Corrigé type

Probabilité avancée

• **Solution question de cours** (2p)

on ne peut pas appliquer la loi forte des grands nombres au variables X_n, car elle n'ont pas la même loi. D'autre part, on obtient $E(X_n)=0$ et $V(X_n)=n$ donc on ne peut pas non plus appliquer la loi faible des grands nombres car ces variables n'ont pas la même variance.

$\boxed{\text{Remarque: J'ai accepté d'autre réponses justes.}}$

Exercice 1: (5p)

Calculer la fonction caractéristique son espérance et sa variance:

$$P(X=x) = q^{x-1}\,p \qquad (0{,}25)$$

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{itx}\right) \qquad (0{,}25)$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} e^{itx}\, q^{x-1}\, p$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} e^{itx}\, \frac{q^x}{q}\, p$$

$$= \frac{p}{q} \sum_{x=1}^{\infty} \left(e^{it} q\right)^x$$

$$= \frac{p}{q}\left((e^{it} q)^1 + (e^{it} q)^2 + (e^{it} q)^3 \cdots \right)$$

c'est une suite géométrique à l'infinie

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

a = le premier terme $e^{it} q$

r: raison (il faut que $|r| < 1$)

donc $|r| = |e^{it}|\,|q| = q$ avec $q \in [0,1]$

(1)

(2)

donc $\phi_X(t) = \frac{p}{q}\left(\frac{q e^{it}}{1-qe^{it}}\right)$ donc $\phi_X(t) = \frac{pe^{it}}{(1-qe^{it})}$

$\boxed{\text{Remarque: J'ai accepté d'autre démonstration}}$

· Calculons $E(X)$

$E(X) = \frac{1}{i} \phi_X'(0)$ (0,25).

donc : $\phi_X'(t) = \frac{(pie^{it})(1-qe^{it}) - (-qie^{it})pe^{it}}{(1-qe^{it})^2}$

$= \frac{pie^{it} - \cancel{piqe^{2it}} + \cancel{qpie^{2it}}}{(1-qe^{it})^2}$

1

$\phi_X'(t) = \frac{pi\,e^{it}}{(1-qe^{it})^2}$

donc $E(X) = \frac{1}{\cancel{i}} \frac{p\cancel{i}e^{i0}}{(1-qe^{i0})^2} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$

donc $\boxed{E(X) = \frac{1}{p}}$

Calculons $E(X^2)$.

$E(X^2) = \frac{1}{i^2} \phi_X''(0)$

donc $\phi_X''(t) = \frac{(-p\, e^{it})(1-qe^{it})^2 + 2qie^{it}(1-qe^{it})pie^{it}}{(1-qe^{it})^4}$

$\phi_X''(0) = \frac{-p(1-q)^2 + 2q(1-q)pi^2}{(1-q)^4} = -\frac{p+2q}{p^2}$

F

$E(X^2) = \frac{1}{\cancel{i^2}} \cancel{i^2}\frac{(p+2q)}{p^2} = \left(\frac{p+2q}{p^2}\right)$

$V(X) = \frac{p+2q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$ 0,25

Solution Exo2 (5p)

pour montrer que (X_n) converge en moyenne quadratique vers zéro, il faut étudier la limite de

$$\lim_{n \to +\infty} E\left(|X_n - 0|^2\right) = 0 \quad (0{,}75)$$

$$E(X_n^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 n e^{-nx} \underset{\text{intégration par partie}}{=} \left[-x^2 e^{-nx}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} x e^{-nx} dx$$

(0,75) (0,5) (0,5)

$$\underset{\text{intégration par partie}}{=} \left[-2x \frac{e^{-nx}}{n}\right]_0^{+\infty} + \frac{2}{n}\int_0^{+\infty} e^{-nx} dx = \frac{2}{n^2} \to 0$$

(0,75) (0,75) (0,75)

$$\text{donc } \lim_{n \to +\infty} E\left(|X_n - 0|^2\right) = \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n^2} = 0 \quad \text{m.q}$$

(0,25)

> Remarque : j'ai accepté la solution en utilisant la fonction $\Sigma(n)$

Exo 4

On pose X_i les v.a qui vaut 1 si le passager confirme son billet et 0 sinon

On a donc $X_i \leadsto B(p)$ avec $p = 0{,}75$

avec S_n le nombre (aléatoire) de passager

$$S_n = \sum X_i$$

et donc $S_n \leadsto B(n,p)$ 0,5 puisque $X > 150 \leadsto$ approx $N(n.p, \sqrt{npq})$ 0,5

$E(S_n) = np = n\,0{,}75$ 0,5 , $V(S_n) = n.p(1-p) = n\,0{,}25\;0{,}75$ 0,5

2) $P[X > 150] \leq 0{,}05$.

$$P[X \leq 150] \geq 0{,}95$$ 2

on applique le théorème de la limite centrale ou moins 0,5

$$\left(\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \leadsto N(0,1)$$

1

$X \leq 150$ donne $\dfrac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \dfrac{150 - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ de plus

1

Dans la table de gauss, on lit $P(X \leq 1{,}645) = 0{,}95$, on n'a plus qu'à résoudre l'inéquation

$$\frac{150 - 0{,}75n}{\sqrt{0{,}25 \cdot 0{,}75\,n}} \leq 1{,}645$$ 0,5

$\Rightarrow 150 - np \geq \sqrt{n} \cdot 0{,}712$ on pose $x = \sqrt{n}$ 1

$\Rightarrow 150 - np - 0{,}712\sqrt{n} \geq 0$

$\Rightarrow -x^2\,0{,}75 - 0{,}712\,x + 150 \geq 0$

$x_1 = -14 \Rightarrow$ refusé

$x_2 = 13{,}675 \Rightarrow$ accepté donc $n = (13{,}675)^2 = 187$

donc $0 \leq n \leq 187$