Solution de la serie d'exos n°1

Exercice 1 :

$$\mathcal{G}_t = \sigma(M_s,\ s \leq t) \subseteq \mathcal{F}_t \quad \left(\begin{array}{c}\text{plus petite} \\ \text{ss-tribu} \\ \text{rendant } M_s \\ s\leq t, \text{mes}\end{array}\right)$$

Soit $s \leq t$:

Concernant la 1ère et la 2ème condition (adaptation et intégrabilité), c'est évident.

La propriété clé :

$$\mathbb{E}(M_t / \mathcal{G}_s) \underset{\text{Tour}}{\overset{\text{pté}}{\underline{\underline{\text{car}}}}} \mathbb{E}\Big[\underbrace{\mathbb{E}(M_t/\mathcal{G}_s)}_{M_s}/\mathcal{F}_s\Big] \quad \left(\begin{array}{c}\text{car} \\ \mathcal{G}_s \subset \mathcal{F}_s\end{array}\right)$$

$$= \mathbb{E}(M_s / \mathcal{F}_s)$$

$$= M_s \quad \text{car } M_s \text{ est } \mathcal{F}_s\text{-mes} \quad \blacksquare$$

//

Exercice 2 : Montrons qu'un processus $(M_t)_{t\geq 0}$ intégrable, adapté et croissant est une sous-mart ?

La 1ère et la 2ème condition sont satisfaites par hypothèse.

<u>pté clé</u> : <u>Mq</u> : $\mathbb{E}(M_t/\mathcal{F}_s) \overset{?}{\geq} M_s$ p.s., $s \leq t$

<u>St</u> $s \leq t$:

$M_s \leq M_t$ car $M_t \nearrow$.

$\underbrace{\mathbb{E}(M_s/\mathcal{F}_s)}_{\substack{\| \\ M_s}} \leq \mathbb{E}(M_t/\mathcal{F}_s)$ Monotonie de l'esp. cond.

$M_s \leq \mathbb{E}(M_t/\mathcal{F}_s)$ ■

(adaptation)

Exercice 3 Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ - mart.

$s \leq t$

(a) $\mathbb{E}\left[(M_t - M_s)^2/\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[M_t^2 + M_s^2 - 2M_sM_t/\mathcal{F}_s\right]$

$= \mathbb{E}(M_t^2 + M_s^2/\mathcal{F}_s) - 2\,\mathbb{E}(\underbrace{M_s}_{\mathcal{F}_s\text{-mes}}M_t/\mathcal{F}_s)$

$= \mathbb{E}(M_t^2 + M_s^2/\mathcal{F}_s) - 2M_s \underbrace{\mathbb{E}(M_t/\mathcal{F}_s)}_{\substack{\| \\ M_s}}$

② $= \mathbb{E}(M_t^2 - M_s^2/\mathcal{F}_s)$.

(b) Introduisons ds les 2 côtés (ds (a)) l'espérance :

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(M_t^2 - M_s^2 / \mathcal{F}_s)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left((M_t - M_s)^2 / \mathcal{F}_s\right)\right]$$

Par la pté des esp. itérées, on obtient

$$\mathbb{E}(M_t^2 - M_s^2) = \mathbb{E}(M_t - M_s)^2 .$$

⚠ Remarque : La réciproque est fausse

$$\left(\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y \not\Rightarrow \mathbb{E}(X/\mathcal{G}) = \mathbb{E}(Y/\mathcal{G}) \right)$$

■

$\boxed{\text{Exercice 4}}$ Soit $(T_n)_{n\geq 1}$ une suite de t.a.

c.à.d. $\forall n \geq 1$: $\{T_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ pour $\forall t \geq 0$

<u>Mq</u> :

① $\sup_n T_n$ est un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ t.a.

St $t \geq 0$: $\{\sup_n T_n \leq t\} = \bigcap_n \underbrace{\{T_n \leq t\}}_{\in \mathcal{F}_t \text{ : tribu}} \in \mathcal{F}_t$.

② $\forall t \geq 0$: On a toujours :

$$\{\inf_n T_n \geq t\} = \bigcap_n \{T_n \geq t\} \quad \dots\dots (*)$$

mais On n'a pas :

$$\{\inf T_n \leq t\} = \bigcup_n \{T_n \leq t\} \quad \underline{\text{Faux}}$$

Car Inf de T_n peut atteindre une valeur t dont tous les $T_n < t$.

