29 ماي 2022

الأعمال الموجهة لمقياس
Théorie des Martingales (à temps discret)

المحتويات

تذكير ______ 1
الأعمال الموجهة رقم 1 ______ 3
الأعمال الموجهة رقم 2 ______ 11
الأعمال الموجهة رقم 3 ______ 18
روابط مجتمعاتنا ______ 22
لنتعاون و نثري هذا المحتوى ______ 24

مهم جدا

- الصور الموجودة في هذا الملف لست بصاحبها بل هي لطلبة قاموا بإرسالها لي لأقوم بجمعها و نشرها ليستفيد الجميع وطلبوا مني عدم ذكر أسمائهم ولهذا السبب لم أذكرهم هنا **و أشكرهم جزيل الشكر وجزاهم الله عنا خير الجزاء** وهدفنا إن شاء الله هو وضع دروس، أعمال موجهة، فروض و امتحانات لجميع مقاييس الرياضيات التي تدرس بالجامعة الجزائرية
- جميع هذه الصور، ملفات البيدياف و الكود المستعمل لإنشائهم موجود في المستودع التالي على موقع ال Github و أي تحديث أو تعديل سيكون هناك
- ملفات البيدياف ستكون في مجموعة التليغرام الرياضيات التطبيقية
- الصور ستكون على مجموعة الفيسبوك الرياضيات التطبيقية

و أنت عزيزي الطالب إذا أردت أن تقوم بإثراء هذا المحتوى و تعم الفائدة وهذا ما أتمناه أنا وأظنك مثلي في هذا الأمر فأنظر في القسم لنتعاون و نثري هذا المحتوى لتعلم كيف الطريقة و هو أمر جد بسيط

تذكير

TD Marting

Temps d'arrêt.

$T : \Omega \to \overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

$\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n \iff \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$.

$\{\forall \omega \in \Omega, T(\omega) \leq n\}$

Exo1 : 1 – Montre que $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n \iff \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$.

$X = (X_n)_{n \geq 1}$ un processus, $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ la filtration naturelle de X. et $t \in \mathbb{R}_+$ fixé.

2 – Montrer que la v.a

$$N_t = \max\{n \in \mathbb{N}, X_1 + \dots + X_n \leq t\}.$$

3 – Montrer que N_{t+1} est un t.a.

Sol 1 $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n \Rightarrow \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$.

$\forall n \in \mathbb{N} : \{T = n\} \in \mathcal{F}_n \overset{?}{\Rightarrow} \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.

$\{T \leq n\} = \{T = 0\} \cup \{T = 1\} \cup \dots \cup \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$.

$\{T = 0\} \in \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_n \Rightarrow \{T = 0\} \in \mathcal{F}_n$.

$\{T = 1\} \in \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_n \Rightarrow \{T = 1\} \in \mathcal{F}_n$

$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$

$\{T = n\} \in \mathcal{F}_n. \qquad \{T = n\} \in \mathcal{F}_n.$

1

$\Rightarrow \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.

1

$$? \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n \overset{?}{\Longrightarrow} \forall n \in \mathbb{N} \ \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$$

$$\{T=n\} = \{T \leq n\} \cap \{T \geq n\} = \{T \leq n\} \cap \{T < n\}^c$$
$$= \{T \leq n\} \cap \{T \leq n-1\}^c$$

$\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.

$\{T \leq n-1\} \in \mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n. \Rightarrow \{T \leq n-1\}^c \in \mathcal{F}_n.$

$\Rightarrow \quad \{T = n\} \in \mathcal{F}_n.$

$\{N_{t+1} \leq n\} \in \mathcal{F}_n \qquad \{N_{t+1} = n\} \in \mathcal{F}_n$

$N_{t+1} = \max\{ n \in \mathbb{N}, X_1 + \dots + X_n \leq t+1\}$

2

$\boxed{2}$

الأعمال الموجهة رقم 1

Série I.

Exo1, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1 \dots X_n)$, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$.

$N(t) = \max\{n \in \mathbb{N},\ X_1 + \dots + X_n \leq t\}$.

$N(t) : \Omega \to \mathbb{N}$. (v.a).

1/ $N(t)+1$ est un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt ?

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$\{N_t + 1 = n\}$

$\{N_t = n-1\} \overset{?}{=} \{S_{n-1} \leq t\}$

$w \in \{N_t = n-1\} \Rightarrow N_t(w) = n-1 \Rightarrow S_{n-1}(w) \leq t$

$\{N_t = n-1\} \subset \{S_{n-1} \leq t\}$ $\Rightarrow w \in \{S_{n-1} \leq t\}$

إحتواء العكس غير صحيح

on pose $S_n = X_1 + X_2 + \dots X_n$.

