Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Université Hassiba Benbouali de Chlef
Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة حسيبة بن بوعلي بالشلف
كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي
قسم الرياضيات

U.H.B.C. Chlef
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département des Mathématiques

Année Universitaire: 2018/2019
Niveau: 1ère Master/ Option: M.A.S.
Module: Processus Stochastiques 1.

EXAMEN DE RATTRAPAGE

Exercice 1 :

Soit la chaîne de Markov d'espace d'états $\mathbb{N}$, de matrice de transition définie par :

$$\begin{array}{ll} p_{i,0} = p_i, & p_{i,i+1} = 1 - p_i; \\ \forall i \in \mathbb{N} & 0 < p_i < 1. \end{array}$$

(1) Dessiner le graphe de la chaîne ; en déduire qu'elle est irréductible.

(2) À quelle condition est-elle récurrente ? [Rappel : si pour tout i, $0 < x_i < 1$, alors le produit infini $\Pi_{i=1}^{+\infty}(1 - x_i)$ est nul ssi $\sum_{i=0}^{+\infty} - \ln(1 - x_i)$ diverge.]

(3) Si $\forall i$, $p_i = p$, montrer que la chaîne est récurrente positive.

Exercice 2 :

Une entreprise de location de voitures possède N voitures ; chacune d'elles peut tomber en panne avec un taux de panne égal à μ ; la durée de sa réparation est de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Soit X_t le nombre de voitures disponibles au temps t.

(1) Démontrer que $(X_t)_t$ est un processus de naissance et de mort.

(2) Déterminer la distribution stationnaire π.

Exercice 3 :

Soit $\{X(t), t \geq 0\}$ un processus de Naissance et de Mort d'espace d'états $E = \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$, de taux de naissance

$$\lambda_k = \begin{cases} 0 \; pour \; k = 0, \ldots, 4 \\ \lambda \; pour \; k = 5, \ldots, 9 \end{cases}$$

avec $\lambda > 0$, et de taux de mortalité

$$\mu_k = \begin{cases} \mu \quad pour \quad k = 1, \ldots, 5 \\ 0 \; pour \; k = 6, \ldots, 10 \end{cases}$$

avec $\mu > 0$.

(a) Tracer le diagramme de transition.

(b) Supposons que $X(0) = 5$.

- Calculer le temps moyen de la première atteinte de l'état "0" ou de l'état "10".

Exercice 3 :

a) Donner un exemple d'un processus de naissance et de mort transitoire.

b) Donner un exemple d'un processus de naissance et de mort récurent positif.

Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Université Hassiba Benbouali de Chlef
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

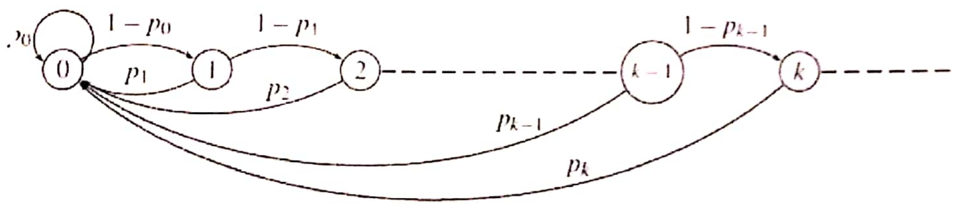
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة حسيبة بن بوعلي بالشلف
كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي
قسم الرياضيات

U.H.B.C. Chlef
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département des Mathématiques

Année Universitaire: 2018/2019
Niveau: $1^{ère}$ Master/ Option: M.A.S.
Module: Processus Stochastiques 1.

EXAMEN DE RATTRAPAGE Corrigé-Type

Exercice 1 :



(1) La chaîne est irréductible étant donné la structure de son graphe.

(2) Il suffit donc de montrer que l'un des états, par exemple 0, est récurrent pour s'assurer que la chaîne est récurrente.

$P(\text{temps de retour en } 0 \text{ soit fini}) = 1 - P(\text{temps de retour en } 0 \text{ soit infini})$

$= 1 - \prod_{i=0}^{+\infty}(1-p_i)$, donc 0 est récurrent si $\prod_{i=0}^{+\infty}(1-p_i) = 0$.

Ce qui équivaut à : $\ln\left(\prod_{i=0}^{+\infty}(1-p_i)\right) = \sum_{i=0}^{+\infty}\ln(1-p_i) = -\infty$. Sachant que, si x est proche de 0, $-\ln(1-x) \sim x$, la série précédente est de même nature que $-\sum_{i=0}^{+\infty} p_i$.

