1. Sistemas de ecuaciones lineales y matrices

1.1. Ecuaciones lineales

Todo sistema de ecuaciones lineales no tiene soluciones, tiene exactamente una solución o tiene una infinidad de soluciones.

Las ***operaciones elementales*** en las filas son las siguientes:

1. Multiplicar una fila por una constante diferente de cero.
2. Intercambiar dos filas.
3. Sumar un múltiplo de una fila a otra fila.

1.2. Sistemas lineales homogéneos

Un sistema de ecuaciones lineales es ***homogéneo*** si todos los términos constantes son cero; es decir el sistema es de la forma:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

Todo sistema de ecuaciones lineales homogéneo es consistente, ya que siempre existe la ***solución trivial*** (es decir, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $\ldots$, $x_n = 1 = 0$). Debido a que un sistema lineal homogéneo siempre tiene la solución trivial, entonces para sus soluciones sólo hay dos posibilidades.

- El sistema tiene sólo la solución trivial.
- El sistema tiene infinidad de soluciones además de la solución trivial.

Teorema 1. *Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con más incógnitas que ecuaciones tiene infinidad de soluciones*

1.3. Matrices y operaciones con matrices

*Una **matriz** es un arreglo rectangular de números. Los números en el arreglo se denominan **elementos** de la matriz.*

Una matriz general $m \times n$ puede expresarse como:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij}]$$

1.4. Operaciones con matrices

*Dos matrices son **iguales** si tienen el mismo tamaño y sus elementos correspondientes son iguales.*

*Si A y B son matrices del mismo tamaño, entonces la **suma** $A+B$ es la matriz obtenida al sumar los elementos de B con los elementos correspondientes de A. No es posible sumar o restar matrices de tamaños diferentes.*

En notación matricial:

$$(A+B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$
$$(A-B)_{ij} = (A)_{ij} - (B)_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

*Si A es cualquier matriz y c es cualquier escalar, entonces el **producto** cA es la matriz obtenida al multiplicar cada elemento de A por c.*

En notación matricial:

$$(cA)_{ij} = c(A)_{ij} = ca_{ij}$$

Si A es una matriz $m \times r$ y B es una matriz $r \times n$, entonces el **producto** AB es la matriz $m \times n$ cuyos elementos se determinan como sigue. Para encontrar el elemento en la fila i y en la columna j de AB, considerar sólo la fila i de la Matriz A y la columna j de la matriz B. Multiplicar entre si los elementos correspondientes del renglón y de la columna mencionados y luego sumar los productos resultantes.

En notación matricial:

$$[(AB)_{ij}]_{m\times n} = \sum_{k=1}^{r} A_{ik} B_{kj}$$

La matriz resultante será de $m \times n$.

1.5. Multiplicación de matrices por columnas y por renglones

$$j^{th} \text{ matriz columna de } AB = A\left[j^{th}\text{matriz columa de} B\right]$$
$$i^{th} \text{ matriz fila de } AB = \left[j^{th} \text{ matriz columa de } A\right] B$$

Si $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_m$ denotan las matrices fila de A y $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_n$ denotan las matrices columna de B, entonces por lo establecido recién se concluye que:

$$AB = A\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A\mathbf{b}_1 & A\mathbf{b}_2 & \cdots & A\mathbf{b}_n\end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m\end{bmatrix} B = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 B \\ \mathbf{a}_2 B \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m B\end{bmatrix}$$

1.6. Productos de matrices como combinaciones lineales

Sean:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Mediante esta elección es posible expresar al sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

como:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$