

Gondolkodási módszerek

Kombinatorikai problémák

- Véges halmazok elemeinek összeszámlálására vonatkozó problémák
- Felmerülő kérdések a problémamegoldás során:
 - Minden esetet összeszámláltunk?
 - Különböző eseteket számláltunk össze?
- A feladatok nehézségi szintje nő
 - Az esetszám növelésével
 - A válogatási szempontok számának növelésével
- Kombinatorikus szemléletmód kialakítása

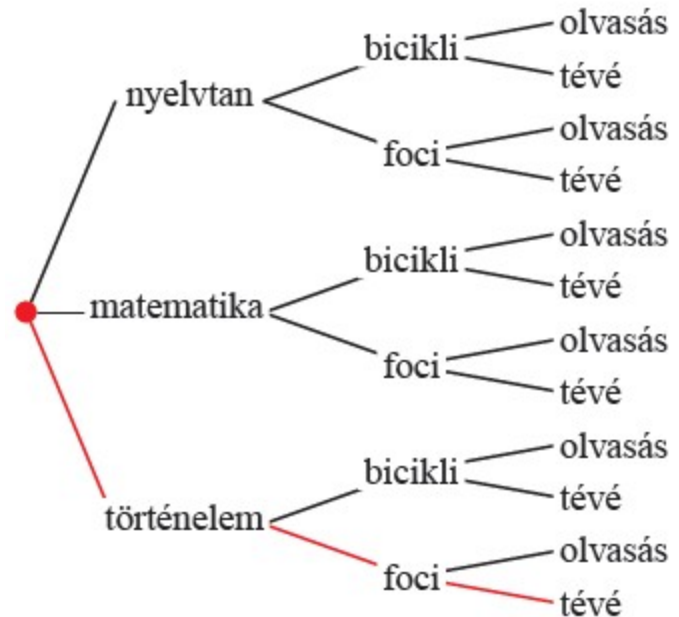
Az esetek felsorolása

1-6. évfolyam

- Esetek megkülönböztetése; néhány, majd az összes eset felsorolása ötletszerűen
 - Kis esetszám
 - Tárgyi tevékenység (gyöngyfűzés, építés, ...)
 - Rajzos, színezős feladatok
- Összes eset felsorolása szisztematikus kereséssel:
 - Táblázatba rendezés
 - Fagráfos elrendezés

B/6/4. OLD.

Dacos Dani hazafelé ballag az iskolából az első tanítási nap után. Azon morfondírozik, hogy mivel töltse el a nap hátralevő részét. „Először is kellene egy kicsit tanulni, de legfeljebb egy tárggyal fogok első nap foglalkozni: vagy átnézem a nyelvtani szabályokat, vagy átfutok a történelmi eseményeken, vagy egy picit matekozom. Utána bringázni vagy focizni fogok. Este esetleg olvasom a nyári kötelező olvasmányt vagy tévét nézek.” Hányféleképpen töltheti Dani a nap hátralevő részét?



Formális módszerek

7-9. évfolyam

1. Szorzási módszer

1. Panni matricás füzetében különféle szemeket orrokat, szájakat lehet fejeknek ragasztani, így különböző arcokat lehet összerakni. Hányféle arcot rakhat össze Panni, ha 2-féle szem (nyitott - csukott), 3-féle száj (egyenes, mosolygós, szomorú) és a) egyféle, b) kétféle orr van?
2. Debrecenből Budapestre eljuthatunk autóval, busszal vagy vonattal. Budapestről Bécsbe autóval, repülővel, vonattal, busszal vagy hajóval. Hányféle módon juthatunk el Debrecenből Bécsbe, ha Budapesten bármelyik közlekedési eszköztől bármelyikre átszállhatunk?

1. Összeadási módszer

- Betűtáblákból szavak kiolvasása

2. Esetszétválasztás módszere

- Hány háromjegyű páros számot alkothatunk a 0 1; 2; 4 számkártyák felhasználásával?

3. Kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés

- Peti akváriumában 3 hal van, Pinty Punty és Panty. Peti belemeríti a halfogó hálóját az akváriumba és kiemeli. Hányféle eredménye lehet a halászatnak?

