

Medios granulares: Reloj de arena en 3D

Teófilo Duffau (54151), Ezequiel Lynch (54172)

2020-02-11

Abstract

Una simulación de un reloj de arena en 3D utilizando como modelo matemático medios granulares y la aproximación de Verlet.

1 Introducción

El proposito del trabajo investigativo es el de analizar el movimiento de un medio granular 3D en un recipiente con forma de un reloj de arena. Para esto se basa en una extension dimensional de las ecuaciones dadas por la cátedra de medios granulares para 2 dimensiones.

2 Fundamentos

El trabajo consta de una simulacion del flujo granular gravitatorio en un reloj de arena tal que:

El sistema contiene partículas macroscópicas con comportamiento distinto al de sólidos, líquidos o gases.

El sistema se basa en colisiones de tiempo mucho mayor al tiempo de viaje de las partículas.

Tiene interacciones altamente disipativas, el sistema llega al reposo si no recibe energía del exterior o propias.

3 Modelo Matemático

3.1 Cálculo de las fuerzas

La fuerza total de una partícula es la suma de su fuerza normal y de su fuerza tangencial $F = F_n + F_t$.

$$F_n = \left[-k_n \xi_{ij} - \gamma \dot{\xi}_{ij} \right] \hat{n} \quad (1)$$

$$F_t = -\min(\mu \|\overline{F_n}\|, k_t \|\overline{V_{t_{ij}}}\|) \hat{t} \quad (2)$$

Siendo k_n el coeficiente de restitución de las partículas, k_t el coeficiente de amortiguación, y γ y μ parámetros del tipo de partículas.

Para la fuerza normal el versor normal es

$$\hat{n} = (e_x^n, e_y^n, e_z^n) \quad (3)$$

Luego las fuerzas se calculan componente a componente

$$\begin{aligned} F_{x_{ij}} &= F_{ij} * e_{x_{ij}}^n \\ F_{y_{ij}} &= F_{ij} * e_{y_{ij}}^n \\ F_{z_{ij}} &= F_{ij} * e_{z_{ij}}^n \end{aligned} \quad (4)$$

Siendo

$$\begin{aligned} e^n_{x_{ij}} &= (x_j - x_i) / |r_j - r_i| \\ e^n_{y_{ij}} &= (y_j - y_i) / |r_j - r_i| \\ e^n_{z_{ij}} &= (z_j - z_i) / |r_j - r_i| \end{aligned} \quad (5)$$

Por otro lado, para la fuerza tangencial el versor tangente es

$$\hat{t} = (e^t_x, e^t_y, e^t_z) \quad (6)$$

y sus partes

$$\begin{aligned} e^t_{x_{ij}} &= [(V_{x_i} - V_{x_j}) - \dot{\xi} e^n_{x_{ij}}] / \|V_t\| \\ e^t_{y_{ij}} &= [(V_{y_i} - V_{y_j}) - \dot{\xi} e^n_{y_{ij}}] / \|V_t\| \\ e^t_{z_{ij}} &= [(V_{z_i} - V_{z_j}) - \dot{\xi} e^n_{z_{ij}}] / \|V_t\| \end{aligned} \quad (7)$$

siendo

$$\begin{aligned} \overline{V_{ij}} &= \overline{v_i} - \overline{v_j} \\ \dot{\xi}_{ij} &= \overline{V_{ij}} \cdot \hat{n} \\ \overline{V_t} &= \overline{V} - \dot{\xi} \hat{n} \end{aligned} \quad (8)$$

Luego las fuerzas totales en cada partícula p es la suma de todas las fuerzas ejercidas por las demás partículas que interactúan con ella.

$$\begin{aligned} F_x &= \sum_j (F^n_{x_{pj}} * e^n_{x_{pj}} + F^t_{x_{pj}} * e^t_{x_{pj}}) \\ F_y &= \sum_j (F^n_{y_{pj}} * e^n_{y_{pj}} + F^t_{y_{pj}} * e^t_{y_{pj}}) \\ F_z &= m_p g + \sum_j (F^n_{z_{pj}} * e^n_{z_{pj}} + F^t_{z_{pj}} * e^t_{z_{pj}}) \end{aligned} \quad (9)$$

Por último con cada componente de las fuerzas se calcula la aceleración con

$$\bar{a} = \bar{F} / m \quad (10)$$

3.2 Cálculo del caudal

Para calcular el caudal se cuenta con una lista de los tiempos en los que cada partícula atravesó la ranura para cada iteración. Con esta lista se calcula una média móvil con ventana de N elementos con la siguiente ecuación

$$Q[i] = \frac{N}{t_{i+N} - t_i} \quad (11)$$

4 Implementación

4.1 Modelo

Contamos con las siguientes clases además de un main simple que las utiliza:

GranularParticle: representa la partícula y tiene toda la información que la concierne como posición, velocidad, aceleración, radio, masa, etc.

GranularGrid: es la encargada de mantener el cell index method y calcular los vecinos.

SimulatorGranular: es la simulación en sí. Con métodos para generar las partículas, calcular el siguiente paso de la simulación e imprimir a archivo cuando ella terminase.

4.2 Reloj de arena

Para el reloj de arena se utilizó una geometría de un prisma rectangular que en su parte central tiene 4 planos en un ángulo tal que en el punto $H/2$ del prisma se genere una ranura cuadrada de largo D . El reloj tiene un alto de 1.5m y un largo y ancho de 0.4m. Los planos superiores parten desde $z=1m$ y llegan hasta la ranura que está en $z=0.75m=H/2$ y los inferiores solo están visualmente en la figura pero no fueron programados dado que son intrascendentes.

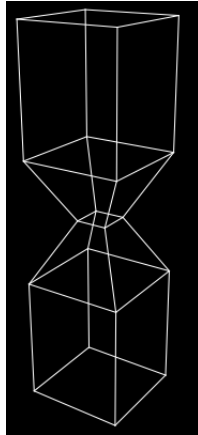


Figure 1: El reloj de arena.

4.3 Algoritmo

1. Se generan las partículas con distribución uniforme y se agregan al GranularGrid.
2. En cada paso:

- (a) Se calculan las fuerzas aplicadas en cada partícula.
 - (b) Se actualizan las velocidades y posiciones utilizando Verlet Leap-Frog.
 - (c) Si una partícula pasa por la ranura, se guarda el tiempo en el que pasó.
 - (d) Se recalculan los vecinos usando el cell index method.
3. Se corta el ciclo al guardarse N estados.
 4. Finalmente se guarda el archivo.

4.4 Pseudocódigo

```

Main():
    Simulator.simulate(deltaTime)

Simulator.simulate(deltaTime):
    //para que en tiempo real sean 60fps
    saveTime = 1 / (deltaTime / 60)
    //genera hasta que no puede generar sin overlap en 1000 intentos
    generateParticles()
    counter = 0
    while(true):
        // calcula con cada vecino y con las paredes
        calculateParticleForces()
        // utilizando verlet leap frog y si cayó lo suficiente se guarda el tiempo
        updateParticlesPositions()
        // utilizando cell index method
        recalculateNeighbours()
        if(counter % saveTime):
            saveState()
        if(savedStates == n); // n es 60 * segundos de simulación
            printToFile()
            return

```

5 Resultados

5.1 Parámetros y valores iniciales

Para llevar a cabo las simulaciones se utilizó un tiempo delta de $1e-5s$, un μ de 0.1, un γ de 70 kg/s, un k_n de 1000 N/m, un k_t de 2000 N/m y para cada prueba se hicieron 5 simulaciones con los mismos parámetros.

Cada partícula tiene un radio entre 0.01m y 0.015m y una masa de 0.01 kg.

Para el cálculo de la media móvil del caudal se utilizó una ventana deslizante de 100 elementos.

5.2 Media móvil del caudal

Para el siguiente gráfico se utilizó una ventana deslizante de 100 elementos. Se puede ver en el mismo que a medida que la ranura crece, se tiene una mayor variación en sus caudales.

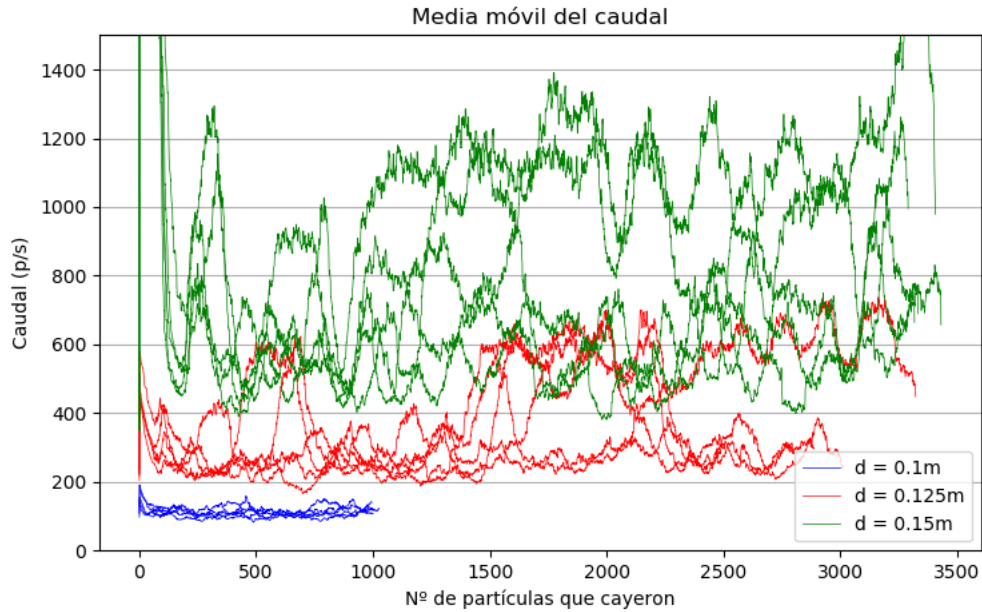


Figure 2: Media móvil del caudal.

