UNIVERSITÉ HASSIBA BENBOUALI DE CHLEF

Faculté des Sciences Exactes et informatique
Déparetement de mathématiques

Année universitaire :2021-2022
Niveau :2^{eme} Master mathématique appliquée et statistique

Fiche d'exercices 1 : Correction

Module. **Programmation linéaire 2**

Corrigé 1

1. Le dual (D_1) du primal (P_1) est

$$(D_1)\begin{cases} \min\ w = & 60\lambda_1 + 40\lambda_2 + 80\lambda_3 \\ & 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \geq 2 \\ & 4\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 \geq 4 \\ & 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 \geq 2 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0 \end{cases}$$

2. Le dual (D_2) du primal (P_2) est

$$(D_2)\begin{cases} \max\ w = & 30\lambda_1 + 40\lambda_2 \\ & \lambda_1 + \lambda_2 \leq 20 \\ & \lambda_1 + 2\lambda_2 \leq 24 \\ & \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \end{cases}$$

3. Le dual (D_3) du primal (P_3) est

$$(D_3)\begin{cases} \min\ w = & 40\lambda_1 + 60\lambda_2 - 25\lambda_3 \\ & \lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 \geq 10 \\ & 4\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \geq 6 \\ & \lambda_1, \lambda_3 \geq 0, \lambda_2 \textbf{quelconque} \end{cases}$$

Corrigé 2

La solution optimale dual : $u^\star = (u_1, u_2, u_3, u_4) = (0, 1, 0, 0)$ de valeur optimale $w^\star = 1$.

Corrigé 3

Cherchons le dual (D) de $(P1)$

$$(D1) \Longleftrightarrow \begin{cases} z\,(\min) = 6y_1 + 2y_2 - 2y_3 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 \geq -2 \\ y_1 - y_2 - 3y_3 \geq -1 \\ -3y_1 + 2y_2 - 2y_3 \geq 1 \\ y_1 - y_2 - y_3 \geq 1 \\ y_i \text{ de signe qcq},\ i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

vérifions que $x^* = (3,0,1,3)^\top$ est une solution admissible de $(P1)$

$$\begin{aligned} 2\times 3+0-3\times 1+3&=6\\ 3-0+2\times 1-3&=2\\ 3-3\times 0-2\times 1-3&=-2 \end{aligned}$$

Cherchons y^* solution admissible du dual avec (x^*, y^*) vérifie le théorème des écatrs complémentaires,

$$\begin{cases} x_1^* = 3 > 0 \\ x_2^* = 1 > 0 \\ x_3^* = 3 > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2y_1^* + y_2^* + y_3^* = -2 \\ -3y_1^* + 2y_2 - 2y_3^* = 1 \\ 6y_1^* + 2y_2^* - 2y_3^* = 1 \end{cases} \Longrightarrow y^* = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)^\top.$$

On vérifie que y^* est solution admissible de $(D1)$. Rest à vérifier la contrainte (2) du dual

$$-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-3\left(-\frac{2}{3}\right) \geq -1$$

Coclusions :$(x^*, y^*) \in S_{(P1)} \times S_{(D1)}$ vérifie le théorème des écatrs complémentaires, alors x^* est une solution optimal de $(P1)$.

Corrigé 4

1. Le dual (D) de ce problème linéaire est le suivant :

$$(D)\begin{cases} \min\ w = & 600u_1 + 400u_2 + 225u_3 \\ & 3u_1 + u_2 + u_3 \geq 200 \\ & 2u_1 + 2u_2 + u_3 \geq 300 \\ & u_1, u_2, u_3 \geq 0 \end{cases}$$

2. En utilisant la méthode simplex, on trouve $x_1^* = 50, x_2^* = 175, z^* = 62500$.
3. En utilisant le théorème des écarts complémentaires, on obtient :

$$\begin{aligned} 3\times 50 + 2\times 175 &= 500\\ 50+2\times 175 &= 400\\ 50+175 &= 225 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 600-500=100>0 &\Longrightarrow u_1 = 0\\ 400-400=0,&\ \text{aucun conclusion}\\ 225-225=0,&\ \text{aucun conclusion.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1^* > 0 &\Longrightarrow \text{ la première contrainte est saturée.}\\ x_2^* > 0 &\Longrightarrow \text{ la deuxième contrainte est saturée.} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} u_2 + u_3 &= 200 \\ 2u_2 + u_3 &= 300 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u_2 &= 100 \\ u_3 &= 100 \end{cases}$$
$u_1^* = 0, u_2^* = 100, u_3^* = 100, w^* = 62500.$

Corrigé 5

1. Le dual (D) de ce problème linéaire (PL) est le suivant :

$$(D)\begin{cases} \min\ w = & 80\lambda_1 + 24\lambda_2 + 36\lambda_3 \\ & 5\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 \geq 40 \\ & 4\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 \geq 50 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0 \end{cases}$$

2. En utilisant la méthode simplex, on trouve $x_1^* = 6, x_2^* = 9, z^* = 690$.
3. Déduire la solution du dual (D). A l'optimum, le primal et le dual sont liés par les règles suivantes :
   - les fonctions objectifs z et w ont la même valeur optimale $z^* = w^*$.
   - la valeur marginale d'une variable dans un programme est égale à l'opposé de la valeur optimale de la variable associée dans l'autre programme et réciproquement

   En utilisant le théorème des écarts complémentaires, on obtient :
   - le variable du dual λ_1 est différent de 0, car le premier contrainte du primal n'est pas saturée. i.e.

$$\begin{aligned} 5 \times 6 + 4 \times 9 = 66 \neq 80 \\ 6 + 2 \times 9 = 24 \\ 3 \times 6 + 2 \times 9 = 36 \end{aligned}$$

   Donc :

$$\begin{aligned} 80 - 66 \neq 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 0 \\ 24 - 24 = 0,\ \text{aucun conclusion} \\ 36 - 36 = 0,\ \text{aucun conclusion.} \end{aligned}$$

   - les variables du primal (x_1, x_2), étant toutes différentes de 0, alors les contraintes associées du dual sont saturées. Alors :
   $\begin{cases} \lambda_2 + 3\lambda_3 &= 40 \\ 2\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 50 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_2 &= 17.5 \\ \lambda_3 &= 7.5 \end{cases} \Longrightarrow \lambda_1^* = 0, \lambda_2^* = 17.5, \lambda_3^* = 7.5, w^* = 690.$

Corrigé 6

1. On peut rescrit le programme (**??**) sous la forme canonique suivante :

$$\begin{cases} \max\ z = & 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 8 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 7 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, \end{cases} \tag{1}$$

le dual (D) de ce problème linéaire (1) est le suivant :

$$\left\{\begin{array}{ll} \min\ w = & 8u_1 + 7u_2 \\ & 2u_1 + 3u_2 \geq 2 \\ & u_1 + 2u_2 \geq 3 \\ & 3u_1 + 2u_2 \geq 2 \\ & 2u_1 + u_2 \geq 3 \\ & u_1, u_2 \geq 0. \end{array}\right. \tag{2}$$

2. La solution graphique obtenue est donc : $u_1 = 1, u_2 = 1$.
3. Après trois itérations, on trouve que la solution optimale de ce programme est $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 0$ et $x_4 = 3$.
4. Les solutions primale et duale sont optimales. En effet, les solutions trouvées sont réalisables (il suffit de voir que la solution primale vérifie toutes les contraintes du problème primal et la solution duale toutes celles du problème dual). Elles donnent comme valeur pour les fonctions objectif 15 (valeur de l'objectif du primal) et 15 (valeur de l'objectif du dual). Le théorème vu en cours sur la dualité nous permet donc (puisque 15=15) d'affirmer que nos solutions sont optimales.

Corrigé 7

1.

$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$	$\mathbf{x}_5$	$\mathbf{x}_6$	$\mathbf{b}_i$	**V.b**
3	4	2	1	0	0	90	$\mathbf{x}_4$
2^*	1	1	0	1	0	40	$\mathbf{x}_5$
1	3	2	0	0	1	80	$\mathbf{x}_6$
5	4	3	0	0	0	0	$-\mathbf{z}$
0	$\frac{5}{2}^*$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	0	30	$\mathbf{x}_4$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	20	$\mathbf{x}_1$
0	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	60	$\mathbf{x}_6$
0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	0	-100	$-z$
0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0	12	$\mathbf{x}_2$
1	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	0	14	$\mathbf{x}_1$
0	0	1^*	-1	1	1	30	$\mathbf{x}_6$
0	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{8}{5}$	0	-118	$-z$
0	1	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	6	$\mathbf{x}_2$
1	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	2	$\mathbf{x}_1$
0	0	1	-1	1	1	30	$\mathbf{x}_3$
0	0	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{9}{5}$	$-\frac{1}{5}$	-124	$-z$

La base B=$\{1, 2, 3\}$ est optimale. La solution correspondante est :
$x_1 = 2$, $x_2 = 6$, $x_3 = 30$ et $z = 124$.

