

**Matematickou analýzou proti koronaviru XI:  
Nevlastní integrály, aplikace určitého integrálu**

**Nevlastní integrály** Vzpomeňte si opět na zásadní Newtonovu-Leibnizovu formuli (kde  $F(x)$  je primitivní funkce k  $f(x)$ ):

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b-) - F(a+), \text{ pro } a < b,$$

***pokud má pravá strana smysl!***

1. Spočítejte následující integrály (pokud existují):

(a)  $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dx$

(b)  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x dx$

(c)  $\int_3^{\infty} \frac{2x-1}{x^2-x} dx$

(d)  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(\ln^2 2x+1)} dx$

(e)  $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx$

(f)  $\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2 x} dx$  (Pozor, špek!)

(g) Známy starý vtip praví: „V Polsku v dobách tuhého socialismu si jeden docent matematiky spočítal, že dělník v loděnici vydělá 3x více než on. Proškrtal si tedy v občance tituly před a za jménem a šel také pracovat do loděnice. V loděnici se mu dařilo, moc se s prací nepřetrhl a dostával 3x víc než na škole. Po čase loděnice založila večerní školu pro dělníky s tím, že kdo ji bude navštěvovat, dostane přidáno, čehož po zralé úvaze využil i docent, zapsal se a stal se opět studentem. Hned první hodinu, báb ho, matematika. Obtížnost jako v prvním ročníku na střední, takže docent jen tak pospává a nedává pozor. Toho si všimne učitel, vyvolá docenta k tabuli a dá mu spočítat obsah kruhu. Docent začne psát, ale zaboha si nemůže vzpomenout na vzorec, takže se jej rozhodne odvodit...”

Zvládnete z této situace vyklouznout?

2. Konverguje integrál  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+1} dx$ ?

**Aplikace určitého integrálu** Vzorce k následujícím úlohám najdete na str. 10 .

3. Spočítejte délku kružnice jako délku grafu vhodné funkce.

4. Určete objem rotačního elipsoidu (tj. elipsu točíme kolem její osy) s poloosami  $a, b$ .

5. Určete objem a povrch rotačního hyperboloidu pro  $f(x) = \frac{1}{x}$  na  $\langle 1; \infty \rangle$ .

6. Určete těžiště půlkruhu.

*Ad 1g:*

When you show someone **Math** you're really proud of and they say "cool" and change the subject

