Proposition : Si H est exhaustif et si $\hat{s}$ est le m.v alors $\hat{s}$ est fonction de H.

Démonstration :

$$\operatorname{Max} \mathcal{L}(x_1^n, s) = \max_s (g_s \circ H)(x_1^n) \cdot h(x_1^n)$$

revient à maximiser. $\max_s g_s \circ H$.

Proposition : Soit $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, f(x,s) ; s \in S)$ et $h : S \to E$ un paramètre **injectif** alors si $\hat{s}$ est le max de vrais. de s

Alors $h(\hat{s})$ est l'e.m.v de h.

Exemple : $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2$

e.m.v pour σ^2, m étant connue.

Alors $\hat{\sigma} = \left[\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2 \right]^{1/2}$ e.m.v pour σ

$\log \hat{\sigma}^2$ e.m.v pour $\log \sigma^2$.

$e^{\hat{\sigma}^2}$ " " " " e^{σ^2} etc —

Estimateurs par la méthode des moments.

Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un échantillon de la v.a X de modèle $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, f(x,s), s \in S)$

On appelle moment empirique d'ordre r de l'échantillon

$$M_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^r \qquad r \in \mathbb{N}$$

Proposition : ① $E(M_r) = E_p(X^r) = b_r(s_1, \ldots, s_k)$

② $M_r \xrightarrow[P_r]{P_s} E_p(X^r)$

Si la taille de l'échantillon est suffisamment grande, si on note

$$b_r(s_1, \ldots, s_k) = E_p(X^r) \qquad \text{où } s = (s_1, \ldots, s_k)$$

On peut égaler pour tout $r = 1, \ldots, k$

$$M_r = \boxed{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^r = b_r(s_1, \ldots, s_k)}$$

Donc on obtient un système de k équations à k inconnues.

$$\begin{cases} \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_i^1 = b_1(s_1, \ldots, s_k) \\ \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_i^2 = b_2(s_1, \ldots, s_k) \\ \hline \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_i^r = b_r(s_1, \ldots, s_k) \end{cases}$$

La solution de ce système $\hat{s}_i(X_1, \ldots, X_n)$ $i = 1, \ldots, k$ constitue un estimateur $\bar{T}(X_1, \ldots, X_n) = (\hat{s}_1(X_i^n), \hat{s}_2(X_i^n), \ldots, \hat{s}_k(X_i^n))$ par la méthode des moments.

Exemple : $X \rightsquigarrow N(m, \sigma)$ $\qquad (m, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$

$$\begin{cases} \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_i = E_{(m,\sigma)}(X) \\ \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_i^2 = E_{(m,\sigma)}(X^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{X} = m \\ \frac{1}{n}\sum_1^n x_i^2 = \sigma^2 + m^2 \end{cases} \qquad \hat{m} = \frac{1}{n}\sum x_i = \overline{x}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum x_i^2 - \overline{x}^2 = \frac{1}{n}\sum_1^n (x_i - \overline{x})^2$$

$$(\hat{m}, \hat{\sigma}^2) = (\overline{x}, S^2)$$

Exercice :

① Déterminer $K(a,k)$ tq $f(x,a) = K(a,k)\,x^k$ $a \in \mathbb{R}_+^*$ $k > -1$ soit une densité de probabilité pour $x \in]0,a]$

② Déterminer l'est. par la méthode des moments et G l'estimateur sans biais déduit. Montrer qu'il est convergent (dans L_2)

③ Estimateur du max. de vraisemblance $\hat{a}$ asymptotiquement sans biais.

④ Soit H l'estimateur sans biais déduit de $\hat{a}$
H est il meilleur que G ?

Réponse : ① $\int_0^a f(x,a)\,dx = 1 \iff k(a,k) = \frac{k+1}{a^{k+1}}$.

