A.Rahmoune

Umbb/FS/Dépt Maths/Stat. Analyse des Données

Analyse des Données

Analyse des Correspondances (A F C)

Feuille de Résumé cours

Résumé Analyse des Correspondances (A F C)

Résumé Ajustements dans les deux espaces

Remarque la dualité entre les deux nuages $\mathcal{N}(I)$et $\mathcal{N}(J)$

Caractéristiques/Nuage	$\mathcal{N}(I)$	$\mathcal{N}($
Les points	$X_i = f_j^i = \dfrac{f_{ij}}{f_{i.}} = \dfrac{k_{ij}}{k_{i.}},\ \ X_{n\times p}{=}D_n^{-1}F_{n\times p}$	$Y_j = f_i^j = \dfrac{f_{ij}}{f_{.j}} = \dfrac{k_{ij}}{k_{.j}}$
Le nombre	n	p
L'espace de représentation	$\mathbb{R}^p$	$\mathbb{R}$
Métrique	$M = D_{p\times p}^{-1} = [1/f_{.j}]_{p\times p}$	$Q = D_{n\times n}^{-1} =$
Critère d'ajustement (Matrice des poids)	$N = D_{n\times n}{=}[f_{i.}]$	$P = D_{p\times}$
comparaison	$M_p = P_p^{-1}$	$N_n =$

Ajustement dans $\mathbb{R}^p$ **:**

$X = D_n^{-1}F$ matrice des profils lignes

$M = D_{p\times p}^{-1} = [1/f_{.j}]_{p\times p}$

$N = D_{n\times n} = [f_{i.}]$

$g = F'1_n$ le centre de gravité du nuage N(I) profils lignes

La matrice à diagonaliser est: $S_0 = V_0 M = (X'NX)M_{p\times p}$

$S_0 = (D_n^{-1}F)'D_n(D_n^{-1}F)D_{p\times p}^{-1} = (F\prime D_n^{-1}F)D_p^{-1}$

La matrice variance covariance avec $g = 0$:

$$V_0 = F\prime D_n^{-1}F$$

D'une manière générale:

La matrice variance covariance avec $g \neq 0$:

$$V_g = X'NX - g_{p\times 1}g'$$

avec

$$g = X\prime N1_n$$

en AFC:

$$g = (D_n^{-1}F)'D_{n\times n}1_n = F'1_n$$

$$V_g = F'D_n^{-1}F - F'1_n1_n'F = F'(D_n^{-1} - 1_n1_n')F$$

Les axes factorielles: notées

$$\psi_\alpha = XMu_\alpha$$

avec u_α normalisé (divisé par la M-norme)

En AFC: les facteurs d'ordre α

$$\psi_\alpha = (D_n^{-1}F)D_p^{-1}u_\alpha$$

Le facteur d'ordre α vérifie: centré (sa moyenne est nulle) et sa variance est égale à λ_α(voir *)

$$\parallel \psi_\alpha\|_N^2 = \lambda_\alpha$$

A) Ajustement dans $\mathbb{R}^p : g \neq 0$

La matrice à diagonaliser est : $V_g M = X' N_{n\times n} X M - g g' M$

$S_g = F'(D_n^{-1} - 1_n 1_n')F D_p^{-1}$

La matrice à diagonaliser est $\mathbf{M}^{-1}A$ avec $A = MX'NXM$

i-e: $(X\prime NXM)_{p\times p}$

ou exprimé $V_0 M$ avec $V_0 = X\prime NX$

V_0 Matrice variance covaiance lorsque X est centré (g=0)

B) Ajustement dans $\mathbb{R}^n$

Résume

$Y_{p\times n} = \left[f_i^j\right] = D_p^{-1}F'$ joue le rôle de X'

P prend la place de N

Q la place de M

Caractéristiques	**Analyse g$^{\text{ale}}$ de N(J)**	**AFCde N(J)**
Matrice l'étude	$(X\prime)_{p\times n}$	$\text{Y}_{p\times n} = \left[f_i^j\right] = D_p^{-1}F'$ (Y remplace X')
Matrice $(\text{V})_{n\times n}$	$(V_g)_{n\times n} = XP_{p\times p}X' - g_{n\times 1}g'$	$(V_g)_{n\times n} = FD_p^{-1}F' - F1_p1_p'F'$ (N=D_p)
Matrice I_G	$(\text{T}_g)_{n\times n} = V_g Q_{n\times n} = XPX'Q - gg'Q_{n\times n}$	$\text{T}_g = F(D_p^{-1} - 1_p1_p')F'D_n^{-1}$ (M=D_n^{-1})
Matrice I_0	$T_0 = V_0 Q = XPX'Q$	$T_0 = FD_p^{-1}F'D_n^{-1}$
Axes factorielles	$(v_\alpha)_{n\times 1} : Tv_\alpha = \lambda_\alpha v_\alpha$	$(v_\alpha)_{n\times 1} : Tv_\alpha = \lambda_\alpha v_\alpha$
coordonnées	$(G_\alpha)_{n\times 1} = X'Qv_\alpha$	$(\varphi_\alpha)_{n\times 1} = D_p^{-1}F'D_n^{-1}v_\alpha$

Particularité de l'AFC: Relation entre analyse et analyse duale

La matrice variance covariance du nuage $\mathcal{N}$(I) est : $V_g = F'D_n^{-1}F - F'1_n1_n'F$ matrice da tail

où encore $\mathbf{V}_g = \mathbf{F\prime}(\mathbf{D}_n^{-1} - \mathbf{1}_n\mathbf{1}_n')\mathbf{F}$

(Matrice à diagonaliser)La matrice d'inertie totale de N(I) est : $\text{S}_g = \mathbf{V}_g\mathbf{D}_p^{-1} = F'(D_n^{-1} - 1_n1_n')FD_p^{-1}$

La matrice variance covariance du nuage N(J) est : $V_g = FD_p^{-1}F' - F1_p1_p'F'$ matrice da taille n $\times\, n$

où encore $\mathbf{V}_g = \mathbf{F}(\mathbf{D}_p^{-1} - \mathbf{1}_p\mathbf{1}_p')\mathbf{F}'$

La matrice d'inertie totale de N(J) est: T $_g = \mathbf{V}_g\mathbf{D}_n^{-1} = F(D_p^{-1} - 1_p1_p')F'D_n^{-1}$

Exercice

On effectue une AFC sur les tableaux suivants

On calculera les inerties par rapport aux deux nuages(On vérifiera l'égalité).

On déterminera la matrice à diagonaliser (On vérifiera que l'étude par rapport à l'origine est identique par rapport à celle du centre de gravité en tenant compte de quelques remarques) et on concluera par la représentation graphique et l'interprétations des résultats.

Applications:

Tabeau I

$$K_{I\times J}(i,j) = \begin{bmatrix} I\backslash J & A & B & C \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tableau II

$$K_{3\times 7}(i,j) = \begin{bmatrix} I\backslash J & A & B & C & D & E & F & G \\ \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \beta & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \gamma & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

TableauIII $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

TableauIV $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Rappels

I:Nuage de I (cardI=n)

Analyse avec $X_{n\times p}=[x_{ij}]$-profils lignes pour le nuage

$$\mathcal{N}(I) = \left\{ X_i = x_{ij} = f_j^i = \frac{f_{ij}}{f_{i.}} = \frac{k_{ij}}{k_{i.}} \right\}$$

pour chaque i fixé allant de 1 à n j varie 1,...,p, ainsi on dispose de n points X_i, où chaque point de $\mathcal{N}$(I) est plongé dans un espace inclus dans $\mathbb{R}^p$avec comme métrique M= χ^2 centrée en $f_{.j}$ i.e: Métrique euclédienne pondérée de $1/f_{.j}$

$$M_{p\times p} = [1/f_{.j}] = D_p^{-1}$$

La distance est ainsi évaluée entre éléments de $\mathcal{N}$(I)

$$d^2_{\chi^2}(f^i_j, f^{i'}_j) = \left\| f^i_j - f^{i'}_j \right\|^2_{\chi^2} =< f^i_j - f^{i'}_j, f^i_j - f^{i'}_j >_{\chi^2}= \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{f_{.j}} (f^i_j - f^{i'}_j)^2$$

pour i$\neq i'$ fixé et comme critère d'ajustement -La pondération des n points X_i de l'espace $\mathbb{R}^p$ est résumé par la matrice:

$$N_{n\times n} = D_n = [f_{i.}]$$

matrice diagonale de terme $[f_{i.}]$

Remarquer:La somme des pondérations de tous les points est égale à 1($\sum_i m_i = \sum f_{i.} =$ 1)

II:Nuage de J(card(J)=p)

Analyse avec Y=$[y_{ij}]$profils colonnes pour le nuage $\mathcal{N}$(J)=$\left\{Y^j = y_{ij} = f^j_i = \frac{f_{ij}}{f_{.j}}\right\}$ pour chaque j fixé allant de 1 à p i varie de 1 à n. Chaque point de J(il y'en a p) est plongé dans un espace inclus dans $\mathbb{R}^n$avec comme métrique M= χ^2 centrée en $f_{i.}$

$$d^2(f^j_i, f^{j'}_i) = \left\| f^j_i - f^{j'}_i \right\|^2 =< f^j_i - f^{j'}_i, f^j_i - f^{j'}_i >_{\chi^2}= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f_{i.}} (f^j_i - f^{j'}_i)^2$$

pour j fixé

$$M = D_n^{-1}$$

et comme critère d'ajustement -la pondération des points Y^j de l'espace $\mathbb{R}^n$ est

$$N = D_p$$

matrice diagonale de terme $[f_{.j}]$

Remarquer:La somme des pondérations de tous les points est égale à $1(\sum_{j=1}^{p} m_j = \sum_j f_{.j} = 1)$

Remarque la dualité entre les deux nuages $\mathcal{N}$(I) et $\mathcal{N}$(J)

Caractéristiques/Nuage	$\mathcal{N}$(I)	
Les points	$X_i = f_j^i = \frac{f_{ij}}{f_{i.}} = \frac{k_{ij}}{k_{i.}}$. $X_{n\times p}=D_n^{-1}F_{n\times p}$	$Y_j = f_i^j = \frac{f_{ij}}{f_{.j}} =$
Le nombre	n	
L'espace de représentation	$\mathbb{R}^p$	
Métrique M	$D_{p\times p}^{-1} = [1/f_{.j}]_{p\times p}$	$D_{n\times n}^{-1}$
Critère d'ajustement(Matrice des poids):N	$D_{n\times n}=[f_{i.}]$	D_p
comparaison	$M_{\mathcal{N}(I)}=N_{\mathcal{N}(I)}^{-1}$	$M_{\mathcal{N}(}$

Questions & Réponse

Tableau I

(i) Combien de facteurs non triviaux peut-on à priori extraire?

Nombre de facteurs non triviaux est égale à 2, en effet : C'est le $\min(p-1, n-1) = \min(3-1, 3-1) = 2$

(ii) Déterminer les centres de gravités g_I de N(I) et g_J de N(J)et les différentes distances des points-profils- aux centre de gravité, déduire de ces calculs les inerties totales des deux nuages.

On désigne une fois pour toutes:

$K_{n\times p}$(i,j)=$[k(i,j)]_{n\times p}$ matrice des effectifs avec $\sum_j \sum_i k(i,j) = k$ (C'est la matrice des données brutes)

$F_{n\times p}$(i,j)=$[f_{ij}]$ matrice des fréquences où $f_{ij} = \frac{k(i,j)}{k}$ d'où $\sum_j \sum_i f_{ij} = 1$

$$D_n = [f_{i.}] = \begin{bmatrix} f_{1.} & 0 & & & 0 \\ 0 & . & & & \\ & & f_{i.} & & \\ & & & . & 0 \\ 0 & & & 0 & f_{n.} \end{bmatrix}_{n\times n}$$ la matrice diagonale des masses-poids- de $\mathcal{N}(I)$ où

$f_{i.} = \sum_j f_{ij}$ et $\sum_i f_{i.} = 1$

et $\mathcal{N}(I) = \left\{ X_i = f_j^i = \frac{f_{ij}}{f_{i.}},\ \text{i=1,...,n} \right\}$ points profils lignes

Ainsi la matrice des profiles lignes est:$X_{n\times p}=\left[x_{ij} = f_j^i = \frac{f_{ij}}{f_{i.}} \right]$ (C'est la matrice à analyser:

Matrice dont la somme de chaque ligne est égale à 1, on peut la considérer comme une matrice stochastique, en assimilant f_j^i à $p(j/i)$

Le choix de f_j^i afin d'enlever la disparité entre lignes

$X_{n\times p}$ s'exprime en fonction de $F_{n\times p}$ et D_n

$$X_{n\times p} = D^{-1}_{n\times n} F_{n\times p}$$

$$X_{n\times p} = \begin{bmatrix} X'_1 \\ \\ \\ \\ X'_n \end{bmatrix} = D_n^{-1} F_{n\times p} = [x_{ij} = f_{ij}/f_{i.}]$$

Le centre de gravité de $\mathcal{N}(I)$ est:

$$g_{\mathcal{N}(I)} = \sum_i m_i X_i$$

les masses $m_i = f_{i.}(\sum_i f_{i.} = 1)$ d'où $g = \sum_i f_{i.} \frac{f_{ij}}{f_{i.}} = \sum_i f_{ij} = f_{.j}$ j=1,...,p

$$g_{\mathcal{N}(I)} = \begin{bmatrix} f_{.1} \\ . \\ f_{.j} \\ . \\ f_{.p} \end{bmatrix}$$

ou encore sous forme matriciellement:

$$g_{p\times 1} = X\prime_{p\times n} D_{n\times n} 1_{n\times 1} = F' D_n^{-1} D_n 1_n = F'_{p\times n} 1_{n\times 1}$$

Applications

Tabeaux I

$$\text{K(i,j)}=\begin{bmatrix} \text{I}\backslash J & \text{A} & \text{B} & \text{C} & \text{Marginal } \text{k}_{i.} \\ \text{a} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \text{b} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \text{c} & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \text{Marginal } \text{k}_{.j} & 1 & 1 & 1 & \text{k}=\sum_j \sum_i k_{ij} = 3 \end{bmatrix}$$

$$F(i,j) = \left[\frac{k(i,j)}{k}\right] = \begin{bmatrix} \text{I}\backslash J & \text{A} & \text{B} & \text{C} & \text{Marginal } \text{f}_{i.} \\ \text{a} & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ \text{b} & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ \text{c} & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ \text{Marginal } \text{f}_{.j} & 1/3 & 1/3 & 1/3 & \sum_j \sum_i f_{ij} = 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $\text{D}_{3\times3} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$ d'où $D^{-1}_{3\times3} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

La matrice des profils lignes:

$\text{X}_{3\times3} = \left[f^i_j\right] = D^{-1}_{3\times3} F_{3\times3} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ la somme de chaque ligne est égale à 1

$\text{g=X'D}_3 1_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

c'est aussi $\text{g=F'}1_3 = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{f}_{.1} \\ \text{f}_{..2} \\ \text{f}_{..3} \end{bmatrix}$ car $\text{X'}=(\text{D}_n^{-1}F)' = F'D_n^{-1}$

La matrice variance covariance de taille $\text{p}\times p$ est

$$V_g = \sum_{i=1}^{n} f_{i.}(X_i - g)(X_i - g)' \text{ Somme de n matrice de taille } (\text{p} \times 1)(1 \times p) = p \times p$$

$$V_{p\times p} = X'D_nX - gg'$$

$$\mathrm{V}_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$$

En remplaçant X par $\mathrm{D}_n^{-1}F$ et g par F'1_n on obtient:

$$V_g = F'D_n^{-1}F - F'1_n1_n'F$$

En effet: $\mathrm{V}_g{=}F'D_n^{-1}D_n\mathrm{D}_n^{-1}F - F'1_n1_n'F = F'D_n^{-1}F - F'1_n1_n'F$

Remarquer la matrice $1_n1_n'$est une matrice carréé où tous les éléments sont égale à 1.

Application numérique:

$$\mathrm{F'D}_n^{-1}F = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

et

$$F'1_n1_n'F = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

d'où on retrouve $\mathrm{V} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$

En faisant sortir des deux cotés de la parenthèse F' et F, on obtient:

$$V_g = F'(D_n^{-1} - 1_n1_n')F$$

Vérification numériques:

On a: $(D_n^{-1} - 1_n1_n') = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

On retrouve V_g

$$\mathrm{V}_g = F'(D_n^{-1} - 1_n 1_n')F = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$$

Calcul d'inertie totale de N(I): Inertie par rapport au centre de gravité

Cas général: Soit

N(I)={X_i, de masse m_i, de centre de gravité g}avec i=1,...,n (nombre de points du nuage),$X_i \in \mathbb{R}^p$(espace où chaque individus du nuage est plongés) muni d'une métrique M ainsi défini:$\forall A, B$ de $\mathbb{R}^p$

$d^2(A,B) = \|A-B\|_M^2 =< A-B, A-B >_M =' (A-B)M(A-B)$

Dans notre cas $X_i = \begin{bmatrix} f_1^i \\ . \\ f_j^i \\ . \\ f_p^i \end{bmatrix}, g = \begin{bmatrix} f_{.1} \\ . \\ f_{.j} \\ . \\ f_{.p} \end{bmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^p$ et M=$D_p^{-1} = [1/f_{.j}]_{p\times p}$ (la métrique du χ^2 centré en $f_{.j}$ qui n'est

autre que la métrique enclédienne pondérée par $1/f_{.j}$.Ainsi

$$d^2(X_i, g) =' (X_i - g)D_p^{-1}(X_i - g)$$

et la masse est $m_i = f_{i.}$ i=1,...,n.

$$I = Ig(N(I)) = \sum_{i=1}^{n} m_i d_\chi^2(X_i, g) \text{ cas général}$$

$d_\chi^2(X_i, g) =< X_i - g, X_i - g >_\chi = (X_i - g)' D_p^{-1}(X_i - g)$

Ainsi $I = \sum_{i=1}^{n} f_{i.}'(X_i - g)' D_p^{-1}(X_i - g)$

$\mathrm{tr}(I) = \mathrm{tr}(\left\{ \sum_{i=1}^{n} f_{i.}'(X_i - g)' D_p^{-1}(X_i - g) \right\}) = \mathrm{tr}(\left\{ \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f_{i.}(X_i - g)(X_i - g)'}_{\mathrm{V}_g} D_p^{-1} \right\})$ propriété de la trace

d'où $\quad \mathrm{tr}(I) = \mathrm{tr}(V_g D_p^{-1})$

Posons S*=V$_g D_p^{-1} = (F'D_n^{-1}F - F'1_n1'_nF)D_p^{-1} = \underbrace{F'D_n^{-1}FD_p^{-1}} - F'1_n1'_nFD_p^{-1}$ la matrice à diagonaliser

et mettons S*= S $-F'1_n1'_nFD_p^{-1} = F'(D_n^{-1} - 1_n1'_n)FD_p^{-1}$

$$S^* = F'(D_n^{-1} - 1_n1'_n)FD_p^{-1}$$

Application:

$$D_p = [f_{.j}] = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$S^* = VD_3^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

I(N(I))=$tr(V_gD_3^{-1}) = 2/3 + 2/3 + 2/3 = 2.$

Calcul d'inertie I_0(N(I))-Inertie par rapport à l'origine de R^p−

$I_0 = I_0(N(I)) = \sum_{i=1}^{n} m_i d^2(X_i, 0_{R^p})$

$I_0 = \sum_{i=1}^{n} f'_{i.}X_iD_p^{-1}X_i$

I_0=tr(I_0)=tr($V_0D_p^{-1}$) avec $V_0 = X'D_nX =' (D_n^{-1}F)D_n(D_n^{-1}F) = F'D_n^{-1}F$

Ainsi S est la matrice à diagonaliser

Rappel et remarque

S est appelée **matrice d'inertie**(par rapport à l'origine du nuage $\mathcal{N}(I)$)dans l'analyse générale):

$$S_{p\times p} = X\prime NXM$$

S' est appelée matrice d'inertie globale-par rapport au centre de gravité du nuage $\mathcal{N}(I)$)dans l'analyse générale:

S'$_{p\times p}$=$'XNXM-gg'M$ où g='XN1$_{n\times 1}$ d'où

$$S'=X\prime NXM-X\prime N1_{n\times 1}1'_{1\times n}NXM$$

où Dans notre cas X= $\left[x_{ij}=f_j^i\right]=D_n^{-1}F$

$N=$ le critére d'ajustement $=D_n$, et M= la métrique utilisée=D_p^{-1}

Ainsi S=$(D_n^{-1}F)'D_n(D_n^{-1}F)D_p^{-1}=F'D_n^{-1}FD_p^{-1}$

$$V_0D_p^{-1}=F'D_n^{-1}FD_p^{-1}=S$$

S est du type V M ou MV avec M= métrique et V la matrice variance covariance (V_0 ou V_g)

Dans notre cas V=$V_0=F'D_n^{-1}F$ et M=D_p^{-1}

Pour S*: Dans notre cas: g=X'N$1_n=(D_n^{-1}F)'D_n1_n$ =F'1_n; M=D_p^{-1}

$$gg\prime M=X\prime N1_{n\times 1}1'_{1\times n}NXM=F'1_n1'_nFD_p^{-1}$$

Ainsi S* la matrice d'inertie globale est

$$\begin{array}{rcl} S^*_{p\times p} & = & F'D_n^{-1}FD_p^{-1}-F'1_n1'_nFD_p^{-1}=\underbrace{F'{}'(D_n^{-1}-1_n1'_n)F}D_p^{-1} \\ S*_{p\times p} & = & V \quad \times \quad M \end{array}$$

$$V_0=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}1/3&0&0\\0&1/3&0\\0&0&1/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$$S=V_0D_p^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}, \operatorname{tr}(V_0D_p^{-1})=1+1+1=3$$

On remarque que:

$$I_g=I_0-1$$

Remarques:

$$\mathrm{tr}(V_g D_p^{-1}) = \mathrm{tr}(V_0 D_p^{-1}) - 1$$

a: 1 représente la quantité: $\mathrm{d}^2(0_{\mathbb{R}^p}, g = f_{.j})$

En effet: $d^2(0_{\mathbb{R}^p}, g = f_{.j}) = \sum_j \frac{1}{f_{.j}}(f_{.j} - 0)^2 = \sum_j f_{.j} = 1$

b: On retouve le théorème de Hughens:

$$I_x = I_g + d^2(g,x) \Longleftrightarrow I_g = I_x - d^2(g,x)$$

$x = 0, I_0 = tr(S_0 = V_0 D_p^{-1}),$

$I_g = tr(S_g = V_g D_p^{-1})$

c: 1 représente aussi la trace de la matrice carrée $F' 1_n 1_n' F D_p^{-1}$

En effet: $\begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$,trace =1/3+1/3+1/3=1

Conclusion:

On travaille avec la matrice

$$S_{p\times p} = V_0 D_p^{-1} = F' D_n^{-1} F D_p^{-1}$$

(c'est plus facile)et on retanche 1 de sa trace pour evaluer l'inertie total I_g

Application:

spectre de $\mathrm{S}_{3\times 3}$: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, characteristic polynomial: $(X-1)^3$, eigenvalues: 1 de multiplicité 3

Les vecteurs propres par exemple à retenir sont: $\mathrm{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\mathrm{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

axes factorielles: $\psi_\alpha = XMu_\alpha = (D_n^{-1}F) D_p^{-1} u_\alpha$

$$\psi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\psi_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Représentation graphiques: sur les deux axes avec 50% de taux d'inertie sur chaque axe

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Etude du N(J): $\mathcal{N}(J) = \left\{ Y^j = f_i^j = \dfrac{f_{ij}}{f_{j.}},\ \text{i=1,...,n} \right\}$ p points profils colonnes

Ainsi la matrice des profiles colonnes est:$Y_{p\times n}$=$\left[y_{ij} = f_i^j = \dfrac{f_{ij}}{f_{.j}} \right]$

$Y_{p\times n}$ s'exprime en fonction de F'$_{n\times p}$ et $D_{p\times p}$($D_{p\times p}$ est une matrice diagonale avec comme terme $f_{.j}$)

$$Y_{p\times n} = D^{-1}_{p\times p} F'_{p\times n}$$

Application:$D_p = [f_{.j}] = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$

$$Y_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le centre de gravité de$\mathcal{N}(J)$ est : g= $\begin{bmatrix} . \\ . \\ f_{i.} \\ . \\ . \end{bmatrix}_{n\times 1}$ où $f_{i.}$ (sa i-ème coordonnée)

$$g=Y'_{n\times p}D_{p\times p}1_{p\times 1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}1/3&0&0\\0&1/3&0\\0&0&1/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

c'est aussi $g=F1_3=\begin{bmatrix}1/3&0&0\\0&1/3&0\\0&0&1/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_{1.}\\f_{2.}\\f_{3.}\end{bmatrix}$

En effet: $Y_{p\times n}= D_p^{-1}F'_{p\times n} \implies Y'=(D_p^{-1}F')'=FD_p^{-1} \implies g_{n\times 1}=F_{n\times p}D_p^{-1}D_{p\times p}1_{p\times 1}=F_{n\times p}1_{p\times 1}$

La matrice variance covariance V_g de taille $n\times n$ du nuage N(j) de points Y^j (au nobre de p)

$Y^j=\begin{bmatrix}.\\.\\f_i^j\\.\\.\end{bmatrix}_{n\times 1}$ pour tous j=1,...,p ,de masse $f_{.j}$ et de centre de gravité $g=\begin{bmatrix}.\\.\\f_{i.}\\.\\.\end{bmatrix}_{n\times 1}$

$$V_g=\sum_{j=1}^{p}f_{.j}(Y^j-g)(Y^j-g)'\text{Somme de p matrice de taille } (\text{n}\times 1)(1\times n)=n\times n$$

$$V_{n\times n}=Y'_{n\times p}D_{p\times p}Y_{p\times n}-g_{n\times 1}g'_{1\times n}$$

$$V_g=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}1/3&0&0\\0&1/3&0\\0&0&1/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}\frac{2}{9}&-\frac{1}{9}&-\frac{1}{9}\\-\frac{1}{9}&\frac{2}{9}&-\frac{1}{9}\\-\frac{1}{9}&-\frac{1}{9}&\frac{2}{9}\end{bmatrix}$$

