23 *Janvier* 2022 — Année Universitaire 2021/2022

Université Djillali Liabès De Sidi Bel Abbès
Faculté Des Sciences Exactes
1er Année Master Mathématiques et Informatiques

Examen de Probabilités 1 (01h 30mn)

Responsable du Module : *S.BENAISSA*

Exercice 1 *:(08points)*
Soit α un nombre réel.
Soit X et Y deux v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{\alpha}{2^{1+j}i!} \quad \text{por tout } (i,j) \in \mathbb{N}^2.$$

i) Déterminer α. 02
ii) Déterminer les lois marginales. 02
iii) X et Y sont-elles indépedantes ? 02
iv) Déterminer l'espérance et la variance de X et de Y. 02

Exercice 2 *:(12points)*
Soient X et Y deux v.a.r indépendantes telles que

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{sinon} \\ xe^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

.Une densité de Y est :

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{sinon} \\ \dfrac{1}{\Pi\sqrt{1-y^2}} & \text{si } -1 < y < 1 \end{cases}$$

On pose $Z = XY$ et $Z' = X\sqrt{1-Y^2}$.
i) Questions préliminaires. Pour tout $x \geq 0$ et tout $-1 < y < 1$, on pose

$$(z, z') = (xy, x\sqrt{1-y^2}).$$

(a) Montrer que $(x,y) = \left(\sqrt{z^2+z'^2}, \dfrac{z}{\sqrt{z^2+z'^2}}\right)$. 02

(b) Montrer que le Jacobien associé à $(x,y) = \left(\sqrt{z^2+z'^2}, \dfrac{z}{\sqrt{z^2+z'^2}}\right)$ *est* $J(z,z') = -\dfrac{z'}{z^2+z'^2}$. 03

ii) Déterminer une densité de (Z, Z'). 02

iii) Déterminer une densité de Z, *puis une densité de* Z' *(on poura utiliser l'égalité* $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\Pi}$*).* 02

iv) Est-ce que Z *et* Z' *sont indépendantes ?* 01

Solution (Exercice n° 1)

i) $\mathbb{P}$ est une probabilité donc

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X=i, Y=j)=1 \text{ et } \mathbb{P}(X=i, Y=j)\geq 0 \quad \forall (i,j)\in\mathbb{N}^2$$

On a ; $\sum\sum \mathbb{P}(X=i, Y=j)=1 \Leftrightarrow \alpha=\left(\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{1+j}\,i!}\right)^{-1}$

$$\Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{i!}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{2^j}}$$

$$\Leftrightarrow \alpha=\frac{2}{e\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}}} \; ; \left(\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^j=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\alpha=\frac{1}{e}}$$

02

Finalement ; $\boxed{\mathbb{P}(X=i, Y=j)=\frac{e^{-1}}{2^{1+j}\,i!} \quad \forall (i,j)\in\mathbb{N}^2}$

ii) $\mathbb{P}(X=i)=P_{i.}=e^{-1}\frac{1}{i!}$ donc (0.1)

$$\boxed{X \text{ suit la loi de Poisson } \mathcal{P}(\lambda=1)}$$

$$P_{.j}=\mathbb{P}(Y=j)=\sum_{i=0}^{+\infty} P_{ij}$$
$$=\frac{e^{-1}}{2^{j+1}}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{i!}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{1}{2^{j}} \text{ et}$$

(01)

$$\boxed{Y \text{ suit la loi géométrique } \mathcal{G}(\tfrac{1}{2}).}$$

$$P_{ij}=\frac{e^{-1}}{i!}\frac{1}{2^{j+1}}=P_{i.}\cdot P_{.j}\,;$$ (02)

Les v.a.r X et Y sont donc indépendantes.

iii) Pour $Z \leadsto \mathcal{G}_0(p)$, on a $\mathbb{E}(Z)=\frac{q}{p}$ et $\mathrm{Var}(Z)=\frac{q}{p^2}$ donc (01)

$$\boxed{\mathbb{E}(Y)=\frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=1\;;\;\mathrm{Var}(Y)=\frac{1-\frac{1}{2}}{(\frac{1}{2})^2}=2}$$

et pour $Z \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, on sait que

$\mathbb{E}(Z) = \mathrm{Var}(Z) = \lambda$ donc

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \mathrm{Var}(X) = 1} \; ; \qquad 01$$

Solution (Exercice n° 2)

i) (a) On a $z^2+z'^2=(xy)^2+x^2(1-y^2)=x^2$.

D'où, comme $x\geq 0$, on a $x=\sqrt{z^2+z'^2}$.

Comme $z=xy$, on a

$$y=\frac{z}{\sqrt{z^2+z'^2}}.$$

02

Au final, on a $(x,y)=\left(\sqrt{z^2+z'^2},\ \frac{z}{\sqrt{z^2+z'^2}}\right)$.

(b) Le jacobien associé à $(x,y)=\left(\sqrt{z^2+z'^2},\ \frac{z}{\sqrt{z^2+z'^2}}\right)$ est

$$J(z,z')=\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z}\sqrt{z^2+z'^2} & \frac{\partial}{\partial z'}\sqrt{z^2+z'^2} \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+z'^2}}\right) & \frac{\partial}{\partial z'}\frac{z}{\sqrt{z^2+z'^2}} \end{vmatrix}$$

03

$$=\begin{vmatrix} \frac{z}{\sqrt{z^2+z'^2}} & \frac{z'}{\sqrt{z^2+z'^2}} \\ \frac{\sqrt{z^2+z'^2}-\frac{z^2}{\sqrt{z^2+z'^2}}}{z^2+z'^2} & -\frac{zz'}{(z^2+z'^2)\sqrt{z^2+z'^2}} \end{vmatrix} = -\frac{z'}{z^2+z'^2}.$$

(α_4)

ii) On a $(Z, Z') = (XY, X\sqrt{1-Y^2})$ et, par le résultat de la question i) (a),

$$(z, z') = (xy, x\sqrt{1-y^2}) \Leftrightarrow (x,y) = \left(\sqrt{z^2+z'^2}, \frac{z}{\sqrt{z^2+z'^2}}\right).$$

Le théorème du changement de variable nous assure qu'une densité de (Z, Z') est donnée par

$$f_{Z,Z'}(z,z') = f_{X,Y}\left(\sqrt{z^2+z'^2}, \frac{z}{\sqrt{z^2+z'^2}}\right) |J(z,z')|,$$
$$(z,z') \in \mathbb{R}^2$$

0,1

où $f_{X,Y}$ est une densité de (X,Y) et $J(z,z')$ est le jacobien associé à $(x,y) = \left(\sqrt{z^2+z'^2}, \frac{z}{\sqrt{z^2+z'^2}}\right)$.

(α_5)

On a $(X,Y)(\Omega) = [0,+\infty[\times [-1,+1]$.

Comme

$x \geq 0,\ -1 \leq y \leq 1 \Leftrightarrow xy \in \mathbb{R}$,

$x\sqrt{1-y^2} \geq 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R},\ z' \geq 0$,

On a $(Z,Z')(\Omega) = (XY, X\sqrt{1-Y^2})(\Omega) = \mathbb{R} \times [0,\infty[$.

Par conséquent, pour tout $(z,z') \notin \mathbb{R} \times [0,\infty[$,

on a $f_{Z,Z'}(z,z') = 0$.

Finalement

$$f_{Z,Z'}(z,z') = f_{X,Y}\left(\sqrt{z^2+z'^2}, \frac{z}{\sqrt{z^2+z'^2}}\right) |J(z,z')|$$

$$\overset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} f_X\left(\sqrt{z^2+z'^2}\right) f_Y\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+z'^2}}\right) |J(z,z')|$$

(α_6)

$$= \sqrt{z^2+z'^2}\, e^{-\frac{\left(\sqrt{z^2+z'^2}\right)^2}{2}} \frac{1}{\pi\sqrt{1-\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+z'^2}}\right)^2}} \frac{z'}{z^2+z'^2}$$

$$= \sqrt{z^2+z'^2}\, e^{-\frac{z^2+z'^2}{2}} \frac{1}{\pi\sqrt{z^2+z'^2}} = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{z^2}{2}} e^{-\frac{z'^2}{2}}$$

01

Ainsi, une densité de (Z, Z') est

$$f_{Z,Z'}(z,z') = \begin{cases} \frac{1}{\pi} e^{-z^2/2} e^{-\frac{z'^2}{2}} & \text{si } (z,z') \in \mathbb{R}\times[0,\infty[, \\ 0 & \text{sinon}, \end{cases}$$

iii) $Z(\Omega) = \mathbb{R}$

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_{Z,Z'}(z,z')\, dz'$$

01

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\pi} e^{-z^2/2} e^{-z'^2/2}\, dz' = \frac{1}{\pi} e^{-z^2/2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{z'^2}{2}} dz'$$

$$= \frac{1}{\pi} \underset{(\varphi_Z)}{e^{-z^2/2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2},\ z \in \mathbb{R},$$

Finalement : $Z \sim L\text{-}G(0,1)$,

$Z'(\Omega) = [0, \infty[$, pour tout $z' < 0$, on a $f_{Z'}(z') = 0$. Pour tout $z' \geq 0$.

$$f_{Z'}(z') = \int_{\mathbb{R}} f_{Z, Z'}(z, z')\, dz$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} e^{-z^2/2} e^{-z'^2/2}\, dz$$

$$= \frac{1}{\pi} e^{-z'^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2}\, dz$$

$$= \frac{1}{\pi} e^{-z'^2/2} \sqrt{2\pi}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-z'^2/2}$$

d1

Finalement : $f_{Z'}(z') = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-\frac{z'^2}{2}}, & z' \geq 0; \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

(α_8)

iv) En utilisant les résultats des questions ii) et iii), on a 01

$f_{Z,Z'}(z,z') = f_Z(z) \cdot f_{Z'}(z')$ pour tout $(z,z') \in \mathbb{R}^2$, donc $Z \perp\!\!\!\perp Z'$;

(α_9)