Solution de l'examen de SC 2020
EX1
I)1-Je vous laisse le soin de faire **les graphes des AC et ACP**. (Rappel l'axe des x est pour h et l'axe des y pour ρ_h ou φ_{hh}.)
2- **Identification du modèle:** ici, il faut calculer l'IC et le dessiner sur les graphes, alors l'IC à 95%

$$IC = \left[-1.96\sqrt{\frac{1}{100}}, 1.96\sqrt{\frac{1}{100}}\right] = [-0.19, 0.19].$$

On remarque que:
*- Les valeurs de ρ_h décroissent très lentement ce qui veut dire que X_t est non stationnaire. (ce n'est plus la peine de voir le graphe de φ_{hh}).
*-X_t étant non stationnaire, alors $d = 1$ et on passe à ΔX_t.
*- D'après les corrélogrammes de ΔX_t, on propose les valeurs de $p = 2$ et $q = 5$, bien sur, on identifie le modèle:

$$\Delta X_t \backsim ARMA(2,0) \quad \text{ou} \quad X_t \backsim ARIMA(2,1,0).$$

3- **Estimation des paramètres:**
La méthode des moments: on a

$$\begin{pmatrix}\rho_1\\ \rho_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \rho_1\\ \rho_1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{pmatrix}\widehat{\varphi}_1\\ \widehat{\varphi}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0.91\\ 0.91 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0.91\\ 0.8\end{pmatrix}.$$

Après calcul, on trouve $\begin{pmatrix}\widehat{\varphi}_1\\ \widehat{\varphi}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1.05\\ -0.16\end{pmatrix}$.
4-**Tester la significativité des coefficients**
*Pour trouver les écarts types on a la distribution asymptotique des coefficients:

$$\sqrt{n}\left(\begin{pmatrix}\widehat{\varphi}_1\\ \widehat{\varphi}_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}\right) \xrightarrow{d} N\left(0, \sigma^2\Gamma^{-1}\right)$$

$\widehat{\sigma}^2 = \widehat{\gamma}_0\left(1 - \widehat{\varphi}_1\widehat{\rho}_1 - \widehat{\varphi}_2\widehat{\rho}_2\right)$ d'où $\widehat{\sigma}^2 = 1.72$

$$\begin{aligned} Var\left(\begin{pmatrix}\widehat{\varphi}_1\\ \widehat{\varphi}_2\end{pmatrix}\right) &= \frac{\widehat{\sigma}^2}{n\widehat{\gamma}_0}\begin{pmatrix}1 & \widehat{\rho}_1\\ \widehat{\rho}_1 & 1\end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix}0.01 & -0.009\\ -0.009 & 0.01\end{pmatrix}\end{aligned}$$

*tester la significativité des coefficients.
-Test de Student pour φ_1 : $t_{\varphi_1} = \frac{|\widehat{\varphi}_1|}{\sqrt{Var(\widehat{\varphi}_1)}} = 10.5 > 1.96 \Longrightarrow \varphi_1 \neq 0$.
-Test de Student pour φ_2 : $t_{\varphi_2} = \frac{|\widehat{\varphi}_2|}{\sqrt{Var(\widehat{\varphi}_2)}} = 1.6 < 1.96 \Longrightarrow \varphi_2 = 0$.
5- on ne peut pas valider le modèle car $\varphi_2 = 0$,donc, on propose le $ARMA(1,0)$ et comme $\rho_1 = \varphi_1 \Longrightarrow \widehat{\varphi}_1 = \widehat{\rho}_1 = 0.91$ et $\widehat{\sigma}^2 = \widehat{\gamma}_0\left(1 - \widehat{\varphi}_1\widehat{\rho}_1\right) = 1.71$avec

$Var\left(\widehat{\varphi}_1\right) = \dfrac{\widehat{\sigma}^2}{n\widehat{\gamma}_0} \Longrightarrow Var\left(\widehat{\varphi}_1\right) = 0.001$. D'où

-Test de Student pour φ_1 : $t_{\varphi_1} = \frac{\left|\widehat{\varphi}_1\right|}{\sqrt{Var\left(\widehat{\varphi}_1\right)}} = 28.77 > 1.96 \Longrightarrow \varphi_1 \neq 0$.
Donc, finalement le modèle est

$$\left(1 - L\right)\left(1 - 0.91L\right) X_t = \varepsilon_t.$$