Hatvány, gyök, logaritmus

A hatványfogalom alakítása 7-8. osztály

1. A kitevő természetes szám
   - $n > 1 \to a^n \overset{=}{} a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ (n tényezős szorzat)
   - $n = 1 \to a^1 = a$
2. A hatványozás azonosságainak felfedeztetése konkrét számokkal, majd megfogalmazásuk általánosan.
3. 1-nél nagyobb számok normálalakja

7B/41/1-2.

1. A hatványokat írd szorzat alakba, a szorzatokat írd hatvány alakba!

2^5 $\qquad 10^6$ $\qquad \left(\frac{3}{5}\right)^2$ $\qquad 1{,}2^3$

$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$ $\qquad \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}$ $\qquad 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3$ $\qquad 2{,}01 \cdot 2{,}01$

2. Melyik nagyobb? Tedd ki a megfelelő (<, =, >) jelet! A füzetedben dolgozz!

$3 \cdot 5^4 \square (3 \cdot 5)^4$ $\qquad 1{,}2^4 \square 2{,}1^2$ $\qquad 0{,}1^3 \square 0{,}001^2$

$10^2 \square 2^{10}$ $\qquad \frac{1}{10^4} \square 0{,}001$ $\qquad \left(\frac{1}{2}\right)^6 \square \left(\frac{1}{2}\right)^8$

8B/43/4

4. Számítsd ki hatványtáblázat és zsebszámológép nélkül! Könnyebb látni az egyszerűsítési lehetőségeket, ha a hatványokat átírod szorzat alakba.

a) 2^8 *b)* $2^5 \cdot 4^2$ *c)* $\dfrac{6^5}{3^5}$ *d)* $\dfrac{5^2 \cdot 2^4}{25}$ *e)* $\dfrac{2^6 \cdot 9^2}{4^3}$

A hatványfogalom kiterjesztése 9-10-11. osztály

9-10. osztály

- A kitevő 0 $\rightarrow a^0 = 1,\ a \neq 0$
- A kitevő negatív egész szám $\rightarrow a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, ahol $a \neq 0$ és $n \geq 0$
- A hatványozás azonosságainak kiterjesztése egész kitevőjű hatványokra
- Számok normálalakja

11. osztály

- Négyzetgyökvonás, n-edik gyökvonás
- A kitevő racionális szám
- A kitevő valós szám $\rightarrow$ exponenciális függvény

Számok négyzetgyöke, n-edik gyöke

8-9. osztály

- A négyzetgyökvonás értelmezése

10. osztály

- A négyzetgyökvonás azonosságai
- Bevitel a gyökjel alá, kivitel a gyökjel elé, gyöktelenítés

11. osztály

- Az n-edik gyökvonás értelmezése (általánosítás), az n páros vagy páratlan pozitív egész
- Az n-edik gyök hatványalakja, racionális kitevőjű hatványok
- Az n-edik gyökvonás azonosságai (általánosítás)
- Exponenciális függvény (irracionális kitevőjű hatványok)

11B/27/5.

5. K2 Végezzük el az alábbi hatványozásokat!

a) $\left(2^{\frac{1}{5}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$; b) $\dfrac{5^{3,2} \cdot 4^{\frac{21}{10}}}{10^{\frac{26}{5}}}$; c) $\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)^{2}$, ha $a > 0$ és $b > 0$.

A logaritmus fogalma 11. osztály

- Az $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ valós számok. A $log_a b$ jelenti azt a valós számot, melyre a-t emelve b-t kapunk.
- Dinamikus definíció, azaz a gondolati sorrend nem egyezik meg a definíció szavainak sorrendjével. A definíció hivatkozik a definiálandó fogalomra.
- A logaritmus fogalmának gyakorlati megközelítése: a nagyságrend, azaz az ismeretlen kitevő meghatározása
- Áttérés tízes alapú logaritmusra, számológép használata
- Hatványozás és gyökvonás ill. hatványozás és logaritmus kapcsolata
- Logaritmusfüggvény

A logaritmus alkalmazása

1. Minden pozitív valós szám felírható például 10 hatványaként: $4 = 10^{lg4}$
2. A 2-t hányadik hatványra kell emelni, hogy 8-at kapjunk?
3. Exponenciális egyenlet megoldása, pl. Hány év alatt háromszorozódik meg az évi 15%-os kamatos kamattal gyarapodó tőke?

$$T \cdot 1{,}15^x = 3 \cdot T$$
$$x = log_{1{,}15} 3$$
$$x = \frac{lg3}{lg1{,}15}$$

11B/47/2. 48/3-4.

2. K1 Számítsuk ki az alábbi kifejezések értékét!

a) $\lg 4 + 3\lg 5 + \lg 11 - \lg 55$;

b) $\log_3 27 + 2\log_3 5 - \log_3 20\frac{1}{2} + \log_3 16 - \log_3 5$;

c) $\frac{1}{2}\lg 52 + 3\lg 2 + \lg 125 + \frac{1}{2}\lg 325 - \lg 13$.

$$\lg \frac{4\cdot 5^{\cancel{3}\,2}\cdot \cancel{11}}{\cancel{55}\,5} = 2$$

$$\log_3 \frac{27\cdot 5^{2}\cdot 16}{\frac{41}{2}\cdot \cancel{5}} =$$

$$\lg \frac{\sqrt{52}\cdot 2\cdot 125\cdot \sqrt{325}}{13} = \lg \frac{2^3\cdot\sqrt{4}\cdot\cancel{\sqrt{13}}\cdot 125\cdot\sqrt{25}\cdot\cancel{\sqrt{13}}}{\cancel{13}} =$$

$$= \lg 16000 = \lg 10^4 = 4$$

11B/48/3-4.

3. Hozzuk egyszerűbb alakra!

K1 *a)* $\frac{1}{\lg 35}(\lg 25 + \lg 49)$; **K2** *b)* $\log_a \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[5]{a^3}$. $= a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{3}{5}} = a^{\frac{19}{15}}$

4. K1 Írjuk át az alábbiakat tízes alapú logaritmus alakra!

a) $a = \log_7 2$; *b)* $b = \log_5 3$; *c)* $c = \log_9 3\sqrt{3}$; *d)* $d = \log_{0,1} 4$.

$$\frac{\lg 2}{\lg 7}$$

$$\frac{\lg 3\sqrt{3}}{\lg 9} = \frac{\lg \sqrt{3^3}}{\lg 9} = \frac{\lg 3^{\frac{3}{2}}}{\lg 9} = \frac{\frac{3}{2}\cancel{\lg 3}}{2\cancel{\lg 3}} = \frac{3}{4}$$