Chapitre 2

Processus stationnaires univariés (ARMA)

Les différends modèles de l'approche de Box-Jenkins utile pour les prévisions à court terme sont : Les modèles AR, MA et ARMA.

2.1 Processus AutoRégressifs (AR)

2.1.1 Processus Autorégressif d'ordre 1 : (AR(1))

X_t est un processus $AR(1)$ s'il vérifie l'équation de différence stochastique suivante :

$$X_t = \delta + \varphi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$$

où δ est une constante et ε_t est un bruit blanc.

Représentation de wold

En utilisant l'opérateur retard, on obtient :

$$(1 - \varphi_1 L) X_t = \delta + \varepsilon_t$$

d'où

$$X_t = \frac{\delta}{(1 - \varphi_1 L)} + \frac{\varepsilon_t}{(1 - \varphi_1 L)}$$

Si $|\varphi_1| < 1$, on a

$$\frac{1}{(1 - \varphi_1 L)} = 1 + \varphi_1 L + \varphi_1^2 L^2 + ...$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned} X_t &= \left(1+\varphi_1 L+\varphi_1^2 L^2+...\right)\delta+\left(1+\varphi_1 L+\varphi_1^2 L^2+...\right)\varepsilon_t \\ &= \frac{\delta}{1-\varphi_1}+\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_1^j\varepsilon_{t-j}. \end{aligned}$$

Ainsi si, $|\varphi_1|<1$ alors le processus (X_t) admet une décomposition de Wold avec $\psi_j=\varphi_1^j$ et

$$\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j^2=\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_1^{2j}=\frac{1}{1-\varphi_1^2}<\infty.$$

D'où le processus $AR(1)$ est stationnaire.

Calcul des moments :

1ère **méthode** : Avec la représentation de wold.

*

$$E\left(X_t\right)=E\left(\frac{\delta}{1-\varphi_1}+\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_1^j\varepsilon_{t-j}\right)=\frac{\delta}{1-\varphi_1},\quad \text{cst.}$$

*

$$\begin{aligned} V\left(X_t\right) &= E\left[\left(X_t-\frac{\delta}{1-\varphi_1}\right)^2\right]=E\left[\left(\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_1^j\varepsilon_{t-j}\right)^2\right] \\ &= \left[1+\varphi_1^2+\varphi_1^4+...\right]\sigma^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{1-\varphi_1^2}. \end{aligned}$$

*

$$\begin{aligned}
Cov\left(X_t, X_{t-h}\right) &= E\left[\left(X_t - \frac{\delta}{1-\varphi_1}\right)\left(X_{t-h} - \frac{\delta}{1-\varphi_1}\right)\right] \\
&= E\left[\left(\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_1^j \varepsilon_{t-j}\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} \varphi_1^i \varepsilon_{t-h-i}\right)\right] \\
&= \varphi_1^h \left[1 + \varphi_1^2 + \varphi_1^4 + ...\right] \sigma^2 \\
&= \varphi_1^h \frac{\sigma^2}{1-\varphi_1^2}.
\end{aligned}$$

Alors la fonction d'ACV est

$$\gamma_h = \varphi_1^h \frac{\sigma^2}{1-\varphi_1^2}, \quad h = 0, 1, 2, ...$$

2ème méthode : (à utiliser dans les exercices) Sous la condition $|\varphi_1| < 1$, on a

$$\begin{aligned}
E\left(X_t\right) &= E\left(\delta + \varphi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t\right) \\
&= \frac{\delta}{1-\varphi_1}
\end{aligned}$$

*Pour calculer la FACV, on suppose que le processus est centré (de moyenne nulle)

$$\gamma_h = E\left(X_t X_{t-h}\right) = \varphi_1 E\left(X_{t-1} X_{t-h}\right) + E\left(X_{t-h} \varepsilon_t\right)$$

