Université de Sidi bel Abbès
Faculté des Sciences Exactes
Département de Proba-Stat

Année 2023-2024
Simulation et pratique de logiciels
3èmme Année Licence MA

Corrigé d'examen

Exercice **1**. *[2+4+3] Soit la densité de probabilité f définie par*

$$f(x) = \begin{cases} M(1+x) & si \quad x \in [-1,0] \\ xe^{-x^2} & si \quad x > 0 \end{cases}$$

1. *Donner la constante de normalisation M.*

Réponse.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \int_{-1}^{0} M(1+x)dx + \int_{0}^{\infty} xe^{-x^2} \\ &= [M(x+\frac{x^2}{2})]_{-1}^{0} + [-\frac{1}{2}e^{-x^2}]_0^{\infty} \\ &= \frac{M}{2} + \frac{1}{2} = 1.\end{aligned}$$

Donc $M = 1$

2. *Expliquer comment simuler f par la méthode d'inversion en précisant l'expression de F^{-1}.*

Réponse

$$\begin{aligned} F(x) &= \begin{cases} \int_{-1}^{x}(1+t)dt & si \quad x \in [-1,0] \\ \int_{-1}^{0}(1+t)dt + \int_0^x te^{-t^2}dt & si \quad x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} [t+\frac{t^2}{2}]_{-1}^{x} & si \quad x \in [-1,0] \\ \frac{1}{2} + [\frac{-1}{2}e^{-t^2}]_0^x & si \quad x > 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Alors on déduit que

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + x + \frac{x^2}{2} & si \quad x \in [-1,0] \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x^2} & si \quad x > 0 \end{cases}$$

On trouve après inversion de F

$$F^{-1}(y) = \begin{cases} -1 + \sqrt{2y} & si \quad y < \frac{1}{2} \\ \sqrt{-\ln(2(1-y))} & si \quad y > \frac{1}{2} \end{cases}$$

1. *Simuler $U \sim \mathcal{U}[0,1]$.*

2. *Poser $X = F^{-1}(U)$.*

3. *Ecrire deux fonctions R , **rf1=function(n) { ... }** et **rf2=function(n) { ... }** qui permettent de simuler un echantillon aléatoire de taille n suivant la densité f, l'une avec boucles explicites et l'autre sans boucle.*

```
f=function(x) (x<0)*(1+x)+(x>0)*x*exp(-x*x)

rf1=function(n){
U=runif(n)
X=numeric(n)
for(i in 1:n) if(U[i]<(1/2)) X[i]=(-1+sqrt(2*U[i]))
 else X[i]=sqrt(-log(2*(1-U[i])))
return(X)
}

rf2=function(n){
Finv=function(y){
if(y<1/2) return(-1+sqrt(2*y))
return(sqrt(-log(2*(1-y))))
}
U=runif(n)
X=sapply(U,Finv)
return(X)
}
```

Exercice **2**. *[2+2+2+1] Soit la densité de probabilité f donnée par $f(x) = Mxe^{-2x}\mathbf{1}_{[0,a]}(x)$. pour $a > 0$. On veut simuler f par la méthode de rejet. On veut utiliser et comparer entre deux densités instrumentales g_1 uniforme et g_2 exponentielle de paramètre 1.*

1. *Donner le c optimal pour chaque méthode.*
2. *Discuter le meilleur choix entre g_1 et g_2.*
3. *Écrire une fonction R qui génére un n-échantillon aléatoire suivant la loi de densité f.*
4. *Déduir une méthode pour simuler la densité $\phi_a(x) \propto xe^{-2ax}\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$.*

Réponse.

1. - $g_1(x) = \frac{1}{a}\mathbf{1}_{[0,a]}(x)$.
   - $g_2(x) = e^{-x}\mathbf{1}_{[0,\infty[}(x)$.

$$c_1 = \sup_{x\in[0,a]} \frac{f(x)}{g_1(x)} = \sup_{x\in[0,a]} axe^{-2x}$$

$$c_1 = \begin{cases} a^2e^{-2a} & \text{si} \quad a < \frac{1}{2} \\ \frac{a}{2e} & \text{si} \quad a > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$c_2 = \sup_{x\in[0,a]} \frac{f(x)}{g_2(x)} = \sup_{x\in[0,a]} xe^{-x}$$

$$c_2 = \begin{cases} ae^{-a} & \text{si} \quad a < 1 \\ \\ \frac{1}{e} & \text{si} \quad a > 1 \end{cases}$$

2. On choisit la méthode qui a le c optimal le plus petit. Soit $r = \frac{c_1}{c_2}$.

   On a
$$r = \begin{cases} ae^{-a} & \text{si} \quad a < \frac{1}{2} \\ \frac{a}{e} & \text{si} \quad \frac{1}{2} < a < 1 \\ \frac{a}{2} & \text{si} \quad a > 1 \end{cases}$$

   On déduit que $r < 1$ si $a < 2$ et $r \geq 1$ si $a \geq 2$. Conclusion, on choisit g_1 pour $a < 2$ et g_2 pour $a > 2$.

