Solution exercice N° 6 :

X est une v.a tq: $f_X(x) = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\theta \frac{x^2}{2}}$ où $x \in \mathbb{R}$ et $\theta > 0$

on dispose d'un n-éch de X

1) Un estimateur noté $\hat{\theta}$ de θ par la méthode de maximum de vraisemblance ⇔ e.m.v de θ noté $\hat{\theta}$

$\cdot L(\underset{\sim}{x}, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) = \left(\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\theta \frac{\sum x_i^2}{2}}$

$\cdot \log L(\underset{\sim}{x}, \theta) = n \log \sqrt{\theta} - n \log \sqrt{2\pi} - \theta \frac{\sum x_i^2}{2}$

$= \frac{n}{2} \log \theta - n \log \sqrt{2\pi} - \theta \frac{\sum x_i^2}{2}$

$\cdot \frac{\partial \log L(\underset{\sim}{x}, \theta)}{\partial \theta} = 0$

$\Rightarrow \frac{n}{2} \frac{1}{\theta} - \frac{\sum x_i^2}{2} = 0 \Rightarrow \frac{n - \theta \sum x_i^2}{2\theta} = 0 \Rightarrow n - \theta \sum x_i^2 = 0$

$\Rightarrow \hat{\theta} = \frac{n}{\sum x_i^2}$

$\cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log L(\underset{\sim}{x}, \theta) = \frac{-n}{2\theta^2} \Big|_{\theta = \frac{n}{\sum x_i^2}} \Rightarrow \frac{-n}{2\left(\frac{n}{\sum x_i^2}\right)^2} < 0$

$\Rightarrow \hat{\theta} = \frac{n}{\sum x_i^2}$ est l'e.m.v pour θ.

2) $\hat{\theta}$ est exhaustif ?? ⇔ est-ce que $\hat{\theta} = \frac{n}{\sum x_i^2}$ est une statistique exhaustive pour θ

d'après le critère de factorisation:

$L(\underset{\sim}{x}, \theta) = \left(\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\theta \frac{\sum x_i^2}{2}} = \underbrace{(\sqrt{\theta})^n e^{-\theta \frac{\sum x_i^2}{2}}}_{g(\theta, T)} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n}_{h(x)}$

où $T = \sum x_i^2$ est une stat exh pour θ.

Remarque: toute fonction injective d'une stat exh est exh

$\Rightarrow Z = \hat{\theta} = \frac{n}{\sum x_i^2} = h(T)$

$\hat{\theta} = h(T)$ est exh ssi la fonction h est injective.

h injective $\Leftrightarrow \forall\, t, t'$; $h(t) = h(t') \overset{??}{\Rightarrow} t = t'$

$$h(t) = h(t') \Rightarrow \frac{n}{\sum x_i^2} = \frac{n}{\sum x_i'^2}$$

$$\Rightarrow n \sum x_i'^2 = n \sum x_i^2 \Rightarrow \sum x_i^2 = \sum x_i'^2$$

$$\Rightarrow t = t'$$

$\Rightarrow h$ est injective

d'où $\hat{\theta} = \frac{n}{T} = \frac{n}{\sum x_i^2}$ est une stat exh pour le paramètre θ.

3] $E(\hat{\theta})$ et $V(\hat{\theta})$:

$$E(\hat{\theta}) = E\left(\frac{n}{\sum X_i^2}\right) = E\left(\frac{n}{T}\right)$$

la loi de la v-a T ;

$$F_T(t) = P(T \leq t) = P\left(\sum X_i^2 \leq t\right)$$

a] ~~[illegible]~~ on cherche la loi de X_i^2

on pose $Y = X_i^2 \Rightarrow f_Y(y) = ??$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X_i^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$$

$$= P(X \leq \sqrt{y}) - P(X \leq -\sqrt{y})$$

$$= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} = \frac{\partial F_X(\sqrt{y})}{\partial y} - \frac{\partial F_X(-\sqrt{y})}{\partial y}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(-\sqrt{y})$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \left(\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\theta y}{2}} + \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\theta y}{2}}\right)\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\theta y}{2}} \quad \ldots (1)$$

on sait que $\chi^2_{(n)} = \gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

si la v.a $S \rightsquigarrow \gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$ alors

$f_S(s) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} s^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{s}{2}}$ $\underline{\underline{(\ast)(\ast)}}$ ~~et $\Gamma(\pi) = \frac{1}{2}$~~ et $\Gamma(\pi) = \frac{1}{2}$

On compare la $\gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$ avec $(\ast)$ on trouve que si on suppose $\theta y = s$ . . . .

<u>ou bien</u>

On Voit bien que $f_X(x) = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\theta x^2}{2}} = \frac{1}{(\sqrt{\theta})^{-1}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\theta^{-1}}}$

et $x \in \mathbb{R}$ alors $X \rightsquigarrow N(0, \theta^{-1})$

$\rightsquigarrow N\left(0, \frac{1}{\theta}\right)$

$N(m, \sigma^2) : \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2}$

les X_i sont i.i.d de même loi $N\left(0, \frac{1}{\theta}\right)$

alors $X_i\sqrt{\theta} \rightsquigarrow N(0,1) \Rightarrow \theta X_i^2 \rightsquigarrow \chi^{(2)}_{(1)}$

Si $X \rightsquigarrow N(0,1)$ alors $X^2 \rightsquigarrow \chi^2_{(1)}$

$\Rightarrow \sum \theta X_i^2 = \theta \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \rightsquigarrow \chi^2_{(n)}$

$\Rightarrow \theta T = \theta \sum X_i^2 \rightsquigarrow \chi^2_{(n)}$

$\theta T = Z$ par exemple

$\Rightarrow Z$ est une v.a positive car $\rightarrow$ une loi de χ^2 est positive.

$\Rightarrow E\left(\frac{n}{T}\right) = E\left(\frac{n\theta}{\theta T}\right) = E\left(\frac{n\theta}{\theta \sum X_i^2}\right) = n\theta\, E\left(\frac{1}{\theta \sum X_i^2}\right)$

$= n\theta\, E\left(\frac{1}{Z}\right)$

$= n\theta \int_0^{+\infty} \frac{1}{z} f_Z(z)\, dz = n\theta \int_0^{+\infty} \frac{1}{z} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} z^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}z}\, dz.$

car $\chi^2_{(n)} = \gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et voir $(\ast)(\ast)$

$= n\theta \int_0^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} z^{\frac{n}{2}-1-1} e^{-\frac{z}{2}}\, dz = n\theta \times \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{+\infty} z^{\frac{n-2}{2}-1} e^{-\frac{z}{2}}\, dz$

$\underset{(\ast)}{=}$ $(\ast)(\ast)(\ast)$

on pense à la $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x}\, dx$

Soit $\frac{z}{2} = k \Rightarrow 2k = z$ et $\frac{dz}{2} = dk \Rightarrow dz = 2dk$

d'où $\int_0^{+\infty} z^{\frac{n-2}{2}-1} e^{-\frac{z}{2}} dz = \int_0^{+\infty} (2k)^{\frac{n-2}{2}-1} e^{-k} \, 2\, dk$

$= 2^{\frac{n-2}{2}} \int_0^{+\infty} k^{\frac{n-2}{2}-1} e^{-k} dk = 2^{\frac{n-2}{2}} \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)$

$\Rightarrow (*)(*)(*) = \frac{n\theta \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} 2^{\frac{n-2}{2}} \underbrace{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}_{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}$ | $\Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1)$

$= \frac{n\theta}{\left(\frac{n}{2}-1\right)\cancel{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} 2^{\frac{n}{2}-1} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\cancel{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}}$

$= \frac{n\theta}{\frac{n}{2}-1} \frac{1}{\cancel{2^{\frac{n}{2}}}} \cdot \cancel{2^{\frac{n}{2}}} \times \frac{1}{2} = \frac{n\theta}{2} \Big/ \frac{n-2}{2}$

