Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Université Hassiba Benbouali de Chlef
Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة حسيبة بن بوعلي بالشلف
كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي

قسم الرياضيات

Année Universitaire : 2017/2018
Niveau : $2^{ème}$ *Année M.A.S.*
Module : *ProcessusStochastiques* 3

Examen de T.D

I)

1. Trouver $\int_0^t B(s)dB(s)$ où $\{B(s),\ s \in [0,t]\}$ est un mouvement brownien standard .

2. Calculer la variance des intégrales:

$$\int_0^t |B(s)|^{1/2}\, dB(s) \text{ et } \int_0^t (B(s)+s)^2\, dB(s)$$

.

3. Montrer que $\int_0^t B^2(s)dB(s) = \frac{1}{3}B^3(t) - \int_0^t B(s)ds.$

II) Soit le processus $\{X(t),\ t \in \mathbb{R}_+\}$ une solution forte de l'E.D.S.:

$$dX(t) = [\mu_1 X(t) + \mu_2]\, dt + [\sigma_1 X(t) + \sigma_2]\, dB(t), X_0 = 0, t \in \mathbb{R}_+$$

1. Trouver une forme explicite de $X(t)$.

2. Soit $S(t) = Exp[(\mu_1 - \frac{\sigma_1^2}{2})t + \sigma_1 B(t)]$ où B est le même mouvement brownien standard écrit dans l'équation de X.

   (a) Prouver que le processus $\{S(t),\, t \in \mathbb{R}_+\}$ est une solution forte de l'E.D.S.:

   $$dS(t) = \mu_1 S(t)dt + \sigma_1 S(t)dB(t), t \in \mathbb{R}_+$$

   (b) Trouver une E.D.S. satisfaite par le processus $\{S^{-1}(t),\, t \in \mathbb{R}_+\}$.

3. Montrer que:

$$d\left[X(t)S^{-1}(t)\right] = S^{-1}(t)\left[(\mu_2 - \sigma_1\sigma_2)dt + \sigma_2 dB(t)\right]$$