$\{N_t + 1 = n\} = \{N_t = n-1\} = \underbrace{\{S_{n-1} \leq t\}}_{\in \mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{S_n > t\}}_{\subset \mathcal{F}_n}$.

$\{N_t + 1 = n\} \subset \mathcal{F}_n$.

2/ $N(t)$ n'est pas temps d'arrêt puisque

$\{N(t) = n\} = \underbrace{\{S_n \leq t\}}_{\in \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}} \cap \underbrace{\{S_{n+1} > t\}}_{\in \mathcal{F}_{n+1}}$.

$\Rightarrow \{N(t) = n\} \in \mathcal{F}_{n+1}$ dep future

$\{N_t = k\} = \{S_k \leq t\} \cap \{S_{k+1} > t\}$

8

3

$\{T_1 \wedge T_2 = n\} \in \mathcal{F}_n$?

$\{T_1 \vee T_2 = n\} \in \mathcal{F}_n$

Exo2 :

T_1 et T_2 sont $\mathcal{F}$_temps d'arrêt, $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1/ $T_1 + T_2$ temps d'arrêt ?

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\{T_1 + T_2 = n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \Big(\underbrace{\{T_1 = k\}}_{\in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{T_2 = n-k\}}_{\in \mathcal{F}_{n-k} \subset \mathcal{F}_n} \Big)$$

car $\forall\, 0 \leq k \leq n$, $\{T_1 = k\} \in \mathcal{F}_n$ et $\{T_2 = n-k\} \in \mathcal{F}_n$

$\{T_1 + T_2 = n\} \in \mathcal{F}_n$.

2/ Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\{T_1 \vee T_2 \leq n\} = \underbrace{\{T_1 \leq n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{T_2 \leq n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n.$$

3/ Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\{T_1 \wedge T_2 \leq n\} = \{T_1 \wedge T_2 > n\}^c = \big(\{T_1 > n\} \cap \{T_2 > n\}\big)^c$$

$$= \{T_1 > n\}^c \cup \{T_2 > n\}^c$$

$$= \underbrace{\{T_1 \leq n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \cup \underbrace{\{T_2 \leq n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n.$$

2/

4

Exo3.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $G_n \subset \mathcal{F}_n$.

T est un $\mathcal{F}$-t.a et S est un G-t.a.

2/ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\{S=n\} \in G_n$ mais $G_n \subset \mathcal{F}_n$ alors

$\{S=n\} \in \mathcal{F}_n$.

d'où S est aussi un $\mathcal{F}$-t.a.

1/ on a, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\{T=n\} \in \mathcal{F}_n$.

on ne sait pas si $\{T=n\} \cancel{\in \mathcal{F}_n}$ est G_n mesurable ou non.

3/ si la filtration est constante

i.e : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{H}$.

alors T est une v.a. $\mathcal{H}$-mesurable.

Exo4.

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F} / \forall n \in \mathbb{N}, A \cap \{T=n\} \in \mathcal{F}_n\}$$

1/ $\mathcal{F}_T$ est une tribu sur Ω ?

i/ on a $\Omega \in \mathcal{F}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$. $\Omega \cap \{T=n\} = \{T=n\}$ $\in \mathcal{F}_n$ alors $\Omega \in \mathcal{F}_T$

ii/ $A \in \mathcal{F}_T \overset{?}{\Rightarrow} A^c \in \mathcal{F}_T$.

$A \in \mathcal{F}_T \Rightarrow A \in \mathcal{F}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $A \cap \{T=n\} \in \mathcal{F}_n$.

$A^c \in \mathcal{F}$ et :

$A \cap \{T=n\} \in \mathcal{F}_n \Rightarrow A^c \cup \{T=n\}^c \in \mathcal{F}_n$.

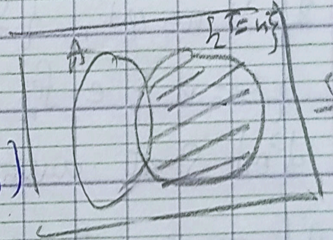
5

$\Rightarrow (A^c \cup \{T=n\}^c) \cap \{T=n\} \in \mathcal{F}_n.$

$\Rightarrow (A^c \cap \{T=n\}) \cup (\{T=n\}^c \cap \{T=n\}) \in \mathcal{F}_n.$

$\Rightarrow (A^c \cap \{T=n\}) \cup \emptyset \in \mathcal{F}_n$

$\Rightarrow A^c \cap \{T=n\} \in \mathcal{F}_n \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}_T.$



Méthode 2 :

$A^c \cap \{T=n\} = \underbrace{\{T=n\} \setminus (A \cap \{T=n\})}_{\in \mathcal{F}_n}$

iii/ $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_T \overset{?}{\Rightarrow} \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}_T.$

