Martingales Descretes

Moulay Abdelkader

29 avril 2021

Table des matières

Introduction

La théorie des martingales est l'un des outils les plus puissants de la théorie moderne des probabilités. Le nom martingale est synonime de jeu équitable, c'est-à-dire d'un jeu où le gain quel'on peut espérer faire en tout temps ultérieur est égal à la somme gagnée au moment présent. En probabilités, les martingales, ainsi que leurs variantes les sous-martingales et les surmartingales, jouissent de nombreuses propriétés qui les rendent très utiles dans l'étude de processus stochastiques plus généraux.

Ce cours est destiné à des étudiants de la première année master ayant suivi un cours de base de mesure et intégration et une connaissance préalable sur la théorie du calcul des probabilités avancée. Le premier chapitre traite de façon détaillée la notion de l'espérance conditionnelle (définition, propriétés ...). Le deuxième chapitre fait l'objet de martingales à temps discret (définition, propriétés, inégalité, décomposition de Doob, et convergence). Une série des exercices est proposée à la fin du polycopie.

Chapitre 1

Rappels

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Rappelons les théorèmes suivants :

Théorème 1.0.1. *Décomposition de Lebesgue.*
On notera $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}$ l'espérance prise par rapport à la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
Soient $\mathbb{P}$ et $\tilde{\mathbb{P}}$ deux mesures de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{F})$. Alors $\tilde{\mathbb{P}}$ peut s'écrit $\tilde{\mathbb{P}}_a + \tilde{\mathbb{P}}_s$ où

(a) Il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que $\tilde{\mathbb{P}}_s(A) = 0$ et $\mathbb{P}(A^c) = 0$: on dit alors que $\tilde{\mathbb{P}}_s$ est singulière par rapport à $\mathbb{P}$;

(b) Il existe $Y \geq 0$ une v.a telle que pour tout A

$$\tilde{\mathbb{P}}_a(A) = \int_A Y d\mathbb{P} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Y\mathbf{1}_A).$$

Une telle décomposition est unique.

Définition : Une mesure de probabilité $\tilde{\mathbb{P}}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est dite absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$ si $\forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}(A) = 0 \Rightarrow \tilde{\mathbb{P}}(A) = 0$. Dans ce cas on note $\tilde{\mathbb{P}} \ll \mathbb{P}$.
On dit que $\tilde{\mathbb{P}}$ et $\mathbb{P}$ sont équivalentes si $\tilde{\mathbb{P}} \ll \mathbb{P}$ et $\mathbb{P} \ll \tilde{\mathbb{P}}$.
Le résultat suivant est un grand "classique".

Théorème 1.0.2. ***Radon-Nikodym***
Il y a équivalence entre les proposition suivantes :

(i) $\tilde{\mathbb{P}} \ll \mathbb{P}$;

(ii) Il existe une unique ($\mathbb{P}$-p.s) v.a Z à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$, $\mathbb{P}$-intégrable, telle que

$$\forall A \in \mathcal{F} \quad \tilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A Z(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z\mathbf{1}_A).$$

Dans ce dernier cas Z est appelée la dérivé de Radon-Nikodym de $\tilde{\mathbb{P}}$ par rapport à $\mathbb{P}$ et on la note $Z = \frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}$.

Chapitre 2

Espérance Conditionnelle

Soit $\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, étant données une variable aléatoire X et une sous-tribu $\mathcal{B}$ de $\mathcal{F}$. L'espérance conditionnelle est une notion de probabilité qui permet, d'exprimer ce que l'on sait de X en ayant uniquement l'information contenue dans $\mathcal{B}$. Pour plus de détail, nous renvoyions le lecteur au [1] et [9].

2.1 Probabilité Conditionnelle(Cours 1)

Définition 2.1.1. Soient A et B deux évènements de $\mathcal{F}$, où B est un évènement non négligeable ; la formule

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

définit une probabilité $\mathbb{P}(.|B)$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$, appelée ***probabilité conditionnelle*** à B ou *sachant* B.

En effet ;

L'application est clairement à valeurs dans $[0, 1]$ avec $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une famille d'évènements deux à deux disjoints alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_n A_n | B\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_n A_n \cap B\right)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_n (A_n \cap B)\right)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\sum_n \mathbb{P}(A_n \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$
$$= \sum_n \left(\frac{\mathbb{P}(A_n \cap B)}{\mathbb{P}(B)}\right) = \sum_n \mathbb{P}(A_n|B) \quad \blacktriangleleft$$

Remarque 2.1.1. On a $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ et $\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$ donc

$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)$. Alors on peut généraliser pour une famille d'évènements on obtient par récurrence :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2|A_1) \times \mathbb{P}(A_3|A_2 \cap A_1) \times ... \times \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap ... \cap A_{n-1}).$$

Si X est une variable aléatoire intégrable, B un évènement non négligeable ***l'espérance conditionnelle*** de X sachant B, est par définition l'espérance de X par rapport à la probabilité conditionnelle à B ; soit

$$\mathbb{E}(X|B) = \int_\Omega X(w) d\mathbb{P}(.|B).$$

Possède toujours les propriétés de l'espérance.

Proposition 2.1.1. *Si X est une variable aléatoire intégrable, B un évènement non négligeable, alors*

$$\mathbb{E}(X|B) = \frac{\mathbb{E}(X \mathbf{1}_B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_B X d\mathbb{P}.$$

Démonstration : Utiliser la méthode standard des applications étagées ◄

Soit maintenant $\mathcal{B} = \{B_1, ..., B_n\}$ une famille disjointe (un système). Alors si $A \in \mathcal{F}$:

$$\mathbb{P}(A|\mathcal{B}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{P}(A \cap B_i)}{\mathbb{P}(B_i)} \mathbf{1}_{B_i}$$

La probabilité $\mathbb{P}(A|\mathcal{B})$ définie une variable aléatoire qui est $\sigma(\mathcal{B})$-mesurable et vérifie :

$$\int_B \mathbb{P}(A|\mathcal{B}) d\mathbb{P} = \mathbb{P}(A \cap B); \quad B \in \mathcal{B}$$

de plus $\quad \mathbb{E}\left(\mathbb{P}(A|\mathcal{B})\right) = \mathbb{P}(A)$.

Définition 2.1.2. Plus généralement, si $\mathcal{G}$ est une sous tribu de $\mathcal{F}$ et $A \in \mathcal{F}$, alors $\mathbb{P}(A|\mathcal{G})$ est une variable aléatoire $\mathcal{G}$-mesurable telle que :

$$\int_B \mathbb{P}(A|\mathcal{G}) d\mathbb{P} = \mathbb{P}(A \cap B); \quad B \in \mathcal{G}$$

Théorème 2.1.2. *La probabilité $\mathbb{P}(A|\mathcal{G})$, $\mathcal{G}$ est une sous tribu de $\mathcal{F}$ vérifie :*

1. $\mathbb{P}(\Omega|\mathcal{G}) = 1$ *.p.s.*
2. *Pour tout $(A_n)_{n \geq 0}$ de $\mathcal{F}$ deux à deux disjoints, on a :* $\mathbb{P}\left(\bigcup_n A_n|\mathcal{G}\right) = \sum_n \mathbb{P}(A_n|\mathcal{G})$ *.p.s.*

Démonstration : D'abord $\int_B \mathbb{P}(\Omega|\mathcal{G}) d\mathbb{P} = \mathbb{P}(B \cap \Omega) = \mathbb{P}(B) = \int_B d\mathbb{P}$, pour tout $B \in \mathcal{G}$; alors $\mathbb{P}(\Omega|\mathcal{G}) = 1$ .p.s.

Soit $B \in \mathcal{G}$,

$$\begin{aligned} \int_B \sum_n \mathbb{P}(A_n|\mathcal{G}) d\mathbb{P} = \sum_n \int_B \mathbb{P}(A_n|\mathcal{G}) d\mathbb{P} = \sum_n \mathbb{P}(A_n \cap B) &= \mathbb{P}\left((\bigcup_n A_n) \cap B\right) \\ &= \int_n \mathbb{P}\left(\bigcup_n A_n|\mathcal{G}\right) \end{aligned}$$

d'où $\mathbb{P}\left(\bigcup_n A_n|\mathcal{G}\right) = \sum_n \mathbb{P}(A_n|\mathcal{G})$ ◄

Proposition 2.1.3. *Si $\mathcal{G}$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$ et $C \in \mathcal{F}$, pour tout $A \in \mathcal{G}$, alors $\mathbb{P}(A \cap C|\mathcal{G} = \mathbb{P}(C|\mathcal{G}) \mathbf{1}_A)$. p.s.*

En effet,
$\int_B \mathbb{P}(A \cap C|\mathcal{G}) d\mathbb{P} = \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$, d'autre part $\int_B \mathbf{1}_A \mathbb{P}(C|\mathcal{G}) d\mathbb{P} = \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$ ◄

2.2 Existence de la probabilité conditionnelle

Si X est une variable aléatoire positive sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ alors

$$\mu(B) = \int_B X d\mathbb{P}, B \in \mathcal{G} \tag{2.1}$$

est bien définie.

μ est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{F}) \to \mathbb{R}_+$ est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$ et sa dérivée de Radon-Nikodym est une variable aléatoire $\mathcal{G}$ mesurable.

Pour $X = \mathbf{1}_A$, où $A \in \mathcal{F}$ du théorème de Radon-Nikodym et 2.1 on définit

$$\int_B \mathbb{P}(A|\mathcal{G}) d\mathbb{P} = \mu(B) = \int_B \mathbf{1}_A d\mathbb{P} = \mathbb{P}(A \cap B); B \in \mathcal{G}$$

ce qui justifie l'existence d'une variable aléatoire vérifiant la définition 1.1.2.

2.3 Espérance Conditionnelle (Cas Général) (Cours 2)

Théorème 2.3.1. ***(et Définition)*** *Soit X une variable aléatoire intégrable sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Alors il existe une unique (p.s) variable aléatoire, appelée* ***Espérance conditionnelle*** *de X sachant $\mathcal{G}$ notée $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$, telle que*

i) $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ *est $\mathcal{G}$-mesurable ;*

ii) *pour tout $B \in \mathcal{G}$,* $\displaystyle\int_B \mathbb{E}(X|\mathcal{G})d\mathbb{P} = \int_B X d\mathbb{P}.$

La condition ii) s'écrit encore :

$$\mathbb{E}(X\mathbf{1}_B) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\mathbf{1}_B\right), \quad pourtout \;\; B \in \mathcal{G}.$$

Démonstration : L'unicité : Si Y et Y' sont deux versions de $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$, alors pour tout $B \in \mathcal{G}$

$$\int_B Y d\mathbb{P} = \int_B Y' d\mathbb{P}$$

Posons $A = \{Y - Y' \geq \varepsilon\}$, pour $\varepsilon > 0$. Alors

$$0 = \int_A Y d\mathbb{P} - \int_A Y' d\mathbb{P} = \int_A (Y - Y')d\mathbb{P} \geq \varepsilon \mathbb{P}(A) = \varepsilon \mathbb{P}(Y - Y' \geq \varepsilon)$$

Comme c'est vrai pour tout ε, on a $Y \leq Y'$ p.s. En inter changeant les rôles de Y et Y', on obtient l'inégalité inverse, d'où on déduit l'égalité presque sûre.

Existence : Montrons finalement l'existence. Rappelons qu'une mesure ν sur $(\Omega, \mathcal{G})$ est dite absolument continue par rapport à la mesure μ si $\mu(A) = 0$ implique $\nu(A) = 0$ pour tout $A \in \mathcal{G}$. On écrit alors $\nu \ll \mu$. Le théorème de Radon–Nikodym affirme qu'il existe alors une fonction $f \in \mathcal{G}$ telle que

$$\int_A f d\mu = \nu(A), \quad A \in \mathcal{G}$$

La fonction f est appelée dérivée de Radon–Nikodym et notée $\frac{d\nu}{d\mu}$.

Supposons d'abord que $X \geq 0$. Posons $\mu = \mathbb{P}$ et définissons ν par

$$\nu(A) = \int_A X d\mathbb{P}, \quad A \in \mathcal{G}$$

de sorte que $\nu \ll \mu$. Nous avons $\frac{d\nu}{d\mu} \in \mathcal{G}$ et pour tout $A \in \mathcal{G}$.

$$\int_A X d\mathbb{P} = \nu(A) = \int_A \frac{d\nu}{d\mu} d\mathbb{P}.$$

Ceci montre que $\frac{d\nu}{d\mu}$ satisfait (ii). De plus, prenant $A = \Omega$ on voit que $\frac{d\nu}{d\mu}$ est intégrable. Par conséquent $\frac{d\nu}{d\mu}$ est une version de $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$.

Finalement, un X quelconque peut se décomposer $X = X^+ - X^-$ avec $X^+, X^- \geq 0$. Soit $Y_1 = \mathbb{E}(X^+|\mathcal{G})$ et $Y_2 = \mathbb{E}(X^-|\mathcal{G})$. Alors $Y_1 - Y_2$ est $\mathcal{G}$-mesurable et intégrable et on a pour tout $A \in \mathcal{G}$

$$\int_A X d\mathbb{P} = \int_A X^+ d\mathbb{P} - \int_A X^- d\mathbb{P} = \int_A Y_1 d\mathbb{P} - \int_A Y_2 d\mathbb{P} = \int_A (Y_1 - Y_2) d\mathbb{P}$$

Ceci montre que $Y_1 - Y_2$ est une version de $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$. ◄

Proposition 2.3.2. *Cette espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ vérifie alors :*

$$\forall Z \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}), \int_B XZ d\mathbb{P} = \int_B Z\mathbb{E}(X|\mathcal{G})d\mathbb{P}, \quad B \in \mathcal{G}. \tag{2.2}$$

En effet, La propriété est évidente pour une fonction indicatrice, puis nous passons aux fonctions étagés $\mathcal{G}$-mesurable puis au variables positives et enfin aux variables $\mathcal{G}$-mesurables par la démarche usuelle. ◄

2.4 Propriétés de L'espérance Conditionnelle

L'espérance conditionnelle possède les propriétés suivantes

1. **Linéarité** : $\mathbb{E}\left(X+Y|\mathcal{G}\right) \ = \ \mathbb{E}\left(X|\mathcal{G}\right)+\mathbb{E}\left(Y|\mathcal{G}\right)$

2. **Son espérance** :

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X|\mathcal{G}\right)\right) \ = \ \mathbb{E}\left(X\right)$$

   En effet, il suffit de prendre $B=\Omega$ dans la définition. ◀

3. **Positivité.** Si $X \geq 0$ alors $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \geq 0$.

   En effet,

   Soit $X \geq 0$; on prend $Y = \mathbf{1}_{\{\mathbb{E}(X|\mathcal{G})<0\}}$.

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\mathbf{1}_{\{\mathbb{E}(X|\mathcal{G})<0\}}) \leq 0$$

   D'autre part

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{\mathbb{E}(X|\mathcal{G})<0\}}) \geq 0$$

   Ces deux expressions sont égales, elles sont donc toutes les deux nulles, ce qui implique $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\mathbf{1}_{\{\mathbb{E}(X|\mathcal{G})<0\}} = 0$ p.s et par conséquent $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \geq 0$. ◀

4. **Monotonie** : Si $X \leq Y$, alors

$$\mathbb{E}\left(X|\mathcal{G}\right) \ \leq \ \mathbb{E}\left(Y|\mathcal{G}\right)$$

5. **Indépendance** : Si X est indépendant de $\mathcal{G}$, alors

$$\mathbb{E}\left(X|\mathcal{G}\right) \ = \ \mathbb{E}(X)$$

   En effet,

   Si $B \in \mathcal{G}$, $\mathbf{1}_B$ et X sont indépendantes et donc pour tout $B \in \mathcal{G}$,

$$\int_B \mathbb{E}(X|\mathcal{G})d\mathbb{P} = \int_B X d\mathbb{P} = \mathbb{E}(X)\mathbb{P}(B) = \int_B \mathbb{E}(X)d\mathbb{P}.$$

   Puisque $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ est $\mathcal{G}$-mesurable, $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$ p.s. ◀

6. Si X est $\mathcal{G}$-mesurable, alors

$$\mathbb{E}\left(X|\mathcal{G}\right) \ = \ X$$

   En particulier $\mathbb{E}(1|\mathcal{G}) = 1$.

