Chapitre 1

Professeur ZEROUKI Ibtissem

January 28, 2021

Contents

1. Tribus et mesures.

1.1. Introduction à la théorie de la mesure.

Historiquement, comme l'indique le nom, le but de cette théorie est de **mesurer des ensembles**. Sans s'en rendre compte, plusieurs types de **mesures** ont été rencontrées, telle que

- Le cardinal d'un ensemble discret.
- L'aire d'une figure plane.
- Le volume d'un solide en dimension 3.
- La probabilité d'un évènement.

Ces mesures sont des cas particuliers d'une notion plus générale de mesure, qui est l'outil de base pour une nouvelle théorie de l'intégration, dite **intégrale de Lebesgue** (1902)**.** Elle généralise la notion déjà vu de l'intégration de Riemann. Cependant, cette nouvelle théorie

1- s'applique à une classe de fontions plus grande (les **fonctions mesurables).**

2- a des théorèmes de convergence plus forts que le convergence uniforme : le **Théorème de convergence monotone** et le **Théorème de convergence dominée**, pour avoir des résultats du type

$$\lim_{n\to+\infty}\int f_n(x)dx = \int \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx$$

où

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\int f_k(x)dx = \int \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} f_k(x)dx = \int \sum_{n\geq 0} f_n(x)dx.$$

3- traite sans difficulté des intégrale multiples (**Théorème de Fubini-Tonelli** et **de Fubini**).

4- unifie les différentes façons de mesurer.

De plus, cette théorie sert de cadre pour une théorie des probabilités moderne due à **Kolmogorov.**

1.2. Rappels sur la théorie des ensembles.

1.2.1. Terminologie.

Soit E un ensemble non vide.
· $A \subseteq E$ est un **sous ensemble** ou une **partie** de E.
· $\mathcal{P}(E)$ est l'**ensemble de tous les parties** de E.
· $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ est dite une **famille** ou une **classe de partie** de E.

1.2.2. Opérations classiques

Soient A_1 et A_2 deux parties E, on définit
- La **réunion** de A_1 et A_2, notée $A_1 \cup A_2$, par :

$$A_1 \cup A_2 = \{x \in E \ \ / \ \ x \in A_1 \text{ ou bien } \ x \in A_2\}.$$

- l'**intersection** de A_1 et A_2, notée $A_1 \cap A_2$, par :

$$A_1 \cap A_2 = \{x \in E \ \ / \ \ x \in A_1 \quad \text{et} \ \ x \in A_2\}.$$

- Le **complément** de A_1 dans E, notée $\mathcal{C}_E\ A_1$ (ou $\mathcal{C}A_1$), par :

$$\mathcal{C}_E\ A_1 = \{x \in E \ \ \text{et} \ \ x \notin A_1\}.$$

- La **différence symétrique** A_1 et A_2, notée $A_1\ \Delta\ A_2$, par :

$$A_1\ \Delta\ A_2 = \{x \in E \ \ / \ \ x \in A_1 \cup A_2 \quad \text{et} \ \ x \notin A_1 \cap A_2\}.$$

-La **différence** de A_1 avec A_2, notée $A_1 \backslash A_2$, dite **différence propre** dans la cas où $A_2 \subseteq A_1$, par :

$$A_1 \backslash A_2 = \{x \in E \ \ / \ \ x \in A_1 \quad \text{et} \ \ x \notin A_2\}.$$

Remarque 1.2.1.
◦ $A_1\ \Delta\ A_2 = (A_1 \backslash A_2) \cup (A_2 \backslash A_1)$.
◦ *Remarquer l'association de la réunion avec le quantificateur "$\exists$" et l'intersection avec le quantificateur "$\forall$", ainsi que le passage au complémentaire avec la négation.*

Proposition 1.2.2. *On a les relations suivantes*
$1 - \mathcal{C}\,(A_1 \cup A_2) = \mathcal{C}A_1 \cap \mathcal{C}A_2$ *et* $\mathcal{C}\,(A_1 \cap A_2) = \mathcal{C}A_1 \cup \mathcal{C}A_2$.
$2 - A_1 \backslash A_2 = A_1 \cap \mathcal{C}A_2$.
$3 - A_1\ \Delta\ A_2 = (A_1 \cup A_2) \diagdown (A_1 \cap A_2) = (A_1 \backslash A_2) \cup (A_2 \backslash A_1)$.

1.2.3. Suites de parties d'un ensemble.

Soit $\{A_n\}_{n\geq 0}$ une suite de parties de E. Nous allons définir dans ce qui suit les notions de **limite**, **limite supérieure** et **limite inférieure** de cette suite.

Définition 1.2.3. *La suite $\{A_n\}_{n\geq 0}$ est dite **croissante** (resp. **décroissante**) lorsque pour tout entier n, on a $A_n \subseteq A_{n+1}$ (resp. $A_{n+1} \subseteq A_n$). Dans ce cas, la **limite** de cette suite est définie naturellement comme la réunion (resp. l'intersection) de tous les A_n*

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n\geq 0} A_n \quad \left(\textit{resp.} \quad \bigcap_{n\geq} A_n \right).$$

Définition 1.2.4. *· On définit la **limite supérieure** de $\{A_n\}_{n\geq 0}$, notée $\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n$ $\left(\text{ou } \overline{\lim} A_n\right)$, par*

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n = \overline{\lim} A_n = \lim \downarrow \left(\bigcup_{k\geq n} A_k \right) := \bigcap_{n\geq 0} \left(\bigcup_{k\geq n} A_k \right).$$

*· On définit la **limite inférieure** de $\{A_n\}_{n\geq 0}$, notée $\liminf\limits_{n\to+\infty} A_n$ $\left(\text{ou } \underline{\lim} A_n\right)$, par:*

$$\liminf_{n\to+\infty} A_n = \underline{\lim} A_n = \lim \uparrow \left(\bigcap_{k\geq n} A_k \right) := \bigcup_{n\geq 0} \left(\bigcap_{k\geq n} A_k \right).$$

La notation $\lim \uparrow$ (resp. $\lim \downarrow$) fait référence que la suite est croissant (resp. décroissante).

Remarque 1.2.5. *On a :*

○
$$\begin{aligned} x \in \limsup_{n\to+\infty} A_n &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N};\ \ \exists k \geq n \ \ \textit{tel que} \ \ x \in A_k. \\ &\Leftrightarrow x \in A_n, \ \text{où } n \in \ \textit{ensemble infini.} \end{aligned}$$

○
$$\begin{aligned} x \in \liminf_{n\to+\infty} A_n &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N};\ \ \forall k \geq n \ \ \textit{tel que} \ \ x \in A_k. \\ &\Leftrightarrow x \notin A_n, \ \text{où } n \in \ \textit{ensemble fini.} \end{aligned}$$

Notant que $\liminf\limits_{n\to+\infty} A_n \subseteq \limsup\limits_{n\to+\infty} A_n$.

Définition 1.2.6. *On dit que la suite* $\{A_n\}_{n\geq 0}$ *converge si* $\liminf\limits_{n\to+\infty} A_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} A_n$. *Lorsque c'est le cas, on définit la limite de cette suite par :*

$$\lim_{n\to+\infty} A_n := \liminf_{n\to+\infty} A_n = \limsup_{n\to+\infty} A_n.$$

Remarque 1.2.7. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = A$, *alors cet ensemble est caractérisé par:*

$$\forall x \in A; \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}\ , \ \ \forall n \geq n_0 \ \ \text{tel que } x \in A_n$$

$$\forall x \notin A; \quad \exists n_1 \in \mathbb{N}\ , \ \ \forall n \geq n_1 \ \ \text{tel que } x \notin A_n.$$

1.2.4. Fonctions - Fonctions indicatrices.

Définition 1.2.8. *On appelle* ***fonction indicatrice*** *ou* ***indicatrice*** *de la partie* A, *qu'on note* $\mathbf{1}_A$, *la fonctionsdéfinie par :*

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_A : \ \ & E \to \{0,1\} \\ & x \mapsto \begin{cases} 0 & : x \notin A \\ 1 & : x \in A. \end{cases} \end{aligned}$$

Proposition 1.2.9. (1) $\mathbf{1}_{\mathcal{C}A} = 1 - \mathbf{1}_A$.
(2) *Au sens de la convergence simple, on a*

$$\overline{\lim}\mathbf{1}_{A_n} = \mathbf{1}_{\overline{\lim} A_n} \quad \text{et} \ \ \underline{\lim}\mathbf{1}_{A_n} = \mathbf{1}_{\underline{\lim} A_n}$$

(3) *La suite* $\{A_n\}_{n\geq 0}$ *converge si et seulement si* $\{\mathbf{1}_{A_n}\}_{n\geq 0}$ *converge et dans ce cas on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{1}_{A_n}(x) = \mathbf{1}_{\lim\limits_{n\to+\infty} A_n}(x).$$

Définition 1.2.10. *Soient* E, F *deux ensembles et* $f : E \to F$ *une fonction.*
⊛ *Pour tout* $A \subseteq E$, *on définit l'****image directe*** *de* A, *notée* $f(A)$, *par :*

$$f(A) := \{y \in F, \ \text{tel que } \exists x \in A \text{ où } y = f(x)\}.$$

⊛ *Pour tout* $B \subseteq F$, *on définit l'****image resiproque*** *de* B, *notée* $f^{-1}(B)$, *par :*

$$f^{-1}(B) := \{x \in E, \ \text{tel que } \ f(x) \in B\}.$$

Proposition 1.2.11. *Pour toute famille* $(A_i)_{i\in I}$ *de parties de* E *et pour toute famille* $(B_j)_{j\in J}$ *de parties de* F, *où* I *et* J *sont deux ensembles d'indices quelconques, et pour toute fonction* $f : E \to F$, *on a*

(i) $\quad f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$ *et* $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$, *avec une égalité si* f *est bijective.*

(ii) $\quad f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$ *et* $f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) \subseteq \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$.

(iii) *Pour tout* $B \subseteq F$, *on a* $\mathcal{C}f^{-1}(B) = f^{-1}(\mathcal{C}B)$.

1.3. Algèbres et Tribus.

Soit E un ensemble quelconque, non vide. Nous rappelons que $\mathcal{P}(E)$ peut contenir un nombre fini d'élèments, ou bien, il peut être non dénombrable. Autrement dit, il peut exister des élèment de $\mathcal{P}(E)$ que nous ne sommes pas en mesure d'appréhender. Par conséquent, nous ne sommes pas capable d'attribuer une mesure à ces élèments. Il est donc essentiel de caractériser un sous ensemble de $\mathcal{P}(E)$ auquel nous nous restreindrons.

Définition 1.3.1. *Soit* $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ *une famille non vide de parties de* E. *On dit que*

$1-$ $\mathcal{A}$ *est une* ***algèbre*** *(booléenne) sur* E *(ou un* ***clan*** *sur* E*) si*

(a) $E \in \mathcal{A}$.

(b) *Si* $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}A \ \left(= A^{\mathcal{C}}\right) \in \mathcal{A}$.

(c) *Si* $(A, B) \in \mathcal{A}^2 \Rightarrow (A \cup B) \subset \mathcal{A}$.

$2-$ $\mathcal{A}$ *est une* $\boldsymbol{\sigma -}$ ***algèbre*** *ou* ***tribu*** *ou bien* ***un*** $\boldsymbol{\sigma -}$ ***clan*** *sur* E, *si*

(a) $\mathcal{A}$ *est une algèbre ou un clan sur* E.

(b) *Si* $\{A_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n\geq 0} A_n \in \mathcal{A}$.

Un ensemble E *muni d'une tribu* $\mathcal{A}$ *est appelé* ***espace mesurable*** *et noté* $(E, \mathcal{A})$.

