01/03/2021 الأحد

# Processus stochastique.

عملية عشوائية

1) Généralité sur les processus aléatoire العشوائية
(stochostique)
2) Des exemples sur les processus. أمثلة
1) processus de Markov temps continu.
2) Chaines de Markov
3) Processus de poisson
4) mouvement Brownien.
5) processus gaussien.

## 1) Généralité sur les processus aléatoires

considérons $(\Omega, F, P)$ un espace de proba. on va s'intéresser à des phénomènes dépandant du temps ce qui st connu à la date $t$ est rassemblé dans une tribu $F_t$ c'est l'information à la date $t$

### Déf

تعريف ... تزايدية

une filtration est une famille croissante de sous tribu de $F$ c'est-à-dire

$$F_t \subset F_s \;;\; \forall t \leq s$$

$X : (\Omega, F, P) \longrightarrow \mathbb{R}$

$\Omega = \{w_1 \ldots\ldots w_n\}$ : $X(w_1) = x_1$

$X : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ ; $X(t, w)$ :

$\forall t \in T$ ; $X(t, \cdot)$ une v.a

$\forall w \in \Omega$ ; $X(\cdot, w)$

$\forall t \in T$ ; $(\Omega, F, P) \longrightarrow \mathbb{R}$ une v.a

$F_t$ - mes

$\{X(t) = X(\omega)\}_{t \in T}$ : $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}, P) \to \mathbb{R}$

filtration مكانش ← مكانش بيرو سيس
الف امبيقا ← الف تزاينو

On demande souvent que les ensembles négligeables soient contenus dans $\mathcal{F}_0$ on parle d'hypothèses habituelles si

1) Les ensembles négligeables sont contenus dans $\mathcal{F}_0$

2) La filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ est continue à droite au sens où $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$

## Remarque

une filtration $G = \{G_t\}_{t\in T}$ est dite plus gross que la filtration $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ si $\mathcal{F}_t \subset G_t$, $\forall t \in T$.

$T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$

$\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_{t_1}, \mathcal{F}_{t_2}, \mathcal{F}_{t_3} \dots\}$

$T = [0, T], \mathbb{R}, \mathbb{N}$

$\mathcal{F}_{t_1} \subset G_{t_1}$

## Déf

**Processus aléatoire**: Un processus aléatoire est une famille de variable aléatoire $\{X(t), t \in T\}$ définit sur $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$

$X(\cdot, \cdot) : \Omega \times T \to \mathbb{R}$

dépendant d'un paramètre $t \in T \subset \mathbb{R}$.

Lorsque $T = \mathbb{N}$ on dit que on un processus

à temps discret ou une suite qu'on a un.
processus à temps continu.

$T$ : l'ensemble d'indice

- pour tout $t$ fixe la v-a $x(t)$ est appelle.
la valeur du processus $x(\cdot) = \{x(t), t \in T\}$
- Lorsque $w$ est fixé la fonction réele $x(w, \cdot)$
est appellée une trajectoire du processus
$\{x(t), t \in T\}$. التذاوب

2021 / 03 / 23 الثلثاء
ص 2

Déf : une processus aléatoire $X(\cdot) = \{X(t), t \geq 0\}$.
est dit adopté par rapport à une filtration
$\{F_t, t \geq 0\}$ si la v.a $X(t)$ et $F(t)$ mesurable
$\forall t \geq 0$
تكييف مقارنة الترشيح

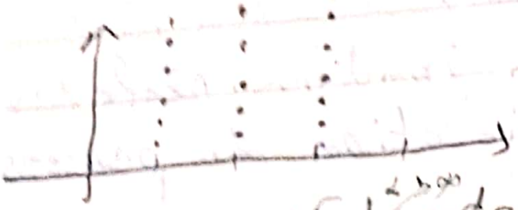
Déf :
On dit que le processus $\{x(t), t \geq 0\}$.
est trajectoires continues (ou est continu)
si les application $t \longrightarrow x(t, w)$ sont continues تناوب مستمر
pour presque tout $w$
التناوب

déf :
?
Une processus aléatoire est dit càdlàg
(continue à droite, pourvu de limites
à gauche) si ses trajectoires soit continues
à droite, pourvues de limite à gauche.

$\lim_{} f(m) < $ نفس الشيئ نبدل الكلمة
$m < n$ gauche $\Rightarrow$ adroit. مع اليمين
$\lim_{x \to x_0} f(m)$ $x_0$ $\Rightarrow$

A un processus aléatoire $X(\cdot)$ on associe sa filtration naturelle $\{F^X(t)\}_{t\geq 0}$ c'est à dire la famille croissante de tribues

$F^X_{(t)} = \sigma(X(s), s\leq t)$



$X(t)$ et $(F_t)_{t\geq 0}$ adapte $\Longrightarrow$ $\forall t$ la v.a $X(t)$ et $F^X_t$ - mesurable.

$E(X(t)/F_s) = \begin{cases} & s>t \\ & s\leq t \end{cases}$

لمكن التنبأ بها

**Def** Soit $(\Omega, F, P)$ un espace probabilisé muni d'une filtration $(F_t)_{t\geq 0}$ on appelle tribu des prévisibles la tribu sur $(0,+\infty)\times\Omega$ par les rectangles de la forme $]s,t]\times A$, $0\leq s\leq t$ $A\in F_s$ un processus $\{X(t)\}$ et dit prévisible si et seulement si $(t,w)\longrightarrow X(t,w)$ est mesurable par rapport à la tribu des prévisibles.

**Def** on dit que deux processus $X(\cdot)$ et $Y(\cdot)$ $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ et $\{Y(t)\}_{t\geq 0}$ sont égaux à une modification près si

$X(t) = Y(t)$ .. P - sûre $\forall t$

$X(t) = Y(t)$

"4 =

**Déf**

Deux processus sont égaux en loi $X(\cdot) \overset{loi}{=} Y(\cdot)$ si $\forall (t_1, t_2, t_n)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$(X(t_1) \longrightarrow X(t_n))^T \overset{loi}{=} (Y(t_1) \longrightarrow Y(t_n))^T$

الأحد 28 / مارس / 2021
محاضرة رقم "03"

**Déf**

On dit que le processus $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ appartient à $L_p$ et on note $X(t) \in L_p$, $t \geq 0$ si

$E|X(t)|^p < \infty \quad (L_p(\Omega, F, P))$. $\forall t \geq 0$

**Remarque**

Soit $X(t) \in L_p(\Omega, F, P)$ $\forall t \geq 0$ Dans ce cas nous pourrons définir les fonction

$E(X(t)) = m(t)$, et $R(s,t) = E[(X(s) - m(s))(X(t) - m(t))]$
$= cov(X(s), X(t))$

qui l'on appelle la moyenne et la fonction de corrélation du process $X(\cdot)$

Il est évident que $R(s,t) = R(t,s)$, $\forall s, t \geq 0$

**Déf**

on dit que le processus $\{X(t)\}$ est strictement stationnaire : si pour tout $n$-uple de temp $t_1 < t_2 \ldots < t_n$ $(t_i \in \mathbb{R})$ et pour tout

temps $h \in \mathbb{R}$ la vecteur aléatoire $(X(t_1+h) \dots X(t_n+h))$
ci la même loi que.
le vecteur $(X(t_1) \dots X(t_n))^T$
i.e :

$$F_{t_1, t_2 \dots t_n}(x_1 \dots x_n) = F_{t_1+h, t_2+h, \dots t_n+h}(x_1 \dots x_n)$$

tq : $F_{t_1 \dots t_n}$ est la fct de répartition du $(X(t_1) \dots X(t_n))$

et $F_{t_1+h \dots t_n+h}$ est la fct de " du $(X(t_1+h) \dots X(t_n+h))$

En particulier $n=1$ $p(X(t) \leq x) = F_t(x) = F_{t+h}(x)$ ?
$= p(X(t+h) \leq x)$

Déf

on dit que le processe $\{X(t), t \geq 0\}$ est faiblement out tout simplement stationnaire si

$$\begin{cases} E(X(t)) = m, \forall t \geq 0 \\ Var(X(t)) = \delta^2, \forall t \geq 0 \\ cov(X(t), X(t+h)) = r(h) \quad \forall t, h. \end{cases}$$

Rq

on dit que $r(h)$ est la fonction de covariance ou de corrélation du processus $\{X(t)\}$

Rq

$r(\cdot)$ est une fonction paire si $\{X(t)\}$ est stationnaire



CamScanner الممسوحة ضوئيا بـ

**thèm**

si le processus $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ est strictement stationnaire tq $E(|X(t)|^2) < \infty$ alors $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ est faiblement stationnaire.

**thèm : (Bochner et Khintchine.)**

Soit $\{X(t)\}$, $t\geq 0$ un processus stationnaire tq sa fonction de correlation $r(h)$ est absolument integrable sur $\mathbb{R}$, $\int_{\mathbb{R}} |r(t)|\, dt < \infty$. Dans ce cas il existe la densité spectrale $f(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ du processus $\{X(t)\}$ tq $r(h) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, e^{ih\lambda}\, d\lambda$

De ce thm il suit que

$$\boxed{f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} r(h)\, e^{-h\lambda}\, dh.}$$

On dit que le processus $\{X(t)\}$ est stationnaire avec spectre continu.

**Déf**

On dit que $F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} f(s)\, ds$, $\lambda \in \mathbb{R}$ est la fonction spectrale du processus $\{X(t)\}$.

**Rq :**

il suit que si $r(0) = 1$ alors fonction spectrale : $F(\cdot)$ est une fonction de répartition.

$r(0) = 1 = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\, d\lambda$ donc car $f(\cdot)$ est une densité de proba.

المحاضرة رقم "4"
الثلاثاء 30 / 03 / 2021

## def : tem ergodique pour les processus stationnaire :

soit $\{x(t)\}$ un processus stationnaire si
$r(t) \longrightarrow 0$  $t \longrightarrow +\infty$ alors
$y(T) = \frac{1}{T} \cdot \int x(t) \cdot dt \xrightarrow{moq} 0$

## Déf

Soit $\{x(t)\}$ un processus stationnaire on dit que $\{x(t)\}$ est un bruit blanc si :

. $x(t) \longrightarrow x(t_n)$ sont independantes 2 à 2
$\forall\, t_n \longrightarrow t_n \ (t \geq 0)$ de fonction de corrélation de ce processus est $r(t) = \delta^2 \chi(n)$ si $\{x(t)\}$ est un processus stati. de bruit blanc et $x(t) \longrightarrow N(0, \delta^2)$, $\forall\, t \geq 0$

## Différentiation et integration d'un processus aléatoire

Soit $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$ un processus aléatoire $E[|X(t)|^p] < \infty$
si $p=1$ ou $p=2$ le processus $\{X(t)\}$ continu.
en $s$ si $\lim_{t \to s} \| x(t) - x(s) \|_{L^p} = 0$, $E|x(t) - x(s)| \xrightarrow[t \to s]{p=1} 0$
$E|x(t) - x(s)|^2$ ou $p=2$

On dit que $\{x(t)\}$ est derivable en $s$ s'il existe un élément $x'(s) \in L^p$ tq : $\lim_{t \to s} \left\| \frac{x(t) - x(s)}{t - s} - x'(s) \right\|_{L^p} = 0$

**déf**

Soit $\{x(t),\ t\in[a,b]\subset\mathbb{R}\}$, $E|x(t)|^2<\infty$, un processus aléatoire stochastiquement continue en moyenne quadratique.

$$\|x(t+\Delta t)-x(t)\|_2^2 = E\,|x(t+\Delta t)-x(t)|^2 \longrightarrow 0$$

(esp de Hilbert) lorsque $\Delta t \longrightarrow 0$

$x(t)$, $t\in T=[a,b]$ est un courbe continue de $L_2(w)$ (espace Hilbert) on définit l'intégral stochastique de Rieman

$I(x)=\int_T X(t)\,dt$ comme la limite en $L_2(w)$ de somme de Darbaux :

$$I(n)=\lim \sum_{i=1}^{n} X(t_i)(t_{i+1}-t_i) \text{ ou } a\le t_1\le t_2 \ldots \le t_n$$

$$\max(t_{i+1}-t_2)\longrightarrow 0$$

Il existe evident que $I_n(n)=\sum_{i=1}^{n} X(t_i)(t_{i+1}-t_i)\in L_2(w)$

$$I_n(n)\xrightarrow{L_2} I(n)$$

**Proposition**

$$\|I(n)-I_m(x)\|_2 \longrightarrow 0 \text{ ssi } \|I_n(n)-I_m(n)\|_2 \to 0$$

$$n\longrightarrow +\infty$$

adopté

المحاضرة رقم "5"
2021/04/15

$\lambda(t,s) = \lambda \cdot f$ (بسيط) intensité
le paramètre l'intensité.

## processus de Poisson

**Déf**

On dit que le processus aléatoire $X(t)$, $t \geq 0$ est un processus de Poisson de paramètre les paramètre d'intensité $\lambda$ (l'intensité $\lambda t$) الشدة

$0 \leq t_0 < t_1 < t_2$

$X(t_2) - X(t_1)$

$X(t_1) - X(t_0)$.

$\lim_{\Delta t \to 0} (f(t+\Delta t) - f(t)) = 0$

$\lim_{\Delta t \to 0} P(X(t+\Delta t) - X(t)) = 0$
$= 1$

d'intensité $\lambda > 0$. Si :

1) $X(0) = 0$.

2) $\forall t, t_0 \longrightarrow t_n$ avec $0 \leq t_0 < t_1 \leq t_2 \longrightarrow < t_n$ les accroissements $X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1)$ $\dots X(t_n) - X(t_{n-1})$ sont indépendant

3) $\forall s$ et $t$ $0 \leq s \leq t$ l'accroissement $X(t) - X(s)$ suit une loi de Poissons de paramètre. $\lambda(t-s)$

$$P(X(t) - X(s) = K) = (\lambda(t-s))^K \frac{e^{-\lambda(t-s)}}{K!}$$

$K \in \mathbb{N}$

**Rq**

$m(t) = E(X(t)) = \lambda t$, $t \geq 0$

$Var(X(t)) = \lambda t$, $t \geq 0$

Rq

Soit $\Delta t > 0$. Dans ce cas, de (*)

$P(X(t+\Delta t) - X(t) = 0) = e^{-\lambda \Delta t} = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$

lorsque $\Delta t \to 0$.

et donc $X(t)$ est stochastiquement continu.

D'autre part : $P(X(t+\Delta t) - X(t) = 1) = \lambda \Delta t e^{-\lambda \Delta t}$

$= \lambda \Delta t + o(\Delta t)$

lorsque $\Delta t \to 0$.

~~En effet~~ Enfin, on remarque que

$P(X(t+\Delta t) - X(t) \geq 2) = 1 - P(X(t+\Delta t) - X(t) = 0)$

$- P(X(t+\Delta t) - X(t) = 1)$

0 يوتيت $= 1 - 1 + \lambda \Delta t - o(\Delta t) - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$.

$o(\Delta t) \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} 0$

$O(\Delta t) \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} 0$

الفرق بينهم

0 قروتة

$\frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} 0$.

$\frac{O(\Delta t)}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{}$ C est ثابت

$2 o(\Delta t) = o(\Delta t)$ آندبوندنتا

الفرق بين الزمن $\Delta t$

• $P(X(t+\Delta t) \geq k+2 / X(t) = k) = o(\Delta t)$

$= \frac{P(X(t+\Delta t) \geq 2 ; X(t) = k)}{P(X(t) = k)}$

$X(t+\Delta t)$, $\cancel{\perp\!\!\!\perp}$ $(X(t))$

$X(t+\Delta t) - X(t) \perp\!\!\!\perp X(t) - X(0)$

$X(t_2) - X(t_1)$

$\frac{P(X(t+\Delta t) - X(t) > 2-k, X(t) = k)}{P(X(t) = k)}$

$= \frac{P(X(t+\Delta t) - X(t) \geq 2-k, X(t) = k)}{X(t) = k}$

$$\frac{P(X(t+\Delta t) - X(t) \geq 2-k \mid P(X(t)=k)}{P(X(t)=k)}$$ ثم يكمل

Rq on mat

par (*) : $P_n(t) = P(X(t)=n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$

et donc $P_0(0) = P(X(0)=0) = 1$

alors $1 - P_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(t) = P(X(t) \geq 1) = \lambda t + o(t)$ lorsque $t \to 0$

يكون عند ك بروسيسور ماركوف عنو د جينيباتور

بروسيسر ريجاسوق ديحتاج د ميناتور :

et donc $\frac{1 - P_0(t)}{t} \to \lambda$ lorsque $t \to 0$

المحاضرة رقم 6 :

الثلاثاء : 20/ 4/ 2021

Soit $0 \leq s \leq t$ alors $X(s)$ et $X(t-s)$ sont independe
et donc $cov(X(s), X(t-s)) = 0$
dans ce cas $R(s,t) = cov(X(s), X(t))$
$= cov(X(s), X(t) - X(s) + X(s))$
$= cov(X(s), X(t) - X(s)) + \boxed{Var(X(s))}$
لأنه يوافق المتغير $= \boxed{\lambda s}$
$= \lambda \min(s,t)$

d'un autre que $X(t)$ n'est pas stat.

processus de Poisson et temps d'attente

Soit $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ un Processus de Poisson
de paramètre d'intensité $\lambda > 0$. عدد الفترات
la v.a $X(t)$, $\forall t \geq 0$ nous donne le nombre
de sauts de processus dans l'intervalle $[0,t]$
Notons $T_1$ le temps d'attente de premier
saut. Il est (évident) que $\forall t \geq 0$. الانتظار الأول
$P(T_1 > t) = P(X(t) = 0) = e^{-\lambda t}$.
et donc la fonction de répartition.
de $T_1$ est $F(t) = P(T_1 \leq t) = 1 - P(T_1 > t)$
$= 1 - e^{-\lambda t}, t \geq 0$.
d'on onteré que la densité
$f_{T_1}(t)$ de $T_1$ est $f_{T_1}(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0$.

ie: $T_1$ suit la loi exponentielle de paramètre
$\lambda > 0$ et $E(T_1) = \frac{1}{\lambda}$, $Var(T_1) = \frac{1}{\lambda^2}$
De la même façon, si $T$ représente le temps
d'attente du prochain saut quand

CamScanner الممسوحة ضوئيا بـ

On choisit comme une origine un moment $s \geq 0$, donc :

$$P(T > t) = P(X(t+s) - X(s) = 0) = e^{-\lambda t}$$

Notons que :

$$P(T - s > t \mid T > s) = \frac{P(T - s > t, T > s)}{P(T > s)}$$

$$= \frac{P(T > s+t, T > s)}{P(T > s)} = \frac{P(T > s+t)}{P(T > s)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t}$$

$s \qquad s+t$

pg

[illegible] $]s, +\infty[$ [illegible] $]s+t, +\infty[$

On a un cette propriété de perte de mémoire dans un modèle de la loi géométrique.

ملاحظة

Notons $T_k$ le moment du $k$-ème saut du processus $\{X(t)\}_{t \geq 0}$, $k = 1, 2 \dots$

Soit $\{T_k^*\}$ la suite de v.a. $T_k^* = T_k - T_{k-1}$, $T_0 = 0$.

The

Pour tout $n$ fini les v.a $T_1^*, T_2^*, \dots, T_n^*$ soit indépendantes et suivent la même loi exponentielle de paramètre $\lambda$.

CamScanner بـ ضوئيا الممسوحة

المحاضرة رقم 7 :
الأربعاء 2021 / 04 / 20

سليمان
دوحمار

# Chaîne de Markov à espace d'états discret

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}\}, P)$ un espace probabilisé filtré et $\{X(t), t\in\mathbb{N}\}$ un processus, à temps discret. $X(\cdot) : \Omega \longrightarrow \xi$, $\forall t \in \mathbb{N}$

où $\xi \subseteq \mathbb{N}$ est l'espace des états du processus $\{X(t), t\in\mathbb{N}\}$

On dit que $\{X(t), t\in\mathbb{N}\}$ est un processus à espace d'état discret

يباء : Pour tout $t = k \in \mathbb{N}^*$ et $i_0, i_1, \dots, i_k \in \xi$.

On a : $P(X(0) = i_0, X(1) = i_1, X(2) = i_2, \dots X(k) = I_k)$

$P(X(k) = i_k / X(k-1) = i(k-1) \dots, X(0) =$

Notation $X(t) = X_t$

$= P(X(k) = i_k \mid X(k-1) = i_{k-1}, \dots X(0) = i_0)$

$\times P(X(k-1) = i_{k-1} / X(k-2) = i_{k-2} \dots X(0) = i_0$

$\times P(X(k-2) = i_{k-2} \mid X(k-3) = i_{k-3} \dots X(0) = i)$

$\times P(X(1) = i_1 \mid X(0) = i_0) P(X(0) = i_0)$.

