Étude de la partie déterministe d'une série chronologique

Université Hassiba Benbouali de Chlef

Plan du Cours

Dans ce chapitre, on présente d'abord comment on peut étendre la régression linéaire au cas des séries chronologiques, puis deux méthodes empiriques de lissage pour mettre en évidence la tendance et la saisonnalité :

- lissage par les moyennes mobiles
- lissage exponentiel

Ajustement de la tendance

Le contexte. On dispose d'une série chronologique où les seules composantes présentes sont

- La tendance
- La composante résiduelle

La méthode des moindres carrés

Supposons que l'on observe T valeurs d'une série dont la tendance semble être linéaire, $Z_t = at + b$.

- Cette méthode consiste à choisir les coefficients a et b de sorte que la quantité

$$\sum_{t=1}^{T} (X_t - (at + b))^2 = g(a, b)$$

soit minimale.

- On cherche donc a et b solutions du système :

$$\begin{cases} \frac{\partial g(a,b)}{\partial a} & = 0 \\ \frac{\partial g(a,b)}{\partial b} & = 0 \end{cases}$$

La méthode des moindres carrés (suite)

On démontre que le couple solution $(\widehat{a}, \widehat{b})$ est donné par

$$\widehat{a} = \frac{\mathrm{Cov}(t, X_t)}{\mathbb{V}[t]} \quad \text{et} \quad \widehat{b} = \overline{X} - \widehat{a}\overline{t}$$

où

$$\overline{t} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} t \quad \text{et} \quad \overline{X} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t$$

$$\mathrm{Cov}(t, X_t) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(t - \overline{t})(X_t - \overline{X}) \quad \text{et} \quad \mathbb{V}[t] = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(t - \overline{t})^2$$

Exemple

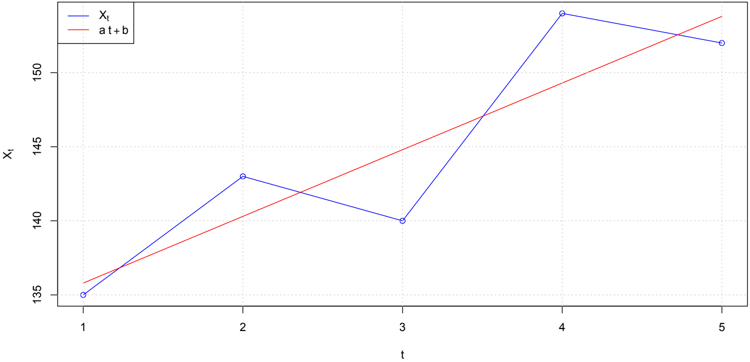
On considère la série chronologique ci-dessous :

t	1	2	3	4	5
X_t	135	143	140	154	152

	t	X_t	t^2	X_t^2	$t \times X_t$
	1	135	1	18225	135
	2	143	4	20449	286
	3	140	9	19600	420
	4	154	16	23716	616
	5	152	25	23104	760
Total	15	724	55	105094	2217

L'équation de la droite de la régression de X_t sur t, $X_t = at + b$, avec :

$$a := \frac{\mathrm{Cov}(t, X)}{\mathbb{V}[t]} = 4.5 \quad \text{et} \quad b := \overline{x} - a\bar{t} = 131.3$$



La prévision pour la date 6 s'obtient en remplaçant t par la valeur 6 dans l'équation de la tendance : $\widehat{X}_6 = 158$.

Les moyennes mobiles

Le but d'un lissage par moyenne mobile est de faire apparaître l'allure de la tendance, en gommant les variations saisonnières.

Définition 2.1

On appelle moyenne mobile, une transformation de X_t s'écrivant comme combinaison linéaire finie des k valeurs de la série correspondant à des dates entourant t. k est appelé ordre de la moyenne mobile.

Les moyennes mobiles (suite)

On note $\mathrm{MM}(k)$ la série des moyennes mobiles d'ordre k de la série. Plus précisément, cette série est définie par :

- si l'ordre k correspond à un nombre impair $(2m+1)$,

$$\mathrm{MM}(k)_t = \frac{X_{t-m} + \cdots + X_t + \cdots + X_{t+m}}{2m+1} = \frac{1}{2m+1}\left[\sum_{i=-m}^{m} X_{t+i}\right]$$

- si l'ordre k correspond à un nombre pair $2m$,

$$\mathrm{MM}(k)_t = \frac{1}{2m}\left[\frac{1}{2}X_{t-m} + \sum_{i=-m+1}^{m-1} X_{t+i} + \frac{1}{2}X_{t+m}\right]$$

Les moyennes mobiles (suite)

Exemples

Les moyennes mobiles d'ordre 2, 3, 4 et 5 sont données par :

- $\mathrm{MM}(2)_t = \frac{1}{2}\left(\frac{X_{t-1}}{2} + X_t + \frac{X_{t+1}}{2}\right)$
- $\mathrm{MM}(3)_t = \frac{1}{3}\left(X_{t-1} + X_t + X_{t+1}\right)$
- $\mathrm{MM}(4)_t = \frac{1}{4}\left(\frac{X_{t-2}}{2} + X_{t-1} + X_t + X_{t+1} + \frac{X_{t+2}}{2}\right)$
- $\mathrm{MM}(5)_t = \frac{1}{5}\left(X_{t-2} + X_{t-1} + X_t + X_{t+1} + X_{t+2}\right)$

Remarque

Les moyennes mobiles (suite)

Dans de nombreuses applications, la période p est paire et vaut $2m$ (série mensuelle, trimestrielle, bi-mensuelle, semestrielle, etc). Avec le lissage, on perd m observations au début de la série et m observations à la fin, soit au total $p = 2m$ observations.

Calcul des moyennes mobiles d'ordre 2

t	X_t	$\mathrm{MM}(2)_t$	$\mathrm{MM}(3)_t$	$\mathrm{MM}(4)_t$
1	135	$\times$	$\times$	$\times$
2	143	140.25	139.33	$\times$
3	140	144.25	145.66	145.125
4	154	150	148.66	$\times$
5	152	$\times$	$\times$	$\times$

$$\mathrm{MM}(2)_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{135}{2} + 143 + \frac{140}{2}\right) = 140.25$$

Remarque

Si la série X_t possède une composante saisonnière de période p alors l'application d'une moyenne mobile d'ordre p supprime cette saisonnalité.

Méthodologie

- Si aucune liaison fonctionnelle entre $\mathrm{MM}(k)_t$ et le temps ne semble se dégager, on définit la tendance $Z_t = \mathrm{MM}(k)_t$.
- Si une liaison (par exemple linéaire) se dégage, on estime cette liaison et on estime Z_t grâce à l'estimation de cette liaison. L'avantage est de pouvoir définir une tendance à tout instant.

Décomposition d'une Série Chronologique

On considérera deux types de décomposition :

- la décomposition à partir d'un modèle additif
- la décomposition à partir d'un modèle multiplicatif

La démarche consistera à :

1. identifier les coefficients saisonniers
2. désaisonnaliser la série initiale, pour pouvoir ensuite ajuster une courbe de tendance
3. construire la série lissée des prédictions en vue de faire de la prévision

Principe de conservation des aires

Les variations saisonnières se compensent sur un cycle. C'est le principe de conservation des aires : Sur tout intervalle de longueur p, la somme des aires au-dessus de la tendance est égale à la somme des aires en dessous.

1. pour un modèle additif

$$\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} S_j = 0$$

2. pour un modèle multiplicatif si

$$\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} S_j = 1$$

Décomposition additive

On effectue les étapes suivantes :

1. Estimation de la tendance : On peut par exemple effectuer un lissage par la méthode des Moyennes Mobiles, ou utiliser la méthode des moindres carrés.
2. On calcule les écarts entre la valeur de la série et l'estimation de la tendance au temps t : $\widehat{S}_t = X_t - \widehat{Z}_t$.
3. On calcule les p coefficients saisonniers : S_j.
   - On calcule la moyenne arithmétique des p coefficients saisonniers obtenus : $\overline{S} = \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{j=1}^{p} S_j$.
   - Si $\overline{S} \neq 0$, on centre les coefficients saisonniers : $\widetilde{S}_j = S_j - \overline{S}$.
4. La série corrigée des variations saisonnières ou la série désaisonnalisée notée X_t^{cvs} s'obtient en retranchant à la série initiale X_t la suite des coefficients saisonniers centrés : $X_t^{cvs} = X_t - \widetilde{S}_j$.

Exemple

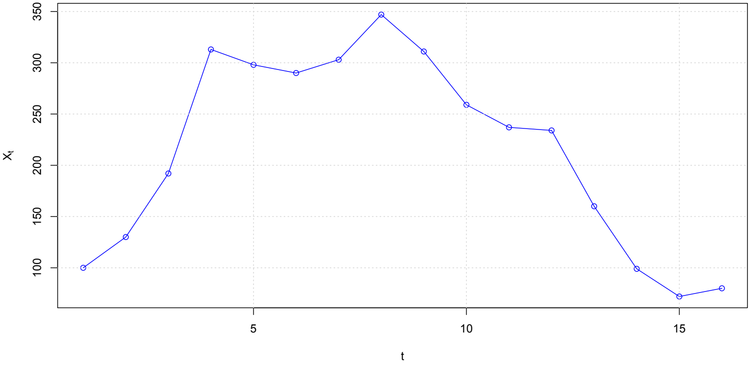
Par exemple si la saisonnalité est trimestrielle $p = 4$ et que la série est observée sur 3 années, on a

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{\widehat{S}_1 + \widehat{S}_5 + \widehat{S}_9}{3} \\
S_2 &= \frac{\widehat{S}_2 + \widehat{S}_6 + \widehat{S}_{10}}{3} \\
S_3 &= \frac{\widehat{S}_3 + \widehat{S}_7 + \widehat{S}_{11}}{3} \\
S_4 &= \frac{\widehat{S}_4 + \widehat{S}_8 + \widehat{S}_{12}}{3}
\end{aligned}$$

Exemple

On considère la série chronologique trimestrielle suivante :

	Trimestre 1	Trimestre 2	Trimestre 3	Trimestre 4
Année 1	100	130	192	313
Année 2	298	290	303	347
Année 3	311	259	237	234
Année 4	160	99	72	80



350
300
250
200
150
100
X_t
5
10
15
t

Nous allons estimer la tendance en effectuant un lissage par la méthode des Moyenne Mobiles :

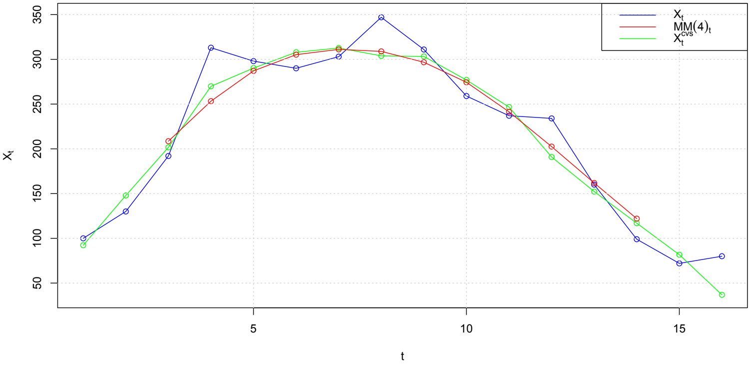
- Comme la série est trimestrielle, on utilise une moyenne mobile d'ordre 4 pour supprimer la composante périodique.
- On a $\mathrm{MM}(4)_t = \frac{1}{4}\left(\frac{X_{t-2}}{2} + X_{t-1} + X_t + X_{t+1} + \frac{X_{t+2}}{2}\right)$.
- $\mathrm{MM}(4)_t$ ne peut donc pas être calculée aux instants $t = 1, 2$ et $t = 15, 16$.

