Fiabilité

Assia Chadli
Université Badji Mokhtar Annaba

Cours Master 1 : Actuariat & prob-stat. (Semestre 2)

Chapitre 1 : Généralités et Définitions

Table des matières

Chapitre 1

Généralités et définitions de la fiabilité

La fiabilité est l'une des composantes essentielles de la qualité d'un produit et elle est retenue comme critère fondamental dés le stade de la conception.
La fiabilité est la caractéristique d'un dispositif exprimé par la probabilité que ce dispositif accomplisse une fonction requise dans des conditions d'utilisations et pour une période de temps déterminée.

Définition 1 *La fiabilité est l'aptitude d'un système ou d'un élément à accomplir une fonction*

1.1 Fonction de fiabilité

Admettons qu à l'instant $t = 0$; l'élément ou le système commence à fonctionner et qu'à la date $(t = w)$; il se produise une panne. La variable aléatoire W est appelée "durée de vie" de l'élément.

$$F(t) = P(W \leq t)$$

est la fonction de répartition (f.d.r.) de la variable aléatoire (v.a.) W; c est la probabilité de panne dans l'intervalle temps $(0, t)$.

On admet que la v.a. W est une v.a. à densité $f(x)$ à valeurs dans IR^{+}.

Définition 2 *On appelle fonction de fiabilité la probabilité de bon fonctionnement dans* $(0, t)$

$$R(t) = 1 - F(t) = P(W \geq t) = \int_t^{\infty} f(x)\, dx$$

1.2 Moyenne du temps de bon fonctionnement $(MTBF)$

La $MTBF$ est définie pardonnée durant une période déterminée dans des conditions spécifiques d'exploitation

$$T_0 = E(W) = \int_0^{\infty} x f(x)\, dx = \int_0^{\infty} R(t)\, dt$$

1.3 Taux de défaillance (ou risque de panne)

Soit l'évenement $A_{t_i, t_j} = \{$l'élément fonctionne sans défaillance dans l'intervalle temps $(t_i, t_j)\}$,la probabilité pour que l'élément fonctionne sans panne dans $(t, t+h)$ sachant qu'il a fonctionné sans panne dans $(0, t)$ est :

$$R(t, t+h) = P(A_{t,t+h} / A_{0,t}) = \frac{P(A_{t,t+h} \cap A_{0,t})}{P(A_{0,t})} = \frac{P(A_{0,t+h})}{P(A_{0,t})} = \frac{R(t+h)}{R(t)}.$$

La probabilité de panne dans $(t, t+h)$ est donc :

$$1 - R(t, t+h) = F(t, t+h) = \frac{R(t) - R(t, t+h)}{R(t)}$$

Définition 3 *On appelle taux de panne ; la fonction*

$$r(t) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{F(t, t+h)}{h} \right) = \lim_{h \to 0} \frac{R(t) - R(t, t+h)}{R(t)\, h} = -\frac{R'(t)}{R(t)} \qquad (1)$$

De l'expression 1, on peut déduire à partir du taux de pane la fonction de fiabilité ; il est aisé de constater que :

$$R(t) = \exp\left\{ -\int_0^{t} r(x)\, dx \right\}$$

Définition 4 *On appelle fonction de hasard; la fonction définie par*

$$H(x) = \int_0^x r(t)\,dt$$

Parfois, la connaissance de la MTBF ne suffit pas, c est pourquoi il est souvent nécessaire d'avoir une idée sur la dispersion des valeurs de la durée de vie autour de T_0.

$$Var(W) = E(W - T_0)^2 = E\left(W^2\right) - E(W)^2$$

1.3.1 Autres coefficients de fiabilité

Définition 5 ***La disponibilité*** *ou coefficient d'aptitude (pointwise availability)* $D(t)$ *est la probabilité pour que le systhème soit capable d'accomplir correctement ses taches loesqu'il est sollicité, c est la probabilité de bon fonctionnement à la date t.*

Définition 6 ***La maintenabilité*** $M(t)$ *est la probabilité de localiser et de réparer les éléments défaillants; c est la probabilité que le système fonctionne à l'instant t sachant qu'il était en panne à tout instant* $t' \in (0, t)$.

Définition 7 ***La sécurité*** $S(t)$ *est la probabilité d'éviterles évenements catastrophiques pour la mission considérée; c'est à dire la probabilité pour qu'une défaillance dont les effets sont sont catastrophiques ne survienne pas.*

Définition 8 ***La sureté*** *peut être caractérisée par le vecteur*

$$\hat{S}(t) = \{R(t), D(t), M(t), S(t)\}.$$

Remarque 9 *Il est évident que ces critères sont dépendants*

Remarque 10 *La quantité* T_0 *est appelée parfois* $MTFF$ *(mean time first failure).*

Chapitre 2

Méthodes d'estimation des coefficients de fiabilité

2.1 Méthodes empiriques

Ce cours a été traité en classe (à compléter ultérieurement)

2.1.1 Estimation de la fonction de fiabilité

Supposons que nous désirons déterminer la valeur de $R(t)$ au point $(t = t_0)$; c'est à dire la probabilité de bon fonctionnement dans $(0, t_0)$. L'idée consiste à soumettre N éléments identiques à un test de survie.

