Rattrapage 19/20 PS 2.
MAS 1

Exo1

Exercice n° 5 / Série n° 2

Exo2 : (a) Prouver la propriété de tour de l'espérance conditionnelle.

(b) Prouver la propriété de linéarité de l'esp. conditionnelle.

Exo3

Exercice n° 2 / Série n° 2

Master 1 MAS 19/20

Processus Stoch. 2

Examen de Rattrapage

Corrigé-type.

Nom & Prénom :	اللقب و الإسم:
Niveau :	المستوى:
Groupe :	الفوج:
N d'inscription :	رقم التسجيل:
Examen de :	إمتحان في مادة:

05,50 $\boxed{\text{Exo 1}}$ $(Y_n)_{n\geq 1}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ – mart.

(i) Adaptation : 0,50

Si $n\geq 1$: $Y_n = \underbrace{(Z_1 + \cdots + Z_n)^2}_{\mathcal{F}_n\text{- mesurable } (\text{car } \mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \dots, Z_n))} - \overset{\mathcal{F}_n\text{-mes. } (\text{cte})}{n}$

$\mathcal{F}_n$ – mesurable

Donc : $\forall n\geq 1$: Y_n est $\mathcal{F}_n$ – mes.

(ii) Intégrabilité 0,2

Si $n\geq 1$: $E|Y_n| = E|X_n^2 - n|$

$\leq EX_n^2 + n$

Or $EX_n^2 = E(Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n)^2$

$= E\left[\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 + \sum_{n=i\neq j}^{n} Z_i Z_j\right]$

Comme $\{Z_i\}$ sont indep., $E\left[\sum_{i\neq j} Z_i Z_j\right] = 0$

Exo1 (suite) (ii)

De plus: $\mathbb{E}(Z_j^2) = 1$.

D'où, $\mathbb{E}|Y_n| \leq 2n < \infty \Rightarrow Y_n \in L^1 \ \forall n \geq 1$.

(iii) Propriété de (03)

Si $n \geq 1$: $\mathbb{E}(Y_{n+1}/\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X_{n+1}^2 - (n+1)/\mathcal{F}_n)$

On a

$$X_{n+1}^2 = (X_n + Z_{n+1})^2$$

$$= X_n^2 + 2Z_{n+1}X_n + Z_{n+1}^2$$

Alors,

$$\mathbb{E}(X_{n+1}^2/\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\underbrace{X_n^2}_{\mathcal{F}_n\text{-mes.}}/\mathcal{F}_n) + 2\mathbb{E}(Z_{n+1}\underbrace{X_n}_{\mathcal{F}_n\text{-mes.}}/\mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(Z_{n+1}^2/\mathcal{F}_n)$$

$$= X_n^2 + 2X_n\mathbb{E}(Z_{n+1}/\mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(Z_{n+1}^2/\mathcal{F}_n)$$

Comme: $Z_{n+1} \perp \mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \dots, Z_n)$.

$$\mathbb{E}(X_{n+1}^2/\mathcal{F}_n) = X_n^2 + 2X_n\mathbb{E}(Z_{n+1}) + \mathbb{E}(Z_{n+1}^2)$$

Or: Par hypothèse: $\mathbb{E}(Z_{n+1}) = 0$ et $\mathbb{E}(Z_{n+1}^2) = 1$.

Il en résulte, $\mathbb{E}(X_{n+1}^2/\mathcal{F}_n) = X_n^2 + 1$

D'où: $\mathbb{E}(Y_{n+1}/\mathcal{F}_n) = X_n^2 + 1 - (n+1)$

$$= X_n^2 - n = Y_n$$

12,5/16
Exercice 2

a) Propriété de Tour : (voir le cours).

Enoncer :
hypothèses : 0,5
Résultats : 0,5

Preuve : (Kolmogorov)
(i) 2,5
(ii) 0,5

b) Propriété de Linéarité :
Enoncer
hypothèses : 0,5
Résultats : 0,5

Preuve :
(i) 1
(ii) 2

02,5/04
Exercice 3

Mq, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ est la plus petite filtration à laquelle $(X_n)_{n\geq 1}$ est adapté.

0,5
Supposons que $(\mathcal{G}_n)_{n\geq 1}$ est une autre filtration à laquelle $(X_n)_{n\geq 1}$ est adapté,

montrons que : $\forall n \geq 1$, $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{G}_n$?

On a : $\forall n$, $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ X_k est $\mathcal{F}_n$- mesurable (la plus petite)
de plus ;

1,50
X_1 est $\mathcal{G}_1$- mes ($\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_n$)
X_2 est $\mathcal{G}_2$- mes ($\mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}_n$)
⋮
X_n est $\mathcal{G}_n$- mes

$\Rightarrow X_1, X_2, \dots, X_n$ sont $\mathcal{G}_n$- mes. $\Rightarrow \sigma(X_1, \dots, X_n) \subset \mathcal{G}_n$ $\forall n$.

3/3