Université Mohamed Khider, Biskra
Faculté des Sc. Exactes et Sc. de la Nature et la Vie
Département de Mathématiques
Master 1: 2020/2021

Corrigé de l'examen de remplacement (1h)

Exercice 1. (08pts)

Donner la région critique du:

1. test, unilatéral à droite, de la moyenne d'une population gaussienne de variance connue? (2pts)
2. test, bilatéral, de comparaison de deux moyennes de deux populations gaussiennes indépendantes de variances connues? (2pts)
3. test, unilatéral à gauche, de comparaison de deux moyennes de deux populations gaussiennes indépendantes de variances inconnues? (2pts)
4. test, unilatéral à droite, de comparaisons de deux moyennes de deux populations gaussiennes indépendantes de variances inconnues supposées égales? (2pts)

* * * * * * * * * * * * * * * * * *

Exercice 2. (12 pts)

Soit $(X_1, ..., X_{12})$ un échantillon d'une population X normale centrée de variance σ^2. On s'intéresse au test suivant:

$$\begin{cases} H_0: & \sigma^2 \leq 2 \\ H_1: & \sigma^2 > 2 \end{cases}.$$

1. Quel test s'agit-il: unilatéral ou bilatéral? $(1pt)$
2. Donner la statistique de test à utiliser. $(2pts)$
3. Au niveau de signification $\alpha = 0.05$, donner la région critique de ce test. $(3pts)$
4. Donner la fonction puissance de ce test. $(3pts)$
5. Tracer soigneusement le graphe de la fonction puissance. $(3pts)$

* *

1 Solution de l'exercice 1

1. Le test, unilatéral à droite, de la moyenne d'une population gaussienne de variance connue σ, est

$$H_0 : \mu \leq \mu_0$$
$$H_1 : \mu > \mu_0.$$

La région critique associeé est:

$$W = \left\{ (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sqrt{n}\frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma} \geq z_{1-\alpha} \right\},$$

où $z_{1-\alpha} = \Phi^{-1}(1-\alpha)$ est le quantile d'ordre $1-\alpha$ de la loi normale centrée-réduite.

2. Test, bilatéral, de comparaison de deux moyennes de deux populations gaussiennes indépendantes de variances connues, est:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

avec σ_1 est σ_2 connues. La région critique associée est:

$$W=\left\{\left(x_1^{(1)},...,x_1^{(n_1)};x_2^{(1)},...,x_2^{(n_2)}\right)\in\mathbb{R}^{n_1+n_2}\mid\frac{|\overline{x}_1-\overline{x}_2|}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}\geq z_{1-\alpha/2}\right\},$$

où $z_{1-\alpha/2}$ (la valeur critique) est le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de $\mathcal{N}(0,1)$, c'est à dire $z_{1-\alpha/2}=\Phi^{-1}(1-\alpha/2)$.

3. Test, unilatéral à gauche, de comparaison de deux moyennes de deux populations gaussiennes indépendantes de variances inconnues, est (le test de Welch)

$$H_0:\mu_1\geq\mu_2$$
$$H_1:\mu_1<\mu_2$$

La région critique associée est

$$W=\left\{\left(x_1^{(1)},...,x_1^{(n_1)};x_2^{(1)},...,x_2^{(n_2)}\right)\in\mathbb{R}^{n_1+n_2}\mid\frac{\overline{x}_1-\overline{x}_2}{\sqrt{\widetilde{s}_1^2/n_1+\widetilde{s}_2^2/n_2}}\leq t_\alpha(\nu)\right\},$$

où $t_\alpha(\nu)$ (la valeur critique) est le quantile d'ordre α de $t(\nu)$ (student), où

$$\nu:=\frac{\left(\widetilde{s}_1^2/n_1+\widetilde{s}_2^2/n_2\right)^2}{\widetilde{s}_1^4/\left(n_1^2(n_1-1)\right)+\widetilde{s}_2^4/\left(n_2^2(n_2-1)\right)}.$$

4. Test, unilatéral à droite, de comparaison de deux moyennes de deux populations gaussiennes indépendantes de variances inconnues supposé égales, est

$$H_0:\mu_1\leq\mu_2$$
$$H_1:\mu_1>\mu_2.$$

avec σ_1 est σ_2 in connues. La région critique associée est:

$$W=\left\{\left(x_1^{(1)},...,x_1^{(n_1)};x_2^{(1)},...,x_2^{(n_2)}\right)\in\mathbb{R}^{n_1+n_2}\mid\frac{\overline{x}_1-\overline{x}_2}{\widetilde{s}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\geq t_{1-\alpha}\right\},$$

où $t_{1-\alpha}$ (la valeur critique) est le quantile d'ordre $1-\alpha$ de $t(n_1+n_2-2)$.

2 Solution de l'exercice 2

C'est un exercice résolut de TD.