Chapitre 2 : Chaînes de Markov à temps discret

2.1. Définitions et Propriétés

Définition 2.1

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans un espace d'états discret E. On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov à temps discret si la propriété de Markov suivante est vérifiée

pour tout $n\in\mathbb{N}$, pour tout état j et pour toute suite d'états $i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i$, on a :

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=j / X_n=i, X_{n-1}=i_{n-1}, \dots, X_1=i_1, X_0=i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1}=j / X_n=i)$$

tel que $\mathbb{P}(X_n=i, X_{n-1}=i_{n-1}, \dots, X_0=i_0) > 0$.

Si de plus la quantité $\mathbb{P}(X_{n+1}=j / X_n=i)$ ne dépend pas de n. i.e

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=j / X_n=i) = \mathbb{P}(X_1=j / X_0=i)$$

Alors la chaîne de Markov est dite homogène.

Définition 2.2

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène à espace d'états E. Soient $i, j\in E$, la probabilité $P_{ij} = \mathbb{P}(X_1=j / X_0=i)$ est appelée probabilité de transition de i à j.

La matrice $P = (P_{ij})_{i,j\in E}$ est appelée matrice de transition de la chaîne de Markov.

Toute matrice de transition P vérifie les propriétés suivantes :

i- $P_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in E$

ii. $\forall i \in E, \sum_{j\in E} P_{ij} = 1$

Proposition 2.1

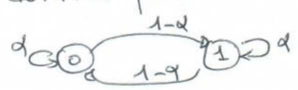
La loi d'une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est entièrement caractérisée par sa sa matrice de transition P, et la loi de X_0, π_0. De plus On a pour tous $i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i_n \in E$,

$$P(X_0=i_0, X_1=i_1, \dots, X_n=i_n) = P(X_0=i_0)\,P(X_1=i_1/X_0=i_0)\cdots P(X_n=i_n/X_{n-1}=i_{n-1})$$
$$= P(X_0=i_0)\, P_{i_0i_1} P_{i_1i_2} \cdots P_{i_{n-1}i_n}$$

Exemple 2.1

La matrice et le graphe de transition de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $E=\{0,1\}$ sont donnés par:

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix}$$



2.1.1. Matrice de transition en n étapes

Soit $P_{ij}^{(n)}$ la probabilité que la chaîne de Markov passe de l'état i à l'état j en n transitions (étapes). Cette probabilité est donnée par

$$P_{ij}^{(n)} = P(X_n=j/X_0=i) = P(X_{n+k}=j/X_k=i), \quad n\geq 1, \ k\geq 1.$$

La matrice $P^{(n)} = \left(P_{ij}^{(n)}\right)_{i,j\in E}$ s'appelle matrice de transition en n étapes et vérifie :

- $P_{ij}^{(n)} \geq 0$, $i,j\in E$
- $\sum_{j\in E} P_{ij}^{(n)} = 1$, $\forall i\in E$

On pose $P_{ij}^{(0)} = P(X_0=j/X_0=i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i\neq j \\ 1 & \text{si } i=j \end{cases}$

2.1.2. Equations de Chapman-Kolmogorov

Les équations de Chapman-Kolmogorov fournissent une méthode de calcul des probabilités de transition en n étapes.

Théorème 2.1.

Pour tout $n, m = 0, 1, \dots,$ et tout i, j dans E, On a

$$P_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in E} P_{ik}^{(n)} P_{kj}^{(m)}$$

Soit en notation matricielle $\underline{P}^{(n+m)} = \underline{P}^{(n)} \underline{P}^{(m)}$

La matrice des transitions en n étapes est égale à la n-ième puissance de la matrice des transitions, $\underline{P}^{(n)} = \underline{P}^{n}$

Exemple 2.2

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov d'espace d'états $E = \{0, 1\}$ et de matrice de transition $\underline{P} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$

Calculer $P_{00}^{(2)}$.

Solution On a $P_{00}^{(2)} = \sum_{k=0}^{1} P_{0k} P_{k0} = P_{00} P_{00} + P_{01} P_{10} = 9/16 + 1/16 = 10/16$

Méthode 2 : On calcule $\underline{P}^2 = \underline{P} . \underline{P} = \begin{pmatrix} 10/16 & 6/16 \\ 6/16 & 10/16 \end{pmatrix}$

La probabilité cherchée est $P_{00}^{(2)} = 10/16$.

2.1.3. Loi de probabilité de X_n.

L'analyse du régime transitoire d'une chaîne de Markov consiste à détermine le vecteur $\pi(n)$ des probabilités d'états qu'on note $\pi_i(n) = \underline{P}(X_n = i)$, Pour que la chaîne $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se trouve dans l'état i après n étapes

La distribution de X_n peut être décrite sous la forme de vecteur ligne : $\pi(n) = (\pi_1(n), \pi_2(n), \dots)$, dont la somme des termes vaut 1.

Pour calculer le vecteur $\pi(n)$, il faut connaître soit la valeur prise par X_0, soit sa distribution initiale $\pi(0) = (\pi_1(0), \pi_2(0), \dots)$

D'aprés le théorème des probabilités totales, on a

$$P(X_n = i) = \sum_{j \in E} P(X_0 = j)\, P(X_n = i / X_0 = j)$$

$$\pi_i(n) = \sum_{j \in E} \pi_j(0)\, p_{ji}^{(n)}$$

En notation matricielle, la relation ci-dessus est donnée comme suit:

$$\pi(n) = \pi(0)\, P^{(n)} = \pi(0)\, P^n$$

De façon analogue, On obtient

$$\pi(n+1) = \pi(n) \cdot P$$

Exemple 2.3.

Considérons une chaîne de Markov à deux états $\{0, 1\}$ de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Supposons une distribution initiale des états égale à $\pi(0) = (1, 0)$

La distribution de X_1 est donnée par: $\pi(1) = \pi(0) \cdot P = (2/3, 1/3)$

La distribution de X_2 est donnée par: $\pi(2) = \pi(1) P = \pi(0) P^2 = \left(\frac{22}{36}, \frac{14}{36}\right)$

2.2. chaîne de Markov à deux états

La matrice de transition d'une chaîne de Markov sur deux états 0 et 1 est de la forme

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} \qquad 0 \leq \alpha, \beta \leq 1$$

On suppose que $0 < a, b < 1$ de telle sorte que toutes les probabilités de transition sont strictement positives.

Pour calculer la matrice de transition en n étapes, et donc la n-ième puissance de P, il suffit de diagonaliser cette matrice. On a l'expression $P = SDS^{-1}$,

où $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ est la matrice diagonale des valeurs propres,

S est une matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres à droite correspondants et S^{-1}, une matrice inverse de S. On obtient

$$P^n = SD^nS^{-1}, \quad n \geq 1.$$

Les valeurs propres sont obtenues en solutionnant l'équation

$$\det(P - \lambda I) = (1-\alpha-\lambda)(1-\beta-\lambda) - \alpha\beta = 0$$

$$= \lambda^2 - (2-\alpha-\beta)\lambda + (1-\alpha-\beta) = 0$$

On trouve les solutions

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 1-\alpha-\beta$$

Les vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2 sont respectivement $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

D'où $P = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\alpha-\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \\ -\frac{1}{\alpha+\beta} & \frac{1}{\alpha+\beta} \end{pmatrix}$

où $S = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\alpha-\beta \end{pmatrix}$ et $S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \\ -\frac{1}{\alpha+\beta} & \frac{1}{\alpha+\beta} \end{pmatrix}$

La matrice de transition en n étapes est alors donnée par

$$P^{(n)} = P^{n} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-\alpha-\beta)^{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \\ -\frac{1}{\alpha+\beta} & \frac{1}{\alpha+\beta} \end{pmatrix}$$

et on obtient

$$\lim_{n \to +\infty} P^{(n)} = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \\ \frac{\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \end{pmatrix}$$

2.3 Distributions stationnaires et limites.

On constate souvent que la distribution $\pi(n)$ converge vers une distribution limite lorsque $n \to \infty$. Dans ce cas, on dit que cette dernière définit le régime permanent de la chaîne de Markov.

Définition 2.3 (Distribution limite)

On dit qu'une chaîne de Markov converge vers π (ou possède une distribution limite π) si $\lim_{n \to \infty} \pi(n) = \pi$, et cela indépendamment de la distribution initiale $\pi(0)$.