$h = 0$, $\gamma_0 = \varphi_1 \gamma_1 + \sigma^2$

$h = 1$, $\gamma_1 = \varphi_1 \gamma_0, \dots,$

$\gamma_h = \varphi_1 \gamma_{h-1} = \varphi_1^h \gamma_0.$

La fonction d'AC est donnée par

$$\rho_h = \frac{\gamma_h}{\gamma_0} = \varphi_1^h, \quad h = 0, 1, 2, ...$$

Condition de stabilité : obtenue à partir de l'équation homogène aux différences $X_t - \varphi_1 X_{t-1} = 0$ ou par son ACV $\gamma_h - \varphi_1 \gamma_{h-1} = 0$ ou par son AC $\rho_h - \varphi_1 \rho_{h-1} = 0$. Les équations aux différences ont des solutions stables ($\lim_{h\to\infty} \rho_h = 0$) si et seulement si leur équations caractéristiques $\lambda - \varphi_1 = 0$ a une solution inferieur à 1 en valeur absolu ou la solution du polynôme retard $1 - \varphi_1 z = 0$ doit être en valeur absolu $>$ à 1.

2.1.2 Processus Autorégressif d'ordre p AR(p)

Le processus $AR(p)$ verifie l'équation de différence stochastique :

$$X_t = \delta + \varphi_1 X_{t-1} + \cdots + \varphi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$

-Le processus $AR(p)$ est stationnaire si les conditions de stabilités sont vérifiées c.à.d : Les solutions de l'équation caractéristique $\lambda^p - \varphi_1 \lambda^{p-1} - \cdots - \varphi_p = 0$ sont en module < 1 ou si les solutions du polynôme retard $1 - \varphi_1 z - \cdots \varphi_p z^p = 0$ sont en module > 1.

Si on a la stationnarité, on peut obtenir la représentation de wold par le développement en série de l'inverse du polynôme retard

$$\frac{1}{1 - \varphi_1 L - \cdots \varphi_p L^p} = \psi_0 + \psi_1 L + \cdots$$

et

$$X_t = \frac{\delta}{1 - \varphi_1 - \cdots \varphi_p} + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}$$

*$E(X_t) = \frac{\delta}{1-\varphi_1 - \cdots \varphi_p} = \mu$.

*Sans perte de généralités, on suppose que $\delta = 0 \Longrightarrow \mu = 0$, pour calculer les ACV

$$\gamma_h = E(X_t X_{t-h}) = E\left(X_{t-h}\left(\varphi_1 X_{t-1} + \cdots + \varphi_p X_{t-p} + \varepsilon_t\right)\right)$$

Pour $h = 0, \gamma_0 = \varphi_1 \gamma_1 + \cdots + \varphi_p \gamma_p + \sigma^2$,

$h = 1$, $\gamma_1 = \varphi_1 \gamma_0 + \cdots + \varphi_p \gamma_{p-1}, \ldots,$

$h = p, \gamma_p = \varphi_1 \gamma_{p-1} + \cdots + \varphi_p \gamma_0$.

Puisque $E(\varepsilon_t X_{t-h}) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } h = 0 \\ 0 & \text{si } h \neq 0 \end{cases}$, alors pour $h > 0$

$$\gamma_h - \varphi_1 \gamma_{h-1} - \cdots - \varphi_p \gamma_{h-p} = 0$$

D'où la fonction d'AC

$$\rho_h - \varphi_1 \rho_{h-1} - \cdots - \varphi_p \rho_{h-p} = 0$$

qui est une équation de récurrence linéaire homogène d'ordre p dont le polynôme caractéristique est

$$\lambda^h - \sum_{i=1}^{p} \varphi_i \lambda^{h-i} = 0$$

sous la stationnarité on a les racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ où $|\lambda_i| < 1$, le coefficient d'AC d'ordre h est donné par

$$\rho_h = a_1 \lambda_1^h + \cdots + a_p \lambda_p^h$$

où les a_i, $i = 1, \ldots, p$ sont des constantes déterminés par les conditions initiales. La FCR d'un processus stationnaire décroit soit de manière exponentielle si les racines sont réelles, soit selon des cycles amortis si les racines sont complexes, on a $\sum |\gamma_h| < \infty$. En remplaçant $h = 1, \ldots, p$, on obtient les équations de Yule-Walker

$$\begin{cases} \rho_1 = \varphi_1 + \cdots + \varphi_p \rho_{p-1} \\ \qquad\vdots \\ \rho_p = \varphi_1 \rho_{p-1} + \cdots + \varphi_p \end{cases}$$

On pose

$$\boldsymbol{\rho}' = \left(\rho_1, \ldots, \rho_p\right), \phi' = \left(\varphi_1, \ldots, \varphi_p\right)$$

et

$$R_{(p\times p)} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

On peut écrire les équations de Yule-Walker comme : $\boldsymbol{\rho} = R \times \phi$.

