Faculté des Mathématiques USTHB **Année 2019/2020**

Master 1 SPA Module: **Calcul Stochastique**

Série 2
Espérance Conditionnelle et Martingales

Exercice 1 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité et $\mathcal{A}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Pour toute variable aléatoire $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on définit la variance conditionnelle $V(X \mid \mathcal{A})$ par :*

$$V(X \mid \mathcal{A}) = E\left[(X - E(X \mid \mathcal{A}))^2 \mid \mathcal{A}\right]$$

1/ Montrer que $V(X \mid \mathcal{A}) = E(X^2 \mid \mathcal{A}) - E(X \mid \mathcal{A})^2$. En particulier, $E(X \mid \mathcal{A})^2 \leq E(X^2 \mid \mathcal{A})$.
2/ Montrer que $V(X) = E[V(X \mid \mathcal{A})] + Var[E(X \mid \mathcal{A})]$. En particulier, $V[E(X \mid \mathcal{A})] \leq V(X)$. Discuter le cas d'égalité.

Exercice 2 *Montrer qu'un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$, muni de sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$, est une martingale si et seulement si pour tout $s, t \in \mathbb{T}$, $s \leq t$ et tout $A \in \mathcal{F}_s$,*

$$\int_A X_s \mathrm{d}P = \int_A X_t \mathrm{d}P.$$

Exercice 3 *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une martingale à temps continu relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Démontrer que si $s \leq t$:*

$$E\left[(X_t - X_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] = E\left[(X_t^2 - X_s^2) \mid \mathcal{F}_s\right]$$

Exercice 4 *Soit $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ un processus de Poisson de taux λ et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration naturelle associée. Montrer que le processus $Y(t) = \exp\{\alpha N(t) - \lambda t(e^\alpha - 1)\}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et α un paramètre réel, est une martingale.*

Exercice 5 *Soit τ_1 et τ_2 deux temps d'arrêt relativement à la filtration $\mathcal{F}_n$. Montrer que $\tau_1 + \tau_2$, $\tau_1 \vee \tau_2 = \sup\{\tau_1, \tau_2\}$ et $\tau_1 \wedge \tau_2$ sont des temps d'arrêt.*

Exercice 6 *Montrer que pour $s < t$ et $A \in \mathcal{F}_s$, $\tau = s\mathbf{1}_A + t\mathbf{1}_{A^c}$ est un temps d'arrêt.*

Exercice 7 *Soit τ un temps d'arrêt relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ $\forall t \geq 0$.*
1/ Montrer que $\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}, \forall t \geq 0, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$ est une tribu.
2/ Démontrer que τ est $\mathcal{F}_\tau$ mesurable.
3/ Soit τ_1 et τ_2 deux temps d'arrêt, tels que $\tau_1 \leq \tau_2$ (p.s). Montrer que $\mathcal{F}_{\tau_1} \subset \mathcal{F}_{\tau_2}$.
4/ Soit $\{X(t), t \geq 0\}$ une martingale relativement à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$. Montrer que $\{X(t\wedge\tau), t \geq 0\}$ est une martingale.

Exercice 8 *Soit $(M_t, t \geq 0)$ une $(\mathcal{F}_t)$-martingale et τ un temps d'arrêt borné prenant ses valeurs dans un ensemble dénombrable. Soit Y une variable aléatoire bornée $\mathcal{F}_\tau$ mesurable. Soit $N_t = Y(M_t - M_{t\wedge\tau})$. Montrer que $(N_t)_{t\geq 0}$ est une martingale.*

Exercice 9 *Considérons l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sur lequel sont construites deux filtrations $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ satisfaisant $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{G}_t$.*
1) Soit $M = (M_t)_{t\geq 0}$ une $\mathcal{F}_t$-martingale (martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$) et soit $N = (N_t)_{t\geq 0}$ une $\mathcal{G}_t$-martingale . Est-ce que M est une $\mathcal{G}_t$-martingale ? Est-ce que N est une $\mathcal{F}_t$-martingale ? Justifiez vos réponses.
2) Soit T un $\mathcal{F}_t$-temps d'arrêt (temps d'arrêt par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$) et S un $\mathcal{G}_t$-temps d'arrêt. Est-ce que S est un $\mathcal{F}_t$-temps d'arrêt? Est-ce que T est un $\mathcal{G}_t$-temps d'arrêt? Justifiez vos réponses.

Exercice 10 *Soit $T > 0$ un nombre réel. Pour $0 = t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} < \ldots$ et $i = 1, \ldots, n, \ldots$ soit ϕ_i des fonctions bornées $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurables et ϕ_0 une fonction bornée $\mathcal{F}_0$-mesurable. On définit le processus élémentaire $X(t, \omega) = \phi_0(\omega)\mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(\omega)\mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(t)$. Montrer que $(X(t))_{t\geq 0}$ est progressivement mesurable.*

Exercice 11 *Deux joueurs jouent à un jeu équitable. On note Z_n le résultat de la $n^{\text{ième}}$ partie pour le premier joueur. Les Z_n sont indépendantes et: $P(Z_n = +1) = P(Z_n = -1) = 1/2$. On note $\mathcal{F}_n$ la filtration engendrée par les résultats des n premières parties, et X_n la fortune du premier joueur après la $n^{\text{ième}}$ partie. Sa fortune initiale est fixée: $X_0 = a$. pour tout $n \geq 1$, on a donc: $X_n = a + Z_1 + \ldots + Z_n$. Le second joueur a une fortune initiale fixée à b et la partie se termine par la ruine de l'un des deux joueurs. On définit donc: $T = \min\{n,\ X_n = 0 \text{ ou } X_n = a+b\}$.*

1/ *Montrer que $(X_n)_n$ est une martingale et que T est un temps d'arrêt, relativement à $(\mathcal{F}_n)$.*

2/ *Montrer que: $P(T > n) \leq P(0 < X_n < a+b)$. Déduire du théorème de la limite centrale que $P(T > n)$ tend vers 0, puis que T est fini.*

3/ *Déduire du théorème d'arrêt que: $P(X_T = 0) = \dfrac{b}{a+b}$ et $P(X_T = a+b) = \dfrac{a}{a+b}$.*

4/ *Montrer que $E(X_T^2) - E(T) = a^2$. Conclure que $E(T) = ab$.*

5/ *Observons que pour tout réel λ : $E\left[e^{\lambda Z_n}\right] = \frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2} = \cosh(\lambda)$. Pour tout $n \geq 0$, on pose $Y_n(\lambda) = \exp(\lambda X_n)(\cosh(\lambda))^{-n}$. Montrer que $(Y_n(\lambda))_n$ est une martingale.*

6/ *Déduire du théorème d'arrêt que: $E\left[(\cosh(\lambda))^{-T}\left(I_0(X_T) + e^{\lambda(a+b)}I_{a+b}(X_T)\right)\right] = e^{\lambda a}$.*

Exercice 12 *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes et de même loi donnée par: $P(X_1 = +1) = p$, $P(X_1 = -1) = q = 1-p$. On pose $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ pour $n \geq 1$, et $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$*

1/ *Montrer que $Z_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$ est une martingale par rapport à $\mathcal{F}_n$.*

2/ *Déduire de l'inégalité maximale que: $P\left(\sup_{n\geq 0} S_n \geq k\right) \leq \left(\frac{p}{q}\right)^k$ et que, lorsque $q > p$*

$$E\left(\sup_{n\geq 0} S_n\right) \leq \frac{p}{q-p}.$$

Exercice 13 *Soit $(M(t))_{t\geq 0}$ une martingale positive continue issue de $a > 0$ ($M(0) = a$) et telle que: $\lim_{t\to\infty} M(t) = 0$ (p.s.). En introduisant le temps d'arrêt $T_x = \inf\{t \geq 0,\ M(t) \geq x\}$, montrer que $S = \sup\{M(t);\ t \geq 0\}$ suit la même loi que $\frac{a}{U}$ avec U une variable aléatoire uniforme sur $]0,1]$.*

Exercice 14 *A la date 0, une urne contient une boule blanche et une boule noire. A la date 1, on prélève une boule, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne avec une boule supplémentaire de même couleur. on itère cette opération aux dates $2, 3, \ldots$. Soit B_n , $n \geq 0$ le nombre de boules blanches dans l'urne après la $n^{\text{ème}}$ opération.*

1/ Montrer que la suite: $X_n = \dfrac{B_n}{n+2}$ est une martingale relativement à $\mathcal{F}_n = \sigma(B_1, \ldots, B_n)$.

2/ Montrer que le rapport du nombre de boules blanches au nombre de boules noires converge p.s. vers une limite.