

SERIE 5

Exercice 1

Soient (X, Y) un couple de v.a. de loi de probabilités conjointe

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j) = \frac{\lambda^i}{i! (j-i)!} e^{-(1+\lambda)} \quad \lambda > 0, j \geq i$$

- 1) a) Déterminer les lois de X et de Y . Que peut-on en conclure ?
b) En déduire sans calculs, $E(X)$ et $E(Y)$.
- 2) a) Déterminer la loi de $Y \mid X = i$
b) Calculer $E(Y \mid X = i)$.
c) Calculer $Cov(X, Y)$; que peut-on en conclure ?
- 3) a) Déterminer la loi de $Z = Y - X$
b) En déduire $E(Z)$ et $V(Z)$ (sans calculs).
Déterminer la loi de $T = \max(X, Y)$ (sans calculs)

Exercice 2

Soient (X, Y) deux v.a. de densité conjointe

$$f_{(X,Y)}(x, y) = kx|y| I_D(x, y) \quad \text{où } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

- 1) a) Déterminer $k, f_X(x), f_Y(y)$.
b) Calculer $E(Y^n), n \in \mathbb{N}$.
- 2) a) Déterminer $f_{Y|X=x}(y)$ et calculer $E(Y \mid X = x)$.
b) En déduire $Cov(X, Y)$. Que peut-on en conclure ?
c) Déterminer la densité de la v.a $W = E(Y^2 \mid X)$
d) Calculer $E(W)$
- 3) Calculer $P(X > |Y|)$.
- 4) a) Déterminer la densité du couple (Z, T) avec $T = X^2$ et $Z = X^2 + Y^2$
b) En déduire la densité de la v.a. Z .
c) Déterminer la densité de la v.a. $U = Z + T$