République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed Khider - BISKRA
Faculté des Sciences Exactes
et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département de Mathématiques
Spécialités : Probabilités et EDSs.

Concours d'accès à la formation de troisième cycle (Doctorat LMD)
Date : 01/04/2021
Durée 02H, 00

Epreuve: Probabilités et processus stochastiques

Exercice 01 (6 pts)

Sur un éspace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, P)$ on considère les deux processus stochastiques

$$X_t = \int_0^t e^s dB_s, \text{ et } Y_t = e^{-t} X_t.$$

1) Déterminer $E(X_t)$, $Var(X_t)$, $E(Y_t)$ et $Var(Y_t)$.
2) Spécifier la loi de X_t et de Y_t.
3) Exprimer dY_t en fonction de Y_t et de B_t.

Exercice 02 (7 pts)

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite aléatoire i.i.d de loi de Bernoulli:

$$P(X_1 = 0) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé, la variable aléatoire

$$N_n = \inf\{k \in \mathbb{N} : X_{n+k} = 0\}$$

est un temps d'arrêt adapté à la filtration $\{\sigma(\{X_0, ..., X_{n+m}\})\}_{m\in\mathbb{N}}$.
2) Calculer la probabilité que N_n soit égale à 0 infiniment souvent (ie: $P(\lim_n \sup (N_n = 0))$).
3) Même question pour la valeur 1 (on considérera la suite d'événements $(N_{2n} = 1)_{n\in\mathbb{N}}$).

Exercice 03. (7 pts)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, définie par la loi de probabilité:

$$\forall i \in \mathbb{N}^* : P(X = i) = \frac{b}{4^i}.$$

Soit Y une v.a telle que, sachant $X = i$, la loi de Y est l'équiprobabilité sur $\{i, i+1\}$.
1) Déterminer la valeur de b. Déduire $\mathbb{E}[X]$ et $Var(X)$.
2) Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbb{E}[Y \mid X = i]$. En déduire $\mathbb{E}[Y \mid X]$, puis $\mathbb{E}[Y]$.
3) Calculer la loi jointe de couple (X, Y).
4) Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbb{E}[X \mid Y = j]$. En déduire $\mathbb{E}[X \mid Y]$.
5) Déterminer $Cov(X, Y)$.

Choisi Sujet 1

Corrigé de l'exercice 01 :

1) $E[X(t)] = 0, \ \forall t \geqslant 0$ (02)

$$Var[X(t)] = E[X(t)^2] = \int_0^t e^{2s} ds = \frac{1}{2}[e^{2t} - 1].$$

$$E[Y(t)] = 0$$

$$Var[Y(t)] = e^{-2t} Var(X(t)) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}).$$

2) $X(t) \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{2}(e^{2t} - 1)) \quad \forall t \geqslant 0.$ (02)

$Y(t) \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})). \quad \forall t \geqslant 0.$

3) $dY(t) = -e^{-t} X(t) dt + e^{-t} dX(t)$ (02)

$= -Y(t) dt + dB(t)$

Corrigé de l'exercice :02

1) N_n est un temps d'arrêt ?

On pose pour $m=0$ $\mathcal{F}_m = \sigma(X_0, \dots, X_{n+m})$ et $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_m)_{m\geq}$

Soit $k \in \mathbb{N}$, $\{N_n = k\} = \{X_n = 1\} \cap \dots \cap \{X_{n+k-1} = 1\} \cap \{X_{n+k} = 0\} \in \mathcal{F}_k$

car $\forall$ $0 \le i \le k-1$, X_{n+i} est $\mathcal{F}_i$ - mesurable et donc $\{X_{n+i} = 1\} \in \mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_k$

et $\{X_{n+k} = 0\} \in \mathcal{F}_k$. d'où $\{N_n = k\} \in \mathcal{F}_k$.

i.e. N_n est un $\mathbb{F}$ - temps d'arrêt

2) Calculons $P(\overline{\lim} \{N_n = 0\})$

Les événements $(\{N_n = 0\})_{n \ge 0}$ sont indépendants car

$$\{N_n = 0\} = \{X_n = 0\}.$$

et on a $P(\{N_n = 0\}) = P(\{X_n = 0\}) = \frac{1}{2}$ et donc

$$\sum_{n \ge 0} P(N_n = 0\} = +\infty.$$

Le lemme de Borel Cantelli nous confirme que $P(\overline{\lim} \{N_n = 0\}$

3) Les événements $(\{N_{2n} = 1\})_{n \ge 0}$ sont indépendants

$$\{N_{2n} = 1\} = \{X_{2n} = 1\} \cap \{X_{2n+1} = 0\}.$$

$$P(\{N_{2n} = 1\}) = P(\{X_{2n} = 1\}) \cdot P(\{X_{2n+1} = 0\}) = \frac{1}{4}.$$

d'où $\sum_{n \ge +\infty} P(\{N_{2n} = 1\}) = 1$ $P(\overline{\lim} \{N_{2n} = 1\}) = 1$

d'après le lemme de Borel Cantelli

et comme $(\{N_{2n} = 1\})_{n \ge 0} \subset (\{N_n = 1\})_{n \ge 0}$ alors $\overline{\lim} (\{N_{2n} = 1\}) \subseteq \overline{\lim} \{N_n =$

$$1 = P(\overline{\lim} \{N_{2n} = 1\}) \le P(\overline{\lim} \{N_n = 1\}) \le 1$$

Solution Exo 3.

1°- La valeur de b

i)- On a $P(X=i)=\frac{b}{4^i}\geq 0 \Rightarrow b\geq 0$

ii)- $\sum_{i\in\mathbb{N}^*}\frac{b}{4^i}=1 \Rightarrow b\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{4^i}=1$ (Serie géométrique)

$\Rightarrow b\,\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-1/4}=1$, $|1/4|<1$

$\Rightarrow \boxed{b=3}$ 0,5

Alors. $\boxed{P(X=i)=\frac{3}{4^i}}$.

• La valeur de E(X) et Var(X)

$P(X=i)=\frac{3}{4^i}=\underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)}_{p}\underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)}_{q}^{i-1}$, c'est la loi géométrique $G(3/4)$

$\Rightarrow p=3/4$, on déduit que $E(X)=\frac{1}{p}=\boxed{4/3}$ 0,5

$Var(X)=\frac{q}{p^2}=\frac{1/4}{(3/4)^2}=\boxed{\frac{4}{9}}$ 0,5

2°- $E[Y/X=i]=?$

$\forall i\in\mathbb{N}^*$, la loi de Y sachant que $\{X=i\}$ est l'équiprobabilité sur $\{i, i+1\}\Rightarrow E[Y/X=i]=\frac{i+i+1}{2}=\boxed{\frac{2i+1}{2}}$, $\forall i\in\mathbb{N}^*$

on déduit que $\boxed{E[Y/X]=\frac{2X+1}{2}}$ 0,5

• La valeur de E[Y]

On a $E[E[Y/X]]=E[Y]$

donc $E[E[Y/X]]=E\left[\frac{2X+1}{2}\right]$ "E" Linéaire

$\Rightarrow E[Y] = E[X] + \frac{1}{2} = \frac{4}{3} + \frac{1}{2} = \boxed{11/6}$ OK

3°. <u>La loi jointe du couple (X, Y)</u>

$P_{(i,j)} = P(X=i, Y=j) = P_{(Y=j/X=j)} \cdot P_{X=i}$

$= \frac{3}{4^i} \cdot \frac{1}{2} = \begin{cases} 3/2 \cdot \frac{1}{4^i} & \text{si } j \in \{i, i+1\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ 01

5°. $Cov(X,Y) = E[XY] - E(X) \cdot E[Y]$ (avec $E[X] = 4/3$, $E[Y] =$

On a: $E[XY] = E[E[XY/X]] = E[X E[Y/X]]$, X est $\sigma(X)$-m

$= E\left[X \cdot \frac{2X+1}{2}\right] = \boxed{E[X^2] + \frac{1}{2} E(X)}$.

donc $\boxed{Cov(X,Y) = E[X^2] + \frac{1}{2} E[X] - E[X] \cdot E[Y]}$

• <u>$E[X^2] = ?$</u>

On a: $Var(X) = E[X^2] - E^2[X] \Rightarrow E[X^2] = Var(X) + E^2[X]$

$= 4/9 + (4/3)^2 = \boxed{20/9}$ OK

• <u>La loi de Y</u>: $P_j = P(Y=j) = \sum_i P_{ij}(i,j)$

<u>Cas 1</u>: On a $j = 1 \in \{i, i+1\} = \{1, 2\} \Rightarrow i = 1 \Rightarrow \boxed{P_j = 3/8}$

