Exo2 : Exo 1 = corr   corrigé type

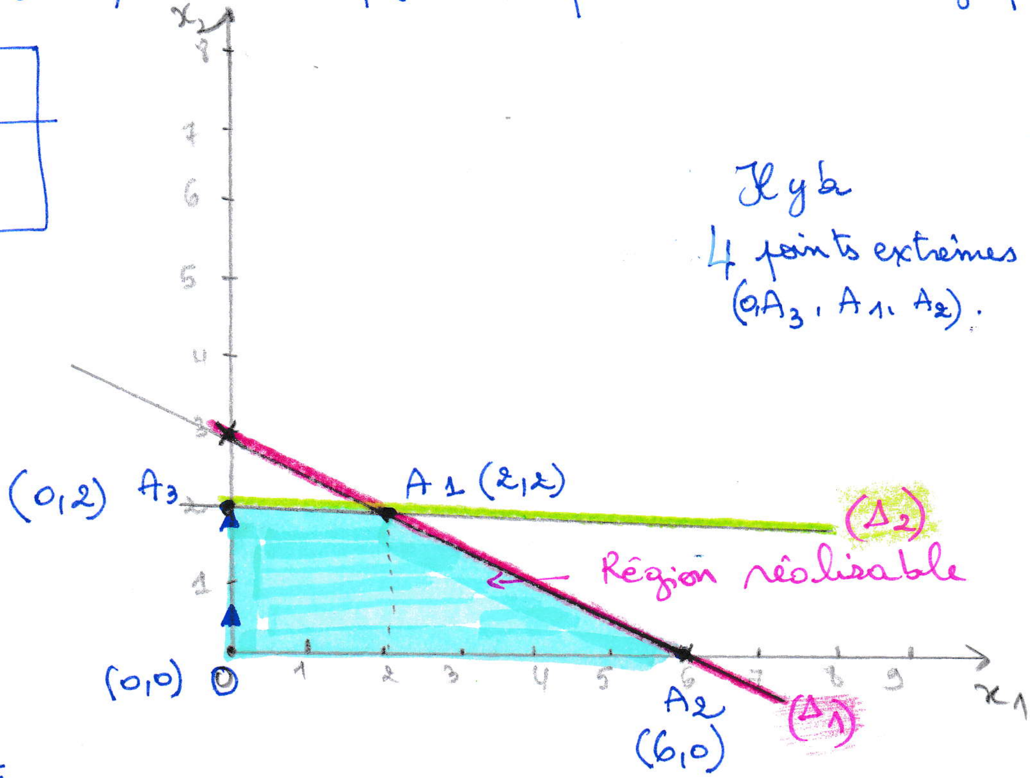
$$P(\alpha,\theta) : \begin{cases} \max\ \alpha x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \quad \dots (\Delta_1) \\ x_2 \leq 2+\theta \quad (\Delta_2) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$c^t = (\alpha, 1)$

① Résolution du problème $P(\alpha,0)$ par la méthode graphique.

(Δ_1)

x_1	0	6
x_2	3	0



Il y a 4 points extrêmes : (O, A_3, A_1, A_2).

On calcule :

$$c^t A_1 = (\alpha, 1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\alpha + 2$$

$$c^t A_2 = (\alpha, 1) \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 6\alpha.$$

$$c^t A_3 = (\alpha, 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2.$$

1) si $\begin{cases} c^t A_1 \geq c^t A_2 \\ c^t A_1 \geq c^t A_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 2 \geq 6\alpha & \Rightarrow 2 \geq 6\alpha - 2\alpha \Rightarrow \alpha \leq 1/2 \\ 2\alpha + 2 \geq 2 & \Rightarrow 2\alpha \geq 0 \Rightarrow \alpha \geq 0. \end{cases}$

• donc si $0 \leq \alpha \leq 1/2$, alors la solution optimale est $A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2) si $\begin{cases} c^t A_2 \geq c^t A_1 \\ c^t A_2 \geq c^t A_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6\alpha \geq 2\alpha + 2 & \Rightarrow \alpha \geq 1/2. \\ 6\alpha \geq 2 & \Rightarrow \alpha \geq 1/3. \end{cases}$

• donc si $\alpha \geq 1/2$, alors la solution est $A_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

2

3) Si $\begin{cases} c'A_3 \geq c'A_1 \\ c'A_3 \geq c'A_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \geq 2\alpha + 2 \\ 2 \geq 6\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \leq 0 \\ \alpha \leq 1/3 \end{cases}$

- ~~donc~~ si $\alpha \leq 0$, alors la solution est $A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

II) Résoudre par la méthode du simplexe le problème $P(-1,0)$

$$P(-1,0) : \begin{cases} -x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

La forme standard :

$$\max z \begin{cases} -x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 + e_1 + 0e_2 = 6 \\ 0x_1 + x_2 + 0e_1 + e_2 = 2 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ e_1, e_2 \geq 0 \end{cases}$$

$n = 4$ $\quad m = 2$

donc $n - m = 2$

$$\underbrace{\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}}_{V.H.B} \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} e_1 = 6 \\ e_2 = 2 \end{cases}}_{V.B.}$$

$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, A_B^{-1} exist

$\det A_B \neq 0$.

pivot

V.H.B / V.B	x_1	x_2	e_1	e_2	b	R	
e_1	1	2	1	0	6	$6/2 = 3$	L_1
e_2	0	$\boxed{1}$	0	1	2	$2/1 = 2$	L_2
Z	-1	1	0	0	0		L_3

v.e

$L'_1 = L_1 - 2.L'_2$

$L'_2 = \dfrac{L_2}{\text{pivot}} = (0, 1, 0, 1, 2)$

$L'_3 = L_3 - L'_2$

$$L'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad L'_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

V.HB / V.B	x_1	x_2	e_1	e_2	b
e_1	1	0	1	-2	2
x_2	0	1	0	1	2
Z	-1	0	0	-1	-2

$z \leq 0$ donc c'est la solution optimale.

$x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $e_1 = 2$, $e_2 = 0$. $|Z| = |-2| = 2$.

$X^* = (0, 2, 2, 0)$

Intérprétation économique:

pour avoir le bénifice de $|Z| = 2$, il faut produire 0 de x_1 et 2 de x_2.

il reste 2 heures de production et les heures de finitions sont épuisées.

Duale:

$$\begin{cases} 6y_1 + 2y_2 \\ y_1 + 0y_2 \geq -1 \\ 2y_1 + y_2 \geq 1 \\ y_1, y_2 \geq 0. \end{cases}$$

Déduisons la valeur de dual D'après le dernier tableau.

$y_1 = 0$, $y_2 = -1$, $z = |-2| = 2$.

$y^* = (0, -1)$

La dualité est forte car $c' x^* = b' y^*$

(4) pour quelle valeurs de θ, la solution optimales de $P(-1, 0)$ reste optimale pour $P(-1, \theta)$

Comme $x_2 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq 2 + \theta \Rightarrow -2 \leq \theta$

pour que $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ est solution $\begin{cases} (1) \text{ solution réalisable} \\ (2) \text{ optimale} \end{cases}$

$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ solution réalisable

$\Rightarrow 2 \leq 2 + \theta \Rightarrow$ $\theta \geq 0$ pour que $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ solution optimale.

Exo 3: $Z = \max 38000 x_{4p} + 28000 x_{3p}$

$x_{4p} + x_{3p} \leq 100$

$x_{4p} \leq 40$ $\quad 2x_{4p} + x_{3p} \leq 80$

$x_{3p} \geq 0$, $x_{4p} \geq 0$