Examen final du 3 janvier 2011 (1ère session)

Durée : 2 heures. Tous documents interdits. La qualité et la rigueur de la rédaction seront prises en compte.

Attention : le dernier exercice est facultatif. Il s'agit d'un exercice de rattrapage hors barême, qui ne sera comptabilisé que s'il vous permet d'obtenir la note moyenne (mais ne peut vous permettre d'obtenir plus que la note moyenne).

Exercice 1.
Soit $F\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+,\ F(x) = \int_{[0,\,x]} \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}\,\mathrm{d}\lambda$.

a) Justifier le fait que la fonction F est continue, puis qu'elle est dérivable.
b) Déterminer l'ensemble $A := \{x \in \mathbb{R}_+ : F'(x) \neq \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)\}$.

Solution de l'exercice 1.

a) $F(x) = \lambda((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,x]) = \lambda([0,x]) - \lambda(\mathbb{Q} \cap [0,x]) = \lambda([0,x]) = x$, donc F est bien entendu continue et dérivable. Pour la continuité, on aurait également pu utiliser le fait que F est une intégrale (par rapport à λ) fonction de sa borne supérieure (avec intégrand λ-localement intégrable).
b) L'ensemble A est donc trivialement $\mathbb{Q}_+$.

Exercice 2. Soit (x_n) une suite de nombres réels et (α_n) une suite de nombres réels positifs. On définit la mesure μ sur $(\mathbb{R}, \mathscr{P}(\mathbb{R}))$ par

$$\mu := \sum_{n\geq 0} \alpha_n\, \delta_{x_n},$$

où δ_x désigne la mesure de Dirac au point x.

a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que μ soit finie.
b) En supposant que $\sum_{n\geq 0} \alpha_n = \infty$, donner une condition nécessaire et suffisante pour que μ soit σ-finie.
c) Montrer que si la suite (x_n) n'a pas de valeur d'adhérence finie, alors μ est une *mesure de Borel*, c'est-à-dire qu'elle est *finie sur les compacts.*
d) On suppose à présent que

$$x_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ y_{n/2} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases} \qquad \text{et que} \qquad \alpha_n = \begin{cases} \beta_{(n-1)/2} & \text{si } n \text{ est impair} \\ \gamma_{n/2} & \text{si } n \text{ est pair,} \end{cases}$$

où (y_n) est une suite *strictement croissante* de nombres réels strictement positifs, de limite notée $Y \leq \infty$, et chaque suite (β_n), (γ_n) est une suite de nombre réels positifs dont la somme de la *série* est respectivement notée $B \leq \infty$ et $C \leq \infty$.

i) Calculer $\mu(\{0\})$ et $\mu(]0, Y[)$.

ii) Donner une condition nécessaire et suffisante sur Y, B et C pour que μ soit une mesure de Borel.

iii) Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, donner une expression pour $\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu$ et caractériser $\mathscr{L}^1(\mu)$, en distinguant les cas $B = \infty$ et $B < \infty$.

Solution de l'exercice 2.

a) $\mu(\mathbb{R}) = \sum_n \alpha_n$ donc μ est finie ssi $\sum_n \alpha_n < \infty$.

b) ici μ est σ-finie ssi pour tout $x \in \{x_j : j \in \mathbb{N}\}$, $\mu(\{x\}) < \infty$, c'est-à-dire $\sum_{j:x_j=x} \alpha_j < \infty$. Montrons que cette condition est suffisante. Soit $E_n := \mathbb{R} \setminus \{x_k ; k \geq n\}$. Alors la suite (E_n) croît vers $\mathbb{R}$ et

$$\mu(E_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mu(\{x_k\}) < \infty,$$

car c'est une somme finie de nombres réels positifs finis. Montrons que cette condition est nécessaire. Soit (E_n) une suite croissante de limite $\mathbb{R}$ telle que $\mu(E_n) < \infty$ pour tout n. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe n tel que $x \in E_n$, donc $\mu(\{x\}) < \infty$ car $\mu(\{x\}) \leq \mu(E_n) < \infty$.

c) si la suite (x_n) n'a pas de valeur d'adhérence finie, alors pour tout compact K de $\mathbb{R}$, $A := \{n \in \mathbb{N} : x_n \in K\}$ est fini, donc $\mu(K) = \sum_n \alpha_n \delta_{x_n}(K) = \sum_{n \in A} \alpha_n < \infty$.

d) i) le calcul est immédiat : $\mu(\{0\}) = B$ et $\mu(]0, Y[) = C$.

ii) il est nécessaire que $B < \infty$ car $\{0\}$ est un compact de mesure B. Supposons que $Y < \infty$, alors il est nécessaire que $C < \infty$ car $[0, Y]$ est un compact de mesure C. La combinaison des deux conditions $B < \infty$ et $C < \infty$ est alors non seulement nécessaire, mais aussi suffisante pour que μ soit de Borel car μ est alors tout simplement finie de masse $B + C$. Supposons maintenant que $Y = \infty$. Alors la condition $B < \infty$ est non seulement nécessaire, mais aussi suffisante pour que μ soit de Borel, car pour tout compact K,

$$\mu(K) \leq \mu(K \setminus \{0\}) + \mu(\{0\}) = \sum_{n:x_n \in K \setminus \{0\}} \alpha_n + B < \infty,$$

car $K \setminus \{0\}$ ne contient qu'un nombre fini d'éléments de la suite (x_n).

iii) pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu = \sum_n \alpha_n f(x_n) = Bf(0) + \sum_n \gamma_n f(y_n)$. Donc $\int_{\mathbb{R}} |f| \, d\mu = B|f(0)| + \sum_n \gamma_n |f(y_n)|$ et $\mathscr{L}^1(\mu)$ est l'ensemble des fonctions f telles que $\sum_n \gamma_n |f(y_n)| < \infty$ (ainsi que $f(0) = 0$, dans le cas où $B = \infty$).

Exercice 3.
Soit (f_n) une suite d'applications boréliennes de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$. Dans les quatre cas suivants, montrer que la suite $(\int_{\mathbb{R}_+} f_n \, \mathrm{d}\lambda)_n$ converge et déterminer sa limite (aucun calcul d'intégrale n'est exigé).

a) $f_n(x) = \dfrac{ne^{-x}}{\sqrt{1 + n^2x^2}}$

b) $f_n(x) = \dfrac{ne^{-nx}}{\sqrt{1 + n^2x^2}}$

c) $f_n(x) = \sin(nx)\, \mathbb{1}_{[0,\, n]}(x)$

d) $f_n(x) = |\cos(x)|^{1/n}\, e^{-x}$.

Solution de l'exercice 3.

a) $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{n^{-2} + x^2}}$, d'où l'on voit que la suite (f_n) est une suite croissante de fonctions boréliennes positives, croissant vers f, où $f(x) = e^{-x}/x$ ($x \geq 0$), qui n'est PAS λ-intégrable. Donc la limite de la suite $(\int_{\mathbb{R}_+} f_n\, d\lambda)_n$ vaut $+\infty$. On pouvait tout autant utiliser le lemme de Fatou, qui ne nécessitait pas de prouver que la suite (f_n) est croissante.

b) par le changement de variable $u = nx$ (dans l'intégrale de Riemann qui est égale à l'intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue), on voit que pour tout n, $\int_{\mathbb{R}_+} f_n\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}_+} (1 + u^2)^{-1/2} e^{-u} d\lambda(u)$.

c) comme f_n est bornée, et que $g_n' = f_n$, où $g_n(x) = -n^{-1} \cos(nx)\, \mathbb{1}_{[0,\, n]}(x)$, on peut calculer directement $\int_{\mathbb{R}_+} f_n\, d\lambda = \int_{[0,n]} f_n\, d\lambda = g_n(n) - g_n(0) = (1 - \cos(n^2))/n$, et donc la suite $(\int_{\mathbb{R}_+} f_n\, d\lambda)_n$ a pour limite 0.

d) soit $A := \{\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$, qui est dénombrable, donc λ-négligeable. Alors pour tout $x \notin A$, $|\cos(x)| \in]0, 1]$ et par conséquent $(|\cos(x)|^{1/n})$ converge vers 1 en croissant. Donc la suite (f_n) croît λ-p.p. sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction f, avec $f(x) = e^{-x}$. On peut utiliser au choix le théorème de convergence monotone ou le théorème de convergence dominée (avec domination par f) pour montrer que la suite $(\int_{\mathbb{R}_+} f_n\, d\lambda)_n$ converge vers $\int_{\mathbb{R}_+} f\, d\lambda = 1$.

Exercice 4. Énoncer et démontrer, dans leur *version simple*, au choix :

1. le théorème de convergence monotone (sans utiliser le lemme de Fatou)

OU BIEN

2. le lemme de Fatou, puis le théorème de convergence dominée.

Le premier choix sera mieux valorisé dans la notation.