3.7 Exercices

Exercice 3.3. *Montrer qu'un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$, muni de sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$, est une martingale si et seulement si pour tout $s,t \in \mathbb{T}$, $s \le t$ et tout $A \in \mathcal{F}_s$,*

$$\int_A X_s dP = \int_A X_t dP.$$

Exercice 3.4. *Soit $(X_t)_{t\ge 0}$ une martingale à temps continu relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$. Démontrer que si $s \le t$:*

$$E\left[(X_t - X_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] = E\left[(X_t^2 - X_s^2) \mid \mathcal{F}_s\right]$$

Exercice 3.5. *Soit $\{N(t)\}_{t\ge 0}$ un processus de Poisson de taux λ et $(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$ la filtration naturelle associée. Montrer que le processus $Y(t) = \exp\{\alpha N(t) - \lambda t(e^\alpha - 1)\}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et α un paramètre réel, est une martingale.*

Exercice 3.6. *Soit τ_1 et τ_2 deux temps d'arrêt relativement à la filtration $\mathcal{F}_n$. Montrer que $\tau_1+\tau_2$, $\tau_1 \vee \tau_2 = \sup\{\tau_1, \tau_2\}$ et $\tau_1 \wedge \tau_2$ sont des temps d'arrêt.*

Exercice 3.7. *Montrer que pour $s < t$ et $A \in \mathcal{F}_s$, $\tau = s\mathbf{1}_A + t\mathbf{1}_{A^c}$ est un temps d'arrêt.*

Exercice 3.8. *Soit τ un temps d'arrêt relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ $\forall t \ge 0$.*
1/ Montrer que $\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}, \forall t \ge 0, A \cap \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t\}$ est une tribu.
2/ Démontrer que τ est $\mathcal{F}_\tau$ mesurable.
3/ Soit τ_1 et τ_2 deux temps d'arrêt, tels que $\tau_1 \le \tau_2$ (p.s). Montrer que $\mathcal{F}_{\tau_1} \subset \mathcal{F}_{\tau_2}$.
4/ Soit $\{X(t), t \ge 0\}$ une martingale continue relativement à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge 0}$. On suppose que τ est borné p.s. Montrer que $\{X(t\wedge\tau), t \ge 0\}$ est une martingale.

Exercice 3.9. *Soit $(M_t, t \ge 0)$ une $(\mathcal{F}_t)$-martingale et τ un temps d'arrêt borné prenant ses valeurs dans un ensemble dénombrable. Soit Y une variable aléatoire bornée $\mathcal{F}_\tau$ mesurable. Soit $N_t = Y(M_t - M_{t\wedge\tau})$. Montrer que $(N_t)_{t\ge 0}$ est une martingale.*

Exercice 3.10. *Considérons l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sur lequel sont construites deux filtrations $(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$ et $(\mathcal{G}_t)_{t\ge 0}$ satisfaisant $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{G}_t$.*
1) Soit $\mathbf{M} = (M_t)_{t\ge 0}$ une $\mathcal{F}_t$-martingale (martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$) et soit $\mathbf{N} = (N_t)_{t\ge 0}$ une $\mathcal{G}_t$-martingale . Est-ce que $\mathbf{M}$ est une $\mathcal{G}_t$-martingale ? Est-ce que $\mathbf{N}$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale ? Justifiez vos réponses.
2) Soit T un $\mathcal{F}_t$-temps d'arrêt (temps d'arrêt par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$) et S un $\mathcal{G}_t$-temps d'arrêt. Est-ce que S est un $\mathcal{F}_t$-temps d'arrêt ? Est-ce que T est un $\mathcal{G}_t$-temps d'arrêt ? Justifiez vos réponses.

Exercice 3.11. *Soit $T > 0$ un nombre réel. Pour $0 = t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} < \ldots$ et $i = 1, \ldots, n, \ldots$ soit ϕ_i des fonctions bornées $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurables et ϕ_0 une fonction bornée $\mathcal{F}_0$-mesurable. On définit le processus élémentaire $X(t,\omega) = \phi_0(\omega)\mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^\infty \phi_i(\omega)\mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(t)$. Montrer que $(X(t))_{t\ge 0}$ est progressivement mesurable.*

Exercice 3.12. *Deux joueurs jouent à un jeu équitable. On note Z_n le résultat de la $n^{\text{ième}}$ partie pour le premier joueur. Les Z_n sont indépendantes et : $P(Z_n = +1) = P(Z_n = -1) = 1/2$. On note $\mathcal{F}_n$ la filtration engendrée par les résultats des n premières parties, et X_n la fortune du premier joueur après la $n^{\text{ième}}$ partie. Sa fortune initiale est fixée : $X_0 = a$. pour tout $n \ge 1$, on a donc :*

$X_n = a + Z_1 + ... + Z_n$. *Le second joueur a une fortune initiale fixée à* b *et la partie se termine par la ruine de l'un des deux joueurs. On définit donc :* $T = \min\{n,\ X_n = 0 \text{ ou } X_n = a+b\}$.
1/ *Montrer que* $(X_n)_n$ *est une martingale et que* T *est un temps d'arrêt, relativement à* $(\mathcal{F}_n)$.
2/ *Montrer que :* $P(T > n) \leq P(0 < X_n < a+b)$. *Déduire du théorème de la limite centrale que* $P(T > n)$ *tend vers* 0, *puis que* T *est fini.*
3/ *Déduire du théorème d'arrêt que :* $P(X_T = 0) = \dfrac{b}{a+b}$ *et* $P(X_T = a+b) = \dfrac{a}{a+b}$.
4/ *Montrer que* $E(X_T^2) - E(T) = a^2$. *Conclure que* $E(T) = ab$.
5/ *Observons que pour tout réel* λ : $E\left[e^{\lambda Z_n}\right] = \frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2} = \cosh(\lambda)$. *Pour tout* $n \geq 0$, *on pose* $Y_n(\lambda) = \exp(\lambda X_n)(\cosh(\lambda))^{-n}$. *Montrer que* $(Y_n(\lambda))_n$ *est une martingale.*
6/ *Déduire du théorème d'arrêt que :* $E\left[(\cosh(\lambda))^{-T}\left(I_0(X_T) + e^{\lambda(a+b)} I_{a+b}(X_T)\right)\right] = e^{\lambda a}$.

Exercice 3.13. *Soit* $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de v.a. indépendantes et de même loi donnée par :* $P(X_1 = +1) = p$, $P(X_1 = -1) = q = 1-p$. *On pose* $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ *pour* $n \geq 1$, *et* $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$
1/ *Montrer que* $Z_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$ *est une martingale par rapport à* $\mathcal{F}_n$.
2/ *Déduire de l'inégalité maximale que :* $P\left(\sup_{n\geq 0} S_n \geq k\right) \leq \left(\frac{p}{q}\right)^k$ *et que, lorsque* $q > p$

$$E\left(\sup_{n\geq 0} S_n\right) \leq \frac{p}{q-p}.$$

Exercice 3.14. *Soit* $(M(t))_{t\geq 0}$ *une martingale positive continue issue de* $a > 0$ $(M(0) = a)$ *et telle que :* $\lim_{t\to\infty} M(t) = 0$ *(p.s.). En introduisant le temps d'arrêt* $T_x = \inf\{t \geq 0,\ M(t) \geq x\}$, *montrer que* $S = \sup\{M(t);\ t \geq 0\}$ *suit la même loi que* $\frac{a}{U}$ *avec* U *une variable aléatoire uniforme sur* $]0,1[$.

Exercice 3.15. *A la date* 0, *une urne contient une boule blanche et une boule noire. A la date* 1, *on prélève une boule, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne avec une boule supplémentaire de même couleur. on itère cette opération aux dates* $2, 3, \ldots$. *Soit* B_n , $n \geq 0$ *le nombre de boules blanches dans l'urne après la* $n^{\text{ème}}$ *opération.*
1/ Montrer que la suite : $X_n = \dfrac{B_n}{n+2}$ *est une martingale relativement à* $\mathcal{F}_n = \sigma(B_1, \ldots, B_n)$.
2/ Montrer que le rapport du nombre de boules blanches au nombre de boules noires converge p.s. vers une limite.

3.8 Corrigés des Exercices

Corrigé 3.3

Pour une martingale on a pour tout $s \leq t$

$$E(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s \text{ p.s.} \tag{3.39}$$

et d'après la définition de l'espérance conditionnelle pour tout $A \in \mathcal{F}_s$

$$\int_A E(X_t \mid \mathcal{F}_s) dP = \int_A X_t dP. \tag{3.40}$$

Ainsi d'après (3.39)

$$\int_A E(X_t \mid \mathcal{F}_s) dP = \int_A X_s dP = \int_A X_t dP.$$

Maintenant si pour tout $s, t \in \mathbb{T}$, $s \leq t$ et tout $A \in \mathcal{F}_s$,

$$\int_A X_s dP = \int_A X_t dP.$$

et d'après (3.40) on a

$$\int_A E(X_t \mid \mathcal{F}_s) dP = \int_A X_s dP. \tag{3.41}$$

La conclusion vient du Lemme 2.1.

Corrigé 3.6

1/ Montrons que $\{\tau_1 + \tau_2 > t\} \in \mathcal{F}_t$. On a

$$\underbrace{\{\tau_1 + \tau_2 > t\}}_{CG} = \underbrace{\left(\bigcup_{\substack{r, s \in \mathbb{Q}^+, r+s > t \\ r \leq t, s \leq t}} \{\tau_1 > r\} \cap \{\tau_2 > s\} \right) \cup \{\tau_1 > t\} \cup \{\tau_2 > t\}}_{CD} \tag{3.42}$$

L'inclusion $CD \subset CG$ est triviale. Il reste à montrer que $CG \subset CD$ pour conclure que $\{\tau_1 + \tau_2 > t\} \in \mathcal{F}_t$. Pour $\omega \in CG$, si $\tau_1(\omega) = 0$ ou $\tau_2(\omega) = 0$, alors $\omega \in \{\tau_1 > t\} \cup \{\tau_2 > t\} \subset CD$. Autrement, on a $\tau_1(\omega) + \tau_2(\omega) > t$, $\tau_1(\omega) > 0$, $\tau_2(\omega) > 0$. Dans ce cas, on peut toujours trouver deux nombres rationnels r, s tels que $r + s > t$, $r \leq t$, $s \leq t$, $\tau_1(\omega) > r \geq 0$, $\tau_2(\omega) > s \geq 0$. Alors $\omega \in \{\tau_1 > r\} \cap \{\tau_2 > s\} \subset CD$. Cela complète la preuve que $CG = CD = \{\tau_1 + \tau_2 > t\} \in \mathcal{F}_t$ Il s'ensuit que $\{\tau_1 + \tau_2 \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, i.e. $\tau_1 + \tau_2$ est une temps d'arrêt relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

2/

$$\{\tau_1 \vee \tau_2 \leq t\} = \{\tau_1 \leq t\} \cap \{\tau_2 \leq t\} \in \mathcal{F}_t. \tag{3.43}$$

$$\{\tau_1 \wedge \tau_2 > t\} = \{\tau_1 > t\} \cap \{\tau_2 > t\} \in \mathcal{F}_t. \tag{3.44}$$

Corrigé 3.8

2/ Montrons que τ est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable.
Il faut donc montrer que pour tout borélien B on a $\tau^{-1}(B) \in \mathcal{F}_\tau$. C'est à dire que $\tau^{-1}(B) \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Aussi on a $\tau^{-1}(B) \cap \{\tau \leq t\} = (\tau \mathbf{1}_{\{\tau \leq t\}})^{-1}(B)$. Il suffit donc de montrer que $\tau \mathbf{1}_{\{\tau \leq t\}}$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable. On peut écrire aussi $\tau \mathbf{1}_{\{\tau \leq t\}} = (\tau \wedge t)\mathbf{1}_{\{\tau \leq t\}}$. Comme τ est un temps d'arrêt, $\tau \wedge t$ et $\mathbf{1}_{\{\tau \leq t\}}$ sont $\mathcal{F}_t$-mesurable, alors il en est de même de $\tau \mathbf{1}_{\{\tau \leq t\}}$. Donc τ est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable.
3/ Montrons que si $\tau_1 \leq \tau_2$ p.s. alors $\mathcal{F}_{\tau_1} \subseteq \mathcal{F}_{\tau_2}$.
Soit $A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$, alors $A \cap \{\tau_1 \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Comme $\tau_1 \leq \tau_2$ p.s. alors $\{\tau_2 \leq t\} \subseteq \{\tau_1 \leq t\}$. En effet, si $\omega \in \{\tau_2 \leq t\}$ alors $\tau_1(\omega) \leq \tau_2(\omega) \leq t$, ainsi $\omega \in \{\tau_1 \leq t\}$. on peut alors écrire

$$A \cap \{\tau_2 \leq t\} = [A \cap \{\tau_1 \leq t\}] \cap \{\tau_2 \leq t\} \in \mathcal{F}_t. \tag{3.45}$$

4/ Montrons que $\{X(\tau \wedge t)\}_{\{t \geq 0\}}$ est une martingale relativement à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$.
Soit σ un temps d'arrêt borné relativement à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$. D'après le théorème d'arrêt (Théorème 3.6) de Doob, on a $E[X(\tau \wedge \sigma)] = E[X(0)]$. Puisque σ est arbitraire, on conclut aussi du Théorème 3.6 que $\{X(\tau \wedge t)\}_{\{t \geq 0\}}$ est une martingale relativement à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$.

Corrigé 3.9

Puisque Y est bornée alors le processus N_t est intégrable. De plus, il est adapté, puisque, pour tout borélien B, on a

$$\{N_t \in B\} = (\{Y(M_t - M_{t\wedge\tau}) \in B\} \cap \{\tau \leq t\}) \cup (\{0 \in B\} \cap \{\tau > t\}) \in \mathcal{F}_t.$$

Prenons maintenant un $\leq s < t$. Alors nous avons

$$E[N_t \mid \mathcal{F}_s] = \underbrace{E[Y(M_t - M_{t\wedge\tau})\mathbf{1}_{\{\tau > s\}} \mid \mathcal{F}_s]}_{I_1} + \underbrace{E[Y(M_t - M_{t\wedge\tau})\mathbf{1}_{\{\tau \leq s\}} \mid \mathcal{F}_s]}_{I_2}$$

D'après le théorème d'arrêt

$$I_1 = E[E[Y(M_t - M_{t\wedge\tau})\mathbf{1}_{\{\tau > s\}} \mid \mathcal{F}_\tau] \mid \mathcal{F}_s] = E[Y\overbrace{E[M_t - M_{t\wedge\tau} \mid \mathcal{F}_\tau]}^{0}\mathbf{1}_{\{\tau > s\}} \mid \mathcal{F}_s] = 0$$

Pour le second terme, on peut aussi appliquer le théorème d'arrêt

$$\begin{aligned} I_2 &= E[Y(M_t - M_{t\wedge\tau})\mathbf{1}_{\{\tau \leq s\}} \mid \mathcal{F}_s] = Y\mathbf{1}_{\{\tau \leq s\}}E[M_t - M_{t\wedge\tau} \mid \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbf{1}_{\{\tau \leq s\}}Y(M_s - M_{s\wedge\tau}) = N_s. \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve.

