Chapitre 1

Rappels et compléments de probabilités

Chapitre 2

Estimation ponctuelle

Chapitre 3

Tests d'hypothèses paramétriques

3.1 Introduction

Soit une pièce de monnaie dont on ne connait pas la probababilité de pile p. On veut savoir si : $p \geq \frac{1}{2}$ ou si $p < \frac{1}{2}$. Ce problème est dit test d'hypothèses, plus précisément test de l'hypothèse $p \geq \frac{1}{2}$ contre hypothèse $p < \frac{1}{2}$. Il s'agit de prendre une décision (laquelle des deux hypothèses en présence est vraie) sur la base d'observations $(x_1, x_2, ..., x_n)$, par exemple $(\pi, \pi, f, f, f, f, \pi, ...)$ faites sur n lancers de cette pièce. Une règle de décision possible et naturelle est de décider $p \geq \frac{1}{2}$ si la fréquence de pile $F_n(pile) \geq \frac{1}{2}$ et de décider $p < \frac{1}{2}$ si $F_n(pile) < \frac{1}{2}$.

Un test d'hypothèses est donc une règle de décision pour trancher entre deux hypothèses en présence. Il peut y avoir erreur de décision, par exemple décider $p \geq \frac{1}{2}$ alors qu'en réalité $p < \frac{1}{2}$ ou l'inverse. La théorie des tests dévelloppe des procédures de choix, entrainant les plus petites erreurs, dans un sens à préciser.

3.2 Définitions

Dans toute la suite on considèrera un modèle statistique $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, (P_\theta)_{\theta \in \Theta})$ associé à l'observation d'une v.a X de loi P_θ. Le plus souvent ça sera un modèle d'échantillon $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, (\mathcal{P}_\theta)_{\theta \in \Theta})\ ^{(n)}$ où les lois seront supposées admettre des densités f_θ. Le modèle sera écrit, alors,$(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, (f_\theta)_{\theta \in \Theta})^{(n)}$.

Définition 3.1. On appelle hypothèse toute partie de $\mathcal{P}_0$ de $\mathcal{P}$. Si le modèle est paramétrique, c'est à dire $\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ alors une hypothèse est, de manière équivalente, une partie Θ_0 de Θ. Une hypothèse est dite simple si elle se réduit à un seul élément. Sinon elle est dite composite.

Exemple 3.1.
1. "$\theta = 1$" "$\theta = -3$","$\theta = (1, 2)$", d'une manière générale "$\theta = \theta_0$" sont des hypothèses simples.
2. "$\theta \leq 1$" "$\theta > -3$","$\theta \neq 0$" , d'une manière générale "$\theta \leq \theta_0$","$\theta > \theta_0$""$\theta \neq \theta_0$"sont des hypothèses composites.

Notation. Les deux hypothèses seront notées respectivement : H_0 : "$\theta \in \Theta_0$" et : H_1 : "$\theta \in \Theta_1$"

Définition 3.2. On appelle fonction test (déterministe) une application

$$\begin{aligned} \phi : \mathfrak{X} &\longrightarrow \{0,1\} \\ x &\longrightarrow \phi(x) \end{aligned}$$

A toute fonction test est associé la fonction décision : $d(x) = d_0$ si $\phi(x) = 0$ et $d(x) = d_1$ si $\phi(x) = 1$.

Une fonction test correspond à une partition de $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_0 \cup \mathfrak{X}_1$ avec $\mathfrak{X}_0 = \{x \in \mathfrak{X} \backslash \phi(x) = 0\}$ et $X_1 = \{x \in \mathfrak{X} \backslash \phi(x) = 1\}$. $\mathfrak{X}_1$ la région de $\mathfrak{X}$ conduisant au rejet de $\mathcal{P}_0$ est dite région critique du test et sera noté par la suite C. On peut alors écrire $\phi(x) = 1_C(x)$.

Exemple 3.2. Dans l'exemple de l'introduction, si on pose $x_i = 0$ pour face et $x_i = 0$ pour pile, la région critique du test est $C = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \backslash \overline{x} < \frac{1}{2}\}$ ce qui correspond à la fonction test

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \overline{x} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si} \quad \overline{x} \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Définition 3.3. On appelle fonction test (aléatoire) une application :$\phi : \mathfrak{X} \longrightarrow [0,1]$, auquel est associé la règle de décision :

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{décider } H_1 \text{ vraie} \\ \gamma & \text{décider } H_1 \text{ vraie avec la probabilité } \gamma \\ 0 & \text{décider } H_0 \text{ vraie} \end{cases}$$

Exemple 3.3. Pour l'exemple précédent on peut considérer le test suivant

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \overline{x} < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \text{si} \quad \overline{x} = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si} \quad \overline{x} > \frac{1}{2} \end{cases}$$

on rejette H_0 si $\overline{x} < \frac{1}{2}$, mais aussi avec la probabilité $\frac{1}{3}$ si $\overline{x} = \frac{1}{2}$. Dans les autres cas on accepte H_0.

Tout test peut conduire à des décisions érronées. On utilise la fonction puissance pour mesurer ces erreurs.

Définition 3.4. La fonction puissance d'un test Φ de région critique C est la fonction β_Φ définie sur $\Theta_0 \cup \Theta_1$ par

$$\beta_\Phi(\theta) = P_\theta(C)$$

Le niveau de signification de ce test α_Φ est défini par

$$\alpha_\Phi = \sup_{\theta \in \Theta_0} \beta_\Phi(\theta)$$

	vraie valeur "$\theta = \theta_0$"	vraie valeur "$\theta = \theta_1$"
décider "$\theta = \theta_0$"	décision juste	erreur de 2ème espèce
décider "$\theta = \theta_1$"	erreur de 1ère espèce	décision juste

TABLE 3.1 – Différentes erreurs d'un test

Considérons le problème de test de l'hypothèse simple "$\theta = \theta_0$" contre l' hypothèse simple "$\theta = \theta_1$". Dans ce cas on peut se tromper de deux manières :

décider que "$\theta = \theta_0$" est vrai alors que c'est "$\theta = \theta_1$" qui l'est, ou bien décider que "$\theta = \theta_1$" est vrai alors que c'est "$\theta = \theta_0$" qui l'est.

Ces deux erreurs sont dites respectivement erreurs de première et deuxième espèce et mesurées par

$$\beta_\Phi(\theta_0) = P_{\theta_0}(\textit{décider}\text{"}\theta = \theta_1\text{"}) = \alpha_\Phi$$

et

$$1 - \beta_\Phi(\theta_1) = P_{\theta_1}(\textit{décider}\text{"}\theta = \theta_0\text{"}) = 1 - \beta_\Phi$$

α_Φ et β_Φ sont respectivement dits niveau de signification et puissance du test. Un test idéal serait donc un test qui aurait les plus petites erreurs de première et deuxième espèce . Il est facile de voir que cela n'est pas possible car α_Φ et $1 - \beta_\Phi$ varient en sens inverse l'un de l'autre (voir figure ci-dessous).

Critère de Neymann-Pearson :

Puisqu'il n'est pas possible de trouver un test meilleur que tous les autres, alors on va restreidre la classe des tests considérés, en se limitant aux tests ayant une erreur de première espèce inférieure à un certain seuil α fixé à l'avance . On choisira, alors, dans cette classe celui qui a la plus petite erreur de deuxième espèce (ou la plus grande puissance). Ce critère introduit de fait une dissymétrie entre les deux hypothèses qui ne sont pas considérées sur le même pied d'égalité. α est souvent choisi très petit (en pratique les seuils 0.05,0.02 et 0.01 sont les plus utilisés), l'hypothèse H_0 est donc protégé, dans le sens où la probabilité de la rejetter à tort est controlée et prise généralement très faible. H_0 est dite hypothèse nulle et H_1 hypothèse alternative.

