Devoir de Maison n° 2

« Décomposition de Doob »

But : Démonstration du Thm de décomp. de Doob

1. Processus croissant :

Définition : Une suite de v.a. $(Z_n)_{n\geq 1}$ est dite **processus croissant** si :

① $Z_1 = 0$ p.s. et $Z_n \leq Z_{n+1}$ p.s $\forall n \geq 1$;

② $\mathbb{E} Z_n < \infty$ $\forall n \geq 1$.

(a) Montrer que : $Z_n = n-1$, $n \geq 1$ est un processus croissant.

(b) X : v.a. positive et intégrable, Montrer que : $Z_n = (n-1)X$, $n \geq 1$ est un processus croissant.

(c) $Z_n \sim N(0, n-1)$, $n \geq 1$ et $Z_1, Z_2, \dots$ sont indép.

– Montrer que $(Z_n)_{n\geq 1}$ n'est pas un processus croissant.

(**Indication** : M.q. $\mathbb{P}(Z_n \leq Z_{n+1}) \neq 1$)

2. Décomposition d'une sous-martingale :

Théorème (de décomposition de Doob)

Toute sous-martingale $(X_n)_{n\geq 1}$ (p.r.p. à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$) peut être écrite d'une manière unique comme :

$$X_n = Y_n + Z_n,$$ où $(Y_n)_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$-martingale et $(Z_n)_{n\geq 0}$ est un processus prévisible croissant tel que : $Z_1 = 0$.

Posons : $\begin{cases} Y_1 := X_1 \,; \\ Y_n := X_1 + \sum_{i=2}^{n} \left[X_i - \mathbb{E}(X_i/\mathcal{F}_{i-1})\right], \end{cases}$ $n \geq 2$.

(a) Montrer que $(Y_n)_{n\geq 1}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$-mart.

(b) Soit $Z_n := X_n - Y_n$.

(i) Vérifier que $Z_1 = 0$.

(ii) Exprimer $Z_{n+1} - Z_n$ en fonction de X_n, X_{n+1} et $\mathcal{F}_n$.

(iii) En déduire que $(Z_n)_{n\geq 1}$ est croissant.

(iv) En déduire de (ii) l'expression de Z_n en fct. de $X_1, X_2, \ldots, X_n, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_{n-1}$.

(v) Montrer que $(Z_n)_{n\geq 1}$ est prévisible.

(c) L'unicité de la décomposition $X_n = Y_n + Z_n$.

- Montrer que la décomposition est unique.
(Indication : Raisonner par absurde ; c.à.d. supposer qu'il existe 2 décompositions :

$$X_n = Y_n + Z_n$$
$$X_n = Y_n' + Z_n'$$

puis utiliser l'expression dans b.(ii) pour contredire l'hypothèse).

(d) Application : "Crochet d'une martingale"

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ - martingale ; tq $X_0 = 0$ et $\mathbb{E}X_n^2 < \infty$ pour tout n.

(i) Montrer que $(X_n^2)_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ - sous-mart.

(ii) Donner la décomposition de Doob de X_n^2.

c.à.d. écrire $X_n^2 = Y_n + Z_n$

<u>avec</u> : $(Y_n)_{n\geq 0}$ – mart. et $(Z_n)_{n\geq 0}$: croissant prévisible.

(<u>Indication</u> : il suffit d'écrire Z_n en fct de

$X_1, X_2, \ldots, X_n, \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_{n-1}$ (voir (b).ii)).

(iii) Posons : $\langle X \rangle_n := Z_n$: le crochet

de la martingale $(X_n)_{n\geq 0}$.

- Montrer que pour tout $n \geq 1$, la v.a.

$\Delta \langle X \rangle_n$ $(\langle X \rangle_n - \langle X \rangle_{n-1})$ est (une version

de) la variance conditionnelle de X_n sachant $\mathcal{F}_{n-1}$.

(<u>Indication</u> : $Var(X/\mathcal{G}) = \mathbb{E}\left\{\left[X - \mathbb{E}(X/\mathcal{G})\right]/\mathcal{G}\right\}$)

(iv) <u>Cas particulier</u> : si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une marche

aléatoire symétrique simple sur $\mathbb{Z}$; $\begin{cases} \mathbb{P}\text{[redacted]}_n = \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1 \\ X_n = \text{[redacted]}_k, \; X_0 = 0. \end{cases}$

- Montrer que $(X_n^2 - n)_{n\geq 0}$ est une <u>martingale</u>.

(<u>Indication</u> : Montrer d'abord que $\langle X \rangle_n = n$).