Chapitre 1

Conditionnement

1-1 Espace de probabilité

Soit Ω l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire. Un élément de Ω est appelé " réalisation ". Un ensemble $A \subset \Omega$ est appelé "évènement" .Si w $\in \Omega$, le singleton $\{w\}$ est un évènement élémentaire , Ω est l'évènement certain, $\emptyset$ est l'évènement impossible.

- Si A et B sont deux évènements, $\bar{A}$ est l'évènement contraire.
- Deux évènements A et B sont incompatibles ou disjoints si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.
- Une suite $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un système complet d'évènements si $\forall i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ et $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

Un sous ensemble $\mathcal{F}$ de Ω est appelé tribu ou σ- algèbre sur Ω si

i- $\emptyset$ et $\Omega \in \mathcal{F}$

ii- Si $A \in \mathcal{F}$ alors $\bar{A} \in \mathcal{F}$

iii- Si $(A_i)_{i \geq 1}$ est une suite d'évènements de $\mathcal{F}$ alors $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

1-1-1 Probabilité

On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ une application P de $\mathcal{F}$ dans [0,1] vérifiant les deux propriétés suivantes :

i- $P(\Omega) = 1$

ii- Pour toute suite $(A_i)_{i \geq 1}$ d'évènements de $\mathcal{F}$ deux à deux incompatibles on a

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est appelé espace de probabilité **.**

<u>Propriétés</u> :

i- $P(\emptyset) = 0$

ii- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

iii- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

iv- Si A et B sont incompatibles , alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

v- Pour toute famille $A_1, A_2, \dots, A_n$ d'évènements deux à deux incompatibles

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots P(A_n)$$

Equiprobabilité et probabilité uniforme

Soit Ω un ensemble fini. On dit qu'il y a équiprobabilité lorsque les probabilités de tous les évènements élémentaires sont égales. Dans ce cas, P est la probabilité uniforme. S'il y a équiprobabilité, pour tout évènement A , on a

$$P(A) = \frac{Card\ A}{Card\ \Omega} = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}$$

1-1-2 Probabilités conditionnelles

Soient A et B deux évènements tel que $P(B) > 0$. La probabilité conditionnelle de A sachant B est

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Propriétés pour trois évènements A , B et C, on a

- i- $P(\bar{B}/A) = 1 - P(B|A)$
- ii- $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$
- iii- Si A et B sont incompatibles alors $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C)$

Formule des probabilités composées : Soient $A_1, .., A_n$ des évènements tel que $P(A_1 \cap .. \cap A_n) \neq 0$ on a

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P(A_n|A_1 \cap A_2 .. A_{n-1}).$$

Formule des probabilités totales : Soient $B_1, .., B_n$ un système complet d'évènements de probabilités toutes non nulles. Pour tout évènement A on a

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)$$

Formule de Bayes : Soient $B_1, .., B_n$ un système complet d'évènements de probabilités toutes non nulles. Pour tout évènement A tel que $P(A) > 0$, On a

$$P(B_i|A \quad) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)}$$

Exemple 1 On effectue un test dans un grand élevage de bovins pour dépister une maladie. Ce test a permis de déceler 1.8% de cas atteints chez les mâles et 1.2% chez les femelles. Cet élevage contient 65% de femelles et 35% de mâles.

1- Quelle est la probabilité qu'un animal choisi au hasard dans cet élevage soit atteint de cette maladie?
2- L'animal choisi est atteint de cette maladie, quelle est la probabilité qu'il soit une femelle ?

Solution

Soients les évènements suivants :
A : L'animal choisi est atteint de cette maladie
F : L'animal choisi est une femelle
M : L'animal choisi est un mâle

1- On a par la formule des probabilities totales :

$$P(A) = P(A|\mathrm{F})P(\mathrm{F}) + P(A|\mathrm{M})P(\mathrm{M}) = (0.012)(0.65) + (0.018)(0.35) = 0.0141$$

2- On cherche $P(F|A) = \frac{P(A|F)P(F)}{P(A)} = \frac{(0.012).\ (0.65)}{0.0141} = 0.553$

1-1-3 Indépendance

Deux évènements A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Si A et B sont indépendants, A et $\bar{B}$ le sont aussi.

