Année Universitaire 2023/2024

Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès
Faculté des Sciences Exactes
3ème Année Maths

Examen du S6 Programmation mathématique

Exercice 1

Soit la fonction réelle à deux variables : 4

$$f(x, y) = 3x^3 - 6xy + 3y^2$$

Trouver analytiquement les optimums de cette fonction. Quelle sont leurs natures ?

Exercice 2

Soit f la fonction donnée par

$$f(x, y) = -x - 2y - 2xy + 1/2x^2 + 1/2y^2$$ 4

f est-elle convexe ? concave ?

Exercice 3

Soit

$$f(x, y) = 4x^2 + 6y^2 + 6xy + 3x + 4y + 6$$ 6

Développer deux itérations par l'algorithme du gradient à pas optimal pour $x_0 = {}^t(0\ 0)$.

Exercice 4

Résoudre le problème d'optimisation sous contrainte

$$\begin{cases} \max \quad f(x, y) = xy \\ \text{s.c. } 4x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$ 6

Bon Courage

Corrigé de l'examen
Programmation mathématique

Exo1 : $f(x,y) = 3x^3 - 6xy + 3y^2$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 9x^2 - 6y = 0 \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -6x + 6y = 0. \end{cases}$$

$x = y \Rightarrow 9x^2 - 6x = 0$

$\Rightarrow 3x(3x - 2) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2}{3}. \end{cases}$ 1

Les points optimums sont $(0,0)$ et $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

$$Hf_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 18x & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$ 1,5 det = -36

$(0,0)$ est un point selle.

$$Hf\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$ 1,5 det = 36

$(2/3, 2/3)$ point minimum

Exo 2 : $f(x,y) = -x - 2y - 2xy + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -1 - 2y + x$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -2 - 2x + y.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 1 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2 .$$

$$Hf = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$ 2

$\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = \det = -3$.

Donc Hf n'est pas définie (positive et négative)

Alors f n'est ni convexe ni concave.
1 1

Exo 3 :

l'algorithme du gradient à pas optimal

$$X_{k+1} = X_k - \rho_k \nabla f^t .$$

Alors $\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} - \rho_0 \nabla f(x_0, y_0)^t$

$\boxed{12}$

$$\nabla f^t = \begin{pmatrix} 8x + 6y + 3 \\ 12y + 6x + 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \rho_0 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\rho_0 \\ -4\rho_0 \end{pmatrix}.$$

$$\varphi(\rho_0) = f(-3\rho_0, -4\rho_0) = 4(-3\rho_0)^2 + 6(-4\rho_0)^2 + 6(-3\rho_0)(-4\rho_0) + 3(-3\rho_0) + 4(-4\rho_0) + 6.$$

3

$$= 36\rho_0^2 + 96\rho_0^2 + 72\rho_0^2 - 9\rho_0 - 16\rho_0 + 6.$$

$$= 204\rho_0^2 - 25\rho_0 + 6.$$

$$\varphi'(\rho_0) = 408\rho_0 - 25 = 0 \qquad \rho_0 = \frac{+25}{408}.$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{25}{136} \\ -\frac{25}{102} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}184 \\ -0{,}245 \end{pmatrix}$$

$\underline{2^{\text{ème}}}$.

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \rho_1 \nabla f^t(x_1, y_1).$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-25}{136} \\ \frac{-25}{102} \end{pmatrix} - \rho_1 \begin{pmatrix} 8\left(\frac{-25}{136}\right) + 6\left(\frac{-25}{102}\right) + 3 \\ 12\left(\frac{-25}{102}\right) + 6\left(\frac{-25}{136}\right) + 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0{,}184 - 0{,}058\,\rho_1 \\ -0{,}245 + 0{,}046\,\rho_1 \end{pmatrix}$$

$\varphi(\rho_1)$; $\varphi'(\rho_1) = 0$ on trouve

$$\rho_1 = 0,271.$$

3

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,184 - 0,058(0,271) \\ -0,245 + 0,046(0,271) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0,199 \\ -0,231 \end{pmatrix}.$$

Ex 04 $\begin{cases} \max f(x;y) = xy \\ sc \quad 4x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = xy - \lambda(4x^2 + y^2 - 4).$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -8\lambda x + y = 0 & (1) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -2\lambda y + x = 0 & (2) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 4x^2 + y^2 - 4 = 0. & (3) \end{cases}$$

2

(1) et (2) $x = 2\lambda y$. Alors

$$-8\lambda(2\lambda y) + y = 0$$

$$-16\lambda^2 y + y = 0$$

$$y(-16\lambda^2 + 1) = 0.$$

4

Alors $y=0$ ou $-16\lambda^2+1=0$.

pour $y=0$. 1 et 2 vérifiées mais 3

$-4=0$ contradiction.

D'où $-16\lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda^2=\frac{1}{16}=\frac{1}{4^2}$

$$\boxed{\lambda=\pm\frac{1}{4}}$$ 1

On a $x=2\lambda y$.

$\lambda=\frac{1}{4}$ $\quad x=\frac{2}{4}y \Rightarrow x=\frac{1}{2}y$.

$4\left(\frac{1}{2}y\right)^2+y^2-4=0$

1,5

$2y^2-4=0 \Rightarrow y^2=2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{2}$.

Les points $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2}\right)$.

Pour $\lambda=-\frac{1}{4}$

$x=\frac{-2}{4}y=-\frac{1}{2}y$.

$4\left(-\frac{1}{2}y\right)^2+y^2-4=0 \Rightarrow 2y^2-4=0$

1,5

$y=\pm\sqrt{2}$

Les points $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right),\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2}\right)$

Donc on a 4 points optimals

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right),\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2}\right),\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right),\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2}\right)$.

5