Projeto e Análise de Algoritmos Revisão de Demonstrações e princípio da indução

Atílio G. Luiz

Primeiro Semestre de 2024



Predicados

- Definição: Uma proposição é uma afirmação que pode ser tomada como verdadeira ou falsa.
 - Ex.: 3 é primo.
- Definição: Um predicado é uma sentença que contém um número finito de variáveis e se torna uma proposição quando as variáveis são substituídas por valores específicos.
 - **►** Ex.: *x* é primo.
- Os valores das variáveis de predicados são definidos por conjuntos chamados domínios. Por exemplo: R, Z, Q, N.

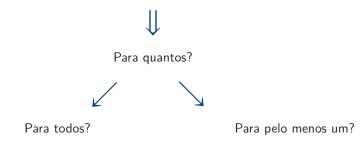
Predicados



- P(x) = x **é maior que 3**: P indica o predicado e x é a variável.
- Uma vez que um valor é dado para a variável x, a declaração P(x) torna-se uma proposição e tem um valor-verdade.
- Qual o valor-verdade de P(4) e P(2)?
- Seja Q(x,y) = "x = y + 3". Quais os valores-verdade de Q(1,2) e Q(3,0)?

Quantificadores

P(x) contendo a variável livre x é verdadeira para alguns valores de x



Quantificadores

Surgem para expressar estas ideias de quantidades.

Definição: Quantificadores são palavras/expressões que referem a quantidades tais como "todos" e "alguns" e indicam para quantos elementos do domínio um dado predicado é verdadeiro.

Quantificador universal: ∀

Usado para expressar a ideia de que P(x) vale para **todos** os valores do universo de discurso (ou domínio de discurso), denotado por U.

$$\forall x P(x)$$
 "para todo $x \in U$, vale $P(x)$ "

- ▶ O conjunto-verdade de P(x) é U.
- ▶ Um elemento para o qual P(x) é falsa é chamado de **contraexemplo**.
- **Exemplo:**

$$U = \mathbb{R};$$

 $\forall x (x > 2 \rightarrow x^2 > 4).$

Quantificador existencial: 3

▶ Usado para expressar a ideia de que **existe pelo menos um** elemento do universo do discurso para o qual P(x) é verdadeira.

$$\exists x P(x)$$
 "existe x, tal que $P(x)$ "

- ightharpoonup O conjunto-verdade de P(x) é não-vazio.
- **Exemplo:**

$$U = \mathbb{N};$$

$$\exists x(x^2 - 3x - 4 = 0).$$

▶ De fato, $x \in \{-1, 4\}$.

Expressando frases do cotidiano

Dado o domínio ${\cal U}$ de todas as pessoas, considere o predicado:

$$Ama(p_1,p_2) = pessoa p_1 ama pessoa p_2$$

Expressão	Significado
$\exists p_2 \text{ Ama}(Bob, p_2)$	Bob ama alguém
$\forall p_2 \text{ Ama}(Bob, p_2)$	Bob ama todo mundo
$\exists p_1 \forall p_2 \ Ama(p_1, p_2)$	Alguém ama todo mundo
$\forall p_1 \exists p_2 \; Ama(p_1, p_2)$	Todo mundo ama alguém
$\exists p_2 \forall p_1 \ Ama(p_1, p_2)$	Existe uma pessoa que é
	amada por todos
$\exists p_1 \exists p_2 \; (Ama(p_1, p_2) \; e \; \neg \; Ama(p_2, p_1))$	Alguém ama em vão

Atenção: A ordem dos quantificadores importa!

Leis da negação do quantificador

Leis de De Morgan para AND e OR

$$\neg (P(x) \land Q(x)) \equiv (\neg P(x) \lor \neg Q(x))$$
$$\neg (P(x) \lor Q(x)) \equiv (\neg P(x) \land \neg Q(x))$$

Leis de De Morgan para quantificadores

$$\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$$
$$\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$$

Negue a expressão e reexpresse o resultado

- $ightharpoonup A \subseteq B$
 - $\forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$
 - ▶ **Negando**: $\neg \forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$
 - ► $\equiv \exists x \neg (x \in A \rightarrow x \in B)$ (Lei da negação do quantificador)
 - $= \exists x \neg (\neg x \in A \lor x \in B)$ (Lei do condicional)

 - $= \exists x (x \in A \land \neg x \in B)$ (Negação dupla)
 - Isto é: A ⊈ B é o mesmo que dizer que existe x tal que x pertence a A mas x não pertence a B.

Negue a expressão e reexpresse o resultado

- Todo mundo tem um parente de quem não gosta.
 - P(x,y) = "x e y são parentes."
 - \blacktriangleright L(x,y) = "x gosta de y."
 - ► Então: $\forall x \exists y (P(x,y) \land \neg L(x,y)).$
 - ▶ Negando: $\neg \forall x \exists y (P(x,y) \land \neg L(x,y))$.
 - $\blacksquare \exists x \neg \exists y (P(x,y) \land \neg L(x,y)).$
 - ightharpoonup $\equiv \exists x \forall v \neg (P(x, v) \land \neg L(x, v)).$
 - $ightharpoonup \equiv \exists x \forall y (\neg P(x,y) \lor \neg \neg L(x,y)).$
 - $ightharpoonup \equiv \exists x \forall y (\neg P(x,y) \lor L(x,y)).$
 - $ightharpoonup \equiv \exists x \forall y (P(x,y) \rightarrow L(x,y)).$

(Lei da negação do ∀)

(Lei da negação do ∃)

(DeMorgan)

(Negação Dupla)

(Lei do condicional)

Negação de proposições com quantificadores aninhados

Exemplo: Qual a negação da seguinte afirmação:

```
P: \forall pessoas x, \exists uma pessoa y tal que x ama y.
```

O que significa a sentença ser falsa?
 A propriedade não ser válida para todas as pessoas.

```
¬P: ∃ uma pessoa x tal que
¬(∃ uma pessoa y tal que x ama y) ≡
∃ uma pessoa x tal que
∀ pessoas y,x não ama y

Regra geral: ¬∀x∃yQ(x,y) ≡ ∃x∀y¬Q(x,y)
```

Negação de proposições com quantificadores aninhados

► Regra geral 1:

$$\neg \forall x \exists y Q(x, y) \equiv \exists x \forall y \neg Q(x, y)$$

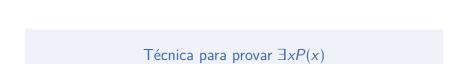
► Regra geral 2:

$$\neg \exists x \forall y Q(x,y) \equiv \forall x \exists y \neg Q(x,y)$$

Negação de proposições com quantificadores aninhados

Exemplo: Expresse a negação da sentença $\forall x \exists y (xy = 1)$ de tal forma que a negação não preceda algum quantificador.

- $ightharpoonup \neg \forall x \exists y (xy = 1)$
 - ▶ $\exists x \neg \exists y (xy = 1)$ (Lei de De Morgan para quantificadores)
 - ▶ $\exists x \forall y \neg (xy = 1)$ (Lei de De Morgan para quantificadores)
 - ► $\exists x \forall y (xy \neq 1)$ (Negação da igualdade)

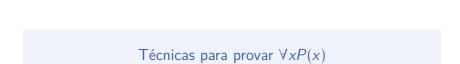


Técnica: Prova por exemplo ou construção

- Você, ou fornece um exemplo diretamente, ou você descreve como construir tal objeto.
- Após exibir ou construir o objeto, você argumenta que ele satisfaz a propriedade.

Exemplo

Existe um número inteiro primo e par.



Técnica 1: Prova por Exemplo Arbitrário

- A técnica clássica para provar que todo objeto de algum domínio satisfaz uma determinada propriedade consiste em tomar um objeto arbitrário do domínio e então provar que esse objeto satisfaz a propriedade.
- Como foi escolhido um objeto qualquer do domínio, fica então provado que todo objeto do domínio satisfaz a propriedade.

Provar: $\forall x P(x)$.

Estrutura da prova final:

Seja x um objeto arbitrário do domínio.

[Prova de P(x) vem aqui.]

Como o x escolhido é arbitrário, nós concluímos que $\forall x P(x)$.

Técnica 2: Prova por contradição

- ▶ Outra técnica clássica para provar a afirmação $\forall x P(x)$ é prova por contradição.
- Por contradição, suponha que a afirmação seja falsa, ou seja, suponha que $\exists x \neg P(x)$ é verdadeiro.
- A partir desta suposição, deve-se obter uma contradição, concluindo assim que a suposição inicial é falsa.
- ► Logo, concluí-se que $\forall x P(x)$.

Provas do tipo $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$

Muitas provas com quantificador universal envolvem implicação:

$$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$$

- Neste caso, existem algumas técnicas que auxiliam:
 - Prova direta
 - Prova pela contrapositiva
 - Prova por contradição
 - Prova por casos

Demonstração direta

A demonstração direta de uma implicação $p \Rightarrow q$ é uma sequência de passos lógicos

$$p \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow p_n \Rightarrow q$$
,

que resultam, por transitividade, na implicação desejada.

Cada passo da demonstração é um axioma ou um teorema demonstrado previamente.

Exemplo

Prove que: Seja n inteiro. Se n é ímpar, então n^2 é ímpar.

Demonstração pela contrapositiva

A contrapositiva de $p \Rightarrow q \in \neg q \Rightarrow \neg p$.

- A contrapositiva é equivalente à implicação original.
- ▶ Demonstrar $\neg q \Rightarrow \neg p$ implica em $p \Rightarrow q$ e vice-versa.
- É útil quando é mais fácil demonstrar a contrapositiva.
- Para demonstrarmos a contrapositiva de uma implicação, podemos utilizar qualquer técnica de demonstração.

Exemplo

Prove: Seja n inteiro. Se 3n+2 é ímpar, então n é ímpar.

Demonstração por contradição

A demonstração por contradição supõe que a afirmação a ser demonstrada é falsa e obtém uma conclusão contraditória.

- A contradição obtida implica que a suposição é falsa.
- Portanto, a afirmação é verdadeira.
- ▶ A negação de $p \Rightarrow q$ corresponde a $p \land \neg q$.

Exemplo

Prove que: Seja n inteiro. Se 3n+2 é ímpar, então n é ímpar.

Demonstração por casos

Na demonstração por casos, particionamos as possibilidades em um conjunto de casos e demonstramos cada um deles.

- O número de casos é normalmente finito.
- Cada caso é demonstrado usando qualquer técnica.

Exemplo

Provar que a soma de dois inteiros x e y de mesma paridade é sempre par.

Técnica 3 para $\forall x P(x)$: Princípio da indução

Demonstração por indução

Usando o princípio da indução, demonstramos uma afirmação P(n) que depende de um parâmetro natural n.

- ightharpoonup Demonstramos P(n) para todos os valores de n no domínio.
- Quebramos a demonstração em duas partes.

1. Caso básico

- ightharpoonup consideramos n_0 o menor natural no domínio
- ightharpoonup demonstramos $P(n_0)$

2. Caso geral

- ightharpoonup consideramos $n > n_0$
- **hipótese da indução:** supomos que P(n-1) vale
- **passo da indução:** demonstramos P(n) usando a hipótese

Demonstração por indução alternativa

Uma forma equivalente:

- 1. Caso básico
 - ightharpoonup consideramos n_0 o menor natural no domínio
 - ightharpoonup demonstramos $P(n_0)$
- 2. Caso geral
 - ightharpoonup consideramos $n \ge n_0$
 - ightharpoonup supomos que P(n) vale
 - ightharpoonup demonstramos P(n+1)

Exemplo

Prove que a soma dos n primeiros números ímpares é n^2 .

Fortalecendo a hipótese

Algumas vezes é útil supor que a hipótese vale para todos os casos anteriores.

- 1. Caso básico
 - ightharpoonup consideramos n_0 o menor elemento no domínio
 - ightharpoonup demonstramos $P(n_0)$
- 2. Caso geral
 - ightharpoonup consideramos $n > n_0$
 - ▶ supomos que P(k) vale para todo $n_0 \le k \le n-1$
 - ightharpoonup demonstramos P(n)

Exemplo

Prove que todo inteiro positivo n pode ser escrito como a soma de diferentes potências de 2.