Valószínűség, statisztika tanítása

A Valószínűségi szemlélet alapozása 1-6. osztály

- A *biztos*, a *lehetetlen* és a *lehet, de nem biztos* események megkülönböztetése
- Valószínűségi játékok, kísérletek – események gyakoriságának, relatív gyakoriságának mérése
  - dobókockák, pénzérmék, korongok, pörgettyűk, színes golyók, számkártyák
- Események valószínűségének (esélyeknek) az összehasonlítása
  - Szubjektív: tippelés
  - Objektív: kísérlet
  - Elméleti (kombinatorikai) megfontolások

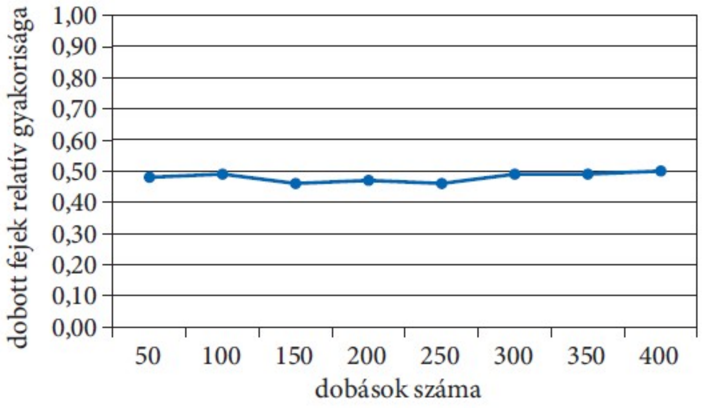
Esélyek összehasonlítása – Melyik valószínűbb? 4-6. osztály

- Három piros-kék koronggal dobunk. Milyen események következhetnek be? Végezzünk 100 dobásból álló kísérletsorozatot! Először tippeljük meg, hogy az egyes események 100-ból hányszor fordulnak elő! A kísérlet elvégzése után keressünk magyarázatot a kapott eredményekre!

Lehetőségek	3 piros (PPP)	2 piros, 1 kék (PPK)	1 piros, 2 kék (PKK)	3 kék (KKK)
Tipp				
Ennyiszer fordult elő				

A relatív gyakoriság változása a kísérletek számának növelésével

	Dobások száma összesen	Ebből a fejek **gyakorisága**	Fejek **relatív gyakorisága**
1.	50	24	0,48
2.	100	49	0,49
3.	150	69	0,46
4.	200	93	0,47
5.	250	116	0,46
6.	300	148	0,49
7.	350	172	0,49
8.	400	201	0,50



A valószínűség fogalmának megközelítési lehetőségei

1. Statisztikus megközelítés (7-11. osztály): esemény gyakorisága, relatív gyakorisága
   - Az esemény valószínűsége az az érték, ami körül az adott esemény relatív gyakorisága ingadozik.

2. Kombinatorikus megközelítés 9-11. osztály

A klasszikus valószínűségi mező fogalma

- A kísérlet kimenetét a körülmények nem befolyásolják. véletlen
- A kísérletnek *véges* számú különböző kimenete lehetséges. elemi események
- Ezek a kimenetek egyenlő valószínűséggel következnek be.

Egy elemi esemény valószínűsége , ahol az elemi események száma.

Ha egy esemény db elemi esemény összegeként adódik, akkor

3. Axiomatikus megközelítés – Eseményalgebra (11. osztály)

Halmazalgebrai analógiák

- Esemény, elemi esemény, összetett esemény, eseménytér
- Események összege, szorzata, ellentettje
- Egymást kizáró események
- Teljes eseményrendszer
- Példa: *Egy diák vonattal Budapestre utazik. Legyen A az az esemény, hogy az út során zenét hallgat, B az, hogy internetezik, C pedig az, hogy olvas. Írja le szövegesen, mit jelentenek az alábbi események:*

A valószínűség fogalma

- Definíció: Legyen adott a H eseménytér. Az eseménytérhez tartozó események halmazán értelmezett valós értékű függvényt az esemény valószínűségnek nevezzük, ha
    1. – ra
    2. esetén.
- Tulajdonságok:

Példák

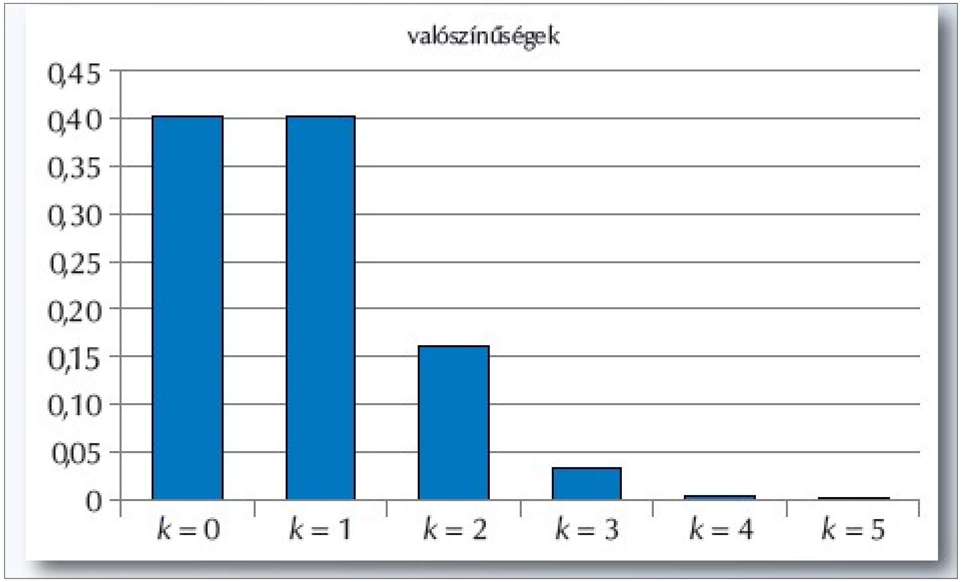
1. Egy szabályos dobókockával kétszer dobva, mi a valószínűsége annak, hogy a dobott számok a) összege prím; b) szorzata prím; c) összege *9*-nél kisebb?

2.dobás / 1.dobás	1	2	3	4	5	6
1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**
2	**3**	4	**5**	6	**7**	8
3	4	**5**	6	**7**	8	9
4	**5**	6	**7**	8	9	10
5	6	**7**	8	9	10	**11**
6	**7**	8	9	10	**11**	12

Diszkrét valószínűségeloszlások, várható érték

- Teljes eseményrendszer eseményeinek valószínűségeit határozzuk meg.
- A valószínűségeket oszlopdiagramon ábrázoljuk

Példa: Dobjunk fel 5 dobókockát és számoljuk meg, hány hatost dobunk. Legyen k a dobott hatosok száma. Az egyes k értékekhez tartozó valószínűségeket ábrázoljuk oszlopdiagrammon:



A hatos dobás M várható értéke:

Események függetlensége

- Két esemény független, ha az egyik esemény bekövetkezése nem befolyásolja a másik esemény valószínűségét.
- Példa független eseményekre: 32 lapos kártyából ászt ill. pirosat választunk.
- Példa nem független eseményekre: 30 lányból 12 szőke, 10 kék szemű. A szőkék közül 8 kék szemű. Kék szeműt választunk az összes közül, vagy kék szeműt választunk a szőkék közül.

Visszatevéses mintavétel binomiális eloszlás

2. Egy zsákban db golyó van: 3 sárga, 7 piros színű. Egymás után -ször húzunk 1-1 golyót visszatevéssel. Mennyi a valószínűsége, hogy az húzás eredménye között pontosan sárga lesz?
    - Összes estek száma: ismétléses variáció
    - Kedvező esetek száma:

Annak a valószínűsége, hogy egy *n*-szer elvégzett kísérletsorozat során egy *p* valószínűségű esemény éppen *k*-szor fordul elő: .

Visszatevés nélküli mintavétel hipergeometrikus eloszlás

3. Egy zsákban 10 db golyó van: 3 sárga és 7 piros színű. Egymás után 5-ször húzunk 1-1 golyót visszatevés nélkül. Mennyi a valószínűsége, hogy az 5 húzás eredménye között pontosan 2 sárga lesz?

- Összes esetek száma: ismétlés nélküli kombináció
- Kedvező esetek száma:

Legyen adott számú elem, közülük legyen valamilyen szempontból kitüntetett. Annak a valószínűsége, hogy az elem közül -et kiválasztva a kiválasztottak közt éppen darab kitüntetett legyen:

A/11/210/23.

