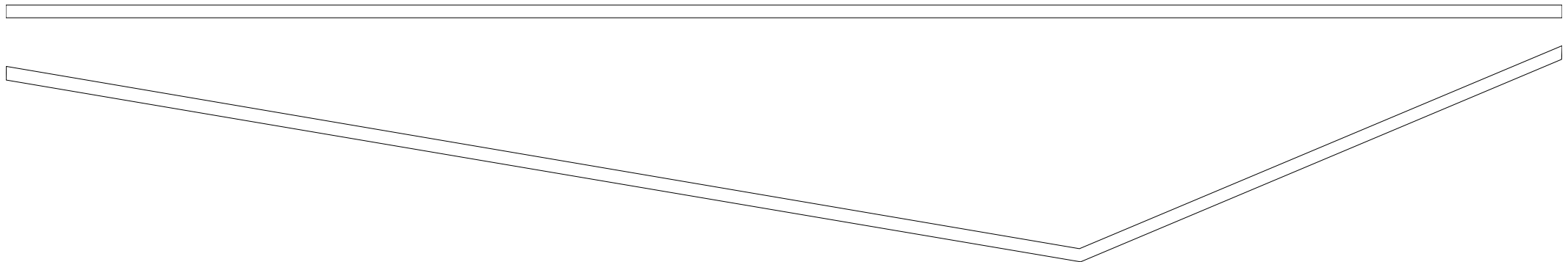
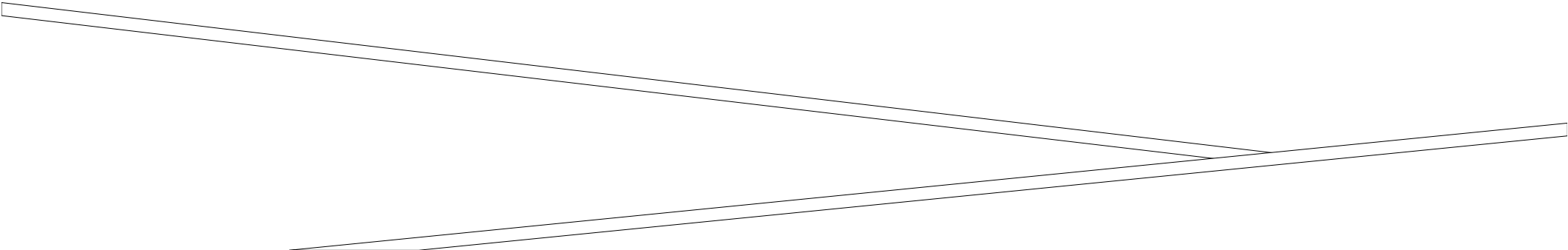


# ALGEBRAI KIFEJEZÉSEK, EGYENLETEK



# AZ ALGEBRAI KIFEJEZÉS FOGALMÁNAK KIALAKÍTÁSA (7-9. OSZTÁLY)

- ▶ Racionális algebrai kifejezés (betűs kifejezés): betűket és számokat a négy alpművelet véges sokszori alkalmazásával kapcsolunk össze.
  - ▶ Kapcsolódó fogalmak:
    - ▶ Együttható, változó
    - ▶ Alaphalmaz vagy értelmezési tartomány: Az a számhalmaz, amelynek elemeit helyettesítik a kifejezésben szereplő betűk (változók). ← absztrahálás
    - ▶ Helyettesítési érték ← konkretizálás
    - ▶ Polinom, Fokszám
- 

**Egytagúnak** nevezzük a betűs kifejezést, ha a műveletek sorrendjében az utolsó szorzás, osztás vagy hatványozás. Az egyetlen számot tartalmazó kifejezést is egytagúnak tekintjük.

**Például:**

$$7; a; -b; 3 \cdot c; \frac{3}{4} \cdot d; a \cdot 1,5; \frac{b}{3}; d : \frac{3}{4}; a^2; 3 \cdot b^2; a \cdot b; a \cdot b \cdot c; -\frac{2 \cdot x^2}{4}$$

Az egytagú kifejezések számszorzóit **együtthatónak** nevezzük.

**Például:**

- 7 esetén maga a 7 az együttható,
- $5 \cdot c$  együtthatója az 5,
- $a$  együtthatója az 1, mert  $1 \cdot a = a$ ,
- $-b$  együtthatója a  $-1$ , mert  $-1 \cdot b = -b$ ,
- $d : \frac{3}{4}$  kifejezés együtthatója a  $\frac{4}{3}$ , mert  $d \cdot \frac{4}{3} = d : \frac{3}{4}$ ,
- $a^2$  együtthatója az 1, mert  $1 \cdot a^2 = a^2$ ,
- $-\frac{2 \cdot x^2}{4}$  együtthatója  $-\frac{2}{4}$ , mert  $-\frac{2}{4} \cdot x^2 = -\frac{2 \cdot x^2}{4}$ .

**Többtagúnak** nevezzük a kifejezést, ha az utolsó művelete összeadás vagy kivonás.

**Például:**

$$a + 2; 5 \cdot b - 3; \frac{5}{2} + c; 2 \cdot (c - d) + 5; x + y$$

7B/55. old.

# ALGEBRAI KIFEJEZÉSEK CSOPORTOSÍTÁSA

1. Egyváltozós kifejezés

$$6x; \frac{12y}{5}; \frac{2}{b}$$

Többsváltozós kifejezés

$$-4xy; -3a^2b^6; 3a + 2cx; \frac{xy}{5ab}$$

2. Egész kifejezés

$$4ax; 6,8y^2zu; \frac{3a^3+2}{5}$$

Törtkifejezés

$$\frac{2}{n}; \frac{3a}{6xc}; \frac{2}{a+b};$$

3. Egytagú egész kifejezés

$$5x^2ab^6; \frac{3a}{5}; -2,6uv^2$$

Többs tagú egész kifejezés (polinom)

$$3x + 5by^4; 3a^4 + 2a^3 + 8; \frac{5}{4}x^4 - 3;$$

4. Egyenemű kifejezések

$$8x^3c^2; -c^2x^3$$

Különnemű kifejezések

$$8x^3c^2; 8x^3c^3; x^3c^2a$$

# 7B/58/7.

7. Válaszd ki az egynemű betűs kifejezéseket!

$2 \cdot x$ ;  $x \cdot y$ ;  $x \cdot 0,75$ ;  $5 \cdot x^2$ ;  $x \cdot y : 3$ ;  $\frac{-3 \cdot x}{7}$ ;  $-1,5$ ;  $7 \cdot y \cdot x$ ;  $2 \cdot x \cdot x$ ;  $2021$

# 7B/59/II.

**11.** Végezd el az összevonásokat! Az összevonás helyességét vizsgáld meg a változó megadott értékénél az eredeti és az új kifejezés helyettesítési értékének kiszámításával!

a)  $8 \cdot x - (3 + 2 \cdot x + 12) - 4 \cdot x + 6 =$   $x = 0$

b)  $(5 \cdot x - 2) + (7 + 11 \cdot x) - (3 \cdot x + 2) =$   $x = -1$

c)  $(4 \cdot x - 12) + (6 \cdot x + 3 \cdot y) - (9 + 10 \cdot y) =$   $x = 2; \quad y = -2$

d)  $(2 \cdot x + 5 \cdot y) - (3 \cdot x \cdot y + 2 \cdot y) + (2 \cdot x \cdot y - 5 \cdot x) =$   $x = 0,1; \quad y = -0,2$

# MŰVELETEK POLINOMOKKAL

## 8-9. OSZTÁLY

- ▶ Az összeadás/szorzás műveleti tulajdonságainak alkalmazása
- ▶ Egynemű kifejezések összevonása
- ▶ Polinomok szorzása, zárójelfelbontás  $(a^2 - 3ab + b^2)(a^2 - 4ab) =$
- ▶ Szorzattá alakítás
  - ▶ Kiemeléssel  $x^3 + 3x^2 + 3x + 9 =$
  - ▶ Nevezetes azonosságok felhasználásával  $9a^2 - 36b^2 =$

# 9B/I 46/2.

**2. K1**

a)  $3a^2 - 6ab + 3b^2$ ;

b)  $7c^2 + 14cd + 7d^2$ ;

c)  $15ab^2 - 30ab + 15a$ ;

d)  $-x^2 - 2x - 1$ ;

e)  $-y^2 + 4y - 4$ .



# MŰVELETEK ALGEBRAI TÖRTEKKEL

## 9. OSZTÁLY

### ► Egyszerűsítés

$$\frac{9a^2+18ab+9b^2}{12a^2-12b^2} =$$

### ► Közös nevezőre hozás, összevonás

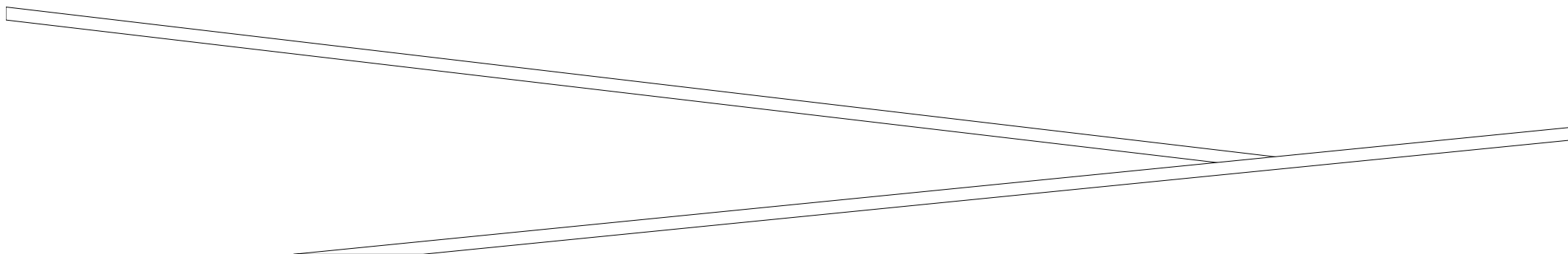
$$\frac{5}{x-3} - \frac{x+6}{x^2-9} + \frac{x+2}{2x+6} =$$

### ► Algebrai törtek szorzása, osztása

$$\frac{x^2-25}{x^2-3x} : \frac{x^2+5x}{x^2-9} =$$

### ► Algebrai törtek értelmezési tartományának meghatározása

$$\frac{x^2 - 25}{x^2 - 3x} \div \frac{x^2 + 5x}{x^2 - 9} =$$



# IRRACIONÁLIS KIFEJEZÉSEK

## 10. OSZTÁLY

- ▶ A 4 alapművelet mellett a négyzetgyökvonás, tört kitevőjű hatványozás is szerepel
- ▶ A gyökvonás azonosságainak alkalmazása

