CHAPITRE 3

Processus *ARMA*

Dans ce chapitre, une famille importante de processus aléatoires est introduite, les processus $ARMA$ ou processus autorégressifs moyenne mobile. Cette famille joue un rôle clé dans la modélisation de séries chronologiques.

1 Processus $ARMA(p,q)$

Dans le chapitre 2, le processus $ARMA(1,1)$ a été introduit. Des propriétés clés ont été présentées comme l'existence et l'unicité de la solution stationnaire au second ordre des équations, ainsi que les concepts de causalité et d'inversibilité du processus. Ces notions vont être étendues à un processus $ARMA(p,q)$.

Definition 1 *Un processus $ARMA(p,q)$ est un processus $\{X_t\}$ qui est solution de l'équation aux différences stochastiques*

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \epsilon_{t-q} \tag{1}$$

L'équation (1) s'écrit de façon compacte

$$\Phi(B) X_t = \Theta(B) \epsilon_t \tag{2}$$

$\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p$ *est appelé : le polynôme autorégressif d'ordre p.*

$\Theta(B) = 1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q$ *est appelé : le polynôme moyenne mobile d'ordre q.*

$\Phi(z) = 1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p$ *et* $\Theta(z) = 1 + \theta_1 z + \cdots + \theta_q z^q$ *n'ont pas de facteurs communs.*

$\{\epsilon_t\} \sim WN(0, \sigma_\epsilon^2)$. $\{X_t\}$ *est un processus $ARMA$ d'ordres (p,q).*

- Si $\Theta(z) \equiv 1$, i.e., si $q = 0$, le processus est un $AR(p)$, i.e., un processus autorégressif d'ordre p. Il est solution de l'équation

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \epsilon_t$$

- Si $\Phi(z) \equiv 1$, i.e., si $p = 0$, le processus est un $MA(q)$, i.e., un processus moyenne mobile d'ordre q. Il est solution de l'équation

$$X_t = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \epsilon_{t-q}$$

Proposition 2 *Un processus $ARMA(p,q)$ est* ***stationnaire*** *au second ordre si les racines de $\Phi(z)$ sont telles que $|z| \neq 1$. Ou encore $\Phi(z) = 1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p \neq 0$ pour tout $|z| = 1$.*

Proposition 3 *Un processus $ARMA(p,q)$ est* ***inversible*** *si les racines de $\Theta(z)$ sont à l'extérieur du disque unité*

i.e., $\Theta(z)=0 \Rightarrow |z|>1.$

Causalité

Un processus $\{X_t\}$ est un processus $ARMA(p,q)$ causal ou est une fonction causale de $\{\epsilon_t\}$ s'il existe des constantes $\left\{\psi_j\right\}$ telles que $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\left|\psi_j\right|<\infty$ et $X_t=\sum\limits_{j=0}^{\infty}\psi_j\epsilon_{t-j}, \forall t.$

Remark 4 *On dira que* $X_t=\sum\limits_{j=0}^{\infty}\psi_j\epsilon_{t-j}$ ***est la représentation*** $\mathbf{MA}(\infty)$ *du processus $ARMA(p,q)$.*

La causalité est équivalente à la condition

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= 1-\phi_1 z-\cdots-\phi_p z^p=0 \Rightarrow |z|>1\\ &\quad \text{ce qui est équivalent à}\\ \Phi(z) &= 1-\phi_1 z-\cdots-\phi_p z^p\neq 0 \text{ pour tout } \ |z|\leq 1\end{aligned}$$

Un processus $ARMA(p,q)$ est donc causal si les racines du polynôme autorégressif sont à l'extérieur du disque unité.

La suite des constantes $\left\{\psi_j\right\}$ est déterminée par la relation $\Psi(z)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}\psi_j z^j=\frac{\Theta(z)}{\Phi(z)}$ ou de façon équivalente par l'identité $(1-\phi_1 z-\cdots-\phi_p z^p)(\psi_0+\psi_1 z+\psi_2 z^2+\cdots)=(1+\theta_1 z+\theta_2 z^2+\cdots+\theta_q z^q)$.

