1 Généralités sur les processus stochastiques

Dans cette section, on donne les définitions de base nécessaires pour la compréhension du calcul stochastique. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace des probabilités.

Définition:

On appelle filtration toute famille $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *croissante de sous tribus de* $\mathcal{F}$ *(i.e.*$s < t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$*). Le quadruplet* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ *s'appelle base stochastique ou espace probabilisé filtré.*

La tribu $\mathcal{F}_t$ *représente le passé pris en compte à l'instant* t.

Définition:

Un processus stochastique est un modéle mathématique qui permet de décrire l'évolution d'un systéme en fonction du temps et du hasard. Formellement un processus stochastique est la donnée d'une famille de variables aléatoires $X := (X_t)_{t\in T}$ *à valeurs dans un espace probabilisable* (E, ξ), (généralement $T = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}_+$). E *s'appelle l'espace d'état du processus* X.

Pour tout $\omega \in \Omega$ fixé, *l'application* $t \to X_t(\omega)$ *s'appelle la trajectoire de* X *en* ω.

Dans toute la suite on ne considère que le cas où $T = \mathbb{R}_+$.

Définition:

Soit $X := (X_t)_{t\geq 0}$*un processus. La filtration* $(F_t^X)_{t\geq 0}$ *définie par* $F_t^X := \sigma(X_u : u \leq t)$ *la tribu engendrée par les variables aléatoires* X_u *telles que* $u \leq t$*; s'appelle la filtration naturelle de* X*:*

Définition:

Un processus X *est dit adapté par rapport à une filltration donnée* $(F_t)_{t\geq 0}$ *si pour tout* $t \geq 0$ *la variable aléatoire* X_t *est* F_t-*mesurable.*

Ainsi tout processus est adapté par rapport à sa propre filtation naturelle.

Notation:

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ *une base stochastique. On note par* $\mathcal{F}_\infty$ *la tribu engendrée par* $\bigcup\limits_{t\geq 0} \mathcal{F}_t$. *On écrit* $\mathcal{F}_\infty = \bigvee\limits_{t\geq 0} \mathcal{F}_t$.

Lorsqu'on ne spécifie pas la tribu $\mathcal{F}$, on prendra automatiquement $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty$.

Définition:

Soit X *un processus. On dira qu'un processus* Y *est une modification (ou version) de* X *si*

$$X_t = Y_t \quad p.s. \qquad \forall t \geq 0.$$

2 Mouvement brownien:

C'est le processus le plus célèbre. Il a été découvert en 1927 par le botaniste écossais Robert Brown en observant des mouvements de particules à l'intérieur de grains de pollen. Le mouvement brownien, ou processus de Wiener, est une description mathématique du mouvement aléatoire d'une « grosse » particule immergée dans un fluide et qui n'est soumise à aucune autre interaction que des chocs avec les « petites » molécules du fluide environnant. Il en résulte un mouvement très irrégulier de la grosse particule. Ce mouvement permet de décrire avec succès le comportement thermodynamique des gaz (théorie cinétique des gaz), ainsi que le phénomène de diffusion. Il est aussi très utilisé dans des modèles de mathématiques financières.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ une base stochastique.

Définition:

On appelle mouvement brownien de dimension $d \geq 1$ *(réel si* $d = 1$*) tout processus adapté* $(B_t)_{t\geq 0}$ *d'espace d'état* $(\mathbb{R}^d, B_{\mathbb{R}^d})$*, satisfaisant les propriétés suivantes :*

$1 - B_{t+h} - B_t \rightsquigarrow N_d(0, hC)$ *(*$B_{t+h} - B_t \rightsquigarrow N(0, h\beta^2)$*,* $\beta > 0$*, si* $d = 1$*) pour tout* $t, h \geq 0$*, où* C *est une matrice carrée d'ordre d, symétrique et inversible.*

$2-(B_t)_{t\geq 0}$ *est à accroissements indépendants par apport au passé: la variable aléatoire* $B_{t+h} - B_t$ *est indépendante de la tribu* $\mathcal{F}_t$ *pour tout* $t, h \geq 0$

Lorsque $B_0 = x$ *p.s., on dira que* $(B_t)_{t\geq 0}$ *est issu de* x*. Lorsque* $B_0 = 0$ *p.s. et* $C = I$ *la matrice identité (*$\beta = 1$ *dans le cas où* $d = 1$*), on dira que le mouvement brownien est standard.*

Dans toute la suite, on considère un mouvement brownien standard, réel $(B_t)_{t\geq 0}$ défini sur la base stochastique $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$. Ainsi la variable aléatoire $B_t \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, t)$ pour tout $t > 0$.

