Université Mohamed Khider - BISKRA
Faculté des Sciences Exactes et des SNV
Département de Mathématiques
Master 2 – Statistique

جامعة محمد خيضر - بسكـــرة
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
قسم الرياضيات
السنة الثانية ماستر - إحصاء

Epreuve Module : Statistique non Paramétrique (07/01/2019)

Exercice 1 (4 points) Soit f_n un estimateur à noyau de la densité f, et soient les deux noyaux d'Epanechinkov et Quartique (Biweight) donnés par

$$\mathbf{K}_e(t) = \frac{3}{4}\left(1 - t^2\right).\mathbf{1}_{(|t|\leq 1)} \quad \text{et} \quad \mathbf{K}_q(t) = \frac{15}{16}\left(1 - t^2\right)^2.\mathbf{1}_{(|t|\leq 1)}$$

On donne les quantités suivantes:

$$\boldsymbol{\mu}_{Ke} = \int \mathbf{K}_e^2(t)\,\mathbf{dt} = \mathbf{0,6} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\mu}_{Kq} = \int \mathbf{K}_q^2(t)\,\mathbf{dt} = \mathbf{0,714}.$$

(a) Rappeler la formule de l'effecacité relative au noyau optimal d'Epanechinkov, notée $\mathbf{Eff}(K)$.

(b) Donner la valeur de $\mathbf{Eff}(K_q)$ du noyau Quartique (Biweight).

Exercice 2 (8 points) Soit F une fonction de répartition sur $\mathbb{R}$ et soit $\theta \in \mathbb{R}_+$ un paramètre inconnu. On dispose d'un échantillon iid $(X_1, ..., X_n)$ de fonction de répartition :

$$P(X \leq x) = F_\theta(x) = F(x - \theta).$$

On considère aussi la variable aléatoire $V_n = \sum_{i=1}^{n} 1_{(X_i > 0)}$.

(a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, montrer que V_n suit une loi Binomiale de paramètres n et p à préciser.

(b) Montrer que la loi limite de $(V_n - np)/\sqrt{n}$ est gaussienne. Préciser la moyenne et la variance de cette loi limite.

(c) Déterminer la loi limite des deux statistiques S_n et de W_n suivantes:

$$S_n = \left(\frac{V_n}{n}\right)^2 \quad \text{et} \quad W_n = \frac{n}{V_n}.$$

Exercice 3 (8 points) On étudie l'arrivée des voitures à un poste de péage sur une autoroute, pendant la durée de temps unitaire d'une munite. Soit X la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ comptant le nombre des voitures arrivées à un poste de péage sur une autoroute, par munite. On souhaite tester si le processus peut-être assimilé à une loi de Poisson de paramètre λ à l'aide d'un test d'adéquation de Khi-2. Soient les résultats obtenus à partir de 170 mesures:

Débit par munite O_k :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Fréquence N_k :	15	33	12	37	30	10	9	5	12	7

(a) Justifier le choix $\hat{\boldsymbol{\lambda}} = 4,45$ du paramètre $\boldsymbol{\lambda}$.

(b) Donner la statistique de test d'ajustement de Khi-deux pour le problème de test considéré.

(c) Calculer la valeur de cette statistique, sachant que la probabilité p_k que C soit égal à k lorsque C est une variable suivant la loi de Poisson de paramètre $\hat{\boldsymbol{\lambda}} = 4,45$ est donnée par :

k :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_k:	0.05	0.12	0.17	0.19	0.17	0.13	0.08	0.04	0.02	0.01

(d) Quelle est la conclusion de ce test pour un niveau $\alpha = 5\%$?

On donne pour différentes valeurs de m, le quantile d'ordre 0,95 d'une χ^2 à m ddl $\chi^2_{(m)}$:

$$\chi^2_{(7)} = 14,07 \qquad \chi^2_{(8)} = 15,51 \qquad \chi^2_{(9)} = 16,92$$

Corrigé-type de l'Epreuve du Module : Statistique Non Paramétrique

Exercice 1 (4 points) Soit f_n un estimateur à noyau de la densité f.
(a) L'effecacité relative au noyau optimal d'Epanechinkov est

1 $$Eff(K) = \left(\frac{\mu_{opt}\sigma_{opt}}{\mu_c\sigma_c}\right)^{4/5}, \quad \text{avec } \mu = \int K^2(t)\,dt \quad \text{et} \quad \sigma^2 = \int t^2 K(t)\,dt.$$ 0,5 0,5

(b) $Eff(K_q)$ du noyau Quartique (Briweight): On a

$$\sigma_{opt}^2 = \int t^2 K(t)\,dt = \int_{-1}^{1} \frac{3}{4}\left(1-t^2\right)t^2 dt = 0,2 \qquad \sigma_q^2 = \int t^2 K(t)\,dt = \int_{-1}^{1} \frac{15}{16}\left(1-t^2\right)^2 t^2 dt = 0,143$$ 0,5 0,5

Donc : $Eff(K_q) = \left(\frac{\mu_{opt}\sigma_{opt}}{\mu_c\sigma_c}\right)^{4/5} = \left(\frac{0.6\sqrt{0.2}}{0.714\sqrt{0.143}}\right)^{4/5} = 0.995.$ 1

Exercice 2 (8 points) $P(X \le x) = F_\theta(x) = F(x-\theta)$ et $V_n = \sum_{i=1}^{n} 1_{(X_i>0)}$.
(a) Il est clair que $1_{(X_i>0)}$ est une v.a de Bernoulli de paramètre 0,5

$$p = P\left(1_{(X_i>0)} = 1\right) = P(X>0) = 1 - P(X<0) = 1 - F_\theta(0) = 1 - F(-\theta)$$ 1

Donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, V_n est la somme de n v.a de Bernoulli, elle suit donc, une loi Binomiale de paramèters n et p. 0,5
(b) La loi limite de $(V_n - np)/\sqrt{n}$: d'après le TCL : 0,5

$$\sqrt{n}\left(\frac{V_n}{n} - p\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}(V_n - np) \xrightarrow{L} N(0, p(1-p)) \qquad \text{quand } n \to \infty$$ 1,5

(c) En applicant la méthode delta à $\frac{V_n}{n}$, nous obtenons: 1

0,5 $$S_n = g\left(\frac{V_n}{n}\right) \text{ tq } g(t) = t^2 \qquad \text{donc} \qquad \sqrt{n}\left(S_n - p^2\right) \xrightarrow{L} N\left(0, 4p^3(1-p)\right)$$ 1

0,5 $$W_n = g\left(\frac{V_n}{n}\right) \text{ tq } g(t) = t^{-1} \qquad \text{donc} \qquad \sqrt{n}\left(W_n - p^{-1}\right) \xrightarrow{L} N\left(0, (1-p)/p^3\right)$$ 1

Exercice 3 (8 points) On souhaite tester si le processus peut-être assimilé à une loi de Poisson de paramètre λ : $H_0 : X \sim P^0 = P(\lambda)$ 0,5
(a) Le choix $\hat{\lambda} = 4,45$ du paramètre λ est dû à l'estimation par moments de λ : Comme $X \sim P(\lambda)$ donc $E(X) = \lambda$, donc $\hat{\lambda} = \bar{X} = 4,45.$ 1 0,5
(b) Statistique de test d'ajustement de Khi-deux :

$$D\left(P_n, P^0\right) = \sum_{k=1}^{m=10} \frac{(N_k - np_k)^2}{np_k} \sim \chi^2_{(m-1-1)}$$ 2

(c) La valeur de cette statistique : $D\left(P_n, P^0\right) = 70,2.$ 2
(d) Au niveau $\alpha = 5\%$, la loi limite de la stat de Khi-2 est une $\chi^2_{(m-1-1)} = \chi^2_{(8)}$ car la loi contient un paramètre inconu λ. Puisque

$$D\left(P_n, P^0\right) = 70,2 >> \chi^2_{(8)} = 15,51$$ 1

En conclus que, H_0 est rejeté à 95%, le processus n'est pas un Poisson. 1

Université Med Khider-Biskra

Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie

Domaine : Math-informatique-Master 2—Date : Janvier 2019
Module : Analyse de Fourier et Ondelettes.

