La fonction d'autocorrélation empirique est :

$$\hat{\rho}_h = r_h = \frac{\hat{\gamma}_h}{\gamma_0}, \quad -n < h < n$$

Remarque : L'utilisation de la division par n dans $\hat{\gamma}_h$ assure que la matrice de covariance empirique $\hat{\Gamma}_n := \left(\hat{\gamma}_{i-j}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ est semi-définie positive.

Il en est de même pour $\hat{R}_n := \left(\hat{\rho}_{i-j}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$.

$\hat{\rho}_0 = 1.$

On a :
- $\gamma_0 \geq 0$
- $|\gamma_h| \leq \gamma_0, \ \forall h$
- $\gamma_h = \gamma_{-h}, \ \forall h$ (γ_h est paire).

Proposition : la fonction d'autocovariance de tout processus stationnaire $\{X_t, t\in\mathbb{N}\}$ est semi-définie positive.

Preuve : Soit $\underline{X}_n = (X_n, \dots, X_1)'$ et $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)' \in \mathbb{R}^n$.

alors $Var(\underline{a}'\,\underline{X}_n) = \underline{a}'\,\Gamma_n\,\underline{a} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\,\gamma_{i-j}\,a_j \geq 0.$

i.e., Γ_n est semi définie positive.

$\Gamma_n = Var(\underline{X}_n)$ matrice de covariance du vecteur X_n

On a :
- $\rho_0 = 1$
- $|\rho_h| \leq 1$
- $\rho_h = \rho_{-h}, \ \forall h.$