② $\frac{1}{n}\sum x_i = E(x)$

$$E(X) = \int_0^a K(a,k)\, x^{k+1}\,dx = \frac{k+1}{k+2}\,a.$$

$$\frac{1}{n}\sum x_i = \frac{k+1}{k+2}\,a \rightarrow a = \frac{k+2}{k+1}\overline{x}$$

donc $\boxed{\hat{a}(x_i^n) = \frac{k+2}{k+1}\overline{x} = G_n}$

$$E(G_n) = \frac{k+2}{k+1}E(\overline{x}) = \frac{k+2}{k+1}\cdot\frac{k+1}{k+2}\,a = a$$ il est sans biais.

$$E_a\left(|G_n - a|^2\right) = \mathrm{Var}\, G_n = \mathrm{Var}\left(\frac{k+2}{k+1}\overline{x}\right) = \left(\frac{k+2}{k+1}\right)^2 \mathrm{Var}\,\overline{x} = \left(\frac{k+2}{k+1}\right)^2 \cdot \frac{\sigma^2(x)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$G_n = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\left(\frac{k+2}{k+1}X_i\right) \xrightarrow[P_p]{} E_a\left(\frac{k+2}{k+1}X\right) = a.$$

(3) $L(x_1^n, a) = \left(\frac{k+1}{a^{k+1}}\right)^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^k$ $\qquad 0 \le x_i ;\ i=\overline{1,n} \le a.$

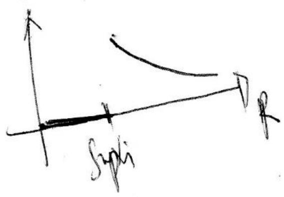
$\qquad 0 \le \inf_i x_i,\ \sup_i x_i \le a$

$$= \frac{(k+1)^n}{a^{n(k+1)}}\left(\prod_{1}^{n} x_i\right)^k$$

$$\max_{a\in\mathbb{R}_+^*} L(x_1^n, a) = \max(\text{—}) = \frac{(k+1)^n \cdot \left(\prod_{1}^{n} x_i\right)^k}{\min\left(a^{n(k+1)}\right)}$$

$0 \le \inf x_i,\ \sup x_i \le a.$

$a \in [\sup x_i, +\infty[.$



$$\boxed{\hat{a}(X_1^n) = \sup_{i=\overline{1,n}} X_i}$$

$$f(x,a) = \frac{k+1}{a^{k+1}}x^k \cdot 1_{[0,a]}(x)$$

$$P(\hat{a} < z) = \sup(\sup X_i < z) = \left(P(X_i < z)\right)^n = \left(\frac{z}{a}\right)^{n(k+1)}$$

donc $F_{\hat{a}}(z) = \left(\frac{z}{a}\right)^{n(k+1)} \Rightarrow f_{\hat{a}}(z) = \frac{n(k+1)}{a^{n(k+1)}} z^{n(k+1)-1}$

$E_a(\hat{a}) = \frac{n(k+1)a}{n(k+1)+1}$ biaisé mais asymptotiquement sans biais

Soit $\boxed{H = \frac{n(k+1)+1}{n(k+1)} \cdot \max_i X_i}$ H est sans biais et fonction de la statistique exhaustive $\max_{i=\overline{1,n}} X_i$

Comparer H et G revient à comparer Var H et Var G.

$\mathrm{Var}\,G = \cancel{\mathrm{Var}\left(\frac{k+2}{k+1}\right)}$

$$\mathrm{Var}\left(\frac{k+2}{k+1}\bar{X}\right) = \left(\frac{k+2}{k+1}\right)^2 \cdot \frac{\sigma^2(X)}{n} = \left(\frac{k+2}{k+1}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{k+1}{(k+2)^2(k+3)} a^2.$$

$$\mathrm{Var}\,G = \frac{1}{n(k+1)(k+3)} a^2.$$

$$H = \left(1 + \frac{1}{n(k+1)}\right) \max_{i=\overline{1,n}} X_i$$

$$\mathrm{Var}\,H = \left(1 + \frac{1}{n(k+1)}\right)^2 \mathrm{Var}\big(\underbrace{\max_{i=\overline{1,n}} X_i}_{\hat{a}}\big)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n(k+1)}\right)^2 \cdot \frac{n(k+1)\, a^2}{(n(k+1)+1)^2 (n(k+1)+2)}$$

$$\mathrm{Var}\,H = \frac{1}{n(k+1)(n(k+1)+2)} a^2$$

Var H et Var G

donc il revient à comparer $n(k+1)+2$ et $k+3$.

On a $k+3 \leq n(k+1)+2$.

$\Rightarrow \mathrm{Var}\,G \geq \mathrm{Var}\,H. \rightarrow$ H est meilleur