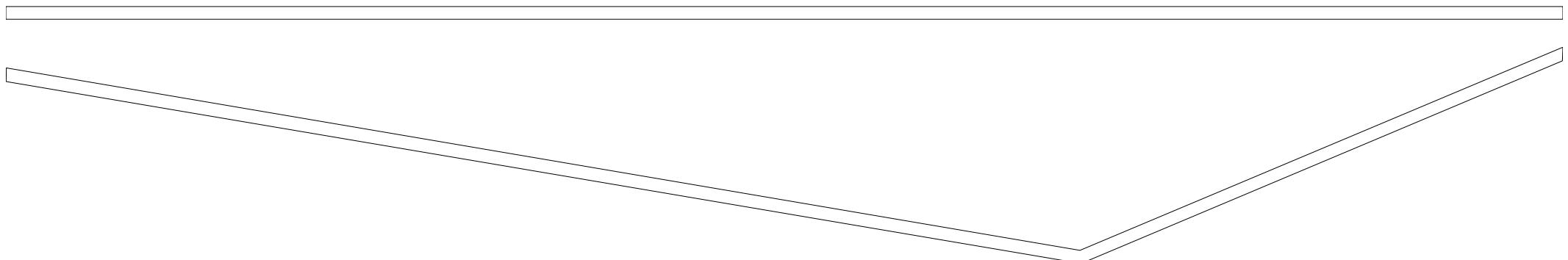


# **ALGEBRAI KIFEJEZÉSEK, EGYENLETEK**



# AZ ALGEBRAI KIFEJEZÉS FOGALMÁNAK KIALAKÍTÁSA (7-9. OSZTÁLY)

- ▶ Racionális algebrai kifejezés (betűs kifejezés): betűket és számokat a négy alapművelet véges sokszori alkalmazásával kapcsolunk össze.
- ▶ Kapcsolódó fogalmak:
  - ▶ Együttható, változó
  - ▶ Alaphalmaz vagy értelmezési tartomány: Az a számhalmaz, amelynek elemeit helyettesítik a kifejezésben szereplő betűk (változók). ← absztrahálás
  - ▶ Helyettesítési érték ← konkretizálás
  - ▶ Polinom, Fokszám

**Egytagúnak** nevezzük a betűs kifejezést, ha a műveletek sorrendjében az utolsó szorzás, osztás vagy hatványozás. Az egyetlen számot tartalmazó kifejezést is egytagúnak tekintjük.

**Például:**

$$7; a; -b; 3 \cdot c; \frac{3}{4} \cdot d; a \cdot 1,5; \frac{b}{3}; d : \frac{3}{4}; a^2; 3 \cdot b^2; a \cdot b; a \cdot b \cdot c; -\frac{2 \cdot x^2}{4}$$

Az egytagú kifejezések számszorzóit **együtthatónak** nevezzük.

**Például:**

- 7 esetén maga a 7 az együttható,
- $5 \cdot c$  együtthatója az 5,
- $a$  együtthatója az 1, mert  $1 \cdot a = a$ ,
- $-b$  együtthatója a  $-1$ , mert  $-1 \cdot b = -b$ ,
- $d : \frac{3}{4}$  kifejezés együtthatója a  $\frac{4}{3}$ , mert  $d \cdot \frac{4}{3} = d : \frac{3}{4}$ ,
- $a^2$  együtthatója az 1, mert  $1 \cdot a^2 = a^2$ ,
- $-\frac{2 \cdot x^2}{4}$  együtthatója  $-\frac{2}{4}$ , mert  $-\frac{2}{4} \cdot x^2 = -\frac{2 \cdot x^2}{4}$ .

7B/55. old.

**Töbntagúnak** nevezzük a kifejezést, ha az utolsó művelete összeadás vagy kivonás.

**Például:**

$$a + 2; 5 \cdot b - 3; \frac{5}{2} + c; 2 \cdot (c - d) + 5; x + y$$

# ALGEBRAI KIFEJEZÉSEK CSOPORTOSÍTÁSA

## I. Egyváltozós kifejezés

$$6x; \frac{12y}{5}; \frac{2}{b}$$

## 2. Egész kifejezés

$$4ax; 6,8y^2zu; \frac{3a^3+2}{5}$$

## 3. Egytagú egész kifejezés

$$5x^2ab^6; \frac{3a}{5}; -2,6uv^2$$

## 4. Egy nemű kifejezések

$$8x^3c^2; -c^2x^3$$

## Többváltozós kifejezés

$$-4xy; -3a^2b^6; 3a + 2cx; \frac{xy}{5ab}$$

## Törtkifejezés

$$\frac{2}{n}; \frac{3a}{6xc}; \frac{2}{a+b};$$

## Többtagú egész kifejezés (polinom)

$$3x + 5by^4; 3a^4 + 2a^3 + 8; \frac{5}{4}x^4 - 3;$$

## Külön nemű kifejezések

$$8x^3c^2; 8x^3c^3; x^3c^2a$$

# 7B/58/7.

7. Válaszd ki az egynemű betűs kifejezéseket!

$$2 \cdot x; \quad x \cdot y; \quad x \cdot 0,75; \quad 5 \cdot x^2; \quad x \cdot y : 3; \quad \frac{-3 \cdot x}{2}; \quad -1,5; \quad 7 \cdot y \cdot x; \quad 2 \cdot x \cdot x; \quad 2021$$

# 7B/59/ I I.

11.

