

* Série d'exos #3
Temps d'arrêt - Th^m d'arrêt - Inégalités maximales *

Ex01 Dans tous les exos, supposons que $(\Omega, (\mathcal{F}_n), \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité filtré.

- Soient τ et σ deux (\mathcal{F}_n) -temps d'arrêt.
- Montrer que
 - (a) Si $\tau \equiv k \in \mathbb{N}$ alors $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_k$.
 - (b) $\tau \wedge \sigma$, $\tau \vee \sigma$, $\sigma + \tau$ sont des (\mathcal{F}_n) -t.a.
 - (c) Si $\tau \leq \sigma$ alors $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\sigma$
 - (d) $\mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma} = \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$
 - (e) $\{\tau < \sigma\} \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$ et $\{\tau = \sigma\} \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$.

Ex02 Soient $(X_n)_n$ et $(Y_n)_n$ deux surmartingales (resp. martingales) et τ un temps d'arrêt tel que : $X_\tau \leq Y_\tau$ (resp. $X_\tau = Y_\tau$) p.s sur $\{\tau < +\infty\}$.

Sat:

$$Z_n := Y_n \mathbb{1}_{\{n < \tau\}} + X_n \mathbb{1}_{\{\tau \leq n\}}$$

- Montrer que $(Z_n)_n$ est une surmartingale (resp. martingale).

Ex03 Soit $(X_n)_n$ est une martingale et τ un temps d'arrêt tel que :

- (i) $\tau < \infty$ p.s, (ii) $X_\tau \in L^1$ et (iii) $\mathbb{E} |X_n| \mathbb{1}_{\{\tau > n\}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Montrer que :

- (a) $\mathbb{E} |X_\tau| \mathbb{1}_{\{\tau > n\}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$; (b) $\mathbb{E} |X_{\tau \wedge n} - X_\tau| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$; (c) $\mathbb{E} X_\tau = \mathbb{E} X_0$.

Ex04 (Une réciproque du Th^m d'arrêt)

Soit (X_n) un processus intégrable adapté

Montrer que si l'on a $\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0)$ pour tout temps d'arrêt borné τ , alors $(X_n)_n$ est une martingale.

(1/2)

Exo 5 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une marche aléatoire symétrique sur \mathbb{Z} .

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ avec: $a < 0 < b$ et Soient:

$\tau_a = \inf \{n \geq 0 : X_n = a\}$; $\tau_b = \inf \{n \geq 0 : X_n = b\}$ et $\tau_{a,b} = \tau_a \wedge \tau_b$.

Soit $A = \{\tau_{a,b} = \tau_a\}$ l'événement où X atteint " a " avant " b ".

- Le but de cet exercice est de calculer $P(A)$.

1) Montrer que $\limsup_{n \rightarrow +\infty} X_n = +\infty$

2) Montrer que $(X_n^{\tau_{a,b}})_{n \geq 0} = (X_{n \wedge \tau_{a,b}})_{n \geq 0}$ est une martingale.

3) Montrer que $|X_n^{\tau_{a,b}}| < b - a$.

4) Par le Th^m de la convergence dominée, montrer que: $\mathbb{E}(X_n^{\tau_{a,b}}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_{\tau_{a,b}})$.

5) Ecrire $\mathbb{E}(X_{\tau_{a,b}})$ en fonction de a, b et $P(\tau_{a,b} = \tau_a)$.

6) En déduire $P(A)$.

Exo 6 Soient Y_1, Y_2, \dots des v.a. i.i.d telles que $\mathbb{E}(Y_m) = 0$, et soit la martingale $X_n = \sum_{m=1}^n Y_m$. On se donne $\lambda > 0$, et soit

$$P_n(\lambda) = P\left\{\max_{1 \leq m \leq n} |X_m| \geq \lambda\right\}.$$

1. On suppose que les $Y_m \in L^2$. Donner une majoration de $P_n(\lambda)$ en appliquant l'inégalité de Doob à X_n^2 .

2. Améliorer la borne précédente en appliquant l'inégalité de Doob à $(X_n + c)^2$ et en optimisant sur c .

3. On suppose que $Y_m \sim N(0, 1)$. Majorer $P_n(\lambda)$ en appliquant l'inégalité de Doob à $e^{cX_n^2}$ et en optimisant sur c .

4. Pour les Y_m normales centrées réduites, majorer $P\left\{\max_{1 \leq m \leq n} X_m \geq \lambda\right\}$ en appliquant l'inégalité de Doob à e^{cX_n} et en optimisant sur c .

(2/2)

Corrigé des exos de la semaine n°3

Exon (a) $\{\tau \leq n\} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } k > n \\ \Omega & \text{si } k \leq n \end{cases}$

On sait que: $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{F}_n)$

Dni: $\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \in \mathcal{F}_n \text{ pour tout } n \geq k\} = \bigcap_{n \geq k} \mathcal{F}_n = \mathcal{F}_k$

(b) st $n \in \mathbb{N}$. On a:

• $\{\tau \wedge \sigma \leq n\} = \underbrace{\{\tau \leq n\}}_{\text{t.a.}} \cup \underbrace{\{\sigma \leq n\}}_{\text{t.a.}} \in \mathcal{F}_n$

de \hat{m} : • $\{\tau \vee \sigma \leq n\} = \{\tau \leq n\} \cap \{\sigma \leq n\} \in \mathcal{F}_n$

• $\{\tau + \sigma \leq n\} = \bigcup_{m=0}^n \{\tau \leq m\} \cap \{\sigma \leq n-m\} \in \mathcal{F}_n$

Remarque: On peut le démontrer en utilisant l'égalité $\{\tau = n\}$.

(c) st $A \in \mathcal{F}_\tau$ et $n \geq 0$. On a: $A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$

et comme $\tau \leq \sigma$, on a: $\{\sigma \leq n\} \subseteq \{\tau \leq n\}$. Par conséquent;

$A \cap \{\sigma \leq n\} = \underbrace{A \cap \{\tau \leq n\}}_{\mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{\sigma \leq n\}}_{\mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n \Rightarrow A \in \mathcal{F}_\sigma$

Dni: $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\sigma$

(d) D'après (b) et (c): $\mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma} \subset \mathcal{F}_\tau$ et $\mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma} \subset \mathcal{F}_\sigma$

$\therefore \mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma} \subset \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$

le contraire: st $A \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_\infty$.

On sait que: $\{\tau \wedge \sigma \leq n\} = \{\tau \leq n\} \cup \{\sigma \leq n\}$

Alors: $A \cap \{\tau \wedge \sigma \leq n\} = A \cap [\{\tau \leq n\} \cup \{\sigma \leq n\}]$
 $= \underbrace{(A \cap \{\tau \leq n\})}_{A \in \mathcal{F}_\tau} \cup \underbrace{(A \cap \{\sigma \leq n\})}_{A \in \mathcal{F}_\sigma} \in \mathcal{F}_n.$

(e)⁽ⁱ⁾ st $n \in \mathbb{N}$. On a:

$$\{\tau < \sigma\} \cap \{\tau \leq n\} = \bigcup_{m=0}^n \{\tau = m\} \cap \{\sigma > m\}$$

Mais pour $\forall m \in \{0, 1, \dots, n\}$, on a:

$$\{\tau = m\} = \{\tau \leq m\} \cap \{\tau \leq m-1\}^c \in \mathcal{F}_m^c \subset \mathcal{F}_n.$$

(e.a. discret.)

et $\{\sigma > m\} = \{\sigma \leq m\}^c \in \mathcal{F}_m^c \subset \mathcal{F}_n.$

Il s'en suit que: $\{\tau < \sigma\} \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n.$

$$\Rightarrow \boxed{\{\tau < \sigma\} \in \mathcal{F}_\tau}.$$

Par la m. procédure, on montre que:

$$\{\tau < \sigma\} \cap \{\sigma \leq n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n$$

c.à.d. $\boxed{\{\tau < \sigma\} \in \mathcal{F}_\sigma}$

Conclusion: $\{\tau < \sigma\} \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma.$

(ii) $\{\tau = \sigma\} = \{\tau < \sigma\}^c \cap \{\sigma < \tau\}^c \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma. \quad (\text{d'après } e(i)).$



Exo2 Notons que: $|Z_n| \leq |X_n| + |Y_n| \quad \forall n \geq 1$.

Dm: $Z_n \in L^1$.

de plus (Z_n) : (\mathcal{F}_n) -adapté car somme de processus (\mathcal{F}_n) -adaptés.

On a: $Y_{n+1} = Y_\tau \geq X_\tau = X_{n+1}$ p.s. sur $\{\tau = n+1\}$. (τ : fini)

$$\begin{aligned} \text{Dm: } Z_{n+1} &= Y_{n+1} \mathbb{1}_{\{n+1 < \tau\}} + X_{n+1} \mathbb{1}_{\{\tau \leq n+1\}} \\ &\leq Y_{n+1} \mathbb{1}_{\{n+1 < \tau\}} + Y_{n+1} \mathbb{1}_{\{n+1 = \tau\}} + X_{n+1} \mathbb{1}_{\{\tau \leq n\}} \\ &= Y_{n+1} \mathbb{1}_{\{n < \tau\}} + X_{n+1} \mathbb{1}_{\{\tau \leq n\}} \\ &\quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\mathcal{F}_n} \qquad\qquad\qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\mathcal{F}_n} \end{aligned}$$

Introduisons l'espérance conditionnelle:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_{n+1} / \mathcal{F}_n) &\leq \mathbb{1}_{\{n < \tau\}} \mathbb{E}(Y_{n+1} / \mathcal{F}_n) + \mathbb{1}_{\{\tau \leq n\}} \mathbb{E}(X_{n+1} / \mathcal{F}_n) \\ &\leq Y_n \mathbb{1}_{\{n < \tau\}} + X_n \mathbb{1}_{\{\tau \leq n\}} = Z_n \quad \text{p.s.} \end{aligned}$$

Dnc: (Z_n) : (\mathcal{F}_n) -supermart.

* La m. chose pour le cas de martingale (remplacer \leq par $=$).

Exo3 (2) Comme $\tau < +\infty$ et $|X_\tau| < +\infty$ p.s.,

On a: $|X_\tau| \mathbb{1}_{\{\tau > n\}} \rightarrow 0$ p.s.

et $|X_\tau| \mathbb{1}_{\{\tau > n\}} \leq |X_\tau|$ et $X_\tau \in L^1$

En appliquant le Th^m de la cge ~~monotone~~ dominée on obtient: $\mathbb{E}|X_\tau|1_{\{\tau > n\}} \rightarrow 0$

(b) D'après les hypothèses et la partie (a), on a :

$$\mathbb{E}|X_{\tau \wedge n} - X_\tau| = \mathbb{E}|X_n - X_\tau|1_{\{\tau > n\}} + \underbrace{\mathbb{E}|X_\tau - X_\tau|1_{\{\tau \leq n\}}}_{0''}$$

$$\begin{matrix} (X_{\tau \wedge n} - X_\tau)1_{\{\tau > n\}} + \\ (X_{\tau \wedge n} - X_\tau)1_{\{\tau \leq n\}} \end{matrix} \leq \mathbb{E}|X_n|1_{\{\tau > n\}} + \mathbb{E}|X_\tau|1_{\{\tau > n\}} \rightarrow 0.$$

(c) Comme $\tau \wedge n$ est un t.a. ^{borné}, par le théorème d'arrêt : $\mathbb{E}(X_{\tau \wedge n}) = \mathbb{E}X_0$] On peut utiliser la mart. arrêtée

Alors : $|\mathbb{E}X_\tau - \mathbb{E}X_0| = |\mathbb{E}X_\tau - \mathbb{E}X_{\tau \wedge n}|$

$$\leq \mathbb{E}|X_\tau - X_{\tau \wedge n}| \rightarrow 0$$

Donc : $\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_0$.

Exo 4 On remarque que $\mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X_0$ pour $\forall n \geq 0$ (t.a. constant). De plus, pour $n \geq 0$, et $A \in \mathcal{F}_n$, on considère :

$$\tau = n1_A + (n+1)1_{A^c}$$

τ est un t.a, En effet :

$$\{\tau \leq k\} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } 0 \leq k \leq n-1 \\ A & \text{si } n \leq k \leq n+1 \\ \Omega & \text{si } k \geq n+1 \end{cases} \in \mathcal{F}_n.$$

de plus : $|\tau| \leq 2n+1$ donc borné, ($\in L^1$).

4/6

Donc: $E X_T = E(X_n | A) + E(X_{n+1} | A^c) = E(X_{n+1})$

ce qui implique que: $E(X_n | A) = E(X_{n+1} | A) \quad \forall A \in \mathcal{F}_n$.

d'où: $\boxed{E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n}$



Exos (1) (X_n) : chaîne de Markov récurrente de \mathbb{Z}
donc tous les états seront visités

$\Rightarrow X_n$ n'est pas bornée

$\Rightarrow \limsup_{\infty} X_n = +\infty, \quad \liminf_{\infty} X_n = -\infty$

(2) Il suffit de voir que $\tau_{a,b} = \tau_a \wedge \tau_b$ est un t.a.
(voir exo 1)

et on sait que la martingale arrêtée est une martingale.

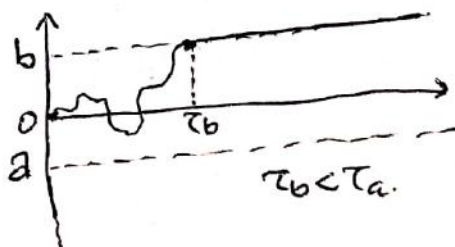
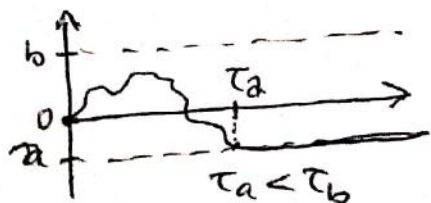
(3) $X_{n \wedge \tau_{a,b}} = X_{n \wedge \tau_a \wedge \tau_b} = \begin{cases} X_{n \wedge \tau_a} & \text{si } \tau_a \leq \tau_b \\ X_{n \wedge \tau_b} & \text{si } \tau_b \leq \tau_a \end{cases}$

et on sait que $X_0 = 0$ (marche aléatoire) -- (1)

D'où: si $\tau_a < \tau_b$: une fois le processus atteint "a" -- (2)
il garde la valeur a.

de m si $\tau_b < \tau_a$: il garde la valeur "b" après τ_b -- (3)

de (1), (2) et (3) $|X_{n \wedge \tau_{a,b}}| < b - a$.



4) Montrons que $\tau_a < \infty$ et $\tau_b < \infty$ (chaîne de Markov récurrente)

alors: $\tau_{a,b} \wedge n \rightarrow \tau_{a,b}$ p.s.

ce qui entraîne: $X_{\tau_{a,b} \wedge n} \rightarrow X_{\tau_{a,b}}$ p.s.

et $\cancel{X_{\tau_{a,b} \wedge n}} | X_{\tau_{a,b} \wedge n} | \leq b-a = Y \in L^1$.

Par le Th^m de la croûte dominée:

$$\mathbb{E} | X_{\tau_{a,b} \wedge n} | \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_{\tau_{a,b}})$$

$$5) X_{\tau_{a,b}} = \begin{cases} a & \text{si } \tau_{a,b} = \tau_a \\ b & \text{si } \tau_{a,b} = \tau_b \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{D'au: } \mathbb{E} X_{\tau_{a,b}} &= a \cdot \mathbb{P}(\tau_{a,b} = \tau_a) + b \cdot \mathbb{P}(\tau_{a,b} = \tau_b) \\ &= b + (a-b) \mathbb{P}(\tau_{a,b} = \tau_a) \end{aligned} \quad \left[\begin{array}{l} \text{car la} \\ \text{somme des} \\ \text{proba} = 1 \end{array} \right]$$

6) On sait que: $(X_n^{\tau_{a,b}})_n$ est une martingale

$$\text{d'au: } \mathbb{E}(X_n^{\tau_{a,b}}) = \mathbb{E}(X_0) = 0 \quad (\text{marche aléatoire } X_0 = 0 \text{ p.s.})$$

$$\text{Ou a: } 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n^{\tau_{a,b}}) \stackrel{4)}{=} \mathbb{E}(X_{\tau_{a,b}}) = b + (a-b) \mathbb{P}(A).$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{b}{b-a}}$$

$$\boxed{\mathbb{E} x \geq 0} \quad 1) \boxed{P_n(\lambda) \leq \frac{n\sigma^2}{\lambda^2}}; \quad 2) \boxed{P_n(\lambda) \leq \frac{n\sigma^2 + c^2}{(\lambda + c)^2}} \text{ minimale pour } \boxed{c = \frac{n\sigma^2}{\lambda}}$$

$$3) \boxed{P_n(\lambda) \leq \frac{e^{-c\lambda}}{\sqrt{1-2nc}}}$$

$$\text{minimale pour } \boxed{c = (1 - \frac{n}{\lambda^2})/2n} \quad 4) \text{ La borne est } \boxed{e^{\frac{1}{2}cn - c\lambda}}$$

$$\text{minimale pour } \boxed{c = \frac{\lambda}{n}}$$