5

OPT midterm 5.4.2023 Příjmení: Zviazdou Jméno: Yauheni 011

Příklady z první části vyřešte a odpovědi včetně postupu napište do připravených mezer.

1. (2 body) Najděte vzdálenost bodu $\mathbf{z} = (1, 0, 1, 0) \in \mathbb{R}^4$ od nadroviny $\{\mathbf{x};\ \mathbf{a}^T\mathbf{x} = b\}$, kde $\mathbf{a} = (1, 1, 1, 2)$, $b = 3$.

1

$X = \text{null}(a) + x_0$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$ $X = \text{span}\{(1,-1,0,0),(1,0,-1,0),(2,0,0,-1)\} + (0\ 0\ 1\ 1)$

$X^\perp = (1, 1, 0, 1)$ $P_\perp = \begin{pmatrix} 1&1&0&1\\1&1&0&1\\0&0&0&0\\1&1&0&1 \end{pmatrix}/3$ $P = I - P_\perp = \begin{pmatrix} 3&&&0\\&3&&\\&&3&\\0&&&3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1&1&0&1\\1&1&0&1\\0&0&0&0\\1&1&0&1 \end{pmatrix}/3 = \begin{pmatrix} 2&-1&0&-1\\-1&2&0&-1\\0&0&3&0\\-1&-1&0&2 \end{pmatrix}/3$

$\|P_\perp z\| = \|(1\ 1\ 0\ 1)\| = \sqrt{3}$

Vzdálenost od nadpr.

$d = \|a^T z - b\| = \|1+1-3\| = \|1\| = 1$

2. Nechť $X = \text{span}\{(1, 2, 3, 4), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0)\}$. Najděte

2

a) (1 bod) bázi podprostoru $X^\perp$,
b) (1 bod) matici ortogonálního projektoru na podprostor $X^\perp$,
c) (1 bod) matici ortogonálního projektoru na podprostor X.

a) $\begin{pmatrix} 1&2&3&4\\1&0&1&0\\0&1&0&0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&2&4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&0&0&-2\\0&1&0&0\\0&0&1&2 \end{pmatrix}$ -1

$X^\perp = \text{span}\{(-2, 0, 2, -1)\}$ ✓

PROČ?

b) $P_{(X^\perp)} = \frac{aa^T}{a^Ta} = \begin{pmatrix} -2\\0\\2\\1 \end{pmatrix}(-2\ 0\ 2\ 1)/9 = \begin{pmatrix} 4&0&-4&-2\\0&0&0&0\\-4&0&4&2\\-2&0&2&1 \end{pmatrix}/9$

c) $P_{(X)} = I - P_{(X^\perp)} =$

$= \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix} - (4$

$\begin{pmatrix} 1&&0\\&1&\\0&&1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4&0&-4&-2\\0&0&0&0\\-4&0&4&2\\-2&0&2&1 \end{pmatrix}/9 =$

$= \begin{pmatrix} 5&0&4&2\\0&9&0&0\\4&0&5&-2\\2&0&-2&8 \end{pmatrix}/9$

3. Máme 5 pozorování $(0, 1), (1, 1), (2, 3), (3, 3), (4, 4)$ tvaru (x_i, y_i). Hledáme optimální regresní přímku $y = \theta_1 x + \theta_2$, kde $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ jsou hledané parametry.

1

a) (1 bod) Formulujte úlohu maticově jako problém nejmenších čtverců.
b) (2 body) Vyřešte tento problém.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & x_1\\1 & x_2\\ & \vdots\\1 & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0\\1&1\\1&2\\1&3\\1&4 \end{bmatrix}$ $X = \begin{bmatrix} \theta_2\\\theta_1 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} y_1\\y_2\\\vdots\\y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\\1\\3\\3\\4 \end{bmatrix}$ $Ax = b$

FORMULACE?

t.j. $\begin{bmatrix} 1&0\\1&1\\1&2\\1&3\\1&4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_2\\\theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\\1\\3\\3\\4 \end{bmatrix}$

NEMÁ ŘEŠENÍ!

b) $\theta_2 = 0$ $\theta_1 = 1$ chyba $= 1^2 + 1^2 = 2$
$\theta_2 = 0{,}5$ $\theta_1 = 1$ chyba $= 0{,}5^2 + 0{,}5^2 + 0{,}5^2 + 0{,}5^2 + 0{,}5^2 = 1{,}25$

$\theta = A \backslash b$ $\theta_1 = 1$ $\theta_2 = 0{,}5$ chyba $= 1{,}25$

4. Pro matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{15\times5}$ hledáme nejbližší matici hodnosti ≤ 3. Víme, že matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ má vlastní čísla $2, 1, 4, 9, 0$.

