Université de Tlemcen   Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
L3 - Introduction aux processus aléatoires. Examen de rattrapage
Durée 1h30mn
Le 20/06/2022.

Exercice 1 :

Soient X et Y deux variables indépendantes, et de même loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On définit les variables aléatoires R sur $\mathbf{R}_+$ et θ sur $]0,2\pi[$ par

$$R = \sqrt{X^2+Y^2} \qquad \text{et} \qquad X = R\cos\theta, \quad Y = R\sin\theta.$$

1. Calculer la densité du couple (R,θ).
2. Montrer que R et θ sont indépendantes.

Exercice 2 :

Montrer que la loi d'une variable aléatoire X est symétrique (X et $-X$ ont la même loi ou encore X et $-X$ ont la même fonction caractéristique) si et seulement si la fonction caractéristique de X est réelle ($\forall t \in \mathbf{R} \quad \Phi_X(t) \in \mathbf{R}$).

Exercice 3 :

Soit $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)^t$ un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(\mu_X, \Sigma_X)$ avec $\mu_X = (0,0,0,0)^t$ et

$$\Sigma_X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$ et $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)^t$ défini par

$$Y_1 = X_1 + \alpha X_2, \ Y_2 = X_2 \quad \text{et} \quad Y_3 = X_4.$$

1. Déterminer la loi de Y.
2. Quelle condition doit vérifier α pour que les variables aléatoires Y_1, Y_2, Y_3 soient indépendantes ?
3. Calculer $\mathbf{E}(Y_1^2 Y_2^2 Y_3^2)$ sous ces conditions.

Exercice 4 :

Soit $(U_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur l'intervalle $[0,\theta]$, où $\theta > 0$. On pose pour $n \geq 1, X_n = \max\limits_{1 \leq i \leq n} U_i$.

1. Montrer que $(X_n, n \geq 1)$ converge presque sûrement et déterminer sa limite.
   Indication : on pourra calculer $P(|X_n - \theta| > \varepsilon)$ pour $\varepsilon > 0$.
2. Etudier la convergence en loi de la suite $(Y_n, n \geq 1)$ définie par $Y_n = n(\theta - X_n)$.
   Indication : on pourra utiliser la fonction de répartition de Y_n.

Proposition de solution de l'examen de rattrapage du module : Introduction aux processus aléatoires du 20/06/2022.

Exercice 1 : 1) on utilise la méthode de la fonction muette ; soit une fonction mesurable et positive h et le difféomorphisme défini par

$$\varphi : \underset{\mathbb{R}^2}{(x,y)} \longrightarrow \underset{\mathbb{R}_+ \times [0,2\pi[}{(r(x,y), \theta(x,y))} \qquad \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

et donc $r = \sqrt{x^2+y^2}$. La matrice jacobienne de φ^{-1} est alors

$$J = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Alors $|\det J| = |r| = r$ et $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$.

Si $R = \sqrt{X^2+Y^2}$ nous pourrons écrire

$$E[h(R,\Theta)] = \int_{\mathbb{R}^2} h\left(\sqrt{x^2+y^2}, \theta(x,y)\right) \cdot \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, dx\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+ \times [0,2\pi[} h(r,\theta) \frac{1}{2\pi} r e^{-\frac{r^2}{2}}\, dr\,d\theta.$$

Il s'ensuit alors que la densité du couple aléatoire (R,Θ) est

$$f_{(R,\Theta)}(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} r e^{-\frac{r^2}{2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+ \times [0,2\pi[}(r,\theta).$$

2) Les variables R et Θ sont indépendantes puisque la densité du couple est le produit d'une fonction de r et une fonction de θ.

En intégrant $f_{(R,\Theta)}(r,\theta)$ par rapport à la variable θ, nous avons la marginale en r :

$$f_R(r) = \int_0^{2\pi} f_{(R,\Theta)}(r,\theta)\, d\theta = r e^{-\frac{r^2}{2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(r)$$

$$f_\Theta(\theta) = \frac{1}{2\pi} \mathbb{1}_{[0,2\pi[}(\theta)$$

Exercice 2: On remarque que $\phi_X(t) = E[e^{itX}] = E[e^{-itX}] = \phi_{-X}(t)$.
Donc $\phi_X(t)$ est réelle si et seulement si $\phi_{-X}(t) = \phi_X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$
c'est à dire ssi la loi de X est symétrique

Exercice 3:

1) On peut écrire $Y = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}$

donc Y est un vecteur gaussien en tant que transformation linéaire d'un vecteur gaussien. Il ne reste plus qu'à déterminer l'espérance et la matrice de variance-covariance de Y :

$$E[Y] = A\,E[X] = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_Y = A \Sigma_X A^t = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+\alpha & 1 & 0 \\ 1+\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+\alpha+\alpha(1+\alpha) & 1+\alpha & 0 \\ 1+\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha^2+2\alpha+2 & \alpha+1 & 0 \\ \alpha+1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2) Le vecteur Y étant gaussien il y a équivalence entre l'indépendance des composantes et les covariances nulles. Les variables Y_1, Y_2 et Y_3 sont donc indépendantes ssi :
$\alpha + 1 = 0$ soit $\alpha = -1$. On a alors

$$\Sigma_Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3) $E[Y_1^2 Y_2^2 Y_3^2] = E[Y_1^2] \cdot E[Y_2^2] \cdot E[Y_3^2]$ car Y_1, Y_2, Y_3 indépendants implique Y_1^2, Y_2^2 et Y_3^2 indépendantes aussi

Or $V(Y_1) = E[Y_1^2] - (E[Y_1])^2 \Rightarrow E[Y_1^2] = V(Y_1) + (E[Y_1])^2 = 1$

et de même $E[Y_2^2] = V[Y_2] + (E[Y_2])^2 = 1$

et $E[Y_3^2] = 2$.

Ainsi $E[Y_1^2 \cdot Y_2^2 \cdot Y_3^2] = 1 . 1 . 2 = 2$

Exercice 4:

1) La suite (X_n) est croissante et bornée p.s. par θ. Elle converge donc p.s. vers une limite X. Montrons que (X_n) converge en proba. vers θ
Soit $\varepsilon \in]0, \theta]$ on a :

$$P[|X_n - \theta| > \varepsilon] = P[X_n > \theta + \varepsilon] + P[X_n < \theta - \varepsilon] = 0 + \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n$$

En effet $P[X_n \leq \theta - \varepsilon] = P[\max_{1 \leq i \leq n} U_i \leq \theta - \varepsilon] = \prod_{i=1}^{n} P[U_i \leq \theta - \varepsilon] =$

$$= \left(P[U_1 \leq \theta - \varepsilon]\right)^n = \left[F_{U_1}(\theta - \varepsilon)\right]^n = \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

alors $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{P} \theta = X$

et comme (X_n) converge p.s. alors nécessairement

$X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s} X = \theta$ (p.s) vu que la convergence p.s. implique la convergence en probabilité.

2) $Y_n = n(\theta - X_n)$ On remarque que $Y_n \geq 0$ alors

si $x \leq 0$ $F_{Y_n}(x) = 0$.

Soit $x > 0$ alors $F_{Y_n}(x) = P(n(\theta - X_n) \leq x) = P(-X_n \leq \frac{x}{n} - \theta)$

$= P(X_n \geq \theta - \frac{x}{n}) = 1 - P(X_n \leq \theta - \frac{x}{n}) = 1 - F_{X_n}(\theta - \frac{x}{n})$

On rappelle que $F_{X_n}(\theta - \frac{x}{n}) = P(\max_{1 \leq i \leq n} U_i \leq \theta - \frac{x}{n}) =$

$\prod_{i=1}^{n} P(U_i \leq \theta - \frac{x}{n}) = \prod_{i=1}^{n} F_{U_i}(\theta - \frac{x}{n}) = \left[F_{U_1}(\theta - \frac{x}{n})\right]^n =$

$= \left[\frac{1}{\theta}(\theta - \frac{x}{n})\right]^n = \left[1 - \frac{x}{n\theta}\right]^n$

Ainsi $F_{Y_n}(x) = 1 - F_{X_n}(\theta - \frac{x}{n}) = 1 - \left[1 - \frac{x}{n\theta}\right]^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}$

$F_{Y_n}(x) = 1 - \left[1 - \frac{x}{n\theta}\right]^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 - e^{-\frac{x}{\theta}} = F(x)$ où F est la f.d.r de la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\theta}$.

La suite (Y_n) converge donc en loi vers $Y \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{\theta}\right)$.