حلول تمارين السلسلة الثالثة

احتمالات

حل التمرين الأول:

1) إيجاد قيمة k ثم دالة توزيع X.

بما أن $\mathbb{P}_X$ هو قانون احتمال X فإنه يحقق الشرط

$$\sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}_X(x)=1 \quad , \quad X(\Omega)=\{0,1,2\}.$$

وعليه

$$\sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}_X(x)=\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(X=2)=1$$
$$=6k=1 \Rightarrow \boxed{k=\frac{1}{6}}$$

لتكن F_X دالة توزيع X المعرفة كما يلي:

$$F_X(x)=\mathbb{P}(X\leq x)=\sum_{x_i\leq x}\mathbb{P}(X=x_i)$$

$$=\begin{cases} 0 & , \text{si } x<0 \\ \mathbb{P}(X=0) & , \text{si } 0\leq x<1 \\ \mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=1) & , \text{si } 1\leq x<2 \\ \mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(X=2) & , \text{si } x\geq 2 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 0 & , \text{si } x<0 \\ \frac{1}{6} & , \text{si } 0\leq x<1 \\ \frac{1}{2} & , \text{si } 1\leq x<2 \\ 1 & , \text{si } x\geq 2. \end{cases}$$

2) حساب الاحتمالات:

$$\mathbb{P}(X<2)=\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=1)=\frac{4}{6}$$

$$\mathbb{P}(X>2)=0$$

$$\mathbb{P}(X>1|X\geq 1)=\frac{\mathbb{P}(X>1, X\geq 1)}{\mathbb{P}(X\geq 1)}=\frac{\mathbb{P}(X>1)}{\mathbb{P}(X\geq 1)}=\frac{\mathbb{P}(X=2)}{\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(X=2)}$$

$$=\frac{2}{3}.$$

حل التمرين رقم 2

1- وصف التجربة العشوائية

رمي حجر النرد ثم السحب للكرة من الوعاء.

2- تعيين النتائج الممكنة للتجربة العشوائية

$\Omega = \{(i,j),\ i = 0,1,3,5;\ j = 1,3,5\}$.

$= \{(0,1),(0,3),(0,5),(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),$
$(5,1),(5,3),(5,5)\}$

$\text{Card}\,\Omega = 4 \times 3 = 12$.

3) تعريف إحتمال على Ω: يمكن تعريف إحتمال منتظم على Ω لأن كل الثنائيات متساوية إحتمال الظهور والذي يساوي

$\forall (i,j) \in \Omega,\ P_{(i,j)} = \dfrac{1}{\text{card}\,\Omega} = \dfrac{1}{12}$

4) X متغير عشوائي يرفق بكل نتيجة ممكنة للتجربة العشوائية القيمة التي يربحها اللاعب

اللاعب يربح 0 دينار إذا تحصل على الرقم 0 بعد رمي حجر النرد.

يربح 5 دينار إذا تحصل على رقم النرد مساوٍ لرقم الكرة المسحوبة.

ويربح 1 دينار إذا كان الرقمان المتحصل عليهما مختلفان.

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

$\omega \longmapsto X(\omega) = x$.

القيم الممكنة لـ X هي

$X(\Omega) = \{0, 5, 1\}$.

$X(0,1) = X(0,3) = X(0,5) = 0$

$X(3,3) = X(5,5) = 5$

$X(1,1) = X(1,3) = X(1,5) = X(3,1) = X(3,5) = X(5,1) = X(5,3) = 1$

ب- قانون إحتمال X ودالة التوزيع: لحساب قانون احتمال X نبحث عن الأعداد الحقيقية $(P_i)_{i=1,2,3}$ بحيث $\forall i = 1,2,3 : P_i = P(X = x_i)$ والتي تحقق

$\begin{cases} 1)\ \forall i = 1,2,3\ ,\ P_i \in [0,1] \\ 2)\ \sum_{i=1,2,3} P_i = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$P_1 = P(X=0) = 3/12$

$P_2 = P(X=5) = 2/12$

$P_3 = P(X=1) = 7/12$

$(P_1 + P_2 + P_3 = 1)$

$F_X(x) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 3/12, & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 10/12, & \text{si } 1 \le x < 5 \\ 1, & \text{si } x \ge 5. \end{cases}$

الصفحة 2

التمرين الثالث

① حساب قيمة a.

الأعداد الحقيقية p_k بحيث $k=1,2,\dots,9$ تعرف قانون احتمال X، فهي تحقق الشرط

$$\sum_{k=1}^{9} p_k = 1.$$

وعليه:

$$\sum_{k=1}^{9} p_k = 1 \iff \sum_{k=1}^{9} a\,k(10-k) = 1 \iff \boxed{a = \frac{1}{165}}$$

② حساب التوقع الرياضي والتباين

$$E(X) = \sum_{k=1}^{9} k\,\mathbb{P}_X(k) = \sum_{k=1}^{9} k \cdot \frac{1}{165} k(10-k)$$

$$= \frac{1}{165} \sum_{k=1}^{9} k^2(10-k) = \frac{10}{165} \sum_{k=1}^{9} k^2 - \frac{1}{165} \sum_{k=1}^{9} k^3$$

$$\boxed{E(X) = 5}$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_{k=1}^{9} k^2\,\mathbb{P}_X(k) - (5)^2$$

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{9} k^2 \frac{1}{165} k(10-k) = \frac{149}{3}$$

$$Var(X) = \frac{74}{3}.$$

③ حساب التوقع الرياضي والتباين للمتغير العشوائي $Y=X^2$

نعين أولا قانون إحتمال Y ثم نحسب $E(Y)$ و $Var(Y)$

ليكن $\mathbb{P}_Y$ قانون احتمال Y والمعرف كما يلي:

$$\mathbb{P}_Y(y) = \mathbb{P}(Y=y) = \mathbb{P}(X^2=y) = \mathbb{P}(X=\mp\sqrt{y}) = \mathbb{P}(X=\sqrt{y})$$ (لأن قيم X كلها موجبة)

لدينا $Y = X^2$ ومنه $Y(\Omega) = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\}$

$\mathbb{P}_Y(1) = \mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(X=1) = \boxed{\frac{9}{165}}$, $\mathbb{P}_Y(9) = \mathbb{P}(Y=9) = \mathbb{P}(X=3) = \boxed{\frac{21}{165}}$

$\mathbb{P}_Y(4) = \mathbb{P}(Y=4) = \mathbb{P}(X=2) = \boxed{\frac{16}{165}}$, $\mathbb{P}_Y(16) = \mathbb{P}(Y=16) = \mathbb{P}(X=4) = \boxed{\frac{24}{165}}$

$\mathbb{P}_Y(25) = \mathbb{P}(Y=25) = \mathbb{P}(X=5) = \boxed{\frac{25}{165}}$, $\mathbb{P}_Y(36) = \mathbb{P}(Y=36) = \mathbb{P}(X=6) = \boxed{\frac{24}{165}}$

$\mathbb{P}_Y(49) = \mathbb{P}(Y=49) = \mathbb{P}(X=7) = \boxed{\frac{21}{165}}$, $\mathbb{P}_Y(64) = \mathbb{P}(Y=64) = \mathbb{P}(X=8) = \boxed{\frac{16}{165}}$

$\mathbb{P}_Y(81) = \mathbb{P}(Y=81) = \mathbb{P}(X=9) = \boxed{\frac{9}{165}}$

حساب $E(Y)$ و $Var(Y)$

$$E(Y)=\sum_{y\in Y(\Omega)} y\cdot P_Y(y)$$

$$=\frac{9+4\times16+9\times21+16\times21+25\times25+36\times21+49\times21+64\times16+81\times9}{165}$$

$$\boxed{E(Y)=29{,}8}$$

$$Var(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2$$

$$E(Y^2)=\sum_{y\in Y(\Omega)} y^2\, P(Y=y)$$

$$=\frac{9+16\times16+81\times21+256\times21+625\times25+1296\times21+2401\times21+4096\times16+6561\times9}{165}=\boxed{1393}$$

ومنه

$$Var(Y)=1393-(29{,}8)^2=\boxed{504{,}96}$$

حل التمرين الرابع

1) تعيين القيم الممكنة لـ X، وقانون احتماله.

من تعريف الدالة F_X يمكن استخراج القيم الممكنة لـ X، فيكون

$$X(\Omega)=\{-2,1,2,3\}.$$

أما قانون الاحتمال:

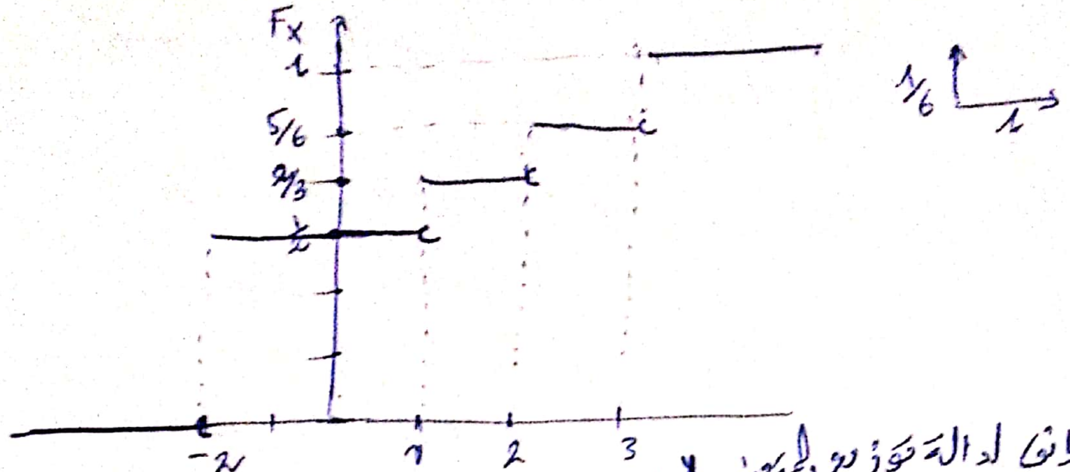
$$P_X(-2)=P(X=-2)=\boxed{\frac{1}{2}}$$

$$P_X(1)=P(X=1)=F_X(1)-P_X(-2)=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\boxed{\frac{1}{6}}$$

$$P_X(2)=P(X=2)=F_X(2)-F_X(1)=\frac{5}{6}-\frac{2}{3}=\boxed{\frac{1}{6}}$$

$$P_X(3)=P(X=3)=1-F_X(2)=1-\frac{5}{6}=\boxed{\frac{1}{6}}$$

2) التمثيل البياني للدالة F_X.



التمثيل البياني لدالة توزيع المتغير X .

③ حساب الاحتمالات

$$\mathbb{P}(X>1)=\mathbb{P}(X=2)+\mathbb{P}(X=3)=\frac{2}{6}$$

$$\mathbb{P}(X\geq \tfrac{1}{2})=\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(X=2)+\mathbb{P}(X=3)=\frac{3}{6}$$

$$\mathbb{P}(-3<X<2{,}5)=\mathbb{P}(X=-2)+\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(X=2)=\frac{5}{6}.$$

$$\mathbb{P}(\tfrac{1}{2}\leq X<3)=\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(X=2)=\frac{2}{6}.$$

④ إيجاد قانون احتمال Y ثم دالة توزيعه.

أولا يجب تحديد القيم الممكنة لـ Y: $Y(\Omega)=\{-8,1,4,7\}$.

ليكن $\mathbb{P}_Y$ قانون احتمال Y وعليه

$$\mathbb{P}_Y(-8)=\mathbb{P}(Y=-8)=\mathbb{P}(X=-2)=\frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}_Y(1)=\mathbb{P}(Y=1)=\mathbb{P}(X=1)=\frac{1}{6}.$$

$$\mathbb{P}_Y(4)=\mathbb{P}(Y=4)=\mathbb{P}(X=2)=\frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}_Y(7)=\mathbb{P}(Y=7)=\mathbb{P}(X=3)=\frac{1}{6}.$$

لتكن F_Y دالة توزيع المتغير العشوائي Y. ولدينا $y\in\mathbb{R}$،

$$F_Y(y)=\mathbb{P}(Y\leq y)=\sum_{y_i\leq y}\mathbb{P}_Y(y_i)=\begin{cases}0, & si\ y<-8\\ \frac{1}{2}, & si\ -8\leq y<1\\ \frac{4}{6}, & si\ 1\leq y<4\\ \frac{5}{6}, & si\ 4\leq y<7\\ 1, & si\ y\geq 1.\end{cases}$$

• حساب الاحتمالات :

$P(2<Y<4.5) = P(Y=3)+P(Y=4) = \frac{2}{6}$

$F_Y(-1) = \frac{1}{2}$ بما أن $-2<-1<1$ فإن

$F_Y(3.3) = \frac{4}{6}$ بما أن $1<3.3<4$ فإن

حل التمرين الخامس

① بيان إن كانت الدوال التالية هي كثافات إحتمال.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{a^2}, & si\ -a \le x \le a \\ 0, & sinon \end{cases}$$

نلاحظ أن الدالة f تحقق الشروط تعريف كثافة إحتمال، فهي موجبة، مستمرة، و كذلك تكاملها على $\mathbb{R}$ يساوي 1 إذن f كثافة إحتمال.

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$f(x)$ هي كثافة إحتمال لأنها موجبة، مستمرة و تكاملها على $\mathbb{R}$ يساوي 1.

$$f(x) = \begin{cases} a e^{-ax}, & si\ x \ge 0 \\ 0, & sinon \end{cases}$$

$f(x)$ هي كثافة إحتمال إذا وفقط إذا كان العدد الحقيقي a موجب تماما و إلا فلا.

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

f هي كثافة إحتمال لأنها موجبة، مستمرة و تكاملها على $\mathbb{R}$ يساوي 1.

