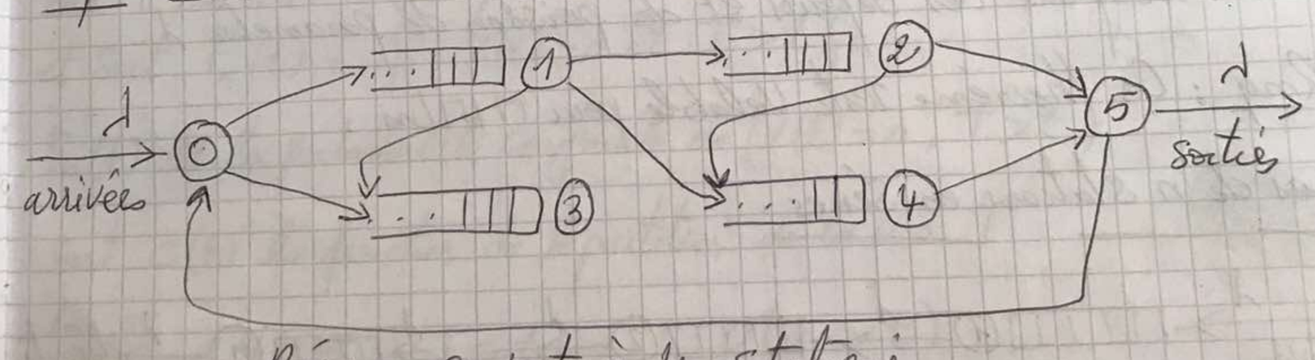
1

Réseaux de files d'attente

Définition : un réseau de files d'attente est un ensemble de n systèmes de files d'attente dans lesquels les clients séjournent selon un itinéraire pré établit ou aléatoire.
Si le réseau comporte une arrivée de clients de l'extérieur et une sortie de clients vers l'extérieur, il est dit ouvert.
Dans le cas contraire, le réseau est dit fermé et il contient alors un nombre constant d'unités.

Rmq : Dans le cas général, les clients peuvent arriver de l'extérieur à n'importe quelle station et peuvent quitter le système de n'importe quel station, comme ils peuvent retourner à une station déjà visitée ou sauter quelques stations complètement.

Exp de réseau ouvert :



Réseau ouvert à 4 stations

Les stations du réseau étant notées de 1 à n, désignons par 0 la source (arrivées des clients) et n+1 le puits (sortie des clients).

Dans ce qui suit, on s'intéresse aux réseaux de files d'attente avec les caractéristiques suivantes :

1/ Les arrivées de l'extérieur à la station i sont poissonnienes de taux γ_i

2/ Les temps de service pour chaque serveur à la station i, sont indépendants et exponentiels de taux μ_i

3/ P_{ij} = probabilité qu'un client qui termine son service à la station i, se dirige vers la station j. $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$

$P_{i\,n+1}$ = prob qu'un client qui termine son service à la station i, se dirige vers l'extérieur.

m_i = nombre de serveurs à la station i

Rmq : des réseaux qui ont ces propriétés s'appellent réseaux de JACKSON.

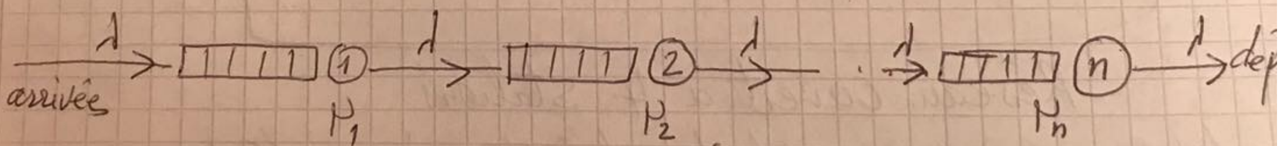
Flux des départs : (Théorème de Burke)

Soit un système M/M/1 de paramètre (λ, μ)

Alors le flux des départs est de poisson de paramètre λ.

Rmq : Ce théorème reste valable pour M/M/m.

Cas de n stations en Séries.

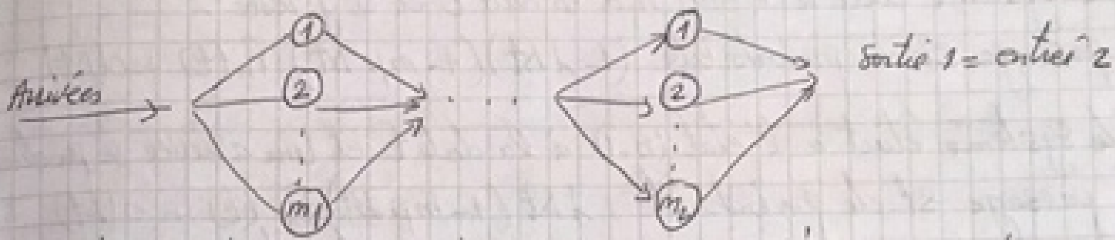


Dans ce cas, on considère $\gamma_i = \begin{cases} \lambda & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

$$P_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+1 \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ 1 & \text{si } i = n \,,\ j = n+1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Exp : Atelier de fabrication ou de montage

Le modèle de série est une succession de files avec aucune restriction sur la capacité de la file en station.



On peut considérer chaque station comme un modèle M/M/m et pour étudier le système global, on peut étudier chaque système élémentaire individuellement et dans ce cas l'analyse complète de ce réseau est possible.

Démontrons le théorème de Burke pour ce réseau.

Soit $X(t)$ le nombre de clients dans le réseau à la date t.

$P_n = p(X(t)=n)$

soit T la v.a. = $\{$temps entre deux départs successifs$\}$

et soit $F_n(t) = p\{X(t)=n \text{ et } T>t\}$

$F_n(t)$ est la probabilité conjointe de $(X(t)=n, T>t)$

Soit $c(t)$ la fonction de répartition de la v.a. T

On a :
$$c(t) = p(T \leq t) = 1 - p(T>t)$$

et on a : $p(T>t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t)$

d'où $c(t) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t)$

Donc pour trouver $c(t)$, il faut déterminer $F_n(t)$.

Pour écrire les équations permettant de trouver $F_n(t)$, considérons tous les cas possible pour atteindre l'état n à la date $(t+\Delta t)$

1/ Si $n \geq m$ deux situations sont possibles

a) Le système était à l'état n à la date t et il y reste.
Le passage est de probabilité $(1-\lambda\Delta t)(1-m\mu\Delta t)\,F_n(t) + o(\Delta t)$

b) Le système était à l'état $(n-1)$ à la date t et une arrivée se produit
Le passage est de probabilité $\lambda\Delta t(1-m\mu\Delta t)\,F_{n-1}(t) + o(\Delta t)$

$$F_n(t+\Delta t) = (1-\lambda\Delta t)(1-m\mu\Delta t)F_n(t) + \lambda\Delta t(1-m\mu\Delta t)F_{n-1}(t) + o(\Delta t)$$

2/ $1 \leq n \leq m$

Un raisonnement analogue nous conduit à :

$$F_n(t+\Delta t) = (1-\lambda\Delta t)(1-n\mu\Delta t)F_n(t) + \lambda\Delta t(1-n\mu\Delta t)F_{n-1}(t) + o(\Delta t)$$

3/ Si $n=0$; une seule situation est possible pour atteindre l'état 0 à la date $t+\Delta t$.

Le système était à l'état 0 et il y reste.

$$F_0(t+\Delta t) = (1-\lambda\Delta t)\,F_0(t) + o(\Delta t)$$

par conséquent on a :

$$\begin{cases} F_n(t+\Delta t) = (1-\lambda\Delta t)(1-m\mu\Delta t)F_n(t) + \lambda\Delta t(1-m\mu\Delta t)F_{n-1}(t) + o(\Delta t) & n \geq m \\ F_n(t+\Delta t) = (1-\lambda\Delta t)(1-n\mu\Delta t)F_n(t) + \lambda\Delta t(1-n\mu\Delta t)F_{n-1}(t) + o(\Delta t) & 1 \leq n < m \\ F_0(t+\Delta t) = (1-\lambda\Delta t)F_0(t) + o(\Delta t) \end{cases}$$

En transposant $F_n(t)$ à gauche, en divisant les deux membres par Δt et en faisant tendre $\Delta t \to 0$, on obtient les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{dF_n(t)}{dt} = -(\lambda+m\mu)\,F_n(t) + \lambda F_{n-1}(t) & n \geq m \\ \dfrac{dF_n(t)}{dt} = -(\lambda+n\mu)\,F_n(t) + \lambda F_{n-1}(t) & 1 \leq n < m \\ \dfrac{dF_0(t)}{dt} = -\lambda F_0(t) & \end{cases}$$

pour résoudre ce système, on utilise la condition initiale

$$F_n(0) = P(X(0)=n\ ,\ T>0) = P_n$$

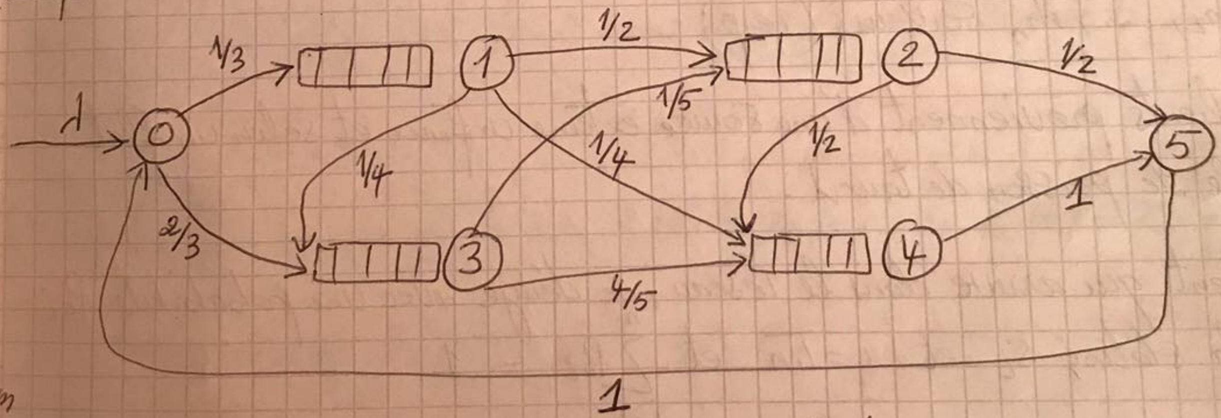
Après la résolution, on obtient :

$$F_n(t) = P_n\, e^{-\lambda t}$$

et la fonction de répartition de la v.a. T

$$C(t) = 1-\sum_{n=0}^{\infty} F_n(t) = 1-\sum_{n=0}^{\infty} P_n\, e^{-\lambda t} = 1-e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1-e^{-\lambda t}.$$

<u>Exp</u> : Considérons le réseau à 4 stations suivant :



Soit Y_n la $n^{\text{ème}}$ station visitée par un client :

$$P_{ij} = P\left(Y_{n+1} = j \,/\, Y_n = i\right)$$

On suppose que $P_{i0} = 0 \quad \forall i = \overline{0,n}$

$$P_{n+1\,0} = 1 \quad ; \quad P_{n+1\,j} = 0 \quad \forall j = \overline{1,n+1} \quad ; \quad P_{0\,n+1} = 0$$

Trouver la matrice de routage pour ce réseau.

<u>**Sol**</u> :

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\
0 & 0 & 1/5 & 0 & 4/5 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Réseau Jacksonien Ouvert

Hypothèse

1/ Le réseau comporte n stations $S_1, S_2, \dots, S_n$ constituées chacune de $m_1, m_2, \dots, m_n$ serveurs (resp.)

2/ Les clients proviennent d'une source externe infinie et selon un flot simple de poisson de taux λ.

3/ Le client qui arrive dans le réseau, se dirige avec une probabilité P_{0i} vers la station S_i et $i=\overline{1,n}$ et $\sum_{i=1}^{n} P_{0i} = 1$

4/ A son arrivée dans la station S_i, il est immédiatement pris en charge par l'un des m_i serveurs qui est libre et la durée de service obéit à une loi exponentielle de paramètre ν_i. Si tous les serveurs sont occupés, le client rejoint la file d'attente.

5/ La discipline de la file dans chaque station est FIFO

6/ Le client qui termine son service dans la station S_i, se dirige avec une probabilité P_{ij} vers la station S_j ou quitte le réseau avec une prob $P_{i\,n+1}$ et $\sum_{j=1}^{n+1} P_{ij} = 1$

7/ Nous considérons deux stations fictive supplémentaire, la source S_0 de durée de "service" égale à la durée entre deux arrivées externe $1/\lambda_0$ $= \frac{1}{\lambda}$ (en moyenne) et le puits S_{n+1} de durée de service $\mu_{n+1} = \infty$ et $P_{n+1\,0} = 1$

8/ La suite $\{Y_m, m \geq 1\}$ (où Y_m = $m^{ème}$ station visitée par un client donné) définit une chaine de Markov ergodique de matrice de transition

$P = \| P_{ij} \|$ avec $P_{i0} = 0 \quad \forall i = \overline{0,n}$; $P_{0\,n+1} = 0$;

$P_{n+1\,0} = 1 \qquad P_{n+1\,j} = 0 \quad \forall j = \overline{1,n+1}$

Soit $X_i(t)$ = nombre de clients dans la station S_i à la date t.

$$X(t) = \{X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)\}$$

$$P(x) = \lim_{t \to \infty} P(X_1(t) = x_1, X_2(t) = x_2, \ldots, X_n(t) = x_n)$$

$$P_j(x_j) = \lim_{t \to \infty} P(X_j(t) = x_j) \qquad j = \overline{1,n}$$

<u>Théorème de Jackson</u>

Dans les hypothèses ci-dessus, les taux λ_i d'arrivée à la station S_i $i = \overline{1,n}$ sont solution du système d'équations :

$$(*) \begin{cases} \lambda_i = \lambda_0 P_{0i} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_{ji} & i=\overline{1,n} \\ \lambda_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_{j\,n+1} \\ \lambda_0 = \lambda_{n+1} = \lambda \end{cases}$$

De plus $\{X(t), t \geq 0\}$ st un processus homogène de Markov qui est ergodique si $\max_{1 \leq i \leq n} \left(\lambda_i / m_i \mu_i \right) < 1$

Dans ce cas, les probabilité stationnaire des états du réseau vérifie la formule suivante :

$$\boxed{P(x) = P_1(x_1)\, P_2(x_2) \cdots P_n(x_n)} \quad (**)$$

Remarque :

1) Les caractéristiques de performance pour chaque station sont obtenue à l'aide des formules déjà vu pour les système de type $M/M/m_i$ $i=\overline{1,n}$

2) La durée de séjour moyenne dans le réseau peut être obtenue à partir de l'analyse de la chaîne de Markov à temps discret $\{Y_m\}$.

3) La solution du système $(*)$ st unique et s'exprime sous la forme $\lambda_0 = \lambda_{n+1} = \lambda$; $\lambda_i = \alpha_i \lambda$

L'étude de la chaîne de Markov $\{Y_m\}$ montre que : $\alpha_i = \dfrac{\pi_i}{\pi_0}$

où π_i st la probabilité stationnaire de visite de la station S_i et π_0 la probabilité de se trouver à l'extérieur du réseau (dans l'une des stations fictive S_0 et S_{n+1})

$\pi_0 = 1/a_0$ où a_0 est le nombre moyen de stations visitées au cours d'un séjour dans le réseau.

La durée moyenne d'une tournée (séjour dans le réseau) :

$$W = \frac{1}{\pi_0} \sum_{i=1}^{n} W_i \, \pi_i$$

où W_i est la durée moyenne de séjour dans la station S_i.

Exp : soit P la matrice de routage vu déjà

Calculer le taux d'arrivée dans chaque station

$$(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/5 & 0 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_5 = \lambda_0 = \lambda \\ \lambda_1 = 1/3 \, \lambda \\ \lambda_2 = 1/2 \, \lambda_1 + 1/5 \, \lambda_3 \\ \lambda_3 = 2/3 \, \lambda_0 + 1/4 \, \lambda_1 \\ \lambda_4 = 1/4 \, \lambda_1 + 1/2 \, \lambda_2 + 4/5 \, \lambda_3 \\ \lambda_5 = 1/2 \, \lambda_2 + \lambda_4 \end{cases}$$

Après résolution, on trouve :

$\lambda_0 = \lambda_5 = \lambda$

$\lambda_1 = 1/3 \, \lambda$; $\lambda_2 = 19/60 \, \lambda$; $\lambda_3 = 3/4 \, \lambda$; $\lambda_4 = 101/120 \, \lambda$