Chapitre 4

La coloration dans les graphes

En 1852, le jeune anglais Francis Guthrie s'est demandé s'il est possible de colorer toute carte de géographie avec quatre couleurs en respectant la condition que deux pays voisins ne soient pas recouverts par la même couleur. Ce n'est qu'en 1976 que deux chercheurs américains ont pu répondre affirmativement à la conjecture des quatre couleurs. En effet, à tout pays d'une carte géographique, on associe un sommet du graphe. A deux sommets du graphe, on associe une arête si et seulement si les deux pays correspondants ont une extrémité commune. Une coloration des sommets du graphe est alors équivalente à une coloration des régions. Cette technique de coloration est devenue donc un outil très puissant dans la résolution des problèmes de la théorie des graphes.

Généralement, il s'agit de trouver une coloration des sommets d'un graphe qui satisfasse certaines conditions d'optimalité. Une condition naturelle est que le nombre de couleurs utilisées soit minimal.

4.1 Coloration des sommets

Définition 4.1 *Une coloration propre des sommets d'un graphe $G = (V, E)$ est une application c de V dans IN telle que si deux sommets x et y sont adjacents, alors leurs couleurs correspondantes sont différentes $c(x) \neq c(y)$. Une classe de couleur i est un ensemble stable de sommets de V colorés avec la même couleur i. Le nombre minimum de classes de couleur qui partitionnent l'ensemble V est le nombre chromatique, noté $\chi(G)$. Une $k-$coloration propre des sommets de G est une coloration propre qui utilise k couleurs, donc $\chi(G) = \min\{k$ où k est une $k-$coloration propre des sommets de $G\}$.*

Le problème de décision lié à ce paramètre est $NP-$complet dans le cas général. De nombreux travaux ont été menés pour définir des bornes pour le nombre chromatique en fonction d'autres paramètres de graphe.

4.1.1 Algorithme de coloration de Welsh et Powell (Algorithme glouton)

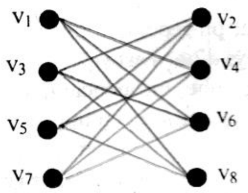
Cet algorithme couramment utilisé permet d'obtenir une assez bonne coloration d'un graphe, c'est-à-dire une coloration n'utilisant pas un trop grand nombre de couleurs. Cependant il n'assure pas que le nombre de couleurs utilisé soit minimum (et donc égal au nombre chromatique du graphe).

1. Classer les sommets suivant un ordre décroissant de leur degrés.

2. En parcourant la liste dans l'ordre, attribuer une couleur non encore utilisée au premier sommet non coloré, et attribuer cette même couleur à chaque sommet non encore coloré, et non adjacent à un sommet de cette couleur.

3. S'il reste des sommets non encore colorés dans legraphe, revinir à l'étape 2.

Enfin, notons que l'on peut parfois aboutir aux pires colorations possibles avec l'algorithme de Welsh & Powell, comme on le voit sur la figure ci-dessous



Le nombre de coloration de ces graphes est évidement 2. Tous les sommets étant de même degré, ils vont être visités dans l'ordre croissant des numéros de sommets. On voit bien que Welsh & Powell fournira une coloration propre c telle que $c(v_{2i-1}) = i$ et $c(v_{2i}) = i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Alors le nombre de couleurs trouvé est $4 > \chi(G) = 2$..

4.1.2 Bornes pour le nombre chromatique $\chi(G)$

Proposition 4.2 *Si H est un sous-graphe de G alors $\chi(H) \leq \chi(G)$.*

Preuve. Si c est une coloration propre de G alors c est clairement une coloration propre de H. ■

Proposition 4.3 $\chi(G) = max\{\chi(C); C$ *composante connexe de* $G\}$.

