1. Prouvez qu'un graphe avec plus de six sommets de degré impair ne peut pas être décomposé en trois chemins.

2. Soit G un graphe acyclique (et donc nécessairement simple). Montrer que G possède au plus $n-1$ arêtes.

3. Montrer qu'un graphe est biparti si et seulement si il ne contient pas de chaîne fermée de longueur impair.

4. (a) Montrer qu'un graphe G est fortement connexe si et seulement si G est connexe et tout arc est dans un circuit.
   (b) Le résultat est-il encore vrai si on remplace la condition par : G est connexe et tout sommet est dans un circuit ?
   (c) Est-il vrai que si dans un graphe G on a $x \to y$ et $y \to x$ alors il existe un circuit élémentaire passant par x et y ?

5. Soit $G=(V,E)$ un graphe orienté avec $V=\{1,2,\cdots,n\}$. On considère la matrice $A=(a_{i,j})$ définie par

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & si \quad i \to j \\ 0 & sinon \end{cases}$$

On considère l'algorithme suivant

Algorithm 1 Ex4

```
for i = 1, ··· , n do
    a_{i,i} = 1
    for j = 1, ··· , n do
        for k = 1, ··· , n do
            a_{j,k} = max {a_{j,k}, a_{j,i}, a_{i,k}}
        end for
    end for
end for
```

(a) Appliquer l'algorithme au graphe suivant

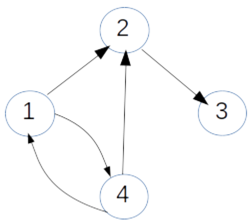

FIGURE 1 – Graphe 1

(b) Vérifier que, après avoir appliquer l'algorithme, on a $a_{i,j}=1$ si et seulement si $i \to j$.

(c) Comment trouver les composantes fortement connexes avec cet algorithme.

6. Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Le sommet v est appelé point d'articulation de G, si $G \setminus \{v\}$ contient plus de composantes connexes que G.
   (a) Trouver les points d'articulation du graphe suivant.

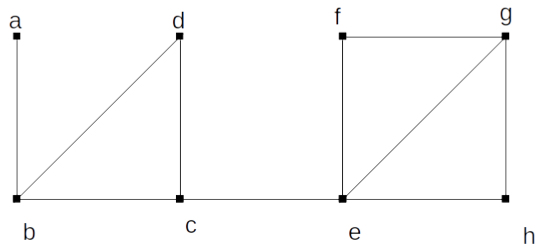

FIGURE 2 – Graphe 2

   (b) Montrer que le graphe K_n n'a pas de point d'articulation. On supposera le graphe G connexe. Un sous-ensemble V' de V est appelé ensemble d'articulation si le graphe G privé de V' et de toutes les arêtes incidentes à V' n'est plus connexe.
   (c) Montrer que $\{b, c, e\}$ est un ensemble d'articulation du graphe suivant

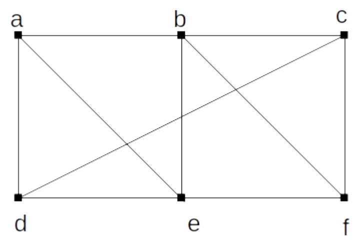

FIGURE 3 – Graphe 3

   (d) Montrer que tout graphe connexe non complet possède un ensemble d'articulation.
   (e) Soit G un graphe. On définit $\kappa(G)$ comme étant le nombre minimal de sommet que l'on doit enlever à G pour obtenir soit un graphe non connexe soit un graphe à un seul sommet.
   Montrer que $\kappa(G) = n - 1$ si et seulement si $G = K_n$.
   (f) Si $\kappa(G) = 0$, que peut-on dire sur G ?
   (g) De la même manière, une arête est appelée arête d'articulation si le graphe obtenue en enlevant cette arrête n'est plus connexe. Un ensemble de coupure est un sous-ensemble E' de E tel que le graphe $G' = (V, E')$ n'est pas connexe. On définit alors $\lambda(G)$ comme étant le nombre minimal d'arêtes à enlever pour obtenir soit un graphe non connexe soit un graphe à un seul sommet.
   Calculer $\lambda(G)$ pour Graphe(2) et Graphe(4).
   (h) On suppose que G a n sommets et que G est simple. Montrer que $\lambda(G) = n - 1$ si et seulement $G = K_n$.
   (i) Montrer que $\kappa(G) \leq \lambda(G)$.
   (j) Montrer que $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \min_{v \in V} \deg(v)$.

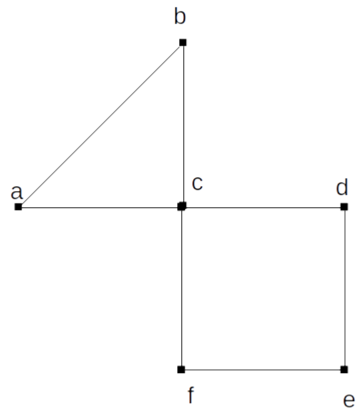

FIGURE 4 – Graphe 4

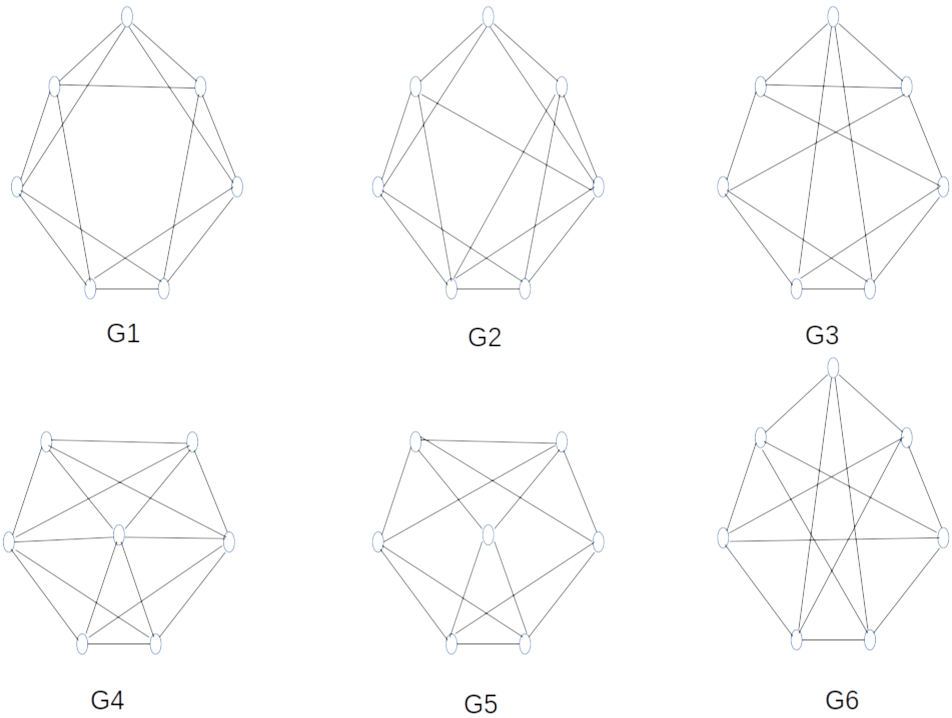

FIGURE 5 – Graphe 5

7. Déterminer quelles paires de graphes ci-dessous Graphe(5) sont isomorphes.

8. Soit G un graphe de circonférence 4 dans lequel chaque sommet a un degré k. Prouvez que G a au moins $2k$ sommets. Déterminez tous ces graphes avec exactement $2k$ sommets.

1. Prouvez qu'un graphe avec plus de six sommets de degré impair ne peut pas être décomposé en trois chemins.

Solution: Nous prouvons la contraposition, c'est-à-dire "si un graphe peut être décomposé en trois chemins, alors il a au plus six sommets de degré impair". Soit donc G un graphe qui peut être décomposé en trois chemins P_1, P_2 et P_3. Les sommets internes d'un chemin ont le degré 2. Par conséquent, si un sommet $v \in V(G)$ est une extrémité de aucun des chemins P_1, P_2, P_3 alors v a un degré pair. En d'autres termes, si v a un degré impair, alors il doit être une extrémité d'au moins l'un des chemins P_1, P_2, P_3. Ces chemins ont au total 6 extrémités, il y a donc au plus 6 sommets de degré impair.

2. Soit G un graphe acyclique (et donc nécessairement simple). Montrer que G possède au plus $n-1$ arêtes.

Solution: On procede par recurrence sur le nombre de sommets n de G.
Si $n = 1$, alors $|E| = 0$ et le resultat est vrai. Supposons que tout graphe acyclique contenant n sommets possede au plus $n-1$ aretes. Soit $G = (V, E)$ un graphe acyclique tel que $|V| = n+1 > 2$. On veut montrer que $|E| \leq n$. On peut supposer que $|E| > 1$. Soit $x, y \in V$ tel que $[x, y] \in E$ et $G' = (V, E \setminus [x, y])$ le graphe partiel. Le graphe G' ne peut pas etre connexe, sinon il existerait une chaine de x a y dans G' qui donnerait un cycle dans G en rajoutant l'arete $[x, y]$. Soit $G_1 = (V_1, E_1), \ldots, G_k = (V_k, E_k)$ les composantes connexes de G'.
Par recurrence, on a

$$|E| = \sum_{i=1}^{k} |E_i| + 1 \leq \sum_{i=1}^{k} (|V_i| - 1) + 1 = n + 1 - k + 1 \leq n$$

3. Montrer qu'un graphe est biparti si et seulement si il ne contient pas de chaîne fermée de longueur impair.

Solution: Soit $G = (V, E)$ un graphe biparti. Soit $\mathcal{C}$ une chaîne de longueur impaire et soit $(v_0, \ldots, v_{2n+1})$ la suite de sommet associé à $\mathcal{C}$. On suppose que $v_0 \in V_1$. Puisque G est biparti et $(v_i, v_{i+1}) \in E$ on voit facilement que $v_k \in V_2$ si k est impair et $v_k \in V_1$ si k est pair. Ainsi, $v_{2n+1} \in V_2$ et $\mathcal{C}$ n'est pas fermée.
Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe ne contenant pas de chaîne fermée de longueur impaire et soit $u \in V$. On pose

$$V_1 = \Big\{ v \in V | \exists \text{ } une \text{ } cha\hat{i}ne \text{ } de \text{ } longueur \text{ } impaire \text{ } de \text{ } u \text{ } \grave{a} \text{ } v \text{ } dans \text{ } G \Big\}$$

$$V_2 = \Big\{ v \in V | \exists \text{ } une \text{ } cha\hat{i}ne \text{ } de \text{ } longueur \text{ } paire \text{ } de \text{ } u \text{ } \grave{a} \text{ } v \text{ } dans \text{ } G \Big\}$$

On a alors $V = V_1 \cup V_2$ puisque G est connexe
$V_1 \cap V_2 = \emptyset$. En effet s'il existe $v \in V_1 \cap V_2$ alors on peut trouver une chaîne $\mathcal{C}_p$ de longueur paire et une chaîne $\mathcal{C}_i$ de longueur impaire allant de u vers v. Mais alors on aurait une chaîne fermée de longueur impaire $u \xrightarrow{\mathcal{C}_p} v \xrightarrow{\mathcal{C}_i} u$.
Il n'existe pas d'arête entre deux sommets de V_1. En effet, soit $v, w \in V_1$. Il existe $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux chaînes de longueur paire joignant u à v et w respectivement. Si $a = [v, w] \in E$ alors

$$u \xrightarrow{\mathcal{C}_1} v \xrightarrow{a} w \xrightarrow{\mathcal{C}_2} u$$

est un cycle de longueur impair. C'est une contradiction.
Il n'existe pas d'arête entre deux sommets de V_2. En effet, soit $v, w \in V_2$. Il existe $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux chaînes de longueur impaire joignant u à v et w respectivement. Si $a = [v, w] \in E$ alors

$$u \xrightarrow{\mathcal{C}_1} v \xrightarrow{a} w \xrightarrow{\mathcal{C}_2} u$$

est une chaîne fermée de longueur impair. C'est une contradiction. On voit donc que G est biparti.

4. (a) Montrer qu'un graphe G est fortement connexe si et seulement si G est connexe et tout arc est dansun circuit.

Solution: On supposera que G est fortement connexe. Par définition, G est connexe. Soit (x, y) un arc de G. Comme G est fortement connexe, il existe un chemin de y vers x. Si on ajoute à la fin de ce chemin l'arc (x, y) on obtient un circuit contenant x et y.
Réciproquement, supposons que G est connexe et que tout arc est dans un circuit. Soient $x, y \in V$. Il existe un chemin non orienté de x vers y. Supposons qu'il existe dans ce chemin un arc (a, b) "dans le mauvais sens". Comme (a, b) appartient à un circuit, il existe un chemin $\mathcal{C}$ de b vers a. On remplace alors (a, b) dans le chemin non-orienté de x vers y par le chemin $b \xrightarrow{\mathcal{C}} a$. On applique cette transformation à tous les arcs qui sont dans le mauvais sens. On obtient un chemin de x vers y. G est donc fortement connexe.

(b) Le résultat est-il encore vrai si on remplace la condition par : G est connexe et tout sommet est dans un circuit ?

Solution: Non.

(c) Est-il vrai que si dans un graphe G on a $x \to y$ et $y \to x$ alors il existe un circuit élémentaire passant par x et y ?

Solution: Non.

5. Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté avec $V = \{1, 2, \cdots, n\}$. On considère la matrice

$A = (a_{i,j})$ définie par

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & si \quad i \to j \\ 0 & sinon \end{cases}$$

On considère l'algorithme suivant

Algorithm 1 Ex4

for $i = 1, \cdots, n$ **do**
  $a_{i,i} = 1$
  for $j = 1, \cdots, n$ **do**
    for $k = 1, \cdots, n$ **do**
      $a_{j,k} = \max\{a_{j,k}, a_{j,i}, a_{i,k}\}$
    end for
  end for
end for

(a) Appliquer l'algorithme au graphe suivant

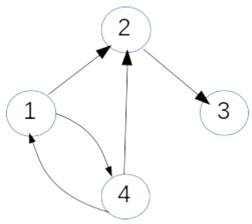

FIGURE 1 – Graphe 1

Solution: Notons A_N la matrice obtenue après avoir parcouru la première boucle en i N-fois.

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Vérifier que, après avoir appliquer l'algorithme, on a $a_{i,j} = 1$ si et seulement si $i \to j$.

Solution: On notera $a_{i,j}^N$ les coefficients de A_N. Montrons par récurrence sur N que $a_{i,j}^N = 1$ si et seulement il existe un chemin allant de i vers j et ne passant que par des sommets de valeur inférieure ou égale à N (hormis bien sur les extrémités).

Si $k = 0$, c'est clair puisque A_0 est la matrice d'adjacence du graphe. Montrons que $a_{i,j}^{N+1} = 1$ si et seulement si il existe un chemin de i vers j ne passant que par des sommets de valeur inférieure ou égale $N + 1$. Remarquons tout d'abord que

$$a_{i,j}^{N+1} = 1 \Longleftrightarrow a_{i,j}^{N} = 1, a_{i,N+1}^{N} a_{N+1,j}^{N} = 1.$$

On suppose que $a_{i,j}^{N+1} = 1$. Si $a_{i,j}^{N} = 1$, alors par récurrence, il existe un chemin de i vers j ne passant que par des sommets de valeur inférieure ou égale à N et donc aussi à inférieure ou égale $N + 1$. Si $a_{i,N+1}^{N} a_{N+1,j}^{N} = 1$ alors $a_{i,N+1}^{N} = 1$ et $a_{N+1,j}^{N} = 1$. Par récurrence, il existe un chemin de $i \to N + 1$ ne passant que par des sommets $\leq N$ et un chemin $N + 1 \to j$ ne passant que par des sommets $\leq N$. Ainsi il existe bien un chemin de i vers j ne passant que par des sommets $\leq N + 1$.

Réciproquement supposons qu'il existe un chemin de i vers j ne passant que par des sommets $\leq N + 1$.

Soit $i = i_0 \to i_1 \ldots \to i_n = j$ un chemin de longueur minimale allant de i vers j tel que $i_r \leq N + 1$ pour tout r. On remarque que, par minimalité, tous les i_r sont distincts. Soit i_m le sommet de valeur maximale dans ce chemin. Si $i_m < N$ alors par récurrence on a $a_{i,j}^{N} = 1$ et on obtient $a_{i,j}^{N+1} = 1$ dans ce cas. Supposons donc que $i_m = N + 1$. On a alors un chemin de i vers $N + 1$ ne passant que par des sommets $< N + 1$ et un chemin de $N + 1$ vers j ne passant que par des sommets $< N + 1$. On en déduit par récurrence que $a_{i,N+1}^{N} = 1$ et $a_{N+1,j}^{N} = 1$ et donc $a_{i,N+1}^{N} a_{N+1,j}^{N} = 1$ et on voit que $a_{i,j}^{N+1} = 1$.

(c) Comment trouver les composantes fortement connexes avec cet algorithme.

Solution: Il suffit de vérifier que la matrice A ne contient que des 1 à la fin de l'algorithme.

6. Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Le sommet v est appelé point d'articulation de G, si $G \setminus \{v\}$ contient plus de composantes connexes que G.

(a) Trouver les points d'articulation du graphe suivant.

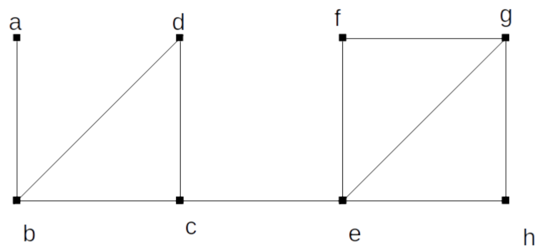

FIGURE 2 – Graphe 2

Solution: On trouve facilement que les points d'articulation sont b, c et e.

(b) Montrer que le graphe K_n n'a pas de point d'articulation. On supposera le graphe G connexe. Un sous-ensemble V' de V est appelé ensemble d'articulation si le graphe G privé de V' et de toutes les arêtes incidentes à V' n'est plus connexe.

Solution: Si on supprime un sommet de K_n on obtient K_{n-1}, qui est connexe. Il s'ensuit que K_n ne possède pas de point d'articulation.

(c) Montrer que $\{b, c, e\}$ est un ensemble d'articulation du graphe suivant

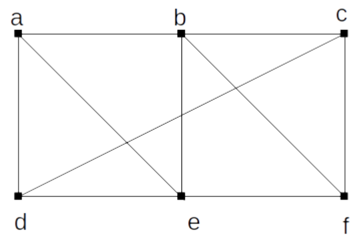

FIGURE 3 – Graphe 3

Solution: C'est une simple vérification.

(d) Montrer que tout graphe connexe non complet possède un ensemble d'articulation.

Solution: Supposons que G n'est pas complet et que G contient n sommets. Alors il existe un sommet v qui n'est pas connecté à tous les autres sommets. Par exemple, on a $(v, w) \notin E$. Si on supprime tous les sommets différents de u et w on obtient un graphe avec deux sommets et sans arêtes, donc non-connexe. Et on a bien trouvé un ensemble d'articulation $V - \{v, w\}$.

(e) Soit G un graphe. On définit $\kappa(G)$ comme étant le nombre minimal de sommet que l'on doit enlever à G pour obtenir soit un graphe non connexe soit un graphe à un seul sommet.
Montrer que $\kappa(G) = n - 1$ si et seulement si $G = K_n$.

Solution: Soit G un graphe a n sommets. Si $G = K_n$ alors $\kappa(G) = n - 1$. En effet si on supprime n'importe quel sous-ensemble de sommets de cardinal $k \leq n - 2$, on obtient le graphe K_{n-k} qui est connexe. De plus d'après 4., si G n'est pas complet il possède un ensemble d'articulation de cardinal $n - 2$ et donc $\kappa(G) \leq n - 2$.

(f) Si $\kappa(G) = 0$, que peut-on dire sur G ?

Solution: Si $\kappa(G) = 0$ alors G n'est pas connexe.

(g) De la même manière, une arête est appelée arête d'articulation si le graphe obtenue en enlevant cette arrête n'est plus connexe. Un ensemble de coupure

est un sous-ensemble E' de E tel que le graphe $G' = (V, E')$ n'est pas connexe. On définit alors $\lambda(G)$ comme étant le nombre minimal d'arêtes à enlever pour obtenir soit un graphe non connexe soit un graphe à un seul sommet.
Calculer $\lambda(G)$ pour Graphe(2) et Graphe(4).

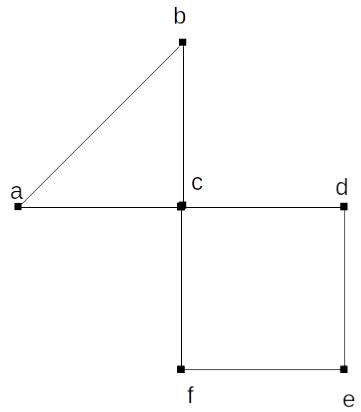

FIGURE 4 – Graphe 4

Solution: On vérifie facilement que $\lambda(G_1) = 1$ et $\lambda(G_2) = 2$.

(h) On suppose que G a n sommets et que G est simple. Montrer que $\lambda(G) = n - 1$ si et seulement $G = K_n$.

Solution: Montrons que $\lambda(K_n) = n - 1$. Soient a, b deux sommets de K_n. Notons $a = v_0, v_1, \ldots, v_n = b$ les sommets de K_n. Alors il existe $n-1$ chemins disjoints n'ayant aucune arêtes en commun allant de a vers b : le chemin (v_0, v_n) et tous les chemins de la forme (v_0, v_i, v_n) pour $1 \leq i \leq n - 1$. Ainsi, pour que a et b ne soit plus joignable par un chemin il faut supprimer au moins $n-1$ arêtes. Ceci montre que $\lambda(K_n) = n-1$. Si G satisfait $\lambda(G) = n-1$. Alors G est nécessairement complet, en effet si G possède un sommet de degré inférieur ou égale à $n - 2$ alors l'ensemble des arêtes adjacentes à v serait un ensemble de coupure de cardinal $n - 2$. On en déduit que G est complet puisque G est simple.

(i) Montrer que $\kappa(G) \leq \lambda(G)$.

Solution: Soit $G = (V, E)$ avec $|V| = n$. On sait que $\kappa(G) \leq n - 1$. Soit C un ensemble de coupure minimale. Si on supprime C on obtient un graphe non connexe, en particulier il existe un sous-ensemble non-vide S de V qui n'est plus connecté à son complémentaire $S' = V - S$. Si $(x, y) \in E$ pour tout $(x, y) \in S \times S'$ alors $C \geq |S| \cdot |S'|$ et comme $|S|, |S'| \geq 1$ et $|S| + |S'| = n$ on a $|C| \geq n - 1$. Supposons donc qu'il existe $(x, y) \in S \times S'$ tel que $(x, y) \notin E$. On considère alors l'ensemble T défini par

$$T := (N(x) \cap S') \cup \{u \in S - \{x\} | \exists (u, w) \in E \text{ } avec \text{ } w \in S'\}$$

