Université Mohamed Khider - Biskra **(2021 – 2020)**
Département de Mathématiques

Master 2 – Tests Non Paramétrique

Ex1) Considérons un échantillon $X = (X_1, ..., X_{10})$ de taille $n = 10$ d'une loi inconnue P, dont on dispose de l'observation $x = (x_1, ..., x_{10})$ suivante :

j :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_j :	$1,6$	$1,3$	$0,1$	$0,2$	$2,4$	$1,0$	$14,4$	$0,3$	$6,7$	$0,5$

Sur la base de cette observation, on souhaite savoir si la loi P inconnue peut être considérée comme une loi log-normale de paramètres $(\beta, 1)$. On rappelle ici que la densité de la loi log-normale de paramètres $(\beta, 1)$, pour $\beta \in R$, est définie par

$$f_\beta(x) := \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\log(x) - \beta)^2\right\}, \qquad x > 0.$$

1) Montrer que $\forall i$, $\log(X_i)$ suit la loi $N(\beta, 1)$. En déduire la loi de la variable $\sum \log(X_i)$.
2) On souhaite maintenant construire un test de Kolmogorov-Smirnov de l'hypothèse:

$$(H_0) : P \ est \ la \ loi \ log - normale \ de \ paramètres \ (0, 1).$$

a) Montrer que la fonction de répartition F de la loi $LN(0, 1)$ vérifie: $F(t) = \Phi(\log t) 1_{(t>0)}$, où Φ est la fonction de répartition de la loi $N(0, 1)$.
b) Donner la statistique de test de Kolmogorov-Smirnov pour le problème de test considéré, et donner une expression de cette statistique en fonction de Φ et de la statistique d'ordre associée.
c) Quelle est la conclusion de ce test pour un niveau $\alpha = 5\%$? Sachant que, pour $n = 10$

$$P(\sup_{t\in[0,1]} |F_{U,n}(t) - t| \leq 0.409) = 0.95$$

Ex 2) Pour savoir si le genre influence l'avis que l'on donne, nous avons demandé à 42 étudiants, 16 filles et 26 garçons s'ils étaient tout à fait d'accord(A), plutôt d'accord(B), plutôt pas d'accord(C) ou pas du tout d'accord(D) avec la proposition (l'argent fait le bonheur !). Construire le test permettant de conclure, selon leurs réponses présentées comme suit:

	A	*B*	*C*	*D*
Filles	3	7	6	0
Garçons	2	4	13	7

Ex 3) Un étudiant s'entraîne pour l'épreuve de tir à l'arc. Il installe une cible dans son jardin et la vise 30 fois. A chaque tir $i (i = 1, ..., 30)$, il apprécie la précision de son tir en mesurant l'éloignement X_i entre le centre de la cible et le point d'impact de sa flèche. Si la mesure $X_i = 0$, il a tiré au centre de la cible, si $X_i < 0$, il a tiré dans la demi-cible du bas, si $X_i > 0$ il a tiré dans la demi-cible du haut. Les mesures sont les suivantes (en dm) :

$$-1.8;\ 1;\ -0.1;\ 3;\ -1.3;\ -1.4;\ 1.3;\ -0.8;\ 0.3;\ -1;\ -1;\ 0;\ 0.6;\ -0.2;\ 0.6;\ 0.8;$$
$$1;\ -1.4;\ -1.6;\ -2.3;\ -1.2;\ 4;\ 4.3;\ 0;\ 1;\ 1.2;\ 3.8;\ -1;\ 0.5;\ -2.9$$

Les tirs sont considérés indépendants entre eux et on admet que l'étudiant est un excellent tireur si les X_i suivent une loi normale $N(0; 4)$.
1) A l'aide d'un test du Khi-deux de niveau asymptotique 5% sur les classes:

$$]-\infty; -1[, \quad [-1; 0[, \quad [0; 1[, \quad [1; 2[, \quad [2; +\infty[$$

dire si l'étudiant peut être considéré comme un excellent tireur à l'arc.
2) Tester l'hypothèse que l'étudiant peut être considéré comme un excellent joueur à l'aide d'un test de Kolmogorov-Smirnov.
3) Quel test l'étudiant aurait-il fait s'il avait seulement souhaité vérifier que les X_i suivent une loi gaussienne ? réaliser ce test est conclure.