En identifiant les coefficients des $z^j, j=0,1,2,...$, on déduit que

$$\left\{\begin{array}{l}1=\psi_0\\ \theta_1=\psi_1-\psi_0\phi_1\\ \theta_2=\psi_2-\psi_1\phi_1-\psi_0\phi_2\\ \qquad\vdots\end{array}\right. \text{ ou, de façon équivalente } \left\{\begin{array}{l}\psi_j-\sum\limits_{k=1}^{p}\phi_k\psi_{j-k}=\theta_j, j=0,1,2,...\\ \theta_0=1,\\ \psi_l=:0 \text{ si } l<0,\ \theta_l:=0 \text{ si } l>q.\end{array}\right.$$

On retiendra plus facilement les relations

$$\left\{\begin{array}{l}\psi_j=\phi_1\psi_{j-1}+\phi_2\psi_{j-2}+\cdots+\phi_p\psi_{j-p}+\theta_j,\ j=0,1,2,..,q,\ \theta_0=1,\psi_l=0 \text{ si } l<0\\ \psi_j=\phi_1\psi_{j-1}+\phi_2\psi_{j-2}+\cdots+\phi_p\psi_{j-p},\ j=q+1,q+2,.....\ \theta_l=0 \text{ si } l>q\end{array}\right.$$

Inversibilité

L'inversibilité, qui permet d'exprimer ϵ_t en fonction de $X_s, s\leq t$, possède une caractérisation similaire en termes du polynôme moyenne mobile.

Un processus $ARMA(p,q)$ est inversible s'il existe des constantes $\{\pi_j\}$ telles que $\sum\limits_{j=0}^{\infty}|\pi_j|<\infty$ et $\epsilon_t=\sum\limits_{j=0}^{\infty}\pi_j X_{t-j}, \forall t.$

Remark 5 *On dira que* $\epsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j}$ *ou encore* $X_t = -\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j X_{t-j} + \epsilon_t$ ***est la représentation*** $\mathbf{AR}(\infty)$ *du processus* $ARMA(p,q)$.

L'inversibilité est équivalente à la condition

$$\begin{aligned}\Theta(z) &= 1+\theta_1 z+\cdots+\theta_p z^p = 0 \Rightarrow |z|>1 \\ &\text{ce qui est équivalent à} \\ \Theta(z) &= 1+\theta_1 z+\cdots+\theta_p z^p \neq 0 \text{ pour tout } |z|\leq 1\end{aligned}$$

Un processus $ARMA(p,q)$ est donc inversible si les racines du polynôme moyenne mobile sont à l'extérieur du disque unité.

La suite des constantes $\{\pi_j\}$ est déterminée par la relation $\Pi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j = \frac{\Phi(z)}{\Theta(z)}$ ou de façon équivalente par l'identité $(1+\theta_1 z+\cdots+\theta_p z^p)(\pi_0+\pi_1 z+\pi_2 z^2+\cdots) = (1-\phi_1 z-\cdots-\phi_p z^p)$.

En identifiant les coefficients des $z^j, j=0,1,2,...$, on déduit que

$$\begin{cases} \pi_j - \sum_{k=1}^{p} \theta_k \pi_{j-k} = -\phi_j, j=0,1,2,... \\ \phi_0 = 1, \\ \pi_l := 0 \text{ si } l<0, \ \phi_l := 0 \text{ si } l>p. \end{cases}$$

Remark 6 *Notons que la causalité et l'inversibilité ne sont pas des propriétés du processus* $\{X_t\}$ *seul, mais plutôt de la relations entre les deux processus* $\{X_t\}$ *et* $\{\epsilon_t\}$ *qui apparaissent dans les équations définissant le processus* $ARMA$.

Remark 7 *Un processus* $AR(p)$ *est toujours inversible.*

Remark 8 *Un processus* $MA(q)$ *est toujours stationnaire et causal.*

2 Fonction d'autocorrélation (ACF) et fonction d'autocorrélation partielle $(PACF)$ d'un processus $ARMA(p,q)$

2.1 Calcul de la fonction d'autocovariance $FACV$ ou $ACVF$ (en anglais)

Soit un processus $\{X_t\}$ solution des équations $X_t = \phi_1 X_{t-1}+\cdots+\phi_p X_{t-p}+\epsilon_t+\theta_1\epsilon_{t-1}+\cdots+\theta_q\epsilon_{t-q}$. L'hypothèse de causalité implique que $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j}, \forall t$, avec $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j = \frac{\Theta(z)}{\Phi(z)}, |z|\leq 1$.

