U.H.B.C. Chlef
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département des Mathématiques

Année Universitaire: 2019/2020
Niveau: $2^{ème}$ Master/ Option: M.A.S.
Module: Processus Stochastiques 3.

EXAMEN FINAL

1. $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$.

   (a) Montrer que si f dans $L^2([0,T])$ alors
$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\int_0^t f(s)dB_s\right)\right] = \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t f^2(s)ds\right);\ \textit{pour tout } t \in [0,T].$$

   (b) Soit τ un temps d'arrêt sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ et $X \in L^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$.Montrer que:
$$\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge\tau} X_s dB_s\right) = 0;\ \textit{pour tout } t \in [0,T].$$

   (c) Montrer que, pour tout $t > 0$:
$$\int_0^t e^{B_s}ds \overset{\mathcal{L}}{\sim} t\int_0^1 e^{\sqrt{t}B_s}ds.(\textit{utiliser la propriété d'echelles du mouvement } B\text{row}\,\textit{nien})$$

2. $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$.

   (a) Calculer $Z = \int_0^1 1_{\{B_t=0\}}dB_t$.

   (b) Soit $Z = \int_0^1 1_{\{B_t\geq 0\}}dB_t$. Calculer $\mathbb{E}(Z)$ *et* $\mathbb{V}ar(Z)$.

3. Soit X la solution (*geometric Brownian motion*) de l'EDS:
$$\begin{cases} dX_t = bX_t dt + \sigma X_t dB_t \\ X_0 = 1. \end{cases}$$

   (a) Dans cette partie on va déterminer, par deux façons, un nombre réel α tel que $(X_t^\alpha)_{t\geq 0}$ est une martingale:

      i. La première est par l'utilisation de la formule d'Itô pour calculer la différentielle stochastique de X_t^α.

      ii. La deuxième est par la résolution de l'EDS ci-dessus.

   (b) Soit α prenant la valeur trouvée dans (a) et soit τ le temps de sortie de X à l'extérieur de l'interval $]\frac{1}{2},\ 2[$, c.à.d. $\tau = \inf\left\{t \geq 0;\ X_t = \frac{1}{2}\ \textit{ou}\ X_t = 2\right\}$.

      i. Exprimer $\mathbb{E}(X_\tau^\alpha)$ en fonction de α et $\mathbb{P}(X_\tau = 2)$.

      ii. Montrer que $\mathbb{E}(X_{\tau\wedge t}^\alpha) = 1$.

      iii. Prouver que $t \mapsto X_{\tau\wedge t}^\alpha$ est bornée et déduire que $\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}(X_{\tau\wedge t}^\alpha) = \mathbb{E}(X_\tau^\alpha)$.(*utiliser le Théorème de la Convergence Monotone*).

      iv. Déduire que $\mathbb{P}(X_\tau = 2) = \dfrac{1-2^{-\alpha}}{2^\alpha - 2^{-\alpha}}$.

4. Considérons l'EDS admettant une solution unique .
$$\begin{cases} dX_t = \left(\sqrt{1+X_t^2} + \frac{1}{2}X_t\right)dt + \sqrt{1+X_t^2}dB_t. \\ X_0 = x \in \mathbb{R}. \end{cases} \qquad (1)$$

(a) Donner la différentielle stochastique de $Y_t = \ln\left(\sqrt{1+X_t^2} + X_t\right)$.

(b) Déduire une solution explicite de (1).

Aide: $z \mapsto \ln\left(\sqrt{1+z^2}+z\right)$ *est la fonction inverse de* $y \mapsto sh(y)$.

5. Prouver par deux façons (par définition et par la formule d'Itô) que $X_t = B_t^3 - 3tB_t$ est une martingale.

Aide:
- $\mathbb{E}(B_t^4) = 3t$
- $\mathbb{E}(|XY|) \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}$