Probabilidad y Combinatoria

Agustín Santiago Gutiérrez

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Problemas Algoritmos y Programación 2016

Contenidos

“The generation of random numbers is too important to be left to chance.”

Robert R. Coveyou, *Oak Ridge National Laboratory, 1969.*

“Randomness is a very, very subtle concept with its study properly belonging to statisticians more than mathematicians.”

Julian Havil, *The Irrationals: A Story of the Numbers You Can’t Count On (2012), Chapter 9, p. 229.*

“The sun comes up just about as often as it goes down, in the long run, but this doesn’t make its motion random.”

Donald Knuth, *The Art of Computer Programming, Vol. II, 1969, section 3.3.2.*

“Si la literatura no fuera más que un álgebra verbal, cualquiera podría producir cualquier libro, a fuerza de ensayar variaciones.”

Jorge Luis Borges, *Nota sobre (hacia) Bernard Shaw*

“There is no problem in all mathematics that cannot be solved by direct counting.”

Ernst Mach, *quoted by A. T. Benjamin, G. M. Levin, K. Mahlburg and J. J. Quinn,*
Random approaches to Fibonacci identities, Amer. Math. Monthly 107 (2000), p.511.

La probabilidad y la combinatoria:

- Están estrechamente relacionadas
- Combinatoria: Queremos contar la cantidad de elementos de un conjunto (finito).
- Probabilidad: Queremos cuantificar qué porcentaje “de las veces” ocurre algo.
- Ambas son una **medida**. Responden un “**¿Cuánto?**”

Contenidos

Principios

Principio de suma

Si A y B son conjuntos disjuntos finitos, $|A \cup B| = |A| + |B|$

- Sirve para contar **disyunciones**: Si tengo que hacer algo de la manera A **o** de la manera B, **disjuntas**, entonces si la A presenta n opciones y la B presenta m opciones, en total tengo $n + m$ posibilidades.
- Generaliza naturalmente a más de 2, sumando todas las opciones.

Principios (cont)

Principio de multiplicación

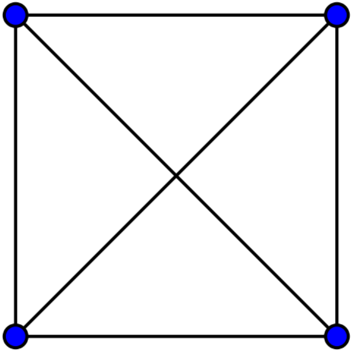
Si A y B son conjuntos finitos, $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

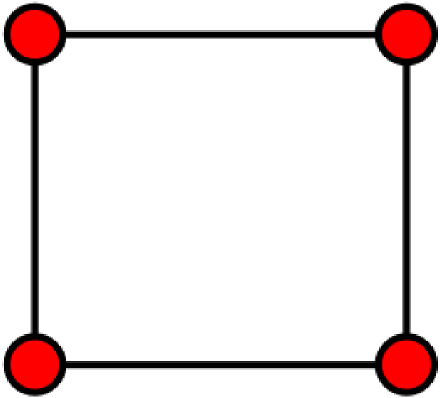
- Sirve para contar **conjunciones**: Si tengo que hacer una cosa que se puede hacer de n formas, **y** otra más **independiente** que se puede hacer de m formas, el proceso completo lo puedo realizar de $n \cdot m$ formas.
- Generaliza naturalmente a más de 2 cosas que haya que elegir, multiplicando todas las opciones.
- Es fundamental que en cada paso, la cantidad de opciones **no dependa** de las elecciones anteriores, para poder aplicar el principio.