3.3 Tests d'hypothèses simples

3.3.1 Lemme de Neymann-Pearson

Définition 3.5. Un test Φ est dit le plus puissant au niveau α $(0 < \alpha < 1)$ de l'hypothèse simple "$\theta = \theta_0$" contre l' hypothèse simple "$\theta = \theta_1$" si :

1. $\alpha_\Phi \leq \alpha$
2. Pour tout autre test Φ' on a : $\alpha_{\Phi'} \leq \alpha \implies \beta_\Phi \geq \beta_{\Phi'}$

Théorème 3.1 (Lemme de Neymann-Pearson)**.** *Pour le problème de test de l'hypothèse simple "$\theta = \theta_0$" contre l' alternative simple "$\theta = \theta_1$", les tests les plus puissants sont de la*

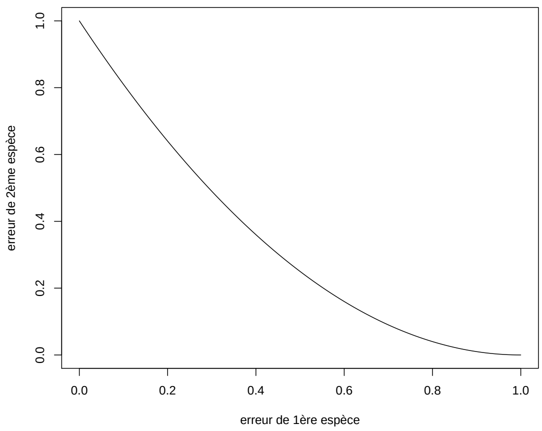

FIGURE 3.1 – Evolution de l'erreur de deuxième espèce en fonction de l'erreur première espèce

forme

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 \\ si\ \dfrac{L(\theta_1,\widetilde{x})}{L(\theta_0,\widetilde{x})} > K \\ \gamma \quad si\ \dfrac{L(\theta_1,\widetilde{x})}{L(\theta_0,\widetilde{x})} = K \\ 0 \quad si\ \dfrac{L(\theta_1,\widetilde{x})}{L(\theta_0,\widetilde{x})} \leq K \end{cases}$$

Démonstration. Rappelons que :

$\alpha = E_{\theta_0}(\Phi) = \int\limits_{\mathfrak{X}} \Phi(x)L(\theta_0,x)dx,,\ \alpha_{\Phi'} = E_{\theta_0}(\Phi') = \int\limits_{\mathfrak{X}} \Phi'(x)L(\theta_0,x)dx,$

$\beta_\Phi = E_{\theta_1}(\Phi) = \int\limits_{\mathfrak{X}} \Phi(x)L(\theta_1,x)dx,\ \beta_{\Phi'} = E_{\theta_1}(\Phi') = \int\limits_{\mathfrak{X}} \Phi'(x)L(\theta_1,x)dx.$

Désignons par C la région critique de Φ. On a

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathcal{X}} (\Phi(x)-\Phi'(x))(L(\theta_0,x)-KL(\theta_1,x))dx &= \int\limits_{\mathcal{C}} (\Phi(x)-\Phi'(x))(L(\theta_1,x)-KL(\theta_0,x))dx \\ +\int\limits_{\overline{\mathcal{C}'}} (\Phi(x)-\Phi'(x))(L(\theta_1,x)-KL(\theta_0,x))dx &\geq 0 \end{aligned}$$

d'où

$$\int\limits_{\mathcal{X}} (\Phi(x)-\Phi'(x))(L(\theta_1,x)dx \geq K \int\limits_{\mathcal{X}} (\Phi(x)-\Phi'(x))L(\theta_0,x)dx$$

c'est à dire

$$(\beta_\Phi - \beta_{\Phi'}) \geq K(\alpha - \alpha_{\Phi'}) \geq 0$$

□

Remarque 1. Si les lois de la famille $\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ sont absolument continues, on a P_θ et donc les tests les plus puissants sont déterministes et de la forme :

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 \quad \text{si } \dfrac{L(\theta_1, \widetilde{x})}{L(\theta_0, \widetilde{x})} > K \\ 0 \quad \text{si } \dfrac{L(\theta_1, \widetilde{x})}{L(\theta_0, \widetilde{x})} < K \end{cases}$$

Exemple 3.4. Soit $(x_1, x_2, ..., x_n)$ un n-échantillon de $X \sim Exp(\lambda)$. Déterminons le test le plus puissant au niveau α de "$\lambda = \lambda_0$" contre "$\lambda = \lambda_1$".

La famille des lois $\{Exp(\lambda) \backslash \lambda > 0\}$ est absolument continue donc le tests les plus puissants sont déterministes, d'après le lemne de Neymann-Pearson.

$$\Phi(\widetilde{x}) = \begin{cases} 1 \quad \text{si} \quad \dfrac{L(\lambda_1, \widetilde{x})}{L(\lambda_0, \widetilde{x})} > K \\ 0 \quad \text{si} \quad \dfrac{L(\lambda_1, \widetilde{x})}{L(\lambda_0, \widetilde{x})} \leq K \end{cases}$$

Ces tests sont de régions critiques

$$C = \{\widetilde{x} / \frac{L(\lambda_1, \widetilde{x})}{L(\lambda_0, \widetilde{x})} > K\} = \{\widetilde{x} / (\frac{\lambda_0}{\lambda_1})^n e^{-(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_0}) \sum_{i=1}^{n} x_i} > K\}$$

On remarque qu'il y a deux cas

1er cas : $\lambda_1 > \lambda_0$

Les tests les plus puissants sont alors de la forme :

$$\Phi(\widetilde{x}) = \begin{cases} 1 \quad \text{si} \quad \{\widetilde{x} / \sum_{i=1}^{n} x_i < K'\} \\ 0 \quad \text{si} \quad \{\widetilde{x} / \sum_{i=1}^{n} x_i > K'\} \end{cases}$$

2ème cas : $\lambda_1 < \lambda_0$

$$\Phi(\widetilde{x}) = \begin{cases} 1 \quad \text{si} \quad \{\widetilde{x} / \sum_{i=1}^{n} x_i > K'\} \\ 0 \quad \text{si} \quad \{\widetilde{x} / \sum_{i=1}^{n} x_i < K'\} \end{cases}$$

Théorème 3.2. *Pour tout α dans [0,1], il existe un test de la forme précédente de niveau α.*

Démonstration. On doit avoir :

$$\begin{aligned} \alpha_\Phi &= P\left(\frac{L(\theta_1, \widetilde{X})}{L(\theta_0, \widetilde{X})} > K\right) + \gamma P\left(\frac{L(\theta_1, \widetilde{X})}{L(\theta_0, \widetilde{X})} = K\right) \\ &= 1 - F_Z(K) + \gamma\left(F_Z(K) - F_Z(K_-)\right) = \alpha \end{aligned}$$

Notons $Z = \dfrac{L(\theta_1, \widetilde{X})}{L(\theta_0, \widetilde{X})}$. On va distinguer deux cas :

1^{er} cas : Z absolument continue

Dans ce cas F_Z est continue et strictement croissante (i.e bijective). On a $F_Z(K) - F_Z(K_-) = 0$ et l'équation $1 - F_Z(K) = \alpha$ admet l'unique solution (voir figure 1.2)

$$K = F_Z^{-1}(1-\alpha)$$

γ pouvant être pris quelconque , en particulier $\gamma = 0$.

$2^{ème}$ cas : Z discrète

En général $F_Z(K) - F_Z(K_-) \neq 0$.L'équation (1) admet comme solution

$$\gamma = \frac{\alpha - (1 - F_Z(K))}{F_Z(K) - F_Z(K_-)}$$

$\square$

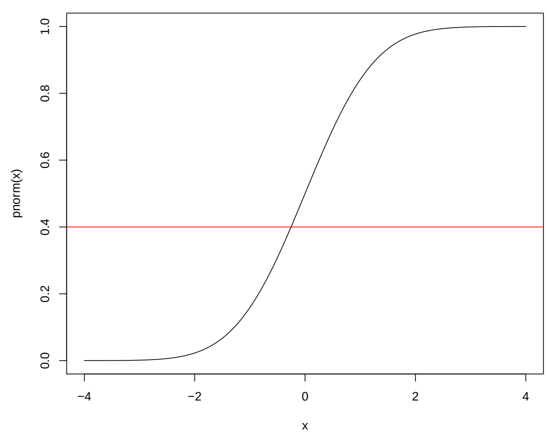

Figure 3.2 – Cas absolument continu

Exemple précédent : Pour déterminer ce test il suffit d'écrire : $P_{\lambda_0}(C) = \alpha$.