Egy probléma – több modell

Egy modell – több probléma

- A. Mindegyik hallal két dolog történhet, vagy kifogják vagy nem. Jelöljük ezt + vagy – jellel. A kétféle jelből 3 tagú sorozatokat képezünk. (ismétléses variáció)
- B. A 3 elemű halmaz {Pinty; Puntty, Panty} összes részhalmazainak számát határozzuk meg.
- C. Esetszétválasztás az egy merítéssel kihalászott halak száma szerint (0; 1; 2; 3 hal)
 - Egy pénzérmét feldobunk 3-szor egymásután. Hányféle kimenete lehet ennek a dobássorozatnak?
 - Egy pár 3 gyereket tervez. Hányféleképpen alakulhat a fiúk és lányok eloszlása?

Formális módszerek

7-9. évfolyam

4. Komplementer halmaz elemszámának meghatározása

- Két dobókockával dobunk. Hányféleképpen lesz a dobott számok szorzata páros?

5. Rekurzió

A lehetőségek összeszámlálását a kisebb elemszámmal kezdjük, majd ezt felhasználva lépünk a következőre.

- Egy 8 fős társaságban mindenki koccint mindenkivel. Hány koccintás történt?

B/9/36/3

3. példa

A 0, 1, 2, 3, 5 számjegyekből hány darab 5 jegyű, 5-tel osztható természetes szám készíthető, ha

- a) minden számjegyet fel kell használni;
- b) egy-egy számjegy többször is szerepelhet?

A/I/9/3.

- 3.** Egy büfében a hamburgert kétféle alappal kínálják. Választhatunk csirkeburgert vagy marhahúsos hamburgert. Mindkettőt kiegészíthetjük extra feltétekkel, ezek közül akár többet is választhatunk, a feltétek sorrendje nem számít. Négyféle extra feltétet kínálnak: sajt, hagyma, paradicsom, saláta.

Gabi kiválasztotta az egyik alapot, majd két extra feltétet rendelt. Hányfélét rendelhetett? Készítsetek ábrát (gráfot) is a feladathoz!



Struktúrák felismerése

10-12. évfolyam

- Számít a sorrend?
- Ismétlődhetnek az elemek?
 1. Ismétlés nélküli/ismétléses permutáció
 2. Ismétlés nélküli/ismétléses variáció
 3. Ismétlés nélküli/ismétléses kombináció
 4. Összetett, vegyes problémák

A/11/55/6.

6. 

Egy 12 fős társaság érkezik egy lifthez, amelyben egyszerre csak 4 személy utazhat.

- a)** Hányféle lehet az első utazó négyes?
- b)** Ha már felment az első 4 ember, akkor a többiek közül hányféleképpen választhatják ki, hogy ki utazzon a második menetben?
- c)** Ha már a második menet is elment, akkor hányféleképpen választhatják ki, hogy kik utaznak a harmadik menetben?
- d)** Hányféleképpen utazhat az emeletre a 12 fős társaság 3 menetben?

Kiszámítási képletek

- $n!$ fogalma
- Binomiális együtthatók fogalma, tulajdonságai
- Pascal-háromszög
- Binomiális tétel és bizonyítása

A/11/65/3.

3.

Kösd össze azokat a feladatokat, amelyeknek ugyanaz a szám a megoldása! Határozd meg a közös megoldást! Az egyiknek nincs párja – ehhez találj ki olyan feladatot, amelynek ugyanannyi a megoldása!

A) Hányféleképpen rendezhetünk sorba 6 egyforma almát és 3 egyforma körtét?

B) Hány 3 betűs jelszó állítható össze a MATEK szó betűiből, ha a betűket többször is felhasználhatjuk?

C) Egy 6 elemű halmaznak hány olyan részhalmaza van, amely 2 vagy 3 elemű?

D) A dobókockával háromszor dobtunk. Minden dobás különböző lett. Hányféle dobássorozat történhetett?

E) Hányféleképpen rakhatók sorba a MODERN szó betűi?

F) Hányféleképpen választhatjuk egy 6 fős csoportból, hogy ki legyen az elnök, ki a titkár és ki a jegyző?

