Corrige de Sene pages

EXOIL

· Si reço, fet toutes ses, derivées sont milles · Si n= 0, les dérivées à ganche, de f sont nulles B(x) = etc, f'(x) = = = = = = = , f'(x) = -6x24 ex; ... · Si x>o, on a et Montrons cette formule par recurrence. et on montre que p(k) (x) =  $\frac{P(x)}{2^{3k}}e^{\frac{1}{2^{2k}}}$  et on montre que p(kn) (x) =  $\frac{P(x)}{2^{3k}}e^{\frac{1}{2^{2k}}}$ on a ( ( (x) = ) ( (x) )  $= \frac{P_1(x) \cdot x^{3k} - 3x^{-1} P_1(x)}{x^{6k}} = \frac{P_1(x) \cdot x^{3k} - 3x^{-1} P_1(x)}{x^{6k}} + \frac{2P_1(x)}{3(x+1)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{P_1(x) \cdot x^{3k}}{P_1(x)} + \frac{2P_1(x)}{3(x+1)} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{P_1(x) \cdot x^{3k}}{P_1(x)} + \frac{2P_1(x)}{3(x+1)} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{P_1(x) \cdot x^{3k}}{P_1(x)} + \frac{2P_1(x)}{3(x+1)} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{P_1(x) \cdot x^{3k}}{P_1(x)} + \frac{2P_1(x)}{3(x+1)} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{P_1(x) \cdot x^{3k}}{P_1(x)} + \frac{2P_1(x)}{3(x+1)} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{P_1(x) \cdot x^{3k}}{P_1(x)} + \frac{2P_1(x)}{3(x+1)} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{P_1(x) \cdot x^{3k}}{P_1(x)} + \frac{2P_1(x)}{3(x+1)} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{P_1(x) \cdot x^{3k}}{P_1(x)} + \frac{P_1(x)}{2(x+1)} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{P_1(x) \cdot x^{3k}}{P_1(x)} + \frac{P_1(x)}{2(x+1)} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{P_1(x) \cdot x^{3k}}{P_1(x)} + \frac{P_1(x)}{2(x+1)} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{P_1(x) \cdot x^{3k}}{P_1(x)} + \frac{P_1(x)}{2(x+1)} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{P_1(x) \cdot x^{3k}}{P_1(x)} + \frac{P_1(x)}{2(x+1)} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{P_1(x) \cdot x^{3k}}{P_1(x)} + \frac{P_1(x)}{2(x+1)} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{P_1(x) \cdot x^{3k}}{P_1(x)} + \frac{P_1(x)}{2(x+1)} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{P_1(x) \cdot x^{3k}}{P_1(x)} + \frac{P_1(x)}{P_1(x)} + \frac{P_1(x)}{P_1(x)} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{P_1(x) \cdot x^{3k}}{P_1(x)} + \frac{P_1(x)}{P_1(x)} + \frac{P_1(x)}{P_1(x)} + \frac{P_1(x)}{P_1(x)} + \frac{P_1(x)}{P_1(x)} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{P_1(x) \cdot x^{3k}}{P_1(x)} + \frac{P_1(x)}{P_1(x)} + \frac{P_1(x)}{P_1($  $= \frac{P_1(x) \cdot x + 3x}{3(k+1)} + 2P_1(x) = \frac{1}{2}$ = P2(x) = = 1/2 / B(x) = 2 P/10/+30xP/0/+2/10/ Jante par  $P(0) = P(0) = \frac{1}{2}$   $= P(0) = \frac{3k}{2}$   $= P(0) = \frac{3k}{2}$   $= \frac{3k}{2}$ Jone & p(k) = 6 Pegle de P/Hopital.)

on a 4n p=0 (simplement) p=0. sixe supp fon => nxe supp for => a a scrade

sixe supp fon c [- a a ] continue down d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue d

sixe supp fon c [- a a ] continue · 1) on suppose que supp p C [- a, a] / a> o (car) meme melhodo de Exo 1, on montre que · (x)=1. c'est à dire n=+1 · & 1x1<4, 46co (4 est composition de 1x2 ex · & bd/4, on a p(x) = 0 el p & co en a p' (nd= p'/nx)

mon e | 11p' || 0 don

mon e | 11p' || 10

Mo En outre, Jupp 4 = [-1, 1] et par lonsequent eph (a) = 0, donc en globale p & c. Pageir find (the) hamily

EXO OH on considere la fonction O(t) = } e 1-62, si 161<1. o smon ona OED(R). donc finite)= in o(t). parsente f(k) (t) = 1 nk 0(k) (E). si k est un compact de IR, on a Sup 180 (2) | \ = 10 1 10 110 => e sup | fn (x) = 0 donc fr (k) uniforment sur . K · lomme supp (fn) = [-n, n] donn & un compact comment tous les supports de (fn). et par suite la convergne EXO5 Soit a yo / supp y CE-a, a] toute primitive op de de y s'ecrit 4/20) = C+ / 4/1 dt supporous qu'il es viste les 4/ supp 4 C[-6,5] · pour x < min(-a, -b), on a y (sc) = 0 et  $\int_{a}^{\infty} \psi(t) dt = 0 = \gamma C = 0$ . De plus, pou  $sc = \max(a, b)$ , on a  $\varphi(sc) = oet \int_{-a}^{\infty} \psi(t)dt = \int_{-a}^{a} \psi(t)dt$ page: 3

