Cours 2

Processus de renouvellement

2-1- Introduction

Soit $N(t)$ le nombre d'évènements dans $[0,t], N(t)_{t>0}$ est un processus de comptage . Supposons sans perte de généralité que cet évènement est une panne et que l'objet défaillant est remplacé sans délai par un objet identique : on dit qu'il y a renouvellement. Notons $S_i, i \geq 1$, l'instant où se produit le i-ième renouvellement, on définit les temps d'inter arrivées par $T_i = S_{i+1} - S_i$ avec $S_0 = 0$.
Les temps T_i représentent les temps qui s'écoulent entre deux évènements consécutifs. On a la relation $S_i = \sum_{k=1}^{i} T_k$. Lorsque les T_i sont indépendants, la loi des T_i caractérise le processus de renouvellement.

Définition 1 Un processus de renouvellement est un processus de comptage tel que les inter-arrivées T_i sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

2-2- Fonction de renouvellement – Densité de renouvellement

Définition 2 On appelle fonction de renouvellement et on note $M(t)$, l'esperance mathématique de la variable aléatoire $N(t)$:

$$M(t) = E(N(t))$$

$M(t)$ représente le nombre moyen d'évènements se représentant entre 0 et t.

Proposition 1 Soit $F_k(t)$ la fonction de répartition de S_k alors $M(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t)$

Définition 3 On appelle densité de renouvellement $m(t)$, la dérivée de la fonction de renouvellement :

$$m(t) = M'(t)$$

2-2-1 Calcul de $M(t)$

Soit $F(t)$ et $f(t)$ désignant respectivement la fonction de répartition et la densité de la loi des inter-arrivées.

Proposition 2 Soit un processus de renouvellement dont la loi des inter-arrivées a pour densité f. Alors

$$M^*(t) = \frac{f^*(t)}{t(1 - f^*(t))}$$

Où $M^*(t)$ (resp $f^*(t)$) est la transformée de Laplace $M(t)$ (resp. de f).

Par définition, la transformée de Laplace φ^* d'une fonction quelconque φ a pour expression

$$\varphi^*(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \varphi(x) dx$$

2-2-2 Cas des inter- arrivées de loi exponentielle

Soit un processus de renouvellement dont les inter-arrivées sont de loi exponentielle de paramètre λ, alors, la loi de la date du $k^{ème}$ renouvellement est une loi Gamma de paramètre (k, λ).

Proposition 3 Soit un processus de renouvellement dont les inter-arrivées sont de loi exponentielle de paramètre λ. Alors la loi de $N(t)$, nombre d'évènements dans $[0,t]$ est une loi de Poisson de paramètre λt.

2-2-3 Loi du nombre de renouvellement

Le calcul de la loi du nombre de renouvellement est délicat. La loi est décrite par la relation $P(N(t) = k) = F_k(t) - F_{k-1}(t)$ et le calcul de $F_k(t)$ n'est pas toujours simple. On montre que lorsque k devient grand, $N(t)$ suit une loi normale de moyenne t/μ et de variance $\sigma^2 t/\mu^2$.
On peut donc, pour k assez grand, approximer $P(N(t) = k)$ par :

$$\phi\left(\frac{k+\frac{1}{2}-\frac{t}{\mu}}{\sqrt{\sigma^2 t/\mu^3}}\right)-\phi\left(\frac{k-\frac{1}{2}-\frac{t}{\mu}}{\sqrt{\sigma^2 t/\mu^3}}\right)$$

On écrit $P(S_k \leq t) = P(N(t) \geq k) = 1 - \phi\left(\frac{k-\frac{t}{\mu}}{\sqrt{\sigma^2 t/\mu^3}}\right)$

2-2-4 Equation de renouvellement

La fonction de renouvellement vérifie l'équation dite de renouvellement :

$$M(t) = F(t) + \int_0^t M(t-x)dF(x)$$

2-3 Théorèmes de renouvellement

Dans le cas où les temps d'inter-arrivées T_i sont de loi exponentielle de paramètre λ, le processus $N(t)$ est un processus de Poisson d'intensité λ. Alors, on a

$$\frac{E(N(t))}{t} = \lambda = \frac{1}{\mu}$$

Pour tout $t > 0$, on a

$$\frac{E(N(t+h) - N(t))}{h} = \lambda = \frac{1}{\mu}$$

Pour tout $h > 0$ et tout $t \geq 0$, avec $N(0) = 0$

$\frac{1}{\mu}$ est le taux d'arrivée instantané des évènements.

Dans le cas général, les résultats ci-dessus ne peuvent être exacts qu'asymptotiquement, c'est-à-dire

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E(N(t))}{t} = \frac{1}{\mu}$$

Où $\frac{1}{\mu}$ est le taux moyen de renouvellement sur une longue période de temps.

Proposition 4 Soit un processus de renouvellement tel que $\mu = E(X_1) < +\infty$. Alors $\lim_{t \to \infty} \frac{M(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$

L'intensité d'un processus de renouvellement tend vers $\frac{1}{\mu}$, $\lim_{t \to \infty} m(t) = \frac{1}{\mu}$

Proposition 5 Soit un processus de renouvellement tel que $\sigma^2 = Var(X_1) < +\infty$, alors

$$\lim_{t \to \infty} \left(M(t) - \frac{t}{\mu} \right) = \frac{\sigma^2 - \mu^2}{2\mu^2}$$

2-3-1 Formule de Wald

Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d à valeurs positives d'espérance $\mu < \infty$. Si N est une variable aléatoire à valeurs entières positives telle que la réalisation ou non de l'évènement $\{N \geq n\}$ est indépendante de X_n pour tout $n \geq 1$, alors on a

$$E\left(\sum_{n=1}^{N} X_n \right) = \mu E(N)$$

2-3-2 Théorème de renouvellement à temps discret

On considère un processus de renouvellement avec T_0 le temps avant le premier renouvellement et T_i le temps entre $i$ème et le $(i$+1)ième renouvellement pour $i \geq 1$. Tous ces temps sont indépendants, de même distribution de probabilité discrète donnée par la fonction de masse p_k , $k \geq 1$. On suppose que $pgcd\{k \geq 1, p_k > 0\} = 1$ et $\sum_{k \geq 1} kp_k = \mu < \infty$

Soit $\mu_k = P(renouvellement$ à $l'instant\ k\ )$ pour $k \geq 1$, alors $\lim_{k \to \infty} \mu_k = \frac{1}{\mu}$.

2-3-3 Théorème de renouvellement à temps continu

Si $(N(t))_{t \geq 0}$ est un processus de renouvellement avec temps d'inter arrivées $(T_i)_{i \geq 0}$ de distribution de probabilité continue, alors

$$\lim_{t \to \infty} \frac{E\big(N(t+h) - N(t)\big)}{h} = \frac{1}{\mu}$$

Pour tout $h > 0$, et tout $t \geq 0$, $\frac{1}{\mu}$ représente le taux moyen de renouvellement par unité de temps sur une période de longueur quelconque, mais à partir d'un moment qui tend vers l'infini.

2-4 Age courant- temps de vie résiduel

Lorsqu'on observe un processus de renouvellement à un instant donné, trois temps ont un intérêt particulier. L'âge courant noté A est le temps qui s'est écoulé depuis le dernier renouvellement, le temps de vie résiduel noté R est le temps qui reste à écoulé jusqu'au prochain renouvellement et Le temps de vie total noté V du dernier renouvellement est le temps entre ces deux renouvellement.