Examen final

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique impaire, telle que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0, \pi[\\ 0 & \text{si } x = \pi. \end{cases}$$

1. Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.
2. Etudier la convergence (simple, uniforme) de la série de Fourier de f.
3. En déduire les valeurs des sommes

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

Exercice 2

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On rappelle que sa transformée de Fourier est définie par :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \qquad \widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt$$

1. Montrer que la transformée de Fourier de f est continue et bornée.
2. (a) On suppose que f est paire. Enoncer une propriété vérifiée par $\widehat{f}$.

   (b) On suppose que f est à valleurs réelles. Enoncer une propriété vérifiée par $\widehat{f}$.
3. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. On pose $g(t) = f(t - t_0)$. Exprimer $\widehat{g}$ en fonction de $\widehat{f}$.
4. (a) On suppose que f est de classe C^1 et que f' est intégrable. Exprimer $\widehat{f'}$ en fonction de $\widehat{f}$.

   (b) On suppose que $g : t \to tf(t)$ est intégrable. Exprimer $\widehat{g}$ en fonction de $\widehat{f}$.

Exercice 3

1. Soient $f, g \in \mathcal{S}$ (où $\mathcal{S}$ est l'éspace de Schwartz). Montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\, \overline{g(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega)\, \overline{\widehat{g}(\omega)} d\omega$$

   [Indication : Définir $\tilde{g}(x) = \overline{g(-x)}$, considérer $f \star \tilde{g}$ et lui appliquer la formule d'inversion].

2. (a) Montrer qu'il existe un unique opérateur continu $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$ pour toute fonction $f \in \mathcal{S} \cap L^2(\mathbb{R})$.

   (b) Que vaut $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}$?
3. Vérifier que, pour toute $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, on a bien : $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$.

On poura admettre que, pour toute $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{S}$ telle que $f_n \to f$ dans L^1et $f_n \to f$ dans L^2.

Corrigé type de l'Examen final (I)

(8pts) d'Analyse de Fourier et Ondelettes.

Exercice N°1: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique impaire, telle que : $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0,\pi[\\ 0 & \text{si } x = \pi. \end{cases}$

① Calcul des coefficients de Fourier trigonométriques de f.

La fonction f étant impaire, $a_n = 0$ (0,5) pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n \geq 1$, $b_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(t) \sin \frac{2\pi n}{a} t \, dt$, $a = 2\pi$ est la période

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt \quad \left(\int_0^a g(t)\,dt = \int_x^{x+a} g(t)\,dt \text{ si } g \text{ est de période } a \right)$$

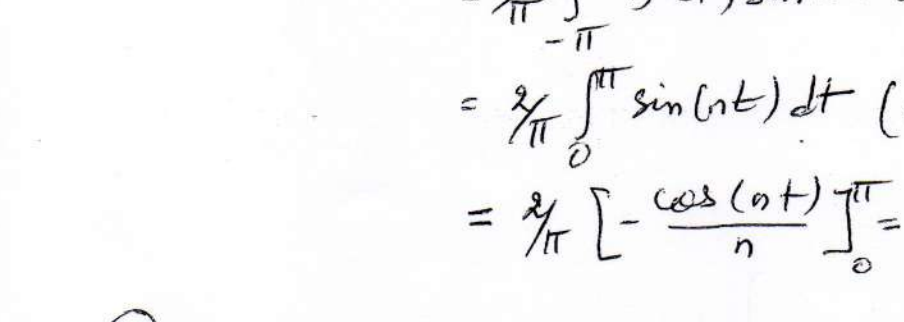
$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nt)\,dt \quad (\text{car } f(t) \sin nt \text{ est paire})$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \frac{1-(-1)^n}{n} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \quad (1)$$

② Etude de la convergence (simple, uniforme) de la série de Fourier de f:

La série de Fourier de f est donnée par:

$$\sum_{k \geq 0} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin((2k+1)x) \quad (1)$$



La fct f est C^1 par morceaux sur $]-\pi,\pi[$. Donc, elle satisfait les hypothèses du théorème de Dirichlet, et la série de Fourier de f converge vers $f(x)$ dans les points de continuité et vers $f(x_+) + f(x_-)/2 = \frac{1-1}{2} = 0$ dans les points de discontinuité $-\pi, 0, \pi$. (1,5)

La convergence ne peut pas être uniforme car la limite "f" n'est pas continue. (1)

③ * Pour $x=\pi/2$, on a: $\sin((2k+1)x) = \sin(\pi/2 + k\pi) = (-1)^k$, donc:

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{2k+1} = f(\pi/2) = 1 \Rightarrow \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$ 1

* L'égalité de Parseval donne:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|^2 = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

donc $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ 1

* On a:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k\geq 1} \frac{1}{(2k)^2}$$

$$= \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}, \text{ donc:}$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3}\cdot\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}$$ 01

* et on a:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} - \sum_{k\geq 1}\frac{1}{(2k)^2}$$

$$= \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{12}, \text{ alors:}$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$ 01

8pts

Exercice N°=2: ① La transformée de Fourier de f est bornée. En effet: pour tout $\omega \in \mathbb{R}$:

$$|\hat{f}(\omega)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)\, e^{-i\omega t}| dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < +\infty$$ 1

De plus, $\hat{f}$ est continue, par le thm de convergence dominée. En effet, si on note $F(t,\omega) = f(t)\, e^{-i\omega t}$, la fct F est continue selon ω. De plus, pour tous t, ω: 1 $|F(t,\omega)| = |f(t)|$. Puisque $t \to |f(t)|$ est une fonction intégrable qui ne dépend pas de ω, les hypothèses du théorème de convergence dominée sont vérifiées, et par suite la fonction $\omega \mapsto \hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} F(t,\omega)\,dt$ est continue.

② ⓐ $\hat{f}(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i(-\omega)t}\,dt$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega(-t)}\,dt \text{ , on pose } s=-t$$

$$= -\int_{+\infty}^{-\infty} f(-s)\, e^{-i\omega s}\,ds$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(-s)\, e^{-i\omega s}\,ds \underset{(f \text{ est paire})}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\, e^{i\omega s}\,ds = \hat{f}(\omega)$$

(1)

$\Rightarrow \hat{f}$ est paire.

ⓑ f est à valeurs réelles $\Rightarrow \overline{f(t)} = f(t)$. Alors :

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-i\omega t}\,dt = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(t)}\; e^{-i\omega t}\,dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \overline{f(t)\, e^{i\omega t}}\,dt = \overline{\int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{i\omega t}\,dt} = \overline{\hat{f}(-\omega)}$$

(1,5)

③ $\hat{g}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} g(t)\, e^{-i\omega t}\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(t-t_0)\, e^{-i\omega t}\,dt$

$$= e^{-i\omega t_0} \int_{\mathbb{R}} f(t-t_0)\, e^{-i\omega(t-t_0)}\,dt$$

(1,5)

$$= e^{-i\omega t_0} \int_{\mathbb{R}} f(s)\, e^{-i\omega s}\,ds = e^{-i\omega t_0}\, \hat{f}(\omega).$$

④ ⓐ On suppose que $f \in C^1$ et que f' est intégrable

$$\widehat{f'} = \int_{\mathbb{R}} f'(t)\, e^{-i\omega t}\,dt = \left[f(t)\, e^{-i\omega t}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} f(t)\left(e^{-i\omega t}\right)'dt$$

$$= i\omega \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-i\omega t}\,dt = i\omega\, \hat{f}(\omega).$$

(1)

ⓑ Posons $F(t,\omega) = f(t)\, e^{-i\omega t}$ pour tous $\omega, t \in \mathbb{R}$.
Cette fct est de classe C^1 selon ω et $\partial_\omega F(t,\omega) = -i\,t f(t)\, e^{-i\omega t}$
Pour tout ω : $|F(\cdot,\omega)| \leq |f|$ et $|\partial_\omega F(\cdot,\omega)| \leq |g|$. (1)

Puisque f et g sont intégrables, on peut appliquer à F le thm de dérivation sous le signe somme :

$$(\hat{f})'(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \partial_\omega F(t,\omega)\,dt = (-i)\int_{\mathbb{R}} t\,f(t)\,e^{-i\omega t}\,dt$$

$$= (-i)\,\hat{g}(\omega).$$

Donc, $\hat{g}(\omega) = i(\hat{f})'(\omega)$

Exercice N°=3 : 4Pts ① Soient $f, g \in S$ (où S est l'espace de Schwartz).

On montre que : $\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\overline{g(t)}\,dt = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)\,\overline{\hat{g}(\omega)}\,d\omega$.

Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tilde{g}(x) = \overline{g(-x)}$. La fonction $f * \tilde{g} \in L^1$ et $\|f * \tilde{g}\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|\tilde{g}\|_1$.

On a : $\widehat{f * \tilde{g}} = \hat{f} \cdot \widehat{\tilde{g}}$ et $\widehat{\tilde{g}}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{g}(t)\,e^{-i\omega t}\,dt = \int_{\mathbb{R}} \overline{g(-t)}\,e^{-i\omega t}\,dt$

$$= \overline{\int_{\mathbb{R}} g(-t)\,e^{-i\omega(-t)}\,dt} = \overline{\int_{\mathbb{R}} g(t)\,e^{-i\omega t}\,dt} = \overline{\hat{g}(\omega)}.$$

Ainsi $\hat{f}, \hat{g} \in S \subset L^2 \Rightarrow \hat{f}\,\widehat{\tilde{g}} \in L^1$ (d'après l'inégalité de Hölder).

Puisque $f * \tilde{g}$ et sa transformée de Fourier sont des fcts de L^1, on peut appliquer la formule d'inversion au point 0 :

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\overline{g(t)}\,dt = (f * \tilde{g})(0) = (\overline{\mathcal{F}}\,\mathcal{F}(f * \tilde{g}))(0) = \overline{\mathcal{F}}(\widehat{f * \tilde{g}})(0)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f * \tilde{g}}(\omega)\,e^{i\omega 0}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)\,\overline{\hat{g}(\omega)}\,d\omega.$$ (1)

En effet la fct $f * \tilde{g}$ est continue ($f \in S \subset L^1$ et $\tilde{g} \in S$) (en particulier en 0).

② L'ensemble S est dense dans $L^2(\mathbb{R})$. De plus, la T.F est linéaire et continue pour la norme $\|\cdot\|_2$: si on applique la formule précédente pour $g = f$, on trouve que $\|f\|_2 = \frac{1}{2\pi}\|\hat{f}\|_2$ si $f \in S$. (1)

Alors la T.F est continue sur S à valeurs dans un espace complet ($L^2(\mathbb{R})$) se prolonge de manière unique à un opérateur continu $\mathcal{F}' : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ tq $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ pour toute $f \in S \cap L^2(\mathbb{R})$.

(b) Pour toute $f \in S$, $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{-i\omega x} d\omega$ (V)

$= \frac{1}{2\pi} f(-x)$,

d'après la formule d'inversion.

Puisque $\mathcal{F}$ est continue sur L^2 et $\overline{S} = L^2$. (1)

Par passage à la limite $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(f) = \frac{1}{2\pi} f$ p.p, pour toute $f \in L^2$

(3) Soit $f \in L^1 \cap L^2$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S$ tq $f_n \to f$ ds L^1 et $f_n \to f$ ds L^2.

Alors $\mathcal{F}(f_n) \longrightarrow \mathcal{F}(f)$ dans L^2, puisque $\mathcal{F}$ est continue sur L^2.

De plus, $\mathcal{F}(f_n)$ converge uniformément vers $\hat{f}$: (1)

$$|\mathcal{F}(f_n)(\omega) - \hat{f}(\omega)| = \left| \int_{\mathbb{R}} (f_n(x) - f(x)) e^{-i\omega x} dx \right| \leq \|f_n - f\|_1$$

ce qui nous donne que $\mathcal{F}(f_n) \to \hat{f}$ dans L^2_{loc}

et aussi $\mathcal{F}(f_n) \longrightarrow \mathcal{F}(f)$ dans L^2_{loc} ($L^2 \subset L^2_{loc}$)

D'après l'unicité de la limite $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ p.p.

Université Mohamed Khider - BISKRA
Faculté des Sciences Exactes et des SNV
Département de Mathématiques
Master 2

جامعة محمد خيضر - بسكـــرة
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
قسم الرياضيات
السنة الثانية ماستر

ÉPREUVE MODULE : METHODOLOGIE DE RECHERCHE

Vous êtes sur le point de réaliser un mémoire de master en mathématiques sous la direction d'un encadreur et sur un sujet de recherche bien définit :

Q1) Quels sont vos tâches et votre rôle et que devez-vous faire pour obtenir un bon mémoire ?

Q2) Qu'attendez-vous exactement de votre encadreur ?

Q3) Que pensez-vous du sujet ? Voyez-vous qu'il devrait être modifié, ajusté ou non, afin de compléter le mémoire à temps ?

Q4) Qu'avez-vous l'intention d'écrire en conclusion de ce mémoire ?

Q5) Durant l'exposé de votre mémoire, que devriez-vous faire pour convaincre l'auditoire de vos valeurs scientifiques et pédagogiques ?

Université Mohamed Khider - BISKRA
Faculté des Sciences Exactes et des SNV
Département de Mathématiques
Master 2

جامعة محمد خيضر - بسكـــرة
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
قسم الرياضيات
السنة الثانية ماستر

ÉPREUVE MODULE : METHODOLOGIE DE RECHERCHE

Vous êtes sur le point de réaliser un mémoire de master en mathématiques sous la direction d'un encadreur et sur un sujet de recherche bien définit :

Q1) Quels sont vos tâches et votre rôle et que devez-vous faire pour obtenir un bon mémoire ?

Q2) Qu'attendez-vous exactement de votre encadreur ?

Q3) Que pensez-vous du sujet ? Voyez-vous qu'il devrait être modifié, ajusté ou non, afin de compléter le mémoire à temps ?

Q4) Qu'avez-vous l'intention d'écrire en conclusion de ce mémoire ?

Q5) Durant l'exposé de votre mémoire, que devriez-vous faire pour convaincre l'auditoire de vos valeurs scientifiques et pédagogiques ?

Corrigé-type Examen : Module : Méthodologie de Recherche

R1) Devoirs et rôle de l'étudiant pour obtenir un bon mémoire : Un mémoire est un travail de recherche, il est problématisé et il est introduit par une bibliographie normalisée qui permettra d'étayer l'argumentation par référence à des auteurs et des publications déjà validées. Un bon mémoire est rarement celui ou tout resterait inexplicable. Pour cela, l'étudiant doit :

- Suivre les conseils, suggestions et orientations de son encadreur,
- Etre autonome et à jour, ne laisse pas les choses se cumules,
- Réaliser une étude bibliographique sur le sujet,
- Prendre notes de toutes pensés et diverses questions,
- Recueillir les données nécessaires pour la partie applications,

R2) L'encadreur : Le rôle du directeur du mémoire est de vous guider, de vous orienter, et de répondre à vos questionnements. Il peut ainsi être sollicité pour valider la problématique, le plan, le type de méthodologie. Il évaluera la version finale du mémoire. Sauf demande particulière de l'encadreur, celui-ci ne corrige pas les différentes parties au fur et à mesure de la rédaction. Un bon encadreur est donc celui qui rencontre régulièrement ses étudiants et exige souvent certaines productions (rapport périodique, fiches-résumés) pour suivre et évaluer l'avancement des travaux.

R3) Afin de compléter le mémoire à temps, le sujet doit être clair et bien défini, la problématique, les objectifs spécifiques, les hypothèses de recherche et les variables sont bien précisés. Particulièrement, si le sujet est un peu long, floue, ambiguë ou nécessite du matérielle spéciale et dans le cas de manque de références, l'étudiant (avec son encadreur) doit penser à ajuster ou modifier le sujet.

R4) La conclusion : elle conduit fréquemment à une reformulation du questionnement initial. Comme l'introduction, elle est rédigée au terme du travail d'écriture. La conclusion est également un espace privilégié pour aborder ce qui est en marge de la recherche. Elle vous permet donc d'élargir la réflexion, de dégager de nouvelles perspectives de travail ou de procéder à une brève autocritique.

R5) Durant l'exposé de mémoire et pour convaincre l'auditoire des valeurs scientifique et pédagogique il faut :

- Préparez des fiches sur lesquelles vous appuyer pendant la présentation,
- Bâtir le plan de l'exposé et lister les points importants à dire, et les hiérarchiser. Chaque point important devra être ensuite soutenu par une diapo.
- Consacrez du temps à la préparation de votre exposé pour bien comprendre le sujet, déterminer une problématique, faire les recherches nécessaires pour y répondre.
- Ne laissez pas l'auditoire tirer une conclusion qui pourrait être autre que la vôtre.
- Soyez didactique : Structurez votre intervention. Avant de commencer votre exposé, présentez le sujet et annoncez le plan. Organisez bien votre discours et soignez les transitions entre chaque partie pour que les personnes qui vous écoutent suivent facilement l'enchaînement de vos idées.
- Entrainez-vous : Répétez votre présentation point par point et évaluez le temps pour présenter chaque partie. Chronométrez-vous pour vous assurer que votre exposé ne dure pas trop longtemps. Réfléchissez en amont aux questions qui pourraient vous être posées. Évitez de rester trop immobile ou, à l'inverse, de trop vous agiter.

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
UNIVERSITE DE BISKRA
MODULE

$2^{ième}$ Année Master Maths
Premier semestre, année 2018/2019
Mouvement Brownien et calcul stochastique

Examen

Exercice 1. 1) Soit B_t un mouvement Brownien standard. Soient $dY_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t$ et $X_t = f(t, Y_t)$. Ecrire X_t sous la forme d'un processus d'Itô.

2) Soit B_t un mouvement Brownien standard. Montrer la relation suivante:

$$\int_0^t B_s^2 dB_s = \frac{1}{3}B_t^3 - \int_0^t B_s ds$$

3) Soit B_t un mouvement Brownien standard. Montrer la relation suivante:

$$\int_0^t s dB_s = tB_t - \int_0^t B_s ds$$

Exercice 2. Soit X_t un processus d'Itô solution de l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = X_t dt + dB_t$$

X_0 donné et B désigne un mouvement Brownien standard. On pose $Y_t = e^{-t}X_t$.

1) Calculer dY_t à l'aide de la formule d'Itô. Le processus Y est-il une $B-$martingale?

2) Montrer que la solution de l'EDS vérifiée par X_t peut s'écrire

$$X_t = e^t X_0 + \phi_t$$

où ϕ_t est une intégrale stochastique que l'on précisera.

Exercice 3. Soit $(B_t, \quad t \in \mathbb{R}_+)$ un mouvement Brownien standard.

1) Calculer l'espérance et la covariance des processus suivants:

a) $M_t = B_t^2 - t, \qquad t \in \mathbb{R}_+$

b) $N_t = \exp(B_t - \frac{t}{2}), \qquad t \in \mathbb{R}_+$

est-ce que ces processus sont Gaussiens?

2) Soit $(\mathcal{F}_t^B, \quad t \in \mathbb{R}_+)$ la filtration naturelle du mouvement Brownien standard B. Montrer que les deux processus suivants sont des martingales par rapport à $(\mathcal{F}_t^B)$:

a) $M_t = B_t^2 - t, \qquad t \in \mathbb{R}_+$

b) $N_t = \exp(B_t - \frac{t}{2}), \qquad t \in \mathbb{R}_+$

Exercice 4. Soit B un mouvement Brownien standard, et soit $(\mathcal{F}_t^B)_t$ sa filtration naturelle. On pose$Y_t = \int_0^t B_s ds$ pour $t \geq 0$.

En utilisant la propriété de martingale de l'intégrale stochastique

$$J_t := \int_0^t B_s^2 dB_s$$

calculer l'espérance conditionnelle $E(B_t^3/\mathcal{F}_s)$, et démontrer qu'on a: $E(Y_t/\mathcal{F}_s) = Y_s + (t-s)B_s$ pour $0 < s < t$.

Corrigé type

Examen de Mouvement Brownien et Calcul stochastique

Exercice n° 1 : (5 pts)

① $X_t = f(t, Y_t)$ de la forme $f(t,x)$

$$dX_t = \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t,Y_t) + \mu_t \frac{\partial f}{\partial x}(t,Y_t) + \frac{1}{2}\sigma_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,Y_t)\right)dt$$

(1)

$$+ \sigma_t \frac{\partial f}{\partial x}(t,Y_t)\, dB_t .$$

$$X_t = X_0 + \int_0^t \left\{ \frac{\partial f}{\partial s}(s,Y_s) + \mu_s \frac{\partial f}{\partial x}(s,Y_s) + \frac{1}{2}\sigma_s^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,Y_s) \right\} ds$$

$$+ \int_0^t \sigma_s \frac{\partial f}{\partial x}(s,Y_s)\, dB_s$$

② $f(t, B_t) = \frac{1}{3} B_t^3$ de la forme $f(t,x) = \frac{1}{3}x^3$

$\frac{\partial f}{\partial t} = 0,\ \frac{\partial f}{\partial x} = x^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2x$ $\quad (dB_t = 0\,dt + 1\,dB_t)$

(2)

Par Itô

$$d\, f(t, B_t) = B_t\, dt + B_t^2\, dB_t .$$

Soit encore

$$\frac{1}{3} B_t^3 = \int_0^t B_s \, ds + \int_0^t B_s^2 \, dB_s$$

(Note : $\frac{1}{3} B_0^3 = 0$ car B_t est Mvt Brownien standard).

d'où $\frac{1}{3} B_t^3 - \int_0^t B_s \, ds = \int_0^t B_s^2 \, dB_s$

③ $f(t, B_t) = t B_t$ $\quad (dB_t = 0 . dt + 1 . dB_t)$

$f(t, x) = tx$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = B_t$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = t \, , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

Par Itô :

$$d(t B_t) = (B_t + 0 + 0) dt + t \, dB_t .$$

2

Soit encore

$$t B_t = \int_0^t B_s \, ds + \int_0^t s \, dB_s$$

d'où $\int_0^t s \, dB_s = t B_t - \int_0^t B_s \, ds .$

Exercice n° 2 : (5 pts)

$$dX_t = X_t\,dt + dB_t \quad , X_0 \text{ donné}$$

on pose $Y_t = e^{-t}X_t$.

on a : $Y_t = f(t, X_t)$, $f(t,x) = e^{-t}x$.

la formule d'Itô donne

$$\begin{cases} dY_t = \left(-e^{-t}X_t + e^{-t}X_t\right)dt + e^{-t}dB_t \\ \quad\;\; = e^{-t}\,dB_t. \\ Y_0 = X_0 \end{cases}$$

(1,5)

le terme de drift étant nul, Y_t est une intégrale stochastique et donc une martingale. (1)

(2) le resultat est la traduction de l'égalité

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t e^{-s}\,dB_s$$

soit : $e^{-t}\cancel{X}_t = X_0 + \int_0^t e^{-s}\,dB_s$ (2,5)

d'où $X_t = e^{t}X_0 + \int_0^t e^{t-s}\,dB_s$

$$= e^{t}X_0 + \Phi_t.$$

avec $\Phi_t = \int_0^t e^{t-s}\,dB_s$

Exercice n°3, $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un Mvt Brownien standard.

(1) (a) $M_t = B_t^2 - t, \quad t \in \mathbb{R}_+$.

- $E(M_t) = E(B_t^2 - t) = t - t = 0$ 0,50
- $Cov(M_t, M_s) = 2(t\wedge s)^2$ 0,50

(b) $N_t = \exp(B_t - t/2)$

- $E(N_t) = 1$ 0,50
- $Cov(N_t, N_s) = e^{(t\wedge s)} - 1$ 0,50

Les processus ne sont pas Gaussiens pour les raisons précédentes. 0,5

(2) (a) $E(B_t^2 - t \mid \mathcal{F}_s^B) = B_s^2 - s$

$E(B_t^2 - B_s^2 \mid \mathcal{F}_s^B) = E((B_t - B_s)^2 + 2(B_t - B_s)B_s \mid \mathcal{F}_s^B)$

1 $= E((B_t - B_s)^2) + 2E(B_t - B_s)B_s = t - s$

(b) Vérifions que $E(\exp(B_t - t/2) \mid \mathcal{F}_s^B) = \exp(B_s - s/2)$ 1,5

$E(\exp(B_t - B_s) \mid \mathcal{F}_s^B) = E(\exp(B_t - B_s)) = \exp\left(\frac{t-s}{2}\right)$

puisque $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$

et puisque si X est v.a Gaussienne centrée de variance σ^2 on a

$$E\left(\exp(X)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(x - \frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-\sigma^2)^2}{2\sigma^2} + \frac{\sigma^2}{2}\right) dx$$

$$= \exp\left(\sigma^2/2\right)$$

Exercice 4 : B — mvt Brownien standard

$(\mathcal{F}_t^B)_t$ filtration naturelle.

