Flujo

Problemas, Algoritmos y Programación

Agosto/Septiembre de 2016

Contenidos

Motivación

"Todo fluye, nada permanece"

Heráclito.

"Si sus fuerzas están unidas, separalas"

Sun Tzu, El Arte de la Guerra.

Motivación

"Todo fluye, nada permanece"

Heráclito.

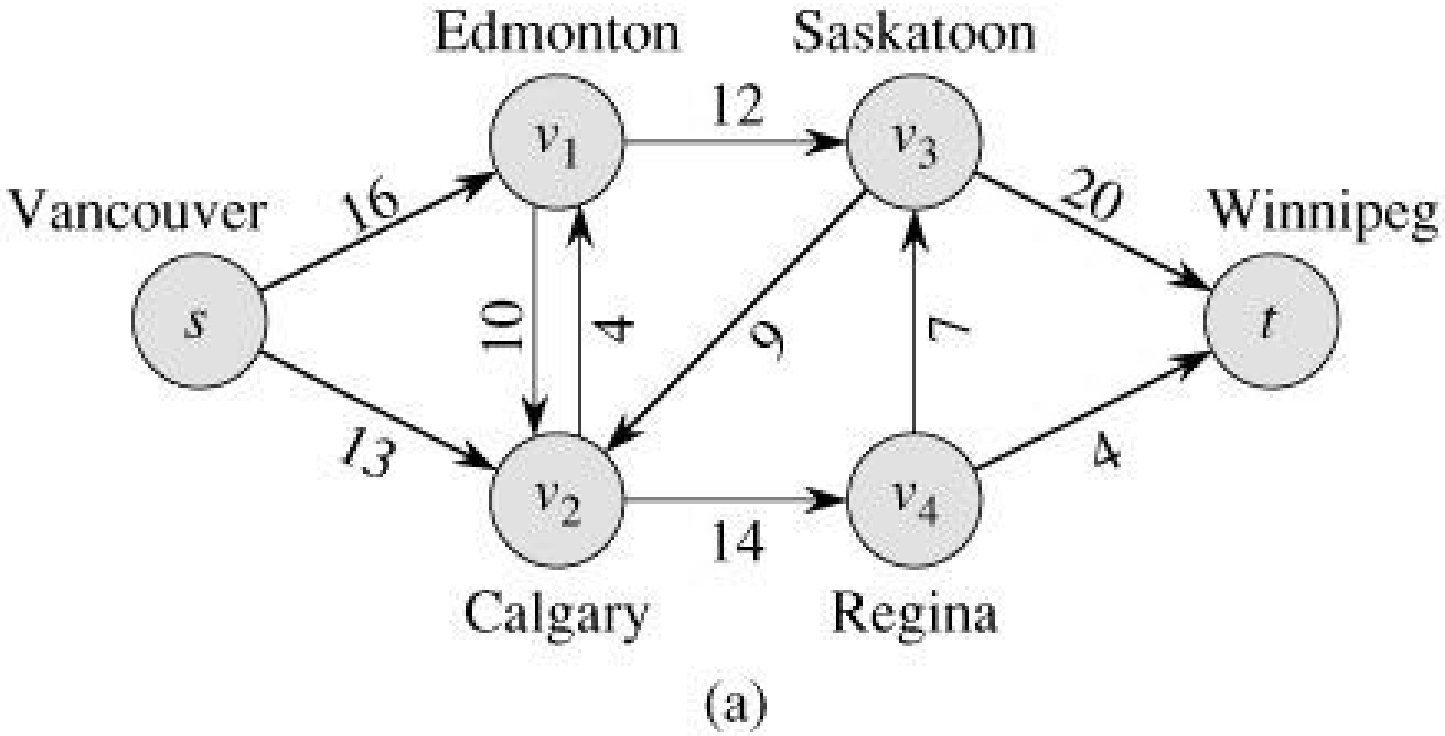
"Si sus fuerzas están unidas, separalas"

Sun Tzu, El Arte de la Guerra.

