Université Badji Mokhtar - Annaba	**$2^{ème}$ année Master Proba-Stat**
Faculté des Sciences	**Files d'attente**
Département de Mathématiques	**2018/2019**

Série 2

6 . 6

Exercice 1 Un atelier dispose de 5 machines, chacune ayant un taux de pannes Poissonnien égal à 1/6 (par heure). Deux mécaniciens sont chargés de l'entretien : la durée des réparations équivaut en moyenne à 4 heures, suit une loi exponentielle.

1. Identifier le modèle à l'aide de la notation de Kendall. Modéliser le problème à l'aide d'un processus stochastique approprié. Quel est son espace d'état ?
2. Tracer le graphe des transitions simplifié.
3. Décrire le régime transitoire et obtenir la distribution stationnaire, calculer les probabilités d'états.
4. Trouver le nombre moyen de pannes et le nombre moyen de machines en attente de réparation.
5. Quelle est la probabilité qu'un réparateur soit actif ?

Exercice 2 Les clients arrivent vers un système, dont l'espace de service contient 2 serveurs, selon un processus de Poisson de taux $\lambda>0$. Un client arrivant et trouvant le serveur 1 libre commencera immédiatement son service avec ce serveur, sinon si le serveur 2 est libre le client en question commencera son service avec le serveur 2. Dans le cas où les deux serveurs sont occupés, le client sera placé en attente. Les durées de services dans le serveur 1 et dans le serveur 2 sont exponentiellement distribuées de taux μ_1 et μ_2 respectivement.

1. Introduire un processus stochastique décrivant l'état du système à la date t. Définir son espace d'états.
2. Décrire le régime transitoire du processus introduit et obtenir la distribution stationnaire du processus en question.

Exercice 3 Une certaine opération d'assemblage est modélisée comme un système de files d'attente de type M/G/1 avec le taux d'arrivée $\lambda = 6$ clients/heure, le temps moyen de service égal à 5 min et la variance du temps de service égale à 90 min^2.

1. Trouver le nombre moyen de clients dans le système, le nombre moyen de clients en attente, le temps moyen d'attente ainsi que le temps moyen de séjour d'un client dans le système.
2. Est-ce que l'opération d'assemblage en question s'améliore si les temps de service deviennent exponentiels avec la même moyenne ? Est-ce que l'opération d'assemblage en question s'améliore si les temps de service suivent une loi uniforme sur [0 minutes, 10 minutes] ?

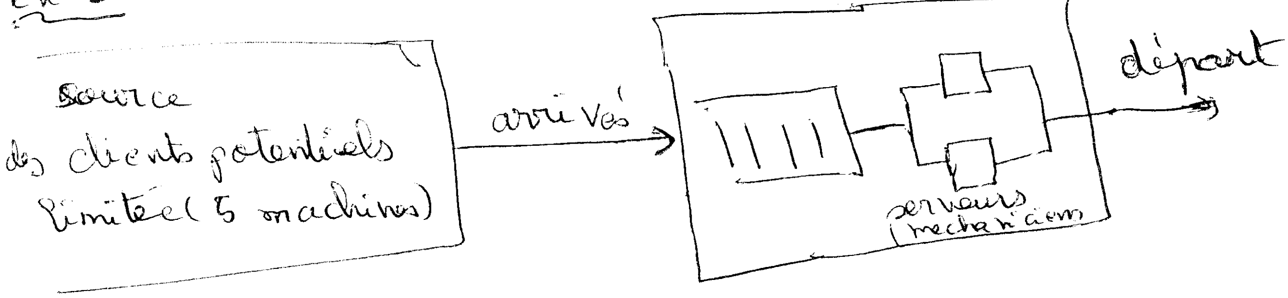
Exercice 4 On considère un système de files d'attente avec rappels de type M/M/1. Cependant, une nouvelle situation est ajoutée : à l'arrivée d'un client (primaire ou secondaire), si le serveur est occupé, le client en question entre en orbite (revient en orbite) avec une probabilité p ou quitte le système sans recevoir son service avec une probabilité 1-p.

1. Introduire un processus stochastique qui décrit l'état du système considéré à la date t et présenter son espace d'état.
2. Décrire le régime transitoire du processus introduit. A cet effet, tracer le graphe des transitions et fournir les équations différentielles de Kolmogorov.
3. Obtenir les équations d'équilibre statistique qui gouvernent le régime stationnaire du processus en question.

Exercice 5 Considérons le système de files d'attente M/M/3 avec rappels.
Décrire l'état du système, tracer le graphe des transitions et obtenir les équations d'équilibre statistique en régime stationnaire.

Serie N° 2

Exo 1



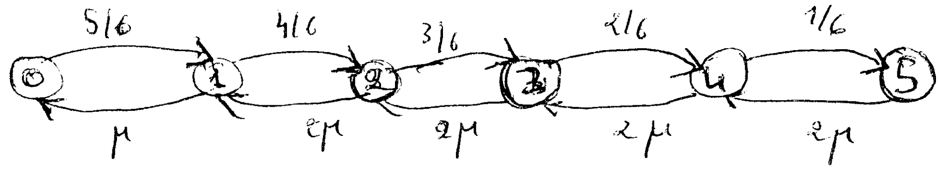
1°) * Modèle de type : $M|M|2|\infty|K$ ou $K=5$

l'état du sys peut être décrit par le processus de naissance et de mort $\{N(t), t\geq 0\}$. $S\{0,1,2,\dots\}$

$$\lambda_n = \begin{cases} \frac{1}{6}(K-n) & , n\leq K \\ 0 & n>K \end{cases}$$

$\mu_n = \mu \times \min\{n,2\}$, $1\leq n\leq 5$

2) Le graphe de transition.



3) regime transitoire

$P_n(t) = \mathbb{P}(N(t)=n)$, $0\leq n\leq 5$, $t\geq 0$

d'après le graphe on obtient le sys de kolmo :

$$\begin{cases} P_0'(t) = -\frac{5}{6}P_0(t) + \frac{1}{4}P_1(t) \\ P_1'(t) = -\left(\frac{4}{6}+\frac{1}{4}\right)P_1(t) + \frac{1}{2}P_2(t) + \frac{5}{6}P_0(t) \\ P_2'(t) = -\left(\frac{3}{6}+\frac{1}{2}\right)P_2(t) + \frac{4}{6}P_1(t) + \frac{1}{2}P_3(t) \\ P_3'(t) = -\left(\frac{2}{6}+\frac{1}{2}\right)P_3(t) + \frac{3}{6}P_2(t) + \frac{1}{2}P_4(t) \\ P_4'(t) = -\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)P_4(t) + \frac{2}{6}P_3(t) + \frac{1}{2}P_5(t) \\ P_5'(t) = -\frac{1}{2}P_5(t) + \frac{1}{6}P_4(t) \end{cases}$$

Régime stationnaire

posons : $P_n = \lim_{n \to +\infty} P_n(t)$, $\forall\ 0 \leq n \leq 5$

donc : $P'_n = 0$ du sys précédent on obtient :

$$\begin{cases} \frac{5}{6} P_0 = \frac{1}{4} P_1 \\ 0 = -\frac{11}{12} P_1 + \frac{1}{2} P_2 + \frac{5}{6} P_0 \\ 0 = -P_2 + \frac{2}{3} P_1 + \frac{1}{2} P_3 \\ 0 = -\frac{5}{6} P_3 + \frac{1}{2} P_2 + \frac{1}{2} P_4 \\ 0 = -\frac{2}{3} P_4 + \frac{1}{3} P_3 + \frac{1}{2} P_5 \\ 0 = -\frac{1}{2} P_5 + \frac{1}{6} P_4 \end{cases}$$

Calculons les P_n :

$P_1 = \frac{10}{3} P_0$

$P_2 = 2\left[\frac{11}{12} \cdot \frac{10}{3} - \frac{5}{6}\right] P_0 = \left[\frac{55}{9} - \frac{5}{3}\right] P_0 = \frac{40}{9} P_0$

$P_3 = 2\left[\frac{40}{9} - \frac{2}{3} \cdot \frac{10}{3}\right] P_0 = \frac{40}{9} P_0$

$P_4 = 2\left[\frac{5}{6} \cdot \frac{40}{9} - \frac{20}{9}\right] P_0 = \frac{80}{27} P_0$

$P_5 = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{80}{27} P_0 = \frac{80}{81} P_0$

$\sum_{n=0}^{5} P_n = 1 \Rightarrow P_0 \left[1 + \frac{10}{3} + \frac{40}{9} + \frac{80}{27} + \frac{80}{81}\right] = 1$

$$P_0 = \left[\frac{81 + 270 + 360 + 360 + 240 + 80}{81}\right]^{-1}$$

$P_0 = \frac{81}{1391} = 0{,}0582$

$P_1 = 0{,}19$; $P_2 = 0{,}25$; $P_3 = 0{,}25$, $P_4 = 0{,}17$

$P_5 = 0{,}057$

1) Nombre de pannes :

$\bar{n} = E[N] = \sum_{n=0}^{5} n P_n = 0{,}19 + 0{,}5 + 0{,}75 + 0{,}68 + 0{,}285 = \boxed{2{,}405}$

nombre moyen de machines en attente

$\bar{n}_f = \sum_{n=3}^{5} (n-2) P_n = P_3 + 2 P_4 + 3 P_5 = 0{,}25 + 0{,}34 + 0{,}171 \Rightarrow \boxed{\bar{n}_f = 0{,}761}$

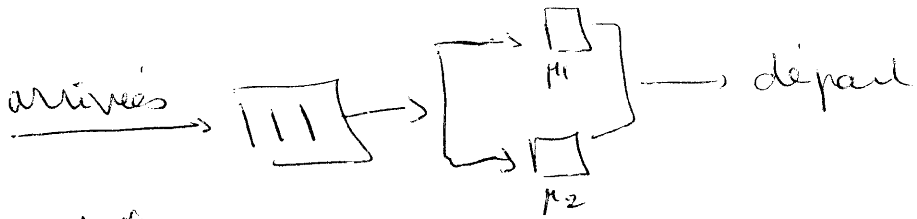
3) La proba qu'un réparateur soit actif

$P_{act} = \underbrace{1 - P_0}_{\sum_{n=1}^{5} P_n} = 1 - 0{,}0582 = \boxed{0{,}9418}$

M/M/∞/K
&
M/M/C

P_0 = la proba q le serveur soit inoccupé
donc $1 - P_0$ = la proba q le serveur soit occupé

Exo 2 (on a pas le même taux de service)



Modèle M|M|2

avec $\mu_n = \begin{cases} \mu_1 + \mu_2 \ ; & n \geq 2 \\ \mu_1 & n = 1 \end{cases}$

et $\mu_0 = 0$

1°) l'état peut être décrit par le processus de naissance et de mort

$\{N(t), t \geq 0\}$ à la date t. son espace d'états $S = \{0, 1, \ldots$

graphe de transition :

Soient les proba d'états

$P_n(t) = P(N(t) = n) \ \forall n \geq 0, \forall t \geq 0$

A partir du graphe de transition on obtient le système de Kolmo :

$$\begin{cases} P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \mu_1 P_1(t) \\ P_1'(t) = -(\lambda + \mu_1) P_1(t) + \lambda P_0(t) + (\mu_1 + \mu_2) P_2(t) \\ \vdots \\ P_n'(t) = -(\lambda + \mu_1 + \mu_2) P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + (\mu_1 + \mu_2) P_{n+1}(t) \end{cases}$$

$\forall n \geq 2$

Régime stationnaire

posons $P_n = \lim_{t \to +\infty} P_n(t)$ si $\exists$ alors $P_n'(t) = 0$

$$\begin{cases} 0 = -\lambda P_0 + \mu_1 P_1 \\ 0 = -(\lambda + \mu_1) P_1 + \lambda P_0 + (\mu_1 + \mu_2) P_2 \\ \vdots \\ 0 = -(\lambda + \mu_1 + \mu_2) P_n + \lambda P_{n-1} + (\mu_1 + \mu_2) P_{n+1} \end{cases}$$

$\forall n \geq 2$

alors $P_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right) P_0$

$$(\mu_1+\mu_2)P_2 = (\lambda+\mu_1)\left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)P_0 - \lambda P_0$$

$$= \frac{\lambda^2}{\mu_1} P_0 \Rightarrow P_2 = \frac{\lambda^2}{\mu_1(\mu_1+\mu_2)} P_0$$

Pour $\boxed{n=2}$

$$0 = -(\lambda+\mu_1+\mu_2)P_2 + \lambda P_1 \cancel{(\mu_1+\mu_2)P} + (\mu_1+\mu_2)P_3$$

$$(\mu_1+\mu_2)P_3 = (\lambda+\mu_1+\mu_2)\left(\frac{\lambda^2}{\mu_1(\mu_1+\mu_2)}\right)P_0 - \frac{\lambda^2}{\mu_1} P_0$$

$$(\mu_1+\mu_2)P_3 = \frac{\lambda^3}{\mu_1(\mu_1+\mu_2)} P_0 \Rightarrow P_3 = \frac{\lambda^3}{\mu_1(\mu_1+\mu_2)^2} P_0$$

$$\Rightarrow \boxed{P_n = \frac{\lambda^n}{\mu_1(\mu_1+\mu_2)^{n-1}} \quad \forall n \geq 2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$$

$$P_0 = \left[1 + \frac{1}{\mu_1} + \frac{\lambda^2}{\mu_1(\mu_1+\mu_2)} + \frac{\lambda^3}{\mu_1(\mu_1+\mu_2)^2} + \dots + \frac{\lambda^n}{\mu_1(\mu_1+\mu_2)^{n-1}}\right]$$

$$P_0 = \left[1 + \frac{\lambda}{\mu_1}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\right)^{n-1}\right]^{-1} = \left[1 + \frac{\lambda}{\mu_1}\left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{(\mu_1+\mu_2)}}\right)\right]^{-1}$$

$$= \left[1 + \frac{\lambda(\mu+\mu_2)}{\mu_1(\mu_1+\mu_2-\lambda)}\right]^{-1} = \left[\frac{\mu_1^2+\mu_1\mu_2+\lambda\mu_2}{\mu_1(\mu_1+\mu_2-\lambda)}\right]^{-1}$$

Alors : $P_n = \frac{\lambda^n}{\mu_1(\mu_1+\mu_2)^{n-1}}\left[\frac{\mu_1(\mu_1+\mu_2-\lambda)}{\mu_1^2+\mu_1\mu_2+\lambda\mu_2}\right]$

$$P_n = \frac{\lambda^n(\mu_1+\mu_2-\lambda)}{(\mu_1+\mu_2)^{n-1}(\mu_1^2+\mu_1\mu_2-\lambda\mu_2)} \quad \forall n \geq 1$$

Suite série

Exo 3

(1) $\lambda = 6$ clts / h $= 0,1$ clts / mins

$E[Se] = 5$ min $\quad \mu = \frac{1}{5}$, $var[Se] = 90$ min^2

$$\rho = \frac{\text{moyenne des durées de se}}{\text{moy des durées inter-arrivées}}$$

$$\rho = \frac{E[Se]}{1/\lambda} = \lambda E[Se] = 0,1 \times 5 = 0,5$$

Modèle M/G/1

$$\bar{n} = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 var[Se]}{2(1-\rho)} = 0,5 + \frac{0,25 + (0,1)^2 \times 9 =}{1}$$

$\boxed{\bar{n} = 1,6 \text{ clts}}$

De la formule de little on calcul le $\bar{n}_j$

$$\bar{n} = \frac{\lambda}{\mu} + \bar{n}_j \Rightarrow \bar{n}_j = \bar{n} - \frac{\lambda}{\mu}$$

$\bar{n}_j = 1,65 - 0,5 = \boxed{1,15 \text{ clients}}$

$\bar{w} = \frac{\bar{n}_8}{\lambda} = \frac{1,15}{0,1} = 11,5$; $\bar{w}_s = \frac{1,65}{0,1} = 16,5$ mn

(2) $Se \sim \mathcal{E}(\mu)$ $\quad \mu = \frac{1}{5}$ clts / min $= 0,2$ clts / min

alors $var(Se) = \frac{1}{\mu^2} = 25$ min^2

$\bar{n} = 0,5 + 0,25 + (0,1)^2 \times 25 = 1$ clt

$\bar{n}_j = 0,5$ clts

$\bar{w} = \frac{0,5}{0,1} = 5$ min $\quad$ / $\bar{w}_s = \frac{1}{0,1} = 10$ min

