Série d'exercices 2

Exercice 1

L'observation du ciel a permis de déduire les statistiques suivantes . Une journée ensoleillée est suivie d'une journée pluvieuse avec une probabilité 0.2, une journée pluvieuse est suivie d'une journée ensoleillée avec une probabilité 0.6 . Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ l'état du ciel dans la journée n.

1- La suite X_n est- elle une chaîne de Markov ?
2- Déterminer la matrice de transition et tracer son graphe.

Exercice 2

Un fumeur a l'habitude de choisir ses cigarettes de la manière suivante. Si pendant une semaine, il fume des cigarettes avec filtres, il fumera des cigarettes sans filtres la semaine suivante avec une probabilité de 0.2. Par contre, quand pendant une semaine il fume des cigarettes sans filtres, il y a une probabilité de 0.7 pour qu'il fume encore des cigarettes sans filtres la semaine suivante. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ l'état du fumeur à l'instant n.

1- Déterminer la matrice de transition de cette chaîne de Markov et tracer son graphe
2- La chaine de Markov est elle irréductible ?

Exercice 3

On donne la matrice de transition $P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et la distribution initiale $\pi(0) = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$

1- La chaine est -elle irréductible ?justifier ?
2- Calculer la probabilité que la chaîne passe de l'état 1 à l'état 2 en deux étapes
3- Calculer $P(X_2 = 2\ ,\ X_1 = 3,\ X_0 = 1)$
4- Calculer la distribution de X_1 et de X_2.
5- Trouver la distribution stationnaire et la distribution limite.

Exercice 4

On considère 5 points équirépartis sur un cercle. Un promeneur saute à chaque instant, d'un point à l'un de ses voisins avec la probabilité 1/2 pour chaque voisin.

1- Déterminer le graphe et la matrice de transition ainsi obtenue.
2- Quelle est la période de ses états ?

Exercice 5

On considère une chaîne de Markov à 3 états caractérisée par la distribution initiale $P(X_0 = 0) = 0.5$, $P(X_0 = 1) = 0.5$, et par la matrice de transition suivante :

$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Faire le graphe et calculer $P(X_0 = 1 , X_1 = 1, X_2 = 0)$

Exercice 6

on considère une chaîne de Markov définie sur $E = \{1,2,3\}$ dont la matrice de transition est

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

1- Donner le graphe de transition et vérifier que la chaîne est irréductible
2- Calculer la distribution stationnaire
3- Trouver les valeurs propres de P .
4- Ecrire P sous la forme $P = SDS^{-1}$, calculer $\lim_{n\to+\infty} P^n$. Que peut –on déduire ?

Exercice 7

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à espace d'états $E = \{1,2,3,4,5,6\}$ et de matrice de transition donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.8 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1- Etudier la chaîne (graphe, nature des états, périodicité)
2- Supposons que les états 3,4,5,6 ne forment qu'un seul état que l'on notera x.
Donner la matrice de transition P associée à $E = \{1,2,x\}$
Déterminer le temps moyen jusqu'à l'absorption.

Exercice 8

On considère une chaîne de Markov à valeurs dans $\{1,2,3,4\}$ de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer

1- les états transitoires et récurrents.
2- la probabilité d'absorption en $\{4\}$ partant de l'état 2
3- les temps moyens d'absorption