7. Si Z est $\mathcal{G}$-mesurable, alors

$$\mathbb{E}\left(XZ|\mathcal{G}\right) \ = \ Z\mathbb{E}\left(X|\mathcal{G}\right)$$

   En effet, utiliser la méthode standard. ◀

8. **Conditionnement successif** : si $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$,

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X|\mathcal{G}_1\right)|\mathcal{G}_2\right) = \mathbb{E}\left(X|\mathcal{G}_1\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X|\mathcal{G}_2\right)|\mathcal{G}_1\right)$$

   En effet,

   Soit $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$. La variable $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1)$ est $\mathcal{G}_2$-mesurable si bien que

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1)|\mathcal{G}_2\right] = \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1).$$

Démontrons l'égalité $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1\right] = \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1)$.
La variable $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1\right]$ est $\mathcal{G}_1$-mesurable. De plus, pour tout Y $\mathcal{G}_1$-mesurable, Y est à la fois $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$-mesurable et d'après la propriété précédente,

$$\mathbb{E}(Y\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1\right]) = \mathbb{E}(\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(YX|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1\right]) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(YX|\mathcal{G}_2) = \mathbb{E}(YX)$$

Ce sont les deux propriétés qui caractérisent $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1)$. ◄

9. **Inégalité de Jensen conditionnel** : si ϕ est une fonction convexe et $\phi(X)$ est intégrable, alors

$$\mathbb{E}\left(\phi(X)|\mathcal{G}\right) \;\geq\; \phi\left(\mathbb{E}\left(X|\mathcal{G}\right)\right)$$

En effet,
Comme ϕ est convexe alors pour tout $a \in \mathbb{R}$ il existe λ_a tel que pour tout x,

$$\phi(x) \geq \phi(a) + \lambda_a(x-a)$$

Posons : $a = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ et $x = X$ on a

$$\phi(X) \geq \phi(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})) + \lambda_a(X - \mathbb{E}(X|\mathcal{G}))$$

On prend alors l'espérance conditionnelle des deux membres pour obtenir

$$\mathbb{E}\left(\phi(X)|\mathcal{G}\right) \;\geq\; \phi\left(\mathbb{E}\left(X|\mathcal{G}\right)\right). ◄$$

10. **Théorème de convergence monotone conditionnel** : si $X_n \geq 0$ est une suite croissante de variables aléatoires réelles qui converge presque sûrement vers X, alors

$$\mathbb{E}\left(X_n|\mathcal{G}\right) \;\longrightarrow\; \mathbb{E}\left(X|\mathcal{G}\right), \quad n \longrightarrow \infty.$$

En effet,
On pose $Y = \lim \mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}] = \limsup \mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}]$ (d'après la croissance) qui est $\mathcal{G}$-mesurable. On a pour tout $B \in \mathcal{G}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y\mathbf{1}_B] = \mathbb{E}[\lim_n \mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}]\mathbf{1}_B] &= \lim_n \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}]\mathbf{1}_B] \quad \text{par convergence monotone} \\ &= \lim_n \mathbb{E}[X_n\mathbf{1}_B] \\ &= \mathbb{E}[X\mathbf{1}_B]\text{par convergence monotone. ◄} \end{aligned}$$

11. **Lemme de Fatou conditionnel :** Si X_n sont des variables aléatoires positives, alors

$$\mathbb{E}[\liminf X_n|\mathcal{G}] \leq \liminf \mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}].$$

En effet,
On a d'après le résultat précédent

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\liminf X_n|\mathcal{G}] &= \lim_n \mathbb{E}[\inf_{k\geq n} X_k|\mathcal{G}] \\ &\leq \lim_n \inf_{k\geq n} \mathbb{E}[X_k|\mathcal{G}] \\ &= \liminf \mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}]. ◄ \end{aligned}$$

12. **Théorème de convergence dominées conditionnel :** Si $X_n \longrightarrow X$ p.s. avec pour tout n, $|X_n| \leq Z \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$, alors

$$\lim_n \mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}].$$

En effet, Exercice.

Définition 2.4.1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, deux sous tribus $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ de $\mathcal{F}$, sont dites **conditionnellement indépendantes** à $\mathcal{G}$ si

$$\mathbb{P}(A \cap B|\mathcal{G}) = \mathbb{P}(A|\mathcal{G})\mathbb{P}(B|\mathcal{G}), \quad p.s.$$

pour tous $A \in \mathcal{G}_1, \quad B \in \mathcal{G}_2$

2.5 Conditionnement à une variable aléatoire (Cours 3)

Définition 2.5.1. Soit Y une variable aléatoire. Si X est une v.a.r. positive ou intégrable, on définit l'espérance conditionnelle de X sachant Y comme l'espérance conditionnelle de X sachant la tribu engendrée par Y. On note alors $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X|\sigma(Y)]$.

Proposition 2.5.1. *Une variable aléatoire $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est $\sigma(X)$-mesurable si et seulement si il existe une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ borélienne telle que $Y = f(X)$.*

Démonstration . Exercice.

Proposition 2.5.2. *Si X et Y sont des variables aléatoires, alors $\mathbb{E}(X|Y) = \varphi(Y)$, où φ est une fonction borélienne, si et seulement si*

$$\mathbb{E}[Xg(Y)] = \mathbb{E}[\varphi(Y)g(Y)]$$

pour toute fonction borélienne g, en particulier,

$$\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{(Y\in B)}] = \mathbb{E}[\varphi(Y)\mathbf{1}_{(Y\in B)}]$$

où B est un borélien.

Démonstration : Toute v.a $\sigma(Y)$-mesurable s'écrit $g(Y)$ avec g borélienne(Proposition(2.5.1)), d'où le résultat par la définition de l'espérance conditionnelle.◀

2.5.1 Cas discret

Soit X une variable aléatoire réelle dont l'espérance est définie et Y une variable aléatoire discrète, pour tout y_i tel que l'événement $\{Y = y_i\}$ soit de probabilité non nulle, on peut définir

$$\mathbb{E}(X|Y = y_i) = \frac{1}{\mathbb{P}(Y = y_i)}\mathbb{E}(X.\mathbf{1}_{\{Y=y_i\}})$$

On définit ainsi, presque partout, une fonction, $\varphi(y) = \mathbb{E}(X|Y = y)$ et une variable aléatoire $\varphi(Y)$ appelée espérance de X conditionnée par Y et notée $\mathbb{E}(X|Y)$.

Exemple 2.5.1. Pour des variables aléatoires discrète

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes telles que X suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ et Y suit la loi $\mathcal{P}(\mu)$. On a donc $T = X + Y$ suit la li $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$. On calcul

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k|T = t) &= \frac{\mathbb{P}(X = k, Y = t-k)}{\mathbb{P}(X + Y = t)} \\ &= \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\frac{e^{-\mu}\mu^{t-k}}{(t-k)!}\frac{t!}{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^t} \\ &= \binom{k}{t} p^k(1-p)^{t-k}, \quad 0 \leq k \leq t,\end{aligned}$$

où $p = \lambda/(\lambda+\mu)$. Par conséquent, la loi conditionnelle de X sachant $(T = t)$ est une loi binomiale $\mathcal{B}(t, \lambda/(\lambda+\mu))$.

Ainsi, $\mathbb{E}(X|T = t) = \lambda t/(\lambda + \mu)$ et $Var(X|T = t) = \lambda\mu t/(\lambda + \mu)^2$,

Donc $\mathbb{E}(X|T) = \lambda T/(\lambda + \mu)$ et $Var(X|T) = \lambda\mu T/(\lambda + \mu)^2$.

2.5.2 Cas absolument continu

Proposition 2.5.3. *Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles telle que le couple (X,Y) admet la densité $f_{(X,Y)}(x,y)$, alors la loi conditionnelle de X sachant $(Y=y)$ a une densité lorsque $f_Y(y) \neq 0$, donnée par*

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{\int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)dx}$$

Proposition 2.5.4. *Soit X,Y deux variables aléatoires telles que le couple (X,Y) admette une densité $f_{X,Y}$ et soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne positive ou $\mathbb{P}_Y$-intégrable. Alors, pour P_X-presque tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}(g(Y)|X=x) = \frac{\int_{\mathbb{R}} g(y) f_{X,Y}(x,y)dy}{\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dy}.$$

Exemple 2.5.2. Pour des variables aléatoires continues Soient X et Y deux v.a indépendantes de même loi $\gamma(1,1)$, on sait que $T = X+Y$ suit la loi $\gamma(2,1)$. Calculons l'espérance conditionnelle de X sachant T. On cherche φ telle que, pour toute g borélienne bornée, on ait

$$\mathbb{E}[g(T)X] = \mathbb{E}[g(T)\varphi(T)]$$

Or

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(T)X] = \int\int_{\mathbb{R}_+^2} g(x+y)xe^{-(x+y)}dxdy &= \int_{\mathbb{R}_+}\int_0^t g(t)e^{-t}ududt \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(t)g(t)te^{-t}dt \\
&= \mathbb{E}[g(t)\varphi(t)].
\end{aligned}$$

où $\varphi(t) = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t udu = t/2$, donc $\mathbb{E}(X|T) = T/2$ p.s.

Chapitre 3

Martingales à temps Discret

3.1 Filtration et temps d'arrêt(Cours 4)

La notion de temps d'arrêt intervient de façon essentielle dans l'étude des processus stochastiques. Nous donnons ici les principaux résultats les concernant, du moins pour les temps d'arrêt à valeurs entières.

Définition 3.1.1. *Filtration* : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$ des tribus, $n \in \mathbb{N}$. On dit que les $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ forment une **filtration** si elles constituent une suite croissante pour l'inclusion : $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Une suite de variables aléatoires $(M_n)_{n\geq 0}$ est dite **adaptée** à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ si M_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition 3.1.2. *Temps d'arrêt* : Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ une filtration de $\mathcal{F}$ Un temps d'arrêt relatif à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ est une variable aléatoire T à valeurs dans $\overline{\mathbb{N}}$ vérifiant $(T \leq n) \in \mathcal{F}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Il est immédiat que l'on pourrait définir un temps d'arrêt T comme étant une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $(T = n) \in \mathcal{F}_n$ (puisque $(T = n) = (T \leq n) \cap (T \leq n-1)^c$ et $(T \leq n-1) = \bigcup_{1\leq i\leq n-1}(T = i)$).

Si T est un temps d'arrêt, on définit la **tribu des évènements antérieurs** à T En posant

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F} : A \cap (T \leq n) \in \mathcal{F}_n \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}\}$$

En effet,

Il est clair que $\emptyset$ et Ω sont des évènements de $\mathcal{F}_T$.
Soit $A \in \mathcal{F}_T$, $A^c \cap (T \leq n) = (T \leq n) - (A \cap (T \leq n)) \in \mathcal{F}_n$.
Si $(A_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'évènements de $\mathcal{F}_T$ alors,
$(\bigcup_k A_k) \cap (T \leq n) = \bigcup_k (A_k \cap (T \leq n)) \in \mathcal{F}_n$. ◄

On obtient bien sûr une définition équivalente en remplaçant l'événement $(T \leq n)$ par l'événement $(T = n)$. On vérifie immédiatement que $\mathcal{F}_T$ est effectivement une tribu et que T est $\mathcal{F}_T$-mesurable.

3.1.1 Propriétés

1. Si S et T sont des temps d'arrêt, alors : $S + T, S \wedge T$ et $S \vee T$ sont des temps d'arrêt, en effet,

$$(S + T = n) = \bigcup_{i=0}^{n} ((S = i) \cap (T = n - i)) \in \mathcal{F}_n,$$

$(S \wedge T \leq n) = (S \leq n) \cup (T \leq n) \in \mathcal{F}_n$,
$(S \vee T \leq n) = (S \leq n) \cap (T \leq n) \in \mathcal{F}_n$.◄

2. Si $(T_n)_{n\geq 0}$ est une suite de temps, alors $\sup_{k\geq 0} T_k$ et $\inf_{k\geq 0} T_k$ son des temps d'arrêt,
   En effet,
   $(\sup_k T_k \leq n) = \bigcap_k (T_k \leq n) \in \mathcal{F}_n$ et $(\inf_k T_k \leq n) = \bigcup_k (T_k \leq n) \in \mathcal{F}_n$. ◀
3. Si S et T sont des temps d'arrêt, avec $S \leq T$ alors $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$, en effet, Soit $A \in \mathcal{F}_S$,
$$A \cap (T \leq n) = [A \cap (S \leq n)] \cap (T \leq n) \in \mathcal{F}_n.$$
   Car $(T \leq n) \subset (S \leq n)$ ◀

Exemples de Temps d'arrêt :

1. Si T est constante presque sûrement, alors c'est un temps d'arrêt.
2. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ un processus $\mathcal{F}$-adapté à valeurs dans $(\Omega, \mathcal{F})$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$. Et on note T_a, le premier temps pour le quel X dépasse a, la variable aléatoire ci-dessous définie :
$$T_a = \inf \{n \geq 0 \quad / \quad X_n \geq a\}$$
   avec la convention $\inf \emptyset = \infty$. Alors T_a est un temps d'arrêt.
   En effet,
$$(T_a \leq n) = \{\exists m \leq n / \quad X_m \geq a\} \in \mathcal{F}_n. \quad ◀$$

3.2 Martingale, Sous-martingale, Surmartingale (Cours 5)

L'étude des martingales qui est proposée ci-dessous repose très fortement sur l'algèbre des espérances conditionnelles, dont la forme utile a été rappelée dans le Chapitre 1. Les Règles qui y ont été données, sont utilisées constamment. Comme rappelé dans le chapitre 1, les formules qui comportent des espérances conditionnelles ne sont vraies que presque sûrement.

3.2.1 Définitions

On suppose donné un processus stochastique à temps discret, c'est-à-dire une suite $(M_n)_{(n>0)}$ de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$.

Définition 3.2.1. La suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **martingale** (respectivement *sous-martingale, sur-martingale*) relativement à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, si

i) les M_n sont intégrables,

ii) la suite $(M_n)_{n\geq 0}$ est adaptée à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$,

iii) $\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = M_n$ p.s. (respectivement $\geq M_n, \leq M_n$) pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale (resp. une sous-martingale, une sur-martingale) si et seulement si pour tout $A \in \mathcal{F}_n$ on a
$$\int_A M_{n+1} d\mathbb{P} = \int_A M_n d\mathbb{P} \qquad (\text{resp. } \geq, \leq)$$
Si la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ n'est pas spécifiée, on prend $\mathcal{F}_n = \sigma(M_k,\ k \leq n)$.

Proposition 3.2.1. *Pour tout* $k > 0, \mathbb{E}(M_{n+k}|\mathcal{F}_n) = M_n$.

En effet,

Cette proposition se démontre par récurrence sur k. Supposons là vérifiée pour $k > 0$ et démontrons là pour $k + 1$. Comme $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+k}$,
$$\mathbb{E}(M_{n+k+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(M_{n+k+1}|\mathcal{F}_{n+k})|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(M_{n+k}|\mathcal{F}_n) = M_n. \quad ◀$$

3.2.2 Exemples

1. **Martingale de Doob** : Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes entre elles et centrées ($\mathbb{E}(X_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Posons $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$. Alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale relativement à la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, ..., X_n)$.

   En effet,

   La variable aléatoire S_n est bien intégrable et $\mathcal{F}_n$-mesurable.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(X_{n+1} + S_n|\mathcal{F}_n)\\ &= \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(S_n|\mathcal{F}_n)\\ &= \mathbb{E}(X_{n+1}) + S_n\\ &= S_n\end{aligned}$$

   Remarquons qu'on a l'égalité $\sigma(X_1, X_2, ..., X_n) = \sigma(S_1, S_2, ..., S_n)$ car les X_i s'expriment en fonction des S_i et réciproquement. La suite (S_n) est une martingale aussi bien par rapport aux (X_i) qu'aux (S_i).

2. Soit M une variable aléatoire intégrable et $(\mathcal{F}_n)$ une filtration. La suite

$$M_n = \mathbb{E}(M|\mathcal{F}_n)$$

   est une martingale. En effet,

$$\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(M|\mathcal{F}_{n+1})|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}(M|\mathcal{F}_n) = M_n.$$

Propriété 3.2.2. *Si $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale (resp ; surmartingale, sous-martingale) par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, alors, pour tout $n > 0$, on a : $\mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[M_o]$ (resp $\leq$; $\geq$).*

En effet, il suffit de calculer l'éspérances des deux membres dans le conditionnement de la définition ◄

Remarque 3.2.1. Il est évident que $(M_n)_{n\geq 0}$ est une surmartingale si et seulement si $(-M_n)_{n\geq 0}$ est une sous-martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Par ailleurs, $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale si et seulement si $(M_n)_{n\geq 0}$ est à la fois une sur-martingale et une sous-martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)$.

Donnons des méthodes de construction de sous-martingales à partir d'une martingale ou d'autres sous-martingales.

Lemme 3.2.3. *Supposons données :*
(a) une martingale (ou une sous-martingale) $(M_n)_{n\geq 0}$ par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$;
(b) une fonction convexe φ telle que, pour tout $n > 0$, l'espérance mathématique $\mathbb{E}[\varphi(M_n)]$ est finie.
Alors $(\varphi(M_n))_n$ est une sous-martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

En effet, Utiliser l'énagalité se Jensen ◄

En particulier ;

Si $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$; alors $(|M_n|)_{n\geq 0}$ et $(M_n^2)_{n\geq 0}$ sont des sous-martingales pour $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

3.3 Martingale et temps d'arrêt (Cours 6)

On se donne deux processus $X = (X_n)_n$ et définis sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$. On suppose que X est adapté à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. On se donne, un temps d'arrêt T du $(\mathcal{F})_{n\geq 0}$.
On définit un nouveau processus, noté $X^T = ((X^T)_{n\geq 0}); (n > 0)$, en posant, pour tout $n > 0$,

$$X^T(w) = X_{T\wedge n} = \begin{cases} X_n(w) & si \quad n \leq T(w) \\ X_T(w) & si \quad n \geq T(w) \end{cases}$$

On peut encore écrire :

$$X_{T\wedge n} = X_0 \mathbf{1}_{(T=0)} + X_1 \mathbf{1}_{(T=1)} + ... + X_n \mathbf{1}_{(T=n)} + X_n \mathbf{1}_{(T\geq n)}$$

Comme chacun des événements $\{T = 0\}, \{T = 1\}, ..., \{T = n\}, \{T \geq n\}$ appartient à $\mathcal{F}_n$, leurs indicatrices sont des fonctions mesurables de $\mathcal{F}_n$. Comme, par hypothèse, $X_o, X_1, ..., X_n$ sont aussi de telles fonctions mesurables, le processus X^T est aussi adapté à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. On l'appelle le **processus obtenu en arrêtant** X à l'instant (aléatoire) T. Donnons une autre expression pour $X_{T\wedge n}$, qui est mieux adaptée pour les calculs ultérieurs.

