Chapitre 4

Mouvement Brownien et Processus de Diffusion

4.1 Introduction

Le mouvement Brownien est une description du mouvement aléatoire de particules qui sont soumises à aucune autre interaction que les chocs. Ce comportement a été décrit physiquement pour la première fois par le biologiste Robert Brown en 1827, en observant le mouvement irrégulier de particules de pollen en suspension dans l'eau. Bachelier (1900) a mit en évidence le caractère Markovien du mouvement Brownien, en vue d'étudier les cours de la bourse de Paris. Einstein (1905) a déterminé la densité de transition du mouvement Brownien par l'intermédiaire de l'équation de la chaleur. Wiener (1923) a réalisé la première étude mathématique rigoureuse en mettant en évidence la continuité et non-dérivabilité des trajectoires du mouvement brownien et donné une démonstration de l'existence du mouvement Brownien, appelé aussi depuis processus de Wiener.
Un processus de diffusion est un processus de Markov continue ayant des moyenne et variance infinitésimales finies.

4.2 Définitions et Notations

Soit $\{X_t\}_{t\geq 0}$ un processus stochastique à temps et espace d'états continus. On lui associe la densité de probabilité $p(x,t)$

$$P\{X(t)\in[a,b]\}=\int_a^b p(x,t)dx$$

Les processus stochastiques considérés dans ce chapitre sont des processus de Markov.

4.2.1 Densité de transition d'un processus de Markov

Définition 4.1. La densité de probabilité de transition d'un processus de Markov à temps et espace d'états continus est la fonction de densité pour une transition d'un état x au temps s vers un état y au temps t, $s<t$. On la note par $p(y,t;x,s)$. La densité de probabilité de transition est dite homogène si

$$p(y,t+\Delta t;x,s+\Delta t)=p(y,t;x,s),$$

où $0\leq s<t$ et $\Delta t>0$.
Dans le cas homogène, on note la densité de probabilité de transition par $p(y,x,t-s)$.

Les équations de Chapman-Kolmogorov s'écrivent pour $s < u < t$:

$$p(y, t; x, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(y, t; z, u) p(z, u; x, s) dz. \tag{4.1}$$

4.3 Marche aléatoire et mouvement Brownien

Considérons une marche aléatoire simple sur $\{\dots, -2\Delta x, -\Delta x, 0, \Delta x, 2\Delta x, \dots\}$. Soit p la probabilité de transition à droite et q celle de transiter à gauche avec $p + q = 1$. Soit $X(t)$ la chaîne

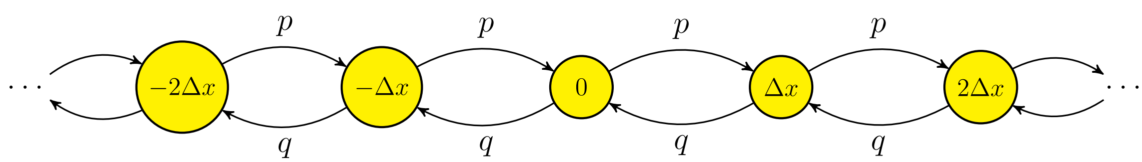

FIGURE 4.1 – Graphe des transitions associé à la marche aléatoire.

de Markov à temps discret (CMTD) associé à cette marche aléatoire, où $t \in \{0, \Delta t, 2\Delta t, \dots\}$ et

$$\mathbf{p}(x, t) = P(X(t) = x).$$

On a

$$\mathbf{p}(x, t + \Delta t) = \mathbf{p}(x - \Delta x, t)p + \mathbf{p}(x + \Delta x, t)q.$$

On applique la formule de Taylor au côté droit

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}(x, t + \Delta t) =& p\left[\mathbf{p}(x, t) + \frac{\partial \mathbf{p}(x, t)}{\partial x}(-\Delta x) + \frac{\partial^2 \mathbf{p}(x, t)}{\partial x^2}\frac{(\Delta x)^2}{2} + \circ((\Delta x)^2)\right] \\
&+ q\left[\mathbf{p}(x, t) + \frac{\partial \mathbf{p}(x, t)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial^2 \mathbf{p}(x, t)}{\partial x^2}\frac{(\Delta x)^2}{2} + \circ((\Delta x)^2)\right] \\
&= \mathbf{p}(x, t) + (q - p)\frac{\partial \mathbf{p}(x, t)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial^2 \mathbf{p}(x, t)}{\partial x^2}\frac{(\Delta x)^2}{2} + \circ((\Delta x)^2).
\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\frac{\mathbf{p}(x, t + \Delta t) - \mathbf{p}(x, t)}{\Delta t} = (q - p)\frac{\Delta x}{\Delta t}\frac{\partial \mathbf{p}(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}\frac{\partial^2 \mathbf{p}(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\circ((\Delta x)^2)}{\Delta t}. \tag{4.2}$$

Sur la période $[0, t]$, il y a un total de $t/\Delta t$ temps de déplacement Δt. Le déplacement total est la somme des $t/\Delta t$ mouvements, ayant pour valeurs Δx ou $-\Delta x$ avec probabilités respectives p et q. La moyenne de déplacement infinitésimale (sur Δt) est

$$p\Delta x + q(-\Delta x) = (p - q)\Delta x$$

et la variance du déplacement infinitésimale est

$$p(\Delta x)^2 + q(-\Delta x)^2 - (p - q)^2(\Delta x)^2 = 4pq(\Delta x)^2.$$

Le déplacement total sur $[0, t]$ est la somme de $t/\Delta t$ déplacement indépendants. Ainsi, la moyenne de déplacement sur une période de temps t est

$$\frac{t}{\Delta t}(p - q)\Delta x = (p - q)\frac{\Delta x}{\Delta t}t. \tag{4.3}$$

La variance de déplacement sur une période de temps t est

$$\frac{t}{\Delta t} 4pq(\Delta x)^2 = 4pqt \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}. \tag{4.4}$$

Si la moyenne et la variance du processus sont finis, alors quand $\Delta t \to 0$ et $\Delta x \to 0$ les expressions (4.3) et (4.4) doivent être finis en limites. On a donc les hypothèses

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \to 0} (p-q) \frac{\Delta x}{\Delta t} = \mu \tag{4.5}$$

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = V \tag{4.6}$$

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \to 0} \frac{\circ((\Delta x)^2)}{\Delta t} = 0. \tag{4.7}$$

On fait tendre Δt et Δx vers 0, la probabilité $\mathbf{p}(x,t)$ représente alors la fonction densité de probabilité d'un processus $X(t)$ à temps et espace d'états continus, qui est solution de l'équation aux dérivées partielles (EDP)

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x} + \frac{1}{2} V \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial x^2} \tag{4.8}$$

L'EDP (4.8) est appelée équation de diffusion (équation différentielle progressive de Kolmogorov) avec dérive, où V est le coefficient de diffusion et μ le coefficient de dérive.
Quand $p = 1/2 = q$, le processus limite est un mouvement Brownien. Dans ce cas $\mu = 0$ et

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = \frac{1}{2} V \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial x^2}$$

$x \in \mathbb{R}$.
Pour résoudre l'équation différentielle (4.8), on suppose que la densité initiale est concentrée en x_0 (i.e., $X(0) = x_0$, $\mathbf{p}(x,0) = \delta(x - x_0)$, où $\delta(x)$ est la fonction de Dirac). La solution de l'équation de diffusion (4.8) (voir Einstein (1905)) est une densité normale de moyenne $x_0 + \mu t$ et variance Vt.

$$\mathbf{p}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi V t}} \exp\left(-\frac{(x - x_0 - \mu t)^2}{2Vt} \right). \tag{4.9}$$

Si $X(0) = 0$ et $V = 1$ on a un mouvement Brownien standard appelé aussi processus de Wiener.

4.4 Processus de Diffusion

Un processus de diffusion est un processus de Markov avec des propriétés additionnelles concernant la moyenne et variance infinitésimales.

Définition 4.2. Soit $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ un processus de Markov sur $\mathbb{R}$, ayant des trajectoires continues et une densité de probabilité de transition $p(y,t;x,s)$, $s < t$. Alors $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ est un processus de diffusion si $p(y,t;x,s)$ satisfait aux trois hyposthèses suivantes pour $\epsilon > 0$ et $x \in \mathbb{R}$:

(i) $\lim_{\triangle t \to 0^+} \frac{1}{\triangle t} \int_{|y-x|>\epsilon} p(y, t+\triangle t; x, t)dy = 0.$

(ii) $\lim_{\triangle t \to 0^+} \frac{1}{\triangle t} \int_{|y-x|\leq\epsilon} (y-x)p(y, t+\triangle t; x, t)dy = a(x,t).$

(iii) $\lim_{\triangle t \to 0^+} \frac{1}{\triangle t} \int_{|y-x|\leq\epsilon} (y-x)^2 p(y, t+\triangle t; x, t)dy = b(x,t).$

Ces conditions découlent des conditions plus fortes :

(i)' $\lim_{\triangle t \to 0^+} \frac{1}{\triangle t} E\left(|\triangle X(t)|^\delta \mid X(t) = x\right) = 0$ pour un $\delta > 2$.

(ii)' $\lim_{\triangle t \to 0^+} \frac{1}{\triangle t} E\left[\triangle X(t) \mid X(t) = x\right] = a(x,t).$

(iii)' $\lim_{\triangle t \to 0^+} \frac{1}{\triangle t} E\left[(\triangle X(t))^2 \mid X(t) = x\right] = b(x,t).$

où $\triangle X(t) = X(t+\triangle t) - X(t) = y - x$.

4.4.1 Équations Différentielles de Kolmogorov

La densité de transition $p(y,t;x,s)$ d'un processus de diffusion est solution des équations différentielles de Kolmogorov rétrograde (Backward) et progressive (Froward). En utilisant les hypothèses **(i)**'-**(iii)**' et les équations de Chapman-Kolmogorov (4.1) on obtient l' équation différentielle de Kolmogorov rétrograde correspondants à un processus de diffusion non-homogène :

$$\frac{\partial p(y,t;x,s)}{\partial s} = -a(x,s)\frac{\partial p(y,t;x,s)}{\partial x} - \frac{1}{2}b(x,s)\frac{\partial^2 p(y,t;x,s)}{\partial x^2}. \tag{4.10}$$

Elle est dite équation rétrograde car la position et le temps actuelles sont (y,t), mais l'équation différentielle décrit la dynamique de toutes les positions et temps (x,s) avant l'actuel (y,t) ou en revenant en arrière dans le temps. Les équations différentielles de Kolmogorov progressives sont

$$\frac{\partial p(y,t;x,s)}{\partial t} = -\frac{\partial[a(y,t)p(y,t;x,s)]}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2[b(y,t)p(y,t;x,s)]}{\partial y^2}. \tag{4.11}$$

Si $a(x,t) = a(x)$ et $a(x,t) = a(x)$, alors le processus est homogène, et $p(y,t;x,s) = p(y,x;t-s)$. En posant $\tau = t - s$, il suit que

$$\frac{\partial p(y,t;x,s)}{\partial t} = -\frac{\partial p(y,x;\tau)}{\partial \tau}.$$

L' équation différentielle de Kolmogorov rétrograde correspondant à un processus homogène est

$$\frac{\partial p(y,x;t)}{\partial t} = a(x)\frac{\partial p(y,x;t)}{\partial x} + \frac{1}{2}b(x)\frac{\partial^2 p(y,x;t)}{\partial x^2}. \tag{4.12}$$

L' équation différentielle de Kolmogorov progressive (Équation de Fokker-Planck dans les applications en Physique) correspondant à un processus homogène est

$$\frac{\partial p(y,x;t)}{\partial t} = -\frac{\partial[a(y)p(y,x;t)]}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2[b(y)p(y,x;t)]}{\partial y^2}. \tag{4.13}$$

La densité de probabilité $\mathbf{p}(x,t)$ de $X(t)$ est une solution de l'équation différentielle de Kolmogorov progressive avec condition initiale $X(0) = x_0$. Dans ce cas $\mathbf{p}(x,t) = p(x,t;x_0,0)$. Ainsi l'équation (4.13) peut s'exprimer par

$$\frac{\partial \mathbf{p}(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial[a(x)\mathbf{p}(x,t)]}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2[b(x)\mathbf{p}(x,t)]}{\partial x^2}. \tag{4.14}$$

Processus de diffusion pour file d'attente M/M/1

On considère une file d'attente M/M/1 avec taux d'arrivées λ et taux de service μ. On suppose $\lambda < \mu$. Sur un intervalle de temps infinitésimale Δt, la probabilité d'une arrivée est $\lambda\Delta t$ et celle d'un service $\mu\Delta t$. Soit $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ le processus nombre de clients dans le système au temps t et $\mathbf{p}(x,t)$ sa densité de probabilité. On suppose $X(0) = x_0$ le système est vide au temps 0.

Changement Δx	**Probabilité**
$+1$	$\lambda\Delta t$
-1	$\mu\Delta t$

La moyenne de transition infinitésimale est donc

$$E\left[\triangle X(t) \mid X(t) = x\right] = +1 \times \lambda\Delta t + (-1) \times \mu\Delta t = (\lambda - \mu)\Delta t$$

et

$$E\left[(\triangle X(t))^2 \mid X(t) = x\right] = (\lambda + \mu)\Delta t.$$

On obtient ainsi les conditions **(ii)**'-**(iii)**' :

$$\lim_{\triangle t \to 0^+} \frac{1}{\triangle t} E\left[\triangle X(t) \mid X(t) = x\right] = \lambda - \mu.$$
$$\lim_{\triangle t \to 0^+} \frac{1}{\triangle t} E\left[(\triangle X(t))^2 \mid X(t) = x\right] = \lambda + \mu.$$

L'équation de Fokker-Planck associée est

$$\frac{\partial \mathbf{p}(x,t)}{\partial t} = -(\lambda - \mu)\frac{\partial[\mathbf{p}(x,t)]}{\partial x} + \frac{1}{2}(\lambda + \mu)\frac{\partial^2[\mathbf{p}(x,t)]}{\partial x^2}. \tag{4.15}$$

et la solution, sous la condition initiale $X(0) = x_0$, est donnée par la loi normale (4.9)

$$\mathbf{p}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\lambda + \mu)t}} \exp\left(-\frac{(x - x_0 - (\lambda - \mu)t)^2}{2(\lambda + \mu)t}\right).$$

Mais la solution n'est pas significative vu qu'on ne peut pas avoir, pour une file d'attente, de probabilité pour les valeurs négatives. Ainsi on impose la condition

$$\lim_{x \to 0} \frac{\partial[p(x,t;x_0,0)]}{\partial t} = 0$$

pour tout t. Ainsi $\triangle p(x,t;x_0,0) = 0$ pour $x < 0$ et $\lim_{x\to 0} \triangle p(x,t;x_0,0) = 0$. la nouvelle solution est donnée (sous $X(0) = x_0$) par

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\lambda+\mu)t}} \Bigg[&\exp\left(-\frac{(x-x_0-(\lambda-\mu)t)^2}{2(\lambda+\mu)t}\right) \\ &+ \exp\left(-\frac{2x(\mu-\lambda)}{(\mu+\lambda)}\right)\left(\exp\left(-\frac{[x+x_0-(\lambda-\mu)t]^2}{2(\mu+\lambda)t}\right)\right. \\ &\left. + \frac{2(\mu-\lambda)}{\mu+\lambda}\int_x^\infty \exp\left(-\frac{[y+x_0-(\lambda-\mu)t]^2}{2(\mu+\lambda)t}\right) dy\right)\Bigg].\end{aligned}$$

Cette solution est valide comme approximation d'un modèle M/M/1 sous la condition $\rho = \lambda/\mu = 1 - \epsilon$.

Processus de naissance et de morts avec immigration

Soit $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ le processus nombre total de la population sujette à des naissance de taux λ, morts de taux μ et un taux constant ν d'immigration. On suppose $X(0) = x_0$.

Table 4.1 – Probabilités associées au changements dans les naissances, mortalités et immigrations.

Changement Δx	**Probabilité**
$+1$	$\lambda x \Delta t$
-1	$\mu x \Delta t$
$+1$	$\nu \Delta t$

La moyenne de transition infinitésimale est donc

$$E\left[\triangle X(t) \mid X(t) = x\right] = +1 \times \lambda x \Delta t + (-1) \times \mu x \Delta t + 1 \times \nu \Delta t = [(\lambda-\mu)x + \nu]\Delta t$$

et

$$E\left[(\triangle X(t))^2 \mid X(t) = x\right] = [(\lambda+\mu)x + \nu]\Delta t$$

On obtient ainsi les conditions **(ii)**'-**(iii)**' :

$$\lim_{\triangle t\to 0^+} \frac{1}{\triangle t} E\left[\triangle X(t) \mid X(t) = x\right] = (\lambda-\mu)x + \nu = a(x).$$

$$\lim_{\triangle t\to 0^+} \frac{1}{\triangle t} E\left[(\triangle X(t))^2 \mid X(t) = x\right] = (\lambda+\mu)x + \nu = b(x).$$

L'équation de Fokker-Planck associée est

$$\frac{\partial \mathbf{p}(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial[((\lambda-\mu)x+\nu)\mathbf{p}(x,t)]}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2[((\lambda+\mu)x+\nu)\mathbf{p}(x,t)]}{\partial x^2}. \tag{4.16}$$

4.5 Processus de Wiener

Définition 4.3. Un processus stochastique continue $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ est un processus de Wiener (Mouvement Brownien Standard) si :

(1) Accroissements stationnaires : $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ pour $0 \leq s < t < \infty$.

(2) **Accroissements indépendants** : $W(t_2) - W(t_1)$ et $W(t_1) - W(t_0)$ sont indépendants pour $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \infty$.

(3) $P[W(0) = 0] = 1$.

Pour simplifier les notations on pose $\triangle t_i = t_{i+1} - t_i$ et $\triangle W(t_i) = W(t_{i+1}) - W(t_i)$ pour les intervalles $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n$. En appliquant la loi forte des grands nombre à $\triangle W(i) \sim \mathcal{N}(0,1)$ pour $i = 0, 1, \ldots, t$, où

$$W(t) = \sum_{i=0}^{t} \triangle W(i) \sim \mathcal{N}(0,t),$$

il suit que

$$P\left[\lim_{t\to\infty} \left|\frac{W(t)}{t}\right| = 0\right] = 1.$$

Notons que $\triangle W(t) = W(t + \triangle t) - W(t) \sim \mathcal{N}(0, \triangle t)$. Ainsi

$$E[\triangle W(t)] = 0,\ \ E\left[(\triangle W(t))^2\right] = \triangle t,\ \text{ et } E\left[(\triangle W(t))^4\right] = 3(\triangle t)^2.$$

En divisant ces quantités par $\triangle t$ et en prenant la limite $\triangle t \to 0^+$ on obtient les conditions **(i)**'-**(iii)**' avec $a(x,t) = 0$ et $b(x,t) = 1$. Le processus de Wiener est donc un processus de diffusion ayant pour densité de transition

$$p(y,x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2t}\right].$$

La covariance d'un processus de Wiener vaut :

$$E[W(t)W(s)] = \min(s,t)$$

4.6 Variation quadratique d'un processus de Wiener

Par définition, l'accroissement $W(t + \triangle t) - W(t)$ est de loi $\mathcal{N}(0, \triangle t)$ de sorte que le taux d'accroissement tend vers l'infini (en loi) quand $\triangle t \to 0^+$

$$\lim_{\triangle t\to 0} \frac{W(t+\triangle t) - W(t)}{\triangle t} = \infty \ \text{ (en loi)}.$$

La fonction W ne peut pas être dérivable. Pour une partition $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T$ de $[0,T]$, on définit le pas comme $\triangle = \max_i t_i - t_{i-1}$, et la variation de W par

$$\sum_{i=1}^{n} |W(t_i) - W(t_{i-1})|.$$

Une conséquence de la constatation ci-dessus, est que la variation du mouvement brownien tend vers l'infini lorsque le pas $\triangle \to 0$. Cependant la limite sera finie si on considère la variation quadratique et non la variation

Définition 4.4. La variation quadratique d'un processus de Wiener est la limite

$$\lim_{\triangle\to 0} \sum_{i=1}^{n} |W(t_i) - W(t_{i-1})|^2 = T$$

dans L^2.

4.6.1 Caractérisation de Levy

Proposition 4.1. *$W(t)$ et $W(t)^2 - t$ sont des martingales.*

On a la propriété remarquable qu'une martingale continue de variation quadratique (crochet) égale à t est nécessairement un mouvement brownien. En plus d'être une propriété fondamentale, elle est aussi très utile, puisqu'il est assez simple de vérifier ses hypothèses.

Proposition 4.2 (Caractérisation de Levy du mouvement brownien)**.** *Soit $\mathbf{M} = \{M(t)\}_{t\geq 0}$ un processus stochastique continue. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\{M(t)\}_{t\geq 0}$ et $\{M(t)^2 - t\}_{t\geq 0}$ sont des martingales pour la filtration associée à $\mathbf{M}$.*
2. *$\{M(t)\}_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien.*