Département de Mathématiques
Université Badji-Mokhtar- Annaba

Concours d'entrée en formation doctorale (2019/2020)	
Mathématiques Appliquées - Spécialité: Probabilités et statistique	
Deuxième épreuve	Durée : 2 H

Exercice 1 (5points):

Considérons le système de files d'attente M/M/2 avec rappels.

1. Décrire l'état du système à l'aide d'un processus stochastique, tracer le graphe des transistions.
2. Sous quelle condition le régime est en état stationnaire? Donner les équations d'équilibre statistique.
3. Exprimer ces équations à l'aide des fonctions génératrices.

Exercice 2 (5points):

Soit X une variable aléatoire positive admettant pour fonction de densité

$$f(x;\sigma^2) = \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\frac{x}{\sigma^2} \qquad \forall x \in [0, +\infty[.$$

Soit un $N-$échantillon $\{X_1, ..., X_N\}$ i.i.d. de même loi que X. On suppose que le paramètre σ^2 est inconnu et l'on se propose de l'estimer par la méthode du maximum de vraisemblance.

1. Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\sigma^2}$ du paramètre σ^2 est: $\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N} X_i^2$.
2. On admet que $E(X) = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et $V(X) = \left(\frac{4-\pi}{2}\right)\sigma^2$. En utilisant $V(X)$ et $E(X)$, déterminer $E(X^2)$.
3. Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\sigma^2}$ est sans biais.
4. On admettra que $V(X^2) = 4\sigma^4$. Montrer que $V(\widehat{\sigma^2}) = \frac{\sigma^4}{N}$.
5. Montrer que l'estimateur $\widehat{\sigma^2}$ est un estimateur convergent (au sens de la convergence en probabilité) de σ^2.

6. Calculer la quantité d'information de Fisher, puis déduire l'efficacité de L'estimateur de σ^2.

7. En utilisant le théorème central limite (T.C.L.), déterminer la loi asymptotique de la quantité $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i^2$. En déduire, la loi asymptotique de l'estimateur $\widehat{\sigma^2}$.

Exercice 3 (5 points): 1) Soit le processus $Z_t = \varepsilon_t \varepsilon_{t-1} \cdots \varepsilon_{t-10}$; avec $\varepsilon_t \backsim IIDN(0,1)$

-Montrer que Z_t est un bruit blanc faible mais pas fort.
-Montrer que Z_t^2suit un processus ARMA.
2) Soit le processus AR(1) suivant: $X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$
avec $\varepsilon_t \backsim IID(0,\sigma^2)$ et $\varphi_1 \neq 0$
-Montrer que si $|\varphi_1| \prec 1$, la somme infinie $X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_1^k \varepsilon_{t-k}$ converge presque surement et que c'est l'unique solution stationnaire.
Preciser la fonction d'autocovariance de la solution.

Exercice 4 (5 points): Sur deux groupes de même taille: 9 malades, on expérimente les effets d'un nouveau médicament. On observe les résultats suivants:

Groupe 01	15	18	17	20	21	18	17	15	19
Groupe 02	12	16	17	18	17	15	18	14	16

1. Tester au risque 5% pour la population 02 si la moyenne vaut 16.

2. Tester au risque 5% pour la population 02 si la variance vaut 15.

3. Comparer au risque 5% les moyennes des deux populations.

Solution Concours Doctorat - Annaba 2019 - Epreuve 2

Exercice 2 :

1) Notons $\eta = \sigma^2$, $\eta > 0$.

On a :

$$L(x_1, \dots, x_N; \eta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \eta)$$

et
$$\ell(x_1, \dots, x_N; \eta) = \log L(x_1, \dots, x_n; \eta)$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \log f(x_i; \eta)$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \log \left\{ \frac{x_i}{\eta} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2\eta}\right) \right\}$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \log(x_i) - N \log(\eta) - \frac{1}{2\eta} \sum_{i=1}^{N} x_i^2$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \eta}(x_1, \dots, x_N; \eta) = -\frac{N}{\eta} + \frac{1}{2\eta^2} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\eta} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 = N$$

$$\Leftrightarrow \eta = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{N} x_i^2$$

donc $\hat{\eta} = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{N} x_i^2$ est un point critique de $\ell(x_1, \dots, x_N; \eta)$

