Corrigé exercices 2 et 3 série 2
variables aléatoires discrètes

Exercice 1:
Le support de X est donné par

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{-2, 1, 2, 4\}$$

1) a) On écrit que la variable aléatoire discrète X suit la loi de probabilité indiquée dans le tableau, donc doit vérifier

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{4} P(X = x_i) &= 1, \text{ soit} \\ 1 &= \alpha + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

d'où

$$\alpha = \frac{1}{6}$$

b)

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{4} x_i P(X = x_i) = \\ &= (-2) \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{4} = \\ &= \frac{19}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left(X^2\right) &= \sum_{i=1}^{4} x_i^2 P(X = x_i) = \\ &= (-2)^2 \times \frac{1}{6} + 1^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{1}{3} + 4^2 \times \frac{1}{4} = \\ &= \frac{25}{4} \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned} V(X) &= E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = \\ &= \frac{25}{4} - \left(\frac{19}{12}\right)^2 = \frac{539}{144} \end{aligned}$$

2) a)

$$
\begin{array}{rclll}
x & < & -2 & & F(x) = 0 \\
-2 & \leq & x < 1 & & F(x) = P(X=-2) = \frac{1}{6} \\
1 & \leq & x < 2 & & F(x) = P(X=-2) + P(X=1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12} \\
2 & \leq & x < 4 & & F(x) = P(X=-2) + P(X=1) + P(X=2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3}{4} \\
x & \geq & 4 & & F(x) = 1
\end{array}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
P(X > 1,5 \mid X \geq 0,5) &= \frac{P(X > 1,5 \ et \ X \geq 0,5)}{P(\ X \geq 0,5)} = \frac{P(X > 1,5\ )}{P(\ X \geq 0,5)} = \\
&= \frac{1 - P(X \leq 1,5)}{1 - P(X \leq 0,5)} = \frac{1 - F(1,5)}{1 - F(0,5)} = \frac{1 - \frac{5}{12}}{1 - \frac{1}{6}} = \\
&= \frac{\frac{7}{12}}{\frac{5}{6}} = \frac{7}{10}
\end{aligned}
$$

3) Déterminons tout d'abord le support de la variable aléatoire $Y = (X-1)(X-2)$
$X = -2 \rightarrow Y = 12$
$X = 1 \rightarrow Y = 0$
$X = 2 \rightarrow Y = 0$
$X = 4 \rightarrow Y = 6$, d'où le support de Y est donné par $Y(\Omega) = \{0, 2, 6\}$. La loi de Y est donnée par

$$
\begin{aligned}
P(Y=0) &= P(X = 1 \ ou \ X = 2) = P(X=1) + P(\ X=2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12} \\
P(Y=6) &= P(X=4) = \frac{1}{4} \\
P(Y=12) &= P(\ X=-2) = \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

on vérifie que

$$P(Y=0) + P(Y=6) + P(Y=12) = 1$$

Exercice 2:
1) a) On a $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$
La loi de X est la loi hypergéométrique (modélise par exemple le tirage

simultané de plusieurs boules) et est donnée par

$$\begin{aligned} P(X=0) &= \frac{C_2^0 C_3^3}{C_5^2} = \frac{1}{10} \\ P(X=1) &= \frac{C_2^1 C_3^2}{C_5^2} = \frac{6}{10} \\ P(X=2) &= \frac{C_2^2 C_3^1}{C_5^2} = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

b) On en déduit que

$$E(X) = \sum_{k=0}^{2} kP(X=k) = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{6}{10} + 2 \times \frac{3}{10} = 1,2$$

$$E\left(X^2\right) = \sum_{k=0}^{2} k^2 P(X=k) = 0^2 \times \frac{1}{10} + 1^2 \times \frac{6}{10} + 2^2 \times \frac{3}{10} = 1,8$$

donc

$$V(X) = 1,8 - 1,44 = 0,36$$

2) a) On a $Y(\Omega) = \{0,1,2,3,4,5\}$

L'expérience consiste à répéter (5 fois) le tirage d'une boule de manière **indépendante** (**avec remise**) avec 2 seules possibilités "succès" et "échec",où "succès"=" tirer une boule rouge" et $P(\text{"}succès\text{"}) = p = \frac{2}{5}$, donc Y suit une loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p = \frac{2}{5}$, autrement dit $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(5, \frac{2}{5}\right)$ et sa loi est donnée par

$$P(Y=k) = C_5^k \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{5-k} \qquad 0 \leq k \leq 5$$

b) On sait que

$$E(Y) = np = 2 \quad et \quad V(X) = np(1-p) = \frac{6}{5}$$

c)

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^{5} \left(2k^2 - 3k + 2\right) C_5^k 2^k 3^{5-k} = 5^5 \sum_{k=0}^{5} \left(2k^2 - 3k + 2\right) C_5^k \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{5-k} = \\ &= 5^5 \sum_{k=0}^{5} \left(2k^2 - 3k + 2\right) P(Y=k) = 5^5 E\left(2Y^2 - 3Y + 2\right) = \\ &= 5^5 \left(2V(Y) + 2(E(Y))^2 - 3E(Y) + 2\right) = 5^5 \left(\frac{12}{5} + 8 - 6 + 2\right) = 32 \times 5^4 = 20000 \end{aligned}$$

Exercice 3

1) Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes reçues en 1 heure par le guichet. On sait que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda = 4$, autrement dit X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 4$.

On nous demande $P(X \geq 2)$, or

$$P(X = k) = e^{-4}\frac{4^k}{k!}$$

donc

$$P(X \geq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 1 - e^{-4}\frac{4^0}{0!} - \frac{4^1}{1!} = 1 - 5e^{-4}$$

2) Soit Y la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes reçues en 2 heures. On sait que $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda = 8$, ainsi

$$\begin{aligned} P(Y \geq 4) &= 1 - [P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 3)] = \\ &= 1 - e^{-8}\left[1 + 8 + \frac{8^2}{2} + \frac{8^3}{6}\right] = 1 - \frac{379}{3}e^{-8} \end{aligned}$$

3)

$$S = \sum_{k \geq 0} \left(3k^2 + 2k\right) e^{-4}\frac{4^{k-1}}{k!} = \frac{1}{4}\sum_{k \geq 0} \left(3k^2 + 2k\right) P(X = k)$$

donc

$$S = \frac{1}{4}\left(3E\left(X^2\right) + 2E(X)\right) = \frac{1}{4}\left(3V(X) + 3(E(X))^2 + 2E(X)\right)$$

Or

$$E(X) = V(X) = 4 \qquad \text{d'où} \;\; S = 17$$