1. Sistemas de ecuaciones lineales y matrices

1.1. Ecuaciones lineales

Todo sistema de ecuaciones lineales no tiene soluciones, tiene exactamente una solución o tiene una infinidad de soluciones.

Las ***operaciones elementales*** en las filas son las siguientes:

1. Multiplicar una fila por una constante diferente de cero.
2. Intercambiar dos filas.
3. Sumar un múltiplo de una fila a otra fila.

1.2. Sistemas lineales homogéneos

Un sistema de ecuaciones lineales es ***homogéneo*** si todos los términos constantes son cero; es decir el sistema es de la forma:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

Todo sistema de ecuaciones lineales homogéneo es consistente, ya que siempre existe la ***solución trivial*** (es decir, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $\ldots$, $x_n = 1 = 0$). Debido a que un sistema lineal homogéneo siempre tiene la solución trivial, entonces para sus soluciones sólo hay dos posibilidades.

- El sistema tiene sólo la solución trivial.
- El sistema tiene infinidad de soluciones además de la solución trivial.

Teorema 1. *Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con más incógnitas que ecuaciones tiene infinidad de soluciones*

1.3. Matrices y operaciones con matrices

*Una **matriz** es un arreglo rectangular de números. Los números en el arreglo se denominan **elementos** de la matriz.*

Una matriz general $m \times n$ puede expresarse como:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij}]$$

1.4. Operaciones con matrices

*Dos matrices son **iguales** si tienen el mismo tamaño y sus elementos correspondientes son iguales.*

*Si A y B son matrices del mismo tamaño, entonces la **suma** $A + B$ es la matriz obtenida al sumar los elementos de B con los elementos correspondientes de A. No es posible sumar o restar matrices de tamaños diferentes.*

En notación matricial:

$$(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$
$$(A - B)_{ij} = (A)_{ij} - (B)_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

*Si A es cualquier matriz y c es cualquier escalar, entonces el **producto** cA es la matriz obtenida al multiplicar cada elemento de A por c.*

En notación matricial:

$$(cA)_{ij} = c(A)_{ij} = ca_{ij}$$

Si A es una matriz $m \times r$ y B es una matriz $r \times n$, entonces el **producto** AB es la matriz $m \times n$ cuyos elementos se determinan como sigue. Para encontrar el elemento en la fila i y en la columna j de AB, considerar sólo la fila i de la Matriz A y la columna j de la matriz B. Multiplicar entre si los elementos correspondientes del renglón y de la columna mencionados y luego sumar los productos resultantes.

En notación matricial:

$$[(AB)_{ij}]_{m\times n} = \sum_{k=1}^{r} A_{ik}B_{kj}$$

La matriz resultante será de $m \times n$.

1.5. Multiplicación de matrices por columnas y por renglones

$$\begin{gathered} j^{th} \text{ matriz columna de } AB = A\left[j^{th}\text{matriz columa de} B\right] \\ i^{th} \text{ matriz fila de } AB = \left[j^{th} \text{ matriz columa de } A\right] B \end{gathered}$$

Si $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\ldots$, $\mathbf{a}_m$ denotan las matrices fila de A y $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\ldots$, $\mathbf{b}_n$ denotan las matrices columna de B, entonces por lo establecido recién se concluye que:

$$AB = A\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A\mathbf{b}_1 & A\mathbf{b}_2 & \cdots & A\mathbf{b}_n\end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m\end{bmatrix} B = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 B \\ \mathbf{a}_2 B \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m B\end{bmatrix}$$

1.6. Productos de matrices como combinaciones lineales

Sean:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Mediante esta elección es posible expresar al sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

como:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

La matriz A se denomina ***matriz de coeficientes*** del sistema.

1.7. Transpuesta de una matriz

Si A es cualquier matriz $m \times n$, entonces la ***transpuesta de*** *A, denotada por A^T, se define como la matriz $n \times m$ que se obtiene al intercambiar las filas y las columnas de A, es decir, la primera columna de A^T es la primer fila de A, la segunda columna de A^T es la segunda fila de A, y así sucesivamente.*

En notación matricial:

$$\left(A^T\right)_{ij} = (A)_{ji}$$

1.8. Traza de una matriz

Si A es una matriz cuadrada, entonces la **traza de A**, *denotada por* $\operatorname{tr}(A)$, *se define como la suma de la diagonal principal de A. La traza de A no está definida si A no es una matriz cuadrada.*

En notación matricial:

$$\operatorname{tr}(A)_{n\times n} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

2. Reglas de la aritmética de matrices

2.1. Propiedades de las operaciones con matrices

Muchas de las reglas básicas de la aritmética de los números reales también se cumplen para matrices, aunque unas cuantas no. Por ejemplo, para números reales a y b siempre se cumple que $ab = ba$ (*ley conmutativa de la multiplicación*). Para matrices, sin embargo, AB y BA no necesariamente son iguales.

Teorema 2. *Suponiendo que los tamaños de las matrices son tales que las operaciones indicadas se pueden efectuar, entonces son válidas las siguientes reglas de aritmética matricial.*

(a) $A + B = B + A$ **Ley conmutativa de la adición**

(b) $A + (B + C) = (A + B) + C$ **Ley asociativa de la adición**

(c) $A(BC) = (AB)C$ **Ley asociativa de la multiplicación**

(d) $A(B + C) = AB + AC$ **Ley distributiva por la izquierda**

(e) $(B + C)A = BA + CA$ **Ley distributiva por la derecha**

(f) $A(B - C) = AB - AC$

(g) $(B - C)A = BA - CA$

(h) $a(B + C) = aB + aC$

(i) $a(B - C) = aB - aC$

(j) $(a + b)C = aC + bC$

(k) $(a - b)C = aC - bC$

(l) $a(bC) = (ab)C$

(m) $a(BC) = (aB)C = B(aC)$

Probaremos el inciso *(d)*. Para ello es necesario probar que $A(B+C)$ y $AB+AC$ son del mismo tamaño y que los elementos correspondientes son iguales. Para formar $A(B + C)$, B y C deben ser del mismo tamaño, por ejemplo, $n \times m$. Entonces A debe tener el mismo número de columnas para que la multiplicación pueda llevarse a cabo, digamos por ejemplo, $r \times n$ de modo que $A(B+C)$ tendrá dimensiones $r \times m$. Veamos ahora la otra igualdad. Con estas definiciones para A, B y C se cumple que tanto AB como AC tienen dimensiones de $r \times n$. Por lo tanto $A(B + C)$ y $AB + AC$ son del mismo tamaño. Queda entonces probar que los elementos correspondientes de $A(B + C)$ y $AB + AC$ son iguales, es decir que:

$$[A(B + C)]_{ij} = [AB + AC]_{ij}$$

para todos los valores de i y j. Por las definiciones de adición y de multiplicación de matrices se tiene:

$$\begin{aligned}[A(B + C)_{ij}] =& a_{i1}(b_{1j} + c_{1j}) + a_{i2}(b_{2j} + c_{2j}) + \cdots + a_{im}(b_{mj} + c_{mj}) \\ =& a_{i1}b_{1j} + a_{i1}c_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i2}c_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj} + a_{im}c_{mj}\end{aligned}$$

Pero:

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj} = [AB]_{ij}$$
$$a_{i1}c_{1j} + a_{i2}c_{2j} + \cdots + a_{im}c_{mj} = [AC]_{ij}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}[A(B + C)]_{ij} =& [AB]_{ij} + [AC]_{ij} \\ =& [AB + AC]_{ij}\end{aligned}$$

Con esto queda demostrado que los elementos correspondientes de $A(B + C)$ y $AB + AC$ son iguales.

La demostración del inciso c es más complicada.

2.2. Matrices cero

Una matriz que tiene sus elementos iguales a cero se denomina ***matriz cero***.

Como ya se sabe que algunas de las reglas de la aritmética para los números reales no se cumplen en la aritmética matricial, es temerario asumir que todas las propiedades del número real cero se cumplen para las matrices cero. En la aritmética de números reales se cumple que:

- Si $ab = ac$ y $a \neq 0$, entonces $b = c$ (*ley de cancelación*)
- Si $ad = 0$ entonces por lo menos uno de los factores del miembro izquierdo es cero.