Chapitre 3

Opérateurs linéaires bornés sur un espace de Hilbert

0.1 Opérateurs linéaires bornés

0.1.1 Définitions - continuité

Dans ce chapitre, $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ désignent deux espaces de Hilbert séparables complexes .

Définition 0.1. *Une fonction* $A \colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ *est dite opérateur linéaire si pour tous* $x, y \in \mathcal{H}_1$ *et tout* $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$A(\lambda x + y) = \lambda A(x) + A(y)$$

On écrit souvent Ax au lieu de $A(x)$ pour l'image d'un vecteur x de $\mathcal{H}_1$ par A.

Définition 0.2. *Un opérateur linéaire* $A \colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ *est dit borné si*

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| < +\infty$$

On a donc le résultat suivant

Théorème 0.1. *Soit* $A \colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ *un opérateur linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes*

i. *A est continu.*

ii. *A est continu en un point quelconque de* $\mathcal{H}_1$.

iii. *A est borné.*

iv. $\exists c > 0 / \forall x \in \mathcal{H}_1 : \|Ax\| \leq c \|x\|$

Si A est borné, la norme de A notée $\|A\|$ est donnée par

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

Exercice Montrer que

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle Ax, y\rangle|$$

On note par $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ à l'espace des opérateurs linéaires bornés de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}_2$.

Proposition 0.1. *$\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.*

Proposition 0.2. *$\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ est un espace de Banach.*

Exemples 1. Soit $A\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ un opérateur linéaire avec $\dim \mathcal{H}_1 < +\infty$. Alors, A est borné. En effet, soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base orthonormale de $\mathcal{H}_1$. Alors

$$\forall x \in \mathcal{H}_1 : x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle\, e_k \quad \text{et} \quad Ax = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle\, Ae_k$$

D'où

$$\begin{aligned}
\|Ax\| &\leq \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|\, \|Ae_k\| \leq (\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=1}^{n} \|Ae_k\|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= (\sum_{k=1}^{n} \|Ae_k\|^2)^{\frac{1}{2}}\, \|x\|
\end{aligned}$$

D'où, A est borné et $\|A\| \leq (\sum_{k=1}^{n} \|Ae_k\|^2)^{\frac{1}{2}}$. Si de plus, $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$, A est donc une matrice carrée. On suppose qu'il existe $\lambda_k \in \mathbb{C}, 1 \leq k \leq n$ tels que

$$Ae_k = \lambda_k e_k, 1 \leq k \leq n$$

Alors

$$\begin{aligned}
\|Ax\|^2 &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle\, Ae_k, \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle\, Ae_k \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2\, |\lambda_k|^2 \leq M^2\, \|x\|^2
\end{aligned}$$

où

$$M = \max_{1\leq k\leq n} |\lambda_k|$$

Donc

$$\|A\| \leq M \qquad (1)$$

D'autre part, soit $M = |\lambda_{j_0}|\,, 1 \leq j_0 \leq n$. Comme $\|e_{j_0}\| = 1$, on obtiendra par définition de $\|A\|$ que

$$\|A\| \geq \|Ae_{j_0}\|$$

Donc

$$\|A\| \geq |\lambda_{j_0}| = M \qquad (2)$$

De (1) et (2), $\|A\| = M = \max\limits_{1\leq k\leq n} |\lambda_k|$ (maximum des valeurs propres de A en dimension finie)

2. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, et soit $(\varphi_k)_{k\geq 1}$ une base orthonormale de $\mathcal{H}$. Soit $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ une suite dans $\mathbb{C}$. On définit l'opérateur $A\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ par

$$Ax = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \langle x, \varphi_k\rangle \varphi_k,\ x \in \mathcal{H}$$

Alors, A est linéaire. De plus, par l'inégalité de Bessel,

$$\|Ax\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k|^2 |\langle x, \varphi_k\rangle|^2 \leq m^2 \|x\|^2$$

où $m = \sup\limits_{k\geq 1} |\lambda_k|$. D'où, A est borné et $\|A\| \leq m \qquad (1)$

De plus, par la définition de la borne supérieure

$$\forall \epsilon > 0, \exists j \geq 1 : |\lambda_j| > m - \epsilon$$

D'où

$$\|A\| \geq \|A\varphi_j\| = |\lambda_j| > m - \epsilon$$

comme $\epsilon > 0$ est arbitraire, $\|A\| \geq m \qquad (2)$

De (1) et (2) on obtient que

$$\|A\| = m = \sup_{k\geq 1} |\lambda_k|$$

3. Sur l'espace

$$\mathcal{D}(\mathcal{D}) = \{f \in L_2[-\pi, \pi] : f' \in L_2[-\pi, \pi]\}$$

muni de son produit scalaire usuel

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\, dt, \quad f, g \in \mathcal{D}(\mathcal{D})$$

on définit l'opérateur différentiel D par

$$Df(x) = \frac{df}{dx}(x) = f'(x)$$

Alors D n'est pas borné. En effet, pour la suite $(f_n)_n$ où

$$f_n(x) = \sin nx, (n \geq 1)$$

on a

$$\|f_n\| = \sqrt{\pi} \quad \text{et} \quad \|Df_n\| = n\sqrt{\pi} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$$

■

Proposition 0.3. *Soient $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. On montre facilement que*

i. $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|, (\alpha \in \mathbb{C})$

ii. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

iii. Soient $\mathcal{H}_3$ un espace de Hilbert, et $C \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$. Alors

$$CA \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_3) \;\; \textit{et} \;\; \|CA\| \leq \|C\| \|A\|$$

0.2 Fonctionnelles linéaires bornées

Définition 0.3. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Une fonctionnelle (forme) linéaire sur $\mathcal{H}$ est un opérateur linéaire de $\mathcal{H}$ dans $\mathbb{C}$.*

Une fonctionnelle linéaire bornée sur $\mathcal{H}$ est un élément de l'espace dual $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$.

On a donc le résultat important suivant

0.2.1 Théorème de représentation de Riesz

[1]

Théorème 0.2. *Pour toute forme linéaire continue f sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, il existe un élément unique $a \in \mathcal{H}$ tel que*

1. $\forall x \in \mathcal{H} : f(x) = \langle x, a \rangle \quad (*)$
2. $\|f\| = \|a\|$

Inversement, tout élément $a \in \mathcal{H}$ définit une forme linéaire continue f_a sur $\mathcal{H}$ par la formule $(*)$

Définition 0.4. *L'espace $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$ des formes linéaires continues sur $\mathcal{H}$ est dit espace dual de l'espace $\mathcal{H}$, et est noté $\mathcal{H}^*$. (Pour le distinguer de l'espace de Banach)*

Remarque 1 Le Théorème de représentation de Riesz affirme l'existence d'un isomorphisme isométrique

$$\begin{array}{rcl} I : \mathcal{H}^* & \to & \mathcal{H} \\ f & \mapsto & I(f) = a_f \end{array}$$

1. Frigyes Riesz, 1880-1956, est un mathématicien hongrois. Il est l'un des fondateurs de l'analyse fonctionnelle.

Ce qui nous permet d'identifier isométriquement les espaces $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}^*$, i.e., $\mathcal{H} = \mathcal{H}^*$.

Exemple $(\mathbb{C}^n)^* = \mathbb{C}^n,\ \ell_2^* = \ell_2$ et $(L_2([a,b]))^* = L_2([a,b])$.

Remarque 2 Si $\{\varphi_k\}_{k\geq 1}$ est une base orthonormale de $\mathcal{H}$, alors l'élément a correspondant à la forme linéaire dans le Théorème 3.2 est défini par

$$a = \sum_{k=1}^{+\infty} \overline{f(\varphi_k)}\varphi_k$$

En effet, comme $f(\varphi_k) = \langle \varphi_k, a\rangle,\ k \geq 1$:

$$a = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle a, \varphi_k\rangle \varphi_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \overline{\langle \varphi_k, a\rangle}\varphi_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \overline{f(\varphi_k)}\varphi_k$$

Exemples 1. $\mathcal{H} = L_2([a,b])$: Une forme linéaire T sur $\mathcal{H}$ est continue si et seulement s'il existe $g \in \mathcal{H}$ telle que

$$\forall f \in \mathcal{H} : T(f) = \langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\, dt$$

De plus

$$\|T\| = \|g\|$$

et dans ce cas

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \overline{T(\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}})}\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{+\infty} \overline{T(e^{int})}\, e^{int},\ t \in [a,b] \end{aligned}$$

2. $\mathcal{H} = \ell_2$. Une forme linéaire T sur ℓ_2 est continue si et seulement s'il existe $a = (a_k)_{k\geq 1} \in \ell_2$ tel que

$$\forall x = (x_k)_{k\geq 1} \in \ell_2 : Tx = \langle x, a\rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k\overline{a_k}$$

De plus

$$\|T\| = \|a\|$$

et si $(e_k)_{k\geq 1}$ est la base standard de ℓ_2, on aura dans ce cas

$$a = \sum_{k=1}^{+\infty} \overline{T(e_k)} e_k$$

0.3 Opérateurs inversibles

Définition 0.5. *Un opérateur $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ est dit inversible s'il existe un opérateur noté $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ tel que*

$$A^{-1}A = I_{\mathcal{H}_2} \text{ et } AA^{-1} = I_{\mathcal{H}_1}$$

où $I_{\mathcal{H}_i}$ est l'opérateur identité sur $\mathcal{H}_i$, $(1 \leq i \leq 2)$.

Définition 0.6. *L'opérateur A^{-1} est dit opérateur inverse de A.*

Définition 0.7. *Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Le noyau de A est l'ensemble*

$$\ker A = \{x \in \mathcal{H}_1 : Ax = 0\}$$

. A est injectif si $\ker A = \{0\}$.

Définition 0.8. *L'image de A est l'ensemble*

$$ImA = \{Ax,\ x \in \mathcal{H}_1\}$$

. A est surjectif si $ImA = \mathcal{H}_2$.

. A est inversible si et seulement si A est injectif et surjectif à la fois.

. S'il existe $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ tel que $BA = I_{\mathcal{H}_1}$, on dit que A admet un inverse à gauche. On dit aussi que A est l'inverse droit de B.

Il est clair que dans ce cas, A est injectif.

. De même, s'il existe $C \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ tel que $AC = I_{\mathcal{H}_2}$, on dit que A admet un inverse à droite, et que A est l'inverse gauche de C.

Il est clair dans ce cas, que A est surjectif.

. Si $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ et est de dimension finie, alors A est inversible si et seulement si A admet soit un inverse à gauche, soit un inverse à droite, car dans ce cas on a

$$\dim \mathcal{H}_1 = \dim \mathcal{H}_2 = \dim \ker A + \dim ImA$$

. En dimension infinie, la remarque précédente n'est pas vraie en général. En effet, l'opérateur shift (de décalage) droit S_r défini sur ℓ_2 par

$$S_r x = S_r(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ...)$$

est l'inverse droit du shift gauche S_l où $S_l x = S_l(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, x_3, ...)$. Or, S_l n'est pas inversible car $e_1 = (1, 0, 0, ...) \in \ker S_l$. De même, S_r n'est pas inversible car $e_1 \notin ImS_r$.

Théorème 0.3. *Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que $\|A\| < 1$. Alors l'opérateur $I - A$ est inversible, et l'on a*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k, \quad A^0 = I$$

De plus

$$\left\| (I - A)^{-1} - \sum_{k=0}^{n} A^k \right\| \underset{n \to +\infty}{\to} 0$$

et

$$\left\| (I - A)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

0.4 Adjoint d'un opérateur linéaire

Définition 0.9. *Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Il existe un opérateur unique $A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ tel que*

$$\forall x \in \mathcal{H}_1, \forall y \in \mathcal{H}_2 : \langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$$

De plus, on a $\|A\| = \|A^*\|$.

Définition 0.10. *L'opérateur A^* est dit opérateur adjoint de l'opérateur A.*

Exemples 1. $I^* = I$ et $0^* = 0$.

2. $S_r^* = S_l$ et $S_l^* = S_r$, où S_r et S_l sont respectivement les opérateurs shift droit (de décalage) et shift gauche sur ℓ_2.

3. Considérons l'opérateur de multiplication M sur $L_2([a, b])$ défini comme suit

$$(Mf)(t) = \mu(t) f(t), f \in L_2([a, b])$$

où μ est une fonction complexe continue et Lebesgue mesurable sur $[a, b]$. On a pour tous $f, g \in L_2([a, b])$:

$$\begin{aligned} \langle Mf, g \rangle &= \int_a^b M(f)(t)\overline{g(t)}\, dt = \int_a^b \mu(t) f(t)\, \overline{g(t)}\, dt \\ &= \int_a^b f(t)\, \mu(t)\overline{g(t)}\, dt = \int_a^b f(t)\, \overline{\overline{\mu(t)} g(t)}\, dt \\ &= \langle f, M^* g \rangle \end{aligned}$$

D'où

$$(M^* g)(t) = \overline{\mu(t)} g(t), \quad t \in [a, b]$$

On a donc les propriétés suivantes

Théorème 0.4. *Soient $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Alors*

1. $(A+B)^* = A^* + B^*$
2. $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$, $(\alpha \in \mathbb{C})$
3. $(A^*)^* = A$
4. *Si $D \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$ où $\mathcal{H}_3$ est un espace de Hilbert, alors $(DA)^* = A^* D^*$*

Théorème 0.5. *Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Alors*

1. $\ker A = (ImA^*)^{\perp}$
2. $\ker A^* = (ImA)^{\perp}$
3. $\overline{ImA} = (\ker A^*)^{\perp}$
4. $\overline{ImA^*} = (\ker A)^{\perp}$

Comme conséquence directe du Théorème précédent, on présente un résultat important relatif à la décomposition en somme directe orthogonale d'un espace de Hilbert. On a donc

Corollaire 0.1. *(Important) Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Alors*

$$\mathcal{H}_1 = \ker A \oplus \left(\overline{ImA^*}\right) \quad et \quad \mathcal{H}_2 = \ker A^* \oplus \overline{ImA}$$

0.5 Opérateurs auto-adjoints

Définition 0.11. *Un opérateur $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est dit auto-adjoint si $A^* = A$.*

Théorème 0.6. *Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur auto-adjoint. Alors $(\ker A)^{\perp} = \overline{ImA}$. De plus*

$$\mathcal{H} = \ker A \oplus \left(\overline{ImA}\right)$$

Exemples 1. Soit M l'opérateur de multiplication sur $L_2\left([a,b]\right)$ défini par

$$Mf = \mu f, \;\; f \in L_2\left([a,b]\right)$$

On a alors

$$M^* f = \overline{\mu} f$$

Donc M est auto-adjoint si et seulement si $\overline{\mu}(t) = \mu(t)$ p.p sur $[a,b]$.

2. Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. L'opérateur A^*A est auto-adjoint. En effet

$$(AA^*)^* = A^{**}A^* = AA^*$$

Théorème 0.7. *L'opérateur $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est auto-adjoint si et seulement si pour tout $x \in \mathcal{H}$, $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$.*

0.6 Orthoprojecteur sur un espace de Hilbert

Définition 0.12. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, et soit $\mathcal{M}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$. Un opérateur $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est dit orthoprojecteur (Opérateur de projection orthogonale) sur $\mathcal{M}$ si*

$$\forall x \in \mathcal{M}, \forall y \in \mathcal{M}^{\perp} : P(x+y) = x$$

. Il est clair que P est linéaire sur $\mathcal{H}$. De plus

$$ImP = \mathcal{M} \;\text{ et }\; \ker P = \mathcal{M}^{\perp}$$

et que

$$Px = x, \ x \in M$$

. $I - P$ est un orthoprojecteur sur $\mathcal{M}^{\perp}$ de noyau $\ker(I - P) = \mathcal{M}$.

. Si $\mathcal{M} \neq \{0\}$, alors $\|P\| = 1$. En effet

$$\forall x = u + v \in \mathcal{H}, u \in \mathcal{M}, v \in \mathcal{M}^{\perp} : \|Px\|^2 = \|u\|^2 \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 = \|x\|^2$$

par le théorème de Pythagore. D'où $\|P\| \leq 1 \quad (1)$

D'autre part, si $u \in \mathcal{M}, u \neq 0$:

$$\|P\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Px\|}{\|x\|} \geq \frac{\|Pu\|}{\|u\|} = \frac{\|u\|}{\|u\|} = 1$$

car $u \in \mathcal{M}$. Donc $\|P\| \geq 1 \quad (2)$

De (1) et (2), découle que $\|P\| = 1$.

On a donc le résultat important suivant

Théorème 0.8. *Un opérateur $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est un orthoprojecteur si et seulement si $P^2 = P = P^*$.*