Corrigé 3.10

1/ $\mathbf{M}$ n'est pas une $\mathcal{G}_t$-martingale car, pour $s < t$, $E(M_t \mid \mathcal{G}_s)$ peut ne pas être égale à M_s. Par exemple si $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_s$ alors $E(M_t \mid \mathcal{G}_s) = M_t$ et pas M_s puisque dans ce cas M_t, qui est $\mathcal{F}_t$-mesurable, serait $\mathcal{G}_s$-mesurable.
Pour un t fixé N_t n'est pas $\mathcal{F}_t$-mesurable, car pour $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, on a $N_t^{-1}(B) \in \mathcal{G}_t$ mais $N_t^{-1}(B)$ peut ne pas appartenir à $\mathcal{F}_t$ car $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$. Donc $\mathbf{N}$ n'est pas une $\mathcal{F}_t$-martingale.
2/ $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$ donc T est un $\mathcal{G}_t$-temps d'arrêt. $\{S \leq t\} \in \mathcal{G}_t$ mais $\{S \leq t\}$ peut ne pas appartenir à $\mathcal{F}_t$ car $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$. Donc S n'est pas un $\mathcal{F}_t$-temps d'arrêt.

Corrigé 3.12

1/ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|X_n| \leq a+n < +\infty$, alors X_n est intégrable. $\{X_n\}_n$ est adaptée à la filtration $\{\mathcal{F}_n\}_n$ car pour n fixé X_n est fonction de $Z_1, \dots, Z_n$ donc $\mathcal{F}_n$-mesurable.
Montrons maintenant la propriété martingale

$$\begin{aligned} E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) &= E(X_n + Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \\ &= X_n + E(Z_{n+1}) = X_n. \end{aligned}$$

$\{X_n\}_n$ est donc une martingale relativement à la filtration $\{\mathcal{F}_n\}_n$.
T est le temps d'entrée du processus $\{X_n\}_n$, adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_n\}_n$, dans le borélien $B = \{0, a+b\}$ et représente le temps de ruine de l'un des deux joueurs. Donc T est un temps d'arrêt relativement à la filtration $\{\mathcal{F}_n\}_n$.
2/ Si $\omega \in \{T > n\}$ cela veut dire qu'aucun des deux joueurs ne s'est ruiné avant le temps n alors $0 < X_n(\omega) < a+b$ donc $\{T > n\} \subset \{0 < X_n < a+b\}$. On déduit que $P\,(T > n) \leq P\,(0 < X_n < a+b)$.
On peut exprimer X_n par la somme $X_n = a + Z_1 + \cdots + Z_n$, la suite $\{Z_i\}_i$ étant i.i.d. on peut lui appliquer le Théorème Central Limite (TCL)

$$\begin{aligned} P\,(0 < X_n < a+b) &= P\left(0 < a + \sum_{i=1}^{n} Z_i < a+b\right) \\ &= P\left(-a < \sum_{i=1}^{n} Z_i < b\right) \\ &= P\left(\frac{-a}{\sqrt{n}} < \frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i - nE(Z_1)}{\sqrt{n}\sqrt{V(Z_1)}} < \frac{b}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \phi\left(\frac{b}{\sqrt{n}}\right) - \phi\left(\frac{-a}{\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

où ϕ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.
On déduit la limite

$$\lim_{n\to\infty} P\,(T > n) \leq \lim_{n\to\infty} \left(\phi\left(\frac{b}{\sqrt{n}}\right) - \phi\left(\frac{-a}{\sqrt{n}}\right)\right) = 0.$$

On déduit que

$$P(T < +\infty) = 1 - P(T = \infty) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(T > n) = 1$$

donc T est fini presque sûrement.
3/ Puisque $|X_{T\wedge n}| \leq a+b$ et T est un temps d'arrêt presque sûrement fini alors d'après la Proposition 3.4 on a

$$E(X_T) = E(X_0) = a \tag{3.46}$$

et d'après la définition du temps d'arrêt T on a

$$E(X_T) = 0 \times P(X_T = 0) + (a+b) \times P(X_T = a+b) = a. \tag{3.47}$$

On obtient

$$P(X_T = a+b) = \frac{a}{a+b}$$

et $P(X_T = 0) = 1 - P(X_T = a + b) = b/(a + b)$.
4/ Appliquons le théorème d'arrêt à la martingale $\{X_n^2 - n\}_n$ (voir Exemple 3.2).
Nous allons, en premier, montrer le théorème d'arrêt à la martingale $\{X_n^2 - n\}_n$ au temps d'arrêt $T \wedge n$ borné pour n fixé, puis en faisant tendre n vers l'infini on obtient le résultat.

$$E(X_{T\wedge n}^2 - (T \wedge n)) = E(X_0^2 - 0) = a^2 \tag{3.48}$$

$$E(X_{T\wedge n}^2) - E(T \wedge n) = a^2. \tag{3.49}$$

On a la suite des temps $(T \wedge n)_n$ est croissante et $\lim_{n\to\infty}(T \wedge n) = T$ p.s. Le Théorème de Convergence Monotone (TCM) donne

$$\lim_{n\to\infty} E(T \wedge n) = E[\lim_{n\to\infty}(T \wedge n)] = E(T). \tag{3.50}$$

Aussi $\lim_{n\to\infty} X_{T\wedge n}^2 = X_T^2$ et $|X_{T\wedge n}^2| \leq (a+b)^2$. En utilisant le Théorème de Convergence Dominée (TDM) on obtient

$$\lim_{n\to\infty} E[X_{T\wedge n}^2] = E[\lim_{n\to\infty} X_{T\wedge n}^2] = E(X_T^2).$$

Ainsi

$$\lim_{n\to\infty}[E(X_{T\wedge n}^2) - E(T \wedge n)] = E(X_T^2) - E(T) = a^2. \tag{3.51}$$

On déduit

$$E(T) = E(X_T^2) - a^2 = (a + b)^2 \frac{a}{a + b} - a^2 = ab.$$

Corrigé 3.13

1/ Pour $0 < p < 1$, on a

$$E(|Z_n|) = E(Z_n) = \prod_{i=1}^{n} E\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{X_i}\right] = \left[p\left(\frac{1-p}{p}\right) + (1-p)\left(\frac{p}{1-p}\right)\right]^n = 1$$

Z_n est fonction de S_n qui est $\mathcal{F}_n$-mesurable et donc Z_n est aussi $\mathcal{F}_n$-mesurable. Donc le processus $\{Z_n, n \geq 0\}$ est adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_n\}$.

$$\begin{aligned}
E(Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) &= E\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}\left(\frac{1-p}{p}\right)^{X_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n\right] \\
&= \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n} E\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{X_{n+1}}\right] \\
&= Z_n\left(p\left(\frac{1-p}{p}\right) + (1-p)\left(\frac{1-p}{p}\right)^{-1}\right) = Z_n
\end{aligned}$$

2/ Notons d'abord que la première inégalité est triviale si $p > q$. Supposons donc $p < q$. Alors $\sup_{n\geq 0} S_n \geq k$ si et seulement si

$$\sup_{n\geq 0} Z_n = \sup_{n\geq 0}\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n} \geq \left(\frac{q}{p}\right)^k. \tag{3.52}$$

On a donc, appliquant l'inégalité maximale (Théorème 3.1) à la martingale $\{Z_n, n \geq 0\}$

$$P\left(\sup_{0\leq n\leq N} S_n \geq k\right) = P\left(\sup_{0\leq n\leq N} Z_n \geq \left(\frac{q}{p}\right)^k\right) \leq \left(\frac{p}{q}\right)^k E\left(Z_N\right) \tag{3.53}$$

$$= \left(\frac{p}{q}\right)^k E\left(Z_0\right) = \left(\frac{p}{q}\right)^k \tag{3.54}$$

On fait tendre $N \to \infty$ on obtient le résultat.
On utilise la formule $E(X) = \sum_{k\geq 1} P(X \geq k)$, valable pour toute v.a. $X \geq 0$, on tire

$$E\left(\sup_{n\geq 0} S_n\right) = \sum_{k\geq 1} P\left(\sup_{n\geq 0} S_n\right) \leq \sum_{k\geq 1} \left(\frac{p}{q}\right)^k = \frac{\frac{p}{q}}{1-\frac{p}{q}} = \frac{p}{q-p}.$$

Corrigé 3.14

Soit $u \in]0,1[$ et $x = a/u$. On a :

$$P\left(\frac{a}{S} \leq u\right) = P\left(S \geq \frac{a}{u}\right) = P\left(T_x < \infty\right). \tag{3.55}$$

