Nom & Prénom : T.D	2017/2018 اللقب و الإسم:
Niveau :	المستوى:
Groupe : Processus Stoch. 3	الفوج:
N d'inscription :	رقم التسجيل:
Examen de :	إمتحان في مادة:

Corrigé-type de l'examen de T.D Master 2 MAS.

Exo1

(1) $d(B_t^2) \underset{\text{d'Itô}}{\overset{\text{f}^{\text{le}}}{=}} 2B_t\,dB_t + dt$

$$\Longrightarrow \boxed{\int_0^t B_s\,dB_s = \frac{1}{2}\left(B_t^2 - t\right)} \qquad 01,00$$

(2) • $Var\left[\int_0^t |B_s|^{1/2}\,dB_s\right] = \int_0^t \mathbb{E}|B_s|\,ds$

Or: $\mathbb{E}|B_s| = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\,e^{-\frac{x^2}{2s}}\,dx \quad , s>0$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\left[2\int_0^{+\infty} x\,e^{-\frac{x^2}{2s}}\,dx\right]$$

$$= \frac{2\sqrt{s}}{\sqrt{2\pi}} \qquad 03,00$$

$$\Longrightarrow Var\left[\int_0^t |B_s|^{1/2}\,dB_s\right] = \int_0^t \frac{2\sqrt{s}}{\sqrt{2\pi}}\,ds = \boxed{\frac{4t\sqrt{t}}{3\sqrt{2\pi}}}$$

• $Var\left[\int_0^t (B_s+s)^2\,dB_s\right] = \int_0^t \mathbb{E}(B_s+s)^4\,ds$

$$= \int_0^t \mathbb{E}\left[B_s^4 + 4B_s^3 s + 6B_s^2 s^2 + 4B_s s^3 + s^4\right] ds$$

$$= \boxed{\frac{t^5}{5} + \frac{3}{2}t^4 + t^3} \qquad 03,00$$

③ $d(B_t^3) = 3B_t^2\, dB_t + 3B_t\, dt$

$$\Rightarrow \int_0^t B_s^2\, dB_s = \frac{1}{3}B_t^3 - \int_0^t B_s\, ds$$

$\boxed{\alpha = 1}$

(01,00)

Exo 2 ① $X(t)$: solution d'une EDS linéaire

$$X_t = U_t\left[X_0 + \int_0^t \frac{\mu_2 - \sigma_1\sigma_2}{U_s}\, ds + \int_0^t \frac{\sigma_2}{U_s}\, dB_s\right]$$

Avec : $U_t = \operatorname{Exp}\left[\int_0^t \left(\mu_1 - \frac{\sigma_1^2}{2}\right) ds + \int_0^t \sigma_1\, dB_s\right] = S(t)$,

D'où
$$\boxed{X_t = S_t\left((\mu_2 - \sigma_1\sigma_2)\int_0^t S^{-1}(s)\, ds + \sigma_2 \int_0^t S^{-1}(s)\, dB_s\right),\ t \geq 0}$$

$$X_t = e^{\left(\mu_1 - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)t + \sigma_1 B_t}\left[(\mu_2 - \sigma_1\sigma_2)\int_0^t e^{-\left(\mu_1 - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)s - \sigma_1 B_s}\, ds \right.$$

$$\left. + \sigma_2 \int e^{-\left(\mu_1 - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)s - \sigma_1 B_s}\, dB_s\right]$$

(01,00)

② ⓐ $dS_t = dU_t = U_t\left[\mu_1\, dt + \sigma_1\, dB_t\right]$ (Voir EDS Linéaires)

D'où : $\boxed{dS_t = \mu_1 S_t\, dt + \sigma_1 S_t\, dB_t,\ t \geq 0}$

(02,00)

Rq. On pourrait utiliser la f^le d'Itô
(ou bien l'exponentielle stoch.)

Groupe : ..... I. D	2017/2018 ..... اللقب و الإسم:
N d'inscription :	المستوى:
Examen de :	الفوج:
	رقم التسجيل:
	إمتحان في مادة:

(b) E.D.S satisfait par $S^{-1}(t)$

$$d(S_t^{-1}) = d\left(\frac{1}{S_t}\right) \underset{d'Itô}{\overset{plu}{=}} \underbrace{\frac{-1}{S_t^2} dS_t}_{} + \underbrace{\left(\frac{1}{S_t^3}\right) dS_t^2}_{}$$

$$= \frac{-S_t}{S_t^2}\left(\mu_1 dt + \sigma_1 dB_t\right) + \frac{1}{S_t^3} S_t^2 (\sigma_1^2 dt)$$

$$\boxed{dS_t^{-1} = -S_t^{-1}\left[(\mu_1 - \sigma_1^2) dt + \sigma_1 dB_t\right]}$$ 02,00

(3) $$d\left(X_t S_t^{-1}\right) \overset{d'après\ la\ question\ (1)}{=\!=\!=} d\left[(\mu_2 - \sigma_1\sigma_2)\int_0^t S^{-1}(s) ds + \sigma_2 \int_0^t S^{-1}(s) dB_s\right]$$

$$\boxed{d\left(X_t S_t^{-1}\right) = S^{-1}(t)\left[(\mu_2 - \sigma_1\sigma_2) dt + \sigma_2 dB_t\right]}$$

02,00