الدروس لمقياس

Théorie des Martingales (à temps discret)

29 ماي 2022

المحتويات

مهم جدا

- الصور الموجودة في هذا الملف لست بصاحبها بل هي لطلبة قاموا بإرسالها لي لأقوم بجمعها و نشرها ليستفيد الجميع وطلبوا مني عدم ذكر أسمائهم ولهذا السبب لم أذكرهم هنا **و أشكرهم جزيل الشكر وجزاهم الله عنا خير الجزاء** وهدفنا إن شاء الله هو وضع دروس، أعمال موجهة، فروض و امتحانات لجميع مقاييس الرياضيات التي تدرس بالجامعة الجزائرية
- جميع هذه الصور، ملفات البيدياف و الكود المستعمل لإنشائهم موجود في المستودع التالي على موقع ال Github و أي تحديث أو تعديل سيكون هناك
- ملفات البيدياف ستكون في مجموعة التليغرام الرياضيات التطبيقية
- الصور ستكون على مجموعة الفيسبوك الرياضيات التطبيقية

و أنت عزيزي الطالب إذا أردت أن تقوم بإثراء هذا المحتوى و تعم الفائدة وهذا ما أتمناه أنا وأظنك مثلي في هذا الأمر فأنظر في القسم لنتعاون و نثري هذا المحتوى لتعلم كيف الطريقة و هو أمر جد بسيط

الدروس

Théorie des Martingales (Martingale à temps discret)

Cours Marting

lité est

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}} = X_n$ est v.a

$X : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subseteq \mathcal{F}$

$X : \Omega \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

ضروري باه يولي X (mesurable)

$X : (\Omega, X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

La tribu engendré par X $\sigma(X)$

$\sigma(X) = X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ v.a — هو لي تخلي X يولي v.a

v.a $\Leftrightarrow$ v.a réell.

Fonct de v.a $\Leftrightarrow$ معناه مش شرط يدي قيم في IR

كي يولي عندنا زوج متغيرات X و Y

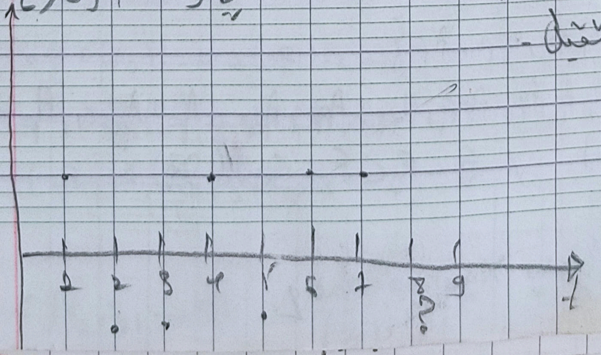
$\sigma(X^{-1}(\mathcal{B}(\Omega)) \cup Y^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))) = \sigma(X, Y)$

le plus petit Tribu pour X, Y deux variable a

$X_1, X_2 \dots X_n \;/\; \sigma(X_1, X_2 \dots X_n) = \sigma\left(\bigcup_{i=1}^{n} \sigma(X_i)\right)$

(X_n) une suite de va ou processus stochastique à temps discret (لي تتبع n تشكل سلسلة v.a)

كي نقصر على processus معناه نتنبأ بالماضي والحاضر و نروح نشوف حالة المستقبل!



①

$[X_t(\omega)]$

كي تثبت w تولد trajectoire

Généralités.

Déf (processus stochastique).

On appelle un processus à temps discret défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans IR, une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de v.a définies sur cet espace

$\Omega = \{FFF, FFP, FPF, FPP, PPP, PPF, PFP, PFF\}$

$A_F = \{FFF, FFP, FPF, FPP\}$ $\quad (\Omega, \mathcal{F})$ espace probabilisé

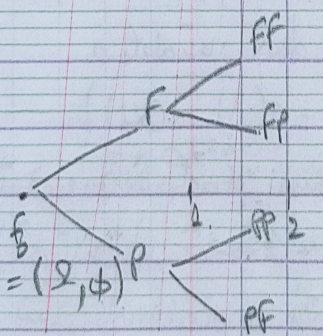
$A_P = \{PPP, PPF, PFP, PFF\}$

$A_{FF} = \{FFF, FFP\}$

$A_{FP} = \{FPF, FPP\}$

$A_{PF} = \{PFP, PFF\}$

$A_{PP} = \{PPP, PPF\}$



$\mathcal{F}_1 = \{\Omega, \phi, A_P, A_F\}$

$\mathcal{F}_2 = \{\Omega, \phi, A_F, A_P, A_{FF}, A_{FP}, A_{PP}, A_{PF}, A_F \cup A_{PF}, A_F \cup A_{PP} \dots\}$

$\mathcal{F}_3 = P(\Omega)$ / $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3 \subset P(\Omega)$

2

Déf 2 : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité. Une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur cet espace a est une suite croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots \subset \mathcal{F}_n \subset \dots \subset \mathcal{F}.$$

Remarque :

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, P)$ est appelé un espace de probabilité filtré (ou espace filtré.

$$X_n : (\Omega, \mathcal{F}_n) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

X_n est $\mathcal{F}_n$-mesura $\iff X_n^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{F}_n$

Déf 3 : un processus $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dit adapté par rapport à une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou $\mathbb{F}$-adapté) si pour tout $n\in\mathbb{N}$, X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable.

$$X : \Omega, X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

أصغر Tribu تخلي X v.a [illegible] σ mesura ?

$\sigma(X) = X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$Y, X : \Omega \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$\sigma(X) = X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $\sigma(Y) = Y^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$\sigma(X, Y) = \sigma(\sigma(X) \cup \sigma(Y)) = \sigma(X) \vee \sigma(Y)$

$X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$X_1 : (\Omega, \sigma(X_1)) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(X_1)$

$X_2 : (\Omega, \sigma(X_1, X_2)) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. $\mathcal{F}_2 = \sigma(X_1) \vee \sigma(X_2)$

$X_3 : (\Omega, \sigma(X_1, X_2, X_3))$

$\mathcal{F}_3 = \sigma(X_1, X_2, \dots X_n)$.

أصغر filt تخلي X يولي adapté

الزبير بزيو
Ezzobir BEZZIOU

Rqs :

1/ Un choix minimal de filtration pour que le processus $X=(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la filtration canonique (ou naturelle) $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que :

$\mathcal{F}_n=\sigma(X_1,\dots,X_n)$, $\forall n\geq 1$.

$E(X_1/\mathcal{F}_1)=X_1$ / X_1 — $\mathcal{F}_1$ mesurable معناه نعرف

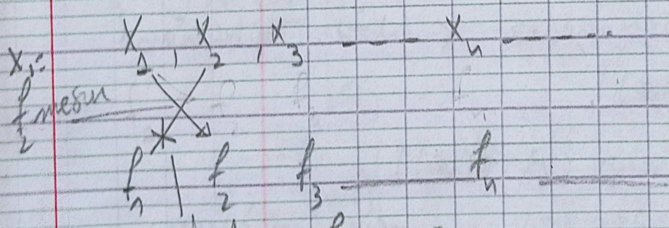
$E(X_{10}/\mathcal{F}_4)_{X_1,X_2,X_3,X_4}$ $\Rightarrow$ mesu $\mathcal{F}_4$ معينة X_{10} / X_1 قيمتها

2/ Dans ce cas, $\mathcal{F}_n$ représente la quantité d'information disponible à l'instant n.

proposition :

Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F}=(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}},P)$ un espace filtré.

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\mathbb{F}$-adapté alors X_m est $\mathcal{F}_n$-mesurable $\forall m\leq n$.



X_2 : n'est pas $\mathcal{F}_1$ mesu.

preuve :

On a $X_m=(\Omega,\mathcal{F}_m)\longrightarrow(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

X_m est $\mathcal{F}_m$-mesurable $\Leftrightarrow$ $X_m^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))\subset\mathcal{F}_m$

mais $\mathcal{F}_m\subset\mathcal{F}_n$, $\forall m\leq n$ $\Leftrightarrow$ $X_m^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))\subset\mathcal{F}_n$

d'où X_m est $\mathcal{F}_n$-mesurable.

4

gmail nécessite un ou plusieurs services google play qui ne sont pas disponibles actuellement veuillez contacter le développeur pour obtenir de l'aide

Temps d'arrêt :

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}=(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, P)$ un espace filtré.

Déf : Un temps d'arrêt pour $\mathbb{F}$ (ou adapté à $\mathbb{F}$ ou $\mathbb{F}$-temps d'arrêt)
est une v.a. $T : \Omega \to \overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ vérifiant $\{T\le n\}\in\mathcal{F}_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Rq :

1/ un temps d'arrêt est une v.a ne dépant pas du "futur"

2/ Le trois conditions suivant sont équivalente :

i/ $\forall n\in\mathbb{N}$, $\{T\le n\}\in\mathcal{F}_n$

ii/ $\forall n\in\mathbb{N}$, $\{T=n\}\in\mathcal{F}_n$

iii/ $\forall n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{1}_{\{T=n\}}$ et $\mathcal{F}_n$-mesurable.

i/ $\Rightarrow$ ii/

$$\{T=n\} = \{T\le n\}\cap\{T\ge n\}$$
$$= \underbrace{\{T\le n\}}_{\in\mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{T\le n-1\}^c}_{\in\mathcal{F}_n}.$$

alors $\{T=n\}\in\mathcal{F}_n$.

ii/ $\Rightarrow$ i/

$\{T\le n\} = \bigcup_{i=0}^{n} \underbrace{\{T=i\}}_{\in\mathcal{F}_i}$ mais $0\le i\le n \Rightarrow \mathcal{F}_i\subset\mathcal{F}_n$.

Alors $\{T\le n\}\in\mathcal{F}_n$

5

Exemples :

1/ Une V.a constante T est un temps d'arrêt.

Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$:

$\forall w \in \Omega : T(w) = n_0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\{T=n\} = \begin{cases} \phi & n \neq n_0 \quad \in \mathcal{F}_n \\ \Omega & n = n_0 \quad \in \mathcal{F}_n \end{cases}$$

$\{T=n\} \in \mathcal{F}_n \quad , \forall n \in \mathbb{N}$.