Végezd el az összevonásokat! Az összevonás helyességét vizsgáld meg a változó megadott értékénél az eredeti és az új kifejezés helyettesítési értékének kiszámításával!

a)  $8 \cdot x - (3 + 2 \cdot x + 12) - 4 \cdot x + 6 =$   $x = 0$

b)  $(5 \cdot x - 2) + (7 + 11 \cdot x) - (3 \cdot x + 2) =$   $x = -1$

c)  $(4 \cdot x - 12) + (6 \cdot x + 3 \cdot y) - (9 + 10 \cdot y) =$   $x = 2; y = -2$

d)  $(2 \cdot x + 5 \cdot y) - (3 \cdot x \cdot y + 2 \cdot y) + (2 \cdot x \cdot y - 5 \cdot x) =$   $x = 0,1; y = -0,2$

# MŰVELETEK POLINOMOKKAL

## 8-9. OSZTÁLY

- Az összeadás/szorzás műveleti tulajdonságainak alkalmazása
- Egy nemű kifejezések összevonása
- Polinomok szorzása, zárójelfelbontás  $(a^2 - 3ab + b^2)(a^2 - 4ab) =$
- Szorzattá alakítás
  - Kiemeléssel  $x^3 + 3x^2 + 3x + 9 =$
  - Nevezetes azonosságok felhasználásával  $9a^2 - 36b^2 =$

# 9B/146/2.

2. K1

a)  $3a^2 - 6ab + 3b^2;$   
b)  $7c^2 + 14cd + 7d^2;$

c)  $15ab^2 - 30ab + 15a;$   
d)  $-x^2 - 2x - 1;$

e)  $-y^2 + 4y - 4.$

# MŰVELETEK ALGEBRAI TÖRTEKKEL

## 9. OSZTÁLY

### ► Egyszerűsítés

$$\frac{9a^2+18ab+9b^2}{12a^2-12b^2} =$$

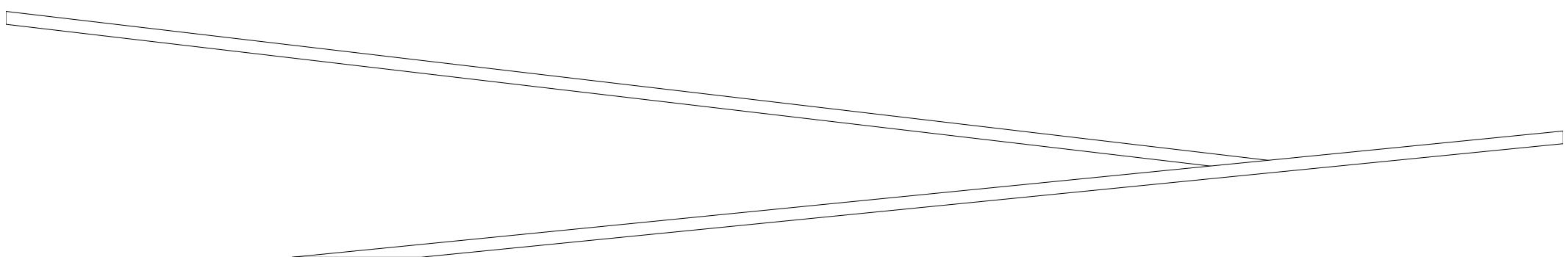
### ► Közös nevezőre hozás, összevonás

$$\frac{5}{x-3} - \frac{x+6}{x^2-9} + \frac{x+2}{2x+6} =$$

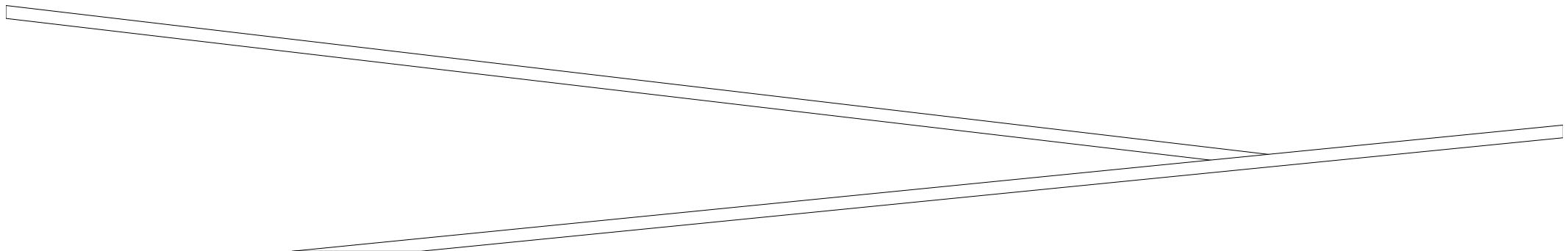
### ► Algebrai törtek szorzása, osztása

$$\frac{x^2-25}{x^2-3x} \cdot \frac{x^2+5x}{x^2-9} =$$

### ► Algebrai törtek értelmezési tartományának meghatározása



$$\frac{x^2 - 25}{x^2 - 3x} \cdot \frac{x^2 + 5x}{x^2 - 9} =$$



# IRRACIONÁLIS KIFEJEZÉSEK

## I0. OSZTÁLY

- ▶ A 4 alapművelet mellett a négyzetgyökvonás, tört kitevőjű hatványozás is szerepel
- ▶ A gyökvonás azonosságainak alkalmazása

