Exercices

Exercice 1

Soit un échantillon aléatoire simple $(X_1, \ldots, X_n)$ issu d'une population $\mathcal{P}(\lambda)$. Déterminez un estimateur efficace de λ, donnez sa variance et l'information de Fisher apportée par l'échantillon.
Solution :

Comme dans l'ensemble des exercices de cette séance, nous allons utiliser le critère de factorisation. Si $X_1, \ldots, X_n$ sont i.i.d $\mathcal{P}(\lambda)$, on trouve

$$\begin{aligned}
L_\lambda(\underline{\mathbf{X}}) &= \frac{e^{-n\lambda}}{\prod_i X_i!} \lambda^{\sum_i X_i} \\
\log L_\lambda(\underline{\mathbf{X}}) &= -n\lambda + \sum_i X_i \log \lambda - \log(\prod_i X_i!) \\
\partial_\lambda \log L_\lambda(\underline{\mathbf{X}}) &= -n + \frac{\sum_i X_i}{\lambda} = \frac{n}{\lambda}\left(\bar{X} - \lambda\right)
\end{aligned}$$

Il est alors immédiat que $T(\underline{\mathbf{X}}) = \bar{X}$ est un estimateur efficace pour λ, avec $A(\lambda) = n/\lambda$ et $\psi(\lambda) = \lambda$. En conséquence, $\Delta_\lambda = 1$, $I(\lambda) = \frac{n}{\lambda}.1 = n/\lambda$. On trouve alors

$$\mathrm{Var}_\lambda\left(T(\underline{\mathbf{X}})\right) = 1.\frac{\lambda}{n} = \frac{\lambda}{n}.$$

Il est ici aisé d'obtenir ces résultats directement :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}_\lambda\left(T(\underline{\mathbf{X}})\right) &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathrm{Var}\left(X_i\right) = \frac{\lambda}{n} \\
I(\lambda) &= \mathrm{Var}\left(-n + \frac{\sum_i X_i}{\lambda}\right) = \frac{\sum_i \mathrm{Var}\left(X_i\right)}{\lambda^2} = n/\lambda
\end{aligned}$$

Exercice 2

Considérons une population $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, où σ^2 est connu. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon aléatoire simple issu de cette population.

1. Déterminez un estimateur efficace de μ, déduisez-en sa variance et l'information de Fisher.
2. Déterminez cette dernière quantité par un calcul direct.

Solution :
Par le critère, il est immédiat que

$$\begin{aligned}
L_\mu(\underline{\mathbf{X}}) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left(-\frac{\sum_i (X_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \\
\log L_\mu(\underline{\mathbf{X}}) &= C(\sigma, \cancel{\mu}) - \frac{\sum_i (X_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \\
\partial_\mu \log L_\mu(\underline{\mathbf{X}}) &= \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n 2(X_i - \mu) \\
&= \frac{n}{\sigma^2}(\bar{X} - \mu)
\end{aligned}$$

Avec $A(\mu) = n/\sigma^2$, on voit que $T(\underline{\mathbf{X}}) = \bar{X}$ est un estimateur efficace pour $\psi(\mu) = \mu$. De plus, $\Delta_\mu = 1$, $I(\mu) = n/\sigma^2$. Ainsi, $\mathrm{Var}_\mu(\bar{X}) = \sigma^2/n$.

Des calculs directs montrent que

$$\begin{aligned}
I(\mu) &= \mathbb{E}_\mu\left[(\partial_\mu \log \mathrm{L}_\mu(\underline{\mathbf{X}}))^2\right] \\
&= \mathrm{Var}\left(\partial_\mu \log L_\mu(\underline{\mathbf{X}})\right) + \left(\mathbb{E}\left[\partial_\mu \log \mathrm{L}_\mu(\underline{\mathbf{X}})\right]\right)^2 \\
&= \mathrm{Var}\left(\frac{n}{\sigma^2}(\bar{X}-\mu)\right) + \left(\mathbb{E}\left[\frac{\mathrm{n}}{\sigma^2}(\bar{\mathrm{X}}-\mu)\right]\right)^2 \\
&= \frac{n^2}{\sigma^4}\mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_i X_i\right) + \left(\frac{n}{\sigma^2}\left[\mathbb{E}\left[\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{\mathrm{i}} \mathrm{X_i}\right]-\mu\right]\right)^2 \\
&= \frac{n^2}{\sigma^4}n^{-2}\sum_i \mathrm{Var}\left(X_i\right) + \left(\frac{n}{\sigma^2}\left(\frac{1}{n}\sum_i \mathbb{E}\left[\mathrm{X_i}\right]-\mu\right)\right)^2 \\
&= \frac{n}{\sigma^2}
\end{aligned}$$

Exercice 3

Soient les variables aléatoires $(X_1, \ldots, X_n)$, i.i.d., à valeurs dans $\mathbb{N}$ et dont la distribution de probabilité est donnée par

$$P(X_i = k) = \theta(1-\theta)^k,$$

où $k \in \mathbb{N}$ et $0 < \theta < 1$. Déterminez un estimateur efficace, sa variance et l'information de Fisher.

