



Processamento digital de **imagens**

Leonardo Vidal Batista
DSC-PPGI/UFPB-PPGCC/UFCG
leonardo@ci.ufpb.br

linkedin.com/in/leonardo-vidal-batista-9b827b22/
Instagram: @leonardovidalbatista / @light.impressions



Avaliações

- Duas provas escritas individuais (P1 e P2)
- Trabalho prático (TP), em grupo com até 5 integrantes, apresentado ao professor por todos os alunos, e todos os integrantes dos grupos devem estar familiarizados com todos os aspectos do trabalho
- Projeto final de pesquisa e desenvolvimento (PF), em grupo com até 5 integrantes, apresentado por todos os alunos na forma de seminário, com duração a ser definida.
- O TP e o PF devem vir acompanhados de código-fonte e relatório impresso (contendo introdução, fundamentação, material e métodos, resultados, discussão e conclusão), entregues até o momento da apresentação.
- A nota final será dada por $(P1+P2+TP+PF)/4$.

Conteúdo Programático no Sigaa

Gonzalez, R. C. e Woods, R. E.. Processamento Digital de Imagens. 3^a. Pearson Prentice Hall. 2010

Gonzalez, R. C.; Woods, R. E.; Eddins, S. L.. Digital Image Processing Using MATLAB. 2nd. Gatesmark Publishing. 2009

Playlist com todas as aulas

https://www.youtube.com/playlist?list=PLCDUoEmhw2bBxmB_jGljT7vqurc8MH-A_



Provas

Não é permitido o uso de celulares durante as provas

Reposição de no máximo uma avaliação não realizada

- Prova
- Apresentação de trabalho ou projeto
- Não há reposição para entrega de relatórios e códigos

Estatísticas 2022.1

48 discentes após 12 trancamentos

33 aprovados por média (69%)

7 na final (15%), todos aprovados

5 reprovados por média (10%)

3 reprovados por falta (6%)

Média geral

Média P1 = 8,4

Média P1 sem reposição = 8,4 (43 discentes)

Média Reposição da P1 = 5,2 (1 discente)

Média P2 = 4,7

Média P2 sem reposição = 5,4 (26 discentes)

Média Reposição da P2 = 2,6 (9 discentes)

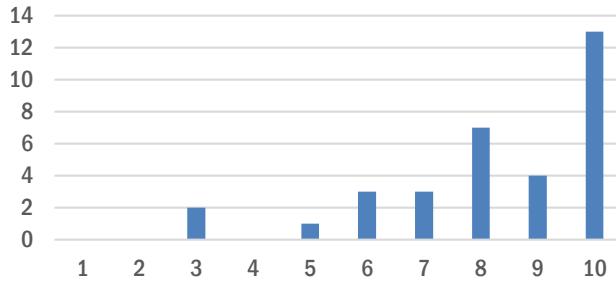
Média Trabalho = 9,0

Média Projeto = 8,4

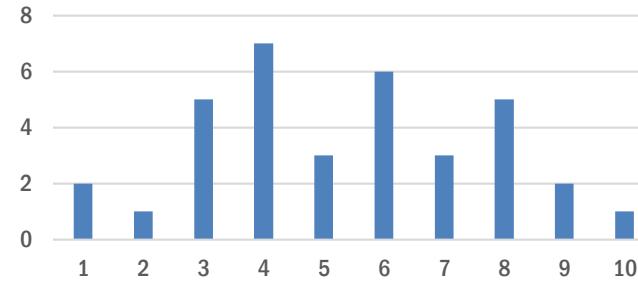
Média na prova final = 7,0

Média final = 7,5

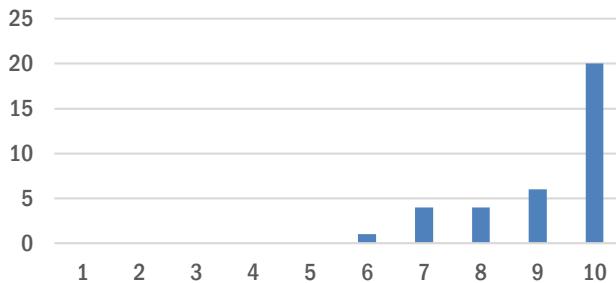
Prova 1



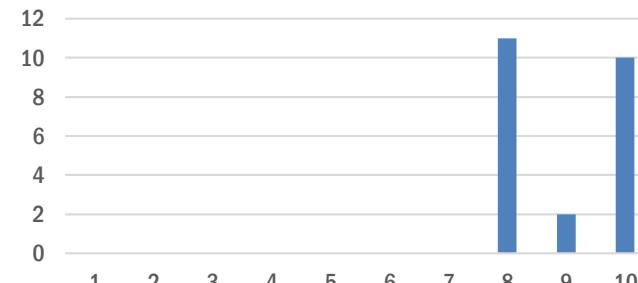
Prova 2



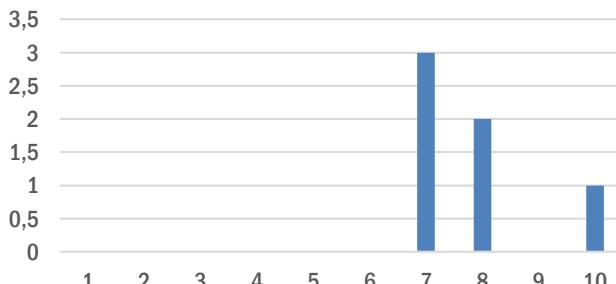
Trabalho



Projeto



Prova final





PDI

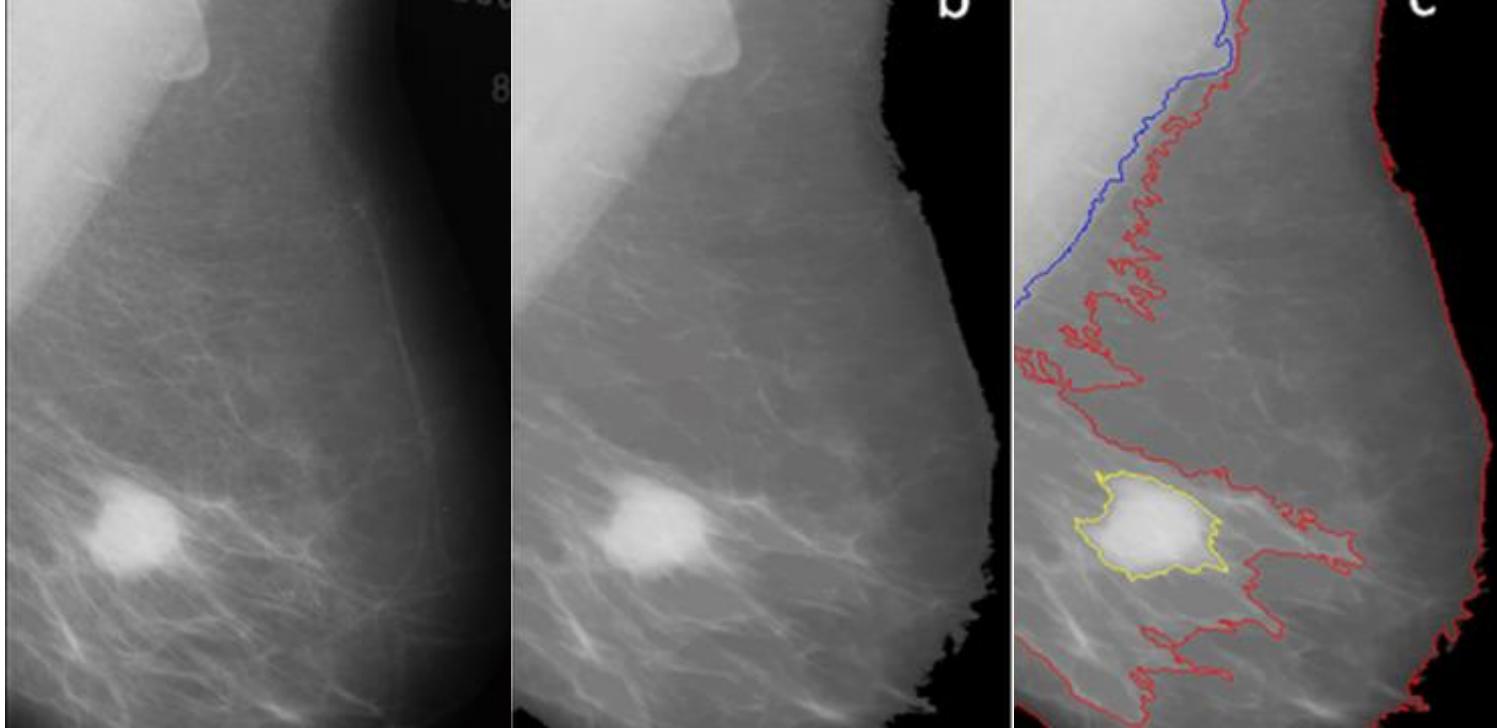
Modelagem, análise, projeto e
implementação (S&H) de métodos
para tratamento de **imagens**
digitais



Para quê?
**Fins
estéticos**



Fins estéticos



Para quê?

Interpretação Humana ou Computacional

Para quê?

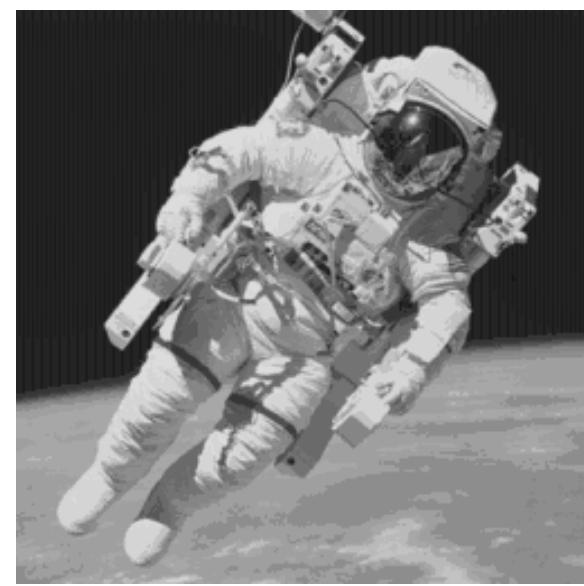
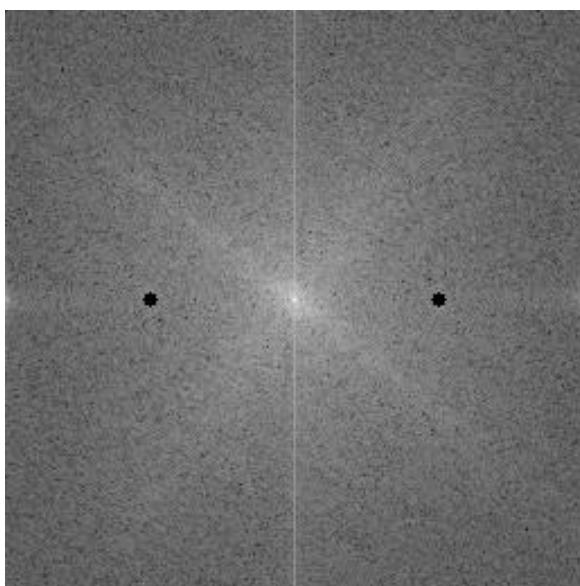
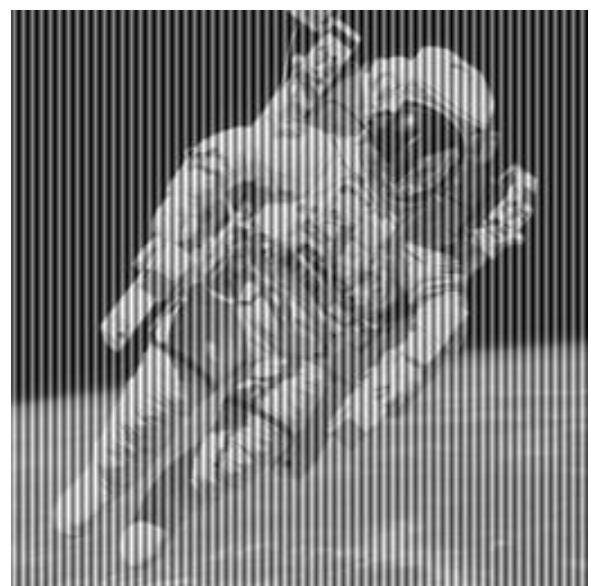
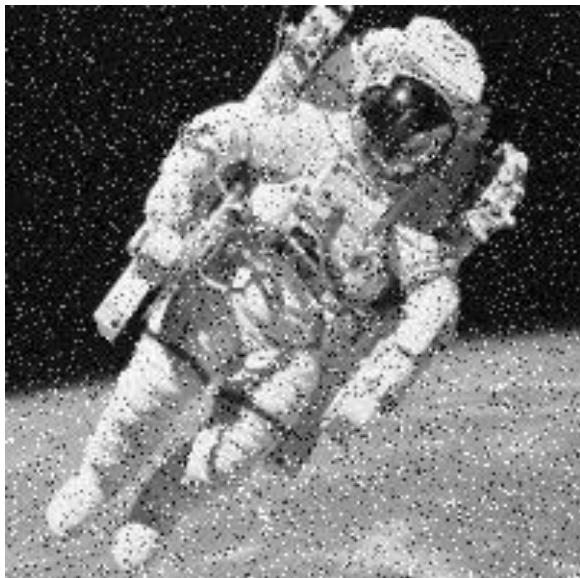
Armazenamento e Transmissão

104
Mbytes



Compressão
157:1
0,66
Mbyte





Redução de ruído

Fins estéticos, de interpretação e de compressão

Processamento de Dados

Dados

Imagens

Visão
Computacional

VC = PDI + IA

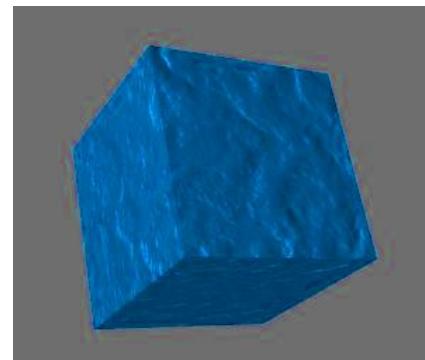
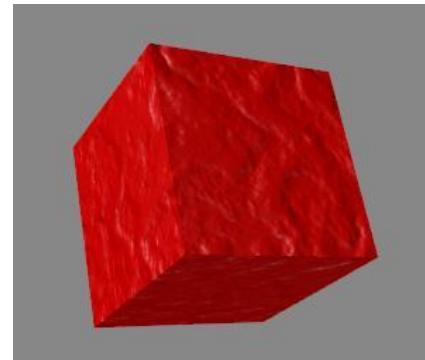
Computação
Gráfica

PDI

Visão
Computacional

Computação
Gráfica

```
background {color rgb <0.25, 0.25, 0.25>}  
box { <-0.5,- 0.5, <-0.5>, <0.5,-0.5, <0.5>  
      texture { pigment {color Red}  
                finish {specular 0.6}  
                normal { agate 0.25 scale 1/2}}  
      rotate <45, 46, 47>}
```

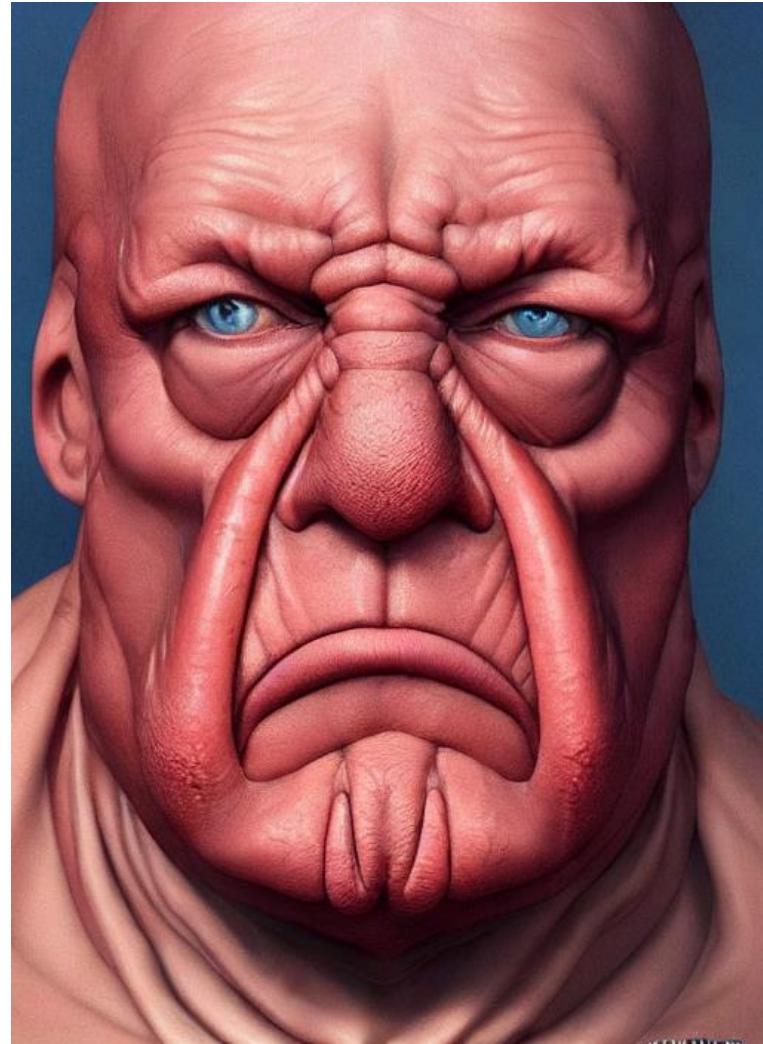


PDI

PDI

Síntese de imagens por IA

dr. john a. zoidberg,
portrait photography
feroflex photorealistic
studio lighting
ektachrome detailed
intricate face details,
ultradetails, beautiful
face, realistic shaded
perfect face, extremely
fine details, artstation

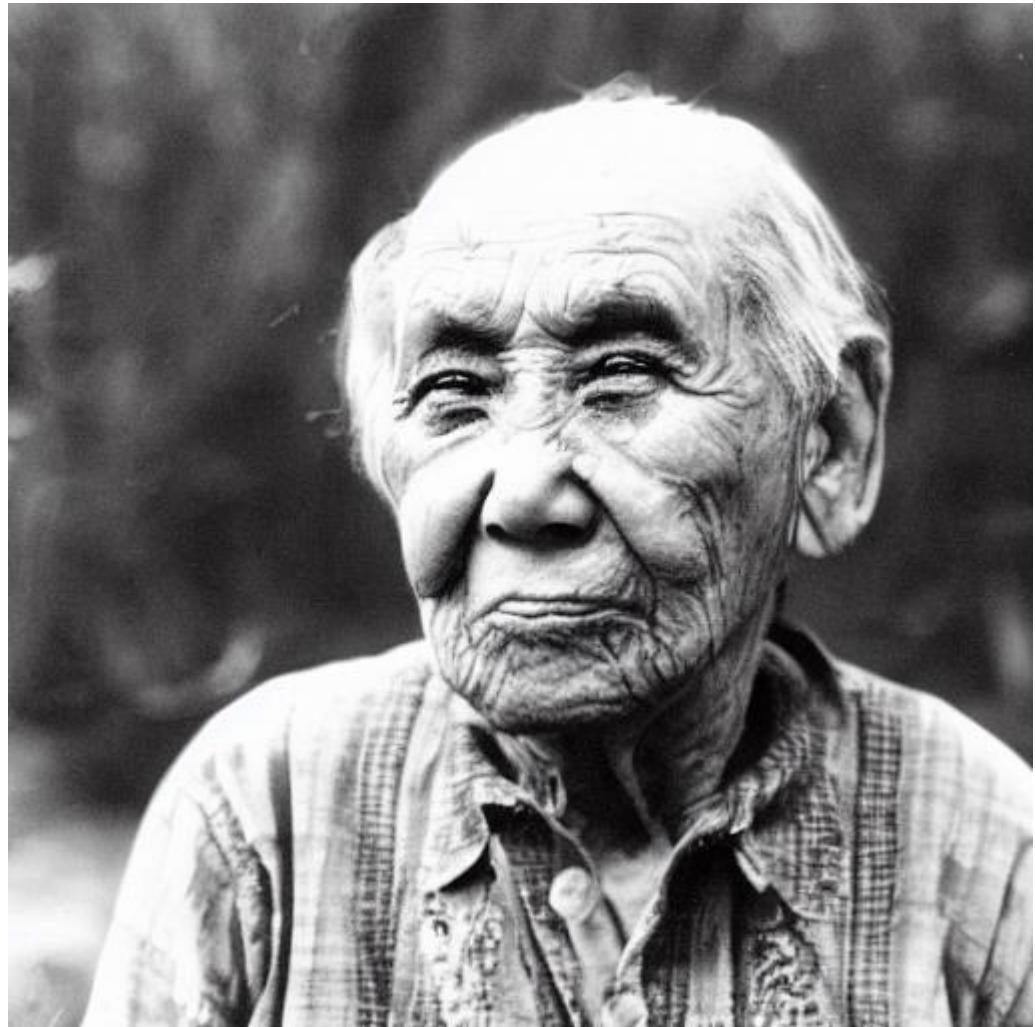


Stability AI



Síntese de imagens por IA

photo of a person
who lost the thrill of
living long ago, but
life goes on



Stability AI

Síntese de imagens por IA

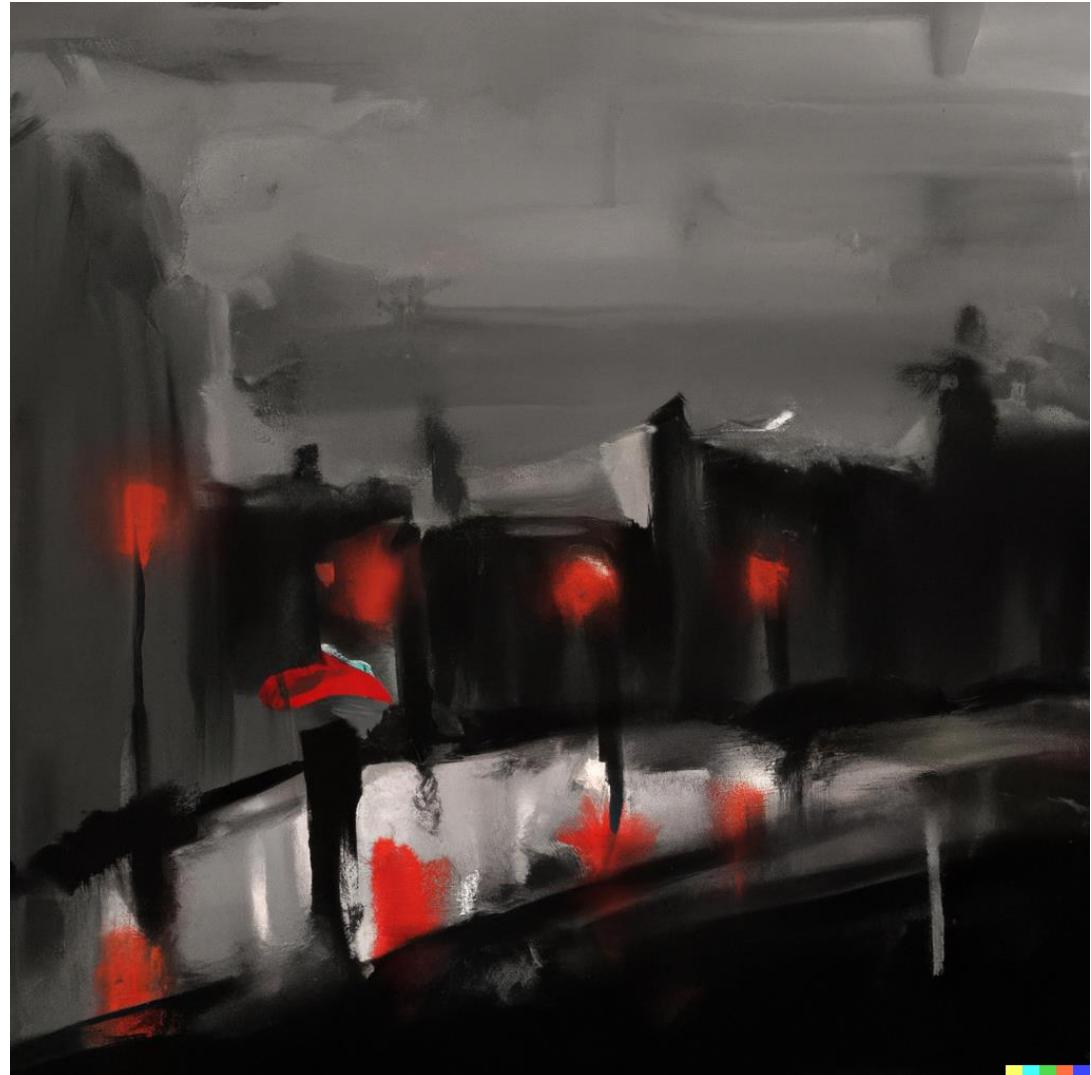
ice cream sundae,
delicious, glistering,
chocolate sauce,
marshmallows, highly
detailed, octane
render, ...



Midjourney

Síntese de imagens por IA

Painting of a dark
rainy night street
with lamp posts
and a man with a
red umbrella



Dall-E (by @lvbatista)

Síntese de imagens por IA

Painting of a dark
rainy night street
with lamp posts
and a man with a
red umbrella



Dall-E (by @lvbatista)

Síntese de imagens por IA

The Beatles, Tim Burton drawing style



Midjourney (by @lvbatista)

Síntese de imagens por IA

a Tim Burton style
colour drawing of
The Beatles playing
3d digital art



Dall-E (by @lvbatista)

Síntese de imagens por IA

Tutankhamun
dancing in Rio de
Janeiro carnival
digital art



Dall-E (by @lvbatista)

PDI Não Convencional

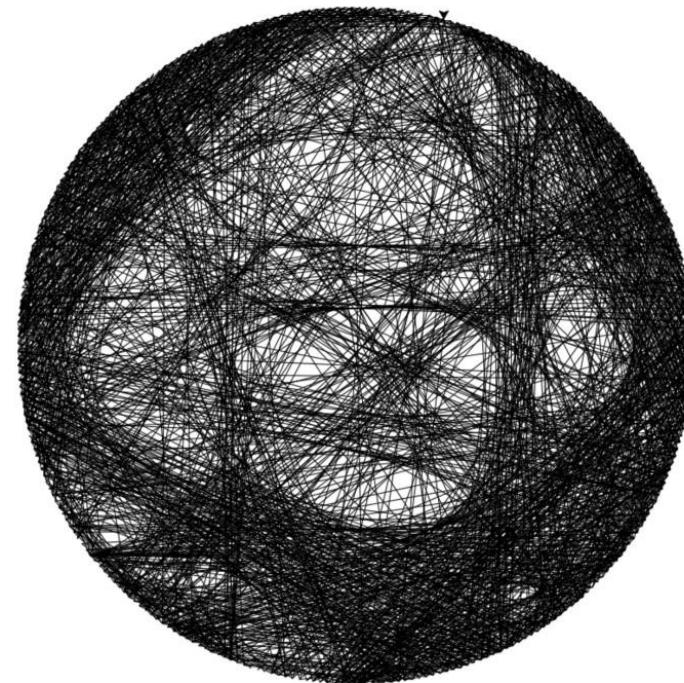
▼

<https://betterprogramming.pub/drawing-portraits-using-only-nails-and-a-thread-with-python-1cf8c6dd040>

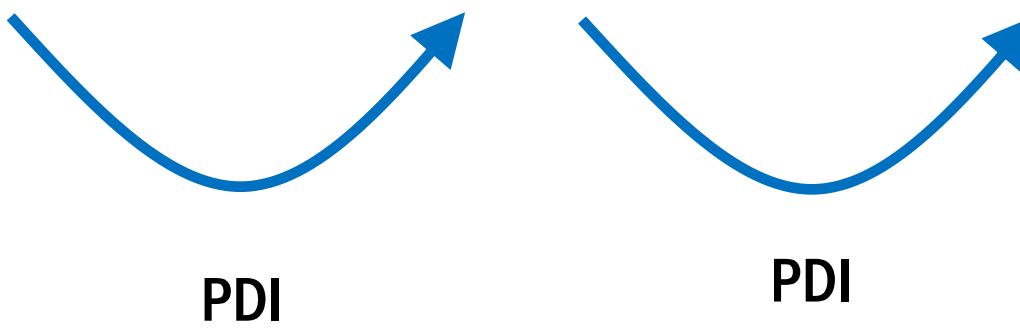
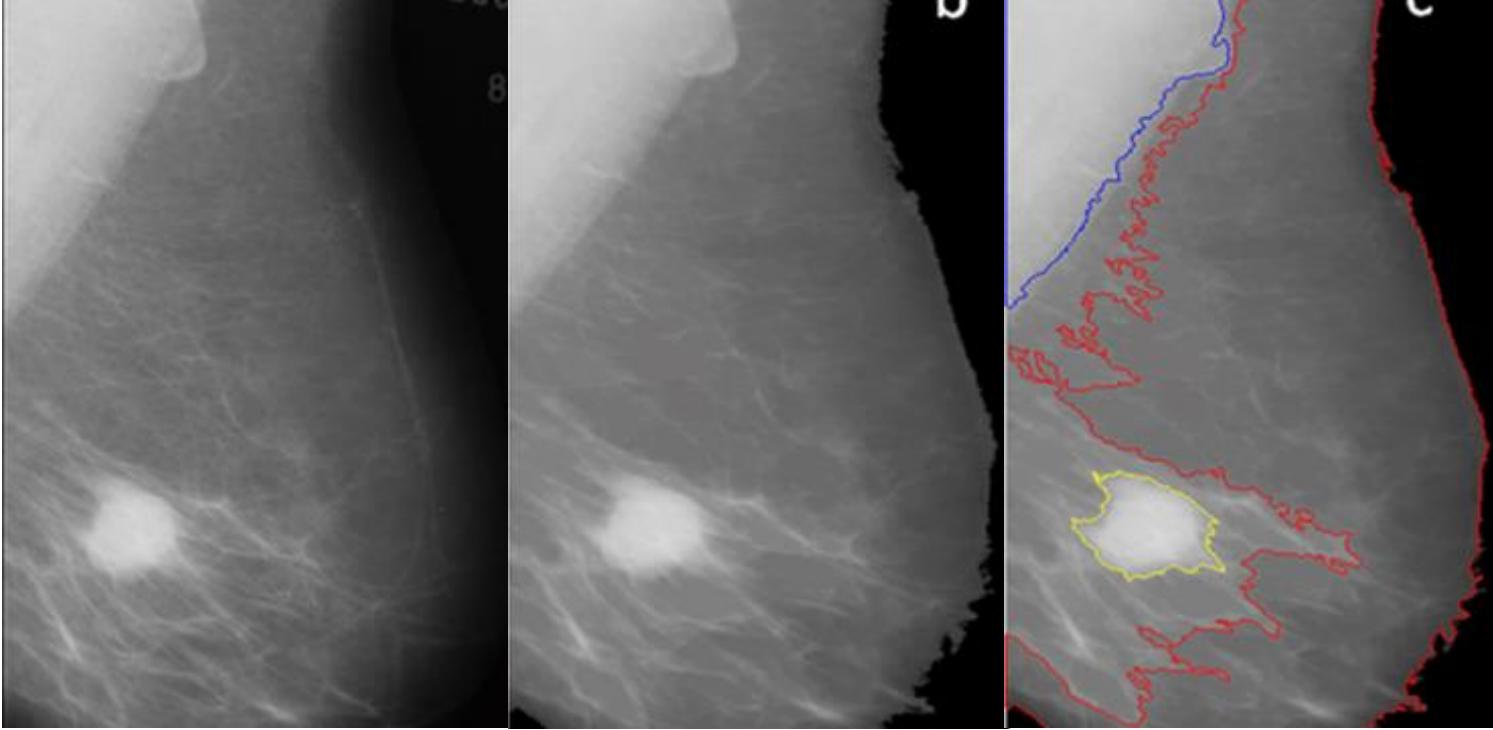
PDI/Leonardo V Batista



PDI Não Convencional



<https://betterprogramming.pub/drawing-portraits-using-only-nails-and-a-thread-with-python-1cf8c6dd040>



Músculo
peitoral

Background

Tecido semi-
adiposo

Nódulo

Tecido
adiposo

Leonardo V Batista

Visão Computacional





**Pré-
Processamento
(PDI)**

**Segmentação
(PDI)**

**Reconhecimento
(VC)**

**Colorização
(PDI)**

Conteúdo



Domínio do
Espaço

Domínio da
Frequência

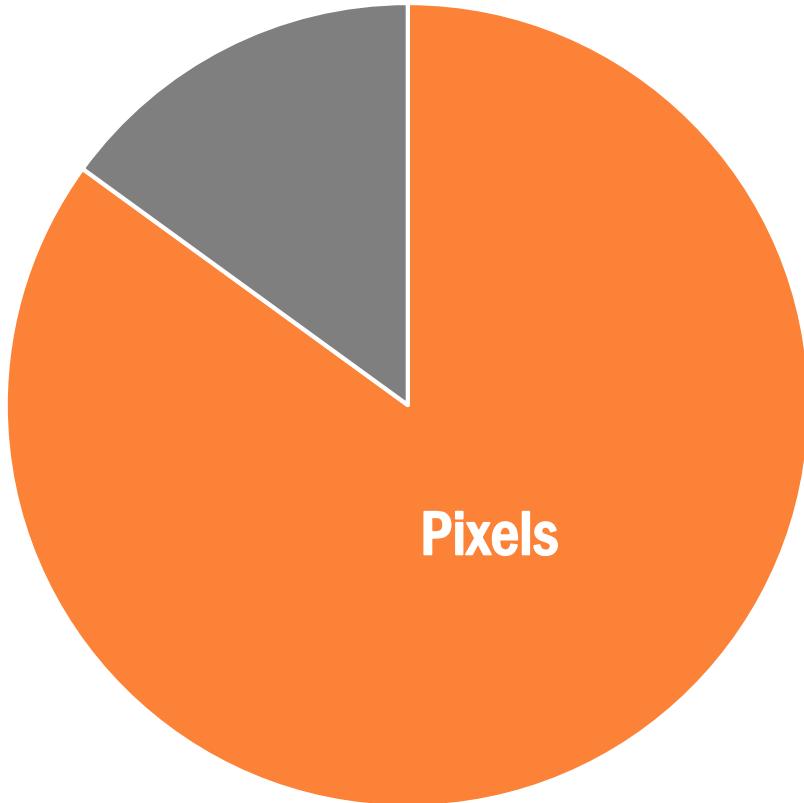
Amostragem e Quantização
Operações Pontuais e Locais
Operações n-árias
Filtros Convolucionais

Transformada Cosseno
Transformada de Fourier
Teorema de Nyquist
Aliasing

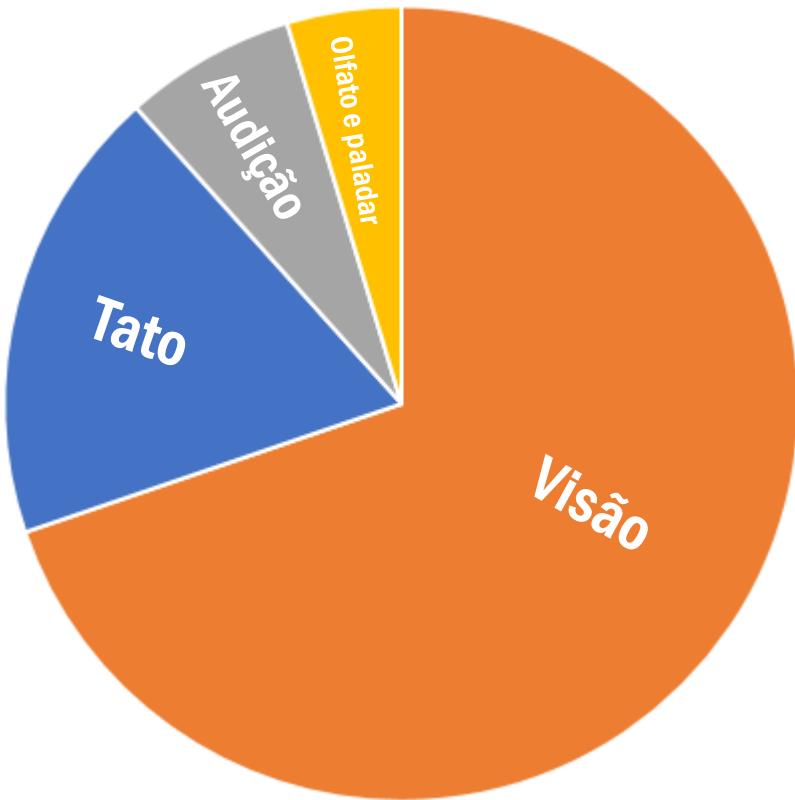
Teorema da Convolução

Recursos Didáticos

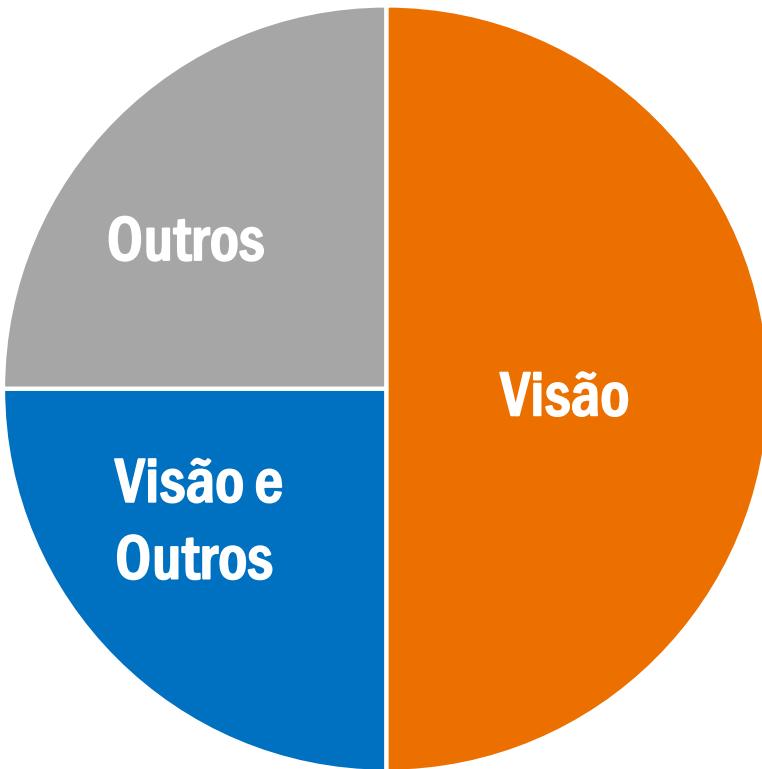




**85% da
informação na
Internet está na
forma de pixels**



**70% dos
neurônios sensoriais
no córtex cerebral
são dedicados à
visão**



**50% do cérebro
dedicados
exclusivamente ao
Processamento
Visual**

Taxa de transmissão de dados sensoriais (KB/s)

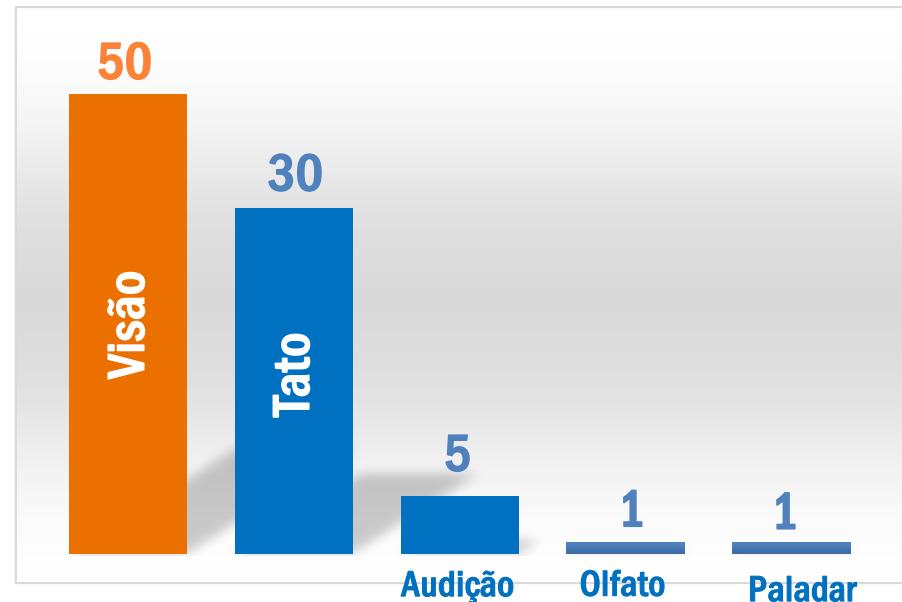


Processamento de dados sensoriais

Inconsciente (KB/s)



Consciente (B/s)



Após 2 semanas, lebramos...

10% do que lemos

20% do que ouvimos

30% do que vemos

**50% do que vemos e
ouvimos**

**70% do que dizemos e
escrevemos**

90% do que fazemos

PDI/Leonardo V Batista

Aulas,
livros, artigos

Aulas,
Podcasts

Aulas, imagens

Aulas audiovisuais, vídeos

Palestras, relatórios, artigos

Trabalhos práticos, projetos





Cortejo fúnebre de João Paulo II

2005



Posse de Francisco I

2013

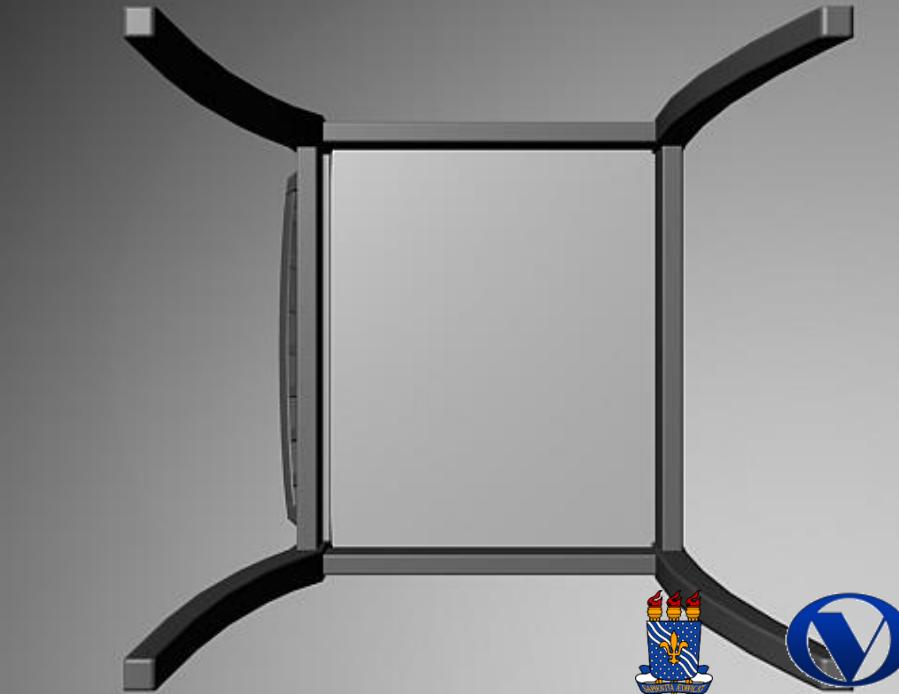
Ver é desafiador!

Depende de...

Ângulo



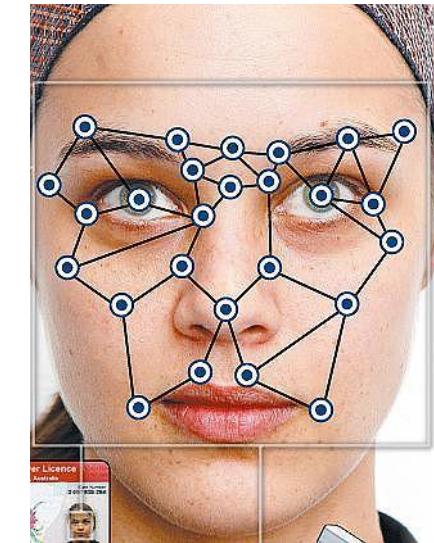
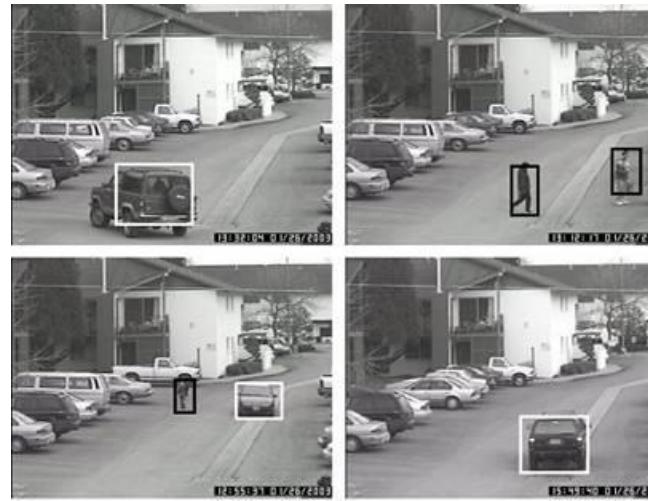
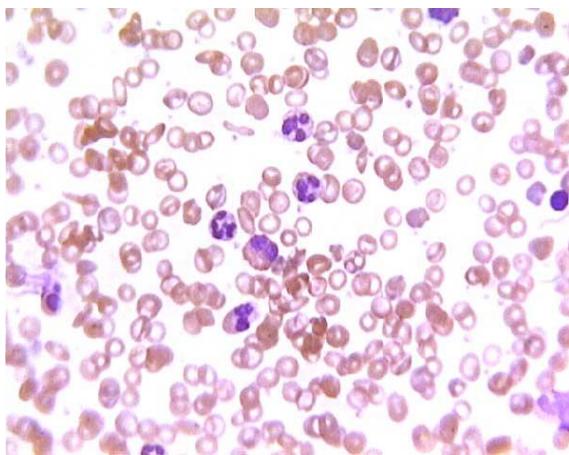
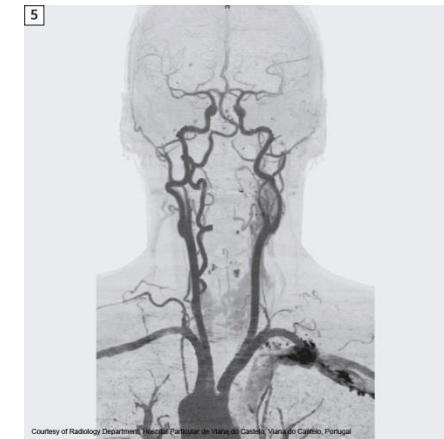
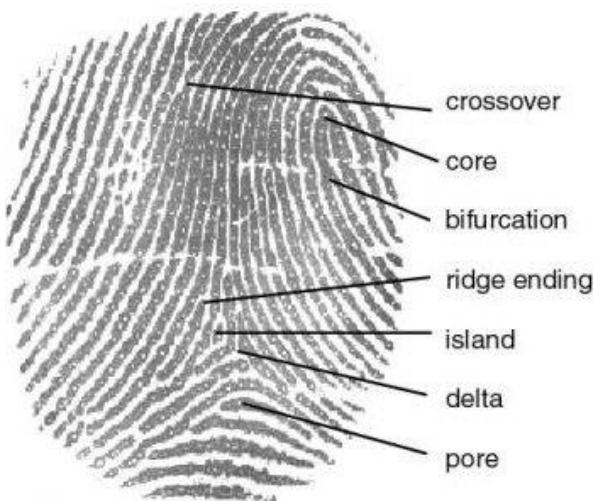
Contexto

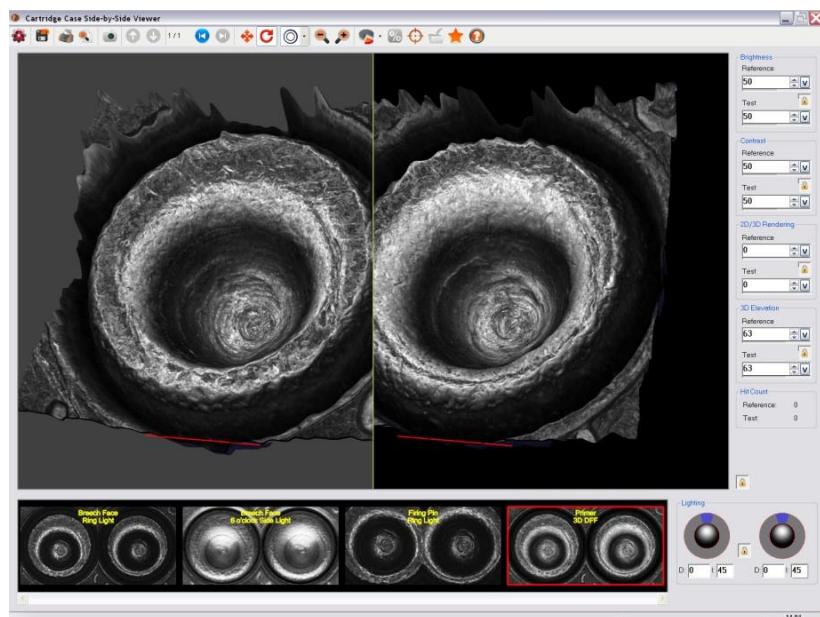
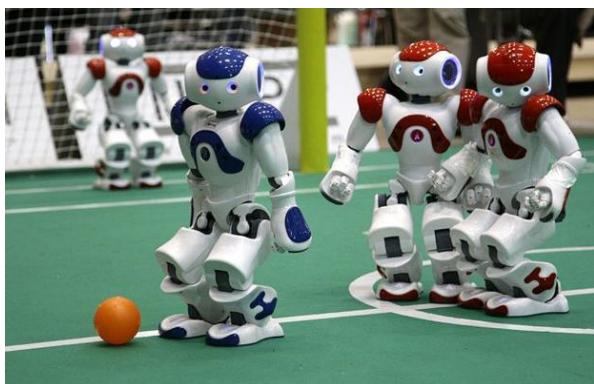
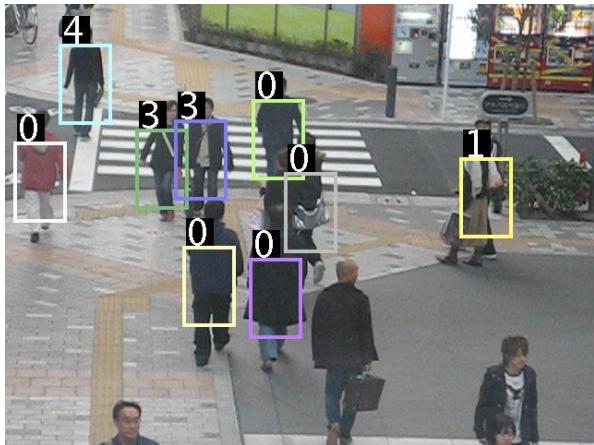


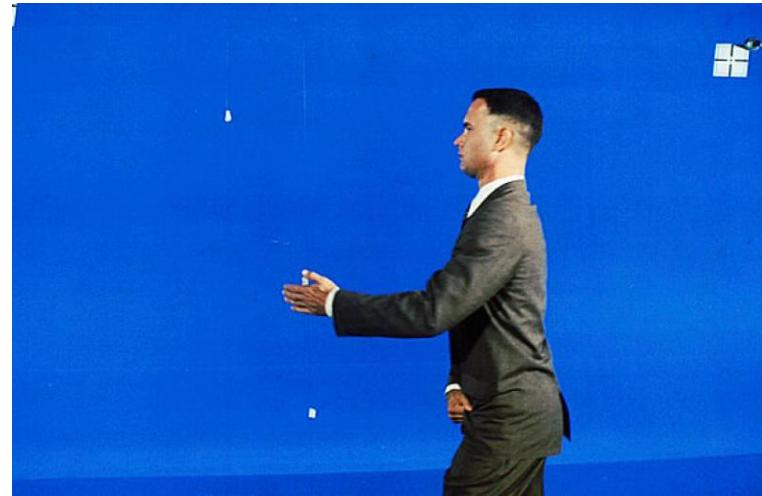


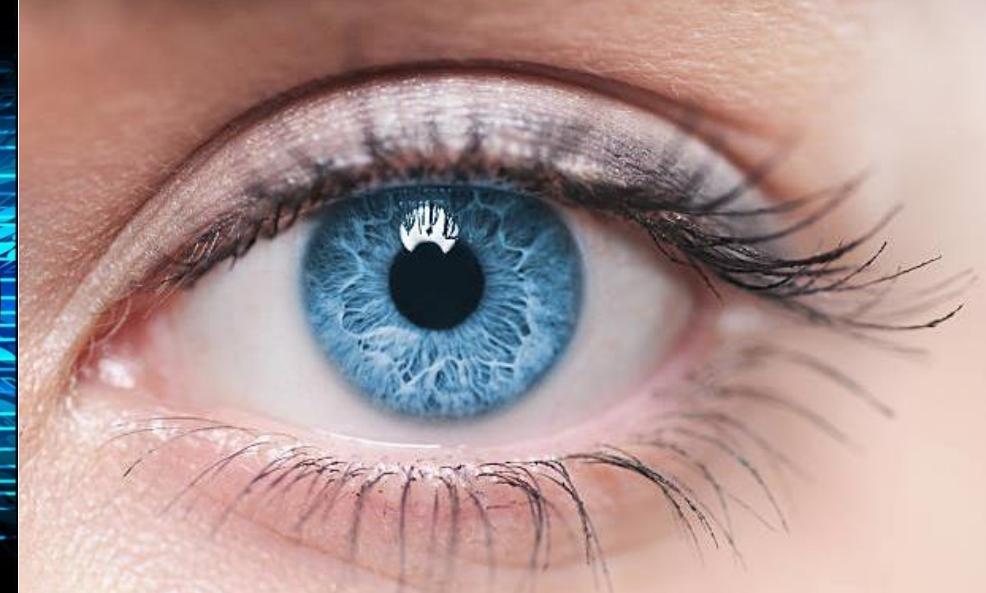
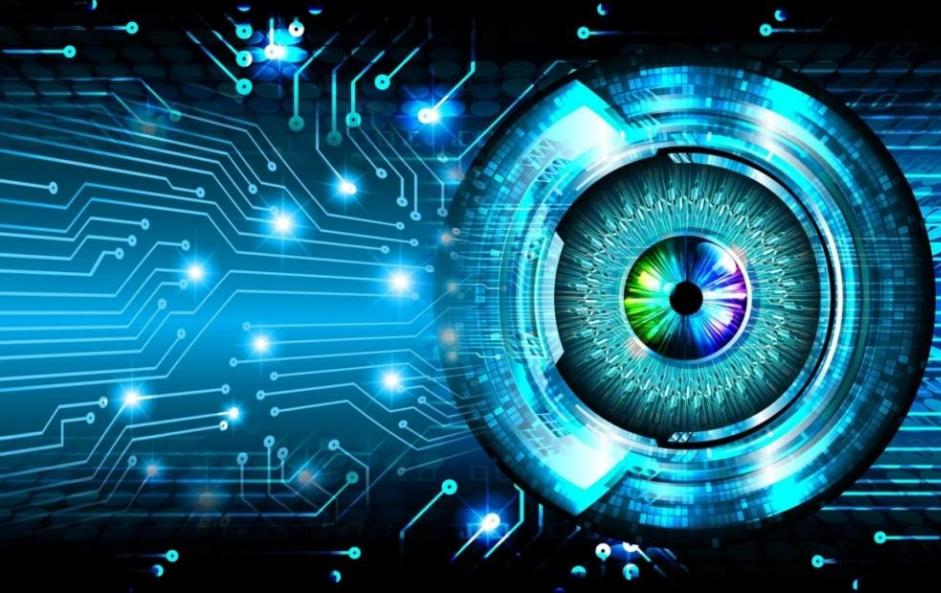
**Do que se viu na
vida**











VC x VH

<p>Objetiva Inflexível Insensível Algorítmica</p>	<p>Subjetiva Flexível Emotiva Ambígua</p>
---	---



VC x VH



izitru

High Trust
Original file from camera

Upload FAQ Sign In

Details below

Contrary to appearances, Kevin and Hany actually get along very well.

VC + VH

PDI/Leonardo V Batista

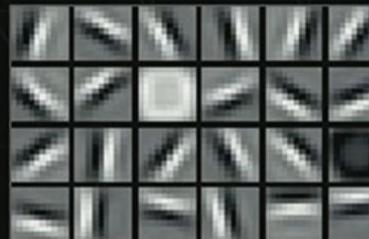




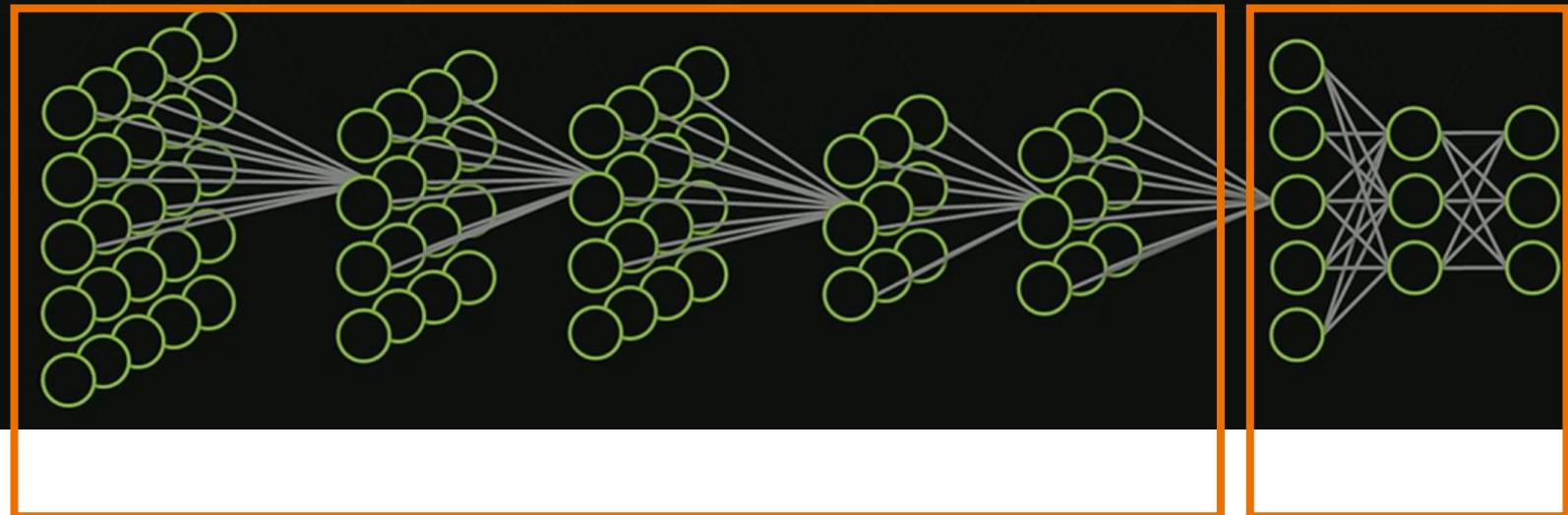
VC + VH=Deep Learning

PDI/Leonardo V Batista





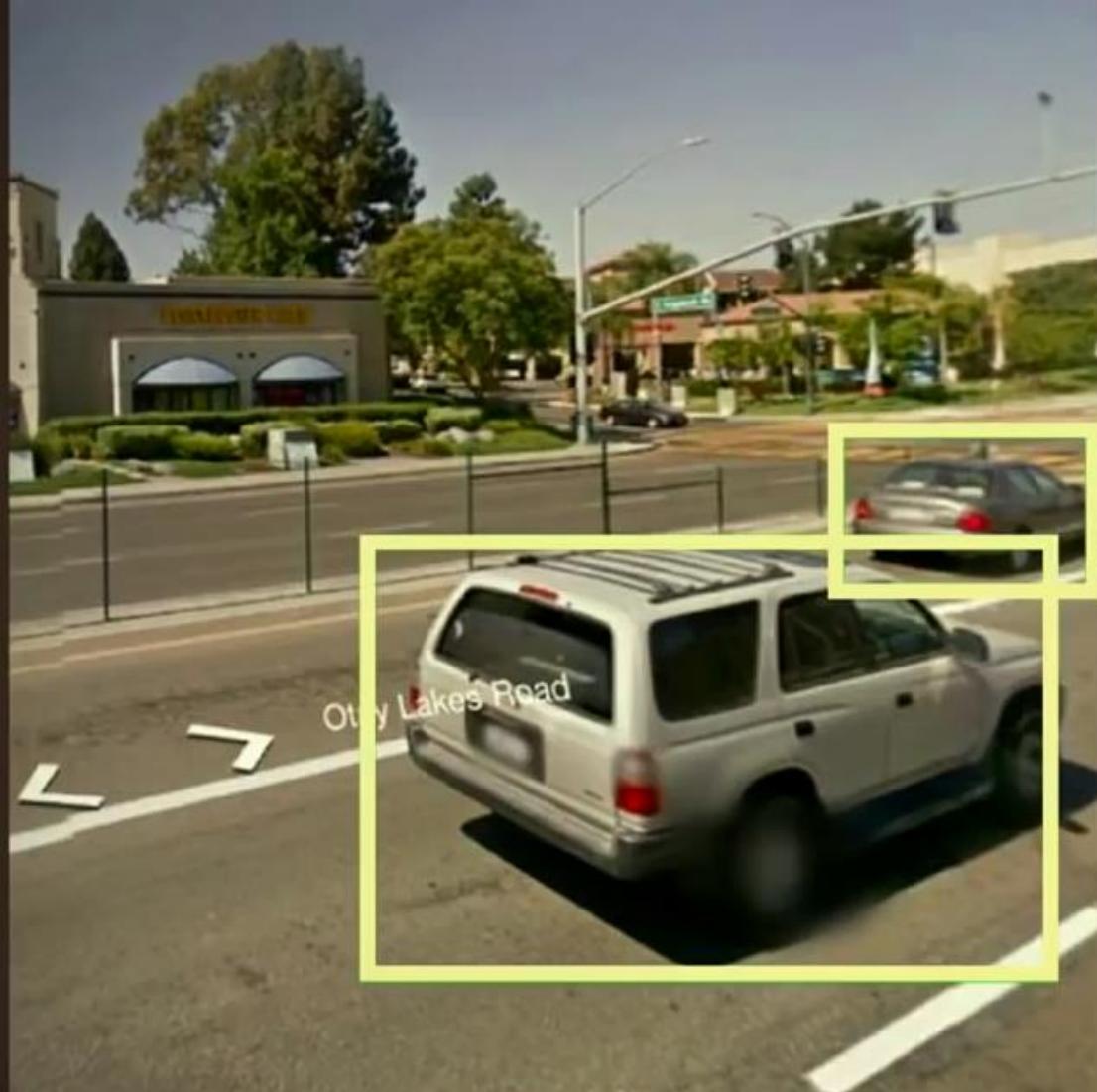
Image



**Convoluçãoes
(PDI)**

**Classificação
(IA)**

$$\text{VC} = \text{PDI} + \text{IA}$$



2005 Nissan
Sentra 1.8 S

2000 Toyota
4Runner Limited

Acertos...



"A young boy is holding a
baseball bat"

E erros...



Ver para crer? Redes adversárias

PDI/Leonardo V Batista





Linhas de Pesquisa

Biometria

Trânsito e transeuntes

Contagem de pessoas

Sensoriamento Remoto

Sports Analytics

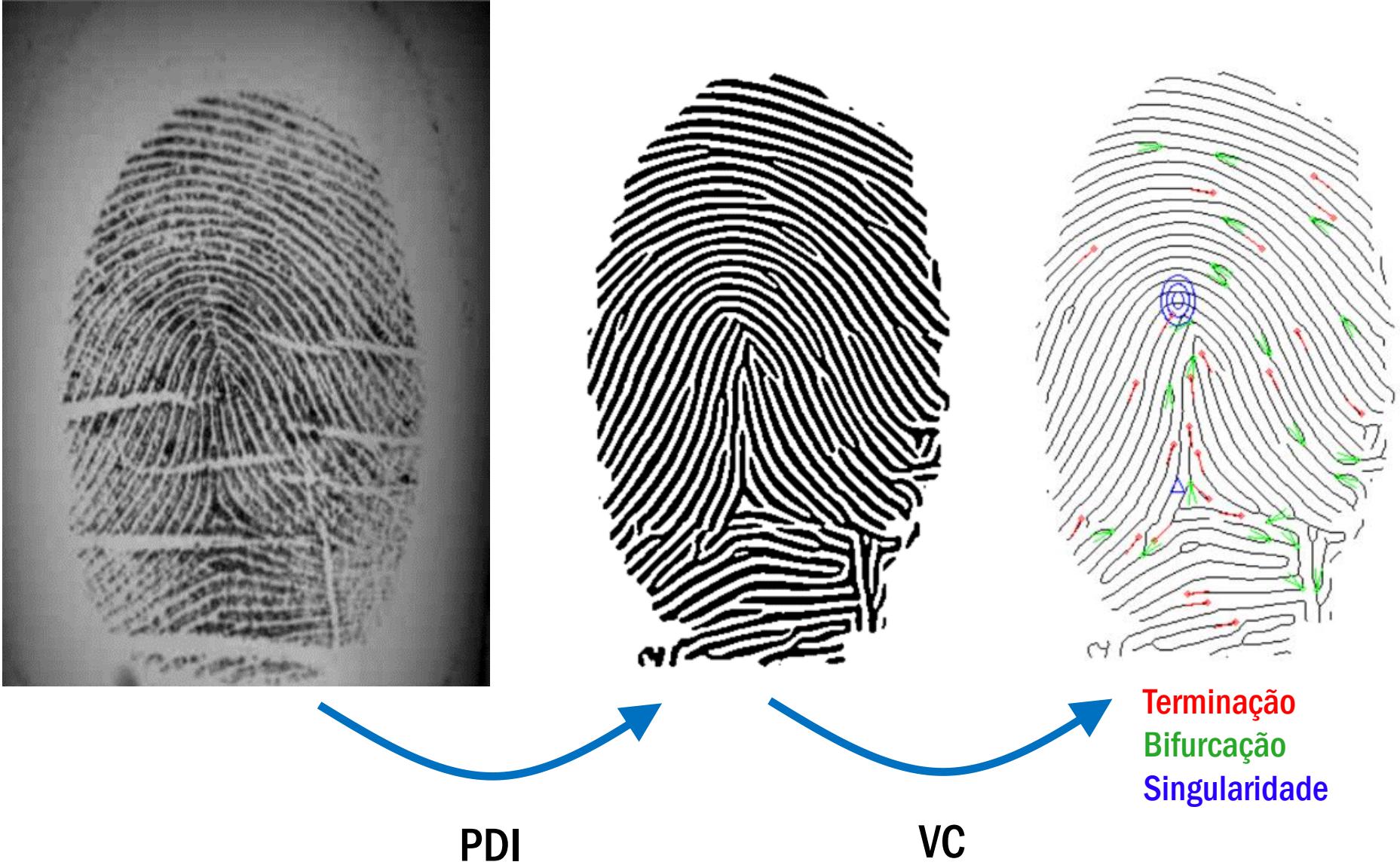
Deep Learning!

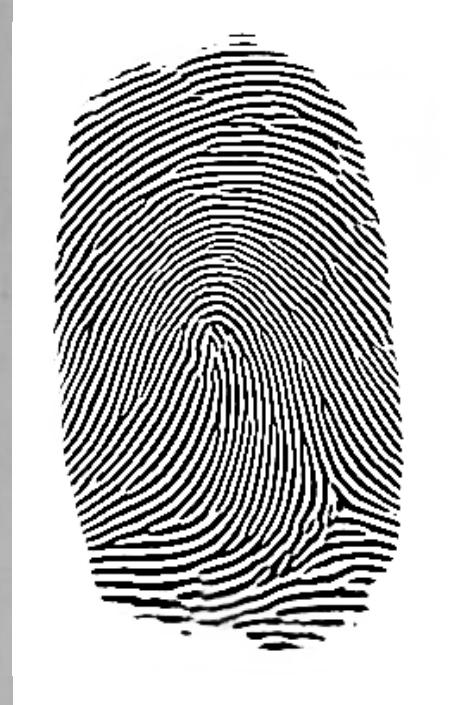


Multifatorial e Multibiométrico

Competição FVC

Certificação FBI

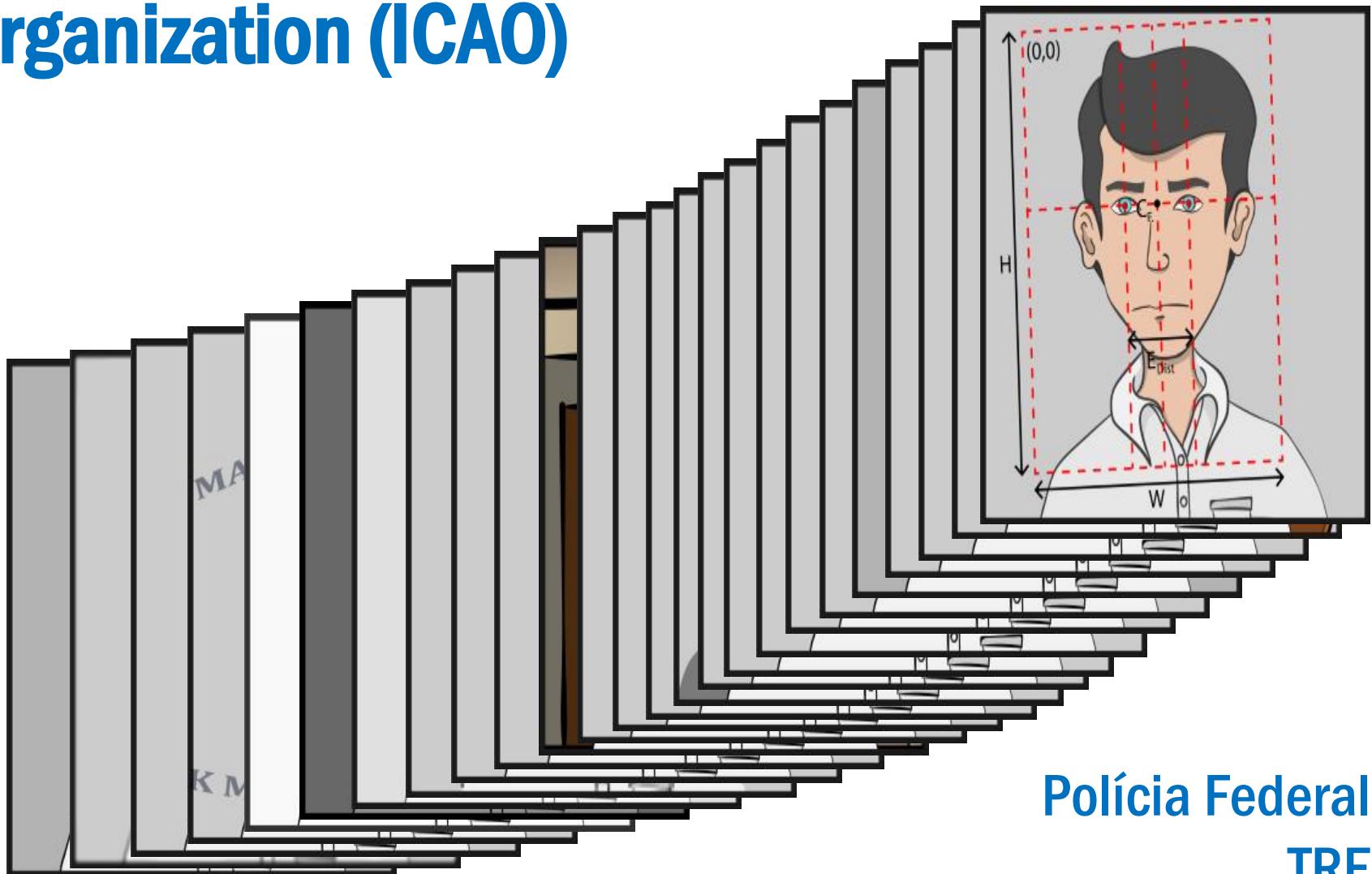




Deep Autoencoder



International Civil Aviation Organization (ICAO)





Softwares de Identificação

PDI/Leonardo V Batista



M Entrada (5) - pedro.alvesjr... Aula - Vsoft.iDS.LogMyCarCFC Mapa

10.1.161/superpratico/admin/Controls/MapaPersonalizado.aspx?id=1b927647-a793-4668-bc9f-c9bce46371f5

- Aprendendo sobre o trânsito meobit → 100% Visits: n/a / 23,076,656 S

Foto

13/03/2015 16:34:11

Centralizar Dados cartográficos ©2015 Google Imagens ©2015 CNES / Atrium, DigitalGlobe | 50 m Termos de Uso Informar: erro no mapa

Legenda

- Alerta
- Conteúdo
- Falta
- Fim trajeto
- Foto
- Início trajeto
- Parada
- Partida

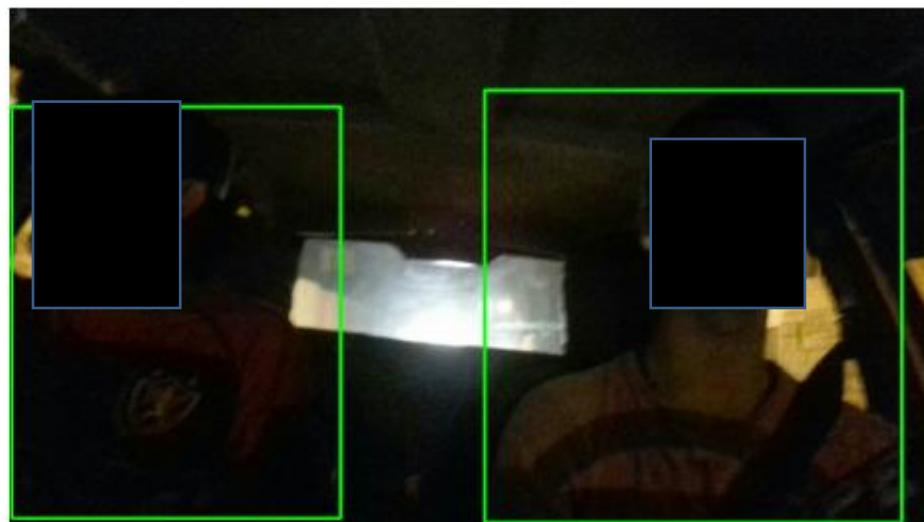
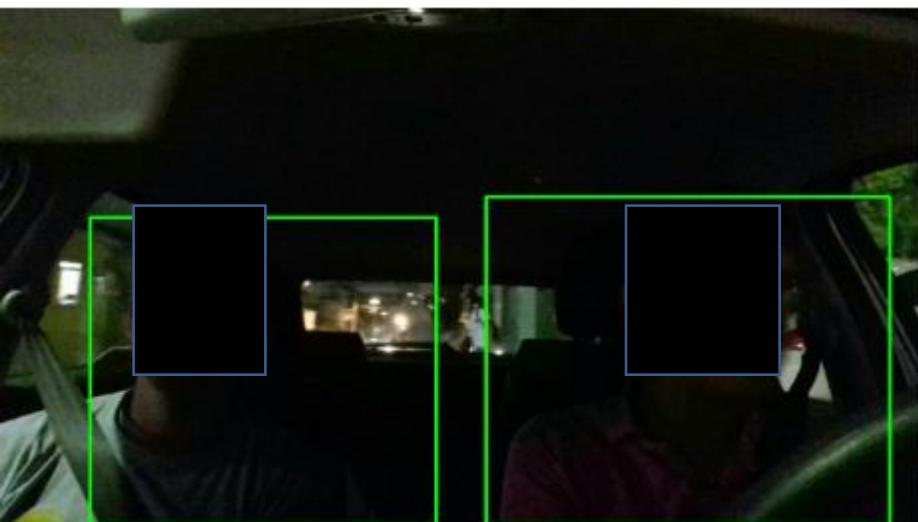
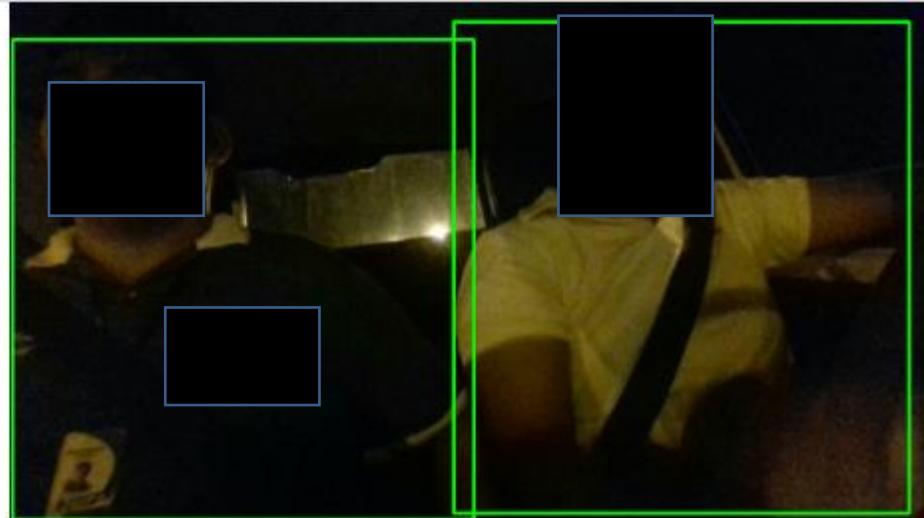
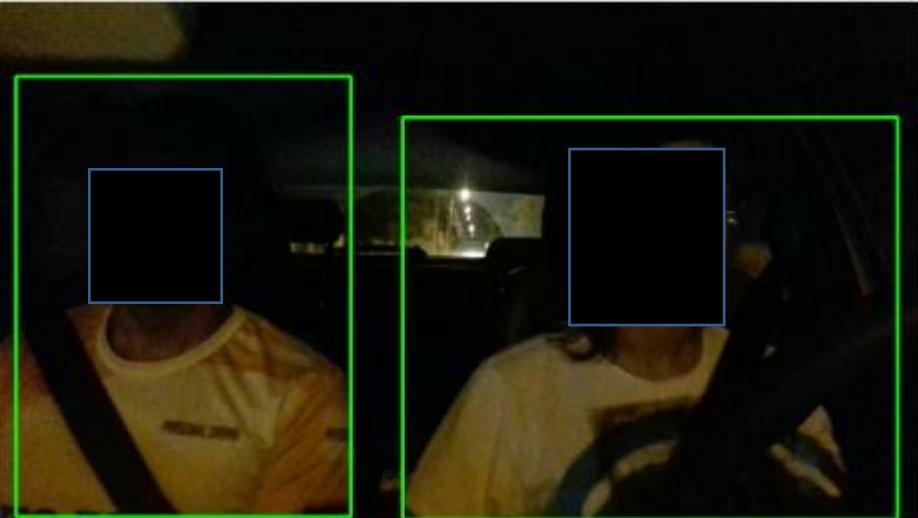
Softwares de Monitoramento

PDI/Leonardo V Batista





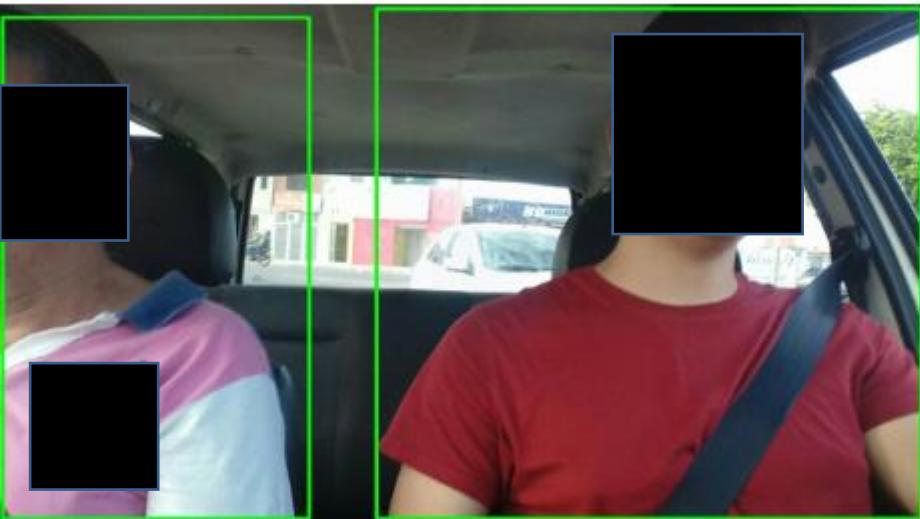
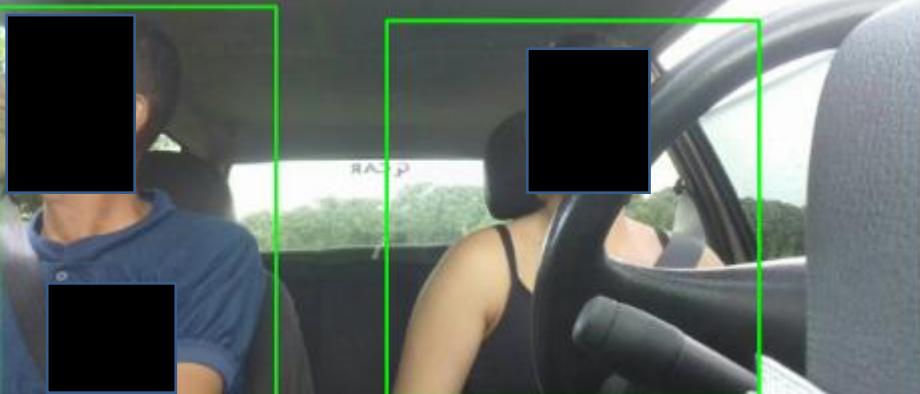
Softwares de Monitoramento



InCar

PDI/Leonardo V Batista





InCar

PDI/Leonardo V Batista

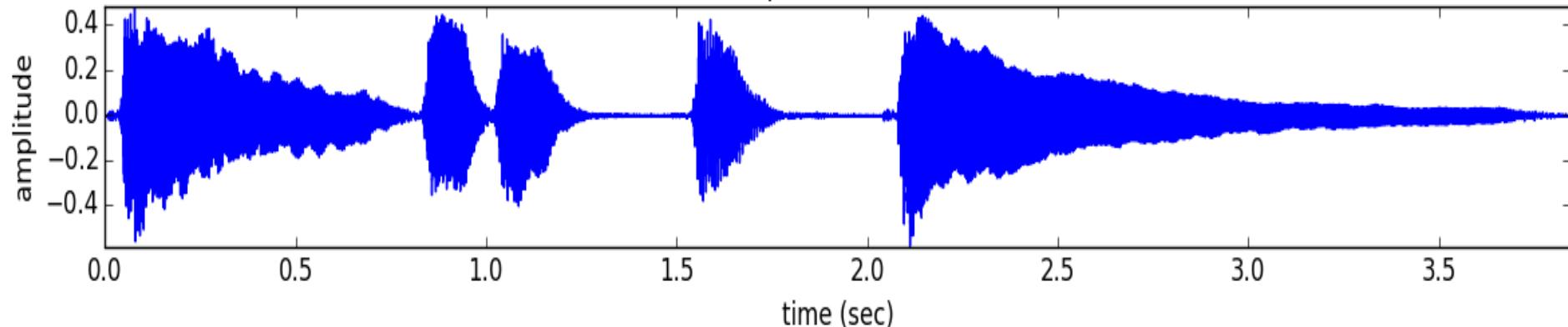


35

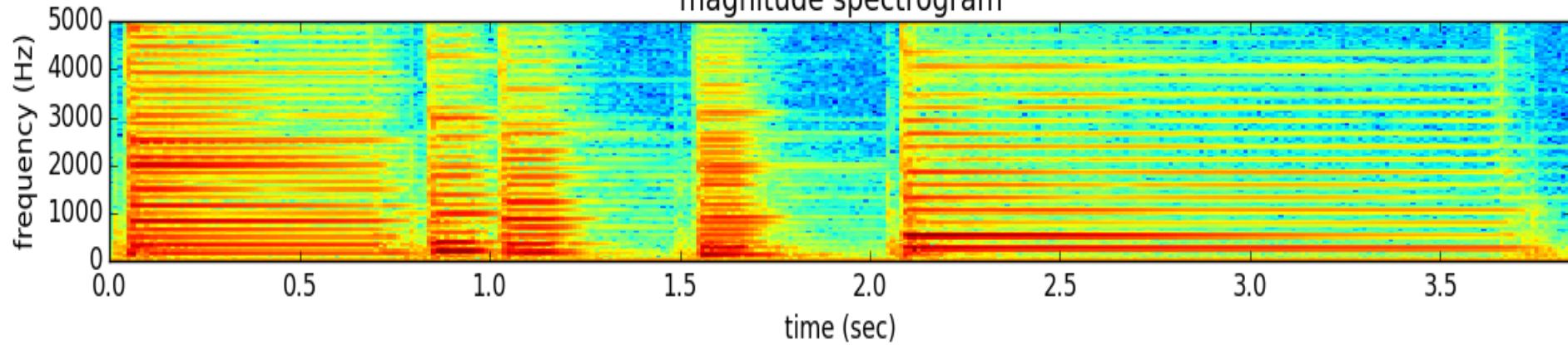
fraudes detectadas

no primeiro mês

input sound: x



magnitude spectrogram



Classificação de desvios e emoções

Parceria com o Laboratório de Fonoaudiologia da UFRB

PDI/Leonardo V Batista



Localização de navios em imagens de satélite

Parceria com o Department of Computer Science at
Memorial University of Newfoundland - Canada



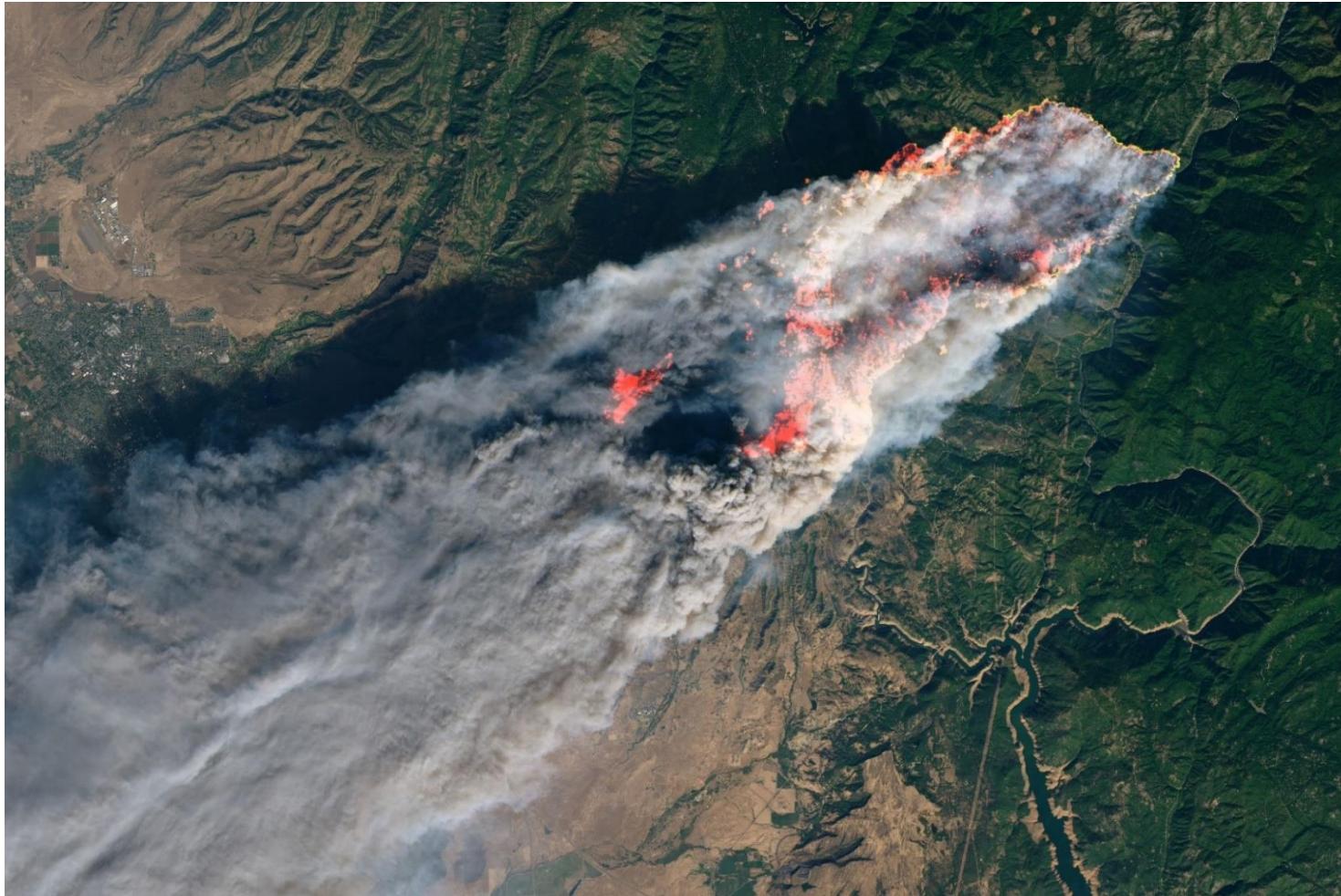
Detecção de queimadas

Parceria com o Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Civil e Ambiental da UFPB

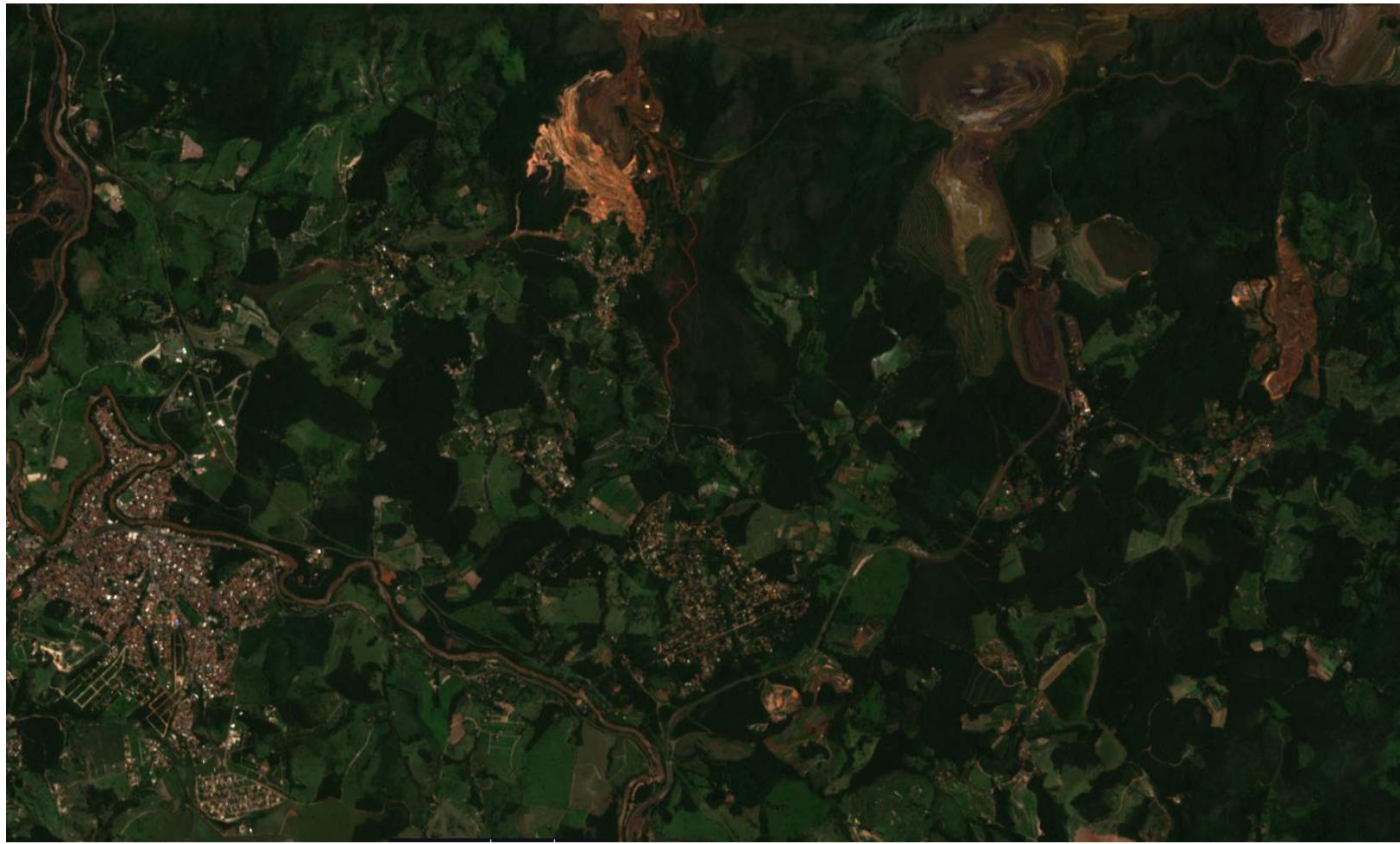


Detecção de queimadas

Parceria com o Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Civil e Ambiental da UFPB



SR



Desastre em Brumadinho



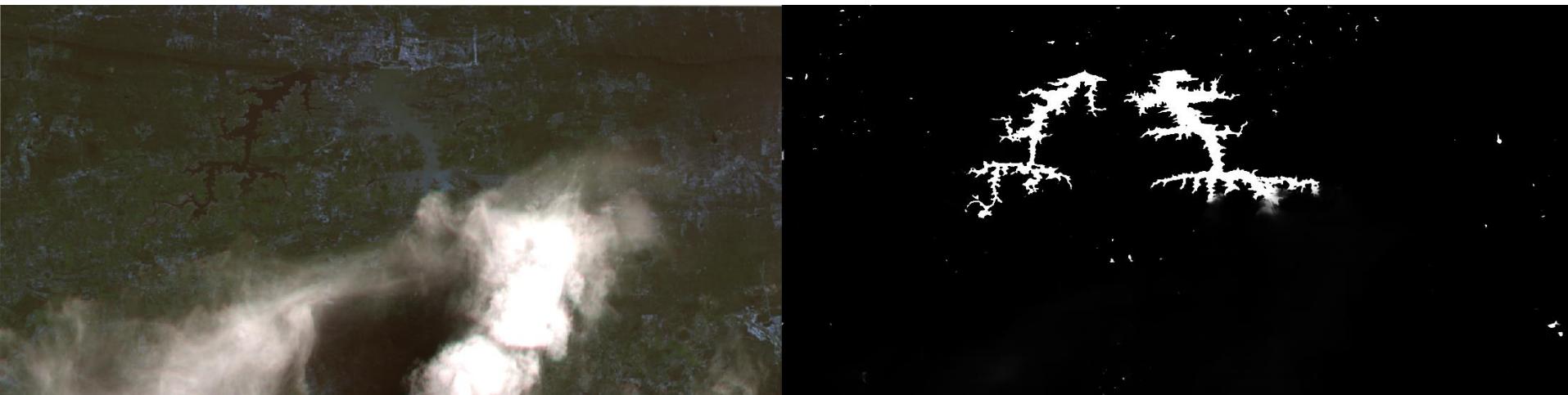
Segmentação de Água em SR

Parceria com o Departamento de Engenharia Civil e Ambiental



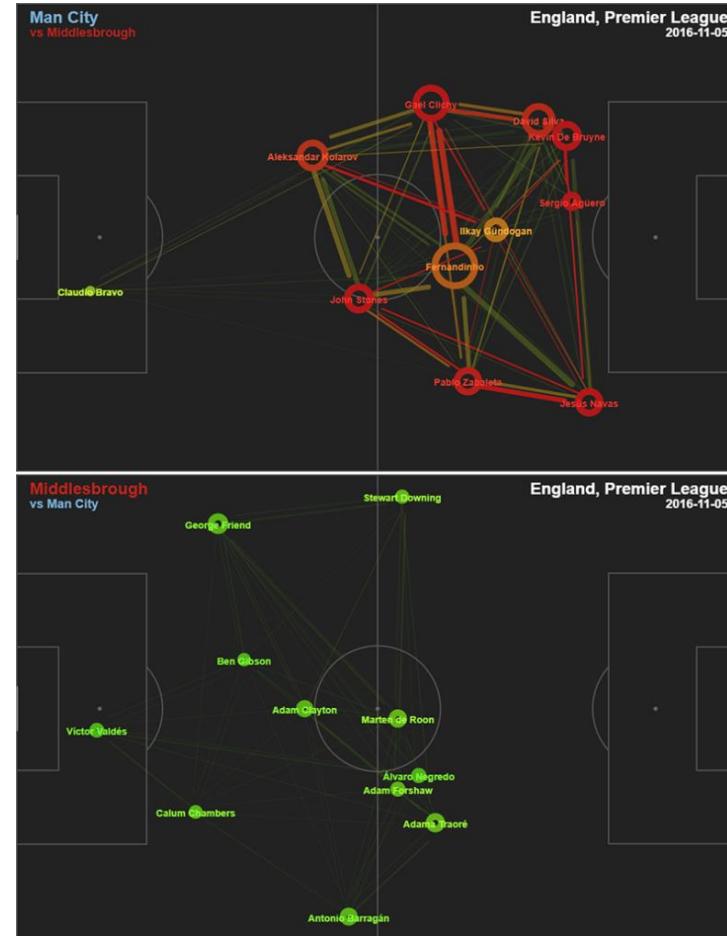
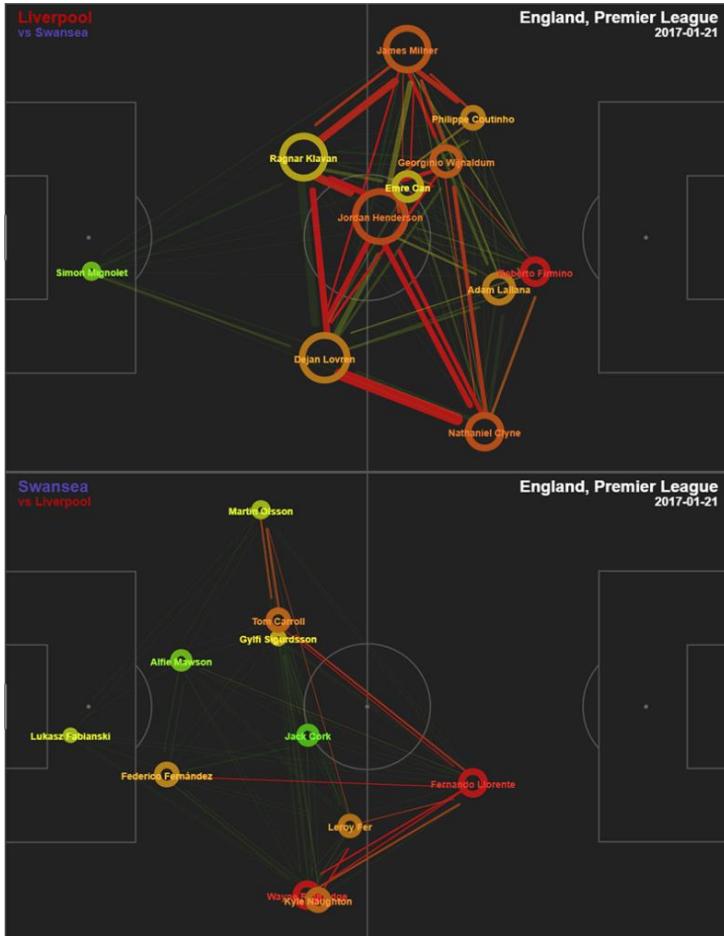
Segmentação de Água em SR

Parceria com o Departamento de Engenharia Civil e Ambiental



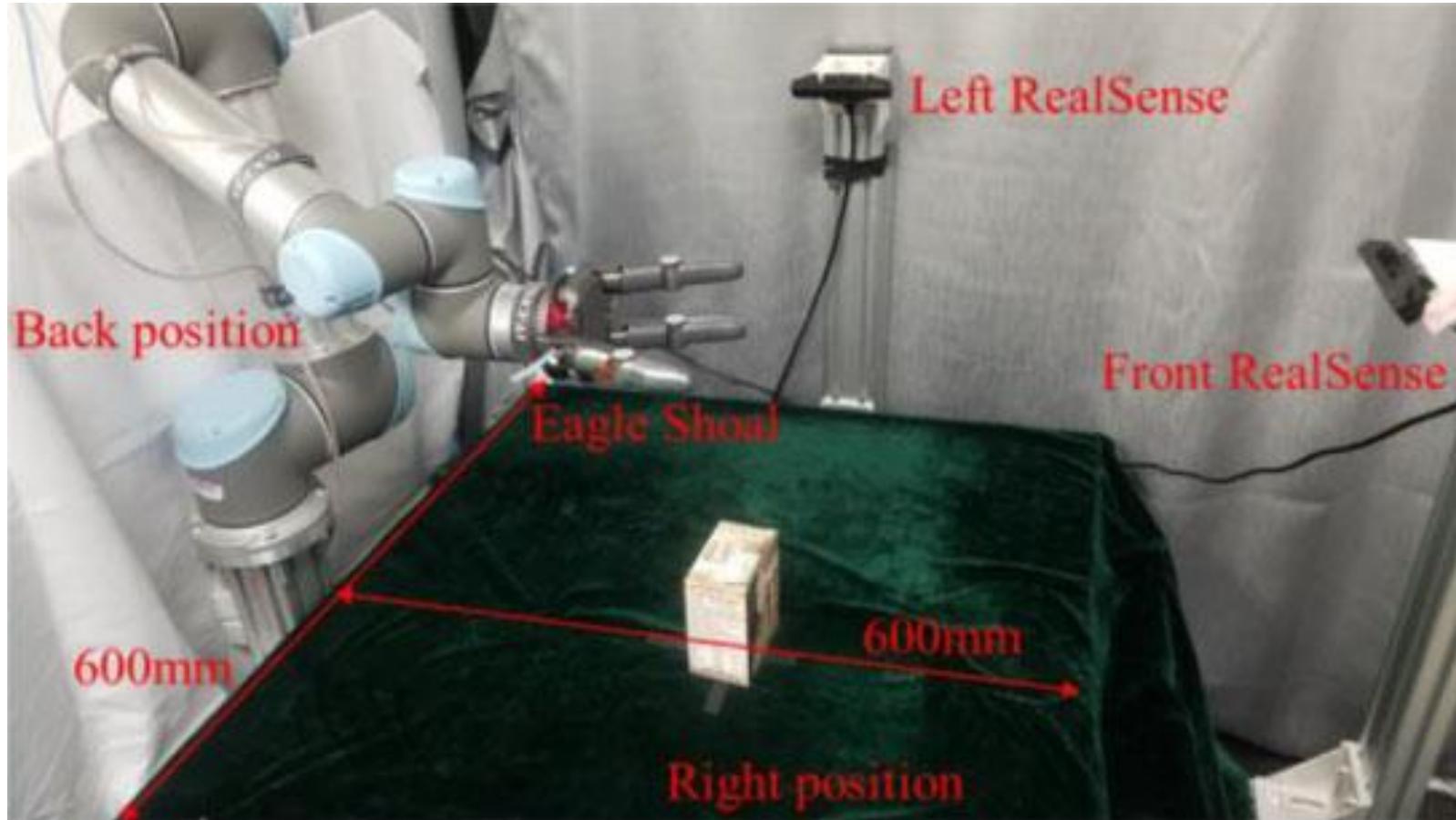
Sports Analytics

Parceria com o Department of Computer Science at Memorial University of Newfoundland - Canada

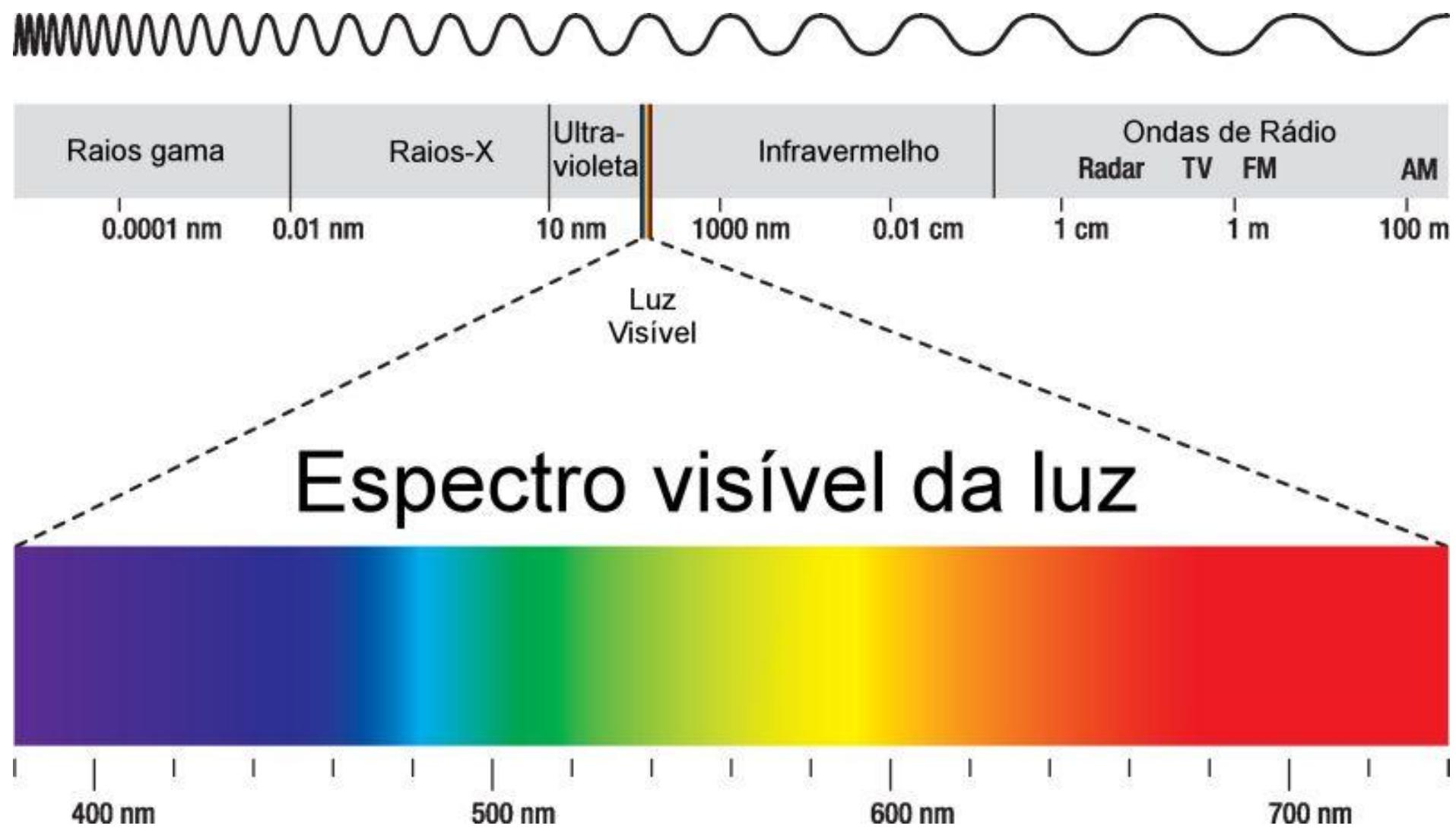


Manipulação robótica

Parceria com o Department of Computer Science at Memorial University of Newfoundland - Canada



Sistemas de cores



Radiação eletromagnética

frequência f , comprimento de onda λ , intensidade A

A horizontal color bar representing the visible spectrum of light. It transitions from violet on the left to red on the right, passing through blue, cyan, green, yellow, and orange. The colors are represented by vertical bands of light.

