Université Hassiba Benbouali Chlef
Faculté des Sciences exactes et informatique
Département de Mathématiques

Année universitaire 2021/2022
Master(M1: Maths.Apl. et Statistique)
Module : Analyse de données

Fiche TD $N =^\circ$ 03

Exercice 01:

Six points du plan ont pour coordonnées, pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ vérifiant $\alpha^2 + \beta^2 = 1$:

B'=

points	1	2	3	4	5	6
C_1	1	-1	-1	1	α	-α
C_2	1	-1	1	-1	β	-β

- Calculer la matrice de variance-covariance empirique ($\mathcal{S}$) et les valeurs propres de cette matrice?..
- Calculer l'inertie du nuage de points associée au tableau de données.
- Calculer les vecteurs propres de ($\mathcal{S}$)?.les composantes principales de l'ACP sur ($\mathcal{S}$)?.
- Représenter les points et les axes principaux dans le plan de départ?
- Reprendre i) et ii) quand on n'observe que les points 1, 2, 3, 4.

Aide : la matrice de variance-covariance est proportionnelle à la matrice $A = \begin{pmatrix} 2+\alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & 2+\beta^2 \end{pmatrix}$ et ses valeurs propres ne dépendent pas de α et β .

Exercice 02:

Une étude sur des fournisseurs de matériel informatique a conduit à apprécier le service, la qualité et le prix de quatre fournisseurs. Pour cela un expert a noté ces entreprises avec des notes allant de -3 à 3. Les résultats sont consignés ci-dessous

Ent	$Service$	$Qualit$	$Prix$
$E1$	-2	3	-1
$E2$	-1	1	0
$E3$	2	-1	-1
$E4$	1	-3	2

1. Calculer le vecteur moyen des données. Qu'en conclure?
2. Calculer la covariance entre x^1 et x^1 . Que représente cette quantité?
3. Donner la matrice de variance-covariance et de corrélation.?
4. Si on veut faire une ACP centrée avec des poids uniformes. Sur quelle matrice faut-il travailler?
5. Si On veut faire une ACP centrée réduite avec des poids uniformes. Sur quelle matrice faut-il travailler?
6. pour ACP centrée réduite On donne ($\lambda_1 = 1,639; \lambda_3 = 0,106$) En déduire λ_2.
7. Calculer les pourcentages d'inertie des axes. Quelle dimension retenez-vous?
8. avec ACP centrée réduite calculer les vecteurs propres associes aux valeurs propres?
   Calculer les deux composantes principales des individus et des variables.
9. Représenter graphiquememt les individus et les variables dans le plan principal(1,2). Interpréter.

.

Exercice 03:

Supposons qu'on ait un échantillon de n individus caractérisés par quatre variables $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ dont les moyennes et les variances sont finies. On se propose d'effectuer l'ACP sur la matrice de covariance $\mathcal{S}$ d'une tableau X dont les colonnes sont $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ avec la métrique identité.

Supposons que cette matrice se met sous la forme ci-dessous on suppose que a, b et c sont des réels:

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ a & 1 & c & b \\ b & c & 1 & a \\ c & b & a & 1 \end{pmatrix}$$

- Quelle est la signification des coefficients a, b, c et entre quelles valeurs varient-ils ?
- est ce que on peut supposer que $\mathcal{S}$ soit une matrice de corrélation?
- si a=b=c=0 quelle sont les valeurs propres de $\mathcal{S}$?
- soit a = 0,1 ; b = 0,4 ; c = 0,6 . si on suppose que $\mathcal{S}$ est une matrice de corrélation commenter, selon le contexte, ces coefficients.? pourquoi on utilise cette matrice dans le cadre de l'ACP normée ? Diterminer les valeurs propres et les vecteurs propres associes de $\mathcal{S}$
- Calculer pour chacun des axes les pourcentages d'inertie. et l'inertie cumulés .
- Combien d'axes doit être retenir pour la représentation ? Justifier votre réponse.
- Donner la formule permettant de calculer les composantes principales associées au nuage des variables et faire l'application numérique.
- Représenter graphiquement le nuage des individus dans le plan principal et faire l'interprétation.?

Exercice 04:

Soit la matrice $X = (x^1, x^2, x^3)^t$ dont les variables ont pour matrice de corrélation

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \rho & -\rho \\ \rho & 1 & \rho \\ -\rho & \rho & 1 \end{pmatrix}$$

avec $-1 \leq \rho \leq 1$ .On va effectuer l'ACP centrée-réduite de X.

- Vérifier que R admet pour vecteur propre $\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^t$.
- Déterminer les autres vecteurs propres et valeurs propres de R.
- Quelles sont les valeurs possibles de ρ ? Justifier le fait que l'ACP a plus d'intérêt si $-1 < \rho < 0$. On se placera ensuite dans ce cas.
- Calculer les pourcentages de variance expliquée et tracer l'éboulis de valeurs propres .
- Comment s'interprète en fonction de x^1, x^2 et x^3 l'unique composante à retenir ici?

Exercice 05:

On considère les matrices $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad et \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ Calculer $M = C \times L$ et M^2.

soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ À tout couple (a, b) de deux réels, on associe la matrice $M(a, b)$ définie par : $\begin{pmatrix} a-5b & 2b & -2b \\ -2b & a & -b \\ 6b & -3b & a+2b \end{pmatrix}$ Ecrire $M(a, b)$ en fonction de la matrice A et calculer les matrice de var -cov et de corrélation ainsi que les valeurs et vecteurs propres .