Chapître 3
MODES DE CONVERGENCE

4-1 Lemme de Borel-Cantelli

On s'interesse à une suite (A_n) d'évènements et on cherche à connaître la probabilité qu'une infinité d'entre eux se produit(limsup), ou encore qu'un nombre quelconque d'entre eux se produise à partir d'un certain rang(liminf).

Définition 4-1-1

1) *La suite* $\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)$ *étant décroissante, on peut considérer sa limite, et on note par*

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k$$

2) *De même, La suite* $\left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right)$ *étant croissante, on peut considérer sa limite, et on note par*

$$\liminf_n A_n = \bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} A_k$$

On peut montrer que $\limsup_n A_n$ et $\liminf_n A_n$ sont des évènements, et nous pouvons formuler le théorème suivant

Théorème 4-1-2 (Lemme de Borel-Cantelli)

Soit une suite $(A_n)_n$ d'évènements,

a)

$$\text{Si} \quad \sum_n P(A_n) < \infty \quad \text{alors} \quad P\left(\limsup_n A_n\right) = 0$$

b) On suppose que les $(A_n)_n$ sont indépendants,

$$\text{Si} \quad \sum_n P(A_n) = \infty \quad \text{alors} \quad P\left(\limsup_n A_n\right) = 1$$

Dans ce qui suit on se donne une v.a. X et une suite de v.a. réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur un **même** espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

4-2 Convergence presque sûre et en probabilité

Définition 4-1-1 On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge presque sûrement vers* X, *et on note* $\lim_{n\longrightarrow +\infty} X_n \overset{p.s.}{=} X$ *si*

$$P\left(\lim_{n\longrightarrow +\infty} X_n = X\right) = 1$$

i.e.

$$P\left(\left\{\omega\in\Omega \,\middle|\, \lim_{n\longrightarrow\ +\infty} X_n(\omega)=X(\omega)\right\}\right)=1$$

Voici un critère de convergence *p.s.*

Proposition 4-1-2 (convergence complète)

$$\forall\varepsilon>0 \quad \text{si} \sum_{n\geq 0} P\left(|X_n-X|>\varepsilon\right)<\infty \qquad \text{alors} \lim_{n\longrightarrow\ +\infty} X_n \overset{p.s.}{=} X$$

Démonstration

Notons que l'ensemble $A=\left\{\lim_{n\longrightarrow\ +\infty} X_n = X\right\}$ est bien un évènement, car

la

convergence $\lim_{n\longrightarrow\ +\infty} X_n \overset{p.s.}{=} X$ s'écrit pour presque tout $\omega\in\Omega$

$$\forall\varepsilon>0,\exists m\in\mathbb{N}^*,\forall n\geq m \quad |X_n(\omega)-X(\omega)|<\varepsilon$$

A peut s' écrire

$$A=\left\{\lim_{n\longrightarrow\ +\infty} X_n = X\right\}=\bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{m\in\mathbb{N}^*}\bigcap_{n\geq m}\left\{|X_n(\omega)-X(\omega)|<\frac{1}{k}\right\}\in\mathcal{F}$$

comme intersection et réunion dénombrable d'évènements $\left(\varepsilon=\frac{1}{k}\right)$

$$\begin{aligned}P(A) &= P\left(\bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{m\geq 1}\bigcap_{n\geq m}\left\{|X_n(\omega)-X(\omega)|<\frac{1}{k}\right\}\right)= \\ &= 1-P\left(\bigcup_{k\geq 1}\bigcap_{m\geq 1}\bigcup_{n\geq m}\left\{|X_n(\omega)-X(\omega)|>\frac{1}{k}\right\}\right)\end{aligned}$$

