

CVI 01

2.1. b)  $X - A = XB$

$$-A = XB - X$$

$$-A = X(B - I)$$

$$X = -A(B - I)^{-1}$$

Odpověď:  $X = -A(B - I)^{-1}$

c)  $2X - AX + 2A = 0$

$$2X - AX = -2A$$

$$(2I - A)X = -2A$$

$$X = -2(2I - A)^{-1}A$$

Odpověď:  $X = -2(2I - A)^{-1}A$

2.3. 
$$\begin{cases} Ax + (y^T B)^T = d \\ Ay + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ax + B^T y = d \\ Ay + c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} A & B^T & 0 \\ 0 & A & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -c \end{bmatrix} \leftarrow \text{Odpověď}$$

p                      u                      =                      q

2.4.  $\begin{cases} Ax + By = a \\ Cx + Dy = b \end{cases} \quad x, y \text{ jsou neznámé}$

a)  $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

b)  $\begin{cases} Ax + By = a \\ Cx + Dy = b \end{cases} \begin{cases} By = a - Ax \\ Dy = b - Cx \end{cases} \begin{cases} y = B^{-1}(a - Ax) \\ y = D^{-1}(b - Cx) \end{cases}$

$$B^{-1}(a - Ax) = D^{-1}(b - Cx)$$

$$B^{-1}a - B^{-1}Ax = D^{-1}b - D^{-1}Cx$$

$$-B^{-1}Ax + D^{-1}Cx = D^{-1}b - B^{-1}a$$

$$(-B^{-1}A + D^{-1}C)x = D^{-1}b - B^{-1}a$$

$$x = (-B^{-1}A + D^{-1}C)^{-1}(D^{-1}b - B^{-1}a)$$

3.1

a)  $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = 0\} \quad a \in \mathbb{R}^n$

1) Necht'  $\vec{u}, \vec{v} \in M$ , pak  $(a^T u = 0, a^T v = 0)$

$$a^T(u+v) = a^T u + a^T v = 0 \quad u+v \in M$$

2) Necht'  $u \in M, \lambda \in \mathbb{R} \quad (a^T u = 0)$ , pak

$$a^T(\lambda u) = a^T \lambda u = \lambda(a^T u) = 0 = a^T u \Rightarrow \lambda u \in M$$

Odpověď: Daná množina je lineární podprostor,  $\dim = n$

b)  $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = b\} \quad a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$

$M$  neobsahuje nulový vektor  $\rightarrow$  není lineární podprostor

$M$  je afinní podprostor  $\dim = n$  iž  $\sum a_i = 1$

c)  $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T x = 1\}$

Není lineární ani afinní podprostor

3.2.

$ANO$ , je lineární

$$x_1 + x_3 = 0; x_1 = -x_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 = 0$$

$$x_2 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_4 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

3.7  $f(x, y) = (x+y, 2x-1, x-y)$

a) Lineární?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & ? \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ 2x-1 \\ x-y \end{bmatrix}$$

Není lineární, protože ~~je třeba~~ ~~neexistuje~~ taková matice  $A$ , že  $f(x) = Ax$

b) Afinní? ANO

Je zapísat zobrazení jako

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{x_0} = \begin{bmatrix} x+y \\ 2x-1 \\ x-y \end{bmatrix}$$

3.8. 
$$\begin{cases} x+2y+z=1 \\ -x+y+2z=2 \end{cases} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2+R_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2+R_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} y+z=1 \\ -x+z=1 \end{cases} \begin{cases} y = -z+1 \\ x = z-1 \end{cases} \quad z=t$$

$$(x, y, z) = (t-1, -t+1, t)$$

$$(x, y, z) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} + \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$