CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES ET GÉNÉRALITÉS

Ce premier chapitre présente sommairement les séries chronologiques. Après quelques définitions relatives aux processus stochastiques et aux notions de stationnarité, nous abordons la méthode générale de modélisation de séries chronologiques et pour terminer le chapitre nous introduirons la fonction d'auto-covariance et sa caractérisation.

Mots-clés :
séries chronologiques ; modèle additif ; tendance ; saisonnalité ; stationnarité ; autocovariance ; bruit blanc ; opérateur retard ; opérateur différence.

1.1 Définitions et objectifs

Un processus aléatoire X indexé par un ensemble T (à priori quelconque) est une famille X_t, où $t \in T$, de vecteurs aléatoires à valeurs dans l'espace d'états $\mathbf{E} = \mathbb{R}^k$ ou $\mathbf{E} = \mathbb{C}^k$. Si $\mathbf{E} = \mathbb{R}$ ou $\mathbf{E} = \mathbb{C}$ (i.e k=1), le processus est dit unidimentionnel (ou univarié).
Un processus aléatoire univarié X indexé par $T = \mathbb{Z}$ ou $T = \mathbb{N}$, est une série chronologique (ou chronique) univariée, car les éléments de T correspondent implicitement à des instants ou à des dates.
Dans la pratique, une réalisation sur une durée finie d'un processus $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est également appelé série chronologique par abus de langage ; chaque donnée x_t est considérée comme réalisation de la variable aléatoire X_t.

L'étude des séries chronologiques est très utile lorsque l'on cherche à analyser, à comprendre ou encore à prévoir un phénomène évoluant dans le temps. Le but est donc de tirer des conclusions à partir des séries observées. Les étapes à suivre sont :

1. Proposer un **modèle** probabiliste afin de représenter des données.
2. **Estimer** les paramètres du modèle choisi et **vérifier** la qualité de l'ajustement aux données (validation du modèle).
3. **Application** du modèle : Prévision.

Les domaines concernés sont nombreux :

- finance (ventes, bourse, ...),
- sociologie (chômage, grèves),
- ingénierie (consommation électricité, pollution),
- industrie (production, consommation),
- médecine (étude du rythme cardiaque).

Le paragraphe suivant est consacré à la notion de stationnarité. Celle-ci joue un rôle fondamental dans 1'étude des séries chronologiques.

1.2 Stationnarité et stationnarité stricte

Avant le traitement d'une série chronologique, il convient d'en étudier la structure du processus sous-jacent. Si celle si se trouve modifiée dans le temps, la série chronologique est considérée comme non stationnaire. Si la structure reste la même, la série chronologique est alors stationnaire.

Définition 1.1 — Fonction d'auto-covariance Soit $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un processus tel que $\mathrm{Var}(X_t) < \infty$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, la fonction d'auto-covariance $\gamma_X(.,.)$ est définie par

$$\gamma_X(r,s) = \mathrm{Cov}(X_r, X_s) = \mathbf{E}\{(X_r - \mathbf{E}(X_r))(X_s - \mathbf{E}(X_s))\}, \quad r, s \in \mathbb{Z}.$$

Définition 1.2 — Stationnarité faible ou stationnarité au second ordre. La série chronologique $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est dite faiblement stationnaire ou stationnaire au second ordre si :

(i) $\mathbf{E}[X_t^2] < \infty$

(ii) $\mathbf{E}[X_t] = m, \ \forall t \in \mathbb{Z}$

(iii) $\gamma_X(r,s) = \gamma_X(r+t, s+t), \quad \forall r, s, t \in \mathbb{Z}.$

Remarque 1 Si $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est stationnaire alors $\gamma_X(r,s) = \gamma_X(r-s, 0), \quad \forall r, s \in \mathbb{Z}$. Il est donc plus commode de redéfinir la fonction d'auto-covariance d'un processus stationnaire comme une fonction d'une seule variable définie par

$$\gamma_X(h) = \gamma_X(h,0) \ = \ \mathrm{Cov}(X_{t+h}, X_t) \quad \forall r, s, t \in \mathbb{Z}.$$

Définition 1.3 — Stationnarité stricte La série chronologique $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est dite strictement stationnaire si la loi jointe de $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ et de $(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_n+h})$ sont identiques pour tout entier $t_1, t_2, \dots, t_n, h \in \mathbb{Z}$.

