Complément important :

Question :

Peut-on construire des sous-martingales à partir des martingales ou des sous-martingales ?

Réponse : Oui, le Th^{m} suivant nous donne la technique utilisée pour cela.

Théorème 2.1 :

1. Soit $(X_n)_n$ une $(\mathcal{F}_n)_n$ - martingale, et soit φ une fct convexe telle que $\mathbb{E}|\varphi(X_n)| < \infty$ $\forall n$. Alors : $[\varphi(X_n)]_n$ est une $(\mathcal{F}_n)_n$ - ss-martingale.

2. Soit $(X_n)_n$ une $(\mathcal{F}_n)_n$ - sous-martingale et φ une fct convexe croissante telle que $\mathbb{E}|\varphi(X_n)| < \infty$, $\forall n$, Alors : $[\varphi(X_n)]_n$ est une ~~mart~~ sous-martingale p.r.p. à $(\mathcal{F}_n)_n$.

Remarques 2.4.

Si $(X_n)_n$ est une martingale et φ une fct concave définie sur $\mathbb{R}$, alors $[\varphi(X_n)]_n$ devient une surmartingale.

Plusieurs cas particuliers de la fct φ dans le Th^m 2.1 joueront un rôle important dans la suite comme le montre le corollaire ci-dessous.

Corollaire

(1) Si $\infty > p \geq 1$ et $(X_n)_n$ est une mart, tq $\mathbb{E}|X_n|^p < \infty$ pour tout n, alors les processus :

$(|X_n|^p)_n$, $(|X_n|)_n$, $[|X_n| \ln^+ |X_n|]_n$ et e^{X_n} sont des sous-martingales.

où : $\ln^+ x = \max(\ln x, 0)$; $x > 0$.

(2) Si $(X_n)_n$ est une ss-mart, alors $[(X_n - a)^+]_n$ est une ss-mart, (a : c^{te}).

22 (3) $(X_n)_n$ surmart, alors $(X_n \wedge a)_n$ l'est aussi (a : c^{te})

2.4. Transformées des martingales

" La version discrète de l'intégrale stochastique $Y_t = \int_0^t C_s dX_s$, $0 \leq s \leq t$ "

2.4.1. Processus prévisibles : يمكن توقعه

Introduction - Intuition :

En termes des jeux de hasard (Gambling) (également : celles des marchés financiers), الأسواق المالية

supposons en effet qu'un joueur mise (bets) يرهن de manière répétée sur le résultat d'une expérience aléatoire, tel que le jet d'une pce de monnaie (jeu de Pile ou Face).

Une stratégie de jeu $\{C_n : n \geq 1\}$: est une manière de décider la somme misée à chaque tour (partie) [C_n : la mise à la nième partie] en fonction des gains précédents.

Par exemple, le joueur peut décider de doubler la mise à chaque tour, ou de miser une proportion fixée de la somme qu'il a gagnée.

Toute stratégie ne peut pas dépendre des résultats futurs du jeu, par contre elle doit se baser sur l'histoire du jeu i.e. toute l'informat° accumulée jusqu'à l'instant $(n-1)$. C'est le sens intuitif du caractère "prévisible" de C.

Formellement, on dit que C_n doit être $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable d'où vient le terme prévisible

Définition 2.4. Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ une filtration. Une suite de v.a. $(C_n)_{n\geq 1}$ est dite « processus prévisible » si : C_n est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable pour tout $n \geq 1$

2.4.2. Transformées des martingales :

Restons toujours dans le cadre des jeux de hasard et considérons le cas particulier où le joueur gagne 1 DA pour chaque 1 DA misé si le résultat est "Pile" et perd 1 DA pour chaque 1 DA misé sinon : "Face".

On définit :

- X_m : la fortune du joueur à l'instant m ;
- C_m : la somme misée à la $m^{\text{ième}}$ partie ;
- $X_m - X_{m-1}$: le gain (perte) à l'instant m / 1 DA misé ;

∴ Le gain après la $m^{\text{ième}}$ partie est :

gain instantané $\longrightarrow$ $C_m(X_m - X_{m-1})$

اللّحظي
الربح بعد
الزمن m :

- Un joueur suivant la stratégie C aura gagné au temps n (après la $n^{\text{ième}}$ partie) la somme (gain total) :

$$Y_n := (C\circ X)_n := \sum_{m=1}^{n} C_m (X_m - X_{m-1}) \ ;$$

Définition 2.5.