<u>Cas 2</u>: $j = 2 \in \{i, i+1\} \Rightarrow (1,2)$ ou $(2,3) \Rightarrow i=1$ ou $i=2$

01 $P_j = 3/2 \sum_i \frac{1}{4^i} = 3/2\left(\frac{1}{4^1} + \frac{1}{4^2}\right) = \boxed{\frac{15}{32}} = \boxed{\frac{15}{2} \cdot \frac{1}{4^2}}$

<u>Cas 3</u>: $j = 3 \in \{2, 3\} \Rightarrow i = 2$ ou $i = 3$

$$P_j = 3/2 \sum_i \frac{1}{4^i} = 3/2\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}\right) = \boxed{\frac{15}{2}\left(\frac{1}{4^3}\right)}$$

• Cas général : $\forall j \geq 2$: $\boxed{P_j = \frac{15}{2}\cdot\frac{1}{4^j}}$

Alors : $$\boxed{P_j = P(Y=j) = \begin{cases} 3/8 & \text{si } j=1 \\ \frac{15}{2}\cdot\frac{1}{4^j}, & \text{si } j \geq 2 \end{cases}}$$ 01

4)- $E[X/Y=j] = ?$

Cas 1 : $Y=1 \Rightarrow X=1 \Rightarrow E[X/Y=1]=1$

$\Rightarrow (E[X/Y=1] = 1\!\!1_{Y=1})$ ... (*)

cas 2 : $Y=j>1 \Rightarrow j \in \{\overset{i}{j-1}, \overset{i+1}{j}\}$, $x \in \{j-1, j\}$

ou $\{j, j+1\}$

01

Alors : • $P(X=j/Y=j) = \frac{P(X=j-1, Y=j)}{P(Y=j)} = 3/2 \frac{\frac{1}{4^{j-1}}}{\frac{15}{2}\frac{1}{4^j}} = \boxed{\frac{4}{5}}$

• $P(X=j/Y=j) = \frac{P(X=j, Y=j)}{P(Y=j)} = 3/2 \frac{1/4^j}{\frac{15}{2}\cdot\frac{1}{4^j}} = \boxed{\frac{1}{5}}$

Donc $E[X/Y=j] = \sum_i i\, P_{X/Y=j}(i,j)$, $j>1$

$= (j-1)\frac{8}{15} + j\frac{2}{15} = \boxed{j - \frac{4}{5}}$ --- (**)

de (*) et (**) $\boxed{E[X/Y] = 1\!\!1_{\{Y=1\}} + \left(Y-\frac{4}{5}\right) 1\!\!1_{\{Y>1\}}}$

On $E[X^2] = \boxed{20/9}$.

et $E[XY] = \boxed{\frac{26}{9}}$

Alors : $Cov(X,Y) = E[XY] - E[X] \cdot E[Y] = \boxed{\frac{4}{9}}$

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider - BISKRA
Faculté des Sciences Exactes
et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département de Mathématiques
Spécialités : Probabilités et EDSs.

Concours d'accès à la formation de troisième cycle (Doctorat LMD)
Date : 01/04/2021
Durée 02H, 00

Epreuve: Probabilités et processus stochastiques

Exercice 01 (7 pts)

Soit X une variable aléatoire (v.a) à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, définie par la loi de probabilité: $\forall i \in \mathbb{N}^* : P(X = i) = \frac{a}{3^i}$.

Soit Y une v.a telle que, sachant $X = i$, la loi de Y est l'équiprobabilité sur $\{i, i+1\}$.

1) Déterminer la valeur de a. Déduire $\mathbb{E}[X]$ et $Var(X)$.

2) Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbb{E}[Y \mid X = i]$. En déduire $\mathbb{E}[Y \mid X]$, puis $\mathbb{E}[Y]$.

3) Calculer la loi jointe de couple (X, Y).

4) Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbb{E}[X \mid Y = j]$. En déduire $\mathbb{E}[X \mid Y]$.

5) Déterminer $Cov(X, Y)$.

Exercice 02 (7 pts)

Sur un éspace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, P)$ on considère le processus

$$X_t = \int_0^t s dB_s, \text{ pour } t \geq 0.$$

1) Calculer $E(X_t)$ et $Var(X_t)$. Quelle est la loi de X_t?

2) Calculer $d(tB_t)$ a l'aide de la formule d'Itô.

3) En déduire une relation entre X_t et $Y_t = \int_0^t B_s ds$.

4) Calculer la variance de Y_t, en utilisant les deux méthodes suivantes:

(a) directement a partir de sa définition,

(b) en calculant d'abord la covariance de B_t et X_t, a l'aide d'une partition de $[0, t]$.

En déduire la loi de Y_t.

Exercice 03 (6 pts)

Soit F une fonction de répartition. On pose $S = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) = 1\}$, avec la convention $\inf \varnothing = +\infty$.

1) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite aléatoire i.i.d de la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

i) Déterminer S et donner la fonction de répartition $F_{(n)}$ de $X_{(n)} = \max(X_1, ..., X_n)$.

ii) Montrer que $X_{(n)}$ converge vers S.

iii) Mêmes questions pour $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de loi continue de densité $f(y) = \alpha(1-y)^{\alpha-1}\, \mathbb{I}_{[0,1]}(y)$, pour $\alpha \in \mathbb{N}^*$, avec la convergence en loi.

Sujet 2

Université Mohamed Khider - BISKRA
Faculté des Sciences Exactes
et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département de Mathématiques
Spécialités : Probabilités et EDSs.

Concours d'accès à la formation de troisième cycle (Doctorat LMD)
Date : 01/04/2021
Durée 02H, 00

Epreuve: Probabilités et processus stochastiques

Exercice 01 (5 pts)

1) Soient X et Y deux variables aléatoires (v.a) telles que: $\mathbb{E}[X \mid Y] = Y$ et $\mathbb{E}[Y \mid X] = X$. Montrer que si X et Y sont dans L^2, alors $X = Y$ $p.s$.

2) Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ est une sous-martingale pour la filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et croissante telle que pour tout $n, \varphi(X_n) \in L^1$. Montrer que $(\varphi(X_n))_{n\geq 0}$ est une sous-martingale pour $\mathbb{F}$.

3) Soit $Z = (Z_n)_{n\geq 0}$ avec $Z_n = e^{X_n}$ pour $n \geq 0$ avec X_n est une $\mathbb{F}-$sous-martingale. Montrer que Z est une sous-martingale pour $\mathbb{F}$.

4) Montrer qu'un processus prévisible intégrable est une martingale si et seulement s'il est $p.s$ constant.

Exercice 02 (7 pts). Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ une mouvement Brownien réel issu de zéro.

1) Montrer que pour tout $t \geq 0$ la variable aléatoire $X_t = \int_0^t \sin(s)\, dB_s$ est bien définie.

2) Montrer que X_t est un processus gaussien, donner sa loi.

3) Montrer que pour tout $t \geq 0$ on a $X_t = \sin(t)\, B_t - \int_0^t \cos(s)\, B_s ds$

4) Montrer que le processus $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ défini pour tout $t \geq 0$ par

$$Y_t = \sin(B_t) + \frac{1}{2}\int_0^t \sin(B_s)\, ds,$$

est une martingale pour la filtration brownienne.

Exercice 03 (8 pts). Soient $X_1, ..., X_n$ des variables indépendantes identiquement distribuées avec la densité exponentielle

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x) \text{ si } x \geq 0,$$

1) Montrer que $S_n = X_1 + ... + X_n$ a une répartition gamma $G(n, \lambda)$ avec une densité

$$f_{S_n}(z) = \frac{\lambda^n z^{(n-1)}}{(n-1)!} e^{-\lambda z},\ z \geq 0.$$

2) Montrer que la densité de la statistique (X_1, S_n) est

$$f_{X_1,S_n}(y, s) = \begin{cases} e^{-\lambda y} \dfrac{\lambda^n}{(n-2)!}(s-y)^{(n-2)} e^{-\lambda(s-y)}, & \text{si } s \geq y \geq 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

3) Trouver la densité conditionelle $f_{X_1|S_n=s}(\cdot)$.

Sujet 3