Modèles à temps continu : Modèle de Black et Scholes

Présenté par : M. HAMMAD

0.1 Description du modèle

0.1.1 L'évolution des cours

Le modèle introduit par Black et Scholes pour décrire l'évolution des cours est un modèle à temps continu avec un actif sans risque de prix S_t^0 à l'instant t et un actif risqué de prix S_t à l'instant t.

Supposons que la dynamique du cours S_t^0 est régie par l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt, \tag{1}$$

où r est une constante positive représentant le taux d'intérêt sur le marché des placements sans risque (notant ici que r est un taux d'intérêt instantané et ne pas confondre avec le taux sur une période des modèles discrets). On posera $S_0^0 = 1$ du sort que

$$S_t^0 = e^{rt}, \text{ pour } t \geq 0.$$

Supposons que l'évolution du cours de l'action S_t est régie par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t), \tag{2}$$

où μ et σ sont deux constantes et (B_t) un mouvement brownien standard.

Le modèle est étudié sur l'intervalle $[0, T]$ d'échéance T. Comme nous l'avons vu (cf. chapitre 4, Exercice 2 de la section 4.5), l'EDS (2) admet la solution explicite suivante :

$$S_t = x_0 \cdot e^{[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t]},$$

où $x_0 = S_0$ est le cours observé à l'instant 0, il en résulte en particulier que, selon ce modèle S_t suit une loi log-normale (c'est-à-dire que son logarithme sui une loi normale).

En particulier, on voit que le prossesus (S_t) vérifie une EDS de type (2) si et seulement si le processus $(\log(S_t))$ est mouvement brownien non nécessairement standard. En tenant compte de la définition (**??**) du chapitre 2, le processus (S_t) vérifie les propriétés suivantes :

- Continuité des trajectoires,
- indépendance des accroissements relatifs : si $s \leq t, S_t/S_s$ (ce qui revient au même), les accroissements relatifs $(S_t - S_s)/S_s$ est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_s = \sigma(B_u,\ u \leq s)$,
- stationnarité des accroissements relatifs : si $s \leq t$, la loi de $(S_t - S_s)/S_s$ est identique à celle de $(S_{t-u} - S_0)/S_0$.

Ces propriétés traduisent de façon concrète les hypothèses de Black et Scholes sur l'évolution du cours de l'action (l'actif risqué).

0.1.2 La stratégie autofinancée

Définition 0.1.1.

Une stratégie financière est définie par un processus $\phi = ((\phi_t^0, \phi_t))_{t\in[0,T]}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, adapté à la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)$ du mouvement brownien, les composantes ϕ_t^0 et ϕ_t de ϕ, donnant, à l'instant t, les quantités d'actif sans risque et d'actif risqué respectivement détenues en portefeuille. La valeur du portefeuille à l'instant t est alors donnée par :

$$V_t(\phi) = \phi_t^0 S_t^0 + \phi_t S_t.$$

Dans les modèles discrets, nous avons caractérisé la stratégie autofinancée par l'égalité : $V_{n+1}(\phi) - V_n(\phi) = \phi_{n+1} \cdot (S_{n+1} - S_n)$, (cf. chapitre 3, remarque (3.1.1) du paragraphe 3.1.3). La transposition de cette égalité à temps continu conduit à écrire la condition d'autofinancement sous la forme suivante :

$$dV_t(\phi) = \phi_t^0 dS_t^0 + \phi_t dS_t.$$

Pour que cette égalité ait un sens on imposera la condition :

$$\int_0^T |\phi_t^0| dt < +\infty \, p.s \text{ et } \int_0^T \phi_t^2 dt < +\infty \, p.s.$$

En utilisant les équations (1), (2), l'intégrale :

$$\int_0^T \phi_t^0 dS_t^0 = \int_0^T \phi_t^0 r e^{rt} dt$$

est bien définie, ainsi que l'intégrale stochastique :

$$\int_0^T \phi_t dS_t = \int_0^T (\phi_t S_t \mu) dt + \int_0^T \sigma \phi_t S_t dB_t,$$

puisque la fonction $t \mapsto S_t$ est continue, donc bornée sur $[0, T]$, presque sûrement.

Définition 0.1.2.

Une stratégie autofinancée est définie par un couple ϕ *de composantes, les processus adaptés* $(\phi_t^0)_{t\in[0,T]}$ *et* $(\phi_t)_{t\in[0,T]}$ *vérifiant :*

1. $\displaystyle\int_0^T |\phi_t^0|dt + \int_0^T \phi_t^2 dt < +\infty p.s.$
2. $\displaystyle\phi_t^0 S_t^0 + \phi_t S_t = \phi_0^0 S_0^0 + \phi_0 S_0 + \int_0^t \phi_s^0 dS_s^0 + \int_0^t \phi_s dS_s\, p.s.$*, pour tout* $t \in [0,T]$.

On pose : $\widetilde{S}_t = e^{-rt}S_t$ *le cours actualisé à l'instant* t *de l'actif risqué. La proposition suivante est l'analogue de la proposition (**??**) du chapitre 3.*

Proposition 0.1.1.

Soit $\phi = ((\phi_t^0, \phi_t))_{t\in[0,T]}$ *un processus adapté à valeurs dans* $\mathbb{R}^2$*, vétifiant* $\displaystyle\int_0^T |\phi_t^0|dt + \int_0^T \phi_t^2 dt < +\infty p.s.$ *On pose :*

$$V_t(\phi) = \phi_t^0 S_t^0 + \phi_t S_t \text{ et } \widetilde{V}_t(\phi) = e^{-rt}V_t(\phi).$$

Alors ϕ *définit une stratégie autofinanée si et seulement si :*

$$\widetilde{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_t^0 \phi_s d\widetilde{S}_s p.s., \tag{3}$$

pour tout $t \in [0,T]$.

Démonstration 0.1.1.

Supposons la stratégie ϕ *autofinancée de l'égalité :*

$$\begin{aligned} d\widetilde{V}_t(\phi) &= -re^{-rt}V_t(\phi)dt + e^{-rt}dV_t(\phi) \\ &= -r\widetilde{V}_t(\phi)dt + e^{-rt}dV_t(\phi) \end{aligned}$$

qui résulte de la différenciation du produit des processus (e^{-rt}) *et* $(V_t(\phi))$ *(noter ici que le terme de crochet* $\langle e^{-r\cdot}, V_\cdot(\phi)\rangle$ *est nul), on déduit*

$$\begin{aligned} d\widetilde{V}_t(\phi) &= -re^{-rt}(\phi_t^0 e^{rt} + \phi_t S_t)dt + e^{-rt}\phi_t^0 de^{-rt} + e^{-rt}\phi_t dS_t \\ &= \phi_t(-re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}dS_t) \\ &= \phi_t d\widetilde{S}_t. \end{aligned}$$

D'où l'égalité (3). La démonstration de la réciproque se base sur un raisonnement similaire.

0.2 Evaluation et couverture des options

0.2.1 Probabilité martingale

Reprenant le modèle introduit dans la section 1. Nous allons montrer qu'il existe une probabilité équivalente à la probabilité initiale $\mathbb{P}$, sous laquelle le prix actualisé $\widetilde{S}_t = e^{-rt}S_t$ de l'action est une martingale. Utilisant l'EDS (Equation Différentielle Stochastique) vérifiée par (S_t) on a :

$$\begin{aligned} d\widetilde{S}_t &= -re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}dS_t \\ &= -r\widetilde{S}_t dt + \widetilde{S}_t(\mu dt + \sigma dB_t) \\ &= \widetilde{S}_t\left[(\mu - r)dt + \sigma dB_t\right], \end{aligned}$$

on a utiliser le fait que $e^{-rt}dS_t = \widetilde{S}_t(\mu dt + \sigma dB_t)$. Si on pose $W_t = B_t + \frac{\mu - r}{\sigma}t$, il vient, alors : $\sigma dW_t = \sigma dB_t + (\mu - r)dt$, et par conséquent, on a :

$$d\widetilde{S}_t = \sigma \widetilde{S}_t dW_t. \tag{4}$$

D'après le théorème (**??**) de Girsanov appliqué sur $\theta = \frac{\mu - r}{\sigma}$, il existe une probabilité $\mathbb{P}^*$ équivalente à $\mathbb{P}$ sous laquelle $(W_t)_{t\in[0,T]}$ avec $W_t = B_t + \int_0^t \theta_s ds$ est un mouvement brownien standard.

