- Vlastnosti
  1) $0 \leq P(A) \leq 1$
  2) $A, B \in \mathcal{A}, \quad A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
  3) $P(A^c) = 1 - P(A)$
  4) $P(A \overset{or}{\cup} B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  5) $P(A \overset{and}{\cap} B) = P(A) \cdot P(B)$ jestli jsou nez
  6) $A, B \in \mathcal{A}, A \subset B \Rightarrow P(B-A) = P(B) - P(A)$

- BAyesova věta

$$P(A_i | B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(A_j) \cdot P(B|A_j)}, \quad \forall i = 1, 2, \dots$$

- Nezávislost jevů

Jevy jsou nezávislé, když

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Jevy A_i jsou vzájemně nezávislé, když

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n)$$

- Distribuční funkce $\boxed{\text{Př } 18,20}$

$$F(x) = P(X \leq x)$$

pst jevů = rozdíl skoků (d)

- Distribuční funkce diskrétní n. v.

$\{x_i\}$ - posloupnost r. čísel

$\{p_i\}$ - posloupnost nezáporných čísel

$$p_i = P(X = x_i), \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$

$$F(x) = P(X \leq x) = P(X = x_i) = \sum_{\{i : x_i \leq x\}} P(X = x_i) = \sum_{\{i : x_i \leq x\}} p_i$$

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \sum_{\{i : a < x \leq b\}} P(X = x_i) = \sum_{\{i : a < x \leq b\}} p_i$$

- A za podmínky jevu B

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

- Kombinační číslo

$\binom{n}{k}$ - počet k-tic z n prvků

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- Věta

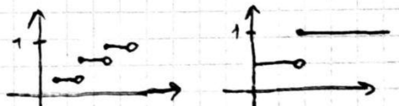
$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$

- Distribuční funkce spojité n.

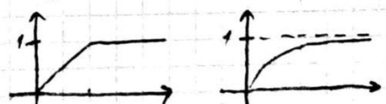
$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

- Příklady diskrétní a spojité d.

a) Diskrétní



b) Spojitá



- Hustota $f(x)$
  1) $f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$
  2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$
  3) $P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$

- Smíšené rozdělení Diskrétní a Spojité n.v.

$X = Mix_c(D, S)$ $\quad$ c - pst, že nastane první složka

- $X = Mix_1(D, S) = D$
- $X = Mix_0(D, S) = S$

- $F_X(x) = c F_D(x) + (1-c) F_S(x) = c \sum_{i: x_i \leq x} p_i + (1-c) \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

- $P(X = x) = F_X(x) - \lim_{t \to x^-} F_X(t)$ $\quad \boxed{\text{Př } 18,20}$

- Muže nastat

$Mix_c(D_1, D_2)$, tedy X bude diskrétní

$Mix_c(S_1, S_2)$, tedy X bude spojitá

- Kvantilová funkce $(\alpha \in \mathbb{R})$

$$q(\alpha) = \frac{1}{2}\left(\sup_{t \in \mathbb{R}} F_X(t) \leq \alpha + \inf_{t \in \mathbb{R}} F_X(t) \geq \alpha\right)$$

inverzní k $F_X(x)$, rotace o 90°

- Momenty, rozptyl, kovariace
  - $\mathbb{E}X^n$ - n-tý moment náh vel X
  - $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^n$ - n-tý centrální moment
  - $\mathbb{E}|X - \mathbb{E}X|$ - absolutní moment
  - $\mathrm{var}X = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$ - rozptyl
  - $\mathrm{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)$ - kovariance

    $\mathbb{E}X^2 < \infty \quad \mathbb{E}Y < \infty$

- Vlastnosti
  1) $\mathrm{var}X = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$
  2) $\mathrm{var}\,a = 0$
  3) $\mathrm{var}(aX) = a^2 \mathrm{var}X$
  4) $\mathrm{var}(X + a) = \mathrm{var}X$
  5) Nechť $Z = \frac{X - \mathbb{E}X}{\sqrt{\mathrm{var}X}} \Rightarrow \mathbb{E}Z = 0, \mathrm{var}Z = 1$
  6) $\mathrm{var}(X + Y) = \mathrm{var}X + \mathrm{var}Y + 2\mathrm{cov}(X, Y)$
  7) $\mathrm{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$

- Střední hodnota

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x\,dF(x)$$ pokud integrál ex.

a) diskrétní

$$\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot P(X = x_i) \qquad \mathbb{E}(X^2) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 P(X = x_i)$$

b) spojitá

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx \qquad \mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx$$

c) směs

$$\mathbb{E}X = c\mathbb{E}D + (1-c)\mathbb{E}S$$

- Vlastnosti
  1) $\mathbb{E}a = a$
  2) $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}X + b\mathbb{E}Y$
  3) $X_1 \leq X \leq X_2 \Rightarrow \mathbb{E}X_1 \leq \mathbb{E}X \leq \mathbb{E}X_2$
  4) $X \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}X \geq 0$

- Střední hodnota funkce náh. vel

$$\mathbb{E}\Phi(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x)\,dF_X(x)$$

a) diskrétní

$$\mathbb{E}\Phi(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi(x_i) \cdot P(X = x_i)$$

b) spojitá

$$\mathbb{E}\Phi(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) f(x)\,dx$$

c) směs

$$\mathbb{E}\Phi(X) = c\mathbb{E}\Phi(D) + (1-c)\mathbb{E}\Phi(S)$$

- **Čebyševova nerovnost**

Pro každé $\varepsilon > 0$ platí:

$$P(|X - \mathbb{E}X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\operatorname{var} X}{\varepsilon^2}$$

- **Alternativní rozdělení $X \sim alt(p)$**

1) X nabývá hodnot 0 a 1 s pstmi $1-p$, p
2) p - parametr $\quad P(X=k) = p^k (1-p)^{1-k}$
3) Distribuční funkce

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1-p & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

4) $\mathbb{E}X = p$, $\operatorname{var} X = p(1-p)$

- **Binomické rozdělení $X \sim Binom(n,p)$**

1) X nabývá hodnot $k = 0, 1 \dots n$
2) $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
3) Distribuční funkce

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \sum_{k=0}^{k \leq x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & 0 \leq x < n \\ 1 & x \geq n \end{cases}$$

4) $\mathbb{E}X = np$, $\operatorname{var} X = np(1-p)$

- **Poissonovo rozdělení $X \sim Po(\lambda)$**

1) X nabývá hodnot $k = 0, 1, 2.$
2) $P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$
3) Distribuční funkce

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \sum_{j=0}^{x} e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} & 0 \leq x < \infty \end{cases}$$

4) $\mathbb{E}X = \operatorname{var} X = \lambda$

- **Rovnoměrné rozdělení na $[a,b]$ $X \sim Ro(a,b)$**

1) Nabývá hodnot z intervalu $[a,b]$
2) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & x < a,\ x > b \end{cases}$
3) $F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$
4) $\mathbb{E}X = \frac{a+b}{2}$, $\operatorname{var} X = \frac{1}{12}(b-a)^2$

- **Geometrické rozdělení $X \sim Ge(p)$**

1) X nabývá hodnot $k = 0, 1, 2$
2) $P(X=k) = p(1-p)^k$
3) Distribuční funkce

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \sum_{k=0}^{x} p(1-p)^k & x \geq 0 \end{cases}$$

4) $\mathbb{E}X = \frac{1-p}{p}$, $\operatorname{var} X = \frac{1-p}{p^2}$

- **Hypergeometrické rozdělení ~~X~Hyp~~**

$X \sim HypGe(N, K, n)$

1) $N, K, n \in \mathbb{N}$, $N \geq K$, $N \geq n$
2) X nabývá hodnot $k \in \mathbb{N}$: $\max\{0, n+K-N\} \leq k \leq \min\{n, K\}$
3) $P(X=k) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$,
4) Distribuční funkce

$$F(x) = \begin{cases} 0 & a) \\ \sum_{k \leq x} \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} & b) \\ 1 & c) \end{cases}$$

a) pro $x < \max\{0, n+K-N\}$
b) pro $x \in \langle \max\{0, n+K-N\}, \min\{n,K\}$
c) pro $x \geq \min\{n, K\}$

5) $\mathbb{E}X = n \frac{K}{N}$

$\operatorname{var} X = n \frac{K}{N}\left(1 - \frac{K}{N}\right) \frac{N-n}{N-1}$

- **Exponenciální rozdělení $X \sim Exp(\lambda)$**

1) Nabývá hodnot $(0, \infty)$ $\quad P(X \geq a) = \int_a^\infty f(x)$
2) $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$
3) $F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$
4) $\mathbb{E}X = \int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$

$\operatorname{var} X = \frac{1}{\lambda^2} \quad P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x) dx$

- **Použití rozdělení**

1) $Alt(p)$ - modelování úspěchu a neuspěchu.
   p - pst úspěchu
2) $Binom(n,p)$ - počet úspěchu v nezavislech pokusech
   n - počet vš. pokusů, p - pst úspěchů
3) $Po(\lambda)$ - počet nezav událostí které nastoupá v ně. čas intervalu
   λ - počet událostí v jednotce času (v intervalu) $\boxed{Př\ 23}$
   60 min - 1,5; 90 min - 2,25
4) $Ge(p)$ - počet neuspěchu před prvním uspěchem
   p - pst úspěchu
5) $Hyp(N, K, n)$ -

   N objektů, z nichž K má nějakou vlastnost. Náhodně vybíráme n objektů.

   X - počet objektu s vlastností K (z n objektů)
6) $Ro(a,b)$ - doba čekání na pravidelně přicházející události
   (a,b) - interval
7) $Exp(\lambda)$ - doba čekání na události, které chodí vzájemně nezavisle

- **Obecné Normální rozdělení $X \sim N(\mu, \sigma^2)$**

1) Nabývá hodnot z $\mathbb{R}$
2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
3) Distribuční funkce

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

4) $\mathbb{E}X = \mu$, $\operatorname{var} X = \sigma^2$

- **Normované norm. rozd $X \sim N(0,1)$**

1) Nabývá hodnot z $\mathbb{R}$
2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$
3) $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$
4) $\mathbb{E}X = 0$, $\operatorname{var} X = 1$
5) $\Phi(x)$ - tabulková hodnota
   $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$

- **Transformace $X \sim N(\mu, \sigma^2) \to Z \sim N(0,1)$**

$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X - \mathbb{E}X}{\sqrt{\operatorname{var} X}}$

Př: $P(X < 5) = P\left(\frac{X - \mathbb{E}X}{\sqrt{\operatorname{var} X}} < \frac{5 - \mathbb{E}X}{\sqrt{\operatorname{var} X}}\right) =$

$= P(Z < const) = \Phi(const)$

- **Součet normálních rozdělení**

$Z = X - Y \qquad X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2),\ Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