Conclusion : 0 est récurrent si et seulement si $\sum_{i=0}^{+\infty} p_i = +\infty$.

(3) La chaîne est récurrente positive si l'espérance de T_0, temps de retour en 0, est finie.

$$P(T_0 = n) = P(T_0 > n-1) - P(T_0 > n) = p(1-p)^{n-1},$$

donc T_0 est une v.a. géométrique $\mathscr{G}(p)$ et $E(T_0) = \frac{1}{p}$: la chaîne est donc récurrente positive.

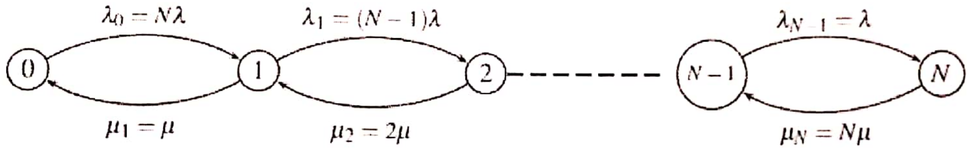
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Université Hassiba Benbouali de Chlef
Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة حسيبة بن بوعلي بالشلف
كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي
قسم الرياضيات

Exercice 2 :

(1) $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus de Markov continu dont les seules transitions se font d'un état quelconque vers les états contigus ; c'est donc un processus de naissance et de mort de diagramme de transition :



Taux de transitions : $\lambda_i = (N-i)\lambda$ et $\mu_i = i\mu$ pour $0 \leqslant i \leqslant N$. En effet :

« 0 » est l'état « aucune voiture n'est disponible » ; autrement dit, toutes sont en réparation et le taux de sortie d'une voiture des ateliers est donc égal à $N\lambda$. Lorsqu'il y a une seule voiture en marche (état 1), elle peut tomber en panne avec un taux égal à μ.

$$(2)\ \pi_0 = \left(1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2} + \cdots + \frac{\lambda_0\cdots\lambda_{N-1}}{\mu_0\cdots\mu_N}\right)^{-1}$$

$$= \left(C_N^0 + \frac{\lambda}{\mu}C_N^1 + \cdots + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^N \frac{N}{1}\frac{N-1}{2}\cdots\frac{1}{N}\right)^{-1} = \left(\frac{\mu}{\mu+\lambda}\right)^N.$$

d'où par définition des π_j, $\pi_1 = \pi_0\frac{\lambda_0}{\mu_1} = \left(\frac{\mu}{\mu+\lambda}\right)^N \frac{N\lambda}{\mu}$ et $\pi_j = C_N^j\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{N-j}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^j$.

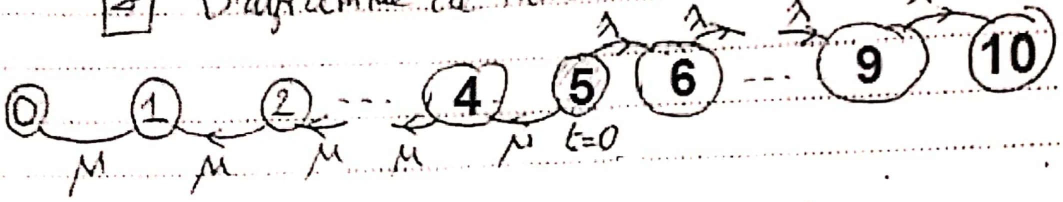
La distribution stationnaire est donc de loi binomiale $\mathscr{B}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\ ;\ N\right)$.

Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Université Hassiba Benbouali de Chlef
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة حسيبة بن بوعلي بالشلف
كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي
قسم الرياضيات

Exercice 3 : étape non justifiée =0

$\boxed{a}$ Diagramme de transition :



$\boxed{b}$ N(0)=5 i.e qu'on démarre du milieu.
On a 2 cas possibles pour la transition suivante.
E_N : " La transition suivante est une Naissance "
ou bien E_D : " La transition suivante est un Décès "
Alors, comme $E_N \cup E_D = \Omega$, on a

$$\mathbb{E}(T/N(0)=5) = \mathbb{E}(T/N(0)=5, E_N)\,\mathbb{P}(E_N/N(0)=5) + \mathbb{E}(T/N(0)=5, E_D)\,\mathbb{P}(E_D/N(0)=5).$$

$$\mathbb{E}(T/N(0)=5) = \frac{5}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{5}{\mu}\cdot\frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{10}{\lambda+\mu}$$

$\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{\lambda}$ Proba d'avoir Naissance avant Décès $\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{\mu}$ Proba d'un Décès avant Naissance

Exercice 4 :

Chaque exemple avec justification : de la transience et de la récurrence positive = 1 point