Chapître 2
FONCTIONS GENERATRICES ET FONCTIONS CARACTERISTIQUES

III-1 Fonctions génératrices

Définition :

Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$*, une v.a.d. à valeurs entières. On appelle fonction génératrice de* X *la fonction*

$$g_X : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

définie par

$$g_X(s) = E\left(s^X\right) = \sum_{k\geq 0} s^k P(X=k)$$

Exemple:
si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, $X(\Omega) = \{0,1\}$ avec $P(X=0) = 1-p$, $P(X=1) = p$
Par conséquent

$$g_X(s) = \sum_{k=0}^{k=1} s^k P(X=k) = s^0 P(X=0) + s^1 P(X=1) = 1-p+sp$$

Propriétés

$a)$ g_X est C^∞ sur $]-1,1[$ et continue sur $[-1,1]$.

Si on note $g_X^{(n)}$ sa dérivée d'ordre n, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(X=n) = \dfrac{g_X^{(n)}(0)}{n!}$

$b)$ La fonction génératrice v.a.d. à valeurs entières caractérise sa loi

Si $X, Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$, alors X et Y ont même loi si et seulement si $\forall s \in [-1,1]$ $g_X(s) = g_Y(s)$

$c)$ $E(X) = g'_X(1)$ $\qquad V(X) = g''_X(1) + g'_X(1) - (g'_X(1))^2$

Démonstration

a) Puisque $s \in [-1,1]$, alors $|s^n P(X=n)| \leq P(X=n)$ et par suite convergence normale des séries car $\sum_{n\geq 0} P(X=n) = 1 < +\infty$. Finalement g_X est C^∞ sur $]-1,1[$ et continue sur $[-1,1]$, le développement en série entière termine ce point.

b) C'est la conséquence du fait que $P(X=n) = \dfrac{g_X^{(n)}(0)}{n!}$

c) Remarquons que $g'_X(s) = \left(E\left(s^X\right)\right)' = E\left(Xs^{X-1}\right)$ et $g''_X(s) = \left(E\left(s^X\right)\right)'' = E\left(X(X-1)s^{X-2}\right)$

III-2 Fonctions génératrices des moments (transformée de Laplace)

Définition

Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$,la fonction génératrice des moments est définie par

$$M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \begin{cases} \sum\limits_k e^{tk} P(X=k) & \text{si } X \text{ est discrète} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)\,dx & \text{si } X \text{ est continue} \end{cases}$$

pour tout réel t tel que $\mathrm{E}\left(e^{tX}\right)$ *existe.*

Théorème

On suppose que M_X est finie au voisinage de 0,c'est à dire qu'il existe t_0 tel que $M_X(t) < +\infty$ pour tout $t \in [-t_0, t_0]$,alors

$E\left(|X|^k\right) < +\infty$ *pour tout k et*

$$E\left(X^k\right) = M_X^{(k)}(0)$$

$M_X^{(k)}$ désignant la dérivée $k - ième$ de M_X.

Autrement dit, tous les moments d'ordre k peuvent être calculés à l'aide des dérivées de la fonction génératrice au

point 0

En effet,

$$\begin{aligned} M_X'(t) &= \frac{d}{dt}\left(E\left(e^{tX}\right)\right) = \frac{d}{dt}\sum_k e^{tk} P(X=k) = \\ &= \sum_k k e^{tk} P(X=k) = E\left(Xe^{tX}\right) \end{aligned}$$

si X est discrète, et dans le cas continu

$$\begin{aligned} M_X'(t) &= \frac{d}{dt}\left(E\left(e^{tX}\right)\right) = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)\,dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{tx} f_X(x)\,dx = E\left(Xe^{tX}\right) \end{aligned}$$

En faisant $t = 0$, il vient $M_X'(0) = E(X)$.

De même, on aura $M_X''(0) = E\left(X^2\right)$ ...

Ou encore d'après le théorème précédent, si $M_X(t)$ existe pour tout $t \in [-t_0, t_0]$, $\forall t_0 > 0$,alors on peut développer $M_X(t)$

en série de Taylor -Mc Laurin

$$M_X(t) = M_X(0) + M_X'(0)\frac{t}{1!} + M_X''(0)\frac{t^2}{2!} + ... + M_X^k(0)\frac{t^k}{k!} + ...$$

Ainsi $E\left(X^k\right)$ est le coefficient de $\dfrac{t^k}{k!}$.

