Licence Acad. Maths 3$^{\text{ième}}$ année **2021/2022**
Matière: Mesure et Intégration

<u>Série 1</u>

<u>Exercice 1</u> $(*)$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit : $f_n :]0,1] \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = n\exp(-nx)$. Montrer que la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,1]$, mais que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx.$$

Vérifier que la convergence de cette suite n'est pas uniforme sur $]0,1]$.

<u>Exercice 2</u> $(*)$Soit f une fonction de E vers F (E et F sont non vides). Montrer que pour toute famille $\{A_i\}_{i\in I}$ de parties de E et pour toute famille $\{B_j\}_{j\in J}$ de parties de F on a

(a) $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$ et $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ avec égalité si f est bijective.

(b) $f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$ et $f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$.

<u>Exercice 3</u> 1- Soit $E = \{1,2,3,4\}$. Parmis les familles suivantes, déterminer ceux qui représentent des tribus sur E
(a) $\{E, \emptyset, \{2\}\}$ (b) $\{E, \emptyset, \{3.4\}, \{1,2\}\}$ (c) $\{E, \emptyset, \{1\}, \{1,2,3\}, \{2,3\}, \{1,4\}\}$.
Justifier votre réponse.
2- Soient $\mathcal{F}_1$et $\mathcal{F}_2$ deux familles de parties d'un ensemble non vide E. Montrer que si $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ alors $\sigma(\mathcal{F}_1) \subset \sigma(\mathcal{F}_2)$.

<u>Exercice 4</u> Soit $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties d'un ensemble non vide E. Montrer que si cette suite est une partie d'une tribu $\mathcal{E}$, alors $A^* = \limsup_{n\to+\infty} A_n$ et $A_* = \liminf_{n\to+\infty} A_n$ sont de éléments de cette tribu.

<u>Exercice 5</u> Soit E un ensemble non vide quelconque.
a) Soit $\mathcal{E} = \{\{x\}, x \in E\}$ et posons $\mathcal{F} = \{A \subset E;\ \ A \text{ ou bien } A^c \text{ est au plus dénombrable}\}$. Montrer que $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{F}$.
b) Montrer que si E est dénombrable alors $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(E)$

<u>Exercice 6</u> $(*)$ 1- Montrer que l'intersection de deux tribus sur le même ensemble E est aussi une tribu sur E.Plus généralement, ce resultat reste valable pour l'intersection quelconque.
2- Montrer que la réunion de deux tribus sur E n'est pas nécessairement une tribu.

<u>Exercice 7</u> Soit f une fonction de X vers Y.
a) Soit $\mathcal{F}$ une tribu sur Y. Montrer que l'ensemble $f^{-1}[\mathcal{F}] = \left\{f^{-1}(B)\ ;\ B \in \mathcal{F}\right\}$ est une tribu sur X.Montrer que si $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{E})$ alors $f^{-1}[\mathcal{F}] = \sigma\left\{f^{-1}(B)\ ;\ B \in \mathcal{E}\right\}$.
b) Soit $\mathcal{L}$ une tribu sur X. Donner un exemple montrant que l'ensemble $\{f(A)\ ;\ A \in \mathcal{L}\}$ n'est pas forcement une tribu sur Y. Montrer en revanche que $\left\{B \in \mathcal{P}(Y) \text{ tq } f^{-1}(B) \in \mathcal{L}\right\}$ est une tribu sur Y.

<u>Exercice 8</u> $(*)$ Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\left(\{]a, +\infty[; a \in \mathbb{Q}\}\right)$.

N.B. Les exercices suivis d'un $(*)$ sont supplémentaires.

Résolution

Exercice 1 Comme $x \neq 0$, on peut écrire

$$f_n(x) = n\exp(-nx) = \frac{nx}{x\exp(nx)},$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{1}{x}\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{nx}{\exp(nx)}\right] = 0.$$

Par conséquent, la suite $\{f_n\}_n$ converge simplement vers la fonction $f(x) = 0$, pour tout $x \in]0,1]$. D'autre part, on a pour tout $n \geq 1$

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 n\exp(-nx)\,dx = -\int_0^1 (-n)\,e^{(-nx)}dx = -\left[\ e^{(-nx)}\right]_{x=0}^{x=1} = 1 - e.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = 1 - e \neq 0 = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx.$$

Exercice 2
(a) On a pour $A \subset E$

$$f(A) = \{y \in F \setminus \exists x \in A \text{ vérifiant } f(x) = y\} \subset F,$$

alors

$$y \in f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \Longleftrightarrow \exists x \in \bigcup_{i\in I} A_i \text{ avec } f(x) = y.$$

$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Longleftrightarrow \exists i \in I$ tel que $x \in A_i \Longleftrightarrow \exists i \in I$ tel que $y = f(x) \in f(A_i) \Leftrightarrow y \in \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.