Violeta

azul

ciano

verde

amarelo

laranja

vermelho

Faixa visível do espectro eletromagnético

$$380 \text{ nm} < \lambda < 780 \text{ nm}$$

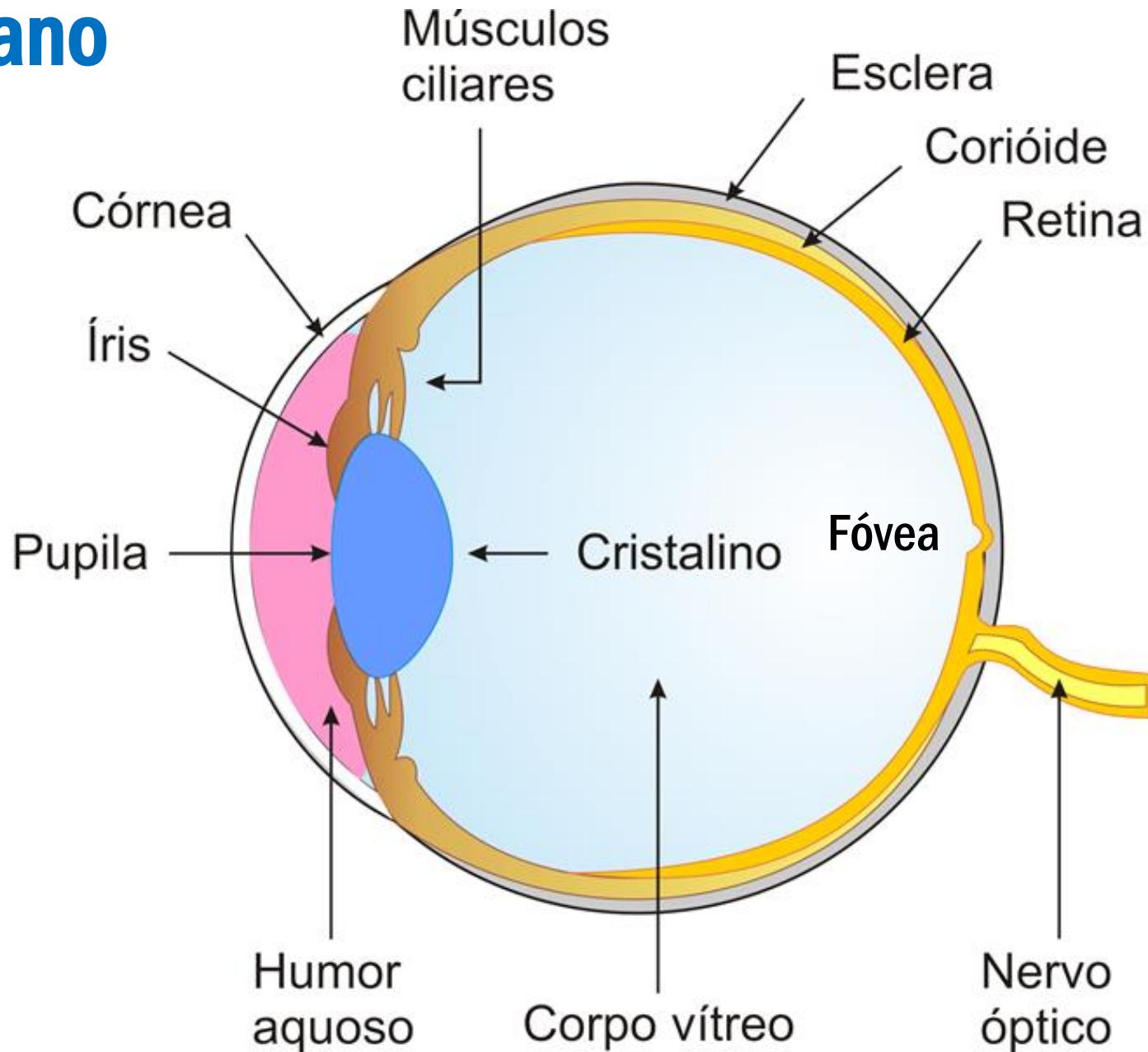
Nessa faixa, o sistema visual humano (SVH) percebe comprimentos de onda diferentes como cores diferentes

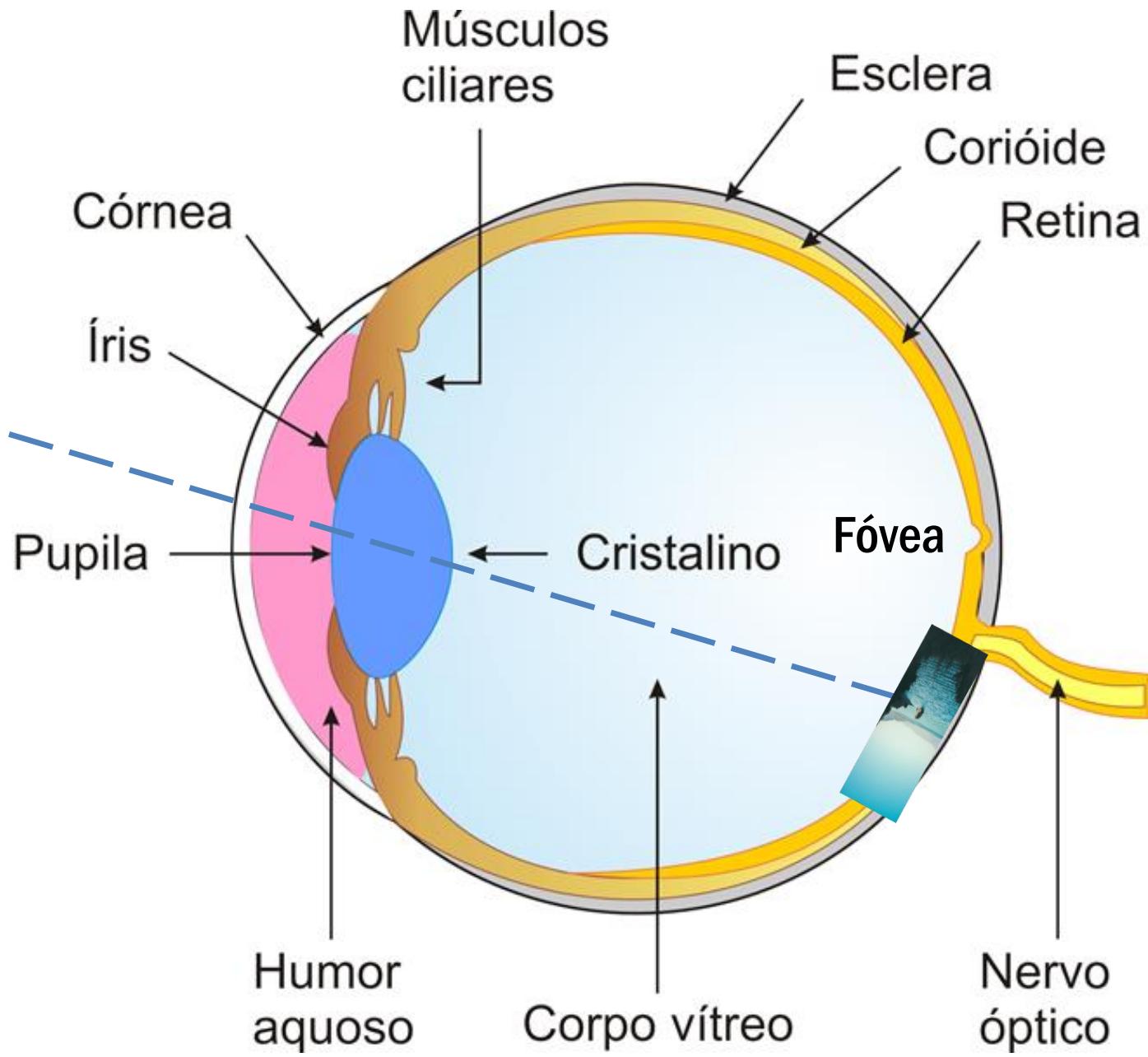


Radiação monocromática
radiação em um único comprimento de onda

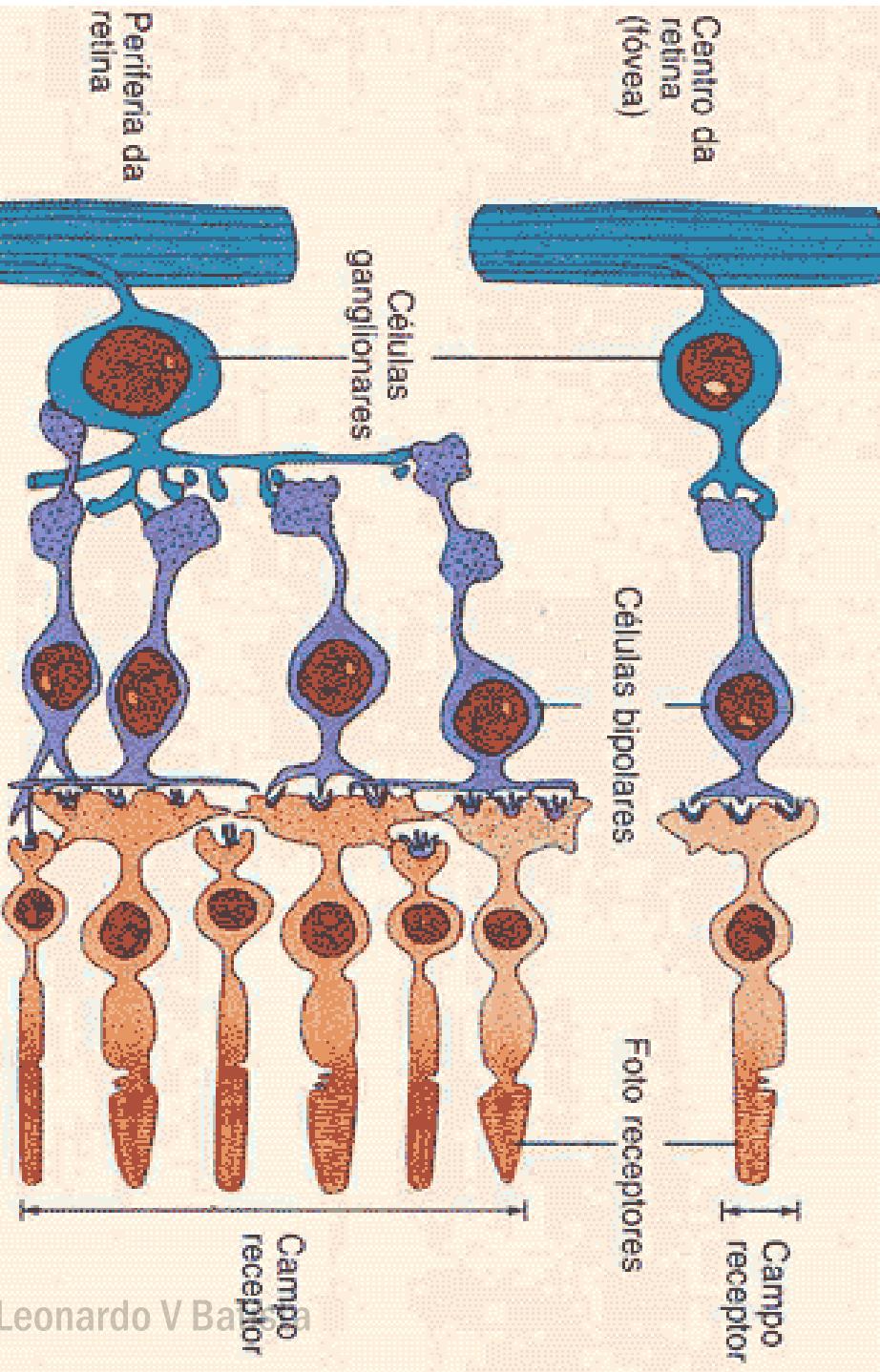
Cor espectral pura
radiação monocromática na faixa visível

O olho humano





Na retina, cones e bastonetes
convertem energia luminosa em impulsos elétricos que são transmitidos ao cérebro por neurônios



Bastonetes

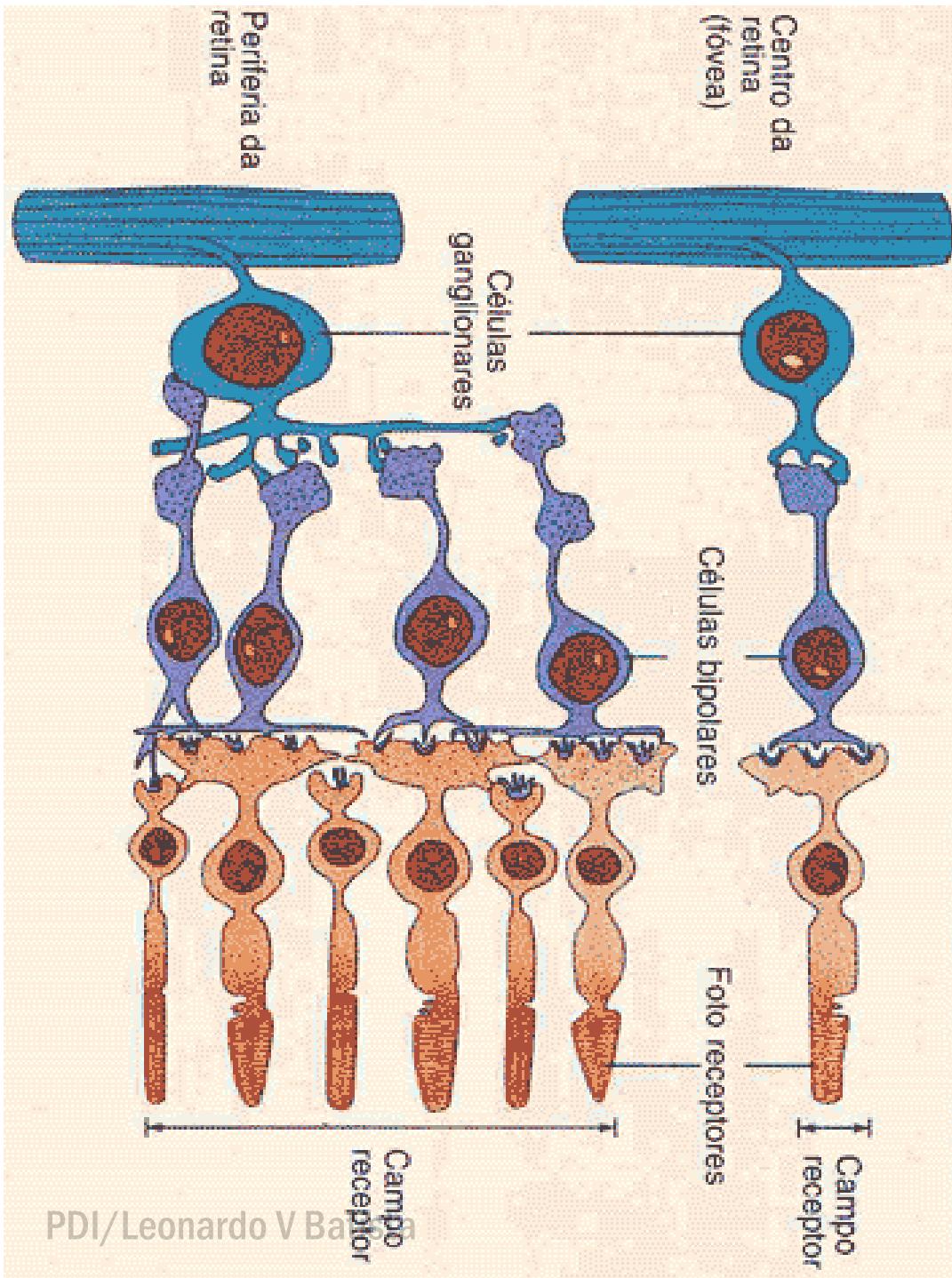
**75 a 150 milhões/olho,
sobre toda a retina**

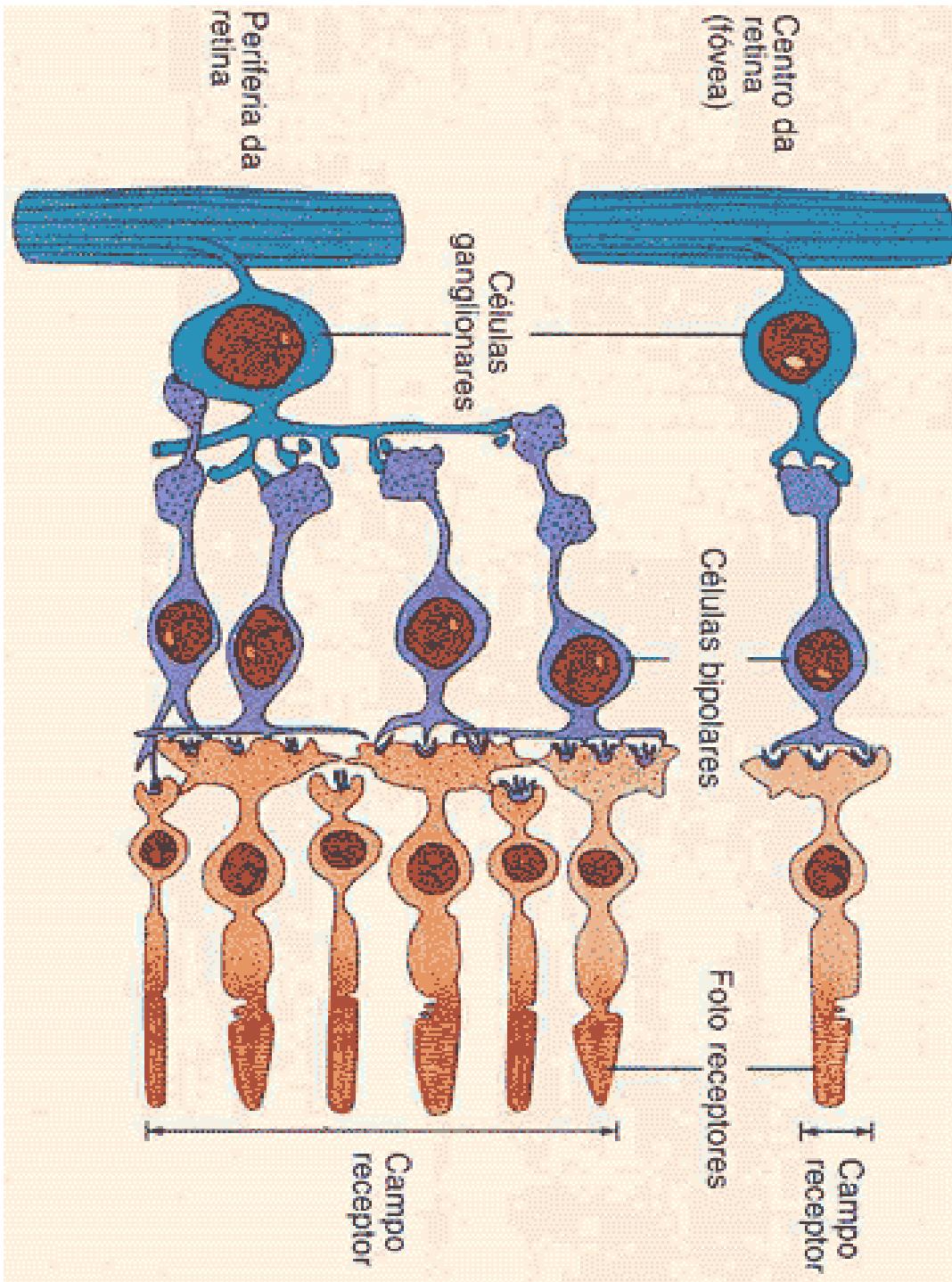
Insensíveis às cores

**Baixa resolução,
conectados em grupos aos
terminais nervosos**

**Sensíveis a radiação de
baixa intensidade**

Visão escotópica: geral e de
baixa luminosidade -
objetos acinzentados em
baixa luminosidade





Cones

6 a 7 milhões/olho,
concentrados na fóvea

Sensíveis às cores

Alta resolução, 1 cone por
terminal nervoso

Pouco sensíveis a
radiação de baixa
intensidade

Visão fotópica: específica,
de alta luminosidade –
direcionamos os olhos
para que a imagem do
objeto de interesse recaia
sobre a fóvea



Teoria Tricromática

T. Young e H. von Helmholtz, século 19:
3 tipos de receptores de cores ou cones

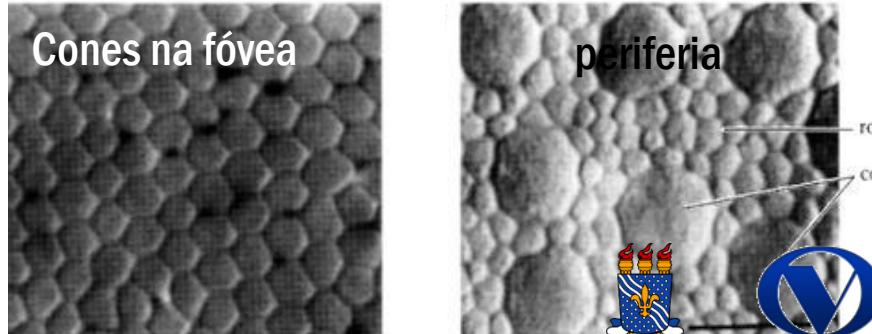
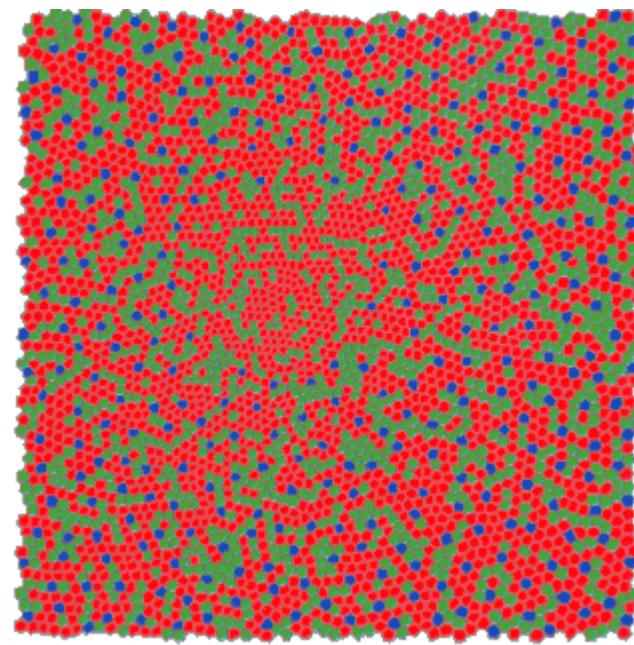
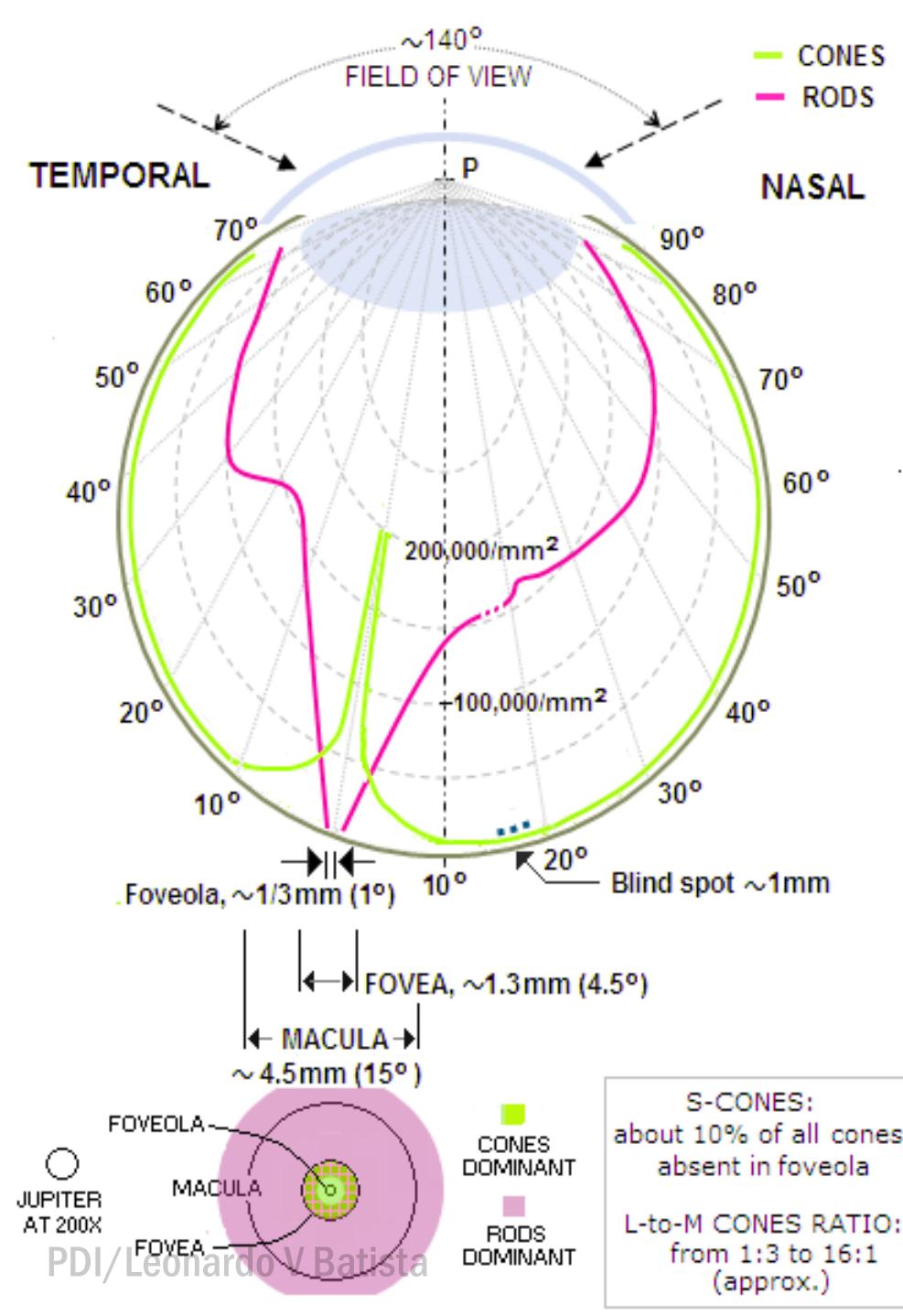
L-cones: sensíveis a comprimentos de onda longos – “sensíveis ao vermelho” (R)

M-cones: sensíveis a comprimentos de onda médios – “sensíveis ao verde” (G)

S-cones: sensíveis a comprimentos de onda curtos (short) – “sensíveis ao azul” (B)

Cores representadas como soma de 3 cores primárias
R, G e B

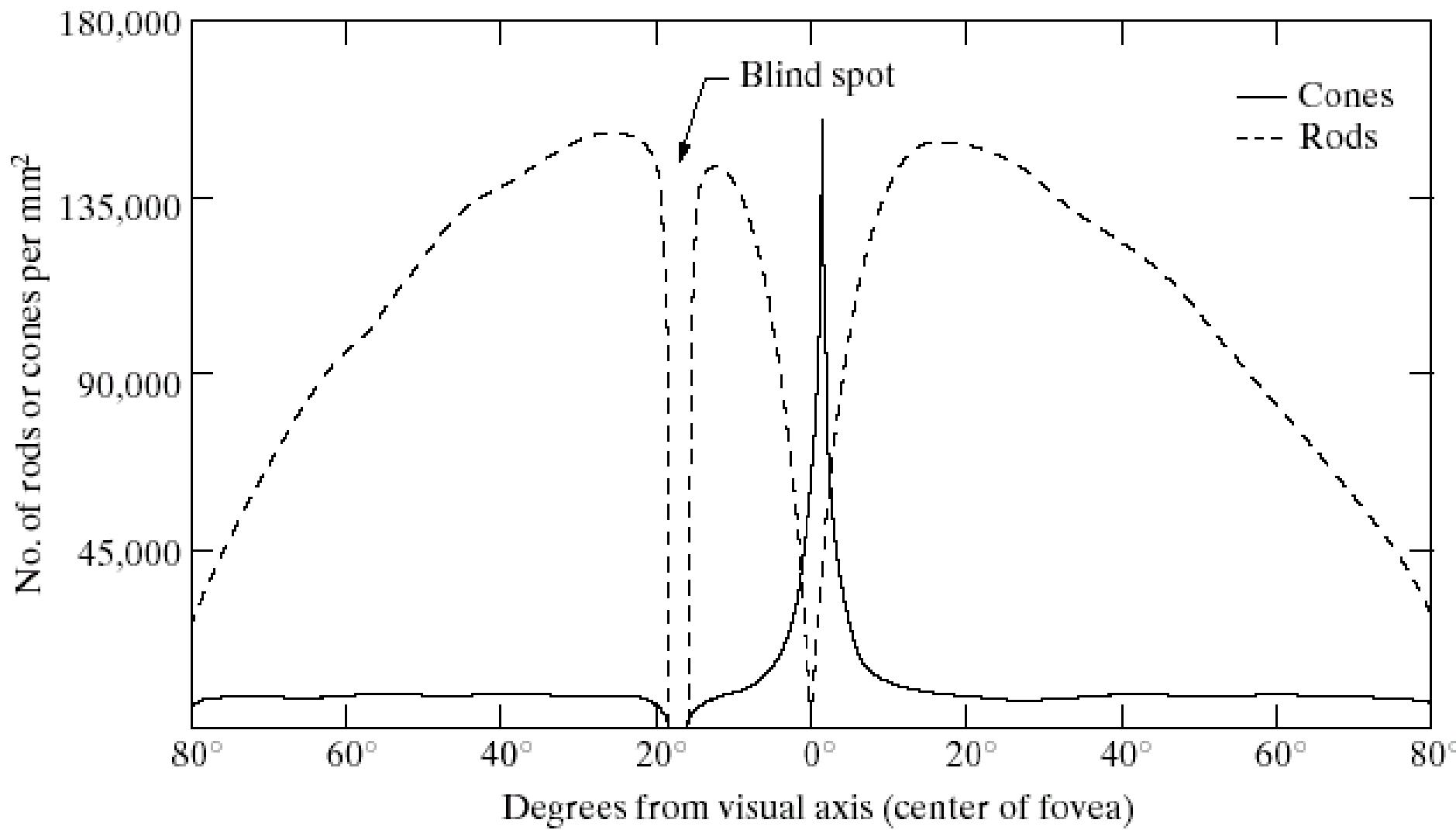
Distribuição de fotorreceptores retiniais



S-CONES:
about 10% of all cones,
absent in foveola

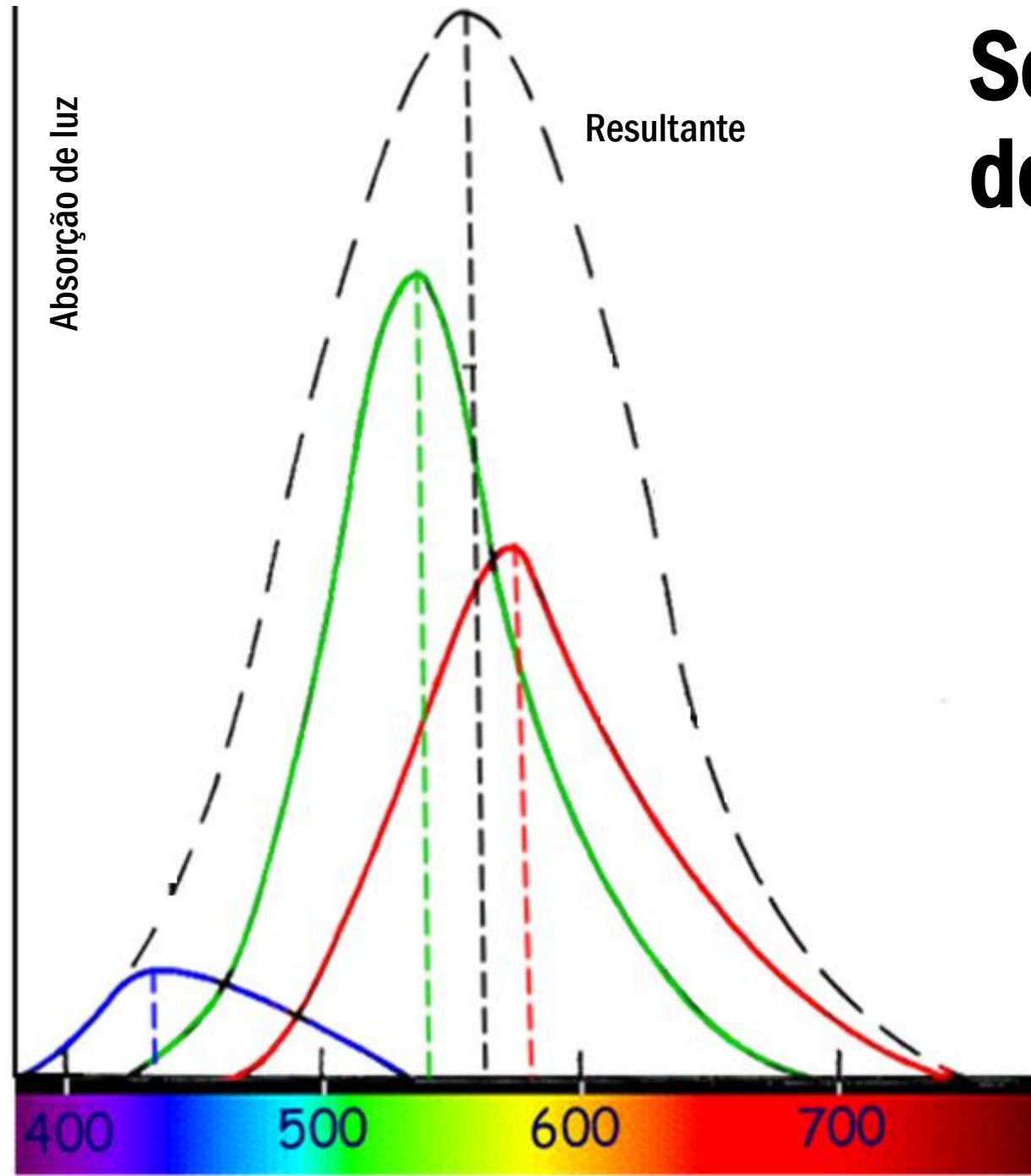
L-to-M CONES RATIO:
from 1:3 to 16:1
(approx.)



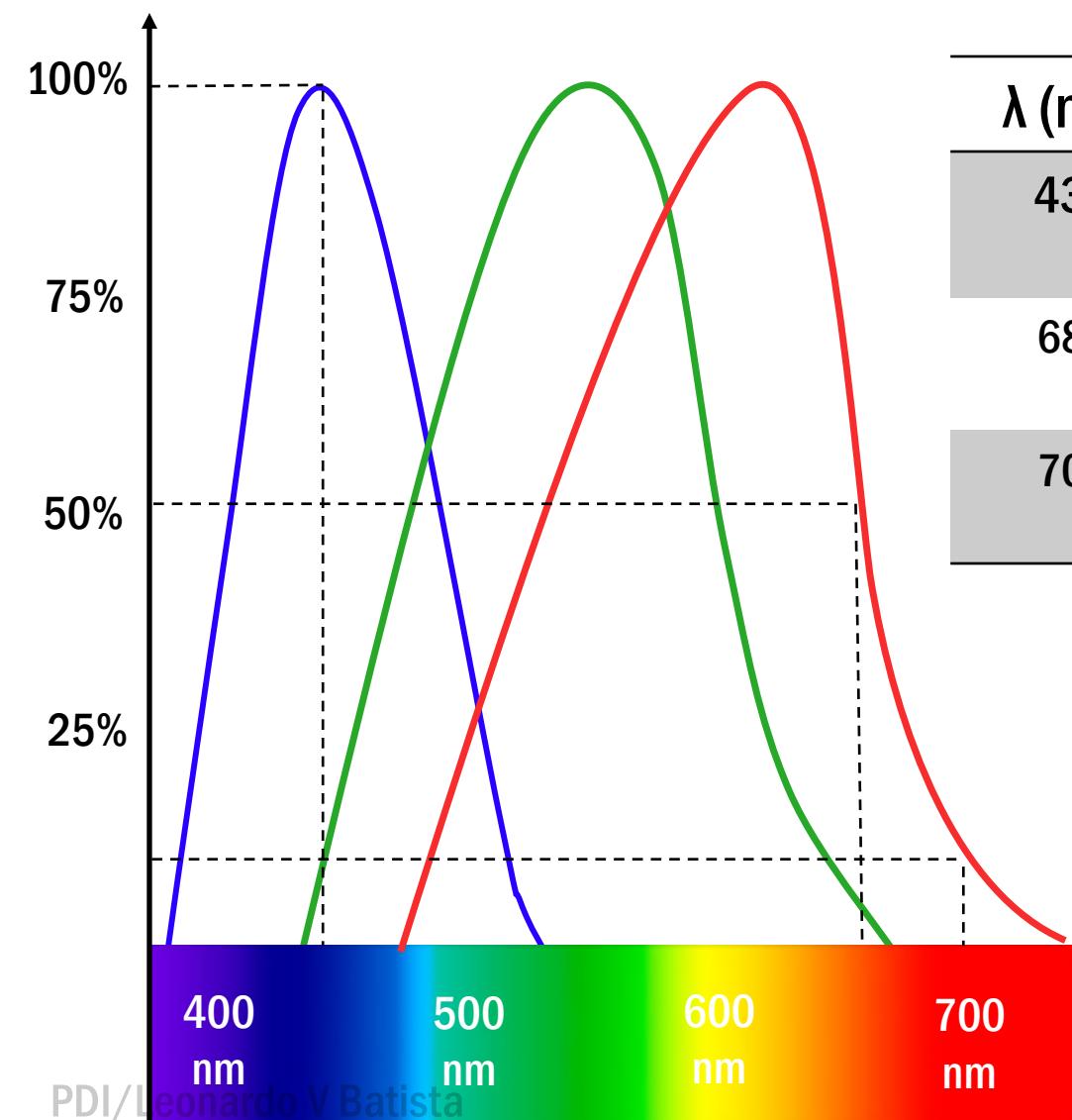


Distribuição de fotorreceptores retinais

Sensibilidade dos Cones



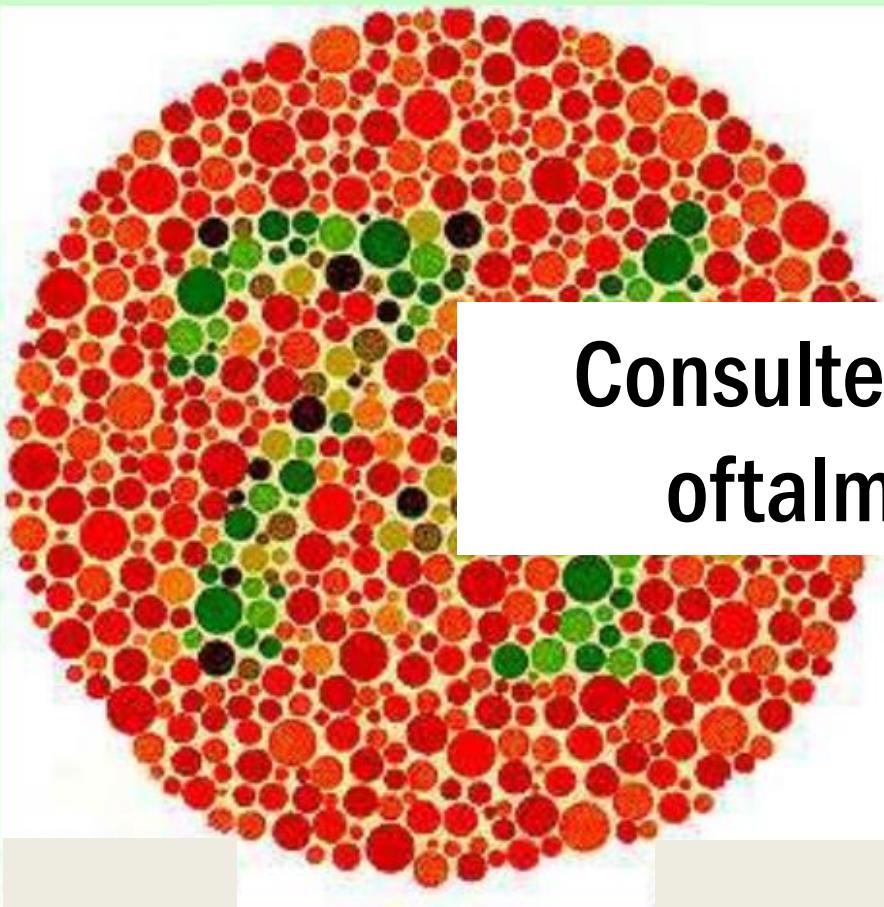
Sensibilidade normalizada

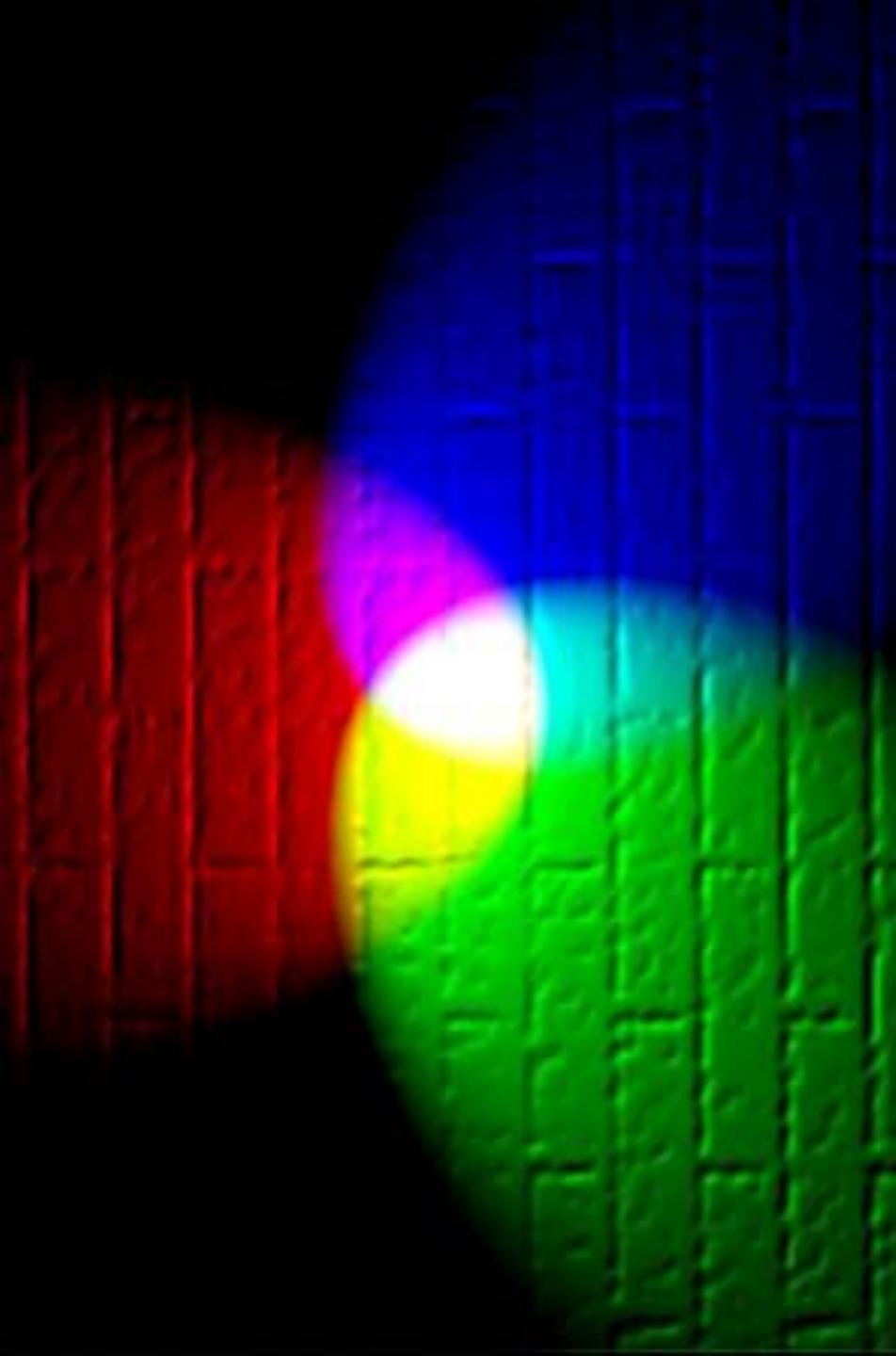


λ (nm)	R,G,B	Interpretação
435	0,9,100	Azul de brilho intenso
680	50,4,0	Vermelho de brilho médio
700	9,0,0	Vermelho de brilho baixo

Testes de Daltonismo

Consulte sempre seu
oftalmologista!





Para o SVH, uma cor é uma **soma** de radiações monocromáticas R, G e B, que são as **cores primárias** da luz. Diz-se que o sistema de cores **RGB** é aditivo.



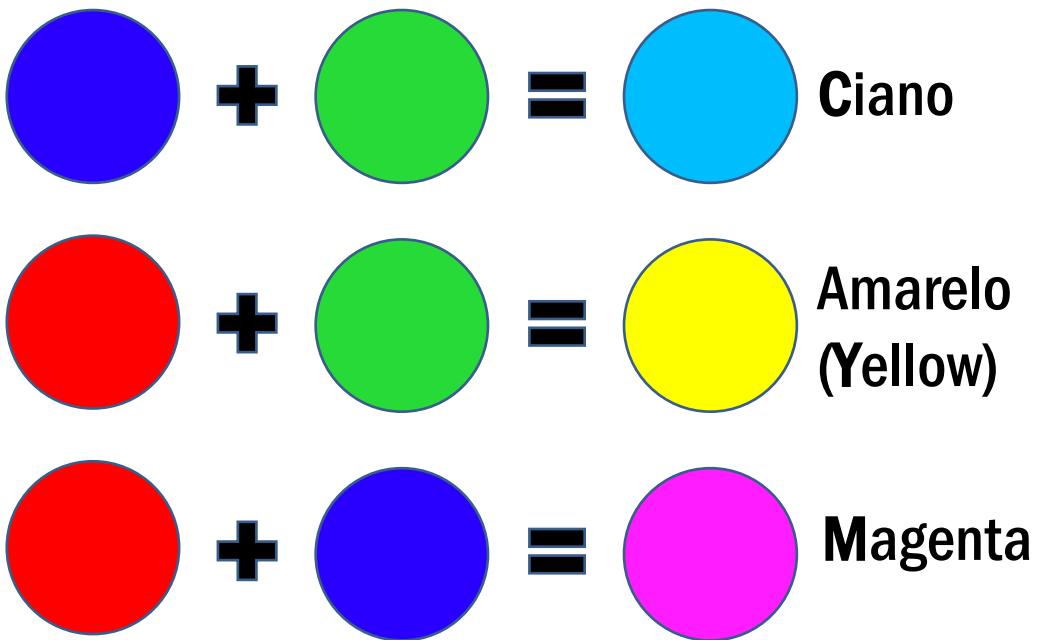
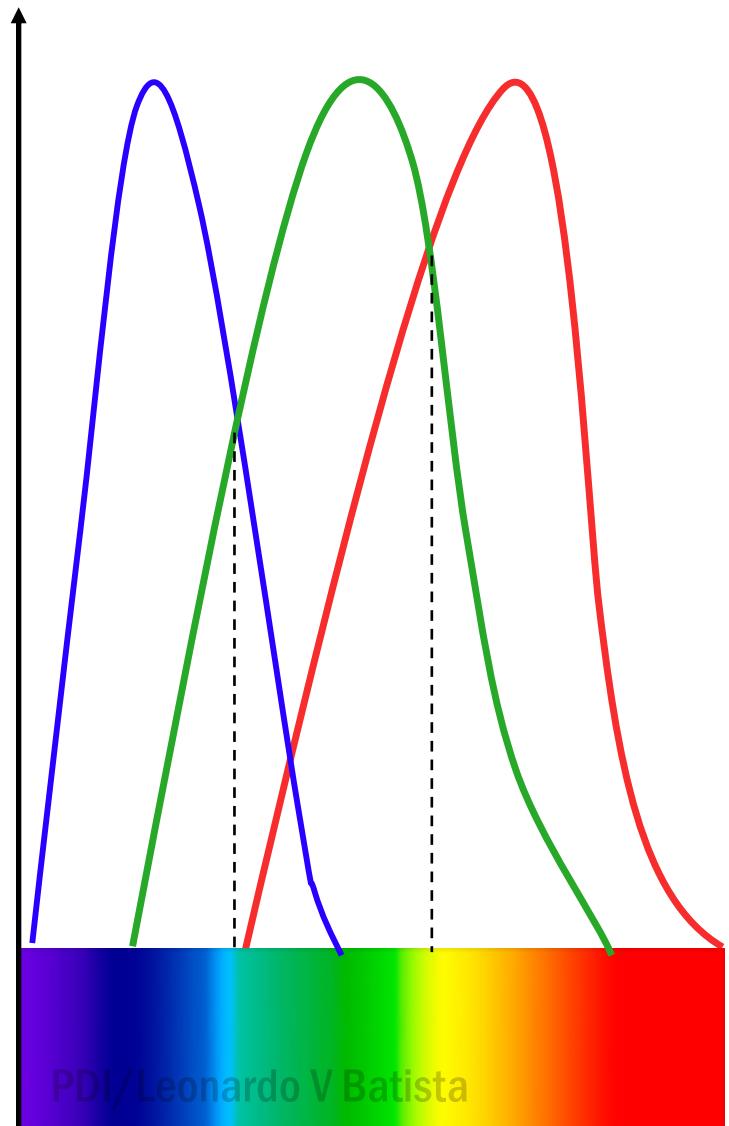
Padronização da Comissão Internacional de Iluminação

**700
nm**

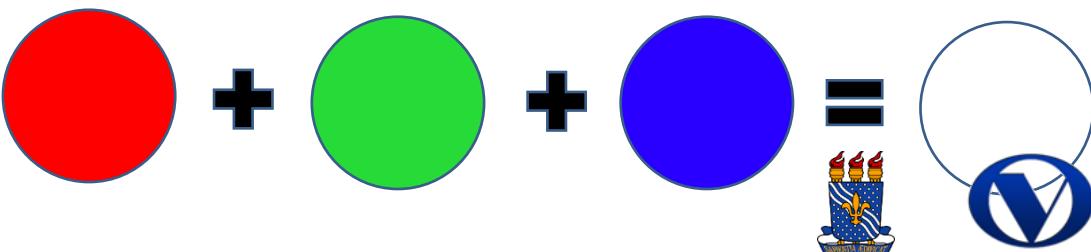
**546,1
nm**

**435,8
nm**

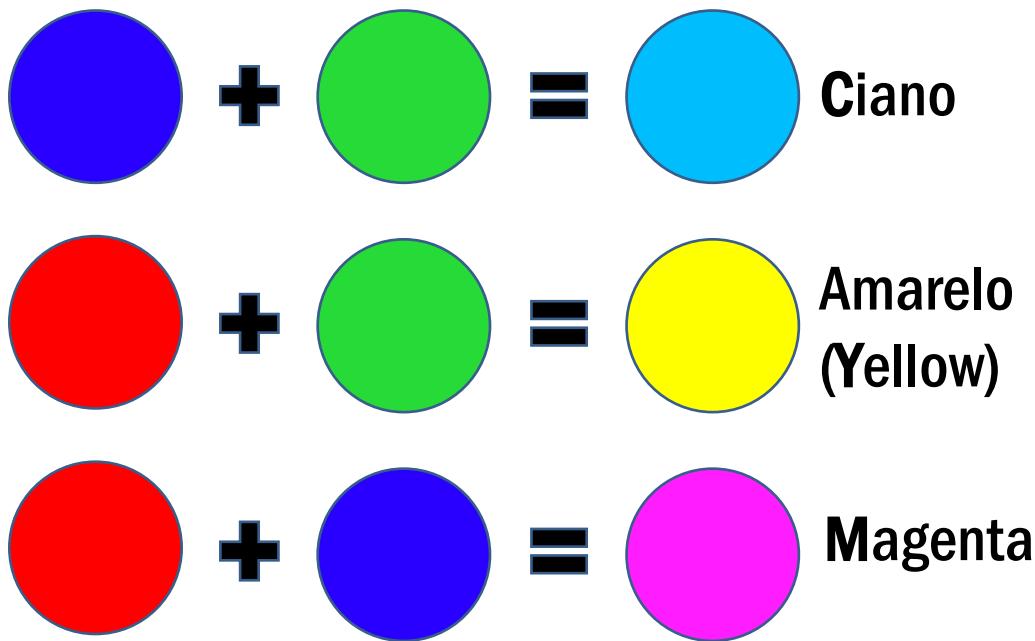
Combinação duas a duas das primárias da luz



Observe que magenta não é cor
espectral!

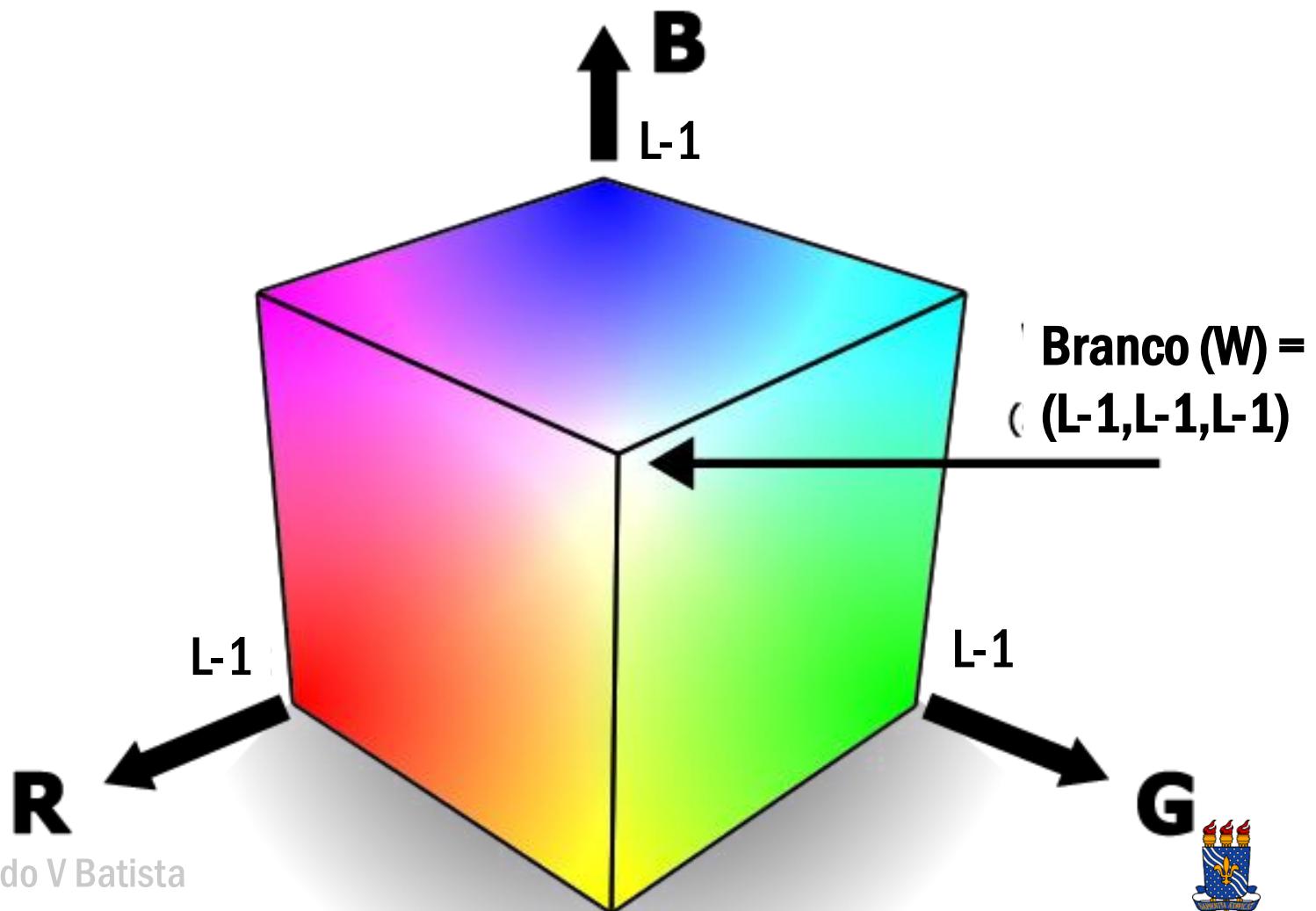


Combinação duas a duas das primárias da luz



**CMY: Cores
Secundárias
da luz**

Cor em RGB é um vetor em um espaço 3D



(L-1,L-1,L-1)

RGB = (i, i, i): reta acromática

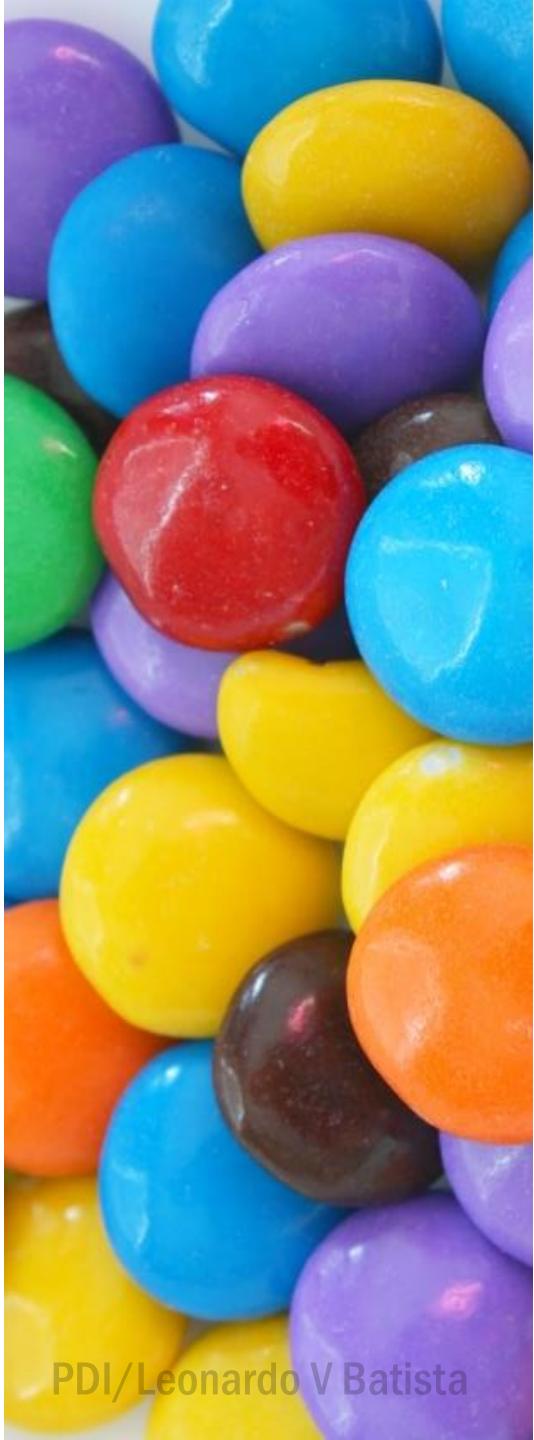
(i,i,i) é um tom ou nível de cinza

Preto (K): (0, 0, 0), ausência de luz

Branco: (L-1, L-1, L-1), L-1 representa a intensidade máxima de R, G e B

Comumente, L=256

Monitores, televisores, projetores multimídia, câmeras, scanners etc utilizam o sistema RGB



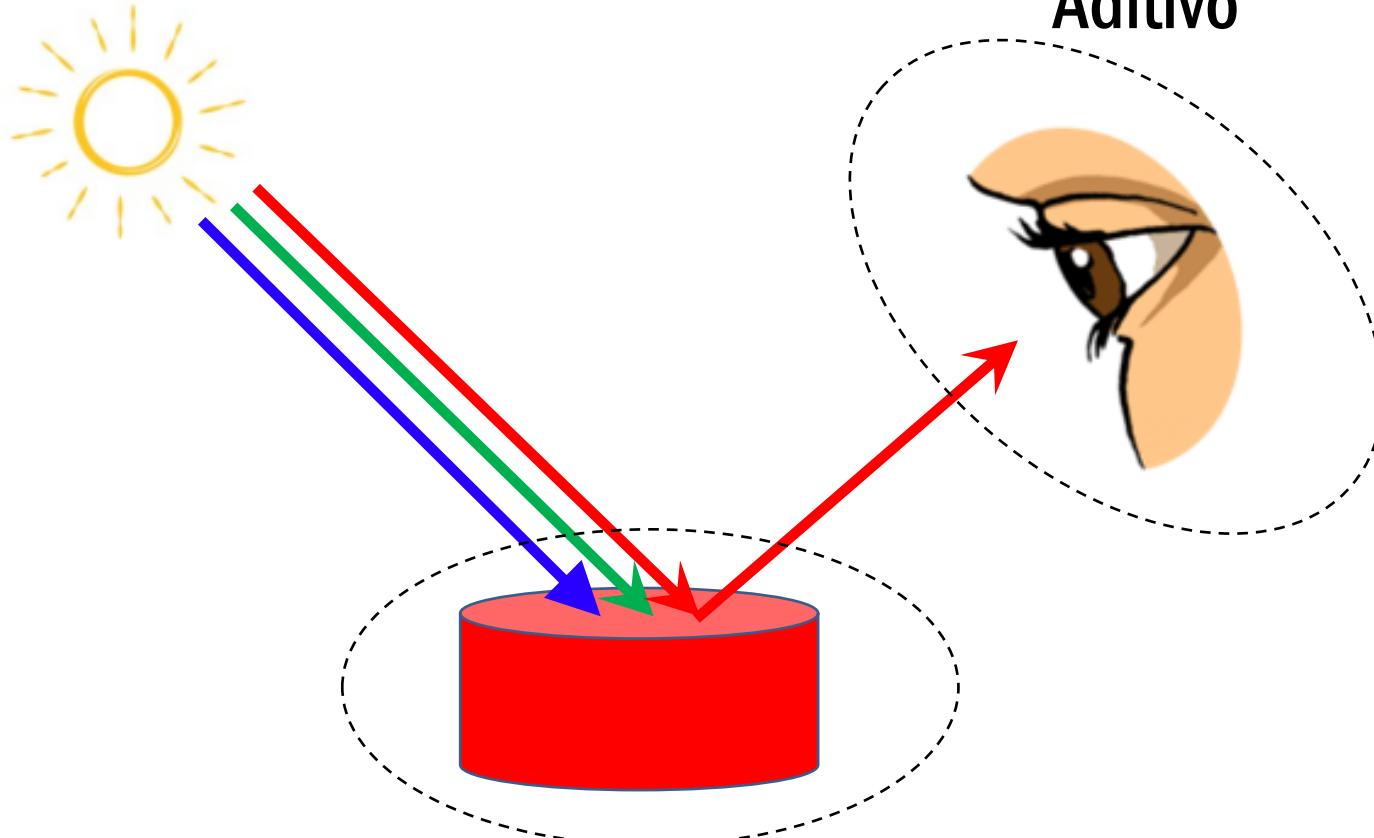
A **COR** de objetos que não emitem radiação depende de **pigmentos** que absorvem radiação em determinadas faixas de frequência e refletem outras

Absorção variável de R, G e B da radiação incidente:

Sistema subtrativo

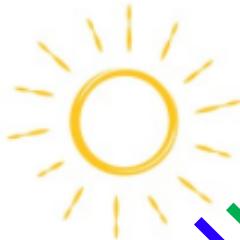
**Fonte de luz
branca**

**Sistema
Aditivo**

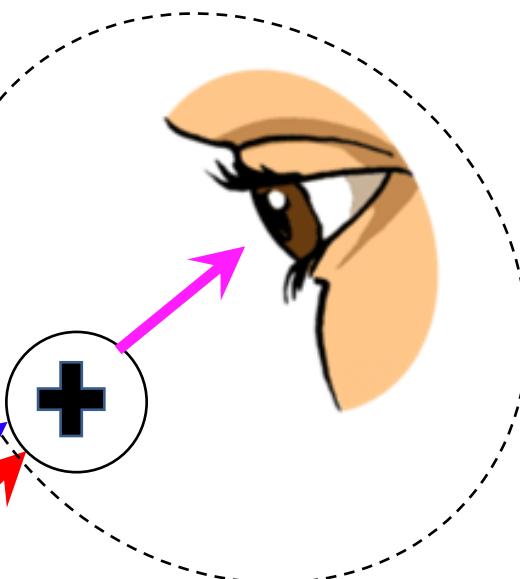


**Sistema
Subtrativo**

**Fonte de luz
branca**



**Sistema
Aditivo**



**Sistema
Subtrativo**

$$\text{White} - \text{Red} = \text{Blue} + \text{Green} = \text{Ciano}$$

$$\text{White} - \text{Green} = \text{Red} + \text{Blue} = \text{Magenta}$$

$$\text{White} - \text{Blue} = \text{Red} + \text{Green} = \text{Amarelo (Yellow)}$$

CMY são as cores primárias dos **pigmentos**: absorvem radiação em uma faixa de frequência (R, G ou B) e refletem as outras duas.

Sistema CMY

$$\text{White} - \text{Red} = \text{Ciano}$$

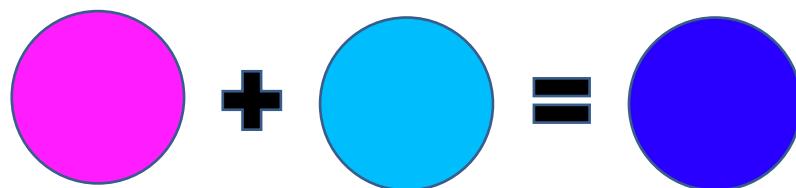
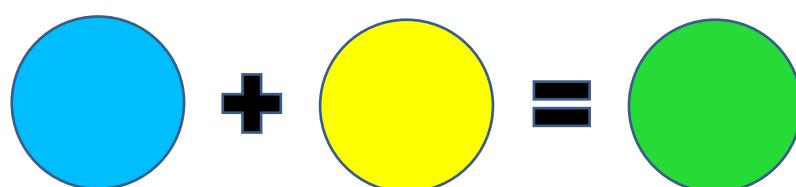
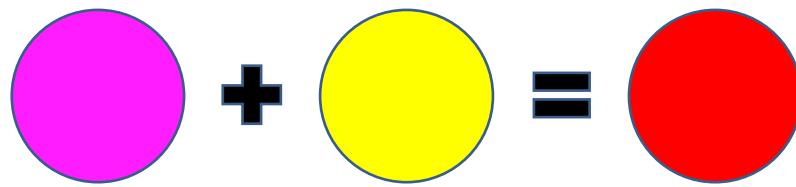
$$\text{White} - \text{Green} = \text{Magenta}$$

$$\text{White} - \text{Blue} = \text{Amarelo (Yellow)}$$

$$\text{White} - \text{Red} - \text{Green} - \text{Blue} = \text{Preto (Black)}$$

Combinação duas a duas das primárias dos pigmentos

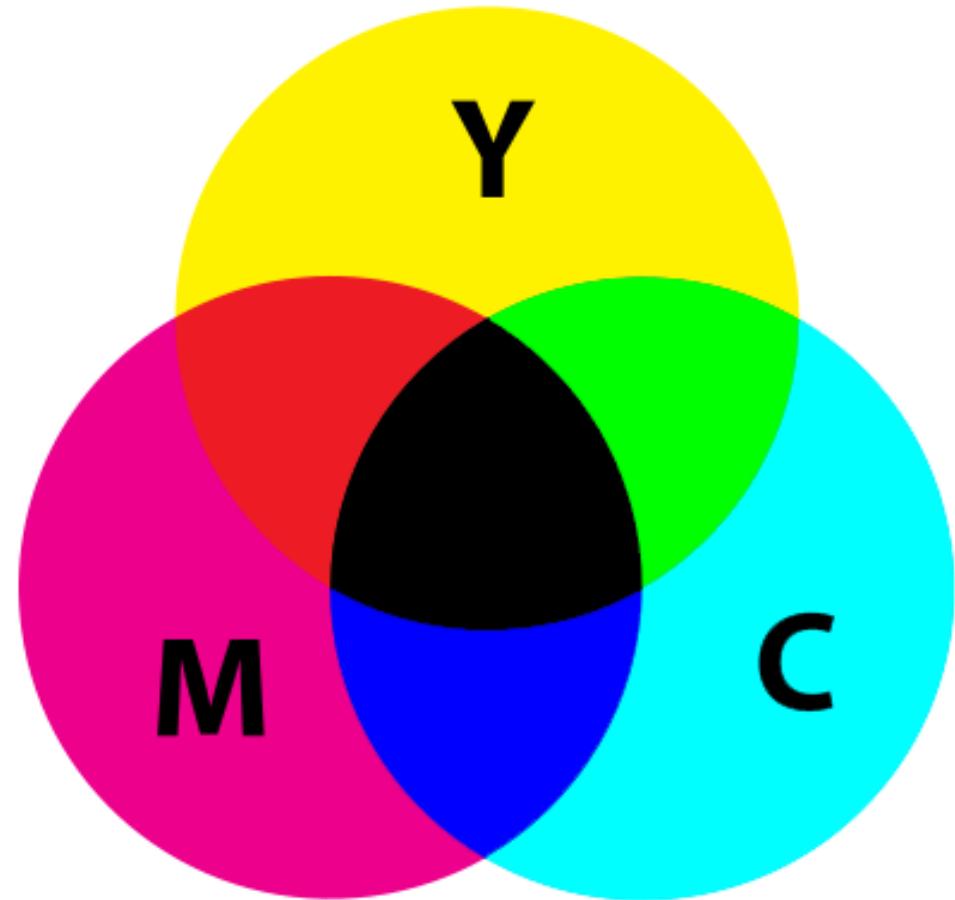
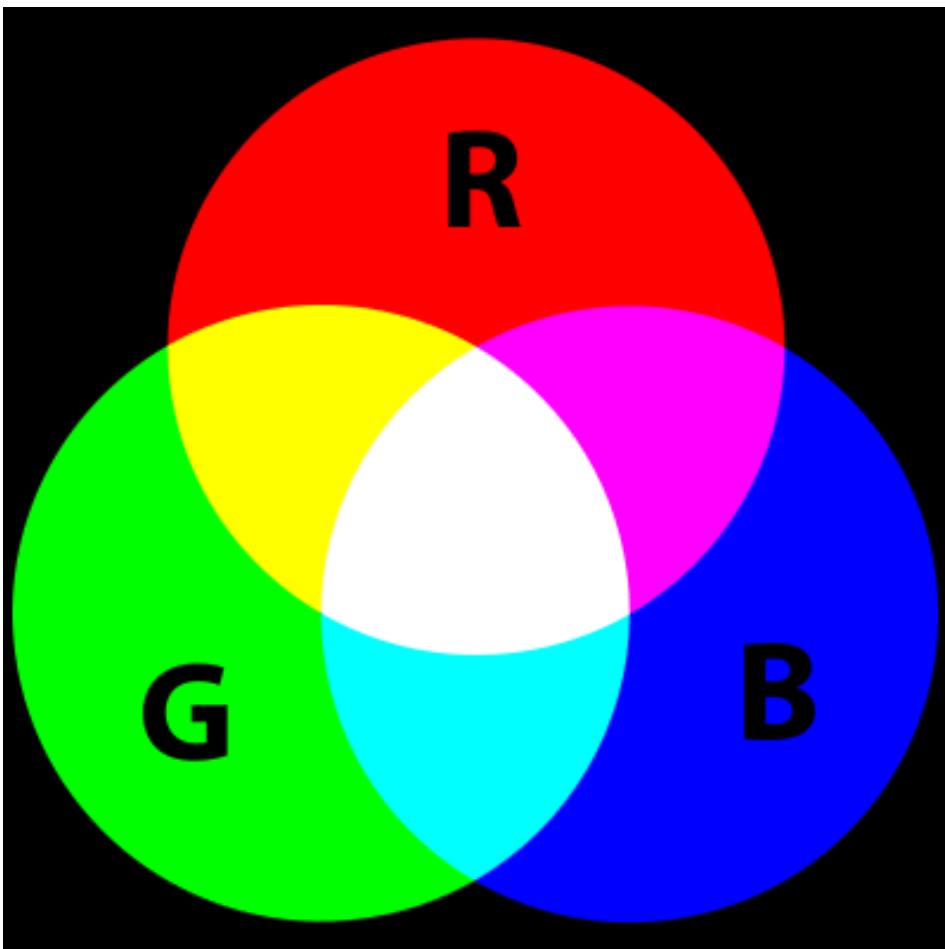
Aborve G Absorve B Reflete R



Cores Secundárias
dos pigmentos



Impressoras coloridas: **CMY ou CMYK**



RGB 8 bits/banda

(255,0,0)	(0,255,0)	(0,0,255)	(255,255,255)
(255,255,0)	(255,0,255)	(0,255,255)	(128,128,128)
(128,0,0)	(0, 128,0)	(0, 0, 128)	(0,0,0)
(255,128,64)	(255,32,32)	(255,128,128)	(255,230,230)





RGB



Y



-



Q

Espaço de cores YIQ

Utilizado em sistemas de transmissão de TV colorida

Y: luma (luminância, intensidade percebida, brilho); usada por TVs P&B

I: In-phase

Q: Quadrature

I e Q são crominâncias

Não serve para visualização direta



RGB para YIQ

$$Y = 0.299R + 0.587G + 0.114B$$

$$I = 0.596R - 0.274G - 0.322B$$

$$Q = 0.211R - 0.523G + 0.312B$$

YIQ para RGB

$$R = 1.000Y + 0.956I + 0.621Q$$

$$G = 1.000Y - 0.272I - 0.647Q$$

$$B = 1.000Y - 1.106I + 1.703Q$$

Exemplos

RGB

(25, 25, 25)

(200, 200, 200)

(100, 0, 0)

(0, 100, 0)

(100, 50, 25)

(200, 100, 50)

YIQ

(25, 0, 0)

(200, 0, 0)

(29.9, 59.6, 21.1)

(58.7, -27.4, -52.3)

(62.1, 37.85, 2.75)

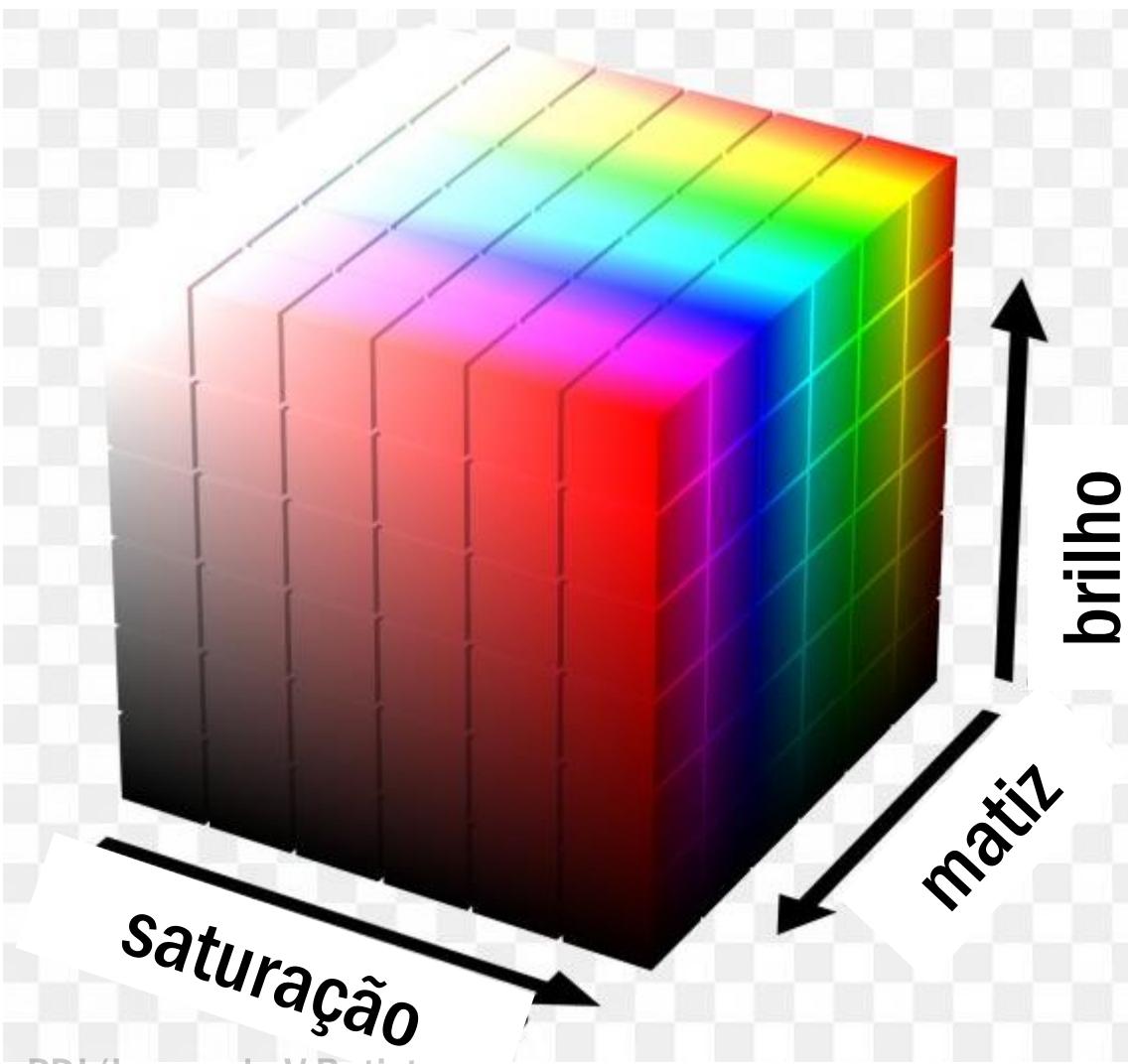
(124.2, 75.7, 5.5)

$$Y = 0.299R + 0.587G + 0.114B$$

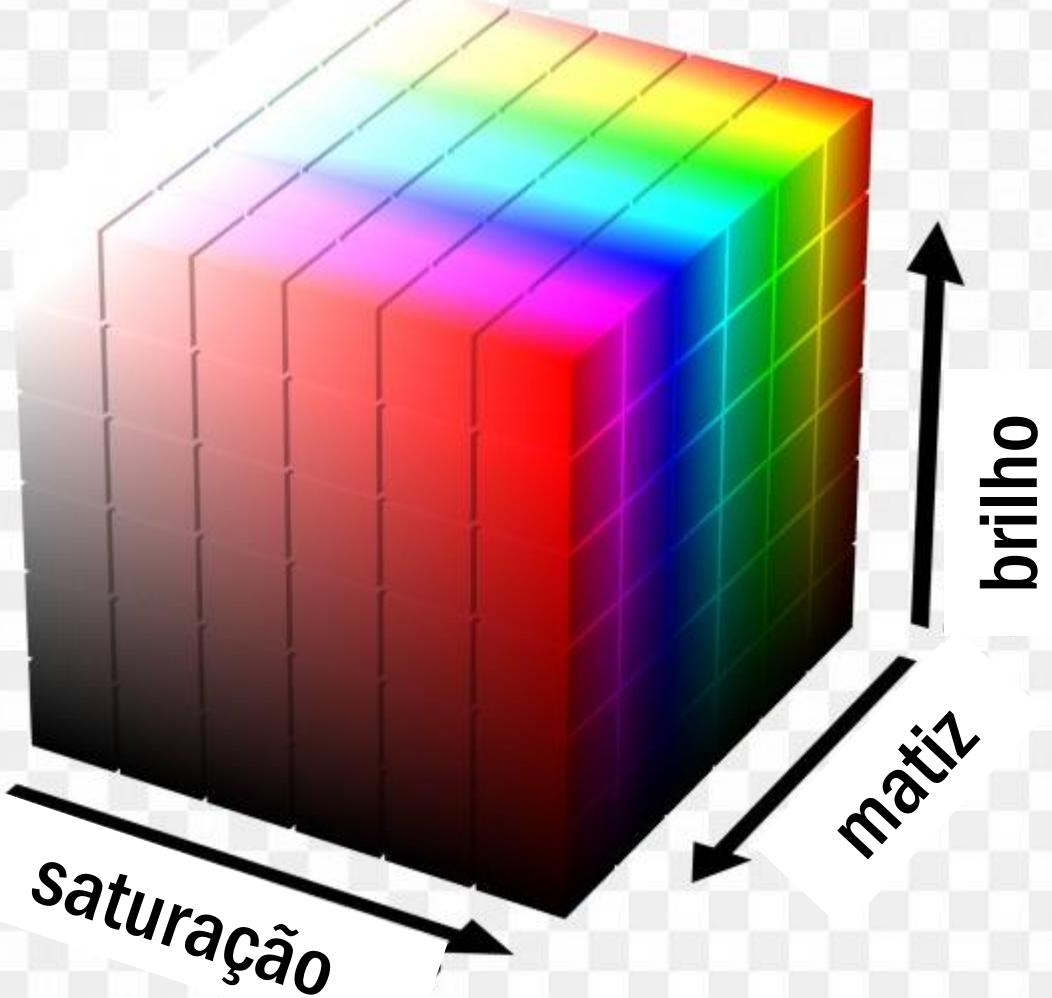
$$I = 0.596R - 0.274G - 0.322B$$

$$Q = 0.211R - 0.523G + 0.312B$$

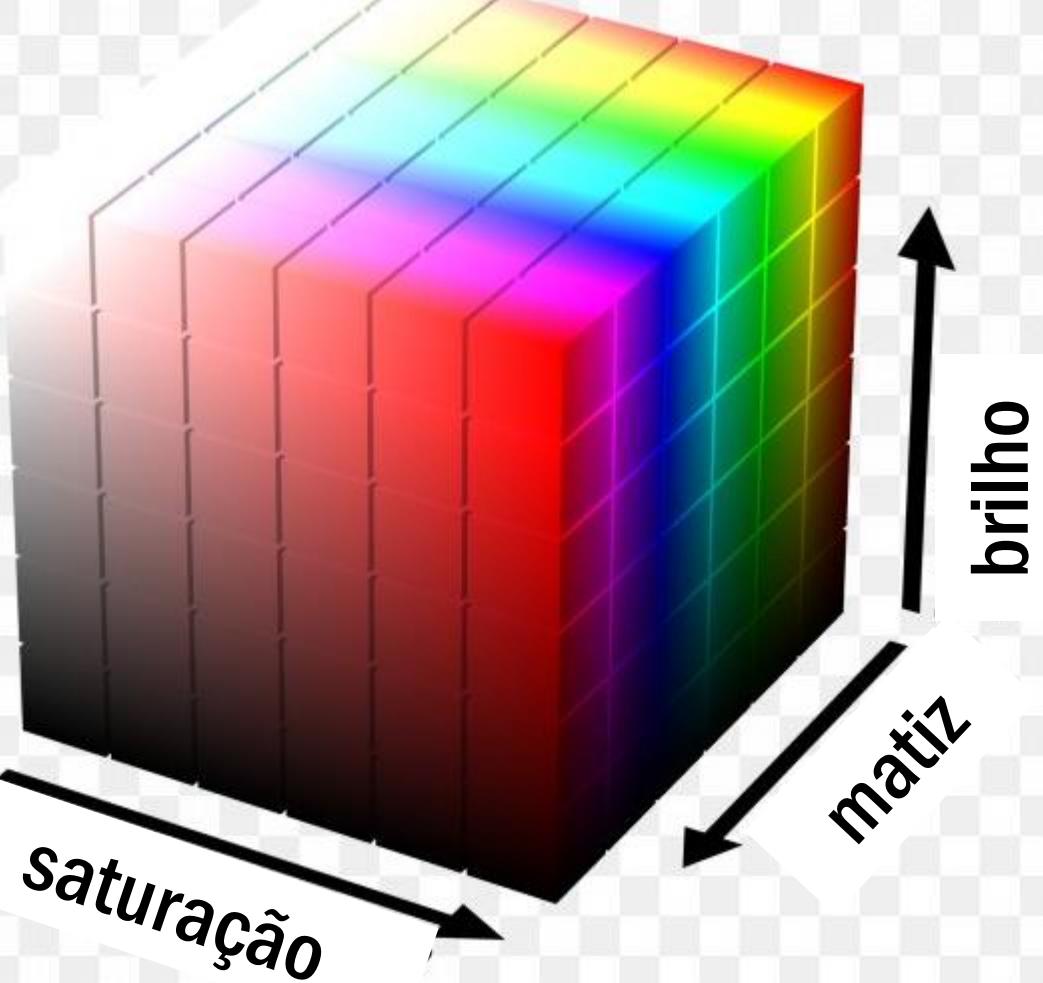
Espaços de cores perceptuais



Baseados nos conceitos
de
Matiz (Hue)
Saturação e
Intensidade (ou
brilho, ou valor, ou
luminância)



Matiz (H):
Determinada pelo
comprimento de onda
dominante;
denominação usual
das cores



Saturação

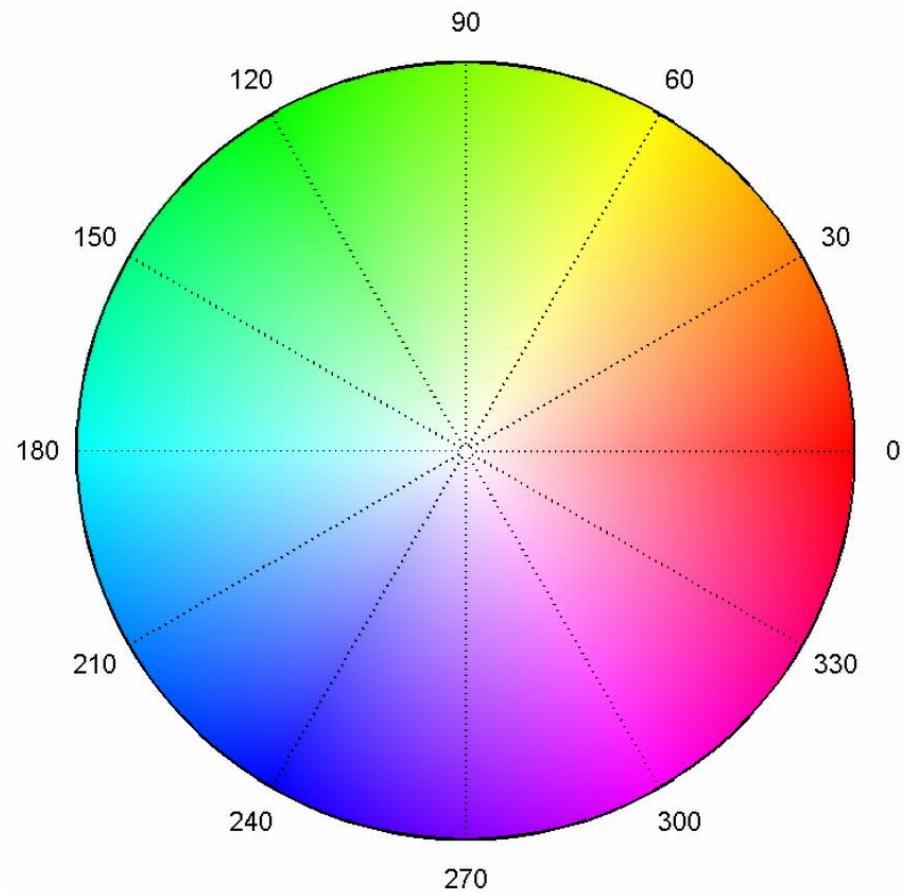
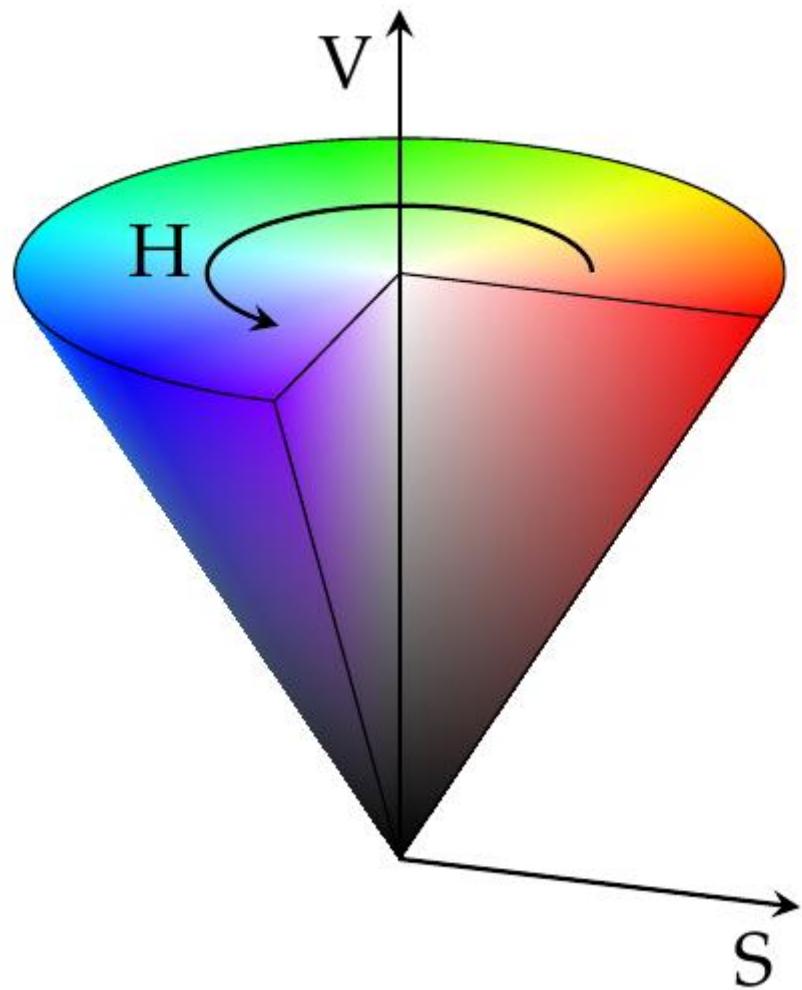
Pureza da cor quanto à adição de “branco” (cinza)

$S = 0$: cor completamente insaturada (nível de cinza)

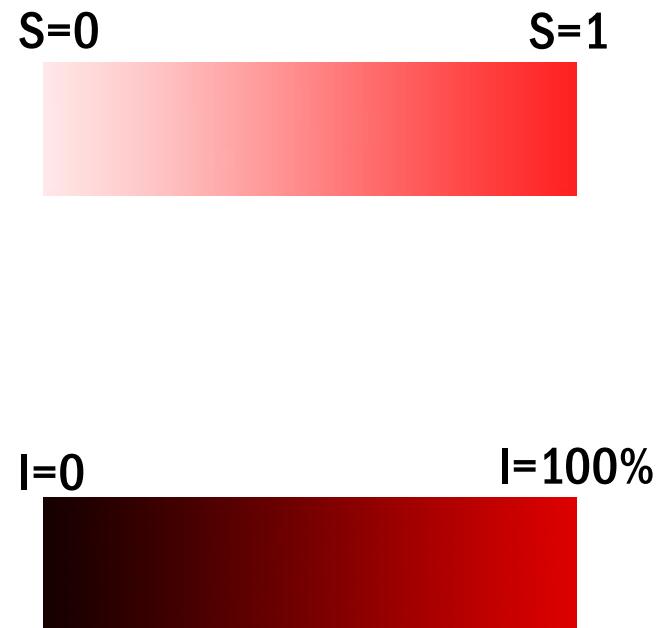
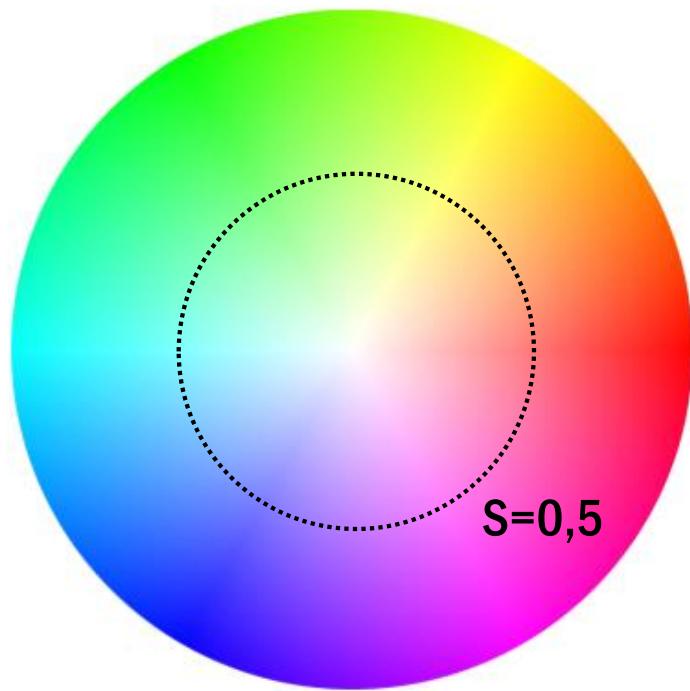
$S = 1$: cor completamente saturada



Sistema HSV



Sistemas HSI/HSL/HSV/HSB



Saturação $S_1 < 1?$

RGB
(250, 10, 250)



RGB
(240, 0, 240)



cinza, então $S_1 < 1$

RGB
(10, 10, 10)

RGB
(250, 100, 250)



RGB
(150, 0, 150)

RGB
(100, 100, 100)

Saturação $S_2 < S_1?$

+cinza, então $S_2 < S_1$

Conversão RGB-HSB-Lab

(algoritmo)

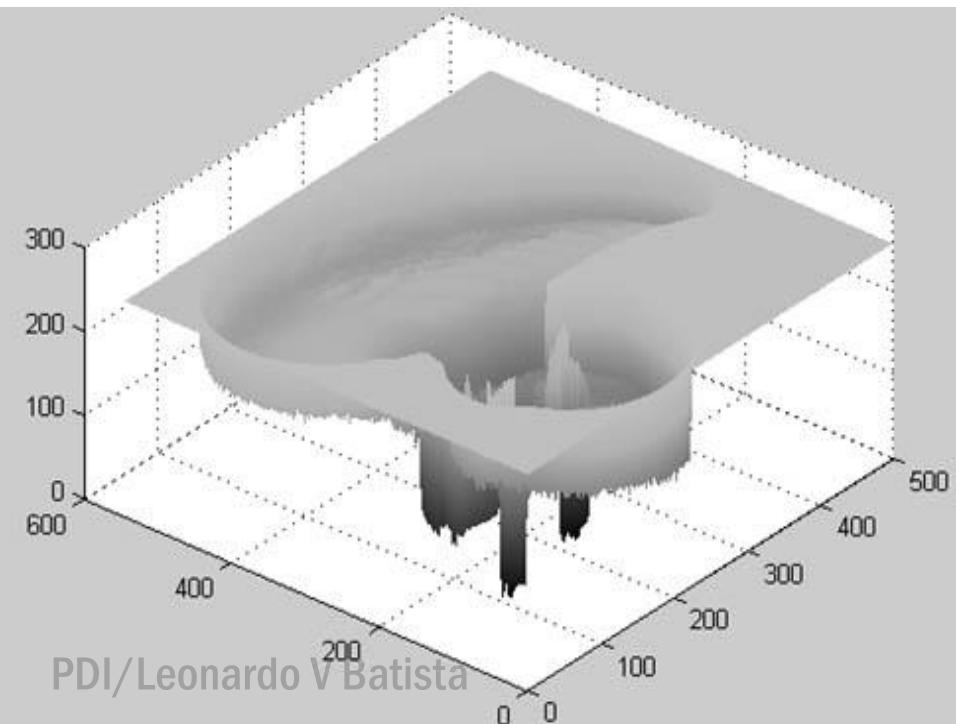
RGB	HSB	LAB
(100, 100, 100)	(0°, 0%, 39%)	(42, 0, 0)
(100, 100, 0)	(60°, 100%, 39%)	(41, -8, 47)
(100, 0, 100)	(300°, 100%, 39%)	(22, 47, -30)
(255, 255, 255)	(0°, 0%, 100%)	(100, 0, 0)
(255, 255, 0)	(60°, 100%, 100%)	(98, -16, 93)
(0, 255, 0)	(120°, 100%, 100%)	(88, -79, 81)
(25, 255, 25)	(120°, 90%, 100%)	(88, -78, 79)
(50, 255, 25)	(113°, 90%, 100%)	(88, -76, 79)



Uma imagem analógica em tons ou níveis de cinza, acromática ou monocromática é uma função $I_a(x,y)$

(x, y): coordenadas espaciais

$I_a(x,y)$: intensidade, brilho, valor ou luminância da imagem em (x, y)

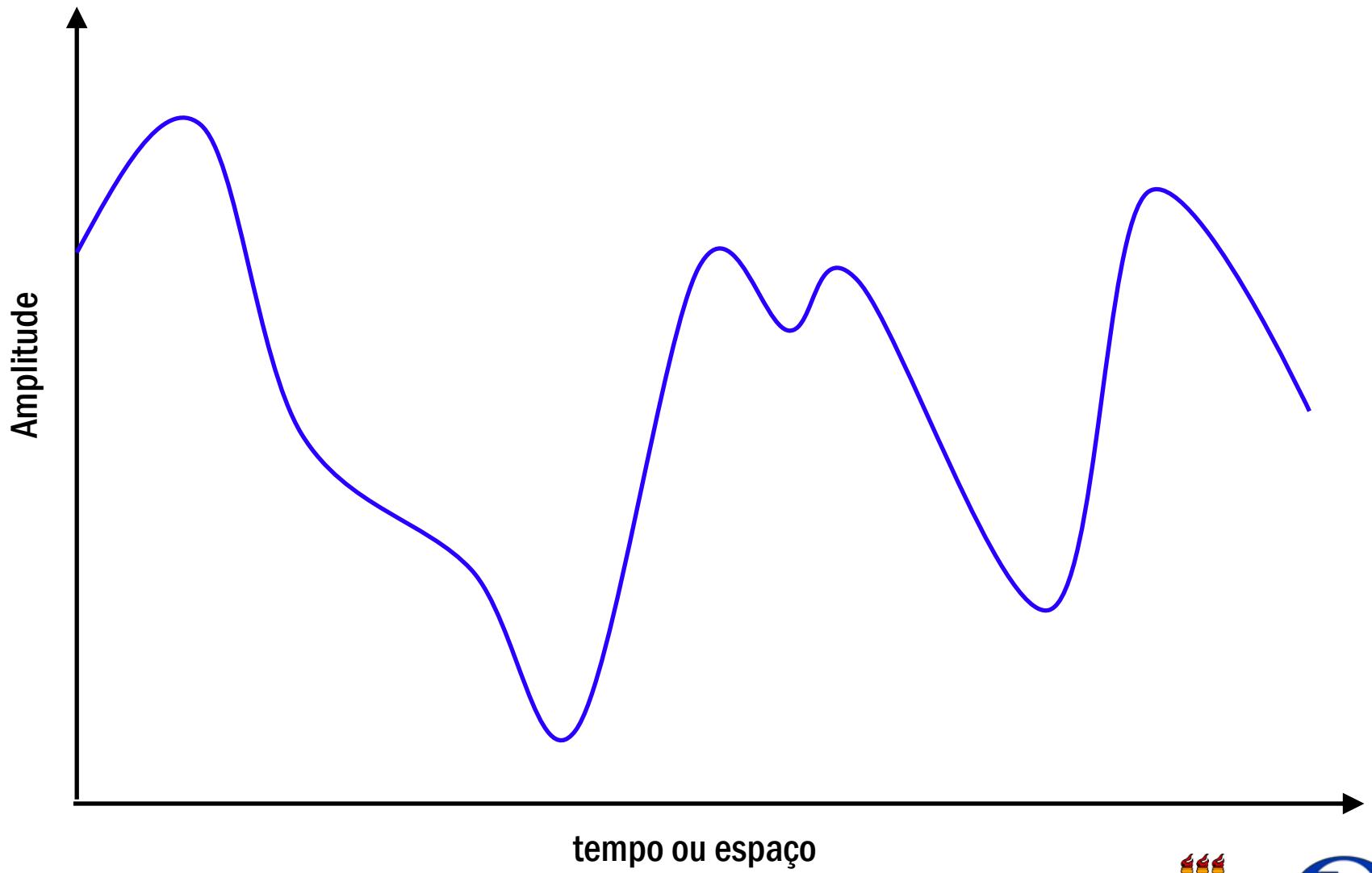




Digitalização

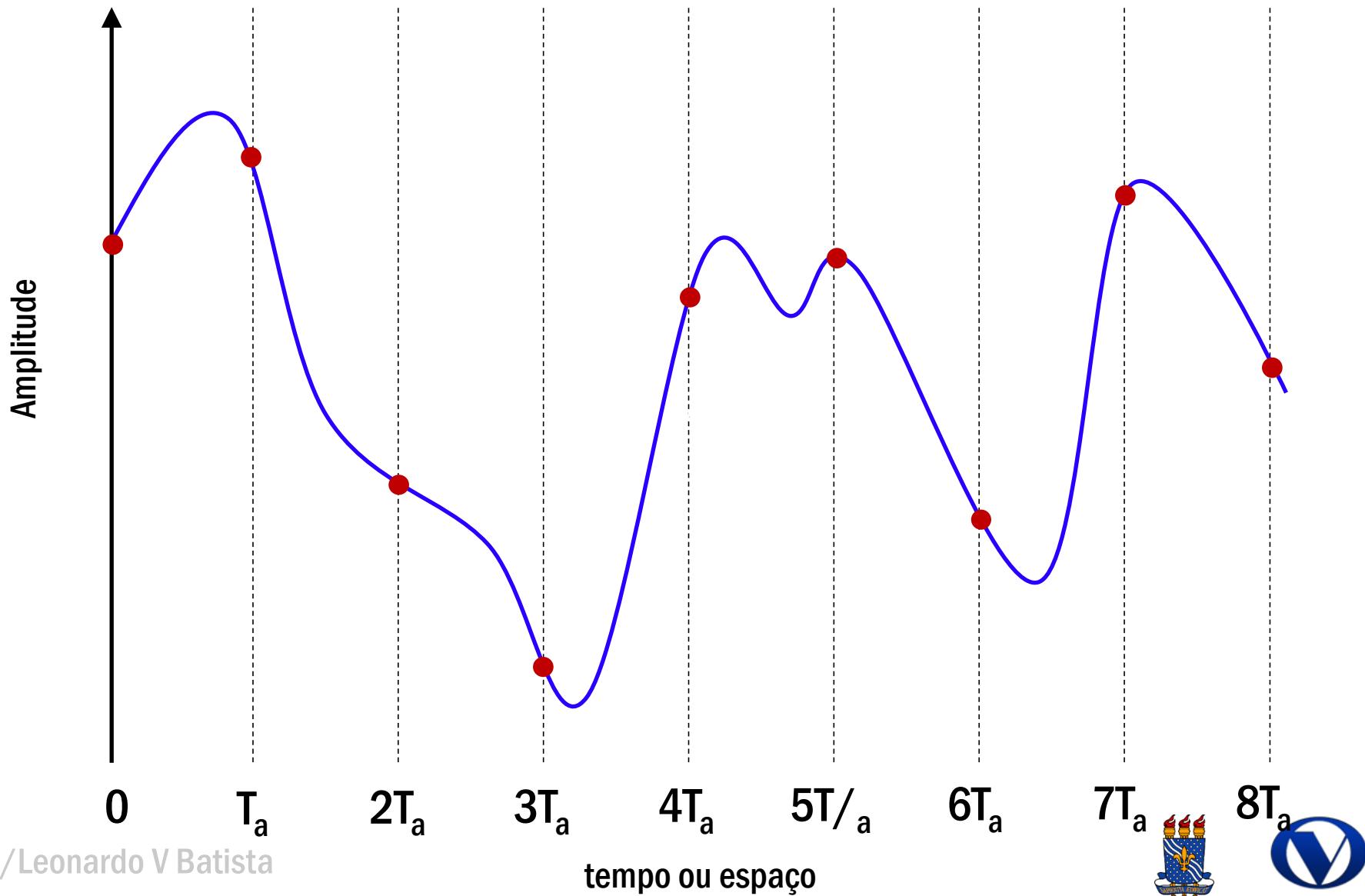
- 
1. Discretização espacial:
amostragem
 2. Discretização de intensidade:
quantização
 3. Codificação binária

Sinal analógico



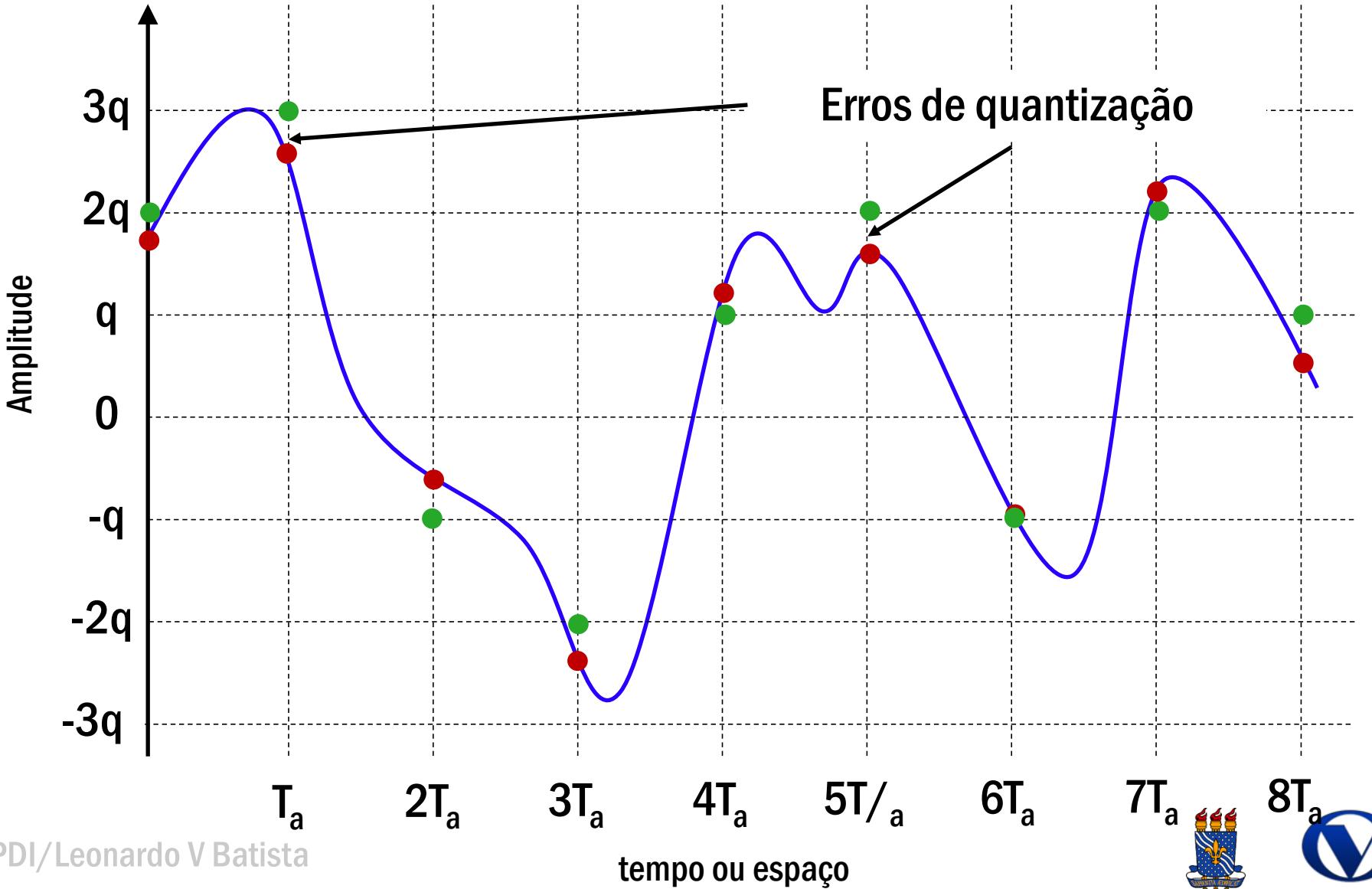
Sinal discreto: amostragem do analógico

Período de amostragem T_a



Sinal digital: quantização do sinal discreto

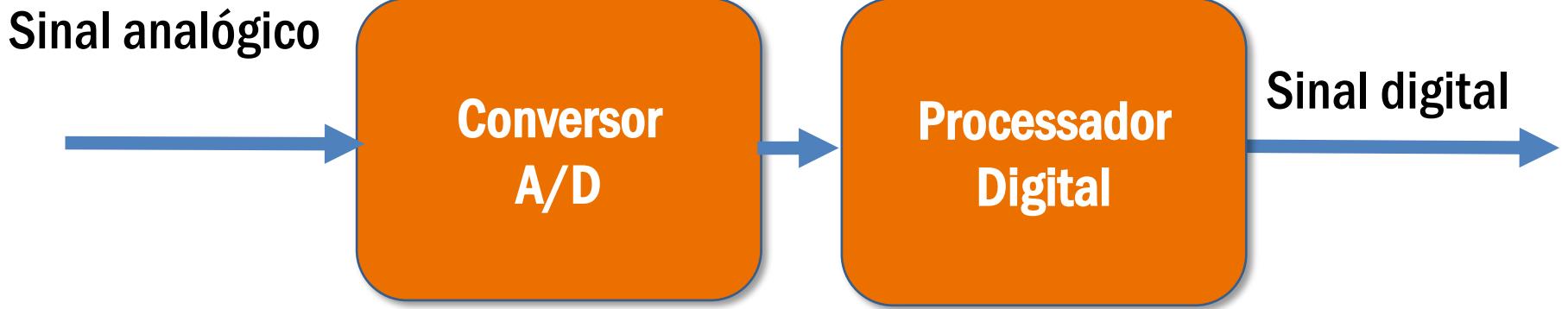
Tamanho de passo de quantização q



Processamento Analógico de Sinais



Processamento Digital de Sinais





Por que processamento digital?

Em hardware, software ou ambos

Maior flexibilidade

Menor custo

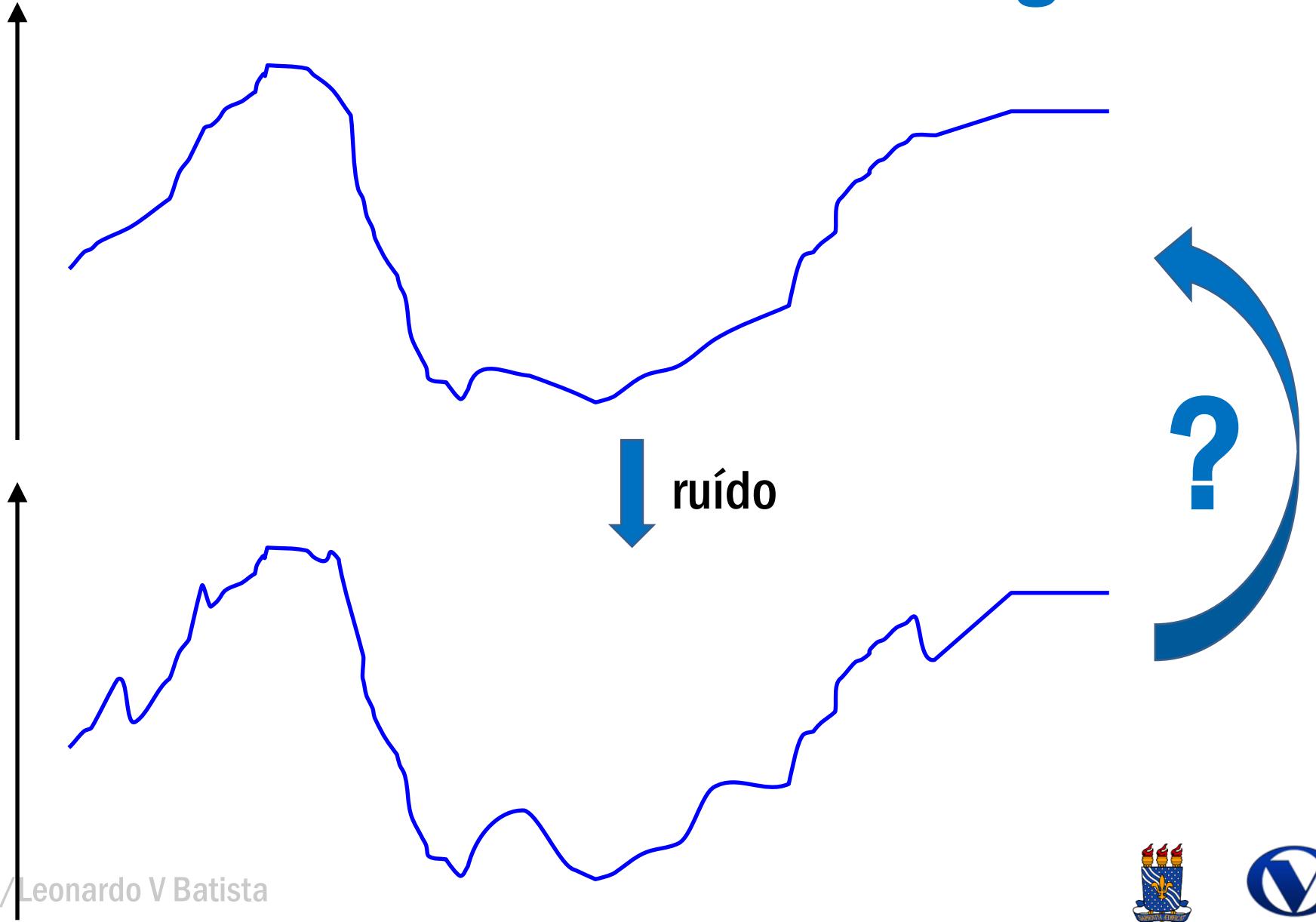
Menor tempo de desenvolvimento

Maior facilidade de distribuição

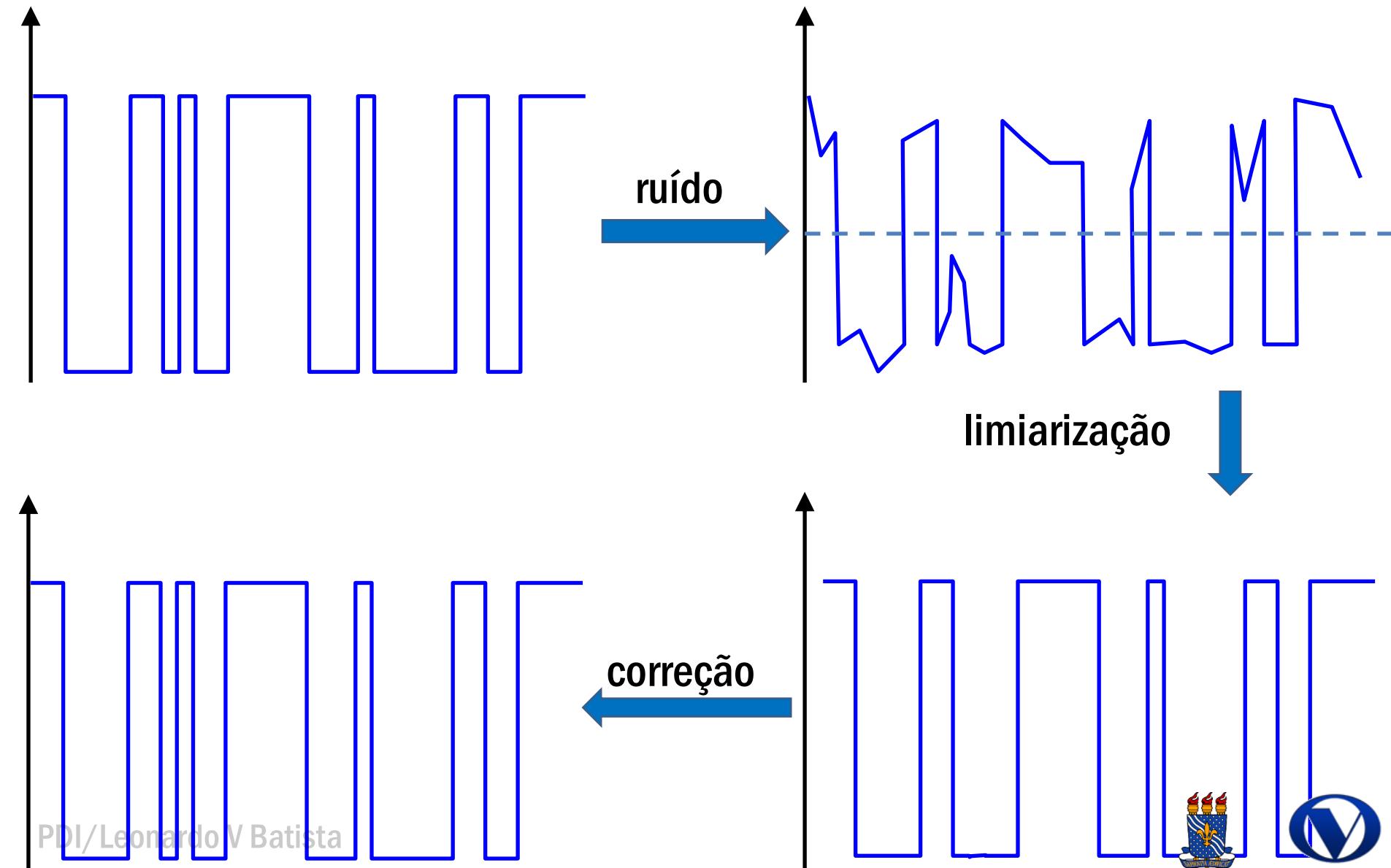
Sinais digitais podem ser armazenados e reproduzidos sem perda de qualidade

Contudo, muitos sistemas exigem etapas analógicas!

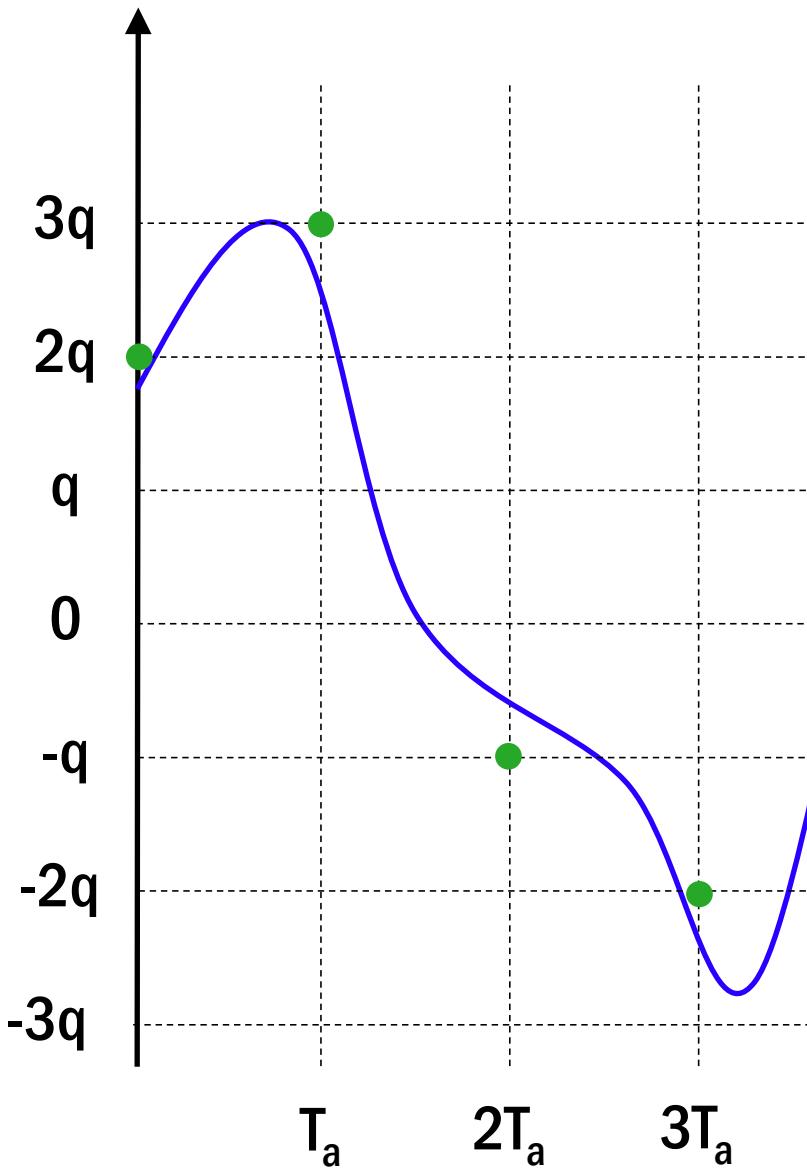
Ruído em Sinais Analógicos



Sinais Digitais – Robustez a Ruído



Parâmetros de Digitalização



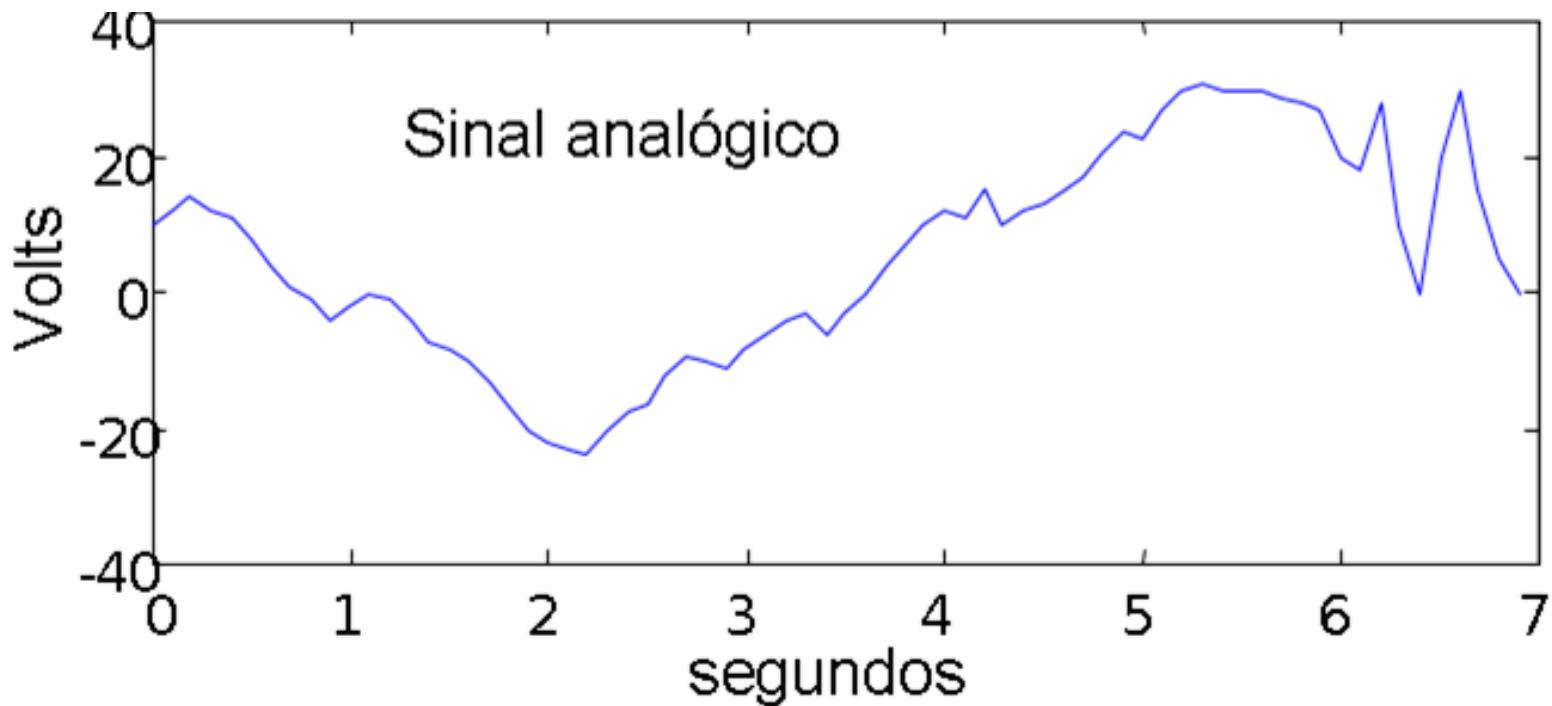
T_a : período de amostragem
(unidade de espaço ou tempo)
 $f_a = 1/T_a$: frequência de amostragem (amostras / unidade de espaço ou tempo)
q: tamanho do passo de quantização
L: parâmetro que limita a amplitude do sinal digital

Notação para sinal analógico e digital

Sinal analógico: $s(t)$ ou $s(x)$

Sinal digital: $s[nT_a]$, em que n é inteiro não negativo, e
 $s[nT_a] \in \{-Lq, \dots, -2q, -q, 0, q, 2q, \dots, (L-1)q\}$

Digitalização - Exemplo 1



Sinal analógico $r(t)$, voltagem na saída de um sistema,
em função do tempo

$$T_a = 0.5 \text{ s}, q = 0.5 \text{ V}, L = 64$$

Digitalização - Exemplo 1

$r[0.5n]$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Considere que:

$r(0.0) = 9.71293\dots$ V,

$r(0.5) = 7.75000\dots$ V,

$r(1.0) = -2.24555\dots$ V,

$r(1.5) = -10.50000\dots$ V,

...

Quantização com $q = 0.5$ V e $L = 64$

$r[nT_a] \in \{-Lq, \dots, -2q, -q, 0, q, 2q, \dots, (L-1)q\}$

$r[0.5n] \in \{-32, -31.5\dots, -0.5, 0, 0.5, 1\dots, 31, 31.5\}$

Digitalização - Exemplo 1

$r[0]=9.5V, r[0.5]=8V, r[1]=-2V, r[1.5]=-10.5V, \dots$

$r[nT_a] \in \{-Lq, \dots, -2q, -q, 0, q, 2q, \dots, (L-1)q\}$

Notação Simplificada:

$r[n] \in \{-L, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, L-1\}$

$r[n] \in \{-64, -63, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, 63\}$

$r[0]=19,$

$r[1]=16,$

$r[2]=-4,$

$r[3]=-21, \dots$

$r[n] = \{19, 16, -4, -21, \dots\}$

Codificação binária em 7 bits:

{0010011, 0010000, ...}

Digitalização - Exemplo 2

Em um processo de digitalização foram colhidas N=10 amostras de um sinal de temperatura (Celsius) igualmente espaçadas ao longo de um segmento de reta unindo duas cidades A e B. A 1^a amostra foi colhida na cidade A e a última na cidade B. O sinal digital resultante, representado em decimal, é $s[n] = \{12\ 12\ 13\ 13\ 14\ 13\ 14\ 14\ 15\ 14\}$.

Digitalização - Exemplo 2

- (a) Distância entre as cidades?
- (b) Valores de temperatura registrados?
- (c) Limites de temperatura registrável?
- (d) Qual o valor de $s[5\text{km}]$?
- (e) Erro máximo que pode ser cometido na conversão?
- (f) Quantidade de bits necessários para representar s

Digitalização - Exemplo 2

Precisamos conhecer f , q e L !

Dados: $f = 0.1$ amostra/km, $q = 2^\circ$ Celsius, $L = 16$;

$$s[n] = \{12 \ 12 \ 13 \ 13 \ 14 \ 13 \ 14 \ 14 \ 15 \ 14\}$$

Perguntas:

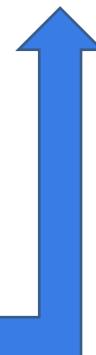
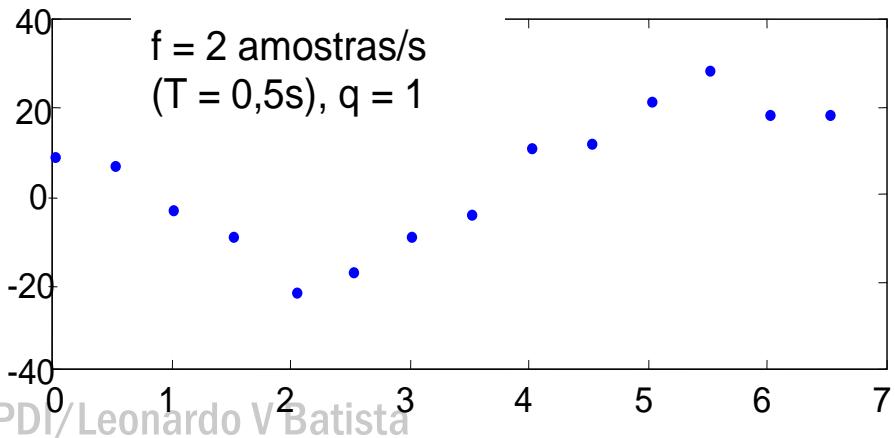
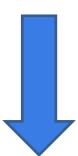
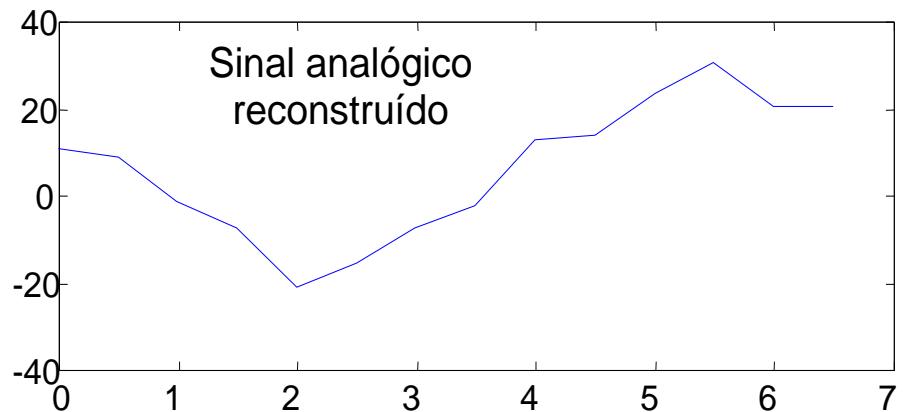
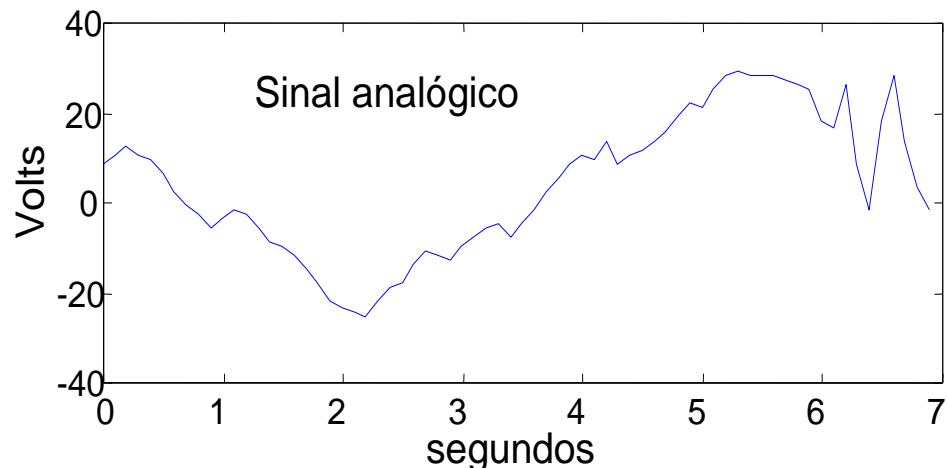
- (a) Distância entre as cidades?
- (b) Valores de temperatura registrados?
- (c) Limites de temperatura registrável?
- (d) Qual o valor de $s[5\text{km}]$?
- (e) Erro máximo que pode ser cometido na conversão?
- (f) Quantidade de bits necessários para representar s

Digitalização - Exemplo 2

$$T_a = 10 \text{ km}$$

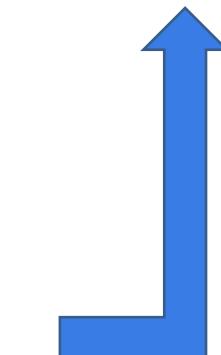
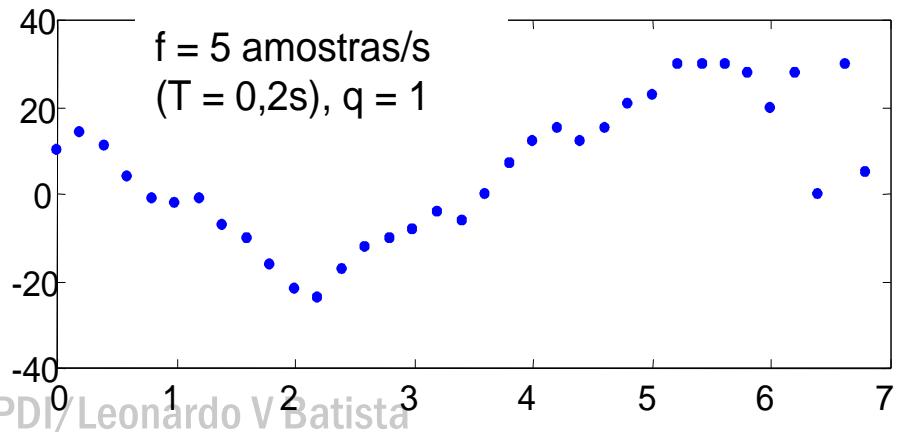
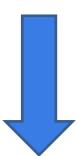
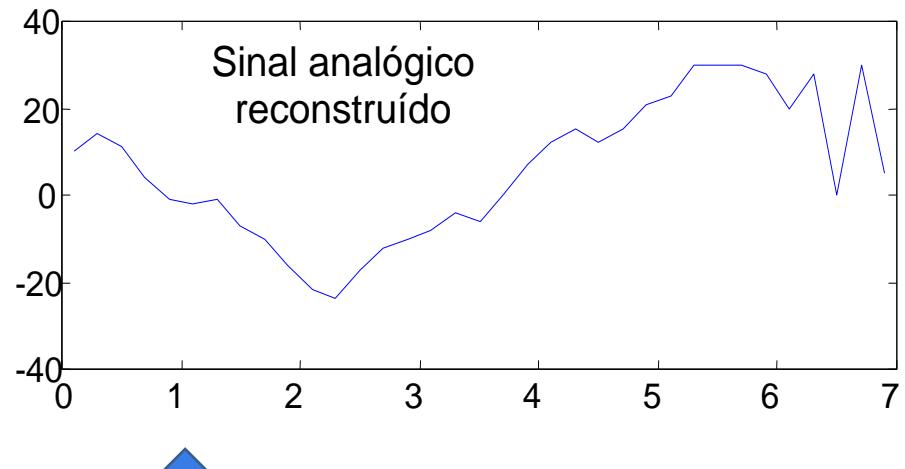
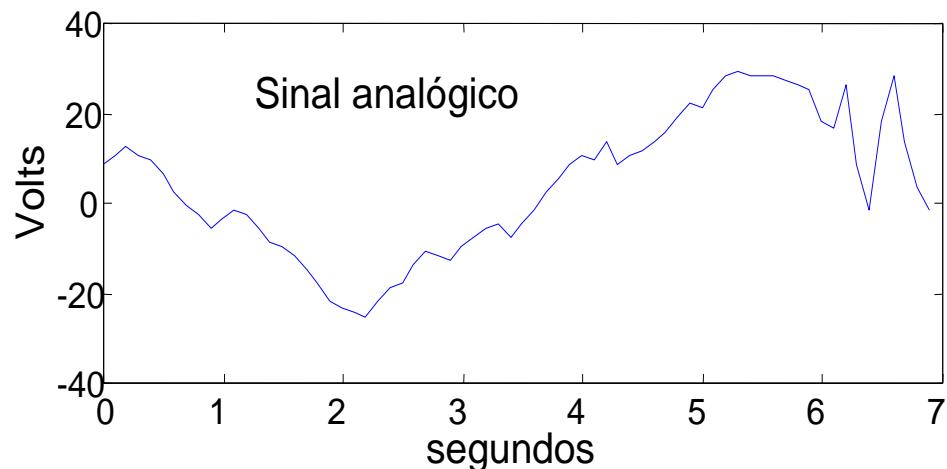
- (a) Distância entre as cidades= $(10-1) \times 10 = 90 \text{ km}$
- (b) Temperaturas ($^{\circ} \text{C}$): {24 24 26 26 28 26 28 28 30 28}
- (c) Limites de temperatura ($^{\circ} \text{C}$): [-32,30]
- (d) $s[5\text{km}]$: no sinal digital $s[nT_a]$ não há $nT = 5 \text{ km}$!
- (e) Indefinido
- (f) $L = 16$: 32 valores diferentes possíveis $\Rightarrow 5 \text{ bits / amostra}$, $5 \times 10 \text{ amostras} = 50 \text{ bits}$

Qualidade da Digitalização



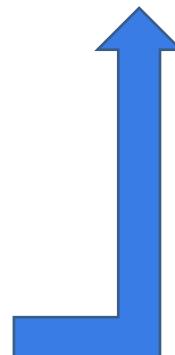
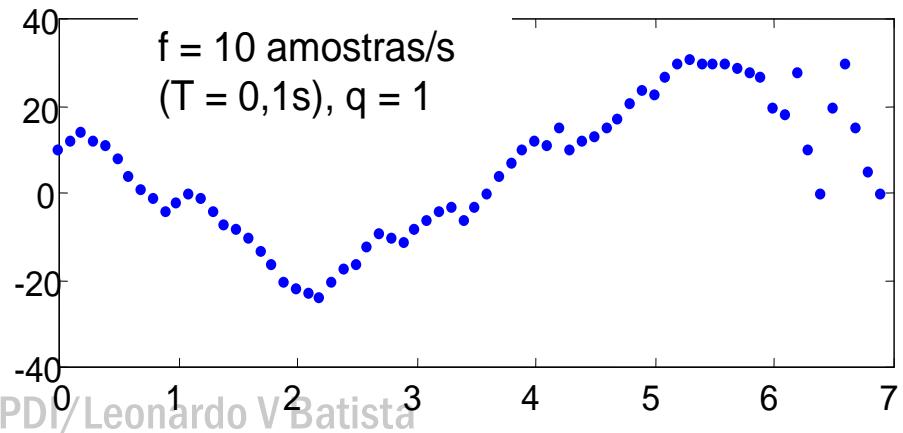
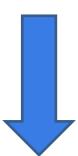
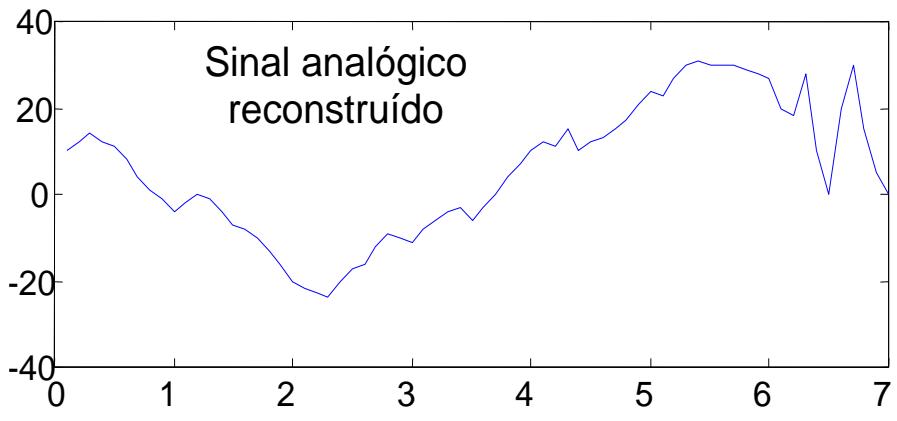
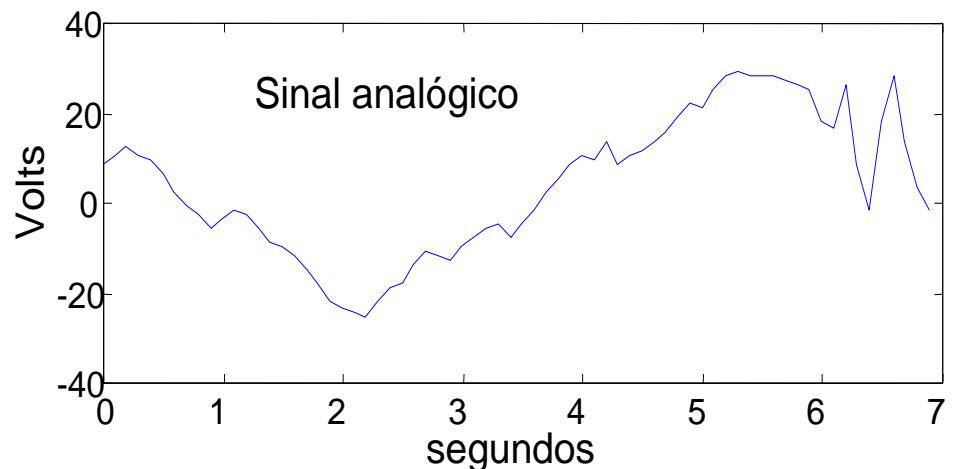
Interpolação
Linear

Qualidade da Digitalização



Interpolação
Linear

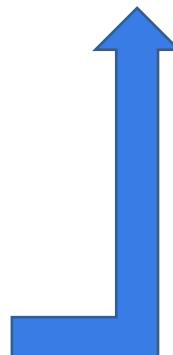
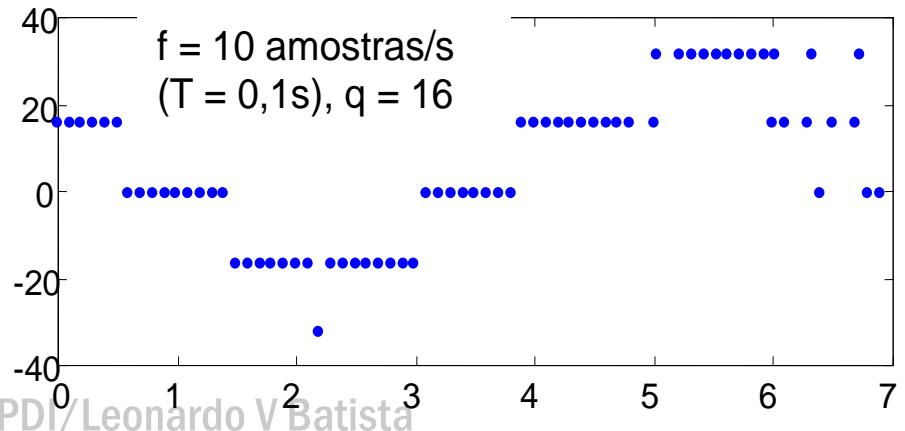
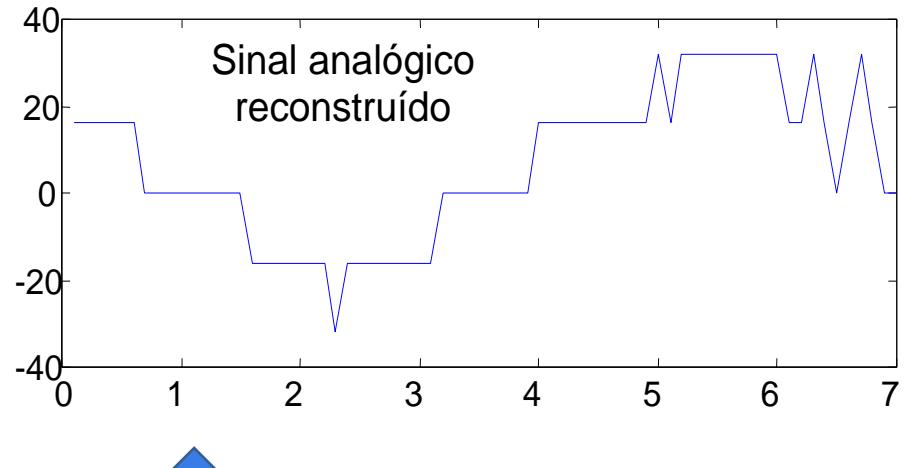
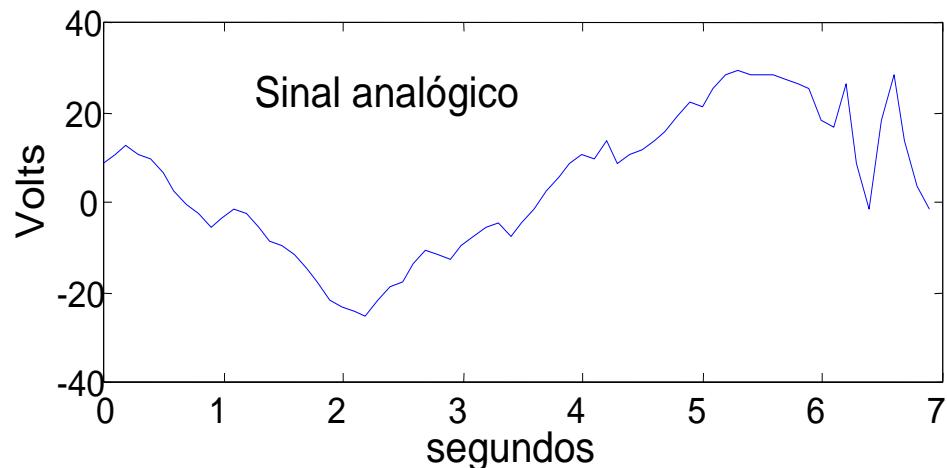
Qualidade da Digitalização



Interpolação
Linear

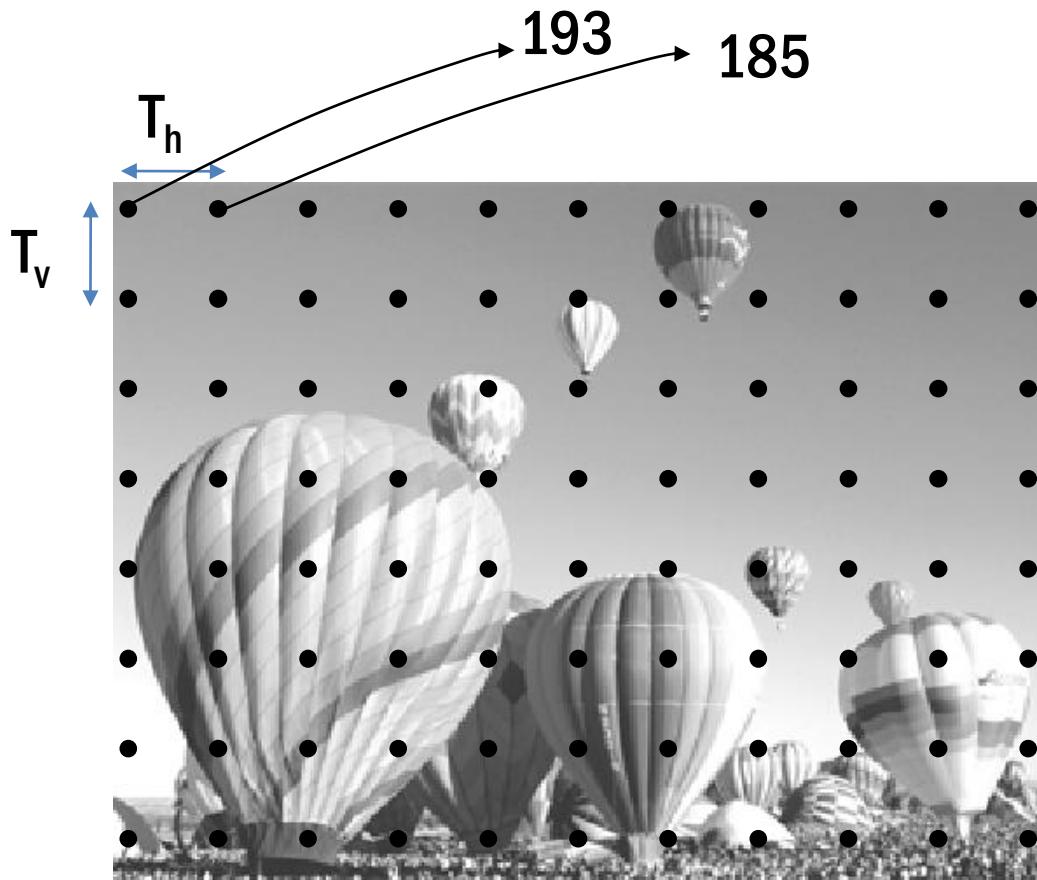


Qualidade da Digitalização



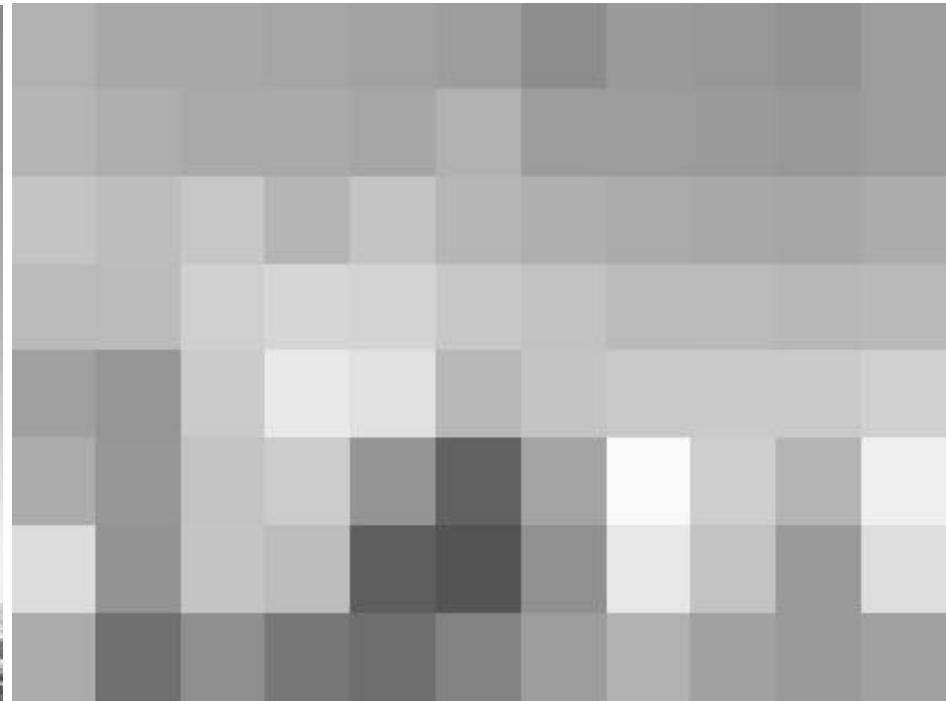
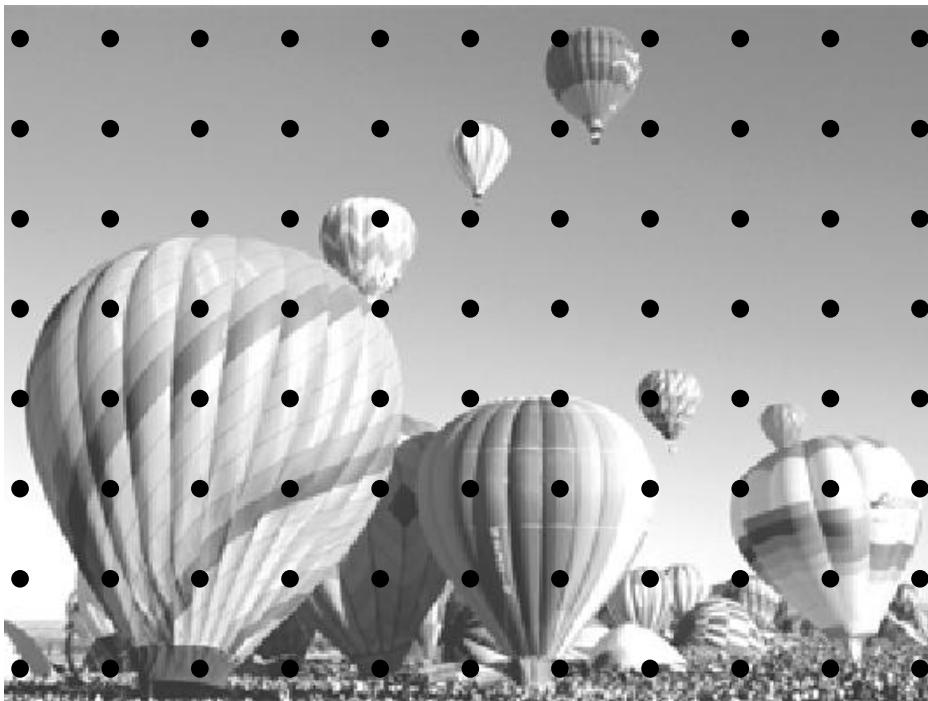
Interpolação
Linear

Digitalização de Imagens



Níveis de cinza já
quantizados e em notação
simplificada

Digitalização de Imagens



$$\begin{bmatrix} 193 & 185 & \dots & 175 \\ 196 & 190 & \dots & 175 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 187 & 134 & \dots & 179 \end{bmatrix}$$

Imagen digital em tons de cinza



C colunas, R linhas

Dimensões R x C

Resolução R x C

$f(i,j)$: pixel na posição
(i,j)

$$f = f[i, j] = \begin{bmatrix} f[0,0] & f[0,1] & \dots & f[0, C - 1] \\ f[1,0] & f[1,1] & \ddots & f[1, C - 1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f[R - 1, 0] & f[R - 1, 1] & \dots & f[R - 1, C - 1] \end{bmatrix}$$

Notação simplificada

$f[i, j] \in \{0, 1, 2, \dots, L-1\}$

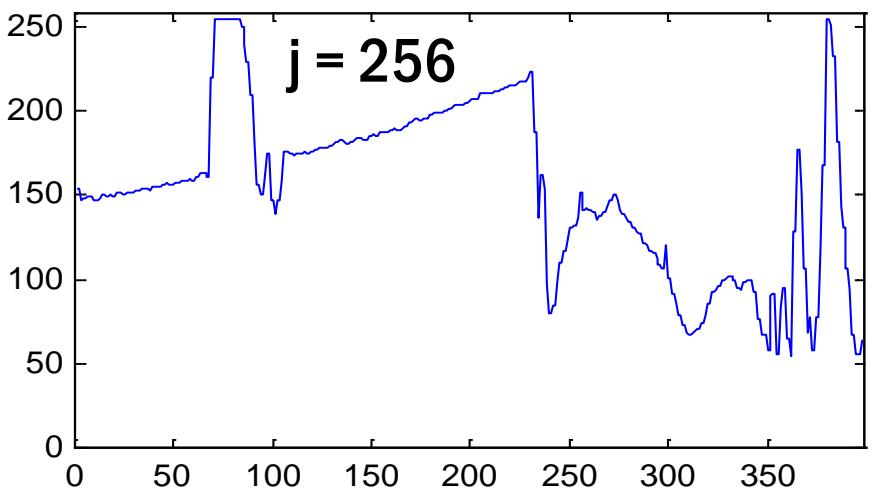
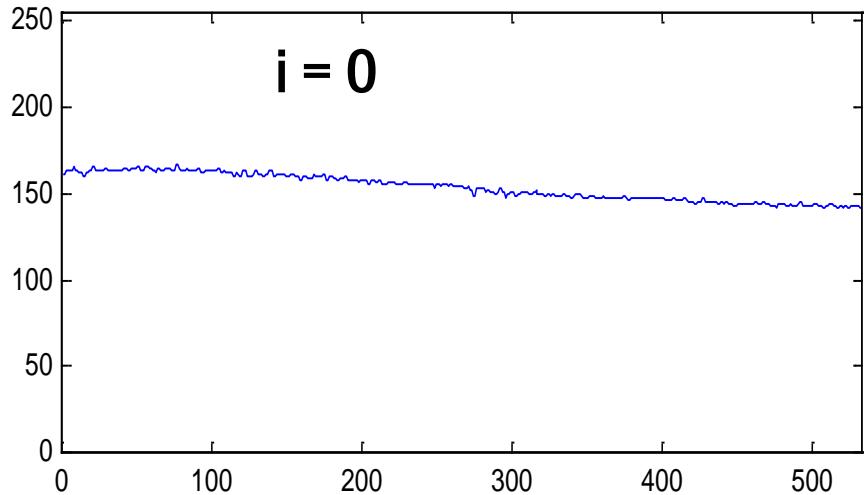
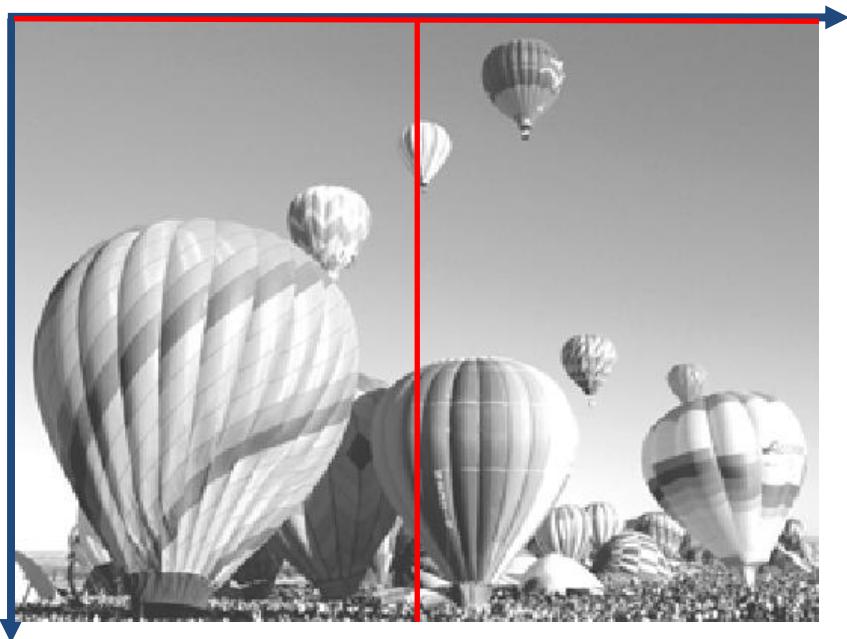
$L = 2^\ell$, ℓ inteiro positivo

Comumente, $L = 256$

Número de bits necessário para representar uma imagem digital:

$b = R \times C \times \ell$

Linhas e colunas como sinais 1D



Dimensões
399 x 511



Resolução espacial e de contraste



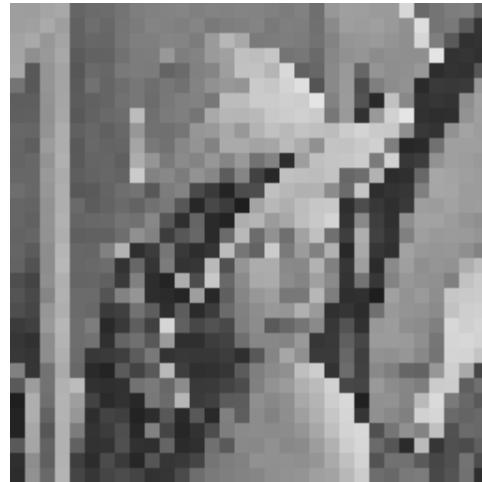
256x256 / 256 níveis



256x256 / 64 níveis

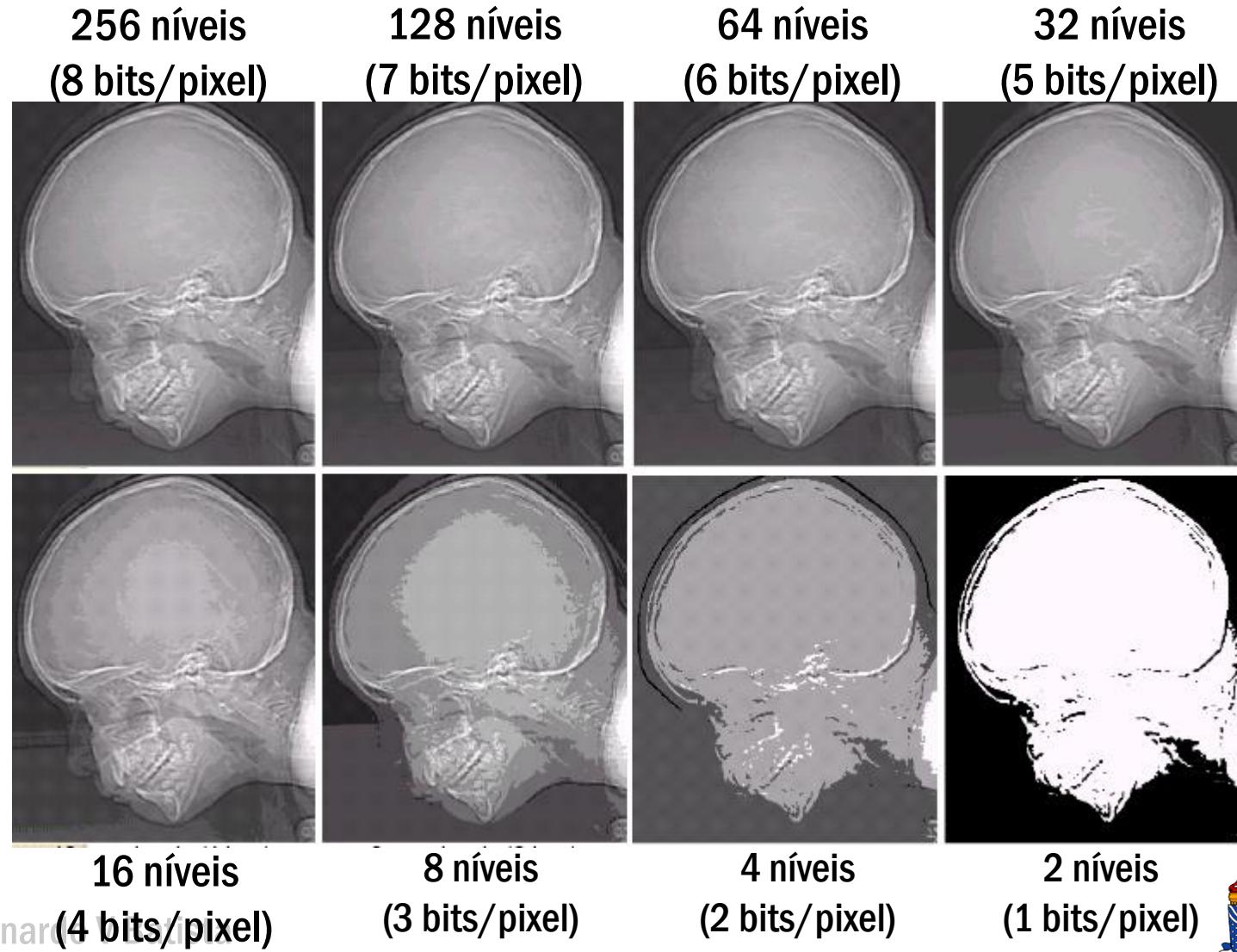


256x256 / 2 níveis



32x32 / 256 níveis

Resolução de contraste



Projeto: superresolução

Bicubic



Regression



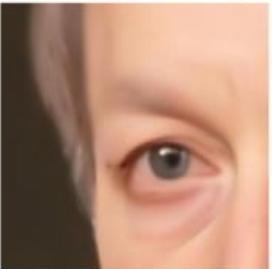
SR3 (ours)



Reference



<https://iterative-refinement.github.io/>



Projeto: superresolução

<https://iterative-refinement.github.io/>

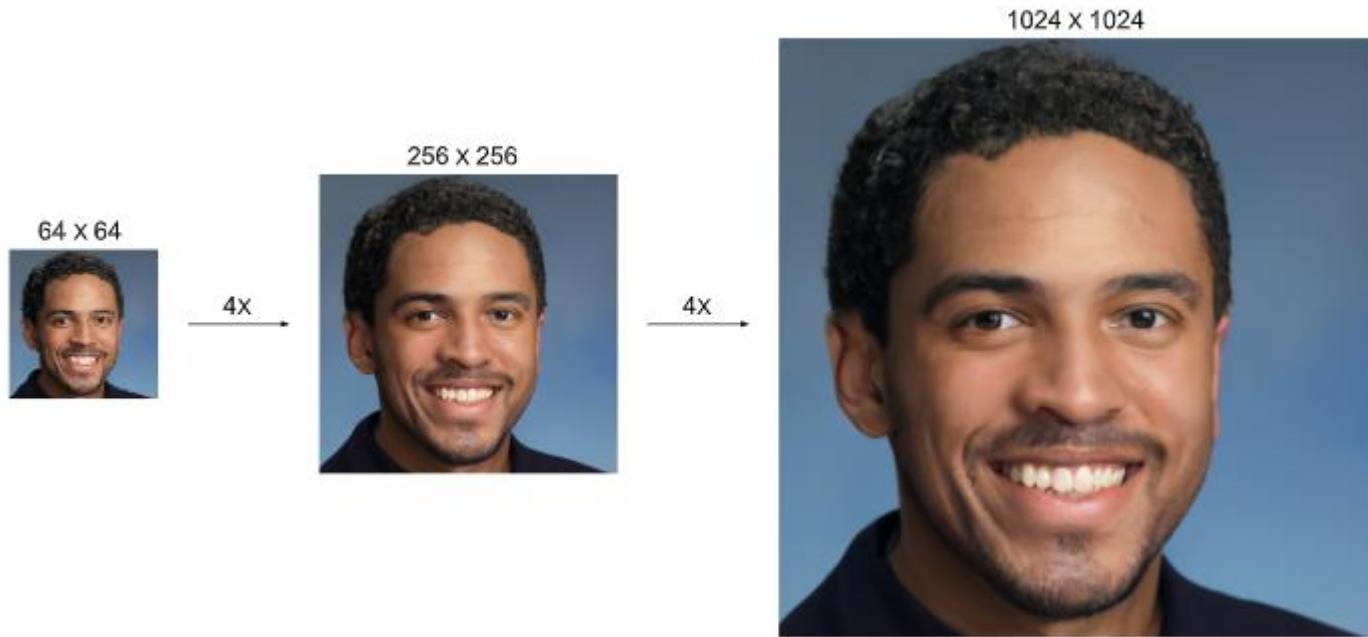
Input : 64x64



SR3 Output : 1024x1024



Projeto: superresolução



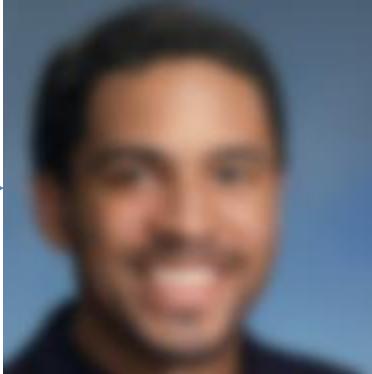
<https://iterative-refinement.github.io/>

Projeto: superresolução



Classificador

Acurácia 1



Classificador

Acurácia 2



Classificador

Acurácia 3

Imagens RGB



Banda ou canal R

Banda ou canal G

Banda ou canal B

$$\begin{bmatrix} 137 & 133 & \dots & 3 \\ 132 & 129 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 138 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 96 & 92 & \dots & 3 \\ 91 & 89 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 79 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 68 & 64 & \dots & 3 \\ 63 & 61 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 37 \end{bmatrix}$$

Imagens RGB



Banda ou canal R



Banda ou canal G



Banda ou canal B



Imagen RGB

Matrizes e imagens

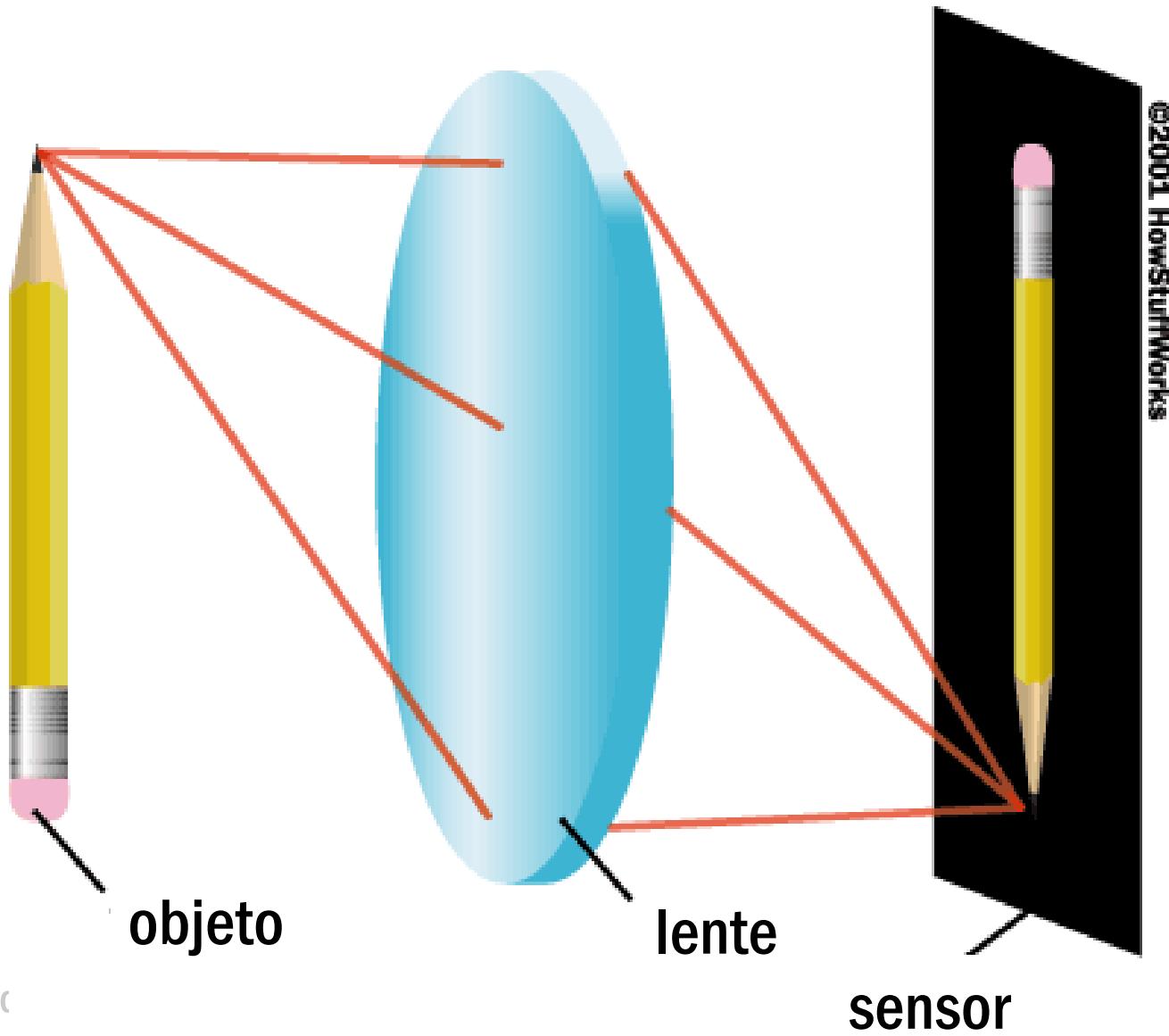


Uma **imagem** é uma **matriz bidimensional** observada de forma pictórica

Imagens de densidade demográfica, raios x, infravermelho, temperaturas etc

$$\begin{bmatrix} f[0,0] & \dots & f[0,C-1] \\ f[1,0] & \ddots & f[1,C-1] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f[R-1,0] & \dots & f[R-1,C-1] \end{bmatrix}$$

Câmeras digitais





Sensor de imagem: matriz de diodos fotossensíveis cobertos por filtros R, G e B

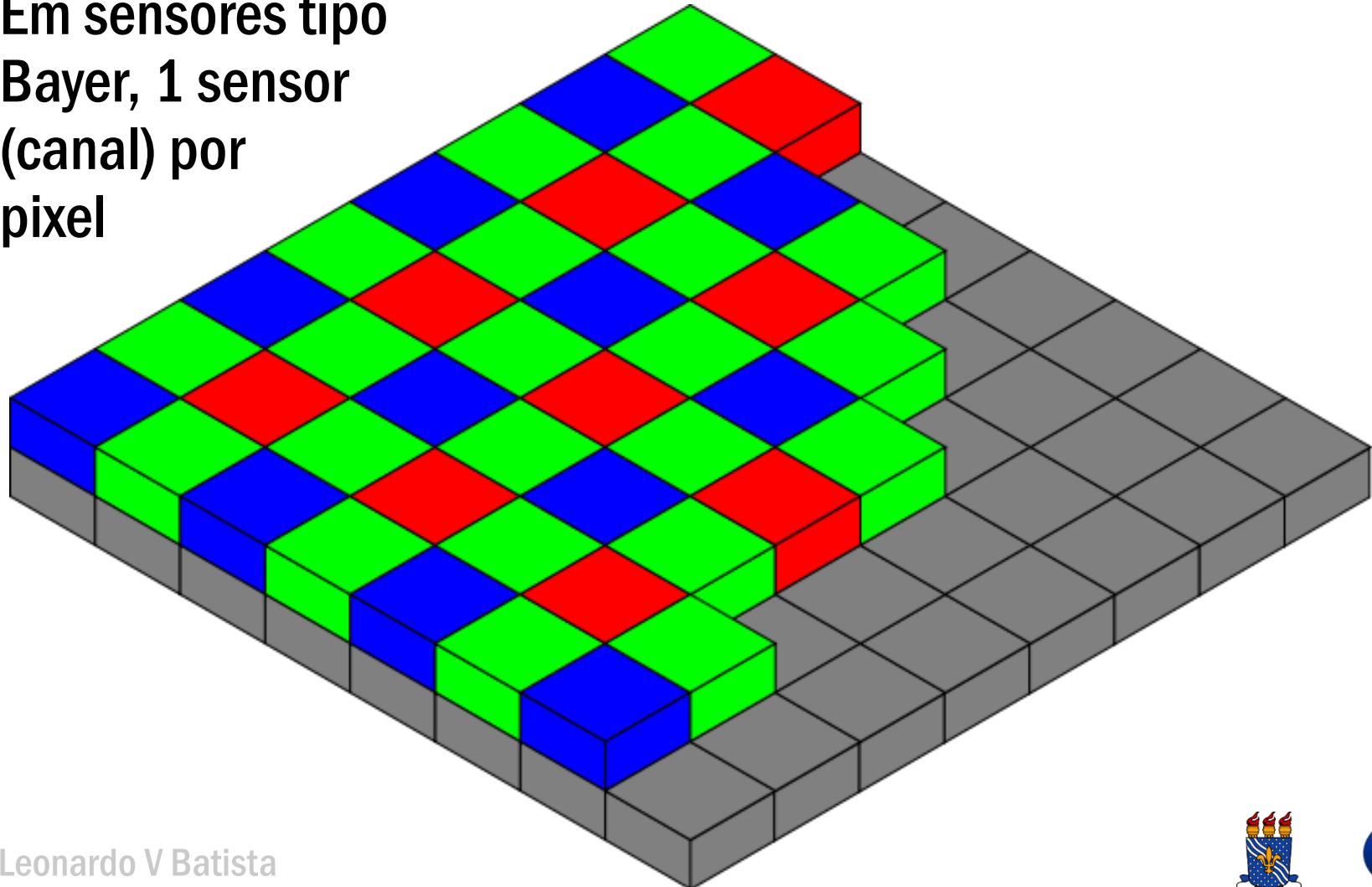
Os diodos produzem carga elétrica proporcional à intensidade da luz incidente

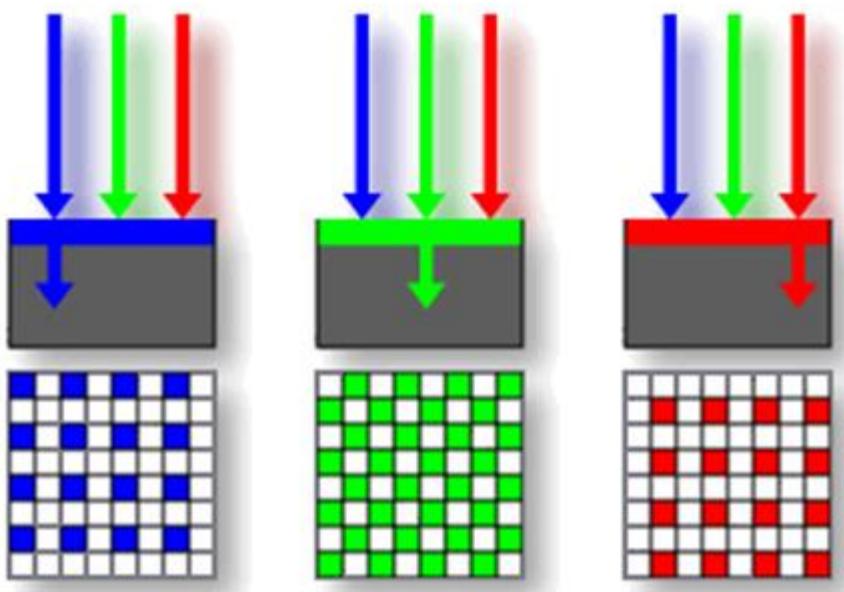
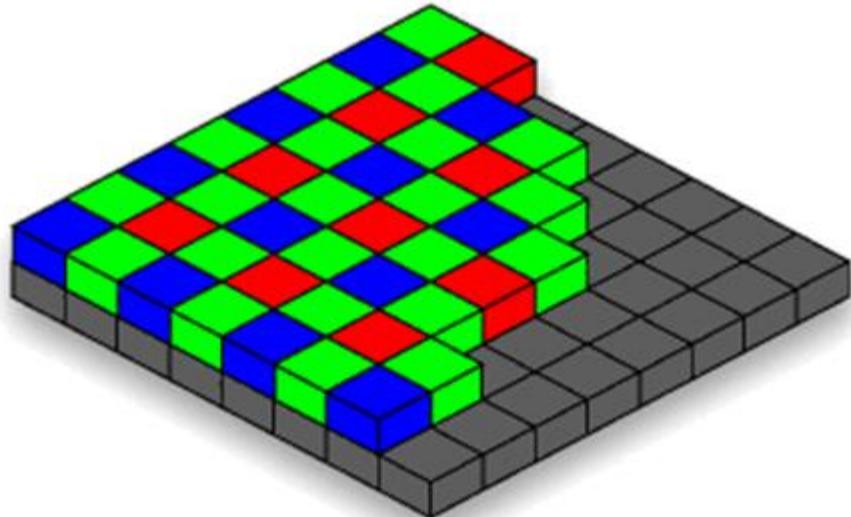
Resolução espacial: número de pontos (pixels), $R \times C$

Teoricamente, 1 pixel = 3 sensores

Mosaico de Bayer

Em sensores tipo
Bayer, 1 sensor
(canal) por
pixel





Pontos **azuis** (por exemplo)
tem as componentes **verde** e
vermelha criadas por
interpolação, produzindo
uma imagem RGB completa

Sensor em um chip

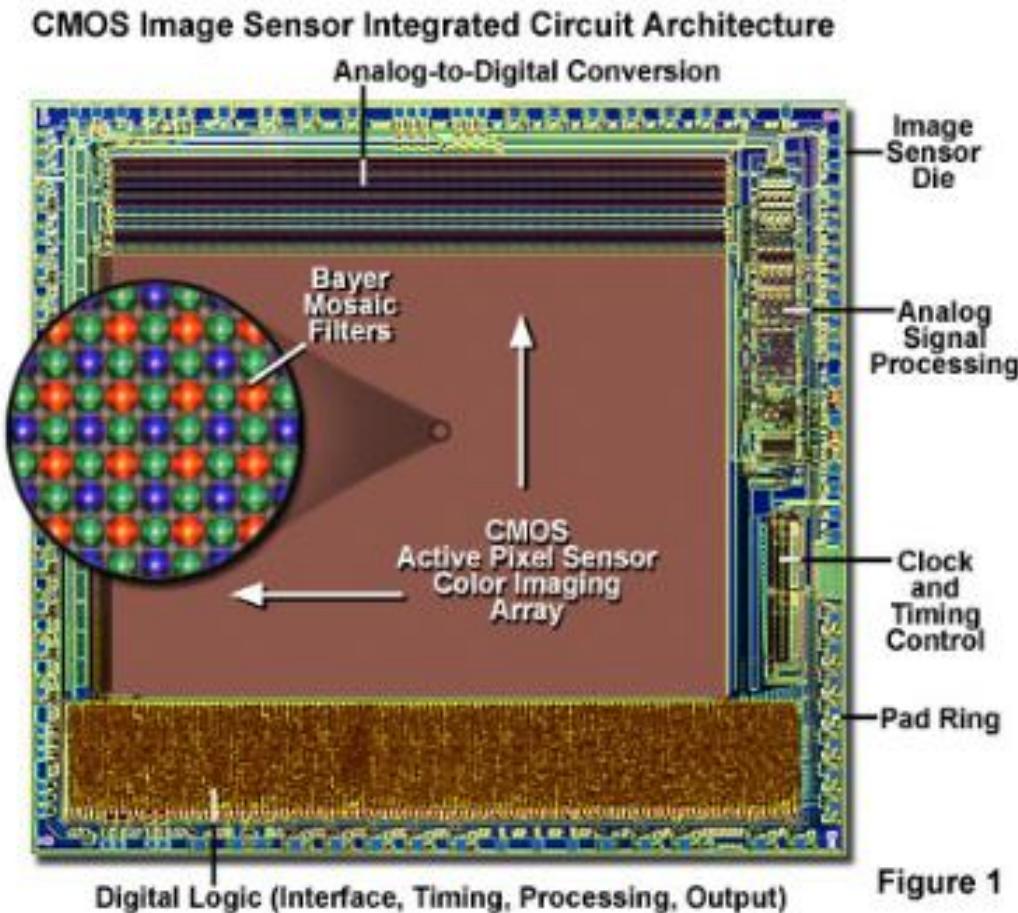
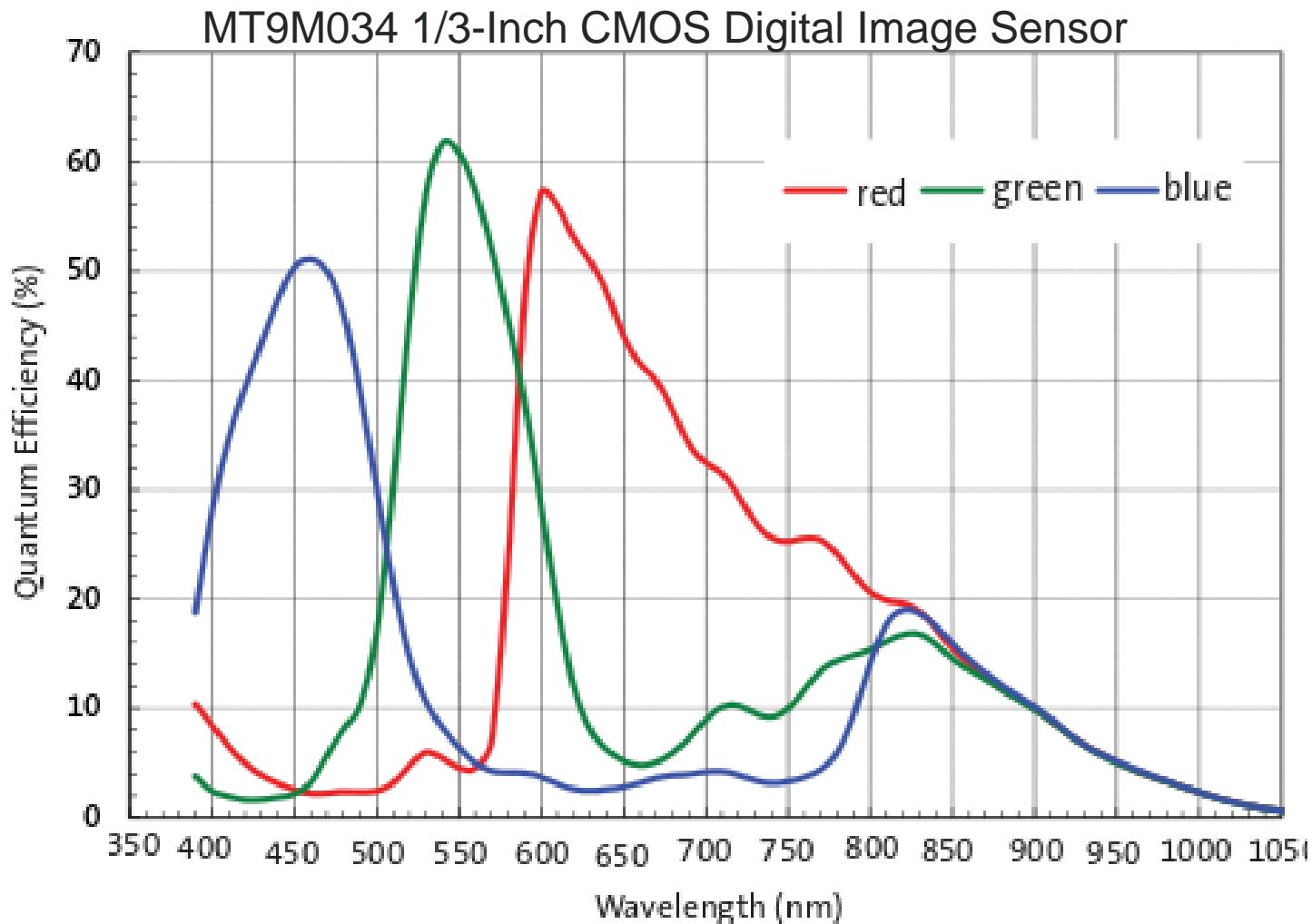


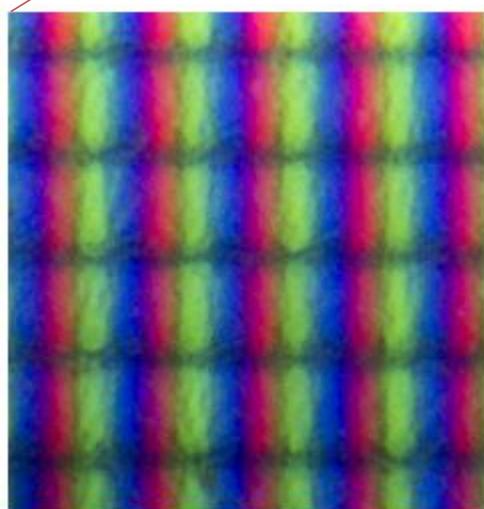
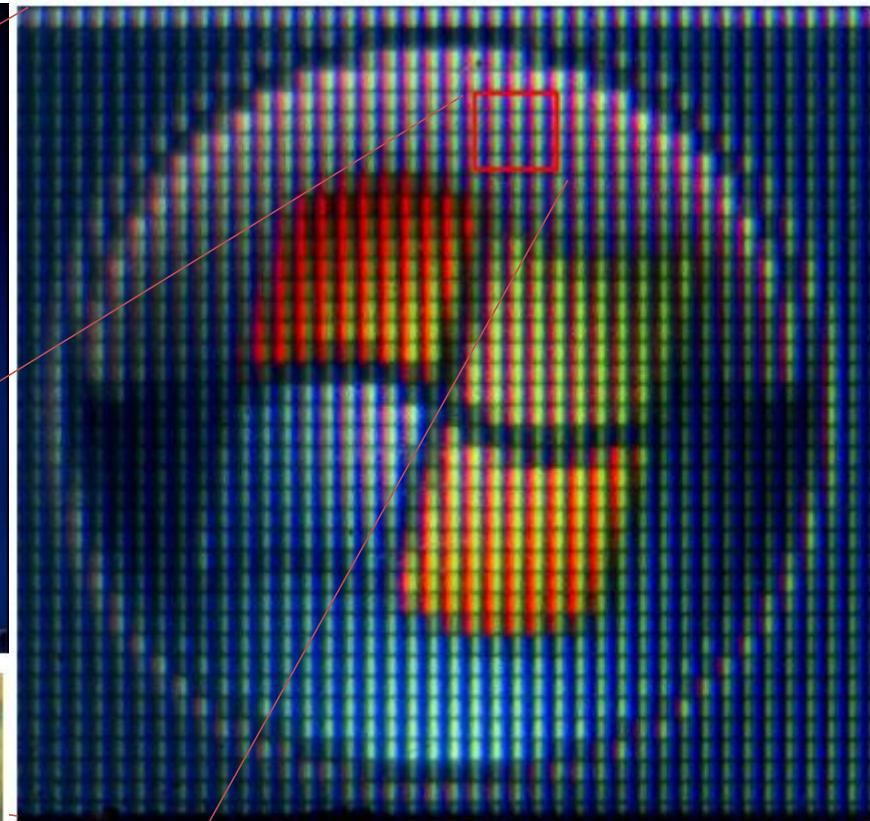
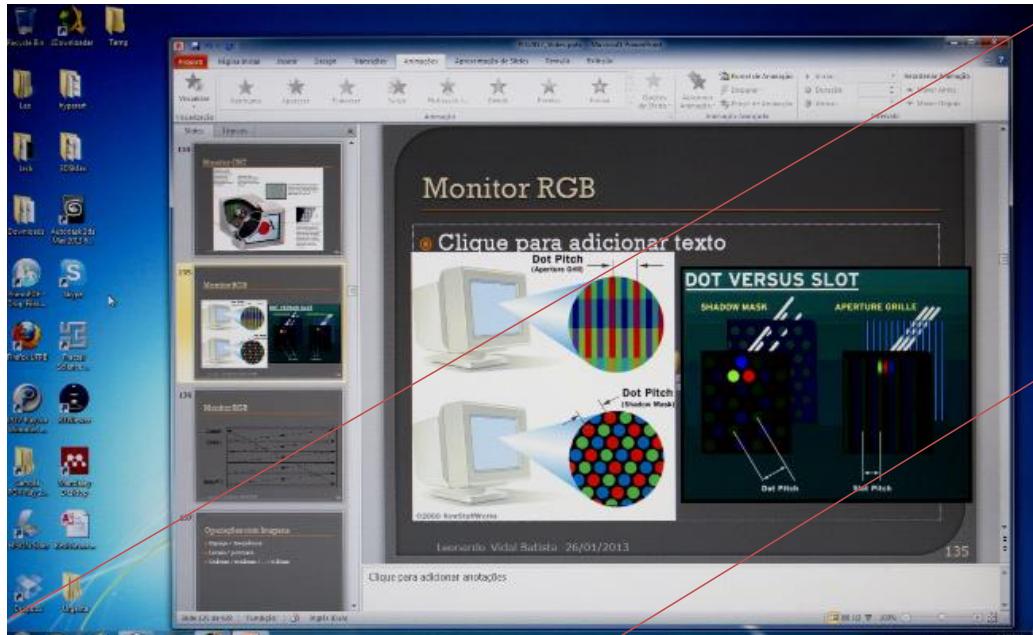
Figure 1

Fonte: <http://micro.magnet.fsu.edu/primer/digitalimaging/cmosimagesensors.html>

Sensibilidade dos filtros RGB



Monitor RGB



Operações com Imagens

Espaço / frequência

Locais / pontuais

Unárias / binárias / ... / n-árias

Operações n-árias

Operação **T** sobre **n imagens**, f_1, f_2, \dots, f_n , produzindo uma imagem de saída g

$$g = T[f_1, f_2, \dots, f_n]$$

Operações **binárias**: $n = 2$

Operações **unárias**, ou **filtros**: $n = 1$

$$g = T[f]$$

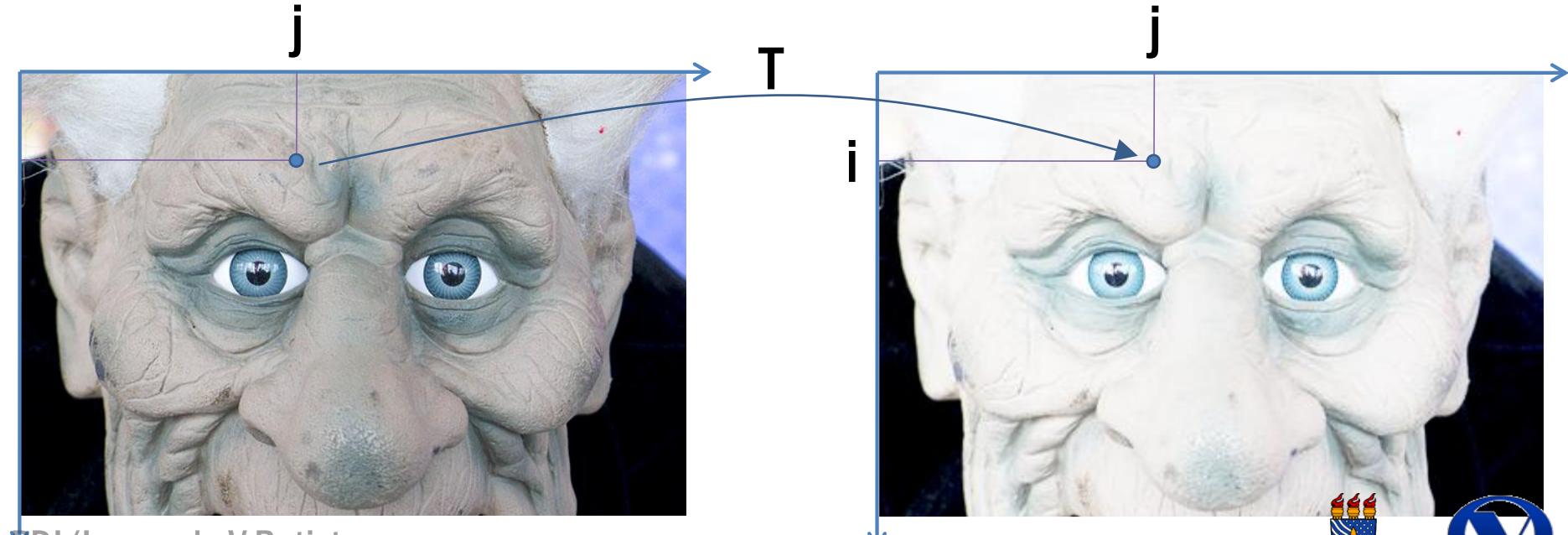
Filtros pontuais

$g(i, j)$ depende apenas do valor de $f(i, j)$

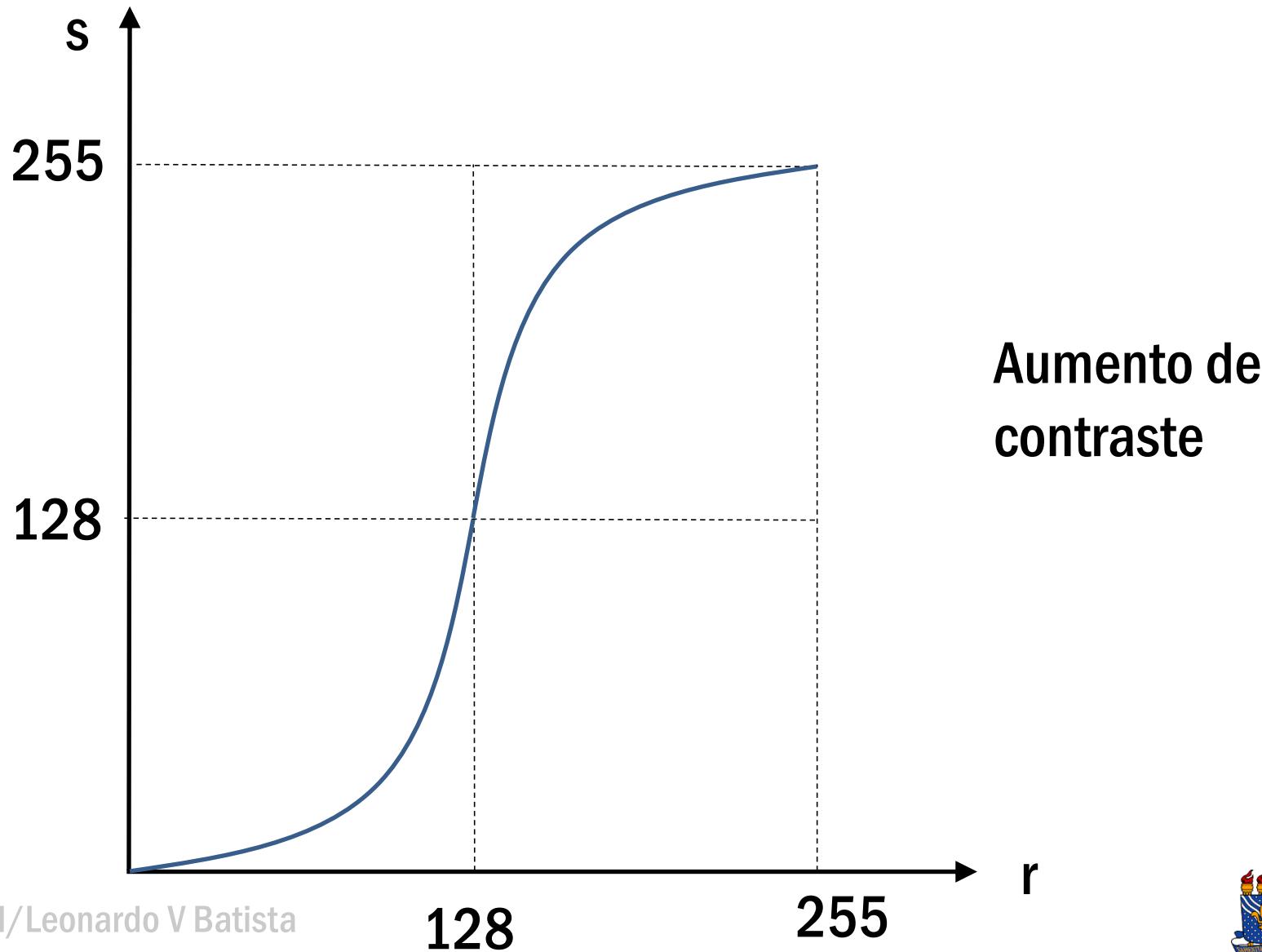
$$g(i, j) = T[f(i, j)]$$

$$s = T(r)$$

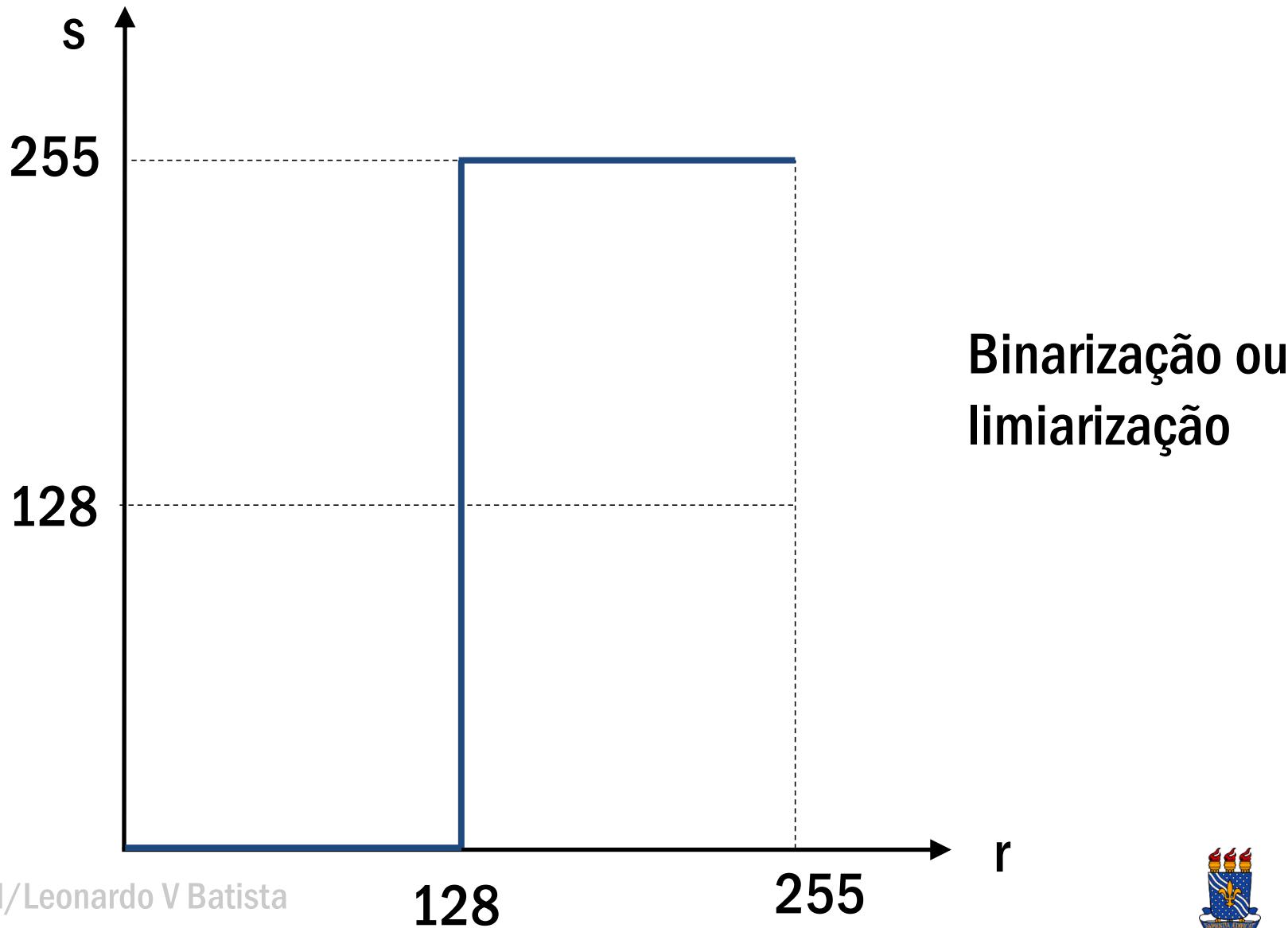
r, s : nível de cinza de f, g , respectivamente, em (i, j)



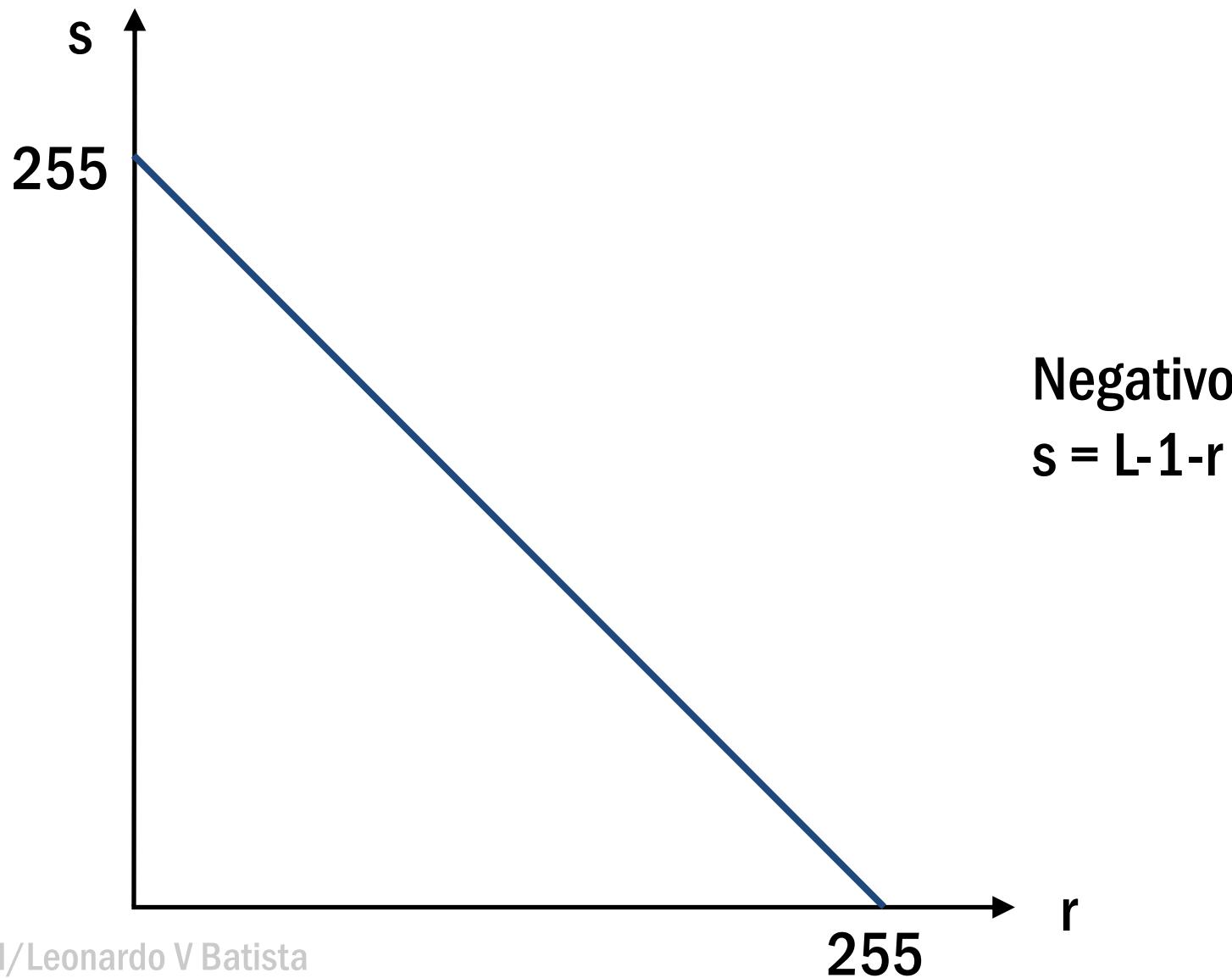
Filtros pontuais



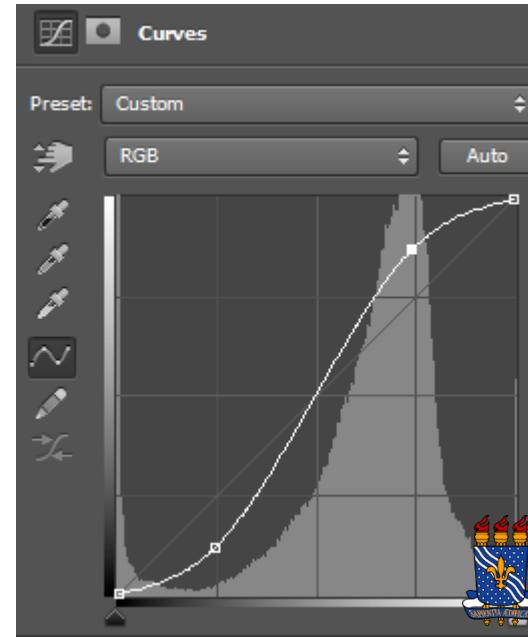
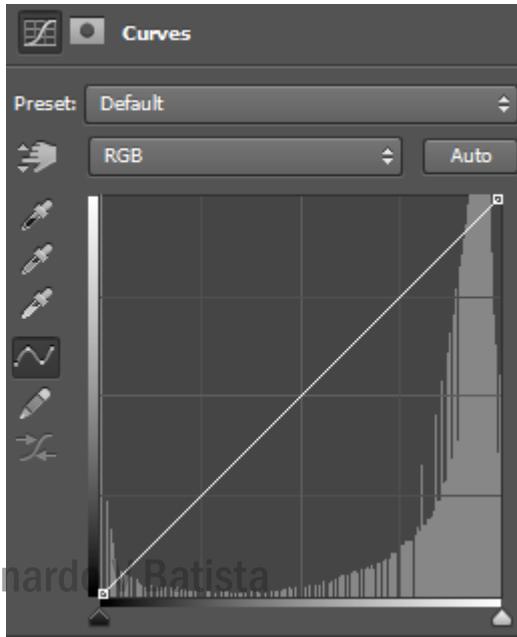
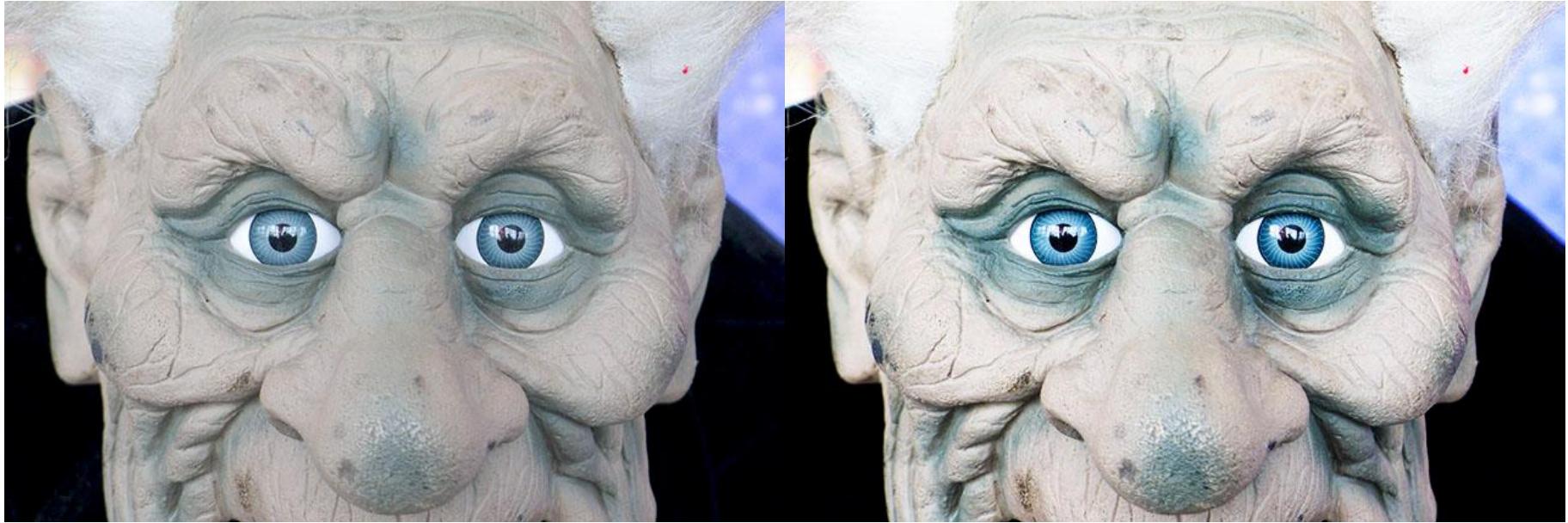
Filtros pontuais



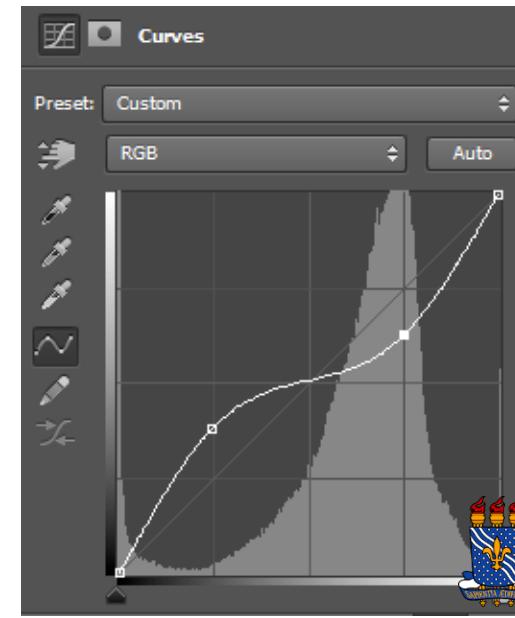
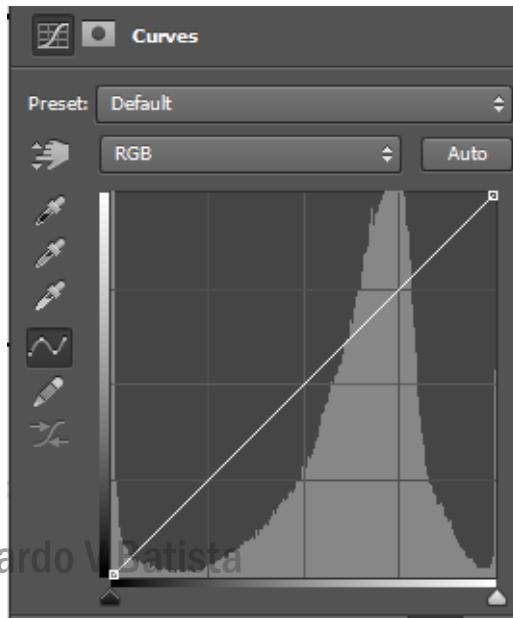
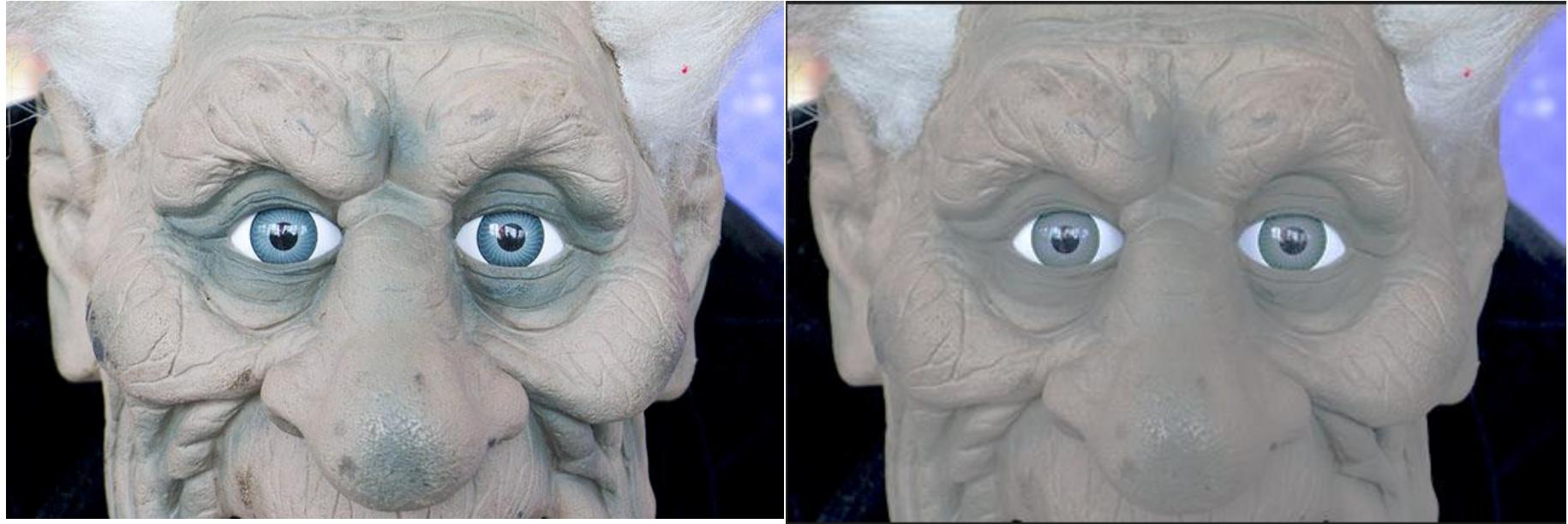
Filtros pontuais



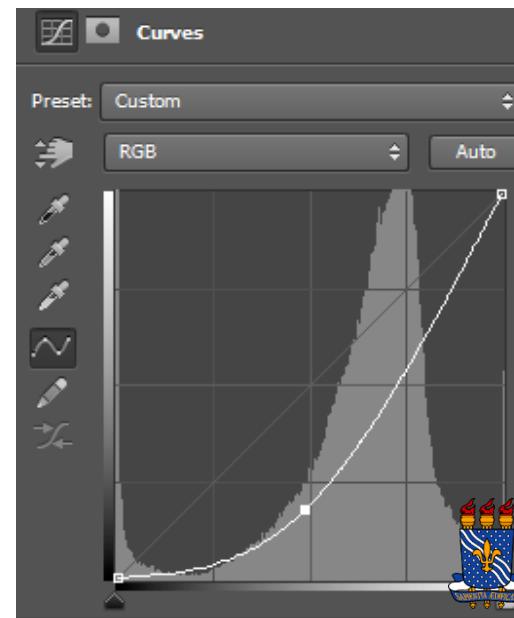
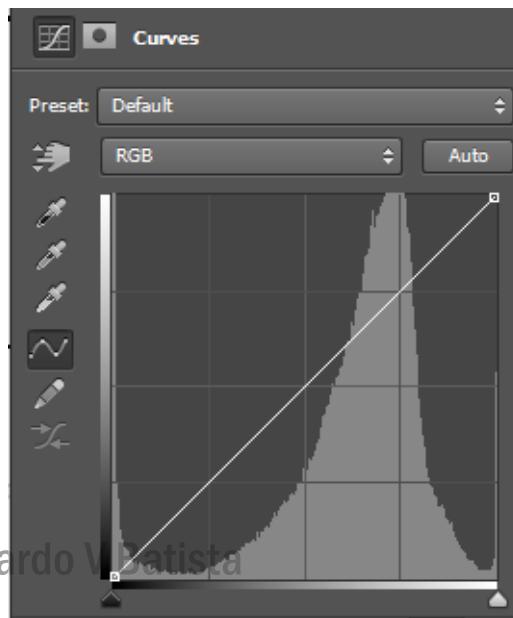
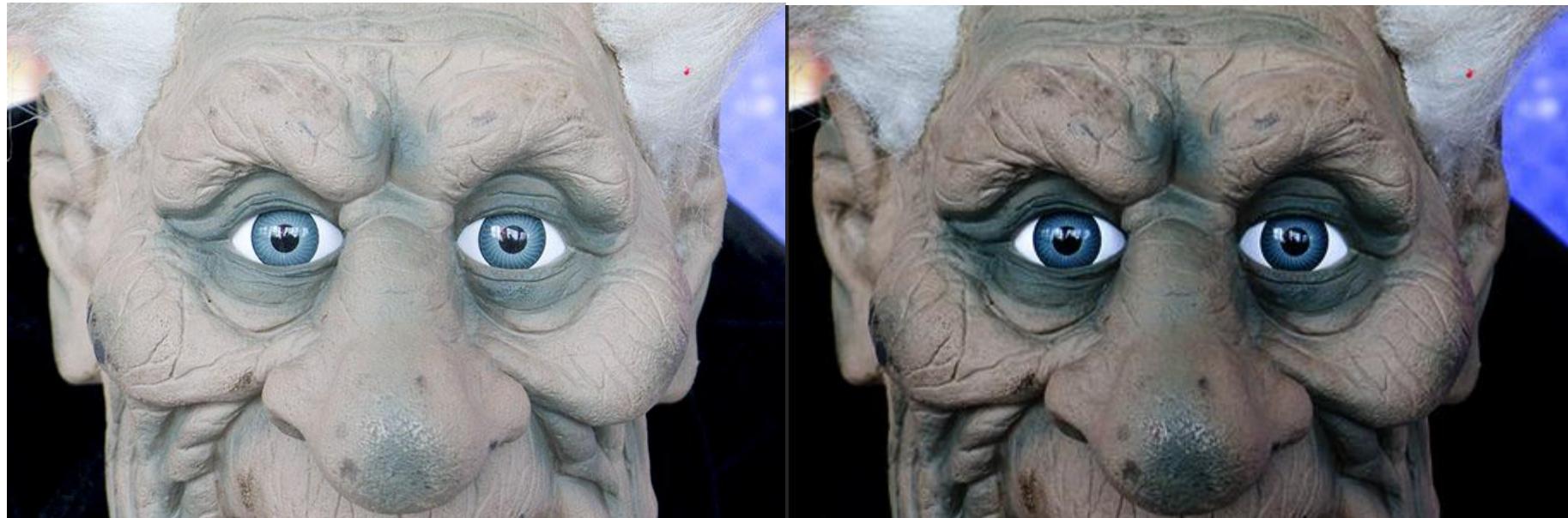
Aumento de contraste



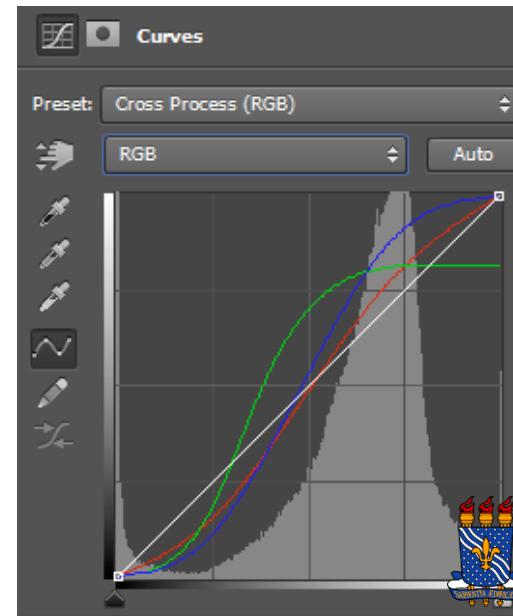
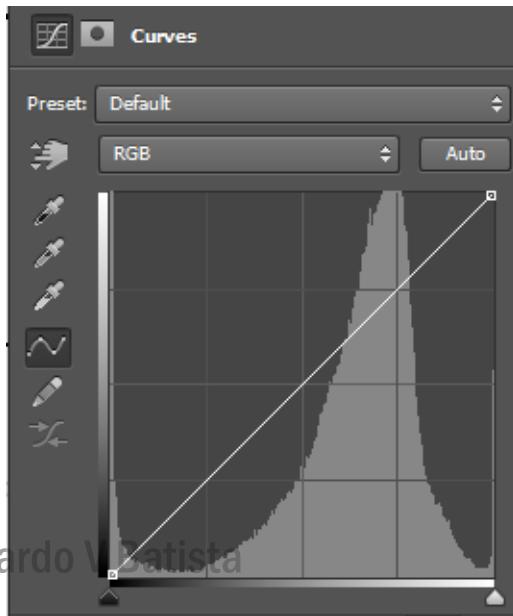
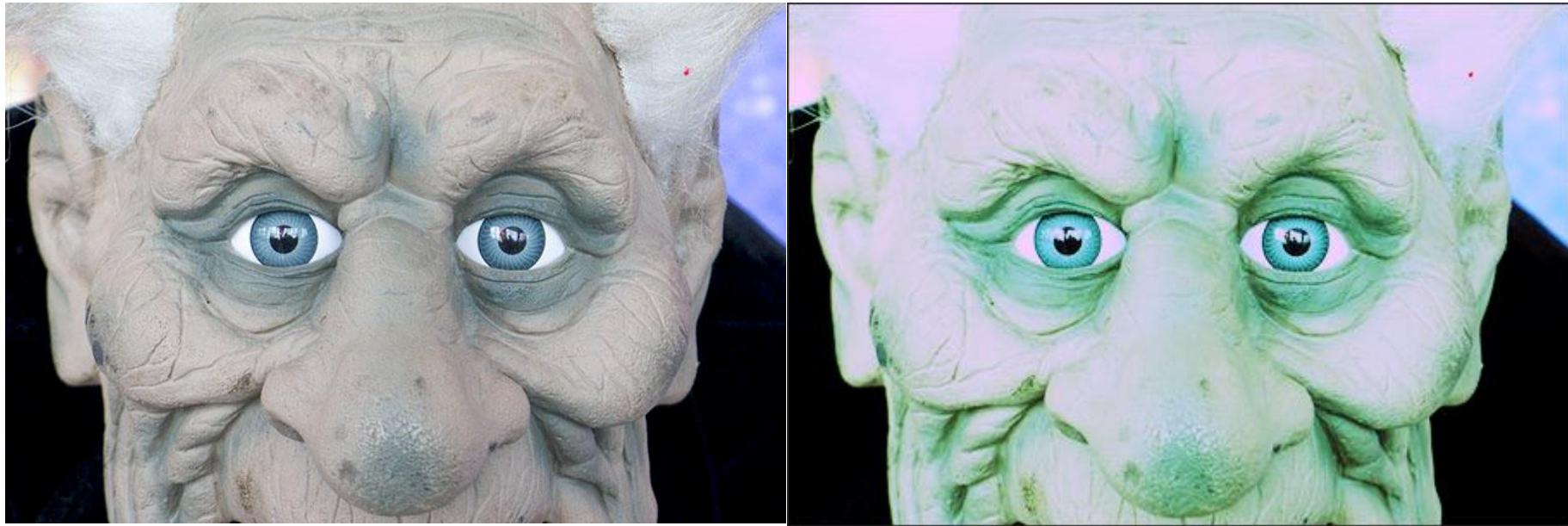
Redução de contraste



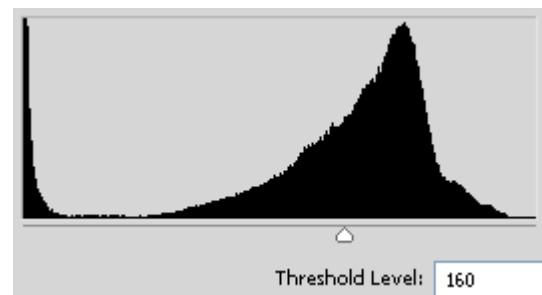
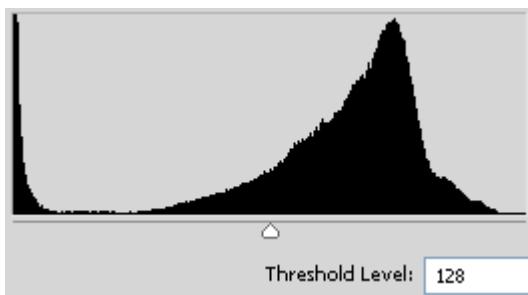
“Darker”



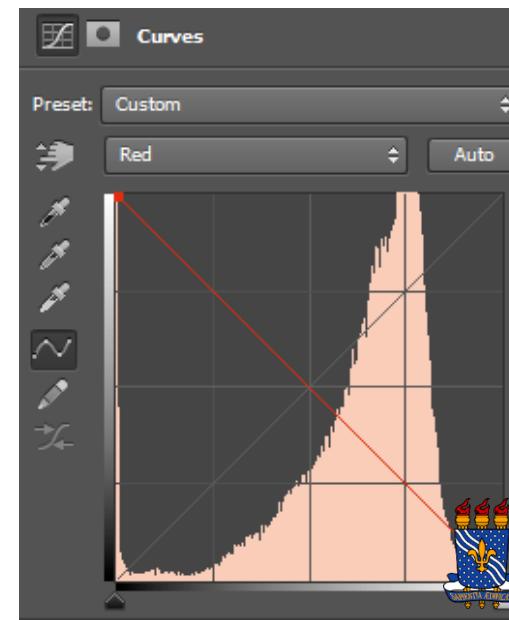
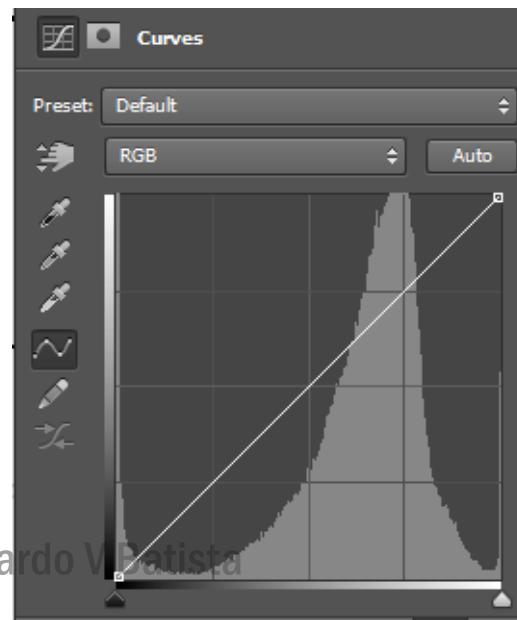
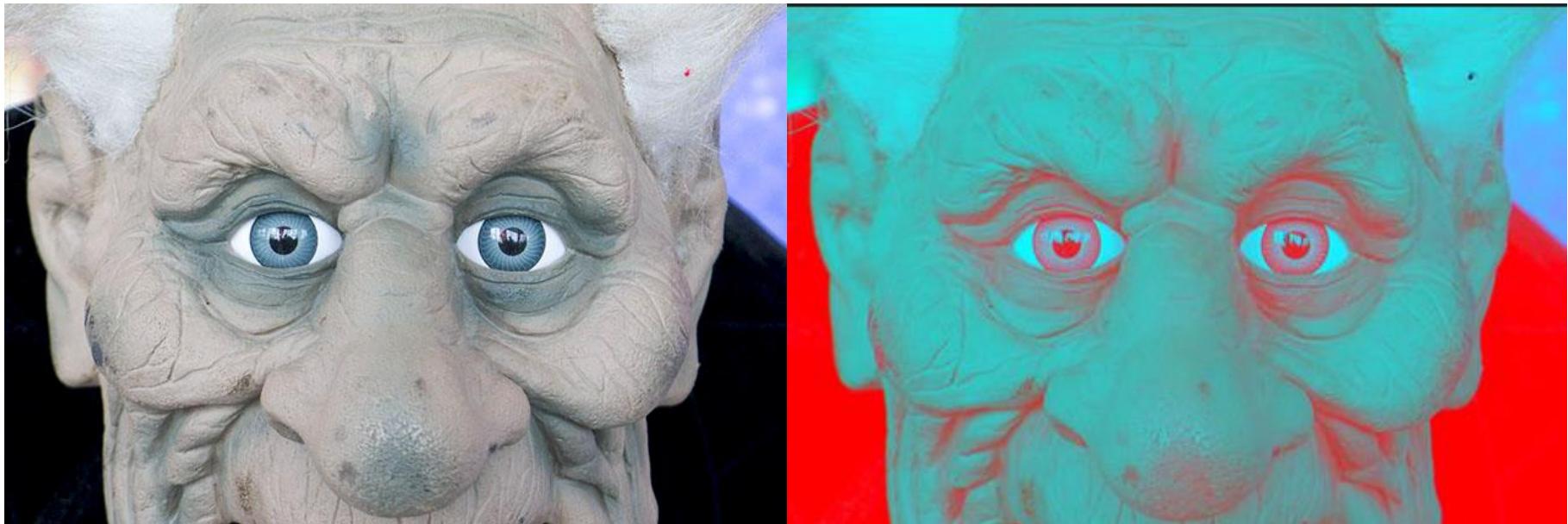
Cross process



Limiarização



Negativo em R



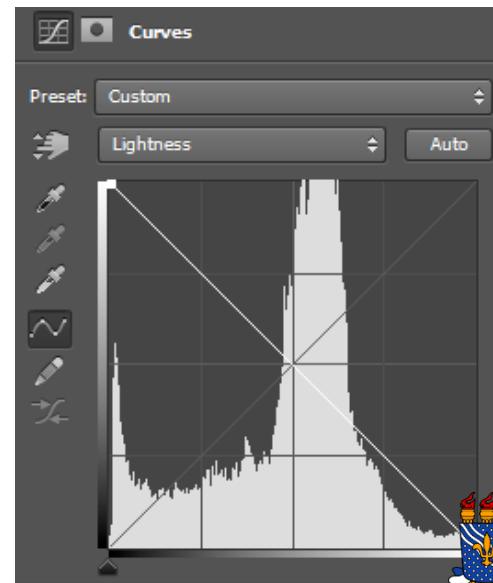
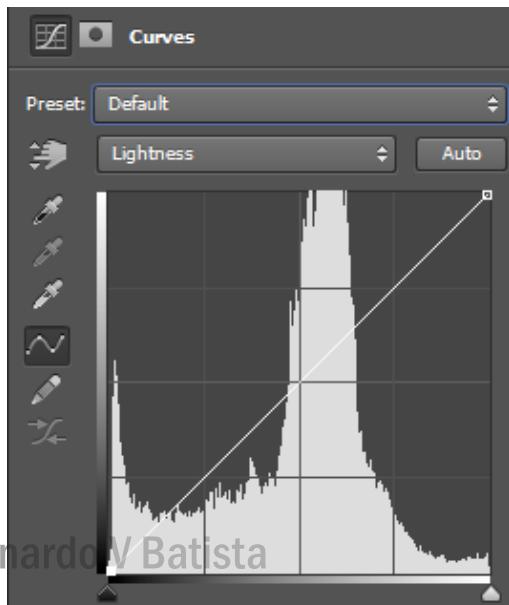
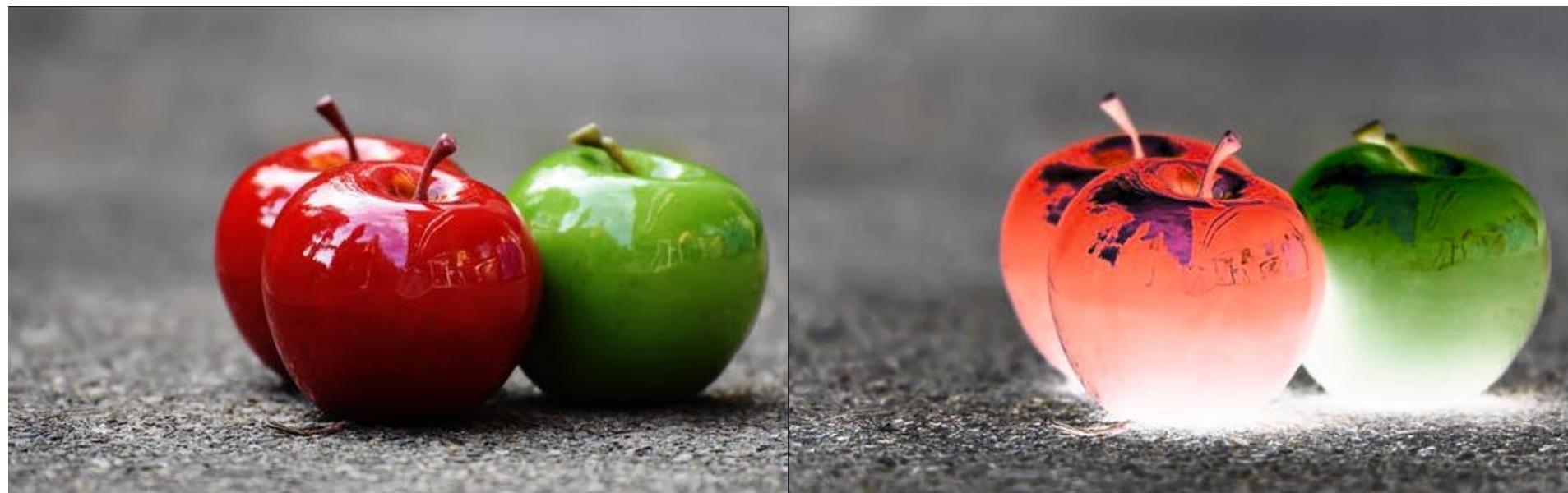
Negativo em RGB



Negativo em Y



Negativo no L do Sistema Lab

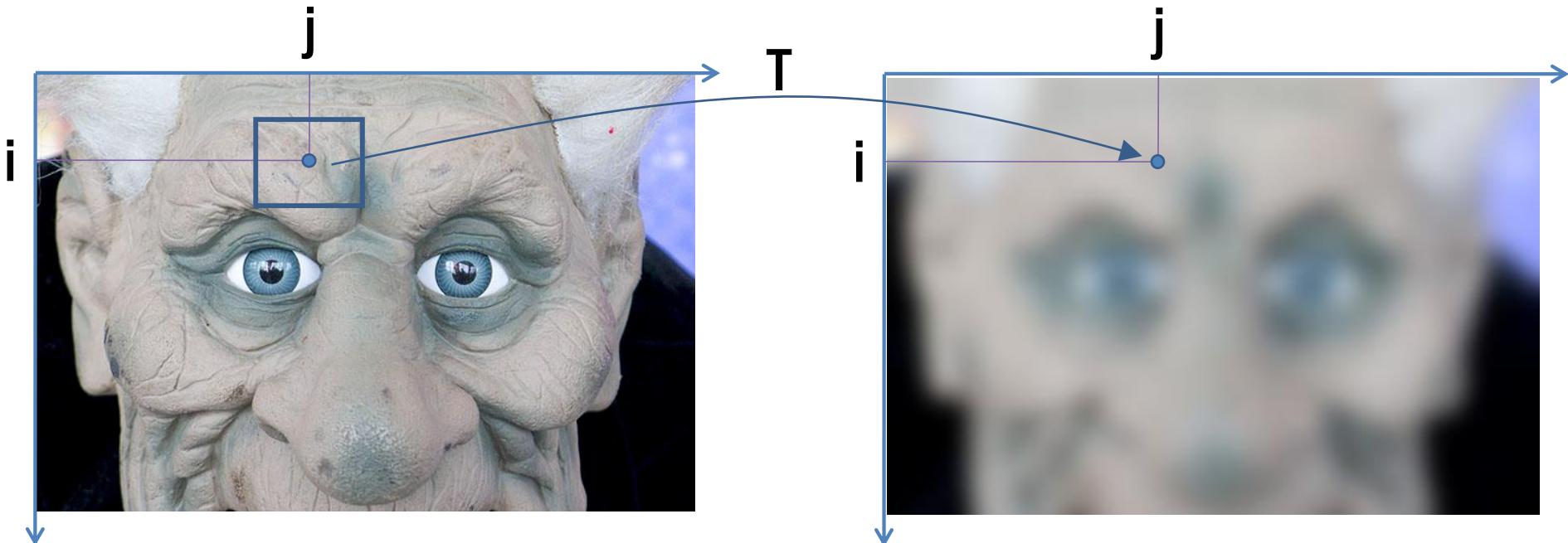


Negativo no L do Sistema Lab



Operações Locais

$g(i, j)$ depende dos valores dos pixels de f em uma vizinhança
 $v(i, j)$



Filtro Média ou Box

$$g(i, j) = \frac{1}{9} [f(i - 1, j - 1) + f(i - 1, j) + f(i - 1, j + 1) + \\ + f(i, j - 1) + f(i, j) + f(i, j + 1) + \\ + f(i + 1, j - 1) + f(i + 1, j) + f(i + 1, j + 1)]$$

Primeira e última coluna/linha?

Pode-se utilizar **extensão de f** com zeros

Correlação

Algumas operações podem ser representadas utilizando o conceito de **máscara** do filtro, h , cujas dimensões são iguais às de v , e a operação de **correlação**

A máscara desliza sobre a imagem de entrada e, em cada ponto (i,j) , calcula-se o produto interno de Frobenius entre h e $v(i,j)$, atribuindo-se o resultado ao ponto nas mesmas coordenadas na imagem resultante:

$$g(i,j) = \langle h, v(i,j) \rangle_F$$

Filtro Média

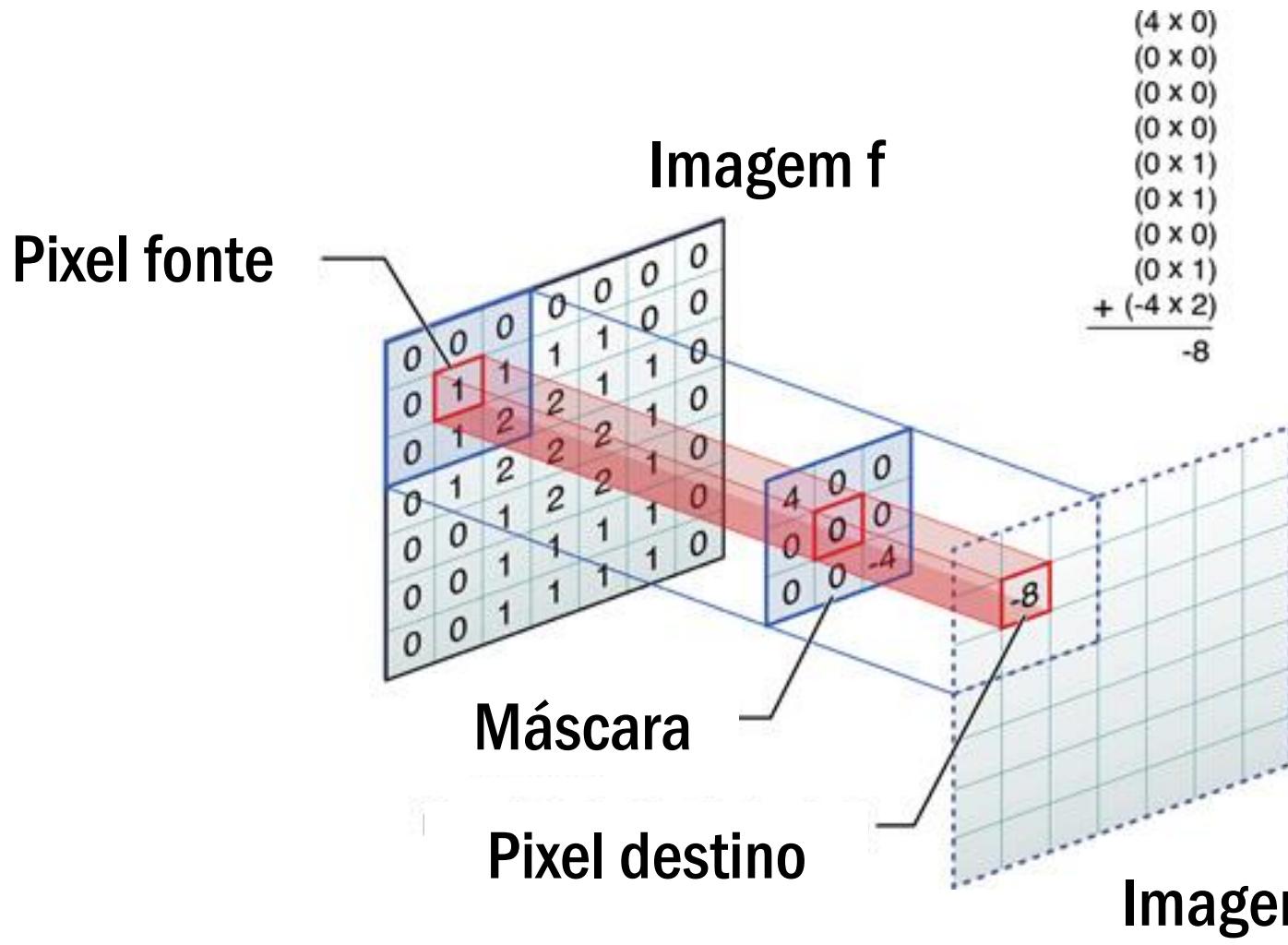
Para o filtro box 3x3, a máscara h é

1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9

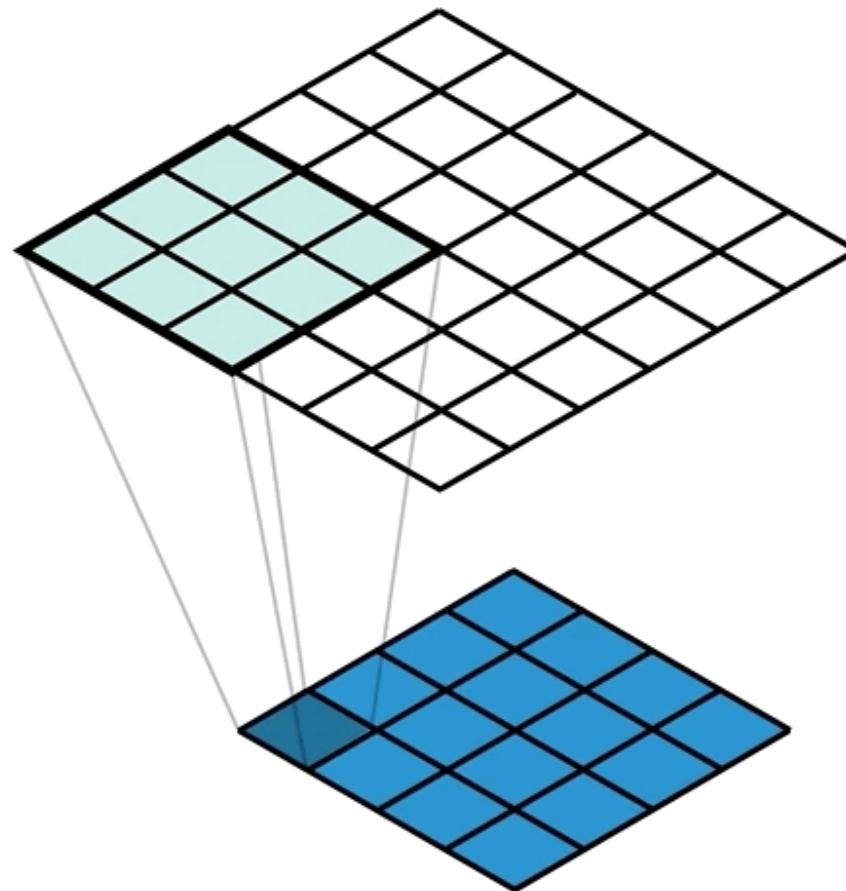
E a vizinhança $v(i,j)$ é

$f(i-1,j-1)$	$f(i-1,j)$	$f(i-1,j+1)$
$f(i,j-1)$	$f(i,j)$	$f(i,j+1)$
$f(i+1,j-1)$	$f(i+1,j)$	$f(i+1,j+1)$

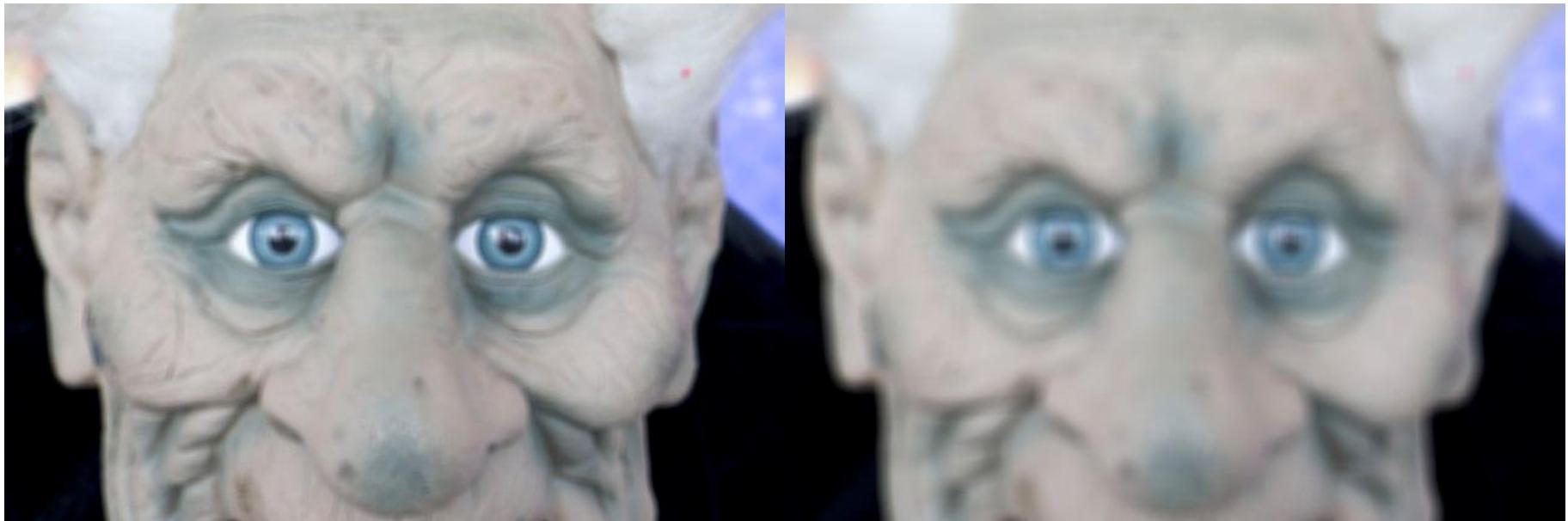
Correlação



Correlação



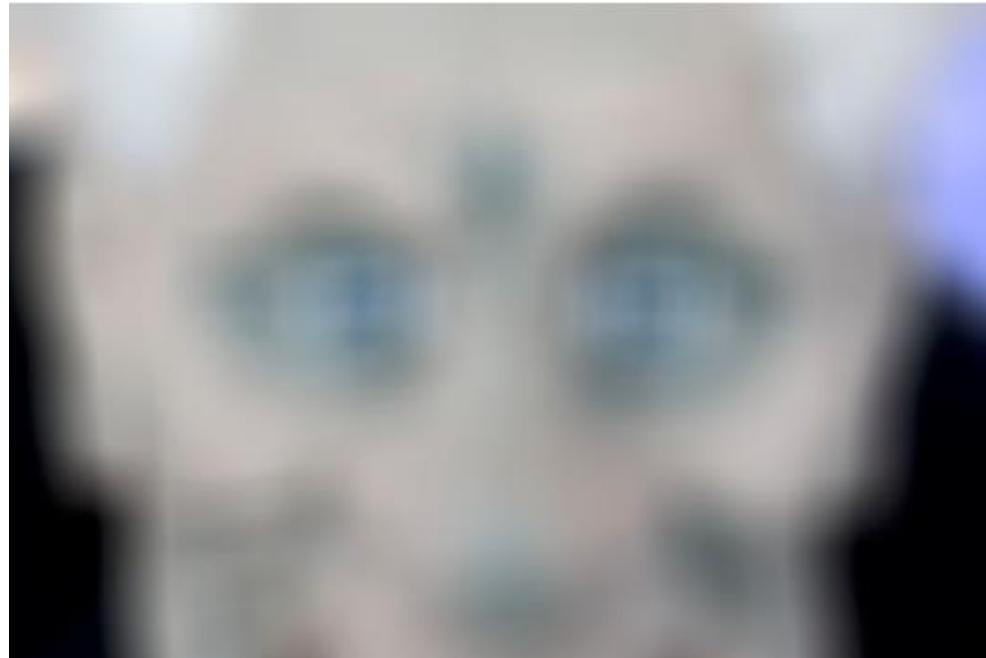
Filtro Média



Tamanho da máscara = 7x7

Tamanho da máscara = 15x15

Filtro Média



Tamanho da máscara = 49x49

Filtro Média - exercício

Encontrar g usando máscara 3×3 , com e sem extensão por zeros

f

16	20	10
4	5	5
2	8	5

Filtro Média: ações, Covid etc

BBDC4 (21,80 21,99 21,43 21,63 0,05%), Média Móvel A [21] (21,19), Média Móvel A [9] (21,40)



Filtros de suavização

Média, moda, mediana, gaussiano...

Vizinhança $m \times n$

Apenas **filtros lineares e invariantes** ao deslocamento
têm máscara convolucional

Filtro Gaussiano 3x3

0,0625	0,125	0,0625
0,125	0,25	0,125
0,0625	0,125	0,0625

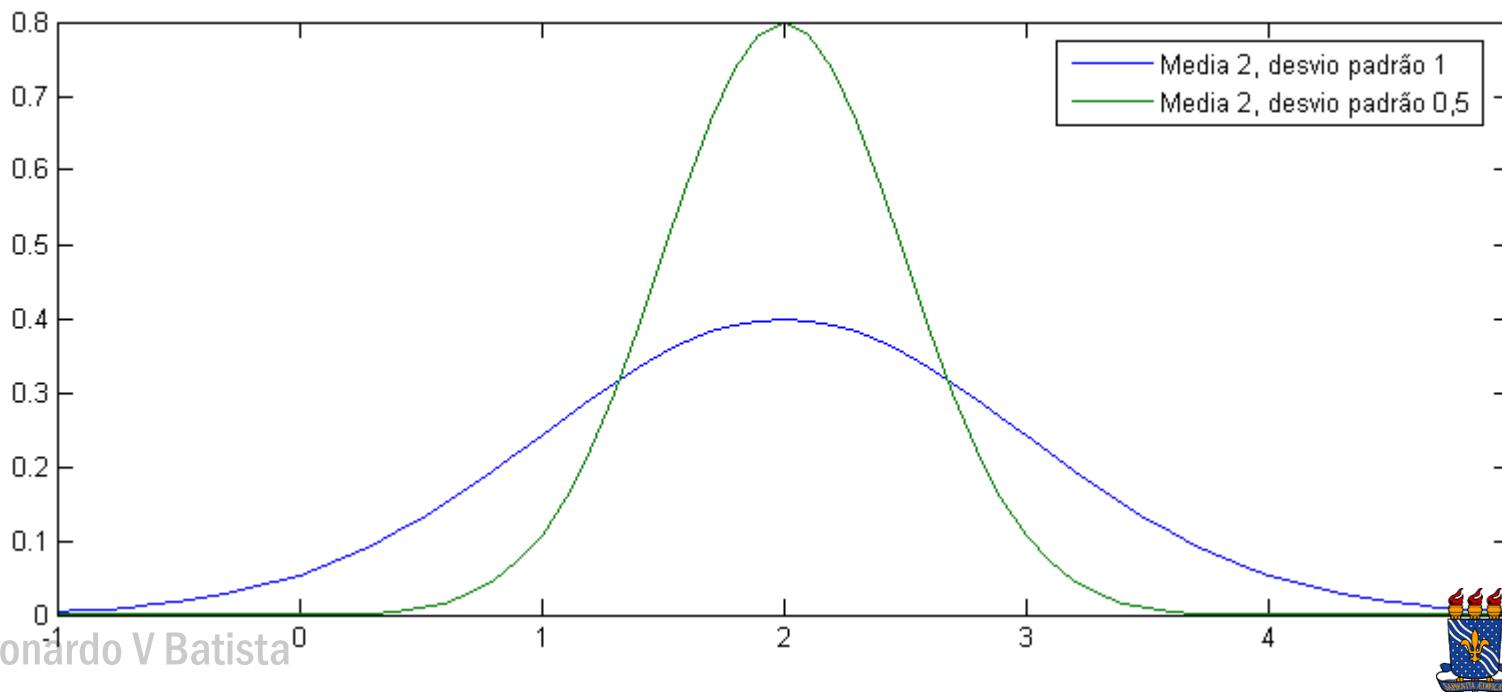
Os coeficientes somam para **1** (caso contrário, aumento ou redução de brilho, além de suavização)

Seguem uma **curva gaussiana 2D**

Curva Gaussiana ou Normal

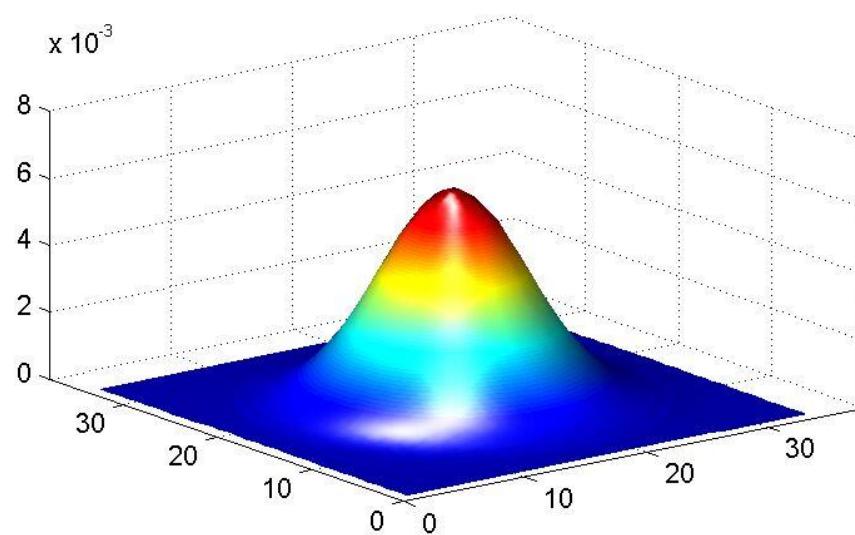
Desvio padrão σ e média μ

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Curva Gaussiana 2D

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2 + (y-\mu_y)^2}{2\sigma^2}}$$

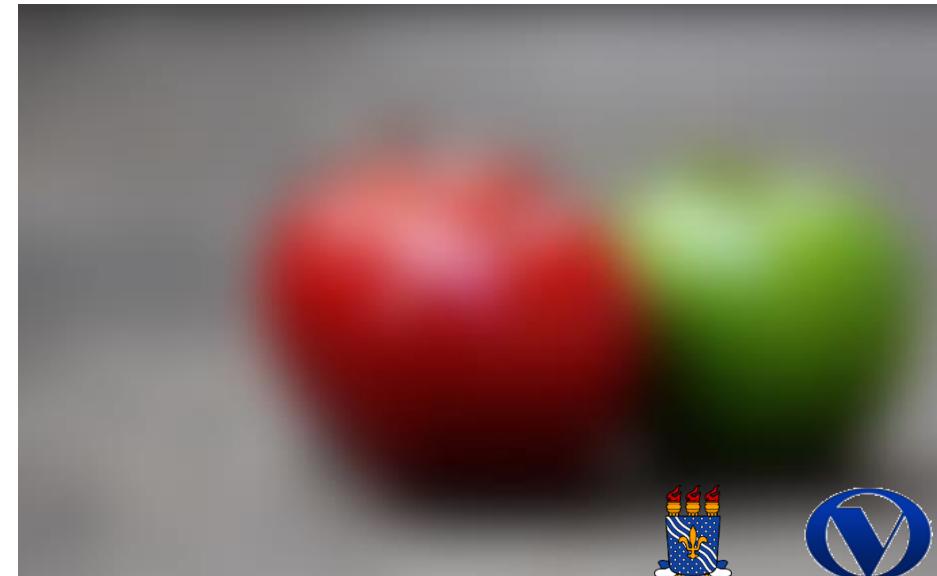


Filtro Gaussiano

Média



Gaussiano



Filtro Gaussiano no Photoshop



Filtro Gaussiano no Photoshop



Filtro Mediana

$g(i,j) = \text{mediana de } f(i,j) \text{ em uma vizinhança } m \times n \text{ de } (i,j)$

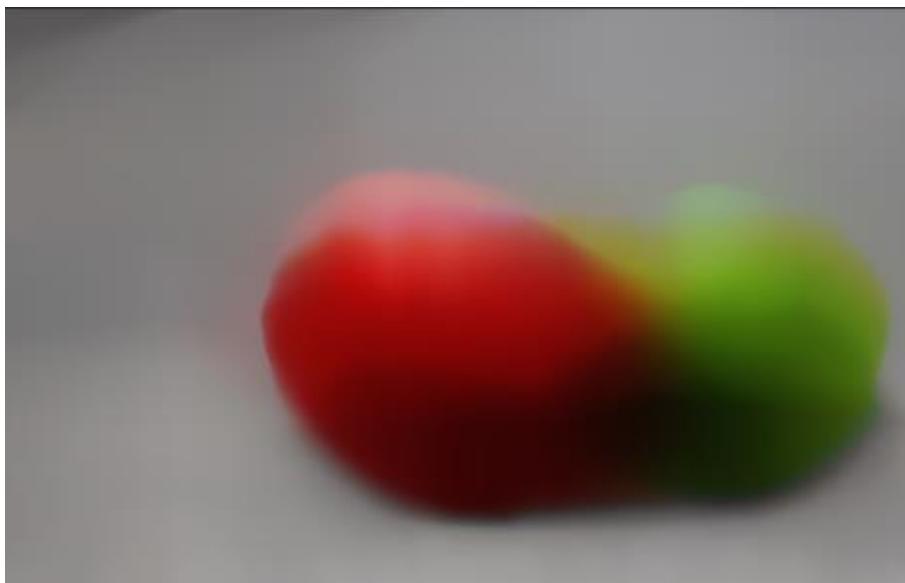
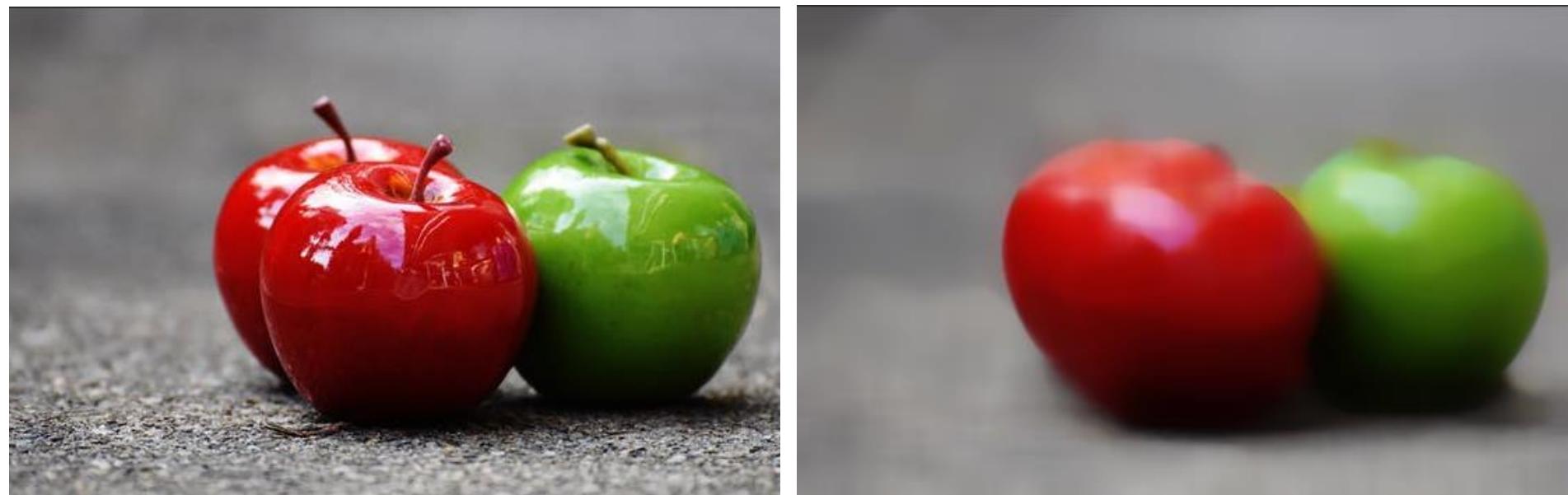
Mediana: ordena os valores e seleciona o valor central.

Exemplo:

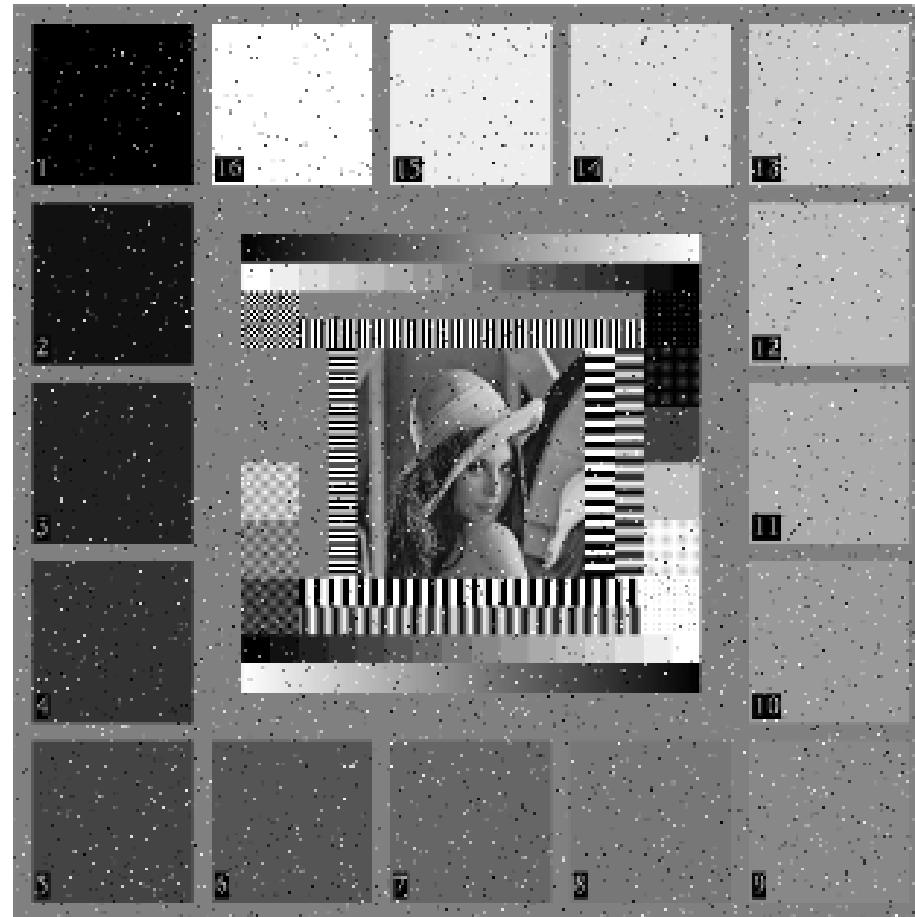
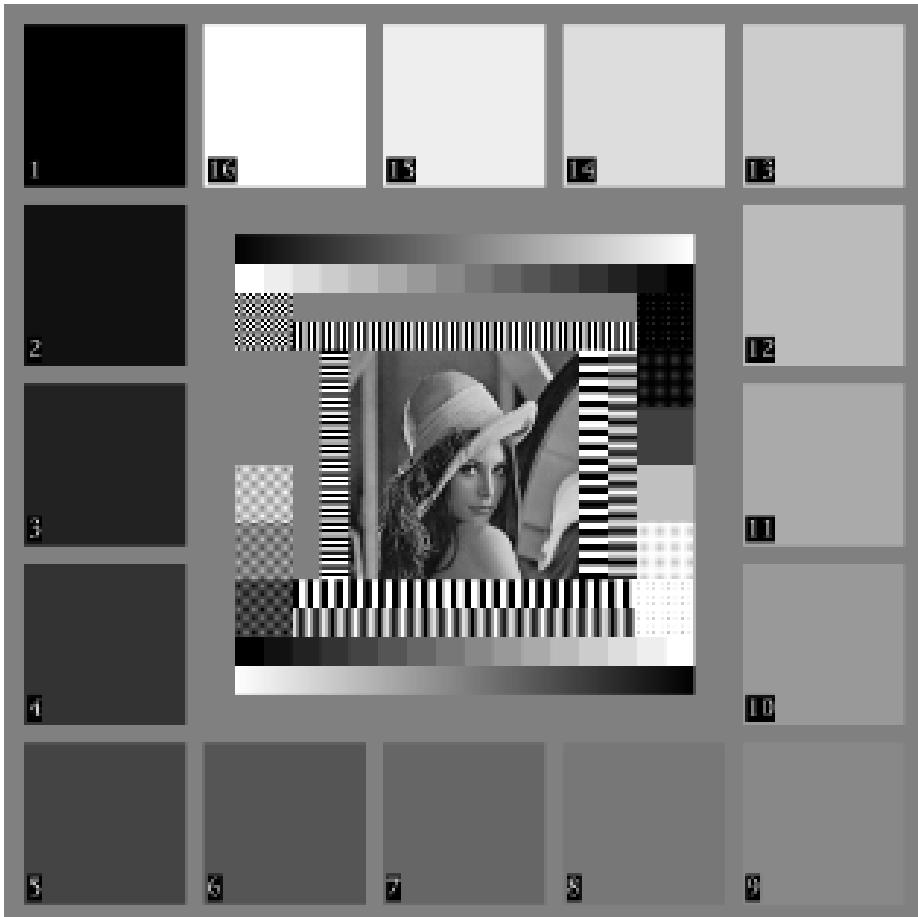
16	20	10
4	4	4
2	8	5

2, 4, 4, 4, 5, 8, 10, 16, 20

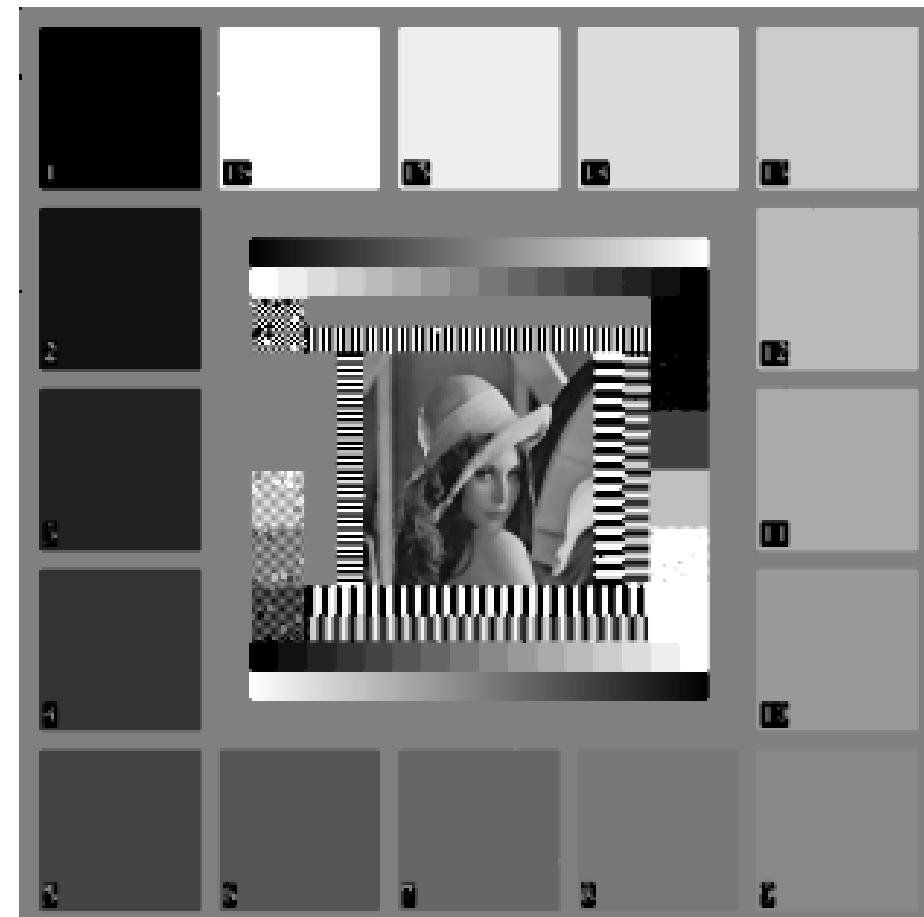
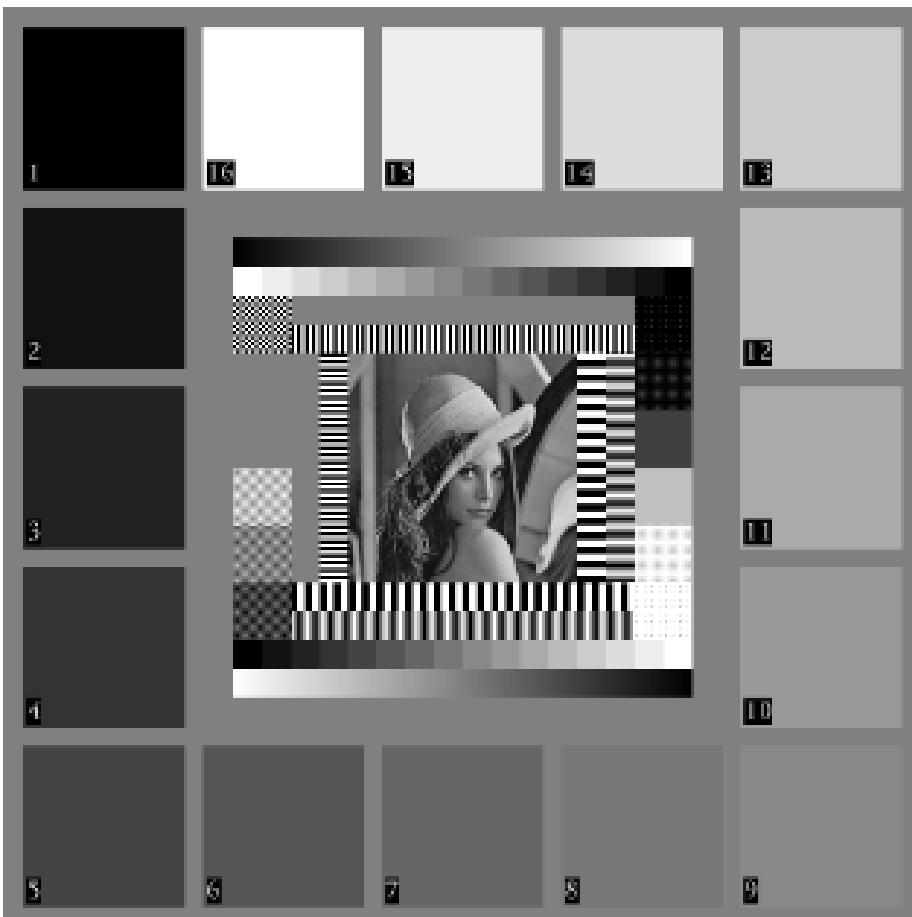
Filtro Mediana



Ruído Salt-and-Pepper



Mediana para redução de Salt-and-Pepper



Filtro Mediana - Exercício

Encontre g utilizando um filtro mediana 3×3 , com extensão por zeros

f		
16	20	10
4	4	4
2	8	5

Filtros Mediana e Box - Exercício

Encontre g utilizando (a) um filtro mediana 3×3 e (b) um filtro box 3×3 , sem extensão por zeros

f

0	0	0	255	255	255
0	0	0	255	255	255
0	0	0	255	255	255

Filtros Mediana e Box- Exercício

Encontre g utilizando (a) um filtro mediana 3×3 e (b) um filtro box 3×3 , sem extensão por zeros

f

128	128	128	128	128	128
128	0	128	128	255	128
128	128	128	128	128	128

Filtros Mediana e Box- Exercício

Encontre g utilizando (a) um filtro mediana 3x3; (b) um filtro box 3x3, sem extensão por zeros

f

128	0	0	255	255	128
128	0	0	255	255	128
128	128	128	128	128	128

Filtros Mediana e Box- Exercício

Encontre g utilizando (a) um filtro mediana $1x3$ seguido por um filtro mediana $3x1$; (b) um filtro box $1x3$ seguido por um filtro box $3x1$, sem extensão por zeros

f

128	0	0	255	255	128
128	0	0	255	255	128
128	128	128	128	128	128

Filtro Moda- Exercício

Encontre g utilizando um filtro moda 3x3, com extensão por zeros
(moda: valor mais frequente)

f

16	20	20
4	4	5
2	8	5

Filtros de detecção de bordas

Efeito contrário ao de suavização: **acentuam variações** de intensidade entre pixels adjacentes.

Baseados no **gradiente** de funções contínuas de duas variáveis.

Gradiente de $f(x, y)$:

$$G[f(x, y)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \quad ||G|| = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2}$$
$$\theta(G) = ?$$

Ângulo do gradiente

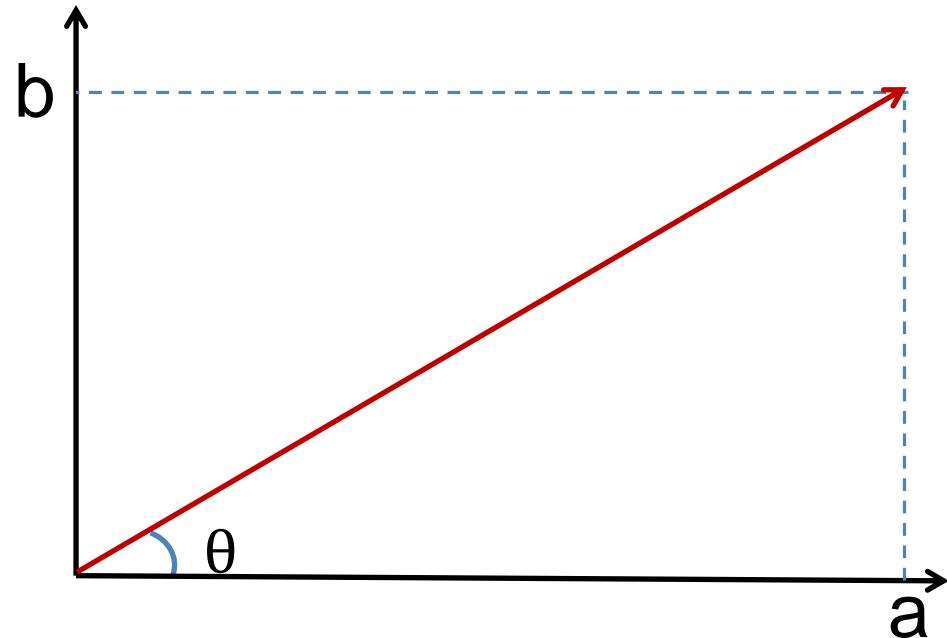
$$\operatorname{tg} \theta = b/a$$

$$\theta = \operatorname{arctg} b/a$$

$$\operatorname{arctg} 4/4 = \operatorname{arctg} 1 = ?$$

$$\operatorname{arctg} -4/-4 = \operatorname{arctg} 1 = ?$$

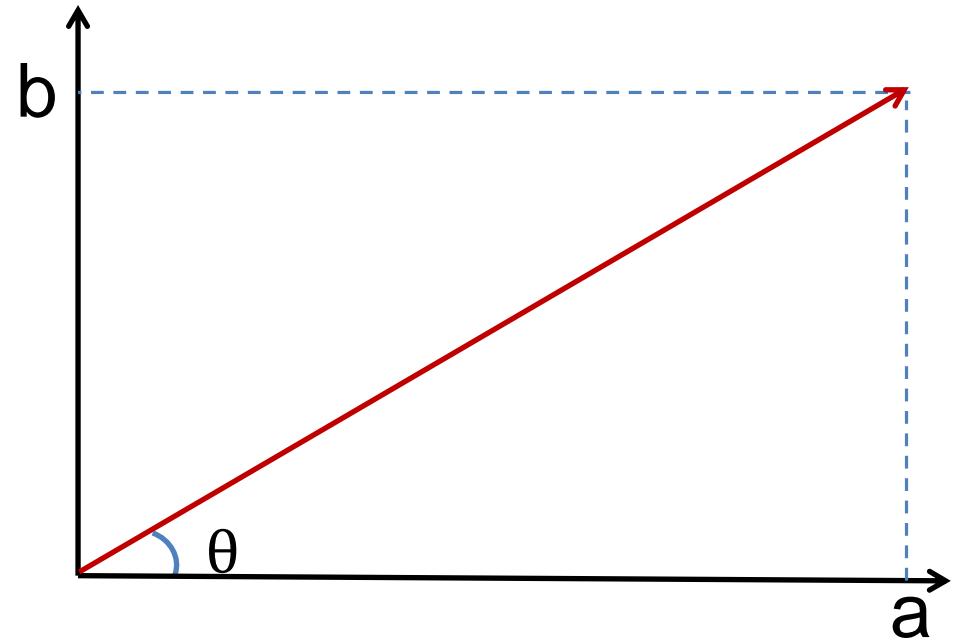
$$\operatorname{arctg} 1 = 45^\circ$$



arctg dá a direção, mas não o sentido

Observando os sinais de a e b tem-se o sentido

Ângulo do gradiente



MATLAB

`theta = atan(b/a)`

`theta = atan2(a, b)`

% $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$

% $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Vetor gradiente

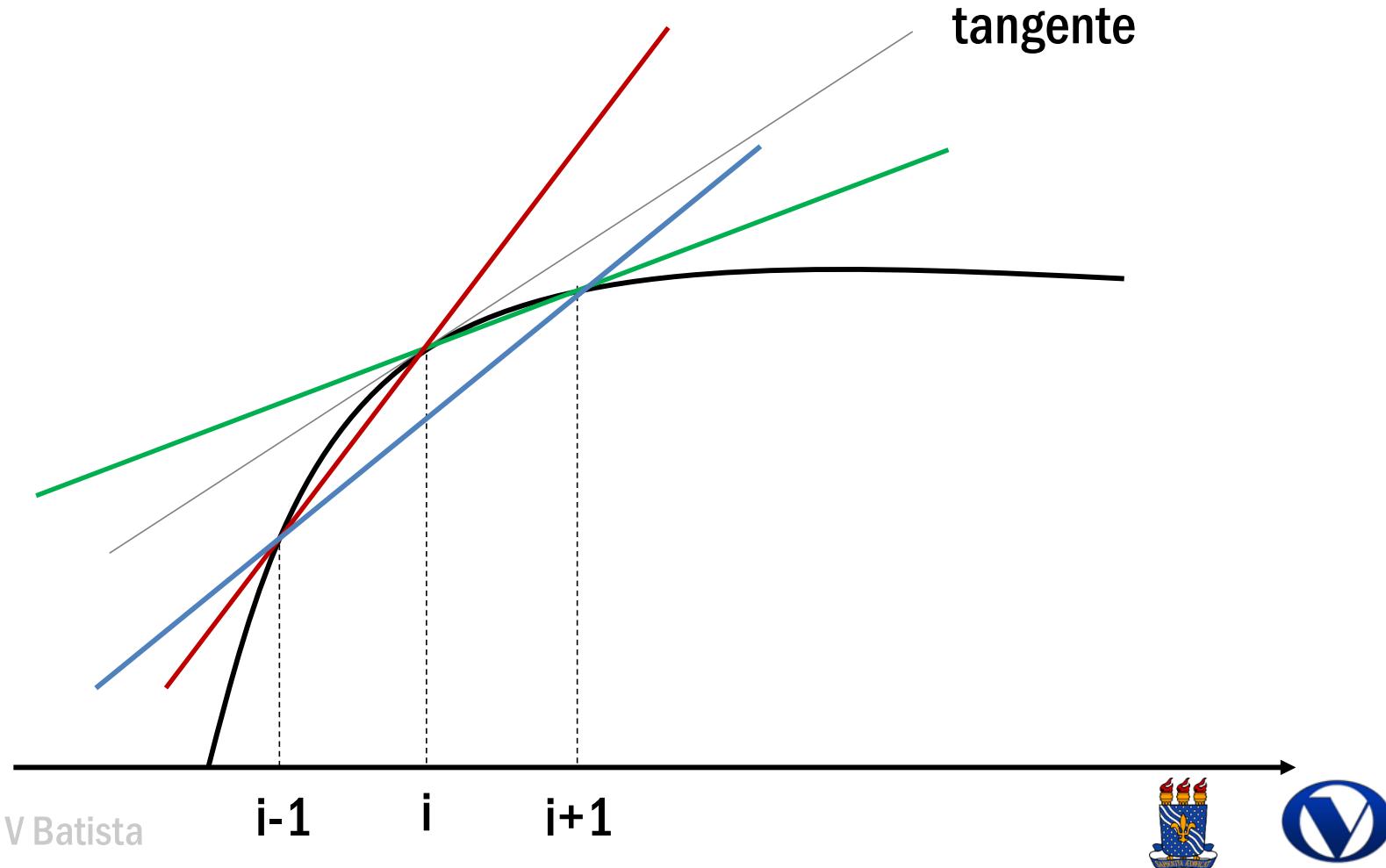
$$G[f(x, y)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \quad \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \right)$$

Uma aproximação discreta:

$$\frac{df[i]}{di} = \frac{f[i + 1] - f[i]}{1}$$

Vetor gradiente

Algumas aproximações discretas possíveis



Filtros de detecção de bordas

$g(i, j)$: aproximação discreta do módulo do vetor gradiente em $f(i, j)$.

Aproximações usuais:

$$g(i, j) = \{[f(i+1, j) - f(i, j)]^2 + [f(i, j+1) - f(i, j)]^2\}^{1/2}$$

$$g(i, j) = |f(i+1, j) - f(i, j)| + |f(i, j+1) - f(i, j)|$$

Gradiente de Roberts:

$$g(i, j) = \{[f(i, j) - f(i+1, j+1)]^2 + [f(i+1, j) - f(i, j+1)]^2\}^{1/2}$$

$$g(i, j) = |f(i, j) - f(i+1, j+1)| + |f(i+1, j) - f(i, j+1)|$$

Filtros de detecção de bordas

Gradiente de Prewitt:

$$g(i, j) =$$

$$| f(i+1, j-1) + f(i+1, j) + f(i+1, j+1) - f(i-1, j-1) - f(i-1, j) - f(i-1, j+1) | + \\ + | f(i-1, j+1) + f(i, j+1) + f(i+1, j+1) - f(i-1, j-1) - f(i, j-1) - f(i+1, j-1) |$$

Gradiente de Sobel:

$$g(i, j) =$$

$$| f(i+1, j-1) + 2f(i+1, j) + f(i+1, j+1) - f(i-1, j-1) - 2f(i-1, j) - f(i-1, j+1) | + \\ + | f(i-1, j+1) + 2f(i, j+1) + f(i+1, j+1) - f(i-1, j-1) - 2f(i, j-1) - f(i+1, j-1) |$$

Filtro Gradiente de Sobel

Máscaras convolucionais horizontal e vertical

Aproximação para derivada parcial horizontal e vertical

Detectores de bordas verticais e horizontais

-1	-2	-1
0	0	0
1	2	1

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

Gradiente de Sobel - exemplo

Vizinhanças da imagem:

10	10	10
10	10	10
10	10	10

0	10	10
0	10	10
0	10	10

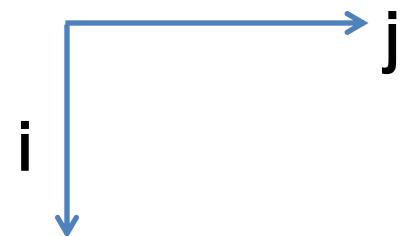
10	10	10
0	10	10
0	0	10

10	10	10
10	10	10
0	0	0

10	10	0
10	10	0
10	10	0

Máscara correlacional
de Sobel horizontal

-1	-2	-1
0	0	0
1	2	1



df_i

0

0

-30

-40

0

Gradiente de Sobel - exemplo

Vizinhanças da imagem:

10	10	10
10	10	10
10	10	10

0	10	10
0	10	10
0	10	10

10	10	10
0	10	10
0	0	10

10	10	10
10	10	10
0	0	0

10	10	0
10	10	0
10	10	0

Máscara correlacional
de Sobel vertical

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1



df_j

0

40

30

0

-40

Gradiente de Sobel - exemplo

Calcule a norma e o sentido do gradiente de Sobel em cada vizinhança. Use correlação.

df_i	0	0	-30	-40	0
df_j	0	40	30	0	-40
$ G $	0	40	60	40	40
θ	?	0°	45°	90°	180°

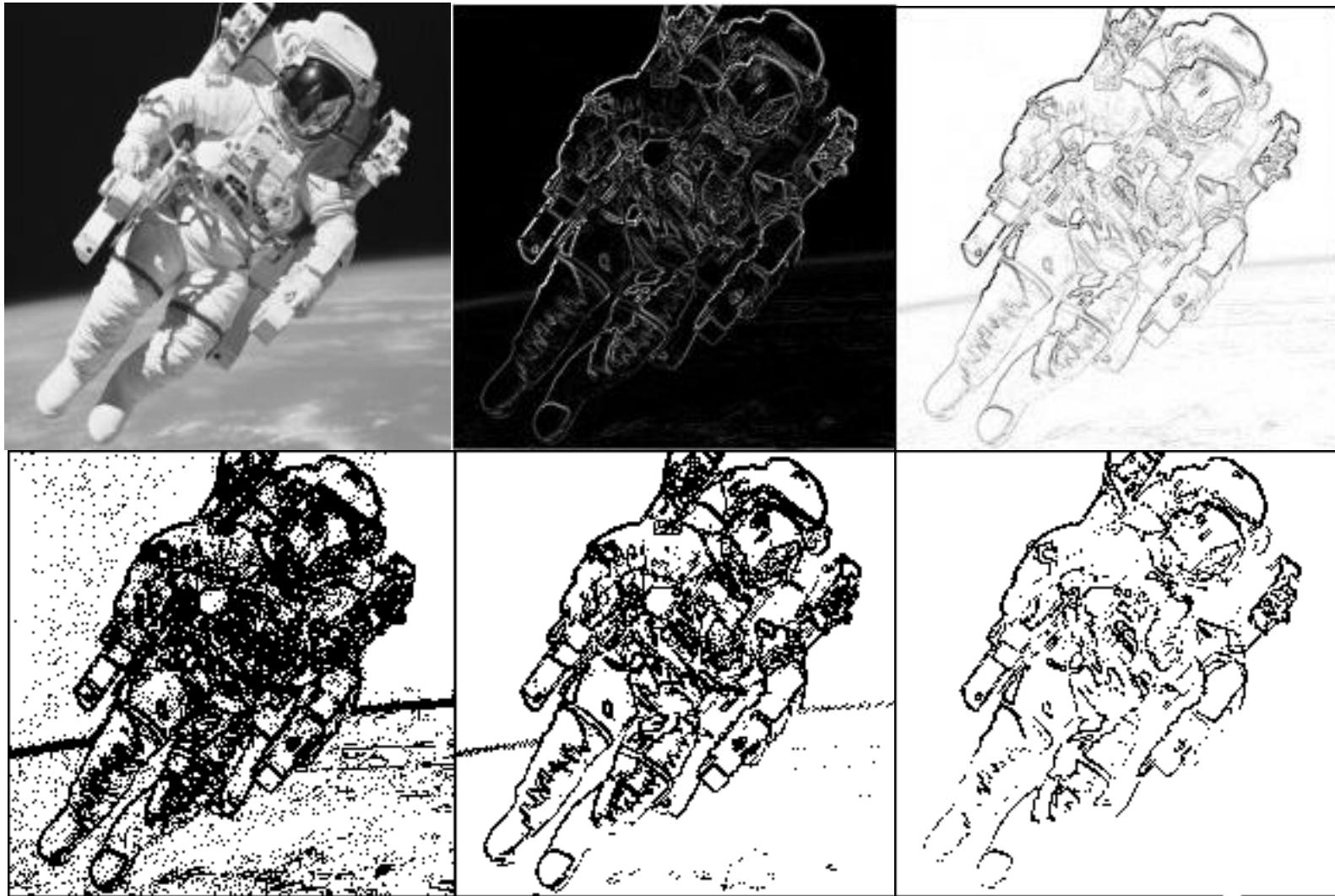
Gradiente de Sobel - exemplo



| Sobel vertical |

| Sobel horizontal |

Gradiente de Roberts



Processamento de histograma

Se o nível de cinza ℓ ocorre n_ℓ vezes em imagem com n pixels, então:

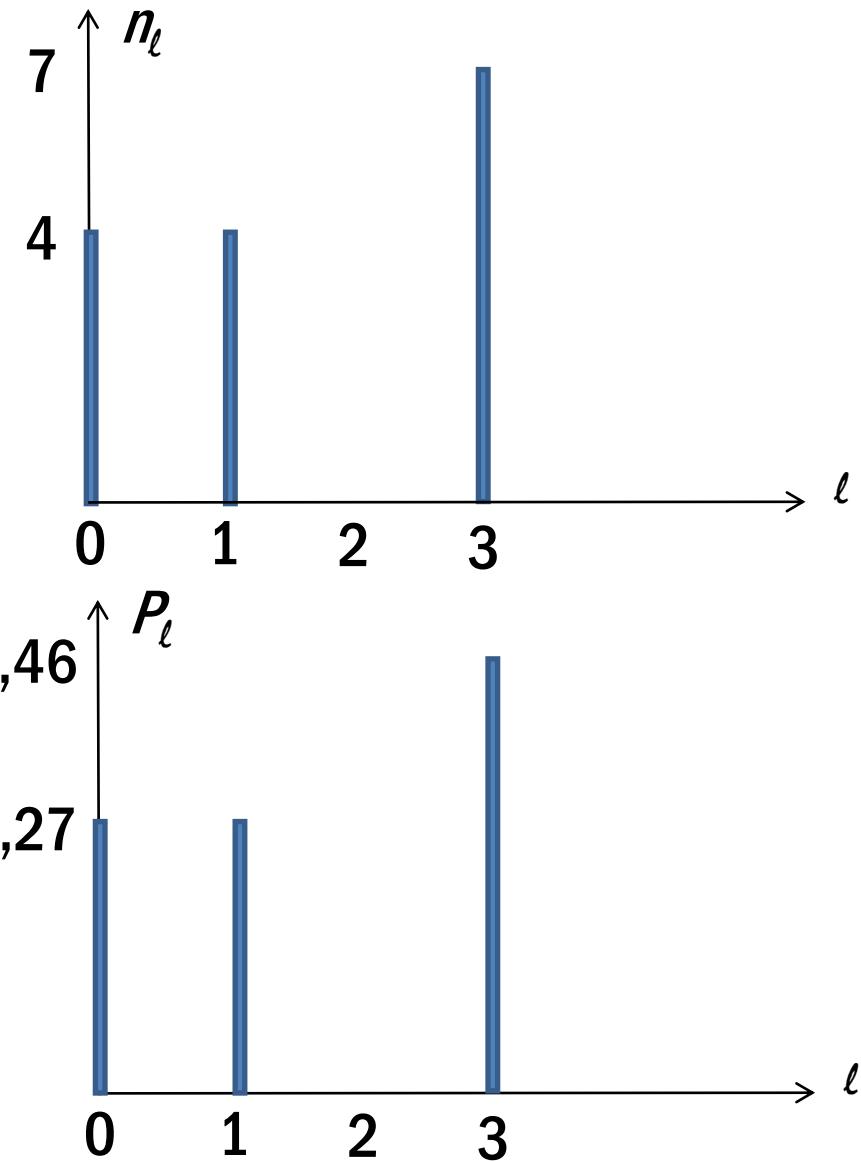
$$P_\ell = \frac{n_\ell}{n}$$

O **histograma** da imagem é uma representação gráfica de n_ℓ x ℓ ou de P_ℓ x ℓ

Histograma - exemplo

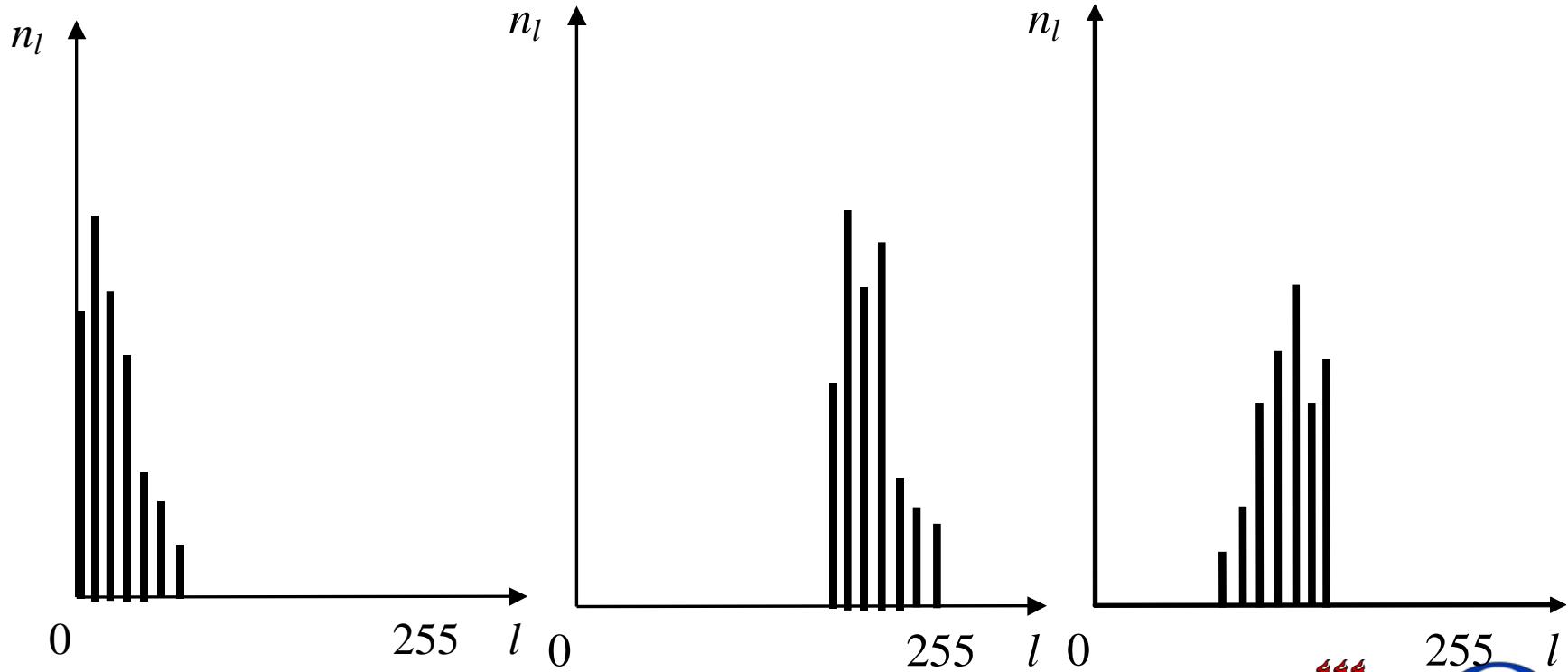
Imagen 3×5 ($L = 4$)

1	0	0	3	3
0	0	3	3	3
1	1	1	3	3

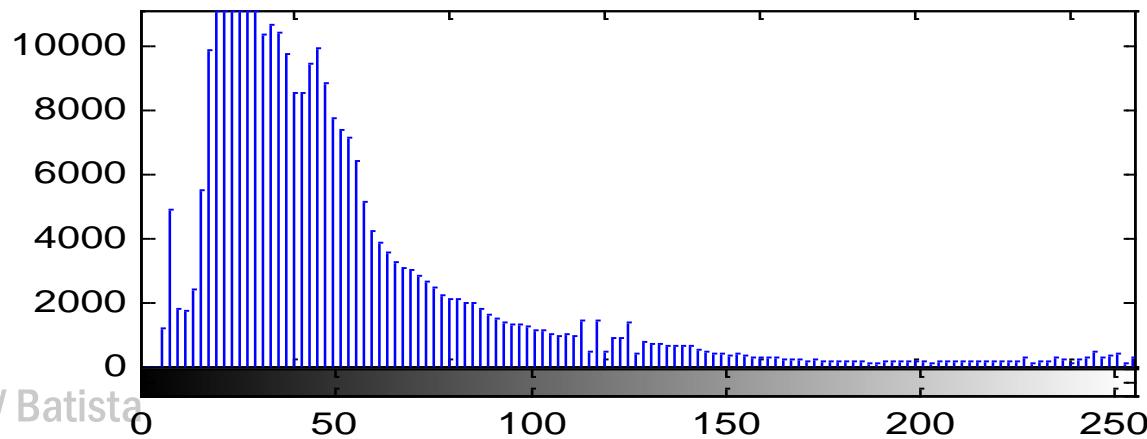


Histograma

O histograma representa a distribuição estatística de níveis de cinza de uma imagem



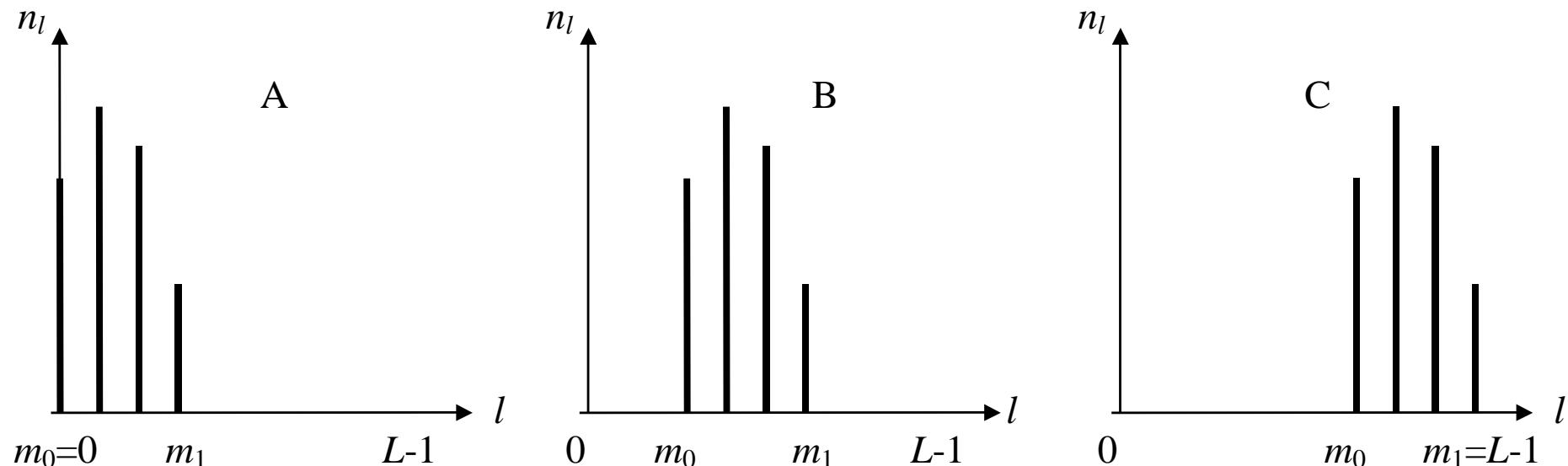
Histograma - exemplo



Expansão de histograma

É um método de **normalização** de imagens

Pode produzir uma imagem visualmente mais rica



Redistribuir níveis de cinza de modo que

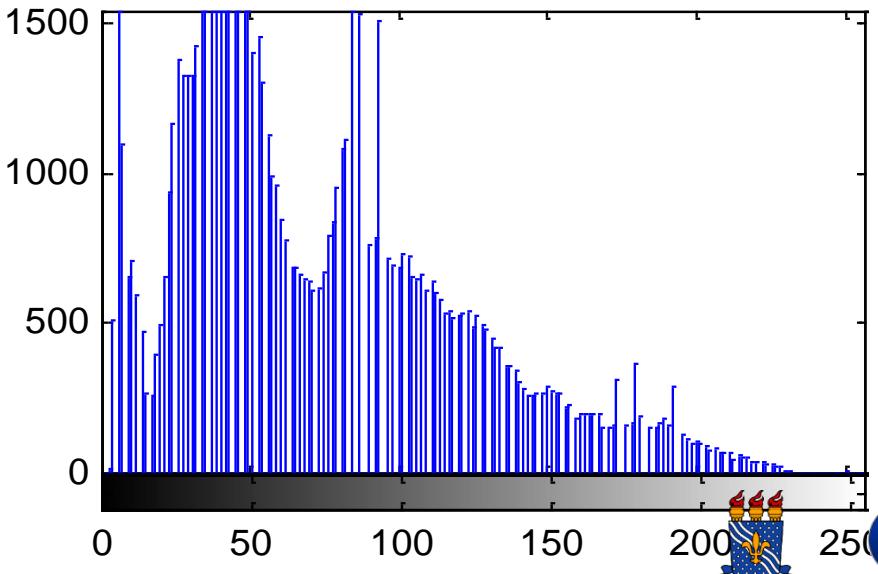
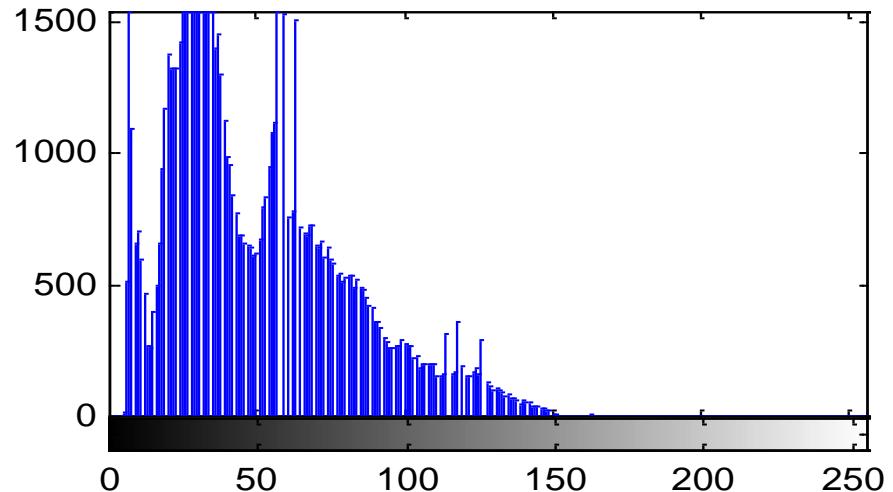
Nível mínimo = 0

Nível máximo = L-1

Expansão de histograma

$$s = T(r) = \text{round} \left(\frac{r - r_{\min}}{r_{\max} - r_{\min}} (L - 1) \right)$$

Expansão de histograma



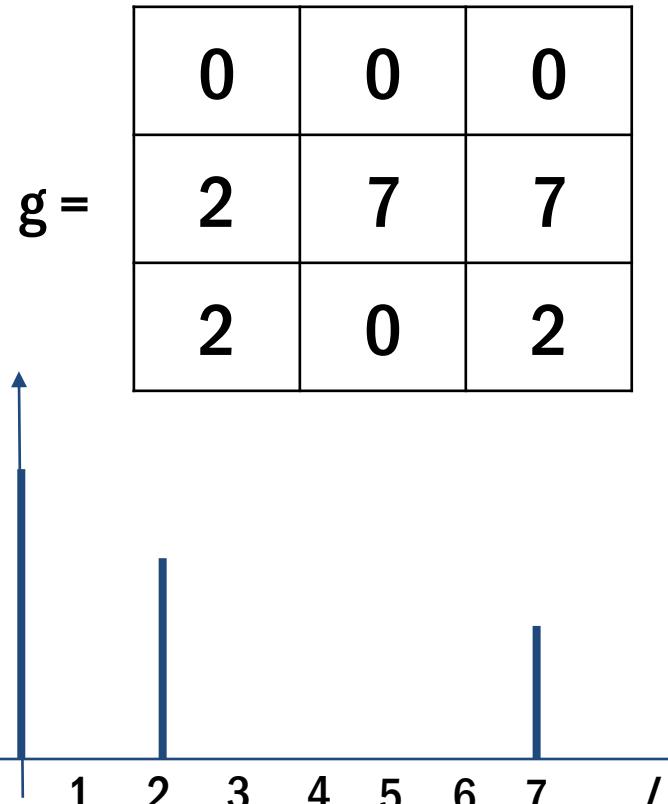
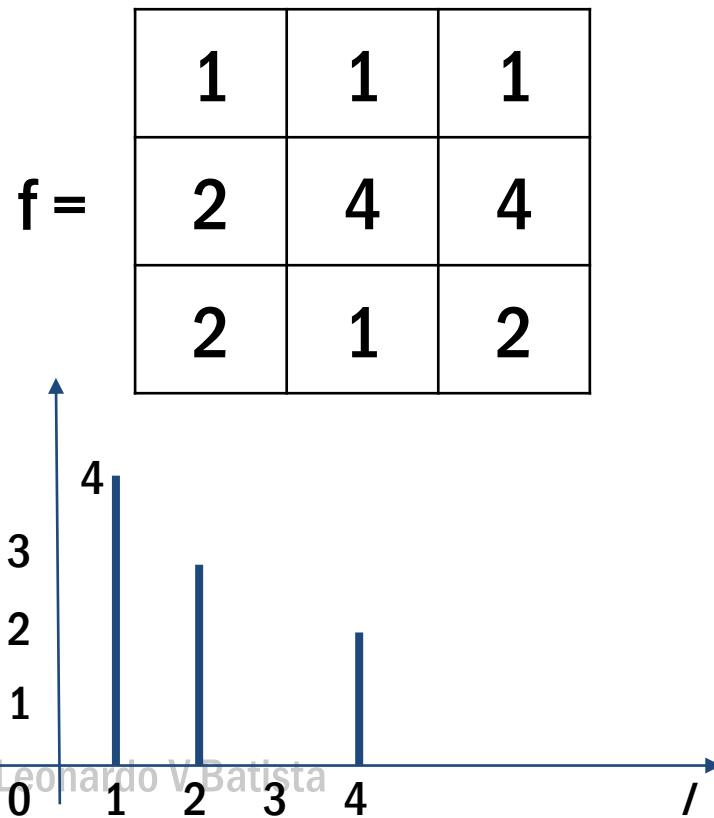
Expansão de histograma - exercício

Desenhe o histograma e calcule a expansão de histograma da imagem f com $L = 8$.

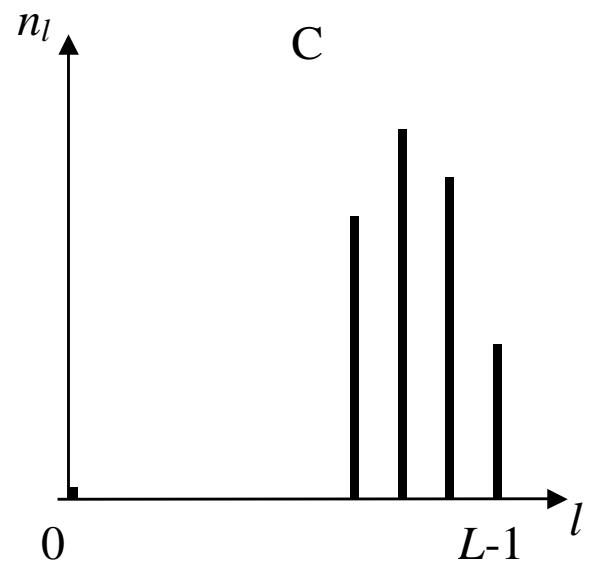
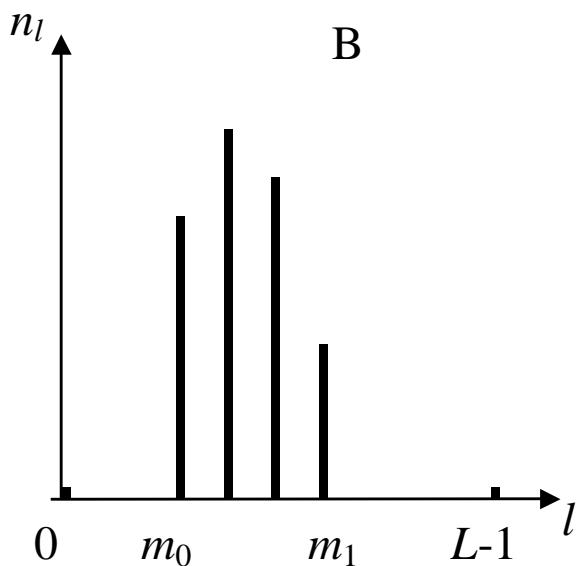
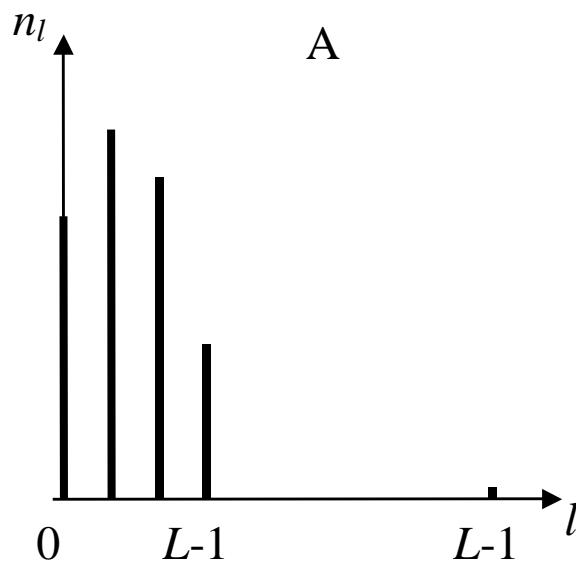
$$f = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 4 & 4 \\ \hline 2 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Expansão de histograma – solução do exercício

$$s = T(r) = \text{round} \left(\frac{r-1}{3} (8-1) \right) = \text{round} \left(\frac{7(r-1)}{3} \right)$$



Quando a expansão é ineficaz?



Equalização de Histograma

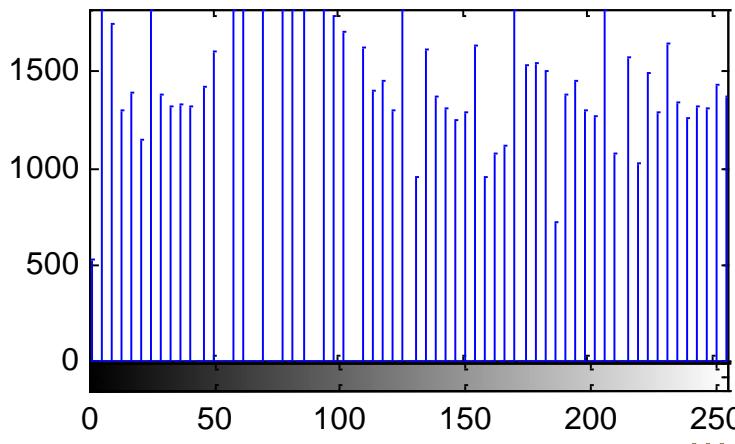
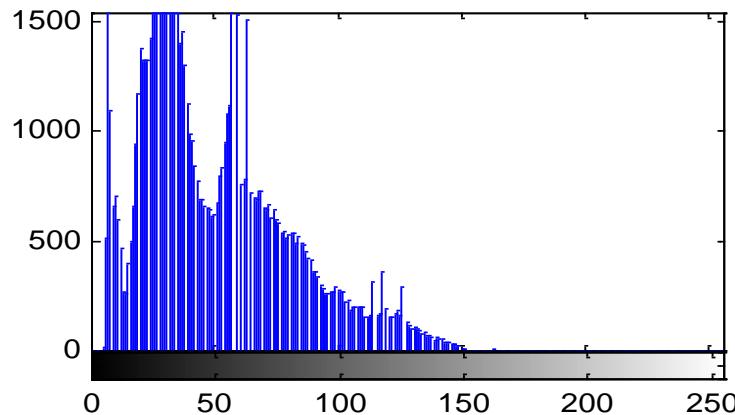
Se a imagem tem pixels de valor 0 e L-1 (ou próximos a esses extremos) a expansão de histograma é ineficaz

Nestas situações, a **equalização de histograma** pode ser utilizada

Objetivo: gerar imagem com **distribuição** de níveis de cinza **uniforme**

Equalização de Histograma

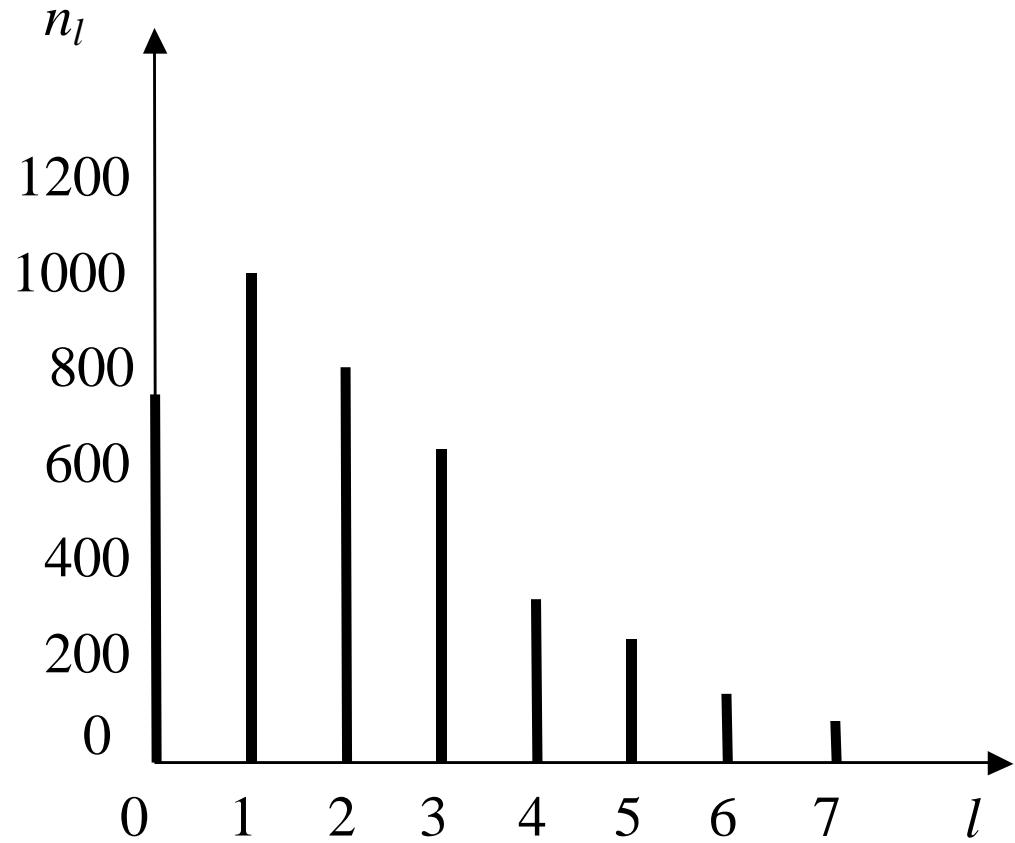
$$s = T(r) = \text{round} \left(\frac{L-1}{RC} \sum_{l=0}^r n_l \right)$$



Equalização de Histograma - Exemplo

Apresente o histograma equalizado de uma imagem 64×64 , $L = 8$, com distribuição a seguir:

l	n_l
0	790
1	1023
2	850
3	656
4	329
5	245
6	122
7	81



Equalização de Histograma - Exemplo

$$s = T(r) = \text{round} \left(\frac{L-1}{RC} \sum_{l=0}^r n_l \right) = \text{round} \left(\frac{7}{4096} \sum_{l=0}^r n_l \right)$$

$$r = 0 \rightarrow s = \text{round}(790 \times 7 / 4096) = 1$$

$$r = 1 \rightarrow s = \text{round}(1813 \times 7 / 4096) = 3$$

$$r = 2 \rightarrow s = \text{round}(2663 \times 7 / 4096) = 5$$

$$r = 3 \rightarrow s = \text{round}(3319 \times 7 / 4096) = 6$$

$$r = 4 \rightarrow s = \text{round}(3648 \times 7 / 4096) = 6$$

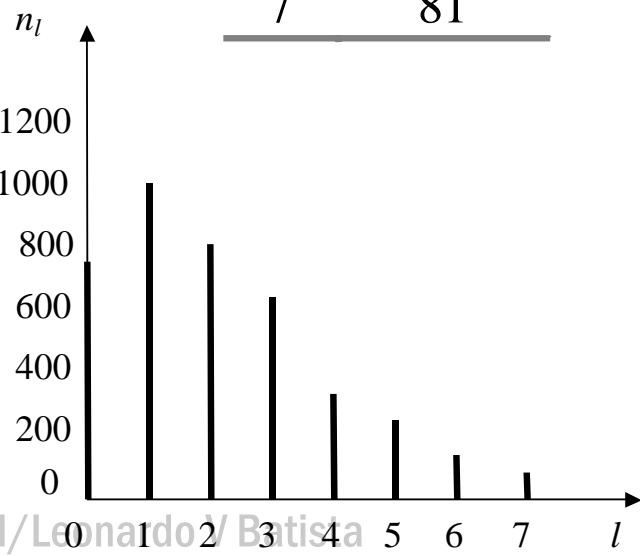
$$r = 5 \rightarrow s = \text{round}(3893 \times 7 / 4096) = 7$$

$$r = 6 \rightarrow s = \text{round}(4015 \times 7 / 4096) = 7$$

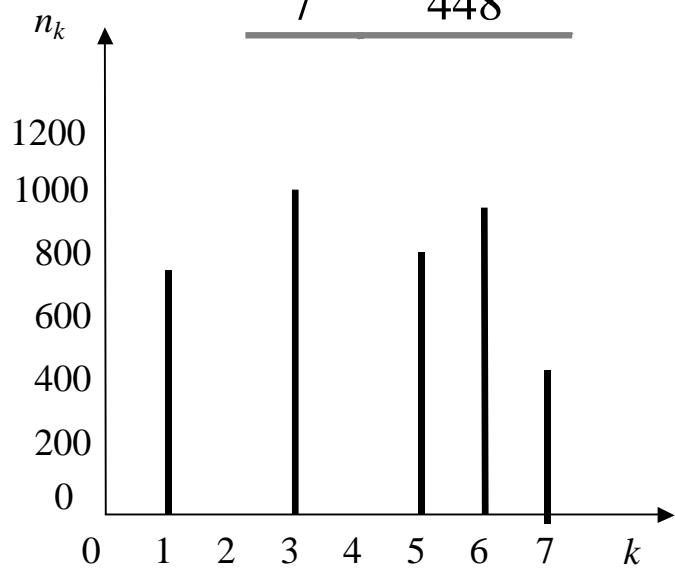
$$r = 7 \rightarrow s = \text{round}(4096 \times 7 / 4096) = 7$$

Equalização de Histograma - Exemplo

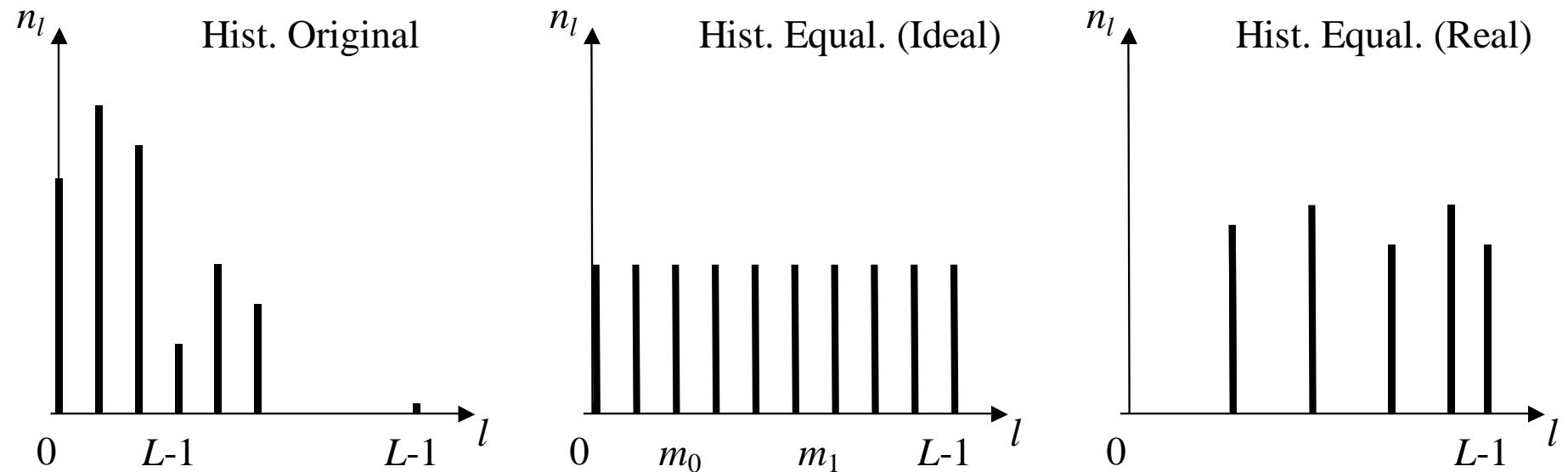
l	n_l
0	790
1	1023
2	850
3	656
4	329
5	245
6	122
7	81



l	n_l
0	0
1	790
2	0
3	1023
4	0
5	850
6	985
7	448



Equalização de Histograma



Equalização de Histograma - Exercício

Calcule a imagem resultante (a) da equalização e (b) da expansão de histograma da imagem f ($L = 8$) e apresente os histogramas resultantes

$$f = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 4 & 4 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Equalização de Histograma - Exercício

Calcule a imagem resultante (a) da equalização e (b) da expansão de histograma da imagem f ($L = 16$) e apresente os histogramas resultantes

$$f = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 4 & 4 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Equalização de Histograma - Exercício

Calcule a imagem resultante (a) da equalização seguida pela expansão de histograma; e (b) da expansão seguida pela equalização de histograma da imagem f ($L = 8$) e apresente os histogramas resultantes

$$f = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 1 & \\ \hline \end{array}$$

Equalização de Histograma

A expansão de histograma é pontual ou local? E a equalização de histograma?

O que ocorre quando uma imagem com um único nível (toda preta ou toda branca, por exemplo) passa pela operação de equalização de histograma? E de expansão?

É mais recomendável fazer equalização seguida por expansão de histograma, o inverso, ou a ordem não importa?

Equalização de Histograma

Para cada posição (i,j) em f

Calcular histograma em uma vizinhança de (i,j)

Calcular $s = T(r)$ para equalização de histograma na vizinhança

$$g(i,j) = s$$

Outros filtros

Curtose, máximo, mínimo etc

Filtros de suavização + filtros de aguçamento

Laplaciano do Gaussiano (LoG)

“Emboss”

Aumento de saturação

Correção de gama

...

Correlação

Em Estatística, a **correlação** entre dois sinais, ou variáveis, é uma medida padronizada de relação (similaridade) entre os sinais.

O coeficiente de correlação linear de Pearson entre **a** e **b** é dado por:

$$r = \frac{(a - \mu_a)}{|a - \mu_a|} \cdot \frac{(b - \mu_b)}{|b - \mu_b|}$$

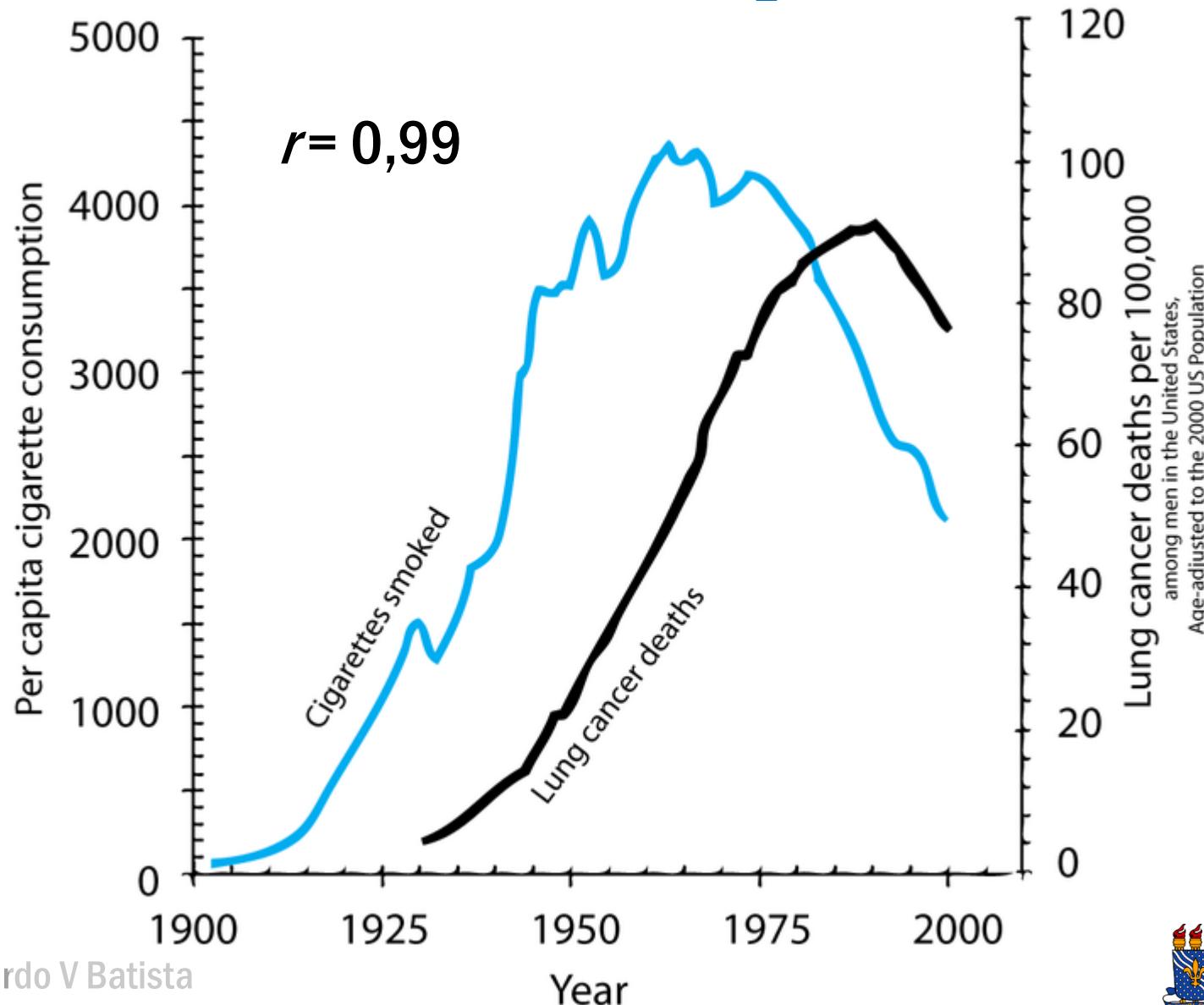
Note a **normalização** efetuada!

Coeficiente de Correlação

Interpreta-se a força da correlação assim:

Perfect	+1	-1
	+0.9	-0.9
Strong	+0.8	-0.8
	+0.7	-0.7
	+0.6	-0.6
Moderate	+0.5	-0.5
	+0.4	-0.4
	+0.3	-0.3
Weak	+0.2	-0.2
	+0.1	-0.1
Zero	0	

Coeficiente de Correlação



Coeficiente de Correlação



Coeficiente de Correlação



$r = 1$



$r = -1$



Correlação normalizada

A **correlação** normalizada $g = s \bullet h$ entre um sinal s e uma máscara h é um sinal g em que cada amostra é a correlação normalizada (Pearson) entre s e h em cada posição da máscara em relação ao sinal.

$$s[n] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ \hline \end{array}$$
$$h[n] = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$
$$g[n] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & g_1 & & & & \\ \hline \end{array}$$

g_1 é o coeficiente de correlação de Pearson entre $(1,2,2)$ e $(1,2,3)$

Correlação normalizada - exercício

Dados $s = (4, 1, 3, 8, 4, 0, 3, 8, 0, 7, 7, 7, 1, 2)$ e
 $h = (3, 7, 5)$, encontre $g = s \bullet h$, sem extensão por zeros

s	4	1	3	8	4	0	3	8	0	7	7	7	1	2
h	3	7	5											
g		?												

Correlação normalizada - exercício

s	4	1	3	8	4	0	3	8	0	7	7	7	1	2
h	3	7	5											
g		?												

$$\mu_v = \frac{4 + 1 + 3}{3} = 2,67 \quad \mu_h = \frac{3 + 7+5}{3} = 5$$

$$r = \frac{(v-\mu_v) \cdot (w-\mu_h)}{|v-\mu_v| \cdot |w-\mu_h|} = \frac{(1.33,-1.67,0.33)}{\sqrt{1.33^2+1,67^2+0.33^2}} \cdot \frac{(-2,2,0)}{\sqrt{2^2+2^2+0^2}}$$

$$r = \frac{-6}{6.11} = -0.98$$

Correlação normalizada - exercício

4	1	3	8	4	0	3	8	0	7	7	7	1	2
3	7	5											
	-0,98												

4	1	3	8	4	0	3	8	0	7	7	7	1	2
	3	7	5										
	-0,98	0,28											

4	1	3	8	4	0	3	8	0	7	7	7	1	2
									3	7	5		
	-0.98	0.28	0.94	-0.5	-.96	0.37	0.62	-.92	0.87	?			

Correlação normalizada - exercício

4	1	3	8	4	0	3	8	0	7	7	7	1	2	
												3	7	5
	-0.98	0.28	0.94	-0.5	-.96	0.37	0.62	-.92	0.87	NaN	0	-0,93		

Filtro casado: resposta máxima na posição do sinal mais “semelhante” (correlacionada com) à máscara

Correlação da máscara com

(3,7,5)?

(6,14,10)?

Resposta: 1 e 1

Filtro casado



Correlação não normalizada

A **correlação não normalizada** $g = s \circ h$ entre um sinal s e uma máscara h é um sinal em que cada amostra é o produto interno entre s e h em cada posição da máscara em relação ao sinal.

$$s[n] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ \hline \end{array}$$
$$h[n] = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$
$$g[n] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & g_1 & & & & \\ \hline \end{array}$$

g_1 é o produto interno entre $(1,2,2)$ e $(1,2,3)$

Correlação não normalizada - exercício

Dados $s = (4, 1, 3, 8, 4, 0, 3, 8, 0, 7, 7, 7, 1, 2)$ e
 $h = (3, 7, 5)$, encontre $g = s \circ h$, sem extensão por zeros

s	4	1	3	8	4	0	3	8	0	7	7	7	1	2
h	3	7	5											
g		?												

$$(3, 7, 5) \cdot (4, 1, 3) = 3 \times 4 + 7 \times 1 + 5 \times 3 = 12 + 7 + 15 = 34$$

Correlação não normalizada - exercício

s
h
g

4	1	3	8	4	0	3	8	0	7	7	7	1	2
3	7	5											
	34												

s
h
g

4	1	3	8	4	0	3	8	0	7	7	7	1	2
	3	7	5										
	34	64											

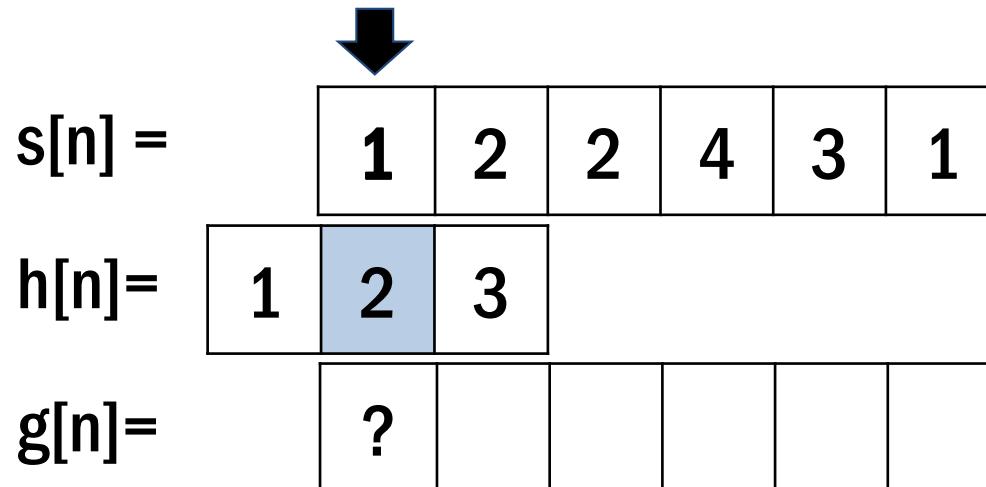
s
h
g

4	1	3	8	4	0	3	8	0	7	7	7	1	2
	34	64	85	52	27	61	65	59	84	105	75	38	



Correlação não normalizada - exercício

Sem extensão por zero

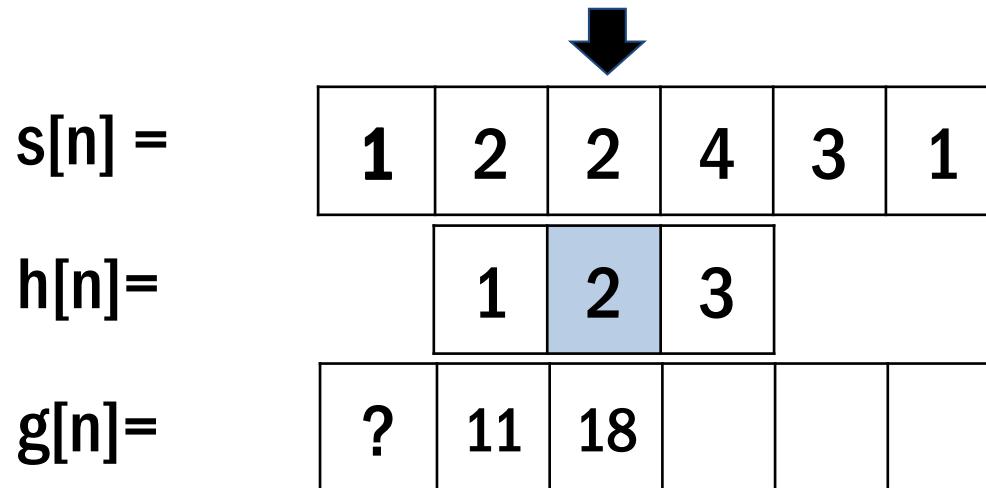


Correlação não normalizada - exercício

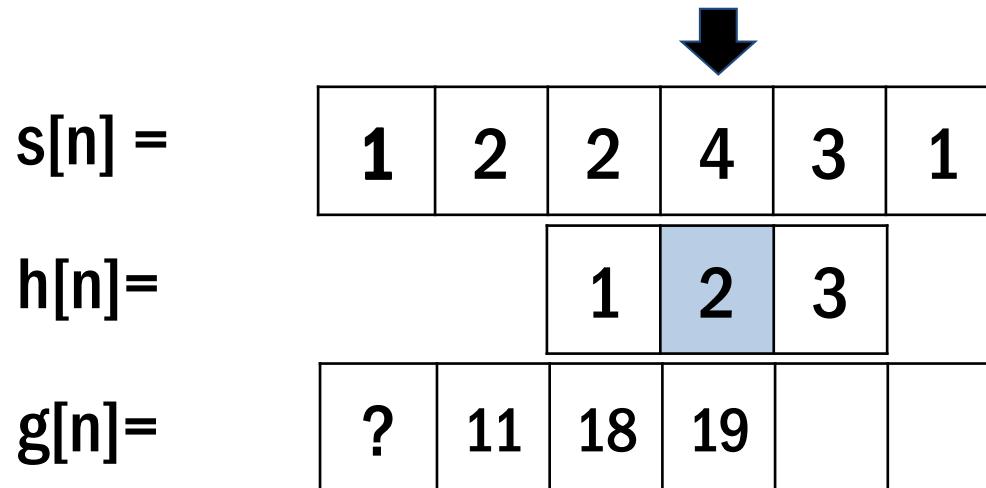
↓

$s[n] =$	1	2	2	4	3	1
$h[n] =$	1	2	3			
$g[n] =$?	11				

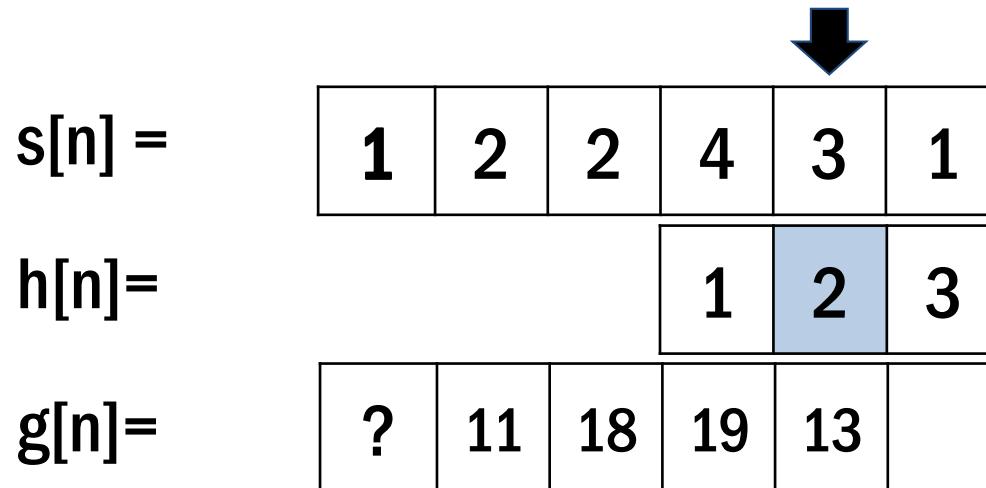
Correlação não normalizada - exercício



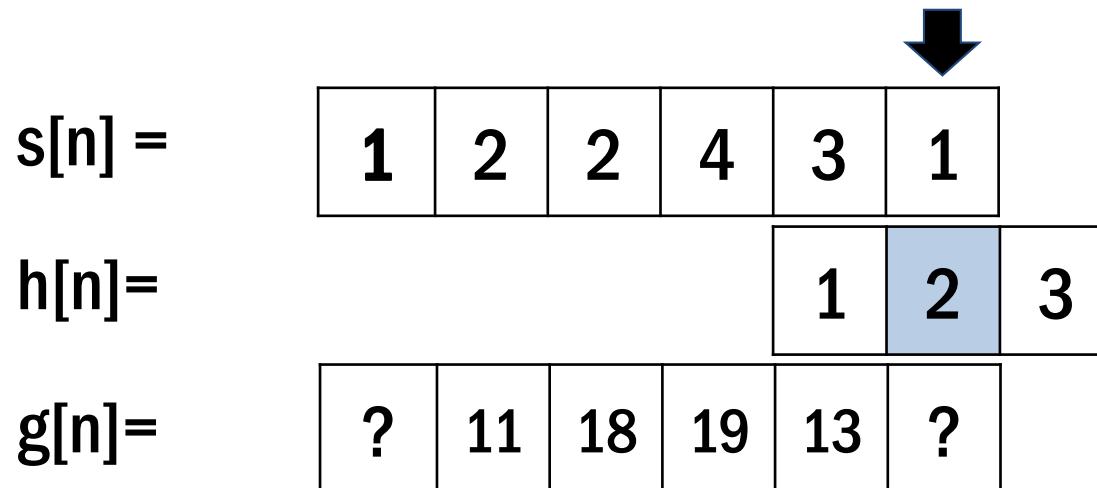
Correlação não normalizada - exercício



Correlação não normalizada - exercício



Correlação não normalizada - exercício



Correlação

Correlação é linear

$$T(s_1) = s_1 \circ h$$

$$T(s_2) = s_2 \circ h$$

$$T(s_1 + s_2) = T(s_1) + T(s_2)$$

$$T(as) = aT(s), a \text{ escalar}$$

Correlação - Exercício

n		0	1	2	3	4	5	6	7	8
$s_1[n]$		1	1	1	1	100	100	100	100	
$h[n]$	1	0	-1							

n		0	1	2	3	4	5	6	7	8
$s_2[n]$		2	2	2	2	200	200	200	200	
$h[n]$	1	0	-1							

Correlação - Resposta do exercício

n		0	1	2	3	4	5	6	7	8
$s_1[n]$		1	1	1	1	100	100	100	100	
$h[n]$	1	0	-1							
$g_1[n]$		-1	0	0	-99	-99	0	0	100	

n		0	1	2	3	4	5	6	7	8
$s_2[n]$		2	2	2	2	200	200	200	200	
$h[n]$	1	0	-1							
$g_2[n]$		-2	0	0	-198	-198	0	0	200	

Convolução

Máscara original:

a	b	c	d
---	---	---	---

Máscara para a convolução:

d	c	b	a
---	---	---	---

Convolução



$$g[n] = s[n] * h[n] = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} s[\tau]h[n - \tau]$$

$g[n]$: resposta do filtro a $s[n]$

Convolução

$$g[i, j] = f[i, j] * h[i, j] = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} f[\alpha, \beta] h[i - \alpha, j - \beta]$$

Correlação e Convolução

Convolução: correlação com a máscara rebatida nas duas dimensões

a	b	c
d	e	f
g	h	i



c	b	a
f	e	d
i	h	g



i	h	g
f	e	d
c	b	a

Máscara

Máscara rebatida

Correlação e Convolução

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

p	o	n	m
l	k	j	i
h	g	f	e
d	c	b	a

Convolução - Exercício

Dado a imagem f e a máscara h , calcule a imagem filtrada g por meio da convolução com extensão por zeros. O pivô da máscara é em $(1,1)$.

$$f = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$
$$h = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline \end{array}$$

$g = ?$

Convolução – resposta do exercício

$$f = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 \\ \hline\end{array}$$
$$h_r = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 6 & 5 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 2 & 1 \\ \hline\end{array}$$
$$g = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 18 & 24 & 8 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline\end{array}$$

Algumas máscaras convolucionais

1	1	1
0	0	0
-1	-1	-1

1	0	-1
1	0	-1
1	0	-1

-1	-1	-1
-1	8	-1
-1	-1	-1

1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9

0.025	0.1	0.025
0.1	0.5	0.1
0.025	0.1	0.025

Máscaras Convolucionais

Em geral,

Máscaras de **integração** (filtros de suavização) somam para **1**

Máscaras de **diferenciação** (filtros de realce de bordas) somam para **0**

Convolução e correlação

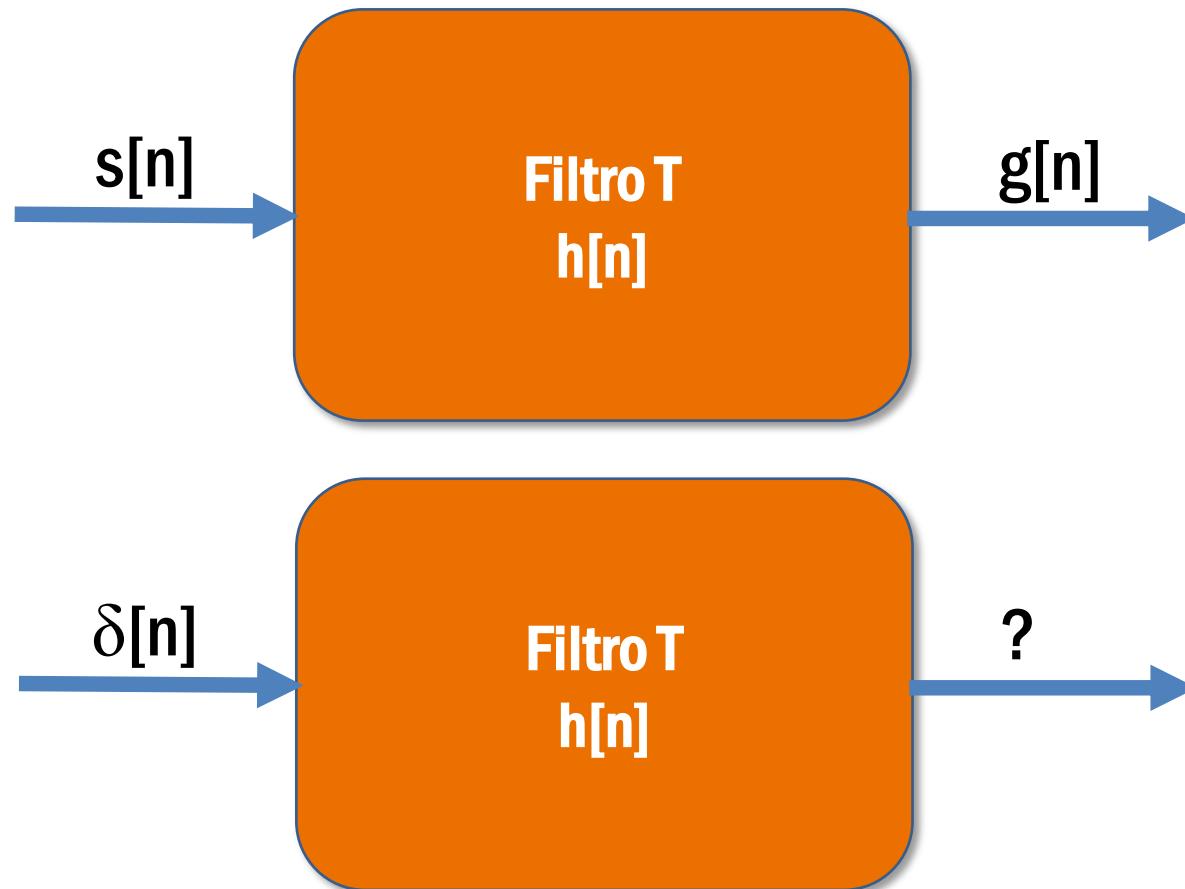
Convolução

$$g[n] = s[n] * h[n] = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} s[\tau]h[n - \tau]$$

Correlação

$$g[n] = s[n] \circ h[n] = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} s[\tau]h[\tau - n]$$

Resposta ao impulso



$\delta[n]$: delta de Kronecker ou impulso unitário

Resposta ao impulso



$h[n]$:

Resposta ao impulso

Máscara convolucional

Kerne/ou *core* do filtro

Vetor de coeficientes do filtro

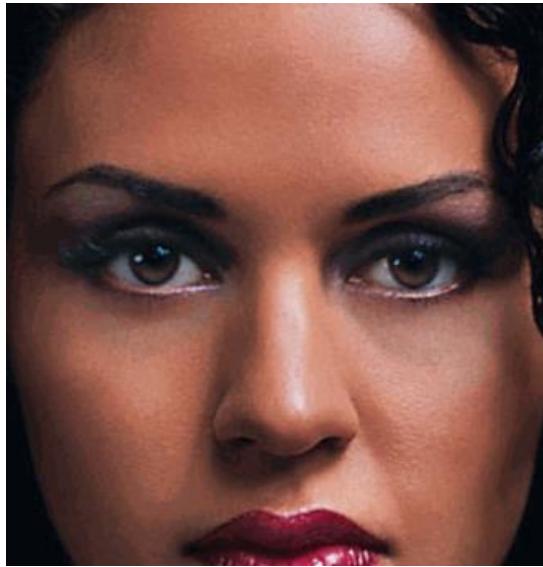
Média de imagens

$g(i, j) = (1-t) f_1(i, j) + t f_2(i, j)$,
em que t é um escalar no intervalo $[0, 1]$.

Consiste em uma **média ponderada** entre duas imagens, ou seja, é uma operação binária.

Média de imagens

f_1



$t=0,25$

f_2



$t=0,5$

$t=0,75$



Média de imagens para metamorfose



Média não-uniforme

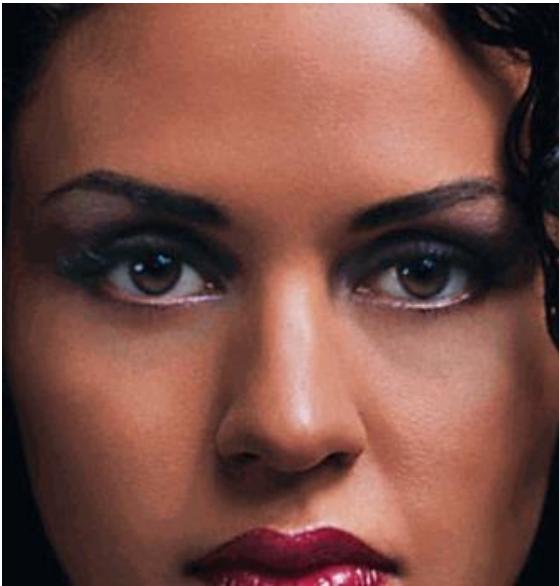
$$g(i, j) = [1 - t(i, j)] f_1(i, j) + t(i, j) f_2(i, j),$$

em que t é uma matriz com as mesmas dimensões de f_1 e f_2 , cujos elementos assumem valores no intervalo $[0, 1]$.

É uma **média ponderada** em que o peso varia em função da coordenada.

Média não-uniforme

f_1



RxC

f_2



$$t(i,j) = \\ j/(C-1)$$

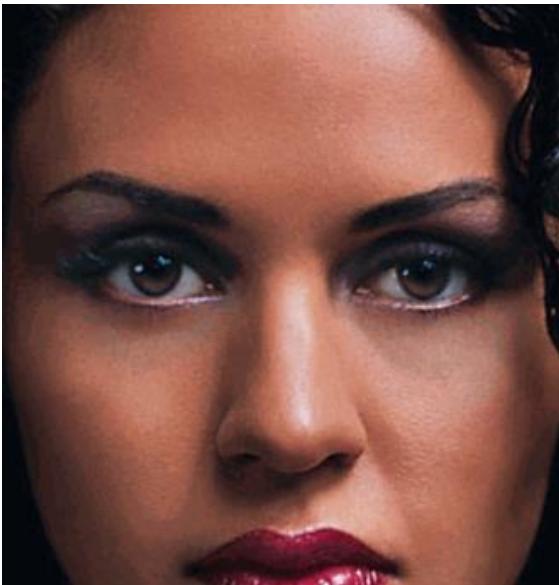


$$t(i,j) = \\ (C-1-j)/(C-1)$$



Média não-uniforme

f_1



RxC

f_2



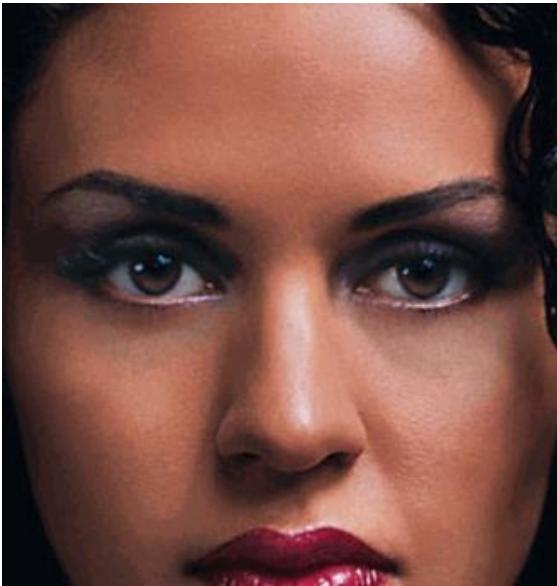
$$t(i,j) = \\ i/(R-1)$$

$$t(i,j) = \\ (R-1-i)/(R-1)$$



Média não-uniforme

f_1



RxC

f_2



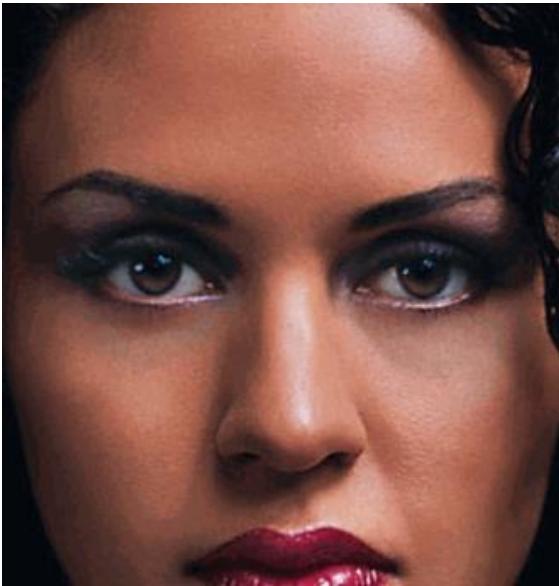
$$t(i,j) = \frac{(R+C-2-i-j)}{(R+C-2)}$$

$$t(i,j) = \frac{(i+j)}{(R+C-2)}$$



Média não-uniforme

f_1



RxC

f_2



$t(i,j) = ?$



$t(i,j) = ?$



Outras operações binárias



PDI/Leonardo V Batista

Multiply



Darken



Outras operações binárias



Color Burn

Linear Burn

Outras operações binárias



Overlay

PDI/Leonardo V Batista



Hard light



Outras operações binárias



Soft light

PDI/Leonardo V Batista



Hue



Photoshop blend modes

- <http://stackoverflow.com/questions/5919663/how-does-photoshop-blend-two-images-together>

```
#define ChannelBlend_Lighten(A,B) ((uint8)((B > A) ? B:A))
#define ChannelBlend_Darken(A,B) ((uint8)((B > A) ? A:B))
#define ChannelBlend_Multiply(A,B) ((uint8)((A * B) / 255))
#define ChannelBlend_Average(A,B) ((uint8)((A + B) / 2))
#define ChannelBlend_Add(A,B) ((uint8)(min(255, (A + B))))
#define ChannelBlend_Subtract(A,B) ((uint8)((A + B < 255) ? 0:(A + B - 255)))
(Aparentemente, há um erro em Subtract)
#define ChannelBlend_Difference(A,B) ((uint8)(abs(A - B)))
#define ChannelBlend_Negation(A,B) ((uint8)(255 - abs(255 - A - B)))
#define ChannelBlend_Screen(A,B) ((uint8)(255 - (((255 - A) * (255 - B)) >> 8)))
#define ChannelBlend_Exclusion(A,B) ((uint8)(A + B - 2 * A * B / 255))
#define ChannelBlend_Overlay(A,B) ((uint8)((B < 128) ? (2 * A * B / 255):(255 - 2 * (255 - A) * (255 - B) / 255)))
#define ChannelBlend_SoftLight(A,B) ((uint8)((B <128)?(2*((A>>1)+64))*(float)B/255):(255-(2*(255-((A>>1)+64))*(float)(255-B)/255)))
#define ChannelBlend_HardLight(A,B) (ChannelBlend_Overlay(B,A))
#define ChannelBlend_ColorDodge(A,B) ((uint8)((B == 255) ? B:min(255, ((A << 8) / (255 - B))))) 
#define ChannelBlend_ColorBurn(A,B) ((uint8)((B == 0) ? B:max(0, (255 - ((255 - A) << 8) / B)))) 
#define ChannelBlend_LinearDodge(A,B)(ChannelBlend_Add(A,B))
#define ChannelBlend_LinearBurn(A,B) (ChannelBlend_Subtract(A,B))
#define ChannelBlend_LinearLight(A,B)((uint8)(B <128) ? ChannelBlend_LinearBurn(A,(2*B)) : 
ChannelBlend_LinearDodge(A,(2 * (B - 128)))) 
#define ChannelBlend_VividLight(A,B) ((uint8) (B < 128) ? ChannelBlend_ColorBurn(A,(2 * B)):ChannelBlend_ColorDodge(A,(2 * (B - 128)))) 
#define ChannelBlend_PinLight(A,B) ((uint8)(B < 128) ? ChannelBlend_Darken(A,(2 * B)):ChannelBlend_Lighten(A,(2 * (B - 128)))) 
#define ChannelBlend_HardMix(A,B) ((uint8)((ChannelBlend_VividLight(A,B) < 128) ? 0:255))
#define ChannelBlend_Reflect(A,B) ((uint8)((B == 255) ? B:min(255, (A * A / (255 - B))))) 
#define ChannelBlend_Glow(A,B) (ChannelBlend_Reflect(B,A))
#define ChannelBlend_Phoenix(A,B) ((uint8)(min(A,B) - max(A,B) + 255))
```

Média Não-Uniforme e blend modes



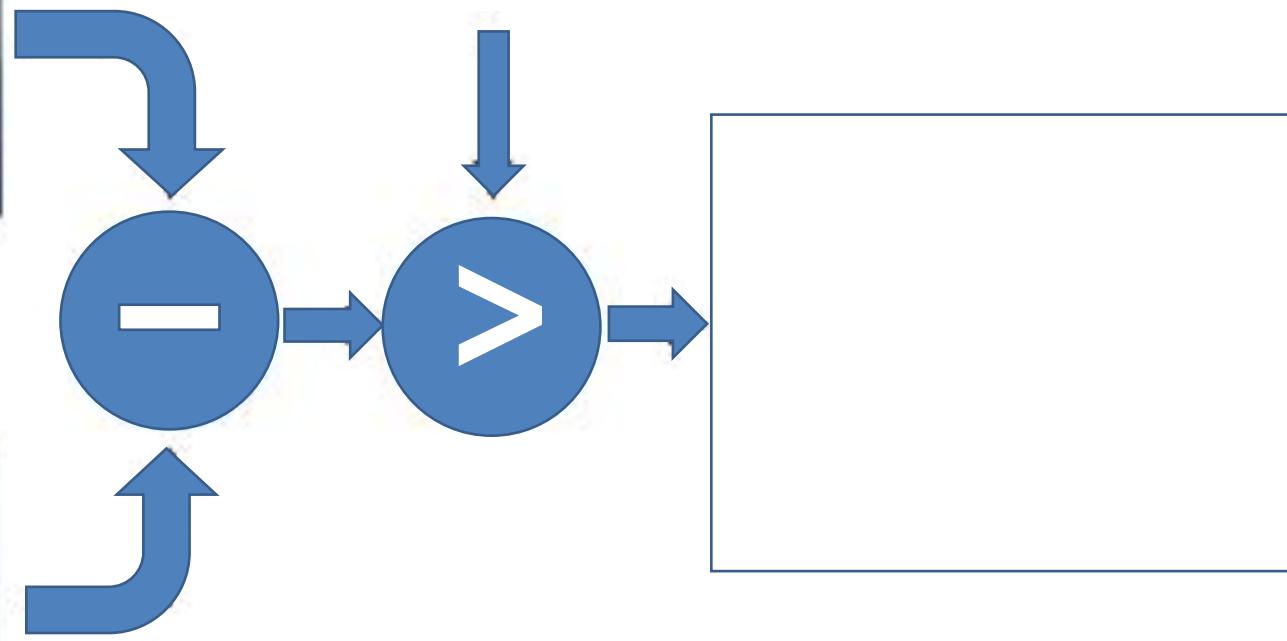
Detecção de Movimento

Quadro atual



Limiar

Quadro anterior



Operações Topológicas

Rígidas

Translação

Rebatimento

Rotação

Mudança de Escala

Não rígidas (*Warping*)

Rotação

Rotação em torno de (i_c, j_c)

$$i' = (i - i_c) \cos \theta - (j - j_c) \sin \theta + i_c$$

$$j' = (i - i_c) \sin \theta + (j - j_c) \cos \theta + j_c$$

Rotação

Rotação de 30º



Rebatimento (flip)

Rebatimento
horizontal

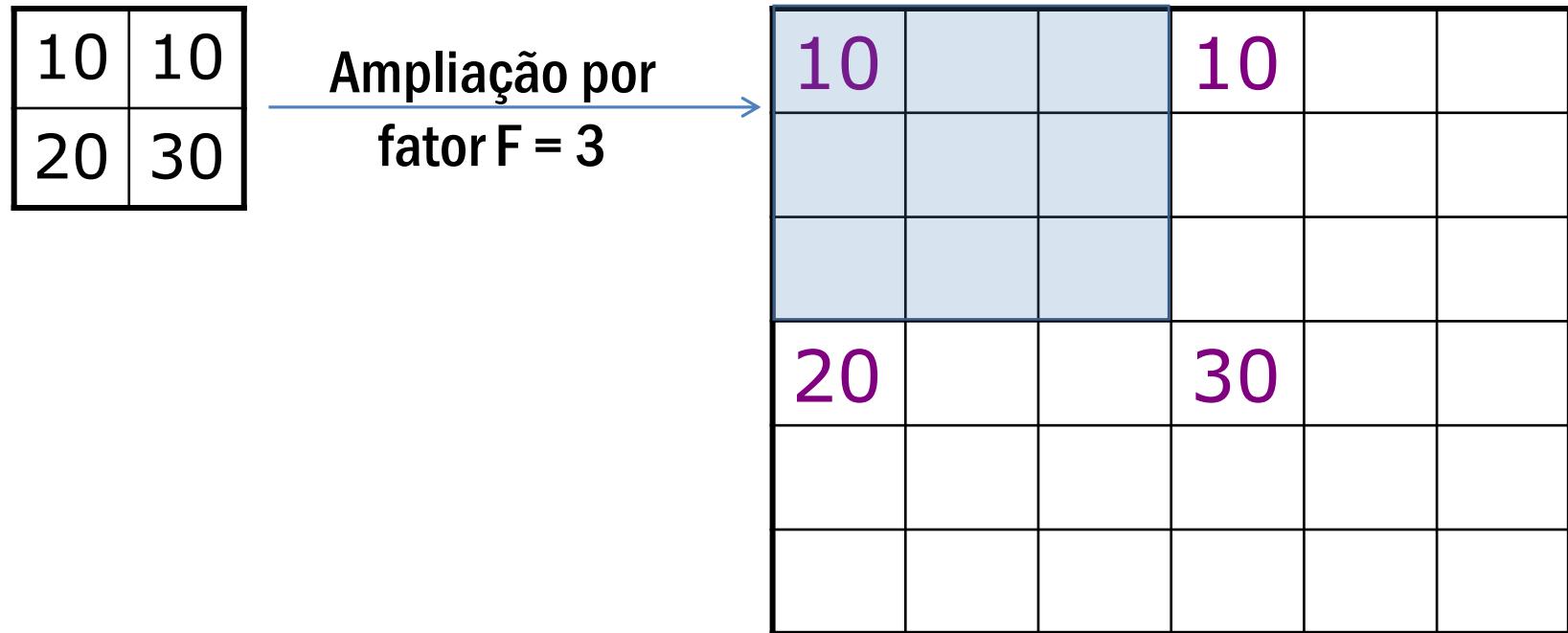


Rebatimento
vertical



Ampliação (Zoom in)

Por replicação de pixels



Ampliação (Zoom in)

Por replicação de pixels

10	10
20	30

Ampliação por
fator F = 3

10	10	10	10	10	10
10	10	10	10	10	10
10	10	10	10	10	10
20	20	20	30	30	30
20	20	20	30	30	30
20	20	20	30	30	30

Ampliação (Zoom in)

Por interpolação bilinear

10	10
20	30

Ampliação por
fator $F = 3$

10			10	
20			30	

Interpolação nas linhas

Passos de níveis de cinza:

De 10 a 10: $0/3 = 0$

De 20 a 30: $(30-20)/3 = 3,3$

Ampliação (Zoom in)

Por interpolação bilinear

10	10
20	30

Ampliação por
fator F = 3

10	10	10	10	10	10
20	23,3	26,7	30	33,3	36,7

Interpolação nas linhas

Passos de níveis de cinza:

De 10 a 10: $0/3 = 0$

De 20 a 30: $(30-20)/3 = 3,33\dots$

Ampliação (Zoom in)

Por interpolação bilinear

10	10
20	30

Ampliação por
fator F = 3

10	10	10	10	10	10
20	23,3	26,7	30	33,3	36,7

Interpolação nas colunas

Passos de níveis de cinza:

De 10 a 20: $10/3 = 3,33\dots$

De 10 a 23,33...: $(23,3-10)/3 = 4,44\dots$

De 10 a 26,66...: $(26,7-10)/3 = 5,55\dots$



Ampliação (Zoom in)

Por interpolação bilinear

10	10
20	30

Ampliação por
fator $F = 3$

10	10	10	10	10	10
13,3	14,4	15,6			
16,7	18,9	21,1			
20	23,3	26,7	30	33,3	36,7
23,3					
26,7					

Interpolação nas colunas

Passos de níveis de cinza:

De 10 a 20: $10/3 = 3,33\dots$

De 10 a 23,33...: $(23,3-10)/3 = 4,44\dots$

De 10 a 26,66...: $(26,7-10)/3 = 5,55\dots$



Ampliação (Zoom in)

Por interpolação bilinear

10	10
20	30

Ampliação por
fator F = 3

10	10	10	10	10	10
13	14	16			
17	19	21			
20	23	27	30	33	37
23					
27					

Ampliação (Zoom in)

Exemplo: Ampliação por fator 10



Imagen
original



Replicação de
pixels



Interpolação
bilinear

Redução (Zoom out)

Por eliminação de pixel:

Manter pixel central, por exemplo

CNNs usam MaxPooling (valor máximo)

Pode gerar *aliasing!* (assunto futuro)

10	10	10	10	18	28
13	16	14	17	10	19
17	19	21	23	25	10
20	23	27	55	33	37
23	27	33	37	41	46
27	32	38	43	48	30

Redução por
fator F = 3

16	10
27	41

Redução (Zoom out)

Por média

Em CNNs, denomina-se AvgPooling

10	10	10	10	18	28
13	16	14	17	10	19
17	19	21	23	25	10
20	23	27	55	33	37
23	27	33	37	41	46
27	32	38	43	48	30

Redução por
fator $F = 3$

14,4	17,7
27,8	41,1

14	18
28	41

Zoom por fator fracionário

Por exemplo, $F = 3,754$

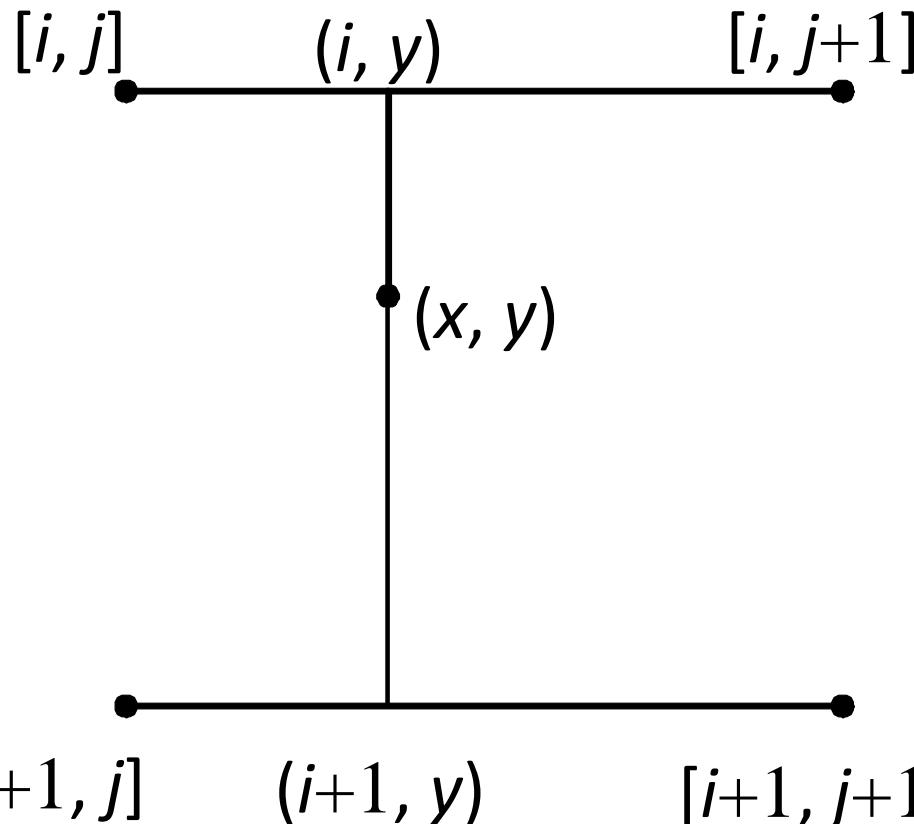
Necessidade para deformações elásticas etc

Utilizar reconstrução de imagens

Reconstrução de imagens

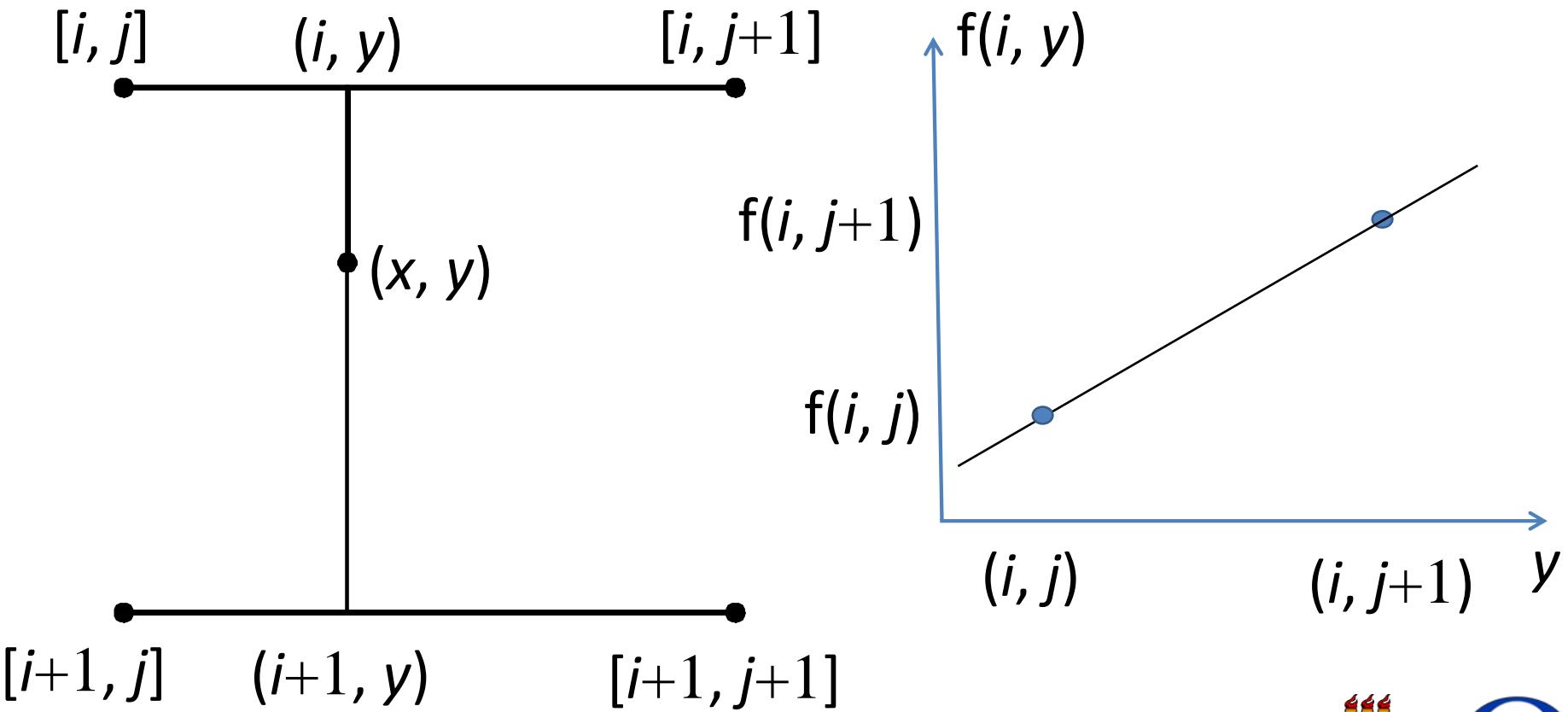
Dados $f[i, j]$, $f[i, j+1]$, $f[i+1, j]$, $f[i+1, j+1]$