En remplaçant $Y_{p\times n}$ par $D_p^{-1}F'$ et g par $F1_p$on obtient:

$$V_g=(D_p^{-1}F')'D_p(D_p^{-1}F')-(F1_p)(F1_p)'$$

d'où

La matrice variance covariance du nuage N(J) est : $V_g = FD_p^{-1}F' - F1_p1_p'F'$ matrice da taille n $\times$ n

où encore $\mathbf{V}_g = \mathbf{F}(\mathbf{D}_p^{-1} - \mathbf{1}_p\mathbf{1}_p')\mathbf{F}'$

La matrice d'inertie totale de N(J) est: T $_g = \mathbf{V}_g\mathbf{D}_n^{-1} = F(D_p^{-1} - 1_p1_p')F'D_n^{-1}$

Rappel:

La matrice variance covariance du nuage N(I) est : $V_g = F'D_n^{-1}F - F'1_n1_n'F$ matrice da taille p $\times$ p

où encore $\mathbf{V}_g = \mathbf{F'}(\mathbf{D}_n^{-1} - \mathbf{1}_n\mathbf{1}_n')\mathbf{F}$

La matrice d'inertie totale de N(I) est : S$_g = \mathbf{V}_g\mathbf{D}_p^{-1} = F'(D_n^{-1} - 1_n1_n')FD_p^{-1}$

Remarquer l'écriture similaire

au lieu de F c'est (F') ; D$_p^{-1}$c'est (D$_n^{-1}$);1_p c'est (1_n)et vu qu'en générale D$_p = [f_{.j}] \neq D_n = [f_{i.}]$ **le passage d'un nuage à l'autre ne se déduit pas par simple transposition.**

Calcul d'inertie totale de N(J): Inertie par rapport au centre de gravité

Remarque

C'est une autre métrique, la métrique du χ^2 mais centrée en f$_{i.}$(euclédienne avec pondération 1/f$_{i.}$) i-e: M=D$_n^{-1}$

N(J), de points Y$^j = f_i^j$ de masse f$_{.j}$ de centre de gravité fi.

$I = Ig(N(J)) = \sum_{j=1}^{p} m_i d^2(Y^j, g)$ où

$$d^2(Y^j, g) = \left\|Y^j - g\right\|_{\chi^2}^2 = (Y^j - g)^{tr} D_n^{-1}(Y^j - g)$$

d'où $I = \sum_{j=1}^{p} f_{.j}(Y^j - g)^{tr} D_n^{-1}(Y^j - g)$

$$\mathrm{tr}(J) = \mathrm{tr}(\left\{\sum_{j=1}^{p} f_j (Y^j - g)^{tr} D_n^{-1} (Y^j - g)\right\}) = \mathrm{tr}(\left\{\underbrace{\sum_{j=1}^{p} f_{.j} (Y^j - g)(X_i - g)^{tr}}_{\mathrm{V}_g} D_n^{-1}\right\})$$

d'où

$$I(N(J)) = \mathrm{tr}(V_g D_n^{-1})$$

d'où la matrice à diagonaliser est T*(dite matrice d'inertie totale)

$$T^* = V_g D_n^{-1} = F D_p^{-1} F' D_n^{-1} - F 1_p 1_p' F' D_n^{-1} \qquad (*)$$

I_0(N(J))=tr(T=$\mathrm{V}_0 D_n^{-1}$); g=0 dans (*) on retrouve $\mathrm{V}_0 = F D_p^{-1} F'$

I_0(N(J))=tr(T=$F D_p^{-1} F' D_n^{-1}$)

Ecriture similaire à celle de N(I)

Même remarque au lieu de diagonalise T' on diagonalise T

$$T = V_0 D_n^{-1} = F D_p^{-1} F' D_n^{-1}$$

et on déduit l'inertie global

$$I_g = tr(T^*) = tr(T) - 1$$

pour les même justifications.

Résumé de l'analyse:

Caractéristiques/Nuages	Analyse g^{ale} de N(I)	AFCde N(I)
Matrice de l'étude	$X_{n\times p} = [x_{ij}]$	$X_{n\times p} = \left[f_j^i = \frac{f_{ij}}{f_{i.}}\right] = D_n^{-1}F$
Matrice V	$(V_g)_{p\times p} = X'NX - g_{p\times 1}g'$	$V_g = F'D_n^{-1}F - F'1_n1_n'F$
Matrice d'inertie	$S_g = V_gM_{p\times p} = X'N_{n\times n}XM - gg'M$	$S^* = F'(D_n^{-1} - 1_n1_n')FD_p^{-1}$
Matrice d'inertie avec g=0	$S_0 = V_0M = X'NXM$	$S_0 = F'D_n^{-1}FD_p^{-1}$
Axes factorielles	$(u_\alpha)_{p\times 1} : Su_\alpha = \lambda_\alpha u_\alpha$	$u_\alpha : Su_\alpha = \lambda u_\alpha$
coordonnées (facteurs)	$(\psi_\alpha)_{p\times 1} = XMu_\alpha$ avec u_α $M-$unitaire	$(\psi_\alpha)_{p\times 1} = D_n^{-1}FD_p^{-1}u_\alpha$

