Université de Sidi Bel Abbes. — 2018/2019
Faculté des Sciences Exactes — **Master SA**
Département de Proba-Stat — Stat-Nonparam

Examen Final

Exercice 1. *Soient $f \in L^1$ (une fonction intégrable) et K un noyau borné, intégrable et vérifiant $\int_{\mathbb{R}} K(x)dx = 1$ et $|xK(x)| \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow \infty$. Montrer que f est continue en tout point de x et*

$$\lim_{h_n \longrightarrow 0} \left(f * K_h\right)(x) = f(x)$$

où $K_h(\cdot) = \frac{1}{h} K\left(\frac{\cdot}{h}\right)$ et $f * g(x) = \int g(x-y)f(y)dy$.

Exercice 2. (1) *Soit X une variable aléatoire réelle centrée, bornée par 1.*

(i) *Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $\forall x \in [-1, 1]$, $\quad \exp(tx) \leq \frac{1-x}{2}\exp(-t) + \frac{1+x}{2}\exp(t)$*

(ii) *En déduire les inégalités $\mathbb{E}\left[\exp(tX)\right] \leq ch(t)$ et $\mathbb{E}\left[\exp(tX)\right] \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$*

(2) *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes centrées telles que $|X_n| \leq c_n$ avec $c_n > 0$. On note pour tout $n \geq 1$, $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$.*

(a) *Montrer que pour tout t, $\mathbb{E}\left[\exp(tS_n)\right] \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{j=1}^{n} c_j^2\right)$.*

(b) *Montrer alors avec l'inégalité de Markov que pour tout $t > 0$ et $\varepsilon > 0$,*

$$\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(-t\varepsilon + \frac{t^2}{2}\sum_{j=1}^{n} c_j^2\right).$$

(c) *En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{j=1}^{n} c_j^2}\right)$.*

(d) *Montrer alors pour tout $\varepsilon > 0$ l'inégalité de Hoeffding, $\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{j=1}^{n} c_j^2}\right)$.*