Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Université Hassiba Benbouali de Chlef
Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة حسيبة بن بوعلي بالشلف
كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي

قسم الرياضيات

U.H.B.C. Chlef
Faculté des Sciences Exactes
Département des maths

A.U. 2020/2021
Niveau: $1^{ère}$ Master/ Option: M.A.S.
Module: Processus Stochastiques 2

Examen de Rattrapage (Documents Non Autorisés)

On travaille sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$.

1. Soit $X_n = \sum_{m=1}^{n} 1_{B_m}$, avec $B_n \in \mathcal{F}_n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}^*} - sous - martingale$.
   (b) Posons $Z_n = \sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}(1_{B_m}/\mathcal{F}_{m-1})$; $n \geq 1$.
   Montrer que:
      i. $Z_n \leq Z_{n+1}$ *p.s. pour tout* $n \geq 1$.
      ii. $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un processus prévisible par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (c) Montrer que le processus $Y_n := X_n - Z_n$; $n \geq 1$. est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}^*} - martingale$.
   (d) Calculer:
      i. $\mathbb{E}(1_{B_2}/\sigma(1_{B_1}))$;
      ii. $\mathbb{E}(1_{B_3}/\sigma(1_{B_1}, 1_{B_2}))$;

2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}^*} - martingale$, où $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$.
   (a) Montrer que: $\mathbb{E}(X_{n+k}/\mathcal{F}_n) = X_n$, $\forall k \geq 1$.
   (b) Montrer que: $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_{n-1}) = ... = \mathbb{E}(X_2) = \mathbb{E}(X_1)$, $\forall n \geq 1$.

3. Soit X et Z deux variables aléatoires sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$.
   (a) Montrer que si Z est $\mathcal{G}$-mesurable, alors
   $$\mathbb{E}(ZX/\mathcal{G}) = Z.\mathbb{E}(X/\mathcal{G}) \tag{1}$$
   (b) Donner un sens intuitif de (1).

Indication Pour n'importe quelle variable aléatoire Z $\mathcal{G}$-mesurable, on a
$$\mathbb{E}[Z.\mathbb{E}(X/\mathcal{G})] = \mathbb{E}(Z.X)$$

UHBC Chlef / MASTER 1/ MAS / Fac. Sces Exactes et Info

P.S 2 20/21

Corrigé type de l'Examen de Rattrapage

13pts $\boxed{1}$

(a) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sous_martingale

0,5 (i) X_n : $\mathcal{F}_n$ - mesurable car somme de v.a $\mathcal{F}_n$_mes.

1 (ii) $\mathbb{E}|X_n| = \mathbb{E}X_n = \sum_{m=1}^{n}\mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_m}) = \sum_{m=1}^{n}\mathbb{P}(B_m) \leq n < \infty$ [Car $\mathbb{P}(B_m)\leq 1$].

1,5 (iii) $\mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_{n+1}} + X_n/\mathcal{F}_n)$

$= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_{n+1}}/\mathcal{F}_n) + X_n$

$= \mathbb{P}(B_{n+1}/\mathcal{F}_n) + X_n$

$\geq X_n$ car $\mathbb{P}(B_{n+1}/\mathcal{F}_n) \geq 0$.

(b)

1 (i) $Z_{n+1} = \sum_{m=1}^{n+1}\mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_m}/\mathcal{F}_{m-1}) = Z_n + \underbrace{\mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_{n+1}}/\mathcal{F}_n)}_{\mathbb{P}(B_{n+1}/\mathcal{F}_n)\geq 0 \text{ p.s.}}$

D'où, $Z_n \leq Z_{n+1}$ p.s $\forall n\geq 1$.

2 (ii) $\mathbb{E}(Z_{n+1}/\mathcal{F}_n) = \sum_{m=1}^{n+1}\underbrace{\mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_m}/\mathcal{F}_{m-1})}_{\mathcal{F}_{m-1}\text{ - mesurable (déf}^t\text{ de Kolmogorov)}}$

Comme, $0\leq m-1\leq n \Rightarrow \mathcal{F}_{m-1}\subset\mathcal{F}_n$ $\forall m\geq 1$.

D'où $\mathbb{E}(Z_{n+1}/\mathcal{F}_n)$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable $\forall n\geq 0$.
i.e. (Z_n) est $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$-prévisible.

(c) Mq. $Y_n = X_n - Z_n$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$-martingale

$$Y_n = \sum_{m=1}^{n}\left[\mathbb{1}_{B_m} - \mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_m}/\mathcal{F}_{m-1})\right]$$

1 (i) $\mathbb{1}_{B_m}$ est $\mathcal{F}_m$-mes $1\leq m\leq n$

$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_m}/\mathcal{F}_{m-1})$: $\mathcal{F}_{m-1}$-mes donc $\mathcal{F}_m$-mes. ($m-1<m$)

$\Rightarrow$ $\mathbb{1}_{B_m} - \mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_m}/\mathcal{F}_{m-1})$ est $\mathcal{F}_m$-mes $\forall m\in\overline{1..n}$

D'où : Y_n est $\mathcal{F}_n$-mes. $\forall n\geq 1$.

