Chapitre 4

Equations différentielles stochastiques

Définition 4.1 *Soient* $d, m \in \mathbb{N}$, $b : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ *et* $\sigma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathcal{M}_{d,m}(\mathbb{R})$ *deux fonctions mesuarbles bornées* ($b(x) = \{b_i(x), 1 \leq i \leq d\}$ *et* $\sigma(x) = \{\sigma_{ij}(x), 1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq m\}$*).*

Soit $x \in \mathbb{R}^d$ *une condition initiale.*

Une solution de l'EDS

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \\ X_0 = x \end{cases} \tag{Eq}$$

est constituée par

a) *Un espace de probabilité filtré* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P\right)$.

b) *Un* $(\mathcal{F}_t)$*-mouvement Brownien* $B = (B_1, ..., B_m)$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^m$.

c) *Un processus* $X = \{X_t, t \geq 0\}$ *continu* $\mathcal{F}_t$*-adapté tel que les intégrales*

$$\int_0^t b(s, X_s)ds \qquad et \qquad \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$$

aient un sens et tel que l'égalité

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$$

soit satistisfaite pour t P *p.s.*

$\forall i = 1, ..., d$ *on a :*

$$X_t^i = x^i + \int_0^t b^i(s, X_s)ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{ij}(s, X_s)dB_s^j.$$

4.1 Notions d'existence et d'unicité

1. Existence d'une solution faible si (Eq) admet une solution X.
2. Existence d'une solution forte si (Eq) qui soit adaptée à la filtration du mouveemnt Brownien.
3. Unicité faible si tous les processus X solutions de (Eq) ont même loi.
4. Unicité trajectorielle si l'espace de probabilité et le Brownien étant fixés, deux solutions X et X' de (Eq) sont indistinguables

$$P(\exists t \in \mathbb{R} \mid \mathbb{X}_t \neq X'_t) = 0$$

L'exemple suivant montre que l'on peut avoir (1) et (3) (existence et unicité faible) mais ni (2) ni (4).

Exemple 4.2 *Soit $\{B_t, t \geq 0\}$ un mouvement Brownien standard. On considère le processus*

$$W_t = \int_0^t sgn(B_s) dB_s$$

où $sgn(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \geq 0 \\ -1 & si\ x < 0 \end{cases}$

puisque $sgn^2(x) = 1 \Longrightarrow W$ est bien défini et W est une martingale continue de crochet t.

par le théorème de Lèvy, W est un mouvement Brownien.

Considérons l'EDS

$$\begin{cases} dX_t = sgn(X_t) dB_t \\ X_0 = 0 \end{cases}$$

W est solution de cette équation.

On voit que toutes les solutions de cette équation sont des mouvements Browniens et sont égaux en loi (on existence et unicité faibles), mais (4) n'est pas vérifiée.

Le processus $-W$ est aussi solution de l'équation

$$P\left[W_t \neq -W_t\right] = P\left[2W_t \neq 0\right] = 1$$

de sorte que W et $-W$ sont deux processus solutions qui ne sont pas indistinguables.

Théorème 4.3 (Yamada-Watanabe) *Supposons que l'équation (Eq) admette une solution faible et que toutes ses solutions soient indistinguables. Alors (Eq) admet une unique solution forte*

Théorème 4.4 *Supposons que pour tout compact K de $\mathbb{R}^d$, il existe une constante $M_K > 0$ telle que :*

a) $|b_i(t,x) - b_i(t,y)| + |\sigma_{ij}(t,x) - \sigma_{ij}(t,y)| \leq M_K |x-y|$, $\forall i = 1,...,d;\ j = 1,...,m,\ t \geq 0,\ x,y \in K \subset \mathbb{R}^d$

(condition de Lipschitz locale)

b) $\exists M > 0$ *telle que*

$|b_i(t,x)| + |\sigma_{ij}(t,x)| \leq M(1+x)$, $\forall i = 1,...,d;\ j = 1,...,m,\ t \geq 0,\ x,y \in \mathbb{R}^d$

(condition de croissance linéaire)

Alors il existe une unique solution forte de (Eq), de durée de vie infinie.

La démonstration de l'existence repose sur une méthode de point fixe. L'idée est de construire une suite X^n par

$$X_t^{i,n-1} = x^i + \int_0^t b^i(s, X_s^{n-1})ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{ij}(s, X_s^{n-1})dB_s^j.$$

et de montrer la convergence de cette suite vers une solution.

Lemme 4.5 (Lemme de Gronwall) *Soit $T > 0$ et g un fonction positive mesurable bornée telle que*

$$g(t) \leq a + b\int_0^t g(s)ds$$

$\forall t \leq T$, a, b des constantes positives. Alors

$$g(t) \leq ae^{bt}, \qquad \forall t \leq T.$$

On suppose que b et σ sont lipschitziennes (globalement) avec constante M.

On fixe $t > 0$, et on considère deux solutions distinctes X et Y de (Eq). On a :

$$\begin{aligned}
E\left(|X_t - Y_t|^2\right) &= E\left|\int_0^t \left(b(s,X_s) - b(s,Y_s)\right)ds + \int_0^t \left(\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s)\right)dB_s\right|^2 \\
&\leq 2\left(E\left(\int_0^t |b(s,X_s) - b(s,Y_s)|\,ds\right)^2 + E\left(\int_0^t |\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s)|\,dB_s\right)^2\right) \\
&\leq 2M^2\left(t^2\int_0^t E\,|X_s - Y_s|^2\,ds + \int_0^t E\,|X_s - Y_s|^2\,ds\right) \\
&\leq K\int_0^t E\,|X_s - Y_s|^2\,ds
\end{aligned}$$

pour une certaine constante $K > 0$.

Dans la première inégalité on a utlisé la formule $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$.

Dans la deuxième inégalité on a utilisé la condition de Lipschitz de b et σ, l'inégalité de Hölder pour la 1ère intégrale et l'isométrie de l'intégrale stochastique pour la deuxième.

On en déduit le résultat en utilisant le lemme de Gronwall.

4.2 Propriétés

4.2.1 Propriété de Markov

Soit l'équation (Eq). supposons que (Eq) ait une unique solution forte $\{X_t(x), t \geq 0\}$. Par linéarité de l'intégrale on voit que $\forall s, t \geq 0$

$$X_{s+t}(x) = X_s(x) + \int_s^{s+t} b(u, X_u(x))du + \int_s^{s+t} \sigma(u, X_u(x))dB_u$$

comme la variable $X_s(x)$ est $\mathcal{F}_s^B$-mesurable, elle est indépendante du processus des accroissements $\{B_u - B_s, u \geq s\}$ qui est lui même un brownien B' partant de 0.

On peut donc écrire

$$X_{s+t}(x) = X_s(x) + \int_0^{t} b(s+u, X_{s+u}(x))du + \int_0^{t} \sigma(s+u, X_{s+u}(x))dB'_u$$

et par unicité, ceci entraine

$$X_{s+t}(x) = X_t^s(X_s(x)), \forall t \geq 0$$

où X_t^s est la solution unique de (Eq) par le Brownien B'.

$\forall s, t \geq 0$ et toute fonction borelienne f, on déduit alors de l'indépendance de B' et $\mathcal{F}_s^B$ que

$$\begin{aligned} E(f(X_{t+s}) \mid \mathcal{F}_s^B) &= E(f(X_{t+s}) \mid \mathcal{X}_s) \\ &= \phi_t(s, X_s) \end{aligned}$$

où $\phi_t(s, X_s) = E(f(X_t^s(x)))$.

$\Longrightarrow X$ vérifie la propriété de markov inhomogène.

Dans le cas où es coefficients b et σ ne dépendent pas du temps, X vérifie de plus la propriété de Markov homogène

$$\begin{aligned} E(f(X_{t+s}) \mid \mathcal{F}_s^B) &= E(f(X_{t+s}) \mid \mathcal{X}_s) \\ &= \phi_t(X_s) \end{aligned}$$

où $\phi_t(s, X_s) = E(f(X_t^s(x)))$.

Théorème 4.6 (Propriété de Markov forte) *Soit X l'unique solution forte de (Eq) avec b et σ ne dependent pas du temps. Soit T un temps d'arrêt fini p.s. pour la filtration naturelle du Mouvement brownien porteur. Alors pour tout $t \geq 0$ et toute fonction f mesurable bornée*

$$\begin{aligned} E(f(X_{T+t}) \mid \mathcal{F}_T^B) &= E(f(X_{T+t}) \mid \mathcal{X}_T) \\ &= \phi_t(X_T) \end{aligned}$$

où $\phi_t(x) = E(f(X_t(x)))$.

