Chapitre 4

Calcul de Probabilités

Dans les différents domaines scientifiques (biologie, médecine, sociologie...), on s'intéresse à de nombreux phénomènes dans les quels apparait souvent l'effet du hasard.
Ces phénomènes sont caractérisés par le fait que les résultats varient d'une ecpérience à l'autre.
Une expérience est appelée aléatoire s'il est impossible de prévoir son résultat c'est-à-dire, elle peut donner des résultats différents même si on la répète dans des conditions identiques.

4.1 Définitions

Définition 4.1.1 ***"l'espace probabilisé"*** *On appelle espace probabilisé le triplet* $(\Omega,\ \mathcal{F}, P)$ *où*

i/ Ω est l'univers : l'ensemble des évenements élémentaires d'une expérience aléatoire.

ii/ $\mathcal{F}$ est la tribu, elle est composée de tous les sous ensembles de Ω appelés les événements et vérifiant :

1/ $\Omega \in \mathcal{F}$.

2/ $\forall A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$.

3/ $\forall A,\ B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$.

4/ $\forall \left(A_n\right)_{n\in I} \in \mathcal{F},\ I \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow \underset{n\in I}{U} A_n \in \mathcal{F}$.

iii/ P est une application définie par :

$$\begin{array}{rccc} P: & \mathcal{F} & \to & [0,1] \\ & A & \mapsto & P(A) \end{array}$$

telle que

1/ $\forall A \in \mathcal{F} / \ (A \neq \emptyset \ et \ A \neq \Omega), \quad 0 < P(A) < 1.$

2/ $P(\Omega) = 1$, l'événement Ω est dit certain.

3/ $P(\emptyset) = 0$, l'événement $\emptyset$ (l'ensemble vide) est dit impossible.

4/ $\forall A \in \mathcal{F}, \ P\left(\bar{A}\right) = 1 - P(A)$ où $\bar{A}$ est le complémentaire de A dans Ω vérifiant $A \cup \bar{A} = \Omega$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$.

5/ $\forall \left(A_i\right)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{F}$ une suite d"événements disjoints deux à deux, on a

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

6/ $\forall A \in \mathcal{F}, \forall B \in \mathcal{F}, \ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$

7/ Deux événements A et B sont dits équiprobables si $P(A) = P(B)$.

Remarque 4.1.1 *Si l'ensemble Ω est fini ou dénombrable, on parle de probabilité discrète, le cas contraire est celui de probabilité continue.*

Définition 4.1.2 *Soient $(\Omega, \ \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé discret et $A \in \mathcal{F}$ un événement. La probabilité de A est :*

$$P(A) = \frac{Card\ A}{Card\ \Omega}.$$

Exemple 4.1.1 *Lorsqu'on lance une pièce de monnaie, on ne sait pas si c'est pile ou face qui sera visible et chacun des deux (pile, face) a une chance sur deux d'apparaitre $\Rightarrow \ \Omega = \{pile, \ face\}$ et la tribu $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \ \{pile\}, \ \{face\}, \ \Omega\}$ et la probabilité P définie pour tout évènement A par :*

$$\begin{array}{rccc} P: & \mathcal{F} & \to & [0,1] \\ & A & \mapsto & P(A) \end{array}$$

vérifie :

1/ Si $A = \emptyset: \ P(A) = 0.$

2/ Si $A = \{pile\} : P(A) = \frac{1}{2}$.

3/ Si $A = \{face\} : P(A) = \frac{1}{2}$.

4/ Si $A = \Omega : P(A) = 1$.

Exemple 4.1.2 *Le lancer d'un dé repose sur un principe similaire, les 6 faces du dé ont autant de chances d'apparaitre* $\frac{1}{6} \Rightarrow \Omega = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ *et* $P\{1\} = P\{2\} = ... = P\{6\} = \frac{1}{6}$. *On considère les évènements suivants :*

1/ Si A :"avoir un nombre pair"$\rightarrow A = \{2,\ 4,\ 6\} \rightarrow P(A) = \frac{CardA}{Card\Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

2/ Si A :"avoir un nombre impair"$\rightarrow A = \{1,\ 3,\ 5\} \rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$.

3/ Si A :"avoir un nombre supérieur à 5"$\rightarrow A = \{\ 6\} \rightarrow P(A) = \frac{1}{6}$.

4.2 Probabilité conditionnelle

Soient $(\Omega,\ \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et $A, B \in \mathcal{F}$ tel que $P(B) > 0$.

Définition 4.2.1 *La probabilité conditionnelle de l'évènement A sachant l'évènement B est définie par :*

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Proposition 4.2.1 *La probabilité conditionnelle vérifie les propriétés suivantes :*

1/ $P(\Omega/B) = 1$.

2/ $P(A \cap B) = P(A/B) \times P(B)$.

3/ $P\left(\bar{A}/B\right) = 1 - P(A/B)$.

Preuve. Les deux premières propriétés sont évidentes, il suffit de démontrer la troisième. On a

$$\begin{aligned} A \cup \bar{A} = \Omega \quad &\Rightarrow \quad \left(A \cup \bar{A}\right) \cap B = \Omega \cap B \\ &\Rightarrow \quad (A \cap B) \cup \left(\bar{A} \cap B\right) = B \end{aligned}$$

d'où

$$P\left[(A \cap B) \cup \left(\bar{A} \cap B\right)\right] = P(B).$$

Comme $(A \cap B) \cap \left(\bar{A} \cap B\right) = \emptyset$, alors

$$P\left[(A \cap B) \cup \left(\bar{A} \cap B\right)\right] = P(A \cap B) + P\left(\bar{A} \cap B\right) = P(B)$$

en divisant par $P(B)$, on obtient

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P\left(\bar{A} \cap B\right)}{P(B)} = 1$$

ce qui implique

$$P\left(\bar{A}/B\right) = 1 - P(A/B).$$

□

Définition 4.2.2 *On dit que A et B sont deux évènements indépendants si $P(A/B) = P(B)$, c'est à dire $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.*

Exemple 4.2.1 *On lance une pièce de monnaie 3 fois et on considère les évènements suivants :*

A : "on obtient face en premier lancement".

B : "on obtient face en deuxième lancement".

C : "on obtient face en deux lancements successifs pas plus".

En calculant les probabilités des 3 évènements cités ci-dessus, on obtient

1/ $P(A) = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$.

2/ $P(B) = 1 \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$.

3/ $P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 + 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Comme $P(A \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4} = P(A) \times P(B)$, alors les deux évènements A et B sont indépendants. De même on a $P(A \cap C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4} = P(A) \times P(C) \Rightarrow$ les deux évènements A et C sont indépendants et $P(B \cap C) = 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(B) \times P(C) \Rightarrow$ les deux évènements B et C sont indépendants.