# الأعمال الموجهة لمقياس
# Séries chronologiques

29 ماي 2022

# المحتويات


الأعمال الموجهة رقم 0 ____ 1
الأعمال الموجهة رقم 1 ____ 2
الأعمال الموجهة رقم 2 ____ 11
الأعمال الموجهة رقم 3 ____ 24
الأعمال الموجهة رقم 4 ____ 33
روابط مجتمعاتنا ____ 41
لنتعاون و ننشري هذا المحتوى ____ 43


## مهم جدا

- الصور الموجودة في هذا الملف لست بصاحبها بل هي لطلبة قاموا بإرسالها لي لأقوم بجمعها و نشرها ليستفيد الجميع وطلبوا مني عدم ذكر أسمائهم ولهذا السبب لم أذكرهم هنا و أشكرهم جزيل الشكر وجزاهم الله عنا خير الجزاء وهدفنا إن شاء الله هو وضع دروس، أعمال موجهة، فروض و امتحانات لجميع مقاييس الرياضيات التي تدرس بالجامعة الجزائرية
- جميع هذه الصور، ملفات البيدياف و الكود المستعمل لإنشائهم موجود في المستودع التالي على موقع ال Github و أي تحديث أو تعديل سيكون هناك
- ملفات البيدياف ستكون في مجموعة التليغرام الرياضيات التطبيقية
- الصور ستكون على مجموعة الفيسبوك الرياضيات التطبيقية

و أنت عزيزي الطالب إذا أردت أن تقوم بإثراء هذا المحتوى و تعم الفائدة وهذا ما أتمناه أنا وأظنك مثلي في هذا الأمر فأنظر في القسم لنتعاون و ننشري هذا المحتوى لتعلم كيف الطريقة و هو أمر جد بسيط

# الأعمال الموجهة رقم 0

TD (4-4)
Série Tomb

**Déf** : On dit $X_t$ une série chronologique ou bien temporelle qui est une suit des v.a qui depend de temps $\{X_t : t = 1, \dots, T\}$ $T \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}$.

Les composantes des série T :

① La tendance $Z_t$ : est un composant observée sur une longue période.

- polynômale de dégrée d :

$$Z_t = a_0 + a_1 t + \dots + a_d t^d$$

- exponentielle :

$$Z_t = a_0 \exp(a_1 t)$$

② La saisonnalité $S_t$ : le terme de variation saisonnière de période p : $S_{t \pm p} = S_t$.

هوة تعرف بعض الظاهرة و تتبع بالسنين -

③ L'erreur $\varepsilon_t$ : il est de faible intensité mais de nature aléatoire

**Déf** : on a les filtres et les opérateurs.

1/ l'opérateur de retard L :

$$LX_t = X_{t-1}$$

$\forall k \geq 0$ $\quad L^k X_t = X_{t-k}$

2/ l'opérateur d'avance F :

$FX_t = X_{t+1}$, $\forall k \geq 0$, $F^k X_t = X_{t+k}$, on a que $F = L^{-1}$.

# الأعمال الموجهة رقم 1

Série I :

3/ l'opérateur de différentiation.

$\Delta = I - L$

$\Delta X_t = (I - L) X_t = X_t - X_{t-1}$

تأخير

Ex1 :

. Montrer que $\Delta$ permet d'éliminer les tendances linéaire

. Montrer que $\Delta^2$ élimine les tendances quadratique

. généraliser pour $\Delta^d$.

Sol :

1/ $Z_t = a_0 + a_1 t$

$\Delta Z_t = (I - L) Z_t = Z_t - Z_{t-1}$

$Z_{t-1} = a_0 + a_1 (t-1)$

$\Delta Z_t = a_0 + a_1 t - a_0 - a_1 (t-1)$

$= a_1 (t - t + 1) = \boxed{a_1}$ cst.

2/ $Z_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$

$\Delta^2 = (I - L) = I + L^2 - 2L$

$\Delta^2 Z_t = (I + L^2 - 2L) Z_t = Z_t + Z_{t-2} - 2 Z_{t-1}$

$Z_{t-2} = a_0 + a_1 (t-2) + a_2 (t-2)^2$

$= a_0 + a_1 (t-2) + a_2 (t^2 + 4 - 4t)$

$Z_{t-1} = a_0 + a_1 (t-1) + a_2 (t-1)^2$

$= a_0 + a_1 (t-1) + a_2 (t^2 + 1 - 2t)$

2

$$\Delta^2 z_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_0 + a_1(t-2) + a_2(t^2+4-4t)$$
$$-2a_0 - 2a_1(t-1) - 2a_2(t^2+1-2t)$$
$$= a_1(t+t-2-2t+2) + a_2(t^2+t^2+4-4t-2t^2-2+4t)$$
$$= 2a_2 \quad Cst.$$

3/

$$z_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$
$$\Delta^3 = (I-L)^2(I-L) = (I+L^2-2L)(I-L)$$
$$= (I+L^2-2L-L-L^3+2L^2)$$
$$= I + 3L^2 - 3L - L^3$$

3

$$\Delta^3 z_t = (I+3L^2-3L-L^3) z_t$$
$$= z_t + 3z_{t-2} - 3z_{t-1} - z_{t-3}$$

$$z_{t-2} = a_0 + a_1(t-2) + a_2(t-2)^2 + a_3(t-2)^3$$
$$= a_0 + a_1(t-2) + a_2(t^2+4-4t) + a_3(t^3+12t-6t^2-8)$$

$$z_{t-3} = a_0 + a_1(t-3) + a_2(t-3)^2 + a_3(t-3)^3$$
$$= a_0 + a_1(t-3) + a_2(t^2+9-6t) + a_3(t^3-9t^2+27t-27)$$
$$z_{t-1} = a_0 + a_1(t-1) + a_2(t-1)^2 + a_3(t-1)^3$$
$$= a_0 + a_1(t-1) + a_2(t^2+1-2t) + a_3(t^3-3t^2+3t-1)$$

3

$$\Delta^3 Z_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + 3a_0 + 3a_1 (t-1) +$$
$$3a_2 (t^2 + 4 - 4t)^2 + 3a_3 (t^3 + 12t - 6t^2 - 8)$$
$$- 3a_0 - 3a_1 (t-1) - 3a_2 (t^2 + 1 - 2t)$$
$$- 3a_3 (t^3 - 3t^2 + 3t - 1) - a_0 - a_1 (t-3) - a_2 (t^2 + 9 - 6t)$$
$$- a_3 (t^3 - 9t^2 + 27t - 27)$$

$$= a_1 (\cancel{t} + \cancel{3t} - \cancel{6} - \cancel{3t} + \cancel{3} - \cancel{t} + \cancel{3}) + a_2 (\cancel{t^2} + \cancel{3t^2} + \cancel{12} - \cancel{12t}$$
$$- \cancel{3t^2} - \cancel{3} + \cancel{6t} - \cancel{t^2} - \cancel{9} + \cancel{6t})$$
$$+ a_3 (\cancel{t^3} + \cancel{3t^3} + \cancel{36t} - \cancel{18t^2} - 24 - \cancel{3t^3} + 9t^2 - \cancel{9t} + 3$$
$$- \cancel{t^3} + \cancel{9t^2} - \cancel{27t} + 27)$$

$$= (27 - 24 + 3) a_3 = 6a_3 = 3! \, a_3$$

3) Soit $Z_t = a_0 + a_1 t + \dots a_d t^d$

$$\Delta^d Z_t = d! \, a_d$$

4

$$Y_t = \nabla X_t = (1 - L) X_t$$
$$X_t = (1 - L)^{-1} Y_t$$

$(1-\alpha L)^{-2} =$
- $|\alpha| = 1$ non inversible
- $|\alpha| < 1$, $|\alpha| > 1$ } inversible.

