Mouvement Brownien

Le mouvement Brownien

Promenade aléatoire

Propriétés

Intégrale de Wiener

Exemples

Robert Brown (1828) observe le mouvement irrégulier de particules de pollen en suspension dans l'eau.
Delsaux (1877) explique les changements incessants de direction de trajectoire par les chocs entre les particules de pollen et les molécules d'eau.
Bachelier (1900) met en évidence le caractère “markovien” du mouvement Brownien, en vue d'étudier les cours de la Bourse.
Einstein (1905) détermine la densité de transition du mouvement Brownien par l'intermédiaire de l'équation de la chaleur et relie ainsi le mouvement Brownien et les équations aux dérivées partielles de type parabolique.
Smoluchowski (1905) décrit le mouvement Brownien comme une limite de promenades aléatoires.
N. Wiener (1923) réalise la première étude mathématique rigoureuse et donne une démonstration de l'existence du Brownien.

P. Lévy (1948) s'intéresse aux propriétés fines des trajectoires du Brownien. Depuis, travaux d'Itô, Watanabe, Meyer, Yor, LeGall, Salminen, Durrett, Chung, Williams, Knight, Pitman,...

1 Le mouvement Brownien

On se donne un espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et un processus $(B_t, t \geq 0)$ sur cet espace.

1.1 Définition.

Le processus $(B_t, t \geq 0)$ est un **mouvement Brownien** (standard) si

a) $P(B_0 = 0) = 1$ (le mouvement Brownien est issu de l'origine).

b) $\forall s \leq t, B_t - B_s$ est une variable réelle de **loi gaussienne, centrée de variance** $(t - s)$.

c) $\forall n, \quad \forall t_i,\ 0 \leq t_0 \leq t_1 \ldots \leq t_n$, les variables

$$(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \ldots, B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_0})$$

sont **indépendantes**.

c') Pour tout (t, s) la variable $B_{t+s} - B_t$ est indépendante de la tribu du passé avant t, soit $\mathcal{F}_t^B = \sigma(B_u, u \leq t)$.

1.2 Généralisation.

Le processus Z défini par $Z_t = a + B_t$ est un Brownien issu de a.
On dit que X est un MB de **drift** μ et de **coefficient de diffusion** σ si

$$X_t = x + \mu t + \sigma B_t$$

où B est un mouvement Brownien. La v.a. X_t est une v.a. gaussienne d'espérance $x + \mu t$ et de variance $\sigma^2 t$.
Pour tout (t, s), la v.a. $X_{t+s} - X_t$ est indépendante de $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_u, u \leq s)$.

