SERIE 4

Exercice 1
Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires discrètes. On suppose que

$$\forall n \geq 1 \ \ X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Montrer que

$$P\left(\sum_{n\geq 1} X_n < \infty\right) = 1$$

Exercice 2
Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires $i.i.d.$On pose

$$U_n = \max_{1\leq i\leq n} X_i \qquad\qquad L_n = \min_{1\leq i\leq n} X_i$$

a) Déterminer F_{U_n} la fonction de répartition de U_n en fonction de celle de X, soit F_X.
b) Déterminer F_{L_n}.
c) On suppose que $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,1]}$.Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, P\left(nL_n \leq x\right)$ converge vers une limite que l'on précisera.

Exercice 3
Soit $\left(X_n\right)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que pour tout n

$$P\left(X_n = -1\right) = 1 - \frac{1}{\left(n+1\right)^2} \qquad\qquad P\left(X_n = n^2 - 1\right) = \frac{1}{\left(n+1\right)^2}$$

1) Montrer que la suite $\left(X_n\right)_{n\geq 1}$ converge vers -1 en probabilité.
2) Montrer que la suite $\left(X_n\right)_{n\geq 1}$ converge $p.s.$ vers -1.
3) Cette convergence a-t-elle lieu dans L^1?

Exercice 4
Soit $\left(X_n\right)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires $i.i.d$ de même loi de Poisson $\mathcal{P}\left(1\right)$.Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$
1) Rappeler la loi de S_n.Déterminer $P\left(S_n \leq n\right)$.
2) En utilisant le Théorème Central Limite, calculer la limite de la suite

$$\left(e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}\right)_{n\geq 1}$$