Université A. Mira de Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

Concours national d'entrée en Doctorat LMD
Spécialité : Mathématiques
Options : Analyse, Probabilités et Statistiques

28/10/2017

Epreuve commune : Mathématiques de base
Durée : 1 H 30

Exercice n° 1.
Soit G un groupe commutatif fini. On appelle e l'élément neutre et on note xy le composé de deux éléments x et y. Soit n un entier tel que $x^n = e \;\; \forall x \in G$.
On suppose que $n = rs$ où r et s sont premiers entre eux.

$$M = \{x \in G |\; x^r = e\} \;\text{ et }\; N = \{x \in G |\; x^s = e\}.$$

1. Démontrer que M et N sont des sous groupes de G.
2. Soit $M \times N$ l'ensemble des couples (x, y) où $x \in M$ et $y \in N$. Sur $M \times N$ on définit la loi suivante notée multiplicativement $(x, y) \times (x', y') = (xx', yy')$.
   Montrer que $M \times N$ est ainsi muni d'une structure de groupe commutatif.
3. Soit f l'application définie sur $M \times N$ à valeurs dans G par $f[(x, y)] = xy$.
   Démontrer que f est un isomorphisme.

Exercice n° 2.

1. **i)** Soit x un nombre réel supérieur ou égal à 1. Montrer qu'il existe un entier n tel que
$$\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{n}.$$
   ii) En déduire que pour tout entier n positif
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} \leq \ln n \leq 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n-1}.$$
   ii) On pose $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \ln n$. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
   (On pourrait utiliser $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \; si \; x \geq 0$).
2. Soit f une fonction réelle définie et continue sur $[a, b]$ et vérifiant
$$f(a + b - x) = f(x) \;\; \forall x \in [a, b].$$
   i) A l'aide d'un changement de variable simple, montrer que
$$\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx.$$
   ii) En appliquant ce qui précède, calculer
$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

3. Soit
$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

i) Touver une relation entre I_{n+1} et I_n.

ii) Résoudre l'équation différentielle suivante :
$$(x^2+1)y' - \frac{y}{Arctgx} = \frac{Arctgx}{(x^2+1)^2}.$$

Exercice n° 3. Soit $\mathbb{E}$ l'espace vectoriel des polynômes à une indéterminée X à coefficients réels de degrè inférieur ou égal à 2.

1. Soit f l'application de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}$ définie par
$$f(P) = -\frac{(X+1)^2}{2}P'' + (X+1)P', \text{ où } P \in \mathbb{E}.$$

a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{E}$ et que $f \circ f = f$

b) Déterminer $Kerf$ et Imf. En donner une base.

c) Montrer que $\mathbf{E} = Kerf \oplus Imf$

2. Soit
$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{E} & \longrightarrow \mathbb{R}^3 & \\ & P & \longmapsto & g(P) = (P(1), P'(1), P''(1)) \end{array}$$

Montrer que g est un isomorphisme et préciser g^{-1}.