De plus on a :
$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \eta^2}(x_1, \dots, x_N; \hat{\eta}) = \frac{N}{\hat{\eta}^2} - \frac{1}{\hat{\eta}^3} \sum_{i=1}^{N} x_i^2$$

or $\sum_{i=1}^{N} x_i^2 = 2N\hat{\eta}$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \ell}{\partial \eta^2}(x_1, \dots, x_N; \hat{\eta}) = \frac{N}{\hat{\eta}^2} - \frac{2N\hat{\eta}}{\hat{\eta}^3} = -\frac{N}{\hat{\eta}^2} < 0$$

donc $\hat{\eta}$ est bien un maximum de $\ell(x_1, \dots, x_N; \eta)$

Donc l'EMV de η est

$$\hat{\eta} = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{N} x_i^2$$

i.e. l'EMV de σ^2 est

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 .$$

2) $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$$\Rightarrow E(X^2) = V(X) + (E(X))^2$$
$$= \left(\frac{4-\pi}{2}\right)\sigma^2 + \frac{\pi}{2}\sigma^2$$
$$= \frac{4-\pi+\pi}{2}\sigma^2 = 2\sigma^2.$$

3) $$E(\widehat{\sigma^2}) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{N} E(X_i^2)$$
$$= \frac{N \times (2\sigma^2)}{2N} = \sigma^2$$

$\Rightarrow \widehat{\sigma^2}$ est sans biais.

4) $$V(\widehat{\sigma^2}) = \frac{1}{4N^2} \sum_{i=1}^{N} V(X_i^2)$$ car les $(X_i)_{1\leq i\leq N}$ sont indépendants

$$= \frac{1}{4N^2} \times N \times (4\sigma^4) = \frac{\sigma^4}{N}.$$

5) Soit $\varepsilon > 0$, d'après l'inégalité de Tchebychev on a :

$$P(|\widehat{\sigma^2} - \sigma^2| > \varepsilon) \leq \frac{E((\widehat{\sigma^2} - \sigma^2)^2)}{\varepsilon^2} = \frac{V(\widehat{\sigma^2})}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^4}{\varepsilon^2 N} \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{N \to +\infty} P(|\widehat{\sigma^2} - \sigma^2| > \varepsilon) = 0$$

$\Rightarrow \widehat{\sigma^2}$ converge en probabilité vers σ^2.

6) $I(\sigma^2) = I(\eta) = -E\left(\frac{\partial^2 \ell}{\partial \eta^2}(x_1, \dots, x_N; \eta)\right)$

$$= -E\left(\frac{N}{\eta^2} - \frac{1}{\eta^3}\sum_{i=1}^{N} X_i^2\right)$$

$$= -\frac{N}{\eta^2} + \frac{1}{\eta^3} \times N \times E(X_1^2)$$

$$= -\frac{N}{\eta^2} + \frac{N}{\eta^3}(2\sigma^2)$$

$$= -\frac{N}{\sigma^4} + \frac{2N\sigma^2}{\sigma^6}$$

$$= -\frac{N}{\sigma^4} + \frac{2N}{\sigma^4}$$

$$= \frac{N}{\sigma^4}.$$

On a : $V(\widehat{\sigma^2}) = \frac{\sigma^4}{N} = \frac{1}{I(\sigma^2)}$ qui est la borne de Rao-Cramer

$\Rightarrow \widehat{\sigma^2}$ est un estimateur efficace.

7) Puisque les $(X_i)_{1 \le i \le N}$ sont iid et $E(X_i^4) < \infty$, le TCL donne :

$$\sqrt{N}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i^2 - E(X^2)\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, V(X^2))$$

i.e. $\sqrt{N}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i^2 - 2\sigma^2\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 4\sigma^4)$

$\Rightarrow \sqrt{N}\left(\frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N} X_i^2 - \sigma^2\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{4\sigma^4}{2^2}\right)$

i.e. $\sqrt{N}(\widehat{\sigma^2} - \sigma^2) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^4).$

Exercice 3 :

1) $Z_t = \varepsilon_t \varepsilon_{t-1} \cdots \varepsilon_{t-10}$

ε_t iid $\mathcal{N}(0,1)$

on a : • $E(Z_t) = E(\varepsilon_t) E(\varepsilon_{t-1}) \dots E(\varepsilon_{t-10}) = 0$ (Par indépendance)

• $E(Z_t^2) = E(\varepsilon_t^2) E(\varepsilon_{t-1}^2) \dots E(\varepsilon_{t-10}^2) = 1 < \infty$ (Par indépendance)