Définition 2.4 (chaîne de Markov stationnaire)

Une chaîne de Markov est dite stationnaire si la distribution $\pi(n)$ est indépendante du temps n.

Définition 2.5 (Distribution stationnaire)

une distribution de probabilité π est appelée distribution stationnaire (ou probabilité invariante) par rapport à une matrice de transition P si $\pi P = \pi$, avec $\sum_{j \in E} \pi_j = 1$, $\pi_j \geq 0 \quad \forall j$

Ou bien $\pi_j = \sum_{i \in E} \pi_j P_{ij}$.

2.3.1 Existence et Unicité des distributions stationnaires

Théorème 2.2.

Pour une chaîne de Markov finie, il existe toujours au moins une distribution stationnaire. Mais une chaîne de Markov finie n'admet pas toujours une unique distribution stationnaire.

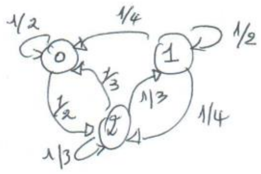
Théorème 2.3.

Une chaîne de Markov finie admet une unique distribution stationnaire si et seulement si elle comprend une seule classe d'équivalence.

Exemple 2.4.

Considérons la chaîne de Markov de matrice de transition P définie par

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$



Il y a une seule classe d'équivalence donc il existe une unique distribution stationnaire.
c'est l'unique solution du système :

$$\begin{cases} \pi . P = \pi \\ \sum_{i \in E} \pi_i = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 1/2\,\pi_0 + 1/4\,\pi_1 + 1/3\,\pi_2 = \pi_0 \\ 1/2\,\pi_1 + 1/3\,\pi_2 = \pi_1 \\ 1/2\,\pi_0 + 1/4\,\pi_1 + 1/3\,\pi_2 = \pi_2 . \end{cases}$$

Les solutions sont $\pi_0 = 3/8$, $\pi_1 = 1/4$ et $\pi_2 = 3/8$.

Exemple 2.5

Considérons la chaîne de Markov de matrice de transition suivante.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette chaîne de Markov admet une infinité de distributions stationnaires définies par $(0, 1-2\alpha, \alpha, \alpha)$ avec $0 \leq \alpha \leq 1/2$.

Remarque 2.1 Une chaîne de Markov infinie n'admet pas toujours de distribution stationnaire.

2.4 Classification des états

Définition 2.6 (Etat accessible)

Un état j est dit accessible à partir de l'état i, s'il existe un entier $n \geq 0$ tel que $P_{ij}^{(n)} > 0$ et l'on a $i \rightarrow j$.

Définition 2.7 (Etats Communiquants)

Si l'état i est accessible de l'état j et si l'état j est accessible de l'état i, on dit que ces états communiquent et l'on note $i \leftrightarrow j$.

La relation $\leftrightarrow$ est une relation d'équivalence.

Définition 2.8 (irréductibilité)

Une chaîne de Markov est dite irréductible si elle ne contient qu'une seule classe d'équivalence. Autrement dit si tous les états de la chaîne communiquent entre eux.

Exemple 2.6

Considérons la chaîne de Markov à espace d'états $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ de matrice de transition

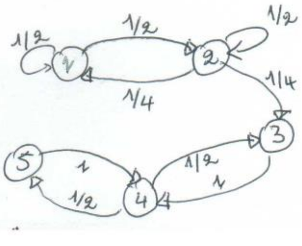
$$\underline{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1- Donner le graphe de transition de la chaîne de Markov

2- Donner ses classes d'équivalence.

Solution

1- le graphe de transition :



La chaîne Comporte deux classes $C_1 = \{1, 2\}$ et $C_2 = \{3, 4, 5\}$

Exemple 2.7

Considérons la chaîne de Markov dont l'espace des états est $E = \{1, 2, 3\}$, La matrice de transition est

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette chaîne est irréductible, tous les états Communiquent.

Définition 2.9

Un état i d'une chaîne de Markov est dit absorbant, si la chaîne ne peut plus quitter cet état une fois qu'elle y est entrée, en d'autre termes si $P_{ii} = 1$.

