

# Méthodes de Monte Carlo : Calculs d'intégrales

Mohamed CHERFI

Faculté des Sciences Exactes et Informatique  
Université Hassiba Benbouali de Chlef



# Plan du Cours

Ce chapitre a pour objectif d'introduire les méthodes de Monte Carlo pour approximer des intégrales.

- ▶ méthodes de Monte Carlo
- ▶ réduction de la variance
- ▶ échantillonnage préférentiel

- ▶ Les méthodes de Monte Carlo permettent d'approximer des quantités comme moyenne, variance, probabilités, ...
- ▶ Dans tous les cas le principe est de considérer la quantité comme une espérance mathématique ; exemples :
  - La variance :

$$\mathbb{V}[Z] = \mathbb{E} \left[ (Z - \mathbb{E}[Z])^2 \right] = \mathbb{E}[X], \text{ avec } X = (Z - \mathbb{E}[Z])^2.$$

- La probabilité :

$$\mathbb{P}[Z \in A] = \mathbb{E} \left[ \mathbb{1}_{\{Z \in A\}} \right] = \mathbb{E}[X], \text{ avec } X = \mathbb{1}_{\{Z \in A\}}.$$

- L'intégrale :

$$\int g(z) \, dz = \int \frac{g(z)}{f(z)} f(z) \, dz = \mathbb{E}[X], \text{ avec } X = \frac{g(Z)}{f(Z)} \text{ et } Z \sim f.$$

# Principe

Supposons que l'on veuille calculer une quantité  $I$ . La première étape est de la mettre sous forme d'une espérance  $I = \mathbb{E}[X]$  avec  $X$  une variable aléatoire.

- ▶ Si on sait simuler des variables  $X_1, X_2, \dots$  indépendantes et identiquement distribuées, alors nous pouvons approcher  $I$  par

$$I \approx \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

avec  $N \ll \text{grand} \gg$ , sous réserve d'application de la loi des grands nombres. C'est ce type d'approximation que l'on appelle « **méthode de Monte-Carlo** »

- ▶ L'estimateur de Monte Carlo est obtenu comme une moyenne empirique  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ , où les  $X_i$  sont des variables aléatoires.

# Moyenne et Variance

Considérons l'estimateur classique  $\hat{I}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

- Biais de l'estimateur :

$$\mathbb{E}[\hat{I}_n] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[X] = I.$$

$\hat{I}_n$  est un estimateur sans biais.

- Variance de l'estimateur

$$\mathbb{V}[\hat{I}_n] = \mathbb{V}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{V}[X_i] = \frac{\sigma^2}{n}.$$

## Exemple

On s'intéresse à l'estimation de l'intégrale

$$I = \int_0^1 e^u \, du.$$

**1** L'estimateur de Monte-Carlo standard est

$$\hat{I}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{U_i},$$

où les  $U_i$  sont i.i.d uniformes sur  $[0, 1]$ .

**2** Par le Théorème Central Limite on a

$$\sqrt{n}(\hat{I}_n - I) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$

avec

$$\sigma^2 = \mathbb{V}(e^U) = \mathbb{E}(e^{2U}) - \mathbb{E}^2(e^U) = \frac{1}{2}(e^2 - 1) - (e - 1)^2 = 0.242$$

# Échantillonnage préférentiel

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\varphi(x)] &= \int \varphi(x) f(x) \, dx \\ &= \int \varphi(x) \frac{f(x)}{g(x)} g(x) \, dx, \quad g > 0\end{aligned}$$

Au lieu de simuler les  $X_i$  selon la densité originale  $f$  de  $X$ , on simule selon une densité  $g$  qui favorise les valeurs de  $X$  dans la zone d'importance (importance sampling).

En considérant la représentation

$$I = \mathbb{E}_f[\varphi(X)] = \mathbb{E}_g\left[\varphi(Y) \frac{f(Y)}{g(Y)}\right]$$

## Échantillonnage préférentiel (suite)

On propose l'estimateur

$$\tilde{I}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(Y_i) \frac{f(Y_i)}{g(Y_i)},$$

où les  $Y_i$  sont simulées à partir de la densité  $g$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\tilde{I}_n] &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_g \left[ \varphi(Y_i) \frac{f(Y_i)}{g(Y_i)} \right] = \mathbb{E}_g \left[ \varphi(Y) \frac{f(Y)}{g(Y)} \right] \\ &= \int \varphi(y) \frac{f(y)}{g(y)} g(y) \, dy = \int \varphi(y) f(y) \, dy = I \end{aligned}$$

Donc  $\tilde{I}_n$  est un estimateur sans biais de  $I$ .



## Échantillonnage préférentiel (suite)

On a  $\tilde{I}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} I$  (par la loi fort des grand nombre)

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(\tilde{I}_n) &= \frac{1}{n} \mathbb{V}_g \left( \varphi(Y) \frac{f(Y)}{g(Y)} \right) = \frac{1}{n} \left[ \mathbb{E}_g \left[ \varphi^2(Y) \frac{f(Y)^2}{g(Y)^2} \right] - I^2 \right] \\ &= \frac{1}{n} \left[ \mathbb{E}_f \left[ \varphi^2(X) \frac{f(X)}{g(X)} \right] - I^2 \right].\end{aligned}$$

Car

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_g \left[ \varphi^2(Y) \frac{f(Y)^2}{g(Y)^2} \right] &= \int \varphi(y)^2 \frac{f(y)^2}{g(y)^2} g(y) \, dy \\ &= \int \varphi(y)^2 \frac{f(y)}{g(y)} f(y) \, dy \\ &= \mathbb{E}_f \left[ \varphi^2(X) \frac{f(X)}{g(X)} \right].\end{aligned}$$

## Échantillonnage préférentiel (suite)

On rappelle l'estimateur standard :  $\hat{I}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(X_i)$ . On a

$$\mathbb{V}(\tilde{I}_n) \leq \mathbb{V}(\hat{I}_n) = \frac{1}{n} \left[ \mathbb{E} [\varphi(x)^2] - I^2 \right]$$

$$\mathbb{V}(\tilde{I}_n) - \mathbb{V}(\hat{I}_n) \leq 0 \text{ si } \mathbb{E}_f \left[ \varphi^2(X) \frac{f(X)}{g(X)} \right] \leq \mathbb{E}_f [\varphi^2(X)]$$

Si  $\mathbb{E}_f \left[ \varphi^2(X) \frac{f(X)}{g(X)} \right] = I^2$ . Le choix optimal de la densité  $g$  est

$g_{opt}(x) = \frac{\varphi(x)f(x)}{I}$ . On remplace :

$$\mathbb{E} \left[ \frac{\varphi^2(X)f(X)}{g_{opt}(X)} \right] = \mathbb{E}_f \left[ \frac{\varphi^2(X)f(X)}{\varphi(X)f(X)} \times I \right] = I \times \mathbb{E}_f [\varphi(X)] = I \times I = I^2$$