Corrigé : Examen Proba 2.

[1] $\alpha \in \left]\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$ (Γ Définie positive). $\boxed{01pt}$

[2] $N_2\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}\right)$ $\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}$ $\det \Gamma = 1$

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{2}(x,y)\begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(2x^2+y^2-2xy\right)\right]$$ $\boxed{01 pt}$

[3] $\alpha = 0 = \mathrm{cov}(X,Y)$ est une cond néc et suff quand (X,Y) est gaussien. ($\alpha \in \left]\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$). $\boxed{01 pt}$

(4) $\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & +1 & +1\\+1 & -1 & +1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$ $\boxed{01 pt}$

(5) $U \sim N(0,4)$; $V \sim N(0,4)$. $\boxed{01 pt}$

[6] $[U,V]' \sim N\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}4 & 2\\2 & 4\end{pmatrix}\right)$ $\boxed{01 pt}$

(7) $E(X|Y,Z) = \frac{2}{5}Y + \frac{1}{5}Z$ $\boxed{01 pt}$

(8) $N(-1/5, 1/5)$ $\boxed{2 pt}$

(9) $\begin{pmatrix}Z/3\\Z/3\end{pmatrix}$. $\boxed{01 pt}$

(10) $N\left(\begin{pmatrix}2/3\\2/3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2/3 & 2/3\\2/3 & 5/3\end{pmatrix}\right)$ $\boxed{2pt}$

Exercice 02

1) $Z = (X+Y-1)\,\mathbb{1}_{\{X-Y\neq 0\}}$

$\{X-Y\neq 0\}\in\mathcal{A}$. Donc $\mathbb{1}_{\{X-Y\neq 0\}}$ est une v.a

$(X+Y-1)$ est une v.a. $f(x,y)=x+y-1$ est continue $\boxed{01\,pt}$

Le produit de deux applications mesurables est mesurable.

2) Soit $Z'=(X+Y-1)$. On a $Z'=Z$ p.s.

Z' a même loi que Z.

$T = X+Y$.

$$f_T(t) = (f_X * f_Y)(t) = \int_0^1 f_X(t-y)\,f_Y(y)\,dy$$
$$= \int_0^1 f_X(t-y)\,dy$$

si $t<0$ $f_T(t)=0$; si $t>2$ $f_T(t)=0$. $\boxed{02\,pt}$

si $0<t<1$ $f_T(t)=\int_0^t dy = t$.

si $1\leq t\leq 2$ $f_T(t)=\int_{t-1}^1 dy = 2-t$

Donc $f_Z(z) = \begin{cases} 1+z & \text{si } -1<z<0 \\ 1-z & \text{si } 0<z<1 \end{cases}$

3) Z est bornée. Donc $Z\in L^p$ pour tout $p\in[1,+\infty[$

$\|Z\|_p = (E|Z|^p)^{1/p}$

$E|Z|^p = 2\int_0^1 (1-z)z^p\,dz = \frac{2}{(p+1)(p+2)}$. $\boxed{01\,pt}$

$\boxed{4}$ On montre $\max(Z_1, \dots, Z_n) \xrightarrow{p.s} 1$

Il suffit de prouver $\sum \mathbb{P}(|\max(Z_1, \dots, Z_n) - 1| > \varepsilon) < +\infty$

De même on montre que $\min(Z_1, \dots, Z_n) \xrightarrow[p.s]{} -1$.

Donc $T_n \xrightarrow{p.s} 0$ $\boxed{0{,}2\text{ pt}}$

⑤ Oui. T_n est bornée. $\forall n \ |T_n| \leq 2$.

Par Lebesgue (C.V Dominée) on obtient $\mathbb{E}(T_n) \longrightarrow 0$.

$\boxed{6}$ $\mathrm{Exp}(2)$. $\boxed{01\text{ pt}}$

$\boxed{7}$ si $\alpha = \mathbb{E} Z^2 = 1/6$. $W_i = Z_i^2$

Comme $E W_i^2 = \mathbb{E} Z_i^4 < +\infty$ Par le TCL. $\boxed{01\text{ pt}}$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum (Z_i^2 - 1/6) \right) \longrightarrow N(0, \delta^2).$$

où

$\delta^2 = \mathbb{E} Z^4 - \mathbb{E} Z^2 = \dots$

si $\alpha \neq 1/6$. pas de CVG en loi vers une v.a réelle