Dans le cas $\lambda_1 > \lambda_0$, on a $P(\sum_{i=1}^{n} x_i < K') = F_{\gamma(n, \frac{1}{\lambda_0})}(K') = F_{\chi^2_{2n}}(\frac{1}{2\lambda_0}K')$.

On déduit $K' = 2\lambda_0 \chi^2_{2n}(\ \alpha)$.

Pour le deuxième cas $\lambda_1 > \lambda_0$, on obtient $K' = 2\lambda_0 \chi^2_{2n}(1-\alpha)$.

3.3.2 Tests sur les paramètres de la loi normale

La loi normale étant très importante en statistique car

– utilisée pour modéliser beaucoup de phénomènes d'une part

– utilisée comme loi asymptotique (lorsque la taille de l'échantillon est grand)

Les tests portant sur ses paramètres (moyenne et variance) ont une grande importance.

Test de "$m = m_0$" **contre** "$m = m_1$"

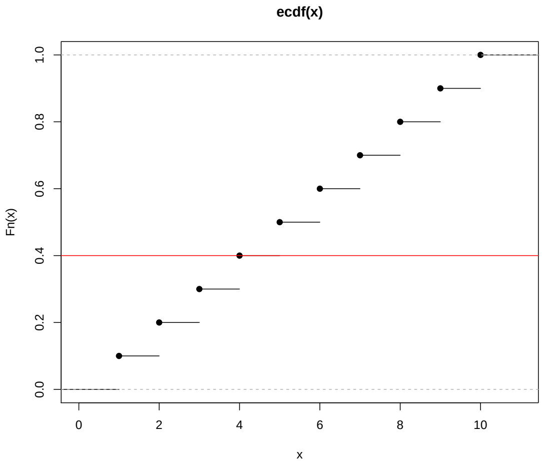

FIGURE 3.3 – Cas discret

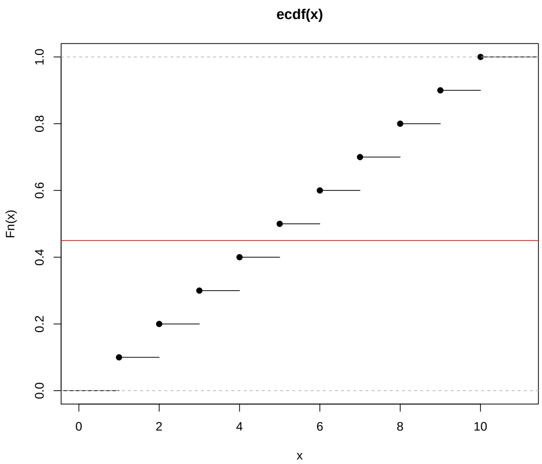

FIGURE 3.4 – Cas discret

Les tests les plus puissants sont déterministes, en utilisant le lemme de Neymann-Pearson, et ont pour régions critiiques

$$\begin{aligned}
C &= \{\ \widetilde{x}/\ \frac{L(m_1,\widetilde{x})}{L(m_0,\widetilde{x})} > K\} = \left\{ \widetilde{x}/\frac{\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x_i-m_1)^2}{\sigma^2}}\right)}{\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x_i-m_0)^2}{\sigma^2}}\right)} > K \right\} \\
&= \left\{ \widetilde{x}/e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i(m_1-m_0)}{\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(m_1^2-m_0^2)}{\sigma^2}} > K \right\}
\end{aligned}$$

On distingue deux cas :
1er cas : $m_1 > m_0$

$$C = \{\ \widetilde{x}/\sum_{i=1}^{n} x_i > K'\} = \{\ \widetilde{x}/\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} > K''\}$$

2ème cas : $m_1 < m_0$

$$C = \{\ \widetilde{x}/\sum_{i=1}^{n} x_i < K'\} = \{\ \widetilde{x}/\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} < K''\}$$

Si on cherche le test le plus puissant au niveau α, on doit avoir pour le cas $m_1 > m_0$:

$$P_{m_0}(C) = P_{m_0}(\sum_{i=1}^{n} x_i > K') = 1 - F_{N(nm_0,n\sigma^2)}(K') = \alpha$$

ce qui donne

$$K' = F^{-1}_{N(0,1)}(1-\alpha) = q_{1-\alpha}$$

et donc

$$C = \{\ \widetilde{x}/\overline{x} > m_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}q_{1-\alpha}\}$$

Pour le cas $m_1 < m_0$, on obtient , après calculs

$$C = \{\ \widetilde{x}/\overline{x} < m_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}q_{1-\alpha}\}$$

Calculons la puissance de ce test dans le premier cas

$$\begin{aligned}
\beta &= P_{m_1}(C) = P_{m_1}(\sum_{i=1}^{n} x_i > K_\alpha) = 1 - F_{N(nm_1,n\sigma^2)}(K_\alpha) \\
&= 1 - F_{N(0,1)}(\frac{K_\alpha - nm_1}{\sqrt{n}\sigma}) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{n(m_0-m_1)+\sqrt{n}\sigma q_{1-\alpha}}{\sqrt{n}\sigma}\right)
\end{aligned}$$

Test sur la variance : "$\sigma^2 = \sigma_0^2$" contre "$\sigma^2 = \sigma_1^2$", avec moyenne connue
Le tests les plus puissants sont déterministes et leurs régions critiques s'écrivent

$$C = \left\{ \widetilde{x} / \frac{L(\sigma_1^2, \widetilde{x})}{L(\sigma_0^2, \widetilde{x})} > K \right\} = \left\{ \widetilde{x} / \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^n e^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2}) \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2} > K \right\}$$

1er cas : $\sigma_1^2 > \sigma_0^2$

$$C = \left\{ \widetilde{x} / \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 > K' \right\}$$

2ème cas : $\sigma_1^2 < \sigma_0^2$

$$C = \left\{ \widetilde{x} / \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 < K' \right\}$$

Le test le plus puissant au niveau α s'obtient, pour le premier cas, en écrivant que :

$$\begin{aligned} P_{\sigma_0^2}(C) &= P_{\sigma_0^2}(\sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 > K') = P_{\sigma_0^2} \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2}{\sigma_0^2} > K' \\ &= 1 - F_{\chi_n^2}(K_\alpha) = \alpha \end{aligned}$$

ce qui donne

$$K' = \sigma_0^2 F_{\chi_n^2}^{-1}(1-\alpha) = \sigma_0^2 \chi_n^2 (1-\alpha)$$

et donc au final , on a

$$C = \left\{ \widetilde{x} / \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 > \sigma_0^2 \chi_n^2 (1-\alpha) \right\}$$

Pour le deuxième cas, on obtient

$$C = \left\{ \widetilde{x} / \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 < \sigma_0^2 \chi_n^2 (\alpha) \right\}$$

Les tests précédents ne sont valables que lorsque σ^2 est connu (pour le test sur la moyenne) et lorsque m est connu (pour le test sur la variance). Lorsque lesdeux paramètres sont inconnus, on obtient des tests en gardant les mêmes formes pour les régions critiques, et en remplaçant m et σ^2 par leurs estimateurs $\overline{x}$ et S^2 (ou S'^2). Les régions critiques finales changent, et de plus il ne découle plus des théorèmes précédents que les tests obtenus soient les plus puissants à leurs niveaux.

