1. Matrices

1.1. Sistemas de ecuaciones lineales y matrices

1.1.1. Ecuaciones lineales

Todo sistema de ecuaciones lineales no tiene soluciones, tiene exactamente una solución o tiene una infinidad de soluciones.

Las ***operaciones elementales*** en las filas son las siguientes:

1. Multiplicar una fila por una constante diferente de cero.
2. Intercambiar dos filas.
3. Sumar un múltiplo de una fila a otra fila.

1.1.2. Sistemas lineales homogéneos

Un sistema de ecuaciones lineales es ***homogéneo*** si todos los términos constantes son cero; es decir el sistema es de la forma:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

Todo sistema de ecuaciones lineales homogéneo es consistente, ya que siempre existe la ***solución trivial*** (es decir, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $\ldots$, $x_n = 1 = 0$). Debido a que un sistema lineal homogéneo siempre tiene la solución trivial, entonces para sus soluciones sólo hay dos posibilidades.

- El sistema tiene sólo la solución trivial.
- El sistema tiene infinidad de soluciones además de la solución trivial.

Teorema 1. *Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con más incógnitas que ecuaciones tiene infinidad de soluciones*

1.1.3. Matrices y operaciones con matrices

*Una **matriz** es un arreglo rectangular de números. Los números en el arreglo se denominan **elementos** de la matriz.*

Una matriz general $m \times n$ puede expresarse como:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij}]$$

A continuación definiremos en que consiste una matriz que se encuentra en su ***forma escalonada reducida***:

1. *Si una fila no consta completamente de ceros, entonces el primer número diferente de cero en la fila es un 1. (Que se denomina **1 principal**).*
2. *Si hay filas que constan completamente de ceros, se agrupan en la parte inferior de la matriz.*
3. *En dos filas consecutivas cualesquiera que no consten completamente de ceros, el 1 principal de la fila inferior aparece más a la derecha que el 1 principal de la fila superior.*
4. *Cada columna que contenga un 1 principal tiene cero en todas las demás posiciones.*

1.1.4. Operaciones con matrices

*Dos matrices son **iguales** si tienen el mismo tamaño y sus elementos correspondientes son iguales.*

*Si A y B son matrices del mismo tamaño, entonces la **suma** $A + B$ es la matriz obtenida al sumar los elementos de B con los elementos correspondientes de A. No es posible sumar o restar matrices de tamaños diferentes.*

En notación matricial:

$$(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$
$$(A - B)_{ij} = (A)_{ij} - (B)_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

Si A es cualquier matriz y c es cualquier escalar, entonces el ***producto*** *cA es la matriz obtenida al multiplicar cada elemento de A por c.*

En notación matricial:

$$(cA)_{ij} = c(A)_{ij} = ca_{ij}$$

Si A es una matriz $m \times r$ y B es una matriz $r \times n$, entonces el **producto** AB es la matriz $m \times n$ cuyos elementos se determinan como sigue. Para encontrar el elemento en la fila i y en la columna j de AB, considerar sólo la fila i de la Matriz A y la columna j de la matriz B. Multiplicar entre si los elementos correspondientes del renglón y de la columna mencionados y luego sumar los productos resultantes.

En notación matricial:

$$[(AB)_{ij}]_{m\times n} = \sum_{k=1}^{r} A_{ik}B_{kj}$$

La matriz resultante será de $m \times n$.

1.1.5. Multiplicación de matrices por columnas y por renglones

$$j^{th} \text{ matriz columna de } AB = A\left[j^{th}\text{matriz columa de}B\right]$$
$$i^{th} \text{ matriz fila de } AB = \left[j^{th} \text{ matriz columa de } A\right]B$$

Si $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_m$ denotan las matrices fila de A y $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, …, $\mathbf{b}_n$ denotan las matrices columna de B, entonces por lo establecido recién se concluye que:

$$AB = A\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A\mathbf{b}_1 & A\mathbf{b}_2 & \cdots & A\mathbf{b}_n\end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m\end{bmatrix} B = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 B \\ \mathbf{a}_2 B \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m B\end{bmatrix}$$

1.1.6. Productos de matrices como combinaciones lineales

Sean:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Mediante esta elección es posible expresar al sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

como:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

La matriz A se denomina ***matriz de coeficientes*** del sistema.

1.1.7. Transpuesta de una matriz

Si A es cualquier matriz $m \times n$, entonces la **transpuesta de** *A, denotada por A^T, se define como la matriz $n \times m$ que se obtiene al intercambiar las filas y las columnas de A, es decir, la primera columna de A^T es la primer fila de A, la segunda columna de A^T es la segunda fila de A, y así sucesivamente.*

En notación matricial:

$$\left(A^T\right)_{ij} = (A)_{ji}$$

1.1.8. Traza de una matriz

Si A es una matriz cuadrada, entonces la **traza de A**, *denotada por* $\operatorname{tr}(A)$, *se define como la suma de la diagonal principal de A. La traza de A no está definida si A no es una matriz cuadrada.*

En notación matricial:

$$\operatorname{tr}(A)_{n\times n} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

1.2. Reglas de la aritmética de matrices

1.2.1. Propiedades de las operaciones con matrices

Muchas de las reglas básicas de la aritmética de los números reales también se cumplen para matrices, aunque unas cuantas no. Por ejemplo, para números reales a y b siempre se cumple que $ab = ba$ (*ley conmutativa de la multiplicación*). Para matrices, sin embargo, AB y BA no necesariamente son iguales.

Teorema 2. *Suponiendo que los tamaños de las matrices son tales que las operaciones indicadas se pueden efectuar, entonces son válidas las siguientes reglas de aritmética matricial.*

(a) $A + B = B + A$ — **Ley conmutativa de la adición**

(b) $A + (B + C) = (A + B) + C$ — **Ley asociativa de la adición**

(c) $A(BC) = (AB)C$ — **Ley asociativa de la multiplicación**

(d) $A(B + C) = AB + AC$ — **Ley distributiva por la izquierda**

(e) $(B + C)A = BA + CA$ — **Ley distributiva por la derecha**

(f) $A(B - C) = AB - AC$

(g) $(B - C)A = BA - CA$

(h) $a(B + C) = aB + aC$

(i) $a(B - C) = aB - aC$

(j) $(a + b)C = aC + bC$

(k) $(a - b)C = aC - bC$

(l) $a(bC) = (ab)C$

(m) $a(BC) = (aB)C = B(aC)$

Demostración: Probaremos el inciso *(d)*. Para ello es necesario probar que $A(B + C)$ y $AB + AC$ son del mismo tamaño y que los elementos correspondientes son iguales. Para formar $A(B + C)$, B y C deben ser del mismo tamaño, por ejemplo, $n \times m$. Entonces A debe tener el mismo número de columnas para que la multiplicación pueda llevarse a cabo, digamos por ejemplo, $r \times n$ de modo que $A(B + C)$ tendrá dimensiones $r \times m$. Veamos ahora la otra igualdad. Con estas definiciones para A, B y C se cumple que tanto AB como AC tienen dimensiones de $r \times n$. Por lo tanto $A(B+C)$ y $AB+AC$ son del mismo tamaño. Queda entonces probar que los elementos correspondientes de $A(B + C)$ y $AB + AC$ son iguales, es decir que:

$$[A(B + C)]_{ij} = [AB + AC]_{ij}$$

para todos los valores de i y j. Por las definiciones de adición y de multiplicación de matrices se tiene:

$$\begin{aligned}[A(B+C)_{ij}] =& a_{i1}(b_{1j}+c_{1j}) + a_{i2}(b_{2j}+c_{2j}) + \cdots + a_{im}(b_{mj}+c_{mj}) \\ =& a_{i1}b_{1j} + a_{i1}c_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i2}c_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj} + a_{im}c_{mj}\end{aligned}$$

Pero:

$$\begin{aligned} a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj} &= [AB]_{ij} \\ a_{i1}c_{1j} + a_{i2}c_{2j} + \cdots + a_{im}c_{mj} &= [AC]_{ij}\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}[A(B+C)]_{ij} =& [AB]_{ij} + [AC]_{ij} \\ =& [AB+AC]_{ij}\end{aligned}$$

Con esto queda demostrado que los elementos correspondientes de $A(B+C)$ y $AB+AC$ son iguales.

La demostración del inciso c es más complicada.

1.2.2. Matrices cero

Una matriz que tiene sus elementos iguales a cero se denomina ***matriz cero***.

Como ya se sabe que algunas de las reglas de la aritmética para los números reales no se cumplen en la aritmética matricial, es temerario asumir que todas las propiedades del número real cero se cumplen para las matrices cero. En la aritmética de números reales se cumple que:

- Si $ab = ac$ y $a \neq 0$, entonces $b = c$ (*ley de cancelación*).
- Si $ad = 0$ entonces por lo menos uno de los factores del miembro izquierdo es cero.

En general los resultados correspondientes **no** son ciertos en aritmética matricial.