**Def** un processus $\{X(t), t \in \mathbb{N}\}$ à espace d'états discret est une chaine de Markov si $\forall k \in \mathbb{N}$ et $i_j \in E$ on a

$$P(X(k) = i_k / X(k-1) = i_{k-1} \dots X(0) = i_0)$$

$$= P(X(k) = i_k \mid X(k-1) = i_{k-1})$$

Notons $P_{ij}(k) = P(X(k+1) = j / X(k) = i)$

**Rq :**

si $\{X(t), t \in \mathbb{N}\}$ est une chaine de Markov homogène pour tout $t = k \in \mathbb{N}$, et $i_0, i_1, \dots i_k \in E$

on a : $P(X(0) = i_0, X(1) = i_1, X(2) = i_2 \dots X(k) = i_k)$

$= P_{i_{k-1} i_k} P_{i_{k-2} i_{k-1}} P_{i_{k-3} i_{k-2}} \dots P_{i_0 i_1} \, \pi_{i_0}$.

Notions :

$P_{ij} = P(X(k+1) = j \mid X(k) = i)$.

Si $P_{ij}(k) = P_{ij}$, $\forall k = 1, 2 \dots$ on dit que.

la chain de Markov $\{X(t), t \in \}$ est homogène

$P_{ij}(k) = P(X(k,t) = 0 \mid X(t)$

$P^{(k)}_{(ij)} = P(X(t) = j \mid X(0) = i)$ ??

**def**

Si $P_{ij}(k) = P_{ij}$, $\forall k = 1, 2 \dots$ on dit que la chaine de Markov. $\{X(t), t \in \mathbb{N}\}$ est homogène

CamScanner المسوحة ضوئيا بـ

المحاضرة رقم ٢:

Rq:

si $\{X(t), t \in T\}$ est une chaîne de Markov homogène dans le temps alors $\forall s \in \mathbb{N}$

$$P(X(t+s)=j \mid X(s)=i) = P(X(t)=j \mid X(0)=i)$$

$\forall i,j \in E$

تحويل

Puisque $P(X(t)=j \mid X(0)=i)$ ne dépend que de $i, j$ et $t$ nous pouvons noter

$$P(X(t)=j \mid X(0)=i) = p_{ij}^{(t)}$$

la probabilité de transition de $k$

$P_{ij}^{k} = P(X(s+k)=j \mid X(s)=i) = P_{ij}$ | $P_{ij}(k) = P(X(k+1)=j \mid X(1)=i)$

$i \to j$ en $(t)$

$P^{(t)} = P^{t}$

Soit $\pi_i = P(X(0)=i)$, $i \in E$ , $i \in \{1,2\}$

dans ce cas $P(X(0)=i_0, X(1)=i_1, \dots, X(K)=i_K)$

$= P_{i_{K-1} i_K} \; P_{i_{K-2} i_{K-1}} \text{———} P_{i_0 i_1} \pi_{i_0}$ , $\pi_{i_0} = P(X(0)=i_0)$

et donc le vecteur $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_K)^T$ et la matrice de probabilités de transition

$$P = \| P_{ij} \|_{K \times K} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & \cdots & P_{1K} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & \cdots & P_{2K} \\ \vdots & & & & \\ P_{K1} & P_{K2} & & \cdots & P_{KK} \end{pmatrix}$$

une matrice stochastique.

déterminent des proba (*).
les éléments $P_{ij} \geqslant 0$ et $\sum_{j=1}^{k} P_{ij} = 1$

$P_{11} = P(X(k+1) = 1 \mid X(k) = 1)$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

maintenant on introduit les probabilités
$\pi_j(k) = P(X(k) = j)$, $j \in E$, $\forall k \in \mathbb{N}$
et soit $\pi(k) = (\pi_1(k), \pi_2(k), \dots, \pi_m(k))^T$
$\pi_j(k)$ représente la proba avec laquelle le processus sera dans l'état $j$ au moment $t = k$. Il est évident que
$\pi_j = \pi_j(0)$

soit $P_{ij}^{(k)}$ la proba de transition système de l'état $i$ à l'état $j$ pour $k$ pas.
alors $\pi_j(k) = \sum_{i=1}^{m} P(X(k) = j \mid X(0) = i) P(X(0) = i)$
$= \sum_{i=1}^{m} P_{ij}^{(k)} \pi_i = \sum_{i=1}^{m} \pi_i P_{ij}^{(k)}$.

