Université Hassiba Benbouali–Chlef
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

$1^{\text{ère}}$ **année Master MAS**
Méthode de Monte-Carlo et Simulation
Année : 2019/2020

Examen Final

EXERCICE N° 1: On considère le générateur de nombres pseudo-aléatoires suivant :

$$x_i = (5 \times x_{i-1} + 1) \bmod 16.$$

On prend $x_0 = 5$.

1. La sortie du générateur est :

$$x_1 = 10,\ x_2 = 3,\ x_3 = 0,\ x_4 = 1,\ x_5 = 6,\ x_6 = 15,\ x_7 = 12,\ x_8 = 13,\ x_9 = 2,\ x_{10} = 11,\ x_{11} = 8,$$
$$x_{12} = 9,\ x_{13} = 14,\ x_{14} = 7,\ x_{15} = 4,\ x_{16} = 5,\ x_{17} = 10, \dots$$

   Donc la période de ce générateur est égale à 16

2. En utilisant ce générateur, on obtient les 5 valeurs suivante entre $[0, 1]$:

$$u_0 = 0.3125,\ u_1 = 0.6250,\ u_2 = 0.1875,\ u_3 = 0,\ u_4 = 0.0625,\ u_5 = 0.3750$$

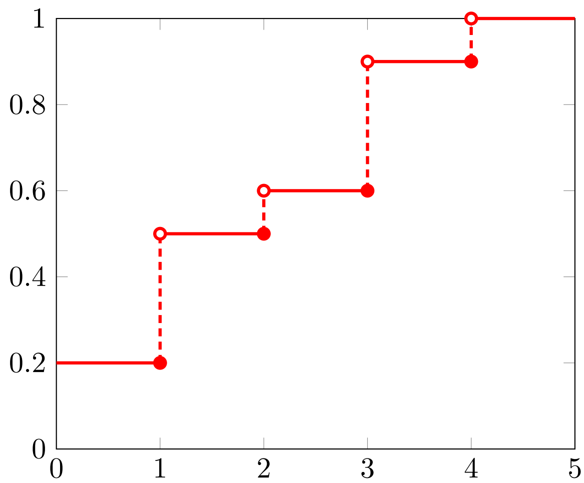
EXERCICE N° 2:
On considère la variable aléatoire X dont la loi est donnée par :

x	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X = x)$	0.2	0.3	0.1	0.3	0.1

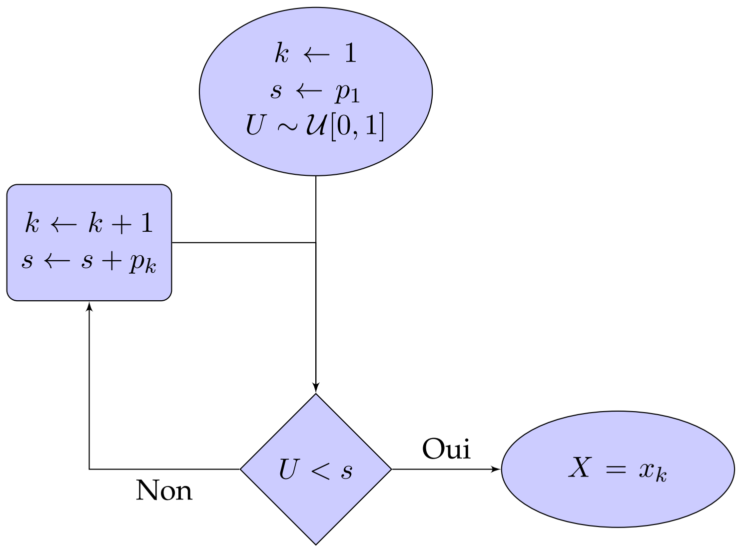
1. La fonction de répartition de X

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq 1) &= 0.2 \\
\mathbb{P}(X \leq 2) &= 0.2 + 0.3 = 0.5 \\
\mathbb{P}(X \leq 3) &= 0.2 + 0.3 + 0.1 = 0.6 \\
\mathbb{P}(X \leq 4) &= 0.2 + 0.3 + 0.1 + 0.3 = 0.9 \\
\mathbb{P}(X \leq 5) &= 0.2 + 0.3 + 0.1 + 0.3 + 0.1 = 1
\end{aligned}$$

   On peut la représenter graphiquement par :



2. L'algorithme qui permet de simuler à partir de la variable aléatoire X.



3. On applique l'algorithme précédent sur les valeur suivantes pour simuler à partir de X :

$$u_1 = 0.15,\ u_2 = 0.61,\ u_3 = 0.65,\ u_4 = 0.43$$

On obtient les valeurs suivantes :

$$x_1 = 1,\ x_2 = 4,\ x_3 = 4,\ x_4 = 2$$

EXERCICE N° 3:
On considère la variable aléatoire Y de densité

$$g(y) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y^2}, \qquad y \in \mathbb{R}.$$

1. La fonction de répartition $\mathbb{G}_Y$ de Y est donnée par :

$$\mathbb{G}_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} g(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\arctan(t)\Big|_{-\infty}^{y} = \frac{1}{\pi}\arctan(y) + \frac{1}{2}$$

2. En résolvant l'équation $U = \mathbb{G}_Y(Y)$, on a :

$$U = \frac{1}{\pi}\arctan(Y) + \frac{1}{2} \Longrightarrow Y = \tan\left(\pi(U - \frac{1}{2})\right)$$

Soit f la densité de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

3. En faisant une étude de variation, on trouve facilement que $M = \sqrt{\frac{2\pi}{\mathrm{e}}}$.

En effet, on pose $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}}{\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}(1+x^2)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$. On a

$$h'(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(2x - x(1+x^2))\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}x(1-x^2)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Donc le maximum est atteint pour $x = \pm 1$. Alors $M = h(1) = \sqrt{\frac{2\pi}{\mathrm{e}}}$.

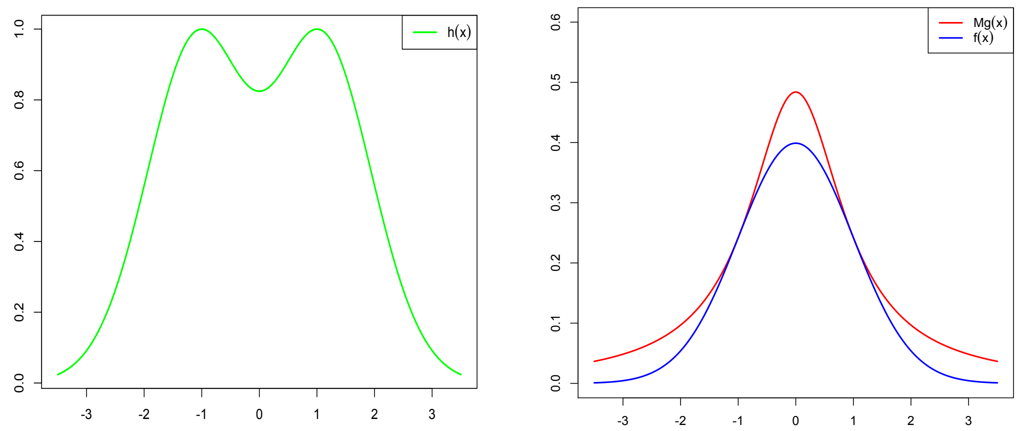


FIGURE 1 – Représentation graphique des courbes de h, f et Mg

4. L'algorithme d'acceptation-rejet peut être défini de la manière suivante :
   (i) générer Y selon la densité g c'est à dire la loi Cauchy ; et U selon la loi uniforme $\mathcal{U}[0,1]$;
   (ii) tester si $U \leq \frac{\sqrt{e}}{2} \frac{e^{-\frac{1}{2}Y^2}}{1+Y^2}$:
      (a) si c'est vrai, accepter la valeur Y et on pose $X = Y$;
      (b) sinon, rejeter Y et recommencer à partir de la première étape.
5. On a

$$Y_1 = 15.8945448,\ Y_2 = 31.8205160,\ Y_3 = -1.9626105,\ Y_4 = 1.4714553,\ Y_5 = 0.2235265$$

On rejette Y_1, on rejette Y_2, on accepte Y_3, on accepte Y_4, on accepte Y_5.

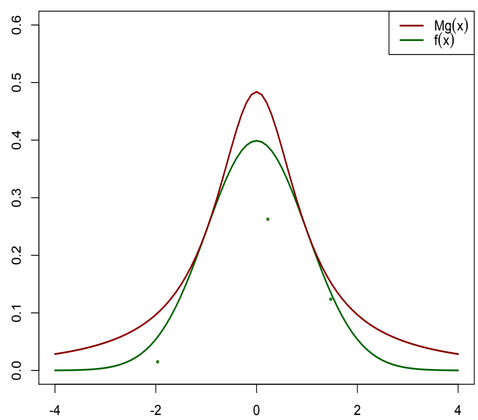


FIGURE 2 – Illustration de la méthode de rejet.