

# SÉRIES TEMPORELLES

## MASTER I : MATHS.APPLIQ& STAT

(HOME WORK N°3)

Le 13 mai 2022 à 8:04

**EXERCICE 1** Soient  $(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)$  des variables aléatoires.

Soit  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  un processus  $AR(1)$

ecrire le modèle de processus et Calculer la variance de  $(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)/4$  ?

**EXERCICE 2** Soit le processus  $MA(1)$  :

$$y_t = 1 + \epsilon_t - \frac{1}{2}\epsilon_{t-1}$$

Calculer la fonction d'autocorrélation et donner une représentation graphique.

**EXERCICE 4** Soit le processus  $MA(2)$  :

$$y_t = \epsilon_t - \theta_1\epsilon_{t-1} - \theta_2\epsilon_{t-2}$$

Calculer la fonction d'autocovariance et la fonction d'autocorrélation.

**EXERCICE 5** Soit le processus  $AR(1)$  :

$$y_t = \frac{1}{2}y_{t-1} + \varepsilon_t$$

avec  $\varepsilon_t$  un bruit blanc gaussien d'espérance nulle et de variance unitaire. On suppose que la condition initiale est déterministe :  $y_0 = 1$ . **(1)** Ce processus est-il stationnaire ? **(2)** Calculer la probabilité que  $y_t$  soit inférieur à zéro pour  $t = 1, 2, 10, 100$  et  $500$ .

**EXERCICE 6** Soit le processus  $AR(1)$  :

$$y_t = \varphi y_{t-1} + \varepsilon_t$$

avec  $\varepsilon_t$  un bruit blanc gaussien d'espérance nulle et de variance  $\sigma_\varepsilon^2$ , on suppose que  $|\varphi| < 1$ . **(1)** Calculer la fonction d'autocovariance. et d'autocorrélation.

**EXERCICE 7** Soit le processus AR(2) :

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$$

où  $\varepsilon_t$  est un bruit blanc gaussien d'espérance nulle et de variance  $\sigma_\varepsilon^2$ . **(1)** Caractériser les conditions sur les paramètres autorégressifs pour que le processus stochastique soit asymptotiquement stationnaire. **(2)** Quelle(s) condition(s) supplémentaire(s) faut-il poser pour que le processus stochastique soit stationnaire ?

**EXERCICE 8** Les processus suivants sont-ils asymptotiquement stationnaires :

(a)  $y_t = \frac{1}{2}y_{t-1} - \frac{1}{4}y_{t-2} + \varepsilon_t$

(b)  $y_t = \frac{1}{4}y_{t-1} + \frac{1}{8}y_{t-2} + \varepsilon_t$

(c)  $y_t = \frac{1}{2}y_{t-1} + \frac{1}{16}y_{t-2} - \frac{1}{32}y_{t-3} + \varepsilon_t$

avec  $\varepsilon_t$  un bruit blanc gaussien d'espérance nulle et de variance unitaire.

**EXERCICE 9** Soit le processus AR(2) :

$$y_t = \frac{5}{6}y_{t-1} - \frac{1}{6}y_{t-2} + \varepsilon_t$$

avec  $\varepsilon_t$  un bruit blanc gaussien d'espérance nulle et de variance unitaire. Écrire la forme MA( $\infty$ ) de ce processus stochastique.

**EXERCICE 10** Soit le processus AR(3) :

$$y_t = \frac{1}{2}y_{t-1} + \frac{1}{16}y_{t-2} - \frac{1}{32}y_{t-3} + \varepsilon_t$$

avec  $\varepsilon_t$  un bruit blanc gaussien d'espérance nulle et de variance unitaire. Calculer la fonction d'autocovariance.