G) Hányféleképpen állhat sorba 7 gyerek, köztük Zsuzsi, ha tudjuk, hogy Zsuzsi áll előlről a harmadik helyen?

H) Hányféleképpen választhatjuk egy 9 fős csoportból, hogy ki legyen az a 3 fő, akik képviselik a csoportot?

I) Hány olyan háromjegyű pozitív egész szám van, amelynek mindegyik számjegye páratlan?

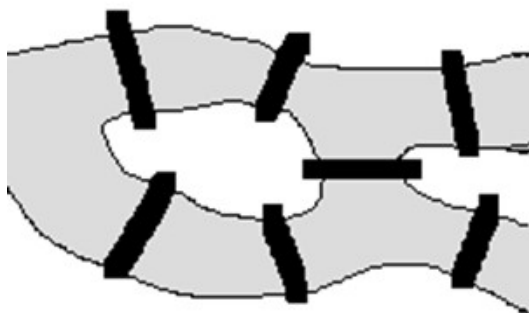
J)

A gráf mint matematikai modell

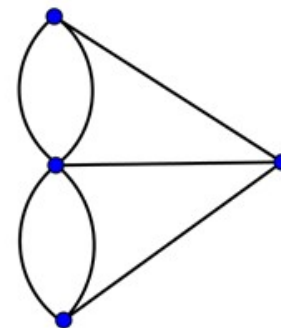
- Konkrét szituációk szemléltetése gráfokkal
- A gráf mint matematikai modell alkalmazása a problémamegoldásban
- Gráfelméleti alapismeretek tanítása
- Klasszikus gráfelméleti feladatok és matematikatörténeti vonatkozásaik
 - Königsbergi hidak

A köönigsbergi hidak problémája

Lehet-e olyan sétát tenni, hogy a hidak mindegyikén pontosan egyszer haladjunk át?



Topológiai szemlélet:
szárazföldek \hookrightarrow a gráf csúcsai
hidak \hookrightarrow a gráf élei



Gráf éleinek bejárása: Euler-gráf: olyan összefüggő gráf, amelyben minden csúcs fokszáma páros vagy pontosan két páratlan fokszámú csúcs létezik.

fogalmak, tételek 9-10. osztályban

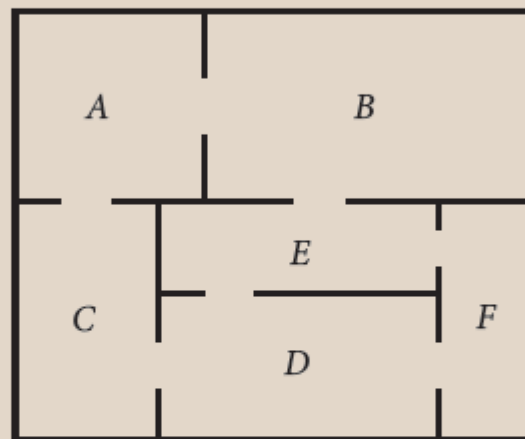
- Gráf, csúcs, él, többszörös él, hurokél
 - egyszerű gráf: nincs se többszörös éle, se hurokéle
 - teljes gráf: minden csúcsból pontosan egy él vezet az összes többi csúcsba. Az n csúcsú teljes gráf éleinek száma: $\frac{n(n-1)}{2}$.
 - Egy csúcs fokszáma: a csúcsból induló élek száma. A fokszámok összege az élek számának kétszerese.

A/11/71/5.

5.

(Érettségi feladat alapján, 2019)

Az ábrán egy kis múzeum alaprajzát látjuk. A múzeum termei közötti kapcsolatot gráffal is szemléltethetjük. A gráf pontjai a termek, élei pedig az átjárók a termek között. (Egy él egy átjárót szemléltet két terem között.)



- a)** Rajzold fel a múzeum termeit és átjáróit szemléltető gráfot!
- b)** Keress olyan útvonalat, amikor minden termen végighaladsz, de mindegyikbe pontosan egyszer lépsz be!
- c)** Keress olyan útvonalat, amikor minden ajtón áthaladsz, de mindegyiken pontosan egyszer! Melyik teremből indulhatsz ehhez?



