USTHB
Faculté de Mathématiques
Master 1 SPA
Séries chronologiques 1

Série d'exercices N°3

Exercice 1

Considérons le processus $ARMA(1,1)$ satisfaisant les équations

$$X_t = 0.5X_{t-1} + \epsilon_t + 0.4\epsilon_{t-1},\ \{\epsilon_t\} \sim WN(0, \sigma_\epsilon^2)$$

1) Donner les propriétés de ce processus (Est-il stationnaire ? Est-il inversible ?)
2) Donner la représentation $MA(\infty)$ de ce processus.
3) Donner la représentation $AR(\infty)$ de ce processus.
(Pour 2) et 3), on déterminera les coefficients de façon précise).

Exercice 2

Considérons le processus $AR(2)$ satisfaisant les équations

$$X_t = 0.7X_{t-1} - 0.1X_{t-2} + \epsilon_t,\ \{\epsilon_t\} \sim WN(0, \sigma_\epsilon^2)$$

1) Donner les propriétés de ce processus (Est-il stationnaire ? Est-il inversible ?)
2) Donner la représentation $MA(\infty)$ de ce processus.
3) Donner la représentation $AR(\infty)$ de ce processus.
(Pour 2) et 3), on déterminera les coefficients de façon précise).

Exercice 3

Considérons le processus $ARMA(2,1)$ satisfaisant les équations

$$X_t = 0.75X_{t-1} - 0.5625X_{t-2} + \epsilon_t + 1.25\epsilon_{t-1},\ \{\epsilon_t\} \sim WN(0, \sigma_\epsilon^2)$$

1) Donner les propriétés de ce processus (Est-il stationnaire ? Est-il inversible ?)
2) Donner la représentation $MA(\infty)$ de ce processus.
3) Donner la représentation $AR(\infty)$ de ce processus.
(Pour 2) et 3), on déterminera les coefficients de façon précise).

Exercice 4

1) Soit le processus $AR(1)$: $X_t = 0.8X_{t-1} + \varepsilon_t$, $\{\varepsilon_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$. Calculer la variance de $(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)/4$.

2) Considérons le modèle suivant : $X_t = X_{t-1} - 0.25X_{t-2} + \varepsilon_t - 0.25\varepsilon_{t-1}$où $\{\varepsilon_t\}$ est un bruit blanc.

a) Ce modèle est-il causal ? Pourquoi ?

b) Calculer les coefficients $\psi_i, i = 0, 1, ...$ de la représentation causale.

(Indication : On montrera que $(1-\varphi_1 B-\varphi_2 B^2)^{-1}=\Sigma_{i=0}^{\infty}\psi_i B^i$ où $\psi_i=\varphi_1\psi_{i-1}+\varphi_2\psi_{i-2}$).

c) Ce modèle est-il inversible ? Pourquoi ?

d) Calculer les coefficients $\pi_i, i=0,1,...$ de la représentation $AR(\infty)$.

3) Donner la représentation causale par rapport à $\{\varepsilon_t\}\sim WN(0,\sigma^2)$ des processus $ARMA$ suivant:

$$\begin{aligned}
X_t &= 1.3X_{t-1}-0.4X_{t-2}+\varepsilon_t \\
X_t &= 1.3X_{t-1}-0.4X_{t-2}+\varepsilon_t-0.2\varepsilon_{t-1} \\
X_t &= \varphi X_{t-1}+\varepsilon_t+\theta\varepsilon_{t-1}, |\varphi|<1
\end{aligned}$$

4) Calculer la fonction d'autocovariance des processus $ARMA$ suivant: $X_t=0.5X_{t-1}+0.36X_{t-2}+\varepsilon_t$,$X_t=0.5X_{t-1}+0.36X_{t-2}+\varepsilon_t+0.5\varepsilon_{t-1}$

Exercice 5

Soit le modèle

$$X_t=-2t+\varepsilon_t+0.5\varepsilon_{t-1}$$

où $\{\varepsilon_t\}$ est un bruit blanc de variance σ_ε^2.

1) Quelle est la fonction moyenne et la fonction d'autocovariance de ce processus ? Est-il stationnaire ? Justifiez votre réponse.

2) On considère le processus différencié $\nabla X_t=(1-B)X_t$ où B est l'opérateur retard ($BZ_t=Z_{t-1}$). Quelle est la fonction moyenne et la fonction d'autocovariance de ce processus ? Est-il stationnaire ? Justifiez votre réponse.

Exercice 6

On suppose que l'on dispose de 1500 observations d'une série chronologique. Les autocovariances empiriques calculées sont :

$\widehat{\gamma}_0=5.0, \widehat{\gamma}_1=3.5, \widehat{\gamma}_2=2.5, \widehat{\gamma}_3=1.8, \widehat{\gamma}_4=1.0.$

1) Calculer les 3 premières autocorrélations et autocorrélations partielles.

L'algorithme de Durbin est :

$\widehat{\varphi}_{11}=\widehat{\rho}_1, \widehat{\varphi}_{hh}=(\widehat{\rho}_h-\sum\limits_{j=1}^{h-1}\widehat{\varphi}_{h-1,j}\widehat{\rho}_{h-j})/(1-\sum\limits_{j=1}^{h-1}\widehat{\varphi}_{h-1,j}\widehat{\rho}_j), \widehat{\varphi}_{h,j}=\widehat{\varphi}_{h-1,j}-\widehat{\varphi}_{hh}\widehat{\varphi}_{h-1,h-j}, j=1,2,...,h-1$ et $h=2,3,...$

2) Quel modèle suggèreriez-vous ?

Exercice 7

La fonction d'autocorrélation d'une série temporelle est donnée par

h	1	2	3	4	5	6
$\widehat{\rho}_h$	-0.36457	$xxxxx$	$xxxxx$	$xxxxx$	$xxxxx$	-0.13273
$\widehat{\sigma}_{\widehat{\rho}_h}$	0.089443	0.100631	0.114326	0.116154	0.116156	0.116514
h	7	8	9	10	11	12
$\widehat{\rho}_h$	0.12924	-0.16093	0.22162	-0.22858	0.15280	-0.16012
$\widehat{\sigma}_{\widehat{\rho}_h}$	0.117717	0.118847	0.120578	0.123794	0.127125	0.128586

1) Déterminez un intervalle de confiance à 95% pour $\rho_h, h = 2, 3, 4, 5$.

2) Il s'agit d'un processus $MA(2)$. Quelles sont les autocorrélations manquantes qui devraient se situer hors de l'intervalle de confiance? Justifiez votre réponse.

Exercice 8

Quatre représentations $ARMA(p, q)$ possibles ont été sélectionnées pour représenter les rendements logarithmiques de la production industrielle:

	$p = 1, q = 0$	$p = 2, q = 0$	$p = 1, q = 1$	$p = 1, q = 2$
ϕ_0	0.011 (4.14)	0.011 (3.31)	0.012 (2.63)	0.012 (2.62)
ϕ_1	0.618 (8.54)	0.456 (5.11)	0.887 (14.9)	0.887 (13.2)
ϕ_2		0.258 (2.89)		
θ_1			-0.484 (-4.22)	-0.483 (-4.19)
θ_2				-0.002 (-0.019)
SCR	0.0156	0.0145	0.0141	0.0141
AIC	-503.3	-506.1	-513.1	-511.1
$SBC = BIC$	-497.7	-497.7	-504.7	-499.9
$Q(12)$	23.6 (**0.008**)	11.7 (**0.302**)	11.7 (**0.301**)	11.7 (**0.301**)
$Q(24)$	28.6 (**0.157**)	15.6 (**0.833**)	15.4 (**0.842**)	15.3 (**0.841**)
$Q(30)$	40.1 (**0.082**)	22.8 (**0.742**)	22.7 (**0.749**)	22.6 (**0.749**)

(.) est la t-stat pour la nullité des coefficients.

$Q(.)$ est la statistique de Box-Ljung pour l'analyse des autocorrélations dans la série des résidus.

(.) est la p-value correspondant à la valeur calculée de la statistique de Box-Ljung.

Quel modèle choisiriez-vous ? Ecrire le modèle.

Exercice 9 Soit $X_t = 1.1X_{t-1} - 0.3X_{t-2} + \varepsilon_t - 0.2\varepsilon_{t-1} - 0.15\varepsilon_{t-2}$

1) Le processus est-il stationnaire ? Inversible ? Justifiez.

2) Calculer les coefficients d'autocorrélation ρ_1 et ρ_2 et le coefficient d'autocorrélation partielle φ_{22}.

3) Calculer les prévisions $X_t(l), l = 1, 2, 3, 4$.