UMBB - Département de Mathématiques - MSS
Calcul Stochastique et Applications - ETCD - 2021 2022

Exercice 1
Soit $(\mathcal{F}_n)_{0\leqslant n}$ une filtration et $(X_n)_{0\leqslant n}$ un processus tel que X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable pour tout $n \geq 0$ (on dit alors que le processus est adapté). Montrer que (X_n) est une martingale ssi

$$E\left(\Delta X_n \diagup \mathcal{F}_{n-1}\right) = 0$$

où $\Delta X_n = X_n - X_{n-1}$
Solution
Comme X_{n-1} est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable, on a aussi $X_{n-1} = E\left(X_{n-1} \diagup \mathcal{F}_{n-1}\right)$ (Propriété de l'espérance conditionnelle). On en déduit que X_n est une martingale ssi $E\left(\Delta X_n \diagup \mathcal{F}_{n-1}\right) = 0$
$E\left(X_n - X_{n-1} \diagup \mathcal{F}_{n-1}\right) = E\left(X_n \diagup \mathcal{F}_{n-1}\right) - E\left(X_{n-1} \diagup \mathcal{F}_{n-1}\right) \Longleftrightarrow X_n - X_{n-1} = 0$
$E\left(X_n - X_{n-1} \diagup \mathcal{F}_n\right) = 0 = 0$
Exercice 2
Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard.
On pose $U_t = e^{-t} B_{e^{2t}}$ avec $t > 0$ et $V_t = B_t - tB_1$ avec $0 < t < 1$. Calculer $E\left(U_t U_s\right)$ et $E\left(V_t V_s\right)$
Solution
Pour $s < t$,
(i) $E\left(U_t U_s\right) = E\left(e^{-t} B_{e^{2t}} e^{-s} B_{e^{2s}}\right) = e^{-(t+s)} E\left(B_{e^{2t}} B_{e^{2s}}\right) = e^{-(t+s)} \min(e^{2t}, e^{2s})$. Et donc $E\left(U_t U_s\right) = e^{-(t+s)} e^{2s} = e^{-t+s}$
$$\begin{aligned}(ii)\ E\left(V_t V_s\right) &= E\left[\left(B_t - tB_1\right)\left(B_s - sB_1\right)\right] \\ &= E\left[B_t B_s - sB_t B_1 - tB_s B_1 + stB_1 B_1\right] \\ &= s - st - st + st = s\left(1 - t\right)\end{aligned}$$
Exercice 3
Ecrire les processus suivants comme des processus d'Itô : (i) $X_t = e^t \sin B_t$ et (ii) $Y_t = e^{B_t} e^{-\frac{t}{2}}$
Solution
(i) En posant $f\left(t, x\right) = e^t \sin x$ et l'application de la formule d'Itô donne $dX_t = \frac{1}{2} e^t \sin B_t dt + e^t \cos B_t dB_t$
(ii) En posant $f\left(t, x\right) = e^x e^{-\frac{t}{2}}$ et l'application de la formule d'Itô donne $dY_t = \left(-\frac{1}{2} Y_t + \frac{1}{2} Y_t\right) dt + Y_t dB_t = Y_t dB_t$
Exercice 4
Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard. Calculer la différentielle dX_t de $X_t = \sin B_t \int_0^t \cos s dB_s$
Solution
On pose $U_t = \int_0^t \cos s dB_s$ et $V_t = \sin B_t$. L'application de la formule d'IPP $d\left(UV\right)_t = V_t dU_t + U_t dV_t + d\left\langle U, V\right\rangle_t$ avec
$dU_t = \cos t dB_t,\ dV_t = -\frac{1}{2} \sin B_t dt + \cos B_t dB_t$ et $d\left\langle U, V\right\rangle_t = \cos t\ \cos B_t dt$ donne

$$d\left(U_t V_t\right) = \left[-\frac{1}{2} U_t \sin B_t + \cos t \cos B_t\right] dt + \left[\cos t \sin B_t + U_t \cos B_t\right] dB_t$$