## CHAPITRE 5
## VECTEURS ALEATOIRES REELS

*6-1 Introduction*

*6-1-1 Notations*

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé. On considère l'application:

$$\begin{aligned} V &: \quad \Omega \longrightarrow R \\ \omega &\longmapsto \quad V(\omega) \\ \text{où } V(\omega) &= \quad (X_1(\omega), X_2(\omega), ......, X_n(\omega)) \end{aligned}$$

Les $(X_i)$ étant des variables aléatoires.

On note ainsi $[V \leq x] = [X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, .....X_n \leq x_n]$ avec $(x_1, x_2, ....., x_n) \in R^n$.

En fait $[V \leq x]$ est le pavé de $R^n$ : $]-\infty, x_1] \times ]-\infty, x_2] \times ....... \times ]-\infty, x_n]$ .Si on note $V^{-1}(x)$ l'image réciproque de ce

pavé, on aura:

$$[V(\omega) \leq x] \Longleftrightarrow \left[\omega \in V^{-1}(x).\right]$$

*Définition*

Une application $V$ de $\Omega$ dans $R^n$ est dite vecteur aléatoire si et seulement si c'est une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$

dans $(R^n, \mathcal{B}_{R^n})$ *i.e.* si et seulement si $V^{-1}(x) \in \mathcal{F}$.(Ceci généralise la définition d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$)

*6-1-2 Fonction de répartition d'un vecteur aléatoire*

La fonction de répartition d'un vecteur aléatoire notée $F_V$ est définie par

$$F_V(x) = P[V(\omega) \leq x] = P[V \leq x]$$

*6-1-2 Propriétés de* $F_V$

*Théorème* :

*Si* $F_V$ *est la fonction de répartition de* $V$, *alors*

1) $0 \leq F_V \leq 1$

2) $F_V$ *est croissante*

3) $\lim\limits_{\forall i \ x_i \longrightarrow +\infty} F_V(x) = 1$

4) $\lim\limits_{x_i \longrightarrow -\infty} F_V(x) = 0 \quad \forall i = 1, ..., n$

*Remarque*: La propriété de continuité à droite d'une fonction de répartition d'un vecteur aléatoire disparaît car la

"droite" dans $R^n$ n'a pas de sens.

Démonstration**:** La seule propriété à démontrer est la croissance.

$$\begin{aligned}
\text{Soient}\quad A_i &= [X \leq x_i] \ \text{ et }\ B_i = [X \leq y_i] \ \text{avec}\ x_i \leq y_i \quad \forall i \\
F_V(y_i) - F_V(x_i) &= -P\left[\underset{i}{\cap} A_i\right] + P\left[\underset{i}{\cap} B_i\right] + \\
&= P\left[\left(\overline{\underset{i}{\cap} A_i}\right) \cap \left(\underset{i}{\cap} B_i\right)\right] \ \text{car}\ A_i \subset B_i \\
&\geq 0 \quad \text{(car c'est une probabilité)}
\end{aligned}$$

L'ensemble image par $V$ de $\Omega$, noté $\mathcal{V}$, est appelé ensemble fondamental de $V$.Les projections de $\mathcal{V}$ sur les axes coordonnées nous donnent les supports des variables aléatoires $X_1, X_2, ......., X_n$. Ces variables aléatoires sont appelées variables aléatoires marginales. Notre étude portera sur les cas discret et absolument continu i.e:

- *Cas discret*: $\mathcal{V}$ est alors une partie au plus dénombrable de $R^n$.

- *Cas absolument continu*: $\mathcal{V}$ est une partie infinie non dénombrable de $R^n$et $F_V$ est continue et admet une dérivée partielle "croisée" $\dfrac{\partial^n F_V}{\partial x_1 \partial x_2 .....\partial x_n}$

*6-2 Etude du cas discret*

On restreint l'étude à $n = 2$ (pb d'indice) et $V = (X, Y)$

*6-2-1 Loi de probabilité conjointe*

On appelle loi de probabilité conjointe d'un couple $(X, Y)$ la donnée des nombres $p_{ij}$ définis par:

$$p_{ij} \ = P[X = x_i, Y = y_j] \quad \forall i \in I \ et\ \forall j \in J, \quad I \ et\ J \subseteq N$$

**Remarque**: On a

$$\sum_{i\in I} \sum_{j\in J} p_{ij} \ = 1$$

*6-2-2 Lois marginales*

on appelle lois marginales, les lois de probabilité de $X$ et de $Y$.On a ainsi:

$$\begin{aligned}
P[X = x_i] &= \sum_{j\in J} P[X = x_i, Y = y_j] = \sum_{j\in J(X,Y)} p_{ij} \ = p_{i.} \quad \text{et} \\
P[Y = y_j] &= \sum_{i\in I} p_{ij} \ = p_{..j}
\end{aligned}$$

*6-2-3 Fonction de répartition du couple $(X, Y)$*

Dans le cas discret:

$$\begin{aligned}
F_{(X,Y)}(x, y) &= P[X \leq x, Y \leq y] = \\
&= \sum_{i/x_{i\leq x}} \sum_{j/y_j \leq y} p_{ij}
\end{aligned}$$

Il est aisé d'en déduire les fonctions de répartition de $X$ et de $Y$ ainsi:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P[X \leq x] = F_{(X,Y)}(x,+\infty) \\ F_Y(y) &= P[Y \leq y] = F_{(X,Y)}(+\infty,y) \end{aligned}$$

*6-2-4 Variable aléatoire conditionnelle*

Soit l'évènement $[X = x_i]$ tel que $P[X = x_i] = \ p_{i.} \quad \neq 0$

On peut considérer la v.a. conditionnelle $Y$ liée par $X = x_i$, notée par $Y \mid_{X=x_i}$ .Cette v.a. aura pour loi de probabilité $p_j^i$

définie par

$$p_j^i = P\left[Y \mid_{X=x_i}^{=y_j}\right] = P[Y = y_j \mid X = x_i] = \frac{p_{ij}}{p_{i.}}$$

De même la loi de probabilité de la v.a. $X \mid_{Y=y_j}$est $p_i^j = \dfrac{p_{ij}}{p_{..j}}$

**Remarque**: Les variables aléatoires$X \mid_{Y=y_j}$ et $Y \mid_{X=x_i}$ sont de nouvelles variables aléatoires dont on peut déterminer

l'espérance, la variance et la fonction de répartition.

*6-2-5 Indépendance de 2 v.a. discrètes*

**Remarque:** Si $X$ et $Y$ étaient indépendantes, on aurait $p_i^j = p_{i.} \quad \forall i$ et $\forall j$.

On en déduit que 2 variables aléatoires $X$ et $Y$, sont indépendantes si et seulement si :

$$\forall (i,j) \in I \times J \quad p_{ij} \ = p_{i.} \quad .p_{..j}$$

*6-3 Etude du cas absolument continu*

Si on pose $V = (X,Y)$ on a alors $F_V$ continue et on admet l'existence de la dérivée partielle $\dfrac{\partial^2 F_V}{\partial x \partial y}$

(sauf éventuellement en un nombre fini de points)

*6-3-1 Densité de probabilités conjointe*

On appelle densité de probabilités conjointe d'un couple $(X,Y)$ la fonction $f_{(X,Y)}$ définie sur $\mathbb{R}^2$par

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{(X,Y)}(x,y)}{\partial x \partial y}$$

Les propriétés de cette densité sont:

$$\begin{aligned} f_{(X,Y)}(x,y) &\geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ \iint\limits_{\mathcal{V}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dxdy &= 1 \end{aligned}$$

De plus si $D \subset \mathcal{V}$ on a alors $P[(X,Y) \in D] = \iint\limits_{D} f_{(X,Y)}(x,y)\,dxdy$

*6-3-2 Densités marginales*

Il s'agit en fait des densités des variables aléatoires $X$ et de $Y$. On a

$$f_X(x) = \int\limits_{y_x} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy$$

Où $y_x$représente l'intersection de $\mathcal{V}$ avec la droite $X = x$.

De même

$$f_Y(y) = \int\limits_{x_y} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx$$

Où $x_y$représente l'intersection de $\mathcal{V}$ avec la droite $Y = y$

**Remarque**: On a

$$\iint\limits_{\mathcal{V}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dxdy = \int\limits_{y_x} f_Y(y)\,dy = \int\limits_{x_y} f_X(x)\,dx = 1$$

*6-3-3 Fonction de répartition de* $(X,Y)$

On a

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \int\limits_{\mathcal{V}\cap D} f_{(X,Y)}(x,y)\,dxdy \qquad \text{où } D = \left]-\infty,x\right] \times \left]-\infty,y\right]$$

*6-3-4 Variables aléatoires condititionnelles*

On désire déterminer la densité de la variable aléatoire $Y\mid_{X=x}$comme dans le cas discret. Un problème se pose. C'est

que dans le cas continu, on a

$$P[X = x] = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Pour cela déterminons $P[Y < y \mid x \leq X < x+h]$

$$P[Y \leq y \mid x \leq X \leq x+h] = \frac{F_{(X,Y)}(x+h,y) - F_{(X,Y)}(x,y)}{F_X(x+h) - F_X(x)}$$

Par passage à la limite quand $h \longrightarrow 0$, on a:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\longrightarrow 0} P[Y \leq y \mid x \leq X \leq x+h] &= P[Y \leq y \mid X = x] \\
&= P\left[Y \mid_{X=x}^{<Y}\right] \\
&= F_{Y\mid_{X=x}}(y)
\end{aligned}$$

(On peut appliquer le lemme $\lim\limits_n P[A_n] = P\left[\lim\limits_n A_n\right]$ car les évènements $[x < X < x+h]$ - en prenant $h = \frac{1}{n}$- sont

monotones, en fait décroissants au sens de l'inclusion des ensembles)
D'où

$$
\begin{aligned}
F_{Y|_{X=x}}(y) &= \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{\dfrac{F_{(X,Y)}(x+h,y)-F_{(X,Y)}(x,y)}{h}}{\dfrac{F_X(x+h)-F_X(x)}{h}} \\
&= \frac{\dfrac{\partial F_{(X,Y)}}{\partial x}}{f_X(x)} \quad \text{avec } f_X \neq 0
\end{aligned}
$$

Il suffit alors de dériver par rapport à $y$ pour obtenir $f_{Y|_{X=x}}$ soit

$$
\begin{aligned}
f_{Y|_{X=x}}(y) &= \frac{\dfrac{\partial^2 F_{(X,Y)}}{\partial x \partial y}}{f_X(x)} \\
&= \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)}
\end{aligned}
$$

Un travail similaire nous aurait permis de trouver la densité de la variable aléatoire $X\ |_{Y=y}$ .On a ainsi

$$f_{X|_{Y=y}}(y) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)}$$

On en déduit alors la relation suivante

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)\,.f_{Y|_{X=x}}(y) = f_Y(y)\,.f_{X|_{Y=y}}(y)$$

**Remarque**: On peut déterminer l'espérance de $Y\ |_{X=x}$qui serait alors une fonction de $x$ .On peut ainsi considérer une nouvelle v.a. $E[Y \mid X]$ ,(fonction de $X$) définie par :

$$E[Y \mid X](\omega) = E[Y \mid X = X(\omega)] = E[Y \mid X = x]$$

On pourrait aussi chercher à déterminer sa densité.
*6-3-5 Indépendance*
**Définition**: Deux v.a. $X$ et $Y$ sont dites indépendantes si et seulement si

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)\,.f_Y(y) \qquad \forall (x,y) \in \mathcal{V}$$

**Remarque**: $\mathcal{V}$ est alors un pavé de $R^2$ (rectangle) i.e: $\mathcal{V} = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \mathcal{X}$ étant le support de la v.a. $X$ et $\mathcal{Y}$ celui de la v.a. $Y$.

*6-4 Caractéristiques d'un vecteur aléatoire*
*6-4-1 Espérance mathématique*

soit $V$ un v.a. $V^t = (X_1, X_2, ......, X_n)$ et $\varphi$ une application de $R^n$ dans $R^p$ avec $\varphi = \left(\varphi_1, \varphi_2, ....., \varphi_p\right)$.

*Définition*: On appelle espérance du vecteur aléatoire $\varphi(V)$ le point de $R^p$, noté $m_i$,quand il existe, défini par:

$$m_i = \begin{cases} \displaystyle\sum_{v \in \mathcal{V}} \varphi_i(v) P[V = v] & si \;\; V \;\; est \;\; discret \\ \displaystyle\int_{\mathcal{V}} \varphi_i(v) f_V(v) dv & si \;\; V \;\; est \;\; continu \end{cases} \qquad i = 1, ..., p$$

*6-4-2 Etude du cas où $p = 1$ et $V^t = (X, Y)$*

*a) Décomposition de l'espérance condititionnelle de $\varphi(X, Y)$*

Dans le cas continu on a

$$\begin{aligned} E(\varphi(X,Y)) &= \iint \varphi(x,y) f_{(X,Y)}(x,y) dxdy = \\ &= \iint \varphi(x,y) f_X(x) .f_{Y|_{X=x}}(y) dydx \\ &= \int f_X(x) \int \varphi(x,y) f_{Y|_{X=x}}(y) dydx = \\ &= \int E_{Y|_{X=x}}[\varphi(x,Y)] f_X(x) dx \\ &= E_X\left[E_{Y|_{X=x}}[\varphi(X,Y)]\right] \end{aligned}$$

De même, on aurait pu montrer que

$$E(\varphi(X,Y)) = E_Y\left[E_{X|_{Y=y}}[\varphi(X,Y)]\right]$$

Dans le cas discret on aurait

$$E(\varphi(X,Y)) = \sum_{x_i, i \in I} \sum_{y_j, j \in J} \varphi(x_i, y_j) p_{ij}$$

et où $I \subseteq \mathbb{N}, J \subseteq \mathbb{N}$

*b) Cas où $\varphi$ est une fonction de $X$ uniquement*

Ceci signifie que $\varphi(X, Y) = \varphi(X)$ (avec un abus de notation), on aura

$$\begin{aligned} E(\varphi(X)) &= E_X\left[E_{Y|_{X=x}}[\varphi(X)]\right] \\ &= E_X(\varphi(X)) \end{aligned}$$

car $\varphi(X)$ est une constante pour la v.a. $Y$.

*c) Cas où $\varphi(X, Y) = g(X) h(Y)$*

Dans ce cas:

$$\begin{aligned} E(\varphi(X,Y)) &= E_X\left[E_{Y|X=x}\left[g(X)h(Y)\right]\right] \\ &= E_X\left[g(X)E_{Y|X=x}\left[h(Y)\right]\right] \end{aligned}$$

si en plus $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors

$$E(g(X)h(Y)) = E_X[g(X)]\,E_Y[h(Y)]$$

.

*d) Espérance et Variance conditionnelle d'une variable aléatoire $X$ par rapport à une variable aléatoire $Y$***:**

*Définition:*

*i) Cas discret*: Soient $(X,Y)$ un couple de variables aléatoires discrètes telles que la loi conditionnelle de $Y\,|X=x_i$ est

notée $p_j^i$ et où $p_j^i = P(Y=y_j\,|X=x_i)$, alors l'espérance conditionnelle de $Y$ sachant $X=x_i$ est donnée par

$$E(Y\,|X=x_i) = \sum_{y_j, j\in J} y_j\ p_j^i$$

*ii) Cas absolument continu***:** Si $(X,Y)$ est un couple de variables aléatoires absolument continues telles que la variable

conditionnelle $Y\,|X=x$ admette une densité de probabilité notée $f_{Y|X=x}$ alors l'espérance conditionnelle de $Y$ sachant

$X=x$ est donnée par

$$E(Y\,|X=x) = \int_{\mathbb{R}} y\ f_{Y|X=x}(y)\,dy$$

Plus généralement, on a un résultat analogue en remplaçant $Y$ par $h(Y)$, où $h$ est une fonction continue de $Y$.Voici un

résultat utile dans le calcul d'espérance de variable aléatoire.

*Proposition:*

*Pour tout couple $(X,Y)$ de variables aléatoires, on a*

$$E(E(Y\,|X)) = E(Y)$$

Démonstration:

On considère le cas absolument continu

$$E(\ Y\,|X=x) = \int_{\mathbb{R}} y\ f_{Y|X=x}(y)\,dy = \varphi(x)$$

$$\begin{aligned}
E\left(E\left(Y\,|X\,\right)\right) &= E\left(\varphi\left(X\right)\right)=\int_{\mathbb{R}}\varphi\left(x\right)f_{X}\left(x\right)dx\\
&= \int_{\mathbb{R}}E\left(\,Y\,|X=x\,\right)f_{X}\left(x\right)dx\\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}y\;f_{Y\,|X=x}\left(y\right)dy\right)f_{X}\left(x\right)dx\\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}y\;f_{Y\,|X=x}\left(y\right)f_{X}\left(x\right)dy\right)dx\\
&= \int_{\mathbb{R}}y\left(\int_{\mathbb{R}}f_{(X,Y)}\left(x,y\right)dx\right)dy=\int_{\mathbb{R}}y\;f_{Y}\left(y\right)dy=E\left(Y\right)
\end{aligned}$$

De la même manière, on aurait obtenu

$$E\left(E\left(X\,|Y\,\right)\right)=E\left(X\right)$$

La variance conditionnelle est définie par

$$Var\left(Y\,|X=x\,\right)=E\left(\left(Y-E\left(Y\,|X=x\,\right)\right)^{2}|X=x\right)$$

ou alors

$$Var\left(Y\,|X=x\,\right)=E\left(Y^{2}\,|X=x\right)-\left(E\left(Y\,|X=x\,\right)\right)^{2}$$

Tous ces calculs sont bien entendu valables si les différentes conditions d'intégrabilité sont satisfaites.

*6-4-3- Covariance de deux variables aléatoires*

*Définition: On appelle covariance de deux variables aléatoires réelles le nombre défini par*

$$Cov\left(X,Y\right)=E\left[\left(X-E\left(X\right)\right)\left(Y-E\left(Y\right)\right)\right]$$

*De part la linéarité de l'espérance, on obtient*

$$Cov\left(X,Y\right)=E\left[XY\right]-E\left[X\right]E\left[Y\right]$$

*Lemme*: *Si $X$ et $Y$ sont indépendantes alors* $Cov\left(X,Y\right)=0$

*Remarque*: La réciproque est fausse.

En Statistique, la covariance présente un défaut majeur qui est celui de ne pas présenter de minimum et de maximum. On lui préfère alors le coefficient de corrélation linéaire qui, de plus est un nombre réel sans dimension.

*Définition*: *On appelle coefficient de corrélation linéaire entre $X$ et $Y$, le nombre noté $\rho(X,Y)$ et défini par*

$$\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X.\sigma_Y}$$

On a alors

$$|\rho(X,Y)|\leq 1$$

*6-5 Transformation d'un vecteur aléatoire*

*6-5-1 Introduction:*

*a) Position du problème:*

Soit $Z^t=(X_1,X_2,......,X_n)$ un vecteur aléatoire de dimension $n$ défini sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},P)$ ,et dont on connait la densité $f_Z$ ainsi que la fonction de répartition $F_Z$. Soit $\varphi$ une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ $(p\leq n)$ .On veut déterminer la loi du vecteur $U$ défini par $\varphi(Z)=U$,le vecteur $U$ étant de dimension $p, U^t=\left(\varphi_1(Z),\varphi_2(Z),.....,\varphi_p(Z)\right)$.

*b) Cas discret:*

Dans le cas où $Z$ et $U$ sont des vecteurs discrets, la loi de $U$ donnée par $P(U=u)$, $u$ étant un $p-$uplet de nombres

entiers, $u=(u_1,u_2,....,u_p)\in\mathbb{Z}^p$

Nous avons

$$P(U=u)=P(\varphi(Z)=u)=\sum_{z/\varphi(z)=u}P(Z=z)$$

On ne peut donner une formule plus précise pour la détermination de la loi, $\varphi$ étant inconnue. On traitera donc le cas

absolument continu de manière plus complète.

*6-5-2 Etude du cas absolument continu:*

La détermination de la densité de $U$,notée $f_U$, passe par la recherche de sa fonction de répartition $F_U$.

On a ainsi

$$F_U(u)=P(U\leq u)=P(\varphi(Z)\leq u)$$

On va considérer plusieurs cas.

*i)* $p=n$ *et* $\varphi$ *bijective*

la formule de changement de variables nous donne

$$\begin{aligned}F_U(u) &= P(U\leq u)=P(\varphi(Z)\leq u)=\int\limits_{z/\varphi(z)\leq u}f_Z(z)\,dz\\ &= \int\limits_{D_u}f_Z\left(\varphi^{-1}(u)\right)\left|J_{\varphi^{-1}}(u)\right|du \qquad (1)\end{aligned}$$

où $D_u$ représente le domaine de la variable $u$ et $J_{\varphi^{-1}}$ étant le Jacobien de $\varphi^{-1}$.On obtient alors la densité de $U$ qui est

définie par

$$f_U(u) = f_Z\left(\varphi^{-1}(u)\right)\left|J_{\varphi^{-1}}(u)\right|$$

**Exemple:** Soit $(X,Y)$ un couple de variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \gamma(a_1,b)$ et

$Y \hookrightarrow \gamma(a_2,b)$ .Déterminons la loi du couple $(U,V)$ tel que

$$\begin{cases} U = X+Y \\ V = \dfrac{X}{X+Y} \end{cases}$$

Etudions la bijectivité de $\varphi$ telle que $\varphi(X,Y) = (U,V)$

$$\left\{\varphi \;:\; \begin{array}{c} U = X+Y \\ V = \dfrac{X}{X+Y} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\varphi^{-1} \;:\; \begin{array}{c} X = UV \\ Y = U(1-V) \end{array}\right.$$

On constate que $\varphi$ est bien bijective.

$$\begin{array}{rcl} \left|J_{\varphi^{-1}}\right| & = & \left\| \begin{array}{cc} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} v & u \\ 1-v & -u \end{array} \right\| \\ & = & |-uv-u+uv| = |u| = u \end{array}$$

On en déduit alors que

$$\begin{array}{rcl} f_{(U,V)}(u,v) & = & f_{(X,Y)}\left(\varphi^{-1}(u,v)\right)|u| = \\ & = & \dfrac{b^{a_1}}{\Gamma(a_1)}(uv)^{a_1-1}e^{-uvb}\dfrac{b^{a_2}}{\Gamma(a_2)}(u(1-v))^{a_2-1}e^{-bu(1-v)} \\ & = & \dfrac{b^{a_1+a_2}}{\Gamma(a_1+a_2)}u^{a_1+a_2-1}v^{a_1-1}(1-v)^{a_2-1}e^{-bu} \end{array}$$

Le domaine fondamental du couple $(u,v)$ étant

$$D = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,|u \geq 0, 0 \leq v \leq 1\right\}$$

**remarque**: on peut vérifier que $U \hookrightarrow \gamma(a_1+a_2,b)$ et $V \hookrightarrow \beta(a_1,a_2)$

*ii)* $p = n$ *et* $\varphi$ *non bijective*

Pour pouvoir effectuer le changement de variables dans (1), $\varphi$ doit être bijective ce qui n'est pas le cas. Une solution consiste à subdiviser le domaine d'intégration de telle sorte que sur chaque subdivision, la restriction de $\varphi$ à cette subdivision soit bijective et ainsi on se ramène au cas précédent. La solution recherchée est alors la somme des solutions sur chaque subdivision. Ainsi soient $\psi_1(u), \psi_2(u), ....., \psi_l(u)$, les solutions de l'équation $u = \varphi(z)$ ($\varphi$ n'étant pas bijective alors $l \geq 2$). On a ainsi

$$f_U(u) = \sum_{i=1}^{l} f_Z(\psi_i(u)) \left| J_{\psi_i}(u) \right|$$

**Exemple**: Soient $(X, Y)$ un couple de variables aléatoires de densité conjointe

$$f_{(X,Y)}(x, y) = kx\,|y|\,\mathbf{1}_D(x, y)$$

où $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\right\}$

Déterminons la loi du couple $(Z, T)$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{c} Z = X^2 + Y^2 \\ T = X^2 \end{array} \right.$$

On vérifie que $k = 4$ en écrivant que $\displaystyle\iint_D f_{(X,Y)}(x, y)\, dxdy = 1$

Etudions la bijectivité de $\varphi$ telle que $\varphi(X, Y) = (Z, T)$

$$\left\{ \varphi \quad : \quad \begin{array}{c} Z = X^2 + Y^2 \\ T = X^2 \end{array} \right.$$

On a $T = X^2$,d'où $X = \sqrt{T}$ car $X \geq 0$

$Z = X^2 + Y^2$, d'où $Y^2 = Z - X^2 = Z - T$ et ainsi $Y = \pm\sqrt{Z - T}$. L'équation $\varphi(X, Y) = (Z, T)$ possède donc 2 solutions

$$\left\{ \psi_1 \ : \ \begin{array}{c} X = \sqrt{T} \\ Y = -\sqrt{Z - T} \end{array} \right. \quad et \quad \left\{ \psi_2 \ : \ \begin{array}{c} X = \sqrt{T} \\ Y = \sqrt{Z - T} \end{array} \right. \ :$$

$\varphi$ n'est donc pas bijective ($l = 2$). Le domaine fondamental des variables $(z, t)$ est donné par $D'$ défini par

$$D' = \left\{(z, t) \in \mathbb{R}^2 \,|0 \leq t \leq 1,\ t \leq z \leq 1\right\}$$

et

$$f_{(Z,T)}(z, t) = \sum_{i=1}^{2} f_{(X,Y)}(\psi_i(z, t)) \left| J_{\psi_i}(z, t) \right|$$

On a $J_{\psi_1} = -J_{\psi_2}$ et

$$\begin{aligned} \left| J_{\psi_1}(z, t) \right| &= \left| -J_{\psi_2}(z, t) \right| = \left| J_{\psi_2}(z, t) \right| = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{array} \right\| \\ &= \left\| \begin{array}{cc} 0 & \frac{1}{2\sqrt{t}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{z - t}} & \frac{1}{2\sqrt{z - t}} \end{array} \right\| = \frac{1}{4\sqrt{t}\sqrt{z - t}} \end{aligned}$$

d'où

$$f_{(Z,T)}(z,t) = 2\mathbf{1}_{D'}(z,t)$$

*iii) cas où* $p < n$

$\varphi$ ne peut donc pas être bijective. On a $Z = (X_1, X_2, ...., X_n)^t$ ,$U = (U_1, U_2, ...., U_p)^t$et $\varphi(Z) = U$.La solution consiste à compléter $U$ par $(n-p)$ variables aléatoires de telle sorte que le nouveau vecteur aléatoire $W$ contienne $U$ et soit d'égale dimension que $Z$ soit $n$.

$$W = (U_1, U_2, ...., U_p, W_1, W_2, ...., W_{n-p})$$

et alors $W = \varphi(Z)$, les variables aléatoires $W_i$ étant arbitraires, alors on peut déterminer la densité de $W$ et on peut en déduire la densité de $U$ car $U$ est une marginale de $W$.

**Exemple:** Soit $(X, Y)$ un couple de variables aléatoires indépendantes, de densité

commune $\mathcal{E}(\lambda)$. Déterminons la densité de $T = X + Y$.On a dans ce cas $n = 2, p = 1$.Soit le vecteur $W = (Z, T)$ où

$Z = X$.Etudions la bijectivité de $\varphi$ telle que $(Z, T) = \varphi(X, Y)$.Soit

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{c} Z = X \\ T = X + Y \end{array} \right. \Leftrightarrow \varphi^{-1} : \left\{ \begin{array}{c} X = Z \\ Y = T - Z \end{array} \right.$$

$\varphi$ est donc bijective.

$$\left| J_{\varphi^{-1}} \right| = \left\| \begin{array}{cc} \dfrac{\partial x}{\partial z} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial z} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{array} \right\| = 1$$

Donc

$$\begin{array}{rcl} f_{(Z,T)}(z,t) & = & f_{(X,Y)}\left(\varphi^{-1}(z,t)\right).1 \\ & = & f_X(z)\, f_Y(t-z) \end{array}$$

car $X$ et $Y$ sont indépendantes, il s'ensuit

$$f_{(Z,T)}(z,t) = \lambda e^{-\lambda z}.\lambda e^{-\lambda(t-z)} = \lambda^2 e^{-\lambda t}$$

d'où

$$f_{(Z,T)}(z,t) = \lambda^2 e^{-\lambda t}\mathbf{1}_D(z,t)$$

où

$$D = \left\{ (z,t) \in \mathbb{R}^2 \, | 0 \ \leq z \leq t \right\}$$

Néammoins, il convient de remarquer que cette technique peut s'avérer fastidieuse et peut donner lieu à des calculs dont l'issue peut être "aléatoire". En effet, la détermination de $U$ repose sur la connaissance d'une primitive de $f_{(U,V)}$

par rapport à $V$ ce qui n'est pas toujours évident. Aussi, il existe d'autres techniques applicables dans certains cas particuliers qui donnent des résultats plus rapides. Nous allons dans ce qui suit étudier certains de ces cas.

*6-6 Cas particuliers:*

*6-6-1 Produit de convolution:*

Soit $(X, Y)$ un couple de variables aléatoires indépendantes de densité commune $f$ sur $\mathbb{R}$,et de fonction de répartition

$F$.Déterminons la densité de $Z = X + Y$.

Pour cela, nous allons chercher la fonction de répartition de $Z$, *i.e* $F_Z$.

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X + Y \leq z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{z-x} f(x) f(y)\, dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) F(z-x)\, dx$$

Or la densité $f_Z$ de $Z$ est la dérivée de $F_Z$. Il s'ensuit:

$$f_Z(z) = F'_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) f(z-x)\, dx$$

Par un raisonnement analogue, on peut montrer aussi le résultat suivant

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) f(z-y)\, dy$$

$f_Z$ est appelée le **produit de convolution** de $f_X$ et de $f_Y$ (ici $f_X = f_Y = f$), noté $f_X * f_Y$.

**Exemple:** Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ , $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et $Z = X + Y$

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} . \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(x-\frac{z}{2}\right)^2}{2}} . e^{-\frac{z^2}{4}}\, dx \\
&= \frac{e^{-\frac{z^2}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(x-\frac{z}{2}\right)^2}{2}} .\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} e^{-\frac{z^2}{4}}
\end{aligned}$$

Ainsi $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,2)$

*6-6-2 Cas des statistiques d'ordre:*

Soient $X_1, X_2, ......, X_n, n$ variables aléatoires indépendantes de densité commune $f$ et de fonction de répartition $F$.On

cherche à déterminer la densité du couple $(U, V)$ où $U = \max\limits_{1 \leq i \leq n} X_i$ et $V = \min\limits_{1 \leq i \leq n} X_i$.(Ici $p = 2 < n$).

Soit $F_{(U,V)}$ la fonction de répartition du couple $(U, V)$.

$$\begin{aligned}
F_{(U,V)}(u, v) &= P(U \leq u, V \leq v) = P\left(\max_{1 \leq i \leq n} X_i \leq u, \min_{1 \leq i \leq n} X_i \leq v\right) \\
&= P\left(\max_{1 \leq i \leq n} X_i \leq u\right) - P\left(\max_{1 \leq i \leq n} X_i \leq u, \min_{1 \leq i \leq n} X_i > v\right) \\
&= P(X_i \leq u, \forall i) - P(v < X_i \leq u, \forall i) \\
&= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq u) - \prod_{i=1}^{n} P(v < X_i \leq u) \\
&= (F(u))^n - (F(u) - F(v))^n
\end{aligned}$$

D'où

$$F_{(U,V)}(u, v) = (F(u))^n - (F(u) - F(v))^n$$

La densité recherchée est donnée par

$$f_{(U,V)}(u, v) = \frac{\partial^2 F_{(U,V)}}{\partial u \partial v}(u, v)$$

et donc

$$f_{(U,V)}(u, v) = n(n-1) f(u) f(v) (F(u) - F(v))^{n-2} \qquad , u \geq v$$