Chapitre 4
Validation des modèles $ARMA$

On dit qu'un modèle est un modèle candidat, lorsque les résidus du modèle proposé pour modéliser l'évolution temporelle des données, forment un bruit blanc. Etant donnée une série chronologique, plusieurs modèles peuvent être proposés comme cadres mathématiques censés refléter l'évolution de la série. Il faut d'abord valider ces modèles, ensuite comparer la qualité de ces modèles relativement à certains **critères**.

Soit un modèle $ARMA(p,q)$: $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \epsilon_{t-q}$.

Si $q = 0$, les estimateurs $\widehat{\underline{\phi}}_T$ de Yule-Walker du vecteur $\underline{\phi}$ des param processus $AR(p)$ sont tels que, pour T grand

$$\sqrt{T}(\widehat{\underline{\phi}}_T - \underline{\phi}) \overset{\text{Asymptotiquement}}{\sim} \mathcal{N}(0_{\mathbb{R}^p}, \sigma_\epsilon^2 \Gamma_p^{-1})$$

où $\Gamma_p = (\gamma_{i-j})_{\substack{1\le i\le p \\ 1\le j\le p}}$, $\underline{\phi} = (\phi_1, \cdots, \phi_p)'$

On admettra que pour $p > 0$ et $q > 0$, le vecteur $\underline{\beta} = (\underline{\phi}', \underline{\theta}')'$ où $\underline{\theta} = (\theta_1, \cdots, \theta_q)'$ est tel que l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\underline{\beta}}_T$ de $\underline{\beta}$ vérifie $\sqrt{T}(\widehat{\underline{\beta}}_T - \underline{\beta}) \overset{\text{Asymptotiquement}}{\sim} \mathcal{N}(0_{\mathbb{R}^{p+q}}, V(\underline{\beta}))$. On admettra que $V(\underline{\beta})$ est l'inverse de l'espérance de la matrice Hessienne. Pour un modèle $AR(p)$, $V(\underline{\beta}) = \sigma_\epsilon^2 \Gamma_p^{-1}$. Les éléments diagonaux de $V(\underline{\beta})/T$ sont les variances des différentes composantes de $\widehat{\underline{\beta}}_T$. Ainsi, la $j-$ème composante de $\widehat{\underline{\beta}}_T$, notée $\widehat{\beta}_j$ vérifie $\frac{\sqrt{T}(\widehat{\beta}_j - \beta_j)}{\sqrt{(V(\underline{\beta}))_{jj}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$. Et $\frac{\sqrt{T}(\widehat{\beta}_j - \beta_j)}{\sqrt{(\widehat{V}(\widehat{\underline{\beta}}))_{jj}}}$ $\sim$Student à $(T-p-q)$ degrés de liberté.

1 Détermination de l'ordre du modèle $ARMA$

Etant donnée une série chronologique On calcule la fonction d'autocorrélation empirique et la fonction d'autocorrélation partielle empirique. Elles permettent de déterminer un modèle a priori pour la série de données. Voir chapitre 3 où les autocorrélations empiriques et les autocorrélations partielles empiriques et leurs lois de probabilité asymptotiques ont été données ainsi que les tests d'hypothèses que l'on peut effectuer.

2 Tests sur les paramètres

On effectue un test de significativité sur le paramètre ϕ_p.

- On teste $H_0 : \phi_p = 0 \quad vs \quad H_1 : \phi_p \neq 0$.

- La statistique de test sous H_0 est $\frac{\sqrt{T}(\widehat{\phi}_p - 0)}{\sqrt{(\widehat{V}(\widehat{\underline{\phi}}))_{pp}}} \sim t_{T-p-q}$ de Student à $(T - p - q)$ degrés de liberté.
- Si $\phi_p \neq 0$ alors l'ordre du polynôme autorégressif est bien p. Sinon, il est inférieur ou égal à p.
- On procède de la même manière pour les autres paramètres.

Exemple
Une variable notée PF_t a été observée annuellement de 1951 à 1969. Pour modéliser son évolution empirique le modèle suivant a été proposé

$$PF_t = \underset{(0.992)}{2.033} + \underset{(0.127)}{0.273} PF_{t-1} - \underset{(0.099)}{0.521} PF_{t-2} + \underset{(0.119)}{0.121} PF_{t-3} + \epsilon_t$$

entre parenthèses figurent les écarts-type.
Tester la significativité de chaque coefficient.

3 Tests sur les résidus du modèle

3.1 Test d'absence d'autocorrélation

- Les résidus du ou des modèles choisis forment-ils un bruit blanc ? On commence par effectuer un test d'absence d'autocorrélation. Les tests de Box-Pierce et Box-Ljung ont été étudiés dans le chapitre 2, page 13.

3.2 Test de nullité de la moyenne des résidus

- On effectue ensuite un test de nullité de la moyenne des résidus.

  On considère le modèle $\epsilon_t = \mu + u_t$.