A pesar de lo dicho anteriormente, existen varias propiedades conocidas de número real cero que *se cumplen* en las matrices cero:

Teorema 3. *Suponiendo que los tamaños de las matrices son tales que las operaciones indicadas se pueden efectuar, entonces son válidas las siguientes reglas de aritmética matricial.*

(a) $A + 0 = 0 + A = A$

(b) $A - A = 0$

(c) $0 - A = -A$

(d) $A0 = 0$; $0A = 0$

1.2.3. Matrices identidad

Una matriz *cuadrada* que tiene unos en la diagonal principal y ceros fuera de ésta se denomina ***matriz identidad***.

En aritmética matricial la matriz identidad juega un papel bastante semejante al que desempeña el número 1 en las relaciones numéricas $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$:

$$AI = A \qquad \text{y} \qquad IA = A$$

Como se muestra en el teorema siguiente, las matrices identidad surgen naturalmente en el estudio de formas escalonadas reducidas de matrices *cuadradas*.

Teorema 4. *Si R es la forma escalonada reducida de una matriz A de $n \times n$, entonces R tiene un renglón de ceros, o bien, R es la matriz identidad I_n.*

1.2.4. Inversa de una matriz

Si A es una matriz cuadrada y si se puede encontrar una matriz B del mismo tamaño tal que $AB = BA = I$, entonces se dice que A es ***invertible*** y B se denomina ***inversa*** de A

1.2.5. Propiedades de las inversas

Teorema 5. *Si B y C son, ambas, inversas de la matriz A, entonces $B = C$*

Demostración: Ya que B es inversa de A se tiene que:

$$\begin{aligned} BA &= I && \text{(\textit{multiplicando por derecha} por } C \text{ ambos miembros)} \\ (BA)C &= IC && \text{(ley asociativa de la multiplicación)} \\ B(CA) &= C && \\ BI &= C && \text{(suposición inicial)} \\ B &= C && \end{aligned}$$

Otra propiedad de las inversas:

$$AA^{-1} = I \qquad \text{y} \qquad A^{-1}A = I$$

Teorema 6. *Si A y B son matrices invertibles del mismo tamaño, entonces:*
(a) AB es invertible
(b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Demostración: Si se puede demostrar que:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I$$

entonces se habrá demostrado simultáneamente que la matriz AB es invertible y que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Siguiendo el siguiente razonamiento:

$$\begin{aligned} (AB)(B^{-1}A^{-1}) &= (B^{-1}A^{-1})(AB) \\ A(BB^{-1})A^{-1} &= B^{-1}(A^{-1}A)B \\ AIA^{-1} &= B^{-1}IB \\ AA^{-1} &= B^{-1}B \\ I &= I \end{aligned}$$

Aunque la siguiente declaración no se demostrará, este último concepto se puede extender para incluir tres o más factores.

Un producto de cualquier número de matrices invertibles es invertible, y la inversa del producto es el producto de las inversas en orden invertido.

1.2.6. Potencias de una matriz

Si A es una matriz cuadrada, entonces las potencias enteras no negativas se definen como:

$$A^0 = I \qquad \text{y} \qquad A^n = \prod_i^n A \quad \text{con } n > 0$$

A su vez, si A es invertible, entonces las potencias negativas de A se definen como:

$$A^{-n} = \left(A^{-1}\right)^n = \prod_i^n A^{-1} \quad \text{con } n > 0$$

Teorema 7. *Si A es una matriz cuadrada y r y s son enteros, entonces:*

$$A^r A^s = A^{r+s} \qquad y \qquad (A^r)^s = A^{rs}$$

Teorema 8. *Si A es una matriz invertible, entonces:*

(a) A^{-1} es invertible y $(A^{-1})^{-1} = A$.

(b) A^n es invertible y $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$

(c) Para cualquier escalar k diferente de cero, la matriz kA es invertible y $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$.

Demostración:

(a) Como $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, la matriz A^{-1} es invertible y $(A^{-1})^{-1} = A$.

(b) De la extensión del teorema 6 (no demostrado aquí) podemos decir que debido a que A es invertible entonces A^n es invertible y su inversa es el producto de las inversas en orden invertido. Esto es:

$$\begin{aligned} (A^n)^{-1} &= \left(A^{-1}\right)^n \\ &= A^{-n} \end{aligned}$$

(c) Si k es cualquier escalar diferente de cero, entonces por los resultados *(l)* y *(m)* del teorema 2 es posible escribir:

$$\begin{aligned} (kA)\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) &= \frac{1}{k}(kA)A^{-1} \\ &= \left(\frac{1}{k}k\right)AA^{-1} \\ &= 1I \\ &= I \end{aligned}$$

1.2.7. Propiedades de la transpuesta

Teorema 9. *Si los tamaños de las matrices son tales que se pueden efectuar las operaciones planteadas, entonces:*

