Université Badji Mokhtar Annaba — Département de Mathématiques
$3^{ième}$ année licence Académique — 2021/2022
Module : Mesure et intégration — Enseignante : E. Zerouki

Série 5

Exercice 1. *On définit sur* $\mathbb{R}^2$ *la fonction* f *par* $f(x,y)=\dfrac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}$. *Montrer que* f *est intégrable sur* $D=[0,1]^2$.

Exercice 2. *Soit* f *la fonction définie sur* $[0,1]^2$ *par* $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ *et* $f(0,0)=0$.

a) Calculer $\int_{[0,1]} dx \int_{[0,1]} f(x,y)dy$ *et* $\int_{[0,1]} dy \int_{[0,1]} f(x,y)dx$.

b) En déduire que $f \notin \mathcal{L}^1([0,1]^2,\mathbb{R})$.

Exercice 3. *Soit* f *la fonction définie sur* $\Delta\times\Delta=[-1,1]^2$ *par* $f(x,y)=\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}$ *et* $f(0,0)=0$.

1) *Montrer que* f *est* $\mathcal{B}(\Delta)\otimes\mathcal{B}(\Delta)$*-mesurable.*

2) *Vérifier que les applications partielles* $x\mapsto f(x,y)$ *et* $y\mapsto f(x,y)$ *sont intégrables sur* Δ, *calculer les intégrales répétées* $\int_{[-1,1]} dx \int_{[-1,1]} f(x,y)dy$ *et* $\int_{[0,1]} dy \int_{[0,1]} f(x,y)dx$.

3) *Montrer que* f *n'est pas intégrable par rapport à la mesure produit sur* $(\Delta^2,\mathcal{B}(\Delta)\otimes\mathcal{B}(\Delta))$.

Exercice 4. *Calculer l'intégrale*

$$I=\int_E y\sin x e^{-xy}dxdy, \quad E=(0,\infty)\times(0,1).$$

Exercice 5. *On définit sur le borélien* $A=]0,+\infty[\times]a,b]$, *où* $0<a<b$ *la fonction* f *par* $f(x,y)=\exp(-xy)$.

1− *Montrer que* f *est intégrable sur* A.

2− *En déduire la valeur de* $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$.

Résolution

Exercice 1 On a pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$: $f(x,y)=\dfrac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}$

♦ $f(x,y)\geq 0$, sur D.
♦ La fonction f est continue sur D $(\text{sur }\mathbb{R}^2)$, alors elle est borélienne sur D.
Donc d'après le **Théorème de Fubini − Tonelli** on a

$$\int_D f(x,y)\,dxdy=\int_{[0,1]}dx\int_{[0,1]}f(x,y)dy=\int_{[0,1]}dy\int_{[0,1]}f(x,y)dx.$$

Comme les fonctions $x\longmapsto f(x,y)$ et $y\longmapsto f(x,y)$ sont continues et positive sur $[0,1]$, on a l'intégrabilité au sens de Lebesgue $\Longleftrightarrow$ l'intégrabilité au sens de Riemann et on a

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]}dy\int_{[0,1]}f(x,y)dx &= \int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx=\int_0^1\frac{1}{1+y^2}\left[\int_0^1\frac{x+y}{1+x^2}dx\right]dy\\
&= \int_0^1\frac{1}{1+y^2}\left[\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx+y\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx\right]dy\\
&= \int_0^1\frac{1}{1+y^2}\left[\left[\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]_{x=0}^{x=1}+y\left[Arctg\ x\right]_{x=0}^{x=1}\right]dy\\
&= \int_0^1\frac{1}{1+y^2}\left(\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}y\right)dy\\
&= \frac{1}{2}\ln 2\int_0^1\frac{dy}{1+y^2}+\frac{\pi}{4}\int_0^1\frac{y}{1+y^2}dy\\
&= \frac{1}{4}\ln 2\left[Arctg\ y\right]_{y=0}^{y=1}+\frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{2}\ln\left(1+y^2\right)\right]_{y=0}^{y=1}=\frac{\pi}{4}\ln 2<+\infty.
\end{aligned}$$

Par conséquent $f\in\mathcal{L}^1([0,1]^2,\mathbb{R}_+)$.

Exercice 2 Les fonctions $f_x : y\longmapsto f(x,y)$ et $f^y : x\longmapsto f(x,y)$ sont continues sur $[0,1]$, alors elles sont (absolument) intégrables au sens de Riemann, donc intégrables au sens de

Lebesgue sur $[0,1]$ et les deux intégrales coïncident. On a dans ce cas

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]} dy \int_{[0,1]} f(x,y)dx &= \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\right] dy = \int_0^1 \left[\int_0^1 - \frac{y^2+x^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}dx\right] dy \\
&= -\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{(x^2+y^2)\,dx}{(x^2+y^2)^2} - \frac{x\,(2x)\,dx}{(x^2+y^2)^2}\right] dy \\
&= -\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{(x^2+y^2)\,dx - xd\,(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right] dy \\
&= -\int_0^1 \left[\int_0^1 d\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\right] dy = -\int_0^1 \left[\frac{x}{x^2+y^2}\right]_{x=0}^{x=1} dy \\
&= -\int_0^1 \frac{1}{y^2+1}dy = -\left[Arctg\ y\ \right]_{y=0}^{y=1} = -\pi/4.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy &= \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy\right] dx = \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}dy\right] dx \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{(x^2+y^2)\,dy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{y\,(2y)\,dy}{(x^2+y^2)^2}\right] dx \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{(x^2+y^2)\,dy - yd\,(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right] dx \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^1 d\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right] dx = \int_0^1 \left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_{y=0}^{y=1} dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx = \left[Arctg\ x\ \right]_{x=0}^{x=1} = \pi/4.
\end{aligned}$$

$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy \neq \int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx$,,alors $f \notin \mathcal{L}^1([0,1]^2, \mathbb{R})$.

Exercice 3 On a

1) f est continue sur $\Delta^2 \setminus \{(0,0)\}$, alors elle est borélienne sur $\mathcal{B}(\Delta) \otimes \mathcal{B}(\Delta) = (\mathcal{B}(\Delta))^2$.

2) La fonction $f_x : y \longmapsto f(x,y)$ (resp. $f^y : x \longmapsto f(x,y)$) est continue sur $[-1,1]$, pour tout $x \in \Delta \setminus \{0\}$,(resp. $y \in \Delta \setminus \{0\}$) donc elle est intégrable au sens de Riemann, pour tout $x \in \Delta \setminus \{0\}$, ce qui nous permet de dire, qu'elle est intégrable au sens de Lebesgue sur Δ.

Pour $x=0$, (resp. $y=0$) la fonction f_0 (resp. f^0) est constante sur $[-1,1]$, donc intégrable au sens de Lebesgue.sur Δ. Par conséquent on a

$$\begin{aligned}
\int\limits_{[-1,1]} dy \int\limits_{[-1,1]} f(x,y)dx &= \int\limits_{-1}^{1}\left[\int\limits_{-1}^{1}\frac{x\ y}{(x^2+y^2)^2}dx\right]dy = -\int\limits_{-1}^{1}\frac{y}{2}\left[\int\limits_{-1}^{1}-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}dx\right]dy \\
&= -\int\limits_{-1}^{1}\frac{y}{2}\left[\int\limits_{-1}^{1}-\frac{d\left(x^2+y^2\right)}{(x^2+y^2)^2}\right]dy = -\int\limits_{-1}^{1}\frac{y}{2}\left[\frac{1}{(x^2+y^2)}\right]_{x=-1}^{x=1}dy \\
&= -\int\limits_{-1}^{1}\frac{y}{2}\left[\frac{1}{(y^2+1)}-\frac{1}{(y^2+1)}\right]dy = 0.
\end{aligned}$$

Pour le deuxième intégrale on a

$$\begin{aligned}
\int\limits_{[0,1]} dy \int\limits_{[0,1]} f(x,y)dx &= \int\limits_{0}^{1}\left[\int\limits_{0}^{1}\frac{x\ y}{(x^2+y^2)^2}dx\right]dy = -\int\limits_{0}^{1}\frac{y}{2}\left[\int\limits_{0}^{1}-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}dx\right]dy \\
&= -\int\limits_{0}^{1}\frac{y}{2}\left[\int\limits_{0}^{1}-\frac{d\left(x^2+y^2\right)}{(x^2+y^2)^2}\right]dy = -\int\limits_{0}^{1}\frac{y}{2}\left[\frac{1}{(x^2+y^2)}\right]_{x=}^{x=1}dy \\
&= -\int\limits_{0}^{1}\frac{y}{2}\left[\frac{1}{(y^2+1)}-\frac{1}{y^2}\right]dy = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}\frac{1}{y}dy - \frac{1}{4}\int\limits_{0}^{1}\frac{2y}{y^2+1}dy \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln y\ \right]_{y\to 0}^{1} - \frac{1}{4}\left[\ln\left(1+y^2\right)\ \right]_{y=0}^{1} = +\infty.
\end{aligned}$$

3) On a

$$|f(x,y)| = \begin{cases} f(x,y) & : \text{si } \ x.y \geq 0 \quad \text{(ils ont le même signe)} \\ -f(x,y) & : \ \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme $f(-x,-y) = f(x,y)$ et $f(-x,y) = f(x,-y) = -f(x,y)$ alors on peut écrire

$$\begin{aligned}
\int\limits_{[-1,1]^2} |f(x,y)|\, d\left(\lambda(x)\otimes\lambda(y)\right) &= \int\limits_{[-1,1]^2} |f(x,y)|\, dxdy \\
&= 2\int\limits_{[0,1]^2} f(x,y)dxdy - 2\int\limits_{[-1,0]\times[0,1]} f(x,y)dxdy
\end{aligned}$$

et

$$\int\limits_{[0,1]^2} f(x,y)dxdy = +\infty \text{ et } \int\limits_{[-1,0]\times[0,1]} \left[-f(x,y)\right]dxdy = \int\limits_{[0,1]^2} f(x,y)dxdy = +\infty,$$

donc $\displaystyle\int\limits_{[-1,1]^2} |f(x,y)|\, d\left(\lambda(x)\otimes\lambda(y)\right) = +\infty \iff f \notin \mathcal{L}^1([-1,1]^2,\mathbb{R}).$

Exercice 4 $\quad I = \int\limits_{(0,\infty)\times(0,1)} y \sin x\ e^{-xy} dxdy = ?$

Posons $f(x,y) = y\sin x\ e^{-xy}$, pour $x \in (0,+\infty)$ et $y \in (0,1)$.

- f est contine sur E, alors elle est mesurable sur E.

- $|f(x,y)| \leq y \exp(-xy) = g(x,y)$ et

$$\begin{aligned}
\int\limits_{[0,1]^2} y\exp(-xy)\,dxdy &= \int\limits_0^1 \left[y \int\limits_0^{+\infty} \exp(-xy)\,dx \right] dy \\
&= \int\limits_0^1 \left[-\exp(-xy)\ \right]_{x=0}^{x\to+\infty} dy = \int\limits_0^1 dy = 1,
\end{aligned}$$

alors $g \in \mathcal{L}^1(E,\mathbb{R}) \implies f \in \mathcal{L}^1(E,\mathbb{R})$. Par conséquent et d'aprés le **Théorème de Fubini** on a

$$I = \int\limits_{(0,+\infty)} \left[\int\limits_{((0,1)} f(x,y)dy \right] dx = \int\limits_{(0,1)} \left[\int\limits_{(0,+\infty)} f(x,y)dx \right] dy.$$

Calculons $\int\limits_{(0,1)} \left[\int\limits_{(0,\infty)} f(x,y)dx \right] dy$. Comme f est continue sur E, on a f est absolument intégrable au sens de Riemann sur $E \iff$ elle est $\lambda-$intégrable (au sens de Lebesgue) sur E et on a

$$\int\limits_{(0,1)} \left[\int\limits_{(0,+\infty)} f(x,y)dx \right] dy = \int\limits_0^1 \left[\int\limits_0^{+\infty} f(x,y)dx \right] dy = \int\limits_0^1 y \left[\int\limits_0^{+\infty} \sin x\ e^{-xy} dx \right] dy.$$