t	X_t	$\mathrm{MM}(4)_t$	$\widehat{S}_t$
1	100		
2	130		
3	192	208.5	-16.5
4	313	253.25	59.75
5	298	287.12	10.88
6	290	305.25	-15.25
7	303	311.12	-8.12
8	347	308.88	38.12
9	311	296.75	14.25
10	259	274.38	-15.38
11	237	241.38	-4.38
12	234	202.5	31.5
13	160	161.88	-1.88
14	99	122	-23
15	72		
16	80		

- $S_1 = \dfrac{10.88 + 14.25 - 1.88}{3} = 7.75$
- $S_2 = \dfrac{-15.25 - 15.38 - 23}{3} = -17.88$
- $S_3 = \dfrac{-16.5 - 8.12 - 4.38}{3} = -9.67$
- $S_4 = \dfrac{59.75 + 38.12 + 31.5}{3} = 43.12$

On a $\overline{S} = 5.83 \neq 0$, et on trouve : $\widetilde{S}_1 = 1.92$ $\widetilde{S}_2 = -23.71$, $\widetilde{S}_3 = -15.5$, $\widetilde{S}_4 = 37.29$.

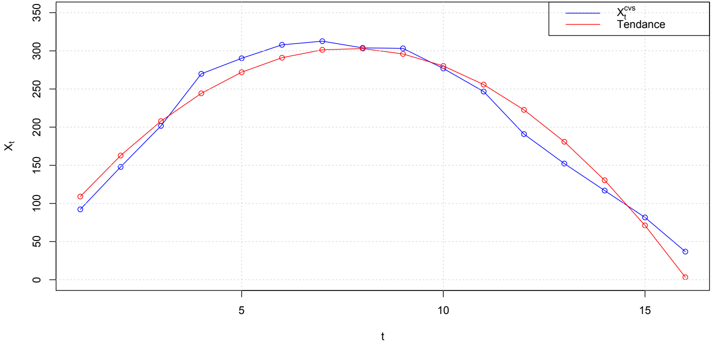
t	X_t	$\mathrm{MM}(4)_t$	$\widehat{S}_t$	$\widetilde{S}_j$	X_t^{cvs}
1	100			7.75	92.25
2	130			-17.88	147.88
3	192	208.5	-16.5	-9.67	201.67
4	313	253.25	59.75	43.12	269.88
5	298	287.12	10.88	7.75	290.25
6	290	305.25	-15.25	-17.88	307.88
7	303	311.12	-8.12	-9.67	312.67
8	347	308.88	38.12	43.12	303.88
9	311	296.75	14.25	7.75	303.25
10	259	274.38	-15.38	-17.88	276.88
11	237	241.38	-4.38	-9.67	246.67
12	234	202.5	31.5	43.12	190.88
13	160	161.88	-1.88	7.75	152.25
14	99	122	-23	-17.88	116.88
15	72			-9.67	81.67
16	80			43.12	36.88



X_t
$MM(4)_t$
X_t^{cvs}
350
300
250
200
150
100
50
5
10
15
t

Maintenant que la série est corrigée des variations saisonnières, on peut ajuster une courbe de tendance. Sur l'exemple, on va ajuster un polynôme de degré 2. On trouve

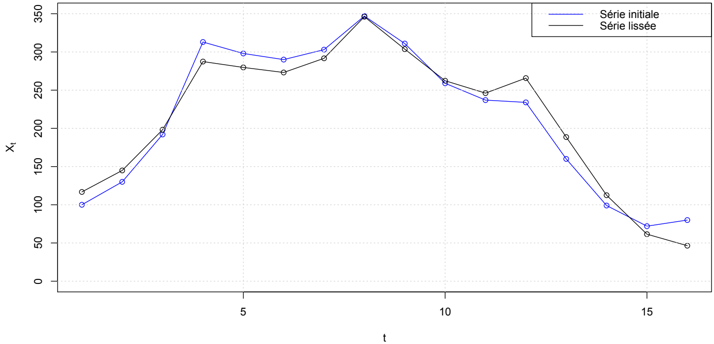
$$\widehat{Z}_t = -328.33\ t^2 - 129.95\ t + 208.23$$



Construction de la série lissée des prédictions

La série lissée des prédictions $\widehat{X}_t$, utile pour la prévision, est obtenue en additionnant la tendance $\widehat{Z}_t$ et la composante saisonnière $\widehat{S}_t$:

$$\widehat{X}_t = \widehat{Z}_t + \widehat{S}_t$$



Décomposition multiplicative

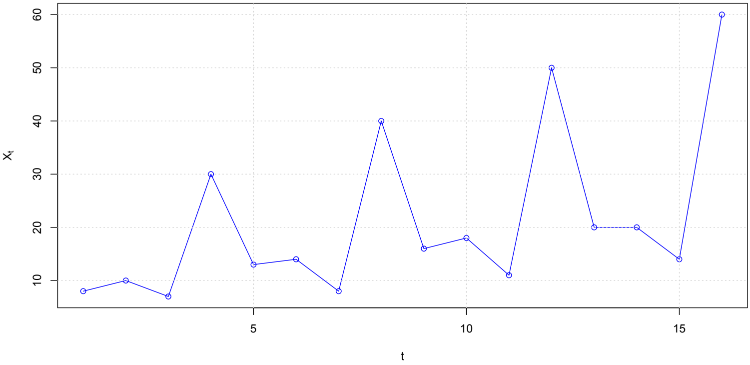
On effectue les étapes suivantes :

1. On évalue la tendance de la série : $\widehat{Z}_t$.
2. On calcule la série des quotients : $\widehat{S}_t = \dfrac{X_t}{\widehat{Z}_t}$.
3. On calcule les p coefficients saisonniers : S_j. Si $\overline{S} \neq 1$, on normalise les coefficients saisonniers : $\widetilde{S}_j = \dfrac{S_j}{\overline{S}}$.
4. La série corrigée des variations saisonnières s'obtient en divisant la série initiale X_t par la suite des coefficients saisonniers normalisés : $X_t^{cvs} = \dfrac{X_t}{\widetilde{S}_j}$.

Exemple

On considère la série chronologique trimestrielle suivante :

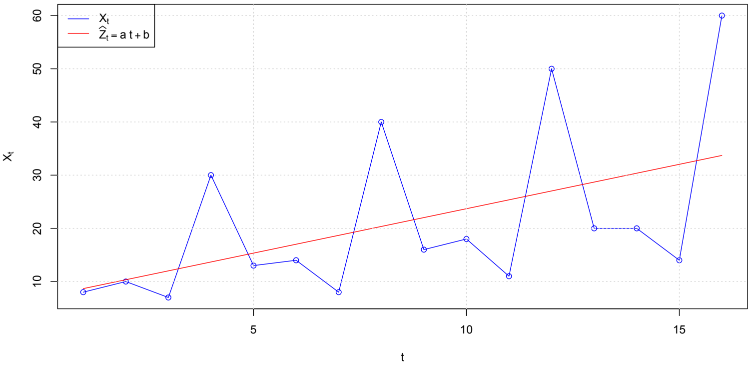
	Trimestre 1	Trimestre 2	Trimestre 3	Trimestre 4
Année 1	8	10	7	30
Année 2	13	14	8	40
Année 3	16	18	11	50
Année 4	20	20	14	60



