Método de Gauss Seidel

El método de Gauss-Seidel es un método iterativo utilizado para resolver sistemas de ecuaciones lineales. El método se llama así en honor a los matemáticos alemanes Carl Friedrich Gauss y Philipp Ludwig Von Seidel

Este método generalmente (pero no siempre) converge más rápido que el método de Jacobi, que veremos más adelante. En este método el último valor de cada variable es sustituido en cada paso en el proceso iterativo. El método de Gauss-Seidel, es un método iterativo y por lo mismo, resulta ser un método bastante eficiente

El método de Gauss-Seidel, cuentan con los siguientes requisitos para poder resolverse:

- La matriz no debe tener elementos nulos. (Si una matriz cuadrada tiene dos filas (o dos columnas) iguales, su determinante es nulo)
- La matriz tiene que ser dominante. Esto quiere decir que los elementos en la diagonal deben de contener el coeficiente mayor en valor absoluto
- El sistema de ecuaciones debe de ser cuadrado, es decir, el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas.

A continuación, se presenta un sistema de ecuaciones

Ejemplo. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones por el método de Gauss-Seidel, tome en cuenta los siguientes valores iniciales: $x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = 0$

$$\begin{array}{llll} 7x & +8y & +5z & = 3 \\ 3x & +4y & -10z & = 6 \\ 9x & +2y & -z & = -2 \end{array}$$

Reacomodamos las ecuaciones para encontrar la matriz dominante

$$\begin{array}{llll} 9x & +2y & -z & = -2 \\ 7x & +8y & +5z & = 3 \\ 3x & +4y & -10z & = 6 \end{array}$$

Despejamos las variables $x, y,$ y z de la 1ra, 2da y 3er ecuaciones respectivamente. Para comenzar a iterar sustituimos los valores iniciales.

$$x = \frac{-2y + z - 2}{9}$$

$$y = \frac{-7x - 5z + 3}{8}$$

$$z = \frac{-3x - 4y + 6}{-10}$$

1ra iteración $x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0$

$$x_1 = \frac{-2(0) + (0) - 2}{9} = -\frac{2}{9} = -0.2222$$

$$y_1 = \frac{-7\left(-\frac{2}{9}\right) - 5(0) + 3}{8} = \frac{41}{72} = 0.5694$$

$$z_1 = \frac{-3\left(-\frac{2}{9}\right) - 4\left(\frac{41}{72}\right) + 6}{-10} = -\frac{79}{180} = -0.4388$$

2da iteración $x_1 = -0.2222 \quad y_1 = 0.5694 \quad z_1 = -0.4388$

$$x_2 = \frac{-2\left(\frac{41}{72}\right) + \left(-\frac{79}{180}\right) - 2}{9} = -\frac{161}{405} = -0.3975$$

$$y_2 = \frac{-7\left(-\frac{161}{405}\right) - 5\left(-\frac{79}{180}\right) + 3}{8} = 0.9971$$

$$z_2 = \frac{-3\left(-\frac{161}{405}\right) - 4(0.9971) + 6}{-10} = -0.3204$$

3ra iteración $x_2 = -0.3975, \quad y_2 = 0.9971 \quad z_2 = -0.3204$

$$x_3 = \frac{-2(0.9971) + (-0.3204) - 2}{9} = -0.4794$$

$$y_3 = \frac{-7(-0.4794) - 5(-0.3204) + 3}{8} = 0.9947$$

$$z_3 = \frac{-3(-0.4794) - 4(0.9947) + 6}{-10} = -0.3459$$

4ta iteración $x_3 = -0.4794, \quad y_3 = 0.9947 \quad z_3 = -0.3459$

$$x_4 = \frac{-2(0.9947) + (-0.3459) - 2}{9} = -0.4817$$

$$y_4 = \frac{-7(-0.4817) - 5(-0.3459) + 3}{8} = 1.0126$$

$$z_4 = \frac{-3(-0.4817) - 4(1.0126) + 6}{-10} = -0.3394$$

5ta iteración $x_4 = -0.4817, \quad y_4 = 1.0126 \quad z_4 = -0.3394$

$$x_5 = \frac{-2(1.0126) + (-0.3394) - 2}{9} = -0.4849$$

$$y_5 = \frac{-7(-0.4849) - 5(-0.3394) + 3}{8} = 1.0114$$

$$z_5 = \frac{-3(-0.4849) - 4(1.0114) + 6}{-10} = -0.3409$$

6ta iteración $x_5 = -0.4849, \quad y_5 = 1.0114 \quad z_5 = -0.3409$

$$x_6 = \frac{-2(1.0114) + (-0.3409) - 2}{9} = -0.4848$$

$$y_6 = \frac{-7(-0.4848) - 5(-0.3409) + 3}{8} = 1.0122$$

$$z_6 = \frac{-3(-0.4848) - 4(1.0122) + 6}{-10} = -0.3405$$

Calculemos el error hasta la 6ta iteración

$x_5 = -0.4849, \; y_5 = 1.0114 \quad z_5 = -0.3409$

$x_6 = -0.4848, \; y_6 = 1.0122 \quad z_6 = -0.3405$

$$E_x = \left|\frac{xnueva - xanterior}{xnueva}\right| * 100$$

$$E_x = \left|\frac{-0.4848 - (-0.4849)}{-0.4848}\right| * 100 = 0.02\%$$

$$E_y = \left|\frac{ynueva - yanterior}{ynueva}\right| * 100$$

$$E_y = \left|\frac{1.0122 - 1.0114)}{1.0122}\right| * 100 = 0.07\%$$

$$E_z = \left|\frac{znueva - zanterior}{znueva}\right| * 100$$

$$E_x = \left|\frac{-0.3405 - (-0.3409)}{-0.3405}\right| * 100 = 0.11\%$$

El cálculo del error nos indica que los valores obtenidos en la 6ta iteración es una muy buena aproximación a la solución del sistema, tomando en cuenta sólo tres decimales la solución sería:

$\boldsymbol{x_6 = -0.484}$, $\boldsymbol{y_6 = 1.012}$ $\boldsymbol{z_6 = -0.340}$

Ejercicio para practicar

Valores iniciales: $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$

$$\begin{array}{lll} 17x & -2y & -3z = 500 \\ -5x & -21y & -2z = 200 \\ -5x & -5y & +22z = 30 \end{array}$$