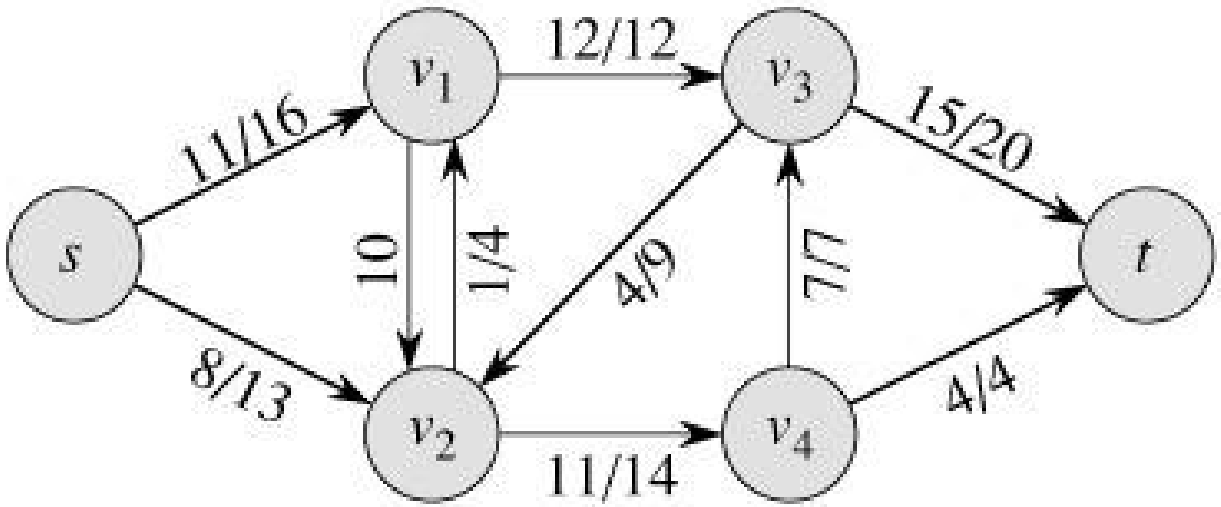
"Ahh mirá, flujo y corte, hablan los dos de lo mismo"

Ford-Fulkerson

Idea


Edmonton
Saskatoon
Vancouver
Winnipeg
Calgary
Regina
v_1
v_2
v_3
v_4
s
t
16
13
12
14
20
4
10
4
9
7
(a)

Idea



(b)

Idea

- Una fuente o source s.
- Un sumidero o sink t.
- Vértices intermedios
- Aristas dirigidas con una capacidad dada.
- Objetivo: Enviar el máximo flujo posible de s a t, cumpliendo las restricciones de capacidad.

Definición: Red de flujo

- Una red de flujo es un grafo dirigido $G = (V, E)$ donde cada arista $e \in E$ tiene asociada una capacidad $c(e) \geq 0$.
- Existen dos vértices distinguidos s y t llamados fuente y sumidero.

Definición: Flujo factible

Un flujo factible, o simplemente flujo, es una función $f : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que satisface:

- Restricción de capacidad:
  - $f(e) \leq c(e)$ para todo $e \in E$.
- Conservación de flujo:
  - Para todo $u \in V \setminus \{s, t\}$ se cumple

$$\sum_{\substack{e \in E \\ \text{e sale de } u}} f(e) = \sum_{\substack{e \in E \\ \text{e llega a } u}} f(e)$$