$$Y_t = \int_0^t B_s \, ds \qquad t \geq 0$$

En utilisant la formule d'Itô pour

$$J_t = \int_0^t B_s^2 \, ds$$

on a

$$J_t = \frac{B_t^3}{3} - \int_0^t B_s \, ds = \frac{B_t^3}{3} - Y_t$$ 1,5

$E\left(B_t^3 \mid \mathcal{F}_s\right)$

on a $B_t^3 = \left((B_t - B_s) + B_s\right)^3 =$

$$= (B_t - B_s)^3 + 3(B_t - B_s)^2 B_s + 3(B_t - B_s) B_s^2 + B_s^3$$

on déduit alors :

$$E(B_t^3 | \mathcal{F}_s) = E\left((B_t - B_s)^3\right) + 3B_s E\left((B_t - B_s)^2\right) + 3B_s^2 E(B_t - B_s)$$

$$= B_s^3 + 3(t-s) B_s$$

1,5

On a donc

$$E(Y_t | \mathcal{F}_s) = E\left(\frac{B_t^3}{3} \Big| \mathcal{F}_s\right) - E(J_t | \mathcal{F}_s)$$

$$= (t-s) B_s + \frac{B_s^3}{3} - J_s$$

1

J_s est une martingale par rapport à la filtration du mouvement Brownien

$$J_s = \frac{B_s^3}{3} - Y_s$$

On conclut

$$E(Y_t | \mathcal{F}_s) = (t-s) B + Y_s$$

1

Corrigé type : Simulation numérique

Exercice 1

Question de cours

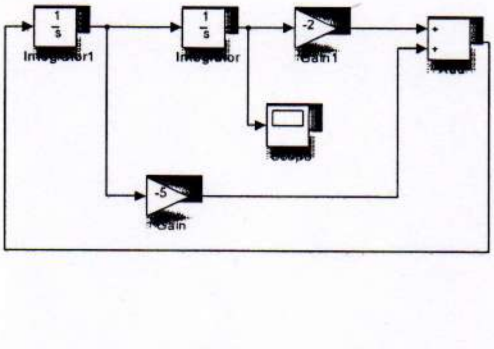
Exercice 2

1. syms : Short-cut for constructing symbolic objects.
2. solve : Equations and systems solver.
3. @ : Handle used in calling functions indirectly
4. hold on : retains the current plot and certain axes properties so that subsequent graphing commands add to the existing graph.
5. ode45 : Solve nonstiff differential equations ; medium order method.
6. plot : This MATLAB function plots the columns of Y versus the index of each value when Y is a real number
7. hold off : resets axes properties to their defaults before drawing new plots.
8. axis : Axis scaling and appearance

Ce bloc utilise ode45 et realise le graphe qui montre comment varieront les populations des deux espèces, proie et prédateur en fonction du temps.

Exercice 3

L'organigramme de résolution de l'équation différentielle y" = -5y' -2y avec Simulink.



Université Med KHIDER
Faculté des sciences exactes
et des sciences de la nature et de la vie.
Département de mathématiques.

Examen Master II:

(Théorie des valeurs extrêmes et processus empirique)

Exercice1 :

Soit $(X_i)_{1 \leq i \leq n,}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi que *X*. On pose $X_{n,n} = max\{X_1, \dots X_n\}$.
Montrer que si X suit la loi de

- Weibull de paramètre α, alors $X_{n,n}$ a même loi que $n^{-\frac{1}{\alpha}}$ X;
- Gumbel, alors $X_{n,n}$ a même loi que X + log(n) ;
- Fréchet de paramètre α alors $X_{n,n}$ a même loi que $n^{\frac{1}{\alpha}}$ X;

Exercice2 :

Soit $X_1,\dots,X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre λ, $X_i \sim \mathcal{E}(\lambda)$. On note par $X_{n,1},\dots,X_{n,n}$ sa statistique d'ordre associée.

1°) Donner la valeur de la médiane en fonction de la statistique d'ordre associée.

2°) Montrer que la suite $\frac{X_{n,n} - \frac{logn}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda}}$ converge en loi vers la variable z de fonction de répartition G, G est la distribution de Gumbel définie par :

$$G(x) = e^{-e^{-x}}, \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

3°) Montrer que les variables $Y_i = X_{n,i} - X_{n,i-1}$ *, pour i=1,…,n* , sont indépendantes et de loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{i}$, $Yi \sim \mathcal{E}\,(\frac{1}{i})$.

Exercice3:

On note dans cet exercice la distribution des valeurs extrêmes généralisée pour $\mu = 0$ et $\gamma \neq 0$, par $H_{\gamma,\sigma}(x) = exp\left\{\left(1 + \gamma\frac{x}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\right\}$, pour $1 + \gamma\frac{x}{\sigma} > 0$.

Sans chercher a résoudre le système donner ses deux équations qui déterminent les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres de dispersion $\sigma > 0$, et de forme (ou indice des valeurs extrêmes) $\gamma \epsilon \mathbb{R}_+$.

Université Mohamed khider Biskra

Faculté des sciences exactes et sciences de la nature et de vie
Département de mathématiques
Module: Théorie générale des processus stochastiques.
Année:2019/2020.

Contrôle de rattrapage

Exercice 1: (6 points) (1, 1,5, 1,5, 2)

Soient X un ensemble. Vérifier que l'ensemble $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(X) \ / \ A$ ou A^c est dénombrable est une tribu sur X.

1) Comparer cette tribu à la tribu engendrée par la classe $\varphi := \{\{x\} \ / \ x \in X\}$.

(2+2+2) Exercice 2:(6 points) Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, montrer que.

1) si $(\bar{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$, alors $.\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$.

2) Si $A_0 \subset A_1 \subset ... \subset A_n \subset ...$ sont des parties mesurables, alors $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

3) si $A_0 \supset A_1 \supset ... \supset A_n \supset ...$ sont des partie mesurables et si $\mu(A_0) < +\infty$, alors $\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

(2+2) Exercice 3: (4 points)

.Pour trois réels a, b, c on désigne par $mil\{a, b, c\}$ le réel situé en deuxième position, si on les ordonne par ordre croissant.

1) Vérifier que $mil\{a,b,c\} = \min\{\max(a,b), \ \max(a,c), \ \max(b,c)\}$.

2) Si f, g, h sont trois applications mesurables de $(X, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, montrer que l'application m de X dans $\mathbb{R}$ définie par $m(x) = mil\{f(x), g(x), h(x)\}$ est $(\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ −mésurable.

(1,5, 1,5, 1) Exercice 4: (4 points)

Soit $f : \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ une application $(\mathcal{B}(\mathbb{R}) - \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$−mesurable, on suppose que f est λ−intergrable (λ est la mesure de Lebesgue). Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}$ $\int_{\mathbb{R}} f(x+a)d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)d\lambda(x)$.

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
UNIVERSITE DE BISKRA
MODULE

$2^{ième}$ Année Master Maths
Premier semestre, année 2020/2021
Mouvement Brownien et calcul stochastique

Examen

Exercice 1. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien. Montrer que

3pts

$$X_t = B_{1-t} - B_1, \qquad t \in [0,1]$$

est un mouvement Brownien.

Exercice 2. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien standard et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle. Montrer que le processus suivant est une $\mathcal{F}_t$-martingale :

4pts

$$B_t^3 - 3tB_t, \qquad t \geq 0.$$

Exercice 3. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien standard. On définit les processus

$$Y_t = \int_0^t e^s dB_s \qquad \text{et} \qquad Z_t = \int_0^t Y_s dB_s.$$

6pts

(1) Montrer que Y_t est bien défini.
(2) Quelle est la loi de Y_t. Calculer $E[Y_t]$ et $E[Y_t^2]$.
(3) Montrer que Z_t est bien défini. Est-ce que Z_t est une martingale?
(4) Calculer $E[Z_t]$ et $E[Z_t^2]$.

Exercice 4. Calculer l'intégrale stochastique

3pts

$$\int_0^t B_s^{1/2} dB_s.$$

Exercice 5. Résoudre l'EDS

$$dX_t = -\frac{1}{2}X_t dt + \sqrt{1-X_t^2}dB_t, \qquad X_0 = 0$$

4pts

à l'aide du changement de variable $Y = Arc\sin(X)$.

Corrigé type : Examen

Exercice 1 : (3pts) B_t - M.B $\quad X_t = B_{1-t} - B_1, \quad t \in [0,1]$.

