Université Mohamed Khider de Biskra

Faculté des sciences exactes et sciences de la nature et de la vie

Département de Mathématiques

Master 1.

Tests statistiques

Rattrapage

Exercice 1. 6

Soit $(X_1, ..., X_n)$ un échantillon d'une variable aléatoire X normale de moyenne 0 et de variance σ^2. $\bar{X}$ est un estimateur sans biais pour μ.

Calculer les moments centrés d'ordre 3 et 4 de $\bar{X}$, puis ses coefficients de dissymétrie et d'aplatissement.

2 2 1 1

Exercice 2. 7

On se propose d'effectuer un contrôle de réception de pièces fabriquées en série. p étant le pourcentage de pièces défectueuses fabriquées, on confronte les deux hypothèses suivantes:

$$\begin{cases} H_0 : p = 0.05 \\ H_1 : p = 0.08 \end{cases}$$

Afin de prendre une décision, on extrait de façon aléatoire un échantillon de 400 pièces et on fixe à 0.06 la valeur critique pour le pourcentage de pièces défectueuses de l'échantillon.

Calculer les risques de première et de deuxième espèce dans cette situation.

Exercice 3. 7

Dans une agence de location de voitures, le patron veut savoir quelles sont les voitures qui n'ont roulé qu'en ville pour les revendre immédiatement. Pour cela, il y a dans chaque voiture une boite noire qui enregistre le nombre d'heures pendant lesquelles la voiture est restée au point mort, au premier rapport, au deuxième rapport,..., au cinquième rapport. On sait qu'une voiture qui ne roule qu'en ville passe en moyenne 10% de son temps au point mort, 5% en première, 30% en seconde, 30% en troisième, 20% en quatrième, et 5% en cinquième. On décide de faire un test pour savoir si une voiture n'a roulé qu'en ville ou non.

1) Sur une première voiture, on constate sur 2000 heures de conduite: 210 h au point mort, 94 h en première, 564 h en seconde, 630 h en troisième, 390 h en quatrième, et 112 h en cinquième. Cette voiture n'a-t-elle fait que rester en ville? avec $\alpha = 5\%$.

2) Avec une autre voiture, on obtient les données suivantes: 220 h au point mort, 80 h en première, 340 h en seconde, 600 h en troisième, 480 h en quatrième et 280 h en cinquième.

(6)

Exercice 1 :

$(X_1, \dots, X_n)$ n.v.a ⫫

$X \sim N(0, \sigma^2)$

$E(\bar{X}) = \mu$ ie $\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$\bar{X} \sim N(\underbrace{E(\bar{X})}_{\mu}, V(\bar{X}))$

$\bar{X} \sim N(0, \frac{\sigma^2}{n})$

1/ $\mu_3(\bar{X}) = E[\bar{X} - E(\bar{X})]^3 = E[\bar{X} - \mu]^3 = E[\bar{X} - 0]^3 = E[\bar{X}]^3 = E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i]^3 = \frac{1}{n^3} E[\sum_{i=1}^{n} X_i]$

exp : pour $n = 2$:

$\mu_3(\bar{X}) = \frac{1}{2^3} E[\sum_{i=1}^{2} X_i]^3 = \frac{1}{8} E[X_1 + X_2]^3 = \frac{1}{8} E[\underbrace{(X_1+X_2)^2 (X_1+X_2)}_{(*)}]$

$(*) = (X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2)(X_1+X_2) = X_1^3 + X_1^2X_2 + X_1X_2^2 + X_2^3 + 2X_1^2X_2 + 2X_1X_2^2$

$= (X_1^3 + X_2^3) + 3X_1^2X_2 + 3X_1X_2^2 = \sum_{i=1}^{2} X_i^3 + \underbrace{3}_{c^{ste}} \sum_{i \neq j = 1}^{2} X_i^2 X_j$

(2)

pour n on a :

$\mu_3(\bar{X}) = \frac{1}{n^3} E[\sum_{i=1}^{n} X_i]^3 = \frac{1}{n^3} E[\sum_{i=1}^{n} X_i^3 + c^{ste} \sum_{i \neq j = 1}^{n} X_i^2 X_j]$

$= \frac{1}{n^3} [\sum_{i=1}^{n} E(X_i^3) + c^{ste} \sum_{i \neq j = 1}^{n} E(X_i^2 X_j)]$

$= \frac{1}{n^3} [n E(X_1^3) + c^{ste} \sum_{i \neq j = 1}^{n} E(X_i^2)\underbrace{E(X_j)}_{\mu_j = \mu}]$ / car X_i^2 ⫫ X_j $(i \neq j)$

$= \frac{1}{n^3} [n E(X_1^3) + c^{ste} \underbrace{\sum_{i \neq j = 1}^{n} E(X_i^2) 0}_{0}]$

$= \frac{n}{n^3} E(X_1^3)$

$= \frac{1}{n^2} E(X_1^3) = \frac{1}{n^2} E(X_1 - \underbrace{E(X_1)}_{\mu_1 = \mu = 0})^3 = \frac{1}{n^2} \mu_3(X)$

$\Rightarrow \boxed{\mu_3(\bar{X}) = \frac{\mu_3(X)}{n^2}}$

- Coefficient de dissymetrie de $\bar{X}$: $Cd(\bar{X}) = \frac{\mu_3(\bar{X})}{\sigma_{\bar{X}}^3}$

$Cd(\bar{X}) = \frac{\mu_3(X)}{n^2} \cdot \frac{1}{\sigma_{\bar{X}}^3} = \frac{\mu_3(X)}{n^2} \cdot \frac{1}{(\sigma_{\bar{X}}^2)^{3/2}} = \frac{\mu_3(X)}{n^2} \cdot \frac{n^{3/2}}{\sigma^3} = \frac{\mu_3(X)}{\sigma^3} \cdot n^{3/2} \cdot n^{-2}$

$$= \frac{\mu_3(X)}{\sigma_x^3} \cdot n^{3/2-2} = \frac{\mu_3(X)}{\sigma_x^3}\, n^{\frac{3-4}{2}} = \frac{\mu_3(X)}{\sigma_x^3}\, n^{-1/2} = \frac{\mu_3(X)}{\sigma_x^3}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{Cd(X)}{\sqrt{n}}$$

$$\boxed{Cd(\bar{X}) = \frac{Cd(X)}{\sqrt{n}}} \qquad (1)$$

2/ $$\mu_4(\bar{X}) = E[\bar{X} - \underbrace{E(\bar{X})}_{\mu=0}]^4 = E[\bar{X}]^4 = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right]^4 = \frac{1}{n^4}\underbrace{E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]^4}_{(*)}$$

exp: pour $n=2$:

$$(*) = \left[\sum_{i=1}^{2} X_i\right]^4 = (X_1+X_2)^4 = (X_1+X_2)^2(X_1+X_2)^2 = (X_1^2+X_2^2+2X_1X_2)(X_1^2+X_2^2+2X_1X_2)$$

$$= X_1^4 + X_1^2X_2^2 + 2X_1^3X_2 + X_1^2X_2^2 + X_2^4 + 2X_1X_2^2 + 2X_1^3X_2 + 2X_1X_2^3 + 4X_1^2X_2^2$$

$$= X_1^4 + X_2^4 + 6X_1^2X_2^2 + 4X_1^3X_2 + 2X_1X_2^2 + 2X_1X_2^3$$

$$\sum_{i=1}^{2} X_i^4 + 6\sum_{i<j}^{2} X_i^2X_j^2 + 4X_1^3X_2 + 2X_1X_2^2 + 2X_1X_2^3$$

Donc:

$$E(*) = E\left(\sum_{i=1}^{2} X_i\right)^4 = E\left(\sum_{i=1}^{2} X_i^4 + 6\sum_{i<j}^{2} X_i^2X_j^2 + 4X_1^3X_2 + 2X_1X_2^2 + 2X_1X_2^3\right)$$

$$= 2E(X_1^4) + 6E(X_1^2X_2^2) + 4E(X_1^3X_2) + 2E(X_1X_2^2) + 2E(X_1X_2^3)$$

$$= 2E(X_1^4) + 6\underbrace{E(X_1^2)E(X_2^2)}_{X_1^2 \perp\!\!\!\perp X_2^2} + 4\underbrace{E(X_1^3)E(X_2)}_{X_1^3 \perp\!\!\!\perp X_2} + 2\underbrace{E(X_1)E(X_2^2)}_{X_1 \perp\!\!\!\perp X_2^2} + 2\underbrace{E(X_1)E(X_2^3)}_{X_1 \perp\!\!\!\perp X_2^3}$$

$$= 2E(X_1^4) + 6\sigma_1^2\sigma_2^2 + 4E(X_1^3)\underbrace{\mu_2}_{=\mu=0} + 2\underbrace{\mu_1}_{=\mu=0}E(X_2^2) + 2\underbrace{\mu_1}_{=\mu=0}E(X_2^3)$$

$$= 2E(X_1^4) + 6\underbrace{\sigma_1^2}_{=\sigma^2}\underbrace{\sigma_2^2}_{=\sigma_2^2} + 0 + 0 + 0$$

$$2E(X_1^4) + 6\sigma^4$$

$$2E(X_1^4) + 6\underbrace{C_{2=n}^2}_{1}\sigma^4 = 2E(X_1^4) + 6\cdot\frac{2!}{2!\,0!}\cdot\sigma^4 = 2E(X_1^4) + 6\cdot 1\cdot\sigma^4$$

pour n v.a:

$$\mu_4(\bar{X}) = \frac{1}{n^4}\left[nE(X_1^4) + 6C_n^2\sigma^4\right] = \frac{E(X_1^4)}{n^3} + 6\frac{C_n^2\sigma^4}{n^4}$$

$$= \frac{\mu_4(X)}{n^3} + 6\frac{n!}{2!(n-2)!}\frac{1}{n^4}\sigma^4 = \frac{\mu_4(X)}{n^3} + 6\frac{n(n-1)(n-2)!}{2n^4\,(n-2)!}\sigma^4$$

$$= \frac{\mu_4(X)}{n^3} + 3\frac{(n-1)}{n^3}\sigma^4$$

$$= \boxed{\frac{\mu_4(X) + 3(n-1)\sigma^4}{n^3} = \mu_4(\bar{X})} \qquad (2)$$

. Coefficient d'aplatissement de $\bar{x}$: $Ca(\bar{X}) = \frac{\mu_4(\bar{X})}{\sigma_{\bar{X}}^4} = \frac{\mu_4(X)+3(n-1)\sigma^4}{n^3} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\sigma_X^2}{n}\right)^{4/2}}$

$$Ca(\bar{X}) = \frac{\mu_4(X)+3(n-1)\sigma^4}{n^3} \cdot \frac{n^2}{\sigma_X^4} = n^2\left[\frac{\mu_4(X)}{\sigma_X^4 n^3} + \frac{3(n-1)}{n^3}\right] = \frac{1}{n}\frac{\mu_4(X)}{\sigma_X^4} + \frac{3(n-1)}{n}$$

$$= \frac{1}{n} Ca(X) + \frac{3(n-1)}{n} = \frac{Ca(X)+3(n-1)}{n} = \boxed{3 + \frac{Ca(X)-3}{n} = Ca(\bar{X})}$$ (1)

Exercice 2 : (7)

$\begin{cases} H_0 : p = 0{,}05 = p_0 \\ H_1 : p = 0{,}08 = p_1 \end{cases}$

x_i : L'etat de la piece i
$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si la piece est defectueuse} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

p : proportion de pieces defectueuse 0,25

$X \sim B(p)$ 0,25

Modele : Comme $n \geq 30$ (400 = n), La v.a $\underline{P}$ est approximativement distribuée selon la loi normale ie 0,25

$\underline{P} \overset{TCL}{\sim} N(E(\underline{P}), V(\underline{P}))$ (1,5)

$\underline{P} \sim N(p, \frac{pq}{n})$ 0,25 0,25 $/ q = 1-p$

$\frac{\underline{P}-p}{\sqrt{qp/n}} \sim N(0,1)$ 0,25

La valeur critique : $w = \{\underbrace{\underline{P} \in \mathbb{R}}_{[0,1]} / \overbrace{\underline{P} \geq 0{,}06}^{\text{On rejette } H_0}\}$ (1)

. Risque de 1ere espece : $\alpha = P($rejeter H_0 / H_0 est vraie$) = P(H_1/H_0) = P(w/H_0)$ 0,25 0,25 0,25

$$P(\underline{P} \geq 0{,}06/H_0) = P\left(Z \geq \frac{0{,}06-p}{\sqrt{pq/n}}/H_0\right) = P\left(Z \geq \frac{0{,}06-0{,}05}{\sqrt{0{,}05(\underbrace{1-0{,}05}_{0{,}95})/400}}\right)$$ 0,25 0,25 (2)

$$= P\left(Z \geq \frac{0{,}01}{0{,}0109}\right) = P(Z \geq 0{,}92)$$

$$= 1 - P(Z \leq 0{,}92) = 1 - F_Z(0{,}92) = 1 - 0{,}8212 = 0{,}1788 \simeq 0{,}18$$ 0,25 0,25 0,25

$$\boxed{\alpha = 0{,}18}$$

Le risque de rejeter H_0 alors qu'elle est vraie est d'environ 0,18.