D'après $(*)$, en passant au complémentaire :

$$\{\inf_n T_n < t\} = \bigcup_n \{T_n < t\}$$

Cela veut dire que $\inf_n T_n$ n'est pas en général un temps d'arrêt sauf si $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est continue à droite

dans ce cas, d'après la proposition 3.1 du cours (chap. 1) :

Si la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est càd, alors :

$$\{\inf_n T_n < t\} = \bigcup_n \{T_n < t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t$$

i.e. $\inf_n T_n$ est un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ t.a.

si $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est càd. ■

Exercice 5 : Vérifions que $\mathcal{F}_\tau$ est une tribu si τ est $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ − t.a. i.e.

① $\emptyset \in \mathcal{F}_\tau$?

② si $A \in \mathcal{F}_\tau \overset{?}{\Longrightarrow} \overline{A} \in \mathcal{F}_\tau$

③ $A_k \in \mathcal{F}_\tau \overset{?}{\Longrightarrow} \bigcup_k A_k \in \mathcal{F}_\tau$.
$k = 1, 2, \ldots$

pour tout $t \geq 0$

① $\emptyset \cap \{\tau \leq t\} = \emptyset \in \mathcal{F}_t$ (tribu).

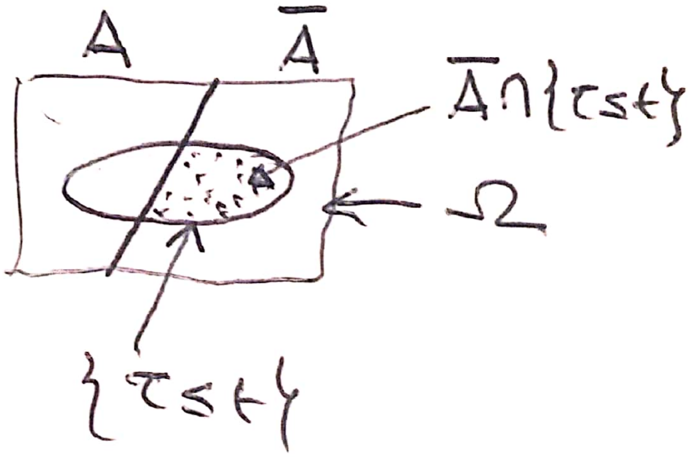
$\Rightarrow \emptyset \in \mathcal{F}_\tau$.

② Soit $A \in \mathcal{F}_\tau$ alors (d'après la définition de $\mathcal{F}_\tau$)

$$A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t \geq 0$$

<u>Dém</u> $$\bar{A} \cap \{\tau \leq t\} \overset{(*)}{=} \underbrace{\underbrace{\{\tau \leq t\}}_{\substack{\in \\ \mathcal{F}_t \\ (\tau.\ t.a)}} \cap \underbrace{\overline{[\underbrace{A \cap \{\tau \leq t\}}_{\substack{\in \\ \mathcal{F}_t}}]}}_{\in \mathcal{F}_t\ (\text{tribu})}}_{\in \mathcal{F}_t\ (\text{tribu})}$$

<u>Justifica^t de (*)</u>



Comme $\bar{A} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \ \forall t$, <u>Alors</u>

$$\bar{A} \in \mathcal{F}_\tau .$$

③ Soit $A_k \in \mathcal{F}_\tau$, $k=1,2\ldots$, Alors :

$$A_k \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \ \forall t \geq 0.$$

<u>On a</u> : $\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \cap \{\tau \leq t\} = \bigcup_k \left[\underbrace{A_k \cap \{\tau \leq t\}}_{\in \mathcal{F}_t}\right] \in \mathcal{F}_t$

D'où : $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}_\tau$.

Exercice 6 :
Soient τ et σ 2 $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ - t.a.

(a) Montrons que : $\tau \leq \sigma \overset{?}{\Rightarrow} \mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\sigma$.

Soit $A \in \mathcal{F}_\tau$ alors $A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \ \forall t$

Comme $\tau \leq \sigma$: $\{\tau \leq t\} \supset \{\sigma \leq t\}$ car

Par conséquent :

$$\{\sigma \leq t\} = \{\sigma \leq t\} \cap \{\tau \leq t\}, \ \forall t$$

Maintenant :

$$A \cap \{\sigma \leq t\} = \underbrace{\underbrace{\left[A \cap \{\tau \leq t\}\right]}_{\in \mathcal{F}_t \ (A \in \mathcal{F}_\tau)} \cap \underbrace{\{\sigma \leq t\}}_{\in \mathcal{F}_t \ (\sigma \text{ t.a})}}_{\in \mathcal{F}_t \ (\text{ss\_tribu})}$$

D'où $A \in \mathcal{F}_\sigma$

On a bien : $\tau \leq \sigma \Rightarrow \mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\sigma$.

b) M.q. $\mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma} = \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$

c.à.d : $\mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma} \overset{(1)}{\subset} \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$

et $\mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma \overset{(2)}{\subset} \mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma}$

L'inclusion (1)

Notons que : $\sigma\wedge\tau \leq \sigma$ et $\sigma\wedge\tau \leq \tau$

donc par le résultat (a) précédent :

$$\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau} \subset \mathcal{F}_\sigma \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau} \subset \mathcal{F}_\tau$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau} \subset \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau} .$$

L'inclusion (2) :

Soit $A \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau \Rightarrow \begin{cases} A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \\ \text{et} \\ A \cap \{\sigma \leq t\} \in \mathcal{F}_t \end{cases} \quad \forall t$

Comme : $\{\sigma\wedge\tau \leq t\} = \{\sigma \leq t\} \cup \{\tau \leq t\}$

8 $\Rightarrow A \cap \{\sigma\wedge\tau \leq t\} = [A \cap \{\sigma \leq t\}] \cup [A \cap \{\tau \leq t\}]$

Or $A \cap \{\sigma \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ $\forall t$
et $A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$

Donc : $A \cap \{\sigma \wedge \tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \; \forall t$

càd. $A \in \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}$

$\boxed{\text{Exercice 7}}$ Mart. en fct. de sa valeur terminale

$(X_t)_{t \geq 0}$: $(\mathcal{F}_t)_{T \geq t \geq 0}$ - mart. tq. $X_T =: Y$.

$$X_t = \mathbb{E}(X_T / \mathcal{F}_t) \quad \text{car } t \leq T \text{ et } (X_t)_{T \geq t \geq 0} \text{- mart}$$

D'où :

$$\boxed{X_t = \mathbb{E}(Y / \mathcal{F}_t) \quad , 0 \leq t \leq T}$$

Y est dite la valeur terminale de $(X_t)_{T \geq t \geq 0}$

Exercice 8 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ esp. de proba. filtré.

On a : $Z_t := \mathbb{P}(T \leq t / \mathcal{F}_t)$, T : v.a. positive

(i) Adaptation : On sait que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}\mathbb{1}_A$.

D'où : $Z_t = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{T\leq t\}} / \mathcal{F}_t)$

D'après la déf$^{\underline{t}}$ de Kolmogorov de l'espérance conditionnelle ; Z_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour $\forall t \geq 0$

(ii) Intégrabilité :

Z_t est une probabilité donc

$0 \leq Z_t \leq 1$ bornée

d'où $Z_t \in L^1$ $\forall t$.

(iii) pté clé : Mq : $\mathbb{E}(Z_t / \mathcal{F}_s) \geq Z_s$, $s \leq t$.

On sait que : $\{T \leq s\} \subset \{T \leq t\}$, $s \leq t$

$\Longrightarrow \mathbb{1}_{\{T\leq s\}} \leq \mathbb{1}_{\{T\leq t\}}$

Introduisons l'espérance conditionnelle p.r.p. à $\mathcal{F}_s$ dans les 2 côtés :

$$\underbrace{\mathbb{E}\left(1\!\!1_{\{T\leq s\}} / \mathcal{F}_s\right)}_{\substack{\shortparallel \\ Z_s}} \leq \mathbb{E}\left(1\!\!1_{\{T\leq t\}} / \mathcal{F}_s\right)$$

$$\underset{\substack{\text{Tour} \\ (\mathcal{F}_s\subset\mathcal{F}_t)}}{\overset{\text{p}^{\text{té}}\text{ de}}{\leq}} \mathbb{E}\left[\underbrace{\mathbb{E}\left(1\!\!1_{\{T\leq t\}} / \mathcal{F}_t\right)}_{Z_t} / \mathcal{F}_s\right]$$

<u>D'où</u>

$$Z_s \leq \mathbb{E}\left(Z_t / \mathcal{F}_s\right), \quad \forall s,t \quad s\leq t.$$

Ce qui prouve que :

$(Z_t)_{t\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-sous-mart.

$\blacksquare$

Scanned with CamScanner