Numărul divizorilor şi suma divizorilor unui număr natural

Mihai CRĂCIUN[1]

Am închis uşile ca să nu intre greşeala. Atunci adevărul m-a întrebat: pe unde voi intra eu?

Rabindranath Tagore

Fie n un număr natural mai mare ca 1. Vom nota cu $d(n)$ numărul divizorilor lui n, iar cu $S(n)$ suma acestor divizori. Vom prezenta două formule simple, accesibile elevilor din clasele gimnaziale şi care au aplicaţii interesante.

Amintim mai întâi **teorema fundamentală a aritmeticii**:
Orice număr natural $n > 1$ se reprezintă în mod unic, abstracţie făcând de ordinea factorilor, ca un produs de numere prime.

În consecinţă, orice număr natural $n > 1$ se descompune în mod unic sub forma $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$, unde $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sunt numere prime, $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$, cu $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{N}^*$ (*descompunerea canonică* a lui n).

Vom utiliza următoarea regulă de bază a analizei combinatorii:
Dacă obiectele $x_1, x_2, \ldots, x_k$ pot fi alese, în ordinea scrisă, în $m_1, m_2, \ldots, m_k$ moduri, atunci k-uplul $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ poate fi ales în $m_1 m_2 \cdot \ldots \cdot m_k$ moduri (regula produsului).

Teoremă. *Dacă $n > 1$ are descompunerea $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$, atunci*

$$d(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (a_k + 1), \qquad (1)$$

$$S(n) = \frac{p_1^{a_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{a_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_k^{a_k+1} - 1}{p_k - 1}. \qquad (2)$$

Demonstraţie. Un divizor al lui n are forma $p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{b_k}$, unde $b_i \in \{0, 1, \ldots, a_i\}$, $i = \overline{1,k}$. Ca urmare, b_1 poate fi ales în $a_1 + 1$ moduri, b_2 în $a_2 + 1$ moduri, ..., b_k în $a_k + 1$ moduri. Deci, $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ poate fi ales în $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (a_k + 1)$ moduri şi relaţia (1) este dovedită.

Suma divizorilor, în mod evident, coincide cu produsul

$$\left(1 + p_1 + p_1^2 + \ldots + p_1^{a_1}\right)\left(1 + p_2 + p_2^2 + \ldots + p_2^{a_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + p_k + p_k^2 + \ldots + p_k^{a_k}\right).$$

Cum acesta este egal cu

$$\frac{p_1^{a_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{a_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_k^{a_k+1} - 1}{p_k - 1},$$

rezultă că pentru $S(n)$ are loc formula (2).

Exemplu. Pentru $72 = 2^3 \cdot 3^2$ avem $d(72) = (3+1)(2+1) = 12$ şi $S(72) = \dfrac{2^4 - 1}{2 - 1} \cdot \dfrac{3^3 - 1}{3 - 1} = 195$.

[1] Profesor, Grupul Şcolar "Unirea", Paşcani

Problema 1. *Aflaţi cel mai mic număr natural care are exact* 105 *divizori.*

Soluţie. Deoarece $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, rezultă că numărul căutat are descompunerea canonică de forma $p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3}$, cu $(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1) = 3 \cdot 5 \cdot 7$. Cel mai mic număr se obţine pentru $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ şi $a_1 + 1 = 7$, $a_2 + 1 = 5$, $a_3 + 1 = 3$. Acest număr este $2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2 = 129600$.

Problema 2. *Arătaţi că numărul divizorilor lui n^{a+1} care se divid cu n^a este egal cu $d(n)$.*

Soluţie. Este suficient să observăm că orice divizor al lui n^{a+1} ce se divide cu n^a este de forma $m \cdot n^a$, m fiind un divizor al lui n.

Problema 3. *Un număr natural este de forma $n = p^a \cdot q^b$, unde p, q sunt numere prime. Ştiind că puterea a treia are* 133 *divizori, să se găsească ce putere a lui n are* 645 *divizori.*

Soluţie. Avem $d(n^3) = (3a+1)(3b+1) = 133 = 7 \cdot 19$ şi, deci, $\begin{cases} 3a+1=7 \\ 3b+1=19 \end{cases}$ sau $\begin{cases} 3a+1=19 \\ 3b+1=7 \end{cases}$. Obţinem $a = 2$, $b = 6$ sau $a = 6$, $b = 2$. Cum $d(n^x) = (ax+1) \times$ $\times (bx+1) = abx^2 + (a+b)x + 1$, vom avea $12x^2 + 8x + 1 = 645$ şi, ca urmare $x = 7$.

Problema 4. *Determinaţi un număr par ştiind că numărul divizorilor săi este* 15 *şi suma lor este* 5467.

Soluţie. Numărul n căutat fiind par, are un factor prim egal cu 2. Deoarece $d(n) = 15 = 3 \cdot 5$, rezultă că n are cel mult doi factori primi: 2 şi p şi aceştia sunt la puterile 2 şi 4. Deci $n = 2^4 \cdot p^2$ sau $n = 2^2 \cdot p^4$ şi cum $S(n) = 5467$, avem corespunzător

$$\frac{2^5-1}{2-1} \cdot \frac{p^3-1}{p-1} = 5467 \text{ sau } \frac{2^3-1}{2-1} \cdot \frac{p^5-1}{p-1} = 5467.$$

Numai a doua ecuaţie are soluţia $p = 5 \in \mathbb{N}$. Deci, $n = 2^2 \cdot 5^4 = 2500$.

Problema 5. *Arătaţi că numărul divizorilor unei puteri naturale a unui număr dat este prim cu exponentul acelei puteri.*

Soluţie. Dacă $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$, atunci $n^m = p_1^{ma_1} p_2^{ma_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{ma_k}$ şi $d(n) =$ $= (ma_1+1)(ma_2+1) \cdot \ldots \cdot (ma_k+1) = mb+1$, $b \in \mathbb{N}$. Rezultă că $(d(n^m), m) = 1$.

Probleme propuse.

1. Găsiţi cel mai mic număr natural care are 25 de divizori.

2. Aflaţi numărul n de forma $n = 3^x \cdot 5^y \cdot 17^z$ ştiind că $17n$ are 56 divizori naturali mai mult ca n, iar $125n$ are 189 divizori mai mult ca n.

3. Determinaţi un număr de forma $n = p^x \cdot q^y$, unde p, q sunt numere prime şi $x, y \in \mathbb{N}$, ştiind că $d(n) = 20$ şi $S(n) = 12400$.

4. Găsiţi un număr $n = p^a \cdot q^b \cdot r^{a+b+1}$, cu p, q, r numere prime, ştiind că $d(n) = 30$ şi $S(n) = 6045$.