Série de révision

Ex1

Soit X et Y deux variables aléatoires avec $E(Y) = \mu$ et $EY^2 < \infty$.
a-Montrer que la constante c qui minimise $E(Y-c)^2$ est $c = \mu$.
b-En déduire que la variable aléatoire $f(X)$ qui minimise $E\left((Y - f(X))^2 / X\right)$ est $f(X) = E(Y/X)$.
c-En déduire que la variable aléatoire $f(X)$ qui minimise $E\left((Y - f(X))^2\right)$ est encore $f(X) = E(Y/X)$.

Ex2

Soit Y_t un processus stationnaire de moyenne 0 et soit a et b deux constantes.
a-On pose $X_t = a + bt + s_t + Y_t$, où s_t est une composante saisonnière de période 12. Montrer que $(1-L)(1-L^{12}) X_t$ est stationnaire.
b-Soit $X_t = (a+bt) s_t + Y_t$. Montrer que $(1-L^{12})^2 X_t$ est stationnaire.

Ex3

La densité spectrale de la série temporelle X_t définie sur $[0, \pi]$ par

$$f(\omega) = \begin{cases} 100 \quad \text{si } \frac{\pi}{6} - 0.01 < \omega < \frac{\pi}{6} + 0.01 \\ \qquad 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

a-Calculer $\gamma_0(X)$ et $\gamma_1(X)$.
b-Trouver la densité spectrale du processus Y_t définie par

$$Y_t = \left(1 - L^{12}\right) X_t.$$

c-Calculer la variance de Y_t.

Ex4

I) Soit le modèle suivant

$$Y_t = 5 + \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1}, \qquad \text{où } \ \varepsilon_t \backsim N(0,1).$$

Donner l'intervalle de confiance prévisionnelle de Y_{t+1} et Y_{t+2}, sachant que les dernières observations sont: $5.654; 4.686; 5.965$.
II) Les valeurs $-0.753; -0.954; 0.576$ sont les valeurs simulées de X_8, X_9, X_{10} où X_t est le processus $ARMA(2,1)$ suivant:

$$X_t - 0.1X_{t-1} - 0.12X_{t-2} = \varepsilon_t - 0.7\varepsilon_{t-1},$$

où ε_t est un bruit blanc $N(0,1)$.
a-Calculer les prévisions de X_{11} et X_{12}.
b-Construire l'intervalle de confiance prévisionelle à 95% de X_{11} et X_{12}.
III) Donnez la prévision $\widehat{X}_n(2)$ du modèle SARIMA$(1,0,0)(0,1,1)_{12}$.
Remarque: Les ex 1,2,3 du livre Brockwell and Davis.