$$\sqrt{\frac{32a^9b^8}{64c^2}} =$$

- ▶ Kivitel gyökjel elő, bevitel gyökjel alá

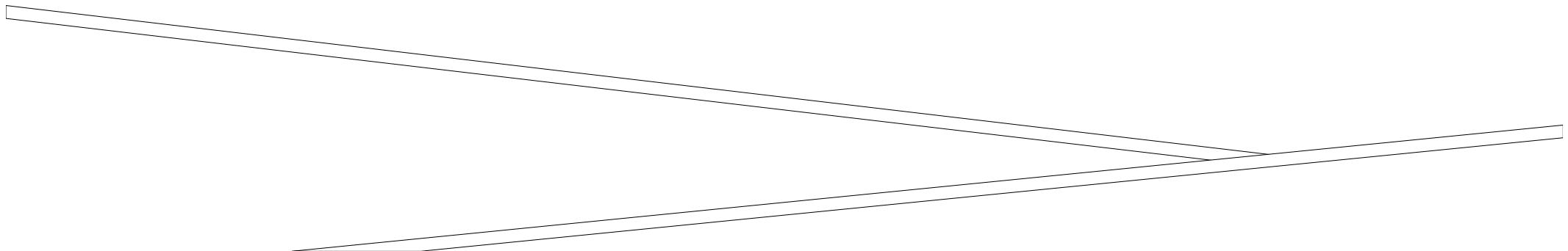
$$6a\sqrt{63ab^3} - 5b\sqrt{28a^3b} =$$

- ▶ Nevező gyöktelenítése

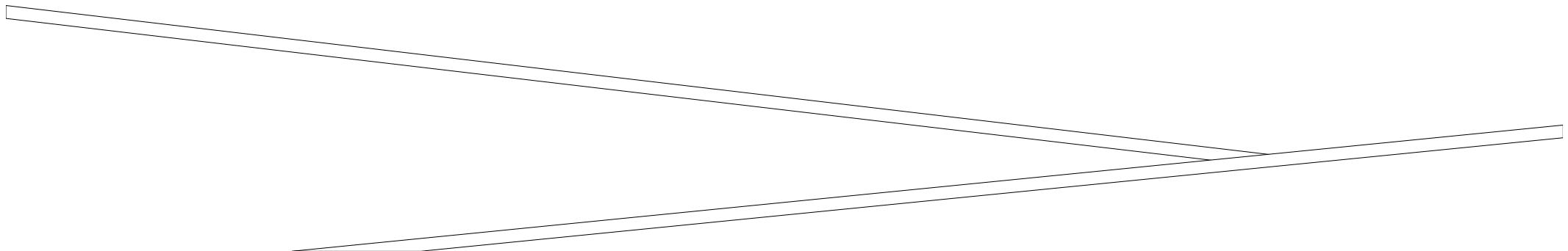
$$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a+b}} =$$

- ▶ Értelmezési tartomány meghatározása

$$6a\sqrt{63ab^3} - 5b\sqrt{28a^3b} =$$



$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a + b}} =$$



# EXPONENCIÁLIS, LOGARITMIKUS, TRIGONOMETRIKUS KIFEJEZÉSEK

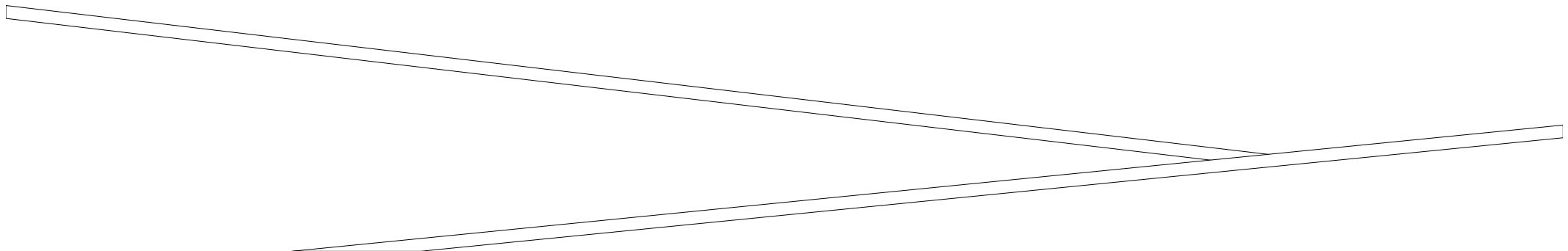
## II. OSZTÁLY

► Azonosságok alkalmazása

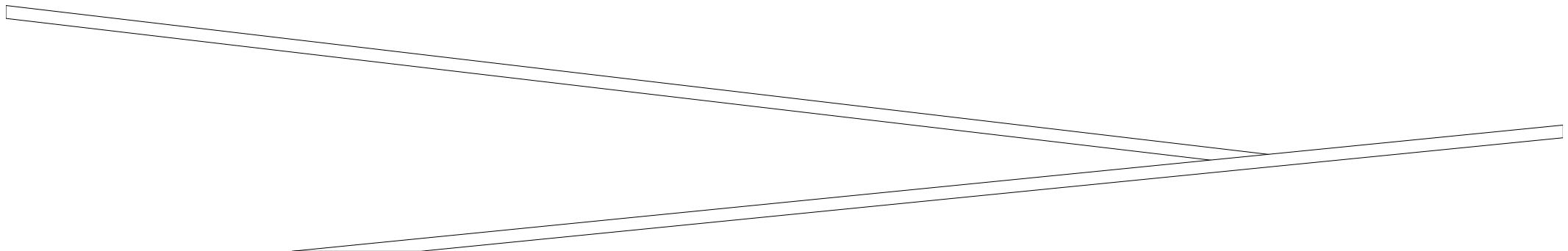
$$\sqrt{a^{4+lo} - a^{36}} =$$

► Trigonometrikus azonosságok, addíciós tételek  
alkalmazása

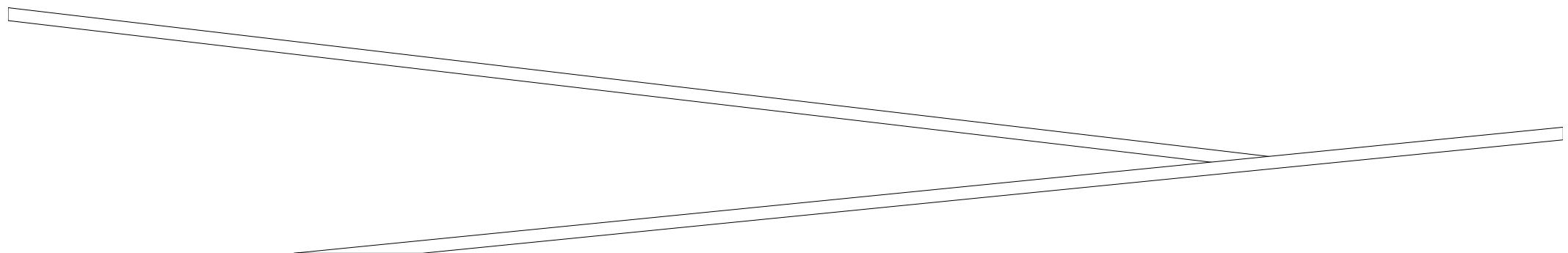
$$\frac{\sin^2 x - \cos^2 x + 1}{\sin^2 x} =$$



$$\sqrt{a^{4+\log_a 36}} =$$



$$\frac{\sin^2 x - \cos^2 x + 1}{\sin^2 x} =$$



# EGYENLET, EGYENLŐTLENSÉG FOGALMA

## I-7. OSZTÁLY

- ▶ Nyitott mondat (logikai fgv.): hiányos állítás, két algebrai kifejezés összekapcsolása a  $<$ ,  $,$ ,  $=$ ,  $\leq$ ,  $\geq$  jelekkel.
- ▶ Kapcsolódó fogalmak: alaphalmaz, igazsághalmaz
- ▶ Megoldási módok:
  - ▶ Próbálhatás (behelyettesítés)
  - ▶ Tervszerű próbálhatás
  - ▶ Lebontogatás (visszafelé következtetés):  $(x + 5)100 = 700$
- ▶ Megoldások száma:

Nincs megoldás, 1 megoldás, véges sok megoldás, végtelen sok megoldás, az alaphalmaz minden eleme megoldás

# 7B/6 I/2.

## 2. példa

Oldjuk meg az  $\frac{5 \cdot x + 4}{3} + 10 = 3$  egyenletet!

### Megoldás

Oldjuk meg az egyenletet lebontogatással!

Melyik az a szám, amelyhez 10-et adva 3-at kapunk?

$$\frac{5 \cdot x + 4}{3} + 10 = 3$$
$$\boxed{\phantom{00}} = 3 - 10 = -7$$

Melyik az a szám, amelyet 3-mal osztva -7-et kapunk?

$$\frac{5 \cdot x + 4}{3} = -7$$
$$\boxed{\phantom{00}} = -7 \cdot 3 = -21$$

Melyik az a szám, amelyhez 4-et adva -21-et kapunk?

$$5 \cdot \boxed{x} + 4 = -21$$
$$\boxed{\phantom{00}} = -21 - 4 = -25$$

Melyik az a szám, amelynek az 5-szöröse -25?

$$\boxed{\phantom{00}} = -25 : 5 = -5$$

$$\boxed{x} = -5$$

Van három teljesen egyforma dobozunk. Ha egy kétkarú mérleg egyik serpenyőjében két ilyen dobozt és egy 2 kg-os tömeget, a másikba pedig egy ugyanilyen dobozt és két darab 2 kg-os és egy 1 kg-os tömeget teszünk, akkor a mérleg egyensúlyban van. Határozzuk meg egy doboz ismeretlen tömeget!



$$2 \cdot x + 2 = x + 2 + 2 + 1$$



$$2 \cdot x = x + 2 + 1$$



$$x = 3$$

# EGYENLETEK, EGYENLŐTLENSÉGEK MEGOLDÁSA MÉRLEGELVVEL 8-9. OSZTÁLY

Elsőfokú, egyismeretlenes, egész majd tört együtthatós egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása

- ▶ A két oldalt egyenlően változtatjuk: ugyanazt a számot hozzáadjuk, kivonjuk.
- ▶ Ha egyenlet, akkor ugyanazzal a számmal szorozzuk, osztjuk (ha  $\neq 0$ ) minden oldalt, ha egyenlőtlenség, akkor negatív számmal szorozva vagy osztva a két oldalt, a reláció iránya megfordul.
- ▶ A mérlegelv alkalmazása előtt egyszerűbb alakra hozzuk a két oldalt: zárójelfelbontás, összevonás, közös nevezőre hozás
- ▶ Példa:  $\frac{x+7}{2} - \frac{2x-1}{7} = x - 1$

