Université Saad Dahlab Blida 1 **2019/2020**

Module : Probabilités

Série N°3 : Variables aléatoires

Exercice 1: L'oral d'un concours comporte au total 100 sujets; les candidats tirent au sort trois sujets et choisissent alors le sujet à traiter parmi ces trois sujets. Un candidat se présente en ayant révisé 60 sujets sur les 100.

1. Quelles est la probabilité pour que le candidat ait révisé:
   a. les trois sujets tirés;
   b. exactement deux sur les trois sujets;
   c. aucun des trois sujets.
2. Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre de sujets révisés parmi les sujets tirés.
   a. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance.
   b. Déterminer la fonction de répartition de probabilité de X.

Exercice 2 : On tire une à une et sans remise deux boules dans une urne contenant cinq boules numérotées de 1 à 5. Soit X la variable aléatoire indiquant le maximum des deux numéros tirés.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer E(X) et VAR(X).

Exercice 3 : (cours)

Une récente diplômée a l'intention de passer trois examens. Elle passera le premier en juin. Si elle réussit, elle passera le deuxième en juillet. Puis, si elle réussit cet examen, elle passera le dernier en septembre. En cas de non réussite, elle n'a pas le droit de passer l'examen suivant. La probabilité de réussir le premier examen est de 0,9. Si elle poursuit, la probabilité de réussir le deuxième est de 0,8. Si elle réussit au premier et au deuxième, la probabilité de réussir le troisième est 0,7.

1. Avec quelle probabilité, la candidate réussira-t-elle les trois examens.
2. Soit X la v.a qui compte le nombre d'examens réussit par la candidate.
   a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Calculer son espérance.

Exercice 4 : Un industriel doit vérifier l'état de marche de ses machines et remplacer certaines le cas échéant. D'après des statistiques précédentes, il évalue à 30% la probabilité pour une machine de tomber en panne en 5ans; parmi ces dernières, la probabilité de devenir hors d'usage suite à une panne plus grave est évaluée à 75%; cette probabilité est de 40% pour une machine n'ayant jamais eu de panne.

1. Quelle est la probabilité pour une machine donnée de plus de cinq ans d'être hors d'usage?
2. Quelle est la probabilité pour une machine hors d'usage de n'avoir jamais eu de panne auparavant?
3. Soit X la variable aléatoire "nombre de machines qui tombent en panne au bout de cinq ans, parmi trois machines choisies au hasard».
   Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance et sa variance.

Exercice 5 : Soit la fonction de densité de la variable aléatoire continue X

$$f(x) = \begin{cases} cx & 0 \leq x < 2 \\ c(4-x) & 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

1. Calculer la constante c.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Calculer P(X >1), P (1< X ≤ 3).
4. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 6 : (cours)

Soit X une variable aléatoire continue de fonction de répartition :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction de densité de X.
2. Calculer P(X > 2), P (-3 < X ≤ 4).

Module : probabilité

Série 3 : Corrigé.
Variables aléatoire.

Exo 1.

le nbre de cas possible : $|\Omega| = C^3_{100} = 161700$

1. a. Soit A : " le candidat a révisé le 3 sujets "

le nbre de cas favorables : $|A| = C^3_{60} = 34220$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{C^3_{60}}{C^3_{100}} \simeq 0,2116.$$

b. soit B : " le candidat a révisé exact 2 sur les 3 "

$$|B| = C^2_{60} \times C^1_{40} = 70800.$$

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{C^2_{60} \times C^1_{40}}{C^3_{100}} \simeq 0,437$$

c. soit C : " le candidat n'a pas révisé les 3 sujets "

$|C| = C^3_{40} = 9880$. donc $P(C) = \dfrac{C^3_{40}}{C^3_{100}} = 0,061$

2. soit X la v.a qui compte le nbre de sujets révisé parmi les 3 tirés.

$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ fini.

donc X est une v.a discrète.

a. La loi de probabilité de X.

- $P_X(0) = P(X=0) = P(C) = 0,061$.
- $P_X(1) = P(X=1) = \dfrac{C_{60}^1 \times C_{40}^2}{C_{100}^3} = 0,289$.
- $P_X(2) = P(X=2) = P(B) = 0,437$.
- $P_X(3) = P(X=3) = P(A) \simeq 0,212$.

Avec $\sum_{x \in X(\Omega)} P_X(x) = 1$.

x	0	1	2	3
$P_X(x)$	0,061	0,289	0,437	0,212

- L'espérance de X.

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\, P_X(x) = 0 \times 0,061 + 1 \times 0,289 + 2 \times 0,437 + 3 \times 0,212 \simeq 1,8$$

b. La fct de répartition de X

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0. \\ P_X(0) = 0,061 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ P_X(0) + P_X(1) = 0,35 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ P_X(0) + P_X(1) + P_X(2) = 0,787 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

Exo 3 :

On note les évènements :

R_i : " La candidate ~~réussit~~ réussit le $i^{ème}$ examen "
$\forall\, i = 1, 2, 3$.

les données : . $P(R_1) = 0,9$; $P(R_2/R_1) = 0,8$.

. $P(R_3/R_1 \cap R_2) = 0,7$.

1. $P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(R_1) \times P(R_2/R_1)\, P(R_3/R_1 \cap R_2)$

$= 0,9 \times 0,8 \times 0,7 = 0,504$.

2. Soit X la v.a qui compte le nbre d'examens réussit par la candidate.

le support de X est :

$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ fini

X est une v.a discrète.

a. la loi de probabilité de X.

- $P_X(0) = P(X=0) = P(\overline{R_1}) = 1 - P(R_1) = 0,1$.
- $P_X(1) = P(X=1) = P(R_1 \cap \overline{R_2}) = P(R_1)\, P(\overline{R_2}/R_1)$

$= 0,9 \times 0,2 = 0,18$

- $P_X(2) = P(X=2) = P(R_1 \cap R_2 \cap \overline{R_3}) = P(R_1)\, P(R_2/R_1)\, P(\overline{R_3}/R_1 \cap R_2)$

$= 0,9 \times 0,8 \times 0,3 = 0,216$

- $P_X(3) = P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = 0,504$.

Avec $\sum_{x \in X(\Omega)} P_X(x) = 1$.

x	0	1	2	3
$P_X(x)$	0,1	0,18	0,216	0,504

b. $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \, P_X(x)$.

$= 0 \times 0,1 + 1 \times 0,18 + 2 \times 0,216 + 3 \times 0,504$.

$= 2,12$. est le nombre moyen d'examens réussit.