1) Fin du test

$L > \lambda \Leftrightarrow \log L > \log \lambda$

$$L = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i-m_1)^2-(x_i-m_0)^2\right]} \Rightarrow \log L = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i-m_1)^2-(x_i-m_0)^2\right]$$

$$\text{Or} \quad (x_i-m_1)^2-(x_i-m_0)^2 = -2(m_1-m_0)x_i + m_1^2 - m_0^2$$

$\Rightarrow \log L = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(m_1-m_0)x_i - \frac{n}{\sigma^2}(m_1^2-m_0^2) > \log \lambda$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{\sigma^2}(m_1-m_0)\sum_{i=1}^{n}x_i > \log\lambda + \frac{n}{\sigma^2}(m_1^2-m_0^2)$$

<u>Cas 1</u> $m_1 > m_0$

$\sum_{i=1}^{n} x_i > \frac{\sigma^2}{m_1-m_0}\left(\log\lambda + \frac{n}{\sigma^2}(m_1^2-m_0^2)\right) := K$

$\Longrightarrow C = \left\{x_i \mid \sum_{i=1}^{n} x_i > K\right\}$ qui est la région critique (zone de rejet de l'hypothèse H_0).

<u>Cas 2</u> $m_1 < m_0$

mêmes étapes $C = \left\{x_i \mid \sum_{i=1}^{n} x_i < K\right\}$

2) Trouver K

on utilise $\alpha = 0.01$ d'une part et d'autre part $\alpha = P_{H_0}(C) \Rightarrow$

si $\boxed{m_1 > m_0}$ $\quad P_{H_0}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i > K\right) = 0.01$

On sait que $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{N}(nm, n\sigma^2)$ et

sous H_0 : $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{N}(nm_0, n\sigma^2) \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - nm_0}{\sqrt{n}\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$\Rightarrow 0.01 = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - nm_0}{\sqrt{n}\sigma} > \frac{K-nm_0}{\sqrt{n}\sigma}\right) = 1 - P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - nm_0}{\sqrt{n}\sigma} \leq \frac{K-nm_0}{\sqrt{n}\sigma}\right) \Longrightarrow$

$\frac{K-nm_0}{\sqrt{n}\sigma} = 2.33$ d'après la table de la table normale(0,1)

$\Rightarrow K = 2.33 \times \sqrt{n}\sigma + nm_0$

Application numérique
$m_0 = 30 \quad \sigma^2 = 6 \quad n = 9 \quad \Rightarrow \quad K = 2.33 \times 3 \times \sqrt{6} + 9 \times 30 = 287.12$
$\sum_{i=1}^{n} x_i = 298.0 < K \qquad \Longrightarrow$ on acccepte H_0 au seuil de 1%.

3)Puissance
$\beta = P_{H_1}(C) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - nm_1}{\sqrt{n}\sigma} > \frac{K - nm_1}{\sqrt{n}\sigma}\right)$
Application numérique
$m_0 = 30 \quad \sigma^2 = 6 \quad n = 9$ et $K = 287.12$

$$\frac{K - nm_1}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{287.12 - 9 \times 36}{3 \times \sqrt{6}} = -5.0187$$

On pose $Z = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - nm_1}{\sqrt{n}\sigma}$

$$\Rightarrow \beta = P\left(Z > -5.0187\right) = P(Z < 5.0187) = 0.999$$