Exemple 1.3.2. *On peut citer les exemples suivants*

$1-$ $\{\varnothing, E\}$ *est une tribu*$\Rightarrow$ *sur* E, *appelée* ***tribu grossière.***

$2 - \mathcal{P}(E)$ *est une tribu sur* E, *appelée* ***tribu discète.***

$3-$ *L'ensemble de tous les évènements possibles d'une expérience aléatoire est une tribu.*

Proposition 1.3.3. *Les algèbres et les tribus possèdent les propriétés suivantes*
⊛ *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre sur E, alors :*

(α) *$\mathcal{A}$ est stable par réunions finies (récurrence).*

(β) *$\mathcal{A}$ est stable par intersections finies, différence et différence symétrique.*

⊛ *Soit $\mathcal{A}$ une $\sigma-$ algèbre sur E, alors elle est stable pour les mêmes opérations sur des familles dénombrables d'élèments de $\mathcal{A}$ et pour les opérations $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup A_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \inf A_n$.*

⊛ *Si E est un ensemble fini, toute algèbre sur E est une tribu.*

Remarque 1.3.4. *On peut remlacer la condition $1-(a)$ dans la* <u>*Définition* 1.3.1.</u> *par $\emptyset \in \mathcal{A}$ et la condition $2-(b)$ par la stabilité de l'intersection dénombrable (ou fini dans $1-(c)$).*

Proposition 1.3.5. *Nous avons :*
$1-$ *L'intersection de deux tribus sur E est aussi une trubu. Plus généralement, l'intersection quelconque de tribus est une tribu.*
$2-$ *Une réunion finie de tribus n'est pas forcément une tribu.*

Démonstration. $1-$ Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux tribus sur E. Alors on a:

⊙ $E \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{B} \Rightarrow E \in (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$.

⊙ Soit $A \in (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$, ce qui nous permet de dire que $A \in \mathcal{A}$ et $A \in \mathcal{B}$, donc $A^{\mathcal{C}} \in \mathcal{A}$ et $A^{\mathcal{C}} \in \mathcal{B}$. D'où $A^{\mathcal{C}} \in (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$.

⊙ Soit $\{A_i\}_{i\in I} \subset (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$, où I est un ensemble d'indice au plus dénombrable. Alors, pour tout $i \in I$, on a $A_i \in \mathcal{A}$ et $A_i \in \mathcal{B}$, ce qui nous permet d'avoir $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$ et $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{B}$. Donc $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \in (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$.
Par conséquent $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ est une tribu sur E.

Par l'intersection dénombrable la généralisation est immédiate.

$2-$ Soit $E = \{a, b, c\}$, alors $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, E\}$ et $\mathcal{B} = \{\emptyset, \{b\}, \{a, c\}, E\}$ sont deux tribus sur E.

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{b\}, \{a, c\}, E\}.$$

$\{a\}$ et $\{b\} \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, mais $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Par conséquent, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ n'est pas une tribu. ■

Définition 1.3.6. *Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E)$ une famille de parties de E. On appelle* ***tribu engendrée par*** *$\mathcal{F}$, qu'on note $\sigma(\mathcal{F})$, la plus petite tribu contenant $\mathcal{F}$.*

Les deux propositions suivantes sont faciles à démontrer.

Proposition 1.3.7. *Nous avons $\sigma(\sigma(\mathcal{F})) = \sigma(\mathcal{F})$.*

Démonstration. Nous avons d'aprés la définition précédente $\sigma(\mathcal{F}) \subset \sigma(\sigma(\mathcal{F}))$. De plus, $\sigma(\mathcal{F})$ est une tribu contenant $\sigma(\mathcal{F})$, donc $\sigma(\sigma(\mathcal{F})) \subset \sigma(\mathcal{F})$, car $\sigma(\sigma(\mathcal{F}))$ est la plus petite tribu contenant $\sigma(\mathcal{F})$. D'où l'égalité. ■

Proposition 1.3.8. *Si $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$, alors on a $\sigma(\mathcal{F}_1) \subset \sigma(\mathcal{F}_2)$.*

Démonstration. En effet, nous avons $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \sigma(\mathcal{F}_2)$. Donc $\sigma(\mathcal{F}_2)$ est une tribu contenant $\mathcal{F}_1$. Par conséquent $\sigma(\mathcal{F}_1) \subset \sigma(\mathcal{F}_2)$. ■

Enfin, nous avons une caractérisation de la tribu engendrée.

Proposition 1.3.9. $\sigma(\mathcal{F}) = \bigcap_{\mathcal{F} \subset \mathcal{T}_i} \mathcal{T}_i$, *où $\mathcal{T}_i$ est une tribu.*

Démonstration. On a d'aprés les deux dernières propositions, pour toute tribu $\mathcal{T}_i$ contenant $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{T}_i \quad \Rightarrow \sigma(\mathcal{F}) \subset \sigma(\mathcal{T}_i) = \mathcal{T}_i,$$

alors $\sigma(\mathcal{F}) \subset \bigcap_{\mathcal{F} \subset \mathcal{T}_i} \mathcal{T}_i$, qui est une tribu.

En plus, $\sigma(\mathcal{F})$ est une tribu contenant $\mathcal{F}$, (elle est l'une des tribus $\mathcal{T}_i$ contenant $\mathcal{F}$), donc $\bigcap_{\mathcal{F} \subset \mathcal{T}_i} \mathcal{T}_i \subset \sigma(\mathcal{F})$. D'où le résultat voulu. ■

Cette caractérisation va nous permettre d'étudier les tribus engendrées par des familles des particulières. Dans $\mathbb{R}$, la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ n'est pas dénombrable mais surtout, elle contient des éléments que nous ne savons pas décrire. En revanche, les familles d'intervalles sont familières et utiles. Il est donc assez intuitif de considérer les tribus engendrées par la famille des intervalles. C'est ce qu'a fait le mathématicien français **Emile Borel** (né le 07 Janvier 1871, mort à Paris le 03 Février 1956).

1.4. Tribu de Borel.

Définition 1.4.1. *Soit X un ensemble non vide, muni d'une topologie $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$. La tribu engendrée par cette topologie est dite* ***"tribu de Borel"*** *ou* ***"tribu de borélienne",*** *notée $\mathcal{B}(X)$. les éléments de cette tribu sont appelés les* ***"boréliens"*** *de X.*

Remarque 1.4.2. *La tribu borélienne de X contient:*

- Les ouverts de X, $U_i \in \mathcal{T}$.

- Les intersections d'ouverts (finies ou dénombrables).

- Les réunions d'intersection d'ouverts (finies ou dénombrables) de la forme $\bigcup\limits_{j\in J}\left(\bigcap\limits_{i\in I} U_i\right)$.