60
50
40
30
20
10
X_t
5
10
15
t

Nous allons ajuster la tendance par la méthode des moindres carrés.

$$a := \frac{\mathrm{Cov}(t, X)}{\mathbb{V}[t]} = 1.67 \quad \text{et} \quad b := \overline{x} - a\overline{t} = 7$$

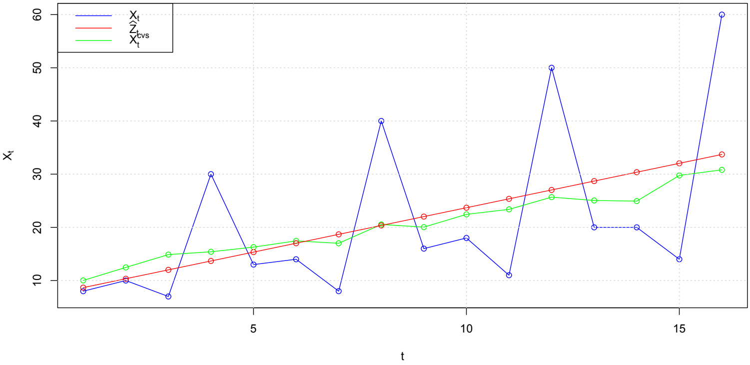


t	X_t	$\widehat{Z}_t$	$\widehat{S}_t$
1	8	8.67	0.92
2	10	10.34	0.97
3	7	12.01	0.58
4	30	13.68	2.19
5	13	15.35	0.85
6	14	17.01	0.82
7	8	18.68	0.43
8	40	20.35	1.97
9	16	22.02	0.73
10	18	23.69	0.76
11	11	25.36	0.43
12	50	27.03	1.85
13	20	28.70	0.7
14	20	30.37	0.66
15	14	32.04	0.44
16	60	33.71	1.78

- $S_1 = \dfrac{0.92 + 0.85 + 0.73 + 0.7}{4} = 0.8$
- $S_2 = \dfrac{0.97 + 0.82 + 76 + 0.66}{4} = 0.8$
- $S_3 = \dfrac{0.58 + 0.43 + 0.43 + 0.44}{4} = 0.47$
- $S_4 = \dfrac{2.19 + 1.97 + 1.85 + 1.78}{4} = 1.95$

On a $\overline{S} \simeq 1$, se sont les coefficients finaux.

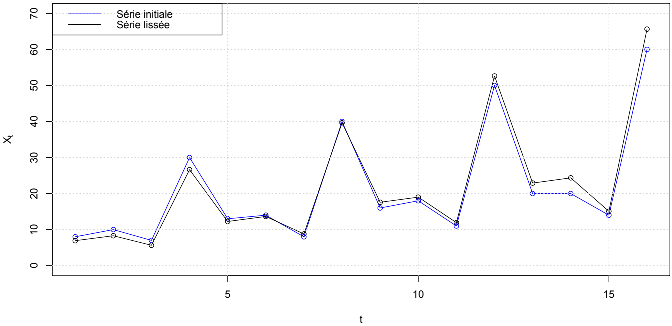
t	X_t	$\mathrm{MM}(4)_t$	$\widehat{S}_t$	$\widetilde{S}_j$	X_t^{cvs}
1	8	8.67	0.92	0.80	10.02
2	10	10.34	0.97	0.80	12.47
3	7	12.01	0.58	0.47	14.88
4	30	13.68	2.19	1.95	15.41
5	13	15.35	0.85	0.80	16.28
6	14	17.01	0.82	0.80	17.45
7	8	18.68	0.43	0.47	17
8	40	20.35	1.97	1.95	20.54
9	16	22.02	0.73	0.80	20.04
10	18	23.69	0.76	0.80	22.44
11	11	25.36	0.43	0.47	23.38
12	50	27.03	1.85	1.95	25.68
13	20	28.70	0.70	0.80	25.05
14	20	30.37	0.66	0.80	24.93
15	14	32.04	0.44	0.47	29.76
16	60	33.71	1.78	1.95	30.81


X_t
$\hat{Z}_t$
X_t^{cvs}
60
50
40
30
20
10
X_t
5
10
15
t

Construction de la série lissée des prédictions

La série lissée des prédictions $\widehat{X}_t$, utile pour la prévision, est obtenue en multipliant la tendance $\widehat{Z}_t$ par la composante saisonnière $\widehat{S}_t$:

$$\widehat{X}_t = \widehat{Z}_t \times \widehat{S}_t$$



Prédiction

On veut prédire la série pour les deux premiers trimestres de l'année suivante.

Méthodologie

1. On cherche $\widehat{X}_{17}$ et $\widehat{X}_{18}$
2. On utilise la droite de régression pour estimer $\widehat{Z}_{17}$ et $\widehat{Z}_{18}$
3. On récupère les coefficients saisonniers associés aux trimestres à prédire : ici S_1 et S_2
4. On combine le tout :

$$\widehat{X}_{17} = \widehat{Z}_{17} + S_1 = 1.67 \times 17 + 7 + 0.8 = 36.19$$

et

$$\widehat{X}_{18} = \widehat{Z}_{18} + S_1 = 1.67 \times 18 + 7 + 0.8 = 37.86$$

Le lissage exponentiel simple

Le lissage exponentiel simple permet d'effectuer des prévisions pour des séries chronologiques dont la tendance est constante et sans saisonnalité.

Soit (X_t) une telle série dont on a observé les T premiers instants $X_1, \dots, X_T$. Pour $h \in \mathbb{N}^*$, on cherche à prévoir la valeur X_{T+h}, c'est-à-dire faire une prévision de la série à l'horizon h.

Étant donné un réel λ tel que $0 < \lambda < 1$, comme la tendance est constante, on cherche une prévision $\widehat{X}_T(h)$ sous la forme de la constante qui s'ajuste le mieux au sens des moindres carrés pondérés au voisinage de T, c'est-à-dire la solution du problème de minimisation

$$\min_a \sum_{j=0}^{T-1} \lambda^j \left(X_{T-j} - a\right)^2$$

Le lissage exponentiel simple (suite)

Définition 4.1

La prévision de la série à l'horizon h, $\widehat{X}_T(h)$, fournie par la méthode de lissage exponentiel simple est donnée par

$$\widehat{X}_T(h) = (1-\lambda)\sum_{j=0}^{T-1}\lambda^j X_{T-j}$$

où λ est la constante de lissage.

Remarque

- $\lambda = 0$, la prévision est alors égale à la dernière valeur observée.
- $\lambda = 1$, alors toutes les prévisions sont identiques.
- λ proche de 0, prévision souple i.e. fortement influencée par les observations les plus récentes.
- λ proche de 1, prévision rigide i.e. l'influence des observations passées est d'autant plus importante et remonte loin dans le passé.

En pratique, on prend $\lambda \in]0, 1[$ afin d'exclure ces deux cas extrêmes dégénérés.

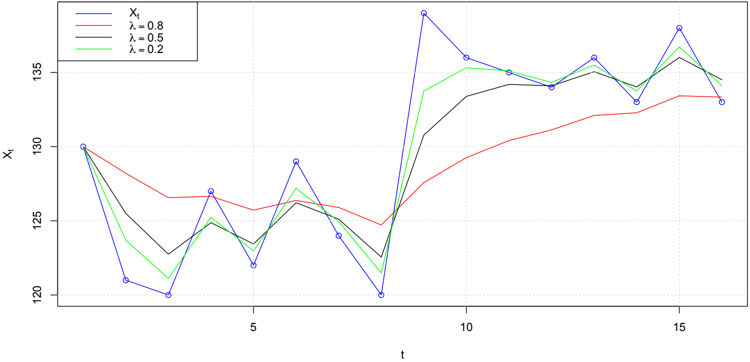
A partir de la définition, on obtient la formule de mise à jour :

$$\begin{aligned}\widehat{X}_T(h) &= \lambda \widehat{X}_{T-1}(h) + (1-\lambda) X_T \\ &= \widehat{X}_{T-1}(h) + (1-\lambda)\left(X_T - \widehat{X}_{T-1}(h)\right)\end{aligned}$$

