

1. Questions de cours (06/06)

Soit  $X_1, X_2, X_3, \dots$  une chaîne de Markov à espace d'état fini  $E = \{1, 2, \dots, N\}$  avec la matrice de transition  $P$ . Parmi les affirmations suivantes, dites lesquelles impliquent lesquelles.

(a) Il existe une loi de probabilité  $\bar{\pi}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi P^n = \bar{\pi}$  pour toute loi de probabilité  $\pi$ .

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \begin{bmatrix} \bar{\pi} \\ \vdots \\ \bar{\pi} \end{bmatrix}$ , pour une certaine loi de probabilité  $\bar{\pi}$ .

(c) Il existe une loi de probabilité  $\bar{\pi}$  telle que  $\bar{\pi} P = \bar{\pi}$ .

e (d)  $P_{ij} > 0$  pour tout  $i, j \in E$

f (e) Il existe  $n > 0$  tel que  $P_{ij}^{(n)} > 0$  pour tout  $i, j \in E$

g (f)  $P_{ij}^{(n)} > 0$  pour tout  $i, j \in E$  et  $n > 0$ .

h (g) Pour tout  $i, j \in E$ . Il existe  $n > 0$  tel que  $P_{ij}^{(n)} > 0$ .

i (h)  $X_1, X_2, X_3, \dots$  une chaîne de Markov irréductible.

j (i)  $X_1, X_2, X_3, \dots$  une chaîne de Markov irréductible apériodique.

2. Chaîne de Markov à temps discret

Soit  $X_1, X_2, X_3, \dots$  une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans  $E = \{1, 2, 3\}$  de loi de probabilité  $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1/2$ ,  $\mathbb{P}(X_1 = 2) = 1/3$ ,  $\mathbb{P}(X_1 = 3) = 1/6$

(a) Expliquer pourquoi cette suite définit une Chaîne de Markov homogène.

(b) Calculer la matrice de transition et la loi limite  $\bar{\pi}$ .

(c) Donner la loi du temps de séjour et le temps moyen de séjour dans l'état 1.

(d) Quel est le temps moyen du retour à l'état 2?

(e) Donner le nombre moyen de visites de l'état 3.

(f) Calculer la limite:  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m (X_n)^r$ ;  $r > 0$ .

3. Chaîne de Markov à temps continu.

Trois (3) satellites de communication sont placés sur une orbite. La durée de vie d'un satellite est exponentiellement distribuée de moyenne  $1/\mu$ ,  $\mu > 0$ . Si l'un tombe en panne, son remplaçant sera envoyé. Le temps nécessaire pour préparer et envoyer un remplaçant est exponentiellement distribuée de moyenne  $1/\lambda$ ,  $\lambda > 0$ . Soit  $X(t)$  le nombre des satellites sur l'orbite à l'instant  $t$ . Supposons que  $[X(t)]_{t \geq 0}$  est un processus de Markov à temps continu.

(a) Tracer le diagramme des transitions.

(b) Donner le générateur infinitésimal.

(c) Ecrire les équations de Kolmogorov directes (forward) et rétrogrades (backward) du processus.

(d)  $[X(t)]_{t \geq 0}$  est-il un processus de Naissance et de Mort? Justifier!

(e) Montrer que la limite  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_t = i)$ ;  $i \geq 0$  existe. Que représente cette limite?

(f) Calculer la probabilité qu'à long-terme aucun satellite n'est sur l'orbite.

P.S. 1  
MAS 1

Examen de Rattrapage

2019/2020

Corrigé-type

Exercice 1 : (06/06) [Question de Cours]

$$(d) \Leftrightarrow (f) \Rightarrow (e) \Leftrightarrow (i) \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} (a) \Leftrightarrow (b) \\ (g) \Leftrightarrow (h) \end{array} \right] \Rightarrow (c)$$

(0,50) pour chaque implication.

Exercice 2 : (08/08) C.M.T.D.

(a) ~~P~~  $P(X_{n+1}=j/X_n=i, X_{n-2}, X_{n-2}, \dots, X_1) =$

(0,50)  $P(X_{n+1}=j/X_n=i)$  car  $X_{n+1} \perp\!\!\!\perp X_1, X_2, \dots, X_n$   
 indép.

Donc :  $(X_n)_n$  est une C.M.T.D.

De plus :  $P(X_{n+1}=j/X_n=i) = P(X_{n+1}=j) = P_{ij}$   
à cause de l'indépendance.

Donc : La C.M. est homogène.

(0,50) (b)  $P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \end{bmatrix}$

La C.M. étant aperiodique irréductible

(1,50)  $\bar{\pi}$  existe et est unique :  $\bar{\pi} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{matrix}$

m.l.r



Exercice 2 (suite).

(c) La loi du temps de séjour dans l'état ① :  $\tau_1$ .

On suppose que  $X_1 = 1$ .

$$P(\tau_1 = n / X_1 = 1) = P(X_2 = X_3 = \dots = X_{n-1} = 1, X_n \neq 1 / X_1 = 1)$$

$$= P[X_2 = 1 / X_1 = 1] P[X_3 = 1 / X_1 = 1] \dots P[X_{n-1} = 1 / X_1 = 1] \cdot$$

$$P(X_n \neq 1 / X_1 = 1)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)$$

$$(01) \quad P(\tau_1 = n / X_1 = 1) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \quad n \geq 1.$$

i.e.  $\tau_1 \sim G(1/2)$  la géométrique

Le temps moyen de séjour de l'état ①

$$(01) \quad E(\tau_1) = \frac{1}{1/2} = 2$$

(d) Les temps moyen du retour à l'état ②  $\mu_2$

$R_2$  : temps du retour à l'état ② (voir cours)

$$R_2 \sim G(1 - f_{22})$$

$$f_{22} = P(\dots)$$

02/05

### Exercice 2 (suite)

(d) Le temps moyen du retour à l'état (2) :

(01)  $\mu_2 = \frac{1}{\pi_2} = \frac{1}{1/3} = 3$

(e) Le nombre moyen de visite de l'état (3) :

$E_3 R_3 = \frac{1}{1-f_3}$ ,  $f_3 = 1$  car (3) est rec.

(01) Donc:  $E_3 R_3 = \infty$

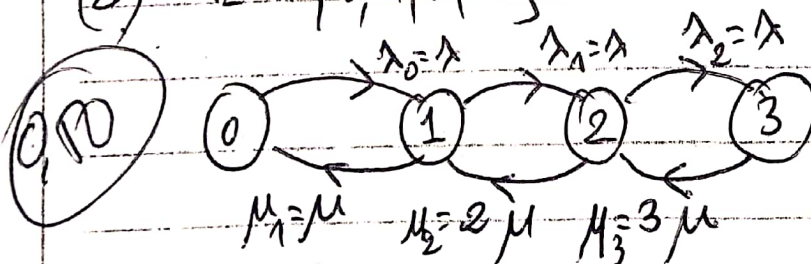
(f)  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m X_n^r = \lim_{n \rightarrow \infty} E X_n^r$

à l'infini,  $X_n$  suit la loi  $\bar{\pi}$ .

Donc:  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m X_n^r = 1^r \frac{1}{2} + 2^r \frac{1}{3} + 3^r \frac{1}{6}$

### Exercice 3 (07/07) C.M.T.C.

(a)  $E = \{0, 1, 2, 3\}$



(b)  $Q = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & 3\mu & -3\mu \end{bmatrix}$

03/05



### Exercice 3 (suite)

(c) Les équations de Kolmogorov directes :

$$P'(t) = P(t) \cdot Q, \quad \text{i.e., } P'_{ij}(t) = \sum_{k=0}^3 P_{ik}(t) Q_{kj}, \quad i, j \in E.$$

Écrivons les équations suivant les colonnes de  $Q$  :

$j=0$

$$P'_{i0}(t) = \sum_{k=0}^3 P_{ik}(t) Q_{k0}$$

$$P'_{i0}(t) = -\lambda P_{i0}(t) + \mu P_{i1}(t), \quad i \in E.$$

$j=1$

$$P'_{i1}(t) = \lambda P_{i0}(t) - (\lambda + \mu) P_{i1}(t) + 2\mu P_{i2}(t), \quad i \in E$$

$j=2$

$$P'_{i2}(t) = \lambda P_{i1}(t) - (\lambda + 2\mu) P_{i2}(t) + 3\mu P_{i3}(t), \quad i \in E$$

$j=3$

$$P'_{i3}(t) = \lambda P_{i2}(t) - 3\mu P_{i3}(t), \quad i \in E$$

(1) Or,  $(X_t)_{t \geq 0}$  est un P.N.M., car d'après

(0,80) le diagramme des transitions, seules les transitions possibles sont celles entre les états adjacents.

(e) La limite  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(X_t = i)$  existe si  $\pi_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} P(X_t = 0)$

(01) existe, d'après le cours :  $\pi_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2}{\mu_1 \mu_2 \mu_3}}$

04/05

Exercice 3 (suite)

Or:  $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ;  ~~$\mu_1 = 2\mu$~~   $\mu_2 = 2\mu$ , (c) 1.3  
Roz  $D_n$ ,

$$\lambda_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} + \frac{\lambda^3}{6\mu^3}}$$

Cette limite représente la proba. que la C.H.  
soit de l'état (i) à long terme.  
pour  $t \rightarrow \infty$ , on obtient alors la loi limite  $\pi$

(f)  $P(\text{à long terme, aucun satellite n'est sur l'orbite})$

$$\textcircled{01} = \lim_{t \rightarrow \infty} P(X_t = 0)$$

$$= \lambda_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} + \frac{\lambda^3}{6\mu^3}}$$