Н.В.Емельянов

ПРАКТИЧЕСКАЯ НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА

Оглавление.

Глава 2. **Простейшие механические модели в небесной механике.**

2.11. Задача двух тел.

2.11.1. Общие сведения о задаче двух тел.

Задача двух тел заключается в изучении их движения под действием гравитационных сил взаимного притяжения. Два тела считаются изолированными от других тел и любых других воздействий.

В большинстве случаев рассматривается задача о движении двух материальных точек, то есть когда масса каждого из тел целиком сосредоточена в его центре масс.

Когда принимаются во внимание форма и размеры тел, говорят о поступательно-вращательном движении двух тел.

Рассматривают относительное движение в задаче двух тел, когда начало системы отсчета помещается в центр масс одного из них, и барицентрическое движение, при котором начало помещено в центр масс обоих тел.

Траектория движения в задаче двух тел всегда лежит в неизменной плоскости. Она представляет собой эллипс, параболу или гиперболу. Центральное тело в относительном движении или барицентр двух тел в барицентрическом движении расположен в фокусе одной из указанных фигур. Существуют также прямолинейные траектории в задаче двух тел.

Точку траектории с минимальным расстоянием до начала системы отсчета называют перицентром, а точку с максимальным расстоянием (в случае эллиптического движения) — апоцентром. Апоцентр может располагаться в бесконечности (гиперболические и параболические траектории).

Линию, соединяющую перицентр орбиты с ее апоцентром, называют линией апсид.

Движение в задаче двух тел имеет то свойство, что, чем меньше расстояние между ними, тем больше их скорость.

Движение описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений 6-го порядка. Следовательно, общее решение зависит от шести независимых произвольных постоянных.

Существуют семь первых интегралов уравнений движения, содержащих семь произвольных постоянных интегрирования, пять из которых являются независимыми. Недостающей шестой независимой произвольной постоянной является константа, определяющая положение тела на орбите в заданный момент времени.

Траекторию движения в задаче двух тел описывают параметрами (элементами) кеплеровской орбиты.

В ряде случаев рассматривают **ограниченную задачу двух тел**. Ограниченная задача двух тел заключается в изучении движения материальной точки P_1 под действием силы притяжения другой материальной точки P_0. При этом считается, что масса точки P_1 по сравнению с массой точки P_0 столь мала, что она не оказывает никакого влияния на движение точки P_0. Полагают, что притягивающий центр P_0 покоится в некоторой инерциальной системе координат.

2.11.2. Дифференциальные уравнения движения в задаче двух тел.

Движение двух тел M_1 и M_2 с массами m_1 и m_2 обычно рассматривают в одной из двух систем координат.

Первая из них – инерциальная система координат $(GX'Y'Z')$ с неизменными направлениями осей и с началом в барицентре двух тел.

Вторая система координат $Oxyz$, называемая относительной, имеет начало в теле M_1 и оси, параллельные осям барицентрической системы координат $GX'Y'Z'$.

2.11.2.1. Дифференциальные уравнения движения двух тел в барицентрической системе координат

Инерциальная система координат $(GX'Y'Z')$ имеет неизменное направление осей. Начало G этой системы помещают в барицентр двух тел. Обозначим через X_1', Y_1', Z_1' координаты тела M_1, а через X_2', Y_2', Z_2' — координаты тела M_2. Тогда дифференциальные уравнения движения двух тел под влиянием их взаимного притяжения в соответствии с законом всемирного тяготения в выбранной системе координат запишутся в виде

$$\frac{d^2X_i'}{dt^2} = -\kappa_i \frac{1}{R_i^2}\frac{X_i'}{R_i}, \quad \frac{d^2Y_i'}{dt^2} = -\kappa_i \frac{1}{R_i^2}\frac{Y_i'}{R_i}, \quad \frac{d^2Z_i'}{dt^2} = -\kappa_i \frac{1}{R_i^2}\frac{Z_i'}{R_i},$$

где $R_i^2 = X_i'^2 + Y_i'^2 + Z_i'^2 (i = 1, 2)$, а $\kappa_1 = G\frac{m_2^3}{(m_1+m_2)^2}, \kappa_2 = G\frac{m_1^3}{(m_1+m_2)^2}$, или в векторной форме

$$\vec{R}_i' = \{X_i', Y_i', Z_i'\}, \quad \frac{d^2\vec{R}_i'}{dt^2} = -\kappa_i \frac{1}{R_i^2}\frac{\vec{R}_i'}{R_i} \quad (i = 1, 2).$$

Согласно выбору начала системы координат во все время движения выполняются соотношения

$$X_1'm_1 + X_2'm_2 = 0, \quad Y_1'm_1 + Y_2'm_2 = 0, \quad Z_1'm_1 + Z_2'm_2 = 0,$$

или в векторной форме

$$\vec{R}_1'm_1 + \vec{R}_2'm_2 = 0.$$

Здесь, как и всюду далее, через G обозначена универсальная гравитационная постоянная, а через t обозначено время (независимая переменная).

Движение каждого тела описывается собственной системой уравнений движения, представляющей собой систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Общее решение каждой системы уравнений движения должно зависеть от 6 независимых произвольных постоянных интегрирования.

2.11.2.2. Дифференциальные уравнения движения двух тел в относительной системе координат.

Система координат $Oxyz$, называемая относительной, имеет начало в теле M_1 и оси, параллельные осям барицентрической системы координат $GX'Y'Z'$. Движение тела M_2 в относительной системе координат будет описываться следующей системой дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\kappa\frac{1}{r^2}\frac{x}{r}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\kappa\frac{1}{r^2}\frac{y}{r}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\kappa\frac{1}{r^2}\frac{z}{r},$$

где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, а $\kappa = G(m_1 + m_2)$ — так называемый гравитационный параметр системы двух тел M_1 и M_2. Гравитационным параметром какого-либо тела называется, как известно, величина произведения универсальной гравитационной постоянной на массу этого тела.

В векторной форме уравнения движения тела M_2 в относительной системе координат имеют вид

$$\vec{r} = \{x, y, z\}, \quad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\kappa\frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}, \quad \kappa = G(m_1 + m_2).$$

Движение тела M_2 относительно M_1 описывается системой трех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, так что ее общее решение должно зависеть от 6 независимых произвольных постоянных интегрирования. Для этого достаточно найти 6 независимых первых интегралов уравнений движения.

2.11.3. Первые интегралы уравнений движения в задаче двух тел.

Что такое первый интеграл. Конечное соотношение между координатами x, y, z, компонентами скорости $dx/dt,\ dy/dt,\ dz/dt$ и временем t вида

$$\Phi(x, y, z, dx/dt, dy/dt, dz/dt, t) = const,$$

которое тождественно удовлетворяется каждым решением дифференциальных уравнений движения при подходящем значении постоянной в правой части, называется *первым интегралом.*

Дифференциальные уравнения движения задачи двух тел в относительных координатах имеют следующие семь первых интегралов:

- три интеграла площадей (или интегралы момента количества движения)

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = c_x, \quad z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = c_y, \quad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = c_z,$$

- интеграл энергии (или интеграл живой силы)

$$\frac{dx}{dt}^2 + \frac{dy}{dt}^2 + \frac{dz}{dt}^2 = \frac{2\kappa}{r} + h$$

  и

- три интеграла Лапласа

$$x\frac{dr'}{dt} - r'\frac{dx}{dt} = f_1, \quad y\frac{dr'}{dt} - r'\frac{dy}{dt} = f_2, \quad z\frac{dr'}{dt} - r'\frac{dz}{dt} = f_3.$$

Здесь

$$r' = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt} = r\frac{dr}{dt}, \quad \frac{dr'}{dt} = \frac{\kappa}{r} + h,$$

и введено обозначение

$$\kappa = G(m_1 + m_2).$$

Постоянные c_x, c_y, c_z называются постоянными площадей, величина h — постоянной энергии (постоянной живой силы), а f_1, f_2, f_3 — постоянными интегралов Лапласа.

Из перечисленных выше семи первых интегралов не все являются независимыми. Можно показать, что между произвольными постоянными интегрирования существуют следующие две зависимости:

$$c_x \cdot f_1 + c_y \cdot f_2 + c_z \cdot f_3 = 0, \quad f^2 = \kappa^2 + h \cdot c^2,$$

где

$$c^2 = c_x^2 + c_y^2 + c_z^2, \quad f^2 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2.$$

Следовательно, среди констант $c_x, c_y, c_z, h, f_1, f_2, f_3$ фактически независимы лишь пять. Никаких других соотношений между произвольными постоянными интегрирования в задаче двух тел нет.

2.11.4. Закон движения и параметры орбиты в задаче двух тел.

2.11.4.1. Траектория в плоскости орбиты

Параметр, описывающий форму орбиты, называется эксцентриситетом и обычно обозначается буквой e.

Круговая орбита соответствует значению	$e = 0,$
для эллиптической орбиты	$0 < e < 1,$
параболическая орбита описывается значением	$e = 1,$
для гиперболической орбиты	$e > 1.$

В случаях прямолинейных траекторий в задаче двух тел полагают $e = 1$.

Размер эллиптической орбиты задается большой полуосью a. В случаях параболического и гиперболического движений рассматривают параметр траектории q, равный минимальному расстоянию тела от начала координат.

Движение в задаче двух тел обычно описывают в прямоугольной системе координат x, y, z, оси которой могут быть направлены произвольно.

Из первых интегралов уравнений движения задачи двух тел следует, что траектория движения полностью лежит в некоторой плоскости — плоскости орбиты. Выберем в этой плоскости некоторую орбитальную систему декартовых координат $O\xi\eta$ с центром O в теле M_1 (при рассмотрении относительного движения) или с центром O в барицентре тел M_1 и M_2 (при рассмотрении барицентрического движения). Ось ξ этой системы направим в перицентр — точку орбиты, наименее удаленную от начала системы координат.

Траектория движения в задаче двух тел в орбитальной системе координат описывается следующим соотношением:

$$\kappa \cdot r = c^2 - f \cdot \xi,$$

где $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ — модуль радиуса-вектора тела M_2, c — постоянная площадей, f — постоянная Лапласа При этом $\kappa = G \cdot (m_1 + m_2)$ в относительном движении и

$$\kappa = \kappa_2 = G \frac{m_1^3}{(m_1 + m_2)^2}$$

при рассмотрении движения точки M_2 относительно барицентра системы точек M_1 и M_2, m_1 и m_2 — массы материальных точек M_1 и M_2, а G — универсальная гравитационная постоянная.

Вырожденный случай прямолинейного движения в задаче двух тел, когда постоянная интеграла площадей c равна нулю, описан отдельно. Здесь допустим, что $c > 0$, и рассмотрим уравнение траектории в полярных координатах.

Введем в плоскости орбиты полярные координаты r и v по формулам

$$\xi = r\cos(v), \quad \eta = r\sin(v),$$

где угол v называется истинной аномалией и отсчитывается от перицентра в направлении против часовой стрелки. Уравнение орбиты в полярных координатах имеет вид

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(v)},$$

где обозначено $p = c^2/\kappa$, $e = f/\kappa$. При этом p называется фокальным параметром орбиты, а e — ее эксцентриситетом.

Из первых интегралов уравнений движения в задаче двух тел следует, что постоянная энергии зависит от введенных параметров следующим образом :

$$h = \frac{\kappa^2}{c^2}(e^2 - 1).$$

Изменение полярного угла v во времени описывается уравнением

$$\Big(\frac{p}{1 + e\cos(v)}\Big)^2 \frac{dv}{dt} = c.$$

Решение этого уравнения записывают в различных формах в зависимости от типа движения. Тип движения определяется значением эксцентриситета e. Формулы, описывающие зависимости $r(t), v(t)$, приводятся в параграфе 2.11.4.3. Различные типы движений.

2.11.4.2. Ориентация орбиты в пространстве.

Из первых интегралов уравнений движения задачи двух тел следует, что траектория движения полностью лежит в некоторой плоскости — плоскости орбиты. Выберем некоторую орбитальную систему декартовых координат $O\xi\eta\zeta$ с центром O в теле M_1 (при рассмотрении относительного движения) или с центром O в барицентре тел M_1 и M_2 (при рассмотрении барицентрического движения). Ось ξ этой системы направим по вектору Лапласа (см. параграф 2.11.3. Первые интегралы уравнений движения в задаче двух тел.). В этом же направлении лежит точка орбиты, наименее удаленная от начала координат. Ось ζ орбитальной системы координат направим по вектору момента количества движения одного из тел. Ось η будет дополнять систему координат до правой. Плоскость орбиты совпадает с плоскостью $\xi O\eta$.

Как движутся два тела в орбитальной системе координат, описано в предыдущем параграфе. Здесь рассмотрим, как принято в небесной механике задавать ориентацию плоскости орбиты в произвольной системе прямоугольных координат с центром O и осями x, y, z, соответственно параллельными осям какой-либо инерциальной системы координат.

Формулы перехода от орбитальной системы координат $O\xi\eta\zeta$ к системе координат $Oxyz$ имеют вид:

$$x = P_x \cdot \xi + Q_x \cdot \eta + R_x \cdot \zeta,$$

$$y = P_y \cdot \xi + Q_y \cdot \eta + R_y \cdot \zeta,$$

$$z = P_z \cdot \xi + Q_z \cdot \eta + R_z \cdot \zeta,$$

где через $P_i, Q_i, R_i (i = 1, 2, 3)$ обозначены направляющие косинусы линии апсид, направляющие косинусы перпендикуляра к линии апсид в плоскости орбиты, и направляющие косинусы перпендикуляра к плоскости орбиты соотвественно. Направляющие косинусы принято выражать через три угла поворота орбитальной системы координат $O\xi\eta\zeta$ по отношению к системе координат $Oxyz$:

Ω — долгота восходящего узла орбиты,

ω — угловое расстояние перицентра от восходящего узла орбиты,

i — наклон орбиты.

Выражения имеют вид

$$
\begin{array}{lcrlcl}
P_x & = & & \cos\omega\cdot\cos\Omega & - & \sin\omega\cdot\sin\Omega\cdot\cos i,\\
P_y & = & & \cos\omega\cdot\sin\Omega & + & \sin\omega\cdot\cos\Omega\cdot\cos i,\\
P_z & = & & \sin\omega\cdot\sin i, & & \\
Q_x & = & - & \sin\omega\cdot\cos\Omega & - & \cos\omega\cdot\sin\Omega\cdot\cos i,\\
Q_y & = & - & \sin\omega\cdot\sin\Omega & + & \cos\omega\cdot\cos\Omega\cdot\cos i,\\
Q_z & = & & \cos\omega\cdot\sin i, & & \\
R_x & = & & \sin\Omega\cdot\sin i, & & \\
R_y & = & - & \cos\Omega\cdot\sin i, & & \\
R_z & = & & \cos i. & &
\end{array}
$$

Ориентацию орбиты в пространстве можно увидеть на Рис. FIG02.11.4.2.

2.11.4.3. Различные типы движения.

Рассмотрим движение двух тел в орбитальной системе координат (см. параграф 2.11.4.1. Траектория в плоскости орбиты) За исключением случая прямолинейного движения, когда постоянная площадей равна нулю, траектория движения в полярных координатах описывается уравнением

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v},$$

где r — расстояние, v — полярный угол, p — фокальный параметр, e — эксцентриситет. Причем p и e — постоянные параметры, зависящие от начальных условий движения.

Обозначим через h постоянную энергии.

Из полярного уравнения следует, что тип траектории существенно зависит от значения e. Поэтому форма зависимости координат от времени t будет различной. Существуют следующие типы орбит.

1) К р у г о в а я орбита : $e = 0, \quad h < 0, \; r = const.$
2) Э л л и п т и ч е с к а я орбита : $0 < e < 1, \quad h < 0.$
3) П а р а б о л и ч е с к а я орбита : $e = 1, \quad h = 0.$
4) Г и п е р б о л и ч е с к а я орбита : $e > 1, \quad h > 0.$

Зависимости координат от времени $r(t), v(t)$ можно рассмотреть отдельно для каждого типа движения :

Круговое и эллиптическое.
Параболическое.
Гиперболическое.

2.11.4.4. Круговое и эллиптическое движения в задаче двух тел.

Эксцентриситет $e < 1$. Круговое движение при $e = 0$.

Рассмотрим движение одного из двух тел — тела M_2 в полярных координатах. Пусть r — расстояние, v — полярный угол. Обозначим большую полуось эллиптической траектории через a, тогда из полярного уравнения траектории следует

$$p = a(1 - e^2),$$

где p — фокальный параметр.

