

Függvények, sorozatok

A függvényfogalom előkészítése

1-6. osztály

- Adott szabály követése
- Szabályfelismerés és szabálykövetés
- Szabályfelismerés és szabály megadása szöveggel,

<i>pék</i>	<i>tér</i>	<i>ló</i>	<i>bál</i>	<i>görög</i>		
<i>kép</i>	<i>rét</i>	<i>ól</i>			<i>derék</i>	<i>savas</i>

x	1	10	7	0	9	20	38		
y	5	23	17						

$y = \underline{\hspace{2cm}}$

Egyenes és fordított arányosság

7-8. osztály

- Egy csapból egy tartályba másodpercenként 2 liter víz folyik. Mennyi víz van a tartályban a) , b) , c) , d), e), f) múlva, ha a csap megnyitásakor a tartály üres volt?

Készítsünk táblázatot, majd ábrázoljuk koordináta-rendszerben a megfelelő értékpárokat!

- Egy autó egyenletesen haladva 40 km/h sebességgel bizonyos távolságot 2 óra alatt tesz meg. Mennyi idő alatt teszi meg ugyanezt az utat, ha sebessége 60 km/h?

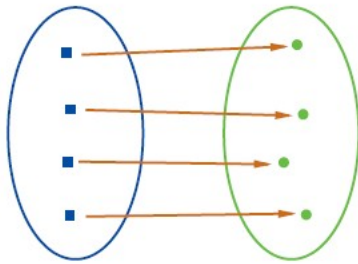
Milyen kapcsolat van az idő és a sebesség között?
Adjunk meg összetartozó sebesség-idő értékpárokat!

A függvényfogalom bevezetése

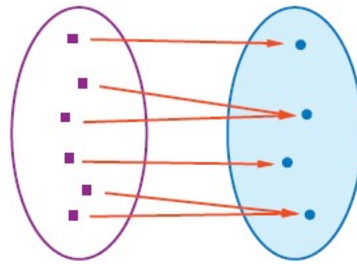
9. osztály

- Két halmaz közötti hozzárendelések vizsgálata

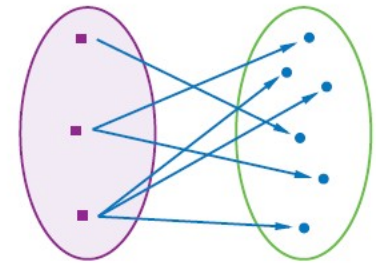
Alaphalmaz Képhalmaz



Alaphalmaz Képhalmaz



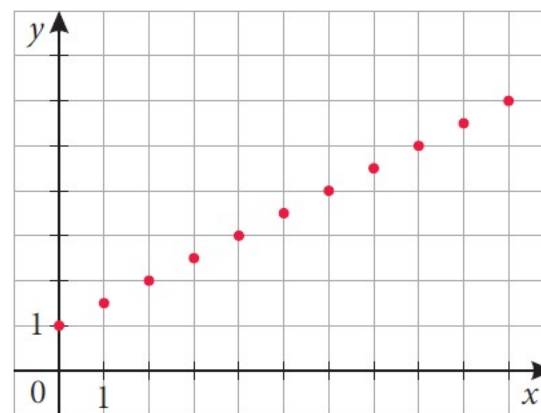
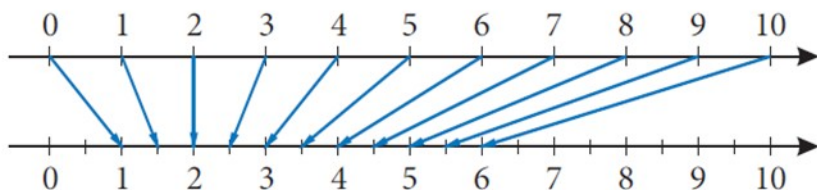
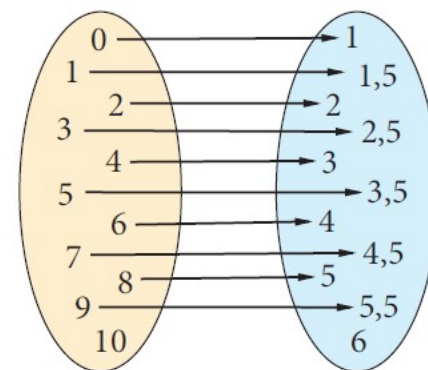
Alaphalmaz Képhalmaz



- A függvény fogalma
- A függvény megadása az értelmezési tartomány, a képhalmaz és a hozzárendelési szabály megadását jelenti.

Függvénymegadási módok

- Szövegesen
- Nyíldiagrammal
- Táblázattal
- Rendezett elempárok felsorolásával
- Számegyenesekkel
- Grafikonnal
- Képlettel:



A függvényhez kötődő fogalmak

- Értelmezési tartomány
- Képhalmaz
- Értékkészlet
- Helyettesítési érték
- Függvény grafikonja (görbéje)
- Inverz függvény
- Kölcsönösen egyértelmű függvény
- Függvény értelmezési tartományának leszűkítése
- Összetett függvény

9B/162. o.

1. K1 Határozzuk meg a következő függvény értelmezési tartományát és értékkészletét!
 $f: (1; 2), (3; 4), (4; 5), (6; 5), (7; 7), (8; 7).$

2. K1 Legyen $D_f = \{1, 2, 3\}$ és $R_f = \{5, 6, 7\}$. Adjuk meg az összes ilyen függvényt rendezett számpárokkal! Hány megoldást kapnánk, ha $\{5, 6, 7\}$ a képhalmaz lenne?

3. K1 Határozzuk meg a következő függvények értékkészletét!

a) $f: \{\text{pozitív páros számok}\} \rightarrow \mathbf{Z}, f(x) = \frac{x}{2};$

d) $i: [-1; 5] \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto x + 3;$

b) $g: [0; 10] \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = \frac{x}{2};$

e) $j: \{-2; -1; 0; 1; 2\} \rightarrow \mathbf{R}, j(x) = 1;$

c) $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, h(x) = \frac{x}{2};$

f) $k: \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\} \rightarrow \mathbf{R}, k(x) = -x.$

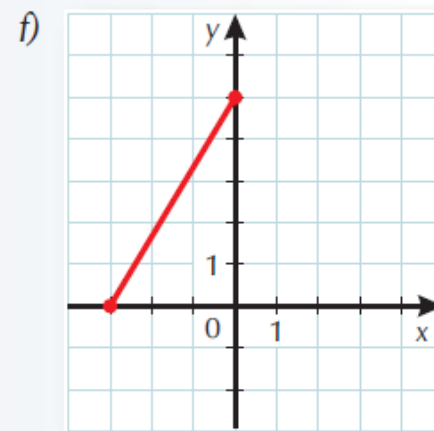
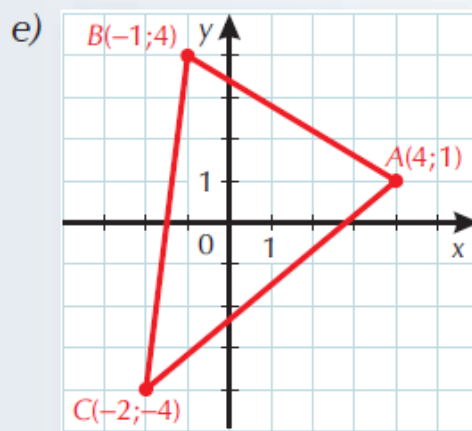
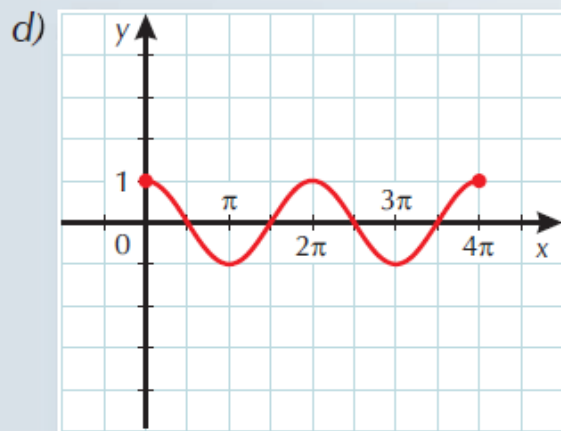
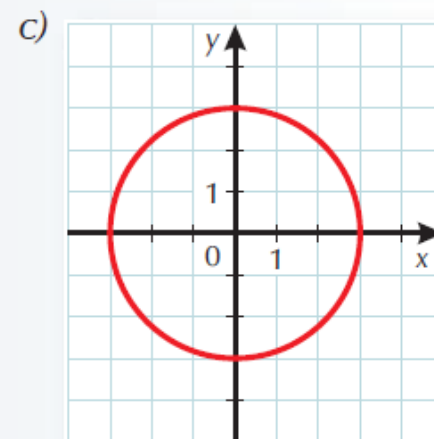
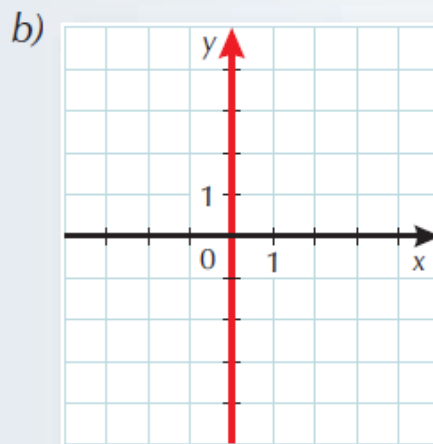
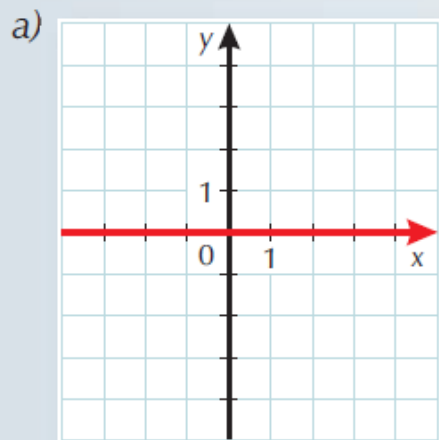
4. K1 Adjuk meg a táblázattal megadott függvények hozzárendelési szabályát, értelmezési tartományát és értékkészletét!

a)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f(x)	1	4	7	10	13	16	19	22	25

9B/168/9

Lehetnek-e a következő ponthalmazok egy függvény grafikonjai? A ponthalmazokat pirossal rajzoltuk be.



8-9. o.	Lineáris fgv.	monotonitás, zérushely
9. o.	Abszolútérték fgv.	szélsőérték, párosság
9. o.	Lineáris törtfgv.	szakadás, páratlanság
9-10. o.	Másodfokú fgv.	
9-10. o.	Négyzetgyökfgv.	invertálhatóság
10-11. o.	Hatványfgv-ek	paritás
10-11. o.	Trigonometrikus fgv-ek	periodicitás, korlátosság
11. o.	Exponenciális fgv.	
11. o.	Logaritmus fgv.	

Függvénytranszformációk

- Változó-transzformációk
 - eltolás az x tengely mentén, egységgel
 - -szeres nyújtás az x tengely mentén
 - tükrözés az y tengelyre
- Érték-transzformációk
 - eltolás az y tengely mentén, egységgel
 - -szeres nyújtás az y tengely mentén
 - tükrözés az x tengelyre

9B/308/2.

K1 a) $f(x) = \frac{3}{x-3} - 3;$

K2 b) $g(x) = \frac{x-1}{x+1};$

K2 c) $h(x) = \frac{-3x+13}{x-4}.$

Függvényábrázolás: Grafikon és képlet kapcsolata

- Lineáris függvények:
- Abszolútérték függvények: ;
- Másodfokú függvények:
(teljes négyzetté alakítás)
- Lineáris törtfüggvények:
- További fgv. típusok ábrázolása a függvénytranszformációk alkalmazásával. \Leftarrow analógiás gondolkodás

9B/189/1.