$P = \begin{vmatrix} \frac{t}{2} & 1 - t/2 \\ t^2 & 1 - t^2 \end{vmatrix}$ $P_{12}(t) = P(X(t-1) = 2 \mid X(t) = 1)$

## processus de Markov à temps continue et à espace d'états discret :

soit $\{X(t), t \in T\}$ ; $T = [0, +\infty[$ un processus aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

$X(t) = X(t, w) : \Omega \longrightarrow \varepsilon \subseteq \mathbb{N}$.

ie: $X(t)$ est une V.a discrète, $\forall t \in T$

اذا مفلسيتس T نولي بروسيسور ؛ فكستنها فاحيا باليال

**déf** : $\{X(t)\}$, $t \in T$ est un proc. de Markove.

si

$$P(X(t_k) = i_k \mid X(t_{k-1}) = i_{k-1}, \dots, X(t_1) = i_1) = P(X(t_k) = i_k \mid X(t_{k-1}) = i_{k-1}) \quad (1)$$

$\forall t_1, \longrightarrow t_k$ ; $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k$ , $t_j \in T$

et $i_1, i_2, \dots, i_k$ , $i_j \in \varepsilon$ $(j = 1, 2, \dots, k, k \in \mathbb{N}^*)$

المعلومات

تواريخ

$T(t) = \delta(X(s) \mid s \leq t)$

$p(X(t) \mid F(s))$ نبدا من صفر وتمشي

$P(X(t) \mid X(s))$ في التاريخ هذاك برك.

**Remarque.**

la propriété (1) est toujours vérifiée si $X(\cdot)$ est un proc à accroissements indépendants

Notons $P_{ij}(s,t) = P(X(t)=j \mid X(s)=i)$ $s<t$

La propobolite de transition de i en j

Dans ce cas $\forall s,t \in T$ $0 \leq s \leq t$

$P(s,t) = \| P_{ij}(s,t) \|_{i,j=\overline{1,2}}$ représente.

la matrice de transitions (stochatique) de $\{X(t), t \in T\}$.

Il est clair que les éléments de $P(s,t)$ vérifie l'équation de chapman kolmogotov. $P_{ij}(s,t) = \sum_{k \in E} P_{ik}(s,u) \, P_{kj}(u,t)$

$0 < s < u < t$

$P(s,t) = P(s,u) \cdot P(u,t)$

si $\forall i,j$, $P_{ij}(s,t) = P_{ij}(t-s)$, $s<t$.

Nous disons que $\{X(t), t \in T\}$ est un processus hommogéne de MarKov.

Soit $\{X(t)\}$ un processus de MarKov hommogéme, Dans ce cas l'equation de Chapman - Kolmogorov peut être présentée sous la forme $P_{ij}(s+t) = \sum_{k \in E} P_{ik}(s) P_{kj}(t)$.

ie: $P(s+t) = P(s) P(t)$ ...... (1)

Supposons que les probabilités $P_{ij}(t)$ sont différentiables en 0 et $P_{ij}(h) = \lambda_{ij} h + o(h)$.

Si $i \neq j$, $h \longrightarrow 0$

alors la limite

$$\lambda_{ij} = \lim_{h \to 0} \frac{P_{ij}(h)}{(h)} \quad (i \neq j) \text{ .. } (2)$$

caractérise la vitesse de changement de $P_{ij}(h)$ en 0.

$A(\lambda_{ij})$.

$o(h) = h^{1+q}$ $\quad i > c$

$o(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$ et $\dfrac{o(h)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} c$

$O(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$ $\quad \dfrac{O(h)}{h} \to c$

المحاضرة (13)

2021 / 05 / 18

Suppossons que $P_{ij}(t)$ sont differentiables en 0 et $P_{ij} = (\lambda_{ij} \cdot h) + o(h) \cdot (i \neq j)$ et $h \to 0$

alors $\lim_{h \to 0} \dfrac{P_{ij}(h)}{h} = \lambda_{ij} \quad i \neq j \; \ldots$ (1)

Caraderise la vecteur de changement de $P_{ij}(h)$ en 0 est appele le taux de transition de l'état $i$ a l'etat $j$

Comme $\sum_{j=1}^{m} P_{ij}(h) = 1$ alors $P(s+t) = P(s)P(t)$

$$\lambda_{ii} = \lim_{h \to 0} \frac{P_{ii}(h) - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-\sum P_{ij}(h)}{h} \ldots (2)$$

$$= -\sum_{i \neq j} \lambda_{ij}$$

Notons $A = \|\lambda_{ij}\|_{m \times}$ la matrice des taux de transition

D'a pres (1) et (2)

$$\lim \frac{P(h) - I_n}{h} = A$$

Par (1) $\lim_{h \to 0} \dfrac{P(t+h) - P(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{P(t) \cdot P(h) - P(t)}{h}$

$$= P(t) \lim_{h \to 0} \frac{P(h) - I_n}{h}$$

$$\boxed{P'(t) = P(t)\,A.} \longrightarrow (4)$$

d'où l'équation directe de Kolmogorov.

$$P'(t) = P(t)A$$

De même : $P'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{P(t+h) - P(t)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{P(h)\,P(t) - P(t)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left( \frac{P(h) - I_n}{h} \right) P(t) = A\,P(t) \quad --- (5)$$

Il faut remarque que

$$P(t) = e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}, \; A^0 = I_n$$

---

(4) $\Rightarrow P'_{ij}(t) = \sum_{K=1}^{m} P_{iK}(t)\,\lambda_{Kj}$

(5) $\Rightarrow P'_{ij}(t) = \sum_{K=1}^{m} \lambda_{iK}\,P_{Kj}(t).$

(11) المحاضرة

الأسبوع :

# Le mouvement brownien :

**Déf** On appelle mouvement brownien un processus stochastique à valeurs réelles

$$B(\cdot,\cdot) : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

$\Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$

tq $(B(t))_{t\geq 0}$ est un processus à accroissements indépendants et stationnaires.

dont les trajectoires sont continues.

Ce que signifie que

1) Continuité p.p sur la fonction $s \longrightarrow B(w,s)$ est une fonction continue.

2) Indépendance des accroissements

Pour $s < t$ $B(t) - B(s)$ est indépendant de la tribu $F_s = \sigma(B(r), r \leq s)$

$B(t) - B(s)$ de loi gaussienne centrée de variance $t - s$

3) stationnairité des accroissement : si $s < t$ la loi de $B(t) - B(s)$ est identique à celle de $B(t-s) - B(0) = B(t-s)$, $B(0) = 0$

$B(t-s) \overset{loi}{=} B(t) - B(s)$ suit $N(0, t-s)$

**def**

Un mouvement brownien est dit standard si

$B(0) = 0$ p-p sûr

$E[B(t)] = 0$ et $Var(B(t)) = E(B_t^2) = t$

**Proposition.**

Soit $(B(t))_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard alors $(B(t))_{t \geq 0}$ est un processus gaussien

~~$\forall t$ $X(t) \sim N(0, t)$~~

~~$V = (V_1, \dots V$~~

i.e : $\forall n$ et tout $0 < t_0 \leq t_1 \dots < t_n$, $(B(t_1) \dots B(t_n))^T$ est vecteur gaussien.

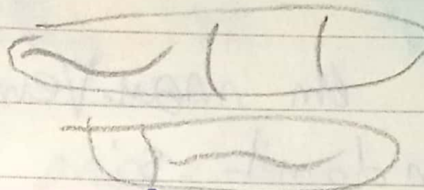
**Rq**

$\forall t \geq 0$ $P(B(t) \leq x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2t}} du.$

2) Le processus $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ n'est pas stationnaire,

**Rq**

On peut montrer que presque toutes les trajectoires sont continues



## Propriété de Martingale.

**déf** : Un processus $\{M(t)\}_{t\geq 0}$ est dit $\mathcal{F}(t)$ martingale

Si 1) $\forall t \geq 0$ ; $M(t)$ est $\mathcal{F}_{(t)}$ - mesurable

2) $\forall t \geq$, $M(t)$ est integrable $E(M(t)) < \infty$

3) $\forall t \geq s \geq 0$ $E[M(t) \mid \mathcal{F}(s)] = M(s)$ p.p.sur.

**prop** : Le mouvement brownien standard $\{B(t), t\geq 0\}$ est une martingale par rapport à la fonction naturelle. $\mathcal{F}(t) = \sigma(B(s), s\leq t)$