Université Hassiba Benbouali de Chlef **Année Universitaire : 2019-2020**
Faculté des Sciences Exactes et Informatique **Matière: Théorie des Opérateurs**
Département de Mathématiques **Niveau : Master 1**

Feuille de TD 3

Exercice 1.

Sur l'espace de Hilbert $\ell_2 := \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty \right\}$, on définit l'opérateur linéaire $\mathcal{A}$ par

$$\mathcal{A}x = (x_1, \frac{x_2}{2}, , ..., \frac{x_n}{n}, ...), \quad x = (x_i)_{i=1}^{+\infty} \in \ell_2$$

1. Montrer que $\mathcal{A}x \in \ell_2$ pour tout $x \in \ell_2$.
2. Montrer que $\mathcal{A}$ est borné.
3. En déduire la norme de $\mathcal{A}$.
4. Déterminer $\mathcal{A}^*$ l'opérateur adjoint de $\mathcal{A}$.
5. Que peut-on déduire ?

Exercice 2.

Déterminer les opérateurs adjoints des opérateurs linéaires suivants

$$K_i : L^2([-\pi, \pi]) \to L^2([-\pi, \pi]), i = \overline{1, 2}$$

avec

$$(K_1\psi)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t-s)}\psi(s)ds, \quad (K_2\psi)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} cos(t-s)\psi(s)ds$$

pour tout $\psi \in L^2([-\pi, \pi])$, et

$$K : L^2([0, 1]) \to L^2([0, 1]), (K\psi)(t) = \int_0^{t} \psi(s)ds, \psi \in L^2([0, 1])$$

Exercice 3.

$\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ sont deux espaces de Hilbert, et $(\varphi_k)_{k\geq1}$ et $(\psi_k)_{k\geq1}$ sont des suites orthonormales dans $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ respectivement. Soit $(\lambda_n)_{n\geq1}$ une suite complexe bornée. Considérons l'application $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ définie par

$$Tx = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \langle x, \varphi_n \rangle \psi_n, \ x \in \mathcal{H}$$

i. Montrer que T définit un opérateur linéaire de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{K}$.
ii. Montrer que T est borné, et en déduire une estimation de $\|T\|$.
iii. Calculer $\|T\|$.
vi. Déterminer l'opérateur adjoint T^* de T.

Exercice 4.

a. Soit k une fonction complexe Lebesgue mesurable sur $[a, b] \times [a, b]$ et telle que

$$\int_a^b \int_a^b |k(t,s)|^2 \, dt \; ds < +\infty$$

On définit l'opérateur $K : L^2([a, b]) \to L^2([a, b])$ par

$$(Kf)(t) = \int_a^b k(t,s) f(s) \; ds, \; f \in L^2([a, b])$$

- Montrer que Kf existe pour tout $f \in L^2([a, b])$.
- Vérifier que K est linéaire et estimer sa norme.
- Déterminer l'opérateur adjoint K^* de l'opérateur K.

Exercice 5.

On définit sur ℓ_2 l'opérateur

$$\mathcal{U}(x) = \mathcal{U}(x_1, x_2, x_3, ...) = (x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_1, x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, ...), \quad x \in \ell_2$$

Prouver que
a. $\|\mathcal{U}x\| = \|x\|$ pour tout $x \in \ell_2$.
b. $\mathcal{U} = \mathcal{U}^* = \mathcal{U}^{-1}$ et $\mathcal{U}^2 = \mathcal{I}$.
c. Si $\alpha \in \mathbb{C}, \alpha \neq \pm 1$, alors l'opérateur $\mathcal{I} - \alpha \mathcal{U}$ est inversible et

$$(\mathcal{I} - \alpha \mathcal{U})^{-1} = \frac{1}{1 - \alpha^2} (\mathcal{I} + \alpha \mathcal{U})$$

où $\mathcal{I}$ est l'identité sur ℓ_2.

Exercice 6.

($\bigstar$) Soit $(\omega_j)_{j=1}^{+\infty}$ une suite de nombres complexes, et soit $\mathcal{D}_\omega$ l'opérateur sur ℓ_2 défini par

$$\mathcal{D}_\omega x = \mathcal{D}_\omega(x_1, x_2, x_3, ...) = (\omega_1 x_1, \omega_2 x_2, \omega_3 x_3, ...), \quad (x \in \ell_2)$$

a. Prouver que $\mathcal{D}_\omega$ est borné si et seulement si la suite $(\omega_j)_{j=1}^{+\infty}$ est bornée, et que dans ce cas, on a $\|\mathcal{D}_\omega\| = \sup\limits_{j \leq 1} |\omega_j|$.
b. Montrer que $\inf\limits_{j \leq 1} |\omega_j| \, \|x\| \leq \|\mathcal{D}_\omega x\|$, $x \in \ell_2$.
c. Calculer $\mathcal{D}_\omega^k x$, pour tout k, $k \geq 1$.
d. Montrer que $\mathcal{D}_\omega$ est inversible si et seulement si $\inf\limits_{j \leq 1} |\omega_j| > 0$. Donner l'expression de $\mathcal{D}_\omega^{-1}$.
e. Trouver une condition suffisante et nécessaire pour que $\mathcal{D}_\omega$ soit auto-adjoint.