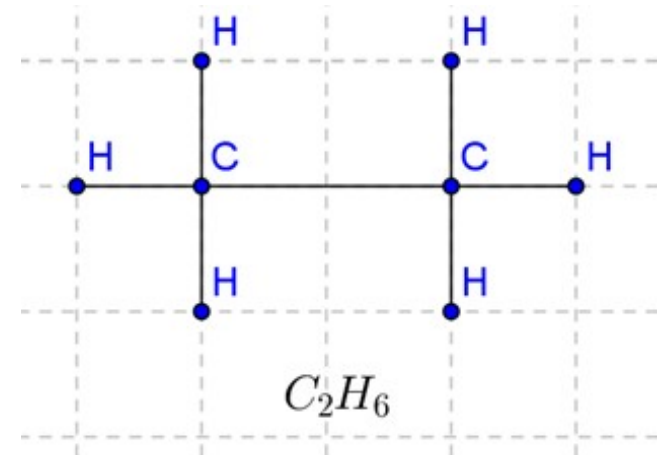
(Érettségi feladat alapján, 2013)

Egy iskola asztalitenisz-bajnokságán hat tanuló vesz részt. Mindenki mindenkivel egy mérkőzést játszik. Eddig Andi egy mérkőzést játszott, Barnabás és Csaba kettőt-kettőt, Dani hármat, Enikő és Feri négyet-négyet.

- a)** Rajzold le az eddig lejátszott mérkőzések egy lehetséges gráfját!
- b)** Lehetséges-e, hogy Andi az eddig lejátszott egyetlen mérkőzését Barnabással játszotta?
- c)** Hányféleképpen választhatunk ki a lejátszott mérkőzések közül hármat, amiről összefoglalót készítünk az iskolaújságba, ha a kiválasztás sorrendje nem számít?
- d)** Hányféleképpen választhatjuk ki, hogy a résztvevők közül melyik három tanulót keressük fel a riporthoz, ha a riportalanyok sorrendje nem számít?

Példák Gráfok alkalmazására

- Matematikai témakörökben
 - Számelmélet; prímfaktorizáció
 - Kombinatorika; összes eset felsorolása
 - Relációk ábrázolása
 - Sík és térgeometria; pontok, egyenesek
- Más területeken
 - Közlekedési útvonalak
 - Sportmérkőzések
 - Elektromos áramkörök
 - Családfák
 - Molekulák szerkezete

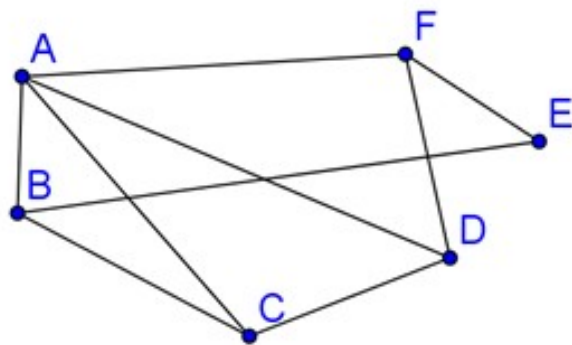


fogalmak, tételek emelt szinten

- Út, kör, összefüggő gráf, fagráf
 - Út: az egyszerű gráf egymáshoz csatlakozó éleinek olyan sorozata, amelyben nincs ismétlődő csúcs
 - Kör: olyan út kezdő és végpontja megegyezik
 - Összefüggő gráf: bármely bármely két csúcsa között vezet út
 - Fagráf: egyszerű gráf, melynek bármely két csúcsa között pontosan egy út létezik.
- Komplementer gráf: Egyszerű gráf komplementer gráfjában két csúcs között pontosan akkor van él, ha az eredetiben nincs.
- Izomorf gráfok: Két csúcs között pontosan akkor van él, ha a másik gráfban is.

