

Exercice 1

Nous cherchons à minimiser la fonction suivante à deux variables :

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 4x + 6y$$

Questions

1. Donner l'algorithme de la technique de descente de gradient de base.
2. Appliquer cet algorithme pour trouver le minimum de $f(x, y)$ avec :
 - a. **Choix du point de départ** : on choisit un point de départ initial $(x_0, y_0) = (0, 0)$.
 - b. **Choix du taux d'apprentissage (learning rate)** : supposons que $\alpha = 0.1$.
 - c. **Choix du critère d'arrêt**: répéter jusqu'à atteindre le nombre d'itérations fixé à 4.
3. Visualiser les différentes itérations sur la courbe de la fonction $f(x, y)$.
4. Reprendre l'exercice en utilisant les critères d'arrêt suivants :
 - (a) **Tolérance sur le gradient** : arrêter lorsque $\|\nabla f(x_k)\| < \varepsilon$.
 - (b) **Tolérance sur la variation des paramètres** : arrêter lorsque $\|x_{k+1} - x_k\| < \varepsilon$ et $\|y_{k+1} - y_k\| < \varepsilon$.
 - (c) **Nombre d'itérations maximal** : arrêter si $k \geq k_{\max}$.
 - (d) **Tolérance sur la variation de la fonction** :

$$|f(x_{k+1}, y_{k+1}) - f(x_k, y_k)| < \varepsilon$$

Exercice 2

L'objectif de cet exercice est d'implémenter en Python l'algorithme de descente de gradient appliqué à la fonction suivante :

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 4x + 6y$$

Vous devez reproduire, à l'aide du langage Python, les étapes de l'algorithme étudiées dans l'exercice 1 (calcul du gradient, mise à jour des variables, calcul du coût), en suivant les paramètres définis.

Consignes

1. Écrire une fonction `f(x, y)` qui calcule la valeur de la fonction objectif.
2. Écrire une fonction `gradient(x, y)` qui retourne le gradient :

$$\nabla f(x, y) = (2x + 4, 2y + 6)$$

3. Initialiser :

- $x_0 = 0, y_0 = 0$
- Taux d'apprentissage : $\alpha = 0.1$
- Nombre d'itérations : 4

4. Implémenter une boucle **for** pour effectuer 4 itérations :

- Calcul du gradient
- Mise à jour de x_k et y_k
- Évaluation de $f(x_k, y_k)$
- Affichage des résultats à chaque étape

5. Afficher sous forme de tableau :

Itération	(x_k, y_k)	$f(x_k, y_k)$
-----------	--------------	---------------

6. Tracer l'évolution de la fonction objectif à l'aide de **matplotlib**.

7. Réécrire l'algorithme en testant les 4 critères d'arrêt suivants :

- (a) Norme du gradient $\|\nabla f(x_k)\| < \varepsilon$
- (b) Variation des paramètres : $\|x_{k+1} - x_k\| < \varepsilon$ et $\|y_{k+1} - y_k\| < \varepsilon$
- (c) Nombre d'itérations maximal $k \geq k_{\max}$
- (d) Variation de la fonction :

$$|f(x_{k+1}, y_{k+1}) - f(x_k, y_k)| < \varepsilon$$