Université M'Hamed Bougara-Boumerdes
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

*MSS: Master1*
*Année universitaire: 2020/2021*
Matière: *Probabilités Approfondies*

# Examen du 1er semestre

**Question de Cours :** Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un vecteur $X$ de $\mathbb{R}^n$ soit Gaussien.

**Exercice 1:**
Soit $X = (X_1, X_2)^t$, un vecteur aléatoire réel centré, à deux dimensions, de loi Gaussienne $\mathcal{N}\left(\vec{0}, \Sigma_X\right)$ où

$$\Sigma_X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

**1**. Donner l'expression de la densité de probabilité $f_X(x)$ du couple $X$.
**3**. Calculer la densité de probabilité conditionnelle $f_{X_2|X_1=x_1}(x_2|x_1)$ de $X_2$ sachant $X_1 = x_1$. Quelle est cette loi ?
**4**. En déduire l'espérance conditionnelle, $\mathbb{E}[X_2|X_1 = x_1]$, de $X_2$ sachant $X_1 = x_1$.

**Exercice n**°2 :
Soit $(X, Y)$ un couple aléatoire de densité jointe :

$$f(x, y) = \frac{12}{5} x(2 - x - y) \mathbf{1}_{]0,1[^2}(x, y).$$

**1**. Déterminer la densité marginale $f_Y(y)$ de $Y$ .
**2**. En déduire la densité conditionnelle $f_{X|Y=y}(x|y)$.
**3**. Montrer que l'espérance conditionnelle de $X$ sachant $Y$ vaut

$$\mathbb{E}[X|Y] = \frac{5 - 4Y}{8 - 6Y}$$

**Exercice n**°3 :

**1.** Soit $(X, Y)$ un couple indépendant de v.a.r. On suppose que la variable aléatoire réelle $X$ suit la loi uniforme $U([0, 2])$ définie par la densité $f_X(t) := \frac{1}{2} \times 1_{[0,2]}(t)$ et $Y$ suit la loi exponentielle de paramètre 3 de densité $f_Y$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f_Y(t) := 1_{[0,+\infty[}(t)e^{-3t}$. Déterminer la densité de la variable aléatoire réelle $X + Y$ .
**2.** Même question si $X$ suit la loi de Gauss $N(0, 1)$, et $Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 2$.