A continuación, se encuentra el cálculo de la media de los resultados del gráfico anterior y sus desvíos estándares. Se permite ver con mayor claridad la suposición anterior que a medida que la ranura aumenta, también lo hace el desvío estándar.

Aún así se puede ver en qué valores se estabiliza cada uno de los caudales. Con una ranura de 0.1m el caudal se estabiliza a las 100 p/s, con 0.125m no se estabiliza visiblemente y con 0.25m se estabiliza en un valor alrededor de las 800 p/s.

Además se puede ver que en el caso de la ranura más grande que el caudal acelera al final de la simulación. Esto se puede suponer que ocurre debido a que al quedar menos cantidad de partículas, el flujo crece hasta que no quedan más en el recipiente superior.

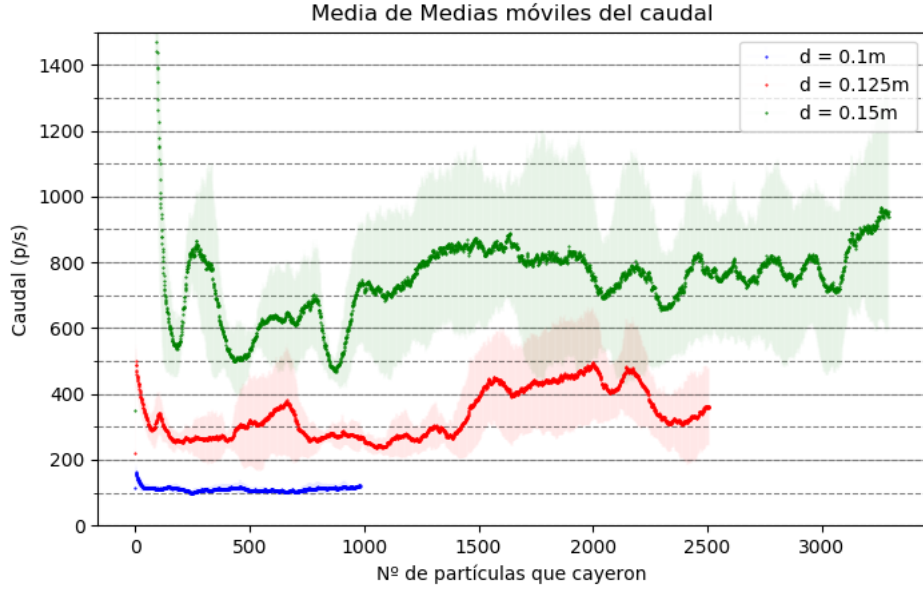


Figure 3: Media de medias móviles del caudal.

Sin tener en cuenta la parte inicial, donde el flujo no esta estabilizado, ni la parte final por la misma razón, obtenemos la tabla (Figura 4)

Ranura(m)	Media Caudal (p/s)	Desvío Caudal (p/s)
0.100	110.07	12.52
0.125	355.54	142.74
0.150	761.97	256.93

Figure 4: Caudal medio por ranura

5.3 Aproximación del modelo por Beverloo

La ley de Beverloo nos aproxima el caudal Q según el tamaño de la ranura y la geometría de las partículas

$$Q \approx n_p * \sqrt{g} * (d - c * r)^{2.5} = B * (d - c * r)^{2.5} \quad (12)$$

n_p : partículas por unidad de volumen
 d : diámetro de apertura
 r : radio medio de partículas

Para encontrar el c que mejor aproxima a nuestros resultados se calculó el error para $c \in [0, 8]$

$$E(c) = \sum_i \left[Q_{exp_i} - B * (d_i - c * r)^{2.5} \right]^2 \quad (13)$$

La densidad se obtuvo experimentalmente y fue de $n_p = 81400 \pm 100 p/m^3$.