Initialisation de la récurrence par $\widehat{X}_1(h) = X_1$ ou la moyenne des observations.

Exemple

t	X_t
1	130
2	121
3	120
4	127
5	122
6	129
7	124
8	120
9	139
10	136
11	135
12	134
13	136
14	133
15	138
16	133


X_t
$\lambda = 0.8$
$\lambda = 0.5$
$\lambda = 0.2$
120
125
130
135
X_t
5
10
15
t

Le lissage exponentiel double

$$\min_{a,b} \sum_{j=0}^{T-1} \lambda^j \left(X_{T-j} - (aj+b)\right)^2$$

En notant la série lissée S_1 et la série doublement lissée S_2 définies par

$$S_1(t) = (1-\lambda)\sum_{j=0}^{t-1} \lambda^j X_{t-j}, \quad S_2(t) = (1-\lambda)\sum_{j=0}^{t-1} \lambda^j S_1(t-j)$$

on déduit la définition suivante

Définition 4.2

Le lissage exponentiel double (suite)

La prévision de la série à l'horizon h, $\widehat{X}_T(h)$, fournie par la méthode de lissage exponentiel double est donnée par

$$\widehat{X}_T(h) = \widehat{a}_T h + \widehat{b}_T$$

où λ est la constante de lissage et le couple $(\widehat{a}_T, \widehat{b}_T)$ est donné par

$$\begin{cases} \widehat{a}_T & = \frac{1-\lambda}{\lambda} \left(S_1(T) - S_2(T)\right) \\ \widehat{b}_T & = 2S_1(T) - S_2(T) \end{cases}$$

Les formules de mise à jour s'obtiennent à partir de ces expressions

$$\widehat{a}_T = \widehat{a}_{T-1} + (1-\lambda)^2 \left(X_T - \widehat{X}_{T-1}(h) \right)$$

Le lissage exponentiel double (suite)

et

$$\widehat{b}_T = \widehat{b}_{T-1} + \widehat{a}_{T-1} + (1-\lambda^2)\left(X_T - \widehat{X}_{T-1}(h)\right)$$

Pour l'initialisation, on prend $\widehat{a}_2 = X_2 - X_1$ et $\widehat{b}_2 = X_2$.

La méthode de Holt-Winters

Les mises à jour pour le lissage exponentiel double s'écrivent aussi

$$\widehat{a}_T = \frac{1-\lambda}{2}\left(\widehat{X}_T(1) - \widehat{X}_{T-1}(1)\right) + \frac{1+\lambda}{2}\widehat{a}_{T-1}$$

et

$$\widehat{b}_T = (1-\lambda^2)X_T + \lambda^2\left(\widehat{X}_{T-1}(1) + \widehat{X}_{T-1}(2)\right)$$

Ainsi écrits, $\widehat{a}_T$ et $\widehat{b}_T$ apparaissent comme des barycentres. Holt et Winters ont alors proposé les mises à jour suivantes :

$$\widehat{a}_T = (1-\alpha)\left(\widehat{X}_T(1) - \widehat{X}_{T-1}(1)\right) + \alpha\widehat{a}_{T-1}$$

et

$$\widehat{b}_T = (1-\beta)X_T + \beta\left(\widehat{X}_{T-1}(1) + \widehat{X}_{T-1}(2)\right)$$

où $|\alpha| < 1$ et $|\beta| < 1$.