Corrigé Série Chrono

A/ 1/ y_t est fortement stationnaire ssi

$$F(y_t, y_{t+1}, y_{t+2}, \dots, y_{t+n}) =$$
$$F(y_s, y_{s+1}, y_{s+2}, \dots y_{s+n}) \quad \forall t, \forall s, \forall n$$

2/ y_t faiblement stationnaire ssi

$E(y_t) = \text{cste} \quad \forall t \qquad Var(y_t) = \text{cste} \ \forall t$

$Cov(y_t, y_{t-k}) = Cov(y_s, y_{s-k}) = \gamma_k \ \forall t, \forall s$

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

B/ $y_t \sim AR(3)$ si r_1 est racine double et r_2 racine simple de l'équation caractéristique alors $\rho_k = (a + bk) r_1^k + c r_2^k$

ρ_1 et ρ_2 connus, r_1 et r_2 connus et $\rho_0 = 1$ nous donnent un système de 3 équations à 3 inconnues

$k = 0 \Rightarrow 1 = a + c$

$k = 1 \Rightarrow \rho_1 = (a+b) r_1 + c r_2$

$k = 2 \Rightarrow \rho_2 = (a+2b) r_1^2 + c r_2^2$

c/ $y_t \sim MA(q)$

1_ $y_t = \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_i \varepsilon_{t-i} + \dots \theta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t$

$y_{t-k} = \theta_1 \varepsilon_{t-1-k} + \dots + \theta_j \varepsilon_{t-j-k} + \dots \theta_q \varepsilon_{t-q-k} + \varepsilon_{t-k}$

Avec $\theta_0 = 1$

$\gamma_k = E(y_t y_{t-k})$

$= E\left(\sum_{i=0}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-i} \left(\sum_{j=0}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j-k}\right)\right)$

$\varepsilon_t \sim BB(\sigma^2) \Rightarrow E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq s \\ \sigma^2 & \text{si } t = s \end{cases}$

les seules $E(\quad)$ non nulles sont celles lorsque $t-i = t-j-k \Rightarrow i = j+k \Rightarrow j = i-k$

$\Rightarrow \gamma_k = \sigma^2 \sum \theta_i \theta_{i-k}$

Dans cette sommation $\forall$ indice est ≥ 0 et $\leq q$ $\Rightarrow \gamma_k = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{\cancel{k}=k}^{q} \theta_i \theta_{i-k} \\ \\ \gamma_k = 0 & \text{si } k > q \end{cases}$

$\Rightarrow \rho_k = \begin{cases} \dfrac{\sum_{i=k}^{q} \theta_i \theta_{i-k}}{\sum_{i=0}^{q} \theta_i^2} & \text{si } k \leq q \\ 0 & \text{si } k > q \end{cases}$

③

$$E(y_t) = E\left(\sum_{i=0}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-i}\right) = \sum_{i=0}^{q} \theta_i E(\varepsilon_{t-i}) = 0 \quad \forall t$$

$$\gamma_0 = Var(y_t) = Var\left(\sum_{i=0}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-i}\right) \quad \text{les } Cov(\varepsilon_t \varepsilon_{t-i}) = \begin{cases} \sigma^2 \text{ si } i=j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$= \sum_{i=0}^{q} \theta_i^2 Var(\varepsilon_{t-i}) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{q} \theta_i^2 \quad \forall i$$

ρ_k ne depend que de k

$\rho_k = 0$ si $k > q$

Donc y_t est stationnaire

2 - si $q = 2$ $\quad y_t = \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t \quad \theta_0 = 1$

$$= \theta_1 L(\varepsilon_t) + \theta_2 L^2(\varepsilon_t) + \theta_0 L^0 \varepsilon_t$$

$$= (\theta_2 L^2 + \theta_1 L + 1)\varepsilon_t$$

soit s_1 et s_2 les racine du polynôme caractéritique

$$\varepsilon_t = \frac{y_t}{\theta_2 L^2 + \theta_1 L + 1} = \frac{1}{\theta_2} \frac{y_t}{\left(L^2 + \frac{\theta_1}{\theta_2} L + \frac{1}{\theta_2}\right)} = \frac{1}{\theta_2} \frac{y_t}{(L - s_1)(L - s_2)}$$

$$= \frac{y_t}{\theta_2} \cdot \frac{\cancel{A}\ \cancel{s_2}}{\left(s_1\left(\frac{L}{s_1} - 1\right)\left(s_2\left(\frac{L}{s_2} - 1\right)\right)\right)} = \frac{1}{s_1 s_2}\left(\frac{A}{\frac{L}{s_1} - 1} + \frac{B}{\frac{L}{s_2} - 1}\right)$$

A et B seront fonction de s_1 et s_2

decomposition en fraction rationnelles

$$\varepsilon_t = \frac{A}{s_1 s_2}\left(\frac{1}{\frac{L}{s_1} - 1} y_t + \frac{1}{\frac{L}{s_2} - 1} y_t\right) \quad \text{avec } \|L\| = 1$$

pour que $\dfrac{1}{\frac{L}{s_1} - 1} y_t$ donc $\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{L}{s_1}\right)^i (y_{t-i})$ il faut

que la serie converge $\sum_{i}^{\infty}\left(\frac{L}{s_1}\right)^i \longrightarrow$ si $\left|\frac{L}{s_1}\right| < 1$

soit $|s_1| > 1$

or les racines du polynôme caractéristique sont les inverses des racines de l'equation caractéristique $x^2 + \theta_1 x + \theta_2 = 0$ $\quad r_1 = \frac{1}{s_1}$ $\quad r_2 = \frac{1}{s_2}$

Donc pourque le processus soit inversible il faut que $|r_1| < 1$ et $|r_2| < 1$

D/ $y_t \sim ARMA(p, q)$

$$\gamma_k = E(y_t y_{t-k}) = \alpha_1 E(y_{t-1} y_{t-k} + \dots + \alpha_p E(y_{t-p} y_{t-k})$$

$$+ \theta_0 E(\varepsilon_t y_{t-k}) + \theta_1 E(\varepsilon_{t-1} y_{t-k}) + \dots \theta_i E(\varepsilon_{t-i} y_{t-k})$$

$$+ \theta_q E(\varepsilon_{t-q} y_{t-k}) \Rightarrow$$

$$(*) \gamma_k - \alpha_1 \gamma_{k-1} + \dots \alpha_p \gamma_{k-p} = E(\varepsilon_t y_{t-k}) + \dots \theta_i E(\varepsilon_{t-i} y_{t-k}) \dots$$

$$E(\varepsilon_{t-i} y_{t-k}) = \begin{cases} 0 \text{ si } i > k \Rightarrow y_{t-k} \text{ valeur passé} \\ \neq 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

Donc si $k > q$ l'equation $(*)$ sera homogene

$$\gamma_k = \alpha_1 \gamma_{k-1} + \dots \alpha_i \gamma_{k-i} + \dots + \alpha_p \gamma_{k-p} \quad \forall k > q$$

$$(**) \rho_k = \alpha \rho_{k-1} + \dots \alpha_i \rho_{k-1} + \dots + \alpha_p \rho_{k-p}$$

$\Rightarrow$ Dans la matrice V soit $k \in \{0, \dots j-1\}$ avec $i > q$

$j > p$

avec $j > p$ la matrice V à plus que p colonne

en faisant varier l de 0 jusqu'à $j-1$

avec $l = 0$ $V_i = (\ell_i, \ell_{i-1}, \ell_{i-2}, \dots, \ell_p, \ell_{p+1}, \dots \ell_{i-(j-1)})$

Donc $(\ell_{i-1}, \ell_{i-2}, \dots \ell_p) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} = \ell_i$

$= \alpha_1 \ell_{i-1} + \alpha_2 \ell_{i-2} + \dots \alpha_p \ell_{i-p} = \ell_i$

en utilisant $(**)$ avec $i = k$

pour $l = 1$ $V_{i+1} = \ell_{i+1}, \ell_i, \ell_{i-1}, \dots \ell_{i-(p+1)}, \dots \ell_{i-(j-2)}$

$\Rightarrow (\ell_i, \ell_{i-1}, \dots, \ell_{i-(p+1)}) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} =$

$\alpha_1 \ell_i + \alpha_2 \ell_{i-1} + \dots + \alpha_p \ell_{i-(p+1)} = \ell_{i+1}$

en utilisant $(**)$ avec $i+1 = k$

et ainsi de suite jusqu'à $l = j-1$

Donc $\begin{pmatrix} \ell_i \\ \ell_{i+1} \\ \vdots \\ \ell_{i+j-1} \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire des p autres colonnes de V (de la 2^e jusqu'à la ~~$p$ième~~ $(p+1)$ième

Donc si $i > q$ et $j > p$ $\det(V) = 0$

2 - avec $y_t = -y_{t-1} - 0.21\, y_{t-2} = 0.3\, \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

l'equation caracteristique devient homogene à partir de q+1 c-à-d 2 sous forme

$$\gamma_k = -\gamma_{k-1} - 0.21\, \gamma_{k-2}$$

$$\gamma_k + \gamma_{k-1} + 0.21\, \gamma_{k-2}$$

il y avait un signe - qui manquait donc la 2e question n'a pas été notée