Chapitre III : Les probabilités

Partie I : Analyse combinatoire

L'analyse combinatoire se base sur le dénombrement dont voici le principe :

1. Principe fondamental de dénombrement

Ω

***Exemple** : supposons que pour t'aider à choisir un objet (une voiture par exemple), on te pose 3 questions (le modèle, la couleur, la motorisation). Pour le modèle on a 5propositions différentes, pour la couleur 7 et pour la motorisation 3 ; alors pour déterminer le nombre de voiture différente, tu dois effectuer l'opération (5.7.3)*

Cela s'explique très simplement par le schéma suivant :

modèle	*couleur*	*motorisation*
A	*1*	M_1
B	*2*	M_2
C	*3*	M_3
D	*4*	
E	*5*	
	6	
	7	

Avec un crayon on relie A-1- $M1$, etc…

***Règle1** : Si tu es confronté à **plusieurs choix à faire**, que le premier choix te donnes p réponses possibles, le second choix q réponses possibles et le troisième choix r réponses possibles, alors **le nombre total de choix est** : p. q. r*

2. Permutations d'objets différents (sans répétition)

On utilise l'expression « permutation d'objets différents » lorsque tous les objets sont différents et qu'on essaye de les ranger dans un certain ordre (classer). Les exemples les plus classiques : de combien de façons 12 enfants peuvent ils se ranger en file indienne ? Ou combien de mots peut-on écrire avec les lettres du mot MANGER ?

- *Pour les enfants, ils sont tous différents et on essaye de dénombrer les rangements possibles*
- *Pour les mots (pas au sens de la langue française) , toutes les lettres du mot manger sont différentes et on essaye de les ranger dans tous les ordres possibles*

A toutes ses questions, la réponse est LA FACTORIELLE !

6 ! *(se lit factorielle 6)= 6.5.4.3.2.1=720*

La réponse pour les enfants : 12! *=479 001 600*

La réponse pour les mots est donc 6 ! = 720

Règle 2 *: Si on te demande le nombre de manières de classer n objets sachant que tous les objets sont différents les uns des autres, la réponse est simplement* $n!$

3. Permutations d'objets identiques (avec répétition)

A présent, considérons les lettres du mot MAGASIN. La réponse n'est plus 7!

Parce que la lettre « A » se répète 2 fois, il faut donc diviser ce 7! *par 2*! *puisqu'il ya qu'une seule lettre qui se répète deux fois. Si on envisage le mot « MAMAN », le nombre de mots est* $\frac{5!}{2!.2!}$

Un dernier exemple ; le mot « MURMURER » peut générer $\frac{8!}{2!.3!2!}$ *mots différents.*

Règle : *Si on te demande le nombre de manières de classer n objets sachant qu'un objet se répète p fois et un autre q fois la réponse est :* $\frac{n!}{p!q!}$

4. Arrangement d'objets différents (sans répétition)

Cela ressemble aux cas des permutations mais on ne prend pas tous les objets.

Exemple *: tu as 15 crayons de couleurs différentes, de combien de façons différentes peux tu en choisir 4 et les classer ? autrement dit, non seulement la nature des objets a de l'importance (bleu, noir, ..) mais aussi l'ordre des objets a de l'importance (le fait de prendre le bleu, ensuite le noir, donne un ordre différent)*

Réponse *: la réponse est tout simplement : 15.14.13.12, on s'arrête là, car tu devais choisir 4 crayons et donc on doit prendre 4 termes dans la multiplication*

Règle : *si on te demande le nombre de manières de classer p objets parmi n objets disponibles sachant que tous les objets sont différents les uns des autres, la réponse est :*$n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-p+1)$*, qu'on pourra écrire sous la forme :* $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

5. *Arrangement avec répétition*

Il s'agit de prendre p objets parmi n (les n objets sont tous différents) de les classer, mais chaque objet peut être pris plusieurs fois.

