0.1 Solution de base

Exercice 1 *Une entreprise de montage fabrique deux types de télécommande, la régulière donne des bénéfices nets de 150 dinars tandis que la deluxe donne 200 dinars. Le temps de montage de la télécommande de luxe est le double du temps de la régulière et l'entreprise a une capacité de production équivalente à 1000 télécommandes ordinaires. L'approvisionnement est limité puisqu'il ne peut y avoir de pièces que pour 400 deluxes et 700 ordinaires. Donner les solutions de base pour ce problème, le nombre de sommet du polygone des solutions réalisables et la solution optimale.*

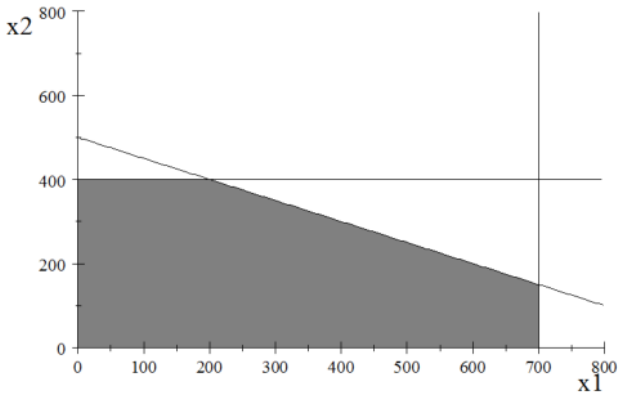
Solution 1 *Solution : Soit* x_1 *: le nombre de télécommandes ordinaires et* x_2 *: le nombre de télécommandes deluxe. Le PPL est de maximiser*

$$z = 150x_1 + 200x_2$$

sujet aux contraintes

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 1000 \\ x_1 &\leq 700 \\ x_2 &\leq 400 \end{aligned}$$

avec $x_1 \geq 0$ *et* $x_2 \geq 0$. *Le polygone des solutions réalisables est donné par Le polygone des solutions*



réalisables a 5 sommets : $(0,0), (0,400), (200,400), (700,0)$ *et* $(700,150)$. *Les valeurs respectives de la fonction objectif sont 0, 800, 1100, 1150 et 1350.*

Si on regarde la méthode des solutions de base on a les contraintes de la forme standard :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1000 \\ x_1 + x_4 &= 700 \\ x_2 + x_5 &= 400 \end{aligned}$$

Il y a une possibilité de $\binom{5}{3} = 10$ *solutions, ce qui donne le tableau suivant :*

Base	*Hors base*	*Solution*	*réalisable*	*z*
(x_1, x_2, x_3)	(x_4, x_5)	$(700, 400, -500, 0, 0)$	*non*	
(x_1, x_2, x_4)	(x_3, x_5)	$(200, 400, 0, 500, 0)$	*oui*	110000
(x_1, x_2, x_5)	(x_3, x_4)	$(700, 150, 0, 0, 250)$	*oui*	135000
(x_1, x_3, x_4)	(x_2, x_5)	*incompatible*		
(x_1, x_3, x_5)	(x_2, x_4)	$(700, 0, 300, 0, 400)$	*oui*	105000
(x_1, x_4, x_5)	(x_2, x_3)	$(1000, 0, 0, -300, 400)$	*non*	
(x_2, x_3, x_4)	(x_1, x_5)	$(0, 400, 200, 700, 0)$	*oui*	800
(x_2, x_3, x_5)	(x_1, x_4)	*incompatible*		
(x_2, x_4, x_5)	(x_1, x_3)	$(0, 500, 0, 700, -100)$	*non*	
(x_3, x_4, x_5)	(x_1, x_2)	$(0, 0, 1000, 700, 400)$	*oui*	*0*

La solution optimale est $(700, 150, 0, 0, 250)$ *c'est-à-dire* $x_1 = 700$ *et* $x_2 = 150$.

La solution est effectivement la même que celle trouvée par la méthode graphique. On remarque qu'il y a exactement 5 solutions réalisables et elles correspondent aux sommets du polygone trouvé par la méthode graphique. On constate donc que les deux méthodes font la même chose mais celle des solutions de base est exploitable pour plus de deux variables de décision.