$$\sqrt{\frac{32a^9b^8}{64c^2}} =$$

- ▶ Kivitel gyökjel elé, bevitel gyökjel alá

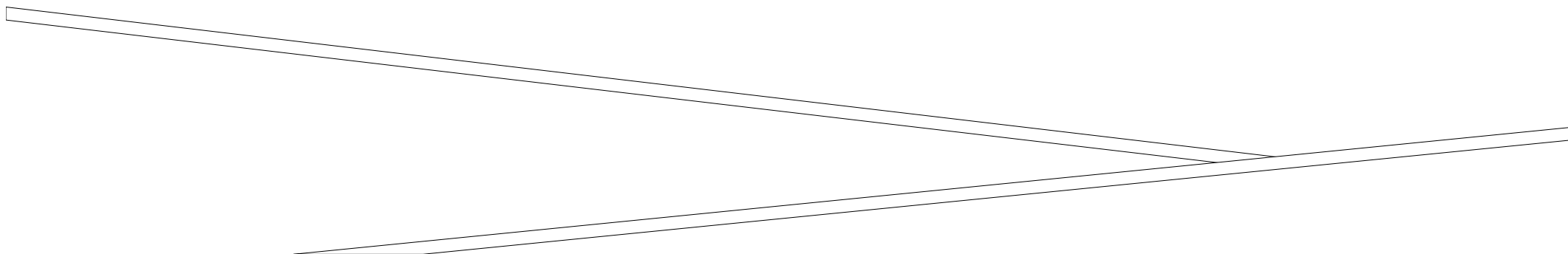
$$6a\sqrt{63ab^3} - 5b\sqrt{28a^3b} =$$

- ▶ Nevező gyöktelenítése

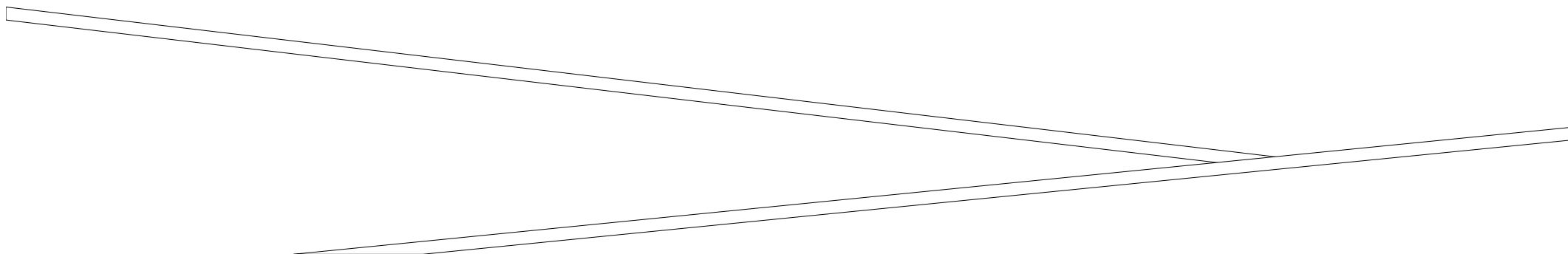
$$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a+b}} =$$

- ▶ Értelmezési tartomány meghatározása

$$6a\sqrt{63ab^3} - 5b\sqrt{28a^3b} =$$



$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a + b}} =$$



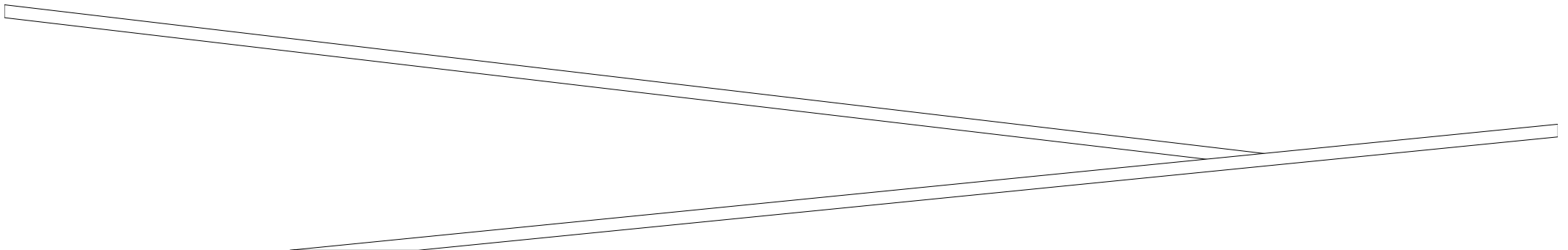
# EXPONENCIÁLIS, LOGARITMIKUS, TRIGONOMETRIKUS KIFEJEZÉSEK II. OSZTÁLY

- ▶ Azonosságok alkalmazása

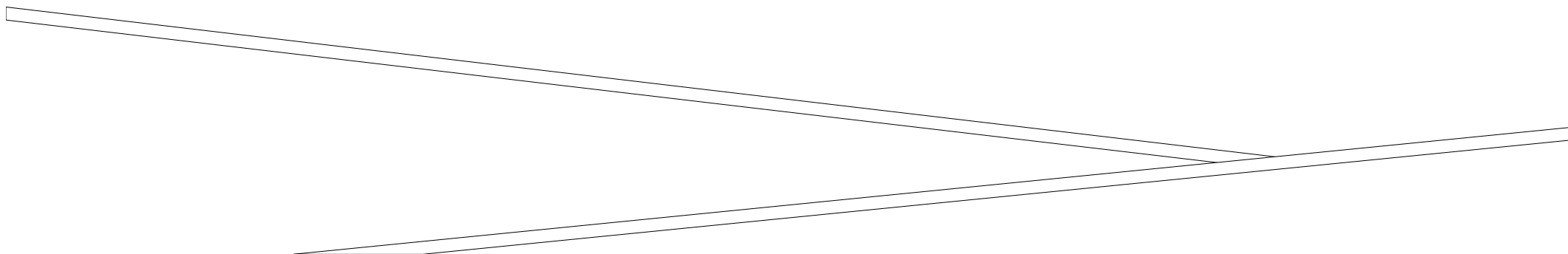
$$\sqrt{a^{4+lo} a^{36}} =$$

- ▶ Trigonometrikus azonosságok, addíciós tételek alkalmazása

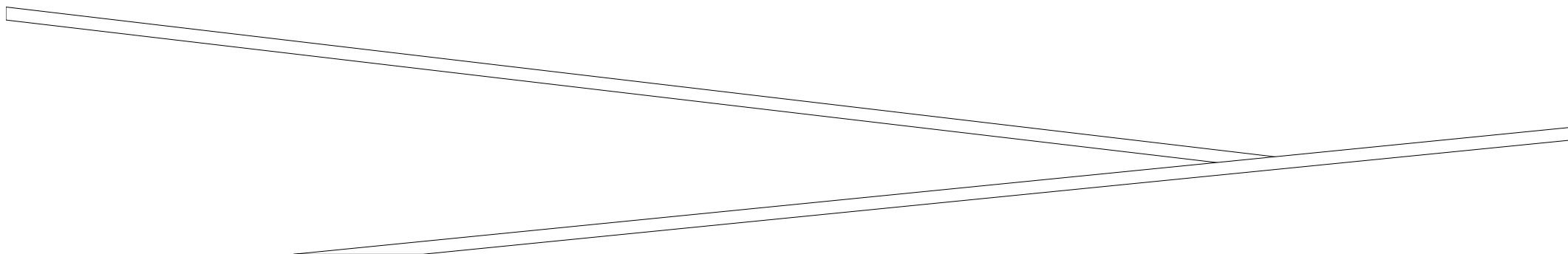
$$\frac{\sin^2 x - \cos^2 x + 1}{\sin^2 x} =$$



