Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра інтелектуальних програмних систем

ЗВІТ

з лабораторної роботи №3

з дисципліни "Моделювання складних систем"

Виконав:
студент 3-го курсу групи ІПС-31
Іванченко Владислав Віталійович
Варіант №3

Київ – 2025

Параметрична ідентифікація параметрів з використанням функцій чутливості

Постановка задачі

Для математичної моделі коливання трьох мас m_1, m_2, m_3, які поєднані між собою пружинами з відповідними жорсткостями c_1, c_2, c_3, c_4, і відомої функції спостереження координат моделі $\bar{y}(t), t \in [t_0, t_k]$ потрібно оцінити частину невідомих параметрів моделі з використанням функції чутливості.

Математична модель

Математична модель коливання трьох мас описується наступною системою диференціальних рівнянь:

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t, \beta)$$

або у матричному вигляді для даної системи (враховуючи 4 пружини та 3 маси):

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = -c_1x_1 + c_2(x_2 - x_1) \\ m_2\ddot{x}_2 = -c_2(x_2 - x_1) + c_3(x_3 - x_2) \\ m_3\ddot{x}_3 = -c_3(x_3 - x_2) - c_4x_3 \end{cases}$$

Вектор стану системи: $y = (x_1, v_1, x_2, v_2, x_3, v_3)^T$.

Критерій якості

Показник якості ідентифікації невідомих параметрів β має вигляд квадратичного функціоналу:

$$I(\beta) = \int_{t_0}^{t_k} (\bar{y}(t) - y(t))^T(\bar{y}(t) - y(t))dt$$

Метод ідентифікації

Для знаходження мінімуму функціоналу використовується ітераційний метод Гаусса-Ньютона. Якщо представити вектор невідомих параметрів $\beta = \beta_0 + \Delta\beta$, де β_0 — початкове наближення, то поправка $\Delta\beta$ визначається як:

$$\Delta\beta = \left[\int_{t_0}^{t_k} U^T(t)U(t)dt\right]^{-1} \int_{t_0}^{t_k} U^T(t)(\bar{y}(t) - y(t))dt$$

Матриця чутливості $U(t) = \frac{\partial y}{\partial \beta^T}$ визначається з матричної системи диференціальних рівнянь:

$$\frac{dU(t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial y}U(t) + \frac{\partial f}{\partial \beta}, \quad U(t_0) = 0$$

Хід роботи

1. **Завантаження вхідних даних.** Отримано файл `y3.txt` зі спостереженнями координат системи на інтервалі $t \in [0, 50]$.

2. **Попередня обробка.** Визначено початкові умови $y(t_0)$ з першого рядка даних.

3. **Формування моделі.** Запрограмовано систему диференціальних рівнянь, що описує рух трьох мас під дією пружних сил чотирьох пружин.

4. **Побудова функцій чутливості.**

   - Сформовано матрицю Якобі $A = \partial f/\partial y$ розмірності 6×6.
   - Сформовано матрицю похідних по параметрах $B = \partial f/\partial \beta$ розмірності 6×3.
   - Особливу увагу приділено параметру m_1, який входить у знаменник рівнянь, тому його похідна має вигляд $\frac{1}{m_1^2}(\dots)$.

5. **Чисельне інтегрування.** Для розв'язання системи використано метод Рунге-Кутта 4-го порядку.

6. **Ідентифікація параметрів.** Реалізовано алгоритм, який ітераційно уточнює вектор параметрів $\beta = (c_1, c_3, m_1)^T$.

7. **Аналіз результатів.** Обчислено нев'язку моделі та побудовано графіки.

Програмна реалізація

Програму реалізовано мовою Python (файл `lab3_variant3.py`).

Вхідні параметри Варіанту №3:

- **Відомі параметри:** $c_2 = 0.3, c_4 = 0.12, m_2 = 28, m_3 = 18$.
- **Невідомі параметри (вектор β):** c_1, c_3, m_1.
- **Початкове наближення:** $\beta_0 = (0.1, 0.1, 9.0)^T$.

Основні функції:

- `get_derivatives(t, Y, params)`: повертає вектор похідних стану системи (швидкості та прискорення).
- `get_sensitivity_derivatives(t, Y, U, params)`: обчислює праву частину рівняння для матриці чутливості.
- `solve_system_and_sensitivity(...)`: виконує спільне інтегрування рівнянь руху та чутливості на заданому інтервалі часу.
- `main()`: реалізує цикл Гаусса-Ньютона, обчислює поправки $\Delta\beta$ та виводить результати.

