

Esperance Conditionnelle

Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace probabilisé. La probabilité conditionnelle d'un événement $B \in \mathcal{F}$ avec $P(B) > 0$ est $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

La proba conditionnelle $P(A|B)$ représente la probabilité que A se réalise sachant que B s'est réalisé.

$$E[X] = \int_{\Omega} X dP(\cdot)$$

$$E[X|B] = \int_{\Omega} X dP(\cdot|B).$$

$$\text{Si } X = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i}$$

$$E[\mathbb{1}_A|B] = \int_{\Omega} \mathbb{1}_A dP(\cdot|B) = \int_{\Omega} dP(\cdot|B) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$X = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i}$$

L'application $A \rightarrow P(A|B)$ définit une nouvelle proba sur \mathcal{F} .

On peut alors définir l'espérance conditionnelle par rapport à B par $E[X|B] = \frac{1}{P(B)} E[X \mathbb{1}_B]$.

Now fixons maintenant une sous-tribu $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$

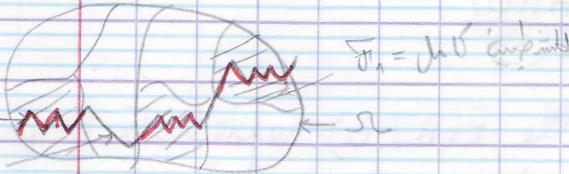
\mathcal{F}_1 : représente une information partielle sur l'espace (Ω, \mathcal{F}, P) obtenue par exemple en observant une v.a.r X_1 .

Définition : Soit X une v.a.r sur (Ω, \mathcal{F}, P) telle que $E|X| < +\infty$. On appelle espérance conditionnelle de X sachant \mathcal{F}_1 et on note $E[X|\mathcal{F}_1]$.

toute o.a.Y satisfaisant les deux conditions

1] $Y \in \mathbb{F}_n$ c.-à-d Y est \mathbb{F}_n -mesurable.

2] $\forall A \in \mathbb{F}_n$, on a $\int_A X dP = \int_A Y dP$ (I)



Si Z est une o.a.r sur (Ω, \mathbb{F}, P) alors on note

$E[X | \sigma(Z)]$ par $E[X | Z]$.

Theoreme

1] L'espérance conditionnelle $E(X | \mathbb{F}_n)$ existe

2] " " est unique dans le sens que si Y et Y' sont deux versions de $E(X | \mathbb{F}_n)$ alors $Y = Y'$ presque sûrement.

3] On a $E[E(X | \mathbb{F}_n)] = E[X]$ et $E[|E(X | \mathbb{F}_n)|] \leq E|X|$

Démonstration :

Commengons par 3]. Soit $Y = E[X | \mathbb{F}_n]$.

Si $A = \Omega$ dans (I).

$$\int_X dP = \int_{\Omega} Y dP = E[X] = E[Y]$$

$$\text{Si } Y = E[X | \mathbb{F}_n] \rightarrow E[X] = E[E(X | \mathbb{F}_n)]$$

\mathbb{F}_n -mes

$$\forall A \in \mathbb{F}_n, \int_A X dP = \int_A Y dP \Leftrightarrow Y = E[X | \mathbb{F}_n]$$

Soit $A = \{Y > 0\} = \{\omega : Y(\omega) > 0\}$.

Y est \mathbb{F}_t -mesuré $\Rightarrow A \in \mathbb{F}_t$.

Par (I) : $\int_A Y dP = \int_A X dP \leq \int_A |X| dP$.

$\int_A -Y dP = \int_A -X dP \leq \int_A |X| dP$.

\hookrightarrow intégrabilité de $|Y|$.

$|Y| = \begin{cases} Y & \text{sur } A \\ -Y & \text{sur } \mathbb{C} \setminus A \end{cases}$

$\int_A |Y| dP \leq \int_A |X| dP$.

$\Rightarrow E[|E(X/\mathbb{F}_t)|] \leq E|X|$.

* Montrons l'unicité.

Si Y et Y' deux version de $E[X/\mathbb{F}_t]$, alors $\forall A \in \mathbb{F}_t$

$\int_A Y dP = \int_A Y' dP \quad (\because X dP = Y dP)$ (autre version $Y \neq Y'$ mais \int_A)

Prenons : $A = \{Y - Y' \geq \varepsilon\}$ pour $\varepsilon > 0$.

$0 = \int_A (Y - Y') dP \geq \varepsilon P(A) = \varepsilon P(Y - Y' \geq \varepsilon)$

alors : $P(Y - Y' \geq \varepsilon) = 0$ car $\varepsilon > 0$.

$P(Y - Y' + \varepsilon) = 0$

$|Y - Y'| \leq \varepsilon$ (car $Y, Y' \in \mathbb{F}_t$)

alors : $Y = Y'$ p. sur

* L'existence : rappelons qu'une mesure \mathbb{J} sur (Ω, \mathbb{F}_t) est dite absolument continue par rapport à la mesure μ si $\mu(A) = 0$ implique $\mathbb{J}(A) = 0$, $\forall A \in \mathbb{F}_t$.

on écrit : $\mathbb{J} \ll \mu$.

Le théorème de Radon-Nikodym affirme qu'il existe alors une fct f \mathbb{F}_t -mesuré telle que $\int_A f d\mu = \mathbb{J}(A)$ $\forall A \in \mathbb{F}_t$. f est appelée densité ou dérivée de

$$M(\cdot) = \int f d\lambda \Rightarrow \frac{dM}{d\lambda} = \frac{d(\int f d\lambda)}{d\lambda}$$

Radon-Nikodym et noté $\frac{d\mathbb{V}}{d\mu}$
Supposons que $X \geq 0$.

Prenons $\mu = P$ et définissons \mathbb{V} par : $\mathbb{V}(A) = \int_A X dP \quad \forall A \in \mathcal{F}$,
de sorte que $\mathbb{V} \ll \mu$.

Nous avons $\frac{d\mathbb{V}}{d\mu} \in \mathcal{F}_n$ et $\forall A \in \mathcal{F}_n$.

$$\int_A X dP = \mathbb{V}(A) = \int_A \frac{d\mathbb{V}}{d\mu} d\mu.$$

Proposition :

1) Supposons que X soit \mathcal{F}_n mesurable alors,

$$E[X / \mathcal{F}_n] = X$$

2) Si X est indépendante de \mathcal{F}_n , alors : $E[X / \mathcal{F}_n] = E[X]$

3) Soit Ω_1, \dots une partition de Ω telle que $P(\Omega_i) > 0$
Soit $\mathcal{F}_n = \sigma(\Omega_1, \Omega_2, \dots)$ la tribu engendrée par Ω_i , alors :

$$E(X / \mathcal{F}_n)(\omega) = \frac{E[X \mathbf{1}_{\Omega_i}]}{P(\Omega_i)} = \frac{1}{P(\Omega_i)} \int_X dP \quad \forall \omega \in \Omega_i$$

Propriétés de l'espérance Conditionnelle

Propriétés analogues à l'espérance :

Proposition :

Soient X et Y deux r.a intégrables et \mathcal{E} une sous tribu de \mathcal{F} .

a) Si $X \geq 0$ P p.sur $\Rightarrow E(X / \mathcal{E}) \geq 0$ P -p.sur
(Propriété)

