Série 3 : applications mesurables

Exercice 1 Soient (E,τ) et $(F,\mathcal{L})$ deux espaces mesurables, A une partie de E et $f:(E,\tau)\to(F,\mathcal{L})$ une application.

1. Montrer que si f est une application constante alors elle est mesurable.
2. Montrer que $\mathbf{1_A}$ est mesurable si et seulement si A est mesurable.
3. Soit $f:E\to\mathbb{R}$ une application mesurable. Soit $k\in]0;+\infty[$.On pose

$$f_k(x)=\begin{cases} f(x), & \text{si } |f(x)|\leq k,\\ k, & \text{si } f(x)>k,\\ -k, & \text{si } f(x)<-k.\end{cases}$$

   Montrer que f_k est une application mesurable.

Exercice 2 Les applications suivantes sont-elles boréliennes ?

1. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\leq 0;\\ \frac{1}{x}, & x>0;\end{cases}$
2. $f(x)=e^{\cos x}$,
3. $f(x)=\ln x$.

Exercice 3 Soient (E,τ) un espace mesurable et $f:E\to\bar{\mathbb{R}}$ une application. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes

1. f est mesurable, **2.** $\forall r\in\mathbb{Q}$, $\{f\geq r\}\in\tau$, **3.** $\forall r\in\mathbb{Q}$, $\{f<r\}\in\tau$,

4. $\forall r\in\mathbb{Q}$, $\{f>r\}\in\tau$, **5.** $\forall r\in\mathbb{Q}$, $\{f\leq r\}\in\tau$.

Exercice 4 Soient (E,τ) un espace mesurable et $f:E\to\bar{\mathbb{R}}$ et $g:E\to\bar{\mathbb{R}}$ deux applications mesurables.

1. Montrer que les ensembles suivants sont mesurables

$$\{f<g\},\ \{f\leq g\},\ \{f=g\}.$$

2. Montrer que les applications suivantes sont mesurables

$$\sup(f,g),\ \inf(f,g).$$

3. Montrer que f est mesurable $\Leftrightarrow f^+,\ f^-$ sont mesurables.
4. Montrer que f est mesurable $\Rightarrow\mid f\mid$ est mesurable. Est-ce que l'inverse est vraie ?

Exercice 5 Soients $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables définies de (E,τ) dans $(\mathbb{R},\mathbb{B}(\mathbb{R}))$.

1. Montrer que $\lim_n\inf f_n$ et $\lim_n\sup f_n$ sont mesurables.
2. Montrer que si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers $f:E\to\mathbb{R}$, alors f est mesurable.
3. Montrer que l'application f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0;0),\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0;0)\end{cases}$$

   est borélienne.

Exercice 6 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application.

1. F. Zouyed, email :fzouyed@gmail.com, Laboratoire des Mathématiques appliquées $\mathcal{LMA}$

1. Montrer que si f est dérivable alors f et f' sont boréliennes.
2. Montrer que si f est monotone alors elle est borélienne.

<u>Exercice 7</u> Soit $f : E \to \bar{\mathbb{R}}_+$ mesurable. Montrer que f est une limite d'une suite de fonctions mesurables étagées. Ind. on pourra considérer la suite de fonctions

$$f_n(x) = \begin{cases} k2^{-n}, & \text{si } \frac{k}{2n} \leq f(x) \leq \frac{k}{2n}); \; k = 0, 1, ..., n2^n - 1, \\ n, & \text{si } f(x) \geq n. \end{cases}$$