



TP N°3

EXERCICE N° 1:

1. Si X est une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, trouver la densité $f_{|X|}(t)$ de la loi suivie par $|X|$.
2. En prenant la densité $g(t) = e^{-t}$ de la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$, trouver la plus petite constante c telle que $f_{|X|}(t) \leq cg(t)$ sur $[0, +\infty[$.
3. Donner une représentation graphique des courbes de $f_{|X|}$ et cg .
4. Simuler un échantillon de taille 100 de la loi de $|X|$ par la méthode d'acceptation-rejet. On précisera combien il aura fallu d'itérations.

EXERCICE N° 2:

1. Donner la densité de la loi $\text{Beta}(3, 5)$ sur l'intervalle $[0, 1]$.
2. Trouver l'abscisse du point où f est maximale. Quelle est la signification de ce point? Quelle est la valeur à l'optimum c correspondante.
3. Définir un algorithme d'acceptation-rejet utilisant la distribution uniforme sur $[0, 1]$.
4. Quel est le taux moyen d'acceptation?
5. Générer avec R un échantillon de taille 150. Représenter, sur un même graphique, l'histogramme de l'échantillon et la densité.
6. Que fait le programme qui suit :

```
M <- 2.305
curve(dbeta(x, 3, 5), from=0, to=1, ylim=c(0, M))
r <- runif(300, min=0, max=1)
u <- runif(300, min=0, max=1)
below <- which(M*u*dunif(r, min=0, max=1) <= dbeta(r, 3, 5))
points(r[below], M*u[below], pch="+", col='red')
points(r[-below], M*u[-below], pch="-")
```

EXERCICE N° 3: On veut simuler une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ en utilisant comme proposition une loi de Laplace de paramètre $\lambda > 0$, c'est-à-dire de densité

$$g(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}.$$

Déterminer la valeur de λ qui permet de minimiser la probabilité de rejet. Écrire en R un code qui permet de simuler en utilisant cette méthode.

EXERCICE N° 4: On veut générer une variable X suivant une loi Gamma $\Gamma(3/2, 1)$ de densité notée f . On utilise une technique de rejet avec comme loi de proposition une exponentielle $\mathcal{E}(2/3)$ de densité notée g .

1. Déterminer $m = \sup_{x>0} \frac{f(x)}{g(x)}$. Quelle est le nombre moyen de simulations de la loi exponentielle pour aboutir à une réalisation de la loi Gamma?
2. Représenter sur un même graphique un histogramme de réalisations de X et la densité f .
3. Intuitivement, qu'est-ce qui a guidé le choix du paramètre $2/3$ comme paramètre de l'exponentielle?