# Chapitre 2

# Intégrale stochastique et formule d'Itô

## 2.1 Variation total et variation quadratique

**Définition 2.1** *La variation infinitésimale d'ordere $p$ d'un processus $X_t$ associée à une subdivision $\Pi_n = (t_1^n, t_2^n ..., t_n^n)$ est défini par*

$$V_T^p(\Pi_n) = \sum_{i=1}^{n} \left| X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} \right|^p \qquad X_t \in [0,T].$$

*Si $V_T^p(\Pi_n)$ admet une limite dans un certain sens (converge presque sûrement,converge $\mathbb{L}_p$) lorsque :*

$$\Pi_n = ||\Pi_n||_\infty = \sup_{i\geq 1} \left| t_{i+1}^n - t_i^n \right| \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

*La limite ne dépend pas de la subdivision choisie et nous l'appellerons alors la variation d'ordre $p$ de $X_t$ sur $[0,t]$.*

*Maintenant on note*

$$V_T^p = \lim_{||\Pi_n||_\infty \to 0} V_T^p(\Pi_n), \text{ tel que } ||\Pi_n||_\infty = \sup_{i\geq 1} \left| t_{i+1}^n - t_i^n \right|, \tag{2.1}$$

*en particulier :*

– Si $p = 1$, la limite 2.1 s'appelle la variation totale de $X_t$ sur $[0,T]$.

– Si $p = 2$, la limite 2.1 s'appelle la variation quadratique de $X_t$ sur $[0, T]$ et on la note $V_T^2 = \langle X, X\rangle_T$.

**Variation bornée :** Un processus $X_t$ est à variation bornée sur $[0, T]$ s'il est à variation bornée trajectoire par trajectoire, c'est à dire que

$$\sup_{\Pi_n} \sum_{i=1}^{n} \left| X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \right| < \infty, \qquad \mathbb{P}\text{−}p.s.$$

**Remarque 2.1** *Si la variation totale d'un processus existe p.s alors elle est égale à :*

$$V_T^1(X) = \sup_{\pi \in \mathcal{P}} \sum_{i=1}^{n} \left| X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \right|,$$

*où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des subdivisions possibles de $[0, T]$.*

*Réciproqument, si ce supremum est fini ,le processus admet une variation totale d'un processus s'interpréte la langeur de ses trajectoires.*

1. La variation quadratique d'un **M.B** sur $[0, T]$ existe dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ et vaut $T$, c-à-d

$$V_T^2 = \langle B, B\rangle_T = T, \qquad \mathbb{P}\text{−}p.s.$$

2. Un processus $X$ est à variations bornée s'il est difference de deux processus croissants( $X^+$et $X^-$), c-à-d

$$X = X^+ - X^-, \text{ telque } X^+ \text{ et } X^- \text{ sont deux processus croissants.}$$

3. Si $X$ est à variations bornée et à trajectoire continue alors

$$V_T^2 = \langle X, X\rangle_T = 0, \qquad \mathbb{P}\text{−}p.s.$$

## 2.2 L'intégrale stochastique

L'objectif de ce paragraphe est de définir integrale $\int_0^t \Phi_s dB_s$, Ceci n'est pas évident car les trajectoires du **M.B** ne sont pas à variation finie. Dans cette section, on fixe un réel $T$ strictement positif.

Soit $\Phi = (\Phi_t)$, un processus élémentaire. Nous souhaitons donner un sens à la variable aléatoire

$$\int_0^t \Phi_s dB_s, \tag{2.2}$$

où $B_t$ est un mouvement Brownien.

Pour cela, rappellons que lorsque nous intégrons une fonction $g$ régulaire par rapport à une fonction dérivable $f$, alors

$$\int_0^t g(s)df(s) = \int_0^t g(s)f'(s)ds.$$

Dans le cas où $f$ n'est pas dérivable, mais en supposant qu'elle est à variation bornée, alors l'integrale de stieltjes, définie par

$$\int_0^t g(s)df(s) = \lim_{\pi_n \to 0} \sum_{i=0}^{i=n-1} g(s_i)[f(s_{i+1}) - f(s_i)],$$

où $0 = s_0 < s_1 < ... < s_n = t$ et $\pi_n = \max_{0<i<n-1} |s_{i+1} - s_i|$ peut être utilisée.

Malheureusement, puisque le mouvement Brownien n'est pas à variation bornée, la définition précédente ne s'applique pas à l'integrale 2.2.

Cependant, puisque $B_t$ est à variation quadratique finie, car pour tout $t > 0$ nous avons :

$$\lim_{n \to +\infty} \langle B \rangle_t^{(n)} = t \ p.s,$$

Donc en peut de définir l'integrale par rapport au mouvement Brownien comme une limite dans l'espace $\mathbb{L}^2$ de variable aléatoire dont le moment d'ordre deux existe.

Ainsi, on définit

$$\int_0^t \Phi_s dB_s = \lim_{\pi_n \longrightarrow 0} \sum_{i=0}^{i=n-1} \Phi(s_i)[B(s_{i+1}) - B(s_i)],$$

où le processus $\Phi_t$ appartient à l'espace $\mathcal{L}^2$ et $\Phi_t$ soit $\mathcal{F}$-adapté, de telle sort que $\Phi_{s_i}$ soit indépendant de $B(s_{i+1}) - B(s_i)$.

Pour des raisons technique, on supposons des conditions de régularité aux processus étudiés. En générale, il faut qu-ils soit présque sûrement continue à droite avec une limite à gauche (càdlag).

### 2.2.1 Cas d'un processus déterministe (Integrale de wiener)

Soit un processus $\Phi$ qui n'est pas aléatoire, mais simplement une fonction de temps $t$. Dans ce cas, nous pouvons écrire $\Phi_t = f(t)$ pour une certaine fonction $f : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Cette integrale s'appelle l'integrale de wiener.

Par la suite, on suppose $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+)$ l'ensemble des applications mesurable défini sur $\mathbb{R}_+$ à valeur dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\int_0^t \Phi_s^2 ds < +\infty.$$

Si $(B_t)_t$ est un mouvement Brownien on veut definir

$$\Psi = \int_0^\infty \Phi_s dB_s.$$

**Le cas simple (fonction étagé)**

Soit $\Phi(\omega) = 1_{]u,v[}$, en pose $\int_0^\infty \Phi_s dB_s = B_v - B_u$.

**Proposition 2.1** *Si* $\Phi_t = \sum_{i=1}^n \Phi_{i-1} 1_{]t_{i-1},t_i[}$, *alors*

1. $\Phi \longrightarrow \Psi$ est linéaire,
2. $t \longrightarrow \Psi$ est une variable aléatoire Gaussien,
3. $\mathbb{E}(\Psi) = 0$ et $\mathbf{Var}(\Psi) = \int_0^t \Phi_s^2 ds = ||\Phi||^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+)}$,
4. $\Psi$ est une $\mathcal{F}_t-$martingale,

5. Le processus $\Psi^2 - \int_0^t \Phi_s^2 ds$ est une $\mathcal{F}_t$−martingale.

**Preuve.**

**1.** On va montrer

$$\Psi\left(\Phi^1 + \Phi^2\right) = \Psi\left(\Phi^1\right) + \Psi\left(\Phi^2\right).$$

**3.** $\mathbb{E}(\Psi) = 0$?

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\Psi\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{i=n} \Phi_{i-1}\left(B\left(t_i\right) - B\left(t_{i-1}\right)\right)\right], \\
&= \sum_{i=1}^{i=n} \Phi_{i-1}\mathbb{E}\left[B\left(t_i\right) - B\left(t_{i-1}\right)\right], \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Maintenant on va montrer que $\mathbf{Var}(\Psi) = \mathbb{E}\left(\int_0^t \Phi_s^2 ds\right)$ :

$$\begin{aligned}
\mathbb{VAR}\left(\Psi\right) &= \mathbb{E}\left[\Psi^2\right], \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{i=n} \Phi_{i-1}\left(B\left(t_i\right) - B\left(t_{i-1}\right)\right)\right)^2\right], \\
&= \sum_{i=1}^{i=n} \left(\Phi_{i-1}\right)^2 \mathbb{E}\left[\left(B\left(t_i\right) - B\left(t_{i-1}\right)\right)^2\right], \\
&= \sum_{i=1}^{i=n} \left(\Phi_{i-1}\right)^2 \left(t_i - t_{i-1}\right), \\
&= \int_0^\infty \left(\Phi_s\right)^2 ds.
\end{aligned}$$

■

**Proposition 2.2** *Si $f$ et $g$ sont des fonction en escalier, on a (i)*

$$\mathbb{E}\left[\Psi_t\left(f\right)\Psi_t\left(g\right)\right] = \int_0^\infty f\left(s\right)g\left(s\right)ds = \langle f, g\rangle_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+)}.$$

$(ii)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{VAR}\left(\Psi_t\left(f+g\right)\right) &= \mathbb{VAR}\left(\Psi_t\left(f\right)\right)+\mathbb{VAR}\left(\Psi_t\left(g\right)\right)+2\mathbb{E}\left[\Psi_t\left(f\right)\Psi_t\left(g\right)\right], \\
&= \int_0^\infty f\left(s\right)^2 ds+\int_0^\infty g\left(s\right)^2 ds+2\int_0^\infty f\left(s\right)g\left(s\right)ds, \\
&= \int_0^\infty \left(f\left(s\right)+g\left(s\right)\right)^2 ds = \left|\left|f+g\right|\right|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

**Proposition 2.3** *Si le processus* $\Phi$ *est déterministe, alors*

$$\Psi\left(f\right) = \int_0^\infty f(s)dB_s \sim \mathcal{N}(0, \int_0^\infty f^2(s)ds).$$

### Cas général

On sait que si $f \in \mathbb{L}^2\left(\mathbb{R}^+\right)$, il existe une suite $\left(f_n\right)_{n\in N}$ de fonctions en escalier qui converge dans $\mathbb{L}^2\left(\mathbb{R}^+\right)$ vers $f$ c-à-d :

$$\int_0^\infty \left|f_n\left(s\right)-f\left(s\right)\right|^2 ds \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La suit de variable aléatoire $F_n = \int_0^\infty f_n\left(s\right)dB_s$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{L}^2\left(\Omega\right)$

En effet :

$$\left|\left|F_n-F_m\right|\right|_2 = \mathbb{E}\left[\left(F_n-F_m\right)^2\right] = \mathbb{VAR}\left(F_n-F_m\right) = \int_0^\infty \left(f_n-f_m\right)^2 ds \underset{n,m\to\infty}{\rightarrow} 0,$$

car $\left(f_n\right)_n$ est une suit convergent dans $\mathbb{L}^2\left(\Omega\right)$, ce qui implique que $\left(F_n\right)_n$ est une suit de Cauchy dans $\mathbb{L}^2\left(\Omega\right)$.

Comme $\mathbb{L}^2\left(\Omega\right)$ est un espace de Hilbert (donc complet) alors il existe $F \in \mathbb{L}^2\left(\Omega\right)$ telle que $\left|\left|F_n-F\right|\right|_2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. On note :

$$F = \Theta\left(f\right) = \int_0^\infty f\left(s\right)dB_s,$$

alors :

$$\Theta(f) = \int_0^\infty f(s)\, dB_s = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left( \int_0^\infty f_n(s)\, dB_s \right), \text{ La limite dans } \mathbb{L}^2(\Omega).$$

**Remarque 2.2** *Le sous espace de $\mathbb{L}^2(\Omega)$ engendré par les variable aléatoire $\int_0^\infty f(s)\, dB_s$ coïncid avec l'espace Gaussien engendré par les* ***mouvement Brownien.***

**Proposition 2.4**

1. L'application $f \longrightarrow \Theta(f)$ est linéaire et isométrique de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+)$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ telle que

$$\Theta(f+g) = \Theta(f) + \Theta(g).$$
$$\|\Theta(f)\|_2 = \|f\|_2.$$

2. $\mathbb{E}[\Theta_t(f)\,\Theta(g)] = \int_0^{+\infty} f(s)\, g(s)\, ds$ et $\langle \Theta_t(f), \Theta(g) \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \langle f, g \rangle_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+)}$.
3. Soit $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+)$,alors $\Theta_t(f)$ est une variable aléatoire gaussienne centrée de $\mathbb{VAR}(\Theta(f)) = \int_0^{+\infty} |f(s)|^2\, ds$.
4. $\mathbb{E}\left[B_t \int_0^{+\infty} f(s)\, dB_s\right] = \int_0^t f(s)\, ds$.

### 2.2.2 Processus lié à l'integrale stochastique de wiener

On définit pour $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+)$ la variable aléatoire

$$\int_0^t f(s)\, dB_s = \int_0^{+\infty} f(s)\, 1_{[0,t]}(s)\, dB_s.$$

**Théorème 2.1** *Soit $f \in \mathbb{L}^2_{loc} = \left\{ f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \text{ mesurable telque } \forall T > 0,\ \int_0^t f^2(s)\, ds < \infty \right\}$ et $M_t = \int_0^t f(s)\, dB_s$.*

1. $(M_t)$ est une martingale continue telleque :

$$\mathbb{E}[M_t] = 0.$$
$$\mathbb{VAR}(M_t) = \int_0^t f^2(s)\, ds.$$

2. $(M_t)$ est un processus Gaussienne centré de $\mathbb{COV}(M_t, M_s) = \int_0^{t\wedge s} f^2(u)\,du$ à accroissement indépandant.

