Modèles à temps discret : Modèle de Cox-Ross-Rubinstein

Présenté par : M. HAMMAD

0.1 Formalisme de modèle discret

0.1.1 Les actifs financiers

Le modèle de Marché financier discret est construit sur un espace de probabilité fini $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, muni d'une filtration $(\mathcal{F}_n)_{0\leq n\leq N}$, $\mathcal{F}_n$: représente l'information disponible à l'instant n. Dans la pratique, l'horizon N représente la date d'échéance des options.

On supposera dans la suite que $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_N = \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\forall \omega \in \Omega\, \mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$.

On suppose qu'il y a sur le marché $d+1$ actifs financiers, dont les prix à l'instant n sont données par les variables aléatoires $S_n^0, S_n^1, \dots, S_n^d$ à valeurs strictement positives, mesurables par rapport à la tribu $\mathcal{F}_n$ (les investisseurs ont connaissance des cours actuels et passés, mais pas des cours futurs).

- $S_n = (S_n^0, S_n^1, \dots, S_n^d)$ est le vecteur des prix à l'instant n.
- S^0 est l'actif sans risque (les placements dans les banques) et on pose $S_0^0 = 1$.
- Si le taux d'intérêt des placements sans risque est constant et égale à r on aura $S_n^0 = (1+r)S_{n-1}^0 = (1+r)^n$.
- $\gamma_n = \frac{1}{S_n^0}$ est le facteur d'actualisation.

0.1.2 La stratégie financière

Définition 0.1.1.

Une stratégie financière est définie par le processus discret $\phi = ((\phi_n^0, \phi_n^1, \dots, \phi_n^d))_{0\leq n\leq N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{d+1}$, dont les composantes $\phi_n^0, \phi_n^1, \dots, \phi_n^d$ sont les quantités des divers actifs détenues en portefeuille à l'instant n. On impose au processus ϕ d'être prévisible au sens suivant :

$$\forall i \in \{0,1,\dots,d\} \begin{cases} \phi_i^0 \text{ est } \mathcal{F}_0 \text{ mesurable} \\ \text{et, pour } n \geq 1 : \\ \phi_n^i \text{ est } \mathcal{F}_{n-1} \text{ mesurable.} \end{cases}$$

La segnification de cette hypothèse est que le portefeuille à la date n, $(\phi_n^0, \phi_n^1, \ldots, \phi_n^d)$ est constitué au vu des informations disponibles à la date $n-1$ et conservé tel quel au moment de cotations à la date n.

La valeur du portefeuille à l'instant n est donnée par le produit scalaire :

$$\begin{aligned} V_n(\phi) &= \phi_n \cdot S_n = \sum_{i=1}^{d} \phi_n^i \cdot S_n^i \\ &= \phi_n^0 \cdot S_n^0 + (\phi_n^1 \cdot S_n^1 + \cdots + \phi_n^d \cdot S_n^d), \end{aligned}$$

la valeur actualisé du portefeuille est :

$$\widetilde{V}_n(\phi) = \gamma_n \cdot V_n(\phi) = \phi_n \cdot \widetilde{S}_n \text{ où } \widetilde{S}_n = (1, \gamma_n S_n^1, \ldots, \gamma_n S_n^d),$$

$\widetilde{S}_n$: est le processus des prix actualisés.

0.1.3 Stratégie autofinancée

La stratégie financière ϕ est autofinancée si :

$$\phi_n \cdot S_n = \phi_{n+1} \cdot S_n, \, \forall n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}.$$

cette égalité s'interprète de la façon suivante : à l'instant n, après avoir pris connaissance des cours $S_n^0, \ldots, S_n^d$, l'investisseur réajuste son portefeuille pour le faire passer de la composition ϕ_n à la composition ϕ_{n+1}, le réajustement se faisant aux cours de la date n en réinvestissant la valeur totale du portefeuille avec ni apports, ni retraits de fonds (il n'y a pas de consommation).

Remarque 0.1.1.
La relation $\phi_n \cdot S_n = \phi_{n+1} \cdot S_n$ est équivalente à

$$\phi_{n+1} \cdot (S_{n+1} - S_n) = \phi_{n+1} \cdot S_{n+1} - \phi_n \cdot S_n,$$

i.e à

$$\phi_{n+1} \cdot (S_{n+1} - S_n) = V_{n+1}(\phi) - V_n(\phi) = \Delta V_n(\phi).$$

A l'instant $n+1$, la valeur du portefeuille est $V_{n+1}(\phi) = \phi_{n+1}.S_{n+1}$ et la différence $\phi_{n+1}.(S_{n+1} - S_n) = \Delta V_n(\phi)$ représente le gain net dû à la variation des cours entre les dates $n \, et \, n+1$. Une stratégie autofinancée est donc une stratégie pour laquelle les variations de valeur du portefeuille viennet uniquement des gains dûs à l'agitation des cours.

La proposition suivante prouve cette remarque en termes de quantités actualisées.

Proposition 0.1.1.

Les conditions suivantes sont équivalentes :
i) La stratégie ϕ est autofinancée.
ii) Pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$,

$$V_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \phi_j \cdot \Delta S_j,$$

où $\Delta S_j = S_j - S_{j-1}$.
iii) Pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$,

$$\widetilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \phi_j \cdot \Delta \widetilde{S}_j,$$

où $\Delta \widetilde{S}_j = \gamma_j S_j - \gamma_{j-1} S_{j-1}$.

Démonstration 0.1.1.

L'équivalence entre i) et ii) vient de la remarque (0.1.1) et l'équivalence entre i) et iii) s'obtient en remarquant que $\phi_n.S_n = \phi_{n+1}.S_n$ si et seulement si $\phi_n.\widetilde{S}_n = \phi_{n+1}.\widetilde{S}_n$. ■

Cette proposition montre que, pour une stratégie autofinancée, la valeur actualisée du portefeuille est complétement déterminée par la richesse initiale V_0 et le processus $(\phi_n^1, \dots, \phi_n^d)_{0 \leq n \leq N}$ des quantités d'actifs risqués détenues en portefeuille.

Proposition 0.1.2.

Pour tout processus prévisible $\big((\phi_n^1, \dots, \phi_n^d)\big)_{0 \leq n \leq N}$ et pour toute variable V_0 $\mathcal{F}_0-$mesurable, il existe un et un seul processus prévisible $(\phi_n^0)_{0 \leq n \leq N}$ tel que la statégie $\phi = (\phi^0, \phi^1, \dots, \phi^d)$ soit autofinancée et de valeur initiale V_0.

Démonstration 0.1.2.

La condition d'autofinancement :

$$\begin{aligned} \widetilde{V}_n &= \phi_n^0 + \phi_n^1.\widetilde{S}_n^1 + \cdots \phi_n^d.\widetilde{S}_n^d \\ &= V_0 + \sum_{j=1}^{n} (\phi_j^1 \Delta \widetilde{S}_j^1 + \cdots + \phi_j^d \Delta \widetilde{S}_j^d). \end{aligned}$$

Ce qui détermine ϕ_n^0. Il rest à vérifier que ϕ^0 est prévisible, qui se déduit à partir de l'égalité

$$\phi_n^0 = V_0 + \sum_{j=1}^{n-1} (\phi_j^1 \Delta \widetilde{S}_j^1 + \cdots + \phi_j^d \Delta \widetilde{S}_j^d) + (\phi_n^1(-\widetilde{S}_{n-1}^1) + \cdots + \phi_n^d(-\widetilde{S}_{n-1}^d)).$$ ■

0.2 Stratégie admissible et arbitrage

Nous n'avons pas imposé de condition sur le signe de la quantité $(\phi_n^i)_{0\leq i\leq d}$. Si $\phi_n^0 < 0$, cela signifie qu'on a emprunté la quantité $|\phi_n^0|$ sur le marché des placements sans risques. Si $\phi_n^d \leq 0$ pour un $i \geq 1$, cela signifie qu'on a des dettes libellées en actifs risqués (par suite de ventes à découvert). Donc les emprunts et les ventes à découvert sont permis, mais nous imposerons à la valeur du portefeuille d'être positive ou nulle à tout moment.

Définition 0.2.1.
Une stratégie ϕ est dite admissible si elle s'auto-finance et si la valeur du portefeuille $V_n(\phi) \geq 0$ $\forall n \in \{0, 1, \ldots, N\}$.

L'investisseur doit être donc en mesure de rembourser ses emprunts à tout moment. Donnons maintenant une formulation à la notion d'arbitrage (réalisation d'un gain sans prendre de risque).

Définition 0.2.2.
Une stratégie d'arbitrage est une stratégie financière admissible de valeur initiale nulle et de valeur finale non nulle.

La plupart des modèles financiers excluent toute possibilité d'arbitrage, l'objet de la section suivante est de donner une caractérisation de ces modèles grâce à la notion de martingale.

Relation entre martingales et arbitrages

Afin d'examiner la relation entre martingales et arbitrage, nous renvoyons le lecteur au chapitre 2 pour analyser le concept de martingales sur un espace de probabilité fini, où l'usage de l'espérance conditionnelle et ses propriétés sont indispensables.

