

## Devoir n° 2

### EXERCICE 1 (9 PTS)

On observe un  $n$ -échantillon  $(X_1, \dots, X_n)$  de la loi admettant par rapport à la mesure de Lebesgue la densité  $f_\theta$  définie par

$$f_\theta(x) = (k+1)\theta^{-k-1}x^k \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x),$$

où  $k$  est un entier positif donné et  $\theta$  est un paramètre strictement positif inconnu. Dans la suite, on note  $m = n(k+1)$ .

1. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance  $\hat{\theta}$  de  $\theta$ . (1 pt)

On a un modèle dominé par la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}_+^n$ . La vraisemblance, en  $X = (X_1, \dots, X_n)$  est:

$$f_{\theta,n}(X) = (k+1)^n \theta^{-m} \left( \prod_{i=1}^n X_i \right)^k \mathbb{1}_{\max X_i \leq \theta}.$$

Donc l'estimateur du max de vraisemblance de  $\theta$  est:

$$\hat{\theta} = \max X_i.$$

2. Calculer le biais de  $\hat{\theta}$ . (1 pt)

On calcule la fonction de répartition de  $\hat{\theta}$ . Pour  $t$  dans  $[0, \theta]$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\hat{\theta} \leq t) &= \mathbb{P}(X_1 \leq t)^n, \\ &= \left( \frac{t}{\theta} \right)^m. \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\hat{\theta}) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(\hat{\theta} > t) dt, \\ &= \int_0^\theta \left[ 1 - \left( \frac{t}{\theta} \right)^m \right] dt, \\ &= \frac{\theta m}{m+1}. \end{aligned}$$

Donc le biais de  $\hat{\theta}$  est  $-\frac{\theta}{m+1}$ .

3. Montrer que  $\hat{\theta}$  est une statistique exhaustive complète. (1.5 pt)

Vue la vraisemblance  $f_{\theta,n}(X)$ ,  $\hat{\theta}$  est clairement exhaustive d'après le théorème de factorisation. Pour voir qu'elle est complète, prenons  $\phi$  une fonction mesurable de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $\phi(\hat{\theta})$  soit  $\mathbb{P}_\theta$ -intégrable pour tout  $\theta$ , et telle que:

$$\forall \theta > 0, \mathbb{E}_\theta(\phi(\hat{\theta})) = 0.$$

Cela signifie:

$$\forall \theta > 0, \int_0^\theta \phi(t) \frac{mt^{m-1}}{\theta^m} dt = 0.$$

Posons  $\psi(t) = \phi(t)t^{m-1}$ :

$$\forall \theta > 0, \int_0^\theta \psi(t) dt = 0.$$

C'est un exercice classique de montrer que ceci implique la nullité de  $\psi$  (et donc de  $\phi$ )  $\lambda_+$ -presque partout, où  $\lambda_+$  est la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^+$ . En effet, un argument de classe monotone permet de montrer que pour tout  $\theta$ ,  $\psi$  a une intégrale nulle sur tout borélien de  $[0, \theta]$ . Enfin, comme pour tout  $\theta$ , la loi de  $\hat{\theta}$  sous  $\mathbb{P}_\theta$  est absolument continue par rapport à  $\lambda_+$ , on en déduit que  $\phi(\hat{\theta})$  est nulle  $\mathbb{P}_\theta$ -p.s. pour tout  $\theta$ . Donc  $\hat{\theta}$  est une statistique exhaustive complète.

4. Calculer le risque quadratique de  $\lambda\hat{\theta}$ , où  $\lambda$  est un réel donné. Vérifier que l'on peut trouver  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  tels que  $\lambda_1\hat{\theta}$  soit sans biais et  $\lambda_2\hat{\theta}$  soit de risque minimal parmi les estimateurs de la forme  $\lambda\hat{\theta}$ . (1.5 pt)

