Interpolation par morceaux

I Interpolation par morceaux

Considérons la fonction

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{pour } x \in [0,1] \\ e^{-x} & \text{pour } x \in]1,2]. \end{cases}$$

Nous étudions son interpolation de Lagrange et d'Hermite par morceaux.

1. Construisez et implémentez une fonction qui, pour un point $x \in [0,2]$ et une partition de $[0,2]$ en sous-intervalles $[x_j, x_{j+1}]$, retourne l'indice j du sous-intervalle auquel x appartient.
2. Construisez et implémentez le polynôme $\mathcal{L}_1 f$ d'interpolation de Lagrange de degree 1 aux noeuds s_0 et s_1.
3. Calculez et implémentez la fonction d'interpolation de Lagrange par morceaux à $N+1$ noeuds.
4. Testez l'algorithme. Tracez les graphes de f et de son approximation de Lagrange par morceaux pour $N = 3,\ 10,\ 50,\ 200$.
5. Reprenez les questions 2. à 4. pour l'approximation de Hermite à deux points. On rappelle que le polynôme d'interpolation de Hermite aux noeuds s_0 et s_1 est donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 f(x) &:= \sum_{i=0}^{1} \left(f(s_i) + (x - s_i) \left(f'(s_i) - \frac{2}{s_i - s_j} f(s_i) \right) \right) p_i(x), \qquad \text{où } j \in \{0,1\},\ j \neq i, \\ p_i(x) &:= \left(\frac{x - s_j}{s_i - s_j} \right)^2, \qquad \text{où } j \in \{0,1\}, \quad j \neq i. \end{aligned}$$

6. Recuperez dans Lagrange.py (du précédent TP) la fonction qui renvoie le polynôme d'interpolation de Lagrange aux points de Tchebychev. Comparez les resultats obtenus avec l'interpolation par morceaux et avec l'interpolation de Lagrange avec $N = 5,\ 10,\ 40$ noeuds.
7. Reprenez les questions 2. à 4. pour l'approximation de Lagrange de degrée M et de Hermite de degrée $2M+1$ par morceaux, *i.e.* avec M noeuds par sousintervalle. Les polynômes d'interpolation de Hermite aux noeuds $(s_i)_{i=0,\dots,M}$ est donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_M f(x) &:= \sum_{i=0}^{M} \left(f(s_i) + (x - s_i) \left(f'(s_i) - f(s_i) \sum_{\substack{j=0,\dots,M \\ j \neq i}} \frac{2}{s_i - s_j} \right) \right) p_i(x), \\ p_i(x) &:= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{M} \left(\frac{x - s_j}{s_i - s_j} \right)^2. \end{aligned}$$