Université Mohamed Khider Biskra
Département de Mathématiques
Master 2

2021/2022
Simulation et M.N
T.P

TP 4

Résolution numérique des EDPs
Schéma implicite

On considère le problème suivant

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t), \quad x \in]0,2[\ ,\ t \in]0,1[$$

Où $f(x,t) = exp(x)$ et avec conditions aux bords

$$u(x,0) = (x-2)\sin(\pi x)\cos(\pi x) \quad \forall x \in [0,2]$$
$$u(0,t) = u(2,t) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

Nous allons écrire un programme qui donne une solution numérique de ce problème par un schéma implicite. Nous utiliserons les approximations suivantes

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t_j) \simeq \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{k}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_j) \simeq \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2}$$

Le problème s'écrira alors

$$\frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{k} - \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2} = f(x_i,t_j)\ , \quad \forall i \in \{1,\dots N\} \quad , \forall j \in \{1,\dots M+1\}$$

Vectoriellement

$$\frac{U^{(j)} - U^{(j-1)}}{k} + A_h U^{(j)} = C^{(j)} \quad \forall j \in \{1,\dots M+1\}$$

où : $U^{(j)} = \begin{bmatrix} u_1^j \\ u_2^j \\ . \\ . \\ u_N^j \end{bmatrix}, C^{(j)} = \begin{bmatrix} f(x_1,t_j) \\ f(x_2,t_j) \\ . \\ . \\ f(x_N,t_j) \end{bmatrix}$, et $A_h = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0... & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0... & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0.. & 0 & ..0 & -1 & 2 & -1 \\ 0.. & 0 & .. & . & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$\forall j \in \{0,\dots M+1\}$

Ce qui donne

$$U^{(j)} = (Id + kA_h)^{-1}U^{(j-1)} + k(Id + kA_h)^{-1}C^{(j)}$$

ou encore

$$U^{(j)} = (Id + kA_h)^{-1}(U^{(j-1)} + C^{(j)})$$

Implémentation

```
%paramètres
L=2;
T=1;
M=50;
N=50;
h=L/N;
k=T/M;
%les matrices
Ah=toeplitz([ 2  -1  zeros(1,N-2)])  ;
Ahh=(1/h^2)*Ah;
D=eye(N,N)+k*Ahh;
x=zeros(N,1);
u1=zeros(N,1);
%les fonctions
f=@(x) exp(x);
g=@(x) (x-2).*sin(pi.*x)*cos(pi.*x);
for i=1:N
    x(i)=i*h
    u1(i)=feval(g,x(i));
    C=feval(f,x(i));
end
%résolution
for j= 1:M+1
    u=inv(D)*(k*C+u1);
    u1=u
X=[0;x;2];
U=[0;u1;0];
plot(X,U), hold on
end
```