

Série N°1 : Rappel de quelques notions d'algèbre linéaire

Exercice 1 On considère les matrices suivantes: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{E} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Quels sont les produits matriciels possibles? Quelles sont les matrices carrées et les matrices symétriques?

Exercice 2 Soit la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 1- Vérifier que \mathbf{A} est une matrice symétrique.
- 2- Calculer le déterminant de \mathbf{A} .
- 3- Déterminer les valeurs propres de \mathbf{A} .
- 4- Déterminer les vecteurs propres de \mathbf{A} associés à ces valeurs propres. Vérifier que ces derniers sont linéairement indépendants.
- 5- \mathbf{A} est-elle diagonalisable?
- 6- En utilisant l'algorithme (ou procédé) de Gram-Schmidt, déterminer une base orthonormée formée de ces valeurs propres.
- 7- Déterminer deux matrices \mathbf{D} et \mathbf{P} telles que: $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^t$. Vérifier par calcul cette égalité matricielle.
- 8- Calculer \mathbf{A}^n , $n \geq 1$.

Exercice 3 Soit la matrice

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que \mathbf{M} est inversible puis déterminer sa matrice inverse \mathbf{M}^{-1} .
2. Dédire de la question 1 une matrice \mathbf{X} telle que

$$2\mathbf{XM} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 Soit f une application linéaire de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^3 dont la matrice relativement aux bases canoniques et

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 9 \\ -1 & 2 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la rang de la matrice \mathbf{M} et donner une base de sous-espace vectoriel image de f (noté $\text{Im } f$).
2. Dédire de la question 1, la dimension de sous-espace vectoriel noyau de f (noté $\text{ker } f$), puis donner une base à ce dernier.