Введем в качестве вспомогательной переменной эксцентрическую аномалию E:

$$r \sin v = a\sqrt{1 - e^2} \sin E, \quad r \cos v = a(\cos E - e),$$

$$r = a(1 - e \cos E).$$

Геометрический смысл эксцентрической аномалии Вы можете увидеть на Рис. FIG02.11.4.4. Зависимость E от времени t описывается соотношениями

$$E - e \sin E = M,$$

$$M = n(t - t_0) + M_0,$$

$$n = \sqrt{\kappa / a^3},$$

t_0 — начальный момент времени, а M_0 — произвольная постоянная интегрирования. Величина M называется средней аномалией, n называется средним движением, а M_0 — средней аномалией в эпоху. Постоянная κ определяется соотношением

$$\kappa = G \cdot (m_1 + m_2),$$

если начало координат помещено в точку M_1, и соотношением

$$\kappa = \kappa_2 = G\frac{m_1^3}{(m_1 + m_2)^2}$$

при рассмотрении движения точки M_2 относительно барицентра системы точек M_1 и M_2. Здесь m_1 и m_2 — массы материальных точек M_1 и M_2, а G — универсальная гравитационная постоянная.

Уравнение

$$E - e\sin E = M$$

относительно эксцентрической аномалии E называется уравнением Кеплера. Его численное решение обычно выполняется методом последовательных приближений. Вы можете познакомиться с несколькими алгоритмами решения уравнения Кеплера в параграфе 2.11.5.1.

Отметим, что при изменении M на 2π углы E и v также изменяются на 2π. Разница между ними заключается в том, что M изменяется равномерно во времени, а E и v — с переменной угловой скоростью. Лишь в частном случае кругового движения ($e = 0$) все три угла совпадают.

Период T обращения тела по орбите связан со средним движением n соотношением

$$T = \frac{2\pi}{n}.$$

Исходными элементами эллиптической орбиты в задаче двух тел, задающими движение в плоскости орбиты, считаются три параметра

n — среднее движение,
e — эксцентриситет,
M_0 — средняя аномалия в эпоху.

Вместо n можно задать большую полуось a. Вместо средней аномалии в эпоху M_0 иногда задают момент t' прохождения телом перицентра орбиты. Т.е.

$$n(t' - t_0) + M_0 = 0.$$

2.11.4.5. Параболическое движение в задаче двух тел.

Эксцентриситет $e = 1$.

Рассмотрим движение одного из двух тел — тела M_2 в полярных координатах. Пусть r — расстояние, v — полярный угол.

Полярное уравнение в этом случае принимает вид

$$r = q\sec^2(v/2),$$

где q — минимальное расстояние тела от начала координат. Зависимость полярного угла v от времени t описывается соотношениями

$$S = \tan(v/2), \qquad S + S^3/3 = M, \qquad M = n(t - t_0) + M_0,$$

где

$$n = \sqrt{\frac{\kappa}{2q}},$$

t_0 — начальный момент времени, а M_0 — произвольная постоянная интегрирования. Величина M называется средней аномалией, n называется средним движением, а M_0 — средней аномалией в эпоху. Постоянная κ определяется соотношением

$$\kappa = G(m_1 + m_2),$$

если начало координат помещено в точку M_1, и соотношением

$$\kappa = \kappa_2 = G\frac{m_1^3}{(m_1 + m_2)^2}$$

при рассмотрении движения точки M_2 относительно барицентра системы точек M_1 и M_2. Здесь m_1 и m_2 — массы материальных точек M_1 и M_2, а G — универсальная гравитационная постоянная.

Уравнение $S + S^3/3 = M$ относительно S называется уравнением Кеплера для параболического движения.
(См. также параграф 2.11.5.1).

Его решение описывается следующей цепочкой формул:

$$Q = \frac{2}{3}M, \qquad R = \left(\sqrt{1 + q^2} + |Q|\right)^{\frac{2}{3}}, \qquad S = \frac{3M}{R + 1 + \frac{1}{R}}.$$

Исходными элементами параболической орбиты в задаче двух тел, задающими движение в плоскости орбиты, считаются два параметра

n — среднее движение,

M_0 — средняя аномалия в эпоху.

Вместо n можно задать параметр q. Вместо средней аномалии в эпоху M_0 иногда задают момент t' прохождения телом перицентра орбиты. Т.е.

$$n(t' - t_0) + M_0 = 0.$$

2.11.4.5. Гиперболическое движение в задаче двух тел.

Эксцентриситет $e > 1$.

Рассмотрим движение одного из двух тел — тела M_2 в полярных координатах. Пусть r — расстояние, v — полярный угол, p — фокальный параметр. Введем в рассмотрение вспомогательный параметр a и вспомогательную переменную H с помощью следующих соотношений:

$$p = a(e^2 - 1),$$

$$r \sin v = a\sqrt{e^2 - 1} \sinh H, \quad r \cos v = a(e - \cosh H),$$

$$r = a(e \cosh H - 1).$$

Зависимость H от времени t описывается соотношениями

$$e \sinh H - H = M,$$

$$M = n(t - t_0) + M_0,$$

где

$$n = \sqrt{\frac{\kappa}{a^3}},$$

t_0 — начальный момент времени, а M_0 — произвольная постоянная интегрирования. Величина M называется средней аномалией, n называется средним движением, а M_0 — средней аномалией в эпоху. Постоянная κ определяется соотношением

$$\kappa = G(m_1 + m_2),$$

если начало координат помещено в точку M_1, и соотношением

$$\kappa = \kappa_2 = G\frac{m_1^3}{(m_1 + m_2)^2}$$

при рассмотрении движения точки M_2 относительно барицентра системы точек M_1 и M_2. Здесь m_1 и m_2 — массы материальных точек M_1 и M_2, а G — универсальная гравитационная постоянная.

Заметим, что в гиперболическом случае величина a не является никакой полуосью орбиты, поскольку орбита имеет бесконечные размеры.

Уравнение

$$e \sinh H - H = M,$$

относительно H называется уравнением Кеплера для гиперболического движения. Его численное решение обычно выполняется методом последовательных приближений. Вы можете познакомиться с алгоритмом решения в параграфе 2.11.5.1.

Исходными элементами гиперболической орбиты в задаче двух тел, задающими движение в плоскости орбиты, считаются три параметра

$$\begin{aligned} n &\ \text{— среднее движение,} \\ e &\ \text{— эксцентриситет,} \\ M_0 &\ \text{— средняя аномалия в эпоху.} \end{aligned}$$

Вместо n можно задать a или p. Вместо средней аномалии в эпоху M_0 иногда задают момент t' прохождения телом перицентра орбиты. Т.е.

$$n(t' - t_0) + M_0 = 0.$$

2.11.4.6. Прямолинейное движение в задаче двух тел.

Это случай, когда постоянная площадей $c = 0$. (см. параграф 2.11.3. Первые интегралы уравнений движения в задаче двух тел).

Рассмотрим движение одного из двух тел — тела M_2 в полярных координатах. Пусть r — расстояние, v — полярный угол. Из интеграла площадей

$$r^2 \frac{dv}{dt} = c$$

видно, что движение происходит по прямой. Обычно принимают $v = 180°$.

Определение r, как функции времени, зависит от значения интеграла энергии h. Введем в рассмотрение величину a, заданную формулой

$$a = -\frac{\kappa}{h},$$

где постоянная κ определяется соотношением

$$\kappa = G(m_1 + m_2),$$

если начало координат помещено в точку M_1, и соотношением

$$\kappa = \kappa_2 = G\frac{m_1^3}{(m_1 + m_2)^2}$$

при рассмотрении движения точки M_2 относительно барицентра системы точек M_1 и M_2. Здесь m_1 и m_2 — массы материальных точек M_1 и M_2, а G — универсальная гравитационная постоянная.

Если $h < 0$, то введем переменную E, определяемую равенством

$$r = a(1 - \cos E).$$

Зависимость E от времени описывается соотношениями

$$E - \sin E = M = n(t - t_0) + M_0, \quad \text{где} \quad n = \sqrt{\frac{\kappa}{a^3}}.$$

Если $h > 0$, то удобно ввести переменную H соотношением

$$r = |a|(\cosh H - 1),$$

что дает

$$\sinh H - H = M = n(t - t_0) + M_0, \quad \text{где} \quad n = \sqrt{\frac{\kappa}{|a|^3}}.$$

При $h = 0$ имеем решение, которое лучше всего записать в виде

$$r = q(3M)^{\frac{2}{3}}$$

где

$$M = M = n(t - t_0) + M_0, \quad q = \sqrt[3]{\frac{\kappa}{2n^2}}.$$

Во всех трех случаях t_0 — начальный момент времени, а M_0 — произвольная постоянная интегрирования. Величина M называется средней аномалией, n называется средним движением, а M_0 — средней аномалией в эпоху.

Исходными элементами прямолинейного движения в задаче двух тел считаются два параметра

n — среднее движение,
M_0 — средняя аномалия в эпоху.

Вместо n можно задать a или q. Вместо средней аномалии в эпоху M_0 иногда задают момент t':

$$n(t' - t_0) + M_0 = 0.$$

Решение уравнений $E - \sin E = M$ и $\sinh H - H = M$ выполняется обычно численно методом последовательных приближений. Вы можете познакомиться с алгоритмами решения в параграфе 2.11.5.1.

2.11.5.1. Формулы для решения уравнения Кеплера.

Методы и формулы решения уравнения Кеплера различны для трех типов движения — эллиптического, параболического и гиперболического. Кроме того, для эллиптического и гиперболического типов движений применяются несколько методов.

Обозначения:
e — эксцентриситет,
M — средняя аномалия,
E — эксцентрическая аномалия,
ε — точность вычисления E.

Для эллиптического движения

- Метод последовательных приближений. Итерации выполняются по правилам:
  1. В нулевом приближении полагаем $E_0 = M$.
  2. Вычисляем последовательно $E_{n+1} = M + e \sin E_n$ для $n = 0, 1, \dots$ до тех пор, пока $|E_{n+1} - E_n| > \varepsilon$.

- Метод последовательных приближений. Итерации выполняются по правилам:
  1. В нулевом приближении полагаем $E_0 = M$.
  2. Вычисляем последовательно
  $$E_{n+1} = E_n + \frac{M - E_n + e \sin E_n}{1 - e \cos E_n}$$
  для $n = 0, 1, \dots$ до тех пор, пока $|E_{n+1} - E_n| > \varepsilon$.

- Метод последовательных приближений по Денби. Итерации:

  1. В нулевом приближении полагаем $E_0 = M + 0.85\, e$.
  2. Вычисляем последовательно

  $$E_{n+1} = E_n - \left[M + \frac{e\sin^2(E_n - E)}{E_n - 2(M + e\sin E_n) + M + e\sin(M + e\sin E_n)}\right]$$

  для $n = 0, 1, \ldots$ до тех пор, пока $|E_{n+1} - E_n| > \varepsilon$.

Для параболического движения

Никаких итераций. Вычисления по формулам

$$x = \left(\sqrt{1 + 9/4M^2} + 3/2|M|\right)^{2/3},$$

$$E = \frac{3M}{x + 1 + \frac{1}{x}}.$$

Для гиперболического движения

- Метод последовательных приближений. Итерации выполняются по правилам:

  1. В нулевом приближении полагаем $E_0 = M$.
  2. Вычисляем последовательно

  $$E_{n+1} = \ln\left\{\sqrt{\left(\frac{E_n + M}{e}\right)^2 + 1} + \frac{E_n + M}{e}\right\}$$

  для $n = 0, 1, \ldots$ до тех пор, пока $|E_{n+1} - E_n| > \varepsilon$.

- Метод последовательных приближений по Денби.

