U.H.B.C. Chlef (22.10.1442≡03.06.2021) Année Universitaire: 2020/2021
Faculté des Sciences Exactes et Informatique Niveau: $1^{ère}$ Master/ Option: M.A.S.
Département des Mathématiques Module: Processus Stochastiques 1.

EXAMEN DE RATTRAPAGE (1 HEURE)

Toute réponse non justifiée =0

Exercice 1 :

Choisir la (les) bonne (s) réponse(s) en la (les) justifiant, et donner un contre exemple pour la (les) réponse(s) fausse(s).

1. Supposons que toutes les classes d'une chaîne de Markov sont récurrente, et soient i, j deux états tels que $i \to j$. Alors

   1 (a) Pour chaque état k, soit $i \to k$ soit $j \to k$;
   2 (b) $j \to i$;
   1 (c) $P_{ij} > 0$ ou $P_{ji} > 0$;
   1 (d) $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} < \infty$;
   (e) Aucune réponse n'est vraie.

2. Dans une chaîne de Markov à n états ($n \in \mathbb{N}$),

   1 (a) toutes les classes sont fermées;
   1 (b) au oins un état est transitoire;
   1 (c) pas plus de la moitié de tous les états sont transitoires;
   2 (d) il existe au plus n classes;
   (e) Aucune réponse n'est vraie.

Exercice 2:

Considérons une chaîne de Markov $\{X_n; n = 0, 1, 2, ...\}$ d'espace d'état $E = \{0, 1, 2, 3\}$, donnée par la matrice de transition:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.7 & 0 \\ 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2 1. Tracer le diagramme des transitions de cette chaîne.

1 2. La chaîne est-elle irréductible? Commenter sur l'étude de la chaîne à long terme.

1 3. Trouver les états récurrents, transitoires et absorbants de cette chaîne.

3 4. Calculer les proportions du temps de séjour dans les états: "0","2" et "3" à long terme.

2 5. En moyenne, combien de temps faut-il pour atteindre **pour la première fois** l'état "0" en démarrant de l'état "2".

1 6. En moyenne, combien de temps faut-il pour atteindre **pour la première fois** l'état "1" en démarrant de l'état "3".

Processus Stoch. 1. Master1 / MAS

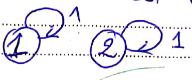
Nom & Prénom :	اللقب و الإسم:
Niveau : 2020/2021	المستوى:
Groupe :	الفوج:
N° d'inscription :	رقم التسجيل:
Examen de :	إمتحان في مادة:

Corrigé type. Examen de Rattrapage.

$\boxed{\text{Exo 1}}$

1 $\boxed{1}$ La réponse correcte est (b).

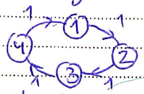
1 (a) Fausse.



Prenons : $i = j = 1$ et $k = 2$.

1 (b) Vraie : Les classes récurrentes sont fermées, donc i et j appartiennent à la m̂. classe de communication, Par conséquent $j \longrightarrow i$.

1 (c) Fausse



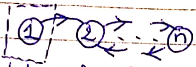
Prenons : $i = 1$ et $j = 3$

1 (d) Fausse. $\sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{(n)} < \infty$ veut dire que j est transitoire et ceci contredit la récurrence de toutes les classes de la c.m.

(e) Fausse car (b) est vraie.

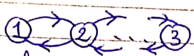
1 $\boxed{2}$ La vraie réponse est (d).

1 (a) Fausse :



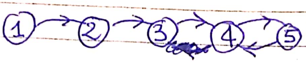
n'est pas fermée.

1 (b) Fausse



Tous les états sont récurrents.

1 (c) Fausse



(n=5)

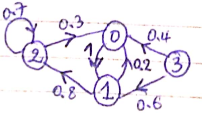
∃ 3 états transitoires.

1 (d) Vraie Chaque état peut être une classe et comme il y a n états, donc au plus il existe n classes.

(e) Fausse car (d) est vraie.

Exo 2

2 (1)



0,5 (2) La C.M. n'est Irréductible, car l'état (3) ne communique pas avec les autres états.