- En généralisant le procédé : les réunions d'intersection de réunion . . . d'ouverts de la forme $\bigcup\limits_{j\in J}\left\{\bigcap\limits_{i\in I}\left[\cdots\bigcup\limits_{k\in K}\left(\bigcap\limits_{l\in L}\cdots\right)\right]\right\}$.

Comme ce processus ne s'arrête pas, on ne peut pas décrire tous les boréliens. Par contre, dans cle cas ou $X = \mathbb{R}$, on peut optimiser la famille qui engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, i. e. :Choisir une famille plus petite que celle dex ouverts qui suffit pour retrouver toute la tribu de Borel de $\mathbb{R}$ avec les opérateurs $\cup$, $\cap$ et complémentaire.

1.4.1. Boréliens de $\mathbb{R}$.

Dans ce cas on considère $X = \mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle (engendrée par la distance usuelle $|\ .\ |$). On rappelle que les ouverts de $\mathbb{R}$, dans ce cas, sont des réunions au plus dénombrables d'intervalles ouvert de la fome $]a_n, b_n[$. Donc les boréliens de $\mathbb{R}$ sont:

- Tout ouvert, tout fermé.
- Tout intervalle ouvert, fermé, semi-fermé, borné, non borné.
- Tout singleton $\{x\}, x \in \mathbb{R}$.
- Tout ensemble dénombrable.

En effet, $]a,b[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ car c'est un ouvert.

$$[a,b] = \bigcap_{n\geq 1}\left]a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}\right[\in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

$$[a,b[= \bigcap_{n\geq 1} \left]a-\frac{1}{n}, b\right[\in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ de même }]a,b] = \bigcap_{n\geq 1} \left]a, b+\frac{1}{n}\right[\in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

$$]-\infty, a[= \left[\bigcup_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\leq [a]}}]n-1,n] \right] \bigcup] \ [a], a[\text{ et }]-\infty, a] = \left[\bigcup_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\leq [a]}}]n-1,n] \right] \bigcup] \ [a], a] \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Enfin

$$]a,+\infty[=]-\infty, a]^C \quad \text{et} \quad [a,+\infty[=]-\infty, a[^C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Donc, on peut donnercle résultat suivant:

Théorème 1.4.3. *La tribu de Borel de $\mathbb{R}$ vérifie les relations suivantes:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(\mathbb{R}) &= \sigma\left(\left\{]a,b[\ / \ (a,b)\in\mathbb{R}^2 \text{ et } a<b\right\}\right). \quad (1)\\
&= \sigma\left(\left\{[a,b] \ / \ (a,b)\in\mathbb{R}^2 \text{ et } a\leq b\right\}\right). \quad (2)\\
&= \sigma\left(\left\{]a,b] \ / \ (a,b)\in\mathbb{R}^2 \text{ et } a<b\right\}\right). \quad (3)\\
&= \sigma\left(\left\{[a,b[\ / \ (a,b)\in\mathbb{R}^2 \text{ et } a<b\right\}\right). \quad (4)\\
&= \sigma\left(\{]-\infty,a[\ / \ a\in\mathbb{R}\}\right) = \sigma\left(\{[a,+\infty[\ / \ a\in\mathbb{R}\}\right). \quad (5)\\
&= \sigma\left(\{]-\infty,a] \ / \ a\in\mathbb{R}\}\right) = \sigma\left(\{]a,+\infty[\ / \ a\in\mathbb{R}\}\right). \quad (6)
\end{aligned}$$

Démonstration. (1) Comme pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et $a<b$, l'intervalle $]a,b[$ est un ouvert, alors $\{]a,b[\ / \ (a,b)\in\mathbb{R}^2$ et $a<b\}$ est une partie de la topologie usuelle de $\mathbb{R}$. D'où

$$\sigma\left(\left\{]a,b[\ / \ (a,b)\in\mathbb{R}^2 \text{ et } a<b\right\}\right) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

On sait que tout ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}$ s'écrit de la manière suivante

$$\mathcal{O} = \bigcup_{i\in I}]a_i, b_i[$$

où I est un ensemble d'indice au plus dénombrable, alors comme

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma\left(\left\{]a,b[\ / \ (a,b)\in\mathbb{R}^2 \text{ et } a<b\right\}\right).$$

On obtient donc l'égalité (1).

(2) Pour tout $a < b \in \mathbb{R}$, on a d'une part $[a,b] = \bigcap_{n\geq 1} \left]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right[$, alors

$$\left\{[a,b] \ / \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } a \leq b\right\} \subset \sigma\left(\left\{]a,b[\ / \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } a < b\right\}\right).$$

En utilisant (1) on peut avoir

$$\sigma\left(\left\{[a,b] \ / \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } a \leq b\right\}\right) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

D'autre part, comme $]a,b[= \bigcup_{n\geq 1} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right]$, on a

$$\left\{]a,b[\ / \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } a < b\right\} \subset \sigma\left(\left\{[a,b] \ / \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } a \leq b\right\}\right)$$

et d'aprés (1) on a

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma\left(\left\{[a,b] \ / \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } a \leq b\right\}\right).$$

D'où la relation (2).

(3) Pour tout $a < b \in \mathbb{R}$, on a d'une part $]a,b[= \bigcup_{n\geq 1} \left]a, b - \frac{1}{n}\right]$, donc

$$\left\{]a,b[\ / \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } a < b\right\} \subset \sigma\left(\left\{]a,b] \ / \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } a \leq b\right\}\right)$$

et d'aprés (1) on a

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma\left(\left\{]a,b] \ / \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } a < b\right\}\right).$$

D'autre part, on a $]a,b] = \bigcap_{n\geq 1} \left]a, b + \frac{1}{n}\right[$, donc

$$\left\{]a,b] \ / \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } a < b\right\} \subset \sigma\left(\left\{]a,b[\ / \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } a \leq b\right\}\right)$$

et d'aprés (1) on a

$$\sigma\left(\left\{]a,b] \ / \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } a < b\right\}\right) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Par conséquent on obtient (3).

(4) Pour montrer l'égalité (4), on raisonne de la même manière en utilisant les relations

$$]a, b[= \bigcup_{n\geq 1} \left[a + \frac{1}{n}, b\right[\quad \text{et} \quad [a, b[= \bigcap_{n\geq 1} \left]a - \frac{1}{n}, b\right[.$$

(5) Pour montrer l'égalité (5), on utilise les relations

$$[a, b[= [a, +\infty[\cap [b, +\infty[^C, \quad [a, +\infty[= [a, [a] + 1[\ \cup \left(\bigcup_{n=[a]+1}^{+\infty} [n, n+1[\right)$$

et $]-\infty, a[= [a, +\infty[^C$.

(6)Pour montrer l'égalité (5), on utilise les relations

$$]a, b] =] - \infty, a] \ \cap \ ] - \infty, b[^C, \quad] - \infty, a[=] \ [a]\,, a] \ \cup \left(\bigcup_{n\leq [a]}]n - 1, n]\right)$$

et $] - \infty, a] =]a, +\infty[^C$. ■

1.5. Semi - anneau booléen.

Définition 1.5.1. *Soit $\mathcal{S}$ une famille de parties d'un ensemble non vide E. On dit que $\mathcal{S}$ est un "**semi - anneau boolien**" de E si :*

(α) $\varnothing \in \mathcal{S}$

(β) *Si* $(A, B) \in \mathcal{S}^2$ *alors* $A \cap B \in \mathcal{S}$.

(γ) *Si* $(A, B) \in \mathcal{S}^2$ *avec* $B \subset A$, *alors* $A \backslash B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ *où* $A_i \in \mathcal{S}$, *pour tout* $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, *et* $A_i \cap A_j = \varnothing$ *si* $i \neq j$.

Proposition 1.5.2. *Les familles* $\mathcal{I}_0 = \{[a, b],]a, b[,]a, b], [a, b[\text{ telle que } a < b \in \mathbb{R}\}$ *est* $\mathcal{I}_1 = \{]a, b] \text{ telle que } a \leq b \in \mathbb{R}\}$ *sont des semi - anneaux booléens de parties de* $\mathbb{R}$, *mais pas* $\mathcal{I}_2 = \{]a, b[\text{ telle que } a \leq b \in \mathbb{R}\}$ *et* $\mathcal{I}_3 = \{]-\infty, a] \text{ telle que } a \in \mathbb{R}\}$.

Démonstration. ⊛ Le résultat est évident pour la famille $\mathcal{I}_0$.

⊛ Pour $\mathcal{I}_1$ on a:
(α) On a $]a, a] = \varnothing$.
(β) On a

$$]a, b] \cap]c, d] = \begin{cases} \varnothing \\ ]a, b] \\ ]c, d] \\ ]c, b] \\ ]a, d] \end{cases}, \text{ alors }]a, b] \cap]c, d] \in \mathcal{I}_1.$$

(γ) Si $]a, b] \subset]c, d]$, on peut avoir $]c, d] \backslash]a, b] =]c, a] \cup]b, d]$, ou $]c, a] \cap]b, d] = \varnothing$.

Par conséquent $\mathcal{I}_1$ est un semi - anneau booléen de partie de $\mathbb{R}$.

⊛ Si $]a, b[\subset]c, d[$, on a $]c, d[\backslash]a, b[=]c, a] \cup [b, d[$, donc $\mathcal{I}_2$ n'est pas semi - anneau booléen de partie de $\mathbb{R}$.

⊛ Si $]-\infty, a] \subset]-\infty, b]$, on a $]-\infty, b] \setminus]-\infty, a] =]a, b]$, par conséquent $\mathcal{I}_3$ n'est pas un semi - anneau booléen de partie de $\mathbb{R}$. ∎

Proposition 1.5.3. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux semi - anneaux booléens de E et F, respectivement. Alors la famille $\mathcal{F} = \{A \times B \text{ telle que } A \in \mathcal{A} \text{ et } B \in \mathcal{B}\}$ est un semi - anneau booléen de parties de $E \times F$.*

Démonstration. Comme $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux semi - anneaux booléens, alors
- $\varnothing \times \varnothing = \varnothing \in \mathcal{F}$.

- Soient C_1 et $C_2 \in \mathcal{F}$, alors $C_1 = A_1 \times B_1$ et $C_2 = A_2 \times B_2$, avec $(A_1, A_2) \in \mathcal{A}^2$ et $(B_1, B_2) \in \mathcal{B}^2$.

$$C_1 \cap C_2 = (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) \in \mathcal{F}$$

- Soient C_1 et $C_2 \in \mathcal{F}$ telle que $C_1 \subset C_2$, alors $C_1 = A_1 \times B_1$ et $C_2 = A_2 \times B_2$, avec $(A_1, A_2) \in \mathcal{A}^2$ et $(B_1, B_2) \in \mathcal{B}^2$.

$$C_1 \subset C_2 \;\Rightarrow (A_1 \times B_1) \subset (A_2 \times B_2) \Rightarrow A_1 \subset A_2 \text{ et } B_1 \subset B_2.$$

On sait que

$$A_2 \backslash A_1 = \bigcup_{i=1}^{n} A_i' \text{ avec } A_i' \; \in \mathcal{A},\ i = 1, \cdots, n \text{ et } A_i' \cap A_j' = \varnothing \text{ pour } i \neq j$$

et

$$B_2 \backslash B_1 = \bigcup_{i=1}^{m} B_i' \text{ avec } B_i' \; \in \mathcal{A},\ i = 1, \cdots, m \text{ et } B_i' \cap B_j' = \varnothing \text{ pour } i \neq j,$$

par conséquent on peut écrire

$$\begin{aligned}
C_2 \backslash C_2 &= (A_2 \times B_2) \setminus (A_1 \times B_1) \\
&= [A_2 \times (B_2 \backslash B_1)] \cup [(A_2 \backslash A_1) \times B_2] \\
&= \left[A_2 \times \left(\bigcup_{i=1}^{m} B_i' \right) \right] \cup \left[\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i' \right) \times B_2 \right] \\
&= \left[\bigcup_{i=1}^{m} (A_2 \times B_i') \right] \cup \left[\bigcup_{i=1}^{n} (A_i' \times B_2) \right],
\end{aligned}$$

qui est une réunion finie de parties deux à deux disjointes de $\mathcal{F}$.

