Support du cours

Processus de Poisson

1-1 Processus de Poisson homogène

De nombreux phénomènes aléatoires se manifestent par des « arrivées » survenant une par une à des instants aléatoires successifs**.**

Exemples

- Arrivées d'appels à une centrale téléphonique
- Passage de véhicules à un péage d'autoroute
- Arrivées de clients à un guichet, occurrence d'accidents dans une ville, pannes de machines dans une usine,..

De tels phénomènes peuvent se définir par la famille $(S_n)_{n\geq 1}$des temps d'arrivées qui sont des variables aléatoires, mais on peut aussi le faire à partir du processus de comptage $(N(t))_{t\geq 0}$ ou par la famille $(\tau_n)_{n\geq 1}$ des intervalles de temps entre deux arrivées.

1-1-1 Processus de Comptage

Soit $N(t)$ le nombre d'évènements apparus jusqu'à l'instant t et $N(t+s)-N(s)$ est le nombre d'évènements apparus entre s et $s+t$.
L'espace des états E du processus $(N(t))_{t\geq 0}$ est discret ($E=\mathbb{N}$) et l'espace des temps est continu .Donc le processus $(N(t))_{t\geq 0}$ est un processus aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ tel que $N(0)=0$.

Définition 1

Un processus est dit homogène ou stationnaire dans le temps, si pour tout s et pour tout t, l'accroissement $N(t+s)-N(s)$ suit la même loi que $N(t)$.

Définition 2

Un processus de comptage est une suite de variables aléatoires réelles $(N(t))_{t\geq 0}$ tels que

i- $N(0) = 0$

ii- $\forall t > 0,\ N(t) \in \mathbb{N}^*$

iii- $t \mapsto N(t)$ est croissant

1-1-2 Définitions d'un processus de Poisson

Définition 3

Un processus de comptage $(N(t))_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson d'intensité ou de taux $\lambda(\lambda > 0)$ si

i- $N(0) = 0$,

ii- Le processus est à accroissements indépendants,

iii- Le processus est à accroissements stationnaires,

iv- $\forall\ 0 \leq s < t$, la variable aléatoire $N(t) - N(s)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(t - s)$.

v- La probabilité que deux événements ou plus se produisent dans un petit intervalle h est négligeable par rapport à la probabilité qu'il n'y ait qu'un seul événement :

$$P(N(h) = k) = \begin{cases} 1 - \lambda h + o(h) & si \quad k = 0 \\ \lambda h + o\,(h) & si \quad k = 1 \\ o(h) & si \quad k \geq 2 \end{cases}$$

$o(h)$ est une fonction de h telle que $\lim\limits_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$

Définition 4

Un processus de Poisson d'intensité λ est un processus de comptage $(N(t))_{t\geq 0}$ tels que :

i- $(N(t))_{t\geq 0}$ est un processus stationnaire,

ii- $(N(t))_{t\geq 0}$ est un processus à accroissements indépendants,

iii- Pour tout $t \geq 0$, la variable $N(t)$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda\, t$.

$$P(N(t)=k)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}\quad ,k\geq 0$$

Il en résulte $E(N(t))=\lambda\, t$ et $Var\big(N(t)\big)=\lambda\, t$

Exemple 1

Des clients arrivent au guichet d'une banque selon un processus de Poisson d'intensité λ=10 /h .

1- Sachant que deux clients sont arrivés durant 5 premières minutes, la probabilité que les deux soient arrivés pendant les deux premières minutes est

$$P\left(N\left(\frac{1}{30}\right)=2 \,\Big|\, N\left(\frac{1}{12}\right)=2\right)=\frac{P\left(N\left(\frac{1}{30}\right)=2, N\left(\frac{1}{12}\right)=2\right)}{P\left(N\left(\frac{1}{12}\right)=2\right)}$$

$$=\frac{P\left(N\left(\frac{1}{2}\right)=2, N(1)-N\left(\frac{1}{2}\right)=0\right)}{P(N(1)=2)}$$

$$=\frac{P\left(N\left(\frac{1}{2}\right)=2\quad\right)P(\quad N(1)-N\left(\frac{1}{2}\right)=0\Big)}{P(N(1)=2)}$$

$$=\frac{P\left(N\left(\frac{1}{2}\right)=2\right)P\left(N\left(\frac{1}{2}\right)=0\right)}{P(N(1)=2)}=\frac{\frac{e^{-\frac{5}{2}}\left(\frac{5}{2}\right)^2}{2!}\times e^{-\frac{5}{2}}}{\frac{e^{-5}5^2}{2!}}=\frac{1}{4}$$