Des évènements $A_1, .. A_n$ sont mutuellement indépendants si $P(A_1 \cap A_2 \cap .. \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)..P(A_n)$

Si $A_1, .. A_n$ sont mutuellement indépendants, alors ils sont indépendants deux à deux, la réciproque est fausse.

Exemple 2 On lance une pièce de monnaie deux fois de suites et on considère les évènements :
A : obtenir pile au premier lancer
B : obtenir le même résultat dans les deux lancers
C : obtenir pile dans les deux lancers

1- Les évènements A et B sont- ils indépendants ?
2- Les évènements A et C sont- ils indépendants ?

Solution

1- Les évènements A et B sont indépendants car
$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = P(A)P(B)$$
2- Les évènements A et C ne sont pas indépendants car
$$P(A \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2}\frac{1}{4} = P(A)P(C)$$

1-2- Variable aléatoire discrète

Définition 1 Une variable aléatoire (v. a) X est une fonction allant de Ω dans E.

$$X: \Omega \longrightarrow E$$
$$w \mapsto X(w) = x$$

Définition 2 Une variable aléatoire réelle (v.a.r) X est une fonction allant de Ω dans un ensemble $E \subset \mathbb{R}$.

Définition 3 Une variable aléatoire réelle (v.a.r) X est une fonction allant de Ω dans un ensemble discret $E \subset \mathbb{R}$.

1-2-1 Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

On appelle distribution ou loi de probabilité de la v.a X, l'ensemble des couples (x, p) telle que

$$\forall x \in X(\Omega), \;\; P_X(x) = P(X = x)$$

Avec $P(X = x) \geq 0$, $\forall x \in X(\Omega)$ et $\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x)$= 1

La loi de probabilité d'une v.a discrète est souvent présentée sous forme d'un tableau.

Définition 4 *(*Fonction de répartition)
On appelle fonction de répartition de la v.a X, la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

Propriétés **:**

i- $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

ii- La fonction F_X est croissante et continue à droite

iii- Pour tous réels a et b, $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète est une fonction en escalier. Si la variable aléatoire prend les valeurs $x_k, k = 1,2, ..$, supposées rangées par ordre croissant, alors la fonction de répartition F_X prend les valeurs :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < x_1 \\ P[X = x_1] & \text{pour } x \in [x_1, x_2[\\ & \vdots \\ P[X = x_1] + \cdots + P[X = x_k] & \text{pour } x \in [x_k, x_{k+1}[\\ & \vdots \end{cases}$$

1-2-2 Moments d'une v.a discrète

1- Espérance mathématique

l'espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète X est la quantité , si elle existe

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x)$$

Proposition 1 pour toute fonction g,

$$E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x) P(X = x)$$

Définition 5

i- On appelle moment centré d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$ d'une v.a X , la quantité , si elle existe

$$\mu_r = E((X - E(X))^r) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - E(X))^r P(X = x)$$

ii- On appelle moment d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$ d'une v.a X , la quantité , lorsqu'elle existe :

$$m_r = E(X^r) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^r P(X = x)$$

2- Variance et Ecart-type

La variance d'une v. a discrète X est le réel positif

$$Var(X) = E(X - E(X))^2 = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - E(X))^2 \, P(X = x) = E(X^2) - E^2(X)$$

L'écart-type de X est la quantité définie par $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$

1-2-3 Fonction génératrice

Définition 6: On appelle fonction génératrice de la variable aléatoire discrète X à valeurs dans $\mathbb{N}$, la série entière

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} s^k \, P(X = k) = E(s^X) \ , \ s \in [-1\,,1]$$