Solution :

On trouve

$$\begin{aligned}
L_\theta(\underline{\mathbf{X}}) &= \prod_{i=1}^{n} \theta(1-\theta)^{X_i} \\
&= \theta^n(1-\theta)^{\sum_i X_i} \\
\log L_\theta(\underline{\mathbf{X}}) &= n\log(\theta) + \sum_i X_i \log(1-\theta) \\
\partial_\theta \log L_\theta(\underline{\mathbf{X}}) &= \frac{n}{\theta} - \sum_i X_i \frac{1}{1-\theta} \\
&= \frac{n}{\theta} + \frac{n\bar{X}}{\theta-1} \\
&= \frac{n}{\theta-1}\left(\frac{\theta-1}{\theta}+\bar{X}\right) = \frac{n}{\theta-1}\left(\bar{X}-\frac{1-\theta}{\theta}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, $T(\underline{\mathbf{X}}) = \bar{X}$ est un estimateur efficace pour $\psi(\theta) = (1-\theta)/\theta$. De plus, $A(\theta) = n/(\theta-1)$. On trouve alors $\Delta_\theta = \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \theta^{-2}$, $\mathrm{Var}_\theta\left(\bar{X}\right) = \frac{1-\theta}{n\theta^2}$ et $I(\theta) = \frac{n}{(1-\theta)\theta^2}$.

Exercice 4

Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Considérons $\delta(X) := I_{[X=0]}$.

1. Montrez que cette statistique est non biaisée pour $e^{-\lambda}$.
2. Montrez que c'est le seul estimateur non biaisé de $e^{-\lambda}$.
3. On extrait d'une population $\mathcal{P}(\lambda)$ un échantillon de taille 1. Calculez à partir de cet échantillon la borne de Cramer-Rao pour un estimateur non biaisé de $e^{-\lambda}$. Calculez $Var_\lambda[\delta(X)]$. Quelle conclusion pouvez-vous en tirer au sujet de $\delta(X)$?

Solution :
Le non-biais est presque trivial, via

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\delta(\mathrm{X})\right] &= \sum_x x\mathbb{P}\left[\delta(X)=x\right] = 1.\mathbb{P}\left[I_{[X=0]}=1\right] + 0.\mathbb{P}\left[I_{[X=0]}=0\right] \\
&= \mathbb{P}\left[X=0\right] \\
&= e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

D'où la conclusion attendue. Prenons maintenant un autre estimateur $T(X)$ et montrons qu'il ne sera pas sans biais.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mathrm{T(X)}\right] &= \sum_x T(x)\mathbb{P}\left[T(X)=x\right] \stackrel{?}{=} e^{-\lambda} \\
\Leftrightarrow & \sum_x T(x)e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} \stackrel{?}{=} e^{-\lambda} \\
\Leftrightarrow & \sum_x T(x)e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} \stackrel{?}{=} 1
\end{aligned}$$

On a donc un polynome en λ de degré infini qui doit être égal à une constante. Seul le terme indépendant du polynôme doit être $\neq 0$ (et doit valoir 1). On retrouve donc l'estimateur $T(X) = I_{[X=0]}$.

Calculons maintenant la borne de Cramer-Rao pour un échantillon de taille 1. On trouve

$$\begin{aligned}
L_\lambda(X_1) &= \frac{e^{-\lambda}\lambda^{X_1}}{X_1!} \\
\log L_\lambda(X_1) &= -\lambda + X_1\log\lambda - \log X_1 \\
\partial_\lambda \log L_\lambda(X_1) &= -1 + X_1\frac{1}{\lambda} \\
&= \frac{1}{\lambda}\left(X_1-\lambda\right).
\end{aligned}$$

