Université Hassiba Benbouali Chlef
Faculté des Sciences Exactes & Informatique
Département de Mathématiques

Année universitaire 2021/2022
Master II : Math.Appli & Stat
Module : Stat Non Parametrique

Fiche TD $N =^\circ$ **02 :** Estimation NP de la fonction de répartition

Exercice 01: Loi discrètes et lois continues
1. Dire si la fonction de rèpartition est (à priori) discrète ou continue
– on tire un ou plusieurs dès
– la taille des enfants d'une classe de maternelle
–le nombre de fautes par tranche de 1000 mots
– le temps mis par des athlètes pour courire un 100 mètre
– les salaires dans une entreprise
2. Est-ce que la fonction de répartition des lois suivantes est discrète ou continue ? Donner la formule de la densitè/de la loi de probabilité suivant les cas.
– loi de Cauchy
– loi exponentielle de paramètre λ.
– loi binomiale
– loi multinomiale
– loi normale
– loi de Poisson

Exercice 02:

1. Donner un exemple de lois discrète, et absolument continu. Tracer les fonctions de répartitions de ces 2 lois.
2. Soit X une variable aléatoire dont la fonction de densité est donnée par : $f(x) = \begin{cases} x & si x \in [0;1] \\ 2-x & si x \in [1;2] \\ 0 & ailleurs \end{cases}$
   1. Déterminer la fonction de répartition F de X .
   2. Calculer son espérance et sa variance.
   3. Calculer $P(|X-1| < 1/2)$.
3. Soit X une variable aléatoire continue de densité de proba. $f(x)$ telque $f(x) = 4x(1-x^2) \quad 0 \leq x \leq 1$

   Trouver la moyenne , la médiane et le mode ?
4. Soit $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par: $[F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si x} \leq 0. \\ 1 - \exp(-x/2)\left(1 + \frac{x}{2}\right), & \text{if } x > 0; \end{cases}$

   Montrer que F est la fonction de répartition d'une loi de probabilité dont on déterminera la densité si elle existe.
5. Suppose the p.d.f. of a continuous random variable X is defined as: $[f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{si -1<x} < 0. \\ 1-x, & \text{if } 0 \leq x < 1; \end{cases}$

   Find and graph the c.d.f. $F(x)$.?
6. Calculate and draw the empirical distribution function of the following sample: $(-15.4, -8.8, 8.2, 3.4, -7.1, 4.5, -12.7, 5.2, -10.6, -11.2)$
7. On lance une pièce de monnaie deux fois. Soit X le nombre de face observées. Trouvez le CDF de X?
8. Soit X une variable aléatoire réelle de denstié f_X. La variabe aléatoire $Y = X + 1$ admet pour densité :

   (a) $f_X(y+1)$ (b) $1 + f_X(y)$ (c) $1 - f_X(y)$ (d) $f_X(y-1)$ (e) une autre

Exercice 03: Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ une suite de n v.a. i.i.d.. La fonction de répartition de X_i est $F(x)$inconnue . Soit $\widehat{F}_n(x)$ la fonction de répartition empirique estimateur de $F(x)$.

1. Déterminer la loi de $\widehat{F}_n(x)$ pour un élément x fixé dans $\mathbb{R}$.
2. Calculer $\mathbb{E}[(\widehat{F}_n(x) - F(x))^2]$ pour un élément x fixé dans $\mathbb{R}$..
3. En déduire que $\widehat{F}_n(x)$ converge en moyenne quadratique vers $F(x)$ lorsque n tend vers l'infini. Donner la vitesse de convergence.
4. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\widehat{F}_n(x) \longrightarrow^p_{n\longrightarrow\infty} F(x)$.
5. Montrer que pour tout $x\mathbb{R}, \widehat{F}_n(x)$ vérifie un théorème de limite centrale que l'on établira.
6. Diterminer l'intervalle de confiance sur $F(x)$ avec TCL.
7. Diterminer l'intervalle de confiance sur $F(x)$ on utilisant l'inégalité de Dvoretzky-Kiefer-Wolfowitz (DKW). donner par la relation $\forall n \in \mathbb{N}, \forall\epsilon > 0, \mathbb{P}(\sup_{x\in\mathbb{R}} |\widehat{F}_n(x) - F(x)| > \epsilon) \leq 2e^{-2n\epsilon^2}$. ensuite comparer les deux intervalle de confiance.

Exercice 04:

On dit que Q_p est un quantile d'ordre p de la v.a. X si :

$$P(X \leq Q_p) \geq p \quad et \quad P(X \geq Q_p) \geq 1 - p.$$

On considère une suite de v.a. iid (X_i) de fonction de répartition continue F et strictement croissante. On associe à F son inverse généralisée F^{-1} définie par :

$$\forall p \in]0, 1[; \quad F^{-1}(p) = \inf\{x \in R; F(x) \geq p\}$$

Soit f_θ la densité définie sur $\mathbb{R}$ par $f_\theta(t) = \dfrac{\theta}{1 + t\theta}$ où θ désigne un réel supérieur à 2.

1. Calculer la fonction de répartition associée et notée F_θ .
2. Calculer la fonction de répartition associée et notée F_θ^{-1} .
3. En déduire le quantile théorique d'ordre 1/4.
4. Montrer que $Q_{p,n}$ converge p.s. vers Q_p (utiliser le théorème de G.C.).
   Remarque : On peut montrer que si la loi de X admet une densité strictement positive au voisinage de x_p , alors $\sqrt{n}(Q_{p,n} - x_p)$ converge en loi vers la loi normale $N(0, \sigma_p^2)$ avec $\sigma_p^2 = p(1-p)/f(x_p)^2$..

Exercice 04: Loi uniforme

L'instruction *rand(1,10)* permet de générer n = 10 nombres pseudo-aléatoires de loi $\mathcal{U}$, la loi uniforme sur $[0, 1]$. Voici le résultat donné lors de l'appel de cette fonction :

0.2113249 0.7560439 0.0002211 0.3303271 0.6653811 0.6283918 0.8497452 0.6857310 0.8782165 0.0683740

1. Quelle est la fonction de répartition F de la loi $\mathcal{U}$? Déterminer la fonction de répartition empirique $F_n(t)$ associée aux observations et tracer F et F_n sur un même graphique.
2. Construire le test de Kolmogorov-Smirnov de niveau 5% de l'hypothèse H_0: "les nombres sont indépendants et de loi U " contre H_1 : "ils ne le sont pas".

Ex2

$$\mathbf{5.}F(x) = \begin{cases} 0, & \text{for } x \leq -1 \\ \frac{1}{2}(x+1)^2, & \text{for } -1 < x \leq 0 \\ 1 - \frac{(1-x)^2}{2}, & \text{for } 0 < x < 1 \\ 1, & \text{for } x \geqslant 1 \end{cases} \qquad \mathbf{7.}F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ \frac{1}{4} & \text{for } 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4} & \text{for } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{for } x \geq 2 \end{cases}$$