Intuitivement, une série chronologique strictement stationnaire doit avoir le même comportement statistique sur des intervalles de temps égaux.

Remarque 2 Un processus strictement stationnaire ayant ses moments d'ordre 2 finis est faiblement stationnaire. La réciproque n'est pas vraie en général.

Contre exemple

Soit $\{X_t\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que

- $X_t \sim \mathcal{E}(1)$, lorsque t est pair
- $X_t \sim \mathcal{N}(1, 1)$ lorsque t est impair $\square$

alors $\{X_t\}$ est stationnaire avec $\gamma_X(0) = 1$ et $\gamma_X(h) = 0$ lorsque $h \neq 0$. Cependant X_1 et X_2 n'ont pas la même loi donc $\{X_t\}$ n'est pas strictement stationnaire.

Remarque 3 Une classe importante de processus pour laquelle l'assertion : **stationnarité faible implique stationnarité stricte** est la classe des **processus gaussiens**. $\square$

Important

Afin d'éviter par la suite toute ambiguité entre la faible et la forte stationnarité, nous désignerons par la stationnarité la faible stationnarité.

Une série chronologique est donc stationnaire si elle est la réalisation d'un processus stationnaire. Ceci implique que la série ne comporte ni tendance, ni saisonnalité et plus généralement aucun facteur n'évoluant dans le temps.

Définition 1.4 — Bruit Blanc Un processus $\{Z_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ est un bruit blanc faible ou bruit blanc de moyenne nulle et de variance σ^2 noté

$$\{Z_t,\ t \in \mathbb{Z}\} \sim \mathcal{BB}(0, \sigma^2), \quad (\mathcal{BB} \text{ est une abréviation pour Bruit Blanc})$$

si $\{Z_t\}$ est de moyenne nulle et de fonction d'autocovariance définie par

$$\gamma(h) = \begin{cases} \sigma^2, & \text{si } h = 0 \\ 0 & \text{si } h \neq 0. \end{cases}$$

Si $\{Z_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiqument distribuées de variance finie, on dit que $\{Z_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ est un bruit blanc fort.

Définition 1.5 — Fonction d'auto-corrélation La fonction d'auto-corrélation d'un processus stationnaire au second ordre est définie par

$$\rho(h) = \frac{\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+h})}{\sigma_{X_t}\sigma_{X_{t+1}}} = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}.$$

Quelques exemples

Exemple 1.1 Soit $\{Z_t; t \in \mathbb{Z}\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées *iid* d'espérance nulle et de variance finie σ_Z^2. On pose

$$X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}.$$

La fonction d'auto-covariance de X_t est donnée par

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X_{t+h}, X_t) &= \mathrm{Cov}(Z_{t+h} + \theta Z_{t+h-1}, Z_t + \theta Z_{t-1}) \\ &= \begin{cases} (1+\theta^2)\sigma_Z^2, & \text{si} \quad h = 0 \\ \theta\sigma_Z^2, & \text{si} \quad h = +1 \textit{ ou } h = -1 \\ 0, & \text{si} \quad |h| > 1. \end{cases}\end{aligned}$$

$\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est donc un processus stationnaire. En fait, on peut montrer qu'il est aussi stationnaire au sens strict.

Exemple 1.2 Soit $\{Y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ une séries chronologique stationnaire, on définit

$$X_t = \begin{cases} Y_t & \text{si } t \text{ est pair,} \\ Y_t + 1 & \text{si } t \text{ est impair.} \end{cases}$$

Bien que $\mathrm{Cov}(X_{t+h}, X_t) = \gamma_Y(h)$, $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ n'est pas un processus stationnaire car il n'a pas une espérance constante.

