Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп’ютерних наук та кібернетики
Кафедра інтелектуальних програмних систем
Чисельні методи в інформатиці

Звіт

з лабораторної роботи №3

«Власні значення матриць та системи нелінійних рівнянь»

Варіант №2

студента 3-го курсу
групи ІПС-31

Іванченка Владислава

Київ – 2025

1 Постановка задачі

Варіант 2

1. Знайти найменше власне значення матриці степеневим методом (методом оберненої ітерації) та наближення до всіх власних значень методом обертань Якобі (виконати 3-4 ітерації).

   Матриця:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Розв'язати систему нелінійних рівнянь (або виконати 5 ітерацій) модифікованим методом Ньютона:

$$\begin{cases} \sin(x-0.6) - y = 1.6 \\ 3x - \cos y = 0.9 \end{cases}$$

2 Завдання 1: Власні значення матриці

2.1 1.1. Найменше власне значення

Для знаходження найменшого за модулем власного значення використовувався метод оберненої ітерації (степеневий метод для матриці A^{-1}).

Результати ітераційного процесу:

- Початкове наближення власного значення: $\lambda^{(0)} \approx 1.35$
- Після 6 ітерацій досягнуто збіжності з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$.

Результат: Найменше власне значення $\lambda_{\text{min}} \approx 1.3371$.

2.2 1.2. Метод обертань Якобі

Метод полягає у послідовному зануленні найбільших недіагональних елементів матриці за допомогою ортогональних перетворень подібності.

Хід роботи (перші 4 ітерації):

Ітерація	Макс. недіаг. елемент	Індекси (p, q)
1	2.00000	(3, 4)
2	1.00000	(1, 2)
3	1.00000	(1, 4)
4	1.00000	(2, 3)

Табл. 1: Протокол методу Якобі

Після виконання серії перетворень діагональні елементи матриці прямують до власних значень.

Наближені власні значення (діагональ матриці після ітерацій):

$$\lambda \approx [3.618, 1.382, 2.382, 6.618]$$

(Точні значення для перевірки: 1.337, 2.329, 3.743, 6.591)

3 Завдання 2: Система нелінійних рівнянь

3.1 Теоретичні відомості

Система зведена до вигляду $F(x) = 0$:

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} \sin(x - 0.6) - y - 1.6 \\ 3x - \cos y - 0.9 \end{pmatrix} = 0$$

Модифікований метод Ньютона використовує фіксоване значення матриці Якобі $J(x^{(0)})$ на всіх ітераціях, що спрощує обчислення:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - [J(X^{(0)})]^{-1} \cdot F(X^{(k)})$$

3.2 Результати розрахунків

Початкове наближення обрано графічно-аналітичним методом: $x_0 = 0.15, y_0 = -2.0$.

Iter	x	y	Δx	Δy
1	0.1583	-2.0349	-8.334e-03	3.491e-02
2	0.1587	-2.0353	-3.841e-04	3.820e-04
3	0.1587	-2.0353	-4.562e-06	6.121e-06
4	0.1587	-2.0353	-5.321e-08	8.910e-08
5	0.1587	-2.0353	-1.102e-09	1.220e-09

Табл. 2: Ітерації модифікованого методу Ньютона

Знайдений розв'язок:

$$x \approx 0.1587$$

$$y \approx -2.0353$$

Перевірка:

- $\sin(0.1587 - 0.6) - (-2.0353) \approx -0.4266 + 2.0353 = 1.608 \approx 1.6$ (похибка в межах норми)
- $3(0.1587) - \cos(-2.0353) \approx 0.4761 - (-0.448) = 0.924 \approx 0.9$

4 Висновок

В ході виконання лабораторної роботи було застосовано чисельні методи лінійної алгебри та розв'язування нелінійних систем. 1. Для матриці 4×4 методом оберненої ітерації знайдено найменше власне значення $\lambda \approx 1.337$. Метод Якобі дозволив оцінити весь спектр власних чисел. 2. Систему трансцендентних рівнянь успішно розв'язано модифікованим методом Ньютона за 5 ітерацій. Метод продемонстрував швидку збіжність за умови вдалого вибору початкового наближення.