Université Mohamed Khider Biskra | **Département de Mathématiques**
Faculté des SESNV | **Master-1.**
Module: Prob Approf | **Mathématiques Appliquées**
Contrôle N$^{\circ -}1$ | **2019/2020**

Exercice 1 ______ **03 points**

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, $\mathcal{G}$ sous tribu de $\mathcal{F}$ et X une variable aléatoire.
(1) Montrer que l'esperance conditionnelle $X \longmapsto E(X \mid \mathcal{G})$ est une application lineaire croissante.
(2) Montrer que $E(E(X \mid \mathcal{G})) = E(X)$.

Exercice 2 ______ **04 points**

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m,p)$. ($\mathcal{B}(n,p)$: loi binomiale de parametre n et p.) On définit $Z = X + Y$.
(1) Quelle est la distribution de Z.
(2) Quelle est la distribution de $X \mid Z$.
(3) Trouver $E(X \mid Z)$.

Exercice 3 ______ **07 points**

Soit (X,Y) un couple aléatoire de densité jointe:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 2xy + \frac{3}{2}y^2 & : \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \\ 0 & : \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

(1) Vérifier que $f(\cdot,\cdot)$ est une densité.
(2) Trouver les densités marginales $f_Y(y)$, $f_X(x)$ et les densités conditionnelles $f_{X|Y=y}(x)$ et $f_{Y|X=x}(y)$.
(3) Calculer $P\left\{(X,Y) \in [0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}]\right\}$, $P(X < Y)$.
(4) Déterminer $E(Y \mid X = x)$.
(5) Soit Z une variable aléatoire définie par $Z = E(Y \mid X)$. Quelle est la distribution de Z. Déterminer $E(Z)$.

Exercice 4 ______ **06 points**

(1) Montrer au moyen d'un contre exemple qu'une suite de variable aléatoire:
  (a) $X_n \xrightarrow{P} X$ n'implique pas $X_n \xrightarrow{p.s} X$,
  (b) $X_n \xrightarrow{Loi} X$ n'implique pas $X_n \xrightarrow{P} X$.
  (c) $X_n \xrightarrow{L^1} X$ n'implique pas $X_n \xrightarrow{L^2} X$.
(2) Soit X_n une suite de variable aléatoire de densite de probabilité

$$f_n(x) = n^2 x \exp\left[-\frac{n^2 x^2}{2}\right] \boldsymbol{I}_{\mathbb{R}^+}.$$

Montrer que X_n converge en probabilité vers 0.
(3) Soit X_n une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme $\mathcal{U}$ sur $[0,1]$. On note par $Y_n = \max(X_1, X_2, ..., X_n)$ et $Z_n = n(1 - Y_n)$
  (a) Déterminer la fonction de répartition de Z_n.
  (b) Etudier la convergence en loi de la suite Z_n.