Exemple 1.3 — Marche aléatoire Soit $S_t = X_1 + X_2 + \ldots + X_t$ où les X_i sont *iid* d'espérance nulle et de variance σ^2. Pour $h > 0$,

$$cov\left(\sum_{i=1}^{t+h} X_i, \sum_{i=1}^{t} X_i\right) = cov\left(\sum_{i=1}^{t} X_i, \sum_{i=1}^{t} X_i\right) = \sigma t^2.$$

Donc $\{S_t\}$ n'est pas stationnaire.

Évidemment, la plupart des séries chronologiques ne sont pas des réalisations de processus stationnaire, cependant, on peut s'y ramener en faisant subir à la série chronologique certaines transformations.

1.3 Modélisation de séries chronologiques

Une étape importante dans l'analyse des séries chronologiques est le choix d'un modèle probabiliste pour les données. On modélise un processus par la somme d'une partie déterministe et d'une partie aléatoire (modèle additif), ou par le produit d'une partie déterministe et d'une partie aléatoire (modèle multiplicatif).
Le modèle de décomposition classique est le suivant (modèle additif) :

$$X_t = m_t + s_t + e_t \quad 1 \leq t \leq n. \tag{1.1}$$

où $d_t = (m_t + s_t)$ représente la partie déterministe du processus et e_t sa partie aléatoire, avec

1. m_t une fonction qui varie lentement, appelée la composante de **tendance**. C'est une fonction qui varie au cours du temps et traduit l'aspect général de la série.
2. s_t une fonction périodique de t avec la période d : $s_{t-d} = s_t$. C'est la composante **saisonnière** de période $4, 12, 52, \ldots$ selon qu'il s'agisse de données trimestrielles, mensuelles, hebdomadaires, ...
3. e_t un bruit aléatoire, stationnaire, de moyenne nulle. Il correspond à la notion d'écart au modèle.

Le modèle multiplicatif s'écrit $X_t = d_t e_t$, où d_t est la partie déterministe et e_t, la partie aléatoire.
La modélisation de la série (trajectoire du processus) comporte deux parties :

√ celle de la partie fixe,

√ celle de la partie aléatoire.

Pour détecter la tendance et/ou la saisonnalité, on peut s'aider des informations *a priori*, notamment la nature des données et leur représentation graphique ; par exemple, si le signal observé est la consommation mensuelle d'électricité par foyer, on pourra s'attendre à une certaines saisonnalité (mensuelle ? trimestrielle) et à une tendance (linéaire ? quadratique ?).

1.3.1 Modèle avec tendance

Le modèle est de la forme :

$$X_t = m_t + e_t \tag{1.2}$$

où e_t est un bruit blanc aléatoire de moyenne nulle.

Pour modéliser la tendance de la série observée, on peut par exemple chercher une fonction paramétrique qui ressemble à l'allure générale de la série et estimer les paramètres de cette fonction afin d'ajuster au mieux les observations. Les fonctions les plus utilisées sont des fonctions :

– linéaires :

$$m_t = a + bt \tag{1.3}$$

– polynomiales :

$$m_t = a_0 + a_1 t + \cdots + a_d t^d \tag{1.4}$$

NB : On peut également modéliser par des fonctions de type exponentiel.

Estimation de la fonction m_t
Il existe plusieurs méthodes pour estimer la fonction m_t. Une des plus utilisées est la méthode des **moindres carrés**. Les paramètres des fonctions sont choisis de façon à minimiser l'erreur :

$$\sum_{t=1}^{n}(x_t - m_t)^2.$$

Un examen visuel de la série permet en général de se faire une idée du degré du polynôme à utiliser. Il faut utiliser le polynôme de degré le plus petit possible tout en ayant un bon ajustement. Pour cela, il est souhaitable que les résidus fluctuent autour de 0 avec une amplitude la plus faible possible.

