Faculté des Mathématiques **USTHB** | **Année 2012/2013**
Master 1 ISMTID | 03/06/2013
Module: **Processus Stochastiques 2** | **Durée: 1h 30m**

Epreuve Finale

Exercice 1 ***(6 pts)*** *Soit X une variable aléatoire intégrable sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.*
1/ *Montrer que si $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$, alors $E(X/\mathcal{A}) = E(X)$ p.s.*
2/ *Soit $Y_n = E(X/\mathcal{F}_n)$ où $(\mathcal{F}_n)_n$ est une filtration. Montrer que Y_n est une martingale relativement à la filtration $\mathcal{F}_n$.*

Exercice 2 ***(8 pts)*** *Soit X_n une marche aléatoire symétrique, i.e., $X_n = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$ où $(\xi_n)_{n \geq 1}$ est une suite de v.a. indépendantes et identiquement distribuées avec $P(\xi_n = -1) = P(\xi_n = +1) = 1/2$, et $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, ..., \xi_n)$.*
1/ *Montrer que $Y_n = (-1)^n \cos(\pi X_n)$ est une martingale relativement à la filtration $\mathcal{F}_n$.*
2/ *Soit $K \in \mathbb{N}^*$ et $T = \min\{n \geq 1 : |X_n| = K\}$. Montrer que T est un temps d'arrêt.*
3/ *Montrer que $X_n^2 - n$ est une martingale relativement à la filtration $\mathcal{F}_n$.*
4/ *Trouver $\lim_{n\to\infty} P(T > 2Kn)$ en justifiant votre résultat.*
5/ *Montrer que $P(T = \infty) = 0$.*
6/ *Montrer que $E(|X_T^2 - T|) < \infty$.*
7/ *Trouver $\lim_{n\to\infty} E\left(X_n^2 1_{\{T>n\}}\right)$. Déduire $\lim_{n\to\infty} E\left((X_n^2 - n)\, 1_{\{T>n\}}\right)$.*
8/ *Trouver $E(X_T^2 - T)$. En déduire $E(T)$.*

Exercice 3 ***(6 pts)*** *Soit $W(t)$ un mouvement brownien.*
1/ *Calculer $E\left[(W(t) - W(s))^3\right]$, pour $s < t$.*
2/ *Montrer que $W(t)^2 - t$ est une martingale relativement à la filtration naturelle $\mathcal{F}_t$ de $W(t)$.*
3/ *Montrer que $W(t)^3 - 3tW(t)$ est une martingale relativement à la filtration naturelle $\mathcal{F}_t$ de $W(t)$.*