$$\sqrt{a^{4+\log_a 36}} =$$



$$\frac{\sin^2 x - \cos^2 x + 1}{\sin^2 x} =$$





# EGYENLET, EGYENLŐTLENSÉG FOGALMA

## I-7. OSZTÁLY

- ▶ Nyitott mondat (logikai fgv.): hiányos állítás, két algebrai kifejezés összekapcsolása a  $<$ ,  $>$ ,  $=$ ,  $\leq$ ,  $\geq$  jelekkel.
- ▶ Kapcsolódó fogalmak: alaphalmaz, igazsághalmaz
- ▶ Megoldási módok:
  - ▶ Próbálgatás (behelyettesítés)
  - ▶ Tervszerű próbálgatás
  - ▶ Lebontogatás (visszafelé következtetés):  $(x + 5)100 = 700$
- ▶ Megoldások száma:

Nincs megoldás, 1 megoldás, véges sok megoldás, végtelen sok megoldás, az alaphalmaz minden eleme megoldás

# 7B/6I/2.

## 2. példa

Oldjuk meg az  $\frac{5 \cdot x + 4}{3} + 10 = 3$  egyenletet!

### Megoldás

Oldjuk meg az egyenletet lebontogatással!

Melyik az a szám, amelyhez 10-et adva 3-at kapunk?

$$\frac{5 \cdot x + 4}{3} + 10 = 3$$

$$\boxed{\phantom{00}} = 3 - 10 = -7$$

Melyik az a szám, amelyet 3-mal osztva -7-et kapunk?

$$\frac{5 \cdot x + 4}{3} = -7$$

$$\boxed{\phantom{00}} = -7 \cdot 3 = -21$$

Melyik az a szám, amelyhez 4-et adva -21-et kapunk?

$$5 \cdot x + 4 = -21$$

$$\boxed{\phantom{00}} = -21 - 4 = -25$$

$$5 \cdot \boxed{x} = -25$$

Melyik az a szám, amelynek az 5-szöröse -25?

$$\boxed{\phantom{00}} = -25 : 5 = -5$$

$$\boxed{x} = -5$$

Van három teljesen egyforma dobozunk. Ha egy kétkarú mérleg egyik serpenyőjében két ilyen dobozt és egy 2 kg-os tömeget, a másikba pedig egy ugyanilyen dobozt és két darab 2 kg-os és egy 1 kg-os tömeget teszünk, akkor a mérleg egyensúlyban van. Határozzuk meg egy doboz ismeretlen tömeget!



$$2 \cdot x + 2 = x + 2 + 2 + 1$$



$$2 \cdot x = x + 2 + 1$$



$$x = 3$$

# EGYENLETEK, EGYENLŐTLENSÉGEK MEGOLDÁSA MÉRLEGELVEL 8-9. OSZTÁLY

Elsőfokú, egyismeretlenes, egész majd tört együtthatós egyenletek,  
egyenlőtlenségek megoldása

- ▶ A két oldalt egyenlően változtatjuk: ugyanazt a számot hozzáadjuk, kivonjuk.
- ▶ Ha egyenlet, akkor ugyanazzal a számmal szorozzuk, osztjuk (ha  $\neq 0$ ) mindkét oldalt, ha egyenlőtlenség, akkor negatív számmal szorozva vagy osztva a két oldalt, a reláció iránya megfordul.
- ▶ A mérlegelv alkalmazása előtt egyszerűbb alakra hozzuk a két oldalt: zárójelfelbontás, összevonás, közös nevezőre hozás
- ▶ Példa:  $\frac{x+7}{2} - \frac{2x-1}{7} = x - 1$

# EGYENLET, EGYENLŐTLENSÉG FOGALMA

## 9. OSZTÁLY

1. Az egyenlet/egyenlőtlenség olyan logikai függvény, melybe a változók helyére az alaphalmaz konkrét elemeit behelyettesítve igaz/hamis állítást kapunk.

Az egyenlet megoldása: meghatározzuk az alaphalmaz elemei közül mindazokat, amelyeket behelyettesítve igaz állítást kapunk.

2. Az egyenlet/egyenlőtlenség két függvény összekapcsolása az  $=$  ;  $<$  ;  $\leq$  ;  $>$  ;  $\geq$  relációs jelek valamelyikével.

Az egyenlet megoldása: meghatározzuk a két függvény értelmezési tartománya metszetének azokat az elemeit, amelyekben a függvények helyettesítési értéke  $=$  ;  $<$  ;  $\leq$  ;  $>$  ;  $\geq$  .

# EGYENLETMEGOLDÁSI MÓDSZEREK

► Ránézés:  $x = 7$ ;  $x^2 + 3x + 2 = 0$

► Ekvivalens átalakítások

► Nullára redukálás, szorzattá alakítás, megoldóképlet

$$x^2 + 3x + 2 = 0; \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = (x + 2)(x + 1) = 0$$