Les coefficients du processus AR(p) peuvent être calculé par la relation :

$$\phi = R^{-1} \boldsymbol{\rho}$$

Fonction d'autocorrélation partielle (FACP)

La FAC d'un processus AR d'ordre p stationnaire est toujours une suite qui converge vers 0 sans coupure, on ne peut pas distinguer entre les processus de différends ordres donc on introduit la F ACP. La corrélation partielle entre deux variables est la corrélation qui reste en éliminant l'impact de tous les autres variables. On utilise la nouvelle notation :

$$X_t = \varphi_{h1}X_{t-1} + \cdots + \varphi_{hh}X_{t-h} + \varepsilon_t$$

les coefficients φ_{hh} sont les coefficients d'ACP qui mesure la corrélation entre X_t et X_{t-h} qui reste quand l'influence des variables $X_{t-1}, \cdots, X_{t-h}$ sont éliminés. Avec les équations de YW :

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{h-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{h-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ \rho_{h-1} & \rho_{h-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{h1} \\ \varphi_{h2} \\ \vdots \\ \varphi_{hh} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_h \end{pmatrix}, h = 1, 2, ...$$

avec la règle de Cramer, on obtient :

$$\varphi_{hh} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ \rho_{h-1} & \rho_{h-2} & \cdots & \rho_h \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{h-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{h-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ \rho_{h-1} & \rho_{h-2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}}, h = 1, 2, ...$$

Exemples :

* La FACP du processus $AR(1)$ est :

$$\varphi_{11} = \rho_1 = \varphi$$

et

$$\varphi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = 0,$$

$\varphi_{hh} = 0$ pour $h > 1$.

*La FACP du processus AR(2) est :

$\varphi_{11} = \rho_1, \varphi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1-\rho_1^2}$ et $\varphi_{hh} = 0$ pour $h > 2$. (Calculer φ_{33}).

Pour un processus $AR(\mathbf{p})$: $\varphi_{hh} = 0$ pour $h > \mathbf{p}$. Donc la FACP permet d'identifier l'ordre p du processus AR.

2.2 Processus Moyenne Mobile (MA)

2.2.1 Processus Moyenne Mobile d'ordre 1 (MA(1))

Le processus $MA(1)$ est donné par l'équation suivante

$$X_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \text{ ou } X_t - \mu = (1 - \theta_1 L)\, \varepsilon_t$$

où $\{\varepsilon_t\} \backsim BB(0, \sigma^2)$. La représentation de Wold du processus $MA(1)$ a un nombre fini de terme. On a $\psi_0 = 1, \psi_1 = -\theta_1$ et $\psi_j = 0$ pour $j \geq 2 \Longrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$. Donc le processus $MA(1)$ est toujours stationnaire.

Calcul des moments

*** L'espérance**

$$E(X_t) = \mu.$$

* **La variance** de ce processus est donnée par :

$$\begin{aligned} V(X_t) &= E\left((X_t - \mu)^2\right) \\ &= \left(1 + \theta_1^2\right) \sigma^2 = \gamma_0, \quad \text{cst } \forall t \end{aligned}$$

*** La covariance :**

$$\gamma_h = E\left((X_t - \mu)(X_{t-h} - \mu)\right) = E\left((\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-h} - \theta_1 \varepsilon_{t-h-1})\right)$$

La FACV est différente de zéros si $h = \pm 1$

$$\gamma_h = \begin{cases} (1 + \theta_1)\, \sigma^2 \text{ si } h = 0 \\ -\theta_1 \sigma^2 \text{ si } \ h = \pm 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Donc

$$\rho_h = \begin{cases} 1 \text{ si } h = 0 \\ \frac{-\theta_1}{(1+\theta_1)} \text{ si } h = \pm 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Remarque

Pour le $MA(1)$, $\rho_h = 0, \forall h > 1$.

