Université Badji Mokhtar, Annaba **Année universitaire 2021/2022**
Licence Mathématiques 3^{ième} année

Examen de Mesure et intégration (Durée 01h00)

Exercice 1 **I**- Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant chaque réponse.
a) La fonction continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann $\Longleftrightarrow$ $|f|$ est intégrable au sens de Lebesgue.
b) Une fonction en escalier est une fonction étagée.
c) Toute partie négligeable est de mesure nulle.

II- Donner les définitions de
(a) Une $\sigma-$algèbre sur un ensemble $E \neq \emptyset$.. (b) Une mesure.μ.

Exercice 2 On définie pour tout $n \geq 0$, la fonction $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1+\cos^n x}{1+x^2} & : x \geq 0 \\ 0 & : \text{ sinon} \end{cases}$$

(a) Montrer que f_n est $\lambda-$intégrable, pour tout $n \geq 0$.

(b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f_n d\lambda$.

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
1- Montrer que f est borélienne (mesurable).
2- Définissons la suites $\{f_n\}_{n\geq 1}$ par

$$f_n(x) = n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right]; \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Caculer $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$. Que peut-on conclure?

Exercice 4 On définie sur $\mathbb{R}$ la fonction F par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \sin(x+t)\, e^{-t} dt$$

1- Montrer que F est bien définie sur et continue sur $\mathbb{R}$.
2- Montrer que la fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice Supplémentaire On définit la fonction $f(x,y) = 2e^{-2xy} - e^{-xy}$ sur $\mathbb{R}^2$.

1- Montrer que $\int\limits_0^1 f(x,y)dy > 0$, pour tout $x \in]0,+\infty[$.

2- En déduire que $\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^1 f(x,y)dydx \neq \int\limits_0^1\int\limits_0^{+\infty} f(x,y)dxdy$. Que peut-on conclure?

Corrigé de l'examen.

Exercice 1

I-

a) Faux (0.5 pt), car $|f|$ est intégrable au sens de Lebesgue $\Longleftrightarrow$ $|f|$ est intégrable au sens de Riemann $\Longrightarrow$ f est intégrable au sens de Riemann.(0.5 pt)

b) Vraie (0.5 pt), car si f est une fonction en escalier, elle est de la forme $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i . \mathbb{I}_{A_i}$, où $A_i = [a_i, a_{i+1}[$.(0.5 pt)

c) Faux (0.5 pt), car par définition A est négligeable alors, $\exists B$ une partie mesurable telle que $A \subset B$ et $\mu(B) = 0$..(0.5 pt)

II-

(a) Soient $E \neq \emptyset$ et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ est dite $\sigma-$algèbre sur E si on a

$$\begin{cases} i)\ E\ \ (\text{ou } \emptyset) \in \mathcal{A} \\ ii)\ \text{Si } A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A} \\ iii)\ \text{Si }\ (A, B) \in \mathcal{A}^2 \implies A \cup B \in \mathcal{A} \qquad\qquad (1.5\ pts) \\ iv)\ \text{Soit }\ \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \implies \bigcup\limits_{n\geq 0} A_n \in \mathcal{A} \end{cases}$$

(b) Une mesure.μ sur un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$ est une application définie de $\mathcal{A}$ vers $\overline{\mathbb{R}}_+$ vérifiant

$$\begin{cases} i)\ \mu(\emptyset) = 0 \\ ii)\ \text{Soit }\ \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \text{ telle que } A_n \cap A_m = \emptyset \text{ pour } n \neq m,\ \text{alors } \mu\left(\bigcup\limits_{n\geq 0} A_n\right) = \sum\limits_{n\geq 0} \mu(A_n) \end{cases} \quad (1.5\ pts)$$

Exercice 2

(a) f_n est continue sur $\mathbb{R}^*$ alors elle est borélienne pour tout $n \geq 0$. En plus on a

$$|f_n(x)| = \left|\frac{1+\cos^n x}{1+x^2}\right| .\mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(x) \leq \frac{2}{1+x^2}.\mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(x) = g(x), \forall n\ \ (0.5\ pt)$$

et

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}} g(x)d\lambda &= \int\limits_{\mathbb{R}_+} \frac{2}{1+x^2} d\lambda = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{2dx}{1+x^2}\, (g \text{ est continue et positive sur} \mathbb{R}_+) \\ &= [2\arctan\ x]_{x=0}^{x\to+\infty}\, (0.25\ pt) = \pi < +\infty\, (0.25\ pt) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ (0.25 pt) $\Longrightarrow f_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, pour tout $n \geq 0$.(0.25 pt)

(b)

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{1}{1+x^2}.\mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(x),\ \text{pour } x \neq k\pi \text{ où } k \in \mathbb{N} \quad (0.5\ pt)$$

alors $\{f_n\}_n$ converge p.p. sur $\mathbb{R}$. Comme $\{f_n\}_n$ est dominée par une fonction intégrable, alors d'aprés le T.C.D. (0.5 pt) on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} f_n d\lambda \,(0.5\ pt) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{1+x^2} d\lambda \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}\,(0.5\ pt) = [\arctan\ x]_{x=0}^{x\to+\infty} = \pi/2.\,(0.5\ pt)\end{aligned}$$

<u>Exercice 3</u>

1) f est une fonction dérivable $\Longrightarrow f$ est continue (0.5 pt) $\Longrightarrow f$ est borélienne.(0.5 pt)

2) Comme f est dérivable on écrit:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right]}{\frac{1}{n}} = f'(x)\,.\,(1\ pt)$$

f(f est mesurable $\Longrightarrow \{f_n\}_n$ est une suite de fonctions mesurables (0.5 pt) $\Longrightarrow f' = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ est aussi mesurable.(0.5 pt)

<u>Exercice 4</u> $F(x) = \int_0^{+\infty} \sin(x+t)\, e^{-t} dt$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

1- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \longmapsto f(x,t) = \sin(x+t)\,e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ (0.5 pt)et elle vérifie

$$|f(x,t)| \le e^{-t}\,(0.5\ pt) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)\,,(0.25\ pt)$$

donc F est bien définie sur $\mathbb{R}\,(0.25\ pt)$.

La fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}\,(0.5\ pt) \Longrightarrow F$ est aussi continue sur $\mathbb{R}$ $(0.5\ pt)$.

2- La fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est dérivable (0.5 pt) et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\cos(x+t)\,e^{-t}\right|(0.5\ pt) \le e^{-t} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)\,(0.5\ pt)\,.$$

Donc F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \cos(x+t)\,e^{-t}dt,\ \text{pour tout } x \in \mathbb{R}\,(0.5\ pt)$$

La fonction $x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}\,(0.5\ pt) \Longrightarrow F'$ est aussi continue sur $\mathbb{R}$ $(0.5\ pt)$.

Par conséquent F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.(0.5 pt)

Exercice Supplémentaire

1-

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x,y)dy &= \int_0^1 \left(2e^{-2xy} - e^{-xy}\right) dy = \left[-\frac{e^{-2xy}}{x}\right]_{y=0}^{y=1} - \left[-\frac{e^{-xy}}{x}\right]_{y=0}^{y=1} (0.25\ pt)\\ &= \frac{e^{-x}}{x}\left(1-e^{-x}\right)(0.25\ pt) > 0, \text{pour tout } x \geq 0.\,(0.25\ pt)\end{aligned}$$

2- $\int_0^1 f(x,y)dy > 0 \Longrightarrow \int_0^{+\infty}\int_0^1 f(x,y)dydx > 0.\,(0.25\ pt)$

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^{+\infty} f(x,y)dxdy &= \int_0^1 \left[\left(2e^{-2xy} - e^{-xy}\right) dx\right] dy\\ &= \int_0^1 \left(\left[-\frac{e^{-2xy}}{y}\right]_{x=0}^{x=1} - \left[-\frac{e^{-xy}}{y}\right]_{x=0}^{x=1}\right) dy\,(0.25\ pt)\\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y}\right) dy = 0.\,(0.25\ pt)\end{aligned}$$

Donc $\int_0^{+\infty}\int_0^1 f(x,y)dydx \neq \int_0^1\int_0^{+\infty} f(x,y)dxdy\,(0.25\ pt) \Longrightarrow f \notin \mathcal{L}^1\left(|0,+\infty| \times [0,1]\right)(0.25\ pt)\,.$