Remarque 0.2.1.
On admettra par la suite, que la définition de l'intégrale stochastique vu au chapitre 4 est invariante par changement de probabilité équivalente. Alors si on se place sous peobabilité $\mathbb{P}^*$, de l'égalité (4) que $(\widetilde{S}_t)$ est une martingale et que :

$$\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_0 \exp\left((\mu - r)t + \sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right) = \widetilde{S}_0 \exp(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t).$$

0.2.2 Pricing (tarification ou valorisation)

Dans toute la suite, nous nous limiterons aux options européennes.

Définition 0.2.1.
Une option européenne est définie par une variable aléatoire $\mathcal{F}_T-$mesurable, positive h. Le plus souvent, h (l'actif conditionnel) est de la forme $f(S_T)$, qui représente le gain que permet l'exercice de l'option (dans le cas d'un call, $f(x) = (x - K)_+$ et dans le cas d'un put $f(x) = (K - x)_+$, où K est le prix d'exercice de l'option).

Exemple 0.2.1.
Les options européennes sont soumises à un actif sous-jacent particulier. Le profit dégagé à la date T pour un call est $h = (S_T^1 - K)_+$ si l'actif sous-jacent est l'actif 1 et si le prix d'exercice de l'option est K, où $x_+ = \max(x, 0)$. Tandis que pour un put, $h = (K - S_T^1)_+$, h est la fonction du prix du sous-jacent à la date T.

Comme dans le cas discret, nous allons définir la valeur de l'option on la simulant. Pour des raisons techniques, nous restreindrons la classe des stratégies admissibles de la manière suivante :

Définition 0.2.2.
Une stratégie $\phi = (\phi_{t,\phi_t}^0)_{t\in[0,T]}$ *est admissible si elle est autofinancée et si la valeur actualisée du portefeuille corespondant :* $\widetilde{V}_t(\phi) = \phi_t^0 + \phi_t \widetilde{S}_t \geq 0, \forall t \in [0,T]$ *et telle que* $\sup_{t\in[0,T]} \widetilde{V}_t$ *est de carré intégrable sous* $\mathbb{P}^*$.

L'option est dite simulable si sa valeur à l'échéance est égale à la valeur finale d'une stratégie admissible. Il est nécessaire que h soit de carré intégrable sous $\mathbb{P}^*$, pour que l'option définie par h soit simulable. Dans le cas d'un call $h = (S_T - K)_+$, cette propriété est bien vérifiée puisque $\mathbb{E}^*(S_T^2) < \infty$ et dans le cas d'un put h est même bornée.

Théorème 0.2.1.
Dans le modèle de Black et Scholes, toute option définie par une variable aléatoire h, *positive,* $\mathcal{F}_T-$*mesurable et de carré intégrable sous* $\mathbb{P}^*$ *est simulable et la valeur à l'instant* t *de toute portefeuille simulant est donnée par :*

$$V_t = \mathbb{E}^* \left(e^{-r(T-t)} h | \mathcal{F}_t \right).$$

La valeur de l'option à l'instant t est donc définie par l'expression $\mathbb{E}^* \left(e^{-r(T-t)} h | \mathcal{F}_t \right)$.

Démonstration 0.2.1.
Supposons qu'il existe une stratégie admissible ϕ, *simulant l'option. La valeur du portefeuille* (ϕ_t^0, ϕ_t) *à la date* t *est donnée par :*

$$V_t = \phi_t^0 S_t^0 + \phi_t S_t$$

et par hypothèse, on a, $V_T = h$. *Soit* $\widetilde{V}_t = e^{-rt} V_t$, $(\widetilde{V}_T = he^{-rT})$ *la valeur actualisée :*

$$\widetilde{V}_t = \phi_t^0 + \phi_t \widetilde{S}_t.$$

*Puisque la stratégie est autofinancée, d'après la proposition (**??**) et l'égalité (4) :*

$$\begin{aligned} \widetilde{V}_t &= V_0 + \int_0^t \phi_s d\widetilde{S}_s \\ &= V_0 + \int_0^t \sigma \phi_s \widetilde{S}_s dW_s. \end{aligned}$$

Sous la probabilité $\mathbb{P}^*$, $\sup_{t\in[0,T]} \widetilde{V}_t$ *est de carré intégrable, d'après la définition des stratégies admissibles et l'égalité ci dessus fait apparaître le processus* $(\widetilde{V}_t)$ *comme une intégrale stochastique par rapport à* (W_t). *Il en résulte (cf. chapitre 4, équation (**??**) et proposition (**??**)) que* $(\widetilde{V}_t)$ *est, sous* $\mathbb{P}^*$, *une martingale de carré intégrable. D'où*

$$\widetilde{V}_t = \mathbb{E}^*(\widetilde{V}_T | \mathcal{F}_t),$$

et par conséquent :

(5) $$V_t = e^{rt}\widetilde{V}_t = \mathbb{E}^*\left(e^{-r(T-t)}h|\mathcal{F}_t\right).$$

Nous avons aussi montré que si le portefeuille ϕ simule l'option définie par h, sa valeur est donnée par l'égalité (5). Pour achevé la démonstration du théorème, il reste à démontrer que l'option est bien simulable, c'est-à-dire à trouver des processus (ϕ_t^0) et (ϕ_t) définissant une stratégie admissible et tels que :

$$\phi_t^0 S_t^0 + \phi_t S_t = \mathbb{E}^*\left(e^{-r(T-t)}h|\mathcal{F}_t\right).$$

*Sous la probabilité $\mathbb{P}^*$, le processus définie par $M_t = \mathbb{E}^*(e^{-rT}h|\mathcal{F}_t)$ est une martingale de carré intégrable. $(\mathcal{F}_t)$ est la filtration naturelle de (B_t), et aussi la filtration naturelle de (W_t), d'après le théorème (**??**) de représentation des martingales browniennes, il existe un processus adapté $(K_t)_{t\in[0,T]}$: tel que $\mathbb{E}^*(\int_0^T K_s^2 ds) < +\infty$ et :*

$$\forall t \in [0,T]\ M_t = M_0 + \int_0^t K_s dW_s p.s..$$

*La stratégie $\phi = ((\phi_t^0, \phi_t))_{t\in[0,T]}$, avec $\phi_t = K_t/(\sigma\widetilde{S}_t)$ et $\phi_t^0 = M_t - \phi_t\widetilde{S}_t$, est alors, d'après la proposition (**??**) et l'égalité (4), une stratégie autofinancée, dont la valeur à la date t est donnée par :*

$$V_t(\phi) = e^{rt}M_t = \mathbb{E}^*\left(e^{-r(T-t)}h|\mathcal{F}_t\right),$$

d'après cette expression, $V_t(\phi)$ est une variable aléatoire positive, que $\sup\limits_{t\in[0,T]} V_t(\phi)$ est de carré intégrable sous $\mathbb{P}^*$ et que $V_T(\phi) = h$. On a donc bien une stratégie admissible simulant h.

Remarque 0.2.2.

Quand la variable aléatoire h est de la forme $h = f(S_T)$, on peut expliciter la valeur V_t de l'option à la date t comme une fonction de t et S_t. On a en effet :

$$\begin{aligned} V_t &= \mathbb{E}^*\left(e^{-r(T-t)}f(S_T)|\mathcal{F}_t\right) \\ &= \mathbb{E}^*\left(e^{-r(T-t)}f(S_t e^{r(T-t)}e^{\sigma(W_T-W_t)-(\sigma^2/2)(T-t)}|\mathcal{F}_t)\right). \end{aligned}$$

Or, la variable aléatoire S_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable et $W_T - W_t$ est indépendante de $\mathcal{F}_t$ sous $\mathbb{P}^*$. On a donc $V_t = F(t, S_t)$, avec

(6) $$F(t,x) = \mathbb{E}^*\left(e^{-r(T-t)}f\left(xe^{r(T-t)}e^{\sigma(W_T-W_t)-(\sigma^2/2)(T-t)}\right)\right),$$

comme, sous $\mathbb{P}^*$, $W_T - W_t$ est gaussienne centrée de variance $T-t$:

$$F(t,x) = e^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{+\infty} f(xe^{(r-\sigma^2/2)(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}})\frac{e^{-y^2/2}dy}{\sqrt{2\pi}}.$$

Le calcul de F peut s'améliorer dans le cas du call ($f(x) = (x-K)_+$) et du put ($f(x) = (K-x)_+$). Par exemple si l'on prend $f(x) = (x-K)_+$, on a, d'après l'égalité (6) :

$$\begin{aligned} F(t,x) &= \mathbb{E}^*\left(e^{-r(T-t)}\left(xe^{(r-\sigma^2/2)(T-t)+\sigma(W_T-W_t)} - K\right)_+\right) \\ &= \mathbb{E}^*\left(xe^{\sigma\sqrt{\theta}g-\sigma^2\theta/2} - Ke^{-r\theta}\right)_+, \end{aligned}$$

avec $\theta = T-t$ et g est une gaussienne centrée réduite.

0.2.3 Couverture des calls et des puts

Dans l'épreuve du théorème (0.2.1), nous avons invoqué le théorème (**??**) de représentation des martingales browniennes pour prouver l'existence d'un portefeuille simulant. Dans la pratique, il est important de pouvoir construire efficacement le portefeuille simulant pour couvrir une option et on ne peut pas se contenter d'un simple théorème d'existence. Nous allons voir comment, dans le cas où l'option est définie par une variable aléatoire de la forme $h = f(S_T)$, on peut expliciter le portefeuille de couverture. Un portefeuille simulant est donné, pour chaque instant t, par la valeur actualisée :

$$\widetilde{V}_t = e^{-rt}F(t,S_t),$$

où F est la fonction définie par l'égalité (6). Sous des hypothèses très larges sur f, et dans les du call et du put où on dispose des formules explicites de la remarque (5.2.2), on remarque que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,T[\times\mathbb{R}$. Si on pose :

$$\widetilde{F}(t,x) = e^{-rt}F(t,xe^{rt}).$$

on a : $\widetilde{V}_t = \widetilde{F}(t,\widetilde{S}_t)$ et, pour $t<T$, d'après la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} \widetilde{F}(t,\widetilde{S}_t) &= \widetilde{F}(0,\widetilde{S}_0) + \int_0^t \frac{\partial\widetilde{F}}{\partial x}(s,\widetilde{S}_s)d\widetilde{S}_s \\ &+ \int_0^t \frac{\partial\widetilde{F}}{\partial t}(s,\widetilde{S}_s)ds + \int_0^t \frac{1}{2}\frac{\partial^2\widetilde{F}}{\partial x^2}(s,\widetilde{S}_s)d\langle\widetilde{S},\widetilde{S}\rangle_s. \end{aligned}$$

De l'égalité $d\widetilde{S}_t = \widetilde{S}\sigma dW_t$, on déduit que $d\langle\widetilde{S},\widetilde{S}\rangle_s = \sigma^2\widetilde{S}_s^2 ds$, d'où la fonction $\widetilde{F}(t,\widetilde{S}_t)$ prend la forme suivante :

$$\widetilde{F}(t,\widetilde{S}_t) = \widetilde{F}(0,\widetilde{S}_0) + \int_0^t \sigma\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial x}(s,\widetilde{S}_s)\widetilde{S}_s dW_s + \int_0^t K_s ds.$$

Or, $\widetilde{F}(t,\widetilde{S}_t)$ est une martingale sous $\mathbb{P}^*$. le processus K_s est nécessairement nul. D'où :

$$\begin{aligned} \widetilde{F}(t,\widetilde{S}_t) &= \widetilde{F}(0,\widetilde{S}_0) + \int_0^t \sigma\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial x}(s,\widetilde{S}_s)\widetilde{S}_s dW_s \\ &= \widetilde{F}(0,\widetilde{S}_0) + \int_0^t \frac{\partial\widetilde{F}}{\partial x}(s,\widetilde{S}_s)\widetilde{S}_s d\widetilde{S}_s. \end{aligned}$$

Le processus de couverture ϕ_t prend la forme :

$$\phi_t = \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x}(t, \widetilde{S}_t) = \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t).$$

Si on pose $\phi_t^0 = \widetilde{F}(t, \widetilde{S}_t) - \phi_t \widetilde{S}_t$, le portefeuille (ϕ_t^0, ϕ_t) est autofinancé et sa valeur actualisée est $\widetilde{V}_t = \widetilde{F}(t, \widetilde{S}_t)$.

Remarque 0.2.3.
Le calcul précédent montre qu'on peut traiter les options de la forme $f(S_T)$ sans passer par le théorème de représentation des martingales browniennes.