Calcul d'Itô

Présenté par : M. HAMMAD

1.1 Calcul d'Itô

Nous allons introduire maintenant un calcul différentiel sur ces intégrales stochastiques. On appelle ce calcul "Calcul d'Itô" et l'outil essentiel en est "la formule d'Itô" qui donne, en particulier la façon de différencier $t \mapsto f(B_t)$ si f est deux fois continûement différentiable.

Exemple 1.1.1.

L'exemple suivant montre que le prolongement du calcul différentiel usuel est voué à l'échec.

Supposons que l'on veuille différencier $t \mapsto B_t^2$ *et l'exprimer en fonction de* dB_t.

Pour une fonction $f(t)$ *différentiable nulle en 0, on a :*

$$f^2(t) = 2\int_0^t f(s)df(s).$$

Dans le cas du mouvement Brownien et de l'intégrale stochastique on ne peut avoir une formule du même type, c.a.d $B_t^2 = 2\int_0^t B_s dB_s$, *d'après ce qui précède,* $\int_0^t B_s dB_s$ *est une martingale(car* $\mathbb{E}\int_0^t B_s^2 ds < +\infty$ *), nulle en zéro.*

Si elle était égale à B_t^2 *elle serait positive, et une martingale nulle en zéro ne peut être positive que si elle est nulle.*

1.1.1 Processus d'Itô

Commençons par préciser la définition de la classe de processus pour la quelles on peut introduire la formule d'Itô.

Définition 1.1.1.

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité filtré,* $(B_t)_{t\geq 0}$ *un* $\mathcal{F}_t-$*mouvement Brownien.*

On appelle processus d'Itô, un processus $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *tel que :*

$$\mathbb{P}\, p.s.,\ \forall t \leq T,\ Y_t = Y_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s, \tag{1.1}$$

avec :

- Y_0 *est* $\mathcal{F}_0-$*mesurable.*
- $(K_t)_{0\leq t\leq T}$ *et* $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ *sont deux processus adaptés à* $\mathcal{F}_t$.
- $\int_0^T |K_s| ds < +\infty$ $\mathbb{P}\, p.s.$ *et* $\int_0^T |H_s|^2 ds < +\infty$ $\mathbb{P}\, p.s.$

Le résultat suivant, montre l'unicité de la décomposition (1.1) précédente.

Proposition 1.1.1.
Soit $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ *est une martingale continue telle que :*

$$M_t = \int_0^t K_s ds, \text{ avec } \mathbb{P}\, p.s., \int_0^T |K_s| ds < +\infty,$$

alors :

$$\mathbb{P}\, p.s. \forall t \leq T, M_t = 0.$$

Ceci entraîne que :

Cette décomposition d'un processus d'Itô est unique. Ce que signifie que si :

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s = Y_0^{'} + \int_0^t K_s^{'} ds + \int_0^t H_s^{'} dB_s$$

alors :

$$Y_0 = Y_0^{'} \;\; d\mathbb{P}\, p.s. \; H_s = H_s^{'} \;\; ds \times d\mathbb{P}\, p.p. \; K_s = K_s^{'} \;\; ds \times d\mathbb{P}\, p.p..$$

Si $(Y_t)_{0\leq t\leq T}$ est une martingale de la forme $Y_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s$, alors $K_t = 0 \; dt \times d\mathbb{P}\; p.p.$.

1.1.2 Formule d'Itô

La formule d'Itô prend la forme suivante (nous l'admettons sans démonstration)

Théorème 1.1.1. ***(Formule d'Itô)***
Soit $(Y_t)_{0\leq t\leq T}$ *un processus d'Itô :*

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s,$$

et f *une fonction deux fois différentiable, on a :*

$$f(Y_t) = f(Y_0) + \int_0^t f^{'}(Y_s) dY_s + \frac{1}{2}\int_0^t f^{''}(Y_s) d\langle Y, Y\rangle_s \tag{1.2}$$

où, par définition :

$$\langle Y, Y\rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds,$$

et

$$\int_0^t f^{'}(Y_s) dY_s = \int_0^t f^{'}(Y_s) K_s ds + \int_0^t f^{'}(Y_s) H_s dB_s.$$

De même si $(t, y) \to f(t, y)$ *est une fonction deux fois différentiable en* y *et une fois différentiable en* t*, ces dérivées étant continues en* (t, y) *(on dit dans ce cas que* f *est de classe* $C^{1,2}$*), on a :*

$$f(t, Y_t) = f(0, Y_0) + \int_0^t f_s^{'}(s, Y_s) ds + \int_0^t f_x^{'}(s, Y_s) dY_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}^{''}(s, Y_s) d\langle Y, Y\rangle_s. \tag{1.3}$$

1.1.3 Exemple d'utilisation de la formule d'Itô

Traitons un exemple élémentaire. Si $Y_t = B_t$ et $f(y) = y^2$, alors Y_t défini bien un processus d'Itô car : $K_s = 0$ et $H_s = 1$, et $\begin{cases} f'(Y_s) = 2Y_s \\ f''(Y_s) = 2. \end{cases}$

D'après la formule d'Itô et comme $Y_t = B_t$, on a :

$$B_t^2 = 2\int_0^t B_s dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2ds$$

car

$$\langle Y, Y\rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds = \int_0^t ds = t,$$

d'où

$$d\langle Y, Y\rangle_s = ds,$$

donc

$$B_t^2 - t = 2\int_0^t B_s dB_s$$

Comme $\mathbb{E}\left(\int_0^t B_s^2 ds\right) < +\infty$, on retrouve le fait que $B_t^2 - t$ est une martingale.

1.1.4 Formule d'Itô multidimensionnelle

La formule d'Itô admet une généralisation aux cas où la fonction f dépend de $n-$processus d'Itô et lorsque chaque processus d'Itô s'écrit en fonction de plusieurs mouvements Brownien.

Définition 1.1.2.
On appelle $\mathcal{F}_t-$mouvement Brownien $p-$dimensionnel un processus $(B_t)_{t\geq 0}$ $\mathcal{F}_t-$adapté à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, avec $B_t = (B_t^1, \ldots, B_t^p)$, où les $(B_t^i)_{t\geq 0}$ sont des $\mathcal{F}_t-$mouvements Brownien standards indépendants.

Dans ce cas, la notion de perocessus d'Itô se généralise.

Définition 1.1.3.
Un processus $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ est dit d'Itô si :

$$\mathbb{P}\ p.s.,\ \forall t \leq T,\ Y_t = Y_0 + \int_0^t K_s ds + \sum_{i=1}^{p}\int_0^t H_s^i dB_s^i, \tag{1.4}$$

avec :
- $(K_t)_{0\leq t\leq T}$ *et* $(H_t^i)_{0\leq t\leq T}$ $(1 \leq i \leq p)$ *sont* $\mathcal{F}_t-$*adaptés.*
- $\int_0^T |K_s| ds < +\infty\ \mathbb{P}\ p.s.$.
- $\int_0^T (H_s^i)^2 ds < +\infty\ \mathbb{P}\ p.s.$.

La formule d'Itô multidimensionnelle prend donc la forme suivante :

Proposition 1.1.2.
Soient $(Y_t^1, \dots, Y_t^n)$ *n processus d'Itô :*

$$Y_t^i = Y_0^i + \int_0^t K_s^i ds + \sum_{j=1}^p \int_0^t H_s^{i,j} dB_s^j$$

si f *est une fonction deux fois différentiable en* y *et une fois différentiable en* t*, ces dérivées étant continues en* (t, y)*, alors :*

$$\begin{aligned} f(t, Y_t^1, \dots, Y_t^n) &= f(0, Y_0^1, \dots, Y_0^n) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, Y_s^1, \dots, Y_s^n) ds \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial f}{\partial y_i}(s, Y_s^1, \dots, Y_s^n) dY_s^i \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial y_i y_j}(s, Y_s^1, \dots, Y_s^n) d\langle Y^i, Y^j \rangle_s \end{aligned}$$

avec :
- $dY_s^i = K_s^i ds + \sum_{j=1}^p H_s^{i,j} dB_s^j$,
- $d\langle Y^i, Y^j \rangle_s = \sum_{m=1}^p H_s^{i,m} H_s^{j,m} ds$.

Remarque 1.1.1.
Si $(Y_t)_{t \geq 0}$ *et* $(Z_t)_{t \geq 0}$ *sont deux processus d'Itô, le crochet de* Y *et* Z *(noté* $\langle Y, Z \rangle_s$*) on peut le définir comme suit :*

- $\langle Y, Z \rangle_s$ *est bilinéaire et symétrique.*
- $\langle \int_0^\cdot K_s ds, Y \rangle_t = 0$ *si* $(Y_t)_{t \geq 0}$ *est un processus d'Itô.*
- $\langle \int_0^\cdot H_s dB_t^i, \int_0^\cdot H_s' dB_t^j \rangle_t = 0$ *si* $i \neq j$.
- $\langle \int_0^\cdot H_s dB_t^i, \int_0^\cdot H_s' dB_t^i \rangle_t = \int_0^t H_s H_s' ds$.

Avec ces règles on peut calculer et retrouver la formule du crochet dans la proposition (1.1.2).