Université: Mohamed Khider
Faculté des Sciences exactes, des Sciences de la nature et de la vie
Département: de Mathématiques
Module: Processus Stochastique 2020/2021

Serie N^0 01

Exercice 01

Soit $X_t, t \in \mathbb{N}$ un processus aléatoire, avec $X_t = mt + b + \xi_t$, où $\xi_t, t \in \mathbb{N}$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribiées

$$E[\xi_t] = 0, \text{ et } Var[\xi_t] = \sigma^2, \forall t \in \mathbb{N}.$$

1) Est-ce que le processus X_t, $t \in \mathbb{N}$ est stationnaire?

2) On considère un nouveau processus $Y_t, t \in \mathbb{N}$, par $Y_t = X_t - X_{t-1}$. Montrer que Y_t, $t \in \mathbb{N}$ est stationnaire.

Exercice 02

Soit $X_t, t \in \Im$ un processus aléatoire, tel que

$$P(X_t = 1) = P(X_t = -1) = 0.5, \ \forall t \in \Im.$$

Est-ce que ce processus est stationnaire?

Exercice 03

Soit $X_t, t \in \Im$ un processus aléatoire, tel que

$$P(X_t = 0) = 1 - \frac{1}{t}, P\left(X_t = \sqrt{t}\right) = \frac{1}{2t}, P\left(X_t = -\sqrt{t}\right) = \frac{1}{2t}.$$

Ce processus est stationnaire?

Exercice 04

Soit $Y_t, t \in \mathbb{N}$ un processus aléatoire, $Y_t = (-1)^t X_t, t \in \mathbb{N}$, où $X_t, t \in \mathbb{N}$ est un processus stationnaire

$$E[X_t] = 0, \ E[X_t X_s] = 0, \ \forall t \neq s, \ \text{et } Var[X_t] = \sigma^2, \forall t \in \mathbb{N}.$$

Considérons le processus $Z_t = X_t + Y_t$, $t \in \mathbb{N}$. Est-ce que ce processus est stationnaire?

واجب

Exercice 05

Soit X_n, $n \in \mathbb{N}$ un processus aléatoire à temps discret tel que $E[X_n] = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$Var[X_n] = \begin{cases} \dfrac{\sigma^2}{1-\mu^2}, & \text{si } n = 0, \\ \sigma^2, & \text{si } n \geq 1, \end{cases}$$

avec $0 < \mu^2 < 1$, et $E[X_i X_j] = 0, \forall i \neq j$. Maintenant on construit un nouveau processus à temps discrèt

$$Z_n = \begin{cases} X_0, & \text{si } n = 0, \\ \mu Z_{n-1} + X_n, & \text{si } n \geq 1, \end{cases}$$

connu comme le processus de autorégression du premier ordre. Montrer que Z_n est stationnaire.

Exercice 06

Montrer que si le processus $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ est strictement stationnaire, tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$ $E[X(t)] < \infty$, alors $\forall (t,s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} R(s,t) &= Cov(X_t, X_s), \\ &= r(t-s). \end{aligned}$$

Exercice 07

1) Soit $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ un processus stationnaire dont la fonction de corrélation est $r(t) = e^{-\beta|t|}$, $\beta > 0$. Calculer sa densité spectrale.

2) Soit

$$X(t) = \theta X(t-1) + \epsilon(t), \quad |\theta| < 1,$$

ou $\{\epsilon(t)\}$ suit une loi $N(0, \sigma^2)$, Montrer que

$$r(t) = \frac{\sigma^2}{1-\theta^2}\theta^{|t|} \text{ et } f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\left|1 - \theta e^{i\lambda}\right|^{-2}.$$

Exercice 08

Soit $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ un processus aléatoire vérifie les conditions suivantes:

1) $E|X(t)| < \infty$, $\forall t \in \mathbb{R}$

2) $\forall \omega \in \Omega$ il existe

$$X'(t) = X'(t;\omega) = \frac{d}{dt}X(t,\omega).$$

3) $|X'(t,\omega)| \leq Y(\omega)$, $\omega \in \Omega$, où Y est une variable aléatoire telle que $E|Y| < \infty$.

Montrer que $E[X(t)]$ est différentiable par rapport à t et on a

$$\frac{d}{dt}EX(t) = EX'(t).$$

Exercice 9

Soit $\{X(t), t \in [a,b]\}$ un processus aléatoire tel que

1) $|X(t,\omega)| \leq Y(\omega)$, $\omega \in \Omega$, $\forall t \in [a,b]$, où Y est une variable aléatoire intégrable.

2) pour tout $\omega \in \Omega$ les trajectoires $X(t,\omega)$ sont integrables sur $[a,b]$.

3) $EX(t)$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$.

Montrer que

$$\int_a^b E[X(t)]\,dt = E\left[\int_a^b X(t)\,dt\right].$$

$1-2(x+yi)+$

Université: Mohamed Khieder
Faculté des Sciences exactes, des Sciences de la nature et de la vie
Département: de Mathématiques
Module: Proc. Stocha. 2020/2021 مستمرة

Série $N^0 02$ صيغة

Exercice 1. المنتج جزء

عدلوها On suppose que la durée de vie X d'un produit est une variable aléatoire continue de fonction de répartition F et de densité f. on suppose qu'aprés défaillance le produit est réparé et la durée de vie après la réparation a la même répartition. On observe donc une suite de variables aléatoires i.i.d $X_1, X_2, ..., X_n, ...$

Désignons par نرمز

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k,$$

le moment de la n-ème défaillance et par $N(t)$ le nombre de défaillances dans l'intervalle $[0, t]$; F_n et f_n sont respectivement la fonction de répatition et la densité de S_n.

Montrer que

(a)

$$P\{N(l) = n\} = F_n(l) - F_{n+1}(l), \quad (n = 0, 1, ...; F_0 \equiv 0)$$

(b)

$$H(t) = EN(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} F_n(t)$$

(c) notons $W_t = S_{N(t)+1} - t$ le temps entre le moment t et le moment de la première défaillance après t. Montrer que si les fonctions $f_n(l)$ et la somme $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(l)$ sont continues sur $[0, +\infty)$, alors la fonction de répartition de W_t est donnée par la formule

$$F_{W_t}(s) = F(t+s) - \int_0^t \{1 - F(t+s-x)\} h(x)\, dx, \quad s \geq 0,$$

où $h(x) = H'(x)$.

(d) Montrer que lorsque les X_i sont distribuées exponentiellement avec le paramètre $\lambda > 0$, alors

$$N(t) \sim P(\lambda t), h(t) = \lambda, W_t \sim 1 - e^{-\lambda t}, t \geq 0$$

Exercice 2.