Exemple *: une urne contient une boule jaune, une rouge, et une blanche. L'expérience consiste à prendre une boule, regarder sa couleur et la remettre dans l'urne. Si on te demande le nombre de façons de choisir 8 boules et de les classer, c'est bien un arrangement avec répétition puisque non seulement la nature des objets a de l'importance (la rouge, la blanche,..) mais aussi l'ordre des objets a de l'importance (le fait de prendre la bleue, puis la noire donne un ordre différent..)*

La réponse à cette question est : $\alpha_n^p = n^p$*, donc* $3^8 = 6561$

5. *Combinaison d'objets différents (sans répétition)*

Une combinaison ressemble très fort à un arrangement, sauf que dans le cas d'une combinaison l'ordre n'a plus d'importance.

Exemple *: si on reprend l'exemple précédent, tu as 4 crayons de couleurs différentes de combien de manières peux tu en choisir 4 ?tu ne les classes pas !!!*

Réponse *: dans ce cas il suffit de diviser la réponse trouvé précédemment par la factorielle du nombre d'objets choisis* $\frac{15.14.13.12}{4!}$ *, ce qu'on peut interpréter par la formule suivante :* $C_n^p = \frac{n!}{n!(n-p)!}$

Règle : *Si on te demande le nombre de manières de choisir (choisir est différent de classer) p objets parmi n objets disponibles sachant que tous les objets sont différents alors :*$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-p+1)}{p!}$

Partie II : Calcul des probabilités

Introduction : *le calcul des probabilités a pour objectif un traitement mathématique de la notion intuitive de hasard.*

I. ***Espace probabilisable***

1- ***Expérience aléatoire, événements***

Définition : *Une expérience est dite aléatoire ou stochastique s'il est impossible de prévoir son résultat. En principe, on admet qu'une expérience aléatoire peut être répétée indéfiniment dans des conditions identiques. Son résultat peut donc varier d'une réalisation à l'autre.*

***Exemples** :*

1- On jette un dé et l'on observe le résultat obtenu

2- Si l'on lance trois fois de suite une pièce de monnaie, on peut distinguer 8résultats possibles : $PPP, PPF, \dots\dots FFF$

3- On jette une pièce de monnaie jusqu'à ce que le coté face sorte pour la première fois

Définitions :

- *L'ensemble, noté en général Ω, de tous les résultats d'une expérience aléatoire est appelée <u>univers</u> ou <u>espace des résultats possibles</u> de cette expérience. Selon la nature de cette dernière, l'ensemble Ω peut être fini(exemple 1) et 2 ou infini (exemple 3).*
- *Le nombre d'éléments d'un ensemble Ω est noté w*
- *On appelle événement tout sous ensemble deΩ. Un événement qui contient un unique élément de Ω est un événement élémentaires.*

2- Notion de probabilités et axiomes

Le but de la présente section est d'attribuer à chaque événement $A \in \Omega$ *un nombre réel, appelé probabilité de cet événement et noté* $P(A)$. *la valeur* $P(A)$ *est une mesure des chances de réalisation de l'événement A lors de l'expérience aléatoire considérée.*

2-1 Probabilités combinatoires : *Soit* Ω *un univers fini constitué de N événements élémentaires sur lequel on fait l'hypothèse d'équiprobabilité de réalisation des N événements élémentaires. On suppose ainsi que tous les événements ont la même chance de se réaliser.*

Soit A un événement quelconque constitué de k événements élémentaires de Ω.

On en déduit que la probabilité d'un événement A noté $P(A)$ *est le nombre :*$\frac{k}{N}$

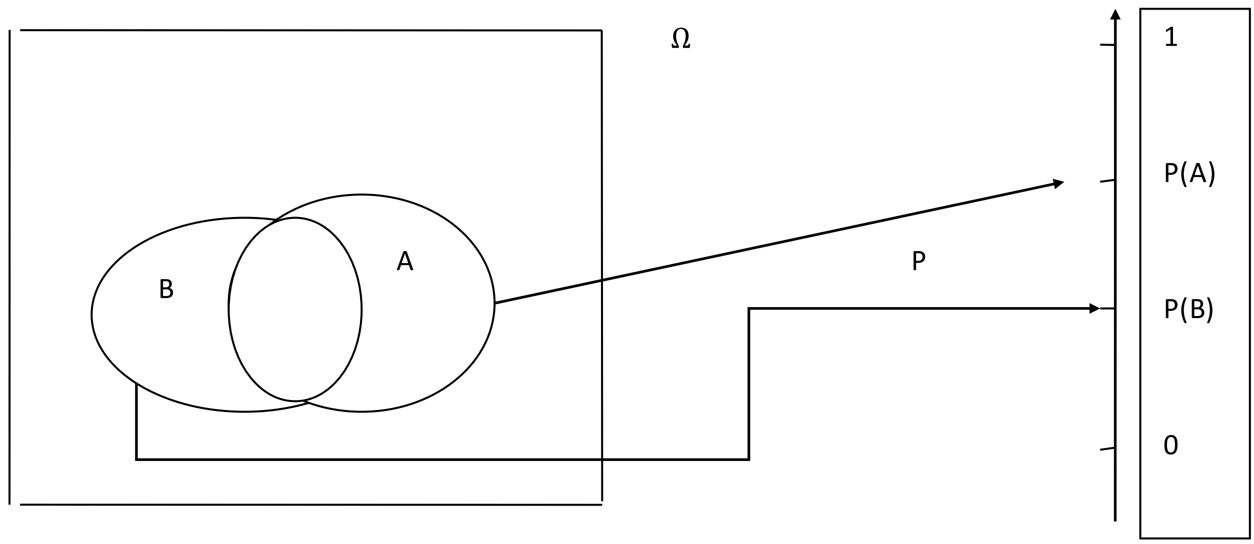
Cette formule s'énonce souvent comme suit : $P(A) = \frac{nbre\ de\ cas\ favorables}{nbre\ de\ cas\ possibles}$

Exemple :

1- Quelle est la probabilité « obtenir un nombre pair » en lançant un dé à six faces ? cas favorable s: 3, cas possibles : 6, $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

2- Quelle est la probabilité « obtenir trois fois le même coté » en lançant trois fois une pièce de monnaie ? cas favorables :2, cas possibles :8, $P(A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

2-2 Axiome des probabilités *: Soit* Ω *un univers. On dit que l'on définit une probabilité sur les événements* Ω *si : a tout événement* $A \in \Omega$ *on associe un nombre* $P(A)$ *appelé probabilité de l'événement* A.



Une probabilité doit intuitivement satisfaire aux trois axiomes suivants :

1. $P(A) \geq 0, \forall\, A \in \Omega$ *(la probabilité de tout événement est un nombre positif)*
2. $P(\Omega) = 1$, *(la probabilité de l'événement certain est égale à 1)*
3. *Si* $A \cap B = \emptyset$ *alors* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, *(la probabilité de la réunion de deux événements incompatibles est égale à la somme de leur probabilités)*

Remarque : *une probabilité P est une application de l'ensemble des événements* Ω *dans l'intervalle* $[0,1]$

Exemple *: Si on jette un dé à 6 faces non truqué :* $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

A est l'événement « un nombre pair est tiré » alors $P(A) = \{2,4,6\}$

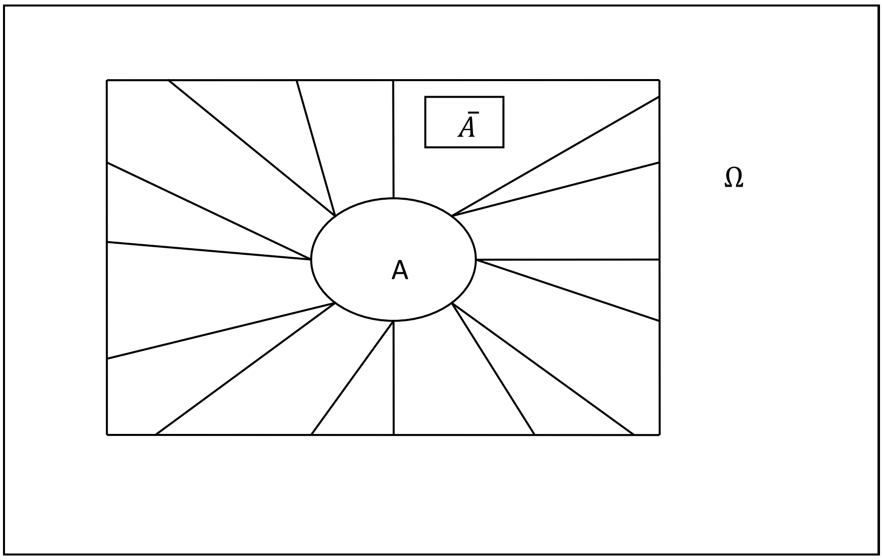
B est l'événement « un nombre impair est tiré » alors $P(B) = \{1,3,5\}$

