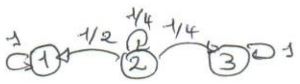
Université M'Hamed Bougara-Boumerdès
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire : 2021 - 2022
Matière : IPA
3LM / Proba-Stat

Correction de l'examen.

Exercice 1

I/ 1- Graphe :  0,5

On a 3 classes : $\{1\}$ et $\{3\}$ classes récurrentes et absorbantes
$\{2\}$ classe transitoire 0,75

2- période : $d(i) = \text{pgcd}\{n \geq 1 ;\ P_{ii}^{n} > 0\}$

$P_{11} > 0$, $P_{11}^{(2)} > 0$, $P_{11}^{(3)} > 0$ .... Donc $d(1) = \text{pgcd}\{1, 2, \dots\} = 1$.

$P_{22} > 0$, $P_{22}^{(2)} > 0$, $P_{22}^{(3)} > 0$ .... Donc $d(2) = 1$. 1

$P_{33} > 0$, $P_{33}^{(2)} > 0$, $P_{33}^{(2)} > 0$, ... Donc $d(3) = 1$.

3- Les temps d'absorption t_i sont $t_i = 1 + \sum_{k \in E'} P_{ik} t_k$, $E' = \{2\}$, $i = 2$.
Le temps moyen pour que partant de 2 la chaîne soit absorbée est

$t_2 = 1 + P_{22} t_2 = 1 + \frac{1}{4} t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{4}{3}$ 0,75

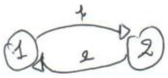
4- Les probabilités d'absorption sont

$b_{ij} = P_{ij} + \sum_{k \in E'} P_{ik} b_{kj}$, $E' = \{2\}$, $i = 2$, $j = 1, 3$.

$b_{21} = P_{21} + P_{22} b_{21}$ $\Rightarrow$ $b_{21} = 1/2 + 1/4\, b_{21}$ $\Rightarrow$ $b_{21} = 2/3$ 1

$b_{23} = P_{23} + P_{22} b_{23}$ $\Rightarrow$ $b_{23} = 1/4 + 1/4\, b_{23}$ $\Rightarrow$ $b_{23} = 1/3$

L'état dans lequel la chaîne a le plus de chance d'être absorbée est 1. Car $b_{21} > b_{23}$. 0,5

II. Graphe :  0,5

La matrice de transition de l'instant 0 à l'instant t est

$P(t) = e^{At} = U e^{Dt} U^{-1}$ 0,5

Les valeurs propres sont obtenues en solutionnant l'équation caractéristique

$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 2 & -2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda + 3) = 0$ 1

Les valeurs propres sont donc 0 et -3.

les vecteurs propres associés à ces valeurs propres sont obtenus en solutionnant l'équation : $(A - \lambda_i I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $i = 1, 2$.

pour $\lambda_1 = 0$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 0,25

Pour $\lambda_2 = -3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ 0,25

On définit donc $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ 0,25, on trouve alors

$Com\,U = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, ${}^t Com\,U = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $U^{-1} = \frac{1}{\det U}\, {}^t Com\,U = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$

0,75

Finalement, on obtient

$$P(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{0} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2/3 + 1/3\, e^{-3t} & 1/3 - 1/3\, e^{-3t} \\ 2/3 - 2/3\, e^{-3t} & 1/3 + 2/3\, e^{-3t} \end{pmatrix}$$ 1

Exercice 2.

1- $P(X> n+m \mid X>n) = \dfrac{P(X>n+m,\ X>n)}{P(X>n)} = \dfrac{P(X>n+m)}{P(X>n)} = \dfrac{(1-p)^{n+m}}{(1-p)^{n}}$ 1

$$= (1-p)^{m} = P(X>m)$$

2- La loi marginale de X est:

$f_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_{x}^{+\infty} 2\, e^{-(x+y)}\,dy = 2e^{-x}\int_{x}^{+\infty} e^{-y}\,dy$ 1

$= 2e^{-x}\left[-e^{-y}\right]_{x}^{+\infty} = 2e^{-2x}$ si $x \geq 0$ et 0 ailleurs.

3- La densité conditionnelle de Y sachant $X=x$ est.

$f(y|x) = \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)} = e^{-y+x}$ si $0 \leq x \leq y$ et 0 ailleurs. 0,5

L'espérance conditionnelle de Y sachant $X=x$ est

$E[Y/X=x] = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} y\, f(y|x)\,dy = \int_{x}^{+\infty} y\, e^{-y+x}\,dy = e^{x}\int_{x}^{+\infty} y e^{-y}\,dy$ 1,5

En faisant une intégration par partie, on obtient

$E[Y/X=x] = e^{x}\left(x e^{-x} + e^{-x}\right) = x+1.$

On en déduit finalement que $E[Y/X] = X+1$ 0,5

Exercice 3.

1- Notation de Kendall : $M|M|1|\infty$ 0,75

2- $\lambda = 3/h$, $1/\mu = 15mn = 1/4\,h$ soit $\mu = 4/h$. La condition de stabilité est $\lambda/\mu < 1$ 0,75

3/
$$P(N(1/4)=1 / N(1/2)=2) = \frac{P(N(1/4)=1,\ N(1/2)=2)}{P(N(1/2)=2)}$$
$$= \frac{P(N(1/4)=1,\ N(1/2)-N(1/4)=1)}{P(N(1/2)=2)}$$
$$= \frac{P(N(1/4)=1)\,P(N(1/2)-N(1/4)=1)}{P(N(1/2)=2)}$$
2,25
$$= \frac{P(N(1/4)=1)\,P(N(1/4)=1)}{P(N(1/2)=2)}$$
$$= \frac{e^{-3/4}\,3/4 \times e^{-3/4}\cdot 3/4}{e^{-3/2}\,\frac{(3/2)^2}{2!}} = \frac{1}{2}.$$

4/ Un patient qui arrive est immédiatement traité s'il y a aucun patient dans le système. $P(X=0) = \pi_0 = 1 - \lambda/\mu = 1 - 3/4 = 1/4$. 1,5

5/ Si la salle d'attente ne contient qu'un seul patient alors le nombre de patients dans le cabinet est soit 0, 1 ou 2.

La matrice generatrice est $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 4 & -7 & 3 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ 1,25

Son graphe est :
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "3"] & 1 \arrow[l, bend left, "4"] \arrow[r, bend left, "3"] & 2 \arrow[l, bend left, "4"] \end{tikzcd}$$