OPTIMIZACIÓN
Maestría en Ciencias: Matemáticas Aplicadas
TAREA 5

Ezau Faridh Torres Torres

Fecha de entrega: 06/03/2024.

1. *a*) Encuentre y clasifique los puntos estacionarios para la función

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_3 - x_2x_3 + 4x_1 + 12.$$

b) Sea $\mathbf{x}_0 = (1, 0, 0)^\top$. Calcule el punto $\mathbf{x}_1$ usando la dirección de descenso máximo con paso exacto.

Respuesta:

El gradiente está dado por:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_3 + 4 \\ -2x_2 - x_3 \\ 2x_3 - 2x_1 - x_2 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

y la matriz Hessiana es:

$$\mathcal{H} = \nabla^2 f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$\nabla f(\mathbf{x}) = 0$ sí, y sólo sí,

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_3 + 4 & = 0 \\ -2x_2 - x_3 & = 0 \\ 2x_3 - 2x_1 - x_2 & = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Sumando la primera y la tercera ecuación: $4 - x_2 = 0 \implies x_2 = 4$. De la segunda ecuación, se tiene: $x_3 = -2x_2 \implies x_3 = -8$. De la tercera ecuación, se tiene que: $2x_1 = 2x_3 - x_2 \implies x_1 = -10$. Por lo tanto, el único punto estacionario de la función f es

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Para la clasificación, se analiza la matriz Hessiana usando el criterio de los "subdeterminantes"de la matriz $\mathcal{H}$

-
-
-

donde

$$\textit{content...} \tag{5}$$

---

2. Considere la función

$$f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1^3 + x_1^4$$

Sea $\mathbf{x}_0 = (0, 1)^\top$

a) Aplique un paso del método de Newton a partir del punto si la Hessiana en $\mathbf{x}_0$ es definida positiva. Si no, aplique el algoritmo de descenso máximo con un tamaño de paso apropiado.

b) Calcule el cambio de la función objetivo: $f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_0)$.

Respuesta:

---

3. Supongamos que $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son funciones convexas.

a) Muestre que también es convexa la función $f(\mathbf{x})$ definida como

$$f(\mathbf{x}) = \max\{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x})\}.$$

b) Si $n = 1$ y $f_1(-0.4) = 0.36$, $f_1(0.6) = 2.56$, $f_2(-0.4) = 3.66$ y $f_2(1) = 2$, identifique el intervalo más pequeño en el que se puede garantizar que se encuentra el minimizador de la función $f(x)$. Explique su respuesta.

Respuesta: