Université Dr.Moulay Tahar de Saida.
Faculté des Sciences
Département de mathématiques

12 novembre 2013
Durée: 1h30

# Concours d'accès à l'Ecole doctorale
## Modèles stochastiques, Statistique et Applications
## $1^{ere}$ Epreuve: Statistique Para.-NonPara.
## Sujet 3

**Exercice 1.** *Soient $f \in L^1$ (une fonction intégrable) et $K$ un noyau borné, intégrable et vérifiant $\int_{\mathbb{R}} K(x)dx = 1$ et $|xK(x)| \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow \infty$. Montrer que $f$ est continue en tout point de $x$ et*

$$\lim_{h_n \longrightarrow 0} (f * K_h)(x) = f(x)$$

*où $K_h(.) = \dfrac{1}{h} K\left(\dfrac{.}{h}\right)$ et $f * g(x) = \int g(x-y)f(y)dy$.*

**Exercice 2.** *Soit $\mathbb{P}$ la loi de probabilité de densité $\exp(-x)$ sur $\mathbb{R}^+$; on désigne par $\mathbb{P}_\theta$ la loi déduite de $\mathbb{P}$ par la translation $\theta$.*

*Déterminer l'estimateur de maximum de vraisemblance de $\theta$ au vu d'un échantillon de taille $n$ de la loi $\mathbb{P}_\theta$; étudier ses qualités.*

**Exercice 3.** *(10 points)*
*Soit $(X_1, Y_1) \dots (X_n, Y_n)$ un $n$-échantillon de $(X, Y)$ dans $\mathbb{R}^2$. On considère la fonction de répartition conditionnelle de $Y$, sachant $X$, définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad F(x,y) = \mathbb{E}\left(\psi_y(Y) | X = x\right)$$

*où $\psi_y(Y) = \mathcal{I}_{Y \leq y}$ avec $\mathcal{I}$ est la fonction indicatrice. On suppose que la densité de la variable explicative $X$ et la fonction $\mathbb{E}\left(\psi_y(Y)|X=x\right)$ vérifient la condition suivante:*

$$\exists k > 0,\ \exists C < \infty,\ \forall z \in ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[,\ |\phi(x) - \phi(z)| \leq C|x-z|^k,$$

*où $\phi$ désigne indifféremment $f$ ou $\mathbb{E}\left(\psi_y(Y)|X=x\right)$.*

(1) *Estimer la fonction $F(x,y) = \mathbb{E}\left(\psi_y(Y)|X=x\right)$ par la méthode du noyau.*
(2) *Montrer que, si :*
   (a) $\lim_{n \longrightarrow \infty} h_n = 0$ *et* $\lim_{n \longrightarrow \infty} \dfrac{nh_n}{\log n} = \infty$,
   (b) *Le noyau $K$ est borné, intégrable et à support compact,*
   (c) *La fonction $f$ est telle que $f(x) > 0$, alors, l'estimateur construit converge presque complètement et que sa vitesse de convergence est*

$$O(h_n^k) + O\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_n}}\right) \quad \textit{en p.co.}$$