**Université Mohammed kheider Biskra**
**Département de Mathématiques**
**$1^{ième}$ année Master: 2021 - 2022**
**Module : Théorie des opérateurs**

# Série 2 avec correction

**Exercice 1** *Soit* $E = l^2$, $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ *une suite bornée dans* $\mathbb{C}$ *et* $M = \sup_n |\lambda_n|$.
*Soit* $T : l^2 \to l^2$ *définie par :*

$$Tx = y, \text{ avec } y = (\lambda_n x_n)_{n\geq 1} \text{ si } x = (x_n)_{n\geq 1} \in E.$$

1. *Montrer que* $T$ *est linéaire, continue, et calculer sa norme*
2. *Montrer que si l'ensemble* $\{|\lambda_n|, \ n \geq 1\}$ *est minoré par un nombre strictement positif, alors* $T$ *est bijective.*

   *Préciser dans ce cas* $T^{-1}$.

**Solution 2** *si* $x = (x_n)_{n\in N} \in l^2$,*alors*

$$\begin{aligned} \|Tx\|_2^2 &= \sum_{n\geq 1} |\lambda_n x_n|^2 \\ &\leq M^2 \sum_{n\geq 1} |x_n|^2 = M^2 \|x\|_2^2 \end{aligned}$$

*donc*

$$\|Tx\|_2 \leq M \|x\|_2 \text{ et } Tx \in E$$

*Ce qui preuve que* $T$ *est continue et que* $\|T\| \leq M$.

*Soit* $(e_n)_{n\in N}$ *la base hilbertienne canonique. Alors ,* $\forall\ n \in N$, $\|Te_n\|_2 = |\lambda_n| \leq \|T\|$

*D'où* $M \leq \|T\|$ *puis* $\|T\| = M$

*soit* $\alpha = \inf_{n\geq 1} |\lambda_n|$, *on suppose* $\alpha > 0$. *Alors*

$$\|Tx\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n x_n|^2 \geq \alpha^2 \|x\|^2$$

*Donc si* $Tx = 0 \Rightarrow \|Tx\| = 0 \Rightarrow \|x\| = 0$ $(car\ \alpha > 0) \Rightarrow x = 0$

*Il en résulte que* $T$ *est injective*

*Remarquons que* $\forall\ n$, $\lambda_n \neq 0$, *soit* $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ *et* $x = \left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

*Alors, pour tout $n$, on a* $\left|\frac{y_n}{\lambda_n}\right|^2 \leq \frac{1}{\alpha^2}\left|y_n\right|^2$ *,d'où* $x \in E$ *et* $Tx = y$.

*Ce ci montre que* $T$ *est surjectie et donc inversible et* $T^{-1}y = x$ *avec* $y = (y_n) \in E$ *et* $x = \left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right) \in E$

**Exercice 3** *Soit $A$ un opérateur linéaire borné dans un espace de Hilbert (Banach) $H$.*

1. *Montrer que si $A$ est inversible alors les opérateurs $A$ et $A^{-1}$ ont les mêmes vecteurs propres.*

2. *Montrer que si l'opérateur $A^2$ possède un vecteur propre alors, il en est de même pour l'opérateur $A$.*

**Solution 4**

1. *Remarquons tout d'abord que puisque $A$ est inversible alors, $0 \notin \sigma(A)$. On peut donc dans tout ce qui suit supposer que $\lambda \neq 0$. On a,*

$$A\left(v\right) = \lambda v \Longleftrightarrow v = A^{-1}\left(\lambda v\right) = \lambda A^{-1}\left(v\right) \Longleftrightarrow A^{-1}\left(v\right) = \lambda^{-1}v$$

   *Par conséquent, $v$ est un vecteur propre de $A$, associé a la valeur propre $\lambda$ si et seulement si, $v$ est un vecteur propre de $A^{-1}$, associé a la valeur propre $\lambda^{-1}$.*

2. *Suppons maintenant qu'il existe $\lambda \in \Bbbk$ et $0 \neq v \in H$ tels que $A^2(v) = \lambda v$. Alors*

$$0 = \left(A^2 - \lambda I\right)(v) = \left(A + \sqrt{\lambda} I\right)\left(A - \sqrt{\lambda} I\right)(v) = 0$$

   *Deux cas se présentent.*

   ***Premier cas:*** $\left(A - \sqrt{\lambda} I\right)(v) = 0$

   *Dans ce cas, $\sqrt{\lambda}$ est une valeur propre de $A$ associée au vecteur propre $v$.*

   ***Deuxième cas:*** $\left(A - \sqrt{\lambda} I\right)(v) \neq 0$

   *Dans ce cas,$-\sqrt{\lambda}$ est une valeur propre de $A$ associée au vecteur propre $\left(A - \sqrt{\lambda} I\right)(v)$*