Exercice 2 *Un contracteur doit faire exécuter 5000 heures de travaux de menuiserie par trois sous-traitants dont les taux horaires sont respectivement de 250, 300 et 320. Pour des raisons de subvention à l'entreprise locale, il ne faut pas qu'un des sous-traitants puisse faire plus de 2 fois le nombre d'heures d'un autre. Le contracteur veut évidemment minimiser ses coûts.*

Solution 2 *Solution : Soit* x_i *: le nombre d'heures données au sous-traitant* i *pour* $i = 1, 2, 3$ *. La fonction objectif à minimiser est*

$$250x_1 + 300x_2 + 320x_3$$

et les contraintes sont

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &\geq 5000 \\
x_1 - 2x_2 &\leq 0 \\
x_1 - 2x_3 &\leq 0 \\
x_2 - 2x_1 &\leq 0 \\
x_2 - 2x_3 &\leq 0 \\
x_3 - 2x_1 &\leq 0 \\
x_3 - 2x_2 &\leq 0
\end{aligned}$$

avec non négativité pour les variables de décision. Forme Standard :

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 5000 \\
x_1 - 2x_2 - x_5 &= 0 \\
x_1 - 2x_3 - x_6 &= 0 \\
x_2 - 2x_1 - x_7 &= 0 \\
x_2 - 2x_3 - x_8 &= 0 \\
x_3 - 2x_1 - x_9 &= 0 \\
x_3 - 2x_2 - x_{10} &= 0
\end{aligned}$$

avec $x_i \geq 0$. *On observe le nombre de variables* $n = 10$ *et le nombre d'équations* $m = 7$. *Cela donne une possibilité de* $\binom{10}{7} = 120$ *solutions avec 3 variables hors base et 7 variables de base.*

Si on veut un exemple de solution de base il suffit de choisir trois variables puis de les posées à 0. En posant les trois premières variables hors base on obtient les équations :

$0 + 0 + 0 - x_4 = 5000$

$0 - 2 * 0 + x_5 = 0$

$0 - 2 * 0 + x_6 = 0$

$0 - 2 * 0 + x_7 = 0$

$0 - 2 * 0 + x_8 = 0$

$0 - 2 * 0 + x_9 = 0$

$0 - 2 * 0 + x_{10} = 0$

La solution de base est $(0, 0, 0, -5000, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ *On a pour cette solution 6 variables dégénérées.*

0.2 Algorithme du simplexe

La solution graphique est très efficace pour solutionner les problèmes ayant deux variables de décision mais elle reste inutilisable avec des problèmes plus complexes. Pour trouver des solutions à ces problèmes il faut avoir recours à la méthode des solutions de base et hors base.

Cette dernière n'est praticable à la main que si le nombre de variables et de contraintes sont relativement petits. La méthode des solutions de base est particulièrement bien adaptée à un calcul automatique par l'ordinateur. Si certains problèmes peuvent être résolus à la main comme l'exemple des

téléviseurs et des machines à laver, d'autres demandent nécessairement l'utilisation d'un ordinateur. Prenons l'exemple d'un problème pour lequel il y a 5 variables et 5 contraintes au départ. Il y aura $\binom{10}{5} = 252$ solutions de base possibles à explorer. Un ordinateur peut facilement et rapidement faire ce calcul.

Dans la majorité des cas "réels" la méthode des solutions de base bien que théoriquement possible n'est pas applicable même à l'aide d'un ordinateur. Prenons le cas réaliste pour l'industrie d'un problème qui comporte 50 variables et 25 contraintes au départ, le nombre de solutions de base à explorer sera de $\binom{75}{50} = 5,2589 \times 10^{19}$ calcul à faire. Ce nombre est tellement grand que même un superordinateur ne peut pas faire le

calcul de toutes les solutions de base possibles pour trouver celle qui optimise l'objectif ;

Dfinition 1 *Considérons une solution de base obtenue en prenant m variables de base et $n-m$ variables hors base. Un sommet adjacent à cette solution de base est obtenu en permutant une variable de base avec une variable hors base. Il y a $m(n-m)$ sommets adjacents à un sommet.*

Considérons une solution de base déterminée en posant x_1 x_2 et x_3 comme variables de base et x_4 comme variable hors base. Il y a 3 sommets adjacents qui sont déterminés par les solutions de base obtenues en posant comme variables de base, x_1 ,x_2 puis x_4 ou x_1 ,x_4 et x_3 et finalement x_3 ,x_2 et x_4 . Le tableau suivant illustre le passage du sommet ayant $x4$ comme variable hors base à ses trois sommets adjacents.