(a) $\left((A)^T\right)^T = A$

(b) $(A+B)^T = A^T + B^T$ y $(A-B)^T = A^T - B^T$

(c) $(kA)^T = kA^T$*, donde* k *es cualquier escalar*

(d) $(AB)^T = B^T A^T$

Demostración: Al considerar que al transponer una matriz se intercambian sus filas por sus columnas, los incisos *(a)*, *(b)* y *(c)* deben ser evidentes. Para demostrar el inciso *(d)* supongamos:

$$A = [a_{ij}]_{m\times r} \qquad \text{y} \qquad B = [b_{ij}]_{r\times n}$$

A continuación demostraremos que $(AB)^T$ y $B^T A^T$ son del mismo tamaño. El producto AB tendrá un tamaño de $m\times n$. Ahora bien, la transpuesta del producto $(AB)^T$ tendrá dimensiones $n \times m$. Por otro lado:

$$A^T = \left[a'_{ij}\right]_{r\times m} \qquad \text{y} \qquad B^T = \left[b'_{ij}\right]_{n\times r}$$

De modo que el producto $B^T A^T$ tendrá un tamaño $n \times m$. Por lo que $(AB)^T$ y $B^T A^T$ tienen ambos el mismo tamaño. Nos queda demostrar que los elementos correspondientes de $(AB)^T$ y $B^T A^T$ son los mismos, es decir:

$$\left((AB)^T\right)_{ij} = \left(B^T A^T\right)_{ij}$$

Para encontrar $\left((AB)^T\right)_{ij}$ primero encontramos el producto AB:

$$\begin{aligned}(AB)_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ir}b_{rj}\\ &= \sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj}\end{aligned}$$

La transpuesta de este último resultado es:

$$\begin{aligned}\left((AB)^T\right)_{ij} &= (AB)_{ji}\\ &= \sum_{k=1}^{r} a_{jk}b_{ki}\end{aligned}$$

Notar el intercambio de subíndices con respecto al último resultado. Analicemos ahora el otro miembro de la igualdad $\left(B^T A^T\right)_{ij}$.

$$\begin{aligned}\left(B^T A^T\right)_{ij} &= \sum_{k=1}^{r} b'_{ik}a'_{kj}\\ &= \sum_{k=1}^{r} b_{ki}a_{jk}\\ &= \sum_{k=1}^{r} a_{jk}b_{ki}\end{aligned}$$

Con esto queda demostrado que $(AB)^T$ y B^TA^T son iguales.

Aunque no se demostrará el siguiente hecho, el inciso *(d)* del último teorema se puede extender para incluir tres o más factores:

La transpuesta de un producto de cualquier número de matrices es igual al producto de sus transpuestas en orden invertido.

1.2.8. Invertibilidad de una transpuesta

Teorema 10. *Si A es una matriz invertible, entonces A^T también es invertible y:*

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T \tag{1}$$

Demostración: Se puede probar la invertibilidad de A^T y obtener (1) al demostrar que:

$$A^T\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^{-1}\right)^T A^T = I$$

Por el inciso *(d)* del teorema 9:

$$\begin{aligned}
\left(A^T\left(A^{-1}\right)^T\right)^T &= \left(\left(A^{-1}\right)^T A^T\right)^T \\
\left(\left(A^{-1}\right)^T\right)^T\left(A^T\right)^T &= \left(A^T\right)^T\left(\left(A^{-1}\right)^T\right)^T \\
A^{-1}A &= AA^{-1} \\
I &= I
\end{aligned}$$

1.3. Matrices elementales y un método para determinar A^{-1}

1.3.1. Matrices elementales

Una matriz $n \times n$ se denomina ***matriz elemental*** si se puede obtener a partir de la matriz identidad I_n al efectuar una sola operación elemental en las filas.

Teorema 11. *Si la matriz elemental E resulta de la ejecución de ciertas operaciones en los renglones de I_m y si A es una matriz $m \times n$, entonces el producto EA es la matriz que se obtiene cuando la misma operación en las filas se efectúa en A.*

Teorema 12. *Toda matriz elemental es invertible, y la inversa es también una matriz elemental*

Demostración: Si E es una matriz elemental, entonces E se obtiene al efectuar algunas operaciones en las filas de I. Sea E_0 la matriz que se obtiene cuando la inversa de esta operación se efectúa en I. Entonces usando el hecho de que las operaciones inversas en las filas cancelan mutuamente su efecto, se concluye que:

$$E_0E = I \qquad \text{y} \qquad EE_0 = I$$

El siguiente teorema establece algunas relaciones fundamentales entre invertibilidad, sistemas lineales homogéneos, formas escalonadas reducidas y matrices elementales.

