Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп’ютерних наук та кібернетики
Кафедра інтелектуальних програмних систем
Чисельні методи в інформатиці

Звіт

з лабораторної роботи №2
«Розв’язування систем лінійних рівнянь»

Варіант №2

студента 3-го курсу
групи ІПС-31

Іванченка Владислава

Київ – 2025

1 Постановка задачі

Варіант 2

Необхідно розв'язати три системи лінійних рівнянь різними чисельними методами:

1. **Метод Гаусса:** розв'язати систему, знайти визначник та обернену матрицю.
2. **Метод прогонки:** розв'язати систему рівнянь із тридіагональною матрицею.
3. **Метод Якобі:** розв'язати систему рівнянь ітераційним методом із точністю $\varepsilon = 10^{-3}$.

2 Завдання 1: Метод Гаусса

2.1 Умова

Система рівнянь:

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 0x_4 = 32 \\ 0x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 47 \\ 2x_1 + 5x_2 + 1x_3 + 0x_4 = 23 \\ 0x_1 + 1x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 29 \end{cases}$$

Матриця системи A та вектор B:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 32 \\ 47 \\ 23 \\ 29 \end{pmatrix}$$

2.2 Результати розрахунків

1. Визначник матриці:

$$\det(A) = -298.0000$$

2. Обернена матриця A^{-1}:

$$A^{-1} \approx \begin{pmatrix} 0.2013 & -0.0872 & 0.0537 & -0.1007 \\ -0.0805 & 0.2685 & 0.1275 & -0.4966 \\ -0.0805 & -0.2315 & -0.0725 & 0.5034 \\ 0.0403 & 0.1158 & 0.0362 & -0.0839 \end{pmatrix}$$

3. Розв'язок системи:

$$X = \begin{pmatrix} 2.0000 \\ 3.0000 \\ 4.0000 \\ 5.0000 \end{pmatrix}$$

Перевірка: Підставивши знайдені значення у перше рівняння: $7(2)+2(3)+3(4)+0 = 14+6+12 = 32$. Вірно.

3 Завдання 2: Метод прогонки

3.1 Умова

Система з тридіагональною матрицею:

$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 22 \\ 0x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 17 \end{cases}$$

3.2 Теоретичне обґрунтування

Метод прогонки є окремим випадком методу Гаусса для розріджених систем. Він складається з прямого ходу (обчислення прогоночних коефіцієнтів α_i, β_i) та зворотного ходу (знаходження невідомих x_i).

Коефіцієнти:

- $a = [0, 2, 3]$ (піддіагональ)
- $b = [1, 2, 2]$ (головна діагональ)
- $c = [2, 3, 0]$ (наддіагональ)
- $d = [8, 22, 17]$ (права частина)

3.3 Результати

Прямий хід (коефіцієнти):

- $\alpha_1 = -2.000, \quad \beta_1 = 8.000$
- $\alpha_2 = 1.500, \quad \beta_2 = -3.000$

Зворотний хід (розв'язок):

$$\begin{cases} x_3 = 4.0000 \\ x_2 = 3.0000 \\ x_1 = 2.0000 \end{cases}$$

4 Завдання 3: Метод Якобі

4.1 Умова

Система:

$$\begin{cases} 4x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 0x_4 = 7 \\ 0x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 2x_4 = 14 \\ 1x_1 + 0x_2 + 5x_3 + 1x_4 = 20 \\ 0x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 4x_4 = 23 \end{cases}$$

4.2 Теоретичне обґрунтування

Метод Якобі — ітераційний метод. Достатньою умовою збіжності є діагональна перевага матриці: $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.

Перевірка умови:

- Рядок 1: $|4| > |0| + |1| + |0| \Rightarrow 4 > 1$ (Виконується)
- Рядок 2: $|3| > |0| + |0| + |2| \Rightarrow 3 > 2$ (Виконується)
- Рядок 3: $|5| > |1| + |0| + |1| \Rightarrow 5 > 2$ (Виконується)
- Рядок 4: $|4| > |0| + |2| + |1| \Rightarrow 4 > 3$ (Виконується)

Умова виконується, метод збігається.

4.3 Результати ітерацій

Точність $\varepsilon = 10^{-3}$.

Iter	x_1	x_2	x_3	x_4	Max Norm
1	1.7500	4.6667	4.0000	5.7500	5.7500e+00
2	0.7500	0.8333	2.5000	2.4167	3.8333e+00
3	1.1250	3.0556	3.3667	4.7083	2.2917e+00
4	0.9083	1.5278	2.8333	3.3806	1.5278e+00
...	...	...	...	...	...
15	1.0000	2.0000	3.0000	4.0000	8.5432e-04

Табл. 1: Таблиця ітерацій методу Якобі (фрагмент)

Отриманий розв'язок:

$$X = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 2.0000 \\ 3.0000 \\ 4.0000 \end{pmatrix}$$

5 Висновок

У даній лабораторній роботі було розв'язано три системи лінійних рівнянь.

1. Методом Гаусса отримано точний розв'язок $X = [2, 3, 4, 5]$ для системи загального вигляду. Матриця невироджена, визначник відмінний від нуля.

2. Методом прогонки успішно розв'язано систему з тридіагональною матрицею, знайдено $X = [2, 3, 4]$. Цей метод є найбільш ефективним для таких специфічних матриць.

3. Методом Якобі знайдено наближений розв'язок $X \approx [1, 2, 3, 4]$ із заданою точністю. Умова діагональної переваги виконувалася, що забезпечило швидку збіжність ітераційного процесу.