الدروس لمقياس
Processus Stochastiques

29 ماي 2022

المحتويات

محتوى المقياس ____ 1
الدروس ____ 2
روابط مجتمعاتنا ____ 27
لنتعاون و نثري هذا المحتوى ____ 29

مهم جدا

- الصور الموجودة في هذا الملف لست بصاحبها بل هي لطلبة قاموا بإرسالها لي لأقوم بجمعها و نشرها ليستفيد الجميع وطلبوا مني عدم ذكر أسمائهم ولهذا السبب لم أذكرهم هنا و أشكرهم جزيل الشكر وجزاهم الله عنا خير الجزاء وهدفنا إن شاء الله هو وضع دروس، أعمال موجهة، فروض و امتحانات لجميع مقاييس الرياضيات التي تدرس بالجامعة الجزائرية
- جميع هذه الصور، ملفات البيدياف و الكود المستعمل لإنشائهم موجود في المستودع التالي على موقع ال Github و أي تحديث أو تعديل سيكون هناك
- ملفات البيدياف ستكون في مجموعة التليغرام الرياضيات التطبيقية
- الصور ستكون على مجموعة الفيسبوك الرياضيات التطبيقية

و أنت عزيزي الطالب إذا أردت أن تقوم بإثراء هذا المحتوى و تعم الفائدة وهذا ما أتمناه أنا وأظنك مثلي في هذا الأمر فأنظر في القسم لنتعاون و نثري هذا المحتوى لتعلم كيف الطريقة و هو أمر جد بسيط

محتوى المقياس

processus aléatoire (stocastique) Cours.

processus - a

- processus générale (station).
- La chaîne de Markov.
- processus de poison.
- le mouvement brownien.

الدروس

ξ : on va s'interesser à des phénomène dependant du temps, le qui est connu à la date t est rassemble dans une tribu $\mathcal{F}_t$ c'est l'information à la date t.

Def :

Une filtration est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$.

$(F_t)_{t\geq 0}$ filtration

C'est à dire $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$, $\forall t \leq s$.

F_t = tribus.

on demande souvent que les ensemble négligeable soient contienne dans $\mathcal{F}_0$.

on parle d'hypothèse habituelles si :

1/ les ensembles negligeables sont continues dans $\mathcal{F}_0$.

2/ la filtration est continue à droite ($F_t = \bigcap_{s>t} F_s$)

Def :

Une filtration $G = (G_t)_{t\geq 0}$ est dite plus grasse que la filtration $F = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

si $F_t \subset G_t$, $\forall t \geq 0$

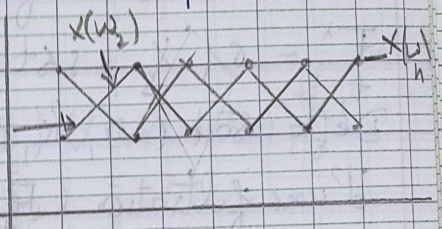
processus stochastique (aléatoire)

Def : un processus aléatoire est une famille de variables aléatoires $\{X(t), t \in J\}$ définit sur $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_t, P)$ un espace probabilisé filtré

$X(t) = X(\omega, t) : \Omega \times J \to \mathbb{R}, \quad t \in J$

$X(t)$ une v.a dépendant d'un paramètre.

- Lorsque $J \subseteq \mathbb{N}$ on dit qu'on a un processus à temps discret ou une suite aléatoire.
- Lorsque $J \subseteq \mathbb{R}$ on dit qu'on a un processus à temps continu.



- pour tout t fixé. $X_t(\omega)$: trajectoire

v.a $X_t(\cdot) : \Omega \to \mathbb{R}$.

$X_t(\cdot) : \Omega \to \mathbb{R}$

$\omega \to X_t(\omega) = x_t$ } trajectoire

هنا كي نثبت ω

Déf : Un processus aléatoire $(X(t))_{t \geq 0}$ est dit adapté par rapport à une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ si $X(t)$ est $\mathcal{F}_t$ - mesurable $\forall t \geq 0$.

Déf : on dit le processus $\{X(t)\}$ est à trajectoires continues (ou est continue) si les application $t \to X_t(\omega)$ sont continues pour presque tout ω.

Déf : Un processus est dit Cadlag (continue à droite) pour un de limites à gauche si ses trajectoires sont continues à droite pour vus de limites à gauche.

كي نقول عنه gauche, يعني gauche ثابت conti droite لا عنه
متصلة يعني موجودة يعني متساوية droite

La même définition pour caglad (continue à gauche) mais avec de limite à droite).

A un processus aléatoire X on associe, sa filtration naturelle $\mathcal{F}_t^X$.

C'est à dire la famille croissante de tribus.

$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, s \leq t)$.

Déf = Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)$.

Déf = Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)$ on appelle tribu des prévisibles, la tribu sur $]0, +\infty[\times \Omega$ engendrée par les rectangles de la forme $]s, t] \times A$ $0 \leq s \leq t$, $A \in \mathcal{F}_s$.

