Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Hassiba Benbouali de Chlef

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

Programmation linéaire 2 : Éléments de cours et exercices corrigés

Destiné aux étudiants deuxième années master

Filière : Mathématiques

Option : Mathématique appliquée et statistique

Module : Programmation linéaire 2

Présenté par :

Rachid Belgacem

Faculté des **S**ciences **E**xactes et de l'**I**nformatiques (FSEI).

Site Web : www.univ-chlef.dz/fsei/

Polycopié

Table des matières

Table des figures

Introduction

La Programmation linéaire est l'une des plus importantes techniques d'optimisation utilisées en recherche opérationnelle, qui cherche à modéliser, analyser et la résolution optimale (analytiquement ou numériquement) de certains problèmes d'optimisation qui consistent à minimiser ou maximiser une fonction linéaire sous des contraintes linéaires liant les variables. Elle est utilisée, en particulier, dans l'industrie et dans la planification économique pour l'allocation de ressources limitées en vue d'atteindre des objectifs fixés.

On distingue dans la programmation linéaire : la programmation en nombres réels (LP), pour laquelle les variables des équations sont dans $\mathbb{R}^+$ et la programmation en nombres entiers (ILP), pour laquelle les variables sont dans $\mathbb{Z}^+$.

Historiquement, en 1947, George Bernard Danzig a développé une nouvelle méthode de résolution de programmes linéaires, connue aujourd'hui sous le nom de méthode du simplexe [8]. Cette méthode consiste, en partant d'une solution réalisable, à améliorer la valeur de la fonction objectif en explorant les solutions voisines (c'est-à-dire en faisant évoluer la base). L'optimum est atteint lorsqu'il n'y a pas de meilleure solution voisine.

A chaque problème de programmation linéaire est associé un problème de programmation linéaire dual correspondant. Le problème dual (D) est construit à partir du coût et des contraintes du problème d'origine ou primal. Étant donnée un problème (LP), le dual peut être résolu en utilisant la méthode simplexe. Cependant, comme nous le verrons, la solution du dual peut aussi être obtenue à partir de la solution du problème primal, et vice versa.

Le présent cours est organisé en quatre chapitres.

Le premier chapitre traite des notions mathématiques de base qui doivent être maîtrisés avant de s'intéresser à la résolution à proprement parler de tout problème de programmation linéaire. Nous avons donc introduit le modèle de base de la programmation linéaire, ses propriétés et son interprétation économiques. Ainsi, nous présentons une méthode graphique de résolution de programme linéaire à deux variables x_1 et x_2. Au fur et à mesure que le nombre des contraintes s'accroît, la méthode graphique s'avère de plus en plus difficile à mettre en œuvre. Or, dans la pratique, les programmes linéaires comportent plusieurs dizaines de variables et de contraintes. Ainsi, le recours à une méthode générale devient indispensable, parmi lesquelles la méthode du simplexe. Alors, nous présentons le célèbre de cette méthode. Nous définissons aussi la notion de dualité et met en évidence les propriétés fondamentales liées à cette notion. Ensuite, le reste de ce chapitre est consacré à l'algorithme simplexe dual.

Le deuxième chapitre traite les problèmes linéaires en nombres entiers. La résolution de ces problèmes est plus compliquée qu'un problème en nombre réels. L'optimum n'est plus en général, un sommet du polyèdre et ne peut pas être calculé par l'algorithme de simplexe. En effet, on perd tout caractérisation de la solution optimale qui est, pour cette raison bien difficile à déterminer. Cependant, nous exposant d'une manière générale une classe de méthodes connue sous le nom de "Branche and Bound", (séparation et évaluation) qui permet de résoudre un grand nombre de problèmes linéaires en nombres entier. Nous verrons aussi certains modèles particulières de la programmation linaire avec des variables $(0, 1)$, qui définit quelques problèmes parmi les plus connus et les plus utiles pour les applications, à savoir le problème d'affectation linéaire (LAP) et le problème de voyageur de commerce (TSP).

Par la suit, nous allons d'écrire l'algorithme hongroise. Cet algorithme, aussi appelé algorithme de Kuhn-Munkres, est un algorithme d'optimisation combinatoire, qui résout le problème d'affectation en temps polynomial. À cet effet, dans le troisième chapitre, nous présentons cet algorithme sous plusieurs formes. La première forme est une présentation assez combinatoire utilisant des matrices (hongroie), alors que la seconde est une présentation dans le cadre de l'optimisation linéaire (schéma primal-dual). À la fin de ce chapitre, on trouve une illustration de cette méthode.

Enfin, le dernier chapitre de ce cours, comporte des exercices avec corrections afin d'assimiler les notions plus théoriques vues en cours.

CHAPITRE 1

Dualité en programmation linéaire

Sommaire

1.1 Formulation d'un problème de programmation linéaire

1.1.1 Formulation

La programmation linéaire [1] noté "(LP)" (linear programming) est un cadre mathématique générale permettant de modéliser et de résoudre certains problèmes d'optimisation (maximiser ou minimiser) une fonction linéaire dit fonction objectif sur un ensemble d'équations et/ou d'inéquations linéaires, dites contraintes. La forme la plus générale d'un problème de (LP) est la suivante :

$$(LP)\begin{cases} opt\, z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \gtreqless b_i \quad i=\overline{1,p} \qquad (2.a) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad i=\overline{p+1,m} \qquad (2.b) \\ x_j \geq 0\, j=\overline{1,n} \qquad (3), \end{cases} \tag{1.1}$$

avec

- . $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ sont les variables de décisions,
- . z représente la fonction objectif ou la fonction économique [2],
- . $b \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ sont des constantes qui représentant le second membre,
- . $c \in \mathbb{R}^{1\times n}$ sont les coefficients de x dans la fonction objectif z,
- . $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$,
- . les équations $(2.a)$ et $(2.b)$ sont les contraintes réelles et les équations (3) sont les contraintes de positivité.

Cette forme générale peut être simplifiée à des formes plus compactes, mais équivalentes, en particulier aux formes dites "canonique" et "standard". Généralement, la forme standard sera celle utilisée pour la description des algorithmes, la forme canonique sera particulièrement utile pour l'étude de la dualité (c.f section 1.5).

1. Le vocable " programmation" a été introduit durant les années 40, il peut apparaître aujourd'hui comme assez malheureux, ce terme ayant pris depuis une signification précise, et communément admise, en informatique [18].

2. En d'autres termes, z représente la fonction à optimiser.

1.1.2 Forme canonique

Pour obtenir cette forme équivalente, toutes les contraintes d'égalités (2.b) sont mises sous formes d'inégalités :

$$A_i x = b_i \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_i x \geq b_i \\ -A_i x \geq -b_i \end{array} \right\}.$$

En notation vectorielle, la forme canonique est donc :

$$\begin{cases} \max \ z = \ c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

ou

$$\begin{cases} \min \ z = \ c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0, \end{cases} \tag{1.3}$$

avec $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, le second membre et $c \in \mathbb{R}^n$.

1.1.3 Forme standard

Pour obtenir cette forme équivalente, toutes les contraintes d'inégalités (2.a) sont mises sous formes d'égalités par l'introduction de "variables d'écarts" positives ($x_i^e \geq 0$) :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_i^e = b_i \quad i = 1, ..., l$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_i^e = b_i \quad i = l, ..., p,$$

En notation vectorielle, la forme standard est donc :

$$\begin{cases} \mathit{opt} \ z = \ c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Ces variables d'écart mesurent donc l'écart positive entre les premiers et les seconds membres des contraintes (2.a). Ces variables seront toujours, comme les variables de décision, positives ou nulles.

1.2 Interprétation économique

Ici, dans cette partie de ce chapitre, nous fournissons un exemple illustratif pour introduire et expliquer l'idée de construire un modèle mathématique linéaire.

1.2.1 Énoncé du problème

Une compagnie est spécialisée dans la production de deux types de produits : A et B. Les deux produits nécessitent un certain nombre d'heures machine et un certain nombre d'heures de main d'œuvre. Le tableau suivant résume l'information nécessaire sur les deux produits. C'est-à-dire les nombres d'heures machine et d'heures main d'œuvre nécessaires à la fabrication d'une unité de chacun de ces produit. Dans toute la suite, on utilisera comme Unité Monétaire (UM), qui peut être considérée comme Euro, Dollar, Dinar, etc. Le tableau nous donne, de plus, le nombre total d'heures machines et d'heures main d'œuvre disponibles.

	$Heures/machines$	$main/d'oeuvre$	$profit$
A	$2h/unit\acute{e}$	$3h/unit\acute{e}$	$25\,UM/unit\acute{e}$
B	$2h/unit\acute{e}$	$1h/unit\acute{e}$	$15\,UM/unit\acute{e}$
$Total\ disponible$	$240h$	$140h$	

1.2.2 La construction d'un modèle linéaire

Variables de décision : Il suffit de connaître la quantité du produit A et la quantité du produit B à fabriquer. En effet, la compagnie veut décider du nombre de produit A et de nombre de produit B à produire pour maximiser le profit. Ceci nous amène à définir les deux variables de décision suivantes :

x_1=nombre de produit A à fabriquer.

x_2= nombre de produit B à fabriquer.

Les variables x_1 et x_2 sont dites variables de décision.

La fonction objectif : L'objectif de l'entreprise est de déterminer le programme de production qui maximisera son profit. Cette fonction z, qui traduit l'objectif de notre problème, s'appelle fonction objectif ou fonction économique. Et, comme nous cherchons à rendre z aussi grand que possible, nous écrivons :

$$\text{Maximiser } z \text{ où } z = 25x_1 + 15x_2,$$

ce que généralement l'on convient d'abréger comme suit :

$$max\ z = 25x_1 + 15x_2. \tag{1.5}$$

Contraintes du modèle :

S'il ne s'agissait pour l'entreprise que de maximiser z, il suffirait de laisser augmenter x_1 ou x_1 pour que z prenne une valeur aussi grande qu'elle le souhaite. Mais, Il y a bien sûr des empêchements naturels, appelés contraintes, qui freinent le rêve d'un profit infini. Prenons en considération tour à tour chacune des contraintes. La limitation des ressources contraint l'entreprise de la manière suivante :

1. Contraintes d'heure machine : Le temps d'utilisation de la machine pour fabriquer les produits A et B ne peut excéder les 240 heures disponibles :

$$\text{Nombre d'heurs d'utilisation de la machine} \leq 240.$$

Or, ce temps utilisé est la somme des heures consacrées à chacun des types de produits. Par exemple, pour le produit A, le temps nécessaire à la fabrication de la quantité x_1 se calcule ainsi :

1 heure/(unité de A) $\times x_1$ (unité de A) $= x_1$ heures.

Pour le produit B, on procède de façon analogue, donc la contrainte relative à la machine s'écrit donc :

$$2x_1 + 2x_2 \leq 240. \tag{1.6}$$

2. Contraintes main d'œuvre : En s'inspirant de la contrainte d'heure machine, alors cette contrainte peut s'écrire par :

$$3x_1 + x_2 \leq 140. \tag{1.7}$$

3. Contraintes de positivité : Elles assurent que la solution ne comporte pas des valeurs négatives (inacceptables).

$$x_1, x_2 \geq 0. \tag{1.8}$$

Le modèle complet se résume ainsi :

$$\begin{cases} \max \ z = \ 25x_1 + 15x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 240 \\ 3x_1 + x_2 \leq 140 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1.3 Quelques Rappels d'algèbre linéaire et caractérisation des sommets

Définition 1.1 *(Ensemble convexe) Un ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ est dite convexe si :*

$$\forall x, y \in S,\ \forall \lambda \in [0.1] : \lambda x + (1-\lambda) y \in S. \tag{1.9}$$

Théorème 1.1 *L'ensemble $D = \{x \in \mathbb{R}^n\ : Ax \leqslant b, x \geq 0\}$, $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n}$ est convexe .*

Définition 1.2 *(Combinaison convexe) Pour $\lambda_j \in \mathbb{R}$ et $x_j \in V$ (espace vectoriel) l'expression $\sum_{j=1}^{r} \lambda_j x_j$ est une combinaison linéaire des vecteurs $x_1, ..., x_r$.*

Si de plus $\sum_{j=1}^{r} \lambda_j = 1, \lambda_j \geqslant 0$ la combinaison linéaire est appelée combinaison convexe.

Définition 1.3 *(Point intérieur) Un point x de D est un point intérieur de D si :*

$$Ax < b, \forall i = 1, ..., p = m.$$

Définition 1.4 *(Point frontière) Un point x de D est un point frontière de D si : $\exists i = 1, ..., p : Ax = b$*

Définition 1.5 *(Sommet) On appelle sommet de D tout point x^* qui ne peut s'exprimer comme combinaison convexe de deux points de D ie : $\exists (y, z) \in D . \exists \lambda \in]0.1[: x^* = (1-\lambda) y + \lambda z \Rightarrow x^* = y = z$.*

Un sommet est un point frontière particulier.

Définition 1.6 *(Face) Les ensembles non vides de points de D vérifiant un sous-ensemble des m hyperplans : $a_i x = b_i, i = 1, ..., p$ sont appelés des faces de D, il y en un nombre fini.*

Définition 1.7 *(polyèdre) C'est l'ensemble D des points réalisable, géométriquement D est un polyèdre convexe c'est à dire une région définie comme l'intersection d'un nombre fini de demi-espace fermés et ou hyperplan :*

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i x_i \leq b_i,\ i = 1, ..., p, a_i x_i = b_i,\ i = p+1, ..., m\},$$

Les sommet de ce polyèdre sont appelés solutions de base. Un polyèdre convexe, borné et non vide, est appelé un polytope.

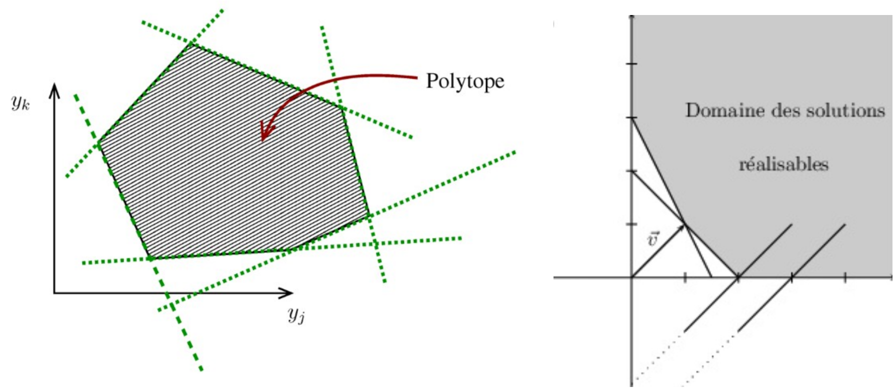


FIGURE 1.1 – Polyèdre convexe et polytope dans $\mathbb{R}^2$

Remarque 1.1 *: Un problème de (LP) est un cas particulier de minimisation d'une fonction convexe définie sur un domaine convexe ; rappelons que dans ce cas tout minimum locale est un minimum globale.*

Définition 1.8 *(Solution admissible) La solution admissible est une solution qui satisfait toutes les contraintes de problème (LP).*

Définition 1.9 *(Solution optimale) La solution optimal du problème (LP) est par définition la solution admissible qui minimise (resp. max) la fonction objectif z :*

$$x^* \in D \text{ solution optimale} \Rightarrow \forall x \in D, z(x^*) \leq z(x) \quad (resp\ z(x^*) \geq z(x)).$$

Définition 1.10 *(Valeur optimale)*
C'est la valeur $z(x^*)$ atteinte par toute solution optimale x^*.

Théorème 1.2 *(Caractérisation géométrique des solution admissible) L'ensemble D de solution admissible d'un problème (LP) est soit un ensemble vide, soit un polyèdre convexe, non vide mais non borné, soit un polytope (convexe, non vide et borné).*

Théorème 1.3 *(Caractérisation géométrique des solutions optimales)*

a) Si $D = \varnothing$, le problème n'a pas de solution optimale.

b) Si D est un polytope, alors :

-Soit la solution optimale est unique située en un sommet de D.

- Soit il existe une infinité de solution optimales qui sont les points d'une face de D, ces solution sont donc une combinaison convexe d'un nombre fini de sommets.

c) Si D est un polyèdre convexe, non vide et non borné, il est possible que le problème n'y ait pas de solution optimale a distance finie, il existe alors une solution admissible (à l'infini) tell que $supz = +\infty$.

Théorème 1.4 *(Caractérisation algébrique des sommets de D) La terminologie suivante joue un rôle fondamentale, elle s'applique exclusivement aux problèmes mis sous forme standard. Soit le problème*

$$(LP)\begin{cases} \min\ z = \ c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0, \end{cases}$$

avec $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ et $c \in \mathbb{R}^n$.

Définition 1.11 *(Base) On appelle base associée au problème (LP) tout sous matrice carrée B de A d'ordre m et inversible ie : $det(B) \neq 0$. Par une éventuelle modification du rangement des indices, on peut écrire*

$$(LP)\begin{cases} \min\ z = c_B x_B + c_N x_N \\ B x_B + N x_N = b \\ x_j \geq 0. \end{cases} \tag{1.10}$$

Oú :

. $B(m \times m)$, $N(m \times (n-m))$ et $A = (B, N)$.

. Les m composantes de x_B sont appelées variables de base. Notons "I" l'ensemble des m indices de base tel que : $x_B = \{x_i, i \in I\}$.

. Les $(n-m)$ composantes de x_N sont appelées variables hors base. Notons "J" l'ensemble des $(n-m)$ indices hors base tel que : $x_N = \{x_j, j \in J\}$. La solution du système $Ax = b$ obtenue en posant $x_N = 0$ est appelée la solution de base associée à la base B. Cette solution de base est donc : $x_B = B^{-1}b$ et $x_N = 0$.