1.3.2 Modèle à composante saisonnière

Pour modéliser un effet saisonnier, admettant du bruit mais pas de tendance, nous utilisons le modèle simple suivant :

$$X_t = s_t + e_t \tag{1.5}$$

où s_t est une fonction **périodique** de t, de période d i.e., pour tout t, $s_{t-d} = s_t$. Un choix convenable pour s_t est une somme des fonctions harmoniques définies par

$$s_t = a_0 + \sum_{j=1}^{k}\left[a_j cos(\lambda_j t) + b_j sin(\lambda_j t)\right],$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_k$ et $b_1, b_2, \ldots, b_k$ sont des paramètres inconnus, et $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ sont des fréquences fixes, chacune étant un multiple entier de $2\pi/d$: $\lambda_j = 2\pi j/d \ \forall j = 1, 2, \cdots, k$.

1.3.3 Élimination de la tendance et de la composante saisonnière par différenciation (Box et Jenkis (1970))

Opérateur retard et opérateur différence
L'opérateur retard B décale le processus d'une unité de temps vers le passé :

$$BX_t = X_{t-1}$$

Si on applique j fois cet opérateur, on décale le processus de j unités de temps :

$$B^j X_t = \underbrace{B(B(\ldots(BX_t)))}_{\text{j fois}} = X_{t-j}.$$

L'opérateur différence Δ fait la différence entre le processus et sa version décalée d'une unité de temps :

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = (1 - B)X_t.$$

Élimination de la tendance

- L'opérateur différence Δ élimine les tendances linéaires. Par exemple, pour un processus de la forme

$$X_t = a + bt + e_t,$$

on a

$$\Delta X_t = -b + e_t - e_{t-1}.$$

De façon générale, l'opérateur Δ^d élimine les tendance polynomiales de degré d. Par exemple, pour une tendance de degré 2,

$$\Delta^2 X_t = \Delta^2(a + bt + ct^2 + e_t) = 2c + (e_t - 2e_{t-1} + e_{t-2}).$$

- **Élimination de la composante saisonnière**

L'opérateur $\Delta_d = (1 - B^d)$ élimine une saisonnalité de période d. Par exemple, pour un modèle général,

$$X_t = m_t + s_t + e_t,$$

où s_t est de période d, on obtient,

$$\Delta_d X_t = m_t - m_{t-d} + e_t - e_{t-d}.$$

avec $m_t - m_{t-d}$ la tendance et $e_t - e_{t-d}$ le bruit.

1.3.4 Méthode générale pour la modélisation des séries chronologiques

La démarche générale pour la modélisation d'une série chronologique :

- Tracer la série et examiner les caractéristiques du graphique. Vérifier en particulier s'il l existe : une tendance ou une composante saisonnière.
- Modéliser la tendance et la composante saisonnière.

  Enlever la tendance et la composante saisonnière afin d'obtenir des résidus stationnaires.

  Choisir un modèle pour les résidus en utilisant la statistique (empirique) de la réalisation, comme par exemple l'autocorrélation

Ensuite, on peut faire de la prévision sur les résidus en premier lieu et puis on inverse les transformations sur les données.

Quelques illustrations sur la méthodolgie générale sur données réelles sont réalisées dans le chapitre 6 (Travaux pratiques).

1.4 Fonctions d'auto-covariance et d'auto-covariance empirique

Proposition 1.1 Si $\gamma(.)$ est la fonction d'auto-covariance d'un processus stationnaire $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ alors

i) $\gamma(0) \geq 0$,

ii) $|\gamma(-h)| \leq \gamma(0)$, $\forall h \in \mathbb{Z}$

iii) $\gamma(-h) = \gamma(h)$, $\forall h \in \mathbb{Z}$ □

Preuve. **i)** $\gamma(0) = Var(X_t) \geq 0$.