2 Promenade aléatoire

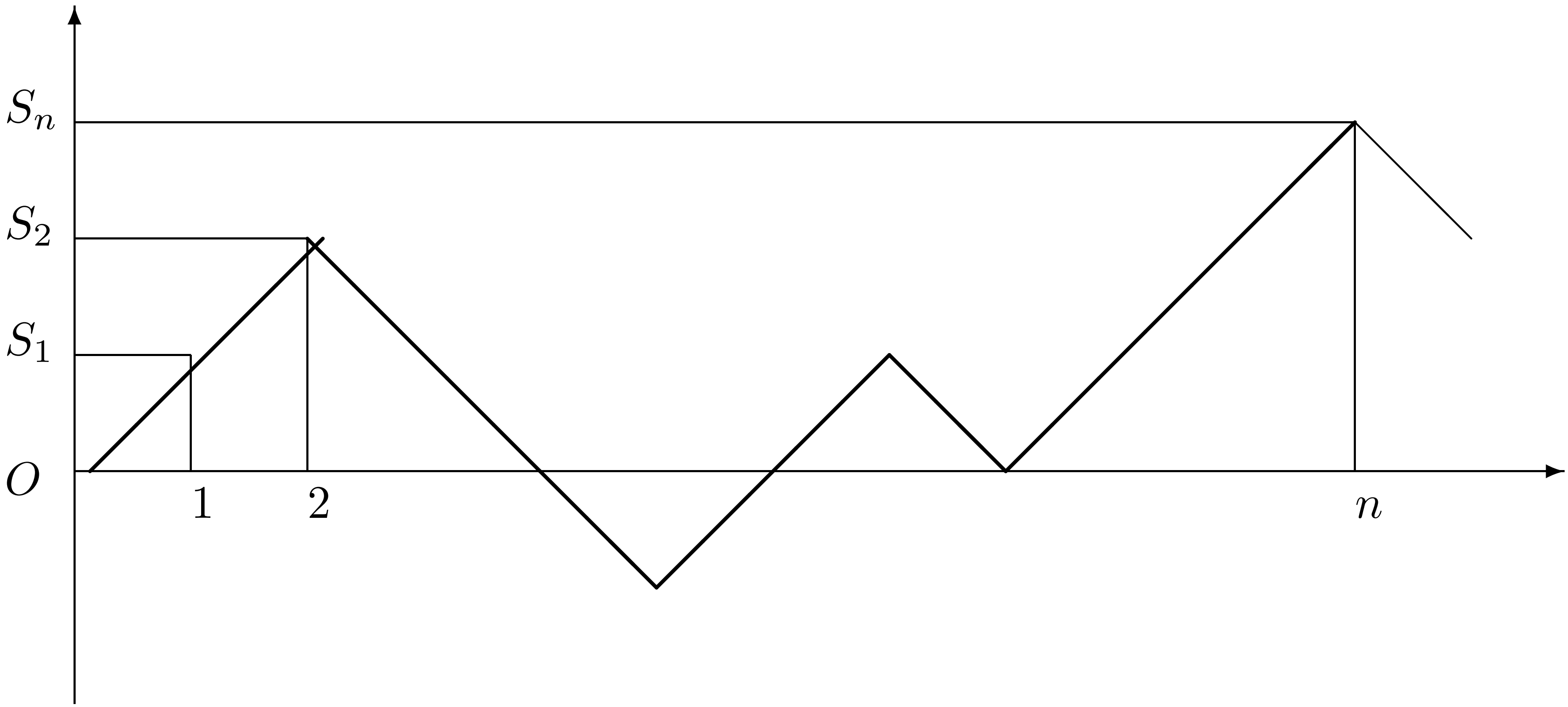
On peut montrer que le mouvement Brownien s'obtient comme limite de promenades aléatoires renormalisées.
Soit, sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ une famille de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes équidistribuées

$$P(X_i = 1) \; = \; P(X_i = -1) \; = \; \frac{1}{2} \quad , \quad i \in I\!N^* \, .$$

On associe à cette famille la suite $(S_n \, , \, n \geq 0)$ définie par

$$S_0 \; = \; 0, \; S_n \; = \; \sum_{i=1}^{n} X_i$$

On dit que la suite S_n est une **promenade aléatoire**
On a $E(S_n) = 0$, $\mathrm{Var}\,(S_n) = n$.



Promenade aléatoire

Remarquons que la suite $(S_m - S_n,\ m \geq n)$ est indépendante de $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$ et que $S_m - S_n$ a même loi que S_{m-n}.

On procède alors à une double renormalisation. Soit N fixé

* on ramène l'intervalle de temps $[0, N]$ à $[0, 1]$

* on change l'échelle des valeurs prises par S_n.

Plus précisément, on définit une famille de variables aléatoires indexées par les réels de la forme $\frac{k}{N}$, $k \in \mathbb{N}$, par

$$U_{\frac{k}{N}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{N}}\, S_k \;.$$

On a

$$E\big(U_{\frac{k}{N}}\big) \;=\; 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}\left(U_{\frac{k}{N}}\right) = \frac{k}{N} \;.$$

Les propriétés d'indépendance et de stationarité de la promenade aléatoire restent vérifiées, soit

- si $k \geq k'$, $U_{\frac{k}{N}} - U_{\frac{k'}{N}}$ est indépendante de $(U_{\frac{p}{N}}\,;\, p \leq k')$
- si $k \geq k'$, $U_{\frac{k}{N}} - U_{\frac{k'}{N}}$ a même loi que $U_{\frac{k-k'}{N}}$.

On définit un processus à temps continu $(U_t\,,\, t \geq 0)$ à partir de $U_{\frac{k}{N}}$ en imposant à la fonction $t \to U_t$ d'être affine entre $\frac{k}{N}$ et $\frac{k+1}{N}$. Pour cela, N étant fixé, on remarque que pour tout $t \in I\!R_+$ il existe $k(t) \in I\!N$ unique tel que $\frac{k(t)}{N} \leq t < \frac{k(t)+1}{N}$ et on pose

$$U_t^N \;=\; U_{\frac{k}{N}} + N\big(t - \frac{k}{N}\big)\left(U_{\frac{k+1}{N}} - U_{\frac{k}{N}}\right)$$

où $k = k(t)$.

Pour $t = 1$ on a $U_1^N = \frac{1}{\sqrt{N}} S_N$. Le théorème central-limite implique alors que U_1^N converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne centrée réduite.

On montre alors que **le processus U^N converge (au sens de la convergence en loi) vers un mouvement Brownien** B.

En particulier $U_t^N \xrightarrow{\mathcal{L}} B_t$ et $(U_{t_1}^N, \ldots, U_{t_k}^N) \xrightarrow{\mathcal{L}} (B_{t_1}, \ldots, B_{t_k})$ pour tout k-uple $(t_1, \ldots, t_k)$.

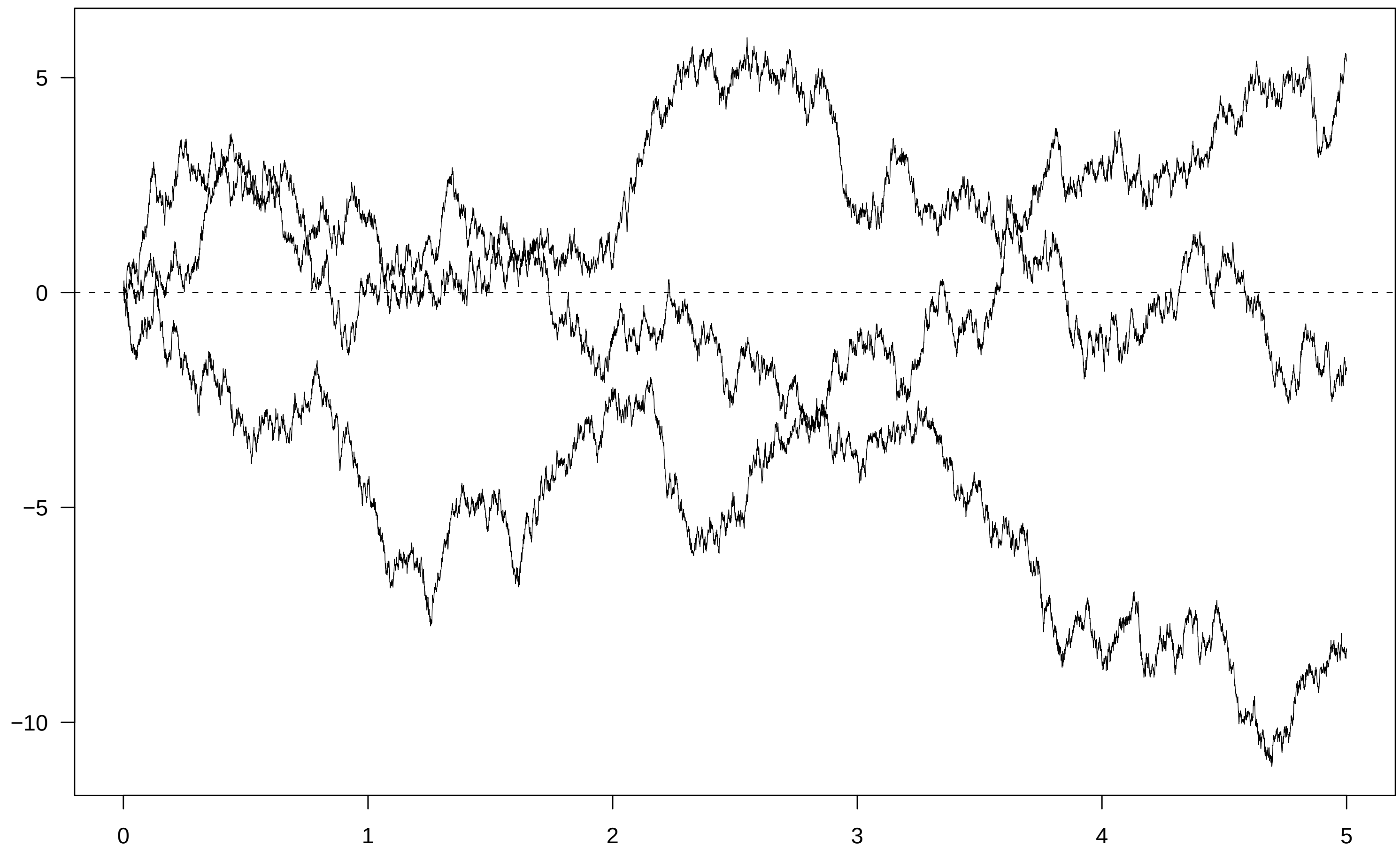


Figure 1: Trajectoires Browniennes

3 Propriétés

Soit $B = (B_t, t \geq 0)$ un mouvement Brownien et $\mathcal{F}_t = \sigma\{B_s, s \leq t\}$ sa filtration naturelle.

3.1 Processus Gaussien

Proposition 3.1 *Le processus B est un processus Gaussien, d'espérance nulle et de covariance* $\mathrm{Cov}(B_t, B_s) = s \wedge t$.

Le processus $(X_t = x + \mu t + \sigma B_t, t \geq 0)$ est un processus gaussien d'espérance $x + \mu t$ et de covariance

$$E[(X_t - E(X_t))\,(X_s - E(X_s))] = \sigma^2 (s \wedge t)$$

3.2 Une notation

On note $E_x(f(B_s))$ l'espérance de $f(B_s)$ quand B est un Brownien issu de x. Cette quantité est égale à

$$E(f(x+B_s)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{I\!R} f(x+y) \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right) dy$$

où B est un Brownien issu de 0.

On note $P_x(B_s \in A) = P(x + B_s \in A)$ et $P_x(B_s \in da)$ est la densité de la v.a. B_s où B est un Brownien partant de x.

3.3 Scaling

Proposition 3.2 *Si* $(B_t, t \geq 0)$ *est un mouvement Brownien, alors*
i) le processus $\hat{B}_t = -B_t$ *est un mouvement Brownien.*
ii) le processus $\tilde{B}_t = \frac{1}{c} B_{c^2 t}$ *est un mouvement Brownien. (Propriété de scaling)*

3.4 Propriété de Markov

Théorème 3.3 *Pour f borélienne bornée, pour $u > t$*

$$E(f(B_u)\,|\mathcal{F}_t\,) = E(f(B_u)\,|\sigma(B_t)\,)$$

Pour tout s, le processus $(W_t, t \geq 0)$ défini par $W_t \stackrel{def}{=} B_{t+s} - B_s$ est un mouvement Brownien indépendant de $\mathcal{F}_s$.

Pour $u > t$, conditionnellement à B_t, la v.a. B_u est de loi gaussienne d'espérance B_t et de variance $u - t$. Alors

$$E(\mathbb{1}_{B_u \leq x}\,|\mathcal{F}_t\,) = E(\mathbb{1}_{B_u \leq x}\,|\sigma(B_t)\,) = E(\mathbb{1}_{B_u \leq x}\,|B_t\,)$$

pour $t \leq u$.

Proposition 3.4 Propriété de Markov forte:
Soit T un temps d'arrêt à valeurs finies. On a alors

$$E(f(B_{T+s})\,|\mathcal{F}_T\,) = E(f(B_{T+s})\,|\sigma(B_T)\,)$$

En particulier, pour tout temps d'arrêt fini T, le processus $(W_t, t \geq 0)$ défini par $W_t \stackrel{def}{=} B_{t+T} - B_T$ est un mouvement Brownien indépendant de $\mathcal{F}_T$.

3.5 Trajectoires

Nous admettons les résultats suivants:

Les trajectoires du mouvement Brownien sont continues.

Les trajectoires du mouvement Brownien sont p.s. “nulle part différentiables”.

Théorème 3.5 *Soit n fixé et $t_j = \frac{j}{2^n} t$ pour j variant de 0 à 2^n. Alors $\sum_{j=1}^{2^n} [B(t_j) - B(t_{j-1})]^2 \to t$ quand $n \to \infty$, la convergence ayant lieu en moyenne quadratique et p.s..*

Proposition 3.6 *Soit σ une subdivision de l'intervalle $[0, t]$ caractérisée par $0 = t_0 \leq t_1 \ldots \leq t_n = t$. Soit V_t la variation de la trajectoire du Brownien sur $[0, t]$ définie par $V_t(\omega) = \sup_\sigma \sum_i |B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)|$. Alors $V_t(\omega) = \infty$ p.s.*

3.6 Propriétés de martingale

3.6.1 a. Cas du Brownien

Proposition 3.7 *Le processus B est une martingale. Le processus $(B_t^2 - t, t \geq 0)$ est une martingale.*
Réciproquement, si X est un processus continu tel que X et $(X_t^2 - t, t \geq 0)$ sont des martingales, X est un mouvement Brownien.

Proposition 3.8 *Soit B_1 et B_2 deux MB indépendants. Le produit $B_1 B_2$ est une martingale.*

Définition 3.9 *On dit que B est un $(\mathcal{G}_t)$-mouvement Brownien si B et $(B_t^2 - t, t \geq 0)$ sont des $(\mathcal{G}_t)$-martingales.*

Proposition 3.10 *Pour tout λ réel, le processus*

$$(\exp(\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t), t \geq 0)$$

est une martingale.
Réciproquement, si X est un processus continu tel que $(\exp(\lambda X_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t), t \geq 0)$ est une martingale, pour tout λ réel, le processus X est un brownien.

3.7 Temps d'atteinte

Proposition 3.11 *Soit* $(B_t, t \geq 0)$ *un mouvement Brownien et* a *un nombre réel. Soit*

$$T_a = \inf\{t \geq 0; B_t = a\}\,.$$

Alors T_a *est un temps d'arrêt fini p.s. tel que* $E(T_a) = \infty$ *et pour* $\lambda \geq 0$

$$E(\exp -\lambda T_a) = \exp(-|a|\sqrt{2\lambda})\,. \tag{3.1}$$

Par inversion de la transformée de Laplace, on obtient la densité de T_a qui est, pour $a > 0$

$$\frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{a^2}{2t}\right)$$

3.8 Brownien multidimensionnel

Soit $B_t = (B_t^{(1)}, B_t^{(2)}, \ldots, B_t^{(n)})^T$ un processus n-dimensionnel. On dit que B est un Brownien multidimensionnel si les processus $(B^{(i)}, i \leq n)$ sont des browniens indépendants.
Le processus n-dimensionnel B est un mouvement Brownien si et seulement si les processus $B^{(i)}$ et $B^{(i)}B^{(j)} - \delta_{i,j}t$ sont des martingales (avec $\delta_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$ et $\delta_{i,i} = 1$.

On dira que les mouvements Browniens à valeurs réelles B_1 et B_2 sont **corrélés** de coefficient de corrélation ρ si $B_1(t)B_2(t) - \rho t$ est une martingale.

On "décorrele" les MB en introduisant le processus B_3 défini par $B_3(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}(B_2(t) - \rho B_1(t))$. Ce processus est un MB indépendant de B_1.

4 Intégrale de Wiener

4.1 Définition

On note $L^2(\mathbb{R}^+)$ l'ensemble des (classes d'équivalence des) fonctions boréliennes f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ de carré intégrable, c'est-à-dire telles que $\int_0^{+\infty} |f(s)|^2 \, ds < \infty$.

C'est un espace de Hilbert pour la norme $||f||_2 = \left(\int_0^{\infty} f^2(s) \, ds \right)^{1/2}$.

4.1.1 a. Fonctions en escalier

Pour $f = \mathbb{1}_{]u,v]}$, on pose $\int_0^{+\infty} f(s)dB_s = B(v) - B(u)$.
Soit f une fonction en escalier, $f(s) = \sum_{i=1}^{i=n} f_{i-1}\mathbb{1}_{]t_i;t_{i+1}]}(s)$ on pose

$$\int_0^{+\infty} f(s)dB_s = \sum_{i=1}^{i=n} f_{i-1}\left(B(t_i) - B(t_{i-1})\right).$$

La variable aléatoire $I(f) \stackrel{def}{=} \int_0^{+\infty} f(s)dB_s$ est une **variable gaussienne** d'espérance nulle et de variance $\int_0^{+\infty} f^2(s)ds$.

L'intégrale est linéaire : $I(f+g) = I(f) + I(g)$. Si f et g sont des fonctions en escalier $E(I(f)\,I(g)) = \int_{R^+} f(s)\,g(s)\,ds$. Le processus I est un processus gaussien, c'est une martingale.

4.1.2 b. Cas général

Si $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$, il existe une suite f_n de fonctions en escalier qui converge (dans $L^2(\mathbb{R}^+)$) vers f, c'est-à-dire qui vérifie

$$\int_0^\infty |f_n - f|^2(x)\, dx \to_{n\to\infty} 0.$$

Dans ce cas, la suite f_n est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^+)$. La suite de v.a. $F_n = \int_0^\infty f_n(s)\, dB_s$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$ (en effet $||F_n - F_m||_2 = ||f_n - f_m||_2 \to_{n,m\to\infty} 0$), donc elle est convergente.
On pose

$$I(f) \stackrel{def}{=} \int_0^\infty f(s)\, dB_s = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(s)\, dB_s$$

la limite étant prise dans $L^2(\Omega)$.
On dit que $I(f)$ est **l'intégrale stochastique** (ou intégrale de Wiener) de f par rapport à B.
Le sous-espace de $L^2(\Omega)$ formé par les v.a. $\int_0^\infty f(s) dB_s$ coïncide avec l'espace gaussien engendré par le mouvement Brownien.

4.2 Propriétés

• L'application $f \to I(f)$ est linéaire

$$I(f+g) = I(f) + I(g)$$

et **isométrique** de $L^2(\mathbb{R}^+)$ dans $L^2(\Omega)$

$$E\left(I(f)\, I(g)\right) = \int_{\mathbb{R}^+} f(s)g(s)\, ds.$$

• La variable $I(f)$ est une v.a. gaussienne centrée de variance $\int_{\mathbb{R}^+} f^2(s)ds$ appartenant à l'espace gaussien engendré par $(B_t, t \geq 0)$ et elle vérifie pour tout t

$$E\left(B_t \int_{\mathbb{R}^+} f(s)dB_s\right) = \int_0^t f(s)ds\,. \tag{4.1}$$

La propriété (4.1) est en fait une caractérisation de l'intégrale stochastique au sens où si pour tout t, $E(ZB_t) = \int_0^t f(s)ds$, alors $Z = \displaystyle\int_0^\infty f(s)dB_s$.

4.3 Processus lié à l'intégrale stochastique

De la même façon on définit $\int_0^t f(s)dB_s$ pour f telle que $\int_0^T |f(s)|^2 \, ds < \infty$, $\forall T$, ce qui permet de définir l'intégrale stochastique pour une classe plus grande de fonctions. On notera L^2_{loc} cette classe de fonctions.

Théorème 4.1 *Soit* $f \in L^2_{loc}$ *et* $M_t = \int_0^t f(s)dB_s$.

a) Le processus M *est une* ***martingale continue****, la v.a.* M_t *est d'espérance* 0 *et de variance* $\int_0^t f^2(s)\,ds$.

b) Le processus M *est un* ***processus gaussien*** *centré de covariance* $\int_0^{t\wedge s} f^2(u)\,du$ *à accroissements indépendants.*

c) Le processus $(M_t^2 - \int_0^t f^2(s)\,ds\,,\, t \geq 0)$ *est une martingale.*

d) Si f *et* g *sont dans* L^2_{loc}*, on a*

$$E(\int_0^t f(u)dB_u \int_0^s g(u)dB_u) = \int_0^{t\wedge s} f(u)g(u)du\,.$$

4.4 Intégration par parties

Théorème 4.2 *Si f est une* ***fonction*** *de classe C^1,*

$$\int_0^t f(s)\,dB_s = f(t)B(t) - \int_0^t f'(s)B_s\,ds.$$

On peut aussi écrire cette formule

$$d(B_t f(t)) = f(t)dB_t + B_t f'(t)dt\,.$$

5 Exemples

5.1 Le brownien géométrique

Définition 5.1 *Soit B un mouvement Brownien, b et σ deux constantes. Le processus*

$$X_t = X_0 \exp\{(b - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t\}$$

est appellé ***Brownien géométrique****.*

Ce processus est aussi appellé processus“log-normal”. En effet, dans ce cas

$$\ln X_t = \left\{ b - \frac{1}{2}\sigma^2 \right\} t + \sigma B_t + \ln x$$

et la variable qui est à droite suit une loi normale.

Propriétés:

- Le processus $X_t e^{-bt}$ est une martingale.
- En notant G une v.a. de loi $\mathcal{N}(0,1)$

$$
\begin{aligned}
E(f(X_t)|\mathcal{F}_s) &= E(f(X_t)|X_s) = E(f(x\exp\{(b-\frac{1}{2}\sigma^2)(t-s)+\sigma(B_t-B_s)\})_{x=X_s} \\
&= E(f(x\exp\{(b-\frac{1}{2}\sigma^2)(t-s)+\sigma G\sqrt{t-s}\})_{x=X_s} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(X_s\exp\{(b-\frac{1}{2}\sigma^2)(t-s)+\sigma y\sqrt{t-s}\})q(1,0,y)dy\,.
\end{aligned}
$$

Ce processus est appelé le **modèle Black et Scholes**, il est utilisé pour modéliser le prix d'un actif financier. Le rendement de l'actif entre deux dates est mesuré par la différence des logarithmes des cours et est donné par la variable gaussienne

$$\left\{b - \frac{1}{2}\sigma^2\right\}(t-s) + \sigma(B_t - B_s)\,.$$

5.2 Processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Théorème 5.2 *L'équation de Langevin*

$$V_t = -\int_0^t aV_s ds + \sigma B_t + V_0, \tag{5.1}$$

a pour unique solution

$$V_t = e^{-ta}V_0 + \int_0^t e^{-(t-s)a}\sigma dB_s. \tag{5.2}$$

On écrit l'équation (5.1) sous forme condensée

$$dV_t + aV_t dt = \sigma dB_t, \quad V_0 \,\text{donné}$$

les données du problème sont la variable aléatoire V_0, le Brownien B et les constantes a et σ.

Proposition 5.3 *Le processus V, appellé **processus d'Ornstein-Uhlenbeck** est gaussien d'espérance et de covariance*

$$E(V_t) = e^{-ta}V,$$

$$\mathrm{cov}[V_s, V_t] = \int_0^s e^{-(s-u)a}\sigma^2 e^{-(t-u)a}\,du\,,\ s \leq t$$

En particulier, si V_0 est une constante ($v = 0$)

$$\mathrm{cov}[V_s, V_t] = \frac{\sigma^2}{2a}e^{-a(s+t)}(e^{2as} - 1)$$

et $\mathrm{Var}(V_t) = \dfrac{\sigma^2}{2a}(1 - \exp -2at)$.

