UNIVERSITÉ HASSIBA BENBOUALI CHLEF
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTE ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DES MATHÉMATIQUES

EXAMEN FINAL DU PREMIER SEMESTRE 2020-2021
SYSTÈME DYNAMIQUE

La durée : 1h30

Exercise 1. Considérons l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par, $f(t,y) = \sqrt{|y(t)|}$ et le problème de Cauchy :

$$y'(t) = f(t,y), y(t_0) = y_0 \tag{0.1}$$

avec $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$

(1) L'application f est-elle continue ? est-elle localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable ? Que peut-on en déduire pour le problème de Cauchy (0.1) ?

(2) Résoudre le problème de Cauchy (0.1).

Exercise 2. Soit l'équation suivante :

$$f''' + (m+2)ff'' - (2m+1)f'^{2} = 0. \qquad (\ \infty)$$

(1) En utilisant les changements de variable suivants :

$$\forall t \in I, s = \int_{\tau}^{t} f(\zeta)\, d\zeta \qquad u(s) = \frac{f'(t)}{f^2(t)} \text{ et } v(s) = \frac{f''(t)}{f^3(t)} \tag{0.2}$$

réécrire l'équation (∞) sous la forme d'un système de dimension 2, $(\mathcal{P})$.

(2) Trouvez les points singuliers du système $(\mathcal{P})$ et définie leur natures.

(3) Tracer les trajectoires représentant le système $(\mathcal{P})$ au voisinage du point singulier $O(0,0)$.