Université Saad Dahleb Blida1 **Mai 2018**

Maths/Module : Proba-L_2 / Durée : 1h30

Examen

Exercice 1: (5pts)

1. On considère deux événements A et B.
   a. Montrer que $P(A\cap\overline{B}) = P(A) - P(A\cap B)$.
   b. En déduire que si A et B sont indépendants alors A et $\overline{B}$ sont indépendants.
2. Soient X et Y deux v. a absolument continues, telles que $Y = a\,X + b.\ a, b \in R$.
   Montrer que $E(Y) = aE(X) + b\ et\ V(Y) = a^2V(X)$.

Exercice 2 : (6pts)

On dispose de cinq boules numérotées de 1 à 5. On les place au hasard dans six boites nommées A, B, C, D, E et F. Chaque boite peut recevoir jusqu'à 5 boules.

1. Quel est le nombre de rangements différents possibles ?
2. Quelle est la probabilité que :
   a. Toutes les boules soient dans des boites différentes.
   b. La boite A soit vide.
   c. Il y ait au moins une boule dans la boite A.
   d. Les boules numérotées 1 et 2 soient dans la même boite.
   e. La somme des numéros des boules placées dans la boite B soit égale à 6.

Exercice 3 : (9pts)

On dispose d'un dé équilibré dont une face porte le numéro 1, deux faces portent le numéro 2 et trois faces portent le numéro 3. On dispose également d'une urne contenant dix boules, portant les lettres L, O, G, A, R, I, T, H, M, E (soit quatre voyelles et six consonnes).

I. Un joueur fait une partie de jeu, il jette le dé et note le numéro obtenu.

• Si le dé indique 1, il tire au hasard une boule de l'urne. Il gagne la partie si cette boule porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.

• Si le dé indique 2, il tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces deux boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.

• Si le dé indique 3, il tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces trois boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.

On définit les événements suivants :

D1 : « le dé indique 1 » ; D2 : « le dé indique 2 » ;
D3 : « le dé indique 3 » ; G : « la partie est gagnée ».

1. Déterminer les probabilités :
   a. De gagner la partie sachant que le dé ait donné 1.
   b. De gagner la partie sachant que le dé ait donné 2.
   c. De gagner la partie sachant que le dé ait donné 3.
2. Représenter cette situation par un arbre pondéré.
3. Montrer alors que la probabilité de gagner la partie est égale à $\frac{23}{180} = 0{,}127$.
4. Un joueur a gagné la partie. Calculer la probabilité qu'il ait obtenu le numéro 1 avec le dé.

II. Un joueur fait six parties [à la fin de chaque partie, il remet dans l'urne la ou les boules tirée(s)]. On note X la variable aléatoire qui représente le nombre de parties gagnées.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. Donner l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire X.
3. Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux.
4. Quel est le nombre minimal de parties que doit le joueur faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,9 ?

<u>Bonne chance</u>

$2^{ième}$ Année Maths ; Module : Probabilité.

Corrigé examen.

Exo 1 (4,5 pts)

1\. a. $A = (A-B) \cup (A \cap B)$

Comme $(A-B)$ et $(A \cap B)$ sont disjoints, alors

01 $P(A) = P(A-B) + P(A \cap B)$

$\Rightarrow P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$; ou encore puisque

$(A-B)$ s'écrit $(A \cap \bar{B})$; $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$.

b. $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A) \times P(B) = P(A)[1 - P(B)]$

01 $= P(A) \times P(\bar{B})$, donc A et $\bar{B}$ sont indpts.

2\. • $E(Y) = E(aX+b) = \int_{\mathbb{R}} (ax+b) f(x)\, dx$.

01,5 $= \int_{\mathbb{R}} ax f(x)\, dx + \int_{\mathbb{R}} b f(x)\, dx$

$= a \int_{\mathbb{R}} x f(x)\, dx + b \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = aE(X) + b$

• $V(Y) = E[(Y - E(Y))^2] = E[(aX + b - aE(X) - b)^2]$

01,5 $= E[(aX - aE(X))^2] = E[a^2(X - E(X))^2]$.

$= a^2 E[(X - E(X))^2] = a^2 V(X)$.

