Faculté des Mathématiques **USTHB** **semestre 2 année 2010/2011**
Master 1 Ingénierie Statistiques (ISMTID)
Module: **Processus stochastiques 2**

## Correction Examen S2

**Exercice 1** ***1/*** *L'évènement* $A = \cap_{n\geq 1}\{a < S_n < b\}$ *signifie que pour tout* $n \geq 1$, $a < S_n < b$, *ainsi il n'existera pas un* $n \geq 1$ *tel que* $S_n \notin [a,b]$, *donc* $T$ *sera nécessairement infini, et donc* $A = \{T = +\infty\}$.
***2/*** *D'après la question 1/,* $\{T < +\infty\} = A^c$. $T$ *est un temps d'arrêt, en effet, car* $T$ *est le temps d'entrée dans l'ensemble* $]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$ *donc* $T$ *est un temps d'arrêt (voir exemple en cours sur le temps d'entrée dans un ensemble). Pour montrer que* $T < +\infty$ *p.s., c'est à dire* $P(T < +\infty) = 1$, *montrons que* $P(A) = 0$ *(car* $P\{T < +\infty\} = P(A^c) = 1 - P(A)$*). On a* $A = \cap_{n\geq 1}\{a < S_n < b\}$ *donc* $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq P(A) \leq P(a < S_n < b)$, *et on a*

$$P(a < S_n < b) = P\left(\frac{a - nm}{\sqrt{n}\sigma} < \frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} < \frac{b - nm}{\sqrt{n}\sigma}\right),$$

*avec* $m = E(X_1)$ *et* $\sigma = \sqrt{Var(X_1)}$. *Comme* $0 \leq p, q, r \leq 1$, $X_1$ *est non-constante et donc* $\sigma \neq 0$. *D'après le théorème central limite*

$$\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

*Notons* $\alpha_n = \frac{a-nm}{\sqrt{n}\sigma}$ *et* $\beta_n = \frac{b-nm}{\sqrt{n}\sigma}$. *On a:*

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim_{n\to+\infty} \beta_n = \begin{cases} 0 & si \quad m = 0 \\ -\infty & si \quad m > 0 \\ +\infty & si \quad m < 0. \end{cases}$$

*Alors* $P\left(\alpha_n < \frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} < \beta_n\right) \to 0$ *quand* $n \to +\infty$. *Par suite* $P(A) = 0$ *et donc* $P(A^c) = P\{T < +\infty\} = 1$.
***3/*** *On a* $\varphi(\lambda) = E(\exp(\lambda X_1)) = pe^{\lambda} + qe^{-\lambda} + r$, *donc* $\varphi(\lambda) > 0$ *et ains* $Y_n$ *est une v.a. positive. Ainsi* $E[|Y_n|] = E[Y_n] = (\varphi(\lambda))^{-n} E[\exp(\lambda S_n)]$, *et on a* $E[\exp(\lambda S_n)] = [E[\exp(\lambda X_1)]]^n = \varphi(\lambda)^n$ *(d'après l'indépendance des* $X_i$*). Donc* $E[Y_n] = 1$ *d'où* $E[Y_n] < +\infty$. $\forall n \geq 1$, $Y_n$ *est fonction de* $X_1, ..., X_n$ *donc* $Y_n$ *est* $\mathcal{F}_n$ *mesurable, d'où adaptée à la filtration* $\mathcal{F}_n$. *Aussi,*

$$\begin{aligned} E[Y_{n+1}/\mathcal{F}_n] &= E\left[\exp(\lambda S_n + \lambda X_{n+1})(\varphi(\lambda))^{-(n+1)}/\mathcal{F}_n\right] \\ &= \exp(\lambda S_n)(\varphi(\lambda))^{-(n+1)} E[\exp(\lambda X_{n+1})/\mathcal{F}_n] \ \textit{(car } S_n \textit{ est } \mathcal{F}_n \textit{ mesurable)} \\ &= \exp(\lambda S_n)(\varphi(\lambda))^{-(n+1)} E[\exp(\lambda X_{n+1})] \ \textit{(car } X_{n+1} \textit{ est indépendante de } \mathcal{F}_n\textit{)} \\ &= \exp(\lambda S_n)(\varphi(\lambda))^{-(n+1)} E[\exp(\lambda X_1)] \ \textit{(} X_{n+1} \textit{ a la même loi que } X_1\textit{)} \\ &= \exp(\lambda S_n)(\varphi(\lambda))^{-(n+1)} \varphi(\lambda) = \exp(\lambda S_n)(\varphi(\lambda))^{-n} \\ &= Y_n. \end{aligned}$$

