Processus aléatoires avec application en finance
Prof Olivier Scaillet
TA Alexandre Engulatov

TP 4

Exercice 1

Une usine de biscuits fabrique des biscuits contenant des éclats de chocolat. La répartition des éclats suit une distribution de Poisson de paramètre $\lambda = 0.08$ par cm^2. Les biscuits sont rectangulaires et mesurent 3×4 cm. Les clients appellent le service des réclamations s'ils ne trouvent pas d'éclats dans le biscuit.

1. Quelle est la probabilité de ne trouver aucun éclat dans le biscuit?
2. Quelle doit être la valeur de λ pour que le taux de réclamation soit inférieur à 1%?

Exercice 2

Lors d'un bombardement, la chute des bombes suit une distribution de Poisson de paramètre $\lambda = 10$ bombes par km^2.

1. Quelle est la probabilité de ne pas trouver de bombes dans un rayon de 350 mètres?
2. Quelle est la distance moyenne pour trouver une bombe (en supposant par exemple que l'on soit parachuté en un point quelconque du champs de bataille)?
3. Que devrait être la taux de bombardement pour que la distance moyenne jusqu'à la prochaine bombe soit de 100 m?

Exercice 3

Soit $\{N_t, t \geq 0\}$ un processus de Poisson tel qu'en moyenne le nombre d'évènements survenant entre 0 et t soit égal à λt. Montrez que la variable $M_t = N_t - \lambda t$ est une martingale. Identifiez la partie prévisible de N_t.

Exercice 4

Les marchés financiers sont influencés par des "bonnes" et des "mauvaises" nouvelles. Soit N_t^B le nombre total d'arrivées de "bonnes" nouvelles jusqu'au moment t et N_t^M le nombre total d'arrivées de "mauvaises" nouvelles jusqu'au moment t. N_t^M et N_t^B sont des processus de Poisson indépendants de paramètre λt. Montrez que la variable $M_t = N_t^B - N_t^M$ est une martingale par rapport à la filtration

- $\mathcal{F}_t = \sigma(N_s^B, N_s^M,\, s \leq t)$,
- $\mathcal{G}_t = \sigma(M_s,\, s \leq t)$.

Exercice 5

Soit S_t une variable telle que les incréments $S_t - S_s, t > s$ sont indépendants et de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2 (t-s))$, et $S_0 = 0$. Les variables suivantes sont-elles des martingales?

a. $Z_t = S_t^2$.

b. $Z_t = S_t^2 - \sigma^2 t$.

Exercice 6

Soit X une chaîne de Markov avec l'espace des états S et la matrice de transition $P = (p_{ij})$. Soit $\psi \colon S \to \mathbb{R}$ une fonction qui satisfait

$$\sum_{j \in S} p_{ij} \psi(j) = \lambda \psi(i),$$

pour un $\lambda \neq 0$. Montrez que, si $\mathbb{E}|\psi(X_n)| < \infty$, alors $\lambda^{-n} \psi(X_n)$ définit une martingale.

Exercice 7

Montrez que si Z_t est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_t$ nous avons

$$E[Z_t] = k, \quad \forall t, \text{et où } k \text{ est une constante.}$$

Exercice 8

Soit Z_1, Z_2, $Z_3, \ldots$ des v.a. indépendantes et identiquement distribuées telles que

$$P[Z_n = 1] = P[Z_n = -1] = \frac{1}{2}, \ \forall n$$

Soit

$$X_n = \sum_{i=0}^{n} Z_i, \quad n = 1, 2, \ldots$$

avec $X_0 = 0$. Le processus X_n est une marche aléatoire symétrique.

1. Montrez que les filtrations $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ et $\mathcal{G}_n = \sigma(Z_0, Z_1, \ldots, Z_n)$ contiennent la même information.
2. Montrez que X_n est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_n$.
3. Montrez que $X_n^2 - n$ est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{G}_n$.

Exercice 9

Soit W_t un mouvement brownien standard. Les variables suivantes sont-elles des Martingales?

1. W_t
2. $Z_t = W_t - \mu t$
3. $Z_t = W_t^2 - t$

Exercice 10

Soient X_t des v.a. indépendantes de distribution normale standard. Quelle est la distribution des incréments de $Z_t = \sqrt{t}X_t$? Z_t est-il un mouvement brownien?

Exercice 11

Montrez que $Z_t = -W_t$ est un processus de Wiener si W_t l'est.

Exercice 12

Si W_t et $\widetilde{W_t}$ sont deux mouvements browniens indépendants et ρ une constante entre -1 et 1. Quelle est la distribution de $Z_t = \rho W_t + \sqrt{1-\rho^2}\widetilde{W_t}$? Z_t est-il un mouvement brownien?