Université Mohamed khider Biskra

Faculté des sciences exactes et sciences de la nature et de vie
Département de mathématiques
Module: Martingale à temps discret.
Année: 2020/2021

TD. Temps d'arrêt

Exercice 01:
Soient $X = (X_n)_{n\geq 1}$ un processus à temps discret, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ sa filtration naturelle et t un nombre réel constant. On pose,

$$N(t) = \max\{n \in \mathbb{N}, X_1 + ... + X_n \leq t\}.$$

1) Montrer que la variable aléatoire $N(t) + 1$ est un $\mathbb{F}-$temps d'arrêt.

2) La variable aléatoire $N(t)$ est-elle un $\mathbb{F}-$temps d'arrêt? Justifier

Solution 01: On pose : $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\{N(t) + 1 = n\} &= \{N(t) = n - 1\} \\ &= \{X_1 + X_2 + ... + X_{n-1} \leq t\} \cap \{X_1 + X_2 + ... + X_{n-1} + X_n > t\} \\ &= \{S_{n-1} \leq t\} \cap \{S_n > t\} \in \mathcal{F}_n\end{aligned}$$

car :

$$\{S_{n-1} \leq t\} \in \mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n \quad \text{et} \quad \{S_n > t\} = \{S_n \leq t\}^C \in \mathcal{F}_n.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\{N(t) = n\} = \{S_n \leq t\} \cap \{S_{n+1} > t\} \in \mathcal{F}_{n+1}$$

car :

$$\{S_n \leq t\} \in \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \quad \text{et} \quad \{S_{n+1} > t\} = \{S_{n+1} \leq t\}^C \in \mathcal{F}_{n+1}.$$

et donc: $N(t)$ n'est pas un temps d'arrêt.

Exercice 02:
Soient T_1, T_2 deux temps d'arrêt adaptés à une filtration $F = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que:

1) $T_1 + T_2$, $T_1 \wedge T_2$ et $T_1 \vee T_2$ sont des temps d'arrêt.

2) Si $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $F-$temps d'arrêt, alors $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} T_n$ est $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} T_n$ sont des temps d'arrêt.

Solution 02:

1) $T_1 + T_2$, $T_1 \wedge T_2$ et $T_1 \vee T_2$ sont des temps d'arrêt.

1-1) $T_1 + T_2$ un temps d'arrêt.

Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\{T_1 + T_2 = n\} \quad = \cup_{k=0}^{n} \left(\{T_1 = k\} \cap \{T_2 = n-k\}\right) \in \mathcal{F}_n.$$

Car : $0 \leq k \leq n$, $\{T_1 = k\} \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$ et $\{T_2 = n-k\} \in \mathcal{F}_{n-k} \subset \mathcal{F}_n$.

1-2) $T_1 \wedge T_2$ un temps d'arrêt.($\inf = \min\left(T_1(\omega, T_2(\omega))\right)$.

M1) Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\{T_1 \wedge T_2 \leq n\} \quad &= \{T_1 \wedge T_2 > n\}^C \\ &= \left(\{T_1 > n\} \cap \{T_2 > n\}\right)^C \\ &= \{T_1 \leq n\} \cup \{T_2 \leq n\} \in \mathcal{F}_n\end{aligned}$$

Car: $\{T_1 \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ et $\{T_2 \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.

M2) Soit $n \in \mathbb{N}$: $\{T_1 \wedge T_2 = n\} = \left(\,\{T_1 = n\} \cap \{T_2 \geq n\}\,\right) \cup \left(\,\{T_2 = n\} \cap \{T_1 \geq n\}\right) \in \mathcal{F}_n$.