Théorème 1 : Soit X à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors

- X admet une espérance si et seulement si $G'_X(1) = E(X)$
- X admet une variance si et seulement si G_X est deux fois dérivables en 1.

$$Var(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - \left(G'_X(1)\right)^2$$

- Si X et Y ont la même fonction génératrice, elles ont même loi .
- Si X et Y sont deux v.a indépendantes, alors $G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)$

Remarque 1

Si X une variable aléatoire réelle telle que $E(X) = \mu$ et $(X) = \sigma^2$, alors la variable $Y = \frac{(X-\mu)}{\sigma}$ est d'espérance nulle et de variance 1. On dit que la variable aléatoire Y est centré (d'espérance nulle) et réduite (de variance 1).

Exemple 3 On lance deux fois une pièce de monnaie. Soit X le nombre de piles sur les deux lancers.

1- Donner la loi de probabilité
2- Déterminer la fonction de répartition
3- Calculer l'espérance et la variance de X.
4- Trouver la fonction génératrice et en déduire $E(X)$ et $Var(X)$

Solution

1- Loi de probabilité **:**

x	0	1	2	total
$P(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

2- La fonction de répartition est

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ \frac{1}{4} & si \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4} & si \quad 1 \leq x < 2 \\ 1 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$

3- Nous avons :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{2} k\, P(X = k) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1$$

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \sum_{k=0}^{3} k^2\, P(X = k) - E^2(X) = \frac{1}{2}$$

4- La fonction génératrice :

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{2} s^k\, P(X = k) = P(X = 0) + s \quad P(X = 1) + s^2 P(X = 2)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{s}{2} + \frac{s^2}{4}$$

La première et la seconde dérivée sont données respectivement par

$$G_X'(s) = \frac{1}{2} + \frac{s}{2} \quad \text{et} \quad G_X''(s) = \frac{1}{2}$$

On peut calculer l'espérance et la variance à partir de la fonction génératrice

$$E(X) = G_X'(1) = 1$$

$$Var(X) = Var(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - \left(G_X'(1)\right)^2 = \frac{1}{2}$$

1-2- 4 Lois usuelles discrètes

Dans les tableaux ci- après sont présentées les propriétés de quelques lois discrètes

Lois de$X$	$P(X = k)$	Esperance	Variance
Bernoulli $\mathfrak{B}(p)$	p si $k = 1{,}1 - p$ si $= 0$,	p	p(1-p)
Binomiale $\mathfrak{B}(n, p)$	$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $k \in \{0, .. n\}$,	np	$np(1-p)$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k \in \mathbb{N}$, $\lambda > 0$	λ	λ
Géométrique G (p)	$(1-p)^k p$, $k \in \mathbb{N}$	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Géométrique G$^*(p)$	$(1-p)^{k-1} p$, $k \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$

1-3 Variable aléatoire continue

Définition 7 Une v.a continue est une fonction X, allant de Ω dans $\mathbb{R}$.

Définition 8 Soit X une v.a continue. On appelle densité de probabilité de X , une application positive et intégrable f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, vérifiant :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

1-3-1 Loi de probabilité d'une v.a continue

La loi de probabilité d'une v.a continue est déterminée par la fonction de répartition F définie pour tout réel x par :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

La fonction F_X est continue , elle est dérivable aux points de continuité de f_X avec $f_X(x) = F'_X(x)$.

<u>Propriétés</u>

i- $0 \leq \mathrm{F(x)} \leq 1$ avec $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X\,(x) = 0$ et avec $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X\,(x) = 1$

ii- La fonction F est croissante et continue à droite

iii- Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $P(X = a) = 0$

iv- Pour tous réels a et b tels que $a < b$ on a $P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(t)\, dt$

1-3-2 Moments d'une v.a continue

1- Espérance mathématique

On appelle espérance mathématique de la variable aléatoire discrète X la quantité , si elle existe

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx$$

Définition 9

Le moment d'ordre $(r \geq 1)$ de X est la quantité (si elle existe)

$$E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f_X(x)dx$$

Le moment centré d'ordre $(r \geq 1)$ est

$$E\big(X - E(X)\big)^r = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(x - E(X)\big)^r f_X(x)dx$$

2- Variance et écart-type

La variance de X est la quantité (si elle existe) notée $Var(X)$ définie par

$$\text{Var}(X) = E\big(X - E(X)\big)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\big(x - E(X)\big)^2 f_X(x)dx = E(X^2) - E^2(X)$$

L'écart-type, notée σ_X est la racine carrée de la variance de X

<u>Propriétés</u> Soit X une variable aléatoire (discrète ou continue) , On a

i- Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $E[\alpha X + \beta] = \alpha E(X) + \beta$
ii- Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $Var(aX) = a^2 Var(X)$
iii- Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $Var(X + a) = Var(X)$

1-3-3 Fonction génératrice des moments

La fonction génératrice des moments de la variable aléatoire X est définie par

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$

Le moment d'ordre r de X est donnée par :

$$E[X^r] = M_X^{(r)}(0)$$ où $M_X^{(r)}(0)$ est la dérivée d'ordre r de M_X

<u>Exemple 4</u> Soit X une variable aléatoire continue de densité de probabilité :

$$f_X(x) = 2e^{-2x} \quad , \quad x \geq 0$$

1- Donner la fonction de répartition de X
2- Trouver l'espérance , le moment d'ordre 2 de X et la variance de X
3- Déterminer la fonction génératrice des moments de X. En déduire $E(X)$ et $Var(X)$

Solution

1- $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$

si $x < 0$, on a $F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} f_X(t)dt = 0$

si $x \geq 0$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} f_X(t)dt + \int_{0}^{x} f_X(t)dt = 0 + 2\int_{0}^{x} e^{-2t}dt = 1 - e^{-2x}$

On a donc $F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 1 - e^{-2x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$

2- $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x f_X(x)\, dx + \int_{0}^{+\infty} x f_X(x)dx$

Comme $\int_{-\infty}^{0} x f_X(x) = 0$, on aura $E(X) = 2\int_{0}^{+\infty} x e^{-2x}\, dx$

On procède par intégration par parties, on obtient

$$E(X) = \frac{1}{2} \quad , \quad E(X^2) = \frac{1}{2} \text{ et donc } Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{1}{4}$$

La fonction génératrice des moments est

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)dx = 2\int_0^{+\infty} e^{tx} e^{-2x} dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-x(2-t)} dx = \frac{2}{2-t}$$

On a $E(X) = M'_X(0) = \frac{1}{2}$, $E(X^2) = M''_X(0) = \frac{1}{2}$ ainsi $Var(X) = \frac{1}{4}$.

1-3-4 Lois usuelles Continues

Lois	Densité	Esperance	Variance
Uniforme U ([α; β])	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & si\ a \le x \le b \\ 0 & sinon \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(a-b)^2}{12}$
Exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$	$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si\ x \ge 0 \\ 0 & si\ \ x < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normale N(μ; σ^2)	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}$,	m	σ^2
Gamma $\Gamma(\lambda, a)$	$f(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x}, x > 0, a > 0, \lambda > 0$	$\frac{a}{\lambda}$	$\frac{a}{\lambda^2}$
bêta $\mathrm{B}(a,b)$	$f(x) = \frac{1}{\mathrm{B}(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, 0 < x < 1$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}$

Fonction Gamma : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx, \quad x > 0$,

$\Gamma(a) = (a-1)\,\Gamma(a-1) \quad \forall a > 0,\ \ \Gamma(n) = (n-1)! \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2\pi}$, $\Gamma(1) = 1$

Fonction bêta : $\mathrm{B}(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$, $a > 0$, $b > 0$

1-4 Couple de variables aléatoires discrètes

La loi d'un couple de v.a discrètes(X,Y) est définie par l'ensemble des valeurs possibles $(X,Y)(\Omega) = \{(x,y), x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)\}$ et par les probabilités associées :

$$P_{X,Y}(x,y) = P(X = x, Y = y) \quad \text{avec} \quad \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} P_{X,Y}(x,y) = 1$$