Dans le cas inhomogène

$$\begin{aligned} E(f(T+t, X_{T+t}) \mid \mathcal{F}_T^B) &= E(f(T+t, X_{T+t}) \mid T, \mathcal{X}_T) \\ &= \phi_t(T, X_T) \end{aligned}$$

où $\phi_t(s,x) = E(f(s+t, X_t^s(x)))$.

4.2.2 Théorème de comparaison

Ce théorème permet de comparer presque sûrement deux EDS uni-dimensionnelles.

Théorème 4.7 *Soit $\{W_t, t \geq 0\}$ un mouvement Brownien réel, b_1, b_2 et σ trois fonctions globalemnt lipschitziennes. $x_1 \geq x_2$ deux réels. on considère les deux EDS*

$$X_t^i = x_i + \int_0^t b_i(X_s^i)ds + \int_0^t \sigma(X_s^i)dW_s$$

pour $i = 1, 2$.

Supposons que $b_1(x) \geq b_2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Alors $X_t^1 \geq X_t^2$ p.s. $\forall t \geq 0$.

4.2.3 Fonction d'échelle

On considére l'EDS homogène

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s$$

où b et σ sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ globalement lipschitziennes. D'après la formule d'Itô, on voit que si f est une de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ à dérivées bornées et telle que

$$b(x)f'(x) + 1/2\sigma^2(x)f''(x) = 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}$.

Alors le processus $t \longmapsto f(X_t)$ est une martingale (martingale locale si f n'est pas à dérivées bornées).

La fonction f est appelée fonction échelle du processus X.
Elle est déterminée à deux constantes prés c_1 et c_2 par la formule

$$f(x) = \int_{c_1}^{x} \exp\left(-2\int_{c_2}^{u} \frac{b(v)}{\sigma^2(v)} dv\right) du$$

l'opérateur $\mathcal{L}$ qui à $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ fait correspondre

$$\mathcal{L}f : x \longmapsto b(x)f'(x) + 1/2\sigma^2(x)f''(x)$$

s'appelle le générateur infinitésimal du processus X ou encore son Dynkin.
On peut montrer qu'il vérifie

$$\begin{aligned}\mathcal{L}f(x) &= \lim_{t\to 0} \tfrac{E_x[f(X_t)-f(x)]}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \tfrac{E[f(X_t)|X_0=x]-f(x)}{t}\end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$.
Le générateur infitésimal a aussi un sens dans le cas inhomogène.
Considérons l'EDS

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$$

alors on peut définir son générateur infinitésimal comme l'opérateur $\mathcal{L}$ agissant sur les fonctions de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ une fois dérivable en temps et deux dérivables en espace par

$$\mathcal{L}(f)(t, x) = b(t, x)f'_x(t, x) + \frac{\sigma^2(t, x)}{2} f''_{xx}(t, x)$$

d'après la formule d'Itô, on voit que si f est une fonction de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\mathcal{L}(f)(t, x) + f'_t(t, x) = 0$$

alors le processus $\{f(t, X_t), t \geq 0\}$ est une martingale locale.

4.2.4 Martingale exponentielle et condition de Novikov

Soit θ un bon processus local et Z_0 une constante.
Par la formule d'Itô, on peut démontrer que l'unique solution de l'EDS

$$dZ_t = \theta_t Z_t dB_t$$

(ou sous forme intégrale $Z_t = Z_0 + \int_0^t \theta_s Z_s dB_s$)

est :

$$Z_t = Z_0 \exp\left[\int_0^t \theta_s dB_s - 1/2 \int_0^t \theta_s^2 ds\right]$$

Le processus Z, noté $\mathcal{E}_t(\theta * B)$ est appelé l'exponentielle de Doleans-dade de $\theta * B$.

D'après l'EDS, c'est une martingale locale positive dès que $Z_0 > 0$.

Le critère suivant permet de savoir quand l'exponentielle de Doleans-dade est une vraie martingale.

Théorème 4.8 (Condition de Novikov) *Supposons que* $E\left(\exp\left(1/2 \int_0^t \theta_s^2 ds\right)\right) < +\infty$, $\forall t > 0$, *alors*

$t \longmapsto \mathcal{E}_t(\theta * B)$ *est une vraie martingale.*

Quand la condition de Novikov n'est pas satisfaite $\mathcal{E}_t(\theta * B)$ est une martingale locale positive, donc une surmartingale,

$$E(Z_t) \leq E(Z_s) \leq Z_0, \forall t \geq s > 0.$$

Proposition 4.9 *Supposons que* $\theta_t = f(t, B_t)$ *(cas particulier) où* f *est une fonction globalement lipschitzienne. Alors* $t \longmapsto \mathcal{E}_t(\theta * B)$ *est une vraie martingale.*

Théorème 4.10 *Soit* X *une semi-martingale continue* $X_0 = 0$*. Alors il existe une unique semi-martingale continue solution de l'EDS*

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s dX_s \qquad (*)$$

(ou $dZ_s = Z_s dX_s$*)*

et elle est s'explicite en :

$$Z_t(X) = \exp\left(X_t - 1/2 \langle X \rangle_t\right).$$

Définition 4.11 *Soit X une semi-martingale continue, $X_0 = 0$. On appelle exponentielle stochastique de X, notée $\mathcal{E}(X)$ l'unique solution de $(*)$.*

Exemple 4.12 *$X = aB$ où $a \in \mathbb{R}$. B est un mouvement Brownien. Alors*

$$\mathcal{E}_t(aB) = \exp\left(aB_t - 1/2a^2t\right)$$

Le mouevemnt Brownien geométrique.

Théorème 4.13 *Soit X et Y deux semi-martingales continues, $X_0 = Y_0 = 0$. Alors*

$$\mathcal{E}(X).\mathcal{E}(Y) = \mathcal{E}(X + Y + \langle X, Y\rangle).$$

Preuve. on pose $U_t = \mathcal{E}_t(X)$ et $V_t = \mathcal{E}_t(Y)$. On applique la formule d'intégration par parties

$$U_tV_t - 1 = \int_0^t \left(U_s dV_s + V_s dU_s + d\langle U, V\rangle_s\right)$$

En posant $W = UV$ et en utlisant la définition differentielle de l'exponentielle stochastique on obtient le résultat. ■

Corollaire 4.14 *Soit X une semi-martingale continue, $X_0 = 0$. Alors l'inverse*

$$\mathcal{E}_t^{-1}(X) = \mathcal{E}_t(-X + \langle X\rangle).$$

On peut considérer des EDS linéaires un peu plus générales.

Théorème 4.15 *Soit Z et H deux semi-martingales continues réelles, $Z_0 = 0$. Alors l'EDS*

$$X_t = H_t + \int_0^t X_s dZ_s$$

admet pour unique solution

$$\mathcal{E}_H(Z)_t) = \mathcal{E}_t(Z)\left(H_0 + \int_0^t \mathcal{E}_s^{-1}(Z)\left(dH_s - d\langle H, Z\rangle_s\right)\right).$$

4.3 Lien avec les équations aux dérivées partielles

4.3.1 Problème parabolique

On considère l'opérateur

$$\mathcal{A}f(t,x) = f'_t(t,x) + \mathcal{L}f(t,x)$$

où $\mathcal{L}$ est le générateur infinitésimal du processus X solution de l'EDS

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dB_s.$$

On cherche les solutions du problème parabolique suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{A}f(t,x) = 0, & \forall x \in \mathbb{R}, t \in [0,T] \\ f(T,x) = g(x), & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{EDP}$$

où g est une fonction de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Si f est une solution de (EDP) et si pour $u \geq t \geq 0$ on note $X_u^{x,t}$ une solution de

$$X_u^{x,t} = X_t^{x,t} + \int_t^u b(s,X_s^{x,t})ds + \int_t^u \sigma(s,X_s^{x,t})dB_s. \tag{EDS}$$

avec pour condition initiale $X_t^{x,t} = x$.

la formule d'Itô $\Longrightarrow$

$$f(u,X_u^{x,t}) = f(t,x) + \int_t^u f'_x(s,X_s^{x,t})\sigma(s,X_s^{x,t})dB_s$$

En faisant $u = T$ en particulier, on en déduit que :

$$g(X_T^{x,t}) = f(t,x) + \int_t^T f'_x(s,X_s^{x,t})\sigma(s,X_s^{x,t})dB_s$$

Si f'_x et σ vérifient ds conditions d'intégrabilité suffisantes, alors l'intégrale stochastqiue est une vraie martingale.

On en déduit une importante representation probabiliste de la solution de (EDP)

$$\begin{aligned} f(t,x &= E\left[g(X_T^{x,t})\right] \\ &= E_{x,t}\left[g(X_T)\right] \end{aligned}$$

où X est solution de (EDS) prise sous la probabilité $P_{x,t}$ qui est telle que le processus X prend la valeur x à l'instant t.

Problème plus général

$$\begin{cases} \mathcal{A}f(t,x) = \alpha f(t,x), & \forall x \in \mathbb{R}, t \in [0,T] \\ f(T,x) = g(x), & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{EDP1}$$

$\alpha > 0$.

Si f est solution de (EDP1), la formule d'Itô entre t et T conduit à

$$e^{-\alpha T} f(T, X_T^{x,t}) = e^{-\alpha t} f(t,x) + \int_t^T e^{-\sigma\alpha s} f'_x(s, X_s^{x,t}) \sigma(s, X_s^{x,t}) dB_s$$

Sous des conditions d'intégrabilité sur f'_x et σ l'intégrale stochastique est une martingale et on en déduit la representation probabiliste :

$$f(t,x) = E_{x,t}\left[e^{\alpha(t-T)} g(X_T)\right].$$

Générateur et EDS

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s.$$

$$d\phi\,(t, X_t) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + L_t\phi\right)(t, X_t)\,dt + \sum_l \left[\left(\sum_i \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\sigma_{il}\right) dB_l\right]$$

$L_t\phi\,(x) = \frac{1}{2}\sum\limits_{i,j} a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\phi\,(x) + \sum\limits_{i=1}^{d} b_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i}\phi\,(x)$

$a = \sigma\sigma^*$.

4.3.2 Problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}v = -L_t - kv + g \\ v(t,x) = f(x) \qquad \text{condition finale} \end{cases} \tag{Cauchy}$$

avec $v = v(t,x)$, $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^d$, $k = k(t,x)$, $g = g(t,x)$, $k \geq 0$.

Hypothèses

1. b, σ continues sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d$ et sous-linéaires (i.e. $|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| < K(1+|x|)$).
2. l'EDS a une solution faible
3. $f(x)$, $g(t,x)$, $k(t,x)$ continues, f et g sont à croissance sous polynomiale (i.e. $|f(x)| + |g(t,x)| \leq K\left(1+|x|^{\lambda}\right)$).
4. a, b, k bornées.
5. L_t est uniformément elliptique :
$\exists \delta > 0$, $\forall t, x$, $\sum a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \geq \delta |\xi|^2$

La solution es la formule de Feynman-Kac

$$v(t,x) = E_{t,x}\left\{f(X_T)\exp\left[-\int_t^T k(u,X_u)du\right] + \int_t^T \left[g(s,X_s)\exp\left(-\int_t^s k(u,X_u)du\right)\right]ds\right\}$$

Le problème de Cauchy a une unique solution v telle que $|v(t,x)| \leq C(1+|x|^{\mu})$ qui est donnée par la representation de Feynman-Kac.

4.3.3 Problème de Dirichlet

Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^d$, b, σ indépendantes de t.
On considère $u \in \mathcal{C}\left(\overline{D}\right)$ solution de

$$\begin{cases} Lu - ku = -g & \text{sur } D \\ u\,|_{\partial D} = f \end{cases} \qquad \text{(Dirichlet)}$$

où $f : \partial D \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $k : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}$.
Hypothèses

1. Les trois premières parmi celles du problème précédent.
2. a, b, k, g hölderiennes.
3. L uniformément elliptique.

Le problème de Dirichlet a une unique solution :

$$u(x) = E_x\left\{f(X_\tau)\exp\left[-\int_0^\tau k(X_s)ds\right] + \int_0^\tau \left[\left[g(X_t)\exp\left(-\int_0^t k(X_s)ds\right)\right]dt\right]\right\}$$

avec $\tau = \inf\{t \geq 0 : X_t \in D^c\}$.

4.4 Théorème de representation prévisible

Soit B un mouveemnt Brownien et $\left(\mathcal{F}_t^B\right)_{t\geq 0}$ où $\mathcal{F}_t^B = \sigma\left(B_s, s \leq t\right)$ sa filtration naturelle.

Théorème 4.16 – *soit M une $\left(\mathcal{F}_t^B\right)$-martingale telle que $\sup\limits_{t\leq T} E\left(M_t^2\right) < +\infty$. Alors il existe un unique processus prévisible H tel que $E\left(\int\limits_0^T H_s^2 ds\right) < +\infty$ et tel que*

$$\forall t \in [0,T], \qquad M_t = M_0 + \int\limits_0^t H_s dBs$$

– *Si M est une $\left(\mathcal{F}_t^B\right)$-martingale locale, il existe un unique processus prévisible H tel que $\int\limits_0^T H_s^2 ds < +\infty$ et*

$$\forall t \in [0,T], \qquad M_t = M_0 + \int\limits_0^t H_s dBs$$

Remarque 4.17 *Si M est une martingale de la forme $f(t, B_t)$, on trouve $H_t = \frac{\partial f}{\partial x}\left(t, B_t\right)$ en appliquant la formule d'itô.*

Remarque 4.18 *Ce théorème se généralise au mouvements Browniens d-dimensionnels.*

Corollaire 4.19 *Toutes les $\left(\mathcal{F}_t^B\right)$-martingale locale sont continues.*

4.5 Changement de probabilité et théorème de Girsanov

La solution de l'équation différentielle stochastique

$$\left\{\begin{array}{rcl} dX_t &=& f(t,X_t)dt + g(t,X_t)dB_t \\ X_0 &=& x_0 \end{array}\right.$$

n'est pas en général une martinagle sous la probabilité P.

Question : On se demande s'il existe une mesure de probabilité $\widetilde{P}$ sous laquelle (X_t) serait une martingale.

Définition 4.20 *Soit (M_t) une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$; on suppose que le processus M_t est continu et de caré intégrable, et tel que $M_0 = 0$ et $\langle M_t \rangle \leq Kt$, $k \in \mathbb{R}^+$, $t \in \mathbb{R}^+$. La martingale exponentielle associée à (M_t) est définie, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, par*

$$Y_t = \exp\left(M_t - \frac{\langle M_t \rangle}{2}\right)$$

Nous définissons pour tout $A \in \mathcal{F}_T(\mathcal{F}_\infty)$ la mesure de probabilité $\widetilde{P}_T(A) = E\left(1_A Y_T\right)$.

On pose le problème sur l'espace de probabilité $\left(\Omega, \mathcal{F}_T, \widetilde{P}_T\right)$.

Il est facile de démontrer que $\widetilde{P}_T$ satisfait les axiomes de Kolmogorov. En effet

i) $\widetilde{P}_T(A) \geq 0$, $A \in \mathcal{F}_T$ car $Y_T \geq 0$.

ii) $\widetilde{P}_T(\Omega) = E(Y_T) = E(Y_0) = 1$ (puisque (Y_t) est une martingale)

iii) Si $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ est une famille d'évenements dans $\mathcal{F}_T$, alors

$\widetilde{P}_T\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = E\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1_{A_n} Y_T\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \widetilde{P}_T(A_n)$

Remarque 4.21 *Notons que $P(A) = 0$ si et seulement si $\widetilde{P}_T(A) = 0$. i.e. P et $\widetilde{P}_T$ sont équivalentes.*

Lemme 4.22 *Si Z est $\mathcal{F}_t$-mesurable et tel que $E\left(|ZY_T|\right) < \infty$, alors $\widetilde{E}_T\left(Z\right) = E\left(ZY_t\right)$*

Preuve. Comme (Y_t) est une martingale et que Z est $\mathcal{F}_t$-mesurable, alors $\widetilde{E}_T\left(Z\right) = E(ZY_T) = E(ZY_t)$ ■

Lemme 4.23 *Le processus (X_t) est une martingale sous $\widetilde{P}_T$ si et seulement si $(X_t Y_t)$ est une martingale sous P.*

Preuve. Si (X_t) est une martingale sous $\widetilde{P}_T$, alors

i) X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable et

$$\widetilde{E}_T\left(|X_t|\right) < \infty, \qquad \forall t \in [0, T].$$

ii) $\forall Z$ $\mathcal{F}_s$-mesurable et borné on a

$$\widetilde{E}_T\left(X_t Z\right) = \widetilde{E}_T\left(X_s Z\right), \qquad \forall s \leq t \in [0, T].$$

Par conséquent (X_tY_t) est une martingale sous P car

i) $\forall t \in [0,T]$

$E(|X_tY_t|) = E\left(|X_t|\,Y_t\right) = E\left(|X_t|\,Y_T\right) = \widetilde{E}_T\left(|X_t|\right) < \infty$

ii) $\forall Z$ $\mathcal{F}_s$-mesurable et borné et $\forall s \leq t \in [0,T]$ on a :

$E\left(X_tY_tZ\right) = E(X_tZY_T) = \widetilde{E}_T\left(X_tZ\right) = \widetilde{E}_T\left(X_sZ\right) = E(X_sY_sZ).$

Réciproquement, Si (X_tY_t) est une martingale sous P, alors

i) $\forall t \in [0,T]$ le processus $X_t = X_tY_tY_t$ est $\mathcal{F}_s$-mesurable et

$\widetilde{E}_T\left(|X_t|\right) = E\left(|X_t|\,Y_T\right) = E\left(|X_t|\,Y_t\right) < \infty.$

ii) $\forall Z$ $\mathcal{F}_s$-mesurable et borné $\forall s \leq t \in [0,T]$ on a :

$\widetilde{E}_T\left(X_tZ\right) = E(X_tZY_t) = E(X_sZY_s) = \widetilde{E}_T\left(X_sZ\right).$

$\Longrightarrow X_t$ est une martingale sous $\widetilde{P}_T$. ■

4.5.1 Théorème de Girsanov

Théorème 4.24 *Si Z_t est une martingale continue de carré intégrable sous P, alors le processus $Z_t - \langle M, Z_t\rangle$ est une martingale sous $\widetilde{P}_T$ où M_t est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ qui est continue, de caré intégrable et telle que $M_0 = 0$ et $\langle M_t\rangle \leq Kt$, $t \in \mathbb{R}^+$, $K \in \mathbb{R}^+$.*

Preuve. Du lemme précédent, il suffit de montrer que $(Z_t - A_t)\,Y_t$ est une martingale sous P, où $A_t = \langle M, Z\rangle_t$.

De la formule d'intégration par parties

$(Z_t - A_t)\,Y_t - (Z_0 - 0)\,Y_0 = \int_0^t (Z_r - A_r)\,dY_r + \int_0^t Y_r dZ_r - \int_0^t Y_r dA_r + \langle Z - A, Y\rangle_t$

puisque Y et Z sont des martingales sous P, les termes

$\int_0^t (Z_r - A_r)\,dY_r$ et $\int_0^t Y_r dZ_r$

sont aussi des martingales sous P.

Il reste à montrer que

$-\int_0^t Y_r dA_r + \langle Z - A, Y\rangle_t = 0.$

Par une application de la formule d'Itô on a :

$dY_t = Y_t dM_t \Longrightarrow dM_t = \frac{dY_t}{Y_t}$

Ainsi

$dA_t = d\,\langle M, Z\rangle_t = \frac{1}{Y_t} d\,\langle Y, Z\rangle_t$

et donc $Y_t dA_t = d\,\langle Y, Z\rangle_t$

puisque A est à variation bornée

$\langle Z-A,Y\rangle_t=\langle Y,Z\rangle_t$.

On déduit que

$-\int_0^t Y_r dA_r+\langle Z-A,Y\rangle_t=0.$ ■

Exemple 4.25 *EDS (Black-Scholes) :*

$$\begin{cases} dX_t &= \mu X_t dt+\sigma X_t dB_t \\ X_0 &= x_0 \end{cases}$$

où $\mu\in\mathbb{R}$, σ, $x_0>0$.

Si on définit

$$M_t=-\int_0^t \frac{\mu X_r}{\sigma X_r}dB_r=\frac{-\mu}{\sigma}B_t.$$

alors M_t *est une martingale sous* P *et* $\langle M\rangle_t=\mu^2 t/\sigma^2$.

Si Y_t *est la martingale exponentielle associée à* M_t *et que* $\widetilde{P}_T(A)=E(1_A Y_T)$. *Alors du théorème de Girsanov le processus* X_t *est une martingale sous* $\widetilde{P}_T$.

De plus le processus $\widetilde{B}_t=B_t+\frac{\mu}{\sigma}t$ *est un mouvement brownien standard sous* $\widetilde{P}_T$ *et*

$$dX_t=\sigma X_t d\widetilde{B}_t.$$