Espérance conditionnelle
« Tout ce qu'il faut savoir »

On donne :

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espace de probabilité
- Une sous-tribu $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$; une information fournie a priori.
- X une v.a. intégrable $\left[\in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})\right]$

On cherche à :

~~Calculer~~ Définir (caractériser) la valeur espérée de X en fournissant l'information $\mathcal{G}$, notée par. $Y := \mathbb{E}(X/\mathcal{G})$

⚠ Si on n'a pas une information à priori, il s'agit de $\mathbb{E}(X)$

⚠ $\mathcal{G}$: est une information compliquée car elle contient les évènements, leurs négations et leurs réunions. (c'est les propriétés d'une sous-tribu).

<u>Par conséquent</u> :

- Conditionner sur $\mathcal{G}$ dépend des évènements de $\mathcal{G}$ qui se sont réalisés.

- Ce qui entraine que $\mathbb{E}(X/\mathcal{G})$ n'est pas constante en général.

$\boxed{\mathbb{E}(X/\mathcal{G}) \text{ est une variable aléatoire.}}$

Quels sont les propriétés caractérisant cette v.a. ?

La réponse est donnée par la définition de Kolmogorov (1933).

C'est une définition à retenir.
Elle donne 2 propriétés de $Y = \mathbb{E}(X/\mathcal{G})$.

<u>La 1ère propriété</u> :

Y dépend de l'information $\mathcal{G}$, c.à.d.

$\mathcal{G}$: contient toute l'information pour pouvoir décider la valeur de Y,

et ceci, exactement, signifie que :

$$\boxed{\text{L'esp. cond. } Y = \mathbb{E}(X/\mathcal{G}) \text{ est } \mathcal{G}\text{-mesurable.}}$$

<u>La 2ème propriété</u> :

Pour mieux comprendre et imaginer cette propriété, prenons un cas particulier :

X : v.a. discrète, $|X(\Omega)| < \infty$

Z : v.a. discrète, $|Z(\Omega)| < \infty$

$\mathcal{G} = \sigma(Z)$: L'information minimale fournie par Z.

et soit $Y := \mathbb{E}(X/\underbrace{\sigma(Z)}_{\mathcal{G}}) \overset{\text{Notation}}{=} \mathbb{E}(X/Z)$

Supposons de (X, Z) est donné par le tableau de contingence (croisé) :

$X \backslash Z$	z_1	z_2	z_3	z_4	...	
x_1	P_{11}	P_{12}	P_{13}	P_{14}	...	
x_2	P_{21}	P_{22}	P_{23}	P_{24}	...	
x_3	P_{31}	P_{32}	P_{33}	P_{34}	...	
x_4	P_{41}	P_{42}	P_{43}	P_{44}	..	
$Y = \mathbb{E}(X/\mathcal{G})$	$y_1 = \mathbb{E}(X/z_1)$	$y_2 = \mathbb{E}(X/z_2)$	$y_3 = \mathbb{E}(X/z_3)$	$y_4 = \mathbb{E}(X/z_4)$	----	$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X/\mathcal{G})] = \mathbb{E}X$

(G : columns z_1, z_2)

Prenons, par exemple $G = \{Z = z_1\} \cup \{Z = z_2\} \in \mathcal{G}$.

Calculons d'abord $\mathbb{E}(X \mathbb{1}_G)$: la moyenne de X sur G :

$\cancel{\mathbb{E}(X\mathbb{1}_G)}$ $\mathbb{E}(X\mathbb{1}_G) = P_{11}x_1 + P_{12}x_1 + P_{21}x_2 + P_{22}x_2 + \dots$

$+ x_4 P_{41} + x_4 P_{42}$.