  Итерации:

  1. В нулевом приближении полагаем $E_0 = \ln(2M/e + 1.8)$.

2. Для $n = 0, 1, 2, \ldots$ вычисляем последовательно

$$x_2 = e\big[\exp(E_n) - \exp(-E_n)\big]/2 - M,$$

$$x_3 = e\big[\exp(x_2) - \exp(-x_2)\big]/2 - M,$$

$$E_{n+1} = E_n - \frac{(x_2 - E_n)^2}{E_n - 2x_2 + x_3}$$

до тех пор, пока $|E_{n+1} - E_n| > \varepsilon$.

2.11.5.2. Вычисление положения и скорости по элементам орбиты в задаче двух тел.

В данном параграфе дается список формул кеплеровского движения небесного тела в том порядке, в каком они нужны для вычисления:

- прямоугольных координат и скорости тела
- при заданных элементах орбиты
- на заданный момент времени.

Движение тела рассматривается в некоторой прямоугольной системе координат $Oxyz$. К этой системе относятся также элементы кеплеровской орбиты тела.

Обозначения:

n — среднее движение, размерность радиан/ед.времени;
e — эксцентриситет, безразмерный;
i — наклон (двугранный угол между плоскостью орбиты и основной плоскостью Oxy), рад.;
M_0 — средняя аномалия в эпоху (значение средней аномалии M в начальный момент времении — эпоху), рад.;
ω — угловое расстояние перицентра от восходящего узла орбиты, рад.;
Ω — долгота восходящего узла орбиты (угол в плоскости Oxy между осью x и линией узлов), рад.;
t_0 — начальный момент времени — эпоха элементов;
t — текущий момент времени, на который вычисляются координаты тела.

Предполагается также, что известен гравитационный параметр κ:

$\kappa = G \cdot (m_1 + m_2)$ — в случае относительного движения (точка с массой m_2 движется относительно точки с массой m_1),

$\kappa = G\,\frac{m_1^3}{(m_1+m_2)^2}$ — в случае, когда точка с массой m_2 движется вокруг барицентра m_1 и m_2.

В некоторых случаях вместо среднего движения n в качестве исходного параметра орбиты рассматривают

a — большую полуось орбиты (в случае эллиптического движения), размерность ед.длины, или

a — действительную полуось (в случае гиперболического движения), размерность ед.длины, или

p — фокальный параметр орбиты, ед.длины (кроме случая прямолинейного движения).

q — перицентрическое расстояние, ед. длины (кроме случая прямолинейного движения).

В этих случаях вычисления начинаются с определения среднего движения по формулам

$$n = \sqrt{\frac{\kappa}{a^3}} \quad \text{— для эллиптического и гиперболического движений,}$$

$$n = \sqrt{\frac{2\kappa}{q^3}} \quad \text{или} \quad n = \sqrt{\frac{4\kappa}{p^3}} \qquad \text{— для параболического движения.}$$

Если задано среднее движение n, следует прежде всего найти a, q или p:

$$a = \left(\frac{\kappa}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{— для эллиптического и гиперболического движений,}$$

$$p = \left(\frac{4\kappa}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{или} \quad q = \left(\frac{\kappa}{2n^2}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{— для параболического движения.}$$

В любом случае, когда n известно, определяют среднюю аномалию:

$$M = n(t - t_0) + M_0.$$

Отметим, что в случае прямолинейного движения элементы e и Ω должны иметь следующие значения:

$$e = 1, \quad \Omega = 0.$$

Следующий этап вычислений зависит от типа движения.

Итак, для <u>эллиптического движения</u> решаем уравнение

$$E - e\sin E = M$$

и с помощью найденного значения находим

$$\sin v = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin E}{1 - e\cos E}, \quad \cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E},$$

$$r = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1 + e\cos v} \quad \text{или} \quad r = a(1 - e\cos E).$$

В случае прямолинейного эллиптического движения $v = 180^\circ$. Вычисляем

$$r = a(1 - \cos E).$$

Для гиперболического случая решаем уравнение, соответствующее уравнению Кеплера:

$$e\sinh H - H = M$$

и определяем

$$\sin v = \frac{\sqrt{e^2-1}\sinh H}{e\cosh H - 1}, \quad \cos v = \frac{e - \cosh H}{e\cosh H - 1},$$

$$r = \frac{a(e^2-1)}{1 + e\cos v} \quad \text{или} \quad r = a(e\cosh H - 1).$$

В случае прямолинейного гиперболического движения полагаем $v = 180^\circ$ и вычисляем

$$r = a(\cosh H - 1).$$

В случае параболического движения нужно решать уравнение Баркера

$$S + \frac{1}{3}S^3 = M,$$

а затем находить

$$\sin v = 2S/(1 + S^2), \quad \cos v = (1 - S^2)/(1 + S^2),$$

$$r = \frac{p}{1 + \cos v} \quad \text{или} \quad r = \frac{p(1 + S^2)}{2}.$$

В случае прямолинейного параболического движения полагаем $v = 180^\circ$ и вычисляем

$$M = n(t - t_0) + M_0, \quad a = (\kappa/n^2)^{1/3},$$

$$r = (9/2)^{1/3} a M^{2/3}.$$

Иначе можно сразу вычислить

$$r = \Big(\frac{9}{2}\frac{\kappa}{n^2} M^2\Big)^{1/3}.$$

Если вместо элемента n задан параметр a, то последовательность вычислений будет такой:

$$n = \sqrt{\kappa/a^3}, \quad M = n(t - t_0) + M_0,$$

$$r = (9/2)^{1/3} a M^{2/3}.$$

Уравнение Кеплера и его гиперболический аналог решаются итерационными методами. Один из таких методов заключается в следующем. В "нулевом"приближении неизвестные E, или H полагают равными M. Затем их значения последовательно уточняют до тех пор пока новое значение станет несущественно отличаться от предыдущего.

