Université Saad Dahleb BLIDA1 **Année : 2019-2020**
Faculté des sciences
Departement MI
M. N. RAOUTI

Chapitre1 : ANALYSE COMBINATOIRE

1. Introuduction:

Ce chapitre est introductif aux chapitre sur les probabilités, il permet de donner un sens intuitif à la notion de probabilité (dans des situations particulières), comme il offre des outils qui permettent de calculer simplement les probabilités dans ces situations.

L'objet du chapitre peut être résumé par l'expérience (*modéle*) suivante: On dispose d'un ensemble E fini de n éléments ($|E| = n$). On choisit *au hasard* ou *de façon aléatoire* p éléments de E, (choix non intentionné ou tout les éléments de E ont la même chance d'étre choisis). Les éléments de E sont choisits avec ou sans *ordre* (ie les éléments choisis sont ordonnés ou non), avec ou sans *répétition* (ie un élément quelconque de E peut être choisit plusieursfois ou non).

Problème de base: *quel est le nombre de pôssibilités que nous avons pour le choix des p éléments?* En général, on désigne par Ω l'ensemble de tout les choix possibles pour les p éléments. Le problème consiste alors à *detérminer le cardinal de* Ω. Remarquons qu'il n'est pas demandé d'exhiber Ω, mais seulmenent de déterminer le nombre de ses éléments.

schéma

Illustrons cela sur l'exemple très simple suivant:
Nb: prenez le temps nécessaire pour bien assimiler cet exemple particulier, car il vous facilitera la compréhension des formules générales de dénombrement.

Exemple:
Une boite comporte trois jetons sur lesquels sont inscrites les lettres "a", "b" et "c".
.
Cas0: On choisit **1** jetons au hasard de cette boite

$E = \{a, b, c\}$, $n = |E| = 3$ et $p = 1$ (choix au hasard de $p = 1$ élément parmi $n = 3$)
$p = 1$ (choix de 1 élémént de E) $\Longrightarrow$ ni ordre, ni répétition
l'ensemble de tout les choix possibles $\Omega = E = \{a, b, c\} \Longrightarrow |\Omega| = |E| = 3$

Cas1: On choisit **2** jetons au hasard *avec ordre (un à un)* et *avec répétition (avec remise)*

- $E = \{a, b, c\}$, $n = |E| = 3$ et $p = 2$ (choix au hasard de $p = 2$ éléments parmi $n = 3$)
- choix de $p = 2$ éléments avec ordre et avec répétition
  chaque *choix* est *un couple ordonné et avec répétition* de 2 éléments de E
  exemples $(a, b), (b, a), (a, a), (b, b)$; il est dit: *2-liste* ou *liste de 2 éléments* de E.
- observons que $(a, b) \neq (b, a)$ (à cause de l'ordre) et $(a, a), (b, b)$ sont des choix possibles à comptabiliser à cause de la répétition
- l'ensemble de tout les choix possibles est:
  $\Omega = E^2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$
  $\Longrightarrow |\Omega| = \left|E^2\right| = 3^2 = 9$ (c'est le nombre tatal de 2-listes d'éléments de E)

.

Cas2: On choisit **2** jetons au hasard *avec ordre (un à un)* et *sans répétition (sans remise)*

- $E = \{a, b, c\}$, $n = |E| = 3$ et $p = 2$ (choix au hasard de $p = 2$ éléments parmi $n = 3$)
- choix de $p = 2$ éléments avec ordre et sans répétition
  chaque *choix* est *un couple ordonné et sans répétition*
  exemples $(a, b), (b, a)$; il est dit: *arrangement de 2 éléments* de E.
- observons que $(a, b) \neq (b, a)$ (à cause de l'ordre) et $(a, a), (b, b)$ sont des choix impossibles à ne pas comptabiliser à cause de la non répétition
- l'ensemble de tout les choix possibles $\Omega = E^2 \setminus \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$
  $\Longrightarrow \Omega = \{(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b)\}$
  $|\Omega| = A_3^2 = \dfrac{3!}{1!} = 6$ (c'est le nombre tatal d'arrangements de 2 éléments de E)

.

Cas3: On choisit **2** jetons au hasard *sans ordre et sans répétition (choix simultané, à la fois,)*

- $E = \{a, b, c\}$, $n = |E| = 3$ et $p = 2$ (choix au hasard de $p = 2$ éléments parmi $n = 3$)
- choix de $p = 2$ éléments sans ordre et sans répétition
  chaque *choix* est *un sous ensemble de 2 élément de E*
  exemples $\{a, b\}, \{a, c\}$; il est dit: *arrangement de 2 éléments* de E.
- observons que $\{a, b\} = \{b, a\}$ (c'est le même choix car non ordre)
- l'ensemble de tout les choix possibles $\Omega \subset \wp(E)$
  $\Longrightarrow \Omega = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$
  $|\Omega| = C_3^2 = \dfrac{3!}{2!1!} = 3$ (c'est le nombre tatal de combinaisons de 2 éléments de E)

2 FORMULES DE DENOMBREMENT (cas général)

En général, on choisit p éléments parmis n

2.1 Choix avec ordre et avec répétition (nombre de p-listes)

- *un choix* = *une p-liste* = un groupe *ordonné et avec répétition* de p éléments de E.

- $\Omega = E \times E \times \cdots \times E = E^{\,p}$

- Le nombre total de p-listes possibles :

$$\boxed{|\Omega| = l_{\,n}^{\,p} = n^{\,p} \qquad\qquad p \lesseqgtr n}$$

.

Exemples (2.1)

(a) On lance dix fois un dé à six faces, numérotées de 1 à 6. Combien y'a t-il de résultats possibles?

- En lançant 10 fois le dé, on choisit au hasard $p = 10$ nombres parmi $n = 6$ nombres $((E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}))$ avec ordre et avec répétition

- Ω est donc l'ensemble des listes de 10 éléments parmi 6 $\Longrightarrow |\Omega| = l_{\,6}^{\,10} = 6^{\,10}$

.

(b) Combien y'a t'il de nombres entiers de 8 chiffres choisits dans $\{1, 3, 5, 7, 9\}$?

$E = \{1, 3, 5, 7, 9\} \Longrightarrow n = card(E) = 5$

Chaque nombre entiers de 8 chiffres est une suite *ordonnée et avec répétition* de $p = 8$ chiffres parmi $n = 5$

$|\Omega| = l_{\,5}^{\,8} = 5^{\,8}$

.

Exercice: On lance une pièce de monnaie quatre fois.

- Combien y'a t-il de résultats possibles? - Donner Ω.

.

.

2.2 Choix avec ordre et sans répétition (nombre d'arrangements de p éléments de E)

- *un choix* = *un arrangement* de p éléments de E = un groupe *ordonnée et sans répétition* de p éléments de E.

- $\Omega \subset E^{\,p}$

- le nombre d'arrangements possibles est:

$$\boxed{|\Omega| = A_n^p = n \cdot (n-1) \cdots (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!} \qquad p \leq n}$$

Exemples (2.2)

(a) On lance 3 fois un dé à six faces, numérotées de 1 à 6. Combien y'a t-il de résultats possibles comportant trois chiffres différents?

- $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Longrightarrow n = card(E) = 6$ et on choisit au hasard $p = 3$ chiffres parmi $n = 6$ chiffres

- sans répétition car trois chiffres *différents*

- avec ordre: le résultat $(1, 2, 3)$ indique "1" est obtenu au premier lancentment, "2" au second et "3" au troisième. Il différe donc du résultat $(3, 2, 1)$

- Ω est donc l'ensemble des arrangements de 3 éléments de E

$$|\Omega| = A\,{}^{3}_{6} = \frac{6!}{3!} = 120$$

.

(b) Combien y'a t'il de nombres entiers de 4 chiffres différents choisits dans $\{1, 3, 5, 7, 9\}$?

chaque nombres entiers de 4 chiffres différents une suite ordonnée et sans répétition de 4 chiffres de $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ c'est donc un arragements ...

$$|\Omega| = A\,{}^{4}_{5} = 120$$

.

(c) On demande à un jury de classer 3 livres parmi 10 pour une remise de prix de littérature. Combien y'a t'il de classements possibles?

