Chapitre 08 : Variables aléatoires Continues

Il existe les variables dont les valeur appartient à un intervalle de $\mathbb{R}$ Par exemple :

1/ Le temps d'arrivée d'un

2/ d'un composent electrique.

Définition :

une variable X est dite Continue s'il existe une fonction

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tq $\forall B \in \mathbb{R}$ $P(X \in B) = \int_B f(x)\,dx$

et f est appelée la densité de X

Propositions :

1/ $f(x) \geqslant 0 \quad \forall x$

2/ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 = P(X \in (-\infty, +\infty))$

RMQ : . $P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\,dx$

. $P(X = a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0$

fonction de répetition

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$$

Propriétés :

- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$ F est continue

Exemple :

Soit X variable continue ayant pour densité

$$f(x) = \begin{cases} c\,(x^3+x^5) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1/ trouver c

2/ calculer $P(X > 1/2)$

1/ $f(x) \geq 0 \ \forall x$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$

$$\int_0^1 c\,(x^3+x^5)\, dx = 1$$

$$c\left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6}\right]_0^1 = 1 \quad ; \quad c\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right) = 1$$

$$c\left(\frac{5}{12}\right) = 1 \Longrightarrow c = \frac{12}{5}$$

2| $P(X > 1/2) = \int_{1/2}^{1} \frac{12}{5}(x^3 + x^5)\, dx$

$= \frac{12}{5}\left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6}\right]_{1/2}^{1} = \frac{12}{5}\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{64} - \frac{1}{384}\right.$

Remarques :

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$ et $F'(x) = f(x)$

Exemple de variables continues :

① variable aléatoire uniforme :

une Va X est uniforme sur $[a, b]$ si

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}(x) \qquad X \sim$$

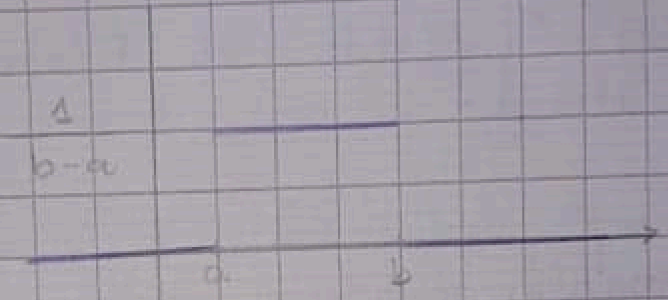
1| $f(x) \geq 0 \quad \forall x$

2| $\int_a^b f(x)\, dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b dx = 1$ f est bien une densité

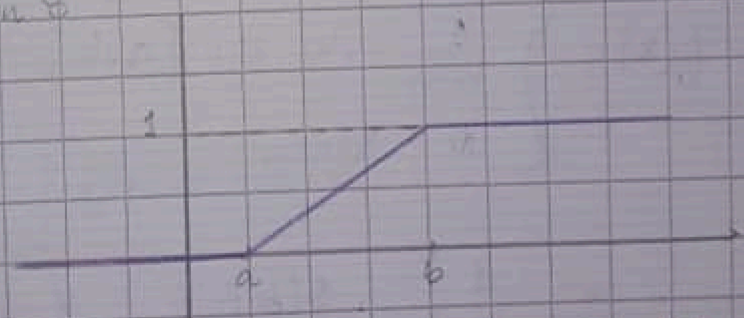
Fonction de répartition (ou des distribution)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

Graphe Densité :



Fct de répartition :



2) Loi exponentielle : $\lambda > 0$ $X \rightsquigarrow Exp(\lambda)$

X suit la loi exponentielle de Paramèters λ

Si sa densité $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

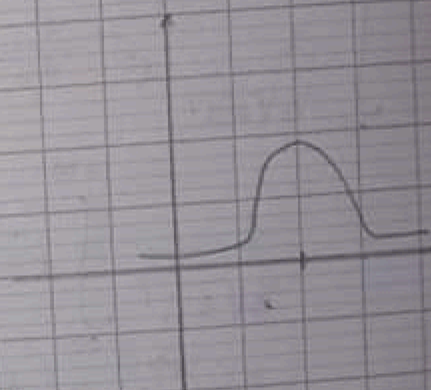
3) Loi Normale (Gauss ou Gauss Laplace)