Scanned by CamScanner

Focalisons nous maintenant sur la v.a. $Y 1\!\!1_G$

Cette v.a. a 2 valeurs : $\underline{\underline{y_1}} = \mathbb{E}(X/z_1)$ avec une proba. $p_1 := \mathbb{P}(Z = z_1) = P_{11} + P_{21} + P_{31} + P_{41}$.

et $y_2 = \mathbb{E}(X/z_2)$ avec une proba :

$$p_2 := \mathbb{P}(Z = z_2) = P_{12} + P_{22} + P_{32} + P_{42}.$$

On peut résumer ça par le tableau :

$Y 1\!\!1_G$	y_1	y_2	
Proba.	P_1	P_2	$\mathbb{E}(Y 1\!\!1_G) = P_1 y_2 + P_2 y_2$

Calculons maintenant y_1 et y_2 :

$$y_1 = \mathbb{E}(X / Z = z_1) = \frac{1}{\mathbb{P}(Z = z_1)} \int_{\{Z = z_1\}} X \, d\mathbb{P}$$

moyenniser suivant la $1^{ère}$ colonne

$$\boxed{y_1 = \frac{1}{P_1} \left(x_1 P_{11} + x_2 P_{21} + x_3 P_{31} + x_4 P_{41} \right)}$$

de m̂ y_2 (moyenniser suivant la $2^{ème}$ colonne).

$$\boxed{y_2 = \frac{1}{P_2} \left(x_1 P_{12} + x_2 P_{22} + x_3 P_{32} + x_4 P_{42} \right)}$$

- Retournons à $\mathbb{E}(Y \mathbb{1}_G)$:

On a vu que, $\mathbb{E}(Y\mathbb{1}_G) = p_1 y_1 + p_2 y_2$

en substituant p_1, p_2, y_1 et y_2 par leurs valeurs on obtient :

$$\mathbb{E}(Y\mathbb{1}_G) = x_1 p_{11} + x_2 p_{21} + x_3 p_{31} + x_4 p_{41} + x_1 p_{12} + x_2 p_{22} + x_3 p_{32} + x_4 p_{42}$$

$$= \mathbb{E}(X\mathbb{1}_G).$$

et ceci est la 2ème propriété de la déf$^{\underline{e}}$.

$$\boxed{\forall G \in \mathcal{G} : \quad \underbrace{\mathbb{E}(Y\mathbb{1}_G)}_{\substack{\text{moyenne des} \\ \text{moyennes} \\ \text{(par colonnes)}}} = \underbrace{\mathbb{E}(X\mathbb{1}_G)}_{\substack{\text{moyenne directe} \\ \text{des valeurs} \\ \text{de } X}}}$$

Les propriétés de l'esp. cond. qu'il faut retenir

① $\boxed{\mathbb{E}(c/\mathcal{G}) = c \quad p.s}$, c : constante.

② Espérance itérées :

$$\boxed{\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X/\mathcal{G})\right] = \mathbb{E}X}$$

Non conditionnelle

Pour comprendre cette pté, retournez à l'exple précédent, et effectuez la moyenne de toutes les valeurs par 2 façons :

<u>1ère façon</u> (directe) : $\mathbb{E}X = \sum_{ij} P_{ij} \cdot x_i$

<u>2ème façon</u> (colonne par colonne) : Calculer la moyenne de chaque colonne [Les valeurs de $\mathbb{E}(X/\mathcal{G})$] puis calculer la moyenne de ces valeurs [$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X/\mathcal{G}))$], ça revient au m.

③ Si on possède toute l'information sur une v.a, alors on la considère comme étant une <u>constante</u> :

X : v.a. $\mathcal{G}$-mesurable.

- $\boxed{\mathbb{E}(X/\mathcal{G}) = X}$ p.s (c'est ~~[illegible]~~ la pté ① appliquée à X)

- $\boxed{\mathbb{E}(XY/\mathcal{G}) = X\,\mathbb{E}(Y/\mathcal{G})}$ p.s.

traiter comme étant une constate car X : $\mathcal{G}$-mesurable.

