Université Hassiba Benbouali–Chlef
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

$1^{\text{ère}}$ **année Master MAS**
Méthode de Monte-Carlo et Simulation
Année : 2019/2020

TP N°4

EXERCICE N° 1: On s'intéresse à l'estimation de l'intégrale

$$I = \int_0^1 \mathrm{e}^u \, \mathrm{d}u.$$

1. Rappeler la formule de l'estimateur Monte-Carlo standard $\hat{I}_n$. Rappeler le Théorème Central Limite auquel il obéit et calculer la variance σ^2 qu'il fait intervenir. Donner un estimateur $\hat{\sigma}_n^2$ de σ^2.
2. Sur un même graphique, pour n allant de 1 à 1000, représenter $\hat{I}_n$ et les intervalles de confiance asymptotiques à 95% en fonction de n. Ajouter à ce graphique la droite horizontale $y = I$ en rouge.
3. Illustrer la convergence de $\hat{\sigma}_n^2$ vers σ^2.
4. Donner un estimateur $\tilde{I}_n$ de I à base de variables antithétiques. Quelle est sa variance ? théorique s^2 Par rapport au Monte-Carlo standard, par combien (environ) a-t-on divisé le temps de calcul pour atteindre la même précision ?
5. Soit c une constante et $X_c = \exp(U) + c(U - 1/2)$, où $U \sim \mathcal{U}[0, 1]$. Quelle est la moyenne de la variable X_c ? Exprimer la variance de X_c en fonction de c et des variances et covariance de U et $\exp(U)$. En déduire la valeur c^* de c rendant cette variance minimale et préciser $\mathbb{V}(X_{c^*})$. Comparer à s^2.

EXERCICE N° 2: On veut calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 x^2 \mathrm{e}^{x^2} \, \mathrm{d}x.$$

1. Calculer la constante C pour que $g(x) = C\mathrm{e}^x$ soit une fonction de densité sur l'intervalle $[0, 1]$.
2. Calculer la fonction de répartition G associée à la densité g et trouver son inverse. En déduire une méthode pour simuler la loi de g.
3. Calculer l'intégrale par la méthode d'échantillonnage préférentiel en prenant comme densité alternative la fonction $g(x)$.