1-4-1 Lois marginales

Les lois marginales sont les lois de chacune des variables du couple (X,Y) .Elles sont définies par

$$P(X=x)=\sum_{y\in Y(\Omega)} P(X=x\,,Y=y\,) \quad \text{et} \quad P(Y=y)=\sum_{x\in X(\Omega)} P(X=x\,,Y=y\,)$$

Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si

$$\forall\,(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\,,\,P(X=x,Y=y)=P(X=x)P(Y=y)$$

1-4-2 Moments associés à un couple discret

Soit $h:\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue , elle définie une v.a réelle . L'espérance mathématique de $h(X,Y)$ est définie par

$$E\big(h(X,Y)\big)=\sum_{x\in X(\Omega)}\sum_{y\in Y(\Omega)} h(x,y)P(X=x,Y=y)$$

Dans le cas où $h(X,Y)=\big(X-E(X)\big)\big(Y-E(Y)\big)$ on définit la covariance de X et Y par

$$Cov(X,Y)=E\left(\big(X-E(X)\big)\big(Y-E(Y)\big)\right)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

Où

$$E(XY)=\sum_{x\in X(\Omega)}\sum_{\in Y(\Omega)} xy\,P(X=x,Y=y)$$

La variance et la covariance sont reliées par l'égalité :

$$Var(X+Y)+Var(X)+Var(Y)+2COV(X,Y)$$

<u>Propriétés</u>

i- $Cov(X,X)=Var(X)$ et $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$
ii- Si X et Y sont indépendantes alors $Cov(X,Y)=0$. La réciproque est fausse.
iii- Si X et Y sont indépendantes alors $Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)$

1-4-3- Somme de deux variables aléatoires discrètes

Soient X et Y des variables aléatoires discètes . La loi de $S=X+Y$ est définie par

$$\forall s\in(X+Y)(\Omega)\ ,P(X+Y=n)=\sum_{n=x+y} P(X=x,Y=y)=\sum_{x\in X(\Omega)} P(X=x,Y=n-x)$$

Si X et Y sont indépendantes alors

$$P(X+Y=n)=\sum_{x} P(X=x)P(Y=n-x)$$

1-4-4 Lois conditionnelles

Définition 10 Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes, et soit $x \in X(\Omega)$ tel que $P(X=x) \neq 0$. La loi conditionnelle de Y sachant $X=x$ est définie par :

$$P(Y=y/X=x) = \frac{P(X=x,Y=y)}{P(X=x)}$$

1-4 -5 Espérances conditionnelles

Soit (X,Y) un couple aléatoire discret. L'espérance conditionnelle de Y sachant $X=x$ est définie par

$$\forall x \in X(\Omega)\,,\, E(Y|X=x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} y\, P(Y=y/X=x)$$

Théorème 2 (Théorème de l'espérance totale)

Soit X et Y deux v.a.r. discrètes définies sur le même espace telles que $E(|Y|) < \infty$. Alors la v.a.r. discrète $E(Y|X)$ admet une espérance et

$$E\big(E(Y|X)\big) = \sum_{x \in X(\Omega)} E(Y|X=x)\, P(X=x) = E(Y)$$

Exemple 5 Soit(X,Y) un couple de variables aléatoires dont la loi est définie par le tableau suivant

$X \setminus Y$	0	1	Loi de X
0	2/7	2/7	4/7
1	2/7	1/7	3/7
Loi de Y	4/7	3/7	1

1- Les v.a X et Y sont- elles indépendantes ?
2- Calculer $E(X), E(Y)$ et $Cov(X,Y)$
3- Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $X=0$ puis son espérance $E(Y|X=0)$
4- Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $X=1$ puis son espérance $E(Y|X=1)$
5- En déduire la loi de $E(Y|X)$ puis son espérance $E(E(Y|X))$