Exo 2 : (6 pts)

0,5 1. $|\Omega| = L_6^5 = 6^5 = 7776.$

1 2. a. $A_6^5 / L_6^5 = \dfrac{6!}{6^5} = \dfrac{720}{7776} = 0{,}092.$

1 b. $L_5^5 / L_6^5 = \dfrac{5^5}{6^5} = \dfrac{3125}{7776} = 0{,}401$

1 c. $1 - \dfrac{5^5}{6^5} = 0{,}599$

d. Il y'a 6 choix pour la boîte qui contiendra {1,2

0/1 $6 \times L_6^3 / L_6^5 = \dfrac{6 \times 6^3}{6^5} = 1/6.$

e. 1 et 5 dans B $\rightarrow L_5^3 = 5^3$

0/1,5 ou 3, 2 et 1 " $\rightarrow L_5^2 = 5^2$

ou 4 et 2 " $\rightarrow L_5^3 = 5^3$

$L_5^3 + L_5^2 + L_5^3 / L_6^5 = \dfrac{2 \times 5^3 + 5^2}{6^5} = \dfrac{275}{7776} = 0{,}035$

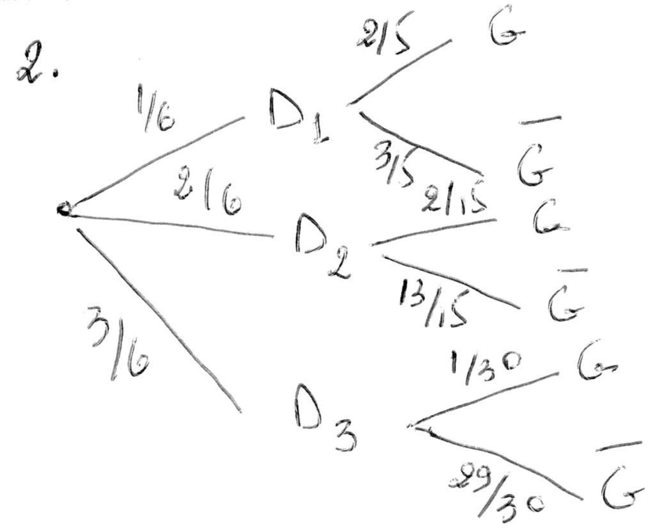
Exo 3 (9,5 pts)

0/1 1. a. $P(G|D_1) = \dfrac{4}{10} = 2/5$

0/1 b. $P(G|D_2) = \dfrac{C_4^2}{C_{10}^2} = \dfrac{6}{45} = \dfrac{2}{15}$

0/1 c. $P(G|D_3) = \dfrac{C_4^3}{C_{10}^3} = \dfrac{4}{120} = \dfrac{1}{30}$

2.



0,75

3. $P(G) = P(G\cap D_1) + P(G\cap D_2) + P(G\cap D_3)$.

01 $\quad = P(D_1)P(G/D_1) + P(D_2)P(G/D_2) + P(D_3)P(G/D_3)$

$= \frac{1}{6}\times\frac{2}{5} + \frac{2}{6}\times\frac{2}{15} + \frac{3}{6}\times\frac{1}{30} = \frac{23}{180}$.

4. $P(D_1|G) = \dfrac{P(D_1\cap G)}{P(G)} = \dfrac{P(D_1)P(G/D_1)}{P(G)} = \dfrac{\frac{1}{6}\times\frac{2}{5}}{\frac{23}{180}} = \dfrac{12}{23}$.

0,75

II. Six expérience identiq-e et indépendants sont effectuées.

$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si la partie est gagnée} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad i = \overline{1,6}$

0,5

$P(Y_i = 1) = \frac{23}{180}$ et $P(Y_i = 0) = \frac{157}{180}$.

$Y_i \sim B(\frac{23}{180})$

la v.a $X = \sum_{i=1}^{6} Y_i$ suit alors une loi binomiale

01 de paramètre $n = 6$ et $p = \frac{23}{180}$. ; $X \sim B(6, \frac{23}{18}$

$P_X(x) = C_6^x \left(\frac{23}{180}\right)^x \left(\frac{157}{180}\right)^{6-x} \quad \forall x \in \{0, 1, -$

2. $E(X) = np = 0,76$ 0,5

$V(X) = np(1-p) = 0,67$ 0,5

3. $p(X=2) = C_6^2 \left(\frac{23}{180}\right)^2 \left(\frac{157}{180}\right)^4 = 0,0014$. 0,5

4. la probabilité de gagner au moins une partie est $p(X \geq 1) = 1 - p(X=0) = 1 - \left(\frac{157}{180}\right)^n$

$p(X \geq 1) \geq 0,9 \iff 1 - \left(\frac{157}{180}\right)^n \geq 0,9$. 01

$\iff \left(\frac{157}{180}\right)^n \leq 0,1 \iff n \geq 17$.