Universite D.L de Sidi Bel-Abbés
Faculté des Sciences Exactes
Département de Probabilités-Statistique

Année : 2022/2023
Première année Master SA, PA
Module : Martingales Discrètes

---

## Examen de moyenne durée

( Durée : $1^H : 30mn$ )

---

**Exercice 1.** (8 pts) Questions de cours.

Soient $X$ une variable aléatoire intégrable définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$.

1. Rappeler la définition générale de l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$.
2. Compléter les égalités suivantes :
   a) $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B})) = ........?$
   b) Pour toute variable aléatoire $Z$ $\mathcal{B}$-mesurable et bornée alors $\mathbb{E}(Z\mathbb{E}(X|\mathcal{B})) = .......?$
   c) Si $\mathcal{G}$ est une sous tribu de $\mathcal{B}$ alors $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B})|\mathcal{G}) = .......?$
   d) Si $X$ et $\mathcal{B}$ sont indépendantes alors $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = .......?$
3. Monter que si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale par raport à sa filtration naturelle alors $(-M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une surmartingale.
4. Si $M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Donner une condition sur $M_n,\ n \geq 0$, pour laquelle $M$ est convergente.

**Exercice 2.** (4 pts)

1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré et $X$ une variable aléatoire intégrable, montrer que $(M_n = \mathbb{E}(X/\mathcal{F}_n))_n$ est une martingale.

2.Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes entre elles et centrées ($\mathbb{E}(X_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Posons $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ .
Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale relativement à la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, ..., X_n)$.

**Exercice 3.** (8 pts)

Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite indépendante de variables aléatoires de même loi

$$\mathbb{P}(X_k = 0) = \mathbb{P}(X_k = 2) = 1/2$$

On définit une suite $(M_n)_{n\geq 0}$ de variables aléatoires par $M_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$ (en particulier $M_0 = 1$).
1. Montrer que $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n^X)_{n\geq 0}$ .
2. Expliciter la loi de $M_n$ pour tout $n \geq 0$.
3. On définit une variable aléatoire $T$ à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ par

$$T = \inf\{n/\ \ X_n = 0\} = \inf\{n/\ \ M_n = 0\}$$

Montrer que $T$ est un temps d'arrêt de la filtration $(\mathcal{F}_n^X)_{n\geq 0}$. Expliciter sa loi.

4. La martingale $(M_n)_{n\geq 0}$ converge-t-elle dans $L^1$ ?



Bon Courage

**Solution de l'examen (Master 1)**
**Module : Martingales à temps discret (2022/2023)**

---

Exercice 1 : Questions de Cours (8 pts)

Veuillez voir le Cours

Exercice 2 : (4pts)

1/ $X$ est une v.a. intégrable sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$

$(M_n)_n = (\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n))_n$ est une martingale pour $(\mathcal{F}_n)_n$ ??

- D'abord $M_n$ est intégrable du fait que $X$ l'est et $(M_n)_n$ est adapté à $(\mathcal{F}_n)_n$ par la définition de l'espérance conditionnelle.

2pts

- $\mathbb{E}(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n\right]$

$= \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{F}_n\right]$ (Conditionnement successif)

$= M_n$ p.s. donc $(M_n)_n$ est bien $(\mathcal{F}_n)_n$-martingale

2/ $(X_n)_{n\geq 0}$ = suite de v.a i.i.d et $\mathbb{E}(X_n) = 0$, $\forall n$.

- $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$

- $S_n$ est intégrable et $(S_n)_n$ est adapté à $(\mathcal{F}_n)_n$ du fait que $(X_n)_n$ l'est.

2pts

- $\mathbb{E}\left[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n+1} X_k \mid \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[X_{n+1} + S_n \mid \mathcal{F}_n\right]$

$= \mathbb{E}\left[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] + \mathbb{E}\left[S_n \mid \mathcal{F}_n\right]$

$= \mathbb{E}\left[X_{n+1}\right] + S_n = S_n$ [Car les $X_k$ sont $\perp\!\!\!\perp$ et $S_n$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable

Donc $S_n$ est bien une $(\mathcal{F}_n^X)_n$ - martingale.

**Exercice 3 (8pts)**

$(X_k)_{k\geq 1}$ = suite de v.a $\perp\!\!\!\perp$ de même loi

$\mathbb{P}(X_k = 0) = \mathbb{P}(X_k = 2) = \frac{1}{2}. \Rightarrow \mathbb{E}[X_k] = 1, \ \forall k$

$$M_n = \prod_{k=1}^{n} X_k \quad \text{avec} \quad (M_0 = 1).$$

1/ $(M_n)_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n^X)_n$ - martingale.

- D'abord $M_n$ est intégrable car les $X_k$ sont aussi et $(M_n)_n$ est adapté à $(\mathcal{F}_n^X)_n$ car ~~les~~ $(X_k)_k$ est adapté à sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_n^X)_n$.

3pts

- $\mathbb{E}[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n+1} X_k | \mathcal{F}_n\right]$

$= \mathbb{E}\left[X_{n+1} \prod_{k=1}^{n} X_k | \mathcal{F}_n\right]$

$= \mathbb{E}[X_{n+1}] \cdot \prod_{k=1}^{n} X_k$ (car les $X_k$ sont $\perp\!\!\!\perp$ et $\prod_{k=1}^{n} X_k \in \mathcal{F}_n$.

$= M_n \cdot \mathbb{E}[X_{n+1}]$

$= M_n$ ( car $\mathbb{E}(X_{k+1}) = 1$ ).

2/ La loi de $M_n$ :

D'abord $M_n$ prend les valeurs $(0, 2^n)$

$$\mathbb{P}(M_n = 2^n) = \mathbb{P}\left(\prod_{k=1}^{n} X_k = 2^n\right) = \mathbb{P}(X_1 = 2, \dots, X_n = 2)$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k = 2) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (\text{car les } X_k \text{ sont } \perp\!\!\!\perp)$$

2pts

donc $\boxed{\mathbb{P}(M_n = 2^n) = \frac{1}{2^n}}$

et $\boxed{\mathbb{P}(M_n = 0) = 1 - \frac{1}{2^n}}$.

3/ $T = \inf\{n / X_n = 0\} = \inf\{n / M_n = 0\}$

<u>T est un temps d'arrêt ??</u>

$$(T = n) = \underbrace{(\underset{\in \mathcal{F}_1}{X_1 = 2}, \underset{\in \mathcal{F}_2}{X_2 = 2}, \dots, \underset{\in \mathcal{F}_{n-1}}{X_{n-1} = 2}, \underset{\in \mathcal{F}_n}{X_n = 0})}_{\in \mathcal{F}_n^X}$$

2pts

donc clairement $T$ est un temps d'arrêt de $(\mathcal{F}_n^X)_n$.

- <u>la loi de T :</u>

$$\mathbb{P}(T = n) = \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_k = 2) \cdot \mathbb{P}(X_n = 0)$$

car les $X_k$ sont $\perp\!\!\!\perp$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}.$$

donc $\boxed{\mathbb{P}(T = n) = \frac{1}{2^n}}$.

4°/ On a : $\forall \varepsilon > 0 : \mathbb{P}(|M_n| > \varepsilon) = \frac{1}{2^n}$

Comme $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(|M_n| > \varepsilon) = \sum_n 1/2^n$ est CV

Alors $M_n \xrightarrow{p.s} 0$.

Supposons maintenant que :

$M_n \xrightarrow{L^1} 0$ Alors $\mathbb{E}(M_n) \longrightarrow 0$

Or $\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}(M_0) = 1 \xrightarrow{n \to +\infty} 1$.

Contradiction

On conclut que $(M_n)_n$ n'est pas CV dans $L^1$.

#

4/