$$\int_B E(X / \mathcal{E}) dP = P(A / B)$$

- b) Si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $E[\alpha X + \beta Y / \mathcal{E}] = \alpha E(X/\mathcal{E}) + \beta E(Y/\mathcal{E})$
 (linéarité)
- c) Si $X \geq Y$ P.P sur $E(X/\mathcal{E}) \geq E(Y/\mathcal{E})$ P.P sur
 (croissance).
- d) Si X_n est une suite de v.a dans L^1 positives
 avec $X_n \nearrow X$ P.P sur, alors : $E(X_n/\mathcal{E}) \nearrow E(X/\mathcal{E})$ P.P sur
 (Beppo - Leoy)
- e) Si X_n est une suite de v.a dans L^1 positives
 alors, $E(\liminf_n X_n / \mathcal{E}) \leq \liminf_n E(X_n / \mathcal{E})$ P.P sur
 (Fatou)
- f) Si X_n est une suite de v.a dans L^1 tq :
 $X_n \rightarrow X$ P.P sur et $\forall n \in \mathbb{N}, X_n \leq Y$, alors $E(X_n / \mathcal{E}) \xrightarrow[\text{P.S et } L^1]{} E(X / \mathcal{E})$
 (convergence dominée)
- g) Si $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe positive, alors lorsque
 $\Psi(X) \in L^1$, $\Psi(E(X/\mathcal{E})) \leq E(\Psi(X)/\mathcal{E})$ P.P sur
 (Jenson)

l'espérance cond est un opérateur contractant
 sur L^p V.P.

Propriétés spécifiques à l'espérance conditionnelle.

Proposition,

Seront X et Y deux v.a intégrables et \mathcal{E} une sous
 tribu de \mathcal{F} ,

$$\text{unif. intgr.} \Rightarrow \limsup_{\substack{|x| > c \\ c \rightarrow 0}} \int |x| dP \xrightarrow[c \rightarrow 0]{} 0$$

- a) $E[E(X/\mathcal{E})] = E[X]$.
- b) Si X est \mathcal{E} -mesurable, $E[X/\mathcal{E}] = X$ P.P sur.
- c) Si Y est \mathcal{E} -mesurable, $E[XY/\mathcal{E}] = Y E[X/\mathcal{E}]$ P.P sur.
- d) Si $S(X) \perp\!\!\!\perp \mathcal{E}$, $E[X/\mathcal{E}] = E(X)$ P.P sur.
- e) Si \mathcal{E}' est une sous tribu de \mathcal{F} tq $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$
alors $E[E(X/\mathcal{E})/\mathcal{E}'] = E[X/\mathcal{E}']$ P.P sur.
- f) Si $(\mathcal{E}_i)_{i \in I}$ est une famille de sous tribus de \mathcal{F}
la famille $(E(X/\mathcal{E}_i))_{i \in I}$ est uniformément intégrable
lemme: $X \in L^1$.
- $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, P(A) < \delta \Rightarrow E(|X| \mathbb{1}_A) < \varepsilon$.

Proposition:

Si $S(X) \perp\!\!\!\perp \mathcal{E}$ et Si Y est \mathcal{E} -mesurable, alors
Pour tout fct boriélienne $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tq: $E[\|\phi(x,y)\|] < \infty$

Dna: $E[\phi(X,Y)/\mathcal{E}] = \Psi(Y)$.
où: $\Psi(y) = E[\phi(X,y)]$.

Preuve,

$$\Psi(y) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x,y) dP_X(x).$$

Soit $G \in \mathcal{E}$ on note $Z = \mathbb{1}_G$ on a: $P_{(x,y,z)} = P_x \otimes P_{(y,z)}$

$$E[\phi(X,Y) \mathbb{1}_G] = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x,y) z dP_{(y,z)}(y,z) dP_X(x).$$

Fubini $\hookrightarrow = \int_{\mathbb{R}^2} \Psi(y) z dP_{(y,z)}(y,z)$.

$$\text{donc: } E[\phi(X,Y) \mathbb{1}_G] = E[\Psi(Y) \mathbb{1}_G].$$

$$E(\phi(x,y)) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x,y) dP_X(x).$$

$$E(\phi(X,Y)) = \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x,y) dP_{(x,y)}(x,y)$$

$$f_{x,y}(x,y) = f_x(x) f_y(y) \quad \text{si } x \perp\!\!\!\perp y$$

$$= f_x(x) f_{Y/x}(y)$$

$$= f_y(y) f_{X/y}(x)$$

Version régulière de la loi conditionnelle.

Déf:

On appelle noyau Markovien de $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d})$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ une application de $\mathbb{R}^d \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ à valeurs dans $[0, 1]$.