1-3) $T_1 \vee T_2$ un temps d'arrêt.($\sup = \max\left(T_1(\omega, T_2(\omega))\right)$

Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\{T_1 \vee T_2 \leq n\} \quad == \{T_1 \leq n\} \cap \{T_2 \leq n\}$$

On a : $\{T_1 \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ et $\{T_2 \leq n\} \in \mathcal{F}_n$, on trouve $\{T_1 \vee T_2 \leq n\} \in \mathcal{F}_n$, alors :

$$T_1 \vee T_2 \quad \text{un temps d'arrêt.}$$

2) Soit : $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de$F$-temps d'arrêt. On a :$\forall k \in \mathbb{N}$:

2-1) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} T_n$ un temps d'arrêt car :

$$\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}} T_n \leq k\right\} \quad = \cap_{n\in\mathbb{N}} \{T_n \leq k\} \in \mathcal{F}_k.$$

2-2) $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} T_n$ un temps d'arrêt car :

$$\left\{\inf_{n\in\mathbb{N}} T_n \leq k\right\} \quad = \cup_{n\in\mathbb{N}} \{T_n \leq k\} \in \mathcal{F}_k$$

Exercice 03:

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité sur lequel on définit deux filtrations $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{F}_n$. Soit également T un $\mathbb{F}-$temps d'arrêt et S un $\mathbb{G}-$temps d'arrêt.

- **1)** Est-ce que S un $\mathbb{F}-$temps d'arrêt? Justifier.

  2) Est-ce que T un $\mathbb{G}-$temps d'arrêt? Justifier.

Solution 03:

1) Est-ce que S un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt? Justifier.

On a : $\forall n \in \mathbb{N} : \{S \leq n\} \in \mathcal{G}$ et $\mathcal{G} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \{S \leq n\} \in \mathcal{F}$, donc: S un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt.

2) Est-ce que T un $\mathcal{G}$-temps d'arrêt? Justifier.

On a : $\forall n \in \mathbb{N} : \{T \leq n\} \in \mathcal{F}$ et $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, on ne peut rien dire.

Exercice 4:
Soient $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}, P\right)$ un espace de probabilité filtré et T et S sont deux $\mathbb{F}-$temps d'arrêt.

a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F} : \forall n \in \mathbb{N}, A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n\}$ est une tribu.

b) Montrer que $\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F} : \forall n \in \mathbb{N}, A \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n\}$.

c) Montrer que T est $\mathcal{F}_T$ -mesurable.

d) Si $A \in \mathcal{F}_S$, montrer que $A \cap \{S \leq T\} \in \mathcal{F}_T$.

e) Si $S \leq T$, montrer que $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.

Solution 04:

a) Montrons que $\mathcal{F}_T$ est une tribu sur Ω.

i) $\Omega \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ et donc $\Omega \in \mathcal{F}_T$.

ii) Si $A \in \mathcal{F}_T$, alors pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ et donc :

$$A^c \cap \{T = n\} = \{T = n\} \diagdown (A \cap \{T = n\}) \in \mathcal{F}_n,$$

comme la diférence de deux événements $\mathcal{F}_n-$mesurables. Ce que signifie que $A \in \mathcal{F}_T$.

iii) Si $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}_T$, alors :

$$\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) \cap \{T = n\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (A_k \cap \{T = n\}) \in \mathcal{F}_n.$$

d'où $\bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{F}_T$.

d'après $i)$, $ii)$ et $iii)$, on a bien $\mathcal{F}_T$ est une tribu.

b) Montrons que T est $\mathcal{F}_T$-mesurable.

Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, alors

$$\{T \in B\} \cap \{T = n\} = \begin{cases} \{T = n\} \in \mathcal{F}_n & \text{si} \quad n \in B \\ \\ \varnothing \in \mathcal{F}_n & \text{si} \quad n \notin B. \end{cases}$$

et donc : $\{T \in B\} \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$, ceci pour chaque $\{T \in B\} \in \mathcal{F}_T$ et donc: $\mathcal{T}$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable.

c) Soit $A \in \mathcal{F}_S$, alors pour chaque $n \in \mathbb{N}$:

$$(A \cap \{S \leq T\}) \cap \{T \leq n\} = \bigcup_{k=0}^{k=n} [(A_k \cap \{S \leq T\}) \cap \{T = k\}] \in \mathcal{F}_n,$$

d'où $A \cap \{S \leq T\} \in \mathcal{F}_T$.

d) Si $S \leq T$, montrons que $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.

Si $A \in \mathcal{F}_S$, d'après i), on obtient :

$$A = A \cap \{S \leq T\} \in \mathcal{F}_T \quad (\text{ car } \{S \leq T\} = \Omega),$$

d'où $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.