Dans un modèle financier, dire que le cours $(S_n^i)_{0\leq n\leq N}$ de l'actif i est une martingale, revient à dire que, à tout moment n, la meilleure estimation (au sens des moindres carrés) que l'on puisse faire de (S_{n+1}^i), à partir des informations disponibles à l'instant n, est donnée par (S_n^i).

0.2.1 Marchés financiers viables

Revenons aux modèles de marchés fianciers à temps discret introduits à la section 1.

Définition 0.2.3.
Le marché financier est dit viable si la stratégie d'arbitrage est éliminer.

Rappellons, avant d'énoncer le théorème suivant que deux mesures de probabilité $\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}^*$ sont dites équivalentes et on note $\mathbb{P} \sim \mathbb{P}^*$ si et seulement si, pour tout événement A, $\mathbb{P}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}^*(A) = 0$. Ici $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$ signifie simplement que, $\forall \omega \in \Omega$, $\mathbb{P}^*(\{\omega\} > 0$.

Théorème 0.2.1.

Le marché est viable si, et seulement si, il existe ***une probabilité martingale*** *notée* $\mathbb{P}^*$ *équivalente à la probabilité initiale* $\mathbb{P}$ *sous laquelle les prix actualisés des actifs sont des martingales.*

Démonstration 0.2.1.

1. *Supposons qu'il existe une probabilité martingale* $\mathbb{P}^*$ *équivalente à* $\mathbb{P}$ *sous laquelle les prix actualisés des actifs sont des martingales. Donc pour toute stratégie autofinancée* (ϕ_n) *et d'après la proposition (0.1.1), on a :*

$$\widetilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \phi_j \cdot \Delta \widetilde{S}_j.$$

*Grâce à la proposition (**??**) du chapitre précédent, on en déduit que* $(\widetilde{V}_n(\phi))$ *est une martingale (transformée de martingale) sous* $\mathbb{P}^*$. *En conséquence* $(\widetilde{V}_N(\phi))$ *a même espérance sous* $\mathbb{P}^*$ *que* $V_0(\phi)$ *:*

$$\mathbb{E}^*\left(\widetilde{V}_N(\phi)\right) = \mathbb{E}^*\left(V_0(\phi)\right).$$

Si la stratégie est admissible et de valeur initiale nulle, on a donc $\mathbb{E}^*(\widetilde{V}_N(\phi)) = 0$, *avec* $\widetilde{V}_N(\phi) \geq 0$. *D'où* $\widetilde{V}_N(\phi) = 0$, *puisque* $\mathbb{P}^*(\{\omega\}) > 0, \forall \omega \in \Omega$.

2. *La démonstration de la réciproque est plus délicate. Pour celà, on a besoins de la définition suivante.*

Définition 0.2.4.

Soit $\mathbb{K}$ *un corps ordonné. Un sous-ensemble* C *d'un* $K-$*espace vectoriel* E *est* ***un cône convexe*** *si* $\alpha x + \beta y \in C, \forall \alpha > 0, \beta > 0$ *et* $\forall x, y \in C$, *ce qui s'écrit de façon bref* $\alpha C + \beta C \subset C$.

Soit Γ *le cône convexe des variables aléatoires positives et non nulles. Le marché est viable si et seulement si pour toute stratégie admissible* ϕ *on a :*

$$V_0(\phi) = 0 \Rightarrow \widetilde{V}_N(\phi) \notin \Gamma.$$

a) A tout processus prévisible $(\phi_n^1, \ldots, \phi_n^d)$, *on associe le processus défini par :*

$$\widetilde{G}_n(\phi) = \sum_{j=1}^{n} (\phi_j^1 \Delta \widetilde{S}_j^1 + \cdots + \phi_j^d \Delta \widetilde{S}_j^d).$$

C'est le processus des gains actualisés cumulés dans toute stratégie autofinancée suivant les quantités d'actifs risqués $\phi_n^1, \cdots, \phi_n^d$ *détenues en portefeuille à l'instant* n. *D'après la proposition (0.1.2), il existe un unique processus* (ϕ_n^0) *tel que la stratégie* $((\phi_n^0, \phi_n^1, \cdots, \phi_n^d))$ *soit autofinancée et de valeur initiale nulle.* $\widetilde{G}_n(\phi)$ *est alors la valeur actualisée de cette stratégie à l'instant* n *et l'hypothèse de viabilité du marché entraîne que si* $\widetilde{G}_n(\phi) \geq 0$, *pour tout* $n = 1, \cdots, N$, *alors* $\widetilde{G}_N(\phi) = 0$. *Le lemme suivant montre que, même sans l'hypothèse de positivité de* $\widetilde{G}_n(\phi)$, *on a encore* $\widetilde{G}_n(\phi) \notin \Gamma$.

Lemme 0.2.1.
Si le marché est viable, tout processus prévisible $(\phi^1, \cdots, \phi^d)$ *vérifie :*

$$\widetilde{G}_N \notin \Gamma.$$

La démonstration du lemme est laissée au lecteur à titre d'exercice.

b) L'ensemble $\mathcal{V}$ *des variables aléatoires de la forme* $\widetilde{G}_N(\phi)$, *avec* ϕ *prévisible à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$, *est un sous-espace vectoriel de l'espace* $\mathbb{R}^\Omega$ *: de toutes les variables aléatoires réelles définies sur* Ω. *D'après le lemme (0.2.1) le sous-espace* $\mathcal{V}$ *ne rencontre pas* Γ, *ni le convexe compact* K *contenu dans* Γ *définit par :*

$$K = \{X \in \Gamma | \sum_{\omega} X(\omega) = 1\}.$$

Théorème 0.2.2. ***(de séparation des convexes)***
Soit K *un convexe compact et soit* $\mathcal{V}$ *un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^n$, *disjoint de* K. *Il existe une forme linéaire* ξ *sur* $\mathbb{R}^n$, *vérifiant les deux conditions suivantes :*
i) $\forall x \in K \ \xi(x) > 0$.
ii $\forall x \in \mathcal{V} \ \xi(x) = 0$.
Le sous-espace V *est donc contenu dans un hyperplan qui ne rencontre pas* K.
*Pour plus de détails sur ce théorème et sa démonstration, vous pouvez consulter l'annexe de l'ouvrage [**?**].*
D'après ce théorème, il existe $(\lambda(\omega))_{\omega\in\Omega}$ *tel que :*
i) $\forall X \in K, \sum_{\omega} \lambda(\omega) X(\omega) > 0$.
ii) Pour tout ϕ *prévisible :*

$$\sum_{\omega} \lambda(\omega) \widetilde{G}_N(\phi)(\omega) = 0.$$

De la propriété i), on déduit que $\lambda(\omega) > 0$ *pour tout* $\omega \in \Omega$ *de sort que la probabilité* $\mathbb{P}^*$ *définie par :*

$$\mathbb{P}^*(\{\omega\}) = \frac{\lambda(\omega)}{\sum_{\omega'\in\Omega} \lambda(\omega')}$$

est équivalente à $\mathbb{P}$.
La propriété ii) signifie que, pour tout processus prévisible (ϕ_n) *à valeur dans* $\mathbb{R}^d$:

$$\mathbb{E}^* \left(\sum_{j=1}^{N} \phi_j \Delta \widetilde{S}_j \right) = 0,$$

où $\mathbb{E}^*$ *est l'espérance sous la probabilité* $\mathbb{P}^*$. *On en déduit que pour toute indice* $i \in \{1, \cdots, d\}$ *et toute suite prévisible* ϕ_n^i, *à valeurs réelles, on a :*

$$\mathbb{E}^* \left(\sum_{j=1}^{N} \phi_j^i \Delta \widetilde{S}_j^i \right) = 0,$$

ce qui entraîne, grâce à la proposition (??) que, sous $\mathbb{P}^*$, les prix actualisés $(\widetilde{S}_n^1), \cdots, (\widetilde{S}_n^d)$ sont des martingales.

■

0.3 Marchés complets et évaluation des options

0.3.1 Marchés complets

Actif conditionnel et simulable

Définition 0.3.1.

Un actif conditionnel d'échéance N est définit par la donnée d'une variable aléatoire $h \geq 0$, $\mathcal{F}_N-$mesurable, représentant le gain que permet l'exercice de l'option.

Exemple 0.3.1.

Pour une option d'achats (call) sur une unité d'actif 1, au prix d'exercicre K, on a $h = (S_N^1 - K)_+$ et, pour une option de vente (put) sur une unité d'actif 1 au prix d'exercice K, $h = (K - S_N^1)_+$. Dans ces deux exemples (les plus importants dans la pratique), la variable aléatoire h est une fonction de S_N seulement. Il existe des options pour lesquelles h dépend de toutes les valeurs des cours jusqu'à l'échéance : $S_0, \ldots, S_N$. c'est le cas des options dites asiatiques, dont le prix d'exercice K est égal à la moyenne des cours observés sur une période donnée, précédant l'échéance.