① $X_0 = B_1 - B_1 = 0$.

② X_t est continu (transformation continue du M.B B)

③ $0 \leq s < t < 1$

$$X_t - X_s = (B_{1-t} - B_1) - (B_{1-s} - B_1) = B_{1-t} - B_{1-s}$$

$$= -(B_{1-s} - B_{1-t})$$

on sait que $B_{1-s} - B_{1-t} \sim N(0, t-s)$

$\Rightarrow X_t - X_s \sim N(0, t-s)$.

X_t est accroissements stationnaires et suivent la la loi normale.

④ $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4 \leq 1$.

$$Cov(X_{t_4} - X_{t_3}, X_{t_2} - X_{t_1}) = Cov(B_{1-t_4} - B_{1-t_3}, B_{1-t_2} - B_{1-t_1})$$

$$= cov(B_{1-t_4}, B_{1-t_2}) - cov(B_{1-t_4}, B_{1-t_1}) - cov(B_{1-t_3}, B_{1-t_2})$$

$$+ cov(B_{1-t_3}, B_{1-t_1}) =$$

$$= 1 - t_4 - (1-t_4) - (1-t_3) + (1-t_3) = \cancel{1} - \cancel{t_4} - \cancel{1} + \cancel{t_4} - \cancel{1} + \cancel{t_3} + \cancel{1} - \cancel{t_3}$$

$$= 0.$$

$\Rightarrow$ les accroissements de X_t sont indépendants.

$\Rightarrow X_t$ est M.B. standard.

Exercice 2 : $B_t^3 - 3t B_t$, $t \geq 0$
(4 pts)
est une $\mathcal{F}_t$-martingale.

$$E(B_t^3 | \mathcal{F}_s) = E\left(\left(B_t - B_s + B_s\right)^3\right)$$
$$= B_s^3 + 3 B_s (t-s).$$

B_t est une $\mathcal{F}_t$-martingale

$$E\left(B_t^3 - 3t B_t \middle| \mathcal{F}_s\right) = B_s^3 + 3(t-s) B_s - 3t B_s$$
$$= B_s^3 - 3s B_s.$$

ce qui prouve que $B_t^3 - 3t B_t$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale.

Exercice 3 : $Y_t = \int_0^t e^s dB_s$, $Z_t = \int_0^t Y_s dB_s$
(6 pts)

① Y_t est bien défini

$$\int_0^t (e^s)^2 dt = \int_0^t e^{2s} dt = 1/2 \, e^{2s} \Big|_0^t = 1/2 \left(e^{2t} - 1\right) < \infty$$

$Y_t = \int_0^t e^s dB_s$ est une intégrale de Wiener

② $Y_t \sim N\left(0, \int_0^t (e^s)^2 ds\right) = N\left(0, \frac{1}{2}\left(e^{2t} - 1\right)\right)$.

$\Rightarrow E(Y_t) = 0$

$E(Y_t^2) = Var(Y_t^2) = \int_0^t e^{2s} ds = \frac{1}{2}\left(e^{2t} - 1\right)$

③ $Z_t = \int_0^t Y_s dB_s$.

$E(Y_t^2) = \frac{1}{2}\left(e^{2t} - 1\right) < \infty$, $Y_t^2 \in L^2[0,t]$.

$\Rightarrow$ l'intégrale $Z_t = \int_0^t Y_s dB_s$ st bien défine.

d'après cours Z_t st une martingale.

④ $E(Z_t) = 0$

$E(Z_t^2) = \frac{1}{4}\left(e^{2t} - 1 - 2t\right)$.

Exercice 4 : (3pts) $\int_0^t B_s^{1/2} dB_s$

La formule d'Itô, on a :

$d\left(B_t^{3/2}\right) = \frac{3}{2} B_t^{1/2} dB_t + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} B_t^{-1/2}\right)dt$.

$$\Rightarrow B_t^{3/2} = \int_0^t \frac{3}{2} B_s^{1/2} dB_s + \frac{3}{8}\int_0^t B_s^{-1/2} ds .$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} B_t^{3/2} = \int_0^t B_s^{1/2} dB_s + \frac{1}{4}\int_0^t B_s^{-1/2} ds .$$

$$\Rightarrow \int_0^t B_s^{1/2} dB_s = \frac{2}{3} B_t^{3/2} - \frac{1}{4}\int_0^t B_s^{-1/2} ds .$$

Exercice 5 : 4 pts

$dX_t = -\frac{1}{2} X_t dt + \sqrt{1-X_t^2}\, dB_t$, $\quad X_0 = 0$

$Y_t = \text{Arc}\sin(X_t)$, $\quad X_t \in]-1,1[$

posons $f(x) = \text{Arc}\sin(x)$,

Formule d'Itô :

$$dY_t = \frac{dX_t}{\sqrt{1-X_t^2}} + \frac{1}{2}\frac{X_t}{(1-X_t^2)^{3/2}} dX_t^2 = dB_t$$

$\Rightarrow dY_t = dB_t \Rightarrow Y_t = B_t$

$\Rightarrow X_t = \sin(Y_t) \quad \Rightarrow \boxed{X_t = \sin(B_t)}$

UNIVERSITE DE BISKRA
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
MASTER 2 MATH ANALYSE CONVEXE

FACULTE DE SCIENCES EXACTES
ET SCIENCE DE LA NATURE ET DE LA VIE
14/01/2020

EXAMEN FINAL

EXERCICE 1 [$01 \times 05 = 05$ points]

Soit $C = \{v_1, v_2, ..., v_m\} \subset \mathbb{R}^n$. Expliquer ce que signifient les termes suivants :

1) X est une combinaison linéaire d'éléments de C

2) X est une combinaison affine d'éléments de C

3) X est une combinaison convexe d'éléments de C

4) L'enveloppe convexe de C

5) L'enveloppe affine de C

EXERCICE 2 [$02 + 02 = 04$ points]

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, $X \subset E$. Montrer que :

$$\overline{Conv\,(X)} = \overline{Conv\,(\overline{X})}$$

EXERCICE 3 [$(01.5 \times 02) + (02 \times 04) = 11$ points]

I 1) Soit $\psi : E \to F$ une application affine et $f : F \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.
Montrer que $f \circ \psi$ est convexe

2) Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $\varphi K \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe définie sur un convexe K croissante tel que $Imf \subset K$.
Montrer que $\varphi \circ f$ est convexe

II Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ et on définie la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par $f(X) = \|AX - b\|_2^2$.

1) Montrer que f est convexe

2) On suppose que $Ln \circ g$ est convexe, montrer que pour tout $\alpha > 0$, g^α est convexe

III Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite quasi convexe si pour tout $a < c < b$ dans I : $f(c) \leq max(f(a), f(b))$

1) Vérifier que toute fonction convexe est quasi convexe

2) On suppose que $I = I_1 \bigcup I_2$, $I_1 < I_2$, $I_1 \bigcap I_2 = \varnothing$ telque f décroissante sur I_1 et croissante sur I_2.
Montrer que f est quasi convexe

Université Mohamed Khider Biskra.
Département des Mathématiques
Master 2

2019/2020

Examen

Simulation et méthodes numériques

Exercice 1. (10 points)
On considère les deux problèmes suivants :

Problème 1

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\ \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

avec $t \in [0, T]$ et $x \in [0, 2]$
On considère en espace les conditions aux bords

$$u(x = 0, t) = 1 \quad , \quad u(x = 2, t) = 0, \quad t \in [0, T]$$

et en temps la condition initiale

$$u(x, t = 0) = exp(2x) \quad , \quad x \in [0, 2]$$

Problème 2

$$-\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)y = f(x) \quad , \quad x \in [0, 1]$$

$$y(0) = 1 \ \ , \ \ y(1) = 1$$

où $q(x)$ et $f(x)$ sont continues.

Pour chaque problème, on cherche à trouver une valeur approchée de la solution.

1. Écrire le schéma aux différence finies pour approcher la solution du problème.
2. Par la méthode des différences finies, écrire un programme Matlab qui sert à donner la courbe de la solution approchée.