Contenidos

Ejemplo

Podemos aplicar estos principios para calcular polinomios cromáticos. Por ejemplo, para los siguientes grafos:





Repaso (pizarrón)

Repaso de álgebra 1:

- Subconjuntos
- Permutaciones
- Factorial
- Anagramas
- Numeros combinatorios
- Bosones

Más ejemplos de combinatoria (pizarrón)

- ¿De cuántas maneras podemos cubrir un tablero de $2 \times n$ con dominós?
- Dado un DAG: ¿Cuántos caminos existen entre A y B?
- Dado un grafo (dirigido): ¿Cuántos caminos de longitud L existen entre A y B?
- Dado un entero positivo N: ¿De cuántas maneras se lo puede obtener como suma de números positivos? $1 + 2$ y $2 + 1$ se consideran la misma manera de obtener 3.

Contenidos

Principios

Unión

Si A y B son eventos disjuntos (cosas que nunca ocurren a la vez), $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- Si los eventos no son **disjuntos**, hay que **medir** adecuadamente y restar lo que se contó dos veces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Corolario: La probabilidad de que E no ocurra es $1 - P(E)$
- Es análogo al principio de suma en combinatoria.

Principios

Intersección

Si A y B son eventos **independientes** (la ocurrencia de uno no depende para nada del otro), $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

- Si los eventos no son independientes no se puede multiplicar, hay que analizar la probabilidad contando de alguna otra forma.
- Es el análogo al principio de multiplicación en combinatoria.

Principios

Probabilidad total

Si en un cierto momento "se sortea" entre n opciones distintas, donde la opción i tiene probabilidad p_i, y además una vez que ya sabemos que salió la opción i, entonces resulta que el evento E que nos interesa ocurre con una probabilidad e_i, entonces la probabilidad del evento al comienzo del sorteo es $P(E) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot e_i$

- Esta regla es extremadamente común de utilizar en problemas, sobre todo combinada con programación dinámica, donde los e_i resultarán ser nuevos subproblemas recursivos.
- Lo veremos enseguida al hablar de procesos de Markov.
- En problemas donde los resultados posibles son continuos (números reales arbitrarios), todo es igual pero con integrales en lugar de sumas (recordar que una integral no es más que una suma sobre muchos intervalitos, muy chiquititos).

Principios

Espacio de equiprobabilidad

Cuando hay n resultados posibles, y todos tienen la misma probabilidad, estamos ante un *espacio de equiprobabilidad*.

- En este caso, si el evento que nos interesa se corresponde con k de los n resultados, tiene probabilidad $P(E) = \frac{k}{n}$
- Este caso generalmente da problemas y soluciones muy similares a los de combinatoria, pues equivale esencialmente a contar n y k.

Contenidos

Paradoja de los cumpleaños

- ¿Cuál es la probabilidad de que en un grupo de N personas, dos cumplan años el mismo día?
- Asumimos por supuesto, de manera totalmente irrazonable, que no hay bisiestos y que todos los días son equiprobables.
- $P = 1 - \prod_{i=0}^{N-1} \frac{365-i}{365} = 1 - \frac{365!}{(365-N)!365^N}$

Máximo de dos números

- Se eligen dos números al azar uniformemente entre 0 y 1. ¿Cuál es la probabilidad de que el máximo sea mayor o igual que 0.5?
- ¿Cuál es la probabilidad de que su suma sea mayor o igual que 0.5?
- ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de sus cuadrados sea mayor o igual que 0.5?

Red Tape Committee

- Google Codejam: Round 2 2016, problema B.
- You are the head of the Department of Redundancy Reduction and Superfluity Shrinkage. Currently, the department cannot agree on whether there is too much "red tape" (inefficiency) in the department itself. They have asked you to form a Red Tape Committee to vote on the issue.
- The department has N members. For each member, you know the probability P_i that that member will vote "Yes". If a member does not vote "Yes", they necessarily vote "No"; nobody abstains.
- You must choose exactly K members to be on the committee. The department rules dictate that K must be an even number to allow for ties, which are seen as part of a healthy bureaucracy.
- If you choose committee members to maximize the probability of a tie, what is that probability?