$(y, A) \rightarrow N(y, A)$ tq :

1) $\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ $y \rightarrow N(y, A)$ est $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ -mesurable.

2) $\forall y \in \mathbb{R}^d$ $A \rightarrow N(y, A)$ est une mesure de proba.

Exemple:

Soit $\Psi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ -mes

μ une proba sur \mathbb{R} , alors si pour chaque $y \in \mathbb{R}^d$

$\int_{\mathbb{R}^d} \Psi(y, x) \mu(dx) = 1$, alors,

$$N(y, A) = \int_A \Psi(y, x) \mu(dx).$$

N est un noyau Markovien $(A = \mathbb{R})$

Remarques

Un noyau Markovien est une proba qui dépend de façon mesurable d'un paramètre.

Si N est un noyau Markovien.

Si ℓ une application mesurable positive sur bornée.

On peut définir : $\phi(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \ell(x) N(y, dx)$.

$$N(y, A) = \int_A \phi(y) dx.$$

Théorème :

Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace de proba, Y une v.a à valeurs dans \mathbb{R}^d . et X une v.a à valeurs dans \mathbb{R} . Il existe un noyau Markovien $N(y, dx)$ de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ à valeurs $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ tq pour tout ft ℓ boriennne positive de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On a :

$$\underline{E[\ell(X) / Y]} = \int_{\mathbb{R}} \ell(x) N(Y, dx) \quad P.P.-\text{sur}$$

Si on pose : $\phi(Y) = \int_{\mathbb{R}} \ell(x) N(Y, dx)$

On a : $E[\ell(X) / Y] = \phi(Y)$

Le noyau Markovien $N(y, dx)$ est appelé version régulière de l'espérance conditionnelle

Le fait d'écrire : $E[\ell(X) / Y] = \int_{\mathbb{R}} \ell(x) N(Y, dx) \quad P.P.$ sur est équivalent à : $\forall g, \forall \ell$ des fcts mesurables positives (en bornées) resp \mathbb{R}^d, \mathbb{R}

$$E[\ell(X)g(Y)] = E[g(Y) \int_{\mathbb{R}} \ell(x) N(Y, dx)]$$

Dém :

$$\begin{aligned} E[\ell(X)g(Y)] &= E[E[\ell(X)g(Y) / Y]] \\ &= E[\int_{\mathbb{R}} \ell(x) g(Y) N(Y, dx)] \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \int_{\mathbb{R}} \ell(x) N(Y, dx) P_Y(dy) \end{aligned}$$

Proposition :

Soit Y un v.a à valeurs dans \mathbb{R}^d et X un v.a à valeurs dans \mathbb{R} . P_Y la loi de Y

Une condition nécessaire et suffisante pour que un noyau $N(y, dx)$ soit une version régulière de la loi conditionnelle de X sachant Y est que,

Pour toute fct mesurable $h(\cdot, \cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ positive (ou bornée) on a :

$$E[h(X, Y)] = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d} h(x, y) N(y, dx) P_Y(dy).$$

Dans le cas usuels, une version régulière de la loi cond peut être calculée grâce à

Proposition : Supposons que la loi de couple (X, Y) possède une densité $\Psi(x, y) > 0$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$.

$$P_{X,Y}(dx, dy) = \Psi(x, y) dx dy.$$

Alors une version régulière de la loi cond de X sachant Y est donnée par :

$$N(y, A) = \frac{\int_A \Psi(x, y) dx}{\int_{\mathbb{R}} \Psi(x, y) dx}.$$

Dém :

Il suffit de vérifier que $\forall g, \ell$ bornées.

$$E[\ell(X) g(Y)] = \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{\ell(x) \Psi(x, y) dx}{\int_{\mathbb{R}} \Psi(x, y) dx} \right] dP_Y(y)$$

$$\text{Dma, } E[\ell(X) g(Y)] = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d} \ell(x) g(y) dP_{X,Y}(x, y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \left[\int_{\mathbb{R}} [\ell(x) \cdot \Psi(x, y)] dx \right] dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \left(\frac{\int_{\mathbb{R}} [\ell(x) \Psi(x, y)] dx}{\int_{\mathbb{R}} \Psi(x, y) dx} \right) dP_Y(y)$$

$$\int_{\mathbb{R}} \ell(x) N(y, dx)$$

Processus aléatoire

Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace probabilisé.

