Corrigé Série 3

Exercice 1

Par définition $G(s) = \sum_{n \geq 0} p_n s^n, \quad |s| \leq 1$

1) $Q(s) = \sum_{n \geq 0} q_n s^n$, pour $|s| < 1, \ \ 0 < q_n \leq 1$

$$\begin{aligned}
(1-s)\,Q(s) &= \sum_{n \geq 0} q_n s^n (1-s) = \\
&= \sum_{n \geq 0} q_n s^n - \sum_{n \geq 0} q_n s^{n+1} = \\
&= q_0 + \sum_{n \geq 0} q_{n+1} s^{n+1} - \sum_{n \geq 0} q_n q_n = \\
&= \sum_{n \geq 0} (q_{n+1} - q_n)\, q_n + q_0
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
q_{n+1} - q_n &= P(X > n+1) - P(X > n) = \\
&= -P(n < X \leq n+1) = -P(X = n+1) = -p_{n+1}
\end{aligned}$$

d'où

$$(1-s)\,Q(s) = q_0 - \sum_{n \geq 0} p_{n+1} s^{n+1}$$

En outre, $q_0 = P(X > 0) = P(X \geq 1) = P(X \geq 0) - P(X = 0) = 1 - p_0$

Ainsi

$$(1-s)\,Q(s) = 1 - p_0 - \sum_{n \geq 0} p_{n+1} s^{n+1} = 1 - \sum_{n \geq 0} p_n s^n = 1 - G(s)$$

2) $E(X) = G'(1)$ (voir cours) et d'après la question précédente

$$1 - (1-s)\,Q(s) = G(s)$$

d'où

$$G'(s) = -(1-s)\,Q'(s) + Q(s) \quad \text{donc } E(X) = Q(1)$$

$$G''(s) = -(1-s)\,Q''(s) + 2Q'(s) \quad \text{ainsi } G''(1) = 2Q'(1)$$

$$\begin{aligned}
V(X) &= E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = \\
&= E\left(X^2 - X\right) + E(X) - (E(X))^2 = \\
&= E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2 = G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2 \\
&\quad \text{(voir cours)}
\end{aligned}$$

enfin

$$V(X) = 2Q'(1) + Q(1) - (Q(1))^2$$

Exercice 2
Les moments de la distribution sont donnés par $m_n = \dfrac{1}{n+1}$ alors d'après le cours, on sait que la fonction génératrice G s'écrit

$$G(s) = \sum_{n\geq 0} m_n \frac{s^n}{n!} \qquad \text{donc}$$

$$\begin{aligned} G(s) &= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1}\frac{s^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \frac{s^n}{(n+1)!} = \\ &= \frac{1}{s}\sum_{n\geq 0} \frac{s^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{s}\sum_{n\geq 1} \frac{s^n}{n!} = \\ &= \frac{1}{s}(e^s - 1) \end{aligned}$$

Exercice 3
On considère la fonction $\varphi_X(t) = e^{-|t|}$, $t \in \mathbb{R}$, φ_X est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc c'est la fonction caractéristique d'une v.a. réelle X de densité f donnée par

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}e^{-|t|}dt = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{-itx+t}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} e^{-itx-t}dt = \\ &= \frac{1}{2\pi(1-ix)} + \frac{1}{2\pi(1+ix)} = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \end{aligned}$$

qui n'est autre que la densité d'une v.a. X qui suit une loi de Cauchy, et dont φ_X est la fonction caractéristique.

Exercice 4

$$\overline{\varphi_X(t)} = \overline{E(e^{itX})} = E\left(e^{-itX}\right) = \varphi_{-X}(t)$$

Alors φ_X est réelle si et seulement si $\varphi_X(t) = \varphi_{-X}(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$,c'est-à-dire si et seulement si la loi de X est symétrique.

Exercice 5
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ alors sa fonction caractéristique, notée φ est donnée par

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} e^{-\dfrac{x^2}{2}} dx = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\dfrac{1}{2}(x-it)^2} e^{-\dfrac{t^2}{2}} dx = \\
&= e^{-\dfrac{t^2}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\dfrac{1}{2}(x-it)^2} dx \right) = e^{-\dfrac{t^2}{2}}
\end{aligned}$$

Par conséquent (cours)

$$\varphi(t) = e^{-\dfrac{t^2}{2}} = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k t^{2k}}{2^k k!} = \sum_{k\geq 0} \frac{(it)^k (2k)!}{(2k)! 2^k k!}$$

Ainsi, par identification,

$$\begin{aligned}
m_{2k} &= E\left(X^{2k}\right) = \frac{(2k)!}{2^k k!}, \qquad k = 0, 1, ... \\
m_{2k+1} &= 0
\end{aligned}$$

Exercice 6
1)

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_1(x)\, dx = \int_{-1}^{1} e^{itx} (1-|x|)\, dx = \\
&= \int_{-1}^{0} e^{itx} (1+x)\, dx + \int_{0}^{1} e^{itx} (1-x)\, dx
\end{aligned}$$

qu'on intègre par parties, il vient

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \frac{1}{it} + \frac{1}{t^2}\left(1-e^{-it}\right) - \frac{1}{it} - \frac{1}{t^2}\left(e^{it}-1\right) = \\
&= \frac{1}{t^2}\left(2-\left(e^{it}+e^{-it}\right)\right) = \frac{2}{t^2}(1-\cos t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_Y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity} f_2(y)\,dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity} \frac{1-\cos y}{\pi y^2} dy\end{aligned}$$

On ne sait pas calculer ce type d'intégrale même si elle existe, alors l'idée est de faire appel à la formule d'inversion par rapport à la v.a. X, puisque la fonction caractéristique de X et la densité de Y sont semblables. On écrit la formule d'inversion pour la v.a. X

$$\begin{aligned}f_1(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi_X(t)\,dt = \\ (1-|x|)\, I_{[-1,1]}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \frac{2(1-\cos t)}{t^2} dt\end{aligned}$$

On remarque que $f_1(x) = f_1(-x)$ par symétrie, donc

$$\begin{aligned}(1-|x|)\, I_{[-1,1]}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{2(1-\cos t)}{t^2} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{(1-\cos t)}{\pi t^2} dt\end{aligned}$$

Par comparaison, on voit que

$$\varphi_Y(t) = (1-|t|)\, I_{[-1,1]}(t)$$

2) On 'reconnait' la fonction caractéristique d'une v.a. X qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(4, \frac{1}{2}\right)$.
En effet si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, alors $\varphi_X(t) = \left(pe^{it} + (1-p)\right)^n$.