Faculté des Mathématiques **USTHB** | **Année 2012/2013**
Master 1 ISMTID | 19/06/2013
Module: **Processus Stochastiques 2** | **Durée: 1h 30m**

Rattrapage

Exercice 1 *A/* ***(4 pts)***
1/ T_1 est un temps d'arrêt. Il peut pas deviner le future. Il connait la mise initiale et il peut savoir à n'importe quel instant si sa fortune est égale à la mise initiale de son adversaire.
2/ T_2 est un temps d'arrêt. Sachant l'information disponible il peut savoir si l'indice boursier à chuté de 1%.
3/ T_3 n'est pas un temps d'arrêt (on ne peut pas savoir dans le future si le processus peut entrer dans l'ensemble $]0;22[$).
T_4 est un temps d'arrêt (temps d'entrée d'un processus adapté dans un ensemble $\{0\}$).
B/ 1/ ***(1 pts)*** *$(Y_n)_{n\geq 0}$ est une $\mathcal{G}_n$-martingale. On a*

$$\begin{aligned} E(Y_{n+1} \mid \mathcal{G}_n) &= E(E(Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \mid \mathcal{G}_n) \ \ (\textit{car}\ \mathcal{G}_n \subseteq \mathcal{F}_n) \\ &= E(Y_n \mid \mathcal{G}_n) \ \ (\textit{car}\ \ (Y_n)_{n\geq 0}\ \ \textit{est une}\ \mathcal{F}_n - \textit{martingale}) \\ &= Y_n\ \ (\textit{car}\ Y_n\ \textit{est}\ \mathcal{G}_n - \textit{mesurable}) \end{aligned}$$

2/ ***(1 pts)***

$$\begin{aligned} Var(Y_n \mid \mathcal{F}_n) &= E\left[(Y_n - E(Y_n \mid \mathcal{F}_n))^2 \mid \mathcal{F}_n\right] \\ &= (Y_n - E(Y_n \mid \mathcal{F}_n))\, E\left[(Y_n - E(Y_n \mid \mathcal{F}_n)) \mid \mathcal{F}_n\right] \\ &\quad \textit{car}\ Y_n\ \textit{et}\ E(Y_n \mid \mathcal{F}_n)\ \ \textit{sont}\ \mathcal{F}_n - \textit{mesurables} \\ &= (Y_n - E(Y_n \mid \mathcal{F}_n))\left[(E(Y_n \mid \mathcal{F}_n) - E(Y_n \mid \mathcal{F}_n))\right] = 0\ \textit{p.s.} \end{aligned}$$

Exercice 2 ***(6 pts) 1/*** *On a $|X_n| \leq a + |Z_1| + ... + |Z_n| = a + n$, donc $E|X_n| \leq a + n$ ainsi X_n est intégrable. Aussi, X_n est fonction L'évènement $A = \cap_{n\geq 1}\{a < S_n < b\}$ signifie que pour tout $n \geq 1$, $a < S_n < b$, ainsi il n'existera pas un $n \geq 1$ tel que $S_n \notin [a,b]$, donc T sera nécessairement infini, et donc $A = \{T = +\infty\}$.*
2/ *D'après la question 1/, $\{T < +\infty\} = A^c$. T est un temps d'arrêt, en effet, car T est le temps d'entrée dans l'ensemble $]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$ donc T est un temps d'arrêt (voir exemple en cours sur le temps d'entrée dans un ensemble). Pour montrer que $T < +\infty$ p.s., c'est à dire $P(T < +\infty) = 1$, montrons que $P(A) = 0$ (car $P\{T < +\infty\} = P(A^c) = 1 - P(A)$). On a $A = \cap_{n\geq 1}\{a < S_n < b\}$ donc $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq P(A) \leq P(a < S_n < b)$, et on a*

$$P(a < S_n < b) = P\left(\frac{a - nm}{\sqrt{n}\sigma} < \frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} < \frac{b - nm}{\sqrt{n}\sigma}\right),$$

avec $m = E(X_1)$ et $\sigma = \sqrt{Var(X_1)}$. Comme $0 \leq p, q, r \leq 1$, X_1 est non-constante et donc $\sigma \neq 0$. D'après le théorème central limite

$$\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Notons $\alpha_n = \frac{a-nm}{\sqrt{n}\sigma}$ *et* $\beta_n = \frac{b-nm}{\sqrt{n}\sigma}$. *On a:*

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim_{n\to+\infty} \beta_n = \begin{cases} 0 & si \quad m = 0 \\ -\infty & si \quad m > 0 \\ +\infty & si \quad m < 0. \end{cases}$$

Alors $P\left(\alpha_n < \frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} < \beta_n\right) \to 0$ *quand* $n \to +\infty$. *Par suite* $P(A) = 0$ *et donc* $P(A^c) = P\{T < +\infty\} = 1$.

Exercice 3 *Deux joueurs jouent à un jeu équitable. On note* Z_n *le résultat de la* $n^{ième}$ *partie pour le premier joueur. Les* Z_n *sont indépendantes et:* $P(Z_n = +1) = P(Z_n = -1) = 1/2$. *On note* $\mathcal{F}_n$ *la filtration engendrée par les résultats des* n *premières parties, et* X_n *la fortune du premier joueur après la* $n^{ième}$ *partie. Sa fortune initiale est fixée:* $X_0 = a$. *pour tout* $n \geq 1$, *on a donc:* $X_n = a + Z_1 + ... + Z_n$. *Le second joueur a une fortune initiale fixée à* b *et la partie se termine par la ruine de l'un des deux joueurs. On définit donc:* $T = \min\{n,\ X_n = 0 \ ou\ X_n = a + b\}$.

1/ *Montrer que* $(X_n)_n$ *est une martingale et que* T *est un temps d'arrêt, relativement à* $(\mathcal{F}_n)$.

2/ *Montrer que:* $P(T > n) \leq P(0 < X_n < a + b)$. *Déduire du théorème de la limite centrale que* $P(T > n)$ *tend vers* 0, *puis que* T *est fini.*

3/ *Déduire du théorème d'arrêt que:* $P(X_T = 0) = \dfrac{b}{a+b}$ *et* $P(X_T = a+b) = \dfrac{a}{a+b}$.

Exercice 4 ***(8 pts)*** *Soit* $W(t)$ *un mouvement brownien avec la filtration* $\mathcal{F}_t = \sigma(W(s), s \leq t)$.

1/ *Déterminer* $E\left[(W(t) - W(s))^4\right]$, *pour* $s < t$.

2/ *Montrer que* $W(t)^2 - t$ *est une martingale relativement à la filtration naturelle* $\mathcal{F}_t$ *de* $W(t)$.

3/ *Montrer que* $W(t)^3 - 3tW(t)$ *est une martingale relativement à la filtration naturelle* $\mathcal{F}_t$ *de* $W(t)$.

4/ *Soit* $(Y_k)_{k\geq 0}$ *une suite de variables aléatoire de carrés intégrables et* $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$ *tels que* Y_k *est* $\mathcal{F}_{t_k}$ *mesurable. Soit*

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} Y_k \ 1_{[t_k, t_{k+1}[}(t).$$

4.1/ *Déterminer l'integrale de Itô* $I_T(f) = \int_0^T f(t)dW(t)$ *de* f *sur l'intervalle de temps* $[0, T]$

4.2/ *Calculer* $E\left[\int_0^T f(t)dW(t)\right]$.