Exercice 1:

1.Comme les $v.a.$ $X_1, X_2, ..., X_n$ sont indépendantes et de loi de Bernouli de parmètre p, alors la variable aléatoire S_n est de loi binomiale de paramètres n et p:

$$S_n \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p).$$

Sa loi est

$$P(S_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, k \in D_{S_n} = \{0,1,2,...,n\}.$$

Il est connu que

$$\mathbb{E}(S_n) = np \text{ et } var(S_n) = npq,$$

d'où, d'après l'inégalité de Tchebychev et en utilisant le fait que

$$\mathbb{E}\left(n^{-1}S_n\right) = p \text{ et } var\left(n^{-1}S_n\right) = \frac{pq}{n},$$

$$P\left(\left|n^{-1}S_n - p\right| > \delta\right) \leq \frac{var\left(n^{-1}S_n\right)}{\delta^2} = \frac{pq}{n\delta^2}.$$

Comme

$$pq - \frac{1}{4} = -p^2 + p - \frac{1}{4} = -\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0, \text{ alors } pq \leq \frac{1}{4},$$

d'où

$$P\left(\left|n^{-1}S_n - p\right| > \delta\right) \leq \frac{1}{4n\delta^2}.$$

2.Remarquons $B_n(p)$ est un polynôme. En effet,

$$B_n(p) = \mathbb{E}\left(f\left(n^{-1}S_n\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(n^{-1}k\right) P(S_n = k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) p^k (1-p)^{n-k},$$

qui est bien un polynôme de degrès n. On a, en utilisant les faits suivants

$$\Omega = \left\{\left|n^{-1}S_n - p\right| > \delta\right\} \cup \left\{\left|n^{-1}S_n - p\right| \leq \delta\right\} \text{ et } \left|f\left(n^{-1}S_n\right) - f(p)\right| \leq 2K$$

pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
|B_n(p) - f(p)| &= \left|\mathbb{E}\left(f\left(n^{-1}S_n\right) - f(p)\right)\right| \leq \mathbb{E}\left(\left|f\left(n^{-1}S_n\right) - f(p)\right|\right) \\
&\leq \mathbb{E}\left(\left|f\left(n^{-1}S_n\right) - f(p)\right|; \left|n^{-1}S_n - p\right| > \delta\right) \\
&\quad + \mathbb{E}\left(\left|f\left(n^{-1}S_n\right) - f(p)\right|; \left|n^{-1}S_n - p\right| \leq \delta\right) \\
&\leq 2KP\left(\left|n^{-1}S_n - p\right| > \delta\right) + \frac{\varepsilon}{2} P\left(\left|n^{-1}S_n - p\right| \leq \delta\right) \\
&\leq \frac{K}{2n\delta^2} + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{K}{n\delta^2} = 0$, alors $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{K}{n\delta^2} \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N_0$. Ainsi, pour tout $n \geq N_0$,

$$\sup_{p\in[0,1]} |B_n(p) - f(p)| \leq \varepsilon.$$

Remarque:

En fait, il s'agit d'une démonstration probabiliste du théorème de Stones-Wiestrass qui est bien connu en analyse, à savoir que toute fonction continue sur un compact peut être approchée uniformément par une suite de polynômes.

Exercice 2:

$X_N \rightsquigarrow \mathcal{H}(N,n,p)$ peut être décrit par un tirage sans remise de n boules d'une urne qui contient N boules, dont Np sont blanches et Nq sont noires. X_N est alors la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches parmi les n boules tirées. On a donc

$$P(X_N = k) = \frac{C_{Np}^k C_{Nq}^{n-k}}{C_N^n},\ k \in D_{X_N} = \{0, 1, ..., n\}.$$

Comme

$$C_{Np}^k = \frac{(Np)!}{k!\,(Np-k)!} = \frac{Np\,(Np-1)\ldots.(Np-k+1)}{k!} \sim \frac{(Np)^k}{k!}$$

car

$$\lim_{N\to\infty} \frac{Np\,(Np-1)\ldots.(Np-k+1)}{(Np)^k} = 1.$$

De même, on a

$$C_{Nq}^{n-k} \sim \frac{(Nq)^{n-k}}{(n-k)!} \text{ et } C_N^n \sim \frac{N^n}{n!},$$

d'où

$$P(X_N = k) \sim \frac{\frac{(Np)^k}{k!}\frac{(Nq)^{n-k}}{(n-k)!}}{\frac{N^n}{n!}} = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Cela signifie que

$$\lim_{N\to\infty} P(X_N = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \text{ pour tout } k \in \{0, 1, ..., n\},$$

d'où $X_N \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ de loi binomiale de paramètres n et p.

Remarque:

Cet exercice signifie qu'en pratique, on peut approximer une loi hypergéométrique par une loi binomiale, dans le cas où $N > 10n$.

Exercice 3:

Comme $D_{X_n} = \{0, 1, ..., n\} \subset \mathbb{N} = D_X$, alors il suffit de montrer que

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = P(X = k) \text{ pour tout } k \in \{0, 1, ..., n\}.$$

Comme $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda$, alors $p_n \sim \frac{\lambda}{n}$, d'où

$$
\begin{aligned}
P\left(X_n = k\right) &= C_n^k \left(p_n\right)^k \left(1 - p_n\right)^{n-k} \\
&\sim \frac{n!}{k!\left(n-k\right)!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&\sim \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n\left(n-1\right)...\left(n-k+1\right)}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n} \text{ car } \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \sim 1 \\
&\sim \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \text{ car } \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n} \sim e^{-\lambda},
\end{aligned}
$$

d'où $\lim_{n\to\infty} P\left(X_n = k\right) = P\left(X = k\right)$ pour tout $k \in \{0, 1, ..., n\}$. Ainsi $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ de loi de Poisson de paramètre λ.

Remarque:

Cet exercice signifie qu'en pratique, on peut approximer une loi binomiale par une loi de Poisson, dans le cas où $n \geq 30, p \leq 0,1$ et $np \leq 10$.