3. Le processus $\left(M_t^2 - \int_0^t f^2(s)\,ds, t \geq 0\right)$ est une martingale.

4. Si $f$ et $g$ sont dans $\mathbb{L}^2_{loc}$, alors

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t f(u)\,dB_u \int_0^s g(u)\,dB_u\right] = \int_0^{t\wedge s} f(u)\,g(u)\,du.$$

### 2.2.3 Intégrale stochastique d'*Itô*

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $(B_t)$ un mouvement Brownien et $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s,\ s \leq t)$. Notre objectif est de definir $\int_0^t \theta(s)\,dB_s$ avec $(\theta(s))_s$ un processus généralisant l'intégrale de wiener.

#### Cas des processus étagé

#### Processus élémentaire

Un processus $(\theta_t)_{0\leq t\leq T}$ est dit élémentaire s'il existe une subdivision $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$ et un processus discret $(\theta_i)_{0\leq i\leq n-1} \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ telque $\theta_i$ est $\mathcal{F}_{t_i}-$mesurable et que

$$\theta_t(\omega) = \sum_{i=0}^{i=n-1} \theta_i \mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}[}(t).$$

L'integrale stochastique entre 0 et $t < T$ d'un processus élémentaire $\theta_t$ est un variable aléatoire

$$\int_0^t \theta_s dB_s = \sum_{i=0}^{i=n-1} \theta_i(B_{\min(t,t_{i+1})} - B_{(\min(t_i,t)}).$$

De cette manière, nous associons à un processus $\theta$ élémentaire le processus

$$\Psi_t = \left(\int_0^t \theta(s)\,dB_s\right)_{0\leq t\leq T}.$$

**Proposition 2.5** *Si* $(\Phi_t)_{0\leq t\leq T}$ *est un processus élémentaire, alors* $\mathbb{E}(\int_0^t \theta(s)\,dB_s) = 0$ *et*

$\mathbb{VAR}(\int_0^t \theta(s)\, dB_s) = \mathbb{E}\left(\int_0^t \theta^2(s)\, ds\right) = ||\Phi||^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$ .

### Cas général

Soit $\Gamma$ espace des processus $\theta$ càglàd " continue à gauche avec une limite à droite" telque $\mathbb{E}\left(\int_0^\infty \theta^2(s)\, ds\right) < +\infty$.

Le processus étagé appartient a $\Gamma$, on dit que $\theta_n \to \theta$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ si

$$\mathbb{E}\int_0^\infty |\theta_n(s) - \theta(s)|^2\, ds \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On sait que $\mathbb{L}^2(\Omega \times \mathbb{R}_+, \|\cdot\|_2)$ est un espace de Hilbert (donc complet). Donc on peut définir pour tout $\theta \in \Gamma$ $\int_0^\infty \theta(s)\, dB_s$.

Si $\theta \in \Gamma$, $\exists \theta_n$ processus étagés

$$\theta_n(s) = \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{\theta}_j^n 1_{[t_j, t_{j+1}[};\ \tilde{\theta}_j^n \text{ mesurable par rapport à } \mathcal{F}_{t_j},$$

tel que $\lim_{n\to\infty} \theta_n(s) = \theta(s)$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$. On sait que $\int_0^\infty \theta_n(s)\, dB_s$ existe est égale à $\sum_{j=0}^{n-1} \tilde{\theta}_j^n \left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right)$.

On définit

$$\int_0^\infty \theta(s)\, dB_s \triangleq \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \theta_n(s)\, dB_s,\ \text{dans } \mathbb{L}^2(\Omega).$$

$\mathbb{E}\left(\int_0^\infty \theta(s)\, dB_s\right) = 0$; $\mathbb{VAR}\left(\int_0^\infty \theta(s)\, dB_s\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty \theta^2(s)\, ds\right)$, car $\mathbb{E}\left(\int_0^\infty \theta_n(s)\, dB_s\right) = 0$; $\mathbb{VAR}\left(\int_0^\infty \theta_n(s)\, dB_s\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty \theta_n^2(s)\, ds\right)$.

**Proposition 2.6** *On note $\Lambda$ l'ensemble :*

$\mathbb{L}^2_{loc}(\Omega \times \mathbb{R}_+) = \left\{\theta \text{ adapté càglàd}, \forall t > 0,\ \mathbb{E}\left(\int_0^t \theta^2(s)\, ds\right) < \infty\right\}$.

***Lineaire :*** *Soit $\theta \in \Lambda$ et $\beta \in \Lambda$ deux processus, soit $a$ et $b$ deux constants*

$$\int_0^t (a\theta(s) + b\beta(s))\, dB_s = a\int_0^t \theta(s)\, dB_s + b\int_0^t \beta(s)\, dB_s.$$

**Proposition 2.7** ***(Propriéte de martingale)*** *Soit $M_t = \int_0^t \theta(s)\, dB_s$, $\theta \in \Lambda$.*

*a)* $(M_t)_t$ *est une martingale continue.*

*b)* $N_t = \left(\left(\int_0^t \theta(s)\, dB_s\right)^2 - \int_0^t \theta^2(s)\, ds\right)_t$ *est une martingale.*

**Corollaire 2.1** *i)* $\mathbb{E}(M_t) = 0$, $\mathbb{VAR}(M_t) = \mathbb{E}\int_0^t \theta^2(s)\, ds$.

*ii)* $\mathbb{E}\left(\int_0^t \theta(s)\, dB_s \cdot \int_0^t \sigma(s)\, dB_s\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t \theta(s)\, \sigma(s)\, ds\right)$, *pour tout* $\theta$, $\sigma \in \Lambda$.

*iii)* $\left(\int_0^t \theta(s)\, dB_s \cdot \int_0^t \sigma(s)\, dB_s - \int_0^t \theta(s)\, \sigma(s)\, ds\right)_t$ *est une martingale, pour tout* $\theta$, $\sigma \in \Lambda$.

### 2.2.4 Définition de processus d'Itô

Soitent $\left(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ un espace probabilisé muni d'une filtration et $(B_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t-$mouvement Brownien.

**Définition 2.2** ***(Processus d'Itô)***

On appelle processus d'itô un processus $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ à valeur réelle tel que

$$\forall 0 \leq s \leq t,\ X_t = x_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s, \quad \mathbb{P} - p.s. \tag{2.3}$$

Où $x_0$ est $\mathcal{F}_0-$mesurable, $b$ et $\sigma$ sont deux processus progressivement mesurable verifiant les conditions

$$\int_0^T |b_s| ds < +\infty \ et \int_0^T ||\sigma_s||^2 ds < +\infty, où\ ||\sigma|| = trace(\sigma\sigma^*),$$

le coefficient $b$ est le drift ou la derivé, $\sigma$ est le coefficient de diffusion.

L'equation 2.3 est notée de maniére différentiale par :

$$\begin{cases} dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t, \\ X_0 = x_0. \end{cases}$$

Ceci entraine que la décomposition d'un processus d'Itô est unique ce qui signifie que si :

$$\begin{aligned} X_t &= x_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s, \\ &= x_0' + \int_0^t b_s' ds + \int_0^t \sigma_s' dB_s, \end{aligned}$$

alors $\mathbb{P}-p.s.$ on a

$$\begin{cases} x_0 = x'_0, \\ b_s = b'_s, \ ds \otimes d\mathbb{P}, \\ \sigma_s = \sigma'_s, \ ds \otimes d\mathbb{P}. \end{cases}$$

**Définition 2.3** *Soitent $X_t$ et $Y_t$ des processus d'Itô definie par*

$$dX_t = b_s ds + \sigma_s dB_s,$$
$$dY_t = b'_s ds + \sigma'_s dB_s.$$

*alors, les variation quadratiques sur $[0,t]$ sont donnée par*

$$\langle X, X \rangle_t = \int_0^t \sigma_s^2 ds,$$
$$\langle Y, Y \rangle_t = \int_0^t \sigma_s'^2 ds,$$

*et la covariation quadratique entre $X_t$ et $Y_t$ est donnée par :*

$$\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t \sigma_s \sigma'_s ds.$$

### 2.2.5 Intégrale par rapport a un processus d'Itô

Si $X_t$ est un processus d'itô, alors

$$\int_0^t \theta(s)\, dX_s \triangleq \int_0^t \theta(s)\, b_s ds + \int_0^t \theta(s)\, \sigma_s dB_s.$$

## 2.3 Formule d'Itô

**Théorème 2.2** *Soit $(X_t)_{0 \le t \le T}$ un processus d'Itô, telque :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s,$$

*et $f$ une fonction deux foix continûement différentiabl $f \in \mathbb{C}^2$, alors*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\,dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\,d\langle X, X\rangle_s,$$

*oú, par définition*

$$\int_0^t f'(X_s)\,dX_s = \int_0^t f'(X_s)\,b_s ds + \int_0^t f''(X_s)\,\sigma_s dB_s,$$

*et*

$$\langle X, X\rangle_t = \int_0^t \sigma_s^2 ds.$$

**Théorème 2.3** *Si $(t,x) \to f(t,x)$ est une fonction deux foix continûement différentiable en $x$ et une fois continûement différentiable en $t$ cés dérivées étant continus en $(t,x)$, $f \in \mathcal{C}^{1,2}$, ona :*

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t f'_s(s, X_s)\,ds + \int_0^t f'_x(s, X_s)\,dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''_{xx}(s, X_s)\,d\langle X, X\rangle_s, \\ &= f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s)\,ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)\,dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x^2}(s, X_s)\,d\langle X, X\rangle_s. \end{aligned}$$

**Intégration par parties**

La formule d'integration par parties décrite dans le résultat suivant est une conséquence de la formule d'Itô

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\,dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\,d\langle X, X\rangle_s.$$

**Proposition 2.8** *Soient $X_t$ et $Y_t$ des processus d'Itô, nous avons*

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s, \\ Y_t &= Y_0 + \int_0^t b'_s ds + \int_0^t \sigma'_s dB_s, \end{aligned}$$

*alors :*

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y\rangle_t,$$

*avec*

$$\langle X, Y\rangle_t = \int_0^t \sigma_s \sigma'_s ds.$$

**Formul d'Itô multidimensionnelle**

**Définition 2.4** *On appelle $\mathcal{F}_t-$mouvement brownien $p-$dimensionnelle un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.telque $(B_t)_{t\geq 0}$ adapté à $\mathcal{F}_t$ avec $B_t = (B_t^1, B_t^2, ..., B_t^n)$, où les $(B_t^i)_{t\geq 0}$ sont des mouvement brownien standards indépendants.*

**Définition 2.5** *On dit que $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ est un processus d'Itô si :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \sum_{i=1}^{p} \int_0^t \sigma_s^i dB_s^i,$$

*où $K_t$et $H_s^i$ sont adapté à $\mathcal{F}_t$*

$$\int_0^t |b_s|\, ds < \infty, \qquad \mathbb{P} - p.s$$
$$\int_0^t \left(\sigma_s^i\right)^2 ds < \infty, \qquad \mathbb{P} - p.s.$$

**Proposition 2.9** *soient $(X_t^1, X_t^2, ..., X_t^n)$ est un processus d'Itô*

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t b_s^i ds + \sum_{i=1}^{p} \int_0^t \sigma_s^{i,j} dB_s^j,$$

*alors si $f$ est une fonction deux foix différentiables par rapport à $x$ et un foix differntiables en $t$ ces dérivées étant continue en $(t, x)$ c-à-d $(f \in \mathcal{C}^{1,2})$, on a*

$$\begin{aligned} f\left(t, X_t^1, ..., X_t^n\right) &= f\left(0, X_0^1, ..., X_0^n\right) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}\left(s, X_s^1, ..., X_s^n\right) ds \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(s, X_s^1, ..., X_s^n\right) dX_s^i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\left(s, X_s^1, ..., X_s^n\right) d\langle X^i, X_s^j\rangle, \end{aligned}$$

*telleque :*

$$dX_s^i = b_s^i ds + \sum_{i=1}^{n} \sigma_s^{i,j} dB_s^j,$$

*et*

$$d\langle X^i, X^j \rangle = \sum_{m=1}^{p} \sigma_s^{i,m} \sigma_s^{j,m} ds.$$

**Remarque 2.3** *Si $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ et $(Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ sont deux processuse d'Itô, on peut définir formellement le crochet de $X$ et $Y$ les régles suivant :*

1. $\langle X, Y \rangle_t$ est bilinéaire et symetrique.
2. $\langle \int_0^{\cdot} b_s ds, X \rangle_t = 0$.
3. $\langle \int_0^{\cdot} \sigma_s dB_s^i, \int_0^{\cdot} \sigma_s' dB_s^j \rangle_t = 0$ si $i \neq j$.
4. $\langle \int_0^{\cdot} \sigma_s dB_s^i, \int_0^{\cdot} \sigma_s' dB_s^i \rangle_t = \int_0^{\cdot} \sigma_s \sigma_s' ds$ si $i \neq j$.