Preuve. D'après la Proposition 4.2, $\chi(G) \geq max\{\ \chi(C)\ ;C$ composante connexe de $G\}$. Soit C_1, C_2, C_k les composantes connexes de G. Pour $1 \leq i \leq k$; soit c_i une coloration propre de C_i avec les couleurs 1, 2, ..,$\chi(Ci)$. Soit c une coloration de G définie par $c(v) = c_i(v)$ si $v \in C_i$. Comme il n'y a pas d'arêtes entre deux sommets de composantes connexes diférentes, c est une coloration propre de G. Ainsi, $\chi(G) \leq max\{\chi(C)$,$C$ composante connexe de $G\}$. ■

Définition 4.4 *Soient $G = (V, E)$ un graphe et K un sous ensemble de sommets de V. L'ensemble K est appelé une clique si pour chaque paire de sommets distincts $a, b \in K$, a est adjacent à b. La taille d'une clique est le nombre de sommets de la clique. Une clique de taille p est notée par K_p . Le cardinal maximum d'une clique de G est noté par $\omega(G)$.*

Proposition 4.5 *Pour tout graphe G on a $\chi(G) \geq \omega(G)$*

Preuve. On applique la proposition 4.2 à H où H est le sous graphe induit par une clique de G de cardinalitée maximum. Donc $\chi(G) \geq \chi(H) = \omega(G)$ ■

Proposition 4.6 *Pour tout graphe G on a* $\left\lceil \frac{n}{\alpha(G)} \right\rceil \leq \chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1.$

Preuve. On démontre tout d'abord la première inégalité : Soit $P = \{S_1, .., S_k\}$ une partition minimale en stables de G. On a $k = \chi(G)$. De plus, $|S_i| \leq \alpha(G)$ par définition de $\alpha(G)$, pour $1 \leq i \leq k$. Or $n = \sum_{i=1}^{i=k} |S_i| \leq \sum_{i=1}^{i=k} \alpha(G) = \alpha(G).\chi(G)$. D'où $\frac{n}{\alpha(G)} \leq \chi(G)$ qui est un entier. Donc $\left\lceil \frac{n}{\alpha(G)} \right\rceil \leq \chi(G)$. Démontrons maintenant la seconde inégalité : On considère un stable S de taille $\alpha(G)$. Il suffit d'une couleur pour colorier S. Il reste alors $n - \alpha(G)$ sommets à colorier. On utilise une couleur différente pour chacun. D'où $\chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1$. ■

Théorème 4.7 *(Brooks,* 1941*). Pour tout graphe G de degré maximum $\Delta(G)$,*

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

et avec égalité si et seulement si on est dans un des deux cas suivants :
- Soit $\Delta(G) \neq 2$ et G admet un sous-graphe $K_{\Delta(G)+1}$ comme composante connexe, où $K_{\Delta(G)+1}$ est le graphe complet d'ordre $\Delta(G) + 1$.
- Soit $\Delta(G) = 2$ et G admet un cycle d'ordre impair comme composante connexe.

De nombreux paramètres de coloration propre ont été dérivés du nombre chromatique $\chi(G)$, la plupart de ces paramètres minimisent le nombre de couleurs nécessaires à la coloration d'un graphe. Il existe d'autres paramètres qui cherchent à maximiser le nombre de couleur. Parmi ces derniers, on cite le nombre $a-$chromatique $\psi(G)$, le nombre de *Grundy* $\gamma(G)$ et le nombre $b-$chromatique $b(G)$.

4.1.3 a-coloration et nombre a-chromatique

Définition 4.8 *Une $a-$coloration est une coloration propre telle que pour toute paire de couleurs différentes i et j, le sous graphe engendré par les deux classes de couleurs i et j, contient au moins une arête. Le nombre $a-$chromatique , noté $\psi(G)$, est le nombre maximum de classes de couleurs dans une $a-$coloration.*

4.1.4 b-coloration et nombre b-chromatique.

