Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Badji Mokhtar-Annaba

Masters: -Probabilités et Statistique
-Actuariat

Probabilités1(Série N°4)

Exercice 1:

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soient E, F deux sous espaces de $\mathcal{H}$ tels que $E \subset F$. Montrer que $F^{\perp} \subset E^{\perp}$.

Exercice 2:

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et soient $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ deux sous tribus de $\mathcal{F}$.

1.Montrer que pour tout $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on a:

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{V}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{U}) \mid \mathcal{V}).$$

2.Montrer que pour tout $Z \in \left(\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)\right)^{\perp}$, on a:

$$\mathbb{E}(Z) = 0.$$

Exercice 3:

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et soient $\mathrm{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ deux sous tribus de $\mathcal{F}$.

1.Montrer que

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left([X - \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_2)]^2\right) + \mathbb{E}\left([\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_2) - \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_1)]^2\right) \\ = \; & \mathbb{E}\left([X - \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_1)]^2\right) \end{aligned}$$

2.On pose $var(X \mid \mathcal{F}_1) := \mathbb{E}\left(X^2 \mid \mathcal{F}_1\right) - (\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_1))^2$. Montrer que

$$var(X) = \mathbb{E}(var(X \mid \mathcal{F}_1)) + var(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_1)).$$

Exercice 4:

Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de *v.a.r. i.i.d.* d'espérances μ et de variances σ^2. Soit N une *v.a.d.* à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes de toutes les *v.a.* Y_n. On pose $X = Y_1 + Y_2 + ... + Y_N$. Calculer $var(X)$.

Indication: Utiliser 2. de l'exercice précédant avec $\mathcal{F}_1 := \sigma(N)$ la tribu engendrée par N.

Exercice 5:

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et soient $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$. Soient X et Y deux *v.a.* telles que $X - Y$ soit indépendante de $\mathcal{U}$, d'espérance m et de variance σ^2. On suppose que Y est $\mathcal{U}-$mesurable.

1.Calculer $\mathbb{E}(X - Y \mid \mathcal{U})$. En déduire $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{U})$.

2.Calculer $\mathbb{E}\left((X - Y)^2 \mid \mathcal{U}\right)$. En déduire $\mathbb{E}\left(X^2 \mid \mathcal{U}\right)$.