Test de Student (test sur la moyenne m d'une loi normale)
Ce test consiste à remplacer σ^2 par son estimateur S'^2. dans la région critique du test à variance connue $C = \{\widetilde{x}/\overline{x} > K\}$. Pour qu' il soit de niveau α, et en supposant $m_0 < m_1$, il faut :

$$\begin{aligned} P_{m_0}(C) &= P_{m_0}(\overline{x} > K) = P_{m_0}\left(\frac{\overline{x}-m_0}{\frac{S'}{\sqrt{n}}} > \frac{K-m_0}{\frac{S'}{\sqrt{n}}}\right) \\ &= 1 - F_{St_{n-1}}\left(\frac{K-m_0}{\frac{S'}{\sqrt{n}}}\right) = \alpha \end{aligned}$$

donc

$$K = m_0 + \frac{S'}{\sqrt{n}} t_{n-1}(1-\alpha)$$

La région critique du test de Student au niveau α de "$m = m_0$" contre "$m = m_1$" est

$$C = \{\widetilde{x}/\overline{x} > m_0 + \frac{S'}{\sqrt{n}} t_{n-1}(1-\alpha)\}$$

Si $m_0 > m_1$, par une démarche similaire on obtient

$$C = \{\widetilde{x}/\overline{x} < m_0 - \frac{S'}{\sqrt{n}} t_{n-1}(1-\alpha)\}$$

Test sur la variance Remplaçons m par son estimateur $\overline{x}$ dans la région critique du test à moyenne connue, on obtient :

$$\Phi(\widetilde{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 > K \\ 0 & \text{si} \quad \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \leq K \end{cases}$$

Il est de niveau α si :

$$\begin{aligned} P_{\sigma_0^2}(C) &= P_{\sigma_0^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 > K_\alpha\right) = P_{\sigma_0^2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{\sigma_0^2} > \frac{K'}{\sigma_0^2}\right) \\ &= 1 - F_{\chi^2_{n-1}}(K_\alpha) = \alpha \end{aligned}$$

ce qui donne

$$K_\alpha = \sigma_0^2 F^{-1}_{\chi^2_{n-1}}(1-\alpha) = \sigma_0^2 \chi^2_{n-1}(1-\alpha)$$

$$C = \left\{\widetilde{x}/\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 > \sigma_0^2 \chi^2_{n-1}(1-\alpha)\right\}$$

3.4 Tests d'hypothèses composites

D'une manière générale on est amené à considérer des tests où les deux hypothèses en présence ne sont pas simples. Les hypothèses en présence sont alors de la forme : H_0 : "$\theta \in \Theta_0$" et H_1 : "$\theta \in \Theta_1$". En particulier si $\Theta \subset R$, on distingue

- les hypothèses unilatères : "$\theta \leq \theta_0$", "$\theta > \theta_1$"

– les hypothèses bilatères : "$\theta \leq \theta_0$ ou $\theta > \theta_1$", "$\theta \neq \theta_0$".

Définition 3.6. Un test Φ est dit uniformément le plus puissant au niveau α pour le problème de test de H_0 : "$\theta \in \Theta_0$" contre H_1 : "$\theta \in \Theta_1$". si

1. $\alpha_\Phi \leq \alpha$
2. pour tout autre test Φ' tel que $\alpha_{\Phi'} \leq \alpha$ on a

$$\beta_{\Phi'}(\theta) \leq \beta_\Phi(\theta) \quad \forall \theta \in \Theta_1$$

3.4.1 Tests d'hypothèses unilatères

Questions :
1) Existe-t-il des tests UMP pour des hypothèses composites ?
2) Si oui comment les déterminer ?

Définition 3.7. La famille de lois $\mathcal{P} = \{(f_\theta)_{\theta\in\Theta}\}$ est dite à rapport de vraisemblance monotone si
1) il existe une statistique

$$\begin{aligned} T : \mathfrak{X} &\longrightarrow R \\ x &\longrightarrow T(x) \end{aligned}$$

2) il existe une fonction monotone $g : R \longrightarrow R$
telles que $\forall$ $\theta_1 > \theta_0$

$$\frac{L(\theta_1, x)}{L(\theta_0, x)} = g(T(x))$$

On parle alors de famille à R.V.M croissant si g est croissante ou de famille à R.V.M décroissant si g est décroissante.

Exemple 3.5. Considérons la famille des lois de Poisson $\{P(\lambda) \setminus \lambda > 0\}$ et soit $\lambda_1 > \lambda_0$

$$\frac{L(\lambda_1, x)}{L(\lambda_0, x)} = \frac{\dfrac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^x}{x!}}{\dfrac{e^{-\lambda_0}\lambda_0^x}{x!}} = e^{-(\lambda_1-\lambda_0)}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^x = e^{-(\lambda_1-\lambda_0)}e^{x\log\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)} = g(x)$$

g est croissante puisque $\log\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) > 0$. Donc la famille $\{P(\lambda) \setminus \lambda > 0\}$ esr à R.V.M croissant

Exemple 3.6. Famille des lois exponentielles d'ordre 1. Soit $\theta_1 > \theta_0$
On a

$$\frac{L(\theta_1, x)}{L(\theta_0, x)} = \frac{c(\theta_1)h(x)\exp(a(x)\alpha(\theta_1))}{c(\theta_0)h(x)\exp(a(x)\alpha(\theta_0))} = \frac{c(\theta_1)}{c(\theta_0)}\exp(a(x)(\alpha(\theta_1) - \alpha(\theta_0))$$

$$\frac{L(\theta_1, x)}{L(\theta_0, x)} = g(a(x))$$

Ce rapport est $\begin{cases} \text{croissant si } \alpha \text{ est croissante} \\ \text{décroissant si } \alpha \text{ est décroissante} \end{cases}$

Application : famille des lois $Exp(\lambda)$
$f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{R_+}(x) = c(\lambda)h(x)\exp(a(x)\alpha(\lambda))$
avec $\alpha(\lambda) = -\lambda$
donc la famille $Exp(\lambda)$ est à R.V.M décroissant.

Théorème 3.3. *Soit le modèle statistique* $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, (f_\theta)_{\theta\in\Theta})$ *où la famille* $(f_\theta)_{\theta\in\Theta}$ *est à R.V.M croissant alors le test*
$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & si\ T(x) > K \\ \gamma & si\ T(x) = K \\ 0 & si\ T(x) < K \end{cases}$$
de niveau α *est UMP au niveau* α *pour tester* "$\theta \leq \theta_0$" *contre* "$\theta > \theta_0$"
K *et* γ *sont déterminés par l'équation* $\alpha_\Phi = \alpha$.

Remarque 2. Si la famille $(f_\theta)_{\theta\in\Theta}$ est R.V.M décroissant alors le test le plus puissant au niveau α est de la forme
$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } T(x) < K \\ \gamma & \text{si } T(x) = K \\ 0 & \text{si } T(x) > K \end{cases}$$

Démonstration. La démonstration du théorème est basée sur les deux lemmes qui sont utiles en eux-mêmes □

Lemme 3.4. *Un test est UMP de* Θ_0 *contre* Θ_1 *si et seulement s' il est UMP de* Θ_0 *contre* "$\theta = \theta_1$" $\forall\ \theta_1 \in \Theta_1$.

Lemme 3.5. *Soit* $\Theta_0' \subset \Theta_0$ *et* Φ *un test UMP au niveau* α *de* Θ_0' *contre* Θ_1. *Si comme test de* Θ_0 *contre* Θ_1, Φ *est de niveau* α *alors* Φ *est UMP au niveau* α *de* Θ_0 *contre* Θ_1.

3.4.2 Tests d'hypothèses bilatères

Les tests de la forme "$\theta = \theta_0$" contre "$\theta \neq \theta_0$" sont parmi les plus importants tests bilatères. On montre facilement qu'il n'existe pas de test UMP pour ce type de test.

Prenons l'exemple d'un test portant sur la moyenne d'une loi normale à variance connue : "$m = m_0$" contre "$m \neq m_0$",

Si un test UMP existait, alors d'après le lemme 1 :

- il serait UMP de "$m = m_0$" contre "$m > m_0$" et donc aurait pour région crique $C_1 = \{\overline{x}/\overline{x} > m_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha}\}$

-il serait UMP de "$m = m_0$" contre "$m > m_0$" et donc aurait pour région crique $C_1 = \{\overline{x}/\overline{x} < m_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha}\}$

Ces deux régions critiques sont contradictoires et conduisent à des décisions contraires.