$= \frac{n\theta}{2} \cdot \frac{2}{n-2} = \boxed{\frac{n\theta}{n-2}} \Rightarrow \boxed{E(\hat{\theta}) = \frac{n\theta}{n-2}}$

et $V(\hat{\theta}) = V\left(\frac{n}{\sum X_i^2}\right) = V\left(\frac{n\theta}{\theta \sum X_i^2}\right) = n^2\theta^2 V\left(\frac{1}{Z}\right)$

où $V\left(\frac{1}{Z}\right) = E\left[\left(\frac{1}{Z}\right)^2\right] - \left[E\left(\frac{1}{Z}\right)\right]^2$

· $\left[E\left(\frac{1}{Z}\right)\right]^2 = \left(\frac{n\theta}{n-2}\right)^2$

· $E\left[\left(\frac{1}{Z}\right)^2\right] = \int_0^{+\infty} \frac{1}{z^2} f_Z(z) dz$ ou $Z = \theta T = \theta \sum X_i^2 \rightsquigarrow \chi^2_{(n)}$

de la même façon que $E\left(\frac{1}{Z}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{z} f_Z(z) dz$

on utilise la $\gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$

à la fin on trouve $E\left(\frac{1}{Z^2}\right) = \frac{n^2\theta^2}{(n-2)(n-4)}$

$\Rightarrow V(\hat{\theta}) = \frac{n^2\theta^2}{(n-2)(n-4)} - \frac{n^2\theta^2}{(n-2)^2} = (n\theta)^2 \left[\frac{\cancel{n}-2 - \cancel{n}+4}{(n-2)^2(n-4)}\right]$

$\boxed{V(\hat{\theta}) = \frac{2n^2\theta^2}{(n-2)^2(n-4)}}$

Comme $E(\hat{\theta}) = \frac{n}{n-2}\theta \neq \theta \Rightarrow \hat{\theta}$ est un estimateur biaisé

mais $\frac{n-2}{n}\hat{\theta} = \hat{\theta}_1 = \frac{n-2}{n}\frac{n}{T} = \frac{n-2}{T} = \frac{n-2}{\sum x_i^2}$ est

un estimateur non biaisé = E.S.B pour θ

. la $V(\hat{\theta}_1) = V\left(\frac{n-2}{n}\hat{\theta}\right) = \left(\frac{n-2}{n}\right)^2 V(\hat{\theta}) = \left(\frac{n-2}{n}\right)^2 \frac{2n^2\theta^2}{(n-2)^2(n-4)}$

$\Rightarrow V(\hat{\theta}_1) = \frac{2\theta^2}{(n-4)}$

4) B.C.R pour l'estimateur de $\underline{\underline{\theta}}$ noté $B(\theta)$

On a : $g(\theta) = \theta$

$B.C.R = \frac{(g(\theta)')^2}{I_n(\theta)} = \frac{1}{I_n(\theta)}$ ou $I_n(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log L(x,\theta)\right)$

ou bien $I_n(\theta) = nI(\theta)$ ou $I(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(x,\theta)\right)$

car $\mathcal{X} = \mathbb{R} \perp\!\!\!\perp \theta$.

. $f_X(x) = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\theta x^2}{2}}$.

. $\log f_X(x) = \log\sqrt{\theta} - \log\sqrt{2\pi} - \frac{\theta x^2}{2} = \frac{1}{2}\log\theta - \log\sqrt{2\pi} - \frac{\theta x^2}{2}$

. $\frac{\partial}{\partial\theta}\log f_X(x) = \frac{1}{2\theta} - \frac{x^2}{2}$ et . $\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f_X(x) = -\frac{1}{2\theta^2}$

$\Rightarrow I(\theta) = -E\left(-\frac{1}{2\theta^2}\right) = \boxed{\frac{1}{2\theta^2}}$ $\Rightarrow \boxed{I_n(\theta) = nI(\theta) = \frac{n}{2\theta^2}}$

$\Rightarrow B(\theta) = B.C.R = \frac{1}{\frac{n}{2\theta^2}} = \boxed{\frac{2\theta^2}{n}}$

. on cherche l'efficacité de $\hat{\theta}_1$ notée $e_{\hat{\theta}_1}$

$e_{\hat{\theta}_1} = \frac{B.C.R}{V(\hat{\theta}_1)}$ pour cela on a calculé la B.C.R

