Université Mohamed Khider, Biskra
Faculté des Sc. Exactes et Sc. de la Nature et la Vie
Département de Mathématiques
Master 1: 2021/2022
Module: Tests Statistiques

Corrigé-type de l'examen de remplacement

Solution de l'exercice 1. $(10pts)$

1. Remplir le tableau suivant par les riques associés:

		Vérité	
		H_0	H_1
Décision	H_0	$1-\alpha$	β
	H_1	α	$1-\beta$

Tab.1

2. Un test sans biais: $1-\beta \geq \alpha$. Un test consistent: $1-\beta \to 1$, quand $n \to \infty$.
3. Répondre:
a) La puissance du test est égale à $\mathbf{P}$ [accepter $H_1 \mid H_0$ est fausse]. Vrai
b) Etant donné une région critique W . On a $\mathbf{P}\left(W \mid H_1 \text{ est fausse}\right) = \alpha$. Vrai
4. La relation entre le seuil de singnification et la fonction puisance est: $\alpha = \sup_{\theta \in \Phi_0} \pi\left(\theta\right)$.
5. La variable de décision: est la statistique de test qui nous permet de déteminer la région critique.

* *

Solution de l'exercice 2. $(10pts)$

1) Ici**,** la variable aléatoire X prend une valeur 1 (qui correspond à un article non-défectueux) avec une probabilité p et elle prend la valeur 0 (qui correspond à un article non défectueux). Donc il s'agit d'une v.a qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p. La fonction masse de cette v.a discrète X et définie comme suit:

$$\mathbf{P}\left(X=1\right)=p \text{ et } \mathbf{P}\left(X=0\right)=1-p.$$

Celle-ci peut être reformuler comme suit: $\mathbf{P}\left(X=x\right)=p^x\left(1-p\right)^{1-x}$, $x=0,1$.

2) Nous allons appliquer la méthode du test de *rapport de vraisemblance monotone***.** Soit $p_1 > p_2$ et écrivons

$$\frac{L_{p_1}}{L_{p_2}} = \frac{\prod_{i=1}^{15} p_1^{x_i}\left(1-p_1\right)^{1-x_i}}{\prod_{i=1}^{15} p_2^{x_i}\left(1-p_2\right)^{1-x_i}} = \frac{p_1^t\left(1-p_1\right)^{15-t}}{p_2^t\left(1-p_2\right)^{15-t}}, \text{ avec } t := \sum_{i=1}^{15} x_i.$$

Celle peut être réécrite comme suit:

$$\frac{L_{p_1}}{L_{p_2}} = \left(\frac{1-p_1}{1-p_2}\right)^{15}\left(\frac{p_1\left(1-p_2\right)}{p_2\left(1-p_1\right)}\right)^t.$$

On pose $b := \left(\frac{1-p_1}{1-p_2}\right)^{15} > 0$, et $a := \frac{p_1(1-p_2)}{p_2(1-p_1)} > 1$ (car $p_1 > p_2$), ainsi $t \to \frac{L_{p_1}}{L_{p_2}}\left(t\right) = ba^t$ est une fonction croissante en t (car $a > 1$). La statistique $T := \sum_{i=1}^{15} X_i$ est une v.a discrète qui suit la loi binomiale de paramètre $\left(15, 0.9\right)$.

3) Nous allons alors appliquer la proposition 3, pour avoir le test upp :

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^{15} x_i < c \\ \gamma & \text{si } \sum_{i=1}^{15} x_i = c \\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^{15} x_i > c \end{cases}$$

où c et $0 < \gamma < 1$ sont telles que

$$\mathbf{P}_{p=0.9}(T < c) + \gamma \mathbf{P}_{p=0.9}(T = c) = \alpha = 0.05. \tag{1}$$

Nous avons $\mathbf{P}_{p=0.9}(T \leq c) = \mathbf{P}_{p=0.9}(T < c) + \mathbf{P}_{p=0.9}(T = c)$. Comme $0 < \gamma < 1$, alors

$$\mathbf{P}_{p=0.9}(T = c) > \gamma \mathbf{P}_{p=0.9}(T = c),$$

ce qui implique que $\mathbf{P}_{p=0.9}(T \leq c) > \mathbf{P}_{p=0.9}(T < c) + \gamma \mathbf{P}_{p=0.9}(T = c) = 0.05$. De la table statistique, de la loi binomiale, la plus petite c telle que $\mathbf{P}_{p=0.9}(T \leq c) > 0.05$ est $c = 11$, pour la quelle $\mathbf{P}_{p=0.9}(T \leq 11) = 0.056$. En utilisant la même table statistique on obtien $\mathbf{P}_{p=0.9}(T \leq 10) = 0.013$, ainsi

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{p=0.9}(T = 11) &= \mathbf{P}_{p=0.9}(T \leq 11) - \mathbf{P}_{p=0.9}(T \leq 10) \\ &= 0.056 - 0.013 = 0.043. \end{aligned}$$

Observons que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{p=0.9}(T < 11) &= \mathbf{P}_{p=0.9}(T < 11) - \mathbf{P}_{p=0.9}(T = 11) \\ &= 0.056 - 0.043 = 0.013. \end{aligned}$$

Grace à l'équation (1), on écrit

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{0.05 - \mathbf{P}_{p=0.9}(T < 11)}{\mathbf{P}_{p=0.9}(T = 11)} \\ &= \frac{0.05 - 0.013}{0.043} \simeq 0.86. \end{aligned}$$

Ainsi le test optimal upp est

$$\delta = \delta(X_1, ..., X_{15}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^{15} x_i < 11 \\ 0.86 & \text{si } \sum_{i=1}^{15} x_i = 11 \\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^{15} x_i > 11 \end{cases}$$

4) La fonction puissance du test est

$$\begin{aligned} \pi(p) &= \mathbf{E}_p[\delta], \ 0 < p < 1 \\ &= 1 \times \mathbf{P}(\delta = 1) + 0.86 \times \mathbf{P}(\delta = 0.86) + 0 \times \mathbf{P}(\delta = 0). \end{aligned}$$

En d'autres termes

$$\pi(p) = \mathbf{P}(T < 11) + 0.86\mathbf{P}(T = 11),$$

où $T := \sum_{i=1}^{15} X_i$ est une v.a binimiale de parametrer $(15, p)$, avec $0 < p < 1$. Il est clair que

$$\begin{aligned} \pi(p) &= (\mathbf{P}(T \leq 11) - \mathbf{P}(T = 11)) + 0.86\mathbf{P}(T = 11) \\ &= \mathbf{P}(T \leq 11) - 0.14\mathbf{P}(T = 11) \\ &= \mathbf{P}(T \leq 11) - 0.14(\mathbf{P}(T \leq 11) - \mathbf{P}(T \leq 10)) \\ &= 0.86\mathbf{P}(T \leq 11) + 0.14\mathbf{P}(T \leq 10) \\ &= 0.86\mathbf{F}_p(11) + 0.14\mathbf{F}_p(10), \end{aligned}$$

où $F_p(x)$ désigne la fonction de répartition de la loi binomiale de paramètrer $(15, p)$. Explicitement la fonction puissance est

$$\pi(p) = 0.85 \sum_{k=0}^{11} C_{15}^{k} p^k (1-p)^{15-k} + 0.14 \sum_{k=0}^{10} C_{15}^{k} p^k (1-p)^{15-k},$$

pour $0 < p < 1$. Le graphe de fonction puissance est donné par la figure suivante: