**Université Mohammed kheider Biskra**
**Département de Mathématiques**
**$1^{ième}$ année Master: 2021 - 2022**
**Module : Distributions et EDP**
**TD : 2**

**Exercice 1** *On pose, pour* $\varphi \in D(\mathbb{R})$, $< vp\frac{1}{x}, \varphi >= \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$

1. *Montrer que* $vp\frac{1}{x}$ *est une distribution, d'ordre au plus* 1.
2. *Montrer que* $vp\frac{1}{x}$*est exactement d'ordre* 1.

**Exercice 2** *Montrer que l'application* $T : D(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ *définie par*
$< T, \varphi >= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \varphi(n)$ *est une distribution d'ordre* 0 *sur* $\mathbb{R}$

**Exercice 3** *Montrer que l'application* $T : D(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ *définie par*
$< T, \varphi >= \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [\varphi(n) - \varphi(0)]$ *est une distribution d'ordre infrieur ou égale à* 1 *sur* $\mathbb{R}$.

**Exercice 4** *Pour tout* $\varphi \in D(\mathbb{R})$, *on pose*

$$< T, \varphi >= \int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\left(x^2+y^2\right)} \varphi(\sin(xy))\, dxdy$$

1. *Montrer que* $T$ *est une distribution.*
2. *Quel est le support de* $T$?

**Exercice 5** *Considérons les fonctions suivantes:*
$H(x) = \begin{cases} 1, \ si \ |x| < \frac{1}{2} \\ 0, \ si \ |x| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$, $Sign(x) = \frac{|x|}{x}$
*Calculer* $H'(x)$, $Sign'(x)$ *dans* $D'(\mathbb{R})$

**Exercice 6**
1. *Montrer que* $\ln|x| \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ *et calculer* $(\ln|x|)'$ *dans* $D'(\mathbb{R})$
2. *Soit* $x^+ = \max(x, 0)$, *calculer* $T'_{x^+}$ *( la distribution associée à* $x^+$*)*

3. *Soit* $\varphi \in D(\mathbb{R})$ *.Calculer* $< x^2\delta'', \varphi >$, *en déduire une solution de l'equation* $x^2T = \delta$.

**Exercice 7** *Calculer au sens des distributions, et les dérivées successives de la fonction* $|x|$.

**Exercice 8** *Soient* $H(x)$*la fonction d'Heaviside, et* $\delta$ *la distribution de Dirac*

1. *Calculer* $(H\sin)'$ *et* $(H\cos)'$ *dans* $D'(\mathbb{R})$ *En déduire une solution générale de* $y'' + y = \delta$

2. *Montrtrer que*

**a)**

$$\left(\frac{d}{dx} - \alpha\right) H(x)\, e^{\alpha x} = \delta.$$

**b)**

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2\right) \frac{H(x)\sin \omega x}{\omega} = \delta.$$

**Exercice 9** *Déterminer les limites, dans* $D'(\mathbb{R})$, *des suites de distributions suivantes:*

1. $T_n = n\left(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}}\right)$.

2. $T_n = n^2\left(\delta_{\frac{1}{n}} + \delta_{-\frac{1}{n}} - 2\delta_0\right)$

**Exercice 10** *Soit* $f_n$ *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f_n = \begin{cases} n \ sur \ \left[0; \frac{1}{n}\right] \\ 0 \ sinon \end{cases}$$