3.
```
a=2;
m=function(x) x*exp(-2*x);M=1/integrate(m,0,a)$value
f=function(x) M*x*exp(-2*x)*(x<a);curve(f,0,a)

g1=function(x) 1/a ;g2=function(x) exp(-x)

h1=function(x) f(x)/g1(x) ;h2=function(x) f(x)/g2(x)
c1=optimise(h1,c(0,a),maximum=TRUE)$objective
if(a<0.5) c1=a^2*exp(-2*a) else c1=a/(2*exp(1))
c1=M*c1

c2=optimise(h2,c(0,a),maximum=TRUE)$objective
if(a<1) c2=a*exp(-a) else c2=1/(exp(1))
c2=c2*M
par(mfrow=c(1,2))
n=1e5;
#Methode 1
X=runif(n,0,a);U=runif(n)
Acc=(f(X)>(c1*U*g1(X)))
hist(X[Acc],freq=FALSE,main="par g1");curve(f,add=TRUE)

#Methode 2
X=rexp(n);U=runif(n)
Acc=(f(X)>(c2*U*g2(X)))
hist(X[Acc],freq=FALSE,main="par g2");curve(f,add=TRUE)
```

4. Il est clair que $1/a$ est un paramètre d'échelle. Alors il suffit de simuler X suivant la densité f et poser $Y = X/a$.

Exercice **3** (2+2+2+2).

Estimer en utilisant Monte-Carlo par deux méthodes chacune des intégrales suivantes, en donnant le programme pour un intervalle de confiance à 95%:

$$I = \int_0^3 \sin(x^4+3)e^{-\frac{x}{2}}\, dx.$$

$$J = \iint_{\mathbb{R}_+{}^2} |\cos(x^2+2y)|e^{-(x^2+y)} dx\, dy.$$

Réponse.

$$I = \int_0^3 \sin(x^4+3)e^{-\frac{x}{2}}\, dx.$$

I. Méthode 1.

- $f(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\mathbf{1}_{[0,\infty[}(x)$
- $g(x) = 2\sin(x^4+3)\mathbf{1}_{[0,3]}(x)$.

I. Méthode 2.

- $f(x) = \frac{1}{3}\mathbf{1}_{[0,3]}(x)$.
- $g(x) = 3\sin(x^4+3)e^{-\frac{x}{2}}$

Programme

```
## Méthode 1
h=function(x) (sin(x^4+3))*exp(-x/2)
integrate(h,0,3)
n=1e6
U=runif(n,0,3)
g=function(x) 3*(sin(x^4+3))*exp(-x/2)
X=g(U)
binf=mean(X)-1.96*sd(X)/sqrt(n)
bsup=mean(X)+1.96*sd(X)/sqrt(n)
## Méthode 2
n=1e7
X=rexp(n,1/2)
g=function(x) 2*(sin(x^4+3))
Y=g(X)
binf=mean(Y)-1.96*sd(Y)/sqrt(n)
bsup=mean(Y)+1.96*sd(Y)/sqrt(n)
```

$$J = \iint_{\mathbb{R}_+{}^2} |\cos(x^2+2y)|e^{-(x^2+y)} dx\, dy.$$

J. Méthode 1.

$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-y}\mathbf{1}_{[0,\infty[}(y)$.

$g(x,y) = \sqrt{\pi}|\cos(x^2+2y)|\mathbf{1}_{[0,\infty[}(x)$.

J. Méthode 2.

$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-y}\mathbf{1}_{[0,\infty[}(y)$.

$g(x,y) = \sqrt{2\pi}|\cos(x^2+2y)|e^{-\frac{x^2}{2}}\mathbf{1}_{[0,\infty[}(y)$.

Programme

```
### Méthode 1
g=function(x,y) sqrt(pi)*abs(cos(x^2+2*y))*(x>0)
```

```
n=1e6
X=rnorm(n,0,1/sqrt(2))
Y=rexp(n)
Z=g(X,Y)
mean(Z);sd(Z)

## Méthode 2
g=function(x,y) sqrt(2*pi)*abs(cos(x^2+2*y))*exp(-x^2/2)*(x>0)
n=1e6
X=rnorm(n)
Y=rexp(n)
Z=g(X,Y)
mean(Z);sd(Z)
```

Bon courage.