Definición: Flujo máximo

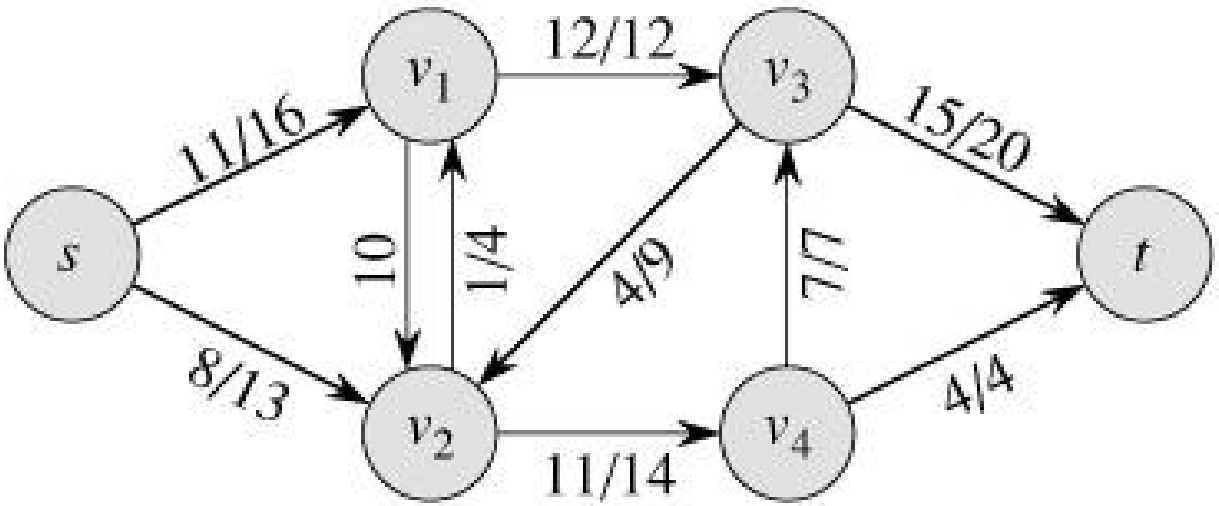
El valor de un flujo $|f|$ se define como

$$|f| = \sum_{\substack{e \in E \\ \text{e sale de } s}} f(e) - \sum_{\substack{e \in E \\ \text{e llega a } s}} f(e)$$

Dada una red de flujo G, el problema de flujo máximo consiste en encontrar el flujo de máximo valor que admite G.

Repaso

¿Es esto un flujo máximo?



(b)

Método de Ford Fulkerson

Es un método en general, no un algorítmo específico.

Se basa en tres conceptos claves:

- Redes residuales.
- Caminos de aumento.
- Cortes.

Método de Ford Fulkerson

El método comienza con una red de flujo vacía.

En cada iteración se busca un camino de aumento en la red residual para incrementar el valor del flujo.

Se puede demostrar mediante el teorema de Max-flow min-cut que, cuando termina, el flujo obtenido es máximo.

Redes residuales

Intuitivamente, la red residual es una nueva red de flujo que representa como podemos cambiar el flujo.

Formalmente, la red residual de $G = (V, E)$ es $G_f = (V, E_f)$ donde para cada arista $e : u \to v \in E$ se tiene en E_f:

- Una arista de u a v con capacidad $c(e) - f(e)$, siempre que $c(e) - f(e) > 0$.
- Una arista de v a u con capacidad $f(e)$, siempre que $f(e) > 0$.

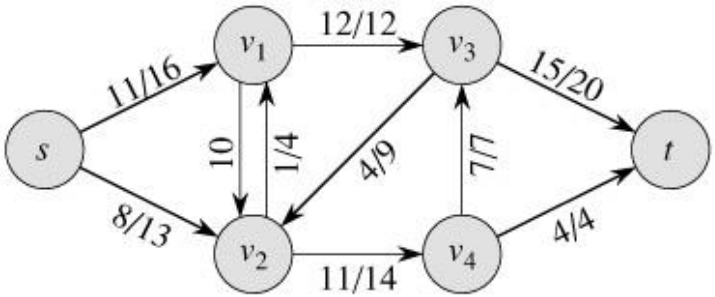
Caminos de aumento

Como vimos, dada una red de flujo $G = (V, E)$ y un flujo f, podemos obtener una red residual G_f.

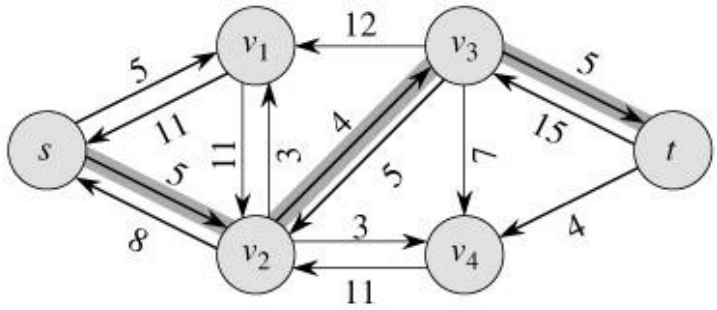
Un camino de aumento es un camino simple de s a t en la red residual.

Si existe un camino de aumento en la red residual, el flujo puede aumentarse a lo largo de dicho camino con un valor igual a la menor capacidad de los arcos del camino.

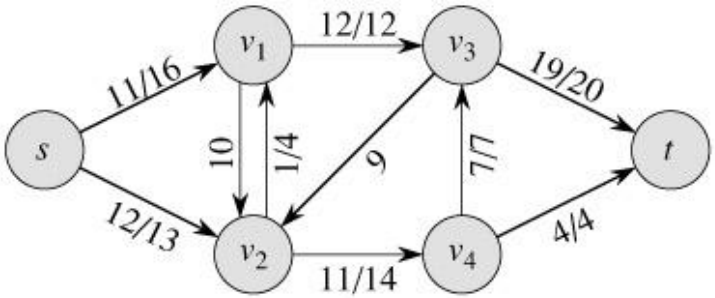
Aumento de flujo



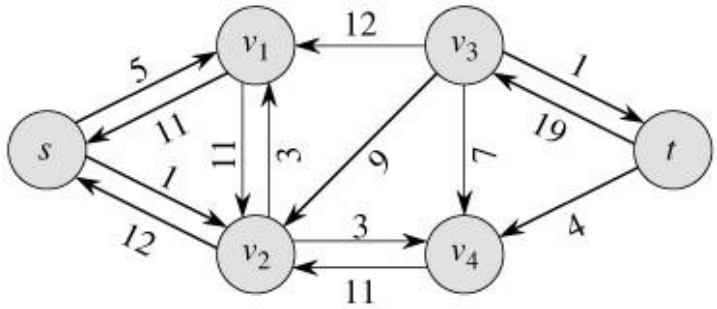
(a)



(b)



(c)



(d)

Cortes

Dada una red de flujo $G = (V, E)$, un corte es una partición de V en dos conjuntos S y T tales que $s \in S$ y $t \in T$.

Dado un corte (S, T):

- El flujo neto a través del corte es:

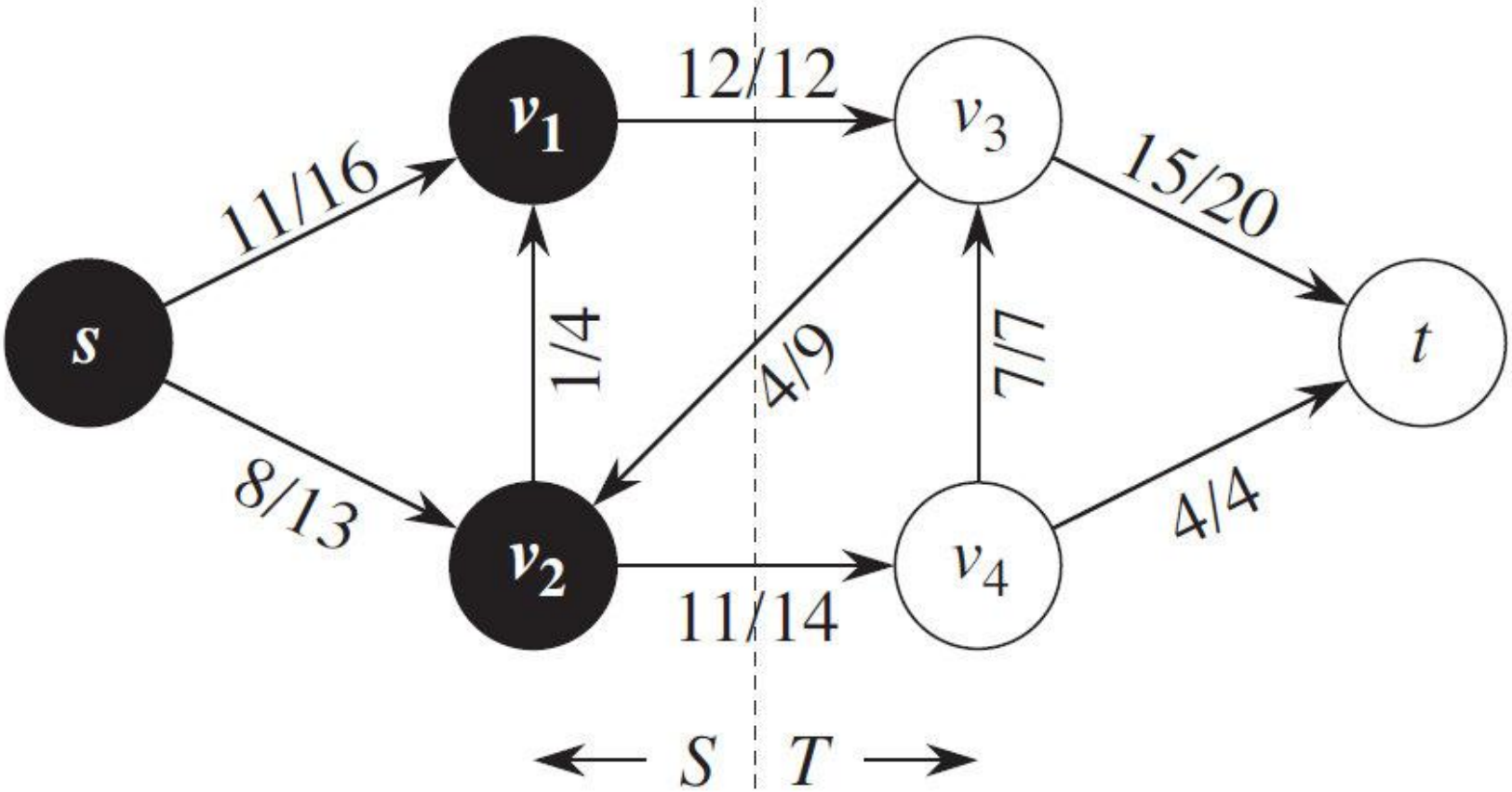
$$\sum_{\substack{e \in E \\ e: u \to v \\ u \in S, v \in T}} f(e) - \sum_{\substack{e \in E \\ e: u \to v \\ u \in T, v \in S}} f(e)$$

- La capacidad del corte es:

$$c(S, T) = \sum_{\substack{e \in E \\ e: u \to v \\ u \in S, v \in T}} c(e)$$

Un corte se dice mínimo si la capacidad del corte es la menor de las capacidades de todos los cortes de G.

Cortes



Teorema max-flow min-cut

Las siguientes tres condiciones son equivalentes

- f es un flujo máximo.
- La red residual G_f no contiene caminos de aumento.
- $|f| = c(S, T)$ para algún corte mínimo (S, T) de G.

Este teorema prueba que Ford-Fulkerson es correcto. No vamos a demostrarlo.