On prend

$$f(x) = \pi\ \ exp(2x) \quad , \quad q(x) = \frac{1}{2}x^3$$

Exercice 2. (6 points)
A l'aide de la boite à outil " *Optimization Toolbox* " de Matlab , utiliser la commande qui permet la minimisation de :

1.

$$Max \;\; f(x) = Max(-x_1 + 3x_2 - 18 \;\;,\;\; x_1 + x_2 - 8 \;\;,\;\; -x_1 - x_2)$$

$$\text{sous les deux contraintes} \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ 2x_1 - x_2 \leq 6 \end{cases}$$

2.

$$f(x) = -x_1 x_2 \quad \text{sous les deux contraintes} \begin{cases} 20x_1 + 15x_2 - 30 = 0 \\ (x_1/2)^2 + x_2^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{où} \quad 0 \leq x_1, 0 \leq x_2$$

Exercice 3. (4 points)
Construire un modèle en Simulink permettant la résolution numérique de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 3(\frac{dy}{dt})^2 + ty + 2e^{2t}$$

avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
UNIVERSITE DE BISKRA
MODULE

$2^{ième}$ Année Master Maths
Premier semestre, année 2019/2020
Mouvement Brownien et calcul stochastique

EXAMEN
(15/01/2020)

Exercice 1. Soit B_t un mouvement Brownien réel standard et soit $s \leq t$.
1) Montrer que $E(B_s e^{B_s}) = se^{s/2}$. 1
2) Calculer $E(B_s e^{B_t})$. 1

Exercice 2. Soit B_t un mouvement Brownien réel standard et soit X_t l'intégrale stochastique

$$X_t = \int_0^t e^{s-t} dB_s.$$

1) Montrer que X_t est bien défini. 1
2) Montrer que X_t est un processus Gaussien. 1
3) Déterminer l'espérance $E(X_t)$ et la variance $Var(X_t)$. 1
4) Démontrer que la variable aléatoire

$$Z_t = \sqrt{2(t+1)} X_{\ln(t+1)/2}$$ 2

suit la loi $\mathcal{N}(0, t)$.

Exercice 3. Soit B_t un mouvement Brownien réel standard. Démontrer que le processus suivant est une $\mathcal{F}_t^B$−martingale

$$M_t = e^{B_t} - 1 - \frac{1}{2} \int_0^t e^{B_s} ds.$$ 3

Exercice 4. Soit B_t un mouvement Brownien réel standard. Soit $X_t = tB_t$ et $Y_t = e^{B_t}$.
Trouver $d\left(\frac{X_t}{Y_t}\right)$. 3

Exercice 5. Soit B_t un mouvement Brownien réel standard. On considère l'EDS suivante

$$\forall t \geq 0, \qquad dX_t = -\frac{\sin(t)}{2+\cos(t)} X_t dt + (2+\cos(t)) dB_t.$$

1) Démontrer que l'EDS admet une unique solution. 2
2) Montrer que la solution est donnée par 2

$$\forall t \geq 0, \qquad X_t = (2+\cos(t)) B_t.$$

Exercice 6. Soit B_t un mouvement Brownien réel standard. Trouver $E\langle X, Y\rangle_t$, $t \geq 0$ si $X_t = B_t^3$ et Y_t vérifie l'équation différentielle stochastique

$$dY_t = \cos^2 Y_t dt + dB_t, \qquad Y_0 = 1.$$ 3

LAMRI ~~KENZA~~ (TD : (0,5))
Chellal (TD : (0,5))

Corrigé type : Mouvement brownien et Calcul stochastique.

Exercice 1 :

Si Z designe une v.a de loi $\mathcal{N}(0,1)$ alors $B_s \sim \sqrt{s}\,Z$

$$E\left[B_s e^{B_s}\right] = E\left[\sqrt{s}\,Z\, e^{\sqrt{s}Z}\right] = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z\, e^{\sqrt{s}z} e^{-z^2/2}\, dz$$

$$= \underbrace{\frac{-\sqrt{s}}{\sqrt{2\pi}} e^{\sqrt{s}z} e^{-z^2/2} \Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} + \frac{s}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\sqrt{s}z} e^{-z^2/2}\, dz \quad (1)$$

$$= s e^{s/2}$$

par une intégration par parties et la transformée de Laplace.

2) $E\left(B_s e^{B_t}\right) = E\left(B_s e^{B_s} e^{B_t - B_s}\right)$

$$= E\left(B_s e^{B_s}\right) * E\left(e^{B_t - B_s}\right) = s e^{s/2} e^{(t-s)/2} = s e^{t/2} \quad (1)$$

(B_s et $B_t - B_s$ sont indépendants)

Exercice 2 : $X_t = \int_0^t e^{s-t}\, dB_s$

(1) X_t est bien défini

e^{s-t} est déterministe donc X_t est une intégrale de Wiener.

$$\int_0^t \left(e^{s-t}\right)^2 ds = \int_0^t \left(e^{s} \cdot e^{-t}\right)^2 ds = \int_0^t e^{2s} e^{-2t}\, ds = e^{-2t} \int_0^t e^{2s} ds = e^{-2t} \cdot e^{2s} \Big|_0^t$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2t}\right) \qquad 0 \le t < \infty \qquad (1)$$

$\int_0 e^{s-t} dB_s$.

e^{s-t} est déterministe ($\in L^2$) $\Rightarrow$ l'intégrale stochastique (Wiener) est normalement distribuée

$$X_t \sim \mathcal{N}\left(0, \int_0^t \left(e^{(s-t)}\right)^2 ds\right) = \mathcal{N}\left(0, \int_0^t e^{2(s-t)} ds\right) = \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2}(1-e^{-2t})\right)$$ (1)

3) De (2) on sait que

$E(X_t) = 0$ et $Var(X_t) = \frac{1}{2}(1-e^{-2t})$. (1)

4) $Z_t = \sqrt{2(t+1)}\, X_{\ln(t+1)/2}$.

de (2) on sait que $X_t \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2}(1-e^{-2t})\right)$

Rq : Pour une v.a normale $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, il est vérifié que $cY \sim \mathcal{N}(0, c^2\sigma^2)$. (2)

Par conséquent

$$Z_t \sim \mathcal{N}\left(0, \left(\sqrt{2(t+1)}\right)^2 \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2\ln(t+1)/2}\right)\right)$$

$$= \mathcal{N}\left(0, (t+1)\left(1 - e^{-\ln(t+1)}\right)\right) = \mathcal{N}\left(0, (t+1)\left(1 - \frac{1}{t+1}\right)\right)$$

$$= \mathcal{N}\left(0, (t+1)\frac{1}{t+1}\right) = \mathcal{N}(0, t).$$

Exercice 3 : $M_t = e^{B_t} - 1 - \frac{1}{2}\int_0^t e^{B_s} ds$.

M_t est $\mathcal{F}_t^B$-adapté car e^{B_t} est $\mathcal{F}_t^B$-mesurable et $\int_0^t e^{B_s} ds$ est $\mathcal{F}_t^B$-mesurable (fct intégrable de Riemann) (0,5)

... la formule d'Itô à $e^{B_t} = g(B_t)$ avec $g(x) = e^x$, $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et on a

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x) = e^x, \qquad g(B_0) = e^{B_0} = e^0 = 1$$

$$\Rightarrow e^{B_t} = g(B_t) = 1 + \int_0^t e^{B_s}\,dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t e^{B_s}\,ds \qquad 1{,}5$$

$$\Rightarrow M_t = \cancel{1} + \int_0^t e^{B_s}\,dB_s + \cancel{\frac{1}{2}\int_0^t e^{B_s}\,ds} - \cancel{1} - \cancel{\frac{1}{2}\int_0^t e^{B_s}\,ds}$$

$$= \int_0^t e^{B_s}\,dB_s .$$

1

e^{B_s} est mesurable adapté et

$$E\left[\int_0^t |e^{B_s}|^2\,ds\right] = \int_0^t E\left[e^{2B_s}\right]ds = \int_0^t e^{4s/2}\,ds \le t e^{2t} < \infty$$

pour $\forall\, 0 \le t < \infty$

$\Rightarrow e^{B_t} \in L^2$.

$\Rightarrow M_t$ est une martingale (intégrale d'Itô d'un processus de L^2).