Caractéristiques/Nuages	Analyse g^{ale} de N(J)	AFCde N(J)
Matrice de l'étude	$X'_{p\times n}$	$Y_{p\times n} = \left[f_i^j\right] = D_p^{-1}F'$ (Y
Matrice V	$(V_g)_{n\times n} = XN_{p\times p}X' - g_{n\times 1}g'$	$(V_g)_{n\times n} = FD_p^{-1}F' - F1_p1_p'F$
Matrice d'inertie	$(T^*)_{n\times n} = V_gM_{n\times n} = XNX'M - gg'M_{n\times n}$	$T^* = F(D_p^{-1} - 1_p1_p')F'D_n^{-1}($
Matrice d'inertie avec g=0	$T = V_0M = XNX'M$	$T = FD_p^{-1}F'D_n^{-1}$
Axes factorielles	$(v_\alpha)_{n\times 1} : Tv_\alpha = \lambda_\alpha v_\alpha$	$(v_\alpha)_{n\times 1} : Tv_\alpha = \lambda_\alpha$
coordonnées (facteurs)	$(\varphi_\alpha)_{n\times 1} ='XMv_\alpha$	$(\varphi_\alpha)_{n\times 1} = D_p^{-1}F'D_n^{-}$

Tableau II

$$K_{3\times 7}(i,j) = \begin{bmatrix} I\backslash J & A & B & C & D & E & F & G \\ \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \beta & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \gamma & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(i) Combien de facteurs non triviaux peut-on à priori extraire?

Nombre de facteurs non triviaux est égale à $\min(p-1, n-1) = \min(3-1, 7-1) = 2$

(ii) AFC

Déterminer, la matrice F=[$f_{ij} = \frac{k_{ij}}{k}$] matrice des fréquences.

la matrice des profils lignes: la matrice $X = [f_j^i = \frac{f_{ij}}{f_{i.}} = \frac{k_{ij}}{k_{i.}}]$, X peut s'ecrire comme $D_n^{-1}F$

avec

$$D_n = [f_{i.}] = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_n^{-1} = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_p = [f_{.j}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$M=D_p^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$F_{3\times 7}=\frac{1}{12} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{12} \end{bmatrix}$$

$$X_{3\times 7}=D_n^{-1}F = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g = X\prime N 1_n$$

en AFC:

$$g_{p\times 1} = X\prime_{p\times n} D_{n\times n} 1_{n\times 1} = F' D_n^{-1} D_n 1_n = F'_{p\times n} 1_{n\times 1}$$

(iii)Déterminer le centre de gravité g_I

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{12} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matrice à diagonaliser:

$\mathrm{V}_g =' XNX - gg'$ avec N=D_n

$\mathrm{V}_0 =' XNX$

Tableau III

Matrice des effectifs: $\mathrm{K}_{5\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matrice des fréquences $F = \frac{1}{8}K$

Matrice des poids dans N(I):

$$\mathrm{N}=\mathrm{D}_n=[\mathrm{f}_{i.}] = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{D}_n^{-1} = 8\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{D}_p = [f_{.j}] = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Métrique dans $\mathbb{R}^{p}$:M=D_p^{-1}

$$D_p^{-1} = 8\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

Matrice des profils lignes $X_{5\times3}$=$D_n^{-1}F$

$$\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

profil ligne moyen $g_{3\times1} = {}'XN1_n = F'1_n$

$$= \frac{1}{8}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

Matrice variance covariance $V_g =' XNX - gg'$

$$V_g = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{7}{64} & -\frac{3}{32} & -\frac{1}{64} \\ -\frac{3}{32} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{32} \\ -\frac{1}{64} & -\frac{1}{32} & \frac{3}{64} \end{bmatrix}$$

$$V_0 = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{3}{16} \end{bmatrix}$$

Matrice à diagonaliser: $S_g = V_gM$ ou $S_0 = V_0M$

où M=D_p^{-1}

$$S_g = \begin{bmatrix} \frac{7}{64} & -\frac{3}{32} & -\frac{1}{64} \\ -\frac{3}{32} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{32} \\ -\frac{1}{64} & -\frac{1}{32} & \frac{3}{64} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{8}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{24} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{24} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{24} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

Le spectre de S_g: $\begin{bmatrix} \frac{7}{24} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{24} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{24} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$, eigenvectors: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 0, \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{41}+19}{3\sqrt{41}+17} \\ -\frac{2\sqrt{41}-2}{3\sqrt{41}+17} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow \frac{11}{24} - \frac{1}{24}\sqrt{41}, \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{41}-19}{3\sqrt{41}-17} \\ -\frac{2\sqrt{41}+2}{3\sqrt{41}-17} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow \frac{1}{24}\sqrt{41} + \frac{11}{24}$

La somme des valeurs propres:$\sum \lambda_i = \frac{22}{24} = \frac{11}{12}$

$S_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{3}{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Le spectre de S_0 : $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, eigenvectors: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 1, \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{41}+3}{\sqrt{41}+7} \\ -\frac{4}{\sqrt{41}+7} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow \frac{11}{24} - \frac{1}{24}\sqrt{41}, \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{41}-3}{\sqrt{41}-7} \\ \frac{4}{\sqrt{41}-7} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow \frac{1}{24}\sqrt{41} + \frac{11}{24}$