On voit tout d'abord que $y \notin T$ puisque $y \notin N(x)$ et $y \notin S$. Ensuite, x et y sont connectés dans G mais pas incident, ainsi il existe une chaîne C_S (respectivement de $C_{S'}$) de S (respectivement de S') et $v \in S, w \in S'$ tel que

$$x \xrightarrow{C_S} v \xrightarrow{[v,w]} w \xrightarrow{C_{S'}} y$$

Et donc T est un ensemble d'articulation de G puisque x et y ne peuvent pas être connectés dans le graphe induit par $V \backslash T$. Finalement, pour que C déconnecte S et S' il faut enlever au moins $|T|$ arêtes. En effet chaque sommet de T correspond à une arête de S vers S'. On a donc $|T| \leq |C|$ d'ou le résultat.

(j) Montrer que $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \min_{v \in V} \deg(v)$.

Solution: C'est clair : si on enlève toutes les arêtes incidentes à v, et il en y a $d(v)$, on déconnecte le graphe.

7. Déterminer quelles paires de graphes ci-dessous Graphe(5) sont isomorphes.

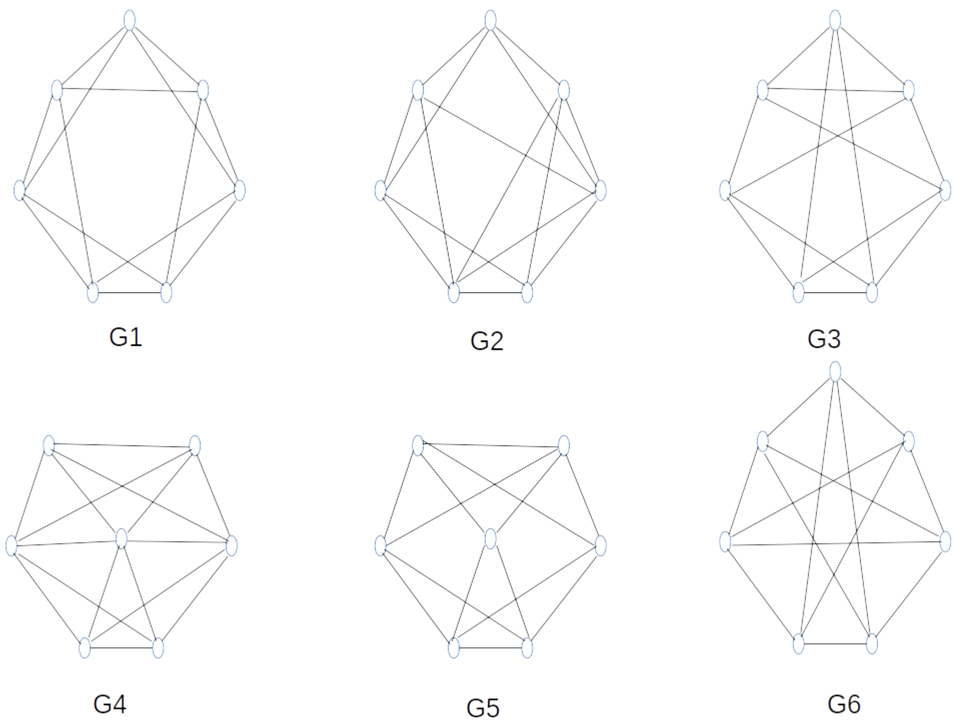

Figure 5 – Graphe 5

8. Soit G un graphe de circonférence 4 dans lequel chaque sommet a un degré k. Prouvez que G a au moins $2k$ sommets. Déterminez tous ces graphes avec exactement $2k$

sommets.