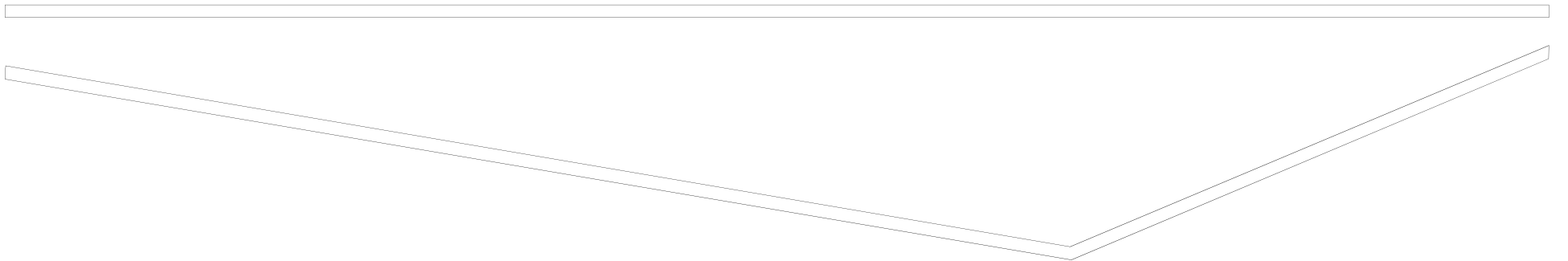
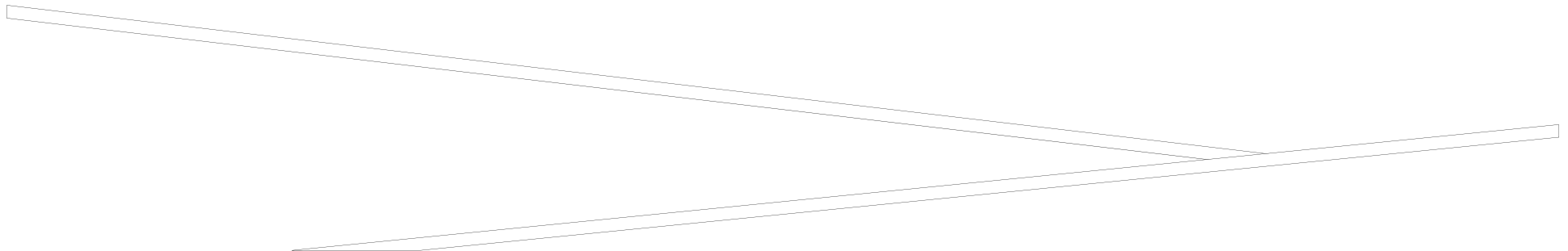


GEOMETRIA



A GEOMETRIA TÉMAKÖR FELOSZTÁSA

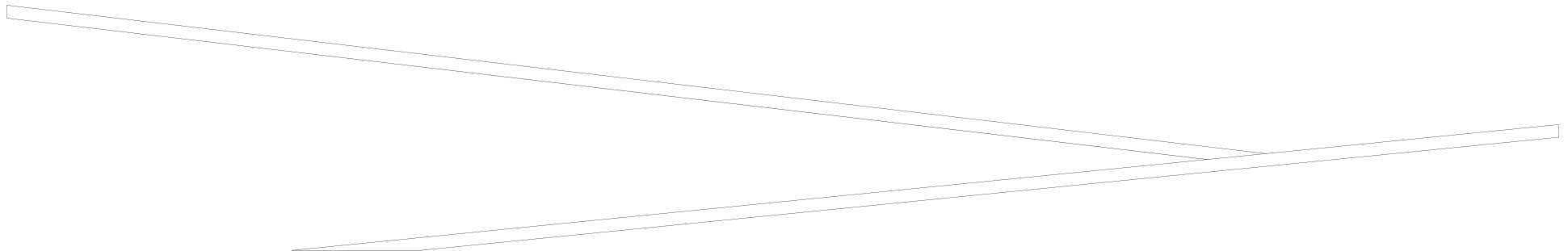
- ▶ Síkgeometria
- ▶ Térgeometria
- ▶ Geometriai mérések
- ▶ Geometriai transzformációk
- ▶ Trigonometria
- ▶ Koordináta-geometria



A SÍKGEOMETRIA TANÍTÁSA

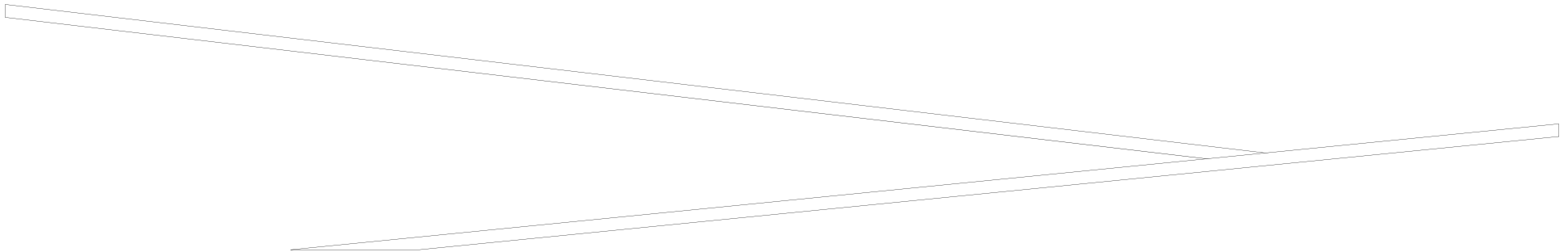
5-10. OSZTÁLY

- ▶ Síkgeometriai fogalmak
- ▶ Síkgeometriai tételek
- ▶ Síkgeometriai feladatok
 - ▶ Szerkesztési feladatok
 - ▶ Számítási feladatok
 - ▶ Bizonyítási feladatok



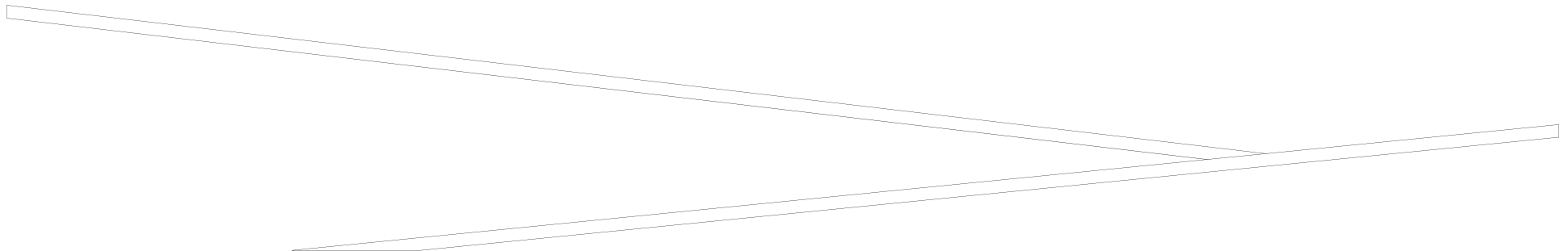
SÍKGEOMETRIAI FOGALMAK TANÍTÁSA

- ▶ Az euklideszi geometria fogalmainak alakítása
 - ▶ Pont, egyenes, sík, szakasz, félegyenes, szög
 - ▶ Térelemek kölcsönös helyzetére vonatkozó fogalmak: párhuzamos, metsző, merőleges, illeszkedik
 - ▶ Sokszög, síkidom, kör
 - ▶ Háromszögek, négyszögek és osztályozásuk
 - ▶ Háromszögek nevezetes pontjai és vonalai



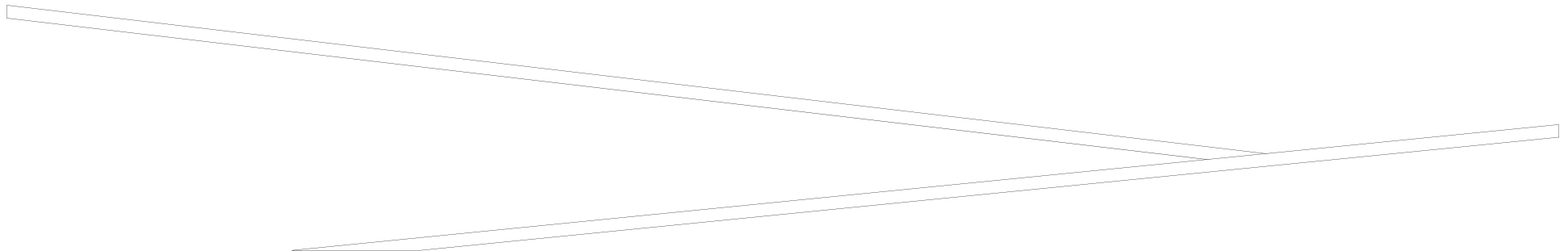
HALMAZSZEMLÉLET A GEOMETRIÁBAN

- ▶ Adjuk meg a P ponttól 3 cm távolságra és az e egyenestől legfeljebb 2 cm távolságra levő pontok halmazát!
- ▶ Határozzuk meg azon pontok halmazát a síkban, melyek két adott ponttól (metsző egyenestől) egyenlő távolságra vannak!
- ▶ Határozzuk meg azon pontok halmazát a síkban, melyek egy adott egyenestől és egy rá nem illeszkedő ponttól egyenlő távolságra vannak!
- ▶ Ábrázoljuk Venn-diagramon a speciális trapézok közötti kapcsolatot!



