- Směry růstu funkce f v bodě a_0

1) Největšího růstu
   1. Spočteme $\operatorname{grad} f(a_0)$
   2. Spočteme $\|\operatorname{grad} f(a_0)\|$
   3. $\vartheta = \dfrac{\operatorname{grad} f(a_0)}{\|\operatorname{grad} f(a_0)\|} = (\dots,\dots)$

2) Nejmenšího růstu
   $w = -\vartheta$

3) Nulového růstu
   $\vec{k} \cdot \operatorname{grad} f(a_0) = 0$
   $\vec{k}$ - je odpověď

- Normála k ploše F v bodě A

$\vec{n} = \operatorname{grad} F(A)$

Rovnice normály:

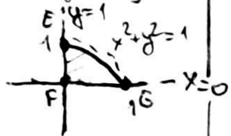
$A + \vec{n}t \quad ; t \in \mathbb{R}$

- Diferenciál funkce $f(x,y,\dots)$ v bodě A

$df(A)[h_1, h_2, \dots] = (h_1, h_2) \cdot \operatorname{grad} f(A)$

- Globální (absolutní) extrémy f-ce $f(x,y)$ na množině $M\{x,y \in \mathbb{R},\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2=1\}$

1) Najdeme extrémy ve vnitřku
   $\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0)$
   $V = (x_1, y_1)$
   - Odmítáme A jestli neleží v M



2) Najdeme extrémy na Hranici

a) $x = 0$
   $f(0,y)$
   $\nabla f = (0,0)$
   $A = (x_2, y_2)$

b) $y = 0$
   $f(x,y)$
   $\nabla f = (0,0)$
   $B = (x_3, y_3)$

c) $x^2+y^2=1$
   $y = \pm\sqrt{1-x^2}$
   $f(x, \pm\sqrt{1-x^2})$
   $C = (x_4, y_4)$
   $D = (x_5, y_5)$

3) Ověřeme nalezené body a hraniční !!!
   A, B, C, D, V - nalezené
   $E = (0,1)$
   $F = (0,0)$ — Hraniční
   $G = (1,0)$

• Limity

Př $f(x,y) = \frac{x \sin x}{y}$; $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f$

1) Vyjádříme y jako fce s x

$y = kx$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} f(x,kx) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x \sin x}{kx} = 0$

2) Vyjádříme y jako jiná f-ce s x

$y = kx^2$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} (x,kx^2) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x \sin x}{kx^2} = 1$

3) Limita existuje, jestli výsledky jsou stejné

• Tečná rovina $f(x,y)$ v bodě A

1) Najít $\mathrm{grad}\,F(x,y,z)$, kde $F(x,y,z) = f(x,y) - z$

2) Najít normálový vektor v b. A t.r.

$\vec{n} = \mathrm{grad}\,F(A)$

3) Rovnice roviny je

$((x,y,z\dots) - A) \cdot \vec{n} = 0$

Př

• Najít body na ploše $F(x,y,z) = \lambda$, ve kterých je tečná rovina rovnoběžná s rovinou $f(x,y,z)$

1) Najdeme $\mathrm{grad}\,F$ a $\vec{n}_f = \mathrm{grad}\,f$

2) Řešíme soustavu rovnic

$$\begin{cases} \mathrm{grad}\,F(x,y,z) = \alpha \cdot \vec{n}_f \\ F(x,y,z) = \lambda \end{cases}$$

3) Nalezené (x_1,y_1,z_1), (x_n,y_n,z_n) jsou hledané body

4) Po získání rovnice máme dosadit (x_n,y_n,z_n) do $f(x,y)$ a příkl. c.

• Spojitost funkce

Nechť $f(x,y)$, $g(x,y)$ jsou spoj.

$f + g$ - spoj

$f \cdot g$ - spoj

f/g - spoj , pokud $g \neq 0$

Pro ověření spojitosti funkce máme ověřit existence limity.

• Gradient - ukazuje směr největší derivace (ukazuje na lok. max)

$\mathrm{grad}\,f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \dots \right)$

Př Derivace $f(x,y)$ v bodě A ve směru vektoru $\vec{u}$

1) Najít $\mathrm{grad}\,f$

2) Spočítat $\langle \mathrm{grad}\,f ; \vec{u} \rangle$

$\underbrace{\langle \mathrm{grad}\,f ; \vec{u} \rangle}_{g(x,y,z\dots)} = \mathrm{grad}\,f[0] \cdot u[0] + \mathrm{grad}\,f[1] \cdot u[1] +$

3) Spočítat $g(A)$ bude číslo

• Úhel mezi plochami F_1 a F_2 v bodě A

1) Najdeme $\mathrm{grad}\,F_1$ a $\mathrm{grad}\,F_2$

2) $\vec{n}_1 = \mathrm{grad}\,F_1(A)$; $\vec{n}_2 = \mathrm{grad}\,F_2(A)$

3) $\cos\alpha = \frac{n_1 \cdot n_2}{\|n_1\| \cdot \|n_2\|}$

$\alpha = \mathrm{acos}\left(\frac{n_1 \cdot n_2}{\|n_1\| \cdot \|n_2\|} \right)$

• Lokální extrémy $F(x,y,z)$

1) Najdeme $\mathrm{grad}\,F(x,y,z)$

2) Najdeme stacionární body S

$\mathrm{grad}\,F(x,y,z) = (0,0,0)$

3) Sestavíme Hessovou matici

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial z} \end{pmatrix}$$

4) Dosadíme S do H

$H_{S_1}(S_1) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

5) Spočteme det

$\det_1 = \det a$

$\det_2 = \det \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$

$\det_3 = \det H_S$

• Lokální extrémy

(1) positivně definitní – lok [redacted] min – všechny det > 0

(2) negativně definitní – lok [redacted] max – znaménka det se střídají (začínající s mínusa)

(3) indefinitní – sedlový bod – není (1) ani (2)

• Vázané extrémy f-ce $f(x,y)$

za podmínkou $M\{x,y \in \mathbb{R}^n \mid F_1(x,y) \geq 0, \ldots, F_n(x,y) \geq 0\}$

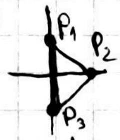
1) Najdeme extrémy ve vnitřku M

$\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0)$

$A = (x_1, y_1)$

• Odmítáme A jestli neleží v M

Jestli máme trojúhelník, koukáme na hraniční konečné body



viz stranku 0

2) Najdeme extrémy na hranici

• $L = f(x,y) - \lambda_1 F_1 - \ldots - \lambda_n F_n$

• Řešíme $\operatorname{grad} L(x,y\ldots) = (0,\ldots,0)$ a dostaneme B_1 a B_2 (podle λ taky)

! Není potřeba hledat λ

• Dosadíme $f(B_1)$ a $f(B_2)$

$f(B_1) > f(B_2) \Rightarrow B_1$ – max, B_2 – min

• Substituce v polárních souřadnicích

1) Načertneme graf

2) Najdeme meze φ: $0 \leq \varphi \leq \alpha$

3) Uděláme řez z $(0,0)$

4) Dosadíme $x = \rho\cos\varphi$ a $y = \rho\sin\varphi$ do rovnic, které řežeme

5) Vyjádříme ρ pomocí $\cos\varphi, \sin\varphi$ a zapíšeme do mezů integrálu

6) Vnitřek integrálu máme násobit ρ = Jakobian (det)

$$\int_b^a \int_{f_2(x)}^{f_1(x)} f \, dx\, dy = \int_0^{\alpha} \int_{f_3(\varphi)}^{f(\varphi)} f \rho \, d\rho\, d\varphi$$

• Derivace složené funkce

$f(x,y)$ $\quad x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$

$F(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

• Změna pořadí integrace

1) Načertneme graf

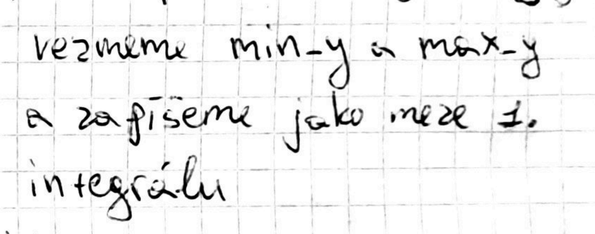
2) Jestli původní integrál $dy\,dx$, vezmeme min_y a max_y a zapíšeme jako meze 1. integrálu

3) Vyjádříme x pomocí y a řez děláme vodorovně

4) $$\int_{\min x}^{\max x} \int_{f_2(x)}^{f(x)} f \, dy\, dx = \int_{\min y}^{\max y} \int_{f_4(y)}^{f_3(y)} f \, dx\, dy$$

Př Změnit pořadí integrace

$$\int_0^4 \int_{x/2}^{\sqrt{x}} f \, dy\, dx = \int_0^2 \int_{y^2}^{2y} f \, dx\, dy$$



1) min_y = 0, max_y = 2

2) $y = \sqrt{x}$; $y^2 = x$ ✓

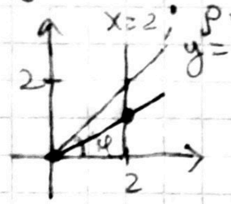
$y = \frac{x}{2}$; $x = 2y$ ✓

3) Děláme řez vodorovně na úseku [min_y; max_y]

• Polární souřadnice Př

$$\int_0^2 \int_0^x f \, dy dx = \int_0^{\pi/4} \int_0^{2/\cos\varphi} f \rho \, d\rho \, d\varphi$$

1) $x=2$; $\rho = 2/\cos\varphi$



2) $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$

3) Řez jde do $x = 2$

4) $x = 2 \longrightarrow \rho\cos\varphi = 2$

$\rho = 2/\cos\varphi$

i) $\int_0^{\pi/4} \int_0^{2/\cos\varphi} f \rho \, d\rho \, d\varphi$

• Pokračování ⟶

$\det J_{\Phi^{-1}} = \frac{1}{\det J_\Phi} \Rightarrow$

$\Rightarrow \det J_\Phi = \frac{1}{\det J_{\Phi^{-1}}}$

Připomenutí Obsah $M = \iint_M 1 \, dA$.

• Válcové souřadnice

$x = \rho\cos\varphi$
$y = \rho\sin\varphi$
$z = z$

$\det J_\Phi = \rho$

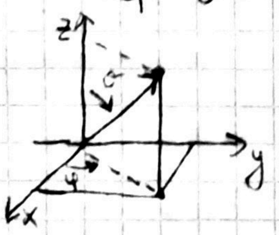
• Trojný integrál

$$\iiint_M f \, dV = \iint_A \left(\int_b^a f \, dz \right) dA$$

• Sférické souřadnice

$x = \rho\sin\vartheta\cos\varphi$
$y = \rho\sin\vartheta\sin\varphi$
$z = \rho\cos\vartheta$

$\det J_\Phi = \rho^2 \sin\vartheta$



• Integrace vhodnou substitucí

Př $f(x,y) = x - y$ M: rovnoběžník s teřky $(1,2), (4,3)$, $(3,4), (6,5)$

a: $y = \frac{x+9}{3}$

$3y - x = 9$

b: $y = x + 1$

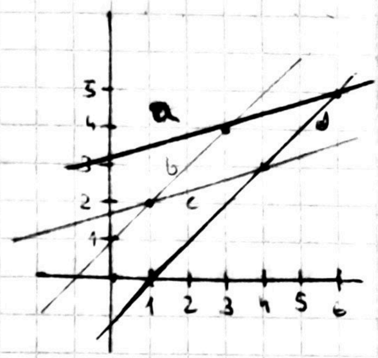
$y - x = 1$

c: $y = x - 1$

$y - x = -1$

d: $y = \frac{x+5}{3}$

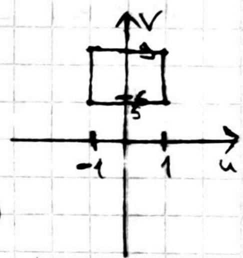
$3y - x = 5$



1) Uděláme substituci

$u = y - x$; $u \in [-1, 1]$

$v = 3y - x$; $v \in [5, 9]$



2) Spočteme x, y pomocí u, v

$x = \frac{3u - v}{2}$ $\quad y = \frac{v - u}{2}$

3) Spočteme Jakobiho matici

$\Phi : (u,v) \mapsto (x,y) = \left(\frac{3u-v}{2}, \frac{v-u}{2} \right)$

$$J_\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \frac{3u-v}{2}}{\partial u} & \frac{\partial \frac{3u-v}{2}}{\partial v} \\ \frac{\partial \frac{v-u}{2}}{\partial u} & \frac{\partial \frac{v-u}{2}}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Můžeme místo u a v spočíst s $(y-x)$ a $(3y-x)$, ale po počítání $\det J_\Phi$ máme změnit na výraz s u a v

Spočteme $\det J_\Phi$

4) Uděláme substituci v integrálu

$$\int_{-1}^{1} \int_5^9 \left(\frac{3u-v}{2} - \frac{v-u}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} \, dv \, du = 0$$

Obecně:

$$\int_{M = \Phi(N)} = \int_N f(x(u,v), y(u,v)) \cdot \det J_\Phi \, dA$$

5) Hint

$$J_\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(y-x)}{\partial x} & \frac{\partial(3y-x)}{\partial y} \\ \frac{\partial(y-x)}{\partial x} & \frac{\partial(3y-x)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

• **Př** Hmotný střed tělesa M, které má hustotu $\rho(x,y,z)$

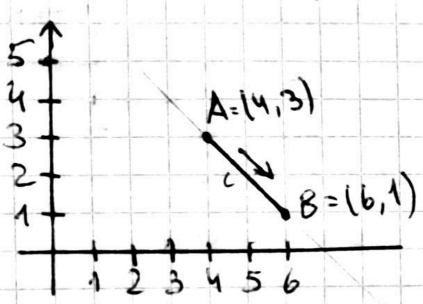
1) $$x_T = \frac{\int_M x\rho(x,y,z)\,dV}{\int_M \rho(x,y,z)\,dV}$$

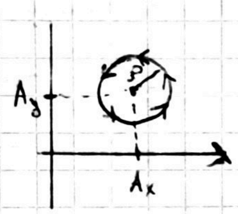
2) $$y_T = \frac{\int_M y\rho(x,y,z)\,dV}{\int_M \rho(x,y,z)\,dV}$$

3) $$z_T = \frac{\int_M z\rho(x,y,z)\,dV}{\int_M \rho(x,y,z)\,dV}$$

Odpověď: (x_T, y_T, z_T)

• Parametrizace přímky / Kružnice





c: $A + (B-A)t$

$x = A_x + (B_x - A_x)t$

$y = A_y + (B_y - A_y)t$

Př $A = (4,3)$ $B = (6,1)$

$c: (4,3) + (2,-2)t$

$x = 4 + 2t$

$y = 3 - 2t$

C:

$x = \rho\cos t + A_x$

$y = \rho\sin t + A_y$

• Křivkový integrál z vektorového p. F

$F(x,y) = (xy^2, -x^2)$ např

1) Najdeme parametrizaci křivky

2) Najdeme derivaci parametrizace

3) Najdeme kř int. v. pole

$$\int_C F \cdot dS = \int_b^a F(\varphi(t)) \times \varphi'(t)\,dt$$

• **Př** Moment setrvačnosti tělesa M které má hmotnost m vzhledem k

1) Hustota $M \to \rho = \frac{m}{V_M}$

2) $$I_z = \int_M \underbrace{(x^2+y^2)\,\rho(x,y,z)}_{f(x,y,z)}\,dV,$$

kde $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = a^2,\ -h \le z \le h\}$

$a, h > 0$

• Křivkový integrál $t \in [a,b]$

1) Najdeme parametrizaci přímky/křivky/kružnice

$\varphi(t) = (\ldots, \ldots, \ldots)$

Když máme $f(x) = (\ldots)$, pak

$\varphi(t) = (t, (\ldots))$ ale x změníme na t

2) Najdeme derivaci parametrizace

$\varphi'(t) = (\ldots, \ldots)$

3) Najdeme normu derivace parametrizace

$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{(\ldots)^2 + (\ldots)^2 \ldots}$

4) Najdeme křivkový integrál + uděláme substituce funkce

$x = \varphi(t)[0] \longrightarrow f(x) = subs(t)$

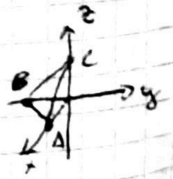
$y = \varphi(t)[1]$

$\vdots$

$$\int_a^b subs(t) \cdot \|\varphi'(t)\|\,dt$$

• Parametrizace roviny (rovnice)

$A = (1,0,0)$, $B = (0,-2,0)$, $C = (0,0,4)$



1) $\vec{u} = \vec{AB} = B - A = (-1,-2,0)$

$\vec{v} = AC = C - A = (-1,0,4)$

2) $\vec{n} = (a,b,c)$

$\vec{n} \perp \vec{u}$: $(a,b,c)\cdot(-1,-2,0) = 0$

$a = -2b$

$\vec{n} \perp \vec{v}$: $(a,b,c)\cdot(-1,0,4) = 0$

$4c = a$

3) Volím $b = 1$, pak $a = -2$, $c = -\frac{1}{2}$

4) $ax + by + cz + d = 0$

$-2x + y - \frac{1}{2}z + d = 0$ $d = 2$

• Plošný integrál

1) Najdeme parametrizaci plochy (Vyjádříme z ~~jako~~ pomocí x, y)

$z = x + y + \dots$

$$\Phi(x,y) = (x, y, \dots)$$

2) Najdeme derivaci parametrizace

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}$$

3) Najdeme vektorový součin der. (pomocí determinantu)

$$\underbrace{\frac{\partial\Phi}{\partial x}}_{(a,b,c)} \times \underbrace{\frac{\partial\Phi}{\partial y}}_{(d,e,f)}$$

$$\begin{array}{c} + \\ + \\ + \end{array}\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}\begin{array}{c} - \\ - \\ - \end{array}$$

$$\begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a & b & c \end{matrix}$$

$$e_1(bf) + (ae)e_3 + (dc)e_2 - (db)e_3 - (ce)e_1 -$$
$$- (af)e_2 =$$
$$= e_1(bf - ce) + e_2(dc - af) + e_3(ae - db)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} \times \frac{\partial\Phi}{\partial y} = (bf - ce, dc - af, ae - db)$$

4) Najdeme normu vekt. součinu

$$\left\| \frac{\partial\Phi}{\partial x} \times \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right\|$$

5) Najdeme plošný integrál

$$\iint_M f(\Phi(x,y)) \cdot \left\| \frac{\partial\Phi}{\partial x} \times \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right\| dS$$

• Zde máme najít meze integrálu, můžeme udělat substituci

• Obsah plochy M

$$S = \iint_M \left\| \frac{\partial\Phi}{\partial x} \times \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right\| dS$$

• Plošný integrál vektorového pole

1) Najdeme parametrizace plochy

2) Najdeme derivaci parametrizace

3) Najdeme vektorový součin der.

4) Najdeme směr vektoru

Když do $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} \times \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)$ dosadíme nějaké číslo a vektor bude směrovat se

• dovnitř figury — je vnitřní.
• ven od figury — je vnější.

Pro změnu směru máme násobit výsledný vektor (-1)

5) Najdeme plošný integrál v. p.

$$\iint_M F(\Phi(x,y)) \underbrace{\cdot}_{\text{skalární součin}} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} \times \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) dS.$$

• Greenova věta

$$\underbrace{\int_C}_{\text{křivkový}} F \cdot ds = \underbrace{\iint_M}_{\text{plošný}} \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\, dA$$

Př. Obsah mn. M.

$$S_M = \iint_M 1\, dA$$

1) Zvolíme F takové, že ~~...~~ plošný integrál Greenovy věty bude 1.

$F = (0, x)$ $\quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$

2) $\iint_M = \int_C F(\Phi(t)) \cdot \Phi'(t)\, ds.$

• Stokesova věta

$$\iint_M \mathrm{rot}\, F\, dS = \int_C F\, dS$$

1) Najdeme parametrizaci C

2) Spočteme křivkový integrál

• Když normálový vektor $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} \times \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)$ jde ven — je vnější.

• **Stokesova věta** (křivkový → plošný)

Pomocí Stokesovy věty vypočíst integrál pole $\vec{F}$ podél křivky C

$\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$

1) Spočteme $\operatorname{rot}\vec{F}$

$$\operatorname{rot}\vec{F}: \begin{array}{c} + \\ + \\ + \end{array}\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}\begin{array}{c} - \\ - \\ - \end{array}$$
$$\begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{matrix}$$

$$e_1 \frac{\partial F_3}{\partial y} + e_3 \frac{\partial F_2}{\partial x} + e_2 \frac{\partial F_1}{\partial z} - e_3 \frac{\partial F_1}{\partial y} - e_1 \frac{\partial F_2}{\partial z} - e_2 \frac{\partial F_3}{\partial x}$$

$$\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

2) Najdeme parametrizace plochy

$\Phi(x,y) = (x, y, \dots)$

3) Najdeme vektorový součin derivací parametrizací.

$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ (pomocí det)

4) Najdeme plošný integrál $\operatorname{rot} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}$

$$\iint_M \operatorname{rot}\vec{F} \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) dS$$

5) Stokesova věta

$$\int_C \vec{F}\, dA = \iint_M \operatorname{rot}\vec{F} \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) dS$$

• **Gaussova věta**

$$\iint_M \vec{F}\, dS = \iiint_M \operatorname{div} \vec{F}\, dV$$

1) Najdeme divergenci

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

2) Spočítáme trojný integrál divergence

$$\iiint_M \operatorname{div}\vec{F}\, dV.$$

• **Potenciál vektorového pole**

1) Ověříme, že F je potenciální
   - spočteme $\operatorname{rot}\vec{F}$
   - $\operatorname{rot}\vec{F} = (0,0,0) \Rightarrow$ ANO

2) Najdeme potenciál f
   - Máme vyřešit diferenciální rovnice

$$\nabla f = F \quad \frac{\partial f}{\partial x} = F_1 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = F_2 \quad \frac{\partial f}{\partial z} = F_3$$

   - Na konci budeme mít $f(x,y,z) = \dots + K$, kde $K \in \mathbb{R}$

Extra: Vypočítat $\int_C F(x,y,z)$, kde C má parametrizaci $\varphi(t) = \dots$, $t \in [t_0, t_1]$

$a = \varphi(t_0) \quad b = \varphi(t_1)$

$$\int_C \vec{F}\, dS = f(b) - f(a)$$

• **Př** Nacházení potenciálu

$F(x,y,z) = (x, -2y, 3z)$

1) $\operatorname{rot} F = (0,0,0)$

2)
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = x \xrightarrow{1} f(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + C(y,z) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -2y; \xrightarrow{3} 0 + \frac{\partial C(y,z)}{\partial y} = -2y; \ C(y,z) = -y^2 + C(z); \ C(y,z) = -y^2 + \frac{3z^2}{2} \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 3z; \ 0 + \frac{\partial C(z)}{\partial z} = 3z; \ C(z) = \frac{3z^2}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x,y,z) = \frac{x^2}{2} - y^2 + \frac{3z^2}{2} + C$$