

Université de Jijel

Département de Mathématiques

Module : Mesure et Intégration

TD N°3

Exercice 1 : Soit μ une mesure sur $\mathcal{B}([0, 1])$. Montrer que $C([0, 1], \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \mu)$.

Exercice 2 : Soit δ_0 la mesure de Dirac en 0 et soit $f \in \mathcal{M}_+$. Calculer $\int f d\delta_0$.

Exercice 3 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, nulle sur \mathbb{R}_- et positive décroissante sur \mathbb{R}_+^* .

- 1) Montrer que f est borélienne.
- 2) On suppose que $\int f d\lambda < +\infty$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \leq \frac{C}{x}, \forall x > 0$.
- 3) Montrer que le résultat de la question précédente est faux si f n'est pas décroissante sur \mathbb{R}_+^* .

Exercice 4 : Soient (E, T, μ) un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(E, T, \mu)$. On suppose que $0 \leq f \leq 1$ p.p et que $\int f d\mu = \int f^2 d\mu$. Montrer qu'il existe un ensemble mesurable fini A tel que $f = 1_A$ p.p.

Exercice 5 : Soient (E, T, μ) un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(E, T, \mu)$. Montrer que

$$f \geq 0 \text{ p.p} \Leftrightarrow \int_A f d\mu \geq 0, \forall A \in T.$$

Exercice 6 : Soient λ la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}([0, 1])$ et $f \in \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$.

- 1) Montrer que $x \mapsto e^{nx} f(x)$ appartient à $\mathcal{L}^1, \forall n \in \mathbb{N}$.
- 2) Supposons que $f \geq 0$ p.p et $\exists M \in \mathbb{R}_+$ tels que $\int e^{nx} f(x) d\lambda(x) \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$.
 - (i) Montrer que $f = 0$ p.p.
 - (ii) Montrer que si f est continue, alors $f(x) = 0, \forall x \in [0, 1]$.

Exercice 7 : Soient (E, T, μ_1) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}_+$. On pose $\mu_2(A) = \int_A f d\mu_1, \forall A \in T$.

- 1) Montrer que μ_2 est une mesure sur T .
- 2) Soit $g \in \mathcal{M}$. Montrer que $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(E, T, \mu_2)$ si et seulement si $fg \in L_{\mathbb{R}}^1(E, T, \mu_1)$.

Exercice 8 : Soient (E, T, μ) un espace mesuré et L^1 l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, \mu)$. Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1$ et $f \in L^1$. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \geq 0$ p.p, $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f$ p.p et que $\int f_n d\mu \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int f d\mu$. Montrer que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f$ dans L^1 .