► Új ismeretlen bevezetése:  $(x - 2)^4 - 5(x - 2)^2 + 4 = 0$

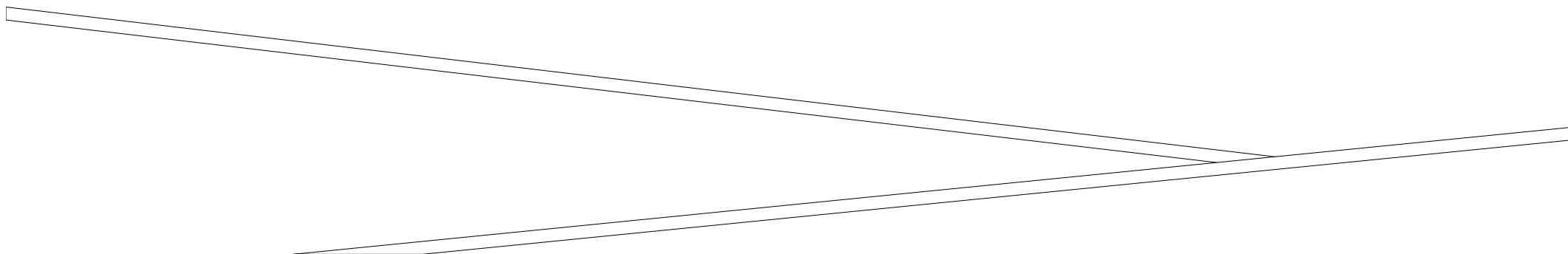
► Értelmezési tartomány vizsgálata:  $\sqrt{9 - x^2} = \sqrt{2x - 6}$

► Értékkészlet vizsgálata:  $x^2 + 1 = \cos x$

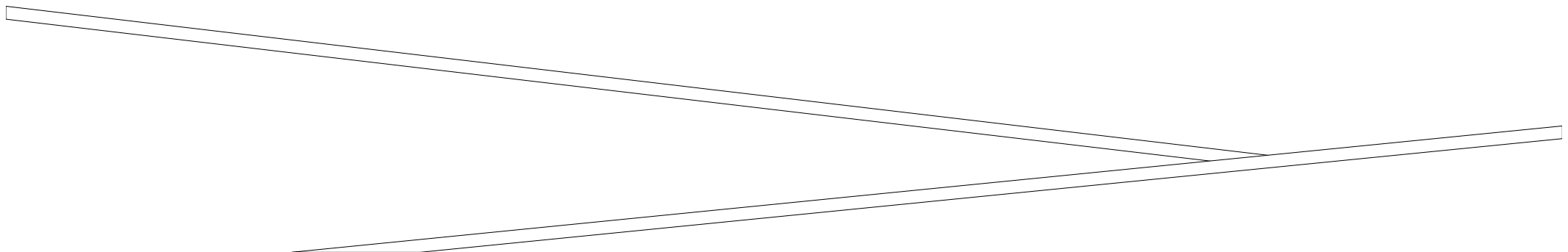
► Esetszétválasztás  $|x - 3| + 2 = x$

► Grafikus megoldás  $2^x = 4x - 3$

$$\sqrt{9 - x^2} = \sqrt{2x - 6}$$



$$x^2 + 1 = \cos x$$





# EKVIVALENS ÁTALAKÍTÁSOK

- ▶ A megoldandó egyenletet nála egyszerűbb egyenlettel helyettesítjük úgy, hogy közben az egyenlet alap- és megoldáshalmaza nem változik.
- ▶ Ha az egyenlet két oldalát ugyanazzal a kifejezéssel növeljük/csökkentjük/szorozzuk/osztjuk, akkor nem feltétlenül jutunk ekvivalens egyenlethez:  $4x - \sqrt{3x - 9} = 8 - \sqrt{3x - 9}$
- ▶ Nem ekvivalens átalakítások
  - ▶ Az alaphalmaz szűkül  $\rightarrow$  gyököt veszünk:
$$\log_3 x^2 = 2 \rightarrow 2\log_3 x = 2$$
  - ▶ Az alaphalmaz bővül  $\rightarrow$  hamis gyök lép fel, következményegyenletet kapunk:  $4x - \sqrt{3x - 9} = 8 - \sqrt{3x - 9}$

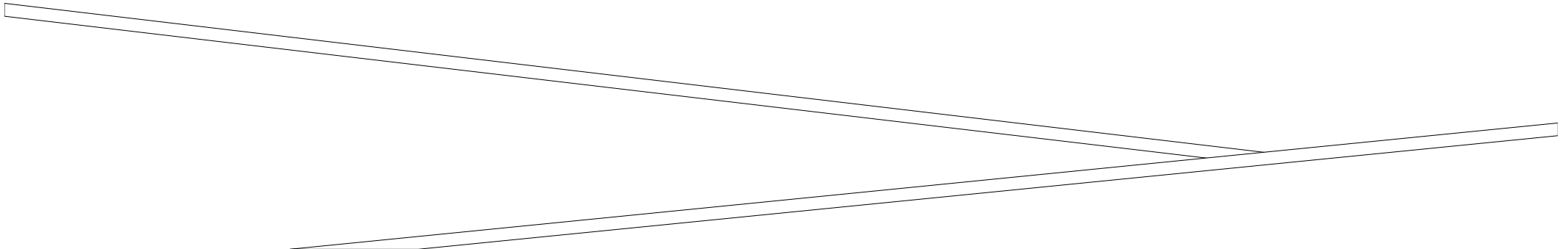
Szorzás ismeretlen kifejezéssel vagy négyzetre emelés

# EGYENLETEK, EGYENLŐTLENSÉGEK TÍPUSAI

- ▶ Elsőfokú (egyismeretlenes) – 6.o. egyenlőtlenség: 9.o
- ▶ Elsőfokú törtes
- ▶ Elsőfokú abszolútértékes
- ▶ Másodfokú – 10. o.
- ▶ Másodfokú abszolútértékes
- ▶ Másodfokú törtes
- ▶ Négyzetgyökös -  $\sqrt{x + c} = ax + b$
- ▶ Magasabb fokú, másodfokúra visszavezethető
- ▶ Exponenciális, logaritmikus
- ▶ Trigonometrikus

# EGYENLETRENDSZEREK

- ▶ 9. osztály: két ismeretlenes lineáris egyenletrendszer
  - ▶ Értelmezés
    - ▶ Megoldás: rendezett számpár
  - ▶ Megoldási módok
    - ▶ Behelyettesítő módszer
    - ▶ Egyenlő együtthatók módszere
    - ▶ Összehasonlító módszer
    - ▶ Grafikus módszer
- ▶ 10. osztály: másodfokú két ismeretlenes egyenletrendszer



# PARAMÉTERES EGYENLETEK

A paraméteres egyenletek együtthatói nem csak számok, hanem betűk is lehetnek.

