Université Badji Mokhtar - Annaba
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

$2^{ème}$ année Master Proba-Stat
Files d'attente
2018/2019

Série 1

Exercice 1 Soit un processus de naissance et de mort dont les taux de transition sont

a) $\lambda_n = \lambda q^n, 0 < q < 1, \lambda > 0, n \geq 0;$
$\mu_n = \mu, \mu > 0, n > 0.$

b) $\lambda_n = \frac{\lambda}{n+1}, n \geq 0;$
$\mu_n = \mu, n > 0, \mu_0 = 0.$

Déterminer la distribution stationnaire du processus en question.

Exercice 2 Un curieux s'intéresse à la cabine téléphonique située au bas de son immeuble. Après plusieurs mois d'observation acharnée, il est capable d'affirmer que la manière dont les gens arrivent pour téléphoner suit un processus de Poisson dont le taux d'arrivée est de 5 personnes par heure. Il a également calculé que la durée d'une conversation correspond à une variable aléatoire exponentielle de moyenne 10 minutes.

1. En moyenne, quel est le nombre de personnes qui attendent devant la cabine ?
2. Quel est le temps moyen d'attente devant la cabine ?
3. La compagnie des téléphones désire ajouter une deuxième cabine aux endroits où celle qui se trouve est occupée plus de 75 pourcents du temps. Doit-elle ajouter une devant cet immeuble ?

Exercice 3 Trouver les distributions de la durée d'attente d'un client dans la file d'attente et de la durée de séjour d'un client dans le système M/M/1. Démontrer le même résultat pour la durée de séjour cependant à l'aide de la transformée de Laplace-Stieltjes.

Exercice 4 Un organisme public est ouvert, chaque jour ouvrable, de 9h à 17h sans interruption. Il accueille en moyenne 64 usagers par jour ; un guichet sert uniquement à traiter le dossier de chaque usager. Une étude statistique a permis de conclure que la durée aléatoire des services suit une loi exponentielle de moyenne 2.5 minutes et que les arrivées des usagers forment un processus de Poisson. On suppose que le régime stationnaire est rapidement atteint.

1. Donner la notation de Kendall de ce système de files d'attente ; le temps moyen passé à attendre ; le temps moyen passé dans l'organisme pour chaque usager.
2. Quelles sont les probabilités qu'il n'arrive aucun client entre 15h et 16h ? Que 6 clients arrivent entre 16h et 17h ?
3. Quelle est la probabilité d'observer une file d'attente de 4 usagers, derrière l'usager en cours de service ?
4. Quelle est la probabilité qu'un usager passe plus de 15 minutes dans l'organisme ?

Exercice 5

1. L'arrivée des clients vers une banque obéit à un flux poissonnien avec le taux de 9 clients par heure. La durée de service par client est considérée comme une variable aléatoire exponentielle de moyenne 10 minutes. Quel est le nombre minimal a de guichets nécessaires pour assurer un régime stationnaire de ce processus ? Quel est le temps moyen d'attente si le nombre de guichets est $c = a$ et $c = a + 1$?
2. Calculer E[Y], où Y est le nombre de serveurs inoccupés d'un système M/M/c en termes de l'intensité du trafic global. Est-ce que le nombre moyen de serveurs occupés dépend de c ?

Serie 1

Exo 1

$\lambda_n = \lambda q^n$, $0 < \mu < 1$, $\lambda > 0$, $\mu \geq 0$, $\mu_n = \mu$, $\mu > 0$, $n > 0$.

La distribution stationnaire d'un processus de naissance et de mort

a)

$$P_n = \frac{\lambda \times \lambda q \times \lambda q^2 \times \dots \times \lambda q^{n-1}}{\mu \times \mu \times \dots \times \mu} P_0$$

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}}$$

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}} P_0 \text{ ; avec } P_0$$

$$P_0 = \left[1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} + \dots + \frac{\lambda_0 \times \dots \times \lambda_{n-1}}{\mu_1 \times \dots \times \mu_n}\right]^{-1}$$

$$P_0 = \left[1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 q + \dots + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n q^{n-1} + \dots\right]^{-1}$$

b)

$\lambda_n = \dfrac{\lambda}{n+1}$ $\quad n \geq 0$

$\mu_n = \mu$, $n > 0$, $\mu_0 = 0$

$$P_n = \frac{\lambda \cdot \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{\lambda}{3} \dots \frac{\lambda}{n}}{\mu \cdot \mu \cdot \mu \dots \mu} P_0$$

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} P_0$$

$$P_0 = \left[1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \frac{1}{2!} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \frac{1}{3!} + \dots + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} \dots\right]^{-1}$$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!}\right] = e^{-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}$$

$$\boxed{P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} e^{-\frac{\lambda}{\mu}}}$$

Exo2 on est dans le cas M | M | 1

avec $\lambda_n = \lambda = 5$ pers / h $\forall n$

et $\mu_n = \mu$ $\forall n$; $\frac{1}{\mu} = 10 \text{ min}/_{pers} = \frac{1}{6}$ h / pers

$\Rightarrow \mu = 6$ pers / h.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{6}$$

$$\bar{n}_f = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{25}{6} = 4{,}16 \text{ pers}$$

$$\bar{W} = \frac{\bar{n}_f}{\lambda} = \frac{5}{6} = 0{,}83 \text{ h} \simeq 50 \text{ min}$$

3) comme $\rho = \frac{5}{6} = 0{,}83$ alors la cabine est occupée à 83 % du tps. donc la compagnie doit ajouter une 2ème cabine.

Exo3

W : durée d'attente d'un client

$\mathbb{P}(0 \leq W \leq t) = ?$

$\mathbb{P}(0 \leq W \leq t) = \mathbb{P}(W = 0) + \mathbb{P}(0 < W \leq t)$

$= P_0 + \mathbb{P}(0 < W \leq t)$

on a : $P_0 = 1 - \rho$

$\mathbb{P}(0 < W \leq t) = \mathbb{P}(\{0 < W \leq t\} \cap \{A_n\}) =$

$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(0 < W \leq t \mid A_n) \cdot P(A_n)$

ou : $(A_n$: il y a n clients dans le système alors : $\mathbb{P}(A_n) = P_n = \rho^n(1-\rho)$

Remarque : (Indication)

Dans la theorie des F.A, on attend que n phénomenes successifs surviennent et les durées séparants leur appariteront supposées independantes et de loi $\mathcal{E}(\mu)$. Alors le Tps d'attente total est de loi $\Gamma(n, \mu)$

+ comme n est entier, alors Γ est nomée Erlang

$T \sim \Gamma(n, \mu)$

$$f_T(t) = \frac{\mu^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-\mu t} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$$

$$f_T(t) = \mu \frac{(\mu t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\mu t} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$$

$\mathbb{P}(0 < W \leq t) = \mathbb{P}(\{0 < W \leq t\} \cap \{A_n\}) =$

la proba q $W \in]0, t]$ sachant qu'il y a n clients

$\mathbb{P}(0 < W \leq t) = \sum_{n=0} \int_0 \frac{\mu(\mu s)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\mu s} ds \, \rho^n (1-\rho)$

on trouve $\rho(1 - e^{-\mu t(1-\rho)})$

c'est une exp de taux $\mu(1-\rho)$ ponderée par ρ.

b) W_s : durée de séjour d'un client dans le système $(n-1+1) = n$

$p(0 \leq W_s \leq t) = P_0 + P(0 < W_s \leq t)$

$$P(0 < W_s \leq t) = \sum \int_0^t \frac{\mu(\mu s)^n}{n!} e^{-\mu s} ds \times \rho^n(1-\rho)$$

on trouve $= 1 - e^{-\mu t(1-\rho)}$

$\sim$ ex $W_s \rightarrow \exp(\mu(1-\rho))$

c) Se = service, $\tilde{B}$ = TLS

La distribut° de W_s en utilisant la TLS. $\mathbb{P}(0 < W_s \leq t) = F(W_s)$

alors $\mathbb{P}(0 < W_s \leq t \mid A_n) = F(W_s / n)$

Le service $\sim \mathcal{E}(\mu)$, alors sa TLS

$\tilde{F}(S/0) = \tilde{B}(S)$

$\tilde{F}(S/1) = \tilde{B}(S) \cdot \tilde{B}(S)$

$\tilde{F}(S/n) = (\tilde{B}(S))^{n+1}$ on sait q

$\tilde{B}(S) = \frac{\mu}{\mu + S}$, on a :

$$\tilde{F}(S) = \sum_{n=0}^{\infty} (\tilde{B}(S))^{n+1} \cdot \rho^n (1-\rho)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mu}{\mu + S}\right)^{n+1} \cdot \rho^n (1-\rho)$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{F}(S) = \frac{\mu(1-\rho)}{S + \mu(1-\rho)}}$$

c'est bien la TLS d'une $\mathcal{E}(\mu(1-\rho))$

Exo 4

$\lambda = 64$ cl/j $= 8$ clients/h

$\frac{1}{\mu} = 2,5$ mn, $\mu = 24$ clients/h

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$

1) M|M|1

$\bar{w} = \frac{\rho}{\mu-\lambda} = \frac{1}{48} h$, $\bar{w}_s = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{16} h$

2) $p(A=k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = e^{-8}$

$p(A=6) = \frac{(8)^6}{6!} e^{-8} = 990$

3) $P_n = \rho^n(1-\rho) = 2,74.10^{-3}$

4) $p(w_s > t) = 1 - P(w_s \le t)$

$= 1 - (1 - e^{-\mu t(1-\rho)})$

$p(w_s > 15) = e^{-4} = 0,0183$

Exo 5

$\lambda = 9$ clts/h et $\frac{1}{\mu} = 10$ min $\Rightarrow \mu = 6$ clts/h

le nbre de serveurs nécessaire pour la stationnarité du syst

$\frac{\lambda}{c\mu} < 1 \Rightarrow c\mu > \lambda \Rightarrow c > \frac{\lambda}{\mu} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1,5$

$\Rightarrow c = 2$ minimum de serveurs

pour $c = 2$

$$\bar{w} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c\mu\, c!\left(1 - \frac{1}{c\mu}\right)^2} \times P_0$$

$$P_0 = \left[\sum \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \left(\frac{1}{1-\rho}\right)\right]^{-1}$$

$$P_0 = \left[1 + 1,5 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2 \frac{1}{1 - 3/4}\right]^{-1}$$

$$\boxed{P_0 = \frac{1}{7}}$$

$$\bar{w} = \frac{(3/2)^2}{24\left(1 - \frac{1}{12}\right)^2} \times \frac{1}{7}$$

$$\bar{w} = \frac{9/4}{24\left(\frac{11}{12}\right)^2} \times \frac{1}{7} = \boxed{\frac{3}{14} h}$$

pour $c = 3$

$\rho = \frac{\lambda}{\mu c} = \frac{9}{6 \times 3} = \frac{1}{2}$

$P_0 = \left[1 + 1,5 + \frac{9}{16} + \frac{1}{6}\left(3/2\right)^3 \times 2\right]^{-1}$

$P_0 = \left[2,5 + \frac{9}{16} + \frac{9}{8}\right]^{-1}$

$$\boxed{P_0 = \frac{16}{67}}$$

$$\bar{w} = \frac{(3/2)^2}{108\left(1 - \frac{1}{18}\right)^2} \times \frac{16}{67}$$

2) y = nbre de serveur inoccupé (libre)

$$y = \begin{cases} 0 & \text{si } n \ge c \\ c-n & \text{si } n < c \end{cases}$$

$$E[y] = \sum_{n=0}^{c} (c-n) P_n$$

$$E[y] = \sum_{n=0}^{\infty} c P_n - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} n P_n}_{\bar{n}} + \underbrace{\sum_{n=c+1}^{\infty} (c-n) P_n}_{\bar{n}_f}$$

$= c - \bar{n} + \bar{n}_f = c - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{c\mu - \lambda}{\mu} =$

$$\boxed{E[y] = c(1-\rho)}$$

* nbre de serveurs occupés : $c - y$

$E[c-y] = E[c] - E[y]$

$= c - c + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu}$

alors $E[c-y]$ ne dépend pas de c