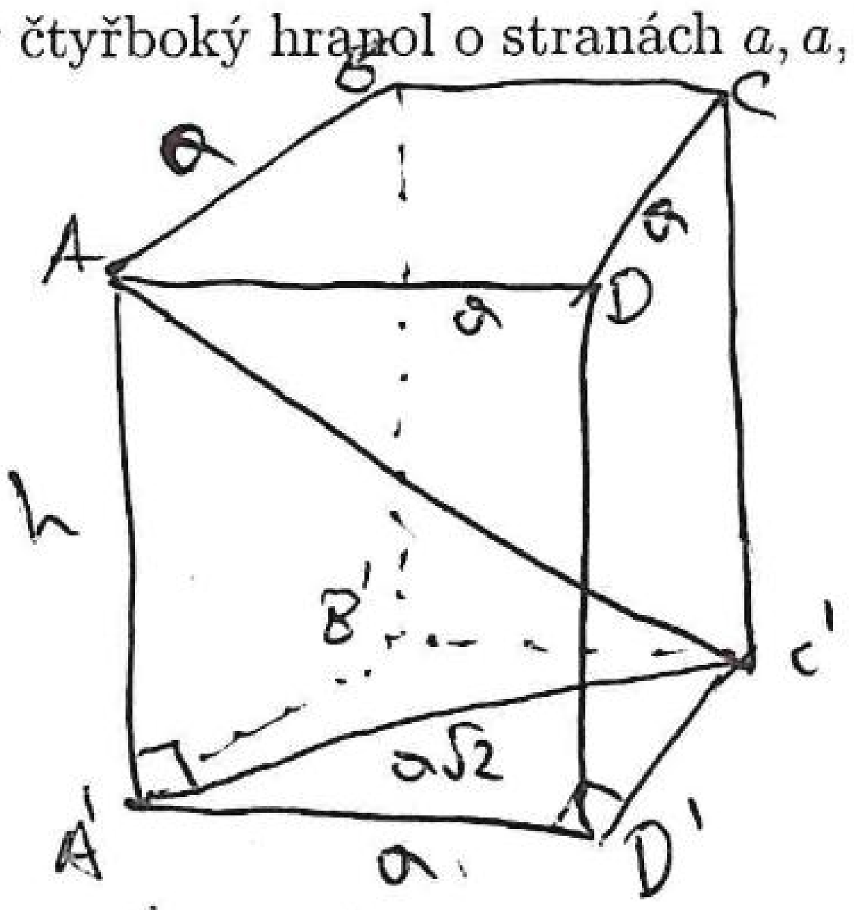
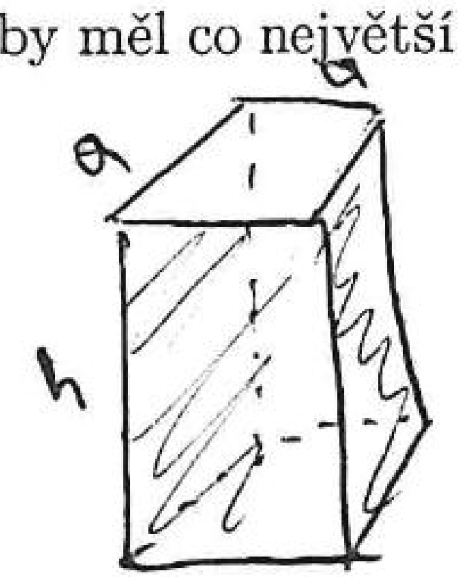
OPT midterm 17.5.2023 | Příjmení: Zviazdou | Jméno: Jauheni | 105

Příklady z první části vyřešte a odpovědi včetně postupu napište do připravených mezer.

1. (6 b) Do koule o jednotkovém poloměru vepište pravidelný čtyřboký hranol o stranách a, a, h tak, aby měl co největší povrch bez podstav.

$S = 4ah$ – povrch bez podstav





$A'C' = \sqrt{a^2+a^2} = a\sqrt{2}$

$AC' = \sqrt{h^2 + (a\sqrt{2})^2} = \sqrt{h^2+a^2\cdot 2} = h$

$= \sqrt{h^2+2a^2}$

Aby hranol byl vepsaný, AC' má být diametrem. $AC' = 2R = 2$

$\max\{4ah \mid h>0,\ a>0,\ \sqrt{h^2+2a^2} = 2\}$

$\max\{4ah \mid h>0,\ a>0,\ h^2+2a^2 = 4\}$

$a = 1 \quad h = \sqrt{2} \qquad S_{b.p} = 4\sqrt{2}$

6

2. (4 b) Prokládáme data $(x_1, y_1), \ldots, (x_{100}, y_{100}) \in \mathbb{R}^2$ regresní funkcí $f(x) = a + bx + c\sin x$ s neznámými parametry $a, b, c \in \mathbb{R}$ tak aby, kritérium $\max_{i=1}^{100} |y_i - f(x_i)|$ bylo minimalizováno. Napište účelovou funkci v maticové podobě a formulujte tuto úlohu jako lineární program.