Soient $(X(t))_{t \geq 0}$ un processus de Poisson de paramètre d'intensité λt, et Z une variable aléatoire de Bernoulli indépendante du processus $X(.)$, avec

$$P(Z = 1) = P(Z = -1) = 0.5.$$

1) Trouver $Cov(X(t), X(t+\tau))$, $t > 0$, $\tau > 0$.

2) Considérons le processus de signal télégraphique $Y(t) = Z(-1)^{X(t)}$, pour $t \geq 0$. Montrer que $Y(t)$ est un processus stationnaire.

Exercice 3.

Soit N^i, $i = 1; 2$ deux processus de Poisson indépendants de même intensité. Montrer que $N^1 - N^2$ est une martingale.

Exercice 4. Soit N un processus de Poisson.

1. Calculer $\psi(z, t) = \sum_n z^n P(N_t = n)$.

2. Soit X un processus à accroissements indépendants, à valeurs dans l'ensemble $\mathbb{N}$, tel que $X_{t+s} - X_t \overset{loi}{=} X_s$ et $\psi(z, t) = \sum_n z^n P(X_t = n)$. Montrer que $\psi(z, t+h) = \psi(z, t)\psi(z, h)$. On suppose qu'il existe ν tel que

$$\frac{1}{h} P(X_h \geq 2) \to 0; \ \frac{1}{h} P(X_h = 1) \to \nu; \ \frac{1}{h}(1 - P(X_h = 0)) \to \nu.$$

quand h tend vers 0. Montrer que $\frac{d}{dt}\psi(z, t) = \nu(z - 1)\psi(z, t)$. Quel est le processus X?

Exercice 5.

Notons T_k le moment du k-éme saut du processus de Poisson $X(t), k = 1, 2, ...$

Soit $\{\tau_k\}$ la suite de variables aléatoires: $\tau_k = T_k - T_{k-1}$, $T_0 = 0$.

Montrer que, pour tout n fini les variables aléatoires $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$ sont indépendantes et suivent la même loi exponentielle de paramètre λ.

Faculté des Sciences exactes, des Sciences de la nature et de la vie
Département: de Mathématiques
Module: Intro. Proc. aléatoire 2020/2021
Niveau: 1er année Master

Série N°3

Exercice 01.

Soit $\{X(t),\ t \in \mathbb{N}\}$ un processus a accroissements indépendants a espace de valeurs E discret. Montrer que $\{X(t),\ t \in \mathbb{N}\}$ est une chaine de Markov.

Exercice 02.

Supposons q'un point fait une promenade aléatoire sur la droite et qu'il ne peut s'arrêter qu'aux points de coordonnés 1,2,3,... m.

En plus on suppose que de l'état i ne peut se déplacer qu'a l'état $i+1$ ou a l'état $i-1$ avec les probabilités

$$\begin{aligned} p_{i,i+1} &= P(X_{k+1} = i+1 | X_k = i) = p, \\ p_{i,i-1} &= P(X_{k+1} = i-1 \mid X_k = i) = q = 1-p. \end{aligned}$$

si $i \neq 1$ et $i \neq m$.

Pour $i = 1$ ou $i = m$ on a les états absorbants

$$\begin{aligned} p_{1,1} &= P(X_{k+1} = 1 \mid X_k = 1) = 1, \\ p_{m,m} &= P(X_{k+1} = m \mid X_k = m) = 1. \end{aligned}$$

Dans ce cas déterminer l'espace des état ansi que la matrice de transition de cette chaîne de Markov.

Exercice 03.

Soit $\{X(t), t \in \mathbb{N}\}$ une chaine homogène de Markov dont la matrice stoshastique et le vecteur de probabilités initiales

$$\mathbf{P} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{Vmatrix}, \text{ et } \pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Notons $A(t) = \{X(t) = 1\}$, $t \in N$. Trouver $P(A)$, où $A = \bigcap_{t \geq 1} A(t)$.

Exercice 04.

1) Soit $p_{ij}^{(k)}$ la probabilité de transition d'un système de l'état i a l'état j pour k pas. Dans ce cas nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \pi_j^{(k)} &= \sum_{i=1}^{m} P(X_k = j \mid X_0 = i) P(X_0 = i), \\ &= \sum_{i=1}^{m} p_{ij}^{(k)} \pi_i = \sum_{i=1}^{m} \pi_i p_{ij}^{(k)}. \end{aligned}$$

Montrer que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{(k)} &= \left\| p_{ij}^{(k)} \right\|, \\ &= \mathbf{P}^k \end{aligned}$$

2) La loi de répartition d'un processus de Markov discret homogène $\{X(t),\ t \in \mathbb{N}\}$ est déterminée par le vecteur π des probabilités initiales et par la matrice stochastique $\mathbf{P}$.

Est-ce-que ce processus est déterminée par π et $\mathbf{P}^{(2)}$.

Exercice 05.

Soit $\{X(t),\ t \in \mathbb{N}\}$ une chaîne homogène de Markov a 2 états, dont la matrice stochastique est

$$\mathbf{P} = \left\| \begin{matrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{matrix} \right\|.$$

$0 \leq a \leq 1$ et $0 \leq b \leq 1$.

1) Montrer que si $0 \leq a+b < 2$, alors

$$\mathbf{P}^n = \frac{1}{a+b} \left\{ \left\| \begin{matrix} b & a \\ b & a \end{matrix} \right\| + (1-a-b)^n \left\| \begin{matrix} a & -a \\ -b & b \end{matrix} \right\| \right\}.$$

2) Trouver

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}^n.$$

3) Supposons que le vecteur des probabilités initiales

$$\pi = (\pi_1, \pi_2)^T = (0.7,\ 0.3)^T,$$

et que la matrice stochastique

$$\mathbf{P} = \left\| \begin{matrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.3 & 0.7 \end{matrix} \right\|$$

Trouver $P(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 1)$ et $\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}^n$.

Exercice 06.

La durée de vie d'un produit a une fonction de répartition $F(t) = 1 - e^{-\alpha t}$, $t \geq 0$. La durée de réparation a une fonction de répartition $G(t) = 1 - e^{-\beta t}$, $t \geq 0$.

Notons 0 l'état de fonctionnement, 1 l'état de réparation. Au moment $t = 0$ le produit est dans l'état 0. Soit $X(t)$, $t \geq 0$, l'état du produit au moment t.

1) Ecrire les équations directes de Kolmogorov.

2) Trouver les probabilités

$$\mathrm{p}_i = P(X(t) = i) \text{ pour } i = 0, 1.$$

3) Montrer que

$$\lim_{t \to +\infty} p_0(t) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta},$$
$$\lim_{t \to +\infty} p_1(t) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

Exercice 07.

Soit $\{X(t),\ t \geq 0\}$ un processus de naissance, c'est un processus de Markov avec l'espace d'états $E = \{0, 1, 2, ...\}$, tel que $X(0) = 0$ et les intensités $\lambda_{kj} = 0$ $(j < k$ ou $j > k+1)$.