.Solution

1- Les v.a X et Y ne sont pas indépendantes puisque par exemple, $P(X=0,Y=1) = \frac{2}{7}$ alors que $P(X=0)P(Y=1) = \frac{16}{49} \neq \frac{2}{7}$
2- On a

$$E(X) = \sum_{x=0}^{1} xP(X=x) = 0 \times \frac{4}{7} + 1 \times \frac{3}{7} = \frac{3}{7} \quad et \quad E(Y) = \sum_{y=0}^{1} yP(Y=y) = 0 \times \frac{4}{7} + 1 \times \frac{3}{7} = \frac{3}{7}\ ,$$

$$E(XY) = \sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{1} xyP(X=x,Y=y) = (0 \times \frac{2}{7} \times 0) + (0 \times \frac{2}{7} \times 1) + (1 \times \frac{2}{7} \times 0) + (1 \times \frac{1}{7} \times 1) = \frac{1}{7}$$

D'où $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{7} - \frac{9}{49} = -\frac{2}{49}$

La probabilité conditionnelle de Y sachant $X = 0$ est $P(Y = y|X = 0) = \frac{P(X=0\ ,Y=y)}{P(X=0)}$ ce qui conduit au tableau suivant :

y	0	1
$P(Y = y\|X = 0)$	$\frac{2/7}{4/7} = 1/2$	$\frac{2/7}{4/7} = 1/2$

On calcule $E(Y|X = 0) = \sum_{y=0}^{1} yP(Y = y|X = 0) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

De la même manière on calcule $P(Y = y|X = 1) = \frac{P(X=1,\ Y=y)}{P(X=1)}$

y	0	1
$P(Y = y\|X = 1)$	$\frac{2/7}{3/7} = 2/3$	$\frac{1/7}{3/7} = 1/3$

on obtient $E(Y|X = 1) = \sum_{y=0}^{1} yP(Y = y|X = 1) = \frac{1}{3}$ et on en déduit la loi de $E(Y|X)$

$E(Y\|X)$	$E(Y\|X = 0)$ =1/2	$E(Y\|X = 1)$ =1/3
$P(X = x)$	4/7	3/7

et puis $E\big(E(Y|X)\big) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{7} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{7} = E(Y)$

1-5 Couple de variables aléatoires continues

Si X et Y sont deux v.a réelles continues , La loi du couple(X,Y) est déterminée par sa fonction de répartition $F_{X,Y}$. Si cette fonction est deux fois dérivables par rapport aux deux variables , alors la loi de (X,Y) est dite absolument continue , de densité $f_{X,Y}$ définie par :

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

et $F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)\, dudv$

Vérifiant pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $f(x,y) \geq 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dxdy = 1$

1-5-1 Lois marginales

Les densités marginales de $X\ et\ Y$ sont définies par

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \qquad \text{et} \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

Deux variables aléatoires absolument continues $X\ et\ Y$ sont indépendantes si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x,y\ ) = f_X(x) f_Y(y)$$

1-5-2 Moments associés à un couple continu

Soit h : $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue, l'espérance mathématique de $h(X,Y)$ est définie par

$$E\big(h(X,Y)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x,y)f(x,y)dxdy$$

La covariance de X et Y est définie par

$$Cov(X,Y) = E\Big(\big(X-E(X)\big)\big(Y-E(Y)\big)\Big) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Où ; $E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy$

Les propriétés de la variance et de la covariance sont identiques au cas discret

1-5-3 Somme de deux variables aléatoires continues

Soit (X,Y) un couple de v .a absolument continues . La variable $Z = X + Y$ est une v.a absolument continue de densité

$$g_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\, dx$$

Si X et Y sont indépendantes alors

$$g_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\, dx$$

La fonction g_Z est appelée le produit de convolution de f_X et f_Y.

1-5-4 Loi conditionnelle

Soit (X,Y) un couple de v.a absolument continues . Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $f_X(x) \neq 0$,la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$ est donnée par

$$f_{Y|X}(y|x) = f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

1-5-5 Esperance conditionnelle

Soit (X,Y) un couple aléatoire absolument continu. L'espérance conditionnelle de Y sachant $\mathrm{X} = \mathrm{x}$ est définie par

$$E(Y|X=x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\ f(y|x)dy$$

Théorème 3 Soit X et Y deux v.a.r. absolument continues définies sur le même espace telles que $E(|Y|) < \infty$. Alors la v.a.r. continue $E(Y|X)$ admet une espérance et

$$E\big(E(Y|X)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(Y|X=x)\, f_X(x)dx = E(Y)$$

Exemple 6 Soit un couple aléatoire (X, Y) de densité

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-x-y} & si\ \ x > 0\ \ , y > 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1- Déterminer les lois marginales de X et Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2- Calculer la covariance
3- Déterminer $f(y|x)$ et $E(Y|X=x)$

Solution

1- Densités marginales de X et de Y :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} f(x,y)dy = \int_0^{+\infty} e^{-x-y}dy = e^{-x} \quad \text{si } x > 0 \text{ et nulle ailleurs}$$

$$f(y) = \int_0^{+\infty} f(x,y)dx = \int_0^{\infty} e^{-x-y}dx = e^{-y} \quad \text{si } \ y > 0 \text{ et nulle ailleurs}$$

Les v.a X et Y sont indépendantes puisque $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$

2- On a $E(X) = \int_0^{+\infty} xf_X(x)dx = \int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = 1$, $E(Y) = \int_0^{+\infty} yf_Y(y)dy = \int_0^{+\infty} ye^{-y}dy = 1$ et

$$E(XY) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} xy\, f(x,y)dxdy = \int_0^{+\infty} xe^{-x}(\int_0^{+\infty} ye^{-y}dy)dx = 1$$

On obtient $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)(Y) = 0$

3- La loi conditionnelle de Y sachant $X = x$

$$f\ \ (y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{e^{-x-y}}{e^{-x}} = e^{-y}$$

L'espérance conditionnelle de Y sachant $X = x$ est

$$E(Y|X=x) = \int_0^{+\infty} yf(y|x)dy = \int_0^{+\infty} ye^{-y}dy = 1$$

Propriétés des espérances conditionnelles et variances conditionnelles

Soit (X, Y) un couple aléatoire. Soit ϕ , φ deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et soit h une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Sous réserve d'intégrabilité des variables aléatoires , on a les propriétés suivantes :

i- Si X et Y sont indépendantes , alors $E(\varphi(Y)|X) = E(\varphi(Y))$. En particulier, $E(Y|X) = E(Y)$.

ii- On a $E(\varphi\ (X)|X) = \varphi(X)$. En particulier on a $E(X|X) = X$

iii- $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall b \in \mathbb{R}$, $E(a\varphi(X) + b\phi(Y)\ \ |X) = aE(\varphi(X)|X) + bE(\phi(Y)|X) = a\varphi(X) + bE(\phi(Y)|X)$

iv- $E(h(X,Y)|X=x) = E(h(x,Y)|X=x)$

v- $E\big(\varphi(Y)\big) = E(E(\varphi(Y))|X)$

La variance conditionnelle de Y sachant $\mathrm{X} = \mathrm{x}$ est donnée par

$$Var(Y|X = x) = E(Y^2\,|X = x) + E^2\,(Y|X = x)$$

Notons que $Var(Y|X)$ est une variable aléatoire donc on peut calculer son espérance et on a

$$Var(Y) = E(Var(Y|X) + Var\big(E(Y|X)\big)$$

Exercices

Exercice 1 Une école prestigieuse exige de ces candidats de passer un test avant d'accepter leurs candidature. Un bon candidat a 85% de chance de réussir le test alors qu'un candidat faible, n'a que 15% de chance de réussir le test. Des études statistiques ont montré qu'il y a en moyenne 40% de bon candidats.

1- Quelle est la probabilité qu'un candidat choisis au hasard, réussi le test ?
2- Un candidat a échoué au test, quelle est la probabilité qu'il soit bon ?
3- Quelle est la proportion des bon candidats qui ont réussi au test ?

Exercice 2 On suppose que 100 personnes voyageant par train à un instant donné, il y a en moyenne 1 médecin . Soit X la v.a représentant le nombre de médecins dans le train. La v.a X suit une loi de Poisson de paramètre 1.

1- Quelle est la probabilité de trouver :

i- Aucun médecin
ii- Entre 2 et 4 médecins
iii- AU moins deux médecins

2- Calculer la fonction génératrice, l'espérance et la variance de la variable X.

Exercice 3 Soit X une v.a continue de densité

$$f_X(x) = \frac{k}{x+1} \quad si \quad 0 \le x \le e-1 \quad \text{et} \quad 0 \text{ sinon}$$

1- Calculer k pour que f soit une densité de probabilité.
2- Calculer $E(X)$ et $Var(X)$ si elles existent
3- Déterminer la fonction de répartition F de X.
4- Déterminer la loi de la v.a $Y = Ln(1 + X)$

Exercice 4 Soit un couple de variables aléatoires (X, Y) tel que $X(\Omega) = \{-2, 0, 1\}$ et $Y(\Omega) = \{-1, 1, 2\}$ dont la loi jointe est donnée par le tableau suivant :

$X \setminus Y$	-1	1	2
-2	0.2	0.2	α
0	0.1	0.1	0.05
1	0.2	0	0.1

1- Donner l'unique valeur possible pour α.
2- Calculer les lois marginales de X et de Y.
3- Montrer que X et Y ne sont pas indépendants
4- Calculer la loi conditionnelle de X sachant $Y = 1$. En déduire $E(X|Y = 1)$
5- Calculer la loi conditionnelle de X sachant $Y \neq 2$.
6- Calculer $E(XY)$ et en déduire $Cov(X, Y)$
7- On pose $Z = X + Y$. Calculer la loi de Z.

Exercice 5 Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose que, pour tout entier $n > 0$, la loi de Y sachant $X = n$ est la loi binomiale $\mathfrak{B}(n, p)$, et que $Y = 0$ si $X = 0$.

1- Donner la loi jointe du couple aléatoire (X, Y).
2- Montrer que Y suit une loi de Poisson de paramètre $p\lambda$.
3- Montrer que : $\forall n \geq k \quad P(X = n|Y = k) = e^{-(1-p)\lambda} \ \frac{((1-p)\lambda)^{n-k}}{(n-k)!}$
En déduire $E(X|Y = k)$ et $E(X|Y)$

Exercice 6 Soit (X, Y) un couple aléatoire de densité jointe :

$$f(x, y) = cx(y - x)e^{-y}1_{\{0<x\leq y\}}$$

1- Déterminer c pour que f soit une densité.
2- Calculer $f(x|y)$, densité conditionnelle de X sachant $Y = y$
3- En déduire que $E(X|Y) = \frac{Y}{2}$
4- Calculer $f(y|x)$, densité conditionnelle de Y sachant $X = x$
5- En déduire que $E(Y|X) = X + 2$
6- Déduire de la question 3 la quantité $E(X)$

Exercice 7 Un couple (X, Y) de variables aléatoires admet pour densité

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4y}{x^3} & si\ \ 0 < x < 1\ , 0 < y < x^2 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1- Vérifier que f est bien une densité puis calculer la densité marginale de X
2- Calculer $f(y|x)$ et $E(Y|X)$

Exercice 8 Soient X, Y deux v.a réelles avec

$$f_Y(y) = \frac{1}{y^2} 1_{[1,+\infty[} \quad , \quad f_{X|Y}(x|y) = xy^2e^{-xy}1_{\mathbb{R}^+}(x)$$

1- Donner la loi du couple (X, Y)
2- En déduire la loi marginale de X
3- Calculer $f(y|x)$. En déduire $E(Y|X)$