Par conséquent on a $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.

Soit $y \in f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \Longleftrightarrow \exists x \in \bigcap_{i\in I} A_i$ avec $f(x) = y \Longrightarrow \forall i \in I$ on a $x \in A_i$ et $f(x) = y \Longrightarrow \forall i \in I$: $y \in f(A_i) \Longrightarrow y \in \bigcap_{i\in I} f(A_i)$. D'où $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$.

Soit $y \in \bigcap_{i\in I} f(A_i) \Longleftrightarrow y \in f(A_i)$, pour tout $i \in I \Longrightarrow \exists x_i \in A_i$; pour tout $i \in I$, tel que $y = f(x_i)$. Si f est bijective (injective) x_i est constant pour tout $i \in I$, ce qui nous permet d'écrire que $x_i = x$; pour tout $i \in I$ et $y = f(x)$. Alors $y \in f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$. D'où le résultat voulu.

(b) Soit $B \subset F$, l'image réciproque de B est définie par

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \text{ telle que } f(x) \in B\} \subset E.$$

Montrons que $f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$, où $\{B_j\}_{j\in J} \subset \mathcal{P}(F)$.

Soit $x \in f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) \iff f(x) \in \bigcap_{j\in J} B_j \iff f(x) \in B_j$; pour tout $j \in J \iff x \in f^{-1}(B_j)$; pour tout $j \in J \iff x \in \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$. d'où l'égalité.

Montrons maintenant qu'on a $f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$, où $\{B_j\}_{j\in J} \subset \mathcal{P}(F)$.

Soit $x \in f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) \iff f(x) \in \bigcup_{j\in J} B_j \iff$ Il existe au moins $j \in J$, tel que $f(x) \in B_j \iff$Il existe au moins $j \in J$, tel que $x \in f^{-1}(B_j) \iff x \in \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$. D'où le résultat voulu.

Exercice 3
1- (a) n'est pas une tribu car $\{2\}^c$ n'est pas un élément de cette famille.

La famille (b) vérifie toutes les conditions données dans la définition d'une tribu, donc cette famille est une tribu sur E.

La famille (c) n'est pas une tribu car $\{1\}^c$ et $\{1,2,3\}^c$ ne sont pas des éléments de cette famille.

2- Soient $\mathcal{F}_1$et $\mathcal{F}_2$ deux familles de parties d'un ensemble non vide E. Supposons que $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ alors on a d'une part $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \sigma(\mathcal{F}_2) \Longrightarrow \mathcal{F}_1 \subset \sigma(\mathcal{F}_2)$.
D'autre part, comme $\sigma(\mathcal{F}_1)$ est la plus petite tribu contenant $\mathcal{F}_1$, alors $\sigma(\mathcal{F}_1) \subset \sigma(\mathcal{F}_2)$.

Exercice 4 Soit $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'une tribu $\mathcal{E}$. On a par définition

$$A^* = \limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_n \left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) \text{ et } A_* = \liminf_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_n \left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right).$$

Posons pour tout entier n : $S_n = \bigcup_{k\geq n} A_k$ et $T_n = \bigcap_{k\geq n} A_k$. Comme $\mathcal{E}$ est une tribu contenant A_n, pour tout n, alors $S_n \in \mathcal{E}$, pour tout n. En plus, comme et $T_n^c = \left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right)^c = \bigcup_{k\geq n} A_k^c \in \mathcal{E}$, alors $T_n = (T_n^c)^c \in \mathcal{E}$. Donc

$$A^* = [(A^*)^c]^c = \left[\left(\bigcap_n S_n\right)^c\right]^c = \left[\bigcup_n S_n^c\right]^c \in \mathcal{E}$$

et

$$A_* = \bigcup_n T_n \in \mathcal{E}.$$

Exercice 5.
a) On a $\mathcal{E} = \{\{x\}, x \in E\}$ et $\mathcal{F} = \{A \subset E; \quad A \text{ ou bien } A^c \text{ est au plus dénombrable}\}$. Montrer que $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{F}$.
♦ Montrons d'abord que $\mathcal{F}$ est une tribu sur E., alors $\mathcal{F}$ doit vérifier
  (i) $\varnothing \in \mathcal{F}$.
  (ii) Si $A \in \mathcal{F}$, alors $A^c \in \mathcal{F}$.
  (iii) Si $(A, B) \in \mathcal{F}^2$, alors $A \cup B \in \mathcal{F}$.
  (iv) Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$, alors $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$.

