20 May 2018 Année Universitaire 2017/2018

Université Djillali Liabès De Sidi Bel Abbès
Faculté Des Sciences Exactes
$2^{\text{ème}}$ Année Licence Mathématiques et Informatiques

Examen de Probabilités (01h 30mn)

Responsable du Module : *S.BENAISSA*

Exercice 1 *:(04points)*
On considère des événements A et B tels que :

$$\mathbb{P}(A) = 1/2, \mathbb{P}(A \bigcup B) = 3/4, \text{ et } \mathbb{P}(\overline{B}) = 5/8.$$ 04pts

Déterminer

$$\mathbb{P}(A \bigcap B), \mathbb{P}(\overline{A} \bigcap \overline{B}), \mathbb{P}(\overline{A} \bigcup \overline{B}) \text{ et } \mathbb{P}(B \bigcap \overline{A})$$

01pt 01pt 01pt 01pt

Exercice 2 *:(03points)*
Soit X une variable aléatoire réelle absolument continue, d'ensemble fondamental $\mathbb{R}^+$ *et d'espérance mathématique* $\mathbb{E}(X) = m$. *Montrer l'inégalité suivante(Inégalité de Markov) :*

$$\forall \alpha > 0, \mathbb{P}(X \geq \alpha m) \leq \frac{1}{\alpha}.$$ 03pts

Exercice 3 *:(07points)*
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, *on note* $G_n = \left\{ \frac{k}{n} / k = \overline{1, n} \right\}$.
On considère une suite X_n *de v.a.r.d de* $\Omega \to G_n$ *telle que :*

$$\forall k \in \{1, 2, ..., n\}, \mathbb{P}\left(X_n = \frac{k}{n}\right) = \alpha_n \frac{\ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)}{k + n}. \quad (1)$$ 07pts

03pts i) *Déterminer* α_n *pour que la relation (1) définisse une loi de probabilité.*
02pts ii) *Etudier la convergence de la suite* (α_n).
02pts iii) *Donner une estimation pour n grand de l'espérance* $\mathbb{E}(X_n)$.

Exercice 4 *:(06points)*
Soit X une variable aléatoire réelle absolument continue, dont une densité est :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ xe^{-\frac{x^2}{2}} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$ 06pts

03pts i) *Vérifier que* f_X *est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X.*
03pts ii) *Quelle est la loi de* $Y = X^2$?
iii) *Calculer l'espérance et la variance de X.*

Exercice n° 1 :

Cet exercice se résoud à l'aide des propriétés suivantes :

- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = 1$

On en déduit successivement :

1. $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) = \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{5}{8}\right) - \frac{3}{8}$

   soit $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{8} = 0{,}125$.

2. $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(\overline{A \cup B}) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = \frac{1}{4} = 0{,}25$

3. $\mathbb{P}(\overline{A} \cup \overline{B}) = \mathbb{P}(\overline{A \cap B}) = 1 - \mathbb{P}(A \cap B)$

   $$= 1 - \frac{1}{8}$$
   $$= \frac{7}{8} = 0{,}875.$$

4. $\mathbb{P}(B \cap \overline{A}) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B \cap A) = \left(1 - \frac{5}{8}\right) - \frac{1}{8}$

   $$= \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Exercice n°2 :

Soit f_X la densité de probabilité de X. On a :

$$m = \mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,dx = \int_{\Omega} X\,d\mathbb{P}$$

$$= \int_{\{X \geq \alpha m\} \cup \{X < \alpha m\}} X\,d\mathbb{P}$$

$$= \int_{\{X \geq \alpha m\}} X\,d\mathbb{P} + \int_{\{X < \alpha m\}} X\,d\mathbb{P}$$

$$\geqslant \int_{\{X \geq \alpha m\}} X\,d\mathbb{P} \geq \alpha m \int_{\{X \geq \alpha m\}} d\mathbb{P}$$

$$= \alpha m\, \mathbb{P}\{X \geq \alpha m\}$$

et après division par m :

$$\mathbb{P}(X \geq \alpha m) \leqslant \frac{1}{\alpha}.$$

Exercice n° 3 :

i) La condition cherchée est : $\sum_{k=1}^{n} \alpha_n \frac{\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}{n+k} = 1$

c'est-à-dire :

$$\alpha_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}{n+k}}$$

ii) Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}{n+k}$; $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}{1+\frac{k}{n}}$

sous cette forme, on reconnaît une somme de Riemann associée à la fonction

$f : x \longmapsto \frac{\ln(1+x)}{1+x}$ sur $[0;1]$ (f est continue et définie sur $[0;1]$). Par suite,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x}\,dx = \frac{1}{2}\left[(\ln(1+x))^2\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 2)^2.$$

Conclusion : $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \frac{2}{(\ln 2)^2}$.

iii) $\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \mathbb{P}\left(X_n = \frac{k}{n}\right)$

$$= \alpha_n \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \frac{\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}{n+k}$$

$$= \alpha_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \frac{\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}{\left(1+\frac{k}{n}\right)}$$

$$= \alpha_n \beta_n \text{ où } \beta_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \frac{\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}{1+\frac{k}{n}}.$$

β_n est une somme de Riemann associée à la fonction $g : x \mapsto x \frac{\ln(1+x)}{1+x}$ sur $[0,1]$.

$$\lim_{n \to +\infty} \beta_n = \int_0^1 x \frac{\ln(1+x)}{1+x} dx$$

$$= \int_0^1 \left[\ln(1+x) - \frac{\ln(1+x)}{1+x}\right] dx$$

(car $x = x+1-x$)

$$\lim_{n \to +\infty} \beta_n = 2\ln 2 - 1 - \frac{1}{2}(\ln 2)^2$$

Alors $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X_n) = \frac{2}{(\ln 2)^2}\left(2\ln 2 - 1 - \frac{1}{2}(\ln 2)^2\right).$

Exercice n° 4 :

i) f_X est continue sur $\mathbb{R}$, positive ou nulle, et

$$\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{+\infty} x e^{-x^2/2}\,dx$$

$$= \left[-e^{-x^2/2}\right]_0^{+\infty} = 1.$$

ii) Y est également une v.a.R.C à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Soit donc $x \in \mathbb{R}_+$; On peut écrire :

$$F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(X^2 \leq x) = \mathbb{P}(-\sqrt{x} \leq X \leq +\sqrt{x})$$

$$= \mathbb{P}(X \leq \sqrt{x})$$

(puisque X est aussi à valeurs dans $\mathbb{R}_+$). Donc :

$$\mathbb{P}(Y \leq x) = \int_0^{\sqrt{x}} t e^{-t^2/2}\,dt = \left[-e^{-t^2/2}\right]_0^{\sqrt{x}} = 1 - e^{-x/2}$$

Une densité Y est donc définie par :

$$\varphi_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-x/2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Finalement : $Y \rightsquigarrow \mathcal{E}\left(\lambda = \frac{1}{2}\right)$.

iii) $\mathbb{E}(X) = \int_{\Omega} X \, d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) \, dx$

$$= \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx \quad \dots (1)$$

On pose $v = \frac{x^2}{2} \Rightarrow \sqrt{v} = \frac{x}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{v}} dv = dx$$

$(1) \Rightarrow \mathbb{E}(X) = \frac{2}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} v^{\frac{1}{2}} e^{-v} dv$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} ; \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\right)$$

Finalement $\mathbb{E}(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

• $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right]$

$= \mathbb{E}(X^2) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2$

or a :

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2/2}\, dx \quad \ldots (2)$$

On pose $v = \frac{x^2}{2} \Rightarrow \sqrt{2}\sqrt{v} = x$

$\Rightarrow \sqrt{2}\frac{1}{2\sqrt{v}}\, dv = dx$

$$(2) \Rightarrow \mathbb{E}(X^2) = \int_0^{+\infty} 2^{3/2} v^{3/2} \frac{\sqrt{2}}{2} v^{-\frac{1}{2}} e^{-v}\, dv$$

$$= 2^{3/2 + \frac{1}{2} - 1} \underbrace{\int_0^{+\infty} v e^{-v}\, dv}_{=1}$$

$= 2$

Finalement $\mathrm{Var}(X) = 4 - \frac{\pi}{2}$