2.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Le dual

$$(PL)\begin{cases} w(\min) = 90\lambda_1 + 40\lambda_2 + 80\lambda_3 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \geq 5 \\ 4\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 \geq 4 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \geq 3 \\ \lambda_i \geq 0,\ i = 1,2,3 \end{cases}$$

4. $\lambda^* = \left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5}, \frac{1}{5}\right)^\top$ est une solution admissible car,

$$\begin{aligned} 3\left(\tfrac{2}{5}\right) + 2\left(\tfrac{9}{5}\right) + \tfrac{1}{5} &= 5 \geq 5 \\ 4\left(\tfrac{2}{5}\right) + \tfrac{9}{5} + 3\left(\tfrac{1}{5}\right) &= 4 \geq 4 \\ 2\left(\tfrac{2}{5}\right) + \tfrac{9}{5} + 2\left(\tfrac{1}{5}\right) &= 3 \geq 3 \end{aligned}$$

5. $w^* = 90\left(\frac{2}{5}\right) + 40\left(\frac{9}{5}\right) + 80\left(\frac{1}{5}\right) = 124 = z^*$, ainsi λ^* est une solution optimale de (D).

Corrigé 8

1. Le dual de ce problème linéaire (**??**) est le suivant :

$$\begin{cases} \min\ w = \quad 4u_1 + 2u_2 + 5u_3 \\ 2u_1 - 4u_2 + 3u_3 \geq 1 \\ -u_1 + 3u_2 - 2u_3 \geq -3 \\ u_1 - u_3 \geq 3 \\ u_1, u_2, u_3 \geq 0. \end{cases} \tag{3}$$

La solution proposée est réalisable, car
- Première contrainte : $4 = 4$
- Deuxième contrainte : $0 < 2$
- Troisième contrainte : $-4 < 5$.

Les contraintes associées à u_2 et u_3 étant inégalités strictes, d'après le théorème des écarts complémentaires, on a :

$$\begin{aligned} 4 - 4 = 0,&\ \text{aucun conclusion} \\ 2 - 0 \neq 0 &\Longrightarrow u_2 = 0 \\ 5 - (-4) \neq 0 &\Longrightarrow u_3 = 0. \end{aligned}$$

- Le variable primal $x_3^* = 4$ est strictement positive, alors la contrainte associée du dual est saturée. Alors :

$$u_1 - u_3 = 3.$$

Donc la solution duale associée à la solution primale donnée est :

$$u_1^* = 3, u_2^* = 0, u_3^* = 0.$$

Cette solution étant dual réalisable, on en déduit que la solution proposée est optimale.

2. Le problème dual de problème linéaire (**??**) est le suivant :

$$\left\{\begin{array}{ll} \min & 4y_1+3y_2+5y_3+y_4 \\ & y_1+4y_2+2y_3+3y_4 \geq 7 \\ & 3y_1+2y_2+4y_3+y_4 \geq 6 \\ & 5y_1-2y_2+4y_3+2y_4 \geq 5 \\ & -2y_1+y_2-2y_3-y_4 \geq -2 \\ & 2y_1+y_2+5y_3-2y_4 \geq 3 \\ & y_1,y_2,y_3,y_4 \geq 0. \end{array}\right. \tag{4}$$

La solution proposée est réalisable, car
- Première contrainte : $4=4$
- Deuxième contrainte : $3=3$
- Troisième contrainte : $\frac{14}{3}<5$.
- Quatrième contrainte : $1=1$.

Donc, d'après le théorème des écarts complémentaires :
$y_3=0$, puisque la contrainte associée à y_3 est inégalités strictes.
- Les variables primales x_2^*, x_3^* et x_4^* sont strictement positive, alors les contraintes associées du dual est saturée. Alors :

$$\begin{aligned} 3y_1+2y_2+4y_3+y_4 &= 6 \\ 5y_1-2y_2+4y_3+2y_4 &= 5 \\ -2y_1+y_2-2y_3-y_4 &= -2 \\ y_3 &= 0 \end{aligned}$$

Donc la solution duale associée à la solution primale donnée est : $y_1^*=y_2^*=y_4^*=1$ et$y_3^*=0$. Mais cette solution n'est pas duale réalisable, on en déduit que la solution proposée est n'est donc pas optimale.