Déf :

X suit une loi normale de Paramètres m et σ^2 si la densité de X est

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

notation $X \rightsquigarrow N(m, \sigma^2)$



Rappels :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx$$

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2}\,dy \qquad J = I$$

$$I^2 = I \times J = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)}\,dx\,dy \qquad \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$I^2 = \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} r e^{-r^2/2}\, dr\, d\theta = \int_0^{+\infty} r e^{-r^2/2} dr \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= 2\pi\left(-e^{-r^2}\Big|_0^{+\infty}\right) = \pi \Rightarrow \quad I = \sqrt{\pi}$$

$$\text{et} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Vérifions que f est une densité de Probabilité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2} dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx \qquad t = \frac{x-n}{\sigma}$$

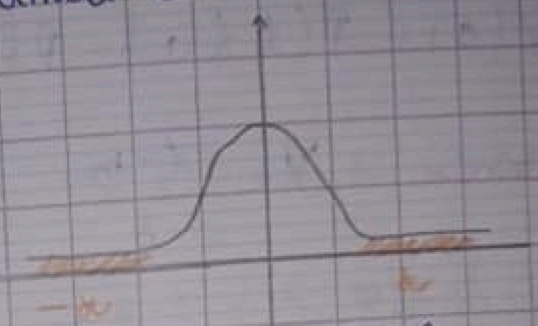
$$= \frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = 1.$$

Loi normale de Paramètres $\sigma = m$ et $\delta = 1$

$N(0,1)$ est appelée loi normale Centrée Reduite

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$



Fonction de répartition de La loi normale

$$1) \quad \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} \, dx$$

$$1 = P(X \in (-\infty, +\infty))$$
$$= P(\{X \leq -x\} \cup \{-x \leq X \leq x\} \cup \{X \geq x\})$$
$$= P(X \leq -x) + P(-x \leq X \leq x) + P(X \geq x)$$
$$= \phi(-x) + P(-x \leq X \leq x) + P(X \leq -x)$$
$$= \phi(-x) + \phi(x) - \phi(-x) + \phi(-x)$$

$$\Rightarrow \quad \phi(-x) = 1 - \phi(x)$$

2/ Si $X \rightsquigarrow N(m, \sigma^2)$

$$F_X(a) = P(X \leq a) = P\left(\frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{a-m}{\sigma}\right)$$

Posons $Y = \dfrac{X-m}{\sigma}$

Loi de Y :

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P\left(\frac{X-m}{\sigma} < y\right)$$

$$= P(X < \sigma y + m) = F_X(\sigma y + m)$$

On dérive :

$$f_Y(y) = \sigma f_X(\sigma y + m)$$

$$= \sigma \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{-1}{2\sigma^2}(\sigma y + m - m)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}$$ donc $Y \rightsquigarrow N(0, 1)$

donc $F_X(a) = \phi\left(\dfrac{a-m}{\sigma}\right)$

Exemple : Si $X \rightsquigarrow N(\underset{m}{3}, \underset{\sigma^2}{9})$

Trouver a) $P(2 < x < 5)$
b) $P(X > 0)$
c) $P(|x-3| > 6)$

Comme $X \sim N(3, 9) \Rightarrow Y = \frac{X-3}{9} \sim N(0,1)$

a) $P(2 < X < 5) = P\left(\frac{2-3}{3} < \frac{X-3}{3} < \frac{5-3}{3}\right)$

$= P\left(-1/3 < y < 2/3\right) = \phi(2/3) - \phi(-1/3)$

$= \phi(2/3) - 1 + \phi(1/3)$

b) $P(X > 0) = P\left(\frac{X-3}{3} > -1\right)$

$= P(Y > -1) = 1 - P(Y \leq -1) = 1 - \phi(-1) = \phi(1)$

c) $P(|x-3| > 6)$

$= P(\{X-3 > 6\} \cup \{X-3 < -6\})$

$= P(X > 9) + P(X < -3)$
$= 1 - P(X \leq 9) + P(X < -3)$

$= 1 - P\left(\frac{X-3}{3} \leq 2\right) + P\left(\frac{X-3}{3} < -2\right)$

$= 1 - \phi(2) + \phi(-2) = 2 - \phi(2) - \phi(2) = 2(1-\phi(2))$

c/ La Gamma :

Soit $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \, dx \quad a>0$

On dit que X suit une loi Gamma de Paramètre a et P si sa densité est :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{P^a}{\Gamma(a)} e^{-Px} \cdot x^{a-1} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque :

$$\int_0^{+\infty} e^{-Px} \cdot x^{a-1} \, dx = \frac{\Gamma(a)}{P^a}$$

$$\Gamma(a+1) = \int_0^{+\infty} x^a e^{-x} \, dx$$

$u = x^a \qquad du = a x^{a-1} \, dx$

$dv = e^{-x} \, dx \qquad v = -e^{-x}$

$\Gamma(a+1) = a \, \Gamma(a)$

Si $a \in \mathbb{N}$ $\quad \Gamma(a+1) = a!$

Distribution d'une fonction de v.a

1/ Soit X une Va de densité f
Trouver la densité de $Y = X^2$
Pour $y > 0$

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(X^2 < y)$$
$$= P(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y})$$
$$= P(X < \sqrt{y}) - P(X < -\sqrt{y})$$
$$= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

on dérive : $f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})\right)$

2/ Trouver la densité de $T = |X|$ Pour $t > 0$:

$$F_T(t) = P(T < t) = P(|X| < t)$$
$$= P(-t < X < t) = P(X < t) - P(X < -t)$$
$$= F_X(t) - F_X(-t)$$

on dérive $f_T(t) = f_X(t) + f_X(-t)$

Exemples $X \rightsquigarrow N(0, \sigma^2)$
Trouver la densité de $Y =$

Por $y > 0$ $F_Y(y) = P(Y < y) = P(X^2 < y)$

$= P(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y})$

$= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \Rightarrow$

$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \left(f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y}) \right)$

$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-y/\delta^2}$ Para $y > 0$

13/02/2013

Théorème : Cas générale :

Soit X une va de densité f et soit $Y = \varphi(X)$ où $\varphi : x \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable si φ est inversible (c-à-d φ^{-1} existe) alors la densité de y est

$$g(y) = f(\varphi^{-1}(y)) \left| \frac{d\varphi^{-1}(y)}{dy} \right|$$

Preuve : $F_Y(y) = P(Y < y) = P(Y < y)$

$$= P(\varphi(x) < y) = P(X < \varphi^{-1}(y)) = F_X(\varphi^{-1}(y))$$

on dérive :

$$f_Y(y) = f_X(\varphi^{-1}(y)) \, |(\varphi^{-1}(y))'|$$

Espérance et Variance :

① $E(X) = EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f(x) \, dx$

② $E(X^n) = EX^n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \, f(x) \, dx$

③ $\text{Var}\, X = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E^2(X)$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 \, f(x) \, dx$$

Exemples

Soit $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\, dx$$

On Pose $t = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$\Rightarrow x = \sigma t + \mu \Rightarrow dx = \sigma\, dt$

$$E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma t + \mu)\, e^{-\frac{t^2}{\sigma^2}}\, dt$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t\, e^{-t^2/2}\, dt + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\, dt$$

impair (symétrie)

$0 \qquad\qquad 1$

$= \mu$ moyenne

$$\text{Var } X = E\left((X-\mu)^2\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 e^{-\frac{1}{2\sigma}(x-\mu)^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma t)^2 e^{-\frac{t^2}{\sigma^2}} \cdot dt$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t . t e^{-t^2/2} \, dt$$

$u = t \Rightarrow du = dt$

$dv = t e^{-t^2/2} \, dt \Rightarrow v = -e^{-t^2/2}$

$$\text{Var } X = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left[-t e^{-t^2/2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} \, dt \right]$$

$$\text{Var } X = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} \, dt = \sigma^2 \qquad \sigma^2$$

Distribution d'un vecteur aléatoire :

Définitions :

(X, Y) est un vecteur aléatoire Continue s'il existe une fonction $f(x,y)$ tq

$$P((X,Y) \in C) = \iint_C f(x,y) \, dx \, dy$$

Remarque :

① $f(x,y)$ est appellée densité Conjointe de X et Y

② $f(x,y) \geq 0$ et

③ $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = 1$

④ $P(X\in A, Y\in B) = \iint_{B\,A} f(x,y)\,dx\,dy$

Théorème :

Si (X,Y) est un vecteur aléatoire Contenue alors X et Y sont des variables aléatoires Continues.

Preuve :

$P(X\in A) = P(X\in A, Y\in\mathbb{R})$

$$= \int_A\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_A f(x)\,dx$$

$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$ densité de X.

Exemple :

Soit $f(x,y)$ la densité de (X,Y) tq

$f(x,y) = C e^{-(x^2-xy+y^2)/2}$ $\quad (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

a/ trouver c

b/ trouver f_X

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} c\, e^{-[x^2 - xy + y^2]/2}\, dy$$

$$y^2 - xy + x^2 = \left(y - \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x^2$$

$$= e^{-3/8\, x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} c\, e^{-(y - x/2)^2/2}\, dy$$

Posons : $y - \frac{x}{2} = t \Rightarrow dy = dt$

$$= c\, e^{-3/8\, x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\, dt = \sqrt{2\pi}$$

$$f_X(x) = c\sqrt{2\pi}\, e^{-3/8\, x^2}$$

On doit avoir $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

$$c\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3/8\, x^2}\, dx = 1$$

$$\frac{4}{3} C \sqrt{2\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} \, dt}_{\sqrt{2\pi}} = 1$$

$$\frac{4}{3} C (2\pi) = 1 \qquad C = \frac{3}{8\pi}$$

$$\frac{3}{8} x^2 = \frac{t^2}{2}$$
$$x = \frac{4}{3} t$$
$$dy = \frac{4}{3} dt$$

$$X \sim N(0, 4/3)$$

Fonctions de Distribution :

$$F_{(X,Y)}(x,y) = P(X < x, Y < y)$$
$$= \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v) \, du \, dv$$

Remarque :

$$f(x,y) = \frac{d^2}{dy\,dx} F_{(X,Y)}(x,y)$$

Distributions d'une fonction de variables aléatoires :

Problème :

« Soit (X,Y) ayant pour densité $f(x,y)$ et $Z = g(X,Y)$

On cherche la densité de Z.

c à d $P(Z < z)$

$$\{Z \leq z\} \Leftrightarrow \{(X,Y) \in \underbrace{\{(x,y) / g(x,y) \leq z\}}_{\Delta z}\}$$

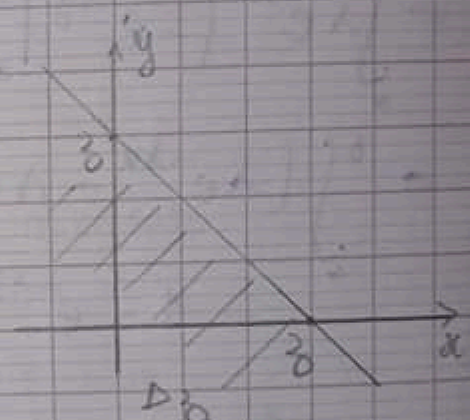
$\Leftrightarrow \{(X,Y) \in \Delta_z\}$

Alors $F_Z(z) = P(Z < z) = P((X,Y) \in \Delta_z)$

$$= \iint_{\Delta_z} f(x,y)\,dx\,dy$$

Exemple : Distribution de la somme $Z = X + Y$

$\Delta_z = \{(x,y) \mid x+y \leq z\}$



$$F_Z(z) = \iint_{\Delta_z} f(x,y)\,dx\,dy$$

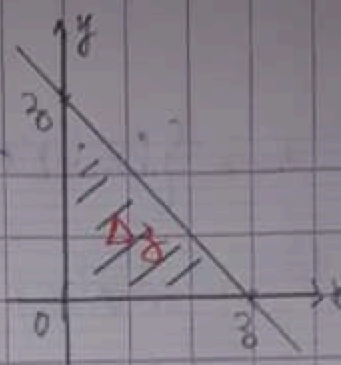
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)\,dx\,dy$$

Exemple :

X et Y v.a indépendants et de même loi exponentielle de paramètre λ.

Trouver la densité de $Z = X + Y$

$X \sim exp(\lambda)$ $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ si $x > 0$



$$P(X+Y<z) = \iint_{x+y\leq z} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \iint_{x+y\leq z} f(x)\,f(y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^z \int_0^{z-x} \lambda e^{-\lambda x} \cdot \lambda e^{-\lambda y}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^z \lambda e^{-\lambda x}\left(-e^{-\lambda y}\Big|_0^{z-x}\right) dx = \int_0^z \lambda e^{-\lambda x}\left(1-e^{-\lambda(z-x)}\right) dx$$

$$= \int_0^z \left(\lambda e^{-\lambda x} - \lambda e^{-\lambda z}\right) dx = -e^{-\lambda x} - x\lambda e^{-\lambda z}\Big|_0^z$$

$$= 1 - e^{-\lambda z} - z\lambda e^{-\lambda z} \quad \text{si } z \geq 0$$

$$\Rightarrow f_Z(z) = \lambda e^{-\lambda z} - \lambda e^{-\lambda z} + \lambda^2 z e^{-\lambda z}$$

$$= \lambda^2 z e^{-\lambda z} \quad \text{si } z \geq 0$$

Formule de changement de variables :

Soit $f(x,y)$ la densité de probabilité de (X,Y)

Soit $U = g_1(X,Y)$ soit $U = g_1(X,Y)$ et

$g_2(X,Y) = V$ on suppose (U,V)

$X = \varphi_1(u,v)$ et $Y = \varphi_2(u,v)$

Alors la fonction densité de Proba $h(u,v)$ de U et V est donné par

$$h(u,v) = f(x,y) \cdot \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right|$$

$$= f(\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v)) \, |J|$$

avec $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ moments.

Définitions : X Var

1) Les moments non centrés de X sont

$\mu_r = E(X^r) \quad r \in \mathbb{N}$

Si $r = 0 \quad \mu_0 = 1$

$r = 1 \quad \mu_1 = E(X)$ moyenne.

2) Les moments Centrés de X sont

$\mu'_r = E((X - E(X))^r)$

Si $r = 1 \quad \mu'_1 = 0$

Si $r = 2 \quad \mu'_2 = \sigma^2$

3/ Les moments factoriels d'ordre r $(r \in \mathbb{N}^*)$

$$\mu_r^* = E\left(X(X-1)(X-2)\ldots(X-r+1)\right)$$

Fonction génératrices:
Fonction caractéristique:

I/ Fonction génératrice des moments:

Définitions:
La fct génératrice des moments d'une variable aléatoire X est définie par

$$M_X(t) = E\left(e^{Xt}\right)$$

Le domaine de M_X est l'ensemble des nombres réels tq $E(e^{Xt}) < +\infty$

Exemple:
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$M_X(t) = E\left(e^{Xt}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\, dx$$