Déf.

Soit $X = (X_n)_{n \geq 0}$ une suite de v.a sur (Ω, \mathcal{F}) à valeurs dans un ensemble mesuré (E, ξ) .

On dit que X est un processus aléatoire.

d'indice n indique la date à laquelle la v.a X_n est observée.

Déf.

Une filtration de \mathcal{F} est une suite croissante $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ de sous \mathcal{S} -algèbre de \mathcal{F} .

On dit que $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_n, P)$ est un espace probabilisé filtré. $\forall n \in \mathbb{N}$, la sous \mathcal{S} -algèbre \mathcal{F}_n représente l'information disponible à la date n .

Exemple.

Soit $X = (X_n)_{n \geq 0}$ un processus aléatoire de (Ω, \mathcal{F}) dans (E, ξ) . La suite $\mathcal{F}_n^X = \sigma(X_i, i \leq n), n \geq 0$ est une filtration de \mathcal{F} appelée filtration naturelle de $X = (X_n)_n$.

Déf.

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ un processus aléatoire, et $(\mathcal{F}_n)_n$ une filtration de \mathcal{F} . On dit que :

prévision : $E(X_n / \mathcal{F}_{n-1}) = X_n$

- 1) X est (\mathcal{F}_n) -adapté si $\forall n \geq 0$, X_n est \mathcal{F}_n -mesurable
- 2) X est $(\mathcal{F}_n)_n$ -prévisible si X_n est \mathcal{F}_{n-1} -mesurable $\forall n \geq 1$.

Déf.

Un temps d'arrêt $\bar{\tau}$ est une o.a à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ telle que :

$$\{\bar{\tau} = n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n \geq 0.$$

$$\{\omega : \bar{\tau}(\omega) = n\} \in \mathcal{F}_n, \quad \forall n \geq 0.$$

On note \mathcal{T} l'ensemble des temps d'arrêt.

Remarque :

On pourra vérifier que $\bar{\tau}$ est un temps d'arrêt si.

$$\{\bar{\tau} \leq n\} \in \mathcal{F}, \quad \forall n \geq 0$$

Proposition :

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ un processus (\mathcal{F}_n) -adapté à valeurs dans (E, ξ) . $T_A := \inf\{n \geq 0, X_n \in A\}$ est un temps d'arrêt.

$$\{T_A \leq n\} = \bigcup_{k \leq n} \{X_k \in A\} \in \mathcal{F}_n.$$

Prop.

① Soient τ et θ deux temps d'arrêt alors.

$\tau \wedge \theta$, $\tau \vee \theta$, $\tau + \theta$ sont des temps d'arrêt.

② Si $c > 0$ alors $\tau + c$, $(1+c)\tau$ sont des temps d'arrêt.

③ Soit $(\tau_n)_n$ une suite de temps : $\liminf_n \tau_n$, $\limsup_n \tau_n$ sont des temps d'arrêt.

Prop:

Soient $(X_n)_{n \geq 0}$ un processus aléatoire à valeurs dans un espace mesuré (E, \mathcal{F}) , et \bar{T} un temps d'arrêt.

Alors la fct aléatoire :

$X_{\tau}: \omega \in \Omega \rightarrow X_{\tau(\omega)}(\omega)$ est une o.a mesurable.

Dém:

X_{τ} est \mathcal{F} -mes, on écrit que :

$$\forall A \in \mathcal{F}, (X_{\tau})^{-1}(A) = \bigcup_{k \geq 0} [\{\tau = k\} \cap (X_k)^{-1}(A)]$$

$\{\tau = k\}$ et $(X_k)^{-1}(A)$ sont dans $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$.