# EGYENLET, EGYENLŐTLENSÉG FOGALMA

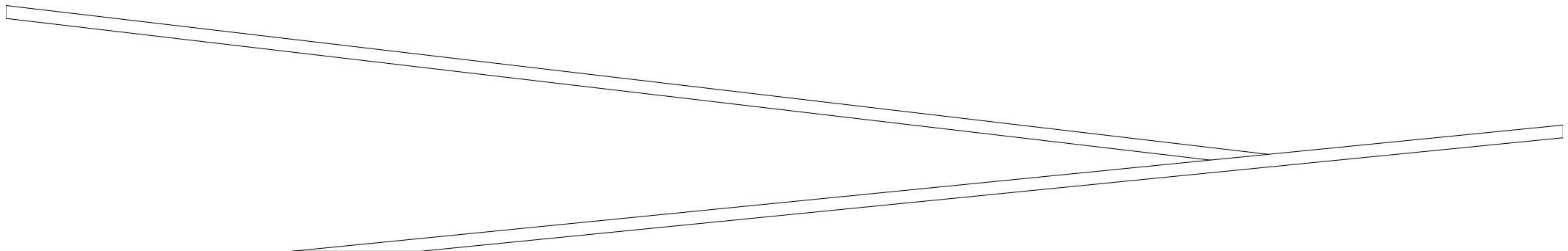
## 9. OSZTÁLY

- I. Az egyenlet/egyenlőtlenség olyan logikai függvény, melybe a változók helyére az alaphalmaz konkrét elemeit behelyettesítve igaz/hamis állítást kapunk.

Az egyenlet megoldása: meghatározzuk az alaphalmaz elemei közül mindeneket, amelyeket behelyettesítve igaz állítást kapunk.

2. Az egyenlet/egyenlőtlenség két függvény összekapcsolása az =; <; ≤; >; ≥ relációs jelek valamelyikével.

Az egyenlet megoldása: meghatározzuk a két függvény értelmezési tartománya metszetének azokat az elemeit, amelyekben a függvények helyettesítési értéke =; <; ≤; >; ≥ .



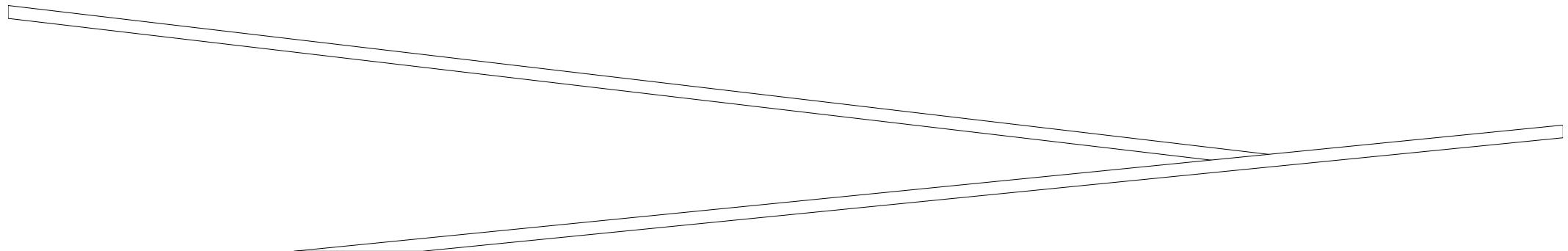
# EGYENLETMEGOLDÁSI MÓDSZEREK

- Ránézés:  $x = 7$ ;  $x^2 + 3x + 2 = 0$
- Ekvivalens átalakítások
- Nullára redukálás, szorzattá alakítás, megoldóképlet

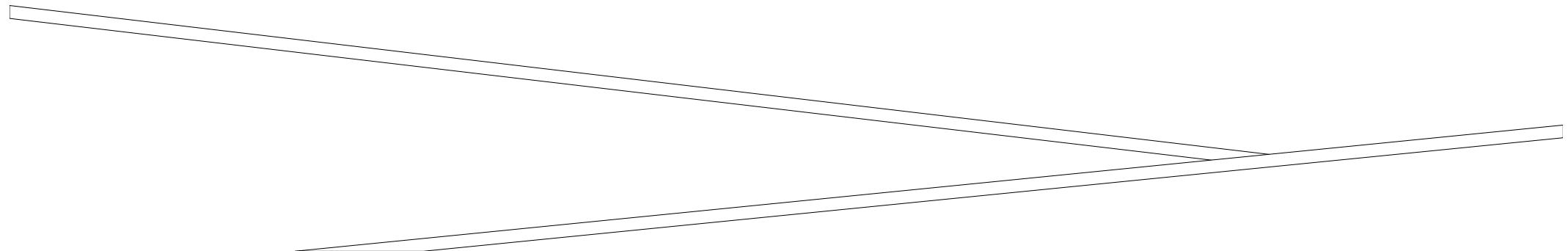
$$x^2 + 3x + 2 = 0; \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = (x + 2)(x + 1) = 0$$

- Új ismeretlen bevezetése:  $(x - 2)^4 - 5(x - 2)^2 + 4 = 0$
- Értelmezési tartomány vizsgálata:  $\sqrt{9 - x^2} = \sqrt{2x - 6}$
- Értékkészlet vizsgálata:  $x^2 + 1 = \cos x$
- Esetszétválasztás  $|x - 3| + 2 = x$
- Grafikus megoldás  $2^x = 4x - 3$

$$\sqrt{9 - x^2} = \sqrt{2x - 6}$$



$$x^2 + 1 = \cos x$$



# EKVIVALENS ÁTALAKÍTÁSOK

- ▶ A megoldandó egyenletet nála egyszerűbb egyenlettel helyettesítjük úgy, hogy közben az egyenlet alap- és megoldáshalmaza nem változik.
- ▶ Ha az egyenlet két oldalát ugyanazzal a kifejezéssel növeljük/csökkentjük/szorozzuk/osztjuk, akkor nem feltétlenül jutunk ekvivalens egyenlethez:  $4x - \sqrt{3x - 9} = 8 - \sqrt{3x - 9}$
- ▶ Nem ekvivalens átalakítások
  - ▶ Az alaphalmaz szűkül  $\rightarrow$  gyököt vesztünk:  
$$\log_3 x^2 = 2 \rightarrow 2\log_3 x = 2$$
  - ▶ Az alaphalmaz bővül  $\rightarrow$  hamis gyök lép fel, következményegyenletet kapunk:  $4x - \sqrt{3x - 9} = 8 - \sqrt{3x - 9}$