В случае <u>эллиптического движения</u>

$E_1 = M + e\sin M, \quad E_2 = M + e\sin E_1, \quad E_3 = M + e\sin E_2$ и так далее.

> Быстрая сходимость в большинстве случаев обеспечивается такой итерационной формулой
>
> $E_1 = M + e\sin M\,/(1 - e\cos M),$
>
> $E_2 = E_1 + (M - E_1 + e\sin E_1)/(1 - e\cos E_1),$
>
> $E_3 = E_2 + (M - E_2 + e\sin E_1)/(1 - e\cos E_2),$ и т.д.

В случае <u>гиперболического движения</u>

> $H_1 = M, \quad Q_1 = (H_1 + M)/e,$
>
> $H_2 = \ln(\sqrt{Q_1^2 + 1} + Q_1), \quad Q_2 = (H_2 + M)/e,$
>
> $H_3 = \ln(\sqrt{Q_2^2 + 1} + Q_2), \quad Q_3 = (H_3 + M)/e,$ и т.д.

В случае <u>параболического движения</u> не нужны никакие итерации. S можно вычислить по формулам

$$Q = 2/3\,M, \quad R = (\sqrt{1 + Q^2} + |Q|)^{2/3},$$

$$S = 3M/(R + 1 + 1/R).$$

Далее вычисления не зависят от типа орбиты.
Находим

$$\sin u = \sin\omega\cos v + \cos\omega\sin v,$$

$$\cos u = \cos\omega\cos v - \sin\omega\sin v,$$

и, наконец, получаем значения прямоугольных координат тела x, y, z:

$$x = r(\cos u\cos\Omega - \sin u\sin\Omega\cos i),$$

$$y = r(\cos u\sin\Omega + \sin u\cos\Omega\cos i),$$

$$z = r\sin u\sin i.$$

Для определения компонент скорости сначала вычислим V_1 и V_2:

$$V_1 = \sqrt{\kappa/p}\, e\sin v, \quad V_2 = \sqrt{\kappa/p}(1 + e\cos v),$$

причем в эллиптическом случае p вычисляется по формуле

$$p = a(1 - e^2),$$

в гиперболическом движении по формуле

$$p = a(e^2 - 1),$$

а в параболическом движении просто

$$p = 2q.$$

В случае прямолинейного движения имеем

$$V_1 = \sqrt{\kappa/a}\sin E, \quad V_2 = 0 \quad \text{(эллиптическое движение)}$$

или

$$V_1 = \sqrt{\kappa/a}\sinh H, \quad V_2 = 0 \;\; \text{(гиперболическое движение)}$$

или

$$V_1 = \frac{2}{3}\left(\frac{9}{2}\right)^{1/3} naM^{-1/3} = \frac{2}{3}\,\frac{n}{M}\,r,$$

$$V_2 = 0 \;\; \text{(параболическое движение)}$$

где

$$M = n(t - t_0) + M_0, \quad a = (\kappa/n^2)^{1/3}.$$

Компоненты скорости находятся далее из соотношений

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{r}V_1 + (-\sin u \cos\Omega - \cos u \sin\Omega \cos i)\; V_2,$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{r}V_1 + (-\sin u \sin\Omega + \cos u \cos\Omega \cos i)\; V_2,$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{z}{r}V_1 + \cos u \sin i\; V_2.$$

Конец вычислений

2.11.5.3. Вычисление элементов орбиты по положению и скорости в задаче двух тел.

В данной статье приводятся формулы для вычисления элементов кеплеровской орбиты по начальным данным: прямоугольным координатам и компонентам скорости тела.

Формулы даются в том порядке, в каком они используются для вычислений.

Движение тела рассматривается в некоторой прямоугольной системе координат $Oxyz$. Относительно этой системы отсчитываются также элементы кеплеровской орбиты тела.

Обозначения:

x_0, y_0, z_0 — заданные координаты тела в начальный момент времени t_0;
$v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0}$ — соответствующие компоненты скорости тела;

понадобится также длина начального радиуса-вектора тела

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2};$$

n — среднее движение, размерность радиан/ед.времени;
e — эксцентриситет, безразмерный;
i — наклон (угол между плоскостью орбиты и основной плоскостью Oxy), рад.;
M_0 — средняя аномалия в эпоху (значение средней аномалии M в начальный момент времении — эпоху), рад;
ω — угловое расстояние перицентра от восходящего узла орбиты, рад;
Ω — долгота восходящего узла орбиты (угол в плоскости Oxy между осью x и линией узлов), рад;
t_0 — начальный момент времени — эпоха элементов;
t — текущий момент времени, на который вычисляются координаты тела.

Предполагается также, что известен гравитационный параметр κ:

$\kappa = G \cdot (m_1 + m_2)$ в случае относительного движения (точка с массой m_2 движется относительно точки с массой m_1),

$\kappa = G \, \dfrac{m_1^3}{(m_1 + m_2)^2}$ в случае, когда точка с массой m_2 движется вокруг барицентра m_1 и m_2.

> Обычно полагают, что среднее движение тела n всегда является положительной величиной, а наклон орбиты i изменяется в пределах от нуля до 180°.

Вычисления начинаются с определения произвольных постоянных, фигурирующих в первых интегралах уравнений движения.

