Université de Med Khider, Biskra Le 25/01/2012
Faculté de sciences FSESNV.
Département de Mathématiques.
Module: T. G. Proc. Stoch
Mokhtar HAFAYED

**Epreuve N°1**

**Exercice-1** [7p]

Soit $Y \sim \mathcal{P}(\alpha)$ et $Z \sim \mathcal{P}(\beta)$ deux variables aléatoires de Poisson indépendantes. On s'intéresse à leur somme $X = Y + Z$.

(1) Quelle est la loi de $X$

(2) Quelle est la loi de $Y$ sachant $X$ ( $\mathbb{P}(Y = k \mid X = n)$).

(3) Montrer que $\mathbb{E}(Y \mid X = n) = \dfrac{\alpha n}{\alpha + \beta}$ et $\mathbb{V}ar(Y \mid X = n) = \dfrac{n\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}$

(4) Déduire que $\mathbb{E}[Y|X] = \dfrac{\alpha X}{\alpha + \beta}$.

(5) Si $Y$ est intégrable, Montrer que la variable aléatoire $\mathbb{E}[Y|X]$ est d'esperance $\alpha$. Vérifier que on a toujours $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]] = \mathbb{E}[Y]$.

**Exercice-2** [5p]

1) On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale (par rapport a la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$). Montrer que la suite $(\mathbb{E}(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

2) On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale (par rapport a la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$). Montrer que $\mathbb{E}[X_{n+m}|\mathcal{B}_n] = X_n$ pour tout $m \geq 0$.

**Exercice-3** [5p]

Soit $N$ une variable aleatoire vérifiant:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \mathbb{P}(N_t = n) = \frac{(\alpha t)}{n}\mathbb{P}(N_t = n - 1).$$

(1) Exprimer $\mathbb{P}(N_t = n)$ en fonction de $\mathbb{P}(N_t = 0)$.

(2) Déterminer $\mathbb{P}(N_t = 0)$ puis déduire $\mathbb{P}(N_t = n)$, a quelle loi de probabilité usuelle correspond-elle?

(3)-Si $s < t$, Montrer que la loi de $(N_t - N_s)$ est la meme que celle de $N_{t-s}$.

**Exercice-4** [5p]

(1) On dit que la variable aléatoire discrète $X$ suit une loi géométrique de paramètre $p \in ]0, 1[$ si $X$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, avec $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$. Soit $m \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbb{P}(X > m)$.

(2) Montrer que $X$ vérifie la propriété suivante, dite *d'absence de mémoire*

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 : \mathbb{P}(X > n + m \mid X > n) = \mathbb{P}(X > m).$$

(3) Rappeler la densité d'une loi exponentielle de paramètre $\blacksquare > 0$, ainsi que sa fonction de répartition. Montrer que $X$ vérifie:

$$\forall t \geq 0, \forall s \geq 0 : \mathbb{P}(X > t + s \mid X > t) = \mathbb{P}(X > s)$$

(4) *Application* : la durée de vie d'une radio suit une loi exponentielle de moyenne 5 ans. Si j'achète une radio qui a 5 ans, quelle est la probabilité qu'elle fonctionne encore deux ans plus tard ?