Définition 1.12 *(Base admissible) Lorsque les variables de base sont positive $(x_B \geq 0)$, la solution de base est admissible et appartient à D. Par extension, la base B sera dite "base admissible". Dans le cas contraire, c'est-à-dire ; s'il existe une variable de base négative, la solution de base et la base sont non admissible.*

Définition 1.13 *(Base dégénéré) Lorsqu'au moins une variable de base est nulle, la solution de base est dite dégénéré. Le problème sera dit non dégénéré si toutes les solutions de base admissible sont non dégénéré.*

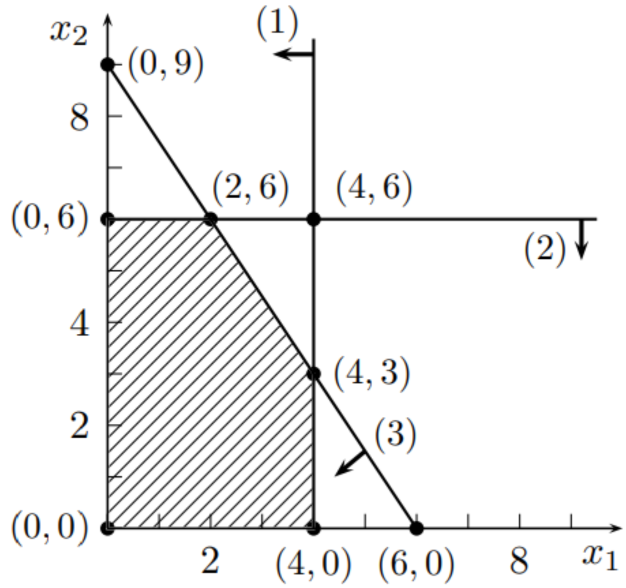


FIGURE 1.2 – Représentation graphique de l'exemple (1.1)

Propriété fondamentale

Propriété 1.1 *: Le programme linéaire étant mis sous forme standard, chaque sommet de la région réalisable (polyèdre D) correspond à une et une seule solution de base réalisable et inversement.*

Exemple 1.1 *On peut vérifier cette propriété sur le problème de maximisation suivant :*

$$\begin{cases} \max z = 300x_1 + 500x_2 \\ x_1 \leq 4 \\ 2x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

La représentation graphique de ce problème est donnée à la figure (1.2). A la ce figure, les sommets $(0,0), (0,6), (2,6), (4,3), (4,0)$ *correspondent à des solutions de base admissible tandis que les points* $(0,9), (4,6)$ *et* $(6,0)$ *correspondent à des solutions de base non admissible.*

Définition 1.14 *On appelle* ***solutions de base adjacentes*** *deux solutions de base dont les variables de base sont les mêmes sauf une qui est de base dans la première base et hors base dans la seconde.*

Dans l'exemple (1.1), les deux solutions de base suivantes sont adjacentes : $(x_1, x_2) = (0,0), (x_1, x_2) = (0,6)$ car elles ne diffèrent que par une seule variable hors base. Par contre les solutions suivantes : $(x_1, x_2) = (0,0), (x_1, x_2) = (2,6)$ ne sont pas adjacentes puisqu'elles diffèrent pas plus d'une variable hors base.

1.4 Méthodes de Résolutions

Dans cette section, nous présentons deux méthodes pour résoudre un problème linéaire : la méthode graphique et la méthode du simplexe.

1.4.1 Résolution graphique

L'objet principal de ce paragraphe est présenter une méthode de résolution d'un problème linéaire ne comportant que deux variables de décision. Cette méthode consiste à éliminer l'intersection des demi- plans représentant les inéquations des contraintes, et puis on cherche sur le bord de ce domaine les points donnant l'optimum de la fonction objectif.

Première méthode : Le principe de cette méthode est :

- Tracer les droites correspondantes aux contraintes.

- Déterminer l'ensemble de contraintes en vérifiant le sens des inégalités pour chaque contrainte.

- Tracer les droites correspondantes à la fonction objectif. Suivre les déplacements des droites précédents dans le sens de maximisation de la fonction l'objectif.

- Arrêter les déplacements juste avant que l'intersection avec l'ensemble des contraintes ne devient vide.

- La dernière intersection non vide est l'ensemble de solutions optimales.

Deuxième méthode : Le principe de cette méthode est :

- Représenter les lignes de contraintes et l'ensemble des solutions admissibles.

- Localiser toutes les solutions de base [1].

- Calculer la valeur de la fonction objectif en chacun de ces points, et sélectionné la solution optimale.

1. Les points d'intersection des droites de contraintes.

Exemple 1.2 *Soit le problème de maximisation suivant*

$$(LP)\begin{cases} \max z = 6x_1 + 5x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

La forme standard du LP est :

$$\begin{cases} \max z = 6x_1 + 5x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_5 = 2 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} max\ z = \ c^T x \\ s.c \\ Ax = b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

où

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, c = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \ et\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}.$$

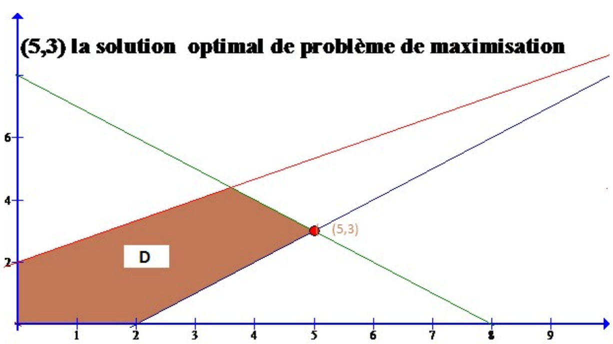


FIGURE 1.3 – Représentation graphique des solutions admissibles

Le nombre maximum de bases admissibles : $C_5^3 = \dfrac{5!}{3!2!} = 10.$
Il est aisé de vérifier que les dix sous matrices (3×3) *de* A *sont toutes régulières et forment donc des bases.*

On résout trois problèmes linéaires de ces dix problème correspondants aux matrices de bases

$I = \{indices\,de\,base\}$ $variables\,de\,base$	$Bx_B = b$: $système\,a\,résoudre$	$solution$ $de\,base$
$I = \{1,2,3\}$ $x_4 = x_5 = 0$ $intersection\,des$ $contraintes(2)et(3)$	$x_1 + x_2 + x_3 = 8$ $-2x_1 + 3x_2 = 6$ $x_1 - x_2 = 2$	$x_1 = 12, x_2 = 10, x_3 = -14$ non $admissible$
$I = \{1,2,4\}$ $x_3 = x_5 = 0$ $intersection\,des$ $contraintes(1)et(3)$	$x_1 + x_2 = 8$ $-2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6$ $x_1 - x_2 = 2$	$x_1 = 5, x_2 = 3, x_4 = 7$ $admissible$ $solution$ $optimale$
$I = \{1,3,4\}$ $x_2 = x_5 = 0$ $intersection\,des$ $contraintes(5)et(3)$	$x_1 + x_3 = 8$ $-2x_1 + x_4 = 6$ $x_1 = 2$	$x_1 = 2, x_3 = 6, x_4 = 10$ $admissible$

Donc cette méthode prend trop de temps, alors nous sommes besoin d' un algorithme efficace pour résoudre ce problème, à savoir la méthode simplexe.

1.4.2 Méthode simplexe

Toutefois, il n'est pas possible d'énumérer simplement toutes les solutions de bases admissibles. Le nombre maximum de bases du problème sous formes standard (en supposant $r(A) = m \leq n$)) est

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

(cette borne supérieure est atteinte si toutes les sous-matrices $(m \times m)$ de A sont régulières), et donc, pour un problème de grande dimension, une telle énumération est exclue car le temps de calcul deviendrait prohibitif.

Une procédure "intelligente" est donc nécessaire : L'algorithme simplexe, décrit dans cet section, utilise une procédure itérative qui converge vers la (les) solution(s) de base(s) admissible(s) fournissant l'optimum de la fonction économique ou, à défaut, mettra en évidence que l'ensemble D est vide.

La méthode du simplexe développée en 1947 par G.DANTZIG [9] est la plus souple et la plus universelle, elle s'applique à la résolution de tout programme linéaire. Cette méthode est exacte et itérative, étant donné qu'une solution d'un programme linéaire se trouve toujours sur un sommet du polyèdre des contraintes, le simplexe consiste à se déplacer d'un sommet en sommet de D, le long des arâtes du polyèdre, jusqu'à trouver le point associé à la solution optimale. Nous allons maintenant voir commet effectuer les procédures de l'algorithme du simplexe. Il y a deux phase dans cette méthode :

Phase I :

Déterminer une première solution de basse admissible, si cette procédure échoue, on a une solution de base mais pas admissible. [On ne peut pas démarrer le simplexe phase II]. Soit le problème de maximisation écrit sous la forme standard (1.3)
On considère le problème auxiliaire :

$$(PA)\begin{cases} \min \; g = \omega_1 + \omega_2 + ... + \omega_m = \sum_{i=1}^{m} \omega_i \\ Ax + I\omega = b \\ x \geq 0.\ \omega \geq 0.\ b \geq 0 \end{cases} \tag{1.11}$$

On remarque que (0,b) une solution de base admissible, donc la méthode de simplexe phase II peut démarrer.

Remarque 1.2 *: la fonction g est Exprimer uniquement en fonction de variable hors base.*

Phase II :

Calculer, à partir d'une solution de basse admissible, une autre solution de basse admissible donnant une valeur meilleure de la fonction économique.
Enfin, il existe une procédure d'arrêt de l'algorithme : deux tests d'arrêt mettront en évidence, respectivement que :

- Une solution optimale est déterminée.
- Il n'existe pas de solution optimale finie : D est non borné et z peut y tendent vers l'infini.

Tableau simplexe :

A chaque itération on a :

x_B	x_N	sm	vb
I	$\tilde{N}$	$\tilde{b}$	x_B
0	d_N^T	$-z_B$	$-z$

avec $c = (c_B, c_N); x = (x_B, x_N)^t; A = (B, N)$ et :

$$\tilde{N} = B^{-1}N$$

$$\tilde{b} = B^{-1}b$$

$$x_B = \tilde{b} - \tilde{N}x_N$$

$$d_N^T = c_N^T - c_B^T\tilde{N}$$

$$z_B = c_B^T\tilde{b}$$

$$z = z_B + d_N^T x_N.$$

tel que

$$x_B = (x_i, i \in I), m\, variable\, de\, base$$

$$x_N = (x_j, j \in J), (n-m)\, variable\, hors\, base$$

Algorithme de simplexe

Soit le problème de maximisation (LP) donné par (1.1)

1- Écrire le problème sous forme standard.

2-Déterminer une base initiale B correspondante à une solution de base admissible.

-S'il n'existe pas d'évident, appliquer la "phase I".

Metre le problème sous la forme équivalente et écrire le tableau simplexe.

3- Tester les d_j $j \in \mathbb{N}$.

a/ Si $d_j \leqslant 0,\ \forall j \in \mathbb{N}$, la solution est optimale [a]. STOP

b/ $\exists j \in \mathbb{N}$ $d_j > 0$ et $\widehat{a_{ij}} \leq 0$. $\forall i \in B$, il n' y a pas de solution optimale fini et la valeur de la fonction objectif n'est pas borné : $Z^* = +\infty$. STOP

c/ Autrement, effectue un changement de base .

4- Changement de base.

a/ Déterminer l'indice "l" de la variable qui entre dans la base : $max\,\{d_j > 0\}$

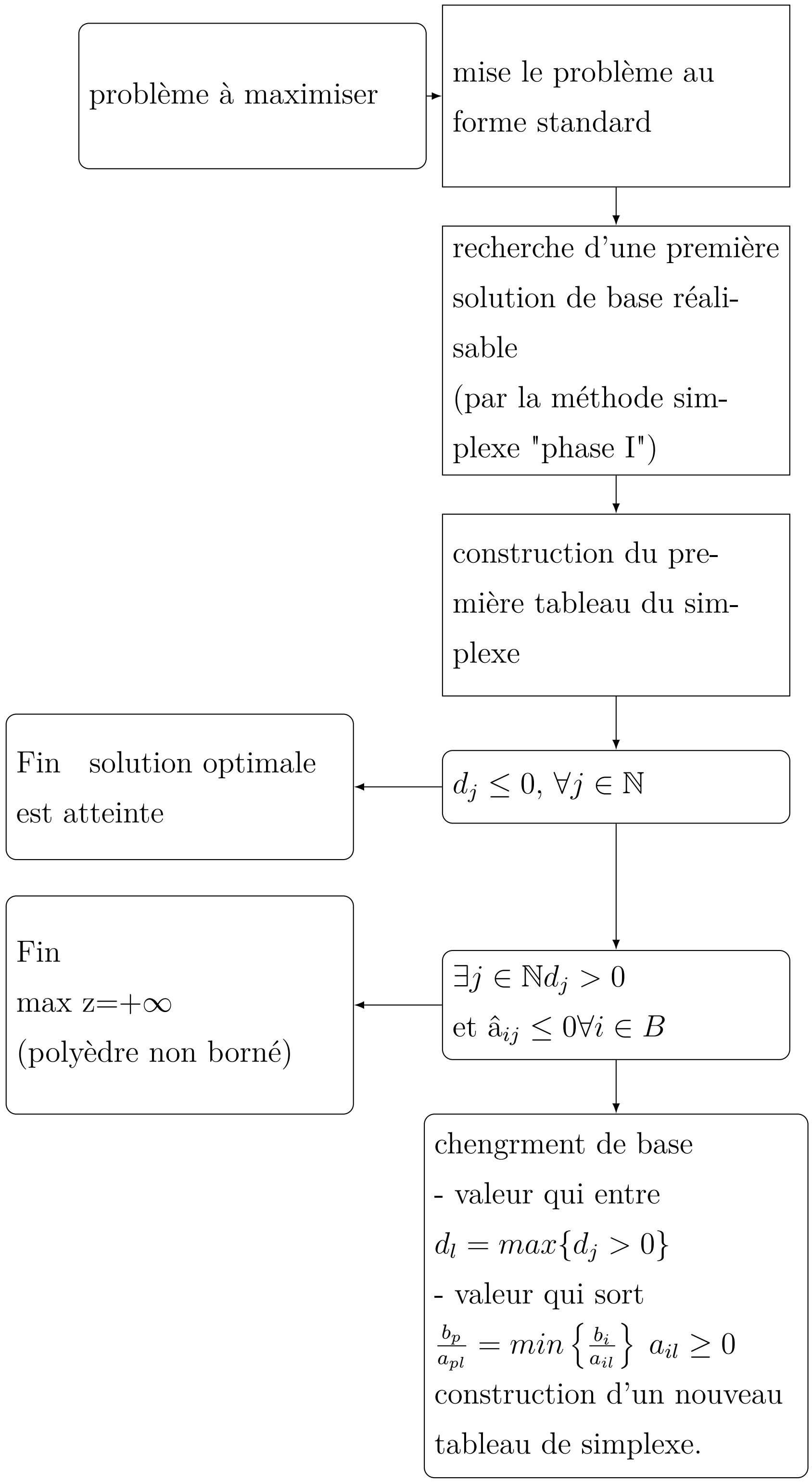
b/ Déterminer l'indice "p" de la variable qui sort de la base :

$$\frac{b_p}{a_{pl}} = min\left\{\frac{b_i}{a_{il}}\ a_{il} \geq 0\right\}$$

c/ Calculer le nouvelle tableau simplexe on appliquant les formule de base "pivotage ".

[a]. Pour un problème de minimisation le critère d'optimalité est ; $d_N^T \geqslant 0$.

Organigramme de l'algorithme de simplexe



Exemple 1.3 *: Soit le problème de maximisation suivant :*

$$(LP)\begin{cases} \max\ z = \ 6x_1 + 5x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

la forme standard :

$$(FS)\begin{cases} \max\ z = \ 6x_1 + 5x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_5 = 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0, \end{cases}$$

On résoudre le problème par l'algorithme simplexe :

$\downarrow x_1$	x_2	x_3	x_4	x_5	*sm*	*vb*
1	1	1	0	0	8	x_3
-2	3	0	1	0	6	x_4
$\boxed{1}$	-1	0	0	1	2	$x_5 \rightarrow$
6	5	0	0	0	0	-z

max $\{6, 5\} = 6$, x_1 *qui entre dans la base.*
min $\left\{\frac{8}{1}, \frac{2}{1}\right\} = 2$, x_5 *qui sorte de la base.*

0	$\downarrow \boxed{2}$	1	0	-1	6	$x_3 \rightarrow$
0	1	0	1	2	10	x_4
1	-1	0	0	1	2	x_1
0	11	0	0	-6	-12	-z

max $\{11, -6\} = 11$, x_2 *qui entre dans la base.*
min $\left\{\frac{6}{2}, \frac{10}{1}\right\} = 3$, x_3 *qui sorte de la base.*

0	1	1/2	0	-1/2	3	x_2
0	0	-1/2	1	5/2	7	x_4
1	0	1/2	0	1/2	5	x_1
0	0	-11/2	0	-1/2	-45	-z

La solution optimale est $x_1^* = 5, x_2^* = 3$ *et la valeur optimale est* $z^* = 45$.

1.5 Dualité d'un problème linéaire

1.5.1 Définition du problème dual

La notion de dualité est un concept fondamental en programmation linéaire. A un programme linéaire donné que nous appelons primal, l'opération de dualité associe un autre programme linéaire dit son dual, qui ne sera défini qu'à l'aide des seules données du primal. Étant donnée un problème de maximisation (LP) sous la forme canonique.

$$(LP)\begin{cases} z = \max \quad c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0, \end{cases} \tag{1.12}$$

où $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $c \in \mathbb{R}^m$ et $b \in \mathbb{R}^m$.
Soit $S_{(LP)} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$ l'ensemble de solutions admissibles pour (LP). On définit le problème dual (D) associe au problème primal (LP) comme suit :

$$(D)\begin{cases} w^* = \min \quad \lambda^T b \\ A^T \lambda \geq c \\ \lambda \geq 0. \end{cases} \tag{1.13}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}^m$. Soit $S_{(D)} = \left\{\lambda \in \mathbb{R}^n : A^T \lambda \geq c, \lambda \geq 0\right\}$ l'ensemble des solutions admissibles pour (D).

