Chapitre 3

Graphes planaires

3.1 Définitions et exemples

Un graphe $G = (V, E)$ est dit *planaire* s'il est possible de le tracer sur un plan de sorte que les sommets soient des points distincts, les arêtes des courbes simples (pouvant être tracées sans lever le crayan) et que deux arêtes ne se croisent pas en dehors de leurs extrémités. Un tel tracé s'appelle une *représentation planaire* de G et sera notée R(G).

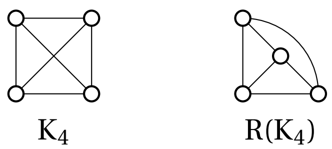

FIGURE 3.1 – Le graphe K_4 et une de ses représentations planaires

— Considérons une carte de géographie et associons un sommet à chaque pays et joignons deux sommets par une arête si les pays correspondants ont une frontière commune ; le graphe obtenu est un graphe planaire.

— Pour le problème des trois villas et trois usines traité dans le chapitre 1, l'expérience montre qu'on peut toujours placer 8 conduites ; en revanche, il semble absolument impossible de placer la dernière sans croiser l'une des précédentes ; en effet, comme le montre la figure 3.2, la dernière conduite, représentée en pointillés, croiserait nécessairement l'une des précédentes. Comme conséquence, le graphe complet $K_{3,3}$ n'est pas planaire.

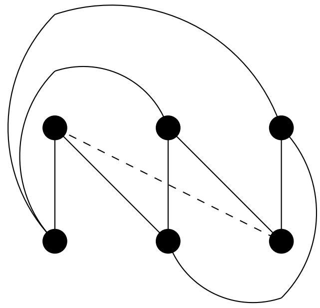

FIGURE 3.2 – Graphe associé au probléme des 3 villas et 3 usines

Etant donné une réprésentation planaire R(G) du graphe planaire G, soit P_G l'ensemble des points du plan qui n'appartiennent à aucune arête de R(G). On définit une relation binaire $\Re$ sur les éléments de P_G par :

$$x \Re y \Leftrightarrow \begin{cases} \text{il existe une courbe simple du plan dont les extrémités sont } x \text{ et } y \\ \text{et qui ne traverse aucune arête de R(G) ou bien } x = y. \end{cases}$$

Cette relation est une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont appelées *faces* de la représentation planaire de G.

— La représentation planaire du graphe K_4 illustrée dans la figure 3.1 possède 4 faces.

On appelle *frontière* d'une face l'ensemble des arêtes qu'il faut franchir pour passer d'un point de cette face à un point extérieur.

Remarque 3.1.1 *Soit* R(G) *une représentation planaire d'un graphe planaire. Alors*

— R(G) *possède un certain nombre de faces finies et une face infinie.*

— *Chaque arête de* R(G) *est frontière d'au plus deux faces. En particuler, un isthme n'est frontière d'aucune face finie.*

— *Chaque face finie de* R(G) *est délimitée par au moins* 3 *arêtes.*

3.2 Propriétés

Théorème 3.2.1 (Formule d'Euler) *Soit* G *un graphe planaire connexe ayant* n *sommets et* m *arêtes. Soit* R(G) *une représentation planaire quelconque de* G, *et soit* f *le nombre de faces de* R(G). *Alors*

$$f = m - n + 2.$$

Preuve. On montre cette proposition par recurrence sur m. La proposition est vraie pour les graphes planaires ayant une arête. Supposons la vraie pour les graphes connexes ayant moins de m arêtes. Si toutes les arêtes sont des isthmes, G est un arbre et la proposition est vraie car $f = 1$ et $m = n-1$. Sinon G possède une arête disons l'arête e qui n'est pas un isthme. Alors e appartient à un cycle et par conséquent, sa suppression ne disconnecte pas le graphe. Notons par f' le nombre de faces de $G-e$. Vu que $G-e$ est connexe, alors par hypothèse de recurrence, on a

$$f' = (m-1) - n + 2. \tag{3.1}$$

Par ailleurs e étant une arête d'un cycle, alors cette arête est frontière de deux faces f_1 et f_2 et sa suppression de G forme une seule face constituée des deux faces f_1 et f_2. D'où

$$f' = f - 1. \tag{3.2}$$

De (3.1) et (3.2), on conclut que la proposition est vraie. ■

Remarque 3.2.1 *Le nombre de faces est indépendant de la représentation planaire du graphe.*

Corollaire 3.2.1 *Soit* G *un graphe planaire non connexe ayant n sommets, m arêtes et p composantes connexes. Soit* R(G) *une représentation planaire quelconque de* G*, et soit f le nombre de faces de* R(G)*. Alors*

$$f = m - n + 1 + p.$$

Preuve. Soit H le graphe obtenu de G en reliant les p composantes connexes par $p-1$ nouvelles arêtes. Alors H est connexe. Soit f' le nombre de faces de R(H), et soit m' et n' respectivement le nombre d'arêtes et le nombre de sommets de H. Clairement $m' = m + p - 1$ et $n' = n$. L'ajout d'une seule arête entre chaque deux composantes connexes, ne fait pas créer de cycles et donc ne fait pas créer de nouvelle face ; d'où $f' = f$. On applique la formule d'Euler pour les graphes connexes au graphe H, on trouve $f' = m' - n' + 2$. Par conséquent, $f = m + p - n + 1$. ■

Théorème 3.2.2 *Soit* $G = (V, E)$ *un graphe simple planaire tel que* $m = |E| \geq 2$*. Alors*

$$3f \leq 2m.$$

Preuve. Il est facile de vérifier que si $m = 2$, alors $f = 1$; d'où le théorème est vrai. Supposons alors que $m \geq 3$ et construisons un graphe biparti (face-arête) $H = (F, A, E_{FA})$ où chaque sommet de F représente une face de R(G) et chaque sommet de A représente un arête de R(G). Par conséquent, $|F| = f$ et $|A| = m$. Puisque une arête est frontière d'au plus deux faces, alors pour tout sommet $v \in A$, $d_H(v) \leq 2$; d'où,

$$|E_{FA}| \leq 2\,|A|\,. \tag{3.3}$$

D'autre part, chaque face finie contient au moins 3 frontières et donc le sommet correspondant dans F sera adjacent à au moins 3 sommets de A. Par ailleurs, si $f \geq 2$, alors le sommet correspondant à la face infinie sera aussi adjacent à au moins 3 sommets de A. Ainsi, pour tout sommet $u \in F$, $d_H(u) \geq 3$. D'où,

$$|E_{FA}| \geq 3\,|F|\,. \tag{3.4}$$

Compte tenu de (3.3) et (3.4),

$$2\,|A| = 2m \geq 3\,|F| = 3f.$$

Si $f = 1$, alors G est une forêt et le théorème vrai. ■

Corollaire 3.2.2 *Soit* G *un graphe simple planaire connexe d'odre* $n > 2$. *Alors*

$$m \leq 3n - 6.$$

Preuve. Conséquence directe des deux théorèmes 3.2.1 et 3.2.2. ■

Dans le théorème 3.2.2, on a pris en compte qu'une face nécessite au moins 3 arêtes; mais si le graphe est sans triangle, alors dans ce cas, une face nécessite au moins 4 arêtes. Par conséquent, le théorème 3.2.2 s'énnonce pour les graphes planaires sans triangle somme suit.

Proposition 3.2.1 *Si* G *est un graphe planaire simple sans triangle tel que* $m \geq 2$, *alors*

$$4f \leq 2m.$$

Proposition 3.2.2 *Les graphes* K_5 *et* $K_{3,3}$ *ne sont pas planaires.*

Preuve. Pour le K_5, $n = 5$, $m = 10$; si K_5 est planaire, alors $f = m - n + 2 = 7$ mais d'après le théorème 3.2.2, $3f \leq 2m$ n'est pas vérifiée puisque $3f = 21$ et $2m = 20$, contradiction. Pour le $K_{3,3}$, $n = 6$, $m = 9$; si $K_{3,3}$ est planaire, alors $f = m - n + 2 = 5$ mais d'après le théorème 3.2.1, $4f \leq 2m$ n'est pas vérifiée puisque $4f = 20$ et $2m = 18$, contradiction. ■

3.3 Caractérisation des graphes planaires

Une *subdivision d'un graphe* G est un graphe simple obtenu à partir de G en ajoutant des sommets sur les arêtes de G.

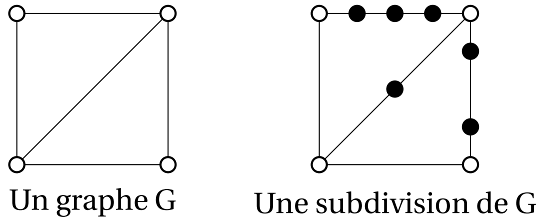

FIGURE 3.3 – Un graphe G et une subdivision de G

Théorème 3.3.1 (Kuratowski, 1930) *Un graphe* G *est planaire si et seulement s'il ne possède pas de sous graphes partiels isomorphes à une subdivison de* $K_{3,3}$ *ou* K_5.