*Donc* $(Y_n, n \in \mathbb{N})$ *est bien une martingale relativement à* $\mathcal{F}_n$.
***4/*** $S_T$ *ne peut prendre que les deux valeurs* $a - 1$ *ou* $b + 1$ *(pour sortir de* $[a,b]$*). Si* $\varphi(\lambda) > 1$ *on a:* $Y_T = (\varphi(\lambda))^{-T}\exp(\lambda S_T) \leq \max\left(e^{\lambda(a-1)}, e^{\lambda(b+1)}\right)$ *et donc* $E(Y_T) < +\infty$ *(* $Y_T$ *est*

*intégrable). D'autre part,* $E\left(Y_n 1_{\{T>n\}}\right) = \int\limits_{\{T>n\}} Y_n dP \leq \int\limits_{\{T>n\}} \exp(\lambda S_n) dP$ *or* $\{T>n\} \subset \{a < S_n < b\}$ *d'où*

$$\int\limits_{\{T>n\}} \exp(\lambda S_n) dP \leq \max\left(e^{\lambda(a-1)}, e^{\lambda(b+1)}\right) P\{T>n\},$$

*mais* $\lim_{n\to\infty} P\{T>n\} = P\{T=+\infty\} = 0$. *Donc les condition du théorème d'arrêt sont vérifiée, ainsi* $E(Y_T) = E(Y_1) = 1$,*finalement*

$$E(Y_T) = E\left[\exp(\lambda S_T)(\varphi(\lambda))^{-T}\right] = 1.$$

***5/*** *pour* $p = q = 1/2$ *on a que* $E(X_1) = 0$. $S_n$ *est une martingale, et* $S_T$ *ne peut prendre que les deux valeurs* $a-1$ *ou* $b+1$, *ainsi*

$$E\left(|S_n| 1_{\{T>n\}}\right) = \int\limits_{\{T>n\}} |S_n| dP \leq \max\{|a-1|, |a+1|\} P\{T>n\} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

*Par suite* $E(S_T) = E(S_1) = E(X_1) = 0$.*On a:* $P(S_T = a) = 0$ *et* $P(S_T = b) = 0$.

**Exercice 2** ***(8 pts)*** *Soit* $S_t$ *le prix d'une action en bourse au temps* $t$. *On suppose que le prix d'une action est modélisé par un mouvement Brownien géométrique* $S_t = S_0 \exp(\mu t + \sigma W_t)$, *où* $W_t$ *est un processus de Wiener. On suppose que* $S_0 = 1$.
***1/*** *Supposons que les valeurs des paramètres sont* $\mu = 0.05$ *et* $\sigma = 0.09$. *Sachant que* $S_3 = 60$, *trouver la probabilité que le prix* $S_{12}$ *est supérieur à* $120$.
*On suppose désormais que* $\mu \in \mathbb{R}$ *et* $\sigma > 0$ *quelconques.*
***2/*** *Trouver la médiane et l'espérance de* $S_t$.
***3/*** *Donner une expression de l'espérance conditionnelle* $E[S_t / \mathcal{F}_s]$, *avec* $s < t$ *et* $\mathcal{F}_t$ *la filtration associé à* $S$.
***4/*** *Donner les conditions sur* $\mu$ *et* $\sigma$ *pour que* $\{S_t, t \geq 0\}$ *soit une martingale.*
***5/*** *Quelle est la limite de la médiane quand* $t$ *tend vers* $\infty$. *Conclure si l'action serait ou non, à long terme, un bon investissement dans ce cas.*

**Exercice 3** ***(5 pts)*** *Soit* $W(t)$ *un mouvement Brownien et* $0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_n^n = T$, *avec* $t_j^n = \frac{jT}{n}$ *une partition de l'intervalle* $[0, T]$. *Sachant que*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \left(W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n)\right)^2 = T \textit{ dans } L^2.$$

***1/*** *Trouver la limite suivante dans* $L^2$: $\lim_{n\to\infty} \sum\limits_{j=0}^{n-1} W(t_j^n)\left(W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n)\right)$.

***2/*** *Trouver* $\int\limits_0^T W(t) dW(t)$.