الفصل الأول: المتغيرات العشوائية.

الدرس 2: المتغيرات العشوائية المستمرة

حل المثال 1: حتى تكون F_X دالة توزيع لمتغير عشوائي مستمر يجب أن تحقق شروط تعريف دالة التوزيع، وعليه:

نلاحظ أولا: الدالة F_X متزايدة.

ثانيا: $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ ، $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

ثالثا: F_X هي دالة مستمرة وقابلة للإشتقاق عند كل $x \in \mathbb{R}$.

حل المثال 3:

- إيجاد قيمة الثابت C.

حتى تكون f_X دالة كثافة إحتمال يجب أن تكون موجبة وعليه يجب أن يكون $C \geq 0$ و f_X يجب أن تحقق أيضا

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1$$

ومنه نجد $C = \frac{1}{4}$

حل المثال 4:

1) الدالة f_X مستمرة عند كل نقطة $x \in \mathbb{R}$، حتى عند النقطة $x = \frac{1}{3}$ فإن

$$\lim_{x \xrightarrow{<} \frac{1}{3}} f_X(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{3}} f_X(x) = \frac{5}{3}.$$

2) الدالة f_X هي دالة موجبة على مجال تعريفها.

3) $\int_{0}^{+2} f_X(x)\, dx = 1$

ومنه f_X هي كثافة إحتمال.

حل المثال 5: 1- عبارة دالة التوزيع F_X

لدينا بالتعريف $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt.$

ومنه

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , si\ x < 0 \\ \int_{-\infty}^{0} f_X(t)\,dt + \int_{0}^{x} f_X(t)\,dt, & si\ x \in [0, 2[\\ \int_{-\infty}^{0} f_X(t)\,dt + \int_{0}^{2} f_X(t)\,dt + \int_{2}^{x} f_X(t)\,dt, & si\ x \geq 2 \end{cases}$$

ومنه

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , si\ x < 0 \\ \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3, & si\ 0 \leq x < 2 \\ 1 & , si\ x \geq 2. \end{cases}$$

2- حساب الاحتمالات

$\mathbb{P}(X < 0) = \mathbb{P}(X \leq 0) = 0$

$\mathbb{P}(0 \leq X \leq 1) = F_X(1) - F_X(0) = \int_{0}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{2}.$

$\mathbb{P}(X > 1) = 1 - F_X(1) = \frac{1}{2}.$

حل المثال 6

1- الدالة f_X هي دالة مستمرة على $\mathbb{R}$، موجبة وتحقق

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$$

ومنه f_X هي كثافة احتمال.

2- حساب $E(X)$ و $Var(X)$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_{0}^{+\infty} \beta x^2 e^{-\beta x^2}\,dx = 1$$

تكامل بالتجزئة

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\, dx$$

تكامل بالتجزئة 2 مرة.

3.. كثافة احتمال $Y = \beta X^2$

لتكن F_Y دالة توزيع Y و f_Y دالة كثافة احتمال Y

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(\beta X^2 \le y) = \begin{cases} \mathbb{P}\left(|X| \le \sqrt{\frac{y}{\beta}}\right), & \text{si } y \ge 0 \\ 0, & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \mathbb{P}\left(-\sqrt{\frac{y}{\beta}} \le X \le \sqrt{\frac{y}{\beta}}\right), & \text{si } y \ge 0 \\ 0, & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} F_X\left(\sqrt{\frac{y}{\beta}}\right) - F_X\left(-\sqrt{\frac{y}{\beta}}\right), & \text{si } y \ge 0 \\ 0, & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{d\left(F_X\left(\sqrt{\frac{y}{\beta}}\right) - F_X\left(-\sqrt{\frac{y}{\beta}}\right)\right)}{dy}, \text{si } y \ge 0$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\beta y}}\left[f_X\left(\sqrt{\frac{y}{\beta}}\right) + f_X\left(-\sqrt{\frac{y}{\beta}}\right)\right], \text{si } y \ge 0$$

بالتعويض نجد

$$f_Y(y) = e^{-y} \mathbb{1}_{y \ge 0}$$

- حساب $E(Y)$ و $Var(Y)$

$$E(Y) = \int_0^{+\infty} y f_Y(y) = \int_0^{+\infty} y e^{-y}\, dy \quad (\text{تكامل بالتجزئة})$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$$

$$E(Y^2) = \int_0^{+\infty} y^2 e^{-y}\, dy$$ (تكامل بالتجزئة 2 مرة .)

حل المثال 7:

1) $$\mathbb{P}(1,2 < X < 5,2) = \mathbb{P}(1,2 - 3,2 < X < 5,2 - 3,2)$$ لدينا

$$= \mathbb{P}(-2 < X < 2)$$

---

1) $$\mathbb{P}(1,2 < X < 5,2) = \mathbb{P}(1,2 - 3,2 < X - 3,2 < 5,2 - 3,2)$$

$$= \mathbb{P}(-2 < X - 3,2 < 2)$$

$$= \mathbb{P}(|X - 3,2| < 2) \geq 1 - \frac{Var(X)}{2^2}$$

$$\geq 1 - \frac{0,64}{4}$$

$$\geq 0,84.$$

3) حساب $Var(X)$

$$\mathbb{P}(|X - 4| < 2) > 0,54 \Rightarrow \frac{Var(X)}{4} = 0,54$$

$$\Rightarrow Var(X) = 2,76$$