Értéktáblázat segítségével ábrázoljuk a következő függvényeket! Keressük meg a parabolák tengelypontjait! Adjuk meg a függvények értékkészletét!

a) $f(x) = 2x^2 - 8$;

b) $g(x) = -x^2 + 4x$;

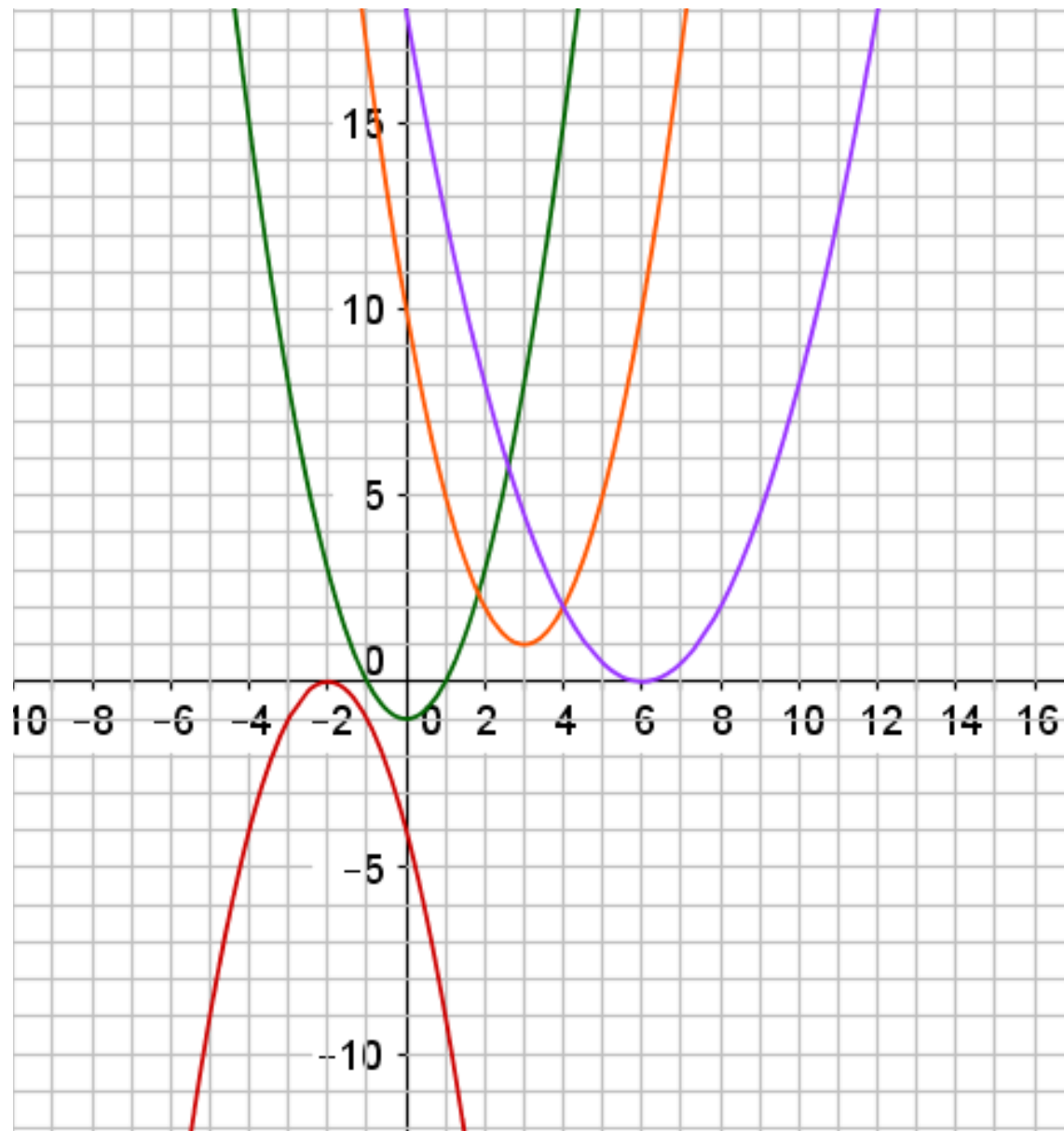
c) $h(x) = -(x - 2)^2 + 4$;

d) $i(x) = x^2 + 6x + 5$;

e) $j(x) = (x - 3)^2 - 4$;

f) $k(x) = x|x|$.

Olvasd le a
függvények
hozzárendelési
szabályát a
grafikonról!



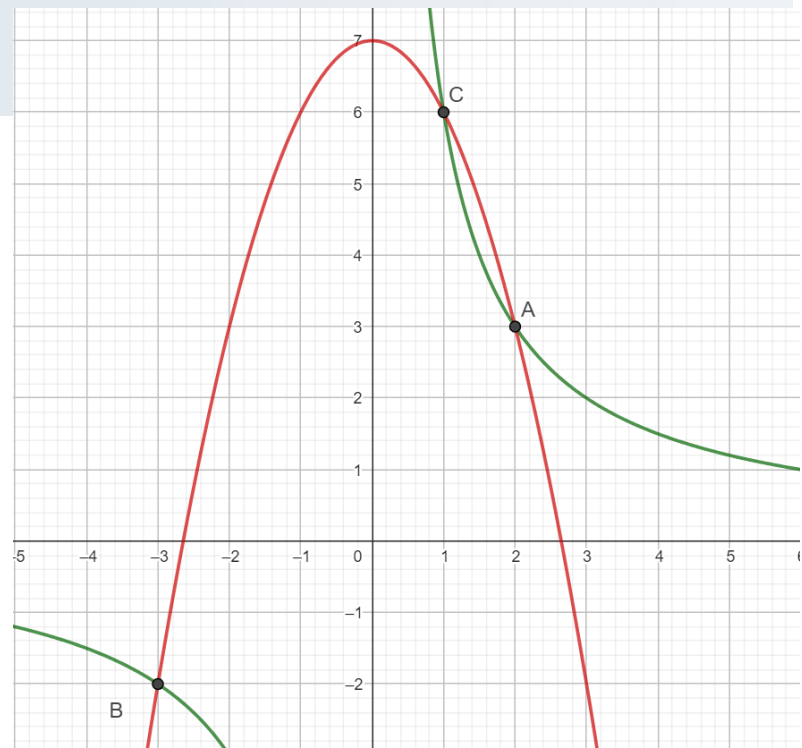
Függvények felhasználása a feladatok megoldásában

- Egyenletek, egyenletrendszerek grafikus megoldása
- Egyenlőtlenségek megoldása
 - Másodfokú, négyzetgyökös, exponenciális, logaritmikus
 - Trigonometrikus
- Szélsőértékfeladatok megoldása
 - Határozzuk meg a 8 egység kerületű téglalapok közül azt, amelynek a területe maximális!

9B/300/8.

Oldjuk meg grafikusan a következő egyenlőtlenséget!

$$\frac{6}{x} \geq 7 - x^2.$$



Függvények megjelenése más matematikai témakörökben

- Sorozatok
- Geometriai transzformációk – pontfüggvények
- Geometriai mérések – alakzatokhoz számot rendelnek
- Valószínűség – eseményhez számot rendelnek
- Számelméleti függvények (pl. osztók száma)
- Számhalmazokon értelmezett alapműveletek – kétváltozós függvények
- Statisztika – vonaldiagramok időbeli változás leírására


Sorozat fogalma, megadási módjai

- A sorozat olyan függvény, melynek értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza.
- Számsorozat: A sorozat *tagjai* valamely számhalmaz *elemei*.
- Megadási módok:
 - Az első néhány tag felsorolásával: ez nem egyértelmű
 - Általános taggal: pl.
 - Rekurzív módon: pl. ;

A sorozat fogalmának előkészítése általános iskolában

- Tárgysorozatok, jelsorozatok, számsorozatok

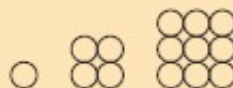
4. példa

Az előzőekben számokból készítettünk sorozatokat. Lehetnek olyan sorozatok, amelyeknek a tagjai nem számok. Ilyen esetekben is kereshetjük a szabályszerűséget. 

Hogyan lehetne folytatni a fenti ábraszorozatot? Adjuk meg egy lehetséges folytatás következő négy tagját! Mi lesz a sorozat százegyedik tagja?

2. példa

A következő ábraszorozatot Yvette készítette:



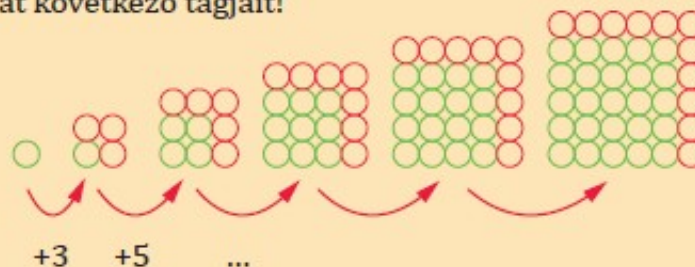
a) Adjuk meg az általa készített sorozat első hat tagját!

b) Fogalmazzuk meg, hogy hogyan kapjuk a sorozat következő tagjait!

Megoldás

a) A sorozat első hat tagja: 1, 4, 9, 16, 25, 36.

b) Figyeljük meg az ábrák építését! A piros kupák hozzáillesztésével kapjuk az előző ábrából a következőt.



$$0 + 1 = 1, \quad 1 + 3 = 4, \quad 4 + 5 = 9, \quad 9 + 7 = 16, \quad 16 + 9 = 25, \quad 25 + 11 = 36, \quad \dots$$

- Szabályfelismerés, szabálykövetés, szabály megfogalmazása

2.  Keress egy-egy szabályt, és folytasd a sorozatokat 3-3 számmal!


a) 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, ...

d) 5, 3, 1, -1, ...

b) 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, ...

e) 1, 2, 11, 3, 111, 4, 1111, 5, ...

c) 1, 2, 4, 8, 16, ...

3.  Az előző feladat b) és e) részében szereplő sorozatoknak add meg a 15. és a 16. tagját, anélkül hogy a közbeesőket felsorolnád! Használd az általad kitalált szabályokat!

- Speciális sorozatok:
 - Állandó vagy változó különbségű sorozatok
 - Állandó vagy változó hányadosú sorozatok

Sorozatok tulajdonságai

- Periodicitás
- Korlátosság
- Monotonitás
- Konvergencia – emelt szinten
- Egy sorozat első három tagját megadtuk. Folytasd a sorozatot minél többféleképpen. Írd fel a kapott sorozatok képzési szabályát, majd jellemezd a sorozatokat! 3; 6; 9; ...
 - a) 3, 6; 9; 12; 15; 18; ... b) 3; 6, 9; 15; 24; 39; ... c) 3; 6; 9; 3, 6; 9; ...
 - d) 3; 6; 9; 21, 24, 81, ... e) 3; 6; 9; 9; 9; 9; ...

A számtani és a mértani sorozat

- Az n tag kiszámítási módja
 - Bizonyítás teljes indukcióval
- Az első n tag összege
- Az elnevezések indoklása
 - A számtani/mértani sorozat tetszőleges tagja a rá szimmetrikusan elhelyezkedő tagjainak számtani/mértani közepe.

Feladatok a számtani/mértani sorozatra

- Fogalmak, képletek elmélyítése, egyenletrendszerek megoldása
- Szöveges feladatok megoldása
- Kamatos kamat számítása

12B/77/1.

Mennyi pénzt kell most félretenni egy újszülött szüleinek ahhoz, hogy 18 év múlva 5 000 000 forintjuk legyen a gyerek egyetemi tanulmányaira, ha a kamat 5%?

12B/55/4.

Egy derékszögű háromszög oldalhosszai egy számtani sorozat egymást követő elemei. A háromszög területe 600 cm^2 . Mekkorák a háromszög oldalai?

Könnyelmű fiatalember ismerősünk 100 000 dollár készpénzre tett szert, s első útja Monte Carlóba vezetett, ahol szerencsejátékokkal próbálta növelni vagyonát. Csakhogy már az első napon 10 dollárt vesztett, s minden ezt követő napon 3 dollárral többet, mint az előző napon.

- a) Mennyit vesztett az 5. napon?
- b) Mennyi pénze maradt az 5. nap végére?
- c) Jellemezze a napi veszteségekből alkotott sorozatot!
- d) Mennyit vesztett a 50. napon? Mennyi pénze maradt ennek a napnak a végén?
- e) Legfeljebb hány napig játszhatott?
- f) Mennyit vesztett az utolsó napon?
- g) Maradt-e 250 dollárja útiköltségre, hogy sürgősen felkeresse gazdag és bőkezű nénikéjét?