5.2.6 Approximation d'une loi binomiale par une loi du Poisson

Soit X une variable alétoire discrète suit la loi binomiale $X \sim B(n,\ p,\ q)$ avec n grand $(n \geq 30)$ et p petit $(p \leq 0.1)$. On peut approximer cette loi par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$.

Exemple 5.2.6 *Dans une population une personne sur cent est un centenaire. On définit la variable alétoire discrète X : nombre des centenaires dans une population de 200 personnes. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 200,\ p = 0,01$ et $q = 1 - p = 0,99$. Comme $n > 30$ et $p < 0.1$, alors on peut approximer la loi de X par la loi de Poisson $\mathbf{P}(\lambda)$ telle que $\lambda = np = 2$.*

5.3 Exercices

Exercice 1 : Un candidat se présente à un concours sous forme de QCM de 100 questions, à chaque question, sont proposés 4 réponses, dont une seule est correcte, l'examinateur fait le compte des réponses exactes données par le candidat.
Certains candidats répondent au hasard à chaque question. Soit la variable aléatoire X : «nombre de réponses exactes données par un candidat».

1/ Donner la loi de probabilité de X.

2/ Calculer son espérance et son écart type.

Exercice 2 : Dans une population une personne sur cent est un centenaire.

1/ Quelle est la probabilité de trouver au moins un centenaire parmi 100 personnes choisies au hasard.

2/ Même question parmi 200 personnes.

Exercice 3 : Un chercheur a analysé un lot complet de roches volcaniques. Il a compté le nombre de pierres précieuses dans chacune des roches de poids constant 1kg et a obtenu le tableau suivant :

$Nbr\ pp\ \ (xi)$	1	2	3	4	5	6	7	8
$Nbr\ rv\ \ (ni)$	63	19	17	32	5	2	1	1

1/ Pour une roche choisie au hasard parmi les 140 roches analysées, on désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de pierres précieuses trouvées. Calculer les probabilités $P(X = xi)$.

2/ Calculer $E(X)$ et $Var(X)$.

3/ En déduire la loi de probabilité de X et ses paramètres.

5.4 Corrigés

Exercice 1 : Comme X : «nombre de réponses exactes données par un candidat», alors

$$X = \{0,\ 1,\ 2,\ .....,100\}\,.$$

1/ La loi de la variable aléatoire X : il est clair que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,\ p,\ q)$ telle que

$$n = 100,\ p = \frac{1}{4},\ q = 1 - p = \frac{3}{4}.$$

2/ L'espérance et l'écart type de la variable X :

$$\begin{aligned} E(X) &= np \\ &= 100 \times \frac{1}{4} \\ &= 25. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Var(X) &= npq \\ &= 100 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \\ &= 18,75. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \sigma_X &= \sqrt{Var(X)} \\ &= \sqrt{18,75} \\ &= 4,33. \end{aligned}$$

Exercice 2 : Dans une population une personne sur cent est un centenaire. On définit la variable aléatoire discrète X : nombre des centenaires dans une population de 200 personnes. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$, $p = 0.01$ et $q = 1 - p = 0.99$.

Comme $n > 30$ et $p < 0.1$, alors on peut approximer la loi de X par la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ telle que $\lambda = np = 1$ et

$$\underset{0\leq k\leq n}{P(X = k)} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Probabilité d'avoir au moins un centenaire

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - e^{-1} \\ &= 0,63. \end{aligned}$$

De manière similaire si $n = 200$, on trouve $\lambda = 2$ et

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - e^{-2} \\ &= 0,86. \end{aligned}$$

Exercice 3 : On définit la variable aléatoire discrète X : nombre de pierres précieuses trouvées.

* x_i : nombre de pierres précieuses,

* n_i : nombre de roches volcaniques analysées.

La taille de l'echantillon $n = \sum_{i=1}^{8} n_i = 140$ et les probabilités sont calculées comme suit :

$$\begin{aligned} P(X = x_i) &= P_i \\ &= \frac{n_i}{n} \\ &= \frac{n_i}{140}. \end{aligned}$$

1/ Les probabilités $P(X = x_i)$

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	$Total$
$P(X = x_i)$	$\frac{63}{140}$	$\frac{19}{140}$	$\frac{17}{140}$	$\frac{32}{140}$	$\frac{5}{140}$	$\frac{2}{140}$	$\frac{1}{140}$	$\frac{1}{140}$	$\sum_{i=1}^{8} P(X = x_i) = 1$

2/

$$\begin{aligned} E(X) &= \overline{X} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{8} n_i x_i \\ &= \frac{1}{140}(332) \\ &= 2,37. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{X^2} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{8} n_i x_i^2 \\
&= \frac{1}{140}(1114) \\
&= 7,96.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var(X) &= \overline{X^2} - \left(\overline{X}\right)^2 \\
&= 7,96 - (2,37)^2 \\
&= 2,34.
\end{aligned}$$

3/ On remarque que $E\,(X) \simeq Var\,(X)$, alors X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = E\,(X) = 2,4$.