2/

Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un processus stochastique

on définit $T_B = \inf\{n \in \mathbb{N}, X_n \in B\}$.

est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt où $\mathcal{F}$ est la filtration naturelle de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$

En effet : Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\{T_B = n\} = \underbrace{\{X_1 \notin B\}}_{\in \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{X_2 \notin B\}}_{\in \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_n} \cap \dots \cap \underbrace{\{X_{n-1} \notin B\}}_{\in \mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{X_n \in B\}}_{\subset \mathcal{F}_n}$$

$\{T_B = n\} \in \mathcal{F}_n$

T_B est le premier temps d'entré dans B par contre le temps de sortie

$S_B = \sup\{n \in \mathbb{N}, X_n \in B\}$ n'est pas un $\mathcal{F}$-t-a.

6

En effet : Soit $n \in \mathbb{N}$.

$\{S_B = n\} = \{X_1 \in B\} \cap \{X_2 \in B\} \cap \dots \cap \{X_n \in B\} \cap \{X_{n+1} \notin B\}$

$\{S_B = n\} \in \mathcal{F}_{n+1}$

Déf : Soit T un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt l'ensemble $\mathcal{F}_T$

$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F} / \forall n \in \mathbb{N}, A \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n\}$.

$= \{A \in \mathcal{F} / \forall n \in \mathbb{N}, A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n\}$.

est une tribu sur Ω appelée tribu des événements antérieurs à T

Propriétés

1/ Si S et T deux $\mathcal{F}$-t.a, alors $S+T$, $S \wedge T$, $S \vee T$ sont des $\mathcal{F}$-t.a.

2/ Si $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{F}$-t.a alors $\sup_n T_n$ et $\inf_n T_n$ sont des t.a.

3/ Si T un $\mathcal{F}$-t.a et $k \in \mathbb{N}$, alors $T+k$ est un $\mathcal{F}$-t.a

En effet soit $n \in \mathbb{N}$.

$\{T+k = n\} = \{T = n-k\}$

Si $k \leq n$, on a $\{T = n-k\} \in \mathcal{F}_{n-k} \subset \mathcal{F}_n$

Si $k > n$, on a $\{T = n-k\} = \emptyset \in \mathcal{F}_n$.

4/ Si S et T sont des temps d'arrêt tels que $S \leq T$, alors $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$

7

Martingales.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, P)$ un espace de probabilité filtré et on note $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Déf : Soit $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus stochastique alors X est une.

1/ $\mathbb{F}$ - martingale (ou martingale adaptée à $\mathbb{F}$) si les trois conditions suivantes sont vérifiées.

a/ $\forall n\in\mathbb{N}$, $E|X_n| < +\infty$.

b/ X est $\mathbb{F}$ - adapté (ie : $\forall n\in\mathbb{N}$, X_n est $\mathcal{F}_n$ - mesurable)

c/ $\forall n\in\mathbb{N}$, $E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = X_n$.

2/ $\mathbb{F}$ - sous - martingale si elle vérifie.

a), b) et $\forall n\in\mathbb{N}$, $E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) \geq X_n$.

3/ $\mathbb{F}$ - sur - martingale si elle vérifie.

a), b) et $\forall n\in\mathbb{N}$, $E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) \leq X_n$.

Rqs :

1/ une martingale est à la fois une sous martingale et une sur - martingale.

2/ le processus $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous - martingal ssi le processus $-X = (-X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sur - martingale.

3/ $E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = X_n$.

$\forall A\in\mathcal{F}_n \quad \int_A E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n)\,dP = \int_A X_{n+1}\,dP$

18

$X_n^{-1}(B(\mathbb{R})) \subset \mathcal{F}$

$\{X_n \in B\} \subset \mathcal{F}$

$$\Rightarrow \int_A X_n \, dP = \int_A X_{n+1} \, dP$$

$$E(X_n 1\!\!1_A) = E(X_{n+1} 1\!\!1_A).$$

_ La condition c/ est équivalente à $\forall n \in \mathbb{N}$, $E(X_n 1\!\!1_A) = E(X_{n+1} 1\!\!1_A)$ pour Tout $A \in \mathcal{F}_n$, ou $\forall n \in \mathbb{N}$. $E(X_{n+1} - X_n / \mathcal{F}_n) = 0$.

Exemples. (martingale régulière) = fermé

1/ Soit Z une v.a réelle intégrable définie sur ~~$(\Omega, \mathcal{F}$~~ $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}, P)$.

Le processus $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$X_n = E(Z/\mathcal{F}_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ est une $\mathbb{F}$_ martingale

En effet :

a/ $\forall n \in \mathbb{N}$, $E|X_n| = E|E(Z/\mathcal{F}_n)| \leq E(E(|Z|/\mathcal{F}_n))$
$= E(|Z|) < +\infty$.

b/ Il est claire que X_n est $\mathcal{F}_n$ - mesurable, $\forall n \in \mathbb{N}$.

c/ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = E\left[E(Z/\mathcal{F}_{n+1})/\mathcal{F}_n\right] = E\left[E(Z/\mathcal{F}_n)/\mathcal{F}_{n+1}\right]$$

$$= E(X_n/\mathcal{F}_{n+1}) = X_n.$$

أي proce نقدر نكتبو من الشكل $E(va_{inte}/\mathcal{F}_n)$
هو = mart_réguli

Rq = Une telle martingale est dite une martingale régulière (ou fermé). et intégrable

2/ Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a i.i.d telle que $E(X_n)=m$, $\forall n\in\mathbb{N}$ et $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\mathcal{F}_n=\sigma(X_1,\dots,X_n)$

la marche aléatoire $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que

pour chaque $n\in\mathbb{N}$, $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$

est une $\begin{cases}\text{sous-martingale si } m>0.\\ \text{sur-martingale si } m<0.\\ \text{martingale si } m=0.\end{cases}$

En effet = الشروط الباقية تتحقق بسهولة

$\forall n\in\mathbb{N}$, $E(S_{n+1}-S_n/\mathcal{F}_n)=E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n)$

$X_{n+1}\perp\!\!\!\perp\mathcal{F}_n \Big(= E(X_{n+1})=m.$

alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\begin{cases}\text{sous martingale si } m>0.\\ \text{martingale si } m=0.\\ \text{sur martingale si } m<0.\end{cases}$

Propriétés =

1/ Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $\mathbb{F}$-martingales alors.

$\forall m\geq n$ $E(X_m/\mathcal{F}_n)=X_n$. En effet

* si $m=n$, $E(X_m/\mathcal{F}_n)=E(X_n/\mathcal{F}_n)=X_n$

* si $m>n$, $E(X_m/\mathcal{F}_n)=E(E(X_m/\mathcal{F}_{m-1})/\mathcal{F}_n)$

$=E(X_{m-1}/\mathcal{F}_n)$

$=E(E(X_{m-1}/\mathcal{F}_{m-2})/\mathcal{F}_n)$

10

$= E(X_{n-2}/\mathcal{F}_n)$

$\vdots$

$= E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = X_n$

2/ si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $\mathbb{F}$-mart (resp-sous mart resp-sur-mart). La suite $(E(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante (resp-croissante, resp décroissante).

En effet: si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $\mathbb{F}$-mart.

$\forall n\in\mathbb{N}, E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = X_n \Rightarrow E(E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n)) = E(X_n)$

$\Rightarrow E(X_{n+1}) = E(X_n)$

d'où $E(X_0) = E(X_1) = E(X_2) = \dots = E(X_n) = \dots$

3/ si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $\mathbb{F}$-martingale et f une fonction convexe telle que pour chaque $n\in\mathbb{N}$, $E|f(X_n)| < +\infty$ Alors: $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est $\mathbb{F}$-sous mart.

En effet: En utilisant l'inégalité de Jenson on obtient

$E(f(X_{n+1})/\mathcal{F}_n) \geq f(E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n)) = f(X_n)$.

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ | $E(X_{n+1}^2/\mathcal{F}_n) \geq (E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n))^2$

$f: x \mapsto x^2$ | $= X_n^2$

11

Déf :

on dit qu'un processus $\mathbb{F}$-adapté $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un processus $\mathbb{F}$-prévisible si $\forall n\in\mathbb{N}$, A_{n+1} est $\mathcal{F}_n$-mesurable.

Déf :

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus prévisible pour la même filtration $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

La suite définie par $(Y.X)_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k(X_k - X_{k-1})$

est appelée intégrale stochastique discret ou transformé de martingale.

Thé :

si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un processus prévisible borné pour la même filtration $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $((Y.X)_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $\mathbb{F}$-martingale

preuve.

on a : $(Y.X)_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k(X_k - X_{k-1})$ et $|Y_n(\omega)|\leq k$
$\forall n\in\mathbb{N}, \forall \omega\in\Omega$

1/ Il est clair que $(Y.X)_n$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable

2/ $\forall n\in\mathbb{N}$, $E|(Y.X)_n| = E|\sum_{k=1}^{n} Y_k(X_k - X_{k-1})|$

12

$(1-\frac{\beta}{k})\varepsilon = (1-\beta)\varepsilon_k$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} E\left(|Y_k|\left(|X_k|+|X_{k-1}|\right)\right)$$

$$\leq K \sum E|X_k| + E|X_{k-1}| < +\infty$$

ie : $(Y.X)_n \in L^1(\Omega)$

iii/ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$E\left[(Y.X)_{n+1} - (Y.X)_n / \mathcal{F}_n\right] = E\left(Y_{n+1}(X_{n+1}-X_n)/\mathcal{F}_n\right]$$

$$= Y_{n+1} \underbrace{E\left[X_{n+1} - X_n / \mathcal{F}_n\right]}_{\leq 0} = 0$$

alors $((Y.X)_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $\mathcal{F}$-martingale

proposition - (Décomposition de Doob)

Toute $\mathcal{F}$-sous-mart $(X_n)_{n\geq 0}$ s'écrit de façon unique sous la forme $X_n = M_n + A_n$ où $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $\mathcal{F}$-martingale et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un processus prévisible croissant tels que $A_0 = 0$

preuve

on définit $A_0 = 0$, $A_{n+1} = A_n + E(X_{n+1} - X_n / \mathcal{F}_n)$

par construction, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un processus prévisible croissant car.

13

$E(A'_{n+1} - A'_n / \mathcal{F}_n) = A'_{n+1} - A'_n = E(X_{n+1} - X_n / \mathcal{F}_n) = E(A_{n+1} - A_n / \mathcal{F}_n)$

$= A'_{n+1} - A_n$

A_{n+1} est $\mathcal{F}_n$-mesurable de plus

$A_{n+1} - A_n = E(X_{n+1} - X_n / \mathcal{F}_n) \geq 0.$

De plus.

$$E(M_{n+1} / \mathcal{F}_n) = E(X_{n+1} - A_{n+1} / \mathcal{F}_n)$$

$$= E(X_{n+1} / \mathcal{F}_n) - A_{n+1}$$

$$= E(X_{n+1} / \mathcal{F}_n) - (A_n + E(X_{n+1} - X_n / \mathcal{F}_n))$$

$$= E(X_{n+1} / \mathcal{F}_n) - A_n - E(X_{n+1} / \mathcal{F}_n) + X_n$$

$$= X_n - A_n = M_n$$

i.e. $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une $\mathbb{F}$-martingale.

