Faculté des Mathématiques **USTHB** **semestre 2 année 2012/2013**
Master 1 Ingénierie Statistiques (ISMTID)
Module: **Processus Stochastiques 2**

Correction Epreuve Finale

Exercice 1 ***1/ (2 pts)*** *Soit X une v.a. réelle sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ telle que $E(|X|) < +\infty$.*

On a que $\forall B \in \mathcal{A} : \int_B E(X/\mathcal{A})\, dP = \int_B X dP$. Mais $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$, donc:

- Si $B = \Omega$: $\int_\Omega E(X/\mathcal{A})\, dP = \int_\Omega X dP = E(X) = E(X) P(\Omega) = E(X) \int_\Omega dP = \int_\Omega E(X)\, dP$
- Si $B = \emptyset$: $\int_\emptyset E(X/\mathcal{A})\, dP = 0 = \int_\emptyset X dP = \int_\emptyset E(X)\, dP$

Donc $\forall B \in \mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$: $\int_B E(X/\mathcal{A})\, dP = \int_B E(X)\, dP$, ainsi d'après le Lemme 1, $E(X/\mathcal{A}) = E(X)$ p.s.

2/ $Y_n = E(X/\mathcal{F}_n)$ où $(\mathcal{F}_n)_n$ est une filtration.

- **(1 pts)** $Y_n = E(X/\mathcal{F}_n)$ est $\mathcal{F}_n-$mesurable, ainsi $(X_n)_n$ est adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)_n$.
- **(1 pts)** On a $E(|Y_n|) = E(|E(X/\mathcal{F}_n)|) \leq E(E(|X|/\mathcal{F}_n))$ d'après l'inégalité de Jensen et $E(E(|X|/\mathcal{F}_n)) = E(|X|) < +\infty$ donc $E(|Y_n|) < +\infty$. D'où Y_n est intégrable $\forall n \geq 1$.
- **(2 pts)** Montrons que: $E(Y_{n+1}/\mathcal{F}_n) = Y_n$. On a $E(Y_{n+1}/\mathcal{F}_n) = E(E(X/\mathcal{F}_{n+1})/\mathcal{F}_n) = E(X/\mathcal{F}_n) = Y_n$ car $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$. Ainsi $Y_n = E(X/\mathcal{F}_n)$ est une martingale.

Exercice 2 ***1/*** $Y_n = (-1)^n \cos(\pi X_n)$

- **(0.5 pts)** Y_n est fonction de X_n qui est $\mathcal{F}_n-$mesurable, ainsi $(Y_n)_n$ est adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)_n$.
- **(0.5 pts)** On a $|Y_n| \leq 1$ donc $E(|Y_n|) < +\infty$. D'où Y_n est intégrable $\forall n \geq 1$.
- **(1 pts)** Montrons que: $E(Y_{n+1}/\mathcal{F}_n) = Y_n$. On a

$$\begin{aligned}
E(Y_{n+1}/\mathcal{F}_n) &= E\left((-1)^{n+1}\cos(\pi X_{n+1})/\mathcal{F}_n\right) = E((-1)^{n+1}\cos(\pi X_n + \pi\xi_{n+1})/\mathcal{F}_n) \\
&= (-1)^{n+1}\left[E(\cos(\pi X_n)\cos(\pi\xi_{n+1})/\mathcal{F}_n) - E(\sin(\pi X_n)\sin(\pi\xi_{n+1})/\mathcal{F}_n)\right] \\
&= (-1)^{n+1}\cos(\pi X_n)E(\cos(\pi\xi_{n+1})) - (-1)^{n+1}\sin(\pi X_n)E(\sin(\pi\xi_{n+1}))
\end{aligned}$$

et $E(\cos(\pi\xi_{n+1})) = \cos(-\pi)\frac{1}{2} + \cos(\pi)\frac{1}{2} = -1$ aussi $E(\sin(\pi\xi_{n+1})) = 0$. Ainsi $E(Y_{n+1}/\mathcal{F}_n) = (-1)^{n+2}\cos(\pi X_n) = (-1)^n \cos(\pi X_n) = Y_n$.

2/ (1 pts) T est le temps d'entrée dans l'ensemble $\{-K, K\}$, donc T est un temps d'arrêt.

3/ (1 pts) On a $|X_n| \leq n$, donc $E(|X_n^2 - n|) \leq E(X_n^2) + n \leq n^2 + n < \infty$.
$X_n^2 - n$ est $\mathcal{F}_n-$mesurable.

$$\begin{aligned}
E\left(X_{n+1}^2-(n+1)/\mathcal{F}_n\right) &= E\left(X_{n+1}^2/\mathcal{F}_n\right)-(n+1)\\
&= E\left(\xi_{n+1}^2/\mathcal{F}_n\right)+2E\left(\xi_{n+1}X_n/\mathcal{F}_n\right)+E\left(X_n^2/\mathcal{F}_n\right)-(n+1)\\
&= E\left(\xi_{n+1}^2\right)+2X_nE\left(\xi_{n+1}\right)+X_n^2-(n+1)\\
&= 1+X_n^2-(n+1)=X_n^2-n
\end{aligned}$$

Donc X_n^2-n est une martingale.

4/ (1 pts) $2Kn$ peut être considérée comme une suite de $2K$ expériences de Bernouilli répétées n fois. Une condition nécessaire pour que $T>2Kn$ est qu'aucune des n suites (de $2K$) ne contiennes que des succés. Alors $P\left(T>2Kn\right)\leq\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2K}\right]^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

5/ (1 pts) Puisque $\{T>2K\left(n+1\right)\}\subset\{T>2Kn\}$ donc d'après le théorème de la continuité monotone séquentielle on a:

$$P\left(T=\infty\right)=P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{T>2Kn\}\right)=\lim_{n\to\infty}P\left(T>2Kn\right)=0$$

6/ (1 pts) $E\left(|X_T^2-T|\right)\leq E\left(X_T^2\right)+E(T)\leq K^2+E(T)$ (car $X_T=\pm K$). Et

$$\begin{aligned}
E(T) &= \sum_{n=1}^{\infty}nP(T=n)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{2K}(2Kn+k)P\left(T=2Kn+k\right)\\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{2K}2K(n+1)P\left(T>2Kn\right)\leq 4K^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2K}\right]^n<\infty
\end{aligned}$$

car la série $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)r^n$ est convergente pour $r\in\left]-1,+1\right[$. Donc $E\left(|X_T^2-T|\right)<\infty$.

7/ (1 pts) Puisque $X_n^2\leq K^2$ sur $\{T>n\}$ donc $E\left(X_n^21_{\{T>n\}}\right)\leq K^2P\left(T>n\right)\to 0$ quand $n\to\infty$; de plus $E\left(n1_{\{T>n\}}\right)\leq E\left(T1_{\{T>n\}}\right)\to_{n\to\infty}0$ car $T>n$ donc $E\left(\left(X_n^2-n\right)1_{\{T>n\}}\right)\to 0$ quand $n\to\infty$.

8/ Puisque $T<\infty$ p.s, $\left(X_T^2-T\right)$ est intégrable et $\lim_{n\to\infty}E\left(\left(X_n^2-n\right)1_{\{T>n\}}\right)=0$. Donc d'après le théorème d'arrêt $E\left(X_T^2-T\right)=E\left(X_1^2-1\right)=0$, donc $E(T)=E(X_T^2)=K^2$.

Exercice 3 ***1/ (1 pts)*** $P\left(S_{12}>120\,/S_3=60\right)=P\left(\frac{S_{12}}{S_3}>2\right)=P\left(9\mu+\sigma\left(W_{12}-W_3\right)>\log 2\right)=P\left(\frac{W_{12}-W_3}{\sqrt{9}}>\frac{\log 2-9\mu}{3\sigma}\right)=1-\phi\left(0.9\right)=0.1841.$

2/ (1 pts) *Soit M la médiane. $P(S_t\leq M)=1/2$ et $P(S_t\leq M)=P(S_0\exp(\mu t+\sigma W_t)<M)=P\left(W_t<\frac{\log M-(\log S_0+\mu t)}{\sigma}\right)=\phi\left(\frac{\log M-(\log S_0+\mu t)}{\sqrt{t}\sigma}\right)=1/2$, donc $\frac{\log M-(\log S_0+\mu t)}{\sqrt{t}\sigma}=0$ et on obtient $M=S_0e^{\mu t}$.*

(1 pts) *On a $\log S_t\rightsquigarrow\mathcal{N}\left(\log S_0+\mu t,\sigma^2t\right)$ donc $E\left(S_t\right)=\exp\left(\log S_0+\mu t+\frac{\sigma^2t}{2}\right)$.*

3/ (2 pts)

$$\begin{aligned}
E\left[S_t\,/\mathcal{F}_s\right] &= E\left[S_0\exp(\mu s+\sigma W_s)\exp(\mu(t-s)+\sigma(W_t-W_s))\,/\mathcal{F}_s\right]\\
&= E\left[S_s\exp(\mu(t-s)+\sigma(W_t-W_s))\,/\mathcal{F}_s\right]=S_sE\left[\exp(\mu(t-s)+\sigma(W_t-W_s))\,/\mathcal{F}_s\right]\\
&= S_sE\left[\exp(\mu(t-s)+\sigma(W_t-W_s))\,/\mathcal{F}_s\right]=S_s\exp\left[\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)(t-s)\right]
\end{aligned}$$

4/ (0.5 pts) *On aura $E\left[S_t\,/\mathcal{F}_s\right]=S_s$ si $\mu=-\dfrac{\sigma^2}{2}$.*

5/ (0.5 pts) *Si $\mu=-\dfrac{\sigma^2}{2}$ la médiane $M=S_0e^{\mu t}$ tend vers 0 exponentiellement quand t tend vers l'infinie, donc un inverstissement mauvais dans ce cas.*