Université Saâd Dahlab-Blida — le 25 Juin 2010

Faculté des Sciences-Dépt de Maths — L3S2

Rattrapage de Statistique

Exercice 1:(4 points)
Soit (X_n) une suite de v.a indépendantes et de même loi ayant un moment d'ordre 1, m (cad $E(X_i) = m$).

On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Montrer que $\frac{S_n}{n}$ converge en loi vers m quand $n \to +\infty$

Exercice 2: (6 points)
Soit $X_i \curvearrowright N(i, 3i)$ $i = 1, 2, 3, 4$ 4 va indépendantes.
En utilisant les X_i pour i=1,...,4, construire une va qui suit la loi de
a) χ^2_4; b)t_3; c) $F_{2,2}$

Exercice 3: (10 points)
On considère des v.a gaussiennes $X_1, X_2, ..., X_n$ de même espérance m inconnue dont on connait les variances $\delta_1^2, \delta_2^2, ..., \delta_n^2$.
A) Donner l'estimation Y de m obtenue par la méthode du maximum de vraisemblance. Quelle est la loi de Y ?Est-il sans biais?
B)Application numérique: On suppose $n = 10$
$\delta_1 = \delta_2 = ... = \delta_8 = 0.04$ et $\delta_9 = \delta_{10} = 0.02$.
On trouve $X_1 = 3.252; X_2 = 3.224; X_3 = 3.286; X_4 = 3.262; X_5 = 3.217$
$X_6 = 3.243; X_7 = 3.191; X_8 = 3.205; X_9 = 3.232; X_{10} = 3.215$.
Quelle est la valeur prise par Y? Donner pour m un intervalle de confiance au seuil $\alpha = 0.05$

Bonus:(2 points) Calculer $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ et en déduire que

$$I_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2} dx = 1$$

Correction Rattrapage de Stat.

Exo1 : On utilise le thm de Lévy.
Soit φ_n la ft caractéristique de $\frac{S_n}{n}$ et soit φ celle de X_1.

Les va X_i étant indépendantes donc

$$\varphi_n(t) = E\left[e^{it\frac{S_n}{n}}\right] = E\left[e^{i\left(\frac{t}{n}\right)\sum X_k}\right] = \left(E\left(e^{\frac{itX_i}{n}}\right)\right)^n \quad 1,5$$

donc $\varphi_n(t) = \left(\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n$.

Le DL à l'ordre 1 au $V(0)$ de φ donne

$$\varphi(t) = 1 + mt + o(t) \quad \text{car } \varphi'(0) = im. \quad 1$$

donc $\varphi_n(t) = \left(1 + im\frac{t}{n} + o(1/n)\right)^n$

$$= \exp\left[n \log\left(1 + im\frac{t}{n} + o(1/n)\right)\right] \quad 1$$

$$= \exp\left[n\left(im\frac{t}{n} + o(1/n)\right)\right] = \exp\left(imt + o(1)\right) \to e^{imt}$$

qui est la ft caractéristique de la variable constante égale à m. 1

Exo2 : Si $X \hookrightarrow N(m, \sigma)$ alors $\frac{X - m}{\sigma} \hookrightarrow N(0,1)$.

a) $X_i \hookrightarrow N(i, 3i)$ $\forall i = \overline{1,4}$ $\Rightarrow$ $\frac{X_i - i}{3i} \hookrightarrow N(0,1)$.

$$\Rightarrow \left(\frac{X_i - i}{3i}\right)^2 \hookrightarrow \chi^2_1$$

donc $T = \sum_{i=1}^{4} \left(\frac{X_i - i}{3i}\right)^2 \hookrightarrow \chi^2_4$. 2

b) On a $A = \frac{X_1 - 1}{3} \rightsquigarrow N(0,1)$

$$Y = \left(\frac{X_2-2}{6}\right)^2 + \left(\frac{X_3-3}{9}\right)^2 + \left(\frac{X_4-4}{12}\right)^2 \rightsquigarrow \chi^2_3.$$

donc $T = \frac{A}{\sqrt{Y/3}} \rightsquigarrow t_3.$ 2

c) On a $X = \left(\frac{X_1-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{X_2-2}{6}\right)^2 \rightsquigarrow \chi^2_2$

et $Y = \left(\frac{X_3-3}{9}\right)^2 + \left(\frac{X_4-4}{12}\right)^2 \rightsquigarrow \chi^2_2$

$\Rightarrow \quad F = \frac{X/2}{Y/2} = \frac{X}{Y} \rightsquigarrow F_{2,2}$ 2

Exo 3: A) $f_{X_i}(x) = \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_i^2}(x-m)^2\right\}.$

donc $\mathcal{L}(x_1^n, m) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot \frac{1}{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_1^n\left(\frac{x_i-m}{\sigma_i}\right)^2\right\}.$ 0,5

$$\max_m \mathcal{L}(x_1^n, m) \Leftrightarrow \max_m \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_1^n\left(\frac{x_i-m}{\sigma_i}\right)^2\right\}$$

$$\Leftrightarrow \min_m \sum_1^n \left(\frac{x_i-m}{\sigma_i}\right)^2$$ 0,5

2/4

On dérive, on obtient $-2\sum\left(\frac{x_i-m}{\sigma_i^2}\right)=0$

càd $\frac{x_1-m}{\sigma_1^2}+\frac{x_2-m}{\sigma_2^2}+\dots+\frac{x_n-m}{\sigma_n^2}=0$ 0,5

$$\frac{x_1}{\sigma_1^2}+\frac{x_2}{\sigma_2^2}+\dots+\frac{x_n}{\sigma_n^2}=\hat{m}\left[\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}+\dots+\frac{1}{\sigma_n^2}\right].$$

donc $Y=\hat{m}=a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n$ avec $a_i=\dfrac{1/\sigma_i^2}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}}$ 1

Rmq: $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$ 0,5

Y est une va Gaussienne car combinaison linéaire de va gaussiennes 1

$E(Y)=E\left(\sum_1^n a_iX_i\right)=\sum_{i=1}^{n}a_iE(X_i)=m\sum_1^n a_i=m$ 0,5

Y est donc un estimateur sans biais de m. 0,5

$$\mathrm{Var}\,Y=\sum_{i=1}^{n}a_i^2\,\mathrm{Var}\,X_i=\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sigma_i^2=\frac{1}{\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}+\dots+\frac{1}{\sigma_n^2}}.$$ 1

B) Si $n=10$.

$$\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}+\dots+\frac{1}{\sigma_{10}^2}=\frac{8}{(0{,}04)^2}+\frac{2}{(0{,}02)^2}=\frac{8}{16\times10^{-4}}+\frac{2}{4\times10^{-4}}=10^4$$ 0,5

3/4

donc $a_1 = \dots = a_8 = \dfrac{1/(0,04)^2}{10^4} = \dfrac{1}{16}$ 0,5 et $a_9 = a_{10} = 1/4$ 0,5

$$\Rightarrow Y = \frac{1}{16}(X_1 + \dots + X_8) + \frac{1}{4}(X_9 + X_{10}) = 3,229 \quad 0,5$$

càd que $Y \rightsquigarrow N(m, 10^{-4} = \sigma^2) \Rightarrow T = \dfrac{Y-m}{10^{-2}} \rightsquigarrow N(0,1)$ 0,5

et $P(|T| > t_\alpha) = 0,05 \Rightarrow t = 1,96$ (Table) 0,5

On a donc
$$-1,96 \leq 100(Y-m) \leq 1,96$$
$$Y - \frac{1,96}{100} \leq m \leq Y + \frac{1,96}{100}$$
$$\boxed{3,209 \leq m \leq 3,249} \quad 1$$

Bonus : Calculons $I_1^2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2}\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy$

Posons $x = r\cos t$, $y = r\sin t$ $\quad dx\,dy = r\,dr\,dt \quad r \in [0, +\infty[$, $t \in [0, 2\pi]$.

$$I_1^2 = \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} e^{-r^2/2}\, r\,dr\,d\theta = 2\pi\left[-e^{-r^2/2}\Big|_0^{+\infty}\right] = 2\pi$$

donc $I_1 = \sqrt{2\pi}$ 1,5

4/4

$I_2 = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx$ posons $t = \dfrac{x-m}{\sigma}$ $\quad dx = \sigma\,dt$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\,dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} = 1 \quad 0,5$$