*Le processus $MA(1)$ doit vérifier une autre propriété : avoir une représentation AR

$$X_t - \mu = (1 - \theta_1 L)\,\varepsilon_t \Longrightarrow \varepsilon_t = -\frac{\mu}{1-\theta_1 L} + \frac{1}{1-\theta_1 L} X_t$$

Le développement en série de $\frac{1}{1-\theta_1 L}$ est possible si $|\theta_1| < 1$ d'où

$$\varepsilon_t = -\frac{\mu}{1-\theta_1 L} + X_t + \theta_1 X_{t-1} + \theta_2 X_{t-2} + \cdots \backsim AR(\infty)$$

ou

$$X_t + \theta_1 X_{t-1} + \theta_2 X_{t-2} + \cdots = \frac{\mu}{1-\theta_1 L} + \varepsilon_t$$

Cette représentation exige la condition d'inversibilité.

Condition d'inversibilité : Le processus $MA(1)$ est inversible si et seulement si la racine du polynôme retard $1 - \theta_1 z = 0$ est supérieur à 1 en valeur absolu.

Exemple : Soit le processus $X_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1},\ \ \varepsilon_t \backsim iidN\,(0, 4)$.

1-Pour $\theta_1 = -0.5$, calculer $E\,(X_t)\,, V\,(X_t)$ et ρ_h.

2-Supposons que θ_1 est inconnu et on donne $\rho_1 = 0.4$; estimer la valeur de θ_1.

*Calculons les **AC partielles** du processus $MA(1)$

$$\varphi_{11} = \rho_1, \varphi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-\rho_1^2}{1-\rho_1^2}$$

$$\varphi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & 0 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ 0 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_1^3}{1-2\rho_1^2}.$$

Remarque :

Contrairement au processus $AR(1)$ la FAC d'un processus $MA(1)$ présente une coupure alors que ce n'est pas le cas pour la FACP .

2.2.2 Processus Moyenne Mobile d'ordre q (MA (q))

Le processus $MA(q)$ s'écrit

$$X_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}.$$

avec $\theta_q \neq 0$ et $\{\varepsilon_t\} \backsim BB\left(0, \sigma^2\right)$. En utilisant l'opérateur retard

$$X_t - \mu = \left(1 - \theta_1 L - \cdots - \theta_q L^q\right) \varepsilon_t = \Theta\left(L\right) \varepsilon_t$$

De la formule on a déjà la représentation de Wold avec $\psi_k = 0$ pour $k > q$, donc tout processus $MA(q)$ est stationnaire.

*Pour la moyenne de ce processus :

$$E\left(X_t\right) = \mu.$$

*La variance :

$$\begin{aligned} V\left(X_t\right) &= E\left(\left(X_t - \mu\right)^2\right) \\ &= \left(1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2\right) \sigma^2 \end{aligned}$$

*La covariance :

$$\gamma_h = Cov\left(X_t, X_{t-h}\right) = E\left(\left(X_t - \mu\right)\left(X_{t-h} - \mu\right)\right)$$

Pour $h = 1, \cdots, q$, on obtient

$$\begin{aligned} h &= 1 : \gamma_1 = \left(-\theta_1 + \theta_1\theta_2 + \cdots + \theta_{q-1}\theta_q\right)\sigma^2 \\ h &= 2 : \gamma_2 = \left(-\theta_2 + \theta_1\theta_3 + \cdots + \theta_{q-2}\theta_q\right)\sigma^2 \\ &\vdots \\ h &= q : \gamma_q = -\theta_q\sigma^2 \end{aligned}$$

et

$$\gamma_h = 0, \text{ pour } h > q.$$

Donc $\gamma_h = \rho_h = 0, \forall h > q$ pour $MA\left(q\right)$. Il est possible -au moins théoriquement- d'identifier l'ordre du processus $MA(q)$ en utilisant son corrélogramme. Il est possible d'estimer les paramètres $\theta_1, \cdots, \theta_q$ à partir du système non linéaire précédent, avec la méthode des moments, mais ce système a des solutions multiple, pour avoir une paramétrisation unique on utilise la condition d'inversibilité c.à.d il doit être possible de représenter $MA(q)$ comme un processus $AR(1)$ stationnaire. Donc, on a :

