U.S.T.H.B - FACULTE DES MATHEMATIQUES- $1^{ère}$année MASTER–ISTD-DECEMBRE 2010-

TEST n°1

.**QUESTIONS DE COURS**

a) Donner trois propriétés des fonctions génératrices:

1) Si X_1, X_2 sont deux v.a .r de lois P_{X_1} et P_{X_2} alors $\Psi_{X_1}(t) = \Psi_{X_2}(t) \iff P_{X_1} = P_{X_2}$

2) Si X_1, X_2 sont deux v.a .r indépendantes alors $\Psi_{X_1+X_2}(t) = \Psi_{X_1}(t)\Psi_{X_2}(t)$

3) Soit X une v.a.r . X admet des moments à l'ordre k si et seulement si Ψ_X est dérivable jusqu'à l'ordre k et on a: $\Psi_X^{(k)}(0) = E(X^k)$.

b) Enoncer le théorème de Rao-Blackwell:

Soit T un estimateur sans biais de $g(\theta)$ et S une statistique exhaustive pour θ, alors $E_\theta(E_\theta(T/S)) = g(\theta)$ et $Var_\theta(E_\theta(T/S)) \leq Var_\theta(T)$.

($E_\theta(T/S)$ est un autre estimateur sans biais de $g(\theta)$ de plus petite variance, et donc meilleur)

c) Définir la notion d'estimateur ESBVUM

Un estimateur T de $g(\theta)$ est dit ESBVUM (estimateur sans biais de variance uniformément mimimale) s'il est sans biais et si pour tout autre estimateur sans biais T'de $g(\theta)$, on a

$Var_\theta(T). \leq Var_\theta(T') \quad \forall\theta \in \Theta.$

d) Répondre par vrai ou faux aux questions suivantes:

1) Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ et $(Y_1, Y_2, ..., Y_m)$ deux échantillons, respectivement, des v.a indépendantes X de loi $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ et Y de loi $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, alors

$\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sum\limits_{i=1}^{m}(Y_i - \overline{Y})^2} \backsim F_{(n,m)}$: Faux

2) L'erreur moyenne quadratique de $\widehat{\theta}$ est égale à son biais plus sa variance: Faux

3) Soit $\widehat{\theta}$ l'EMV de θ qu'on suppose de plus sans biais alors exp($\widehat{\theta}$) est l'EMV de exp(θ) et il est sans biais: Faux

EXERCICE 1

On considère un n-échantillon d'une v.a de densité $f_X(x) = \dfrac{\alpha\theta^\alpha}{x^{\alpha+1}} 1_{\{x>\theta\}}$

Déterminer des statistiques exhaustives pour θ si α est connu, pour α si θ est connu puis pour (α, θ).

La vraisemblance s'écrit: $L(\theta,\widetilde{x}) = \dfrac{\alpha^n\theta^{n\alpha}}{(\prod\limits_{i=1}^{n} x_i)^{\alpha+1}} 1_{\{\min x_i>\theta\}}$.

1^{er} cas: α connu, θ inconnu

$L(\theta,\widetilde{x}) = \dfrac{\alpha^n}{(\prod\limits_{i=1}^{n} x_i)^{\alpha+1}}\theta^{n\alpha}1_{\{\min x_i>\theta\}} = h(\widetilde{x})g(\theta,\min x_i)$ avec $g(\theta,\min x_i) = \theta^{n\alpha}1_{\{\min x_i>\theta\}}$ donc $T(\widetilde{x}) = \min x_i$ est exhaustive pour θ.

$2^{\grave{e}me}$ cas: α inconnu, θ connu

$L(\theta,\widetilde{x}) = 1_{\{\min x_i>\theta\}}\dfrac{\alpha^n\theta^{n\alpha}}{(\prod\limits_{i=1}^{n} x_i)^{\alpha+1}} = h'(\widetilde{x})g'(\theta,\min x_i)$ avec $g'(\theta,\prod\limits_{i=1}^{n} x_i) = \dfrac{\alpha^n\theta^{n\alpha}}{(\prod\limits_{i=1}^{n} x_i)^{\alpha+1}}$ donc $T(\widetilde{x}) = \prod\limits_{i=1}^{n} x_i$ est exhaustive pour α.

<u>EXERCICE 2</u>

Soit $x_1, x_2, ...x_n$ un n-échantillon d'une v.a X de densité $f_X(x) = \dfrac{1}{\theta}x^{\frac{1-\theta}{\theta}}$

1) Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ.

$L(\theta,\widetilde{x}) = \dfrac{1}{\theta^n}(\prod\limits_{i=1}^{n} x_i)^{\frac{1-\theta}{\theta}} \implies \log L(\theta,\widetilde{x}) = -n\log\theta + \dfrac{1-\theta}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n}\log x_i \implies \dfrac{\partial}{\partial\theta}\log L(\theta,\widetilde{x}) = -\dfrac{n}{\theta} - \dfrac{1}{\theta^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\log x_i$

$\dfrac{\partial}{\partial\theta}\log L(\theta,\widetilde{x}) = 0 \iff \widehat{\theta} = -\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\log x_i}{n}$ et $\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log L(\widehat{\theta},\widetilde{x}) =$

$\widehat{\theta}$ est donc l'EMV de θ.

2) Montrer que $Y = -\log(X)$ suit une loi exponentielle de paramètre θ.

On a $F_Y(x) = P(-\log(X) < x) = P(X > e^{-x}) = 1 - F_Y(e^{-x}) \implies f_Y(x) = e^{-x}f_X(e^{-x}) = \dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{1}{\theta}x}$. Donc $Y \backsim Exp(\dfrac{1}{\theta})$.

3) L'estimateur obtenu en 1) est-il sans biais ? de variance mimimum? efficace?

$\widehat{\theta}$ est un estimateur sans biais car $-\sum\limits_{i=1}^{n}\log X_i \backsim \gamma(n,\dfrac{1}{\theta}) \implies E(-\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\log x_i}{n}) = \theta$. D'autre part f_X appartient à la famille des lois exponentielles:

$\log f_X(x) = -\log\theta + \dfrac{1-\theta}{\theta}\log x = c(\theta) + \alpha(\theta)a(x)$ avec$a(x) = \log x$ et $h(x) = 0$. On conclut que $-\sum\limits_{i=1}^{n}\log x_i$ est exhaustive pour θ, et de plus complète car cette staztistique est de même dimension que θ, $-\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\log x_i}{n}$ est donc l'unique ESBVUM de θ.