Master 2 M.A.S

Nom & Prénom :	اللقب و الإسم:
Niveau : Processus Stoch 3	المستوى:
Groupe :	الفوج:
N° d'inscription : Examen de T.D. #2	رقم التسجيل:
Examen de :	إمتحان في مادة:

Corrigé-type. 18/19.

04/04 1.

(02,50) (a) $dU_t = 2t\,dt + \cos B_t\, dB_t - \frac{1}{2}\sin B_t\, dt$ (0,5) (0,5) (0,5)

$= \left(2t - \frac{1}{2}\sin B_t\right)dt + \cos B_t\, dB_t.$

On a: $t \longmapsto 2t - \frac{1}{2}\sin B_t$: continue (0,5)

et $t \longmapsto \cos B_t$ est dans L^2 (0,5)

i.e. $(U_t)_{t\geq 0}$ est d'Itô.

(01,50) (b) $U_t = 2 + \underbrace{\int_0^t \cos B_s\, dB_s}_{M_t} + \int_0^t \left(2s - \frac{1}{2}\sin B_s\right)ds$

(0,5) $M_t := \int_0^t \cos B_s\, dB_s$ martingale car il s'agit (0,5) d'1 Intégrale d'Itô.

(0,5) $U_t - M_t = 2 + \int_0^t \left(2s - \frac{1}{2}\sin B_s\right)ds$: continûment

(2) $\boxed{05/05}$

(1,50) (a) $f(t,x) = \frac{1}{\sqrt{1-t}} e^{-\frac{x^2}{2(1-t)}}$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \left[\frac{1}{2(1-t)} - \frac{x^2}{2(1-t)^2}\right] f(t,x) \ ; \quad \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = \frac{-x}{1-t} f(t,x);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) = -2 \frac{\partial f}{\partial t}(t,x).$$

Par Itô : $\quad dM_t = \frac{-B_t}{1-t} M_t \, dB_t$.

(1,50) (b) $M_t = \overset{=1}{M_0} + \underbrace{\int_0^t \frac{-B_s}{1-s} M_s \, dB_s}_{= I_t}$

I_t est une intégrale d'Itô car :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \frac{B_s^2}{(1-s)^2} \underset{\leq 1/(1-s)}{M_s^2} \, ds\right] \leq \mathbb{E}\left[\int_0^t \frac{B_s^2 \, ds}{(1-s)^3}\right] = \int_0^t \frac{s \, ds}{(1-s)^3} < \infty$$

D'où $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale.

(01) (c) $B_t^2 \xrightarrow[t \to 1]{p.s} B_1^2 > 0 \quad$ car $t \mapsto B_t$ continue p.s.

$$M_t = \frac{e^{-B_t^2/2(1-t)}}{(1-t)^{1/2}} \underset{t \to 1}{\overset{x = \frac{1}{1-t}}{\approx}} \frac{x^{1/2}}{e^{\frac{B_1^2}{2} \cdot x}} \xrightarrow{x \to +\infty} 0^+.$$

(01) (d) D'après (b) $\quad \mathbb{E}M_t = 1 + \underbrace{\mathbb{E}\int_0^t \frac{-B_s}{1-s} M_s \, dB_s}_{= 0}$ car I_t : centrée.

$\mathbb{E}M_t = 1 \ \forall t$ ou bien : $\mathbb{E}M_t = \mathbb{E}M_0 = 1$ (Martingale).