Exercice 05:

Temps de premier succès ou du premier échec. Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite aléatoire i.i.d de loi de Bernoulli:

$$P(X_1 = 0) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé, la variable aléatoire $N_n = \inf\{k \in \mathbb{N} : X_{n+k} = 0\}$ est un temps d'arrêt adapté à la filtration

$$\{\sigma(\{X_0, ..., X_{n+m}\})\}_{m\in\mathbb{N}}$$

2) Calculer la probabilité que N_n soit égale à 0 infiniment souvent (ie: $P(\lim_n \sup(N_n = 0))$).

3) Même question pour la valeur 1 (on considérera la suite d'événements $(N_{2n} = 1)_{n\in\mathbb{N}}$).

Solution 05:

1/ Remarquons que N_t compter le nombre de 1 avant le premier 0 dans le suite $(X_k)_{k\geq 0}$ à partir de l'instant n. C'est un temps d'arret puisque

$$\{N_n = m\} = \left(\bigcap_{k=n}^{k=n+m-1} \{X_k = 1\}\right) \cap \{X_{n+m} = 1\} \in \mathcal{F}_m$$

car : $\{X_k = 1\} \in \mathcal{F}_{m-1} \subset \mathcal{F}_m$ et $\{X_{n+m} = 1\} \in \mathcal{F}_m$.

2/ L'événement ‹ N_n est egale a 0 infiniment souvent › est egal : $\overline{\lim}(\{N_n = 0\})$, on a $\{N_n = 0\} = \{X_n = 0\}$, ces événements forment une suit des évenements indépendants. De plus $P(X_n = 0)$ diverge. Par le lemme de Borel cantelli

$$P\left(\overline{\lim}\{N_n = 0\}\right) = 1.$$

3/ Les événement $\{N_n = 1\} = (X_{2n} = 0, X_{2n+1} = 1)$ forme une suite des évenements indépendants. Comme $P(N_{2n}) = \dfrac{1}{4}$ et la série de terme général $P(N_{2n}) = 1$ diverge. Alors : $P\left(\overline{\lim}\{N_{2n} = 1\}\right) = 1$ et comme $(\{N_{2n} = 1\})_{n\in\mathbb{N}} \subset (\{N_n = 1\})_{n\in\mathbb{N}}$ on a donc $\overline{\lim}\{N_{2n} = 1\} \subset \overline{\lim}\{N_n = 1\}$ ainsi $1 = P\left(\overline{\lim}\{N_{2n} = 1\}\right) \leq P\left(\overline{\lim}\{N_n = 1\}\right) \leq 1$, d'où

$$P\left(\overline{\lim}\{N_n = 1\}\right) = 1.$$

Remarque : Les évenements $\{N_n = 1\} = (X_n = 0, X = 1)$ ne forment pas une suite des événements indépendants.

Exercice 6 :(Identité de Wald)

Soient $(Y_n)_{n\geq 1}$une suite de v.a.r. indépendantes, intégrables, de même loi et T un temps d'arrêt intégrable. On pose $X_0 = 0$ et $X_n = Y_1 + Y_2 + ... + Y_n$ pour $n \geq 1$. Montrer que

$$E(X_T) = E(Y_1)E(T).$$

Solution 06:

Nous avons :

$$E[X_T] \quad = \sum_{n\geq 0} E\left[\mathbf{1}_{\{T=n\}} \sum_{i=0}^{i=n} Y_i\right]$$

Par le théorème de Fubini, on trouve :

$$\begin{aligned}
E\left[X_T\right] &= \sum_{i\geq 0} E\left[Y_i \sum_{n\geq i} \mathbb{1}_{\{T=n\}}\right] \\
&= \sum_{i\geq 0} E\left[Y_i \ \mathbb{1}_{\{T\geq i\}}\right] \\
&= \sum_{i\geq 0} P\left[\{T\geq i\}\right] E\left[Y_i\right] = E\left[Y_0\right].E\left[Y_1\right]
\end{aligned}$$

Car $\mathbb{1}_{\{T\geq i\}}$ est indépendante de Y_i puisque

$$\{T\geq i\} = \{T < i\}^c = \{T\leq i-1\}^C \in \sigma\left(Y_0, Y_1, ..., Y_{i-1}\right).$$