Définition 4.9 *Une coloration dominante est une coloration propre telle que toute classe de couleur i contient un sommet adjacent à au moins un sommet de chaque classe de couleur $j \neq i$. Ce sommet est dit sommet $b-$dominant pour la couleur i (ou sommet de couleur dominante i). Le nombre $b-$chromatique noté $b(G)$ est le nombre maximum de classes de couleurs dans une coloration dominante. Une coloration dominante avec $b(G)$ couleurs est dite $b-$coloration.*

Définition 4.10 *Une $(k)b-$coloration de G est une coloration dominante de G avec k couleurs.*

4.2 Coloration des arêtes

Définition 4.11 *Une coloration propre des arêtes d'un graphe $G = (V, E)$ est une application c de E dans IN telle que si deux arêtes e_1 et e_2 sont adjacentes, alors leurs couleurs correspondantes sont différentes $c(e_1) \neq c(e_2)$. Un ensemble d'arêtes colorés par la même couleur i est un couplage de G. Le nombre minimum de classes de couleur qui partitionnent l'ensemble E est l'indice chromatique, noté $\acute{\chi}(G)$. Une $k-$coloration propre des arêtes de G est une coloration propre qui utilise k couleurs, donc $\grave{\chi}(G) = \min\{k$ où k est une $k -$ coloration propre des arêtes de $G\}$.*

Pour colorer les arêtes d'un graphe, on peut se ramener au problème de la coloration des sommets. Il suffit pour cela de travailler non pas sur le graphe lui-même, mais sur le graphe adjoint, noté $\grave{G}$ (Line graph noté $L(G)$), et que l'on définit ainsi :

- à chaque arête de $G = (V, E)$ correspond un sommet de $\grave{G} = (E, F)$
- deux sommets de $\grave{G}$ sont reliés par une arête si les deux arêtes correspondantes de G sont adjacentes.

On peut ensuite appliquer par exemple l'algorithme de Welsh et Powell sur le graphe $\grave{G}$ pour colorer ses sommets. Une fois cela fait, on colorera les arêtes de G de la même couleur que les sommets correspondants de $\grave{G}$. Donc $\chi(L(G)) = \grave{\chi}(G)$.

Exemple 4.12 *Considérons n équipes de hockey qui doivent s'affronter lors d'un tournoi. Supposons que chaque équipe doive rencontrer chaque autre équipe exactement une fois. On peut tout d'abord se demander quel est le nombre maximum de rencontres qui peuvent avoir lieu chaque jour sachant qu'aucune équipe ne peut jouer deux matchs le même jour. La réponse est simple : si n est pair, alors $\frac{n}{2}$ rencontres peuvent avoir lieu le même jour; si n est impair, ce nombre est réduit à $\frac{n-1}{2}$, ce qui veut dire qu'au moins une équipe ne joue pas chaque jour. En termes de graphe, on peut créer un sommet par équipe et relier chaque paire de sommets par une arête. Les arêtes correspondent donc aux rencontres qui doivent être planifiées. La question posée ci-dessus revient alors à se demander quel est le nombre maximum d'arêtes que l'on peut choisir dans le graphe sans que deux arêtes choisies aient des extrémités en commun. Ce que l'on recherche s'appelle en fait un couplage avec un nombre maximum d'arêtes.*

Définition 4.13 *Un couplage dans un graphe est un ensemble d'arêtes n'ayant aucune extrémité en commun*

Proposition 4.14 *Soit $G = (X, E)$ un graphe. On note $\beta(G)$ la taille maximale d'un couplage. On a alors :*

$$\Delta(G) \leq \grave{\chi}(G) \quad \text{et} \quad \left\lceil \frac{|E|}{\beta(G)} \right\rceil \leq \grave{\chi}(G)$$

Preuve. Tout d'abord, il existe un sommet x tel que $d(x) = \Delta(G)$. En x, on a besoin de $\Delta(G)$ couleurs différentes donc $\Delta(G) \leq \grave{\chi}(G)$. Ensuite, soit $\{C_1, \ldots$

$,C_k\}$ une partition minimale de E, en couplage. On a $k = \dot{\chi}(G)$ et $|E| = \sum_{i=1}^{i=k} |C_i| \leq \sum_{i=1}^{i=k} \beta(G) = \dot{\chi}(G)\,\beta(G)$. Donc $\dot{\chi}(G) \geq \frac{|E|}{\beta(G)}$. Le fait que $\dot{\chi}(G)$ soit un entier permet d'ajouter la partie entière supérieure. ■

Proposition 4.15 $\dot{\chi}(K_{2n}) = 2n-1$ *et* $\dot{\chi}(K_{2n+1}) = 2n+1$

Preuve. Le cas de K_{2n} $m(K_{2n}) = \frac{(2n)(2n-1)}{2} = n(2n-1)$ et on voit facilement que $\beta(K_{2n}) = n$. La proposition précédente donne alors $\dot{\chi}(K_{2n}) \geq 2n-1$. Pour montrer l'inégalité contraire, on colorie K_{2n} avec $2n-1$ couleurs. On numérote tout d'abord les sommets de 0 à $2n-1$. On place $2n-1$ au centre tandis que les $2n-1$ autres forment un polygone régulier tout autour. On relie alors $2n-1$ à 0, puis 1 à $2n-2$, 2 à $2n-3$, . . ., et $n-1$ à n. On forme ainsi un couplage parfait C_0. On décale les sommets du polygone pour former le couplage parfait C_1. $2n-1$ est relié à 1, puis 2 à 0, 3 à $2n-2$, 4 à $2n-3$, . . ., n à $n+1$. De la façon, on forme successivement les couplages parfaits C_0 à C_{2n-2}. Le couplage C_k est en fait $\{(k, 2n-1)\} \cup \{(i+k, 2n-1-i+k)$ tel que$1 \leq i \leq n-1\}$ (on compte les sommets modulo $2n-1$). Il est clair que ces $2n-1$ couplages forment une partition de l'ensemble des arêtes. En associant une couleur à chaque couplage, on obtient le coloriage recherché. Le cas de K_{2n+1} $m(K_{2n+1}) = \frac{(2n)(2n+1)}{2} = n(2n+1)$ et on voit que $\beta(K_{2n+1}) = n$. La proposition précédente donne alors $\dot{\chi}(K_{2n+1}) \geq 2n+1$. K_{2n+1} est inclus dans K_{2n+2} donc $\dot{\chi}(K_{2n+1}) \leq \dot{\chi}(K_{2n+2}) = 2n+1$. ■

Théorème 4.16 *(Vizing, 1964). Pour tout graphe G, $\Delta(G) \leq \dot{\chi}(G) \leq \Delta(G)+1$.*

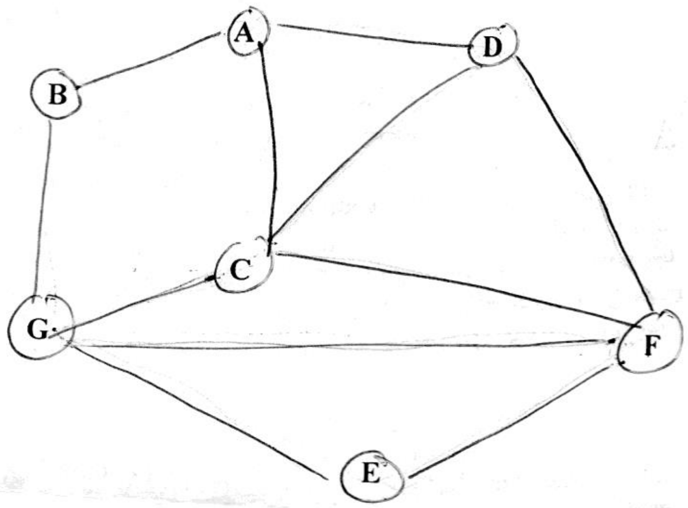
Exercice 01

Des touristes sont logés dans un hôtel noté A.