Posons $\frac{x-\mu}{\sigma} = y \Rightarrow x = \sigma y + \mu$

$dx = \sigma\, dy$

$$M_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\sigma t\, y+\sigma t} \cdot e^{-y^2/2}\, \sigma\, dy$$

$$= \frac{e^{\mu t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2+\sigma t y}\, dy$$

$$-\frac{y^2}{2} + \sigma t y = -\frac{1}{2}\left[y^2 - 2\sigma t y\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[(y-\sigma t)^2 - \sigma^2 t^2\right]$$

$$M_X(t) = \frac{e^{\mu t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-1/2\,(y-\sigma t)^2} \cdot e^{\sigma^2 \frac{t^2}{2}}\, dy$$

$$= e^{\mu t} \cdot e^{\sigma^2 \cdot \frac{t^2}{2}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-1/2\,(y-\sigma t)^2}\, dy}_{1}$$

$$M_X(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}$$

Si $X \sim N(0, \sigma^2) \Rightarrow M_X(t) = e^{\sigma^2 \frac{t^2}{2}} = E(e^{Xt})$

$$e^t = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!}$$

$$M_X(t) = e^{\sigma^2 \frac{t^2}{2}} = E(e^{Xt})$$

$$E(e^{Xt}) = E\left(\sum_{n\geq 0} X^n \frac{t^n}{n!}\right) = \sum \frac{t^n}{n!} E(X^n) \quad (*)$$

$$e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}} = \sum_{n\geq 0} \frac{\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \frac{\sigma^{2n} t^{2n}}{2!\, n!}$$

Par indentificotion $E(X^{2n+1}) = 0$

$$E(X^{2n}) = \frac{\sigma^{2n}}{2n}$$

La série de Taylor de $M_X(t)$

$$M_X(t) = \sum \frac{t^n}{n!} M_X^{(n)}(0) = \sum \frac{t^n}{n!} E(X^n)$$

$$E(X^n) = \frac{d^n}{dt^n} M_X(t) \Big|_0 = M_X(0)$$

Propriétés

① Si X et Y sont indépendantes Alors e^{tX} et e^{tY} sont aussi indépendantes et par conséquent

$$M_{X+Y}(t) = E\left(e^{t(X+Y)}\right)$$
$$= E\left(e^{tX} \cdot e^{tY}\right)$$
$$= E\left(e^{tX}\right) \cdot E\left(e^{tY}\right)$$
$$= M_X(t) \cdot M_Y(t)$$

② Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendants et même loi alors $M_{X_1+X_2+\ldots+X_n}(t) = \left(M_{X_1}(t)\right)^n$

Exemple : Donner la fct Génératrice de la va $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum e^{tk} P(X = k)$$
$$= \sum_{k \geq 0} e^{tk} \lambda^k \frac{e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum \frac{(\lambda e^t)^k}{k!}$$
$$= e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{-\lambda(1-e^t)}$$

donc $E(X) = \frac{d}{dt} M_X(t)\Big|_{t=0} = \lambda e^t \cdot e^{-\lambda(1-e^t)}\Big|_{t=0}$
$= \lambda$

Proposition X

Fonction Caractéristique :

Définition :
La fct caractéristique d'une v.a X est définé par :

$$\varphi_X(t) = E(e^{ixt}) \qquad t \in (-\infty, +\infty)$$
$$i = \sqrt{-1}$$

Exemple :
Soit X une va qui suit la loi exponentielle de paramétre λ.

alors $\varphi_X(t) = E(e^{ixt}) = \int_0^{+\infty} e^{ixt} \cdot \lambda e^{-\lambda x} \, dx$

$$= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-x(\lambda - it)} \, dx = \frac{\lambda}{\lambda - it} e^{-x(\lambda - it)} \Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda - it} = \left(1 - i\frac{t}{\lambda}\right)^{-1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x(\lambda - it)} = \lim_{x \to +\infty} e^{-\lambda x} e^{i(-x)}$$

0

Propriétés :

1) $|\varphi_X(t)| \leq 1$

2) $\varphi(0) = 1$

3) $\overline{\varphi_X(t)} = \varphi_X(-t)$

4) Si X et Y sont indépendantes $\Rightarrow$

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\,\varphi_Y(t)$$

5) $\varphi_X^{(n)}(t) = E\left((iX)^n e^{itX}\right) = i^n E\left(X^n e^{itX}\right)$

5') $\varphi_X^{(n)}(0) = i^n E(X^n)$

6) $\varphi_X(t) = \sum_{n\geq 0} i^n \frac{E(X^n)}{n!} t^n$

Exemple : $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\qquad \varphi_X(t)$?

$$\varphi_X(t) = E\left(e^{itX}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma}(x-\mu)^2}\, dx$$

$$U_X(t) = e^{\mu t} \cdot e^{\sigma^2 t^2/2}$$

$$\varphi_X(t) = e^{i\mu t} \cdot e^{-\sigma^2 t^2/2} = U_X(it)$$

(sinon faire le calcul directement)

Théorème : Si 2 variables aléatoires ont la même fonction caractéristique elles ont la même fonction de distribution.

Exemple : $X_1 \sim N(N_1, \delta^2)$
$X_2 \sim N(N_2, \delta_2^2)$

Trouver la loi de $x+y$ X et Y indep

$$\varphi_{X_1}(t) = e^{i\mu t} \cdot e^{-\delta_1^2 t^2/2}$$
$$\varphi_{X_2}(t) = e^{iN_2 t} \cdot e^{-\delta_2^2 t^2/2}$$

$$\varphi_{X_1+Y_2}(t) = \varphi_{X_1}(t)\,\varphi_{X_2}(t)$$
$$= e^{i(N_1+N_2)t} \cdot e^{-t^2/2(\delta_1^2+\delta_2^2)}$$

Si $\mu_1 + \mu_2 = N$ Alors $\varphi_{X_1+X_2}(t) = e^{iNt} \cdot e^{-t^2\delta^2/2}$
Si $\delta_1^2 + \delta_2^2 = \delta^2$

donc $X_1 + X_2 \sim N(N_1+N_2, \delta_1^2+\delta_2^2)$

Théorème :
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ et X des va tq

$\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_{X_n}(t) = \varphi_n(t)$ $t \in \mathbb{R}$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{X_n}(t) = F_X(t)$ en tout Point de F_X est continue

Théorème Central limite :

Soit $\{X_n, n\geq 1\}$ une suite de v.a indépendantes et de même loi tq $E(X_1)=0$ et $Var X_1 = 1$

Soit $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Alors $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0,1)$

cad $F_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} \longrightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt$

Preuve :

Soit $\varphi_X(t) = E(e^{itX_1})$ $\quad E(X_1^2) < +\infty$

alors $\varphi_X(t) = 1 + itEX_1 - \frac{t^2}{2}E(X_1^2) + o(t^2)$

$= 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$

$\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = E\left(e^{it\frac{S_n}{\sqrt{n}}}\right) = E\left(\exp\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\sum^{n} X_i\right.\right.$

$= \left(\varphi_X(t/\sqrt{n})\right)^n$

$$= \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-t^2/2}$$

fct caractéristique de $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ qui CV de loi

vers $N(0,1)$

Rappel : $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^a$

Remarque : Si $\{X_n, n \geq 1\}$ va indépendants et de

même loi tq $E(X_1) = \mu$ et $Var X_1 = \sigma^2$

alors :

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$$

Preuve :

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{X_1 - \mu}{\sigma\sqrt{n}} + \frac{X_2 - \mu}{\sigma\sqrt{n}} + \dots + \frac{X_n - \mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

Si on Pose $Y_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$ $\qquad$ $E(Y_i) = 0$

$Var Y_i = 1$

$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ CV loi vers $N(0,1)$