Examen Final

EXERCICE N° 1:

1. On considère la variable aléatoire X de fonction de répartition $\mathbb{F}$. Montrer que la variable aléatoire définie par $U = \mathbb{F}(X)$, suit la loi uniforme $\mathcal{U}[0, 1]$.
2. On considère la variable aléatoire U qui suit la loi uniforme $\mathcal{U}[0, 1]$ et une fonction de répartition $\mathbb{F}$. Montrer que la variable aléatoire définie par $X = \mathbb{F}^{-1}(U)$, a pour fonction de répartition $\mathbb{F}$.

Une variable aléatoire est de loi uniforme sur $[a, b]$, si sa densité est définie comme $f(x) = \dfrac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$.

3. Montrer que si U suit la loi uniforme $\mathcal{U}[0, 1]$, alors $(b-a)U + a$ suit la loi uniforme $\mathcal{U}[a, b]$.
4. Quelle est la loi de $a(2U - 1)$?
5. Déterminer la loi de la variable aléatoire X en sortie du code suivant :

```
X<-2+runif(1)-1
```

EXERCICE N° 2:
On considère la variable aléatoire X de densité

$$f(x) = Cx\mathrm{e}^{-\frac{4}{15}x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}_+.$$

1. Calculer C pour que f soit bien une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition $\mathbb{F}_X$ de X.
3. Écrire une fonction qui permet de simuler n variables aléatoires de X.

Soit g une densité de probabilité définie par :

$$g(x) = K\mathrm{e}^{-\frac{2}{15}x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}_+.$$

4. Déterminer K de sorte que g soit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}_+$.
5. Trouver la plus petite constante M telle que $f(x) \leq Mg(x)$ sur $[0, +\infty[$.
6. Donner une représentation graphique des courbes de f et Mg.
7. Utiliser la méthode de rejet pour simuler à partir de f avec l'enveloppe g.

Université Hassiba Benbouali–Chlef
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

Examen Final

EXERCICE N° 1:

1. On considère la variable aléatoire définie par $U = \mathbb{F}(X)$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U \leq u) &= \mathbb{P}(\mathbb{F}(X) \leq u) = \mathbb{P}\left(X \leq \mathbb{F}^{-1}(u)\right) \\ &= \mathbb{F}\left(\mathbb{F}^{-1}(u)\right) = u. \end{aligned}$$

Donc U suit la loi uniforme $\mathcal{U}[0,1]$.

2. On considère la variable aléatoire définie par $X = \mathbb{F}^{-1}(U)$, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq x) &= \mathbb{P}\left(\mathbb{F}^{-1}(U) \leq x\right) = \mathbb{P}\left(U \leq \mathbb{F}(x)\right) \\ &= \mathbb{F}(x) \end{aligned}$$

Il s'en suit que X a pour fonction de répartition $\mathbb{F}$.

Une variable aléatoire est de loi uniforme sur $[a,b]$, si sa densité est définie comme $f(x) = \dfrac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$.

3. MSoit $V = (b-a)U + a$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V \leq v) &= \mathbb{P}((b-a)U + a \leq v) \\ &= \mathbb{P}\left(U \leq \frac{v-a}{(b-a)}\right) = \frac{v-a}{(b-a)}. \end{aligned}$$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi uniforme $\mathcal{U}[a,b]$.

4. La variable aléatoire $a(2U-1)$ suit la loi uniforme $\mathcal{U}[-a,a]$
5. La variable aléatoire X en sortie du code

```
X<-2*runif(1)-1
```

suit la loi $\mathcal{U}[-1,1]$.

EXERCICE N° 2:
On considère la variable aléatoire X de densité

$$f(x) = Cx\mathrm{e}^{-\frac{4}{15}x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}_+.$$

1. Pour que f soit une densité, il faut que $C \geq 0$ et :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1 &\Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} Cx\mathrm{e}^{-\frac{4}{15}x^2}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\,\mathrm{d}x = 1 \\ &\Longrightarrow C \times -\frac{15}{8}\mathrm{e}^{-\frac{4}{15}x^2}\Big]_0^{+\infty} = 1 \\ &\Longrightarrow C = \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

2. La fonction de répartition de X :

$$\mathbb{F}_X(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{4}{15}x^2}.$$

3. Pour générer n réalisations de X, on utilise la méthode d'inversion. En résolvant l'équation $U = \mathbb{F}(X)$, on a :

$$X = \sqrt{-\frac{15}{4}\log(1-U)}$$

```
myf<-function(n){
x<-sqrt(-(15/4)*log(runif(n)))
return(x)
}
```

Soit g une densité de probabilité définie par :

$$g(x) = K\mathrm{e}^{-\frac{2}{15}x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

4. Déterminer K de sorte que g soit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$. Pour que g soit une densité, il faut que $K \geq 0$ et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = 1 \implies \int_{0}^{+\infty} K\mathrm{e}^{-\frac{2}{15}x^2}\,\mathrm{d}x = 1$$
$$\implies K = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15\pi}}.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

5. En faisant une étude de variation, on trouve facilement que $M = \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-1/2}$
6. Donner une représentation graphique des courbes de f et Mg

```
M <- sqrt(2*pi/exp(1))
f <- function(x) {(8/15)*x*exp(-(4/15)*x^2)}
g <- function(x) {2*dnorm(x,0,sqrt(15/4))}
x <- seq(0,3.5,length=200)
plot(x,M*g(x),'l',col="red",lwd=2,xlab="",ylab="",ylim=c(0,1.3))
lines(x,f(x),col="blue",lwd=2)
abline(h=0,v=0)
legend("topright",legend=c(expression(Mg(x)),expression(f(x))),col=c
    ("red","blue"),lwd=2)
```

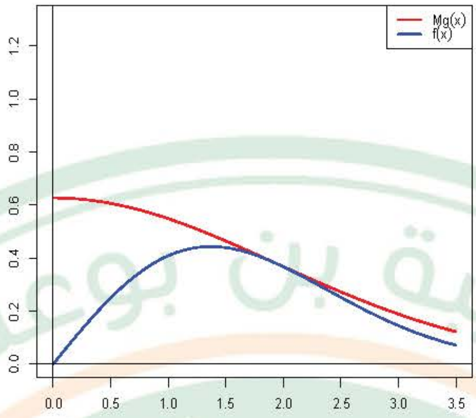


FIGURE 1 – Représentation graphique des courbes de f et Mg

7. L'algorithme d'acceptation-rejet peut être défini de la manière suivante :
   (i) générer Y selon la densité g c'est à dire la loi normale $\mathcal{N}(0, \frac{15}{4})$; et U selon la loi uniforme $\mathcal{U}[0, 1]$;
   (ii) tester si $U \leq \frac{4}{\sqrt{15}} Y e^{\left(\frac{1}{2} - \frac{2Y^2}{15}\right)} \mathbb{1}_{Y \geq 0}$:
      (a) si c'est vrai, accepter la valeur Y et on pose $X = Y$;
      (b) sinon, rejeter Y et recommencer à partir de la première étape.

```
myfrejet<-function(n){
Y <- rnorm(n, sd=sqrt(15/4))
U <- runif(n)
A <- U < (4/sqrt(15)) * Y * exp(.5 - (2/15)*Y^2) * (Y >= 0)
Y[A]
}
```

Examen Final

EXERCICE N° 1: On considère le générateur de nombres pseudo-aléatoires suivant :

$$x_i = (5 \times x_{i-1} + 1) \bmod 16.$$

On prend $x_0 = 5$.

1. Donner la période de ce générateur.
2. En utilisant ce générateur, simuler 5 valeurs successives entre $[0, 1]$.

EXERCICE N° 2:
On considère la variable aléatoire X dont la loi est donnée par :

x	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X = x)$	0.2	0.3	0.1	0.3	0.1

1. Définir $\mathbb{F}_X$, la fonction de répartition de X et construire sa représentation graphique.
2. Donner l'algorithme qui permet de simuler à partir de la variable aléatoire X.
3. Utiliser les valeurs suivantes pour simuler à partir de X :

$$u_1 = 0.15,\ u_2 = 0.61,\ u_3 = 0.65,\ u_4 = 0.43$$

EXERCICE N° 3:
On considère la variable aléatoire Y de densité

$$g(y) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y^2}, \qquad y \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer la fonction de répartition $\mathbb{G}_Y$ de Y.
2. Simuler à partir de la variable aléatoire Y.

Soit f la densité de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

3. Trouver la plus petite constante M telle que $f(x) \le M g(x)$.
4. Utiliser la méthode de rejet pour simuler à partir de f avec l'enveloppe g.
5. Utiliser les valeurs suivantes pour simuler à partir de g, puis à partir de f :

$$u_1 = 0.02,\ u_2 = 0.99,\ u_3 = 0.15,\ u_4 = 0.81,\ u_5 = 0.57$$

Examen Final

EXERCICE N° 1: On considère le générateur de nombres pseudo-aléatoires suivant :

$$x_i = (5 \times x_{i-1} + 1) \bmod 16.$$

On prend $x_0 = 5$.

1. La sortie du générateur est :

   $x_1 = 10,\ x_2 = 3,\ x_3 = 0,\ x_4 = 1,\ x_5 = 6,\ x_6 = 15,\ x_7 = 12,\ x_8 = 13,\ x_9 = 2,\ x_{10} = 11,\ x_{11} = 8,$
   $x_{12} = 9,\ x_{13} = 14,\ x_{14} = 7,\ x_{15} = 4,\ x_{16} = 5,\ x_{17} = 10, \ldots$

   Donc la période de ce générateur est égale à 16

2. En utilisant ce générateur, on obtient les 5 valeurs suivante entre $[0,1]$:

$$u_0 = 0.3125,\ u_1 = 0.6250,\ u_2 = 0.1875,\ u_3 = 0,\ u_4 = 0.0625,\ u_5 = 0.3750$$

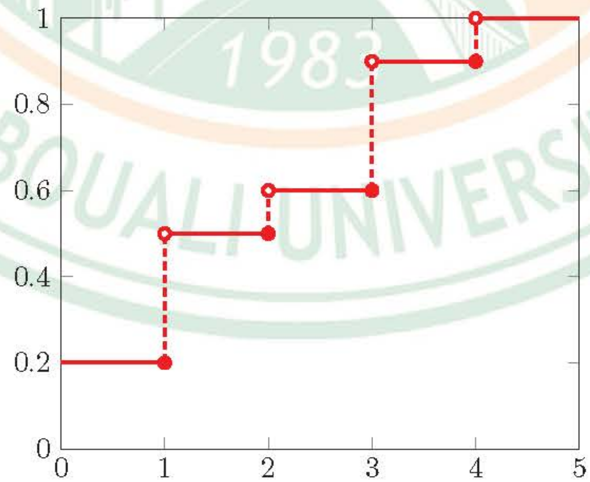
EXERCICE N° 2:
On considère la variable aléatoire X dont la loi est donnée par :

x	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X = x)$	0.2	0.3	0.1	0.3	0.1

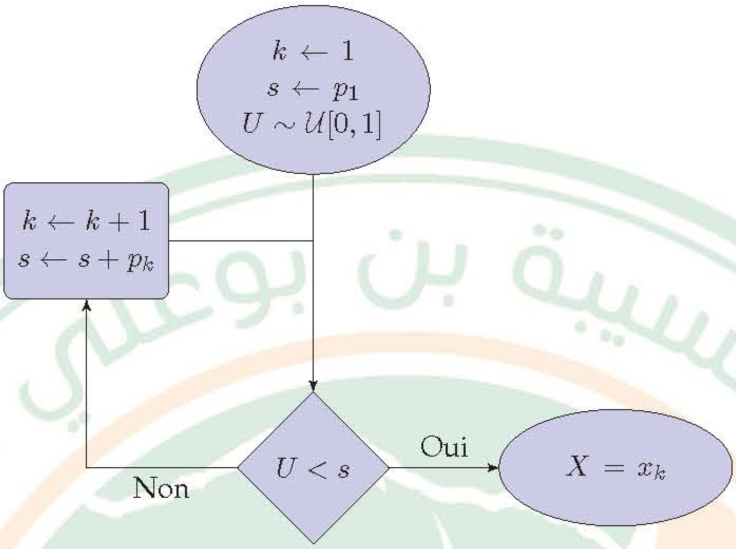
1. La fonction de répartition de X

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X \leq 1) = 0.2\\
&\mathbb{P}(X \leq 2) = 0.2 + 0.3 = 0.5\\
&\mathbb{P}(X \leq 3) = 0.2 + 0.3 + 0.1 = 0.6\\
&\mathbb{P}(X \leq 4) = 0.2 + 0.3 + 0.1 + 0.3 = 0.9\\
&\mathbb{P}(X \leq 5) = 0.2 + 0.3 + 0.1 + 0.3 + 0.1 = 1
\end{aligned}$$

   On peut la représenter graphiquement par :



2. L'algorithme qui permet de simuler à partir de la variable aléatoire X.



3. On applique l'algorithme précédent sur les valeur suivantes pour simuler à partir de X :

$$u_1 = 0.15,\ u_2 = 0.61,\ u_3 = 0.65,\ u_4 = 0.43$$

On obtient les valeurs suivantes :

$$x_1 = 1,\ x_2 = 4,\ x_3 = 4,\ x_4 = 2$$

EXERCICE N° 3:
On considère la variable aléatoire Y de densité

$$g(y) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y^2}, \qquad y \in \mathbb{R}.$$

1. La fonction de répartition $\mathbb{G}_Y$ de Y est donnée par :

$$\mathbb{G}_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\arctan(t)\Big|_{-\infty}^{y} = \frac{1}{\pi}\arctan(y) + \frac{1}{2}$$

2. En résolvant l'équation $U = \mathbb{G}_Y(Y)$, on a :

$$U = \frac{1}{\pi}\arctan(Y) + \frac{1}{2} \Longrightarrow Y = \tan\left(\pi(U - \frac{1}{2})\right)$$

Soit f la densité de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

3. En faisant une étude de variation, on trouve facilement que $M = \sqrt{\frac{2\pi}{\mathrm{e}}}$.

En effet, on pose $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}}{\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}(1+x^2)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$. On a

$$h'(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(2x - x(1+x^2))\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}x(1-x^2)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Donc le maximum est atteint pour $x = \pm 1$. Alors $M = h(1) = \sqrt{\frac{2\pi}{\mathrm{e}}}$.

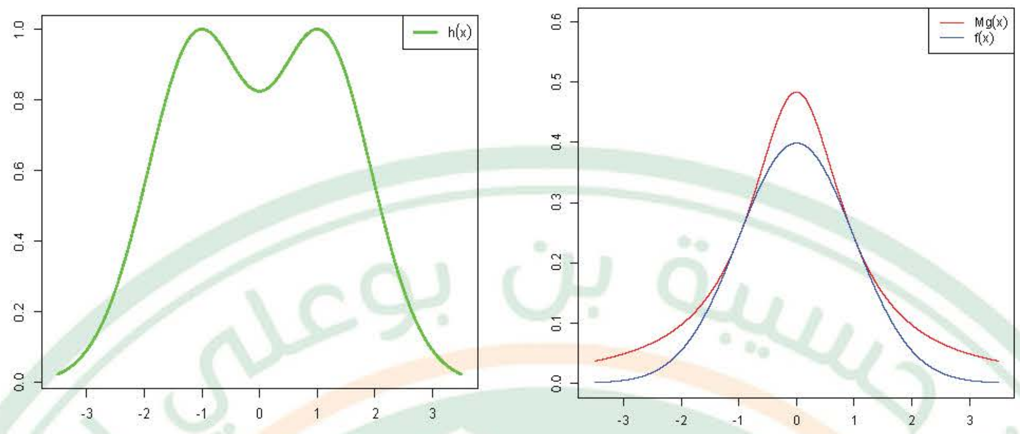


FIGURE 1 – Représentation graphique des courbes de h, f et Mg

4. L'algorithme d'acceptation-rejet peut être défini de la manière suivante :
   (i) générer Y selon la densité g c'est à dire la loi Cauchy ; et U selon la loi uniforme $\mathcal{U}[0, 1]$;
   (ii) tester si $U \leq \frac{\sqrt{e}}{2} \frac{e^{-\frac{1}{2}Y^2}}{1+Y^2}$:
      (a) si c'est vrai, accepter la valeur Y et on pose $X = Y$;
      (b) sinon, rejeter Y et recommencer à partir de la première étape.
5. On a

$$Y_1 = 15.8945448,\ Y_2 = 31.8205160,\ Y_3 = -1.9626105,\ Y_4 = 1.4714553,\ Y_5 = 0.2235265$$

On rejette Y_1, on rejette Y_2, on accepte Y_3, on accepte Y_4, on accepte Y_5.

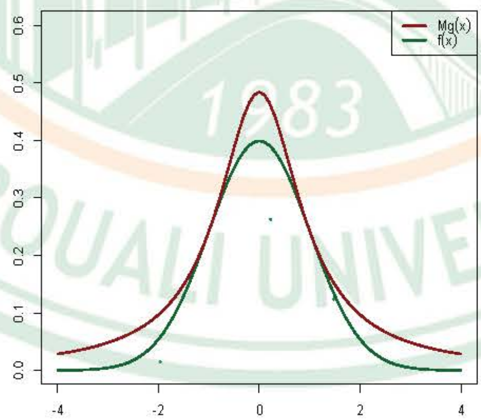


FIGURE 2 – Illustration de la méthode de rejet.