Université Saad Dahleb BLIDA1 **Année : 2019-2020**
Faculté des sciences
Departement MI
M. N. RAOUTI

.

*Chapitre*2 : **CALCUL DE PROBABILITES**

.

.

INTRODUCTION

- La théorie des probabilités est une discipline des mathématiques appliquées qui est née au XVIIème siécle en essayant de résoudre des problèmes de jeux de hasard.

- Le terme "probabilité" dérive du mot probable qui signifie possible, non sûre, incertain. Elle intervient dans les situations ou règne l'incertitude. La probabilité offre les outils mathématiques qui permettent d'étudier ces situations et d'y prendre des décisions.

- La probabilité trouve ses applications dans de très nombreux domaines des sciences et des technologies. Mentionnons la physique, l'informatique, les réseaux de télécommunications, la finance, l'assurance, la biologie et la médecine ...

.

1 **DEFINITIONS** (concepts de base)

1.1 **Définition** (*épreuve aléatoire EA*)

Une épreuve aléatoire c'est toute expérience réelle ou artificielle qu'on peut répéter ou qui se répéte (au moins théoriquement) un grand nombre de fois, et qui exécutée dans quasiment les mêmes conditions peut conduire à des résultats différents. En général, on connait l'*univers* Ω *d'une EA* qui est l'ensemble de tout les résultats possibles de cette EA (Ω : fini ou infini), mais il est impossible de prédire (dire à l'avance) son résulat effectif ou réel..

.

1.2 **Définition** (*événement associé à une EA*)

un évènement associé à une EA est *tout élément de* $\mathcal{P}(\Omega)$, (l'ensemble des parties de Ω). C'est donc *un sous-ensemble* de Ω, ensemble des résultats possibles d'une E.A. Un évènement estt désigné par une lettre majuscule $A, B, C, ...$ et est défini soit à travers une déscription littéraire (une phrase), soit par la donnée de la liste explicite de ses éléments. Un évènement est dit *réalisé* si l'un de ses éléments apparaît comme résultat de l'EA.

.

1.2.1 **Evénements particuliers**

Evènement certain: C'est l'élément Ω de $\mathcal{P}(\Omega)$. Il est réalisé quel que soit le résultat de l'E.A.

Evènement impossible: C'est l'élément $\varnothing$ de $\mathcal{P}(\Omega)$. Il n'est pas réalisé quel que soit le résultat de l'E.A.

Evènement contraire : L'évènement contraire d'un événement E, noté $\overline{E}$, est la négation de E. on a donc $\overline{E} = \complement_{\Omega}^{A}$. $\overline{E}$ se réalise lorsque E ne l'est pas et inversement.

Evénement élémentaire: C'est tout élément de $\mathcal{P}(\Omega)$ à un seul élément (les singletons de $\mathcal{P}(\Omega)$) ou un résultat de l'EA.

Remarque : un événement $E \neq \varnothing$ est une union d'événements élémentaires.

.

1.2.2 **Opérations sur les événements**

Etant données deux évènements A et B associés à une même E.A., on a:

- *l'évènement contraire de l'événement* A: (voir ci-dessus), observons que l'évènement contraire de $\overline{A}$ est A (i.e. $\overline{\overline{A}} = A$).

- *l'évènement* $A \cup B$, se lit *«A ou B»*. Il est réalisé si *l'un au moins* des deux évènements A et B est réalisés.

- *l'événement* $A \cap B$, se lit *« A et B »*. Il est réalisé si A et B sont *tout deux* réalisés. Lorsque $A \cap B = \varnothing$ (événement impossible) c.a.d. ne peuvent se réaliser en même temps, A et B sont dit *incompatibles ou disjoints.*

Ceux là sont les opérations de base. Il en existe d'autres (composées) telles que: $A \backslash B, A \Delta B, \cdots$

Exemples (1): *(EA, événements, opérations sur les événements)*

.

2. **PROBABILITE**

2.1 définition axiomatique générale (*Probabilité sur un ensemble discrêt***)**

On appelle *probabilité* toute application $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$
$$E \quad \to P(E)$$

vérifiant les axiomes suivants :

(i) $P(\Omega) = 1$.

(ii) $\forall A_1, A_2, ..., A_k \in \mathcal{P}(\Omega)$ deux à deux disjoints $(A_i \cap A_j = \varnothing \quad i \neq j)$ on a: $P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + ...P(A_k)$, P est dite additive.

Le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est dit *espace de probabilité fini*; et le couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est dit *espace probabilisable.*

Propriétés d'une probabilité
En conséquence des axiomes précédents:

- $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \; 0 \leq P(A) \leq 1$.

- $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega), \; A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

- $P(A) = 1 - P(A) \Longrightarrow P(\varnothing) = 0$

- $A \cap B = \varnothing \Longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Remarque: (Comment est fixée l'application P?)
Si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$, on fait correspondre à chaque résultat $\omega_i \in \Omega$ une probabilité $p(\omega_i)$, (t.q. $0 \leq p(\omega_i) \leq 1$ et $\sum\limits_{\omega_i \in \Omega} P(\omega_i) = 1$) . La probabilité d'un événement quelconque A est alors donnée par: $P(A) = \sum\limits_{\omega_i \in A} P(\omega_i)$...