L'opération d'assemblage s'améliore

$Se \sim U[0,10]$

$var(Se) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{100}{12} = \frac{25}{3}$

amélioration $\Rightarrow$ optimiser le tps moyen d'attente
de la file d'attente

$\bar{n} = 0,5 + 0,25 + (0,1)^2 \times \frac{25}{3} = 0,8333$ clts

$\bar{n}_f = 0,8333 - 0,5 = 0,3333$ clts

$\bar{w} = \frac{0,3333}{0,1} = 3,333$ min

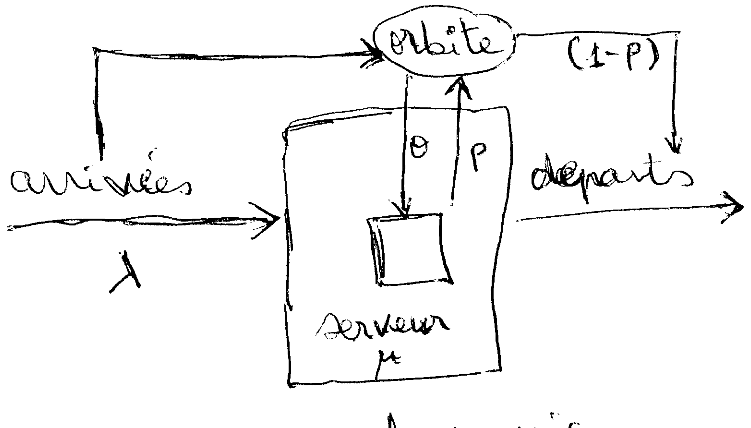
$\bar{w}_s = \frac{0,8333}{0,1} = 8,333$ min

Le modèle est plus performant si le service est uniformément distribué.

Ex 04 (Serie 2)

Modèle M/M/1 avec rappels.

1°) L'état du système peut être décrit par le processus stochastique $\{C(t), N_0(t), t \geq 0\}$



espace de service

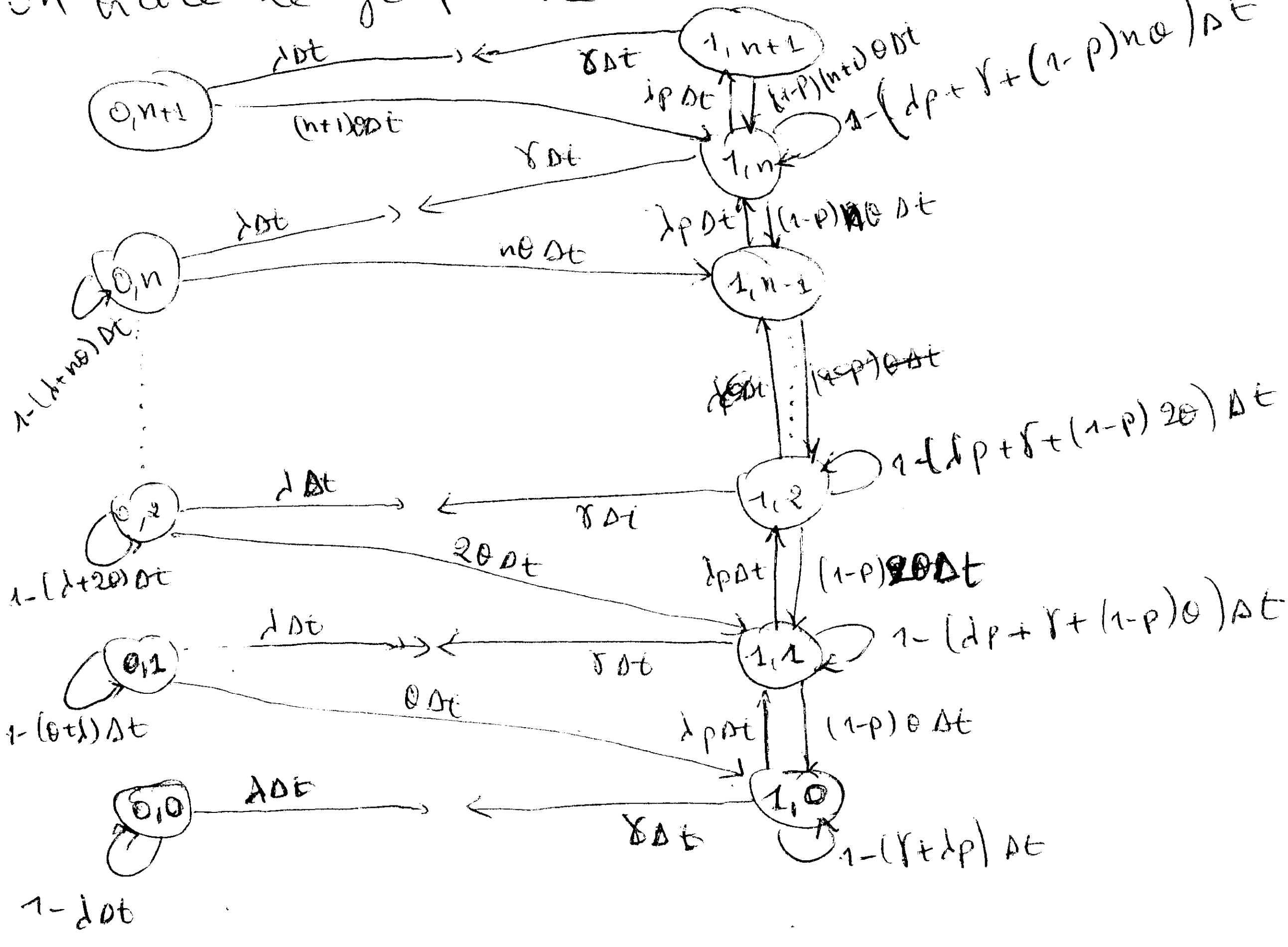
son ~~tous~~ espace d'état $S = \{0,1\} \times \{0,1,2,\dots\}$

