Universidade Federal do Ceará – Campus Quixadá

QXD0041 – Projeto e Análise de Algoritmos – 1º Semestre de 2024

Lista de Exercícios

Grafos

Conceitos de grafos

Questão 1. Sejam G um grafo e u, v vértices de G. Mostre que se existe um **caminho** de u a v em G, então existe um **caminho simples** de u a v em G.

Questão 2. Sejam G um grafo e u, v, w vértices de G. Mostre que se em G existem um caminho simples de u a v e um caminho simples de v a w então existe um caminho simples de u a w em G.

Questão 3. Seja G um **grafo direcionado** e u, v vértices de G. Mostre que se existe um caminho de u a v em G, então existe um caminho simples de u a v em G.

Questão 4. Sejam G um **grafo direcionado** e u, v, w vértices de G. Mostre que se em G existem um caminho simples de u a v e um caminho simples de v a w então existe um caminho simples de u a w em G.

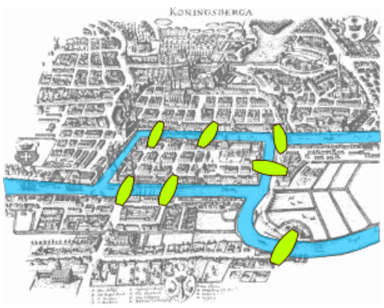
Questão 5. Demonstre ou dê contraexemplo:

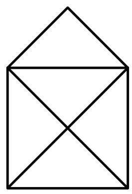
(a) Todo ciclo contém um ciclo simples.

(b) Todo ciclo em um grafo direcionado contém um ciclo simples direcionado.

Questão 6. Prove por indução que todo grafo conexo $G = (V, E)$, com $|V| \geq 2$, tem um vértice cuja remoção mantém o grafo resultante conexo.

Questão 7. O Problema das Sete Pontes de Königsberg é um problema matemático famoso e resolvido por Euler em 1736: existe um percurso que passe exatamente uma vez por cada uma das sete pontes da antiga cidade de Königsberg? Euler respondeu que não.





(a) Descreva esse problema em termos de um grafo, i.e., defina um grafo (seus vértices e arestas) e faça uma pergunta acerca dele que seja equivalente ao problema das pontes.

(b) A figura da direita é uma casa e é apresentada com um desafio para crianças: desenhá-la sem tirar a ponta do lápis do papel e sem repetir linhas. Argumente que tanto a pergunta sobre as pontes quanto o desafio para as crianças corresponde ao mesmo problema, mas para grafos distintos.

Questão 8. O jogo é o seguinte: alguém faz um desenho fazendo alguns riscos no papel e depois pede para reproduzi-lo sem refazer o mesmo risco nem levantar a ponta do lápis do papel. Impressionado por sua habilidade em resolver esse problema, um amigo, que é editor de uma pequena coluna sobre tecnologia no jornal local, convidou-o para escrever na edição da próxima semana. Você explicou que era um problema simples e de fácil resolução. Escreva um artigo que descreva para os leitores do jornal (que são interessados em Matemática, mas cujo conhecimento não vai muito além de aritmética básica e noção de conjuntos) como resolver esse problema. No seu artigo você deverá descrever o problema em termos de grafos, usando uma *linguagem acessível* e dando as definições necessárias. Você deve explicar que nem sempre é possível realizar o que o jogo pede, mas é fácil verificar isso. Mais do que isso, quando é possível, existe uma estratégia simples para resolvê-lo. A coluna do jornal deve ser um texto contínuo, adequadamente separado em parágrafos, com cerca de 400 palavras.

Questão 9. Mostre que, em uma festa com pelo menos $n \geq 6$ pessoas, existem três pessoas que se conhecem mutuamente ou três pessoas que não se conhecem mutuamente.

Representação de grafos

Questão 10. (CLRS) Exercícios: 22.1-1, 22.1-2, 22.1-3, 22.1-4, 22.1-6, 22.1-7,

Questão 11. (CLRS) (22.1-3) O transposto do grafo direcionado $G = (V, E)$ é o grafo $G^{\mathrm{T}} = (V, E^{\mathrm{T}})$, em que $E^{\mathrm{T}} = \{(u, v) \in V \times V : (u, v) \in E\}$. Assim, G^{T} é G com todas as suas arestas invertidas. Descreva algoritmos eficientes para calcular G^{T} a partir de G, para as representações de lista de adjacências e matriz de adjacências de G. Analise os tempos de execução dos seus algoritmos.

Questão 12. Seja M uma matriz de adjacência de um grafo $G = (V, E)$ e calcule o quadrado M^2. Dados $u, v \in V$, se existe um caminho de u até v, que valores pode haver em $M^2[u, v]$? Utilize essa informação e dê um algoritmo que calcule o quadrado de um grafo, representado como uma matriz de adjacências, com tempo assintoticamente melhor do que $|V|^3$.

Questão 13. Crie um algoritmo que receba um grafo G em forma de lista de adjacências e um conjunto $S \subseteq V$ e crie um novo grafo $G[S]$. Analise a complexidade de seu algoritmo.

Questão 14. O *diâmetro* de um grafo G é a maior distância entres dois vértices de G.

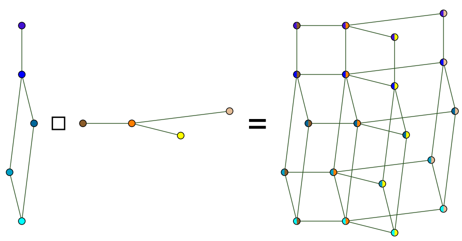
- ***(a)*** Seja G um grafo simples de diâmetro maior que três. Mostre que $\overline{G}$ tem diâmetro no máximo três.
- ***(b)*** Seja T uma árvore com pelo menos uma aresta de diâmetro d. Suponha que após a remoção de uma aresta, obtemos duas componentes conexas T_1 e T_2 com diâmetro d_1 e d_2, respectivamente. Mostre que $d \geq (d_1 + d_2)/2 + 1$.

Questão 15. O produto cartesiano (Bondy e Murty) de grafos simples G e H é um novo grafo, denotado $G \square H$, cujo conjunto de vértices é $V(G) \times V(H)$ e cujo conjunto de arestas são todas as arestas $((u_1, v_1), (u_2, v_2))$ tal que

$$(u_1, u_2) \in E(G) \text{e } v_1 = v_2, \qquad \text{ou} \qquad (v_1, v_2) \in E(H) \text{e } u_1 = u_2.$$

Portanto, para cada aresta (u_1, u_2) de G e cada aresta (v_1, v_2) de H, existem quatro arestas em $G \square H$, a saber:

1. $((u_1, v_1), (u_2, v_1))$, 2. $((u_1, v_2), (u_2, v_2))$, 3. $((u_1, v_1), (u_1, v_2))$ e 4. $((u_2, v_1), (u_2, v_2))$.



Escreva um algoritmo para calcular o produto cartesiano de dois grafos usando matriz de adjacências. Analise a complexidade do algoritmo. Depois refaça usando listas de adjacências.