Université Mohamed Khider, Biskra
Faculté des Sc. Exactes et Sc. de la Nature et la Vie
Département de Mathématiques
Master 1: **Modèle linéaire** 06 juin 2022

Corrigé-type de l'examen

Exercice 1 ***(ACP, 12 pts)***
La matrice de corrélation associée au tableau de données est

$$R := \begin{pmatrix} 1 & 0.474 & -0.171 \\ 0.474 & 1 & 0.514 \\ -0.171 & 0.514 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres normés de la matrice R associés aux valeurs propres $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ sont:

$$u_1 := \begin{pmatrix} 0.434 \\ 0.748 \\ x \end{pmatrix}, \ u_2 := \begin{pmatrix} 0.738 \\ y \\ -0.673 \end{pmatrix}, \ u_3 := \begin{pmatrix} z \\ -0.662 \\ t \end{pmatrix},$$

avec $x, y \geq 0$.
1) Rappelons que $\|u_i\| = 1,\ i = 1, 2, 3$. Donc

$$1 = \|u_1\|^2 = (0.434)^2 + (0.748)^2 + x^2 \Leftrightarrow x^2 = \sqrt{0.252\,14} \Longrightarrow \underline{x = 0.502}, \ \textit{car } x \geq 0,$$

et

$$1 = \|u_2\|^2 = (0.738)^2 + y^2 + (-0.673)^2 \Leftrightarrow y^2 = 2.427 \times 10^{-3} \Longrightarrow \underline{y = 0.049}, \ \textit{car } y \geq 0.$$

En outre nous avons $\langle u_i, u_j \rangle = 0$, pour $i \neq j$. Donc

$$0 = \langle u_3, u_1 \rangle = 0.434 \times z - 0.662 \times 0.748 + 0.502 \times t$$

et

$$0 = \langle u_3, u_2 \rangle = 0.738 \times z - 0.662 \times 0.049 - 0.673 \times t.$$

La solution de ce sytème est $\underline{t = 0.530, \ z = 0.527}$.
Les composantes principales associées à cette analyse sont:

Produits	***Composantes principales***		
	c_1	c_2	c_3
Guedila	0.836	β	0.112
Lalla Khedidja	-1.763	0.314	0.059
Saida	2.2	-1.418	0.356
Mansourah	0.988	0.25	0.289
Youkous	-0.737	0.702	0.512
Ifri	-0.271	1.828	0.166
Bouglez	-2.009	-2.111	0.01
Manbaa alghezlane	α	0.205	-0.415
Batna	0.447	γ	-1.091

2) Rappelons aussi que les composantes principales sont centrées. Donc

$$0 = 9\overline{c}_1 = 0.836 - 1.7632.2 + 0.988 - 0.737 - 0.271 - 2.009 + \alpha + 0.447,$$

ce qui donne $\underline{\alpha = 0.309}$. De même

$$0 = 9\overline{c}_2 = \beta + 0.314 - 1.418 + 0.25 + 0.702 + 1.828 - 2.111 + 0.205 + \gamma,$$

ce qui implique

$$\beta + \gamma = 0.23. \tag{1}$$

En toutre les composantes principales sont non corrélées entres elles, ainsi $cov(c_2, c_1) = 0$. *En d'autres termes*

$$\begin{aligned}
&0.836 \times \beta + (-1.763) \times 0.314 + 2.2 \times (-1.418) + 0.988 \times 0.25 + (-0.737) \times 0.702 \\
&+ (-0.271) \times 1.828 + (-2.009) \times (-2.111) + 0.309 \times 0.205 + 0.447 \times \gamma, \\
&= 0,
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$0.836\,\beta + 0.447\,\gamma = 0.134\,6. \tag{2}$$

La solution du système $(1, 2)$ *donne* $\underline{\beta = 0.081 \text{ et } \gamma = 0.148}$.

