Université de Picardie Jules Verne **Année 2010-2011**
Master 1 de Mathématiques

M3-Probabilités
TD N. 4 Espérance conditionnelle

Exercice 1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité. Soit $(A_1, \ldots, A_K)$ une partition finie de Ω en ensembles deux à deux disjoints de $\mathcal{A}$. On note $\Sigma = \sigma(A_1, \ldots, A_K) \subset \mathcal{A}$ la tribu engendrée.
a) Décrire les éléments de Σ.
b) Soit X une variable aléatoire rélle définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Que vaut son espérance conditionnelle $E(X|\Sigma)$?

Corrigé
a) Les éléments de Σ sont les unions finies $\cup_{j\in J} A_j$, où $J \subset \{1, \ldots, K\}$ est finie, éventuellement vide.
b) Remarquons d'abord que $E(X|\Sigma)$ est Σ-mesurable, donc constante p.s. sur chacun des A_i, $1 \leq i \leq K$. On notera $E(X|A_i)$ la valeur p.s. de $E(X|\Sigma)$ sur A_i. On a $\sum_{i=1}^K E(X|A_i)P(A_i) = E(X)$. Et pour tout $1 \leq i \leq K$, $\int_{A_i} X\,dP = \int_{A_i} E(X|A_i)dP$, d'où $E(X|A_i) = \frac{1}{P(A_i)} \int_{A_i} X\,dP$. Finalement,

$$E(X|\Sigma) = \sum_{i=1}^{K} \mathbf{1}_{A_i}(x) \int_{A_i} X\,dP\,.$$

Exercice 2. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Soit $Y = 2[X/2]$ où [.] désigne la partie entière. Calculer $E(X|Y)$ et $E(Y|X)$.

Corrigé D'abord, Y est une fonction (mesurable) de X. Donc Y est $\sigma(X)$-mesurable, et $E(Y|X) = Y$. Maintenant, calculons $E(X|Y)$.

On a d'abord $E(X|Y)(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} E(X|Y = 2k)\mathbf{1}_{Y=2k}$. Calculons $E(X|Y = 2k)$.

On a d'abord

$$P(Y = 2k) = P(X/2 = k) + P(X/2 = k + 1/2) = \cdots = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}(1 + \frac{\lambda}{2k+1})\,.$$

Maintenant,

$$E(X|Y = 2k) = \frac{2kP(X = 2k) + (2k + 1)P(X = 2k + 1)}{P(Y = 2k)} = \cdots = \frac{(2k + \lambda)(2k + 1)}{2k + 1 + \lambda}$$

Exercice 3. *Soit (X, Y) un vecteur aléatoire à densité $f_{X,Y}$. Quelle est l'espérance conditionnelle de X sachant Y, $E(X|Y)$?*

Corrigé Rappelons que la densité conditionnelle de X sachant Y est définie par $f_{X|Y}(x) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)}$ où $f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x, y)dx$ est la densité marginale de Y. Alors, d'après le cours,

$$E(X|Y = y) = \int_{\mathbb{R}} x f_{X|Y}(x, y)dx = \frac{\int_{\mathbb{R}} x f_{(X,Y)}(x, y)dx}{\int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x, y)dx}$$

Exercice 4. Soit (X, Y) un vecteur aléatoire à densité. On pose $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$. Déterminer la loi du couple (U, V). En déduire la densité conditionnelle de U sachant V.

Corrigé On a $P(U \leq t) = P(X \leq t \text{ et } Y \leq t)$, et $P(V > t) = P(X > t \text{ et } Y > t)$.

Remarquons aussi que $(U, V) = (X, Y)$ si $X \geq Y$ et $(U, V) = (Y, X)$ si $Y \geq X$. On en déduit par des changements de variables immédiats que

$$f_{(U,V)}(u, v) = f_{(X,Y)}(u, v)\mathbf{1}_{u\geq v} + f_{(X,Y)}(v, u)\mathbf{1}_{v>u}\,.$$

Ensuite, en intégrant, on trouve

$$f_{U|V}(u, v) = \frac{f_{(U,V)}(u, v)}{f_V(v)} = \frac{f(u, v)\mathbf{1}_{u\geq v} + f(v, u)\mathbf{1}_{v>u}}{\int_{-\infty}^{v} f(v, u)du + \int_{v}^{+\infty} f(u, v)du\,.}$$

Exercice 5. Soient X et Y deux var indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1. On pose $Z = X + Y$. Déterminer la loi du couple (X, Z). En déduire la densité conditionnelle de X sachant Z et $E(X|Z)$.

