Faculté des Mathématiques **USTHB** — **Année 2012/2013**
Master 1 ISMTID — 19/06/2013
Module: **Processus Stochastiques 2** — **Durée: 1h 30m**

Correction Rattrapage

Exercice 1 *A/ 1/* ***(1 pts)*** *T_1 est un temps d'arrêt. Il peut pas deviner le future. Il connait la mise initiale et il peut savoir à n'importe quel instant si sa fortune est égale à la mise initiale de son adversaire.*
2/ ***(1 pts)*** *T_2 est un temps d'arrêt. Sachant l'information disponible il peut savoir si l'indice boursier à chuté de 1%.*
3/ ***(1 pts)*** *T_3 n'est pas un temps d'arrêt (on ne peut pas savoir dans le future si le processus peut entrer dans l'ensemble $]0;22[$).* ***(1 pts)*** *T_4 est un temps d'arrêt (temps d'entrée d'un processus adapté dans un ensemble $\{0\}$).*
B/ 1/ ***(1 pts)*** *$(Y_n)_{n\geq 0}$ est une $\mathcal{G}_n$-martingale. On a*

$$\begin{aligned} E\left(Y_{n+1}\mid \mathcal{G}_n\right) &= E\left(E\left(Y_{n+1}\mid \mathcal{F}_n\right)\mid \mathcal{G}_n\right) \ \ (car\ \mathcal{G}_n\subseteq \mathcal{F}_n) \\ &= E\left(Y_n\mid \mathcal{G}_n\right) \ \ (car\ \ (Y_n)_{n\geq 0}\ \ est\ une\ \mathcal{F}_n-martingale) \\ &= Y_n\ \ (car\ Y_n\ \ est\ \mathcal{G}_n-mesurable) \end{aligned}$$

2/ ***(1 pts)***

$$\begin{aligned} Var\left(Y_n\mid \mathcal{F}_n\right) &= E\left[\left(Y_n-E\left(Y_n\mid \mathcal{F}_n\right)\right)^2\mid \mathcal{F}_n\right] \\ &= \left(Y_n-E\left(Y_n\mid \mathcal{F}_n\right)\right)E\left[\left(Y_n-E\left(Y_n\mid \mathcal{F}_n\right)\right)\mid \mathcal{F}_n\right] \\ &\quad car\ Y_n\ \ et\ E\left(Y_n\mid \mathcal{F}_n\right)\ \ sont\ \mathcal{F}_n-mesurables \\ &= \left(Y_n-E\left(Y_n\mid \mathcal{F}_n\right)\right)\left[\left(E\left(Y_n\mid \mathcal{F}_n\right)-E\left(Y_n\mid \mathcal{F}_n\right)\right)\right]=0\ \ p.s. \end{aligned}$$

Exercice 2 ***1/ (0.5+0.5+1 pts)*** *On a $|X_n|\leq a+|Z_1|+...+|Z_n|=a+n$, donc $E|X_n|\leq a+n$ ainsi X_n est intégrable. Aussi, X_n est fonction de $Z_1,...,Z_n$ donc $\mathcal{F}_n$ mesurable. On a:*

$$\begin{aligned} E\left(X_{n+1}\mid \mathcal{F}_n\right) &= E\left(X_n+Z_{n+1}\mid \mathcal{F}_n\right) \\ &= X_n+E\left(Z_{n+1}\mid \mathcal{F}_n\right) \\ &= X_n+E\left(Z_{n+1}\right)\ \ car\ Z_{n+1}\ est\ indépendante\ de\ \mathcal{F}_n \\ &= X_n\ \ car\ E\left(Z_{n+1}\right)=0 \end{aligned}$$

(1 pts) *T est un temps d'arrêt car c'est le temps d'entrée dans l'ensemble $\{0,a+b\}$.*
2/ ***(1+1 pts)*** *Si $\omega\in\{T>n\}$ alors $T(\omega)>n$ et ainsi il n y a pas de ruine à l'instant n donc $0<X_n(\omega)<a+b$ (car le processus $(X_n)_n$ augmente de +1 ou diminue de -1 à chaque jeu) ainsi $\{T>n\}\subseteq\{0<X_n<a+b\}$ d'où $P(T>n)\leq P(0<X_n<a+b)$. Pour montrer que $T<+\infty$ p.s., c'est à dire $P(T<+\infty)=1$, montrons que $\lim_{n\to\infty}P(T>n)=0$ (car $P\{T<+\infty\}=P(\{T=+\infty\}^c)=1-P(T=+\infty)=1-\lim_{n\to\infty}P(T>n)$). On a*

$$P\left(0<X_n<a+b\right)=P\left(\frac{-a}{\sqrt{n}}<\frac{X_n-a}{\sqrt{n}}<\frac{b}{\sqrt{n}}\right),$$

car $E(X_n) = a$ *et* $Var(X_n) = \sum_{i=1}^{n} Var(Z_i) = n$. *D'après le théorème central limite* $\frac{X_n - a}{\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$. *Notons* $\alpha_n = \frac{-a}{\sqrt{n}}$ *et* $\beta_n = \frac{b}{\sqrt{n}}$. *On a* $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim_{n\to+\infty} \beta_n = 0$. *Alors* $P\left(\alpha_n < \frac{X_n - a}{\sqrt{n}} < \beta_n\right) \to 0$ *quand* $n \to +\infty$. *Par suite* $\lim_{n\to\infty} P(T > n) = 0$ *et donc* $P\{T < +\infty\} = 1$.

3/ (0.5+0.5 pts) *On a* $|X_{T\wedge n}| \leq a + b$, *d'après le théorème d'arrêt* $E(X_T) = E(X_0) = a$, *aussi* $E(X_T) = 0 \times P(X_T = 0) + (a+b) \times P(X_T = a+b) = (a+b) \times P(X_T = a+b) = a$, *donc* $P(X_T = a+b) = \dfrac{a}{a+b}$ *et* $P(X_T = 0) = 1 - P(X_T = a+b) = \dfrac{b}{a+b}$.

Exercice 3 ***1/ (1 pts)*** *On a* $E\left(X^k\right) = \dfrac{\phi_X^{(k)}(0)}{i^k}$, *et pour un mouvement Brownien* $W(t)$ *on a* $\phi_W(\lambda) = \exp\left(-\frac{\lambda^2 t}{2}\right)$. *Donc* $\phi_W^{(4)}(\lambda) = -6\lambda^2 t^3 \exp\left(-\frac{\lambda^2 t}{2}\right) + 3t^2 \exp\left(-\frac{\lambda^2 t}{2}\right) + \lambda^4 t^4 \exp\left(-\frac{\lambda^2 t}{2}\right)$.
Ainsi $\phi_W^{(4)}(0) = 3t^2$. *Donc* $E[W(t)^4] = 3t^2$.
On déduit que $E\left[(W(t) - W(s))^4\right] = 3(t-s)^2$ *pour* $s < t$.
2/ (0.5+0.5+2 pts) $W(t)^2 - t$ *est intégrable puisque* $W(t)$ *est de carré intégrable.* $W(t)^2 - t$ *est* $\mathcal{F}_t$ *mesurable. On a pour* $s < t$:

$$
\begin{aligned}
E\left[W(t)^2 - t \middle| \mathcal{F}_s\right] &= E\left[(W(t) - W(s))^2 - W(s)^2 + 2W(t)W(s) \middle| \mathcal{F}_s\right] - t \\
&= E\left[(W(t) - W(s))^2 \middle| \mathcal{F}_s\right] - E\left[W(s)^2 \middle| \mathcal{F}_s\right] + 2E\left[W(t)W(s) \middle| \mathcal{F}_s\right] - t,
\end{aligned}
$$

puisque l'accroissement $W(t) - W(s)$ *est indépendant de* $\mathcal{F}_s$ *et* $W(s)$ *est* $\mathcal{F}_s$ *mesurable, on aura*

$$
\begin{aligned}
E\left[W(t)^2 - t \middle| \mathcal{F}_s\right] &= E\left[(W(t) - W(s))^2\right] - W(s)^2 + 2W(s)E\left[W(t) \middle| \mathcal{F}_s\right] - t \\
&= t - s - W(s)^2 + 2W(s)^2 - t = W(s)^2 - s \text{ } (W(t) \textit{ martingale})
\end{aligned}
$$

Donc $W(t)^2 - t$ *est une martingale.*
3/ (2 pts) *On a*

$$
\begin{aligned}
E[W(t)^3 - 3tW(t) | \mathcal{F}_s] &= E\left[(W(t) - W(s))^3 + W(s)^3 - 3W(t)W(s)^2 + 3W(s)W(t)^2 - 3tW(t) \middle| \mathcal{F}_s\right] \\
&= E[(W(t) - W(s))^3 | \mathcal{F}_s] + E[W(s)^3 | \mathcal{F}_s] - 3E[W(t)W(s)^2 | \mathcal{F}_s] \\
&\quad + 3E[W(s)W(t)^2 | \mathcal{F}_s] - 3tE[W(t) | \mathcal{F}_s] \\
&= E[(W(t) - W(s))^3] + W(s)^3 - 3W(s)^2 E[W(t) | \mathcal{F}_s] \\
&\quad + 3W(s)E[W(t)^2 | \mathcal{F}_s] - 3tW(s) \\
&= 0 + W(s)^3 - 3W(s)^3 + 3W(s)E[W(t)^2 - t + t | \mathcal{F}_s] - 3tW(s) \\
&= -2W(s)^3 + 3W(s)\left(W(s)^2 - s + t\right) - 3tW(s) = W(s)^3 - 3sW(s)
\end{aligned}
$$

En effet, on a $\phi_W^{(3)}(\lambda) = 3\lambda t^2 \exp\left(-\frac{\lambda^2 t}{2}\right) - \lambda^3 t^3 \exp\left(-\frac{\lambda^2 t}{2}\right)$, *ainsi* $\phi_W^{(3)}(0) = 0$ *et donc* $E[W(t)^3] = 0$; *on déduit que* $E\left[(W(t) - W(s))^3\right] = 0$ *pour* $s < t$.

4.1/ (1 pts) *On a* $f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} Y_k \, 1_{[t_k, t_{k+1}[}(t)$. *Ainsi* $I_T(f) = \int_0^T f(t)dW(t) = \sum_{k=0}^{n-1} Y_k \left(W(t_{k+1}) - W(t_k)\right)$.

4.2/ (1 pts) *D'où* $E\left[\int_0^T f(t)dW(t)\right] = \sum_{j=0}^{n-1} E\left[Y_j \left(W(t_{j+1}) - W(t_j)\right)\right]$
$= \sum_{j=0}^{n-1} E(Y_j) E\left[(W(t_{j+1}) - W(t_j))\right]$ *car* $W(t_{j+1}) - W(t_j)$ *est indépendant de* ϕ_j *donc* $E\left[\int_0^T f(t)dW(t)\right] = 0$ *car* $E\left[(W(t_{j+1}) - W(t_j))\right] = 0$.