

**Matematickou analýzou za „tak to už by stačilo, ne?“ VII:  
Applikace diferenciálního počtu, jednoduché primitivní funkce**

**Dva povinné příklady, abyste měli zpětnou vazbu** Na začátku jsem zmiňoval, že v průběhu semestru dvakrát zadám pár příkladů, jejichž vypracování bude povinné: chci vám je opravit „jako u zkoušky“ – zdá se totiž, že taková zpětná vazba umí až o polovinu zlepšit pravděpodobnost úspěchu při prvním pokusu u zkoušky. Takže je to zde!

Abych se z opravování nezbláznil, odevzdávejte jako jedno pdf s povinnými příklady na začátku, díky!

1. Určete koeficient u  $x^3$  Taylorova polynomu řádu 3 v bodě  $\frac{\pi}{2}$  pro funkci

$$f(x) = \ln \frac{\sin x}{x}.$$

2. Načrtněte graf funkce a určete všechny důležité vlastnosti funkce

$$g(x) = x \cdot \ln \left( \frac{1}{x} \right).$$

**Optimalizační problémy** V tomto typu úloh obvykle hledáme stacionární bod. Nezapomeňte ale zdůvodnit, proč se v daném bodě nabývá požadovaného extrému (maxima/minima) – občas se dá druhé derivování ušetřit např. geometrickým náhledem.

3. Do elipsy o rovnici  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  vepište obdélník, který má strany rovnoběžné s osami elipsy a má maximální obsah.
4. Jaký je největší možný objem válcového sudu (s víkem/bez víka) při zadaném povrchu?

Jedna „praktická úloha ze života“ na skoro aktuální téma:

5. Uvažme funkci  $\mathbf{CoV}(t)$  = počet osob s prokázaným onemocněním COVID-19 v čase  $t$ ; její graf si můžete prohlédnout zde (druhý obrázek). Čemu odpovídají  $\mathbf{CoV}'(t)$ , resp.  $\mathbf{CoV}''(t)$ ?

A jeden superšťavnatý pro dobrovolníky:

6. Pro jaké základy logaritmů existuje číslo, které je rovno svému logaritmu? (Nápověda na konci stránky.)

**Základní integrály** Druhá polovina semestru se věnuje teorii a praxi okolo integrálů, my začneme zlehka, konkrétně jen využitím linearitu integrálu a znalosti základních primitivních funkcí:

7. Najděte neurčitý integrál (tj. množinu všech primitivních funkcí, kterou typicky zapisujeme jako  $F + c$  a máme tím na mysli množinu  $\{F + c \mid c \in \mathbb{R}\}$ ) k následujícím funkcím (využijte přehled tabulkových integrálů na str. 7 v materiálu k přednášce + linearitu integrálu). Určete také na jakém intervalu jsou nalezené funkce primitivními k zadané funkci:

(a)  $\int \left( \frac{3}{x^5} - \frac{2}{x^4} \right) dx$

(b)  $\int \left( \sqrt[5]{x^3} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$

(c)  $\int (e^x + 2e^{2x} - 3e^{-x} + 5e^{-2x}) dx$

(d)  $\int (2 \cos 5x - 3 \sin 2x) dx$

(e)  $\int \cos^2 x dx$  (zkuste opravdu jen pomocí linearitu a vlastností kosínu)

(f)  $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx$