

**Київський національний університет імені Тараса Шевченка**

**Факультет комп'ютерних наук та кібернетики**

**Кафедра інтелектуальних програмних систем**

**Чисельні методи в інформатиці**

## **Звіт**

**з лабораторної роботи №1**

**«Розв'язування нелінійних рівнянь»**

**Варіант №2**

студента 3-го курсу

групи ІПС-31

**Іванченка Владислава**

# 1 Постановка задачі

## Варіант 2

Необхідно знайти корені рівнянь із точністю  $\varepsilon = 10^{-3}$ :

1.  $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$  — методом релаксації.
2.  $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$  — модифікованим методом Ньютона.

## Графічний аналіз

Нижче наведено графіки функцій для локалізації коренів.

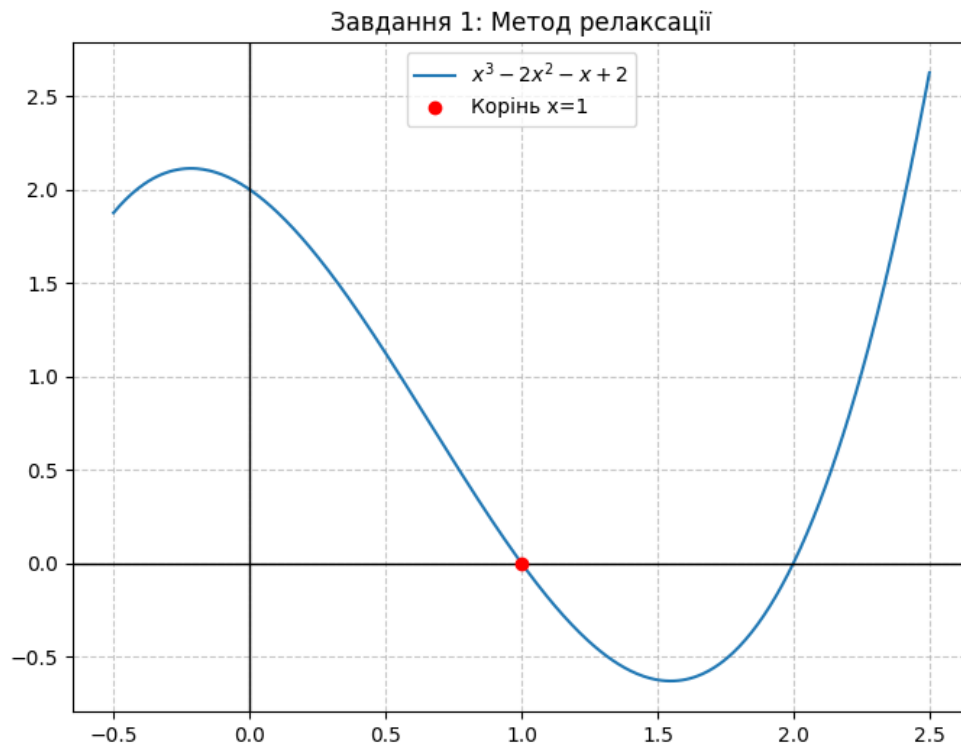


Рис. 1: Графік функції  $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

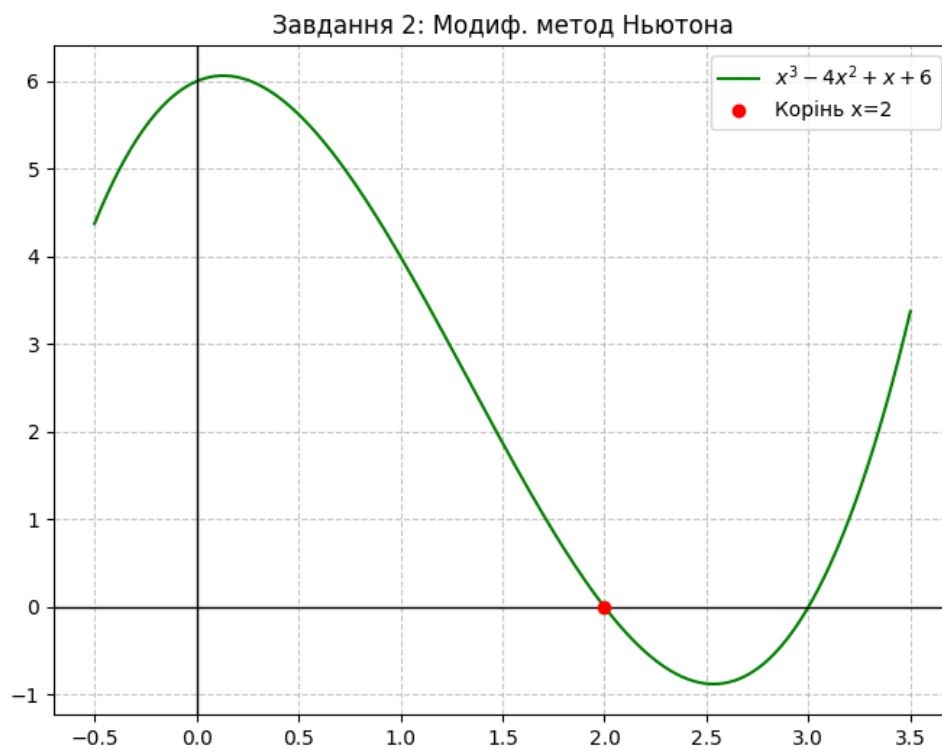


Рис. 2: Графік функції  $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$

## 2 Опис методів та теоретичне обґрунтування

### 2.1 Метод релаксації (Завдання 1)

Рівняння:  $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ .

**Теоретична довідка:** Метод релаксації базується на ітераційній формулі:

$$x_{n+1} = x_n \pm \tau f(x_n)$$

Параметр  $\tau$  та знак обираються на основі меж похідної функції на інтервалі ізоляції  $[a, b]$ :  $m_1 \leq |f'(x)| \leq M_1$ . Оптимальний параметр:  $\tau_0 = \frac{2}{M_1 + m_1}$ . Умова збіжності:  $q = \frac{M_1 - m_1}{M_1 + m_1} < 1$ .