HÁROMSZÖGEKRE VONATKOZÓ TÉTELEK ÉS BIZONYÍTÁSUK

- ▶ Összefüggések a háromszög
 - ▶ oldalai között
 - ▶ szögei között
 - ▶ oldalai és szögei között
- ▶ A háromszög nevezetes vonalaira vonatkozó tételek
- ▶ Megfordítható tételek értelmezése és bizonyítása
 - ▶ Thalesz-tétel
 - ▶ Pitagorasz-tétel



9B/79/I, 7

1. K1

Létezik-e olyan háromszög, amelyben az oldalak

a) 33, 66, 35;

d) $x, 2x, 3x$ ($x > 0$);

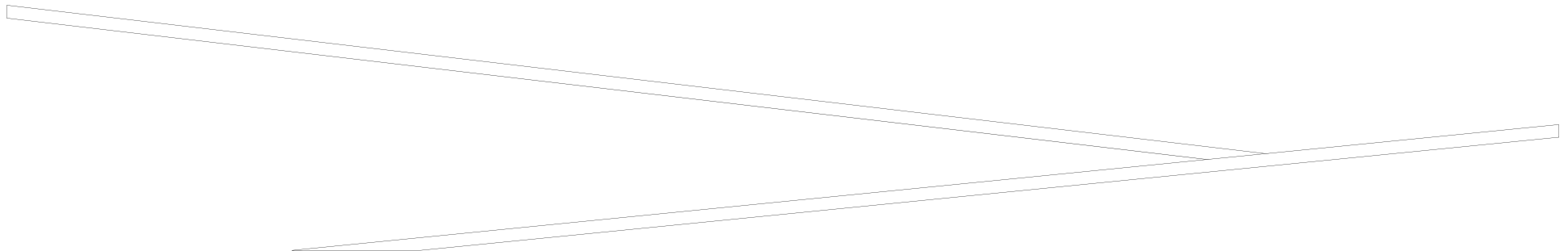
b) 33, 66, 30;

e) $2a, 3a, 4a$ ($a > 0$)?

c) 2008, 2010, 3;

7. K2

Egy egyenlő szárú háromszög egyik belső és egyik külső szögének összege 108° . Mekkora lehetnek a háromszög szögei?



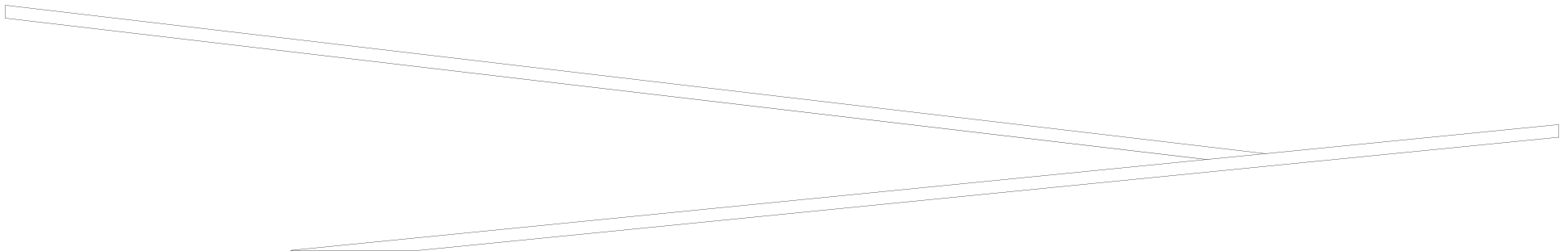
B/9/84/I

1. K1

Válasszuk ki az alábbi állítások közül az igazakat! Válaszunkat indokoljuk!

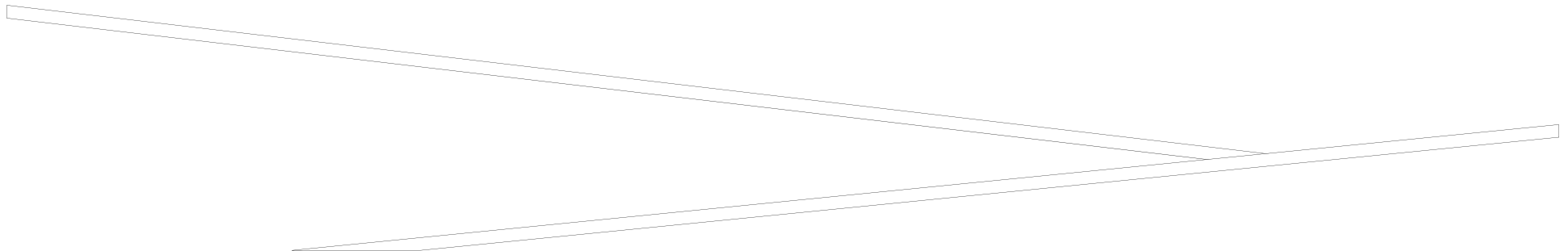
A háromszög köré írt kör középpontja

- ☐ ☐ ☐ a) mindig rajta van egy magasságon;
- ☐ ☐ ☐ b) mindig a háromszög belső pontja.
- ☐ ☐ ☐ c) Van olyan háromszög, amiben rajta van valamelyik oldalfelező merőlegesen.



NEVEZETES NÉGYSZÖGEK

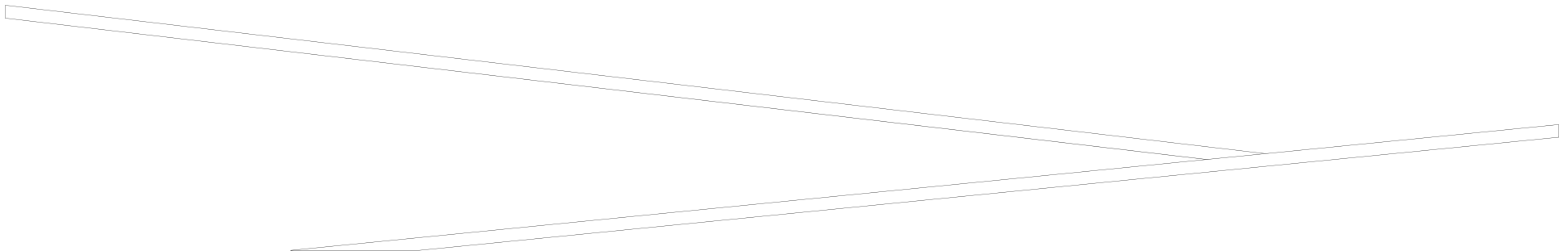
- ▶ Trapéz, deltoid, paralelogramma, rombusz, téglalap, négyzet
- ▶ A definíció szerepének megértése, a fogalmi hierarchiák felépítése
- ▶ Klasszikus formájú definíció:
 - ▶ A trapéz olyan *négyszög*, amelynek van két párhuzamos oldala.
- ▶ Definiálási hibák:
 - ▶ Még nem definiált fogalmat használ
 - ▶ Körbenforgó meghatározás
 - ▶ Tág definíció
 - ▶ Szűk definíció
 - ▶ Felesleges elemeket tartalmaz



A PARALELOGRAMMA EKVIVALENS DEFINÍCIÓI

A paralelogramma olyan négyszög, amelynek

1. két-két szemközti oldala párhuzamos.
2. két-két szemközti oldala egyenlő.
3. két szemközti oldala párhuzamos és egyenlő.
4. két-két szemközti szöge egyenlő.
5. bármely két szomszédos szöge 180° -ra egészíti ki egymást.
6. átlói felezik egymást.
7. középpontosan szimmetrikus.

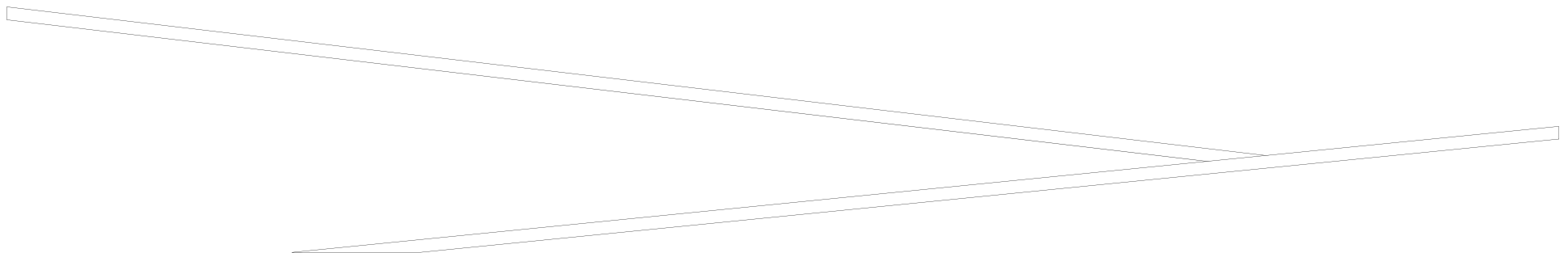


B/9/90/I

1. K1

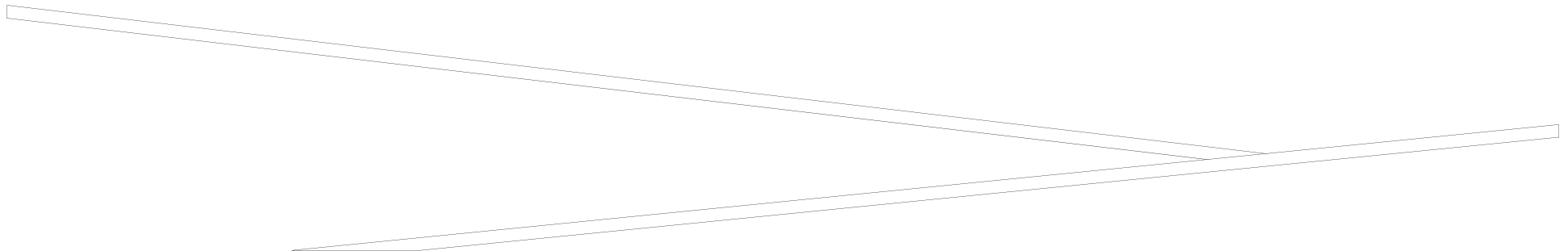
Az alábbi állítások közül melyek igazak és miért?

- a) Minden téglalap trapéz.
- b) Van olyan deltoid, ami paralelogramma.
- c) Minden trapéz konvex.
- d) Ha egy négyszögben van két egyenlő szög, akkor az paralelogramma.
- e) Ha egy paralelogrammának van szimmetriatengelye, akkor az téglalap.
- f) Ha egy négyszögben van két derékszög, akkor az még lehet, hogy nem trapéz.



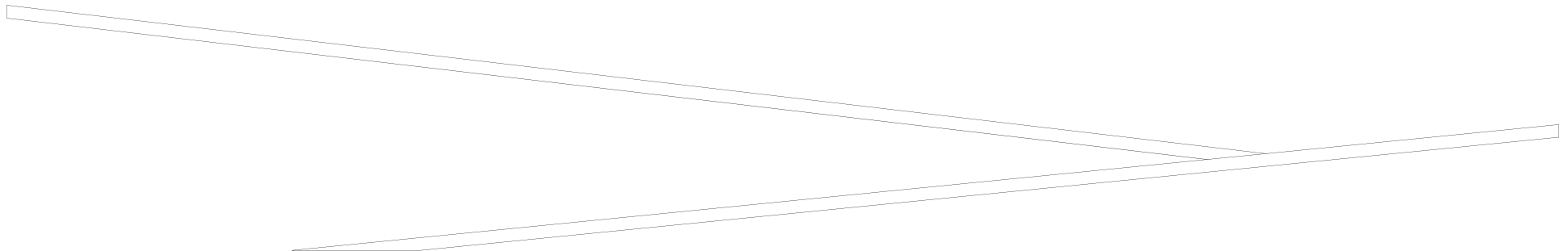
A DEFINÍCIÓ LOGIKAI SZERKEZETE

- ▶ Egy sokszöget konvexnek nevezünk, ha **bármely két** pontját összekötve a kapott szakasz **minden** pontja illeszkedik a sokszögre.
- ▶ Azt a sokszöget, amely nem konvex konkávnak nevezzük.
- ▶ Másképpen: Egy sokszöget konkávnak nevezünk, ha **van két** olyan pontja, melyet összekötve a kapott szakasznak **nem minden** pontja illeszkedik a sokszögre.



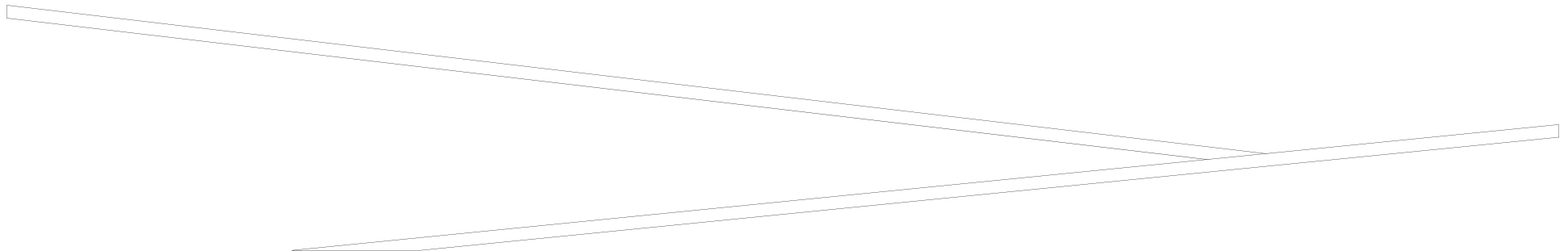
A KÖRHÖZ KAPCSOLÓDÓ FOGALMAK ÉS TÉTELEK

- ▶ Kör, körvonal, sugár, átmérő, körív
- ▶ Érintő, szelő, húr
- ▶ *Középponti szög, kerületi szög, érintő szárú kerületi szög*
- ▶ Körcikk, körszelet, körgyűrű
- ▶ *A kerületi és középponti szögek tételei*
 - ▶ *Azonos íven nyugvó kerületi szög fele a középponti szögnek.*
 - ▶ *Azonos íven nyugvó kerületi szögek egyenlők.*
 - ▶ Thalesz-tétel



SZERKESZTÉSI FELADATOK

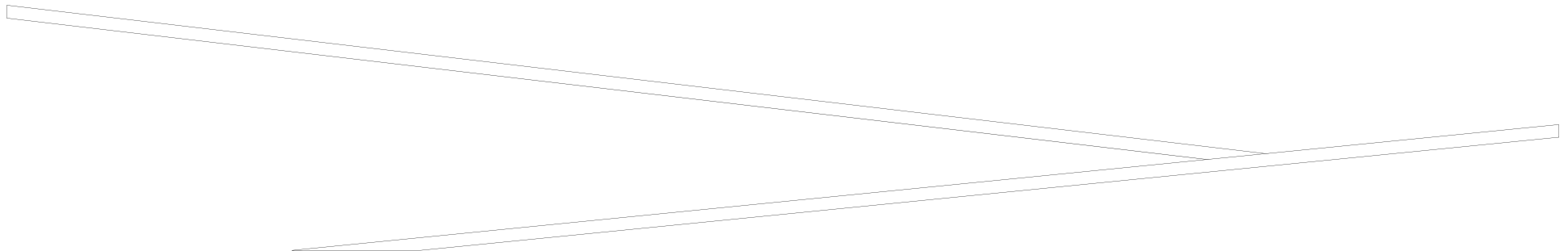
- ▶ Szerkesszünk háromszöget, ha oldalai
 - ▶ 2cm, 3cm és 4cm hosszúak
 - ▶ 1cm, 2cm és 3cm hosszúak.
- ▶ Szerkesszünk háromszöget, ha két oldalának hossza 6,5cm és 5cm, egyik szöge pedig 55° !
- ▶ Szerkesszünk háromszöget, ha egyik oldala 5 cm, a köré írt kör sugara 6cm és az oldalhoz tartozó magassága 4 cm!
- ▶ Szerkesszünk háromszöget, ha adott az egyik oldala, a köré írt kör sugara és az oldalhoz tartozó magassága!



B/7/I 72/3

3. Szerkeszd meg azt a deltoidot, amelynek

- a) 6 cm-es szimmetriaátlója 30° -os és 45° -os szöget zár be az oldalakkal;
- b) 5 cm-es szimmetriaátlója 15° -os szöget zár be az egyik oldallal, a másik oldala pedig 3 cm!



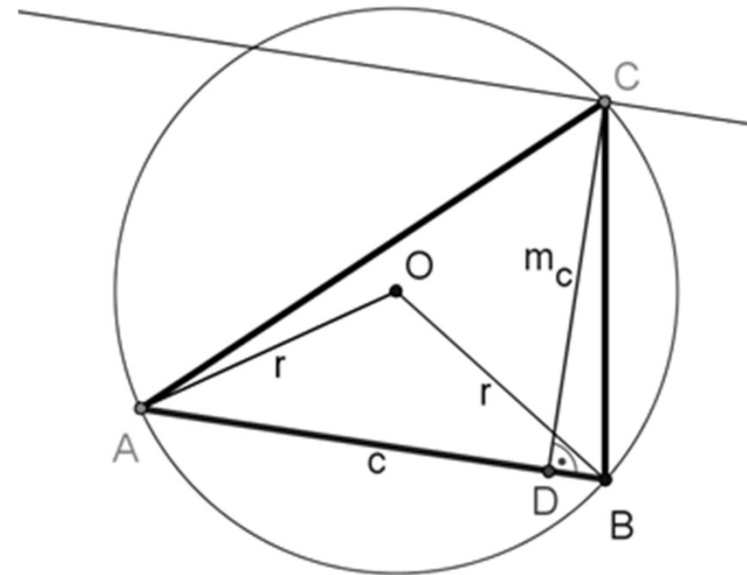
B/9/84/2, 3

2. K2

Szerkesszünk háromszöget, ha adott két oldala és a körülírt kör sugara! Hány megoldás van?

3. K1

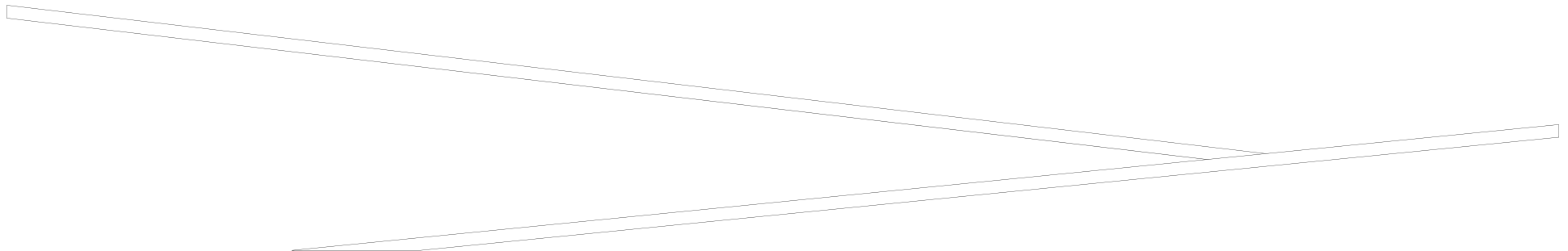
Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldala, a hozzá tartozó magassága és a körülírt kör sugara!



