

Examen de Files d'Attente

Exercice1 : On considère un système $M/M/1$ où des usagers arrivent avec un taux variable proportionnel à l'inverse du nombre d'usagers dans le système : $\lambda_n = \frac{\theta}{1+n}$, $\theta > 0$. Le taux de service est $\mu > 0$.

- Montrer que le système est ergodique. Ecrire P_n en fonction de P_0 et en déduire que la distribution stationnaire est une distribution de Poisson.
- Trouver le nombre moyen d'usagers dans le système.
- Trouver le taux moyen d'arrivée et en déduire, par la formule de Little, le temps moyen passé par usager dans le système et la longueur moyenne de la file d'attente.

Exercice2 : On considère un système d'attente dans lequel deux types de clients viennent se faire servir à la même unité de service. Les clients de type A arrivent selon un processus de poisson de taux λ_A , ceux de type B arrivent indépendamment des clients de type A et selon un processus de poisson de taux λ_B . Les temps de service sont exponentiels de paramètre μ et sont indépendants du type de clients servis.

- On suppose que la discipline est FIFO, quel que soit le type de client. Quel est le temps moyen de séjour d'un client de type A ?
- On suppose maintenant que les clients de type A sont prioritaires: Si un client de type A arrive alors qu'un client de type B est en train de se faire servir, le service de ce dernier est interrompu au profit du client A, et ne reprend qu'après qu'il n'y ait plus de clients de type A présents. Quel est alors le temps moyen de séjour d'un client de type A. En déduire le temps moyen de séjour d'un client de type B.

Exercice3 : Soit un service de reproduction louant 3 photocopieurs identiques. Ils sont tous utilisés lorsqu'ils sont en état de marche et, en cas de panne, un réparateur est appelé, toujours le même. Chaque photocopieur, lorsqu'il fonctionne, a un taux de panne λ . L'occurrence de ces pannes suit un processus de poisson et ceci indépendamment des autres photocopieurs. Les durées de réparation sont des v.a.i exponentielles de moyenne $\frac{1}{\mu}$.

- En considérant $X(t)$ le nombre de photocopieurs en panne à l'instant t , et en posant $P_n(t) = P(X(t) = n)$, établir les équations de Chapman-Kolmogorov et déterminer l'expression des probabilités stationnaires. Déterminer le nombre moyen de photocopieurs en bon état.
- Chaque photocopieur peut lorsqu'il marche effectuer, en moyenne, 600 photocopies/h. (chaque photocopie rapportant 5 DA) et le coût horaire de location d'un photocopieur est C . (Ce coût comprend le coût de réparation). La société de location propose deux politiques de location :
 P_1 : $\varrho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{2}$ et $C=10$ DA ;
 P_2 : $\varrho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{5}$ et $C=20$ DA (service de réparation plus rapide).
Quelle est la meilleure politique ?

Bon courage !

10