• Pour $s < t$ on a :

$E(Z_t Z_s) = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1} \cdots \varepsilon_{t-10} \varepsilon_s \varepsilon_{s-1} \cdots \varepsilon_{s-10}) = 0$

$= \underbrace{E(\varepsilon_t)}_{0} E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2} \cdots \varepsilon_{t-10} \varepsilon_s \varepsilon_{s-1} \cdots \varepsilon_{s-10})$

(car ε_t est indépendant de $(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-10}, \varepsilon_s, \dots, \varepsilon_{s-10})$

Donc Z_t est un bruit blanc faible

- On remarque que pour $t-10 \leq s < t$: Z_t et Z_s ne sont pas indépendantes (elles contiennent des termes en commun)

pas indépendantes (elles contiennent des termes en commun) un bruit blanc fort.

Donc Z_t n'est pas un bruit blanc fort.

• Soit $h \in \mathbb{Z}$ on a :

$\mathrm{cov}(Z_t^2, Z_{t+h}^2) = E(Z_t^2 Z_{t+h}^2) - \underbrace{E(Z_t^2)}_{1} \underbrace{E(Z_{t+h}^2)}_{1} = E(Z_t^2 Z_{t+h}^2) - 1$

Or : $E(Z_t^2 Z_{t+h}^2) = E(\varepsilon_t^2 \varepsilon_{t-1}^2 \cdots \varepsilon_{t-10}^2 \varepsilon_{t+h}^2 \varepsilon_{t+h-1}^2 \cdots \varepsilon_{t+h-10}^2)$

• si $|h| \leq 10$: Il y a $11-h$ ~~termes communs~~ Pairs identiques dans ce produit, pour ces termes la puissance devient 4, et en utilisant l'indépendance des (ε_t) et le fait que pour une variable aléatoire Y de loi $\mathcal{N}(0,1)$ on a :

$E(Y^2) = 1$ et $E(Y^4) = 3$ (kurtosis de Y)

on déduit que

$$E(Z_t^2 Z_{t+h}^2) = 3^{11-h}$$

• si $|h| > 10$: Il n'y a pas de termes identiques dans le produit ci-dessus et donc par indépendance

$$E(Z_t^2 Z_{t+h}^2) = E(\varepsilon_t^2) E(\varepsilon_{t-1}^2) \dots E(\varepsilon_{t-10}^2) E(\varepsilon_{t+h}^2) \dots E(\varepsilon_{t+h-10}^2)$$
$$= 1.$$

D'où :

$$\operatorname{Cov}(Z_t^2, Z_{t+h}^2) = \begin{cases} 3^{11-h} - 1 & \text{si } |h| \leq 10 \\ 0 & \text{si } |h| > 10. \end{cases}$$

Cette covariance ne dépend pas de t donc Z_t^2 est un processus stationnaire de fonction d'autocovariance

$$\gamma(h) = \begin{cases} 3^{11-h} - 1 & \text{si } |h| \leq 10 \\ 0 & \text{si } |h| > 10. \end{cases}$$

Puisque $\gamma(h)$ s'annule pour $|h| > 10$ on déduit que Z_t^2 est un processus $MA(10)$.

2) $X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$, ε_t iid $(0, \sigma^2)$, $\varphi_1 \neq 0$.

• Supposons que $|\varphi_1| < 1$; on a

$$E\left(\sum_{k=0}^{+\infty} |\varphi_1|^k |\varepsilon_{t-k}|\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} |\varphi_1|^k E|\varepsilon_{t-k}| \quad (TCM)$$

or $E|\varepsilon_{t-k}| \leq \sqrt{E(\varepsilon_{t-k}^2)} = \sigma$ (inégalité de Schwartz)

$\Rightarrow E\left(\sum_{k=0}^{+\infty} |\varphi_1|^k |\varepsilon_{t-k}|\right) \leq \sigma \sum_{k=0}^{+\infty} |\varphi_1|^k < \infty$ car c'est une série géométrique de raison $|\varphi_1| < 1$.

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} |\varphi_1|^k |\varepsilon_{t-k}|$ converge presque sûrement

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_1^k \varepsilon_{t-k}$ converge presque sûrement.

. Montrons que $X_t = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_1^k \varepsilon_{t-k}$ est l'unique solution stationnaire de l'équation $X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$.