$(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_T \Rightarrow \forall i \in \mathbb{N},\ A_i \in \mathcal{F}_T.$

$\Rightarrow \forall i \in \mathbb{N},\ A_i \in \mathcal{F}$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ A_i \cap \{T=n\} \in \mathcal{F}_n$

$\Rightarrow \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$ et $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (A_i \cap \{T=n\}) \in \mathcal{F}_n.$

$\Rightarrow \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$ et $(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) \cap \{T=n\} \in \mathcal{F}_n$

$\Rightarrow \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}_T.$

2/ $\mathcal{F}_T \overset{?}{=} \{A \in \mathcal{F} / \forall n \in \mathbb{N},\ A \cap \{T \le n\} \in \mathcal{F}_n\} = \mathcal{F}'_T.$

• $\mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}'_T$?

$A \in \mathcal{F}_T \Rightarrow A \in \mathcal{F}$ et $\forall n \in \mathbb{N} : A \cap \{T=n\} \in \mathcal{F}_n.$

$\underbrace{A \cap \{T \le n\}}_{\in \mathcal{F}_n} = A \cap \left(\bigcup_{k=0}^{n} \{T=k\}\right) = \bigcup_{k=0}^{n} \underbrace{(A \cap \{T=k\})}_{\in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n.}$

6

Alors $A \in \mathcal{F}'_T$ ainsi $\mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}'_T$ — (1).

ii) $\mathcal{F}'_T \subset \mathcal{F}_T$?

$A \in \mathcal{F}'_T \Rightarrow A \in \mathcal{F}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $A \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.

$A \cap \{T = n\} = A \cap (\{T \leq n\} \cap \{T \geq n\})$

$= (A \cap \{T \leq n\}) \cap \{T < n\}^c$

$= \underbrace{(A \cap \{T \leq n\})}_{\in \mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{T \leq n-1\}^c}_{\in \mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n$

$A \in \mathcal{F}_T \Rightarrow \mathcal{F}'_T \subset \mathcal{F}_T$ — (2)

de (1) et (2) : $\mathcal{F}'_T = \mathcal{F}_T$.

c) T est $\mathcal{F}_T$ - mesurable ?

$T : (\Omega, \mathcal{F}_T) \to (\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$

Soit $B \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ et $\forall n \in \mathbb{N}$.

$T^{-1}(B) \cap \{T = n\} = \{T \in B\} \cap \{T = n\} = \begin{cases} \{T = n\} & \text{si } n \in B \\ \emptyset & \text{si } n \notin B \end{cases}$

$\{\omega \in \Omega / T(\omega) \in B\}$

" $\{T \in B\}$

alors $T^{-1}(B) \in \mathcal{F}_T$ i.e : T est $\mathcal{F}_T$ - mesurable.

d) $A \in \mathcal{F}_S \Rightarrow A \cap \{S \leq T\} \in \mathcal{F}_T$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$(A \cap \{S \leq T\}) \cap \{T = n\} = \underbrace{(A \cap \{S \leq n\})}_{\in \mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{T = n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n$

$= A \cap \{S \leq T\} \in \mathcal{F}_T$.

7

et si $S \le T \Rightarrow \mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.

$S \le T$ sur $\Omega \Rightarrow \{S \le T\} = \Omega$.

Soit $A \in \mathcal{F}_S \Rightarrow A \cap \{S \le T\} \in \mathcal{F}_T$.

$\Rightarrow A \cap \Omega \in \mathcal{F}_T$

$\Rightarrow A \in \mathcal{F}_T$.

d'où $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.

Exo 4.

1) $n \in \mathbb{N}$ fixé.

$N_n = \inf\{k \in \mathbb{N} : X_{n+k} = 0\}$.

$\forall m \geq 0$, $\mathcal{F}_m = \sigma(X_0, \dots, X_{n+m})$.

$\{N_n = 0\} = \{X_n = 0\}$.

$\{N_n = 1\} = \{X_n = 1\} \cap \{X_{n+1} = 0\}$

$\{N_n = 2\} = \{X_n = 1\} \cap \{X_{n+1} = 1\} \cap \{X_{n+2} = 0\}$

$\vdots$

$\{N_n = k\} = \{X_n = 1\} \cap \{X_{n+1} = 1\} \cap \dots \cap \{X_{n+k-1} = 1\}$
$\cap \{X_{n+k} = 0\}$

$\cancel{\{N_n = k\}} =$

$\{N_n = k\} = \bigcap_{i=0}^{k-1} \{X_{n+i} = 1\} \cap \{X_{n+k} = 0\} \in \mathcal{F}_k$

Car $\forall\, 0 \le i \le k-1$, $\{X_{n+i} = 1\} \in \mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_k$

et $\{X_{n+k} = 0\} \in \mathcal{F}_k$

8

alors N_n est un $\mathcal{F}$-t.a.

