Université Badji Mokhtar, Annaba **Année universitaire 2020/2021**
Licence Acd. Maths 3^{ième} année

Examen de Mesure et intégration
Durée 01h00.

Question de Cours. Donner les définitions des notions suivantes:
(a) Une fonction $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ mesurable.
(b) Une fonction $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \overline{\mathbb{R}}$ intégrable.
(c) La convergence presque partout d"une suite de fonctions $\{f_n\}_{n\geq 0}$, définie de $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vers $\overline{\mathbb{R}}$.

Exercice 1- Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant chaque réponse.
1) Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, alors $\mathcal{T}$ est une $\sigma-$ algèbre sur X.
2) La limite simple d'une suite de fonctions mesurable est aussi mesurable.
3) Dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ si $\lambda(A) = 0$ alors A est dénombrable.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue et bornée. On définit pour tout $n \geq 1$ la fonction f_n par

$$f_n : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto nf(t)e^{-nt}.\mathbb{I}_{[0,+\infty[}. \end{array}$$

1- Montrer que la fonction f_n est mesurable et intégrable, pour tout $n \geq 1$.
2- En utilisant un changement de variable convenable de la forme $u = \varphi(t)$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} f_n(t)\, dt = \int\limits_0^{+\infty} f(0)\, e^{-u} du.$

3- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f_n(t)dt.$

Exercice 3 Soit $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to (Y, \mathcal{B})$ unr fonction mesurable. Montrer que l'aplication $\varphi : \mathcal{B} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ définit par

$$\forall B \in \mathcal{B} \text{ on a } \varphi(B) = \mu\left(f^{-1}(B)\right)$$

est une mesure sur $(Y, \mathcal{B})$.

Exercice 4 On définit dans $\mathbb{R}^2$ la fonction f telle que $f(x, y) = \dfrac{1}{(1 + x^2)(1 + y)}$ et on considère la partie $D = [0, +\infty[\times [a, b]$, où $-1 < a < b$.

1- Calculer $\int\limits_D f(x, y)dxdy$.

2- Que peut-on conclure?

Corrigé de l'examen.

Question de Cours.

(a) Une fonction $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ est dite mesurable si et seulement si : $\forall B \in \mathcal{B}$ $\{^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. (**1.25 pts**)

(b) Une fonction $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \overline{\mathbb{R}}$ estintégrable $\Longleftrightarrow$. $\int_X |f| \, d\mu < +\infty$ (ou $\int_X f^+ d\mu < +\infty$ et $\int_X f^- d\mu < +\infty$).(**1 pt**)

(c) $\{f_n\}_{n\geq 0}$ converge $\mu - p.p.$ vers $f \Longleftrightarrow$ il eexiste $A \in \mathcal{A}$, tel que $\mu(A^c) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$. (**1.25 pts**)

Exercice 1

1) Faux (**0.5 pt**), car on n'a pas la stabilité par passage au complémentaire. (**0.75 pt**)
2) Vraie (**0.5 pt**), c'est un résultat vu au cours.(**0.75 pt**)
3) Faux (**0.5 pt**), on a l'ensemble de cantor qui est de mesure nulle et non-dénombrable.(**0.75 pt**)

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue et bornée. On définit pour tout $n \geq 1$ la fonction f_n par

$$f_n : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto nf(t)e^{-nt}.\mathbb{I}_{[0,+\infty[}. \end{array}$$

1- On a pour tout $n \geq 1$,

$\odot$ f_n est continue sur $\mathbb{R}^* \Longrightarrow f_n$ est borélienne sur $\mathbb{R}$ (1.**25 pts**) ou bien produit de fonctions mesurables.

$\odot$ f est une fonction positive et bornée alors: $\exists M > 0$ telle que $0 \leq f(t) \leq M$,pour tout $t \in \mathbb{R}$ (**0.5 pt**), donc

$$|f_{bn}(t)| \leq n.M.e^{-nt}.\mathbb{I}_{[0,+\infty[}(t) = g(t) \; (\mathbf{0.25\ pt})$$

et $\int_{\mathbb{R}} n.M.e^{-nt}.\mathbb{I}_{[0,+\infty[}(t)dt = M \int_0^{+\infty} ne^{-nt}dt \, (\mathbf{0.5\ pt}) = M\left[-e^{-nt}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} = M \, (\mathbf{0.5\ pt}) < +\infty$, alors $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ (**0.25 pt**). Par conséquent $f_n$est intégrable sur $\mathbb{R}$ (**0.5 pt**).

2- Pour calculer $\int_0^{+\infty} f_n(t) \, dt$, on considère le changement de variable suivant $u = nt$ (**0.5 pt**) $\Longrightarrow$ $du = ndt$ (**0.25 pt**). Donc

$$\int_0^{+\infty} f_n(t) \, dt = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{n}\right) e^{-u} du = \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{u}{n}\right) e^{-u}.\mathbb{I}_{[0,+\infty[}(u)du. \; (\mathbf{0.5\ pt})$$

Posons $F_n(u) = f\left(\frac{u}{n}\right) e^{-u}.\mathbb{I}_{[0,+\infty[}(u)$, pour $n \geq 1$. On a

$\circledast \lim_{n\to+\infty} F_n(u) = \lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{u}{n}\right) e^{-u}\mathbb{I}_{[0,+\infty[}(u) = f\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{u}{n}\right) e^{-u}\mathbb{I}_{[0,+\infty[}(u)$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} F_n(u) &= \lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{u}{n}\right) e^{-u}.\mathbb{I}_{[0,+\infty[}(u) \\
(f \text{ est continue}) &= f\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{u}{n}\right) e^{-u}.\mathbb{I}_{[0,+\infty[}(u)\,(\mathbf{0.5\ pt}) \\
&= f(0)\,e^{-u}.\mathbb{I}_{[0,+\infty[}(u).\,(\mathbf{0.5\ pt})
\end{aligned}$$

$\circledast\, |F_n(u)| \leq M.e^{-u}.\mathbb{I}_{[0,+\infty[}(u) = G(u)\,(\mathbf{0.5\ pt})$ et $G \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})\,.\,(\mathbf{0.25\ pt})$

Donc d'aprés le T.C.D.($\mathbf{0.5\ pt}$) on a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt &= \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} F_n(u)du \\
&= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} F_n(u)du\,(\mathbf{0.5\ pt}) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(0)\,e^{-u}.\mathbb{I}_{[0,+\infty[}(u)du = \int_0^{+\infty} f(0)\,e^{-u}du.\,(\mathbf{0.25\ pt})
\end{aligned}$$

3- D'aprés (2) on a

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(t)dt = \int_0^{+\infty} f(0)\,e^{-u}du = f(0).\,(\mathbf{0.5\ pt})$$

Exercice 3

$$\begin{aligned}
\varphi:\ & \mathcal{B} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+ \\
& B \longmapsto \varphi(B) = \mu\left(f^{-1}(B)\right)
\end{aligned}$$

Pour montrer que φ est une mesure sur $(Y, \mathcal{B})$, on vérifie par définition que

$$\left.\begin{array}{l}
\circledast\varphi(\emptyset) = 0. \\
\circledast \text{ Soit } \{B_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{B} \text{ telle que } B_n \cap B_m = \emptyset \text{ pour } n \neq m, \text{ alors } \varphi\left(\bigcup_{n\geq 0} B_n\right) = \sum_{n\geq 0}\varphi(B_n)
\end{array}\right\}(1\ \mathbf{pt})$$

$\circledast$ $\emptyset \in \mathcal{B}$ et f est une fonction mesurable, alors $\emptyset = f^{-1}(\emptyset) \in \mathcal{A}$ et $\varphi(\emptyset) = \mu\left(f^{-1}(\emptyset)\right) = \mu(\emptyset) = 0.\,(\mathbf{0.5\ pt})$

$\circledast$ Soit $\{B_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{B}$ telle que $B_n \cap B_m = \emptyset$ pour $n \neq m$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n \in \mathcal{B}$ et f est une fonction mesurable, alors $f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}\,(\mathbf{0.5\ pt})$. On a en plus

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n\geq 0} B_n\right) = \bigcup_{n\geq 0} f^{-1}(B_n) \quad \text{et } f^{-1}(B_n) \cap f^{-1}(B_m) = \emptyset, \text{ si } n \neq m\,(\mathbf{0.5\ pt})\,.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\bigcup_{n\geq 0} B_n\right) &= \mu\left(f^{-1}\left(\bigcup_{n\geq 0} B_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{n\geq 0} f^{-1}(B_n)\right) (\mathbf{0.5\ pt}) \\
(\mu \text{ est une mesure}) &= \sum_{n\geq 0} \mu\left(f^{-1}(B_n)\right) (\mathbf{0.5\ pt}) \\
&= \sum_{n\geq 0} \varphi(B_n) (\mathbf{0.5\ pt})
\end{aligned}$$

<u>Exercice 4</u> e $f(x,y) = \dfrac{1}{(1+x^2)(1+y)}$ sur $D = [0,+\infty[\times[a,b]$, où $-1 < a < b$.

1- On a

⊛ $f(x,y) \geq 0$,,pour tout $(x,y) \in D.$ $(\mathbf{0.5\ pt})$

⊛ f est continue sur D $(\mathbf{0.5\ pt})$, alors elle est mesurable.$(\mathbf{0.25\ pt})$

Donc d'aprés le Théorème de **Fubini - Tonelli** on a

$$\int_D f(x,y)dxdy = \int_0^{+\infty}\left[\int_a^b f(x,y)dy\right]dx = \int_a^b\left[\int_0^{+\infty} f(x,y)dx\right]dy.\ (\mathbf{0.5\ pt})$$

$$\begin{aligned}
\int_a^b\left[\int_0^{+\infty} f(x,y)dx\right]dy. &= \int_a^b \frac{1}{1+y}\left[\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}\right]dy\ (\mathbf{0.5\ pt}) \\
&= \int_a^b \frac{1}{1+y}\left[Arctg\ x\right]_{x=0}^{x\to+\infty} dy\ (\mathbf{0.5\ pt}) \\
&= \frac{\pi}{2}\int_a^b \frac{dy}{1+y}\ (\mathbf{0.25\ pt}) = \frac{\pi}{2}\left[\ln(1+y)\right]_{y=a}^{y=b} \\
&= \frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{1+b}{1+a}\right).\ (\mathbf{0.5\ pt})
\end{aligned}$$

2- On a $\int_D f(x,y)dxdy < +\infty$, alors f est intégrable sur $D.$ $(\mathbf{0.5\ pt})$