

حلول تمارين السلسلة الخامسة احتمالات

التجربة العشوائية التي تنص على إعطاء مريض نوع معين من العقاقير الطبية، لها نتيجتان فقط، أحدهما الاستجابة للدواء بالشفاء (نعتبرها نجاحاً للتجربة) والآخر عا عدم الاستجابة للدواء (نعتبرها فشلاً للتجربة). إذن هذه التجربة هي تجربة برنولي، مع احتمال الشفاء 0.6.

عندما نطوي هذا العقار الطبي لـ 5 أشخاص (مصابين)، نكون قد كررنا هذه التجربة 5 مرات مستقلة.

وإذا عرفنا X على أنه المصير العشوائي الذي يمثل عدد المرضى الذين يشقون من المرض، متاين 5 مرضى الذين تلقوا العلاج، فإن X يمكن أن يأخذ القيم $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ، وبما أن هذه المجموعة مستقلة، فإن X هو مصير عشوائي منقطع.

٥- تعيين قانون احتمال X

بما أن تكرارات تجربة برنولي (إعطاء الدواء للمريض) مستقلة و X يمثل عدداً من نجاح هذه التجربة خلال 5 تكرارات فإن X يتبع قانون ثنائي الناحية الحسب $B(5, 0.6)$ بحيث

$$\forall k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, P(X=k) = C_5^k (0.6)^k (1-0.6)^{5-k}.$$

3- حساب احتمال استجابة 3 مرضى لهذا الدواء.

$$P(X=3) = C_5^3 (0.6)^3 (1-0.6)^{5-3} = 0.3456.$$

4- حساب احتمال استجابة مريض واحد على الأقل

نعني بمريض واحد على الأقل إما مريض واحد أو اثنين أو ثلاثة أو أربع أو خمس. أي

$$\begin{aligned}
 P(X \geq 4) &= P(X=4) + P(X=5) \\
 &= C_5^4 (0.6)^4 (1-0.6)^1 + C_5^5 (0.6)^5 (1-0.6)^0 \\
 &= 0.9898
 \end{aligned}$$

ويمكن حساب هذا الاحتمال أيضا باستخدام الحوادث العكسي (المتمم)

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) - P(X=3)$$

5- حساب احتمال انتصار فريق على الآخر.

مريضتان على الأكثر صحف إما مريضتان أو مريض واحدة أو لمريضتين

$$\begin{aligned}
 P(X \leq 2) &= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) \\
 &= 0.3174.
 \end{aligned}$$

6- حساب التوقع الرياضي والتباين

$$\begin{aligned}
 X \sim B(n, p) \Rightarrow E(X) &= np \\
 Var(X) &= np(1-p)
 \end{aligned}$$

$$E(X) = 5 \times 0.6 = 3.$$

$$Var(X) = 5 \times 0.6 \times 0.4 = 1.2.$$

حل السؤال الثاني

X هو المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الكرات السوداء المستخرجة

أولا يجب تحديد فضاء الاحتمال للمتغير X.

تجربة سحب كرة من الصندوق هي تجربة ثنائية لأن لها نتيجتين فقط إما أن تكون الكرة سوداء وإما أن تكون الكرة حمراء.

بصفتنا نحتاج التجربة لتمثيل سحب كرة سوداء.

وبما أننا نسحب 5 كرات أي أننا نكرر هذه التجربة 5 مرات

مستقلة لأن السحب بالرجوع.

وعليه X يتبع قانون ثنائيي الحد $B(3, \frac{5}{15})$ بحيث

$$p = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$P(X=1) = C_3^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{3-1}$$

1 - حساب احتمال ظهور كرة واحدة سوداء.

$$P(X=1) = C_3^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

2 - حساب احتمال ظهور كرة سوداء أو أكثر.

$$P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$$

$$= 1 - P(X < 1) = 1 - P(X=0) = \frac{19}{27}$$

حل المرنين الثالث

X هو المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الشبائن الذين يزورون هذا المحل.

X يتبع قانون بواسون بمعدل 4 أشخاص يوميًا، يعني $E(X) = 4$.

وبما أن $X \sim P(\lambda) \Leftrightarrow E(X) = \text{var}(X) = \lambda$ فإن $\lambda = 4$

- حساب الاحتمالات

$$P(X=0) = e^{-4} \frac{4^0}{0!} = e^{-4}$$

$$P(X=5) = e^{-4} \frac{4^5}{5!}$$

$$P(X \geq 6) = 1 - P(X < 6)$$

$$= 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)]$$

- انظر جواب

حل التمرين الرابع

1) تجربة غرس بذرة هي تجربة برنولي لأنها قابلة للتجديد فقط
 إما أن تنبت البذرة وإما لا، بحيث نباح لهذه التجربة يتمثل
 في: إنبات البذرة وفشلها هو عدم إنبات البذرة.
 مع ملاحظة أن تكرار هذه التجربة إلى أن تنبت البذرة هي
 تكرارات مستقلة ويمكن أن تكون غير متناهية.
 وبما أن X يمثل عدد مرات تكرار البعوض حتى نجاح عملية الإنبات
 فإن

$$X \sim M^p$$

وعنه X يتبع القانون الهندسي $G(p)$ حيث $p=0.7$

2) حساب $P(X=7)$

$$P(X=7) = 0.7 (1-0.7)^{7-1}$$

3) حساب التباين والتوقع الرياضي

$$X \sim G(p) \Rightarrow \begin{cases} E(X) = \frac{1}{p} \\ Var(X) = \frac{1-p}{p^2} \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{1}{0.7}$$

$$Var(X) = \frac{1-0.7}{(0.7)^2}$$

حل التمرين الخامس

المسابقة تضم 100 موضوع (المجموعة الكلية عناصرياً $N=100$)
 من بين هذه المواضيع راجع 4 أحد الموضوعات 60 موضوعاً ($n=60$)
 و 40 موضوعاً الأخرى لم تراجع.

نحسب احتمال اختيار موضوع من المواضيع المحترمة هي بحسب ما يلي
 لأن لها ترتيبين فقط إما أن يكون الموضوع قد تمت مراجعته
 مسبقا وإلا فإما أن الموضوع لم يُراجع.
 وبما أن الموضوع يختار 3 مواضيع معناه أنه يتم تكرار بحسب ما يلي
 3 مرات غير مستقلة (السحب بدون إرجاع).

وإذا كان X هو عدد المواضيع التي تمت مراجعتها من بين 3 مواضيع
 المختارة فإن

$$X \in \{0, 1, 2, 3\}$$

وقانون X هو القانون فوق الهندسي $H(100, 60, 3)$

$$P(X=3) = \frac{C_3^3 C_{100-60}^{3-3}}{C_{100}^3}$$

$$P(X=2) = \frac{C_3^2 C_{100-60}^{3-2}}{C_{100}^3}$$

$$P(X=0) = \frac{C_3^0 C_{100-60}^{3-0}}{C_{100}^3}$$