Le biais de  $\lambda_1\hat{\theta}$  est nul pour  $\lambda_1 = \frac{m+1}{m}$ . Risque quadratique de  $\lambda\hat{\theta}$ :

$$\begin{aligned} R(\lambda\hat{\theta}) &= \text{Var}(\lambda\hat{\theta}) + (\mathbb{E}(\lambda\hat{\theta}) - \theta)^2, \\ &= \lambda^2 \text{Var}(\hat{\theta}) + (\mathbb{E}(\lambda\hat{\theta}) - \theta)^2, \\ &= \lambda^2 \theta^2 \frac{m}{(m+1)^2(m+2)} + \theta^2 \left[ \frac{\lambda^2 m^2}{(m+1)^2} - \frac{2\lambda m}{m+1} + 1 \right], \\ &= \theta^2 \left[ \lambda^2 \frac{m}{m+2} - \lambda \frac{2m}{m+1} + 1 \right], \end{aligned}$$

et le minimum est atteint pour  $\lambda_2 = \frac{m+2}{m+1}$ .

5. Indiquer une propriété de minimalité de  $\lambda_1\hat{\theta}$ . Cette propriété contredit-elle le fait que  $\lambda_2\hat{\theta}$  soit de risque minimal ? (1 pt)

$\lambda_1\hat{\theta}$  est un estimateur sans biais, fonction de  $\hat{\theta}$ , statistique exhaustive et complète. Donc c'est un estimateur UVMB de  $\theta$ . Ceci ne contredit pas la minimalité du risque de  $\lambda_2\hat{\theta}$ , car ce dernier estimateur est biaisé.

6. On se donne la loi *a priori* de densité

$$\delta\theta^{-2}\mathbb{1}_{[\delta, +\infty[}(\theta),$$

où  $\delta$  est un réel positif fixé. Calculer l'estimateur de Bayes de  $\theta$  pour la perte quadratique. Quel est son comportement lorsque  $\delta$  tend vers 0? Calculer ensuite l'estimateur de Bayes de  $\theta$  pour la perte  $L_1$ . (3 pts)

Soit  $\mu$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}_+$ . On a, pour  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $\theta > 0$ ,

$$\frac{d\nu(\cdot|X=x)}{d\mu}(\theta) = \frac{f_\theta(x) \frac{d\nu(\theta)}{d\mu}}{\int f_\theta(x) d\nu(\theta)}.$$

On trouve, en notant  $a \vee b$  le maximum de deux reals  $a$  et  $b$ :

$$\int f_\theta(x) d\nu(\theta) = \prod_{i=1}^n x_i^k \delta(k+1)^n \frac{1}{(m+1)(\delta \vee \max x_i)^{m+1}}.$$

D'où:

$$\frac{d\nu(.|X=x)}{d\mu}(\theta) = \frac{(m+1)(\delta \vee \max x_i)^{m+1}}{\theta^{m+2}} \mathbb{1}_{\delta \vee \max x_i \leq \theta}.$$

(C'est une loi de Pareto, cf. exercices suivants). L'estimateur bayésien  $\tilde{\theta}$  de  $\theta$  pour la perte quadratique est la moyenne de  $\theta$  sachant  $X$ , ce qui donne:

$$\tilde{\theta} = \int_{\delta \vee \max X_i}^{\infty} (m+1) \frac{(\delta \vee \max X_i)^{m+1}}{\theta^{m+1}} d\theta = \frac{(m+1)(\delta \vee \max X_i)}{m}.$$

Lorsque  $\delta$  tend vers 0,  $\tilde{\theta}$  converge ( $\mathbb{P}_{\theta}$ -p.s pour tout  $\theta$ ) vers  $\frac{(m+1)}{m} \max X_i = \lambda_1 \hat{\theta}$ .

L'estimateur bayésien  $\check{\theta}$  est la (car elle est unique, ici) médiane de la loi de  $\theta$  sachant  $X$ :

$$\check{\theta} = 2^{\frac{1}{m+1}} (\delta \vee \max_i X_i).$$

## EXERCICE 2 (9 pts)

On observe un  $n$ -échantillon  $(X_1, \dots, X_n)$  de la loi admettant par rapport à la mesure de Lebesgue la densité

$$x \mapsto \frac{\alpha r^\alpha}{x^{\alpha+1}} \mathbb{1}_{x>r},$$

où  $\alpha$  et  $r$  sont des réels strictement positifs. Cette loi est appelée loi de Pareto de paramètres  $\alpha$  et  $r$ .

