Université Abou Bekr Belkaid 2021/2022
Département de Mathématiques
M1Statistiques et probabilités approfondies.
Module: Analyse numérique

Contrôle continu
Corrigé

Exercice 1 sur 6 points
1. Déterminer l'équation intégrale équivalente au problème $y'(t) = \cos(t) + y^4(t), y(0) = 1$
2. On considère le problème autonome $y'(t) = F(y)$ et le schéma numérique

$$y_{i+1} = y_i + ahF(y_i) + bhF(y_i + chF(y_i)) \qquad (S)$$

Déterminer les coefficients a, b, c pour que le schéma (S) soit au moins d'ordre 2. Le schéma peut-il être d'ordre 3?
Solution
1. [**2 points**]
En intégrant entre 0 et t l'équation $y'(t) = \cos(t) + y^4(t)$ on a

$$y(t) - y(0) = \int_0^t \big(\cos(s) + y^4(s)\big)\,ds$$

donc,l'équation intégrale est

$$y(t) = 1 + \sin(t) + \int_0^t y^4(s)\,ds$$

inversement, en dérivant l'equation précédente on obtient $y'(t) = \cos(t) + y^4(t)$ puis en remplaçant t par 0 il vient que $y(0) = 1$.
2. [**4 points**]
On pose

$$\varphi(t, y, h) = aF(y) + bF(y + chF(y))$$

Le schéma est d'ordre 2 si et seulement si

$$\begin{cases} \varphi(t, y, 0) = F(y) \\ \dfrac{\partial}{\partial h}\varphi(t, y, h) = \dfrac{1}{2}F^{[1]}(y) = \dfrac{1}{2}F'(y)F(y) \end{cases}$$

Le système est équivalent à

$$\begin{cases} aF(y) + bF(y) = F(y) \\ bcF(y)F'(y) = \dfrac{1}{2}F'(y)F(y) \end{cases}$$

Ce qui donne

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ bc = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} a = 1 - b \\ c = \dfrac{1}{2b}, \quad b \neq 0 \end{cases}$$

On obtient donc le schéma d'ordre au moins 2:

$$y_{i+1} = y_i + h\left[(1-b)\,F(y_i) + bF(y_i + \frac{1}{2b}hF(y_i))\right] \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Pour que le schéma soit d'ordre au moins 3 il faut que:

$$\frac{\partial^2}{\partial h^2}\varphi(t, y, h) = \frac{1}{3}F^{[2]}\,(y)$$

On a

$$F^{[2]}\,(y) = F(y)\,(F'(y)F(y))' = F(y)\,(F'(y))^2 + (F(y))^2\,F''(y)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial h^2}\varphi(t, y, h) &= \frac{\partial^2}{\partial h^2}\left((1-b)\,F(y) + bF(y + \frac{1}{2b}hF(y))\right) \\ &= \frac{1}{2}F(y)F'(y + \frac{1}{2b}hF(y)) \\ &= \frac{1}{4b}F^2(y)F''(y + \frac{1}{2b}hF(y)) \end{aligned}$$

On voit bien que pour tout $b \neq 0$

$$\frac{\partial^2}{\partial h^2}\varphi(t, y, 0) = \frac{1}{4b}F^2(y)F''(y) \neq \frac{1}{3}\left[F(y)\,(F'(y))^2 + (F(y))^2\,F''(y)\right] = F^{[2]}\,(y)$$

Le schéma ne peut pas être d'ordre 3.

Exercice 2 sur 8 points
On considère la famille de méthodes définies par le schéma

$$y_{n+1} = y_n + h_n\left((1-\omega) f(t_n, y_n) + \omega f(t_{n+1}, y_{n+1})\right)$$

avec $0 \leq \omega \leq 1$. Montrer qu'une telle méthode est A-stable c'est à dire que sa région de stabilité contient le demi-plan complexe $\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) < 0\}$ si et seulement si $\omega \geq \dfrac{1}{2}$.
Solution
[1 point]
On considère le problème test

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t), t > 0 \\ y(0) = 1, \lambda \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Appliqué au problème test le schéma engendre la suite définie par la formule de récurrence

$$y_{n+1} = \frac{1 + (1-\omega)\lambda h_n}{1 - \omega \lambda h_n} y_n$$

[1 point]
On pose $z_n = \lambda h_n$, pour déterminer la région de l'absolue stabilité de la méthode on considère l'inéquation

$$\left|\frac{1 + (1-\omega) z_n}{1 - \omega z_n}\right| < 1,$$

[0.5 point]
une élevation au carré nous ramène à la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'inéquation

$$|1 + (1-\omega) z_n|^2 < |1 - \omega z_n|^2 \tag{1}$$

[1 point]
en posant $z_n = x_n + iy_n$, (1) s'écrit

$$(1-2\omega) x_n^2 + 2x_n + (1-2\omega) y_n^2 < 0 \tag{2}$$

[1 point]
Si $\omega = \frac{1}{2}$ alors la condition de stabilité absolue est

$$2x_n < 0.$$

Dans ce cas la région de stabilité est $\mathbb{C}_-$ et la méthode est A-stable.
[0.5 point]
Maintenant si $\omega \neq \frac{1}{2}$ l'inéquation (2) devient

$$(1-2\omega)\left[x_n^2 + \frac{2}{1-2\omega} x_n + y_n^2\right] < 0. \tag{3}$$

[1.5 points]
Si $\omega < \frac{1}{2}$ alors $1 - 2\omega > 0$ et l'inéquation (3) donne

$$\left(x_n + \frac{1}{1-2\omega}\right)^2 + y_n < \frac{1}{(1-2\omega)^2}$$

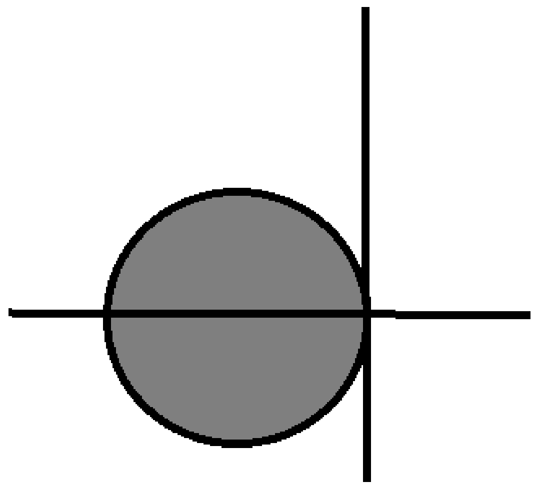

Figure 1: Région de stabilité pour $\omega < \frac{1}{2}$.

c'est l'intérieur du disque de centre $\frac{1}{2\omega-1}$ et de rayon $\frac{1}{1-2\omega}$ (voir la figure 1)
Dans ce cas la méthode n'est pas A-stable.
[1.5 points]
Si $\omega > \frac{1}{2}$ alors $1-2\omega < 0$ et l'inéquation (3) donne

$$\left(x_n + \frac{1}{1-2\omega}\right)^2 + y_n > \frac{1}{(1-2\omega)^2}$$

La région de la stablité absolue est l'extérieur du disque de centre $\frac{1}{2\omega-1} > 0$ et de rayon $\frac{1}{2\omega-1}$, elle contient le demi-plan $\mathbb{C}_-$ (voir la figure 2).

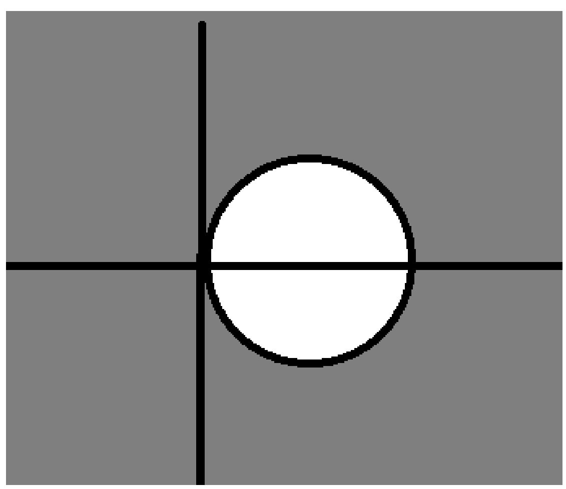

Figure 2: Région de stabilité pour $\omega > \frac{1}{2}$.

En conclusion, la méthode est A-stable si et seulement si $\omega \geq \dfrac{1}{2}$.

Exercice 3 sur 6 points

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
\frac{2}{3} & \frac{2}{27} & \frac{8}{27} & \frac{8}{27} & 0 \\
\hline
 & -\frac{1}{12} & \frac{16}{15} & -\frac{4}{3} & \frac{27}{20}
\end{array}$$

1. Décrire les méthodes de quadrature utilisées à chaque étape.
2. Ecrire explicitement et en détail le schéma associé au tableau de Butcher .
3. Montrer que la méthode est au moins d'ordre 2.

Solution

1. **[2 points]**

Les points intermédiaires sont

$$t_{n,1} = t_n, t_{n,2} = t_n + \frac{h}{4}, t_{n,3} = t_n + \frac{h}{2} \text{ et}, t_{n,4} = t_n + \frac{2}{3}h$$

La formule de quadrature de f sur $[0,1]$ associée aux poids b_i est:

$$\int_0^1 f(t)dt \approx -\frac{1}{12}f(0) + \frac{16}{15}f\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{4}{3}f(\frac{1}{2}) + \frac{27}{20}f(\frac{2}{3})$$

Première étape, la formule de quadrature de f sur $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ est:

$$\int_0^{\frac{1}{4}} f(t)dt \approx \frac{1}{4}f(0)$$

Deuxième étape, la formule de quadrature de f sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ est:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt \approx \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)$$

Troisième étape, la formule de quadrature de f sur $\left[0, \frac{2}{3}\right]$ est:

$$\int_0^{\frac{2}{3}} f(t)dt \approx \frac{2}{27}f(0) + \frac{8}{27}f(\frac{1}{4}) + \frac{8}{27}f(\frac{1}{2})$$

2. **[2 points]**

$$\begin{aligned}
y_{n,1} &= y_n \\
y_{n,2} &= y_n + \frac{h}{4}f(t_{n,1}, y_{n,1}) \\
y_{n,3} &= y_n + \frac{1}{2}hf(t_{n,2}, y_{n,2}) \\
y_{n,4} &= y_n + \frac{2}{27}hf(t_{n,1}, y_{n,1}) + \frac{8}{27}hf(t_{n,2}, y_{n,2}) + \frac{8}{27}hf(t_{n,3}, y_{n,3}) \\
y_{n+1} &= y_n - \frac{1}{12}hf(t_{n,1}, y_{n,1}) + \frac{16}{15}hf(t_{n,2}, y_{n,2}) - \frac{4}{3}hf(t_{n,3}, y_{n,3}) + \frac{27}{20}hf(t_{n,4}, y_{n,4})
\end{aligned}$$

La méthode proposée s'écrit:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(t_n, y_n) \\
k_2 &= f(t_n + \frac{h}{4}, y_n + \frac{h}{4}k_1) \\
k_3 &= f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2) \\
k_4 &= f(t_n + \frac{2h}{3}, y_n + \frac{2}{27}hk_1 + \frac{8}{27}hk_2 + \frac{8}{27}hk_3) \\
y_{n+1} &= y_n - \frac{1}{12}hk_1 + \frac{16}{15}hk_2 - \frac{4}{3}hk_3 + \frac{27}{20}hk_4
\end{aligned}
$$

3. [**2 points**]
ordre ≥ 1

$$\sum_{i=1}^{4} b_i = -\frac{1}{12} + \frac{16}{15} - \frac{4}{3} + \frac{27}{20} = 1$$

ordre ≥ 2 de plus on doit avoir

$$\sum_{i=1}^{4} b_i c_i = -\frac{1}{12} \times 0 + \frac{16}{15} \times \frac{1}{4} - \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{27}{20} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}.$$