$\Rightarrow e_{\hat{\theta}_1} = \frac{\cancel{2\theta^2}}{n} \Big/ \frac{\cancel{2\theta^2}}{(n-4)} = \boxed{\frac{n-4}{n}}$

Comme $e_{\hat{\theta}_1} = \frac{n-4}{n} < 1 \Rightarrow B.C.R < V(\hat{\theta}_1)$

$\Rightarrow \hat{\theta}_1$ est un estimateur non efficace pour θ

pour que $\hat{\theta}_1$ efficace il faut que $V(\hat{\theta}_1) = B.C.R$ pour θ.

mais $\lim_{n\to\infty} e_{\hat{\theta}_1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-4}{n} = 1 \Rightarrow \hat{\theta}_1$ est un estimateur asymptotiquement ~~...~~ efficace pour θ.

3) $S^2 = \frac{1}{n} \sum (X_i - \bar{X})^2$

E.S.B pour θ en fonction de S^2 noté $\hat{\theta}_2$

E.S.B = Estimateur non biaisé

on sait que $\frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$ si $X_i \sim N(m, \sigma^2)$

dans notre cas $X_i \sim N(0, \frac{1}{\theta})$

$\Rightarrow \frac{nS^2}{1/\theta} = \theta n S^2 \sim \chi^2_{(n-1)}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{si } X \sim \chi^2_{(n)} \\ E(X) = n \\ V(X) = 2n \end{array}}$$

$\Rightarrow E(\theta n S^2) = (n-1)$

$\Rightarrow \theta n E(S^2) = (n-1)$ $\Rightarrow \boxed{E(S^2) = \frac{n-1}{n\theta}} = \frac{n-1}{n} \frac{1}{\theta}$

donc pour définir simplement un estimateur non biaisé (E.S.B) à partir de S^2, il faut considérer son inverse $\frac{1}{S^2}$

ou bien

$\frac{n-1}{nS^2} = \hat{\theta}_2$ est un E.S.B pour θ.

efficacité de $\hat{\theta}_2 = e_{\hat{\theta}_2} = \frac{B.C.R}{V(\hat{\theta}_2)}$

$B.C.R = \frac{2\theta^2}{n}$ pour $g(\theta) = \theta$.

$V(\hat{\theta}_2) = V\left(\frac{n-1}{n S^2}\right) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 V\left(\frac{1}{S^2}\right).$

et $V\left(\frac{1}{S^2}\right) = V\left(\frac{n\theta}{\theta n S^2}\right)$ car $\theta n S^2 \sim \chi^2_{(n-1)}$

$= n^2\theta^2 V\left(\frac{1}{\theta n S^2}\right) = V\left(\frac{1}{Z}\right) n^2\theta^2$ où $Z \sim \chi^2_{(n-1)}$

$V\left(\frac{1}{Z}\right) = ?!$ d'après la question 3] $V(\hat{\theta}) = n^2\theta^2 V\left(\frac{1}{Z}\right)$

où $Z \sim \chi^2_{(n)}$

$\Rightarrow V\left(\frac{1}{Z}\right) = E\left(\left(\frac{1}{Z}\right)^2\right) - \left(E\left(\frac{1}{Z}\right)\right)^2$

à la fin on compare $V(\hat{\theta}_1)$ et $V(\hat{\theta}_2)$

celui qui admet une variance minimale st meilleur que l'autre

Exercice N°7

X est une v.a tq $f_X(x) = K\, x^{-\alpha}\, \mathbb{1}_{\{x \geq \theta\}}$

$\theta > 0$ et $\alpha > 1$

partie I :

1) $K = ??$ $\quad \mathcal{X} = [\theta, +\infty[$

$$\int_{\theta}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1 \Rightarrow \int_{\theta}^{+\infty} K\, x^{-\alpha}\, dx = 1$$

$$\Rightarrow K \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_{\theta}^{+\infty} = 1 \Rightarrow K \left[0 - \frac{\theta^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right] = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{K = (\alpha - 1)\, \theta^{\alpha - 1}}$$

$$\Rightarrow f_X(x) = (\alpha - 1)\, \theta^{\alpha - 1}\, x^{-\alpha}\, \mathbb{1}_{\{x \geq \theta\}}$$