Hest donc nécessaire que s'4Hdt=0 Réciproquent, si sa 41t) dt = 0, alors ea fonction primitive de y à support dans La, a). EXO 6 Posons  $\delta(\infty) = \varphi(\infty) - \varphi(0)\theta(\infty)$ , alus  $\delta(\infty) \in D(IR)$ et de plus  $\delta(0) = 0$ ona V(x)= SV(t)dt Posons Y (x)= f 8/usc)du. Alors  $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall (x) = x \forall (x)$ Reste à demontrer que y est à support compact. (pour que y soit dans D(IR)) ona & est à support compact. donc  $\exists \alpha \rangle 0 / \delta(x) = 0$ , six  $\notin [-a, a]$ =) 4/x) = 0 el donc y est à support

compact.

to ONE Jan for Ap(x) = of = (x) p(x) + of

2) On considire les moembles on a Ang CA = Ang CA = Ang CANB A= {x: {(x) +0}, B= {x: g(x) +0} AAB = {20(\$8)(x) #0} . Bdbis, Ugchis = (B.1)dchis (=

Jone 2° E supply (=) # (x) # of x exply Su xo ε supp (f+g) => 3 +xo/ (f+g) (xo) + o + wenge => f(x) + 0 ou g(x) + 0, + nev xo

Jone

(En bossamIsm & a = oet b = o =) a+b=o et pour le contrapose : & a+b+o=) a+ o et pour le contrapose : & a+b+o=) a+ o

pages 5

= 200 E supp & U supp 8.

sute de Exo 09 · on a suppf (sc)= } a} (definition de f (sc)} comme f'est une distinution régulière, on peul écrire 1/6, 4>= 5 f(x) p(x) dx En outre of (x) est pres que partout rulle et d'après Lebesque (16,4)=0, donc Tp=0 et pou conse quent supp [p=0]. EX010  $\langle H+E, \varphi \rangle = \langle H, \varphi \rangle + \langle S, \varphi \rangle = \int_{0}^{\infty} \varphi(x) dx + \varphi(0) \text{ in Equal }$ soit y ED, on a Do minic  $\langle \Delta + \delta, \varphi \rangle = \langle \Sigma \Sigma, \varphi \rangle = \Sigma \langle \delta_{R}, \varphi \rangle$   $= \Sigma \langle \delta_{R}, \varphi$ =0 84 R Z

Corrige de serie pages

EXON · Si re qu, fet toutes ses, derivées sont nulles · Si n = 0, les rédérivrées à gauche, de f sont rulles  $\beta(x) = e^{-\frac{1}{2}x}, \ \beta'(x) = \frac{2}{23}e^{\frac{1}{2}x}, \ \beta''(x) = \frac{-6x^2+4}{x^6}e^{\frac{1}{2}x},...$ et Montrons cette formule par recurrence. et on montre que  $f^{(k)}(x) = \frac{P(x)}{2^{2k}} e^{\frac{1}{2^{2k}}}$  (trail)  $f^{(k+1)}(x) = \frac{P(x)}{2^{2k}} e^{\frac{1}{2^{2k}}} e^{\frac{1}{2^{2k}}}$ on a f (2) = Person (p(k))  $= \frac{P_{1}(x) \cdot x^{3k} - 3x^{k-1} \cdot P_{1}(x)}{x^{6k} - 3x^{k-1}} \cdot \frac{P_{1}(x)}{P_{2}(x)} \cdot \frac{1}{2^{2k}} \cdot \frac{P_{1}(x)}{3^{2k}} \cdot \frac{1}{3^{2k}} \cdot \frac{1}{3^{2k}}$ = [ P<sub>1</sub>(x) - 3x<sup>2</sup> · P<sub>1</sub>(x) + 2P<sub>1</sub>(x) ] e = 22 (simplification)  $= \frac{P_1(x) \cdot x + 3x P_1(x) + 2P_1(x)}{3(k+1)} = \frac{1}{x^2}$ = P2(x) = 1/2 / B(x) = 2 P2 / B(x) = 32 P3 (b) + 3 x P3 (d) + 2 p2 / B(x) = 12 P3 (b) + 3 x P3 (d) + 2 p2 (d) + 2 p3 (d) d'autre par (h) (si) = p(0) e = 1 = P(0) Py= = 0 y > 0 ey = 0 y > 0 ey = (2) = ( Pegle de P Hopital.) Nonc (x) = ( Pegle de P Hopital.)