<u>*1*^{ère} méthode</u>

$E(X_t) = 0, \forall t$ (voir chapitre 2). et $\gamma_h = E(X_t X_{t-h}) = E(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j} \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \epsilon_{t-h-k})$

$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \psi_j \psi_k E(\epsilon_{t-j} \epsilon_{t-h-k})$ les seuls termes non nuls sont ceux pour lesquels $t-j = t-h-k \Leftrightarrow j = h+k$. Il y a une relation entre les indices. La somme double se réduit donc à une somme simple. $\gamma_h = E(X_t X_{t-h}) = \sigma_\epsilon^2 \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \psi_{k+h}$. Si on considère $\gamma_{-h} = E(X_t X_{t+h}) = E(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j} \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \epsilon_{t+h-k}) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \psi_j \psi_k E(\epsilon_{t-j} \epsilon_{t+h-k})$ les seuls termes non nuls sont ceux pour lesquels $t-j = t+h-k \Leftrightarrow j = k-h$.

Et donc $\gamma_{-h} = E(X_t X_{t+h}) = \sigma_\epsilon^2 \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \psi_{k-h}$. $\gamma_h = \gamma_{-h} = \sigma_\epsilon^2 \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \psi_{k+|h|}$.

<u>*2*^{ème} méthode</u>

Soit le modèle $X_t - \phi_1 X_{t-1} - \cdots - \phi_p X_{t-p} = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \epsilon_{t-q}$. Multiplions les deux membres par X_{t-h} puis appliquons l'opérateur E. Il vient :

$$\begin{aligned}
\gamma_h - \phi_1 \gamma_{h-1} - \cdots - \phi_p \gamma_{h-p} &= \sigma_\epsilon^2 \sum_{j=0}^{\infty} \theta_{h+j} \psi_j \text{ si } 0 \leq h < m = \max(p, q+1). \\
\gamma_h - \phi_1 \gamma_{h-1} - \cdots - \phi_p \gamma_{h-p} &= 0 \text{ si } h \geq m.
\end{aligned}$$

Preuve $E(X_t X_{t-h}) - \phi_1 E(X_{t-1} X_{t-h}) - \cdots - \phi_p E(X_{t-p} X_{t-h}) = E(\epsilon_t X_{t-h}) + \theta_1 E(\epsilon_{t-1} X_{t-h}) + \cdots + \theta_q E(\epsilon_{t-q} X_{t-h})$

$\Leftrightarrow \gamma_h - \phi_1 \gamma_{h-1} - \cdots - \phi_p \gamma_{h-p} = E(\epsilon_t \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-h-j}) + \theta_1 E(\epsilon_{t-1} \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-h-j}) + \cdots + \theta_q E(\epsilon_{t-q} \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-h-j})$

$\Leftrightarrow \gamma_h - \phi_1 \gamma_{h-1} - \cdots - \phi_p \gamma_{h-p} = \sigma_\epsilon^2 (\theta_h \psi_0 + \theta_{h+1} \psi_1 + \cdots + \theta_{h+q-h} \psi_{q-h})$ ce qui suppose que $p - h \geq 0$ et que $q - h > 0$, ce qui équivaut à $0 \leq h \leq p$ et $0 \leq h < q$.

D'où $\gamma_h - \phi_1 \gamma_{h-1} - \cdots - \phi_p \gamma_{h-p} = \sigma_\epsilon^2 (\theta_h \psi_0 + \theta_{h+1} \psi_1 + \cdots + \theta_{h+q-h} \psi_{q-h})$ pour $0 \leq h < m = \max(p, q+1)$. $\psi_j = 0$ si $j < 0$ et $\theta_j = 0$ si $h > q$.

Si $h \geq m$, le membre de droite est nul.