# Résumé Analyse Factorielle Générale

$\boxed{\text{Cas Simple: Métrique Euclédienne M=I et matrice des poidsN=I}}$

La matrice des données: $X_{n,p}$ centrée( centre de gravité coinside avec l'origine des axes $g = 0_{\mathbb{R}^p}$)

**Ajustement dans** $\mathbb{R}^p$:Ajustement du nuage des individus$\mathcal{N}(\mathcal{I})$dans l'espace des variables.

La matrice à diagonaliser: $(X\prime X)_{p\times p}$ dite aussi matrice d'inertie

$u_\alpha$ : Le $\alpha - ième$ axe factoriel dans $\mathbb{R}^p$:

Il est $M$ unitaire( le cas euclédien $M = I_{p\times p}$)et c'est le vecteur propre de la matrice $(X\prime X)_{p\times p}$ relatif à la valeur propre rangée par ordre croissant au rang $\alpha$

$F_\alpha$ : La $\alpha - ième$ composante

$F_\alpha = Xu_\alpha = \begin{bmatrix} \\ F_\alpha(i) \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ X_i' \\ \\ \end{bmatrix}_{n\times 1} u_\alpha$ où $F_\alpha(i)$ est la composante du i-èm individus (il y'en a $n$) sur l'axe $u_\alpha$

$F_\alpha\prime F_\alpha = \|F_\alpha\|^2 = \lambda_\alpha$

**Ajustement dans** $\mathbb{R}^n$: Ajustement du nuage des variables$\mathcal{N}(\mathcal{J})$dans l'espace des individus.

La matrice à diagonaliser: $XX\prime$ c'est une matrice $(n \times n)$

$v_\alpha$ : Le $\alpha - ième$ axe factoriel dans $\mathbb{R}^n$:

$v_\alpha$ Il est unitaire et c'est le vecteur propre de la matrice $(XX\prime)_{n\times n}$ relatif à la valeur propre rangée par ordre croissant au rang $\alpha$

$G_\alpha = X\prime v_\alpha = \begin{bmatrix} \\ G_\alpha(j) \\ \\ \end{bmatrix}_{p\times 1}$ où $G_\alpha(j)$ est la composante de la j-ème variable (il y'en a $p$)sur l'axe engendré par le vecteur unitaire $v_\alpha$

$G_\alpha\prime G_\alpha = \|G_\alpha\|^2 = \lambda_\alpha$

**Régle 1:**

Sur le sous éspace de $\mathbb{R}^p$ engendré par les vecteurs$u_\alpha$( orthonormés: vecteurs unitaires et orthogonaux deux à deux)

**les coordonnées des individus sont les composantes de $\mathbf{F}_\alpha$ (projection de X sur l'axe $u_\alpha$)et aussi les composantes de $\sqrt{\lambda_\alpha}v_\alpha$**

$$F_\alpha = \begin{bmatrix} \\ F_\alpha(i) \\ \\ \end{bmatrix}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} \\ X'_i \\ \\ \end{bmatrix}_{p\times 1} u_\alpha = Xu_\alpha = \sqrt{\lambda_\alpha}v_\alpha$$

**Régle 2:**

Sur le sous éspace de $\mathbb{R}^n$ engendré par les vecteurs $v_\alpha$( vecteurs orthonormés)

**les coordonnées des variables sont les composantes de $\mathbf{G}_\alpha$et aussi les composantes de $\sqrt{\lambda_\alpha}u_\alpha$**

$$G_\alpha = \begin{bmatrix} \\ G_\alpha(j) \\ \\ \end{bmatrix}_{p\times 1} = X'v_\alpha = \sqrt{\lambda_\alpha}u_\alpha$$