Példa komplementer gráfra

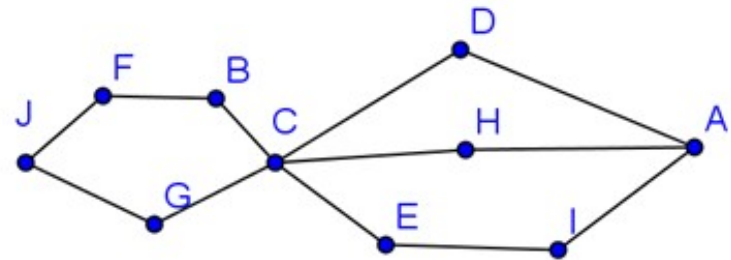
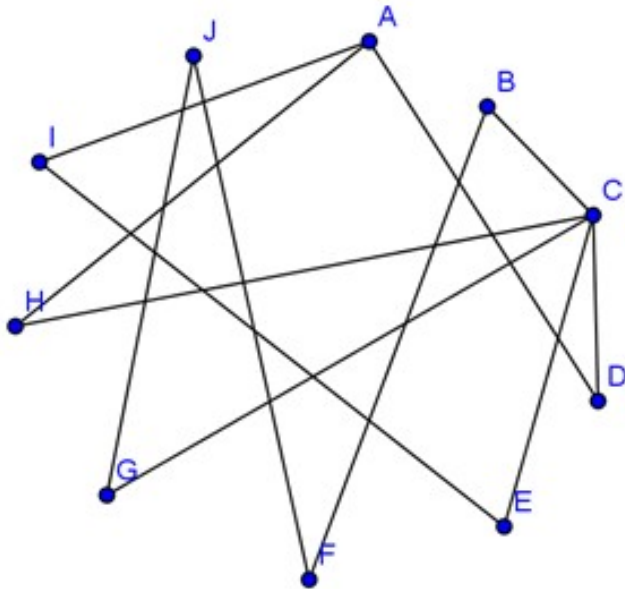
Egy iskolai focibajnokságon 6 csapat vesz részt, a lejátszott mérkőzéseket szemlélteti az ábra. Hány mérkőzés van még hátra, ha minden csapat minden csapattal egy mérkőzést játszik?



Izomorf gráfok

Egy munkahelyen 10 ember dolgozik. J meghallott egy pletykát A-ról. A pletykát mindenki továbbadja annak, akivel barátkozik. Az ábra mutatja, hogy ki kivel van baráti kapcsolatban.

Hány különböző úton juthat el a pletyka A-hoz?
Valaki nem adta tovább a hírt, így a pletyka nem jutott el A-hoz. Ki lehetett a hallgató munkatárs?



Az ábra a londoni metróhálózat egy részletét mutatja. Keressünk a gráfban kört! Adjunk meg 3 különböző utat a King's Cross és a Westminster között!




Halmazszemlélet alakítása

- Nem önálló témakör, integráltan tanítjuk
 - Egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása
 - Oszthatósági feladatok
 - Ponthalmazok
 - Sokszögek rendszerezése
 - Kombinatorika
 - Függvények értelmezési tartománya, annak szűkítése
- Halmazelméleti fogalmak, összefüggések rendszerezése 9. osztály elején

Alapvető fogalmak

- Halmaz, eleme
- Halmaz megadásának módjai, halmazok ábrázolása
- Részhalmaz, valódi részhalmaz, halmazok egyenlősége
- Részhalmazok száma, Pascal-háromszög
- Halmazműveletek: komplementer, metszet, unió, különbség
- Halmazok Descartes-szorzata
- Halmaz számossága
 - Véges halmaz
 - Végtelen halmaz

A/I/25/3.

3.  Egy osztályban 31 tanuló van. Közöttük 9 szőke és 13 kék szemű, a kék szeműek között 9 szőke.

Legyen az osztály tanulóinak halmaza U , az osztály szőke tanulóinak halmaza S , a kék szeműeké pedig K .

a) Készíts halmazábrát az U , S , K halmazokról!


b) Hány eleműek a következő halmazok?

