Université Mohamed Khider Biskra
Faculté des FSENV
Département de Mathématiques

Stat D'ordre
Master-2
2021/2022.

Correction des exercices du Chapitre 02

Exercice 01

1. On commence par déterminer la fonction de répartion de M_n. Puisque M_n est à valeurs dans $[0,1]$, il est clair que si $x \leq 0$, on a $P(M_n \leq x) = 0$ et si $x \geq 1$, on a $P(M_n \leq x) = 1$. Prenons maintenant $x \in]0,1[$. Alors :

$$M_n \leq x \iff \forall i \in \{1,\dots,n\},\ U_i \leq x.$$

Puisque les variables aléatoires $(U_i)_{1\leq i\leq n}$ sont indépendantes, on en déduit que

$$P(M_n \leq x) = \prod_{i=1}^{n} P(U_i \leq x) = x^n.$$

Pour obtenir la fonction de répartition de X_n, on remarque que

$$X_n \leq x \iff M_n \geq 1 - \frac{x}{n},$$

d'où

$$P(X_n \leq x) = 1 - P\left(M_n \leq 1 - \frac{x}{n}\right).$$

De plus,

$$1 - \frac{x}{n} \in [0,1] \iff x \in [0,n].$$

On en déduit que la fonction de répartition de (X_n) est donnée par

On en déduit que la fonction de répartition de (X_n) est donnée par

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - (1 - \frac{x}{n})^n & \text{si } 0 \leq x \leq n \\ 1 & \text{si } x \geq n. \end{cases}$$

2. On va étudier, à x fixé, la limite de $F_{X_n}(x)$. D'abord, pour $x \leq 0$, il est clair que $\lim_n F_{X_n}(x) = 0$. Maintenant, pour $x \geq 0$, dès que n est assez grand, on a $x \leq n$ et donc

$$F_{X_n}(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n.$$

Or, en passant à l'exponentielle, on sait que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}.$$

On en déduit que $F_{X_n}(x)$ tend vers $F(x)$ défini par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

On en déduit que (X_n) converge en loi vers la loi exponentielle de paramètre 1.

Exercice-2

1) Il est évident que $F(\cdot)$ est continue, croissante sur $[0, \infty[$. De plus, $F(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$ et $F(x) \to 1$ lorsque $x \to \infty$. Le point terminal de $F(\cdot)$ est donc $+\infty$.

2) On a :

$$1 - F(x) = (1 + x^{\theta})^{-\lambda} = x^{-\theta\lambda}(1 + x^{-\theta})^{-\lambda} = x^{-1/\gamma}L(x),$$

avec $\gamma = 1/(\theta\lambda)$ et $L(x) = (1 + x^{-\theta})^{-\lambda} \to 1$ lorsque $x \to \infty$.

3) On a évidemment que $x^{-1/\gamma}(1 - F(x)) = L(x) = (1 + x^{-\theta})^{-\lambda}$. Cette fonction convergeant vers une constante, c'est une fonction à variations lentes.

4) On a :

$$\Delta(x) = \frac{xL'(x)}{L(x)} = \theta\lambda x^{-\theta}(1 + x^{-\theta})^{-1} = x^{-\theta}\ell(x),$$

avec $\ell(x) = \theta\lambda(1 + x^{-\theta})^{-1} \to \theta\lambda$ lorsque $x \to \infty$. Donc $\Delta(\cdot)$ est à variations régulières d'indice $-\theta$.

5) Calculons tout d'abord a_n. En résolvant l'équation $F(x) = \alpha$, on trouve que $F^{\leftarrow}(\alpha) = [(1 - \alpha)^{-1/\lambda} - 1]^{1/\theta}$. Ainsi, $a_n = (n^{1/\lambda} - 1)^{1/\theta}$.
On note ensuite que Y_n prend ses valeurs dans $[0, \infty[$. De plus, pour $x > 0$,

$$\mathbb{P}(Y_n \leq x) = F^n(a_n x) = \exp\left[n \log(1 - u_n)\right],$$

avec $u_n = (1 + (a_n x)^{\theta})^{-\lambda} \to 0$ car $a_n \to \infty$. Donc $\log(1 - u_n) \sim u_n \sim x^{-\theta\lambda}/n$. Ainsi, si $x > 0$,

$$\mathbb{P}(Y_n \leq x) \to \exp(-x^{-\theta\lambda}) = \exp(-x^{-1/\gamma}),$$

c'est-à-dire que $F(\cdot)$ appartient au domaine d'attraction de Fréchet.