En écrivant

$$\begin{aligned} V_s &= e^{-sa}V_0 + \int_0^s e^{-(s-u)a}\sigma dB_u \\ V_s e^{(s-t)a} &= e^{-ta}V_0 + \int_0^s e^{-(t-u)a}\sigma dB_u \end{aligned}$$

on en déduit, pour $s \leq t$

$$V_t = V_s e^{-(t-s)a} + \int_s^t e^{-(t-u)a}\sigma dB_u$$

ou encore

$$V_{t+s} = V_s e^{-ta} + \int_0^t e^{-(t-u)a}\sigma d\widetilde{B}_u$$

où le processus $\widetilde{B}$ défini par $\widetilde{B}_u = B_{s+u} - B_s$ est un MB indépendant de $\mathcal{F}_s$ (donc de V_s).

En particulier $E(f(V_{t+s})|\mathcal{F}_s) = E(f(V_s e^{-ta} + Y)|\mathcal{F}_s) = E(f(V_{t+s})|V_s)$ (dans cette égalité Y est une v.a. indépendante de $\mathcal{F}_s$) ce qui établit le caractère markovien de V.

Le calcul explicite peut se faire en utilisant que

$$E(f(V_s^{(x)}e^{-ta} + Y)|\mathcal{F}_s) = \Psi(V_s^{(x)})$$

avec $\Psi(y) = E(f(ye^{-ta} + Y)) = E(f(V_t^{(y)}))$ où $V^{(x)}$ est la solution de l'équation de valeur initiale x, soit $V_t^{(x)} = e^{-ta}x + \int_0^t e^{-(t-s)a}\sigma dB_s$.

Proposition 5.4 *La variable aléatoire* $\displaystyle\int_0^t V_s ds$ *est une v.a. gaussienne, de moyenne* $V_0 \frac{1-e^{-at}}{a}$ *et de variance* $\displaystyle -\frac{\sigma^2}{2a^3}(1-e^{-at})^2 + \frac{\sigma^2}{a^2}(t - \frac{1-e^{-at}}{a})$.

5.3 Modèle de Vasicek

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dB_t. \tag{5.3}$$

La forme explicite de la solution est

$$r_t = (r_0 - b)e^{-at} + b + \sigma \int_0^t e^{-a(t-u)} dB_u.$$

L'égalité

$$r_t = (r_s - b)e^{-a(t-s)} + b + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dB_u, \ s \leq t$$

établit le caractère Markovien de r.

• Si r_0 est une constante, r_t est une variable gaussienne de moyenne $(r_0 - b)e^{-at} + b$, et de variance $\frac{\sigma^2}{2a}(1 - \exp -2at)$.

• En particulier, ce n'est pas une variable positive.

• Le processus r est gaussien de covariance $Cov(r_s, r_t) = \frac{\sigma^2}{2a} e^{-a(s+t)}(e^{2as} - 1)$ pour $s \leq t$.

Proposition 5.5 *Pout $s < t$, l'espérance et le variance conditionnelle de r sont*

$$\begin{aligned} E(r_t|r_s) &= (r_s - b)e^{-a(t-s)} + b \\ var_s\ (r_t) &= \frac{\sigma 2}{2a}(1 - e^{-2a(t-s)}) \end{aligned}$$

Proposition 5.6 *La variable $\int_0^t r_s ds$ est une variable gaussienne de moyenne*

$$E(\int_0^t r_s ds) = bt + (r_0 - b)\frac{1 - e^{-at}}{a}$$

et de variance $-\dfrac{\sigma^2}{2a^3}(1 - e^{-at})^2 + \dfrac{\sigma^2}{a^2}(t - \dfrac{1 - e^{-at}}{a})$.

On en déduit

$$E(\exp - \int_s^t r_u\, du \,|\mathcal{F}_s) = \exp(-M(t,s) + \frac{1}{2}V(t,s))\,.$$

Ces calculs sont utiles pour valoriser des zéro-coupons en finance : si $B(t,T)$ est la valeur d'un ZC de maturité T, on a

$$B(t,T) = E(\exp\left(-\int_t^T r_u du\right)|\mathcal{F}_t)$$

et

$$\begin{aligned} B(t,T) &= \exp\left[b(T-t) + (r_t - b)\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\right. \\ &\left. -\frac{\sigma^2}{4a^3}(1-e^{-a(T-t)})^2 + \frac{\sigma^2}{2sa^2}(T-t-\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a})\right] \end{aligned}$$