Nom & Prénom :	اللقب و الإسم:
Niveau :	المستوى:
Groupe :	الفوج:
N° d'inscription :	رقم التسجيل:
Examen de :	إمتحان في مادة:

Solution des exercices de la serie n° 1
Esp. Cond.

Exercice 1 : M.q. $X \in L^2 \Rightarrow X \in L^1$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

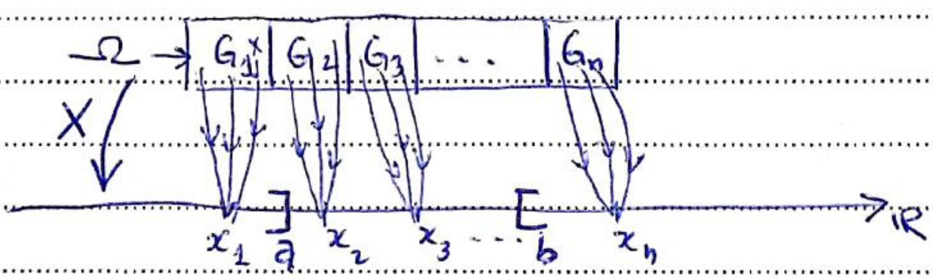
$$E|X| = E|1.X| \leq \sqrt{E1^2}\sqrt{EX^2} < \infty.$$

Exercice 2 : (a) On a $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \Rightarrow \boxed{\Omega = \bigcup_{i=1}^{n}\{X = x_i\}}$

(b) $\sigma(X) = \{X^{-1}(B),\ B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}$ la plus petite tribu rendant X mesurable.

Posons $G_i = \{X = x_i\}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Le schéma suivant illustre mieux le p^b :



Si $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, prenons $B =]a, b[$, $a < b \in \mathbb{R}$.

Il est clair que : $X^{-1}(B) = \{w \in \Omega = \bigcup_i G_i \ / \ X(w) \in]a, b[\}$

$$= \bigcup_{a < x_i < b} G_i$$

Conclusion : Les élément de $\sigma(X)$ sont ~~les G_i et~~ les réunions ~~de certains ou~~ $\bigcup_{i \in I} G_i$, $I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$

(c) C.à.d, on m.q. $Y : \sigma(X)$-mesurable $\Leftrightarrow Y = c^{te}$ sur $\{X = x_i\}$ $\forall i$

Y : cte sur chaque atome

⇒/ (montrons par la contraposée).

Supposons que Y n'est pas constante, i.e.

$\exists i \in \{1,2,\dots,n\}$ t.q. $G_{i,1}$ et $G_{i,2}$ une partition de G_i avec : $Y = y_1 \mathbb{1}_{G_{i,1}} + y_2 \mathbb{1}_{G_{i,2}}$ sur G_i.

c.à.d. Y n'est pas constante sur G_i.

Soit $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ avec : y_1 est la seule valeur de Y appartenant à B.

On a : $Y^{-1}(B) = G_{i,1} \notin \sigma(X) \Rightarrow Y$ n'est pas $\sigma(X)$-mesurable.

⇐/ Si $Y = cte = y_i$ sur chaque atome $G_i = \{X = x_i\}$.

alors $Y^{-1}(B) = \bigcup_{y_i \in B} G_i$, $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

d'après (b) Y est $\sigma(X)$-mesurable.

Remarque (i) Y est $\sigma(X)$-mesurable signifie que $\sigma(X)$ porte toute l'information sur Y. $(Y = f(X))$.

ou bien ; l'information portée par Y appartient à $\sigma(X)$.

(ii) $\sigma(Y) \subset \sigma(X)$.

Exercice 3 ; $E(X/\Omega) \overset{déf}{=} \frac{1}{\underbrace{\mathbb{P}(\Omega)}_{1}} \int_\Omega X \, d\mathbb{P} = \int_\Omega X \, d\mathbb{P} = \mathbb{E}(X)$.

i.e. Ω ne donne aucune information sur X.

