Faculté des Sciences Exactes

Département de Probabilités-Statistique

2019/20

Module : Chaînes de Markov

TD

Exercice 1. *On lance un dé de manière répétitive. Parmi les suites aléatoires suivantes, lesquelles sont des chaînes de Markov ? Donner leur matrice de transition.*

1. X_n *: le plus grand résultat obtenu après* n *lancers.*
2. N_n *: le nombre de* 6 *obtenus au bout de* n *lancers.*
3. $B_n = \sum_{i=0}^{n} N_i$

Réponse :

1. Notons le résultat du i^{ème} lancer par U_i. On a $X_n = \sup\limits_{1\leq i\leq n} U_i$, donc pour tout $n \geq 1$,
$$X_{n+1} = f(X_n, U_{n+1}), \qquad \text{avec } f(x,y) = sup(x,y).$$
La suite $(U_i)_{i\geq 1}$ est suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, alors $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov homogène de transition $\mathrm{P} = (p(i,j))_{i,j\in\mathbb{E}}$ avec $\mathbb{E} = \{1,2,3,4,5,6\}$. Or pour tout $i,j \in \mathbb{E}$,
$$p(i,i) = \mathbb{P}(f(i,U_1) = j) = \mathbb{P}(\sup(i,U_1) = j).$$
Cependant on a
$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On a $N_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{U_i=6\}}$, et par suite $N_{n+1} = N_n + \mathbf{1}_{\{U_{n+1}=6\}} = g(N_n, U_{n+1})$ ou $g(x,y) = x + \mathbf{1}_{\{y=6\}}$. De la même manière, on déduit que $(N_n)_n$ est une chaîne de Markov homogène à valeurs dans $\mathbb{E} = \mathbb{N}$ de transition $\mathrm{Q} = (q(i,j))_{i,j\in\mathbb{N}}$, avec
$$q(i,j) = \mathbb{P}(i + \mathbf{1}_{\{U_1=6\}} = j) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{si}\,;\ \ j = i+1 \\ \frac{5}{6}, & \text{si}\,;\ \ j = i \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. On a $B_n = \sum_{i=1}^{n} N_n = \sum_{i=1}^{n} (n-i+1)\mathbf{1}_{\{U_i=6\}}$, on prend les événements suivants $B_1 = 1$, $B_2 = 2$, $B_3 = 3$ et $B_4 = 5$. On remarque que

$$(B_1 = 1, B_2 = 3, B_3 = 3) = (U_1 = 6, U_2 \neq 6, U_3 \neq 6)$$

et

$$(B_1 = 1, B_2 = 3, B_3 = 3, B_4 = 7) = (U_1 = 6, U_2 \neq 6, U_3 \neq 6, U_4 = 6)$$

ainsi que

$$(B_3 = 3) = (U_1 = 6, U_2 \neq 6, U_3 \neq 6) \text{ ou } (U_1 \neq 6, U_2 = 6, U_3 = 6)$$

et

$$(B_3 = 3, B_4 = 7) = (U_1 = 6, U_2 \neq 6, U_3 \neq 6, U_4 = 6) \text{ ou } (U_1 \neq 6, U_2 = 6, U_3 = 6, U_4 \neq 6).$$

Après calcul des probabilités, on trouve que

$$\mathbb{P}(B_4 = 7 / B_1 = 1, B_2 = 3, B_3 = 3) = \frac{1}{6}$$

et

$$\mathbb{P}(B_4 = 7 / B_3 = 3) = \frac{5}{18}.$$

On conclut que $(B_n)_n$ n'est pas une chaîne de Markov.

Exercice 2. *On considère la suite de variables aléatoires $(U_n)_n$ indépendantes de même loi telles que $\mathbb{P}(U_1 = 1) = p$ et $\mathbb{P}(U_1 = -1) = 1 - p$. On définit la suite la suite $(X_n)_n$ par*

$$\begin{cases} X_0 = x \in \mathbb{R} \\ X_{n+1} = X_n U_{n+1} \end{cases}$$

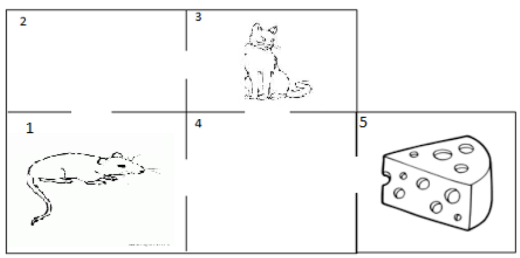
1. *$(X_n)_n$ est-elle une chaîne de Markov ?*
2. *Donner la matrice de transition de $(X_n)_n$.*

Exercice 3. *Soit X une chaine de Markov de matrice de transition P. On pose $Y_n = X_{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Y est-elle une chaîne de Markov ? Si oui, quelle est sa matrice de transition ?*

Exercice 4. *m boules, numérotées $1, 2, ..., m$, sont réparties dans deux boîtes. On note X_n le nombre de boules dans la première boîtes à l'instant n. À chaque étape, on tire un numéro entre 1 et m, et on change de boîte la boule portant ce numéro. Expliciter la matrice de transition de la chaîne de Markov $(X_n)_n$.*

Exercice 5. *On considère jeu classique de tennis (pas un jeu décisif) de Daniel contre Olivier. c'est à Olivier de servir. Il gagne chaque point avec probabilité p. Modéliser par une chaîne de Markov et donner la probabilité pour que Olivier gagne le jeu.*

Exercice 6. *Si à l'instant t, la souris est dans une pièce avec k portes alors au temps suivant $t+1$, elle se trouve équiprobablement dans une des k pièces voisines. Si elle se trouve dans la pièce du fromage, elle le mange. Le chat est assez paresseux pour ne pas bouger de sa chambre et assez gourmand pour manger la souris dés qu'il se retrouve dans la même pièce qu'elle. Partant de la configuration suivante, quelle est la probabilité pour que la souris mange le fromage ?*



Exercice 7. *Pour quelles valeurs de $p, q \in [0,1]$, la matrice stochastique* $\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$ *est-elle irréductible ?*

Exercice 8. *Soit X une chaîne de Markov à espaces d'états $E = \{1,2,3,4,5\}$ et de matrice de transition*

$$\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

1. *Dessiner le graphe de la chaîne.*
2. *Quelles sont les classes d'états communicants ?*
3. *Qualifier les différents états de la chaîne.*
4. *L'état initial de la chaîne est l'état 2. quelle est la loi de X_1 ?de X_2 ?*

Exercice 9. *Soit X une chaîne de Markov à espaces d'états $E = \{1,2,3,4\}$ et de matrice* *de transition*

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Montrer que X est irréductible récurrente positive et calculer sa probabilité invariante.*
2. *Quel est le temps moyen de retour à l'état "i".*
3. *Que peut-on dire sur le comportement de*

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Exercice 10. *Soit X une chaîne de Markov à espaces d'états $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et de matrice de transition*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Montrer que X est irréductible*
2. *Déterminer sa période*
3. *Calculer les valeurs propres de* M. *En déduire la limite de* M^n *quand n tend vers l'infini.*
4. *Rechercher la probabilité invariante. Conclure !*

Exercice 11. *Soit une chaîne de Markov possédant 5 états notés $1, 2, ..., 5$ et donnée par sa matrice de transition*

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1. *Identifier les classes de communication.*
2. *Qualifier les états de la chaîne.*
3. *Quelles sont les probabilités invariantes ?*

Exercice 12. *Soit X une chaîne de Markov à espaces d'états $E = \{1,2,3,4,5\}$ et de matrice de transition*

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1. *Dessiner le graphe de cette chaîne de Markov.*
2. *Déterminer la ou les composantes irréductibles de cette chaîne.*
3. *Déterminer le(s) états transitoires.*
4. *Donner la période de chaque élément de E.*
5. *Vérifier que si X_0 suit une loi uniforme sur $\{4;5\}$, X_1 également. Voyez-vous d'autres mesures de probabilité invariantes ?*
6. *Qu'est-ce qui change si $p(3,3)$ est changé en $\frac{1}{2} - \varepsilon$ et et $p(3,4)$ en ε ?*

Exercice 13. *Les consommateurs de 3 produits sont répartis en 50% pour P1, 30% pour P2 et 20% pour P3.*

Après chaque mois, 60% restent fidèles à P1 contre 70% pour P2 et 90% pour P3.
Les autres se réorientent entre les deux produits de manière équiprobable.
On note X_n la répartition des consommateurs au mois n.

1. *Montrer que (X_n) est une chaîne de Markov. Déterminer sa distribution initiale λ et la matrice de transition* P.
2. *Donner le diagramme de la chaîne.*
3. *Donner les propriétés de la matrice* P.
4. *Existe-t-il une distribution invariante ? Donner son expression.*
5. *Donner le nombre de mois moyen pour qu'un consommateur reviennent à son choix initial.*
6. *Donner la loi de $(X_n, n \in \mathbb{N})$ pour $n \geq 1$.*
7. *En moyenne, à quelle produit va la préférence du consommateur.*

Exercice 14. *Soit $(Y_i)_i$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi donnée par $\mathbb{P}(U_n = 1) = \mathbb{P}(U_n = -1) = \frac{1}{2}$.On pose*

$$\begin{cases} X_0 = 0 \\ X_n = Y_1 + Y_2 + ... + Y_n, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

1. *Montrer que* $\mathbb{P}(X_{2k} = 0) = \mathrm{C}_k^{2k} 2^{-2k}$ *et* $\mathbb{P}(X_{2k+1} = 0) = 0$ *pour tout* $k \geq 1$.
2. *On pose* $\mathrm{T}_0 = \inf\{n \geq 1;\ X_n = 0\}$, *montrer que pour tout* $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}(X_{2n} = 0) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{T}_0 = 2k)\ \mathbb{P}(X_{2n-2k} = 0)$$

3. *Pour* $x \in [0, 1[$, *on pose* $U(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_{2m} = 0) x^m$ *et* $F(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(\mathrm{T}_0 = 2m) x^m$.

   Vérifier que U *et* F *sont bien définies et que* $U(x)F(x) = U(x) - 1$.
4. *On admet que* $U(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$. *En déduire* $F(x)$.
5. *Calculer* $F'(x)$ *et en déduire une formule explicite pour* $\mathbb{P}(\mathrm{T}_0 = 2k)$ *quand* $k \geq 1$.