Ford-Fulkerson

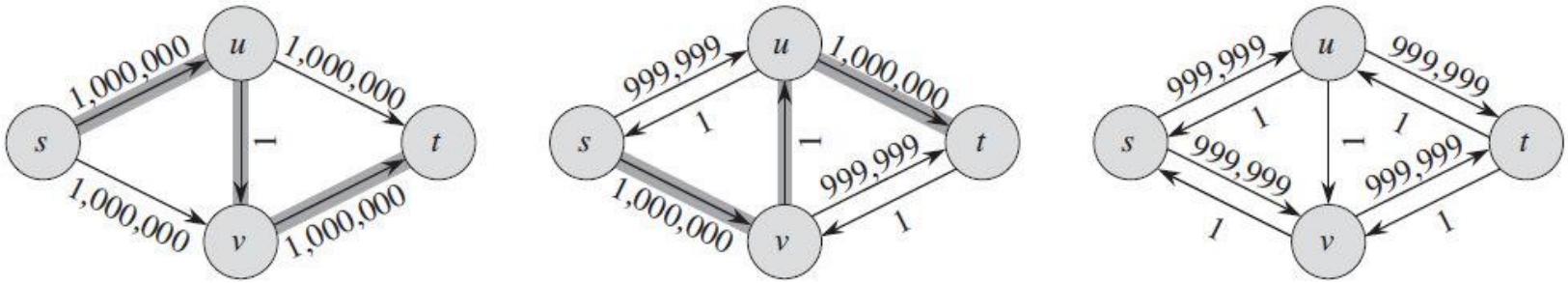
```
FordFulkerson(G, s, t):
    for e in E(G):
        e.f = 0

    while hayaCaminoDeAumento p en G:
        cf(p) = min{cf(e), e in p}
        for e = (u,v) in p:
            (u,v).f += cf(p)
            (v,u).f -= cf(p)
```

En este pseudocódigo, $cf(e)$ es la capacidad de la arista e en la red residual.

Algoritmo de Edmonds-Karp

Motivación del algoritmo de Edmonds-Karp:



(a) (b) (c)

Algoritmo de Edmonds-Karp

Como se vió en la figura anterior, si no elegimos los caminos de aumento de manera inteligente, el tiempo de ejecución puede no estar acotado polinomialmente sobre el tamaño de la entrada.

Afortunadamente, si buscamos el camino de aumento más corto con un BFS, se puede demostrar una cota polinomial: $\mathcal{O}(m^2 n)$.

Esta implementación de Ford-Fulkerson recibe el nombre de algoritmo de Edmonds-Karp.

K-conectividad

Conocemos el concepto de conectividad en un grafo.

Se puede generalizar a K-conectividad.

K-conectividad

Un grafo es K-edge connected si no existe ningún conjunto de $k-1$ aristas tal que al eliminarlas nos deja un grafo desconectado.

A partir de lo anterior, podemos definir componentes k-edge connected de un grafo como los subconjuntos maximales que cumplen la propiedad

Este problema sale con flujo.