$\min\{\max_{i=1}^{100} |y_i - f(x_i)|\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & \sin x_1 \\ & \vdots & \\ 1 & x_{100} & \sin x_{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{100} \end{bmatrix}$$

min

0.5

Vase odpovedi na kvizove otazky: a, b, a, b, e

spatne: 3, 5
dobre: 4, 6, 7
chybi:

Celkem bodu za kviz: 3

Zadani vaseho kvizu naleznete na nasledujici strane.

OPT midterm 17.5.2023 Příjmení: Zviazdou Jméno: Yauheni

V každém z následujících kvízových příkladů je právě jedna odpověď správně. Odpovědi vyznačte do tabulky křížky. Nechcete-li na nějaký příklad odpovědět, sloupec v tabulce ponechte prázdný. Pokud již vyznačený křížek chcete odstranit, políčko s křížkem zcela vyplňte barvou.

ODPOVĚDI NEVYZNAČENÉ V TABULCE NEBUDOU ZAPOČÍTÁNY.

(Za každou správnou odpověď je 1 bod.)

105

	3	4	5	6	7
a	X		X		
b		X		X	
c					
d					
e					X

3. Víme, že afinní funkce $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + d$ nabývá minima v bodě $\mathbf{x}^*$ při omezení $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$. Co z toho plyne?

✓ (a) Bod $\mathbf{x}^*$ je vrcholem konvexního polyedru, který je definován nerovnicemi $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$.
✗ (b) Bod $\mathbf{x}^*$ je konvexní kombinací dvou různých vrcholů množiny přípustných řešení.
✗ (c) Platí $\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$.
✗ (d) Nic z uvedeného.
✗ (e) Platí $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*)$ pro všechna $\mathbf{x}$ splňující $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$. (několik minim)

4. Lineární program $\min\{c_1x_1 + c_2x_2 | x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + 2x_2 \geq 1\}$ má optimum v bodě $(0, \frac{1}{2})$, pokud platí:

✗ (a) Nic z uvedeného.
✓ (b) $c_1 = 1$ a $c_2 = 1$.
✗ (c) $c_2 > 0$. if $c_1 = 0$, $x_1 \to 1 ... \infty$, $x_2 = 0$
✗ (d) $c_1 = -1$ a $c_2 = -1$. $x_1 \to \infty$ $x_2 \to \infty$
✗ (e) $c_1 = 0$ a $c_2 = 1$. $x_1 \to 1 ... \infty$ $x_2 = 0$

$$\begin{aligned} \min\ & c_1x_1 + c_2x_2 \\ \text{z.p.}\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 1 \end{aligned}$$

5. V $\mathbb{R}^3$ je dána množina $X = \{(t, 2t+1, t^2) \mid 0 \leq t \leq 2\}$ a bod $\mathbf{x} = (1, 3, 1)$.

✓ (a) Bod $\mathbf{x}$ je vnitřní bod množiny X.
✗ (b) Neplatí žádné z uvedených tvrzení.
✗ (c) Bod $\mathbf{x}$ nepatří do množiny X.
✗ (d) Bod $\mathbf{x}$ je vnitřní bod množiny $\mathbb{R}^3 \setminus X$.
✗ (e) Bod $\mathbf{x}$ je hraniční bod množiny X.

6. Které body z uzavřeného intervalu $[-1, 1]$ jsou regulárními body zobrazení $g(x) = x^2 - 1$?

(a) Všechny.
✓ (b) Body -1 a 1.
(c) Bod 0.
(d) Bod 0 a 1.
(e) Žádné.

$g(-1) = 0$ $g(0) = -1$
$g(1) = 0$

7. Pro funkci $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 + 1)^2$ v bodě $\mathbf{x} = (1, 2, 3)$ je směr $\mathbf{v} = (1, 1, -2)$:

(a) Tečný k vrstevnici.
✗ (b) Nelze rozhodnout.
(c) Rostoucí.
✗ (d) Nic z uvedeného.
(e) Klesající. asi

~~grad(f(x)) = (2x_1 + 2x_2, 2x_1~~

$$f(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_2 + 1 + x_3^2 + 2x_3 + 1$$
$$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2 + 2x_3 + 2$$
$$\nabla f(x) = (2x_1 + 2x_2,\ 2x_2 + 2x_1 - 2,\ 2x_3 + 2)$$
$$\nabla f(x)\big|_{(1,2,3)} = (6, 4, 8) \qquad (2, 0, -2)$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3$$