CORRIGÉ EXAMEN L3 (PROBA)

Exercice 2

$a > 0$

1) Loi de $Y = X^2$. Soit F la fonction de répartition de X et G la fonction de répartition de $Y = X^2$, alors:

$G(y) = P(Y \leq y) = 0$ si $y < 0$

si $y \geq 0$. $G(y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$ or $X \geq 0 \Rightarrow$

$G(y) = P(X \leq \sqrt{y}) = F(\sqrt{y})$; si g est la densité de Y

alors $g(y) = G'(y) = (F(\sqrt{y}))' = \frac{1}{2\sqrt{y}} f(\sqrt{y}) = \frac{1}{2a\sqrt{y}}$, $0 < y \leq a^2$

d'où
$$\boxed{g(y) = \begin{cases} \frac{1}{2a\sqrt{y}} & \text{si } 0 < y \leq a^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

2) Loi de $Z = \sqrt{X}$, soit H la fonction de répartition de Z

alors $H(z) = P(Z \leq z) = 0$ si $z < 0$ car $0 \leq z \leq \sqrt{a}$

donc $H(z) = P(\sqrt{X} \leq z) = P(X \leq z^2) = F(z^2)$, la densité h de Z est donnée par $h(z) = H'(z) = (F(z^2))' = 2z f(z^2)$

d'où
$$\boxed{h(z) = \begin{cases} \frac{2z}{a} & \text{si } 0 \leq z \leq \sqrt{a} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

Exercice 3 : $(X_n)_n$ suite i.i.d tq $\forall n \geq 1$ $X_n \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$

soit $Y_n = \min_{1 \leq k \leq n} X_k$

1) $G_n(y) = P(Y_n \leq y) = P(\min_{1\leq k \leq n} X_k \leq y) = 1 - P(\min_{1 \leq k \leq n} X_k > y)$

$= 1 - P(\bigcap_{k=1}^{n} \{X_k > y\}) = 1 - \prod_{k=1}^{n} P(X_k > y)$ par indépendance des X_k

$= 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - P(X_k \leq y)) = 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - F_{X_k}(y))$

mais les X_k ont de même loi, alors $F_{X_k}(y) = F(y)$ où $X_k \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$ $\forall k \in [1,n]$

$G_n(y) = 1 - (1 - F(y))^n \Rightarrow$

$$\boxed{G_n(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 - (1-y)^n & \text{si } y \in [0,1[\\ 1 & \text{si } y \geq 1 \end{cases}}$$

d'où la densité $g_n(y) = G_n'(y)$ est donnée par

$$\boxed{g_n(y) = \begin{cases} n(1-y)^{n-1} & \text{si } y \in [0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

2) par définition $E(Y_n) = \int_{\mathbb{R}} y\, g_n(y)\, dy = \int_0^1 n y (1-y)^{n-1} dy$

par parties $\Rightarrow$ $\boxed{E(Y_n) = \frac{1}{n+1}}$

③

$E(Y_n^2) = \int_{\mathbb{R}} y^2 g_n(y)\,dy = n\int_0^1 y^2(1-y)^{n-1}\,dy$

ce qui nous donne $E(Y_n^2) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$ d'où

$$\boxed{V(Y_n) = E(Y_n^2) - [E(Y_n)]^2 = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2}}$$

3) $\forall \varepsilon > 0 \quad P(|Y_n - 0| > \varepsilon) = P(|Y_n| > \varepsilon) = P(Y_n > \varepsilon)$ car $0 \leq Y_n \leq 1$

$\Rightarrow P(Y_n > \varepsilon) = \int_\varepsilon^1 g_n(y)\,dy = \int_\varepsilon^1 n(1-y)^{n-1}\,dy = (1-\varepsilon)^n$

or $(1-\varepsilon) < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} P(Y_n > \varepsilon) = \lim\limits_{n\to\infty} (1-\varepsilon)^n = 0 \Rightarrow$

$Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$

autre méthode par l'inégalité de Markov :

$P(|Y_n| > \varepsilon) \leq \frac{E(Y_n)}{\varepsilon} = \frac{1}{(n+1)\varepsilon} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ d'où le résultat.

4) $\sum\limits_{n\geq 1} P(|Y_n| > \varepsilon) = \sum\limits_{n\geq 1} P(Y_n > \varepsilon) = \sum\limits_{n\geq 1} (1-\varepsilon)^n$ série

numérique convergente (géométrique) car $0 < 1-\varepsilon < 1$ donc

$\sum\limits_{n\geq 1} P(|Y_n| > \varepsilon) < \infty \xRightarrow{\text{Lemme de Borel - Cantelli}} P(\limsup\limits_n \{|Y_n| > \varepsilon\}) = 0$

$\Leftrightarrow P(\liminf\limits_n \{|Y_n| \leq \varepsilon\}) = 1$ ce qui se

traduit par

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 1, \forall n \geq N \quad |Y_n| \leq \varepsilon$ ce qui équivaut

à $\boxed{Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{P.S.} 0}$.