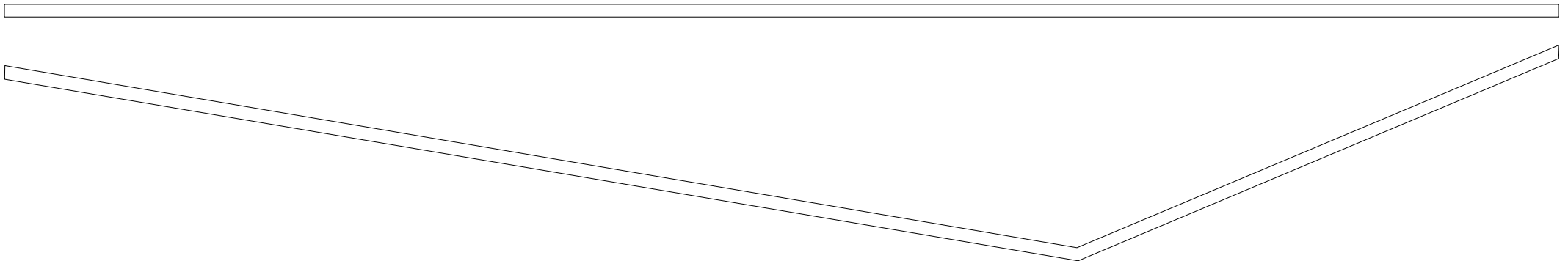


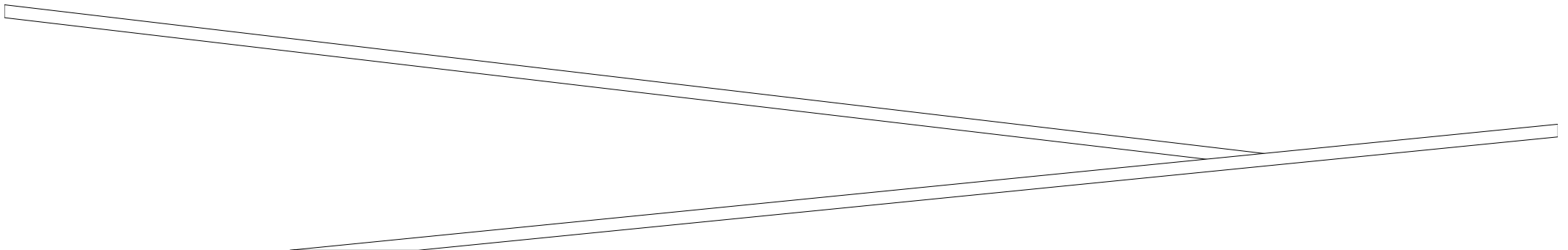
A SZÁMFOGALOM KIALAKÍTÁSA



TERMÉSZETES SZÁMOK ÉRTELMEZÉSE

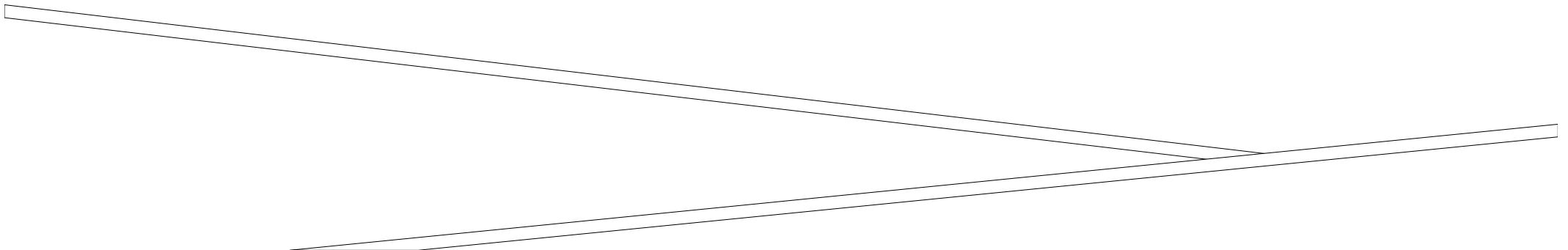
I-5. OSZTÁLY

- ▶ Számok értelmezése 0-tól 10-ig:
 - ▶ Véges halmazok számosságaként
 - ▶ Mérőszámként
 - ▶ Sorszámként
 - ▶ Jelzőszámként
- ▶ A számok fogalmának kiterjesztése analógiák alapján:
 - ▶ Tízes számrendszerbeli helyiértékes írásmód
 - ▶ Kerekítés, nagyságviszonyok



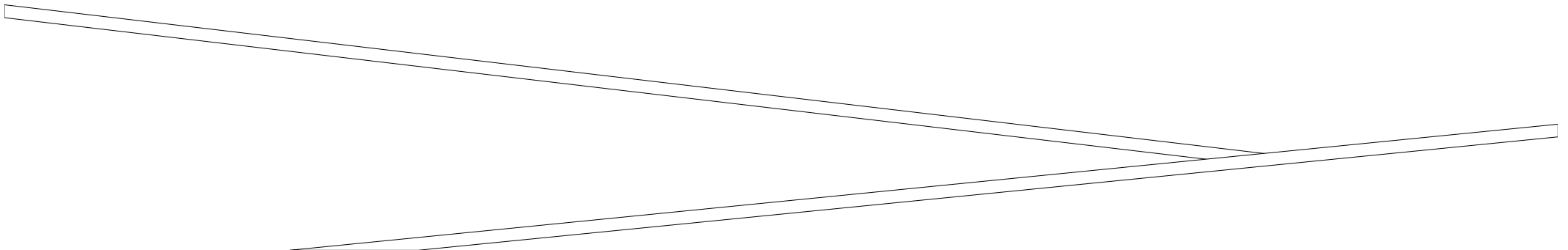
LINEÁRIS SZÁMKÖRBŐVÍTÉS

- ▶ 1. osztály: 10-es, majd 20-as számkör
- ▶ 2. osztály: 100-as számkör
- ▶ 3. osztály: 1000-es számkör
- ▶ 4. osztály: 10000-es számkör
- ▶ 5. osztály: 1000000-s számkör



MŰVELETEK A TERMÉSZETES SZÁMOK HALMAZÁN (I-5. OSZTÁLY)

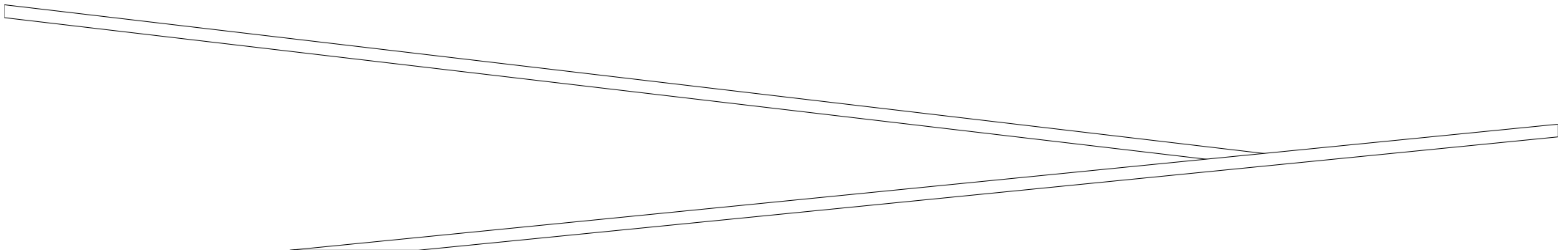
- ▶ A 4 alpművelet értelmezése
- ▶ Műveletvégzés szóbeli és írásbeli algoritmusok alapján
- ▶ Műveletvégzés a 0-val
- ▶ Műveleti sorrend
- ▶ Műveleti tulajdonságok felfedeztetése, megfogalmazása, alkalmazása



STRUKTURÁLIS SZÁMKÖRBŐVÍTÉS

A permanencia-elv alapján:

- ▶ a bővebb számhalmazon értelmezett műveletek ugyanazt az eredményt adják, ha a szűkebb számhalmaz elemeire alkalmazzuk
- ▶ a műveletek és az egyenlőség tulajdonságai érvényben maradnak



EGÉSZ SZÁMOK ÉRTELMEZÉSE

3-5. OSZTÁLY

▶ 3-4. osztály:

- ▶ a negatív egészek bevezetése
- ▶ Hőmérő, számegyenes
- ▶ adósság-készpénz cédulák → két természetes szám különbsége (rendezett számpárok; egy egész számnak végtelen sok számpár felel meg)
- ▶ Egész számok elhelyezkedése a számegyenesen, nagyságviszonyok

▶ 5. osztály:

- ▶ Egész számok abszolútértéke, ellentettje

EGÉSZ SZÁMOK ÖSSZEADÁSA ÉS KIVONÁSA – 5. OSZTÁLY

Az adósság (□) – készpénz (o) modellben:

Összeadás a két tag megjelenítésével

$$(+3)+(+5)=+8 \leftarrow o\ o\ o + o\ o\ o\ o\ o$$

$$(+3)+(-5)=-2 \leftarrow o\ o\ o + \square\square\square\square\square$$

$$(-3)+(+5)=+2 \leftarrow \square\square\square + o\ o\ o\ o\ o$$

$$(-3)+(-5)=-8 \leftarrow \square\square\square + \square\square\square\square\square$$

Kivonás a kisebbítendő alkalmas számpárként való megjelenítésével

$$(+3)-(+5)=-2 \leftarrow o\ o\ o\ o\ o\ o\ \square\square$$

$$(+3)-(-5)=+8 \leftarrow o\ o\ o\ o\ o\ o\ o\ o\ o\ \square\square\square\square\square$$

$$(-3)-(+5)=-8 \leftarrow \square\square\square\square\square\square\square\square\ o\ o\ o\ o\ o$$

$$(-3)-(-5)=+2 \leftarrow \square\square\square\square\square\ o\ o$$

5B/93/I.

1. Írd le a matematika nyelvén a feladatokat, és számold ki, hogy kinek mennyi vagyona lesz!
(Használd készpénz- és adósságcédulókat!)

- a) Aladár vagyona $+5$, és kap $+6$ készpénzt az édesapjától.
- b) Balázs vagyona $+4$, és kap $+12$ készpénzt.
- c) Cili vagyona -8 , és kap $+4$ készpénzt.
- d) Dénes vagyona -6 , és kap $+9$ készpénzt.
- e) Emese vagyona $+10$, és szerez 5 adósságcédulát.
- f) Feri vagyona -7 , és szerez 3 adósságcédulát.

EGÉSZ SZÁMOK SZORZÁSA ÉS OSZTÁSA

6. OSZTÁLY

- ▶ A szorzás ismételt összeadás → ha a **szorzó** 2-nél kisebb egész szám, akkor ez az értelmezés nem megfelelő
- ▶ Tapasztalat: Ha a pozitív szorzót minden lépésben 1-gyel csökkentjük, csökkenő vagy növekvő számtani sorozatot kapunk attól függően, hogy a szorzandó pozitív vagy negatív.

szorzó	...	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	...
szorzandó	...	4	4	4	4	4	4	4	4	...
szorzat	...	16	12	8	4	0	-4	-8	-12	...

- ▶ A pozitív egész számok halmazán a szorzás inverz műveleteként értelmezett osztás a szorzás kiterjesztése után már könnyen kiterjeszthető az egész számok halmazára.

6B/28./7.