1,5 (ii) $$\mathbb{E}|Y_n| \leq \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}(B_m) + \underbrace{\mathbb{E}\left|\mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_m}/\mathcal{F}_{m-1})\right|}_{\mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_m})}$$

$$\leq \sum_{m=1}^{n} 2\mathbb{P}(B_m)$$

$$\leq 2n$$

car : $\mathbb{1}_{B_m}\geq 0$
+ pté des esp. itérées

$Y_n\in L^1$ $\forall n$.

1,5 (iii) $$\mathbb{E}(Y_{n+1}/\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}\left\{\left[\overset{\mathcal{F}_n\text{-mes}}{Y_n} + \mathbb{1}_{B_{n+1}} - \mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_{n+1}}/\mathcal{F}_n)\right]/\mathcal{F}_n\right\}$$

$$= Y_n + \mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_{n+1}}/\mathcal{F}_n) - \underbrace{\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_{n+1}}/\mathcal{F}_n)/\mathcal{F}_n\right]}_{\mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_{n+1}}/\mathcal{F}_n)}$$

$$= Y_n.$$

(d)

1 (i) $\sigma(\mathbb{1}_{B_1}) = \{\emptyset, \Omega, \underbrace{B_1, B_1^c}_{\text{atomes}}\}$

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{B_2} / \sigma(\mathbb{1}_{B_1})] = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_2}/B_1)\mathbb{1}_{B_1} + \mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_2}/B_1^c)\mathbb{1}_{B_1^c}$$

$$= \mathbb{P}(B_2/B_1)\mathbb{1}_{B_1} + \mathbb{P}(B_2/B_1^c)\mathbb{1}_{B_1^c}.$$

2 (ii) $\sigma(\mathbb{1}_{B_1}, \mathbb{1}_{B_2}) = \{\emptyset, \Omega, \underbrace{B_1B_2, B_1B_2^c, B_1^cB_2, B_1^cB_2^c}_{\text{Les atomes}}\}$

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{B_3} / \sigma(\mathbb{1}_{B_1}, \mathbb{1}_{B_2})] = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_3}/B_1B_2)\mathbb{1}_{B_1B_2} + \mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_3}/B_1B_2^c)\mathbb{1}_{B_1B_2^c} +$$

$$+ \mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_3}/B_1^cB_2)\mathbb{1}_{B_1^cB_2} + \mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_3}/B_1^cB_2^c)\mathbb{1}_{B_1^cB_2^c}.$$

avec : $\mathbb{P}(\mathbb{1}_A/B) = \mathbb{P}(A/B)$, $A, B \in \mathcal{F}$.
$\mathbb{P}(B) \neq 0$.

---

[2]

2 (a) Mq. $\mathbb{E}(X_{n+k}/\mathcal{F}_n) \overset{?}{=} X_n$, $\forall k \geq 1$ ..... (*)

Raisonons par récurrence sur $k = 1, 2, 3, \ldots$

- Pour $k=1$: $\mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = X_n$ vraie
  car $(X_n) : (\mathcal{F}_n)_n$ - martingale.

- Supposons que (*) est vraie jusqu'à k et montrons qu'elle reste vraie pour $k+1$;

c.à.d. M.q. $\mathbb{E}(X_{n+k+1}/\mathcal{F}_n) = X_n$

On a : $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+k}$,
par la pté de Tour :

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X_{n+k+1}/\mathcal{F}_n)/\mathcal{F}_{n+k}\right] = \mathbb{E}(X_{n+k+1}/\mathcal{F}_n).$$

$$= \mathbb{E}\left[\underbrace{\mathbb{E}(X_{n+k+1}/\mathcal{F}_{n+k})}_{= X_{n+k} \text{ (car } (X_n) \text{ mart)}}/\mathcal{F}_n\right]$$

$$= \mathbb{E}(X_{n+k}/\mathcal{F}_n)$$

$$= X_n \quad \left(\text{hypothèse de récurrence}\right)$$

(b) Introduisons l'espérance dans les 2 membres de l'égalité dans (a) :

1 On obtient :

(pté des esp. itérées)

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X_{n+k}/\mathcal{F}_n)\right] = \mathbb{E}(X_n) \Rightarrow \mathbb{E}X_{n+k} = \mathbb{E}X_n \quad \forall k \geq 1$$

i.e. $\mathbb{E}X_1 = \mathbb{E}X_2 = \dots = \mathbb{E}X_n \quad \forall n \geq 1$.

$\boxed{3}$

(a) Z est $\mathcal{G}$-mesurable.

Mq :

$$\mathbb{E}(ZX/\mathcal{G}) = Z\,\mathbb{E}(X/\mathcal{G}) \text{ p.s.}$$

Scanné avec CamScanner