Université de Sidi Bel Abbès | Année 2011/2012.
Faculté des Sciences | Module: Statistique et application.
Département de Mathématique | 3-ème cycle.

Concours de Statistique Non Paramétrique

Exercice 1 *Soient $f \in L^1$ (une fonction intégrable) et K un noyau borné, intégrable et vérifiant $\int_{\mathbb{R}} K(x)dx = 1$ et $|xK(x)| \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow \infty$. Montrer que f est continue en tout point de x et*

$$\lim_{h_n \longrightarrow 0} (f * K_h)(x) = f(x)$$

où $K_h(.) = \frac{1}{h} K\left(\frac{.}{h}\right)$ et $f * g(x) = \int g(x-y)f(y)dy$.

Exercice 2

1. *Soit X une variable aléatoire réelle centrée, bornée par 1.*
   - *(i) Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $\forall x \in [-1, 1]$, $\exp(tx) \leq \frac{1-x}{2}\exp(-t) + \frac{1+x}{2}\exp(t)$*
   - *(ii) En déduire les inégalités $\mathbb{E}[\exp(tX)] \leq ch(t)$ et $\mathbb{E}[\exp(tX)] \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$*
2. *Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes centrées telles que $|X_n| \leq c_n$ avec $c_n > 0$. On note pour tout $n \geq 1$, $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$.*
   - *(a) Montrer que pour tout t, $\mathbb{E}[\exp(tS_n)] \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{j=1}^{n} c_j^2\right)$.*
   - *(b) Montrer alors avec l'inégalité de Markov que pour tout $t > 0$ et $\varepsilon > 0$,*
   $$\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(-t\varepsilon + \frac{t^2}{2}\sum_{j=1}^{n} c_j^2\right).$$
   - *(c) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{j=1}^{n} c_j^2}\right)$.*
   - *(d) Montrer alors pour tout $\varepsilon > 0$ l'inégalité de Hoeffding, $\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{j=1}^{n} c_j^2}\right)$.*