1. A feladat az egyenlet megoldása:

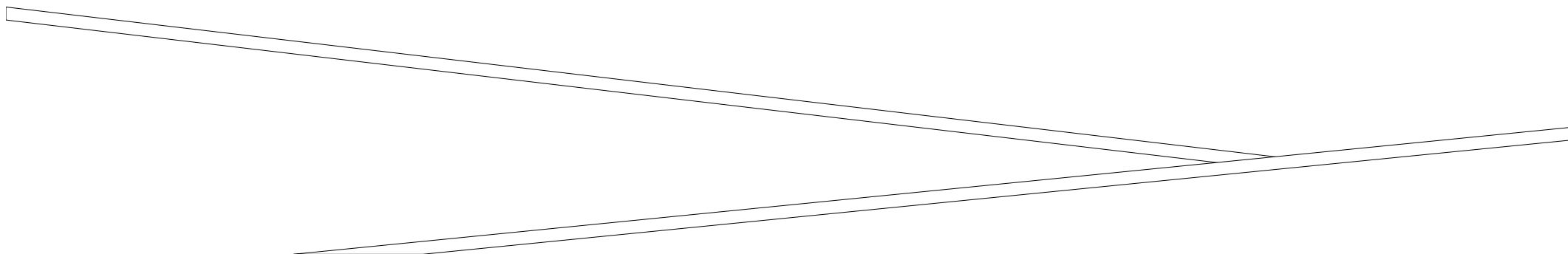
$$a^2x + 3ax = 5a + 15$$

A megoldást a paraméter(ek) összes megengedett értékére meg kell adni.

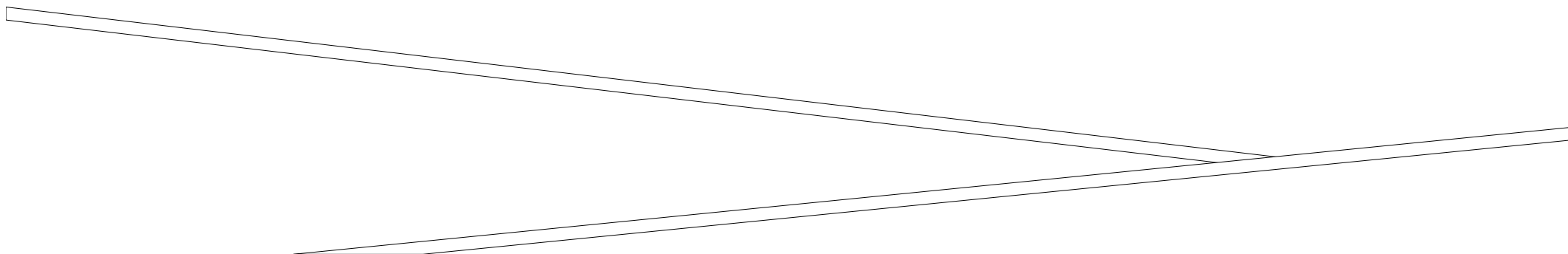
2. Meghatározott feltételeknek megfelelő paraméter(eke)t keresünk:

Határozzuk meg  $c$  értékét úgy, hogy az egyenletnek ne legyen valós gyöke:  $4x^2 - 8x + c = 0$

$$a^2x + 3ax = 5a + 15$$

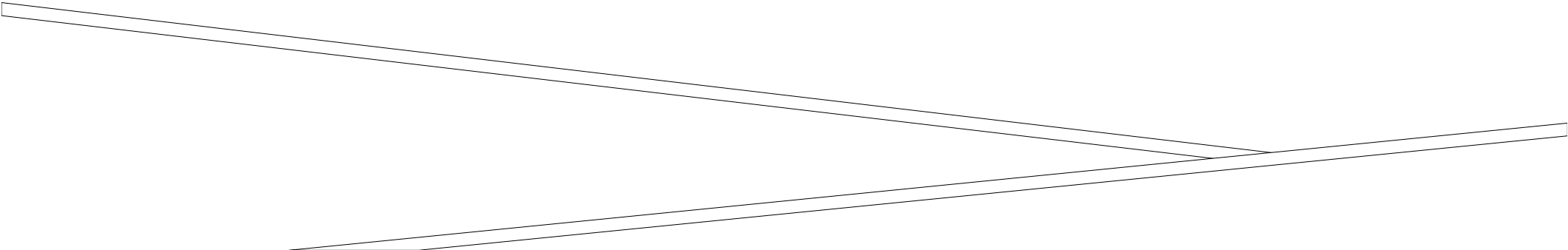


$$4x^2 - 8x + c = 0$$

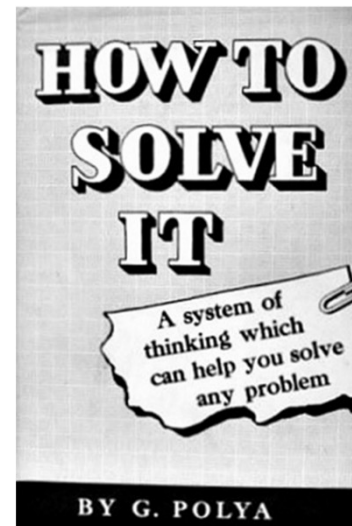
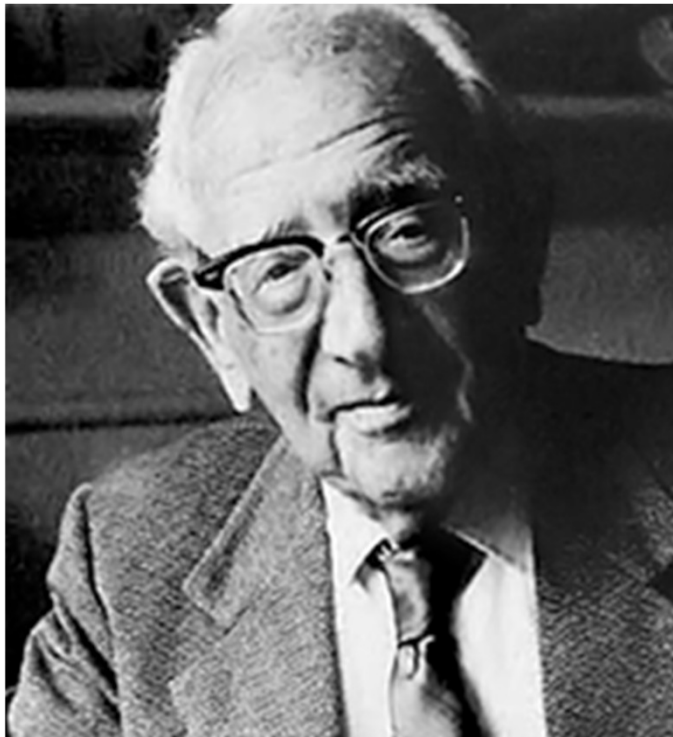


# SZÖVEGES FELADATOK

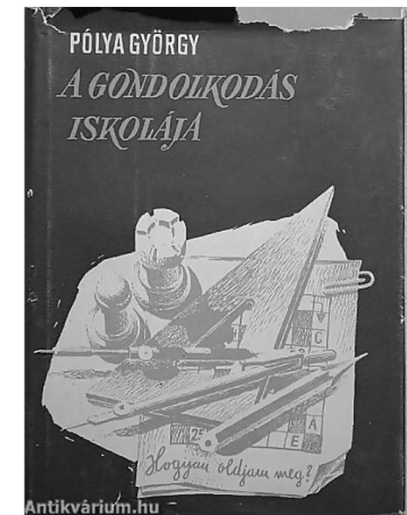
Szöveges feladat: A szöveges feladat olyan életszerű, gyakorlati problémafelvetés, amelyben az ismert és az ismeretlen mennyiségek közötti összefüggések szövegesen vannak megadva és megoldásához valamilyen matematikai modellre van szükség.

- ▶ Szövegértés
  - ▶ Modellalkotás (rajz, egyenlet, táblázat, halmazábra, grafikon stb.)
  - ▶ Kidolgozás
  - ▶ Analizálás/szintetizálás
  - ▶ Kapcsolat a mindennapi élettel
- 

# PÓLYA GYÖRGY (1887-1985)



1945



1957



# A SZÖVEGES FELADATOK MEGOLDÁSÁNAK LÉPÉSEI (PÓLYA-FÉLE FÁZISOK)

## 1. A feladat megértése

Mit ismerünk? Mit keresünk? Milyen eredményre számítunk? (becslés)

## 2. Tervkészítés

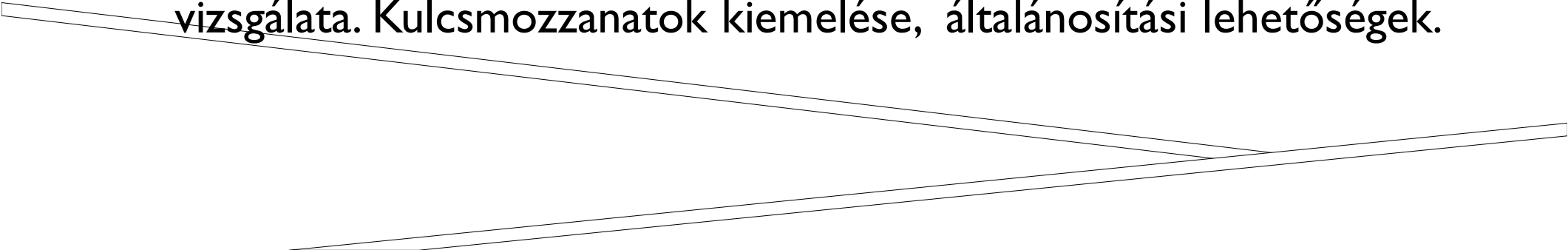
Rokon feladat keresése, a probléma újrafogalmazása

## 3. A terv végrehajtása

Megoldás, szöveges válasz.

## 4. A megoldás vizsgálata

Ellenőrzés a szövegbe helyettesítve. A megoldás realitásának vizsgálata. Kulcsmozzanatok kiemelése, általánosítási lehetőségek.

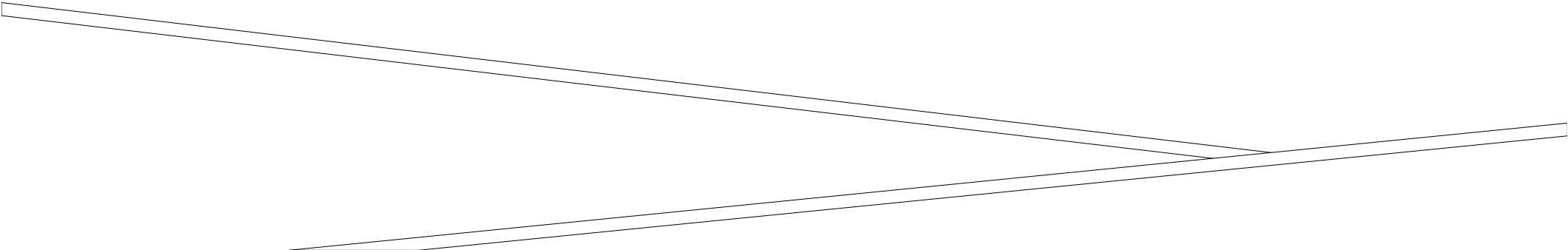


# A SZÖVEGES FELADATOK MEGOLDÁSÁNAK LÉPÉSEI

## ► A problémamegoldás Pólya-féle fázisai:

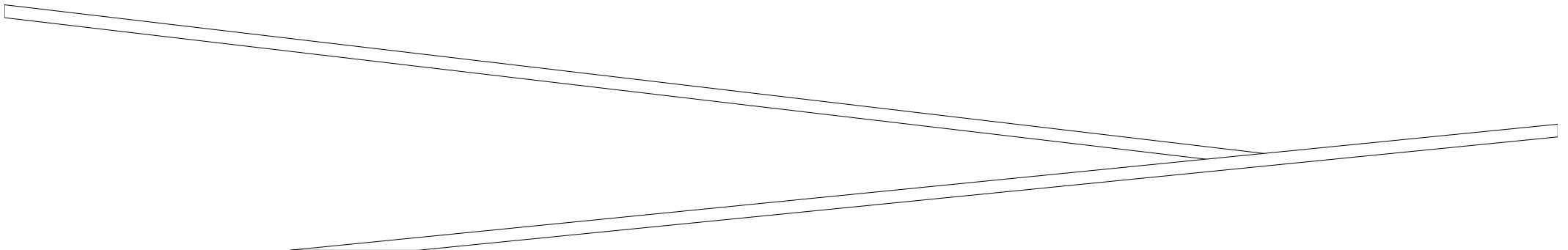
1. A feladat megértése
2. Tervkészítés
3. A terv végrehajtása
4. A megoldás vizsgálata