• Le risque de 2ème espèce: $\beta = P(\text{Rejeter } H_1 / H_1 \text{ est vraie}) = P(H_0/H_1) = P(\overline{W}/H_1)$ 4-

$\beta = P(\hat{P} < 0{,}06 / H_1) = P\left(Z < \frac{0{,}06-0{,}08}{\sqrt{0{,}08(1-0{,}08)/400}}\right) = P\left(Z < \frac{-0{,}02}{0{,}0135}\right)$

$= P(Z < -1{,}47) = F_Z(-1{,}47) = \underset{0,5}{1-} F_Z(1{,}47) = 1-0{,}9292 = 0{,}0708 \simeq 0{,}0$

2,5

$\boxed{\beta = 0{,}07}$

Le risque d'accepter H_0 alors qu'elle est fausse est d'environ 0,07

Exercice 3: 7

	x_i	n_i	np_i
i=1	0	210	2000(0,1) = 200
i=2	1	94	2000(0,05) = 100
i=3	2	564	2000(0,3) = 600
i=4	3	630	2000(0,3) = 600
i=5	4	390	2000(0,2) = 400
i=6=K	5	112	2000(0,05) = 100
$\sum$		2000 (1,5)	2000 (1,5)

$np_i \geq 5$. 0,25

$\alpha = 0{,}05$

H_0: La voiture a roulé qu'en ville 0,25
H_1: " " n'a pas roulé qu'en ville.

Test d'ajustement: 0,25

Decision: On rejette H_0 au niveau de signification α si $D^2 \geq c$. 0,75

ou c est la solution de l'équation $P(D^2 \geq c) = \alpha$ 0,25

Comme $P(D^2 \geq c) = \alpha \Rightarrow c = F^{-1}_{\chi^2_{K-1}}(1-\alpha)$ 0,25 $= F^{-1}_{6-1}(1-0{,}05) = F^{-1}_5(0{,}95) = \boxed{11{,}07}$ 0,25

(car $D^2 \underset{0,25}{\sim} \chi^2_{K-1} = \chi^2_{6-1} = \chi^2_5$).

$D^2 = \sum_{i=1}^{K=6} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$ 0,25 $= \frac{(210-200)^2}{200} + \dots + \frac{(112-100)^2}{100} = \frac{(10)^2}{200} + \dots + \frac{(12)^2}{100} = \frac{(6)^2}{100} + \dots + \frac{(10)^2}{400}$ 0,25

$= 0{,}5 + 0{,}36 + 2{,}16 + 1{,}5 + 0{,}25 + 1{,}44 = \boxed{6{,}21}$ 0,25

Puisque: $d^2 \not\geq c$
$6{,}21 \not\geq 11{,}07$ 0,25

Alors on accepte H_0 0,25 ie (La voiture n'a pas roulé qu'en ville). 0,25

Ministry of Higher Education, University of Mohamed Kheider of Biskra

Faculty of Exact Sciences and Natural and Life Sciences

Department of Mathematics

Level: Master One

First Semester ACHIEVEMENT TEST in English Language

First Name: Sabrine Family Name: Zekri Group N°: Anglais	Mark/20:

Exercise 01: Put the verbs between (...) in **the Simple present tense. (5pts)**

0,25 0,25 5/5

1. Do you drink mineral water? **(to drink)** 0,5
2. Do Sarah and Linda feed their pets? **(to feed)** 0,5
3. Does your teacher check your homework? **(to check)** 0,5
4. Do they live in the old house? **(to live)** 0,5
5. Does the cat sit on the wall in the mornings? **(to sit)** 0,5
6. Does Nina play computer games? **(to play)** 0,5
7. Do your parents watch TV in the afternoon? **(to watch)** 0,5
8. Does your grandmother answer the phone? **(to answer)** 0,5
9. Does Andy do the shopping? **(to do)** 0,5
10. Do Garry and Ken have a cup of tea in the afternoon? **(to have)** 0,5

Exercise 02: Define the following terms. **(3pts)** 3/3

1. Acute Triangle: A triangle with three acute angles 1

2. Addition Fact: Two 1-digit numbers and their sum, such 6+1=7 1

3. Bar Graph: a graph with horizontal or vertical bars, that represents a data 1

Exercise 03: From **the presentations** that we have done in the previous lectures, answer the following questions. **(2 pts)** 2/2

1. Do the Egyptian scientists only who talk about the Story of Numbers?

No, Not only them but there are other scientists like Greek, Roman, babilion ...etc. 1

2. Explain when the **"0"** comes as **a number** and when it comes as **a symbol.**

At the begining "0" comes as a symbol than after many researches, it becomes as a number. 1

....
....

Exercise 04: Put the verbs between (...) in **the simple past tense. (5pts)**

5/5

1. The man **(to walk)** ...walked..so fast. 1
2. Thomas **(to help)** ..helped.me with my homework. 1
3. The policeman **(to stop)** .Stopped..the bus. 1
4. Jenny **(to sleep)** ..Slept....very late as well. 1
5. Dan **(to take)** ...took......his car to car wash. 1

Exercise 05: Summarize the following paragraph. **(5 pts)**

"Fundamentally, High School Mathematics at work is about mathematics. Its view of mathematics and mathematics learning recognizes a potential symbiotic relationship between concrete and abstract mathematics, each contributing to the other, enhancing their joint richness and power. This view is not new. Historically, much mathematics originated from attempts to solve problems from science and engineering have been based on creative ways of applying some mathematics that until then had no known applications. Mathematics can help solve problems, and complex workplace problems can help stimulate the creation of new mathematics". **(The National Academics of Sciences Engineering Medicine, 1998, p. 3)**

The Summary:

5/5

According to the National Academics of Sciences Engineering Medicine, 1998, p. 3), Mathematics play an important and crusual role in solving problems.

Good Luck ☺

Miss.ZEKRI. S

UNIVERSITY OF BISKRA MOHAMMED KHIETHER

MATHEMATIC FACULTY

Second Exam of English Module

Name: ....

group:..........................

ACTIVITY ONE : TRUE OR FALSE (17 p)

1-Trigonometry is a branch of mathematics that studies relationships between side lengths and angles of triangles. ....

2-Trigonometric ratios are the ratios between edges of a right triangle..........................

3-Sine function (sin), defined as the ratio of the side opposite the angle to the hypotenuse. ....

4-Cosine function (cos), defined as the ratio of the adjacent leg to the hypotenuse...............

5-Tangent function (tan), defined as the ratio of the opposite leg to the adjacent leg...................

6-The hypotenuse is the side opposite to the 90 degree angle in a right triangle; it is the longest side of the triangle and one of the two sides adjacent to angle *A*..................

7-The **adjacent leg** is the other side that is adjacent to angle *A*................

8- The **opposite side** is the side that is opposite to angle *A*..................

9-The reciprocals of these functions are named the **cosecant** (csc), **secant** (sec), and **cotangent** (cot), respectively:

10- plane geometry, an **angle** is the figure formed by two rays, called the *sides* of the angle, sharing a common endpoint, called the *vertex* of the angle......................

