Univ.Saida	**Processus Stochastique**
Département de Maths	**2020/2021**
$1^{\text{èr}}$ Année Master (A.S.S.P)	***Dr R. Rouane***

◀ Série d'exercices 1 ▶

◀ Espérance conditionnelle ▶

Exercice 1 *1. Soit $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux tribus contenues dans $\mathcal{A}$. On note $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \vee \mathcal{D}_2$ la tribu engendrée par la classe $\mathcal{D}_0 = \{B_1 \cap B_2 / B_1 \in \mathcal{D}_1, B_2 \in \mathcal{D}_2\}$, On considére une v.a.r. Y telle que $E|Y| < \infty$, et on suppose que les les tribus, $\sigma(Y) \vee \mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont indépendantes.*
Montrer $E(Y/\mathcal{D}) = E(Y/\mathcal{D}_1)$ p.s.
2. Soit (X_i) une suite de v.a.r. indépentes, équidistribuées, telles que $E|X_i| < +\infty$, on pose $S_n = X_1 + ... + X_n$. Déterminer $E(X_1/S_n, S_{n+1}, ...)$.

Exercice 2 *Soient X, Y deux v.a. telles que $E[X] = E[Y] = 0$ et telles que $Z = X + \beta Y$ est independante de Y pour un quelque $\beta \in \mathbb{R}$.Montrer que $E[X/Y] = -\beta Y$.*

Exercice 3 *On suppose que X est de carré intégrable. Soit $\mathcal{B}$ une sous tribu de $\mathcal{A}$. On pose*

$$Var(X/\mathcal{B}) = E(X^2/\mathcal{B}) - \mathbb{E}(X/\mathcal{B})^2$$

Montrer que $Var(X) = \mathbb{E}(Var(X/\mathcal{B})) + Var(\mathbb{E}(X/\mathcal{B}))$.

Exercice 4 *Soient $X_1; ...; X_n$ des var indépendantes, intégrables et $\mathcal{B}$ la tribu définie par $\mathcal{B} = \sigma(X_1; ...; X_n)$.Calculer $\mathbb{E}(X_1 + ... + X_n/\mathcal{B})$ et $E(X_1...X_n/\mathcal{B})$.*

Exercice 5 *Soient X et Y deux var indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1. On pose $Z = X + Y$. Déterminer la loi du couple (X,Z). En déduire la densité conditionnelle de X sachant Z et $\mathbb{E}(X/Z)$.*

Exercice 6 *Soient X et Y deux var indépendantes, de même loi ayant pour densité $f(z) = \frac{1}{z^2}\mathbf{1}_{]1,+\infty[}(z)$. On pose $U = XY$ et $V = \frac{X}{Y}$. Quelle est la loi de (U, V) ? En déduire la densité conditionnelle de V sachant U et $E(V/U)$*

Exercice 7 *Soient $X_1; ...; X_n$ des var indépendantes de même densité f(x). On pose $X = max(X_1; ...; X_n)$ et $Y = min(X_1; ...; X_n)$.*

1. *Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$ et $\mathbb{E} = (Y/X)$.*

2. *Application : les X_i sont des v.a uniformes sur $[0,1]$. Donner les résultade la question précédente et les interpréter*

Exercice 8 *Soit (X_i) une suite de v.a.r iid, avec $\mathbb{E}(X_i) = \mu$,$Var(X_i) = v$. Soit N une v.a entière,indépendante des X_i avec $\mathbb{E}(N) = \gamma$ et $Var(N) = w$.*

1. *Montrer que $\mathbb{E}(S_N/N = n) = \mathbb{E}(S_n)$.*
2. *En déduire $\mathbb{E}(S_N)$ et $Var(S_N)$.*

Exercice 9 *Soit (X, Y) un couple aléatoire de densité jointe :*

$$f(x,y) = cx(y-x)e^{-y}\mathbf{1}_{0<x\leq y}$$

1. *Déterminer c pour que f soit effectivement une densité.*
2. *Calculer $f(x/y)$, densité conditionnelle de X sachant $Y = y$.*
3. *En déduire que $E[X/Y] = Y/2$.*
4. *Calculer $f(y/x)$, densité conditionnelle de Y sachant $X = x$.*
5. *En déduire que $E[Y/X] = X + 2$.*
6. *Déduire des questions 3 et 5 les quantités $E[X]$ et $E[Y]$.*

Exercice 10 *Soit (X, Y) un couple aléatoire de densité jointe :*

$$f(x,y) = \frac{1}{y}e^{-\frac{x}{Y}-y}1_{]0,+\infty[^2}(x,y)$$

1. *Déterminer la densité marginale $f(y)$ de Y .*
2. *En déduire la densité conditionnelle $f(x/y)$.*
3. *Que vaut $E[X/Y = y]$. En déduire l'espérance conditionnelle de X sachant Y .*