$$S \cup K; \quad K \cap S; \quad K \setminus S; \quad S \setminus K;$$

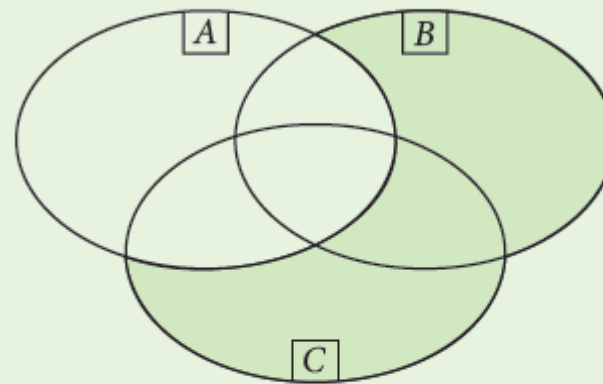
$$U \cap K; \quad U \setminus S; \quad K \setminus U.$$

c) Fogalmazd meg, kik tartoznak a K halmaz U halmazra vonatkozó komplementer halmazába!

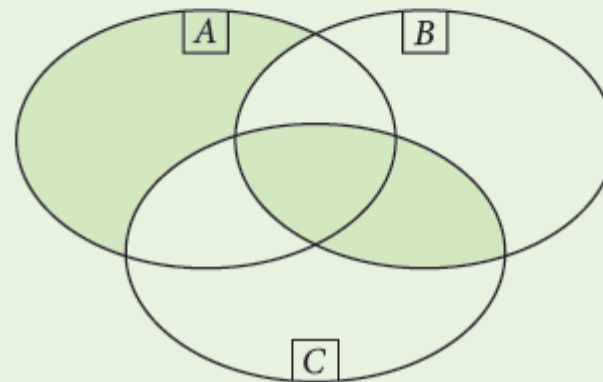
A/I/29/5.

5  Add meg minél egyszerűbb halmazjelölésekkel az alábbi Venn-diagramon sötétebb színnel jelölt halmazokat!

a)



b)



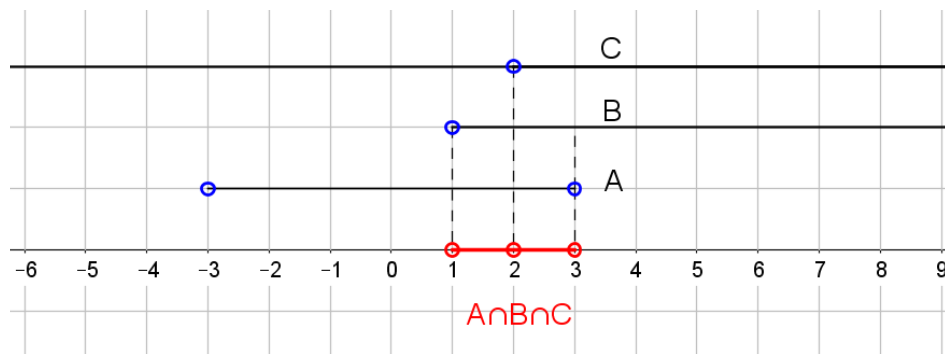
A/I/41/4.

4.  Ábrázold számegyenesen az alábbi intervallumokat!

a) $] -2; 4[\setminus [0; 4[$ **b)** $[0; 7] \cap ([1; 3] \setminus]2; 3[)$

Intervallumokon végzett halmazműveletek

- Határozzuk meg az függvény értelmezési tartományát!



Szitaformula

Egy 30 fős osztályban felmérést végeztek a diákok olvasási szokásaival kapcsolatban. Ebből kiderült, hogy 14-en olvasták A Pál utcai fiúk című Molnár Ferenc-regényt, 18-an az Egri csillagokat, Gárdonyi Géza művét, 17-en pedig a Jókai Mór által írt A kőszívű ember fiait. A Molnár- és a Gárdonyi-regényt 8-an, a Molnár- és a Jókai-művet 9-en, míg a Jókai- és a Gárdonyi-regényt 11-en olvasták. Mindhárom regényt mindössze 5 tanuló olvasta. Hányan nem ismerkedtek meg egyik művel sem?

Halmazok Emelt szinten

- Halmazműveletek, műveleti tulajdonságok, De Morgan azonosságok
- Végtelen halmaz fogalma, megszámlálhatóan végtelen halmazok.
- Halmaz zártsága egy műveletre nézve.