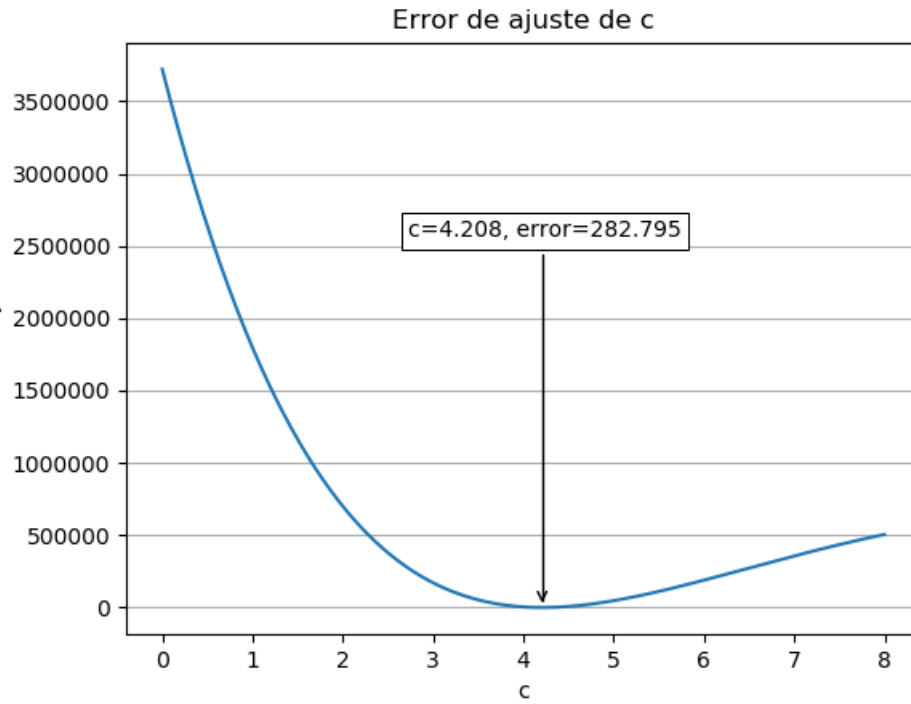


Figure 5: Error de ajuste de c

El c cuyo error fue mínimo fue el de 4.208. (figura 5)

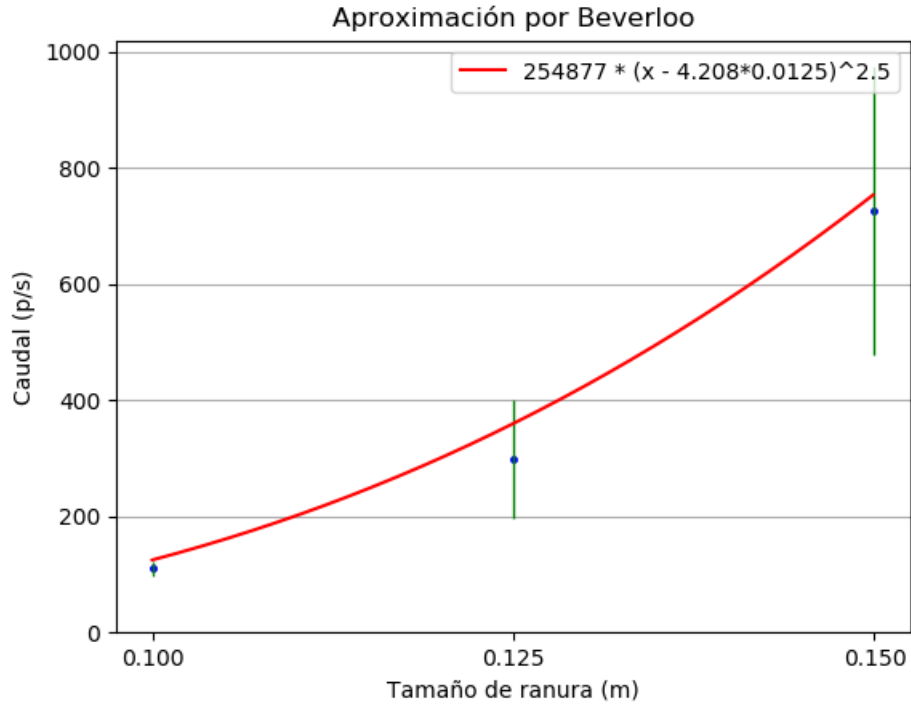


Figure 6: Aproximación por Beverloo.

6 Conclusión

Como es predecible, se puede ver que el caudal aumenta con el tamaño de la ranura (figura 4), pero también pudimos ver que a medida que esta aumenta el caudal también es más inestable. Por otro lado, se pudo aproximar la variable libre de Beverloo a un resultado aceptable de $c=4.208$.

7 Bibliografía

Nathan Bell, Yizhou Yu and Peter J. Mucha. Particle-Based Simulation of Granular Materials. Eurographics/ACM SIGGRAPH Symposium on Computer Animation (2005) (<http://wnbell.com/media/2005-07-SCA-Granular/BeYiMu2005.pdf>)