1. On suppose que  $r$  est inconnu et  $\alpha$  est connu. Montrer qu'il existe un test uniformément le plus puissant parmi les tests de niveau  $\beta$  de  $r = r_0$  contre  $r \neq r_0$ , où  $r_0$  est un réel positif fixé. (3 pts)

On note  $X = (X_1, \dots, X_n)$ ,  $\mu$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$  et  $f_r$  la densité d'un  $n$ -échantillon de la loi de Pareto de paramètres  $\alpha$  et  $r$  par rapport à  $\mu$ .

$$\begin{aligned} \phi \text{ est } UPP(\beta) \text{ de } r = r_0 \text{ contre } r \neq r_0 &\Leftrightarrow \forall r_1 \neq r_0, \phi \text{ est } UPP(\beta) \text{ de } r = r_0 \text{ contre } r = r_1, \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{E}_{r_0}(\phi) = \beta, \\ \forall r_1 \neq r_0, \phi(X) = 1 \text{ si } f_{r_1}(X) > C_\beta(r_0, r_1) f_{r_0}(X) \\ \phi(X) = 0 \text{ si } f_{r_1}(X) < C_\beta(r_0, r_1) f_{r_0}(X) \end{cases} \end{aligned}$$

où  $C_\beta(r_0, r_1)$  est défini par:

$$C_\beta(r_0, r_1) = \inf\{C \geq 0 \text{ t.q. } \mathbb{P}_{r_0}(f_{r_1}(X) > C f_{r_0}(X)) \leq \beta\}.$$

Calculons  $C_\beta(r_0, r_1)$ .

$$\mathbb{P}_{r_0}(f_{r_1}(X) > C f_{r_0}(X)) = \mathbb{P}_{r_0}\left(\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{n\alpha} \mathbb{1}_{\min X_i > r_1} > C\right),$$

où on a utilisé que  $\mathbb{P}_{r_0}$ -p.s,  $\min X_i > r_0$ . On distingue deux cas.

- Supposons  $r_1 > r_0$ . Si  $C < \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{n\alpha}$ ,

$$\mathbb{P}_{r_0}(f_{r_1}(X) > C f_{r_0}(X)) = \mathbb{P}_{r_0}(\min X_i > r_1) = \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{n\alpha}.$$

Et si  $C \geq \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{n\alpha}$ ,

$$\mathbb{P}_{r_0}(f_{r_1}(X) > C f_{r_0}(X)) = 0.$$

On en déduit que si  $\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{n\alpha} \leq \beta$ ,  $C_\beta(r_0, r_1) = 0$ , mais si  $\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{n\alpha} > \beta$ ,  $C_\beta(r_0, r_1) = \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{n\alpha}$ .

• Supposons  $r_1 < r_0$ . Dans ce cas,  $\mathbb{P}_{r_0}$ -p.s,  $\min X_i > r_0$  et  $\min X_i > r_1$ . Donc:

$$\mathbb{P}_{r_0}(f_{r_1} > C f_{r_0}) = \begin{cases} 0 & \text{si } C \geq \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{n\alpha} \\ 1 & \text{si } C < \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{n\alpha} \end{cases}$$

Ce qui nous donne  $C_\beta(r_0, r_1) = \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{n\alpha}$ .