**Exercice 5** 1. *Dans $l^2(\mathbb{N};\mathbb{C})$, soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n = 0$. On définit l'opérateur $T$ sur $l^2$ par*

$$T\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

*Déterminer le spectre de $T$*

2. *Dans $L^2[0;1]$, considérnons l'opérateur de mutiplication*

$$T : L^2[0;1] \to L^2[0;1] \text{ définie par } (Tf(x)) = xf(x)$$

- *Déterminer le spectre de $T$*
- *Montrer que $T$ n'a de valeurs propres.*

**Solution 6** *Comme*

$$(T-\lambda I)\,x = (\lambda_k - \lambda)x_k, \text{ alors}$$

$$(T-\lambda I)^{-1}\,y = \left(\frac{y_k}{\lambda_k - \lambda}\right)$$

1. *Il en resulte que $(T-\lambda I)^{-1}$ est un opérateur borné si et seulement si $\lambda$ n'est pas dans l'adhérence de $\{\lambda_k\}$ c'est à dire $\overline{\{\lambda_k\}} = \{\lambda_k\}\cup\{0\}$.*

   *Comme $Te_k = \lambda_k e_k$ pour $e_k$ élément de la base canonique de $l^2$. On en deduit que tous les $\lambda_k$ sont des valeurs propres de $T$.Mais $0$ n'est pas valeur propre car $T$ esi injective ( puisque tous les $\lambda_k \neq 0$) D'où $\sigma(T) = \{\lambda_k\}\cup\{0\}$ et $\sigma_p(T) = \{\lambda_k\}$*

2. *Comme*

$$(T-\lambda I)\,f(t) = (t-\lambda)f(t)$$

*alors*

$$(T-\lambda I)^{-1}\,y(t) = \left(\frac{1}{t-\lambda}\right)y(t) \text{ si } \lambda \notin [0,1]$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t-\lambda}$ est borné, d'où $(T-\lambda I)^{-1}$ est un opérateur borné.

Inversement, si $\lambda \in [0,1]$, alors $\frac{1}{t-\lambda} \notin L^2[0,1]$ en raison de la singularité non intégrable en $t$=$\lambda$.

Supposons que $\lambda$ soit une valeur propre de $T$ avec $f$ un vecteur propre dans $L^2[0,1]$.

Cela signifie que l'identité suivante est verifie

$$(t-\lambda)f(t)=0 \text{ pour } t\in[0,1]$$

Il en resulte que $f=0$ dans $L^2[0,1]$

Par consequent, T n'a pas de valeurs propres, d'où $\sigma(T)=[0,1]$ et $\sigma_p(T)=\emptyset$

**Exercice 7** *1. Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres complexes et $T$ l'application linéaire de $l^2=l^2(\mathbb{N};\mathbb{C})$ dans lui même définie par $T(x)=(\alpha_n x_n)$, pour $x$=$(x_n)\in l^2$,*

*Vérifier que $T$ est continue et calculer son adjoint*

*2. Soit $S$ l'application de $l^2=l^2(\mathbb{N};\mathbb{C})$ dans lui même définie par $S(x)=(0,x_0,x_1,...,)$*

*Vérifier que $S$ est continue et calculer son adjoint*

**Solution 8** *1. On note $\|\alpha\|_\infty=\sup\{|\alpha_n|,n\in\mathbb{N}\}$ ,on a*

$$\|Tx\|^2=\sum_{n\succeq 0}|\alpha_n|^2|x_n|^2\leqslant\|\alpha\|_\infty^2\|x\|_\infty^2,$$

*ce qui prouve que $T$ est continue avec $\|T\|\leq\|\alpha\|_\infty$.*

*Fixons $y\in l^2, T^*(y)$ est l'unique élément de $l^2$ défini par*

$$<Tx,y>=<x,T^*y> \text{ pour tout } x\in l^2$$

*Or*

$$<Tx,y>=\sum_{n\succeq 0}\alpha_n x_n\overline{y_n}=\sum_{n\succeq 0}x_n\overline{\overline{\alpha_n}y_n}$$

*Ce qui prouve*

$$T^*(y)=(\overline{\alpha_n}y_n)_{n\geq 0}$$

*2. Il esr clair que dans ce cas , on a $\|S(x)\|=\|x\|$ (S est une isométrie )*

*Dautre part, si $y\in l^2$ et si on note $S^*(y)=(z_n)$*

*On a*

$$<Sx,y>=<x,S^*y>=\sum_{n\succeq 1}x_{n-1}\overline{y_n}=\sum_{n\succeq 0}x_n\overline{y_{n+1}}$$

*On doit donc avoir $S^*(y)=y_{n+1}$ c'est à dire encore $S^*(y)=(y_1,y_2,...)$*

**Exercice 9** *Soit* $E = C([0,1]$ *muni de la norme* $\|\|_\infty$ *et pour* $f \in E$, *on définit*

$$Tf(x) = \int_0^x K(x,t) f(t)\, dt$$

*où,* $K(,) \in C([0,1] \times [0,1])$. *Soit* $M = \sup_{0 \le x,t \le 1} |K(x,t)|$.

1. *Montrer que* $T \in \mathcal{L}(E)$.
2. *Montrer que pour tout* $n \geq 1$, *on a* $|T^n f(x)| \leq \frac{M^n}{n!} x^n \|f\|_\infty$
   *En déduire que, pour tout* $n \geq 1, \|T\| \leq \frac{M^n}{n!}$
3. *Déterminer le spectre de* $T$.
4. *Calculer l'opérateur adjoint* $T^*$, *dans le cas où*

$$Tf(x) = \int_0^1 K(x,t) f(t)\, dt$$

**Solution 10** *La linéarité de* $T$ *est évidente . Pour* $x, x_0 \in [0,1]$, *on a*

$$\begin{aligned} |Tf(x) - Tf(x_0)| &= \left| \int_0^{x_0} [K(x,t) - K(x_0,t)] f(t)dt + \int_{x_0}^x K(x,t) f(t)dt \right| \\ &\leq \|f\|_\infty \int_0^{x_0} |K(x,t) - K(x_0,t)|\, dt + M \|f\|_\infty |x - x_0| \end{aligned}$$

*D'où* $|Tf(x) - Tf(x_0)| \to 0$ *quand* $x \to x_0$ *et donc* $Tf \in E$
*D'autre part,on a*

$$|Tf(x)| \leq Mx \|f\|_\infty \tag{1}$$

*D'où* $\|Tf\| \leq M \|f\|_\infty$ *et* $T \in \mathcal{L}(E)$ *avec* $\|T\| \leq M$
*Montrons par recurrence que pour tout* $n \geq 1$
*on a* $|T^n f(x)| \leq \dfrac{M^n}{n!} x^n \|f\|_\infty$.
*C'est vrai pour* $n = 1$, (*d'aprés (1)*)
*Supposons la formule vraie pour* $n$,*On a*

$$\begin{aligned} |T^{n+1} f(x)| &= \left| \int_0^x K(x,t) T^n f(t)dt \right| \leq M \int_0^x |T^n f(t)|\, dt \\ &\leq \frac{M^{n+1}}{n!} \|f\|_\infty \int_0^x t^n dt \end{aligned}$$

*soit* $|T^{n+1} f(x)| \leq \dfrac{M^{n+1}}{n!} \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \|f\|_\infty = \dfrac{M^{n+1}}{(n+1)!} x^{n+1} \|f\|_\infty$

*donc pour tout* $n \geq 1$, *on a* $|T^n f(x)| \leq \dfrac{M^n}{n!} \|f\|_\infty x^n$

*et ainsi* ,$\|T^n\| \leq \dfrac{M^n}{n!}$.

*D'aprés (2), on a* $\|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \dfrac{M}{(n!)^{\frac{1}{n}}}$.

*Montrons alors que nous avons* $u_n = (n!)^{\frac{1}{n}} \to \infty$

*En effet* $e^n = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{n^k}{k!} \geq \dfrac{n^n}{n!}$, *d'où* $n! \geq \dfrac{n^n}{e^n}$ *et* $u_n \geq \dfrac{n}{e}$

*Par conséquent le rayon spectral* $r(t)$ *de* $T$, *dont la valeur est donnée par* $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq M \lim_{n\to\infty} u_n^{-1}$ *est nul et* $\sigma(T) = \{0\}$

*Notons* $\|K\|_\infty = \sup\left\{|K(x,y)|, (x,y) \in [0,1]^2\right\}$ *(qui exsitent est fini car* $K$ *est continue ) sur le compact* $[0,1]^2$ *,on a alors*

$$\begin{aligned}
\|Tf\|^2 &= \int_0^1 \left|\int_0^1 K(x,y)f(y)dy\right|^2 dx \\
&\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |K(x,y)|\,|f(y)|\,dy\right)^2 dx \\
&\leq \|K\|_\infty^2 \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(y)|\,dy\right)^2 dx \\
&\leq \|K\|_\infty^2 \int_0^1 \int_0^1 |f(y)|^2\,dydx \ \ (c.s) \\
&\leq \|K\|_\infty^2 \|f\|^2
\end{aligned}$$

*ce qui prouve que* $T$*,est continue*

*Pour le calcule de l'adjoint on fixe* $g \in L^2$, *et pour tout* $f \in L^2$*,on a*

$$< Tf, g >= \int_0^1 \int_0^1 K(x,y)f(y)\overline{g(x)}dx$$

*par le théorme de Fubini cela donne*

$$\begin{aligned}
< Tf, g > &= \int_0^1 f(y) \int_0^1 K(x,y)\overline{g(x)}dx \\
&= \int_0^1 f(y) \int_0^1 \overline{\overline{k(x,y)}g(x)}dx
\end{aligned}$$

*on en deduit qui*

$$T^*(g) = \int_0^1 \overline{k(x,y)}g(y)dy$$

**Exercice 11** *Soit* $H = L^2([a,b]), (a < b)$, *l'espace des classes des fonctions* $x : [a,b] \to \mathbb{C}$ *de carré sommable et soit* $f : [a,b] \to \mathbb{C}$, *une fonction continue fixée.*

*Soit $T : H \to H$ l'aplication qui à la fonction $x \in H$ fait correspondre la fonction $Tx$ définie sur $[a,b]$ par*

$$(Tx)(t) = f(t)\,x(t)$$

1. *Montrer que cet application est un opérateur linéaire continu*
2. *Calculer l'opérateur $T^*$ (l'opérateur adjoint de $T$)*

**Solution 12** $T \in L(H)$

$$|Tx(t)| = |f(t)|\,|x(t)| \leqslant \|f\|_\infty |x(t)|$$

$$\Rightarrow \int_a^b |Tx(t)|^2\,dt \leqslant \int_a^b \|f\|_\infty^2 |x(t)|^2\,dt$$

$$\Rightarrow \|Tx\|_2 \leqslant \|f\|_\infty \|x\|_2 \quad \forall x \in H$$

$$\Rightarrow \|T\| \leq \|f\|_\infty$$

1. $\forall x \in H, \forall y \in H, \qquad < Tx, y >_H = < x, T^*y >_H$

$$< \ Tx, y > = \int_a^b Tx(t)\overline{y(t)}dt$$

$$= \int_a^b f(t)x(t)\overline{y(t)}dt$$

$$= \int_a^b x(t)\overline{\overline{f(t)}y(t)}dt$$

1. donc $< Tx, y >_H = \displaystyle\int_a^b x(t)\overline{\overline{f(t)}y(t)}dt = < x, f\ y >_H$

   $T^*y(t) = \overline{f(t)}y(t)$

   $T \in L(H)$ est autoadjoint $\Longleftrightarrow T = T^*$

   donc $T$ est autoadjoint si $f(t) = \overline{f(t)}$

**Exercice 13** *Soit* $H = L^2([0,1])$. *Pour* $f \in H$, *on pose*

$$Tf(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

1. *Montrer que* $T$ *est un opérateur continu sur* $H$.
2. *Calculer l'adjoint de* $T$.

**Solution 14** *On a*

$$\begin{aligned}
\|Tf\|^2 &= \int_0^1 \left|\int_0^x f(t)dt\right|^2 dx \\
&= \int_0^1 \left|\int_0^x |f(t)| \times 1dt\right|^2 dx \quad = \int_0^1 \int_0^x |f(t)|^2 \times \int_0^x 1dx \\
&\leq \int_0^1 \left(\int_0^x |f(t)|^2 dt\right) xdx \qquad \text{(Cauchy schwartz)} \\
&\leq \int_0^1 \int_0^1 |f(t)|^2 dtdx \\
&\leq \|f\|^2
\end{aligned}$$

1. *ce qui prouve que* $T$ *est continue,avec* $\|T\| \leq 1$
2. *On a*

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^1 f(t) 1_{[0,x]}(t)dt$$

*donc*

$$\begin{aligned}
< Tf, g > &= \int_0^1 \int_0^1 f(t) 1_{[0,x]}(t) g(x) dtdx \\
&= \int_0^1 f(t) \left(\int_0^1 1_{[0,x]}(t) g(x) dx\right) dt \quad \text{(Fubini)}
\end{aligned}$$

*on a donc*

$$T^*(g)(t) = \int_0^1 1_{[0,x]}(t) g(x) dx$$

*En remarquant que* $0 \leq t \leq x \Leftrightarrow t \leq x \leq 1$*on a donc*

$$T^*(g)(t) = \int_t^1 g(x)dx$$

*Remarquons qu'on a calvulé ici l'adjoint en supposant travailler sur l'espace réel* $L^2([0,1])$ *.Si on travaillait sur l'espace complexe,on obtiendrait*

$$T^*(g)(t) = \int_0^1 \overline{g(x)}dx.$$