D'où le résulat voulu. ■

Définition 1.5.4. *Soient $\sigma(\mathcal{A})$ la tribu engendrée par le semi - anneau booléen $\mathcal{A}$ de E et $\sigma(\mathcal{B})$ la tribu engendrée par le semi - anneau booléen $\mathcal{B}$ de F. La tribu engendrée par le semi - anneau $\{A \times B$ telle que $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}\}$ de parties de $E \times F$ s'appelle "**tribu produit**" de $\mathcal{A}$ par $\mathcal{B}$ et sera notée $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.*

Corollaire 1.5.5. *Sur $\mathbb{R}^k$, nous obtenons facilement la tribu produit grace à la famille*

$$\mathcal{S}_k = \left\{ \prod_{i=1}^{k}]a_i, b_i] \quad \textit{telle que} \quad a_i \leq b_i \in \mathbb{R} \right\}$$

qui est un semi - anneau bololéen de parties de $\mathbb{R}^k$.

La tribu borélienne de $\mathbb{R}^k$, par définition, est celle engendré par le semi -anneau $\mathcal{S}_k$. On écrit dans ce cas $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^k\right) = \sigma\left(\mathcal{S}_k\right)$.

Définition 1.5.6. *Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $A \subset E$ non vide. La famille $\mathcal{C} = \{A \cap B$ tedlle que $B \in \mathcal{A}\}$ est une tribu sur A, appelée "**tribu trace**" de $\mathcal{A}$ sur A.*

1.6. Tribu image et image réciproque.

Soit $f : E_1 \to E_2$ une fonction.

Proposition 1.6.1. (a) *Soit $\mathcal{A}_2$ une tribu sur E_2, alors la famille*

$$f^{-1}[\mathcal{A}_2] = \left\{ f^{-1}(Y) \; ; \quad Y \in \mathcal{A}_2 \right\}$$

*est une tribu sur E_1, appelée "**tribu image réciproque**" de $\mathcal{A}_2$ par f.*

(b) *Soit $\mathcal{A}_1$ une tribu sur E_1, alors la famille-*

$$\mathcal{B} = \left\{ Y \subseteq E_2 \quad ; \quad f^{-1}(Y) \in \mathcal{A}_1 \right\}$$

*est une tribu sur E_2 dite "**tribu image**" de $\mathcal{A}_1$ par f.*

Théorème 1.6.2. (***Lemme de transport***) *Soit $\mathcal{E}$ une famille de pafties de E_2, alors on a*

$$\sigma\left(f^{-1}(\mathcal{E})\right) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})).$$

1.7. Mesures

1.7.1. Définitions et propriétés.

Définition 1.7.1. *Une "**mesure (positive)**" sur l'ensemble mesurable $(E, \mathcal{A})$ est une application $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty] = \overline{\mathbb{R}}^+$ qui:*

A_n (i) associe la valeur 0 à l'ensemble vide, i. e. $\mu(\varnothing) = 0$.

(ii) *est* $\sigma-$***additive****, i. e. pour toute suite* $\{A_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{A}$ *deux à deux disjoints on a*

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 0} A_n\right) = \sum_{n\geq 0} \mu\left(A_n\right).$$

On dit que $(E, \mathcal{A}, \mu)$ *est un "****espace mesuré****" et pour tout* $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A)$ *est dite "****mesure****" de* A *qui est applée "****partie mesurable****" de* E.

Remarque 1.7.2. - *Si* $\mu(E) < +\infty$*, on dit que* μ *est une* ***mesure bornée.***

- *Si* $\mu(E) = 1$*, on dit que* μ *est une* ***mesure de probabilité.***

- *S'il existe une suite* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ *telle que* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = E$ *et* $\mu(A_n) < +\infty$*, pour tout entier* n*, on dit que* μ *est une mesure* $\boldsymbol{\sigma}-$*finie.*

- *Si* $\mu(\varnothing) = 0$ *et* $\mu(A) = +\infty$*, pour tout* $A \in \mathcal{A}\backslash\{\varnothing\}$ *, on dit que cette mesure est* ***identiquement égale*** *à* $+\infty$.

Dans la suite, nous supposons que la mesure est non - identiquement égale à $+\infty$.

Exemples:
1- **Mesure de Dirac** en un point.
Soient $(E, \mathcal{A})$ un ensemble mesurable avec $E \neq \varnothing$ et $x \in E$. On définit la mesure de Dirac en x $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ par

$$\mu(A) = \mathbf{1}_{A_n}(x) = \begin{cases} 1 & : x \in A \\ 0 & : x \notin A \end{cases}, \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{A}.$$

On note souvent $\mu = \delta_x$.

1- **Mesure de comptage.**
Sur $(E, \mathcal{P}(E))$ on définie la mesure de comptage $\mu : \mathcal{P}(E) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ par

$$m(A) = \begin{cases} CardA & : \text{si } A \text{ est fini} \\ +\infty & : \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette mesure est généralement utilisée sur des ensemble discrets.

Théorème 1.7.3. *Une mesure μ sur l'espace $(E, \mathcal{A})$ vérifie pour tout A et $B \in \mathcal{A}$*
(a) *Si $A \cap B = \varnothing$, alors $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.*
(b) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$ (***additivité forte***)
(c) $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ (***sous - additivité***).
(d) *Si $A \subseteq B$, alors $\mu(A) \leq \mu(B)$.*

Remarque 1.7.4. *Nous prenons garde de ne pas écrire (ii) sous la fome $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$, qui pourrait être une forme indéterminée, si $\mu(A \cap B) = +\infty$.*

Théorème 1.7.5. *Soit μ une mesure sur l'espace mesurable $(E, \mathcal{A})$.*
1) *Si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ est une suite croissante, alors on a*

$$\lim_{n \to +\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\lim_{n \to +\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right).$$

C'est la continuité monotone croissante.
2) *Si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ est une suite décroissante telle que $\mu(A_0) < +\infty$, alors on a*

$$\lim_{n \to +\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\lim_{n \to +\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right).$$

C'est la continuité décroissante.
Démonstration. 1) *Posons $B_0 = A_0$ et $B_{n+1} = A_{n+1}/A_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $A_n \subset A_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les B_n sont des parties de E deux à deux disjointes, ce qui nous permet d'écrire*

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n \geq 0} \mu(B_n) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \mu(B_k).$$