D'après Borel-Cantelli, avec $\varepsilon=\frac{1}{k}, A_n^k=\left\{|X_n(\omega)-X(\omega)|>\frac{1}{k}\right\}$ et comme

$$\limsup_n A_n^k=\bigcap_{m\geq 1}\bigcup_{n\geq m}\left\{|X_n(\omega)-X(\omega)|>\frac{1}{k}\right\}$$

on aura

$$P\left(\limsup_n A_n^k\right)=P\left(\bigcap_{m\geq 1}\bigcup_{n\geq m}\left\{|X_n(\omega)-X(\omega)|>\frac{1}{k}\right\}\right)=0$$

Une réunion dénombrable de probabilité nulle étant de probabilité nulle, alors

$$P\left(\bigcup_{k\geq 1}\bigcap_{m\geq 1}\bigcup_{n\geq m}\left\{|X_n(\omega)-X(\omega)|>\frac{1}{k}\right\}\right)=0$$

d'où

$$P(A) = 0$$

autrement dit

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} X_n \overset{p.s.}{=} X$$

Définition 4-1-3
On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en probabilité vers* X*,*
et on note $\lim_{n \longrightarrow +\infty} X_n \overset{p}{=} X$ *si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

Proposition 4-1-4
1) *Si* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge presque sûrement vers* X*,alors* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en probabilité vers* X*.*
2) *Si* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en probabilité vers* X*,alors il existe une sous-suite extraite* $\left(X_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui *converge presque sûrement vers* X*.*(*la fonction* φ *ne dépend pas de* ω)
Les propriétés usuelles de la convergence dans $\mathbb{R}$ sont également valables pour les convergences presque sûre et en probabilité.

Proposition 4-1-5
i) ***(unicité de la limite)*** *Si* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge presque sûrement (en probabilité) vers* X*,et si* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge aussi presque sûrement (en probabilité) vers* Y,alors $P(X = Y) = 1.$
ii) ***(stabilité)*** *Si* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge presque sûrement (en probabilité) vers* X,
alors pour toute fonction continue f, $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$*converge presque sûrement (en probabilité) vers* $f(X)$*.*

Proposition 4-1-6
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de v.a. réelles de carré intégrable et telles que* $\lim_{n\longrightarrow+\infty} E(X_n) = a$ *et* $\lim_{n\longrightarrow+\infty} V(X_n) = 0$*,alors* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en probabilité vers* a*.*
Démonstration
D'après l'inégalité de Markov,

$$\begin{aligned} P(|X_n - a| > \varepsilon) &= P\left(|X_n - a|^2 > \varepsilon^2\right) \leq \frac{E\left(|X_n - a|^2\right)}{\varepsilon^2} = \\ &= \frac{V(X_n - a) + E(|X_n - a|)^2}{\varepsilon^2} = \\ &= \frac{V(X_n) + (E(X_n) - a)^2}{\varepsilon^2} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

4-3 Convergence dans L^p

On rappelle que pour $p > 1$,on définit les espaces L^p

$$L^p(\Omega, \mathcal{F}, P) = \left\{ X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \,\middle|\, \|X\|_p = \left(E\left[|X|^p\right]\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\} / \sim$$

où $\sim$ désigne la relation d'équivalence "être égales presque sûrement". Ce sont des espaces de Banach, et pour

$p = 2$, $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle X, Y \rangle = E(XY)$.

Définition 4-3-1

On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans L^p vers X,

et on note $\lim\limits_{n\longrightarrow\ +\infty} X_n \overset{L^p}{=} X$, si $X \in L^p$, si $\forall n,\ X_n \in L^p$ et si

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} E\left(|X_n - X|^p\right) = 0$$

Dans ce cas, on aura aussi

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} E\left(|X_n|^p\right) = E\left(|X|^p\right) =$$

Lorsque $p = 1$,c'est la convergence en moyenne, si $p = 2$,on parle de convergence en moyenne quadratique.

4-4 Convergence en loi

Ici, on se donne $X, X_0, ..., X_n, ...$ des v.a. qui ne sont pas forcément définies sur le même espace de probabilité. En effet la convergence en loi consiste à comparer les lois P_{X_n}et P_X de X_n et X respectivement et non plus les variables aléatoires elles même.

Définition 4-4-1

On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X,

et on note $\lim\limits_{n\longrightarrow\ +\infty} X_n \overset{\mathcal{L}}{=} X$ *si et seulement si*

pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continue bornée

$$\lim_{n\longrightarrow\ +\infty} E\left(f\left(X_n\right)\right) = E\left(f\left(X\right)\right)$$

Proposition 4-4-2

Si X et tous les éléments de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$sont définis sur le même espace de probabilité et si la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$converge en probabilité vers X, alors elle converge en loi vers X.

Démonstration

Soit f continue et bornée. Comme $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers X et comme f est continue, $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge

en probabilité vers $f(X)$. De plus f est bornée, donc il existe $M > 0$ tel que $|f(x)| \le M$ pour tout x.

Donc la suite $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$est dominée par M qui est bien sûr intégrable $(E(M)=M)$.

Par convergence L^1-dominée, $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc dans L^1 vers $f(X)$.

Ceci implique la convergence des espérances, c'est-à-dire que $E(f(X_n))$ converge vers $E(f(X))$.

La réciproque de la proposition précédente est fausse en général, mais on a le résultat suivant.

Proposition 4-4-3

Si la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$converge en loi vers la constante c, alors elle converge en probabilité vers c.

Nous donnons des caractérisations de la convergence en loi sous forme de critères pratiques de convergence aussi bien dans le cas discret que continu.

Proposition 4-4-4

1) (*Cas discret)*

Si pour tout n, X_n est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, et que X est également à valeurs dans $\mathbb{Z}$,alors la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$converge en loi vers X si et seulement si pour tout $k\in\mathbb{Z}$,

$$\lim_{n\longrightarrow\ +\infty} P\left(X_n=k\right)=P\left(X=k\right)$$

2) *(Cas absolument continu)*

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et X de densité de probabilité respectives f_n et f,

Si pour tout $x\in\mathbb{R}$

$$\lim_{n\longrightarrow\ +\infty} f_n\left(x\right)=f\left(x\right)$$

alors

$$\lim_{n\longrightarrow\ +\infty} X_n\overset{\mathcal{L}}{=}X$$

La réciproque est fausse en général.

Nous donnons enfin le résultat puissant qui fait appel aux fonctions caractéristiques.

Proposition 4-4-5

Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X.

(ii) Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et X ont pour fonctions de répartition respectives F_n et F, avec

$$\lim_{n\longrightarrow\ +\infty} F_n\left(x\right)=F\left(x\right)$$

pour tout $x\in\mathbb{R}$ qui n'est pas un point de discontinuité de F.

(iii) Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et X ont pour fonctions caractéristiques respectives φ_n et φ, telles que

$$\lim_{n\longrightarrow\ +\infty} \varphi_n\left(t\right)=\varphi\left(t\right)\qquad\text{pour tout}\in\mathbb{R}$$

4-5 Relations entre les différents modes de convergence

Proposition

i) La convergence au sens L^2 *implique la convergence au sens* L^1*,autrement dit*

$$\lim_{n\longrightarrow +\infty} E\left(|X_n - X|^2\right) = 0 \Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow +\infty} E\left(|X_n - X|\right) = 0$$

ii) La convergence au sens L^1*implique la convergence en probabilité, autrement dit*

$$\lim_{n\longrightarrow +\infty} E\left(|X_n - X|\right) = 0 \Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow +\infty} X_n \overset{p}{=} X$$

iii) La convergence en probabilité implique la convergence en loi:

$$\lim_{n\longrightarrow +\infty} X_n \overset{p}{=} X \Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow +\infty} X_n \overset{\mathcal{L}}{=} X$$

et enfin

iv) La convergence presque sûre la convergence en probabilité

$$\lim_{n\longrightarrow +\infty} X_n \overset{p.s.}{=} X \Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow +\infty} X_n \overset{p}{=} X$$

remarque: sous certaines conditions, d'autres implications peuvent avoir lieu