(2/5)

0,5

Commentaire: On voit que la C.M. visite l'état 3 ~~dans~~ seulement si $X_0 = 3$ et ce sans retour. Par conséquent, à long terme la C.M. bascule entre les états 0, 1 et 2. i.e. à long terme, on ne tiendra pas l'état 3 en considération et on se restreindra à l'espace $E_1 = \{0, 1, 2\}$.

1

(3) Les états récurrents: 0, 1 et 2.
Les états transitoires: 3
Les états absorbants: n'existent pas.

(4) Posons $\pi_j = \lim P_{ij}^{(n)}$.

* Pour l'état 3, d'après le commentaire ci-dessus,
La proportion du temps de séjour dans l'état 3 $= \boxed{0}$

0,75

0,25

($\pi_3 = 0$ (état transitoire))

0,75

* Pour l'état 2, La proportion du temps de séjour $= \pi_2$.

0,75

* De même pour l'état 0 $\longrightarrow \pi_0$.

Calcul de π_0, π_2

(3/5)

Les éq^s de la balance :

$$ {}^t\pi \cdot P_{E_1} = {}^t\pi \quad , \quad {}^t\pi = (\pi_0 \ \pi_1 \ \pi_2). $$

$$ P_{E_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}8 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}7 \end{pmatrix} $$

On aura le système : $\begin{cases} 0.2\,\pi_1 + 0.3\,\pi_2 = \pi_0 \\ \pi_0 = \pi_1 \\ 0.8\,\pi_1 + 0.7\,\pi_2 = \pi_2 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$

On obtient comme solution unique :

$$ {}^t\pi = \begin{array}{ccc} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 \\ \left(\tfrac{3}{14} \right. & \tfrac{3}{14} & \left. \tfrac{8}{14} \right) \end{array} $$

0,5

(5) $T_{2,0} := \min\{ n \geq 1 ,\ X_n = 0 \,/\, X_0 = 2 \}$.

On cherche $\mathbb{E}\, T_{2,0}$.

Cherchons d'abord la loi de $T_{2,0}$:

$T_{2,0}(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

$$ \mathbb{P}(T_{2,0} = n) = \mathbb{P}\Big(X_0 = 2,\ \overbrace{X_1 \neq 0, X_2 \neq 0, \dots, X_{n-1} \neq 0}^{X_k \neq 0 ;\ k \in 1..(n-1)},\ X_n = 0 \Big) $$

D'après le diagramme, si $X_0 = 2$, alors $X_k \neq 0 \iff X_k = 2$

(4/5)

Donc :

$$\mathbb{P}(T_{2,0}=n) = P_{22}^{n-1} \cdot P_{20} \quad ; \quad P_{22}=0.7, \; P_{20}=0.3$$

i.e. $T_{2,0} \sim \mathcal{G}(P_{2,0})$.

$$\mathbb{E}\,T_{2,0} = 1/P_{20} = 1/0.3$$

$$\boxed{\mathbb{E}\,T_{2,0} = 10/3}$$

(1,5) (0,5)

(6) $T_{3,1} := \min\{n \geq 1,\; X_n = 1 / X_0 = 3\}$.

D'après le diagramme ; $T_{3,1}$ à 2 valeurs possibles : 1 si $3 \xrightarrow{P_{31}} 1$ est réalisée et 2 si $3 \xrightarrow{P_{30}} 0 \xrightarrow{P_{01}} 1$ est réalisée

C'est-à-dire l'état 1 est atteint depuis 3, soit par une seule transition $(3 \to 1)$ soit par 2 transitions $(3 \to 0 \to 1)$

$T_{3,1}=n$	1	2	Σ
$\mathbb{P}(T_{3,1}=n)$	P_{31} 0.6	$P_{30}P_{01}$ 0.4	1

(0,75)

$$\mathbb{E}\,T_{3,1} = 1 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.4$$

$$\boxed{\mathbb{E}\,T_{3,1} = 1,4}$$

(0,25)

(5/5)