Université de Sidi bel Abbès
Faculté des Sciences Exactes
Département de Proba-Stat

Année 2018-2019
Modélisation et Simulation
1ère Année Master PA & SA

Examen final: Corrigé

Exercice 1. ⟦ *4=1+3 pts* ⟧

1. $1 = \int f(x)dx = 2\int_0^\infty Mxe^{-x^2} = M[-e^{-x^2}]_0^\infty = M$. *Donc* $M = 1$.

2.

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x^2} & si\ x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x^2} & si\ x \geq 0 \end{cases} \qquad F^{-1}(y) = \begin{cases} -\sqrt{-\log(2y)} & si\ y < \frac{1}{2} \\ \sqrt{-\log(2-2y)} & si\ y \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Algorithme. **1. Simuler** $U \sim \mathcal{U}[0,1]$. **2.** $X = F^{-1}(U)$.

Exercice 2. ⟦ *5=2+1+2 pts* ⟧

1. $\sigma > \frac{1}{\sqrt{2}}$. $c_{opt} = \frac{\sqrt{2\pi}M}{e}\frac{2\sigma^3}{2\sigma^2-1}$.
2. $\sigma^* = \sqrt{\frac{3}{2}}$.
3. ***Programme***

```
f=function(x) x*x*exp(-x*x); sigma=sqrt(3/2) ;g=function(x) dnorm(x,0,sigma)
c=(2*sqrt(2*pi)/exp(1))*(sigma^3)/(2*sigma^2-1); n=1e6; U=runif(n); X=rnorm(n,0,sigma);
Acc=U<(f(X)/(c*g(X))); taux=mean(Acc) ; sig=sd(Acc); z=qnorm(1-0.02/2)
bi=taux-z*sd(Acc)/sqrt(n) ; bs=taux+z*sd(Acc)/sqrt(n)
binf=1/(binf*c) ; bsup=1/(bsup*c)
```

Exercice 3. ⟦ *6=3.5+2.5 pts* ⟧

1.
```
rand=function(n,mu,sigma,theta){
K=1/(1-dpois(0,theta))
nb=n*K*1.1
m=rpois(nb,theta)
m=m[m>=1]
m=m[1:n]
X=rnorm(n,m*mu, sqrt(m)*sigma)
return(X)
}
```

2. ***La loi de poisson tronquée.***

```
rpois2 = function (n , lamda ) {
K=1/(1-exp(-lamda))
 U=runif (n)
 X=rep(0 , n)
 for ( k in 1 : n){
 i=1
 p=K*lamda*exp(-lamda )
 P=p
 while (U[k]>P) {
 i=i+1
 p=p*lamda/ i
 P=P+p
}
```

```
 X[ k ]= i
 }
return (X)
}
```

La loi normale

```
rnorm2=function(n,mu,sigma){
U=runif(n)
V=runif(n)
Z=sqrt(-2*log(U))*cos(2*pi*V)
X=mu+Z*sigma
return(X)
}
```

Exercice 4. ⟦ ***4=2+2 pts*** ⟧

1. *Simuler* $X \sim \mathcal{U}[-1/2, 1/2]$; $Y \sim \mathcal{U}[-1/2, 1/2]$; $Z \sim \mathcal{U}[-1/3, 1/3]$
Prendre $g(x,y,z) = \frac{4}{3}\exp(1 + sin(\frac{xy+z}{10}))$

2.

$$C = \frac{4e}{3}\frac{XY+Z}{10}. \quad \mu_C = 0.$$

3.

$$f(x,y,z) = K|xy+z|\mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(x)\mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(y)\mathbf{1}_{[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]}(z)$$

où K *est la constante de normalisation qu'on peut calculer analytiquement. La densité* f *est simple à simuler avec la méthode de rejet.*

Exercice 5. ⟦ ***4=3+1 pts*** ⟧

1.
```
n=1e7
X1=runif(n)
Y1=runif(n)
acc1=(Y1-0.5)^2+(X1-0.5)^2<.25
X1=X1[acc]
Y1=Y1[acc]
X2=runif(n,-1.5,-.5)
Y2=runif(n,-1.5,-.5)
acc2=(Y2+1)^2+(X2+1)^2<.25
X2=X2[acc2]
Y2=Y2[acc2]
m=min(length(X1),length(X2))
D=sqrt((X1-X2)^2+(Y1-Y2)^2)
D=D[1:m]
binf=mean(D)+sd(D)*1.96/sqrt(m)
bsup=mean(D)-sd(D)*1.96/sqrt(m)
```

2. `(length(acc)+lenth(acc2))/(2*n)`

Durée: 1h30. **Documents non autorisés.**
Bon courage. **Le barème est donné à titre indicatif.**