Exercice-3

1. On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = e^{-e^{-x}}$. Puisque $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, il s'ensuit que $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$. Par ailleurs, la fonction g est dérivable en tant que composée de fonctions dérivables et sa dérivée vaut $g'(x) = e^{-x-e^{-x}}$. L'allure de g est donnée en figure à droite.

2. Puisque l'exponentielle est partout positive, il en va de même pour f. Il reste à vérifier que son intégrale somme à 1, or il suffit pour cela de remarquer que f n'est rien d'autre que la dérivée de g :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = [g(x)]_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} g(x) - \lim_{x\to-\infty} g(x) = 1 - 0 = 1.$$

L'allure de f est donnée en figure à gauche. Lorsqu'une variable X a pour densité f, on dit qu'elle suit une loi de Gumbel.

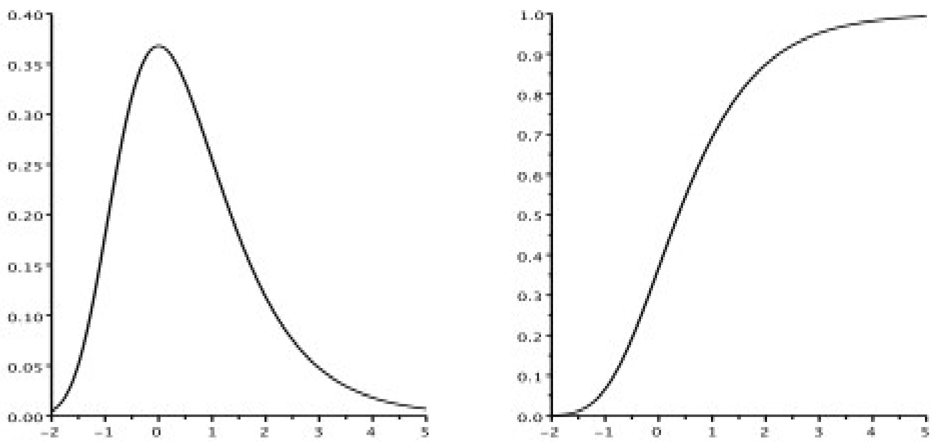

FIGURE – Fonctions f et g, densité et fonction de répartition d'une loi de Gumbel.

3. Si X suit une loi exponentielle de paramètre 1, sa fonction de répartition F vaut 0 pour $x \leq 0$ et $F(x) = 1 - e^{-x}$ pour $x \geq 0$.
4. Les variables X_1 et X_2 ne prenant que des valeurs postives, c'est a fortiori le cas pour la variable M, donc $\mathbb{P}(M \leq x) = 0$ si $x \leq 0$. Pour $x \geq 0$, nous avons par indépendance de X_1 et X_2 :

$$\mathbb{P}(M \leq x) = \mathbb{P}(\max(X_1, X_2) \leq x) = \mathbb{P}(\{X_1 \leq x\} \cap \{X_2 \leq x\}) = \mathbb{P}(X_1 \leq x)\mathbb{P}(X_2 \leq x)$$

et via la question précédente

$$\mathbb{P}(M \leq x) = \left(1 - e^{-x}\right)\left(1 - e^{-x}\right) = \left(1 - e^{-x}\right)^2.$$

Nous avons donc calculé la fonction de répartition F_2 de la variable M. Sa dérivée f_2 est la densité de M. Celle-ci vaut bien entendu 0 pour $x \leq 0$, tandis que pour $x \geq 0$

$$f_2(x) = F_2'(x) = 2e^{-x}\left(1 - e^{-x}\right).$$

5. Mutatis mutandis, les arguments précédents s'appliquent ici et aboutissent à

$$F_n(x) = \mathbb{P}(M_n \leq x) = \left(1 - e^{-x}\right)^n \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}.$$