Une solution est de considérer un test ayant pour région critique un compromis entre les deux régions précédentes de la forme
$$C = \{\overline{x}/\overline{x} < K_1\ ou\ \overline{x} > K_2\}$$

Définition 3.8. Un test Φ de H_0 : "$\theta \in \Theta_0$" contre H_1 : "$\theta \in \Theta_1$" est dit sans biais si
$$\alpha_\Phi \leq \beta_\Phi(\theta) \quad \forall \theta \in \Theta_1$$

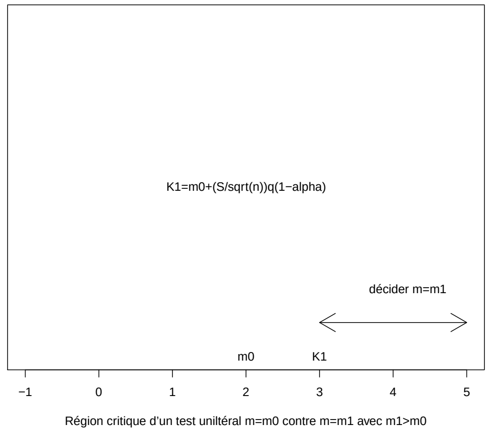

FIGURE 3.5 – Région critique du test unilatéral 1

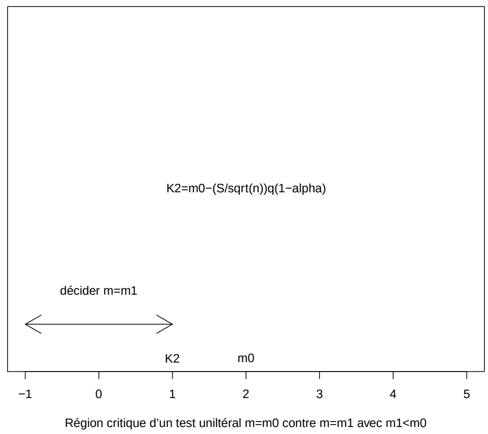

FIGURE 3.6 – Région critique du test unilatéral 2

Théorème 3.6. *Soit $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \{f_\theta(x) = c(\theta)h(x)\exp(a(x)\alpha(\theta)\ \theta \in \Theta\})^{(n)}$ un modèle statistique exponentiel où la fonction $\theta \longrightarrow \alpha(\theta)$ est strictement monotone. Soit θ_0, θ_1 2 réels tels que $\theta_0 < \theta_1$. Alors $\forall \alpha \in [0,1]$ il existe un test UMPB au niveau α de "$\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$" contre "$\theta < \theta_0$ ou $\theta > \theta_1$" de la forme*

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 \quad si \sum\limits_{i=1}^{n} a(x_i) > K_1 \ ou \sum\limits_{i=1}^{n} a(x_i) > K_2 \\ \gamma_1, \gamma_2 \quad si \sum\limits_{i=1}^{n} a(x_i) = K_1 ou \sum\limits_{i=1}^{n} a(x_i) = K_2 \\ 0 \quad si\ K_1 < \sum\limits_{i=1}^{n} a(x_i) < K_2 \end{cases}$$

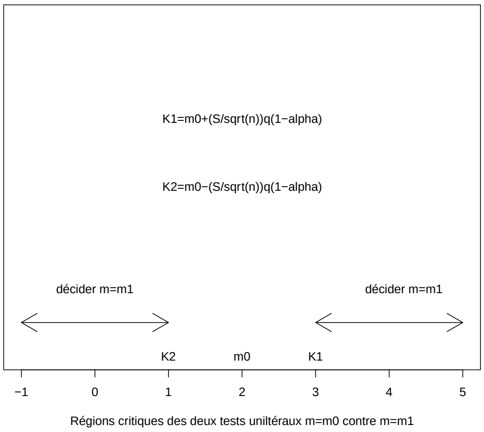

FIGURE 3.7 – Région critique d'un test blatéral

$K_1, K_2, \gamma_1, \gamma_2$ *étant déterminés par les équations :*

$$\beta_\Phi(\theta_0) = \alpha \ , \ \beta_\Phi(\theta_1) = \alpha$$

Corollaire 3.7. *Si $\theta_0 = \theta_1$, il existe un test UMPB de "$\theta = \theta_0$" contre "$\theta \neq \theta_0$ " de la forme précédente, $K_1, K_2, \gamma_1, \gamma_2$ étant déterminés par les équations :*

$$\beta_\Phi(\theta_0) = \alpha \ , \ \beta'_\Phi(\theta_0) = 0$$

Exemple 3.7. Test sur la moyenne d'une loi normale à variance connue : "$m = m_0$" contre "$m \neq m_0$ "

La loi normale vérifie les hypothèses précédentes, il existe donc un test UMPB pour ce problème de la forme :

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 \quad \text{si } \sum\limits_{i=1}^{n} x_i > K_1 \text{ ou } \sum\limits_{i=1}^{n} x_i > K_2 \\ 0 \qquad\qquad \text{si } K_1 \leq \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \leq K_2 \end{cases}$$

Sa région critique est :

$$C = \{\widetilde{x} / \sum_{i=1}^{n} x_i < K_1 \ \text{ ou } \ \sum_{i=1}^{n} x_i > K_2\} = \{\overline{x}/\overline{x} < K'_1 \ ou \ \overline{x} > K'_2\}$$

K_1, K_2 sontdéterminés par les équations :

$$\beta_\Phi(m_0) = \alpha \ , \ \beta'_\Phi(m_0) = 0$$

La première donne

$$\begin{aligned}\beta_\Phi(m_0) &= P_{m_0}(C) = P_{m_0}(\sum_{i=1}^n x_i < K_1 \text{ } ou \sum_{i=1}^n x_i > K_2') \\ &= P_{m_0}(\sum_{i=1}^n x_i < K_1) + P(\sum_{i=1}^n x_i > K_2') \\ &= F_{N(nm_0, n\sigma^2)}(K_1') + 1 - F_{N(nm_0, n\sigma^2)}(K_2') \\ &= \Phi\left(\frac{K_1' - nm_0}{\sqrt{n}\sigma}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{K_2' - nm_0}{\sqrt{n}\sigma}\right) = \alpha\end{aligned}$$

ce qui est équivalent à

$$\Phi\left(\frac{K_2' - nm_0}{\sqrt{n}\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{K_1' - nm_0}{\sqrt{n}\sigma}\right) = 1 - \alpha$$

La deuxième équation donne

$$\beta_\Phi'(m_0) = -\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\phi\left(\frac{K_2' - nm_0}{\sqrt{n}\sigma}\right) - \phi\left(\frac{K_1' - nm_0}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right) = 0$$

avec $\phi = \Phi'$: densité de la loi $N(0,1)$. Ces deux équations, en utilisant la symétrie de ϕ conduisent à $\dfrac{K_2' - nm_0}{\sqrt{n}\sigma} = q_{1-\frac{\alpha}{2}}$ et $\dfrac{K_1' - nm_0}{\sqrt{n}\sigma} = q_{\frac{\alpha}{2}} = -q_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

Le test UMPB de "$m = m_0$" contre "$m \neq m_0$ " a la région critique :

$$C = \left\{\widetilde{x} / \sum_{i=1}^n x_i < nm_0 - \sqrt{n}\sigma q_{1-\frac{\alpha}{2}} \text{ } ou \text{ } \sum_{i=1}^n x_i > nm_0 + \sqrt{n}\sigma q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}$$

ce qui est équivalent à :

$$C = \left\{\widetilde{x} / \left|\overline{x} - m_0\right| > \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}$$

Remarque 3. Si la variance est inconnue on a le test de Student de région critique

$$C = \left\{\widetilde{x} / \left|\overline{x} - m_0\right| > \frac{S'}{\sqrt{n}} t_{n-1}(1 - \frac{\alpha}{2})\right\}$$

Exemple 3.8. Application : Test sur la variance d'une loi normale à moyenne connue : "$\sigma^2 = \sigma_0^2$" contre "$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$"

La loi normale vérifie les hypothèses précédentes, il existe donc un test UMPB pour ce problème de la forme :

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum\limits_{i=1}^n (x_i - m)^2 > K_1 \text{ ou } \sum\limits_{i=1}^n (x_i - m)^2 > K_2 \\ 0 & \text{si } K_1 \leq \sum\limits_{i=1}^n (x_i - m)^2 \leq K_2 \end{cases}$$

Sa région critique est :

$$C = \{\widetilde{x} / \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 < K_1 \text{ } ou \text{ } \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 > K_2\}$$