2) $$E(X^s) = \int_{\theta}^{+\infty} x^s f_X(x)\, dx = \int_{\theta}^{+\infty} x^s (\alpha - 1)\, \theta^{\alpha - 1}\, x^{-\alpha}\, dx$$

$$= (\alpha - 1)\, \theta^{\alpha - 1} \int_{\theta}^{+\infty} x^{s-\alpha}\, dx = (\alpha - 1)\, \theta^{\alpha - 1} \left[\frac{x^{s-\alpha+1}}{s - \alpha + 1} \right]_{\theta}^{+\infty}$$

$$= \begin{cases} \infty & \text{si } s - \alpha + 1 \geq 0 \\ -\dfrac{(\alpha - 1)\, \theta^{\alpha - 1}\, \theta^{s-\alpha+1}}{s - \alpha + 1} & \text{si } s - \alpha + 1 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(X^s) = \begin{cases} \nexists & \text{si } s + 1 \geq \alpha \\ \dfrac{\theta^s\, (1 - \alpha)}{s - \alpha + 1} & \text{si } s + 1 < \alpha \end{cases}$$

- $$\boxed{E(X) = \frac{\theta\, (1 - \alpha)}{(2 - \alpha)}}$$
- $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ tq : $(E(X))^2$ et $E(X^2) = \dfrac{\theta^2 (1 - \alpha)}{3 - \alpha}$

$$\Rightarrow V(X) = \frac{\theta^2(1-\alpha)}{3-\alpha} - \frac{\theta^2(1-\alpha)^2}{(2-\alpha)^2} = \theta^2(1-\alpha)\left[\frac{(2-\alpha)^2-(3-\alpha)(1-\alpha)}{(3-\alpha)(2-\alpha)^2}\right]$$

$$\boxed{\Rightarrow V(X) = \frac{\theta^2(1-\alpha)}{(3-\alpha)(2-\alpha)^2}}$$

3] la loi de la v.a U où $U = (\alpha-1)\ln\left(\frac{X}{\theta}\right)$

$$F_U(u) = P(U \leq u) = P\left((\alpha-1)\ln\frac{X}{\theta} \leq u\right) = P\left(\ln\frac{X}{\theta} \leq \frac{u}{\alpha-1}\right) \quad \alpha > 1 \text{ et } \theta > 0$$

$$= P\left(X \leq \theta e^{\frac{u}{\alpha-1}}\right) = F_X\left(\theta e^{\frac{u}{\alpha-1}}\right)$$

$$f_U(u) = \frac{\partial F_U(u)}{\partial u} = \frac{\partial F_X\left(\theta e^{\frac{u}{\alpha-1}}\right)}{\partial u} = \frac{\theta}{\alpha-1} e^{\frac{u}{\alpha-1}} f_X\left(\theta e^{\frac{u}{\alpha-1}}\right)$$

$$\Rightarrow f_U(u) = \frac{\theta}{\alpha-1} e^{\frac{u}{\alpha-1}} (\alpha-1)\theta^{\alpha-1}\left(\theta e^{\frac{u}{\alpha-1}}\right)^{-\alpha} \mathbb{1}_{\{\theta e^{\frac{u}{\alpha-1}} \geq \theta\}}$$

$$= e^{\frac{u}{\alpha-1}} e^{-\frac{\alpha u}{\alpha-1}} \mathbb{1}_{\{u > 0\}}$$

$$f_U(u) = e^{-u} \mathbb{1}_{\{u > 0\}} \Rightarrow U \sim \mathcal{E}(1).$$

partie II : $\quad \theta$ = connu

1] stat exh pour θ : critère de factorisation.

$$L(x, \alpha) = (\alpha-1)^n \theta^{n(\alpha-1)} \prod x_i^{-\alpha} \prod \mathbb{1}_{\{x_i \geq \theta\}}$$

$$= \underbrace{(\alpha-1)^n \theta^{n\alpha} \prod x_i^{-\alpha}}_{g(\alpha, S)} \underbrace{\theta^{-n} \mathbb{1}_{\{\min x_i \geq \theta\}}}_{h(x)}$$