Exercice 4. Soit $F(t) = \mathbb{P}(X \le t)$, F.d.r de X. alors :

$$EX^2 = \int_0^{+\infty} t^2 \, dF(t)$$

Comme $\mathbb{P}(X > t) = 1 - F(t)$, on va montrer que

Nom & Prénom :	اللقب و الإسم:
Niveau :	المستوى:
Groupe :	الفوج:
N° d'inscription :	رقم التسجيل:
Examen de :	إمتحان في مادة:

$$\int_0^\infty t^2\, dF(t) = 2\int_0^\infty t[1-F(t)]\,dt$$

les 2 intégrales étant impropre, cherchons d'abord

$$\int_0^a t^2\, dF(t) = \int_0^a t^2\, d[F(t)-1].$$

$$\overset{IPP}{=} t^2[F(t)-1]\Big|_0^a - 2\int_0^a t[F(t)-1]\,dt$$

$$= -a^2[1-F(a)] + 2\int_0^a t[F(t)-1]\,dt$$

Il suffit de mq. $a^2(1-F(a)) \xrightarrow[a\to\infty]{} 0$ ——— $(*)$

mais $0 \le a^2[1-F(a)] = a^2\,\mathbb{P}(X>a) \le (n+1)^2\,\mathbb{P}(X>n) \le 4n^2\,\mathbb{P}(X\geq n)$

$n=[a]$, $\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\le X\le k+1} x^2\, d\mathbb{P} < \infty$

D'où $n^2\,\mathbb{P}(X\geq n) \le \int_{\{X\geq n\}} x^2\, d\mathbb{P} = \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k\le X< k+1} X^2\, d\mathbb{P} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

ce qui prouve $(*)$.

Autre méthode : $\int_0^\infty t^2\, dF(t) = [t^2F(t)]_0^\infty - \int_0^\infty F(t)\, dt^2$

$$= [t^2F(t)]_0^\infty - 2\int_0^\infty tF(t)\,dt$$

Or : $\int_0^{\infty} t F(t)\,dt =$

Exercice 5 : $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A / B) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_B \mathbb{1}_A \, d\mathbb{P} = \frac{1}{\mathbb{P}B} \left[\int_{A \cap B} \overset{=1}{\mathbb{1}_A} \, d\mathbb{P} + \int_{\bar{A} \cap B} \overset{=0}{\mathbb{1}_A} \, d\mathbb{P} = \mathbb{P}(A/B) \right)$

Exercice 6 :

Y : v.a $c^{te} \Rightarrow \sigma(Y) = \mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ tribu triviale.

Mq $\mathbb{E}(X/Y) = \mathbb{E}(X)$

(i) $\mathbb{E}(X)$ est une c^{te} donc $\sigma(Y)$-mesurable

(ii) Il reste à vérifier : $\forall A \in \sigma(Y)$: $\int_A \mathbb{E}(X/Y)\,d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}X\,d\mathbb{P}$

mais $A = \emptyset$ ou $A = \Omega$

Pour $A = \emptyset$ c'est évident.

Pour $A = \Omega$: $\int_\Omega \mathbb{E}(X/Y)\,d\mathbb{P} = \int_\Omega X\,d\mathbb{P}$ (Par déf$^{\underline{n}}$ Kolmogorov)

$= \mathbb{E}X$ (c^{te})

$= \int_\Omega \mathbb{E}X\,d\mathbb{P}$

Exercice 7 :

$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A / \mathbb{1}_B) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A / \sigma(\mathbb{1}_B))$

$= \mathbb{E}(\mathbb{1}_A / B)\mathbb{1}_B + \mathbb{E}(\mathbb{1}_A / \bar{B})\mathbb{1}_{\bar{B}}$, car $\sigma(\mathbb{1}_B) = \{\emptyset, \Omega, B, \bar{B}\}$

$= \mathbb{P}(A/B)\mathbb{1}_B + \mathbb{P}(A/\bar{B})\mathbb{1}_{\bar{B}}$.

Nom & Prénom :	اللقب و الإسم:
Niveau :	المستوى:
Groupe :	الفوج:
N d'inscription :	رقم التسجيل:
Examen de :	إمتحان في مادة:

Exercice 8 :

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X/Y)\right] = \int_{\Omega} \mathbb{E}(X/Y)\, dP \underset{\text{Kolmogorov}}{\overset{A=\Omega}{=}} \int_{\Omega} X\, dP = \mathbb{E}X$$

Exercice 9 (voir ~~page~~ exercice 6) $\sigma(Y) = \mathcal{F}_0 = \mathcal{G}$

Exercice 10 : Voir exercice 6.

Exercice 11 : X : $\mathcal{G}$-mesurable

Mq. $\mathbb{E}(X/\mathcal{G}) = X$ p.s.

(i) X : $\mathcal{G}$-mesurable par hypothèse.

(ii) st $A \subset \mathcal{G}$: D'après Kolmogorov $\int_A \mathbb{E}(X/\mathcal{G})\, dP = \int_A X\, dP$

c.q.f.d.

Exercice 12 :

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X/\mathcal{G})/B\right] = \frac{1}{P(B)} \int_B \mathbb{E}(X/\mathcal{G})\, dP \overset{\text{Kolmogorov}}{=} \frac{1}{P(B)} \int_B X\, dP$$

$$= \mathbb{E}(X/B)$$

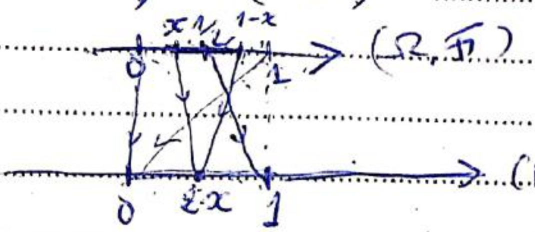
Nom & Prénom :....................................	اللقب و الإسم:....................................
Niveau :....................................	المستوى:....................................
Groupe :....................................	الفوج:....................................
N°d'inscription :....................................	رقم التسجيل:....................................
Examen de :....................................	إمتحان في مادة:....................................

Série d'exos n°1 (Esp. Cond.)

Exercice 9 : Premièrement, il faut décrire les σ-tribu $\sigma(Y)$

1) Y est symétrique autour de $\frac{1}{2}$

$\forall x \in [0,1] : Y(x) = Y(1-x)$



~~On peut affirmer que~~ On a : $\sigma(Y) = \{A : A = Y^{-1}(B),\ B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}$.

2) On affirme que : $\sigma(Y) = \{A \subset [0,1],$ symétrique par $\frac{1}{2}\}$

i.e : $\forall A \in \sigma(Y) \iff A = 1 - A,\ A \subset [0,1]$

En effet :

$(\Leftarrow)$ (a) Mq : $A = 1 - A \implies A \in \sigma(Y)$.

D'après le Schéma ci-dessus :

si $A = 1 - A,\ A \subset [0,1]$, alors : $A = \{x, 1-x \in [0,\frac{1}{2}],\ Y(x) = Y(1-x) = 2x\}$

Donc : $A = \{Y^{-1}\underbrace{\{2x,\ x \in A \cap [0,\frac{1}{2}]\}}_{B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}}\}$

Alors : $A \in \sigma(Y)$.

$(\Rightarrow)$ (b) Supposons que $A \in \sigma(Y)$ alors il existe un Borélien $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ tq : $A = Y^{-1}(B)$.

mq : $A = 1 - A$ (i.e $\forall x \in A : 1 - x \in A$) $x \in [0,1]$.

St $x \in A \Leftrightarrow Y(x) \in B$

$\Leftrightarrow Y(1-x) \in B$

$\Leftrightarrow 1-x \in A.$

(3) On est prêt à définir $\mathbb{E}(X/Y)$.
Comme $\mathbb{E}(X/Y)$ est $\sigma(Y)$ mesurable (par abord)
alors: $\mathbb{E}(X/Y)(x) = \mathbb{E}(X/Y)(1-x)$ $\forall x \in [0,1]$.

(4) Pour tt $A \in \sigma(Y)$, on devra transformer l'intégrale ci-dessous de telle sorte que l'intégrant soit sym. p.r.p à $1/2$.

$$\int_A 2x^2 dx = \int_A x^2 dx + \int_A x^2 dx$$

$$= \int_A x^2 dx + \int_{1-A} (1-x)^2 dx \quad (x \in A \Leftrightarrow 1-x \in 1-A)$$

$$= \int_A x^2 dx + \int_A (1-x)^2 dx$$

$$= \int_A [x^2 + (1-x)^2] dx.$$