On a $\Omega = A \cup B$ *et* $A \cap B = \emptyset$ *alors* $P(\Omega) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} = 1$

- ***Théorème 1*** : $\boldsymbol{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$

Démonstration : $A \cup \bar{A} = \Omega$ *et* $A \cap A = \emptyset$ *(*A *et* $\bar{A}$ *sont incompatibles)*

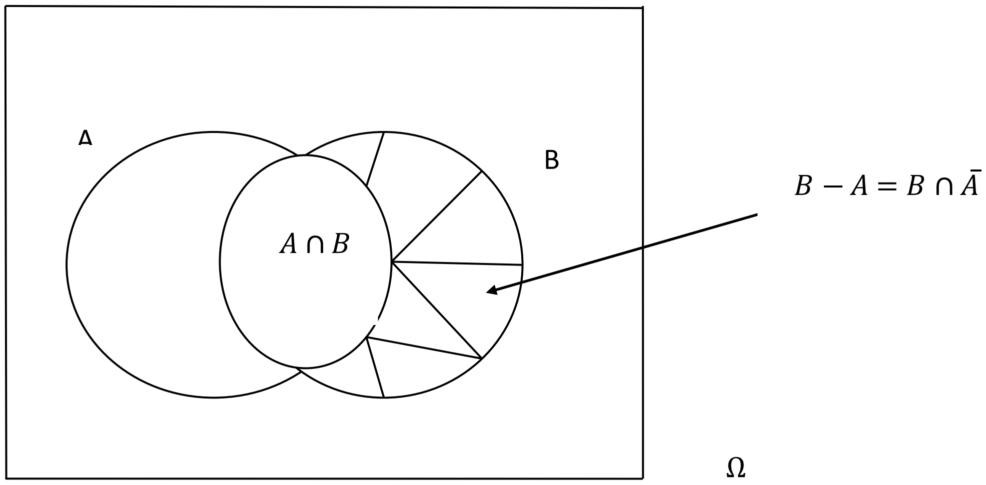
Donc $1 = P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$



Exemple *: quelle est la probabilité d'avoir au moins une fois pile en lançant 4fois une pièce de monnaie ,* $P(0\ fois\ pile) + P(1 fois\ pile) + P(2 fois\ pile) + P(3 fois\ pile) + P(4 fois\ pile) = 1 \Leftrightarrow P(1 fois\ pile) + P(2 fois\ pile) + P(3 fois\ pile) + P(4 fois\ pile) = 1 - P(0 fois\ pile)$

$\Leftrightarrow P(au\ moins\ une\ fois\ pile) = 1 - P(0 fois\ pile) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 93.75\%$

- ***Théorème 2 :*** $\boldsymbol{P(B - A) = P(B) - P(B \cap A)}$



Démonstration : $B(\cap \bar{A}) \cup (B \cap A) = B$ *et* $(B \cap \bar{A}) \cap (B \cap A) = \emptyset$

$(B \cap \bar{A}$ *et* $B \cap A)$ *sont incompatibles donc :*

$P(B) = P\big((B \cap \bar{A}) \cup (B \cap A)\big) = P(B \cap \bar{A}) + P(B \cap A) \Rightarrow P(B) - P(B \cap A)$

Remarque : Si $A \subset B$ *alors* $A \cap B = A$ *et donc* $P(B - A) = P(B) - P(A)$

- ***Théorème 3 :*** $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$, $\forall\, \boldsymbol{A, B} \in \Omega$

Démonstration :

1. *Si* $A \cap B = \emptyset$ *alors* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(\emptyset)$
2. *Si* $A \cap B \neq \emptyset$ *non vide*

   $A \cup B = (B - A) \cup A$ *et* $(B - A) \cap A = \emptyset$ *(*$B - A$ *et* A *sont incompatib*

