Université Kasdi Merbah, Ouargla
Faculté de mathématiques et sciences des matériaux
Module: Calcul stochastique
TD N$^{\circ -}$2 Martingale discrets

Département de Mathématiques
Master-1.
Probabilités et statistique
2022/2023

Exercice 1

Que dire d'une martingale (resp sous martingale , sur-martingale) par rapport à une filtration constatnte?

Exercice 2

Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ une filtration et $(M_n)_{n\geq 0}$ un processus tel que M_n est $\mathcal{F}_n-$mesurable pour tout $n \geq 0$. Montrer que $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale ssi

$$\mathbb{E}\left(M_{n+1} - M_n \middle| \mathcal{F}_n \right) = 0$$

Exercice 3

Soit $(M_n)_{n\geq 0}$ une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ et soit $\mathcal{G}_n = \sigma\left(M_0, ..., M_n\right)$. Montrer que $(M_n)_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{G}_n)_{n\geq 0}$ $-$martingale.

Exercice 4

Soit M_1, $M_2, ...$ de variable aléatoire indépendantes et de méme loi. On note $m = \mathbb{E}\left(M_n\right) < \infty$ aissi que $\mathcal{F}_n = \sigma\left(M_0, ..., M_n\right)$ et

$$N_n :\ = \sum_{i=1}^{n} iM_i - \frac{n\left(n+1\right)}{2} m.$$

Calculer $\mathbb{E}\left(N_n \middle| \mathcal{F}_{n-1} \right)$. Que peut dire du processus $(N_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 5

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite des variable aléatoire indépendantes idéntiquement distributées tells que

$$\mathbb{P}\left(X_1 = 1\right) = \mathbb{P}\left(X_1 = -1\right) = \frac{1}{2}.$$

Pour $n \geq 0$ on note $\mathcal{F}_n = \sigma\left(X_1, ..., X_n\right)$ $\left(\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}\right)$ et on note

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Montrer que $\left(S_n^2 - n\right)_{n\geq 0}$ est une martingale par rapport a $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 6

Soit $(X_i)_{i=1}^{i=N}$ une suite des variable aléatoire indépendantes tel que

$$\mathbb{P}\left(X_i = 1\right) = p \text{ et } \mathbb{P}\left(X_i = -1\right) = 1 - p,$$

avec $0 < p < \frac{1}{2}$. Monter que

$$M_n = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\sum_{i=1}^{i=n} X_i} \quad \text{tel que } M_0 = 1,$$

est une sous-martingale par rapport a $\mathcal{F}_n = \sigma\left(X_1, ..., X_n\right)$.

Exercice 7

Soit $(M_n)_{n\geq 0}$ une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_n$, et soit Θ une fonction convexe telsque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Theta\left(M_n\right)$ $-$est intégrable, i.e. $\mathbb{E}\left(\left|\Theta\left(M_n\right)\right| < \infty\right)$. Alors $\left(\Theta\left(M_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale.