Solutions des exercices de la série d'exos : « Chaîne de Markov à temps discret ».

Page 0/3

Exo 2 $X_3(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

$$\mathbb{E}X_3 = \sum_{i=0}^{2} i \, \underbrace{\mathbb{P}(X_3 = i)}_{?}$$

Cherchons la loi de proba de X_3 : π_3

On a vu au cour que :

$$^t\pi_3 = {}^t\pi_0 P^3 \quad ; \quad \pi_0 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$P^3 = \begin{bmatrix} 17/36 & 2/9 & 11/36 \\ 5/9 & 2/9 & 2/9 \\ 5/12 & 5/18 & 11/36 \end{bmatrix}$$

par une simple multiplica° :

$$^t\pi_3 = \left(\frac{67}{144} ; \frac{1}{4} ; \frac{41}{144}\right)$$

$$\mathbb{E}X_3 = 0 \cdot \frac{67}{144} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{41}{144}$$

$$\boxed{\mathbb{E}X_3 = \frac{59}{72}}$$

Exo 3

(a) $\mathbb{P}_{\underline{a}}\left[X_1 = b, X_2 = b, X_3 = b, X_4 = a, X_5 = b\right] =$

$$= \mathbb{P}(X_1 = b / X_0 = a)\,\mathbb{P}(X_2 = b / X_1 = b)\,\mathbb{P}(X_3 = b / X_2 = b)$$
$$\times\, \mathbb{P}(X_4 = a / X_3 = b)\,\mathbb{P}(X_5 = b / X_4 = a)$$

$$= P_{ab} \cdot P_{bb}\, P_{bb}\, P_{ba}\, P_{ab}$$

$$= \frac{1}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{3} = \boxed{1/64}.$$

(b) de m̂.

$$\mathbb{P}_c\left[X_1 = a, X_2 = c, X_3 = c, X_4 = a, X_5 = b\right] = P_{ca}\, P_{ac}\, P_{cc}\, P_{ca}\, P_{ab}$$

(c) $\mathbb{P}_a\left[X_1=b, X_3=a, X_4=c, X_6=b\right]=$

$$\mathbb{P}(X_1=b/X_0=a)\,\mathbb{P}(X_3=a/X_1=b)\,\mathbb{P}(X_4=c/X_3=a)$$

$$\times\,\mathbb{P}(X_6=b/X_4=c)=$$

$$=P_{ab}\,(P^2)_{ba}\cdot P_{ac}\cdot(P^2)_{cb}\,.$$

avec

$$P^2=\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & 7/20 & 1/4 & 2/5 \\ b & 3/16 & 31/48 & 1/6 \\ c & 6/25 & 2/15 & 47/75 \end{array}$$

$$(P^2)_{bc}=1/6\ ;\ (P^2)_{cb}=2/15\,.$$

(d) $\mathbb{P}(X_1=b, X_2=b, X_3=a)$

ici c'est différent de 3 premiers

Car cette proba. n'est pas conditionnelle sur l'état initial X_0.

c.à.d. On ne sait pas la valeur de X_0.

On doit conditionner sur l'état initial X_0 en utilisant la loi de proba. totales.

$$\mathbb{P}(X_1=b, X_2=b, X_3=c) = \sum_{i\in\{a,b,c\}} \mathbb{P}(X_1=b, X_2=b, X_3=c / X_0=i) \times \mathbb{P}(X_0=i)$$

$$= \underbrace{\mathbb{P}_a(X_1=b, X_2=b, X_3=c)}_{P_{ab}P_{bb}P_{bc}} \mathbb{P}(X_0=a) + \underbrace{\mathbb{P}_b(X_1=b, X_2=b, X_3=c)}_{P_{bb}P_{bb}P_{bc}} \times \mathbb{P}(X_0=b)$$

$$+ \underbrace{\mathbb{P}_c(X_1=b, X_2=b, X_3=c)}_{P_{cb}P_{bb}P_{bc}} \mathbb{P}(X_0=c).$$

Maintenant les calculs se font comme dans (a), (b) et (c).

4

avec : $\mathbb{P}(X_0=a)=2/5$, $\mathbb{P}(X_0=b)=1/5$, $\mathbb{P}(X_0=c)=\frac{2}{5}$

(e) $\mathbb{P}[X_2=b, X_5=b, X_6=b] \underset{\text{proba totales}}{\overset{\text{loi des}}{=}}$

$$\underbrace{\mathbb{P}_a[X_2=b, X_5=b, X_6=b]}_{(P^2)_{ab}(P^3)_{bb}P_{bb}}\mathbb{P}(X_0=a) +$$

$$\underbrace{\mathbb{P}_b[X_2=b, X_5=b, X_6=b]}_{(P^2)_{bb}(P^3)_{bb}P_{bb}}\mathbb{P}(X_0=b) +$$

$$\underbrace{\mathbb{P}_c[X_2=b, X_5=b, X_6=b]}_{(P^2)_{cb}(P^3)_{bb}P_{bb}}\mathbb{P}(X_0=c)$$

Pages 1/3 et 2/3

Exo 1

On va modéliser cette expérience par une C.M.H. $(X_n)_{n\geq 0}$

1 Détermination de E l'esp. des états :

L'état du syst. est le numéro de la pce utilisée.

1ère pce 2ème pce

On a 2 pces donc : $E = \{1, 2\}$

2 La matrice stochastique :

$$P = \begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ 1 & P_{11} & P_{12} \\ 2 & P_{21} & P_{22} \end{array}$$

$$P_{11} = \mathbb{P}[\underbrace{X_{n+1} = 1}_{1^{ère}\ pce} / \underbrace{X_n = 1}_{1^{ère}\ pce}]$$

c.à.d. P_{11} est la proba. de garder la

1ère pce après 1 jet.

D'après la règle de transition :

$P_{11} = \mathbb{P}($ Avoir <u>Pile</u> en jetant la 1ère pce $)$

$\boxed{P_{11} = 0.6} \Longrightarrow \boxed{P_{12} = 1 - 0.6 = 0.4}$

$$P_{21} = \mathbb{P}\Big[\underbrace{X_{n+1} = 1}_{1^{ère}\ pce.} \Big/ \underbrace{X_n = 2}_{2^{ème}\ pce}\Big]$$

C.à.d P_{21} est la proba. <u>de remplacer</u> la 2ème pce par la 1ère.

D'après la règle de transition :

$P_{21} = \mathbb{P}\Big[$ Avoir <u>Face</u> en jetant la 2ème pce $\Big]$

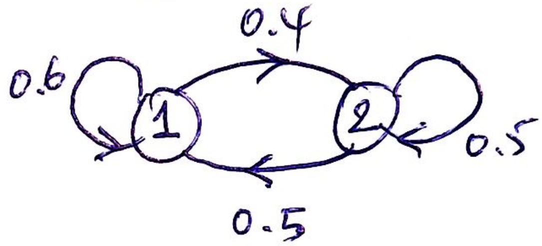
$= 0.5$

$\boxed{P_{21} = 0.5} \Longrightarrow \boxed{P_{22} = 0.5}$

Notre matrice stoch, est alors :

$$P = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Diagramme :



Passons aux questions maintenant :

1) à long terme ($n \to \infty$)

La proportion des jets effectués par la 1ère pce. (l'état 1).

si $X_0 = 1$.

On cherche donc :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 1 / X_0 = 1)$$

Comme la C.M. est apériodique, Récurrente et Irréductible, Cette limite existe, est unique et ne dépend pas de X_0.

Sa valeur est :

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_n = 1 / X_0 = 1) = \pi_1$$

$\pi_1 = ?$

$$\begin{cases} {}^t\pi P = {}^t\pi \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases} , \quad {}^t\pi = (\pi_1 \ \pi_2)$$

$$\begin{cases} 0.6\,\pi_1 + 0.5\,\pi_2 = \pi_1 \\ 0.4\,\pi_1 + 0.5\,\pi_2 = \pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = 5/9 \\ \pi_2 = 4/9 \end{cases}$$

La réponse est : $\boxed{5/9}$

2) Si on commace le processus par la 1ère pce $(X_0 = 1)$,

La proba. que la 2ème pce sera utilisée dans le 100ème jet.

càd $\quad P(X_{100} = 2 / X_0 = 1)$

$$= \left(P^{100}\right)_{12}$$

$n = 100 \gg$.

La loi limite existe et est unique due.

$$P^{100} \approx \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \end{array}$$
$$P^{100} \approx \begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1 & \pi_1 & \pi_2 \\ 2 & \pi_1 & \pi_2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(P^{100}\right)_{12} \approx \boxed{\pi_2 = 4/9}.$$

10

$\boxed{\text{Exo2}}$

(a) P^2 facile.

(b) $\alpha_i = \mathbb{P}(X_0 = i)$; $i \in \{1, 2\}$

c.à.d. ${}^t\pi_0 = (\alpha_1 \ \alpha_2)$.

<u>La loi de X_2</u> ; $\pi_2 = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_2 = 1) \\ \mathbb{P}(X_2 = 2) \end{pmatrix}$

D'après le cours :

$${}^t\pi_2 = {}^t\pi_0 P^2 \quad ; \quad P^2 = \left(P_{ij}^{(2)}\right)_{ij}$$

<u>D'où</u> $\mathbb{P}(X_2 = j) = \alpha_1 (P^2)_{1j} + \alpha_2 (P^2)_{2j}$

$$= \alpha_1 P_{1j}^{(2)} + \alpha_2 P_{2j}^{(2)}.$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X_2 = j) = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i P_{ij}^{(2)}, \quad j \in \{1, 2\}}$$

$\boxed{\text{Exo3}}$ On donne P et $\pi_0 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

(a) La valeur moyenne de l'état après 3 transitions

C.àd : $\mathbb{E} X_3$

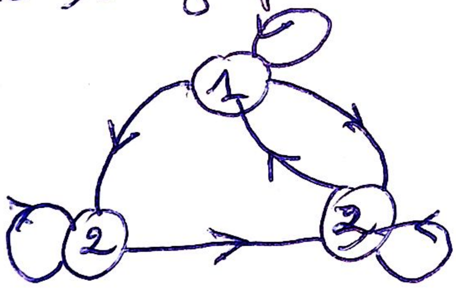
$$\mathbb{E}X_3 = \sum_{i=0}^{2} i \,\mathbb{P}(X_3 = i)$$

$$= (0, 1\ 2)\ {}^t\pi_3$$

$$\boxed{\mathbb{E}X_3 = (0,1,2)\ {}^t\pi_0\, P^3}$$

(b) L'existence et l'unicité de π

Traçons le graphe des transitions :



Il est clair que : La C.M. est : apériodique $d(1) = 1 = d(2) = d(3)$
Irréductible $1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3$

Comme $E = \{1,2,3\}$ est fini, alors :

La C.M. est Récurrente.

Ce qui entraîne que la loi stationnaire existe et est unique.

(c) $\lim_{n\to\infty} P_{10}^{(n)} = \pi_0$.

Il faut donc résoudre le syst.

$$\begin{cases} {}^t\pi P = {}^t\pi \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases} ; \pi = \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix}$$

On obtient : $${}^t\pi = \left(\underset{\pi_0}{\tfrac{10}{21}}, \underset{\pi_1}{\tfrac{5}{21}}, \underset{\pi_2}{\tfrac{6}{21}} \right)$$

La réponse :

$$\lim_{n\to\infty} P_{10}^{(n)} = 10/21 \ (= \pi_0).$$

(d) La proportion du temps de séjour dans ① : $\pi_1 = 5/21$.

(e) Le temps moyen du 1er retour à l'état ② : $\mu_2 = 1/\pi_2 = 21/6$.