Solution des exercices de C.M.

Exo1 : $E = \{1, 2\}$; $P_{11} = 0.6$; $P_{12} = 0.5$

(a) $5/9$ (b) $4/9$.

Exo2 : (b) $P(X_2 = j) = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i P_{ij}^{(2)}$; $j = 1, 2$.

Exo3 : (a) $\left[\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}\right] P^3\, {}^t[0\ 1\ 2]$

(b) récurrente, irréductible et apériodique. loi invariante $\pi = \begin{array}{ccc} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 \\ \left[\frac{10}{21}\right. & \frac{5}{21} & \left.\frac{6}{21}\right] \end{array}$.

(c) π_0

(d) π_1

Exo4 : (a) $\pi_1 = \dfrac{\beta}{1+\beta-\alpha}$, $\pi_2 = \dfrac{1-\alpha}{1+\beta-\alpha}$.

(b) (i) π_2

(ii) $\frac{1}{\pi_2} = E_2(T_2)$.

(iii) $(1-\alpha)\pi_1$.

Exo5 : I. (π_j) unique $\forall j$, satisfait les éq^{ts} de balance $\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij}$.

II. Considérer X_n : le reste de la division de S_n par 13.

i.e. $S_n \equiv X_n\ [13]$.

- Montrer que X_n est une C.M. homogène d'espace d'états $E = \{0, 1, 2, \dots, 12\}$ et de matrice de transition

$$\underset{12\times 12}{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & & & & \vdots \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

(Pour obtenir la ligne suivante, faire une transition cyclique à droite)

- P est double stochastique
- d'après I. $\pi_j = \frac{1}{13}$ $\forall j$

Réponse : $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 0) = \frac{1}{13}$.

Exo6 (1) irréductible, apériodique. $P_{ij}^{(n)} \xrightarrow{n\to+\infty} \pi_j$ $\forall j$

(2) $\pi = \left[\frac{12}{37}\ \ \frac{6}{37}\ \ \frac{4}{37}\ \ \frac{3}{37}\ \ \frac{12}{37}\right]$.

Exo7 : Devoir