Par définition,

$$\begin{aligned}
I_\lambda &= \mathrm{Var}\left(\partial_\lambda L_\lambda(X_1)\right) \\
&= \mathrm{Var}\left(-1+\frac{X_1}{\lambda}\right) = \mathrm{Var}\left(X_1/\lambda\right) = \frac{1}{\lambda^2}\mathrm{Var}\left(X_1\right) = \frac{1}{\lambda}.
\end{aligned}$$

De plus, pour $\psi = \mathbb{E}\left[\delta(\mathrm{X})\right] = \mathrm{e}^{-\lambda}$,

$$\Delta_\lambda = \frac{d\psi}{d\lambda} = -e^{-\lambda}.$$

La borne de Cramer-Rao $= \Delta_\lambda I_\lambda^{-1}\Delta_\lambda = e^{-2\lambda}\lambda$. On a

$$\mathrm{Var}_\lambda\left(\delta(X)\right) = \mathbb{E}_\lambda\left[\delta^2(\mathrm{X})\right] - \left(\mathbb{E}_\lambda\left[\delta(\mathrm{X})\right]\right)^2.$$

Or,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\lambda\left[\delta^2(\mathrm{X})\right] &= \sum_x x\mathbb{P}\left[\delta^2(X)=x\right] \\
&= \mathbb{P}\left[I_{[X=0]}=1\right] \\
&= e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Var}_\lambda\left(\delta(X)\right) = e^{-\lambda} - e^{-2\lambda} \neq$ borne de Cramer-Rao. L'estimateur n'atteignant pas la borne (bien que sans biais), celui-ci n'est pas efficace. Petite question au passage : que faire si l'on dispose d'un estimateur dont la variance atteint la borne de Cramer-Rao...mais qui n'est pas sans biais ?

Exercice 5

Extrayons un échantillon aléatoire simple $(X_1, \ldots, X_n)$ d'une population caractérisée par la fonction de densité

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\theta > 0$. Déterminez un estimateur efficace de θ, calculez sa variance et l'information de Fisher.
Solution :

A nouveau,

$$\begin{aligned}
L_\theta(\underline{\mathbf{X}}) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} e^{X_i/\theta} \mathbb{I}_{[X_i \in]0,\infty[]} \\
&= \theta^{-n} e^{\theta^{-1} \sum_i X_i} \mathbb{I}_{[X_{(1)} \in]0,\infty[]} \\
\log L_\theta(\underline{\mathbf{X}}) &= -n \log(\theta) - \theta^{-1} \sum_i X_i + \log\left(\mathbb{I}_{[X_{(1)} \in]0,\infty[]}\right) \\
\partial_\theta \log L_\theta(\underline{\mathbf{X}}) &= -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_i X_i \\
&= \frac{n}{\theta^2} \left(\bar{X} - \theta\right).
\end{aligned}$$

L'estimateur $T(\underline{\mathbf{X}}) = \bar{X}$ est donc efficace. De plus, $\Delta_\theta = 1$, $\mathrm{Var}_\theta\left(\bar{X}\right) = \theta^2/n$ et $I(\theta) = n/\theta^2$.

Exercice 6 (*)

Replaçons-nous dans le cadre de l'exercice supplémentaire 1 de la séance 2. Déterminez, à partir de l'estimateur $\hat{\theta}$, un estimateur $\hat{\theta}_1$ non biaisé pour θ. Cet estimateur est il efficace pour θ ?
Solution :

Rappelons que la densité des observations est donnée par

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 2\theta x e^{-\theta x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\theta > 0$. On a précédemment considéré l'estimateur $\hat{\theta} = n / \sum X_i^2$ de θ, dont on a déterminé le biais : $E(\hat{\theta}) = \frac{n}{n-1}\theta$. Il est clair dès lors que l'estimateur sans biais correspondant est donné par

$$\hat{\theta}_1 = \frac{n-1}{n} \hat{\theta}.$$

Pour juger de l'efficacité de ce nouvel estimateur, nous pouvons utiliser le critère de factorisation de la dérivée de la log-vraisemblance. La vraisemblance est donnée ici par

$$L(\underline{\mathbf{X}}, \theta) = \left(2^n \prod X_i\right) \theta^n e^{-\theta \sum X_i^2}.$$

En passant au logarithme, et en dérivant par rapport à θ on obtient

$$\partial_\theta \log L(\underline{\mathbf{X}}, \theta) = -n \left(\frac{1}{n} \sum X_i^2 - \frac{1}{\theta}\right).$$

Il apparaît ainsi que seul $1/\theta$ (et ses transformations affines) peut être estimé efficacement, et ce par $\frac{1}{n} \sum X_i^2$ (et ses transformations affines correspondantes). L'estimateur $\hat{\theta}_1$ ne peut donc être efficace pour θ.