$\mathbb{E}Z = \mu_1 - \mu_2$

$\operatorname{var} Z = \sigma_1^2 + \sigma_1^2$ (vždy plus)

• **Funkce náh vel**

X je náh vel ; $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $Y = \varphi(X)$

1) diskrétní $G(y) = \sum_{\{x_n, \varphi(x_n) \le y\}} p_n \quad \forall y \in \mathbb{R}$

2) spojité $G(y) = \int_{\{x, \varphi(x) \le y\}} f(x)\,dx \quad \forall y \in \mathbb{R}$

• **Konvoluce** $H = F * G$; $Z = X + Y$

1) X, Y diskrétní (F a G distrib f-ce)

$F(x) = \sum_{n=0}^{x} p_n \qquad G(y) = \sum_{n=0}^{y} q_n$

$H(z) = \sum_{n=0}^{z} h_n, \qquad h_n = \sum_{k=0}^{n} p_k \cdot q_{n-k}$

2) X, Y spojité

$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y) g(y)\,dy$

• **Náhodný vektor** $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$

1) $\mathbb{E}\mathbb{X} = (\mathbb{E}X_1, \dots, \mathbb{E}X_n)^T$ vektor stř. hodn.

2) Variační matice $\mathrm{var}\mathbb{X}$ s prvky

$\mathrm{cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}(X_i - \mathbb{E}X_i)(X_j - \mathbb{E}X_j) \quad 1 \le i,j \le n$

3) $\mathrm{Corr}\mathbb{X}$ s prvky (korelační matice)

$\mathrm{corr}(X_i, X_j) = \frac{\mathrm{cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{\mathrm{var}X_i}\sqrt{\mathrm{var}X_j}} \quad 1 \le i,j \le n$

$= 0$ iff X_i a X_j jsou nezávislé

Pozn: $-1 \le \mathrm{cor}(X, Y) \le 1$ $\boxed{\mathrm{corr}(X_i, X_i) = 1}$

• **Nezávislost náh vel v náh vektorech**

1) diskrétní $P(X_1 = x_1^{(i)}, \dots, X_n = x_n^{(i)}) = \prod_{j=1}^{n} P(X_j = x_j^{(i)})$

2) spojitý

$f_{\mathbb{X}}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_n}(x_n)$

• **Nezávislost a kovariace**

Nechť X a Y jsou nezáv

1) $\mathbb{E}XY = (\mathbb{E}X)(\mathbb{E}Y)$

2) $\mathbb{E}X^2 < \infty$ a $\mathbb{E}Y^2 < \infty$:

$\mathrm{cov}(X, Y) = 0$

• **Základní konvoluce** $Z = X + Y$

1) $X \sim Alt(p)$, $Y \sim Alt(p)$

$Z \sim Binom(2, p)$

2) $X \sim Binom(n_1, p)$, $Y \sim Binom(n_2, p)$

$Z \sim Binom(n_1 + n_2, p)$

3) $X \sim Po(\lambda_1)$, $Y \sim Po(\lambda_2)$

$Z \sim Po(\lambda_1 + \lambda_2)$

4) $X \sim Ro(a, b)$, $Y \sim Ro(c, d)$

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{d-c} & c \le y \le d \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

Pro $d - c \ge b - a$ platí

$h(z) = \begin{cases} 0 & z \le a+c \,/\, b+d \le z \\ \frac{z-(a+c)}{(b-a)(d-c)} & a+c \le z \le b+c \\ \frac{1}{d-c} & b+c \le z \le a+d \\ \frac{(b+d)-z}{(b-a)(d-c)} & a+d \le z \le b+d \end{cases}$

5) $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

$Z \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

6) $X \sim Exp(\lambda)$, $Y \sim Exp(\lambda)$

$h(z) = \begin{cases} \lambda^2 z \exp\{-\lambda z\}, & z > 0 \\ 0, & z \le 0 \end{cases}$

• **Konvergence náh vel.**

↳ X_n konverguje k X s.j. (skoro jistě), jestliže

$P\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} = 1$

↳ X_n konverguje k X s pstí

jestliže pro vš $\varepsilon > 0$ platí

$\lim_{n\to\infty} P\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\} = 0$

Pozn: konverg s.j $\Rightarrow$ konverg v psti

• **Centrální limitní věta**

$X_1, \dots, X_n$ jsou nez stejně rozdělené náh vel se $\mathbb{E}X_i = \mu$ a $\mathrm{var}X_i = \sigma^2$

$Z_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \qquad n = 1, 2 \dots$

Pak $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \Phi(x)$

• **Výběrový průměr a výběrový rozptyl**

1) Výběrový průměr $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

2) Výběrový rozptyl

$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2$

3) Směrodatná odchylka $S_n = \sqrt{S_n^2}$

• **Spojení $\bar{X}_n$ a S_n^2 s rozdělením**

1) $\bar{X}_n$ a S_n^2 jsou nez náh vel

2) $\bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

3) $\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$

4) $T = \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n}\sqrt{n} \sim t_{(n-1)}$

• **Metoda Momentů**

1) Spočteme $\bar{X}_n$

2) Spočteme S_n^2

3) Řešíme $\begin{cases} \bar{X}_n = \mathbb{E}X \\ S_n^2 = \mathrm{var}X \end{cases}$

