Université Saâd Dahlab de Blida
Faculté des Sciences
Département de Maths
$3^{éme}$ année Maths

4 Juin 2014
Durée 1h30

Examen de Statistique

Exercice1:($4,5$ points)
Soit X une va normale telle que $P(X \prec 2) = 0,0668$ et $P(X \succ 12) = 0,1587$
Calculer la valeur de a telle que $P(|X - E(X)|^2 \prec a) = 0,95$

Exercice 2:($7,5$ points)
a)Quelle décision doit-on prendre dans le cas du test de la moyenne d'une loi normale $N(m, \sigma)$:

$$\begin{cases} H_0 : m = m_0 \\ H_1 : m = m_1 \end{cases} \quad \text{avec } \sigma \text{ connu}$$

Calculer la puissance du test.
b) Application numérique: $\sigma = 6; m_0 = 30; m_1 = 34; \alpha = 0,05; n = 25$
Quelle hypothèse doit-on retenir si l'échantillon donne:
(1)$\overline{x} = 31$; (2)$\overline{x} = 32$

Exercice 3:(8 points)
Soit X un va de densité f définie par

$$f(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt[2]{2\pi\lambda}} e^{-\frac{x^2}{2\lambda}} \quad \text{pour } x \in IR$$

et λ un paramètre rèèl.
(a) Sans faire de calcul:
-Reconnaitre la loi de la va X
-Donner $E(X)$ et $Var(X)$
(b) Calculer $E(X^4)$
(c) ecrire la fonction de vraisemblance de λ associée à une n-réalisation$(x_1, x_2, ..., x_n)$ du $n-$échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de X
Montrer qu'il existe un estimateur du maximum de vraisemblance $\overline{\lambda}$, associé au n-échantillon.
(d) Montrer que $\overline{\lambda}$ est un estimateur efficace du paramètre λ.

Tami Omar

$) = 0.95$

Exercice2:(7 points)

Soit X une v.a de densité f définie par

$f(x,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} e^{-\frac{x^2}{2\lambda}}$ pour $x \in IR$

et λ paramètre de IR

(1)Sans faire de calcul:

-Reconnaitre la loi de la va X

-Donner $E(X)$ et $Var X$

(2) Calculer $E(X^4)$

(3) Ecrire la fonction de vraisemblance de λ associée à une n-réalisation $(x_1, x_2, ..., x_n)$ du n-échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de X.
Montrer qu'il existe un estimateur du maximum de vraisemblance $\overline{\lambda}$, associé au n-échantillon.

(4) Montrer que $\overline{\lambda}$ est un estimateur efficace du paramètre λ.

X . v.a c

sa densité $f(x,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} e^{-\frac{x^2}{2\lambda}}$ $x \in \mathbb{R}$

1. $Y \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$, $f(x, m, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2}$ $x \in \mathbb{R}$

$X \sim \mathcal{N}(0,\lambda)$ on a $E(X) = 0$ et $Var(X) = \lambda$

(car si $Y \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$ $E(Y) = m$, $Var(Y) = \sigma^2$)

2. calculons $E(X^4)$

$$E(X^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\lambda}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \cdot x e^{-\frac{x^2}{2\lambda}} dx$$

D		I
x^3	+	$x e^{-\frac{x^2}{2\lambda}}$
$3x^2$	−	$-\lambda e^{-x^2/2\lambda}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \left(\underbrace{\left[x^3 \cdot \left(-\lambda e^{-x^2/2\lambda}\right) \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{0} - \int_{-\infty}^{+\infty} 3x^2 \cdot \left(-\lambda e^{-x^2/2\lambda}\right) dx \right)$$

$$= 3\lambda \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot e^{-x^2/2\lambda} dx \right) = 3\lambda E(X^2) = 3.\lambda^2$$

or $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$ donc $E(X^2) = Var(X) + E(X)^2 = \lambda + 0^2$

donc $E(X^4) = 3\lambda^2$

(3) Ecrire la fonction de vraisemblance de λ associée à une n-réalisation $(x_1, x_2, ..., x_n)$ du n-échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de X. Montrer qu'il existe un estimateur du maximum de vraisemblance $\overline{\lambda}$, associé au n-échantillon.

3- la fonction de vraisemblance de λ

$$f_{(X_1,\dots,X_n)}(x_1,\dots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} e^{-\frac{x_i^2}{2\lambda}}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$\boxed{L(x_1,\dots,x_n,\lambda) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\lambda}\sum x_i^2}}$$

vecteur aléatoire

$$(X_1,\dots,X_n) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\omega \longmapsto (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$$

$$f_{X_1}(x_1) \quad f_{X_2}(x_2) \quad f_{X_n}(x_n)$$

$X_1, \dots, X_n$ iid

indépendant de même loi de X

loi de X est $\mathcal{N}(0, \lambda)$

donc $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ $X_i \sim \mathcal{N}(0, \lambda)$

donc $f_{X_i}(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} e^{-\frac{1}{2\lambda}x^2}$ $i = \overline{1,n}$

cherchons $\underset{\lambda>0}{\arg\max}\ \mathcal{L}(x_1,\dots,x_n,\lambda)$

on a $\underset{\lambda>0}{\arg\max}\ \mathcal{L}(x_1,\dots,x_n,\lambda) = \underset{\lambda>0}{\arg\max}\ \ln \mathcal{L}(x_1,\dots,x,\lambda)$

on pose $g(\lambda) = \ln \mathcal{L}(x_1,\dots,x,\lambda)$ $\quad \lambda>0$

$$g(\lambda) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}^{\,n}}\cdot e^{-\frac{1}{2\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}^{\,n}}\right) + \ln\left(e^{-\frac{1}{2\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right)$$

$$= -\ln\left(\sqrt{2\pi\lambda}^{\,n}\right) - \frac{1}{2\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$g(\lambda) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\lambda) - \frac{1}{2\lambda}\sum x_i^2$$

$$g'(\lambda) = \frac{-n}{2\lambda} + \frac{1}{2\lambda^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$g'(\lambda_0) = 0 \iff \frac{-n}{2\lambda_0} + \frac{1}{2\lambda_0^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

$$\frac{n}{2\lambda_0} = \frac{1}{2\lambda_0^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \iff \lambda_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

on a $g''(\lambda) = +\frac{n}{2\lambda^2} - \frac{1}{2}\,\frac{2}{\lambda^3}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{n}{2\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^3}\sum x_i^2$

$$g''(\lambda_0) = \frac{n}{2\,\frac{1}{n^2}\left(\sum x_i^2\right)^2} - \frac{1}{\frac{1}{n^3}\left(\sum x_i^2\right)^3}\sum x_i^2 = \frac{n^3}{2\left(\sum x_i^2\right)^2} - \frac{n^3}{\left(\sum x_i^2\right)^2} = \frac{-n^3}{2\left(\sum x_i^2\right)^2} < 0$$

on a $g''(\lambda_0) < 0$ donc $\underset{\lambda>0}{\arg\max}\ g(\lambda) = \underset{\lambda>0}{\arg\max}\ \ln \mathcal{L}(x_1,\dots,x_n) = \lambda_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$

l'estimateur du maximum du vraisemblance est $\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$

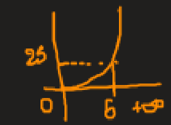
explication

$$f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x)$$

$\underset{x\in A}{\arg\max}\ f(x)$ } مدخل ال x الذي من أجله الدالة f تأخذ أكبر قيمة

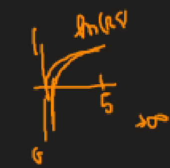
$\underset{x\in A}{\max}\ f(x)$ } مدخل أكبر قيمة $f(x)$ تأخذها الدالة f في A

par exemple $f :]0,5] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^2$



$\underset{x\in]0,5]}{\max} f(x) = 25$ $\qquad$ $\underset{x\in]0,5]}{\arg\max} f(x) = 5$

$\underset{x\in]0,5]}{\max} \ln f(x) = \ln(25)$ $\qquad$ $\underset{x\in]0,5]}{\arg\max} \ln f(x) = 5$



(4) Montrer que $\bar{\lambda}$ est un estimateur efficace du paramètre λ.

4) montrons que $\bar{\lambda}$ est un estimateur efficace du paramètre λ

$\bar{\lambda}$ est un estimateur efficace $\Longleftrightarrow$ $Var(\bar{\lambda}) = \frac{1}{I_n(\lambda)}$

calculons $Var(\bar{\lambda})$

$$Var(\bar{\lambda}) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = Var\left(\frac{\lambda}{n}\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = Var\left(\frac{\lambda}{n}\sum\left(\frac{X_i-0}{\sqrt{\lambda}}\right)^2\right)$$

$$= \frac{\lambda^2}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-0}{\sqrt{\lambda}}\right)^2\right) \qquad U = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-0}{\sqrt{\lambda}}\right)^2 \sim \chi^2_n \text{ car } \frac{X_i-0}{\sqrt{\lambda}} \sim N(0,1) \quad i=\overline{1,n}$$

$$Var(\bar{\lambda}) = \frac{\lambda^2}{n^2} Var(U) = \frac{\lambda^2}{n^2}\frac{\frac{n}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\lambda^2}{n^2}\cdot\frac{n}{2}\cdot 4 = \frac{2\lambda^2}{n} \quad \text{car } \chi^2_n = \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

si $Y \sim \Gamma(a, p)$

$E(Y) = \frac{a}{p}$ | $Var(Y) = \frac{a}{p^2}$

$$Var(\bar{\lambda}) = \frac{2\lambda^2}{n}$$

calculons $I_n(\lambda)$: information de fisher du paramètre λ du n-echantillon $(X_1, \dots, X_n)$

on a $I_n(\lambda) = n\, I_1(\lambda)$

on a $I_1(\lambda) = -E\left(\frac{\partial^2 \ln f(X,\lambda)}{\partial \lambda^2}\right)$

$$\ln f(x,\lambda) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}}\cdot e^{-\frac{1}{2\lambda}x^2}\right) = -\frac{1}{2}\ln(2\pi\lambda) - \frac{x^2}{2\lambda}$$

$$\frac{\partial \ln[f(x,\lambda)]}{\partial \lambda} = -\frac{1}{2\lambda} + \frac{x^2}{2\lambda^2} \quad \Big/ \quad \frac{\partial^2 \ln f(x,\lambda)}{\partial^2 \lambda} = +\frac{1}{2\lambda^2} - \frac{x^2}{\lambda^3}$$

$$I_1(\lambda) = -E\left(\frac{1}{2\lambda^2} - \frac{x^2}{\lambda^3}\right) = E\left(\frac{x^2}{\lambda^3} - \frac{1}{2\lambda^2}\right) = \frac{E(x^2)}{\lambda^3} - \frac{1}{2\lambda^2}$$

mais $E(x^2) = \lambda$ donc $I_1(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda^3} - \frac{1}{2\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{2\lambda^2} = \frac{1}{2\lambda^2}$

donc $I_n(\lambda) = n.\, I_1(\lambda) = \frac{n}{2\lambda^2}$ donc $\frac{1}{I_n(\lambda)} = \frac{2\lambda^2}{n}$

ainsi $Var(\bar{\lambda}) = \frac{1}{I_n(\lambda)} = \frac{2\lambda^2}{n}$ donc $\bar{\lambda}$ est un estimateur efficace de λ