23. Ha 10 gyerek, köztük Bence és Dönci sorba áll, mennyi a valószínűsége, hogy ők ketten nem kerülnek egymás mellé?

A/11/211/36.

36. Egy müzlit gyártó cég reklámja szerint az ő müzlisdobozaik közül „Hétből három ajándékot is rejt!”.

a) Véletlenszerűen kiválasztva egy ilyen müzlisdobozt, mekkora annak a valószínűsége, hogy abban lesz ajándék?

A bolt polcait mindennap újra feltöltik, így a müzlisdobozok sohasem fogynak el.

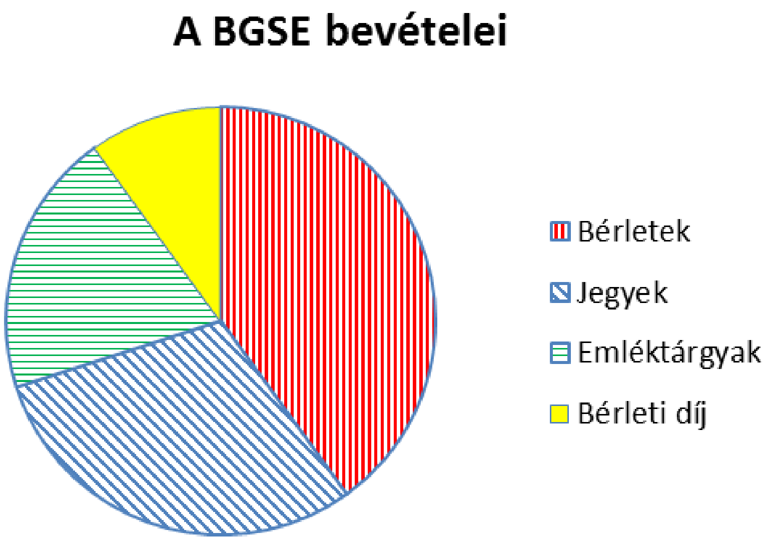
b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy ha a hét minden napján véletlenszerűen vásárolunk egy-egy ilyen müzlit, akkor a hét közül pontosan három dobozban lesz ajándék?

Adatgyűjtés, adatábrázolás

- Adatgyűjtés és adatlejegyzés megfigyelés vagy kísérlet alapján
- Adatábrázolás
  - Táblázat
  - Diagram
    - Pontdiagram
    - Vonaldiagram (grafikon)
    - Oszlopdiagram
    - Kördiagram

Diagramok elemzése

- Diagramból táblázat készítése
- Diagramokról leolvasható statisztikai jellemzők (módusz, terjedelem, maximális, minimális érték stb.)



A sportegyesület éves bevételeinek megoszlását tartalmazza a következő kördiagram. Tudjuk, hogy a bérleti díjból származó bevétele 600.000 forint volt. Az emléktárgyak eladásából származó bevétel összege 1,2 millió forint. Határozzuk meg a bérletekből származó bevételt; a jegyekhez tartozó összeget; a teljes bevételt!

Adatsokaságok (számsokaságok) statisztikai jellemzői

- Gyakoriság
- Relatív gyakoriság
- Átlag
  - Számtani közép, súlyozott számtani közép
- Módusz
- Medián
- Terjedelem
- Átlagtól való átlagos abszolút eltérés
- Szórás (négyzetes szórás)

Adatsorból gyakoriságtáblázat

Példa: 30 családban vizsgáltuk meg a gyermekek számát. A következő adatsort kaptuk:

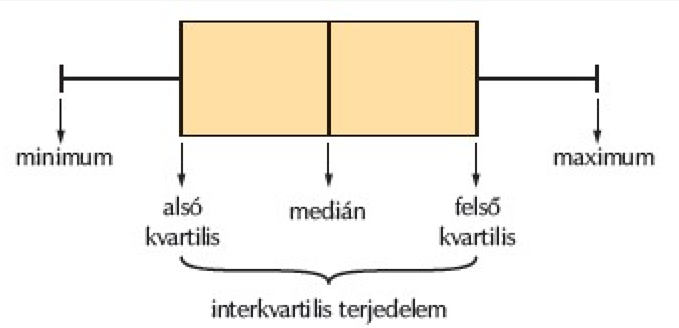
2; 1; 2; 2; 2; 2; 0; 1; 3; 1; 1; 0; 4; 2; 2; 1; 0; 3; 5; 1; 0; 0; 2; 2; 1; 3; 3; 2; 0; 6

Határozza meg a fenti adatsor mediánját, móduszát, és az átlagos gyermekszámot!