7. Számolhatsz vagy okoskodhatsz. Tedd ki az $=$, $<$, $>$ jeleket!

a) $(-25) + (-3) \cdot 2 \square [-25 + (-3)] \cdot 2$

b) $(-13) \cdot (-5) + 17 \square (-3) \cdot 5 + 17$

c) $110 : (-2) - 28 \square (110 - 28) : 2$

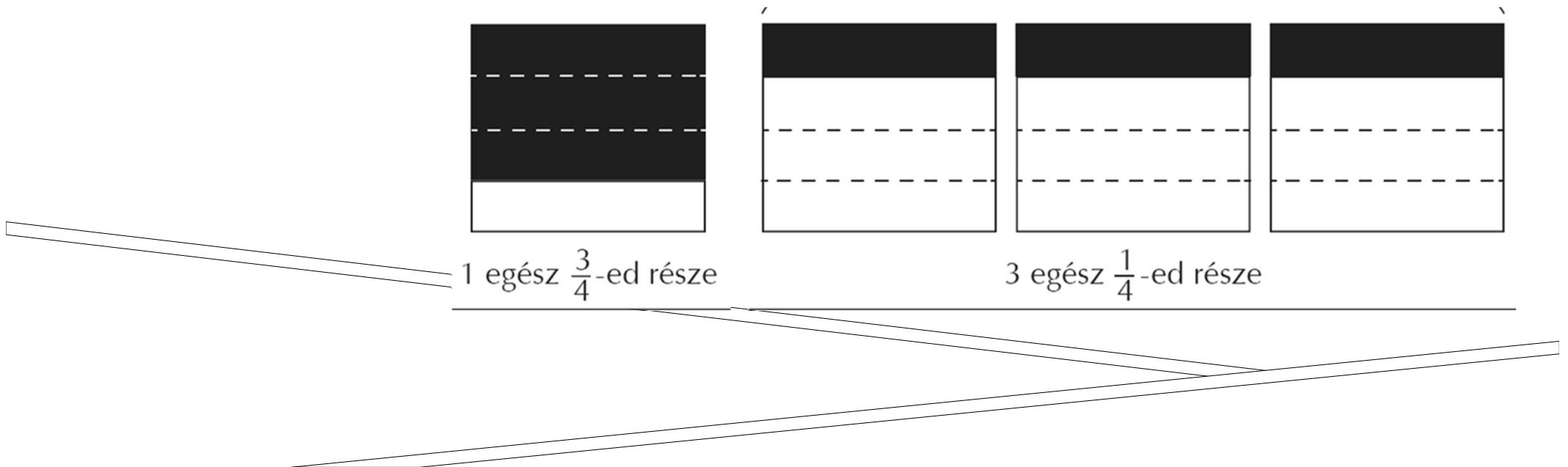
d) $44 + (-5) \cdot 20 \square [44 + (-5)] \cdot 20$

RACIONÁLIS SZÁMOK ÉRTELMEZÉSE

3-6. OSZTÁLY

A pozitív törtek bevezetése (3-4. osztály)

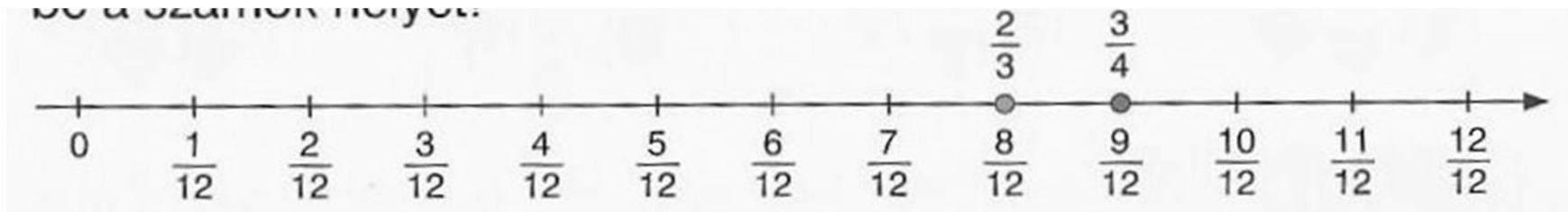
- ▶ Kiindulópont: egyenlő részekre osztás
- ▶ Tapasztalatszerzés tárgyi és rajzos tevékenységekkel a mérhető mennyiség törtrészének számszerűsítésében
- ▶ A tört kétféle értelmezési lehetősége
 - ▶ 1 egészből indul ki: Egységtört, egységtört többszörösei
 - ▶ Több egészből indul ki



TÖRTEK ÖSSZEHAISONLÍTÁSA

(4-5. ÉVFOLYAM)

- ▶ Törtek viszonyítása az 1-hez: 1-nél kisebb, 1-gyel egyenlő, 1-nél nagyobb törtek
- ▶ Azonos értékű, különböző alakú törtek felfedeztetése és tudatosítása (a tört egy egész számokból álló rendezett számpár, ld. Az egésze számok konstruálását)
- ▶ Különböző nevezőjű és különböző számlálójú törtek összehasonlítása
- ▶ A törtek elhelyezése a számegyenesen: tört**rész**ből tört**szám** lesz



5B/I 48./4.

4. Melyik nagyobb? Tedd ki a megfelelő jelet! Segít a tankönyv 142. oldalán lévő ábra.

a) $\frac{1}{3}$ vagy $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{3}$ vagy $\frac{2}{3}$

c) $\frac{1}{2}$ vagy $\frac{2}{3}$

d) $\frac{3}{11}$ vagy $\frac{7}{10}$

e) $\frac{2}{5}$ vagy $\frac{2}{7}$

f) $\frac{9}{10}$ vagy $\frac{2}{3}$

5B/I 54./6.

6. Rajzolj egy 15 cm hosszú szakaszt!

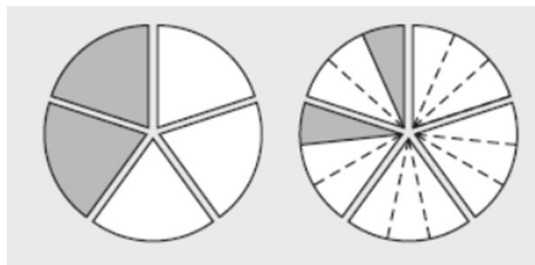
a) Jelöld rajta az $\frac{1}{3}$ -át, $\frac{1}{2}$ -ét, $\frac{3}{15}$ -ét, $\frac{2}{3}$ -át, $\frac{4}{5}$ -ét, $\frac{1}{5}$ -ét, $\frac{5}{15}$ -ét!

b) Olvasd le, hány tizenötöd részből áll $\frac{1}{3}$ rész, $\frac{2}{5}$ rész, $\frac{4}{5}$ rész!

c) Sorolj fel olyan törteket, amelyeket nem lehet tizenötödökkel kifejezni!

MŰVELETEK RACIONÁLIS SZÁMOKKAL (5. OSZTÁLY)

1. Egyenlő nevezőjű (pozitív) törtszámok összeadása, kivonása
2. Különböző nevezőjű (pozitív) törtszámok összeadása, kivonása ← közös nevezőre hozás
3. (Pozitív) törtszámok szorzása természetes számmal ← ismételt összeadás: $3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$
4. (Pozitív) törtszámok osztása természetes számmal ← egyenlő részekre osztás, pl.: $\frac{2}{5} : 3 = \frac{2}{15}$



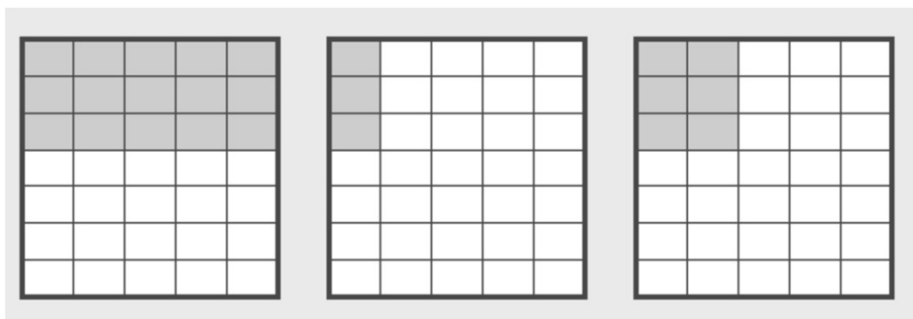
$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$			

SZORZÁS TÖRTSZÁMMAL (6. OSZTÁLY)

- ▶ Mennyiség törtrészének kiszámítása (a nevezővel osztjuk, a számlálóval szorozzuk vagy a számlálóval szorozzuk, a nevezővel osztjuk)
 - ▶ Péter a 400 m-es futóversenyen a táv $\frac{3}{5}$ -öd részét már megtette. Hány métert tett meg eddig? (4. osztályos feladat)
 $400\text{ m} : 5 \cdot 3 = 240\text{ m}$ vagy $400\text{ m} \cdot 3 : 5 = 240\text{ m}$
- ▶ A részképzést és a többszörösképzést kapcsoljuk össze:
 - ▶ Ha az alma kilogrammonként 100 Ft-ba kerül, mennyibe kerül 2; 3; 4; 5 kg alma? És $\frac{1}{2}$ vagy $\frac{1}{4}$ kg alma?
- ▶ A szorzás fogalmának kiterjesztése: Egy mennyiség törtrészén a mennyiség törttel való szorzását értjük.

MENNYI $\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5}$?

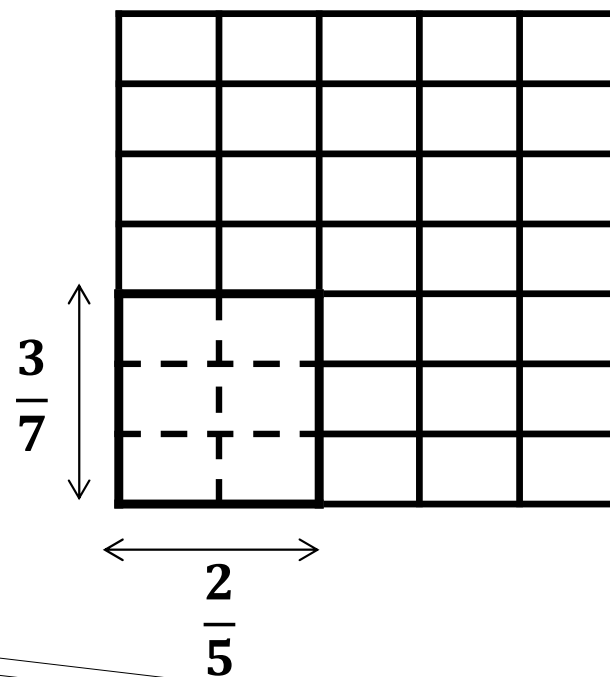
- Mennyi $\frac{3}{7}$ -nek a $\frac{2}{5}$ -öd része?



$$\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5} = \left(\frac{3}{7} : 5 \right) \cdot 2 = \frac{3}{35} \cdot 2 = \frac{6}{35}$$

- Mennyi annak a téglalapnak a területe, amelynek oldalai $\frac{3}{7}$ és $\frac{2}{5}$ hosszúságúak?

$$T = a \cdot b = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{35}$$



MŰVELETEK RACIONÁLIS SZÁMOKKAL

6. OSZTÁLY

4. A reciprok fogalma
5. Tört osztása egész számmal \leftarrow az osztó kifejezése törtrészként $(x:3 = x \cdot \frac{1}{3})$
6. Tört osztása törttel \leftarrow a mennyiség törtrészének ismeretében keressük a mennyiséget.

Milyen hosszú az az útvonal, amelynek $\frac{2}{3}$ része 40 km?

$$x \cdot \frac{2}{3} = 40; x = 40 : \frac{2}{3}$$

$$x : 3 \cdot 2 = 40; x = 40 : 2 \cdot 3 = 40 \cdot \frac{3}{2}$$

6B/I 65/I 0.

10. Keresd meg az egyenlő értékeket!

$A: \frac{2}{3}$ -nak az $\frac{1}{4}$ része

$B: \frac{2}{3} + \frac{1}{4}$

$C: \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}$

$D: \frac{1}{4}$ -nek a $\frac{2}{3}$ része

$E: 2 \cdot 4 : 3$

$F: \frac{2+1}{3 \cdot 4}$

A RACIONÁLIS SZÁM FOGALMA (7. ÉVFOLYAM)

- Azokat a számokat, amelyek felírhatók két egész szám hányadosaként (ahol az osztó nem 0), *racionális számoknak* nevezzük.

