Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Badji Mokhtar-Annaba

Master 1: -Probabilités et Statistique
-Actuariat
Série N°4

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien réel standard défini sur un espace probabilisé $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$.

Exercice 1:

Soit X la semi-martingale définie par

$$X_t = x + \int_0^t a_s X_s ds + \int_0^t b_s X_s dB_s \qquad (*)$$

où $x \in \mathbb{R}$ et $a, b : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$.

1) Soit (y_t) la solution de l'EDO

$$y_t = x + \int_0^t a_s y_s ds.$$

Donner la forme de y.

2) Pour $x \neq 0$, montrer que $Z_t := \frac{X_t}{y_t}$ est une martingale.

3) Vérifier alors $(x \neq 0)$ que la solution de $(*)$ est donnée par

$$X_t = e^{\int_0^t a_s ds} \left[x + \int_0^t b_s \exp\left(-\int_0^s a_u du \right) dB_s \right]$$

Exercice 2:

1) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\forall t \geq 0, \exp(\theta B_t) = 1 + \theta \int_0^t \exp(\theta B_s) dB_s + \frac{\theta^2}{2} \int_0^t \exp(\theta B_s) ds$$

2) On pose pour tout $t \geq 0, u(t) = \mathbb{E}(\exp(\theta B_t))$.

Montrer que $u'(t) = \frac{\theta^2}{2} u(t)$. En déduire $u(t)$.

Retrouver ce résultat par un calcul direct.

Solutions des exercices

Exercice 1:

1) On a, en dérivant l'égalité $y_t = x + \int\limits_0^t a_s y_s ds$, on obtient:

$$\begin{cases} y' = a_t y_t \\ y_0 = x \end{cases},$$

C'est une EDO à variable séparable, qui admet comme solution

$$y_t = x e^{\int\limits_0^t a_s ds}.$$

2) On a d'après la formule d'intégration par parties,

$$dZ_t = X_t d\left(\frac{1}{y_t}\right) + \frac{1}{y_t} dX_t + dX_t d\left(\frac{1}{y_t}\right)$$

Comme $\frac{1}{y_t}$ est à variations finies, alors

$$d\left(\frac{1}{y_t}\right) = -\frac{y_t'}{y_t^2} dt = -\frac{a_t y_t}{y_t^2} dt = -\frac{a_t}{y_t} dt \text{ et } dX_t d\left(\frac{1}{y_t}\right) = 0,$$

d'où

$$dZ_t = X_t \left(-\frac{a_t}{y_t} dt\right) + \frac{1}{y_t}\left(a_t X_t dt + b_t X_t dB_t\right) = \frac{b_t X_t}{y_t} dB_t = b_t Z_t dB_t$$

et en intégrant, on obtient

$$Z_t = Z_0 + \int\limits_0^t b_s Z_s dB_s = 1 + \int\limits_0^t b_s Z_s dB_s,$$

qui est une martingale comme étant une somme de deux martingales.

2) On pose

$$\begin{aligned} U_t &= e^{\int\limits_0^t a_s ds}\left[x + \int\limits_0^t b_s \exp\left(-\int\limits_0^s a_u du\right) dB_s\right], \\ V_t &= e^{\int\limits_0^t a_s ds} \text{ et } W_t = x + \int\limits_0^t b_s \exp\left(-\int\limits_0^s a_u du\right) dB_s, \end{aligned}$$

d'où $U_t = V_t W_t, dV_t = a_t V_t dt$ et $dW_t = b_t \exp\left(-\int\limits_0^t a_u du\right) dB_t = \frac{b_t}{V_t} dB_t$.

La formule d'intégration par parties donne

$$dU_t = V_t dW_t + W_t dV_t + dV_t dW_t.$$

Comme $dV_t dW_t = 0$, alors

$$dU_t = b_t dB_t + a_t U_t dt \text{ avec } U_0 = x,$$

c'est à dire que U_t et X_t satisfont la même EDS, d'où $U_t = X_t$.

Exercice 2:

1) On a, d'après la formule d'Itô avec $F(x) = e^{\theta x} \in C^{\infty}$,

$$dF(B_t) = F'(B_t)\, dB_t + \frac{1}{2} F''(B_t)\, dt.$$

Or $F'(x) = \theta e^{\theta x}$ et $F''(x) = \theta^2 e^{\theta x}$, d'où en intégrant

$$F(B_t) = F(0) + \int_0^t F'(B_s)\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(B_s)\, ds,$$

qui s'écrit

$$e^{\theta B_t} = 1 + \theta \int_0^t e^{\theta B_s} dB_s + \frac{\theta^2}{2}\int_0^t e^{\theta B_s} ds.$$

2) En appliquant l'espérance à cette dernière égalité, on obtient

$$u(t) = 1 + \theta \mathbb{E}\left(\int_0^t e^{\theta B_s} dB_s\right) + \frac{\theta^2}{2}\mathbb{E}\left(\int_0^t e^{\theta B_s} ds\right).$$

Comme $\left(\int_0^t e^{\theta B_s} dB_s\right)$ est une martingale nulle en 0, alors $\mathbb{E}\left(\int_0^t e^{\theta B_s} dB_s\right) = 0$. D'autre part, on a d'après le théorème de Fubini $\mathbb{E}\left(\int_0^t e^{\theta B_s} ds\right) = \int_0^t \mathbb{E}\left(e^{\theta B_s}\right) ds = \int_0^t u(s)\, ds$, d'où

$$u(t) = 1 + \frac{\theta^2}{2}\int_0^t u(s)\, ds.$$

En dérivant on obtient

$$\begin{cases} u'(t) = \frac{\theta^2}{2} u(t) \\ u(0) = 1 \end{cases},$$

qui admet comme solution

$$u(t) = e^{\frac{\theta^2}{2} t}.$$

D'autre part, comme $B_t \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, t)$ de densité $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$, alors

$$\begin{aligned} u(t) &= \mathbb{E}\left(e^{\theta B_t}\right) = \int_R \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} e^{\theta x} dx \\ &= e^{\frac{\theta^2}{2} t} \int_R \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x - t\theta)^2}{2t}} dx = e^{\frac{\theta^2}{2} t}. \end{aligned}$$