– La propriété (i) est vérifiée car par concention $Card\ \varnothing = 0$.

– Soit $A \in \mathcal{F}$, alors A ou bien A^c est au plus dénombrable, comme $A = (A^c)^c$ on a $A^c \in \mathcal{F}$. Donc (ii) est vérifiée.

– Soit $(A, B) \in \mathcal{F}^2$, alors A ou bien A^c est au plus dénombrable et B ou bien B^c est au plus dénombrable. Dans ce cas on a les cas suivants

<u>1^{er} cas</u> Si A et B sont au plus dénombrables, alors $A \cup B$ est au plus dénombrable. Donc $A \cup B \in \mathcal{F}$.

<u>2^{nd} cas</u> Si A^c et B^c sont au plus dénombrables, alors $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ est au plus dénombrable. Donc $A \cup B \in \mathcal{F}$.

<u>$3^{ième}$ cas</u> Si A et B^c (resp. A^c et B) sont au plus dénombrables, alors $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \subset B^c$ (resp. $\subset A^c$), ce qui nous permet de dire que $(A \cup B)^c$ est au plus dénombrable. Donc $A \cup B \in \mathcal{F}$.

Donc (iii) est vérifiée.

– Soit $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$, alors A_n ou bien A_n^c est au plus dénombrable, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a les cas suivants.

<u>1^{er} cas</u> Si A_n est au plus dénombrable, pour tout $n \in \mathbb{N}$; alors $\bigcup\limits_{n\geq 0} A_n$ est au plus dénombrable.

Donc $\bigcup\limits_{n\geq 0} A_n \in \mathcal{F}$.

<u>2^{nd} cas</u> S'il existe au moins $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $A_{n_0}^c$ est au plus dénombrable, alors $\left(\bigcup\limits_{n\geq 0} A_n\right)^c = \bigcap\limits_{n\geq 0} A_n^c \subset A_{n_0}^c$, ce qui nous permet de dire que $\left(\bigcup\limits_{n\geq 0} A_n\right)^c$ est au plus dénombrable. Donc $\bigcup\limits_{n\geq 0} A_n \in \mathcal{F}$.

Donc (iv) est vérifiée.

Par conséquent, on obtient le résultat voulu.

♦ Montrons maintenant que $\mathcal{F}$ contient la famille $\mathcal{E}$.
Comme les éléments de la famille $\mathcal{E}$ sont les singletons de l'ensemble E, ils sont tous deséments de $\mathcal{F}él$, alors $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$. Par conséquent et d'aprés la définition de la tridu engendrée, on obtient $\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}$.
♦ Finalement, il nous reste de vérifier que $\mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{E})$.
Soit $A \in \mathcal{F}$, alors A ou bien A^c est au plus dénombrable.

$*$ Si A est est au plus dénombrable $\Longleftrightarrow$ $A = \{x_i\}_{i\in I} = \bigcup_{i\in I} \{x_i\}$, où I est un ensemble d'indices au plus dénombrable $\Longrightarrow A \in \sigma(\mathcal{E})$, car $\mathcal{E}$ est l'ensmble des singletons de E.

$*$ Si A^c est est au plus dénombrable $\Longleftrightarrow$ $A^c = \{y_j\}_{j\in J} = \bigcup_{j\in J} \{y_j\}$, où J est un ensemble d'indices au plus dénombrable $\Longrightarrow A^c \in \sigma(\mathcal{E}) \Longrightarrow A \in \sigma(\mathcal{E})$.
Donc $\mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{E})$. D'où l'égalité voulue.

b) Supposon que E est dénombrable, alors

$$\forall A \subset E \text{ on a } A \in \mathcal{F} = \sigma(\mathcal{E}) \Longrightarrow \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E),$$

on obtient donc la relation voulue.

<u>Exercice 6</u>.
1- Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux $\sigma-$algèbres sur le même ensemble E. Montrons alors que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ est aussi une tribu sur E, cela veut dire que ce dernier doit vérifier les conditions (i) jusqu'à (iv) citées dans la résolution de la question (a) de l'exercice précédent.

(i) Comme $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des $\sigma-$algèbres sur E alors $\varnothing \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, alors $\varnothing \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$.

(ii) Soit $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, alors $A \in \mathcal{A}$ et $A \in \mathcal{B}$. Comme $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des tribus sur E on a $A^c \in \mathcal{A}$ et $A^c \in \mathcal{B}$, d'où $A^c \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$.

(iii) et (iv) On peut regrouper ces deux dernières conditions comme suit: Soit $\{A_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, où I est un ensemble d'indices au plus dénombrable, alors $\{A_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{A}$ et $\{A_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{B}$. Comme $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des tribus sur E on a $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$ et $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{B}$, alors $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$.

Donc l'intersection de deux tribus sur le même ensemble est aussi une tribu. Plus généralement et en utilisant le même raisonnement, on peut montrer que ce resultat reste valable pour l'intersection quelconque de tribus.

2- Pour montrer que la réunion de deux tribus sur E n'est pas nécessairement une tribu on donne le **contre exemple** suivant :

♣ Soit $E = \{a, b, c\}$ et $\mathcal{A} = \{\varnothing, E, \{a\}, \{b, c\}\}$ et $\mathcal{A} = \{\varnothing, E, \{b\}, \{a, c\}\}$ deux tribus sur E.

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{\varnothing, E, \{a\}, \{b, c\}, \{b\}, \{a, c\}\}$$

.

On a $\{a\}$ et $\{b\} \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, mais $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Par conséquent, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ n'est pas une tribu.

<u>Exercice 7</u> Soit $f : X \to Y$ une fonction.
a) Soit $\mathcal{F}$ une tribu sur Y. Définissons l'ensemble

$$f^{-1}[\mathcal{F}] = \left\{f^{-1}(B) \text{ tel que } B \in \mathcal{F}\right\}.$$

Pour montrer que $f^{-1}[\mathcal{F}]$ est une tribu sur X, on vérifie les conditions (i) jusqu'à (iv) citées dans la résolution de la question (a) de l'<u>exercice 5</u>.

(i) $\mathcal{F}$ est une tribu sur Y, alors $\varnothing \in \mathcal{F}$ $(\subset Y)$, ce qui nous permet de dire que $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ $(\subset X)$ est un éléments de $f^{-1}[\mathcal{F}]$.

(ii) Soit $A \in f^{-1}[\mathcal{F}]$, alors il existe $B \in \mathcal{F}$ tel que $A = f^{-1}(B)$. Comme $A^c = \left(f^{-1}(B)\right)^c = f^{-1}(B^c)$ et $B^c \in \mathcal{F}$, on a $A^c \in f^{-1}[\mathcal{F}]$.

(iii) et (iv) On peut regrouper ces deux dernières conditions comme suit: Soit $\{A_i\}_{i \in I} \subset f^{-1}[\mathcal{F}]$, où I est un ensemble d'indices au plus dénombrable, alors pour tout $i \in I$, il existe $B_i \in \mathcal{F}$ tels que $A_i = f^{-1}(B_i)$. Comme $\mathcal{F}$ est une tribu sur Y, on a

$$\bigcup_{i \in I} B_i \in \mathcal{F} \text{ et } \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) \in f^{-1}[\mathcal{F}].$$

D'où le ésultat voulu.

Supposons qu'il existe une famille de parties de Y, notée $\mathcal{E}$, telle que $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{E})$ et montrons que

$$f^{-1}[\mathcal{F}] = f^{-1}[\sigma(\mathcal{E})] = \sigma\left(\left\{f^{-1}(B) \text{ tel que } B \in \mathcal{E}\right\}\right) = \sigma\left(f^{-1}[\mathcal{E}]\right).$$

On sait que $\left\{f^{-1}(B) \text{ tel que } B \in \mathcal{E}\right\} \subset f^{-1}[\mathcal{F}]$, alors en utilisant la définition de la tribu engendrée on a

$$\sigma\left(f^{-1}[\mathcal{E}]\right) = \sigma\left(\left\{f^{-1}(B) \text{ tel que } B \in \mathcal{E}\right\}\right) \subset f^{-1}[\mathcal{F}]. \tag{1}$$

Posons maintenant $\mathcal{H} = \left\{B \in \mathcal{F} \text{ tel que } f^{-1}(B) \in \sigma\left(f^{-1}[\mathcal{E}]\right)\right\} \subset \mathcal{F}$ Montrons d'abord que $\mathcal{H}$ est une tribu sur Y.

(i) $\sigma\left(f^{-1}[\mathcal{E}]\right)$ est une tribu sur Y, alors $\varnothing \in \sigma\left(f^{-1}[\mathcal{E}]\right)$ $(\subset Y)$, ce qui nous permet de dire que $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ $(\subset X)$ est un éléments de $\mathcal{H}$.

(ii) Soit $B \in \mathcal{H}$, alors $f^{-1}(B) \in \sigma\left(f^{-1}[\mathcal{E}]\right)$. Comme $f^{-1}(B^c) = \left(f^{-1}(B)\right)^c \in \sigma\left(f^{-1}[\mathcal{E}]\right)$, alors $B^c \in \mathcal{H}$.

(iii) et (iv) On peut regrouper ces deux dernières conditions comme suit: Soit $\{B_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{H}$, où I est un ensemble d'indices au plus dénombrable, alors pour tout $i \in I$, on a $f^{-1}(B_i) \in \sigma\left(f^{-1}[\mathcal{E}]\right)$. Comme $\sigma\left(f^{-1}[\mathcal{E}]\right)$ est une tribu sur X, on a

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i) \in \sigma\left(f^{-1}[\mathcal{E}]\right) \Longrightarrow \bigcup_{i \in I} B_i \in \mathcal{H}.$$

Par conséquent $\mathcal{H}$ est une tribu sur X.

En plus, on a pour tout $B \in \mathcal{E}$, $f^{-1}(B) \in f^{-1}[\mathcal{E}] \subset \sigma\left(f^{-1}[\mathcal{E}]\right)$, alors $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}$. donc d'aprés la définition de la tribu engendrée on a $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{H}$. D'autre part et par construction on a $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$. D'où l'égalité.

Donc, on peut écrire que

$$\text{Si } B \in \mathcal{F}, \text{ alors } f^{-1}(B) \in \sigma\left(f^{-1}[\mathcal{E}]\right),$$

Par conséquent on a

$$f^{-1}[\mathcal{F}] = f^{-1}[\sigma(\mathcal{E})] \subset \sigma\left(f^{-1}[\mathcal{E}]\right). \tag{2}$$

De (1) et (2)on a l'égalité voulue.
b) Soit

$$\begin{aligned} f: \quad (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est une tribu définie sur l'ensemble de départ mais $\mathbb{R} \notin \{f(A) \text{ tel que } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$, alors cette famille n'est pas forcement une tribu sur l'ensemble d'arriver $\mathbb{R}$.

Montrons que $\mathcal{D} = \{B \in \mathcal{P}(Y) \text{ tel que } f^{-1}(B) \in \mathcal{L}\}$ est une tribu sur Y (*) (même raisonnement utilisé pour $\mathcal{H}$).
(i) On a $(X \supset) \varnothing = f^{-1}(\varnothing) \in \mathcal{L}$, ce qui nous permet de dire que $\varnothing \ (\subset Y)$ est un éléments de $\mathcal{D}$.
(ii) Soit $B \in \mathcal{D}$, alors $f^{-1}(B) \in \mathcal{L}$. Comme $f^{-1}(B^c) = \left(f^{-1}(B)\right)^c \in \mathcal{L}$, alors $B^c \in \mathcal{D}$.
(iii) et (iv) On peut regrouper ces deux dernières conditions comme suit: Soit $\{B_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{D}$, où I est un ensemble d'indices au plus dénombrable, alors pour tout $i \in I$, on a $f^{-1}(B_i) \in \mathcal{L}$., qui est une tribu sur X, alors on a

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i) \in \mathcal{L} \Longrightarrow \bigcup_{i \in I} B_i \in \mathcal{D}.$$

Par conséquent $\mathcal{D}$ est une tribu sur Y.

<u>Exercice 8</u> On sait que $\{]a, +\infty[; a \in \mathbb{Q}\} \subset \{]a, +\infty[; a \in \mathbb{R}\}$, alors

$$\sigma\left(\{]a, +\infty[; a \in \mathbb{Q}\}\right) \subset \sigma\left(\{]a, +\infty[; a \in \mathbb{R}\}\right) = \mathcal{B}(\mathbb{R}). \qquad (*)$$

Comme $\mathbb{Q}$ est danse dans $\mathbb{R}$, on peut dire que

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists \{a_n\}_{n \geq 0} \subset \mathbb{Q} \text{ telle que } \lim_{n \to +\infty} a_n = a.$$

Sans perdre la généralité, on peut indicer la suite $\{a_n\}_{n \geq 0}$ de telle sorte qu'elle soit décroissante (i.e $a_{n+1} \leq a_n$), donc on a $A_n =]a_n, +\infty[\subset]a_{n+1}, +\infty[= A_{n+1}$, ce qui nous permet d'écrire que $]a, +\infty[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]a_n, +\infty[$, d'où $]a, +\infty[\in \sigma\left(\{]a, +\infty[; a \in \mathbb{Q}\}\right)$, ou encore

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\left(\{]a, +\infty[; a \in \mathbb{R}\}\right) \subset \sigma\left(\{]a, +\infty[; a \in \mathbb{Q}\}\right). \qquad (**)$$

$(*)$ et $(**)$ donnent l'égalité voulue.