Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Université Hassiba Benbouali de Chlef
Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة حسيبة بن بوعلي بالشلف
كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي

قسم الرياضيات

Année Universitaire : 2017/2018
Niveau : $1^{ère}$ *Année M.A.S.*
Module : *Processus Stochastiques 1*

Examen de T.D

I) Considérons une C.M.T.D. d'espace d'états $E = \{0, 1, 2, ..., N\}$, $N > 0$, et de probabilités de transition:

$$p_{i,i+1} = p,\ p_{i,i-1} = q \ pour\ 1 \leq i \leq N-1,\ avec\ p+q = 1\ et\ 0 < p < 1.$$

~~Supposons que $p_{0,1} = 1$, $p_{N,N-1} = 1$~~. $p_{0,1} = p$, $p_{N,N-1} = q$.

1. Tracer le diagramme des transitions.
2. La chaîne de Markov est-elle Irréductible? Justifier.
3. Est-elle Apériodique? Justifier.
4. Quelle est la période de la chaîne?
5. Trouver la loi stationnaire.

II) Considérons une C.M.T.D. d'espace d'états $E = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$, et de probabilités de transition:

$$\begin{aligned} p_{i,i-1} &= 1, \quad i \in \mathbb{N}^* \\ p_{0,i} &= p_i, \quad avec\ p_i > 0\ \forall i \in \mathbb{N}\ et\ \sum_{i \geq 0} p_i = 1. \end{aligned}$$

1. Tracer le diagramme des transitions.
2. La C.M. est-elle Irréductible?
3. Quelle est la période de l'état 0?
4. Quelles sont les périodes des autres états?
5. Sous quelle condition la chaîne est récurrente positive? (Ind. Utiliser l'existence et l'unicité de la loi limite)
6. Si la C.M. est récurrente positive, quelle est le nombre moyen des étapes (transitions) nécessaires pour qu'elle retourne à l'état i en démarrant de i?

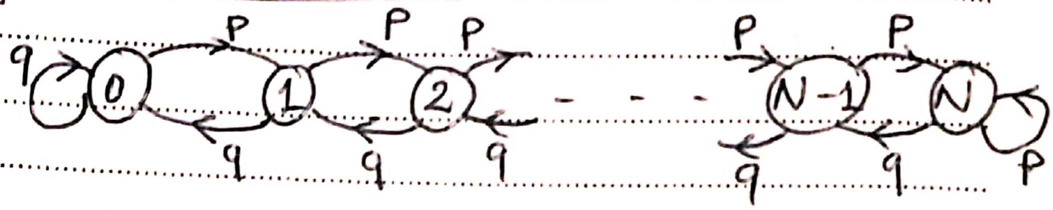
Nom & Prénom :	اللقب و الإسم:
Niveau : Master 1	المستوى:
Groupe :	الفوج:
N d'inscription : Processus	Stoch 1 رقم التسجيل:
Examen de :	إمتحان في مادة:

Corrigé type de l'examen de T.D M1

Exo1

1. Diagramme des transitions :

01



01 2. Irréductibilité : oui, car tous les états se communiquent entre eux.

01 3. Apériodicité : Oui, car $P_{00}^{(1)} > 0$.

01 4. La période de la C.M : $d = d(i) = d(0) = 1$ $\forall i$ car la C.M est irréductible.

5. La loi stationnaire π

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ \\ \vdots \\ N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & & & & N \end{array} \\ \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & \cdots & \\ q & 0 & p & 0 & \cdots & \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & q & p \end{pmatrix} \end{array}, \quad \pi = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_N).$$

L'éq^t de l'invariance ${}^t\pi P = {}^t\pi$

i.e $\sum_j \pi_j P_{ji} = \pi_i \quad \forall i \in \{0, 1, \ldots, N\}$

On a 2 cas, $i = 0$ et $i \neq 0$.

$$\boxed{q\pi_1 = p\pi_0} \Leftrightarrow$$

01 $\boxed{\text{par } i=0} \xrightarrow{} [j \in \{0,1\}]$: $q\pi_0 + q\pi_1 = \pi_0 \Rightarrow \boxed{\pi_1 = \frac{p}{q}\pi_0}$

$\boxed{\text{par } i \neq 0} \rightarrow [j \in \{i-1, i+1\}]$ $\boxed{p\pi_{i-1} + q\pi_{i+1} = \pi_i}$

par $i=1$: $\underbrace{p\pi_0}_{= q\pi_1} + q\pi_2 = \pi_1 \Rightarrow q\pi_2 = p\pi_1$

$$\pi_2 = \frac{p}{q}\pi_1 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \pi_0$$

⋮

01 Par induction : $\boxed{\pi_i = \left(\frac{p}{q}\right)^i \pi_0}$; $0 \leq i \leq N$

Il faut la démontrer par récurrence sur i

Calcul de π_0 :

0,50 On a $\sum_{i=0}^{N} \pi_i = 1 \Rightarrow \cancel{\pi_0 +} \sum_{i=0}^{N} \left(\frac{p}{q}\right)^i \pi_0 = 1$

$$\Rightarrow \pi_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{N} \left(\frac{p}{q}\right)^i}$$

On a 2 cas :

① $p \neq q$. $\pi_0 = \dfrac{p/q - 1}{\left(p/q\right)^{N+1} - 1}$

0,50

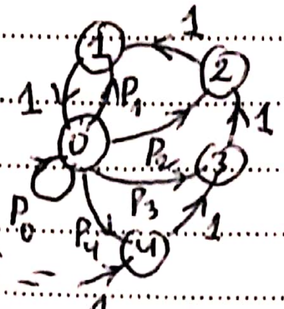
② $p = q = 1/2$ $\pi_0 = \dfrac{1}{N+1}$

Nom & Prénom :................................	................................:اللقب و الإسم
Niveau :................................	................................:المستوى
Groupe :................................	................................:الفوج
N°d'inscription :................................	................................:رقم التسجيل
Examen de :................................	................................:إمتحان في مادة

Exo2

1. Diagramme des transitions

01



01 — 2. Irréductibilité : Oui, car tous les états se communiquent entre eux.

01 — 3. La période de "0" : $d(0) = 1$, car $P_{00}^{(1)} = p_0 > 0$.

01 — 4. Les périodes des autres états : $d(i) = d(0) = 1$, $\forall i$, car : $i \leftrightarrow 0$ $\forall i$.

5. La condition pour que la C.M. soit réc (+)

Comme la C.M. est irréductible, Apériodique alors la limite existe et est unique ssi la C.M. est réc positive.

Etudions la loi stationnaire : π

$$P = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \\ & & 1 & \ddots \end{bmatrix}$$

On a : ${}^t\pi P = {}^t\pi$

D'où : $\sum_j \pi_j P_{ji} = \pi_i \quad \forall j \in \mathbb{N}$

D'après la mat. de transitions :

$$j \in \{0, i+1\}$$

On a alors :

$$\pi_0 P_{0,i} + \pi_{i+1} P_{i+1,i} = \pi_i$$

0,5 $\Rightarrow \boxed{p_i \pi_0 + \pi_{i+1} = \pi_i \quad \forall i \geq 0}$

Pour $\boxed{i=0}$ $\pi_1 = (1-p_0)\pi_0$

$\boxed{i=1}$ $\pi_2 = (1-p_0-p_1)\pi_0$

0,50 Par induction : $\boxed{\pi_i = (1-p_0-p_1-\cdots-p_{i-1})\pi_0 \quad i \geq 1}$

De plus : $\sum_{i \geq 0} \pi_i = 1 \Rightarrow \pi_0 + \sum_{i \geq 1} \pi_i = 1$

$$\Rightarrow \pi_0 \left[1 + \sum_{i \geq 1} (1-p_0-p_1-\cdots-p_{i-1}) \right] = 1$$

01 (5) La condition est : $\boxed{\sum (1-p_0-p_1-\cdots-p_{i-1}) < \infty}$

02 (6) $E_i(T_i) = \dfrac{1}{\pi_i}$