2.2 Méthode du maximum de vraisemblance

Pour un modèle donné, on estime les paramètres du modèle par cette approche, ensuite, on remplace les estimateurs obtenus dans l'expression de la fonction de fiabilité et dans l'expression du taux de panne ou du temps de bon fonctionnement. On obtient alors les estimateurs des coefficients de fiabilité.

Soit $X_1, X_2, ..., X_n$, n observations indépendantes et de même loi (cas des données complètes), la fonction de maximum de vraisemblance est calculée comme suit :

$$L(\theta; x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta)$$

Pour n quelconque, il est logique de dire que la valeur la plus vraisemblance est la valeur pour laquelle la probabilité d'observer $x_1, x_2, ..., x_n$ est la plus forte possible. Cela revient à faire comme si c'était l'éventualité la plus probable qui s'était produite au cours de l'expérience.

L'estimateur de maximum de vraisemblance de θ est la valeur $\widehat{\theta}_n$ de θ qui rend maximale la fonction de vraisemblance $L(\theta; x_1, ..., x_n)$
L'estimateur de maximum de vraisemblance (EMV) de θ est la variable aléatoire correspondante.

Donc $\widehat{\theta}_n$ sera en général calculé en maximisant la log-vraisemblance

$$\widehat{\theta}_n = argmax_\theta L(\theta; x_1, ..., x_n).$$

Quand $\theta = (\theta_1, ..., \theta_d) \in R^d$ et que toutes les dérivées partielles ci-dessus existent, $\widehat{\theta}_n$ est la solution du système d'équations appelées équations de vraisemblance :

$$\forall j \in \{1, ..., d\}, \frac{\partial}{\partial \theta_j} lnL(\theta; x_1, ..., x_n) = 0$$

A priori, une solution de ce système d'équations pourrait être un minimum de la vraisemblance. Mais on peut montrer que la nature d'une fonction de vraisemblance fait que c'est bien un maximum que l'on obtient. Il est fréquent que le système des équations de vraisemblance n'ait pas de solution explicite. Dans ce cas, on le résout par des méthodes numériques, comme la méthode de Newton-Raphson. En R, la maximisation numérique peut se faire à l'aide des commandes **optim** et **BBsolve**...
Lorsqu'on a des données censurées, la fonction de vraisemblance est calculée à l'aide de la formule suivante :

$$L(\theta; x_1, ..., x_n) = \frac{n!}{(n-m)!} \prod_{i=1}^{m} f(x_i)(1 - F(x_m))^{n-m}.$$

2.3 Méthode Bayesienne

On peut se référer à l'excellent ouvrage de C. Robert [] concernant l'analyse statistique Bayesienne. Cependant, nous allons définir quelques éléments importants utilisés dans ce cours.

2.3.1 Quelques définitions

L'ensemble des observations est noté x. avec $x = (x_1, ..., x_n)$; autrement dit, on dispose d'un échantillon de taille n. Le cadre statistique étant celui de la statistique inférentielle, les observations x_i sont donc considérées comme des réalisations de variables aléatoires, notées X_i.

Dans cette approche, le paramètre scalaire ou vectoriel est non seulement supposé inconnu mais il est aléatoire et donc possédant une distribution appelée "loi a priori".

Définition 11 *On entend par information a priori sur le paramètre θ toute information disponoble sur θ en dehors de celle apportée par les observations*

Définition 12 *L'information a priori sur θ est entachée d'incertitude (si ce n'était pas le cas, le paramètre θ serait connu avec certitude et on n'aurait pas à l'estimer !). Il est naturel de modéliser cette information a priori au travers d'une loi de probabilité, appelée loi a priori. Sa densité est notée $\pi(\theta)$.*

Définition 13 *La loi a posteriori : C'est la loi conditionnelle de θ sachant x. Sa densité est notée $\pi(\theta|x)$.En vertu de la formule de Bayes, on a :*

$$\pi(\theta/x) = \frac{f(x/\theta)\pi(\theta)}{\int_\Theta f(x/\theta)\pi(\theta)d\theta}$$

Proposition 14 *L'estimateur de Bayes δ^π associé à la distribution a priori π et avec la perte quadratique, est donné par l'ésperance a posteriori :*

$$\delta^\pi = E^\pi[\theta/x] = \int_\Theta \theta\pi(\theta/x)d\theta = \frac{\int_\theta \theta f(x/\theta)\pi(\theta)d\theta}{\int_\theta f(x/\theta)\pi(\theta)d\theta} = \delta^\pi(x)$$

2.3.2 Estimation des caractéristiques de fiabilité par l'approche

Bayesienne

Estimation de la fonction de fiabilité

Soit $R(t)$, la fonction de fiabilité d'un modèle donné ; l'estimateur Bayesien $R_B(t)$ de $R(t)$ sous une fonction de perte quadratique et avec une loi a priori $\pi(\theta)$ sur θ est :

$$R_B(t) = \int_\Theta R(t)\,\pi(\theta/x)d\theta$$

Estimation du taux de panne

Soit $r(t)$, le taux de panne d'un modèle donné ; l'estimateur Bayesien $r_B(t)$ de $r(t)$ sous une fonction de perte quadratique et avec une loi a priori $\pi(\theta)$ sur θ est :

$$r_B(t) = \int_\Theta r(t)\,\pi(\theta/x)d\theta$$

Estimation de la MTBF

$$T_{0B} = \int_\Theta T_0\pi(\theta/x)d\theta$$