Une chaîne de Markov est dite absorbante si elle Comprend au moins un état absorbant et si l'on peut passer de n'importe quel état à un état absorbant.

2.4.1 Etats récurrents et transients

Définition 2.10

Soit $i \in E$. La variable aléatoire T_i définie par

$$T_i = \inf\{n \geq 1, X_n = i\}$$

est appelée temps d'atteinte de i (ou temps de retour à i) lorsque la chaîne part de i. Par Convention, lorsque pour tout $n \geq 1$, $X_n \neq i$, On pose $T_i = +\infty$.

Considérons deux états i et j dans E. Notons f_{ij} la probabilité que partant de l'état i, la chaîne passe au moins une fois par l'état j, i.e.

$$f_{ij} = P(T_j < +\infty / X_0 = i)$$

La Probabilité f_{ii} est la probabilité que partant de l'état i, la chaîne retourne à l'état i en un temps fini.

Soit $f_{ij}^{(n)}$ la probabilité que, partant de l'état i la chaîne aille, pour la première fois, à l'état j au temps n, i.e.

$$f_{ij}^{(n)} = P(X_n = j, X_k \neq j, \forall k = 1, .., n-1 / X_0 = i),$$

avec la convention $f_{ij}^{(0)} = 0$. On a l'inégalité $f_{ij}^{(n)} \leq P_{ij}^{(n)}$ $\forall i, j \in E, \forall n = 1,$

Avec $f_{ij} = \sum_{n \geq 1} f_{ij}^{(n)}$ et $f_{ii} = \sum_{n \geq 1} f_{ii}^{(n)}$

Proposition 2.2

Pour tout états i et j et tout entier $n \geq 1$, On a :

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)}$$

Définition 2.11

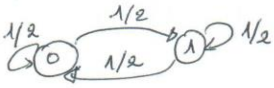
- Un état i est dit transient ou transitoire si $f_{ii} < 1$.
- Un état i est dit récurrent si $f_{ii} = 1$
- Un état i est dit récurrent positif si $\mu_i = E(T_i / X_0 = i) < +\infty$ (avec $\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$ est le temps moyen de retour).
- Un état i est dit récurrent nul si $\mu_i = +\infty$

Définition 2.12

Un état i est récurrent positif (ou non nul) s'il est récurrent et si le temps moyen μ_i de retour est fini. Dans le cas où le temps moyen de retour est infini, l'état est dit récurrent nul.

Exemple 2.8

Considérons le graphe de transition d'une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donné par



L'état 1 est-il récurrent ? récurrent positif ?

On a $f_{11} = P(\text{premier retour à } 1 \,/\, \text{départ de } 1)$

$= 1 - P(\text{ne jamais retourner à } 1 \,/\, \text{départ de } 1)$

$= 1 - 0 = 1$

Donc l'état 1 est récurrent.

On calcule maintenant le temps moyen de retour à l'état 1.

$$\mu_1 = \sum_{n\geq 1} n\, f_{11}^{(n)}$$

$$f_{11}^{(1)} = 1/2$$

$$f_{11}^{(2)} = P_{10} P_{01} = 1/4 = (1/2)^2$$

$$f_{11}^{(3)} = P_{10} P_{00} P_{01} = (1/2)^3 \;\ldots\; f_{11}^{(n)} = (1/2)^n, \quad n \geq 1.$$

Donc $f_{11}^{(n)} = \sum_{n\geq 1} n.(1/2)^n = 1/2 \sum_{n\geq 1} n\,(1/2)^{n-1} = \dfrac{1/2}{(1-1/2)^2} = 2 < \infty$

D'où l'état 1 est récurrent positif.

Remarque 2.2.

1- les états récurrents nuls ne peuvent exister que dans les chaînes infinies.

Théorème 2.4.

Une chaîne de Markov irréductible sur un espace d'état fini E admet une unique loi stationnaire π. Celle-ci est telle que, pour tout i dans E, on a

$$\pi_i = \frac{1}{\mu_i}$$

<u>Définition 2.13</u> (periodicité)

La période $d(i)$, d'un état i est le plus grand commun diviseur de l'ensemble des temps n tel que $P_{ii}^{n} > 0$.

$$d(i) = \text{pgcd}\{n \geq 1 / \; P_{ii}^{(n)} > 0\}$$

- Si $d(i) > 1$, On dit que l'état i est périodique, de période $d(i)$.

Lorsque $d(i) = 1$, On dit que l'état i est apériodique.

Lorsque tous les états d'une chaîne sont apériodiques, On dit que la chaîne est apériodique.

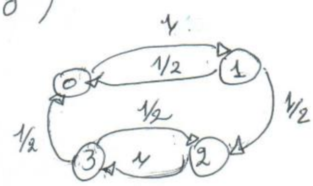
<u>Remarque 2.3</u> un état i tel que $P_{ii} > 0$ est nécessairement apériodique.

<u>Exemple 2.9</u>

On considère la chaîne de matrice de transition:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

On a le graphe suivant:



On a $d(0) = \text{Pgcd}\{n \geq 1, \; P_{00}^{(n)} > 0\}$

On voit que $P_{00}^{(1)} = 0$, $P_{00}^{(2)} > 0$, $P_{00}^{(3)} = 0$ et $P_{00}^{(4)} > 0$, $P_{00}^{(5)} > 0$, $P_{00}^{(6)} > 0$,

$$d(0) = \text{pgcd}\{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\} = 2$$

$$d(1) = \text{pgcd}\{n \geq 1, \; P_{11}^{(n)} > 0\} = \text{pgcd}\{2, 4, 6, 8, \dots\} = 2$$

$$d(2) = \text{pgcd}\{n \geq 1, \; P_{22}^{(n)} > 0\} = \text{pgcd}\{2, 4, 6, \dots\} = 2$$

$$d(3) = \text{pgcd}\{n \geq 1, \; P_{33}^{(n)} > 0\} = 2.$$

Définition 2.4 (ergodicité)

Un état récurrent positif apériodique est dit ergodique.

Théorème 2.5

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov ergodique. On a alors, pour tout j dans E :

$$P(X_n = j) \longrightarrow \pi_j = \frac{1}{\mu_j}, \text{ quand } n \to +\infty$$

En particulier, On a pour tout $i,j \in E$

$$P_{ij}^{(n)} \longrightarrow \pi_j, \text{ quand } n \to +\infty.$$

2.5 Chaînes de Markov absorbantes

Une chaîne de Markov est absorbante s'il existe, pour tout état absorbant atteignable depuis cet état.

2.5.1. Forme canonique de la matrice P

On donne une forme canonique à P en renumérotant les états : on place les états absorbants en premier, puis les états transitoires.

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ R & Q \end{pmatrix}$$

Avec r est le nombre des états absorbants, Q est une matrice de taille $(m-r)\times(m-r)$, R est une matrice de taille $(m-r)\times r$ et I est la matrice identité de taille r. m est la taille de la matrice P.

Proposition 2.3.

Soit P la matrice de transition d'une chaîne de Markov absorbante.

Alors :

i. $\lim\limits_{n\to\infty} Q^n = 0$

ii. La matrice $I - Q$ est inversible et son inverse vaut

$$(I-Q)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} Q^k$$

Notons $N = (I - Q)^{-1}$ la matrice fondamentale de la chaîne de Markov.

2.5.2 Temps moyen d'absorption

Le temps s'écoulant jusqu'à ce qu'un état absorbant soit atteint est

$$t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{m-r} \end{pmatrix} = N.c \quad \text{où } c = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.5.3- Probabilités d'absorption

Soit b_{iq} la probabilité d'atteindre l'état absorbant q si l'on part de i. Alors b_{iq} est l'élément iq de la matrice $B = N.R$

Exemple 2.10

Considérons une matrice de transition d'une chaîne de Markov avec espace d'états $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les états absorbants sont 1 et 5.

La matrice P s'écrira donc sous forme canonique.

$$P = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{array}\right)$$

Les matrices Q et R sont données par

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

La matrice fondamentale N est donnée par

$$N = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Les temps moyen d'absorption sont :

$$t = \begin{pmatrix} t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix} = N.c = (3, 4, 3)$$

et les probabilités d'absorption sont :

$$B = N.R = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$