La somme des valeurs propres:$\sum \lambda_i = 1 + \frac{22}{24} = \frac{23}{12}$

L'inertie globale: $I_g = \sum_i \lambda_i = trace \begin{bmatrix} \frac{7}{24} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{24} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{24} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$, trace: $\frac{11}{12}$

L'inertie par rapport à l'origine: $I_0 = \sum_i \lambda_i = trS_0 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, trace: $\frac{23}{12}$

comme $d^2_{\chi^2}(0, g) = 1$

D'aprés le th de Hughens $I_0 = 1 + I_g$

$I_0 - 1 = \frac{23}{12} - 1 = \frac{11}{12} = I_g$

Les facteurs

on commence par normaliser les vecteurs propres

$$u_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{41}-3}{\sqrt{41}-7} \\ \frac{4}{\sqrt{41}-7} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\|u_\alpha\|_M^2 = u'_\alpha M u_\alpha = u'_\alpha D_p^{-1} u_\alpha$

$$\|u_1\|_M^2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{41}-3}{\sqrt{41}-7} \\ \frac{4}{\sqrt{41}-7} \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{41}-3}{\sqrt{41}-7} \\ \frac{4}{\sqrt{41}-7} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{64}{\left(\sqrt{41}-7\right)^2} + \frac{8}{3}\frac{\left(\sqrt{41}-3\right)^2}{\left(\sqrt{41}-7\right)^2} + \frac{8}{3} = 269.00$$

$\|u_1\|_M = \sqrt{269.00} = 16.401$

$$\psi_1 = D_n^{-1} F D_p^{-1} \frac{u_1}{\|u_1\|_M}$$

Tableau IV

Matrice des effectifs: $K_{4\times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Matrice des fréquences $F = \frac{1}{10} K$

Matrice des poids dans N(I): N=D_n

$$D_n = [f_{i.}] = [\frac{k_{i.}}{k}] = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D_n^{-1} = 10 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{10}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10}{3} \end{bmatrix}$$

Métrique dans $\mathbb{R}^p$: M=D_p^{-1}

avec $D_p = [f_{.j}]$

$$D_p = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$M = D_p^{-1} = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matrice des profils lignes $X_{4\times 2}$=$D_n^{-1}F$

$[f_j^i] = [\dfrac{k_{ij}}{k_{i.}}]$

$$X=\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{10}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

profil ligne moyen $g_{2\times 1} = {}' XN1_n = F'1_n$

$$g=\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$g = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matrice variance covariance $V_g =' XNX - gg'$

$V_g = F'(D_n^{-1} - 1_n 1_n')F$

$$V_g = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} - \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{7}{60} & -\frac{7}{60} \\ -\frac{7}{60} & \frac{7}{60} \end{bmatrix} =$$

$$\frac{7}{60}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V_0 = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{30} & \frac{2}{15} \\ \frac{2}{15} & \frac{11}{30} \end{bmatrix} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 11 & 4 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}$$

Matrice à diagonaliser: $S_g = V_g M$ ou $S_0 = V_0 M$

avec M=D_p^{-1}

$S_g = \frac{14}{60}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{14}{60}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Spectre S_g

spectre $\frac{14}{60}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, eigenvectors: $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \leftrightarrow 0, \left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \leftrightarrow \frac{7}{15}$

somme des valeurs propres=$\frac{7}{15}$

$$traceS_g = \frac{28}{60} = \frac{7}{15}$$

$S_0 = \frac{2}{30}\begin{bmatrix} 11 & 4 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 11 & 4 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}$

Le spectre de S_0

$\frac{1}{15}\begin{bmatrix} 11 & 4 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}$, eigenvectors: $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \leftrightarrow 1, \left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \leftrightarrow \frac{7}{15}$

$$TraceS_0 = \frac{22}{15} = 1 + \frac{7}{15} = \frac{22}{15}$$

Vérification du th de Hughens

$$I_0 = I_g + d^2(0, g)$$

Les facteurs:

$\psi_\alpha = XMu_\alpha$ avec u_α M-unitaire

on a

$$F_\alpha = XM\frac{u_\alpha}{\|u_\alpha\|_M}$$

$\|u_\alpha\|_M^2 = u'_\alpha M u_\alpha = u'_\alpha D_p^{-1} u_\alpha$

$\|u_1\|_M^2 = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 4$

$\frac{u_1}{\|u_1\|_M} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\psi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\|u_2\|_M^2 = 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 4$$

$$\frac{u_2}{\|u_2\|_M} = \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\psi_1 = D_n^{-1} F D_p^{-1} \frac{u_1}{\|u_1\|_M}$$

$$\psi_2 = \tfrac{1}{10} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{10}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Plan principal(ψ_1, ψ_2) :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

vérification

$$\|\psi_\alpha\|_N^2 = \lambda_\alpha \quad \text{où N=D}_n$$

$\alpha = 1$

$$\| \ \psi_1\|_N^2 = \ \psi_1' N \psi_1 = \tfrac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

$\alpha = 2$

$$\parallel \psi_2\|_N^2 = \psi_2' N \psi_2 = \tfrac{1}{10} \begin{bmatrix} -1 \\ -\tfrac{1}{3} \\ 1 \\ \tfrac{1}{3} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -\tfrac{1}{3} \\ 1 \\ \tfrac{1}{3} \end{bmatrix} = \tfrac{7}{15}$$