* $|\alpha| < 1$ : $(1-\alpha L)^{-1} = \dfrac{1}{1-\alpha L} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k L^k$

* $|\alpha| > 1$ : $(1-\alpha L)^{-1} = \dfrac{1}{1-\alpha L} = -\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{-k} L^{-k}$

Exo2.

① $(1-\frac{1}{2}L)$

$|\alpha| = |\frac{1}{2}| = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow (1-\frac{1}{2}L)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^k L^k$

$= 1 + \frac{1}{2}L + (\frac{1}{2})^2 L^2 + (\frac{1}{2})^3 L^3 + \cdots$

② $(1+2L) = (1-(-2)L)$

$|\alpha| = |2| = 2 > 1 \Rightarrow (1-2L)^{-1} = -\sum_{k=1}^{\infty} (-2)^{-k} L^{-k}$

$= -\left[(-2)^{-1} L^{-1} + (-2)^{-2} L^{-2} + \frac{1}{8} L^{3} + \cdots\right]$

③ $(1-\frac{4}{3}L+\frac{1}{3}L^2) = \frac{1}{3}(3-4L+L^2)$

$= \frac{1}{3}(4-1-4L+L^2) = \frac{1}{3}(4-(2-L)^2)$

$= \frac{1}{3}[(2-L-1)(2-L+1)]$

$(-2)^{-3} L^{-3} = ((-2)^3)^{-1} = (-8)^{-1} = -\frac{1}{8}$

5

$= \frac{1}{3}\left[(1-L)(3-L)\right] = (1-L)(1-\frac{1}{3}L)$.

$(1-L)$ est non inversible.

et $(1-\frac{1}{3}L)$ est inversible.

$(1-\frac{1}{3}L)^{-1} = \sum_{k=0} \left(\frac{1}{3}\right)^k L^k = 1 + \frac{1}{3}L + \frac{1}{9}L^2 + \cdots$

$\Rightarrow (1 - \frac{4}{3}L + \frac{1}{3}L^2)$ non inversible.

4) $(-L^2 + \frac{3}{2}L + 1)$.

$\Delta = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4(-1)(1) = \frac{9}{4} + 4 = \frac{25}{4}$.

$L_1 = \frac{-\frac{3}{2} - \frac{5}{2}}{-2} = \frac{-\frac{8}{2}}{-2} = \boxed{2}$ , $L_2 = \frac{-\frac{3}{2} + \frac{5}{2}}{-2} = \frac{\frac{2}{2}}{-2} = -\frac{1}{2}$

$-L^2 + \frac{3}{2}L + 1 = -(L-2)(L+\frac{1}{2})$.

$= -(-2+L)(\frac{1}{2}+L) = (2-L)(\frac{1}{2}+L)$.

$= 2(1-\frac{1}{2}L)\frac{1}{2}(1+2L)$.

$= (1-\frac{1}{2}L)(1+2L)$.

$(1-\frac{1}{2}L)$ est inversible $\Rightarrow (1-\frac{1}{2}L)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k L^k$

$= 1 + \frac{1}{2}L + \left(\frac{1}{2}\right)^2 L^2 + \cdots$

$(1+2L)$ est inversible $\Rightarrow (1+2L)^{-1} = -\sum_{k=1}^{\infty} (-2)^{-k} L^{-k}$

$= -\left[-\frac{1}{2}L^{-1} + \left(\frac{1}{-2}\right)^2 L^{-2} + \left(\frac{1}{-2}\right)^3 L^{-3} + \cdots\right]$.

$\Rightarrow$

$(-L^2 + \frac{3}{2}L + 1)$ est inversible.

6

$$\left(-L^2+\frac{3}{2}L+1\right)^{-1}=\left[\left(1-\frac{1}{2}L\right)(1+2L)\right]^{-1}$$

$$=\left[1+\frac{1}{2}L+\left(\frac{1}{2}\right)^2L^2+\dots\right]*\left[\frac{1}{2}L^{-1}-\frac{1}{4}L^{-2}+\frac{1}{8}L^{-3}+\dots\right]$$

$$=\left[\frac{1}{2}L^{-1}-\frac{1}{4}L^{-2}+\frac{1}{8}L^{-3}+\dots\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{4}L^{-1}+\frac{1}{8}L^{-2}+\dots\right]$$

$$+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}L-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}L^{-1}+\dots\right]+\dots$$

$$=\frac{1}{8}L^{-3}+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\right)L^{-2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{32}\right)L^{-1}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{16}\right)$$

$$+\frac{1}{8}L+\dots$$

$$=\frac{1}{8}L^{-3}-\frac{3}{16}L^{-2}+\frac{13}{32}L^{-1}+\frac{3}{16}+\frac{1}{8}L+\dots$$

$$F^3 \quad F^2 \quad F$$

$$*\ X_t=Y_t-0{,}5Y_{t-1}=\left(1-\frac{1}{2}L\right)Y_t \Rightarrow X_t=\left(1-\frac{1}{2}L\right)Y_t$$

$$\Rightarrow Y_t=\left(1-\frac{1}{2}L\right)^{-1}X_t=\left(1+\frac{1}{2}L+\frac{1}{4}L^2+\dots\right)X_t$$

$$\Rightarrow Y_t=X_t+\frac{1}{2}X_{t-1}+\frac{1}{4}X_{t-2}+\dots$$

7

$$*\ X_t=Y_t+2Y_{t-1}=(1+2L)Y_t$$

$$\Rightarrow Y_t=(1+2L)^{-1}X_t=$$

$$Y_t=-\left[(-2)^{-1}L^{-1}+(-2)^{-2}L^{-2}+\frac{1}{8}L^{-3}+\dots\right]X_t$$

$$Y_t=-\left[-\frac{1}{2}L^{-1}+\frac{1}{4}L^{-2}-\frac{1}{8}L^{-3}+\dots\right]X_t$$

$$=\frac{1}{2}X_{t-1}-\frac{1}{4}X_{t-2}+\frac{1}{8}X_{t-3}+\dots$$

7

8

Exo3.

$$M(L) = \frac{1}{9}\left(-L^2 + 4L + 3 + 4F - F^2\right).$$

on montre

$$X_t = Z_t + S_t + \varepsilon_t.$$

هنا نحوس نبرهن بلي $Z_t$

- $M(L)\, Z_t = Z_t$ laisse invariantes.
- $M(L)\, S_t = 0$. en enlève

1/ $Z_t \sim d.Poly(3)$.

$$Z_t = a + bt + ct^2 + dt^3.$$

$$M(L) Z_t = \frac{1}{9}\left(-Z_{t-2} + 4Z_{t-1} + 3Z_t + 4Z_{t+1} - Z_{t+2}\right).$$

هنا لازم نبدل بالحتيتة

$$= a + bt + ct^2 + dt^2 = Z_t.$$

2/ $p = 3$, $\Rightarrow S_{t\pm 3} = S_t$.

$$S_t = \sum_{i=1}^{3} \gamma_i S^i \quad , \quad \sum_{i=1}^{3} \gamma_i = 0.$$

$$M(L) S_t = \frac{1}{9}\left(-S_{t-2} + 4S_{t-1} + 3S_t + 4S_{t+1} - S_{t+2}\right)$$

- هنا إذا ضفنا 3 تضيفها للحدود لي قبل $S_t$
- و نقصنا 3 تنقصها للحدود لي بعد $S_t$.

لأن إذا درنا في الحدود كامل كاينا حدود راح نرجع نفس القيمة.

$$M(L)\delta_t = \frac{1}{9}\left(-\delta_{t+1} + 4\delta_{t+2} + 3\delta_t + 4\delta_{t+1} - \delta_{t+2}\right)$$

هنا لأن دور متسلسل

$$= \frac{1}{3}\left(3\delta_{t+2} + 3\delta_{t+1} + 3\delta_t\right) = \frac{1}{3}(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)$$

$p = 3$

$\delta_t$ , $\delta_{t+2}$ , $\delta_{t+2}$ , $\delta_{t+3}$ → ترجع

on $a = \sum_{i=1}^{3} \gamma_i = 0$.

9

$$\Rightarrow M(L)\delta_t = 0.$$

$$M(L)\varepsilon_t = \frac{1}{9}\left(-\varepsilon_{t-2} + 4\varepsilon_{t-1} + 3\varepsilon_t + 4\varepsilon_{t+1} - \varepsilon_{t+2}\right)$$

$$= \varepsilon'_t.$$

$$M(L)X_t = Z_t + 0 + \varepsilon'_t = Z_t + \varepsilon'_t.$$

Exo4 :

$2d+1 = 3.$

$M(L) = \frac{1}{3}(1 + L + L^2)$

$Z = a + bt. \sim Poly(1)$

$$M(L)\, z_t = \frac{1}{3}\left(z_t + z_{t-1} + z_{t-2}\right).$$

$$= \frac{1}{3}\left(z_t + bt + a + b(t-1) + a + b(t-2)\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(3a + 3bt - 3b\right) = (a-b) + bt \sim Poly(1)$$

$$2d+1 = 3 \Rightarrow 2d = 2 \Rightarrow \boxed{d=1}$$

$$2d+1 = 5 \Rightarrow \boxed{d=2}$$

$$M(L) = \frac{1}{5}\left(1 + L + L^2 + L^3 + L^4\right)$$

$$z_t = a + bt + ct^2$$

$$M(L)\, z_t = \frac{1}{5}\left(1 + L + L^2 + L^3 + L^4\right) z_t.$$

$$= \frac{1}{5}\left(z_t + z_{t-2} + z_{t-3} + z_{t-4} + z_{t-1}\right)$$

$$= (a - 2b + 6c) + (b - 4c)t + ct^2 \sim Poly(2).$$

$$* \; z_t \sim Poly(d), \quad M(L) = \frac{1}{2d+1}\left(1 + L + \dots + L^{2d}\right)$$

10

10

# الأعمال الموجهة رقم 2

## Série II.

**Exo1 :** Etudier la stationnarité.

1) $X_t = (-1)^t \varepsilon_t$.

* $E(X_t) = E\left((-1)^t \varepsilon_t\right) = (-1)^t \cancel{E(\varepsilon_t)}^{0} = 0 \quad \forall (t)$

* $Var(X_t) = Var\left((-1)^t \varepsilon_t\right) = 0$.

$= (-1)^{2t} Var(\varepsilon_t) = (-1)^{2t} \sigma^2 = \sigma^2 \quad \forall (t)$

* $\gamma(h) = cov(X_t, X_{t+h})$

$= E\left[(X_t - \cancel{E(X_t)}^{0})(X_{t+h} - \cancel{E(X_{t+h})}^{0})\right]$

$= E\left[X_t X_{t+h}\right] = E\left[(-1)^t \varepsilon_t (-1)^{t+h} \varepsilon_{t+h}\right]$

$= (-1)^{2t+h} E(\varepsilon_t \varepsilon_{t+h}) = (-1)^h E(\varepsilon_t \varepsilon_{t+h})$

$= \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } h = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

$\Rightarrow$ le modèle est stationnaire

b) $X_t = (1 - (-1)^t)\varepsilon_t$.

* $E(X_t) = E\left((1-(-1)^t)\varepsilon_t\right) = (1-(-1)^t)E(\varepsilon_t)$

$= 0 \quad \forall t$.

* $\gamma(0) = Var(X_t) = Var\left((1-(-1)^t)\varepsilon_t\right)$

$\gamma_\varepsilon(h) = cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t+h})$ هو معامل لا تجيئ كيتي

$= (1-(-1)^t)^2 \sigma^2 = (1+(-1)^t - 2(-1)^t)\sigma^2$.

$= (2 - 2(-1)^t)\sigma^2 \quad \not\perp t$.

$\Rightarrow$ le modèle non stationnaire

c/ $X_t = \varepsilon_t + \varepsilon_{t-3}$.

• $E(X_t) = E(\varepsilon_t + \varepsilon_{t-3}) = E(\varepsilon_t) + E(\varepsilon_{t-3})$.

$= 0 \quad \perp t$.

12

• $\gamma(0) = Var(X_t) = V(\varepsilon_t + \varepsilon_{t-3})$.

$= V(\varepsilon_t) + V(\varepsilon_{t-3}) + 2\,cov(\varepsilon_t \varepsilon_{t-3})$.

$= 2\sigma^2 \quad \perp t$.

• $\forall t, h \in \mathbb{N} : \gamma(h) = cov(X_t, X_{t+h})$.

$\gamma_X(h) = E((X_t - E(X_t))(X_{t+h} - E(X_{t+h})))$

$= E((\varepsilon_t + \varepsilon_{t-3})(\varepsilon_{t+h} + \varepsilon_{t+h-3}))$

$= E(\varepsilon_t \varepsilon_{t+h} + \varepsilon_t \varepsilon_{t+h-3} + \varepsilon_{t-3} \varepsilon_{t+h} + \varepsilon_{t-3} \varepsilon_{t+h-3})$

$= E(\varepsilon_t \varepsilon_{t+h}) + E(\varepsilon_t \varepsilon_{t+h-3}) + E(\varepsilon_{t-3} \varepsilon_{t+h}) + E(\varepsilon_{t-3} \varepsilon_{t+h-3})$

$$= \gamma_\varepsilon(h) + \gamma_\varepsilon(h-3) + \gamma_\varepsilon(h+3) + \gamma_\varepsilon(h).$$

$$= \begin{cases} 2\gamma^2 & \text{si } h=0 \\ \gamma^2 & \text{si } h=3 \\ \gamma^2 & \text{si } h=-3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \forall t.$$

13

alors le modèle est stationnaire

d) $X_t = \cos(\omega t)\varepsilon_t + \sin(\omega t)\varepsilon_t$.

$\cdot E(X_t) = E(\cos(\omega t)\varepsilon_t + \sin(\omega t)\varepsilon_t)$.

$= \cos(\omega t)E(\varepsilon_t) + \sin(\omega t)E(\varepsilon_t)$

$= 0 \quad \forall t$.

$\cdot Var(X_t) = Var(\cos(\omega t)\varepsilon_t + \sin(\omega t)\varepsilon_t)$.

$= \cos^2(\omega t)Var(\varepsilon_t) + \sin^2(\omega t)Var(\varepsilon_t) + 2\cos(\omega t)\sin(\omega t)Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_t)$

$= \cos^2(\omega t)\gamma^2 + \sin^2(\omega t)\gamma^2 + 2\cos(\omega t)\sin(\omega t)\gamma^2$.

$= (\cos(\omega t) + \sin(\omega t))^2\gamma^2 \Rightarrow$ le modèle non stationnaire

Exo2 :

$$\begin{cases} X_t = \alpha + X_{t-1} + \varepsilon_t \\ X_0 = 0 \end{cases}$$

($X_t$ est marche aléatoire ظواهر عشوائية)

① $X_1 = \alpha + \cancel{X_0} + \varepsilon_1 = \alpha + \varepsilon_1$

$X_2 = \alpha + X_1 + \varepsilon_2 = 2\alpha + \sum_{i=1}^{2} \varepsilon_i$

13

$$\left(\sum^{n} x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j$$

$$X_3 = \alpha + X_2 + \varepsilon_3 = 3\alpha + \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i$$

$$\vdots$$

$$X_t = t\alpha + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$$

Alors : $E(X_t) = E(t\alpha) + E\left(\sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i\right)$

$= t\alpha$.

(*) $\gamma_X(h) = cov(X_t, X_{t+h})$.

14

$= E\left((X_t - E(X_t))(X_{t+h} - E(X_{t+h}))\right)$

$= E\left((X_t - \alpha t)(X_{t+h} - \alpha(t+h))\right)$

$= E\left(\left(\alpha t + \sum^{t} \varepsilon_i - \alpha t\right)\left((t+h)\alpha + \sum^{t+h} \varepsilon_i - \alpha(t+h)\right)\right)$

$= E\left(\left(\sum^{t} \varepsilon_i\right)\left(\sum^{t+h} \varepsilon_j\right)\right)$

$= E\left(\sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i \left(\sum_{j=1}^{t} \varepsilon_j + \sum_{j=t+1}^{t+h} \varepsilon_j\right)\right)$

$= E\left(\left(\sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i\right)^2\right) + \cancel{\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=t+1}^{t+h} E(\varepsilon_i \varepsilon_j)}$

$= E\left(\sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le t} \varepsilon_i \varepsilon_j\right)$

$= E\left(\sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i^2\right) + \cancel{2\sum_{1\le i<j\le t} E(\varepsilon_i \varepsilon_j)}$

$\gamma_X(h) = \sum_{i=1}^{t} E(\varepsilon_i^2) = t\sigma^2$. $\not\Rightarrow$ t depend de t

14

$X_t$ n'est pas stationnaire.

2/ $Y_t = (1-L)X_t$.

$Y_t = \Delta X_t = X_t - X_{t-1} = \alpha + X_{t-1} + \varepsilon_t - X_{t-1}$.
$= \alpha + \varepsilon_t$

من بالأخير نجد أن 2m modèle stat ثابتة إذن

$Y_t$ est stationnaire. puisque $\varepsilon_t$ BB est stationnaire. ($Y_t$ est un bruit blanc).

$E(Y_t) = \alpha$.

$\gamma_Y(h) = cov(Y_t, Y_{t-h}) = E[(Y_t - E(Y_t))(Y_{t-h} - E(Y_{t-h}))]$

$= E[(\alpha + \varepsilon_t - \alpha)(\alpha + \varepsilon_{t-h} - \alpha)]$.

$= E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-h}) = \begin{cases} \sigma^2 & h=0. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

(*) $\gamma_X(h) = cov(X_t, X_{t-h}) = E\left(\left(\sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i\right)^2\right)$.

$\gamma_X(h) = (t-h)\sigma^2$.

EX03

$$\Psi(L)\, X_t = c + \Theta(L)\, \varepsilon_t$$

1/ $X_t$ est stationnaire : si toutes les racines $z_0$ de $\Psi(z) = 0$ ont le module $|z_0| > 1$

ou $\Psi(L) = 1$.

2/ $X_t$ est causale si $X_t$ est de fonction du passé de $\varepsilon_t$ seulement :

ie : $X_t = f(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots)$.

3/ $X_t$ est inversible si :

$$\varepsilon_t = f(X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \dots)$$

16

$$X_t = 40 + 0{,}4\, X_{t-1} - 0{,}2\, X_{t-2} + \varepsilon_t$$

$\varepsilon_t \sim BB(0, \sigma^2 = 12{,}8)$.

$$X_t - 0{,}4\, X_{t-1} + 0{,}2\, X_{t-2} = 40 + \varepsilon_t$$

$$(1 - 0{,}4\, L + 0{,}2\, L^2)\, X_t = 40 + \varepsilon_t$$

$$\Psi(L)\, X_t = 40 + \varepsilon_t$$

$\Delta = (0{,}8i)^2$ , $z_0 = 1 \pm 2i$ , $|z_0| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} > 1$

donc le modèle est stationnaire.

- $E(X_t) = E(X_{t-1})$ ~ (statio) mode لأن هو

$$E(X_t) = 40 + 0{,}4\, E(X_{t-1}) - 0{,}2\, E(X_{t-2}) + E(\varepsilon_t)$$

$$E(X_t) - 0{,}4\, E(X_{t-1}) + 0{,}2\, E(X_{t-2}) = 40 + E(\varepsilon_t)$$

16

$0{,}8\, E(X_t) = 40 \Rightarrow E(X_t) = 50.$

Exo4.

- $Y_t = (1-L)(1-L^4)X_t.$

$X_t = a_0 + a_1 t + S_t + \varepsilon_t.$

$Y_t = (1-L)(1-L^4)X_t.$

$Y_t = (1-L)(1-L^4)\varepsilon_t.$

17

$\Psi(L) = 1 \Rightarrow Y_t$ est stationnaire.

- $Y_t = (1-L^4)^2 X_t.$ , $X_t = (a_0 + a_1 t) S_t + \varepsilon_t.$

$Y_t = (1-L^4)^2 \varepsilon_t.$

$\Psi(L) = 1 \Rightarrow Y_t$ est stationnaire.

التفسير هو نفس

Exo5.

1/ $X_t + 3X_{t-1} = \varepsilon_t - 9\varepsilon_{t-2}.$

$(1+3L)X_t = (1-9L^2)\varepsilon_t.$

$\Psi(z) = 1 + 3z = 0 \Rightarrow 3z = -1 \Rightarrow z = -\frac{1}{3}.$

$|z| < 1 \Rightarrow X_t$ n'est pas stationnaire.

- $X_t = (1+3L)^{-1}(1-9L^2)\varepsilon_t.$

$= (1+3L)^{-1}(1-3L)(1+3L)\varepsilon_t.$

$X_t = (1-3L)\varepsilon_t.$

alors $X_t$ est causale.

17

$$X_t + 3X_{t-1} = \varepsilon_t - 9\varepsilon_{t-2}$$

$$(1+3L)X_t = (1-9L^2)\varepsilon_t$$

$$(1+3L)X_t = (1+3L)(1-3L)\varepsilon_t$$

$|-3| = 3 > 1 \Rightarrow (1+3L)$ est inversible

alors $X_t = (1-3L)\varepsilon_t$

$|3| = 3 > 1 \Rightarrow (1-3L)$ est inversible

$$(1-3L)^{-1}X_t = \varepsilon_t$$

$$(1-3L)^{-1} = -\sum_{k=1} \frac{1}{3^k} F^k$$

$$\Rightarrow -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} F^k X_t = \varepsilon_t$$

$$\Rightarrow \varepsilon_t = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} X_{t+k} \quad \text{(future)}$$

alors le modale n'est pas inversible

$|\alpha| < 1 \Rightarrow a z_1 z_2 \left(1 - \frac{1}{z_1}L\right)\left(1 - \frac{1}{z_2}L\right)$

2/ $X_t + 0{,}2X_{t-1} - 0{,}48X_{t-2} = \varepsilon_t$

$$(1 + 0{,}2L - 0{,}48L^2)X_t = \varepsilon_t$$

$$\psi(z) = 1 + 0{,}2z - 0{,}48z^2 = 0$$

$z$. $\Delta = 1{,}96$

19

$$z_1 = \frac{-0,2 + 1,4}{-2(0,48)} = -1,25$$

$$z_2 = \frac{-0,2 - 1,4}{-2(0,48)} = 1,67$$

$|z_1| > 1$ et $|z_2| > 1$ donc le modele est stationnaire

$$-0,48(-1,25)(1,67)\left(1 + \frac{1}{1,25}L\right)\left(1 - \frac{1}{1,67}L\right)$$

$$\Rightarrow (1 + 0,8L)(1 - 0,6L)X_t = \varepsilon_t$$

$$\Rightarrow X_t = (1 + 0,8L)^{-1}(1 - 0,6L)^{-2}\varepsilon_t$$

$$\Rightarrow X_t = \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-0,8)^k L^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(0,6)^k L^k\right)\varepsilon_t$$

$$\Rightarrow X_t = (1 - 0,8L + \dots)(1 + 0,6L + \dots)\varepsilon_t$$

$$\Rightarrow X_t = (1 + 0,6L - 0,8L - 0,48L^2 + \dots)\varepsilon_t$$

$$\Rightarrow X_t = \varepsilon_t + 0,6\varepsilon_{t-1} - 0,8\varepsilon_{t-1} - 0,48\varepsilon_{t-2} + \dots$$

le modele est causale

19

$\varepsilon_t = X_t + 0{,}2 X_{t-1} - 0{,}48 X_{t-2} + \dots$

$X_t$ est inversible.

20

3| $X_t = \varepsilon_t + \varepsilon_{t-2} = (1 + L^2)\varepsilon_t$.

modele est causale.

$\psi(L) = 1$ alors le modele est stationnaire

$X_t = (1 + L^2)\varepsilon_t$.

$\theta(z) = 1 + z^2$ , $\Delta = -4 = 4i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2i$

$z_1 = i$ , $z_2 = -i$ , $|z_1| = |z_2| = 1$.

$(1 + L^2)$ n'est pas inversible

4/ $X_t - 1{,}4 X_{t-1} + 0{,}49 X_{t-2} = \varepsilon_t - 0{,}7\varepsilon_{t-1}$

① $\psi(z) = 1 - 1{,}4z + 0{,}49z^2$

$\Delta = (1{,}4)^2 - 4(0{,}49) = 0$

$z = \dfrac{1{,}4}{2(0{,}49)} = 1{,}43 \Rightarrow |z| = 1{,}43 > 1$

$X_t$ est stationnaire #.

Causal ?

20

$$0{,}49\,(1{,}43)^2\left(1-\frac{1}{1{,}43}L\right)^2$$

21

$$(1-0{,}7L)^2 X_t = (1-0{,}7)\varepsilon_t$$

$$|\alpha| = |0{,}7| < 1$$

$$(1-0{,}7L)X_t = \varepsilon_t$$

$$\Rightarrow \varepsilon_t = X_t - 0{,}7X_{t-1} \Rightarrow X_t \text{ est inversible}$$

Causalité $\Rightarrow |\alpha| = 0{,}7 < 1$

$$(1-0{,}7L)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} 0{,}7^k L^k$$

$$\Rightarrow X_t = (1-0{,}7L)^{-1}\varepsilon_t$$

$$= \sum_{k=0} (0{,}7)^k L^k \varepsilon_t = \sum_{k=0}^{\infty} (0{,}7)^k \varepsilon_{t-k}$$

$\Rightarrow X_t$ est causale.

5) $X_t + X_{t-1} - 1{,}2X_{t-2} = \varepsilon_t$

① $X_t$ est inversible.

② $\psi(z) = 1 + z - 1{,}2z^2$

$\sqrt{\Delta} = 2{,}40$, $z_{1,2} = 1{,}4$ ; $-0{,}6$.

n'est pas stationnaire car $|z_2| = 0{,}6 < 1$

3| on a : $|z_2| = 0,6 < 1 \Rightarrow X_t$ n'est pas causale.

7| $X_t - X_{t-3} = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-2}$

$(1 - L^3) X_t = (1 - L^2) \varepsilon_t$

$\psi(z) = (1 - z^3) = (1 - z)(1 + z^2 + z)$

$|z_0| = |1| = 1$ alors : $X_t$ n'est pas stationnaire.

le modele n'est pas inversible.

$(1 - L)(1 + L^2 + L) X_t = (1 - L)(1 + L) \varepsilon_t$

$\phi'(z) = z^2 + z + 1 \Rightarrow \Delta = -3 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = i\sqrt{3}$

$z_{1,2} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |z_{1,2}| = 1$

$X_t$ n'est pas causale.

92

10| $X_t + 0,2 X_{t-1} + 0,2 X_{t-2} = \varepsilon_t$

1| $X_t$ est inversible.

$\Psi(z) = 1 + 0{,}2z + 0{,}2z^2 = 0$

$\Delta = -0{,}76 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 0{,}87i$

$z_{1,2} = \dfrac{-0{,}2 \pm 0{,}87i}{2(0{,}2)} = -\dfrac{1}{2} \pm 2{,}17i$

$|z_{1,2}| = \sqrt{\dfrac{1}{4} + 4{,}5} = 2{,}2271$

$X_t$ est stationnaire.

$\Rightarrow X_t$ est causale.

23

23

# الأعمال الموجهة رقم 3

(24)

Série III.

Exo 1.

$$X_t = \mu + \varepsilon_t + \alpha \varepsilon_{t-1} + \beta \varepsilon_{t-3}$$

- $E(X_t) = \mu$.
- $V(X_t) = \sigma^2 + \alpha^2\sigma^2 + \beta^2\sigma^2 = (1+\alpha^2+\beta^2)\sigma^2$.
- $\gamma_{X_t}(h) = cov(X_{t-h}, X_t)$.

$$= E\left[(\varepsilon_{t-h} + \alpha\varepsilon_{t-h-1} + \beta\varepsilon_{t-h-3})(\varepsilon_t + \alpha\varepsilon_{t-1} + \beta\varepsilon_{t-3})\right]$$

$$= E\left[(\varepsilon_{t-h}\varepsilon_t) + \alpha(\varepsilon_{t-h-1}\varepsilon_t) + \beta(\varepsilon_{t-h-3}\varepsilon_t) + \dots\right]$$

$$= \gamma_\varepsilon(h) + \alpha\gamma_\varepsilon(h-1) + \beta\gamma_\varepsilon(h-3) + \alpha\gamma_\varepsilon(h+1) + \alpha^2\gamma_\varepsilon(h) + \alpha\beta\gamma_\varepsilon(h-2) + \beta\gamma_\varepsilon(h+3) + \alpha\beta\gamma_\varepsilon(h+2) + \beta^2\gamma_\varepsilon(h).$$

$$= \begin{cases} (1+\alpha^2+\beta^2)\sigma^2 & \text{si } h=0 \\ \alpha\sigma^2 & \text{si } h=1 \text{ ou } h=-1 \\ \alpha\beta\sigma^2 & \text{si } h=\pm 2 \\ \beta\sigma^2 & \text{si } h=\pm 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

24

$X_t \sim MA(3)$ car $\gamma(h) = 0$ si $h > 3$.

La densité spectrale :

$$X_t = \mu + (1 + \alpha L + \beta L^3)\varepsilon_t$$

$$\psi(L) X_t = \mu + \theta(L)$$

$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{|\theta(e^{i\lambda})|^2}{|\psi(e^{i\lambda})|^2}$$

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$= \frac{\sigma^2}{2\pi} |1 + \alpha e^{-i\lambda} + \beta e^{-i3\lambda}|^2$$

$$= \frac{\sigma^2}{2\pi} |1 + \alpha \cos\lambda + \beta \cos 3\lambda + i(\alpha \sin\lambda + \beta \sin 3\lambda)|^2$$

$$= \frac{\sigma^2}{2\pi} [(1 + \alpha \cos\lambda)^2 + \beta^2 \cos^2 3\lambda + 2\beta \cos 3\lambda$$

$$+ 2\alpha\beta \cos\lambda \cos 3\lambda + \alpha^2 \sin^2\lambda + \beta^2 \sin^2 3\lambda$$

$$+ 2\alpha\beta \sin\lambda \sin 3\lambda]$$

$$= \frac{\sigma^2}{2\pi} [1 + \alpha^2 \cos^2\lambda + 2\alpha \cos\lambda + \beta^2 + 2\beta \cos 3\lambda$$

$$+ 2\alpha\beta \cos\lambda \cos 3\lambda + \alpha^2 \sin^2\lambda + 2\alpha\beta \sin\lambda \sin 3\lambda]$$

$$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin a \sin b$$

$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\left[1 + \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\cos\lambda + 2\beta\cos 3\lambda + 2\alpha\beta\cos(2\lambda)\right].$$

Exo 2

$$X_t \sim AR(2).$$

$$X_t = \theta X_{t-1} + \theta^2 X_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$(1 - \theta L - \theta^2 L^2) X_t = \varepsilon_t.$$

$$\Psi(z) = 1 - \theta z - \theta^2 z^2 = 0$$

$$\Delta = \theta^2 - 4(-\theta^2) = 5\theta^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{5}\theta$$

1)

$\theta = 0 \Rightarrow X_t = \varepsilon_t \Rightarrow$ Stat.

2) $\theta > 0. \Rightarrow z_{1,2} = \dfrac{\theta \pm \sqrt{5}\theta}{-2\theta^2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{-2\theta}$

$$* \ |z_1| = \frac{|1-\sqrt{5}|}{|-2\theta|} = \frac{\sqrt{5}-1}{2|\theta|} > 1.$$

$$* \ |z_2| = \frac{1+\sqrt{5}}{|-2\theta|} = \frac{1+\sqrt{5}}{2|\theta|} > 1.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |\theta| < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \\ \text{et} \\ |\theta| < \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} < \theta < \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad \theta \in ]-0{,}61, 0{,}61[$$

2/ D'après le système Yule-walker.

$$\begin{cases} \rho(0) = 1. \\ \rho(h) = \sum_{k=1}^{2} \alpha_k \cdot \rho(h-k) \\ \gamma(0) = \dfrac{\sigma^2}{1-\alpha_1\rho(1)-\dots-\alpha_p\rho(p)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho(1) = \theta\rho(0) + \theta^2 \cdot \rho(1) = \sum_{k=1}^{2} \alpha_k \rho(1-k) \\ \rho(2) = \theta\rho(1) + \theta^2\rho(0). \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{\rho}(1) = \hat{\theta} + \hat{\theta}^2 \hat{\rho}(1) \\ \hat{\rho}(2) = \hat{\theta}\hat{\rho}(1) + \hat{\theta}^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{\varphi}(1) - \hat{\varphi}(1)\hat{\varphi}(2) = \hat{\theta}^1 - \hat{\theta}^1 \hat{\varphi}^2(1)$$

$$\hat{\theta}^1 = \frac{\hat{\varphi}(1) - \hat{\varphi}(1)\hat{\varphi}(2)}{1 - \hat{\varphi}^2(1)} = 0{,}51$$

$$\hat{\gamma}(0) = \frac{\hat{\sigma}^2}{1 - \hat{\theta}^1\hat{\varphi}(1) - \hat{\theta}^{12}\hat{\varphi}(2)} \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = 2{,}$$

2/ La densité spectrale.

$$(1 - \theta L - \theta^2 L^2) X_t = \varepsilon_t$$

$$f_X(\lambda) = \frac{1}{|\Psi(e^{i\lambda})|^2} \frac{\sigma^2}{2\pi}$$

$$* \; |\Psi(e^{i\lambda})|^2 = |1 - \hat{\theta} e^{i\lambda} - \hat{\theta}^2 e^{i2\lambda}|^2$$

$$\lambda \xi_1 \xi_2 \left(1 - \frac{1}{\xi_1} L\right)\left(1 - \frac{1}{\xi_2} L\right)$$

$X_t \sim ARMA(p,q)$.

$\Psi_p(L)\, X_t = \theta_q(L)\, \varepsilon_t$ ; $\varepsilon_t \sim BB$ لازم

و $\Psi(L)$ و $\theta(L)$ ميكونوش عندهم نفس

جذور

$$X_t = \sum_{j=1}^{p} a_j X_{t-j} + \sum_{k=1}^{q} b_k \varepsilon_{t-k} + \varepsilon_t$$

$X_t \sim ARIMA(p,d,q)$.

$$\Psi_p(L)\, \Delta^d X_t = \theta_q(L)\, \varepsilon_t$$

① $\varepsilon_t \sim BB(0,\sigma^2)$ et $\varepsilon_t$ ind $X_{t-k}$, $k \geq 1$

② $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$

③ il ya pas des racines communs entre $\theta$ et $\Psi$.

- les modul des racines de $\theta$ et $\Psi > 1$.

Exo3 -

$X_t \sim ARIMA(2,0,2)$.

$$X_t - \frac{5}{6} X_{t-1} + \frac{1}{6} X_{t-2} = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} + \frac{1}{4} \varepsilon_{t-2}$$

$\varepsilon_t \sim BB(0,\sigma^2)$

a)

$$\left(1 - \frac{5}{6} L + \frac{1}{6} L^2\right) X_t$$

$$\Delta = \left(-\frac{5}{6}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{6}\right)$$

29

$$= \frac{25}{36} - \frac{4}{6} = \frac{1}{36} \quad , \quad \sqrt{\Delta} = \frac{1}{6}$$

stat ARIMA

$$z_1 = \frac{4/6 + \frac{1}{6}}{2/6} = \frac{1}{2/6} = 3$$

$$z_2 = \frac{4/6 - \frac{1}{6}}{2/6} = \frac{3/6}{2/6} = 2$$

alors $|z_{1,2}| > 1 \Rightarrow$ modèle stat

* Fonction d'autocorrélation Il est impossible de calculer directement cette fonction.

$$Y = X_t - E(X_t)$$

$X_t$ مش باه نوصل

forme générale

= minimale

b)

$$\Psi(L)\, X_t = \theta(L)\, \varepsilon_t$$

$$\left(1 - \frac{5}{6}L + \frac{1}{6}L^2\right) X_t = \left(1 - L + \frac{1}{4}L^2\right)\varepsilon_t$$

$$\Psi(z) = 1 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}z^2 = \left(1 - \frac{1}{3}z\right)\left(1 - \frac{1}{2}z\right)$$

$$z_{1,2} = \{3, 2\}$$

$$\theta(z) = \left(1 - \frac{1}{2}z\right)^2$$

$$z_{1,2} = \{2\}$$

$\Rightarrow$ il ya une racine communs $z = 2$

$\Rightarrow$ la forme n'est pas minimal.

3|

$$\cancel{\left(1-\frac{1}{2}L\right)}\left(1-\frac{1}{3}L\right)X_t = \left(1-\frac{1}{2}L\right)^{\cancel{2}}\varepsilon_t$$

$$\Rightarrow \left(1-\frac{1}{3}L\right)X_t = \left(1-\frac{1}{2}L\right)\varepsilon_t \quad \cdots (*)$$

$$\Rightarrow X_t - \frac{1}{3}X_{t-1} = \varepsilon_t - \frac{1}{2}\varepsilon_{t-1}$$

$X_t \sim ARIMA(1,0,1)$

4|

$$\begin{cases} A(L) = \left(1-\frac{1}{3}L\right) \\ M(L) = \left(1-\frac{1}{2}L\right) \end{cases}$$

$$\left(1-\frac{1}{3}L\right) \Rightarrow |a|<1 \Rightarrow \left(1-\frac{1}{3}L\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k L^k$$

$$(A(L))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k L^k = 1+\frac{1}{3}L+\frac{1}{9}L^2+\cdots$$

$$\left(1-\frac{1}{2}L\right) \Rightarrow |a|<1 \Rightarrow \left(1-\frac{1}{2}L\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k L^k$$

$$(M(L))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k L^k = 1+\frac{1}{2}L+\frac{1}{4}L^2+\cdots$$

$X_t \sim MA(\infty)$.

5| D'après (*)

$$X_t = \left(1-\frac{1}{3}L\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{2}L\right)(\varepsilon_t)$$

31

$$X_t = \left(1 + \frac{1}{3}L + \frac{1}{9}L^2 + \dots\right)\left(1 - \frac{1}{2}L\right)\varepsilon_t$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}L + \frac{1}{3}L - \frac{1}{6}L^2 + \frac{1}{9}L^2 + \dots\right)\varepsilon_t$$

$$X_t \sim AR(\infty)$$

$$\left(1 - \frac{1}{3}L\right)X_t = \left(1 - \frac{1}{2}L\right)\varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \left(1 - \frac{1}{2}L\right)^{-1}\left(1 - \frac{1}{3}L\right)X_t$$

$$\varepsilon_t = \left(1 + \frac{1}{2}L + \frac{1}{4}L^2 + \dots\right)\left(1 - \frac{1}{3}L\right)X_t$$

$$\varepsilon_t = \left(1 - \frac{1}{3}L + \frac{1}{2}L - \frac{1}{6}L^2 + \frac{1}{4}L^2 - \frac{1}{12}L^3 + \dots\right)X_t$$

$$\varepsilon_t = \left(1 + \frac{1}{6}L + \frac{1}{12}L^2 + \dots\right)X_t$$

f)

$$A(L)X_t = M(L)\varepsilon_t$$

$$f_{X_t}(\lambda) = \frac{|A(e^{i\lambda})|^2}{|M(e^{i\lambda})|^2}\frac{\sigma^2}{2\pi} = \frac{\left|1 - \frac{1}{3}e^{i\lambda}\right|^2}{\left|1 - \frac{1}{2}e^{i\lambda}\right|^2}\frac{\sigma^2}{2\pi}$$

# الأعمال الموجهة رقم 4

$$= \frac{\left|1 - \frac{1}{3}\cos(\lambda) - i\frac{1}{3}\sin\lambda\right|^2}{\left|1 - \frac{1}{2}\cos(\lambda) - i\frac{1}{2}\sin\lambda\right|^2} \quad \frac{\sigma^2}{2\pi}.$$

## Série 4.

### Exo 1.

$$X_t \sim AR(1)$$

$$E(X_t) = 0.$$

$$X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t.$$

$$\hat{X}_{t+h} = E(X_{T+h} \mid \sigma(X))$$

$\sigma(X)$ est une filtration engendrée par $(X_1, \dots X_T)$

$$\hat{X}_{T+h} = E(X_{T+h} \mid \sigma(X)) = E(\alpha X_{T+h-1} + \varepsilon_{T+h} \mid \sigma(X))$$

$$= E(\alpha X_{T+h-1} \mid \sigma(X)) + E(\varepsilon_{T+h} \mid \sigma(X))$$

$$= \alpha E(X_{T+h-1} \mid \sigma(X)) + \cancel{E(\varepsilon_{T+h})}^{0}$$

$$= \alpha [\alpha E(X_{T+h-2} \mid \sigma(X)) = \alpha^2 (\alpha E(X_{T+h-3} \mid \sigma(X))$$

$$= \alpha^3 E(X_{T+h-3} \mid \sigma(X))$$

$$= \alpha^h E(X_T / \sigma(X)) = \alpha^h X_T .$$

$$X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t + \mu .$$

$$\hat{X}_{T+h} = E(X_{T+h} / \sigma(X)) .$$

$$= E(\alpha X_{T+h-1} + \varepsilon_{T+h} + \mu / \sigma(X))$$

$$= \alpha E(X_{T+h-1} / \sigma(X)) + E(\varepsilon_{t+h} / \sigma(X)) + \mu .$$

$$= \alpha E(\alpha X_{T+h-2} + \mu / \sigma(X)) + \mu .$$

$$= \alpha^2 E(X_{T+h-2} / \sigma(X)) + \mu + \alpha\mu .$$

$$\vdots$$

$$= \alpha^h E(X_T / \sigma(X)) + \mu + \alpha\mu + \alpha^2\mu + \cdots$$

$$= \alpha^h X_T + \mu(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots \alpha^{h-1})$$

34

Exo 2.

$Y_t \sim AR(2)$

$(1-\alpha L)(1-\beta L) X_t = \varepsilon_t$.

on a : $\alpha^{-1}$, $\beta^{-1}$ sont des racines

Box - Jenkins.

Donnée $X_1, X_2 \dots X_T$

Identification p, d, q.

Estimation $\hat{\alpha}_k, \hat{\beta}_j$

choix de modèle

prévision

$$X_t - (\alpha+\beta) X_{t-1} + \alpha\beta X_{t-2} = \varepsilon_t$$

$$X_t = (\alpha+\beta) X_{t-1} - \alpha\beta X_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$\hat{X}_{T+h} = E(X_{T+h} / \sigma(X))$$

$$= (\alpha+\beta) E(X_{T+h-1} / \sigma(X)) - \alpha\beta E(X_{T+h-2} / \sigma(X))$$

$$\hat{X}_{T+h} = (\alpha+\beta) \hat{X}_{T+h-1} - \alpha\beta \hat{X}_{T+h-2}$$

$$\hat{X}_{T+h} = \alpha^h A(T) + \beta^h B(T).$$

pour $h=1$.

$$\hat{X}_{T+1} = (\alpha+\beta) X_T - \alpha\beta X_{T-1} \quad ---(*)$$

$$= \alpha A(T) + \beta B(T).$$

36

pour $h=2$

$$\hat{X}_{T+2} = (\alpha+\beta)\hat{X}_{T+1} - \alpha\beta X_T$$

$$= \alpha^2 A(T) + \beta^2 B(T)$$

$$= (\alpha+\beta)\left[(\alpha+\beta)X_T - \alpha\beta X_{T-1}\right] - \alpha\beta X_T$$

$$= (\alpha+\beta)^2 X_T - \alpha\beta(\alpha+\beta)X_{T-1} - \alpha\beta X_T \quad (**)$$

$$\begin{cases} * = \alpha A(T) + \beta B(T) \\ ** = \alpha^2 A(T) + \beta^2 B(T) \end{cases}$$

$$① \Rightarrow \alpha(*) - ** = +\beta(\alpha-\beta)B(T)$$

$$\Rightarrow B(T) = \frac{** - \alpha(*)}{\alpha\beta - \beta^2}$$

on trouve :

$$B(T) = \frac{\beta}{\beta-\alpha}(X_T - \alpha X_{T-1})$$

$$A(T) = \frac{\alpha}{\alpha-\beta}(X_T - \beta X_{T-1})$$

$$\hat{X}_{T+h} = \alpha^h A(T) + \beta^h B(T)$$

37

$$\hat{X}_{T+h} = \frac{\alpha^{h+1}}{\alpha-\beta}\left(X_T - \beta X_{T-1}\right) + \frac{\beta^{h+1}}{\beta-\alpha}\left(X_T - \alpha X_{T-1}\right)$$

③ $|\alpha| < 1$ et $|\beta| < 1$.

$h \to \infty$.

$\lim_{h\to\infty} \alpha^h = 0$ et $\lim_{h\to\infty} \beta^h = 0$ car $X_T$ est stationnaire

donc : $\hat{X}_{T+h} \xrightarrow[h\to\infty]{} 0$

EX03

$X_t \sim ARMA(1,0,1)$

$(1-\alpha L)X_t = (1-\beta L)\varepsilon_t$

①

$$X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t - \beta \varepsilon_{t-1}$$

$$\hat{X}_{T+1} = E(X_{T+1} / \sigma(X)) = E(\alpha X_T + \varepsilon_{T+1} - \beta \varepsilon_T / \sigma(X))$$

$$= \alpha X_T + \cancel{E(\varepsilon_{T+1})}^{\,0} - \beta \varepsilon_T.$$

$$\hat{X}_{T+1} = \alpha X_T - \beta \varepsilon_T. \quad \text{Car : } X_T \text{ et } \varepsilon_T \in \sigma(X)$$

- En utilisant $AR(\infty)$ pour trouver $\varepsilon_T$ en fonction $X_{T-j}$. $(f(X_{T-j}))$ on a

$$\varepsilon_T = (1-\beta L)^{-1}(1-\alpha L)X_T$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k L^k\right)(1-\alpha L)X_T$$

$$\varepsilon_T = (1-\alpha L)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k X_{T-k}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k X_{T-k} - \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k X_{T-(k+1)}$$

on pose $j = k+1 \Rightarrow k = j-1$

$$\varepsilon_T = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k X_{T-k} - \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \beta^{j-1} X_{T-j}$$

$$= X_T + \sum_{k=1}^{\infty} \beta^k X_{T-k} - \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \beta^{j-1} X_{T-j}$$

$$\varepsilon_T = X_T + \beta \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} X_{T-k} - \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} X_{T-k}$$

$$= X_T + (\beta-\alpha) \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} X_{T-k} \quad \#.$$

on a :

$$\hat{X}_{T+1} = \alpha X_T - \beta X_T - (\beta-\alpha) \sum_{k=1}^{\infty} \beta^k X_{T-k}$$

$$= (\alpha-\beta) X_T + (\alpha-\beta) \sum \beta^k X_{T-k}$$

39

$$\hat{X}_{T+1} = (\alpha - \beta) \sum_{k=0}^{\infty} \beta^{k} X_{T-k}$$

on pose. $K = j-1$. $j = k+1$.

$$\hat{X}_{T+1} = (\alpha - \beta) \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \beta^{j-1} X_{T-j+1}.$$

$$= (\alpha - \beta) \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} X_{T-k+1}.$$

40

## روابط مجتمعاتنا

هذه روابط قنواتنا و مجموعاتنا على التليغرام و الفيسبوك أسفله يسعدنا إنضمامكم إليها

### قنوات التليغرام:

- قناة السنة أولى ليسانس
  - L1 Math (channel)
- قناة السنة الثانية ليسانس
  - L2 Math (channel)
- قناة السنة الثالثة ليسانس
  - L3 Math (channel)
- قناة السنة أولى ماستر رياضيات تطبيقية
  - M1 [Applied Mathematics](channel)
- قناة السنة ثانية ماستر رياضيات تطبيقية
  - M2 [Applied Mathematics](channel)

### مجموعات التليغرام:

- مجموعة السنة ثانية ماستر رياضيات
  - M2 [Applied Mathematics] (group)
- مجموعة الرياضيات التطبيقية
  - الرياضيات التطبيقية

### مجموعات الفيسبوك:

- مجموعة الرياضيات التطبيقية
  - الرياضيات التطبيقية

## ملاحظة:

هذه روابط حساباتي على اليسار إذا كان لديك استفسار يمكنك مراسلتي على أي منهم حساب التليغرام، بوت التواصل (على تليغرام أيضا) أو الإيميل

أما إذا كنت تريد إرسال ملفات خاصة بأحد مقاييس الرياضيات فيمكنك أيضا مراسلتي على أي واحد فيهم و لكن أرشح لك تطبيق تليغرام خاصة إذا كان حجم الملف كبيرا

- حسابي على تليغرام

Ezzobir

- بوت التليغرام الخاص بالتواصل معنا

Contact Us

- الإيميل

ezzobirb@protonmail.com

# لنتعاون و نثري هذا المحتوى

مرحبا عزيزي الطالب هذا القسم خاص بالذي يرغب بالمساهمة في إثراء المحتوى و الوصول إلى الهدف ألا و هو وضع الدروس، الأعمال الموجهة، الفروض و الامتحانات لجميع المقاييس التي يتم تناولها أثناء دراسة الرياضيات في الجامعة الجزائرية

الطريقة جد سهلة أي ملف لديك يخص أحد المقاييس أرسله لي عبر حسابي على تليغرام أو بوت التواصل

لنقل على سبيل المثال قمت باجتياز فرض أو إمتحان قم بالتقاط صورة له و أرسله لي أو لديك دروس أو أعمال موجهة مكتوبة قم بالتقاط صور لهم و أرسلهم لي

أو أنت طالب على سبيل المثال لا على سبيل الحصر غير مهتم بالدراسة و جئت في الأيام الأواخر التي تسبق الإمتحان و قمت بأخذ صور للدروس و الأعمال الموجهة من عند زميلك **الخباش** الذي لا يترك صغيرة و لا كبيرة يكتبها الأستاذ أو يقولها إلا و سجلها فبعد التقاطك للصور من عند زميلك و الدراسة منهم و حصولك على المعدل الذي كنت ترغبه إن شاء الله أرسل هذه الصور لي قبل حذفها أو عمل فورمات نهاية السنة للهاتف لديك

في الأخير ما أردت قوله أخي الطالب هو المهم أن ترسل و أن لا تحقر من المعروف شيئا

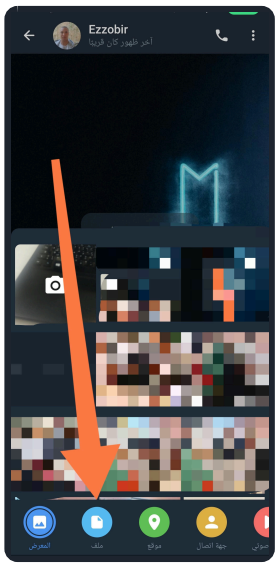
و أنا من جهتي سأقوم بفحص الملفات فإذا كانت مجانية و ليس عليها حقوق سأقوم بنشرها على تليغرام و

فيسبوك وو ضعها على مستودع الغيتهاب المذكورين أعلاه في **مهم جدا**

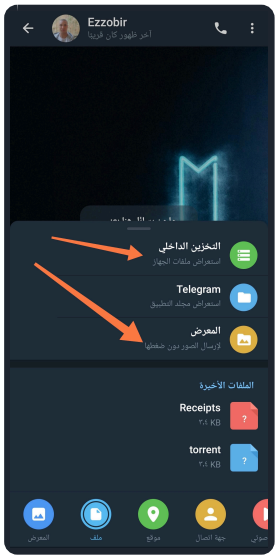
و كيفية إرسال الملفات في تطبيق تليغرام لمن لا يعرف مشروحة أسفله فليلق عليها نظرة

افتح تطبيق تليغرام ثم اكتب في خانة البحث ezzobir ستجد حسابي كما هو مبين في الصورة على اليسار قم بالضغط عليه

ثم بعدها انظرا أسفل الشاشة ستجد زر إرفاق الملفات كما هو مبين في الصورة على اليمين قم بالضغط عليه




ثم هنا احذر أن تضغط على المعرض مباشرة لأنك ستقوم بإرسال الصورة بشكل مضغوط (أي بجودة سيئة) فبدل الضغط على المعرض مباشرة اضغط على ايقونة الملف كما هو مبين في الصورة على اليسار




و الأن في هذه المرحلة

- تضغط على المعرض لتحديد الصور و إرسالهم
- أو في حالة كنت واضعا الصور في مجلد محدد على جهازك تضغط على التخزين الداخلي ثم تنتقل للمجلد الذي تريده و تقوم بتحديد الصور و إرسالهم كما هو مبين في الصورة على اليمين

بالتوفيق لجميع الإخوة الكرام