CVI 05

6.1 a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = (x^2+y^2)(x-y) + xy - x - y$

$= x^3 - x^2y + y^2x - y^3 + xy - x - y$

Je lineární kombinací monomů => je polynomem 3 st.

2 proměnné
není homogenní

b) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $f(x) = a^T x$

$= a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$

Je lineární kombinací monomů => je polynomem 1. st.

n proměnných
je homogenní

c) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|$

$= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 \dots + x_n^2}$

Není lin. kombinací monomů, není polynom

d) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|Ax + b\|^2$ Nechť $Ax+b=c$, $c \in \mathbb{R}^m$

$(m\times n)\cdot(n\times 1) + (m\times 1)$

$= \|c\|^2 = \left(\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_m^2}\right)^2 = c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_m^2$

Je lin kombinací monomů, je polynomem 2. st.

m proměnných, je homogenní

e) $f: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^T y$

$= x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$

Je lin. kombinací monomů, je polynomem 2. st.

2n proměnných, je homogenní

f) $f: \mathbb{R}^{1\times n} \to \mathbb{R},\ f(X) = a^T X b$ složky $a^T X$ jsou lin. komb

$\underset{1\times n}{a^T}\ \underset{n\times n}{X}\ \underset{n\times 1}{b}$

Je lin komb monomů, polynom 1 st.
$n\times n$ proměnných, je homogenní

g) $f: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R},\ f(X) = \det X$ pro $n=2$ $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$

$\det(X) = x_1 \cdot x_4 - \dots$

Je lin komb monomů, polynom n. stu
$n\times n$ proměnných, je homogenní.

6.2

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ $(A - \lambda I)v = 0$
$\det(A - \lambda I) = 0$

$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & -3-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$

$\begin{cases} (1-\lambda)v_1 + 2v_2 = 0 \\ -v_1 + (-3-\lambda)v_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} v_1 - \lambda v_1 + 2v_2 = 0 \\ -v_1 - 3v_2 - \lambda v_2 = 0 \end{cases}$

$(1-\lambda)\cdot(-3-\lambda) - (2\cdot(-1)) = 0$

$-3 - \lambda + 3\lambda + \lambda^2 + 2 = 0$

$\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$

$D = 4 - 4(-1) = 8$

$\lambda_1 = \frac{-2-\sqrt{8}}{2} = -1 - \sqrt{2}$

$\lambda_2 = -1 + \sqrt{2}$

$\lambda_1 = -1 - \sqrt{2}$

$\begin{pmatrix} 1+1+\sqrt{2} & 2 \\ -1 & -3+1+\sqrt{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} & 2 \\ -1 & -2+\sqrt{2} \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} & 2 \\ -2-\sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$V_1 = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2-\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$

$\lambda = -1 + \sqrt{2}$

$\begin{pmatrix} 1-(-1+\sqrt{2}) & 2 \\ -1 & -3-(-1+\sqrt{2}) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} & 2 \\ -1 & -2-\sqrt{2} \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} & 2 \\ -2+\sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$V_2 = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2+\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$

6.8 2) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} \det A_{\{1\}} = 2 > 0 \\ \det A_{\{1,2\}} = (2\cdot 2) - (1\cdot 1) = 3 > 0 \end{array}\right\} \text{A je positivně definitní}$$

Najdeme vlastní čísla

$(2-\lambda)(2-\lambda) - 1 = 0$

$4 - 2\lambda + \lambda^2 - 1 = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$

$D = 16 - 4(3) = 2^2$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{4+2}{2} = 3 \\ \lambda_2 = \frac{4-2}{2} = 1 \end{array}\right\} > 0 \text{, A je pos def}$$

7) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

$\det A_{\{1\}} = -2 < 0$, A je indefinitní

6.16

Musí, např matice z 6.8 7), matice je indef kvůli zápornému prvku na diagonále.