2/ $\mathbb{P}(\limsup_n \{N_n = 0\}) = ?$

$\forall n \in \mathbb{N} : w \in \bigcup_{k \geq n} A_k \implies \forall n \in \mathbb{N}, \exists k \geq n : w \in A_k$

حادثة تتحقق مرة n

$\{N_n = 0\} = \{X_n = 0\}$

$\{N_{n+1} = 0\} = \{X_{n+1} = 0\}$

$\mathbb{P}(\{N_n = 0\} \cap \{N_{n+1} = 0\}) = \mathbb{P}(\{N_n = 0\})\, \mathbb{P}(\{N_{n+1} = 0\}) = \frac{1}{4}$

Les evenements $\{N_n = 0\}$ sont independants. De plus $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(\{N_n = 0\}) = +\infty$

Lemme de Borel Cantel.

A_n suit la serie convergente $\Rightarrow \mathbb{P}(\overline{A_n}) = 0$.

Il A_n suite la serie devergente $\Rightarrow \mathbb{P}(A_n) = 1$.

3/ $\mathbb{P}(\overline{\lim} \{N_n = 1\}) = ?$

$\{N_{2n} = 1\} = \{X_{2n} = 1\} \cap \{X_{2n+1} = 0\}$

$\{N_{2n+2} = 1\} = \{X_{2n+2} = 1\} \cap \{X_{2n+3} = 0\}$

Les evenements $\{N_{2n} = 1\}$ sont independents

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\{N_{2n}=1\}) = +\infty.$$

d'où $\mathbb{P}(\overline{\lim}\{N_{2n}=1\})=1$ d'après le lemme de Borell Contelli.

on a : $(\{N_{2n}=1\})_{n\in\mathbb{N}} \subset (\{N_n=1\})_{n\in\mathbb{N}}$

Et $\overline{\lim}\{N_{2n}=1\} \subset \overline{\lim}\{N_n=1\}$

$\Rightarrow 1 = \mathbb{P}(N_{2n}=1) \leq \mathbb{P}(N_n=1) \leq 1$.

d'où $\mathbb{P}(\overline{\lim}\{N_n=1\}) = 1$

$$Var(X_t) = E(X_t^2) - E^2(X_t) = E(X_t^2)$$

$$= E((\alpha_1 X_{t-1} + \varepsilon_t)^2)$$

$$= E(\alpha_1^2 X_{t-1}^2 + \varepsilon_t^2 + 2\alpha_1 X_{t-1}\varepsilon_t)$$

$$= E(\alpha_1^2 X_{t-1}^2) + E(\varepsilon_t^2) + 2\alpha_1 E(\varepsilon_t X_{t-1})$$

$$\ldots ar(X_{t-1}) + \sigma^2$$

$$\ldots - \alpha_1^2 Var(X_{t-1}) = \sigma^2 \Leftrightarrow (1-\alpha_1^2) Var(X_t) = \sigma^2$$

$$\boxed{Var(X_t) = \frac{\sigma^2}{1-\alpha_1^2}}$$

10

الأعمال الموجهة رقم 2

Serie II.

Exo2.

$(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. indépendante.

$\mathbb{P}(Z_n=1)=p$, $\mathbb{P}(Z_n=-1)=1-p$.

$\mathcal{B}_0=\{\phi,\Omega\}$, $\mathcal{B}_n=\sigma(Z_1,\dots,Z_n)$, $n\geq 1$.

$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de v.a. telle que $\forall n\in\mathbb{N}$ $b_n\geq 0$.

et $\exists K>0$, $b_n\leq K$ et b_n et $\mathcal{B}_{n-1}$ - mesurable.

$$S_n = S_0 + Z_1 b_1 + Z_2 b_2 + \dots + Z_n b_n$$
$$= S_0 + \sum_{k=1}^{n} Z_k b_k .$$

proba $= \frac{1}{2}$ حظوظ الربح والخسارة متساوين

if martingale.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $E|S_n| = E|S_0 + \sum_{k=1}^{n} Z_k b_k| \leq$

$\underbrace{|S_0|}_{+} + \sum_{k=1}^{n} E(|Z_k|\underbrace{|b_k|}_{\text{borné}}) \leq S_0 + K\sum_{k=1}^{n} E|Z_n| < \infty$

$\Rightarrow (S_n)$ est intégrable.

11

ii/ mèsurablité

S_0 est b_0 mesurable $\Rightarrow$ B_n mesurable

b_1 est B_0 mesurable $\Rightarrow$ B_n mesurable

donc la multiplication B_n mèsurable

$\Rightarrow$ La somme ~~B_n~~ mès. $\Rightarrow$ S_n est B_n mès.

Il est claire que S_n est B_n - mès.

iii/

Soit $n \in \mathbb{N}$ $\quad E(S_{n+1}/B_n) = S_n$

$\Rightarrow E(S_{n+1} - S_n / B_n) = 0.$

$\Rightarrow E(Z_{n+1} b_{n+1} | B_n) = 0.$

$\Rightarrow b_{n+1} E(Z_{n+1} | B_n).$

$Z_{n+1} \perp\!\!\!\perp B_n \Rightarrow b_{n+1} E(Z_{n+1})$

$E(Z_{n+1}) = 1 \times p + (-1)(1-p) = 2p - 1$

$E(S_{n+1} - S_n | B_n) = b_{n+1}(2p-1)$

2ème

$p = \frac{1}{2}$: $E(S_{n+1} - S_n | B_n) = 0$

$\Rightarrow E(S_{n+1} | B_n) = S_n$, S_n martingale

$p > \frac{1}{2}$ $\quad E(S_{n+1} - S_n | B_n) = b_{n+1}(2p-1) > 0$

12

$\Rightarrow E(S_{n+1}|B_n) > S_n$ sous martingale.

$p < \frac{1}{2}$: $E(S_{n+1} - S_n | B_n) = b_{n+1}(2p-1) < 0.$

$$E(S_{n+1}|B_n) < S_n$$

$\Rightarrow S_n$ sur martingale.

حل الأستاذ

$$E(S_{n+1} - S_n | B_n) = \begin{cases} \leq 0 & p < \frac{1}{2} \\ = 0 & p = \frac{1}{2} \\ \geq 0 & p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$E(S_{n+1}|B_n) = \begin{cases} \leq S_n & p < \frac{1}{2} \\ = S_n & p = \frac{1}{2} \\ \geq S_n & p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une $\begin{cases} \text{sur mart} & \text{si } p < \frac{1}{2} \\ \text{mart} & \text{si } p = \frac{1}{2} \\ \text{sous mart} & \text{si } p > \frac{1}{2} \end{cases}$

. tout app continue $\Rightarrow$ mesurable par rapport la tribu de Borel. X_n més $\Rightarrow$ X_n adapté.

13

Exo3 -

$$(\Omega, \mathcal{F}_n) \xrightarrow{X_n} (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \xrightarrow{h} (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$$

$h \circ X_n = h(X_n) = |x|$ est $\mathcal{F}_n$ _ mesurable

$hx = x^2$.

$h \circ X_n = h(X_n) = x^2$ est $\mathcal{F}_n$ _ mésurable.

est valeur absolu est fct convexe applique le théoreme de Jensen $E(X_n) < \infty$ et f fct convexe

1/ $E[|X_{n+1}| \mid \mathcal{F}_n] \geq |E[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]| = |X_n|$

(X_n) martingale

donc $(|X_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est sous_mart

$$E(X_{n+1}^2 \mid F_n) \geq (E(X_{n+1} \mid F_n))^2 = X_n^2$$

• (X_n^2) est sous martingale

$$0 \leq E((X_{n+1} - X_n)^2 \mid F_n) =$$

$$E(X_{n+1}^2 \mid F_n) - 2E(X_n X_{n+1} \mid F_n) + E(X_n^2 \mid F_n)$$

$$= X_{n+1}^2 - 2X_n E(X_{n+1} \mid F_n) + X_n^2$$

14

$$= E(X_{n+1}^2 | F_n) - 2X_n^2 + X_n^2 = E(X_{n+1}^2 | F_n) - X_n^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow E(X_{n+1}^2 | F_n) \geq X_n^2.$$

4) $(X_n \vee Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale ?

i) $E|X_n \vee Y_n| \leq E(|X_n| + |Y_n|) = E|X_n| + E|Y_n| < +\infty.$

ii) on a $\forall n \in \mathbb{N}$, X_n et Y_n sont F_n - mesurable alors $X_n \vee Y_n$ est F_n - mesurable.

iii) on a :

$$X_{n+1} \vee Y_{n+1} \geq X_{n+1}.$$
$$X_{n+1} \vee Y_{n+1} \geq Y_{n+1}$$

alors : $\begin{cases} E(X_{n+1} \vee Y_{n+1} | F_n) \geq E(X_{n+1} | F_n) = X_n \\ E(X_{n+1} \vee Y_{n+1} | F_n) \geq E(Y_{n+1} | F_n) = Y_n \end{cases}$

alors $E(X_{n+1} \vee Y_{n+1} | F_n) \geq X_n \vee Y_n.$

De i), ii) et iii) $(X_n \vee Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une F - sous martingale.