A törtszámok értelmezhetők több egész egyenlő részekre osztásának eredményeként, azaz két egész szám hányadosaként .

Az egész számok is felírhatók tört alakban, például $8 = \frac{24}{3}$

7B/39/2.

2. Számítsd ki! Ahol lehet, egyszerűsíts! Ha ügyesen egyszerűsítesz, ezeket a feladatokat fejben is könnyen kiszámíthatod!

$$\frac{2}{3} \cdot 27 - 18$$

$$\frac{15}{7} \cdot 21 - \frac{15}{3}$$

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{100}{80} - (-3)$$

$$\frac{10}{9} : 2 \cdot \frac{9}{5}$$

$$\left(\frac{5}{2} - 0,75 \cdot 2 \right) \cdot \frac{4}{3}$$

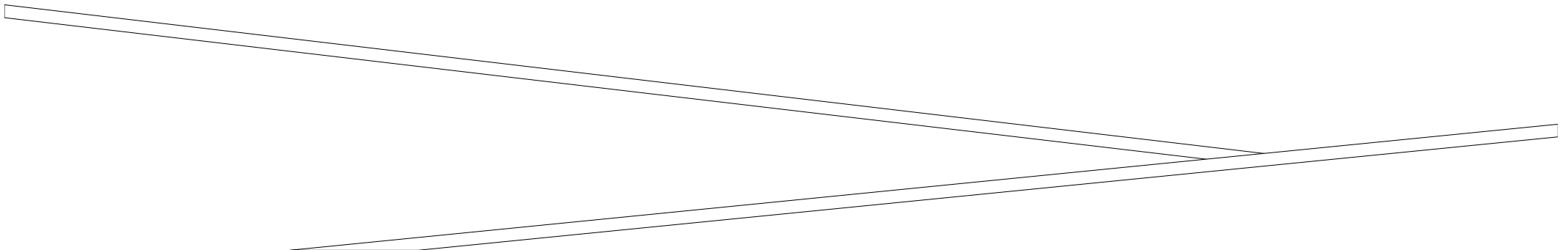
$$0,3 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{3}$$

$$\frac{8}{3} : 2 + \frac{1}{3} \cdot 8$$

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{7}{2} \cdot 3$$

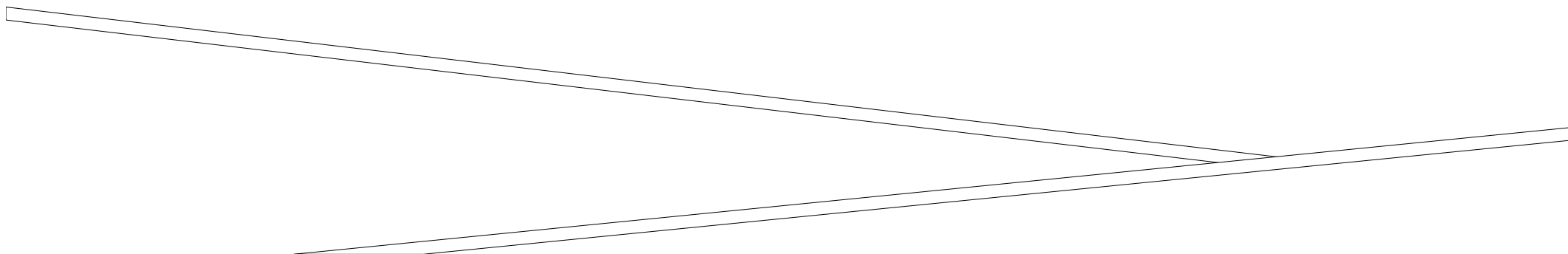
A TIZEDES TÖRT (5. ÉVFOLYAM)

- ▶ Véges tizedes törtek értelmezése
 - ← speciális nevezőjű törtek ($\frac{1}{10}$; $\frac{1}{100}$; ...)
 - ← a helyiérték-fogalom kiterjesztése
- ▶ Műveletek véges tizedes törtekkel ← az írásbeli műveletek algoritmusainak kiterjesztése
- ▶ Véges tizedes törtek összehasonlítása



A HELYIÉRTÉK-TÁBLÁZAT KITERJESZTÉSE

...	ezer	száz	tíz	egy		tized	század	ezred	...
	1000	100	10	1		$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	
				5	,	1			
				5	,	0	1		
		1	0	3	,	2	4		
				0	,	0	0	4	



A TIZEDES TÖRT (6-7. ÉVFOLYAM)

- ▶ Véges tizedes tört átírása közösleges tört alakba

$$0,236 = \frac{236}{1000} = \frac{118}{500} = \frac{59}{250}$$

- ▶ Közösleges tört átírása tizedes tört alakba ← „a törtvonal osztást jelent”

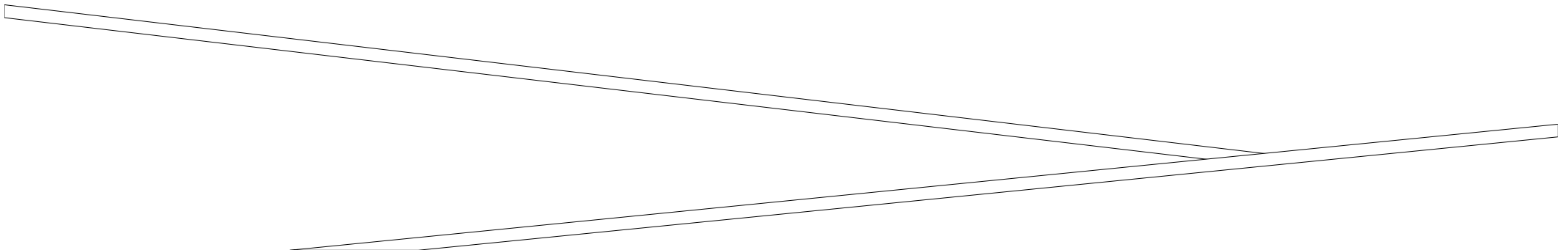
- ▶ $\frac{4}{5} = ?$ $\frac{6}{15} = ?$

- ▶ $\frac{3}{7} = ?$ $\frac{6}{14} = ?$

- ▶ Átírhatók-e a szakaszosan végtelen tizedes törtek közösleges tört alakba?