Logikai alapismeretek

- Nem önálló témakör
- Néhány óra erejéig 9-10. osztályban
- Ítélet (állítás) fogalma, logikai érték (igaz, hamis)
- Ítéletek összekapcsolása logikai műveletekkel – logikai kötőszavak jelentéstartalma:
NEM; ÉS; VAGY; HA ... AKKOR; AKKOR ÉS CSAK AKKOR, HA
- Kvantorok értelmezése nyitott mondatokra
MINDEN, LÉTEZIK

10/I/12/4.



Kösd össze az állítást a tagadásával! Az egyik állításnak nincs párja, annak fogalmazd meg a tagadását!

A: Van olyan természetes szám, amely nagyobb vagy egyenlő, mint a számjegyeinek összege.

B: Van olyan természetes szám, amely kisebb vagy egyenlő, mint a számjegyeinek összege.

C: Van olyan természetes szám, amely kisebb, mint a számjegyeinek összege.

D: Van olyan természetes szám, amely egyenlő számjegyeinek összegével.

E: Van olyan természetes szám, amely nagyobb, mint a számjegyeinek összege.

P: Minden természetes szám kisebb számjegyeinek összegénél.


Q: Minden természetes szám nagyobb számjegyeinek összegénél.

R: Minden természetes szám kisebb vagy egyenlő, mint a számjegyeinek összege.

S: Minden természetes szám nagyobb vagy egyenlő, mint a számjegyeinek összege.

Határozd meg az állítások logikai értékét!

10/I/16/4

4  Kösd össze azokat, amelyek ugyanazt az állítást jelentik! Az egyik mondatnak nincs párja, ezt írd fel logikai jelekkel!


A: Ez az állat gyorsan fut.

B: Ez az állat ragadozó.

C: Ez az állat védett.

P: Ez az állat ragadozó, de nem védett.	(1) $A \vee \neg C$
Q: Ez az állat nem fut gyorsan, de nem is ragadozó.	(2) $B \wedge \neg C$
R: Ez az állat gyorsan fut vagy nem védett.	(3) $A \wedge B \wedge \neg C$
S: Ez az állat egy védett ragadozó, amely nem fut gyorsan.	(4) $\neg A \wedge \neg B$
T: Ez az állat ragadozó vagy védett.	(5) $C \wedge B \wedge \neg A$
U: Ez az állat egy gyorsan futó ragadozó, de nem védett.	

10/I/26/2.

2  Fogalmazd meg az állítások megfordítását! Állapítsd meg, hogy melyik állítás igaz, melyik hamis! Ha hamis, mutass ellenpéldát!

Az állítás	Az állítás igaz vagy hamis?	Az állítás megfordítása szavakban	A megfordítás igaz vagy hamis?
Ha egy tört értéke pozitív, akkor számlálója és nevezője is pozitív.			
Ha egy kétjegyű egész szám prímszám, akkor páratlan.			
Ha egy szám abszolút értéke nagyobb, mint 1, akkor a szám is nagyobb, mint 1.			

Néhány logikai törvény használata a hétköznapi nyelvben és a szaknyelvben

- Kvantorok tagadása:
- Harmadik kizárása
- Ellentmondás mentesség:
- Tagadás tagadása:
- Kontrapozíció elve:
- De Morgan azonosságok:
- Implikáció kifejezése diszjunkcióval:

Példák a kvantorok tagadására

- Az alábbi négy állítás közül háromnak a tagadása is megtalálható az állítások közt. Melyik ez a három, és melyiknek mi a tagadása?
 - (1) Minden diák tudja a Nemzeti dalt.
 - (2) Egyetlen diák sem tudja a Nemzeti dalt.
 - (3) Nem minden diák tudja a Nemzeti dalt.
 - (4) Van olyan diák, aki nem tudja a Nemzeti dalt.
- Nincsen rózsza tövis nélkül. = Minden rózsának van tövise.
- Nem mind arany, ami fénylik. = Van, ami fénylik, de nem arany.

Tételek, bizonyítások logikai szerkezete

- Ha, akkor
- Megfordítható tételek
- Nevezetes logikai következtetési sémák:
 - Leválasztási szabály:
 - Indirekt bizonyítás:
 - Láncszabály:
 - Diszjunktív szillogizmus: