CVI04

5.1

a) Neplatí, např. pro nulovou matici, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$

b) Neplatí, p.p. $\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$

c) Platí (Věta 3.8)

Matice A má plnou hodnost $\Rightarrow$ Řádky A jsou LN $\rightarrow$
$\rightarrow$ rank $A = m$ $\longrightarrow$ $Ax = y$ má řešení pro každé y.

5.8 $u = (2,1,-3)$ $v = (1,-1,1)$

c) Máme najít ortog. projekce na span{u,v}

$((2,0,1) - y) \perp \text{span}\{u,v\}$

Stačí ověřit, že $(2,0,1) - y$ je ortogonální na každý bázový vektor prostoru.

- $(2-y_1, -y_2, 1-y_3) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$

$4 - 2y_1 - y_2 + 3y_3 - 3 = 0$

$2y_1 + y_2 - 3y_3 = 1$

- $(2-y_1, -y_2, 1-y_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$2 - y_1 + y_2 + 1 - y_3 = 0$

$y_1 - y_2 + y_3 = 3$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Najdeme partikulární řešení $y_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix}$

množina řešení tedy null $A + y_0$

$y = A^T (AA^T)^{-1} A y_0 = A^T (AA^T)^{-1} b = A^+ b$

$A^+ = \begin{bmatrix} 0{,}21 & 0{,}47 \\ 0{,}02 & -0{,}31 \\ -0{,}18 & 0{,}21 \end{bmatrix}$ (pomocí počítače)

$y = [1.63, -0{,}32, 0{,}44]$

d) $(\text{span}\{u,v\})^{\perp}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5/3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -5/3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & -5/3 \end{pmatrix}$$

$$(\text{span}\{u,v\})^{\perp} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -2/3 \\ -5/3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$((2,0,1) - y) \cdot (-2,-5,-3) = 0$$

$$(2 - y_1, -y_2, 1 - y_3) \cdot (-2,-5,-3) = 0$$

$$2y_1 - 4 + 5y_2 + 3y_3 - 3 = 0$$

$$2y_1 + 5y_2 + 3y_3 = 7$$

$$A = [2\ 5\ 3] \qquad b = 7$$

$$A \cdot y = b$$

part. res

$$\cancel{A^+} \quad y = A^T(AA^T)^{-1} A y_0 = A^T (AA^T)^{-1} b = A^+ b$$

$$A^+ = [0{,}05 \quad 0{,}13 \quad 0{,}07]$$

$$y = [0{,}36 \quad 0{,}92 \quad 0{,}55]$$

5.17 $a, b \in \mathbb{R}^n$

$$\left\| \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$$

$$\|a\|^2 = \left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}\right)^2 \qquad \|b\|^2 = \left(\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}\right)^2$$

$$\| \quad a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \qquad \qquad \| \quad b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2$$

$$\left\| \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\|^2 = \sqrt{a \cdot a^T + b \cdot b^T}^{\,2} = a \cdot a^T + b \cdot b^T = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 +$$

$$+ b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$$

3.3

a) $f(x) = \sum_{i=1}^{m} \|x - a_i\|^2$ $P = I$, u, q

$$P = I_n \quad u = x \quad q = a = [a_1, \dots, a_i]$$

b) $\min \| y - (a + ts) \| = \min \| y - a - ts \| = \min \| -st - (a - y) \|$

$$P = -S, \quad P \in \mathbb{R}^n = \begin{bmatrix} -s_1 \\ \vdots \\ -s_n \end{bmatrix}$$

$$u = t \quad \in \mathbb{R}$$

$$q = (a - y) = \begin{bmatrix} a_1 - y_1 \\ \vdots \\ a_n - y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$