Test T.D n° 1

(I) Définir avec précision les notions suivantes :

(1) Espace probabilisable.

(2) Espace probabilisé.

(3) Tribu Borélienne. (0,5)×4 = (02)

(4) Mesure de Borel

(5) Le minimum d'information sur une v.a. X.

(II) (1) Les Boréliens sont-ils des évènements ? Justifier ! (01)

(2) Par quoi peut-on modéliser l'information sur une expérience aléatoire ? (0,50)

(III) On lance un dé numéroté de 1 à 6 et une pce de monnaie au même temps.

(1) Déterminer Ω : l'espace fondamental. (0,5)

Soient les 2 ss-tribus définies par :

(a) $\mathcal{F}_1$: donne l'information sur le résultat de la pièce de monnaie

(b) $\mathcal{F}_2$: Le minimum d'information pour pouvoir répondre à la question : « Le nbre apparu est-il 1 ? »

(2) Ecrire explicitement $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$. (1)×2 (2)

(3) Donner une variable aléatoire par rapport à $\mathcal{F}_2$ mais qui n'est pas une v.a. p.r.p. à $\mathcal{F}_1$. (1)

Scanned with CamScanner

Test 1 /07

1] On se donne 2 v.a. réelles positives X et Y.
et on suppose que : $\begin{cases} \mathbb{E}(X/Y) = Y \\ \mathbb{E}(Y/X) = X \end{cases}$

- Montrer que si X et $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
alors $X = Y$ p.s

(Ind. Calculer $\mathbb{E}(X-Y)^2$).

02

2] Si X v.a. $\in L^2$.
On donne $Var(X/\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X^2/\mathcal{G}) - \mathbb{E}^2(X/\mathcal{G})$

- Montrer que $Var X = \mathbb{E}[Var(X/\mathcal{G})] + Var[\mathbb{E}(X/\mathcal{G})]$

02

3] X_1, X_2 v.a. $\sim \mathcal{P}(\lambda)$ indépendantes.

- Calculer $\mathbb{P}(X_1 = i / X_1 + X_2 = j)$, $j \geq i \geq 0$

- En déduire $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X_1 = i\}} / Y)$.

03

Ind. $(X_1 + X_2 \sim \mathcal{P}(2\lambda))$.

Scanned with CamScanner

Test 1 (07/07)

I) Répondre avec précision aux questions suivantes :

1) Définir un modèle probabiliste.
2) Montrer par un exple que la réunion de 2 tribus n'est pas une tribu.
3) Qu'est-ce qu'un espace de proba. complet ?
4) Définir les P-nuls.
5) La relation entre la mesure image et la loi de probabilité d'une variable aléatoire.
6) Donner un sens intuitif à la v.a. dans l'espace $(\Omega, \mathcal{F},)$.
7) Une v.a. intégrable.

II) Soit l'expérience aléatoire suivante :

$\mathcal{E}$: Le jet d'1 dé numéroté de 1 à 6".

Soient les ss-tribus définies par :

$\mathcal{F}_0$: ne contient aucune information sur $\mathcal{E}$.

$\mathcal{F}_1$: contient toute l'information sur $\mathcal{E}$.

$\mathcal{F}_2$: Donne l'information sur la parité du résultat.

$\mathcal{F}_3$: Le minimum d'information pour pouvoir répondre à la question : « Le nbre apparu est-il égal à 6 ».

Scanned with CamScanner

Questions :

① Ecrire explicitement $\mathcal{F}_0$, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ et $\mathcal{F}_4$.

② Soit la fct : $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $\omega \longmapsto \mathbb{1}_{\{6\}}(\omega)$.

Ω : l'espace fondamental relatif à $\mathcal{E}$.

(i) Déterminer i de telle sorte que X soit une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{F}_i)$.

(ii) Déterminer $\sigma(X)$.

③ Si Y est une v.a avec : $Y = f(X)$, f borélienne

Quelle est la relation entre $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$.

Scanned with CamScanner

Correction du test (cours) n° 1 (07/07)

I) Déf^t des termes :

0,50 a) Modèle probabiliste : $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ Ω : esp. fondamentale
$\mathcal{F}$: tribu sur Ω
$\mathbb{P}$: mesure de proba. sur Ω.

0,50 b) Evènement aléatoire : les éléments de $\mathcal{F}$.

0,50 c) Les P-nuls : les sous ensbles des ensbles négligeables.

0,50 d) Espace de proba complet : si $\mathcal{F}$ contient tous les P-nuls.

0,50 e) Tribu Borélienne : $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$: plus petite tribu contenant les ouverts de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

0,50 f) Mesure de Borel : $\mu : (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \longrightarrow \mathbb{R}_+$

II) 1) 0,50 $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$

0,50 $\mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(\Omega) = 2^{\Omega}$.

0,50 $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{2,4,6\}, \{1,3,5\}\}$.

0,50 $\mathcal{F}_3 = \{\emptyset, \Omega, \{5,6\}, \{1,2,3,4\}\}$.

01 2) (i) $X = \mathbb{1}_{\{6\}}$. v.a. p.r.p. à $\mathcal{F}_1$ seulement.

(ii) $\sigma(X) = X^{-1}\{B, B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}$.

$$= \begin{cases} \emptyset & 0,1 \notin B \\ \Omega & 0,1 \in B \\ \{6\} & \text{si } 1 \in B \\ \{1,2,3,4,5\} & \text{si } 0 \in B \text{ et } 1 \notin B \end{cases}$$

01 D'où $\sigma(X) = \{\emptyset, \Omega, \{6\}, \{1,2,3,4,5\}\}$.

Scanned with CamScanner