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= -\frac{\mu}{\Theta\left(1\right)} + \frac{1}{\Theta\left(L\right)}X_t \\ &= -\frac{\mu}{\Theta\left(1\right)} + \sum_{j=0}^{\infty} c_j X_{t-j}. \end{aligned}$$

où

$$\left(1 - \theta_1 L - \cdots - \theta_q L^q\right)\left(1 + c_1 L + c_2 L^2 + \cdots\right) = 1$$

et les paramètres c_i, $i = 1, 2, \cdots$ sont calculé par identification. Cette représentation existe si toutes les solutions de $1 - \theta_1 z - \cdots - \theta_q z^q = 0$ sont en valeur absolu >1. Dans ce cas

$$\begin{aligned} \Theta\left(L\right) &= 1 - \theta_1 L - \cdots - \theta_q L^q \\ &= \left(1 - \lambda_1 L\right)\left(1 - \lambda_2 L\right)\cdots\left(1 - \lambda_q L\right) \end{aligned}$$

Exemple : Soit le processus $MA(2)$ suivant :

$$X_t = \varepsilon_t + 0.6\varepsilon_{t-1} - 0.1\varepsilon_{t-2}, \ \varepsilon_t \backsim BB\left(0, \sigma^2\right)$$

1-Calculer $E(X_t)$, $V(X_t)$, la FACV et la F AC.

2-Ce processus est il inversible ? Donner la forme $AR(1)$.

3-La FACP (pas de coupure).

2.3 Processus Mixte : ARMA(p, q)

Le processus $ARMA(p,q)$ s'écrit

$$X_t = \delta + \sum_{j=1}^{p} \varphi_j X_{t-j} + \varepsilon_t - \sum_{j=1}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j}$$

avec $\varphi_p \neq 0$, $\theta_q \neq 0$ et $\{\varepsilon_t\} \backsim BB\left(0, \sigma^2\right)$. Utilisant l'opérateur retard

$$\Phi\left(L\right) X_t = \delta + \Theta\left(L\right) \varepsilon_t$$

où $\Phi\left(L\right)$ et $\Theta\left(L\right)$ n'ont pas des racines commune.

*Le processus $ARMA(p,q)$ est stationnaire si la condition de stationnarité du terme $AR(p)$ est remplie. Alors, on a la représentation de Wold tel que :

$$\frac{\Theta\left(L\right)}{\Phi\left(L\right)} = 1 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \cdots$$

*Si les racines de $\Theta\left(L\right)$ sont en module >1 alors le processus $ARMA$ est inversible.

*Un processus $ARMA$ stationnaire et inversible $\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \text{ Représentation } AR\left(\infty\right) \\ \rightarrow \text{ Représentation } MA\left(\infty\right) \end{array} \right.$

Ainsi la FAC et la FACP ne s'annulent pas.

*La moyenne

$$E\left(X_t\right) = \frac{\delta}{1 - \varphi_1 - \cdots \varphi_p} = \mu$$

*En supposant $\delta = 0$ alors $\mu = 0$: la FACV

$$\begin{aligned} \gamma_h &= E\left(X_t X_{t-h}\right) = \varphi_1 \gamma_{h-1} + \cdots + \varphi_p \gamma_{h-p} \\ &\quad + E\left(\varepsilon_t X_{t-h}\right) - \theta_1 E\left(\varepsilon_{t-1} X_{t-h}\right) - \cdots - \theta_q E\left(\varepsilon_{t-q} X_{t-h}\right) \end{aligned}$$

On a

$$E\left(\varepsilon_{t-i}X_{t-h}\right)=0 \text{ pour } h>q \text{ et } i=0,1,\cdots q.$$

pour $h>q$ et $h>p$, on a

$$\gamma_h-\varphi_1\gamma_{h-1}-\cdots-\varphi_p\gamma_{h-p}=0$$

d'où

$$\rho_h-\varphi_1\rho_{h-1}-\cdots-\varphi_p\rho_{h-p}=0, \text{ pour } h>q \text{ et } h>p \tag{1}$$

Caractérisation : Le processus X_t vérifie (1) si et seulement si $X_t \backsim ARMA\left(p,q\right)$.

