Université Mohamed Khider Biskra
Département de Mathématiques
Master 2 (2021/2022)

Nom ....
Prénom..
Groupe..

Examen
Simulation et M.N

Exercice 1.(2.5+3+2.5+3 points)

1. Donner la signification et la syntaxe de base de la commande Matlab "fmincon" :

"fmincon" est une commande qui détermine le minimum d'une fonction sous des contraintes (linéaires et/ou non linéaires). Sa syntaxe de base est
$[x, fval, exitflag, output] = fmincon('objfun', x0, A, b, Aeq, beq, lb, ub, 'nonlin')$ 0.5

Explication → 01

01

2. Donner la définition d'un champ de direction de l'équation $\frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad \ldots(1)$. Que donne ce champ ?

- Le champs de direction de (1) est un champ de courts segments de droite ou de flèches de pente $f(x,y)$ passant par chaque point (x,y) dans une grille de points choisie dans le plan (x,y). Ce champ donne une information graphique ou qualitative sur le comportement général des courbes de la solution de (1).

1.5

1.5

Donner la principale commande Matlab pour tracer les champs de directions de (1) ainsi que sa syntaxe de base. 01

"quiver" est la principale commande matlab pour tracer les champs de direction et sa syntaxe de base est : [x, y] = meshgrid(a :b, c :d) ;
s = f(x,y) ;
quiver(x,y, ones(size(s)),s), axis tight

1.5

3. Compléter le programme suivant qui sert à donner une solution explicite à 4 points par la méthode des différences finies de $\frac{\partial y}{\partial t}(x,t) - c\,\frac{\partial y}{\partial x}(x,t) = 0 \quad, t \in [0,1] \quad, x \in [0,1]$

```
L=1; T=1; c=1/2; M=3000; dt=T/M; N=30;dx=L/N;%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%les paramètres
for i=1:(N+1) %les valeurs initiales
  x(i)=(i-1)*dx; y(i,1)=cos((pi/2)*x(i));
end
for k=1:M+1 %valeurs aux limtes
    y(1,k)=1; y(N+1,k)=0; t(k)=(k-1)*dt;
end
for j=1:M %boucle du temps
    for i=2:N %boucle de l'espace
        y(i,j+1)=y(i,j)+b*(y(i+1,j)-y(i-1,j));
    end
end
mesh(x,t,y')
```

0.5 0.5 ← 02

(c*dt/2*dx)

Exercice 2. (2.5+2.5+4 points) On considère le problème aux limites suivant :

$$-\frac{d^2y}{dx^2} + c(x)\frac{dy}{dx} + y(x) = f(x)\ ,\ x \in [0,1]\ \ , c(x) = 2x, f(x) = 2exp(x), y(0) = y(1) = 1 \ldots\ldots (2)$$

On se donne un ensemble de points x_i, $i = 0, \ldots m$ de $[0,1]$ tels que $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = 1$.
On considère un pas constant $x_i = ih$, $\forall i = 0, \ldots m$ avec $h = \frac{1}{m}$.

1. Donner le schéma numérique par la méthode des différences finies de (2) ainsi que le système linéaire obtenu en utilisant l'approximation rétrograde de $y'(x)$.

2. Écrire un programme Matlab qui sert à tracer la courbe de la solution numérique de (2) obtenue de la question 1 ainsi que la valeur approchée de la solution au point 0.25 et au point 0.5.

Le schéma :

2,5

$$\frac{-y_{i-1} - y_{i+1} + 2y_i}{h^2} + c(x_i)\frac{y_i - y_{i-1}}{h} + y_i = f(x_i), \quad i = 1, \ldots, m-1$$

$$-(1 + hc(x_i))y_{i-1} + (2 + c(x_i)h + h^2)y_i - y_{i+1} = h^2 f(x_i), \quad i = 1, \ldots, m-1$$

Le système $A_h y_h = F_h$:

1,5

$$A_h = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & \ddots & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} c(x_1) & & 0 \\ -c(x_2) & \ddots & \\ 0 & -c(x_{m-1}) & c(x_{m-1}) \end{bmatrix} + h^2 \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

0,1

$$F_h = h^2 \left[f(x_1)\ f(x_2) \ldots f(x_{m-1}) \right] + \left[(1 + h c(x_1)) y_0 \ \ 0 \ldots 0 \ \ y_{m+1} \right]$$

0,5 0,1 0,5 0,1 0,5 0,5

```
f=@(x) 2.*exp(x); p=@(x) 2.*x; n = 100 ;  h = 1/(n) ; xh = 0 : h: 1 ; ybegin=1;yend=1;
A1 = diag(ones(n - 2, 1) ,1)*(-1) ;
A2 = diag(ones(n - 2, 1) ,-1)*(-1) ;
A3 = diag(ones(n-1, 1))*(2) ;
Ah1 = A1 + A2 + A3;
px1=p(xh(2:end-1));
px2=p(xh(3:end-1));
Ah2=h*(diag(px1)-diag(px2,-1));
Ah3=h^2*(diag(ones(n - 1, 1)));
A=Ah1+Ah2+Ah3;
%Le vecteur fh
fx=f(xh(2:end-1));
fh=h^2*fx+[(1+h*p(xh(2)))*ybegin zeros(1,n-3) yend];
%résolution de A*yh=fh'
yh = inv(A)*fh';
yhh = [ybegin , yh', yend];
plot(xh, yhh,'ro')
y(51)
```