D'après le théorème d'arrêt, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, au temps d'arrêt borné $T_x \wedge t$, on a

$$a = E(M(0)) = E\left(M(T_x \wedge t)\right) \tag{3.56}$$

$$= E\left[M(T_x \wedge t)\mathbf{1}_{\{T_x \leq t\}}\right] + E\left[M(T_x \wedge t)\mathbf{1}_{\{T_x > t\}}\right] \tag{3.57}$$

$$= xP\left(T_x \leq t\right) + E\left[M(t)\mathbf{1}_{\{T_x > t\}}\right], \tag{3.58}$$

car $M(T_x \wedge t) = M(T_x) = x$ sur l'événement $\{T_x \leq t\}$.
Quand $t \to \infty$, $P\left(T_x \leq t\right) \to P\left(T_x < \infty\right)$, et $M(t) \to 0$ p.s. par hypothèse.
Puisque $M(t)\mathbf{1}_{\{T_x > t\}} < x$ intégrable, le théorème de convergence dominée (TCD) entraine que

$$E\left[M(t)\mathbf{1}_{\{T_x > t\}}\right] \to 0.$$

Finalement, l'égalité ci-dessus devient à la limite $t \to \infty$,

$$a = xP\left(T_x < \infty\right), \tag{3.59}$$

et donc

$$P\left(\frac{a}{S} \leq u\right) = P\left(T_x < \infty\right) = \frac{a}{x} = u,$$

ce qui montre que $\frac{a}{S}$ est de loi uniforme sur $]0,1[$.

Corrigé 3.14

1/ Au temps n, l'urne contient $(n+2)$ boules, dont B_n sont blanches. Ainsi

$$X_n = \frac{B_n}{n+2}$$

représente le rapport de boules blanches sur le total, donc $X_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc $E(|X_n|) = E(X_n) \leq 1 < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. X_n est donc intégrable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

X_n est fonction de B_n qui est $\mathcal{F}_n$ mesurable, donc le processus $\{X_n\}_n$ est adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_n\}_n$.
On a $B_{n+1} = B_n + Z_{n+1}$ où

$$Z_{n+1} = \begin{cases} 1, & \text{si on tire une boule blanche à } n+1 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

La probabilité de tirer une boule blanche au temps $n+1$ sachant l'information accumulée jusqu'au tirage n, information représentée par $\mathcal{F}_n$, est donnée par

$$P\left(Z_{n+1} = 1 \mid \mathcal{F}_n\right) = \frac{B_n}{n+2}.$$

La propriété martingale s'écrit ainsi

$$\begin{aligned} E\left(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right) = E\left(\frac{B_{n+1}}{n+3} \mid \mathcal{F}_n\right) &= \frac{1}{(n+3)} E\left(B_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right) \\ &= \frac{1}{(n+3)} E\left(B_n + Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right) = \frac{1}{(n+3)} B_n + \frac{1}{(n+3)} E\left(Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right) \\ &= \frac{1}{(n+3)} B_n + \frac{1}{(n+3)} \frac{B_n}{n+2} = \frac{B_n}{n+2} = X_n. \end{aligned}$$

Donc $\{X_n\}_n$ est une martingale relativement à la filtration $\{\mathcal{F}_n\}_n$.
2/ Puisque $0 \leq X_n \leq 1$ p.s. pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\sup_n E\left(|X_n|\right) < \infty$ et $\{X_n\}_n$ étant une martingale d'après la première question, alors d'après le Théorème 3.4 $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ p.s. et X est intégrable.
Le rapport de boules blanches sur les noirs est

$$\frac{B_n}{(n+2) - B_n} = \frac{X_n}{1 - X_n}$$

et on a p.s.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{1 - X_n} = \frac{X}{1 - X}$$

si $X \neq 1$.
Le cas $X = 1$ peut, par exemple se produire lorsque l'on tire une blanche à chaque tirage, alors dans ce cas $X_n = \frac{n+1}{n+2}$ qui converge p.s. vers $X = 1$ et le rapport $X_n/(1 - X_n) = n + 1$ converge p.s. vers l'infini.