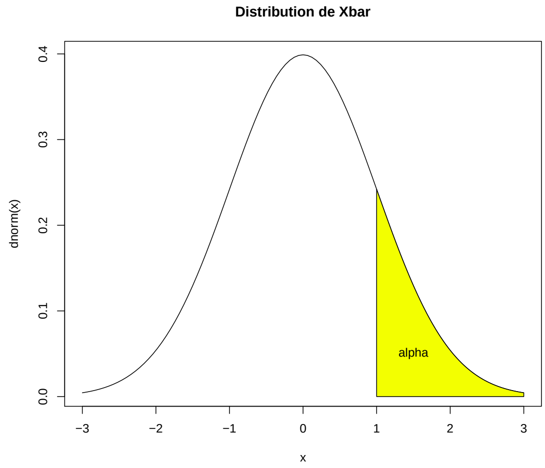

FIGURE 3.8 – Région critique du test unilatéral 1

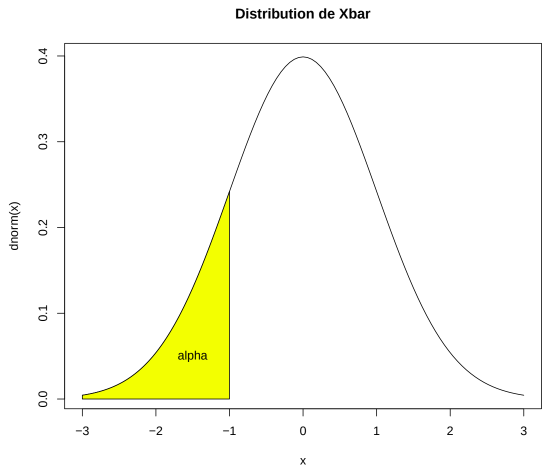

FIGURE 3.9 – Région critique du test unilatéral 2

K_1, K_2 sont déterminés par les équations :

$$\beta_\Phi(\sigma_0^2) = \alpha \ , \ \beta'_\Phi(\sigma_0^2) = 0$$

La première donne

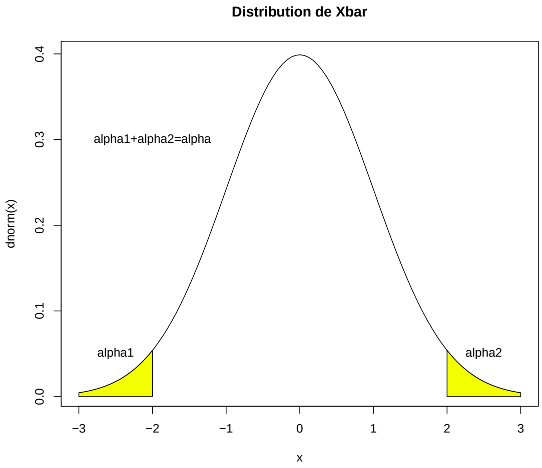

FIGURE 3.10 – Région critique d'un test blatéral

$$\begin{aligned}
\beta_\Phi(\sigma_0^2) &= P_{\sigma_0^2}(C) = P_{\sigma_0^2}(\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 < K_1 \ ou \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 > K_2) \\
&= P_{\sigma_0^2}(\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 < K_1) + P_{\sigma_0^2}(\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 > K_2) \\
&= F_{\mathcal{X}_n^2}(\frac{K_1}{\sigma_0^2}) + 1 - F_{\mathcal{X}_n^2}(\frac{K_2}{\sigma_0^2})) = \alpha
\end{aligned}$$

La seconde

$$\beta'_\Phi(\sigma_0^2) = \frac{-1}{\sigma_0^4}\left(K_1 f_{\mathcal{X}_n^2}(\frac{K_1}{\sigma_0^2}) - K_2 f_{\mathcal{X}_n^2}(\frac{K_2}{\sigma_0^2})\right) = 0$$

Ce système ne peut être résolu analytiquement et ne peut l'être que numériquement.. Pour simplifier on on prend $F_{\mathcal{X}_n^2}(\frac{K_1}{\sigma_0^2}) = \frac{\alpha}{2}$ et $F_{\mathcal{X}_n^2}(\frac{K_2}{\sigma_0^2}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$, i.e : $K_1 = \sigma_0^2 \mathcal{X}_n^2(\frac{\alpha}{2})$ et $K_2 = \sigma_0^2 \mathcal{X}_n^2(1 - \frac{\alpha}{2})$

On obtient le test de région critique

$$C = \left\{ \widetilde{x} / \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 < \sigma_0^2 \mathcal{X}_n^2(\frac{\alpha}{2}) \ \text{ ou } \ \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 > \sigma_0^2 \mathcal{X}_n^2(1 - \frac{\alpha}{2}) \right\}$$

Remarque 4. Dans le cas où la moyenne est inconnue on a le test de région critique

$$C = \left\{ \widetilde{x} : \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2 < \sigma_0^2 \mathcal{X}_{n-1}^2(\frac{\alpha}{2}) \ \text{ ou } \ \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2 > \sigma_0^2 \mathcal{X}_{n-1}^2(1 - \frac{\alpha}{2}) \right\}$$

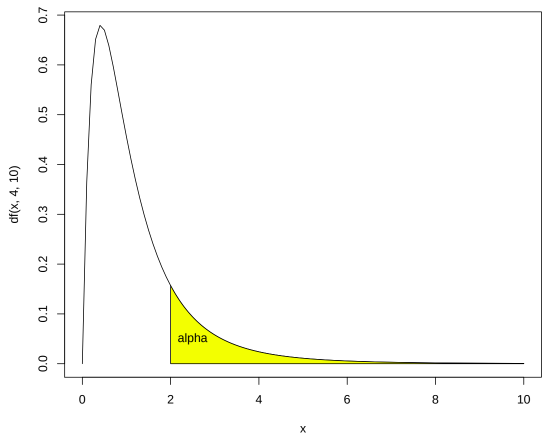

FIGURE 3.11 – Région critique 1

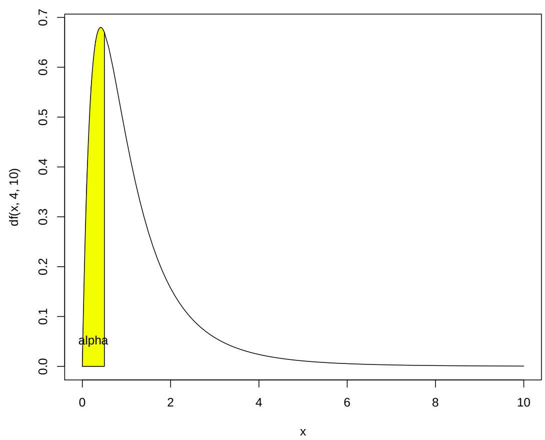

FIGURE 3.12 – Région critique 2

3.4.3 Comparaison de deux populations normales

Il s'agit de tester l'égalité de deux distributions gaussiennes. Les lois normales étant caractérisées par leurs moyennes et variances cela revient à tester l'égalité de leurs moyennes d'une part et de leurs variances d'autre part.

Soit deux variables indépendantes : $X \sim N(m_1, \sigma_1^2)$ et $Y \sim N(m_2, \sigma_2^2)$. On dispose d'un n-échantillon de X et d'un p-échantillon de Y.

Problèmes :

- Tester "$m_1 = m_2$" contre "$m_1 \neq m_2$"
- Tester "$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$" contre "$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$"

On remarque que le premier problème se ramène à tester "$m_1 - m_2 = 0$" contre "$m_1 -$

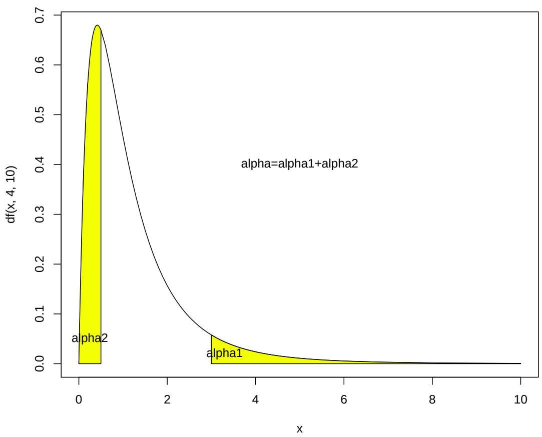

FIGURE 3.13 – Région critique 3

$m_2 \neq 0$"

On a : $\overline{X}-\overline{Y} \sim N(m_1+m_2, \frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{p})$

Si les variances sont connues

$\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(m_1+m_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{p}}} \sim N(0,1)$

On a le test de région critique

$$C=\{\widetilde{x},\widetilde{y}/\;|\overline{x}-\overline{y}|>m_1-m_2+\left(\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{p}}\right)q_{1-\frac{\alpha}{2}}\ \}$$

Si les variances sont inconnues mais égales $\sigma^2=\sigma_1^2=\sigma_2^2$, alors σ^2 est estimée par $\frac{(n-1)S_1'^2+(p-1)S_2'^2}{n+p-2}$, qui est un estimateur combiné avec $S_1'^2$ et $S_2'^2$ et qui est meilleur que chacun d'entr'eux pris séparément(on peut vérifier qu'il est sans biais et de variance plus petite).

On a

1. $\overline{X}-\overline{Y} \sim N\left(m_1+m_2, \sigma^2(\frac{1}{n}+\frac{1}{p})\right)$
2. $\frac{(n-1)S_1'^2+(p-1)S_2'^2}{\sigma^2} \sim \mathcal{X}^2_{n+p-2}$
3. $\frac{\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(m_1+m_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{p}}}}{\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{(n-1)S_1'^2+(p-1)S_2'^2}{n+p-2}}} \sim T_{n+p-2}$

On déduit la région critique du test dit de Student à deux échantillons :

$$C = \left\{ \widetilde{x}, \widetilde{y} / \left|\overline{x} - \overline{y}\right| > \left(\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{p}} \sqrt{\frac{(n-1)S_1'^2 + (p-1)S_2'^2}{n+p-2}} \right) t_{n+p-2}(1 - \frac{\alpha}{2}) \right\}$$

Test d'égalité des variances : "$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$" **contre** "$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$"

On considère le test équivalent : "$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$" contre "$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$"

1er cas : moyennes m_1 et m_2 connues

On a $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_1)^2}{n}}{\frac{\sum_{i=1}^{p}(y_i - m_2)^2}{p}} \sim F_{(n,,p)}$. On déduit un test de niveau α en considérant la région critique

$$C = \left\{ x, y / \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_1)^2}{n}}{\frac{\sum_{i=1}^{p}(y_i - m_2)^2}{p}} < F_{(n,,p)}(\frac{\alpha}{2}) \text{ ou } \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_1)^2}{n}}{\frac{\sum_{i=1}^{p}(y_i - m_2)^2}{p}} > F_{(n,p)}(1 - \frac{\alpha}{2}) \right\}$$

2ème cas : moyennes m_1 et m_2 connues

On a $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{(n-1,p-1)}$. D'où le test de région critique

$$C = \left\{ x, y / \frac{S_1'^2}{S_2'^2} < F_{(n-1,p-1)}(\frac{\alpha}{2}) \text{ ou } \frac{S_1'^2}{S_2'^2} > F_{(n-1,p-1)}(1 - \frac{\alpha}{2}) \right\}$$

3.5 Tests du rapport de vraisemblances maximal

3.5.1 Définitions et exemples

Les tests optimaux au sens de Neymann-Pearson sont déterminés comme maximisant un critère parmi les tests en présence. Cependant si l'hypothèse ou l'alternative (ou les deux) sont complexes, par exemple si le paramètre θ est de grande dimension, leur détermination est difficile. Un procédé intuitif est de se baser sur la statistique $\mu(\widetilde{x}) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} L(\theta, \widetilde{x})}{\sup_{\theta \in \Theta_1} L(\theta, \widetilde{x})}$ et de considérer les tests de région critique

$$C_1 = \left\{ \widetilde{x} / \mu(\widetilde{x}) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} L(\theta, \widetilde{x})}{\sup_{\theta \in \Theta_1} L(\theta, \widetilde{x})} > K_1 \right\}$$

ou de manière équivalente la statistique $\lambda(\widetilde{x}) = \dfrac{\sup\limits_{\theta\in\Theta_0} L(\theta,\widetilde{x})}{\sup\limits_{\theta\in\Theta} L(\theta,\widetilde{x})}$ et de considérer les tests de région critique

$$C_2 = \left\{ \widetilde{x}/\lambda(\widetilde{x}) = \frac{\sup\limits_{\theta\in\Theta_0} L(\theta,\widetilde{x})}{\sup\limits_{\theta\in\Theta_1} L(\theta,\widetilde{x})} < K_2 \right\}$$

Remarque 5. Si Θ_0 et Θ_1 sont simples, on retrouve les tests donnés par le lemne de Neymann-Pearson.

Exemple 3.9. Soit $\widetilde{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ un n-échantillon d'une v.a X de loi $N(m,\sigma^2)$
TRVM de "$m = m_0$" contre "$m = m_1$" (variance connue $\sigma^2 = \sigma_0^2$)
La statistique du test est

$$\lambda(\widetilde{x}) = \frac{\sup\limits_{m=m_0} L(m,\widetilde{x})}{\sup\limits_{m\in R} L(m,\widetilde{x})} = \frac{L(m_0,\widetilde{x})}{\sup\limits_{m\in R} L(m,\widetilde{x})} = \frac{L(m_0,\widetilde{x})}{L(\overline{x},\widetilde{x})} = \exp\left\{-\frac{n}{2}(\overline{x}-m_0)^2\right\}$$

car : $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - m_0)^2 = \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2 + n(m_0-\overline{x})^2$
Le TRVM est donc de la forme

$$\begin{aligned} C &= \left\{\widetilde{x}/\exp\left\{-\frac{n}{2}(\overline{x}-m_0)^2\right\} < K_1\right\} \\ &= \left\{\widetilde{x}/(\overline{x}-m_0)^2 > K_2\right\} \\ &= \{\widetilde{x}/\left|\overline{x}-m_0\right| > K_3\} \end{aligned}$$

En écrivant que le test de niveau α, on obtient la région critique :

$$C = \left\{\widetilde{x}/\left|\overline{x}-m_0\right| > \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}$$

Exemple 3.10. TRVM de "$m = m_0$" contre "$m = m_1$" (variance inconnue)

La statistique du test est

$$\begin{aligned} \lambda(\widetilde{x}) &= \frac{\sup\limits_{m=m_0,\sigma^2\in R_+} L(m,\widetilde{x})}{\sup\limits_{m\in R,\sigma^2\in R_+} L(m,\widetilde{x})} = \frac{L\left(m_0, \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-m_0)^2}{n}, \widetilde{x}\right)}{L\left(\overline{x}, \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}, \widetilde{x}\right)} = \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-m_0)^2}\right)^{\frac{n}{2}} \\ &= \frac{1}{1 + n\dfrac{(\overline{x}-m_0)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}} = \frac{1}{1+\dfrac{T^2}{n-1}} \end{aligned}$$

Le TRVM est donc de la forme

$$\begin{aligned} C &= \left\{ \widetilde{x} / \frac{1}{1+\dfrac{T^2}{n-1}} < K_1 \right\} \\ &= \{ \widetilde{x} / |T| > K_2 \} \end{aligned}$$

En posant $T^2 = (n-1)\dfrac{(\overline{x}-m_0)^2}{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}} = (n-1)\dfrac{(\overline{x}-m_0)^2}{S^2}$, on sait que $T \sim St(n-1)$

En écrivant que le test doit être de niveau α, on obtient la région critique :

$$C = \left\{ \widetilde{x} / |\overline{x}-m_0| > \frac{S}{\sqrt{n-1}} t_{n-1}(1-\frac{\alpha}{2}) \right\}$$

3.5.2 Propriétés asymptôtiques des TRVM

Comme toutes les procédures basées sur le maximum de vraisemblance, les TRVM n'ont que des propriétés asymptôtiques. Soit $\widetilde{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ un n-échantillon d'une v.a X de loi $(f_\theta)_{\theta\in\Theta}$ avec $\Theta = \{\theta = (\theta_1, \theta_2, .., \theta_p, \theta_{p+1}, ..., \theta_k)\}$. Considérons le problème de test de $\Theta_0 = \left\{\theta/\theta_1 = \theta_1^0, \theta_2 = \theta_2^0, .., \theta_p = \theta_p^0\right\}$ contre $\Theta_1 = \left\{\theta/\exists\ 1 \le\ j \le p\ /\theta_j \ne \theta_j^0\right\}$ et soit $\lambda(\widetilde{x})$ la statistique du TRVM pour ce problème. On suppose que les conditions de régularité de Fischer sont vérifiées ainsi que certaines autres que nous ne précisons pas ici, alors on a :