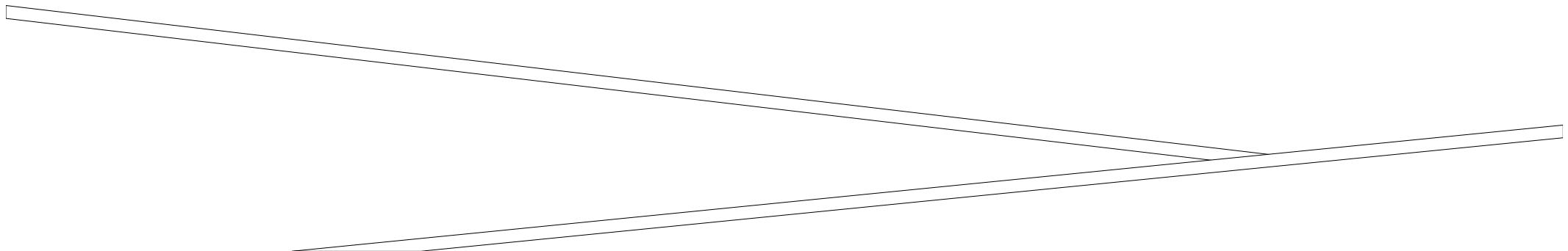
Szorzás ismeretlen kifejezéssel vagy négyzetre emelés

# EGYENLETEK, EGYENLŐTLENSÉGEK TÍPUSAI

- ▶ Elsőfokú (egyismeretlenes) – 6.o. egyenlőtlenség: 9.o
- ▶ Elsőfokú törtes
- ▶ Elsőfokú abszolútértékes
- ▶ Másodfokú – 10. o.
- ▶ Másodfokú abszolútértékes
- ▶ Másodfokú törtes
- ▶ Négyzetgyökös -  $\sqrt{x + c} = ax + b$
- ▶ Magasabb fokú, másodfokúra visszavezethető
- ▶ Exponenciális, logaritmikus
- ▶ Trigonometrikus

# EGYENLETRENDSZEREK

- ▶ 9. osztály: két ismeretlenes lineáris egyenletrendszer
  - ▶ Értelmezés
  - ▶ Megoldás: rendezett számpár
- ▶ Megoldási módok
  - ▶ Behelyettesítő módszer
  - ▶ Egyenlő együtthatók módszere
  - ▶ Összehasonlító módszer
  - ▶ Grafikus módszer
- ▶ 10. osztály: másodfokú két ismeretlenes egyenletrendszer



# PARAMÉTERES EGYENLETEK

A paraméteres egyenletek együtthatói nem csak számok, hanem betűk is lehetnek.

- I. A feladat az egyenlet megoldása:

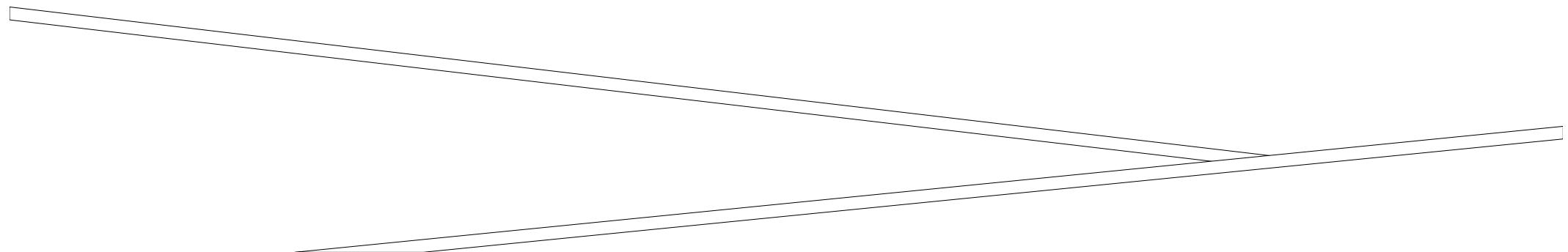
$$a^2x + 3ax = 5a + 15$$

A megoldást a paraméter(ek) összes megengedett értékére meg kell adni.

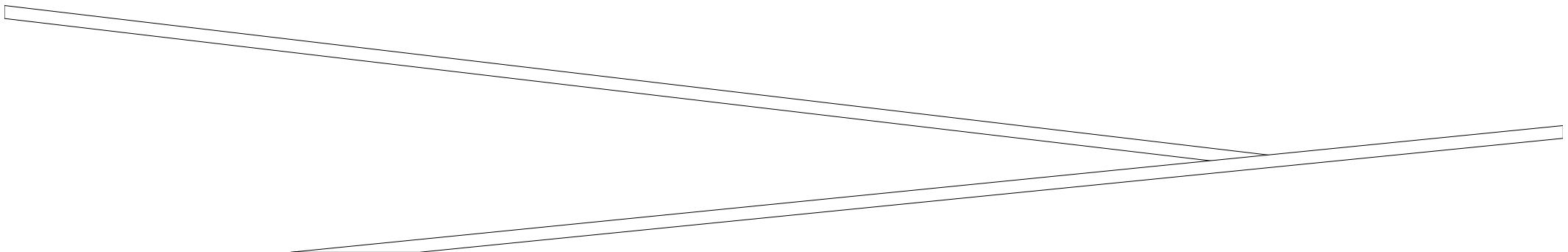
2. Meghatározott feltételeknek megfelelő paraméter(eke)t keresünk:

Határozzuk meg  $c$  értékét úgy, hogy az egyenletnek ne legyen valós gyöke:  $4x^2 - 8x + c = 0$

$$a^2x + 3ax = 5a + 15$$

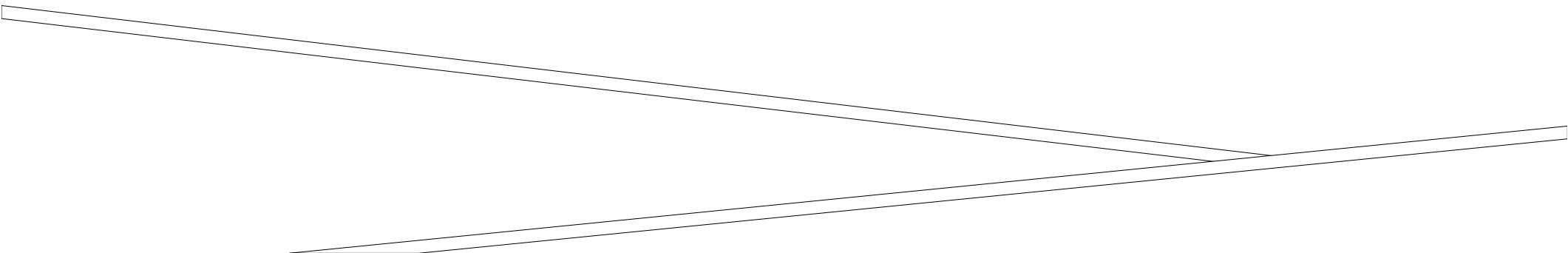


$$4x^2 - 8x + c = 0$$

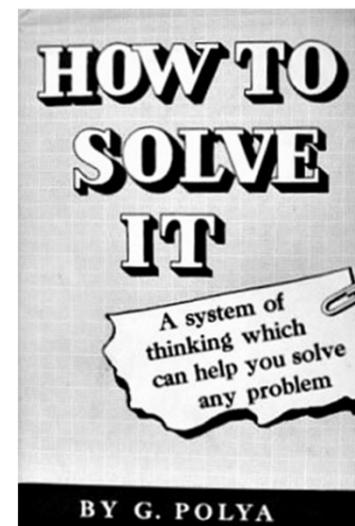


# SZÖVEGES FELADATOK

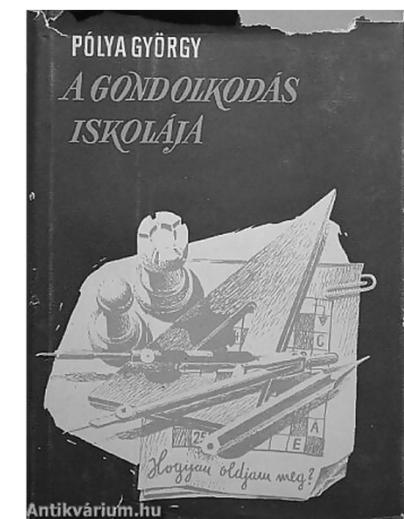
**Szöveges feladat:** A szöveges feladat olyan életszerű, gyakorlati problémafelvetés, amelyben az ismert és az ismeretlen mennyiségek közötti összefüggések szövegesen vannak megadva és megoldásához valamilyen matematikai modellre van szükség.

- ▶ Szövegértés
  - ▶ Modellalkotás (rajz, egyenlet, táblázat, halmazábra, grafikon stb.)
  - ▶ Kidolgozás
  - ▶ Analizálás/szintetizálás
  - ▶ Kapcsolat a minden nap élettel
- 

# PÓLYA GYÖRGY (1887-1985)



1945



1957

# A SZÖVEGES FELADATOK MEGOLDÁSÁNAK LÉPÉSEI (PÓLYA-FÉLE FÁZISOK)

## I. A feladat megértése

Mit ismerünk? Mit keresünk? Milyen eredményre számítunk?  
(becslés)

## 2. Tervkészítés

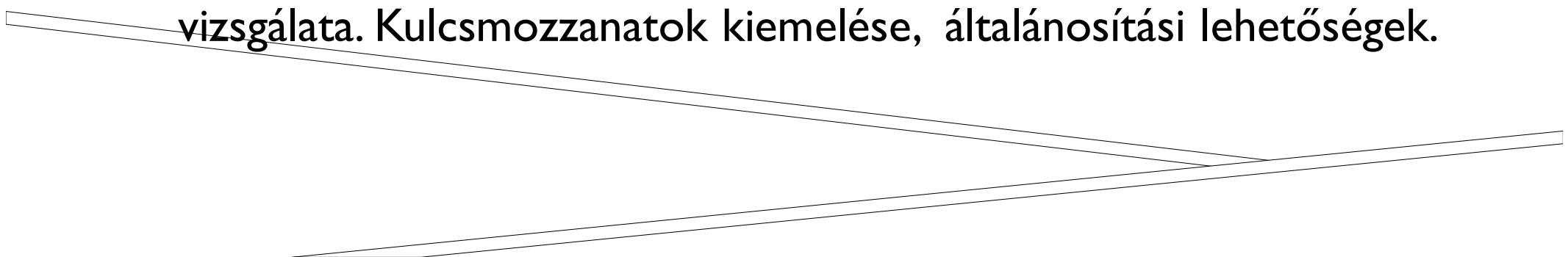
Rokon feladat keresése, a probléma újrafogalmazása

## 3. A terv végrehajtása

Megoldás, szöveges válasz.

