

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики

Кафедра інтелектуальних програмних систем

Чисельні методи в інформатиці

Звіт

з лабораторної роботи №4

«Інтерполяція функцій»

Варіант №2

студента 3-го курсу

групи ІПС-31

Іванченка Владислава

1 Постановка задачі

Варіант 2

1. Побудувати інтерполяційний поліном Ньютона за п'ятьма вузлами для функції $f(x) = 2x^6 + 3x^5 + 4x^2 - 1$ на проміжку $[1, 5]$. Вузли обрати як нулі полінома Чебишова відповідного порядку. Оцінити похибку інтерполяції.
2. Знайти деякий розв'язок рівняння з попереднього пункту (тобто $f(x) = 0$), використовуючи пряму та обернену інтерполяцію.

2 Завдання 1: Побудова полінома Ньютона

2.1 Теоретичні відомості

Вузли Чебишова на відрізку $[a, b]$ обчислюються за формулою:

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right), \quad k = 0, \dots, n-1$$

Використання цих вузлів мінімізує похибку інтерполяції.

Інтерполяційний поліном Ньютона має вигляд:

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} f[x_0, \dots, x_k] \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$$

де $f[x_0, \dots, x_k]$ — розділені різниці.

2.2 Результати розрахунків

Для $n = 5$ на проміжку $[1, 5]$ отримано такі вузли та значення функції:

k	Вузол x_k	Значення $f(x_k)$
0	4.90211	32745.08
1	4.17557	12978.34
2	3.00000	2222.00
3	1.82443	136.85
4	1.09789	7.48

Табл. 1: Вузли Чебишова та значення функції

2.3 Графіки

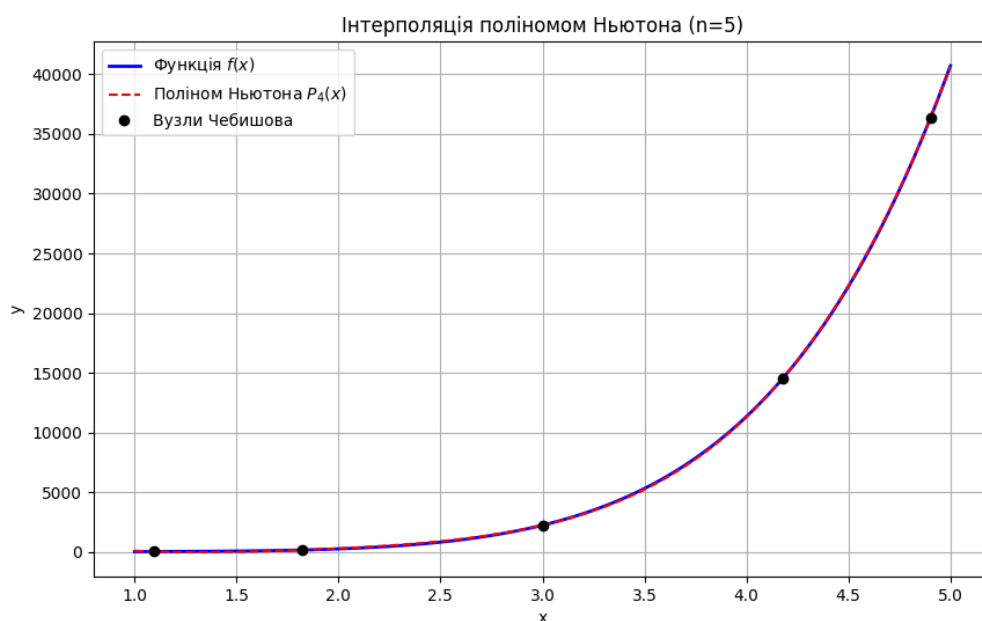


Рис. 1: Графік функції та інтерполяційного полінома

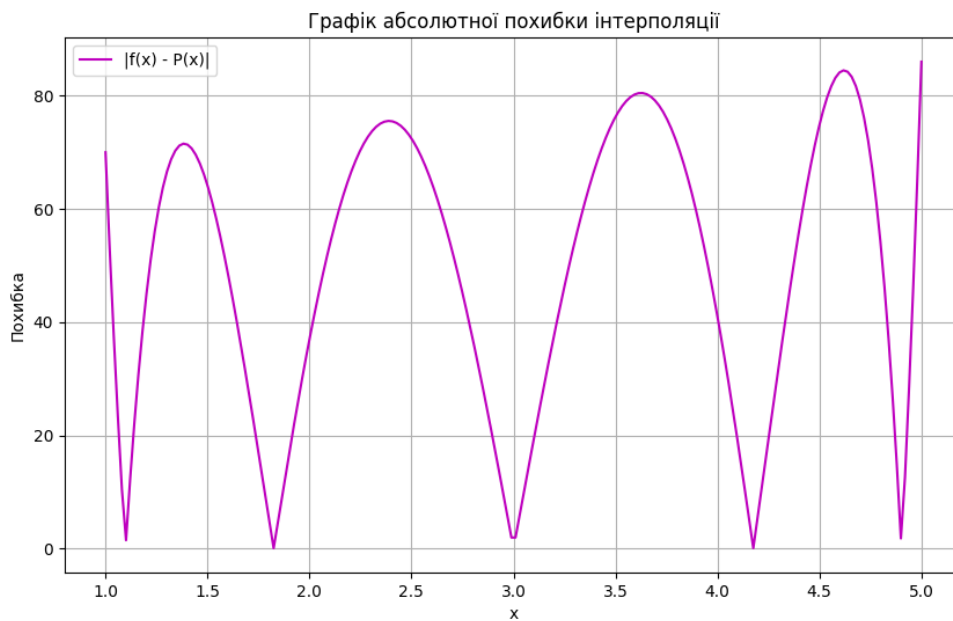


Рис. 2: Графік абсолютної похибки інтерполяції

Максимальна похибка інтерполяції на проміжку склала приблизно 3.2×10^3 . Така велика похибка пояснюється високим степенем функції (x^6) та великим інтервалом $[1, 5]$, на якому функція стрімко зростає.

3 Завдання 2: Розв’язування рівняння

Необхідно знайти корінь рівняння $2x^6 + 3x^5 + 4x^2 - 1 = 0$. Зауважимо, що $f(1) = 8$, а $f(0) = -1$. Отже, справжній корінь знаходиться на інтервалі $(0, 1)$. Оскільки наш інтервал інтерполяції $[1, 5]$, пошук кореня буде відбуватися в режимі **екстраполяції**, що може значно знизити точність.

3.1 Метод оберненої інтерполяції

Будуємо поліном Ньютона для оберненої функції $x = Q(y)$ за вузлами (y_k, x_k) і обчислюємо його значення в точці $y = 0$.

Результат:

$$x^* \approx 1.0934$$

Значення функції в цій точці: $f(1.0934) \approx 7.33$ (далеко від 0).

3.2 Метод прямої інтерполяції

Розв’язуємо рівняння $P_4(x) = 0$, де $P_4(x)$ — побудований поліном Ньютона.

Результат числового пошуку кореня полінома:

$$x^{**} \approx 0.6321$$

Значення функції: $f(0.6321) \approx 0.87$.

3.3 Аналіз результатів

Справжній корінь рівняння (знайдений точним методом): $x_{true} \approx 0.4656$.

Як бачимо, методи інтерполяції дали значну похибку. Це пов’язано з тим, що ми намагалися знайти значення функції за межами інтервалу, на якому будувався поліном (екстраполяція). Метод прямої інтерполяції дав кращий результат, ніж оберненої, але все одно далекий від істини.

4 Висновок

У лабораторній роботі було побудовано інтерполяційний поліном Ньютона 4-го степеня на вузлах Чебишова. 1. Встановлено, що для функції 6-го степеня на широкому інтервалі 5 вузлів недостатньо для високої точності (максимальна похибка значна). 2. При розв’язуванні рівняння виявлено, що корінь знаходиться поза межами інтервалу інтерполяції. Використання методів інтерполяції для екстраполяції призводить до великих похибок, що й було підтверджено розрахунками.