Déf : un processus est prévisible si et seulement si $(t, \omega) \to X_t(\omega)$ est mesurable par rapport à la tribu des prévisibles.

Déf = on dit que deux processus X et Y sont égaux à une modification près si $X_t = Y_t$. P.P. sûre $\forall t$.

Déf = Deux processus sont égaux en loi $(X_t) \overset{\mathcal{D}}{=} (Y_t)$ si $\forall t_1, \dots t_n \in \mathbb{R}_+$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a.

$(X(t_1), \dots X(t_n)) \overset{\mathcal{D}}{=} (Y(t_1) \dots Y(t_n))$

Déf = on dit que le processus $(X(t))_t$ appartient à la classe L_p et on note $X(t) \in L_p$, $t \geq 0$.
si $E[|X(t)|^p] < \infty$, $\forall t \geq 0$.

Rq = soit $(X(t))_t \in L_2$, Dans le cas nous pouvons définir les fonctions

$E(X(t)) = m(t)$

et $R(s,t) = E[(X(s) - m(s))(X(t) - m(t))]$

$= Cov(X(s), X(t))$

que l'on appelle la moyenne et la fonction de Corrélation du processus $(X(t))$ resp.

Déf =

Une fct $R(s,t)$, $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ est dite définie positive si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \dots, x_k)^T \in \mathbb{R}^k$, $(t_1, \dots, t_k)^T \in \mathbb{R}^k$

$$\sum_{i,j=1}^{k} x_i x_j R(t_i, t_j) \geq 0.$$

thm = Soit $R(s,t)$, $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ la fonction de Corrélation d'un processus $X(t)$, $t \in T$, alors $R(s,t)$ est définie positive.

$R(s,t) = cor(X(t), X(s)) = r(t-s)$.

Déf = on dit que le processus $\{X(t), t \in T\}$ est stochastiquement continue en un point t si :

$$\forall \varepsilon > 0, \ P\{w : |X(t+\Delta t) - X(t)| > \varepsilon\} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} 0.$$

يعني متتالية كوشي

$\lim_{\Delta t \to 0} X(t+\Delta t) = X(t)$

5

ie : $X(t+\Delta t) \xrightarrow[\Delta t \to 0]{P} X(t)$

Les processus stationnaires :

Déf : on dit que $\{X(t), t \in J\}$, $J \subseteq \mathbb{R}$ est un processus strictement stationnaire si pour tout n-uple de temps $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ $(t_i \in J)$ et pour tout $h \in J$ le vecteur aléatoire $(X(t_1+h), \dots X(t_n+h))^T$ a la même loi que le vecteur $(X(t_1), \dots X(t_n))^T$

ie : $P_{(X(t_1+h), \dots X(t_n+h))} = P_{(X(t_1) \dots X(t_n))}$

autrement :

$$F_{(X(t_1+h), \dots X(t_n+h))}(x_1, \dots x_n) = F_{(X(t_1), \dots X(t_n))}(x_1 \dots x_n)$$

En particulier pour $n=1$ on a :

$$\mathbb{P}(X(t) \le x) = F_{X_t}(x) = F_{X_{t+h}}(x) = \mathbb{P}(X_{t+h} \le x), \forall h \in J$$

Thm : Si le processus $\{X(t), t \in J\}$ est strictement stationnaire tq $E(X(t)^2) < \infty$, $\forall t$, alors

1/ $E(X(t)) = m$, $\forall t \in J$

2/ $Var(X(t)) = \sigma^2$, $\forall t \in J$

3/ $R(t,s) = Cov(X(t), X(s)) = r(t-s)$, $\forall (t,s) \in J \times J$

Déf : On dit que le processus $\{X(t), t \in J\}$ est faiblement ou tout simplement stationnaire si :

1/ $E(X(t)) = m$, $\forall t \in J$.

2/ $Var(X(t)) = \sigma^2$, $\forall t \in J$.

3/ $Cov(X(t), X(t+h)) = r(h)$, $\forall t, t+h \in J$.

Rq : On dit que $r(h)$, $h \in J$. est la fonction de covariance ou de corrélation du processus $\{X(t), t \in J\}$. Il est facile de montrer que $r(\cdot)$ est une fonction paire. Si $\{X(t)\}_{t \in J}$ est stationnaire

Thm (ergodique pour les processus stationnaires)

Soit $\{X(t)\}$ un processus stationnaire si :

$\lim_{t \to \infty} r(t) = 0$ alors $Y_t = \frac{1}{T} \int_0^T X(t)\, dt \xrightarrow{m.q} 0$.

Thm : (de Bochner et de Khintchine)

Soit $\{X(t)\}$ un processus stationnaire tel que la fonction de corrélation $r(h)$ est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$.

$\int_{\mathbb{R}} |r(h)|\, dh < \infty$, Dans le cas il existe la densité spectrale $f(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ du processus $\{X(t)\}$, tq

$$r(h) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, e^{2ih\lambda}\, d\lambda.$$

De ce thm il suit que : $f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} r(h) e^{-ih\lambda} d\lambda$.

$r(h) = cov(X(t), X(t+h))$.

On dit que le processus $\{X(t)\}$ est stat avec le spectre continue.

Déf : on dit que $F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} f(x)\,dx$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

la fct spectrale de processus $\{X(t)\}$.

on remarque que :

$E[X^2(t)] = r(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\,d\lambda$.

De cette remarque il suit que si $r(0) = 1$ alors la fct spectrale $F(.)$ est une fonction de repartition

Déf : Soit $\{X(t)\}_{t\in J}$ un processus stationnaire on dit que $\{X(t)\}$ est un bruit Blanc si $X(t_1), \dots, X(t_n)$ sont indépendantes $\forall t_1, \dots, t_n$ $(t_j \in J)$ la fct de corrélation de ce processus est $r(t) = \sigma^2 \mathbb{1}_{\{0\}}(t)$.

* si $\{X(t)\}$ est un processus stationnaire de bruit Blanc tq $X(t) \sim N(0, \sigma^2)$, $\forall t \in J$.

on dit que $\{X(t)\}$ est un bruit blanc gaussien.

Differentiation et intégration d'un processus aléatoire.

Soit $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ un processus aléatoire $E|X(t)|^p < \infty$ pour $p = 1,2$.

Le processus $\{X(t)\}$ est continue en s si

$$\lim_{t\to s} \|X(t) - X(s)\|_p = \lim_{t\to s} \left(E|X(t) - X(s)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

$X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $E(|X|)$

$Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $(E|X|^2)^{\frac{1}{2}}$

- on dit que le processus $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ est dérivable en s, s'il existe un élément $X'(s) \in L_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $p = 1,2$, tq: $\lim_{t\to s} \left\| \frac{X(t) - X(s)}{t - s} - X'(s) \right\|_p = 0$

Soit $\{X(t), t \in J = [a,b]\}$, $E|X(t)|^2 < \infty$ un processus aléatoire stochastiquement continue en moyenne quadratique

$$\|X(t+\Delta t) - X(t)\|_2^2 = E|X(t+\Delta t) - X(t)|^2 \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} 0.$$

on définit l'intégrale stochastique de Riemann

$$I(X) = \int X(t)\, dt.$$

Comme J la limite en $L^2(\Omega)$ des somme de Darboux

$$I(X) = \lim \sum_{i=1}^{n} X(t_i)(t_{i+1} - t_i) \text{ où } a \le t_1 \le t_2 \le \dots \le t_{n+1} = b$$

quand $\max(t_{i+1} - t_i) \to 0$.

Il évident que.

$$I_n(X) = \sum_{i=1}^{n} X(t_i)(t_{i+1} - t_i) \in L_2(\Omega).$$

$$I_n(X) \xrightarrow{L_2} I(X)$$

thm :

$$\| I - I_n(X) \|_2 \to 0 \iff \| I_n(X) - I_m(X) \|_2 \to 0.$$

10

Chapitre II 2.

• processus de poisson.

Déf 2 on dit que le processus aléatoire $X(t)$, $t \in J = [0, +\infty[$ est un processus de poisson de paramètre d'intensité $\lambda > 0$ si

1/ $X(0) = 0$.

2/ $\forall t_0, t_1, \dots, t_n$ avec $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$.
les accroissements $X(t_1) - X(t_0)$, $X(t_2) - X(t_1)$ ——
$X(t_n) - X(t_{n-1})$.
Sont indépendants deux date t_1 et t_0 أي تعرف $X(t_1) - X(t_0)$
$\Rightarrow$ accroissement

3/ $\forall s, t$ avec $0 \leq s \leq t$ l'accroissement $X(t) - X(s)$ suit une loi de poisson de paramètre $\lambda(t-s)$:

$$P(X(t) - X(s) = k) = (\lambda(t-s))^k \frac{e^{-\lambda(t-s)}}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Rq = $m(t) = E(X(t)) = \lambda t$, $\forall t \in J$.

$\sigma(t) = Var(X(t)) = \lambda t$ $\quad o(\Delta t)$. $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$

Rq 2 = $\quad O(\Delta t)$. $\lim_{\Delta t \to 0} O(\Delta t) = 0$

Soit $\Delta t > 0$. de (2) on tire que $\forall t \in J$. $\frac{O(\Delta t)}{\Delta t} \to C$

$$P(X(t + \Delta t) - X(t) = 0) = e^{-\lambda \Delta t} = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

lorsque $\Delta t \to 0$ et donc $(X(t))$ est stochastiquement continue.

D'autre part :

$$\mathbb{P}(X(t+\Delta t) - X(t) = 1) = \lambda \Delta t\, e^{-\lambda \Delta t}$$
$$= \lambda \Delta t + o(\Delta t).$$

lorsque $\Delta t \to 0$.

$$\mathbb{P}(X(t+\Delta t) = k+1 \mid X(t) = k) = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

lorsque $\Delta t \to 0$.

$$\frac{\mathbb{P}(X(t+\Delta) = k+1,\ X(t) = k)}{\mathbb{P}(X(t) = k)} = \frac{\overset{=1}{\mathbb{P}(X(t+\Delta t) - X(t))}\ \cancel{\mathbb{P}(X(t) = k)}}{\cancel{\mathbb{P}(X(t) = k)}}$$

et donc $(X(t))$ est dérivable (en proba) ?