En utilisant l'intégration par parties et en posant $u = \sin x$ et $v' = \exp(-xy)$, nous pouvons avoir $(y > 0)$

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^{+\infty} \sin x\ e^{-xy}dx &= \left[-\frac{\sin x}{y} e^{-xy} \right]_{x=0}^{x\to+\infty} + \frac{1}{y}\int\limits_0^{+\infty} \cos x\ e^{-xy}dx \\
&= \frac{1}{y}\int\limits_0^{+\infty} \cos x\ e^{-xy}dx \quad \left(\text{car } \lim_{x\to+\infty} e^{-xy} = 0 \text{ et } |\sin x| \leq 1 \right).
\end{aligned}$$

En utilisant, encore une fois l'intégration par parties, et en posant $u = \cos x$ et $v' = \exp(-xy)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y}\int_0^{+\infty} \cos x \; e^{-xy} dx &= \frac{1}{y}\left[\left[-\frac{\cos x}{y} e^{-xy}\right]_{x=0}^{x\to+\infty} + \frac{1}{y}\int_0^{+\infty} \sin x \; e^{-xy} dx\right] \\
&= \frac{1}{y}\left[\frac{1}{y}\left(1 - \int_0^{+\infty} \sin x \; e^{-xy} dx\right)\right] \left(\text{car } \lim_{x\to=+\infty} e^{-xy} = 0 \text{ et } |\cos x| \leq 1\right) \\
&= \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^2}\int_0^{+\infty} \sin x \; e^{-xy} dx = \int_0^{+\infty} \sin x \; e^{-xy} dx.
\end{aligned}$$

Donc

$$\left(1 + \frac{1}{y^2}\right)\int_0^{+\infty} \sin x \; e^{-xy} dx = \frac{1}{y^2} \Longleftrightarrow \int_0^{+\infty} \sin x \; e^{-xy} dx = \frac{1}{y^2} \times \frac{y^2}{1+y^2} = \frac{1}{1+y^2}.$$

Par conséquent $\quad I = \displaystyle\int_0^1 \frac{y}{1+y^2} dy = \left[\frac{1}{2}\ln(1+y^2)\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{\ln 2}{2}.$

Exercice 5 1- On a

♦ $f(x,y) = \exp(-x.y) > 0$ sur A.
♦ f est continue sur A (sur $\mathbb{R}^2$), alors elle est mesurable (borélienne).
Donc d'après le **Théorème de Fubini − Tonelli**, on a

$$\int_A f(x,y)\, dxdy == \int_{]a,b]} dy \int_{]0,+\infty[} f(x,y)\, dx \int_{]0,+\infty[} dx \int_{]a,b]} f(x,y)\, dy. \tag{$*$}$$

Comme les fonctions $x \longmapsto f(x,y)$ et $y \longmapsto f(x,y)$ sont continues et positive sur $\mathbb{R}$, on a l'intégrabilité au sens de Lebesgue $\Longleftrightarrow$ l'intégrabilité au sens de Riemann et on a

$$\begin{aligned}
\int_{]a,b]} dy \int_{]0,+\infty[} f(x,y)\, dx &= \int_a^b dy \int_0^{+\infty} f(x,y)\, dx = \int_a^b \left[\int_0^{+\infty} e^{-xy} dx\right] dy \\
&= \int_a^b \left[-\frac{e^{-xy}}{y}\right]_{x=0}^{x\to+\infty} dy = \int_a^b \frac{1}{y} dy = \ln b - \ln a < +\infty.
\end{aligned}$$

Alors $f \in \mathcal{L}^1(A, \mathbb{R})$.
2- De $(*)$ on a

$$\begin{aligned}
\ln b - \ln a &= \int_{]0,+\infty[} dx \int_{]a,b]} f(x,y)\, dy = \int_0^{+\infty} \left[\int_a^b e^{-xy} dy\right] dx \\
&= \int_0^{+\infty} \left[-\frac{e^{-xy}}{x}\right]_{y=a}^{y=b} dy = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x} dx = \ln \frac{b}{a}.
\end{aligned}$$