Soit Y_t une autre solution stationnaire donc :

$$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t.$$

$$\Rightarrow Y_t - \varphi_1 Y_{t-1} = \varepsilon_t.$$

$$\Rightarrow \Phi(B) Y_t = \varepsilon_t \dots (*)$$ et B est l'opérateur retard $(BX_t = X_{t-1})$.

avec : $\Phi(z) = 1 - \varphi_1 z$

$\Phi(z) = 0 \Leftrightarrow 1 - \varphi_1 z = 0 \Leftrightarrow \varphi_1 z = 1 \Leftrightarrow z = \frac{1}{\varphi_1}$

et $|z| = \left|\frac{1}{\varphi_1}\right| > 1$.

Donc : $\forall z \in \mathbb{C} / \ |z| \leq 1$ on a : $\Phi(z) \neq 0$

Donc : $\frac{1}{\Phi(z)}$ est développable en série entière au voisinage du disque de centre 0 et de rayon 1 et on a :

$$\forall z \in \mathbb{C} / \ |z| \leq 1 : \ \frac{1}{\Phi(z)} = \frac{1}{1-\varphi_1 z} = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_1^k z^k$$

De plus l'opérateur $\Phi(B)$ est inversible et :

$$\Phi^{-1}(B) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_1^k B^k$$

En appliquant $\Phi^{-1}(B)$ sur l'équation $(*)$ on obtient

$$\phi^{-1}(B)\,\phi(B)Y_t = \phi^{-1}(B)\,\varepsilon_t$$

$$\Rightarrow Y_t = \phi^{-1}(B)\,\varepsilon_t$$

$$Y_t = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_1^k B^k \varepsilon_t$$

$$Y_t = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_1^k \varepsilon_{t-k} = X_t.$$

d'où l'unicité de la solution.

Donc: $X_t = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_1^k \varepsilon_{t-k}$ (X_t est causal).

. Notons γ_X la fonc d'autocovariance de X_t:

$$\gamma_X(h) = cov(X_t, X_{t+h}) = E(X_t X_{t+h}) - E(X_t)E(X_{t+h})$$

D'abord calculons $E(X_t)$:

$$E(X_t) = E\left(\lim_{m\to+\infty} \sum_{k=0}^{m} \varphi_1^k \varepsilon_{t-k}\right).$$

et comme $\left|\sum_{k=0}^{m} \varphi_1^k \varepsilon_{t-k}\right| \leq \sum_{k=0}^{m} |\varphi_1|^k |\varepsilon_{t-k}| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |\varphi_1|^k |\varepsilon_{t-k}|$

et $E\left(\sum_{k=0}^{+\infty} |\varphi_1|^k |\varepsilon_{t-k}|\right) < \infty$ (déjà vu)

le TCD donne:

$$E(X_t) = \lim_{m\to+\infty} E\left(\sum_{k=0}^{m} \varphi_1^k \varepsilon_{t-k}\right) = \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=0}^{m} \varphi_1^k E(\varepsilon_{t-k}) = 0. \quad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

Donc:

$$\gamma_X(h) = E(X_t X_{t+h})$$

$$= E\left(\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_1^j \varepsilon_{t-j} \varphi_1^k \varepsilon_{t+h-k}\right)$$

$$= E\left(\lim_{\substack{m\to+\infty \\ m\to+\infty}} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{m} \varphi_1^{j+k} \varepsilon_{t-j} \varepsilon_{t+h-k}\right)$$

et comme:

$$\left|\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m} \varphi_1^{j+k}\, \varepsilon_{t-j}\cdot\varepsilon_{t+h-k}\right|$$

$$\cancel{\leq \left(\sum_{j=0}^{m} |\varphi_1|^{j}|\varepsilon_{t-j}|\right)\left(\sum_{k=0}^{m} |\varphi_1|^{k}|\varepsilon_{t+h-k}|\right)}$$

$$\leq \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m} |\varphi_1|^{j+k}\,|\varepsilon_{t-j}\cdot\varepsilon_{t+h-k}|$$

$$\leq \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} |\varphi_1|^{j+k}\,|\varepsilon_{t-j}\cdot\varepsilon_{t+h-k}|$$

et $E\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} |\varphi_1|^{j+k}\,|\varepsilon_{t-j}\cdot\varepsilon_{t+h-k}|\right)$ (TCM)

$$= \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} |\varphi_1|^{j+k}\, E|\varepsilon_{t-j}\cdot\varepsilon_{t+h-k}|$$

$$\leq \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} |\varphi_1|^{j+k}\sqrt{E(\varepsilon_{t-j}^2)\,E(\varepsilon_{t+h-k}^2)}$$

$$= \sigma^2\left(\sum_{j=0}^{+\infty}|\varphi_1|^{j}\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty}|\varphi_1|^{k}\right) < \infty \quad \text{car } |\varphi_1|<1.$$