11-Angles smaller than a right angle (less than 90°) are called *acute angles* ("acute" meaning "sharp")..................

12-An angle equal to turn (90° or radians) is called a *right angle.* Two lines that form a right angle are said to be *normal, orthogonal,* or *perpendicular*......................

13-Angles larger than a right angle and smaller than a straight angle (between 90° and 180°) are called *obtuse angles* ("obtuse" meaning "blunt").........................

14-An angle equal to turn (180° or π radians) is called a *straight angle*...............

15Angles larger than a straight angle but less than 1 turn (between 180° and 360°) are called *reflex angles*.......................

16An angle equal to 1 turn (360° or 2π radians) is called a *full angle, complete angle, round angle* or a *perigon*.................

17-Angles that are not right angles or a multiple of a right angle are called *oblique angles*..............

ACTIVITY TWO :(3p)

In small paragraph, depending on your style, write about one of the methods used to measure a volume (one method)

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Université Mohammed kheider Biskra
Département de Mathématiques
$1^{ième}$ année Master: 2019 - 2020
Module : Théorie des opérateurs
Examen final
Durée 1 heure

Exercice 1 *Soit $A : E \to F$ un opérateur linéaire*

1. *Montrer que si A est continu sur E, alors A est borné*
2. *Montrer que si E est un espace vectoriel de dimension finie, alors A est borné.*

Exercice 2 *Dans $L^2[0;2]$, considérnons l'opérateur de mutiplication*

$$T : L^2[0;2] \to L^2[0;2] \text{ définie par } (Tf(x)) = x^2 f(x)$$

1. *Montrer que T est bien défini ($Tf \in L^2[0;2]$, pour $f \in L^2[0;2]$)*
2. *Montrer que T est linéaire continu*
3. *Déterminer la norme de T.*
4. *Déterminer le spectre de T*
5. *Montrer que T n'a de valeurs propres.*

Exercice 3 *Soit l'espace de Hilbert $H = L^2([0,2])$. Pour $f \in H$, on pose*

$$Tf(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

1. *Montrer que T est un opérateur linéaire borné sur H.*
2. *Déterminer l'opérateur adjoint de T, que peut-on conclure?*

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER – BISKRA
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
MODULE: SÉRIES CHRONOLOGIQUES (M1. 10)

06 OCTOBRE 2020
(08H30–09H30)

EXAMEN

EXERCICE 01 (06 pts): **Vrai** ou **Faux** sont les résultats suivants (sans justification) :

1) Les autocorrélations partielles d'un modèle $AR(5)$ sont nulles $\forall h > 5$.

2) Le modèle : $(1-\alpha L)X_t = (1-\frac{1}{\alpha}L)\varepsilon_t$ où $|\alpha| > 1$, est un bruit blanc

3) Le modèle : $X_t = (1-L)\varepsilon_t$ est non stationnaire.

4) Le modèle : $(1-L)X_t = \varepsilon_t$ avec $X_0 = 0$, est non causal.

5) Le modèle : $(1-1.7L+0.7L^2)X_t = (1-0.7L)\varepsilon_t$ est une marche aléatoire.

6) Un modèle $AR(p)$ est toujours stationnaire.

EXERCICE 02 (09 pts)

I) Soit ε_t un bruit blanc de moyenne 0 et de variance σ_ε^2.

1) Trouver la fonction d'autocorrélation $\rho(h)$ du modèle saisonnier de période p suivant

$$X_t = (1-0.6L^p)\,\varepsilon_t.$$

2) Trouver la variance du modèle saisonnier de période p suivant

$$(1-0.6L^p)\,X_t = \varepsilon_t.$$

II) Considérons le filtre $M(L) = \sum_{j=-m}^{m} \theta_j L^j$ avec des poids $\theta_j = (2m+1)^{-1}$,

1) Si $X_t = a + bt$, montrer que $M(L)\,X_t = X_t$.

2) Si Z_t sont des variables aléatoires indépendantes de moyenne 0 et de variance σ^2. Calculer la moyenne et la variance de la moyenne mobile $M(L)\,Z_t = \sum_{j=-m}^{m} \theta_j Z_{t-j}$.

EXERCICE 03 (05 pts)

La densité spectrale d'une série chronologique réelle X_t est définie sur $[0,\pi]$ par

$$f_X(\lambda) = \begin{cases} 100 & si\ \frac{\pi}{6} - 0.01 < \lambda < \frac{\pi}{6} + 0.01, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

et sur $[-\pi, 0]$ par $f_X(\lambda) = f_X(-\lambda)$.

1) Calculer les autocovariances $\gamma_X(0)$ et $\gamma_X(1)$.

2) Trouver la densité spectrale du processus Y_t défini par

$$Y_t = X_t - X_{t-12}.$$

BONNE CHANCE

Département de Mathématiques
Université de Biskra
Module UEM6.1.1

$3^{ième}$ Année licence Maths
Deuxième semestre, année 2019/2020
Transformations intégrales dans les espaces Lp

Examen
Le 06/10/2017.
Durée: 1h

Exercice 1. (6 points)

Soit l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \beta(\mathbb{R}), \lambda)$, λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et soit $\alpha \in]1, +\infty[$ un nombre réel. On considère sur les fonctions suivantes:

1) $f_\alpha(x) = x^{-1/\alpha}\mathbf{1}_{]0,1[}(x)$

2) $g_\alpha(x) = x^{-1/\alpha}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(x)$

On demande pour les deux fonctions précédentes de préciser en fonction de α les valeurs de p pour que cette fonction appartient à $L_p(\mathbb{R})$.

Exercice 2. (7points)

Soit l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \beta(\mathbb{R}), \lambda)$ et soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-1, 1] \\ \frac{1}{x^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Déterminer $\|f\|_\infty$.

2) Montrer que f est dans $L_p(\mathbb{R}. \beta(\mathbb{R}), \lambda)$ pour tout $p \in [1, +\infty[$. Calculer explicitement $\|f\|_p$ en fonction de p.

3) Vérifier que $\lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

Exercice 3. (7points)

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \exp(-n|t-2|$$

1) Etudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (i.e. dire si la suite de fonctions converge simplement et si oui, identifier la limite).

2) Montrer que $f_n \longrightarrow 0$ presque partout.

3) Montrer que $f_n \longrightarrow 0$ dans l'espace $L^1(\mathbb{R})$.

Université: Mohamed Khieder
Faculté des Sciences exactes, des Sciences de la nature et de la vie
Département: de Mathématéques
Module: Processus Stochastique 20019/2020

EMD 01

Exercice 01.

1) Considérons un processus stochastique indexé sur $I = \mathbb{N}$ par $X_t = 1 - t + 2t\varepsilon_t$, $\forall t \geq 0$, où les v.a (ε_t) sont des variables aléatoires i.i.d de loi normale $N(0, \sigma^2)$. Calculer $E(X_t)$, $Var(X_t)$ et $R(s,t)$, $\forall t, s \geq 0$.

