Cours de probabilité Avancée

Diffalah LAISSAOUI

Université de Médéa
Faculté des sciences
Département de mathématiques et Informatique

L3 Maths

Mars 2022

Fonction génératrice

Definition

La fonction définie par

$$\begin{aligned} G(t) &= E(t^X) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} t^k P(X=k) \end{aligned}$$

qui converge pour $|t| \leq 1$, est dite fonction génératrice de la V.a. X.

Remarque

Les moments de la V.a. X s'ils existent peuvent être détermines par les dérivées de $G(t)$ au point $t = 1$.

En effet,

$$\begin{aligned} G'(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} kt^{k-1}P(X=k) \\ &\Longrightarrow G'(1) = E(X) \text{ si } E\left|X\right| < \infty. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G''(t) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)t^{k-2}P(X=k) \\ &\Longrightarrow G''(1) = E(X(X-1)) \text{ si } E\left|X^2\right| < \infty, \end{aligned}$$

et ainsi de suite ....

$$E(X^2) = G'(1) + G''(1)$$

et

$$Var(X) = G'(1) + G''(1) - (G'(1))^2.$$

Fonction génératrice

Exemple

Soit X la v.a. de Poisson défini par

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}; k = 0, 1, 2, \ldots$$

Solution

On a

$$G(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{(t\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{t\lambda} = e^{-\lambda(1-t)}; |t| \leq 1.$$

Donc,

$$\begin{aligned} G'(t) &= \lambda e^{-\lambda(1-t)} \\ G''(t) &= \lambda^2 e^{-\lambda(1-t)} \end{aligned}$$

Fonction génératrice des moments :

Solution

$$
\begin{aligned}
G'(t) &= \lambda e^{-\lambda(1-t)} \\
G''(t) &= \lambda^2 e^{-\lambda(1-t)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G'(1) &= E(X) = \lambda, \\
G''(1) &= E(X(X-1)) = \lambda^2, \\
Var(X) &= \lambda.
\end{aligned}
$$

Fonction génératrice des moments :

Definition

Soit X une v.a. définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. La fonction génératrice des moments est définie pour toute variable aléatoire X par :

$$M(t) = E(e^{tX}) = \begin{cases} \sum_x e^{tx} P(X = x) \text{ si } X \text{ est discrete ;} \\ \int_{\mathbb{R}} e^{tx} f_X(x) dx \text{ si } X \text{ est continue} \end{cases}$$

Si $E(e^{tX})$ existe dans un voisinage de l'origine.

Theorem

Si $M(t)$ existe pour $t \in]-t_0, t_0[$, $t_0 > 0$, alors ses dérivées de tout ordre existent pour $t = 0$ et de plus $M^{(n)}(0) = E(X^n)$; $n = 0, 1, 2, \cdots$. C'est-à-dire que : Tous les moments d'ordre n peuvent etre calculés à l'aide des dérivées de la fonction génératrice des moments au point $t = 0$.

Fonction génératrice des moments :

Remarque

La fonction génératrice des moments peut ne pas exister.

En effet, $E\left(e^{tX}\right)$ n'est pas toujours définie.

Exemple

Soit X une v.a. discrète définie par :

$$P(X=k)=\frac{6}{\pi^2k^2};\ \ k=1,2,\cdots.$$

Donc, on a :

$$M(t)=\frac{6}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{tk}}{k^2}=\infty.$$

Fonction génératrice des moments :

Exemple

Soit X une v.a. continue de fonction de densité

$$f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}; x > 0.$$

Donc

$$M(t) = \frac{1}{1-2t} \text{ pour } t < \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} M'(t) &= \frac{2}{(1-2t)^2} \\ \text{et } M''(t) &= \frac{8}{(1-2t)^3} \text{ pour } t < \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

on en déduit $E(X) = 2$, $E(X^2) = 8$ *et* $Var(X) = 4$.

Fonction génératrice des moments :

Exemple

Soit X une v.a. continue de fonction de densité

$$f_X(x) = ce^{-|x|^\alpha}, 0 < \alpha < 1, x \in \mathbb{R},$$

où c est une constante déterminée par la condition $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = 1$.

Solution

Pour $t > 0$, on a $\int_0^\infty e^{tx}e^{-x^\alpha}dx = \int_0^\infty e^{x(t-x^{\alpha-1})}dx$ et puisque $\alpha - 1 < 0$, $\int_0^\infty e^{tx}e^{-x^\alpha}dx$ n'est pas finie pour $t > 0$; car $e^{x(t-x^{\alpha-1})} \sim_{x\longrightarrow\infty} e^{tx}$. D'ou $M(t)$ n'existe pas ! Pourtant $E(|X|^n) = c\int_{\mathbb{R}} |X|^n e^{-|x|^\alpha}dx = 2c\int_0^\infty x^n e^{-x^\alpha}dx$. Par un changement de variable $y = x^\alpha$, on obtient $E(|X|^n) = \frac{2c}{\alpha}\int_0^\infty y^{\frac{n+1}{\alpha}-1}e^{-y}dy = \frac{2c}{\alpha}\Gamma(\frac{n+1}{\alpha}) < \infty$. On remarque, donc, que meme si $M(t)$ est infini, les moments peuvent etre finis.

Fonction caractéristique :

Definition

Soit X une v.a. définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. La fonction caractéristique est définie par :

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \begin{cases} \sum_x e^{itx} P(X = x) \text{ si } X \text{ est discrete ;} \\ \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x) dx \text{ si } X \text{ est continue} \end{cases}$$

Comme $|e^{itx}| = 1$ pour tout réel t, si X est une variable aléatoire absolument continue, l'intégrale

$$\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x) dx$$

existe pour toute fonction de densité f_X et la fonction caractéristique peut etre définie pour toute variable aléatoire X.

Propriétés :

1. $\varphi_X(0) = 1$.

Propriétés :

1. $\varphi_X(0) = 1$.
2. $|\varphi_X(t)| \leq 1, t \in \mathbb{R}$.

Propriétés :

1. $\varphi_X(0) = 1$.
2. $|\varphi_X(t)| \leq 1, t \in \mathbb{R}$.
3. Si $Y = aX + b$, a et b étant des constantes, alors

$$\varphi_Y(t) = \varphi_X(at)e^{ibt},$$

où φ_X et φ_Y sont les fonctions caractéristiques des variables aléatoires X et Y.

Propriétés :

1. $\varphi_X(0) = 1$.
2. $|\varphi_X(t)| \leq 1, t \in \mathbb{R}$.
3. Si $Y = aX + b$, a et b étant des constantes, alors

$$\varphi_Y(t) = \varphi_X(at)e^{ibt},$$

   où φ_X et φ_Y sont les fonctions caractéristiques des variables aléatoires X et Y.
4. $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$.

Preuves :

1. On montre la propriété pour X absolument continue. En effet :

$$\varphi_X(0) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = 1.$$

Preuves :

1. On montre la propriété pour X absolument continue. En effet :

$$\varphi_X(0) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = 1.$$

2. On montre la propriété pour X absolument continue. En effet :

$$|\varphi_X(t)| = |\int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x)dx| \leq \int_{\mathbb{R}} \left|e^{itx}\right| f_X(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = 1.$$

Preuves :

1. On montre la propriété pour X absolument continue. En effet :

$$\varphi_X(0) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = 1.$$

2. On montre la propriété pour X absolument continue. En effet :

$$|\varphi_X(t)| = |\int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x)dx| \leq \int_{\mathbb{R}} \left|e^{itx}\right| f_X(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = 1.$$

3. $\varphi_Y(t) = E(e^{itY}) = E(e^{it(aX+b)}) = e^{itb}E(e^{itaX}) = e^{itb}\varphi_X(at).$

Preuves :

1. On montre la propriété pour X absolument continue. En effet :

$$\varphi_X(0) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = 1.$$

2. On montre la propriété pour X absolument continue. En effet :

$$|\varphi_X(t)| = \left|\int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x)dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}} \left|e^{itx}\right| f_X(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = 1.$$

3. $\varphi_Y(t) = E(e^{itY}) = E(e^{it(aX+b)}) = e^{itb}E(e^{itaX}) = e^{itb}\varphi_X(at).$
4. $\varphi_X(-t) = E(e^{-itX}) = E(\cos tX) - iE(\sin tX) = \overline{E(\cos tX) + iE(\sin tX)} = \overline{E(\cos tX + i\sin tX)} = \overline{E(e^{itX})} = \overline{\varphi_X(t)}.$

Fonction caractéristique :

Theorem

Si le moment d'ordre $k \geq 1$ de la v.a. X existe, la fonction caractéristique $\varphi_X(t)$ admet une dérivée d'ordre k continue au voisinage de l'origine et $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k E(X^k)$.

Example

On considère X une v.a. qui suit une loi binomiale $B(n, p)$. A partir de sa fonction caractéristique on calculera son espérance mathématique et sa variance.

Fonction caractéristique :

Example

On considère X une v.a. qui suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. A partir de sa fonction caractéristique on calculera son espérance mathématique et sa variance.

Example

On considère X une v.a. qui suit une loi normale $N(0,1)$ et Y une v.a. qui suit une loi normale $N(m,\sigma)$. A partir de la fonction caractéristique de X, on calculera la fonction caractéristique de Y et on en retrouvra l'espérance mathématique et la variance de Y.

Fonction caractéristique :

Solution

On a :

$$\varphi_X(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux - \frac{x^2}{2}} dx$$

comme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \sin(ux)\, dx = 0,$$

alors :

$$\varphi_X(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos(ux)\, dx$$

et

$$\begin{aligned} \varphi'_X(u) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} \sin(ux)\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(ux)\, d(e^{-\frac{x^2}{2}}) dx \end{aligned}$$

Fonction caractéristique :

Solution

On en tire $\frac{\varphi'_X(u)}{\varphi_X(u)} = -u$ *ou* $[\ln \varphi_X(u)]' = -u$ *ce qui implique*

$$\ln \varphi_X(u) = \frac{-u^2}{2} + c.$$

comme $\varphi_X(0) = 1$, *on a* $c = 0$ *et* $\varphi_X(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$. *Si* $Y \to N(m, \sigma)$, *on peut représenter* Y *sous la forme* $Y = \sigma X + m$ *où* $X \to N(0, 1)$ *; d'où*

$$\varphi_Y(u) = \varphi_{\sigma X+m}(u) = e^{ium} e^{-\frac{u^2\sigma^2}{2}}.$$

La dérivée $\varphi'_X(u)$ *s'écrit*

$$\varphi'_Y(u) = (im - u\sigma^2) e^{ium} e^{-\frac{u^2\sigma^2}{2}}$$

et $E(Y) = \frac{1}{i}\varphi'_Y(0) = m$. *La dérivée* $\varphi''_Y(u)$ *s'écrit*

Fonction caractéristique :

Fonction caractéristique :