Encontrar $f(x, y)$, x em $[i, i+1]$, y em $[j, j+1]$



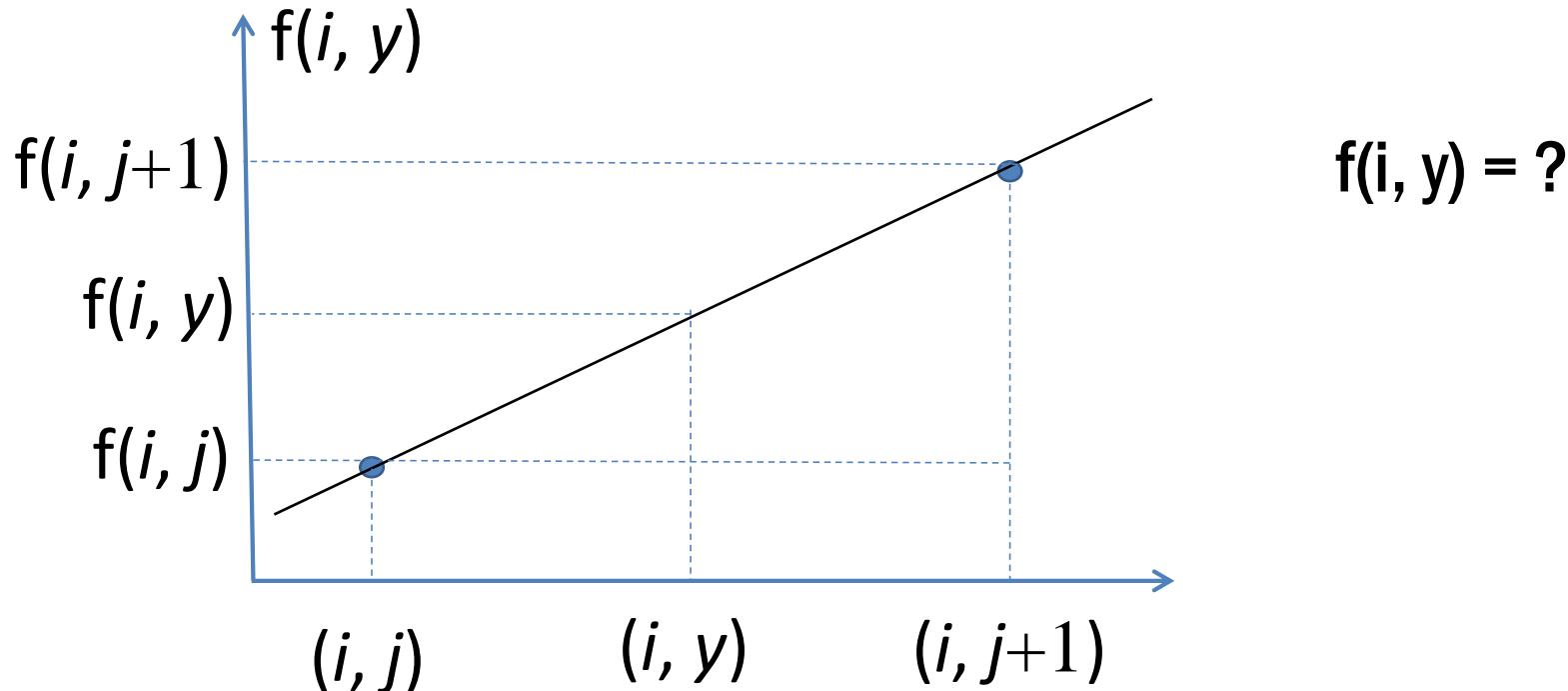
Reconstrução bilinear

Encontrar $f(i, y)$, y em $[j, j+1]$



Reconstrução bilinear

Encontrar $f(i, y)$, y em $[j, j+1]$



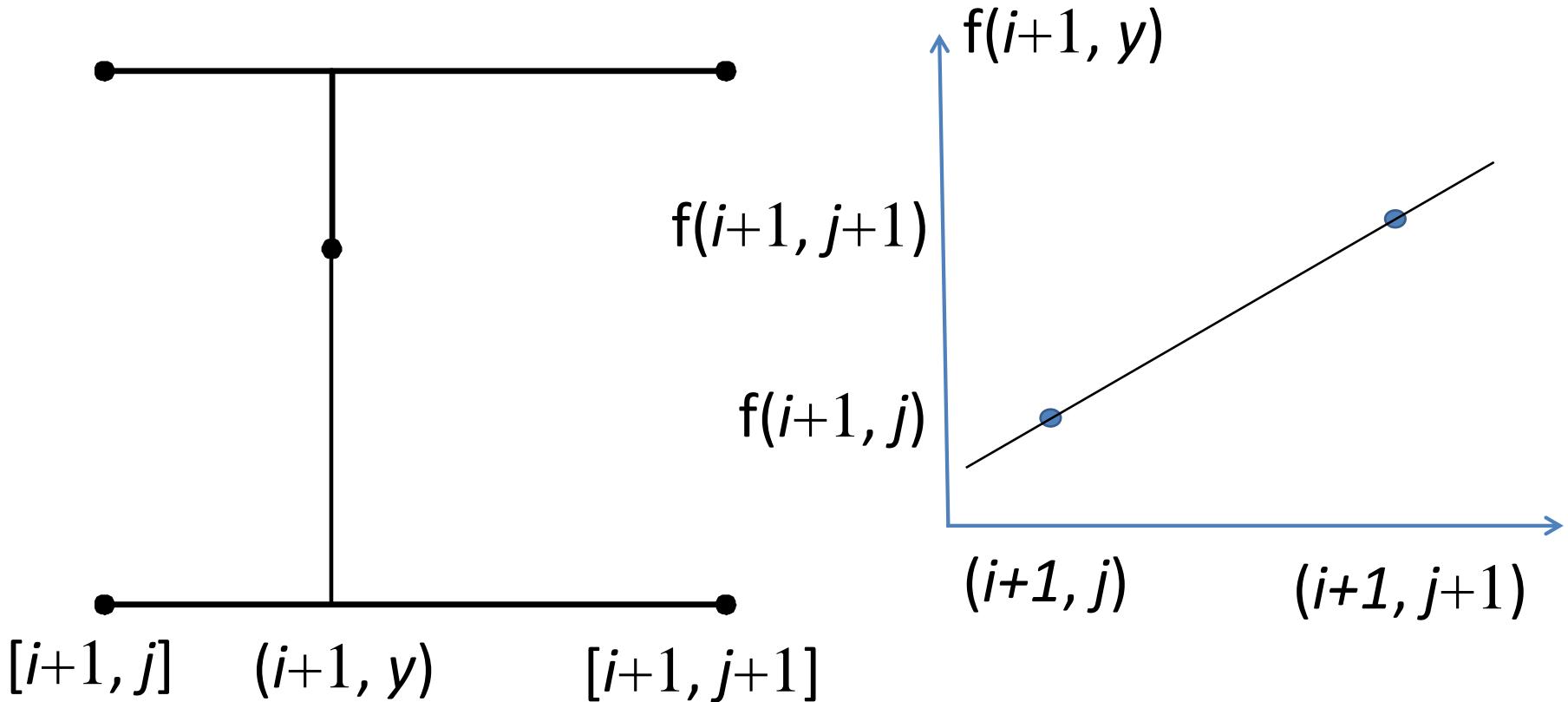
$$\frac{f(i, y) - f(i, j)}{f(i, j + 1) - f(i, j)} = \frac{y - j}{1}$$

$$f(i, y) = f(i, j) + (y - j)[f(i, j + 1) - f(i, j)]$$



Reconstrução bilinear

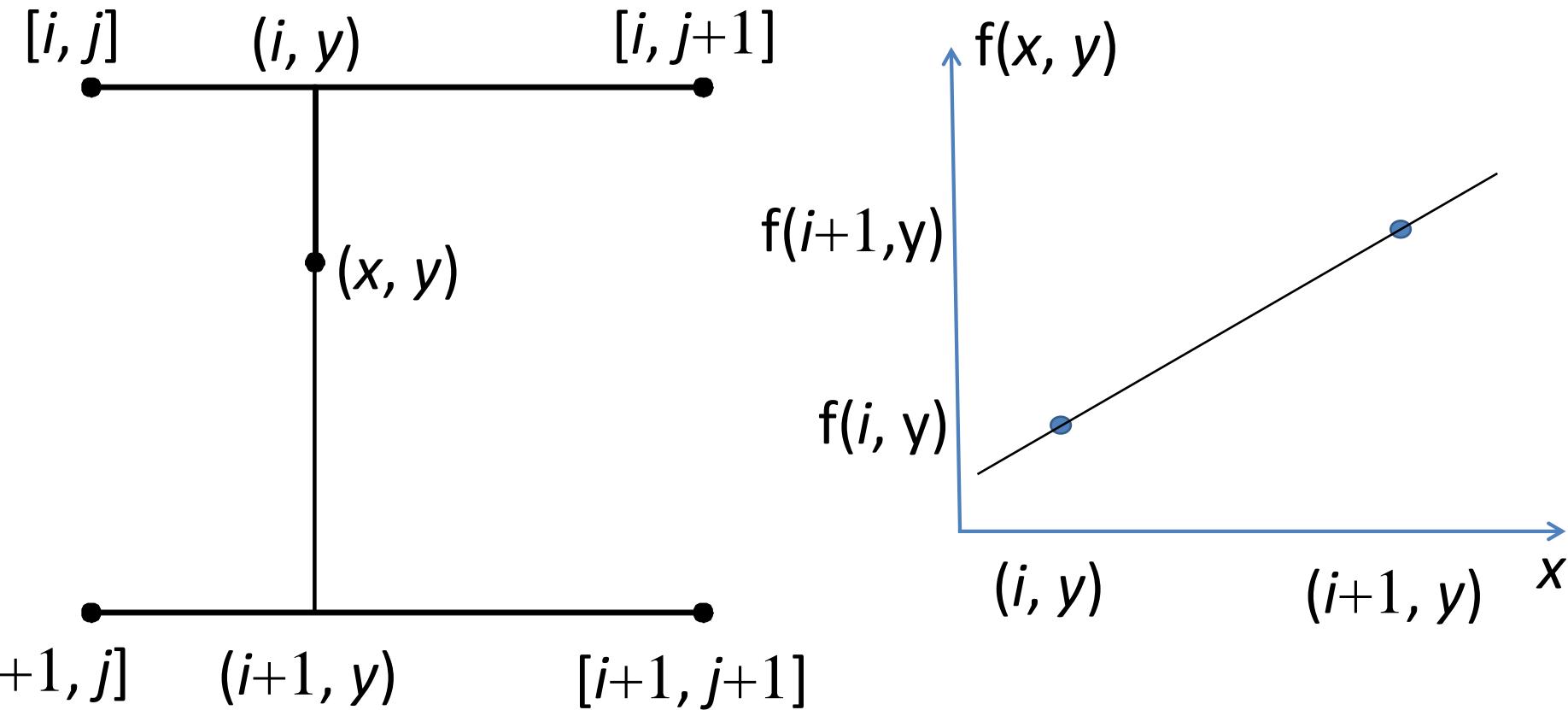
Encontrar $f(i+1, y)$, y em $[j, j+1]$



$$f(i+1, y) = f(i+1, j) + (y-j)[f(i+1, j+1) - f(i+1, j)]$$

Reconstrução bilinear

Encontrar $f(x, y)$, x em $[i_0, i_0+1]$, y em $[j_0, j_0+1]$



Reconstrução bilinear

Encontrar $f(x,y)$, x em $[i, i+1]$, y em $[j, j+1]$

$$f(i, y) = f(i, j) + (y-j)[f(i, j+1) - f(i, j)]$$

$$f(i+1, y) = f(i+1, j) + (y-j)[f(i+1, j+1) - f(i+1, j)]$$

$$f(x, y) = f(i, y) + (x-i)[f(i+1, y) - f(i, y)]$$

Reconstrução bilinear

Exemplo

$$f(10.5, 15.2) = ?$$

$$f(10, 15) = 10; f(10, 16) = 20$$

$$f(11, 15) = 30; f(11, 16) = 30$$

$$f(i, y) = f(i, j) + (y - j)[f(i, j+1) - f(i, j)]$$

$$f(i+1, y) = f(i+1, j) + (y - j)[f(i+1, j+1) - f(i+1, j)]$$

$$f(x, y) = f(i, y) + (x - i) [f(i+1, y) - f(i, y)]$$

Reconstrução bilinear

$$x = 10.5; y = 15.2; i = 10; j = 15$$

$$f(i, y) = f(i, j) + (y-j)[f(i, j+1) - f(i, j)]$$

$$f(10, 15.2) = f(10, 15) + (15.2 - 15) * [f(10, 16) - f(10, 15)] = 10 + 0.2 * [20 - 10] = 12$$

$$f(i+1, y) = f(i+1, j) + (y-j)[f(i+1, j+1) - f(i+1, j)]$$

$$f(11, 15.2) = f(11, 15) + (15.2 - 15) * [f(11, 16) - f(11, 15)] = 30 + 0.2 * [30 - 30] = 30$$

$$f(x, y) = f(i, y) + (x-i) [f(i+1, y) - f(i, y)]$$

$$f(10.5, 15.2) = 12 + (10.5 - 10) * [30 - 12] = 21$$

Reconstrução bilinear

Relembrando: ampliação bilinear, fator inteiro

10	10
20	30

Ampliação por
fator $F = 3$

0	0,33	0,67	1	1,33	1,67
10			10		
20			30		

Interpolação nas linhas

Passos de níveis de cinza:

De 10 a 10: $0/3 = 0$

De 20 a 30: $(30-20)/3 = 3,3$

Passo de coordenadas: $1/F$

Reconstrução bilinear

Relembrando: redução bilinear, fator inteiro

	0	1	2	3	4	5
0	20	10	30	30	40	30
1	30	0	30	10	20	30
2	20	20	20	30	10	10
3	10	20	20	10	40	40
4	20	0	0	10	10	10
5	40	40	40	30	30	20

Redução por
fator $F = 3$

10	10
20	30

Passo de coordenadas: F

Ampliação por reconstrução de imagens

Exercício: ampliação por fator 2,3

Passo para as coordenadas: $1/2,3 = 0,43$

	0	1	2
0	10	20	0
1	30	30	25
2	30	30	90

0	0,43	0,87	1,3	1,74	2,17
0					
0,43					
0,87					
1,3					
1,74					
2,17					

Ampliação por reconstrução de imagens

$f[0,0.43]$

$f[0,0]=10 \quad f[0,1]=20$

$$f[0, 0.43] = f[0,0] + 0.43 (f[0,1]-f[0,0]) = 10+0.43x10= 14.3 \text{ ou } 14$$

$f(0.43, 1.3)$

$$f[0, 1] = 20 \quad f[0, 2] = 0$$

$$f[1, 1] = 30 \quad f[1, 2] = 25$$

$$f(0, 1.3) = f[0, 1] + 0.3(f[0, 2]-f[0,1]) = 20 +0.3(0-20) = 20-6=14$$

$$f(1, 1.3) = f[1, 1] + 0.3(f[1, 2]-f[1,1]) = 30 +0.3(25-30) = 30-1.5=28.5$$

$$f(0.43, 1.3) = f[0, 1.3] +0.43(f[1, 1.3]-f[0,1.3]) = 14 +0.43(28.5-14) = 20.23 \text{ ou } 20$$

	0	1	2
0	10	20	0
1	30	30	25
2	30	30	90

Redução por reconstrução de imagens

Exercício: redução por fator 2,3

Passo para as coordenadas: 2,3

	0	1	2	3	4	5
0	20	10	30	30	40	30
1	30	0	30	10	20	30
2	20	20	20	30	10	10
3	10	20	20	10	40	40
4	20	0	0	10	10	10
5	40	40	40	30	30	20

	0	2,3	4,6
0			
2,3			
4,6			

Mapeamento Reverso

Rotação por ângulo θ em torno de (i_c, j_c)

$$i' = \text{round}((i - i_c) \cos \theta - (j - j_c) \sin \theta + i_c)$$

$$j' = \text{round}((i - i_c) \sin \theta + (j - j_c) \cos \theta + j_c)$$

Mapeamento reverso: rotação por ângulo $-\theta$ em torno de (i_c, j_c)

$$i = (i' - i_c) \cos \theta + (j' - j_c) \sin \theta + i_c$$

$$j = -(i' - i_c) \sin \theta + (j' - j_c) \cos \theta + j_c$$

Atribuir a $g(i', j')$ o valor $f(i, j)$ na imagem original reconstruída

Operações Não Rígidas (warping)

Warping= distorção

Zoom por fator $F(i, j)$

Rotação por ângulo $\theta(i,j)$

Translação com deslocamento $d(i,j)$

Warping especificado graficamente pelo usuário, com o mouse, por exemplo

Warping baseado em Campos

Entretenimento, estética

Efeitos especiais, *morphing*

Correção de distorções óticas

Alinhamento de elementos correspondentes em duas ou mais imagens (registro)

Modelagem e visualização de deformações físicas

Warping para registro



Fonte



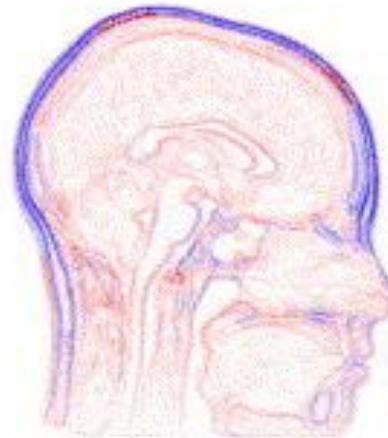
Alvo



Fonte registrada

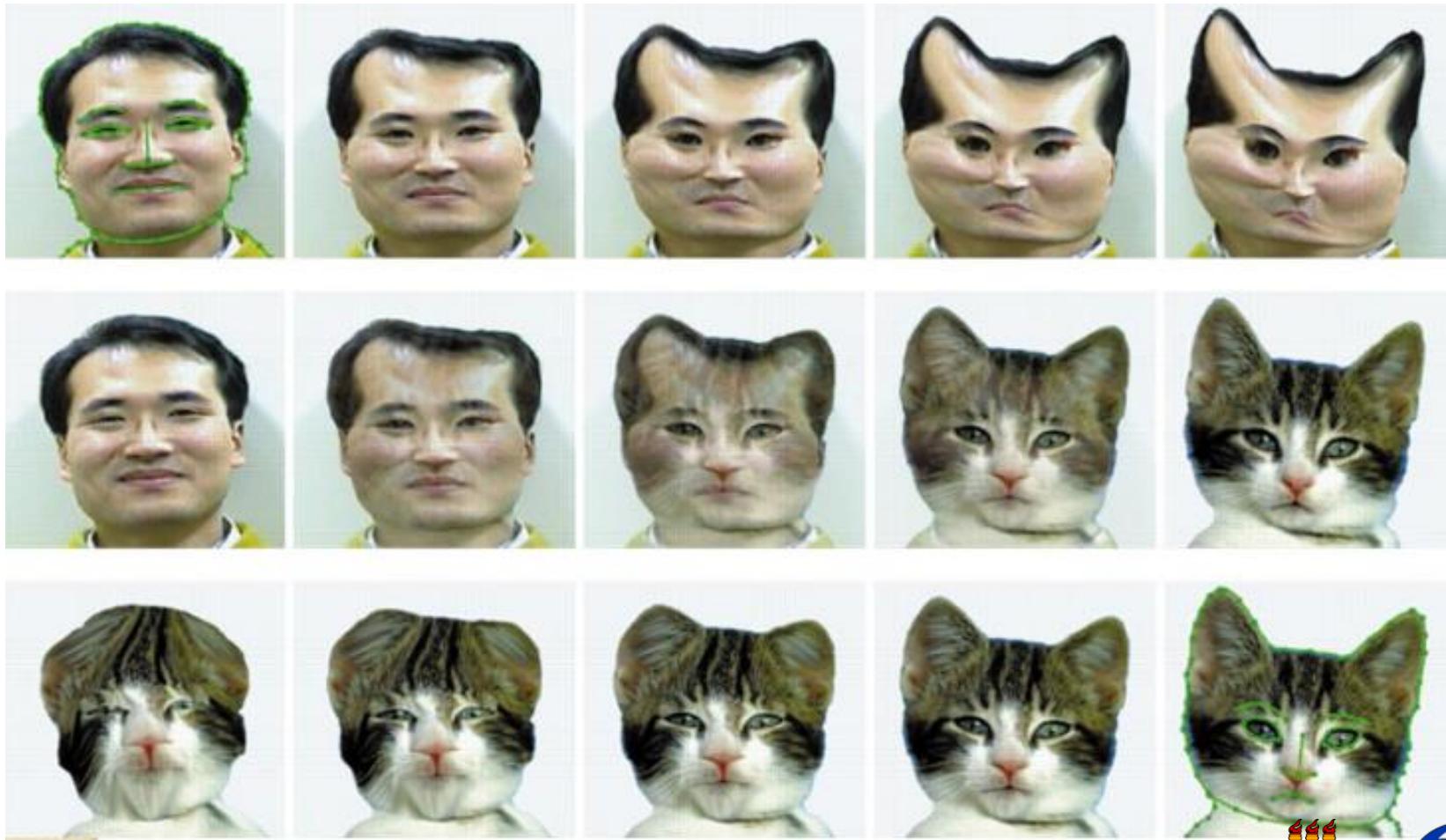


Antes do registro

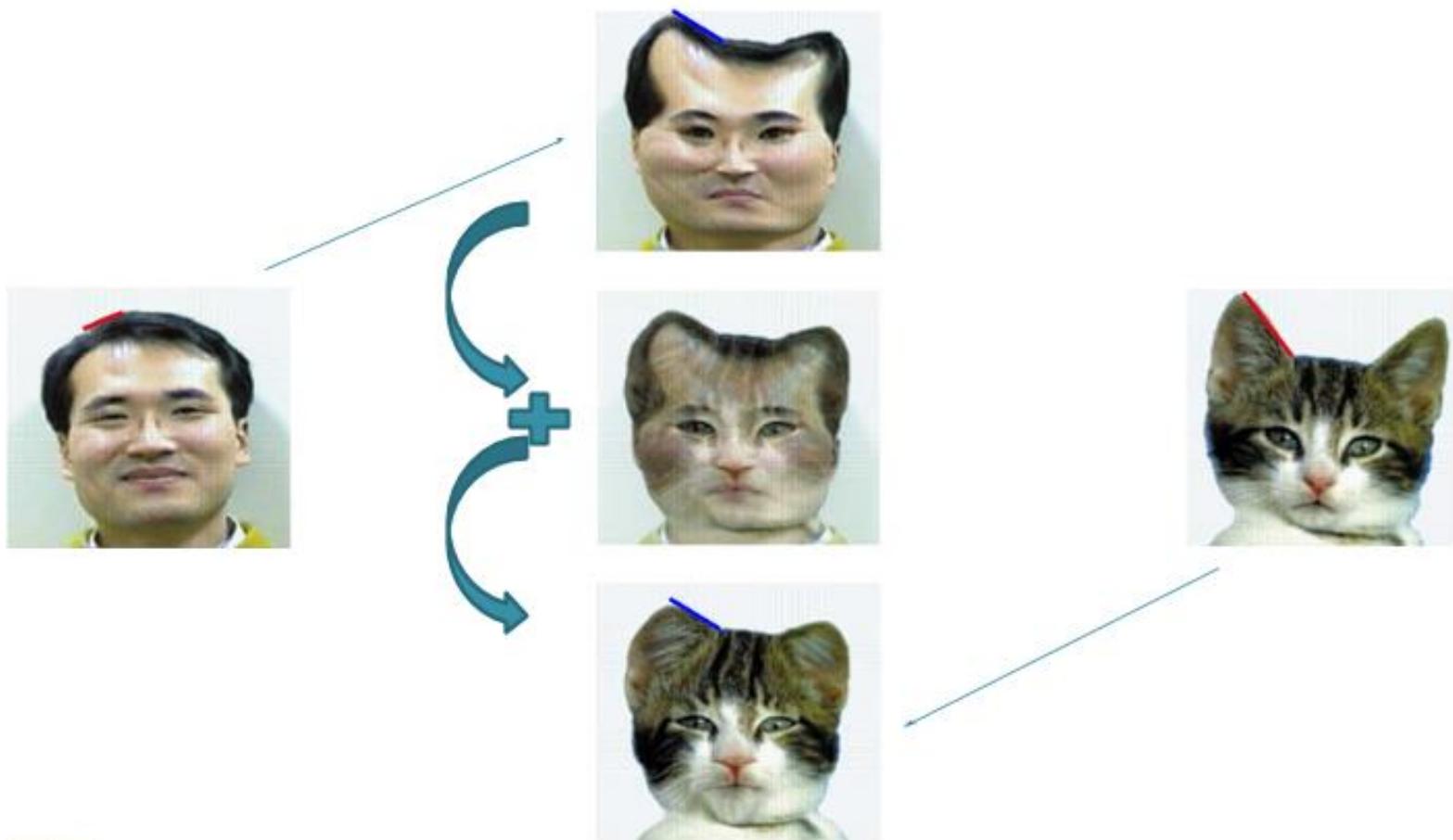


Após o registro

Morphing = warping+média



Morphing = warping+média

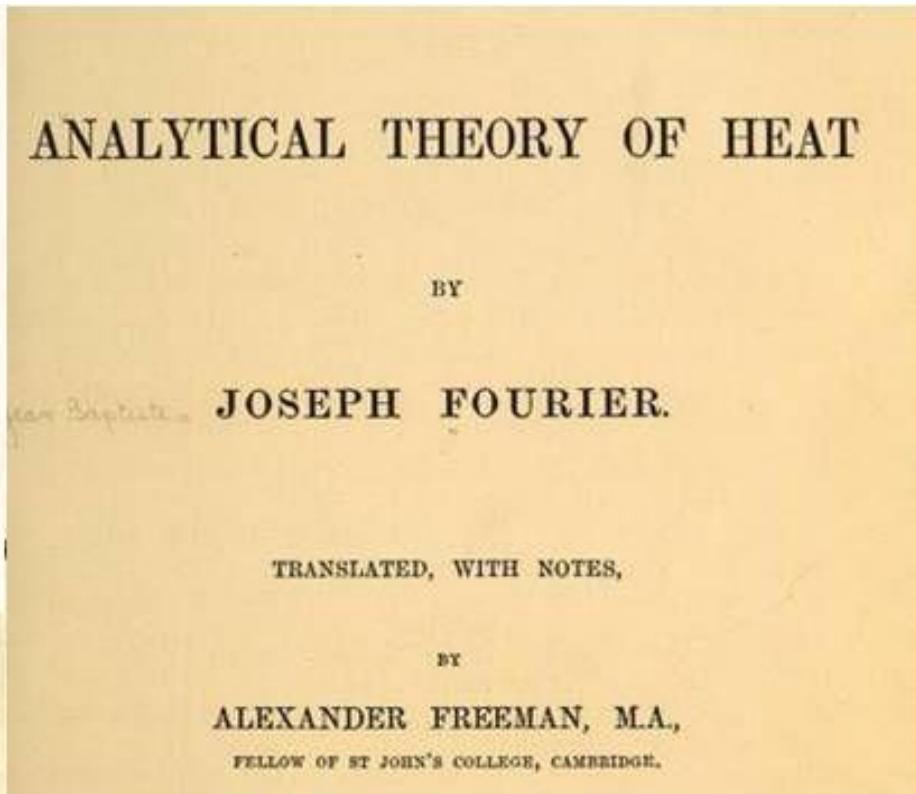


Domínio da Frequência



problem is now to integrate
imply

$$\frac{dv}{dt} = k \frac{d^2v}{dx^2} - hv,$$



Joseph Fourier, 1822

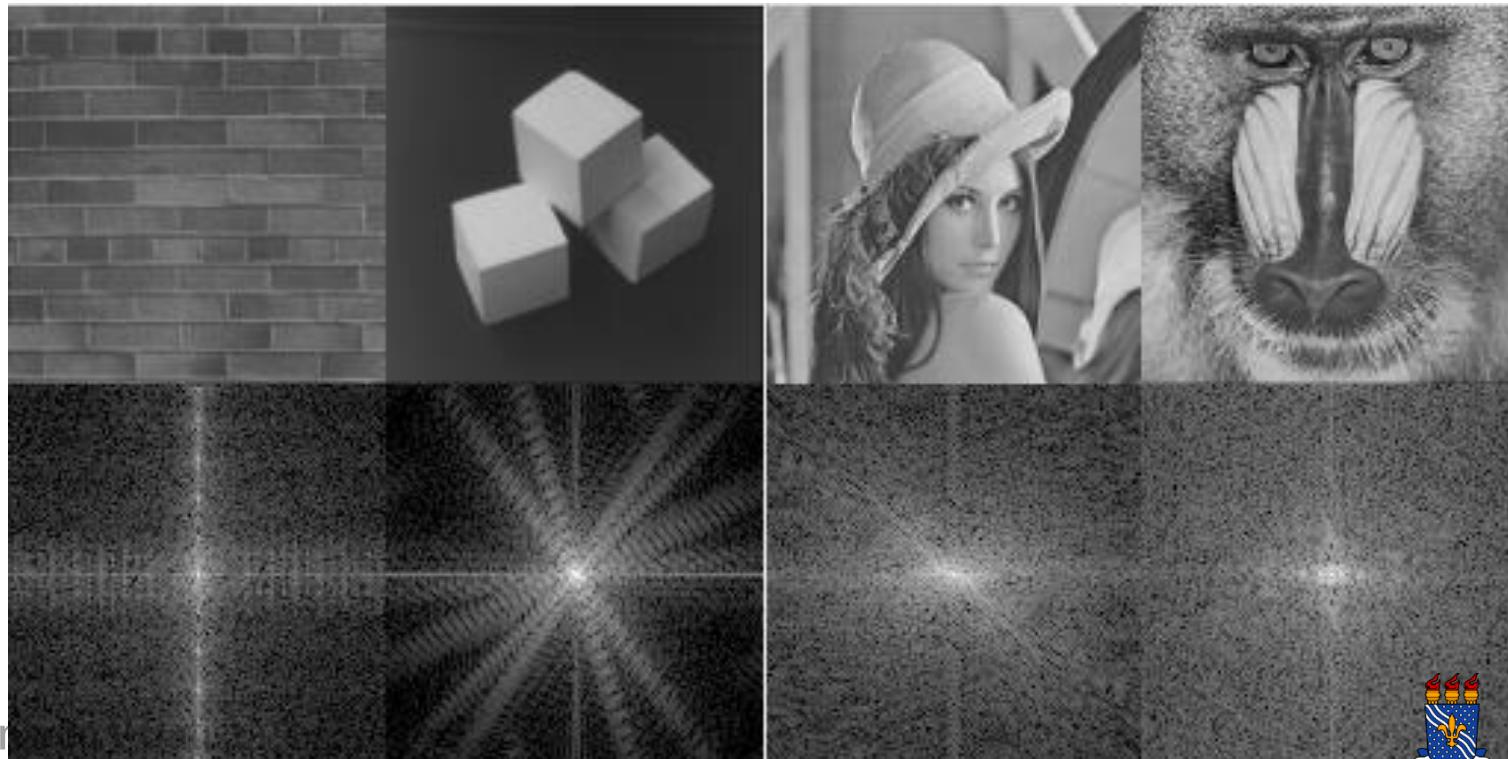
Funções podem ser sintetizadas como soma de
funções senoidais

Domínio da Frequência

Conversão ao DF: transformadas

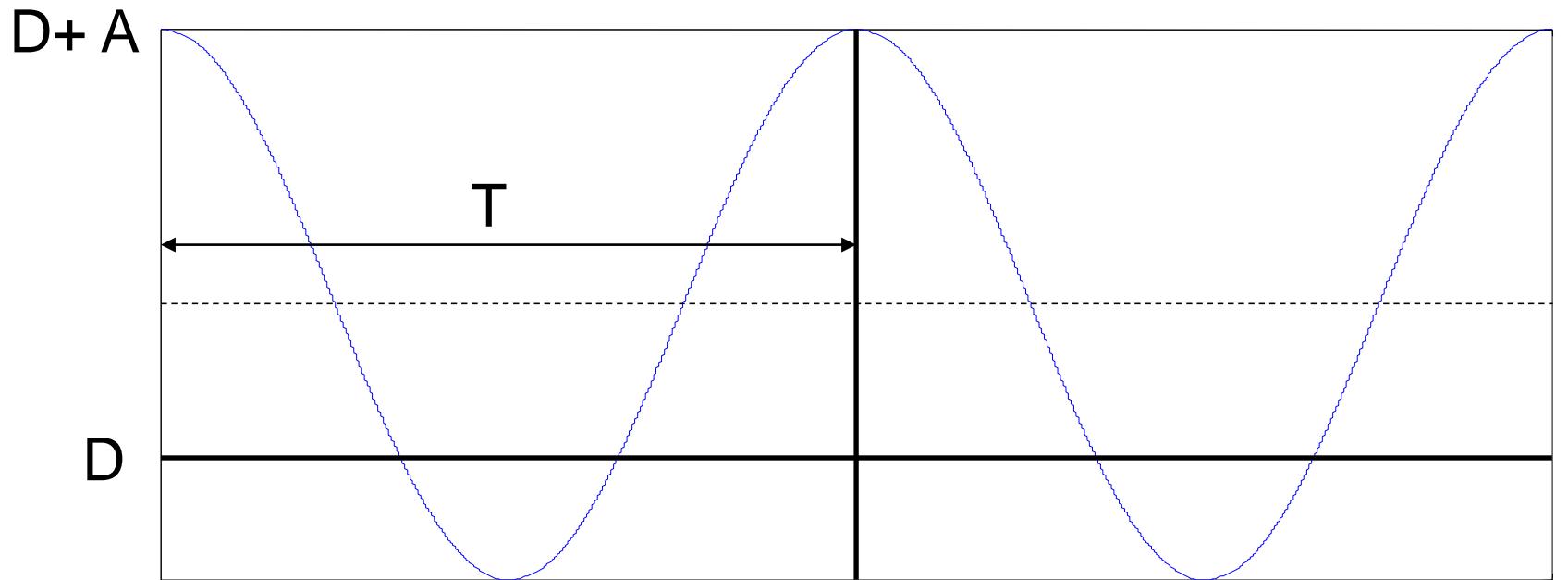
Fourier, Cosseno Discreta, Wavelets etc

Processamento e análise no DF



Cosseno contínuo

$$x(t) = D + A \cos(2\pi f t + \theta)$$



f : frequência, $T=1/f$: período

θ : fase (deslocamento horizontal)

$|A|$: amplitude, D : deslocamento vertical

PDI/Leonardo V. P. de Souza

No gráfico: $\theta = 0$, $D > 0$ e $A > 0$



Família de cossenos contínuos

$$x_k(t) = A_k \cos(2\pi f_k t + \theta_k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$|A_k|$: amplitude do k-ésimo cosseno

f_k : frequência do k-ésimo cosseno

$T_k = 1/f_k$: período do k-ésimo cosseno

θ_k : fase do k-ésimo cosseno

Família de cossenos discretos

$$x_k[n] = A_k \cos(2\pi f_k n + \theta_k), n = 0, 1, \dots, N - 1$$
$$k = 0, 1, \dots, N - 1$$

$|A_k|$: amplitude do k-ésimo cosseno

f_k : frequência do k-ésimo cosseno

$T_k = 1/f_k$: período do k-ésimo cosseno

θ_k : fase do k-ésimo cosseno

Família de cossenos discretos

$$x_k[n] = A_k \cos(2\pi f_k n + \theta_k), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \\ k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$A_k = \left(\frac{2}{N}\right)^{1/2} c_k X_k$$

$$c_k = \begin{cases} (1/2)^{1/2} & \text{para } k = 0 \\ 1 & \text{para } k = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases}$$

$$f_k = \frac{k}{2N} \qquad T_k = \frac{2N}{k} \qquad \theta_k = \frac{k\pi}{2N}$$

Família de cossenos discretos

$$x_k[n] = \left(\frac{2}{N}\right)^{1/2} c_k X_k \cos\left[2\pi \frac{k}{2N} n + \frac{k\pi}{2N}\right], \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \\ k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$c_k = \begin{cases} (1/2)^{1/2} & \text{para } k = 0 \\ 1 & \text{para } k = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases}$$

Família de cossenos discretos

$$x_k[n] = \left(\frac{2}{N}\right)^{1/2} c_k X_k \cos\left[2\pi \frac{k}{2N} n + \frac{k\pi}{2N}\right], \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \\ k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$k = 0 \Rightarrow \begin{cases} f_0 = 0 \\ \theta_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_0[n] = \left(\frac{2}{N}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} X_0, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

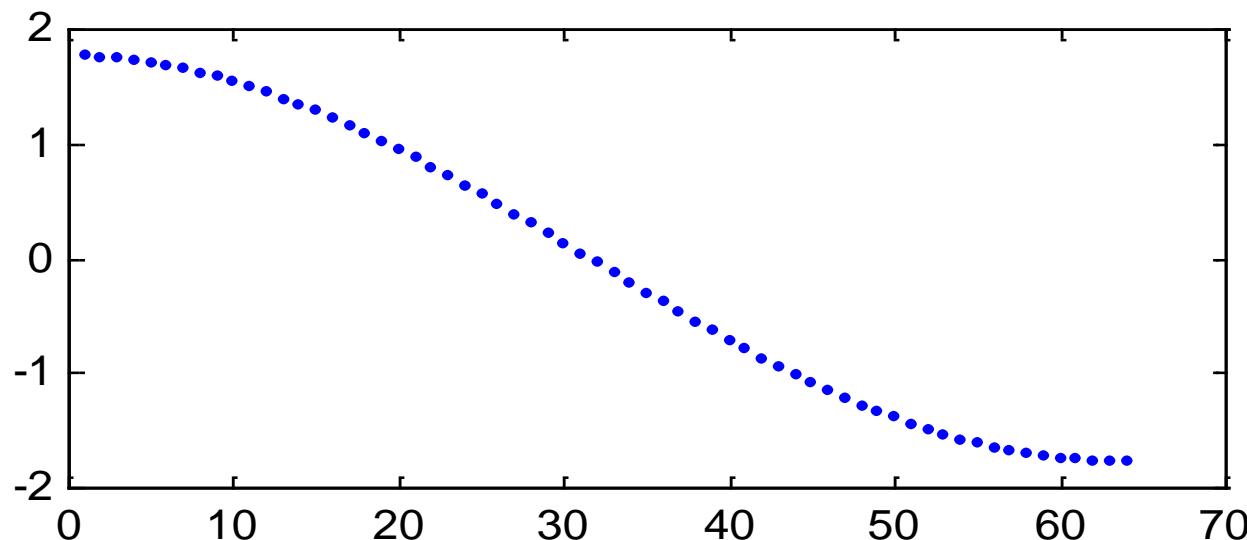
$$k = 1 \Rightarrow f_1 = \frac{1}{2N} \Rightarrow T_1 = 2N \text{ (meio-período em } N \text{ amostras)}$$

$$k = N-1 \Rightarrow f_{N-1} = \frac{N-1}{2N} \Rightarrow T_{N-1} = \frac{2N}{N-1}$$

Família de cossenos discretos - exemplo

$x_k[n] (N=64, X_k=10)$

$k=1$

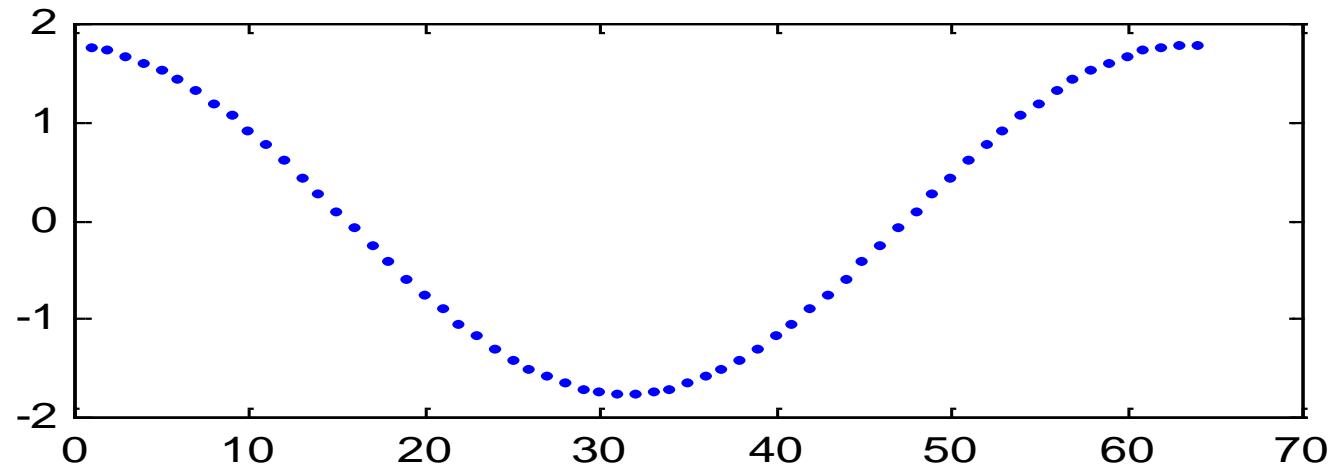


Meio-ciclo

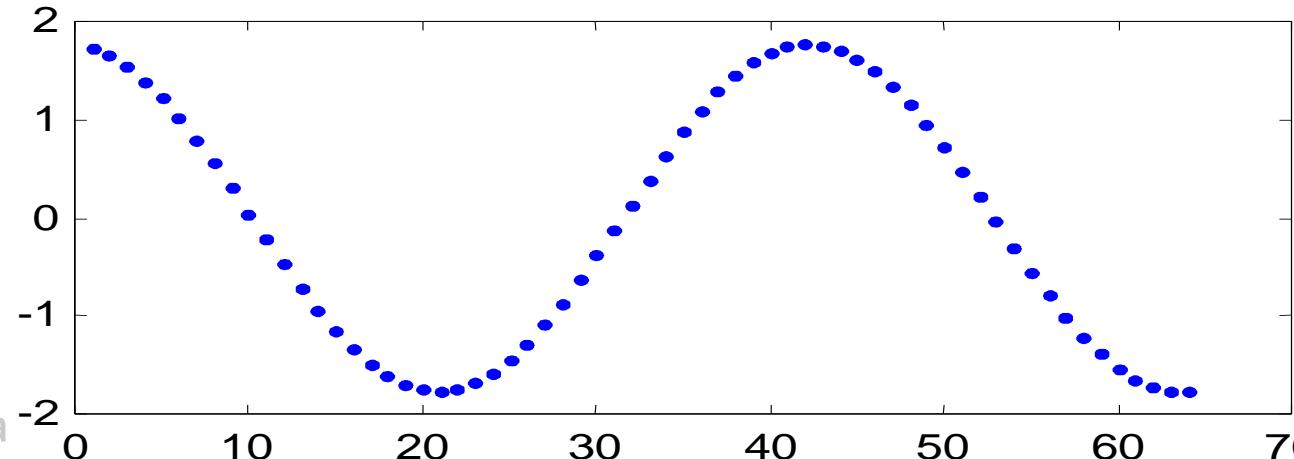
Família de cossenos discretos - exemplo

$x_k[n] (N=64, X_k = 10)$

$k=2$
1 ciclo



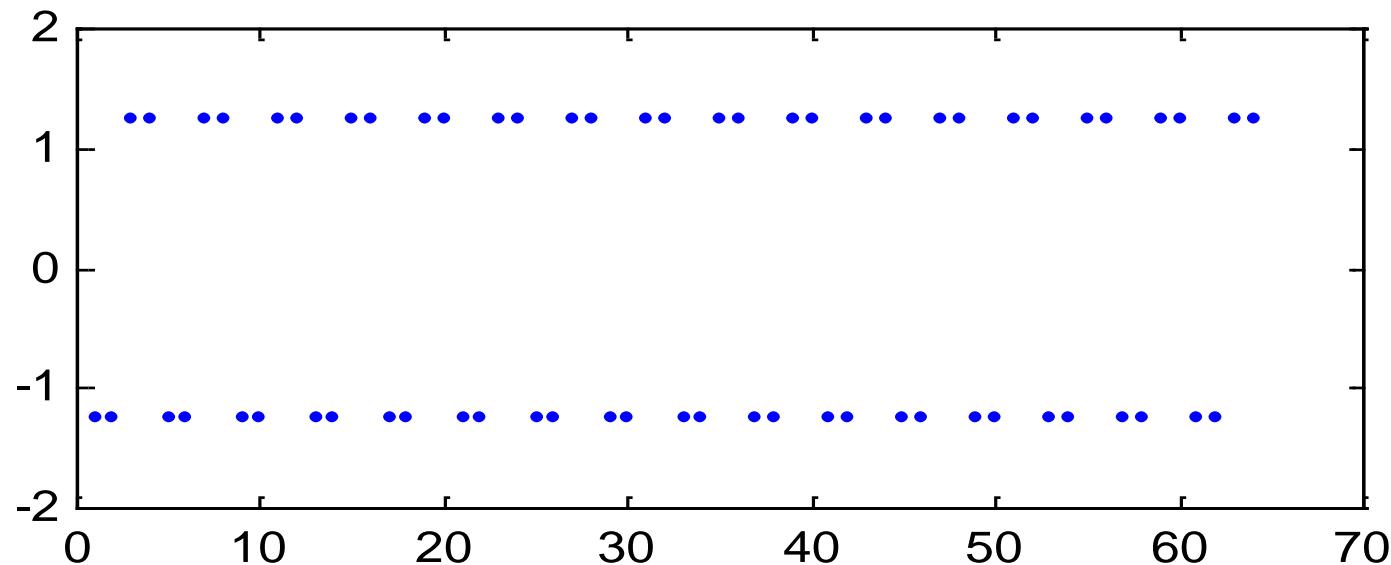
$k=3$
1,5 ciclo



Família de cossenos discretos - exemplo

$x_k[n]$ ($N = 64$, $X_k = 10$)

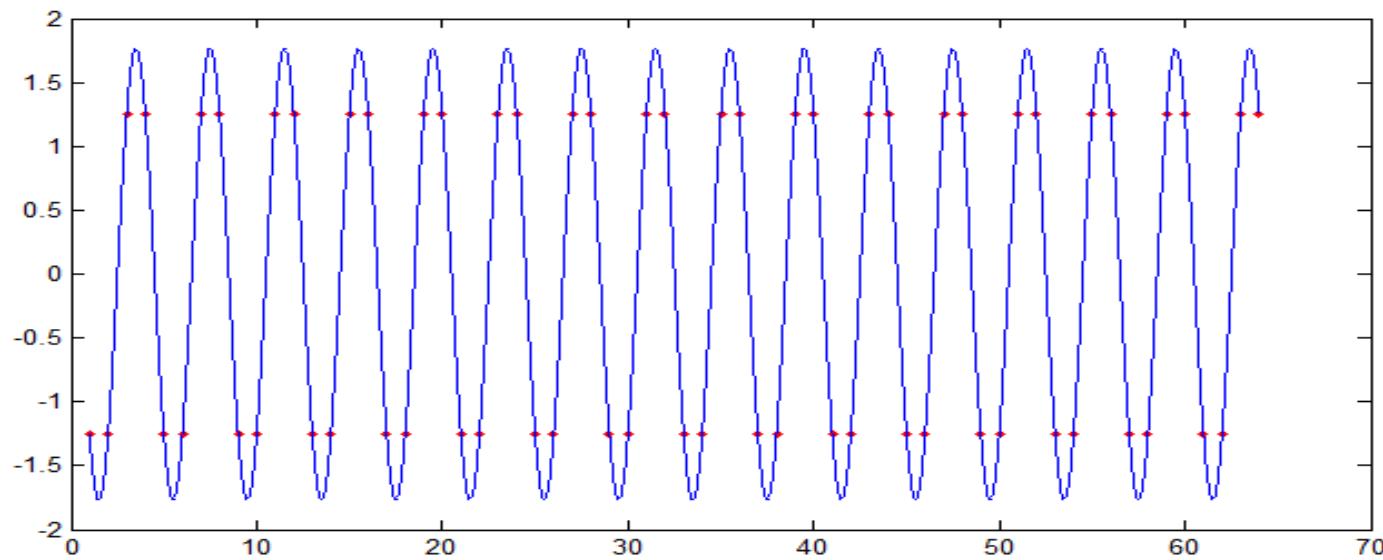
$k=32$: 16 ciclos



Família de cossenos discretos - exemplo

$x_k[n]$ ($N = 64$, $X_k = 10$)

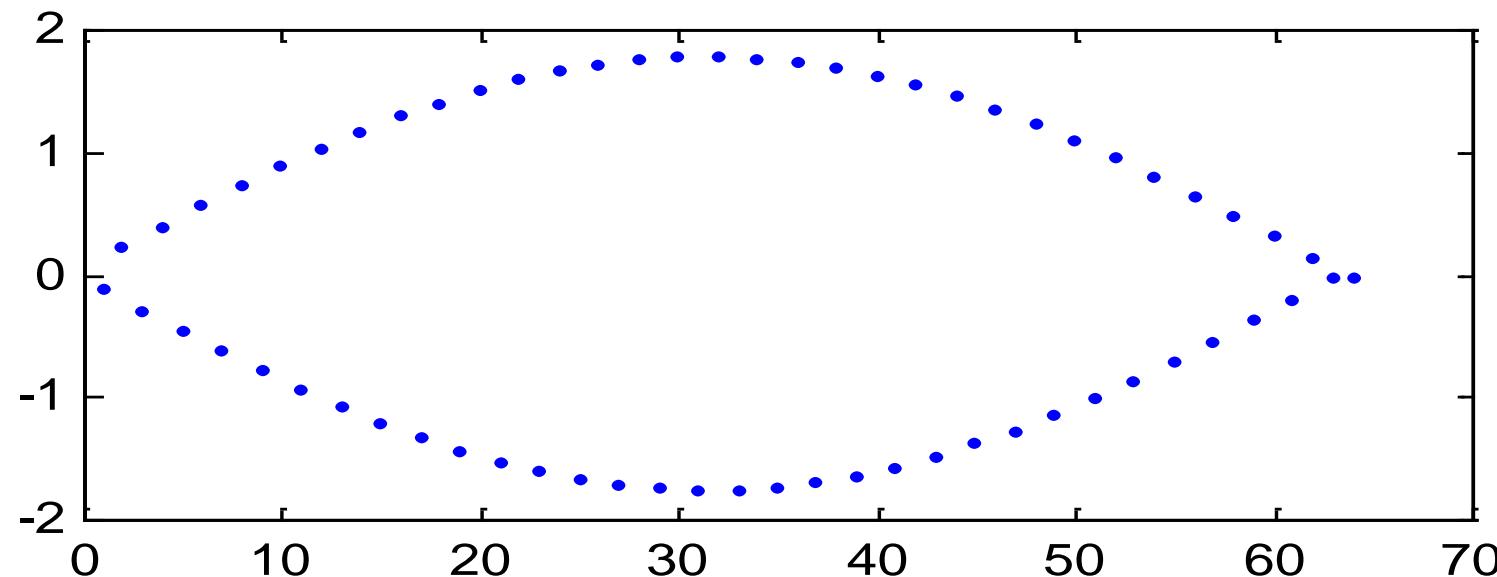
$k=32$: 16 ciclos



Família de cossenos discretos - exemplo

$x_k[n]$ ($N = 64$, $X_k = 10$)

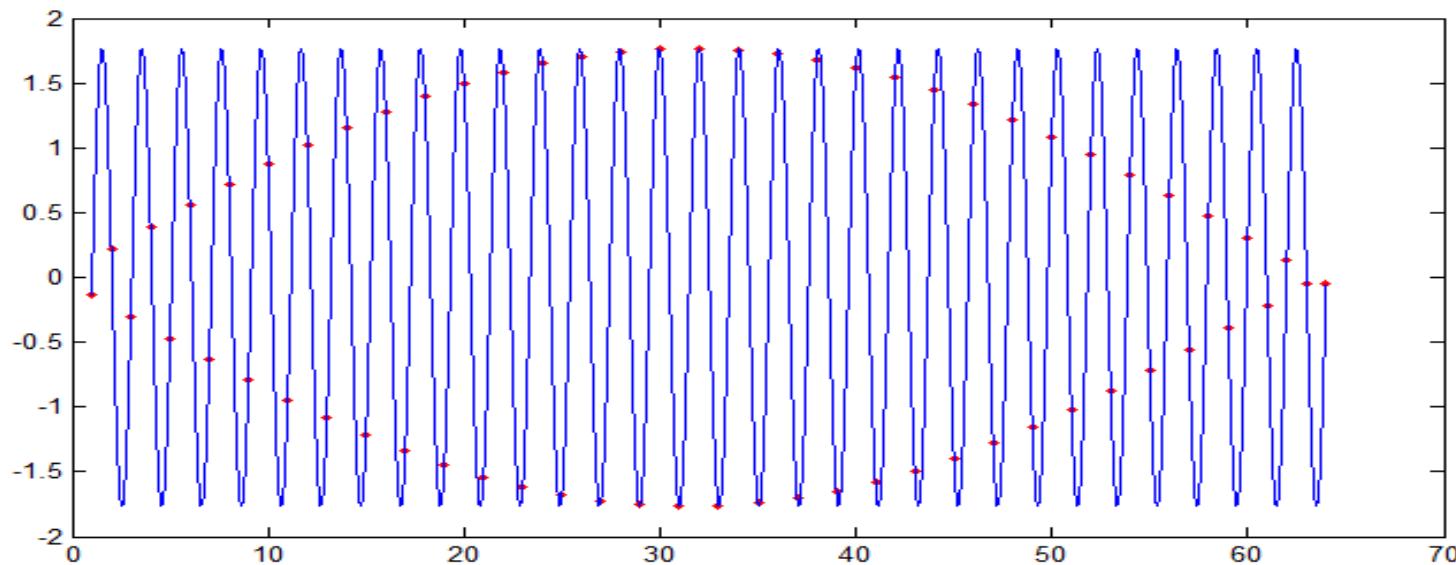
$k=63$: 31,5 ciclos



Família de cossenos discretos - exemplo

$x_k[n]$ ($N = 64$, $X_k = 10$)

$k=63$: 31,5 ciclos

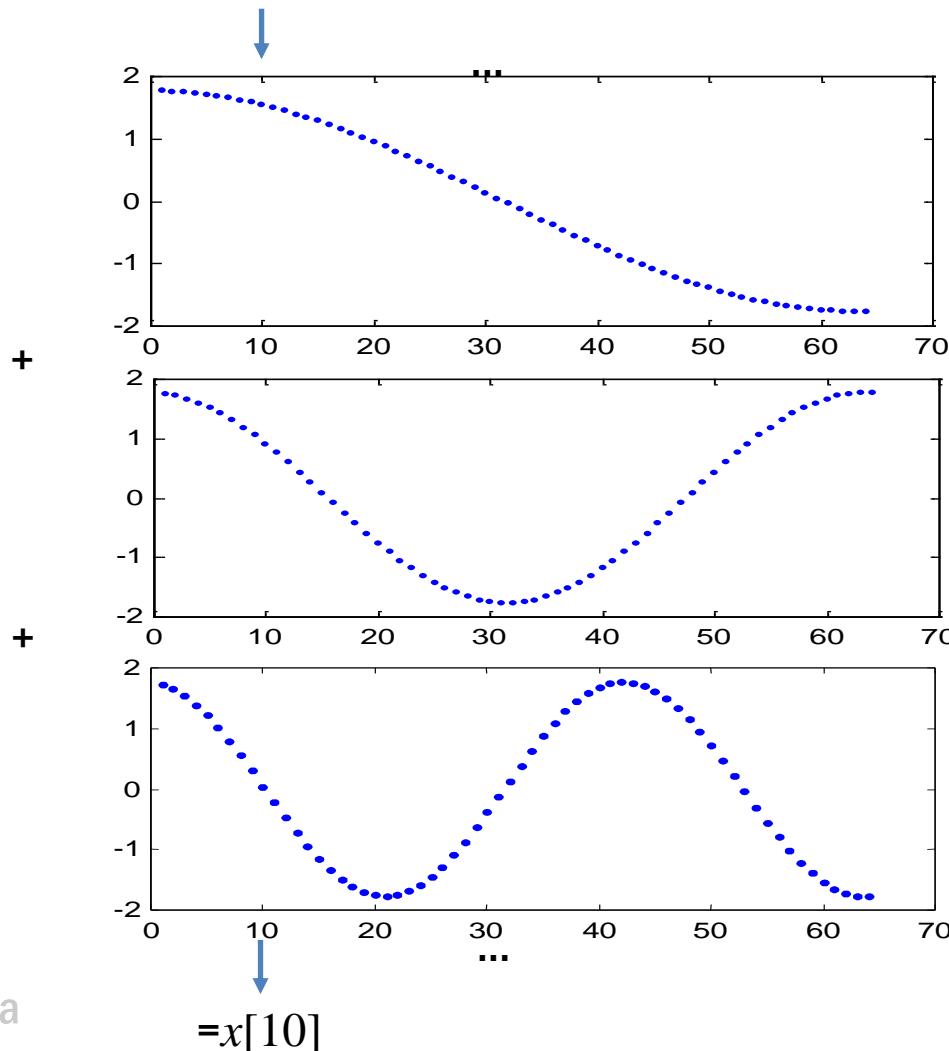


Cossenos discretos

Amostragem de um sinal periódico não necessariamente produz um sinal de mesmo período (ou mesmo periódico)

Somatório de cossenos

Criar um sinal $x[n]$ somando-se os sinais $x_k[n]$, $k = 0 \dots N-1$, amostra a amostra:



Somatório de cossenos

Criar um sinal $x[n]$ somando-se os sinais $x_k[n]$, $k = 0 \dots N-1$, amostra a amostra:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x_k[n], \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$x[n] = \left(\frac{2}{N}\right)^{1/2} \sum_{k=0}^{N-1} c_k X_k \cos\left[2\pi \frac{k}{2N} n + \frac{k\pi}{2N}\right],$$
$$n = 0, 1, \dots, N-1$$

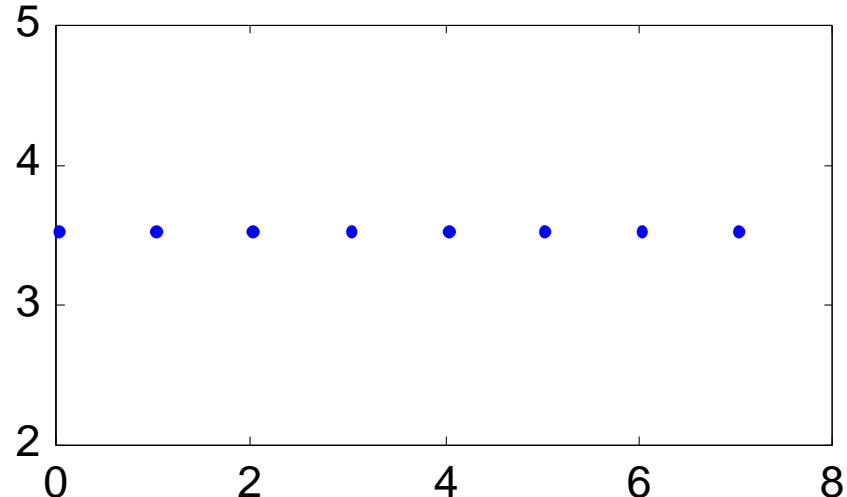
Somatório de cossenos

Exemplo: $N = 8$

$$x_k[n] = \left(\frac{2}{N} \right)^{1/2} c_k X_k \cos \left[2\pi \frac{k}{2N} n + \frac{k\pi}{2N} \right], \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$X_0 = 10, X_1 = 5, X_2 = 8.5, X_3 = 2, X_4 = 1, X_5 = 1.5, \\ X_6 = 0, X_7 = 0.1.$$

$$x_0[n] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{1/2} 10 = 3.5355$$



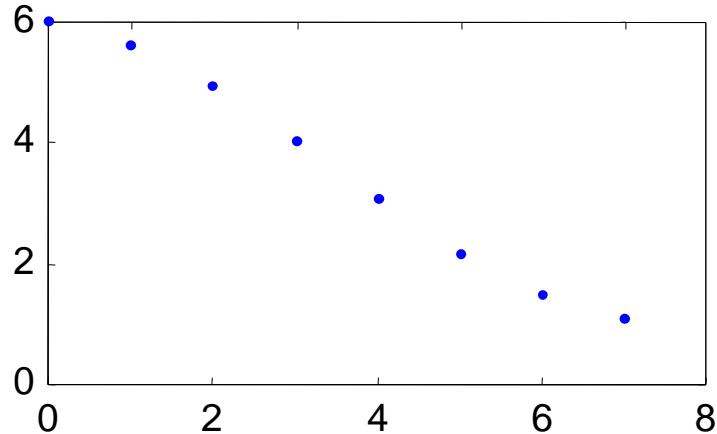
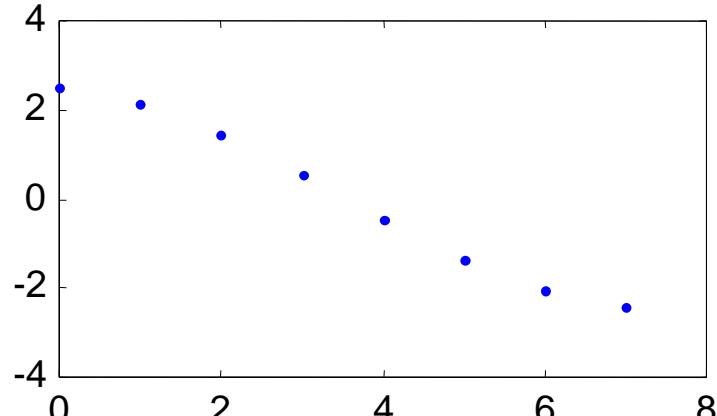
Somatório de cossenos

Exemplo: $N = 8, \dots X_1 = 5\dots$

$$x_k[n] = \left(\frac{2}{N}\right)^{1/2} c_k X_k \cos\left[2\pi \frac{k}{2N} n + \frac{k\pi}{2N}\right], \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

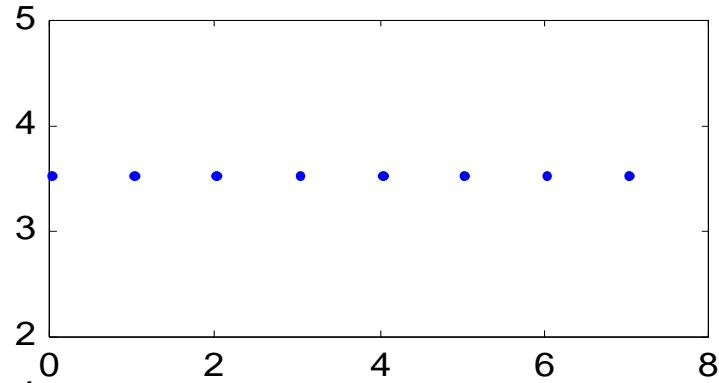
$$x_1[n] = \frac{5}{2} \cos\left[\frac{2\pi n}{16} + \frac{\pi}{16}\right] = \\ 2.45, 2.08, 1.39, 0.49, -0.49, \\ -1.39, -2.08, -2.45$$

$$x_0[n] + x_1[n]$$

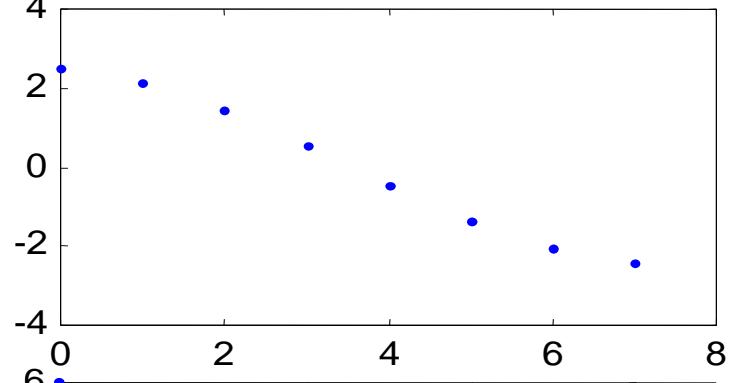


Somatório de cossenos

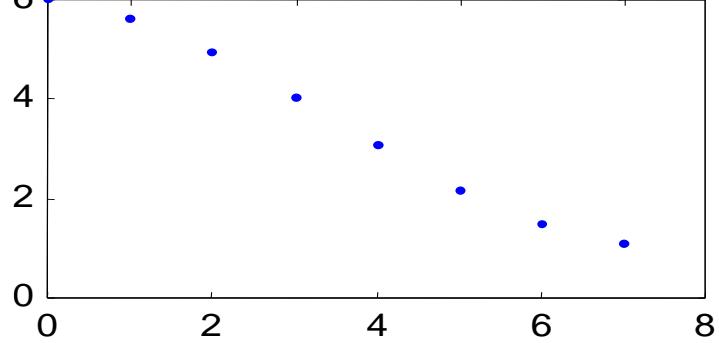
$x_0[n]$



$x_1[n]$



$x_0[n]+x_1[n]$



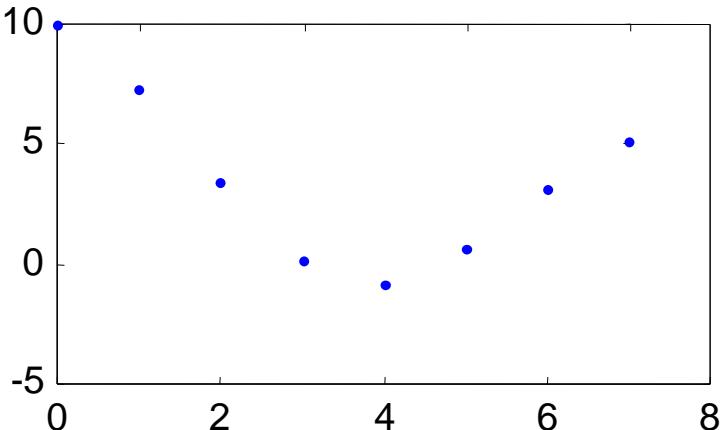
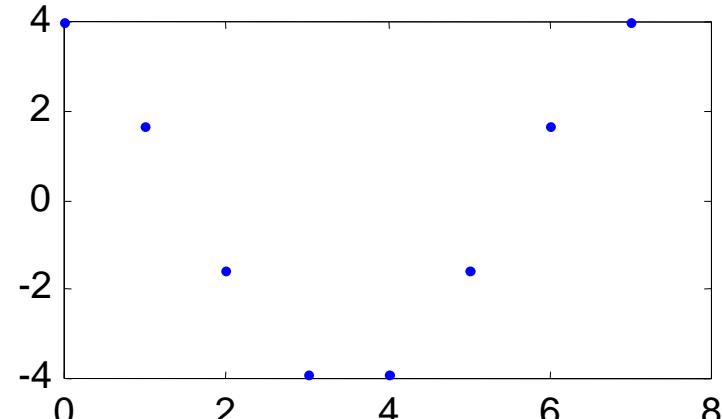
Somatório de cossenos

Exemplo: $N = 8, \dots X_2 = 8,5\dots$

$$x_k[n] = \left(\frac{2}{N}\right)^{1/2} c_k X_k \cos\left[2\pi \frac{k}{2N} n + \frac{k\pi}{2N}\right], \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$x_2[n] = \frac{8.5}{2} \cos\left[\frac{4\pi n}{16} + \frac{2\pi}{16}\right] = \\ 3.93, 1.63, -1.63, -3.93, \\ -3.93, -1.63, 1.63, 3.93$$

$$x_0[n] + x_1[n] + x_2[n]$$



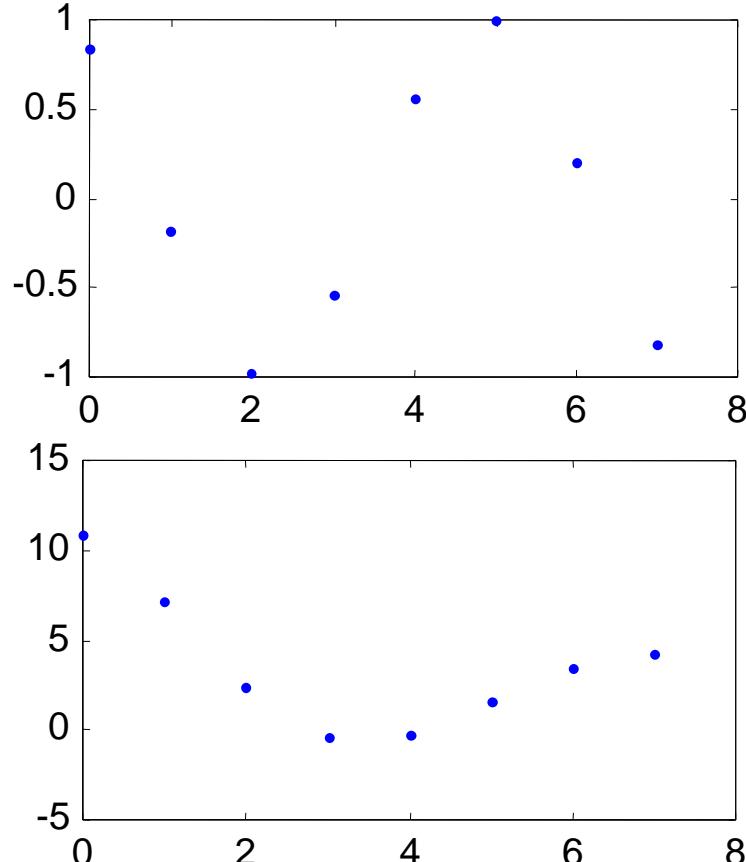
Somatório de cossenos

Exemplo: $N = 8, \dots X_3 = 2\dots$

$$x_k[n] = \left(\frac{2}{N}\right)^{1/2} c_k X_k \cos\left[2\pi \frac{k}{2N} n + \frac{k\pi}{2N}\right], \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$x_3[n] = \frac{2}{2} \cos\left[\frac{6\pi n}{16} + \frac{3\pi}{16}\right] = \\ 0.83, -0.20, -0.98, -0.56, \\ 0.56, 0.98, 0.20, -0.83$$

$$x_0[n] + x_1[n] + x_2[n] + x_3[n]$$



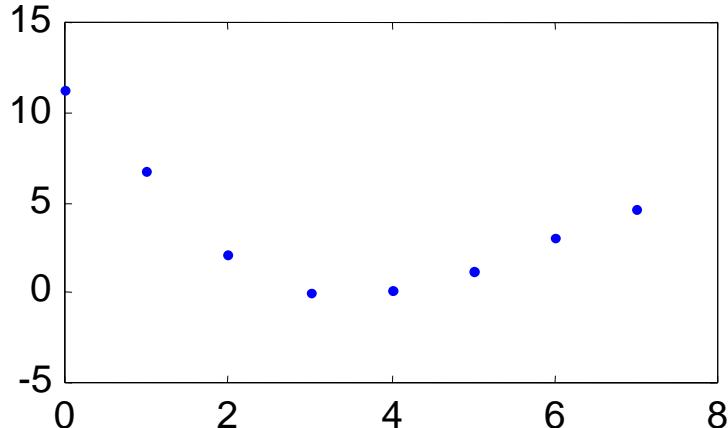
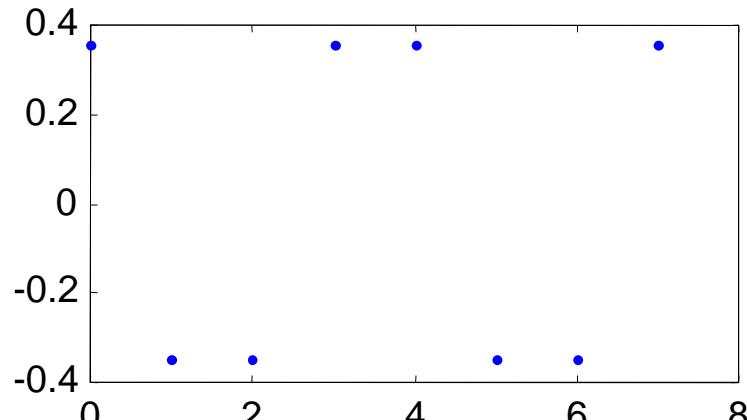
Somatório de cossenos

Exemplo: $N = 8, \dots X_4 = 1\dots$

$$x_k[n] = \left(\frac{2}{N}\right)^{1/2} c_k X_k \cos\left[2\pi \frac{k}{2N} n + \frac{k\pi}{2N}\right], \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$x_4[n] = \frac{1}{2} \cos\left[\frac{8\pi n}{16} + \frac{4\pi}{16}\right] = \\ 0.35, -0.35, -0.35, 0.35, \\ 0.35, -0.35, -0.35, 0.35$$

$$x_0[n] + x_1[n] + x_2[n] + x_3[n] + x_4[n]$$



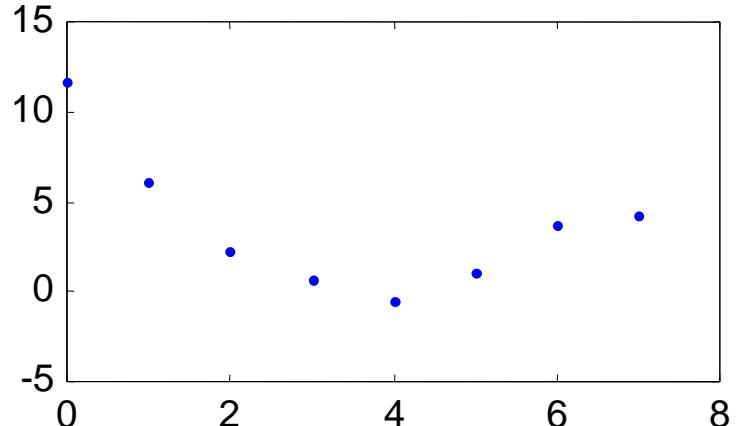
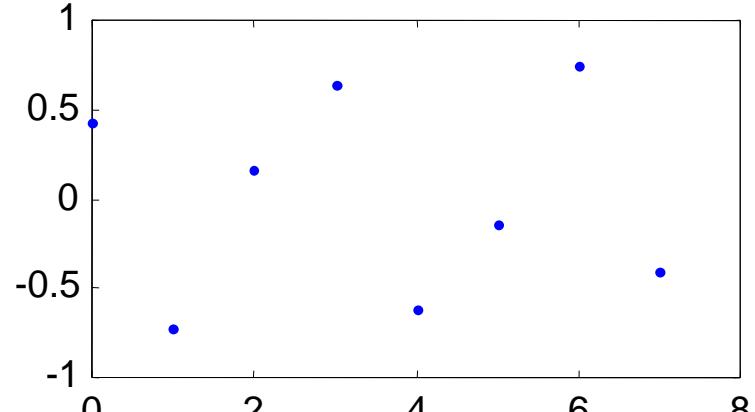
Somatório de cossenos

Exemplo: $N = 8, \dots X_5 = 1.5\dots$

$$x_k[n] = \left(\frac{2}{N}\right)^{1/2} c_k X_k \cos\left[2\pi \frac{k}{2N} n + \frac{k\pi}{2N}\right], \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$x_5[n] = \frac{1.5}{2} \cos\left[\frac{10\pi n}{16} + \frac{5\pi}{16}\right] = \\ 0.42, -0.74, 0.15, 0.62, \\ -0.62, -0.15, 0.74, -0.42$$

$$x_0[n] + x_1[n] + x_2[n] + x_3[n] + \\ + x_4[n] + x_5[n]$$



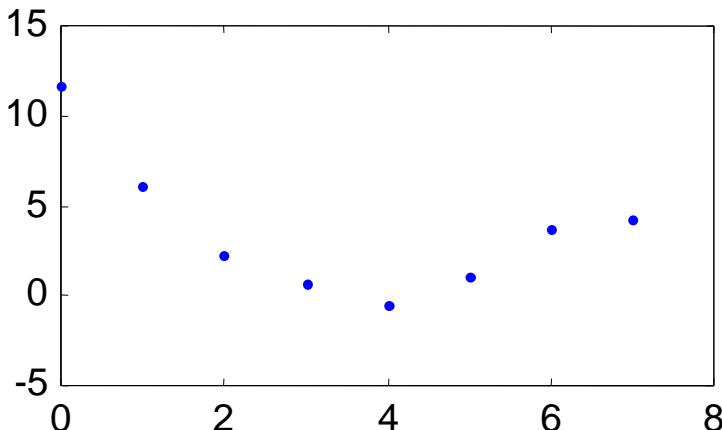
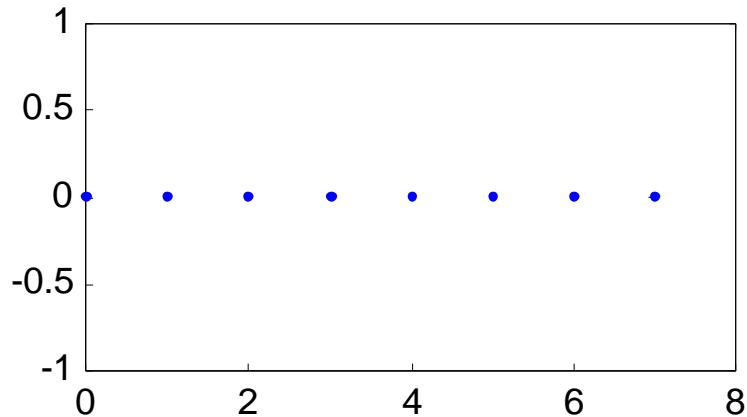
Somatório de cossenos

Exemplo: $N = 8, \dots X_6 = 0\dots$

$$x_k[n] = \left(\frac{2}{N}\right)^{1/2} c_k X_k \cos\left[2\pi \frac{k}{2N} n + \frac{k\pi}{2N}\right], \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\begin{aligned} x_6[n] &= \frac{0}{2} \cos\left[\frac{12\pi n}{16} + \frac{6\pi}{16}\right] \\ &= \\ &= 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_0[n] + x_1[n] + x_2[n] + x_3[n] + \\ + x_4[n] + x_5[n] + x_6[n] \end{aligned}$$



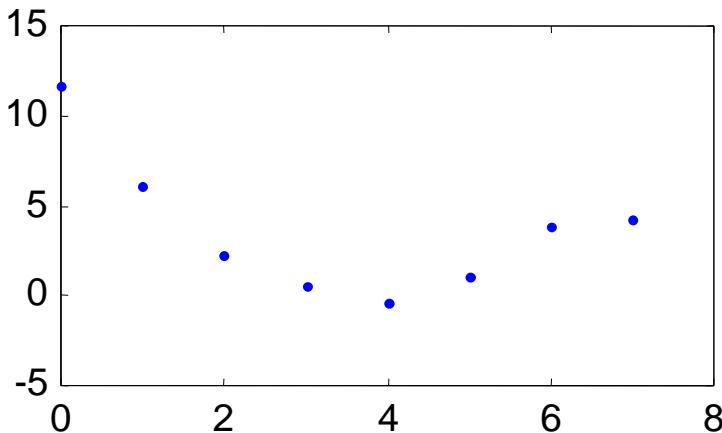
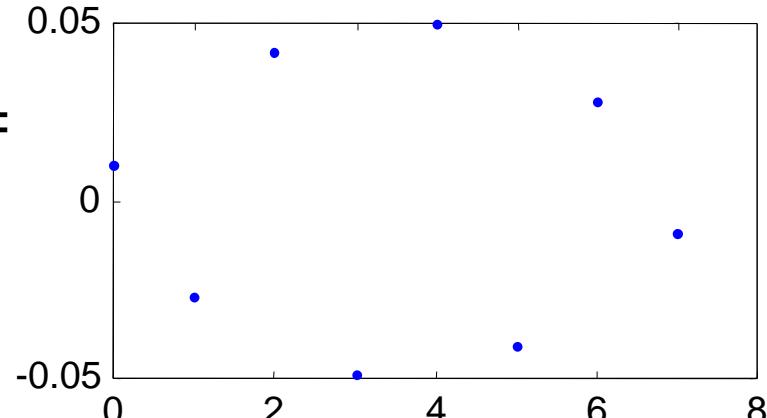
Somatório de cossenos

Exemplo: $N = 8, \dots X_7 = 0.1$

$$x_k[n] = \left(\frac{2}{N} \right)^{1/2} c_k X_k \cos \left[2\pi \frac{k}{2N} n + \frac{k\pi}{2N} \right], \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$x_7[n] = \frac{0.1}{2} \cos \left[\frac{14\pi n}{16} + \frac{7\pi}{16} \right] = \\ 0.01, -0.03, 0.04, -0.05, \\ 0.05, -0.04, 0.03, -0.01$$

$$x_0[n] + x_1[n] + x_2[n] + x_3[n] + \\ + x_4[n] + x_5[n] + x_6[n] + x_7[n] = \\ 11.62, 5.93, 2.15, 0.47, \\ -0.54, 0.96, 3.69, 4.02$$



Somatório de cossenos

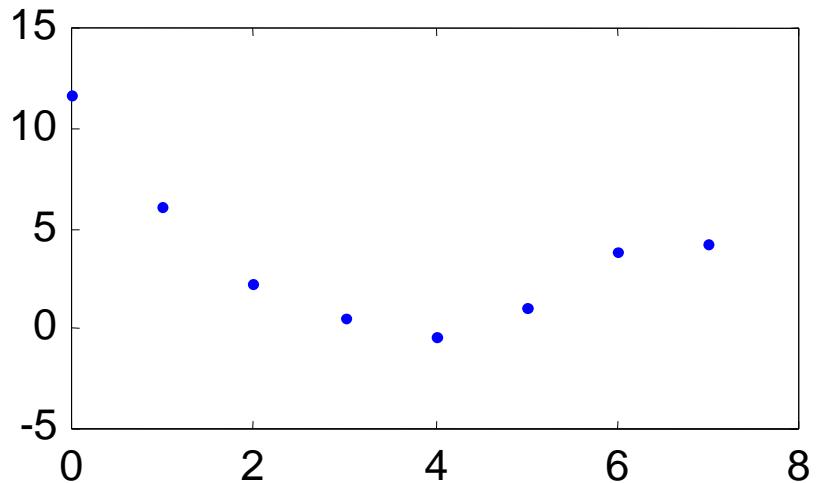
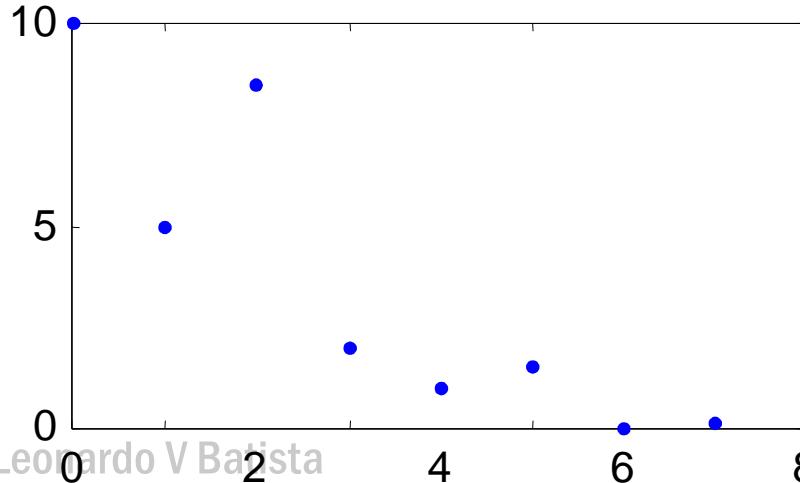
X_k pode ser visto como um **sinal discreto**

$$X[k] = X_0, \dots, X_{N-1}$$

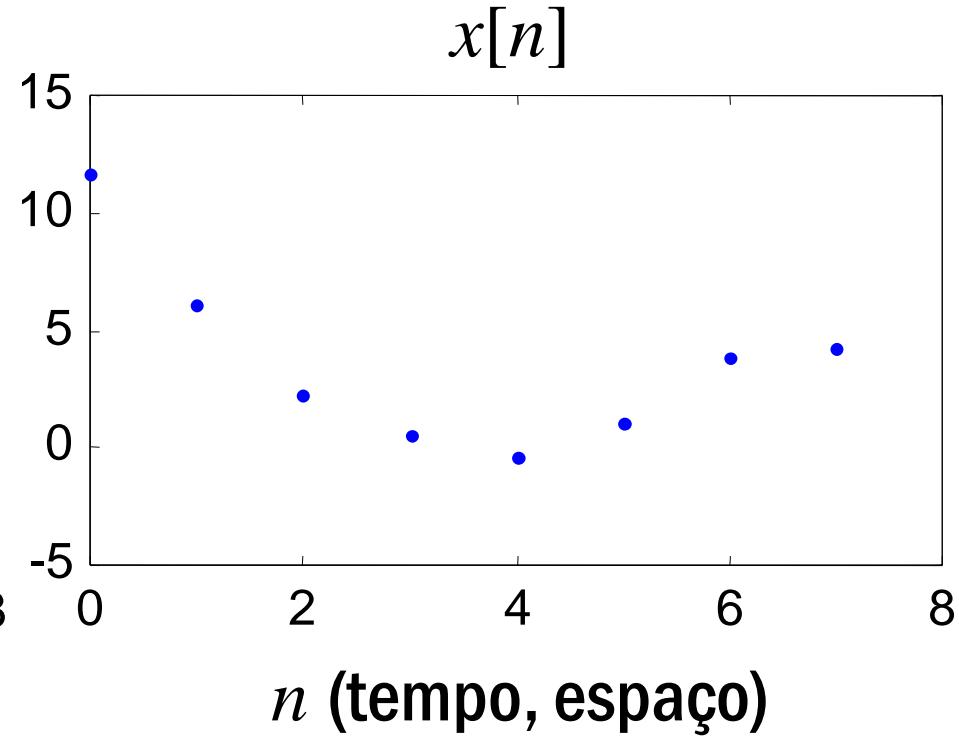
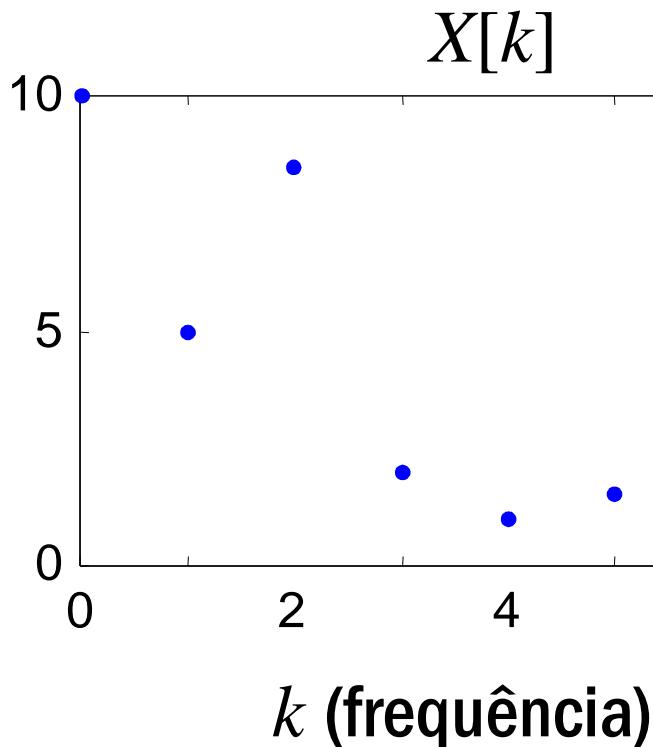
Exemplo: $X[k]=10, 5, 8.5, 2, 1, 1.5, 0, 0.1$

Dado $X[k]$ pode-se obter $x[n]$

$X[k]$: representação alternativa para $x[n]$



Somatório de cossenos



Somatório de cossenos

$x_k[n]$? $X[k]$? $x[n]$?

$x_k[n]$: cosseno componente de $x[n]$, de frequência $f_k = k/2N$; ou

$x_k[n]$: componente de frequência $f_k = k/2N$; ou

f_k é uma frequência componente

$X[k]$: diretamente relacionado com a amplitude do componente de frequência f_k

$X[k]$ representa a importância do componente de frequência f_k

Somatório de cossenos

Dado $x[n]$, posso obter $X[k]$ univocamente?