1

a) (1 bod) Formulujte úlohu maticově jako optimalizační problém a napište hodnotu účelové funkce v optimu.
b) (1 bod) Jaké bude optimální řešení tohoto problému, budeme-li hledat matici hodnosti ≤ 4?

b) $AA^T = V\Lambda V^T$
$V = [X\ Y]$, kde Y má 4 sloupce
$B = YY^TA$

JEN OBECNĚ

a) $\min\{\|A - B\| \mid B \in \mathbb{R}^{15\times5},\ \text{rank}(B \leq 3)\}$ ✓

hodnota (min) $= 2+1+4+9+0 = 16$ $(\text{tr}(\Lambda))$

Vase odpovedi na kvizove otazky: b, d, a, b, e

spatne: 6, 8, 9

dobre: 5, 7

chybi:

Celkem bodu za kviz: 2

Zadani vaseho kvizu naleznete na nasledujici strane.

OPT midterm 5.4.2023 | Příjmení: Zviazdou Jméno: Yauheni | 011

V každém z následujících kvízových příkladů je právě jedna odpověď správně. Odpovědi vyznačte do tabulky křížky. Nechcete-li na nějaký příklad odpovědět, sloupec v tabulce ponechte prázdný. Pokud již vyznačený křížek chcete odstranit, políčko s křížkem zcela vyplňte barvou.
ODPOVĚDI NEVYZNAČENÉ V TABULCE NEBUDOU ZAPOČÍTÁNY.

(Za každou správnou odpověď je 1 bod.)

011

	5	6	7	8	9
a			X		
b	X			X	
c					
d		X			
e					X

5. Máme matice $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ takové, že každá matice $\mathbf{A}_i$ má ortonormální sloupce. Označme $\mathbf{B} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\cdots\mathbf{A}_k$ součin těchto matic.

X (a) Matice $\mathbf{B}$ má ortonormální sloupce, ale nemusí být ortogonální.
✓ (b) Matice $\mathbf{B}$ je ortogonální.
X (c) Matice $\mathbf{B}$ je ortogonální jen tehdy, když $k \leq 2$.
X (d) Matice $\mathbf{B}$ je identická.
(e) Neplatí žádné výše uvedené tvrzení.

6. Nechť $\mathbf{A}$ je matice s lineárně nezávislými řádky. Matice ortogonálního projektoru na podprostor null $\mathbf{A}^T$ je

(a) $\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$
(b) $\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}$
(c) $\mathbf{I} - \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}$
✓ (d) $\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$
(e) neplatí žádné výše uvedené tvrzení

$P = A(A^TA)^{-1}A^T$
$P_\perp = I - A(A^TA)^{-1}A^T$

7. Rozhodněte, co platí pro matici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -1$

(a) Neplatí žádná z uvedených možností.
X (b) $\mathbf{A}$ má vlastní číslo 0.
X (c) Optimální hodnota úlohy $\min \{\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \|\mathbf{x}\| = 1\}$ je kladná.
X (d) Kvadratická forma $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ má minimum v bodě 0.
X (e) $\mathbf{A}$ je pozitivně definitní.

8. Nechť $n \geq 2$ a $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ je nenulový vektor. Ortogonální projektor promítající na podprostor span$\{\mathbf{a}\}$ je

X (a) je singulární matice
✓ (b) je symetrická regulární matice
X (c) je široká matice, která není čtvercová
(d) je matice plné hodnosti
(e) žádná z uvedených možností

9. Pro úlohu nejmenších čtverců $\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|^2$ platí:

X (a) Optimálních řešení může být nekonečně mnoho.
X (b) Optimální řešení je vždy tvaru $(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{y}$.
X (c) Každé řešení úlohy nejmenších čtverců je i řešením soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$.
X (d) Hodnota v optimu je vždy 0.
✓ (e) Úloha nemusí mít optimální řešení.