Université Mohammed kheider Biskra
Département de Mathématiques
$1^{ième}$ année Master: 2021 - 2022
Module : Théorie des opérateurs

Série 2

Exercice 1 *Soit* $E = l^2$, $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ *une suite bornée dans* $\mathbb{C}$ *et* $M = \sup_n |\lambda_n|$. *Soit* $T : l^2 \to l^2$ *définie par :*

$$Tx = y, \text{ avec } y = (\lambda_n x_n)_{n\geq 1} \text{ si } x = (x_n)_{n\geq 1} \in E.$$

1. *Montrer que T est linéaire, continue, et calculer sa norme*
2. *Montrer que si l'ensemble $\{|\lambda_n|, \; n \geq 1\}$ est minoré par un nombre strictement positif, alors T est bijective.*

   Préciser dans ce cas T^{-1}.

Exercice 2 *Soit A un opérateur linéaire borné dans un espace de Hilbert (Banach) H.*

1. *Montrer que si A est inversible alors les opérateurs A et A^{-1} ont les mêmes vecteurs propres.*
2. *Montrer que si l'opérateur A^2 possède un vecteur propre alors, il en est de même pour l'opérateur A.*

Exercice 3

1. *Dans $l^2(\mathbb{N};\mathbb{C})$, soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. On définit l'opérateur T sur l^2 par*

   $$T\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

   .Déterminer le spectre de T
2. *Dans $L^2[0;1]$, considérnons l'opérateur de mutiplication*

   $$T : L^2[0;1] \to L^2[0;1] \;\; \text{définie par } (Tf(x)) = xf(x)$$

   - *Déterminer le spectre de T*
   - *Montrer que T n'a de valeurs propres.*

Exercice 4 *1. Soit* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite bornée de nombres complexes et* T *l'application linéaire de* $l^2 = l^2(\mathbb{N};\mathbb{C})$ *dans lui même définie par* $T(x) = (\alpha_n x_n)$, *pour* $x=(x_n) \in l^2$,

Vérifier que T *est continue et calculer son adjoint*

2. *Soit* S *l'application de* $l^2 = l^2(\mathbb{N};\mathbb{C})$ *dans lui même définie par* $S(x) = (0, x_0, x_1, ...,)$

   Vérifier que S *est continue et calculer son adjoint*

Exercice 5 *Soit* $E = C([0,1]$ *muni de la norme* $\|\|_\infty$ *et pour* $f \in E$, *on définit*

$$Tf(x) = \int_0^x K(x,t) f(t)\, dt$$

où, $K(,) \in C([0,1]\times[0,1])$. *Soit* $M = \sup_{0\leq x,t\leq 1} |K(x,t)|$.

1. *Montrer que* $T \in \mathcal{L}(E)$.

2. *Montrer que pour tout* $n \geq 1$, *on a* $|T^n f(x)| \leq \frac{M^n}{n!} x^n \|f\|_\infty$
   En déduire que, pour tout $n \geq 1, \|T\| \leq \frac{M^n}{n!}$

3. *Déterminer le spectre de* T.

4. *Calculer l'opérateur adjoint* T^*, *dans le cas où*

$$Tf(x) = \int_0^1 K(x,t) f(t)\, dt$$

Exercice 6 *Soit* $H = L^2([a,b]), (a < b)$, *l'espace des classes des fonctions* $x : [a,b] \to \mathbb{C}$ *de carré sommable et soit* $f : [a,b] \to \mathbb{C}$, *une fonction continue fixée.*

Soit $T : H \to H$ *l'aplication qui à la fonction* $x \in H$ *fait correspondre la fonction* Tx *définie sur* $[a,b]$ *par*

$$(Tx)(t) = f(t)\, x(t)$$

1. *Montrer que cet application est un opérateur linéaire continu*

2. *Calculer l'opérateur* T^* *(l'opérateur adjoint de* T*)*

1. donc T est autoadjoint si $f(t) = \overline{f(t)}$

Exercice 7 *Soit* $H = L^2([0,1])$. *Pour* $f \in H$, *on pose*

$$Tf(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

1. *Montrer que* T *est un opérateur continu sur* H.
2. *Calculer l'adjoint de* T.