2- Sachant que deux voitures arrivent pendant la première heure, La probabilité qu'exactement une voiture arrive pendant la première demi-heure :

$$P\left(N\left(\frac{1}{2}\right)=1 \,\Big|\, N(1)=2\right)=\frac{P\left(N\left(\frac{1}{2}\right)=1, N(1)=2\right)}{P(N(1)=2)}=\frac{P\left(N\left(\frac{1}{2}\right)=1, N(1)-N\left(\frac{1}{2}\right)=1\right)}{P(N(1)=2)}$$

$$=\frac{P\left(N\left(\frac{1}{2}\right)=1\quad\right)P(\quad N(1)-N\left(\frac{1}{2}\right)=1\Big)}{P(N(1)=2)}$$

$$=\frac{P\left(N\left(\frac{1}{2}\right)=1\right)P\left(N\left(\frac{1}{2}\right)=1\right)}{P(N(1)=2)}=\frac{\frac{e^{-\frac{5}{2}}\left(\frac{5}{2}\right)}{1!}\times\frac{e^{-\frac{5}{2}}\left(\frac{5}{2}\right)}{1!}}{\frac{e^{-5}5^2}{2!}}=\frac{1}{2}$$

1-1-3 Distribution des temps d'attente et des inter-arrivées

On note

- S_n l'instant de la réalisation du n-ième évènement ;
- τ_n la durée séparant le (n-1)ième évènement du n–ième évènement.

On a

- $S_n = \sum_{i=1}^{n} \tau_i$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
- $\tau_1 = S_1$ et $\tau_n = S_n - S_{n-1}$, pour tout $n \geq 2$

Ainsi, la connaissance de la famille $(S_n)_{n\geq 1}$ est équivaut à celle de $(\tau_n)_{n\geq 1}$.

D'autre part, l'évènement $(S_n \leq t)$ signifie que le n –ième évènement a eu lieu à l'instant t ou avant, c'est à dire jusqu'à l'instant t, au moins n évènements ont eu lieu, $(N(t) \geq n)$.

et l'évènement $(S_{n+1} > t)$ signifie que le (n+1)-ième évènement a eu lieu après l'instant t, c'est-à-dire jusqu'à l'instant t au plus n évènements ont eu lieu $(N(t) \leq n)$. On a

$$P(N(t) = n) = P(S_n \leq t) - P(S_{n+1} \leq t)$$

Par conséquent la connaissance de $(N(t))_{t\geq 0}$ équivaut à celle de $(S_n)_{n\geq 1}$.

Théorème 1

Soit $S_n = inf\{t \geq 0,\ N(t) \geq n\}$ et $\tau_n = S_n - S_{n-1},\ n \geq 1.$ Alors

i- La suite des inter -évènements (ou inter -arrivées) $(\tau_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) de loi exponentielle de paramètre λ.

ii- Le temps d'attente S_n= $\tau_1 + \cdots + \tau_n$ suit la loi gamma de paramètres n et λ de densité

$$f_{S_n}(s) = \frac{e^{-\lambda s} \lambda^n s^{n-1}}{(\mathrm{n}-1)!}, \qquad n \in \mathbb{N}\ , si\ \ s \geq 0\ ,\ \ f_{S_n}(s) = 0\ si\ non$$

$E(S_n) = \frac{n}{\lambda}$ et $Var\ (S_n) = \frac{n}{\lambda^2}$

Théorème 2

$(N(t))_{t\geq 0}$ un processus de Poisson d'intensité λ si et seulement si les variables aléatoires τ_n sont indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ.

1-1-4 Propriétés du processus de Poisson

1- Somme de deux processus de Poisson indépendants

Proposition 1

Soient deux processus de Poisson indépendants $(N_1(t))_{t\geq 0}$ et $(N_2(t))_{t\geq 0}$ d'intensités respectives λ_1 et λ_2. Alors le processus $N(t) = N_1(t)+ N_2(t)$, $t \geq 0$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda_1 + \lambda_2$.

Remarque 1

Le résultat se généralise à la somme de n processus de Poisson.

Exemple 2

On considère que des véhicules arrivent à une station selon un processus de Poisson d'intensité λ. Les voitures arrivent selon un processus de Poisson d'intensité $\lambda_1 = 5.4$ et les camions selon un processus de Poisson d'intensité $\lambda_2 = 0.6$. Ces deux processus sont indépendants. La probabilité que 5 véhicules arrivent à la station durant une heure est

$$P(N(1) = 5) = \frac{e^{-6}6^5}{5!}$$

2- Décomposition

Un processus de Poisson $(N(t))_{t\geq 0}$ d'intensité λ peut être décomposé en deux processus partiels de la façon suivante :

Chaque évènement est soumis à une expérience de Bernoulli qui l'attribue avec des probabilités p et $1 - p$. On admet que ces attributions sont indépendantes les unes des autres et indépendantes de l'état de processus $(N(t))_{t\geq 0}$ alors $(N_1(t))_{t\geq 0}$ et $(N_2(t))_{t\geq 0}$ sont deux processus de Poisson indépendants de paramètres λp et $\lambda(1 - p)$ respectivement.

Remarque 2

Cette proposition se généralise lorsqu'on découpe la population en k sous groupes qui sont distribués selon les proportions $p_1, p_2, \dots, p_k$ avec $\sum_{i=1}^{k} p_i$.

Exemple 3

Les voitures qui passent devant une station service forment un processus de Poisson $(N(t))_{t\geq 0}$ d'intensité λ, chaque voiture a la probabilité p de s'arrêter à la station . Alors, les voitures qui s'arrêtent à la station forment un processus de Poisson $(N_1(t))_{t\geq 0}$ d'intensité λp et les voitures qui passent devant la station sans s'arrêter forment un processus de Poisson $(N_2(t))_{t\geq 0}$ d'intensité $\lambda(1-p)$. De plus, ces deux processus sont indépendants.

1-1-5 Lois conditionnelles des instants d'arrivées.

1- Processus de Poisson et loi uniforme

Soit $N(t), t \geq 0$ un processus de Poisson d'intensité λ et supposons qu'un évènement se produise dans l'intervalle $[0,t]$. La variable aléatoire décrivant les instants d'occurrence de cet évènement a une distribution continue uniforme sur $[0, t]$.

En effet, soit $0 < s < t$, on a

$$P(\tau_1 < s \,|N(t) = 1) = \frac{P(\tau_1 < s,\ N(t) = 1)}{P(N(t) = 1)} = \frac{P(N(s) = 1, N(t) = 1)}{P(N(t) = 1)}$$

$$= \frac{P(N(s) = 1, N(t) - N(s) = 0)}{P(N(t) = 1)}$$

$$= \frac{P(N(s) = 1)P(N(t) - N(s) = 0)}{P(N(t) = 1)}$$

$$= \frac{P(N(s) = 1)P(N(t - s) = 0)}{P(N(t) = 1)} = \frac{\lambda s e^{-\lambda t} e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}$$

Proposition 2

Soit $(N(t))_{t\geq 0}$ un processus de Poisson d'intensité λ . La densité conditionnelle de $(S_1, S_2, .., S_n)$

Sachant $N(t) = n$ est donnée par

$$f(t_1, t_2, .., t_n) = \begin{cases} \dfrac{n!}{t^n} & si \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n \leq t \\ 0 & si\ non \end{cases}$$

Qui est la statistique d'ordre d'un ensemble de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi uniforme sur [0, t].

2- Processus de Poisson et loi Binomiale

Soit $(N(t))_{t\geq 0}$ un processus de Poisson d'intensité λ. Pour tout $s \leq t$, la loi conditionnelle de $N(s)$ sachant $N(t) = n$ est une la loi binomiale de paramètres n et $\frac{s}{t}$.

Proposition 3

Si $(N_1(t))_{t\geq 0}$ et $(N_2(t))_{t\geq 0}$ deux processus de Poisson indépendants d'intensités respectives λ_1 et λ_2 , alors la loi conditionnelle de $N_1(t)$ sachant $(N_1(t) + N_2(t) = n)$ est la loi binomiale de paramètres $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$ et n.

1-1- 6 Processus de Bernoulli

Une manière de construire le processus de Poisson consiste à le considérer comme cas limite d'un processus de comptage connu sous le nom de processus de Bernoulli. Pour cela, on discrétise l'échelle du temps en partitionnant l'intervalle [0,t] en n intervalles de même longueur $h = \frac{t}{n}$. On admet que :

- La probabilité p_n qu'un évènement se produise dans un tel intervalle est

$$p_n = \lambda h + o(h)$$

- La probabilité que plusieurs évènements se produisent dans un intervalle de longueur h est négligeable et est égale à o(h).
- Les évènements associés à des intervalles distincts se produisent indépendamment les uns des autres.

On appelle **processus de Bernoulli** d'intensité λ, la suite d'évènements ainsi définie. De tels processus sont utilisés pour décrire l'arrivée des clients vers un système d'attente dans le cas où l'échelle de temps est discrète.

Le nombre d'évènements $N(t)$ réalisés dans [0,t] suit alors une loi binomiale de paramètre n et p_n :

$$P(N(t)=k)=C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k}, k\in\{0,\dots,n\}$$

Fixons maintenant le temps t. Si le nombre d'intervalles n tend vers l'infini, il en résulte que

$$P(N(t)=k)=C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k}\to\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$$

Le processus de Poisson est un processus limite d'une suite de processus de Bernoulli ayant la même intensité λ.

1-1-7 Processus de Poisson composé

Soit $(N(t))_{t\geq 0}$ un processus de Poisson d'intensité λ et $(Y_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, et indépendantes du processus $(N(t))_{t\geq 0}$.

Le processus$(X(t))_{t\geq 0}$ défini par

$$X(t)=Y_1+Y_2+\dots+Y_{N(t)}$$

est appelé processus de Poisson composé .

Caractéristiques

Soit $G_X(z,t)$ la fonction génératrice de $X(t)$ et $h_Y(z)$ celle de Y . Alors

$$G_X(z,t) = e^{\lambda t(h(z)-1)}$$

$$E\big(X(t)\big) = \lambda t E(Y_1)$$

$$Var\big(X(t)\big) = \lambda t E(Y_1^2)$$

Exemple 4

Dans un magasin, les clients arrivent selon un processus de Poisson avec intensité $\lambda = 10$ clients par heure .On suppose que les achats effectués par les clients sont des variables aléatoires i.i.d avec moyenne 30 et écart type 10. Le nombre moyen des ventes sur une période de 8 heure est

$$E\big(X(t)\big) = \lambda t\, E(Y_1) = 10 \times 8 \times 30 = 2400$$

1-1-8 **Comportement asymptotique**

Proposition 3

Lorsque t tend vers l'infini, on a les convergences suivantes :

$$\frac{N(t)}{t} \to \lambda$$

$$\sqrt{\frac{t}{\lambda}}\left(\frac{N(t)}{t} - \lambda\right) \to N(0,1)$$

1-1-9 Estimation de l'intensité d'un processus de Poisson

Soit $N(t)$ un processus de Poisson, dont l'intensité λ est le seul paramètre du modèle. En pratique λ est inconnu, on doit donc l'estimer.

Considérons le cas où le processus est observé jusqu'à l'instant$t$. L'idée est que lorsqu'on observe $N(t) = n$, les temps $S_1, S_2, .., S_n$ déterminent complètement la trajectoire du processus sur $[0, t]$.

La fonction de vraisemblance sera définie par

$$L(x_1, x_2, .., x_n, n, \lambda) = f(x_1, \dots, x_n) P(N(t) = n)$$

$$= \frac{n!}{t^n} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} = \lambda^n e^{-\lambda t}$$

On a $\log L = -\lambda t + n log \lambda$ et $\frac{\partial Log\ L}{\partial \lambda} = -t + \frac{n}{\lambda} = 0$

D'où la valeur de λ qui maximise la vraisemblance est $\hat{\lambda} = \frac{n}{t}$.

Ainsi l'estimation par le maximum de vraisemblance est donnée par $\frac{n}{t}$ et l'estimateur correspondant est obtenu en remplaçant n par $N(t)$. Donc

$$\hat{\lambda} = \frac{N(t)}{t}$$

Proposition 5

L'estimateur $\hat{\lambda}$ est sans biais, exhaustif et complet, c'est l'unique estimateur sans biais de variance minimum de λ.

1-2- Processus de Poisson non homogène

La différence entre un processus de Poisson homogène et un processus de Poisson non homogène réside dans le fait que les accroissements ne sont plus stationnaires.

Dans beaucoup d'application, il n'est pas réaliste de supposer que le taux moyen d'arrivée des évènements d'un processus de comptage $N(t)$ est constant. En pratique, ce taux dépend de t. Par exemple le taux moyen d'arrivée des voitures sur une autoroute fluctue entre son maximum aux heures de pointe et son minimum pendant les heures creuses.

Définition 5

Soit $(N(t))_{t\geq 0}$ un processus de comptage à accroissements indépendants. Ce processus est appelé processus de Poisson non homogène (ou non stationnaire) de fonction d'intensité $\lambda(t) \geq 0$ pour $t \geq 0$ si :

i- $N(0) = 0$,

ii- $P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$,

iii- $P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$

Remarque 3

La condition (ii) implique que le processus $(N(t))_{t\geq 0}$ ne possède pas des accroissements stationnaires.

Comme dans le cas particulier où le taux moyen d'arrivée des évènements est constant, on trouve que le nombre d'évènements qui se produisent dans un intervalle donné suit une loi de Poisson.

Proposition 6

Soit $(N(t))_{t\geq 0}$ un processus de Poisson non homogène de fonction d'intensité $\lambda(t)$. On a

$$P(N(s+t) - N(t) = n) = \frac{e^{-(m(s+t)-m(t))}(m(s+t) - m(t))^n}{n!} \quad \forall s, t \geq 0$$

Autrement dit $N(s+t) - N(t) \hookrightarrow \mathcal{P}(m(s+t) - m(t))$

Où $m(s) = \int_0^s \lambda(u)du$ est la fonction moyenne.

Très souvent, la fonction $m(t)$ est supposée continue et différentiable. Etant donné que $\lambda(t)$ est positive, la fonction $m(t)$ est aussi positive et non décroissante.

Exemples

- Fonction linéaire

Posons $\lambda(t) = 2t,\ \forall t \geq 0,$ alors $m(t) = t^2,\ t \geq 0$

- Fonction exponentielle

Si $\lambda(t) = \alpha e^{-\beta t},\ \alpha, \beta > 0,\ \forall t \geq 0,$ alors $m(t) = \frac{\alpha}{\beta}\left(1 - e^{-\beta t}\right),\ t \geq 0$

Proposition 7

Soit $(N(t))_{t\geq 0}$ un processus de Poisson non homogène de fonction d'intensité $\lambda(t)$. Alors la fonction génératrice de $N(t)$ est

$$\forall |z| \leq 1, \qquad G(z,t) = e^{m(t)(z-1)}$$

Avec $P(N(t) = n) = \frac{e^{-m(t)}(m(t))^n}{n!}$, $n \geq 0$ et $E\big(N(t)\big) = m(t)$.

Lorsque la fonction d'intensité $\lambda(t)$ est strictement positive, la fonction moyenne est alors strictement croissante. Dans ce cas

$$P(N(t) > 0) = 1 - P(N(t) = 0) = 1 - e^{-m(t)}$$

Proposition 8

Soit un processus de Poisson non homogène $(N(t))_{t\geq 0}$ de fonction moyenne $m(t)$.

Pour tout $t, s > 0$,

$$Var\big(N(t)\big) = E\big(N(t)\big) = m(t) \text{ et } Cov\big(N(t), N(s)\big) = m(min(t,s))$$

Exemple 5

Un magasin ouvre à 8h. De 8h à 10h, les clients arrivent selon un processus de Poisson d'intensité 4 par heure. De 10h à 12h, l'intensité est de 8 par heure. De 12h à 14h, l'intensité croit de 8 par heure (à midi) jusqu'à 10 par heure (à 14h). De 14h à 17h, l'intensité décroit de 10 par heure (à 14h) jusqu'à 2 par heure (à 17h). On souhaite connaitre la moyenne du nombre de clients qui entrent dans le magasin ce jour. On note $N_i(t)$ les processus de Poisson associés à chaque période.

Le nombre $N(t)$ de clients entrant avant l'instant t est un processus de Poisson non homogène. On calcule

$$E(N(17)-N(14))$$
$$= E\big(N_1(10)-N_1(8)\big)+E\big(N_2(12)-N_2(10)\big)+E\big(N_3(14)-N_3(12)\big) + E\big(N_4(17)-N_4(14)\big)$$

- $N_1(t)$ est un processus de Poisson d'intensité 4, donc $N_1(10)-N_1(8) \hookrightarrow \mathcal{P}(4\times 2)$ et $E\big(N_1(10)-N_1(8)\big)=8$

- $N_2(t)$ est un processus de Poisson d'intensité 8, donc $N_2(12)-N_2(10) \hookrightarrow \mathcal{P}(8\times 2)$ et

  $E\big(N_2(12)-N_2(10)\big)=16.$

- $N_3(t)$ est un processus de Poisson d'intensité 8+(t-12)= $t-4$, donc

$$E\big(N_3(14)-N_3(12)\big)=\int_{12}^{14}(t-4)dt=18$$

- $N_4(t)$ est un processus de Poisson d'intensité $10-\frac{8}{3}(t-14)=\frac{142}{3}-\frac{8}{3}t$, et donc

$$E\big(N_4(17)-N_4(14)\big)=\frac{1}{3}\int_{14}^{17}(142-8t)dt=18$$

Le nombre moyen de clients sur une journée est 8+16+18+18 = 60

1-2-1 Lois des inter-arrivées

Théorème 3

Soit $(N(t))_{t\geq 0}$ un processus de Poisson non homogène de fonction d'intensité $\lambda(t)$ et de fonction moyenne $m(t)$ alors :

$$f_{\tau_1}(t)=\lambda(t)e^{-m(t)}$$

$$f_{\tau_n}(t)=\int_0^{+\infty} e^{-m(t+s)}\,\lambda(t+s)\lambda(s)\frac{(m(s))^{n-2}}{(n-2)!}ds \qquad \forall t\in\mathbb{R}^+, \forall n\geq 2$$

Remarque 4

Lorsque $\lambda(t) = \lambda$, on retrouve les résultats du processus de Poisson homogène.

1-2-2 Superposition et décomposition

1- Superposition

Soit $\left(N_j(t)\right)_{t\geq 0}$ pour tout $\left(N_j(t)\right)_{t\geq 0}$ des processus de Poisson non homogènes de fonction moyenne $m_j(t)$ qui sont indépendants les uns des autres. Pour tout $t \geq 0$, posons

$N(t) = N_1(t) + N_2(t) + .. + N_r(t)$. Le processus $(N(t))_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson de fonction moyenne $m(t) = m_1(t) + m_2(t) + .. + m_r(t)$.

2- Décomposition

Considérons un processus de Poisson non homogène $(N(t))_{t\geq 0}$ de fonction moyenne $m(t)$. Soient $(p_1, .., p_r)$ un vecteur de probabilité tel que chaque évènement du processus a une probabilité p_j d'être du type j pour tout $j = 1,2, .., r$. Supposons que les attributions sont indépendants les uns des autres. Pour chaque j, les processus de comptage de type j, $\left(N_j(t)\right)_{t\geq 0}$ sont des processus de Poisson non homogène de fonction moyenne $m(t)p_j$ pour tout $j = 1,2, .., r$. De plus ils sont indépendants les uns des autres.

1-2-3 Processus de Poisson non homogène et loi uniforme

Soit $(N(t))_{t\geq 0}$ un processus de Poisson non homogène de fonction moyenne $m(t)$ conditionnellement à $N(t) = n$, les temps $S_1 < S_2 < .. < S_n$ dans l'intervalle [0,t] auxquels se sont produits les n évènements ont la même distribution que la statistique d'ordre de n variables aléatoires $U_1, U_2, .., U_n$ indépendantes et de même distribution.

$$f_{(S_1,..,S_n/N(t)=n)}(t_1, .., t_n) = \begin{cases} \dfrac{n!}{(m(t))^n} \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \lambda(t_i) & si \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n \leq t \\ 0 & si\ non \end{cases}$$

Cas particulier

Lorsque on a un seul évènement dans l'intervalle [0,t], la loi de S_1 conditionnellement à $N(t) = 1$ est

Pour $s \in [0,t]$,

$$P(S_1 \le s/N(t) = 1) = \frac{P(S_1 \le s,\ \ N(t) = 1)}{P(N(t) = 1)} = \frac{P(N(s) = 1,\ \ N(t) = 1)}{P(N(t) = 1)}$$

$$= \frac{P(N(s)=1,\ \ N(t)-N(s)=0)}{P(N(t)=1)} = \frac{e^{-m(s)}m(s)e^{-(m(t)-m(s))}}{e^{-m(t)}m(t)} = \frac{m(s)}{m(t)}$$

1-2-4 Processus de Poisson non homogène et loi binomiale

Soit $(N(t))_{t\ge 0}$ un processus de Poisson non homogène d'intensité $\lambda(t)$ et de fonction moyenne $m(t)$. Pour $s < t$ et pour $0 \le k \le n$, la loi de $N(s)$ sachant $N(t) = n$ est une loi binomiale de paramètres n et $\frac{m(s)}{m(t)}$.

Exemple 5

Un restaurant ouvre à 8h du matin et ferme à 17h. Les arrivées constituent un processus de Poisson non homogène avec une intensité $\lambda(t)$ donnée par

$$\lambda(t) = \begin{cases} 5 + 5t & 0 \le t \le 3 \\ 20 & 3 \le t \le 5 \\ 20 - 2(t-5) & 5 \le t \le 9 \end{cases}$$

La probabilité qu'aucun client n'arrive à 8h 30 mn sachant que deux clients sont arrivés à 9h 30mn est

$$P\left(N\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \middle/ N\left(\frac{3}{2}\right) = 2\right) = \frac{m(\frac{1}{2})}{m(\frac{3}{2})}$$

Avec $m\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \lambda(u)du = \int_0^{\frac{1}{2}} (5+5u)du = \frac{25}{8}$ et

$$m\left(\frac{3}{2}\right) = \int_0^{\frac{3}{2}} \lambda(u)du = \int_0^{\frac{3}{2}} (5+5u)du = \frac{105}{8}$$

Références

1- Lefebver, M.(2005). Applied Stochastic processes. Edition Springer.

2- Foata, D. & Fuchs, A. (2004). Processus stochastique : Processus de Poisson, chaîne de Markov et martingales. Edition Dunod.

3- Caumel, Y. (2011). Probabilités et processus stochastique. Edition Springer.

4- Ruegg, A. (1989). Processus stochastiques : avec applications aux phénomènes d'attente et de fiabilité. Presses polytechniques romandes.

5- Bassel, S. (2006).Processus stochastiques pour l'ingénieur. Presses polytechniques romandes.