ii) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\mathbb{E}\left[\{X_{t+h} - \mathbb{E}(X_{t+h})\}\{X_t - \mathbb{E}(X_t)\}\right]| \leq Var(X_{t+h})^{1/2} Var(X_t^{1/2}).$$

iii) $\gamma(-h) =$Cov$(X_{t-h}, X_t) = \text{Cov}(X_t; X_{t+h}) = \gamma(h)$. ■

Définition 1.6 Une fonction $\psi : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ est dite de type positif si et seulement si

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_i \psi(t_i - t_j) a_j \geq 0$$

pour tout entier positif n et pour tout vecteur $\mathbf{a}$=$(a_1, \cdots, a_n)' \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{t}$= $(t_1, \cdots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$.

Théorème 1.1 — Caractérisation des fonctions d'auto-covariances Une fonction à valeurs réelles définie sur les entiers est la fonction d'auto-covariance d'un processus stationnaire si et seulement si elle est paire et de type positif. □

Preuve. Montrons que la fonction d'auto-covariance d'un processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est de type positif. Si $a = (a_1, \cdots, a_n)' \in \mathbb{R}^n$, $t = (t_1, \cdots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$ et $Z_t = ((X_{t_1} - \mathbb{E}(X_{t_1}), X_{t_1} - \mathbb{E}(X_{t_1}), \cdots, X_{t_1} - \mathbb{E}(X_{t_n})))'$ alors

$$0 \leq \text{Var}(a'Z_t) = a'\mathbb{E}(Z_t Z_t')a = a'\Gamma_n a = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i \gamma(t_i - t_j) a_j,$$

où $\Gamma_n = \left[\gamma_{t_i - t_j}\right]_{1 \leq i,j \leq n}$ est la matrice de covariance de $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})'$.
La réciproque est admise. ■
À partir des observations $\{x_1, \cdots, x_n\}$ d'un processus stationnaire $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$, nous aurons souvent besoin d'estimer la fonction d'auto-covariance $\gamma(.)$ du processus sous-jacent $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ afin de mieux comprendre sa structure de dépendance.

Définition 1.7 — Fonction d'auto-covariance empirique La fonction d'auto-covariance empirique de $\{x_1, \cdots, x_n\}$ est définie par

$$\hat{\gamma}_n(h) = n^{-1} \sum_{j=1}^{n-h} (x_{j+h} - \bar{x})(x_j - \bar{x}), \quad 0 \leq h \leq n-1$$

et $\hat{\gamma}_n(h) = \hat{\gamma}_n(-h)$ lorsque $-n \leq h \leq 0$, $\bar{x}$ étant la moyenne empirique des x_i : $\bar{x} = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} x_i$.

Définition 1.8 La fonction d'auto-corrélation empirique est définie par

$$\hat{\rho}(h) = \hat{\gamma}_n(h)/\hat{\gamma}_n(0), \quad |h| \leq n-1.$$

Les fonctions d'auto-covariances et d'auto-corrélation emrpiriques jouent un rôle très important dans l'identification des modèles. Le détail relatif à cette étape de modélisation est présenté dans le chapite 4.

1.5 Exercices corrigés

Exercice 1.1 — Relation entre stationnarité et stationnarité stricte Soit X une variable aléatoire normalement distribuée, de moyenne nulle et de variance 1. Soit $Y = X\mathbf{1}_{U=1} - X\mathbf{1}_{U=0}$ où U est une variable de Bernoulli de paramètre 1/2, indépendante de X.

1. Montrer que Y suit une loi normale centrée réduite.
2. Montrer que Cov(X,Y) = 0 mais que X et Y ne sont pas indépendantes.
3. En déduire un processus qui soit un bruit blanc faible mais ne soit pas un bruit blanc fort.

Correction

1. Soit $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} P(Y \leq t) &= P(\{X \leq t\} \cap \{U=1\}) + P(\{-X \leq t\} \cap \{U=0\}) \\ &= \tfrac{1}{2}[P(X \leq t) + P(X \leq t)] \\ &= P(X \leq t) \end{aligned}$$

donc $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$.

2.

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= \mathbb{E}[XY] \\ &= \mathbb{E}\left[X^2\mathbf{1}_{\{U=1\}} - X^2\mathbf{1}_{\{U=0\}}\right] \\ &= \mathbb{E}[X^2]P(U=1) - \mathbf{E}[X^2]P(U=0) \\ &= \mathbb{E}[X^2](1/2-1/2) = 0 \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

Si X et Y étaient indépendantes alors pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$P\{\{X \leq t\} \cap \{Y \leq t\}\} = P\{X \leq t\}.P\{Y \leq t\} = \{P\{X \leq t\}\}^2$$

or

$$\begin{aligned} P\{\{X \leq t\} \cap \{Y \leq t\}\} &= P\{\{X \leq t\} \cap \{X \leq t\} \cup \{U=1\}\} + P\{\{X \leq t\} \cap \{-X \leq t\} \cup \{U=0\}\} \\ &= P(\{X \leq t\} \cap \{U=1\}) + P(\{-t \leq X \leq t\} \cap \{U=0\}) \\ &= \frac{1}{2}P(X \leq t) + \frac{1}{2}P(|X| \leq t). \end{aligned}$$

Lorsque $t > 0$, on aurait :

$$(P(X \leq t))^2 = \frac{1}{2}P(X \leq t)$$

$$\Leftrightarrow P(X \leq t) = \frac{1}{2} \qquad \text{absurde.}$$

3.

$$\left\{ \begin{array}{lll} Z_0 & = & X \\ Z_t & = & \epsilon_t X \end{array} \right. \qquad \text{où } \{\epsilon_t\}_{t>0} \; iid \; P(\epsilon_t = 1) = 1/2; \quad P(\epsilon_t = -1) = 1/2. \quad \epsilon_t \perp X$$

$(Z_t)_{t\geq 0}$ est un bruit blanc faible.

$$\text{car} \quad \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{E}[Z_t Z_{t+h}] & = & 0, \quad \forall h \neq 0, \; \forall t \geq 0. \\ & = & 1, \quad \text{si } h = 0 \end{array} \right.$$

mais les (Z_t) ne sont pas *iid* car $|Z_t| = |Z_0|$.

> **Exercice 1.2 — Marche aléatoire** Soit $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ une marche aléatoire de drift μ définie par $X_t = \mu + X_{t-1} + Z_t$ et $X_0 = 0$, où $\{Z_t\}_{t\geq 1}$ est un bruit blanc fort.
>
> 1. Calculer la fonction d'auto-covariance γ_X de la marche aléatoire. $\{X_t\}_{t\geq 1}$ est-il stationnaire ?
> 2. $\{\Delta X_t\}_{t\geq 1}$ est-il stationnaire ?

Correction

1.

$$\begin{array}{lll} X_t & = & \mu + X_{t-1} + Z_t \\ & = & \mu + \mu + X_{t-2} + Z_{t-2} + Z_{t-1} + Z_t \\ & = & 2\mu + X_{t-2} + Z_{t-1} + Z_t \\ & & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & = & t\mu + (Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_t) \\ \Longrightarrow & & \mathbb{E}[X_t] = t\mu \end{array}$$

- Si $\mu \neq 0$, $\mathbb{E}(X_t)$ dépend du temps donc (X_t) non stationnaire.
- Si $\mu = 0$, $\mathbb{E}[X_t] = 0$.

$$\begin{array}{lll} Cov(X_t, X_{t+h}) & = & Cov\left(\sum_{i=1}^{t} Z_i, \sum_{i=1}^{t+h} Z_i\right) \\ & = & \sigma_Z^2 t, \text{ donc } (X_t) \text{ non stationnaire même avec } \mu = 0. \end{array}$$

2.

$\Delta(X_t) = X_t - X_{t-1} = \mu + Z_t$, donc $\Delta(X_t)$ est stationnaire.