• **Prostor obrazů a Nulový prostor**
(rng) (null)

$\mathrm{rng}A = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$
$\mathrm{null}A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$

Př $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

GEM $\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$\mathrm{rng}(A) = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right\}$

$\mathrm{null}(A) = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

• **Ortogonální doplněk** $X^\perp = \mathrm{null}(A^T)$

$X^\perp = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y \perp X\}, \ X \subseteq \mathbb{R}^n$

• $(\mathrm{rng}A)^\perp = \mathrm{null}(A^T)$
• $(\mathrm{null}A)^\perp = \mathrm{rng}(A^T)$

Př Najít $X^\perp$, $X = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$

$Xy = 0 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$X^\perp = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$

• **Pro každou matici A platí**
• $\mathrm{rng}(A^TA) = \mathrm{rng}(A^T)$
• $\mathrm{null}(A^TA) = \mathrm{null}(A)$

• **Vzdálenost bodu b od prostoru X**

$\|y'\| = \|b - y\| = \|(I-P)b\|$

(délka ortogonální projekce bodu b na podprostor $X^\perp$)

• **Vzdálenost bodu b od podprostoru $X^\perp$**

$\|y\| = \|Pb\|$

(délka ortogonální projekce bodu b na podprostor X)

• **Vzdálenost bodu z od afinního podprostoru** $U^Tx = b$

$d = \|UU^Tz - UU^Tp\| = \|UU^Tz - Ub\| = \|U(U^Tz - b)\| = \|U^Tz - b\|$

• **Gram-Schmidt Process**

original basis $\vec{v}_1, v_2 \dots v_n \longrightarrow$ orthogonal basis $u_1, u_2 \dots$ (orthonormal)

1) $u_1 = v_1$
2) $u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1$
3) $u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2$

• $\forall k = 1 \dots n: \ \mathrm{span}(v_1, v_2 \dots v_n) = \mathrm{span}(u_1, u_2 \dots u_n)$

• **Ortogonální projekce**: $y \in X$, $(b-y) \perp X$

$y = Ax = Pb$, kde $P = AA^+ = A(A^TA)^{-1}A^T$ ← ortogonální projektor

Př $u = (2,1,-3)$ $v = (1,-1,1)$ $s = (2,0,1)$

Najít ortog pr vektoru s na span{u,v}

1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$

2) ~~Najdeme partikulární řešení yo~~

Najdeme $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$(2-y_1, -y_2, 1-y_3) \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix} = 0$

$2y_1 + y_2 - 3y_3 = 1$

$(2-y_1, -y_2, 1-y_3) \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = 0$

$y_1 - y_2 + y_3 = 3$

3) Najdeme partikulární řešení $y_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$

mn řešení je tedy $\mathrm{null}A + y_0$

4) $y = A^T(AA^T)^{-1}Ay_0 = A^T(AA^T)^{-1}b = A^+b$

$y = [1.63 \ \ -0.92 \ \ 0.44]$

• **Ortogonální projektor**
• Nechť $X = \mathrm{span}\{a\}$. Pak $P = \frac{aa^T}{a^Ta}$
• Je-li P ortogonální projektor na podprostor X, pak ortogonální projektor na podprostor $X^\perp$ je $I - P$

• **Vlastní čísla a vektory**

$Av = \lambda v$

• Nacházení: $\det(A - \lambda I) = 0$

• **Spektrální rozklad**

$A = V\Lambda V^{-1}$

Λ – diagonální matice (vlastní čísla na diagonále)

• **Symetrická matice**

$A = V\Lambda V^T$

• Nechť A sym, reálná $\lambda_i \neq \lambda_j$, pak $v_i \perp v_j$

• **PCA, úloha na nejm stopu**

↳ $\min\{x^TAx \mid x \in \mathbb{R}, x^Tx = 1\} = \lambda_1$, $x = v_1$

↳ $\min\{\mathrm{tr}(X^TAX) \mid X \in \mathbb{R}^{n \times k}, X^TX = I\} = \lambda_1 + \lambda_2 \dots + \lambda_k$

$X = [v_1 \dots v_k]$

• **SVD** – Singulární rozklad

↳ $A = USV^T = s_1u_1v_1^T + \dots + s_pu_pv_p^T$

$p = \min\{m,n\}$ $S = \mathrm{diag}(s_1 \dots s_p)$ $U = [u_1 \dots u_p]$ $V = [v_1 \dots v_p]$

↳ Postup nalezení

Máme rovnice ① $C^TC = VS^TSV^T$ ② $CV = US$

1) Najdeme C^TC
2) Najdeme vlastní čísla C^TC
3) Najdeme vlastní vektory
4) $V = [v_1 \dots v_n]$ $S = (\sqrt{\lambda_1} \dots \sqrt{\lambda_n})$
5) Najdeme $C \cdot V$
6) Pomocí $CV = US$ najdeme U

• **Definitnost kvadratické formy** $f(x) = x^TAx$ (A sym)

• positivně def: $\forall x: x^TAx \geq 0$, všechny det (vůdčí minory) > 0
• positivně semidef.: $\forall x \neq 0$ $x^TAx > 0$, všechny hlavní minory jsou nezáporné

• Hlavní minory (Př): $I = \{1,2,3\}$, $I = \{1,2\}$, $I = \{1,3,4\}$, $I = \{2,3\}$

$\nabla f(x) = 0$

• A pos semidef → min v bodě x
• A pos def → ostré min v bodě x
• A indef → nemá min ani max (sedlový bod)

• **Symetrická matice**

↳ pos. semidef iff má nezáporné vl. č.
↳ pos. def iff má kladná vlastní čísla
↳ indef iff má aspoň 1 záporné a 1 kladné vl. č.

Choleského rozklad

↳ pos. semidef ⇒ ∃ R ∈ $\mathbb{R}^{m \times n}$ takové, že $A = R^TR$

• **PCA, úloha na proložení bodů podprostorem**

1. Spočteme spektrální rozklad $V\Lambda V^T = AA^T$ (vlastní čísla vzestupně ↑ seřazena)
2. $V = [X \ Y] \in \mathbb{R}^{m \times m}$

$X \in \mathbb{R}^{m \times (m-k)}$ – ~~ortogon~~ ortonorm báze ortogon doplňku hled. prostoru

$Y \in \mathbb{R}^{m \times k}$ – sloupce jsou ortonormální báze hledaného podpr.

3. Optimální řešení: $B = YY^TA = (I - XX^T)A$

↳ Afinní podprostor dimenze $k \leq m$ minimalizující součet čtverců vzdáleností k bodům $a_1 \dots a_n$ prochází jejím těžištěm $\bar{a} = \frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n)$.

Př SVD $C = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$

1) $C^TC = \begin{bmatrix} 26 & 18 \\ 18 & 74 \end{bmatrix}$
2) $\lambda_1 = 20$ $\lambda_2 = 80$
3) $C^TC - 20I = \begin{bmatrix} 6 & 18 \\ 18 & 54 \end{bmatrix}$ $v_1 = \begin{pmatrix} -3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \end{pmatrix}$

$C^TC - 80I = \begin{bmatrix} -54 & 18 \\ 18 & -6 \end{bmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} \end{pmatrix}$

4) $V = \begin{bmatrix} -3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{bmatrix}$

$S = \begin{bmatrix} \sqrt{20} & \\ & \sqrt{80} \end{bmatrix}$

5) $CV = \begin{bmatrix} -\sqrt{10} & 2\sqrt{10} \\ \sqrt{10} & 2\sqrt{10} \end{bmatrix}$

$U = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

• Maticový kalkulus

1) $f(x) = Ax$

$f'(x) = A$

2) $(g^T(x)\,h(x))' = g^T(x)h'(x) + h^T(x)g'(x)$

3) $(x^Tx)' = 2x^T$

$\cancel{x^T(A+A^T) = 2x^T A}$

$\cancel{(x^TAx)' = 2x^TA}$

4) $(x^TAx)' = Ax + A^Tx$

$(g(x)^TAg(x))' = g(x)^T A g'(x) + g(x)^T A^T g'(x)$

• Taylorův polynom (jedna proměnná)

$T_x^k(y) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} f^{(i)}(x)(y-x)^i$

Př

• $T_x^0(y) = f(x)$

• $T_x^1(y) = f(x) + f'(x)(y-x)$

• $T_x^2(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + \frac{1}{2}f''(x)(y-x)^2$

• Taylorův polynom (více proměnných)

• $T_x^0(y) = f(x)$

• $T_x^1(y) = f(x) + f'(x)(y-x)$

• $T_x^2(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + \frac{1}{2}(y-x)^T f''(x)(y-x)$

Př $f(x,y) = x^{-1} + y^{-1} + xy \qquad (x_0, y_0) = (2,1)$

$f(x_0,y_0) = x^{-1} + y^{-1} + xy\big|_{(2,1)} = \frac{7}{2}$

$f'(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} y - x^{-2} & x - y^{-2}\end{bmatrix}\Big|_{(2,1)} = \begin{bmatrix}\frac{3}{4} & 1\end{bmatrix}$

$f''(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} 2x^{-3} & 1 \\ 1 & 2y^{-3}\end{bmatrix}\Bigg|_{(2,1)} = \begin{bmatrix}\frac{1}{4} & 1 \\ 1 & 2\end{bmatrix}$

$T^2_{(x_0,y_0)}(x,y) = f(x_0,y_0) + f'(x_0,y_0)\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0\end{bmatrix}^T f''(x_0,y_0)\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0\end{bmatrix} =$

$= \frac{7}{2} + \begin{bmatrix}\frac{3}{4} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x - 2 \\ y - 1\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x - 2 \\ y - 1\end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix}\frac{1}{4} & 1 \\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x - 2 \\ y - 1\end{bmatrix} = \frac{1}{8}x^2 + xy + y^2 - \frac{3}{4}x - 3y + \frac{9}{2}$

• Sestupné metody – metody tvaru $x_{k+1} = x_k + \alpha_k v_k$

• Gradientní metoda: $x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k)$

Výhody: spolehlivost (směr je vždy sestupný)

Nevýhody: pomalá konvergence

Př

$f(x,y) = (ax^2 + y^2)/2 \qquad (x_0, y_0) = (1, a)$

$(x_1; y_1) = (1, a) - \alpha\,(a x_0,\ a)$

• Newtonova metoda (Newton-Raphson)

↳ Řešení soust. $g(x) = 0$: $x_{k+1} = x_k - \frac{g(x_k)}{g'(x_k)}$

Výhody: rychlá konvergence

Nevýhody: nutno začít s poměrně přesnou aproximací x_0

Př $(x-1)^2 + y^2 = 1$; $x^4 + y^4 = 1$, pak

$g(x,y) = \begin{bmatrix}(x-1)^2 + y^2 - 1 \\ x^4 + y^4 - 1\end{bmatrix} \quad g'(x,y) = \begin{bmatrix} 2(x-1) & 2y \\ 4x^3 & 4y^3\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k\end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2(x_k-1) & 2y_k \\ 4x_k^3 & 4y_k^3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}(x_k-1)^2 + y_k^2 - 1 \\ x_k^4 + y_k^4 - 1\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}75 \\ 1\end{bmatrix}$

$(x_0, y_0) = (1, 1)$

↳ Minimalizace funkce:

$x_{k+1} = x_k - \underbrace{f''(x_k)^{-1} f'(x_k)^T}_{\text{Newtonův směr}}$

• Gauss-Newtonova metoda

$x_{k+1} = x_k - g'(x_k)^+ g(x_k)$

$g'(x_k)^+ = (g'(x_k)^T g'(x_k))^{-1} g'(x_k)^T$

Můžeme vnímat jako aproximaci Newtonovy metody

Výhody: oproti Newtonově metodě vyhnuli jsme se počítání 2. derivace

Nevýhody: pomalejší konvergence

Př Gauss-Newtonova metoda

$(x-1)^2 + y^2 = 1$

$x^4 + y^4 = 1$

$x^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{2}$

$f(x,y) = g(x,y)^T g(x,y) =$

$= ((x-1)^2 + (y^2-1)^2 + (x^4 + y^4 - 1) + (x^2 + (y-1)^2 - \frac{1}{2})^2$

$g(x,y) = \begin{bmatrix}(x-1)^2 + y^2 - 1 \\ x^4 + y^4 - 1 \\ x^2 + (y-1)^2 - \frac{1}{2}\end{bmatrix} \quad g'(x,y) = \begin{bmatrix} 2(x-1) & 2y \\ 4x^3 & 4y^3 \\ 2x & 2(y-1)\end{bmatrix}$

$(x_0, y_0) = (1, 1)$

$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 4 \\ 2 & 0\end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}75 \\ 1\end{bmatrix}$

• Lineární programování (LP)

$\max_{\min}\ c^Tx$

za podmínek $a_1^Tx = b_1$

$a_2^Tx \geq b_2$

$a_3^Tx \leq b_3$

• Transformace na LP

1) $\max\ c^Tx \ \rightarrow\ \min\ -c^Tx$

$a_1^Tx \leq b \qquad -a_1^Tx \geq -b$

$a_2^Tx = b \qquad a_2^Tx \geq b$

$-a_2^Tx \geq -b$

2) $\min\ \max\{3x + 4y + 1,\ 2x - 3y\}$

z.p. $x + 2y \leq 14$

$3x - y \geq 0$

$x - y \leq 2$

↓

$\min\ z$

z.p. $3x + 4y - z \leq -1$

$2x - 3y - z \leq 0$

$x + 2y \leq 14$

$3x - y \geq 0$

$x - y \leq 2$

• Levenberg-Marquardtova metoda (vylepšení Gauss-Newton)

$x_{k+1} = x_k - (g'(x_k)^T g'(x_k) + \mu_k I)^{-1} \cdot g'(x_k)^T g(x_k)$

kde $\mu > 0$

↳ Malé μ → Gauss-Newton

↳ Velké μ → Gradientní metoda (s délkou μ_k^{-1})

Výhody: výhody Gauss-Newtonovy a Gradientní metody

3) $\min\ |x|$

$a^Tx \leq b$

↓

$\min\ \max\{x, -x\}$

$a^Tx \leq b$

↓

$\min\ z$

$a^Tx - z \leq b$

4) Slackové proměnné

$\min\ -x - y$

z.p. $x + 2y + u = 14$

$3x - y - v = 0$

$x - y + w = 2$

$u, v, w \geq 0$

↓

$\min\ -x_+ + x_- - y_+ + y_-$

z.p. $x_+ - x_- + 2y_+ - 2y_- + u = 14$

$3x_+ - 3x_- - y_+ + y_- - v = 0$

$x_+ - x_- - y_+ + y_- + w = 2$

$x_+, x_-, y_+, y_-, u, v, w \geq 0$

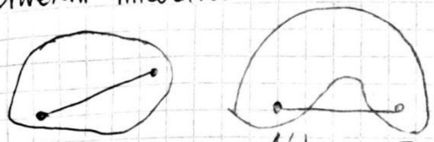
• Normy $\|x\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}$

↳ $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| \dots + |x_n|$

↳ $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

↳ $\|x\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|x\|_p = \max\{|x_1| \dots |x_n|\}$

• Konvexní množina



Konvexní

Nekonvexní

$(1-\alpha)x + \alpha x \in X$, $x \in X, y \in X$
$0 \le \alpha \le 1$

<u>Tvrzení</u> Průnik konvexních mn. je konvexní množina

• Různé kombinace $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k$

1) Lineární: $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$

2) Afinní: $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$

3) Nezáporná: $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$
$\alpha_1, \dots, \alpha_k \ge 0$

4) Konvexní: $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$
$\alpha_1, \dots, \alpha_k \ge 0$

• Konvexní mnohostěn - průnik konečně mnoha uzavřených poloprostorů

Poloprostor: $\{x \in \mathbb{R} \mid a^T x \ge b\}$

• <u>Př</u> mnohostěnů

↳ $\emptyset$, $\mathbb{R}^n$

↳ $(-\infty, a]$, $[a, +\infty)$, $[a, b]$

↳ každý afinní podprostor (bod, přímka, rovina)

↳ polopřímka $\{x + \alpha v \mid \alpha \ge 0\}$

↳ poloprostor

↳ mn. $\mathbb{R}^n_+$

↳ panel $\{x \in \mathbb{R}^n \mid b_1 \le a^T x \le b_2\}$

↳ hyperkrychle, hyperkvádr

↳ simplex, standardní simplex

↳ křížový polytop

• Duální program <u>Př</u>

$$\min\ 2x_1 - 3x_3 + x_4$$
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 6 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 &\le 5 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 &\ge 0 \\ x_1 &\ge 0 \\ x_2 &\in \mathbb{R} \\ x_3 &\ge 0 \\ x_4 &\le 0 \end{aligned}$$

$$\max\ 6y_1 + 5y_2$$
$$\begin{aligned} y_1 &\in \mathbb{R} \\ y_2 &\le 0 \\ y_3 &\ge 0 \\ 2y_1 - y_2 + y_3 &\le 2 \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 &= 0 \\ y_1 - 3y_2 - y_3 &\le -3 \\ 2y_1 - 3y_3 &\ge 1 \end{aligned}$$

<u>Slabá dualita</u> Nechť x je přípustné primární řešení a y přípustné duální řešení. Pak $c^T x \ge b^T y$

↳ Nechť x je přípustné primární řešení a y je přípustné duální řešení. Nechť $c^T x = b^T y$. Potom x je optimální pro primární, y pro duální úlohy

<u>Komplimentarita</u> Nechť x je přípustné řešení primární, y přípustné řešení duální. Pak $c^T x = b^T y$ iff zároveň platí

$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i$ nebo $y_i = 0$ $\forall i \in I$

$x_j = 0$ nebo $\sum_{i \in I} a_{ij} y_i = c_j$ $\forall j \in J$

<u>Silná dualita</u> Primární úloha má optimální řešení iff má duální úloha optimální řešení. Mají primární úl. optimální řešení x a duální úloha optimální řešení y, pak $c^T x = b^T y$

• Konvexní mnohostěny

↳ bod x je extremální bod mn.
$\Updownarrow$
Ex. nezap. mn. $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ tak že $A_I x = b_I$ a sloupce matice A_I jsou LN

• Stěny mnohostěnu

↳ Opěrná nadrovina $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = b\}$

↳ $X \cap H$ - stěna mnohostěnu
dim = 0 - vrchol
dim = 1 - hrana
dim = dim X - 1 - faseta

↳ Každý extremální bod $X \cap H$ je extremální bod X

↳ Mnohostěn má aspoň jeden extremální bod
$\Updownarrow$
Mnohostěn neobsahuje přímku

↳ Mějme konvexní mnohostěn, který neobsahuje přímku. Jestliže lineární funkce má na tomto mnohostěnu minimum, pak tato funkce nabývá na mnohostěnu minima aspoň v jednom z jeho extremálních bodů.

• Konvexní/konkávní funkce

↳ $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je konvexní na mn. X, jestliže $x \in X, y \in X$, $0 \le \alpha \le 1 \Rightarrow f((1-\alpha)x + \alpha y) \le (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y)$

↳ $-f$ je konvexní $\to f$ je konkávní

↳ Epigraf funkce $\to \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f(x) \le y\}$

↳ Subkontura $f \xrightarrow{\text{výšky } y} \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \le y\}$

↳ f je konvexní iff epigraf je konvexní mn

↳ Každá subkontura konvexní f-ce je konvexní množina

$\min\ c^T x$	$\max\ b^T y$
z.p. $Ax \ge b$	z.p. $y \ge 0$
$x \ge 0$	$A^T y \le c$

• Dualita, Pokračování

prim/dual	má optimum	neomezená	nepřípustná
má optimum	+	—	—
neomezená	—	—	+
nepřípustná	—	+	+

• Konvexní konkávní funkce 2.

<u>Podmínka prvního řádu</u> $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je differencovatelná. Pak f je konvexní iff
$x, y \in \mathbb{R}^n \Rightarrow f(y) \ge f(x) + f'(x)(y-x)$

↳ Nechť $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je konvexní. Nechť $x \in \mathbb{R}^n$ a $f'(x) = 0$. Pak x je globální minimum f.

<u>Podmínka druhého řádu</u> Nechť f-ce $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je dvakrát diferencovatelná. F-ce f je konvexní (na celém $\mathbb{R}^n$) iff v každém bodě $x \in \mathbb{R}^n$ je Hessova matice $f''(x)$ pos-semidef

• Operace zachovávající konvexitu

↳ Jsou-li $g_1, \dots, g_k: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvexní funkce a $\alpha_1, \dots, \alpha_k \ge 0$ pak $f = \alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_k g_k$ je konvexní

↳ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je konvexní, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je konvexní a neklesající
$g \circ f = g(f(x))$ je konvexní

↳ $g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ je konvexní. Nechť $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Pak $h(x) = g(Ax + b)$ je konvexní

↳ Nechť I je lib mn. a $g_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $i \in I$ jsou konv. Pak $f(x) = \max_{i \in I} g_i(x)$ je konv, kde předpokládáme, že $\forall x\ \exists$ maximum

• Dualita LP (obecně)

$\min \sum_{j \in J} c_j x_j$	$\max \sum_{i \in I} b_i y_i$
z.p. $\sum a_{ij} x_j = b_i$	z.p. $y_i \in \mathbb{R}$
$\sum a_{ij} x_j \ge b_i$	$y_i \ge 0$
$\sum a_{ij} x_j \le b_i$	$y_i \le 0$
$x_j \in \mathbb{R}$	$\sum a_{ij} y_i = c_j$
$x_j \ge 0$	$\sum a_{ij} y_i \le c_j$
$x_j \le 0$	$\sum a_{ij} y_i \ge c_j$

- Dualita LP, pokračování

Př max $z = 3x_1 + 4x_2$

z.p. $\frac{1}{2}x_1 + 2x_2 \le 30$ ①

$3x_1 + x_2 \le 25$ ②

$x_1, x_2 \ge 0$

① $\to 6\left[\frac{1}{2}x_1 + 2x_2 \le 30\right] \to 3x_1 + 4x_2 \le 3x_1 + 12x_2 \le 180$ $\quad z \le 180$

② $\to 4\left[3x_1 + x_2 \le 25\right] \to 3x_1 + 4x_2 \le 12x_1 + 4x_2 \le 100$ $\quad z \le 100$ $\quad$ min

$\to 2\left[\frac{1}{2}x_1 + 2x_2 \le 30\right]$
$+ 1\left[3x_1 + x_2 \le 25\right] \to 3x_1 + 4x_2 \le 4x_1 + 5x_2 \le 85$ $\quad z = 3x_1 + 4x_2$ $\quad z \le 85$

$\to y_1\left[\frac{1}{2}x_1 + 2x_2 \le 30\right]$
$+ y_2\left[3x_1 + x_2 \le 25\right] \to \underbrace{\left(\frac{1}{2}y_1 + 3y_2\right)}_{3} x_1 + \underbrace{(2y_1 + y_2)}_{4} x_2 \le 30y_1 + 25y_2$

min $w = 30y_1 + 25y_2$

z.p. $\frac{1}{2}y_1 + 3y_2 \ge 3$

$2y_1 + y_2 \ge 4$

$y_1, y_2 \ge 0$

- regulární matice – čtvercová matice, která má inverzi
- singulární matice – čtvercová matice, která nemá inverzi
- homogenní soustava: $Ax = b$, kde $b = 0$
- Afinní kombinace – lineární kombinace, ve které součet koeficientů = 1
- Euklidovská metrika – vzdálenost dvou bodů $\|x - y\| = d(x,y)$
- Ortogonalita ~~...~~ v a u – úhel mezi v a u = 90°, $v \times u = 0$
- Ortonormalita – ortogonalita, ale vš. vektory mají normu 1
- Matice s ortogonálními sloupci $A^T = A^{-1}$
- QR-rozklad – $\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}$: $A = QR$, kde $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ je ortogonální, $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je horní $\left[\begin{smallmatrix} & \nabla \\ 0 & \end{smallmatrix}\right]$
- Symetrická matice – $A = A^T$ např. $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 7 \\ 6 & 7 & 1 \end{bmatrix}$
- Antisymetrická matice – $A^T = -A$ např. $A = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$
- Kvadratická forma na $\mathbb{R}^n$ je homogenní polynom $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ druhého stupně. $f(x) = x^T A x$
- Jakobiho matice (totální derivace) – $A = \frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$
- Řez zobrazení v bodě x ve směru v – $\varphi(\alpha) = f(x + \alpha v)$
- Směrová derivace zobrazení f v bodě x ve směru v – $f_v(x) = \varphi_f'(0) = \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\varphi(\alpha) - \varphi(0)}{\alpha} = \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{f(x + \alpha v) - f(x)}{\alpha}$
- Hessova matice – $f''(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$
- Regulární body zobrazení $g(x) \to g'(x)$ má LN řádky
- Konvergence / divergence – сближение/отдаление