Donc $P(A \cup B) = P\big((B-A) \cup A\big) = P\big((B-A)\big) + P(A) = P(B) - P(B \cap A) + P(A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

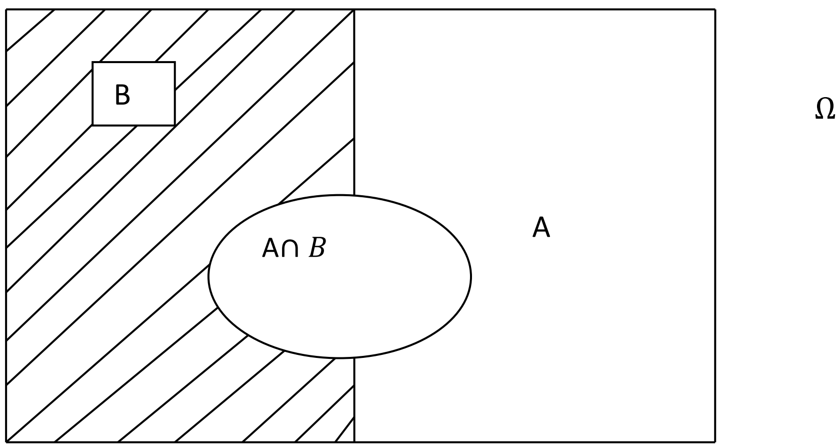
3-Probabilités conditionnelles

Définition : *la probabilité qu'un événement A se réalise sachant que B s'est produit est appelée probabilité conditionnelle. Par définition, elle vaut*

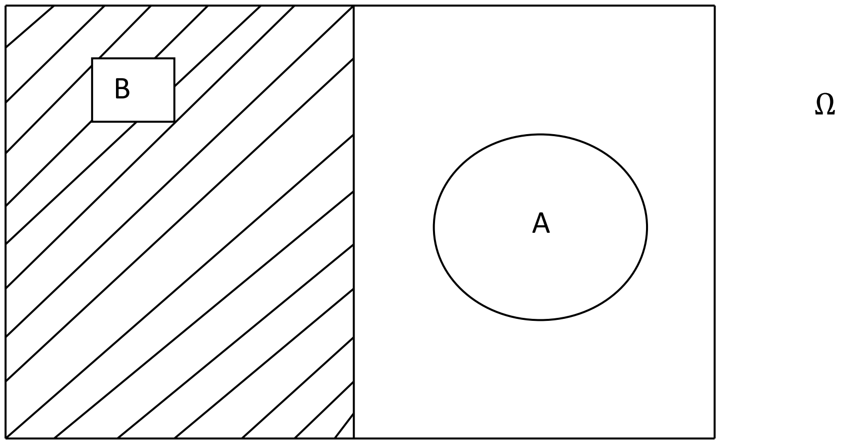
$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Remarque *:*

- $P(A/B)$ *peut s'interpréter comme le fait que* Ω *se restreint à B et que les résultats de A se restreignent à* $A \cap B$



- *Si* $A \cap B = \emptyset$, *(A et B sont incompatibles), A ne peut pas se réaliser si B s'est déjà produit et donc* $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(\emptyset)}{P(B)} = 0$



- $P(A/B) + P(\overline{A}/B) = 1$
- *En général* $P(A/B) \neq P(B/A)$

Exemple : *on jette un dé à 6faces non truqué :* $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$*,* $|\Omega| = 6$

A : « 2sortes », B : nombre pair, P(A)=$\frac{1}{6}$ *, P(B)=*$\frac{1}{2}$*, P(A*$\cap B) = \frac{1}{6}$

- *La probabilité que « 2sorte » sachant qu'il s'agit d'un nombre pair est de : P(A /B)=*$\frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1}{3}$
- *La probabilité qu'un nombre pair sorte sachant qu'il s'agit de 2sorte est :* *P(B/A)=*$\frac{P(B\cap A)}{P(A)} = 1$

  Dans ce cas P(A /B)≠ P(B/A)
- *La probabilité que « 2ne sorte pas » sachant qu'il s'agit d'un nombre pair est de :* $P(\bar{A}/B) = 1 - P(A/B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Théorème : *soit A, B, C, …des événements d'un univers* Ω