2.2 Probabilité uniforme ou équiprobabilité

Dans toutes les situations où aucun événement élémentaire ne doit être distingué des autres, *on suppose* que tous les évènements élémentaires $\{\omega_i\}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ sont *équiprobables* c.a.d. qu'elle ont *la même probabilité de réalisation* ($p(\omega_i) = \dfrac{1}{card(\Omega)}$). l'application P est alors définie par:

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$$
$$E \quad \to \quad P(E) = \frac{card(E)}{card(\Omega)} = \frac{\text{nbr cas favorables}}{\text{nbr cas possibles}}.$$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ dite *probabilité uniforme ou équiprobabilité.* Dans ce cas on utilise l'analyse combinatoire pour calculer la probabilité.

Remarque: *Quand est ce que on a équiprobabilité?*

- un ou plusieurs lancement(s) d'un dé, d'une pièce équilibrée.

- un choix au hasard.

- Parfois les spécialistes supposent l'équiprobabilité lorsqu'elle est vraissemblable pour simplifier les calculs...

Exemples (2):

- E.A.1: un lancement d'*une pièce équilibrée.*

- E.A.2: un lancement d'*un dé équilibré.*

-

-

-

.

Remarque : *cas de non equiprobabilité*

Lorsque les é*vènements élémentaires ne sont pas équiprobables*, *On estime les probabilités des événements élémentaires*, et on utilise le fait que la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des évènements élémentaires qui le composent. c.a.d.

$$P(E) = \sum_{\omega_i \in E} P(\{\omega_i\})$$

Exemples :

- Si le dé précédent n'est pas équilibré et les probabilités des évènements élémentaires sont les suivants :

1	2	3	4	5	6
0.05	0.25	0.25	0.15	0.10	0.20

-

.

.

.

3. PROBABILITE CONDITIONNELLE

3.1 Définition

Soient A et B deux évènements tels que $P(B) \neq 0$. On appelle *probabilité conditionnelle de A sachant B* et on notera $P(A/B)$ la probabilité : $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

C'est probabilité que A se réalise sachant que B s'est déja réalisé. La réalisation de B est dans ce cas une information qui modifie la probabilité de réalisation de A

.

Exemples (*probabilité conditionnelle*)

-

-

.

Remarque:

Pour une E.A. donnée, toute probabilité exprimée par rapport à Ω est non conditionnelle, et toute proba exprimée par rapport à une partie $B \subset \Omega$ est conditionnelle $P(\cdot/B)$.

Exemple:

-

-

.

Propriétés d'une probabilité conditionnelle

- $\overline{(A/B)} = \overline{A}/B \Longrightarrow P\left(\overline{A}/B\right) = 1 - P(A/B)$
- $P(\Omega/B) = P(B/B) = P(E/B) = 1 \qquad B \subseteq E$

  $\Longrightarrow P(\varnothing/B) = 0 = P(E/B) \qquad B \cap E = \varnothing$
- $P((A \cup B)\ /C) = P(A/C) + P(B/C) - P((A \cap B)\ /C)$

.

3.2 Formule de Probabilité composée et indépendance d'événements

De la formule de la probabilité conditionnelle on déduit que

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B\ /A)$$

et on montre façilment que:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C\ /A \cap B)$$

.

Définition : A et B sont dits *indépendants* si $P(A/B) = P(A)$ (ou $P(B/A) = P(B)$), ce qui veut dire que la réalisation de B n'influe pas sur la réalisation de A. (ou n'apporte aucune information sur la réalisation de A). Par conséquent, *si A et B sont indépendants* on a :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

et si A, B et C sont deux à deux indépendants, alors:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

Exemples

-

-

.

3.3 Formule des probabilités totales et *formule de Bayes*

Définition : On dit que la suite des évènements $B_1, B_2, .., B_n$ forme une *partition de* Ω ou un *système complet d'évènements* si:

$$i)\ B_i \cap B_j = \varnothing \quad i \neq j$$

$$ii) \bigsqcup_{i=1..n} B_i = \Omega$$

.

Formule des probabilités totales

Etant donné $B_1, B_2, .., B_n$ un système complet d'évènements. Alors pour tout événement A on a :

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1..n} P(B_i) \cdot P(A/B_i) \qquad /^* \textit{(formule des probabilités totales)} \\ &= P(B_1) \cdot P(A/B_1) + .. + P(A_n) \cdot P(A/B_n) \end{aligned}$$

.

Exemple

-

-

.

Formule de Bayes (probabilité de la cause)

Comme conséquence de la formule des probabilités totales nous avons, si $B_1, .., B_n$ est un système complet d'évènements et A un événement alors :

$$P(B_{i0}/A) = \frac{P(B_{i0} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_{i0}) \cdot P(A/B_{i0})}{\sum_{i=1..n} P(B_i) \cdot P(A/B_i)}$$

Exemples

-

-