Exercice N°5:

Soit la v.a X : le poids des voyageurs et du poids des bagages.

$n = 300$, $\bar{x} = 68$ et $s = 7 \Rightarrow s^2 = 49$

$\Rightarrow s'^2 = \frac{n}{n-1} s^2 = 49,16$

1]. Intervalle de confiance pour la moyenne de la v.a X

On a : la taille de l'échantillon $n = 300 > 30$

donc quelque soit la loi de la v.a X

$\bar{X}$ est de loi Normale $\Leftrightarrow \bar{X} \rightsquigarrow N(m, \frac{\sigma^2}{n})$

• pour $\alpha = 5\% = 0,05$ (le risque standard)

σ^2 est inconnue :

donc $IC_{1-\alpha}(m) = \left[\bar{x} - \frac{s'}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2},(n-1)} ; \bar{x} + \frac{s'}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2},(n-1)}\right]$

où

$\bar{x} = 68$, $s'^2 = \frac{n}{n-1} s^2 = \frac{300}{299} 49 = 49,16 \Rightarrow s' = 7,01$

$\sqrt{n} = 17,32$

$t_{\frac{\alpha}{2},(n-1)} = t_{0,025 \cdot 299}$ lue sur la table de la loi de student = le quantile d'ordre $1 - \frac{\alpha}{2} = q_{1-\frac{\alpha}{2}}$ de la loi de student.

Remarque : si $n > 30$ on peut approximer $t_{\frac{\alpha}{2},(n-1)}$ par $q_{1-\frac{\alpha}{2}}$ où $q_{1-\frac{\alpha}{2}}$ lue sur la table de la $N(0,1)$

Comme le (d.d.l) = $299 > 30$

donc lue sur la table ~~de la~~ student pour le (d.d.l) = ∞

$\Rightarrow t_{0,025 \cdot 299} \simeq t_{0,025 \cdot \infty} \simeq 1,960$

où bien $t_{0,025 \cdot 299} = q_{0,9750}$ lue sur la table de la loi $N(0,1)$

$= 1,960$

Faculté des Sciences كلية العلوم

Nom : .... :اللقب Prénom: 2 الإسم Groupe: .... :الفوج

Date : .... :التاريخ Module : .... :المقياس

$IC_{0,9500}(m) = [\bar{x} - 0{,}79 \quad \bar{x} + 0{,}79]$

$= [67{,}21 \quad ; \quad 68{,}79]$

2) l'intervalle de confiance pour la variance de la v.a X

pour $\alpha = 5\%$

m = inconnue

donc $IC_{1-\alpha}(\sigma^2) = \left[\frac{(n-1)S'^2}{b} , \frac{(n-1)S'^2}{a}\right]$

où $a = q_{\frac{\alpha}{2}}$ = le quantile d'ordre $\frac{\alpha}{2}$ d'une loi de Khi-deux à $(n-1)$ d.d.l

$= \chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2}),(n-1)} = \chi^2_{0,9750,299}$

et $b = q_{1-\frac{\alpha}{2}}$ = le quantile d'ordre $(1-\frac{\alpha}{2})$ d'une loi de Khi-deux à $(n-1)$ d.d.l

$= \chi^2_{\frac{\alpha}{2},(n-1)} = \chi^2_{0,025,299}$

les deux quantiles lus sur la table de la loi de Khi-deux

Remarque:

Si $n > 100$

on peut approximer la loi de Khi-deux à n (d.d.l) par une loi Normale $N(n, 2n)$

$\Leftrightarrow \chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2})(n-1)} = q_{\frac{\alpha}{2}} = (n-1) - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{2(n-1)}$

et $\chi^2_{\frac{\alpha}{2},(n-1)} = q_{1-\frac{\alpha}{2}} = (n-1) + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{2(n-1)}$

pour $(n-1) = 299$ et $\frac{\alpha}{2} = 0{,}025$, $1-\frac{\alpha}{2} = 0{,}975$

$Z_{\frac{\alpha}{2}}$ = le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi $N(0,1)$

Remarque) si le d.d.l > 100 alors les quantils sont hors la table de la Khi-deux. La remarque au bas de la table nous dit que le 95 centile de la loi du Khi-deux avec par exemple 200 d.d.l peut être approximé par le 95 centile de la $N(200, 400)$

