Serie 1

Exercice 1

La variable aléatoire T qui associe à un composant tiré au hasard sa durée de vie exprimée en heures suit une loi exponentielle.

1. Calculer le tauxde panne, sachant que $P(T > 450) = 0,80$.
2. Calculer la MTBF de ce composant.
3. Calculer la valeur t_0 pour laquelle $P(T \leq t_0) = 0,5$.

Exercice 2

On considére un élément dont la durée de vie X est une variable aléatoire dont la densité est:

$$f(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right); \; x > 0, \sigma > 0$$

1) Donner sa fonction de fiabilité $R(x)$ et son taux de panne $h(x)$.

2) Calculer son TMBF T_0.

Exercice 3

On rappelle que la fonction gamma est définie par: $\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1} e^{-x} dx$ et que $\Gamma(n) = (n-1)!$

On considère un élément dont la durée de vie X est une variable aléatoire dont la densité est donnée par:

$$f(x) = \frac{a}{b^a} x^{a-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{b}\right)^a\right) \qquad x \geq 0, \qquad a > 0, b > 0$$

On dit que X suit la loi de Weibull de paramètres a et b notée $\mathcal{W}(a, b)$.

1) Calculer la fonction de répartition $F(x)$, en déduire la fonction de fiabilité $R(x)$.

2) Calculer le taux de panne $h(x)$; discuter selon les valeurs de b.

3) Montrer que pour tout $k \in IN^*$; $E\left(X^k\right) = b^k \Gamma\left(1 + \frac{k}{a}\right)$

4) On suppose que X suit une loi $\mathcal{W}(1, b)$

a) Quelle est la loi classique suivie par X?

b) Rappeler les valeurs de $E(X)$ et $Var(X)$ (sans calculs)

c) Calculer $P(X \geq s + t / X \geq t)$ et $P(X \geq s)$; Que remarquez-vous?

5) Soit ($X_1, X_2, ..., X_n$) n variables aléatoires i.i.d de loi $\mathcal{W}(a, b)$

a) On pose $V_n = \min(X_1, X_2, ..., X_n)$; Quelle est la loi suivie par V_n?

b) Ces n éléments sont montés en série , (le système fonctionne si et seulement si tous les éléments fonctionnent) pour former un système. Calculer la fonction de fiabilité $R_S(x)$ de ce système.

Exercice 4

On considére un élément dont la durée de vie T est une variable aléatoire dont la densité est:

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp(-(x-\theta)) \qquad x \geq \theta \qquad \theta > 0 \\ &= 0 \qquad \text{sinon} \end{aligned}$$

1) Calculer la fonction de fiabilité $R(x)$
2) Calculer $E(T)$ et $Var(T)$
3) On considére n éléments identiques de durées de vie respectives $T_1, T_2, ..., T_n$, on souhaite estimer θ, on pose:

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} T_i \qquad et \qquad Y_n = \inf_{1 \leq i \leq n} T_i$$

a) Montrer que $Z_n = X_n - 1$ est un estimateur sans biais de θ
b) Déterminer la fonction de répartition de Y_n puis une densité de Y_n
c) Montrer que $W_n = Y_n - \dfrac{1}{n}$ est un estimateur sans biais de θ
d) Calculer la variance de chacun des estimateurs Z_n et W_n. Lequel est le plus efficace?
e) donner un estimateur $\hat{R}(t)$ de $R(t)$.
4) On considére un système à n éléments identiques montés en série. Quelle est la fiabilité du système $R_S(x)$.

Exercice 5

On considére un élément dont la durée de vie est une variable aléatoire T de loi de Pareto (notée par la suite $X \longrightarrow P(a)$) et définie par sa densité:

$$f(x) = \frac{a}{x^{a+1}} \qquad si \qquad x \geq 1; \qquad a > 0$$

Où a est un réel strictement positif inconnu.
1) a) Déterminer la fonction de fiabilité $R(t)$ et le taux de panne $r(t)$ d'un tel élément.
b) Calculer $E(T)$ et $Var(T)$
2) On souhaite estimer a, pour cela on observe n éléments identiques de durées de vie respectives $T_1, T_2, ..., T_n$.
Montrer que l'estimateur par maximum de vraisemblance de a s'écrit:

$$\hat{a} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln T_i}$$

3) Montrer que la variable $Z = \ln T$ suit une loi gamma dont on déterminera les paramètres. En déduire que la loi de la variable aléatoire $U = \sum_{i=1}^{n} Z_i$ est une loi $\Gamma(a, n)$.
4) Calculer l'espérence et la variance de la variable $\frac{1}{U}$.

5) Déterminer le biais de l'estimateur $\hat{a}$. En déduire un estimateur non biaisé de a noté $\tilde{a}$ et déterminer sa variance.

6) L'estimateur $\tilde{a}$ est-il l'estimateur efficace de a ?

7) Donner un estimateur $\hat{R}(t)$ de $R(t)$ et un estimateur $\hat{r}(t)$ de $r(t)$.