BIZONYÍTÁSI FELADATOK

- ▶ Állítások igazságértékének eldöntése
- ▶ Direkt bizonyítások
- ▶ Indirekt bizonyítások
- ▶ Fordított okoskodás
- ▶ Példa:

Egy kör AB átmérőjének B -n túl lévő meghosszabbítására C pontjában állítsunk merőleget. Az A pontból egy másik egyenest húzunk, ami a kört E pontban, a merőleget D pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy $BCDE$ húrnégyszög!

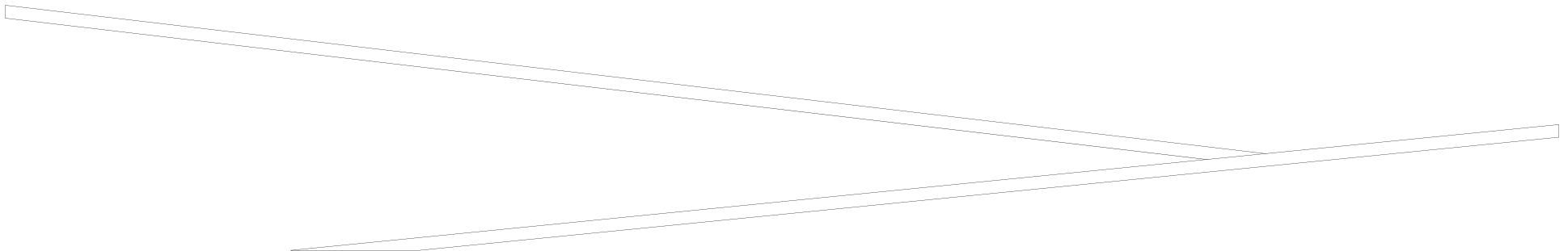


B/9/84/6

6. K2

Az ABC háromszög beírt körének középpontja O . Az $AOB \sphericalangle = 150^\circ$. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög tompaszögű!

■ ■ ■



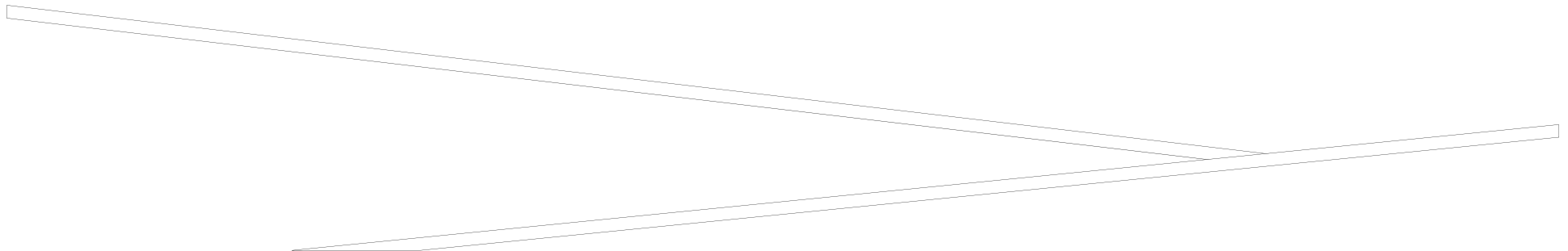
B/9/23 I/3

3. K1

Mit mondhatunk arról a négyszögről, amelynek oldalfelező pontjai

a) rombuszt;

b) téglalapot alkotnak?



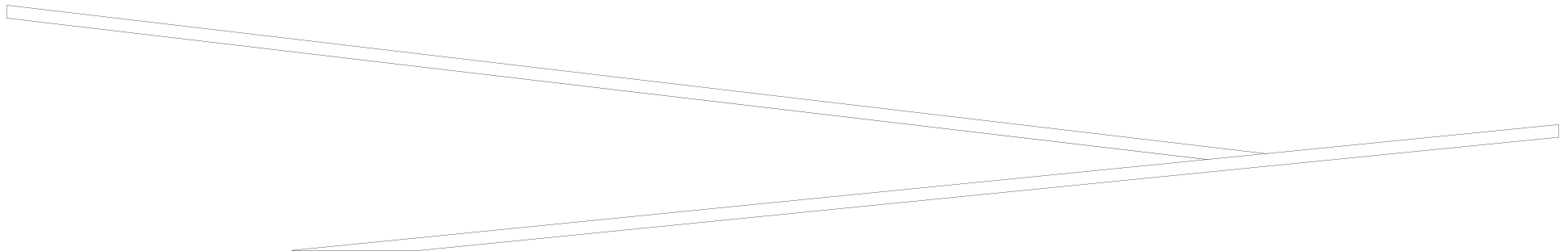
SZÁMÍTÁSI FELADATOK

- ▶ Konkrét adatokkal:

- ▶ Egy derékszögű trapéz rövidebbik alapja és hosszabbik szára 5cm hosszú. Számítsuk ki a hosszabbik átló hosszát, ha a hosszabbik alap 8cm!

- ▶ Betűkkel jelölt általános adatokkal:

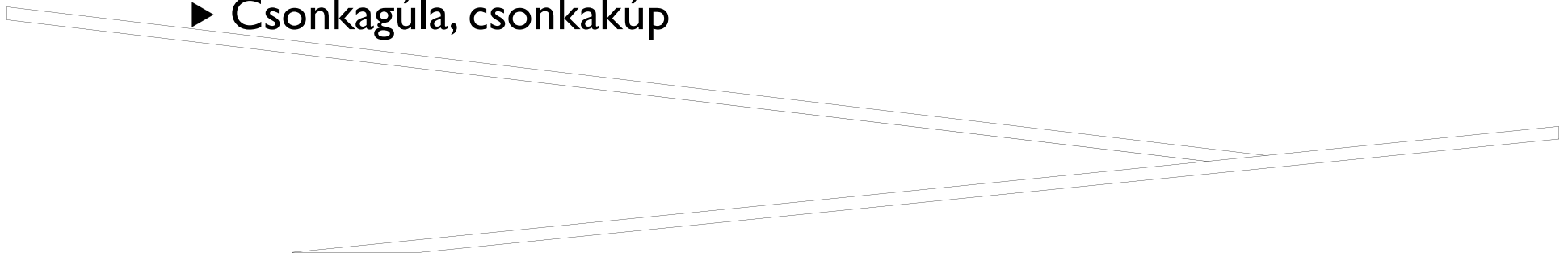
- ▶ Egy derékszögű trapéz rövidebbik alapja és hosszabbik szára egyenlő hosszú. Határozzuk meg a hosszabbik átló hosszát, ha a hosszabbik szár a és a hosszabbik alap b !
- ▶ Egy derékszögű trapéz rövidebbik alapja és ferde szára egyenlő hosszú. Bizonyítsuk be, hogy a hosszabbik átló az alapok mértani közepének $\sqrt{2}$ -szerese!



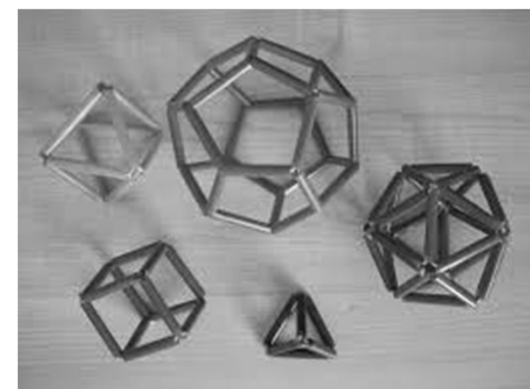
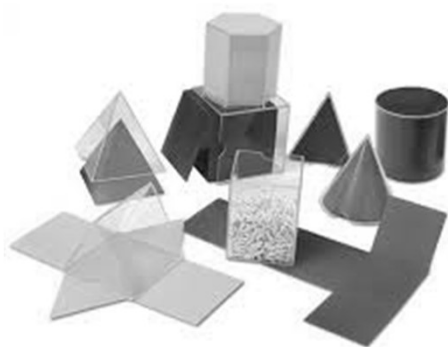
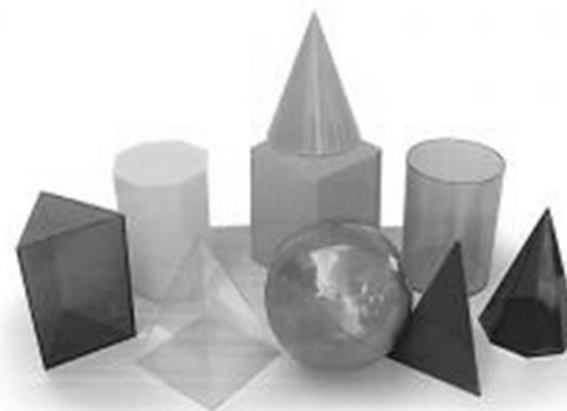
TÉRGEOMETRIAI ALAPISMERETEK

5-12. OSZTÁLY

- ▶ Térelemek kölcsönös helyzete, távolsága, hajlásszöge
- ▶ Poliéderek, testek és a hozzájuk tartozó fogalmak
 - ▶ Lap, él, csúcs, Euler-féle poliédertétel
 - ▶ Lapátló, testátló, lapszög, élszög
 - ▶ Testmagasság
- ▶ Hasáb, téglatest, kocka
- ▶ Gúla, tetraéder
- ▶ Henger, egyenes körhenger
- ▶ Kúp, egyenes körkúp
- ▶ Csonkagúla, csonkakúp



SZEMLÉLTETŐESZKÖZÖK



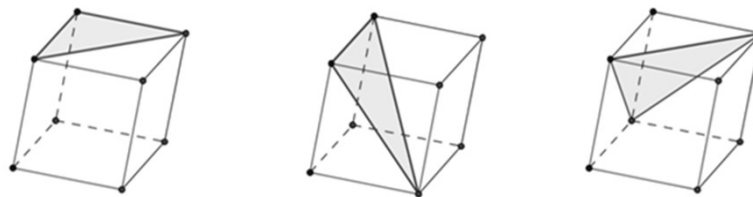
FELADATOK

► A fogalmak elmélyítésére:

Egy háromszög alapú gúla minden lapja egy 10 cm oldalú szabályos háromszög. Határozzuk meg a gúla valamely két lapjának hajlásszögét!