$= q_{1-\frac{\alpha}{2}}$ de la χ^2

$= 200 + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{400}$

Scanné avec CamScanner

$z_{\frac{\alpha}{2}} = q_{1-\frac{\alpha}{2}}$

et $q_{\frac{\alpha}{2}} = -q_{1-\frac{\alpha}{2}}$
$= -z_{\frac{\alpha}{2}}$

dans le cas de la loi $N(0,1)$

$$IC_{0,95\%}(\sigma^2) = \left[\frac{299 \times 49,16}{(n-1)+z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{2(n-1)}} \, ; \, \frac{299 \times 49,16}{(n-1)-z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{2(n-1)}}\right]$$

$$= \left[\frac{299 \times 49,16}{299+1,96\sqrt{2 \times 299}} \, ; \, \frac{299 \times 49,16}{299-1,96\sqrt{2 \times 299}}\right]$$

$$= \left[\frac{14698,84}{346,93} \, ; \, \frac{14698,84}{251,07}\right] = [42,27 \, ; \, 58,54]$$

3- $H_0 : m = 50$ vs $H_1 : m = 52$ à tester

pour $\alpha = 5\%$

σ^2 inconnue.

la statistique de test : $\frac{\bar{X} - m}{S'}\sqrt{n} \sim St_{(n-1)}$

$H_1 : m = 52 \Rightarrow$ test simple.

mais $m_0 = 50$ et $m_1 = 52$

$m_1 > m_0$ donc H_0 vraie | H_0 fausse
c

donc la région critique de la forme $]c, +\infty[$

$\Rightarrow \alpha = P(\bar{X} > c \,/\, m = m_0) = P(H_0 \text{ fausse} \mid H_0 \text{ vraie})$.

$= P\left(\frac{\bar{X} - m_0}{S'}\sqrt{n} > \frac{c - m_0}{S'}\sqrt{n}\right)$

$\alpha = 1 - P\left(\frac{\bar{X} - m_0}{S'}\sqrt{n} < \frac{c - m_0}{S'}\sqrt{n}\right)$

$\alpha = 1 - F_{St(n-1)}\left(\frac{c - m_0}{S'}\sqrt{n}\right) \Rightarrow F_{St(n-1)}\left(\frac{c - m_0}{S'}\sqrt{n}\right) = 1 - \alpha$

$= \frac{c - m_0}{S'}\sqrt{n} = q_{1-\alpha}$ = le quantile d'ordre $1-\alpha$ d'une loi de student

$= t_{\alpha, (n-1)} = t_{0,05 \, . \, 299} \simeq t_{0,05 \, . \, \infty} = 1,645$

lue sur la table de la student

Faculté des Sciences كلية العلوم

Nom : .... :اللقب Prénom: -4- الإسم Groupe: .... :الفوج

Date : .... :التاريخ Module : .... :المقياس

$\frac{C-50}{7{,}01}\sqrt{300} = 1{,}645$

$\Rightarrow C = 50 + \frac{7{,}01}{\sqrt{300}} 1{,}645 = \boxed{50{,}67}$

d'où la région critique est donnée par:

$]50{,}67 , +\infty[$

On a: $\bar{x} = 68 \in]50{,}67 , +\infty[$

$\Rightarrow$ H_0 est fausse

c.à.d $m = 50$ est fausse et

$m = 52$ est vraie

Exercice N°6 :

Soit X la v.a qui modélise la durée de fonctionnement d'une ampoule.

$X \rightsquigarrow N(m, \sigma^2)$.

$n = 20$

$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i = \frac{800}{20} = \boxed{40}$

$s'^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{n}{n-1} s^2 = \frac{n}{n-1} \left[\frac{1}{n} \sum x_i^2 - \bar{x}^2 \right]$

$= \frac{20}{19} \left[\frac{1}{20} \times 35200 - (40)^2 \right] = \boxed{168{,}42}$

1) Estimation ponctuelle de :

la moyenne m :

comme $X \rightsquigarrow N(m, \sigma^2)$

$\Rightarrow \hat{m} = \bar{x} = \boxed{40}$ est le meilleur estimateur pour m.

la variance σ^2 :

comme $X \rightsquigarrow N(m, \sigma^2)$

le meilleur estimateur de σ^2 est s'^2

$\Rightarrow \hat{\sigma}^2 = s'^2 = \boxed{168{,}42}$

d'où l'estimation de l'écart-type : $\hat{\sigma} = ?$

$\hat{\sigma} = s' = \sqrt{168{,}42} = \boxed{12{,}98}$

2) $IC_{1-\alpha}(\sigma^2) = ?$

$\alpha = 5\% \Rightarrow 1 - \alpha = 95\%$

Faculté des Sciences كلية العلوم

Nom : .... اللقب: Prénom: .... -2- .... الإسم Groupe: .... الفوج:

Date : .... التاريخ: Module : .... المقياس: ....