1) Ecrire les équations de Kolmogorov.

2) Trouver la relation de recurrence entre $p_n(t) = P(X(t) = n)$ et $p_{n-1}(t)$.

Série N° 02

pro-stocks

Ex 02 :-

1)

$\mathrm{cov}(X(t), X(t+\tau)) = \mathrm{cov}(X(t), X(t+\tau) - X(t) + X(t))$

$= \mathrm{Cov}(X(t), X(t+\tau) - X(t)) + \mathrm{var}(X(t))$

$= \mathrm{Var}(X(t))$ car $X(t+\tau) - X(t) \perp\!\!\!\perp X(t)$

$= \lambda t$

2) $y(t) = Z(-1)^{X(t)}$ $t \geq 0$

$= E(Z)\, E[(-1)^{X(t)}] = 0$

$E(Z) = 1 \cdot \overbrace{p(Z=1)}^{0,5} + (-1)\overbrace{p(Z=-1)}^{0,5} = 0$

Soit $h > 0$

$r(h) = \mathrm{cov}(y(t), y(t+h))$

$= E[y(t)\, y(t+h)] - E(y(t)) E(y(t+h))$

$= E[Z^2 (-1)^{X(t)} (-1)^{X(t+h)}]$

$= E(Z^2)\, E[(-1)^{X(t+h) - X(t) + 2X(t)}]$

$= E(Z^2)\, E[(-1)^{X(t+h) - X(t)}]\, E[(-1)^{2X(t)}]$

$\bullet\ E(Z^2) = 1^2 \cdot \overbrace{p(Z=1)}^{0,5} + (-1)^2 \overbrace{p(X=-1)}^{0,5} = 1$

E

- $E[(-1)^{2X(t)}] = E[1^{X(t)}] = 1$

- $E[(-1)^{X(t+h)-X(t)}] = e^{-\lambda h} \sum (-1)^k \frac{(\lambda h)^k}{k!}$
$= e^{-\lambda h} \sum \frac{(-\lambda h)^k}{k!} = e^{-\lambda h} e^{-\lambda h}$
$= e^{-2\lambda h}$

- $E[\cancel{(-1)^{X(t+h)-X(t)}}] -$

$Y = X(t+h) - X(t) \sim P(\lambda h)$

$E(f(Y)] = e^{-\lambda h} \sum_{k\geq 0} f(k) \frac{(\lambda h)^k}{k!}$

Ex03 :-

$\{N^i(t)\}_{t\geq 0}$; $i = 1.2$ Sur $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_t, P)$

un espace . probabilité filtré

$E[N^1(t)] = E[N^2(t)] = \lambda t$

Soit $t \geq s$ $E(N(t) | \mathcal{F}_s] = E[N(t) - N(s) + N(s) | \mathcal{F}(s)]$ $\boxed{\mathcal{F}_s = \sigma(N(s))}$

$E(N(t) | \mathcal{F}_s) = E(N(t) - N(s) | \mathcal{F}_s] + E(N(s) | \mathcal{F}_s)$
$= E(N(t) - N(s)) + N(s)$
$= \lambda(t-s) + N(s)$

$\{N(t)\}$ n'est pas une martingale.

$\{N^1(t) - N^2(t)\}_{t\geq 0}$ est une martingale ?

- $E(|N^1(t) - N^2(t)|) \leq E|N^1(t)| + E|N^2(t)|$

$E(|N^1(t)|) = e^{-\lambda t} \sum_{k\geq 0} |k| \frac{(\lambda t)^k}{k!} = \lambda t < \infty$

$t \geq s$

$E[N^1(t) - N^2(t) | \mathcal{F}_s] = E[\{N^1(t) - N^2(t)\} - (N^1(s) - N^2(s)) + N^1(s) - N^2(s)\} | \mathcal{F}_s]$

$X \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}$, $E[X|\mathcal{F}] = E(X)$

X est $\mathcal{F}$ mesurable $E(X/\mathcal{F}) = X$

$= E[N^1(t) - N^2(t) - N^1(s) - N^2(s)\} | \mathcal{F}_s] + E[N^1(s) - N^2(s) | \mathcal{F}_s]$

$= E[N^1(t) - N^1(s)] - E[N^2(t) - N^2(s)] + N^1(s) + N^2(s) = \lambda(t-s) - \lambda(t-s) + N^1(s) - N^2(s)$

$= N^1(s) + N^2(s)$

Ex 04

1) $\Psi(z,t) = \sum_n z^n \, p(N(t) = n)$

$= \sum_n z^n e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{-\lambda t} \sum_n \frac{(z \lambda t)^n}{n!}$

$= \sum e^{-\lambda t} e^{\lambda t z} = e^{\lambda t (z-1)}$

CamScanner الممسوحة ضوئيا بـ

$$E(f(X)] = \sum_{n\geq 0} f_n \, p(X=n)$$

3)

1) X est accroissements ind $X(t) - X(s) \perp\!\!\!\perp X(s)$

2) $X(t+s) - X(t) \overset{loi}{=} X(s)$

2) $x(z.t) = \sum_n z^n \cdot p(X(t) = n)$

$$x(z.t+h) = \sum_n z^n \, p(X(t+h) = n)$$

$$= E(z^{X(t+h)}] = E(z^{X(t+h) - X(t) + X(t)}$$

$$= E(z^{X(t+h) - X(t)}] E[z^{X(t)}]$$

$$= E[z^{X(h)}] E[z^{X(t)}]$$

$$= \sum_n z^n \, p(X(h) = n) \sum_n z^n p(X(t) = n)$$

$$= \psi(z,h) \, \psi(z,t)$$

- $X(z.t) = \sum_n z^n \, p(X(t) = n)$

$x(z.t+h) = \psi(z.h) \, \psi(z.t)$

$$\frac{\psi(z,t+h) - \psi(z.t)}{h} = \frac{\{\psi(z.h) - 1\} . \psi(z.t)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\psi(z.t+h) - \psi(z.t)}{h} \simeq \psi(z.t) \lim_{h\to 0} \left(\frac{\psi(z.h) - 1}{h} \right)$$

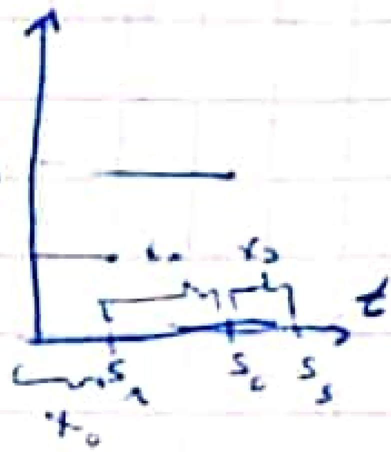
$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(z.t)$$

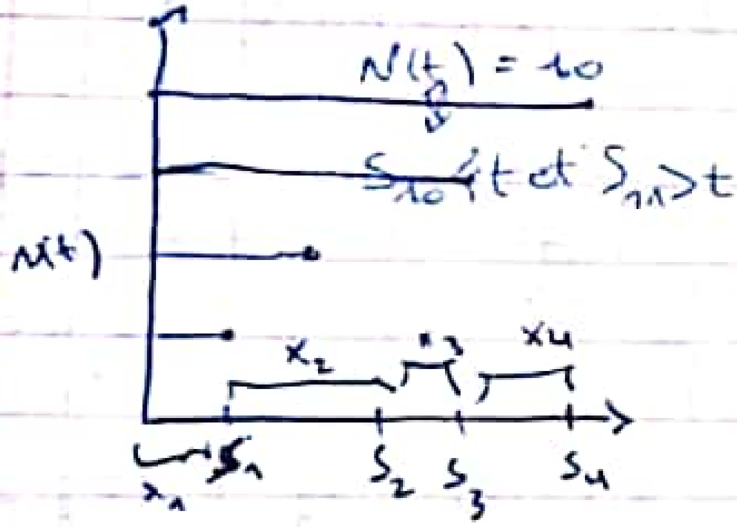
$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(z,t) \simeq \lambda(z,t)\, h \frac{1}{h}(-1 \cdot p(X(h)=0) + z\,p(X(h)=1) + \sum_{n\geq 2} z^n\, p(X(h)=n))$$

$$= \psi(z,t)(-N + zN)$$

$$\psi(z,h) = \sum_n z^n \cdot p(X(h)=n) = p(X(h)=0) + z\,p(X(h)=1) + \sum_{n\geq 2} z^n\, p(X(h)=n)$$

Exp1...





Notons que l'évènement $\{S_n \leq t\} = \{$ le nbr. de la n-ème défaillance $\leq t\}$ est équivalent avec $\{N(t) \geq n\} = \{$ le nbr des défaillance est $\geq n\}$

1) $p(N(t)=n) = p(N(t)\geq n) - p(N(t)\geq n+1)$

car $p(N(t)\geq n) = p(N(t)= n) + p(N(t)\geq n+1)$

$$= p(S_n \leq t) - p(S_{n+1} \leq t)$$

$p(X+Y)=n) = p(\bigcup_{k=1} \{X=k, Y=n-k\}$

$= F_n(\ell) - F_{n+1}(\ell)$

b)

$$H(t) = E[N(t)] = \sum_{n\geq 1} p(N(t)=n)$$

$$= \sum_{n\geq 1} n F_n(t) - \sum_{n\geq 1} n F_{n+1}(t)$$

posons $k=n+1 \longrightarrow n=k-1$

$$\Rightarrow \sum_{k\geq 1} n F_n(t) - \sum_{k\geq 2} (k-1) F_k(t)$$

$$= \sum_{n\geq 1} n F_n(t) - \sum_{n\geq 2} n F_n(t) + \sum_{n\geq 2} F_n(t)$$

$$= F_1(t) + \sum_{n\geq 2} F_n(t) = \sum_{n\geq 1} F_n(t)$$

c)

$$F_{W_t}(s) = p(W \leq s) = 1 - P(W_t > t)$$

$$= 1 - \sum_{n=1}^{n} p(N(t)=n, S_{n+1} > s+t)$$

$$= 1 - p(N(t)=0, S_{n+1} > s+t)$$

$$- \sum_{n\geq 1} \int^{s+t} P(N(t)=n, S_{n+1} > s+$$

$= 1 - P(S_1 > s+t) - \sum_{n\geq 1} P(S_n \leq t, S_{n+1} > t, S_{n+1} > s+t)$

$= 1 - P(S_1 > s+t) - \sum_{n\geq 1} P(S_n \leq t, S_{n+1} > s+t)$

$= \bar{F}(s+t) - \sum_{n\geq 1} P(S_n \leq t, X_{n+1} > s+t - S_n)$

$\int_\Omega f(X)\,dP = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dP_X(x)$

la formule de la prob totale. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ esp prob et $G \subseteq \mathcal{F}$

$P(A \cap B) = \int_B P(A \mid G)\,dP$

$B = \{S_n \leq t\}, \ G = \mathcal{F}$

$F(s+t) - \sum_{n\geq 1} \int_\Omega P(-)1\,dP$

$= F(s+t) - \sum_{n\geq 1} \int_{S_n \leq t} P(X_{n+1} > s+t - S_n)\,dP$

$= F(s+t) - \sum_{n\geq 1} \int_0^t P(X_{n+1} > s+t - x)\,dP_{S_n}(x)$

$= F(s+t) - \sum \int_0^t \left(1 - \overset{F}{\overline{F_{X_{n+1}}(s+t-x)}}\right) \underbrace{f_n(x)}_{h(x)}\,dx$

$= F(s+t) - \int_0^t (1 - F(s+t-x)) \sum_{n\geq 1} f_n(x)\,dx$

$= F(s+t) - \int_0^t (1 - F(s+t-x))\, h(x)$

d)

$X_i \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$

alors $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim \Gamma$

$S_2 = X_1 + X_2$

$f_{S_2}(t) = \int_{\mathbb{R}} f_{X_1}(x) * f_{X_2}(t-x)\,dx$

$t - x > 0$

$t > x$

$= \int_{\mathbb{R}} \lambda \cancel{e^{-\lambda x}} \mathbb{1}_{[0,\infty[}(x) \, \lambda e^{-\lambda(t-x)} \mathbb{1}_{[0,\infty[}(t-x)$

$= \lambda^2 e^{-\lambda t} \int_0^t dx \, \mathbb{1}_{[0,\infty[}(t) \, dx$

$= \lambda^2 e^{-\lambda t} \cdot t \, \mathbb{1}_{[0,\infty[}(t)$

on suppose que $f_{S_n}(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda x} x^{n-1} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$

~~et montrons que $f_{S_n}(t) = \lambda^{n+1}$~~

et montrons que

$f_{S_{n+1}}(t) = \frac{\lambda^{n+1}}{(n)!} e^{-\lambda x} x^{n} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$

Notons que

$$f_{S_{n+1}}(t) = f_{S_n + X_{n+1}}(t)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f_{S_n}(x)\, f_{X_{n+1}}(t-x)\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda x} x^{n-1} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)\ \lambda e^{-\lambda(t-x)} \mathbb{1}_{[0,\infty[}(t-x)\,dx$$

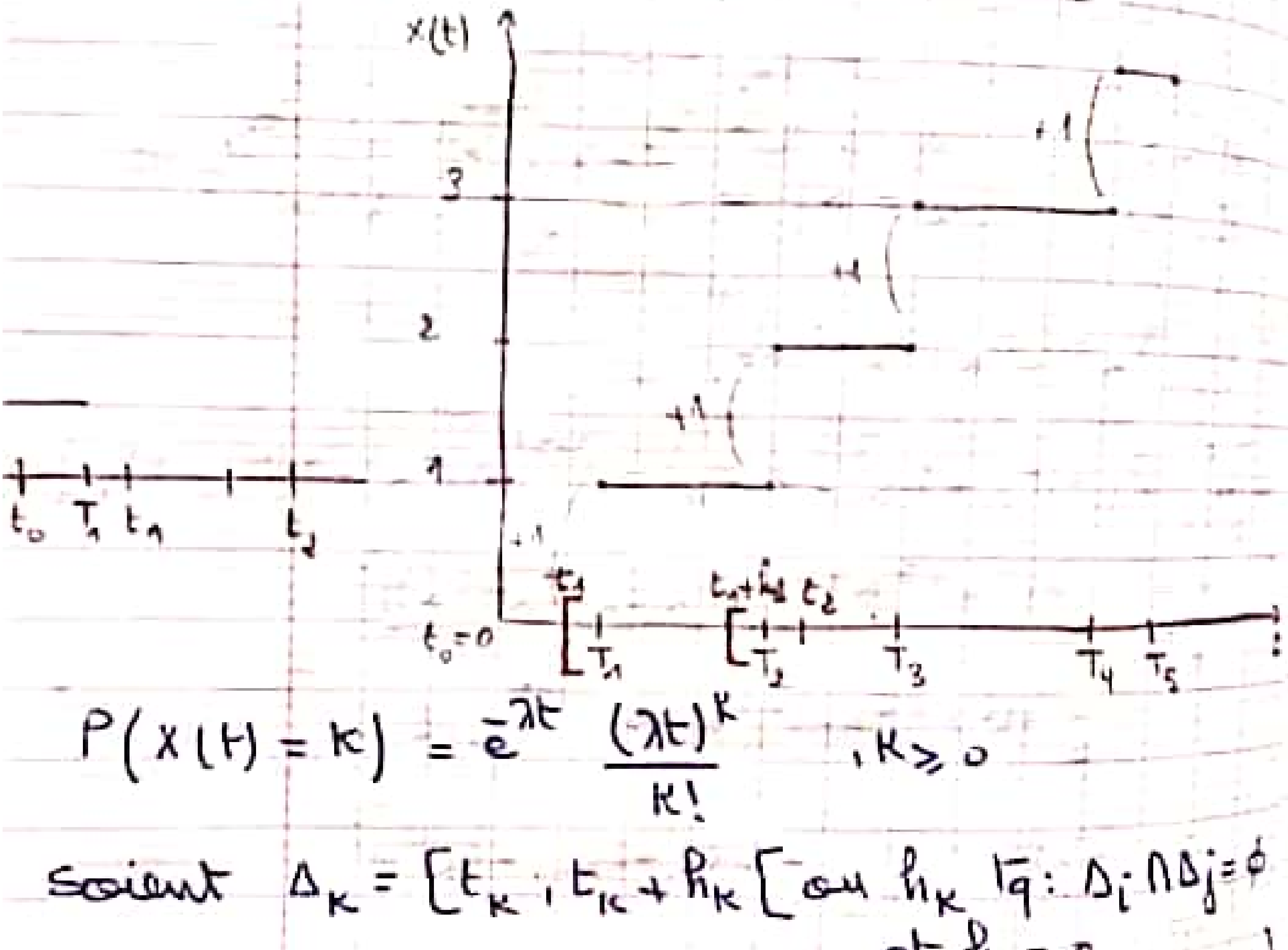
$$P(N(t)=n) = F_n(t) - F_{n+1}(t)$$

$$= \int_0^t \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda x} x^{n-1} \mathbb{1}_{[0,\infty[}(x)\,dx - \underbrace{\int_0^t \frac{\lambda^{n+1}}{n!} e^{-\lambda x} x^n \mathbb{1}_{[0,\infty[}(x)\,dx}_{I.P.P}$$

$$U' = e^{-\lambda x} \longrightarrow U = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}$$

$$V = x^n \longrightarrow V' = n x^{n-1}.$$

Exercice 05.



$$P(X(t) = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k \geq 0$$

Soient $\Delta_k = [t_k, t_k + h_k[$ où h_k tq : $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$ et $h_0 = 0$

$(T_1 \in [t_1, t_1 + h_1[, \; T_2 \in [t_2, t_2 + h_2[, \; \dots, \; t_n \in [t_n, t_n + h_n[$

$= (X(t_1 + h_1) - X(t_1) = 1$ et $X(t_1) - X(t_0 + h_0) = 0)$

et $(X(t_2 + h_2) - X(t_2) = 1$ et $X(t_2) - X(t_1 + h_1) = 0)$

$\vdots$

$(X(t_{n-1} + h_{n-1}) - X(t_{n-1}) = 1$ et $X(t_n) - X(t_{n-1} + h_{n-1}) = 0)$

e_9

$X(t_1+h_1) - X(t_1) = 1$

$X(t_1) - X(t_0 + h_0) = 0$

$\forall\, t > s \quad X(t) - X(s) \sim \mathcal{P}(\lambda(t-s))$

$$P(X(t) - X(s) = K) = \frac{e^{-\lambda(t-s)}}{K!}(\lambda(t-s))^K$$

$$P\left(\bigcap_{K=1}^{n} T_K \in [t_K, t_K + h_K[\right)$$

$$= \prod_{K=1}^{n} P(X(t_K+h_K) - X(t_K) = 1) P(X(t_K) - X(t_{K-1} + h_{K-1}) = 0)$$

$$= \prod_{K=1}^{n} e^{-\lambda(t_K + h_K - t_K)} \frac{(\lambda(t_K+h_K-t_K))^1}{1!} \cdot e^{-\lambda(t_K - t_{K-1} - h_{K-1})} \frac{(\lambda(t_K - t_{K-1} - h_{K-1}))^0}{0!}$$

$$= \prod_{K=1}^{n} e^{-\lambda h_K} \lambda h_K e^{-\lambda(t_K - t_{K-1} - h_{K-1})}$$

$$= \left(e^{-\lambda h_1} \lambda h_1 e^{-\lambda(t_1 - t_0 - h_0)}\right)\left(e^{-\lambda h_2} \lambda h_2 e^{-\lambda(t_2 - t_1 - h_1)}\right)$$

$$\left(e^{-\lambda h_3} \lambda h_3 e^{-\lambda(t_3 - t_2 - h_2)}\right) \text{---} \left(e^{-\lambda h_n} \lambda h_n e^{-\lambda(t_n - t_{n-1} - h_{n-1})}\right)$$

$$e^{-\lambda h_1} \lambda h_1 e^{-\lambda t_1} e^{-\lambda h_2} \lambda h_2 e^{-\lambda t_2} e^{\lambda t_1} e^{\lambda h_1} e^{-\lambda h_3} \lambda h_3 e^{-\lambda t_3} e^{\lambda t_2} e^{\lambda h_2}$$

$$e^{-\lambda h_{n-1}} \lambda h_{n-1} e^{-\lambda t_{n-1}} e^{\lambda t_{n-2}} e^{\lambda h_{n-2}}$$

$$e^{-\lambda h_n} \lambda h_n e^{-\lambda t_n} e^{\lambda t_{n-1}} e^{\lambda h_{n-1}}$$

$$= \lambda^n h_1 h_2 \cdots h_n e^{-\lambda h_n} e^{-\lambda t_n}$$

30

$$= e^{-\lambda t_n} \lambda^n e^{-\lambda h_n} h_1 h_2 \ldots h_n$$

$$f_{(T_1,\ldots,T_n)}(t_1,\ldots,t_n) = \lim_{\substack{\max h_i \to 0 \\ 0 \leq i \leq n}} \frac{P\left(\bigcap_{k=1}^{n} T_k \in [t_k, t_k + h_k[\right)}{h_1 h_2 \ldots h_n}$$

$$= \lim_{\max h_i \to 0} \frac{e^{-\lambda t_n} \lambda^n e^{-\lambda h_n} h_1 h_2 \ldots h_n}{h_1 h_2 \ldots h_n}$$

$$= \lim_{\max h_i \to 0} e^{-\lambda t_n} \lambda^n e^{-\lambda h_n} = \lambda^n e^{-\lambda t_n}$$

si $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$

Pour trouver la densité $f_{(\tau_1,\ldots,\tau_n)}(s_1,\ldots,s_n)$

du vecteur $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)^T$

on remarque la transformation

$$\begin{array}{l|l}
\tau_1 = T_1 - \underbrace{T_0}_{=0} = T_1 & T_1 = \tau_1 \\
\tau_2 = T_2 - T_1 & T_2 = \tau_1 + \tau_2 \\
\tau_3 = T_3 - T_2 & T_3 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 \\
\vdots & \vdots \\
\tau_n = T_n - T_{n-1} & T_n = \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n
\end{array}$$

est une bijection dont le jacobien

3^1

est égale à 1.

et comme $T_n = \tau_1 + \dots + \tau_n$

$$f_{(\tau_1, \dots, \tau_n)}(s_1, \dots, s_n) = \begin{cases} \lambda^n e^{-\lambda(s_1 + \dots + s_n)} \\ 0 \quad \text{si non} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \prod_{k=1}^{n} \lambda e^{-\lambda s_k} & \text{si } s_k > 0 \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

Serie 3 :

EXO 1 :

$X(.) : \Omega \times N \to E \subseteq N$

X est accroissement inde-

$\forall\, 0 < t_0 < t_1 < \dots < t_n$

$X(t_n) - X(t_{n-1}), \dots, X(t_1) - X(t_0)$ sont indep

$$P(X(t_n) = i_n \mid X(t_{n-1}) = i_{n-1}, \dots, X(t_0) = i_0) =$$
$$P(X(t_n) = i_n \mid X(t_{n-1}) = i_{n-1})$$

$$P(X(t_n) = i_n \mid X(t_{n-1}) = i_{n-1}, \dots, X(t_0) = i_0) .$$

$$= \frac{P[X(t_n) = i_n, X(t_{n-1}) = i_{n-1}, \dots X(t_0) = i_0]}{P[X(t_{n-1}) = i_{n-1}, X(t_{n-2}) = i_{n-2}, \dots, X(t_0) = i_0]}$$

$$= \frac{P[X(t_n) - X(t_{n-1}) = i_n - i_{n-1}, \dots, X(t_1) - X(t_0) = i_1 - i_0, X(t_0) = i_0]}{P[X(t_{n-1}) - X(t_{n-2}) = i_{n-1} - i_{n-2}, \dots, X(t_1) - X(t_0) = i_1 - i_0, X(t_0) = i_0]}$$

$$= \frac{P(X(t_n) - X(t_{n-1}) = i_n - i_{n-1}) \dots P(X(t_1) - X(t_0) = i_1 - i_0)\, P(X(t_0) = i_0)}{P(X(t_{n-1}) - X(t_{n-2}) = i_{n-1} - i_{n-2}), \dots, P(X(t_1) - X(t_0) = i_1 - i_0)\, P(X(t_0) = i_0)}$$

$$= P(X(t_n) - X(t_{n-1}) = i_n - i_{n-1}) \cdot \frac{P[(X(t_{n-1}) = i_{n-1}]}{P(X(t_{n-1}) = i_{n-1}}$$

$$P(X(t_n) = i_m \mid X(t_{n-1}))$$

$$= \frac{P(X(t_n) - X(t_{n-1}) = i_n - i_{n-1} , X(t_{n-1}) = i_{n-1})}{P(X(t_{n-1}) = i_{n-1})}$$

EXO 2 :

$E = \{1, 2, m\}$

Si $i = 1$ ou m

$P(X(k+1) = i \mid X(k) = i)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & q & 0 & p \\ 0 & \cdots & & & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1m} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2m} \\ P_{31} & P_{32} & \cdots & P_{3m} \\ \vdots & & & \\ P_{m1} & P_{m2} & \cdots & P_{mm} \end{pmatrix}$$

EXO 3 :

$$P(A) = P\left(\bigcap_{i \geq 1}^{\infty} A(t)\right) = \lim_{n \to \infty} P\left(\bigcap_{t \geq 1}^{n} A(t)\right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} P\left(\bigcap_{t \geq 1}^{n} \{X(t) = 1\}\right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} P\left(\{X(1) = 1\} \cap \{X(2) = 1\} \cap \dots \cap \{X(n) = 1\}\right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} P(X(1) = 1, X(2) = 1, \dots, X(n) = 1)$$

★ $$= \lim_{n \to \infty} P(X(n) = 1, X(n-1) = 1, \dots, X(1) = 1)$$

$P(X(n) = i_n, X(n-1) = i_{n-1}, \dots, X(0) = i_0)$

$= P_{i_{n-1} i_n} P_{i_{n-2} i_{n-1}} \dots P_{i_0 i_1} \pi_{i_0}$

$\lim_{n \to \infty} \underbrace{P_{11} \cdot P_{11} \dots P_{11}}^{n \text{ fois}} \cdot \pi_1$

$= \lim_{n \to \infty} P_{11}^n \cdot \pi_1 = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot 1$

$P(X(4) = 3, X(3) = 1, X(2) = 3, X(1) = 2)$

$= P_{13} P_{31} P_{23} \cdot \pi_2$

Exo 4

$E = \{1, \dots, m\}$, $\{X_t, t \in N\}$ est une chaine de markov

Montrons que

$P^{(t)} = P^t = \underbrace{P \, P \dots P}_{t \text{ fois}}$

$P^{(t)} = (P_{ij}^{(t)}) \stackrel{?}{=} P^t$

$P_{ij}^{(t)} = P\left(\frac{X_t = j}{X_0 = i}\right)$

Par récurrence :

TD 1

TP 1

$x(n) = mn + b + \xi(n)$

Exo 1

1) $E(X(t)) = mt + b + E(\xi(t))$ dépend de t.
dans $\{X(t), t \in \mathbb{N}\}$ est non stat

2) $\xi(t) = X(t) - X(t-1)$

$E(\xi(t)) = E(X(t)) - E(X(t-1)) = mt - m(t-1)$

$= m.$ m^2

$r(h) = cov(X(t), \xi(t+h)) = E(\xi(t) \cdot \xi(t+h)) - E(\xi(t)) \cdot E(\xi(t+h))$

$E(\xi(t) \cdot \xi(t+h)) = E((X(t) - X(t-1))(X(t+h) - X(t+h-1)))$

$= E[(mt + b + \xi(t) - m(t-1) - b - \xi(t-1))(m(t+h) + b - \xi(t+h)$
$- m(t+h-1) - b - \xi(t+h-1))]$

$= E[((\xi(t) - \xi(t-1)) + m)(\xi(t+h) - \xi(t+h-1) + m)]$

$= E(\xi(t)\xi(t+h)] - E(\xi(t)\xi(t+h-1)] - E[\xi(t-1)\xi(t+h)]$

$+ E(\xi(t-1)\xi(t+h-1) + m^2.$

$r(h) = \begin{cases} 2\delta^2 & si\ h = 0 \\ \delta^2 & si\ h = 0 \end{cases}$

ξ stationnaire

Exo 2

$P(X(t) - 1) = P(X(t) - 1) = 0,5$, $\forall t \in T \subset \mathbb{N}$

$E(X(t)) = 0$

$r(h) = cov(X(t), X(t+h)) = E(X(t) \cdot X(t+h))$

$h \in T$

	1	-1
1	1	-1
-1	1	-1

$\xi = 1$ avec $P(\xi = 1) = \frac{1}{2}$

$\xi = -1$ avec $P(\xi = -1) = \frac{1}{2}$

يختلف

$(X_t)_{t \in J}$

$$P(X_t = 1) = P(X_t = -1) = 0{,}5 \quad \forall\, t \in J$$

$$E(X_t) = \sum_{k \in X_t(\omega) = \{1, -1\}} k\, P(X_t = k)$$

$$Var(X_t) = E(X_t^2) = \sum_{k \in X_t(\omega)} k^2 P(X_t = k) = 1$$

$Cov(X_t, X_{t+h}) = Var(X_t) = 1$ si $h = 0$

si $h \neq 0$

$$Cov((X_t), X_{t+h}) = E(X_t \cdot X_{t+h}) - E(X_t)\, E(X_{t+h})$$

$Y_t = X_t X_{t+h}$ $\qquad Y : \omega \longrightarrow \{1, -1\}$.

$$P(Y_t = 1) = P(\{X_t = 1, X_{t+h} = 1\} \cup \{X_t = -1, X_{t+h} = -1\})$$

$$= P(\{X_t = 1\} \cap \{X_{t+h} = 1\}) + P(\{X_t = -1, X_{t+h} = -1\}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$\cancel{Cov(X_t, X_{t+h}) = E(X_t X_{t+h}) - E(X_t)}$

$$E(X_t) = 1\, P(X_t = 1) - 1\, P(X_t = -1) = 0$$

$\text{cov}(X_t , X_{t+h}) = 0$
si $h \neq 0$

Alors le processus $(X_t)_{t\in J}$ est stationnaire.

Exo 3

$(X_t)_{t\in J}$ معطيات

$P(X_t = 0) = 1 - \frac{1}{t}$, $P(X_t = \sqrt{t}) = \frac{1}{2t}$, $P(X_t = -\sqrt{t}) = \frac{1}{2t}$

$E(X_t) = \sqrt{t} \times \frac{1}{2t} - \sqrt{t}\,\frac{1}{2t} = 0$

$\text{Var}(X_t) = E(X_t^2) - E(X_t) = t \times \frac{1}{2t} + t\,\frac{1}{2t} = 1$

$\text{cov}(X_t , X_{t+h}) = \text{Var}(X_t) = 1$ si $h = 0$

si $h \neq 0$

$\text{cov}(X_t , X_{t+h}) = E(X_t \cdot X_{t+h}) - E(X_t)\overset{0}{\cancel{E(X_{t+h})}}$

$= E(Y_t)$

$Y_t(\omega) = \{0, \sqrt{t}\sqrt{t+h}, -\sqrt{t}\sqrt{t+h}\}$?

$x \backslash x_t$ / $t+h$	0	$\sqrt{t}$	$-\sqrt{t}$
0	0	0	0
$\sqrt{t+h}$	0	$\sqrt{t}\sqrt{t+h}$	$-\sqrt{t}\sqrt{t+h}$
$-\sqrt{t+h}$	0	$-\sqrt{t}\sqrt{t+h}$	$\sqrt{t}\sqrt{t+h}$

$E(X_t) = 0\,P(Y_t = 0) + \sqrt{t}\sqrt{t+h}\,P(Y_t = \sqrt{t}\sqrt{t+h})$
$- \sqrt{t}\sqrt{t+h}\,P(Y_t = -\sqrt{t}\sqrt{t+h})$
$= \sqrt{t}\sqrt{t+h} \times \frac{2}{9} - \sqrt{t}\sqrt{t+h} \cdot \frac{2}{9}$
$= 0$

Alors le processus est stationnaire.

Exo 4

$Y_t = (-1)^t X_t$, X_t stationnaire

$E(X_t) = 0$, $E(X_t, X_s) = 0 \ \forall t \neq 0$

$Var(X_t) = \delta^2$, $\forall t \in \mathbb{N}$

$Z_t = X_t + Y_t$

Y_t est stationnaire

Z_t est il stationnaire ?

$E(Z_t) = E(X_t) + E(Y_t) = 0 + (-1)^t \cancel{E(X_t)}^{0} = 0$

$Z_t = X_t (1 + (-1)^t)$

$Var(Z_t) = Var((1 + (-1)^t) X_t) = (1 + (-1)^t)^2 Var(Xt)$
$= (1 + (-1)^t)^2 \delta^2$

$E(\delta) =$ constant

(Z_t) n'est pas stationnaire. يتوقف على t

Exo 5

- $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $n \in \mathbb{N}$
- $E(X_n] = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$
- $Var(X_n) = \begin{cases} \dfrac{\delta^2}{1-\mu^2} & \text{si } n = 0 \\ \delta^2 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$
- $0 < \mu^2 < 1$. $E[X_i X_j] = 0$ $\forall i \neq j$

$Z_n = \begin{cases} X_0 & \text{si } n = 0 \\ \mu Z_{n-1} + X_n & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$

$n \neq 0$

$$Z_n = N Z_{n-1} + X_n = N(N Z_{n-2} + X_{n-1}) + X_n$$

$$= N^2 Z_{n-2} + N X_{n-1} + X_n$$

$$\vdots$$

$$Z_n = N^n X_0 + \dots\dots X N^{n-1} X_1 + \dots N^0 X_n$$

$$= \dots\dots \sum_{i=0}^{n} N^{n-i} X_i$$

$$E(Z_n) = \sum_{i=0}^{n} N^{n-i} E(X_i) = 0$$

$$Var(Z_n) = Var\left(\sum_{i=0}^{n} N^{n-1} X_i\right) = \sum_{i=0}^{n} N^{2(n-1)} Var(X_i)$$

$$- 2 \cancel{cov} \sum_{\substack{i \neq j \\ i<j}} N^{n-i} N^{n-j} cov(X_i, X_j)$$

Ex 06

الحصة (2) الثلاثاء :

$\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ strictement station $E(|X(t)|)<\infty$

Montrons que. $\forall (t,s)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$R(s,t) = \mathrm{cov}(X_t, X_s) \overset{?}{=} V(t-s)$

On a $\forall h\in\mathbb{R}$

$$\mathrm{cov}(X_t, X_s) = \mathrm{cov}(X_{t+h}, X_{s+h})$$

$h=-s$

$= \mathrm{cov}(X_{t-s}, X_0) = \mathrm{cov}(X_0, X_{t-s})$

$= V(t-s)$

$V(h) = \mathrm{cov}(X_t, X_{t+h})$ $\forall t\in\mathbb{R}$

$V(h) = \mathrm{cov}(X_0, X_{0+h})$

Ex 07

$\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ stat.

$V(t) = e^{-\beta|t|}$

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} V(h)e^{-i\lambda h}\,dh.$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta|h|}e^{-i\lambda h}\,dh.$$

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{(\beta-i\lambda)h}\,dh + \int_{0}^{+\infty} e^{-(\beta+i\lambda)h}\,dh\right.$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{e^{(\beta-i\lambda)h}}{(\beta-i\lambda)}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{-e^{-(\beta+i\lambda)h}}{\beta+i\lambda}\right]_{0}^{+\infty}\right.$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\beta-i\lambda}+\frac{1}{\beta+i\lambda}\right) = \frac{1}{\cancel{2}\pi}\,\frac{\cancel{2}\beta}{\beta^2+\lambda^2}$$

$$= \frac{\beta}{\pi(\beta^2+\lambda^2)}$$

2) $|\theta| < 1$

$X(t) = \theta X(t-1) + \varepsilon(t)$

$\Leftrightarrow X(t) - \theta X(t-1) = \varepsilon(t)$

$\Leftrightarrow X(t) - \theta L X_t = \varepsilon(t)$

$\Rightarrow (1-\theta L) X_t = \varepsilon(t)$

$\varphi(L) X_t = \phi(L) \varepsilon(t)$

$z \in \mathbb{C}$

$\varphi(z) = 1 - \theta z.$

$\varphi(z) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{\theta} \quad |z| = \frac{1}{\theta} > 1.$

notre système est stat $h = -1$??

$$f(\lambda) = \frac{\delta^2}{2\pi} \frac{|\phi(e^{-i\lambda h})|^2}{|\varphi| e^{-i\lambda h}|^2} = \frac{\delta^2}{2\pi (|1 - \theta e^{+i\lambda}|}$$

$$= \frac{\sigma^2}{2\pi} (|1 - \theta e^{i\lambda}|^2$$

~~$V(h) = \mathrm{Cov}|X_t, X_{t+h}|$~~

~~$= \mathrm{Cov}$~~$\left(\sum_{i=0}^{+\infty} \theta^k \varepsilon_{t-k} \right)$

$$X(t) = \frac{1}{1-\theta L} \varepsilon(t) = \sum_{h=0}^{+\infty} (\theta L)^k \varepsilon_{(t)}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \theta^k L^k \varepsilon_t$$

$$= \sum_{K=0}^{+\infty} \theta^k \varepsilon_{t-K}$$

$X_t = \theta X_{t-1} = \theta(\theta X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) \varepsilon_t$

$= \theta^2 X_{t-2} + \theta \varepsilon_t + \varepsilon_t$

$= \theta^2 (\theta X_{t-3} + \varepsilon_t + \dots)$

$= \theta^3 X_{t-3} + \theta^2 \varepsilon_{t-2} + \varepsilon \varepsilon_{t-1} \quad \varepsilon f(\lambda)$

المسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\gamma(h) = cov(X_t , X_{t+h}) = cov\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \theta^k \varepsilon_{t-k} , \sum_{j=0}^{+\infty} \theta^j \varepsilon_{t+h-j}\right)$$

$$\gamma(h) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) e^{i\lambda h} d\lambda = \frac{\sigma^2 \theta^{|h|}}{1-\theta^2}$$

Exo 8

$$f(t) = E(X_t)$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(t+\frac{1}{n}) - f(t)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to +\infty} E\left(\frac{X_{t+\frac{1}{n}} - X_t}{\frac{1}{n}}\right)$$

(1) $\forall w \in \Omega$

$$\lim_{n \to +\infty} \theta_n(t,w) = \lim_{n \to +\infty} \frac{X_{t+\frac{1}{n}}(w) - X_t(w)}{1/n}$$

$$X'_t(w) = \theta(t,w).$$

$1 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0$

$|\theta_n(t,w) - \theta(t,w)| < \varepsilon.$

$\theta_n(t,w) < \varepsilon + \theta(t,w)$

$\forall n \geq n_0 , |\theta_n(t,w)| \leq \varepsilon + |X'(t,w)|$

$h(t,w) = \max\{|\theta_1(t,w)| \dots |\theta_n(t,w)|\}$

$\forall n \in \mathbb{N} : |\theta_n(t,w)| \leq \underbrace{\max(h_n(t,w), h_0(t,w))}_{\in L^1}$

par le théorème de cv dominée

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(t+\frac{1}{n}) - f(t)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to +\infty} E(\theta_n)$$

$= E\left(\lim_{n \to +\infty} \varphi_n\right) = E(X')$

alors $f'(t) = \frac{d}{dt} E(X_t) = E\left(\frac{d}{dt} X_t\right)$.