Théorème 3.8. *Sous* H_0 : $-2\log\ \lambda(\widetilde{x}) \underset{n\longrightarrow+\infty}{\overset{Loi}{\longrightarrow}} \mathcal{X}_p^2$

Sous H_1 : $-2\log\ \lambda(\widetilde{x}) \underset{n\longrightarrow+\infty}{\overset{P.S}{\longrightarrow}} +\infty$

Ce théorème permet d'obtenir des tests asymptôtiques, i.e valables pour des tailles d'échantillons assez grandes, et ce quelque soit la loi suivie par la variable X. Ces tests ont des régions critiques de la forme :

$$C = \{\widetilde{x}/\lambda(\widetilde{x}) < K_1\} = \{\widetilde{x}/-2\log\lambda(\widetilde{x}) > K_2\}$$

En écrivant que le test est de niveau α, on obtient en définitive :

$$C = \left\{\widetilde{x}/-2\log\lambda(\widetilde{x}) > \mathcal{X}_p^2(1-\alpha)\right\}$$

Exemple 3.11. Si on a un n'échantillon d'une loi de Poisson, le TRVM asymptôtique de niveau α, pour tester "$\lambda = \lambda_0$" contre "$\lambda \ne \lambda_0$", a pour région critique :

$$C = \left\{ \widetilde{x} \mid -2\log\left(\frac{L(\lambda_0,\widetilde{x})}{\sup\limits_{\lambda\in R_+} L(\lambda,\widetilde{x})}\right) > \mathcal{X}_1^2(1-\alpha) \right\}$$

on a :

$$\frac{L(\lambda_0,\widetilde{x})}{\sup\limits_{\lambda\in R_+} L(\lambda,\widetilde{x})} = \frac{L(\lambda_0,\widetilde{x})}{L(\overline{x},\widetilde{x})} = \frac{e^{-n\lambda_0}\lambda_0^{\sum_{i=1}^n x_i}}{e^{-n\overline{x}}\overline{x}^{\sum_{i=1}^n x_i}} = e^{n(\overline{x}-\lambda_0)}\left(\frac{\lambda_0}{\overline{x}}\right)^{\sum_{i=1}^n x_i}$$

d'où la région critique :

$$C = \left\{\widetilde{x} \mid 2n\left(\lambda_0 - \overline{x} + \overline{x}\log\left(\frac{\lambda_0}{\overline{x}}\right)\right) > \mathcal{X}_1^2(1-\alpha)\right\}$$

3.6 La notion de p-value

Introduisons cette notion sur l'exemple d'un test unilatéral. Soit $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ un échantillon observé d'une v.a X de loi P_θ $(\theta \in R)$. On note $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ l'échantillon des v.a associées et soit le test de région critique

$$C = \{x/T(x) > K_\alpha\}$$

pour tester , au niveau α l'hypothèse nulle H_0 : "$\theta \leq \theta_0$" contre l'alternative H_1 : "$\theta > \theta_0$", où $T(x)$ est la statistique du test. K_α est déterminé par P_{H_0} $(x/T(x) > K_\alpha) = \alpha$.

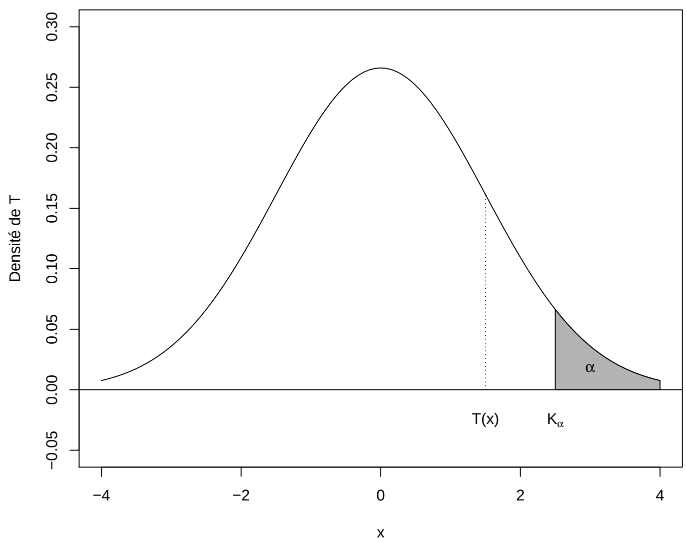

FIGURE 3.14 – Niveau de signification α (Région en gris)

Dans cet exemple, la p-value correspond à $p = P_{H_0}$ $(T(X) > T(x))$. On remarque qu' elle est calculée sur la base des données observées $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. On a

$$T(x) > K_\alpha \Longleftrightarrow p < \alpha$$

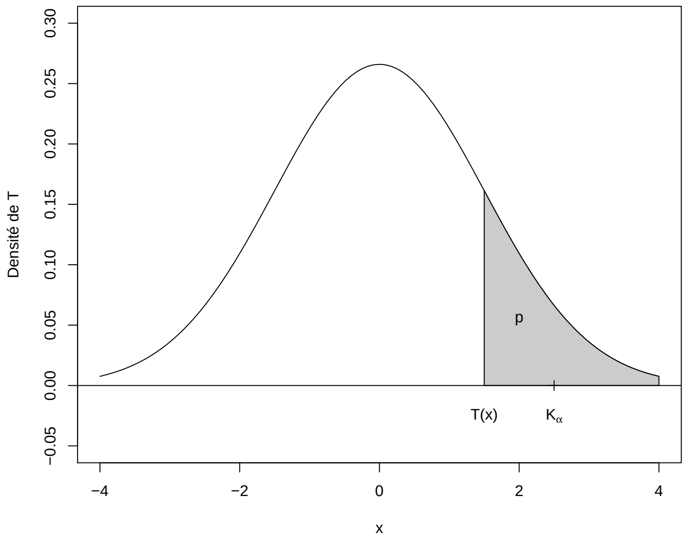

FIGURE 3.15 – P-value p (Région en gris)

En d'autres termes, au vu des observations faites, l'hypothèse nulle doit être rejettée à tout niveau α tel que $p < \alpha$. L'utilisation de la p-value évite de calculer le seuil K_α (qui varie avec α) souvent en ayant recours à des tables statistiques. Ainsi pour tester à deux niveaux différents, par exemple 0.05 et 0.01, on doit déterminer $K_{0.05}$ et $K_{0.01}$. La p-value elle est déterminée une bonne fois pour toutes (pour des observations données).

Définition 3.9. On appelle p-value d'un test le plus petit seuil α pour lequel on rejette l'hypothèse nulle.

Cette notion est importante, notamment lorsqu'on travaille avec les logiciels statistiques qui retournent les p-values des tests utilisés.

Exemple 3.12. Soit $(x_1, x_2, ..., x_{20})$ un échantillon de $X \sim N(m, 4)$ et on considère le problème de test de "$m = 0$" contre "$m > 0$" . On a $\overline{x} = 0.224$. Calculons la p-value du test de région critique $C = \{\ \widetilde{x}/\overline{x} > K\}$. On a

$$\begin{aligned} p &= P_{m=0}(\overline{X} > \overline{x}) = P_{m=0}\left(\sqrt{20}\frac{\overline{X}}{2} > \sqrt{20}\frac{\overline{x}}{2}\right) \\ &= 1 - \Phi(0.501) = 0.308 \end{aligned}$$

Ainsi on accepte l'hypothèse nulle "$m = 0$" pour tout seuil α raisonnable : $0.10, 0.05, 0.01$ etc...

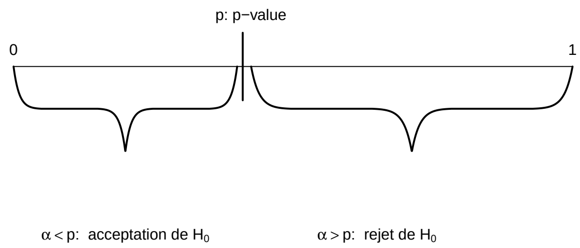

FIGURE 3.16 – Domaine d'acceptation et de rejet de H_0 en fonction de α.

Bibliographie