Suite de la solution des exercices de la série n°2 :

Exercice 4 : $(B_t)_{t\geq 0}$ est un M.B.S.

(c) Montrons que : $\forall T \geq 0$ :

$$B_t^{(3)} := B_T - B_{T-t} \quad , 0 \leq t \leq T \quad \text{(Retournement du temps)}$$

est un M.B.S.

(i) Continuité des trajectoires :

Comme : $(B_t)_{t\geq 0}$ est un M.B.S.

Alors : $t \longmapsto B_T$ et $t \longmapsto B_{T-t}$ sont continues

D'où : $t \mapsto B_t^{(3)}$ est continue également.

(ii) Mq $(B_t^{(3)})_{T\geq t\geq 0}$ est un processus gaussien.

Soient $\{\lambda_i\}_{i=\overline{1..n}} \in \mathbb{R}$ et $\{t_i\}_{i=\overline{1..n}} \in [0, T]$.

Mq : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i B_{t_i}^{(3)}$ est gaussienne. ?

On a : $\sum \lambda_i B_{t_i}^{(3)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (B_T - B_{T-t_i})$

$$= \sum \lambda_i B_{T-0} - \sum \lambda_i B_{T-t_i}$$

On peut écrire donc :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i B_{t_i}^{(3)} = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i B_{T-t_i}}_{\substack{\text{Gaussienne} \\ \text{car } (B_t)_{t\geq 0} \text{ est} \\ \text{un M.B.S.}}} \quad \text{avec} \begin{cases} \alpha_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ ; \ t_0 = 0 \\ \alpha_i = -\lambda_i \ , \ i \in \overline{1..n}. \end{cases}$$

(iii) Calculons : $\mathbb{E}(B_t^{(3)})$ et $Cov(B_s^{(3)}, B_t^{(3)})$, $s,t \in [0,T]$.

- $\mathbb{E}(B_t^{(3)}) = \mathbb{E}(B_T - B_{T-t}) = \mathbb{E}(B_T) - \mathbb{E}(B_{T-t}) = 0$
- $Cov(B_s^{(3)}, B_t^{(3)}) = \mathbb{E}\left[(B_T - B_{T-s})(B_T - B_{T-t})\right]$

$$= \mathbb{E}B_T^2 - \mathbb{E}(B_T B_{T-t}) - \mathbb{E}(B_T B_{T-s}) + \mathbb{E}(B_{T-s} B_{T-t})$$

$$= T - T\wedge(T-t) - T\wedge(T-s) + (T-s)\wedge(T-t)$$

$$= T - (T-t) - (T-s) + T - \underbrace{\max(s,t)}_{s \vee t}$$

$$= s + t - s\vee t$$

$$= s \wedge t. \quad \left( \overline{\text{car}} \ \max(a,b) + \min(a,b) = a+b. \right)$$

de (i), (ii) et (iii) : $(B_t^{(3)})_{0 \leq t \leq T}$ est un M.B.S.

(d) Changement d'échelle :

$a > 0$. $B_t^{(4)} := \frac{1}{\sqrt{a}} B_{at}$ ; $t \geq 0$.

(i) La continuité des trajectoires est évidente.

(ii) Mq $(B_t^{(4)})_{t \geq 0}$ est gaussien.

Soient : $\{\lambda_i\}_{i=\overline{1..n}} \in \mathbb{R}$ et $\{t_i\}_{i=\overline{1..n}} \in \mathbb{R}_+$ ;

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i B_{t_i}^{(4)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{1}{\sqrt{a}} B_{at_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i B_{\mu_i} \qquad \alpha_i \in \mathbb{R},\ \mu_i \geq 0.$$

D'où : $\sum \lambda_i B_{t_i}^{(4)}$ est gaussienne.

(iii) * $\mathbb{E} B_t^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{a}} \mathbb{E} B_{at} = 0$.

* $\mathrm{Cov}(B_s^{(4)}, B_t^{(4)}) = \mathbb{E}(B_s^{(4)} B_t^{(4)})$

$$= \frac{1}{a} \mathbb{E}(B_{as} B_{at})$$

$$= \frac{1}{a} (\underbrace{as \wedge at}_{= a(s \wedge t) \text{ car } a > 0})$$

$$= \frac{1}{a} \cdot a \cdot (s \wedge t)$$

$$= s \wedge t.$$

Conclusion : $(B_t^{(4)})_{t \geq 0}$ est un M.B.S.

(e) Devoir.