2021/2022 Master 1 (MNS)

- Interrogation 2 -

Exercice : On considère le problème hyperbolique de l'équation de transport :

$$(P)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \alpha \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, & \forall x \in]0,1[,\ t \in]0,T[. \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & \forall x \in]0,1[\end{cases}$$

où la vitesse de transport $\alpha \in \mathbb{R}$ et la condition initiale $u_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont données.

On se donne : $0 = x_0 < \dots < x_N = 1$, $x_i = ih$, $i = \overline{1,N}$ et $0 = t_0 < \dots < t_M = T$, $t_j = jk$, $j = \overline{1,M}$

① Donner un schéma aux différences finies de (P) "Euler explicite" en utilisant l'approximation rétrograde (pas en arrière) de $\frac{\partial u}{\partial x}$.

② Montrer que l'erreur de consistance est majorée par $c(h^p + k^q)$ en précisant c, p et q.

③ Sous quelles conditions sur h et k a-t-on

$$\| u^{(j)} \|_\infty \leq \| u^0 \|_\infty, \quad \forall j \leq M$$

④ Calculer u_i^j pour : $j = 1$, $i = \overline{1,3}$, $h = k = 0{,}25$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $u_0(x) = (1-x)$.

MNS

Interrogation 2 –

Corrigé type

$$(P)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \alpha \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 & , x \in]0,1[, \quad t \in]0,T[\\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in]0,1[\end{cases}$$

① On a les approximations suivant $\dfrac{\partial u_i}{\partial t} = \dfrac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k}$ (0,25), $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{u_i^j - u_{i-1}^j}{h}$ (0,25)

On obtient
$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} + \alpha \dfrac{u_i^j - u_{i-1}^j}{h} = 0 & i = 1,N \quad j = 0, M-1 \\ u_0^j = u_N^j = 0 & \forall j = 0,\dots,M \\ u_i^0 = u_0(x_i) & \end{cases}$$ (0,75)

On trouve : $i = 1,N$, $j = 0, M-1$, on a $\boxed{u_i^{j+1} = +\alpha \dfrac{k}{h} u_{i-1}^j + \left(1 - \alpha \dfrac{k}{h}\right) u_i^j}$ (0,75)

② La consistance : $\varepsilon_j^i(u) = A_i + B_i$ (0,25), où $A_i \to \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $B_i \to \dfrac{\partial u}{\partial t}$

• $u(x-h,t) = u(x,t) - h \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) + \dfrac{h^2}{2} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, \xi_1)$, $\xi_1 \in]x-h, x[$ (0,25)

Ce qui donne $\left| \dfrac{-u(x-h,t) + u(x,t)}{h} - \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) \right| = \left| \dfrac{h}{2} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\xi_1) \right| \leq \dfrac{h}{2}$

$$\leq \frac{h}{2} \max_{[0,1]\times[0,T]} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|$$ (0,25)

• $u(x,t+k) = u(x,t) + k\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{k^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,\tau)$, 0,25 $\tau \in]t, t+k[$.

ce qui donne $\left|\frac{u(x,t+k) - u(x,t)}{k} - \frac{\partial u}{\partial t}\right| = \left|\frac{k}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,\tau)\right| \leq \frac{k}{2} \max_{\Omega}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\right|$ 0,25

$\Omega = [0,1]\times[0,T]$,

D'où $\mathcal{E}^{(j)}(u) \leq \frac{h}{2}\max_{\Omega}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right| + \frac{k}{2}\max_{\Omega}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\right|$

$\leq C(h + k)$ où $C = \max\left(\frac{1}{2}\max_{\Omega}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|, \frac{1}{2}\max_{\Omega}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|\right)$

0,5 0,5

Le schéma est consistant d'ordre 1 en espace et 1 en temps.

③ $\|u^{(j)}\| \leq \|u^{(0)}\|_\infty$ $\quad u^{(j)} = \begin{pmatrix} u_0^j \\ u_1^j \\ \vdots \\ u_N^j \end{pmatrix}$

0,25

On montre d'abord $\|u^{(j+1)}\|_\infty \leq \|u^{(j)}\|_\infty$ $\quad \forall j = \overline{0, M-1}$.

Ce qui veut dire $\begin{cases} \max\limits_{1,N-1} u_i^{j+1} \leq \max\limits_{1,N-1} u_i^j \\ \min\limits_{1,N-1} u_i^{j+1} \geq \min\limits_{1,N-1} u_i^j \end{cases}$ 0,25

On note : $j = 0,\dots,M$.
$M^j = \max\limits_{1\leq i\leq N} u_i^j$
et
$m^j = \min\limits_{1\leq i\leq N} u_i^j$

$u^{(j+1)} = \frac{\alpha k}{h} u_{i-1}^j + \left(1 - \alpha\frac{k}{h}\right)u_i^j$ 0,5

Sous les conditions $\begin{cases} \frac{\alpha k}{h} \geq 0 \\ \text{et} \\ 1 - \alpha\frac{k}{h} \geq 0 \end{cases}$ 0,75 c-à-d $\alpha \geq 0$ (puisque $k, h > 0$)

$\alpha \leq \frac{h}{k}$

ce qui donne $0 \leq \alpha \leq \frac{h}{k}$ nous pouvons écrire

$u^{(j+1)} \leq \frac{\alpha k}{h} M^j + \left(1 - \alpha\frac{k}{h}\right) M^j = M^j$ 0,5

Donc : $M^{j+1} < M^j$

. Maintenant pour montrer que $m^{j+1} \geq m^j$ pour $j = \overline{0,M}$.

il suffit de poser aussi $\begin{cases} \alpha \frac{k}{h} \geq 0 \\ 1-\alpha\frac{k}{h} \geq 0\end{cases}$ 0,25

on obtient $U^{(j+1)} \geq \frac{\alpha k}{h} m^j + \left(1-\alpha\frac{k}{h}\right) m^j = m^j \quad \forall j = \overline{0,M}$ 0,25

Par conséquent : $m^{j+1} \geq m^j$

D'où $\|U^{(j+1)}\|_\infty \leq \|U^{(j)}\|_\infty$

0,25

Finalement : $\|U^{(j+1)}\|_\infty \leq \|U^{(j)}\|_\infty \leq \cdots \leq \|U^{(0)}\|_\infty$ et ce qu'il faut montrer.

4) Calculons U_1^1, U_2^1, U_3^1 : $\alpha = 1/2$, $\frac{h}{k} = 1$

Pour $j=0$:

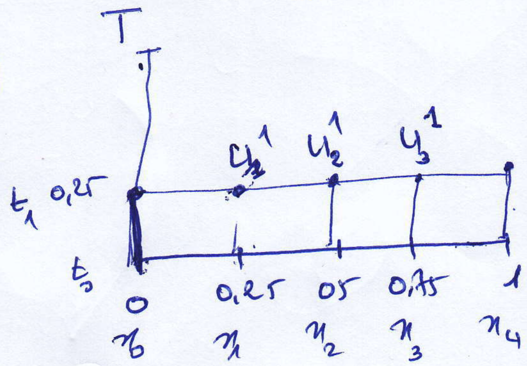
$i=1$: $U_1^1 = \alpha\frac{k}{h} U_0^0 + \left(1-\alpha\frac{k}{h}\right) U_1^0$

$= \frac{1}{2}\underbrace{U_0^0}_{0} + \left(1-\frac{1}{2}\right)\underbrace{U_1^0}_{0,75}$ 0,5

$= 0,375 = \frac{3}{8}$

$i=2$: $U_2^1 = \frac{1}{2}(0,75) + \frac{1}{2}(0,5) = 0,625 = \frac{5}{8}$ 0,5 ~~0,25~~

$U_3^1 = \frac{1}{2}(0,5) + \frac{1}{2}(0,25) = 0,375 = \frac{3}{8}$ 0,5



on a :

$U_0^0 = U_4^1 = 0$,

$U_1^0 = (1-x_1) = 0,75$

$U_2^0 = (1-x_2) = 0,5$ 0,25

$U_3^0 = (1-x_3) = 0,75$