Analyse des données (M2-PA)

Chap 1. Algèbre linéaire

Présenté par : M. HAMMAD

11 Octobre 2022

Exercice 1 : Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les ensembles suivants :

- $E = \{(x, y, z);\ x + 2y - z = 0\}$.
- $F_1 = \{(x, y, z);\ x = 0 \wedge y - z = 0\}$.
- $F_2 = \{(x, y, z);\ x = y = 0\}$.

1. Vérifier que : E, F_1 et F_2 sont des s.e.v de $\mathbb{R}^3$.
2. Trouver une famille génératrice de chacun d'eux et déduire leur dimension.
3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = E \oplus F_1$ et $\mathbb{R}^3 = E \oplus F_2$.

Exercice 2 : Montrer que l'ensemble F défini par :

$$F_{=}\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3;\ x + y + z = 0 \wedge x + iy - z = 0\}$$

est un s.e.v de $\mathbb{C}^3$ et déterminer une base de F.

Exercice 3 : On considère l'application

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & f(x, y, z) = (2x - 3z, 4x - y + z, x - y + 2z). \end{array}$$

1. Démontrer que l'application f est linéaire.
2. Donner la matrice associée à cette application relativement à la base canonique qu'on note $\mathcal{B}$.
3. Soit $\mathcal{B}' = \{(1, 2, 1),\ (0, -1, 1),\ (1, 1, 1)\}$ une base de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}'$.
4. Déduire la matrice associée à l'application f relativement à la nouvelle base $\mathcal{B}'$

Exercice 4 : Calculer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 : Extraire l'application linéaire associée aux matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & -3 \\ -2 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 4 & 5 & -7 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6 : Soit M la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer et factoriser le polynôme caractéristique de M.
2. Démontrer que M est diagonalisable et déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $M = PDP^{-1}$.
3. Calculer M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7 : Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Sont-elles diagonalisables ?.
2. Sont-elles inversibles ?. Si oui calculer leur inverses.

Exercice 8 : Soit M la matrice de $\mathbb{R}^4$ suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de M et ses sous-espaces propres.
2. Montrer que M est diagonalisable.
3. Déterminer une base de vecteurs propres et la matrice de passage P.
4. On a $D = P^{-1}MP$, pour $k \in \mathbb{N}$ exprimer M^k en fonction de D^k puis calculer M^k.

Exercice 9 :

1. Les applications suivantes définies par :

$$d_1(x,y) = |\sin x - \sin y|, \ d_2(x,y) = |x^2 - y^2|, \ d_3(x,y) = |x^3 - y^3|$$

   sont-elles des distances sur $\mathbb{R}$?.
2. A quelle condition sur la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, l'application définie par $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$ est-elle une distance ?.

Exercice 10 : On considère sur $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ les applications suivantes :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|, \ \|f\|_1 = \int_{[0,1]} |f(t)| dt$$

1. Montrer que $\|f\|_\infty$ et $\|f\|_1$ sont des normes sur E.
2. Sont-elles équivalentes ?.