2) On considère le processus gaussien (X_t) pour $t \geq 0$ de fonction de covariance: $R(s,t) = Cov(X_s, X_t) = s \wedge t$, $\forall t, s \geq 0$,

Considérons le processus (Y_t) pour $t \geq 0$ défini pour tout $c > 0$ par

$$Y_t = \frac{1}{c} X_{c^2 t}.$$

Montrer que (Y_t) est un processus gaussien de même loi que (X_t).

3) Soit $N(t)$, $t \geq 0$ un processus de Poisson de paramètre d'intensité $\lambda > 0$. Lorsque $t \to +\infty$, Etudier la converge de $\frac{N_t}{t}$ en moyenne quadratique et presque sure vers λ, et en loi vers $X \sim N(0,1)$.

4) Calculer la loi du n-ième temps d'arrivée d'un processus de Poisson N_t, $t \geq 0$.

Exercice 02.

1) Donner les définitions de:

a) Une chaine de Markov a temps discret.

b) Probabilité de transition.

c) Loi de répartition.

d) Chaine homogène de Markov.

2) On considère 5 points équirépartis sur un cercle. Un promeneur saute à chaque instant, d'un point à l'un de ses voisins avec la probabilité 0.5 pour chaque voisin. Déterminer l'espace et la matrice de transition de la chaine ainsi obtenue. Calculer $P(X_1 = 3. X_2 = 2, X_3 = 1, X_4 = 2, X_5 =, X_6 = 3)$.

Université Mohamed Khider Biskra
Faculté des SESNV
Module: Prob Approf
Contrôle N°-1

Département de Mathématiques
Master-1.
Mathématiques Appliquées
2019/2020

Exercice 1 ______ **03 points**

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, $\mathcal{G}$ sous tribu de $\mathcal{F}$ et X une variable aléatoire.
(1) Montrer que l'esperance conditionnelle $X \longmapsto E(X \mid \mathcal{G})$ est une application lineaire croissante.
(2) Montrer que $E(E(X \mid \mathcal{G})) = E(X)$.

Exercice 2 ______ **04 points**

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m,p)$. ($\mathcal{B}(n,p)$: loi binomiale de parametre n et p.) On définit $Z = X + Y$.
(1) Quelle est la distribution de Z.
(2) Quelle est la distribution de $X \mid Z$.
(3) Trouver $E(X \mid Z)$.

Exercice 3 ______ **07 points**

Soit (X,Y) un couple aléatoire de densité jointe:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 2xy + \frac{3}{2}y^2 & : \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \\ 0 & : \qquad \text{sinon.} \end{cases}$$

(1) Vérifier que $f(\cdot,\cdot)$ est une densité.
(2) Trouver les densités marginales $f_Y(y)$, $f_X(x)$ et les densités conditionnelles $f_{X|Y=y}(x)$ et $f_{Y|X=x}(y)$.
(3) Calculer $P\left\{(X,Y) \in [0,\frac{1}{2}] \times [0,\frac{1}{2}]\right\}$, $P(X < Y)$.
(4) Déterminer $E(Y \mid X = x)$.
(5) Soit Z une variable aléatoire définie par $Z = E(Y \mid X)$. Quelle est la distribution de Z. Déterminer $E(Z)$.

Exercice 4 ______ **06 points**

(1) Montrer au moyen d'un contre exemple qu'une suite de variable aléatoire:
  (a) $X_n \xrightarrow{P} X$ n'implique pas $X_n \xrightarrow{p.s} X$,
  (b) $X_n \xrightarrow{Loi} X$ n'implique pas $X_n \xrightarrow{P} X$.
  (c) $X_n \xrightarrow{L^1} X$ n'implique pas $X_n \xrightarrow{L^2} X$.
(2) Soit X_n une suite de variable aléatoire de densite de probabilité

$$f_n(x) = n^2 x \exp\left[-\frac{n^2 x^2}{2}\right] I_{\mathbb{R}^+}.$$

Montrer que X_n converge en probabilité vers 0.
(3) Soit X_n une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme $\mathcal{U}$ sur $[0,1]$. On note par $Y_n = \max(X_1, X_2, ..., X_n)$ et $Z_n = n(1 - Y_n)$
  (a) Déterminer la fonction de répartition de Z_n.
  (b) Etudier la convergence en loi de la suite Z_n.

UNIVERSITÉ DE BISKRA - FSESNV
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

1ÈRE ANNÉE. MASTER (2019/2020)
MODULE : ANALYSE DES DONNÉES

EXAMEN

Exercice 1. (06 pts) Soit le modèle de régression simple :

$$y_i = b_0 + b_1 x_i + \varepsilon_i, i = 1, 2, \ldots, n. \text{ avec } \varepsilon_i \sim N\left(0, \sigma_\varepsilon^2\right)$$

1) Montrer que $\hat{b}_1$ est une combinaison linéaire de y_i, c-à-d

$$\hat{b}_1 = \sum_{i=1}^{n} k_i y_i, \text{ où } k_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}. \qquad (*)$$

2) Déterminer les sommes suivantes : $\sum_{i=1}^{n} k_i, \sum_{i=1}^{n} k_i x_i$ et $\sum_{i=1}^{n} k_i^2$.

3) En utilisant la formule (*), montrer que $\hat{b}_1$ est un estimateur sans biais et déterminer sa variance.

Exercice 2. (07 pts) On examine l'évolution d'une variable à expliquer y_i en fonction de deux variables explicatives x_i et z_i. Soit $X = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & x & z \end{pmatrix}$ la matrice $n \times 3$ du plan d'expérience, où $\mathbb{1}$ est le vecteur constant. Nous avons obtenus les résultats suivants :

$$X^t X = \begin{pmatrix} 25 & ? & ? \\ 0 & 9.3 & ? \\ 0 & 5.4 & 12.7 \end{pmatrix}, R^2 = 0.968 \text{ et } \hat{y}_i = -1.6 + 0.61 x_i + 0.46 z_i.$$

1) Donner les valeurs manquantes (justifier votre réponse).

2) Calculer la moyenne empirique $\bar{y}$.

3) Présenter la table de l'analyse de la variance et tester la signification globale du modèle.

4) Sachant que : $x_h = 2$, $z_h = 3$. Calculer la prévision $\hat{y}_h$ et son intervalle de confiance.

Exercice 3. (07 pts) Un botaniste veut déterminer l'effet des vers microscopiques sur la croissance des plantes. Il prépare 16 pots de plantation identiques, puis introduit 4 groupes de populations de vers. Il y a 4 groupes de pots avec 4 pots dans chaque groupe. Deux semaines après la plantation, il mesure la croissance des plantes en (cm). Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous.

Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3	Groupe 4
10.7	11.1	5.7	4.7
9.0	11.1	5.1	3.2
13.4	8.9	7.2	6.5
9.2	11.4	4.8	5.3

1) Énoncer l'hypothèse nulle et déterminer la table de l'analyse de la variance.

2) Y a-t-il un effet des vers microscopiques sur la croissance des plantes?

Note : Arrondir les nombres à la 4ème décimale (4 chiffres après la virgule), les tableaux statistiques sont autorisés, $\alpha = 5\%$

Bonne chance

University Of Mohamed Kheider Of Biskra
Faculty Of Exact Sciences And Natural Sciences
Department Of Computer Sciences

Full name :...........................

group: ....

First Exam Of English Language

Activity One :

Directions: Complete the following sentences in the **present perfect simple tense**.

1) She ____ _________ (to be) happy all day.
2) It ____ always _________ (to snow) here in December.
3) Dan ____ _________ (to be) sick for three days.
4) Li and Susan ____ _________ (to try) four times already and will not give up.
5) The old car ____ _________ (to be) a piece of junk since I bought it.
6) We ____ not _________ (to take) this test before.
7) My uncle ____ _________ (to be) to China.
8) Our father ____ never _________ (to drive) to California before.
9) I ____ _________ (to speak) to the president before.
10) The old man ____ occasionally _________ (to need) help crossing the street.

Activity Two :

Please fill in the gaps with the right form of **"going-to-future"**

1) This is taking ages.
How much longer ______________________________ (**it / take**)?
2) We ______________________________ (**visit**) my parents at the weekend.
3) The naughty children ______________________________ (**not / ring**) up any more, because I asked them not to.
4) Look at those clouds! It certainly looks as if it ______________________________ (**rain**).
5) ______________________________ (**you / spend**) your holidays in England?

Activity Three:

In your last lectures you have dealt with the common web pages errors, such **404 ERROR and 405 ERROR.** Write a well developed paragraph in which you explain them and how we may get ride of these problems using your own style .(no more then 6 lignes)

Université Mohammed kheider Biskra
Département de Mathématiques
$1^{ième}$ année Master: 2019 - 2020
Module : Distributions
Examen

Exercice 1 1. *Montrer que la fonction f définie par*
1,5 $f(x) = 0$ *pour* $x < 0, \frac{1}{\sqrt{x}}$ *pour* $x > 0$, *définit une distribution, quel est son ordre.?*

2. *On pose, pour* $\varphi \in D(\mathbb{R})$,

$$< vp\frac{1}{x}, \varphi >= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

1,5 **a)** *Montrer que* $vp\frac{1}{x}$ *est une distribution, d'ordre au plus* 1.
1 **b)** *Montrer que* $vp\frac{1}{x}$*est exactement d'ordre* 1.
1 **c)** *Calculer au sens des distributions* $\left(vp\frac{1}{x}\right)'$ *et* $xvp\frac{1}{x}$

Exercice 2 1. *En utilisant la formule du sauts. Calculer au sens des distributions, les dérivées successives de la fonction* $|x - 1|$. 1,5

2. *Calculer, au sens des distributions :*

1,5 $$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2\right) \frac{H(x)\sin(\omega x)}{\omega}$$

où ω *est une constante et* $H(x)$ *est la fonction d'Heaviside*

3. *Dans le plan* (x, y), *on appelle fonction de Heaviside la fonction* $H(x, y)$ *égale à* 1 *si* $x > 0$ *et* $y > 0$, *et à* 0 *ailleurs. Montrer que l'on a, au sens des distributions :*

1 $$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = \delta(0, 0)$$

4. *Résoudre dans l'espace des distributions les deux équations différentielles suivantes :*

1 1

$$u' + u = H \quad \text{et} \quad u' + xu = \delta$$

Exercice 3 *1. Montrer que*

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda e^{-\lambda x} H(x) = \delta, \ \lim_{\lambda \to 0+} \lambda e^{-\lambda x} H(x) = 0$$

1,5 1,5

2. Calculer

$$\lim_{a \to +\infty} \frac{\delta_a - \delta_{-a}}{2a}$$

1,5

où δ_a est la distribution de Dirac au point a.

Exercice 4 *Soit T une distribution,*

1 *1. Montrer que :*

$$T * \delta^{(k)} = T^{(k)}, k \in \mathbb{N}$$

2 *2. Calculer les inverses dans D'_+, par rapport à la convolution, des distributions suivantes*

$$H, \delta' \text{ et } H + \delta'$$

2 *3. Calculer $(H(x) \sin x) * \left(\delta'(x) + H(x)\right)$*

Université Mohamed Khider Biskra

2019/2020 Module : Distributions et EDP

Corrigé type

EXO 1 :

1) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- f est localement intégrable sur $\mathbb{R}$ car $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $\int_a^b f(x)\,dx < \infty$ et $[a,b]$ compact.
- $\forall \varphi \in D(\mathbb{R})$

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}}\varphi(x)\,dx$$

(1,5)

$$\Rightarrow |\langle T_f, \varphi\rangle| \leq \sup_{x\in[a,b]} |\varphi(x)| \int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = C.\sup_{x\in[a,b]}|\varphi(x)|$$

donc T_f est d'ordre 0.

2) $vp\frac{1}{x}$ distribution ?

- $vp\frac{1}{x}$ linéaire : $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in D(\mathbb{R})$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\langle vp\frac{1}{x}, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon} \frac{(\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2)(x)}{x}\,dx$$

(0,5)

$$= \alpha \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi_1(x)}{x}\,dx + \beta\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi_2(x)}{x}$$

$$= \alpha\langle vp\frac{1}{x}, \varphi_1\rangle + \beta\langle vp\frac{1}{x}, \varphi_2\rangle$$

- $vp\frac{1}{x}$ continue ?

Soit (φ_n) une suite de $D(\mathbb{R})$ telle que $\varphi_n \longrightarrow 0$ et soit $a>0$ / $\text{supp}\,\varphi_n \subset [-a,a]$ $\forall n \in \mathbb{N}$

alors ~~$|\langle vp\frac{1}{x}, \varphi_n\rangle|$~~ on peut écrire

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x) \quad / \ \psi(x) \text{ est continue sur } \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \varphi_n(x) = \varphi(0) + x\psi_n(x)$$

$$\Rightarrow |\langle vp\frac{1}{x}, \varphi_n\rangle| = \left|\int_{-a}^{a}\psi_n(x)\,dx\right|$$

(0,5)

$$= \left|\int_{-a}^{a}\frac{\varphi_n(x)-\varphi(0)}{x}\,dx\right| \leq 2a\sup_{x\in[-a,a]}|\varphi_n'(x)|$$

or $\lim_{n\to\infty}\varphi_n'(x) = 0 \Rightarrow \lim\langle vp\frac{1}{x}, \varphi_n\rangle = $

Comme $|\langle vp\frac{1}{x}, \varphi(x)\rangle| \leq 2a \sup_{x\in[-a,a]} |\varphi'(x)|$

$\Rightarrow vp\frac{1}{x}$ d'ordre au plus 1. (0,5)

b) supposons que $vp\frac{1}{x}$ d'ordre 0

alors $vp\frac{1}{x} \leq C \sup_{x\in[-a,a]} |\varphi|$.

Considerons la suite φ_n $\begin{cases} 0 \leq \varphi_n \leq 1 \text{ sur } \mathbb{R} \\ \varphi_n = 1 \text{ sur } [\frac{1}{n}, 1] \\ \varphi_n = 0 \text{ sur }]-\infty, \frac{1}{2n}] \cup [2, +\infty[\end{cases}$

$\Rightarrow \sup_{\mathbb{R}} |\varphi_n| = 1$

pour $\varepsilon \leq \frac{1}{2n}$, on a $\displaystyle\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi_n(x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{2n}}^{2} \frac{\varphi_n(x)}{x} dx$

$\displaystyle\geq \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{x} dx = \ln n.$

Donc $\langle vp\frac{1}{x}, \varphi_n\rangle \geq \ln n$. (1)

contradiction

c) $\forall \varphi \in D(\mathbb{R})$

• $\langle x\, vp\frac{1}{x}, \varphi\rangle = \langle vp\frac{1}{x}, x\varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \displaystyle\int_{|x|\geq\varepsilon} \varphi(x)\,dx$ (0,5)

$= \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = \langle 1, \varphi\rangle$

• $\langle (vp\frac{1}{x})', \varphi\rangle = \cancel{\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varphi(-\varepsilon)+\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} + \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}}$

$= -\langle vp\frac{1}{x}, \varphi'\rangle = -\lim_{\varepsilon\to 0} \displaystyle\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x} dx$

(0,5) $= -\lim_{\varepsilon\to 0} \left[\displaystyle\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi'(x)}{x} dx \right.$

En effectuant une intégrations par parties

$$\langle (vp\tfrac{1}{x})', \varphi \rangle = -\lim_{\varepsilon \to 0} \left[-\frac{\varphi(-\varepsilon)+\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} + \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}dx \right.$$

on a $\varphi(\varepsilon) = \varphi(0) + \varepsilon\varphi'(0) + \varepsilon^2\theta(\varepsilon)$

$\varphi(-\varepsilon) = \varphi(0) - \varepsilon\varphi'(0) + \varepsilon^2\theta(-\varepsilon)$

d'ou $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varphi(-\varepsilon)+\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \varepsilon[\theta(\varepsilon)-\theta(\right.$

$= 2\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varphi(0)}{\varepsilon}$

Par consequent

$$\langle (vp\tfrac{1}{x})', \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon} - \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}dx \right.$$

3)

$$(H(x)\sin x) * (\delta'(x) + H(x)) = H(x)\sin x * \delta'(x) + H(x)\sin x * H(x)$$

$$= [H(x)\sin x * \delta(x)]' + H(x) * H(x)\sin x$$

$$= (H(x)\sin x)' + H(x) * H(x)\sin x$$

$$= \delta(x)\sin x + H(x)\cos x + H(x) * H(x)\sin x$$

$$= 0 + H(x)\cos x + H(x) * H(x)\sin x$$

- $\langle H(x) * H(x)\sin x, \varphi\rangle = \langle H(x) \otimes H(y)\sin y, \varphi(x+y)\rangle$

$$= \langle H(x), \langle H(y)\sin y, \varphi(x+y)\rangle\rangle$$

$$= \langle H(x), \int_0^\infty \sin y\, \varphi(x+y)\, dy\rangle$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty \sin y\, \varphi(x+y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \varphi(x+y)\, dx\right) \sin y\, dy$$

posons $\psi(y) = \int_0^\infty \varphi(x+y)\, dx$ (2)

$$\Rightarrow \langle H(x) * H(x)\sin x, \varphi\rangle = \int_0^\infty \psi(y)\sin y\, dy$$

$$= \psi(y)\sin y\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \cos y\, \psi'(y)\, dy$$

$$= \int_0^\infty \cos y\, \psi'(y)\, dy.$$

or $\psi(y) = \int_0^\infty \varphi(u)\, du$ / $u = x+y$ $\psi'(y) = -\varphi(y)$

$$\langle H(x) * (H(x)\cos x), \varphi\rangle = -\int_0^\infty \cos y\, \varphi(y)\, dy = \langle -\cos x\, H(x)$$

Exo 2

1) $f(x) = |x-1|$

on a $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x > 1 \\ -x+1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 1 \\ -1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

$f''(x) = f^{(3)} = \cdots = f^{(n)} = 0$

$\sigma_0 = f(1^+) - f(1^-) = 0$

$\sigma_1 = f'_+(1) - f'_-(1) = 2$

$\sigma_2 = \sigma_3 = \cdots \sigma_3 = 0$

donc $T_f' = T_{f'} + \sigma_0 \delta = T_{f'}$

1,5

$T_f'' = T_{f''} + \sigma_0 \delta' + \sigma_1 \delta = 2\delta.$

$T_f^{(3)} = T_{f^{(3)}} + \sigma_0 \delta^{(2)} + \sigma_1 \delta' + \sigma_2 \delta = 2\delta'$

$\vdots$

$T_f^{(n)} = T_{f^{(n)}} + \sigma_0 \delta^{(n-1)} + \sigma_1 \delta^{(n-2)} + \cdots \sigma_{n-1} \delta = 2\delta^{(n-2)}$ $n \geq 2.$

2) Soit $\varphi \in D(\mathbb{R})$.

$\left\langle \left(\frac{d^2}{dx^2} + W^2\right) \frac{H(x)\sin Wx}{W}, \varphi \right\rangle$

$= \left\langle \frac{H(x)\sin Wx}{W}, \varphi'' \right\rangle + W \langle H(x)\sin Wx, \varphi \rangle$

$= \int_0^\infty \frac{\sin Wx}{W} \varphi''(x)\, dx + W \int_0^\infty \sin Wx\, \varphi(x)\, dx$

$= \cancel{\frac{\sin Wx}{W} \varphi'(x)\Big|_0^\infty} - \int_0^\infty \cos Wx\, \varphi'(x)\, dx + W \int_0^\infty \sin Wx\, \varphi(x)\, dx$

$= -\int_0^\infty \cos Wx\, \varphi'(x)\, dx + W \int_0^\infty \sin Wx\, \varphi(x)\, dx$

$= \cos Wx\, \varphi(x)\Big|_0^\infty - W \cancel{\int_0^\infty \sin Wx\, \varphi(x)\, dx} + W \cancel{\int_0^\infty \sin Wx\, \varphi(x)\, dx}$