<u>Exercice 4</u> : $X_t = tB_t$, $Y_t = e^{B_t}$

$d\left(\frac{X_t}{Y_t}\right) = ?$

$$\frac{X_t}{Y_t} = \frac{tB_t}{e^{B_t}} = tB_t e^{-B_t} = f(t, B_t)$$

avec $f(t,x) = txe^{-x}$, $f \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ et

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = xe^{-x}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = t(1-x)e^{-x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) = t(x-2)e^{-x}$$

$$df(t,B_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,B_t)\,dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t,B_t)\,dB_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,B_t)\,dt$$

$$= B_t e^{-B_t}\,dt + t(1-B_t)e^{-B_t}\,dB_t + \tfrac{1}{2}t(B_t-2)e^{-B_t}\,dt$$

$$= \left(B_t e^{-B_t} + \tfrac{1}{2}t\,B_t e^{-B_t} + t e^{-B_t}\right)dt + \left(t e^{-B_t} - t B_t e^{-B_t}\right)dB_t$$

$$= \left(\frac{X_t}{tY_t} + \frac{1}{2}\frac{X_t}{Y_t} + \frac{t}{Y_t}\right)dt + \left(\frac{t}{Y_t} - \frac{X_t}{Y_t}\right)dB_t.$$

3

Exercice 5 : $dX_t = \dfrac{-\sin(t)}{2+\cos(t)}X_t\,dt + (2+\cos(t))\,dB_t$

1) l'EDS admet une solution unique

posons $b(t,x) = \dfrac{-\sin(t)}{2+\cos(t)}x$, $\sigma(t,x) = (2+\cos(t))$

on a :

$|b(t,x)-b(t,y)| = \left|\dfrac{-\sin(t)}{2+\cos(t)}\right| |x-y| \leq \frac{1}{3}|x-y|$

σ ne dépend pas de x et que $|\sigma(t,x)| \leq 3$

$\Rightarrow$ b et σ sont des fonctions Lipschitziennes.

2

$|b(t,x)| = \left|\dfrac{-\sin(t)}{2+\cos(t)}\right| |x| \leq \frac{1}{3}|x| \leq \frac{1}{3}(1+|x|)$

σ ne dépend pas de x $|\sigma(t,x)| \leq 3 \leq 3(1+|x|)$.

$\Rightarrow$ l'EDS admet une solution forte unique

(d'après thm).

… rons que $X_t = \left(2+\cos(t)\right) B_t$ est la solution de l'EDS.

Par application de la formule d'Itô à $X_t = f(t, B_t) = \left(2+\cos(t)\right) B_t$.

avec $f(t,x) = \left(2+\cos(t)\right)x$, $f \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ et

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = -x\sin(t), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = 2+\cos(t), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) = 0$$

et $X_0 = \left(2+\cos(0)\right)B_0 = 0$.

$$dX_t = \frac{\partial f}{\partial t}(t,B_t)\,dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t,B_t)\,dB_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,B_t)\,dt$$

$$= -\sin(t) B_t\,dt + \left(2+\cos(t)\right)dB_t.$$

2

on a que $X_t = \left(2+\cos(t)\right)B_t \Rightarrow B_t = \dfrac{X_t}{2+\cos(t)}$

$$\Rightarrow dX_t = -\frac{\sin(t)}{2+\cos(t)} X_t\,dt + \left(2+\cos(t)\right)dB_t$$

CQFD.

Exercice 6 : $X_t = B_t^3$, $Y_t = \cos^2 Y_t\,dt + dB_t$, $Y_0 = 1$

On écrit X_t sous forme d'un processus d'Itô, en appliquant la formule d'Itô. à $X_t = B_t^3$

on a $X_t = f(B_t) = B_t^3$, avec $f(x) = x^3$, $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x) = 3x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) = 6x.$

$\Rightarrow dX_t = d(B_t^3) = 3B_t^2 \, dB_t + \frac{6}{2} B_t \, dt = 3B_t^2 \, dB_t + 3B_t \, dt$

$X_0 = f(B_0) = 0.$ (1)

$\Rightarrow$ Sous forme intégrale :

$X_t = B_t^3 = 3\int_0^t B_s \, ds + 3\int_0^t B_s^2 \, dB_s \quad , \quad X_0 = 0$

$Y_t = 1 + \int_0^t \cos^2 Y_s \, ds + \int_0^t dB_s \quad , \quad Y_0 = 1.$

on a que le crochet de deux processus d'Itô est le crochet des intégrales stochastiques

$\Rightarrow E\langle X, Y\rangle_t = E\left\langle 3\int_0^t B_s^2 \, dB_s , \int_0^t dB_s \right\rangle_t = E\left(3\int_0^t B_s^2 \, ds\right)$

$= 3\int_0^t E(B_s^2) \, ds = 3\int_0^t s \, ds = 3\left.\frac{s^2}{2}\right|_0^t = 3t^2/2$ (2)

corrigé [illegible] [illegible]
Théorie des valeurs extrêmes, STATISTIQUE

<u>Ex①</u> : 1) Les excès W_i sont définis [illegible] $W_i = \begin{cases} X_i - u & \text{si } [illegible] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

donc $W_i = (X_i - u, 0)_+ = \max\{X_i - u, 0\}$.

$$F_{W_i}(w) = \mathbb{P}(W_i \leq w) = \mathbb{P}(X_i - u \leq w / X_i > u) = \frac{F(w+u) - [illegible]}{1 - F[illegible]}$$

2) $e(u) = E(W_i) = E(X_i - u / X_i > u)$.

L'estimateur de $e(u)$ est $\hat{e}(u) = \hat{E}(W) = \overline{W}$ moyenne [illegible]

$$\hat{e}(u) = \frac{1}{\#\{W_i\}} \sum_{i=1}^{n} W_i = \frac{1}{\#\{X_i > u\}} \sum_{i=1}^{n} (X_i - u, 0)_+ .$$

$$\hat{e}(u) = \frac{1}{N_u} \sum_{i=1}^{n} (X_i - u) \cdot \mathbb{1}_{\{X_i > u\}} \quad \text{où } N_u = [illegible]$$

<u>Ex②</u> :

1) $$\lim_{t \to \infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = \lim_{t \to \infty} \frac{(1 + (tx)^{\theta})^{-\lambda}}{(1 + t^{\theta})^{-\lambda}} = x^{-\lambda\theta} = x^{-1/\gamma}, \quad \gamma = \frac{1}{\lambda\theta}$$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = x^{-\theta\lambda} = -\log \Phi_\gamma(x) \iff \Phi_\gamma(x) = e^{-x^{-1/\gamma}} \; ; \gamma = \frac{1}{\theta\lambda}$$

2) $b_n = 0$; $a_n = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \left(n^{1/\lambda} - 1\right)^{1/\theta}$.

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_{n,n} - b_n}{a_n} \leq x\right) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_{n,n} \leq a_n x) = \lim_{n \to \infty} [F(a_n x)]^n$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[1 - (1 + (a_n x)^{\theta})^{-\lambda}\right]^n = \lim_{n \to \infty} \exp\left[n \log(1 - u_n)\right]; \text{ où } u_n = (1 + [illegible]$$

comme $\log(1 - u_n) \simeq u_n \simeq \frac{x^{-\theta\lambda}}{n}$ on obtient enfin

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_{n,n} - b_n}{a_n}\right) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_{n,n}}{(n^{1/\lambda} - 1)^{1/\theta}} \leq x\right) = \exp - x^{-\theta\lambda} = e^{[illegible]}$$

$$F \in \mathcal{D}\left(\Phi_{(\theta\lambda)^{-1}}(x)\right)$$

$\gamma = \frac{1}{\theta\lambda}$

Ex 3 : 1°) $f(\cdot)$ est continue sur $[0,1]$ et $\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt = 1$. 1

2°) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 0 \\ 1-(1-x)^{\beta} & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases} \Rightarrow \bar{F}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \le 0 \\ (1-x)^{\beta} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

3°) $x_F = F^{-1}(1) = 1$; $a_n = F^{-1}(1) - F^{-1}(1-\frac{1}{n}) = n^{-\beta}$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_n - 1}{n^{-\beta}} \le x\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1-(-n^{-\beta}x)^{\beta}\right)^n = \exp n \log\left(1-(-x\ldots\right.$$

$$= \exp -(-x)^{\beta} = \exp -(-x)^{-1/\gamma} \; ; \; \gamma = -\frac{1}{\beta} <$$

2

Barème

Ex 1 : 1°) 3 pts 2°) 3 pts.

Ex 2 : 1°) 3 pts 2°) 4 pts

Ex 3 : 1°) 1 pt. 2°) 2 pts 3°) 4 pts.

Consultation des copies le 21/01/2020

à 11H00 Salle 09.

T. BENATIA.