Corrigé Série 1

Exercice 1
1) $\mathcal{F}$ étant une tribu, alors $\Omega \in \mathcal{F}$ et donc $\overline{\Omega} = \varnothing \in \mathcal{F}$.
2) Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille dénombrable de $\mathcal{F}$.On a

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \overline{\bigcup_{i\in I} \overline{A_i}}$$

$\forall i \in I, \overline{A_i} \in \mathcal{F}$ et on a $\bigcup\limits_{i\in I} \overline{A_i} \in \mathcal{F}$ (stabilité par réunion dénombrable)
puis $\overline{\bigcup\limits_{i\in I} \overline{A_i}} \in \mathcal{F}$ (stabilité par passage au complémentaire), d'où $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{F}$.
3) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$, comme $A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F}$ alors $\overline{B} \in \mathcal{F}$ et par suite
$A \setminus B = A \cap \overline{B} \in \mathcal{F}$.

Exercice 2
Soient $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux tribus sur Ω,si $\in \mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$, alors $\mathcal{F}$ est une tribu si:
a) $\Omega \in \mathcal{F}$: c'est le cas puisque $\Omega \in \mathcal{F}_1$ et $\Omega \in \mathcal{F}_2$ donc $\Omega \in \mathcal{F}$.
b) la famille $\mathcal{F}$ est stable par passage au complémentaire, en effet
$\overline{A} \in \mathcal{F}_1$ et $\overline{A} \in \mathcal{F}_2$ donc $\overline{A} \in \mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$
c) la famille $\mathcal{F}$ est stable par intersection dénombrable
Si $A_i \in \mathcal{F}$, par stabilité de $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$, on a

$$\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{F}_1 \text{ et } \bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{F}_2 \text{ alors } \bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}$$

$\varnothing \in \mathcal{F}$ car $\varnothing = \overline{\Omega} \in \mathcal{F}_1$ et à $\mathcal{F}_2$,donc $\varnothing \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}$.
Enfin, la famille $\mathcal{F}$ est stable par réunion dénombrable grâce à la stabilité par passage au complémentaire dans l'intersection dénombrable.
Concernant la réunion de deux tribus, on montre que ce n'est pas une tribu, pour cela, il suffit de trouver un contre-exemple.
Si $\Omega = \{1, 2, 3\}$

$$\mathcal{F}_1 = \{\varnothing, \{1\}; \{2,3\}; \{1,2,3\}\}, \quad \mathcal{F}_2 = \{\varnothing; \{2\}; \{1,3\}; \{1,2,3\}\}$$

On peut développer $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 = \{\varnothing, \{1\}; \{2\}; \{1,3\}; \{2,3\}; \{1,2,3\}\}$
Mais $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ n'est pas une tribu car $\{1,2\} = \{1\} \cup \{2\} \notin \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$.

Exercice 3
1) L'évènement $\left\{X^2 \leq x\right\}$ s'écrit

$$\left\{X^2 \leq x\right\} = \left\{-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}\right\} \in \mathcal{F}$$

L'évènement $\left\{\frac{1}{X} \leq x\right\}$ s'écrit $\left\{\frac{1}{X} \leq x\right\} \cap \Omega$, en considérant une partition de Ω suivant les valeurs de la v.a. X, soit

$$\Omega = \{X < 0\} \cup \{X > 0\} \cup \{X = 0\}$$

Il vient

$$\begin{aligned}
\left\{\frac{1}{X} \leq x\right\} &= \\
&= \left\{\left\{\frac{1}{X} \leq x\right\} \cap \{X < 0\}\right\} \cup \left\{\left\{\frac{1}{X} \leq x\right\} \cap \{X > 0\}\right\} \cup \left\{\left\{\frac{1}{X} \leq x\right\} \cap \{X = 0\}\right\} = \\
&= \{\{xX \leq 1\} \cap \{X < 0\}\} \cup \{\{Xx \geq 1\} \cap \{X > 0\}\} \\
&\quad (\text{car } \{X = 0\} = \varnothing)
\end{aligned}$$

On a ainsi, suivant les valeurs de x,

Si $x = 0, \{xX \leq 1\} \cap \{X < 0\} = \{0 \leq 1\} \cap \{X < 0\} = \Omega \cap \{X < 0\} = \{X < 0\}$

et $\{Xx \geq 1\} \cap \{X > 0\} = \{0 \geq 1\} \cap \{X > 0\} = \varnothing$ d'où $\left\{\frac{1}{X} \leq x\right\} = \{X < 0\}$

Si $x > 0, \left\{\frac{1}{X} \leq x\right\} = \left\{\left\{X \leq \frac{1}{x}\right\} \cap \{X < 0\}\right\} \cup \left\{\left\{X \geq \frac{1}{x}\right\} \cap \{X > 0\}\right\}$

(réunion d'intersection d'évènements)

Si $x < 0, \left\{\frac{1}{X} \leq x\right\} = \left\{\left\{X \geq \frac{1}{x}\right\} \cap \{X < 0\}\right\}$

$\left(\text{car } \left\{\left\{X \leq \frac{1}{x}\right\} \cap \{X > 0\}\right\} = \varnothing\right)$

Ainsi $\frac{1}{X}$ est une v.a.

2)

$$\{\omega \mid aX(\omega) + b \leq x\} = \{\omega \mid aX(\omega) \leq x - b\} = \begin{cases} \left\{X(\omega) \leq \frac{x-b}{a}\right\} & si \quad a > 0 \\ \left\{X(\omega) \geq \frac{x-b}{a}\right\} & si \quad a < 0 \\ \Omega \quad si \quad a = 0 \text{ et } x \geq b \\ \varnothing \quad si \quad a = 0 \text{ et } x < b \end{cases}$$

On voit que $aX + b$ est bien une v.a.

Soit F_X la fonction de répartition de X et $Y = |X|$

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(|X| \leq y) = P(-y \leq X \leq y) = \\
&= F_X(y) - F_X(-y) + P(X = -y, y > 0)
\end{aligned}$$

Soit $Z = aX + b$

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(aX + b \leq z) = \begin{cases} P\left(X \leq \frac{z-b}{a}\right) & si \quad a > 0 \\ P\left(X \geq \frac{z-b}{a}\right) & si \quad a < 0 \end{cases}$$

D'où

$$F_Z(z) = \begin{cases} F_X\left(\frac{z-b}{a}\right) & si \quad a > 0 \\ 1 - F_X\left(\frac{z-b}{a}\right) + P\left(X = \frac{z-b}{a}\right) & si \quad a < 0 \end{cases}$$

Exercice 4

I_A est la fonction indicatrice de A,avec $P(A) = p$,on a support de $I_A = I_A(\Omega) = \{0, 1\}$

Soit la loi de la v.a.(discrète) I_A

$I_A(\omega) = x_i$	0	1
$P(I_A(\omega) = x_i)$	$1-p$	p

$$E(I_A) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p = P(A)$$

$$F_{I_A}(x) = P(I_A \leq x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ 1-p & si \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Exercice 5

Soit F_X la fonction de répartition de X, alors
$F_X(x) = P(X \leq x)$ et la densité f_X de X est obtenue par dérivation de F_X
Soit F_Y la fonction de répartition de $Y = kX$,avec $k > 0$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(kX \leq y) = \\ &= P\left(X \leq \frac{y}{k}\right) = F_X\left(\frac{y}{k}\right) \end{aligned}$$

d'où par dérivation de F_Y par rapport à y, f_Y désignant la densité de Y il vient

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = F'_X\left(\frac{y}{k}\right) = \frac{1}{k} f_X\left(\frac{y}{k}\right)$$

Sachant que $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx = 1$, on pourra voir aussi que f_Y est bien une densité et vérifie

$$\int_{\mathbb{R}} f_Y(y)\,dy = 1$$

Exercice 6

On a $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et comme $Y = X^2 + 2$, on aura
$Y(\Omega) = \{3, 6, 11, 18, 27, 38\}$
Si $(P(Y = y))_{y \in Y(\Omega)}$ désigne la loi de la v.a.Y,déterminons la.
Si $y \notin Y(\Omega)$, alors $P(Y = y) = 0$
Si $y \in Y(\Omega)$, on écrit

$$\begin{aligned} P(Y = y) &= P\left(X^2 + 2 = y\right) = \\ &= P\left(X^2 = y - 2\right) = \\ &= P\left(X = \sqrt{y-2}\right) \quad \text{car } X > 0 \end{aligned}$$

et on a

$$
\begin{aligned}
P(Y=3) &= P\left(X=\sqrt{3-2}\right)=P(X=1)=\frac{1}{6}\\
P(Y=6) &= P(X=2)=\frac{1}{6}\\
P(Y=11) &= P(X=3)=\frac{1}{6}\\
P(Y=18) &= P(X=4)=\frac{1}{6}\\
P(Y=11) &= P(X=5)=\frac{1}{6}\\
P(Y=11) &= P(X=6)=\frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

On vérifie que $(P(Y=y))_{y\in Y(\Omega)}$ est bien une loi en remarquant que $\sum_{y\in Y(\Omega)} P(Y=y)=1$

En outre, la fonction de répartition F_Y de Y est donnée par

$$
F_Y(y)=\begin{cases}
0 & si\ \ y<3\\
\frac{1}{6} & si\ 3\le y<6\\
\frac{1}{3} & si\ \ 6\le y<11\\
\frac{1}{2} & si\ \ 11\le y<18\\
\frac{2}{3} & si\ \ 18\le y<27\\
\frac{5}{6} & si\ \ 27\le y<38\\
1 & si\ \ \ y\ge 38
\end{cases}
$$