1,5

$= \varphi(0)$

$= \langle \delta, \varphi \rangle.$

EXO 3

1) $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda e^{-\lambda x} H(x)$

$\forall \varphi \in D$

on a $\langle \lambda e^{-\lambda x} H(x), \varphi(x)\rangle = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\varphi(x)\,dx$ $\quad u = -\lambda x$

$= \int_0^\infty e^{-u}\varphi\left(\frac{u}{\lambda}\right) du$

donc $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda e^{-\lambda x} \varphi H(x) = \int_0^\infty e^{-u} \lim\limits_{\lambda\to\infty}\varphi\left(\frac{u}{\lambda}\right) du$ 1,5

$= \int_0^\infty e^{-u}\varphi(0)\, du = \varphi(0) = \delta$

et $\lim\limits_{\lambda\to 0} \lambda e^{-\lambda x} H(x) = \lim\limits_{\lambda\to 0}\int_0^\infty e^{-u}\varphi\left(\frac{u}{\lambda}\right)du = 0$

1,5 car $\varphi(\infty)=0$

2) $\lim\limits_{a\to0} \frac{\delta_a-\delta_{-a}}{2a}$

soit $\varphi\in D$: $\left\langle \frac{\delta_a-\delta_{-a}}{2a}, \varphi\right\rangle = \frac{1}{2a}(\langle\delta_a,\varphi\rangle \langle\delta_{-a}$

$= \frac{1}{2a}[\varphi(a)-\varphi(-a)]$

$= \frac12\left[\frac{\varphi(a)-\varphi(0)}{a-0} + \frac{\varphi(-a)-\varphi(0)}{-a-0}\right.$

donc $\lim\limits_{a\to0}\left\langle \frac{\delta_a-\delta_{-a}}{2a}, \varphi\right\rangle = \frac12[\varphi'(0)+\varphi'(0)$

$=\langle\delta,\varphi'\rangle = -\langle\delta',\varphi\rangle$

1,5

Alors $\lim\limits_{a\to0}\frac{\delta_a-\delta_{-a}}{2a} = -\delta'$

EXO 4

1) $T * \delta^{(k)} = T^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$.

$\forall \varphi \in D$.

$$\langle T * \delta^{(k)}, \varphi \rangle = \langle T_x \otimes \delta_y^{(k)}, \varphi(x+y) \rangle,$$
$$= \langle T_x, \langle \delta_y^{(k)}, \varphi(x+y) \rangle \rangle.$$
$$= \langle T_x, (-1)^k \langle \delta_y, \varphi^{(k)}(x+y) \rangle \rangle$$
$$= (-1)^k \langle T_x, \varphi^{(k)}(x) \rangle$$
$$= \langle T^{(k)}, \varphi \rangle$$

1

2) • En résolvant l'equation $H * X = \delta$.

on a $(H * X)' = \delta' \Rightarrow H' * X = \delta'$
$$\Rightarrow \delta * X = \delta'$$
$$\Rightarrow \boxed{X = \delta'} \Rightarrow H^{-1} = \delta'$$

0,5

• En resolvant $\delta' * X = \delta$

on a $(\delta' * X) = (\delta * X)' = \delta$
$$\Rightarrow X' = \delta$$
$$\Rightarrow \boxed{X = H \Rightarrow \delta'^{-1} = H}$$

0,5

• $(\delta' + H) * X = \delta$
$$[\delta' + H * X]' = \delta'$$
$$\Rightarrow (\delta' + H)' * X = \delta'$$
$$\Rightarrow (\delta'' + H') * X = \delta'$$
$$\Rightarrow (\delta'' + \delta) * X = \delta'$$
$$\Rightarrow X = (\delta'' + \delta)^{-1} * \delta'$$

1

3) $\langle \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}, \varphi \rangle = \langle H, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \rangle = \iint_{\mathbb{R}^2} H(x,y) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} dx\, dy$

$= \iint_D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} dx\, dy \qquad D =]0, \infty[^2$

$= \int_{y=0}^{y=+\infty} \left(\int_{x=0}^{x=+\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} dx \right) dy = \int_{y=0}^{y=\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,y)\, dy$

$= \varphi(0,0)$ 1

$= \delta_{(0,0)}$

4) • $u' + u = H \Leftrightarrow (u'+u) e^x = H(x) e^x$ 1

$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}(u e^x) = H(x) e^x$

$\Leftrightarrow u e^x = \int_{-\infty}^{x} H(t) e^t dt + C$

$= u = [H(x)(e^x - 1) + C] e^{-x}$

• $u' + xu = \delta \Leftrightarrow (u' + xu) e^{x^2/2} = \delta e^{x^2/2}$

$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}(u e^{x^2/2}) = \delta e^{x^2/2} = \delta$

$\Leftrightarrow u e^{x^2/2} = H(x) + C$ 1

$\Leftrightarrow u = [H(x) + C] \cdot e^{-x^2/2}.$

Ministry of Higher Education, University of Mohamed Kheider of Biskra

Faculty of Exact Sciences and Natural and Life and Sciences

Section of Mathematics

Level: Master One

First Semester ACHIEVEMENT TEST in English Language

First Name: ....Sabrine.................................

Family Name: ....ZEKRI.......................................

Group N°: …................/....................................

Mark/20:

Exercise 01: Choose the correct article: a, an, theor Ø (no article): (9pts)

1. I am crazy about reading ....**Ø**.... history books.
2. She is ...**a**...... nice girl.
3. Do you want to go to ...**the**...... restaurant where we first met?
4. He is.....**an**.... engineer.
5. He thinks that ..**Ø**....... love is what will save us all.
6. Are you coming to....**the**... party next Saturday?
7. I bought.......**a**... new TV set yesterday.
8. I think....**the**..... man over there is very ill. He can't stand on his feet.
9. I watched ...**the**....... video you had sent me.

Exercise 03: For each sentence, write in the gaps either '**in**', '**at**', '**on**' or "**X**" if there is no preposition is needed. **(8pts)**

1. I don't like swimming......**in**.........the winter. The water is too cold.
2. Mum always reads stories...**at**... bedtime.
3. Lots of people go shopping.....**at**.........Christmastime.
4. This street's very dark .**at**..... night.
5. Justin Bieber was born....**on**.......March 1, 1994.
6. My team's playing football against yours.......**on**......Friday afternoon.
7. My brother's married ....**in**.....2006.
8. Would you like to come to the theatre with me ...**on**.....Saturday evening.

Exercise 02: Explain the following proverbs.**(03 pts)**

1- Practise makes perfect.

Bruce Lee said: " I don't fear the man who practiced 10000 kicks once, but I fear the man who practiced one kick 10000 times"

2-You can't judge a book by its cover.

You never know what things can hide under their appearances.

3-Actions speak louder than words.

People who usually brag about what they will achieve in the future end up doing absolutely nothing.

Best of Luck ☺

Miss. ZEKRI. S

"If you are not willing to learn, No one can help you. If you are determined to learn, No one can stop you"