- Dans le cas où le temps entre deux renouvellements consécutifs est une variable aléatoire de loi discrète, l'âge, le temps de vie résiduel et le temps de vie total du renouvellement le plus récent à l'instant $n \geq 0$ sont définis par

$$A(n) = n - S_{N(n)},$$

$$R(n) = S_{N(n)+1} - n\,,$$

$$V(n) = S_{N(n)+1} - S_{N(n)}$$

Respectivement. Où , $N(n)$ représente le nombre de renouvellements jusqu'à l'instant $n \geq 0$ inclusivement, alors que

$$T_{N(n)} = S_0 + \cdots + S_{N(n)-1}$$

est l'instant du dernier renouvellement avant n (n inclus) et

$$T_{N(n)+1} = S_0 + \cdots + S_{N(n)}$$

est l'instant du premier renouvellement après n (n exclu).

- Dans le cas où le temps entre deux renouvellements consécutifs est une variable aléatoire de loi continu, l'âge, le temps de vie résiduel et le temps de vie total du renouvellement le plus récent à l'instant $t \geq 0$ sont définis par

$$A(t) = t - S_{N(t)},$$

$$R(t) = S_{N(t)+1} - t,$$

$$V(t) = S_{N(t)+1} - S_{N(t)}$$

Respectivement. Ici , $N(t)$ représente le nombre de renouvellements jusqu'à l'instant $t \geq 0$ inclusivement, alors que

$$T_{N(t)} = S_0 + \cdots + S_{N(t)-1}$$

est l'instant du dernier renouvellement avant t (t inclus) et

$$T_{N(t)+1} = S_0 + \cdots + S_{N(t)}$$

est l'instant du premier renouvellement après t (t exclu)

2-5 Distributions limites

La distribution de probabilité de ces temps lorsque l'instant d'observation tend vers l'infini, appelée *Distribution limite,* dépend de la distribution du temps entre deux renouvellements consécutifs.

2-5-1 Distributions limites à temps discret

On considère les limites des fonctions de masse des différents temps lorsque n tend vers l'infini.

- Age : pour tout $l \geq 0$, on a

$$P(A(n) = l) = \mu_{n-l} \sum_{m \geq 1} p_{m+l}$$

Où μ_{n-l} représente la probabilité d'un renouvellement à l'instant $n-l$.

$$\lim_{n\to\infty} P(A(n)=l) = \frac{1}{\mu}\sum_{m\geq 1} p_{m+l} = \frac{1}{\mu}\sum_{k\geq l+1} p_k$$

- Temps de vie résiduel pour tout $m \geq 1$, on a

$$P(R(n)=m) = \sum_{l=0}^{n} \mu_{n-l}p_{m+l}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} P(R(n)=m) = \sum_{l\geq 0}\frac{1}{\mu}p_{m+l} = \frac{1}{\mu}\sum_{k\geq m} p_k$$

- Temps de vie total : pour tout $k \geq 1$, on a

$$P(V(n)=k) = \sum_{l=0}^{k-1} \mu_{n-l}p_k$$

Et

$$\lim_{n\to\infty} P(V(n)=k) = \sum_{l=0}^{k-1}\frac{1}{\mu}p_k = \frac{kp_k}{\mu}$$

Remarque l'âge a la même distribution limite que le temps de vie résiduel moins 1.

Remarque La distribution limite du temps de vie total est différente de la distribution entre deux renouvellements successifs.

2-5-2 Distribution limite à temps continu

On considère un processus de renouvellement avec temps d'inter- arrivées T_i de loi continue, de fonction de densité donnée par $f(x) \geq 0$ pour tout réel $x > 0$, avec

$$\int_0^{+\infty} xf(x)dx = \mu < \infty$$

Par analogie avec le cas discret, les distributions limites sont données par :

Temps de vie total : pour tout $x > 0$, on a

$$\lim_{t\to\infty} P(V(t)\leq x) = \int_0^x \frac{yf(y)}{\mu}dy$$

Age et temps de vie résiduel : pour tout $x > 0$, on a

$$\lim_{t\to\infty} P(A(t)\leq x) = \lim_{t\to\infty} P(R(t)\leq x) = \int_0^x \frac{1-F(y)}{\mu}dy$$

Où $F(x) = \int_0^x f(y)dy$

L'espérance de la distribution limite du temps de vie total est donnée par

$$\int_0^\infty x\left(\frac{xf(x)}{\mu}\right)dx = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty x^2 f(x)dx = \frac{E(T_1^2)}{E(T_1)} = \frac{\mu^2+\sigma^2}{\mu}$$

Où $\sigma^2 = Var(T_1)$

Notons que l'espérance de la distribution limite du temps de vie total est plus grande que l'espérance du temps entre deux renouvellements consécutifs donnée par $\mu = E(T_1)$.

L'espérance de la distribution limite de l'âge et du temps de vie résiduel est donnée par

$$\int_0^\infty x\left(\frac{1-F(x)}{\mu}\right)dx = \frac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu}$$

Remarque

La distribution limite du temps de vie total a une densité donnée par $\frac{xf(x)}{\mu}$, pour tout $x > 0$. D'autre part, la distribution limite conditionnelle du temps de vie résiduel et de l'âge étant donné un temps de vie total est uniforme sur (0, x).

$$\int_y^\infty \frac{1}{x}\left(\frac{xf(x)}{\mu}\right)dx = \frac{1-F(x)}{\mu}$$

Pour tout $y > 0$, pour la distribution limite du temps de vie résiduel et de l'âge.

2-5-3 Processus de renouvellement stationnaire

Un processus de renouvellement est dit stationnaire lorsque la distribution de vie résiduel à tout instant est donnée par la distribution limite de ce temps. Sous les conditions du théorème de renouvellement à temps discret ou à temps continu, on a alors

$$E(N(t+h) - N(t)) = \frac{h}{\mu}$$

Pour tous $t, h > 0$. C'est le théorème de renouvellement pour un processus stationnaire.

2-6 Processus semi markovien

Un processus semi markovien sur les entiers $i \geq 0$ est décrit par des temps de séjour aux différents états, tous indépendants, qui sont de même distribution de probabilité mais quelconque, discrète ou continue, pour chaque état $i \geq 0$. A la fin d'un temps de séjour à l'état i, il y a transition à l'état $j \geq 0$ avec probabilité p_{ij}, indépendamment de toutes les autres transitions et de tous les temps de séjour. Il est à noter qu'on peut avoir $p_{ii} \neq 0$. La matrice de transition $P = (p_{ij})_{ij \in E}$ correspond à une matrice de transition pour une chaine de Markov à temps discret.

2-6-1 Extension du théorème ergodique

On considère un processus semi-markovien avec temps de séjour à chaque état $i \geq 0$ d'espérance $0 < \mu_i \leq \mu < \infty$. On suppose que la matrice de transition P correspond à une chaine de Markov à temps discret irréductible et récurrente positive dont la distribution stationnaire est donnée par π_i. Si $W_i(t)$ représente le temps passé à l'état i de l'instant 0 à l'instant $t > 0$ inclusivement, alors

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E(W_i(t))}{t} = \frac{\pi_i \mu_i}{\sum_{j\geq 1} \pi_j \mu_j}$$

Cette limite représente la proportion moyenne de temps à long terme où le processus est à l'état i. Ce résultat pour les processus semi markoviens est une extension du théorème ergodique pour les chaines de Markov autant à temps continu qu'à temps discret.

Remarque Si les temps de séjour prennent la valeur 1 avec probabilité 1, alors on obtient le théorème ergodique pour les moyennes des probabilités de transition, c'est-à-dire

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} p_{ji}^{(k)} = \pi_i$$

Pour tous $i, j \geq 0$. Si les temps de séjour sont de loi exponentielle, disons de paramètre λ_i lorsqu'on est à l'état i, et si $p_{ii} = 0$ pour tout état i, alors on a

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t p_{ji}(s) ds = \frac{\pi_i / \lambda_i}{\sum_{j\geq 1} \pi_j / \lambda_j}$$

Où $p_{ji}(s)$ représente la probabilité d'etre à l'état i à l'instant s étant donné qu'on est à l'état j à l'instant 0.