Lemme 3.3.1. *On a évidement la représentation :*

$$X_{T\wedge n} = X_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{1}_{(k<T)}(X_{k+1} - X_k)$$

Démonstration : Exercice.

Proposition 3.3.2. *Soient $M = (M_n)_{(n>0)}$ une martingale (resp. une sous- martingale, resp. une sur-martingale) par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{(n>0)}$ et T un temps d'arrêt du $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Alors le processus arrêté $M^T = (M_{T\wedge n})_{n>0}$ est encore une martingale (resp. une sous-martingale, resp. une Sur-martingale) par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.*

En effet,
Suivant le lemme précédent on a : $M_{T\wedge n+1} - M_{T\wedge n} = \mathbf{1}_{(n<T)}(M_{n+1} - M_n)$, avec $\mathbf{1}_{(n<T)}$ est dans $\mathcal{F}_n$, et M est une $\mathcal{F}_n$-martingale. On trouve $\mathbb{E}(M_{T\wedge n+1} - M_{T\wedge n}|\mathcal{F}_n) = 0$. ◀

3.3.1 Théorème d'arrêt

Théorème 3.3.3. ***Théorème d'arrêt.*** *Soient $M = (M_n)_{(n>0)}$ une martingale (resp. une sous- martingale, resp. une sur-martingale) par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{(n>0)}$ et T un temps d'arrêt borné adapté à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Alors*

$$\mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_0], \qquad (resp.\ \mathbb{E}[M_T] \geq \mathbb{E}[M_0], \qquad resp.\ \mathbb{E}[M_T] \leq \mathbb{E}(M_0).$$

Démonstration : Comme T est borné, il existe un entier $K \geq 1$ tel que $0 \leq T \leq K$, d'où $M_{T\wedge K} = M_T$ on peut donc écrire :

$$M_T = M_{T\wedge K} = M_0 + \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{1}_{(k<T)}(M_{k+1} - M_k)$$

Or, pour chaque $k = 0, 1, ..., K - 1$, on a :

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{(k<T)}(M_{k+1} - M_k)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbf{1}_{(k<T)}(M_{k+1} - M_k)|\mathcal{F}_k]]$$

$$= \mathbb{E}[\mathbf{1}_{(k<T)}\mathbb{E}[(M_{k+1} - M_k)|\mathcal{F}_k]] = 0; (resp. \geq 0, resp. \leq 0),$$

car M est une martingale, (resp. une sous-martingale, resp. une sur-martingale).
D'où $\mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(M_0), (resp. \geq 0, resp. \leq 0)$. ◀

Théorème 3.3.4. *Si* $(M_n)_{n\geq 0}$ *est une martingale pour* $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$*, Soient* S *et* T *deux temps d'arrêt bornés de la filtration* $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ *tels que* $S \leq T \leq m$*. Alors*

$$\mathbb{E}(X_T|F_S) = X_S.$$

Ici encore le théorème est vrai pour les sous-martingales et les surmartingales si on prend soin de remplacer l'énégalité de la conclusion par l'inégalité appropiée.

Démonstration : La variable aléatoire M_S est $\mathcal{F}_S$-mesurable. Il suffit donc de démontrer $\mathbb{E}(\mathbf{1}_A M_S) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A M_T)$ pour tout A dans $\mathcal{F}_S$. Comme $S \leq T \leq m$, on a donc pour tout évènement A dans $\mathcal{F}_S$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbf{1}_A M_S) &= \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_A \sum_{k=0}^{m} \mathbf{1}_{(S=k)} M_k\right) = \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_A \sum_{k=0}^{m} \mathbf{1}_{A\cap(S=k)} M_k\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_A \sum_{k=0}^{m} \mathbf{1}_{A\cap(S=k)} \mathbb{E}(M_m|\mathcal{F}_k)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{m} \mathbf{1}_{A\cap(S=k)} M_m\right) \quad Car \quad A\cap(S=k) \in \mathcal{F}_k \\
&= \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_A \sum_{k=0}^{m} \mathbf{1}_{(S=k)} M_m\right) \\
&= \mathbb{E}(\mathbf{1}_A M_m).
\end{aligned}$$

Par un calcul analogue, $\mathbb{E}(\mathbf{1}_A M_T) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A M_m)$, d'où le résultat. ◀

3.3.2 Inégalités maximales

Théorème 3.3.5. *Soit* $(M_n)_{(n>0)}$ *une sous-martingale positive. Alors*

$$\forall \lambda > 0; \quad \lambda \mathbb{P}(\max_{0\leq k\leq n} M_k > \lambda) \leq \mathbb{E}(M_n).$$

Démonstration : Posons $A_n = (\max_{0\leq k\leq n} M_k > \lambda) = \bigcup_{0\leq k\leq n}(M_k > \lambda)$ et introduisons le temps d'arrêt T, qui vaut $\min(k : 0 < k < n, M_k > \lambda)$ sur A_n et n sur A_n^c. C'est bien un temps d'arrêt du processus (M_n) ; de plus, il est borné (par n), de sorte qu'on a : $M_{T\wedge n} = M_T$

Appliquons le théorème d'arrêt pour les temps d'arrêt bornés à la sous-martingale $(M_n)(n > 0)$ et au temps d'arrêt $T \wedge n = T$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_n] \geq \mathbb{E}[M_{T\wedge n}] &= \mathbb{E}[M_T] \\
&= \mathbb{E}[M_T \mathbf{1}_{A_n}] + \mathbb{E}[M_T \mathbf{1}_{A_n^c}] = \mathbb{E}[M_T \mathbf{1}_{A_n}] + \mathbb{E}[M_n \mathbf{1}_{A_n^c}] \\
&\geq \mathbb{E}[M_T \mathbf{1}_{A_n}] \quad \text{[puisque la sous-martingale } (M_n) \text{ est positive]} \\
&\geq \lambda \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_n}] = \lambda \mathbb{P}(A_n). \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

Corollaire 3.3.6. *Soit* $(M_n)_{(n>0)}$ *une martingale positive. Alors*

$$\forall \lambda > 0; \quad \lambda \mathbb{P}(\max_{0\leq k\leq n} |M_k| > \lambda) \leq \mathbb{E}(|M_n|).$$

Théorème 3.3.7. *Soit* $(M_n)_{(n>0)}$ *une sous-martingale de signe quelconque. Alors*

$$\forall \lambda > 0; \quad \lambda \mathbb{P}(\max_{0\leq k\leq n} M_k > \lambda) \leq \mathbb{E}[M_n \mathbf{1}_{A_n}] \leq \mathbb{E}(M_n^+) \leq \mathbb{E}(|M_n|).$$

Démonstration : Il suffit de démontrer la première inégalité, les deux autres étant triviales. Le théorème d'arrêt permet d'écrire

$$\mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[M_n \mathbf{1}_{A_n}] + \mathbb{E}[M_n \mathbf{1}_{A_n^c}] \geq \mathbb{E}[M_T \mathbf{1}_{A_n}] + \mathbb{E}[M_n \mathbf{1}_{A_n^c}].$$

d'où

$$\mathbb{E}[M_n \mathbf{1}_{A_n}] \geq \mathbb{E}[M_T \mathbf{1}_{A_n}] > \lambda \mathbb{P}(A_n). \blacktriangleleft$$

Théorème 3.3.8. *Soit $(M_n)_{(n>0)}$ une sur-martingale positive. Alors*

$$\forall \lambda > 0; \quad \lambda \mathbb{P}(\max_{0\leq k\leq n} M_k > \lambda) \leq \mathbb{E}(M_0).$$

Démonstration : Posons $A_n = (\max_{0\leq k\leq n} M_k > \lambda)$ et introduisons le temps d'arrêt T, qui vaut $\min(k : 0 < k < n, M_k > \lambda)\mathbf{1}_{A_n} + n\mathbf{1}_{A_n^c}$ sur A_n et n sur A_n^c. C'est bien un temps d'arrêt du processus (M_n) ; de plus, il est borné (par n), de sorte qu'on a : $M_{T\wedge n} = M_T$

Appliquons le théorème d'arrêt pour les temps d'arrêt bornés à la sur-martingale $(M_n)(n > 0)$ et au temps d'arrêt $T \wedge n = T$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_0] \geq \mathbb{E}[M_{T\wedge n}] \quad &= \mathbb{E}[M_T] \\ &= \mathbb{E}[M_T\mathbf{1}_{A_n}] + \mathbb{E}[M_T\mathbf{1}_{A_n^c}] = \mathbb{E}[M_T\mathbf{1}_{A_n}] + \mathbb{E}[M_n\mathbf{1}_{A_n^c}] \\ &\geq \mathbb{E}[M_T\mathbf{1}_{A_n}] \quad \text{[puisque la sous-martingale } (M_n) \text{ est positive]} \\ &\geq \lambda\mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_n}] = \lambda\mathbb{P}(A_n). \blacktriangleleft \end{aligned}$$

3.4 Décomposition de Doob (Cours 7)

Définition 3.4.1. (Processus prévisible). Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ une filtration. Une suite $(H_n)_{n\geq 0}$ est un processus prévisible si H_n est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable pour tout $n \geq 1$.

Théorème 3.4.1. *Soit $S = (S_n)_{n\geq 0}$ une $(\mathcal{F}_n)_n$-sous-martingale. Alors il existe une martingale $M = (M_n)_{n\geq 0}$ avec $M_0 = 0$ et un processus $A = (A_n)_{n\geq 0}$ prévisible et croissant avec $A_0 = 0$, tels que*

$$S_n = M_n + A_n$$

De plus, cette décomposition, appelée Décomposition de Doob, est unique p.s.

Démonstration : On pose

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(S_k - S_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1})$$

S étant une sous-martingale, on a $\mathbb{E}(S_k - S_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1}) \geq 0$ p.s. . donc $A_{k+1} \geq A_k$ p.s. , tandis que par construction A_k est $\mathcal{F}_{k-1}$-mesurable. Par ailleurs, on a

$$\mathbb{E}(S_n|\mathcal{F}_{n-1}) - S_{n-1} = \mathbb{E}(S_n - S_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}) = A_n - A_{n-1}$$

et donc

$$\mathbb{E}(S_n|\mathcal{F}_{n-1}) - A_n = S_{n-1} - A_{n-1}$$

Comme A_n est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable.

$$\mathbb{E}(S_n - A_n|\mathcal{F}_{n-1}) = S_{n-1} - A_{n-1}$$

Si on pose $M_n = S_n - A_n$, il suit que $M = (M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale avec $M_0 = 0$, et on a la décomposition souhaitée.

L'unicité : Supposons que

$$S_n = M_n + A_n = L_n + C_n$$

soient deux décompositions. En soustrayant l'une de l'autre, on arrive à

$$L_n - M_n = A_n - C_n$$

Comme A_n et C_n sont $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurables, il en est de même de $L_n - M_n$, et donc

$$L_n - M_n = \mathbb{E}(L_n - M_n|\mathcal{F}_{n-1}) = L_{n-1} - M_{n-1} = A_{n-1} - C_{n-1} \ p.s.$$

Par une récurrence évidente, on obtient alors que $L_n - M_n = L_0 - M_0 = 0$ p.s. (car $L_0 = M_0 = 0$).
Par suite, $L_n = M_n$ p.s. , donc aussi $A_n = C_n$ p.s. , et l'unicité est démontrée.◀

3.5 Convergence

Dans le théorème de convergence des martingales, on donne une condition suffisante pour qu'une martingale converge vers une variable aléatoire, qui soit intégrable. La technique de démonstration du théorème fait appel à un argument de comptage. Il s'agit de compter le nombre de fois qu'une Trajectoire traverse une bande horizontale et de majorer ce nombre.

3.5.1 Convergence presque sure

Théorème 3.5.1. ***Soit*** $(M_n)_{(n\geq 0)}$ ***une martingale bornée dans*** L^1***, c'est-à-dire telle que, pour une certaine constante*** $c \geq 0$***, on ait :***

$$\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}[|M_n|] \leq c. \tag{3.1}$$

Alors la suite $(M_n)_{(n\geq 0)}$ ***converge presque sûrement vers une variable aléatoire intégrable*** M_∞***.***

Démonstration. La démonstration utilise un lemme dû à Doob sur la majoration de la moyenne des traversées d'une bande horizontale par la suite (M_n). Pour définir cette notion, nous supposons donnés deux nombres a, b tels que $a < b$ et introduisons la suite $S_1 < T_1 < S_2 < T_2 < ...$ des temps d'arrêt suivante :

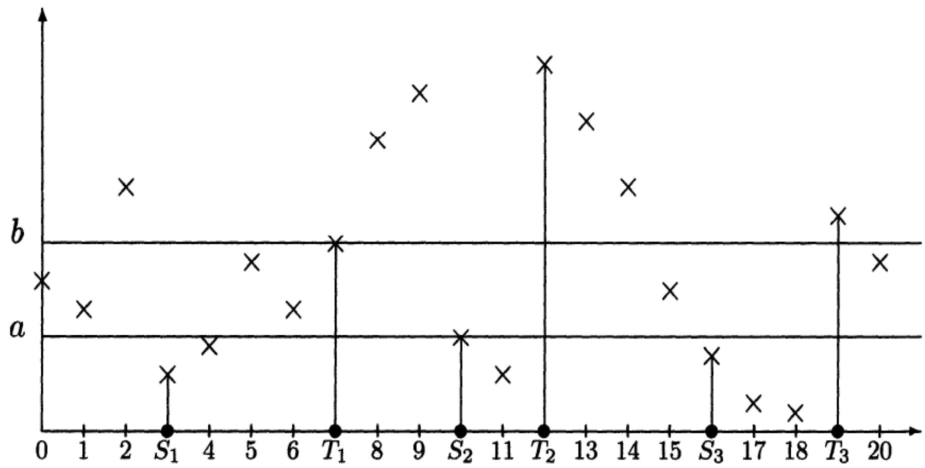
$$S_1 = \inf\{n \geq 0 : M_n \leq a\}, \quad T_1 = \inf\{n \geq S_1 : M_n \geq b\},$$

$$S_2 = \inf\{n \geq T_1 : M_n \leq a\}, \quad T_2 = \inf\{n \geq S_2 : M_n \geq b\},$$

et ainsi de suite. Si l'une des bornes inférieures n'existe pas, on donne la valeur $+\infty$ au temps d'arrêt correspondant, ainsi qu'aux suivants. Dans la figure ci-dessous ; on a représenté une trajectoire $n \longmapsto M_n$ par des croix "$\times$". Les temps d'arrêt $S_1, T_1, S_2, ...$ sont représentés par des gros points "$\bullet$". La variable aléatoire

$$M = \sum_{k\geq 1} 1_{(T_k<\infty)} \tag{3.2}$$

est le nombre total de traversées de $[a, b]$, en montant, effectuées par la trajectoire $n \longmapsto M_n$.



Lemme 3.5.2. ***(Inégalité de Dubins). Pour tout*** $k \geq 1$ ***et tout*** $n \geq 1$***, on a :***

$$(b - a)\mathbb{P}(T_k < n) \leq \mathbb{E}[(a - M_n)1_{(S_k\leq n<T_k)}] \tag{3.3}$$

Démonstration. L'entier n étant fixé, posons

$$D_k = M_{T_k\wedge n} - M_{S_k\wedge n}$$

D'après le théorème d'arrêt appliqué aux temps d'arrêt bornés $T_k \wedge n$ et $S_k \wedge n$, on voit que $\mathbb{E}[D_k] = \mathbb{E}[M_1] - \mathbb{E}[M_1] = 0$. D'autre part, on a les implications

$$n < S_k \Longrightarrow D_k = 0; \quad T_k \leq n \Longrightarrow D_k \geq b - a;$$

$$S_k \leq n < T_k \Longrightarrow D_k = M_n - M_{S_k} \Longrightarrow D_k \geq M_n - a;$$

donc

$$\begin{cases} (b-a)1_{(T_k \leq n)} \leq D_k \\ (M_n - a)1_{(S_k \leq n < T_k)} \leq D_k \end{cases}$$

qu'on peut résumer en écrivant :

$$(b-a)1_{(T_k \leq n)} + (M_n - a)1_{(S_k \leq n < T_k)} \leq 2D_k$$

En prenant l'espérance mathématique des deux membres, on obtient :

$$(b-a)\mathbb{P}(T_k \leq n) + \mathbb{E}[(M_n - a)1_{(S_k \leq n < T_k)}] \leq 2\mathbb{E}(D_k) = 0. \quad \blacktriangleleft$$

Lemme 3.5.3. ***(Lemme de Doob). Conservant les notations (3.1) et (3.2), on a la majoration :***

$$\mathbb{E}(M) \leq \frac{|a| + c}{b - a}. \tag{3.4}$$

Démonstration. L'inégalité de Dubins (3.3) permet d'écrire

$$(b-a)\sum_{k\geq 1}\mathbb{P}(T_k < n) \leq \sum_{k\geq 1}\mathbb{E}[(a - M_n)1_{(S_k \leq n < T_k)}]$$