✓ $P(A \cap B) = P(A).P(B/A$

✓ $P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B/A).P(C/(A \cap B))$

Démonstration *:*

- ✓ *Résulte de* $P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$
- ✓ *Résulte de* $P(C/(A\cap B)) = \frac{P((A\cap B)\cap C)}{P(A\cap B)} \Rightarrow P(A\cap B\cap C) = P(A\cap B).P(C/A\cap B) = P(A).P(B/A).P(C/(A\cap B))$

4-Théorème de Bayes *:

Exercice : *une entreprise utilise trois types d'ampoules* T_1, T_2, T_3 *avec les proportions suivantes : 60%,30% et 10%. La probabilité que ces ampoules fonctionnent est respectivement 90%,80% et 50%. Quelle est la probabilité qu'une ampoule défectueuse proviennent de* T_1 *?*

Avec l'arbre :

T_1 : "*Utiliser une ampoule* $\mathbf{T_1}$

T_2 *: Utiliser une ampoule* T_2

T_3 : *Utiliser une ampoule* T_3

D : ampoule défectueuse

$\overline{D}$ *: ampoule non défectueuse*

$$P(T_1\ /D = \frac{P(T_1\cap D)}{P(b)} = \frac{P(T_1\cap D)}{P(T_1\cap D)+P(T_2\cap D)+P(T_3\cap D)} = \frac{0.6x0.1}{0.6x0.1+0.3x0.2+0.1x0.5} = \frac{6}{17}$$

On a trois événements incompatibles T_1, T_2 *et* T_3*, tel que* $\Omega = T_1 \cup T_2 \cup T_3$. *de plus, on dispose l'information qu'un événement D s'est réalisé. On a alors la formule de bayes :*

$$P(T_{1/D}) = \frac{P(T_1 \cap D)}{P(D)} = \frac{P(T_1)P\left(\frac{D}{T_1}\right)}{P(T_1)P(D/T_1) + P(T_2)P(D/T_2) + P(T_3)P(D/T_3)}$$
$$= \frac{0.6x0.1}{0.6x0.1 + 0.3x0.2 + 0.1x0.5} = \frac{6}{17}$$

Remarque *: *cette formule se généralise à n événements incompatibles*

Théorème de bayes *: Soit* $B_1, B_2, \ldots.. B_n, n$ *événements disjoints deux à deux (càd* $B_i \cap B_j = \emptyset, \forall i \neq j$*) et tel que* $B_1 \cup B_2 \ldots..\cup B_n = \Omega$

Alors $P(B_k/A) = \frac{P(A/B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A/B_i)P(B_i)}$

Remarque *: le théorème de bayes est utilisé de façon classique pour calculer « des probabilités de causes »dans des diagnostics (maladies, pannes, ..).*

La formule au dénominateur est appelée formule des probabilités totales

5- Evénements indépendants

Définition *: on dit que deux événements A et B d'un univers* Ω *sont indépendants si* $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ *dans le cas contraire on dit qu'ils sont dépendants*

Imaginons que le fait de savoir qu'un événement A s'est produit n'a aucune influence sur la probabilité d'un autre événement B : P(B/A)=P(B)

On en déduit que $\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B)$ *d'où* $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

Mais alors P(A/B)=$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$

En d'autres termes, si B ne dépend pas de A, A ne dépend pas non plus de B

6- ***Evénements incompatibles :***

Theorème1 : *A et B sont des événements incompatibles si si et seulement si*

$P(A\cap B) = P(A)P(B)$

Théorème 2 *: A et B sont deux événements incompatibles si et seulement si :*

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Exemple *: On lance un dé à huit faces numérotées de 1 à 8.*

On considère les événements:

A: «Le résultat est inférieur ou égal à 3»

B: «Le résultat est pair»

C: «Le résultat est un multiple de 4

Les événements A et B sont-ils incompatibles? A et C?

On a A = {1, 2, 3};B = {2, 4, 6, 8} et C = {4, 8}

A et B ne sont pas incompatibles car leur intersection n'est pas vide, 2 appartient aux deux ensembles.

A et C sont incompatibles car ils n'ont aucun élément commun