$\Rightarrow \underline{S = \prod_{i=1}^{n} x_i}$ est une stat exh pour α

on peut utiliser aussi la forme exp car $\mathcal{X} = [\theta, +\infty[$ est $\perp\!\!\!\perp$ α : $f_X(x) = (\alpha-1)\theta^{\alpha-1} x^{-\alpha} \mathbb{1}_{\{x \geq \theta\}}$

$$= \underbrace{(\alpha-1)\theta^{\alpha-1}}_{c(\theta)} \exp[-\underset{\alpha(\alpha)}{\alpha} \underbrace{\log x}_{a(x)}] \underbrace{1\!\!1_{\{x \geq \theta\}}}_{h(x)}$$

$\Rightarrow S = \sum_{i=1}^{n} a(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \log x_i$ est une stat exh pour α.

2) e.m.v pour α noté T_1

$\cdot\ L(\underset{\sim}{x}, \alpha) = (\alpha-1)^n \theta^{n(\alpha-1)} \prod x_i^{-\alpha} 1\!\!1_{\{\min x \geq \theta\}}$

$\cdot\ \log L(\underset{\sim}{x}, \alpha) = n \log(\alpha-1) + n(\alpha-1)\log\theta - \alpha \sum \log x_i$

$\cdot\ \frac{\partial \log L(\underset{\sim}{x}, \alpha)}{\partial \alpha} = 0 \Rightarrow \frac{n}{\alpha-1} + n\log\theta - \sum \log x_i = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{\alpha-1} = \frac{\sum \log x_i - n\log\theta}{n}$

$\Rightarrow \hat{\alpha} = 1 + \frac{n}{-n\log\theta + \sum \log x_i}$

$\cdot\ \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \log L(\underset{\sim}{x}, \alpha) = \left.\frac{-n}{(\alpha-1)^2}\right|_{\alpha=\hat{\alpha}} = -n \times \left(\frac{-n\log\theta + \sum \log x_i}{+n}\right)^2 < 0$

$\Rightarrow \hat{\alpha} = T_1 = 1 + \frac{n}{-n\log\theta + \sum \log x_i} \Rightarrow T_1 = 1 + \frac{n}{\sum \log\left(\frac{x_i}{\theta}\right)}$

3) T_1 E.S.B pour α :

On remarque que $T_1 = 1 + \frac{n(\alpha-1)}{\sum(\alpha-1)\log\left(\frac{x_i}{\theta}\right)}$

$T_1 = 1 + \frac{n(\alpha-1)}{\sum U_i}$

$E(T_1) = ??$

$E(T_1) = E\left(1 + \frac{n}{-n\log\theta + \sum \log X_i}\right) = 1 + E\left(\frac{n(\alpha-1)}{\sum U_i}\right) = 1 + n(\alpha-1) \times E\left(\frac{1}{\sum U_i}\right)$

$= 1 + n(\alpha-1) E\left(\frac{1}{Z}\right)$ ou $Z = \sum U_i \sim \gamma(n, 1)$ car $U_i \sim \mathcal{E}(1)$ et U_i sont i.i.d.

$\Rightarrow E\left(\frac{1}{Z}\right) = \int_0^{\infty} \frac{1}{z} f_Z(z)\, dz = \int_0^{\infty} \frac{1}{z} \frac{1^n}{\Gamma(n)} z^{n-1} e^{-z}\, dz$

$$E\left[\frac{1}{Z}\right] = \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n)} z^{n-2} e^{-z} dz = \frac{1}{\Gamma(n)} \Gamma(n-1) = \frac{1}{(n-1)\Gamma(n-1)} \Gamma(n-1) = \boxed{\frac{1}{n-1}}$$

$$\Rightarrow E(T_1) = 1 + n(\alpha-1)\frac{1}{(n-1)} = \frac{n}{n-1}\alpha - \frac{1}{n-1} \neq \alpha$$

$\Rightarrow T_1$ est un E.B pour α.

mais $T_2 = \frac{n-1}{n} T_1 + \frac{1}{n}$ est un E.S.B pour α

T_2 est efficace ssi $V(T_2) = B.c.R$ pour α

$\cdot\, B.c.R = \frac{g(\alpha)'^2}{I_n(\alpha)} = \frac{1}{I_n(\alpha)}$ car $g(\alpha) = \alpha$.