2.4 Les processus $ARIMA(p,d,q)$

2.4.1 Processus $ARIMA(p,d,q)$

Les processus $ARMA$ exige la stationnarité qui est rarement vérifiée pour les séries économiques, par contre $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$ différence $1^{ère}$, ou à des ordres plus élevé : $\Delta^d X_t = (1-L)^d X_t$ différence d'ordre d, devient stationnaire.

Définition

Le processus X_t est un processus $ARIMA\left(p,d,q\right)$ intégré s'il vérifie :

$$\phi\left(L\right)\left(1-L\right)^d X_t=\Theta\left(L\right)\varepsilon_t$$

où $\phi\left(L\right)=1-\varphi_1L-\cdots-\varphi_pL^p$ et $\Theta\left(L\right)=1-\theta_1L-\cdots-\theta_qL^q$ sont des polynômes dont les racines sont de module >1. En pratique d est souvent égal à 1 (quitte à faire des transformations sur la série comme le log).

Exemples

1) La marche aléatoire : $X_t=X_{t-1}+\varepsilon_t \Longrightarrow \left(1-L\right)X_t=\varepsilon_t$, d'où $X_t \rightarrow ARIMA\left(0,1,0\right)$.

2) Soit le modèle $X_t=1.2X_{t-1}-0.2X_{t-2}+\varepsilon_t-0.5\varepsilon_{t-1}$.Classifier le modèle (trouver p, d et q).

2.4.2 Processus ARIMA Saisonnier (SARIMA)

Ces modèles sont utilisés pour modèliser les données saisonnières : mensuelles, trimestrielles,.... La série satisfait l'équation

$$(1-L)^d \left(1-L^S\right)^D \phi(L) \Phi\left(L^S\right) X_t = \theta(L) \Theta\left(L^S\right) \varepsilon_t$$

où : $\phi(L) = 1 - \varphi_1 L - \cdots - \varphi_p L^p$ est la partie AR,

$\Phi\left(L^S\right) = 1 + \Phi_1 L^S + \cdots + \Phi_P L^{SP}$ est la partie AR saisonnière,

$\theta(L) = 1 - \theta_1 L - \cdots - \theta_q L^q$ est la partie MA,

$\Theta\left(L^S\right) = 1 - \Theta_1 L^S - \cdots - \Theta_Q L^{SQ}$ est la partie MA saisonnière,

et p, P, q, Q, d, D et S sont des entiers naturels : d est l'ordre de différence, D est l'ordre de différence saisonnière. On note $X_t \to SARIMA(p,d,q)(P,D,Q)_S$.

2.5 Densité spectrale

Soit X_t un processus $ARMA(p,q)$: $\Phi(L) X_t = \Theta(L) \varepsilon_t$, la densité spectrale est :

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{\Theta(z)\Theta\left(z^{-1}\right)}{\Phi(z)\Phi\left(z^{-1}\right)}, \text{ où } z = e^{i\omega}$$

Exemples

1)Soit $X_t \backsim MA(1) : X_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$, $|\theta_1| < 1$, on a $\Theta(z) = 1 - \theta_1 z$ la densité spectrale est

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \frac{\sigma^2}{2\pi}\left(1-\theta_1 e^{i\omega}\right)\left(1-\theta_1 e^{-i\omega}\right) \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi}\left(1 - 2\theta_1 \cos\omega + \theta_1^2\right) \end{aligned}$$

La DS est une fonction $\nearrow$ si $\theta_1 > 0$ et $\searrow$ si $\theta_1 < 0$ car

$$f'(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\left(2\theta_1 \sin\omega\right).$$

2) Soit $X_t \backsim AR(1)$:

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{1 - 2\varphi_1 \cos\omega + \varphi_1^2}$$

La DS $\nearrow$ si $\varphi_1 < 0$ et $\searrow$ si $\varphi_1 > 0$ car

$$f'(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{-2\varphi_1 \sin\omega}{\left(1 - 2\varphi_1 \cos\omega + \varphi_1^2\right)^2}$$