Donc le TCD donne:

$$\gamma_X(h) = \lim_{\substack{n\to+\infty\\ m\to+\infty}} \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m} \varphi_1^{j+k}\, E(\varepsilon_{t-j}\cdot\varepsilon_{t+h-k}) \ \ldots (**)$$

or $E(\varepsilon_{t-j}\,\varepsilon_{t+h-k}) = \begin{cases}\sigma^2 & \text{si } t-j=t+h-k \Leftrightarrow k=j+h\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$

on déduit que la limite dans (**) existe et égale:

$$\gamma_X(h) = \sigma^2\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_1^{j+k}\, 1_{\{k=j+h\}}$$

$$= \sigma^2\sum_{j=0}^{+\infty}\varphi_1^{2j+h} = \sigma^2\varphi_1^{h}\sum_{j=0}^{+\infty}\varphi_1^{2j} = \frac{\varphi_1^{h}\sigma^2}{1-\varphi_1^2} \quad (\text{car } \varphi_1^2<1) \text{ si } h\geq 0.$$

si $h<0$ on a: $\gamma_X(h)=\gamma_X(-h)$ $(-h>0)$

(8) Donc $\forall h\in\mathbb{Z}$: $\gamma_X(h) = \dfrac{\varphi_1^{|h|}\sigma^2}{1-\varphi_1^2}$, $\forall h\in\mathbb{Z}$.

Exercice 4:

1)- En supposant la normalité des populations, on applique le test de Student pour tester l'hypothèse

$\mathcal{H}_0 : m = 16$ contre $\mathcal{H}_1 : m \neq 16$.

La statistique du test est donnée par

$$T = \sqrt{n}\left(\frac{\bar{X} - 16}{\hat{\sigma}_n}\right) \qquad (T \sim St(n-1) \text{ sous } \mathcal{H}_0).$$

où $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{143}{9}$, $n = 9$.

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{139}{36}$$

donc: $T = 3 \times \left(\frac{\frac{143}{9} - 16}{\sqrt{\frac{139}{36}}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{139}}$

La région de rejet est donnée par $R_c = \{ |T| > t_{1-\alpha/2} \}$

ici $\alpha = 0{,}05$

la table de la loi $St(n-1)$ donne

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2{,}306.$$

et on a: $|T| = \frac{2}{\sqrt{139}} \simeq 0{,}170 < t_{1-\alpha/2}$

donc on accepte que $m = 16$ au risque de 5%.

2) Ici T devient

$$T = \sqrt{n}\left(\frac{\bar{X} - 15}{\hat{\sigma}_n}\right) = \frac{16}{\sqrt{139}} \simeq 1{,}357 < t_{1-\alpha/2}$$

donc on accepte que $m = 15$ au risque de 5%.

3) Notons X ~~représente~~ la variable d'intérêt dans la 2ᵉ population

et Y la variable d'intérêt dans la 1ère population

et posons $Z = Y - X$

les valeurs de Z sont donc,

3	2	0	4	3	-1	1	3

on va appliquer le test de Student pour tester si la moyenne de Z est nulle. (il est applicable sous l'hypothèse d'indépendance de X et Y).

Ici la statistique de test est donnée par :

$$T = \sqrt{n}\left(\frac{\bar{Z} - 0}{\hat{\sigma}_n}\right)$$

où $\bar{Z} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{n} z_i = \frac{17}{9}$

$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^2 = \frac{1403}{648}$

donc $T = 3 \times \frac{\frac{17}{9}}{\sqrt{\frac{1403}{648}}} = \frac{17}{3} \times \sqrt{\frac{648}{1403}} \simeq 3,851$

$|T| = 3,851 > q_{1-\alpha/2}$

Donc on rejette l'hypothèse nulle (d'égalité des moyennes) au risque de 5%.

~~i.e. on décide~~