Département de Mathématiques
Maste1, Proba-States, Actuariat et Contrôle Optimal

Série 3 d'Analyse Numérique Matricielle

Exercice1: Soit n 1 un entier. On considère la matrice carrée tridiagonale $A = D - L - U$ avec

$$D = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & b_2 & ... & ... \\ ... & ... & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & b_n \end{pmatrix}, L = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ a_1 & 0 & ... & ... \\ ... & & ... & 0 \\ 0 & ... & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}, U = -\begin{pmatrix} 0 & c_1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & ... \\ ... & ... & ... & c_{n-1} \\ 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1- En utilisant le fait que pour tout réel $\alpha \neq 0$, on a $\det(A) = \det(D - \alpha L - \frac{1}{\alpha}U)$,démontrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $\omega \in \mathbb{R}^*$ on a

$$D_{L_\omega}(\lambda^2) = \lambda^n \omega^n D_{L_\omega}(\frac{\lambda^2 + \omega - 1}{\lambda\omega})$$

2- En déduire que $\rho(\mathcal{L}_1) = \rho(J)^2$

3- Interpréter en terme de convergence des méthodes de Jacobi et celle de Gauss-Seidel.

4- comparer ces deux méthodes.

Exercice 2:

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. Si $\omega > 0$, on considère la méthode itérative suivante:

$$\begin{cases} x_0 \ \in \mathbb{R}^n \quad \text{quelconque} \\ x_{n+1} = x_n - \omega(Ax_n - b) \end{cases}$$

A quelle condition (nécessaire) sur ω la méthode converge-t-elle ?

Exercice 3:

Soit B la matrice carrée d'ordre n

$$B = \begin{bmatrix} 0 & F \\ F^T & 0 \end{bmatrix}$$

où F est une matrice à k lignes et $n - k$ colonnes.

On considère le système $x = Bx + b$

1- Ecrire la matrice J de la méthode de Jacobi et la matrice $\mathcal{L}_1$ de la méthode de Gauss-Seidel .

2- Que peut-on dire de $\rho(J)$ et $\rho(\mathcal{L}_1)$?

Exercice 4 :

1- Ecrire la méthode de Jacobi, de Gauss-seidel et de Relaxation pour le système linéaire Ax =b, où b est un vecteur donné et

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(on calculera les trois matrices J , $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_\omega$).

2. Calculer les rayons spectraux des matrices J , $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_\omega$

3. Ces trois méthodes sont-elles convergentes ? Comparer la vitesse de leur convergence dans le cas d'une réponse affirmative.

4. Existe-il une valeur de ω pour laquelle la convergence de $\mathcal{L}_\omega$ est optimale? Si oui, laquelle ?

Exercice 5 :

Démontrer que si A est une matrice à diagonale strictement dominante, alors la méthode de Jacobi converge.