Итак, вычисляем постоянные интегралов площадей :

$$c_x = y_0 v_{z_0} - z_0 v_{y_0},$$

$$c_y = z_0 v_{x_0} - x_0 v_{z_0},$$

$$c_z = x_0 v_{y_0} - y_0 v_{x_0},$$

$$c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}.$$

Далее постоянную интеграла энергии

$$h = v_{x_0}^2 + v_{y_0}^2 + v_{z_0}^2 - \frac{2\kappa}{r_0}.$$

Найдем также величину v_r по формуле

$$v_r = x_0 v_{x_0} + y_0 v_{y_0} + z_0 v_{z_0}.$$

Далее учтем тот факт, что при вычислениях в компьютерах угловые величины наиболее точно определяются по значениям тангенсов этих углов. При этом необходимо знать также знак косинуса искомого угла. Дальнейший ход вычислений зависит от значения постоянной интеграла энергии h:

$\boxed{h < 0}$ Эллиптическое движение

Сначала проверяем значение $\kappa + hr_0$.

Если $\underline{\kappa + hr_0 = 0}$, то сразу полагаем $\underline{M_0 = 0 \text{ и } e = 0}$.

Если $\underline{\kappa + hr_0 \neq 0}$, то вычисляем комбинации

$$\tan E = \frac{v_r\sqrt{-h}}{\kappa + r_0 h},$$

$$e \sin E = \frac{v_r\sqrt{-h}}{\kappa}.$$

Затем по $\tan E$, учитывая что $sign(\cos E) = sign(\kappa + hr_0)$, находим E и, наконец, простым вычитанием вычисляем M_0:

$$M_0 = E - e \sin E.$$

$\boxed{h > 0}$ Гиперболическое движение
Вычисляем вспомогательную величину

$$B = \frac{v_r\sqrt{h}}{\kappa + hr_0}.$$

Затем сразу находим M_0:

$$M_0 = \frac{v_r\sqrt{h}}{\kappa} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+B}{1-B}\right)$$

$\boxed{h = 0}$ Параболическое движение
В этом случае вычисления зависят от значения c.
Если $c > 0$, то вычисляем $S = v_r/c$, затем сразу $M_0 = S + S^3/3$.

Если $c = 0$, то M_0 по абсолютной величине может быть задана произвольной.

Удобно принять	$M_0 = 1$	при $v_r > 0$	Прямолинейное
или	$M_0 = -1$	при $v_r < 0$.	движение

Далее ход вычислений зависит от значения c:

$\boxed{c = 0}$ Прямолинейное движение

Сразу полагаем $e = 1, \quad \Omega = 0.$

Далее вычисляем наклон i и аргумент перицентра ω следующим образом.
Если $y_0^2 + z_0^2 = 0$, то полагаем $i = 0, \ \omega = 0.$
Иначе:

Находим i по $\tan i = \dfrac{z_0^2}{y_0^2}$. При этом

если $z_0 < 0$, то $\quad sign(\cos i) = sign(-y_0),$
иначе $\quad sign(\cos i) = sign(y_0).$

Находим ω:

$$\text{если} \quad z_0 < 0, \quad \text{то} \qquad \tan \Omega = \frac{-\sqrt{y_0^2 + z_0^2}}{x_0},$$

$$\text{иначе} \qquad \tan \Omega = \frac{\sqrt{y_0^2 + z_0^2}}{x_0}.$$

При этом $\quad sign(\cos \Omega) = sign(-x_0).$

$\boxed{c > 0}$

Вычисляем постоянные интегралов Лапласа

$$f_x = v_{y_0} \cdot c_z - v_{z_0} \cdot c_y - \frac{\kappa x_0}{r_0},$$

$$f_y = v_{z_0} \cdot c_x - v_{x_0} \cdot c_z - \frac{\kappa y_0}{r_0},$$

$$f_z = v_{x_0} \cdot c_y - v_{y_0} \cdot c_x - \frac{\kappa z_0}{r_0},$$

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}.$$

Если $c_x^2 + c_y^2 = 0$, то $\Omega = 0$ при $c_z > 0$ и $\Omega = 180^\circ$ при $c_z < 0$. Иначе находим Ω из соотношения

$$\tan \Omega = -\frac{c_x}{c_y}$$

знак $\cos \Omega$ совпадает со знаком c_y.
Далее

$$\tan i = \frac{\sqrt{c_x^2 + c_y^2}}{c_z},$$

знак $\cos i$ совпадает со знаком c_z.
Теперь

$$\tan \Omega = \frac{f_z \cdot c}{f_y \cdot c_x - f_x \cdot c_y},$$

знак $\cos \Omega$ совпадает со знаком знаменателя последнего выражения.
Наконец определяем эксцентриситет

$$e = \frac{f}{\kappa}.$$

Дальнейший ход вычислений снова зависит от значения постоянной интеграла энергии h:

$\boxed{h < 0}$ Эллиптическое движение

$$a = -\frac{\kappa}{h}, \quad n = \sqrt{\frac{\kappa}{a^3}}.$$

$\boxed{h > 0}$ Гиперболическое движение

$$a = \frac{\kappa}{h}, \quad n = \sqrt{\frac{\kappa}{a^3}}.$$

$\boxed{h < 0}$ Параболическое движение

Если $c = 0$ (прямолинейное движение),

то находим $\qquad a = r_0(9/2)^{-1/3}, \quad n = \sqrt{\frac{\kappa}{a^3}}.$

Иначе определяем сначала $\qquad q = r_0/(1 + S^2),$

затем $\qquad n = \sqrt{\frac{\kappa}{2q^3}}.$

Заметим, что в случае параболического движения теряет смысл большая полуось орбиты a. В случае прямолинейного движения отсутствует понятие минимального расстояния тела до притягивающего центра. В прямолинейном параболическом движении вместо элемента n можно задавать параметр

$$a = r_0(9/2)^{-1/3},$$

так, что

$$n = \sqrt{\frac{\kappa}{a^3}}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. Учебник для студентов университетов, обучающихся по специальности "Астрономия". Издание 3-е, дополненное. М: Наука, 1975 . 800 с.
2. Субботин М. Ф. Введение в теоретическую астрономию. М: Наука, 1968 . 800 с.