page: 2 EX0 2 · 8i /2/>1, on a y(x) = 0 el y E co · Si /2/31, on a f(x) = 0 et q E C · Si /2/31, on a f(x) = 0 et q · si |x|=1. c'est à dire n=±1 même méthode de Exo1, on montre que  $e^{(h)}(x)=0$ , donc en globale  $\psi \in C^{\infty}$ . En outre, Suppφ = [-1,1] et par Consequent EXO3 yn Dans D ( ε) Supp Pn C K (compact) Yn,

yn (k) unif (k) Yh EN. on a  $\Psi_n \longrightarrow \rho = 0$  (simplement)  $\stackrel{\rho}{n} \rightarrow \stackrel{\rho}{n} = 0$ donc si(4n) con ve ge dans D, ales 4n 4=0 ·1) on suppose que supp & CE-a, a] /a>o (car SixE supp (Pn => nxe supp p => a/nx (a =) supp 40 C[-a, a] c[-a,g] alus supplén c [-a, a] contenu d'ans le mêne korréact. .z) (k) unif 4=0?? una φ, (2)= φ (nx) 4n / 2 6 => 11 4/1 1100= 1141100 marsie 11 prill / o don Page 12

EXO OH on considère la fonction 10(t) = } e \frac{-1}{1-62}, & 161<1. o, smon ona OED(R). donc finiti= 1 o(t). Parsute  $\int_{n}^{\widetilde{(k)}}(t) = \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{nk} O^{(k)}(\frac{E}{n})$ . Si k est un compact de R, on a sup | fn (2) | \ = \frac{1}{2nnk | | O(k) | | \infty . donc fr/k) uniforment sur . K · Comme supp (fn)=[-n,n] dom & un compact comment tous les supports de (fn). et parsute la convergne EXO 5 Soit a so / supp y CE-a, a] toute primitive to de de x s'ecrit 4/20)= C+ 5 4(t) dt supporous qu'il es viste un 4/ supp 4 C[-6,5] · pour x < min (-a, -b), on a y (sc) = 0 et \( \frac{\pi}{4} \psi(t) dt = 0 = \) C=0. De plus, pou sc = max(a,b), on a  $\varphi(sc) = oet \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt$ Page: 3

Pert donc nécessaire que s'y Hdt=0 Réciproquent, si sa 4/6) dt=0, alors la fonction primitive de y à support dans [-a, a]. EXO 6 Posans  $V(x) = \varphi(x) - \varphi(0)\theta(x)$ , alus  $V(x) \in D(IR)$ et de plus V(0) = 0ona V(x)= [ V(t)dt Par le changement de vaniable t = ux = dt = x dt = 0 - u = 0 donc y(x) = x f y(ux) du. · La Bonction x >> 52 v'(ux) du est de classet Posono Y (x)= 5 8/ux)du. Alors  $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall (x) = x \forall (x)$ Reste à demonter que y est à support compact. (pour que y soit dans D(IR)) ona & ast à support compact. donc = a>0/8(x)=0, six [-a,a] =) 4/x)=0 el donc y est à support

1) on a transfer of the 1x6 / 8(x) = 0} = } ~: 8(x) + 0} can x + 0 Jone fre Af(x) +0} = (x 1 f(x) +0} = sup ( ) = sup f. . 2) on considue la insembles #= {x: {(x) fo}, B= {x: g(x) + 0} AAB = {2 = (18)(x) = 0} On a JAMBCA = ANBCAMBCAMB

ANBCB ANBCB = supp (f.g) = supf u suppg. =) f(x) = o et g(x) = o =) resuppf et x Esuppg. suppfig c suppf nsuppg. si x∈ supp(f.g) => f.g(x) ≠° 2 Helhode : ona resupples = Vir 1. P. (x) + 0 + = V26/ F(x) + 0 + x E 1/2 Srx0 E supp (f+g) => => +0 / (p+g) (x) +0 +0 Ely donc =7 f(x) =0 ou g(x) =0, 4 x EV x => >co E supp & U suppg. (En bassandon & a = 0 et b = 0 =) a+b=0 et pou le contraposé: na+b = 0 = ) a = 0 page: 5

Exo of

sinte di ExO 09 · on a suppfiel= } a} ( definition de fice)} Comme f'est une distibution régulière, oripeul écrire 1/6,47= st f(x) p(x) dx En outre of (x) est pres que partout nulle et d'après Lebesque (16,4)=0, donc Tp=0 et parlonséquent supp Tp=0.  $\int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \int_{0$ EXO 10 Soit y ED, on a <Δ+8, φ>= (Σ5, μ)= Σ(8, μ) = Σ(9, 0) = Σ(9, 0) 0 84 R Z

page:6

写べり on a < \frac{\phi}{\phi} = \left(\phi) = \left(\phi) \dx = \left(\ It soit a le plus gramdourent / own a subolt well to - & low pholyson donc IC = support) (pour journation) dome supply CD (xxE supply = xx for) et , dés los (T, 4)=0. Some elle idelimit more i distribution regue got una fonction becalement integra 73+x 3-x[=I 1013 E ano . g, dobns \$ 3c mb acoddh Posons aver 3(x)= / 1 p. x 6 ca, 6] 460/supplecte I'm 0=1= (9 17) xeF = 0 pur FS 0=0 cm supply about (This)=0, F= Supph Supply C (FS) = F = MAP 8. 四中四 TAF Comtradula