وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة أمحمد بوقرة
بومرداس
كلية العلوم
FACULTÉ DES SCIENCES

Groupe : .... : الفوج
Année Universitaire : .... : السنة الجامعية
Date : .... : التاريخ

Matricule : .... : رقم التسجيل
Nom : .... : اللقب
Prénom : .... : الاسم
Date de naissance : .... : تاريخ الميلاد
Module : .... : المقياس

Note : : العلامة
Observation : : ملاحظة
Correction examen LMA_3

Stat. inf

Exercice N° 1

$N = 6$ = la taille de la population

① - la moyenne de la population : μ

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \frac{4+5+8+10+12+13}{6} = \boxed{8,67}$$ 0,5 0,5

- l'écart-type de la population : σ

$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ où σ^2 est la variance de la population

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2 = \frac{1}{N}\sum x_i^2 - \mu^2$$ 0,5

$$= \frac{16+25+64+100+144+169}{6} - (8,67)^2 = \boxed{11,16}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma = 3,34}$$ 0,5

② tous les échantillon exhaustif de taille = 2

$n = 2$ = la taille de chaque échantillon

le nombre des échantillon possible $= C_6^2 = \frac{6!}{2!\,4!} = \boxed{15}$

échantillon exhaustif $\Leftrightarrow$ tirage sans remise 0,25

(4,5), (4,8), (4,10), (4,12), (4,13)
(5,8), (5,10), (5,12), (5,13)
(8,10), (8,12), (8,13), (10,12)
(12,13), (10,13)

0,75

③ L'espérance de la distribution d'échantillonnage des moyennes $= \mathbb{E}(\overline{X})$

1ère méthode

$$E(\overline{X}) = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} \overline{x}_i \quad \text{où } \overline{x}_i = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} x_j$$

$\overline{x}_i$	$\frac{4+5}{2}=4,5$	6	7	8	8,5	6,5	7,5	8,5	9	9	10
	10,5	11	12,5	11,5							

1

$$E(\overline{X}) = \frac{1}{15}(4,5+6+7+8+8,5+\dots+11,5) = \boxed{8,67}$$

2ème méthode utilisant la formule

$\mu = \mathbb{E}(\overline{X})$ (la moyenne de la population égale la moyenne de la distribution d'échantillonnage des moyennes quelque soit le type de tirage (avec ou sans remise).

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{E}(\overline{X}) = \mu = 8,67}$$

0,5

L'écart type de la distribution d'échantillonnage des moyennes $= \sqrt{V(\overline{X})}$

1ère méthode

$$\sqrt{V(\overline{X})} \quad \text{où } V(\overline{X}) = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15}(\overline{x}_i - E(\overline{X}))^2 = \frac{1}{15}\sum \overline{x}_i^2 - E(\overline{X})^2$$

$$= \frac{(4,5)^2+36+49+64+\dots+(11,5)^2}{15} - (8,67)^2 = \boxed{4,43}$$

1

$\Rightarrow \boxed{\sqrt{V(\bar{X})} = \sqrt{4,43} = 2,10}$ est l'écart-type de la distribution d'éch des moyennes

<u>2ème méthode:</u>

échantillon exhaustif $\Rightarrow$ tirage sans remise

$\Rightarrow \sqrt{V(\bar{X})}$ est l'écart-type où $V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \frac{N-n}{N-1}$ 0,5

$V(\bar{X}) = \frac{11,16}{2} \frac{6-2}{6-1} = 4,43 \Rightarrow \boxed{\sqrt{V(\bar{X})} = 2,10}$

<u>exercice N°2</u>

X v.a $\sim \mathcal{P}(\lambda)$

$x \in \mathbb{N}$, $P(X=x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$

$E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$

n échantillon de la v.a X $\Leftrightarrow$ n v.a i.i.d de loi de poisson

1) $\hat{\lambda}_1$ = l'estimateur de λ par la méthode des moments

$E(X) = \bar{X} \Rightarrow \lambda = \bar{X}$

0,5 $\Rightarrow \hat{\lambda} = \bar{X}$

$\Rightarrow \boxed{\hat{\lambda}_1 = \bar{X}}$ 0,25

2. $E(\hat{\lambda}_1) = E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda$ car les X_i sont des v.a de même loi 0,25

$\Rightarrow E(\hat{\lambda}_1) = \frac{1}{n} n\lambda = \lambda$ 0,5

$E(\hat{\lambda}_1) = \lambda \Rightarrow \hat{\lambda}_1 = \bar{X}$ est un E.S.B pour λ 0,25

. $V(\hat{\lambda}_1) = V(\bar{X}) = V\left(\frac{1}{n}\sum X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i)$

car les X_i sont $\perp\!\!\!\perp$ 0,25

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \lambda = \frac{1}{n^2} n \lambda = \boxed{\frac{\lambda}{n}}$$ 0,5

$$\boxed{V(\hat{\lambda}_1) = V(\bar{X}) = \frac{\lambda}{n}}$$

0,25

. $R(\hat{\lambda}_1, \lambda) = V(\hat{\lambda}_1) = \frac{\lambda}{n}$ car $\hat{\lambda}_1$ est un E.S.B pour λ. 0,5

③ e.m.v pour λ noté $\hat{\lambda}_2$

$$L(x, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^{n} \left(e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} \right)$$

$$= e^{-n\lambda} \frac{\lambda^{\sum x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$$

$$\operatorname{Log} L(x, \lambda) = -n\lambda + \sum x_i \log \lambda + \log \left(\frac{1}{\prod x_i!} \right)$$

. $\frac{\partial \log L(x, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow -n + \frac{\sum x_i}{\lambda} + 0 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{-n\lambda + \sum x_i}{\lambda} = 0 \Leftrightarrow -n\lambda + \sum x_i = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\sum x_i}{n} \Rightarrow \boxed{\hat{\lambda} = \frac{\sum x_i}{n}}$

. $\frac{\partial^2 \log L(x, \lambda)}{\partial \lambda^2} = -\frac{\sum x_i}{\lambda^2} < 0$ car $x_i \in \mathbb{N}$ 0,25

$\Rightarrow$ e.m.v pour λ est $\boxed{\hat{\lambda}_2 = \frac{\sum x_i}{n} = \bar{X}}$

④ On remarque que $\hat{\lambda}_1 = \hat{\lambda}_2 = \bar{x}$

$\Rightarrow E(\hat{\lambda}_2) = E(\bar{X}) = \lambda \Rightarrow \hat{\lambda}_2$ est un E.S.B pour λ 0,5

. $V(\hat{\lambda}_2) = V(\bar{X}) = \frac{\lambda}{n}$ 0,25

$\lim_{n \to \infty} V(\hat{\lambda}_2) = \lim_{n \to \infty} \frac{\lambda}{n} = 0$ 0,5

Scanné avec CamScanner

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة أمحمد بوقرة
بومرداس
كلية العلوم
FACULTÉ DES SCIENCES

Groupe : .... :الفوج

Année Universitaire : .... :السنة الجامعية

Date : .... :التاريخ

Matricule : .... :رقم التسجيل

Nom : .... :اللقب

Prénom : .... :الاسم

Date de naissance : .... :تاريخ الميلاد

Module : .... :المقياس

Note : العلامة :	Observation : ملاحظة :

comme $\left\{ \begin{array}{l} \hat{\lambda}_2 \text{ est un E.S.B pour } \lambda \\ \text{et} \\ \lim\limits_{n\to\infty} V(\hat{\lambda}_2) = 0 \end{array} \right.$

alors $\hat{\lambda}_2$ est convergent.

⑤ <u>le meilleur des deux estimateurs</u> :

On a $\hat{\lambda}_1$ et $\hat{\lambda}_2$ sont égaux $= \bar{X}$ 1

$\Rightarrow \hat{\lambda}_1$ et $\hat{\lambda}_2$ incomparable

⑥ <u>e.m.v pour $P(X=0)$</u> :

$P(X=0) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}$ 0,5

$P(X=0) = e^{-\lambda} = g(\lambda)$

on cherche $\widehat{g(\lambda)} = g(\hat{\lambda})$

et $\hat{\lambda} = \bar{x}$

$\Rightarrow g(\hat{\lambda}) = g(\bar{x}) = \boxed{e^{-\bar{x}}}$ 1

Exercice N°3 :

$n = 10$ taille de l'échantillon.

$\bar{x} = 50$ la moyenne empirique

$s^2 = 100$ la variance empirique.

soit X la v.a no $N(m, \sigma^2)$ = modélise le taux de gaz nocif

① intervalle de confiance pour la moyenne m

pour $\alpha = 5\%$ = le risque de confiance = le seuil

$IC_{1-\alpha}(m) = ??$

On a la variance σ^2 = inconnue

donc l'intervalle de confiance st de la forme

$$IC_{95\%}(m) = \left[\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n-1}} t_{(n-1), \frac{\alpha}{2}} \ , \ \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n-1}} t_{(n-1), \frac{\alpha}{2}}\right]$$ 0,5

Où : $t_{(n-1), \frac{\alpha}{2}}$ st le quantile d'ordre $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la loi de student avec (n-1) degrés de liberté.

pour $n = 10$ et $\alpha = 5\%$.

$\boxed{t_{9, 0,025} = 3,690}$ lue sur la table de student 0,5

$$IC_{95\%}(m) = \left[50 - \frac{10}{3} 3,690 \ , \ 50 + \frac{10}{3} 3,690\right]$$

$$= \left[37,7 \ , \ 62,30\right]$$ 0,5

② Intervalle de confiance pour σ^2 si $\alpha = 5\%$ tq la moyenne m st inconnue

$$IC_{95\%}(\sigma^2) = \left[\frac{n\,s^2}{a} , \frac{n\,s^2}{b}\right]$$ 0,5

où • $a = \chi^2_{(n-1), \frac{\alpha}{2}}$ = le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ d'une loi de Khi-deux à (n-1) d.d.l

et

• $b = \chi^2_{(n-1), 1-\frac{\alpha}{2}}$ = le quantile d'ordre $\frac{\alpha}{2}$ d'une loi de Khi-deux à (n-1) d.d.l

les 2 quantile lus sur la table de la Khi-deux

$$IC_{95\%}(\sigma^2) = \left[\frac{n\,s^2}{\chi^2_{(n-1), \frac{\alpha}{2}}} , \frac{n\,s^2}{\chi^2_{(n-1), 1-\frac{\alpha}{2}}}\right]$$

• $\chi^2_{(n-1), 1-\frac{\alpha}{2}} = \chi^2_{9, 0,9750} = 2,70$ 0,25

• $\chi^2_{(n-1), \frac{\alpha}{2}} = \chi^2_{9, 0,025} = 19,02$ 0,25

$$IC_{95\%}(\sigma^2) = \left[\frac{10 \times 100}{19,02} , \frac{10 \times 100}{2,70}\right]$$

$$= [52,57 , 370,37]$$ 0,5

③ On test $H_0 : m = 49$ VS $H_1 : m \neq 49$ pour $\alpha = 5\%$ si $\sigma^2 = 100$ (σ^2 connu)

ⓐ On cherche la région critique comme $H_1 : m \neq 49$ ⇒ le test st bilatérale ⇒ la région critique st de la forme $]-\infty , c_1[\cup]c_2 , +\infty[$ 0,5

$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2) = \mathcal{N}(m, 100)$

$\Rightarrow \bar{X} \sim \mathcal{N}(m, \frac{100}{n}) \sim \mathcal{N}(m, \frac{100}{10})$

$\Rightarrow \frac{\bar{X} - m}{\sigma}\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0,1)$

on cherche c_1 et c_2 (les deux valeurs critiques)

$\alpha = P(\bar{X} < c_1 / m = m_0) + P(\bar{X} > c_2 / m = m_0)$

$= P\left(\frac{\bar{X} - m}{\sigma}\sqrt{n} < \frac{c_1 - m}{\sigma}\sqrt{n} / m = m_0\right) + P\left(\frac{\bar{X} - m}{\sigma}\sqrt{n} > \frac{c_2 - m}{\sigma}\sqrt{n} / m = m_0\right)$

$= P\left(\frac{\bar{X} - m_0}{10}\sqrt{10} < \frac{c_1 - m_0}{10}\sqrt{10}\right) + P\left(\frac{\bar{X} - m_0}{10}\sqrt{10} > \frac{c_2 - m_0}{10}\sqrt{10}\right)$

où $m_0 = 49$ (la moyenne définie sous H_0)

$= F_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{c_1 - m_0}{10}\sqrt{10}\right) + 1 - F_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{c_2 - m_0}{10}\sqrt{10}\right)$

avec $\begin{cases} \frac{c_1 - m_0}{10}\sqrt{10} = -q_{1-\frac{\alpha}{2}} \\ \frac{c_2 - m_0}{10}\sqrt{10} = q_{1-\frac{\alpha}{2}} \end{cases}$ lues sur la table de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

pour $\alpha = 5\%$.

$\frac{c_1 - 49}{10}\sqrt{10} = -q_{0,9750} = -1,96$

$\frac{c_2 - 49}{10}\sqrt{10} = q_{0,9750} = 1,96$

0,5

$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 49 - \frac{10}{\sqrt{10}} 1,96 = 42,80 \\ c_2 = 49 + \frac{10}{\sqrt{10}} 1,96 = 55,19 \end{cases}$

0,5

$\Rightarrow$ la région critique est la suivante :

$]-\infty, 42,80[\cup]55,19, +\infty[$

0,5

On a $\bar{x} = 50$

H_0 rejetée | H_0 acceptée | H_0 rejetée

42,80   55,19

0,5

on remarque que $\bar{x} = 50 \in [c_1, c_2] = [42,80, 55,19]$

$\Rightarrow \bar{x} \in$ la région d'acceptation de H_0

$\Rightarrow H_0$ est acceptée et H_1 est rejetée. 0,5