! řešení nemusí existovat

• **Metoda maximální věrohodnosti**

1) Věrohodnostní funkce $L(\theta) = \prod_{i=0}^{n} P_\theta(X_i = x_i)$

$\prod_{i=0}^{n} f_\theta(x_i)$

2) log-ver f-ce $\ell(\theta) = \ln L(\theta)$

3) $\ell'(\theta) = 0$

4) $\hat{\theta}$ je řešením rovnice

Používáme vš data z výběru. Máme zvolit rozložení, když není (úspěch/neúspěch ~ $Alt(p)$)

• **Rozdělení používaná ve Statistice**

1) $Y \sim \chi^2_n$; $X_1, \dots X_n \sim N(0,1)$ nezáv

$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ (chi-kvadrát rozd se s. n)

2) $Z \sim t_n$; $X \sim N(0,1)$ $Y \sim \chi^2_n$

$Z = \frac{X}{\sqrt{Y}} \cdot \sqrt{n}$ (Studentovo t-rozdělení)

3) Fisherovo-Snedecorovo rozd. s param n, m

$W \sim F_{n,m}$, $U, V \sim \chi^2_n, \chi^2_m$

$W = \frac{U/n}{V/m}$

• **Kvantily**

Nechť F je spojitá a monotónní distrib f-ce a $0 < \beta < 1$. Pak

z_β je β-kvantil rozdělení F, pokud $F(z_\beta) = \beta$

• $P(z_{\alpha/2} < X < z_{1-\alpha/2}) = F(z_{1-\alpha/2}) - F(z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$

• **Empirická distribuční funkce**

$(x_1, \dots, x_n)^T$ je realizace náh výb $(X_1, \dots, X_n)^T$

$F_{emp}(x) = \frac{\#\{x_i : x_i \le x\}}{n}$

kde # počet prvků

• **Kvartily, medián**

1) $z_{1/4} = 1.$ kvartil

2) $z_{1/2} = 2.$ kvartil = medián

3) $z_{3/4} = 3.$ kvartil

• **Bodový odhad**

1) nestranný bodový odhad

$\mathbb{E}\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = \theta$

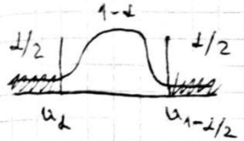
2) Konzistentní bodový odhad

$\left.\begin{aligned} &a)\ \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = \theta \\ &b)\ \lim_{n\to\infty} \mathrm{var}\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = 0 \end{aligned}\right\}$ spolu

3) Efektivní bodový odhad - nestranný bodový odhad s nejmenším rozptylem $\mathrm{var}\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$

- **Intervalový odhad (CI)**

Interval spolehlivosti 95% ⇒ $\alpha = 5\%$



$u_\alpha = -u_{1-\alpha/2}$ (tabulková hodn.) (záleží na rozděl.)

$$\left(\bar X_n + u_\alpha \cdot \frac{S_n}{\sqrt{n}},\ \bar X_n + u_{1-\alpha/2} \cdot \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)$$

- **Jednovýběrový t-test** (hladina α %)

$$T = \frac{\bar X_n - \mu}{\sqrt{S_n^2}} \cdot \sqrt{n} \sim t_{n-1}$$

$$T_0 = \frac{\bar X_n - \mu_0}{\sqrt{S_n^2}} \cdot \sqrt{n} \quad \text{testová statistika}$$

↳ Testování: $H_0: \mu = \mu_0$
$H_A: \mu \neq \mu_0$

$|T_0| \geq t_{1-\alpha/2, n-1}$, zamítáme H_0 ve prospěch H_A.

↳ Testování: $H_0: \mu = \mu_0$
$H_A: \mu > \mu_0$

$T_0 \geq t_{1-\alpha, n-1}$, zamítáme H_0 ve prospěch H_A

Př. $\bar X_{49} = 8.4$ $n = 49$
$S_{49}^2 = 2,56$ hladina = 5%

$H_0: \mu = 8$; $H_A: \mu \neq 8$

$t_{48, 0,975} = 2,01$

$$T_0 = \frac{8,4 - 8}{\sqrt{2,56}} \cdot \sqrt{49} = 1,75$$

$|T_0| \not\geq t_{48, 0,975}$ ⇒
NEZamítáme H_0 ve prospěch H_A

- **Intervalový odhad Alt(p) → p**

$$\left(\bar X_n - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar X_n(1-\bar X_n)}{n}},\ \bar X_n + u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar X_n(1-\bar X_n)}{n}}\right)$$

- **Intervalový odhad Po(λ) → λ**

$$\left(\bar X_n - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar X_n}{n}},\ \bar X_n + u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar X_n}{n}}\right)$$

- **Párový t-test**

↳ Máme $(Y_1, Z_1), (Y_2, Z_2) \dots (Y_n, Z_n)$

↳ Položíme $X_1 = Y_1 - Z_1$; $X_n = Y_n - Z_n$

↳ Testujeme $H_0: \mathbb{E}Y_i - \mathbb{E}Z_i = \mu_0$

↳ Použijeme jednovýběrový t-test pro $X_1, X_2 \dots X_n$.