Remarque: la fonction génératrice des moments peut ne pas exister car $E\left(e^{tX}\right)$ n'est pas toujours définie.

Exemples:

Exemple 1:

Soit X une v.a.c. de densité $f_X(x) = \dfrac{1}{2}e^{-\dfrac{x}{2}}1_{[0,+\infty[}(x)$

Donc

$$M_X(t) = \frac{1}{1-2t} \qquad pour \quad t < \frac{1}{2}$$

$$M'_X(t) = \frac{2}{(1-2t)^2} \qquad M'_X(t) = \frac{8}{(1-2t)^3} \qquad pour \quad t < \frac{1}{2}$$

Alors

$$E(X) = 2 \qquad E\left(X^2\right) = 8 \qquad V(X) = 4$$

Exemple 2:

Soit X une v.a.c. de densité $f_X(x) = ce^{-|x|^\alpha}, 0 < \alpha < 1, x \in \mathbb{R}$, et c est une constante déterminée par la condition $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$.On rappelle que la fonction Γ d'Euler est la fonction

définie par $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}dt$.

Pour $t > 0$,on a $M_X(t) \infty \int\limits_0^{+\infty} e^{tx}e^{-x^\alpha}dx = \int\limits_0^{+\infty} e^{x\left(t-x^{\alpha-1}\right)}dx$ et puisque $\alpha < 1$, $\int\limits_0^{+\infty} e^{tx}e^{-x^\alpha}dx$ n'est pas définie pour $t > 0$ car

$e^{x\left(t-x^{\alpha-1}\right)} \underset{x\longrightarrow+\infty}{\sim} e^{tx}$ d'où $M_X(t)$ n'existe pas.

Mais $E\left(|X|^k\right) = c\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|^k e^{-|x|^\alpha}dx = 2c\int\limits_0^{+\infty} x^k e^{-x^\alpha}dx$, par un changement de variables $y = x^\alpha$,on obtient

$$E\left(|X|^k\right) = \frac{2c}{\alpha}\int\limits_0^{+\infty} y^{\dfrac{k+1}{\alpha}-1}e^{-y}dy = \frac{2c}{\alpha}\Gamma\left(\frac{k+1}{\alpha}\right) < \infty$$

On remarque que même si $M_X(t)$ est infinie, les moments peuvent être finis.

A la lumière de ce qui précède, nous allons voir que la fonction caractéristique de X a l'énorme avantage d'exister

pour tout nombre réel t et toute v.a. X.

III-3 Fonctions caractéristiques

Définition III-3-1

On définit la fonction caractéristique, notée φ_X d'une variable aléatoire réelle

X par

$$\varphi_X(t) = E\left(e^{itX}\right) = \int_{\Omega} e^{itX} dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dP_X(x)$$

Dans les deux cas particuliers, on a

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= \sum_{k \in X(\Omega)} e^{itk} P(X = k) && \textit{si } X \textit{ est discrète} \\ \varphi_X(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_X(x)\, dx && \textit{si } X \textit{ est continue} \end{aligned}$$

On a les propriétés suivantes

Propriétés III-3-2

$$\begin{array}{rrcl} \cdot & \varphi_X(0) & = & 1 \\ \cdot & |\varphi_X(t)| & \leq & 1 \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ \cdot & \mathbb{R}^2 \text{ Si } Y & = & aX + b,\ (a, b) \in \textit{alors } \varphi_Y(t) = e^{ibt} \varphi_X(at) \\ \cdot & \varphi_X(-t) & = & \overline{\varphi_X(t)} \end{array}$$

Démonstration: exercice

Théorème III-3-3

φ_X est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

$$\begin{aligned} |\varphi_X(t+h) - \varphi_X(t)| &= \left| E\left(e^{i(t+h)X} - e^{itX}\right)\right| = \left| E\left(e^{itX} e^{ih\frac{X}{2}} \left(e^{ih\frac{X}{2}} - e^{-ih\frac{X}{2}}\right)\right)\right| \\ &= \left| E\left(e^{itX} e^{ih\frac{X}{2}} 2 \sin \frac{hX}{2}\right)\right| \leq 2E\left|\sin \frac{hX}{2}\right| \leq \\ &\leq \min\left(|h|\,|X|, 2\right) \end{aligned}$$

Car $|\sin x| \leq \min(|x|, 1)$ et le théorème de convergence dominée de Lebesgue,

$$\lim_{h \longrightarrow 0} |\varphi_X(t+h) - \varphi_X(t)| = 0$$

Ce qui garantit l'uniforme continuité de φ_X sur $\mathbb{R}$.

Théorème III-3-4

Soit X une v.a.r. possédant des moments jusqu'à l'ordre $k, i.e. E\left(|X|^k\right) < \infty$ alors

$$\varphi_X(t) = \sum_{j=0}^{k} E\left(X^j\right) \frac{(it)^j}{j!} + o\left(t^k\right)$$

En particulier, $\varphi_X^{(k)}(t) = i^k E\left(X^k e^{itX}\right)$ d'où $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k E\left(X^k\right)$ et donc

$$E\left(X^k\right) = \frac{\varphi_X^{(k)}(0)}{i^k}$$

Proposition III-3-5

Soient X et Y deux *variables aléatoires réelles indépendantes, de fonctions caractéristiques respectives* φ_X et φ_Y,

alors si $Z = X + Y$,on a

$$\varphi_Z(t) = \varphi_X(t)\,\varphi_Y(t)$$

On peut généraliser le résultat précédent à n variables, soit:

Si $X_1, ..., X_n$ sont n variables aléatoires réelles indépendantes, de *fonctions caractéristiques respectives* $\varphi_{X_1}, ..., \varphi_{X_n}$

alors

$$\varphi_{X_1+...+X_n}(t) = \varphi_{X_1}(t) ... \varphi_{X_n}(t)$$

III-4 Fonctions caractéristiques de quelques lois usuelles

Lois discrètes

1) Loi de Bernoulli

Soit X une v.a. qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$,alors $X(\Omega) = \{0,1\}$ avec

$$\begin{aligned} P(X=1) &= p \\ P(X=0) &= 1-p \end{aligned}$$

Sa fonction caractérisque est

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= E\left(e^{itX}\right) = \sum_{k \in X(\Omega)} e^{itk} P(X=k) = pe^{it} + (1-p)e^0 = \\ &= pe^{it} + (1-p) \end{aligned}$$

de dérivée première $\varphi_X'(t) = ipe^{it}$ et de dérivée seconde $\varphi_X''(t) = -pe^{it}$

Donc son espérance mathématique est $E(X) = \frac{1}{i}\varphi_X'(0) = p$ et $E\left(X^2\right) = \frac{1}{i^2}\varphi_X''(t) = p$

D'où sa variance est $V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = p - p^2 = p(1-p)$

2) Loi Binomiale

Soit $X \hookrightarrow B(n,p)$ de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0,1[$, alors $X(\Omega) = \{0,...,n\}$ avec

$$P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \qquad k = 0,1,...,n$$

Sa fonction caractérisque est

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= E\left(e^{itX}\right) = \sum_{k \in X(\Omega)} e^{itk} P(X=k) = \\
&= \sum_{k=0}^{n} e^{itk} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(e^{it} p\right)^k (1-p)^{n-k} = \\
&= \left(pe^{it} + (1-p)\right)^n
\end{aligned}$$

La dérivée s'écrit

$$\varphi_X'(t) = n\left(pe^{it} + (1-p)\right)^{n-1} ipe^{it}$$

d'où

$$E(X) = \frac{1}{i}\varphi_X'(0) = np$$

La dérivée seconde est

$$\varphi_X''(t) = -n(n-1)p^2 e^{it}\left(pe^{it} + (1-p)\right)^{n-2} - npe^{it}\left(pe^{it} + (1-p)\right)^{n-1}$$

d'où

$$E\left(X^2\right) = \frac{1}{i^2}\varphi_X''(0) = -\varphi_X''(0) = n(n-1)p^2 + np$$

et donc

$$V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = np(1-p)$$

3) Loi de Poisson

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$,de paramètre $\lambda > 0$, On a

$$\begin{aligned}
X(\Omega) &= \mathbb{N} \\
P(X=k) &= e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= E\left(e^{itX}\right) = \sum_{k \in X(\Omega)} e^{itk} P(X=k) = \\
&= \sum_{k \geq 0} e^{itk} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k \geq 0}\frac{\left(e^{it}\lambda\right)^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^{it}} = \\
&= e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}
\end{aligned}$$

La dérivée s'écrit
$$\varphi_X'(t) = \lambda i e^{it} e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}$$
d'où
$$E(X) = \frac{1}{i}\varphi_X'(0) = \lambda$$
On peut montrer de même que
$$V(X) = \lambda$$

Lois absolument continues

1) Loi uniforme

Une v.a. continue X suit une loi uniforme sur un intervalle$[a, b]$
et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[a,b]}$ si sa densité de probabilité f_X est donnée par:
$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } \ a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Sa fonction caractéristique est :
$$\varphi_X(t) = \frac{1}{b-a}\frac{e^{itb} - e^{ita}}{it}$$

Son espérance mathématique est :
$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

Sa variance est:
$$V(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$$

2) Loi exponentielle

Une v.a. continue X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et on note $X \hookrightarrow \exp(\lambda)$si sa densité de probabilité est :
$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{[0,+\infty[}(x)$$

Sa fonction caractéristique est :
$$\varphi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

Son espérance mathématique est :
$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Sa variance est donnée par
$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

3) Loi normale

Une variable aléatoire continue X suit une loi normale de paramètres μ et σ^2,et on note $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ si sa densité de probabilité f_X est donnée par

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad \mu \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$$

Sa fonction caractéristique est :

$$\varphi_X(t) = \exp\left(i\mu t - \frac{t^2\sigma^2}{2}\right)$$

et on a bien sûr

$$\begin{aligned} E(X) &= \mu \\ V(X) &= \sigma^2 \end{aligned}$$

On peut à l'inverse, déterminer la loi de probabilité d'une v.a. à l'aide de sa fonction caractéristique

III-5 Détermination de la loi de probabilité d'une v.a. à l'aide de sa fonction caractéristique

Soit F_X la fonction de répartition d'une v.a. X, et soit φ_X sa fonction caractéristique. On a résultat suivant.

Théorème III-5-1 (Formule d'inversion)

Soient $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, deux points de continuité de F_X. Alors

$$F_X(b) - F_X(a) = \lim_{c \longrightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^{c} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi_X(t)\, dt$$

Corollaire III-5-2

Si φ_X est intégrable sur $\mathbb{R}$, alors X admet pour densité f_X donnée par

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi_X(t)\, dt$$

Exemple

Soit X une v.a.qui suit la loi de Laplace, de densité

$$f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} e^{-|x|} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos tx \; e^{-|x|} dx = \int_{0}^{+\infty} \cos tx \; e^{-x} dx = \\ &= -\frac{\cos tx}{t^2} \Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{t^2} \int_0^{+\infty} \cos tx \; e^{-x} dx \end{aligned}$$

D'où on déduit que

$$\varphi_X(t) = \int_0^{+\infty} \cos tx \; e^{-x} dx = \frac{1}{1+t^2}$$

D'après le corollaire précédent,

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} e^{-|x|}$$

d'où l'on déduit que

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \frac{1}{1+t^2} dt = e^{-|x|}$$

Ainsi, supposons qu'une v.a. X suive la loi de Cauchy, dont la densité est

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

Alors la fonction caractéristique de X est

$$\varphi_X(t) = E\left(e^{itX}\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \frac{1}{1+x^2} dx = e^{-|t|}$$

Remarque : De manière analogue aux fonctions génératrices, la fonction caractéristique 'caractérise' la loi d'une v.a.

Proposition III-5-3: *Deux variables aléatoires X et Y ont même loi si et seulement si elles ont les mêmes fonctions caractéristiques.*

Autrement dit, soit φ_X la fonction caractéristique d'une v.a. X et soit φ_Y la fonction caractéristique d'une v.a. Y

$$X \text{ et } Y \text{ ont même loi si et seulement si } \varphi_X(t) = \varphi_Y(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$