Chaque classement est une liste *ordonnée* de trois livres différents (sans répétition) parmi 10 d'où le nombre de classement est égale au nombre d'arrangements

$$|\Omega| = A\,{}^{3}_{10} = \frac{10!}{7!} = 720$$

.

Cas particulier des arrangements:
les permutations sans répétition (permutations d'elements différents)

Lorsque $p = n$, l'arrangement de n éléments parmi n est dit *permutation des éléments de E.* Le nombre total de permutations sans répétition possibles est :

$$\boxed{n!}.$$

.

Nb: C'est le nombre d'ordres différents possibles de n élélements distincts.

Exemple :
- Combien de nombres à 4 chiffres différents peut-on construire avec les chiffres "1", "3", "5" et "7" ?

Choix de $p = 4$ chiffres parmi $n = 4$ avec ordre et sans répétition
$\Rightarrow$ les résultats: *les arrangements de 4 éléments parmi 4 .*

le nombre total de permutations est : $|\Omega| = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = .$

.

Remarque: *les permutations avec répétition* (permutations de groupes d'éléments identiques)

lorsque les éléments à permuter sont formés de groupes d'éléments identiques de cardinalités respectives $n_1, n_2, ..., n_k \quad (n_1 + n_2 + ... + n_k = n)$, on parle alors de permutations avec répétition. Le nombre de permutations avec répétition est:

.

$$\boxed{\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!}}$$

.

Exemple :

- Quel est le nombre d'entiers naturels à 6 chiffres qui comportent une fois "1", deux fois "2" et trois fois le chiffre "3"?

$\Rightarrow$ les nombres entiers sont les permutations (les différents ordres) *des 6 chiffres* $\{1, 2, 2, 3, 3, 3\}$*, cest donc les permutations avec répétition des 6 chiffres.*

le nombre total de permutations avec répétition des 6 chiffres est :

$$|\Omega| = \frac{6!}{1! \cdot 2! \cdot 3!} = .$$

.

2.3 Nombre de Combinaisons :

On appelle *combinaison* de p éléments de E, une disposition *non ordonnée et sans répétition* de p éléments de E. le nombre de combinaisons est:

$$\boxed{C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}} \qquad p \leq n$$

.

Exemple

Une urne comporte 05 boules rouges, 04 boules bleues et 01 boules noirs. On y tire simultanément 03 boules.

(i) Quel est le nombre total de tirages possibles?

Choix simultané de $p = 3$ boules parmi $n = 10$ $\Rightarrow$non ordre et non répétition

$\Rightarrow$ les résultats: *les combinaisons de 3 éléments parmi 10.*

le nombre total de combinaisons possibles est : $|\Omega| = C_{10}^3 = \dfrac{10!}{3!\,(10-3)!} =$

(i) Quel est le nombre de tirages possibles de 3 boules rouges?

Choix simultané de $p = 3$ boules parmi $n = 5$ (parmi les rouges)

$\Rightarrow$ les résultats: *les combinaisons de 3 éléments parmi 5.*

le nombre total tirages possibles est : $|\Omega| = C_5^3 = \dfrac{5!}{3!\,(5-3)!} =$

3. Dénombrement lorsqu'on effectue plusieurs choix à partir d'ensembles différents (*principe fondamental du dénombrement*)

Si on dispose de deux ensembles E_1 $(|E_1| = n_1)$ et E_2 $(|E_2| = n_2)$; alors,

(i) si on choisi au hasard p_1 élements de E_1 (*choix1*) **et** p_2 élements de E_2 (*choix2*),
alors le nombre total de choix possibles pour les $p_1 + p_2$ élements est:

$$|\Omega| = |\Omega_1| \cdot |\Omega_2| \qquad (\text{car } \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2)$$

i.e. le produit des nombres de possibilités de chaque choix

(ii) si on choisi au hasard p_1 élements de E_1 (*choix1*) **ou** p_2 élements de E_2 (*choix2*),
alors le nombre total de choix possibles pour les $p_1$ou p_2 élements est:

$$|\Omega| = |\Omega_1| + |\Omega_2| \qquad (\text{car } \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2)$$

i.e. la somme des nombres de possibilités de chaque choix

Nb: le principe est généralisable aux choix à partir de plus de deux ensembles.

Exemple :

- Une urne comporte 05 boules rouges, 04 boules bleues et 01 boules noirs. On y tire simultanément 03 boules. Quel est le nombre de tirages comportant:

(i) 1 boules rouges et deux boules bleues?

$$\begin{pmatrix} \text{une boule} \\ \text{rouge parmi 5} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \text{deux boules} \\ \text{bleues parmi 4} \end{pmatrix} \Rightarrow C_5^1 \cdot C_4^2$$

(ii) trois boules de même couleur?

$$\begin{pmatrix} \text{trois boules} \\ \text{de même couleurs} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \text{trois boules} \\ \text{rouges parmi 5} \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \text{trois boules} \\ \text{bleues parmi 4} \end{pmatrix} \Rightarrow C_5^3 + C_4^3$$

(iii) comportant une boule noire?

$$\begin{pmatrix} \text{une boule noire} \\ \text{parmi trois} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \text{une boule} \\ \text{noire parmi 1} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \text{deux boules} \\ \text{non noires parmi 9} \end{pmatrix} \Rightarrow C_1^1 \cdot C_9^2$$

Propriétés des combinaisons

- $C_n^p = C_n^{n-p}$ et $C_n^0 = C_n^n = 1$
- $C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$

- Formule du binôme de newton:

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum C_n^k a^{n-k} b^k \\ &= C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + ... + C_n^n a^0 b^n. \\ &= a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + ... + b^n.\end{aligned}$$

Pour $a = b = 1$, on obtient la formule qui donne le nombre de parties d'un ensemble E à n éléments.

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n.$$

.

Exercices

Exercice1

Un groupe de 12 garçons et 10 filles décide de monter une pièce de théâtre comprenant 4 rôles masculins et 3 rôles féminins.

1) On tire au sort 4 garçons et 3 filles pour constituer la troupe des acteurs.
   1) Combien y a-t-il de troupes possibles ?
   b) Combien y a-t-il de distributions possibles de rôles, une fois la troupe choisie ?
   c) Quel est le nombre total de distributions ?

2) A est le nom d'un garçon et B celui d'une fille.
   a) Quel est le nombre de distributions où A joue dans la pièce ?
   b) Quel est le nombre de distributions où A et B jouent ensemble ?

.

Exercice2

Une urne contient $2N$ boules dont N sont rouges et N blanches ($N \geq 3$). On effectue un tirage de 3 boules de cette urne. Quel est le nombre de tirages comportant strictement plus de boules rouges que de blanches, dans les 03 cas suivants :

a) le tirage des 03 boules est simultané.
b) les boules sont tirées successivement et avec remise.
c) les boules sont tirées successivement et sans remise.

.

- Chaque jour, dans son chemin vers l'école un élève rencontre deux feux tricolores qui peuvent être au rouge, au vert ou au Bleu. quel est le nombre des états possibles pour ces feux?

$E = \{V, O, R\}$

ordre et répétition $\Rightarrow$ une dispositon=triplet ordonné et avec répétition (R, R, R), (R, R, V)

$\Omega = E^3$, $|\Omega| = 3^3$.

.

- un élève possède cinq pulls différents $\{A, B, C, D, E\}$. Chaque jour d'école, il choisit un pull *au hasard* qu'il porte durant la journée. quel est le nombre de possibilités pour la séquence des pulls portée durant la semaine, sachant que sa mère lave son linge en fin de semaine.

$E = \{A, B, C, D, E\}$

ordre et non répétition $\Rightarrow$ une dispositon=cinq-uplet ordonné et sans répétition (B, D, A, E, C)

$\Omega \subset E^5 \Rightarrow |\Omega| < 5^5$ (en fait $|\Omega| = 5!$)

Choix de $p = 2$ éléments parmi $n = 4$ avec ordre et répétition

$\Rightarrow$ les résultats: *02-listes*. le nombre total de 2-listes est $|\Omega| = l_4^2 = 4^2 = 16$.

.

- Une urne comporte 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire 04 boules *une à une avec remise*.

Choix de $p = 4$ boules parmi $n = 10$ avec ordre et répétition

$\Rightarrow$ les résultats: *04-listes*. le nombre total de 4-listes est $|\Omega| = l_{10}^4 = 10^4$.