Définition 0.3.2.

Un actif conditionnel $h\,\mathcal{F}_N-$mesurable est simulable (ou atteignable) s'il existe une stratégie admissible dont la valeur à la date N est$h$ i.e, $V_N(\phi) = h$.

Remarque 0.3.1.

D'après ce qui précède, pour que l'actif conditionnel h soit simulable dans un marché financier viable, il suffit qu'il existe une stratégie autofinancée de valeur égale à h à la date N. En effet, si ϕ est une stratégie autofinancée, s'il exsite $\mathbb{P}^*$ une probabilité martingale équivalente à $\mathbb{P}$ (les prix actualisés sous $\mathbb{P}^*$ sont des martingales), $(\widetilde{V}_N(\phi))$ est une martingale, donc pour tout $n \in \{0, \ldots, N\}\, \mathbb{E}^*(\widetilde{V}_N(\phi)|\mathcal{F}) = \widetilde{V}_n(\phi)$. Il est clair donc que $\widetilde{V}_N(\phi) \geq 0$, la stratégie ϕ est admissible.

Définition 0.3.3.

Le marché est complet s'il est viable et si tout actif conditionnel est simulable.

Le théorème suivant donne une caractérisation des marchés complets.

Théorème 0.3.1.

Un marché viable est complet, si et seulement si il existe une unique probabilité risque neutre $\mathbb{P}^*$ équivalente à $\mathbb{P}$ sous laquelle les prix actualisés des actifs soient des martingales.

Démonstration 0.3.1.

1. *Supposons le marché viable et complet. Tout actif conditionnel h $\mathcal{F}_N-$mesurable et positive s'écrit $h = V_N(\phi)$ où ϕ est une stratégie admissible simulant h. Puisque ϕ est une stratégie autofinancée on a :*

$$\frac{h}{S_N^0} = \widetilde{V}_N(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{N} \phi_j.\Delta\widetilde{S}_j.$$

De plus, si $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$ sont deux probabilités sous lesquelles les prix actualisés sont des martingales, $(\widetilde{V}_N(\phi))_{0\leq n\leq N}$ est une martingale à la fois sous $\mathbb{P}_1$ et sous $\mathbb{P}_2$. D'où pour $i = 1, 2$:

$$\mathbb{E}_i(\widetilde{V}_N(\phi)) = \mathbb{E}_i(V_0(\phi)) = V_0(\phi).$$

Donc, on a :

$$\mathbb{E}_1(\frac{h}{S_N^0}) = E_2(\frac{h}{S_N^0}),$$

comme h est arbitraire, $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$ sur la tribu $\mathcal{F}_N$.

2. *Supposons le marché viable et non complet. Alors il existe une variable aléatoire $h \geq 0$ non simulable. On note par $\widetilde{\mathcal{V}}$ l'espace des variables aléatoires de la forme*

$$W_0 + \sum_{n=0}^{N} \phi_n.\Delta\widetilde{S}_n,$$

avec W_0 $\mathcal{F}_0-$mesurable et $((\phi_n^1, \ldots, \phi_n^d))_{0\leq n\leq N}$ prévisible à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. D'après la proposition (0.1.2) et la remarque (0.3.1) il résulte que la variable aléatoire $\frac{h}{S_n^0} \notin \widetilde{\mathcal{V}}$. Donc $\widetilde{\mathcal{V}}$ est un sous-espace strict de l'espace de toutes les variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F})$. Si $\mathbb{P}^*$ est une probabilité risque neutre équivalente à $\mathbb{P}$ sous laquelle les prix actualisés sont des martingales et si l'on munit l'espace des variables aléatoires du produit scalaire $(X, Y) \mapsto \langle X, Y\rangle = \mathbb{E}^*(XY)$, alors, il existe une variable aléatoire X non nulle et orthogonale au sous-espace $\widetilde{\mathcal{V}}$.
Posons :

$$\mathbb{P}^{**}(\{\omega\}) = \left(1 + \frac{X(\omega)}{2 \parallel X \parallel_\infty}\right) \mathbb{P}^*(\{\omega\})$$

où $\parallel X \parallel_\infty = \sup_{\omega\in\Omega} \mid X(\omega) \mid$. on définit ainsi une probabilité qui est équivalente à $\mathbb{P}$ et distincte de $\mathbb{P}^*$. De plus on a :

$$\mathbb{E}^{**}\left(\sum_{n=1}^{N} \phi_n.\Delta\widetilde{S}_n\right) = 0,$$

*pour tout processus prévisible $((\phi_n^1, \ldots, \phi_n^d))_{0\leq n\leq N}$, ce qui implique par la proposition (**??**), que $(\widetilde{S}_n)_{0\leq n\leq N}$ est une $\mathbb{P}^{**}-$martingale.*