$S = \{0,1\} \times \mathbb{N}$

2) Soient les probabilités des transitions :

$P_{ij}(t) = P(C(t) = i, N_0(t) = j)$, $i = 0,1$ et $j \geq 0$, $t \geq 0$

On trace le graphe de transition.



$$\begin{cases} P_{0,n}(t+\Delta t) = \left[1-(\lambda+n\theta)\Delta t\right] P_{0,n}(t) + \gamma \Delta t\, P_{1,n}(t) \\ P_{1,n}(t+\Delta t) = \left[1-\left(\lambda p+\gamma+(1-p)n\theta\right)\right] P_{1,n}(t) + \underbrace{\lambda p \Delta t\, P_{1,n-1}(t)}_{\substack{\text{ce terme} \\ \text{s'annule pour } n=0}} + (1-p)(n+1)\theta \Delta t\, P_{1,n+1}(t) \\ \quad + (n+1)\theta \Delta t\, P_{0,n+1}(t) + \lambda \Delta t\, P_{0,n}(t) \end{cases}$$

$\forall n \geq 0$

d'où le <u>système de Kolmogorov</u> suivant :

$$\begin{cases} P'_{0,n}(t) = -(\lambda+n\theta) P_{0,n}(t) + \gamma P_{1,n}(t) \\ P'_{1,n}(t) = -(\lambda p+\gamma+(1-p)n\theta) P_{1,n}(t) + \lambda p\, P_{1,n-1}(t) \\ \quad + (1-p)(n+1)\theta\, P_{1,n+1}(t) + (n+1)\theta\, P_{0,n+1}(t) + \lambda P_{0,n}(t) \end{cases}$$

$\forall n \geq 0$

3) <u>Régime stationnaire</u>

Posons $P_{0,n} = \lim P_{0,n}(t)$; $P_{1,n} = \lim\limits_{t\to\infty} P_{1,n}(t)$

alors $P'_{0,n} = P'_{1,n} = 0$

d'où le système d'equilibre statistiq svt :

$$\begin{cases} 0 = (-\lambda+n\theta) P_{0,n} + \gamma P_{1,n} \quad , n \geq 0 \\ 0 = -(\lambda p+\gamma+(1-p)n\theta) P_{1,n} + \lambda p P_{1,n-1} + (1-p)(n+1)\theta P_{1,n+1} \\ \quad + (n+1)\theta P_{0,n+1} + \lambda P_{0,n} \quad , n \geq 1 \\ 0 = -(\lambda p+\gamma) P_{1,0} + (1-p)\theta P_{1,1} + \theta P_{0,1} + \lambda P_{0,0} \end{cases}$$

avec l'eqt° de normalisat°.

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{0,n} + \sum_{n=0}^{\infty} P_{1,n} = 1$$