Examen de processus aléatoire

Exercice 1 :

Soit $(N_t)_t$ un processus de Poisson de taux λ ($\lambda>0$) .Supposons qu'à chaque occurrence du processus $(N_t)_t$ Un événement A se réalise avec une probabilité p . Soit $(N_1(t))_t$ et $(N_2(t))_t$ les processus de comptage des événements A et $\bar{A}$ respectivement.

1- Quelle est la nature de chacun des deux processus ? (Justifier votre réponse)
2- Quel est le nombre moyen de réalisation de A sur $[0, t[$; $t \geq 0$?
3- Soit $s>0$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $N_s = n$,quelle est la probabilité d'avoir k ($k \in \mathbb{N}$) réalisations de l' événement A sur $[0, ,s[$

Exercice 2 :

Soit $(N(t))_{t\geq 0}$ un processus de Poisson de taux λ ($\lambda>0$) .

1- Montrer que $(N(t))_{t\geq 0}$ un processus de Markov homogène.
2- Ecrire les équations différentielles progressives de Chapman Kolmogorov
3- Résoudre ces équations afin de retrouver les probabilités

$$P_{0j}(t)=P[\,N(t)=j \,/\, N(0)=0\,] \text{ pour tout } t>0.$$

Exercice 3 :

Une machine peut tomber en panne de deux façons différentes telle que

$P[$ panne de type I sur $[t, t+h[\,] = \alpha h + o(h)$ et $P[$ panne de type II sur $[t, t+h[\,] = \beta h + o(h)$

Dés que la machine tombe en panne une réparation est entreprise et sa durée est une v.a. exponentielle de paramètre λ et μ selon que la panne est de typeI ou de Type II.

1- Décrire le système par un processus de Markov dont on précisera les états et la matrice du générateur infinitésimal.
2- Quelle est la probabilité que la machine fonctionne à l'instant t, $t>0$ en régime stationnaire ?
3- Quel l'état espéré du système en régime stationnaire ?

Bon courage et bon vacance