15

$(X_n \wedge Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sur mart ?

i/ $E|X_n \wedge Y_n| \leq E|X_n| < +\infty$.

ii/ on a $\forall n \in \mathbb{N}$, X_n et Y_n sont $\mathcal{F}_n$ - mes

alors $X_n \wedge Y_n$ est $\mathcal{F}_n$ - mesurable.

iii/ On a : $X_{n+1} \wedge Y_{n+1} \leq X_{n+1}$

$$X_{n+1} \wedge Y_{n+1} \leq Y_{n+1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E(X_{n+1} \wedge Y_{n+1} / \mathcal{F}_n) \leq E(X_{n+1} / \mathcal{F}_n) = X_n \\ E(X_{n+1} \wedge Y_{n+1} / \mathcal{F}_n) \leq E(Y_{n+1} / \mathcal{F}_n) = Y_n \end{cases}$$

alors : $E(X_{n+1} \wedge Y_{n+1} / \mathcal{F}_n) \leq X_n \wedge Y_n$

De i/, ii/ et iii/ $(X_n \vee Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un $\mathcal{F}$ - sur - martingale.

Ex04 $\beta_k \leq M$ (intégrale stochastique)

$$\begin{cases} Z_0 = 0 \\ Z_n = X_n - X_{n-1} \quad n \geq 1 \end{cases}$$

$$Y_n = \beta_0 Z_0 + \beta_1 Z_1 + \cdots + \beta_n Z_n = \sum_{k=1}^{n} \beta_k Z_k$$

16

ii/ $E|Y_n| \le \sum_{k=1}^{n} E|Z_k||B_k| \le M \sum_{k=1}^{n} E|X_k|+|X_{k-1}|$

$< +\infty$.

iii/ Il est claire que Y_n est F_n - mesurable

iiii/ $E(Y_{n+1} - Y_n / F_n) = E(B_{n+1} Z_{n+1} / F_n)$

لي تولد عندنا قاعدة نسقطها قانون

$= B_{n+1} E(Z_{n+1} / F_n) = B_{n+1} \underbrace{E(X_{n+1} - X_n / F_n)}_{\le 0}$

≤ 0.

$\Rightarrow E(Y_{n+1} / F_n) \le Y_n$.

Exo1.

$G_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ G_n \subset F_n$

$E(X_{n+1} / G_n) = E(E(X_{n+1} / G_n) / F_n)$

$= E(E(X_{n+1} / F_n) / G_n)$

$= E(X_n / G_n) = X_n$

17

الأعمال الموجهة رقم 3

Serie 3

EXO1.

1/ Soit X une v.a intégrable et T un temps d'arrêt, Montrer que

$$E(X/\mathcal{F}_n)\mathbb{1}_{\{T=n\}} = E(X/\mathcal{F}_T)\mathbb{1}_{\{T=n\}} \quad p.s.$$

2/ Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale regulière montrer que $X_T = E(X/\mathcal{F}_T)$ et $X_T \in L^1$

3/ Si $T \leq S$ sont deux t.a Montrer que

$$E(X_S/\mathcal{F}_T) = X_T \quad p.s.$$

Sol =

Soit $A \in \mathcal{F}_n$.

$$\int_A E(X/\mathcal{F}_n)\mathbb{1}_{\{T=n\}}\,dP = \int_{A\cap\{T=n\}} E(X/\mathcal{F}_n)\,dP$$

$$\overset{(1)}{=} \int_{A\cap\{T=n\}} X\,dP \overset{(2)}{=} \int_{A\cap\{T=n\}} E(X/\mathcal{F}_T)\,dP$$

$$= \int_A E(X/\mathcal{F}_T)\mathbb{1}_{\{T=n\}}\,dP$$

alors $E(X/\mathcal{F}_n)\mathbb{1}_{\{T=n\}} = E(X/\mathcal{F}_T)\mathbb{1}_{\{T=n\}}$

(1) : car $A\cap\{T=n\} \in \mathcal{F}_n$

(2) car $A\cap\{T=n\} \in \mathcal{F}_T$

18

$E|X_T| < +\infty$

$E|(E(X/\mathcal{F}_T)| \leq E E(|X|/\mathcal{F}_T)$

2/ Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $\mathbb{F}$- mart régulière alors $\exists$ une v.a $X \in L^1$ tq :

$X_n = E(X/\mathcal{F}_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

$$X_T = X_T \mathbb{1}_\Omega = X_T \mathbb{1}_{\bigcup_{n\geq 0}\{T=n\}} = \sum_{n\geq 0} X_T \mathbb{1}_{\{T=n\}}$$

$$= \sum_{n\geq 0} X_n \mathbb{1}_{\{T=n\}} = \sum_{n\geq 0} E(X/\mathcal{F}_n)\mathbb{1}_{\{T=n\}}$$

p.s

$$= \sum_{n\geq 0} E(X/\mathcal{F}_T)\mathbb{1}_{\{T=n\}} = E(X/\mathcal{F}_T)\sum_{n\geq 0}\mathbb{1}_{\{T=n\}}$$

$\underline{X_T \text{ intég}}$

$= E(X/\mathcal{F}_T)$ $\left\{\begin{array}{l} T \text{ borné } \text{ta.} \\ X_{T(1)} \text{ marti régulier} \end{array}\right.$

$* E|X_T| = E|E(X/\mathcal{F}_n)| \leq E(E(|X|/\mathcal{F}_T))$

$= E|X| < +\infty$.

(1) d'après Jenson.

3/ $A \in \mathcal{F}_T$: $E(X_S/\mathcal{F}_T) = E(E(X/\mathcal{F}_S)/\mathcal{F}_T)$

$= E(E(X/\mathcal{F}_T)/\mathcal{F}_S)$

$= E(E(X_S/\mathcal{F}_T)) = E(X_S) = X_S$

$= \underline{E(X/\mathcal{F})}$

$\int_A (E(X_S/\mathcal{F}_T) - X_S)\,dP = 0$ $\Rightarrow E(X_S/\mathcal{F}) = X_\varphi$

19

3/ طريقة أخرى تاع Doob

$T \le S \Rightarrow \mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}_S$, معناه X martin régulière

$$E(X_S / \mathcal{F}_T) \overset{(2)}{=} E(E(X/\mathcal{F}_S)/\mathcal{F}_T) = E(X/\mathcal{F}_T) = X_T \text{ p.s}$$

Exo2 =

on définit le processus arrêté au temps T, $(X_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$ alors $(X_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sur-martingale d'après le théo échantillonnage et donc

$$E(X_{T\wedge n}) \le E(X_0) \quad \text{--- } (1)$$

$$E(X_{T\wedge n}) = E(X_{T\wedge n}\mathbb{1}_{\{T\le n\}}) + E(X_{T\wedge n}\mathbb{1}_{\{T>n\}})$$

$$= E(X_T\mathbb{1}_{\{T\le n\}}) + E(X_n\mathbb{1}_{\{T>n\}})$$

$$\lim_{n\to+\infty} E(\cancel{X}_{T\wedge n}) = \lim_{n\to+\infty} E(X_T\mathbb{1}_{\{T\le n\}})$$

$$\lim_{n\to+\infty} X_T\mathbb{1}_{\{T\le n\}} = X_T\mathbb{1}_{\lim_{n\to\infty}\{T\le n\}} = X_T\mathbb{1}_{\{T\le+\infty\}}$$

$$= X_T\mathbb{1}_{\{T<+\infty\}} + X_T\mathbb{1}_{\{T=+\infty\}}$$

20

$$= X_T \mathbb{1}_{\{T<+\infty\}} + X_\infty \mathbb{1}_{\{T=+\infty\}}$$

$$= \begin{cases} X_T & \text{sur } \{T<+\infty\} \\ X_\infty & \text{sur } \{T=\infty\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow X_T \mathbb{1}_{\{T\le n\}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} X_T \quad p.s$$

et

$$|X_T \mathbb{1}_{\{T\le n\}}| \le |X_T| \in L^2$$

En utilisant le thm de la c.v dominée de Lebesgue.

$$\lim_{n\to+\infty} E(X_{T\wedge n}) = \lim_{n\to+\infty} E(X_T \mathbb{1}_{\{T\le n\}})$$

$$= E\left(\lim_{n\to+\infty} X_T \mathbb{1}_{\{T\le n\}}\right)$$

$$= E(X_T) \quad \text{---} \ (2)$$

De (1) et (2) on obtient.

$$E(X_T) \overset{(2)}{=} \lim_{n\to+\infty} E(X_{T\wedge n}) \overset{(1)}{\le} E(X_0)$$

21

روابط مجتمعاتنا

😇 هذه روابط قنواتنا و مجموعاتنا على التليغرام و الفيسبوك أسفله يسعدنا إنضمامكم إليها 😇

قنوات التليغرام:

- قناة السنة أولى ليسانس

L1 Math (channel)

- قناة السنة الثانية ليسانس

L2 Math (channel)

- قناة السنة الثالثة ليسانس

L3 Math (channel)

- قناة السنة أولى ماستر رياضيات تطبيقية

M1 [Applied Mathematics](channel)

- قناة السنة ثانية ماستر رياضيات تطبيقية

M2 [Applied Mathematics](channel)

مجموعات التليغرام:

- مجموعة السنة ثانية ماستر رياضيات

M2 [Applied Mathematics] (group)

- مجموعة الرياضيات التطبيقية

الرياضيات التطبيقية

مجموعات الفيسبوك:

- مجموعة الرياضيات التطبيقية

الرياضيات التطبيقية

ملاحظة:

هذه روابط حساباتي على اليسار إذا كان لديك استفسار يمكنك مراسلتي على أي منهم حساب التليغرام، بوت التواصل (على تليغرام أيضا) أو الإيميل

أما إذا كنت تريد إرسال ملفات خاصة بأحد مقاييس الرياضيات فيمكنك أيضا مراسلتي على أي واحد فيهم و لكن أرشح لك تطبيق تليغرام خاصة إذا كان حجم الملف كبيرا

- حسابي على تليغرام

Ezzobir

- بوت التليغرام الخاص بالتواصل معنا

Contact Us

- الإيميل

ezzobirb@protonmail.com

لنتعاون و نثري هذا المحتوى

مرحبا عزيزي الطالب هذا القسم خاص بالذي يرغب بالمساهمة في إثراء المحتوى و الوصول إلى الهدف ألا و هو وضع الدروس، الأعمال الموجهة، الفروض و الامتحانات لجميع المقاييس التي يتم تناولها أثناء دراسة الرياضيات في الجامعة الجزائرية

الطريقة جد سهلة أي ملف لديك يخص أحد المقاييس أرسله لي عبر حسابي على تليغرام أو بوت التواصل

لنقل على سبيل المثال قمت باجتياز فرض أو إمتحان قم بالتقاط صورة له و أرسله لي أو لديك دروس أو أعمال موجهة مكتوبة قم بالتقاط صور لهم و أرسلهم لي

أو أنت طالب على سبيل المثال لا على سبيل الحصر غير مهتم بالدراسة و جئت في الأيام الأواخر التي تسبق الإمتحان و قمت بأخذ صور للدروس و الأعمال الموجهة من عند زميلك **الخباش** الذي لا يترك صغيرة و لا كبيرة يكتبها الأستاذ أو يقولها إلا و سجلها فبعد التقاطك للصور من عند زميلك و الدراسة منهم و حصولك على المعدل الذي كنت ترغبه إن شاء الله أرسل هذه الصور لي قبل حذفها أو عمل فورمات نهاية السنة للهاتف لديك

في الأخير ما أردت قوله أخي الطالب هو المهم أن ترسل و أن لا تحقر من المعروف شيئا

و أنا من جهتي سأقوم بفحص الملفات فإذا كانت مجانية و ليس عليها حقوق سأقوم بنشرها على تليغرام و

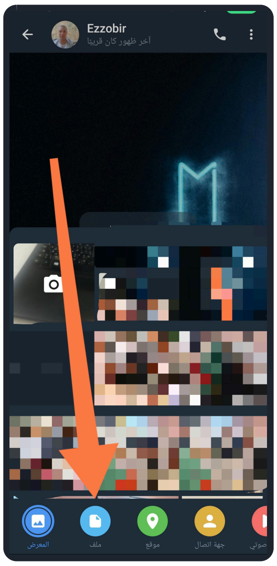
فيسبوك وو ضعها على مستودع الغيتهاب المذكورِين أعلاه في **مهم جدا**

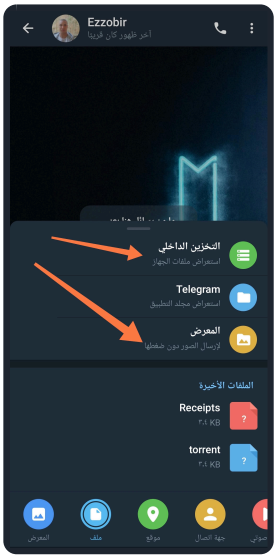
و كيفية إرسال الملفات في تطبيق تليغرام لمن لا يعرف مشروحة أسفله فليلق عليها نظرة

افتح تطبيق تليغرام ثم اكتب في خانة البحث ezzobir ستجد حسابي كما هو مبين في الصورة على اليسار قم بالضغط عليه

ثم بعدها انظرا أسفل الشاشة ستجد زر إرفاق الملفات كما هو مبين في الصورة على اليمين قم بالضغط عليه

ثم هنا احذر أن تضغط على المعرض مباشرة لأنك ستقوم بإرسال الصورة بشكل مضغوط (أي بجودة سيئة) فبدل الضغط على المعرض مباشرة اضغط على إيقونة الملف كما هو مبين في الصورة على اليسار





و الأن في هذه المرحلة

- تضغط على المعرض لتحديد الصور و إرسالهم
- أو في حالة كنت واضعا الصور في مجلد محدد على جهازك تضغط على التخزين الداخلي ثم تنقل للمجلد الذي تريده و تقوم بتحديد الصور و إرسالهم كما هو مبين في الصورة على اليمين

بالتوفيق لجميع الإخوة الكرام