Solution de la série des exercices n°2

1. (a) $A \in \mathcal{F}_{11}$; (b) n'existe pas ; (c) $C \in \mathcal{F}_{100}$; (d) $D = \emptyset \in \mathcal{F}_n \ \forall n$

2. Soit $(\mathcal{G}_n)_{n\geq 1}$ une autre filtration à laquelle $(X_n)_{n\geq 1}$ est adaptée.

On va montrer que : $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{G}_n \ \forall n \geq 1$?

On a : X_n est $\mathcal{G}_n$ - mesurable $\forall n \geq 1$ par hypothèse.

Or :

$$\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \ldots\ldots,$$

D'où $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont $\mathcal{G}_n$ - mesurable $\forall n \geq 1$
et on sait que :

$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ est la plus petite ss tribu rendant $X_1, \ldots, X_n$ mesurables,

Par conséquent : $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{G}_n \ \forall n \geq 1$.

3. $(X_n)_{n\geq 1}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ - martingale alors :

$$X_n = \mathbb{E}(X_{n+1} / \mathcal{F}_n) \quad \forall n$$

$$\xrightarrow[\text{itérée}]{\text{Esp}} \quad \mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X_{n+1} \quad \forall n$$

i.e. $\mathbb{E}X_1 = \mathbb{E}X_2 = \ldots\ldots$

$(\mathbb{E}X_n)_n$ suite constante.

4. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$: $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ – mart.

Montrons que $(X_n)_{n\geq 1}$ restera une martingale p.r.p. à sa filtration canonique $(\mathcal{F}_n^X)_{n\geq 1}$

(i) Concernant <u>l'adaptation</u> : Chaque processus est adapté à sa filtration canonique.

(ii) <u>Intégrabilité</u> ne dépend pas de la filtration donc $X_n \in L^1$ $\forall n$.

(iii) <u>Propriété clé</u> :

$$\mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n^X) \underset{\text{pté de tour. } (\mathcal{F}_n^X \subset \mathcal{F}_n)}{=} \mathbb{E}\Big[\underbrace{\mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n)}_{\substack{X_n \;[(\mathcal{F}_n)\text{-mart}] \\ ''}}/\mathcal{F}_n^X\Big]$$

$$= \mathbb{E}(X_n/\mathcal{F}_n^X)$$

$$= X_n \quad \underline{\text{car}} \ X_n \text{ est } \mathcal{F}_n^X\text{-}$$

mesurable dès que : $\mathcal{F}_n^X = \sigma(X_1, X_2, \cdots, X_n)$

5. $(X_n)_{n\geq 0}$ une marche aléatoire symétrique de $\mathbb{Z}$, avec $X_n = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$ où $Z_1, Z_2, \dots Z_n, \dots$ sont i.i.d. et $\mathbb{P}(Z_n = -1) = \mathbb{P}(Z_n = 1) = 1/2$; $X_0 = 0$ p.s.

• Montrons que $(X_n^2 - n)_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n^Z)_n$-mart.

Remarquons que $\mathcal{F}_n^Z = \mathcal{F}_n^X$ $\forall n\geq 1$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

(i) Adaptation : Triviale.

(ii) Intégrabilité :

$$\mathbb{E}|X_n^2 - n| \leq \mathbb{E}X_n^2 + n$$

Calculons $\mathbb{E}X_n^2$:

$$X_n^2 = \left(\sum_{i=1}^n Z_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n Z_i^2 + \sum_{i\neq j} Z_i Z_j$$

D'où : $$\mathbb{E}X_n^2 = \sum_{i=1}^n \underbrace{\mathbb{E}Z_i^2}_{=1} + \sum_{i\neq j} \underbrace{\mathbb{E}(Z_i Z_j)}_{=0}$$ car $Z_i \perp\!\!\!\perp Z_j$, $i\neq j$

$$\boxed{\mathbb{E}X_n^2 = n}$$

Par conséquent, $\mathbb{E}|X_n^2 - n| \leq 2n < \infty$ $\forall n$.

(iii) Propriété clé : Mq $\forall n\geq 0$:

$$\mathbb{E}\left(X_{n+1}^2 - (n+1) / \mathcal{F}_n\right) = X_n^2 - n. \quad \text{p.s.}$$

Scanned by CamScanner

On a $X_{n+1}^2 = (X_n + Z_{n+1})^2$

$$= X_n^2 + Z_{n+1}^2 + 2 X_n Z_{n+1}.$$

<u>On sait que</u> : ① X_n^2 est $\mathcal{F}_n^Z$-mesurable

ce qui entraine : $\mathbb{E}(X_n^2 / \mathcal{F}_n^Z) = X_n^2$

② $Z_{n+1}^2 \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_n^Z \Rightarrow \mathbb{E}(Z_{n+1}^2 / \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(Z_{n+1}^2) = 1$

③ X_n est $\mathcal{F}_n^Z$-mesurable, $Z_{n+1} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_n \Rightarrow$

$$\mathbb{E}(X_n Z_{n+1} / \mathcal{F}_n) = X_n \, \mathbb{E}(Z_{n+1} / \mathcal{F}_n)$$

$$= X_n \underbrace{\mathbb{E} Z_{n+1}}_{=0}$$

$$= 0$$

de ①, ② et ③ on peut écrire :

$$\mathbb{E}\left(X_{n+1}^2 - (n+1) / \mathcal{F}_n\right) = X_n^2 + 1 - (n+1)$$

$$= X_n^2 - n.$$

6. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - mart. $\in L^2$; $X_{n+1}-X_n \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_n$ ∷ $\forall n$.

Avant de démontrer que $Z_n = [X_n - \mathbb{E}X_n]^2 - \operatorname{Var} X_n$ notons ci-dessous les choses suivantes pour faciliter la tâche :

① $\underline{Y_n = X_n - \mathbb{E}X_n}$:

$(Y_n)_{n\geq 0}$ est également une martingale car $\mathbb{E}X_n = c^{te}$.

② $\mathbb{E}(Y_{n+1}Y_n) = \mathbb{E}Y_n^2$,

<u>En effet</u> : $\mathbb{E}(Y_{n+1}Y_n) \overset{\text{pté de tour}}{=} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(Y_{n+1}\underset{\mathcal{F}_n\text{-mes.}}{Y_n}/\mathcal{F}_n)\right]$

$$= \mathbb{E}\Big[Y_n \underbrace{\mathbb{E}(Y_{n+1}/\mathcal{F}_n)}_{\overset{\shortparallel}{Y_n}\ [(Y_n)\text{ mart.}]}\Big]$$

$$= \mathbb{E}\,Y_n^2.$$

③ $\mathbb{E}\left[(Y_{n+1}-Y_n)^2/\mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}(Y_{n+1}-Y_n)^2$

<u>Car</u> : $Y_{n+1}-Y_n = f(X_{n+1}-X_n) \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_n$.

• Montrons maintenant que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$-mart. :

(i) Adaptation : X_n : $\mathcal{F}_n$-mes $\forall n \Rightarrow$ $(X_n - \mathbb{E}X_n)^2 - \operatorname{Var} X_n$ est $\mathcal{F}_n$-mes.

(car : composition et somme de fcts mesurables sont mesurables.).

(ii) Intégrabilité :

$$\mathbb{E}|Z_n| \leq \underbrace{\mathbb{E}\left[(X_n - \mathbb{E}X_n)\right]^2}_{=} + \operatorname{Var} X_n.$$

$$\leq \operatorname{Var} X_n + \operatorname{Var} X_n$$

$$\leq 2 \operatorname{Var} X_n < \infty \text{ car } X_n \in L^2.$$

(iii) pté clé : Mq : $\mathbb{E}(Z_{n+1} - Z_n / \mathcal{F}_n) = 0$.

On a : $Z_n = Y_n^2 - \mathbb{E}Y_n^2$ $\left(\mathbb{E}Y_n^2 = \mathbb{E}(X_n - \mathbb{E}X_n)^2 = \operatorname{Var} X_n\right)$.

$$Z_{n+1} - Z_n = Y_{n+1}^2 - Y_n^2 - \mathbb{E}Y_{n+1}^2 + \mathbb{E}Y_n^2$$

$$= (Y_{n+1} - Y_n)^2 + 2Y_nY_{n+1} - 2Y_n^2 - \mathbb{E}Y_{n+1}^2 + \mathbb{E}Y_n^2$$

Introduisant l'espérance conditionnelle ds les 2 côtés :

$$\mathbb{E}(Z_{n+1} - Z_n / \mathcal{F}_n^Z) = \mathbb{E}\left[(Y_{n+1} - Y_n)^2 / \mathcal{F}_n\right] - 2\mathbb{E}(Y_n Y_{n+1} / \mathcal{F}_n)$$

$$- 2\mathbb{E}(Y_n^2 / \mathcal{F}_n) - \underbrace{\mathbb{E}Y_{n+1}^2}_{c^{te}} + \underbrace{\mathbb{E}Y_n^2}_{c^{te}} \dots (*)$$

On a :

(i) $\mathbb{E}\left[(Y_{n+1} - Y_n)^2 / \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}(Y_{n+1} - Y_n)^2$

$= \mathbb{E}Y_{n+1}^2 + \mathbb{E}Y_n^2 - 2\mathbb{E}Y_{n+1}Y_n$

(ii) $\mathbb{E}(Y_n Y_{n+1} / \mathcal{F}_n) = \underset{\mathcal{F}_n\text{-mes.}}{Y_n} \underbrace{\mathbb{E}(Y_{n+1} / \mathcal{F}_n)}_{Y_n \text{ (mart)}}$

$= \mathbb{E}Y_n^2$

(iii) $\mathbb{E}Y_{n+1}Y_n = \mathbb{E}Y_n$

En utilisant (i), (ii) et (iii) ds (*), on obtient.

$$\mathbb{E}(Z_{n+1} - Z_n / \mathcal{F}_n^Z) = 0.$$

7. Image d'une ss-mart. par la fct convexe $\nearrow \varphi(x) = x \vee K$.

8.

(a) Image d'une ss-mart. par la fct convexe $\nearrow \varphi(x) = x \vee K$.

(b) $\Rightarrow$/ Tout processus prévisible intégrable, p.s. constant est une martingale.

En effet : $X_n = c$ p.s. $\forall n$. donc X_n est $\mathcal{F}_0$- mesurable alors : X_n : $\mathcal{F}_n$- mesurable.

$E|X_n| = |c| < \infty$ et $E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = c = X_n$ $\forall n$.

$\Leftarrow$/ Réciproquement : si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $(\mathcal{F}_n)$- prévisible et $(\mathcal{F}_n)$- mart.

On a pour tt $n \in \mathbb{N}$: $X_n = \mathbb{E}(\underbrace{X_{n+1}}_{\substack{\mathcal{F}_n\text{-mesurable} \\ (\text{prévisible})}}/\mathcal{F}_n) = X_{n+1}$ p.s. $\therefore$ $X_n = c^{te}$ p.s.

9. Supposons que $n > m \geq 0$

On a : $\mathbb{E}(X_{n+1}-X_n)(X_{m+1}-X_m) \underset{\text{Itérées}}{\overset{\text{Espérances}}{=\!=}} \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\big[(X_{n+1}-X_n)\underbrace{(X_{m+1}-X_m)}_{\substack{\mathcal{F}_n\text{-mesurable} \\ (m<n)}}/\mathcal{F}_n\big]\Big]$

$$= \mathbb{E}\Big[(X_{m+1}-X_m)\,\underbrace{\mathbb{E}(X_{n+1}-X_n/\mathcal{F}_n)}_{\substack{\shortparallel \\ 0 \\ ((X_n):(\mathcal{F}_n)\text{-mart})}}\Big].$$

$$= 0.$$

10.

$$X_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{X_n}{2} & \text{si } X_{n+1} = \dfrac{X_n}{2} \\ \text{ou} & \\ \dfrac{X_n+1}{2} & \text{si } X_{n+1} = \dfrac{X_n+1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow X_{n+1} = X_{n+1} \mathbb{1}_{\overbrace{\left\{X_{n+1} = \frac{X_n}{2}\right\}}^{A_1}} + X_{n+1} \mathbb{1}_{\underbrace{\left\{X_{n+1} = \frac{X_n+1}{2}\right\}}_{A_2}}.$$

$$X_{n+1} = \frac{X_n}{2} \mathbb{1}_{A_1} + \frac{X_n+1}{2} \mathbb{1}_{A_2}$$

<u>Calculons $\mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n)$</u> :

$$\mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = \frac{X_n}{2} \mathbb{P}(A_1/\mathcal{F}_n) + \frac{X_n+1}{2} \mathbb{P}(A_2/\mathcal{F}_n).$$ <u>car</u> : X_n : $\mathcal{F}_n$-mesurable.

<u>Par hypothèse</u> : $\mathbb{P}(A_1/\mathcal{F}_n) = 1 - X_n$, $\mathbb{P}(A_2/\mathcal{F}_n) = X_n$

Ce qui entraine : $\mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = X_n$.

- $X_n \in L^1$ car elle est bornée.

	$\overbrace{}^{A_1}$	$\overbrace{}^{A_2}$
$X_{n+1} = \boldsymbol{x} / \mathcal{F}_n$	$\dfrac{X_n}{2}$	$\dfrac{X_n+1}{2}$
$\mathbb{P}(X_{n+1} = \boldsymbol{x} / \mathcal{F}_n)$	$1 - X_n$	X_n