Teorema 13. *Si A es una matriz $n \times n$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes, es decir, todas son verdaderas o todas son falsas.*

(a) A es invertible.

(b) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ sólo tiene la solución trivial.

(c) La forma escalonada reducida de A es I_n.

(d) A se puede expresar como un producto de matrices elementales.

Demostración: Se demostrará la equivalencia estableciendo la cadena de implicaciones $a \Rightarrow b \Rightarrow c \Rightarrow d \Rightarrow a$.

$a \Rightarrow b$: Si A es invertible y sea $\mathbf{x}_0$ cualquier solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$; así, $A\mathbf{x}_0 = 0$. Al multiplicar ambos miembros de la ecuación por la matriz A^{-1} se obtiene:

$$\begin{aligned} A^{-1}(A\mathbf{x}_0) &= A^{-1}\mathbf{0} \\ (A^{-1}A)\mathbf{x}_0 &= \mathbf{0} \\ I\mathbf{x}_0 &= 0 \\ \mathbf{x}_0 &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial.

$b \Rightarrow c$: Sea $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. La matriz:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

puede llevarse por medio de operaciones elementales en las filas a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto la forma escalonada reducida de A es la matriz I_n.

$c \Rightarrow d$: Suponer que la forma escalonada reducida de A es I_n implica que A se puede reducir a I_n mediante una sucesión finita de operaciones elementales en las filas. Esto es lo mismo que escribir:

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = I_n \tag{2}$$

Por el teorema 12, las matrices $E_k \cdots E_2 E_1 A = I_n$ son invertibles. Al multiplicar por izquierda a ambos miembros de la ecuación (2) se obtiene:

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} I_n = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}$$

Por lo que queda demostrado que A puede expresarse como un producto de matrices elementales.

$d \Rightarrow a$: Si A es un producto de matrices elementales entonces por los teoremas 6 y 12 la matriz es un producto de matrices invertibles, y por lo tanto es invertible.

1.3.2. Equivalencia por renglones

Las matrices que se pueden obtener a partir de otra matriz mediante la ejecución de una sucesión finita de operaciones elementales en las filas se denominan ***equivalentes por renglones***. Con esta terminología por los incisos *(a)* y *(c)* del teorema 13 se concluye que una matriz $A_{n\times n}$ es invertible si y sólo si es equivalentes por renglones a la matriz identidad I_n.

1.3.3. Un método para invertir matrices

Para determinar la inversa de una matriz invertible A, es necesario encontrar una sucesión de operaciones elementales en las filas que reduzca a A a la matriz identidad y luego efectuar esta misma sucesión de operaciones en I_n para obtener A_{-1}.

1.4. Matrices diagonales, triangulares y simétricas

1.4.1. Matrices diagonales

Una matriz cuadrada en la que todos los elementos fuera de la diagonal son cero se denomina ***matriz diagonal*** y puede representarse como:

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

Una matriz diagonal es invertible sólo si todos los elementos de su diagonal son distintos de cero, en este caso la inversa es:

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/d_n \end{bmatrix}$$

Por otro lado, las potencias de las matrices diagonales son fáciles de calcular. Sea k un número entero positivo, entonces:

$$D^k = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^k \end{bmatrix}$$

Finalmente para multiplicar una matriz A por izquierda por una matriz diagonal D, es posible multiplicar filas sucesivas de A por los elementos diagonales sucesivos de D; y para multiplicar A por la derecha por D es posible multiplicar columnas sucesivas de A por los elementos diagonales sucesivos de D.

1.4.2. Matrices triangulares

Una matriz *cuadrada* en la que todos los elementos arriba de la diagonal principal son cero se denomina ***triangular inferior***, y una matriz *cuadrada* en la que todos los elementos debajo de la diagonal principal son cero se denomina ***triangular superior***.

1.4.3. Matrices simétricas

Una matriz cuadrada es **simétrica** *si:*

$$A = A^T$$

Teorema 14. *Si A y B son matrices simétricas del mismo tamaño y si k es cualquier escalar, entonces:*

(a) A^T es simétrica.

(b) $A+B$ y $A-B$ son simétricas

(c) kA es simétrica.

OBSERVACIÓN: En general no es cierto que el producto de matrices simétricas es simétrico. Para ver esto, por el inciso *(d)* del teorema 9, se tiene:

$$(AB)^T = B^T A^T = BA$$

Como AB y BA suelen ser diferentes, se concluye que en términos generales AB no es simétrico. Sin embargo, en el caso que $AB = BA$, entonces se dice que A y B ***conmutan***. En resumen:

El producto de dos matrices simétricas es simétrico si y sólo si las matrices conmutan.

Teorema 15. *Si A es una matriz simétrica invertible, entonces A^{-1} es simétrica.*

Demostración: Supongamos que A es simétrica e invertible. Por el teorema 10 y el hecho de que $A = A^T$, se tiene:

$$\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1} = A^{-1}$$

lo que demuestra que A^{-1} es simétrica.

1.4.4. Matrices de la forma AA^T y A^TA

Los productos de matrices de la forma AA^T y A^TA son siempre simétricos porque:

$$\left(AA^T\right)^T = \left(A^T\right)^T A^T = AA^T \quad \text{y} \quad \left(A^TA\right)^T = A^T \left(A^T\right)^T = A^TA$$

Teorema 16. *Si A es una matriz invertible, entonces AA^T y A^TA también son invertibles.*

Demostración: Como A es invertible, entonces por el teorema 10 también lo es A^T. Así, AA^T y A^TA son invertibles, ya que son el producto de matrices invertibles.

2. Determinantes

2.1. La función determinante

2.1.1. Permutaciones

Una ***permutación*** del conjunto de enteros $\{1, 2, \ldots, n\}$ es un arreglo de éstos en algún orden sin omisiones ni repeticiones.

Una inversión consiste en un cambio en el orden entre dos elementos siempre y cuando un entero mayor precede a uno menor.

Para calcular el número de inversiones en una permutación $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ se prosigue de la siguiente forma:

1. Encontrar el número de enteros que son menores que j_1 y que están después de j_1 en la permutación.
2. Encontrar el número de enteros que son menores que j_2 y que están después de j_2 en la permutación.
3. Continuar este proceso desde j_3 hasta j_{n-1}.
4. La suma de estos números es el número total de inversiones que hay en la permutación.

Por ejemplo, en la permutación $(6, 1, 3, 4, 5, 2)$ el número de inversiones es $5+0+1+1+1 = 8$. Este número indica que se deben haber realizado 8 inversiones a partir del conjunto de enteros $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ para llegar a la permutación $(6, 1, 3, 4, 5, 2)$.

Se dice que una permutación es ***par*** si el número total de inversiones es un entero par, y es ***impar*** si el número total de inversiones es un número entero impar.

Por ***producto elemental*** de una matriz $A_{n\times n}$ se entiende cualquier producto de n elementos de A, de los cuales ningún par de elementos proviene de la misma fila o de la misma columna. De esta manera una matriz $A_{n\times n}$ tiene $n!$ productos elementales. Estos productos son de la forma $a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{nj_n}$, donde $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ es una permutación de conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. El signo de cada producto elemental será positivo si la permutación $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ es par y negativo si la permutación $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ es impar.

Sea A una matriz cuadrada. La ***función determinante*** se denota por ***det***, y $\det(A)$ se define como la suma de los productos elementales con signo de A. El número $\det(A)$ se denomina ***determinante de*** $\boldsymbol{A}$.

2.2. Evaluación de determinantes por reducción de filas

2.2.1. Un teorema básico

Teorema 17. *Sea A una matriz cuadrada.*

(a) Si A tiene una fila de ceros o una columna de ceros, entonces $\det(A) = 0$.

(b) $\det(A) = \det(A^T)$.

Demostración: *(a)*.Como todo producto elemental con signo de A tiene un factor de cada fila y un factor de cada columna, entonces todo producto elemental con signo tiene necesariamente un factor de una fila cero o de una columna cero. *(b)*. Se omite la demostración de este inciso, pero se recuerda que un producto elemental tiene un factor de cada fila y un factor de cada columna, de modo que es evidente que A y A^T tienen exactamente el mismo conjunto de productos elementales.

2.2.2. Determinantes de matrices triangulares

Teorema 18. *Si A es una matriz triangular $n \times n$ (triangular superior, inferior o diagonal), entonces* $\det(A)$ *es el producto de los elementos de la diagonal principal; es decir:*

$$\det(A) = \prod_{i}^{n} a_{ii}$$

2.2.3. Elementales en las filas sobre un determinante

Teorema 19. *Sea A una matriz $n \times n$*

(a) Si B es la matriz que se obtiene cuando una sola fila o una sola columna de A se multiplica por un escalar k, entonces:

$$\det(B) = k \det(A)$$

(b) Si B es la matriz que se obtiene cuando se intercambian dos filas o dos columnas, entonces:

$$\det(B) = -\det(A)$$

(c) Si B es la matriz que se obtiene cuando un múltiplo de una fila de A se suma a otra fila o cuando un múltiplo de una columna se suma a otra columna, entonces:

$$\det(B) = \det(A)$$

2.2.4. Determinantes de matrices elementales

Teorema 20. *Sea E una matriz elemental $n \times n$.*

(a) Si E se obtiene al multiplicar una fila por k un renglón de I_n, entonces $\det(E) = k$.

(b) Si E se obtiene al intercambiar dos filas de I_n, entonces $\det(E) = -1$.

(c) Si E se obtiene al sumar un múltiplo de una fila de I_n a otra fila, entonces $\det(E) = 1$.

2.2.5. Determinantes con filas o columnas proporcionales

Teorema 21. *Si A es una matriz cuadrada con dos filas o dos columnas proporcionales, entonces $\det(A) = 0$.*

2.2.6. Propiedades básicas de los determinantes

$$\det(kA) = k^n \det(A)$$

Desafortunadamente, en general no existe una relación simple entre $\det(A)$, $\det(B)$ y $\det(A + B)$ y:

$$\det(A) + \det(B) \neq \det(A + B)$$

Teorema 22. *Sean A, B y C matrices $n \times n$ que sólo difieren en una fila, por ejemplo, la r-ésima, y suponer que la r-ésima fila de C se puede obtener sumando los elementos* *correspondientes de las r-esimas filas de A y B. Entonces:*

$$\det(C) = \det(A) + \det(B)$$

El mismo resultado es cierto para columnas.

2.2.7. Determinante de un producto de matrices

La siguiente afirmación es cierta:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \tag{3}$$

Como la demostración de este teorema es bastante minuciosa, primero es necesario desarrollar algunos resultados preliminares. Se comenzará con el caso en el que A es una matriz elemental. Debido a que este caso especial sirve como prueba de un teorema mayor (la demostración de (3)), entonces lo denominamos lema:

Lema 1. *Si B es una matriz $n \times n$ y E es una matriz elemental $n \times n$, entonces:*

$$\det(EB) = \det(E)\det(B)$$

Demostración: Se consideran tres casos, cada uno dependiendo de la operación en el renglón con que se obtiene E.

Caso 1. Si E se obtiene al multiplicar por k una fila de I_n, entonces, por el teorema 11, EB se obtiene a partir de B al multiplicar por k una fila; así, por el teorema 19a se tiene que:

$$\det(EB) = k\det(B)$$

Pero por el teorema 20a se tiene que $\det(E) = k$, de modo que:

$$\det(EB) = \det(E)\det(B)$$

Caso 2 y 3. Las demostraciones de estos casos siguen el mismo patrón que para el caso anterior.

Observación: Por aplicaciones repetidas del lema 1 se concluye que si B es una matriz $n \times n$ y E_1, $E_2 \ldots E_r$ son matrices elementales $n \times n$ entonces:

$$\det(E_1 E_2 \cdots E_r B) = \det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_r)\det(B) \tag{4}$$

2.2.8. Prueba de la invertibilidad mediante un determinante

Teorema 23. *Una matriz cuadrada A es invertible si y sólo si* $\det(A) \neq 0$

Demostración: Sea R la forma escalonada reducida de A.

Como paso preliminar se demostrará que tanto $\det(A)$ como $\det(R)$ son cero o diferentes de cero. Sean E_1, E_2 $\ldots E_r$ las matrices elementales que corresponden a las operaciones elementales en los renglones con que se obtiene R a partir de A. Así:

$$R = E_r \cdots E_2 E_1 A$$

y según (4):

$$\det(R) = \det(E_r) \cdots \det(E_2) \det(E_1) \det(A) \tag{5}$$

Pero por el teorema 20, los determinantes de las matrices elementales son diferentes de cero. (Tomar en cuenta que multiplicar por cero una fila *no* es una operación elemental en los renglones permitida.) Así por (5) se concluye que $\det(R)$ y $\det(A)$ son cero o diferentes de cero. Ahora se procederá a la parte importante de la demostración.

Si A es invertible, entonces por el teorema 13 se tiene que $R = I$, de modo que $\det(R) = 1 \neq 0$ y, en consecuencia, $\det(A) \neq 0$. Recíprocamente, si $\det(A) \neq 0$ entonces $\det(R) \neq 0$, de modo que R no puede contener un renglón de ceros. Por el teorema 4 se concluye que $R = I$, de modo que por el teorema 13 se tiene que A es invertible.

Por los teoremas 23 y 21 se concluye que una matriz cuadrada con dos filas o columnas proporcionales no es invertible.

Teorema 24. *Si A y B son matrices cuadradas del mismo tamaño, entonces:*

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

Demostración: La demostración se dividirá en dos casos que dependen de si A es invertible o no lo es.

Caso 1. Si la matriz A no es invertible, entonces por el teorema 6 tampoco lo es el producto AB. Así, por por el teorema 23 se tiene que $\det(AB) = 0$ y $\det(A) = 0$, por tanto, se concluye que:

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

Caso 2. Ahora se supone que A es invertible. Por el teorema 13, la matriz A se puede expresar como producto de matrices elementales, por ejemplo:

$$A = E_1 E_2 \cdots E_r \tag{6}$$

de modo que:

$$AB = E_1 E_2 \cdots E_r B$$

Si se aplica (4) a esta ecuación se obtiene:

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_r)\det(B) \\ &= \det(E_1 E_2 \cdots E_r)\det(B) \end{aligned}$$

que según (6), se puede escribir como:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

El siguiente teorema proporciona una relación útil entre el determinante de una matriz y el determinante de su inversa.

Teorema 25. *Si A es invertible, entonces:*

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$$

Demostración:

$$\begin{aligned} A^{-1}A &= I \\ \det\left(A^{-1}A\right) &= \det(I) \\ \det\left(A^{-1}\right)\det(A) &= 1 \end{aligned}$$

como $det(A) \neq 0$, la demostración puede completarse dividiendo ambos miembros por $\det(A)$.

2.2.9. Sistemas lineales de la forma $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$

Muchas aplicaciones del álgebra lineal están relacionadas con sistemas de n ecuaciones lineales en n incógnitas que se expresan como:

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \tag{7}$$

$$(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{8}$$

El problema de interés esencial en sistemas lineales de la forma (8) es determinar los valores de λ para los cuales el sistema tiene una solución no trivial; ese valor de λ se denomina ***eingenvalor*** o ***autovalor*** de A. Si λ es un autovalor de A, entonces las soluciones no triviales de (8) se denominan ***eingenvectores*** o ***autovectores*** de A correspondientes a λ.

De acuerdo con el teorema 23 se concluye que el sistema $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene una solución no trivial si y sólo si:

$$\det(\lambda I - A) = 0 \tag{9}$$

Ésta se denomina ***ecuación característica*** de A; los autovalores de A se pueden encontrar resolviendo esta ecuación para λ. Notar que la matriz $(\lambda I - A)$ no es invertible.

2.3. Desarrollo por cofactores

2.3.1. Menores y cofactores

Si A es una matriz cuadrada, entonces el ***menor del elemento*** a_{ij} se denota por M_{ij} y se define como el determinante de la submatriz que queda después de quitar la i-ésima fila y la j-ésima columna de A. El número $(-1)^{i+j}M_{ij}$ se denota por C_{ij} y se denomina ***cofactor del elemento*** a_{ij}.

Teorema 26. *El determinante de una matriz $A_{n\times n}$ se puede calcular multiplicando los elementos de cualquier fila (o de cualquier columna) por sus cofactores y sumando los productos resultantes; es decir, para cada $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq n$, se tiene que:*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij} \quad \textit{desarrollo por cofactores a lo largo de la } j\textit{-ésima columna}$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij} \quad \textit{desarrollo por cofactores a lo largo de la } i\textit{-ésima fila}$$

2.3.2. Adjunta de una matriz

Aunque no se demuestra la siguiente afirmación es verdadera:

Resulta que si los elementos de cualquier fila se multiplican por cofactores correspondientes de una fila *diferente*, la suma de tales productos siempre es cero. Este resultado también se aplica para columnas.

Si A es cualquier matriz $n \times n$ y C_{ij} es el cofactor de a_{ij}, entonces la matriz:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

se denomina ***matriz de cofactores de*** A. La transpuesta de esta matriz se denomina ***adjunta de A*** y se denota por $\operatorname{adj}(A)$.

2.3.3. Fórmula para la inversa de una matriz

Teorema 27. *Si A es una matriz invertible, entonces*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$$

Demostración: Primero se demostrará que:

$$A \operatorname{adj}(A) = \det(A) I$$

El elemento en la i-ésima fila y la j-ésima columna de $A \operatorname{adj}(A)$ es:

$$(A \operatorname{adj}(A))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} C_{jk} \tag{10}$$

Si $i = j$, entonces (10) es el desarrollo por cofactores de $\det(A)$ a lo largo de la i-ésima fila de A (teorema 26), y si $i \neq j$ entonces las letras a y los cofactores provienen de filas diferentes de A, de modo que el valor de (10) es cero. En consecuencia:

$$A \operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A) I$$

Dado que A es invertible, $\det(A) \neq 0$. Por tanto la ecuación (**??**) puede volver a escribirse como:

$$\frac{1}{\det(A)} [A \operatorname{adj}(A)] = I$$

$$A \left[\frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) \right] = I$$

Multiplicando por la izquierda ambos miembros por A^{-1}, se obtiene:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,\mathrm{adj}(A)$$