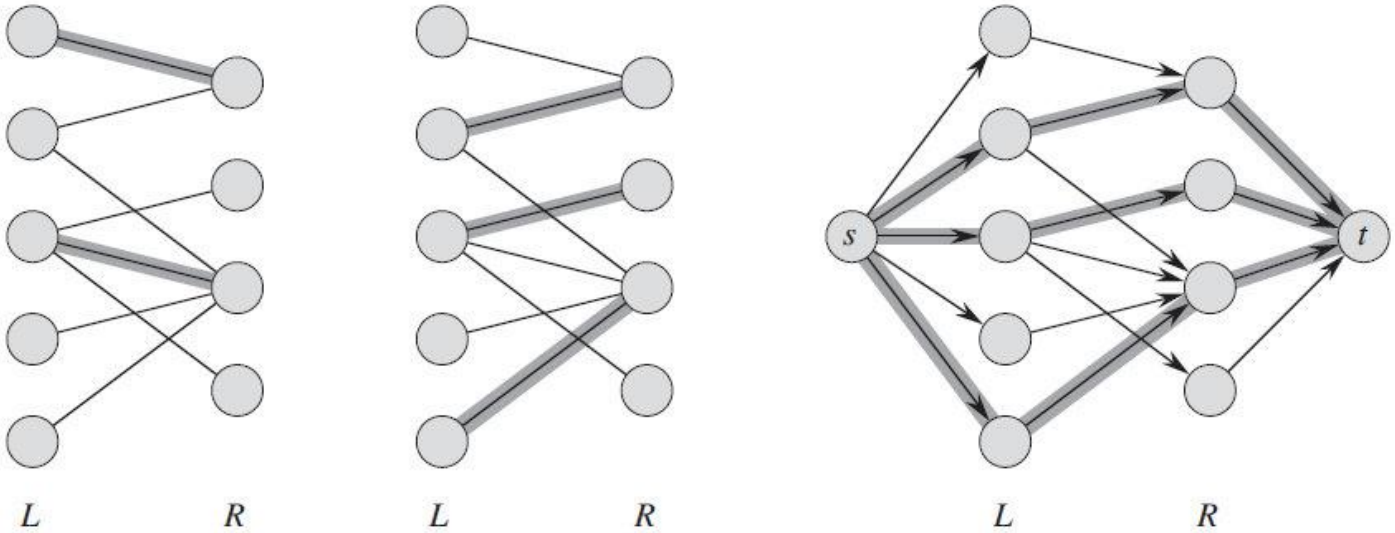
Análogamente podemos definir K-vertex connectivity que también sale con flujo, pero requiere un poquito más de teoría (Teorema de Menger). El caso $K = 2$ en la próxima clase!

Matching bipartito

Existen problemas combinatorios que, en principio, parecen no guardar relación con el problema de flujo máximo pero que pueden ser reducidos a éste.

Uno de los ejemplos más conocidos es el problema del matching bipartito.

Matching bipartito



Attacking Rooks

Problema

Dado un tablero de ajedrez de $m \times n (1 \leq m, n \leq 100)$ donde algunas casillas fueron bloqueadas. Determinar cuál es la máxima cantidad de torres que se pueden colocar de manera que no existan 2 que se amenacen.

Hooligan

Problema

Es dado un torneo de fútbol con N equipos, cada par de equipos juega a lo sumo 4 partidos entre sí. Cada partido reparte 2 puntos (2 para el ganador y uno para el perdedor o 1 y 1 si hay empate). Son dados algunos resultados de partidos ya jugados y los partidos que restan por jugar. Dado un equipo, determinar si es posible que termine con más puntos que todos los demás equipos.

Teorema de Dilworth

El teorema de Dilworth dice que el tamaño de la mayor anticadena es igual al tamaño del menor cubrimiento por caminos de un DAG transitivo.

Teorema de Dilworth

¿Y esto qué tiene que ver con flujo?

Guardando cajas

Problema

Tenemos N cajas de a_i centímetros de ancho y l_i centímetros de largo. Una caja c_i entra en una caja c_j si $a_i < a_j$ y $l_i < l_j$. Un grupo de cajas apilado es una lista de cajas $c_1, c_2, \ldots, c_t$ tales que la caja c_i entra en la caja c_{i+1} con $1 \leq i < t$ ¿Cuantos grupos de cajas apiladas podemos formar, como mínimo, si tenemos que usar las N cajas?

Hay mucho más...

Si les interesó la clase, hay mucho más...

Hay mucho más...

Si les interesó la clase, hay mucho más...

- Flujo de costo mínimo.
- Teorema de Kőnig (sí, son comillas arriba de la o, no una diéresis! Posta, comillas)
- Gomory-Hu tree.
- Mucho más!

Agradecimientos

A Nicolás Álvarez, porque armé estas diapositivas basadas en una clase que él preparó.

Bibliografía

- Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, Clifford Stein. Introduction to Algorithms 3ed. Captulo 26
- Ravindra K. Ahuja, Thomas L. Magnanti, and James B. Orlin. Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications
- Tutoriales de TopCoder (Flujo, Algoritmos para encontrar caminos de aumento y Flujo de costo mínimo, las palabras en azul son clickeables)