Retournons au calcul de  $\phi$ . En notant  $\emptyset$  la condition vide,

$$\begin{aligned} & \phi \text{ est } UPP(\beta) \text{ de } r = r_0 \text{ contre } r \neq r_0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \mathbb{E}_{r_0}(\phi) = \beta, \\ \forall r_1 \in ]r_0; r_0\beta^{-\frac{1}{\alpha n}}[, \quad \phi(X) = 1 \text{ si } \emptyset \\ \quad \phi(X) = 0 \text{ si } \min X_i \in ]r_0, r_1] \\ \forall r_1 \in [r_0\beta^{-\frac{1}{\alpha n}}; +\infty[, \quad \phi(X) = 1 \text{ si } \min X_i > r_1 \\ \quad \phi(X) = 0 \text{ si } \emptyset \\ \forall r_1 < r_0, \quad \phi(X) = 1 \text{ si } r_1 < \min X_i \leq r_0 \\ \quad \phi(X) = 0 \text{ si } \emptyset \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \mathbb{E}_{r_0}(\phi) = \beta, \\ \phi(X) = 0 \text{ si } \min X_i \in ]r_0, r_0\beta^{-\frac{1}{\alpha n}}[ \\ \phi(X) = 1 \text{ si } \min X_i > r_0\beta^{-\frac{1}{\alpha n}} \\ \phi(X) = 1 \text{ si } \min X_i \leq r_0 \end{cases} \end{aligned}$$

Le test qui conserve “ $r = r_0$ ” lorsque  $\min X_i \in ]r_0, r_0\beta^{-\frac{1}{\alpha n}}[$  et qui rejette cette hypothèse sinon est bien un test de taille  $\beta$  (faire le calcul de la taille) de “ $r = r_0$ ” contre “ $r \neq r_0$ ”, et il est  $UPP(\beta)$ .

2. On suppose que  $\alpha$  est inconnu et  $r$  est connu.

(a) Existe-t-il un test uniformément le plus puissant parmi les tests de niveau  $\beta$  de  $\alpha = \alpha_0$  contre  $\alpha \neq \alpha_0$ , où  $\alpha_0$  est un réel positif fixé ? (2 pts)

Soit  $f_\alpha$  la densité d'un  $n$ -échantillon de la loi de Pareto de paramètres  $\alpha$  et  $r$  par rapport à  $\mu_r$ , la mesure de Lebesgue sur  $]r, +\infty[^n$ . On peut raisonner comme pour la question précédente. On peut raccourcir l'écriture de la preuve en utilisant le fait qu'on a une famille de densités à rapport de vraisemblance monotone. En effet, si  $\alpha' > \alpha$ ,

$$\frac{f_{\alpha'}(X)}{f_\alpha(X)} = \left(\frac{\alpha_1 r^{\alpha_1}}{\alpha_0 r^{\alpha_0}}\right)^n \left(\prod_{i=1}^n X_i\right)^{\alpha_0 - \alpha_1},$$

qui est une fonction strictement décroissante de  $\prod_{i=1}^n X_i$ . Si  $\phi$  est un test  $UPP(\beta)$  de  $\alpha = \alpha_0$  contre  $\alpha > \alpha_0$ , on doit avoir:

$$\phi(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } \prod_{i=1}^n X_i < t_\beta \\ 0 & \text{si } \prod_{i=1}^n X_i > t_\beta \end{cases},$$

avec:

$$t_\beta = \sup\{t \text{ t.q. } \mathbb{P}_{\alpha_0}(\prod_{i=1}^n X_i < t) \leq \beta\}.$$

De même, si  $\phi$  est un test  $UPP(\beta)$  de  $\alpha = \alpha_0$  contre  $\alpha < \alpha_0$ , on doit avoir:

$$\phi(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } \prod_{i=1}^n X_i > t'_\beta \\ 0 & \text{si } \prod_{i=1}^n X_i < t'_\beta \end{cases},$$

avec:

$$t'_\beta = \inf\{t \text{ t.q. } \mathbb{P}_{\alpha_0}(\prod_{i=1}^n X_i > t) \leq \beta\}.$$

Donc  $t'_\beta = t_{1-\beta}$ . Par conséquent, si  $\phi$  est un test  $UPP(\beta)$  de  $\alpha = \alpha_0$  contre  $\alpha \neq \alpha_0$ ,  $\phi(X)$  doit être nul lorsque  $\prod_{i=1}^n X_i > t_\beta$  et valoir 1 lorsque  $\prod_{i=1}^n X_i > t_{1-\beta}$ . Lorsque  $\prod_{i=1}^n X_i > t_{1-\beta} \vee t_\beta$ , cela donne une contradiction. Or cet événement est de probabilité strictement positive pour tout  $(\alpha, r)$ . Donc il n'existe pas de test  $UPP(\beta)$  de  $\alpha = \alpha_0$  contre  $\alpha \neq \alpha_0$ .

