Proposition 1.3

Demonstration

① P_2 is bellow the segment $[P_1, P_3]$.

$\Longleftrightarrow$

② $D(1,2) \leq D(1,3)$ $\left(\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq \dfrac{f(x_1)-f(x_3)}{x_1 - x_3} \right)$

$\Longleftrightarrow$

③ $D(1,3) \leq D(2,3)$.

① $\Rightarrow$ ②.

$\forall \lambda \in [0,1]$, $x_2 = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_3 \in [x_1, x_3]$.

$f(x_2) = \cancel{f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_3)} \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_3)$.

$\Longleftrightarrow \quad f(x_2) \leq \lambda f(x_1) + f(x_3) - \lambda f(x_3)$.

$\Longleftrightarrow \quad f(x_2) \leq \lambda f(x_1) + f(x_3) - \lambda f(x_3) + f(x_1) - f(x_1)$

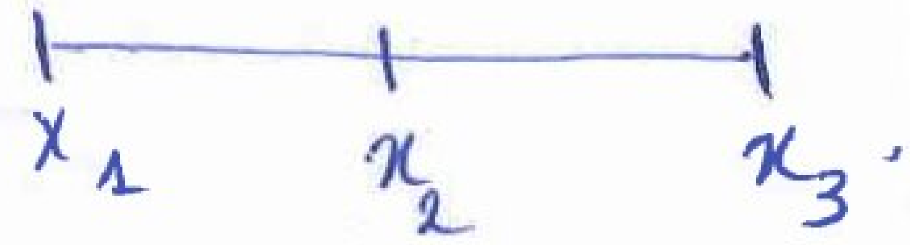
$\Longleftrightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) \leq \lambda f(x_1) - \lambda f(x_3) + f(x_3) - f(x_1)$

$\Longleftrightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) \leq (1-\lambda)\left(f(x_3) - f(x_1)\right)$

$$\iff \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq (1-\lambda)\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

$1-\lambda \geq 0$ et $(x_2-x_1)\geq 0$.

et $x_2-x_1 < x_3-x_1$, et $\lambda\in[0,1]$.



$$\frac{1-\lambda}{x_2-x_1} = \frac{1}{x_3-x_1}. \quad \left(\text{i.e } \frac{x_2-x_1}{1-\lambda} = x_3-x_1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}.$$

$$\Rightarrow D\cancel{(x_1,x_2)} \; D(1,2) \leq D(1,3).$$

(2) $\Rightarrow$ (3)

$D(1,2)\leq D(1,3)$.

$$\Rightarrow \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1},$$

$$\Rightarrow (x_3-x_1)(f(x_2)-f(x_1)) \leq (x_2-x_1)(f(x_3)-f(x_1)).$$

$$\Rightarrow \left(f(x_2)-f(x_1)\right)(x_3-x_1) \leq (x_2-x_1)\left(f(x_3)-f(x_1)\right).$$

$$\Rightarrow \left(f(x_2)-f(x_1)\right)(x_3-x_1) \leq (x_2-x_3+x_3-x_1)\left(f(x_3)-f(x_1)\right).$$

$$\Rightarrow \left(f(x_2)-f(x_1)\right)(x_3-x_1) \leq (x_2-x_3)\left[f(x_3)-f(x_1)\right]+(x_3-x_1)\left[f(x_3)-f(x_1)\right]$$

$$\Rightarrow (x_3-x_1)\left(f(x_2)-f(x_1)\right)-(x_3-x_1)\left(f(x_3)-f(x_1)\right) \leq (x_2-x_3)\left(f(x_3)-f(x_1)\right)$$

$$\Rightarrow (x_3-x_1)\left(f(x_2)-f(x_1)-f(x_3)+f(x_1)\right) \leq (x_2-x_3)\left(f(x_3)-f(x_1)\right)$$

$$\Rightarrow (x_3-x_1)\left[f(x_2)-f(x_3)\right] \leq (x_2-x_3)\left[f(x_3)-f(x_1)\right].$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_2)-f(x_3)}{(x_2-x_3)} \geq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}.$$

$$D(2,3) \geq D(1,3).$$

قسمة على عدد سالب

Page 03.

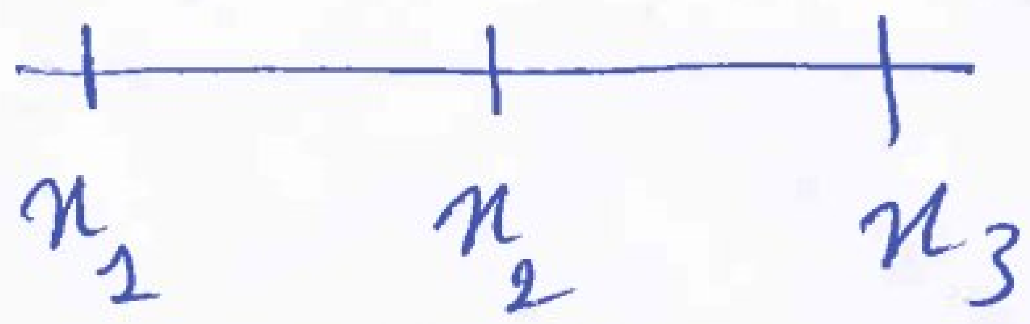
③ $\Rightarrow$ ① ?

$$\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

$$\Rightarrow \big(f(x_3)-f(x_1)\big)(x_3-x_2) \leq \big(f(x_3)-f(x_2)\big)(x_3-x_1).$$

$$\Rightarrow f(x_2)(x_3-x_1) \leq f(x_3)(x_3-x_1) + \big(f(x_1)-f(x_3)\big)(x_3-x_2)$$

$$\Rightarrow f(x_2) \leq f(x_3)\underbrace{\left(\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}\right)}_{\alpha} + f(x_1)\underbrace{\left(\frac{x_3-x_2}{x_3-x_2}\right)}_{\beta}$$



$\alpha < 1$ et $\beta < 1$

et $\alpha + \beta = 1$.

$\Rightarrow$ $\cancel{f(x_2)}$ P_2 is Below $[P_1, P_3]$.

fin prop 1.3

. Proposition 1.4

La proposition 1.4 et $x_3 = x_0$.

Theorem 2.1

~~Extreme~~
Pratiquement . la même ~~présente~~ démonstration ~~de~~

la ~~théorème~~ 1.11 chapitre 01.
proposition

Proposition 2.4

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < +\infty\}.$$

$x, y \in Dom(f) \Leftrightarrow f(x) < +\infty$ et $f(y) < +\infty$.

. $f(tx+(1-t)y) \leqslant t\underset{+\infty}{\underset{\wedge}{f(x)}} + (1-t)\underset{+\infty}{\underset{\wedge}{f(y)}} < +\infty$.

. Proposition 2.6

f est une fonction convexe et diff sur I

il est evident que

f convexe $\Rightarrow$ f' croissante [proposition 1.4.].

$x \leqslant y$ et $\forall x_0 \in \mathbb{R}$.

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x_0 \to x} \left(\quad - \quad \right) \leqslant \lim_{x_0 \to x} \left(\frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0} \right)$$

$$\Rightarrow \lim f'(x) < \lim \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \quad \text{—(a).}$$

et

$$\lim_{x_0 \to y} \left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \right] < \lim_{x_0 \to y} \left[\frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0} \right].$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)-f(y)}{x-y} < f'(y). \quad \text{—(b).}$$

(a) et (b) $\Rightarrow$

$$f'(x) < \frac{f(x)-f(y)}{x-y} < f'(y)$$

(f' is increasing on I).

$\Leftarrow$

f' increasing $\Rightarrow$ f convex ?

$x < y < z$, by the mean value theorem

~~$\exists y_0 \in [x,y]$~~

$\exists y_0 \in [x,y]$, $f'(y_0) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$.

$\exists z_0 \in [y,z]$, $f'(z) = \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$

f' is an increasing function

$y_0 < y < z_0$.

$\Rightarrow f'(y_0) \leq f'(y) \leq f'(z_0)$.

$$\Rightarrow \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z}.$$

by proposition (1.4) f is convex.

f is twice diff, the result is trivial.

Proposition 2.7

$z \in I$ $\quad x < z < y$. (proposition 1.4)

la fonction $x \longrightarrow \dfrac{f(x)-f(z)}{x-z}$ est croissante

$$f'_-(z) \leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$$