6. u étant un réel fixé, il est clair que pour n suffisamment grand, nous avons $|u/n| < 1$, de sorte que nous pouvons sans vergogne passer à la forme exponentielle-logarithmique de la quantité en question et utiliser le développement limité $\ln(1-x) = -x + o(x)$:

$$\left(1 - \frac{u}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 - \frac{u}{n}\right)} = e^{n\left(-\frac{u}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-u + o(1)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-u}$$

Pour tout réel x, pour n suffisamment grand, nous avons $x + \ln n > 0$ et la formule obtenue pour F_n donne donc :

$$F_n(x + \ln n) = \left(1 - e^{-(x + \ln n)}\right)^n = \left(1 - e^{-x}e^{-\ln n}\right)^n = \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n$$

à la suite de quoi nous pouvons appliquer le résultat précédent avec $u = e^{-x}$ pour obtenir

$$\lim_{n \to +\infty} F_n(x + \ln n) = e^{-e^{-x}} = g(x).$$

Dans le jargon, on dit que la suite de variables aléatoires $(M_n - \ln n)_{n \geq 0}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit une loi de Gumbel. Dit autrement, le maximum d'un grand nombre de variables i.i.d. exponentielles tend vers l'infini à vitesse $\ln n$, et après translation de ce maximum par $-\ln n$, l'aléa qui reste suit en gros une loi de Gumbel. C'est pourquoi on dit que la loi de Gumbel est une des lois des extrêmes. En hydrologie, par exemple, elle peut servir à modéliser les crues d'un fleuve.

Exercice-4 (Loi de Weibull)

On considère une variable aléatoire X de densité

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 \, e^{-x^3} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

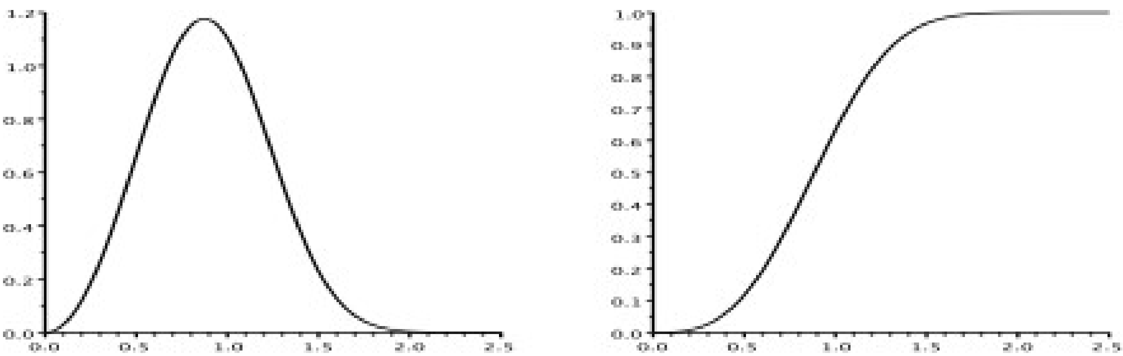

FIGURE – Densité et fonction de répartition de la loi de Weibull.

1. f est positive et elle intègre à 1 puisque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} 3x^2 \, e^{-x^3} dx = \left[-e^{-x^3}\right]_0^{+\infty} = 1.$$

2. La dérivée de f est bien sûr nulle à gauche de 0, et pour tout $x \geq 0$:

$$f'(x) = 3x(2 - 3x^3)e^{-x^3}$$

   Le mode de f se situe donc au point $x_0 = (2/3)^{1/3} \approx 0.87$.

3. La représentation de f est fournie figure à gauche.
   La fonction de répartition F de X est nulle sur $]-\infty, 0]$ et pour tout $x \geq 0$ on trouve

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \left[-e^{-t^3}\right]_0^x = 1 - e^{-x^3}.$$

Exercice-5 (Loi de Pareto)

Pour la v.a. X de loi de Pareto de seuil $a = 1$, on a $F_X(x) = 1 - x^{-\theta}$ pour $x \geq 1$ et 0 pour $x < 1$, où $\theta > 0$. Pour $Y = \ln(X)$, on a :

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(e^Y \leq e^y) = P(X \leq e^y) = 1 - e^{-\theta y}$.

Comme $F_X(x)$ est nulle pour $x \leq 1$, $F_Y(y)$ vaut 0 pour $y \leq 0$, ce qui restitue la loi $\mathcal{E}(\theta)$.