Rattrapage

EXERCICE N° 1:

1. la loi de Burr de densité $f(x) := \dfrac{\theta\gamma x^{\gamma-1}}{(1+x^{\gamma})^{\theta+1}}\mathbb{1}_{x\geq 0}\ (\theta,\gamma)\in]0,+\infty[^2$, sa fonction de répartition est donnée par :
$$\mathbb{F}(x) = 1-(1+x^{\gamma})^{-\theta}.$$
En résolvant l'équation $U=\mathbb{F}(X)$, on a :
$$X = \left((1-U)^{-1/\theta}-1\right)^{1/\gamma}$$

```
myrburr<-function(theta,gamma,n){
x<-((runif(n))^(-1/theta)-1)^(1/gamma)
return(x)
}
```

2. la loi de Weibull de densité $f(x) := \dfrac{\alpha}{\sigma}\left(\dfrac{x}{\sigma}\right)^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\alpha}}\mathbb{1}_{x\geq 0},\ (\alpha,\sigma)\in]0,+\infty[^2$, sa fonction de répartition est donnée par :
$$\mathbb{F}(x) = 1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\alpha}}.$$
En résolvant l'équation $U=\mathbb{F}(X)$, on a :
$$X = \sigma(-\log(U))^{\frac{1}{\alpha}}$$

```
myrweibull<-function(alpha,sigma,n){
x<-sigma*(-log(runif(n)))^(1/alpha)
return(x)
}
```

3. la loi de Pareto généralisé de densité f définie par $f(x) = (1+\beta x)^{-\frac{\beta+1}{\beta}}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$, $\beta>0$, sa fonction de répartition est donnée par :
$$\mathbb{F}(x) = 1-(1+\beta x)^{-\frac{1}{\beta}}.$$
En résolvant l'équation $U=\mathbb{F}(X)$, on a :
$$X = \frac{1}{\beta}\left((1-U)^{-\beta}-1\right)$$

```
myrgpd<-function(beta,n){
x<-(1/beta)*((runif(n))^(-beta)-1)
return(x)
}
```

EXERCICE N° 2:
Une variable aléatoire est de loi uniforme sur $[0,2]$, si sa densité est définie comme $g(x) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[0,2]}(x)$.

1. On peut écrire la fonction suivante :

```
myrunif<-function(a,b,n)
{
x<-a+(b-a)*runif(n)
return(x)
}
```

On considère la variable aléatoire X de densité

$$f(x) = \begin{cases} C(2x - x^2) & \text{si } x \in]0,2[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Déterminer C de sorte que f soit une densité de probabilité sur $[0,2]$. Pour que f soit une densité, il faut que $C \geq 0$ et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \mathrm{d}x = 1 \implies \int_0^2 C(2x - x^2)\, \mathrm{d}x = 1$$
$$\implies C = \frac{3}{4}.$$

3. En faisant une étude de variation, on trouve facilement que $M = \frac{3}{2}$
4. Donner une représentation graphique des courbes de f et Mg

```
M <- 3/2
f <- function(x) {(3/4)*x*(2-x)*(x<=2)*(x>=0)}
g <- function(x) {dunif(x,0,2)}
x <- seq(-0.5,2.5,length=200)
plot(x,M*g(x),'l',col="red",lwd=2,xlab="",ylab="",ylim=c(0,1))
lines(x,f(x),col="blue",lwd=2)
legend("topright",legend=c(expression(Mg(x)),expression(f(x))),col
   =c("red","blue"),lwd=2)
```

5. L'algorithme d'acceptation-rejet peut être défini de la manière suivante :
   (i) générer Y selon la densité g c'est à dire la loi uniforme sur $[0,2]$ $\mathcal{U}[0,2]$; et U selon la loi uniforme $\mathcal{U}[0,1]$;
   (ii) tester si $U \leq \sqrt{\frac{2}{3}} Y \mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2} - \frac{Y^2}{3}\right)} \mathbb{1}_{Y \geq 0}$:
      (a) si c'est vrai, accepter la valeur Y et on pose $X = Y$;
      (b) sinon, rejeter Y et recommencer à partir de la première étape.

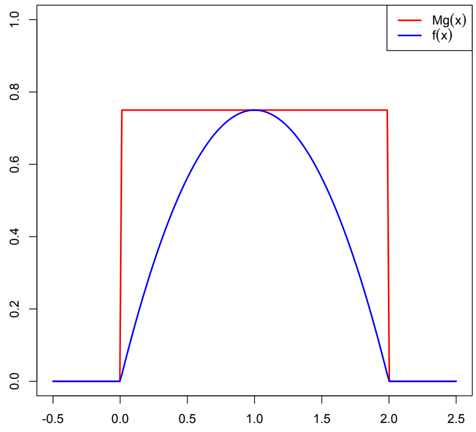

FIGURE 1 – Représentation graphique des courbes de f et Mg

```
B = 40000;  M = 3/2
x = runif(B, 0, 2);  y = runif(B, 0, M)
acc = y <= M*(2*x - x^2)
mean(x[acc]);  sd(x[acc])
## 1.002849  # Simulated E(X)
## 0.446792  # Simulated SD(X)

par(mfrow = c(1,2))  # side-by-side plots
plot(x, y, pch=".", col="red")
points(x[acc], y[acc], pch=".")
hist(x[acc], prob=T, col="wheat")
curve(.75*(2*x - x^2), 0, 2, lwd=2, col="blue", add=T)
par(mfrow = c(1,1))  # restore default plotting
```