- Gyakorisági táblázat:

Gyermekszám	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Családok száma	6	7	10	4	1	1	1

Kvartilisek és a dobozdi



- A rendezett mintát négy egyenlő darabszámú részre bontjuk.
- A részeket a kvartilisek határozzák meg: Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4

  Q_0 a minta minimuma, Q_4 a maximuma, Q_2 a mediánja,

  Q_1 az alsó kvartilise, Q_3 a felső kvartilise
- Az alsó és felső kvartilis meghatározásánál a mediánt nem vesszük figyelembe
- Terjedelem: Q_4-Q_0, Interkvartilis (vagy Fél-) terjedelem: Q_3-Q_1
- Doboz (box-plot, sodrófa) diagram:

A/11/170/3

3. A Rubik-kocka-versenyeken többféle versenyszám létezik. Az egyik versenyszám az, hogy ki tudja kevesebb forgatással kirakni a megkevert kockát. (Érdekes tény, hogy a kocka 20 lépéssel mindig kirakható.)
A 2019-ben Budapesten rendezett nemzetközi bajnokságon 21 forgatással nyerte Balog Dávid ezt a versenyszámot.
A döntőben a következő 44 eredmény született:

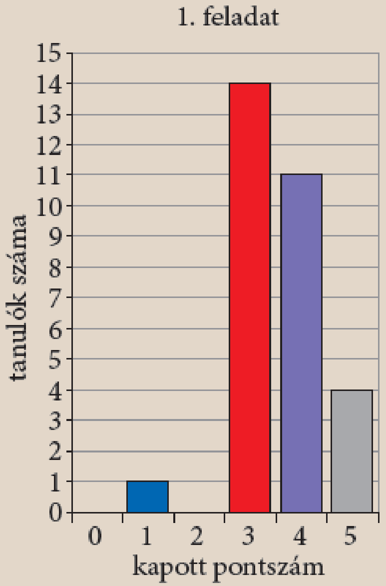
forgatás száma	21	24	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	45	46	47	49	51	53
gyakoriság	1	1	1	2	2	2	1	2	5	2	4	2	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	1	1	2

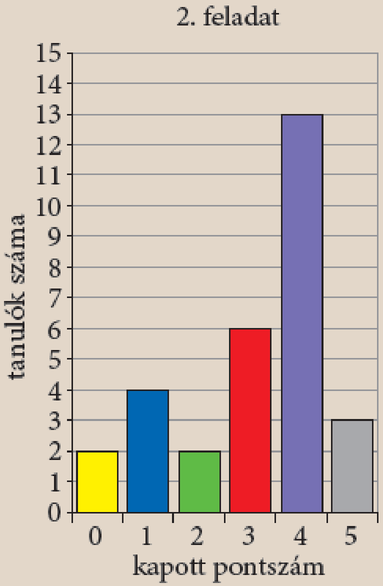
Készíts dobozdiagramot a versenyen elért eredményekről!

A/11/162/3.

3. (Érettségi feladat, 2011)

Egy iskolai tanulmányi verseny döntőjébe 30 diák jutott be, két feladatot kellett megoldaniuk. A verseny után a szervezők a mellékelt oszlopdiagramokon ábrázolták az egyes feladatokban szerzett pontszámok eloszlását:





a) A diagramok alapján töltsd ki a táblázat üres mezőit! Két tizedesjegyre kerekíts!

	1. feladat	2. feladat
Pontszámok átlaga		
Pontszámok mediánja		

b) Ábrázold kördiagramon a 2. feladatra kapott pontszámok eloszlását! Mekkora középponti szögek tartoznak az egyes tartományokhoz?

c) A versenyen minden tanuló elért legalább 3 pontot. Legfeljebb hány olyan tanuló lehetett a versenyzők között, aki a két feladat megoldása során összesen pontosan 3 pontot szerzett?