1.5.2 Règles de dualisation

Les variables x sont appelées variables primales et les variables λ sont appelées variables duales. Cette définition est caractérisée par les règles suivantes :

Problème primal	Problème dual
maximisation	minimisation
minimisation	maximisation
n variables	n contraintes
m contraintes	m variables
variable $x_j \geq 0$	contraintes j est une inégalité $(\geq)$
variable $x_j \leq 0$	contraintes j est une inégalité $(\leq)$
variable x_j sans signe	contraintes j est une égalité $(=)$
contrainte i est une inégalité $(\leq)$	variable $\lambda_i \geq 0$
contrainte i est une inégalité $(\geq)$	variable $\lambda_i \leq 0$
contrainte i est une égalité $(=)$	variable λ_i sans signe
coefficients de fonction objectif	seconde membre
seconde membre	coefficients de fonction objectif

Dans la suite, nous allons étudier certaines résultats concernant les relations entre le problème primal et son dual. Considérons un problème linéaire de maximisation (le primal) sous sa forme canonique (1.12) et son dual (1.13).

1.5.3 Dualité faible

Propriété 1.2 *: Soient x et λ sont des solutions admissibles pour les problèmes (LP) et (D) respectivement. Alors on a :*

$$c^T x \leq \lambda^T b \ \underline{i.e}\ z(x) \leq w(\lambda),\ \forall (x, \lambda) \in S_{(LP)} \times S_{(D)}$$

Preuve En effet,

$$\begin{aligned} c^T x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \lambda_i \right) x_j \\ \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \lambda_i \leq \sum_{i=1}^{m} b_i \lambda_i = \lambda^T b. \end{aligned}$$

■

Remarque 1.3

$$\forall \lambda \in S_{(D)} \qquad max_{x \in S(P)} z(x) \leq w(\lambda)$$

$$\Rightarrow max_{x \in s_{(LP)}} z(x) \leq min_{\lambda \in s_{(D)}} w(\lambda)$$
$$\Rightarrow z^* \leq w^*.$$

Corollaire 1.1 *Une solution réalisable du dual (resp. primal) fournit une borne supérieur (resp. inférieur) de z^* (resp. w^*) :*

$$z^* \leq \lambda^T b \qquad \forall \lambda \in S_{(D)}$$
$$w^* \geq c^T x \qquad \forall x \in S_{(LP)}.$$

Corollaire 1.2 *Si $\bar{x}$ est une solution réalisable du problème primal et $\bar{\lambda}$ une solution réalisable du problème dual tel que $c^T \bar{x} = \bar{\lambda} b$, alors $\bar{x}$ est optimale pour le primal et $\bar{\lambda}$ est optimale pour le dual.*

Preuve En effet, supposons au contraire que $\bar{x}$ n'est pas une solution optimale du primal. Il existe donc une solution $\hat{x}$ telle que

$$c^T \bar{x} < c^T \hat{x}.$$

On a alors

$$\bar{\lambda} b < c^T \hat{x},$$

ce qui est en contradiction avec la propriété (1.2) de la dualité faible. La solution $\bar{x}$ est donc optimale. Pour prouver $\bar{\lambda}$ est optimale pour le dual, nous suivons une méthode similaire pour la preuve ci-dessus. ■

Le corollaire (1.2) indique que l'égalité des fonctions économiques du primal et du dual est une condition suffisante d'optimalité pour des solutions réalisables des deux problèmes.

Corollaire 1.3 *Si un problème possède une valeur optimale infinie, son dual est impossible.*

Preuve En effet, si $z^* = +\infty$, d'après le corollaire (1.2), toute solution admissible $\bar{\lambda}$ du dual devrait vérifier $+\infty \leq \bar{\lambda} b$. Ce qui est impossible. Même démarche si $w^* = -\infty$. ■

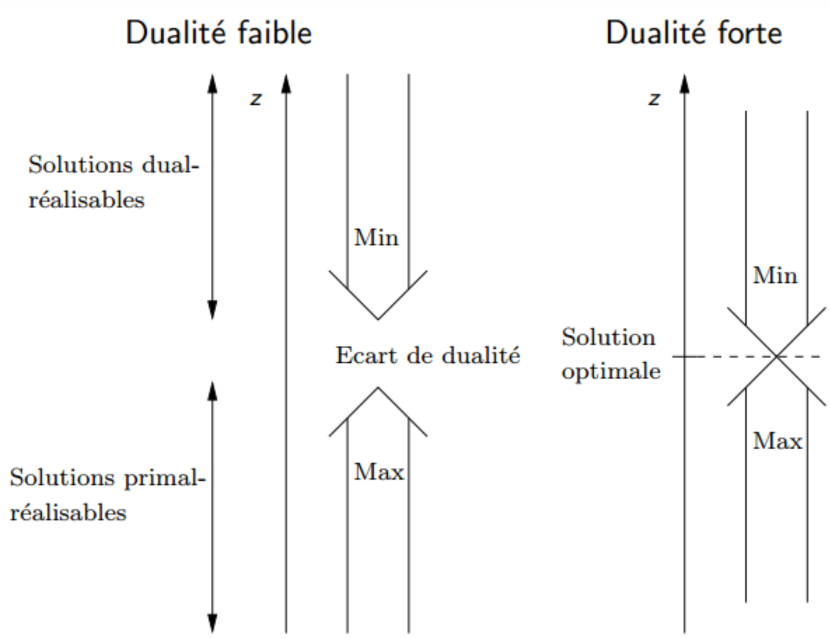


FIGURE 1.4 – Ecart de dualité

1.5.4 Dualité forte

Propriété 1.3 *Si le problème primal (resp. dual) possède une solution optimal finie. Alors il en est de même pour le problème dual (resp. primal) et de plus* $z^* = w^*$ [1].

Preuve

En effet, s'il existe une solution de base optimale finie $\bar{x}$ du problème primal mis sous forme standard, cette solution est de la forme

$$\bar{x}_B = B^{-1}b \geq 0, \bar{x}_N = 0,$$

avec $\bar{z}_B = c_B\bar{x}_B$ et $c_B\bar{x}_B^{-1}A - c \leq 0$ (critère d'optimalité). Posons $\lambda_B = c_B B^{-1}$. Cette solution duale est réalisable puisque $\lambda_B A \leq c$ et de plus vérifie $\lambda_B b = \bar{z}$. Cette solution est donc une solution optimale finie du problème dual. ■

Corollaire 1.4 *L'égalité des fonctions objectifs du primal et du dual est donc une condition nécessaire et suffisante d'optimalité pour des solutions réalisables des deux problèmes.*

1. Si le primal a une solution optimale $x^* \in \mathbb{R}^n$, alors le dual a une solution optimale $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ telle que $c^T x^* = \lambda^* b$.

Utilité de la dualité forte

Si on a une paire (x^*, y^*) de solutions du primal et du dual, on peut facilement vérifier

— La réalisabilité de x^* pour le problème primal.

— La réalisabilité de y^* pour le problème dual.

— l'égalité des deux objectifs.

On a alors un certificat d'optimalité pour la paire (x^*, y^*).

Remarque 1.4 *Par le biais de la preuve du propriété (1.3), on voit que le vecteur* $\lambda_B = c_B B^{-1}$ *des multiplicateurs du simplexe, disponible lorsqu'on résout le primal, est solution optimale du dual (lorsque le primal est à l'optimum).*

Exemple 1.4 *Appliquons le théorème de dualité forte au problème linéaire de minimisation suivant :*

$$\begin{cases} \min -x_1 - 4x_2 - 3x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases} \tag{1.14}$$

Après avoir introduit les variables d'écart, l'application de l'algorithme du simplexe donne successivement :

$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	**s.m**	**V.b**
2	2	1	1	0	4	$\mathbf{x_4}$
1	2	2	0	1	6	$\mathbf{x_5}$
$\mathbf{-1}$	$\mathbf{-4}$	$\mathbf{-3}$	**0**	**0**	**0**	$\mathbf{-z}$
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	2	$\mathbf{x_2}$
-1	0	1	-1	1	2	$\mathbf{x_5}$
3	0	-1	2	0	-8	$-z$
$\frac{3}{2}$	1	0	1	$-\frac{1}{2}$	1	$\mathbf{x_2}$
-1	0	1	-1	1	2	$\mathbf{x_3}$
2	0	0	1	1	-10	$-z$

Comme $d_N^T = (2, 0, 0, 1, 1)$, *la solution optimale est :* $x_1 = 0, x_2 = 1$ *et* $x_3 = 2$, *avec* $z^\star = -10$.

Le problème dual de ce problème linéaire (1.14) s'écrit :

$$\begin{cases} \max\ w \quad 4y_1 + 6y_2 \\ 2y_1 + y_2 \leq -1 \\ 2y_1 + 2y_2 \leq -4 \\ y_1 + 2y_2 \leq -3 \\ y_1, y_2 \leq 0. \end{cases} \tag{1.15}$$

Les valeurs optimales pour (y_1, y_2) se déduisent facilement à partir du tableau final ci-dessus :

$$\lambda^\star = c_B^T B^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.5.5 Théorème fondamentale de la dualité

Théorème 1.5 *[7] Parmi les neuf situations potentielles pour une paire de problèmes liés par la dualité, il n'existe que quatre situations possibles.*

1. *Les deux problèmes ont des solutions optimales finies.*
2. *Le problème primal a une valeur optimale infinie, et son dual est impossible.*
3. *Le problème primal est impossible, et son dual a une valeur optimale infinie.*
4. *Les deux problèmes sont impossibles.*

Le tableau suivant récapitule la situation :

Primal/ Dual	Solution optimale finie	Valeur optimale infinie	Problème impossible
Solution optimale finie	1	Non	Non
Valeur optimale infinie	Non	Non	2
Problème impossible	Non	3	4

D'après ce qui précède, on obtient le résultat suivant. Dans un couple de problèmes liés par la dualité :

— soit les deux problèmes ont des solutions optimales finies ;

— soit un problème est impossible et l'autre a une valeur optimale infinie ;

— soit les deux problèmes sont impossibles.

Toutes les autres situations sont irréalisables.

La dualité présente de nouvelles relations entre le problème primal et le problème dual. Notons en particulier, que le problème dual peut être utilisé pour donner des bornes pour la valeur optimale du problème primal (et vice versa).

Exemple 1.5 *Les deux problèmes ont des solutions optimales finies*

$$(P_1)\begin{cases} \min \ z = 2x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 \geq -1 \\ -x_1 + x_2 \geq -1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}, \ (D_1)\begin{cases} \max \ w = -u_1 - u_2 \\ u_1 - u_2 \leq 2 \\ -u_1 + u_2 \leq 2 \\ u_1, u_2 \geq 0 \end{cases}$$

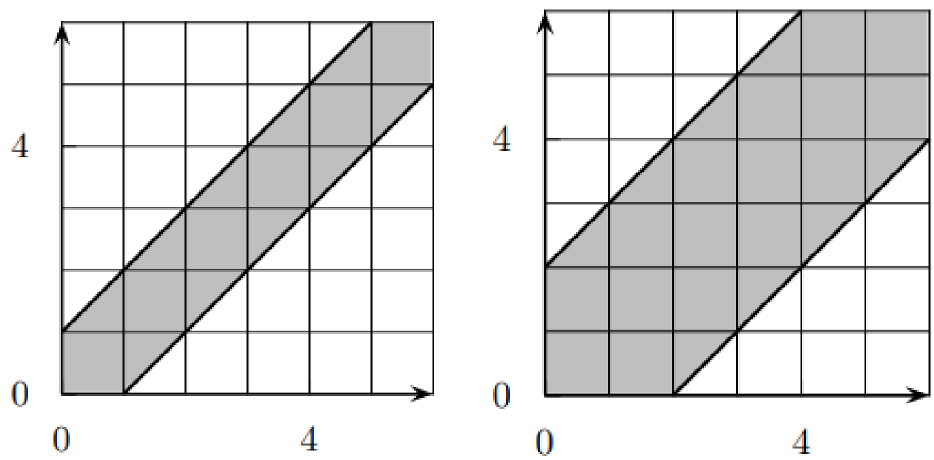


FIGURE 1.5 – le premier cas du théorème fondamentale de la dualité

Exemple 1.6 *Un problème est impossible et l'autre a une valeur optimale infinie*

$$(P_2)\begin{cases} \max \ z = 2x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 - x_2 \geq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}, \ (D_2)\begin{cases} \min \ w = u_1 + u_2 \\ -u_1 + u_2 \leq 2 \\ u_1 - u_2 \leq 2 \\ u_1, u_2 \geq 0 \end{cases}$$

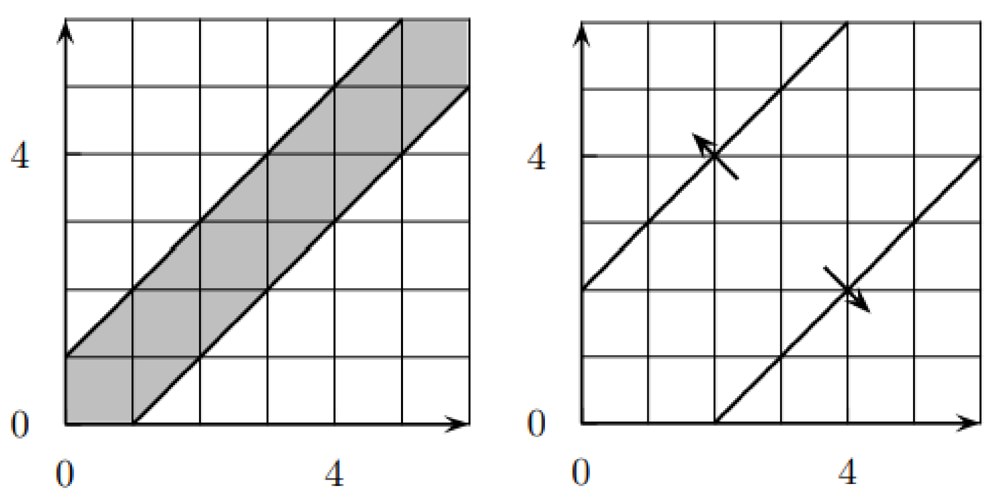
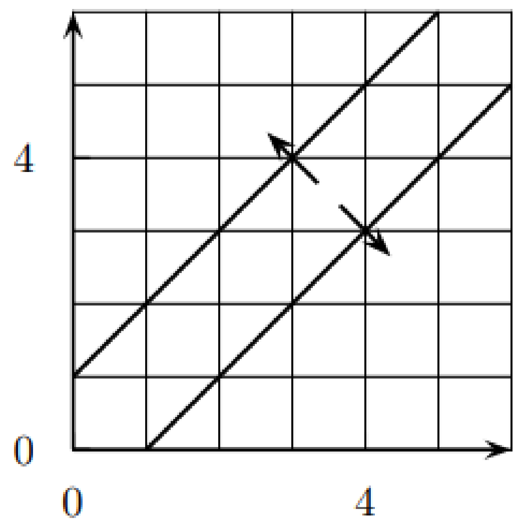


FIGURE 1.6 – le deuxième cas du théorème fondamentale de la dualité

Exemple 1.7 *Les deux problèmes sont impossibles*

$$(P_3)\begin{cases} \max\ z = & 2x_1 + 2x_2 \\ & x_1 - x_2 \geq -1 \\ & -x_1 + x_2 \geq -1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases},\ (D_3)\begin{cases} \min\ w = & -u_1 - u_2 \\ & u_1 - u_2 \leq 2 \\ & -u_1 + u_2 \leq 2 \\ & u_1, u_2 \geq 0 \end{cases}$$



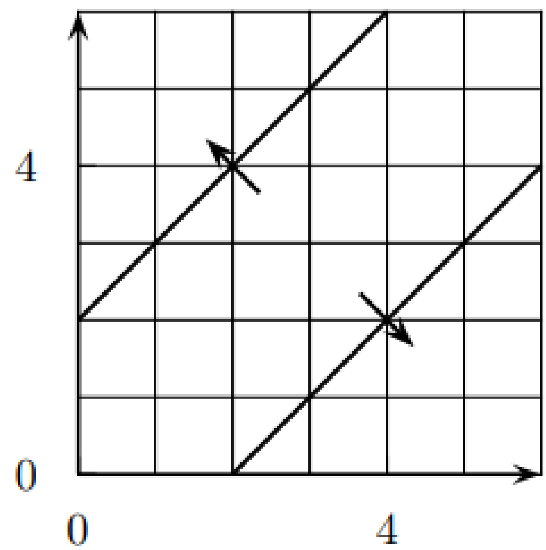


FIGURE 1.7 – le quatrième cas du théorème fondamentale de la dualité

1.5.6 Théorème des écarts complémentaires

Le théorème de dualité peut s'énoncer sous d'autres formes équivalentes à la précédente, et aidant à comprendre la structure des couples de programmes duaux optimaux. Le théorème des écarts complémentaires est donc une autre présentation de la condition nécessaire et suffisante d'optimalité du corollaire (1.4), et s'en déduit facilement.