. la moyenne m st inconnue :

Donc $IC_{1-\alpha}(\sigma^2) = \left[\frac{(n-1)s'^2}{b} , \frac{(n-1)s'^2}{a}\right]$

où $b = \chi^2_{\frac{\alpha}{2},(n-1)} = \chi^2_{0{,}025 \, . \, 19} = 32{,}85$

$a = \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},(n-1)} = \chi^2_{0{,}9750 \, . \, 19} = 8{,}81$

$IC_{0{,}9500}(\sigma^2) = \left[\frac{19 \times 168{,}42}{32{,}85} , \frac{19 \times 168{,}42}{8{,}81}\right]$

$= [97{,}41 ; 363{,}22]$

3] $H_0 : m = 44$ vs $H_1 : m = 42$

a] la région critique

* pour $\alpha = 0{,}025$

m inconnue

* la statistique de tst : $\frac{\bar{X} - m}{s'}\sqrt{n} \sim st_{(n-1)}$

$H_1 : m = 42$ donc il s'agit d'un tst simple

et $m_0 = 44$, $m_1 = 42$

$m_1 < m_0$ donc la région critique

$\Rightarrow$ de la forme $]-\infty, c[$

H_0 fausse | c | H_0 vraie

d'où $\alpha = P(H_0 \text{ fausse} / H_0 \text{ vraie})$

$\Rightarrow \alpha = P(\bar{X} < c \mid m = 44)$

$\Rightarrow \alpha = P\left(\frac{\bar{X} - m_0}{s'}\sqrt{n} < \frac{c - m_0}{s'}\sqrt{n}\right)$

$\Rightarrow \alpha = F_{St(n-1)} \left(\frac{C-44}{s'} \sqrt{n} \right)$

$\Rightarrow \frac{C-44}{s'} \sqrt{n} = q_\alpha$ = le quantile d'ordre α d'une loi de student à $(n-1)$ d.d.l

$= -q_{1-\alpha}$

$= -t_{\alpha,(n-1)}$

La loi de student et symétrique comme la loi $N(0,1)$

donc $q_\alpha = -q_{1-\alpha}$

$\Rightarrow C = 44 - \frac{s'}{\sqrt{n}} t_{\alpha,(n-1)}$

$= 44 - \frac{12,98}{\sqrt{20}} \times t_{0,025,19}$

$t_{0,025,19}$ lue sur la table de la student pour le ddl 19 et $\alpha = 0,025$

$t_{0,025,19} = 2,093$

$$\boxed{C = 37,93}$$

donc la région critique et la suivante :

$]-\infty, 37,93[$

b) l'erreur de 2ème espèce :

$\beta(m) = P(H_1$ et fausse $| H_1$ et vraie$)$

$= P(\bar{X} > C \quad | m = 42)$

$= P\left(\frac{\bar{X} - m_1}{s'} \sqrt{n} > \frac{C - m_1}{s'} \sqrt{n} \right)$

$\beta(m) = 1 - P\left(\frac{\bar{X} - 42}{s'} \sqrt{n} < \frac{C-42}{s'} \sqrt{n} \right)$

$\Rightarrow 1 - \beta(m) = F_{St(n-1)} \left(\frac{C-42}{s'} \sqrt{n} \right)$

Faculté des Sciences كلية العلوم

Nom : ______ اللقب : Prénom : ______ الإسم Groupe : ______ الفوج :

Date : ______ التاريخ : Module : ______ المقياس :

$\Rightarrow \frac{\bar{C}-42}{s'}\sqrt{n}$ = le quantile d'ordre $1-\beta(m)$ d'une loi de student a $(n-1)$ d.d.l $= q_{1-\beta(m)}$

$$\frac{\bar{C}-42}{s'}\sqrt{n} = \frac{37{,}93-42}{12{,}98}\sqrt{20} = \boxed{-1{,}40}$$

- sur la table de la student on cherche $\underline{1{,}40}$ pour le d.d.l = 19

on trouve : $\quad \overset{0{,}10}{\uparrow} \quad \overset{0{,}05}{\uparrow}$

$19 \longrightarrow 1{,}328 < 1{,}40 < 1{,}729$

$\Rightarrow$ pour $1{,}40$ on trouve : $\frac{0{,}10+0{,}05}{2} = 0{,}125$

où bien on choisit 1,328 on trouve $0{,}10$

- et comme la loi de student est symétique donc pour $\underline{-1{,}40}$ on trouve $-0{,}10$ où bien $-0{,}125$

si on choisit 0,10

$\Rightarrow 1-\beta(m) = -0{,}10$

$\Rightarrow \beta(m) = 1-0{,}10 = 0{,}90 = 90\%$

le puissance de test

$1-\beta(m) = 1-0{,}90 = 0{,}10 = 10\%$