④ Le contraire de ③, si on n'a aucune information sur X :

$\mathcal{G} = \mathcal{F}^0 = \{\phi, \Omega\}$ ← tribu triviale absence de l'informa^{tion}

À cause de l'absence de l'informa^{tion}, l'espérance conditionnelle n'améliore pas l'esp. de X sachant $\mathcal{F}^0$, donc

$$\boxed{\mathbb{E}(X/\mathcal{F}^0) = X} \text{ p.s.}$$

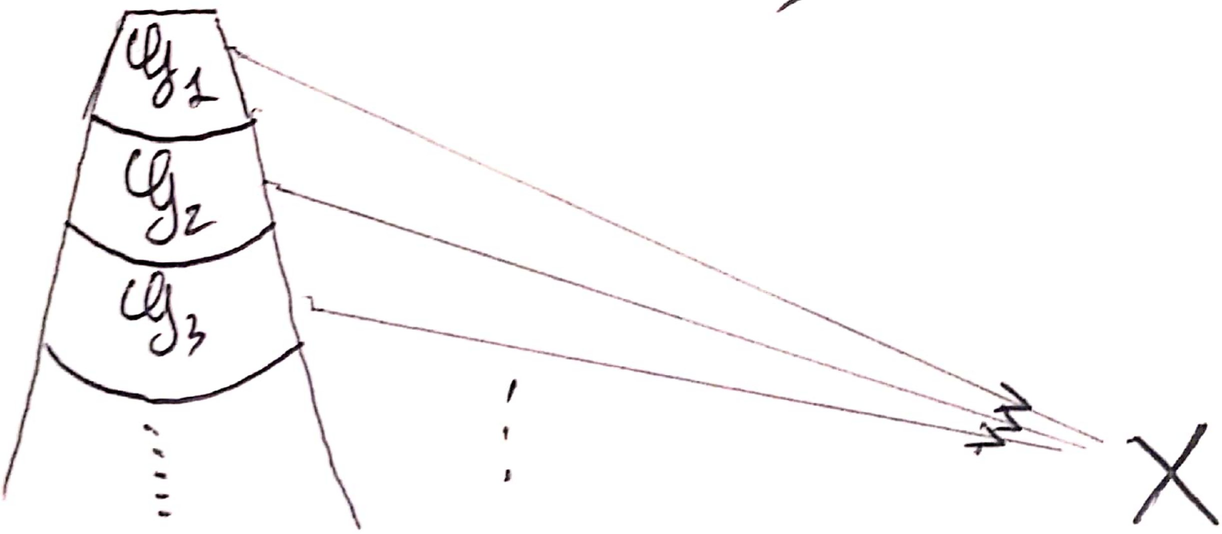
⑧

(5) Information $\mathcal{G}$ existe mais n'a aucune relation avec X, c'est l'indépendance, ceci aussi ne va pas améliorer l'esp. cond. càd :

$$\boxed{\mathbb{E}(X/\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X) \text{ p.s.}}$$

$X \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$

(6) L'information qui coûte est bien la plus détaillée (ss-tribu contenant un nbre minimum d'élts).



$\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}_3 \subset \dots$ — l'avion

برج المراقبة — الطائرة

La tour de contrôle

من يأخذ بقول ؟ المراقب $\mathcal{G}_1$ أم $\mathcal{G}_2$ أم .....

حتما $\mathcal{G}_1$ لأن الرؤية أوضح والمعلومة أدق

$$\boxed{\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\cdots X/\mathcal{G}_1\right]/\mathcal{G}_2\right]/\mathcal{G}_3\right]/\cdots/\mathcal{G}_n\right] = \mathbb{E}(X/\mathcal{G}_1)}$$

Information globale.

Car : $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{G}_n$.

contient l'informa° plus détaillée que les autres.

c'est la pté de tour.

⑦ Jensen conditionnelle :

φ : convexe, $X, \varphi(X) \in L^1$.

$$\boxed{\varphi\left[\mathbb{E}(X/\mathcal{G})\right] \leq \mathbb{E}\left[\varphi(X)/\mathcal{G}\right] \text{ p.s.}}$$

- Cas particulier très important : $\varphi(\cdot) = |\cdot|$

- $|\mathbb{E}(X/\mathcal{G})| \leq \mathbb{E}(|X|/\mathcal{G})$.

$\Rightarrow \mathbb{E}|\mathbb{E}(X/\mathcal{G})| \leq \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(|X|/\mathcal{G})\right]$ $\mathbb{E}(\cdot)$ monotone.

esp itérées

$\Rightarrow \boxed{\mathbb{E}|\mathbb{E}(X/\mathcal{G})| \leq \mathbb{E}|X|}$ à retenir.