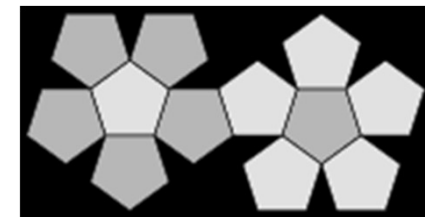
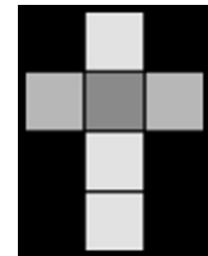
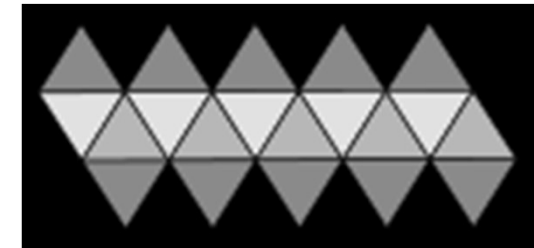
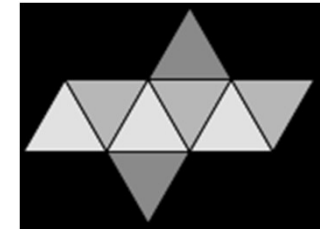
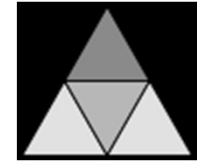
► A kombinatorikus gondolkodás fejlesztésére:

Hányféleképpen tudunk kiválasztani a kocka nyolc csúcsa közül hármat úgy, hogy az ezeken átfektetett sík ne menjen át egy negyedik csúcsponton?



SZABÁLYOS POLIÉDEREK

- ▶ Olyan konvex poliéderek, amelyeknek
 - ▶ lapjai egybevágó szabályos sokszögek,
 - ▶ lapszögeik és élszögeik egyenlők,
 - ▶ minden csúcsában ugyanannyi él találkozik.
- ▶ Ötféle szabályos test létezik:
 - ▶ Tetraéder
 - ▶ Hexaéder
 - ▶ Oktaéder
 - ▶ Dodekaéder
 - ▶ Ikozaéder

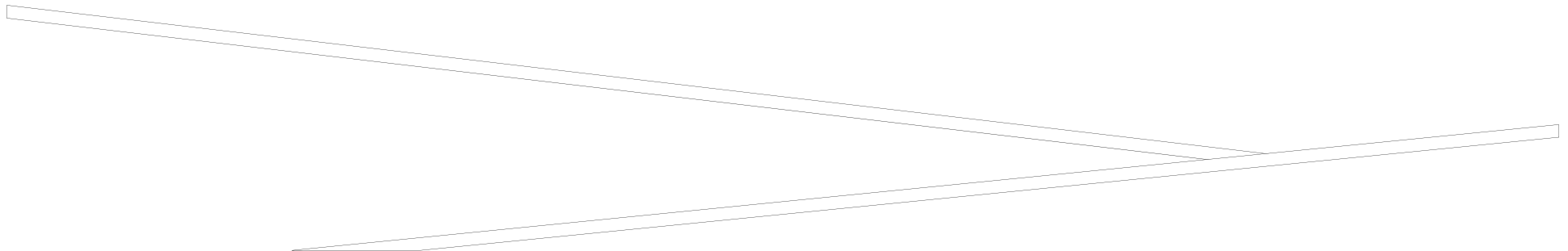


GEOMETRIAI TRANSZFORMÁCIÓK

- ▶ Függvényismeret:
 - ▶ Kölcsonösen egyértelmű pontfüggvények
 - ▶ Inverz transzfomáció – inverz függvény
 - ▶ Transzformációk szorzata – összetett függvény
 - ▶ Identikus transzformáció
- ▶ Transzformációk csoportosítása
 - ▶ Térbeli
 - ▶ Síkbeli
 - ▶ Egybevágósági transzformációk
 - ▶ Hasonlósági transzformációk
 - ▶ Egyéb transzformációk

TRANSZFORMÁCIÓK TANÍTÁSÁNAK ALGORITMUSA

- ▶ Alakzat és képenek kapcsolata, a transzformációs tulajdonságok felfedeztetése (1-5. osztály)
- ▶ A transzformáció definiálása: hozzárendelési szabály megadása a sík összes pontjára.
- ▶ Szerkesztési eljárás megismertetése
- ▶ A transzformáció tulajdonságainak megadása:
 - ▶ Távolságtartás, szögtartás, egyenestartás
 - ▶ Iránytartás
 - ▶ Fixpontok, fixalakzatok
- ▶ Kapcsolat az egyes transzformációk között



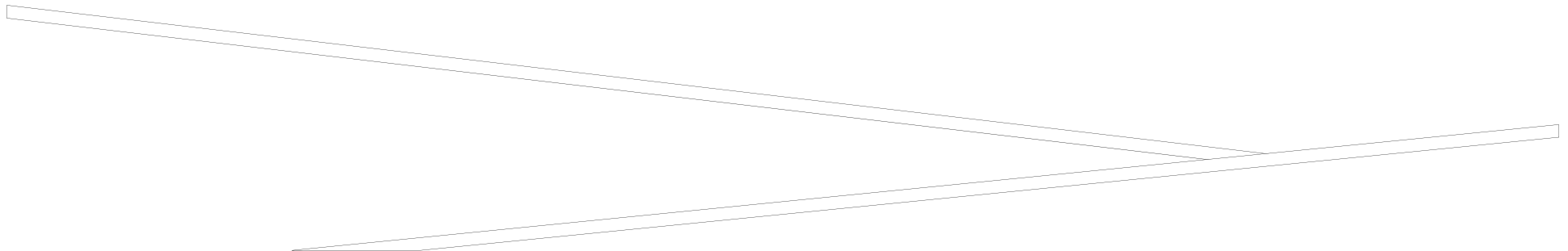
FELADATOK A TRANSZFORMÁCIÓKRA

- ▶ Szerkesztési feladatok

- ▶ Szerkessze meg a k körnek egy olyan húrját, amelyik az AB szakasszal egyenlő és párhuzamos!

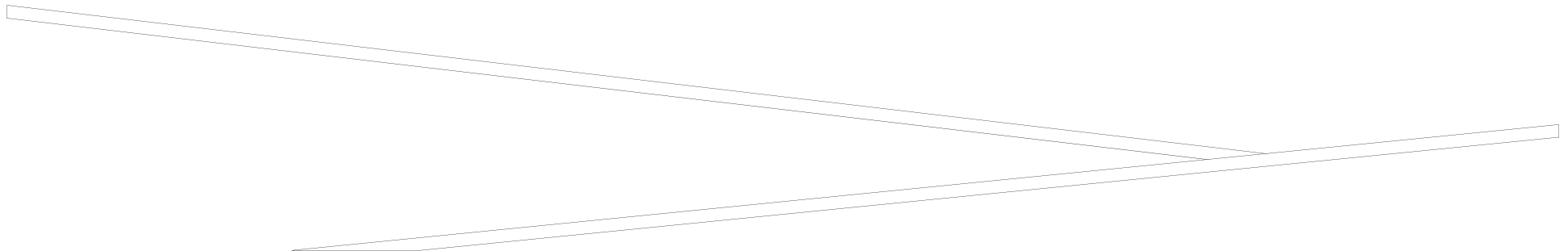
- ▶ Bizonyítási feladatok

- ▶ Mutassuk meg, hogy egy egyenes és képe a tengellyel ugyanakkora szöget zár be!



