U.H.B.C Chlef
Dpt Maths
15/16

Processus Stochastiques 2

Master 1
MA.S.

# Série d'exos #3

"Temps d'arrêt – Th^m d'arrêt – Inégalités maximales"

**Exo1** Dans tous les exos, supposons que $(\Omega, (\mathcal{F}_n)_n, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité filtré.

- Soient $\tau$ et $\sigma$ deux $(\mathcal{F}_n)_n$ - temps d'arrêt.
- Montrer que
  (a) Si $\tau \equiv k \in \mathbb{N}$ alors $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_k$.
  (b) $\tau \wedge \sigma$, $\tau \vee \sigma$, $\sigma + \tau$ sont des $(\mathcal{F}_n)$- t.a.
  (c) Si $\tau \leq \sigma$ alors $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\sigma$
  (d) $\mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma} = \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$
  (e) $\{\tau < \sigma\} \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$ et $\{\tau = \sigma\} \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$.

**Exo2** Soient $(X_n)_n$ et $(Y_n)_n$ deux surmartingales (resp. martingales) et $\tau$ un temps d'arrêt tel que : $X_\tau \leq Y_\tau$ (resp. $X_\tau = Y_\tau$) p.s sur $\{\tau < +\infty\}$.

Soit.
$$Z_n := Y_n \mathbb{1}_{\{n<\tau\}} + X_n \mathbb{1}_{\{\tau \leq n\}}$$

- Montrer que $(Z_n)_n$ est une surmartingale (resp. martingale).

**Exo3** Soit $(X_n)_n$ ~~est~~ une martingale et $\tau$ un temps d'arrêt tels que :
(i) $\tau < \infty$ p.s , (ii) $X_\tau \in L^1$ et (iii) $\mathbb{E}|X_n| \mathbb{1}_{\{\tau > n\}} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$

Montrer que :
(a) $\mathbb{E}|X_\tau| \mathbb{1}_{\{\tau > n\}} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$ ; (b) $\mathbb{E}|X_{\tau \wedge n} - X_\tau| \xrightarrow{n \to +\infty} 0$ ; (c) $\mathbb{E} X_\tau = \mathbb{E} X_0$.

**Exo4** (Une réciproque du Th^m d'arrêt)
Soit $(X_n)$ un processus intégrable adapté
Montrer que si l'on a $\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0)$ pour tout temps d'arrêt borné $\tau$, alors $(X_n)_n$ est une martingale.

**Exo 5** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$.

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ avec : $a < 0 < b$ et soient :

$\tau_a = \inf\{n \geq 0 : X_n = a\}$ ; $\tau_b = \inf\{n \geq 0 : X_n = b\}$ et $\tau_{a,b} = \tau_a \wedge \tau_b$.

Soit $A = \{\tau_{a,b} = \tau_a\}$ l'évènement où X atteint "a" avant "b".

- Le but de cet exercice est de calculer $\mathbb{P}(A)$.

1) Montrer que $\limsup\limits_{n\to+\infty} X_n = +\infty$

2) Montrer que $(X_n^{\tau_{a,b}}) = (X_{n\wedge\tau_{a,b}})$ est une martingale.

3) Montrer que $|X_n^{\tau_{a,b}}| < b - a$.

4) Par le Thm de la convergence dominée, montrer que : $\mathbb{E}(X_n^{\tau_{a,b}}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(X_{\tau_{a,b}})$.

5) Ecrire $\mathbb{E}(X_{\tau_{a,b}})$ en fonction de $a$, $b$. et $\mathbb{P}(\tau_{a,b} = \tau_a)$.

6) En déduire $\mathbb{P}(A)$.

**Exo 6** Soient $Y_1, Y_2, \ldots$ des v.a. i.i.d telles que $\mathbb{E}(Y_m) = 0$, et soit la martingale $X_n = \sum_{m=1}^{n} Y_m$. On se donne $\lambda > 0$, et soit

$$P_n(\lambda) = \mathbb{P}\left\{\max_{1\leq m\leq n} |X_m| \geq \lambda\right\}.$$

1. On suppose que les $Y_m \in L^2$. Donner une majoration de $P_n(\lambda)$ en appliquant l'inégalité de Doob à $X_n^2$.
2. Améliorer la borne prédente en appliquant l'inégalité de Doob à $(X_n + c)^2$ et en optimisant sur $c$.
3. On suppose que $Y_m \sim N(0,1)$. Majorer $P_n(\lambda)$ en appliquant l'inégalité de Doob à $e^{cX_n^2}$ et en optimisant sur $c$.
4. Pour les $Y_m$ normales centrées réduites, majorer $\mathbb{P}\{\max\limits_{1\leq m\leq n} X_m \geq \lambda\}$ en appliquant l'inégalité de Doob à $e^{cX_n}$ et en optimisant sur $c$.