Def:

On dit que le processus $\{X_t, t \in T\}$ appartient à la classe L_p et on note $X_t \in L_p$, $t \in T$ si $E|X_t|^p < \infty, \forall t \in T$

Remarque:

Soit $X_t \in L_2$. Dans le cas nous pouvons définir les fcts $E(X_t) = m(t)$

$$R(s, t) = E[(X_s - m(s))(X_t - m(t))] = \text{cov}(X_s, X_t)$$

que l'on appelle la moyenne et la fct de corrélation du processus X_t resp $R(s, t) = R(t, s), (s, t) \in T \times T$

Exemple:

Soit $X \sim \text{cdP}(a, s)$, $E(X) = a$, $\text{var}(X) = s^2$.

On construit le processus :

$$Z_t = b + tX, b \in \mathbb{R}.$$

Déf:

Une fct $R(s, t)$, $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, est dite définie positive si: $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \dots, x_k)^t \in \mathbb{R}^k$, $(t_1, \dots, t_k)^t \in \mathbb{R}^k$.

$$\sum x_i x_j R(t_i, t_j) \geq 0 \Leftrightarrow x^t R(x, \cdot) x$$

Exemple.

$$L(s, t) = \exp(|s-t|), (s, t) \in \mathbb{R}^2.$$

$$L(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{K \times K} \quad L(s, t) = \min(s, t)$$

$$(x_1, \dots, x_k)^t, (y_1, \dots, y_k)^t \quad (a_{ij} = \min(x_i, y_j)) \quad q_{1,1} \dots q_{1,k}$$

Théorème.

Soit $R(s, t)$ la fct de corrélation d'un processus X_t , $t \in T$, alors $R(s, t)$ est définie positive.

Déf:

On dit que le processus $\{X_t, t \in T\}$ est stochastiquement continue en un point t si pour tout $\varepsilon > 0$

$$P\left\{\omega: |X_{t+\Delta t} - X_t| > \varepsilon\right\} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0$$

autrement dit:

le processus $\{X_t, t \in T\}$ est stochastiquement continue en t si: $X_{t+\Delta t} \xrightarrow{P} X_t$ lorsque $\Delta t \rightarrow 0$.

Déf:

Une processus aléatoire $\{X_t, t \in T\}$ est uniformément stochastiquement continue sur T si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$.

telque : $P\{w : |X_t - X_s| > \varepsilon\} < \varepsilon$.

$\forall t, s$ tels que : $|t-s| < \delta$.

Remarque :

Si $\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ est stoch continue sur un compact $T \in \mathbb{R}$, alors il est uniformement stochastiquement continu. En plus il est stoch borné sur T .

i.e $\sup_{t \in T} P(|X_t| > N) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0$

Théorème : (Kolmogorov).

Soit $(X_t)_{t \in T}$ un processus et $\exists p, q, c \in \mathbb{R}$ tq.

$$E[|X_{t+s} - X_s|^p] \leq c |t-s|^{1+q}$$

Alors presque toutes les trajectoires de X sont continue.

Déf :

Un processus aléatoire $\{X_t, t \in T\}$ à valeurs dans \mathbb{R} est un processus à accroissement indépendants

si $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \in \mathbb{R}$.

Les variables aléatoires $X_0, X_{t_1} - X_0, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont 2 à 2 indépendantes.

Exemple :

On considère n v.a indé X_1, \dots, X_n sur (Ω, \mathcal{F}, P)

on choisit n nbrs $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, $t_i \in [a, b]$.

et on construit le processus aléatoire : $Z = \sum_{t_i \leq t} X_i$, $t \in [a, b]$



Processus stationnaire

Déf : On dit que $\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ est un processus strictement stationnaire, si pour tout n-uple de temps $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ($t_i \in \mathbb{R}$) et $\forall h \in \mathbb{R}$.
le vecteur aléatoire $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})^T$.
a la loi que $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})^T$.
En particulier pour $n=1$.

$$P(X_t \leq x) = F_{X_t}(x) = F_{X_{t+h}}(x) = P(X_{t+h} \leq x) \quad \forall h \in \mathbb{R}$$

théorème :

Si X_t , $t \in T$ est strictement stationnaire, tq.

$$\mathbb{E}(X_t^2) < \infty \quad \forall t \in \mathbb{R}, \text{ alors :}$$

1) $\mathbb{E}(X_t) = m$, $t \in \mathbb{R}$.