A RACIONÁLIS SZÁMOK TIZEDES TÖRT ALAKJA

- ▶ Konkrét példák általánosításaként kimondjuk a következő tételleket:
 - ▶ Minden racionális szám véges vagy szakaszosan végtelen tizedes tört.
 - ▶ Minden véges vagy szakaszosan végtelen tizedes tört racionális szám.
- ▶ Léteznek-e olyan tizedes törtek, amelyek nem szakaszosan végtelenek?



7B/19.

Példa

Írjuk át tizedes tört alakba a törteket!

$$\frac{39}{50}$$

$$\frac{5}{3}$$

$$\frac{3}{7}$$

$$\frac{13}{10}$$

$$\frac{7}{125}$$

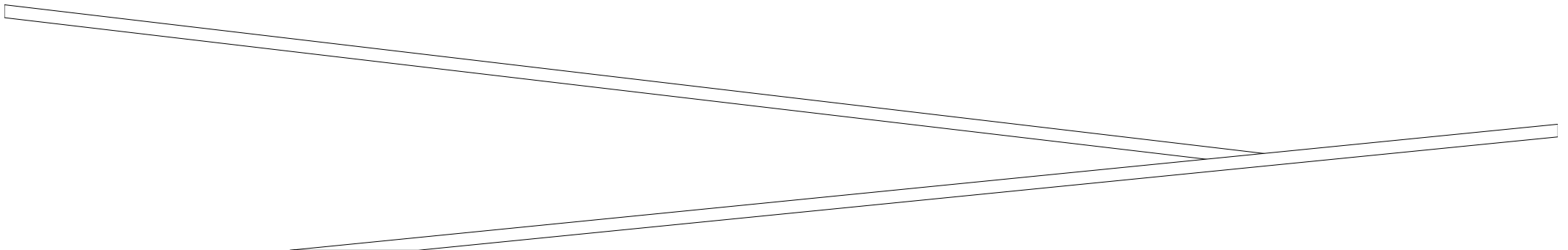
$$\frac{1385}{100}$$

$$\frac{111}{60}$$

$$\frac{1}{9}$$

AZ IRRACIONÁLIS SZÁM FOGALMÁNAK MEGJELENÉSE A 7-8. ÉVFOLYAMON

- ▶ Konstruálhatók nem szakaszosan végtelen tizedes törtek is
→ ezek nem lehetnek racionális számok.
- ▶ A kör kerületének (és területének) kiszámításához egy nem szakaszosan végtelen tizedes tört, a π szükséges.
- ▶ Pitagorasz → Létezik olyan pozitív egész szám, melynek négyzetgyöke nem racionális szám (például a 2).



A VALÓS SZÁM FOGALMA

9. ÉVFOLYAM

- ▶ Korábbi tapasztalatok
 - ▶ Különböző törtszámoknak lehet ugyanaz az értéke, azaz egy racionális szám többféle alakban felírható.
 - ▶ Átírási eljárások a közöséges tört és a szakaszosan végtelen tizedes tört alakok között.
 - ▶ Léteznek olyan számok, amelyek nem írhatók fel két egész szám hányadosaként. Például bizonyítható, hogy a $\sqrt{2}$ **irracionális szám**.
- ▶ A racionális és az irracionális számokat közös néven **valós számok**nak nevezzük.
- ▶ A **valós számok** a végtelen tizedes törtek.

Tétel

$\sqrt{2}$ irracionális szám.

Bizonyítás

Emelt szint

Indirekt bizonyítást alkalmazunk. Tegyük fel, hogy $\sqrt{2}$ racionális szám; ekkor felírható két egész szám hányadosaként. Legyen tehát $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, ahol a p, q relatív prím pozitív egész számok. (Ekkor a tört tovább már nem egyszerűsíthető.)

Átalakításokat végzünk:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

$$2 = \frac{p^2}{q^2},$$

$$2q^2 = p^2.$$

Az egyenlet bal oldalán páros szám áll, így p^2 is páros, s ezért p is páros szám. Ha p páros, akkor p^2 osztható 4-gyel is. Az egyenlet jobb oldalán tehát 4-gyel osztható szám áll, így a bal oldal is osztható 4-gyel. Ha $2q^2$ osztható 4-gyel, akkor q^2 páros, s így q is páros szám.

Ellentmondást kaptunk, hiszen ekkor p és q nem relatív prímek. Ez azt jelenti, hogy a feltevésünk hamis volt, tehát $\sqrt{2}$ valóban irracionális szám.

PÉLDÁK

1. Írjuk fel tizedes tört alakban a következő számokat!

$$\frac{15}{3}; \frac{5}{2}; -\frac{3}{6}; \frac{8}{3}; \frac{16}{6}; \frac{45}{11}; \frac{18}{13}; \frac{1}{7}; \frac{15}{173}$$

2. Írjuk fel két egész szám hányadosaként!

$$0,65; 23,145; -6; 2, \dot{3}; 14, \overline{356}; 0,3\overline{458}; 0, \dot{9}$$

3. Döntsük el, hogy az alábbi valós számok közül melyek racionálisak, melyek irracionálisak!

$$1,325; 2, \overline{17}; \sqrt{10}; \sqrt{324}; -\sqrt{45}; 1,010110111 \dots$$

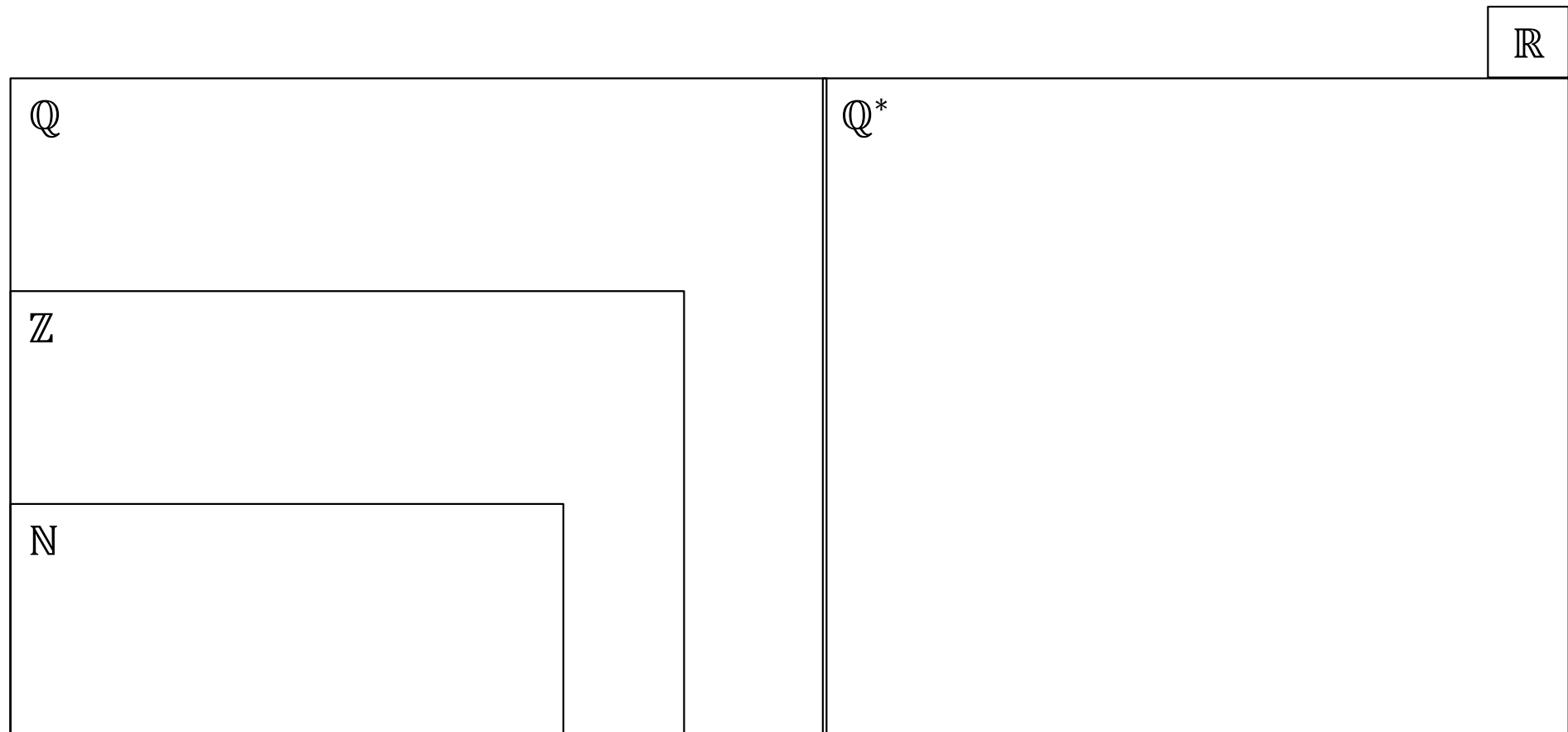
9B/20/5.

5. K1

Rendezzük növekvő sorrendbe az alábbi számokat!

$$A = -2,8; \quad B = -\frac{59}{21}; \quad C = \frac{7}{3}; \quad D = 2,33; \quad E = -\frac{17}{6}; \quad F = \frac{25,4}{11}; \quad G = \sqrt{5,44}.$$

A SZÁMHALMAZOK KAPCSOLATA



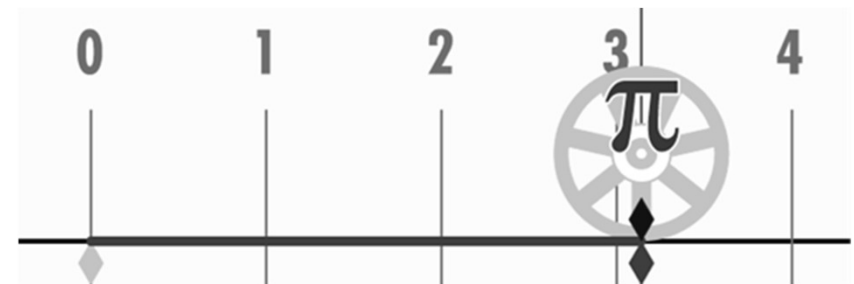
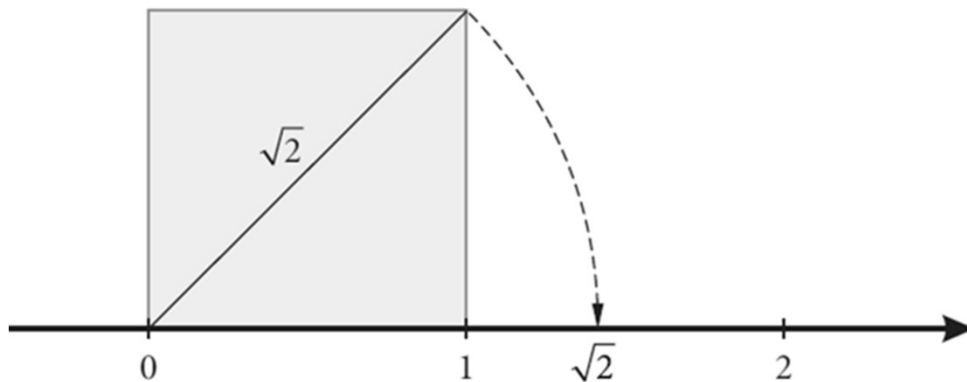
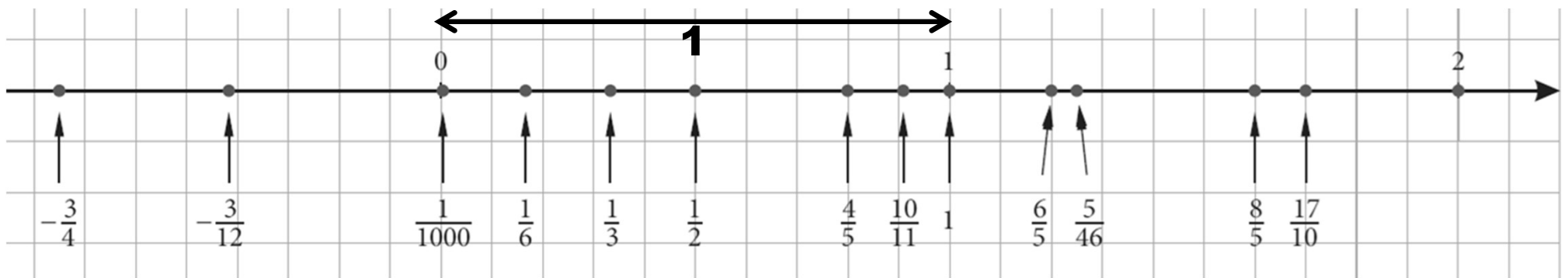
Helyezzük el a halmazábrán az alábbi számokat:

$10; \sqrt{5}; -\frac{15}{7}; 0; -4; 6,7\overline{45}; \frac{6}{2}; 1,8; \frac{\pi}{3}$

VALÓS SZÁMOK A SZÁMEGYENESEN (9. ÉVFOLYAM)

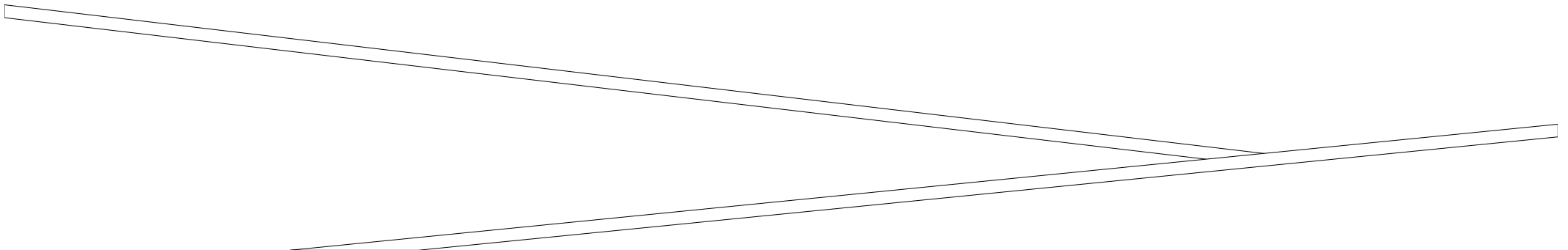
- ▶ A számfogalom alakítása szakasz hosszának mérése alapján
 - ▶ Az olyan szakaszokat, amelyeknek van közös mértékegysége, azaz, amelyek aránya egy racionális szám, *összemérhetőnek* nevezzük.
 - ▶ Ha ilyen közös mértékegység nincs, a szakaszok *nem összemérhetőek*. Pl. a négyzet oldala és átlója *nem összemérhető*.

A számegyenesen bármely valós számnak megfelel egy pont, és fordítva: a számegyenes bármely pontjának megfelel egy valós szám.



INTERVALLUMOK

- ▶ A számegyenes szakaszait intervallumoknak nevezzük. Ezek a valós számok részhalmazai.
- ▶ A valós számok halmaza „mindenütt sűrű”.
 - ▶ Példa: Adjuk meg az $\left] \frac{1}{6}; \frac{1}{5} \right[$ intervallum két racionális és két irracionális elemét!
- ▶ A végtelen tizedes törteket racionális számokkal közelítjük.
 $[1; 2] \supset [1,4; 1,5] \supset [1,41; 1,42] \supset [1,414; 1,415] \supset \dots \ni \sqrt{2}$



VALÓS SZÁMOK KÖZELÍTŐ ÉRTÉKEI

- ▶ A mindennapi életben nincs szükség végtelen tizedes törtekre.
 - ▶ Az érettségi feladatokban a számolások végeredményeit adott számú (általában két) tizedes jegyre kerekítve kell megadni.
 - ▶ A zsebszámológépek kijelzőjén a számítások eredménye véges tizedes törtként jelenik meg.
 - ▶ A részeredményeink lehetnek-e kerekített értékek?
 - ▶ Hány tizedes jegyre kerekítsünk?
-
- ▶ A valós számok halmazán nem értelmezzük újra a műveleteket.
 - ▶ Használják a középiskolás diákok a valós számokat?

VAN-E OLYAN $n \in \mathbb{N}$, AMELYRE $(1 + \sqrt{2})^n$
RACIONÁLIS SZÁM?

$$(1 + \sqrt{2})^2$$

▲

$$(1 + \sqrt{2})^3$$

▲

$$(1 + \sqrt{2})^4$$

▲

$$3 + 2\sqrt{2}$$

$$7 + 5\sqrt{2}$$

$$33,97056275$$

$$(1 + \sqrt{2})^{14}$$

▲

$$(1 + \sqrt{2})^{28}$$

▲

$$228486$$

$$5,220585219 \times 10^{10}$$

$$(1 + \sqrt{2})^{14}$$

Decimal approximation

$$228485.9999956233642$$

$$\sqrt{2}$$



$$\frac{1}{17}$$



$$\frac{5}{21}$$



IRRACIONÁLIS SZÁMOK A TANANYAGBAN

10-12. ÉVFOLYAM

1. Hatvány, gyök, logaritmus témakör
 - ▶ Négyzetgyökvonás, n -edik gyökvonás
 - ▶ Logaritmus
2. Trigonometria témakör
 - ▶ Szögfüggvények értékeinek meghatározása
3. Geometriai számítások
4. Sorozatok témakör
 - ▶ A szakaszosan végtelen tizedes tört mint végtelen mértani sor

