1er septembre 2019
Documentations non autorisées
Portable éteint.
Une bonne Présentation de la copie exigée.

Département de Mathématiques	Université Saad Dahlab, Blida
Modélisation Statistique et Stochastique M1	2018-2019

Examen Final (S2)
Processus Stochastiques

Exercice 1 ***Soit** $\{N(t), t \geq 0\}$ **un processus de Poisson de paramètre** $\lambda > 0$**. On suppose que les occurrences successives du processus peuvent être classées selon deux types que l'on note type** I **et type** II**. On suppose de plus que lorsqu'une occurrence survient, elle est de type I avec probabilité** p **indépendamment de toutes les autres occurrences du processus. On note respectivement** $N_1(t)$ **et** $N_2(t)$ **les nombres d'occurrences de type** I **et de type** II **survenues dans l'intervalle de temps** $[0, t]$**.***

1. ***Pour** $t \geq 0$ **fixé quelle est la loi du couple** $(N_1(t), N_2(t))$ **? (On pourra conditionner à l'événement** $(N(t) = k), k \geq 0)$**.***
   Indication : $P(N_1(t) = k, N_2(t)) = l) = P(N_1(t) = k, N_2(t) = l | N(t) = k + l)P(N(t) = k + l)$
2. ***Justifier que*** $P(N_1(t) = k, N_2(t)) = l) = C_{k+l}^{k} p^k (1-p)^l e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k+l}}{(k+l)!}$
3. ***En déduire, pour tout** $t \geq 0$**, la loi de la variable** $N_1(t)$**.***
4. ***Montrer, pour tout** $t \geq 0$**, que les variables aléatoires** $N_1(t)$ **et** $N_2(t)$ **sont indépendantes.***
5. ***Montrer que** $\{N_1(t), t \geq 0\}$ **et** $\{N_2(t), t \geq 0\}$ **sont des processus de Poisson indépendants de paramètres respectifs** $p\lambda$ **et** $(1-p)\lambda$**.***

Exercice 2 ***Une société de service est sollicitée pour des contrats de durées aléatoires. Nous supposons que les instants de sollicitation** (T_n) **forment un processus de Poisson de paramètre** $\lambda = 2$**. Par ailleurs, les durées des contrats** (C_n) **forment un processus de renouvellement de loi** F **. Toute sollicitation tombant au cours d'un contrat est perdue. Nous nous intéressons à l'instant** T **où pour la première fois un contrat est perdu. On note***
–** $V(t)$ **la probabilité qu'aucune sollicitation ne soit perdue entre** 0 **et** t**, sachant qu'un contrat commence à l'instant** 0**.
–** $U(t)$ **la probabilité qu'aucune sollicitation ne soit perdue entre** 0 **et** t**.

1. ***Impliquer** V **dans une équation fonctionnelle similaire à une équation de renouvellement. En déduire la transformée de Laplace de** V **.***
2. ***En déduire l'espérance de** T **.***
3. ***Calculer la transformée de Laplace de** U**.***
4. ***En déduire l'espérance de** T **.***
5. ***Application : la loi commune des** C_i **est une loi exponentielle de paramètre** $\mu = 1$**.***
6. ***Démontrer qu'en choisissant une constante** R **adéquate, la fonction** $W(t) = e^{Rt}V(t)$ **est solution d'une équation de renouvellement. Utiliser les théorème de renouvellement pour en déduire le comportement asymptotique de** $V(t)$**.***

Application : Calculer le coût asymptotique moyen dans les cas

1. $\bar{F}(t) = e^{-\lambda t}$ **et** $\bar{G}(t) = e^{-\mu t}$**.**
2. X_1 **de loi uniforme sur** $[6, 10]$ **et** Y_1 **de loi uniforme sur** $[0, 10]$

Exercice 3 ***Un système dont on suppose la réponse instantanée est sollicité à des instants aléatoires** (X_n) **suivant un processus de renouvellement dont la loi a pour fonction de répartition** F **. A chaque sollicitation, le système a une probabilité** p **d'être défaillant. On suppose que le processus** (Y_n) **des défaillances sont indépendantes du processus de sollicitations.***

1. ***Justifier que** $Y_1 = X_1 + X_2 + ... + X_N$ **(le temps de la première défaillance) où** N **est une variable géométrique** $\mathcal{G}(p)$**.***

2. ***Montrer que la transformée de Y_1 est $Y_1^* = \frac{pX_1^*}{1-qX_1^*}$ où X_1^* est la transformée de Laplace de X_1***
   ***Indication :** $Y_1^* = E(X_1^*)$*
3. ***Donner l'équation de renouvellement de la suite des instants successifs de défaillance (Y_n).***
4. ***Déduire l'expression de la transformée de Laplace de la loi associée aux instants de défaillance (Y_n) en fonction de la transformée de f, où f est la densité de la loi F.***
5. ***Donner l'expression de la fonction de renouvellement.***
6. ***Décrire le processus de défaillance lorsque F est la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.***

Exercice 4 ***Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ le processus du des instants des arrivées des sinistres à une compagnie d'assurance pour remboursement. Nous considérons que $(X_n)_{n\geq 1}$ est processus de renouvellement de fonction de répartition F et $\{N(t), t \geq 0\}$ son processus de comptage. Une variable aléatoire $(Y_n)_{n\geq 1}$ est associée à l'occurrence de ce processus (représente le coût de remboursement pour le $(X_n)_{n\geq 1}$). On suppose que les variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes et de même loi G. Le coût total au temps $t > 0$ est une variable aléatoire notée C(t) définie par***

$$C(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n$$

1. ***Donner l'équation de renouvellement vérifiée par le processus $(X_n)_{n\geq 1}$.***
2. ***Calculer le coût asymptotique moyen.***

   Application : Calculer le coût asymptotique moyen dans les cas
   (a) $\bar{F}(t) = e^{-\lambda t}$ ***et*** $\bar{G}(t) = e^{-\mu t}$.
   (b) X_1 ***de loi uniforme sur*** $[6, 10]$ ***et*** Y_1 ***de loi uniforme sur*** $[0, 10]$

Barème : 05+06+05+04