② تعيين قيم a التي تجعل الدالة f كثافة إحتمال.

$$f(x) = \begin{cases} x, & si\ 0 \le x \le a \\ 0, & sinon \end{cases}$$

متى تكون الدالة f كثافة إحتمال يجب أن تحقق الشروط

1) f موجبة $(\forall x\in\mathbb{R}, f(x)\geq 0)$

2) f مستمرة على مجال تعريفها D_f

3) $\int_{D_f} f(x)\,dx = 1.$

وعليه تكون الدالة f المعرفة بـ

$$1- f(x)=\begin{cases} a, & si\ 0\leq x< a \\ 0, & sinon \end{cases}$$

كثافة إحتمال إذا وفقط إذا كان $\boxed{a=1}$

$$2- f(x)=\begin{cases} \frac{2a-x}{a^2}, & si\ a\leq x\leq 2a \\ 0, & sinon \end{cases}$$

لا توجد أي قيمة لـ a تجعل الدالة f كثافة إحتمال.

$$3- f(x)=\begin{cases} \frac{1}{8}(4-a), & si\ a\geq x\geq 0 \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

f كثافة إحتمال من أجل $\boxed{a=4}$

$$4- f(x)=\begin{cases} \frac{x}{a^2}; & si\ a\geq x\geq 0 \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

لا توجد أي قيمة لـ a تجعل f كثافة احتمال.

حل التمرين السادس.

1- تعيين قيمة k.

لدينا الدالة f مستمرة و كذلك موجبة من أجل $k>0$

وعليه لحساب قيمة k نستعمل الشرط $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1 \iff \int_0^4 k\,x(4-x)\,dx = 1$$

$$\iff k\,\frac{32}{3} = 1$$

$$\iff \boxed{k = \frac{3}{32}}$$

② إيجاد عبارة دالة التوزيع F_X.

لدينا الدالة F_X معرفة كما يلي

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \,,\quad x \in \mathbb{R}.$$

وعليه - من أجل $x \leq 0$ نجد $F_X(x) = 0$ لأن الدالة f معدومة.

- من أجل $x \in [0,4]$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt}_{=0} + \int_0^{x} f(t)\,dt$$

$$= \int_0^{x} f(t)\,dt = \int_0^{x} \frac{3}{32}\,t(4-t)\,dt.$$

$$= \frac{x^2}{32}(6-x)$$

- من أجل $x \geq 4$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt}_{=0} + \int_0^{4} f(t)\,dt + \underbrace{\int_4^{x} f(t)\,dt}_{=0}$$

$$= \int_0^4 f(t)\,dt = \int_0^4 \frac{3}{32}\,t(4-t)\,dt$$

$$= 1$$

فيكون

$$F_X(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{32}(6-x)\,, & \text{si } x \in [0,4] \\ 1\,, & \text{si } x \geq 4. \end{cases}$$

- الـمـنـوال -

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_0^4 \frac{3}{32} x^2 (4-x)\,dx.$$

$$\boxed{E(X) = 2}$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^4 \frac{3}{32} x^3 (4-x)\,dx$$

$$\boxed{E(X^2) = \frac{24}{5}}$$

$$\boxed{Var(X) = \frac{4}{5}}$$

③ حساب الإحتمالات .

$$\mathbb{P}(X>3/X>2) = \frac{\mathbb{P}(\{X>3\}\cap\{X>2\})}{\mathbb{P}(X>2)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X>3)}{\mathbb{P}(X>2)} = \frac{1-F_X(3)}{1-F_X(2)} = \boxed{\frac{5}{16}}$$

$$\mathbb{P}(1 \le X \le 2) = F(2) - F(1) = \boxed{\frac{11}{32}}$$

④ إيجاد كثافة إحتمال $Y=\sqrt{X}$

لتكن F_Y و f_Y دالة توزيع Y وكثافة إحتماله على التوالي.

$$y \in \mathbb{R},\ F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(\sqrt{X} \le y) = \mathbb{P}(X \le y^2) = F_X(y^2).$$

$$f_Y(y) = \frac{d F_Y(y)}{dy} = \frac{d F_X(y^2)}{dy} = 2y f_X(y^2).$$

$$= \begin{cases} \frac{3}{16} y^3 (4-y^2), & si\ 0 \le y \le 2 \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

- حساب $E(Y)$ و $Var(Y)$

الطريقة الأولى ـــ باستعمال قانون احتمال Y .

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(y)\, dy = \frac{3}{16} \int_0^2 y^4 (4 - y^2)\, dy = \boxed{1,18}$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$$

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y)\, dy = \frac{3}{16} \int_0^2 y^5 (4 - y^2)\, dy = 2,53$$

$$Var(Y) = 2,53 - (1,18)^2 = \boxed{1,14}$$