Exercice 1:

1.On a

$$\varphi_1(u)=\int_{\mathbb{R}} f_1(x)\,e^{iux}dx=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{iux-|x|}dx=\frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{(iu+1)x}dx+\int_{0}^{+\infty} e^{(iu-1)x}dx\right)$$

or

$$\int_{-\infty}^{0} e^{(iu+1)x}dx=\frac{1}{iu+1}e^{(iu+1)x}\ |_{-\infty}^{0}=\frac{1}{iu+1},$$

car

$$0\leq\left|e^{(iu+1)x}\right|=\left|e^{iux}\right|e^{x}=e^{x}\text{ qui tend vers 0 quand } x \text{ tend vers } -\infty.$$

De même (même raisonnement)

$$\int_{0}^{+\infty} e^{(iu-1)x}dx=\frac{1}{iu-1}e^{(iu-1)x}\ |_{0}^{+\infty}=-\frac{1}{iu-1},$$

d'où

$$\varphi_1(u)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{iu+1}-\frac{1}{iu-1}\right)=\frac{1}{u^2+1},u\in\mathbb{R}$$

Pour calculer $\varphi_2(u)$, remarquons d'abord que

$$f_2(y)=\frac{1}{\pi(y^2+1)}=\frac{1}{\pi}\varphi_1(y),\text{ qui est intégrable au sens de Lebesgue,}$$

d'où d'aprés la formule d'inversion,

$$\begin{aligned}\varphi_2(u)&=\int_{\mathbb{R}} f_2(y)\,e^{iuy}dy=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\varphi_1(y)\,e^{-i(-u)y}dy\\&=2f_1(-u),\end{aligned}$$

soit

$$\varphi_2(u)=e^{-|u|},u\in\mathbb{R}$$

2.On a

$$\begin{aligned}\varphi_1(u) &= \int_{\mathbb{R}} f_1(x)\, e^{iux}dx = \int_{-1}^{1} (1-|x|)\, e^{iux}dx \\ &= \int_{-1}^{1} (1-|x|)\cos uxdx + i\int_{-1}^{1} (1-|x|)\sin uxdx \\ &= \int_{-1}^{1} (1-|x|)\cos uxdx \text{ car la fonction } (1-|x|)\sin ux \text{ est impaire} \\ &= 2\int_{0}^{1} (1-x)\cos uxdx \text{ car la fonction } (1-x)\cos ux \text{ est paire}\end{aligned}$$

On pose $g(x) = 1-x$ et $h'(x) = \cos ux$, d'où $g'(x) = -1$ et $h(x) = \frac{1}{u}\sin ux$ et on a par une intégration par parties,

$$\begin{aligned}\varphi_1(u) &= 2\left(\frac{1-x}{u}\sin ux\,|_0^1 - \frac{1}{u}\int_0^1 \sin uxdx\right) \\ &= -\frac{2}{u^2}\cos ux\,|_0^1 = \frac{2(1-\cos u)}{u^2},\end{aligned}$$

soit

$$\varphi_1(u) = \begin{cases} \frac{2(1-\cos u)}{u^2} \text{ si } u \neq 0 \\ 1 \text{ si } u = 0 \end{cases}$$

Pour calculer $\varphi_2(u)$, remarquons d'abord que pour tout $u \neq 0$,

$$f_2(y) = \frac{1-\cos y}{\pi y^2} = \frac{1}{2\pi}\varphi_1(y)\,, \text{ qui est intégrable au sens de Lebesgue,}$$

d'où d'aprés la formule d'inversion,

$$\begin{aligned}\varphi_2(u) &= \int_{\mathbb{R}} f_2(y)\, e^{iuy}dy = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \varphi_1(y)\, e^{-i(-u)y}dy \\ &= f_1(-u) \\ &= f_1(u)\,,\end{aligned}$$

d'où

$$\varphi_2(u) = (1-|u|)\,\mathbf{1}_{[-1,1]}(u)$$

Exercice 2:

Supposons qu'il existent deux *v.a.* X et Y, *i.i.d.* et tels que $X - Y \rightsquigarrow U([-1,1])$. Soit φ la fonction caractéristique commune de X et Y. On sait que la fonction caractéristique de la loi $U([-1,1])$ est

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\sin u}{u} \text{ si } u \neq 0 \\ 1 \text{ si } u = 0 \end{array} \right. .$$

Ainsi si $u \neq 0$, alors $\varphi_{X-Y}(u) = \frac{\sin u}{u}$, or

$$\begin{aligned} \varphi_{X-Y}(u) &= \varphi_X(u)\,\varphi_{-Y}(u) \text{ car } X \text{ et } Y \text{ sont ind} \\ &= \varphi(u)\,\varphi_Y(-u) \\ &= \varphi(u)\,\overline{\varphi(u)} \\ &= |\varphi(u)|^2, \end{aligned}$$

d'où

$$|\varphi(u)|^2 = \frac{\sin u}{u} \text{ pour tout } u \neq 0,$$

En particulier si $u = \frac{3\pi}{2}$, alors on aura $0 \leq |\varphi(u)|^2 = -\frac{2}{3\pi} < 0$, ce qui est absurde.

Exercice 3:

On a

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_j\overline{c_k}\varphi(u_j - u_k) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_j\overline{c_k}\mathbb{E}\left(e^{i\langle u_j-u_k, X\rangle}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_j\overline{c_k}\mathbb{E}\left(e^{i\langle u_j, X\rangle}e^{-i\langle u_k, X\rangle}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_j\overline{c_k}e^{i\langle u_j, X\rangle}e^{-i\langle u_k, X\rangle}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{n} c_j e^{i\langle u_j, X\rangle}\sum_{k=1}^{n}\overline{c_k}e^{-i\langle u_k, X\rangle}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{n} c_j e^{i\langle u_j, X\rangle}\sum_{k=1}^{n}\overline{c_k e^{i\langle u_k, X\rangle}}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{n} c_j e^{i\langle u_j, X\rangle}\overline{\sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\langle u_k, X\rangle}}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\left|\sum_{j=1}^{n} c_j e^{i\langle u_j, X\rangle}\right|^2\right) \geq 0. \end{aligned}$$

Exercice 4:

On a

$$P(X_n = k) = C_n^k \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k},\ k \in D_{X_n} = \{0, 1, ..., n\},$$

d'où

$$\begin{aligned}
\varphi_n(u) &= \sum_{k=0}^{n} e^{iuk} P(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{iuk} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{\lambda e^{iu}}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \left(1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda e^{iu}}{n}\right)^n \text{ d'aprés la formule du binôme} \\
&= \left(1 + \frac{\lambda\left(e^{iu} - 1\right)}{n}\right)^n .
\end{aligned}$$

Il s'en suit que

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(u) = \varphi(u) \text{ où } \varphi(u) = \exp\left(\lambda\left(e^{iu} - 1\right)\right).$$

Montrons que φ n'est autre que la fonction caractéristique d'une *v.a.d.* X de loi de Poisson de paramère λ. En effet, on a

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},\ k \in D_X = \mathbb{N}$$

et

$$\begin{aligned}
\varphi_X(u) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{iuk} P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{iuk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda e^{iu}\right)^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} \exp\left(\lambda e^{iu}\right) \\
&= \exp\left(\lambda\left(e^{iu} - 1\right)\right) \\
&= \varphi(u)
\end{aligned}$$

Remarque:

Comme $\varphi_n(u)$ converge vers $\varphi(u)$, qui est continue (en particulier en 0), alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ d'aprés le théorème de Lèvy.