Considere a soma de quatro números

$$Y_0 + Y_1 + Y_2 + Y_3 = 10$$

$$Y_i = ?$$

Regras

Y_i é zero ou uma potência não negativa de 2

Apenas o valor 0 pode repetir-se na sequência.

$$10 = 0+0+2+8$$

Transformada Cosseno Discreta (DCT)

DCT de $x[n]$

$$X[k] = \left(\frac{2}{N} \right)^{1/2} c_k \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos \left[2\pi \frac{k}{2N} n + \frac{k\pi}{2N} \right], \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Transformada DCT inversa (IDCT) de $X[k]$

$$x[n] = \left(\frac{2}{N} \right)^{1/2} \sum_{k=0}^{N-1} c_k X[k] \cos \left[2\pi \frac{k}{2N} n + \frac{k\pi}{2N} \right], \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

DCT

Demonstração: substituir $x[n]$ em $X[k]$, desenvolver e encontrar $X[k] = X[k]$

$$x[n] = \left(\frac{2}{N} \right)^{1/2} \sum_{k=0}^{N-1} c_k X[k] \cos \left[2\pi \frac{k}{2N} n + \frac{k\pi}{2N} \right], \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$X[k] = \left(\frac{2}{N} \right)^{1/2} c_k \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos \left[2\pi \frac{k}{2N} n + \frac{k\pi}{2N} \right], \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

DCT

Observações úteis para a demonstração:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_k[n] = ?, \quad k = 1, \dots, N - 1$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_k[n] = 0, \quad k = 1, \dots, N - 1$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_k[n]x_l[n] = 0, \quad k, l = 0, 1, \dots, N - 1, \quad k \neq l$$

Espaço de funções ortogonais

DCT

$X[k]$: coeficientes DCT

X : representação de x no domínio da frequência

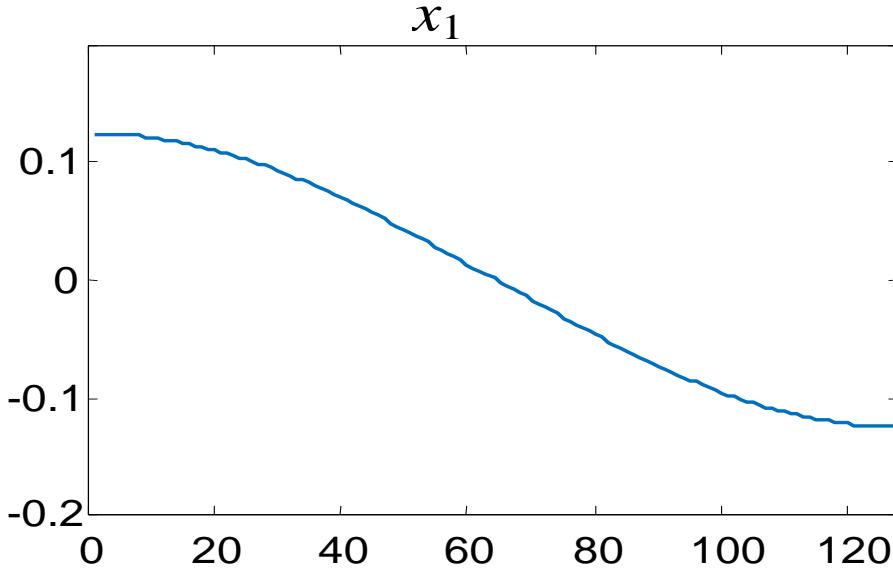
$X[0]$: coeficiente DC (*Direct Current*)

$X[1]..X[N-1]$: coeficientes AC (*Alternate Current*)

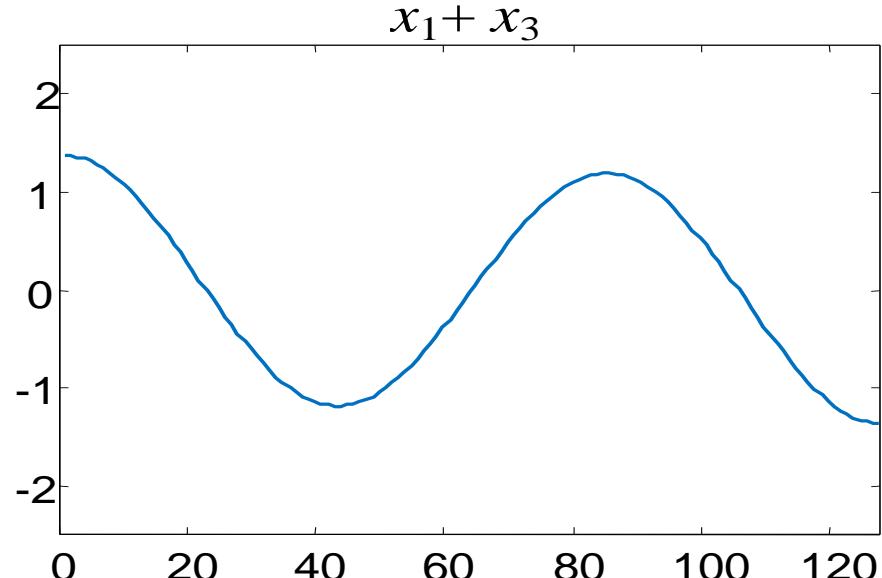
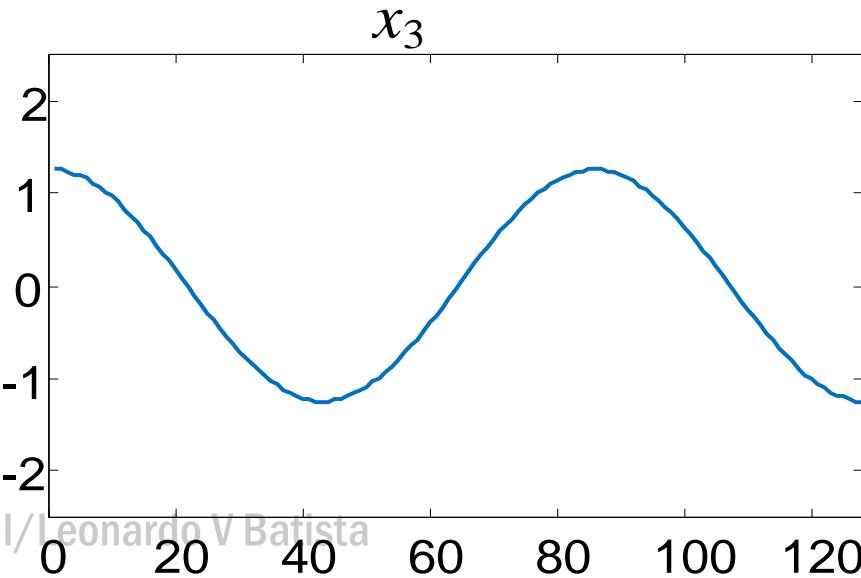
Complexidade computacional

Algoritmos eficientes: Fast DCT, FDCT

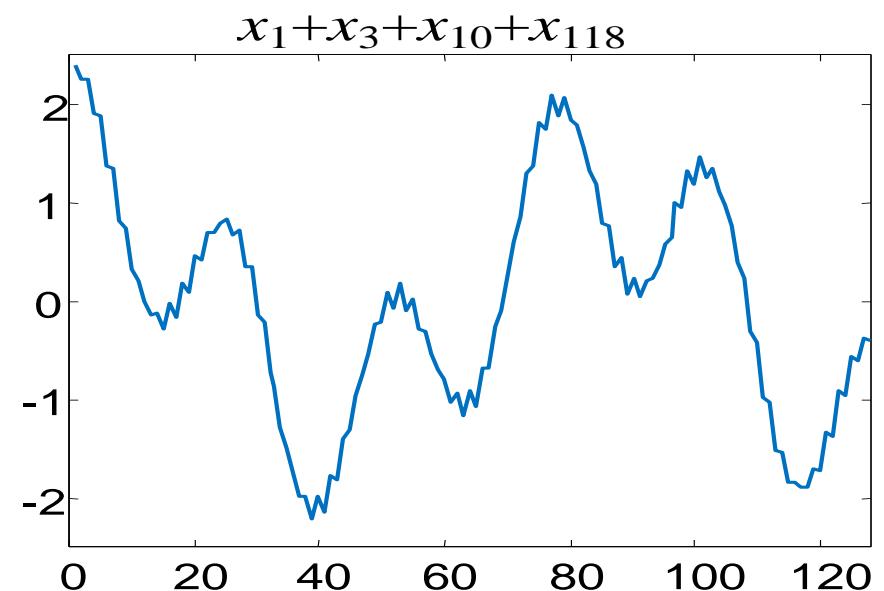
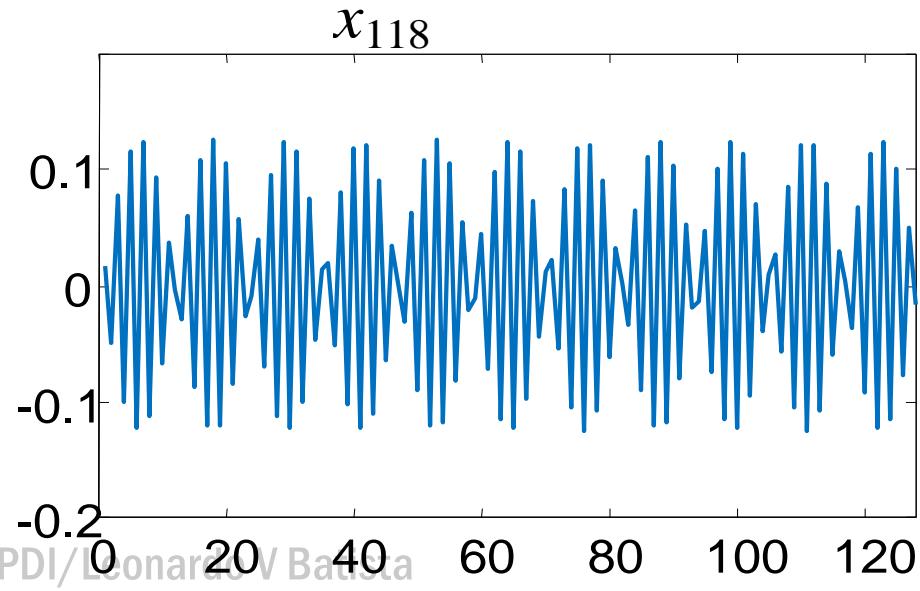
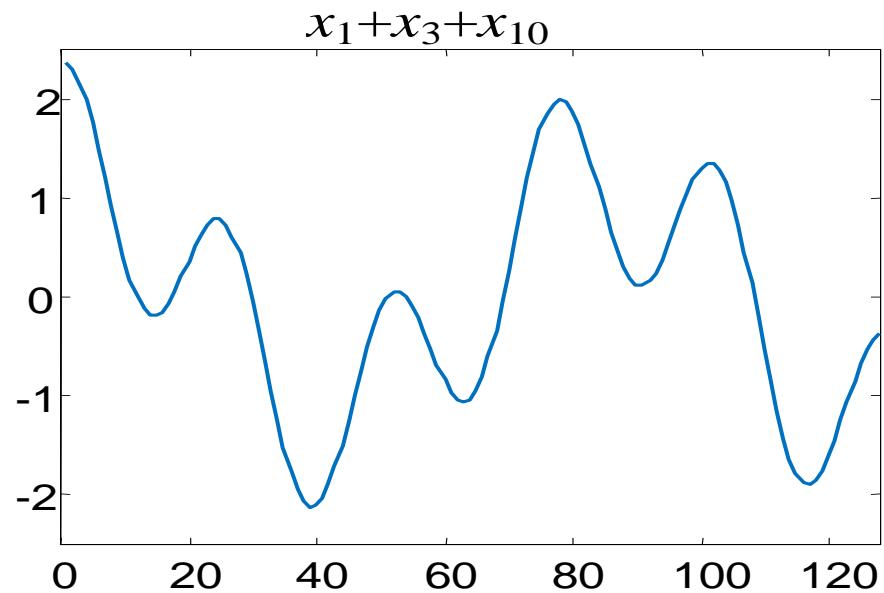
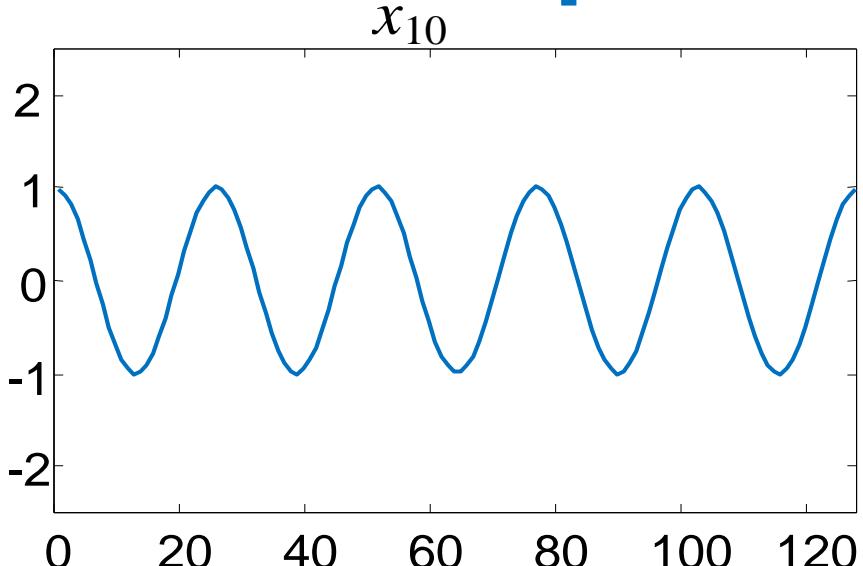
DCT - Exemplo 1



(Os cossenos não apresentados têm amplitude nula)

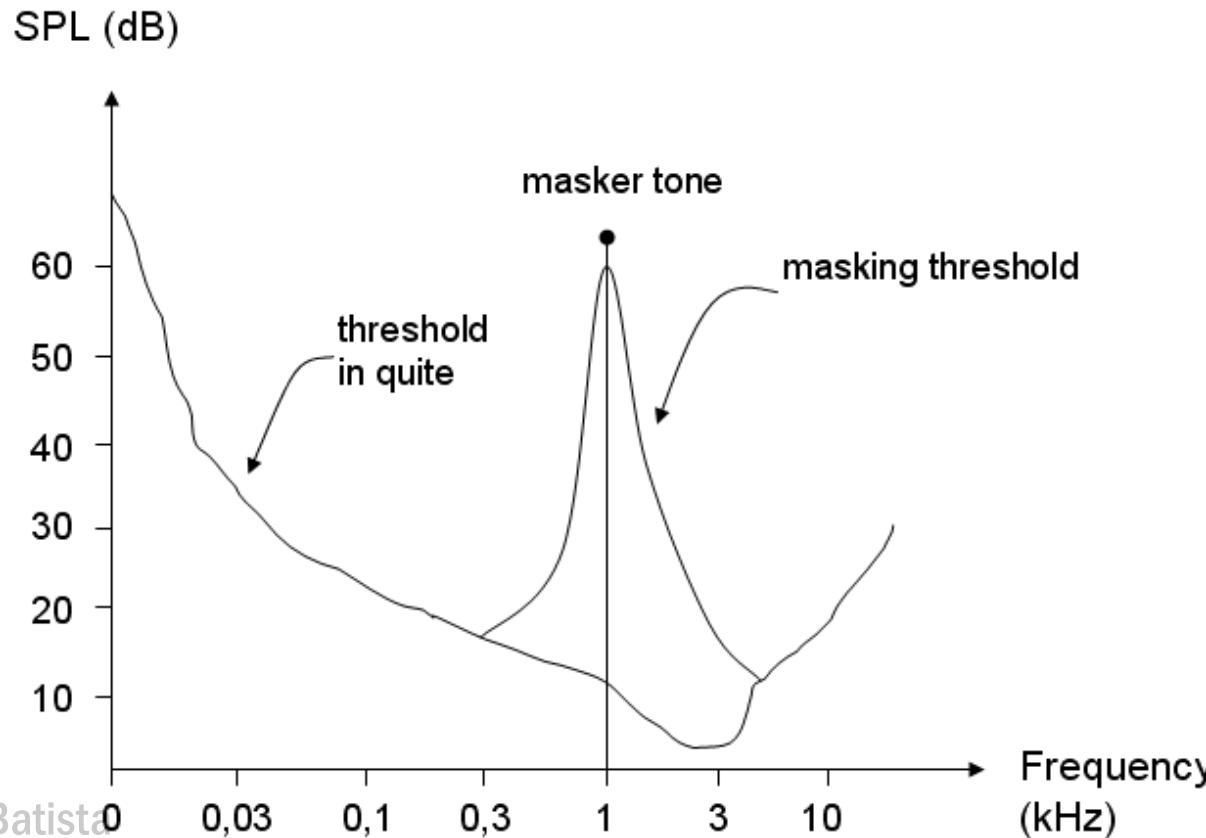


DCT - Exemplo 1

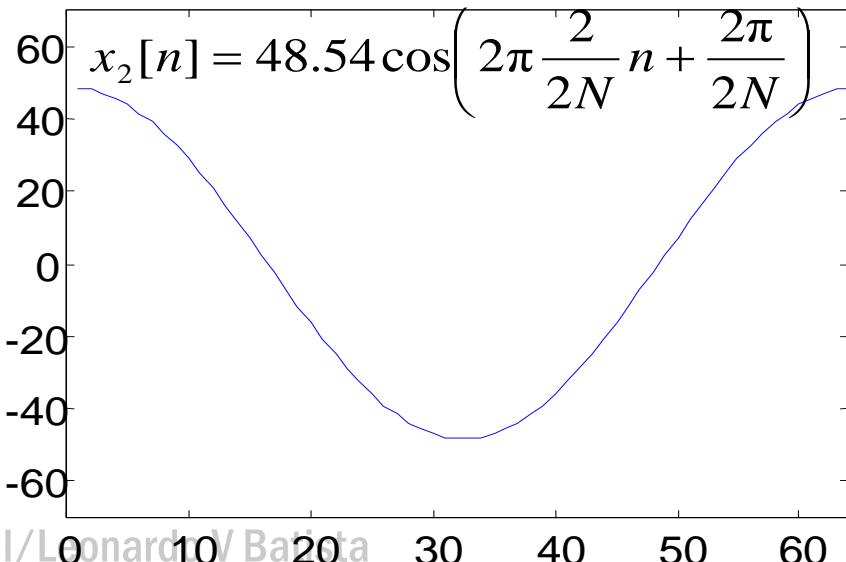
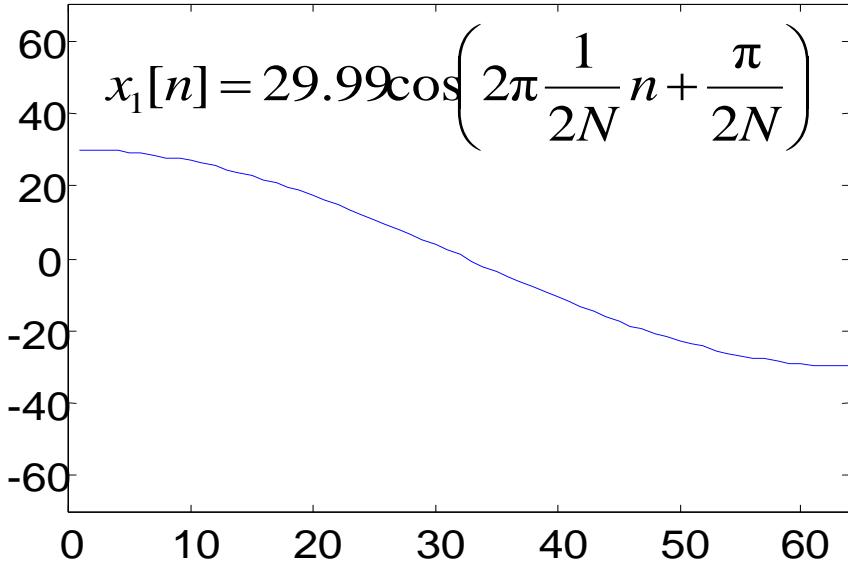


DCT no formato mp3

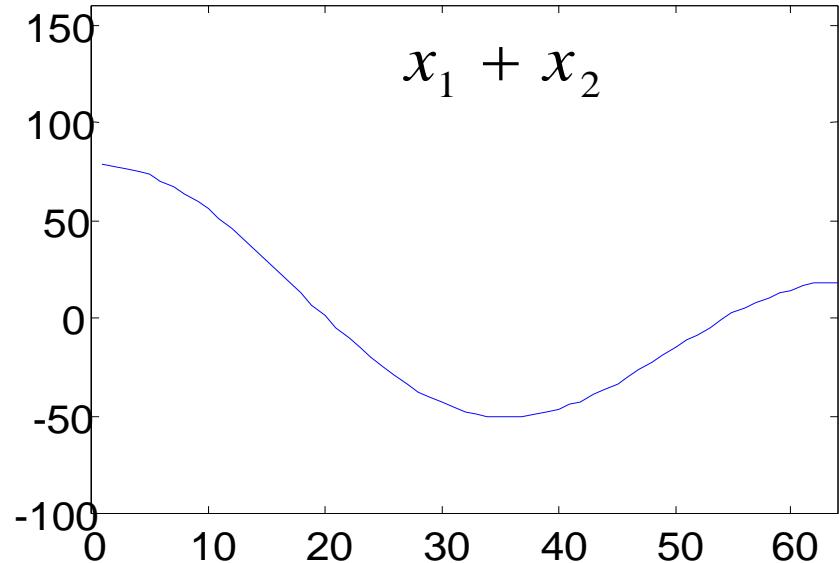
O formato de áudio mp3 utiliza máscaras perceptuais para eliminar componentes pouco importantes, aumentando a compressão



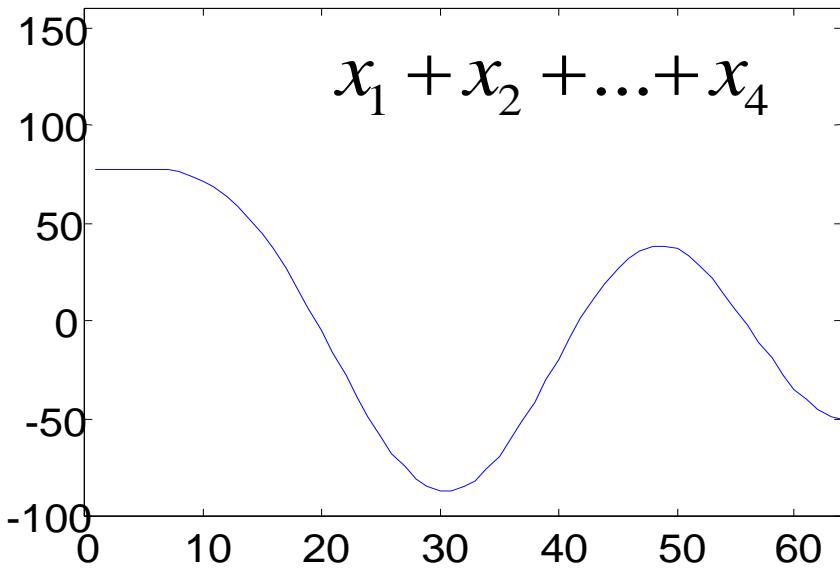
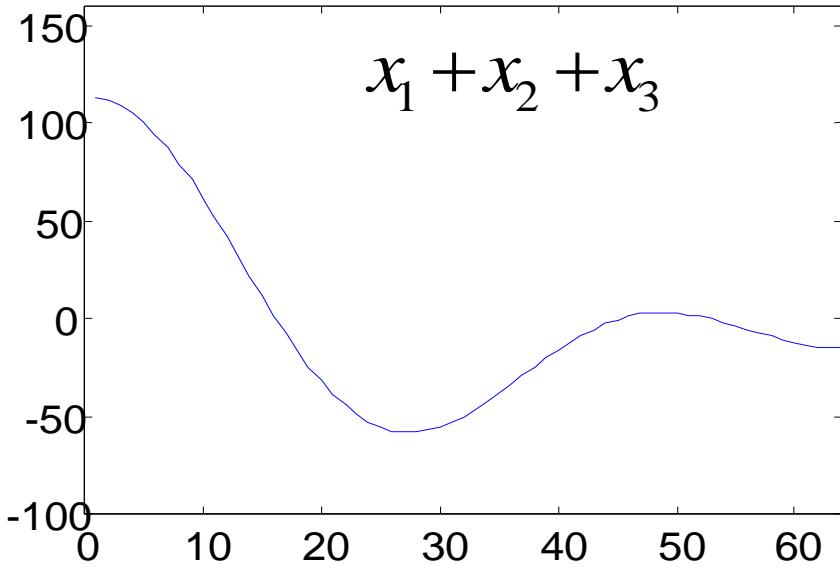
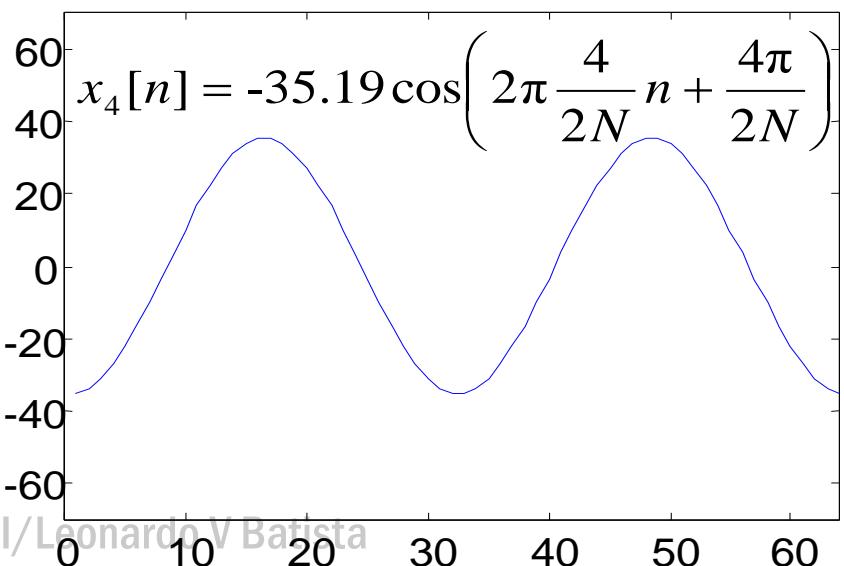
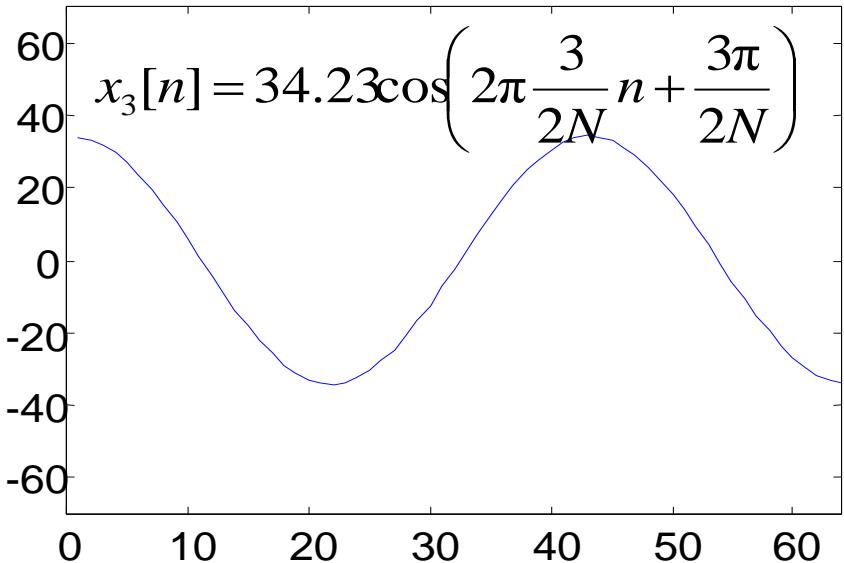
DCT Exemplo 2



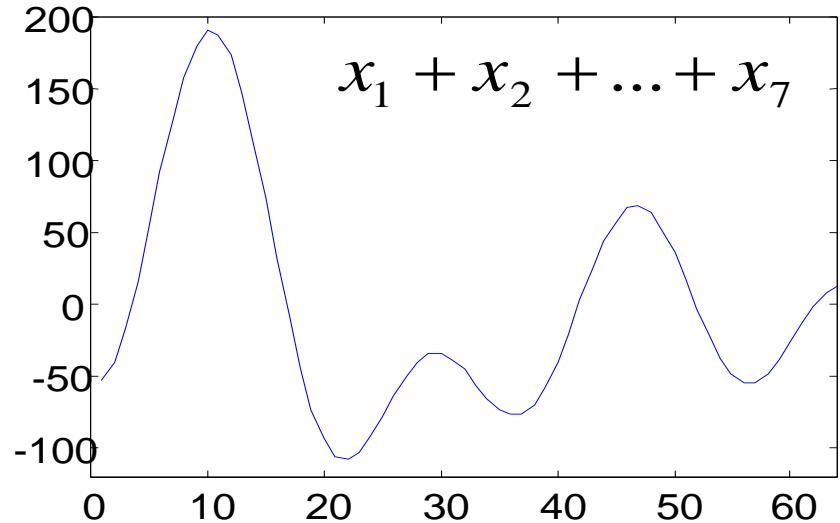
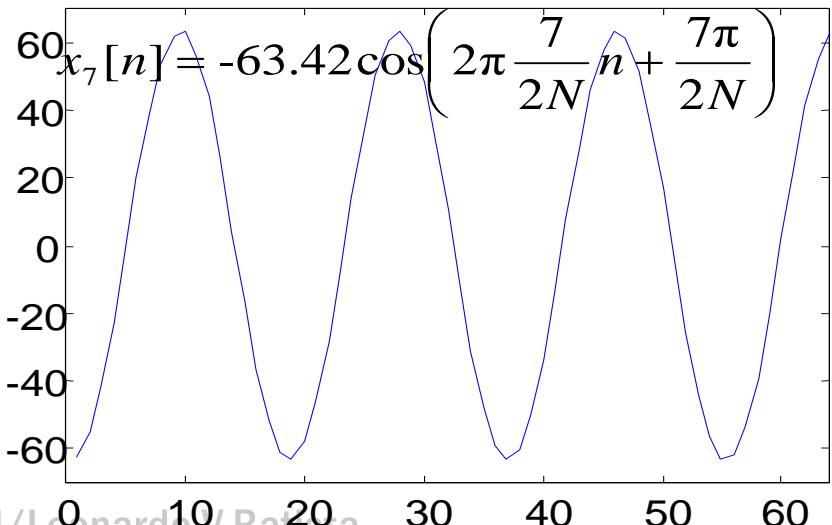
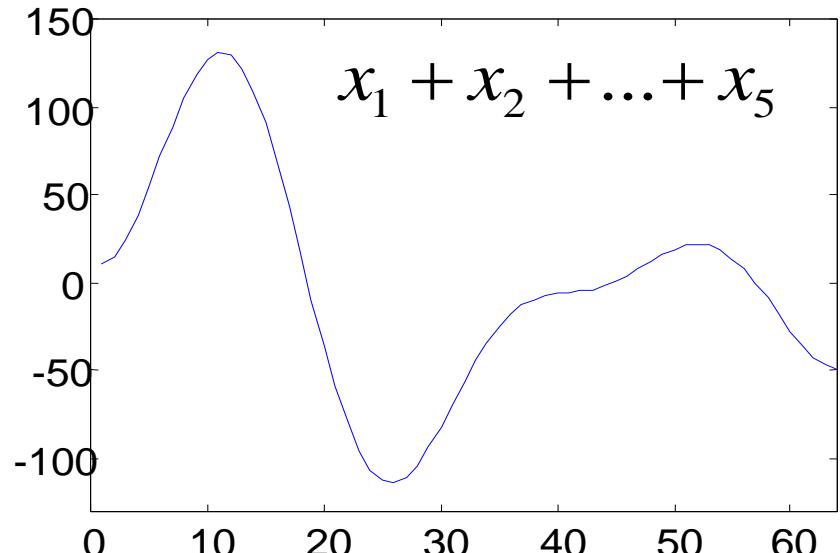
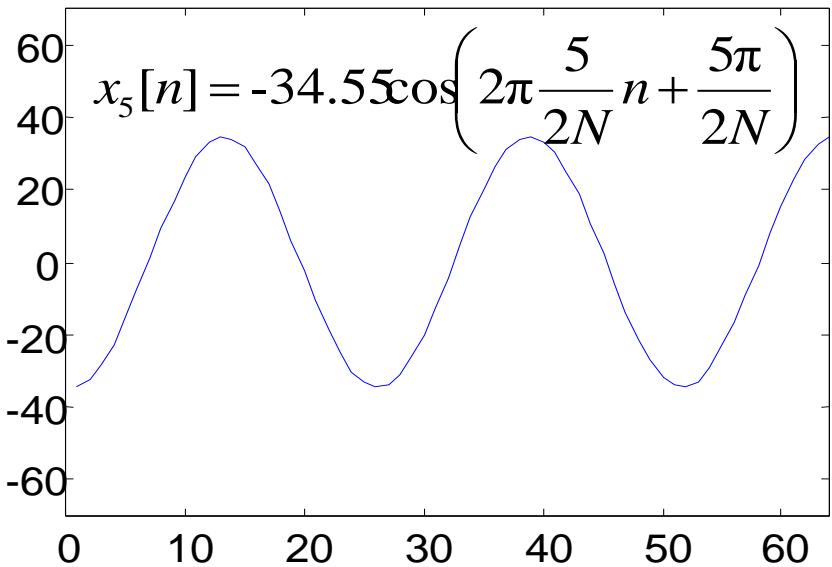
(Os cossenos não apresentados podem ter amplitude não nula)



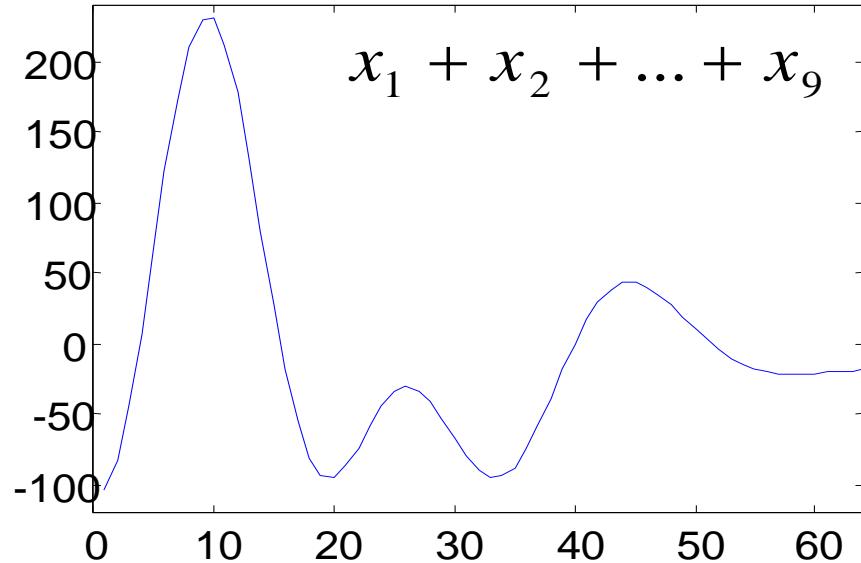
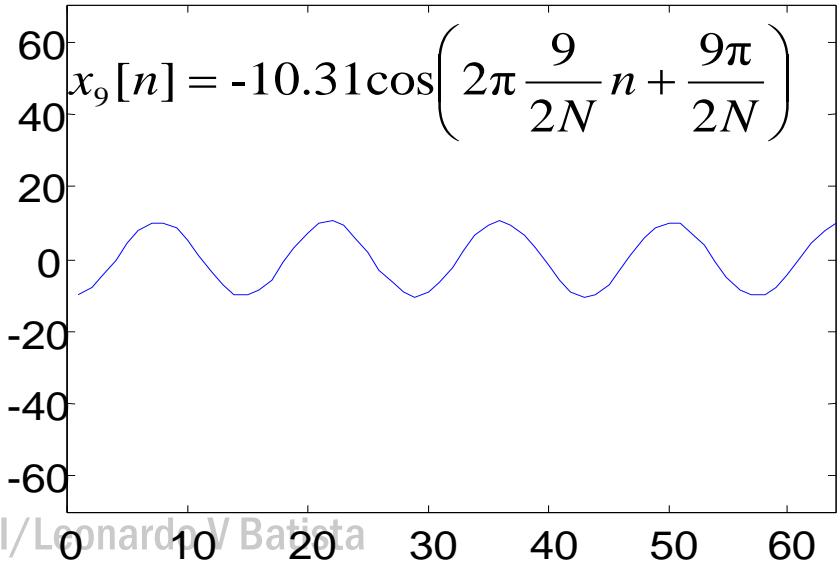
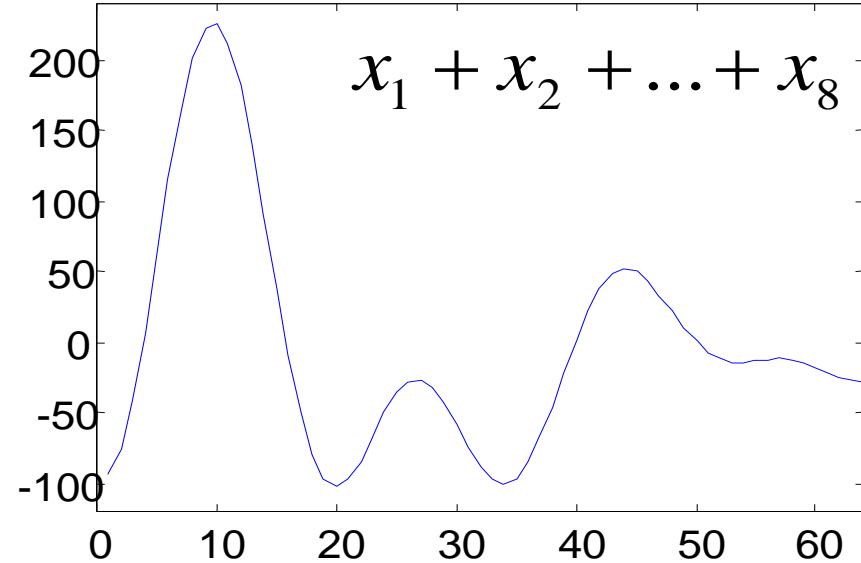
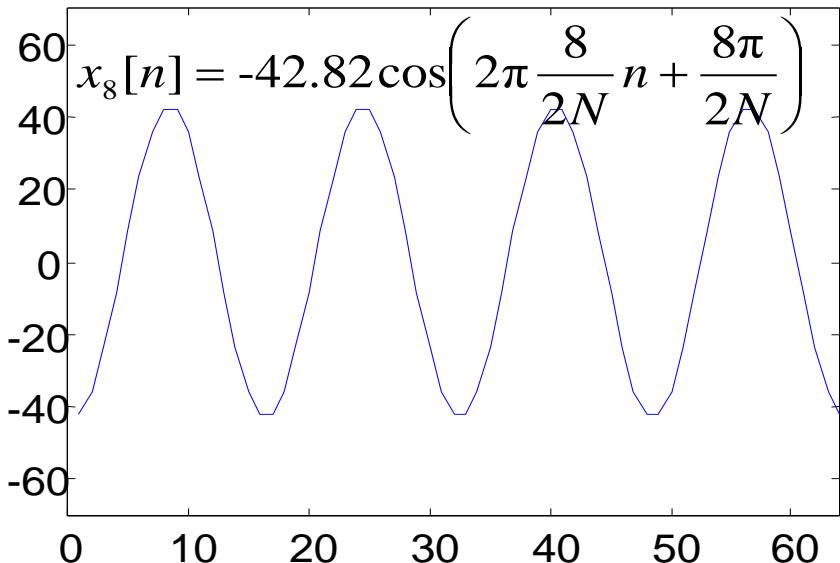
DCT Exemplo 2



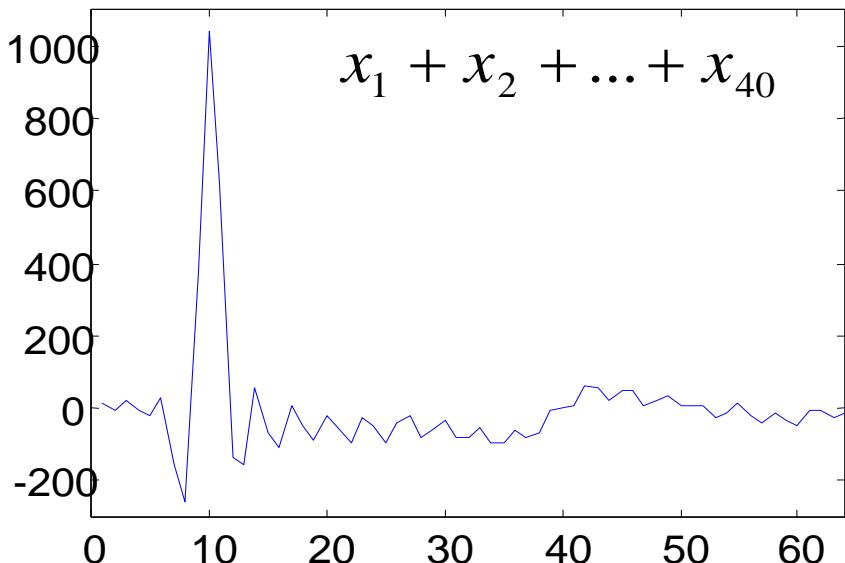
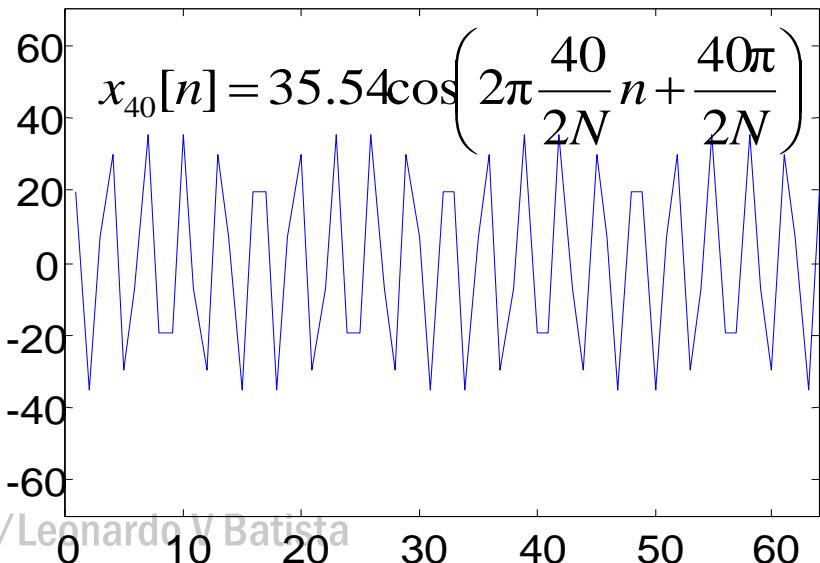
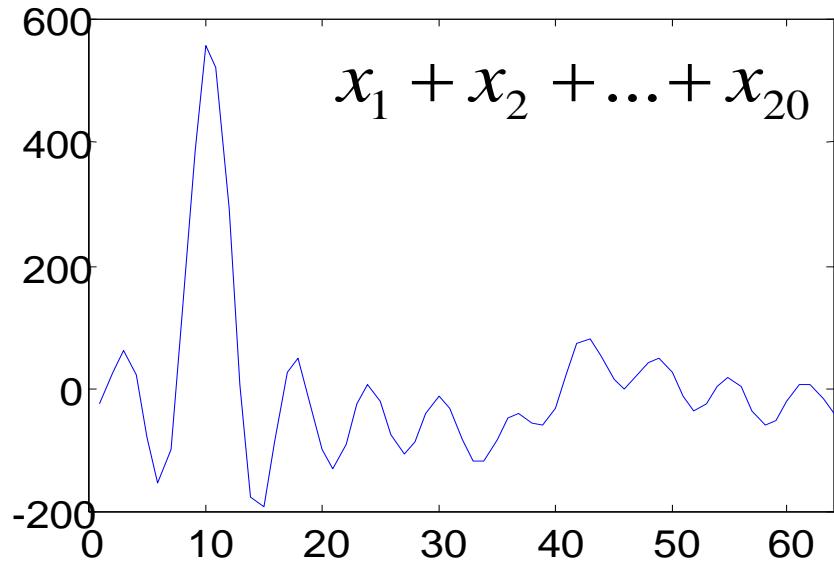
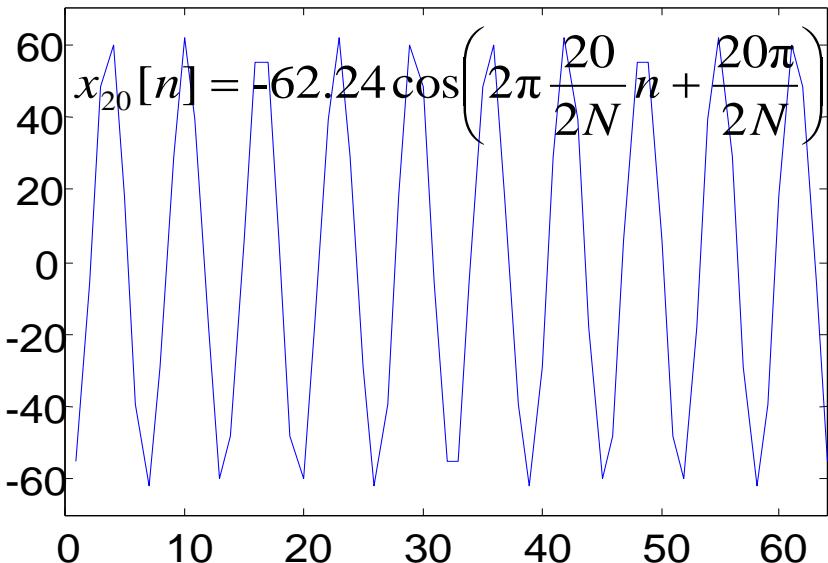
DCT Exemplo 2



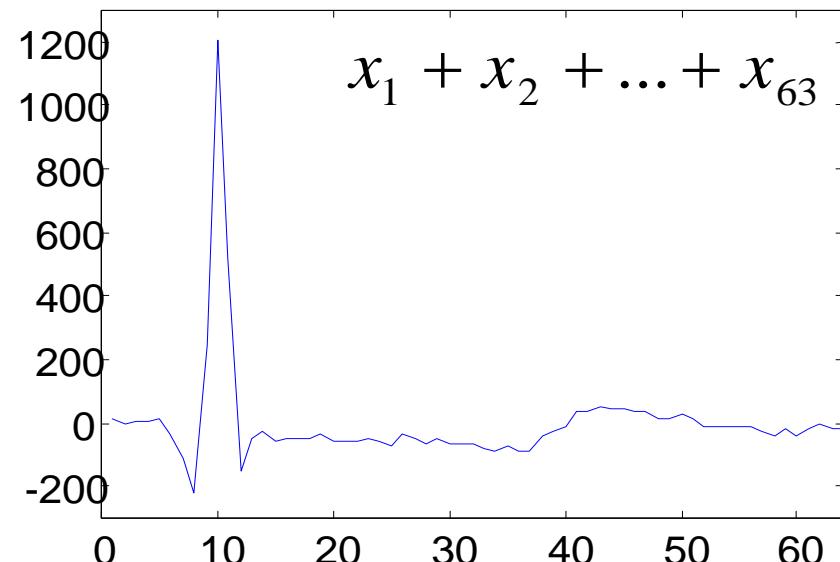
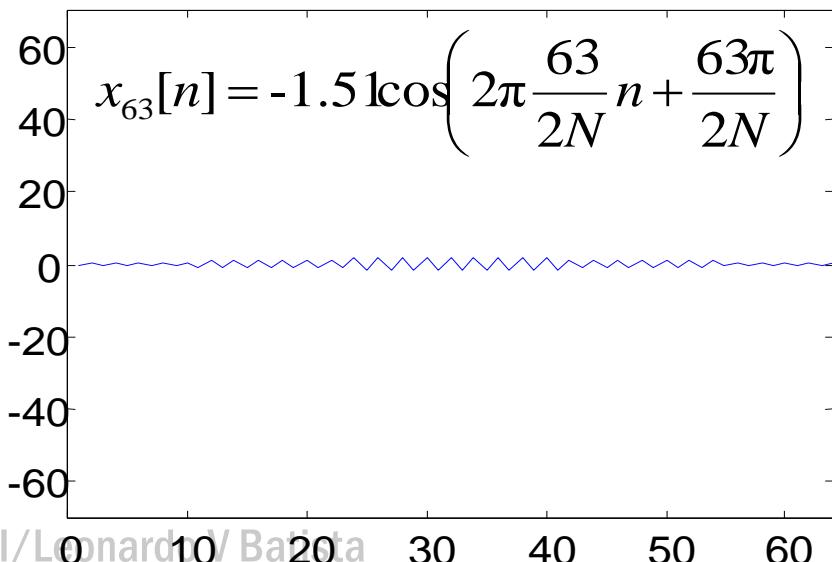
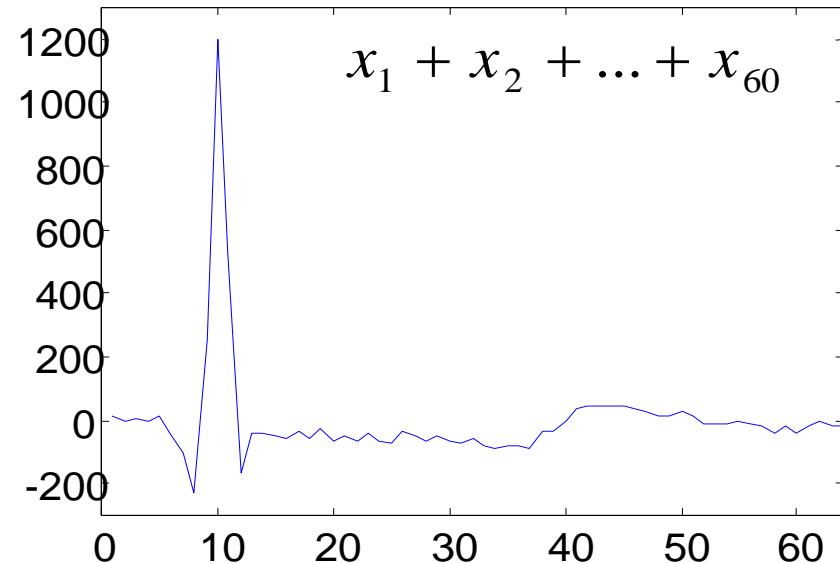
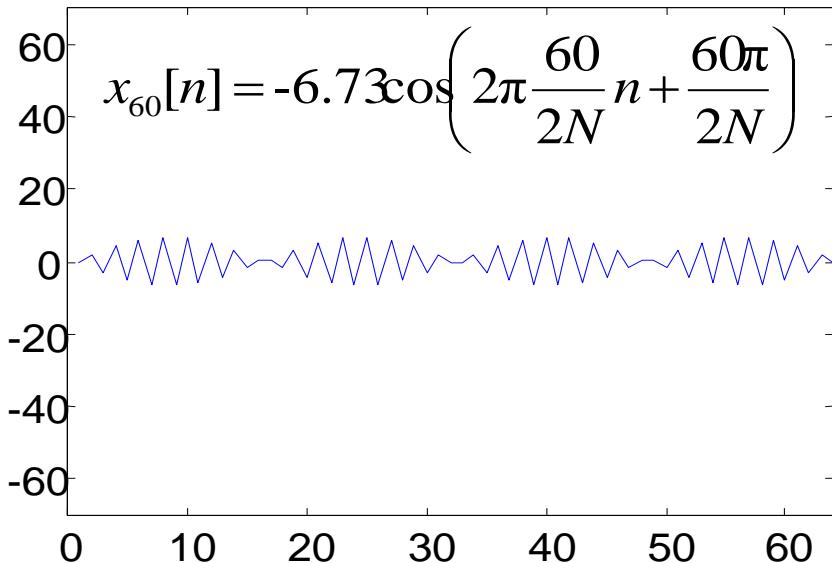
DCT Exemplo 2



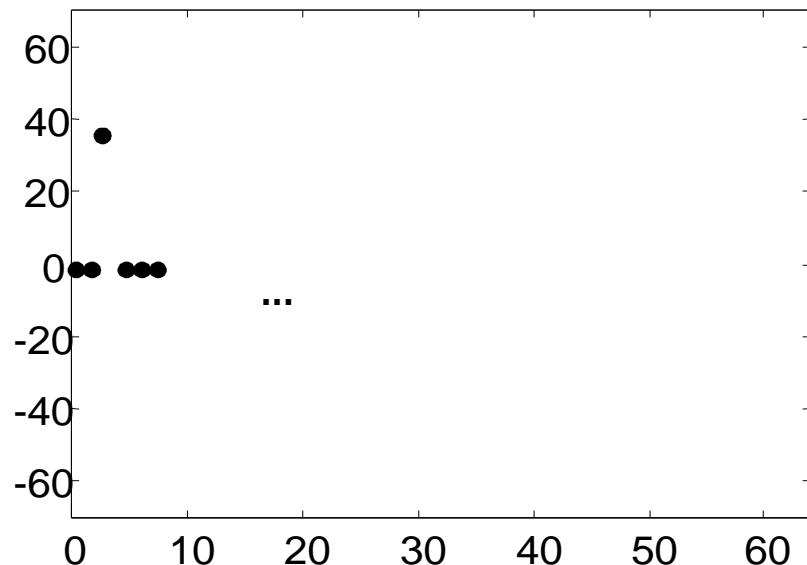
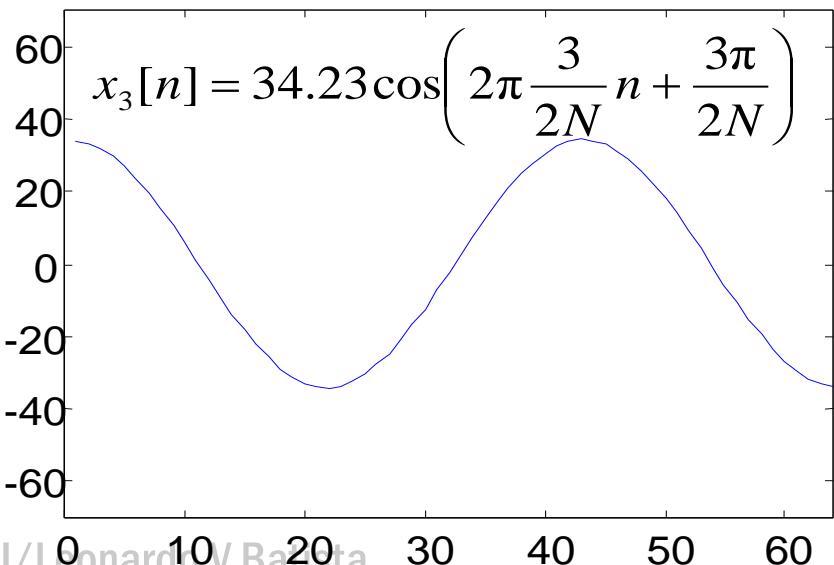
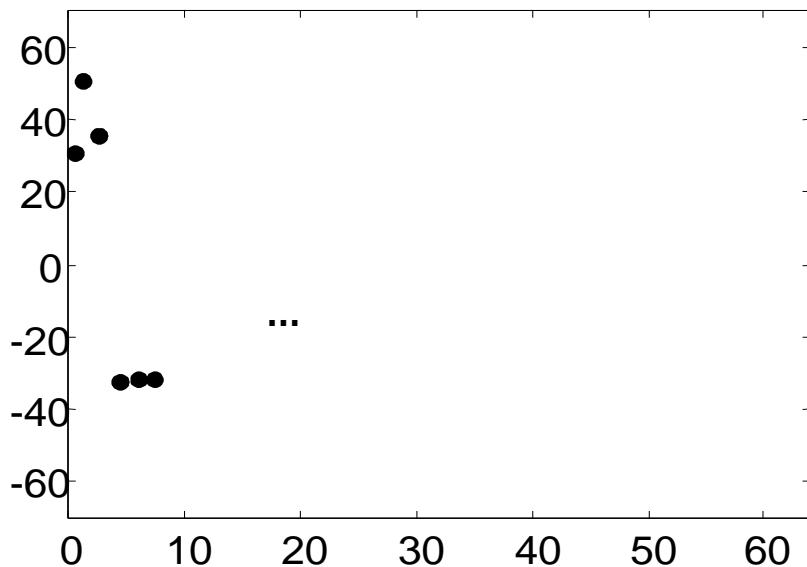
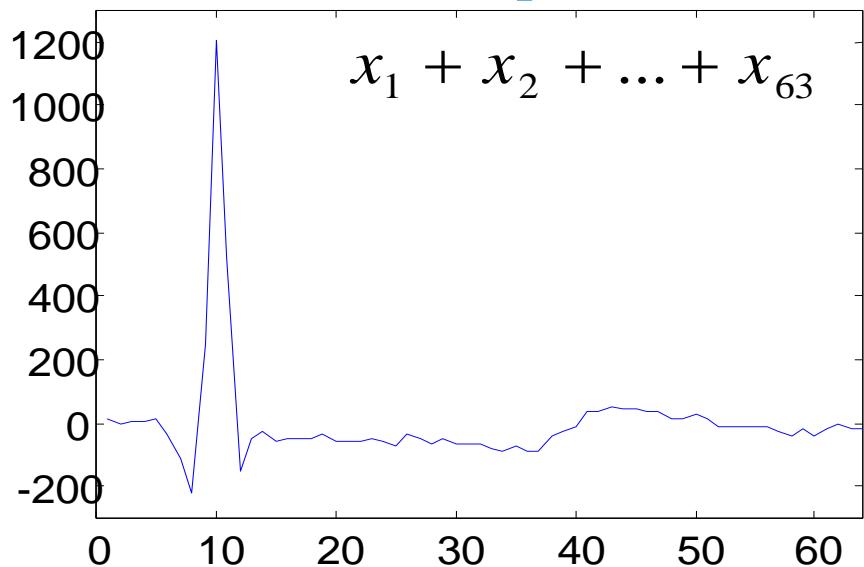
DCT Exemplo 2



DCT Exemplo 2



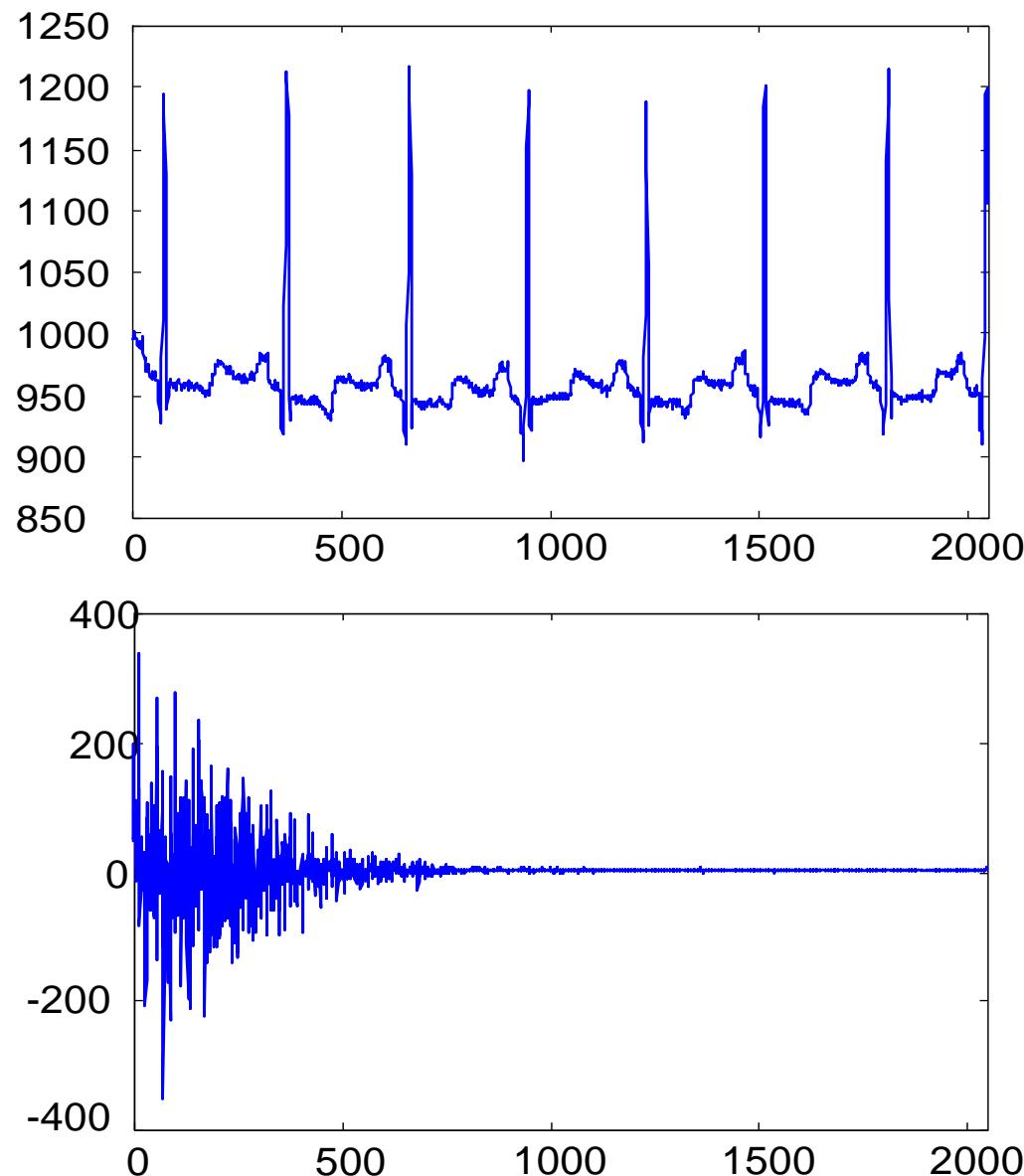
DCT Exemplo 2



DCT Exemplo 3

Sinal eletrocardiográfico,
2048 amostras

DCT do sinal
eletrocardiográfico
(sem coeficiente DC)



DCT – Frequências em Hz

Período de amostragem $T_a = 1/f_a$

N amostras $\leftrightarrow (N-1)T_a$ segundos

$$f_1 = \frac{1}{2N} \quad (\text{Adimensional})$$

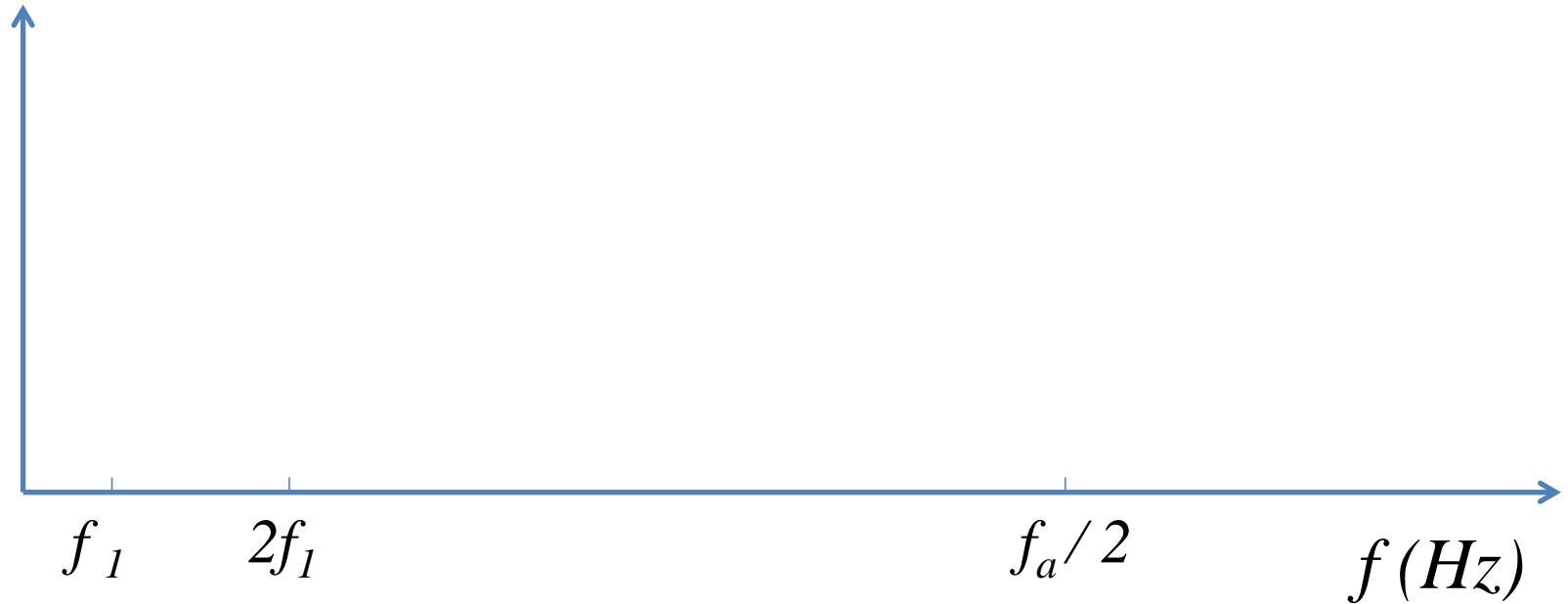
$$f_1 = \frac{1}{2(N-1)T_a} = \frac{f_a}{2(N-1)} \text{ Hz}$$

$$f_2 = 2f_1 \text{ Hz}$$

$$f_{N-1} = ?$$

$$f_{N-1} = (N-1) \frac{f_a}{2(N-1)} = \frac{f_a}{2} \text{ Hz}$$

DCT - Frequências em Hz



DCT – Frequências em Hz

[\(v. domínio do tempo/espaco\)](#)

Aumentar N ...

...melhora a resolução de frequência

Diminuir f_a ...

...melhora a resolução de frequência

Aumentar f_a ...

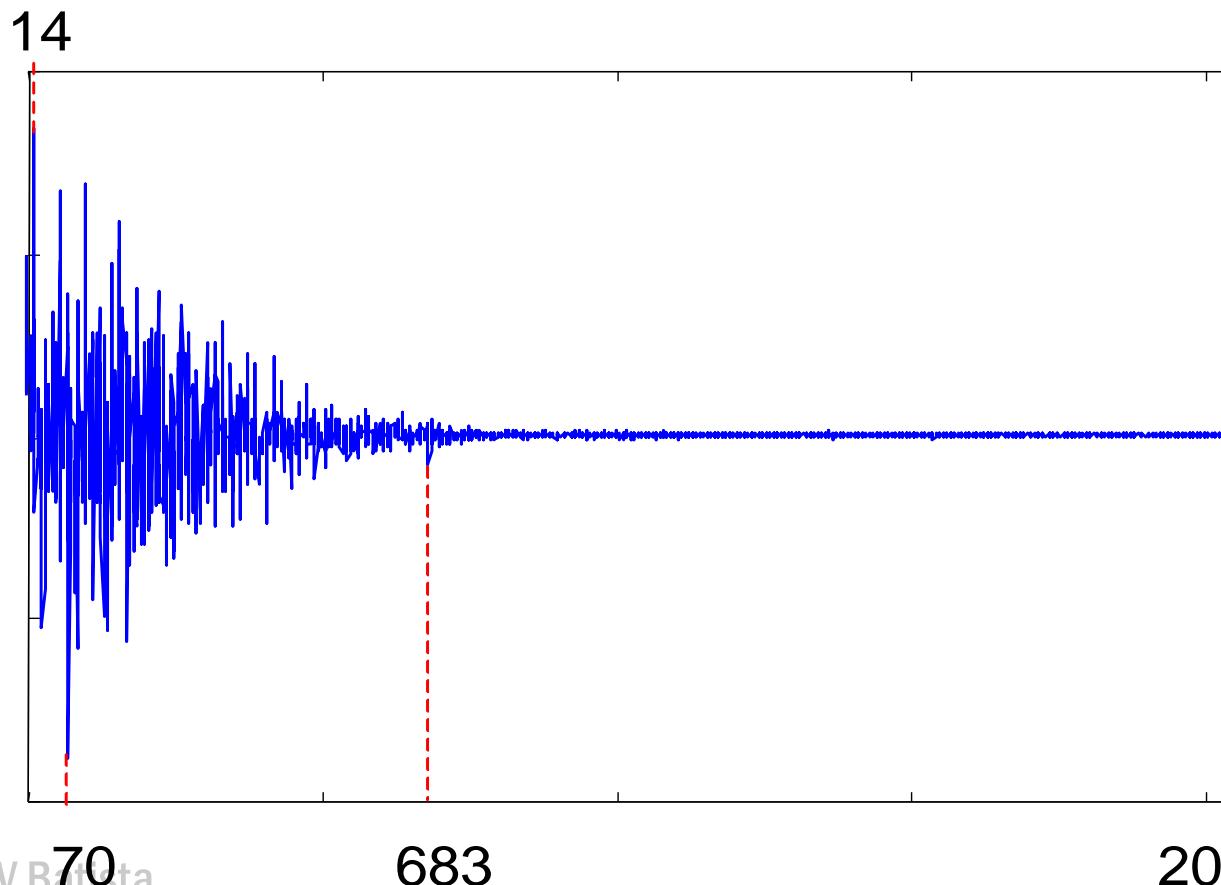
aumenta a frequência máxima em Hz.

Dualidade com o domínio do tempo/espaco

Frequências em Hz - Exemplo

Sinal de ECG, $N= 2048, f_a = 360\text{Hz}$

Valores em Hz para $k= 14, 70, 683, 2047$?



Frequências em Hz- Exemplo

$$f_1 = f_a / [2(N-1)] \text{ Hz} = 360 / (2 \times 2047) = \\ 0,087933561$$

$$f_{14} = 14f_1 = 1,23 \text{ Hz}$$

$$f_{70} = 70f_1 = 6,16 \text{ Hz}$$

$$f_{683} = 683f_1 = 60,06 \text{ Hz}$$

$$f_{2047} = 2047f_1 = 180 \text{ Hz}$$

Frequências em Hz- Exemplo

Tempo total para 2048 amostras?

$$f_a = 360 \text{ Hz} \leftrightarrow T_a = 0,002778 \text{ s}$$

Tempo total para 2048 amostras = 5,69 s

Batimento cardíaco: aprox. 5,69s/7,20 batimentos = 0,8 s

“Frequência” cardíaca: aproximadamente
1,25 bat./s = 1,25 Hz, ou 75 batimentos/min.

“Frequência” cardíaca aproximadamente igual a f_{14}

Frequência e frequências componentes

Sinal periódico

Frequência

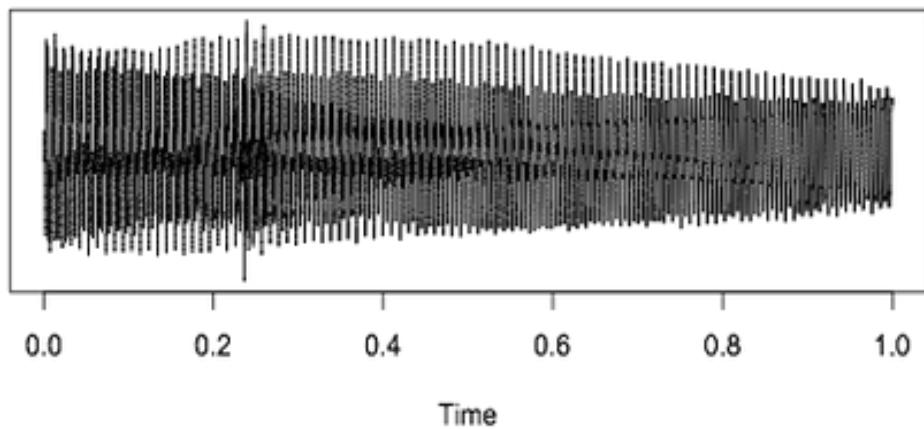
Frequências componentes

Sinal não-periódico

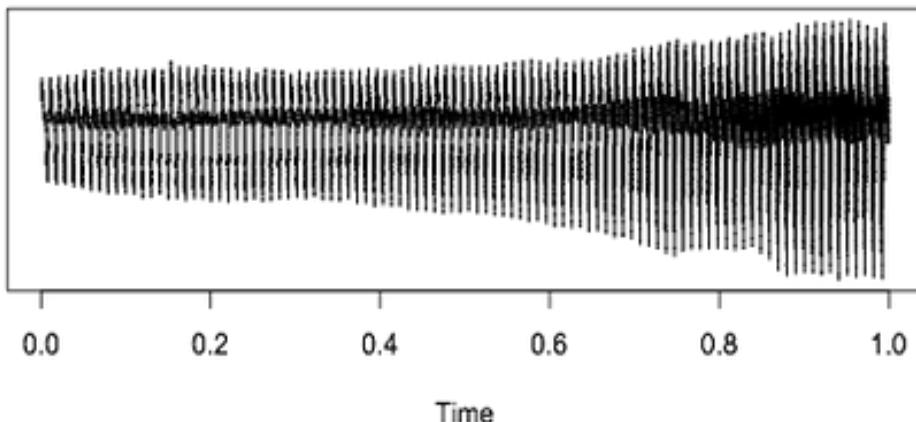
Frequências componentes

Frequências em música

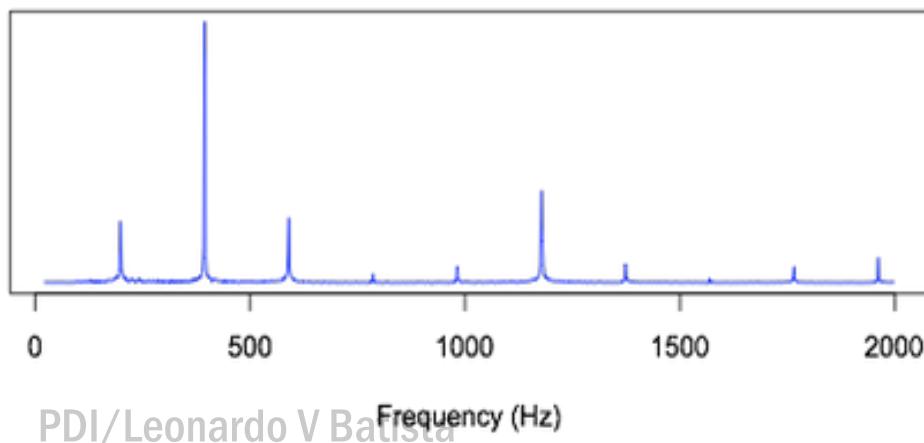
G (guitar)



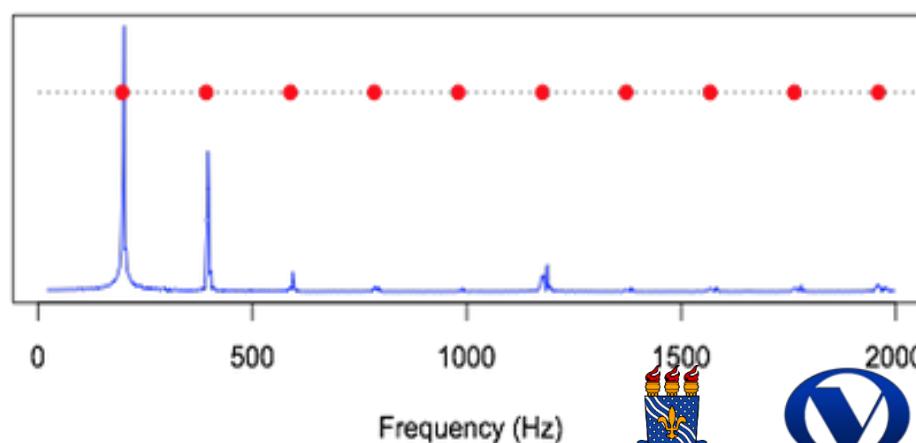
G (voice)



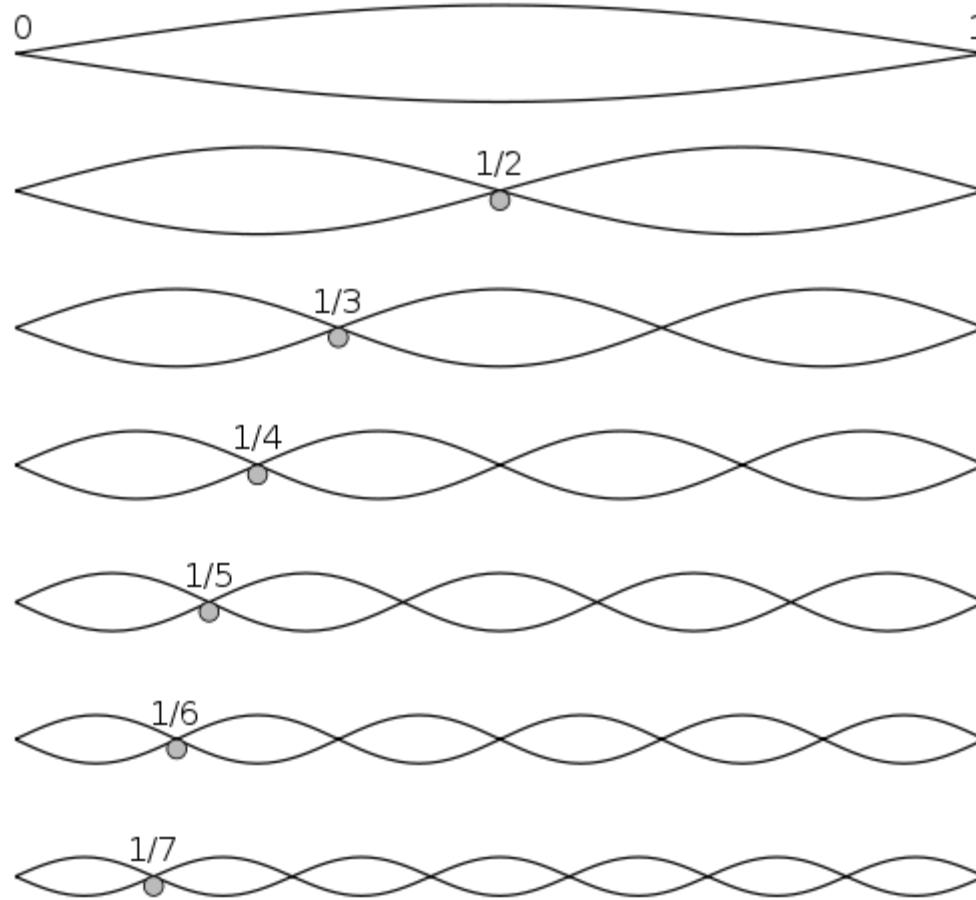
G (guitar)



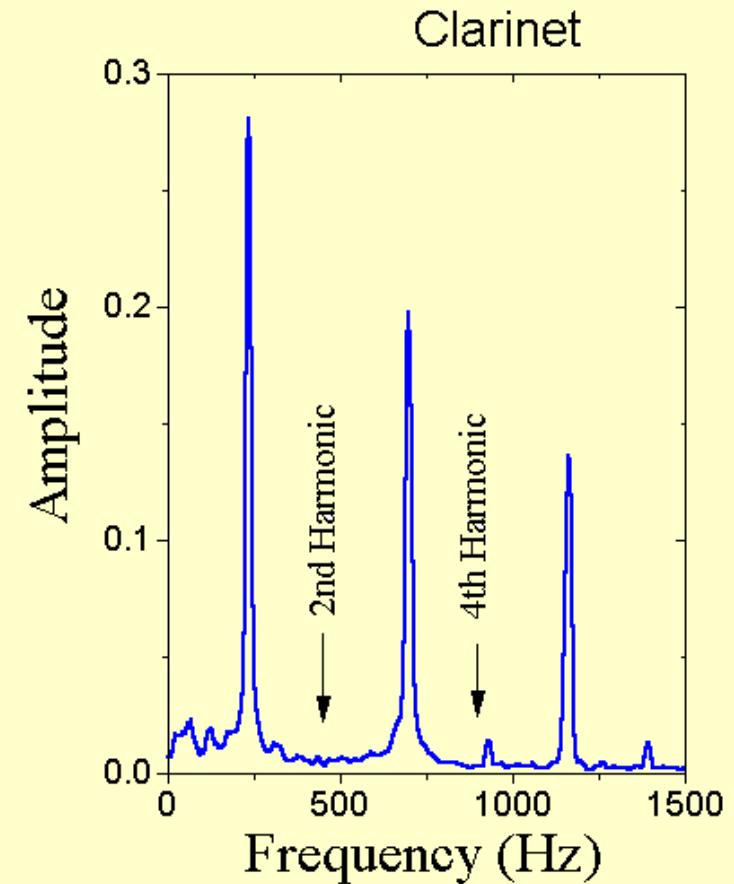
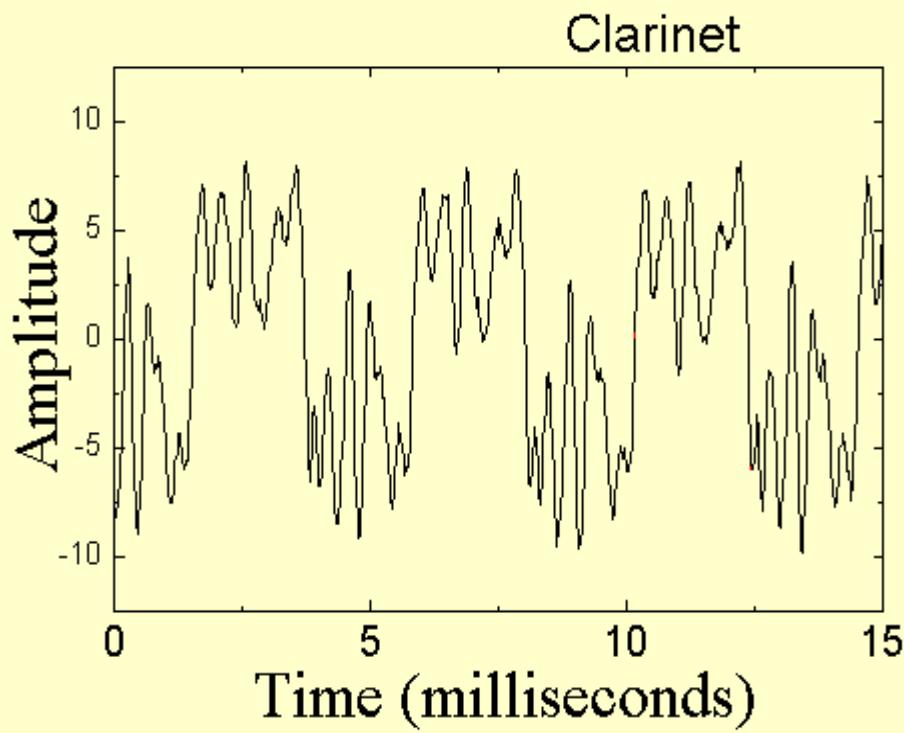
G (voice)



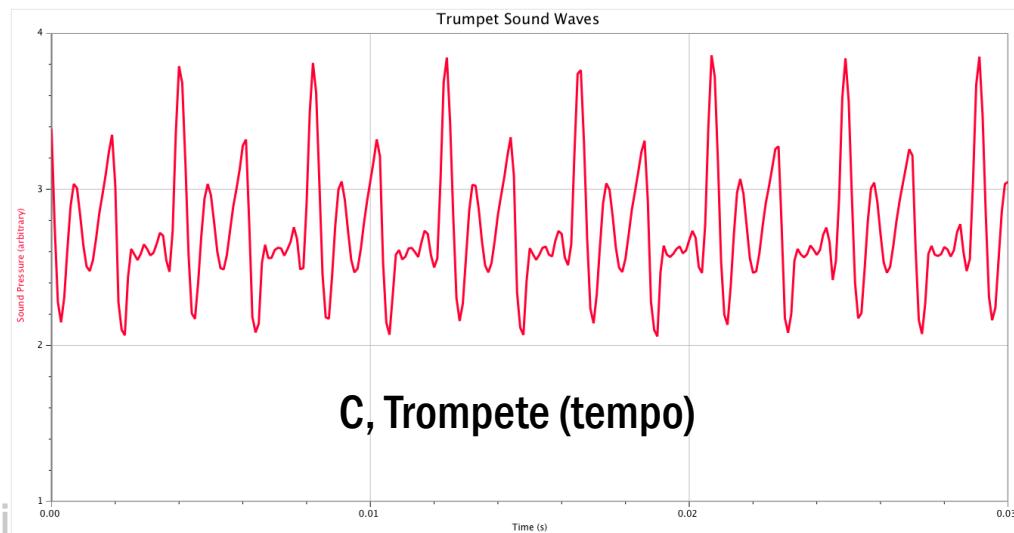
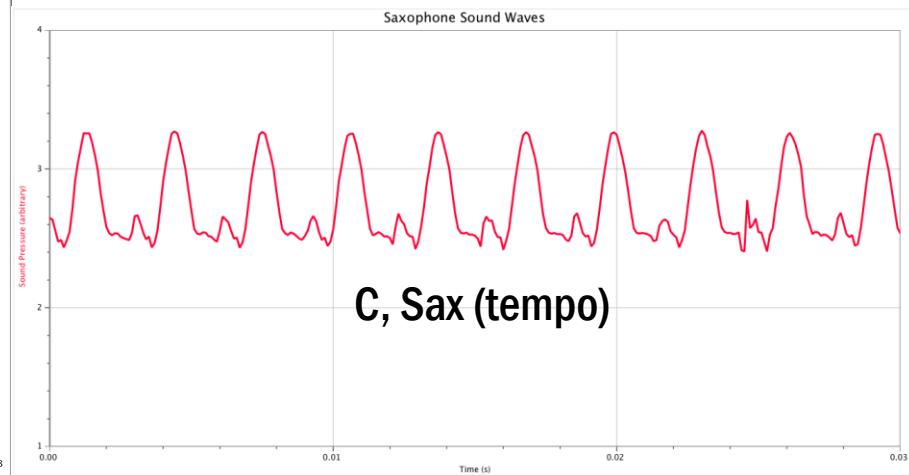
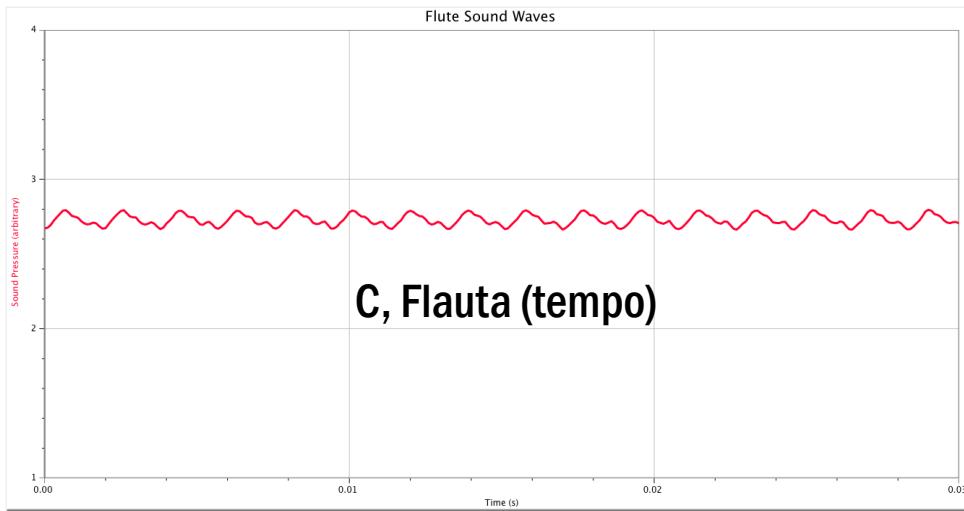
Frequências em música



Frequências em música

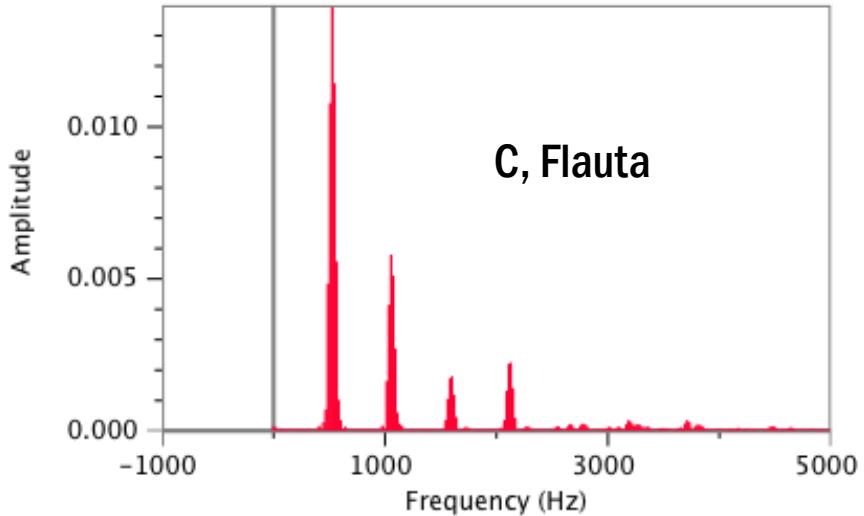


Frequências em música

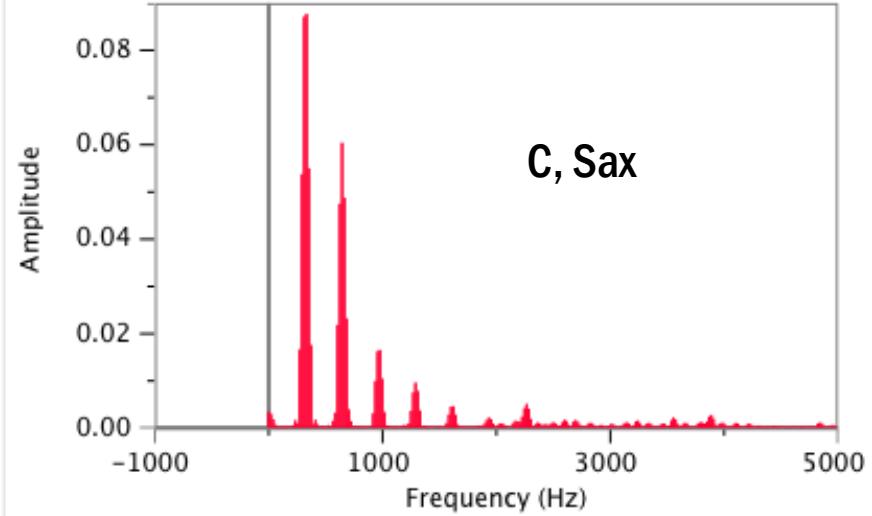


Frequências em música

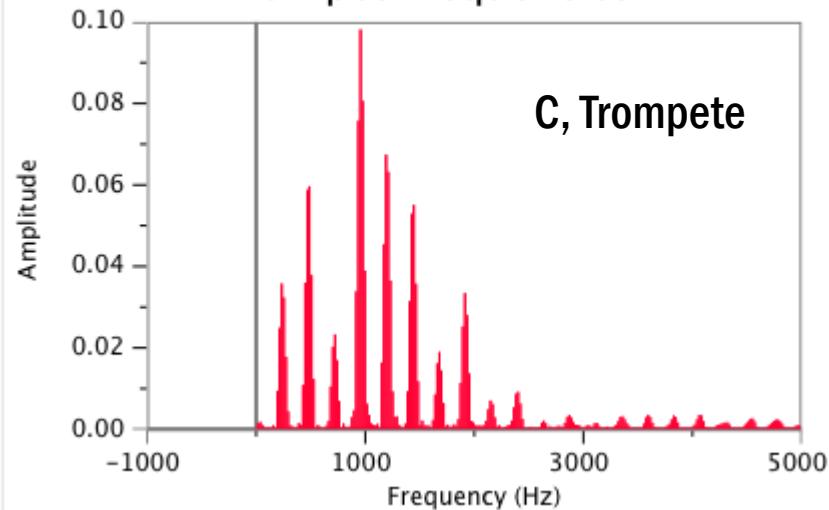
Flute Frequencies



Saxophone Frequencies



Trumpet Frequencies



Frequências em música

**sax
soprano**



clarinete



Frequências em música

You can create your own simulated clarinet sound $s(t)$ as follows:

with w_1 = frequency of fundamental (in Hz) times 2 pi, the simulated clarinet waveform as a function of time, t (in seconds) is:

$$s(t) = \sin(w_1 t) + 0.75 * \sin(3 * w_1 t) + 0.5 * \sin(5 * w_1 t) + \\ 0.14 * \sin(7 * w_1 t) + 0.5 * \sin(9 * w_1 t) + 0.12 * \sin(11 * w_1 t) + \\ 0.17 * \sin(13 * w_1 t)$$

Amostragem de senoides

Qual é a DCT de um sinal discretizado a partir de um analógico senoidal de frequência f e fase θ ?

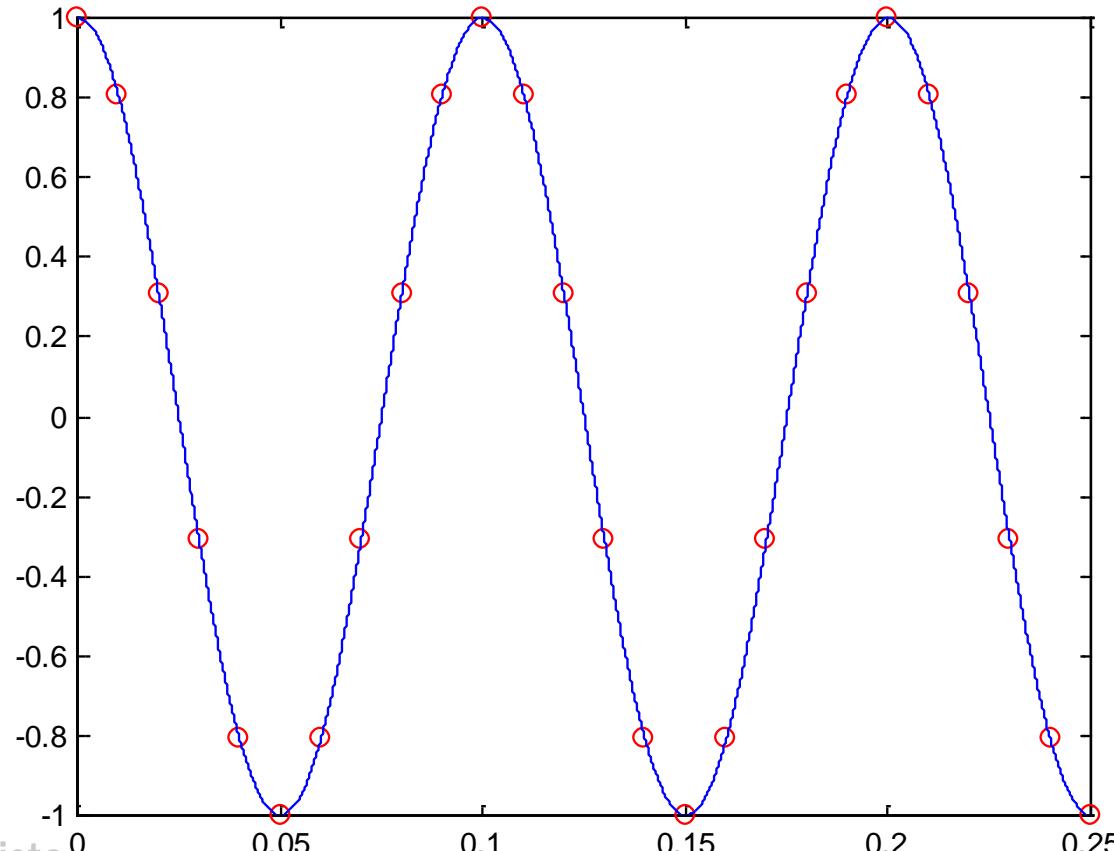
Qual é o f_a mínimo para digitalização adequada?

E se f não é múltiplo de f_1 e θ de θ_1 ?

