Faculté des Sciences Exactes

Département de Probabilités-Statistique

2021/22

Module : Réseaux de files d'attente

Examen-Corrigé

Exercice 1. $\boxed{\textbf{07 points}}$ *Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson de taux λ.*

1 *Pour $0 \leq s < t$, calculez $\mathbb{P}(N(s) = 0, N(t) = 1)$.*

2 *Calculer $\mathbb{P}(N_1 = 1/N_2 = 3)$, $\mathbb{P}(N_2 = 1/N_1 = 1)$, $\mathbb{P}(N_2 = 0/N_1 = 1)$.*

Réponse :

1 Pour $0 \leq s < t$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N(s) = 0, N(t) = 1) &= \mathbb{P}(N(t) - N(s) = 1, N(s) = 0) \\
&= \mathbb{P}(N(t) - N(s) = 1)\mathbb{P}(N(s) = 0) \\
&= e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^1}{1!} \; e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^0}{0!} \\
&= \lambda(t-s)e^{-\lambda t} \quad \boxed{\textbf{01 points}}
\end{aligned}$$

2

$$\mathbb{P}(N_1 = 1/N_2 = 3) = \frac{\mathbb{P}(N_1 = 1 \; ; \; N_2 = 3)}{\mathbb{P}(N_2 = 3)} = \frac{3}{8} \quad \boxed{\textbf{02 points}}$$

$$\mathbb{P}(N_2 = 1/N_1 = 1) = \mathbb{P}(N_2 - N_1 = 0) = e^{-\lambda} \quad \boxed{\textbf{02 points}}$$

$$\mathbb{P}(N_2 = 0/N_1 = 1) = 0 \text{ (événement impossible).} \quad \boxed{\textbf{02 points}}$$

Exercice 2. $\boxed{\textbf{13 points}}$

(I) On considère un processus de sauts markovien X_t sur $\mathcal{X} = \{0, 1\}$, de générateur infinitésimal

$$L = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1 *Déterminer la distribution stationnaire du processus.*

2 *Le processus X_t est-il irréductible ?*

3 *Le processus X_t est-il réversible ?*

L'équation différentielle a une solution unique $p_t(0,0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, e^{-t}$.

Et par suite $p_t(0,1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\, e^{-t}$.

De la même manière, on trouve $p_t(1,1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, e^{-t}$ et $p_t(1,0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\, e^{-t}$.

Conclusion :

$$\mathrm{P}_t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, e^{-t} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\, e^{-t} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\, e^{-t} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, e^{-t} \end{pmatrix}$$ **02 points**

(II)

1 On a

$$\mathbb{P}(Z_t = 1 \,/ Z_0 = 0\,) = \mathbb{P}(Y_{\mathrm{N}_t} = 1 \,/ Y_0 = 0\,)$$

$$= \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(N_t = k)\, \mathbb{P}(Y_k = 0 \,/ Y_0 = 0\,) = \sum_{k\geq 0} e^{-t}\, \frac{t^k}{k!}\, p_k(0,1)$$ **01 points**

Or pour tout $k \geq 1$, $\mathrm{P}^k = \mathrm{P}$ et $\mathrm{P}^0 = \mathrm{I}$ ce qui implique que $p_0(0,1) = 0$ et pour $k \geq 1$, $p_k(0,1) = \frac{1}{2}$.

Donc

$$\mathbb{P}(Z_t = 1 \,/ Z_0 = 0\,) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\, e^{-t}$$ **01 points**

Et par suite

$$\mathbb{P}(Z_t = 0 \,/ Z_0 = 0\,) = 1 - \mathbb{P}(Z_t = 1 \,/ Z_0 = 0\,) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, e^{-t}$$

De la même manière, on trouve

$$\mathbb{P}(Z_t = 0 \,/ Z_0 = 1\,) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\, e^{-t}$$

et

$$\mathbb{P}(Z_t = 1 \,/ Z_0 = 1\,) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, e^{-t}$$

4 *A l'aide des équations de Kolmogrov, déterminer le noyau de transition* P_t *pour* $t \geq 0$.

(II) Soient $(\mathrm{N}_t)_t$ *un processus de Poisson de taux* $\lambda = 1$ *et* $(Y_n)_n$ *une chaîne de Markov homogène à valeurs dans* $\mathcal{X} = \{0, 1\}$ *de transition*

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Notons pour tout $t \geq 0$, $Z_t = Y_{\mathrm{N}_t}$.

1 *Déterminer le noyau de transition du processus Z*

2 *En déduire son générateur infinitésimal ainsi que sa distribution stationnaire.*

Réponse :

(I)

1 La distribution stationnaire $\pi = (\pi_0, \pi_1)$ vérifie $\pi_0 + \pi_1 = 1$ et $\pi\ \mathrm{L} = 0$. Ce système linéaire de trois équations à deux inconnues admet une solution unique $\pi_0 = \pi_1 = \frac{1}{2}$. **02 points**

2 Il est clair que $q(0, 1)q(1, 0) > 0$, donc ce processus est irréductible. **02 points**

3 On a $q(0, 1) = q(1, 0) = \frac{1}{2}$ et $\pi_0 = \pi_1 = \frac{1}{2}$, donc $\pi(0)q(0, 1) = \pi(1)q(1, 0)$. Donc ce processus est réversible. **02 points**

4 Posons

$$\mathrm{P}_t = \begin{pmatrix} p_t(0,0) & p_t(0,1) \\ p_t(1,0) & p_t(1,1) \end{pmatrix}$$

La matrice P_t vérifie les équations de Kolomogorov $\mathrm{P}_t' = \mathrm{P}_t\ \mathrm{L} = \mathrm{L}\ \mathrm{P}_t$. **01 points**

Le produit de la première ligne de la matrice P_t avec la première colonne de la matrice L, nous donne

$$p_t'(0,0) = -\frac{1}{2}\, p_t(0,0) + \frac{1}{2}\, p_t(0,1) = -\frac{1}{2}\, p_t(0,0) + \frac{1}{2}\,(1 - p_t(0,0)) = -p_t(0,0) + \frac{1}{2}$$

Le noyau de transition du processus Z est

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-t} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-t} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-t} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-t} \end{pmatrix}$$

01 points

2 Les processus X et Z ont le même noyau de transition, cependant Z admet la matrice L comme générateur infinitésimal et $\pi = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ comme distribution stationnaire. **01 points**