Faculté des Mathématiques **USTHB 2019/2020**

Master 1 SPA Module: **Calcul Stochastique**

Série 1

Rappels de Théorie de la Mesure et Probabilités

Exercice 1 *Soit*

$$f_{X,Y}(x,y) = e^{-y}(1-e^{-x})\ 1_{[0,y]}(x)1_{[0,\infty[}(y) + e^{-x}(1-e^{-y})\ 1_{[0,x]}(y)1_{[0,\infty[}(x)$$

1) Montrer que $f_{X,Y}$ est une densité.
2) Trouver les marginales de X et Y.
3) Calculer $\mathrm{E}[Y \mid X=x]$; $x>0$.
4) Déduire $\mathrm{E}[Y \mid X]$ et $\mathrm{E}[Y]$.

Exercice 2 *Soit X une v.a. de loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$.*
1) Déterminer la loi de $Y=e^X$.
2) Calculer $\mathrm{E}(Y)$ et $\mathrm{V}(Y)$.

Exercice 3 *Soit $X:\Omega\to[0,+\infty)$ une variable aléatoire de carré intégrable et F la fonction de répartition de X.*
1) Montrer que $n^2\mathrm{P}(X>n)\to 0$ quand $n\to\infty$.
2) Pour $a>0$, montrer que $\int_0^a t^2 \mathrm{d}F(t) = -a^2(1-F(a)) + 2\int_0^a t(1-F(t))\mathrm{d}t$.
3) Déduire que $\mathrm{E}(X^2) = 2\int_0^\infty t\mathrm{P}(X>t)\mathrm{d}t$.

Exercice 4 *On note $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ la tribu de Borel sur $\mathbb{R}$ et on considère une mesure positive μ définie sur $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ et finie sur les compacts. Pour $a\in\mathbb{R}$, on définit*

$$F_a(t) = \begin{cases} \mu([a,t[) & si\ \ t>a, \\ -\mu([t,a[) & si\ \ t\le a. \end{cases}$$

Montrer que F_a est croissante et continue à gauche.
Ind: Pour la continuité à gauche, prendre une suite croissante $(t_n)_{n\ge1}$ vers t_0 et utiliser le fait que $[a,t_0[=\cup_{n\ge1}[a,t_n[$.

Exercice 5 *Soient $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ un espace de mesure, g une fonction mesurable positive. On définit*

$$\lambda(A) = \int_A g\ d\mu, \qquad \forall A\in\mathcal{F}$$

Montrer que λ est une mesure positive sur $(\Omega,\mathcal{F})$ et que pour toute fonction f mesurable:

$$\int_A f\ d\lambda = \int_A fg\ d\mu, \qquad \forall A\in\mathcal{F}$$

Exercice 6 *Soient $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ un espace de mesure, f une fonction intégrable et $\{A_n\}$ une suite d'ensembles mesurables tels que $\mu(A_n)\to 0$.*
1) Montrer que la suite $f\cdot I_{A_n}$ converge en mesure vers 0.
2) Montrer que: $\lim_{n\to\infty}\int_{A_n} f\ d\mu = 0$.
3) En déduire que: $\lim_{n\to\infty}\int_{\{|f|>n\}} f\ d\mu = 0$.

Exercice 7 *Déterminer la limite des suites: $I_n = \int_0^1 \frac{n}{1+x^2}\tanh\left(\frac{x}{n}\right)dx$, $J_n = \int_0^1 \frac{ne^{-x}}{nx+1}dx$, $K_n = \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx$.*
Ind: Utilser le DL de $\tanh$ au voisinage de 0 pour trouver la limite de $f_n(x) = \frac{n}{1+x^2}\tanh\left(\frac{x}{n}\right)$, puis utiliser le Théorème de Convergence Dominée. Pour J_n utiliser le Lemme de Fatou. Pour K_n notons que $\ln(1+t)\le t$ pour $t>-1$.