U.S.T.H.B - FACULTE DES MATHEMATIQUES- 1èreannée MASTER–FINANCE-DECEMBRE 2010-

TEST n°1

.**QUESTIONS DE COURS**

a) Soit $(x_1, x_2, ...x_n)$ un n-échantillon d'une v.a X dont la loi admet une densité f_θ (au sens large). Définir la fonction de vraisemblance et la fonction score de l'échantillon. Donner trois expressions équivalentes de la quantité d'information de Fischer ramemé par l'échantillon sur θ (on supposera toutes les conditions de régularité vérifiées).

Les fonctions de vraisemblance et score sont respectivement définies comme étant les fonctions de θ définies par: $L(\theta, \widetilde{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i)$ et $S(\theta, \widetilde{x}) = Grad(\log L(\theta, \widetilde{x})) = \frac{\partial}{\partial\theta} \log L(\theta, \widetilde{x})$.

La quantité d'information de Fischer ramemé par l'échantillon sur θ, $I_n(\theta) = nI_1(\theta)$ avec $I_1(\theta) = Var(S(\theta, X)) = E(S(\theta, X)^2) = -E(\frac{\partial}{\partial\theta} S(\theta, X))$.

b) Enoncer le théorème de Lehmann-Schéffé:

Soit T un estimateur sans biais de $g(\theta)$ et S une statistique exhaustive et complète pour θ, alors $E_\theta(T/S)$ est l'unique ESBVUM de $g(\theta)$.

d) Choisir l'une des réponses proposées:

1) Soit $X = (X_1, X_2, ..., X_p)^t$ un vecteur aléatoire gaussien de loi $N_p(\mu, \Sigma)$ et B une matrice (r, p) alors le vesteur $Y = BX$ suit la loi :

R1) $N_p(B\mu, B\Sigma B^t)$ R2) $N_r(B\mu, B\Sigma B^t)$ R3) $N_p(B^t\mu, B^t\Sigma B)$ R4) $N_r(B^t\mu, B^t\Sigma B)$

Réponse: R2

2) Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un échantillon d'une variable aléatoire X. $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ est un estimateur de $Var(X)$ qui est:

R1: sans biais et convergent R2: asymptotiquement sans biais et convergent

R3: sans biais et non convergent.

Réponse: R2

3) On note $\widehat{\theta}$ l'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) d'un paramètre θ qu'on suppose sans biais . On a:

R1: $\exp(\widehat{\theta})$ est l'EMV de $\exp(\theta)$ R2: $\exp(\widehat{\theta})$ est sans un estimateur sans biais de $\exp(\theta)$

R3: $\exp(\widehat{\theta})$ est l'EMV de $\exp(\theta)$ et est sans biais.

Réponse: R1

EXERCICE 1

On considère un n-échantillon d'une v.a de densité $f_X(x) = \frac{\alpha}{\beta}(\frac{x}{\beta})^{\alpha-1}\exp(-(\frac{x}{\beta})^\alpha)1_{\{x>0\}}$

Déterminer des statistiques exhaustives pour β si α est connu, pour α si β est connu puis pour (α, β).

La vraisemblance s'écrit: $L(\theta,\widetilde{x}) = \dfrac{\alpha^n}{\beta^n}\dfrac{(\prod\limits_{i=1}^{n} x_i)^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha-1}}\exp(-\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^\alpha}{\beta^\alpha})1_{\{x>0\}}$

1^{er} cas: α connexpu, β inconnu

$L(\theta,\widetilde{x}) = \alpha^n(\prod\limits_{i=1}^{n} x_i)^{\alpha-1}1_{\{x>0\}}\dfrac{1}{\beta^{n+\alpha-1}}\exp(-\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^\alpha}{\beta^\alpha}) = h(\widetilde{x})g(\theta,\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^\alpha)$ avec $g(\theta,\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^\alpha) = \dfrac{1}{\beta^{n+\alpha-1}}\exp(-\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^\alpha}{\beta^\alpha})$
donc $T(\widetilde{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^\alpha$est exhaustive pour θ.

$2^{ème}$ cas: α inconnu, β connu

La seule statistique exhaustive dans cas est $(x_1, x_2, ...x_n)$. On ne peut pas réduire les données dans ce cas.

$3^{ème}$ cas: α inconnu, β inconnu

même réponse que pour 2).

EXERCICE 2

Soit $x_1, x_2, ...x_n$ un n-échantillon d'une v.a X de loi de Bernoulli $B(p)$

1) Proposer un estimateur pour p. Quelles sont ses qualités?

Du fait que $E(X) = p$, la méthode des moments donne directement $\widehat{p} = \overline{X}$.La méthode du maximum de vraisemblance donne après calculs le même résultat. On a $E(\widehat{p}) = E(\overline{X}) = p$ donc $\overline{X}$ est un estimateur sans biais, il est aussi convergent presque sûrement.

2) L'estimateur obtenu est-il un ESBVUM? Est-il efficace?.

La loi de Bernoulli $B(p)$ appartient à la famille des mois exponentielles d'ordre 1, puisque la fonction de vraisemblance $L(p, x = p^x(1-p)^{1-x} = (\dfrac{p}{1-p})^x(1-p)$, on en déduit que la statistique $T(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ est une statistique exhaustive. Elle est de plus complète (T est de même dimension que le paramètre p), p est donc l'unique estimateur sans biais de variance minimum.

D'autre part $Var(\widehat{p}) = Var(\overline{X}) = \dfrac{p(1-p)}{n}$ et la quantité d''information de Fischer $I(p) = \dfrac{n}{p(1-p)}$ (après calculs), d'où $Var(\overline{X}) = \dfrac{1}{I(p)} \implies \overline{X}$ est efficace.

3) Proposer deux estimateurs naturels pour $Var(X) = p(1-p)$.Quelles sont leurs qualités respectives?

On peut proposer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{Var(X)} = \widehat{p}(1-\widehat{p}) = \overline{x}(1-\overline{x})$ et l'estimateur naturel de toute variance $S'^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ qui est sans biais et convergent.