Processus stochastiques 2.

Corrigé des exos de la série n° 3

$\boxed{\text{Exo 1}}$ (a) $\{\tau \leq n\} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } k > n \\ \Omega & \text{si } k \leq n. \end{cases}$

On sait que : $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{n\geq 1} \mathcal{F}_n\right)$

D'où : $\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \in \mathcal{F}_n \text{ pour } \forall\, n \geq k\} = \bigcap_{n \geq k} \mathcal{F}_n = \mathcal{F}_k$.

(b) Si $n \in \mathbb{N}$. On a :

- $\{\tau \wedge \sigma \leq n\} = \{\underbrace{\tau \leq n}_{t.a}\} \cup \{\underbrace{\sigma \leq n}_{t.a.}\} \in \mathcal{F}_n$.

de même : • $\{\tau \vee \sigma \leq n\} = \{\tau \leq n\} \cap \{\sigma \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.

- $\{\tau + \sigma \leq n\} = \bigcup_{m=0}^{n} \left[\{\tau \leq m\} \cap \{\sigma \leq n-m\}\right] \in \mathcal{F}_n$.

Remarque : On peut le démontrer en utilisant l'égalité $\{\tau = n\}$.

(c) Si $\boxed{A \in \mathcal{F}_\tau}$ et $n \geq 0$. On a : $A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.

et comme $\tau \leq \sigma$, on a : $\{\sigma \leq n\} \subseteq \{\tau \leq n\}$. Par conséquent :

$$A \cap \{\sigma \leq n\} = \underbrace{A \cap \{\tau \leq n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{\sigma \leq n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n \Rightarrow \boxed{A \in \mathcal{F}_\sigma}.$$

D'où : $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\sigma$.

(d) D'après (b) et (c) : $\mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma} \subset \mathcal{F}_\tau$ et $\mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma} \subset \mathcal{F}_\sigma$

$$\therefore\ \mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma} \subset \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma.$$

Le contraire : Si $A \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_\infty$.

On sait que : $\{\tau \wedge \sigma \leq n\} = \{\tau \leq n\} \cup \{\sigma \leq n\}$

Alors : $A \cap \{\tau \wedge \sigma \leq n\} = A \cap \left[\{\tau \leq n\} \cup \{\sigma \leq n\}\right]$

$$= \underbrace{\left[A \cap \{\tau \leq n\}\right]}_{A \in \mathcal{F}_\tau} \cup \underbrace{\left[A \cap \{\sigma \leq n\}\right]}_{A \in \mathcal{F}_\sigma} \in \mathcal{F}_n.$$

(e) (i) Si $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\{\tau < \sigma\} \cap \{\tau \leq n\} = \bigcup_{m=0}^{n} \left[\{\tau = m\} \cap \{\sigma > m\}\right]$$

Mais pour $\forall\, m \in \{0, 1, \dots, n\}$, on a :

$$\{\tau = m\} = \underbrace{\{\tau \leq m\} \cap \{\tau \leq m-1\}^c}_{\text{t.a. discret.}} \in \mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}_n.$$

et $\{\sigma > m\} = \{\sigma \leq m\}^c \in \mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}_n$.

ou

Il s'en suit que : $\{\tau < \sigma\} \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n$.

$$\Rightarrow \boxed{\{\tau < \sigma\} \in \mathcal{F}_\tau}.$$

Par la m. procédure, on montre que :

$$\{\tau < \sigma\} \cap \{\sigma \leq n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n$$

c.à.d. $\boxed{\{\tau < \sigma\} \in \mathcal{F}_\sigma}$

Conclusion : $\{\tau < \sigma\} \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$.

(ii) $\{\tau = \sigma\} = \{\tau < \sigma\}^c \cap \{\sigma < \tau\}^c \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$. (d'après e(i)).

**Exo2** Notons que : $|Z_n| \leq |X_n| + |Y_n|$ $\forall n \geq 1$.

D'où $Z_n \in L^1$.

de plus $(Z_n)$ : $(\mathcal{F}_n)$-adapté car somme de processus $(\mathcal{F}_n)$-adaptés.

On a : $Y_{n+1} = Y_\tau \geq X_\tau = X_{n+1}$ p.s sur $\{\tau = n+1\}$. ($\tau$ : fini)

D'où : $Z_{n+1} = Y_{n+1} \mathbb{1}_{\{n+1<\tau\}} + X_{n+1} \mathbb{1}_{\{\tau \leq n+1\}}$

$$\leq Y_{n+1} \mathbb{1}_{\{n+1<\tau\}} + Y_{n+1} \mathbb{1}_{\{n+1=\tau\}} + X_{n+1} \mathbb{1}_{\{\tau \leq n\}}$$

$$= Y_{n+1} \mathbb{1}_{\underbrace{\{n<\tau\}}_{\in \mathcal{F}_n}} + X_{n+1} \mathbb{1}_{\underbrace{\{\tau \leq n\}}_{\in \mathcal{F}_n}}$$

Introduisons l'espérance conditionnelle :

$$\mathbb{E}(Z_{n+1}/\mathcal{F}_n) \leq \mathbb{1}_{\{n<\tau\}} \mathbb{E}(Y_{n+1}/\mathcal{F}_n) + \mathbb{1}_{\{\tau \leq n\}} \mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n)$$

$$\leq Y_n \mathbb{1}_{\{n<\tau\}} + X_n \mathbb{1}_{\{\tau \leq n\}} = Z_n \text{ p.s.}$$

Donc : $(Z_n)$ : $(\mathcal{F}_n)$- surmart.

* La m. chose pour le cas de martingale (remplacer $\leq$ par $=$).

**Exo3** (a) Comme $\tau < +\infty$ et $|X_\tau| < +\infty$ p.s,

On a : $|X_\tau| \mathbb{1}_{\{\tau > n\}} \longrightarrow 0$ p.s.

et $|X_\tau| \mathbb{1}_{\{\tau > n\}} \leq |X_\tau|$ et $X_\tau \in L^1$

En appliquant le Th$^{m}$ de la cvge ~~monotone~~ dominée on obtient : $\mathbb{E}|X_\tau| \mathbb{1}_{\{\tau > n\}} \longrightarrow 0$

(b) D'après les hypothèses et la partie (a), on a :

$$\mathbb{E}|\underbrace{X_{\tau\wedge n} - X_\tau}_{\substack{(X_{\tau\wedge n}-X_\tau)\mathbb{1}_{\{\tau>n\}}+ \\ (X_{\tau\wedge n}-X_\tau)\mathbb{1}_{\{\tau\leq n\}}}}| = \mathbb{E}|X_n - X_\tau| \mathbb{1}_{\{\tau > n\}} + \underbrace{\mathbb{E}|X_\tau - X_\tau| \mathbb{1}_{\{\tau \leq n\}}}_{=0}$$

$$\leq \mathbb{E}|X_n| \mathbb{1}_{\{\tau > n\}} + \mathbb{E}|X_\tau| \mathbb{1}_{\{\tau > n\}} \longrightarrow 0.$$

(c) Comme $\tau \wedge n$ est un t.a. borné, ? par le théorème d'arrêt : $\mathbb{E}(X_{\tau\wedge n}) = \mathbb{E} X_0$ [On peut utiliser la mart. arrêtée]

Alors : $|\mathbb{E}X_\tau - \mathbb{E}X_0| = |\mathbb{E}X_\tau - \mathbb{E}X_{\tau\wedge n}|$

$$\leq \mathbb{E}|X_\tau - X_{\tau\wedge n}| \longrightarrow 0$$

D'où : $\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_0$.

$\boxed{\text{Exo 4}}$ On remarque que $\mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X_0$ pour $\forall n \geq 0$ (t.a. constant).

De plus, pour $n \geq 0$, et $A \in \mathcal{F}_n$, on considère :

$$\tau = n \mathbb{1}_A + (n+1) \mathbb{1}_{A^c}$$

$\tau$ est un t.a, En effet :

$$\{\tau \leq k\} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } 0 \leq k \leq n-1 \\ A & \text{si } k = n \\ \Omega & \text{si } k \geq n+1 \end{cases} \in \mathcal{F}_n.$$

de plus : $|\tau| \leq 2n+1$ donc borné. $(\in L^1)$.

Donc : $\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}(X_n 1\!\!1_A) + \mathbb{E}(X_{n+1} 1\!\!1_{A^c}) = \mathbb{E}(X_{n+1})$

ce qui implique que : $\mathbb{E}(X_n 1\!\!1_A) = \mathbb{E}(X_{n+1} 1\!\!1_A) \quad \forall A \in \mathcal{F}_n$.

d'où : $\boxed{\mathbb{E}(X_{n+1} / \mathcal{F}_n) = X_n}$

Exos (1) $(X_n)$ : chaine de markov récurrente de $\mathbb{Z}$

donc tous les états seront visités

$\Rightarrow$ $X_n$ n'est pas bornée

$\Rightarrow$ $\limsup_\infty X_n = +\infty$, $\liminf_\infty X_n = -\infty$

(2) Il suffit de voir que $\tau_{a,b} = \tau_a \wedge \tau_b$ est un t.a.

(voir exo 1)

et on sait que la martingale arrêtée est une martingale.

(3) $X_{n\wedge\tau_{a,b}} = X_{n\wedge\tau_a\wedge\tau_b} = \begin{cases} X_{n\wedge\tau_a} & \text{si } \tau_a \leq \tau_b \\ X_{n\wedge\tau_b} & \text{si } \tau_b \leq \tau_a \end{cases}$

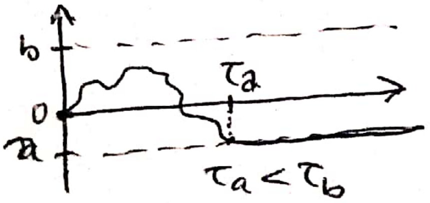
et on sait que $X_0 = 0$ (marche aléatoire) -- 1

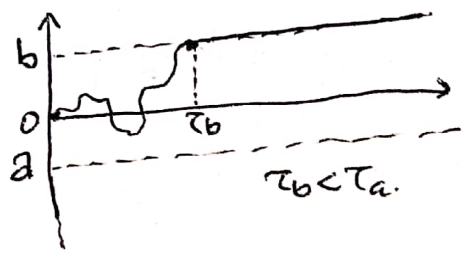
D'où : si $\tau_a < \tau_b$ : une fois le processus atteint "a" - 2

il garde la valeur a.

de même si $\tau_b < \tau_a$ : il garde la valeur "b" après $\tau_b$ - 3

de 1, 2 et 3 $|X_{n\wedge\tau_{a,b}}| < b-a$.



4) Notons que $\tau_a < \infty$ et $\tau_b < \infty$ (chaîne de Markov récurrente)

alors : $\tau_{a,b} \wedge n \longrightarrow \tau_{a,b}$ p.s.

ce qui entraîne : $X_{\tau_{a,b} \wedge n} \longrightarrow X_{\tau_{a,b}}$ p.s

et ~~$X_{\tau_{a,b}} \in L^1$~~ $|X_{\tau_{a,b} \wedge n}| \leq b-a = Y \in L^1$.

Par le Th$^{m}$ de la cvgce dominée :

$$\mathbb{E}|X_n^{\tau_{a,b}}| \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathbb{E}(X_{\tau_{a,b}})$$

5) $X_{\tau_{a,b}} = \begin{cases} a & \text{si } \tau_{a,b} = \tau_a \\ b & \text{si } \tau_{a,b} = \tau_b \end{cases}$

D'où : $\mathbb{E}X_{\tau_{a,b}} = a.\mathbb{P}(\tau_{a,b} = \tau_a) + b\,\mathbb{P}(\tau_{a,b} = \tau_b)$

$= b + (a-b)\,\mathbb{P}(\tau_{a,b} = \tau_a)$ [car la somme des proba $= 1$]

6) On sait que $(X_n^{\tau_{a,b}})_n$ est une martingale

d'où $\mathbb{E}(X_n^{\tau_{a,b}}) = \mathbb{E}(X_0) = 0$ (marche aléatoire $X_0 = 0$ p.s.

On a :

$$0 = \lim_{n \to \infty} \mathbb{E}(X_n^{\tau_{a,b}}) \overset{4)}{=} \mathbb{E}(X_{\tau_{a,b}}) = b + (a-b)\,\mathbb{P}(A).$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{b}{b-a}}$$

$\boxed{\text{Exo 6}}$ 1) $\boxed{P_n(\lambda) \leq \frac{n\sigma^2}{\lambda^2}}$ ; 2) $\boxed{P_n(\lambda) \leq \frac{n\sigma^2 + c^2}{(\lambda+c)^2}}$ minimale pour $\boxed{c = \frac{n\sigma^2}{\lambda}}$

3) $P_n(\lambda) \leq \frac{e^{-c\lambda^2}}{\sqrt{1-2nc}}$ minimale pour $\boxed{c = (1 - \frac{n}{\lambda^2})/2n}$. 4) La borne est $\boxed{e^{\frac{1}{2}c^2 n - c\lambda}}$ minimale pour : $\boxed{c = \frac{\lambda}{n}}$