## ► A szöveges feladatok megoldása:

1. A szöveg értelmezése, adatok kigyűjtése, az eredmény megbecslése
  2. Megoldási terv készítése
  3. Megoldás, szöveges válasz
  4. Ellenőrzés a szövegbe helyettesítve, további észrevételek a feladathoz
- 

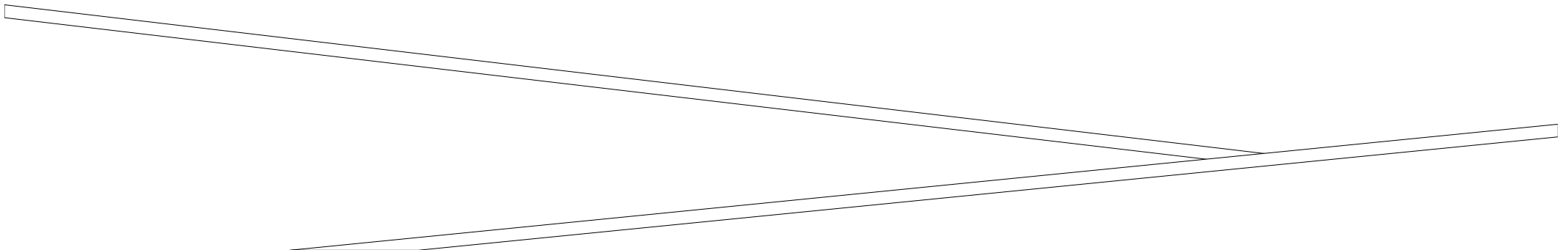
# SZÖVEGES FELADATOK MEGOLDÁSI TERVE

- ▶ Egyenlet, egyenlőtlenség, egyenletrendszer
- ▶ Következtetés
- ▶ Visszafelé gondolkodás
- ▶ Halmazokba rendezés
- ▶ Rajz
- ▶ Táblázat



# A SZÖVEGES FELADATOK CSOPORTOSÍTÁSA MEGOLDÁSI MÓD SZERINT

- ▶ Elsőfokú egyenlettel
- ▶ Elsőfokú egyenletrendszerrel
- ▶ Diofantikus egyenlettel
- ▶ Másodfokú egyenlettel
- ▶ Másodfokú egyenletrendszerrel
- ▶ Exponenciális, logaritmikus egyenlettel  
megoldható szöveges feladatok.



# A SZÖVEGES FELADATOK CSOPORTOSÍTÁSA TARTALOM SZERINT

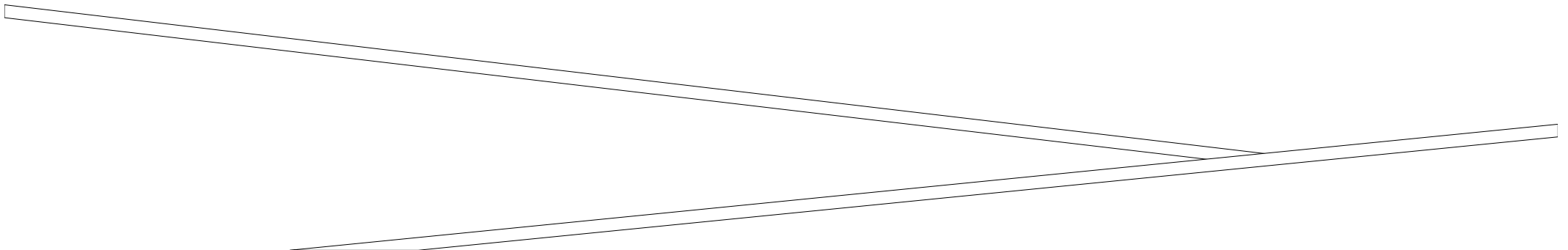
- ▶ Számok, mennyiségek közötti összefüggésekkel
- ▶ A helyiértékes írásmód felhasználásával
- ▶ Együttes munkavégzéssel
- ▶ Százalékszámítással
- ▶ Fizikai számításokkal (mozgással)
- ▶ Kémiai számításokkal (keveréssel)
- ▶ Geometriai számításokkal
- ▶ Számtani, mértani sorozatokkal
- ▶ Statisztikai számításokkal

kapcsolatos szöveges feladatok

The bottom of the slide features several thin, light gray lines that intersect to form a large, abstract, triangular shape pointing towards the right, serving as a decorative element.

# TOVÁBBI CSOPORTOSÍTÁSI SZEMPONTOK

- ▶ Az adatok száma szerint: felesleges adat vagy adathiány
- ▶ A megoldások száma szerint: egy, több vagy nulla megoldás
- ▶ A műveletek száma és fajtája szerint
- ▶ Szövegezése szerint: egyenes vagy fordított, azaz explicit vagy implicit szövegezésű



# I 0B/ I 37/3.

Egy baráti társaság szállást foglalt egy hegyi panzióban. Együttesen 240 euróba került a szállás. Ketten nem tudtak elmenni, így az ő részüket is ki kellett fizetni. Ezért minden résztvevőnek az eredetileg meghatározott összegnél 4 euróval drágább volt a szállásköltség. Hányan vettek részt az összejövetelen, és mennyit kellett a szállásért fizetni?

