**Formule d'Intégration par partie**

**Présenté par : M. HAMMAD**

### 1.0.1 Formule d'intégration par parties pour les processus d'Itô

Nous allons maintenant nous introduire une propriété généralisant "la formule d'intégration par partie" dans le cas des processus d'Itô.

**Proposition 1.0.1.**
*Soient $Y_t$ et $Z_t$ deux processus d'Itô,*

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s \text{ et } Z_t = Z_0 + \int_0^t K_s^{'} ds + \int_0^t H_s^{'} dB_s.$$

*Alors :*

$$Y_t Z_t = Y_0 Z_0 + \int_0^t Y_s dZ_s + \int_0^t Z_s dY_s + \langle Y, Z\rangle_t$$

*avec la convention :*

$$\langle Y, Z\rangle_t = \int_0^t H_s H_s^{'} ds.$$

**Démonstration 1.0.1.**
*On a d'après la formule d'Itô :*

$$\begin{aligned}
(Y_t + Z_t)^2 &= (Y_0 + Z_0)^2 + 2\int_0^t (Y_s + Z_s) d(Y_s + Z_s) + \int_0^t (H_s + H_s^{'})^2 ds \\
Y_t^2 &= Y_0^2 + 2\int_0^t Y_s dY_s + \int_0^t H_s^2 ds \\
Z_t^2 &= Z_0^2 + 2\int_0^t Z_s dZ_s + \int_0^t H_s^{'2} ds.
\end{aligned}$$

*en faisant la différence entre la première ligne et les deux suivantes :*

$$Y_t Z_t = Y_0 Z_0 + \int_0^t Y_s dZ_s + \int_0^t Z_s dY_s + \int_0^t H_s H_s^{'} ds.$$

### 1.0.2 Le processus d'Ornstein-Ulhenbeck

On considère l'équation : $\begin{cases} \mathrm{d}\mathrm{Y}_t = -cY_t dt + \sigma dB_t \\ \mathrm{Y}_0 = y_0 \end{cases}$
où, $y_0, c$ et $\sigma$ sont des constantes réelles.

Le processus d'Ornstein-Ulhenbeck est l'unique solution de cette équation, on peut l'expliciter. En effet, posont $Z_t = Y_t e^{ct}$ et écrivons la formule d'intégration par partie :

$$dZ_t = e^{ct} dY_t + Y_t d(e^{ct}) + \langle Y, e^c \rangle_t.$$

Mais

$$\langle Y, e^c \rangle_t = 0 \text{ car } d(e^{ct}) = ce^{ct} dt \ i.e. \ K_t{}' = ce^{ct} \text{ et } H_t^{'} = 0.$$

On en déduit que :

$$dZ_t = \sigma e^{ct} dB_t \ i.e. \ Z_t = Z_0 + \sigma \int_0^t e^{cs} dB_s,$$

puis que :

$$Y_t = Y_0 e^{-ct} + \sigma e^{-ct} \int_0^t e^{cs} dB_s.$$

On peut calculer la moyenne et la variance de $Y_t$ :

$$\mathbb{E}(Y_t) = Y_0 e^{-ct} + \sigma e^{-ct} \mathbb{E}\left( \int_0^t e^{cs} dB_s \right) = Y_0 e^{-ct}.$$

(en effet $\mathbb{E}\left( \int_0^t (e^{cs})^2 ds \right) < +\infty$, et donc $\int_0^t e^{cs} dB_s$ est une martingale nulle à l'instant 0 donc de moyenne nulle). De même :

$$\begin{aligned} Var(Y_t) &= \mathbb{E}\left( (Y_t - \mathbb{E}(Y_t))^2 \right) \\ &= \mathbb{E}\left( \left( \sigma e^{-ct} \int_0^t e^{cs} dB_s \right)^2 \right) \\ &= \sigma^2 e^{-2ct} \mathbb{E}\left( \int_0^t e^{2cs} ds \right) \\ &= \sigma^2 \frac{1 - e^{-2ct}}{2c}. \end{aligned}$$