- **Testování shody rozptylů dvou výb.**

$(X_1, \dots, X_m) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $(Y_1, \dots, Y_n) \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

1) $F \sim F_{m-1, n-1}$
2) $F_0 = \frac{S_X^2}{S_Y^2}$
3) $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$; $H_A: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$
4) $F_0 \leq F_{\alpha/2, m-1, n-1}$ or $F_0 \geq F_{1-\alpha/2, m-1, n-1}$, zamítáme H_0 ve prospěch H_A

- **Dvouvýběrový t-test**

↳ Máme $(X_1, \dots X_m) \sim N(\mu_1, \sigma^2)$
$(Y_1, \dots Y_n) \sim N(\mu_2, \sigma^2)$

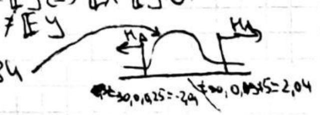
1) Testujeme shodu rozptylů
2) $H_0: \mu_1 - \mu_2 = \mu_0$; $H_A: \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0$
3) $T_0 = \frac{\bar X - \bar Y - \mu_0}{\sqrt{(m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2}} \cdot \sqrt{\frac{mn(m+n-2)}{m+n}}$
4) $|T_0| \geq t_{1-\alpha/2, m+n-2}$, zamítáme H_0 ve prospěch H_A.

Př. Máme 2 výběry $X \to m = 1,\ \bar X_{11} = 1,\ S_{11} = 0,2$
$\alpha = 5\%$ $Y \to n = 21,\ \bar X_{21} = 1,2,\ S_{21} = 0,3$

1) $H_0: \mathrm{var}X = \mathrm{var}Y$; $H_A: \mathrm{var}X \neq \mathrm{var}Y$
$F_0 = \frac{S_{11}^2}{S_{21}^2} = \frac{0,04}{0,09} = 0,\overline{4}$
$F_0 < F_{10, 20, 0,975}$ ✓ $F_0 > F_{20, 10, 0,025}$ ✓

2) $H_0: \mathbb{E}X = \mathbb{E}Y \iff \mathbb{E}X - \mathbb{E}Y = 0$
$H_A: \mathbb{E}X \neq \mathbb{E}Y$

3) $T_0 = -1,984$



4) H_0 nezamítáme ve prospěch H_A

- **Pearsonův χ^2 test dobré shody**

1) H_0: marginální pravděpodobnosti jsou rovny hodnotám $p_1, p_2, \dots, p_i$
H_A: alespoň jedno p_i je jiné →
2) $\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(X_i - np_i)^2}{np_i}$
3) $\chi_0^2 > \chi^2_{1-\alpha, k-1}$ ⇒ zamítáme H_0 ve prospěch H_A

- **Test nezávislosti v kontingenční tabulce**

Máme náh. výb. $(Y_1, Z_1), \dots (Y_n, Z_n)$
$Y_k = 1..r$, $Z_k = 1,..,c$ $k = 1,..n$

1) H_0: "Y a Z jsou vz. nez."
H_A: "Y a Z nejsou nez."
2) $n_{ij} = (Y_k = i, Z_k = j)$
Matice n (r×c) je kontingenční tabulka
3) $n_{i\cdot} = \sum_j n_{ij}$ $n_{\cdot j} = \sum_i n_{ij}$
4) $\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} \frac{\left(n_{ij} - \frac{n_{i\cdot} n_{\cdot j}}{n}\right)^2}{\frac{n_{i\cdot} n_{\cdot j}}{n}}$
5) $\chi_0^2 \geq \chi^2_{1-\alpha, (r-1)(c-1)}$ ⇒ zamítáme H_0 ve pr. H_A

Př. Pst přechodu

1) Pst přechodu řádu 1
$P(X_0 = 1, X_1 = 1, X_2 = 3, X_3 = 2) = \overset{(=1)}{P(X_0 = 1)} \cdot p_{11} \cdot p_{13} \cdot p_{32}$

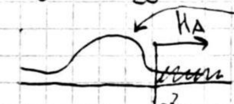
2) Pst přechodu vyšších řádů
$m = 2$: $P(X_{n+2} = j | X_n = i) = p_{ij}^{(2)} = \sum_{k \in S} p_{ik} p_{kj}$
$\mathbb{P}^{(2)} = \mathbb{P} \cdot \mathbb{P} = \mathbb{P}^2$
$m > 2$: $p_{ij}^{(m)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m-1)} \cdot p_{kj}$ • $\mathbb{P}^{(m-1)} \cdot \mathbb{P} = \mathbb{P}^m$

Př. 120x házíme kostkou a pozorujeme

1	2	3	4	5	6
15	21	27	18	18	21

Testujte zda kostka OK

1) $H_0: p_1 = p_2 \dots = p_6 = \frac{1}{6}$. p_i - padlo i puntíků
H_A: aspoň jedno $p_i \neq \frac{1}{6}$
2) $\chi_0^2 = \frac{(15-20)^2}{20} + \frac{(21-20)^2}{2} \dots = 4,05$



$\chi^2_{5, 0,95} = 11,07$

3) H_0 nezamítáme ve prospěch H_A

- **Náhodné procesy** $\{X_t, t \in T\}$

↳ $\mu_t = \mathbb{E}X_t$ - střední hodnota procesu $\{X_t\}$

↳ Autokovarianční funkce
$R(s,t) = \mathbb{E}(X_s - \mu_s)(X_t - \mu_t)$

↳ Rozptyl v čase t
$R(t,t)$

↳ $R(s,t) = R(s+h, t+h)$ ⇒ proces je slabě stacionární

↳ $P(X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_n} = x_n) = P(X_{t_1+h} = x_1, \dots, X_{t_n+h} = x_n)$
⇒ silně stacionární (diskrétní)

- **Markovský řetězec s diskrétním časem**

↳ $P(\underset{\text{příští krok}}{X_{n+1} = j} | \underset{\text{teď}}{X_n = i}, \underbrace{X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0}_{\text{minulost}}) = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$
(nezáleží na minulosti)

↳ Podmíněná pravděpodobnost
$P(X_{n+m} = j | X_n = i) = p_{ij}(n, n+m)$ přechod řádu m
pst přechodu ze stavu i do st. j v čase n+m

↳ Homogenní Markovský řetězec
nezáleží na n, jen na m.

↳ Striktně stacionární Mark. řetězec
$p_j(n) = P(X_n = j) = \pi_j$, $j \in S$ (poč. rozd. M.ř. je stac.)

- Stacionární rozdělení

↳ $\Pi_j = \sum_{k \in S} \Pi_k p_{kj}$, $j \in S$

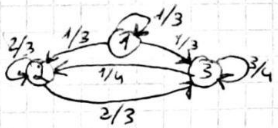
$\Pi_j \geq 0$, $j \in S$, $\sum_{j \in S} \Pi_j = 1$

Př.

$$\begin{cases} \Pi_1 = \Pi_1 p_{11} + \Pi_2 p_{21} + \Pi_3 p_{31} \\ \Pi_2 = \Pi_1 p_{12} + \Pi_2 p_{22} + \Pi_3 p_{32} \\ \Pi_3 = \Pi_1 p_{13} + \Pi_2 p_{23} + \Pi_3 p_{33} \\ \Pi = (\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3) \\ \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = 1 \end{cases}$$

- Př

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$



$P(\tau_1 = \infty) = \frac{2}{3}$ => 1. stav je přech

↑ pst, že nevrátíme se

$P(\tau_2 = \infty) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdots = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\infty} =$

$= \frac{2}{3} \cdot 0 = 0$ => 2. trvalý

$P(\tau_3 = \infty) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\infty} = 0$ =>

3. stav je trvalý

- Absorpční stavy, Nerozložitelnost řetězce

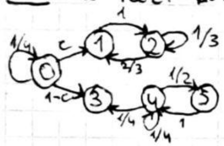
↳ Nerozložitelný – každý stav je dosažitelný z jiného stavu

↳ Absorpční stav – jednobodová mn. stavu $\{j\}$ je uzavřená ($p_{jj} = 1$) (Konečný stav)

↳ Absorpční řetězec – vše trvalé stavy jsou absorpční (Konečný řet)

- Perioda Markovského řetězce = počet kroku, který máme udělat, abychom dostali počáteční matice přechodů ($\mathbb{P} = \mathbb{P}^n$)

- Př 2. nez. komponenty



$\Pi_{nahoře} = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0, 0, 0\right)$

$\Pi_{dolu} = \left(0, 0, \frac{1}{7}, \frac{4}{7}, \frac{2}{7}\right)$

S nulou : $\Pi = c \cdot \Pi_{nahoře} + (1-c) \cdot \Pi_{dolu}$

- Klasifikace stavů

τ_j – čas prvního navratu do stavu j

μ_j – střední hodnota doby prvního navratu $= \mathbb{E}[\tau_j | X_0 = j]$

d_j – největší společný dělitel č $n \geq 1$, pro které $p_{ij} > 0$

↳ Přechodný stav – doba navratu jde k ∞

$P_j(\tau_j = \infty) > 0$ $\qquad \lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$

↳ Trvalý stav

$P_j(\tau_j < \infty) = 1$

↳ Nenulový stav $\mu_j < \infty$

↳ Nulový stav: $\mu_j = \infty$

↳ Periodický stav: $d_j > 1$, d_j - perioda

↳ Neperiodický stav: $d_j = 1$

↳ Trvalý + Nulový: $\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$

↳ Trvalý + Nenulový + Neperiodický: $\lim_{n \to \infty} p_{jj}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j}$

↳ Trvalý + Nenulový + Periodický: $\lim_{n \to \infty} p_{jj}^{(nd_j)} = \frac{d_j}{\mu_j}$

↳ Trvalý je Nulový iff $\lim_{n \to \infty} p_{jj}^{(n)} = 0$

- Dosažitelnost stavů

↳ Dosažitelný z i do j : existuje cesta $i \to j$

↳ Nedosažitelný z i do j : neexistuje cesta $i \to j$

↳ Mn. stavů C je uzavřená, když neex cesta do C z lib. uzlu vně C

↳ Mn. stavů C je komponenta, když neex cesta z C do lib uzlu vně C

- Limitní chování řetězce s absorpčními stavy

↳ Uvaž. rozložitelný M.ř. se stavy $j \in S$, z nich m jsou absorpční

↳ Ex permutace

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_m & 0 \\ R & Q \end{pmatrix}$$ $\mathbb{I}_m$ - jednotková

↳ Pak

$$\mathbb{P}^{\infty} = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}^n = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_m & 0 \\ M & 0 \end{pmatrix}$$

↑ hledáme

↳ $M = FR$, $F = (\mathbb{I}_{|S|-m} - Q)^{-1}$

↑ p_{ij} , $i = m+1, \dots, |S|$ $j = 1, \dots, m$ (indexy původní $\mathbb{P}$)

prvky vyjadřujou psti, že řetězec, který vyšel ze stavu i, skončí v absorpčním stavu j.

- II metoda

1) Ozn. $A_i = P(X_{\infty} = 3 | X_0 = i)$

$$\begin{cases} A_1 = a A_1 + b A_2 + c A_5 \\ A_2 = d A_2 + e A_3 \\ A_3 = 1 \\ A_4 = 0 \\ A_5 = f A_4 + g A_1 \end{cases}$$

($A_4 = 0$: jestli cyklus, t.j nikdy nedostaneme do 3)

$a = \mathbb{P}_{11}$; $b = \mathbb{P}_{12}$; $c = \mathbb{P}_{15}$ ...

Pst, že začneme v 1 a skončíme v 3 = A_1

Př pokračování kasino

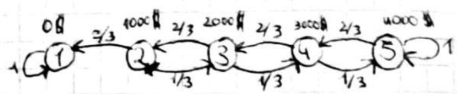
1) Ozn. $A_i = P(X_{\infty} = 5 | X_0 = 4)$

2)

$$\begin{cases} A_1 = 0 \\ A_2 = \frac{1}{3} A_3 + \frac{2}{3} A_1 \\ A_3 = \frac{2}{3} A_2 + \frac{1}{3} A_4 \\ A_4 = \frac{2}{3} A_3 + \frac{1}{3} A_5 \\ A_5 = 1 \end{cases} \cdots \begin{cases} A_1 = 0 \\ A_5 = 1 \\ A_3 = \frac{1}{5} \\ A_4 = \frac{7}{15} \\ A_2 = \dots \end{cases}$$

odpověď

Př Kasino



① a ⑤ jsou konečné stavy

- Cíl: pst, že vyhrame 4000\$, když přijdeme s 3000\$

1) $$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) $$\mathbb{P}^n = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \end{array}\right)$$

R (levý dolní blok), Q (pravý dolní blok)

3) $$\mathbb{P}^{\infty} = \left(\begin{array}{c|ccc} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 0 & 0 & 0 \\ M & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

4) $$F = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 6 & 9 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

5) $$M = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 6 & 9 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 14 & \\ 12 & \\ 8 & \end{pmatrix}$$

6) $$\mathbb{P}^{\infty} = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 14/15 & 1/15 & 0 & 0 & 0 \\ 12/15 & 3/15 & 0 & 0 & 0 \\ 8/15 & \boxed{7/15} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Odpověď

Př Exp rozdělení

obchod	M	N	J	
Oprava	45	25	5	75
Prodej	5	5	15	25
	50	30	20	100

Do obchodu chodí 2 člověka za hodinu.

Cíl: pst, že na dalšího zakazníka požadujícího opravu budeme čekat alespoň 1,5 hodiny.

Řešení:

1) Pst, že člověk potřebuje opravu. $P_{op} = 0{,}75$

2) $1h. - 2 \cdot 0{,}75$

$1{,}5$ č. potřebuje opravu

$1{,}5h. - X = 2{,}25$

2,25 lidí potřebujou opravu za 1,5h.

3) $X \sim Exp(1{,}5)$ č. $\frac{1{,}5}{1}$

$P(X \geq 1{,}5h.) = \int_{1,5}^{\infty} f(x)\,dx$

$= 1 - P(X \leq 1{,}5h.) = 1 - F(1{,}5h.) =$

$= 1 - (1 - e^{-1{,}5 \cdot 1{,}5}) = e^{-2{,}25}$

Př. Poissonovo rozdělení

Stejný příklad

1) $P_{op} = 0{,}75$

2) $1h. - 1{,}5$ č

$1{,}5h. - 2{,}25$ č

3) $X \sim Po(2{,}25)$

1,5h. čekáme na č., který bude potřebovat opravu => 0 událostí =>

$\Rightarrow P(X=0) = e^{-2{,}25} \frac{2{,}25^0}{0!} = e^{-2{,}25}$

Př CLV

Dáno: děti přichází k automatu s bonbony 1-krát za 2 minuty. V automatu 100 bonbonů, vydrží automat alespoň 3 hodiny bez nabití?

1) 2min → 1 bonbon

1 h. → 30 bonbonů

2) $X \sim Exp(30)$ $\mathbb{E}X = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{30}$ $\operatorname{var}X = \frac{1}{30^2} = \frac{1}{\lambda^2}$

3) $P(\sum^{100} X_i \geq 3 \text{ hodiny}) =$

suma dob čekání (když přijde dítě, vynuluje se, nakonci máme počet minut, když automat bude prázdný)

$= P\Big(\underbrace{\frac{\sum^{100} X_i - n \cdot \mathbb{E}X}{\sqrt{n \cdot \operatorname{var}X}}}_{Z \sim N(0,1)} \geq \frac{3 - n\mathbb{E}X}{\sqrt{n \cdot \operatorname{var}X}}\Big) =$

$= P\Big(Z \geq \frac{3 - 100 \cdot \frac{1}{30}}{\sqrt{\frac{1}{900} \cdot 100}}\Big) = P(Z \geq -1) =$

$= 1 - P(Z < -1) = 1 - \Phi(-1) = 1 - (1 - \Phi(1)) =$

$= \Phi(1) \approx 0{,}8431$

Př χ^2 test nezávislosti

		0	1	2	3	4	5
$K =$			L	S_n	B	S_a	Σ
	0	děti	15	5	5	15	40
	1	dospělí	15	15	25	5	60
	2	Σ	30	20	30	20	100

$$\chi_0^2 = \sum_i \sum_j \frac{\left(K_{ij} - \frac{K_{i,5} \cdot K_{2,j}}{K_{2,5}}\right)^2}{\frac{K_{i,5} \cdot K_{2,j}}{K_{2,5}}}$$

$$\chi_0^2 = \frac{\left(15 - \frac{40 \cdot 30}{100}\right)^2}{\frac{40 \cdot 30}{100}} + \frac{\left(5 - \frac{40 \cdot 20}{100}\right)^2}{\frac{40 \cdot 20}{100}} + \frac{\left(5 - \frac{40 \cdot 30}{100}\right)^2}{\frac{40 \cdot 30}{100}} + \frac{\left(15 - \frac{40 \cdot 20}{100}\right)^2}{\frac{40 \cdot 20}{100}} + \frac{\left(15 - \frac{60 \cdot 30}{100}\right)^2}{\frac{60 \cdot 30}{100}} +$$

$$+ \frac{\left(15 - \frac{60 \cdot 20}{100}\right)^2}{\frac{60 \cdot 20}{100}} + \frac{\left(25 - \frac{60 \cdot 30}{100}\right)^2}{\frac{60 \cdot 30}{100}} + \frac{\left(5 - \frac{60 \cdot 20}{100}\right)^2}{\frac{60 \cdot 20}{100}} = 20{,}14$$

$\chi_0^2 \geq \chi^2_{1-\alpha, 3}$ ✓

Zamítáme H_0, jsou závislé

Př Mix rozdělení: X, Y → Mix

Dáno:

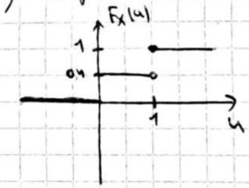
X - diskrétní rozdělení

$P(X=0) = 0{,}4$, $P(X=1) = 0{,}6$

Y - spojité rovnoměrné rozdělení na $[-1, 2]$

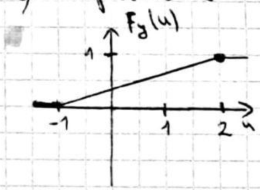
Z - $Mix_{\frac{1}{4}}(X, Y)$

1) Rozepíšeme X



$$F_X(u) = \begin{cases} 0 & \text{pro } u < 0 \\ 0{,}4 & \text{pro } u \in [0, 1) \\ 1 & \text{pro } u \geq 1 \end{cases}$$

2) Rozepíšeme Y



$$F_Y(u) = \begin{cases} 0 & \text{pro } u < -1 \\ \frac{u+1}{3} & \text{pro } u \in [-1, 2] \\ 1 & \text{pro } u > 2 \end{cases}$$

3) Najdeme $F_Z(u)$

$F_Z(u) = \frac{1}{4} F_X + \frac{3}{4} F_Y$

$F_Z(u) = \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{3}{4} \cdot 0 = 0$ $\quad u < -1$

$= \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{3}{4} \cdot \frac{(u+1)}{3} = \frac{u+1}{4}$ $\quad u \in [-1; 0]$

$= \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{10} + \frac{3}{4} \cdot \frac{(u+1)}{3} = \frac{10u + 14}{40}$ $\quad u \in [0; 1)$

$= \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{(u+1)}{3} = \frac{u+2}{4}$ $\quad u \in [1; 2)$

$= \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot 1 = 1$ $\quad u \in [2; +\infty)$

4) Nacházení $P(Z = \ldots)$

$P(0 \leq Z \leq 1) = F_Z(1) - \lim_{z \to 0} F_Z(z) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Jiný způsob

$P(0 \leq Z \leq 1) = cP(0 \leq X \leq 1) + (1-c)P(0 \leq Y \leq 1)$

Př Mix rozdělení: Mix → D, S

Dáno:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; -2) \\ 0{,}1x + 0{,}5 & x \in [-2; -1) \\ 0{,}4 & x \in [-1, 0) \\ 0{,}3x + 0{,}6 & x \in [0, 1) \\ 1 & x \in [1, \infty) \end{cases}$$

1) Najdeme c

$c = P(X=-2) + P(X=-1) + P(X=0) + P(X=1)$

$P(X=-2) = F_X(-2) - \lim_{x \to -2^-} F(x) = 0{,}3$

$P(X=-1) = F_X(-1) - \lim_{x \to -1^-} F(x) = 0$

$P(X=0) = F_X(0) - \lim_{x \to 0^-} F(x) = 0{,}2$

$P(X=1) = F_X(1) - \lim_{x \to 1^-} F(x) = 0{,}1$

$c = 0{,}3 + 0 + 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}6$

2) Najdeme F_D

$$cF_D(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; -2) \\ 0{,}3 & x \in [-2; 0) \\ 0{,}3 + 0{,}2 & x \in [0; 1) \\ 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1 & x \in [1; +\infty) \end{cases} \text{ skoky}$$

$$F_D(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; -2) \\ 0{,}5 & x \in [-2; 0) \\ 0{,}83 & x \in [0; 1) \\ 1 & x \in [1; +\infty) \end{cases} \; \frac{cF_D}{c}$$

3) Najdeme F_S

$$(1-c)F_S(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; -2) \\ 0{,}1x + 0{,}2 & x \in [-2; -1) \\ 0{,}1 & x \in [-1; 0) \\ 0{,}3x + 0{,}1 & x \in [0; 1) \\ 0{,}4 & x \in [1; +\infty) \end{cases} \; F_X - cF_D$$

$$F_S(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; -2) \\ \frac{x+2}{4} & x \in [-2; -1) \\ 0{,}25 & x \in [-1; 0) \\ \frac{3x+1}{4} & x \in [0; 1) \\ 1 & x \in [1; +\infty) \end{cases}$$