Projeto e Análise de Algoritmos

Revisão de Demonstrações e princípio da indução

Atílio G. Luiz

Primeiro Semestre de 2024

Quantificadores Lógicos

Predicados

- **Definição:** Uma proposição é uma afirmação que pode ser tomada como verdadeira ou falsa.
  - Ex.: 3 é primo.
- **Definição:** Um predicado é uma sentença que contém um número finito de variáveis e se torna uma proposição quando as variáveis são substituídas por valores específicos.
  - Ex.: x é primo.
- Os valores das variáveis de predicados são definidos por conjuntos chamados domínios. Por exemplo: $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}$.

Predicados

"x é maior que 3"

x (**sujeito da declaração**) maior que 3 (**predicado**)

- $P(x) = x$ **é maior que 3**: P indica o predicado e x é a variável.
- Uma vez que um valor é dado para a variável x, a declaração $P(x)$ torna-se uma proposição e tem um valor-verdade.
- Qual o valor-verdade de $P(4)$ e $P(2)$?
- Seja $Q(x,y) =$ "$x = y + 3$".
  Quais os valores-verdade de $Q(1,2)$ e $Q(3,0)$?

Quantificadores

$P(x)$ contendo a variável livre x é verdadeira para alguns valores de x

$$\Downarrow$$

Para quantos?

Para todos?

Para pelo menos um?

Quantificadores

Surgem para expressar estas ideias de quantidades.

Definição: Quantificadores são palavras/expressões que referem a quantidades tais como "todos" e "alguns" e indicam para quantos elementos do domínio um dado predicado é verdadeiro.

Quantificador universal: $\forall$

- Usado para expressar a ideia de que $P(x)$ vale para **todos** os valores do universo de discurso (ou domínio de discurso), denotado por U.

$\forall x P(x)$ **"para todo $x \in U$, vale $P(x)$"**

  - O conjunto-verdade de $P(x)$ é U.
  - Um elemento para o qual $P(x)$ é falsa é chamado de **contraexemplo**.
  - **Exemplo:**

$$U = \mathbb{R};$$

$$\forall x (x > 2 \rightarrow x^2 > 4).$$

Quantificador existencial: $\exists$

- Usado para expressar a ideia de que **existe pelo menos um** elemento do universo do discurso para o qual $P(x)$ é verdadeira.

$$\exists x P(x) \qquad \textbf{“existe } x\textbf{, tal que } P(x)\textbf{”}$$

  - O conjunto-verdade de $P(x)$ é não-vazio.
  - **Exemplo:**

$$U = \mathbb{N};$$

$$\exists x(x^2 - 3x - 4 = 0).$$

    - De fato, $x \in \{-1, 4\}$.

Expressando frases do cotidiano

Dado o domínio U de todas as pessoas, considere o predicado:

$$\text{Ama}(p_1, p_2) = \text{pessoa } p_1 \text{ ama pessoa } p_2$$

Expressão	Significado
$\exists p_2$ Ama(Bob, p_2)	Bob ama alguém
$\forall p_2$ Ama(Bob, p_2)	Bob ama todo mundo
$\exists p_1 \forall p_2$ Ama(p_1,p_2)	Alguém ama todo mundo
$\forall p_1 \exists p_2$ Ama(p_1,p_2)	Todo mundo ama alguém
$\exists p_2 \forall p_1$ Ama(p_1,p_2)	Existe uma pessoa que é amada por todos
$\exists p_1 \exists p_2$ (Ama(p_1,p_2) e $\neg$ Ama(p_2,p_1))	Alguém ama em vão

Atenção: A ordem dos quantificadores importa!

Leis da negação do quantificador

Leis de De Morgan para *AND* e *OR*

$$\neg(P(x) \land Q(x)) \equiv (\neg P(x) \lor \neg Q(x))$$

$$\neg(P(x) \lor Q(x)) \equiv (\neg P(x) \land \neg Q(x))$$

Leis de De Morgan para quantificadores

$$\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$$

$$\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$$

Negue a expressão e reexpresse o resultado

- $A \subseteq B$
  - $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$
  - **Negando**: $\neg\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$
    - $\equiv \exists x \neg(x \in A \rightarrow x \in B)$ **(Lei da negação do quantificador)**
    - $\equiv \exists x \neg(\neg x \in A \vee x \in B)$ **(Lei do condicional)**
    - $\equiv \exists x(\neg\neg x \in A \wedge \neg x \in B)$ **(DeMorgan)**
    - $\equiv \exists x(x \in A \wedge \neg x \in B)$ **(Negação dupla)**
  - **Isto é**: $A \not\subseteq B$ é o mesmo que dizer que existe x tal que x pertence a A mas x não pertence a B.

Negue a expressão e reexpresse o resultado

- Todo mundo tem um parente de quem não gosta.
  - $P(x, y)$ = "x e y são parentes."
  - $L(x, y)$ = "x gosta de y."
  - **Então:** $\forall x \exists y (P(x, y) \wedge \neg L(x, y))$.
  - **Negando**: $\neg \forall x \exists y (P(x, y) \wedge \neg L(x, y))$.
    - $\equiv \exists x \neg \exists y (P(x, y) \wedge \neg L(x, y))$. **(Lei da negação do $\forall$)**
    - $\equiv \exists x \forall y \neg (P(x, y) \wedge \neg L(x, y))$. **(Lei da negação do $\exists$)**
    - $\equiv \exists x \forall y (\neg P(x, y) \vee \neg\neg L(x, y))$. **(DeMorgan)**
    - $\equiv \exists x \forall y (\neg P(x, y) \vee L(x, y))$. **(Negação Dupla)**
    - $\equiv \exists x \forall y (P(x, y) \rightarrow L(x, y))$. **(Lei do condicional)**

Negação de proposições com quantificadores aninhados

Exemplo: Qual a negação da seguinte afirmação:

P: $\forall$ pessoas x, $\exists$ uma pessoa y tal que x ama y.

- O que significa a sentença ser falsa?
  A propriedade não ser válida para todas as pessoas.

$\neg P$: $\exists$ uma pessoa x tal que
$\neg(\exists$ uma pessoa y tal que x ama $y) \equiv$

$\exists$ uma pessoa x tal que
$\forall$ pessoas y, x não ama y

Regra geral: $\neg\forall x \exists y Q(x,y) \equiv \exists x \forall y \neg Q(x,y)$

Negação de proposições com quantificadores aninhados

- Regra geral 1:

$$\neg\forall x \exists y Q(x,y) \equiv \exists x \forall y \neg Q(x,y)$$

- Regra geral 2:

$$\neg\exists x \forall y Q(x,y) \equiv \forall x \exists y \neg Q(x,y)$$

Negação de proposições com quantificadores aninhados

Exemplo: Expresse a negação da sentença $\forall x \exists y (xy = 1)$ de tal forma que a negação não preceda algum quantificador.

- $\neg \forall x \exists y (xy = 1)$
  - $\exists x \neg \exists y (xy = 1)$ **(Lei de De Morgan para quantificadores)**
  - $\exists x \forall y \neg (xy = 1)$ **(Lei de De Morgan para quantificadores)**
  - $\exists x \forall y (xy \neq 1)$ **(Negação da igualdade)**

Técnica para provar $\exists x P(x)$

Técnica: Prova por exemplo ou construção

- Você, ou fornece um exemplo diretamente, ou você descreve como construir tal objeto.
- Após exibir ou construir o objeto, você argumenta que ele satisfaz a propriedade.

Exemplo

Existe um número inteiro primo e par.

Técnicas para provar $\forall x P(x)$

Técnica 1: Prova por Exemplo Arbitrário

- A técnica clássica para provar que todo objeto de algum domínio satisfaz uma determinada propriedade consiste em tomar um **objeto arbitrário** do domínio e então provar que esse objeto satisfaz a propriedade.
- Como foi escolhido um objeto qualquer do domínio, fica então provado que todo objeto do domínio satisfaz a propriedade.

Provar: $\forall x P(x)$.

Estrutura da prova final:
Seja x um objeto arbitrário do domínio.
    [Prova de $P(x)$ vem aqui.]
Como o x escolhido é arbitrário, nós concluímos que $\forall x P(x)$.

Técnica 2: Prova por contradição

- Outra técnica clássica para provar a afirmação $\forall x P(x)$ é prova por contradição.
- Por contradição, suponha que a afirmação seja falsa, ou seja, suponha que $\exists x \neg P(x)$ é verdadeiro.
- A partir desta suposição, deve-se obter uma contradição, concluindo assim que a suposição inicial é falsa.
- Logo, concluí-se que $\forall x P(x)$.

Provas do tipo $\forall x(P(x) \to Q(x))$

- Muitas provas com quantificador universal envolvem implicação:

$$\forall x(P(x) \to Q(x))$$

- Neste caso, existem algumas técnicas que auxiliam:
  - Prova direta
  - Prova pela contrapositiva
  - Prova por contradição
  - Prova por casos

Demonstração direta

A demonstração direta de uma implicação $p \Rightarrow q$ é uma sequência de passos lógicos

$$p \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow p_n \Rightarrow q,$$

que resultam, por transitividade, na implicação desejada.

- Cada passo da demonstração é um axioma ou um teorema demonstrado previamente.

Exemplo

Prove que: Seja n inteiro. Se n é ímpar, então n^2 é ímpar.

Demonstração pela contrapositiva

A contrapositiva de $p \Rightarrow q$ é $\neg q \Rightarrow \neg p$.

- A contrapositiva é equivalente à implicação original.
- Demonstrar $\neg q \Rightarrow \neg p$ implica em $p \Rightarrow q$ e vice-versa.
- É útil quando é mais fácil demonstrar a contrapositiva.
- Para demonstrarmos a contrapositiva de uma implicação, podemos utilizar qualquer técnica de demonstração.

Exemplo

Prove: Seja n inteiro. Se $3n+2$ é ímpar, então n é ímpar.

Demonstração por contradição

A demonstração por contradição supõe que a afirmação a ser demonstrada é falsa e obtém uma conclusão contraditória.

- A contradição obtida implica que a suposição é falsa.
- Portanto, a afirmação é verdadeira.
- A negação de $p \Rightarrow q$ corresponde a $p \wedge \neg q$.

Exemplo

Prove que: Seja n inteiro. Se $3n+2$ é ímpar, então n é ímpar.

Demonstração por casos

Na demonstração por casos, particionamos as possibilidades em um conjunto de casos e demonstramos cada um deles.

- O número de casos é normalmente finito.
- Cada caso é demonstrado usando qualquer técnica.

Exemplo

Provar que a soma de dois inteiros x e y de mesma paridade é sempre par.

Técnica 3 para $\forall x P(x)$: Princípio da indução

Demonstração por indução

Usando o princípio da indução, demonstramos uma afirmação $P(n)$ que depende de um parâmetro natural n.

- Demonstramos $P(n)$ para todos os valores de n no domínio.
- Quebramos a demonstração em duas partes.

1. Caso básico
   - consideramos n_0 o menor natural no domínio
   - demonstramos $P(n_0)$
2. Caso geral
   - consideramos $n > n_0$
   - **hipótese da indução:** supomos que $P(n-1)$ vale
   - **passo da indução:** demonstramos $P(n)$ usando a hipótese

Demonstração por indução alternativa

Uma forma equivalente:

1. Caso básico
   - consideramos n_0 o menor natural no domínio
   - demonstramos $P(n_0)$
2. Caso geral
   - consideramos $n \geq n_0$
   - supomos que $P(n)$ vale
   - demonstramos $P(n+1)$

Exemplo

Prove que a soma dos n primeiros números ímpares é n^2.

Fortalecendo a hipótese

Algumas vezes é útil supor que a hipótese vale para todos os casos anteriores.

1. Caso básico
   - consideramos n_0 o menor elemento no domínio
   - demonstramos $P(n_0)$
2. Caso geral
   - consideramos $n > n_0$
   - supomos que $P(k)$ vale para todo $n_0 \leq k \leq n-1$
   - demonstramos $P(n)$

Exemplo

Prove que todo inteiro positivo n pode ser escrito como a soma de diferentes potências de 2.