

Université Mostefa Ben Boulaïd - Batna 2
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Statistiques et Analyse des Données

TD 02

Exercice 1 On considère un dé cubique truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note X la variable aléatoire donnée par le numéro de la face du dessus. On suppose que

$$\exists a \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbb{P}(X = k) = ka.$$

1. Déterminer la loi de X , calculer son espérance.
2. On pose $Y = \frac{1}{X}$. Déterminer la loi de Y , et son espérance et variance.

Exercice 2 Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par

x	0	1	2	3	4	5
$p_X(x)$	0.1	0.3	0.4	0.1	0.05	0.05

1. Calculer l'espérance et la variance de X .
2. Déterminer et représenter la fonction de répartition de X .
3. Calculer les probabilités $\mathbb{P}(X < 4)$, $\mathbb{P}(X > 2)$, $\mathbb{P}(3 < X \leq 4.5)$, $\mathbb{P}(2 \leq X < 4)$, $\mathbb{P}(2 < X < 4)$.
4. Soit $Y = 3X - 5$. Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\text{Var}(Y)$.

Exercice 3 On vous propose le jeu suivant. Pour pouvoir jouer, il faut d'abord verser 1DA. On jette deux dés simultanément. Si l'un des dés au moins présente un chiffre impair, on ne gagne rien. Si les dés présentent deux chiffres pairs différents, on gagne 1DA. Enfin, si les dés présentent deux fois le même chiffre pair, on gagne une somme égale à la somme de ces deux chiffres, par exemple on gagne 8DA si on fait un double quatre. Joueriez-vous à ce jeu ?

Exercice 4 L'oral d'un concours comporte au total 100 sujets ; les candidats tirent au sort trois sujets et choisissent alors le sujet traité parmi ces trois sujets. Un candidat se présente en ayant révisé 60 sujets sur les 100. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de sujets révisés parmi les 3 sujets choisis

1. En utilisant la variable aléatoire X , quelle est la probabilité des événements suivants :
 - A : « les trois sujets tirés ont été révisés » ;
 - B : « exactement deux des trois sujets tirés ont été révisés » ;
 - C : « aucun des trois sujets ».
2. Donner la loi de probabilité de X
3. Calculer l'espérance et la variance de X .
4. Déterminer et représenter graphiquement la fonction de répartition de X

Exercice 5 Une urne contient 6 boules blanches et n boules rouges (n est un nombre entier tel que $n \geq 2$) toutes indiscernables au toucher. Un joueur tire au hasard, successivement et sans remise, deux boules de l'urne. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2DA, et pour chaque boule rouge, il perd 3DA. On appelle X la variable aléatoire donnant le gain du joueur.

1. Quelles sont les différentes valeurs que peut prendre X ?
2. Montrer que : $\mathbb{P}(X = -1) = \frac{12n}{(n+6)(n+5)}$.

3. Déterminer la loi de probabilité de X .
4. Montrer que $\mathbb{E}(X) = \frac{-6(n^2 + n - 20)}{(n + 6)(n + 5)}$.
5. Discuter selon la valeur de n de l'intérêt de jouer à ce jeu.

Exercice 6 Une entreprise fabrique des appareils susceptibles de présenter deux types de pannes notées A et B . On admettra que 5% des appareils sont concernés par la panne A , 3% par la panne B et 1% par les deux. On prélève au hasard un appareil dans la production. On note :

- A l'événement : "L'appareil présente la panne A ."
- B l'événement : "L'appareil présente la panne B ."

L'entreprise fabrique un grand nombre d'appareils par semaine. Chaque appareil a un coût de fabrication de 200€. La réparation d'une panne A coûte 60€ à l'entreprise, la réparation d'une panne B coûte 40€ et la réparation des deux pannes coûte 100€. On considère la variable aléatoire X qui, à chaque appareil, associe son prix de revient total (coût de fabrication et coût de la réparation éventuelle).

1. Établir le tableau de la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
2. Calculer l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X . Interpréter.

Exercice 7 Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{4}{3}(1-x)^{1/3}$ si $x \in [0, 1]$ et $f(x) = 0$ sinon.

1. Montrer que f est la densité d'une variable aléatoire X .
2. Déterminer la fonction de répartition de X et la tracer.
3. Calculer l'espérance de X .

Exercice 8 Mêmes questions de l'exercice précédent (Ex.07) pour les fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 1-x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, f_2(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Exercice 9 Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x$ si $x < 0$ et 0 sinon.

1. Montrer que f est une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire, que l'on notera X .
2. Déterminer la fonction de répartition de X .
3. Calculer l'espérance de X .
4. On pose $Y = 2X + 1$.
 - (a) Déterminer la fonction de répartition de Y .
 - (b) Démontrer que Y est une variable aléatoire à densité, et déterminer la densité de Y .
 - (c) Reprendre les mêmes questions avec $Y = X^2$.

Exercice 10 Dans une station-service, la demande hebdomadaire en essence, en milliers de litres, est une variable aléatoire X de densité

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x)^4 & \text{si } x \in]0, 1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer c .
2. Quelle est la fonction de répartition de X ?

3. La station est réapprovisionnée chaque lundi à 20h. Quelle doit être la capacité du réservoir d'essence pour que la probabilité d'épuiser ce réservoir soit inférieure à 10^{-5} ?

Exercice 11 La fonction de densité de X , variable aléatoire représentant la durée de vie en heures d'un certain composant électronique, est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{10}{x^2} & x > 10 \\ 0 & x \leq 10. \end{cases}$$

1. Trouver $\mathbb{P}(X > 20)$.
2. Quelle est la fonction de répartition de X ?
3. Soit Y la variable aléatoire qui décrit le nombre de composants k fonctionnant au moins 15 heures parmi n composants, de la loi de probabilité suivante

$$\mathbb{P}(Y = k) = C_k^n p^k (1-p)^{n-k}, \quad k \leq n$$

avec p est la la probabilité qu'un composant fonctionne au moins 15 heures

- (a) Quelle est la probabilité que parmi 6 composants, au moins 3 d'entre eux fonctionnent au moins 15 heures ?

4. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 12 La quantité de pain (en centaines de kilos) qu'une boulangerie vend en 1 journée est une variable aléatoire X de fonction de densité

$$f(x) = \begin{cases} cx & 0 \leq x \leq 3 \\ c(6-x) & 3 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer la valeur de c .
2. Quelle est la fonction de répartition de X ?
3. Soit A l'évènement : « le nombre de kilos de pain vendus dans une journée est supérieur à 300 kg ». Soit B l'évènement : « le nombre de kilos de pain vendus dans une journée est compris entre 150 et 450 kg ». Les évènements sont-ils indépendants.