

Heaps y Tries

Problemas, Algoritmos y Programación

Septiembre de 2016

1 Heap

2 Trie

¿Qué es un heap?

Un heap binario (para nosotros, de ahora en más, heap a secas) es un árbol binario que cumple con las siguientes propiedades:

- Si n es la profundidad del heap, las hojas tienen profundidad n o $n - 1$.
- Los vértices de profundidad $n - 1$ que son hojas, están todos a la derecha de los que no lo son.
- Todos los vértices tienen 0 o 2 hijos, a excepción del vértice más a la derecha de profundidad $n - 1$ que puede tener 1 sólo hijo.
- Cada vértice que no es una hoja es menor que sus dos hijos.

Existen castellanizaciones horribles de la palabra heap como parva o montículo. Para que se imaginen, hay un artículo de Wikipedia sobre “Montículos binarios”.

Heaps de todo tipo

Donde dice “*Cada vértice que no es una hoja es menor que sus dos hijos.*” no necesariamente menor se refiere al orden que utilizamos para los números reales. Cualquier relación de orden total en la cual se pueda definir la palabra menor es válida. ¿Se les ocurre alguna otra relación de orden total donde haya otra definición de menor distinta?

Heaps de todo tipo

Donde dice “*Cada vértice que no es una hoja es menor que sus dos hijos.*” no necesariamente menor se refiere al orden que utilizamos para los números reales. Cualquier relación de orden total en la cual se pueda definir la palabra menor es válida. ¿Se les ocurre alguna otra relación de orden total donde haya otra definición de menor distinta?

A mí se me ocurrió la siguiente:

a es menor que $b \Leftrightarrow a > b$ con el orden usual de \mathbb{R}

¿Qué NO le podemos pedir a un heap?

A un heap no le podemos pedir:

- Que nos devuelva el i -ésimo elemento ($1 \leq i \leq n$) en $o(n)$ (tiempo sublineal).
- Que nos diga si un elemento dado está en el heap en $o(n)$.
- Que nos diga si este año Argentina gana la Copa Davis en $\Omega(1)$.

$$f \in o(g) \text{ si } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

$$f \in \Omega(g) \text{ si } g \in \mathcal{O}(f)$$

¿Qué SI le podemos pedir a un heap?

A un heap le podemos pedir:

- Decime tu menor elemento en $\mathcal{O}(1)$.
- Che heap, teneme esto (insertar) en $\mathcal{O}(\log n)$.
- Este elemento que tenés acá (puede o no ser el menor), damelo que me lo quedo yo (borrar) en $\mathcal{O}(\log n)$.

n es siempre la cantidad de elementos del heap.

En la teórica de hoy...

Ahh no! La teórica ya la tuvieron con Esteban, Flavia, Chapa, Charly, Fran... Alguien se las habrá dado ya!

Vayamos directo a la práctica!

Muy lindo pero... ¿Para qué los usamos?

Los heaps son muy potentes pero tienen pocas cosas que pueden hacer, y se relacionan sobre todo con el orden. Pueden dar muy rápido su menor elemento, y modificar su estructura agregando y sacando elementos en $\mathcal{O}(n)$ cada operación de insertar o borrar cada elemento.

Cuando algo se relaciona tanto con un orden, puede servir por ejemplo para ordenar (Heap-sort).

Muy lindo pero... ¿Para qué los usamos?

Los heaps son muy potentes pero tienen pocas cosas que pueden hacer, y se relacionan sobre todo con el orden. Pueden dar muy rápido su menor elemento, y modificar su estructura agregando y sacando elementos en $O(n)$ cada operación de insertar o borrar cada elemento.

Cuando algo se relaciona tanto con un orden, puede servir por ejemplo para ordenar (Heap-sort).

Tengan cuidado! Heap-sort (y todo lo que usa heaps en general) es MUY POCO cache-friendly.

Casi ordenado

Vamos derecho a un ejemplo:

Problema

La semana que viene abren las inscripciones a los concursos de ayudante de segunda, y un amigo me pidió que le tenga su formulario de inscripción que ocupa N hojas. Decidí dejarlas para no olvidarme en la terraza del pabellón, apoyando la i -ésima hoja en el piso a i metros de la puerta de la terraza. Lamentablemente un viento fuerte me las movió a lo sumo $\frac{T}{2}$ metros cada una, por lo que cuando las junté en orden la i -ésima hoja sólo podía estar en la posición j con $i - T \leq j \leq i + T$ ¹. Las tengo que presentar rápido así que tengo que ordenarlas de nuevo en $\mathcal{O}(N \log T)$. Confío en que me van a poder ayudar!

¹ Queda como ejercicio.

Ejemplos varios

- Dijkstra y su hermano Prim.
- Mantener la mediana de un arreglo al que se le insertan elementos.
- “*A heap of other problems*”

Trie, trie, trie de los Pumas!

No, no son **esos tries**. Son otros.

Edsger Dijkstra

Los tries no se los debemos a Dijkstra, pero antes del ejemplo siempre es bueno recordar a nuestro prócer.



Qué es un Trie?

Definición de Trie

Los tries sirven, entre otras cosas, para representar conjuntos o diccionarios de palabras. Un trie es un árbol de caracteres en el que cada camino de la raíz a un nodo final (no necesariamente una hoja) es una palabra de dicho diccionario.

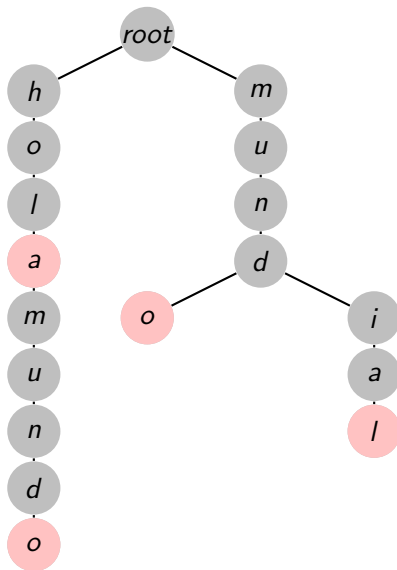
Qué es un Trie?

Definición de Trie

Los tries sirven, entre otras cosas, para representar conjuntos o diccionarios de palabras. Un trie es un árbol de caracteres en el que cada camino de la raíz a un nodo final (no necesariamente una hoja) es una palabra de dicho diccionario.

Veamos un ejemplo de un Trie con las palabras *hola*, *holamundo*, *mundo* y *mundial*.

Ejemplo de un Trie



Caracteres en las aristas

IMPORTANTE: Los caracteres no van en los vértices, van en las aristas!

¡Problemas!

Ya todos saben lo que es un trie, así que derecho a los problemas:

- Diseño de camisetas. (TAP 2012).
- Diccionario Portugués. (Regional Latinoamericana ACM-ICPC 2011).
- Gestión eficiente. (recién sacadito del horno - TAP 2016).

Diseño de camisetas

Enunciado

Dos equipos de rugby de N jugadores deben usar las mismas camisetas. Un jugador puede usar una camiseta si el nombre estampado en la parte de atrás de la camiseta es un prefijo (puede ser vacío) de su apellido. Si los dos equipos quieren compartir N camisetas para que cada camiseta la use un jugador de cada equipo, ¿Cuál es la máxima cantidad de letras que puede haber entre todas las camisetas?

Diccionario Portuguol

Enunciado

Una palabra es vlida en Portuguol si se puede escribir como st (concatenar la palabra s con la palabra t) siendo s el prefijo de una palabra en portugus y t el sufijo de una palabra en espaol. ¿Cuántas palabras distintas tiene el Portuguol?

Gestión eficiente

Enunciado

El cuentito es muy largo, lo cuento en el pizarrón. (después veo si lo hago entrar en una slide o dejo el link al enunciado).

Enunciado formal: Dado un árbol T con pesos en las aristas encontrar para cada vértice v del árbol el vértice w que maximice el xor de los pesos de las aristas del camino de v a w .