Le processus $[(C\circ X)_n]_{n\geq 0}$ est dit la transformée du processus $(X_n)_{n\geq 0}$ par $(C_n)_{n\geq 1}$.

Remarques 2.5.

(1) C_0 n'existe pas. (pas de mise avant de jouer).

(2) $(C.X)_0 = 0$ (le gain initial est nul).

(3) L'expression $C.X$ est la version disrète de l'intégrale stochastique $\int C dX$

Le résultat suivant affirme qu'il n'existe pas des stratégies gagnantes dans un jeu défavorable (surmartingale) ou simplement équitable (martingale).

D'après Williams (Proba. with. Martingales) :

Un principe fondamental :

You can't beat the system!

signifie : Tu ne peux pas battre le système !

لا يُمكنك التَغلّب على النظام !

تحطيم

Le fondement de ce principe est donné par le théorème suivant :

Théorème 2.2. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$-mart, $(C_n)_{n\geq 1}$ une stratégie.

Si $|C_n|$ est borné $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

alors : $[(C \cdot X)_n]_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$- martingale.

Remarques 2.6.

(1) La condition de bornitude de C_n est essentielle pour que $(C \cdot X)_n$ soit intégrable.

Sens intuitif de cette condition :

Le capital disponible est borné et ainsi les dettes sont limitées.

(2) Si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une surmartingale (resp. sous-martingale) alors à condition de supposer en plus $C_n \geq 0$, on a un résultat similaire : $[(C.X)_n]_{n\geq 0}$ est une surmartingale [resp. sous-martingale).

<u>Preuve</u> (du Théorème 2.2.)

ⓘ <u>Adaptation</u> : (pour $n=0$; $(C.X)_0 = 0 = c^{te}$: $\mathcal{F}_0$-mes).

- On a pour $\forall n \geq 1$:

$$(C.X)_n = \sum_{m=1}^{n} \underbrace{C_m}_{\mathcal{F}_{m-1}\text{-mes. } (C \text{ : prévisible})} (\underbrace{X_m}_{\mathcal{F}_m\text{-mes.}} - \underbrace{X_{m-1}}_{\mathcal{F}_{m-1}\text{-mes.}})$$

et comme $m \leq n$: $\mathcal{F}_{m-1} \subset \mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}_n$; chaque terme est $\mathcal{F}_n$-mes, par conséquent la somme l'est aussi.

(ii) Intégrabilité :

$$\mathbb{E}\left|(C\cdot X)_n\right| = \mathbb{E}\left|\sum_{m=1}^{n} C_m (X_m - X_{m-1})\right|$$

$$\leq \sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}\left|\underbrace{C_m}_{\substack{\text{bornée} \\ \Downarrow \\ \text{intégrable}}} \underbrace{(X_m - X_{m-1})}_{\text{intégrable } ((X_n)_n \text{ : mart})}\right|$$

On a alors : (2nd membre) somme finie de quantités ~~intégrables~~ finies (car intégrables).

(iii) Propriété clé :

$$\mathbb{E}\left[(C\cdot X)_{n+1} / \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[\underbrace{(C\cdot X)_n}_{\mathcal{F}_n\text{-mes}} + \underbrace{C_{n+1}}_{\mathcal{F}_n\text{-mes}} (X_{n+1} - \underbrace{X_n}_{\mathcal{F}_n\text{-mes}}) / \mathcal{F}_n\right]$$

$$= (C\cdot X)_n + C_{n+1} \cdot \left[\underbrace{\mathbb{E}(X_{n+1} / \mathcal{F}_n) - X_n}_{\substack{= \\ 0 \\ \text{car } (X_n)_n : (\mathcal{F}_n)\text{-mart.}}}\right]$$

D'où le résultat.

Conclusion :

On a vu donc qu'une stratégie aussi futée (intelligente) ne permettra pas d'obtenir autre chose qu'une surmartingale si le jeu est défavorable.

Une des stratégies les plus simples consiste à s'arrêter de miser (de jouer) à partir d'un certain temps aléatoire τ. Ce temps doit être décidé en fonctions de valeurs déjà observées :
Le fait que $\tau = n$ ou non, ne doit dépendre que de $X_0, X_1, \dots, X_n$. Ce doit donc être un temps d'arrêt (t.a.), qui va être étudié dans le chapitre suivant.