Remarques:

$1-$ *On peut montrer que presque toute les trajectoires de* $(B_t)_{t\geq 0}$ *sont continues i.e.* $P\{\omega : t \to B_t(\omega) \text{ n'est pas continue}\} = 0$

$2-$ *Si* $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^B$*, alors la propriété* 2 *est équivalente à la suivante:* $(B_t)_{t\geq 0}$ *est à accroissements indépendants au sens que pour toute suite* $t_0 < t_1 < .... < t_n$*, les variables aléatoires* $B_{t_0}, B_{t_1} - B_{t_0}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ *sont indépendantes.*

3 Martingales:

Nous allons introduire une classe importante de processus, appelés martingales, qui joue un rôle prépondérant en calcul stochastique.

Définition:

On appelle martingale tout processus M *satisfaisant les propriétés suivantes :*

$1 - (M_t)_{t\geq 0}$ *est adapté.*

$2 - E(|M_t|) < \infty$ *pour tout* $t \geq 0$.

$3 - E(M_{t+h} \mid \mathcal{F}_t) = M_t$ *pour tout* $t, h \geq 0$.

Si au lieu de la propriété 2 on a $E(|M_t|^2) < \infty$ *pour tout* $t \geq 0$*, alors on dira que* X *est une martingale à carré intégrable.*

Remarques:

$1-$*Pour un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *adapté, la propriété* 3 *est équivalente à* $\mathbb{E}(X_{t+h} - X_t \mid \mathcal{F}_t) = 0$ *pour tout* $t, h \geq 0$ *car* $X_t = \mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_t)$.

$2-$*L'ensemble des martingales est un espace vectoriel car l'espérance conditionnelle est linéaire.*

$3-$*Pour une martingale* $(M_t)_{t\geq 0}$, l'*application* $t \mapsto E(M_t)$ *est constante car*

$$\mathbb{E}(M_t) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_0)) = \mathbb{E}(M_0).$$

Exemple fondamental : (voir T.D.)

Soit X un processus a accroissements indépendants et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle tel que $\mathbb{E}(X_t - X_s) = 0 \quad \forall s < t$, alors X est une martingale. En particulier le mouvement brownien est une martingale.

Proposition:

le processus M défini par $M_t = B_t^2 - t$ est une martingale.

Démonstration:

Les propriétés 1 et 2 sont évidentes. Reste à démontrer que $\mathbb{E}(B_{t+h} - B_t \mid \mathcal{F}_t) = 0$. On a d'une part,

$$E((B_{t+h} - B_t)^2 \mid \mathcal{F}_t) = E((B_{t+h} - B_t)^2) = h,$$

car $(B_t)_{t\geq 0}$ est à accroissements indépendants par rapport au passé et $B_{t+h} - B_t \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, h)$ et d'autre part

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((B_{t+h} - B_t)^2 \quad &| \quad \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}((B_{t+h}^2 - 2B_{t+h}B_t + B_t^2) \mid \mathcal{F}_t) \\
&= \mathbb{E}(B_{t+h}^2 \mid \mathcal{F}_t) - 2\mathbb{E}(B_{t+h}B_t \mid \mathcal{F}_t) + \mathbb{E}(B_t^2 \mid \mathcal{F}_t) \\
&= \mathbb{E}(B_{t+h}^2 \mid \mathcal{F}_t) - 2B_t\mathbb{E}(B_{t+h} \mid \mathcal{F}_t) + B_t^2 \text{ car } B_t \text{ est } \mathcal{F}_t - \text{mesurable} \\
&= \mathbb{E}(B_{t+h}^2 \mid \mathcal{F}_t) - 2B_tB_t + B_t^2 \text{ car } (B_t) \text{ est une martingale} \\
&= \mathbb{E}(B_{t+h}^2 \mid \mathcal{F}_t) - B_t^2,
\end{aligned}$$

d'où

$$\mathbb{E}(B_{t+h}^2 - B_t^2 \mid \mathcal{F}_t) = h.$$

Par suite

$$\mathbb{E}(M_{t+h} - M_t \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(B_{t+h}^2 - B_t^2 - h \mid \mathcal{F}_t) = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.■