**Обґрунтування вибору проміжку та параметрів:**

1. Корінь, що шукається:  $x = 1$ .
2. Обраний проміжок ізоляції:  $[0.5, 1.5]$ .
3. Похідна:  $f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$ .
4. Перевірка знакосталості похідної:

$$- f'(0.5) = 3(0.25) - 2 - 1 = -2.25$$

$$- f'(1.5) = 3(2.25) - 6 - 1 = -0.25$$

Похідна від'ємна на всьому проміжку ( $f'(x) < 0$ ), отже, у формулі використовуємо знак «+».

5. Екстремуми модуля похідної:

$$m_1 = \min |f'(x)| = |-0.25| = 0.25$$

$$M_1 = \max |f'(x)| = |-2.25| = 2.25$$

6. Розрахунок параметрів:

$$\tau = \frac{2}{2.25 + 0.25} = \frac{2}{2.5} = 0.8$$

$$q = \frac{2.25 - 0.25}{2.25 + 0.25} = \frac{2}{2.5} = 0.8 < 1$$

(умова збіжності виконується).

**Початкове наближення:**  $x_0 = 0.5$ .

### 2.2 Модифікований метод Ньютона (Завдання 2)

Рівняння:  $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ .

**Теоретична довідка:** Модифікований метод використовує фіксоване значення похідної в початковій точці:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$$

Необхідна умова збіжності (теорема Фур'є):  $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ .

**Обґрунтування вибору проміжку та початкового наближення:**

1. Корінь, що шукається:  $x = 2$ .

2. Обраний проміжок:  $[1.5, 2.5]$ .

3. Похідні:

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 1$$

$$f''(x) = 6x - 8$$

4. Перевірка умови Фур'є для точки  $x_0 = 1.5$ :

$$- f(1.5) = 1.5^3 - 4(1.5)^2 + 1.5 + 6 = 1.875 > 0$$

$$- f''(1.5) = 6(1.5) - 8 = 1 > 0$$

$$- f(1.5) \cdot f''(1.5) > 0.$$

**Висновок:** Точка  $x_0 = 1.5$  підходить як початкове наближення.

### 3 Розрахунок апріорної кількості ітерацій

Розрахунок виконується для методу релаксації для заданої точності  $\varepsilon = 10^{-3}$ .

Формула оцінки:

$$n \geq \left\lceil \frac{\ln \frac{|x_0 - x^*|}{\varepsilon}}{\ln(1/q)} \right\rceil + 1$$

**Вхідні дані:**

- $|x_0 - x^*| \approx 1.0$  (оцінка зверху, довжина півінтервалу)
- $\varepsilon = 0.001$
- $q = 0.8$

**Підстановка:**

$$n \geq \frac{\ln(1000)}{\ln(1.25)} \approx \frac{6.907}{0.223} \approx 30.9$$

**Апріорна кількість ітерацій:**  $n \approx 31$ .

### 4 Таблиця результатів

Нижче наведено результати роботи програми.

#### 4.1 Метод релаксації ( $\varepsilon = 10^{-3}$ )

Крок ( $n$ )	Наближення ( $x_n$ )	$f(x_n)$	Похибка $ x_n - x_{n-1} $
0	0.5000000000	1.1250000000	-
1	1.4000000000	-0.5760000000	0.9000000000
2	0.9392000000	0.1250718843	0.4608000000
3	1.0392575074	-0.0769133612	0.1000575074
4	0.9777268185	0.0450314081	0.0615306890
...	...	...	...
12	0.9996198641	0.0007604162	0.0010142321
13	1.0002281971	-0.0004563421	0.0006083329

Табл. 1: Результати методу релаксації (дані програми)

**Результат:** Корінь  $x \approx 1.0002$  знайдено на 13-й ітерації.

## 4.2 Модифікований метод Ньютона ( $\varepsilon = 10^{-3}$ )

Крок ( $n$ )	Наближення ( $x_n$ )	$f(x_n)$	Похибка $ x_n - x_{n-1} $
0	1.5000000000	1.8750000000	-
1	1.9411764706	0.1831874618	0.4411764706
2	1.9842794028	0.0476521809	0.0431029322
3	1.9954916806	0.0135655164	0.0112122778
4	1.9986835668	0.0039527632	0.0031918862
5	1.9996136288	0.0011594122	0.0009300619

Табл. 2: Результати модифікованого методу Ньютона

**Результат:** Корінь  $x \approx 1.9996$  знайдено на 5-й ітерації.

## 5 Висновок

На основі проведеної лабораторної роботи було знайдено корені двох нелінійних рівнянь із заданою точністю  $\varepsilon = 10^{-3}$ .

- Для рівняння  $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$  було використано **метод релаксації**.
  - Інтервал ізоляції кореня:  $[0.5, 1.5]$ , корінь  $x = 1$ .
  - Розраховано оптимальний параметр  $\tau = 0.8$ .
  - Апріорна оцінка дала песимістичний прогноз  $n \approx 31$  (через широкий інтервал), однак фактично метод зійшовся значно швидше — за **13 ітерацій**. Це пояснюється тим, що реальна швидкість збіжності поблизу кореня виявилася кращою за оцінку "найгіршого випадку".
- Для рівняння  $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$  було використано **модифікований метод Ньютона**.
  - Інтервал ізоляції кореня:  $[1.5, 2.5]$ , корінь  $x = 2$ .
  - Перевірено умови збіжності (теорема Фур'є) для  $x_0 = 1.5$ .
  - Метод продемонстрував високу ефективність, досягнувши точності за 5 ітерацій.

Обидва методи успішно впоралися із завданням, але модифікований метод Ньютона виявився швидшим за кількістю ітерацій.