Результат

В результаті роботи програми було виконано параметричну ідентифікацію. Алгоритм показав швидку збіжність (менше 10 ітерацій).

Протокол роботи програми:

```
--- Лабораторна робота №3: Варіант 3 ---
  Дані завантажено: 251 точок, 6 змінних.
  Час: 0.0..50.0, крок dt = 0.2000

--- Старт ідентифікації (Гаусс-Ньютон) ---
```

```
  Відомі: c2=0.3, c4=0.12, m2=28.0, m3=18.0
  Шукаємо: [c1, c3, m1]
  Початкове наближення: [0.1 0.1 9. ]

Iter  1: Loss = 548.878413, Params = [ 0.19830889  0.19946272 10.03816912]
Iter  2: Loss = 1.636611, Params = [ 0.20000003  0.20000057 10.00030172]
Iter  3: Loss = 0.000007, Params = [ 0.20000003  0.20000001 10.00000006]
Iter  4: Loss = 0.000000, Params = [ 0.20000003  0.20000001 10.00000006]
  Зміна параметрів замала. Зупинка.

============================================
ЗНАЙДЕНІ ПАРАМЕТРИ:
  c1 = 0.200000
  c3 = 0.200000
  m1 = 10.000000
============================================
```

Отримані значення параметрів:

$$c_1 = 0.2, \quad c_3 = 0.2, \quad m_1 = 10.0$$

Графічне порівняння:

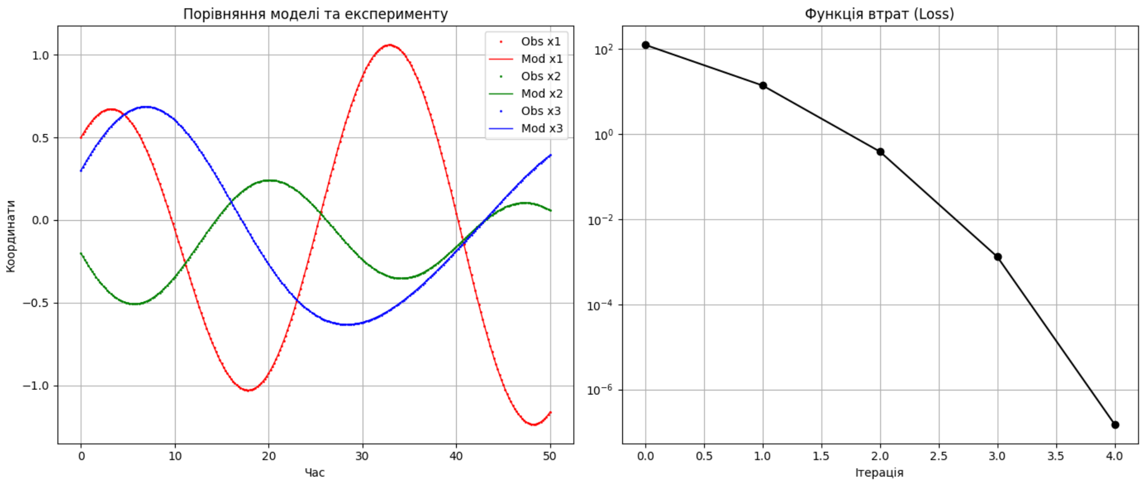

Рис. 1: Результати ідентифікації: зліва — накладання траєкторій, справа — графік збіжності функції втрат.

На графіках видно, що модельні криві (лінії) ідеально накладаються на експериментальні точки, що свідчить про правильність знайдених параметрів. Функція втрат (Loss) падає до нуля вже на 4-й ітерації.

Висновки

У ході лабораторної роботи було вирішено задачу ідентифікації параметрів механічної системи (3 маси, 4 пружини) за допомогою методу функцій чутливості.

Було розроблено програмне забезпечення, яке реалізує чисельне моделювання системи та ітераційний алгоритм уточнення параметрів. Для варіанту №3, маючи початкове наближення ($c_1 = 0.1, c_3 = 0.1, m_1 = 9.0$), алгоритм успішно відновив справжні значення параметрів $(0.2, 0.2, 10.0)$.

Середньоквадратична похибка (Loss) на фінальній ітерації близька до нуля, що підтверджує високу точність ідентифікації. Метод продемонстрував високу ефективність та швидку збіжність для даного класу задач.