Sommet		Sommets adjacents
		$(x_1, x_2, x_3 = 0, x_4)$
$(x_1, x_2, x_3, x_4 = 0)$	$\Longrightarrow$	$(x_1, x_2 = 0, x_3, x_4)$
		$(x_1 = 0, x_2, x_3, x_4)$

0.2.1 Algorithme du Simplexe

1. Prendre une solution de base quelconque et évaluer la fonction objectif. La valeur ainsi déterminée est la "solution optimale potentielle".

2. Trouver chacun des sommets adjacents et calculer la solution et la fonction objectif pour chacun.

3. Prendre la solution pour laquelle valeur de la fonction objectif qui est la plus grande pour une maximisation ou la plus petite pour une minimisation.

- Si la valeur est meilleure que la solution optimale potentielle, cette nouvelle valeur devient la "solution optimale potentielle". Reprendre l'étape 2.
- Si la valeur est égale ou moins bonne que la solution optimale potentielle alors l'optimal est la "solution optimale potentielle" et l'algorithme se termine.

Exemple 1 *Considérons l'exemple des télécommandes à fabriquer. Le PPL est de*

$$\max z = 150x_1 + 200x_2$$

sujet aux contraintes

$$x_1 + 2x_2 \leq 1000$$
$$x_1 \leq 700$$
$$x_2 \leq 400$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Sous forme d'équations standards, les contraintes deviennent

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1000 \\
x_1 + x_4 &= 700 \\
x_2 + x_5 &= 400 \\
x_1, x_2 &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Étape 1 : Le principe de l'algorithme du simplexe est de prendre une solution de base quelconque en posant deux variables à 0 pour avoir le même nombre d'équations que de variables "libres". Posons $x_3 = 0$ *et* $x_5 = 0$ *. Le système d'équations devient*

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x2 + 0 &= 1000 \\
x_1 + x_4 &= 700 \\
x_2 + 0 &= 400
\end{aligned}
$$

On trouve $x_2 = 400$ *,* $x_1 = 200$ *et* $x_4 = 500$. *La solution (200,400,0,500,0) est la "solution optimale potentielle" et la valeur de la fonction objectif pour cette solution est de* 110000*, soit* $z = 150(200) + 200(400)$

Étape 2 : Il y a 6 sommets adjacents à la "solution optimale potentielle", soit le nombre de façons d'échanger une variable de base et une variable hors base. Le tableau suivant donne les 6 possibilités de permutation d'une variable hors base et d'une variable de base pour ce problème

Variables de base	Variable hors base
(x_2, x_3, x_4)	(x_1, x_5)
(x_1, x_3, x_4)	(x_2, x_5)
(x_2, x_2, x_3)	(x_4, x_5)
(x_2, x_4, x_5)	(x_3, x_1)
(x_1, x_4, x_5)	(x_3, x_2)
(x_1, x_2, x_5)	(x_3, x_4)

Pour chacune de ces permutations il faut trouver la solution correspondante puis la valeur de la fonction objectif :

Étape 3 : L'objectif est la maximisation de z et ainsi lasolution qui est la meilleure est $(700, 150, 0, 0, 250)$.

Étape 4 : La valeur obtenu pour l'objectif est plus grande que la valeur précédante donc la solution $(700, 150, 0, 0, 250)$ *devient la "solution optimale potentielle". Il faut retourner à l'étape 2.*

Étape 2 : Il y a deux permutations de variables hors base et de base qui n'ont pas été "visitées", soient

Étape 3 L'objectif est la maximisation de z et ainsi la solution qui est la meilleure est (700,0,300,0,400)

.

de base	hors base	Solution de base	z
(x_2, x_3, x_4)	(x_1, x_5)	$(0, 400, 200, 700, 0)$	80000
(x_1, x_3, x_4)	(x_2, x_5)	impossible	
(x_1, x_2, x_3)	(x_4, x_5)	$(700, 400, -500, 0, 0)$	non réalisable
(x_2, x_4, x_5)	(x_3, x_1)	$(0, 500, 0, 700, -100)$	non réalisable
(x_1, x_4, x_5)	(x_2, x_3)	$(1000, 0, 0, -300, 400)$	non réalisable
(x_1, x_2, x_5)	(x_3, x_4)	$(700, 150, 0, 0, 250)$	135000

de base	hors base	Solution de base	z
(x_2, x_3, x_5)	(x_1, x_4)	Impossible	
(x_1, x_3, x_5)	(x_2, x_4)	$(700, 0, 300, 0, 400)$	105000

