Notions sur les files d'attente

1-1 Introduction

Les files d'attente peuvent être considérées comme un phénomène caractéristique de la vie contemporaine . On les rencontre dans les domaines d'activité les plus divers (guichet de poste , trafic routier , central téléphonique , atelier de réparation…).
L'étude mathématique des phénomènes d'attente constitue un champ d'application important des processus aléatoires.
On parle de phénomène d'attente chaque fois que certains unités appelées « clients » se présentent d'une manière aléatoire à des « stations » afin de recevoir un service dont la durée est généralement aléatoire.

1-2 Système d'attente

Une file d'attente est un système d'attente constitué d'un ou plusieurs serveurs et d'un espace d'attente. Les clients arrivent de l'extérieur patientent éventuellement dans la file d'attente, reçoivent un service, puis quitte le système d'attente.
La théorie des systèmes d'attente a pour objectif d'étudier la structure et de calculer des valeurs caractéristiques permettant de décrire les performances d'un tel système.

1-3 Classification d'un système d'attente

Pour spécifier complètement un système d'attente, on doit caractériser le processus d'arrivée des clients, le temps de service ainsi que la structure et la discipline de service de la file d'attente.

1-3-1 Processus d'arrivées

La nature stochastique du processus des arrivées (ou flux d'entrée) est défini par la distribution des intervalles séparant deux arrivées successives.
La plupart du temps l'arrivée des clients à un système d'attente est supposée décrite par un processus de Poisson.
On note λ le taux des arrivées : $\frac{1}{\lambda}$ est l'intervalle moyen entre deux arrivées consécutives.

1-3-2 Temps de service

Le temps de service est le temps séparant le début et la fin du service . Un instant de départ correspond toujours à une fin de service, Mais ne correspond pas forcément à un début de service. Il se peut qu'un client qui quitte le système laisse celle-ci vide. Le serveur est alors inoccupé jusqu'à l'arrivée du prochain client.

On note μ le taux de service : $\frac{1}{\mu}$ est la durée moyenne de service.

Dans le cas particulier des distributions exponentielles les taux λ et μ sont identiques aux paramètres de ces distributions.

1-3-3 Nombre de serveurs

Un système d'attente peut disposer d'un ou plusieurs serveurs S . La plupart du temps, les serveurs sont supposés identiques (ont la même distribution) et indépendants les uns des autres.

1-3-4 Capacité du système

La capacité du système K peut être finie ou infinie. Si la capacité est limitée ($K < \infty$), la file d'attente ne peut dépasser une longueur de K-S unités. Dans ce cas, certains clients qui arrivent vers le système n'ont pas la possibilité d'y entrer.
On suppose que toutes les variables aléatoires introduites pour décrire un phénomène d'attente sont indépendantes.

1-3-5 Discipline du système

La discipline de service détermine l'ordre dans lequel les clients sont rangés dans la file et y sont retirés pour recevoir un service. Les disciplines les plus courantes sont :

- FIFO : (first in first out) premier arrivé premier servi,
- LIFO :(last in first out) dernier arrivé premier servi ,
- Random (aléatoire) le client est choisi aléatoirement..

1-4 Notations de Kendall

Pour la classification des systèmes d'attente , on utilise une notation symbolique comprenant quatre symboles dans l'ordre suivant Y / B /S /K
Où ,
Y : distribution du temps entre deux arrivées successives ,
B : distribution des temps de service,
S : le nombre de postes de service montée en parallèle,
K : la capacité du système

Les distributions Y et B sont spécifiées par la convention suivante :

M : distribution qui vérifie la propriété de Markov , processus de Poisson pour les arrivées et loi exponentielle pour les temps de service.
E_k : distribution d'Erlang .
G : distribution générale (on ne sait rien sur ses caractéristiques)

D : cas déterministe (la variable ne prend qu'une seule valeur admise).

Par exemple, M/D/1/4 signifie que le processus d'arrivée des clients est un processus de Poisson, la durée de service est constante . il y a un serveur et la capacité du système est limitée égale à 4 . La longueur de la file d'attente vaut 4-1= 3. Si on ne spécifie pas le dernier paramètre celui-ci est infini.

1-5 Analyse mathématique

L'étude mathématique d'un système se fait par l'introduction d'un processus stochastique défini de façon appropriée. On s'intéresse au nombre $X(t)$ de clients se trouvant dans le système à l'instant t $(t \geq 0)$. En fonction des quantités qui définissent la structure du système, on calcule :

- les probabilités d'état $p_n(t) = P(X(t) = n)$ qui définissent le régime transitoire du processus stochastique $(X(t))_{t\geq 0}$,
- Le régime stationnaire du processus stochastique, défini par $p_n = \lim_{t\to\infty} p_n(t)$, $n \geq 0$

A partir de la distribution stationnaire du processus $(X(t))_{t\geq 0}$, on pourra obtenir d'autres caractéristiques du système d'attente telles que :

- Le nombre moyen de clients dans le système (file d'attente + service) : $L = E(X)$
- Le nombre moyen de clients dans la file d'attente : L_q
- Le temps moyen de séjour d'un client dans le système : W
- Le temps d'attente moyen d'un client : W_q
- Le taux d'entrée des clients dans le système λ_e . Si la capacité du système est infinie on a $\lambda_e = \lambda$ sinon $\lambda_e < \lambda$
- Le taux moyen d'arrivée : $\bar{\lambda}$

Formules de Little

Pour tout système d'attente on a les formules suivantes :

$$L = \lambda_e W, \quad L_q = \lambda_e W_q \ , \ W = W_q + \frac{1}{\mu} \quad \text{et} \quad L = L_q + \frac{\lambda_e}{\mu}$$