Un guide fait visiter six sites touristiques notés B, C, D, E, F et G.

Les tronçons de route qu'il peut emprunter sont représentés sur le graphe ci-dessous.

Le long de chaque arête figure la distance en kilomètres des différents tronçons

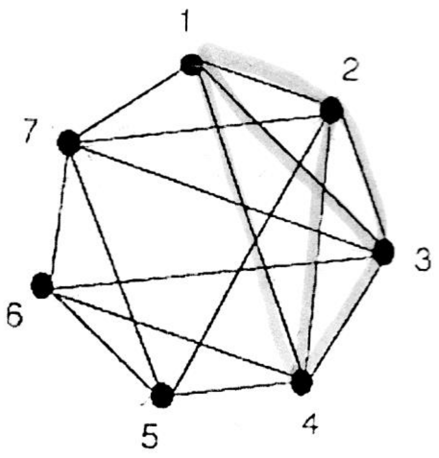


1. A partir de l'hôtel, le guide peut-il emprunter tous les tronçons de route en passant une et une seule fois sur chacun d'eux ? Justifier la réponse.
2. Même question s'il doit obligatoirement terminer son circuit à l'hôtel.

Exercice 02 :

Une université doit organiser les horaires des examens de rattrapage. On suppose qu'il y a 7 épreuves à planifier, numérotées de 1 à 7. Les paires de cours suivantes ont des étudiants en commun : 1 et 2, 1 et 3, 1 et 4, 1 et 7, 2 et 3, 2 et 4, 2 et 5, 2 et 7, 3 et 4, 3 et 6, 3 et 7, 4 et 5, 4 et 6, 5 et 6, 5 et 7 et 6 et 7.

Comment organiser ces épreuves de façon qu'aucun étudiant n'ait à passer deux épreuves en même temps et cela sur une durée minimale ?



Modélisation sous forme de graphe

Solution :

Planifier les examens en un temps minimal consiste à déterminer une coloration en k couleurs des sommets du graphe, k étant le nombre chromatique du graphe :

La partition minimale des sommets est ($k = 4$). $S_1 = \{1, 6\}, S_2 = \{2\}, S_3 = \{3, 5\}, S_4 = \{4, 7\}$.

les examens peuvent être répartis en 4 périodes, de la manière suivante :

période 1, épreuves des cours 1 et 6.

période 2, épreuve du cours 2.

période 3, épreuves des cours 3 et 5.

période 4, épreuves des cours 4 et 7.

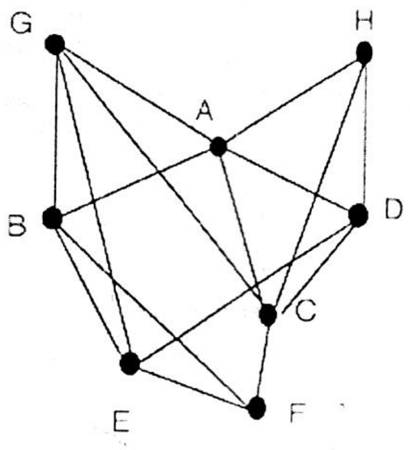
Exercice 3 :

A, B, C, D, E, F, G et H désignent huit poissons ; dans le tableau ci-dessous, une croix signifie que les poissons ne peuvent cohabiter dans un même aquarium :

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		X	X	X			X	X
B	X				X	X	X	
C	X			X		X	X	X
D	X		X		X			X
E		X		X		X	X	
F		X	X		X			
G	X	X	X		X			
H	X		X	X				

Quel nombre minimum d'aquariums faut-il ?

Solution :



$S_1 = \{A, E\}, S_2 = \{B, C\}, S_3 = \{D, F, G\}, S_4 = \{H\}$. Donc on aura besoin de 4 aquariums