Ou seja, e se o sinal não pertence à família de cossenos da DCT? [\(v. Família de cossenos\)](#)

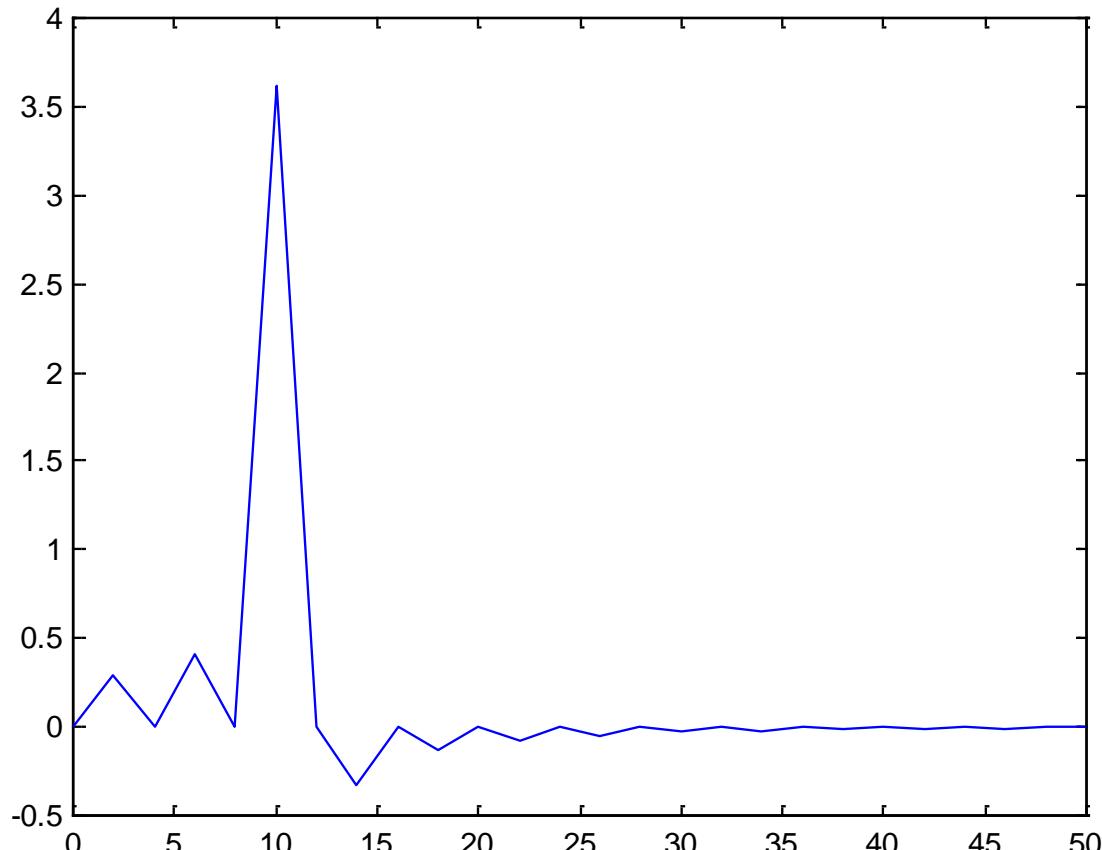
Amostragem de senoides

Cosseno de $f=10\text{Hz}$, $f_a=100 \text{ Hz}$, $N=26$



Amostragem de senoides

DCT do cosseno de $f=10\text{Hz}$, $f_a=100 \text{ Hz}$, $N=26$



Amostragem de senoides

Vazamento de frequência:

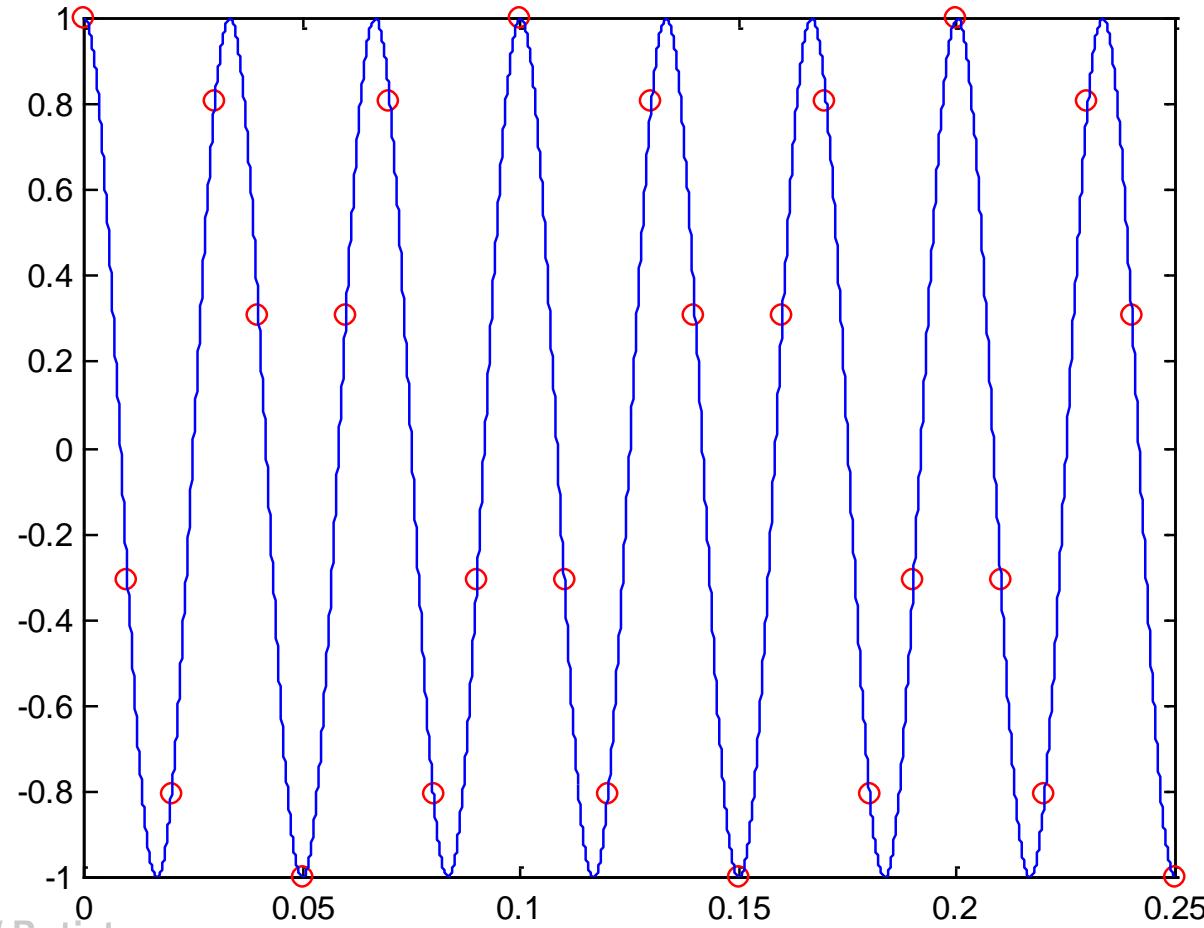
Mais de um cosseno componente para representar um sinal senoidal

Reducir vazamento:

Aumentar N

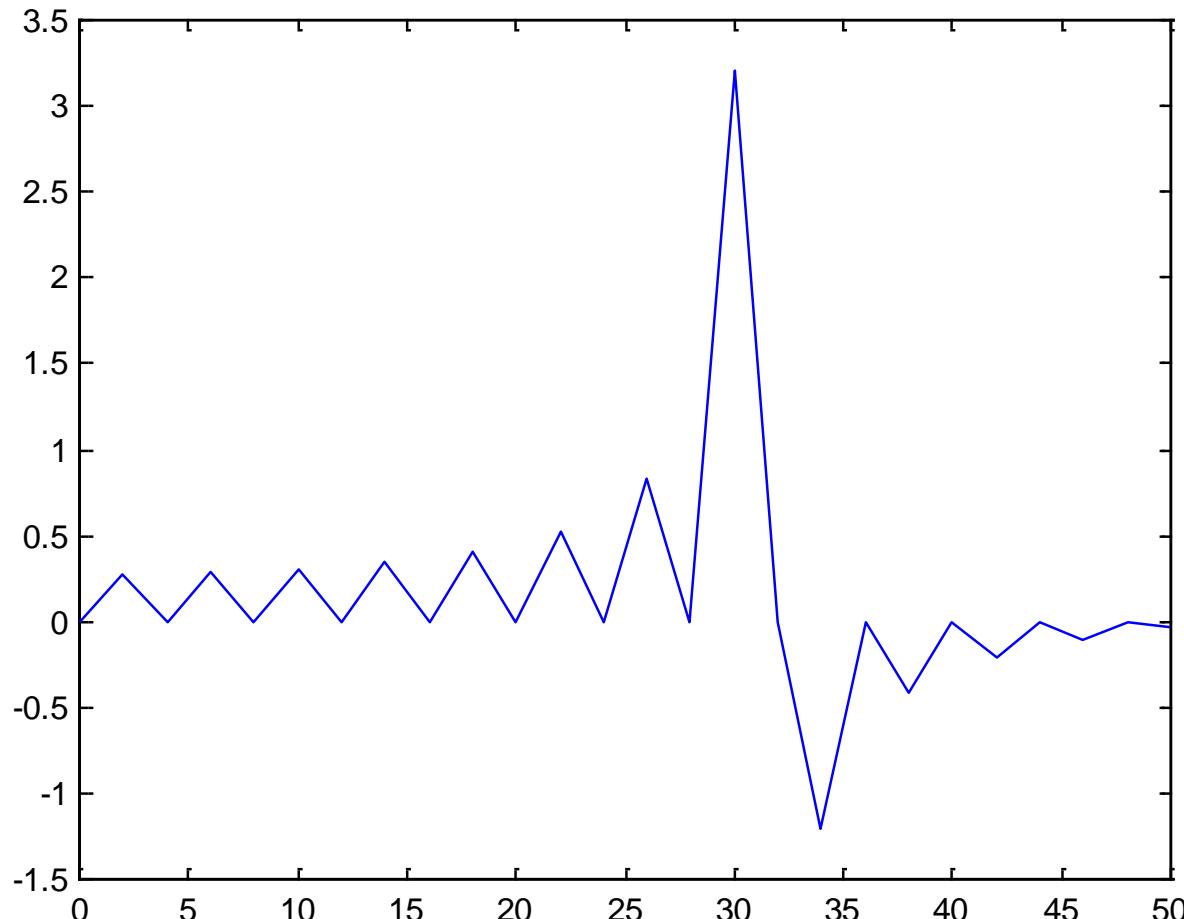
Amostragem de senoides

Cosseno de $f = 30\text{Hz}$, $f_a = 100 \text{ Hz}$, $N=26$



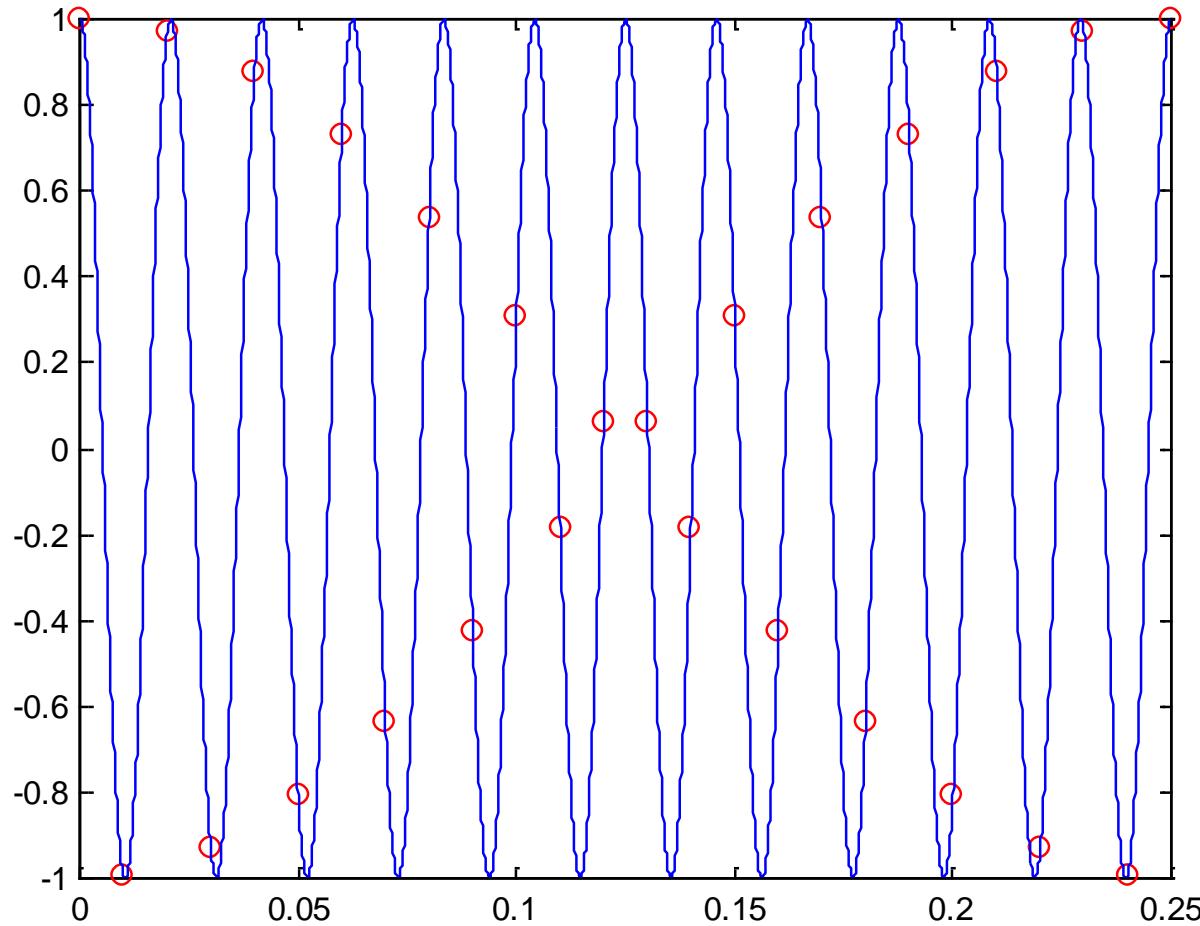
Amostragem de senoides

DCT do cosseno de $f=30\text{Hz}$, $f_a=100 \text{ Hz}$, $N=26$



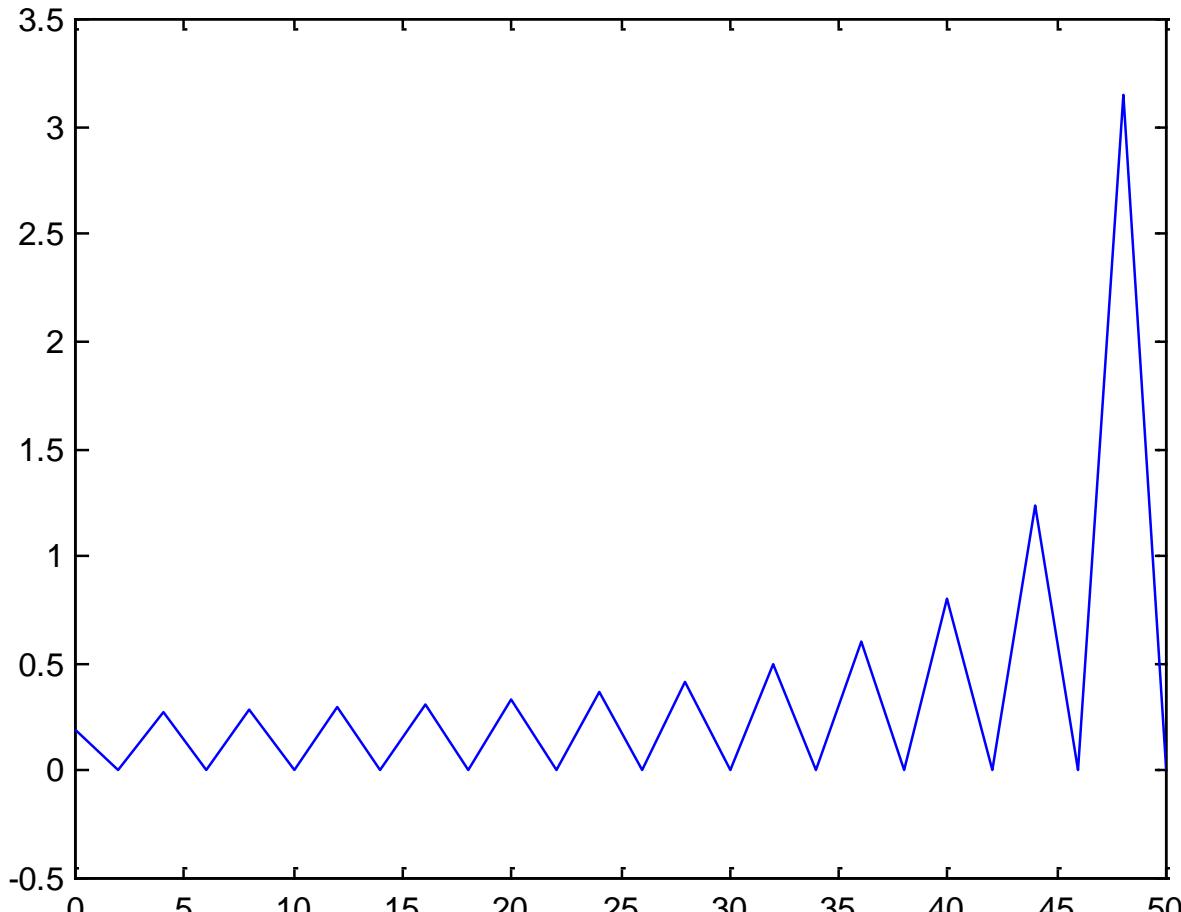
Amostragem de senoides

Cosseno de $f=48$ Hz, $f_a = 100$ Hz, $N=26$



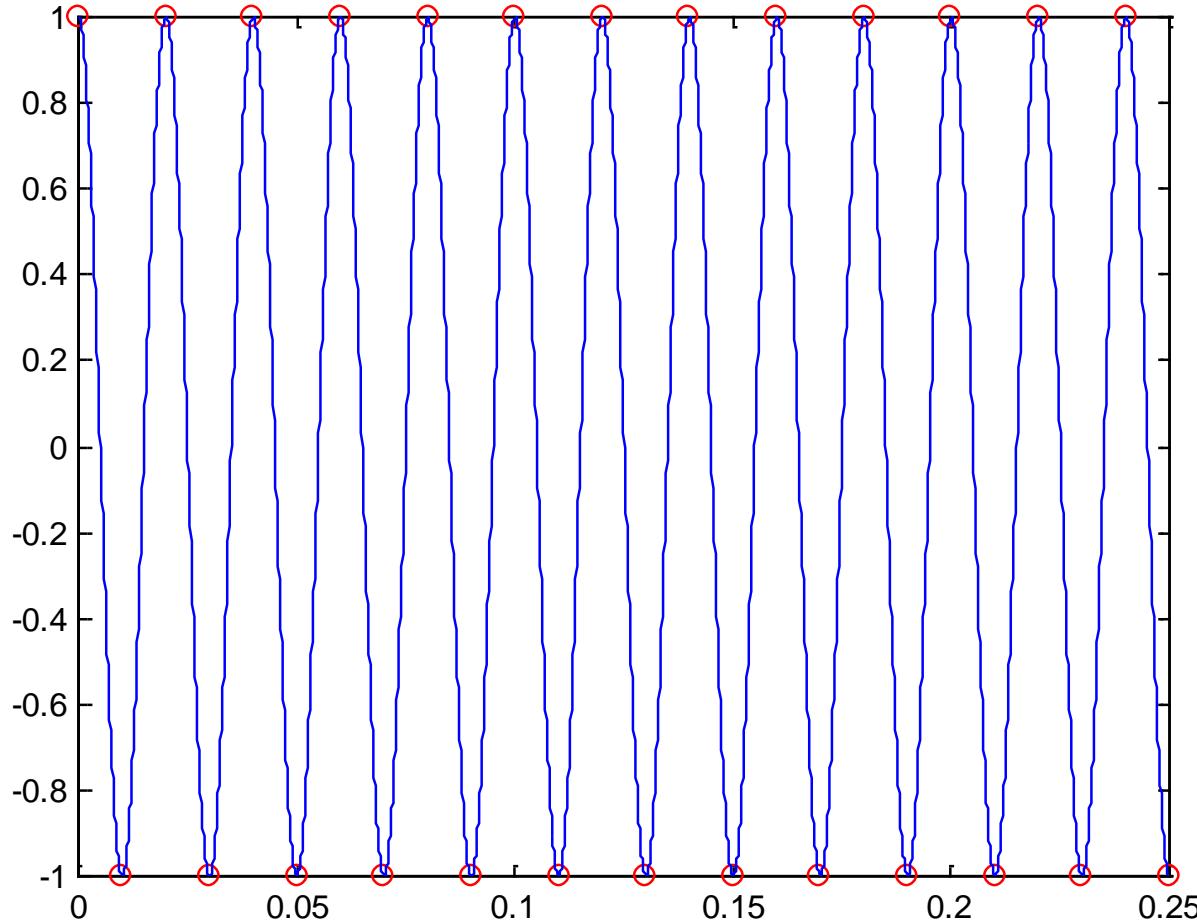
Amostragem de senoides

DCT do cosseno de $f=48$ Hz, $f_a=100$ Hz, $N=26$



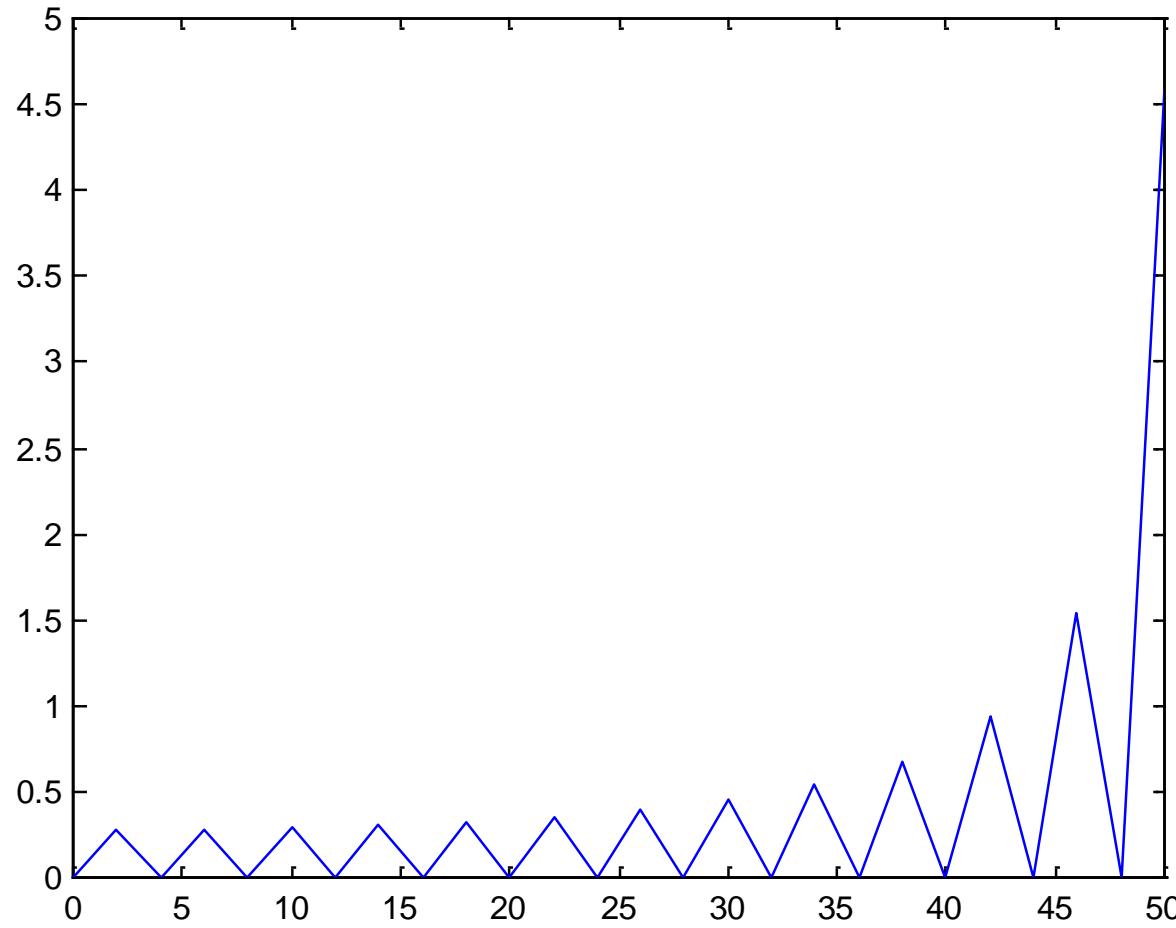
Amostragem de senoides

Cosseno de $f=50$ Hz, $f_a = 100$ Hz, $N=26$



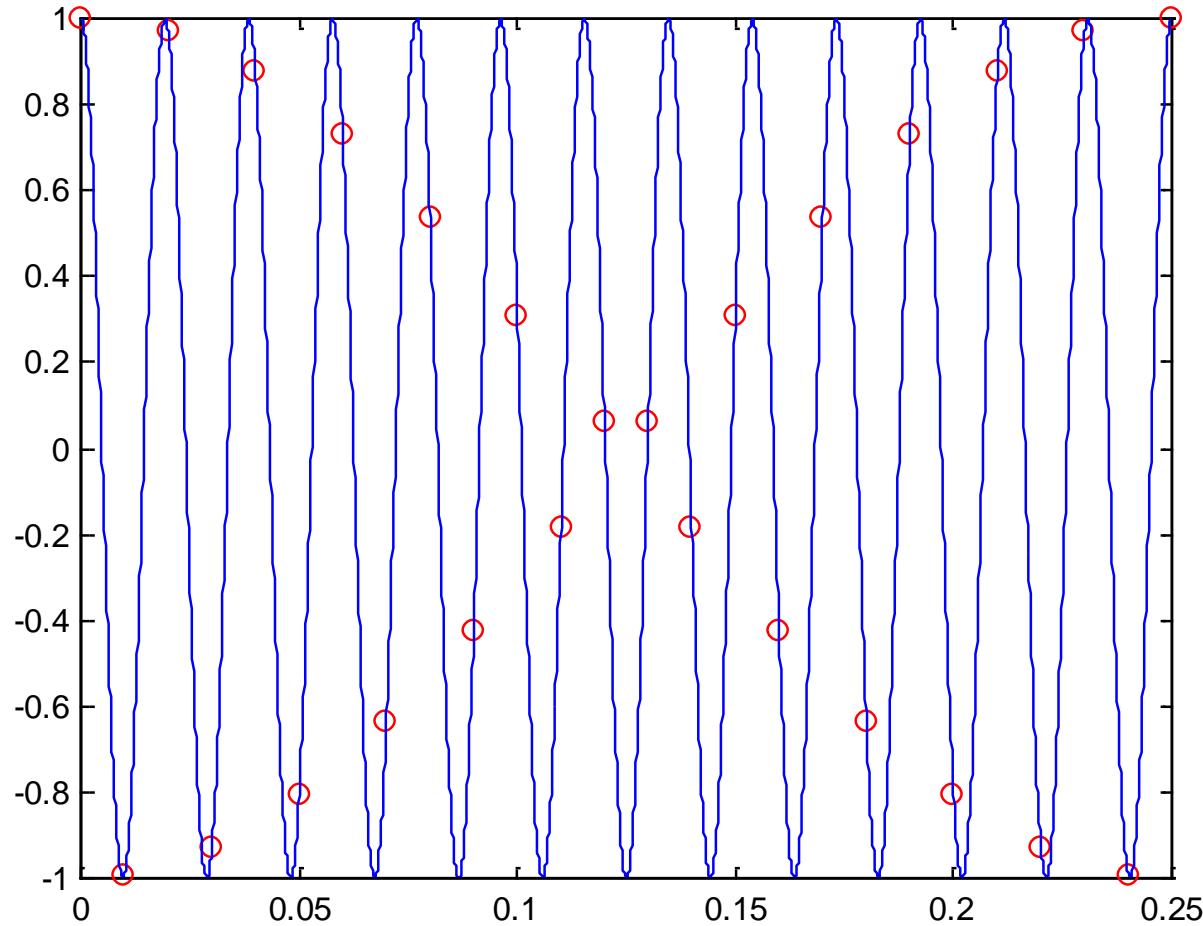
Amostragem de senoides

DCT do cosseno de $f=50$ Hz, $f_a=100$ Hz, $N=26$



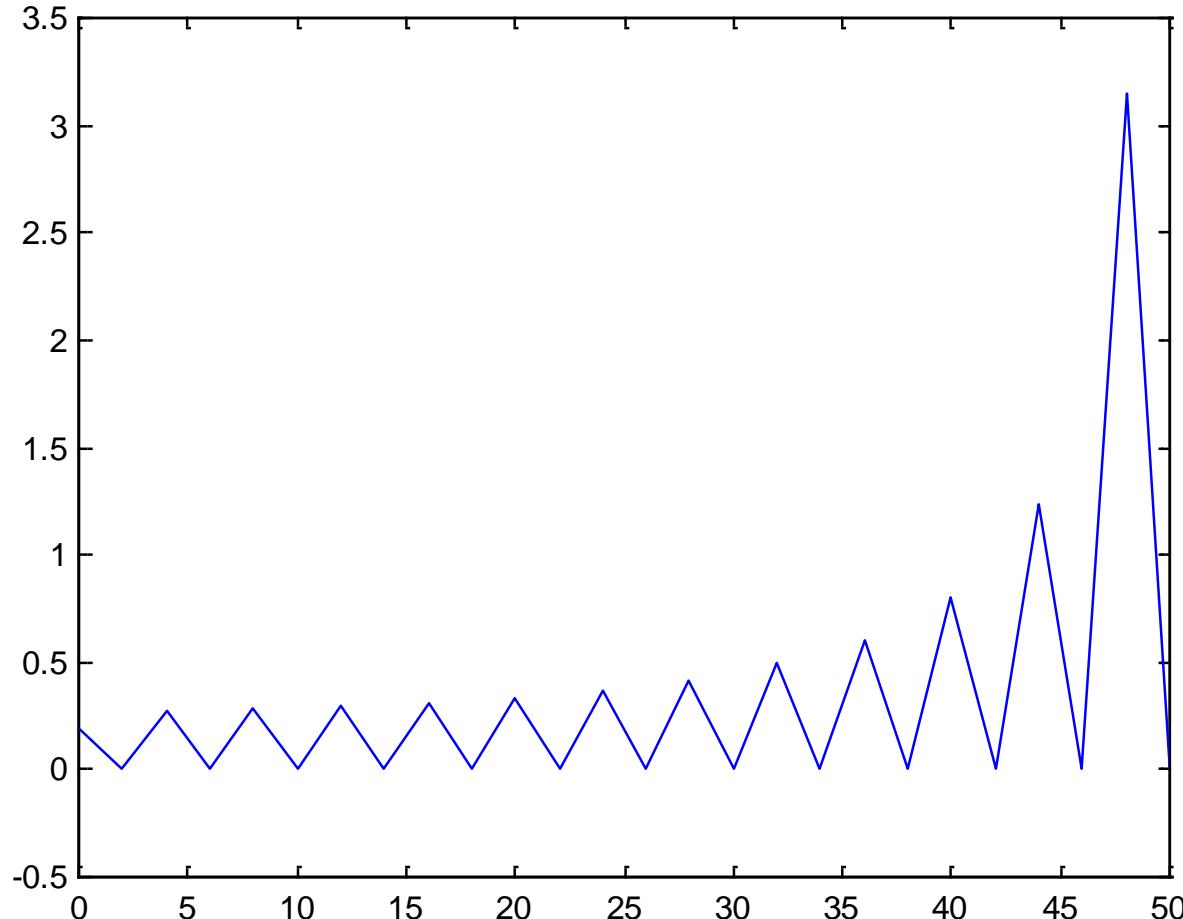
Amostragem de senoides

Cosseno de $f=52$ Hz, $f_a = 100$ Hz, $N=26$



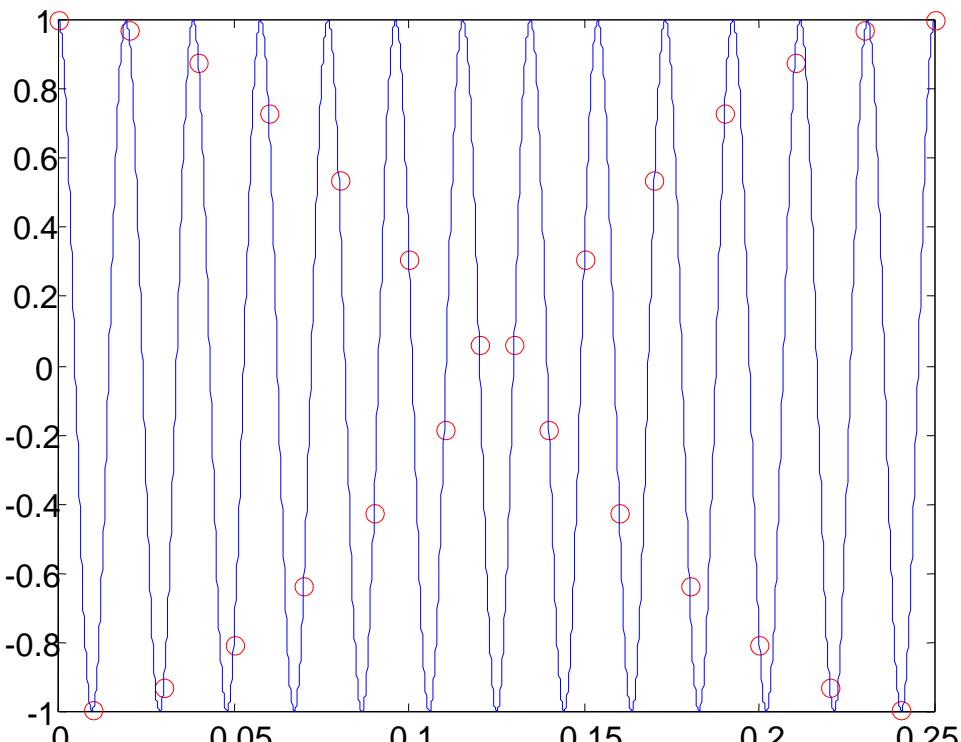
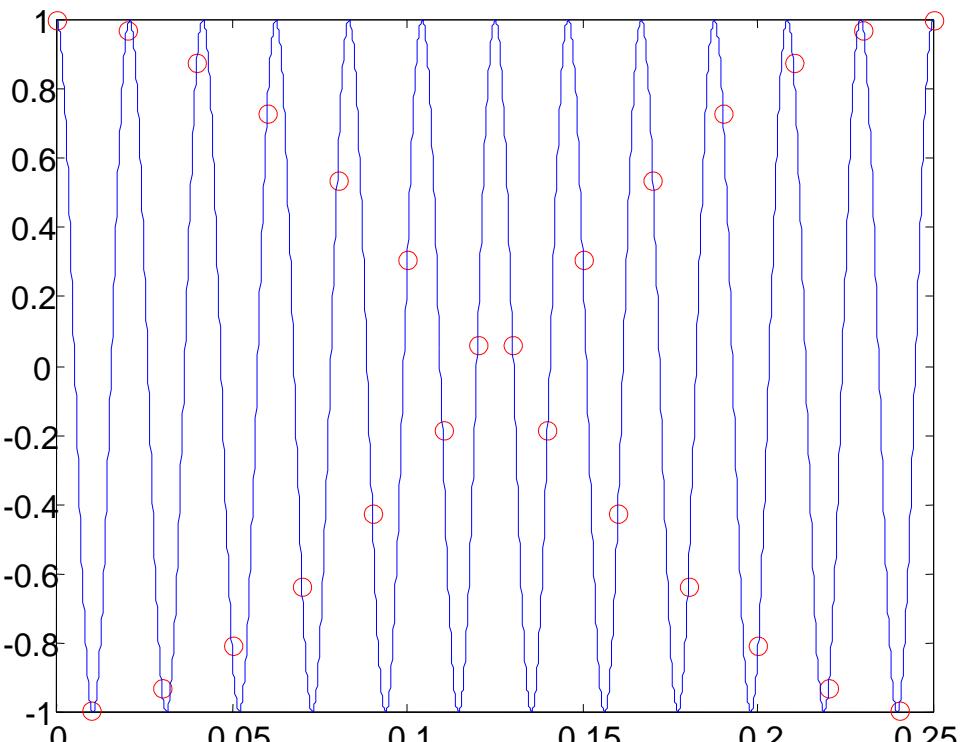
Amostragem de senoides

DCT do cosseno de $f=52$ Hz, $f_a=100$ Hz, $N=26$



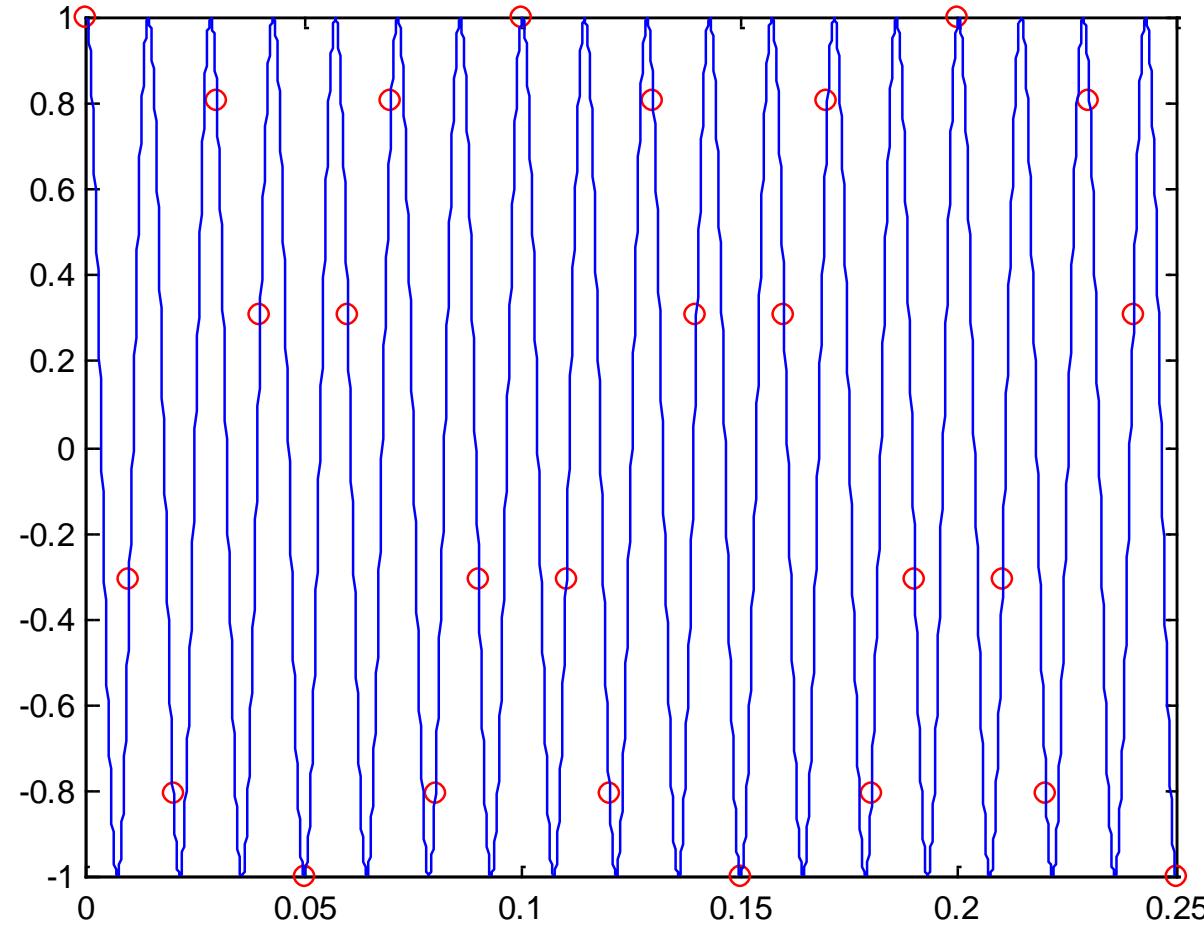
Amostragem de senoides

Sinal digital obtido a partir do cosseno de 52Hz é idêntico ao obtido a partir do cosseno de 48 Hz



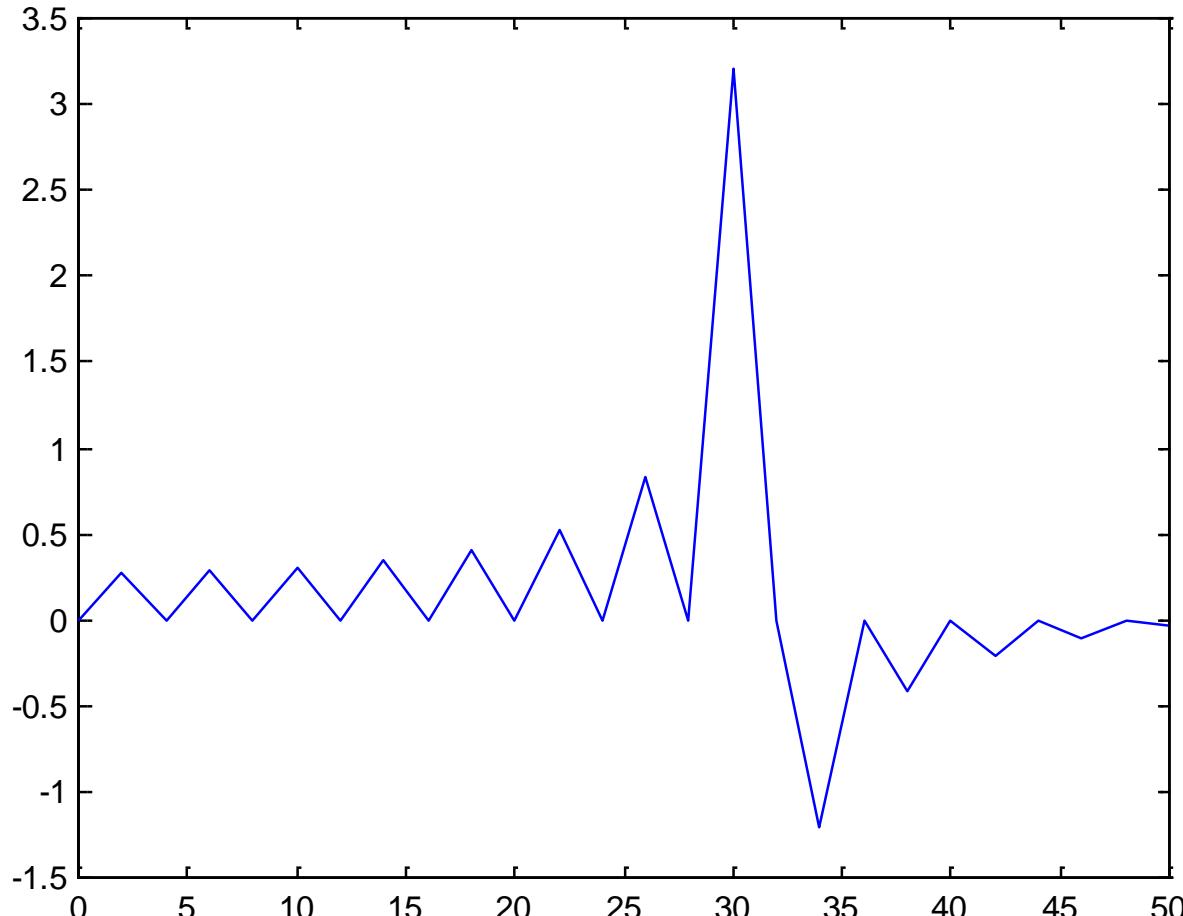
Amostragem de senoides

Cosseno de $f = 70\text{Hz}$, $f_a = 100\text{Hz}$, $N=26$



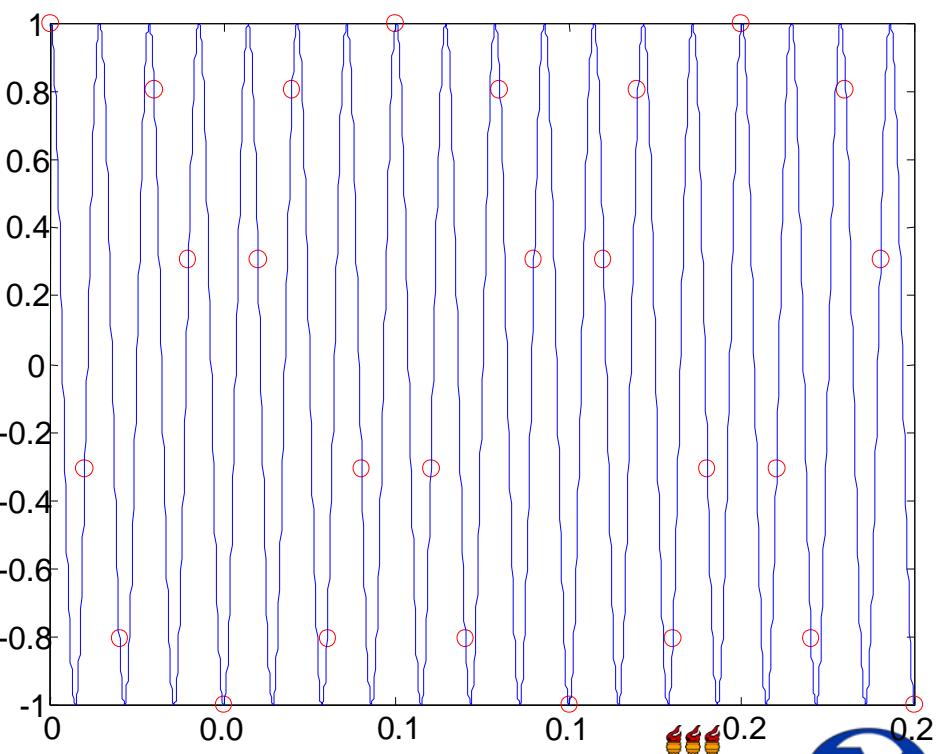
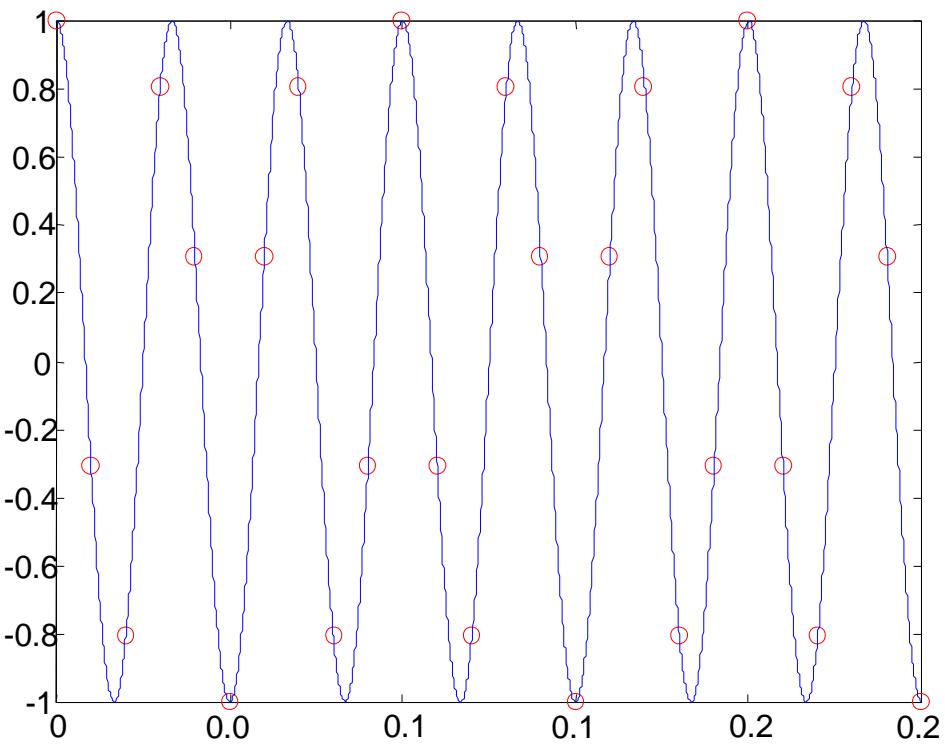
Amostragem de senoides

DCT do cosseno de $f = 70\text{Hz}$, $f_a = 100\text{Hz}$, $N=26$



Amostragem de senoides

Sinal digital obtido a partir do cosseno de 70Hz é idêntico ao obtido a partir do cosseno de 30 Hz



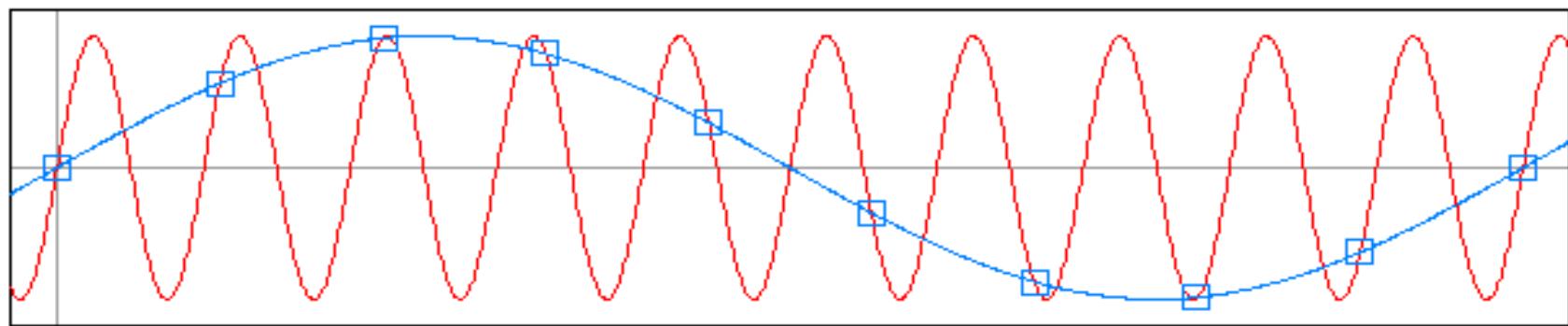
Aliasing

No domínio da DCT, a maior frequência é $f_a/2$

Ocorre *aliasing* quando sinais senoidais com $f > f_a/2$ são discretizados como sinais senoidais com frequência $f_d < f_a/2$
($f_d = f_a - f$, para $f_a/2 < f < f_a$)

Para evitar *aliasing*, $f < f_a/2$, ou $f_a > 2f$

Aliasing



Teorema de Shannon-Nyquist

Um sinal analógico é composto por uma **integral de cossenos**

Se um sinal analógico tem um cosseno componente de frequência máxima f_{max} Hz, deve ser digitalizado com f_a Hz tal que:

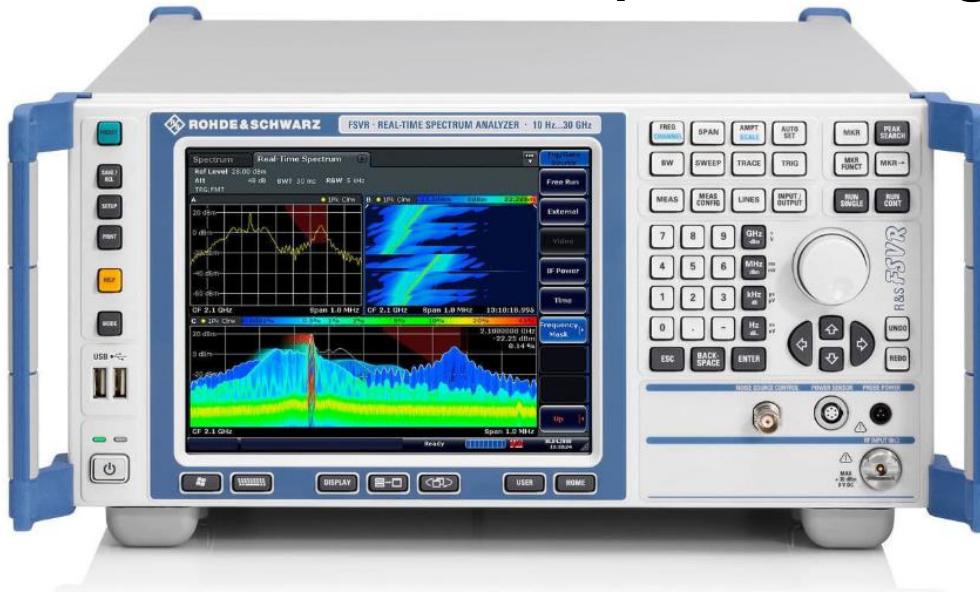
$$f_a > 2f_{max}$$

$2f_{max}$: **frequência de Shannon-Nyquist**

Discretização de sinais

Como descobrir f_{max} no sinal analógico?

Pode-se usar um analisador de espectro analógico

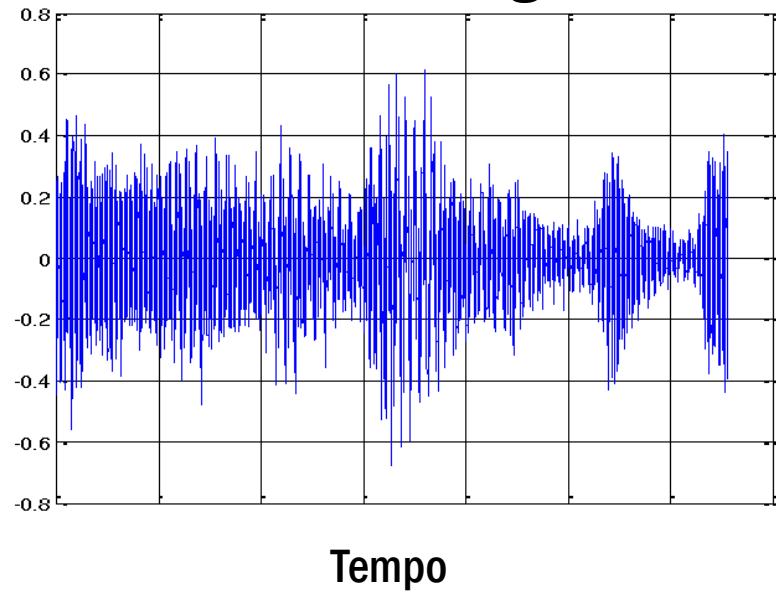


Handheld Spectrum Analyzer, 100kHz a 26.5GHz

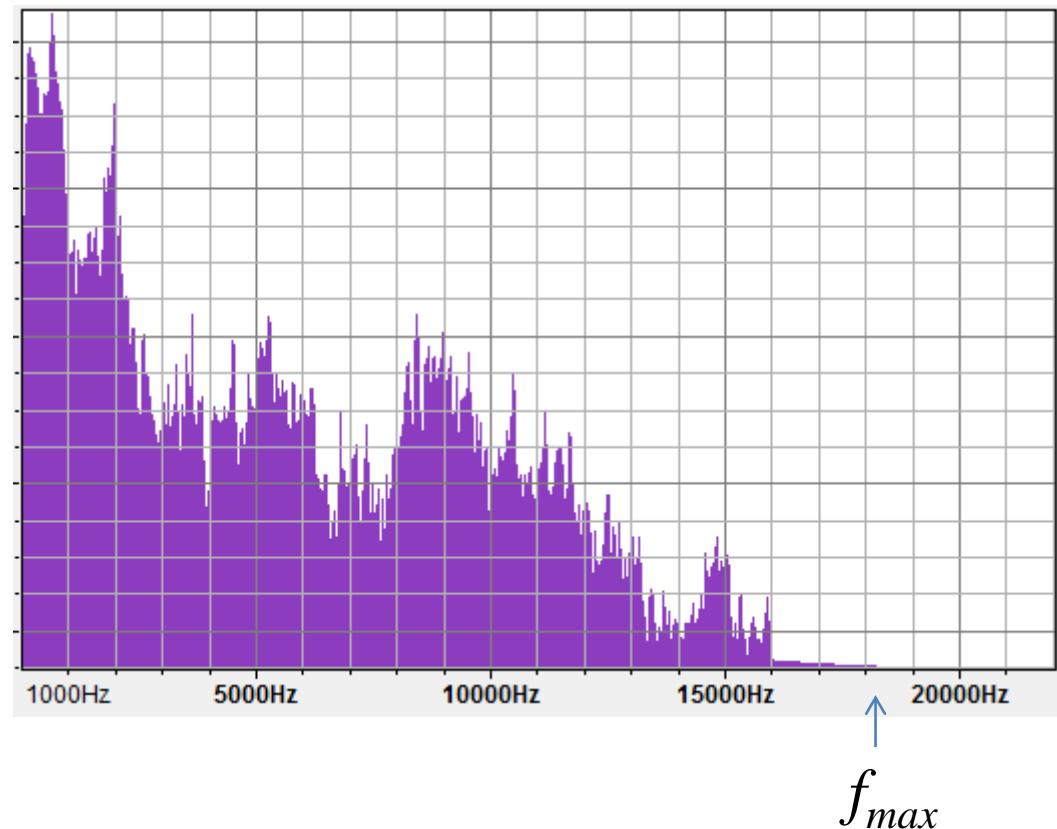
Amazon: \$57,842.84

Discretização de sinais

Áudio analógico



Espectro de frequências



Discretização de sinais

Outras opções:

Conhecimento teórico ou prático sobre o sinal

Analisar espectro de frequências após a digitalização, e redigitalizar se necessário (tentativa e erro)

Limitar faixa de frequências do sinal analógico

Discretização de sinais

Mais uma opção, com um exemplo prático:

O ouvido humano é sensível a $\approx [20, 22K]$ Hz

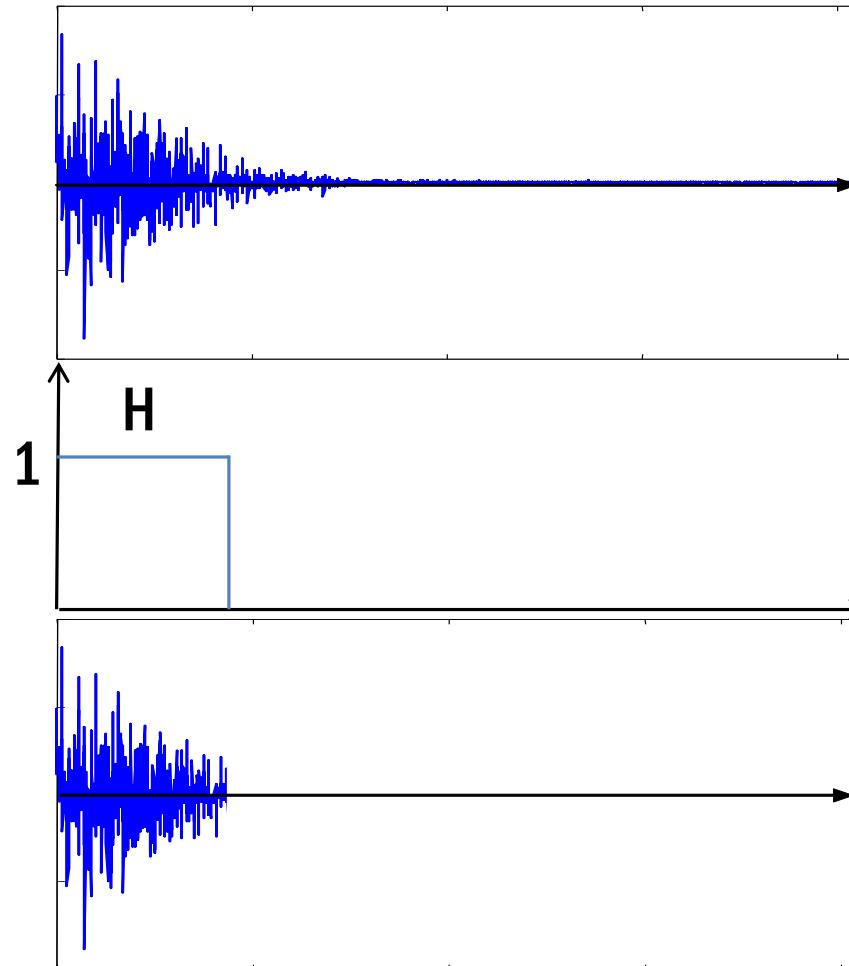
Então, f_a para discretizar áudio deve ser 44K Hz

Mas sons podem ter componentes muito acima de 22KHz, então digitalização a 44KHz pode gerar *aliasing*

Solução: utilizar um filtro analógico “passa-baixas” com frequência de corte em 22Khz: filtro anti-aliasing

Filtros no domínio da frequência

Multiplicar (ponto a ponto) o sinal no domínio da frequência, pela *função de transferência H do filtro*



Filtros no domínio da frequência

Passa-baixas (frequências)

Passa-altas

Passa-faixa, passa-banda

Corta-baixas, rejeita-baixas

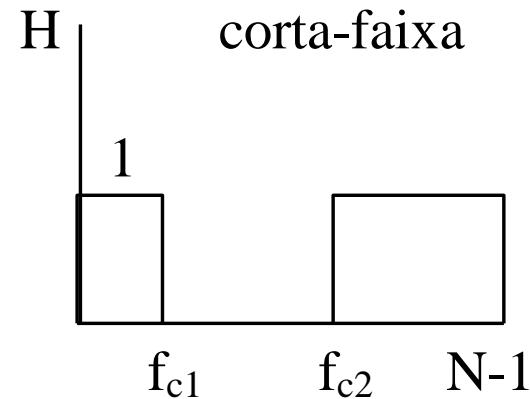
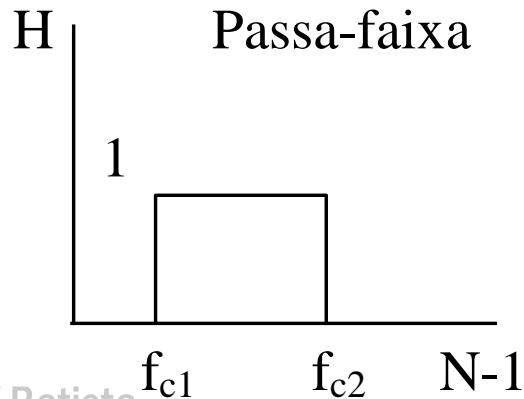
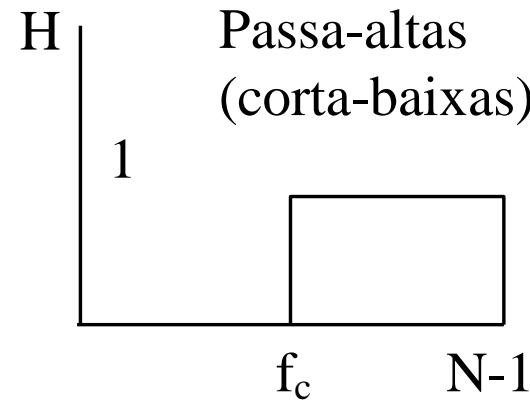
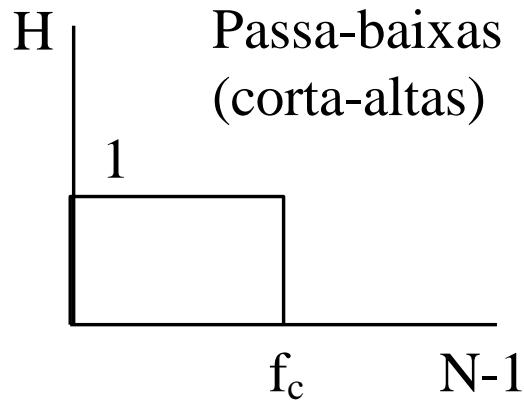
Corta-altas, rejeita-altas

Corta-faixa, corta-banda, rejeita-faixa, rejeita-banda

Corta-faixa estreita: *notch*

Filtros no domínio da frequência

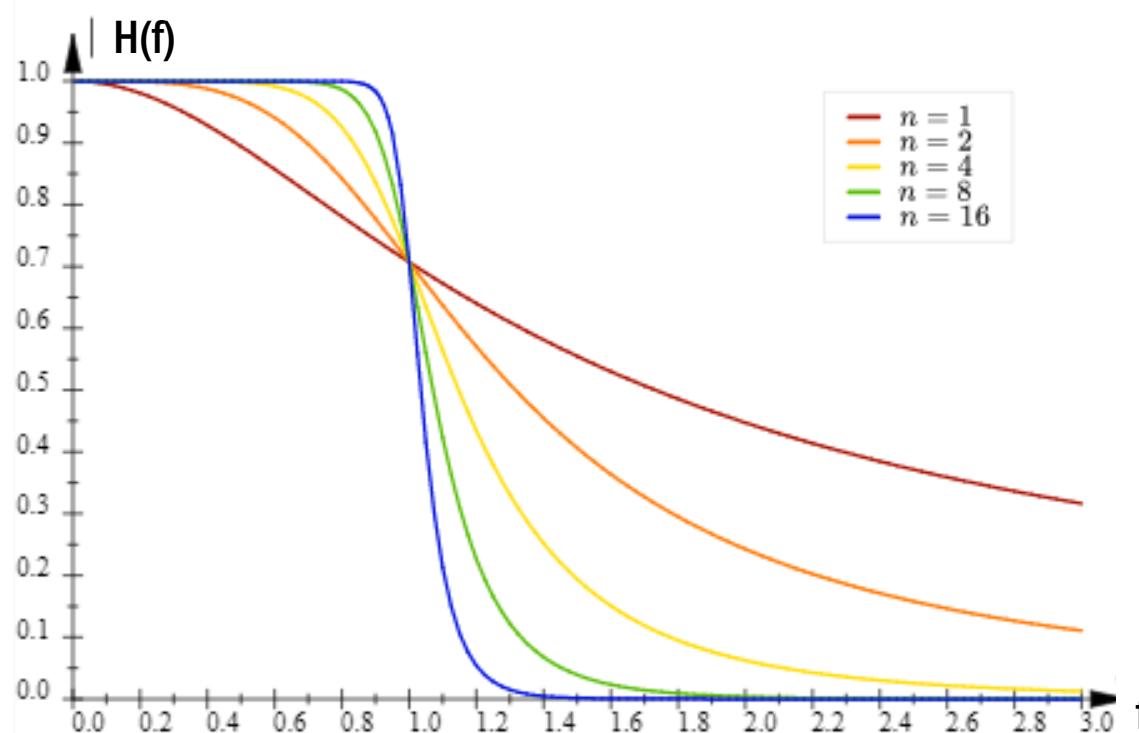
Filtros ideais



Filtros no domínio da frequência

Filtros não-ideais

Corte suave, $|H(f_c)| = (1/2)^{1/2}$ ou $|H(f_c)| = 1/2$



DCT 2D

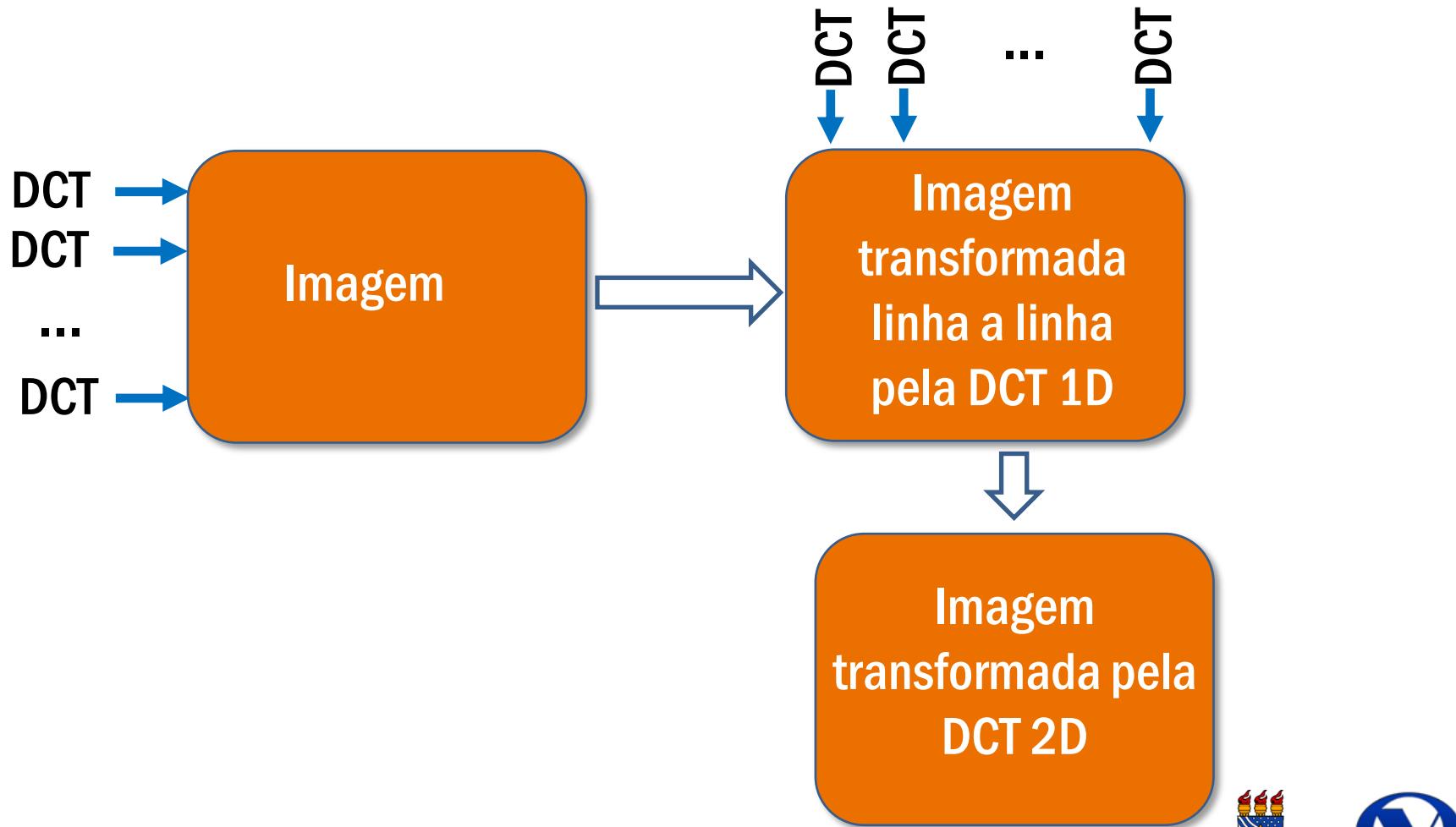
$$X[k, l] = \frac{2}{\sqrt{RC}} c_k c_l \sum_{m=0}^{R-1} \sum_{n=0}^{C-1} x[m, n] \cos \left[\frac{(2m+1)k\pi}{2R} \right] \cos \left[\frac{(2n+1)l\pi}{2C} \right]$$

$$x[m, n] = \frac{2}{\sqrt{RC}} \sum_{k=0}^{R-1} \sum_{l=0}^{C-1} c_k c_l X[k, l] \cos \left[\frac{(2m+1)k\pi}{2R} \right] \cos \left[\frac{(2n+1)l\pi}{2C} \right]$$

Complexidade
Operação separável

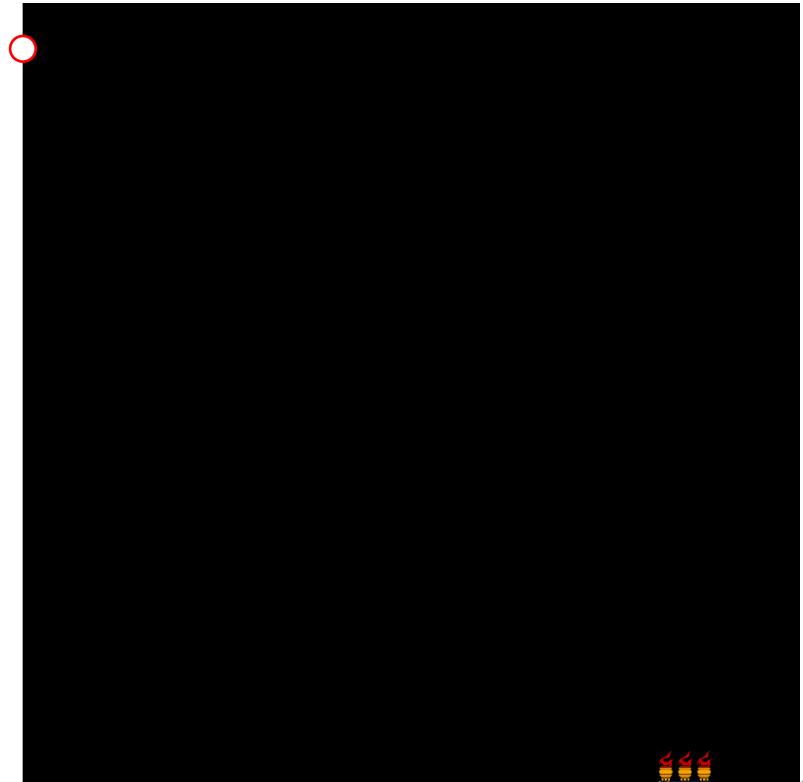
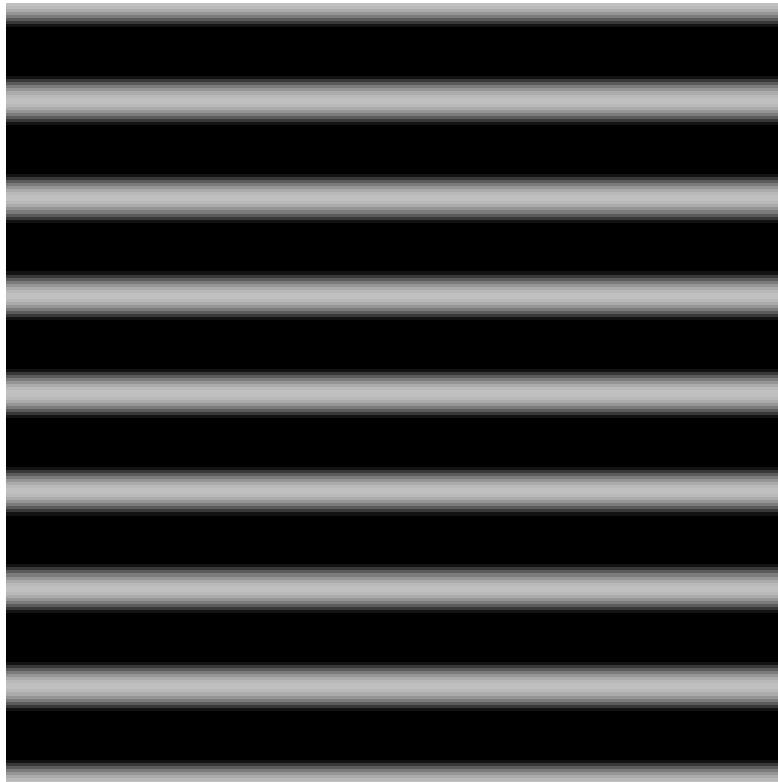
DCT 2D

Separabilidade



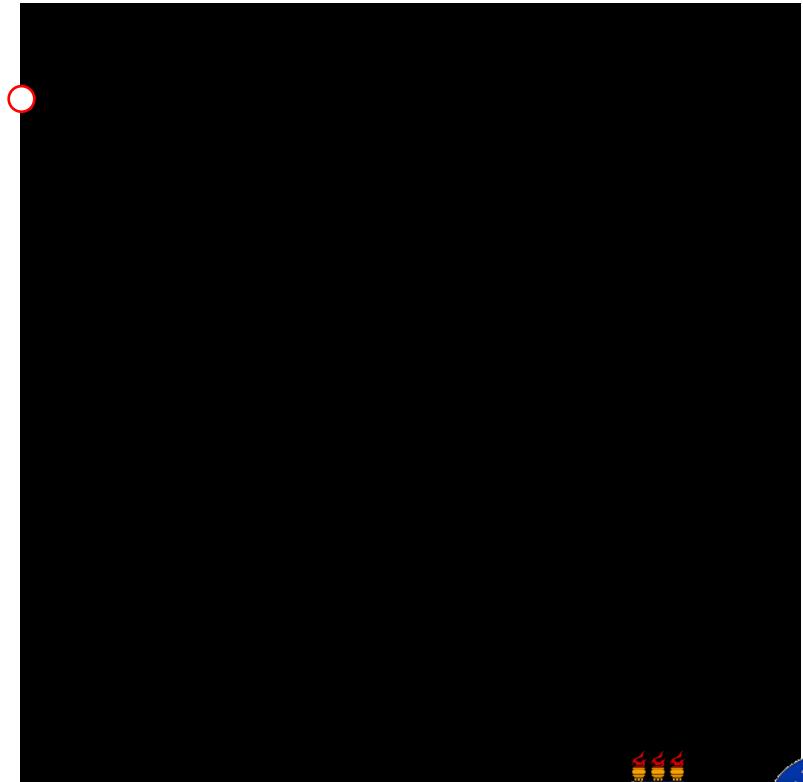
DCT 2D - exemplos

Imagen “cosseno na vertical”, 256 x 256,
8 ciclos ($k = 16$) e sua DCT normalizada



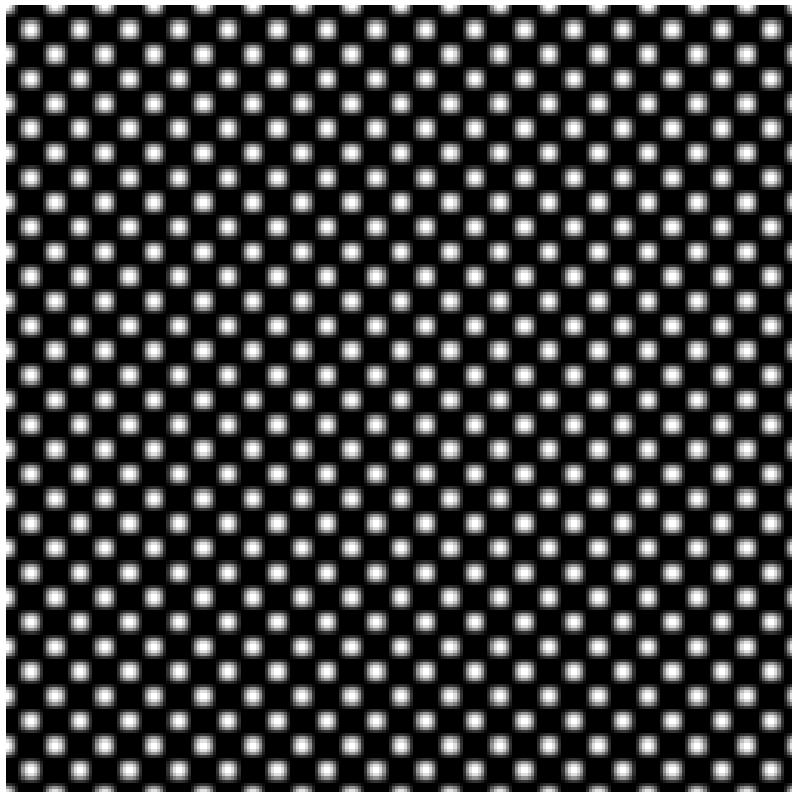
DCT 2D - exemplos

Imagen “cosseno na vertical”, 256 x 256,
16 ciclos ($k = 32$) e sua DCT normalizada



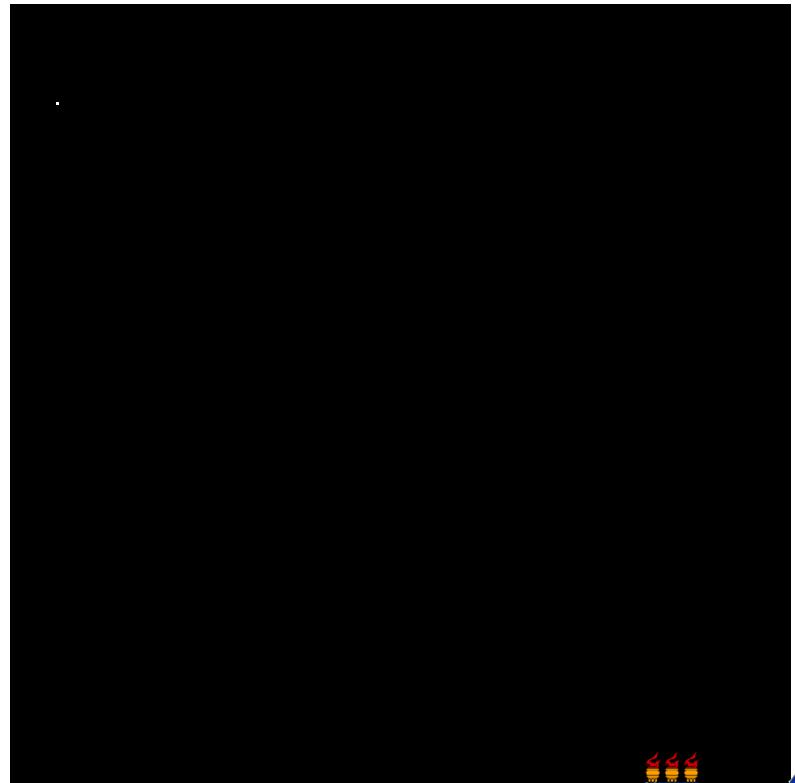
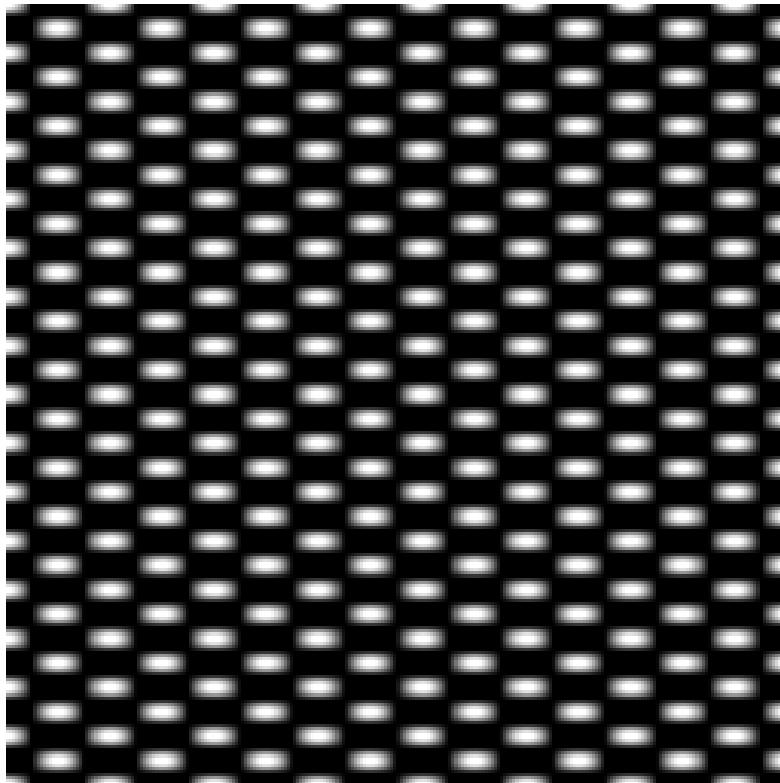
DCT 2D - exemplos

Imagen “cosseno na horizontal x vertical”, 256 x 256, 16x16 ciclos ($k = 32$) e sua DCT normalizada



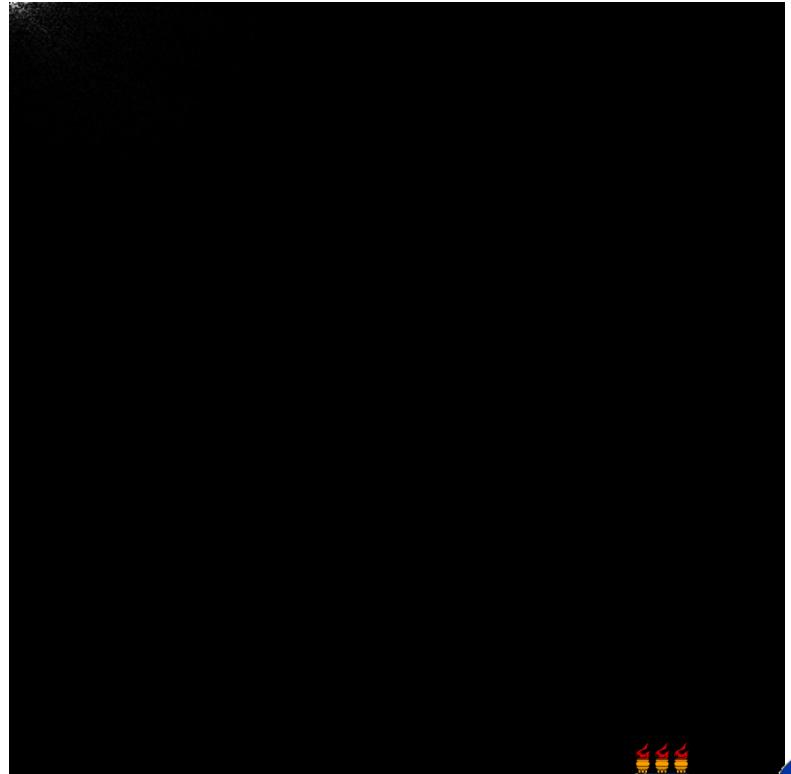
DCT 2D - exemplos

Imagen “cosseno na horizontal x vertical”, 256 x 256, 8x16 ciclos, e sua DCT normalizada



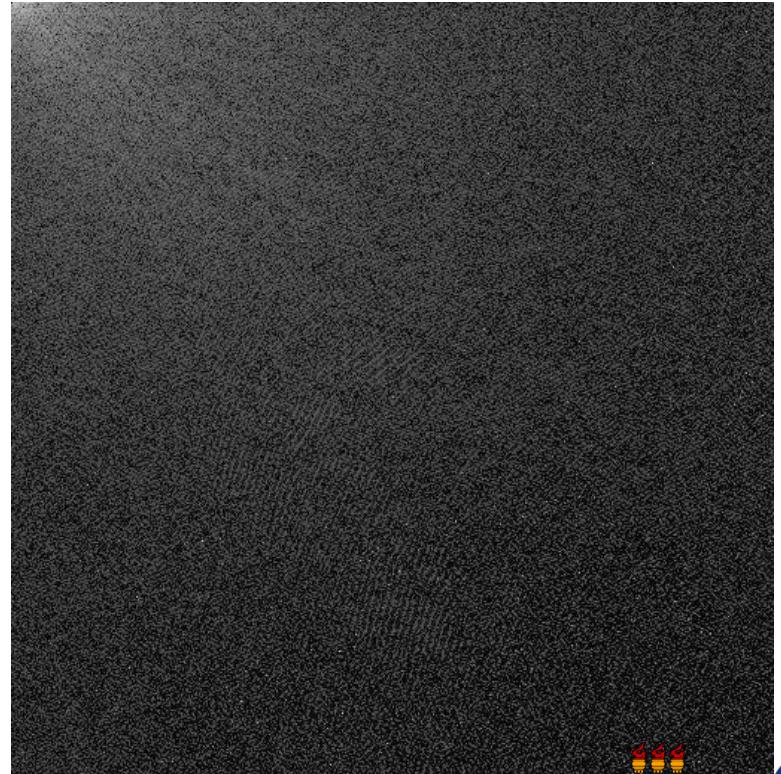
DCT 2D - exemplos

Imagen “Lena” (256x256) e sua DCT normalizada



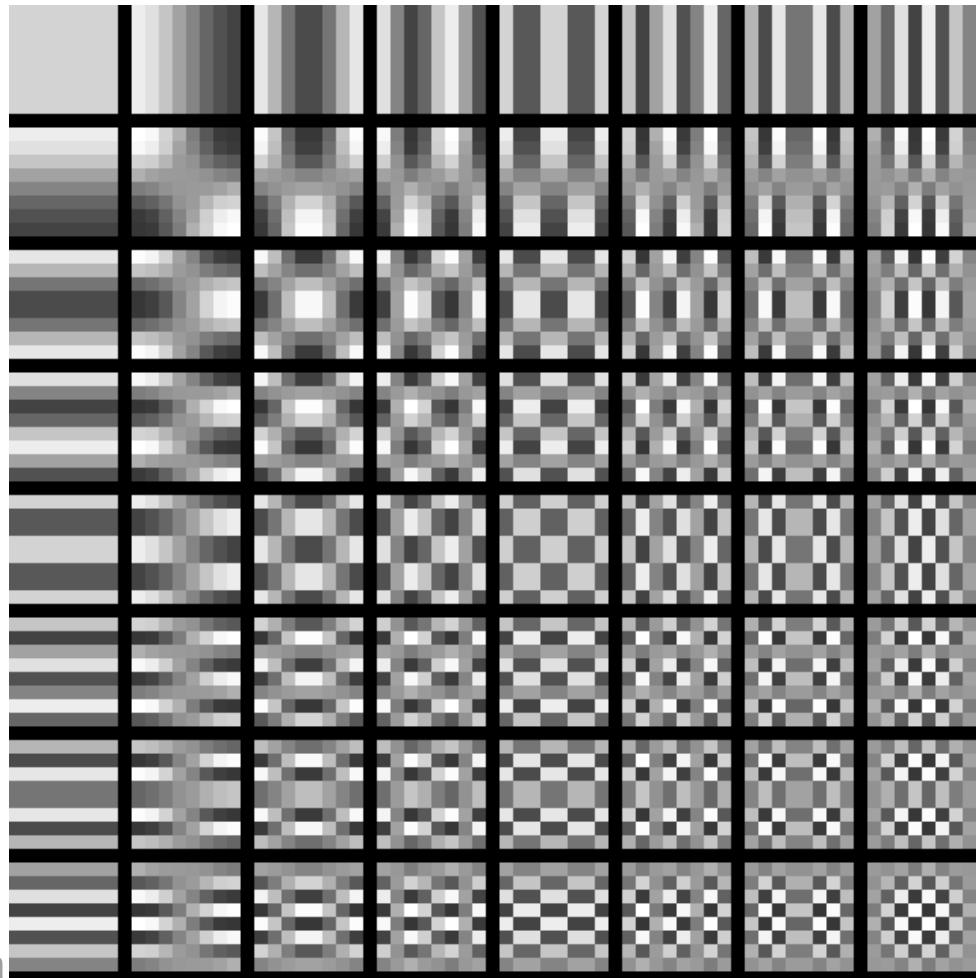
DCT 2D - exemplos

Imagen 256x256 e $\log(|\text{DCT}| + 1)$ normalizado



DCT 2D - exemplos

Funções de base para imagens 8x8



Transformada de Fourier Discreta

DFT Direta:

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}, \quad k=0, 1, \dots, N-1$$
$$j = \sqrt{-1}$$

DFT Inversa:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{\frac{j2\pi kn}{N}}, \quad n=0, 1, \dots, N-1$$
$$j = \sqrt{-1}$$

Fórmula de Euler:

$$e^{\pm j\theta} = \cos \theta \pm j \sin \theta$$

DFT - Fórmula de Euler

A expressão mais bela da matemática

$$e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta$$

$$e^{i\pi} = \cos \pi \pm i \sin \pi$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Número de Euler, $e = 2,718281$

Unidade imaginária, $i, i^2 = -1$

Razão entre circunferência e diâmetro do círculo, π

Dígitos binários 0 e 1

Adição, multiplicação e exponenciação

DFT

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}$$

$$e^{-j\theta} = \cos \theta - j \sin \theta$$

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \left[\cos 2\pi \frac{k}{N} n - j \sin 2\pi \frac{k}{N} n \right]$$

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \left[\cos 2\pi \frac{k}{N} n \right] - j \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \left[\sin 2\pi \frac{k}{N} n \right]$$

DFT

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \left[\cos 2\pi \frac{k}{N} n \right] + j \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \left[\sin 2\pi \frac{k}{N} n \right]$$

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \left[\cos 2\pi \frac{k}{N} n \right] - j \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \left[\sin 2\pi \frac{k}{N} n \right]$$

Comparar a DFT com a DCT:

$$X[k] = \left(\frac{2}{N} \right)^{1/2} c_k \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos \left[2\pi \frac{k}{2N} n + \frac{k\pi}{2N} \right]$$

DFT – duas propriedades essenciais

$$X[k+N] = ?$$

$$|X[-k]| = ?$$

$$|a+jb| = (a^2 + b^2)^{1/2}$$

DFT – duas propriedades essenciais

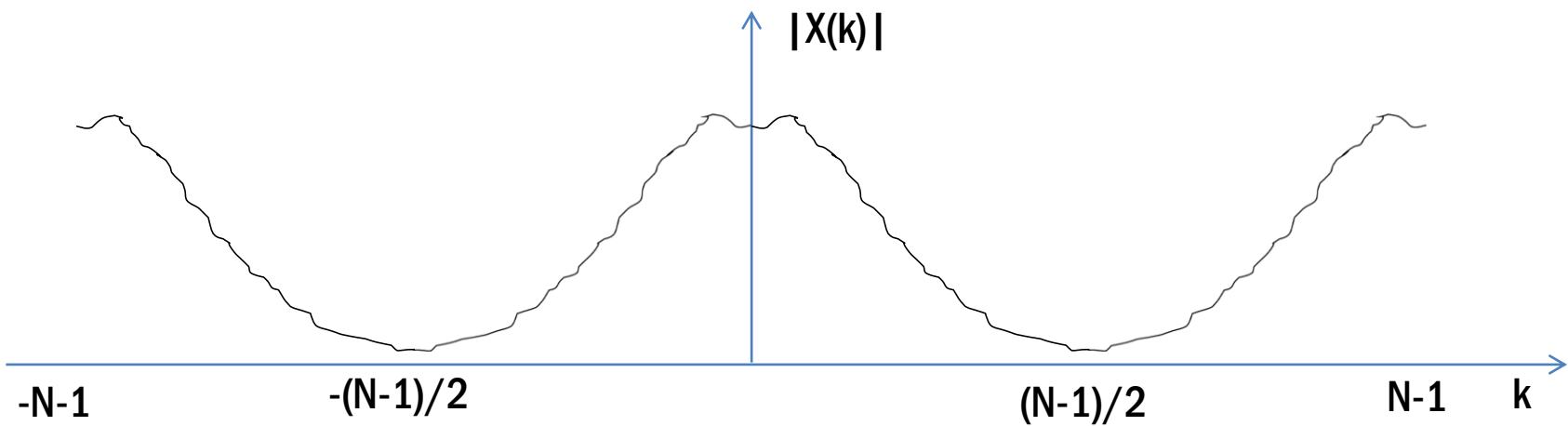
DFT é periódica de período N :

$$X[k+N] = X[u]$$

Espectro de Fourier é função par:

$$|X[k]| = |X[-k]|$$

DFT – duas propriedades essenciais



$k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots$: freq. 0

$k = \pm(N-1)/2, \dots$: freq. máxima

DFT - frequências em Hz

$T_a = 1/f_a$ (Período de amostragem)

N amostras $\Leftrightarrow (N-1)T_a$ segundos

$$f_1 = \frac{1}{N} \text{ (adimensional)} \Leftrightarrow f_1 = \frac{1}{(N-1)T_a} = \frac{f_a}{N-1} \text{ Hz}$$

$$f_{(N-1)/2} = \frac{N-1}{2} \frac{f_a}{(N-1)} = \frac{f_a}{2} \text{ Hz}$$

DFT 2D

$$X[u, v] = \frac{1}{RC} \sum_{m=0}^{C-1} \sum_{n=0}^{R-1} x[m, n] e^{-j2\pi(um/C + vn/R)}$$

$$x[m, n] = \sum_{u=0}^{C-1} \sum_{v=0}^{R-1} X[u, v] e^{j2\pi(um/C + vn/R)}$$

**Complexidade elevada
Operação separável**

Exibição do espectro de Fourier

$$aux = \log(1 + |F[u, \eta]|)$$

$$F_{log}[u, \eta] = round[(L - 1) aux / aux_{max}]$$

Deslocamento da origem para o centro da imagem

Exibição do espectro de Fourier

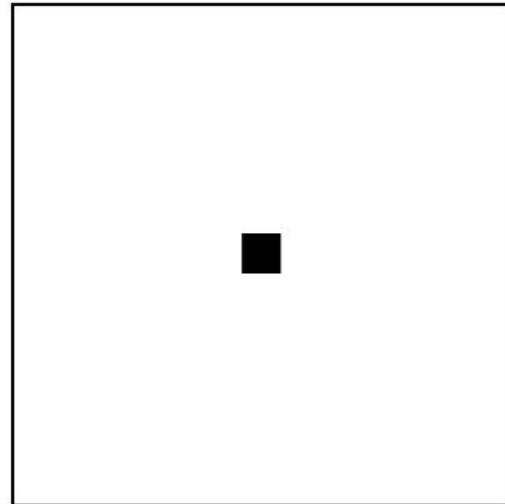


Imagen Original



Espectro F_{im}

DFT - exemplos

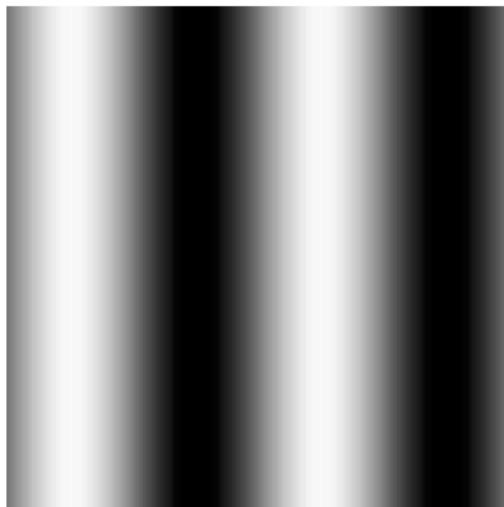
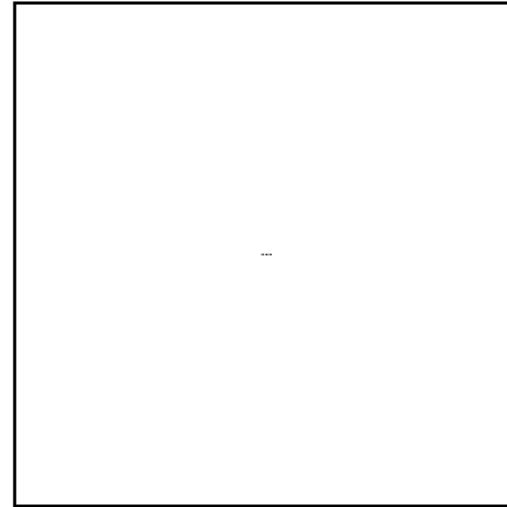


Imagen $\sin 4\pi$



Negativo de espectro F_{log} de $\sin 4\pi$

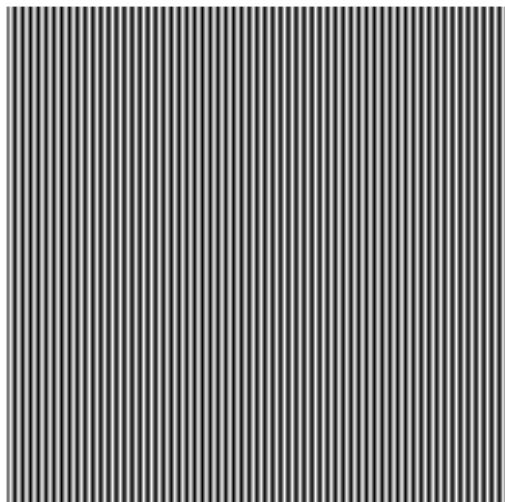
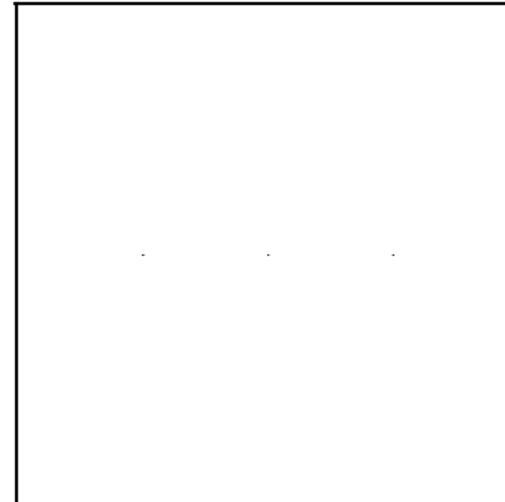


Imagen $\sin 128\pi$

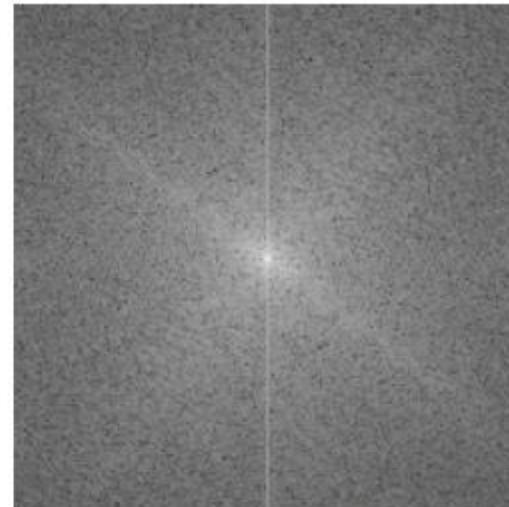


Negativo de espectro F_{log} de $\sin 4\pi$

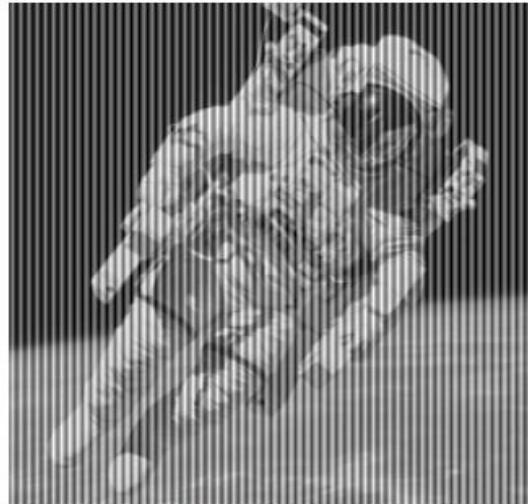
DFT - exemplos



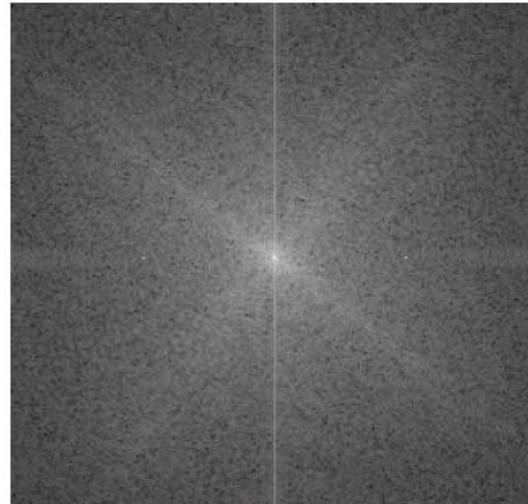
Space



Espectro F_{log} de Space



SpaceSen



Espectro de SpaceSen

DFT - exemplos

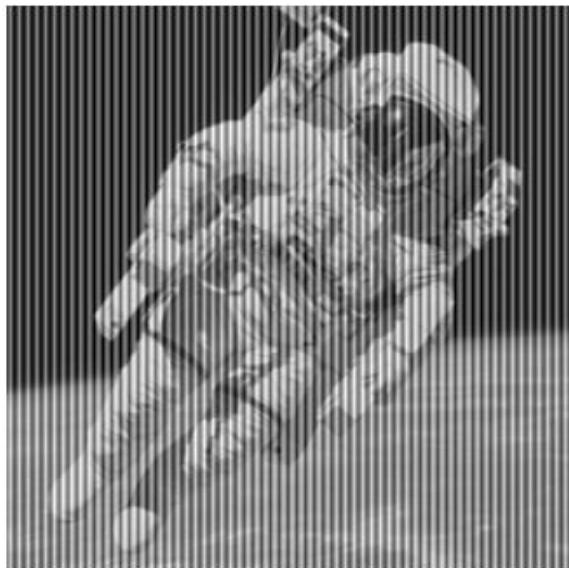


Imagen original

Filtros no domínio de Fourier

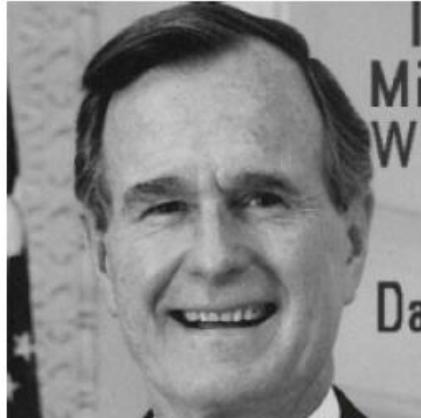
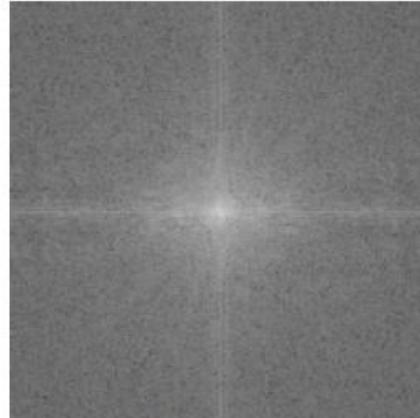


Imagen original



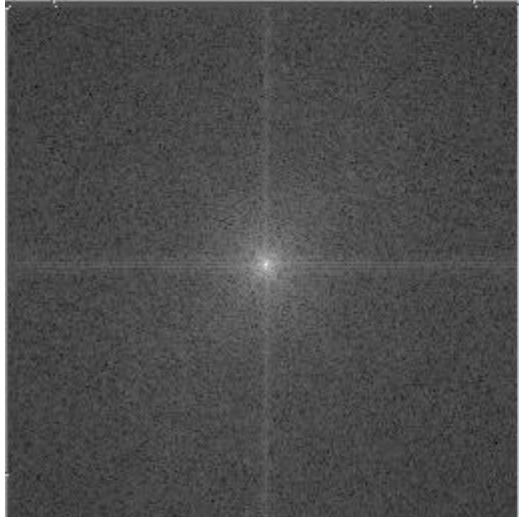
Espectro

Filtros no domínio de Fourier



h ideal
passa-baixas
(Low-pass)

Imagen filtrada



H ideal
passa-baixas
(Low-pass)

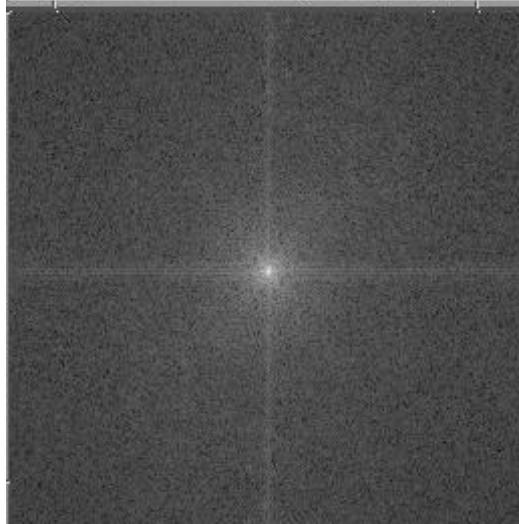
Espectro filtrado

Filtros no domínio de Fourier



h não-ideal
passa-baixas
(Low-pass)

Imagen filtrada



H não-ideal
passa-baixas
(Low-pass)

Espectro filtrado

Teorema da convolução

Se

$$g[m, n] = x[m, n] \otimes h[m, n]$$

Então:

$$G[u, v] = X[u, v] H[u, v]$$

em que

$$G[u, v] = \text{DFT de } g[m, n]$$

$$X[u, v] = \text{DFT de } x[m, n]$$

$H[u, v]$ = DFT de $h[m, n]$ = função de transferência do filtro

Deslocamento de frequências

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$$

$$x[n]e^{\frac{j2\pi dn}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{\frac{j2\pi kn}{N}} e^{\frac{j2\pi dn}{N}}$$

$$x[n]e^{\frac{j2\pi dn}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{\frac{j2\pi(k+d)n}{N}}$$

Adiciona d às frequências originais

Multiplexação no domínio da frequência