■

0.3.2 Evaluation et couverture des actifs conditionnels dans un marché complet

Supposons que le marché est viable et complet et on note $\mathbb{P}^*$ l'unique probabilité risque-neutre sous laquelle les prix actualisé des actifs sont des martingales. Soit h l'actif conditionnel (défini par la variable $h \geq 0$ et $\mathcal{F}_N-$mesurable) et soit ϕ une stratégie admissible simulant h, alors $V_N(\phi) = h$.

La suite $(\widetilde{V}_n)_{0\leq n\leq N}$ est une martingale sous $\mathbb{P}^*$ et par conséquent,

$$V_0(\phi) = \mathbb{E}^*(\widetilde{V}_n(\phi)),$$

d'où $V_0(\phi) = \mathbb{E}^*(\frac{h}{S_N^0})$ et plus généralement

$$V_n(\phi) = S_n^0\mathbb{E}^*(\frac{h}{S_N^0}|\mathcal{F}_n), \;\; n = 0, 1, \ldots, N.$$

La valeur à chaque instant de toute stratégie admissible simulant h est donc complètement déterminiée par h.

Si, à l'instant 0, un investisseur vend l'option au prix $\mathbb{E}^*(\frac{h}{S_N^0})$, il a la possibilité, en suivant une stratégie simulante ϕ, de restituer la richesse promise h à l'instant N; c'est à dire qu'il peut se couvrir parfaitement.

Remarque 0.3.2.

Il est important de savoir que le calcul du prix d'une option et la stratégie de couverture que nous construisons nécessite seulement la connaissance de la probabilité risque neutre $\mathbb{P}^*$ *et non pas celle de la probabilité initiale* $\mathbb{P}$, *dont la seule contrainte relativement à cette dernière est d'être une probabilité équivalente à* $\mathbb{P}$. *L'étude du modèle de Cox-Ross-Rubinstein montrera comment, dans la pratique, les calculs de prix et de couverture peuvent être réalisés.*

0.4 Modèle de Cox-Ross-Rubinstein : problème corrigé

Le Modèle de Cox-Ross-Rubinstein [?] est la version discrétisée du modèle de Black-Scholes qui sera traité au chapitre 5, consiste en un actif sans risque(compte bancaire) noté S_n^0 de taux de rendement certain r sur une période donnée et de cours $S_n^0 = (1+r)^n$, $0 \leq n \leq N$, et un actif risqué(une action) de prix S_n, $0 \leq n \leq N$, dont la dynamique du processus des prix S_n entre deux périodes consécutives est décrite par : soit a, b avec $-1 < a < b$, et pour tout $1 \leq n \leq N$,

$$S_{n+1} = \begin{cases} S_n \cdot (1+a) \\ S_n \cdot (1+b). \end{cases}$$

Le cours initial $S_0 > 0$. L'ensemble des résultats possibles est $\Omega = \{1+a, 1+b\}^N$. chaque $N-$uple représentant les valeurs de $\frac{S_{n+1}}{S_n}$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$. Naturellement :

$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et pour $n = 1, \ldots, N$, $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, \ldots, S_n)$ (la tribu engendrée par les variables aléatoires $S_1, \ldots, S_n$). $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité définie à une équivalence près est que $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) > 0$, $\forall \omega_i \in \Omega$.

Introduisons maintenant, les variables aléatoires $T_n = \frac{S_n}{S_{n-1}}$, pour $n = 1, \ldots, N$. Si $(\omega_1, \ldots, \omega_N)$ est un élément de Ω, on a $\mathbb{P}\{(\omega_1, \ldots, \omega_N)\} = \mathbb{P}(T_1 = \omega_1, \ldots, T_N = \omega_N)$. La connaissance de la probabilité $\mathbb{P}$ est équivaut à celle de la loi du $N-$uple $(T_1, \ldots, \mathbf{T}_n)$. Notons que, pour $n \geq 1$, $\mathrm{F}_n = \sigma(T_1, \ldots, T_n)$.

1. Montrer que le prix actualisé $\widetilde{S}_n$ est une martingale sous $\mathbb{P}$ si et seulement si $\mathbb{E}(T_{n+1}|\mathrm{F}_n) = 1 + r$, $\forall n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$.
2. En déduire que, pour que le marché soit viable, il est nécessaire que $r \in]a, b[$.
3. Donner des exemples d'arbitrages possibles si la condition nécessaire de viabilité aboutie dans la question 2 n'est pas satisfaite.
4. On suppose, dans toute la suite que $r \in]a, b[$ et posons $p = (b - r)/(b - a)$. Montrer que $(\widetilde{S}_n)$ est une martingale sous $\mathbb{P}$ si et seulement si les variables aléatoires $T_1, T_2, \ldots, T_N$ sont indépendantes équidistribuées, leur loi commune étant donnée par : $\mathbb{P}(T_1 = 1 + a) = p = 1 - \mathbb{P}(T_1 = 1 + b)$. En déduire que le marché est viable et complet.
5. On note C_n (resp. P_n) la valeur, à l'instant n, d'un call (resp. d'un put) européen sur une unité d'actif risqué au prix d'exercice K et d'échéance N.
   a) Retrouver, à partir des formules de prix sous forme d'espérances conditionnelles, la relation de parité call-put suivante :
   $$C_n - P_n = S_n - K(1 + r)^{-(N-n)}.$$
   b) Montrer que C_n peut s'écrire sous la forme : $C_n = f(n, S_n)$, où f est une fonction que l'on explicitera à l'aide de K, a, b, r et p.
6. Montrer que la stratégie de couverture parfaite d'un call est définie par une quantité d'actif risqué $\phi_n = \Delta(n, S_{n-1})$ à détenir à l'instant n, où Δ est une fonction que l'on exprimera à partir de la fonction f.

Solution

1. On a, $\dfrac{\widetilde{S}_{n+1}}{\widetilde{S}_n} = \dfrac{1}{1+r} \cdot T_{n+1}$ et la relation
   $$\begin{aligned} \mathbb{E}(\widetilde{S}_{n+1}|\mathrm{F}_n) = \widetilde{S}_n \iff & \mathbb{E}(\frac{\widetilde{S}_{n+1}}{\widetilde{S}_n}|\mathrm{F}_n) = 1, \ (\widetilde{S}_n \text{ est } \mathrm{F}_n - \text{mesurable}) \\ \iff & \mathbb{E}(T_{n+1}|\mathrm{F}_n) = 1 + r. \end{aligned}$$
2. Si le marché est viable, d'après le théorème (0.2.1), il existe une probabilité $\mathbb{P}^*$ équivalente à $\mathbb{P}$, sous laquelle $(\widetilde{S}_n)$ est une martingale. On a donc, d'après la question 1 :
   $$\mathbb{E}^*(T_{n+1}|\mathrm{F}_n) = 1 + r$$

et par conséquent $\mathbb{E}^*(T_{n+1}) = 1+r$. Comme T_{n+1} prend ses valeurs dans $\{1+a, 1+b\}$ avec une probabilité non nulle. Donc nécessairement, on a : $1 + r \in]1 + a, 1 + b[$.

3. Supposons $r \leq a$. En empruntant une somme S_0 à l'instant 0, on peut acheter une unité d'actif risqué. A la date N, on rembourse l'emprunt et on revend l'actif risqué. Le gain réalisé $S_N - S_0(1+r)^N$ est toujours positif ou nul, puisque $S_N \geq S_0(1+a)^N$, et strictement positif avec une probabilité non nulle. Donc, on a bien un arbitrage. Pour le cas $r \geq b$, l'arbitrage s'obtient en vendant l'actif risqué à découvert.

4. Supposons que les variables aléatoires T_i sont indépendantes et vérifient :
$\mathbb{P}(T_i = 1 + a) = p = 1 - \mathbb{P}(T_i = 1 + b)$, on a donc :

$$\mathbb{E}(T_{n+1}|\mathrm{F}_n) = \mathbb{E}(T_{n+1}) = p(1 + a) + (1 - p)(1 + b) = 1 + \underbrace{b + p(a - b)}_{=r} = 1 + r.$$

D'après la question 1, $\widetilde{S}_n$ est une martingale sous $\mathbb{P}$.

Réciproquement, supposons que, $\widetilde{S}_n$ est une martingale sous $\mathbb{P}$, alors pour $n = 0, \ldots, N - 1$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T_{n+1}|\mathrm{F}_n) &= (1 + a)\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{T_{n+1}=1+a\}}|\mathrm{F}_n) + (1 + b)\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{T_{n+1}=1+b\}}|\mathrm{F}_n) \\ &= 1 + r. \end{aligned}$$

En utilisant l'égalité $\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{T_{n+1}=1+a\}}|\mathrm{F}_n) + \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{T_{n+1}=1+b\}}|\mathrm{F}_n) = 1$, on déduit que $\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{T_{n+1}=1+a\}}|\mathrm{F}_n) = p$ et $\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{T_{n+1}=1+b\}}|\mathrm{F}_n) = 1 - p$. Par raisonnement par récurrence sur n, on voit que, pour tous $x_i \in \{1 + a, 1 + b\}$,

$$\mathbb{P}(T_1 = x_1, \ldots, T_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} p_i.$$

Ainsi, on remarque que la condition que $(\widetilde{S}_n)$ soit une martingale sous $\mathbb{P}$ détermine la loi du $N-$uple $(T_1, T_2, \ldots, T_N)$ sous $\mathbb{P}$ et donc la probabilité $\mathbb{P}$ elle même, de façon unique. Le marché est donc viable et complet.

5. Notant C_n (resp. P_n) la valeur, à l'instant n, d'un call (resp. d'un put) européen sur une unité d'actif risqué au prix d'exercice K et d'échéance N,
   a) Notant $\mathbb{E}^*$, l'espérance par rapport à l'unique probabilité $\mathbb{P}^*$ sous laquelle $(\widetilde{S}_n)$ est une martingale, on a par définition :

$$\begin{aligned} C_n - P_n &= (1 + r)^{-(N-n)}\mathbb{E}^*((S_N - K)_+ - (K - S_N)_+|\mathrm{F}_n) \\ &= (1 + r)^{-(N-n)}\mathbb{E}^*((S_N - K)|\mathrm{F}_n) \\ &= S_n - K(1 + r)^{-(N-n)}, \end{aligned}$$

   la dernière égalité résultant du fait que $(\widetilde{S}_n)$ est une martingale sous $\mathbb{P}^*$.

b) Comme $T_i = \frac{S_i}{S_{i-1}}$, et en écrivant $S_N = S_n \prod_{i=n+1}^{N} T_i$, on obtient :

$$C_n = (1+r)^{-(N-n)} \mathbb{E}^* \left(\left(S_n \prod_{i=n+1}^{N} T_i - K \right)_+ | \mathrm{F}_n \right).$$

Comme, sous la probabilité $\mathbb{P}^*$ la variable aléatoire $\prod_{i=n+1}^{N} T_i$ est indépendante de F_n et que S_n est F_n mesurable, on peut écrire $C_n = f(n, S_n)$, où f est la fonction définie par :

$$\begin{aligned} \frac{f(x,n)}{(1+r)^{-(N-n)}} &= \mathbb{E}^* \left(S_n \prod_{i=n+1}^{N} T_i \right)_+ \\ &= \sum_{k=0}^{N-n} \mathcal{C}_{N-n}^k p^k (1-p)^{N-n-k} (x(1+a)^j (1+b)^{N-n-k} - K)_+. \end{aligned}$$

6. Notant ϕ_n^0 la quantité d'actif sans risque dans le portefeuille simulant le call, on a :

$$\phi_n^0 (1+r)^n + \phi_n S_n = f(n, S_n).$$

Puisque ϕ_n^0 et ϕ_n sont $\mathrm{F}_{n-1}-$ mesurables, ce sont des fonctions de $S_1, \ldots, S_{n-1}$ seulement et, S_n étant égal à $S_{n-1}(1+a)$ ou $S_{n-1}(1+b)$, l'égalité ci-dessus implique :

$$\phi_n^0 (1+r)^n + \phi_n S_{n-1}(1+a) = f(n, S_{n-1}(1+a))$$

et

$$\phi_n^0 (1+r)^n + \phi_n S_{n-1}(1+b) = f(n, S_{n-1}(1+b)).$$

D'où, par soustraction,

$$\phi_n = \Delta(n,x) = \frac{f(n, x(1+b)) - f(n, x(1+a))}{x(b-a)}.$$

Autre formulation de la dynamique du cours S_n

$$S_n = (1+\rho_n) S_{n-1},$$

où $(\rho_n)_{1 \leq n \leq N}$ est une suite de variables aléatoires qui ne prennent que deux valeurs a et b telles que $-1 < a < r < b$.

Cette condition garantit en particulier la positivité des variables S_n, de plus, par rapport à la probabilité $\mathbb{P}$ la suite (ρ_n) est supposée une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

Remarque 0.4.1.

Dans les formules obtenues, le seul paramètre qui n'est pas directement observable sur le marché est σ, où son interprétation comme variance nécessite de l'estimer par des voies statistiques. Une présentation élémentaire du modèle de Cox-Ross-Rubinstein est détaillée dans [?].