Contenidos

Definición

Esperanza

Dado un número **que depende de nuestro experimento** (variable aleatoria), su *esperanza* es la suma sobre todos los resultados posibles de $p_i \cdot X_i$, siendo p_i la probabilidad del resultado i, y X_i el valor de nuestra variable aleatoria en ese resultado particular.
En el caso continuo, en lugar de una suma tenemos una integral.

- Si repetimos el experimento muchas veces y promediamos el valor obtenido sobre todas las mediciones, obtendremos un valor muy cercano a la esperanza, arbitrariamente cercano con arbitrariamente alta confianza cuantas más mediciones tomemos. (Ley de los grandes números).

Linealidad de la esperanza

- La propiedad más importante y útil de la esperanza es su linealidad.
- Si X e Y son variables aleatorias: $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$
- En lo anterior **no hace falta que X e Y sean independientes**: La linealidad funciona para cualesquiera variables aleatorias.

Esperanza partida en cachos

Esperanza condicional

Si en un cierto momento “se sortea” entre n opciones distintas, donde la opción i tiene probabilidad p_i, y además una vez que ya sabemos que salió la opción i, entonces resulta que la esperanza de la cantidad X que nos interesa es e_i, entonces la esperanza de X es $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot e_i$

- El teorema anterior mencionado para probabilidades es un caso particular.
- Nuevamente, es muy común combinar esta idea con programación dinámica.

Contenidos

Ejemplos

- Cantidad de intentos esperada hasta tener éxito: $\frac{1}{p}$
- Problema del álbum de figuritas.
- Posición esperada en el torneo “ganador queda en cancha”.
- Matriz: viajamos solo para abajo y para la derecha, a elección. En cada celda hay un cierto beneficio, pero una cierta probabilidad de que al llegar ahí se termine el juego. Siempre se termina si llegamos a la esquina inferior derecha, pues no se puede seguir. Comenzamos en la esquina superior izquierda. Si jugamos de manera óptima para maximizar la esperanza del beneficio total (suma) obtenido, ¿Cuánto será esa esperanza?

Contenidos

Markov

- Este es Andrey Andreyevich Markov, matemático ruso famoso principalmente por su trabajo en procesos estocásticos.
- Además de llamarse igual que su viejo, es conocido entre otras cosas por la desigualdad de los hermanos Markov, que demostró junto con su hermano Vladimir Andreyevich Markov.
- Su hijo, también llamado Andrey Andreyevich Markov, fue otro matemático notorio, uno de los padres fundadores de la matemática constructiva, y conocido por su trabajo en lógica y teoría de funciones recursivas.

Definición

- Un proceso de Markov tiene varios **pasos**.
- Cada paso consiste de una transición del **estado** actual, a un nuevo estado.
- El proceso no es determinista, sino que en cada paso hay una cierta probabilidad de saltar a otros estados posibles.
- Se cumple la propiedad de Markov: La probabilidad de pasar de un cierto estado actual i, a otro estado j, depende **únicamente** de i y de j, y **no depende** del camino utilizado para llegar a i.
- Da lugar naturalmente a un grafo dirigido, con probabilidades en las aristas.

Contenidos

Ejemplos

- Juego de la Oca: Se tira un dado desde la casilla actual, y se mueve de manera acorde.
- Moneda: si sale cara se avanza, si sale ceca se retrocede. Se termina cuando uno “se cae” por un extremo.
- Borrachos peleando en una grilla de $n \times m$, que no paran hasta no pasar por la comisaría.

Preguntas comunes

Generalmente, estas llevan a un sistema de ecuaciones. Se puede resolver directamente con DP cuando el grafo es DAG.

- ¿Cuál es la cantidad de pasos esperada hasta llegar a un cierto estado?
- ¿Luego de muuuuchos (en el límite) pasos, cuál es la probabilidad de estar en un cierto estado?
- ¿Luego de exactamente K pasos, cuál es la probabilidad de estar en un cierto estado?