Université Mohamed Khider, Biskra
Faculté des Sc. Exactes et Sc. de la Nature et la Vie
Département de Mathématiques
Master 1: 2020/2021

Corrigé-type de l'examen

Exercice 1. (12pts)

La statistique de test à utiliser, sous l'hypothèse nulle, pour:

1. tester la variance d'une population gaussienne de moyenne inconnue, est: (2pts)

$$\frac{n\widetilde{S}^2}{\sigma_0^2} \rightsquigarrow \chi^2_{n-1},$$

où $\widetilde{S}^2 := n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$ et χ^2_{n-1} désigne la loi de qui-deux à $(n-1)$ degré de liberté (ddl).

2. comparer deux moyennes de deux populations gaussiennes indépendantes de variances connues, est: (2pts)

$$\frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1) \text{ (loi normale centrée-réduite)},$$

où $\overline{X}_j := n_j^{-1}\sum_{i=1}^{n_j} X_j^{(i)}$, $j = 1, 2$.

3. comparer deux moyennes de deux populations gaussiennes indépendantes de variances inconnues, est: (2pts)

$$\frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\widetilde{S}_1^2/n_1 + \widetilde{S}_2^2/n_2}} \simeq t(\nu),$$

où $t(\nu)$ est la loi de Student à

$$\nu := \frac{\left(\widetilde{s}_1^2/n_1 + \widetilde{s}_2^2/n_2\right)^2}{\widetilde{s}_1^4/\left(n_1^2(n_1-1)\right) + \widetilde{s}_2^4/\left(n_2^2(n_2-1)\right)}, \tag{1}$$

ddl, et $\widetilde{s}_i^2$ désigne la valeur observée de $\widetilde{S}_i^2$.

4. comparer deux moyennes de deux populations gaussiennes indépendantes de variances inconnues supposées égales, est: (2pts)

$$\frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\widetilde{S}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \rightsquigarrow t(n_1 + n_2 - 2),$$

où

$$\widetilde{S}^2 = \frac{n_1\widetilde{S}_1^2 + n_2\widetilde{S}_2^2}{n_1 + n_2 - 2},$$

est un estimateur sans biais de $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ et $t(n_1 + n_2 - 2)$ est la loi de Student à $n_1 + n_2 - 2$ dll.

5. comparer deux variances de deux populations gaussiennes indépendantes, est: (2pts)

$$\frac{\frac{n_1\widetilde{S}_1^2/\sigma_1^2}{n_1-1}}{\frac{n_2\widetilde{S}_2^2/\sigma_2^2}{n_2-1}} \rightsquigarrow F(n_1 - 1, n_2 - 1), \tag{2}$$

où $F(n_1 - 1, n_2 - 1)$ désigne la loi de Fisher à $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ dll.

6. comparer deux proportions de deux populations indépendantes, est: (2pts)

$$\frac{\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2}{\sqrt{\widehat{p}(1-\widehat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1),$$

où

$$\widehat{p} := \frac{n_1\widehat{p}_1 + n_2\widehat{p}_2}{n_1+n_2},$$

et l'estimateur commun de $p_1$et p_2, à condition que

$$n_1+n_2>30,\ n_ip_i\geq 5 \text{ et } n_i(1-p_i)\geq 5,\ \text{pour } i=1,2.$$

Exercice 2. (08pts)

Ici**,** la variable aléatoire X prend une valeur 1 (qui correspond à un article défectueux) avec une probabilité p et elle prend la valeur 0 (qui correspond à un article non défectueux). Donc il s'agit d'une v.a qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p. La fonction masse de cette v.a discrète X et définie comme suit:

$$\mathbf{P}(X=1)=p \text{ et } \mathbf{P}(X=0)=1-p.$$

Celle-ci peut être reformuler comme suit:

$$\mathbf{P}(X=x)=p^x(1-p)^{1-x},\ x=0,1.$$

Nous allons appliquer la méthode du test de *rapport de vraisemblance monotone***.** Soit $p_1>p_2$ et écrivons

$$\frac{L_{p_1}}{L_{p_2}}=\frac{\prod_{i=1}^{16}p_1^{x_i}(1-p_1)^{1-x_i}}{\prod_{i=1}^{16}p_2^{x_i}(1-p_2)^{1-x_i}}=\frac{p_1^t(1-p_1)^{16-t}}{p_2^t(1-p_2)^{16-t}},\ \text{avec } t:=\sum_{i=1}^{16}x_i.$$

Celle-ci peut être réécrite comme suit:

$$\frac{L_{p_1}}{L_{p_2}}=\left(\frac{1-p_1}{1-p_2}\right)^{16}\left(\frac{p_1(1-p_2)}{p_2(1-p_1)}\right)^t.$$

On pose $b:=\left(\frac{1-p_1}{1-p_2}\right)^{16}>0$, et $a:=\frac{p_1(1-p_2)}{p_2(1-p_1)}>1$ (car $p_1>p_2$), ainsi $t\to\frac{L_{p_1}}{L_{p_2}}(t)=ba^t$ est une fonction croissante en t (car $a>1$). Nous allons alors appliquer la proposition 3 (voir le cours), pour avoir le test upp :

$$\delta=\begin{cases}1 & \text{si } \sum_{i=1}^{16}x_i>c\\ \gamma & \text{si } \sum_{i=1}^{16}x_i=c\\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^{16}x_i<c\end{cases}$$

où c et $0<\gamma<1$ sont telles que

$$\mathbf{P}_{p=0.2}\left(\sum_{i=1}^{16}X_i>c\right)+\gamma\mathbf{P}_{p=0.2}\left(\sum_{i=1}^{16}X_i=c\right)=\alpha=0.02.$$

En d'autres termes

$$1-\mathbf{P}_{p=0.2}\left(\sum_{i=1}^{16}X_i\leq c\right)+\gamma\mathbf{P}_{p=0.2}\left(\sum_{i=1}^{16}X_i=c\right)=0.02,$$

ce qui implique que

$$\mathbf{P}_{p=0.2}\left(\sum_{i=1}^{16}X_i\leq c\right)=\gamma\mathbf{P}_{p=0.2}\left(\sum_{i=1}^{16}X_i=c\right)+0.98>0.98.$$

On note que $Y := \sum_{i=1}^{16} X_i \rightsquigarrow$Binomial$(16, 0.2)$ (la loi binomiale de paramètre $n = 16$ et $p = 0.2$). De la table statistique, de la loi binomiale, la plus petite c telle que $\mathbf{P}(Y \leq c) > 0.98$ est $c = 7$, pour la quelle $\mathbf{P}(Y \leq 7) = 0.993$. Par conséquent

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{\mathbf{P}(Y \leq 7) - 0.98}{\mathbf{P}(Y = 7)} \\ &= \frac{0.993 - 0.98}{\mathbf{P}(Y \leq 7) - \mathbf{P}(Y \leq 6)} \\ &= \frac{0.993 - 0.98}{0.993 - \mathbf{P}(Y \leq 6)}.\end{aligned}$$

De la table statistique, de la loi binomiale on trouve $\mathbf{P}(Y \leq 6) = 0.973$, donc

$$\gamma = \frac{0.993 - 0.98}{0.993 - 0.973} = 0.65.$$

Ainsi le test optimal upp est

$$\delta = \delta(X_1, ..., X_{16}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^{16} x_i > 7 \\ 0.65 & \text{si } \sum_{i=1}^{16} x_i = 7 \quad (4pts) \\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^{16} x_i < 7 \end{cases}$$

La fonction puissance du test est

$$\begin{aligned}\pi(p) &= \mathbf{E}_p[\delta], \ 0 < p < 1 \\ &= 1 \times \mathbf{P}(\delta = 1) + 0.65 \times \mathbf{P}(\delta = 0.65) + 0 \times \mathbf{P}(\delta = 0).\end{aligned}$$

En d'autres termes

$$\pi(p) = \mathbf{P}(T > 7) + 0.65\mathbf{P}(T = 7),$$

où $T := \sum_{i=1}^{16} X_i$ est une v.a binomiale de parametrer $(16, p)$, avec $0 < p < 1$. Il est claire que:

$$\begin{aligned}\pi(p) &= 1 - \mathbf{P}(T \leq 7) + 0.65(\mathbf{P}(T \leq 7) - \mathbf{P}(T \leq 6)) \\ &= 1 - 0.35\mathbf{P}(T \leq 7) - 0.65\mathbf{P}(T \leq 6) \\ &= 1 - 0.35F_p(7) - 0.65F_p(6),\end{aligned}$$

où $F_p(x)$ désigne la fonction de répartition de la loi binomiale de paramètrer $(16, p)$. Explicitement la fonction puissance est

$$\pi(p) = 1 - 0.35\sum_{k=0}^{7} C_{16}^k p^k (1-p)^{16-k} - 0.65\sum_{k=0}^{6} C_{16}^k p^k (1-p)^{16-k}, \ (4pts)$$

pour $0 < p < 1$.