Théorème 1.6 *Soient* $(x^\star, \lambda^\star) \in S_{(LP)} \times S_{(D)}$, *les deux conditions suivantes sont nécessaires et suffisantes pour* $x^\star$ *et* $\lambda^\star$ *soient des solutions optimales pour* (LP) *et* (D) *respectivement*

1. $x_j^\star \left(\sum_{i=1}^m a_{ij}\lambda_i^\star - c_j\right) = 0; \forall j = \overline{1,n}$
2. $\lambda_i^\star \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^\star\right) = 0; \forall i = \overline{1,m}.$

Ou de manière équivalente, le théorème des écarts complémentaires peut alors s'énoncer : Soient $x^\star$ et $\lambda^\star$ deux solutions admissibles respectivement du primal et du dual. Une **CNS** pour que $x^\star$ et $\lambda^\star$ soient solutions optimales, est qu'elles vérifient les relations :

1. $\left(A^T\lambda^\star - c\right) x^\star = 0,$
2. $\lambda^\star \left(b - Ax^\star\right) = 0.$

Preuve Considérons le primal (1.12) sous sa forme canonique et son dual (1.12) :

$$\textbf{(primal)} \begin{cases} z = \max \quad c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0, \end{cases}$$

$$\textbf{(daul)} \begin{cases} w^* = \min \quad \lambda^T b \\ A^T\lambda \geq c \\ \lambda \geq 0. \end{cases}$$

Étant donné que par hypothèse,

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(A^T\lambda^\star - c\right) x^\star = \alpha \geq 0, \\ \lambda^\star \left(b - Ax^\star\right) = \beta \geq 0. \end{array} \right\} \Rightarrow c^T x^\star - \left(\lambda^\star\right)^T b = \alpha + \beta \geq 0 \tag{1.16}$$

Une CNS d'optimalité équivalente à $c^T x^\star = \left(\lambda^\star\right)^T b$ est donc $\alpha = \beta = 0$. ∎

Remarque 1.5 *A l'optimum, dans tout couple de contraintes duales, il y a au moins une contrainte serrée.*

Exemple 1.8 *Appliquons le théorème des écarts complémentaires au problème linéaire suivant :*

$$(\begin{cases} \max 15x_1 + 25x_2 \\ x_1 + 3x_2 \leq 96 \\ x_1 + x_2 \leq 40 \\ 7x_1 + 4x_2 \leq 238 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \tag{1.17}$$

Le dual de ce problème linéaire (1.17) est le suivant :

$$\begin{cases} \min \;\; w = & 96u_1 + 40u_2 + 228u_3 \\ & u_1 + u_2 + 7u_3 \geq 15 \\ & 3u_1 + u_2 + 4u_3 \geq 25 \\ & u_1, u_2, u_3 \geq 0. \end{cases} \tag{1.18}$$

Soit une solution primale : $x_1 = 0, x_2 = 32$. *Cette solution est réalisable, car*

- *Première contrainte :* $96 = 96$

- Deuxième contrainte : $32 < 40$

- Troisième contrainte : $128 < 238$.

Les contraintes associées à u_2 *et* u_3 *étant inégalités strictes, d'après le théorème des écarts complémentaires, on a :*

$$u_2 = u_3 = 0.$$

- Le variable primal $x_2 = 32$ *est strictement positive, alors la deuxième contrainte associée du dual est saturée . Alors :*

$$3u_1 = 25 \Longrightarrow u_1 = \frac{25}{3}.$$

Donc la solution duale associée à la solution primale donnée est :

$$u_1 = \frac{25}{3}, u_2 = u_3 = 0.$$

Cette solution ne admissible pour le problème dual, car elle ne satisfait pas la première contrainte duale, on en déduit que la solution primale précédente n'est donc pas optimale .

Considérons maintenant la solution primale : $x_1 = 12, x_2 = 28$. *Cette solution est admissible, car*

- Première contrainte : $96 = 96$ *(saturée).*

- Deuxième contrainte : $40 = 40$ *(saturée).*

- Troisième contrainte : $196 < 238$ *(n'est pas saturée).*

Donc, d'après le théorème des écarts complémentaires :

$u_3 = 0$, *puisque la contrainte associée à* u_3 *est inégalités strictes.*

- Les variables primales x_1 *et* x_2 *sont strictement positive, alors les contraintes associées du dual est saturée. Alors, on obtient donc le système suivant :*

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 &= 15 \\ 3u_1 + u_2 &= 25 \\ u_3 &= 0. \end{aligned}$$

On fait la différence des 2 *égalités, on trouve la solution duale associée à la solution primale :* $u_1 = 5, u_2 = 10$ *et* $u_3 = 0$. *Cette solution est admissible pour le problème duale, on en déduit que la solution proposée est donc pas optimale.*

1.5.7 Méthode du simplexe dual

La méthode du simplexe dual (C.E. Lemke 1954 [12], E.M.L. Beale 1954 [3]) consiste à appliquer la méthode du simplexe au problème dual en travaillant avec des solutions de base qui ne sont pas nécessairement positives (donc pas nécessairement admissibles). Avant de commencer à expliquer cette méthode, dans la section suivante, nous verrons l'interprétation avec la forme réduite d'un problème primal à chaque itération de la méthode du simplexe.

La forme réduite

On considère le problème de programmation linéaire (P) écrit sous forme standard suivant :

$$(P)\begin{cases} \max\left[z\left(x\right)=c^{T}x\right] \\ Ax=b \\ x\geq 0, \end{cases} \tag{1.19}$$

$$A \text{ matrice } m\times n\ ,\ \ x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} b \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},\quad c=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$B=\{i_1,i_2,...,i_m\}\ ,\ N=\{1,2,...,n\}-B$

$A=[A_B\ A_N],\ A_B\in M_{m,m}\ inversible,\ \ A_N\in M_{m,n-m}$

$x=\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix},c=\begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} Ax &= b \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} A_B & A_N \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}=b \\ &\Longleftrightarrow A_Bx_B+A_Nx_N=b \\ &\Longleftrightarrow x_B+\underbrace{A_B^{-1}A_N}_{\widetilde{A}_N}x_N=\underbrace{A_B^{-1}b}_{\widetilde{b}}, \qquad \widetilde{A}_N=A_B^{-1}A_N,\ \widetilde{b}=A_B^{-1}b \\ &\Longleftrightarrow x_B+\widetilde{A}_Nx_N=\widetilde{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= c^{\intercal}x \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} c_B & c_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} \\ &\Longleftrightarrow z = c_B^{\intercal}x_B + c_N^{\intercal}x_N \\ &\Longleftrightarrow z = c_B^{\intercal}\left(\widetilde{b} - \widetilde{A}_N x_N\right) + c_N^{\intercal}x_N \\ &\Longleftrightarrow z = c_B^{\intercal}\widetilde{b} + \underbrace{\left(c_N^{\intercal} - c_B^{\intercal}\widetilde{A}_N\right)}_{d_N^{\intercal}} x_N \\ &\Longleftrightarrow z = z_B + d_N^{\intercal}x_N \end{aligned}$$

Donc,

$$(P) \Longleftrightarrow \begin{cases} \max\left[z(x) = z_B + d_N^{\intercal}x_N\right] \\ x_B + \widetilde{A}_N x_N = \widetilde{b} \end{cases} \longleftarrow \text{La forme réduite}$$

à chaque itération on a

x_B	x_N	$S.m$	$V.b$
I_m	$\widetilde{A}_N$	$\widetilde{b}$	x_B
0	$d_N^{\intercal}$	$-z_B$	$-z$

Le problème dual (D) associe est le suivant :

$$(D) \begin{cases} \min\left[w(\lambda) = \lambda^T b\right] \\ A^T\lambda \geq c \\ \lambda \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \tag{1.20}$$

ou bien encore sous forme standard :

$$\begin{cases} \min\left[w(\lambda, \xi) = \lambda^T b\right] \\ A^T\lambda - \xi = c \\ \lambda \in \mathbb{R}^m \\ \xi \geq 0 \end{cases} \tag{1.21}$$

Critère d'optimalité

Théorème 1.7 *Si $d_N^{\top} \leq 0$, alors la solution de base associée $x = (x_B, x_N)$ est optimale.*

Preuve $\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ admissible, et soit, $x^* = (x_B^*, 0) = (\widetilde{b}, 0)$.
Montrons que $z(x^*) \geq z(x), \forall x$ admissible.

$\forall i, x_i \geq 0$, $\forall x, z(x) = z_B + \underbrace{d_N^\top x_N} \leq z_B = z(x^*)$, puisque $d_N^\top x_N \leq 0$ $z_B = x^*$, d'où x^* solution optimale. ■

Remarque 1.6 *1-Pour un problème de minimisation, le critère d'optimalité* $d_N^\top \geq 0$.

2- si $d_N^\top \nleq 0$ *on va soit procéder à une itération ou remarquer le polyèdre et non borné et* $\sup z(x) = +\infty$

Simplexe dual

A chaque itération de la méthode du simplexe dual, les variables primales entrante et sortante de (1.19) sont déterminées en examinant le problème dual (1.21). Cette méthode s'applique en ayant déjà déterminer une solution de base admissible pour le problème dual.

Pour commencer, on supposera d'abord qu'on dispose d'une solution de base admissible pour le problème dual. On verra ensuite qu'on peut relâcher cette hypothèse de départ et obtenir ainsi une méthode permettant de s'affranchir de la phase d'initialisation quand celle-ci est nécessaire. L'algorithme du simplexe dual est présenté ici avec la méthode des couts réduites.

Pour chaque itération de la méthode simplex appliquée à (1.19), on a :

$$x_B = \tilde{b} - \tilde{A}x_N,\ z = z_B - d_N^T x_N, \tag{1.22}$$

avec $\tilde{b} = A_B^{-1}b, \tilde{A} = A_B^{-1}A_N$ et d_N^T représente les coûts réduits. On peut interpréter (1.19) comme suit :

$$\begin{cases} \max\limits_{x=(x_B,x_N)} \left[z(x) = z_B + d_N^\intercal x_N\right] \\ \begin{pmatrix} I_m | & \tilde{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \tilde{b} \\ x_B, x_N \geq 0. \end{cases} \tag{1.23}$$

Si x est optimal, alors

$$d_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N \leq 0 \Rightarrow c_B^T B^{-1} N \geq c_N^T. \tag{1.24}$$

Avec $\lambda^T = c_B^T B^{-1}$ (solution dual associe à une base B), de plus :

$$\lambda^T b = c_B^T B^{-1} b = c_B^T x_B = c^T x. \tag{1.25}$$

L'idée du simplexe dual est de déterminer une base tel que λ est dual admissible. Itérations après itérations l'algorithme construit des bases vérifiant $d_N^T \leq 0$, qui devient vérifie finalement $B^{-1}b \geq 0$. Les calcules sont faire sur le primal mais en raisonnant sur le dual, d'après la formule (1.9) les valeurs optimales des deux programmes sont égaux.

Règle pour un problème de maximisation :

Choix le variable x_l qui sort.

$l : \tilde{b}_l = \min\{\tilde{b}_i\}$.

Choix le variable x_p qui entre.

$p : \frac{\tilde{d}_p}{a_{pj}} = \min\{\frac{d_j}{\tilde{a}_{lj}} / \tilde{a}_{lj} < 0\}$.

Règle pour un problème de minimisation :

Choix le variable x_l qui sort.

$l : \tilde{b}_l = \min\{\tilde{b}_i\}$.

Choix le variable x_p qui entre.

$p : \frac{\tilde{d}_p}{a_{pj}} = \max\{\frac{d_j}{\tilde{a}_{lj}} : \tilde{a}_{lj} < 0\}$.

Cas d'arrêt du simplexe dual

Dans le simplexe dual, on distingue les différentes situations suivantes :

1. Il n'existe pas d'indice $i \in B$ vérifiant $\tilde{b}_i < 0$:

   Dans ce cas, on a $\tilde{b}_i \geq 0, \forall i \in B$. La solution de base primale du (1.22) est alors admissible. On distingue deux cas :

   (a) Si $d_N^T \leq 0$, alors **la solution de base primale est optimale** (c'est la condition d'optimalité). Elle vaut

   $$x_B^\star = \tilde{b},\ x_N^\star = 0.$$

   (b) S'il existe $p \in N$ tel que $d_p > 0$, alors $\lambda_p < 0$ et comme $\tilde{b} \geq 0$ on ne peut plus diminuer w. Le problème dual n'a pas de solution admissible. Donc dans ce cas, **le problème primal admet un optimum infini**.

2. Il n'existe pas d'indice $p \in N$ vérifiant

   $$p : \frac{\tilde{d}_p}{a_{pj}} = \min\{\frac{d_j}{\tilde{a}_{lj}} / \tilde{a}_{lj} < 0\}.$$

   Dans ce cas, on a $\tilde{a}_{ip} \geq 0, \forall p \in N$ où l'indice $i \in B$ est tel que$\tilde{b}_i < 0$. A partir de la relation

   $$x_i = \tilde{b}_i - \sum_{p \in N} \tilde{a}_{ip} x_p,$$

   on en déduit que $x_i < 0$ quels que soient les $x_p \geq 0$. Par conséquent, **le problème primal n'a pas de solution admissible**.

Exemple 1.9 *: Soit le problème (LP) suivant :*

$$(LP)\begin{cases}\max -x_1 - 2x_2\\ 2x_1 + x_2 \le 6\\ -x_1 - x_2 \le -4\\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\end{cases}$$

La forme standard :

$$(FS)\begin{cases}\max -x_1 - 2x_2\\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6\\ -x_1 - x_2 + x_4 = -4\\ x_i \ge 0, i = \overline{1,4}\end{cases}$$

$\downarrow x_1$	x_2	x_3	x_4	$s.m$	$v.b$
2	1	1	0	6	x_3
$\square$-1	-1	0	1	-4	$x_4 \longrightarrow$
-1	-2	0	0	0	-z

$min\,\{6,-4\} = -4; x_4$ *qui sort de la base.*
$min\left\{\frac{-1}{-1}, \frac{-2}{-1}\right\} = 1$, x_1 *qui entre dans la base.*

x_1	$\downarrow x_2$	x_3	x_4	$s.m$	$v.b$
0	$\square$-1	1	2	-2	$x_3 \longrightarrow$
1	1	0	-1	4	x_1
0	-1	0	-1	4	-z

$min\,\{-2,4\} = -4; x_3$ *qui sort de base.*
$min\left\{\frac{-1}{-1}\right\} = 1$, x_1 *qui entre dans la base.*

x_1	x_2	x_3	x_4	$s.m$	$v.b$
0	1	-1	-2	2	x_2
1	0	1	1	2	x_1
0	0	-1	-3	6	-z

D'après les critères d'optimalité, on a :

$$x^\star = (2,2), z^\star = -6 = w^\star, et\ \lambda^\star = c_B^T B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1.6 Exercices

Cette partie propose divers exercices corrigés sur le programme dual, théorème d'écart complémentaire, l'algorithme simplexe dual. Les exercices sont suivis des corrections.

Fiche d'exercices 1

Exercice 1

Donner le dual de chacun du primal suivant :

$$(P_1)\begin{cases} \max\ z = & 2x_1+4x_2+3x_3 \\ & 3x_1+4x_2+2x_3 \leq 60 \\ & 2x_1+x_2+2x_3 \leq 40 \\ & x_1+3x_2+2x_3 \leq 80 \\ & x_1,x_2,x_3 \geq 0 \end{cases},\ (P_2)\begin{cases} \min\ z = & 20x_1+24x_2 \\ & x_1+x_2 \geq 30 \\ & x_1+2x_2 \geq 40 \\ & x_1,x_2 \geq 0 \end{cases}\ \text{et}$$

$$(P_3)\begin{cases} \max\ z = & 10x_1+6x_2 \\ & x_1+4x_2 \leq 40 \\ & 3x_1+2x_2 = 60 \\ & 2x_1+x_2 \geq 25 \\ & x_1,x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

Exercice 2

Écrire et résoudre le programme dual du problème linéaire suivant

$$\begin{cases} \max\ = & x_1-x_2 \\ & 2x_1-x_2 \leq 3 \\ & x_1 \leq 1 \\ & -x_1+x_2 \leq 3 \\ & -3x_1+7x_2 \leq 1 \\ & x_1,x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 3

Utiliser le théorème des écatrs complémentaires vue en cours, pour vérifier que la solution $x^* = (3,0,1,3)^\top$ est une solution optimale de $(P1)$

$$(P1)\begin{cases} z\,(\max) = -2x_1-x_2+x_3+x_4 \\ 2x_1+x_2-3x_3+x_4 = 6 \\ x_1-x_2+2x_3-x_4 = 2 \\ x_1-3x_2-2x_3-x_4 = -2 \\ x_i \geq 0,\ i=1,2,3,4 \end{cases}$$

Exercice 4

Soit le programme linéaire (PL) suivant

$$(PL)\begin{cases} \max\ z = & 200x_1 + 300x_2 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 600 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 400 \\ & x_1 + x_2 \leq 225 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Écrire le dual (D) de ce problème linéaire.
2. Résoudre le primal (PL).
3. Déduire la solution optimale du dual (D), en utilisant le théorème des écarts complémentaires.

Exercice 5

Soit le programme linéaire (PL) suivant

$$(PL)\begin{cases} \max\ z = & 40x_1 + 50x_2 \\ & 5x_1 + 4x_2 \leq 80 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 24 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 36 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Donner le dual (D) de ce primal (PL).
2. Résoudre le primal (PL) par le simplexe ou graphiquement.
3. Déduire la solution du dual (D).

Exercice 6

On considère le programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} \min\ z = & -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 \\ & -2x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 \geq -8 \\ & -3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 \geq -7 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \tag{1.26}$$

1. Donner le dual (D) de ce primal (4.1).
2. Résoudre le programme dual (D) graphiquement.

3. Résoudre le programme (4.1) par la méthode du simplexe.
4. Vérifiez que la solution de (D) obtenue à la question (2) est optimale.

Exercice 7

Soit le programme linéaire suivant :

$$(P)\begin{cases} z(\max) = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 90 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 40 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 80 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

1. Résoudre (P) par l'algorithme du simplexe.
2. A partir du dernier tableau du simplexe, déduire l'inverse de la matrice A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Ecrire le dual (D) de (P).
4. Vérifier que $\lambda^* = \left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5}, \frac{1}{5}\right)$ est une solution admissible de (D).
5. Que peut-on dire de λ^*? Justifier.

Exercice 8

1. On considère le programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} \max\ z = x_1 - 3x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 4 \\ -4x_1 + 3x_2 \leq 2 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 \leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \tag{1.27}$$

   La solution $x_1^* = 0, x_2^* = 0, x_3^* = 4$ est-elle optimale ?

2. On considère le programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} \max\ z = & 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 \\ & x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 2x_5 \leq 4 \\ & 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 \leq 3 \\ & 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 \leq 5 \\ & 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \tag{1.28}$$

La solution $x_1 = 0, x_2 = \frac{4}{3}, x_3 = \frac{2}{3}, x_4 = \frac{5}{3}, x_1 = 0$, est-elle optimale ?

Exercice 9

En utilisant l'algorithme dual du simplexe, trouver la solution de chacun du problème suivant :

$$(P_1)\begin{cases} z\,(\max) = & -2x_1 - x_2 \\ & -3x_1 - x_2 \leq -3 \\ & -4x_1 - 3x_2 \leq -6 \\ & -x_1 - 2x_2 \leq -3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(P_2)\begin{cases} z\,(\max) = & -5x_1 + 35x_2 - 20x_3 \\ & x_1 - x_2 - x_3 \quad \leq -2 \\ & -x_1 - 3x_2 \qquad \leq -3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$(P_3)\begin{cases} z\,(\min) = x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ x_1 - 5x_2 + 7x_3 \geq 8 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \geq -2 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 \geq 2 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$(P_4)\begin{cases} z\,(\min) = x_1 + 2x_2 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ 6x_1 + x_2 \geq 6 \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 9 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, 2 \end{cases}$$

Fiche d'exercices 1 : Correction

Corrigé 1

1. Le dual (D_1) du primal (P_1) est

$$(D_1)\begin{cases}\min\ w = & 60\lambda_1 + 40\lambda_2 + 80\lambda_3\\ & 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \geq 2\\ & 4\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 \geq 4\\ & 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 \geq 2\\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0\end{cases}$$

2. Le dual (D_2) du primal (P_2) est

$$(D_2)\begin{cases}\max\ w = & 30\lambda_1 + 40\lambda_2\\ & \lambda_1 + \lambda_2 \leq 20\\ & \lambda_1 + 2\lambda_2 \leq 24\\ & \lambda_1, \lambda_2 \geq 0\end{cases}$$

3. Le dual (D_3) du primal (P_3) est

$$(D_3)\begin{cases}\min\ w = & 40\lambda_1 + 60\lambda_2 - 25\lambda_3\\ & \lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 \geq 10\\ & 4\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \geq 6\\ & \lambda_1, \lambda_3 \geq 0, \lambda_2\textbf{quelconque}\end{cases}$$

Corrigé 2

La solution optimale dual : $u^\star = (u_1, u_2, u_3, u_4) = (0, 1, 0, 0)$ de valeur optimale $w^\star = 1$.

Corrigé 3

Cherchons le dual (D) de $(P1)$

$$(D1) \Longleftrightarrow \begin{cases} z\,(\min) = 6y_1 + 2y_2 - 2y_3\\ 2y_1 + y_2 + y_3 \geq -2\\ y_1 - y_2 - 3y_3 \geq -1\\ -3y_1 + 2y_2 - 2y_3 \geq 1\\ y_1 - y_2 - y_3 \geq 1\\ y_i \text{ de signe qcq},\ i = 1, 2, 3\end{cases}$$

vérifions que $x^* = (3,0,1,3)^\top$ est une solution admissible de $(P1)$

$$\begin{aligned} 2\times 3+0-3\times 1+3 &= 6\\ 3-0+2\times 1-3 &= 2\\ 3-3\times 0-2\times 1-3 &= -2 \end{aligned}$$

Cherchons y^* solution admissible du dual avec (x^*, y^*) vérifie le théorème des écatrs complémentaires,

$$\begin{cases} x_1^* = 3 > 0\\ x_2^* = 1 > 0\\ x_3^* = 3 > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2y_1^* + y_2^* + y_3^* = -2\\ -3y_1^* + 2y_2 - 2y_3^* = 1\\ 6y_1^* + 2y_2^* - 2y_3^* = 1 \end{cases} \Longrightarrow y^* = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)^\top.$$

On vérifie que y^* est solution admissible de $(D1)$. Rest à vérifier la contrainte (2) du dual

$$-\frac{1}{3} + \frac{2}{3} - 3\left(-\frac{2}{3}\right) \geq -1$$

Coclusions :$(x^*, y^*) \in S_{(P1)} \times S_{(D1)}$ vérifie le théorème des écatrs complémentaires, alors x^* est une solution optimal de $(P1)$.

Corrigé 4

1. Le dual (D) de ce problème linéaire est le suivant :

$$(D)\begin{cases} \min\ w = & 600u_1 + 400u_2 + 225u_3\\ & 3u_1 + u_2 + u_3 \geq 200\\ & 2u_1 + 2u_2 + u_3 \geq 300\\ & u_1, u_2, u_3 \geq 0 \end{cases}$$

2. En utilisant la méthode simplex, on trouve $x_1^* = 50, x_2^* = 175, z^* = 62500$.
3. En utilisant le théorème des écarts complémentaires, on obtient :

$$\begin{aligned} 3\times 50 + 2\times 175 &= 500\\ 50 + 2\times 175 &= 400\\ 50 + 175 &= 225 \end{aligned}$$

$$\begin{gathered} 600 - 500 = 100 > 0 \Longrightarrow u_1 = 0\\ 400 - 400 = 0,\ \text{aucun conclusion}\\ 225 - 225 = 0,\ \text{aucun conclusion.} \end{gathered}$$

$$x_1^* > 0 \Longrightarrow \text{ la première contrainte est saturée.}$$
$$x_2^* > 0 \Longrightarrow \text{ la deuxième contrainte est saturée.}$$

$$\begin{cases} u_2 + u_3 &= 200 \\ 2u_2 + u_3 &= 300 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u_2 &= 100 \\ u_3 &= 100 \end{cases}$$
$u_1^* = 0, u_2^* = 100, u_3^* = 100, w^* = 62500.$

Corrigé 5

1. Le dual (D) de ce problème linéaire (PL) est le suivant :

$$(D) \begin{cases} \min \ w = & 80\lambda_1 + 24\lambda_2 + 36\lambda_3 \\ & 5\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 \geq 40 \\ & 4\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 \geq 50 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0 \end{cases}$$

2. En utilisant la méthode simplex, on trouve $x_1^* = 6, x_2^* = 9, z^* = 690$.
3. Déduire la solution du dual (D). A l'optimum, le primal et le dual sont liés par les règles suivantes :

   - les fonctions objectifs z et w ont la même valeur optimale $z^* = w^*$.

   - la valeur marginale d'une variable dans un programme est égale à l'opposé de la valeur optimale de la variable associée dans l'autre programme et réciproquement

   En utilisant le théorème des écarts complémentaires, on obtient :

   - le variable du dual λ_1 est différent de 0, car le premier contrainte du primal n'est pas saturée. i.e.

$$5 \times 6 + 4 \times 9 = 66 \neq 80$$
$$6 + 2 \times 9 = 24$$
$$3 \times 6 + 2 \times 9 = 36$$

   Donc :

$$80 - 66 \neq 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 0$$
$$24 - 24 = 0, \text{ aucun conclusion}$$
$$36 - 36 = 0, \text{ aucun conclusion.}$$

- les variables du primal (x_1, x_2), étant toutes différentes de 0, alors les contraintes associées du dual sont saturées. Alors :

$$\begin{cases} \lambda_2 + 3\lambda_3 &= 40 \\ 2\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 50 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_2 &= 17.5 \\ \lambda_3 &= 7.5 \end{cases} \Longrightarrow \lambda_1^* = 0, \lambda_2^* = 17.5, \lambda_3^* = 7.5, w^* = 690.$$

Corrigé 6

1. On peut rescrit le programme (4.1) sous la forme canonique suivante :

$$\begin{cases} \max\ z = \quad 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 7 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, \end{cases} \tag{1.29}$$

le dual (D) de ce problème linéaire (4.2) est le suivant :

$$\begin{cases} \min\ w = \quad 8u_1 + 7u_2 \\ 2u_1 + 3u_2 \geq 2 \\ u_1 + 2u_2 \geq 3 \\ 3u_1 + 2u_2 \geq 2 \\ 2u_1 + u_2 \geq 3 \\ u_1, u_2 \geq 0. \end{cases} \tag{1.30}$$

2. La solution graphique obtenue est donc : $u_1 = 1, u_2 = 1$.
3. Après trois itérations, on trouve que la solution optimale de ce programme est $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 0$ et $x_4 = 3$.
4. Les solutions primale et duale sont optimales. En effet, les solutions trouvées sont réalisables (il suffit de voir que la solution primale vérifie toutes les contraintes du problème primal et la solution duale toutes celles du problème dual). Elles donnent comme valeur pour les fonctions objectif 15 (valeur de l'objectif du primal) et 15 (valeur de l'objectif du dual). Le théorème vu en cours sur la dualité nous permet donc (puisque 15=15) d'affirmer que nos solutions sont optimales.

Corrigé 7

1.

$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$	$\mathbf{x}_5$	$\mathbf{x}_6$	$\mathbf{b}_i$	$\mathbf{V.b}$
3	4	2	1	0	0	90	$\mathbf{x}_4$
2^*	1	1	0	1	0	40	$\mathbf{x}_5$
1	3	2	0	0	1	80	$\mathbf{x}_6$
5	4	3	0	0	0	0	$-\mathbf{z}$
0	$\frac{5}{2}^*$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	0	30	$\mathbf{x}_4$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	20	$\mathbf{x}_1$
0	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	60	$\mathbf{x}_6$
0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	0	-100	$-z$
0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0	12	$\mathbf{x}_2$
1	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	0	14	$\mathbf{x}_1$
0	0	1^*	-1	1	1	30	$\mathbf{x}_6$
0	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0	-118	$-z$
0	1	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	6	$\mathbf{x}_2$
1	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	2	$\mathbf{x}_1$
0	0	1	-1	1	1	30	$\mathbf{x}_3$
0	0	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	-124	$-z$

La base B=$\{1,2,3\}$ est optimale. La solution correspondante est :

$x_1 = 2$, $x_2 = 6$, $x_3 = 30$ et $z = 124$.

2.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Le dual

$$(PL) \begin{cases} w(\min) = 90\lambda_1 + 40\lambda_2 + 80\lambda_3 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \geq 5 \\ 4\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 \geq 4 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \geq 3 \\ \lambda_i \geq 0,\ i = 1,2,3 \end{cases}$$

4. $\lambda^* = \left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5}, \frac{1}{5}\right)^\top$ est une solution admissible car,

$$3\left(\frac{2}{5}\right) + 2\left(\frac{9}{5}\right) + \frac{1}{5} = 5 \geq 5$$
$$4\left(\frac{2}{5}\right) + \frac{9}{5} + 3\left(\frac{1}{5}\right) = 4 \geq 4$$
$$2\left(\frac{2}{5}\right) + \frac{9}{5} + 2\left(\frac{1}{5}\right) = 3 \geq 3$$

5. $w^* = 90\left(\frac{2}{5}\right) + 40\left(\frac{9}{5}\right) + 80\left(\frac{1}{5}\right) = 124 = z^*$, ainsi λ^* est une solution optimale de (D) .

Corrigé 8

1. Le dual de ce problème linéaire (4.4) est le suivant :

$$\begin{cases} \min\ w = & 4u_1 + 2u_2 + 5u_3 \\ & 2u_1 - 4u_2 + 3u_3 \geq 1 \\ & -u_1 + 3u_2 - 2u_3 \geq -3 \\ & u_1 - u_3 \geq 3 \\ & u_1, u_2, u_3 \geq 0. \end{cases} \tag{1.31}$$

La solution proposée est réalisable, car

- Première contrainte : $4 = 4$

- Deuxième contrainte : $0 < 2$

- Troisième contrainte : $-4 < 5$.

Les contraintes associées à u_2 et u_3 étant inégalités strictes, d'après le théorème des écarts complémentaires, on a :

$$\begin{aligned} 4 - 4 = 0,\ \text{aucun conclusion} \\ 2 - 0 \neq 0 \Longrightarrow u_2 = 0 \\ 5 - (-4) \neq 0 \Longrightarrow u_3 = 0. \end{aligned}$$

- Le variable primal $x_3^* = 4$ est strictement positive, alors la contrainte associée du dual est saturée. Alors :

$$u_1 - u_3 = 3.$$

Donc la solution duale associée à la solution primale donnée est :

$$u_1^* = 3, u_2^* = 0, u_3^* = 0.$$

Cette solution étant dual réalisable, on en déduit que la solution proposée est optimale.

2. Le problème dual de problème linéaire (4.5) est le suivant :

$$\begin{cases} \min & 4y_1 + 3y_2 + 5y_3 + y_4 \\ & y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 3y_4 \geq 7 \\ & 3y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4 \geq 6 \\ & 5y_1 - 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 \geq 5 \\ & -2y_1 + y_2 - 2y_3 - y_4 \geq -2 \\ & 2y_1 + y_2 + 5y_3 - 2y_4 \geq 3 \\ & y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0. \end{cases} \tag{1.32}$$

La solution proposée est réalisable, car

- Première contrainte : $4 = 4$

- Deuxième contrainte : $3 = 3$

- Troisième contrainte : $\frac{14}{3} < 5$.

- Quatrième contrainte : $1 = 1$.

Donc, d'après le théorème des écarts complémentaires :

$y_3 = 0$, puisque la contrainte associée à y_3 est inégalités strictes.

- Les variables primales x_2^*, x_3^* et x_4^* sont strictement positive, alors les contraintes associées du dual est saturée. Alors :

$$\begin{aligned} 3y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4 &= 6 \\ 5y_1 - 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 &= 5 \\ -2y_1 + y_2 - 2y_3 - y_4 &= -2 \\ y_3 &= 0 \end{aligned}$$

Donc la solution duale associée à la solution primale donnée est : $y_1^* = y_2^* = y_4^* = 1$ et$y_3^* = 0$. Mais cette solution n'est pas duale réalisable, on en déduit que la solution proposée est n'est donc pas optimale.

Corrigé 9

Résoudre le problème (P_1) :

$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	**s.m**	**V.b**
-3	-1	1	0	0	-3	$\mathbf{x_3}$
-4	-3	0	1	0	-6	$\mathbf{x_4}$
-1	-2	0	0	1	-3	$\mathbf{x_5}$
$\mathbf{-2}$	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{-z}$
$-\frac{5}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	-1	$\mathbf{x_3}$
$\frac{4}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	2	$\mathbf{x_2}$
$\frac{5}{3}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	1	1	$\mathbf{x_5}$
$-\frac{2}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	-2	$-z$
1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$\mathbf{x_1}$
0	1	$\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$	$\mathbf{x_2}$
0	0	1	-1	1	0	$\mathbf{x_5}$
0	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$-\frac{12}{5}$	$-z$

Comme $d_N^T = \left(0, 0, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 0, -\frac{12}{5}\right)$ et $x_B \geq 0$, donc la solution courante est la solution optimale. Par conséquent, la solution optimale est : $x_1 = \frac{3}{5}$ et $x_2 = \frac{6}{5}$, avec $z = -\frac{12}{5}$.

CHAPITRE 2

Introduction à la programmation linéaire en variables entières

2.1 Introduction

La programmation en nombres entiers exprime l'optimisation d'une fonction linéaire soumise à un ensemble de contraintes linéaires sur des variables entières dit les contraintes d'intégrité.

Dans le problème générale de la programmation linéaire (LP), toutes les inconnues peuvent varier de façon continu, on utilise généralement l'algorithme simplexe pour résoudre ce problème (LP), cependant les solution obtenues sont des résultats exactes (valeurs réelles). Pour un problème linéaire discret (ILP), la réalisation se fait à l'unité de production d'un certain nombre de tables, nombre de bouteiller d'eau ...ect.

La solution optimale de ce problème donc appartient à $\mathbb{N}$, puisque il est impossible de fabrique 2.5 tables, dans ce cas, soit on fabrique 2 ou 3 tables. Si on essaie alors d'arrondir à une valeur entière voisine, il se peut que la solution ainsi trouvée soit éloignée de la solution optimale, ou même ne soit pas réalisable. Dans telles situations, il est donc souhaitable d' utiliser une méthode plus adaptée.

Définition 2.1 *Un programme linéaire à variables entières mixtes noté "$MILP$"(Mixed Integer Linear Programming) est donné par la matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, les vecteurs $c \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $b \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ et un nombre $p \in \mathbb{N}^*$. L'objectif du problème est de trouver un vecteur x solution du problème d'optimisation suivant :*

$$(MILP)\begin{cases} \max\ z = \ c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}_+^p \times \mathbb{R}^{n-p}. \end{cases}$$

Si $p = 0$ alors il n'y a pas de contraintes d'intégralité, donc nous obtenons le programme linéaire (LP). D'autre part, si $p = n$, on parle d'un programme linéaire en nombres entiers noté "ILP" (Integer Linear Programming) :

$$(ILP)\begin{cases} \max\ z = \ c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}_+^n, \end{cases} \tag{2.1}$$

dans un (ILP), si $x \in B = \{0, 1\}$, nous avons un programme linéaire binaire noté "BIP" (Binary integer programming) :

$$(BIP)\begin{cases} \max\ z = \ c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \\ x \in \{0, 1\}^n. \end{cases}$$

2.1.1 Complexité

Les problèmes généraux de programmation linéaire en variables entières (ILP), $(MILP)$ ou (BIP) sont beaucoup plus difficiles à résoudre que le problème de programmation linéaire en variables continues (LP). L'étude initiale du problème (LP) nous a montré immédiatement que :

- L'obtention de la solution optimale ne nécessite pas de s'intéresser qu'à un nombre fini de solutions, à savoir les seuls sommets du polyèdre $D = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$.
- Ces sommets sont facilement caractérisables et ils peuvent donc être aisément déterminés.

Par contre, dans les situations (ILP), $(MILP)$ ou (BIP), la solution optimale n'est, en général, pas un sommet de D et donc un point intérieur ou point situé n'importe où sur la frontière. On perd ainsi toute caractérisation particulière de la solution optimale qui est, pour cette raison, bien difficile à déterminer.

2.2 Relaxation des contraintes

Une technique simple de relaxation consiste à ignorer certaines contraintes du problème. On obtient un problème dont la solution optimale est plus facile à calculer. Par exemple soit un polyèdre D défini par deux ensembles de contraintes :

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n : A_1 x \leq b_1, A_2 x \leq b_2\}.$$

La suppression d'un des deux ensembles de contraintes - par exemple le second - permet d'obtenir un polyèdre convexe

$$D^{'} = \{x \in \mathbb{R}^n : A_1 x \leq b_1\},$$

tel que le problème relaxé $(RILP)$ définie par

$$(RILP) \begin{cases} z^* = \max \ c^\top x \\ \text{s.t.} \quad x \in R^{(i)} = D^{'(i)} \bigcap \mathbb{R}^n_+ \end{cases}$$

est un problème classique, simple à résoudre. Le problème relaxé $(RILP)$ est alors appelé sous problème du problème (ILP).

Remarque 2.1 *: Le problème d'affectation est une relaxation du problème du voyageur de commerce TSP.*

2.3 Relaxation linéaire continue

La relaxation linéaire continue est basé sur un changement des contraintes d'intégralité à des contraintes non-d'intégralité.
On considère le (ILP) (donné par (2.1))dont l'ensemble S des solutions admissibles est fini. La relaxation (RILP) de (ILP) est le (LP) (donné par (1.1)). Il s'agit d'un relâchement des contraintes d'intégrité $x_j \in \mathbb{N} \ \forall j = 1, ..., n$ en $x \in \mathbb{R}^n_+$.

Remarque 2.2 *:*

1- Pour un problème de maximisation (resp minimisation), la solution optimale du (PL) donne une borne supérieure (resp inférieure) de la solution optimale du (ILP) ie :

$$z^{PL} \geq z^{IPL} (resp \quad z^{PL} \leq z^{IPL}).$$

2- La relaxation linéaire ne donne pas seulement une borne supérieure ou inférieure, mais par fois la solution optimale si cette ci est entier (voir l'exemple 2).
3- Une méthode immédiate pour résoudre efficacement un (ILP) consiste à résoudre le problème relaxé (LP) puis à prendre comme solution la solution la plus proche.

Exemple 2.1 *Soit le problème* (ILP) *suivant :*

$$(ILP)\begin{cases} \max\ z = \ y \\ -x+y \leq 1 \\ 3x+2y \leq 12 \\ 2x+3y \leq 12 \\ x, y \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

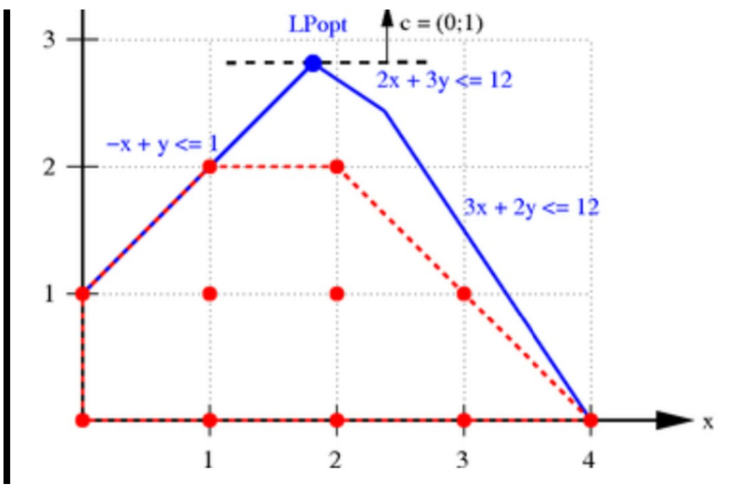


FIGURE 2.1 – Représentation graphique des solutions admissibles pour l'exemple (2.1)

En variables continues, la solution optimale est $x = 9/5, y = 14/5$, qui n'est pas entière. Un arrondi de cette solution serait $x = 2$ et $y = 3$, qui n'est pas admissible pour (ILP) et n'est pas la solution entière du problème. La solution entière du problème est $(x, y) = \{(1, 2), (2, 2)\}$, on remarque même qu'elle est éloignée de la solution optimale continue.

Exemple 2.2 *Soit le problème* (ILP) *suivant :*

$$(ILP)\begin{cases} z & = \max x_1 + 2x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_i \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

La relaxation linéaire de (ILP) a une solution optimale $x^* = (3, 3)$. Comme les $x_i i = \overline{1, 2}$ sont entier, alors le problème (ILP) associé a la même solution.

2.4 Problème d'affectation linéaire

Définition 2.2 *(Problèmes combinatoires) Un problème d'optimisation combinatoire noté (COP)["Combinatorial Optimization Problem"] est donne par un ensemble finie E. Le but est consiste à optimiser :*

$$(COP) : optimiser \left\{ \sum_j c_j : S \subseteq F \right\}$$

tel que $c : E \to \mathbb{R}$ *(c fonction de poids)*
F : famille de sous - ensembles réalisable de E.
Dans la suite nous présentons un problème particulier de programmation (COP), s'appel le problème d'affectation linéaire.

Problème d'affectation linéaire :
Le problème d'affectation linéaire (LAP" Linéaire Asignment Problem") est un problème particulier de problème linéaire en variables binaires. Il consiste à affecter n tâches à n agents. Pour tout couples $(i, j)(i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n})$, l'affectation de i à j entraîne un coût de réalisation noté c_{ij} ($c_{ij} \geqslant 0$). Chaque agent peut réaliser une unique tâche (et vice versa) . Il s'agit donc de définir une permutation de n objets ou une bijection de $\{1, ..., n\}$ sur $\{1, ..., n\}$. L'objectif est de minimiser le coût total des affectations afin de réaliser toutes les tâches.

2.4.1 Formulation de problème d'affectation linéaire

Désignons par $i = \overline{1, n}$ les agents, et $j = \overline{1, n}$ les tâches. introduisons les n^2 variables binaires et $2n$ contraintes.
Les variables de décisions sont définit comme suit :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si l'agent réalise la tâche } j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les contraintes du problème d'affectation s'écrivent sous la forme :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \text{pour } i = \overline{1,n}.$$

Chaque agent i fait une seule tâche j

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \text{pour } j = \overline{1,n}.$$

Chaque tâche j est réalisée par un seul agent i

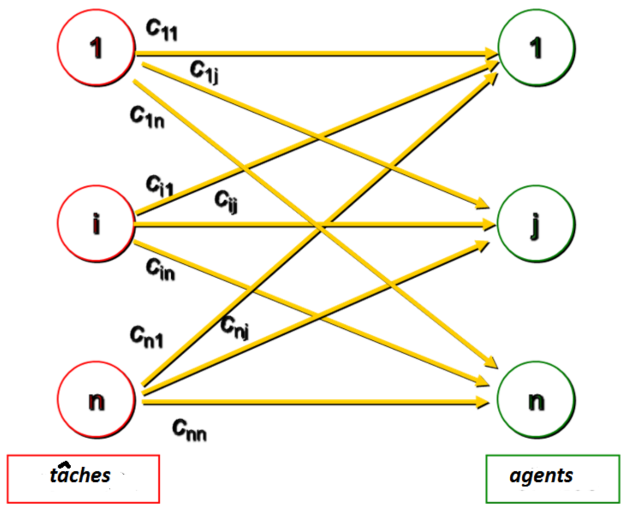


FIGURE 2.2 – Problème d'affectation linéaire

Le problème d'affectation linéaire s'écrit sous la forme :

$$(LAP)\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = \overline{1,n} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = \overline{1,n} \\ x_{ij} \in \{0,1\} \qquad i = \overline{1,n} \qquad j = \overline{1,n}. \end{cases}$$

2.5 Méthode de Résolution

Il existe trois grandes catégories de méthodes de résolution des problèmes linéaires en variables entières(ILP) : les méthodes exactes, les méthodes heuristiques et les méthodes

méta heuristiques.
- Les méthodes exactes permettent d'obtenir une solution optimale à chaque fois, mais si le problème à résoudre est compliqué, le temps de calcul peut être long (Branch and Bound).
- Les méthodes heuristiques permettent d'obtenir une solution approchée, qui n'est pas toujours optimale (par exemple : plus proche voisin et méthodes d'insertion).
- Les méthodes méta heuristiques sont basés sur une recherche aléatoire guidé au sein d'un voisinage de solution courante (par exemple : Recuit simulé et recherche de Tabou).
Dans notre chapitre on prend en compte la méthode $B\&B$ parmi les méthodes de résolution exactes des problèmes (COP) et en particulier pour la résolution des (ILP).

2.5.1 Méthode Branch and Bound

La méthode Branch and Bound ($B\&B$) appelée méthode de séparation et évaluation qui est destinée à résoudre les problèmes linéaires en nombres entier.
Cette méthode consiste donc à appliquer une énumération intelligente de l'espace des solutions, le principe "Diviser pour régner" est :
- Délimite l'exploration de toutes les branches.
- Élimine des solutions partielles ne mènant pas à la solution optimales.

Il s'agit donc d'effectuer une décomposition du problème en sous problèmes plus simples. Puis on combine la résolution de tous les sous problèmes pour obtenir la solution du problème original.

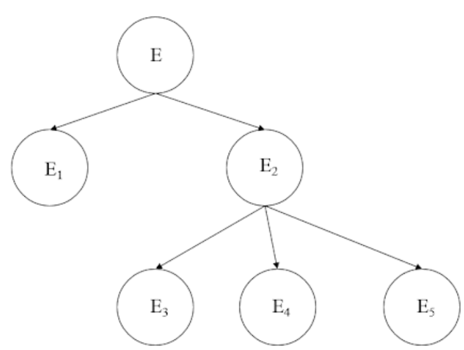


FIGURE 2.3 – Arbre de Branch and Bound

On considéré le problème de programmation linéaire (ILP) suivant :

$$(ILP)\begin{cases} \max \ c^T x \\ s.c \ Ax \leqslant b \\ x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

La relaxation linéaire est donné par :

$$(LP)\begin{cases} \max \ c^T x \\ s.c \ Ax \leqslant b \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

Branchement :

- Si la solution de (LP) n'est pas entière, soit x_i une variable prenant une valeur fractionnaire x_i^* dans la solution optimale de (LP).
- Le problème peut être divisée en deux sous- problèmes en imposant

$$\begin{cases} x_i \leqslant \lfloor x_i^* \rfloor \\ ou \\ x_i \geqslant \lfloor x_i^* \rfloor + 1 \end{cases}$$

ou $\lfloor x_i^* \rfloor$ est le plus grand entier inférieur à x_i^*.

- La solution optimale de (LP) est la meilleure des solutions optimales des deux problèmes :

$$(ILP1)\begin{cases} \max \ c^T x \\ s.c \ Ax \leqslant b \\ x_i \leqslant \lfloor x_i^* \rfloor \\ x \geqslant 0, entier \end{cases} \quad (ILP2)\begin{cases} \max \ c^T x \\ s.c \ Ax \leqslant b \\ x_i \geqslant \lfloor x_i^* \rfloor + 1 \\ x \geqslant 0, entier \end{cases}$$

Règles de branchement :

- Il n'ya pas de règle générale pour le choix de la variable de branchement et de la branche à examiner en premier.
- Ce choix peut avoir un impact important sur le nombres de nœuds à examiner dans l'arbre de $B\&B$.

Exemple 2.3 *:*

$$\begin{cases} \max z = 8x_1 + 5x_2 \\ s.c \ x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ 9x_1 + 5x_2 \leqslant 45 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{2.2}$$

- On résoudrons le problème relaxé par la méthode du simplexe :

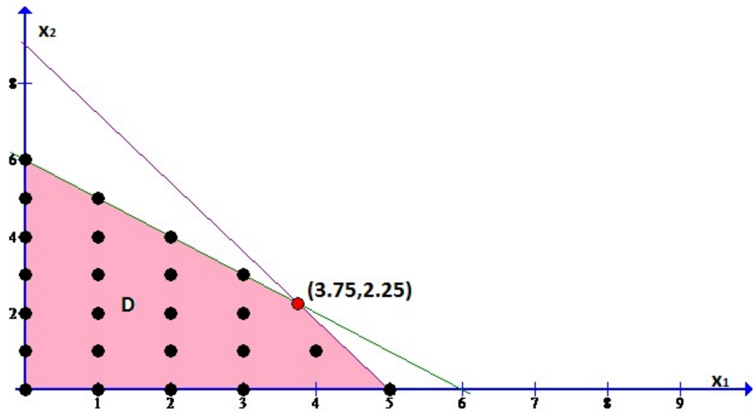


FIGURE 2.4 – Représentation graphique de la solution optimale de problème (2.2)

- Si les solutions sont entières. On s'arrête, on a trouvé l'optimum. Dans ce exemple les résultat obtenus sont :

x_1=15/4=3.75
x_2=9/4=2.25
z=165/4=41.25

- Les résultats sont fractionnaires. Donc il faudra trouver une solution entière et la valeur z obtenue est une borne supérieure pour la solution de la programmation linéaire en variable entière appliquée à cet exemple.

branchement sur $x_1 = 15/4 = 3.75 \quad x_1 \geqslant 4$ *et* $x_1 \leqslant 3$

Sous-problème 2 :

$$(ILP2) \begin{cases} \max z = 8x_1 + 5x_2 \\ s.c \\ x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ 9x_1 + 5x_2 \leqslant 45 \\ x_1 \geqslant 4 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{cases} \Longrightarrow \textit{la solution de ce problème}$$

x_1=4
x_2=9/5=1.8
z=41

Sous-problème 3 :

$$(ILP3)\begin{cases} \max z = 8x_1 + 5x_2 \\ s.c \\ x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ 9x_1 + 5x_2 \leqslant 45 \\ x_1 \leqslant 3 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{cases} \Longrightarrow \textit{la solution de ce problème} \begin{array}{|c|}\hline x_1{=}3 \\ \hline x_2{=}3 \\ \hline z{=}39 \\ \hline \end{array}$$

branchement sur $x_2 = 9/5 = 1.8 \quad x_2 \geqslant 2$ *et* $x_2 \leqslant 1$

Sous-problème 4 :

$$(ILP4)\begin{cases} \max z = 8x_1 + 5x_2 \\ s.c \\ x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ 9x_1 + 5x_2 \leqslant 45 \\ x_1 \geqslant 4 \\ x_2 \leqslant 1 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{cases} \Longrightarrow \textit{la solution de ce problème} \boxed{\textit{Pas de solution}}$$

Sous-problème 5 :

$$(ILP5)\begin{cases} \max z = 8x_1 + 5x_2 \\ s.c \\ x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ 9x_1 + 5x_2 \leqslant 45 \\ x_1 \geqslant 4 \\ x_2 \geqslant 2 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{cases} \Longrightarrow \textit{la solution de ce problème} \begin{array}{|c|}\hline x_1{=}40/9{=}4.44 \\ \hline x_2{=}1 \\ \hline z{=}365/9{=}40.55 \\ \hline \end{array}$$

branchement sur $x_1 = 40/9 = 4.44 \quad x_1 \geqslant 5$ *et* $x_1 \leqslant 4$

Sous-problème 6 :

$$(ILP6)\begin{cases} \max z = 8x_1 + 5x_2 \\ s.c \\ x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ 9x_1 + 5x_2 \leqslant 45 \\ x_1 \geqslant 4 \\ x_2 \geqslant 2 \\ x_1 \leqslant 4 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{cases} \Longrightarrow \textit{la solution de ce problème} \begin{array}{|c|}\hline x_1{=}4 \\ \hline x_2{=}1 \\ \hline z{=}37 \\ \hline \end{array}$$

Sous-problème 7 :

$$(ILP7)\begin{cases} \max z = 8x_1 + 5x_2 \\ s.c \\ x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ 9x_1 + 5x_2 \leqslant 45 \\ x_1 \geqslant 4 \\ x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 5 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{cases} \Longrightarrow \textit{la solution de ce problème} \begin{array}{|c|} \hline x_1{=}5 \\ \hline x_2{=}0 \\ \hline z{=}40 \\ \hline \end{array}$$

la solution du problème (2.2) *est donc* $x_1 = 5, x_2 = 0, z = 40$

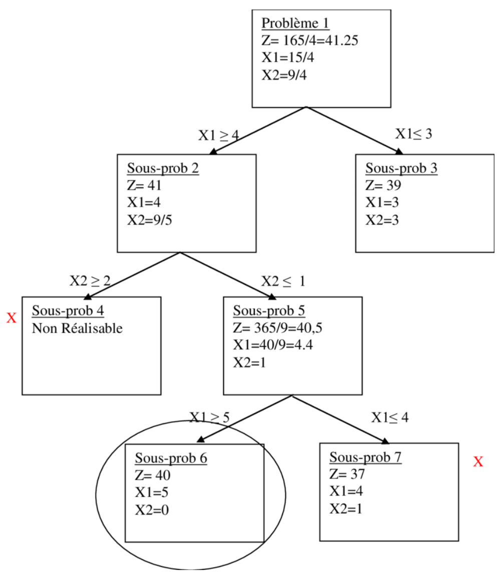


FIGURE 2.5 – Arbre de $B\&B$ pour exemple 2.2

2.6 Exercices

Dans cette partie, nous avons quelques exercices corrigés sur la programmation linéaire en nombre entier, l'algorithme branch and bound. Les exercices sont suivis des corrections.

Fiche d'exercices 2

Exercice 1

Soit le programme linéaire en nombre entier $(PLNE)$ suivant

$$(PLNE)\begin{cases} \max\ z = & 4x_1 - x_2 \\ & 7x_1 - 2x_2 \leq 14 \\ & x_2 \leq 3 \\ & 2x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Les algorithmes branch-and-bound s'articulent autour de 3 composantes essentielles. Quelles sont ces composantes ?
2. Résoudre ce problème par la méthode graphique.
3. Résoudre ce problème par la méthode Branch and Bound.

Fiche d'exercices 2 : Correction

Corrigé 1

Soit le programme linéaire en Nombre Entier $(PLNE)$ suivant :

$$(PLNE)\begin{cases} \max\ z = & 4x - y \\ & 7x - 2y \leq 14 \\ & y \leq 3 \\ & 2x - 2y \leq 3 \\ & x, y \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Les trois composantes essentielles sont :

   - Une fonction fournissant une borne inférieure (ou supérieure, selon le cas) pour la meilleure solution réalisable le long du sous-arbre en cours.

   - Une stratégie de sélection des sous-arbres à élaguer et du prochain sous-arbre à explorer en priorité.

   - Une règle de branchement à appliquer à un sous-arbre qui vient d'être découvert, et qui ne peut être ni élagué, ni exploré en priorité

2. La résolution du problème par la méthode graphique ?

   Pour commencer, nous traçons les contraintes, nous obtenons donc une solution continue en utilisant la relaxation linéaire, la solution trouvée par ce problème relaxé est : $x = \dfrac{20}{7}, y = 3, z^{Relaxation} = 8,42$. La valeur $z^{Relaxation} = 8,42$ représente la borne supérieure de la solution du problème linéaire en ajoutant les contraintes entière $(PLNE)$. Mais la solution dans un programme en PLNE doit être entière et non fractionnaire. Ici la solution continue donne une valeur fractionnaire. Pour trouver une solution entière, nous traçons la droite $z = 4x - y =$ partie entière inférieure de $z^{Relaxation} = 8$. On trouve qu'il n'existe aucune solution entière ayant cette valeur. Puis, on trace la droite $z = 4x - y = 8 - 1 = 7$, ce qui donne la solution entière.

3. La résolution du problème par la méthode Branch and Bound :

   L'algorithme générait alors l'arbre suivant :

max z = 4x1 − x2
7x1 − 2x2 ≤ 14
x2 ≤ 3
2x1 − 2x2 ≤ 3

x1,x2 entiers
best-sol (2.86,3), z= 8.43=UB mais fractionnée
LB= 5

x1 ≤ 2

x1 ≥ 3

max z = 4x1 − x2
7x1 − 2x2 ≤ 14
x2 ≤ 3
2x1 − 2x2 ≤ 3
x1 ≤ 2

z=7.5 =$UB_{x1\leq 2}$ > LB

x1 = 2.0 ; x2 = 0.5 fractionné

max z = 4x1 − x2
7x1 − 2x2 ≤ 14
x2 ≤ 3
2x1 − 2x2 ≤ 3

x1 ≥ 3
Infaisable

pas de solution

X

x2 <= 1

x2 >= 2

max z = 4x1 − x2
7x1 − 2x2 ≤ 14
~~x2 ≤ 3~~
2x1 − 2x2 ≤ 3

x1 <= 2
x2 <= 1

z=7.5 =UB> LB

x1 = 1 ; x2 =0.5

Fractionnaire

max z = 4x1 − x2
7x1 − 2x2 ≤ 14
x2 ≤ 3
2x1 − 2x2 ≤ 3

x1 <= 1
x2 >=2

best sol Z=7
x1 = 2.0
x2 = 1.0
Prendre LB=7

x1 <= 1

x1 >= 0

max z = 4x1 − x2
7x1 − 2x2 ≤ 14
x2 ≤ 3
2x1 − 2x2 ≤ 3

x1 <= 1
x2 <= 1
UBi=4 <LB refusée

max z = 4x1 − x2
7x1 − 2x2 ≤ 14
2x1 − 2x2 ≤ 3

x2 <= 1
x1 >=0 ; x1 ≤ 2

Solution fractionnée non admissible.

X

CHAPITRE 3

L'algorithme primal-dual

3.1 introduction

L'algorithme primal-dual peut s'appliquer à un problème quelconque de LP.

La clé de l'algorithme primal-dual est le théorème des écarts complémentaires (voir théorème), constitue une C.N.S d'optimalité. A chaque étape, en fonction d'une solution admissible du dual, le problème primal sera restreint en annulant des variables primales de façon à satisfaire les relations de complémentarité du théorème des écarts complémentaires.

Si la solution optimale du problème primal restreint est admissible pour le problème non restreint, ce sera la solution optimale, sinon la solution admissible duale sera actualisée, un nouveau problème.

3.2 Principe de l'algorithme primal-dual

Soit le problème primal de programmation linéaire (PL) suivant :

$$\begin{cases} \min\ z = \ cx \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

avec $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$.
Son problème dual s'écrit

$$\begin{cases} \min\ w = \ \lambda b \\ \lambda A \leqslant c \\ \lambda \ de\ signe\ quelconque. \end{cases} \tag{3.2}$$

Nous supposons, par facilité, qu'une solution initiale du dual existe non nécessairement de la base λ_0.

Notons $K = \{j|\lambda_0 a_j = c_j\}$ c'est-à-dire l'ensemble des contraintes serrées pour la solution admissible λ_0 de problème(3.2).

Le théorème des écarts complémentaires donne une C.N.S d'optimalité pour qu'une solution x^* soit solution optimale du problème (3.1) :

a)x^* doit être une solution admissible du problème (3.1).

b)$x_j^*(c_j - \lambda_0 a_j) = 0 \qquad j = 1, ..., n.$

La condition b) est utilisée pour définir un problème primal restreint, en posant

$$x_j^* = 0 \quad j \notin K.$$

La condition b) est vérifiée reste à satisfaire la condition a).

Pour recherche une solution admissible du problème restreint et donc du problème (3.1), le problème suivant qui est le problème primal restreint ont été introduites des variables artificielles.

$$\begin{cases} minE = \sum_{i=1}^{m} e_i \\ \sum_{j \in K} a_j x_j + Ie = b \\ x_j \geqslant 0 \;\; j \in K \\ e_i \geqslant 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

Son dual s'écrit

$$\begin{cases} \max \; y = \; vb \\ va_j \leqslant 0 \; j \in K \\ v_i \leqslant 1 \; i = 1, ..., m \\ v_i \; de \; signe \; quelconque \end{cases} \tag{3.4}$$

oú $v(1 \times m)$.

3.2.1 Résolution du problème primal restreint

La résolution de problème (3.3) permet de déterminer simultanément :

- La solution optimale $(x_j^*, j \in K, e_i, i = 1, ..., m)$ de problème (3.3).

- La solution optimale $(v_i^*, i = 1, ..., m)$ de son dual (3.4), telque $E = y = v^* b$.

Etape 1 : Etant donné une solution réalisable λ_0 pour le dual (3.2), déterminer le primal restreint associé.

Etape 2 : Optimiser le primal restreint associé .

Si la valeur optimale de ce primal restreint (implique $E = 0$) c'est-à-dire toutes les variables artificielles sont nulles $\sum_{j\in K} a_j x_j^* = b$, la solution correspondante est optimale pour le problème primal (3.1). STOP

Notons que λ_0 est une solution optimale du problème (3.2).

Etape 3 : $E \neq 0$

Si la valeur optimale de problème primal restreint est strictement positive (i.e $E > 0$) la solution optimale de ce primal restreint n'est pas réalisable pour le problème primal(3.1), on cherche à améliorer la solution réalisable du dual.

Posons $\lambda' = \lambda_0 + \theta v_0$ avec $\theta \geqslant 0$,

étant donne $\lambda' b = \lambda_0 b + \theta v_0 b = \lambda_0 b + \theta y$.

• Les contraintes d'indice $j \in K$ sont satisfaites par λ' pour toute valeur de θ en effet

$$\lambda_0 a_j = c_j \; et \; v_0 a_j \leqslant 0 \quad j \in K \Rightarrow \lambda' a_j \leqslant c_j \;\; \forall \theta \geqslant 0.$$

• $j \notin K$, on a deux situations possibles :

a)$v_0 a_j \leqslant 0 \qquad \forall j \notin K$

dès lors

$$\lambda' a_j \leqslant c_j \qquad \forall j \notin K.$$

$\lambda' = \lambda_0 + \theta v_0$ est réalisable pour le problème dual (3.2) pour tout valeur positive de θ.

Donc le problème (3.2) est non bornée, lorsque nous augmentons θ et par conséquent le problème (3.1) est impossible. b)$\exists j \notin K | v_0 a_j > 0$.

Obtenir du tableau simplexe du primal restreint la solution v_0 du dual restreint associé. S'il n'y a pas de j pour lequel $v_0 a_j > 0$, le primal n'a pas de solution réalisable, STOP.

Sinon, construire le nouveau vecteur dual réalisable,

$$\lambda' = \lambda_0 + \theta v_0,$$

$$\lambda' a_j = \lambda_0 a_j + \theta v_0 a_j \leqslant c_j \quad j \notin K,$$

c'est-à-dire

$$0 \leq \; \theta \; \leq \; \theta^* = \min_{j \; \notin \; K \; |\lambda \; a_j \; > \; 0} \left(\frac{c_j - \lambda^* \; a_j}{v_0^* a_j} \right) avec \; v_0^* a_j > 0.$$

Posons

$$\lambda' = \lambda_0 + \theta^* v_0.$$

Afin d'avoir une nouvelle solution admissible de problème (3.2), la meilleure possible.

Un nouveau problème restreint peut être défini et une nouvelle itération de l'algorithme primal-dual peut être effectuée.

Il est important de souligner que la solution optimale $\left\{x_j^* \geq 0, \quad j \in K\right\}$ du problème (3.3) peut servir de solution de base initiale de nouveau problème restreint, du fait que

$$x_j^* \geq 0, \ j \in K \rightarrow j \in K^{'}.$$

En effet si $x_j^* \geq 0, j \in K$ (ou même nulle dans une base dégénérée), le théorème des écarts complémentaire appliqués à (3.3) et (3.4) implique $v_0 a_j = 0$, et donc, puisque $\lambda_0 a_j = c_j$ par définition de K, il vient

$$\lambda^{'} a_j = \lambda_0 a_j + \theta^* v_0 a_j = c_j,$$

c-à-d

$$j \in K^{'}$$

.

Exemple 3.1 *Soit le problème de minimisation suivant (problème primal).*

$$\begin{cases} \min 3x_1 + 4x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 8 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_4 = 12 \\ x_i \geq 0, i = 1, ..., n \end{cases} \tag{3.5}$$

Son dual est

$$\begin{cases} \max 8\lambda_1 + 12\lambda_2 \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 \leqslant 3 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 \leqslant 4 \\ -\lambda_1 \leqslant 0 \\ -\lambda_2 \leqslant 0 \\ \lambda_1, \lambda_2 \textit{de signe quelconque}, \end{cases} \tag{3.6}$$

en prend $\lambda_0 = (0, 0)$ *solution admissible de problème dual* (3.6) *non nécessairement de base, en remplace cette solution dans*(3.6) *et en prend les contraintes série, en note* $K = \{3, 4\}$*l'ensemble des indices des contraintes* $\lambda_0 a_j = c_j$ *on considère un nouvelle problème primal associé au problème* (3.6) *(dual) nommée primal restreint*

$$\begin{cases} \min E = e_1 + e_2 \\ -x_3 + e_1 = 8 \\ -x_4 + e_2 = 12 \\ e_1 \geq 0, e_2 \geq 0, x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

On cherche une solution du problème (3.7)

x_3	x_4	e_1	e_2	sm	vb
-1	0	1	0	8	e_1
0	-1	0	1	12	e_1
1	1	0	0	20	E

La solution de problème est $e_1 = 8, e_2 = 12, E = 20$, *le problème dual de problème* (3.7)

$$\begin{cases} \max 8v_1 + 12v_2 \\ -v_1 \leq 0 \\ -v_2 \leq 0 \\ v_1 \leq 1 \\ v_2 \leq 1 \\ v_1, v_2 \textit{de signe quelconque}, \end{cases} \tag{3.8}$$

on a $v_0 = (1, 1)$ *solution admissible de problème* (3.8).

On poursuit l'algorithme pour déterminer,

$$\lambda^{'} = \lambda_0 + \theta v_0,$$

tel que

$$\theta = min \frac{-(\lambda a_j - c_j)}{v_0^* a_j} = min(3/2 + 5, 4/3 + 2) = min(3/7, 4/5).$$

Donc $\theta = 3/7$ *et* $\lambda_1^{'} = (3/7, 3/7)$, *on remplace cette solution dans le problème (3.6) en trouve* $K = \{1\}$, *le nouveaux problème restreint est :*

$$\begin{cases} minE = e_1 + e_2 \\ 2x_1 + e_1 = 8 \\ 5x_1 + e_2 = 12 \\ e_1, e_2, x_1 \geq 0, \end{cases} \tag{3.9}$$

x_1	e_1	e_2	sm	vb
2	1	0	8	e_1
$\boxed{5}$	0	1	12	$e_2 \rightarrow$
$\uparrow -7$	0	0	20	E
0	1	$-2/5$	$16/5$	e_1
1	0	$1/5$	$12/5$	x_1
0	0	$7/5$	$16/5$	E

La solution est $x_1 = 12/5, e_1 = 16/5, E = 16/5.$

Le duale de problème(3.9) *est :*

$$\begin{cases} max 8v_1 + 12v_2 \\ 2v_1 + 5v_2 \leq 0 \\ v_1 \leq 1 \\ v_2 \leq 1 \\ v_1, v_2 \text{de signe quelconque.} \end{cases} \tag{3.10}$$

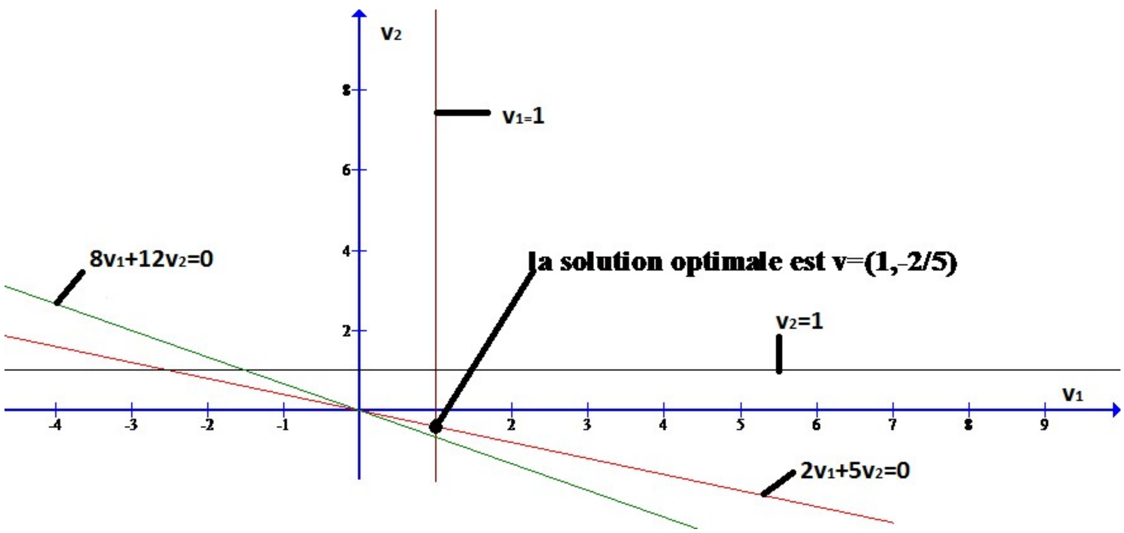


FIGURE 3.1 – Représentation graphique de la solution de problème (3.10)

Par la méthode graphique la solution optimale de problème est $v_1 = (1, -2/5)$ *en trouve la nouvelle solution du dual (3.6) :*

$$\theta = min(65/77, 15/14) = 65/77 \quad et \quad \lambda_2^{'} = (3/7, 3/7) + 65/77(1, -2/5) = (14/11, 1/11).$$

On trouve l'ensemble des contrainte série $K = \{1, 2\}$ *le problème primal restreint est :*

$$\begin{cases} minE = e_1 + e_2 \\ 2x_1 + 3x_2 + e_1 = 8 \\ 5x_1 + 2x_2 + e_2 = 12 \\ e_1, e_2, x_1, x_2 de\ signe\ quelconque, \end{cases} \tag{3.11}$$

x_1	x_2	e_1	e_2	sm	vb
2	3	1	0	8	e_1
$\square 5$	2	0	1	12	$e_2 \rightarrow$
$\uparrow -7$	-5	0	0	20	E
0	$\square 11/5$	1	$-2/5$	$16/5$	$e_1 \rightarrow$
1	$2/5$	0	$1/5$	$12/5$	x_1
0	$\uparrow -22/5$	0	$7/5$	$16/5$	E
0	1	$5/11$	$-2/11$	$16/11$	x_2
0	0	$-2/11$	$3/11$	$20/11$	x_1
0	0	1	1	0	E

En remarque que E=0, Alors STOP. La solution optimale est $x_1 = 20/11$, $x_2 = 16/11$. *La valeur optimale de problème primal est* $z = 3 \times 20/11 + 4 \times 16/11 = 124/11$.

3.3 Algorithme hongrois

L'algorithme hongroise ou méthode hongroise, aussi appelé algorithme de Kuhn-Munkres, est un algorithme d'optimisation combinatoire, qui résout le problème d'affectation en temps polynomial.

Il a été proposé en 1955 par le mathématicien américain Harold Kuhn, qui l'a baptisé "méthode hongroise" parce qu'il s'appuyait sur des travaux antérieurs de deux mathématiciens hongrois : Dénes Kőnig et Jenő Egerváy. L'article a été publié dans la revue Naval Research Logistic Quarterly car le projet de recherche était financé par l'Office of Naval Research Logistic Branch. James Munkres a revu l'algorithme en 1957, et a prouvé qu'il s'exécutait

en tempe polynomial.
En 2006, il a été découvert que le mathématicien allemand Charles Gustave Jacob Jacobi avait décrit l'algorithme dans un article posthume, au XIX^e siècle.
L'algorithme est vu comme une des premières apparitions de l'idée de schéma primal-dual. On présente cet algorithme sous plusieurs formes. La première forme est une présentation assez combinatoire utilisant des matrices (hongrois), alors que la seconde est une présentation dans le cadre de l'optimisation linéaire (schéma primal-dual).

3.3.1 Description par l'optimisation linéaire (schéma primal dual)

Problème d'affectation linéaire

On a vu le problème d'affectation linéaire dans le chapitre 2, sa forme général s'écrit comme suit :

$$(LAP)\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = \overline{1,n} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = \overline{1,n} \\ x_{ij} \in \{0,1\} \qquad i = \overline{1,n} \qquad j = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Notons immédiatement que
-La matrice A des contraintes est totalement unimodulaire.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & \cdots & 1 & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & & & 1 & & & 1 & & \\ & \ddots & & & \ddots & & & \ddots & \\ & & 1 & & & 1 & & & 1 \end{pmatrix}$$

Tel que $A(2n \times n^2)$.

Définition 3.1 *(Matrice totalement unimodulaire) Une matrice $A(m \times n)$à coefficients entiers est dite totalement unimodulaire (TUM)si le déterminants de toutes ses sous-matrices*

carrées valent $\{0, 1, -1\}$
Lorsque la matrice A est TUM la solution par la relaxation linéaire est entière.

Il est donc équivalent de considérer la relaxation linéaire (voir section 2.3) du problème d'affectation linéaire :

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \forall i \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \forall j \\ x_{ij} \geq 0 \qquad . \end{cases} \tag{3.12}$$

et dés lors, il est possible de se référer aux propriétés et technique de la (LP) en variable continues, en particulier aux propriétés de la dualité et à la technique de l'algorithme primal-dual.
Le problème dual s'écrit :

$$\begin{cases} \max w = \sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j \\ u_i + v_j \leqslant c_{ij} \\ u_i, v_j \textit{signe quelconque} \\ i, j = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{3.13}$$

Oú u_i et(v_i) est la variable duale associée à la contrainte $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1(\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1)$ respectivement, et le théorème des écarts complémentaires fournit les relations suivant :

$$x_{ij}(c_{ij} - u_i - v_j) = 0 \quad \forall (i, j)$$

Remarque 3.1 *:*
• *Le problème d'affectation constitue une relaxation du célèbre problème du " voyageur de commerce" [11], par là il peut servir à calculer aisément une fonction d'évaluation dans une procédure "Branch and Bound" relative à ce problème.*
• *Etant donné que parmi les* $2n$ *contraintes il y en* $2n-1$ *linéairement indépendantes et que dans chaque solution de base admissible, seules* n *variable seront positives (égale à 1), les solution de base sont toutes fortement dégénérées(*$n-1$ *variable de base sont nulles).*

L'approche primale-dual appliquée au problème d'affectation

Le théorème des écarts complémentaire implique, qu'à l'optimum,

$$x_{ij} = 1 \longrightarrow c_{ij} - u_i - v_j = 0,$$

c'est-à-dire qu'une affectation (i,j) ne peut être réalisée que si le coût réduit

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j = 0.$$

L'ensemble de l'algorithme s'effectuera sur la matrice $\overline{C} = (\bar{c}_{ij})$ des coût réduits, à partir d'une solution initiale $(u_i, v_j, i, j = 1, ..., n)$ admissible du problème dual.
A chaque itération, les couples (i,j) correspondant à n coût réduit nul, définissent le problème primal restreint (3.3) ; seules ces affectation (i,j) peuvent être considérées pour construire une solution admissible du primale. La terminologie suivante sera utilisée :
Un zéro dans la matrice $\overline{C} = (\bar{c}_{ij} = 0)$ sera dit encadrer (□) s'il correspond au choix d'une affectation $(x_{ij} = 1)$. Pour respect les contrainte primales, il ne peut y avoir plus d'un zéro encadrer par ligne et par colonne.
Une solution admissible du problème primal restreint-et donc une solution optimale du problème d'affectation.
Sera atteinte dés que n zéros de $\overline{C}$ seront encadrer

a)Initialisation

La solution admissible initiale du problème dual est construit de façon à ce
- Qu'il y ait au moins un zéro dans chaque ligne et dans chaque colonne de $\overline{C}$;
- Que ces emplacements initiaux de coût réduit nul correspondent à une valeur minimale de la fonction z.

Pour ce faire, la solution initiale admissible de dual est définie par

$$u_i = min_{j=1,..,n} c_{ij} \qquad \forall i \quad v_j = min_{i=1,..,n} c_{ij} - u_i \qquad \forall j,$$

et la matrice initiale

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j \qquad \forall (i, j),$$

est considérée.
Un en-cadrage initiale de zéro(affectation initiales) est construit : par exemple, en affectant systématiquement le premier zéro rencontré chaque ligne, à condition que dans la colonne, il n'y ait encore aucun zéro encadrer.
Si n zéro sont encadrée, il y a donc n affectation et elles correspondent à une solution optimale.

Remarque 3.2 *Le caractère non admissible de la solution du problème primal restreint se mesure donc par le fait qu'il y a moins que n zéros encadrées.*

b)Résolution du problème restreint

1- Soit une ligne i_0 de la matrice $\overline{C}$ qui ne possède pas de zéros encadrés.

L'objectif de l'itération est d' essayer, à l'aide des zéros disponible de $\overline{C}$, d'encadrer un zéro dans la ligne i_0-tout en conservant un zéro encadré dans les ligne qui en possède déjà un.

Si la ligne i_0 ne possède aucun zéro, il est nécessaire d'en créer un ; aussi la solution duale est modifiée

$$u_{i_0} \longleftarrow u_{i_0} + \Delta,$$

où

$$\Delta = min_j \overline{c}_{i_0,j},$$

et la ligne i_0 de la matrice des coûts réduits est actualisée

$$\overline{c}_{i_0,j} \longleftarrow \overline{c}_{i_0,j} - \Delta \qquad j = 1, ..., n.$$

De sort qu'elle possède à présent au moins un zéro.

2- La procédure de repérage qui est initialisée par le repère (0) attribuée à la ligne i_0 est définie ainsi :

- Repérer une colonne j, non encore repérée, qui contient un zéro non encadré dans une ligne i repérée ; attribuer à cette colonne le repère (i).
- Repérer une ligne i, non encore repérée, qui contient un zéro encadré dans une colonne j repérée ; attribuer à cette ligne le repère (j).

Le zéro situé à la j^{eme} place de la ligne i pourrait être démarqué ;

- Continuer cette attribution de repères tant qu'elle est possible.

cette procédure de repérage s'arrête dans deux situation :

α) lorsqu'une colonne - soit j_0- ne contenant pas de zéro encadré est repérée.

Il est alors possible d'augmenter d'une unité le nombre de zéros encadrés (c'est-à-dire d'affectation), en encadrant un zéro dans la ligne i_0 de $\overline{C}$.

Pour ce faire, appliquer les règles suivantes en commençant par la colonne j_0 qui ne contient pas zéros encadrés :

- dans la colonne j, repérée (i), encadrer le zéro à la place (i,j) ; considérer la ligne i ;
- dans la ligne i, repérée (j), désencadrer le zéro à la place (i,j) ; considérer la colonne j ;
- continuer jusqu'à arriver à la ligne i_0, repérée (0).

Le nombre d'affectations a augmenté d'une unité.

- Si le nombre d'affectation vaut n, une solution optimale a été déterminée ; la valeur optimale de la fonction économique vaut

$$\sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j$$

qui n'est rien d'autre que la somme des n coûts réduits encadrés ;

- Sinon, les repères sont effacés et la procédure de repérage est recommencée à partir d'une nouvelle ligne (i_0) ne contenant pas de zéro encadré ;

β) lorsqu'il n'est plus possible de repérer de nouvelles colonnes, c'est à dire que tous les zéros non encadrés situés dans les lignes repérées ont été utilisés. Dans ce cas, la procédure de repérage n'a pas abouti ; pour la poursuivre, il faut d'abord modifier la solution duale, comme indiqué au point **c)** ci-dessous.

c) Obtention d'une nouvelle solution duale admissible

Pour pouvoir poursuivre la procédure de repérage du point **b)**, il est nécessaire de créer au moins un zéro supplémentaire dan une ligne repérée et une colonne non repérée.

Soit $\overline{I}(\overline{J})$ l'ensemble des indices des ligne(colonnes) repérées et

$$I = 1, ..., n/\overline{I}$$

$$J = 1, ..., n/\overline{J}$$

déterminons

$$\Delta = min_{i \in \overline{I}; j \in \overline{J}} \overline{c}_{ij}.$$

La nouvelle solution dual admissible est définie de la façon suivant

$$\begin{cases} u_i \longleftarrow u_i + \Delta & i \in \overline{I} \\ v_j \longleftarrow v_j - \Delta & j \in J \\ u_i \ i \in I \quad et \quad v_j \ j \in \overline{J} \, ne \, sont \, pas \, modifiés. \end{cases}$$

Déterminant la nouvelle matrice $\overline{C}$ actualisée par les relations

$$\begin{cases} \overline{c}_{ij} \longleftarrow \overline{c}_{ij} - \Delta & i \in \overline{I}, j \in J \\ \overline{c}_{ij} \longleftarrow \overline{c}_{ij} + \Delta & i \in I, j \in \overline{J} \\ \overline{c}_{ij} \ pour \ (i \in \overline{I}, j \in \overline{J}) \ et \ (i \in I, j \in J) \, ne \, sont \, pas \, modifiés. \end{cases}$$

Ainsi au moins un coût réduit $\overline{c}_{ij}(i \in \overline{I}, j \in J)$ a été annulé, sans altérer les coût réduits $\overline{c}_{ij}(i \in \overline{I}, j \in \overline{J})$; la procédure de repérage du point **b)** peut donc être reprise, là où elle avait dû être arrêtée.

Remarque 3.3 *:*

1. La modification des coûts réduits détermine un nouveau problème primale restreint.

2. Lorsque la solution duale est modifiée, le nombre de lignes repérées est toujours supérieur d'une unité au nombre de colonnes repérées :

$$|\overline{I}| = |\overline{J}| + 1$$

Aussi cette modification conduit à une augmentation d'une valeur Δ de la fonction économique ω du dual et donc aussi de la fonction économique z du primal.

3.3.2 Description matricielle

Algorithme

Exemple 3.2 *Soit le problème d'affectation linéaire avec n=5*

$$c = \begin{pmatrix} 17 & 15 & 9 & 5 & 12 \\ 16 & 16 & 10 & 5 & 10 \\ 12 & 15 & 14 & 11 & 5 \\ 4 & 8 & 14 & 17 & 13 \\ 13 & 9 & 8 & 12 & 17 \end{pmatrix}$$

étape 1 : réduction des lignes *:créer une nouvelle matrice des coûts en choisissant le coût minimale sur chaque ligne et en le soustrayant de chaque coût sur la ligne .*

$$u_i = min_{j=1,..,5} c_{ij} \quad i = 1, ..., 5; c_{ij} = c_{ij} - u_i$$

$\overline{c} =$

	1	2	3	4	5	u_i
1	17	15	9	5	12	5
2	16	16	10	5	10	5
3	12	15	14	11	5	5
4	4	8	14	17	13	4
5	13	9	8	12	17	8

$\Rightarrow \overline{c} =$

	1	2	3	4	5	u_i
1	12	10	4	0	7	5
2	11	11	5	0	5	5
3	7	10	9	6	0	5
4	0	4	10	13	9	4
5	5	1	0	4	9	8

réduction des colonnes *:créer une nouvelle matrice des coûts en choisissant le coût minimale sur chaque colonne et en le soustrayant de chaque coût dans la colonne.*

$$v_j = min_{i=1,..,5} c_{ij} \quad j = 1, ..., 5; c_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$$

$\overline{c} =$

	1	2	3	4	5	u_i
1	12	10	4	0	7	5
2	11	11	5	0	5	5
3	7	10	9	6	0	5
4	0	4	10	13	9	4
5	5	1	0	4	9	8
v_j	0	1	0	0	0	

$\Rightarrow \overline{c} =$

	1	2	3	4	5	u_i
1	12	9	4	0	7	5
2	11	10	5	0	5	5
3	7	9	9	6	0	5
4	0	3	10	13	9	4
5	5	0	0	4	9	8
v_j	0	1	0	0	0	

étape 2 : *Déterminer le nombre minimal de lignes nécessaires si les lignes et les colonnes pour couvrir tous les zéros. si ce nombre est égale au nombre de lignes (ou colonnes), la matrice est réduite ; stop on à trouve la solution optimale. si ce nombre est inférieur au nombre de lignes (ou colonnes), aller à l'étape 3.*

$\overline{c} =$

	1	2	3	4	5	u_i
1	12	9	4	$\boxed{0}$	7	5
2	11	10	5	\ 0	5	5
3	7	9	9	6	$\boxed{0}$	5
4	$\boxed{0}$	3	10	13	9	4
5	5	$\boxed{0}$	\0	4	9	8
v_j	0	1	0	0	0	

Dans ce cas le nombre minimal de lignes est de 4, donc, on vas à l'étape 3.

étape 3 :

$\overline{c} =$

					×		
		1	2	3	4	5	u_i
×	1	12	9	4	$\boxed{0}$	7	5
×	2	11	10	5	\ 0	5	5
	3	7	9	9	6	$\boxed{0}$	5
	4	$\boxed{0}$	3	10	13	9	4
	5	5	$\boxed{0}$	\0	4	9	8
	v_j	0	1	0	0	0	

On marque la 1^{iere}*, la* $2^{\text{ème}}$*ligne et la* $4^{\text{ème}}$ *colonne ,et on applique les règles de l'étape 4.*

Le plus petite élément de la matrice

$$w = \begin{pmatrix} 12 & 9 & 4 & 7 \\ 11 & 10 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

est $\Delta = 4$, *on soustrait cette valeur de la matrice* W *et on l'ajout* Δ *au vecteur* $v = (6\ 13\ 4)^t$ *qui traverses par deux traits, les autres valeurs restants les mêmes.*
aprée On répétée les mêmes étapes 2 on obtient le tableau suivant :

8	5	$\boxed{0}$	$\not 0$	3
7	6	1	$\boxed{0}$	1
7	9	9	10	$\boxed{0}$
$\boxed{0}$	3	10	17	9
5	$\boxed{0}$	$\not 0$	8	9

Elle contient à présent $n = 5$ *affectation est donc une solution optimal :*

$$\widehat{x}_{13} = \widehat{x}_{24} = \widehat{x}_{35} = \widehat{x}_{41} = \widehat{x}_{52} = 1$$

avec coût total :

$$z = \widehat{c}_{13} + \widehat{c}_{24} + \widehat{c}_{35} + \widehat{c}_{41} + \widehat{c}_{52} = 32$$

où $\widehat{c} = u_i + v_j + \Delta = 5 + 5 + 5 + 4 + 8 + 1 + 4 = 32.$

3.4 Exercices

Dans cette partie, nous avons quelques exercices corrigés sur l'algorithme hongroise. Les exercices sont suivis des corrections.

Fiche d'exercices 3

Exercice 1

Dans le cas d'un problème de programmation linéaire (minimisation) possédant une solution optimale finie, l'algorithme primal du simplexe permet à chaque itération de passer d'une solution de base ralisable pour le primal à une autre jusqu'à ce que les conditions d'optimalité soient satisfaites : un vecteur de coût relatif dont les composantes sont non négatives.

1. Qu'en est-il de l'algorithme dual du simplexe ?
2. Qu'en est-il de l'algorithme primal-dual ?

Exercice 2

Une compagnie de taxis a un surplus d'une voiture dans les villes A, B, C et D mais il lui manque une voiture dans chacune des villes E, F, G et H. La matrice suivante donne en milles la distance entre les villes concernées :

	E	F	G	H
A	41	72	39	52
B	22	29	49	65
C	27	39	60	51
D	45	50	48	52

1. Comment doit-on affecter les voitures libres à chaque ville si l'on veut minimiser le total des distances parcourues ?
2. En utilisant la méthode hongroise, montrer que l'affectation optimale est la suivante :

$$A \longrightarrow G, B \longrightarrow F, C \longrightarrow E, D \longrightarrow H.$$

Fiche d'exercices 3 : Correction

Corrigé 1

1. L'algorithme dual du simplexe permet de passer d'une solution de base du primal à une autre qui satisfait aux conditions d'optimalité : un vecteur de coût relatif dont les composantes sont non négatives. L'algorithme termine lorsque la solution de base est réalisable pour le primal.
2. L'algorithme primal-dual permet de passer à chaque itération d'une solution réalisable pour le problème dual à une autre, et d'une solution irréalisable pour le primal qui satisfait aux conditions d'optimalité (le théorème des écarts complémentaires) à une autre. L'algorithme termine lorsque la solution primale est réalisable.

Bibliographie

[1] M. Banciu, *Dual simplex. Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science 2010.*

[2] M. S. Bazaraa, J. J. Jarvis, H. D. Sherali, *Linear Programming and Network Flows, 4th Edition, Wiley, 2010.*

[3] E. M. L. Beale, *An alternative method for linear programming. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 50(4), 513-523. 1954.*

[4] R.Belgacem, *Sur quelques méthodes de résolution pour le TSP "Travelling Salesman Problem", Mémoire de Magister , Univ. Mostaganem, 2012.*

[5] A. F. Benghezal, *Programmation linéaire, 2000*

[6] H. Chennouf, *Méthode d'optimisation du sous-gradient dans la programmation linéaire en nombre entier, Mémoire de Master en Mathématique, université Hassiba Ben Bouali. Chlef , 2018.*

[7] E.K.P. Chong, S.H. ZakAn, Introduction to Optimization, 4th Edition Publisher : John Wiley and Sons, 2013.

[8] G.B. Dantzig, *Linear Programming and Extensions. Princeton, NJ : Princeton University Press, 1963.*

[9] G.B. Dantzig, *Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities. In : Activity Analysis of Production and Allocation (T.C. Koopmans, ed.), Wiley, New York, pp. 359–373, 1951.*

[10] H.H.Kuhn, *the Hungarian Methode for the AssignmentProblem,Naval Research Logistics Quarterly 2 (1955) 83-97.*

[11] E.L. Lawler, J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan et D.B. Shmoys, *The traveling salesman problem : a guided tour of combinatorial optimization, Wiley, 1985.*

[12] C.E. Lemke, *The dual method of solving the linear programming problem, Naval Research Logistics Quarterly, John Wiley and Sons, vol. 1(1), pages 36-47. 1954.*

[13] N. Maameri et S. Saghi, *Receuil sur les méthodes d'optimisation combinatoire et application sur un problème de transport réel : cas Ifri, Mémoire de Master en Mathématiques, université A/MIRA. Béjaia, 2013.*

[14] M. Minoux, *Programmation mathématique ,théoie et algorithmes (2 édition).*

[15] K. Mellouli, A. el- Kamel, Pierre Borne, Programmation linéaire et applications, edition TECHNIP, 2004.

[16] G.L.Nemhauser et L.A.Wolsey , *Integrer and Combinatorial Optimization.Wiley.New York, 1998*

[17] G.L. Nemhauser et R.S Garfinkel *integer programing. wiley(1972)*

[18] J. Teghem, *Programmation linéaire, Édition de l'université de Bruxelles, 2003.*