Université Mohamed Khider - Biskra
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département de Mathématiques
Concours d'accès à la formation $3^{ème}$ Cycle 2012/2013 : Mathématiques

Epreuve d'Analyse (durée : 1H30)

Exercice 1 (02 points)
Etudier la convergence de la série : $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.

Exercice 2 (06 points)
1) Soit C l'espace des fonctions continues réelles sur $[0,1]$ muni de la métrique $d_1(f,g)=\int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx$, puis de la métrique $d_\infty(f,g)=\sup_x |f(x)-g(x)|\,dx$. Vérifier que l'application $f\rightarrow \int_0^1 |f(x)|\,dx$ de C dans $\mathbb{R}$ est $1-$*lipschitzienne* dans les deux cas.

2) Soit S l'espace des suites réelles convergentes, muni de la métrique $d(x,y)=\sup_n |x(n)-y(n)|$. Si on désigne par $\ell(x)$ la limite de la suite x, montrer que ℓ est une application continue de S dans $\mathbb{R}$. En déduire que S_0 est fermé dans S.

Exercice 3 (06 points)
1) Montrer que si $a\geq 0$, $b\geq 0$ et $0\leq\lambda\leq 1$, alors

$$a^\lambda b^{1-\lambda}\leq \lambda a+(1-\lambda)\,b.$$

2) Soit $p>1, q<\infty$ tel que $p^{-1}+q^{-1}=1$ et soit $x=\{\xi_i\}$ et $y=\{\eta_i\}$ dans l'espace ℓ_p et ℓ_q. Utiliser l'inégalité précidente pour démontrer que

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i\eta_i|\leq \|x\|_p\,\|y\|_q\,.$$

Exercice 4 (06 points)
Soient f, $f_n\in L^2(\mu)$, on dit que f_n converge vers f faiblement si

$$\lim_{n\to\infty}\int (f_n-f)\,g\,d\mu=0 \qquad \text{pour tout } g\in L^2(\mu) \quad \text{et } \sup\|f_n\|_2<\infty.$$

1) Montrer que si $f_n\to f$ dans L^2, alors $f_n\to f$ faiblement, mais que la réciproque est fausse.
2) Montrer que si $X=[a,b]$ où a et b sont finis, alors $f_n\to f$ faiblement si et seulement si

$$\int_a^x f_n dt\to\int_a^x f\,dt,\quad \forall x\in[a,b] \quad \text{et} \quad \sup\|f_n\|_2<\infty.$$

Université Mohamed Khider - Biskra
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département de Mathématiques
Concours d'accès à la formation $3^{ème}$ Cycle 2012/2013 : Mathématiques

Epreuve d'Analyse (durée : 1H30)

Exercice 1 (02 points)
Etudier la convergence de la série : $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$.

Exercice 2 (06 points)
1) Soit $a, b \geq 0$ et soit $p, q \in (1, +\infty)$ tel que $p^{-1} + q^{-1} = 1$ (on dit que p et q sont conjugués au sens de Young). Montrer l'inégalité de Young :

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

On pourra considérer la fonction $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(a) = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q - ab$.

2) Soient p et q dans $[1, +\infty]$ (pas nécessirement conjugués). Montrer que si f appartient à $L^p \cap L^q$, alors f appartient à L^r pour tout r compris entre p et q.

3) Montrer que si f appartient à L^p et g appartient à L^q avec $p^{-1} + q^{-1} = r^{-1}$, alors $f.g$ appartient à L^r et

$$\|f.g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Exercice 3 (06 points)
On définit une suite de polynômes $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ par :

$$S_0 = 1, \quad S_1 = 2X \quad \text{et} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad S_{n+2} = 2XS_{n+1} - S_n.$$

1) Calculer S_2, S_3, S_4.
2) Dérerminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les valeurs de $\alpha_n = S_n(0)$, de $\beta_n = S_n(1)$ et de $\gamma_n = S_n(-1)$.
3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est de degré n, et déterminer une expression de d_n, le coefficient dominant de S_n.
4) Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N} : \forall\theta \in \mathbb{R}$, $S_n(\cos(\theta))\sin(\theta) = \sin((n+1)\theta)$.
5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que S_n est le seul polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ pour lequel :

$$\forall\theta \in \mathbb{R}, \; P(\cos(\theta))\sin(\theta) = \sin((n+1)\theta).$$

6) A l'aide de la relation obtenue en (4), retrouver les valeurs de α_n et de β_n.

Exercice 4 (06 points)
A partir du polynôme d'interpolation de degré 1 passant par les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$.