- (b) Calculer la loi de  $\log(X_i/r)$  puis construire un estimateur uniformément de variance minimale parmi les estimateurs sans biais de  $1/\alpha$ . Existe-t-il un estimateur efficace de ce paramètre ? (3 pts)

On a:

$$\mathbb{P}(\log \frac{X_i}{r} \leq t) = \mathbb{P}(X_i \leq r e^t) = 1 - e^{-\alpha t}.$$

Donc  $\log \frac{X_i}{r}$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\alpha$ , i.e de moyenne  $\frac{1}{\alpha}$ . Rappelons que:

$$f_\alpha(X) = \alpha^n r^{\alpha n} e^{-(\alpha+1) \sum_{i=1}^n \log X_i}.$$

Donc on est dans un modèle exponentiel de la forme  $C(\alpha)e^{\alpha T(X)}$  avec  $T = \sum_{i=1}^n \log X_i$ .  $T$  est donc une statistique exhaustive et complète. Or  $S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \frac{X_i}{r}$  est un estimateur sans biais de  $1/\alpha$ , fonction de  $T$  exhaustive et complète, c'est donc un estimateur UVMB de  $1/\alpha$ . Par ailleurs, son risque est égal à:

$$\text{Var}(S) = \frac{1}{n} \text{Var}(\log X_i) = \frac{1}{n\alpha^2}.$$

On estime  $g(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ . Donc  $g'(\alpha)^2 = \frac{1}{\alpha^4}$ . Calculons le score, en notant  $g_\alpha$  la densité de la loi de Pareto de paramètres  $\alpha$  et  $r$ :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \log g_\alpha(X_1) = \frac{1}{\alpha} + \log r - \log X_1.$$

D'où l'information de Fisher de cette loi:

$$I(\alpha) = \mathbb{E}_\alpha((\frac{1}{\alpha} + \log r - \log X_1)^2) = \text{Var}(\log \frac{X_1}{r}) = \frac{1}{\alpha^2}.$$

Donc l'information de Fisher du  $n$ -chantillon est:

$$I_n(\alpha) = nI(\alpha) = \frac{n}{\alpha^2}.$$

Finalement, on a:

$$\text{Var}(S) = \frac{g'(\alpha)^2}{I_n(\alpha)},$$

$S$  atteint la borne de Cramer-Rao et est donc efficace.

3. Dans le cas où les deux paramètres  $\alpha$  et  $r$  sont inconnus, donner une statistique exhaustive pour le paramètre  $(\alpha, r)$ . Le modèle est-il exponentiel ? (1 pt)

Le modèle est dominé par la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}_+^n$ , et si on note  $f_{\alpha,r}$  la densité correspondante, on a :

$$f_{\alpha,r}(X) = \alpha^n r^{\alpha n} e^{-(\alpha+1) \sum_{i=1}^n \log X_i} \mathbb{1}_{\min X_i > r} .$$

Donc  $(\sum_{i=1}^n \log X_i, \min X_i)$  est une statistique exhaustive. Par contre, on n'est pas dans un modèle exponentiel, puisque la densité peut s'annuler, et ceci quelle que soit la mesure dominante choisie. En effet, soit  $\mu$  une mesure sur  $\mathbb{R}^n$  dominant le modèle, et  $\mathbb{P}_{\alpha,r,n}$  la loi produit de  $n$  lois de Pareto de paramètres  $\alpha$  et  $r$ . Pour tous  $r_2 > r_1 > 0$ , il existe une loi  $\mathbb{P}_{\alpha,r,n}$  qui charge  $[r_1, r_2]^n$ . Donc  $\mu$  charge  $[r_1, r_2]^n$  pour tous  $[r_1, r_2]^n$ . Mais du coup,  $\frac{d\mathbb{P}_{\alpha,r,n}}{d\mu}$  s'annule sur  $]r, \infty[^n$ , qui est un ensemble de  $\mu$ -mesure strictement positive. On n'est donc pas dans un modèle exponentiel.

### EXERCICE 3 (5 PTS)

1. Calculer l'espérance, la variance et la médiane d'une variable aléatoire de loi de Pareto de paramètres  $\alpha > 2$  et  $r > 0$ . (2 pts)

Soit  $X_1$  de loi de Pareto de paramètres  $\alpha > 2$  et  $r > 0$ . On trouve :

$$\mathbb{E}(X_1) = \frac{\alpha r}{\alpha - 1}, \quad \text{Var}(X_1) = \frac{r^2 \alpha}{(\alpha - 2)(\alpha - 1)^2}, \quad \text{médiane} = 2^{\frac{1}{\alpha}} r .$$

2. On observe un  $n$ -échantillon de la loi uniforme sur  $[0, \theta]$ , où  $\theta > 0$  est inconnu. On muni l'espace des paramètres de la loi *a priori* de Pareto de paramètres  $\alpha > 0$  et  $r > 0$ , avec  $n + \alpha > 2$ .

- (a) Déterminer les estimateurs bayésiens de  $\theta$  relatifs respectivement au risque quadratique et au risque  $\mathbb{L}_1$ . (2 pts)

On calcule la loi a posteriori. Soient  $\nu_{\alpha,r}$  la loi de Pareto de paramètres  $\alpha$  et  $r$  et  $\lambda_+$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^+$ . Soient  $\mu$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}_+^n$  et  $f_\theta$  la densité de la loi  $\mathcal{U}([0, \theta])^{\otimes n}$  par rapport à  $\mu$ .

$$\frac{d\nu(\cdot | X = x)}{d\lambda_+}(\theta) = C(x) f_\theta(x) \frac{d\nu_{\alpha,r}(\theta)}{d\lambda_+} .,$$

où  $C(x)$  est la constante de normalisation nécessaire. On a :

$$f_\theta(x) \frac{d\nu_{\alpha,r}(\theta)}{d\lambda_+} = \alpha \frac{r^\alpha}{\theta^{n+\alpha+1}} \mathbb{1}_{r \vee \max x_i \leq \theta} ,$$

Donc la loi a posteriori  $\nu(\cdot | X = x)$  est la loi de Pareto de paramètres  $n + \alpha$  et  $r \vee \max x_i$ .

L'estimateur de Bayes pour le risque quadratique est donc  $\frac{n+\alpha}{n+\alpha-1}(r \vee \max X_i)$ . L'estimateur de Bayes pour le risque  $L^1$  est la médiane de la loi a posteriori :

$$2^{\frac{1}{n+\alpha}}(r \vee \max X_i) .$$

(b) Ces estimateurs sont-ils admissibles ? (1 pt)

On vérifie que la loi mélange “charge tout  $\mathbb{R}_+^n$ ”. En effet, la densité de la loi mélange  $\mathbb{P}_X$  par rapport à  $\mu$  est  $g$  avec:

$$\begin{aligned} g(x) &= \int f_\theta(x) d\nu_{\alpha,r}(\theta) = \int_0^\infty \alpha \frac{r^\alpha}{\theta^{n+\alpha+1}} \mathbb{I}_{r \vee \max x_i \leq \theta} d\theta, \\ &= \alpha \frac{r^\alpha}{(n+\alpha)(r \vee \max x_i)^{n+\alpha}}, \end{aligned}$$

qui est strictement positive  $\mu$ -p.s. Donc  $\mu$  est absolument continue par rapport à la loi mélange  $\mathbb{P}_X$ . Comme  $\mathbb{P}_\theta$  est absolument continue par rapport à  $\mu$ ,  $\mathbb{P}_\theta$  est absolument continue par rapport à la loi mélange  $\mathbb{P}_X$ , pour tout  $\theta$ . Comme les deux estimateurs de Bayes ci-dessus sont uniques  $\mathbb{P}_X$ -p.s, ils sont uniques  $\mathbb{P}_\theta$ -p.s pour tout  $\theta$ , et donc admissibles (respectivement pour le risque  $L^2$  et le risque  $L^1$ ).