## 4. A megoldás vizsgálata

Ellenőrzés a szövegbe helyettesítve. A megoldás realitásának vizsgálata. Kulcsmonozzatok kiemelése, általánosítási lehetőségek.

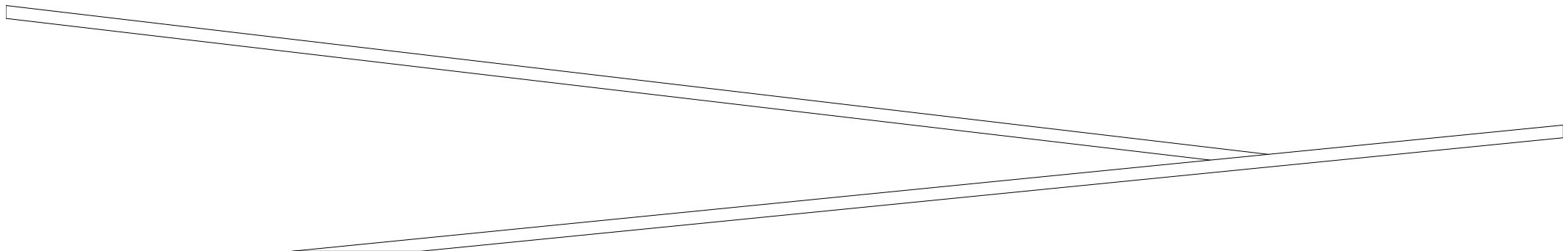


# A SZÖVEGES FELADATOK MEGOLDÁSÁNAK LÉPÉSEI

- ▶ A problémamegoldás Pólya-féle fázisai:
  1. A feladat megértése
  2. Tervkészítés
  3. A terv végrehajtása
  4. A megoldás vizsgálata
- ▶ A szöveges feladatok megoldása:
  1. A szöveg értelmezése, adatok kigyűjtése, az eredmény megbecslése
  2. Megoldási terv készítése
  3. Megoldás, szöveges válasz
  4. Ellenőrzés a szövegbe helyettesítve, további észrevételek a feladathoz

# SZÖVEGES FELADATOK MEGOLDÁSI TERVE

- ▶ Egyenlet, egyenlőtlenség, egyenletrendszer
- ▶ Következtetés
- ▶ Visszafelé gondolkodás
- ▶ Halmazokba rendezés
- ▶ Rajz
- ▶ Táblázat



# A SZÖVEGES FELADATOK CSOPORTOSÍTÁSA MEGOLDÁSI MÓD SZERINT

- ▶ Elsőfokú egyenlettel
  - ▶ Elsőfokú egyenletrendszerrel
  - ▶ Diofantikus egyenlettel
  - ▶ Másodfokú egyenlettel
  - ▶ Másodfokú egyenletrendszerrel
  - ▶ Exponenciális, logaritmikus egyenlettel
- megoldható szöveges feladatok.

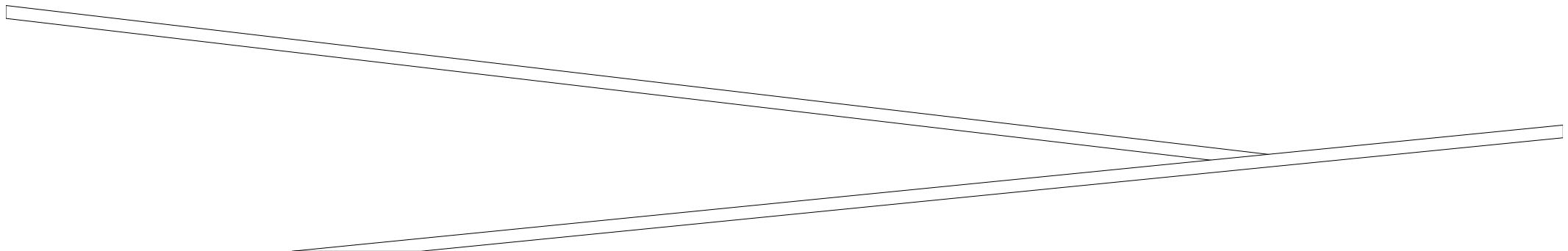
# A SZÖVEGES FELADATOK CSOPORTOSÍTÁSA TARTALOM SZERINT

- ▶ Számok, mennyiségek közötti összefüggésekkel
- ▶ A helyiértékes írásmód felhasználásával
- ▶ Együttes munkavégzéssel
- ▶ Százalékszámítással
- ▶ Fizikai számításokkal (mozgással)
- ▶ Kémiai számításokkal (keveréssel)
- ▶ Geometriai számításokkal
- ▶ Számtani, mértani sorozatokkal
- ▶ Statisztikai számításokkal

**kapcsolatos szöveges feladatok**

# TOVÁBBI CSOPORTOSÍTÁSI SZEMPONTOK

- ▶ Az adatok száma szerint: felesleges adat vagy adathiány
- ▶ A megoldások száma szerint: egy, több vagy nulla megoldás
- ▶ A műveletek száma és fajtája szerint
- ▶ Szövegezése szerint: egyenes vagy fordított, azaz explicit vagy implicit szövegezésű



# I0B/I37/3.

Egy baráti társaság szállást foglalt egy hegyi panzióban. Együttesen 240 euróba került a szállás. Ketten nem tudtak elmenni, így az ő részüket is ki kellett fizetni. Ezért minden résztvevőnek az eredetileg meghatározott összegnél 4 euróval drágább volt a szállásköltség. Hányan vettek részt az összejövetelen, és mennyit kellett a szállásért fizetni?