1) Obtenir les formules aux differences avant et arrière pour le calcul de $f'(x)$.

2) La dérivée de $f(x) = exp(x)$ en $x = 0$ est égale à 1. Comparer ce résultat avec ceux que l'on obtient par les differentes formules aux différences (obtenues en 1) en prenant $h = 0.1$.

Université Mohamed Khider - Biskra
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département de Mathématiques
Concours d'accès à la formation $3^{ème}$ Cycle 2012/2013 : Mathématiques

Epreuve d'Analyse (durée : 1H30)

Exercice 1 (02 points)
Etudier la convergence de la série : $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.

Exercice 2 (06 points)
On considère le problème :

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad 0 < x < 1 \\ \\ u(0) = a, \quad u(1) = b \end{cases} \tag{1}$$

où $c \in C([0,1], R)$, et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
1) Donner la discrétisation par différences finies pour le problème (1). On appelle U_h la solution approchée (c.à.d. $U_h = (u_1, \cdots, u_N)^t$, où u_i est l'inconnue discrète en x_i (*i.e.*, $u_i = u(x_i)$).

2) On suppose ici que $c = 0$. Montrer que $u_i \geq min(a,b)$, pour tout $i = 1, \cdots, N$

Exercice 3 (06 points)
Soient $p, q, r \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $p^{-1} + q^{-1} = r^{-1}$. Soient

$$f \in L^p(\mathbb{R}) = L^p(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda) \quad \text{et} \quad g \in L^q(\mathbb{R}).$$

Montrer que $fg \in L^r(\mathbb{R})$ et que

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |fg|^r \, d\lambda\right)^{1/r} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p \, d\lambda\right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}} |g|^q \, d\lambda\right)^{1/q}.$$

Exercice 4 (06 points)
Soit $f : I \to I$ continue tel que $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ et soit $G = \{(x,y) \in I \times I \mid x \leq y\}$

$$\begin{aligned} F &: I \to I \times I \\ x &\to F(x) = (x, f(x)). \end{aligned}$$

1) Montrer que $F(I)$ est connexe dans $I \times I$.

2) Montrer que si $C_G \cap F(I) \neq \phi \Longrightarrow \exists x \in I$ tel que $f(x) = x$.

Université Mohamed Khider - Biskra
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département de Mathématiques
Concours d'accès à la formation $3^{ème}$ Cycle 2012/2013 : Mathématiques

Epreuve d'Analyse (Corrigé-type)

Exercice 1 (02 points)
Etudie de la convergence de la série : $S_n = \sum_{n\geq 1} U_n : U_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.

D'après la règle de Cauchy : $\sqrt[n]{U_n} = \frac{n}{n+1} \to 1$ (quand $n \to \infty$). Or il suffit de remarquer que le terme générale de la série $U_n \to e^{-1} \neq 0$, en effet $U_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \to e^{-1} \neq 0$, donc la série est divergente.

Exercice 2 (06 points)
On considère le problème :

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), & 0 < x < 1 \\ u(0) = a, \quad u(1) = b \end{cases} \tag{2}$$

où $c \in C([0,1], R)$, et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

1) Donner la discrétisation par différences finies pour le problème (1). On appelle U_h la solution approchée (c.à.d. $U_h = (u_1, \cdots, u_N)^t$, où u_i est l'inconnue discrète en x_i (*i.e.*, $u_i = u(x_i)$).

2) On suppose ici que $c = 0$. Montrer que $u_i \geq min(a,b)$, pour tout $i = 1, \cdots, N$

Exercice 3 (06 points)
Soient $p, q, r \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $p^{-1} + q^{-1} = r^{-1}$. Soient

$$f \in L^p(\mathbb{R}) = L^p(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda) \quad \text{et} \quad g \in L^q(\mathbb{R}).$$

Montrer que $fg \in L^r(\mathbb{R})$ et que

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |fg|^r \, d\lambda\right)^{1/r} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p \, d\lambda\right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}} |g|^q \, d\lambda\right)^{1/q}.$$

Exercice 4 (06 points)
Soit $f : I \to I$ continue tel que $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ et soit $G = \{(x,y) \in I \times I \mid x \leq y\}$

$$\begin{aligned} F &: I \to I \times I \\ x &\to F(x) = (x, f(x)). \end{aligned}$$

1) Montrer que $F(I)$ est connexe dans $I \times I$.

2) Montrer que si $C_G \cap F(I) \neq \phi \Longrightarrow \exists x \in I$ tel que $f(x) = x$.