Remarque : Nous avons vu à la séance 2 que $Var(\hat{\theta}) = \frac{n^2\theta^2}{(n-1)^2(n-2)}$. Nous en déduisons aisément la variance de $\hat{\theta}_1$: $\frac{\theta^2}{n-2}$. En calculant la borne de Cramer-Rao pour le modèle, nous obtenons $\frac{\theta^2}{n}$. Un calcul facile permet de voir que, pout toute valeur de n, nous avons $Var(\hat{\theta}_1) > B.C.R.$ Donc $\hat{\theta}_1$ n'est pas efficace pour θ.

Exercice 7

Replaçons-nous dans le cadre de l'exercice supplémentaire 2 de la séance 2. $\hat{\theta}$ est-il un estimateur efficace du paramètre θ ?
Solution :

Rappelons que la densité des observations est donnée par

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{1}{\theta}-1}}{\theta a^{1/\theta}} & \text{si } 0 < x < a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où a et θ sont deux constantes strictement positives. On a proposé comme estimateur $\hat{\theta} = -\frac{1}{n}\sum \log \frac{X_i}{a}$ pour le paramètre θ. La vraisemblance du modèle s'écrit

$$L(\underline{X}, \theta) = \prod \frac{1}{\theta a^{1/\theta}} X_i^{1/\theta - 1}.$$

En dérivant le logarithme de cette dernière expression nous obtenons

$$\partial_\theta \log L(\underline{X}, \theta) = -\frac{n}{\theta} + \frac{n \log a}{\theta^2} - \frac{1}{\theta^2}\sum \log X_i.$$

On réarrange les termes pour faire apparaître $\hat{\theta}$ et on obtient

$$\partial_\theta \log L(\underline{X}, \theta) = \frac{n}{\theta^2}(\hat{\theta} - \theta).$$

L'estimateur proposé est donc efficace pour θ.

Exercice 8

Considérons maintenant le cas où σ^2 est inconnu, pour un échantillon aléatoire simple $(X_1, \ldots, X_n)$ issu d'une population $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. On souhaite montrer que l'estimateur

$$\underline{\mathbf{T}}(\underline{\mathbf{X}}) = \begin{pmatrix} \bar{X} \\ S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_i (X_i - \mu)^2 \end{pmatrix}$$

est **asymptotiquement efficace** mais non efficace. Pour ce faire,

1. Calculer la matrice d'information de Fisher pour $\underline{\boldsymbol{\theta}}$.
2. Se convaincre dans un second temps qu'il est impossible d'utiliser le critère d'efficacité sur la fonction de score.
3. Calculer la matrice de variance-covariance $\Sigma_{\underline{\mathbf{T}}}$ de l'estimateur de $\underline{\boldsymbol{\theta}}$.
4. Montrer que
$$\mathbf{I}(\underline{\boldsymbol{\theta}}) \times \Sigma_{\underline{\mathbf{T}}} \to \mathbf{I}_2.$$

On dira donc que notre estimateur est asymptotiquement efficace (au sens de Pitman).

Vous aurez besoin pour cela des quelques résultats (devant être démontrables !) ci-dessous :

1. Si $X_1, \ldots, X_n$ sont i.i.d. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors
$$\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n}).$$

2. Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors
$$\mathbb{E}\left[\mathrm{X}^3\right] = \mu^3 + 3\mu\sigma^2 \text{ et } \mathbb{E}\left[\mathrm{X}^4\right] = \mu^4 + 6\mu^2\sigma^2 + 3\sigma^4.$$

3. La statistique S^2 peut s'écrire
$$S^2 = \frac{n}{n-1}s^2 = \frac{n}{n-1}\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) - \bar{X}^2\right).$$

Solution :
De manière classique (mais un peu plus longuette), il est possible d'écrire (attention aux vecteurs à partir de maintenant), en posant $\underline{\boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} \mu \\ \sigma^2 \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned}
L_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}(\underline{\mathbf{X}}) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(\frac{1}{2\sigma^2}\sum_i (X_i - \mu)^2\right) \\
\log L_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}(\underline{\mathbf{X}}) &= C - \frac{n}{2}\log\left(\sigma^2\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 \\
\underline{\nabla_{\boldsymbol{\theta}}} \log L_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}(\underline{\mathbf{X}}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\mu}\log L_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}(\underline{\mathbf{X}}) \\ \frac{\partial}{\partial\sigma^2}\log L_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}(\underline{\mathbf{X}}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2}\sum_i (X_i - \mu) \\ -\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_i (X_i - \mu)^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{n}{\sigma^2}(\bar{X} - \mu) \\ \frac{n}{2\sigma^4}\left(n^{-1}\sum_i (X_i - \mu)^2 - \sigma^2\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

La matrice d'information de Fisher est alors

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{I}}(\underline{\boldsymbol{\theta}}) &= \mathrm{Var}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left(\underline{\nabla_{\boldsymbol{\theta}}} \log L_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}(\underline{\mathbf{X}})\right) \\
&= \mathbb{E}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[\left(\underline{\nabla_{\boldsymbol{\theta}}} \log \mathrm{L}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}(\underline{\mathbf{X}})\right)\left(\underline{\nabla_{\boldsymbol{\theta}}} \log \mathrm{L}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}(\underline{\mathbf{X}})\right)'\right] \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

où

$$a = \mathbb{E}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[\left(\frac{\mathrm{n}}{\sigma^2}(\bar{\mathrm{X}} - \mu)\right)^2\right] = \frac{\mathrm{n}^2}{\sigma^4}\mathrm{Var}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left(\bar{\mathrm{X}} - \mu\right) = \frac{\mathrm{n}}{\sigma^2},$$

$$d = \frac{n^2}{4\sigma^8}\mathrm{Var}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left(n^{-1}\sum_i (X_i - \mu)^2 - \sigma^2\right) = \ldots = \frac{n}{2\sigma^4}$$

Des calculs (un peu longs certes...dont les étapes principales sont détaillées ci-dessous) montrent que $b = c = 0$:

$$\begin{aligned}
b &= \mathbb{E}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[\frac{\mathrm{n}^2}{2\sigma^6}(\bar{\mathrm{X}}-\mu)\left(\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{\mathrm{i}}(\mathrm{X}_\mathrm{i}-\mu)^2-\sigma^2\right)\right] \\
&= \frac{n^2}{2\sigma^6}\mathbb{E}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[\bar{\mathrm{X}}\left(\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{\mathrm{i}}(\mathrm{X}_\mathrm{i}-\mu)^2)\right)\right]-\frac{\mu\mathrm{n}^2}{2\sigma^4} \\
&= \frac{n}{2\sigma^6}\mathbb{E}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[(\mathrm{X}_1{\color{red}\pm\mu})(\mathrm{X}_1-\mu)^2\right]+\frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)}{2\sigma^6}\mathbb{E}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[\mathrm{X}_2(\mathrm{X}_1-\mu)^2\right]-\frac{\mu\mathrm{n}^2}{2\sigma^4} \\
&= \frac{\mu n}{2\sigma^6}\mathbb{E}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[(\mathrm{X}_1-\mu)^2\right]+\frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)}{2\sigma^6}\mu\sigma^2-\frac{\mu\mathrm{n}^2}{2\sigma^4} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\underline{\mathbf{I}}(\underline{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{pmatrix} \frac{n}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2\sigma^4} \end{pmatrix}$$

Il est relativement aisé de se convaincre que la foncion de score, dont l'expression est donnée un peu plus haut, ne peut être réécrite sous la forme $A(\underline{\boldsymbol{\theta}})(\underline{\mathbf{T}}(\underline{\mathbf{X}})-\underline{\boldsymbol{\theta}})$. Ceci est dû à la présence du μ dans l'expression de la seconde composante du vecteur. Calculons alors la matrice de variance-covariance :

$$\Sigma_{\underline{\mathbf{T}}} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[\bar{\mathrm{X}}^2\right]-\mathbb{E}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[\bar{\mathrm{X}}\right]^2 & \mathbb{E}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[\bar{\mathrm{X}}\mathrm{S}^2\right]-\mathbb{E}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[\bar{\mathrm{X}}\right]\mathbb{E}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[\mathrm{S}^2\right] \\ \mathbb{E}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[\bar{\mathrm{X}}\mathrm{S}^2\right]-\mathbb{E}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[\bar{\mathrm{X}}\right]\mathbb{E}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[\mathrm{S}^2\right] & \mathbb{E}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[(\mathrm{S}^2)^2\right]-\mathbb{E}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[\mathrm{S}^2\right]^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

où (et c'est ici que les choses deviennent amusantes) $a = \frac{\sigma^2}{n}$ et

$$\begin{aligned}
d &= \frac{n^2}{(n-1)^2}\mathrm{Var}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left(s^2\right) \\
&= \frac{n^2}{(n-1)^2}\left(\mathbb{E}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[\left((\mathrm{n}^{-1}\sum_{\mathrm{i}}\mathrm{X}_\mathrm{i}^2)-\bar{\mathrm{X}}^2\right)^2\right]-\mathbb{E}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[\mathrm{s}^2\right]^2\right) \\
&= \frac{n^2}{(n-1)^2}\left(\mathbb{E}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[\left((\mathrm{n}^{-1}\sum_{\mathrm{i}}\mathrm{X}_\mathrm{i}^2)-\bar{\mathrm{X}}^2\right)^2\right]-(\frac{\mathrm{n}-1}{\mathrm{n}})^2\right)
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[\left((\mathrm{n}^{-1}\sum_{\mathrm{i}}\mathrm{X}_\mathrm{i}^2)-\bar{\mathrm{X}}^2\right)^2\right] &= \frac{1}{n^2}\mathbb{E}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[\left(\sum_{\mathrm{i}}\mathrm{X}_\mathrm{i}^2\right)^2\right]-\frac{2}{\mathrm{n}}\mathbb{E}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[(\sum_{\mathrm{i}}\mathrm{X}_\mathrm{i}^2)\bar{\mathrm{X}}^2\right]+\mathbb{E}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[\bar{\mathrm{X}}^4\right] \\
&= \frac{1}{n}\mathbb{E}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[\mathrm{X}_1^4\right]+\frac{(\mathrm{n}-1)}{\mathrm{n}}\mathbb{E}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[\mathrm{X}_1^2\mathrm{X}_2^2\right]-2\mathbb{E}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[\mathrm{X}_1^2\bar{\mathrm{X}}^2\right]+\mathbb{E}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[\bar{\mathrm{X}}^4\right]
\end{aligned}$$

Et,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[\mathrm{X}_1^2\bar{\mathrm{X}}^2\right] &= \frac{1}{n^2}\mathbb{E}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[\mathrm{X}_1^2\left(\sum_{\mathrm{i}}\mathrm{X}_\mathrm{i}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{n^2}\mathbb{E}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[\mathrm{X}_1^4\right]+\frac{\mathrm{n}-1}{\mathrm{n}}\mathbb{E}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[\mathrm{X}_1^2\mathrm{X}_2^2\right] \\
&+ \frac{2(n-1)}{n^2}\mathbb{E}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[\mathrm{X}_1^3\mathrm{X}_2\right]+\frac{(\mathrm{n}-1)(\mathrm{n}-2)}{\mathrm{n}^2}\mathbb{E}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left[\mathrm{X}_1^2\mathrm{X}_2\mathrm{X}_3\right]
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left(s^2\right) &= -\frac{(n-1)^2}{n^2}\sigma^4 + \frac{1}{n}\left(\mu^4 + 6\mu^2\sigma^2 + 3\sigma^4\right) \\
&+ \frac{(n-1)}{n}\left(\sigma^2+\mu^2\right)^2 + \left(\mu^4 + 6\mu^2\frac{\sigma^2}{n} + 3\frac{\sigma^4}{n^2}\right) \\
&- 2\left[\frac{1}{n^2}\left(\mu^4 + 6\mu^2\sigma^2 + 3\sigma^4\right) + \frac{(n-1)}{n}\left(\mu^2+\sigma^2\right)^2\right. \\
&\left.+\frac{2(n-1)}{n^2}\left(\mu^3 + 3\mu\sigma^2\right)\mu + \frac{(n+1)(n-2)}{n^2}\sigma^2(\sigma^2+\mu^2)\mu^2\right] \\
&= \ldots \\
&= \frac{2(n-1)}{n^2}\sigma^4
\end{aligned}
$$

Et donc,

$$
d = \frac{n^2}{(n-1)^2}\mathrm{Var}_{\underline{\boldsymbol{\theta}}}\left(s^2\right) = \frac{n^2}{(n-1)^2}\frac{2(n-1)}{n^2}\sigma^4 = \frac{2\sigma^4}{(n-1)}.
$$

Il est aisé de montrer en suivant les mêmes idées que $b = c = 0$. On trouve donc la matrice $\Sigma_{\underline{\mathbf{T}}}$ telle que

$$
I(\underline{\boldsymbol{\theta}}) \times \Sigma_{\underline{\mathbf{T}}} = \begin{pmatrix} \frac{n}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2\sigma^4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{n} & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma^4}{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n}{n-1} \end{pmatrix} \to I_2.
$$