La décomposition est unique car si

$X_n = M_n + A_n = M'_n + A'_n$

$E(A'_{n+1} - A'_n / \mathcal{F}_n) = A'_{n+1} - A'_n = E(X_{n+1} - X_n / \mathcal{F}_n) = A_{n+1} - A_n.$

on a : $A_0 = A'_0 = 0$ alors

$A'_1 - A'_0 = A_1 - A_0 \Rightarrow A'_1 = A_1$

$A'_2 - A'_1 = A_2 - A_1 \Rightarrow A'_2 = A_2$

$\vdots$

$A'_{n+1} - A'_n = A_{n+1} - A_n \Rightarrow A'_{n+1} = A_{n+1}$

et donc

$$\begin{cases} X_n = M_n + A_n \\ X_n = M'_n + A'_n \end{cases} \text{ et } A'_n = A_n.$$

$M_n = X_n - A_n = X_n - A'_n = M'_n$

14

V) Martingale et temps d'arrêt.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, P)$ un espace de probabilité filtré tel que $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Déf 1 =

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus $\mathbb{F}$-adapté et T un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt.

on note X_T l'application défini pour $\omega\in\Omega$.

$$X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega).$$

Lemme

l'application X_T est $\mathcal{F}_T$-mesurable

preuve.

$$X_T : (\Omega, \mathcal{F}_T) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

Soit $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $n\in\mathbb{N}$.

$$X_T^{-1}(B)\cap\{T=n\} = \{X_T\in B\}\cap\{T=n\}$$
$$= \{X_n\in B\}\cap\{T=n\}\in\mathcal{F}_n$$

alors $X_T^{-1}(\Omega)\in\mathcal{F}_T$.

proposition.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une $\mathbb{F}$-mart et T un $\mathbb{F}$-t.a borné par $m\in\mathbb{N}$ ~~alors~~

Alors. X_T est intégrable et $E(X_T) = E(X_0)$

15

preuve

vu que $T \leq m \in \mathbb{N}^*$, alors $\{T \leq m\} = \Omega$

$$X_T = X_T \mathbb{1}_\Omega = X_T \mathbb{1}_{\bigcup_{k=0}^{m}\{T=k\}} = X_T \sum_{k=0}^{m} \mathbb{1}_{\{T=k\}}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} X_T \mathbb{1}_{\{T=k\}} = \sum_{k=0}^{m} X_k \mathbb{1}_{\{T=k\}}$$

alors

$$E|X_T| = E\left|\sum_{k=0}^{m} X_k \mathbb{1}_{\{T=k\}}\right| \leq E\left(\sum_{k=0}^{m} |X_k| \mathbb{1}_{\{T=k\}}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{m} E\left(|X_k| \mathbb{1}_{\{T=k\}}\right) \leq \sum_{k=0}^{m} E|X_k|$$

$$= (m+1)\, E|X_0| < +\infty$$

d'où $X_T \in L^1$

2) $E(X_T) = E(X_0)$?

$$E(X_T) = \sum_{k=0}^{m} E\left(\mathbb{1}_{\{T=k\}} X_k\right)$$

$$= E\left(\sum X_m \mathbb{1}_{\{T=k\}}\right) = \sum_{k=0}^{m} E\left[\mathbb{1}_{\{T=k\}} E(X_m / \mathcal{F}_k)\right]$$

$$E\left(X_m \sum \mathbb{1}_{\{T=k\}}\right) = \sum E\left[E\left(\mathbb{1}_{\{T=k\}} X_m / \mathcal{F}_k\right)\right]$$

$$= E\left(X_m \mathbb{1}_{\bigcup\{T=k\}}\right)$$

$$= \sum E\left(\mathbb{1}_{\{T=k\}} X_m\right) = E(X_m) = E(X_0)$$

$$= E\left(X_m \mathbb{1}_{\{T \leq m\}}\right)$$

16

Théorème (d'arrêt de Doob) Cas fini

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une $\mathbb{F}$-mart, S et T deux $\mathbb{F}$-temps d'arrêt par une constante $m\in\mathbb{N}^*$ tq : $S\leq T\leq m$ $m\in\mathbb{N}^*$ Alors

$$E(X_T/\mathcal{F}_S)=X_S \quad p.s.$$

Preuve.

Soit $A\in\mathcal{F}_S$, on définit :

$$R=S\mathbb{1}_A+T\mathbb{1}_{A^c}=\{$$

alors R est un $\mathbb{F}$-t.a borné par m

En effet

$$\{R=n\}=\{S\mathbb{1}_A=n\}\cup\{T\mathbb{1}_{A^c}=n\}.$$

$$=(\{S=n\}\cap A)\cup(\{T=n\}\cap A^c)$$

$$=\underbrace{(A\cap\{S=n\})}_{①\in\mathcal{F}_n}\cup\underbrace{(A^c\cap\{T=n\})}_{②\in\mathcal{F}_n}\in\mathcal{F}_n$$

(1) : car $A\in\mathcal{F}_S \Rightarrow A\cap\{S=n\}\in\mathcal{F}_n$

(2) : $A\in\mathcal{F}_S \Rightarrow A^c\in\mathcal{F}_S \Rightarrow A^c\in\mathcal{F}_T$ $(\mathcal{F}_S\subset\mathcal{F}_T)$

$\Rightarrow A^c\cap\{T=n\}\in\mathcal{F}_n$

Montrons que $E(X_T/\mathcal{F}_S)=X_S$ p.s

grâce à la proposition précédente on a :

$$E(X_R)=E(X_0)=E(X_T)$$

17

et on a : aussi

$$E(X_T) = E(X_T \mathbb{1}_A + X_T \mathbb{1}_{A^c}) = E(X_T \mathbb{1}_A) + E(X_T \mathbb{1}_{A^c})$$

$$E(X_R) = E(X_S \mathbb{1}_A + X_T \mathbb{1}_{A^c}) = E(X_S \mathbb{1}_A) + E(X_T \mathbb{1}_{A^c})$$

d'où $E(X_T \mathbb{1}_A) = E(X_S \mathbb{1}_A)$, $\forall A \in \mathcal{F}_S$

alors $E(X_T / \mathcal{F}_S) = X_S$ p.s

car :

$$\int_A X_T \, dP = \int_A X_S \, dP$$

$$\parallel$$

$$\int_A E(X_T / \mathcal{F}_S) \, dP$$

$\Rightarrow E(X_T / \mathcal{F}_S) = X_S$ p.s

$(E, \mathcal{A}, \mu)$ $f = (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable

si $f \geq 0$ $\int f \, d\mu = 0 \Rightarrow f = 0$ μ-p.p

si $\forall A \in \mathcal{A}$, on a $\int_A f \, d\mu = 0$, alors

$f = 0$ μ-p.p.

$$E^+ = \{f \geq 0\} = f^{-1}([0, +\infty[) \in \mathcal{A}.$$

$$\int_{E^+} f \, d\mu = 0 \Rightarrow f = 0 \ \mu\text{-p.p sur } E^+$$

$$E^- = \{f \leq 0\} = f^{-1}(]-\infty, 0]) \in \mathcal{A}.$$

18

$$\int_{E^-} f\, d\mu = 0 \Rightarrow \int_{E^-} (-f)\, d\mu = 0.$$

$$\Rightarrow \int_{E^+} f\, d\mu = 0 \Rightarrow f = 0 \text{ p.p.}$$

Def :

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}\uparrow$ une suite de t.a finies. La suite $(X_{T_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée un echantillonnage de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Théorème (d'échantillonnage)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une $\mathcal{F}$-mart (resp sous martingale, sur mart). Si $(X_{T_n})_{n\in\mathbb{N}}$ un échantillonage de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que

i) $\forall n\in\mathbb{N}$, $E|X_{T_n}| < +\infty$

ii) $\liminf_N E(|X_N| \mathbb{1}_{\{T_n > N\}}) = 0$, $n\in\mathbb{N}$.

Alors $(X_{T_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale (resp sous mart, sur mart)

proposition

Sous chacune des conditions suivante,

1) $\exists K\in\mathbb{R}_+$ tel que $|X_n| \leq K$ p.s, $n\in\mathbb{N}$

2) $\forall n\in\mathbb{N}$, $\exists K_n\in\mathbb{N}$ tel que $T_n \leq K_n$ p.s

les hypothèse du théorème d'échantillonage.

19

$\{|X_{T_n}| > k\} \cap \Omega = \{|X_{T_n}| > k\} \cap (\bigcup \{T_n = i\})$

sont vérifiées

Preuve

1. i/ on a : $\{|X_{T_n}| > k\} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (\{T_n = i\} \cap \{|X_i| > k\})$

$\subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (\{|X_i| > k\})$

donc :

$0 \leq \mathbb{P}(|X_{T_n}| > k) \leq \mathbb{P}(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{|X_i| > k\}) \leq \underbrace{\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(|X_i| > k)}_{=0}$

d'où $\mathbb{P}(\{|X_{T_n}| > k\}) = 0$, alors

$|X_{T_n}| \leq k$ p.p $\Rightarrow E|X_{T_n}| \leq k < +\infty$.

$X_{T_n} \in L^1$

ii/ La $(\{T_n > N\})_N \searrow \{T_n = +\infty\}$

$\lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}(\{T_n > N\}) = \mathbb{P}(\bigcap_{N \in \mathbb{N}} \{T_n > N\})$

$= \mathbb{P}(\{T_n = +\infty\}) = 0$

$0 \leq \lim_{N \to +\infty} E(|X_n| \mathbb{1}_{\{T > N\}}) \leq k \lim_{N \to \infty} E(\mathbb{1}_{\{T > N\}})$

$= k \lim_{N \to \infty} \mathbb{P}(\{T_n > N\}) = 0$

20

d'où $\lim\limits_{N \to +\infty} E(|X_n| \mathbb{1}_{\{T_n > N\}}) = 0$

2/

$$X_{T_n} = \sum_{i=0}^{K_n} X_i \mathbb{1}_{\{T_n = i\}}$$

i/ et donc $E|X_{T_n}| \leq \sum_{i=0}^{K_n} E|X_i| < +\infty$.

~~pour $N > K_n$~~

ii/ pour $N > K_n$ $E(|X_n| \mathbb{1}_{\{T_n > N\}}) = 0$.

alors $\lim \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} E(|X_n| \mathbb{1}_{\{T_n < N\}}) = 0$.

Corollaire.

Soit T un $\mathbb{F}$-t-a. Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une $\mathbb{F}$-martingale (resp. sous mart, sur mart) alors le processus arrêté au temps T, soit $(X_{T \wedge n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une $\mathbb{F}$-mart (resp. sous mart, sur-mart)

preuve.

on pose $T_n = T \wedge n$, alors $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \nearrow$ et fini, il est claire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists K_n = n$ tq. $T_n = T \wedge n \leq n = K_n$.

alors d'après le théorème d'échantillonage

21

$(X_{T \wedge n})$ est une martingale (resp. mart sur-mart).

Convergence des martingales

1/ Convergence des martingales de carré intégrable.

Théorème :

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale de carré intégrable bornée dans L^2 (i.e : $\sup_n E(X_n^2) < \infty$) تقترب لها $\forall n\in\mathbb{N}$

Alors.

Il existe une v.a $X \in L^2$ telle que.

1/ $X_n \to X$ dans L^2. $E(X_n - X) < +\infty$

2/ $X_n \to X$ p.s.

2/ Convergence de S. martingales (S. martingale : sous-mart ou sur-mart)

Thém :

Soit $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une S. mart bornée dans L^1 (i.e : $\sup_n E|X_n| < +\infty$) alors X_n converge vers une v.a. X_∞ intégrable.

Uniformément Intégrabilité. (U.I)

Déf : Une famille H de v.a est U.I si

$$\forall X \in H : \lim_{M\to+\infty} \int_{\{|X| \geq M\}} |X|\, dP = 0$$

$$E(f(X)/\mathcal{F}_n) \geq f/\mathcal{G}$$

23

ou, $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, \forall X \in H : \displaystyle\int_{\{|X| > M\}} |X| \, dP \leq \varepsilon.$

Exemples.

1/ Une famille réduite à un nombre fini de v.a intégrables est u.I.

En effet, si X est intégrable, on a :

$$\int_{\{|X|>M\}} |X| \, dP + \int_{\{|X| \leq M\}} |X| \, dP = E|X| < +\infty.$$

or : $$\lim_{M \to +\infty} \int_{\{|X| \leq M\}} |X| \, dP = E|X|.$$

d'où $$\int_{\{|X|>M\}} |X| \, dP \xrightarrow[M \to +\infty]{} 0$$

$$H = \{X\}$$

2/ Une famille H de v.a dominée par une v.a intégrable Y est u.I.

En effet, si $X \in H$, $|X| \leq Y$

$$\{|X|>M\} \subset \{Y>M\}$$

$$\int_{\{|X|>M\}} |X| \, dP \overset{(1)}{\leq} \int_{\{|X|>M\}} Y \, dP \overset{(2)}{\leq} \int_{\{Y>M\}} Y \, dP \xrightarrow[M \to \infty]{(3)} 0$$

(1) : car $|X| \leq Y$.

(2) : $\{|X| > M\} \subset \{Y > M\}$.

(3) : la famille $\{Y\}$ et U.I. d'après l'exemple 1

proposition :

Soit H une famille de v.a intégrables. si les assertions suivantes sont équivalentes.

1/ H est équi-intégrable.

i.e : $\forall \varepsilon > 0, \exists \mu > 0, \forall A \in \mathcal{F}, \forall x \in H$

$$P(A) < \mu \Rightarrow \int_A |X| \, dP < \varepsilon.$$

2/ H est bornée dans L^1 (i.e $\sup_{X \in H} E|X| < +\infty$)

Alors la famille H est U.I.

Théorème : (de Lebesgue généralisé de VITALI)

p.s $\Rightarrow L^1$ هذه تحليلا تنتقل من

p.proba $\Rightarrow L^1$.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a intégrable et X une v.a. les assertions suivantes sont équivalentes.

1/ $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et U.I et $X_n \xrightarrow[n \to \infty]{P} X$

2/ X est intégrable et $X_n \xrightarrow[n \to \infty]{L^1} X$

25

marche aléatoire

$$X_t = \text{passé}(X_t) + \varepsilon_t \text{ ou } (\text{passé } \varepsilon_t)$$

حيث درجة X_t تكون أكبر من درجة ε_t

مثال:

$$X_t = \alpha X_{t-1} - \beta X_{t-2} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$$

2 أكبر من 1.

26

* في MA إذا كان $MA(q)$

si $h > q \Rightarrow \rho(h) = 0$.

fct de correlation = صفر إذا
auto

* l'auto-correlation partielle $\Phi(h)$

$\Phi(h) = 0$ si $h \to +\infty$.

* في $AR(p)$:

si $h > p \Rightarrow$ l'auto-correlation partielle $\Phi(h) = 0$

si $h \to +\infty \Rightarrow$ l'auto-correlation $\rho(h) \to 0$.

$$\mathrm{cov}(X_t, X_{t-h}) = E\left((X_t - E(X_t))(X_{t-h} - E(X_{t-h}))\right)$$

27

روابط مجتمعاتنا

😇 هذه روابط قنواتنا و مجموعاتنا على التليغرام و الفيسبوك أسفله يسعدنا إنضمامكم إليها 😇

قنوات التليغرام:

- قناة السنة أولى ليسانس

L1 Math (channel)

- قناة السنة الثانية ليسانس

L2 Math (channel)

- قناة السنة الثالثة ليسانس

L3 Math (channel)

- قناة السنة أولى ماستر رياضيات تطبيقية

M1 [Applied Mathematics](channel)

- قناة السنة ثانية ماستر رياضيات تطبيقية

M2 [Applied Mathematics](channel)

مجموعات التليغرام:

- مجموعة السنة ثانية ماستر رياضيات

M2 [Applied Mathematics] (group)

- مجموعة الرياضيات التطبيقية

الرياضيات التطبيقية

مجموعات الفيسبوك:

- مجموعة الرياضيات التطبيقية

الرياضيات التطبيقية

ملاحظة:

هذه روابط حساباتي على اليسار إذا كان لديك استفسار يمكنك مراسلتي على أي منهم حساب التليغرام، بوت التواصل (على تليغرام أيضا) أو الإيميل

أما إذا كنت تريد إرسال ملفات خاصة بأحد مقاييس الرياضيات فيمكنك أيضا مراسلتي على أي واحد فيهم و لكن أرشح لك تطبيق تليغرام خاصة إذا كان حجم الملف كبيرا

- حسابي على تليغرام

Ezzobir

- بوت التليغرام الخاص بالتواصل معنا

Contact Us

- الإيميل

ezzobirb@protonmail.com

لنتعاون و نُثري هذا المحتوى

مرحبا عزيزي الطالب هذا القسم خاص بالذي يرغب بالمساهمة في إثراء المحتوى و الوصول إلى الهدف ألا و هو وضع الدروس، الأعمال الموجهة، الفروض و الامتحانات لجميع المقاييس التي يتم تناولها أثناء دراسة الرياضيات في الجامعة الجزائرية

الطريقة جد سهلة أي ملف لديك يخص أحد المقاييس أرسله لي عبر حسابي على تليغرام أو بوت التواصل

لنقل على سبيل المثال قمت باجتياز فرض أو إمتحان قم بالتقاط صورة له و أرسله لي أو لديك دروس أو أعمال موجهة مكتوبة قم بالتقاط صور لهم و أرسلهم لي

أو أنت طالب على سبيل المثال لا على سبيل الحصر غير مهتم بالدراسة و جئت في الأيام الأواخر التي تسبق الإمتحان و قمت بأخذ صور للدروس و الأعمال الموجهة من عند زميلك **الخباش** الذي لا يترك صغيرة و لا كبيرة يكتبها الأستاذ أو يقولها إلا و سجلها فبعد التقاطك للصور من عند زميلك و الدراسة منهم و حصولك على المعدل الذي كنت ترغبه إن شاء الله أرسل هذه الصور لي قبل حذفها أو عمل فورمات نهاية السنة للهاتف لديك

في الأخير ما أردت قوله أخي الطالب هو المهم أن ترسل و أن لا تحقر من المعروف شيئا

و أنا من جهتي سأقوم بفحص الملفات فإذا كانت مجانية و ليس عليها حقوق سأقوم بنشرها على تليغرام و

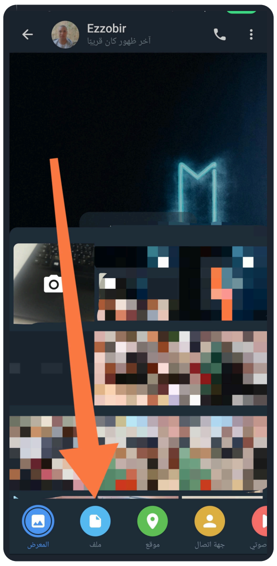
فيسبوك وو ضعها على مستودع الغيتهاب المذكورِين أعلاه في **مهم جدا**

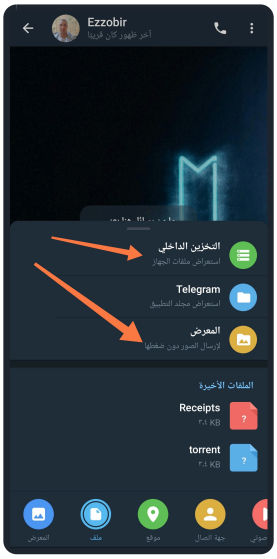
و كيفية إرسال الملفات في تطبيق تليغرام لمن لا يعرف مشروحة أسفله فليلق عليها نظرة

افتح تطبيق تليغرام ثم اكتب في خانة البحث ezzobir ستجد حسابي كما هو مبين في الصورة على اليسار قم بالضغط عليه

ثم بعدها انظرا أسفل الشاشة ستجد زر إرفاق الملفات كما هو مبين في الصورة على اليمين قم بالضغط عليه

ثم هنا احذر أن تضغط على المعرض مباشرة لأنك ستقوم بإرسال الصورة بشكل مضغوط (أي بجودة سيئة) فبدل الضغط على المعرض مباشرة اضغط على إيقونة الملف كما هو مبين في الصورة على اليسار





و الأن في هذه المرحلة

- تضغط على المعرض لتحديد الصور و إرسالهم
- أو في حالة كنت واضعا الصور في مجلد محدد على جهازك تضغط على التخزين الداخلي ثم تنقل للمجلد الذي تريده و تقوم بتحديد الصور و إرسالهم كما هو مبين في الصورة على اليمين

بالتوفيق لجميع الإخوة الكرام