UMBB - Département de Mathématiques - MSS
Calcul Stochastique et Applications - ETLD - 2021 2022

Exercice 1

1. Soit $(X_n)_{0\leqslant n}$ une sur-martingale pour la filtration $\mathcal{F}_n$ et soit ξ_n une suite de variables aléatoires positives et bornées, ξ_n étant $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable pour $n \geqslant 1$ et ξ_0 constante. On pose $Z_0 = X_0$ et pour $n \geqslant 1$, $Z_n = X_n - X_{n-1}$. Montrer que la suite $Y_n = \xi_0 Z_0 + ... + \xi_n Z_n$ est une sur-martingale.

2. On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires adaptée pour la filtration $\mathcal{F}_n$ et B un borélien de $\mathbb{R}$. Montrer que le temps de première entrée de X_n dans B : $\tau = \min\{n; X_n \in B\}$ est un temps d'arrêt.

3. Soient S et T deux temps d'arrêt. Est-ce que la somme $S+T$ est un temps d'arret ? Justifiez votre réponse.

Solution

1.On a $Y_0 = \xi_0 Z_0$ et pour $n \geqslant 1$, $Y_n = Y_{n-1} + \xi_n Z_n$. Puisque $(X_n)_{0\leqslant n}$ est une sur-martingale, on sait que la suite de tribus $(\mathcal{F}_n)_{0\leqslant n}$ est croissante et que X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable pour tout n et que $E(|X_n|) < +\infty$. Il en resulte, par récurrence immédiate, en utilisant le fait que ξ_{n+1} est $\mathcal{F}_n$-mesurable et bornée, que Y_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable et $E(|Y_n|) < +\infty$ pour tout n. On a :

$$E(Y_{n+1}/\mathcal{F}_n) = E(Y_n) + \xi_{n+1} E(Z_{n+1}/\mathcal{F}_n) \leq Y_n$$

puisque $\xi_{n+1} \geqslant 0$ et $E(Z_{n+1}/\mathcal{F}_n) = E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) - X_n \leq 0$, $(X_n)_{0\leqslant n}$ étant une sur-martingale.

2.Si $\tau = \min\{n : X_n \in B\}$, pour tout n : $\{\tau = n\} = \{X_1 \notin B\} \cap \{X_2 \notin B\} \cap ... \cap \{X_{n-1} \notin B\} \cap \{X_n \in B\}$. Chaque ensemble appartient à $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$ et l'intersection aussi. Par conséquent $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$ et τ est un temps d'arrêt.

3.Pour tout $n \geqslant 0$, on a $\{S+T = n\} = \bigcup\limits_{k=0}^{k=n} (\{S = k\} \cap \{T = n-k\}) \in \mathcal{F}_n$ puisque chacun des termes appartient à $\mathcal{F}_k$ ou $\mathcal{F}_{n-k}$ et comme $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$ et $\mathcal{F}_{n-k} \subset \mathcal{F}_n$, il en est de même pour l'intersection et la réunion.

Exercice 2

1.Parmi les processus suivants, lesquels sont des mouvements browniens?

$i)$ $X_t = 3(B_{1+\frac{t}{9}} - B_1)$

$ii)$ $Y_t = \sqrt{t} B_1$

2. Calculer pour tout couple (s,t) la quantité : $E(B_s B_t^2)$

Solution

1. (i) Oui. X est un processus gaussien, centré de covariance, pour $t > s$ et en utilisant $E(B_t B_s) = t \wedge s$:

$$\begin{aligned} cov(X_t, X_s) &= E\left(3(B_{1+\frac{t}{9}} - B_1)3(B_{1+\frac{s}{9}} - B_1)\right) \\ &= 9\left((1+\tfrac{s}{9}) - 1 - 1 + 1\right) = s = t \wedge s \end{aligned}$$

(ii) Non. Y est un processus gaussien, centré de covariance, pour $t > s$:

$$\begin{aligned} cov(Y_t, Y_s) &= E\left(\sqrt{t} B_1 \sqrt{s} B_1\right) \\ &= \sqrt{ts} E(B_1^2) = \sqrt{ts} \end{aligned}$$

2.Pour $t > s$ on a $E(B_s B_t^2) = E((B_s B_t^2/\mathcal{F}_s))$. Comme la variable aléatoire B_s est $\mathcal{F}_s$-mesurable et $B_t^2 - t$ est une martingale, i.e $E(B_t^2 - t/\mathcal{F}_s) = B_s^2 - s$, on a :

$$E(B_s B_t^2) = E(B_s(B_t^2/\mathcal{F}_s)) = E(B_s(B_t^2 - s + t))$$

$=$

$E(B_s^3) + (t-s)E(B_s) = 0$
car B_s est centré et $E(B_s^3) = 0$
Pour $s > t$ on a $E(B_s B_t^2) = E((B_s B_t^2/\mathcal{F}_t))$
$= E(B_t^2 (B_s/\mathcal{F}_t)) = E(B_t^3) = 0$

Exercice 3

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard.
1. Calculer, en utilisant la formule d'I.P.P. la différentielle stochastique de $X_t = e^{B_t} \int_0^t \cos s dB_s$.
2. On considère les deux processus stochastiques

$$X_t = \sigma \int_0^t e^s dB_s \quad \text{et} \quad Y_t = e^{-t} X_t$$

$i)$ Calculer $E(X_t)$, $V(X_t)$, $E(Y_t)$ et $V(Y_t)$.
$ii)$ Spécifier la loi de X_t et de Y_t.
$iii)$ Exprimer dY_t en fonction de Y_t et de B_t

Solution

1.On pose $U = e^{B_t}$ et $V = \int_0^t \cos s \; dB_s$. La formule d'I.P.P.

$$dX_t = U_t dV_t + V_t dU_t + d\langle U, V\rangle_t$$

avec $dU_t = \frac{1}{2} e^{B_t} dt + e^{B_t} dB_t$, $dV_t = \cos t \; dB_t$ et $d\langle U, V\rangle_t = e^{B_t} \cos t \; dt$ donne $dX_t = e^{B_t} \cos t \; dB_t + \left(\int_0^t \cos s \; dB_s\right)\left(\frac{1}{2} e^{B_t} dt + e^{B_t} dB_t\right) + e^{B_t} \cos t \; dt$ ou

$$dX_t = e^{B_t}\left[\left(\cos t + \frac{1}{2}\int_0^t \cos t \; dB_s\right) dt + \left(\cos t + \left(\int_0^t \cos s \; dB_s\right)\right) dB_t\right]$$

2.$i)$ X_t étant l'intégrale d'un processus adapté, on a $E(X_t) = 0$. Par conséquent, l'isométrie d'Itô donne $V(X_t) = E(X_t^2) = \sigma^2 \int_0^t e^{2s} ds = \sigma^2 \frac{1}{2}(e^{2t} - 1)$. De même $E(Y_t) = E(e^{-t} X_t) = e^{-t} E(X_t) = 0$ et $V(Y_t) = E(Y_t^2) = E(e^{-2t} X_t^2) = e^{-2t} E(X_t^2) = e^{-2t} \sigma^2 \frac{1}{2}(e^{2t} - 1) = \sigma^2 \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})$
$ii)$ Etant des intégrales stochastiques de fonctions déterministes X_t et Y_t suivent des lois normales (centrées, et de variances respectives calculées à la question (i)).
$iii)$ La formule d'Itô avec $u(t, x) = e^{-t} x$ donne

$$dY_t = -e^{-t} X_t dt + e^{-t} dX_t = -Y_t dt + \sigma dB_t$$

Exercice 4

On considère un modèle Cox-Ross-Rubinstein de marché (B, S) à 1 étape. On suppose qu'un trader vient de vendre aujourd'hui (date $t = 0$) un call de strike 100 e à échéance T sur une action dont le cours actuel est de 100 e. On pense qu'a l'échéance le cours aura subi soit une hausse à 108 e, soit une baisse à 94 e avec des chances égales $\left(p = q = \frac{1}{2}\right)$. On suppose le rendement non risqué $r = 0^0/_0$.
1. Déterminer la valeur du portefeuille (montant de la prime) à $t = 0$.
2. Détailler les opération effectuées par le trader sur son portefeuille de couverture.

Solution

1. Le trader se constitue un portefeuille de couverture qui contient à la fois une certaine quantité de valeur b d'actif non risqué et une quantité Δ de parts de sous jacent.

A $t = 0$ son portefeuille vaut $b + \Delta 100$ e.
A l'échéance $t = T$ ce même portefeuille vaudra $b + \Delta 108$ e après un mouvement de hausse ou $b + \Delta 94$ e après un mouvement de baisse. Le pay-off (prix de maturité de l'option) du call est de 8 e en cas de hausse ou de 0 e en cas de baisse. Il suffit de choisir la composition (b, Δ) de son portefeuille de telle manière que les 2 équations soient vérifiées :

$$\begin{cases} b + \Delta 108 \ = 8 \\ b + \Delta 94 = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne $\Delta = 4/7$ (parts de sous-jacent) et $b = -53.72$ (emprunt de 53.72 e).
A $t = 0$ le portefeuille vaut $-53.72 + 4/7(100) = 3.43$ e. C'est la somme minimale dont doit disposer le trader à $t = 0$ pour constituer le portefeuille. C'est donc aussi le montant de la prime réclamée pour la vente de ce call. Dans les 2 cas (hausse ou baisse), la détention de ce portefeuille permettra, en le liquidant sur le marché, de s'acquitter du pay-off. on dit que l'on a synthétisé ou répliqué l'option. Cette stratégie est dite "couverture delta-neutre".
2. A $t = 0$ le vendeur effectuera les opérations suivantes :
• Encaisement de la prime de 3.43 e
• Emprunt (ici à taux $0^0/_0$) de la somme de 53.725 e
• Achat de 4/7 de parts de sous jacent.
A l'échéance $t = T$, le vendeur liquidera sa position en vendant sur la marché spot, et avec le produit de la vente , il s'acquittera du pay-off et remboursera son prêt (i.e $b + \Delta 108 \ = 8$ en cas de hausse) ou 0 (en cas de baisse et il gagne la prime).