On remarque que :

$$\mathbb{P}(X(t+\Delta t) - X(t) \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X(t+\Delta t) - X(t) = 0) - \mathbb{P}(X(t+\Delta t) - X(t) = 1)$$
$$= o(\Delta t) \text{ lorsque } \Delta t \to 0$$

ie $= \mathbb{P}(X(t+\Delta t) \geq k+2 \mid X(t) = k) = o(\Delta t)$

par (2) on a :

$$\mathbb{P}_n(t) = \mathbb{P}(X(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}.$$

pour $t \in J$, $n \in \mathbb{N}$.

De la définition de $(X(t))$ on remarque que

$$P_0(0) = \mathbb{P}(X(0) = 0) = 1.$$

alors : $1 - P_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(t) = \mathbb{P}(X(t) \geq 1)$
$$= \lambda t + o(t).$$

et donc $\frac{1-P_0(t)}{t} \to \lambda$ lorsque $t \to 0$.

Soit $0 \leq s \leq t$ alors $X(s)$ et $X(t)-X(s)$ sont indépendantes. et donc : $Cov(X(s), X(t)-X(s)) = 0$

Dans ce cas :

$$R(s,t) = Cov(X(s), X(t)) = Cov(X(s), X(t)-X(s)+X(s))$$
$$= Cov(X(s), X(t)-X(s)) + Var(X(s))$$
$$= 0 + \lambda s$$

d'où on tire que $(X(t))_t$ n'est pas station

processus de poisson et temps d'attente :

Soit $(X(t))_{t\geq 0}$ un processus de poisson de paramètre d'intensité $\lambda > 0$.

X_n, $n \in \mathbb{N}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\forall t \geq 0$, la v.a $X(t)$ nous donne le nombre de sauts du processus dans l'intervalle $[0,t]$.

X_t $t \in \mathbb{R}$ $\mathbb{N}$ valeur, $\mathbb{R}$ valeur

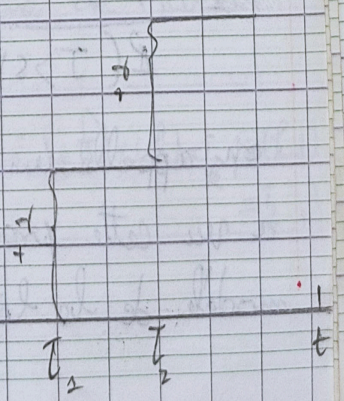
Notons : T_1 le temps d'attente du premier saut

alors, $\forall t \geq 0$,

$$P(T_1 > t) = P(X(t) = 0) = e^{-\lambda t}$$

et donc la fonction de répartition de T_1 est :

$$F(t) = P(T_1 \leq t) = 1 - P(T_1 > t)$$
$$= 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$



alors la densité $f_{J_1}(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$.

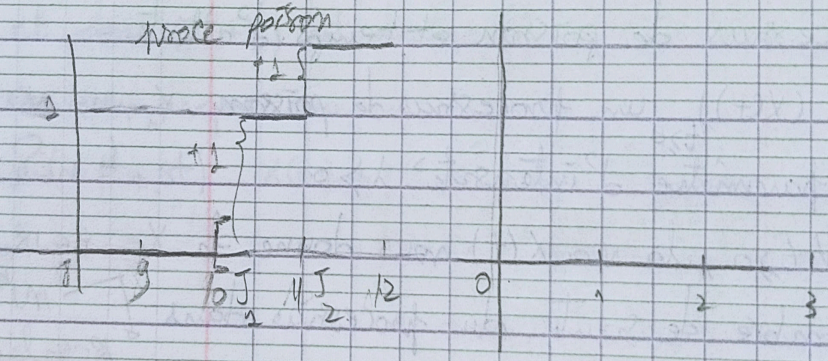
ie: J_1 suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

$E(J_1) = \frac{1}{\lambda}$, $Var(J_1) = \frac{1}{\lambda^2}$.

. λ représente le nombre de sauts que le processus $(X(t))$ a par unité de temps.

De la même façon, si J représente le temps d'attente du premier saut quand on choisit comme une origine un moment $s > 0$, on a.

$$\mathbb{P}(J > t) = \mathbb{P}(X(t+s) - X(s) = 0) = e^{-\lambda t}.$$



on remarque que, $\forall t \geq 0$.

$$\mathbb{P}(J - s > t \mid J > s) = \frac{\mathbb{P}(J - s > t, J > s)}{\mathbb{P}(J > s)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(J > t+s)}{\mathbb{P}(J > s)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t}$$

on appelle un tel modèle "sans vieillissement" on a vu cette propriété de perte de mémoire dans un modèle de la loi géométrique.

Notons : T_k le moment du k-ième sauts des processus $(X(t))$, $k = 1, 2, \ldots$

Soit $\{T_k\}$ la suite de v.a. $T_k = T_k - T_{k-1}$, $T_0 = 0$

Thm :

pour tout n fini les va $T_1, T_2, \ldots, T_n$ sont indépendantes et ~~suit~~ suivent la même loi $\exp(\lambda)$.

Chaine de Markov à espace d'états discret :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $\{X(t), t \in \mathbb{N}\}$ un processus à temps discret $X(t) : \Omega \to \mathcal{E}$, $\forall t \in \mathbb{N}$ où $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{N}$ est l'espace des états du processus $\{X(t)\}$, pour tout $t = k \in \mathbb{N}$ et $i_0, i_1, \ldots, i_k \in \mathcal{E}$

on a. $P(X(0) = i_0, X(1) = i_1, \ldots, X(k) = i_k)$

$= P(X(k) = i_k / X(k-1) = i_{k-1}, \ldots, X(0) = i_0) \cdot$

$P(X(k-1) = i_{k-1} / X(k-2) = i_{k-2}, \ldots, X(0) = i_0)$

$P(X(k-2) = i_{k-2} / X(k-3) = i_{k-3}, \ldots, X(0) = i_0)$

$\vdots$

$P(X(1) = i_1 / X(0) = i_0) \cdot P(X(0) = i_0)$ ——— (1)

Def : $\{X(t), t \in \mathbb{N}\}$ est une chaine de Markov si $\forall k \in \mathbb{N}$ et $i_0, i_1, \ldots, i_k \in \mathcal{E}$.

$P(X(k) = i_k / X(k-1) = i_{k-1}, \ldots, X(0) = i_0) = P(X(k) = i_k / X(k-1) = i_{k-1})$

homog (مقيدة مثل A فيها غير منتهي)

Notons $P_{ij}(K) = P(X(K+1) = j / X(K) = i)$

si $P_{ij}(K) = P_{ij}$, $\forall K = 1, 2 \ldots$ on dit que la chaîne de Markov $\{X(t), t \in \mathbb{N}\}$ est homogène

Rq = si $\{X(t), t \in T\}$ est une chaîne homogène dans le temps alors $\forall s \in \mathbb{N}$

$P(X(t+s) = j / X(s) = i) = P(X(t) = j / X(0) = i)$

$\forall i, j \in \mathcal{E}$.

puisque $P(X(t) = j / X(0) = i)$ ne dépend que de i, j et t, nous pouvons noter

$P(X(t) = j / X(0) = i) = P_{ij}^{(t)}$

$P_{ij}(K) = P(X(K+1) = i / X(K) = j)$

la proba de transition de i à j en t.

Soit $\pi_i = P(X(0) = i)$, $i \in \mathcal{E}$.

Dans ce cas au lieu de (1) on a

$P(X(0) = i_0, X(1) = i_1, \ldots, X(K) = i_K)$

$= P_{i_{K-1} i_K} P_{i_{K-2} i_{K-1}} P_{i_{K-3} i_{K-2}} \ldots P_{i_0 i_1} \pi_{i_0}$

Notons $P_{ij}(K) = P(X(K+1) = j / X(K) = i)$ ... (3)

si $P_{ij}(K) = P_{ij}$, $\forall K = 1, 2 \ldots$ on dit que la chaîne de markov $(X(t))$ est homogène dans temps.

$l > 1$, $P_{ij}^{(l)} = P(X(k+l) = j \mid X(k) = i)$

$+ l$

Soit $(X(t))_{t \in \mathbb{N}}$ une chaîne homogène de Markov à temps discret et à espace d'états finis $\mathcal{E} = \{1, 2, \dots, m\}$

Notons

$$P = \| P_{ij} \|_{m \times m} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1m} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2m} \\ \vdots & & & \\ P_{m1} & P_{m2} & \cdots & P_{mm} \end{bmatrix}$$

la matrice dont les éléments $P_{ij} \geq 0$ sont les probabilités de transition (3) de la chaîne

Comme $\forall i = 1, 2, \dots, m$

$\sum_{j=1}^{m} P_{ij} = 1$ on dit que P est la matrice stochastique de la chaîne $(X(t))$

Soit $\boxed{\pi_i = P(X(0) = i) \ , \ i \in \mathcal{E}}$ Dans ce cas

$$P(X(0) = i_0, X(1) = i_1, \dots X_k = i_k) = P_{i_{k-1} i_k} \cdot P_{i_{k-2} i_{k-1}} \cdots P_{i_0 i_1} \pi_{i_0}$$

et donc le vecteur $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_m)^T$ et la matrice de proba de transition P

Le vecteur $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots \pi_m)^T$ est appelé le vecteur des proba. initials il est évident que π_j représente la probabilité avec la quelle le processus $(X(t))$ se trouve dans l'état j au moment initial $t=0$.

Notons :

$P(X(t)=j \mid X(0)=i) = P_{ij}^{(k)}$ la proba de transition de i ; j en t.

on introduit les proba $\pi_j^{(k)} = P(X(k)=j)$ $j \in E$ $k \in \mathbb{N}$ et soit $\pi^{(k)} = (\pi_1^{(k)}, \pi_2^{(k)}, \dots \pi_m^{(k)})^T$

$\pi_j^{(k)}$ représente la proba avec la quelle le processus sera dans l'état j au moment $t=k$ il est évident que $\pi_j = \pi_j^{(0)}$

Soit $P_{ij}^{(k)}$ la proba de transition du système de l'état i à l'état j pour k pas alors

$$\pi_j^{(k)} = \sum_{i=1}^{m} P(X(k)=j / X(0)=i)\, P(X(0)=i)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} P_{ij}^{(k)} \pi_i = \sum_{i=1}^{m} \pi_i P_{ij}^{(k)}$$

processus de Markov à temps continue et à espace d'états discret.

Soit $\{X(t)\}$, $t \in [0, \infty[$ un processus aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $X(t) = X(t,\omega) : [0,\infty[\times \Omega \to E \subseteq \mathbb{N}$.

i.e $X(t)$ est une v.a. discrète $\forall t \in [0, +\infty[$

Def. $\{X(t)\}$ est un processus de Markov si

$$P(X(t_k) = i_k \mid X(t_{k-1}) = i_{k-1}, X(t_{k-2}) = i_{k-2}, \dots, X(t_1) = i_1)$$

$$= P(X(t_k) = i_k \mid X(t_{k-1}) = i_{k-1})$$

pour tout collections

$t_1, \dots, t_k$ $\quad 0 \le t_1 < t_2 < \dots < t_k$, $t_j \ge 0$.

et

$i_1, i_2, \dots, i_k \in E$ $(j = 1 \dots k$, $k \in \mathbb{N}^*)$

Rq - la propriété (1) est toujours vérifiée si $(X(t))$ est un processus à accroissements indépendantes. Notons

$P_{ij}(s,t) = P(X(t) = j / X(s) = i)$ $\quad s < t$

شرح الصدق هو إيجاد كل الـ les

$P(X(1) = 10, X(2) = 9, X(3) = 11)$

Notons

$P_{ij}(s,t) = P(X(t)=j \mid X(s)=i)$ $s<t$.

1 = مجموع العناصر في كل سطر.

= matrice stochastique

la proba de transition de l'état i à l'état j dans ce cas $\forall s,t$ $0 \leq s \leq t$.

$P(s,t) = \| P_{ij}(s,t) \|$.

représente la matrice stochastique de $X(t)$, $t \geq 0$

$$P(s,t) = \begin{bmatrix} P_{11}(s,t) & \dots & P_{12}(s,t) & \dots & P_{1k}(s,t) \\ \vdots & & & & \\ P_{k1}(s,t) & & P_{k2}(s,t) & \dots & P_{kk}(s,t) \end{bmatrix}$$

Notons que les éléments de matrice $P(s,t)$ vérifie l'équation de Champion Kolmogove.

$P_{ij}(s,t) = \sum P_{ik}(s,t) \cdot P_{kj}(u,t)$ $s<t$

Nous choisons que $X(t)$ $t \in [0,+\infty[$ est un processus homogène de markov.

Voir TD. $\left(\Psi(z, t+h) = \Psi(z,t)\, \Psi(z,h) \right)$

Soit $(X(t))$ un processus de markov homogen

Dans ce cas l'équation de Chapman - Kolmogorove peut être presenté sous la forme

$$P_{ij}(s+t) = \sum_{k \in E} P_{ik}(s)\, P_{kj}(t)$$

$$\text{ie} = \mathbb{P}(s+t) = \mathbb{P}(s) \cdot \mathbb{P}(t) \quad \text{---} \quad (*)$$

$$\begin{bmatrix} P_{11}(s.t) & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) & \text{---} & P_{1k}(s) \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} P_{12}(t) \\ P_{22}(t) \\ P_{23}(t) \end{pmatrix}$$

21

Soit $\{X(t), t \in J\}$, $J = [0, +\infty[$.

$X(t) : \Omega \times J \to \mathcal{E} \subseteq \mathbb{N}$.

Déf :

$\{X(t)\}, t \in J$ est un processus de Markov si

$$\mathbb{P}(X(t_k) = i_k \mid X(t_{k-1}) = i_{k-1}, \dots, X(t_1) = i_1)$$
$$= \mathbb{P}(X(t_k) = i_k \mid X(t_{k-1}) = i_{k-1})$$

$\forall t_1, \dots, t_k \quad 0 \leq t_1 < t_2 \dots < t_k$

$\forall i_1, i_2, \dots, i_k \quad , i_j \in \mathcal{E}$.

notons $P_{ij}(s,t) = \mathbb{P}(X(t) = j \mid X(s) = i)$, $s < t$.

$P(s,t) = \|P_{ij}(s,t)\|$ la matrice de transition

$P(s,t)$ vérifie l'équation de Chapman - Kolmogorov.

$$P_{ij}(s,t) = \sum_{k \in \mathcal{E}} P_{ik}(s,u) P_{kj}(u,t) \quad 0 < s < u < t$$

$(X(t))$ est homogène si $P_{ij}(s,t) = P_{ij}(t-s)$, $s < t$

Dans ce cas l'équation de Chapman Kolomogorov devient sous la forme

$$P_{ij}(s+t) = \sum_{k \in \mathcal{E}} P_{ik}(s) P_{kj}(t)$$

ie $P(s+t) = P(s)\,P(t)$ ---- (1)

Supposons que les probabilités $P_{ij}(t)$ sont differentiables en $t=0$ et

$P_{ij}(h) = \lambda_{ij}\,h + o(h)$ $(i \neq j)$ si $h \to 0$.

alors la limite $\lambda_{ij} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{P_{ij}(h)}{h}$ caractérise (2)

la vitesse de changement de $P_{ij}(h)$ en 0 et est appelé le taux de transition de l'état i à l'état j.

De l'égalité $\sum\limits_{j=1}^{m} P_{ij}(h) = 1$ alors

$$\lambda_{ii} = \lim_{h \to 0} \frac{P_{ii}(h) - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-\sum\limits_{j \neq i} P_{ij}(h)}{h}$$

$$= -\sum_{j \neq i} \lambda_{ij} \quad \text{--- (3)}$$

Notons

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1m} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2m} \\ \vdots & & & \\ \lambda_{m1} & \lambda_{m2} & \cdots & \lambda_{mm} \end{bmatrix}$$

la matrice des taux de transition

D'après (2) et (3) on a $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{P(h) - I_m}{h} = A$

par ① $\lim_{h\to 0} \frac{P(t+h)-P(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{P(t)P(h)-P(t)}{h}$

$= P(t) \lim_{h\to 0} \frac{P(h)-I_m}{h} = P(t)A$

d'où l'équation directe de Kolmogorov

$p'(t) = P(t)A$

De même

$p'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{P(t+h)-P(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{P(h)P(t)-P(t)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{P(h)-I_m}{h}\right) P(t) = A\,P(t)$

d'où l'équation inverse de Kolmogorov

$p'(t) = A\,p(t)$

Il faut remarque $P(t) = e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}$

$A^0 = I_m$.

Le mouvement brownien.

Def = on appelle mouvement brownien un processus stochastique à valeurs réelles $B(\cdot,\cdot) : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$

$(B(t))_{t\geq 0}$ est un processus à accroissements indépendants et stationnaires dont les trajectoires sont continues. Ce qui signifie que :

1/ Continuité : p.p sur la fonction $s \mapsto B(s,\omega)$ est une fonction continue.

2/ Indépendance des accroissements.

Si $s \leq t$ $B(t) - B(s)$ est indépendant de $\mathcal{F}_s = \sigma(B(r),\ r \leq s)$.

$B(t) - B(s)$ de loi gaussienne centrée de variance $t - s$.

3/ Stationnarité des accroissements : Si $s \leq t$ la loi de $B(t) - B(s)$ est identique à celle de $B(t-s) - B(0)$ $= 0$

$$B(t-s) \overset{\text{loi}}{=} B(t) - B(s) \sim N(0, t-s)$$

Def = Un mouvement brownien est dit standard si :

1/ $B(0) = 0$ p.p sur.

2/ $E[B(t)] = 0$ et $Var(B(t)) = E(B^2(t)) = t$

3/ $E[B(t)B(s)] = \min(t,s)$, $\forall s,t \geq 0$

4/ $\forall t \in [0,T]$

$$P(B(t) < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2t}} du.$$

Prop :

Le mouvement brownien standard $\{B(t)\}_{t \geq 0}$ est une martingale par rapport à la filtration naturelle $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, 0 \leq s)$

$$E(B(t)) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx$$

$$E|B(t)| = \int_{\mathbb{R}} |x| f_X(x) dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi t}} (-t) \int_0^{+\infty} -\frac{x}{t} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi t}} (-t) \left[e^{-\frac{x^2}{2t}} \right]_0^{+\infty} = \sqrt{\frac{2t}{\pi}}$$

$t \geq s$.

$$E(B(t)/\mathcal{F}_s) = E(B(t) - B(s) + B(s)/\mathcal{F}_s).$$

$$= E(B(t) - B(s)/\mathcal{F}_s) + E(B(s)/\mathcal{F}_s)$$

$$= E(B(t) - B(s)) + B(s).$$

$$= 0 + B(s)$$

روابط مجتمعاتنا

هذه روابط قنواتنا و مجموعاتنا على التليغرام و الفيسبوك أسفله يسعدنا إنضمامكم إليها

قنوات التليغرام:

- قناة السنة أولى ليسانس
  - L1 Math (channel)
- قناة السنة الثانية ليسانس
  - L2 Math (channel)
- قناة السنة الثالثة ليسانس
  - L3 Math (channel)
- قناة السنة أولى ماستر رياضيات تطبيقية
  - M1 [Applied Mathematics](channel)
- قناة السنة ثانية ماستر رياضيات تطبيقية
  - M2 [Applied Mathematics](channel)

مجموعات التليغرام:

- مجموعة السنة ثانية ماستر رياضيات
  - M2 [Applied Mathematics] (group)
- مجموعة الرياضيات التطبيقية
  - الرياضيات التطبيقية

مجموعات الفيسبوك:

- مجموعة الرياضيات التطبيقية
  - الرياضيات التطبيقية

ملاحظة:

هذه روابط حساباتي على اليسار إذا كان لديك استفسار يمكنك مراسلتي على أي منهم حساب التليغرام، بوت التواصل (على تليغرام أيضا) أو الإيميل

أما إذا كنت تريد إرسال ملفات خاصة بأحد مقاييس الرياضيات فيمكنك أيضا مراسلتي على أي واحد فيهم و لكن أرشح لك تطبيق تليغرام خاصة إذا كان حجم الملف كبيرا

- حسابي على تليغرام

Ezzobir

- بوت التليغرام الخاص بالتواصل معنا

Contact Us

- الإيميل

ezzobirb@protonmail.com

لنتعاون و نثري هذا المحتوى

مرحبا عزيزي الطالب هذا القسم خاص بالذي يرغب بالمساهمة في إثراء المحتوى و الوصول إلى الهدف ألا و هو وضع الدروس، الأعمال الموجهة، الفروض و الامتحانات لجميع المقاييس التي يتم تناولها أثناء دراسة الرياضيات في الجامعة الجزائرية

الطريقة جد سهلة أي ملف لديك يخص أحد المقاييس أرسله لي عبر حسابي على تليغرام أو بوت التواصل

لنقل على سبيل المثال قمت باجتياز فرض أو إمتحان قم بالتقاط صورة له و أرسله لي أو لديك دروس أو أعمال موجهة مكتوبة قم بالتقاط صور لهم و أرسلهم لي

أو أنت طالب على سبيل المثال لا على سبيل الحصر غير مهتم بالدراسة و جئت في الأيام الأواخر التي تسبق الإمتحان و قمت بأخذ صور للدروس و الأعمال الموجهة من عند زميلك **الخباش** الذي لا يترك صغيرة و لا كبيرة يكتبها الأستاذ أو يقولها إلا و سجلها فبعد التقاطك للصور من عند زميلك و الدراسة منهم و حصولك على المعدل الذي كنت ترغبه إن شاء الله أرسل هذه الصور لي قبل حذفها أو عمل فورمات نهاية السنة للهاتف لديك

في الأخير ما أردت قوله أخي الطالب هو المهم أن ترسل و أن لا تحقر من المعروف شيئا

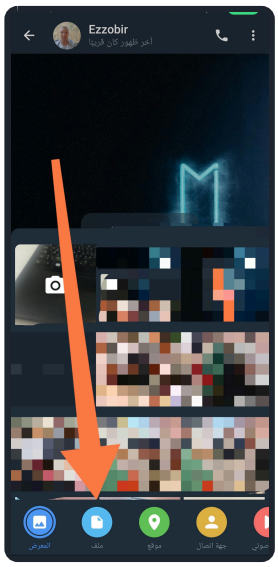
و أنا من جهتي سأقوم بفحص الملفات فإذا كانت مجانية و ليس عليها حقوق سأقوم بنشرها على تليغرام و

فيسبوك وو ضعها على مستودع الغيتهاب المذكورين أعلاه في **مهم جدا**

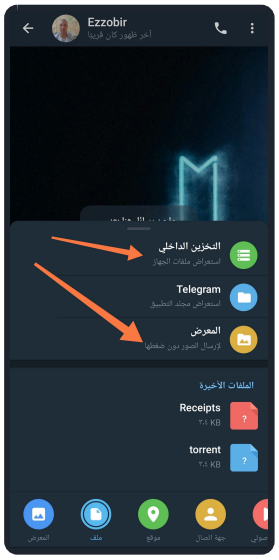
و كيفية إرسال الملفات في تطبيق تليغرام لمن لا يعرف مشروحة أسفله فليلق عليها نظرة

افتح تطبيق تليغرام ثم اكتب في خانة البحث ezzobir ستجد حسابي كما هو مبين في الصورة على اليسار قم بالضغط عليه

ثم بعدها انظرا أسفل الشاشة ستجد زر إرفاق الملفات كما هو مبين في الصورة على اليمين قم بالضغط عليه



ثم هنا احذر أن تضغط على المعرض مباشرة لأنك ستقوم بإرسال الصورة بشكل مضغوط (أي بجودة سيئة) فبدل الضغط على المعرض مباشرة اضغط على ايقونة الملف كما هو مبين في الصورة على اليسار



و الأن في هذه المرحلة

- تضغط على المعرض لتحديد الصور و إرسالهم
- أو في حالة كنت واضعا الصور في مجلد محدد على جهازك تضغط على التخزين الداخلي ثم تنتقل للمجلد الذي تريده و تقوم بتحديد الصور و إرسالهم كما هو مبين في الصورة على اليمين

بالتوفيق لجميع الإخوة الكرام