**Régle 3:**

**Relation entre les deux ajustements:** On a les $F_\alpha$proportionnelle à $v_\alpha$ avec coefficient de proportionalité$\sqrt{\lambda_\alpha}$et de même les $G_\alpha$proportionnelle à$u_\alpha$ avec coefficient $\sqrt{\lambda_\alpha}$

$$\begin{aligned} v_\alpha &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}}Xu_\alpha \text{ est un vecteur}(n\times 1) \\ v_\alpha &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}}F_\alpha \Longleftrightarrow F_\alpha = \sqrt{\lambda_\alpha}v_\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_\alpha &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}}X'v_\alpha \ \text{ est un vecteur}(p\times 1) \\ u_\alpha &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}}G_\alpha \Longleftrightarrow G_\alpha = \sqrt{\lambda_\alpha}u_\alpha \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Cas Général: Métrique quelconque}}$

Critére d'ajustement: Résumé par la matrice de poids dite aussi matrice de pondérations des individus notée: $\mathbf{N}_{n,n}$

Métrique de $\mathbb{R}^p$ (formule de distance) entre individus notée: $\mathbf{M}_{p,p}$

La matrice des données: $X_{n,p}$

**Ajustement dans** $\mathbb{R}^p$:

La matrice à diagonaliser:$(X\prime NXM)_{p\times p}$ dite aussi matrice d'inertie

$u_\alpha$ : Le $\alpha - ième$ axe factoriel dans $\mathbb{R}^p$:

Il est $M$-unitaire: $\prime uMu = 1$

et c'est le vecteur propre de la matrice $(X\prime NXM)_{p\times p}$ relatif à la valeur propre rangée par ordre croissant au rang $\alpha$

$F_\alpha$ : La $\alpha - ième$ composante

$F_\alpha = XMu_\alpha = \begin{bmatrix} \\ F_\alpha(i) \\ \\ \end{bmatrix}_{n\times 1}$ $F_\alpha(i)$ est la composante du i-èm individus sur l'axe$u_\alpha$

$F_\alpha\prime NF_\alpha{=}\|F_\alpha\|_N^2 = \lambda_\alpha$

Le système à résoudre:

$$S : \begin{cases} \max(F_\alpha\prime NF_\alpha) = \max_u(u\prime_\alpha MX\prime NXMu_\alpha) \\ \prime uMu - 1 = 0 \end{cases}$$

**Ajustement dans** $\mathbb{R}^n$:

Critére d'ajustement résumé par la matrice des masses des $p$ points dite aussi matrice de pondérations des variables, notée: $\mathbf{P}_{p\times p}$

Métrique de $\mathbb{R}^n$ (formule de distance) entre variables notée: $\mathbf{Q}_{n\times n}$

La matrice des données: $X_{n,p}$

Ajustement du nuage des variables dans l'espace des individus.

La matrice à diagonaliser: $XPX\prime Q$

$\mathrm{v}_\alpha$ : Le $\alpha - ième$ axe factoriel dans $\mathbb{R}^n$:

$\mathrm{v}_\alpha$ Il est $Q$-unitaire et c'est le vecteur propre de la matrice $(XPX\prime Q)_{n\times n}$ relatif à la valeur propre rangée par ordre croissant au rang $\alpha$

$G_\alpha = X\prime Qv_\alpha = \begin{bmatrix} \\ G_\alpha(j) \\ \\ \end{bmatrix}_{p\times 1}$ $G_\alpha(j)$ est la composante de la j-ème variable (il y'en a p)sur l'axe engendré par le vecteur unitaire $\mathrm{v}_\alpha$

$G_\alpha\prime PG_\alpha = \ \|G_\alpha\|_P^2 = \lambda_\alpha$

**Relation entre les deux ajustements:**

Si les masses et les métriques dans $\mathbb{R}^p(N$ et $M)$ et dans $\mathbb{R}^n(P$ matrice des masses des p points colonnes et $Q$ métrique dans $\mathbb{R}^n)$ n'ont pas de relation privilégiées entre elles , on perd les relations de transitions.

En ACP on utilise les mêmes métriques dans les deux espaces $M_{p\times p} = P = I_{p\times p}$

$N_{n\times n} = Q = \frac{1}{n}I_{n\times n}$

(lorsque les individus ont le même poids, sinon $D$=$[p_i]$ matrice des poids.