2) $\text{var}(X_t) = s^2 > 0$, $t \in \mathbb{R}$.

3) $R(t, s) = \text{cov}(X_t, X_s)$.

$$= \mathbb{E}[(X_t - m)(X_s - m)] = r(t-s)$$

ie : la covariance est une fct de $(t-s)$.

Déf :

On dit que le processus $\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ est faiblement ou tout simplement stationnaire si :

1) $\mathbb{E}(X_t) = m \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

2) $\text{var}(X_t) = s^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

3) $\text{cov}(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h) \quad \forall t, t+h \in \mathbb{R}$.

Remarque :

On dit que $\gamma(h)$ est la fct de corrélation du processus $\{X_t, t \in T\}$.

Si X_t stationnaire $\gamma(h)$ est paire

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= \cos(X_t, X_{t+h}) \\ &= \cos(X_{t-h}, X_t) = \gamma(-h).\end{aligned}$$

Théo : (ergodique pour les proc stat.)

Soit $X(t)$ un proc stat.

Si $r(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$

$$\text{alors } Y_t = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt \rightarrow 0.$$

Théo, (Bochner - Khintchine)

Soit (X_t) un processus stationnaire tq.

sa fct de corrélation $\gamma(h)$ abs intégrable

$$\text{sur } \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}} |\gamma(h)| dh < +\infty.$$

Dans ce cas il existe la densité spectrale $f(\lambda)$,

$$\text{de } \mathbb{R}, \text{ du } X_t \text{ tq. } \gamma(h) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) e^{i\lambda h} d\lambda.$$

Il suit que la densité spectrale est égale à

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(h) e^{i\lambda h} dh.$$

En remarcques

$$E|X(t)|^2 = \gamma(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d\lambda.$$

Déf:

Soit $(X_t, t \in T)$ un processus stationnaire.

On dit que $\{X_t\}$ est un proc stat de bruit blanc ou bruit blanc si, $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ sont indépendantes. $\forall t_1, \dots, t_n$ ($t_j \in T$)

La fct de corrélation de ce processus:

$$\gamma(h) = s^2 \mathbb{E}_{\{0\}}(h).$$

Remarque:

Si (X_t) est un proc stat de bruit blanc et $X(t)$ suit la loi normale $N(0, s^2)$. On dit que l'on a le bruit blanc gaussien.

Définition d'un processus aléatoire.

Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ un processus aléatoire $\mathbb{E} |X(t)|^p < +\infty$,
 $P=1$ ou $P=2$.

Nous disons que le processus $X(t)$ est dérivable en point s , s'il existe un élément $X(s) \in L^p$.

$$\text{tq: } \lim_{t \rightarrow s} \left\| \frac{X(t) - X(s)}{t-s} \right\|_p = 0.$$

Processus de Poisson

Déf: On dit que le processus $X(t)$, $t \in T = [0, +\infty]$ est un processus de poisson de paramètre d'intensité $\lambda > 0$, si :

1) $X(0) = 0$

2) $\forall t_0, t_1, \dots, t_n$ tq. $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$.

Les accroissements.

$X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ sont indépendantes.

3) $\forall s, t$ avec $0 \leq s \leq t$.

L'accroissement $X(t) - X(s)$ suit une loi de poisson de paramètre $\lambda(t-s)$.

$$P[X(t) - X(s) = k] = (\lambda(t-s))^k \frac{e^{-\lambda(t-s)}}{k!}, k \in \mathbb{N}.$$

--- ①

Remarque :

$$m(t) = E(X(t)) = \lambda(t), \text{ var}(X(t)) = \lambda t, t \in T$$

Remarques

Soit $\Delta t > 0$. Dans ce cas de ①, on a, $\forall t \in T$

$$P\{X(t + \Delta t) - X(t) = 0\} = e^{-\lambda \Delta t} = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t).$$

Lorsque $\Delta t \rightarrow 0$ et donc,

$X(t)$ est stochastiquement continue

De l'autre côté, on a

$$P(X(t + \Delta t) - X(t) = 1) = \lambda \Delta t e^{-\lambda \Delta t} + o(\Delta t).$$

Lorsque $\Delta t \rightarrow 0$.

$$\text{i.e. } P(X(t + \Delta t) = k+1 / X(t) = k)$$

$$= \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

$$\Delta t \rightarrow 0$$

d'où on tire que le processus $X(t)$ est dérivable (en proba).

Enfin, on remarque que,

$$P(X(t+\Delta t) - X(t) \geq 2) = 1 - P(X(t+\Delta t) - X(t) = 0) \\ - P(X(t+\Delta t) - X(t) = 1) = O(\Delta t).$$

lorsque $\Delta t \rightarrow 0$.

$O(\Delta t) \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0$	$\frac{O(\Delta t)}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} c$
$O(\Delta t) \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0$	$\frac{O(\Delta t)}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0$
	$\frac{d(\Delta t)}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} c$

i.e. $P(X(t+\Delta t) \geq k+2) / X(t) = k) = O(\Delta t)$ si $\Delta t \rightarrow 0$.

Remarque:

Notons que de la définition il résulte que :

$$P_n(t) = P(X(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Alors :

$$P_0(0) = P(X(0) = 0) = 1.$$

$$1 - P_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(t) = P(X(t) \geq 1) \\ = \lambda t + O(\Delta t)$$

Alors :

$$\frac{1 - P_0(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \lambda.$$

Remarque

Soit $0 < t$: alors $X(s)$ et $X(t-s)$ sont indép et donc :

$$\text{cov}(X(s), X(t-s)) = 0.$$

Dans ce cas :

$$\begin{aligned} R(s, t) &= \text{cov}(X(s), X(t)) \\ &= \text{cov}(X(s), X(s) + X(t) - X(s)) \\ &= \text{cov}(X(s), X(s)) + \text{cov}(X(s), X(t) - X(s)) \\ &= \lambda s \\ &= \lambda \min(s, t). \end{aligned}$$

• $X(t)$ n'est pas stationnaire

Processus de poison et temps d'attente

- Soit $X(t)$, $t \in T = [0, \infty]$ un processus de poison de paramètre $\lambda > 0$. La variable $X(t)$ nous donne le nombre de saut du processus dans l'intervalle $[0, t]$.
- Notons par τ_1 le temps d'attente du premier saut il est évident que $\forall t \geq 0$, $P(\tau_1 > t) = P(X(t) = 0) = e^{-\lambda t}$ et donc la fct de répartition de τ_1 est :

$$\begin{aligned} F(t) &= P(\tau_1 \leq t) = 1 - P(\tau_1 > t) \\ &= 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Alors $f_{\tau_1}(t)$ la densité de τ_1 est :

$$f_{\tau_1}(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

i.e. $T_1 \sim E(\lambda)$, $\lambda > 0$ et

$$E(T_1) = \frac{1}{\lambda}, \text{ var}(T_1) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

λ représente le nombre moyen de sants que le processus $X(t)$ a par unité de temps.

De la même façon. Si τ représente le temps d'attente du premier sant quand on choisit comme une origine un moment $s > 0$, on a :

$$P(\tau > t) = P(X(t+s) - X(s) = 0) = e^{-\lambda t}.$$

On remarque :

$$P(\tau - s > t / \tau > s) = \frac{P(\tau - s > t, \tau > s)}{P(\tau > s)}$$

$$= \frac{P(\tau > s+t)}{P(\tau > s)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}}$$

$$= e^{-\lambda t}.$$

On appelle un tel modèle "Sans vieillissement".
on a ou cette propriété de perte de mémoire
dans un modèle de la loi géométrique.