$I_n(\alpha) = nI(\alpha)$ car $\mathcal{X} \perp\!\!\!\perp \alpha$

et $I(\alpha) = -E\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} \log f_X(x)\right)$ car $\mathcal{X} \perp\!\!\!\perp \alpha$

$\cdot\, f_X(x) = (\alpha-1)\theta^{\alpha-1} x^{-\alpha} \mathbb{1}_{\{x \geq \theta\}}$

$\cdot\, \log f_X(x) = \log(\alpha-1) + (\alpha-1)\log\theta - \alpha\log x$

$\cdot\, \frac{\partial \log f_X(x)}{\partial\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} + \log\theta - \log x$

$\cdot\, \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} \log f_X(x) = -\frac{1}{(\alpha-1)^2} \Rightarrow I(\alpha) = +\frac{1}{(\alpha-1)^2}$

d'où $I_n(\alpha) = \frac{n}{(\alpha-1)^2}$ et donc $\boxed{B.c.R = \frac{(\alpha-1)^2}{n}}$

$V(T_2) = ?!$

$V(T_2) = E(T_2^2) - (\underbrace{E(T_2)}_{\alpha \text{ car } T_2 \text{ E.S.B pour } \alpha})^2$

$$E(T_2^2) = E\left[\left(\frac{n-1}{n}T_1 + \frac{1}{n}\right)^2\right]$$

si on remplace T_1 par $1 + \frac{n(\alpha-1)}{\sum U_i} = 1 + \frac{n(\alpha-1)}{Z}$

on trouve $T_2 = \frac{(n-1)(\alpha-1)}{Z} + 1$

$$\Rightarrow E(T_2^2) = E\left[\left(\frac{(n-1)(\alpha-1)}{Z} + 1\right)^2\right] = (n-1)^2(\alpha-1)^2 E\left(\frac{1}{Z^2}\right) + 1$$
$$+ 2(n-1)(\alpha-1)E\left(\frac{1}{Z}\right)$$

où $E\left(\frac{1}{Z}\right) = \frac{1}{n-1}$ d'après $E(T_1)$

et $E\left(\frac{1}{Z^2}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{z^2} f_Z(z)\,dz = \int_0^\infty \frac{1}{z^2} \frac{1^n}{\Gamma(n)} z^{n-1} e^{-z} dz$

car $Z \sim \gamma(n,1)$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(n)} z^{n-3} e^{-z} dz = \frac{1}{\Gamma(n)} \Gamma(n-2) = \frac{1}{(n-1)\Gamma(n-1)} \Gamma(n-2)$$

$$= \frac{1}{(n-1)(n-2)\cancel{\Gamma(n-2)}} \cancel{\Gamma(n-2)} = \boxed{\frac{1}{(n-1)(n-2)}}$$

$$\Rightarrow E(T_2^2) = \frac{(n-1)^{\cancel{2}}(\alpha-1)^2}{\cancel{(n-1)}(n-2)} + 1 + \frac{2\cancel{(n-1)}(\alpha-1)}{\cancel{(n-1)}}$$

$$= \frac{(n-1)(\alpha-1)^2}{(n-2)} + 1 + 2(\alpha-1)$$

$$\Rightarrow V(T_2) = \frac{(n-1)(\alpha-1)^2 + (n-2) + 2(n-1)(\alpha-1)}{n-2} - \alpha^2$$

$$\vdots$$

$$\boxed{= \frac{(\alpha-1)^2}{(n-2)}}$$

On remarque que $V(T_2) = \frac{(\alpha-1)^2}{(n-2)} > B.C.R = \frac{(\alpha-1)^2}{n}$

$\Rightarrow T_2$ n'est pas efficace