U.H.B.C. Chlef
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département des Mathématiques

Année Universitaire: 2018/2019
Niveau: $2^{ème}$ Master/ Option: M.A.S.
Module: Processus Stochastiques 3.

EXAMEN FINAL

Exercice 1

1. Questions de Cours:
   (a) Quand-est-ce que l'intégrale de Wiener coïncide-t-elle avec l'intégrale au sens de Riemann-Stieljes trajectoire par trajectoire?
   (b) Montrer que l'intégrale de Wiener n'est pas, en général, faisable trajectoire par trajectoire.
2. $(B_t)_{t\geq 0}$ est un Mouvement Brownien Standard défini sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$. Montrer que:
   (a) $E(B_t^3) = 0$
   (b) $E(B_t^2/\mathcal{F}_s) = B_s^2 - s + t$; $s \leq t$.
   (c) $E(B_s B_t^2) = 0$; $s \leq t$.(utiliser a. et b.).
   (d) $E(B_s B_t^2) = 0$; $t \leq s$.(utiliser a. et l'espérance itérée).
   (e) $E(B_t/\mathcal{F}_s) = B_{s\wedge t}$.
   (f) $E(\int_0^t B_u du/\mathcal{F}_s) = B_s - \int_0^s u dB_u$; $s \leq t$.

Exercice 2

$(B_t)_{t\geq 0}$ est un Mouvement Brownien Standard défini sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$.

1. **L'exponentielle stochastique**
   Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus d'Itô. $(U_t)_{t\geq 0}$ un processus satisfait l'E.D.S.:
   $$dU_t = U_t dX_t \tag{1}$$
   (a) Montrer par la formule d'Itô que $U_t = U_0 e^{X_t - X_0 - \frac{1}{2}\langle X\rangle_t}$ satisfait l'E.D.S. (1). (U est dit l'exponentielle stochastique de X, notée par: $U_t = \mathcal{E}(X)(t)$).
   (b) Quand-est-ce que $\mathcal{E}(X)$ coïncide-t-elle avec l'exponentielle classique $\exp(X)$?
   (c) Application:
      i. Déterminer $\mathcal{E}(B)$ avec $(B_t)_{t\geq 0}$: le mouvement brownien standard et $\mathcal{E}(B)(0) = 1$.
      ii. Ecrire l'E.D.S. satisfaite par $U_t = \mathcal{E}(B)(t)$.
2. **Résolution d'une Equation Différentielle Stochastique linéaire simple**
   Soit l'E.D.S.
   $$dU_t = \beta_t U_t dt + \delta_t U_t dB_t \tag{2}$$
   avec: β et δ fonctions adaptées et continues en t, et U_0 donnée.
   (a) Montrer que $U_t = \mathcal{E}(Y)(t)$ où $(Y_t)_{t\geq 0}$ est un processus d'Itô à determiner (sous la forme différentielle).
   (b) Calculer la variation quadratique $\langle Y\rangle_t$ de (Y).
   (c) En déduire de (1.a.) U_t en fonction de U_0, β, δ et B.
3. **Résolution d'une Equation Différentielle Stochastique linéaire générale**
   Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus inconnu satisfaisant l'E.D.S. :
   $$dX_t = (\alpha_t + \beta_t X_t)dt + (\gamma_t + \beta_t X_t)dB_t \tag{3}$$
   avec: α, β, γ et δ fonctions adaptées et continues en t, et X_0 donnée.

(a) Vérifier que l'équation (2) est un cas particulier de l'équation (3).

(b) Vérifier par la formule d'Itô (la différentielle du produit de 2 processus stochastiques) que le processus:

$$X_t = U_t(X_0 + \int_0^t \frac{\alpha_s - \delta_s\gamma_s}{U_s} ds + \int_0^t \frac{\gamma_s}{U_s} dB_s) \tag{4}$$

est une solution de l'équation (3), avec U_t donné par l'équation (2).

4. **Application:** *E.D.S.de Langevin*

Résoudre l'E.D.S.(Utiliser l'expression (4))

$$dX_t = a_t X_t dt + dB_t$$

avec: a est une fonction adaptée et continue en t, et X_0 donnée.

(**BONUS**)

1. (a) Montrer que pour toutes fonctions $f, g \in L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$

$$\langle \int_b^b f(t)dB(t), \int_b^b g(t)dB(t) \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, g \rangle_{L^2_{ad}([a,b]\times\Omega)} \tag{5}$$

Indication: Utiliser $xy = \frac{1}{4}[(x+y)^2 - (x-y)^2]$

(b) Que signifie l'identité (5)?