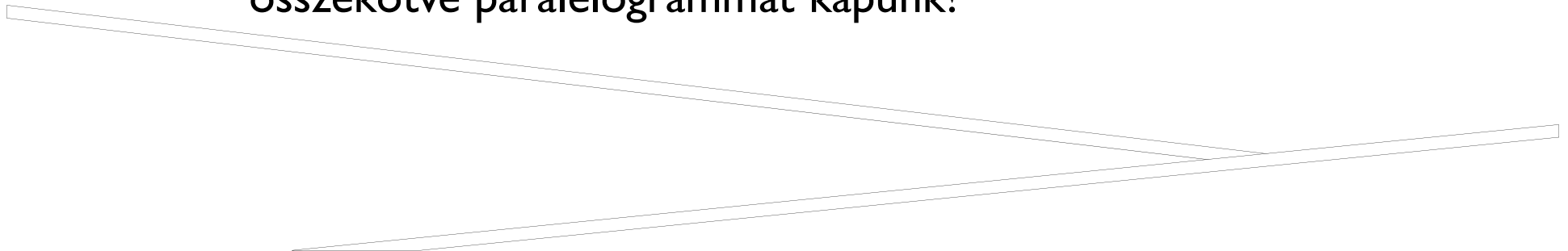
A TRANSZFORMÁCIÓK TANÍTÁSÁNAK SORRENDJE

- ▶ 6. osztály: tengelyes tükrözés
- ▶ 7. osztály: középpontos tükrözés
- ▶ 8. osztály: pont körüli forgatás, eltolás
- ▶ 9. osztály egybevágósági transzformációk rendszerezése
- ▶ 10. osztály: középpontos hasonlóság, hasonlóság



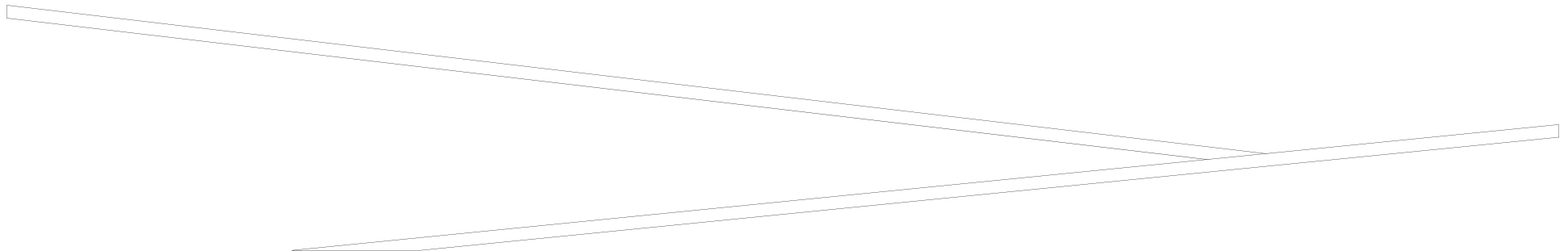
EGYBEVÁGÓ SÍKIDOMOK

- ▶ Definíció
- ▶ A háromszögek egybevágóságának alapesetei
- ▶ Feladatok
 - ▶ Egyenlő szárú háromszögbe szerkesszünk két egyenlő sugarú kört úgy, hogy azok egymást, az alapot és egy-egy szárát is érintsenek!
 - ▶ Az $ABCD$ paralelogramma átlóinak metszéspontján átmenő egyenes az AB oldalból egy 7 cm -es, a CD oldalból egy $4,5\text{ cm}$ -es darabot metsz le. Mekkora az AB oldal?
 - ▶ Bizonyítsuk be, hogy a négyszög oldalfelező pontjait összekötve paralelogrammát kapunk!



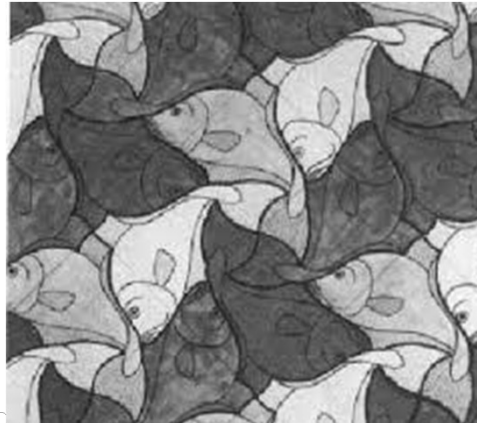
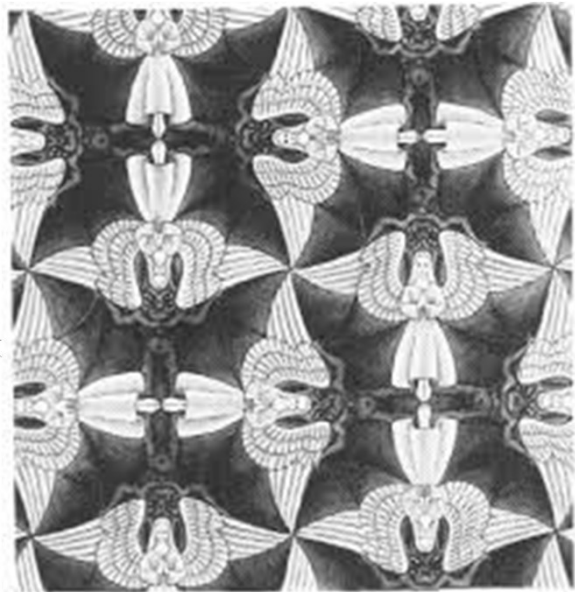
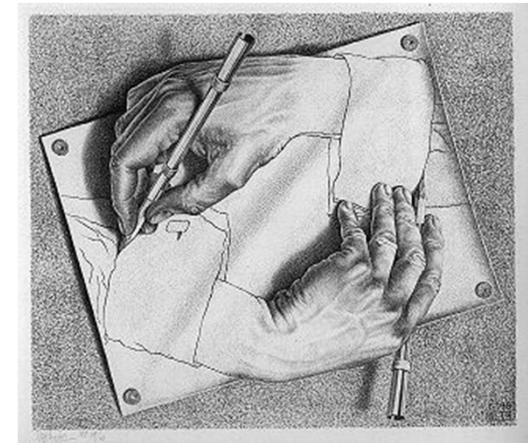
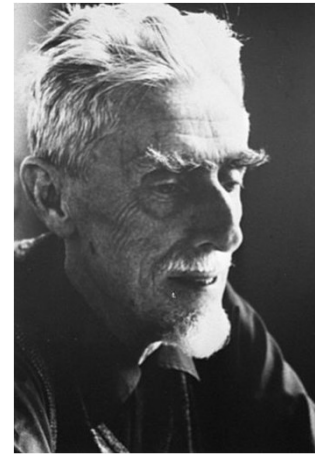
SZIMMETRIA

- ▶ Tengelyes szimmetria, tengelyesen szimmetrikus alakzatok
- ▶ Közepponthos szimmetria, középpontosan szimmetrikus alakzatok
- ▶ Forgásszimmetria, forgásszimmetrikus alakzatok



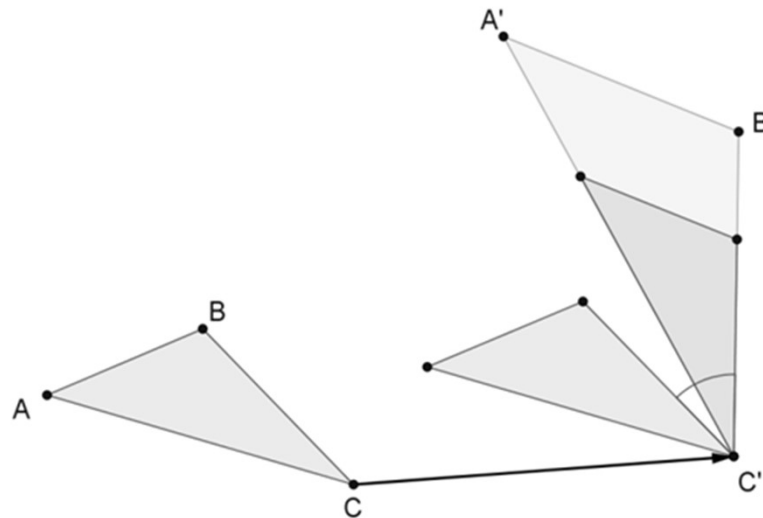
M. C. ESCHER (1898-1972)

[HTTP://WWW.MCESCHER.COM](http://www.mcescher.com)



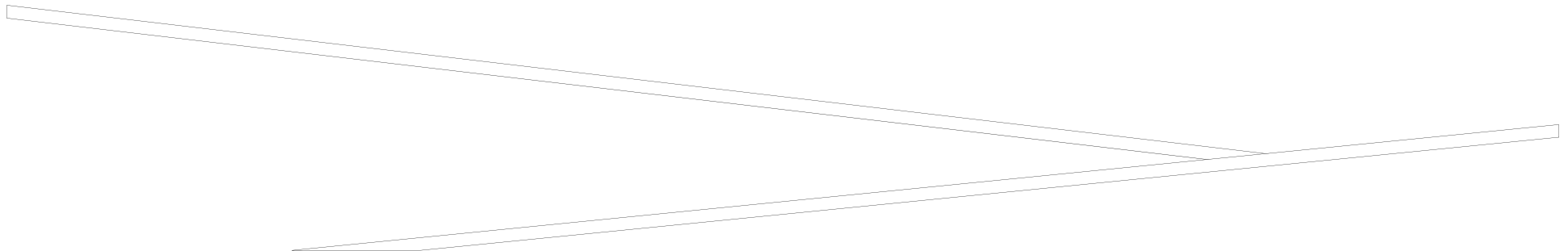
HASONLÓ SÍKIDOMOK

- ▶ Definíció
- ▶ A háromszögek hasonlóságának alapesetei
 - ▶ Mutassuk meg, hogy két háromszög hasonló, ha megegyeznek megfelelő szögeik!



FELADATOK

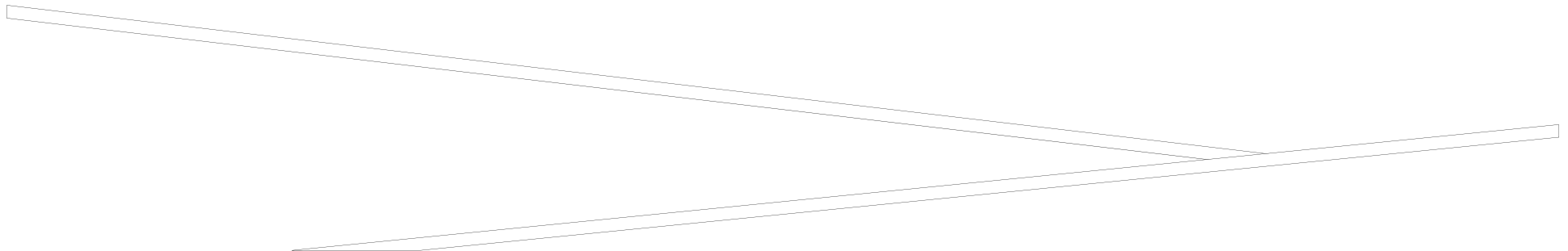
- ▶ Hasonlóságon alapuló szerkesztési feladatok: először a keresett alakzathoz hasonlót szerkesztünk.
 - ▶ Szerkesszünk egyenlőszárú derékszögű háromszöget, ha ismert az egyik szárhoz tartozó súlyvonal hossza!
- ▶ Számítási, bizonyítási feladatok: Az egyik alapeset szerint megállapítjuk a hasonlóságot, majd felírjuk egy másik alapeset feltételét.
 - ▶ Egy egyenlő szárú háromszög alapja 6 cm , szárai 8 cm hosszúak. Mekkora részekre bontja a szárakat a hozzájuk tartozó magasság?
 - ▶ Egy gyárkémény árnyéka $35,8\text{ m}$. Ugyanakkor a merőlegesen, 10 cm mélyen földbe szúrt 2 m hosszú karónak az árnyéka $1,62\text{ cm}$. Határozzuk meg a gyárkémény magasságát!



GEOMETRIAI MÉRÉSEK

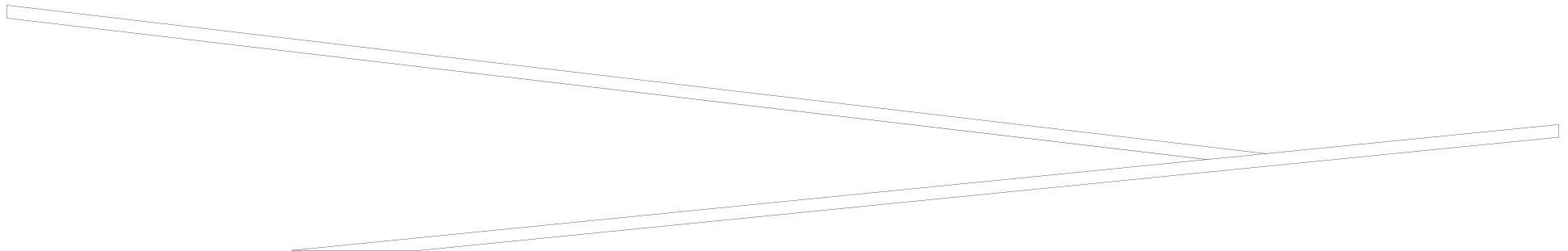
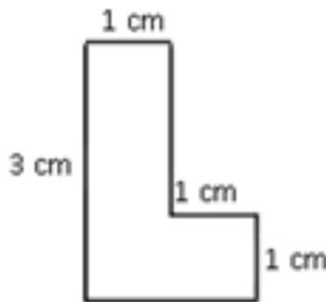
I-12. OSZTÁLY

- ▶ Hosszúság: Két pont távolsága, szakasz hossza, ponthalmazok távolsága
 - ▶ Kerület
 - ▶ Terület
 - ▶ Felszín
 - ▶ Térfogat
- ▶ Szög



KERÜLET FOGALMA ÉS MÉRÉSE

- ▶ Szemléletesen: a síkidom határoló görbéjének hossza
- ▶ Sokszög kerülete: az oldalak hosszának összege
- ▶ A kerület mérése hosszúságmérés.
- ▶ Konkrét sokszögek kerületének kiszámítása képletekkel.



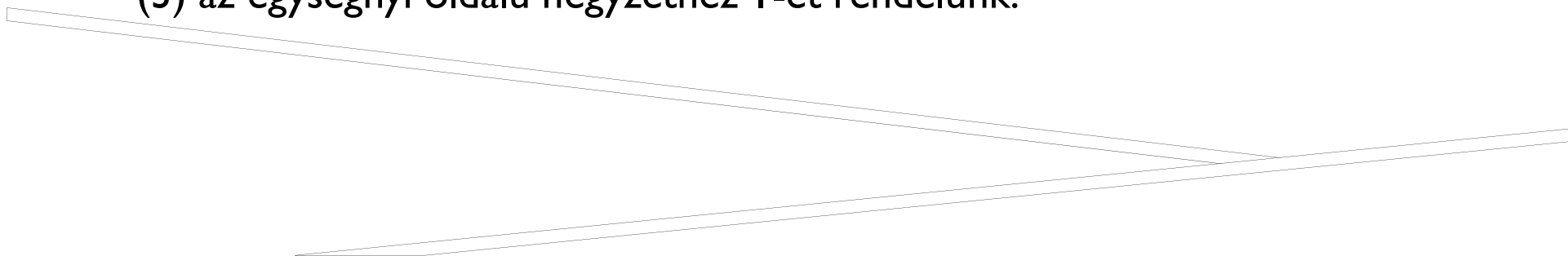
TERÜLET FOGALMA

► Szemléletesen: síkidomok egyrétegű és hézagmentes lefedése egybevágó alakzatokkal.

► Definíció:

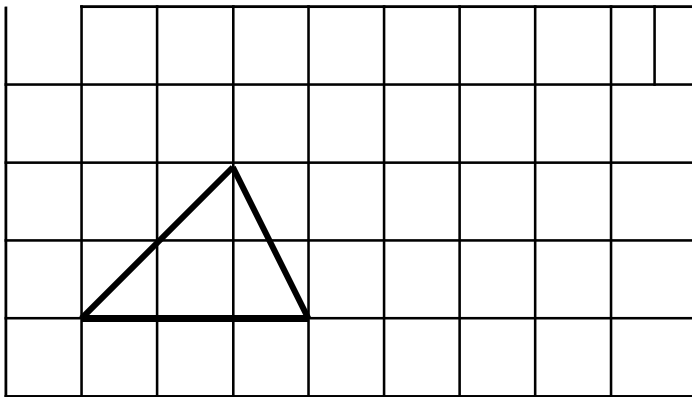
Minden síkidomhoz egyértelműen hozzárendeljük azt a pozitív valós számot, melyet a síkidom területének nevezünk, és amelyre teljesülnek a következő feltételek:

- (1) egybevágó síkidomokhoz ugyanazt a valós számot rendeljük;
- (2) ha egy síkidomot véges sok részsíkidomokra bontunk, akkor a részekhez rendelt valós számok összege megegyezik az eredeti síkidomhoz rendelt valós számmal;
- (3) az egységnyi oldalú négyzethez 1-et rendelünk.

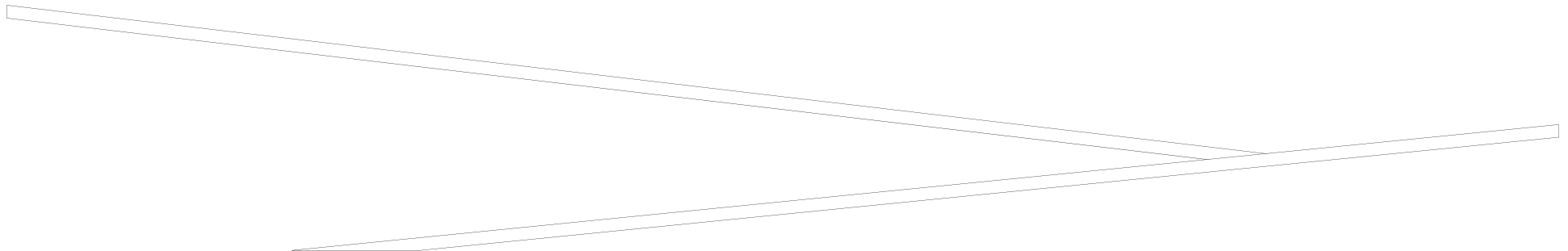


TERÜLETMÉRÉS

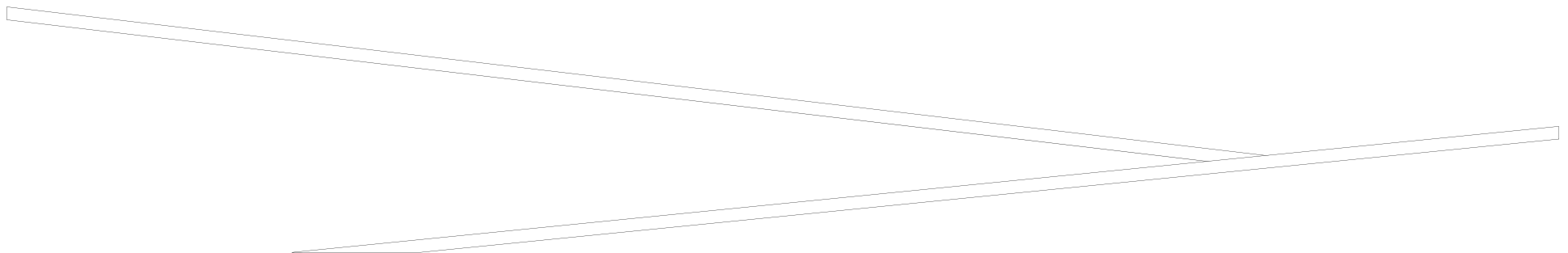
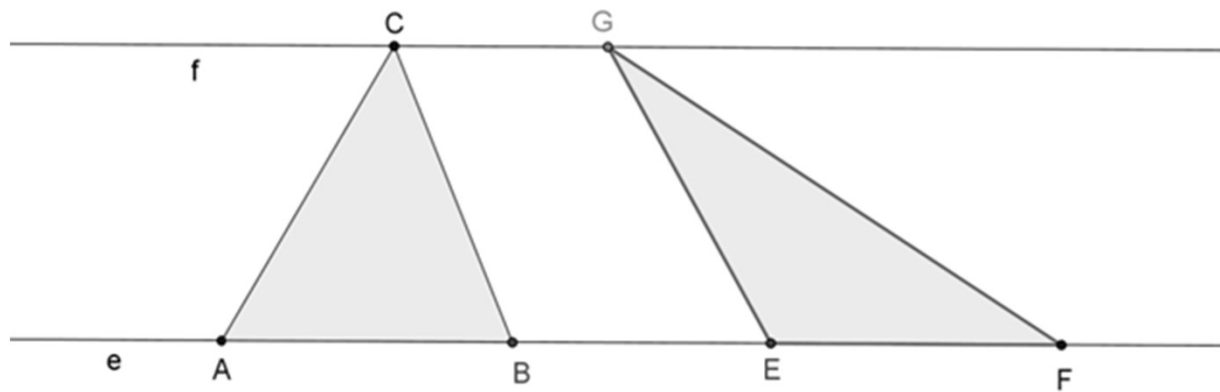
- ▶ Terület meghatározása négyzethálón, méréssel:



- ▶ Terület kiszámítása képletekkel:
 - ▶ Téglalap, paralelogramma, háromszög, trapéz, deltoid
 - ▶ Kör, körcikk, körszelet, körgyűrű

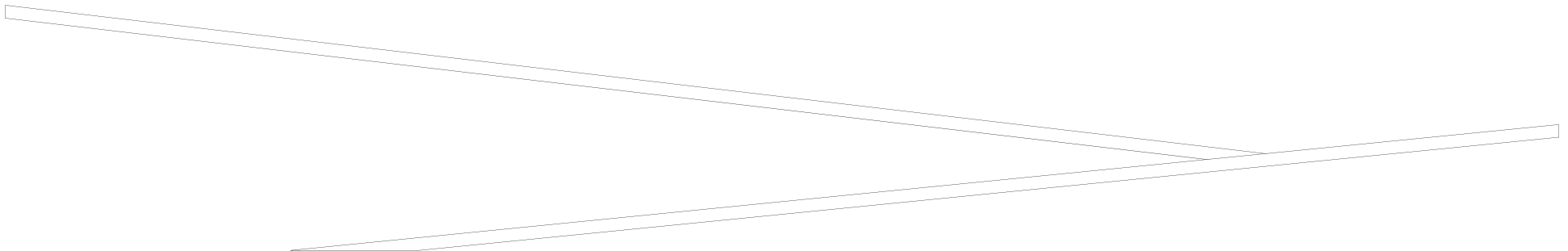


TERÜLET ÉS KERÜLET KAPCSOLATA



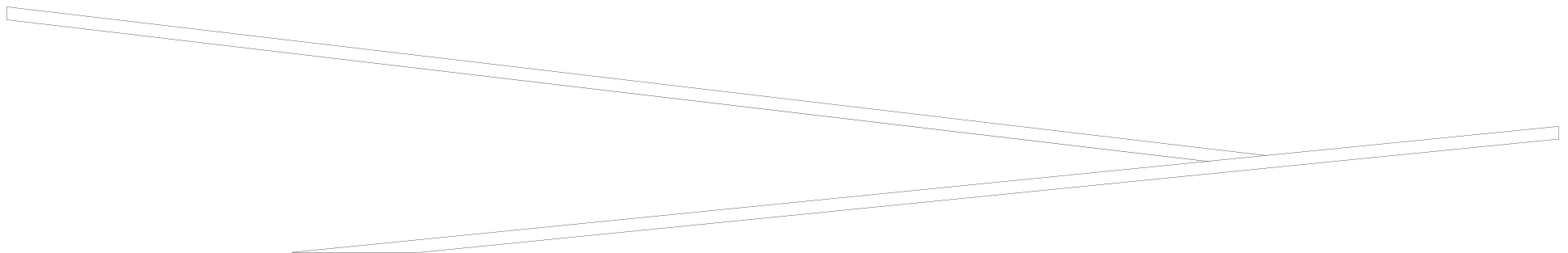
FELSZÍN FOGALMA ÉS MÉRÉSE

- ▶ Szemléletesen: testet határoló felület területe
- ▶ Poliéderek felszíne: a lapok területének összege
- ▶ Testháló fogalma
- ▶ Síkba kiteríthető testek, a palást fogalma
- ▶ Henger, kúp felszíne
- ▶ Gömb felszíne



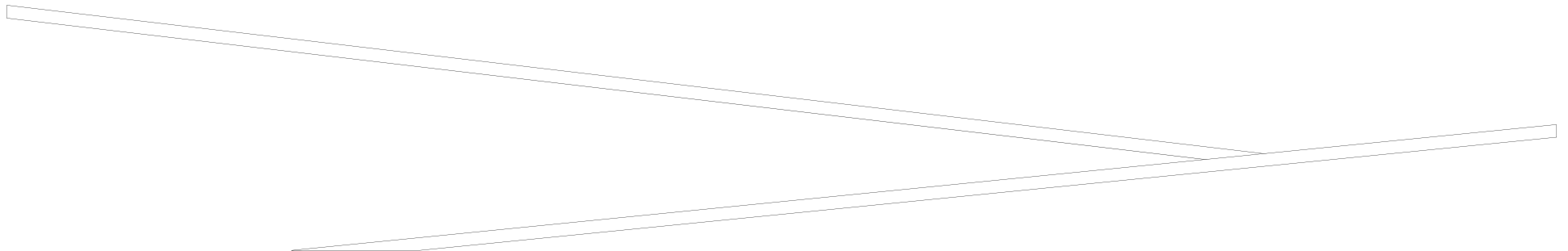
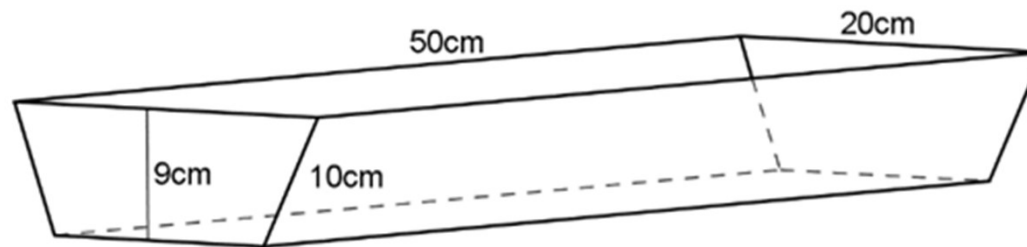
TÉRFOGAT FOGALMA ÉS MÉRÉSE

- ▶ A térfogat szemléletes fogalma és definíciója analóg a területnél megismertekkel.
- ▶ A térfogatmérés egysége
- ▶ Téglatest, hasábok, gúlának térfogatának kiszámítása
- ▶ Csonkagúlának térfogata
- ▶ Hengerek, kúpok, csonkakúpok térfogata
- ▶ Gömb térfogata



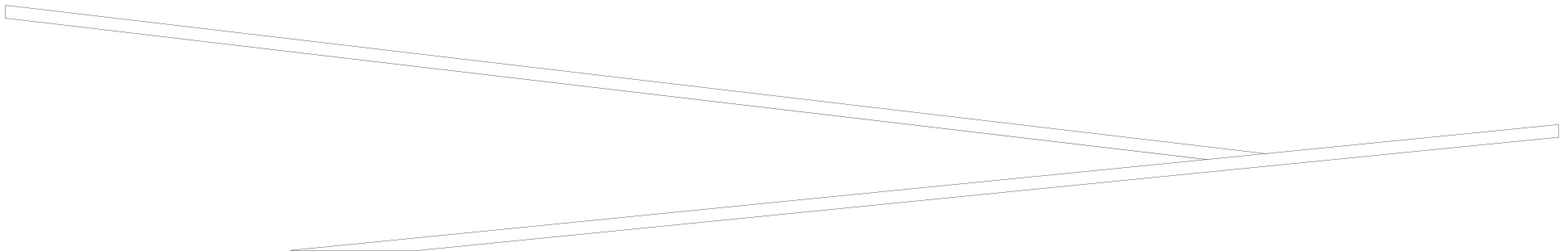
SZÁMÍTÁSI FELADATOK

- ▶ Virágládánk keresztmetszete olyan szimmetrikus trapéz, melynek szárai 10 cm-esek. A láda magassága 8 cm, hossza 50 cm, felül pedig 20 cm széles. Meg bírjuk-e emelni, ha teletöltjük virágfölddel? (1 dm^3 föld tömege kb. 1,4 kg.)



SZÖG FOGALMA ÉS MÉRÉSE

- ▶ Statikus definíció
- ▶ Dinamikus definíció
- ▶ A szögmérés tanítása:
 - ▶ Egyenes szög fogalma
 - ▶ A fok fogalma, a szögmérő használata
 - ▶ Az ívmérték fogalma
- ▶ Szögek csoportosítása nagyságuk alapján
- ▶ Nevezetes szögpárok
- ▶ Nevezetes szögek szerkesztése



A TÁVOLSÁG- ÉS A SZÖGMÉRÉS KAPCSOLATA – TRIGONOMETRIA

- ▶ A hasonló derékszögű háromszögekben a hegyesszögek megegyeznek → ezeket a szögeket két oldal aránya megadja → távolság meghatározása szögméréssel
- ▶ Példa: Egy 45 m magas épület egy 25 m magas épület tetejéről $14^{\circ}2''$ emelkedési szög alatt látszik. Milyen messze van a két épület egymástól?