En plus on a: $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ *et* $A_n = \bigcup_{k=0}^{n} B_k$, *alors*

$$\sum_{k=0}^{n} \mu(B_k) = \mu\left(\bigcup_{k=0}^{n} B_k\right) = \mu(A_n).$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty}\mu\left(A_n\right)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\mu\left(B_k\right)=\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}B_n\right)=\mu\left(\lim_{n\to+\infty}A_n\right).$$

2) *Posons maintenant* $B_n=A_0\diagdown A_n$, *pour tout* $n\in\mathbb{N}$. *Comme* $A_{n+1}\subset A_n$, *on a* $B_n\subset B_{n+1}$, *pour tout* $n\in\mathbb{N}$. *Donc d'aprés* (1) *on a :*

$$\lim_{n\to+\infty}\mu\left(B_n\right)=\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}B_n\right). \tag{$*$}$$

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}B_n=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(A_0\diagdown A_n\right)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(A_0\cap A_n^C\right)=A_0\cap\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n^C\right)=A_0\diagdown\bigcap_{n\geq 0}A_n.$$

On a $\mu\left(A_0\right)<+\infty$ *et* $B_n=A_0\diagdown A_n\subset A_0$, *pour tout* $n\in\mathbb{N}$, *alors*

$$\mu\left(B_n\right)<+\infty\ \text{ et }\ \mu\left(A_n\right)<+\infty,\ \text{ pour tout }\ n\in\mathbb{N}.$$

Donc

$$\mu\left(A_0\right)=\mu\left(A_n\cup B_n\right)=\mu\left(A_n\right)+\mu\left(B_n\right),$$

car $A_n\cap A_n=\varnothing$. *D'où*

$$\mu\left(B_n\right)=\mu\left(A_0\right)-\mu\left(A_n\right),\ \text{pour tout } n\geq 0.$$

De même on a

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}B_n\right)=\mu\left(A_0\right)-\mu\left(\bigcap_{n\geq 0}A_n\right).$$

Par conséquent $(*)$ *devient*

$$\lim_{n\to+\infty}\mu\left(A_n\right)=\mu\left(\lim_{n\to+\infty}A_n\right)=\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n\right).$$

■

Théorème 1.7.6. *Une fonction* $\mu:\mathcal{A}\to\overline{\mathbb{R}}_+$, *non identiquement égale à* $+\infty$ *et additive est une mesure si et seulement si elle vérifie la propriété de continuité monotone croissante.*

Démonstration. $(\Rightarrow)$

Si μ est une mesure, alors elle vérifie la continuité monotone croissante (voir le théorème précédent)

$(\Leftarrow)$

Soit $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction additive vérifiant la continuité monotone croissante.

$(*)$ μ est non identiquement égale à $+\infty$, alors il existe $A \in \mathcal{A}$ telle que $\mu(A) < +\infty$.

D'autre part on a:

$$A = A \cup \varnothing \ \text{ et } \ A \cap \varnothing = \varnothing,$$

d'où

$$\mu(A) = \mu(A \cup \varnothing) = \mu(A) + \mu(\varnothing) \Rightarrow \mu(\varnothing) = 0.$$

$(*)$ Soit $\{A_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{A}$ vérifiant $A_i \cap A_j = \varnothing$, pour $i \neq j$. Posons $B_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$, alors $\{B_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{A}$ est croissante. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(B_n) = \mu\left(\lim_{n\to+\infty} B_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right).$$

D'autre part, on a: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, alors $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$ et

$$\mu(B_n) = \mu\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \mu(A_k). \quad \text{(car } \mu \text{ est additive)}$$

D'où

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \mu(A_k) = \sum_{n\geq 0} \mu(A_n).$$

Par conséquent μ est une mesure sur E. ■

Définition 1.7.7. *Une mesure μ est dite* ***"mesure de Borel"*** *si E est un espace topologique localement compart séparable et $\mathcal{A} = \mathcal{B}(E)$, avec $\mu(K) < +\infty$ pour tout compact K de E.*

Remarque 1.7.8. *Soit μ une mesure de Borel, alors elle est $\sigma-$finie. En effet, E est localement compactet séparable, alors $E = \bigcup_{n\geq 0} E_n$ où les E_n sont tous des compacts, ce qui nous permet d'écrire que $\mu(E_n) < +\infty$, pour tout n.*

1.7.2. Mesures extérieures – Mesures complètes.

Définition 1.7.9. *On appelle* **"mesure extérieure"** *toute fonction* $\mu^* : \mathcal{P}(E) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *telle que:*
(i) $\mu^*(\varnothing) = 0.$
(ii) μ^* *est croissante; i. e. si* $A \subset B$, *alors* $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.
(ii) μ^* *est* $\sigma-$*additive, i. e. si* $\{A_n\}_n \subset \mathcal{P}(E)$ *alors* $\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n)$.

On associe à une mesure extérieure une notion de mesurabilité.

Définition 1.7.10. ($\boldsymbol{\mu^*}$ **– mesurabilité**) *Un esemble* X *est dit* **"**$\boldsymbol{\mu^*}$**– mesurable"** *si pour tout sous ensemnle* A *de* E *on a:*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap X) + \mu^*\left(A \cap X^C\right),$$

i. e. X *est* μ^*- *mesuirable si toute partie de* E *se décompose additivement relativement à* μ^*. *On note* $\mathcal{S}_{\mu^*}$ *la famille des parties* μ^* *mesurable.*

Proposition 1.7.11. *Soient* X *et* $Y \in \mathcal{S}_{\mu^*}$ *et* $A \subset E$.
$1-$ *On a*

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \mu^*(A \cap X \cap Y) + \mu^*\left(A \cap X \cap Y^C\right) + \mu^*\left(A \cap X^C \cap Y\right) \\ &\quad + \mu^*\left(A \cap X^C \cap Y^C\right). \end{aligned}$$