Étape 4 : L'objectif est moins bon que pour la solution précédante donc l'algorithme se termine et la solution optimale est $(700, 150, 0, 0, 250)$ *pour un profit de 135000.*

On obtient un profit maximum à $x_1 = 700$ *et* $x_2 = 150$*. De plus, ce profit maximal est de 135000.*

Exemple 2 *Nous résolvons le problème de programmation linéaire suivant sous forme standard en utilisant la méthode du simplexe :*

$$\max z = 8x_1 + 9x_2 + 5x_3$$

$$s/c : x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 2$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 3$$
$$6x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 8$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

Nous convertissons d'abord le problème en forme standard en ajoutant des variables d'écart, obtenant :

$$\max z = 8x_1 + 9x_2 + 5x_3$$

$$s/c : x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_5 = 3$$
$$6x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_6 = 8$$
$$x_i \geq 0, i = 1, .., 6.$$

Le tableau initial est Tableau 1 ; les tableaux suivants sont les Tableaux 2 et 3.

Par conséquent, une solution optimale à la forme standard du problème est

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = 0.$$

Tableau 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	1	1	2	1	0	0	2
x_5	2	3	4	0	1	0	3
x_6	6	6	2	0	0	1	8
	8	9	5	0	0	0	0

Tableau 2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	1
x_2	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	1
x_6	2	0	-6	0	-2	1	2
	2	0	-7	0	-3	0	-9

Tableau 3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	0	0	$\frac{5}{3}$	1	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$
x_2	0	1	$\frac{10}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_1	1	0	-3	0	-1	$\frac{1}{2}$	1
	0	0	-1	0	-1	-1	-11

Les valeurs des variables d'écart sont

$$x_4 = \frac{2}{3}, x_5 = 0, x_6 = 0.$$

The optimal value of z is 11.

Exemple 3 *Considérons le problème de la programmation linéaire*

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4$$

$$s/c : x_1 - x_2 - x_3 \leq 2$$
$$-2x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 3x_4 \leq 10$$
$$2x_1 - 5x_2 + 3x_4 \leq 8$$
$$x_i \geq 0, i == 1, 2, 3, 4.$$

Pour résoudre ce problème par la méthode du simplexe, nous convertissons d'abord le problème en forme standard en ajoutant des variables d'écart obtenant

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4$$

$$s/c : x_1 - x_2 - x_3 + x_5 = 2$$
$$-2x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 3x_4 + x_6 = 10$$
$$2x_1 - 5x_2 + 3x_4 + x_7 = 8$$
$$x_i \geq 0, i = 1, ..., 7.$$

Le tableau initial est Tableau 4 ; les tableaux suivants sont les Tableaux 5 et 6. Dans Tableau 6, l'entrée la plus positive dans la ligne d'objectif est $\frac{34}{3}$*, donc la variable de départ est* x_3*. Cependant, aucune des entrées de la colonne pivot (la troisième colonne) n'est positive, nous concluons donc que le problème donné n'a pas de solution optimale finie.*

Tableau 4

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_5	1	-1	-1	0	1	0	0	2
x_6	-2	5	-3	-3	0	1	0	10
x_7	2	-5	0	3	0	0	1	5
	2	3	1	1	0	0	0	0

Tableau 5

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_5	$\frac{3}{5}$	0	$-\frac{8}{5}$	$-\frac{3}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	0	4
x_2	$-\frac{2}{5}$	1	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	2
x_7	0	0	-3	0	0	1	1	15
	$\frac{16}{5}$	0	$\frac{14}{5}$	$\frac{14}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$	0	-6

Tableau 6

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	1	0	$-\frac{8}{3}$	-1	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{20}{3}$
x_2	0	1	$-\frac{5}{3}$	-1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{14}{3}$
x_7	0	0	-3	0	0	1	1	15
	0	0	$\frac{34}{3}$	6	$-\frac{16}{3}$	$-\frac{5}{3}$	0	$-\frac{82}{3}$