  On teste $H_0 : \mu = 0 \quad vs \quad H_1 : \mu \neq 0$.

  La statistique de test sous H_0 est $t^* = \frac{\sqrt{T}\overline{\epsilon}_T}{\sqrt{\sum_{t=1}^{T} \frac{\widehat{\epsilon}_t^2}{T}}}$ où $\overline{\epsilon}_T = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\widehat{\epsilon}_t$. t^* ∼Student à $(T - p - q)$-ddl.

  Si on accepte H_0 alors les résidus du modèle sont bien centrés.

3.3 Test d'homoscédasticité des résidus

- Pour montrer que les résidus du modèle ont une variance constante, on effectue un test d'hétéroscédasticité. Il en existe plusieurs. Nous étudions un seul test : le test $ARCH$.

  Le test $ARCH$ de Engle (1982) :

Il est basé sur le modèle

$$\widehat{\epsilon}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \widehat{\epsilon}_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_p \widehat{\epsilon}_{t-p}^2 + v_t \tag{1}$$

où $\{\widehat{\epsilon}_t^2, t = 1, ..., T\}$ sont les résidus au carré d'un modèle $ARMA$ proposé.

On teste $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p \quad vs \quad H_1 : \exists j \in \{1, ..., p\}; \alpha_j \neq 0$

On calcule le R^2 associé au modèle (1). La règle de décision est alors :
- Si $TR^2 < \chi_p^{2,\alpha}$ on accepte l'hypothèse d'homoscédasticité des résidus. ($\chi_p^{2,\alpha}$ est le fractile d'ordre $1 - \alpha$ de la loi du χ^2 à p-ddl.

3.4 Test de normalité des résidus

On peut effectuer le test de Jarque et Bera. Notons $\mu_k = E(\epsilon_t^k)$ les erreurs étant supposées centrées. L'équivalent empirique de μ_k est noté $\widehat{\mu}_k$.

On teste H_0 :'les résidus sont gaussiens' $\quad vs \quad H_1$:'les résidus ne sont pas gaussiens'.

La statistique de test est $JB = \frac{6}{T}(\frac{\widehat{\mu}_3}{(\widehat{\mu}_2)^{3/2}})^2 + \frac{24}{T}(\frac{\widehat{\mu}_4}{(\widehat{\mu}_2)^2} - 3)^2 \sim \chi_2^2$

$\frac{\widehat{\mu}_3}{(\widehat{\mu}_2)^{3/2}}$ est le coefficient d'asymétrie et $\frac{\widehat{\mu}_4}{(\widehat{\mu}_2)^2}$ est le coefficient d'aplatissement. Un calcul simple montre que, si la loi de probabilité d'une v.a. est gaussienne , alors $\frac{\mu_4}{(\mu_2)^2} = 3$.

Une fois les tests sur les résidus effectués, il faut choisir un modèle parmi tous les modèles candidats. Pour cela les critères suivants sont utilisés :

4 Les critères de choix de modèles

4.1 Les critères standards

Ils sont fondés sur le calcul de l'erreur de prévision $\widehat{\epsilon}_t = X_t - \widehat{X}_t$.

4.1.1 Erreur absolue moyenne (Mean absolute error)

$$MAE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} |\widehat{\epsilon}_t|$$

4.1.2 Racine de l'erreur quadratique moyenne (Root Mean Squared Error)

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \widehat{\epsilon}_t^2}$$

4.1.3 Ecart absolu moyen en pourcentage (Mean absolute Percent Error)

$$MAPE = 100\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left|\frac{\widehat{\epsilon}_t}{X_t}\right|$$

T est le nombre des observations de la série étudié $\{X_t\}$ et $\{\widehat{\epsilon}_t\}$ sont les résidus estimés du modèle. Plus la valeur de ces critères est faible meilleur est le modèle estimé proposé.

4.2 Les critères d'information

Ces critères sont fondés sur la quantité d'information de Kullback.

4.2.1 Le critère d'information d'Akaike (1969)

$$AIC = \log\widehat{\sigma}^2_{\widehat{\epsilon}} + \frac{2(p+q)}{T}$$

4.2.2 Le critère d'information bayesien d'Akaike (1977) ou de Schwarz (1978)

$$BIC = \log\widehat{\sigma}^2_{\widehat{\epsilon}} + (p+q)\frac{\log T}{T}$$

4.2.3 Le critère d'information de Hannan-Quinn (1979)

$$\begin{aligned} HQ &= \log\widehat{\sigma}^2_{\widehat{\epsilon}} + \alpha(p+q)\log\frac{\log T}{T} \\ \alpha, (\alpha &> 2) \text{ est une constante} \end{aligned}$$

Il s'agit de choisir le modèle qui minimise ces critères. Le critère le plus utilisé est AIC. Mais il tend à surdimensionner un modèle.

Une fois le modèle choisi, on effectue des prévisions (voir Chapitre 3).