$2-$ *Si* X *et* Y *sont disjoints, alors*

$$\mu^*(A \cap (X \cup Y)) = \mu^*(A \cap X) + \mu^*(A \cap Y).$$

Théorème 1.7.12. *Soit* μ^* *est mesure extérieure, alors:*
$1-$ *La famille* $\mathcal{S}_{\mu^*}$ *est une* $\sigma-$ *algèbre.*
$2-$ *Soit* $\{A_i\}_{i\geq 1}$ *une famille d'ensembles deux à deux disjoints de* $\mathcal{S}_{\mu^*}$ *et où* $A = \bigcup_{i\geq 1} A$, *alors*

$$\mu^*(A) = \sum_{i\geq 1} \mu^*(A_i).$$

Ainsi la restriction $\mu = \mu^*|_{\mathcal{S}_{\mu^*}}$ *de* μ^* *à* $\mathcal{S}_{\mu^*}$ *est une mesure.*

Définition 1.7.13. *Soient* $(E, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré et* $A \in \mathcal{A}$, *telle que* $\mu(A) = 0$, *si pour tout* $F \subset A$ *on a* $F \in \mathcal{A}$ *(i.e.* $\mu(F) = 0)$, *on dit que* μ *est une "**mesure complète**".*

Remarque 1.7.14. *Soit* $A \in \mathcal{A}$, *telle que* $\mu(A) = 0$. *Dans le cas où il existe au moins* $F \subset A$ *telle que* $F \notin \mathcal{A}$, *on complète* μ *par prolongement sur une tribu plus grande notée* $\overline{\mathcal{A}}$ *vérifiant: si* $\mu(B) = 0$ *pour* $B \in \overline{\mathcal{A}}$, *alors on doit avoir nécessairement pour tout* $C \subset B$; $C \in \overline{\mathcal{A}}$ *(i. e.* $\mu(D) = 0)$. *On dit alors que* $\mathcal{A}$ *est complété par* $\overline{\mathcal{A}}$ *et que la mesure* μ *est complété sur* $\overline{\mathcal{A}}$.

Proposition 1.7.15. *Soit* $(E, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré. En notant* $\mathcal{N}$ *la classe des parties "*$\mu-$ ***négligeables****" i. e.*

$$\mathcal{N} = \{N \subset E \text{ telle que } \exists A \in \mathcal{A} \text{ vérifiant } N \subset A \text{ et } \mu(A) = 0\},$$

on obtient

$$\begin{aligned}\sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N}) &= \mathcal{A}_\mu \\ &= \{A \subset E \text{ telle que } \exists (A_1, A_2) \in \mathcal{A}^2 \text{ vérifiant } A_1 \subset A \subset A_2 \text{ et } \mu(A_2 \setminus A_1) = 0\}.\end{aligned}$$

Théorème 1.7.16. *On définit* $\overline{\mu}$ *sur* $\mathcal{A}_\mu$ *par* $\overline{\mu}(A) = \mu(A_1) = \mu(A_2)$, *si* $A_1 \subset A \subset A_2$ *et* $\mu(A_2 \setminus A_1) = 0$. *La fonction* $\overline{\mu}$, *est bien définie et il s'agit de la seule mesure qui prolonge* μ *sur* $\mathcal{A}_\mu$.

1.8. Mesure de Lebesgue sur la $\sigma-$algèbre de Borel.

Théorème 1.8.1. (***d'extension ou de prolongement de Carathéodorie***) *Soient* $(E, \mathcal{A})$ *un espace mesurable et* $\mathfrak{S}$ *un semi–anneau booléen de parties de* E *engendrant* $\mathcal{A}$. *Soit* μ *une applications* $\mu : \mathfrak{S} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *vérifiant:*
1) $\mu(\varnothing) = 0$.
2) *Il existe une famille finie ou dénombrable* $\{A_n\}_{n\in I} \subset \mathfrak{S}$ *telle que* $E \subset \bigcup_{n\in I} A_n$
3) *Pour toute famille finie ou dénombrable* $\{S_n\}_n$ *d'éléments de* $\mathfrak{S}$, *deux à deux disjoints, si* $\bigcup_n S_n \subset \mathfrak{S}$, *alors* $\mu\left(\bigcup_n S_n\right) = \sum_n \mu(S_n)$.
Donc il existe une <u>*unique*</u> *mesure* $\widetilde{\mu}$, $\sigma-$*finie sur* $\mathcal{A}$, *telle que*

$$\forall\, S \in \mathfrak{S} \;\; \widetilde{\mu}(S) = \mu(S).$$

Remarque 1.8.2. *Ce théorème trés puissant et capitale nous dit, qu'en pratique, pour définir complètement une mesure μ sur une $\sigma-$ algèbre $\mathcal{A}$, il suffit dela définir sur un semi–anneau engendrant $\mathcal{A}$ et recouvrant E.*

Ce théorème esr attribué au mathématiciens grec ***Constantin Carathéodory.*** *Sa démonstration reste longue et complexe.*

Définition 1.8.3. *Définissons l'application μ sur $\mathcal{I}_1 = \{]a,b] \text{ telle que } a \leq b \in \mathbb{R}\}$ la famille de parties de $\mathbb{R}$, par*

$$\begin{array}{rll} \mu: & \mathcal{I}_1 & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ &]a,b] & \mapsto \mu\left(]a,b]\right) = b - a \end{array}$$

(longueur de l'intervalle). La ***"mesure de Lebesgue"****, notée λ, sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{I}_1)$ est la seule mesure ($\sigma-$finie) qui prolonge μ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

Remarque 1.8.4. *Nous pouvons de même construire les mesures de Lebesgue sur $\left(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^k\right)\right)$; $k \geq 2$, qui généralisent les notions d'aires, de volumes,. . .etc. Plus généralement, pour toute fonction croissante continue à droite $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, on définie la mesure de* ***"Borel − Stieljes"*** *en prenant l'application*

$$\begin{array}{rll} \mu: & \mathcal{I}_1 & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ &]a,b] & \mapsto \mu\left(]a,b]\right) = \alpha(b) - \alpha(a). \end{array}$$

Proposition 1.8.5. *Soit μ une mesue sur $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^k\right)$; $k \geq 1$, vérifiant les propriétés suivantes*
(i) ***Invariance par translation:*** *Pour tout $A \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^k\right)$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^k$ on a $\mu(x + A) = \mu(A)$.*
(ii) ***Normalisation*** *$\mu\left([0,1]^k\right) = 1$, pour tout $k \geq 1$.*
Alors μ est la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^k\right)$.