Faculté des Mathématiques USTHB — **Semestre 2 2019/2020**
**Master 1 SPA** — Module: **Calcul Stochastique**

# Corrigé du Devoir

## Partie 1

**A**/ En utilisant les Propriétés 2.1 en pages 13-14 du cours on obtient

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(X_1, X_2 \mid \mathcal{A}) =& E(X_1X_2 \mid \mathcal{A}) - E(X_1 \mid \mathcal{A})\, E(X_2 \mid \mathcal{A})\\ =& E(X_1X_2 \mid \mathcal{A}) - E\left[E(X_1 \mid \mathcal{A})\, X_2 \mid \mathcal{A}\right] \quad \text{(Propriété 6, page 14)}\\ =& E(X_1X_2 \mid \mathcal{A}) - E(X_1 \mid \mathcal{A})\, E(X_2 \mid \mathcal{A}) \quad \text{(Linéarité, Propriété 1, page 13)}\end{aligned}$$

**B**/
1/ Si $s \leq t$, et puisque $W_s$ est $\mathcal{F}_s$-mesurable, on peut écrire

$$\begin{aligned}E(W_sW_t^2) =& E\left[E(W_sW_t^2 \mid \mathcal{F}_s)\right] \quad \text{(Propriété 2, page 14)}\\ =& E\left[W_sE(W_t^2 \mid \mathcal{F}_s)\right] \quad \text{(Propriété 6, page 14)}\end{aligned}$$

On sait que $W_t^2 - t$ est une martingale (Proposition 4.1.), d'où $E(W_t^2 \mid \mathcal{F}_s) = W_s^2 - s + t$. En utilisant que $W_t \sim \mathcal{N}(0,t)$ et ainsi que $E(W_t^3) = 0$, on obtient que

$$E(W_sW_t^2) = E(W_s(W_s^2 - s + t)) = E(W_s^3) = 0.$$

Si $t < s$, on a

$$E(W_sW_t^2) = E\left[E(W_sW_t^2 \mid \mathcal{F}_t)\right] = E\left[W_t^2E(W_s \mid \mathcal{F}_t)\right] = E(W_t^3) = 0. \quad \text{($W_t$ martingale, Proposition 4.1)}$$

Pour $s \leq t$, $E(W_t \mid \mathcal{F}_s) = W_s$ car $W_t$ est une martingale, et pour $t < s$ $E(W_t \mid \mathcal{F}_s) = W_t$ car $W_t$ est $\mathcal{F}_s$-mesurable dans ce cas.
Si $s < t$,

$$\begin{aligned}E(W_s^2W_t^2) =& E\left[E(W_s^2W_t^2 \mid \mathcal{F}_s)\right] = E\left[W_s^2E(W_t^2 \mid \mathcal{F}_s)\right]\\ =& E(W_s^2(W_s^2 - s + t)) = E(W_s^4) - sE(W_s^2) + tE(W_s^2) = 3s^2 - s^2 + ts = 2s^2 + ts.\end{aligned}$$

Si $t \leq s$, $E(W_s^2W_t^2) = 2t^2 + ts$.
Si $s < t$, $E(W_t \mid W_s) = E(W_t - W_s + W_s \mid W_s) = E(W_t - W_s \mid W_s) + W_s = W_s$ car $W_t - W_s$ est indépendant de $W_s$ et centré.

Si $t < s$, on écrit

$$E(W_t \mid W_s) = E(W_t - \frac{t}{s}W_s \mid W_s) + \frac{t}{s}W_s.$$

La v.a. $W_t - \frac{t}{s}W_s$ est centrée et indépendante de $W_s$ car le couple $\left(W_t - \frac{t}{s}W_s, W_s\right)$ est un couple gaussien centré et sa covariance est nulle. On en déduit que $E(W_t \mid W_s) = \frac{t}{s}W_s$.
2/ On a $V(W_t + W_s) = V(W_t) + V(W_s) + 2\operatorname{Cov}(W_t, W_s) = t + 3s$, donc $W_t + W_s \sim \mathcal{N}(0, t+3s)$.
3/ Soit $\phi_s$ une variable aléatoire bornée $\mathcal{F}_s$-mesurable. On a, pour $s \leq t$

$$E\left[\phi_s(W_t - W_s)\right] = E\left[E(\phi_s(W_t - W_s) \mid \mathcal{F}_s)\right] = E\left[\phi_sE((W_t - W_s) \mid \mathcal{F}_s)\right] = E\left[\phi_sE(W_t - W_s)\right] = 0.$$

De même
$$E\left[\phi_s\left(W_t - W_s\right)^2\right] = (t-s)E(\phi_s).$$
4/
$$E\left(\mathbf{1}_{\{W_t \le a\}}\right) = P(W_t \le a) = \phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)$$
où $\phi$ est la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite.
$$E\left(W_t \mathbf{1}_{\{W_t \le a\}}\right) = \int_{-\infty}^{a} x \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) dx.$$
La dernière intégrable est calculable par un changement de variable.

**Partie 2**

1/
$$\mathrm{E}[\triangle \mathbf{r}(t) \mid \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}] = \sum_{i=1}^{3} (\triangle \mathbf{r})_i p_i = \alpha(r_e - \mathbf{r})\triangle t$$
et
$$\mathrm{E}[(\triangle \mathbf{r}(t))^2 \mid \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}] = \sum_{i=1}^{3} (\triangle \mathbf{r})_i^2 p_i = \sigma^2 \triangle t.$$
2/ $\{\mathbf{r}(t)\}_t$ est un processus de diffusion avec
$$\mu(\mathbf{r}, t) = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{1}{\triangle t} \mathrm{E}[\triangle \mathbf{r}(t) \mid \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}] = \alpha(r_e - \mathbf{r})$$
et
$$\sigma^2(\mathbf{r}, t) = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{1}{\triangle t} \mathrm{E}[(\triangle \mathbf{r}(t))^2 \mid \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}] = \sigma^2.$$
Ainsi, l'EDS est
$$d\mathbf{r}(t) = \alpha(r_e - \mathbf{r}(t))dt + \sigma dW(t), \tag{1}$$
avec $\mathbf{r}(0) = r_0 > 0$.
3/ On intègre l'EDS (1) de 0 à $t$
$$\mathbf{r}(t) = r_0 + \alpha r_e t - \alpha \int_0^t r(s)ds + \sigma W(t).$$
On passe à l'espérance
$$\mathrm{E}[\mathbf{r}(t)] = r_0 + \alpha r_e t - \alpha \int_0^t \mathrm{E}[r(s)]ds.$$
En passant à la dérivée
$$d\mathrm{E}[\mathbf{r}(t)] = \alpha r_e - \alpha \mathrm{E}[r(t)].$$
En résolvant cette équation différentielle, on obtient
$$\mathrm{E}[\mathbf{r}(t)] = r_e + (r_0 - r_e)e^{-\alpha t}.$$

Pour avoir le moment d'ordre 2 de $\mathbf{r}(t)$, on utilise la formule d'Itô pour $F(x,t) = x^2$. On obtient

$$\begin{aligned} dF(\mathbf{r}(t), t) =& [0 + \alpha(r_e - \mathbf{r}(t)) \times 2\mathbf{r}(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 \times 2]dt + \sigma \times 2\mathbf{r}(t)dW(t) \\ d\mathbf{r}^2(t) =& [2\alpha(r_e - \mathbf{r}(t))\mathbf{r}(t) + \sigma^2]dt + 2\sigma\mathbf{r}(t)dW(t). \end{aligned}$$

On intègre de 0 à $t$

$$\mathbf{r}^2(t) - r_0^2 = 2\alpha r_e \int_0^t \mathbf{r}(s)ds - 2\alpha \int_0^t \mathbf{r}^2(s)ds + \sigma^2 t + 2\sigma \int_0^t \mathbf{r}(s)dW(s).$$

On passe à l'espérance, en utilisant le fait que l'espérance d'une intégrale stochastique est nulle $\mathrm{E}\int_0^t \mathbf{r}(s)dW(s) = 0$, on a

$$\mathrm{E}\mathbf{r}^2(t) = r_0^2 + 2\alpha r_e \int_0^t \mathrm{E}\mathbf{r}(s)ds - 2\alpha \int_0^t \mathrm{E}\mathbf{r}^2(s)ds + \sigma^2 t.$$

On passe à la dérivée

$$d\mathrm{E}\mathbf{r}^2(t) + 2\alpha\mathrm{E}\mathbf{r}^2(t) = \sigma^2 + 2\alpha r_e \mathrm{E}\mathbf{r}(t).$$

En résolvant la dernière équation différentielle pour $y = \mathrm{E}\mathbf{r}^2(t)$ on obtient le moment d'ordre deux et on déduit la variance

$$\mathrm{V}(\mathbf{r}(t)) = \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t}).$$

4/ On utilise la formula d'Itô pour la fonction $F(x,t) = xe^{\alpha t}$

$$d[\mathbf{r}(t)e^{\alpha t}] = [\alpha\mathbf{r}(t)e^{\alpha t} + \alpha(r_e - \mathbf{r}(t))e^{\alpha t} + \frac{1}{2}0]dt + \sigma e^{\alpha t}dW(t).$$

On intègre de 0 à $t$

$$\mathbf{r}(t)e^{\alpha t} - r_0 = r_e(e^{\alpha t} - 1) + \sigma \int_0^t e^{\alpha s}dW(s).$$

La solution est

$$\mathbf{r}(t) = r_e + (r_0 - r_e)e^{-\alpha t} + \sigma e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s}dW(s).$$