3) Les variances des composantes principales sont égales aux valeurs propres respectives:.

$$\begin{aligned}
var\,(c_1) &= \frac{1}{9}\Big((0.836)^2 + (-1.763)^2 + (2.2)^2 + (0.988)^2 + (-0.737)^2 \\
&+ (-0.271)^2 + (-2.009)^2 + (0.309)^2 + (0.447)^2\Big) \\
&= \underline{1.619 = \lambda_1.}
\end{aligned}$$

De la même la manière, on trouve $var\,(c_2) = \underline{1.170 = \lambda_2}$. *La trace de la matrice* $R = 3$ *et d'un autre coté est égale à la somme de ces valeurs propres, donc:* $1.619 + 1.170 + \lambda_3 = 3$, *ce qui donne* $\underline{\lambda_3 = 0.211}$.

4) Les pourcentage d'inerties expliquées par les deux premiers axes principaux sont:

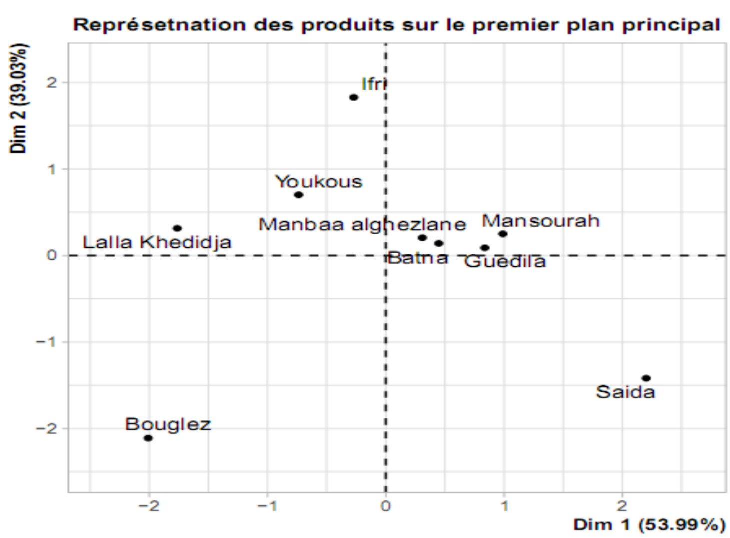
$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}\% = \frac{1.619}{1.619 + 1.170 + 0.211}\% = 53.99\%$$

et

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}\% = \frac{1.170}{1.619 + 1.170 + 0.211}\% = 39.03\%,$$

respectivement. Ainsi le pourcentage d'inertie expliquée par le premier plan principal est $(54 + 39)\,\% = 89\%$. *Ce qui signifie que la représentation des produits sur ce plan est presque parfaite.*

5) Représentation des neuf produits sur le premier plan principal $(1, 2)$:



***Discussion**: on remarque que les deux produits "Manbaa alghezlane" et "Batna" ont presque la même structure en termes des trois minéraux "calcium", "mangnésium" et "sodium". La même remarque pour les deux produits "Mansourah" et "Guedila". On peut dire aussi que les deux produits "Lalla Khedidja" et "Youkous" sont un peu proches entre eux. Tandis que les autres produits ne possèdent pas la même structure en termes de ces trois minéraux.*

Exercice 2 ***(AFC, 8 pts)***

1. Etant donné un tableau dont les lignes représentent les classes d'âges et les colonnes représentent les types de loisirs. Nous avons affaire à une:

a) analyse factorielle des correspondances (AFC).
c) analyse en composante principale (ACP).

2. La matrice associée au tableau des profils-lignes (PL) est:
a) carrée; b) symétrique. **(aucune)**

3. La représentation d'AFC associée à un tableau de contingence (10×2), se fait dans un repère à:
a) deux dimensions; b) une dimension; c) dix dimensions.

4. Les éléments de la matrice des fréquences théoriques sont:
a) $n_{i\cdot}n_{\cdot j}/n$; b) $n_{i\cdot}n_{\cdot j}/n^2$.

5. Les deux variables associées à un tableau de contingence sont:
a) indépendantes; b) dépendantes; c) pas nécessairement.

6. La matrice $V_r M_r$ **est:**
a) inversible; b) n'est pas inversible; c) aucune information.

7. La matrice A_r **est:**
a) inversible; b) n'est pas inversible c) aucune information.

8. Le centre de gravité g_r **est:**
a) centré; b) n'est pas centré; c) pas nécessairement.