Or, les évènements $(S_k \leq n < T_k)$, $(k \geq 1)$ sont disjoints deux à deux ; notons A leur réunion. Comme $(S_k \leq n < T_k) = \emptyset$ dès que $k \geq n$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geq 1}\mathbb{E}[(a - M_n)1_{(S_k \leq n < T_k)}] &= \sum_{1\leq k\leq n}\mathbb{E}[(a - M_n)1_{(S_k \leq n < T_k)}] \\
&= \mathbb{E}[(a - M_n)\sum_{1\leq k\leq n}1_{(S_k \leq n < T_k)}] \\
&= \mathbb{E}[(a - M_n)\sum_{k\geq 1}1_{(S_k \leq n < T_k)}] \\
&= \mathbb{E}[(a - M_n)1_A;
\end{aligned}$$

d'où

$$(b-a)\sum_{k\geq 1}\mathbb{P}(T_k < n) \leq \mathbb{E}[(a - M_n)1_A].$$

Maintenant, on a les majorations :

$$\mathbb{E}[(a - M_n)1_A \leq \mathbb{E}[(a - M_n)^+ 1_A] \leq \mathbb{E}[(a - M_n)^+ \leq |a| + c,$$

d'où pour tout n la majoration $\displaystyle\sum_{k\geq 1}\mathbb{P}(T_k < n) \leq \frac{|a| + c}{b - a} = \lambda.$

D'autre part, $\mathbb{E}[M] = \displaystyle\sum_{k\geq 1}\mathbb{P}(T_k < +\infty)$. Si l'on avait $\mathbb{E}[M] > \lambda$, on airait aussi $\displaystyle\sum_{1\leq k<K}\mathbb{P}(T_k < +\infty) > \lambda$ pour certain $K \geq 1$.

Comme, pour tout $k \geq 1$, on a $\mathbb{P}(T_k < +\infty) = \lim_n \mathbb{P}(T_k < n)$, on aurait $\displaystyle\sum_{1\leq k<K}\mathbb{P}(T_k < n) > \lambda$ pour n assez grand, a fortiori $\displaystyle\sum_{k\geq 1}\mathbb{P}(T_k < n) > \lambda$, ce qui contredit la majoration prouvée pout tout n. $\blacktriangleleft$

Lemme 3.5.4. ***La suite*** $(M_n)_{(n\geq 0)}$ ***est presque sûrement convergente.***

Démonstration. Pour indiquer que la variable aléatoire M dépend du couple (a,b), on pose : $M = M_{a,b}$. C'est une variable aléatoire positive et l'inégalité (3.4) montre qu'elle est intégrable. Elle est donc presque sûrement finie, ou encore l'événement $(M_{a,b} = +\infty)$ est négligeable. La réunion dénombrable

$$\bigcup_{a,b\in\mathbb{Q},a<b} (M_{a,b} = +\infty)$$

est aussi négligeable. Or, l'événement $(\liminf_n M_n < a < b < \limsup_n M_n)$ entraîne qu'il y a une infinité d'indices n tels que $(M_n < a)$ se produise et qu'il y a aussi une infinité d'indices n tels que $(M_n > b)$ se produise également ; ce qui implique alors que l'événement $(M_{a,b} = +\infty)$ se réalise. On a donc

$$(\liminf_n M_n < a < b < \limsup_n M_n) \subset (M_{a,b} = +\infty).$$

D'où

$$\begin{aligned}(\liminf_n M_n < \limsup_n M_n) &= \bigcup_{a,b\in\mathbb{Q},a<b} \left(\liminf_n M_n < a < b < \limsup_n M_n\right) \\ &\subset \bigcup_{a,b\in\mathbb{Q},a<b} (M_{a,b} = +\infty)\,.\end{aligned}$$

L'évènement $(\liminf_n M_n < \limsup_n M_n)$ est donc négligeable, ce qui signifie que la suite $(M_n)_{(n\geq 0)}$ converge presque sûrement. ◄

Il reste à démontrer que la suite $(M_n)_{(n\geq 0)}$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire intégrable. Cette propriété résulte du lemme de Fatou.

En effet, d'après le lemme précédent, la suite $(M_n)_n$ converge presque sûrement, disons, vers une variable aléatoire M_∞, d'où $|M_n| \longrightarrow |M_\infty|$ p.s. Ensuite, pour tout $n \geq 0$, on a $\mathbb{E}[|M_n|] \leq c$. Les deux conditions du lemme de Fatou sont remplies et on peut conclure que l'on a aussi $\mathbb{E}[|M_\infty|] \leq c$.◄

3.5.2 Martingale uniformement intégrable

Définition 3.5.1. Une suite de variables aléatoires $(X_n)_{(n\geq 0)}$ est uniformément intégrable, si

$$\lim_{c\longrightarrow 0} \sup_n \mathbb{E}[1_{(|X_n|>c)}|X_n|] = 0.$$

s'écrit encore

$$\lim_{c\longrightarrow 0} \sup_n \int_{(|X_n|>c)} |X_n| d\mathbb{P} = 0.$$

Donnons, d'abord, quelques conditions suffisantes pour qu'une suite de variables aléatoires soit uniformément intégrable.

Proposition 3.5.5. *Soient* $(X_n)_{(n\geq 0)}$ *une suite de variables aléatoires et* Z *une variable aléatoire positive, intégrable, telles que pour tout* $n \geq 0$ *on ait* $|X_n| \leq Z$*. Alors la suite* $(X_n)_{(n\geq 0)}$ *est uniformément intégrable.*

Démonstration. Exposé.

Théorème 3.5.6. ***(Théorème de convergence pour les martingales uniformément intégrables)****. Soit* $(M_n)_{(n\geq 0)}$ *une martingale uniformément intégrable. Alors il existe une variable aléatoire intégrable* X_∞ *telle que*

1. $M_n \longrightarrow M_\infty \quad p.s.$
2. $M_n \longrightarrow M_\infty$ *(en moyenne d'ordre 1), i.e.* $\mathbb{E}[|M_n - M_\infty|] \longrightarrow 0,$

En outre, pour tout $n \geq 0$*, on a :* $\mathbb{E}[M_\infty] = \mathbb{E}[M_n]$.

Démonstration. Voir [1].

TD : 1 (Espérance Conditionnelle)

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Calculer $\mathbb{E}[X^2/X]$ et $\mathbb{E}[X/X^2]$.

Exercice 2. Soient X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes. On suppose X et Y de carré intégrable et Z intégrable. Calculer $\mathbb{E}[XY + Z/Y]$.

Exercice 3. Soient X et Y deux variables aléatoires qui admettent un moment d'ordre 2. On suppose que $\mathbb{E}[X/Y] = Y$ et $\mathbb{E}[Y/X] = X$. Montrer que $X = Y$.

Exercice 4. Variance conditionnelle.
Pour toute variable aléatoire $X \in L^2(\Omega, A, P)$ et toute sous-tribu $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$, on note $Var(X)$ la variance de X et $Var(X/\mathcal{B})$ la variance conditionnelle de X sachant $\mathcal{B}$ définie par :

$$Var(X/\mathcal{B}) = \mathbb{E}\left[(X - E(X/\mathcal{B}))^2/\mathcal{B}\right]$$

1. Montrer que $Var(X/\mathcal{B}) = \mathbb{E}(X^2/\mathcal{B}) - (\mathbb{E}(X/\mathcal{B}))\,2$. En particulier $[\mathbb{E}(X/\mathcal{B})]^2 \leq \mathbb{E}(X^2/\mathcal{B})$.
2. Montrer que $Var(X) = \mathbb{E}(Var(X/\mathcal{B})) + Var(\mathbb{E}(X/\mathcal{B}))$. En particulier $Var(\mathbb{E}(X/\mathcal{B})) \leq Var(X)$.
3. Que peut-on dire de X si on a égalité dans l'inégalité précédente ?
4. Soient X et Y deux variables aléatoires de carré intégrable telles que $\mathbb{E}(X/\mathcal{B}) = Y$ et $\mathbb{E}(X^2/\mathcal{B}) = Y^2$. Montrer que X et Y sont presque sûrement égales.
5. Soit A un élément de $\mathcal{A}$. On suppose que $\mathbb{E}(1_A/\mathcal{B})$ est une fonction indicatrice. Que peut-on dire de A ?

Exercice 5. Soient X et Y deux v.a. indépendantes, Y a une loi $\mathcal{N}(0;1)$.

1. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

   $e^{\frac{X^2}{2}}$ est intégrable, e^{XY} est intégrable, $e^{|XY|}$ est intégrable.
2. Montrer que lorsque $e^{\frac{X^2}{2}}$ est intégrable, alors $\mathbb{E}[e^{XY}/X] \geq 1$ p.s.
3. Calculer $\mathbb{E}[e^{XY}/X]$ lorsque $e^{\frac{X^2}{2}}$ est intégrable.

Exercice 6. Soit S une v.a. ayant une loi exponentielle de paramètre 1. On fixe un nombre $t > 0$ et on définit les deux v.a. X et Y :

$$X = sup(S,t); \;\; Y = inf(S,t)$$

Calculer $\mathbb{E}(S/X)$ et $\mathbb{E}(S/Y)$.

Exercice 7. Soit $p \in]0,1[$ un réel. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs entières telles que pour tous $k, l \in \mathbb{N}$ on ait

$$\mathbb{P}(X = k, Y = l) = (1-p)\left(\frac{p}{e}\right)^k \frac{k^l}{l!}$$

Calculer $\mathbb{E}[Y/X]$.

Exercice 8. Soit (X,Y,Z) un vecteur aléatoire de densité $f_{(X,Y,Z)}(x,y,z) = ce^{-z-2x}1_{\{0 \leq x \leq y \leq z\}}$ où c est une constante réelle.

(i) Déterminer c.

(ii) Calculer $\mathbb{E}[X/Y,Z]$, $\mathbb{E}[Y/X,Z]$, $\mathbb{E}[X/Y]$ et $\mathbb{E}[Y/X]$.

Lebesgue.

Exercice 9. Soient X et Y deux v.a. Montrer qu'elles sont indépendantes si et seulement si pour toute fonction $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ borélienne bornée, on a :

$$\mathbb{E}[g(Y)/X]=\mathbb{E}[g(Y)]p.s.$$

Soit (X,Y) un vecteur aléatoire dont la densité u par rapport à la mesure de Lebesgue est

$$u(x,y)=e^{-y}1_{0<x<y}.$$

Calculer la loi conditionnelle de Y sachant $X=x$. En déduire que X et $Y-X$ sont indépendantes.

TD : 2 (Temps d'arrêt & Martingales)

Exercice 10. *On considère une suite $(X_n)_{n\geq 0}$ de v.a. définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $[0,1]$, indépendantes et de même loi uniforme sur $[0,1]$. On pose, pour $n \geq 0$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_k, k \leq n)$. On introduit la v.a.*

$$T = \inf\{n \geq 1;\ X_n > X_0\}$$

i) Montrer que T est un temps d'arrêt de la filtration $(\mathcal{F}_n)_n$.

ii) Déterminer la loi de T. Calculer son espérance.

Exercice 11. *Soit T un temps d'arrêt par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_n$. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq 0$, on a*

$$\mathbb{P}(T < N + n/\mathcal{F}_n) > \varepsilon,\ p.s.$$

Montrer que T est fini presque sûrement et que $\mathbb{E}(T) < \infty$.

Exercice 12. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré,* T et S *deux temps d'arrêt,* $\mathcal{F}_{\mathrm{T}}$ et F_{S} *les tribus respectives des événements antérieurs à* T et S.

Montrer que

(i) $\mathrm{S}\wedge\mathrm{T}, \mathrm{S}\vee\mathrm{T}, \mathrm{S}+\mathrm{T}$ *sont des temps d'arrêt.*

(ii) Si T *est un temps d'arrêt constant* ($\mathrm{T} = pavecp \in \mathbb{N}$), alors $\mathcal{F}_{\mathrm{T}} = \mathcal{F}_p$,

(iii) Si $\mathrm{S} \leq \mathrm{T}, \mathcal{F}_{\mathrm{S}} \subseteq \mathcal{F}_{\mathrm{T}}$,

(iv) $\mathcal{F}_{\mathrm{S}\vee\mathrm{T}} = \mathrm{F}_{\mathrm{S}} \cap \mathcal{F}_{\mathrm{T}}$,

(v) $\{\mathrm{S} < \mathrm{T}\} \in \mathcal{F}_{\mathrm{S}} \cap \mathcal{F}_{\mathrm{T}}, \{\mathrm{S} = \mathrm{T}\} \in \mathcal{F}_{\mathrm{S}} \cap \mathcal{F}_{\mathrm{T}}$.

Exercice 13. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré et X une variable aléatoire intégrable, montrer que $(M_n = \mathbb{E}(X/\mathcal{F}_n))_n$ est une martingale.*

Exercice 14. *Soit $(Y_n)_n$ une suite des variables aléatoires i.i.d., et soit $X_n = \prod_{i=1}^n Y_i$. sous quelle condition la suite $(X_n)_n$ est-elle une martingale ?Une sous martingale ?une surmatingale ?*

Exercice 15. *Soit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$ des variables aléatoires indépendantes d'espérance nulle et de variance $Var(\varepsilon_i) = \sigma_i^2$. Posons*

$$S_n = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \quad \mathrm{T}_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$$

Montrer que $S_n^2 - \mathrm{T}_n^2$ est une martingale par rapport a la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$.

Exercice 16. *Soit $(\mathrm{M}_n)_{n\geq 0}$ une martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, telle que $\mathbb{E}(\mathrm{M}_n^2) < +\infty$ pour tout $n \geq 0$. Soit*

$$A_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}([\mathrm{M}_i - \mathrm{M}_{i-1}]^2|\mathcal{F}_{i-1})$$

Montrer que $\mathrm{M}_n^2 - A_n$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ martingale.

Exercice 17. *Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. avec $\mathbb{P}(Y_i = 1) = p = 1 - P(Y_i = -1)$. Soit $\mathrm{S}_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ (et $\mathrm{S}_0 = 0$). Montrer que les processus $(W_n)_{n\geq 0}$ et $(\mathrm{M}_n)_{n\geq 0}$ définit par*

$$\mathrm{W}_n = \mathrm{S}_n - (2p-1)n, \qquad \mathrm{W}_0 = 0$$

et

$$\mathrm{M}_n = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\mathrm{S}_n}, \qquad \mathrm{M}_0 = 1$$

sont des martingales par rapport à la filtration naturelle des Y_n *définit par* $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$ *pour* $n \geq 1$ *et* $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

Exercice 18. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé filtré, et* $X_n = \sum_{i=1}^n 1_{B_n}$ *avec* $B_n \in \mathcal{F}_n \ \forall n$.

1. *Montrer que* $(X_n)_n$ *est une sous martingale.*
2. *Donner la décomposition de Doob de* X_n.
3. *Particulariser au cas* $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n)$.

Exercice 19. *Soit* $(X_i)_{i\geq 1}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes equidistribuées telles que* $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$. *Pour* $n \geq 0$, *on note* $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n)$ *et* $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.*On pose* $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

1. *Montrer que* $(S_n)_n$, $(S_n^2 - n)_n$ *et* $(S_n^3 - 3nS_n)_n$ *sont des martingales.*
2. *Devinez un polynôme* $\mathrm{P}(x, y)$ *de degré* 4 *en* x *et de degré* 2 *en* y *tel que* $(\mathrm{P}(S_n, n))_n$ *soit une martingale.*
3. *Montrer que si* P *est un polynôme à deux variables alors* $(\mathrm{P}(S_n, n))_n$ *est une martingale si et seulement si pour tout* $s, n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\mathrm{P}(s+1, n+1) + \mathrm{P}(s-1, n+1) = 2\mathrm{P}(s, n)$$

4. *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Trouver* $\xi \in \mathbb{R}$ *tel que* $(e^{\lambda S_n - \xi n})_n$ *soit une martingale.*

Exercice 20. *Soit* ξ *une variable aléatoire géométrique de paramètre* $p \in]0, 1[$. *Soit, pour tout* $n \geq 0, F_n$ *la tribu engendrée par* $\xi \wedge (n+1)$.

1. *Montrer que :*

$$F_n = \sigma\{\{\xi = 0\}, \{\xi = 1\}, \ldots, \{\xi = n\}, \{\xi \geq n+1\}\}.$$

2. *Montrer que :*

$$X_n = 1_{\{\xi \leq n\}} - p(\xi \wedge n), n \geq 0$$

est une martingale.

Bibliographie

[1] V. Girardin, N.Limnios. *Probabilités - Processus stochastiques et applications . Master - Ecoles d'ingénieurs - Agrégation de mathématiques. Vuibert,* 2014.

[2] D. Foata and A. Fuchs. *Processus stochastiques. Processus de Poisson, chaînes de Markov et martingales. Sciences Sup,* 2^e *cycle/Master, Agrégation, écoles d'Ingénieurs. Dunod,* 2006.

[3] J. Neveu. *Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités.* Masson, Paris, 1970.

[4] J. Neveu. *Martingales à temps discret. Masson,* 1972.

[5] J-F Le Gall. *Intégration, Probabilités et Processus Aléatoires.* FIMFA, 2006.

[6] J.-Y. Ouvrard. *Probabilités*, volume 2. *Cassini,* 2000.

[7] P. Baldi, L. Mazliak, and P. Priouret. *Martingales et chaînes de Markov avec exercices corrigés. Hermann, seconde edition*, 2000.

[8] Charles SUQUET. Martingales. *Agrégation de Mathématiques,* 2009-2010.

[9] Philippe Barbe et Michel Ledoux. *Probabilités.* Belin, 1998.