CVIO6

7.1 $\max\{x^TAx \mid x \in \mathbb{R}^n, x^Tx = 1\}$

$A = V\Lambda V^T$

$x^TAx = \underbrace{x^TV}_{y=x^TV}\Lambda V^Tx = y\Lambda y^T$

$y = x^TV$, V je ortogonální, pak

$x^T = yV^T$; $x = Vy^T$

$\underbrace{x^Tx = yV^TVy^T = yy^T = y^Ty}_{\text{ekviv.}} = 1$

$\max\{y\Lambda y^T \mid y \in \mathbb{R}^n, y^Ty = 1\} = \max\{\lambda_1 y_1^2 + \dots \lambda_n y_n^2 \mid y \in \mathbb{R}^n$
$y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 = 1\}$

Vlastní čísla seřazený vzestupně, pak $\max = \lambda_n$
$y = e_n$

7.3 $\min\{y^T\Lambda y \mid y^Ty = 1\} = \lambda_1$

$y^T\Lambda y = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$

Vlastní čísla $\lambda_1 \dots \lambda_n$ jsou seřazena vzestupně, pak

λ_1 je minimální číslo

Máme také splnit podmínku $y_1^2 + \dots + y_n^2 = 1$. Aby hodnota výrazu byla minimální, máme zvolit $y = e_1$. Pak $\lambda_1 y_1^2 = \lambda_1$

$\underline{7.5}$ $\min\{x^TAx \mid \overset{①}{x \in \mathbb{R}^n},\ \overset{②}{x^Tx = 1},\ \overset{③}{v_1^Tx = \dots = v_k^Tx = 0}\} = \lambda_{k+1}$

$x = v_{k+1}$

$A = V\Lambda V^T$

$\underbrace{x^TV}_{y}\Lambda V^Tx = y\Lambda y^T$

$x = Vy^T$, pak ② $x^Tx = y^Tx = 1$

③ $v_i^Tx = \cancel{\ \ } \ v_i^TVy^T = 0$

Kaukneme na ③ podmínku

$\underbrace{v_i^T \cdot [v_1\ v_2 \dots v_i \dots v_k\ v_{k+1} \dots v_n]}\cdot[y_1\ y_2 \dots y_i \dots y_k\ y_{k+1} \dots y_n]$

$[0\ 0 \dots e_i \dots 0\ 0 \dots 0]\cdot[y_1\ y_2 \dots y_i \dots y_k\ y_{k+1} \dots y_n]$

Nuly jsou kvůli tomu, že matice V je ortogonální, aby $v_i^TVy^T = 0$, kde $i \in \{1 \dots k\}$; hodnoty y mají být nulové ve složkách $i \in \{1, \dots, k\}$, t.j $y_1 = \dots = y_k = 0$

Teď jako v úloze $\underline{7.1}$ nacházíme $\min = \lambda_{k+1}$

$y = x = v_{k+1} = e_{k+1}$

$\underline{7.6}$ $\langle AX, X\rangle = tr((AX)^TX) = tr(X^TA^TX) = tr(X^TAX)$

$\langle A, XX^T\rangle = tr(A^T \cdot XX^T) = tr(XX^TA) = tr(X^TAX)$

$(tr(A\,B\,C) = tr(BCA))$

$tr(X^TAX) = \langle AX, X\rangle = \langle A, XX^T\rangle = x_1^TAx_1 + \dots + x_k^TAx_k$

$\underline{7.8.}$ Zapíšeme body $a_1, \dots, a_n$ jako sloupci matice A

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AA^T = \begin{bmatrix} 23 & 0 & 15 \\ 0 & 19 & -6 \\ 15 & -6 & 21 \end{bmatrix}$$

$$AA^T = V\Lambda V^T$$

$$V = \begin{bmatrix} -0,69 & -0,61 & -0,38 \\ 0,21 & 0,31 & -0,92 \\ -0,69 & 0,71 & 0,09 \end{bmatrix}$$

a) $k=1$ prochází počátkem $\Rightarrow x_0 = 0$

$$X' = \begin{bmatrix} -0,38 \\ -0,92 \\ 0,09 \end{bmatrix}$$

$$X = 0 + \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -0,38 \\ -0,92 \\ 0,09 \end{pmatrix} \right\}$$

b) $k=2$ prochází počátkem

$$X' = \begin{bmatrix} -0,61 & -0,38 \\ 0,31 & -0,92 \\ 0,71 & 0,09 \end{bmatrix}$$

$$X = 0 + \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -0,61 \\ 0,31 \\ 0,71 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0,38 \\ -0,92 \\ 0,09 \end{pmatrix} \right\}$$

c) $k=1$ nemusí procházet počátkem

$$X' = \begin{bmatrix} -0,38 \\ -0,92 \\ 0,09 \end{bmatrix} \qquad x_0 = (1,2,3) \text{ ???}$$

$$X = (1,2,3) + \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -0,38 \\ -0,92 \\ 0,09 \end{pmatrix} \right\}$$

7.10

$$A = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} -13 & 2 & -22 \\ -16 & 14 & -4 \end{bmatrix} \qquad \min\{\|A-B\|,\ B \in \mathbb{R}^{m \times n},\ \text{rank} B = 1\}$$

$$AA^T = \begin{bmatrix} 2.92 & 1.44 \\ 1.44 & 2.08 \end{bmatrix}$$

$$AA^T = V\Lambda V^T$$

$$V = \begin{bmatrix} -0,8 & 0,6 \\ -0,6 & -0,8 \end{bmatrix} \qquad X' = \begin{bmatrix} 0,6 \\ -0,8 \end{bmatrix}$$

$$B = X' \cdot (X')^T A = \begin{bmatrix} 0,2 & -0,4 & -0,4 \\ -0,2667 & 0,5333 & 0,533 \end{bmatrix}$$

~~min{‖A−B‖}~~

$$\|A-B\| = \left\| \begin{matrix} -1{,}0667 & 0{,}5333 & -1{,}0667 \\ -0{,}80 & 0{,}4 & -0{,}8 \end{matrix} \right\| = tr\begin{pmatrix} 1{,}7778 & -0{,}8889 & 1{,}7778 \\ -0{,}8889 & 0{,}444 & -0{,}8889 \\ 1{,}7778 & -0{,}8889 & 1{,}7778 \end{pmatrix}$$

$$= 1{,}7778 + 0{,}444 + 1{,}7778 = 4.$$