Corrigé X et Y sont indépendantes, de densité $f(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)e^{-x}$. Le couple (X, Y) a donc (par indépendance) densité $f_{(X,Y)}(x, y) = f(x)f(y)$.

Effectuons le changement de variables $\psi(x, y) = (x, x + y)$. On obtient

$$\int_A f_{(X,Z)}(x, z)dxdz = \int_{\psi^{-1}(A)} f_{(X,Y)}(x, y)dxdy) \int_A f_{(X,Y)}(\psi^{-1}(x, z)) \times J\psi^{-1}(x, z)dxdz$$

d'où finalement

$$f_{(X,Z)}(x, z) = f_{(X,Y)}(x, z - x) = f(x)f(z - x) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\mathbf{1}_{[x,+\infty[}(z)e^{-z}$$

Ensuite, on calcule (pour $z \neq 0$)

$$f_{X|Z}(x, z) = \frac{f_{(X,Z)}(x, z)}{f_Z(z)} = \frac{\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\mathbf{1}_{[x,+\infty[}(z)}{z}$$

(on a $f_{X|Z}(x,0) = 0$ par convention)

On en déduit $E(X|Z=z) = \int_{\mathbb{R}} x f_{X|Z}(x,z)dx = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(z)$.

Exercice 6. Soient X et Y deux var indépendantes, de même loi ayant pour densité $f(z) = \frac{1}{z^2} 1_{]1,+\infty[}(z)$. On pose $U = XY$ et $V = X/Y$. Quelle est la loi de (U,V) ? En déduire la densité conditionnelle de V sachant U et $E(V|U)$.

Corrigé Soit $\Psi(x,y) = (xy, \frac{x}{y}$. C'est un C^∞-difféo de $U =]1,+\infty[^2$ sur son image $\Psi(U) = V = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2,\ u > 1,\ u > v, \text{ et } u > \frac{1}{v}\}$, d'inverse $\psi^{-1}(u,v) = (\sqrt{uv}, \sqrt{\frac{u}{v}})$.

Le changement de variables donne

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)} \circ \Psi^{-1}(u,v) \times \left|J\Psi^{-1}(u,v)\right| = \frac{1}{u^2}\mathbf{1}_{uv>1,\, u>v} \times \frac{1}{2v}\,.$$

Calculons aussi $f_V(v) = \int_{\mathbb{R}} f_{(U,V)}(u,v)du = \frac{1}{2v\max(v,\frac{1}{v})} = \frac{1}{2v^2}\mathbf{1}_{v\geq 1} + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{v<1}$.

Ensuite on calcule la densité conditionnelle

$$f_{U|V}(u,v) = \frac{f_{(U,V)}(u,v)}{f_V(v)} = \frac{\max(v,1/v)}{u^2}\mathbf{1}_{v>0}\mathbf{1}_{u>\max(v,1/v)}\,.$$

Dans toute la suite, X désigne une v.a.r. intégrable sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Exercice 7. Soit $\mathcal{B}$ une sous tribu de $\mathcal{A}$ telle que

$$\forall B \in \mathcal{B}, \quad P(B) = 0 \quad \text{ou} \quad 1.$$

Calculer $E(X|\mathcal{B})$.

Corrigé L'hypothèse $\forall B \in \mathcal{B},\quad P(B) = 0 \quad \text{ou} \quad 1$ implique que les fonctions $\mathcal{B}$-mesurables sont constantes ps. Autrement dit, $E(X|\mathcal{B})$ est constante ps. Donc elle vaut $E(X)$ (intégrer la constante sur Ω pour le voir).

Exercice 8. On suppose que X est de carré intégrable. Soit $\mathcal{B}$ une sous tribu de $\mathcal{A}$. On pose

$$\mathrm{Var}(X|\mathcal{B}) = E(X^2|\mathcal{B}) - (E(X|\mathcal{B}))^2.$$

Montrer que $\mathrm{Var}(X) = E(\mathrm{Var}(X|\mathcal{B})) + \mathrm{Var}(E(X|\mathcal{B}))$.

Corrigé : C'est une simple vérification, utilisant le fait que $E(E(X^2|\mathcal{B})) = E(X^2)$.

Exercice 9. Soit X de carré intégrable. On suppose que $E(X^2|Y) = Y^2$ et $E(X|Y) = Y$. Montrer que $X = Y$ ps.

Corrigé : On utilise l'exo précédent pour obtenir $Var(X-Y) = E(Var(X-Y|Y)) + Var(E(X-Y|Y))$. Ensuite, on calcule $E(X-Y|Y) = E(X|Y) - Y = 0$ ps par hypothèse.

Puis

$$Var(X-Y|Y) = E((X-Y)^2|Y) - E(-Y|Y)^2 = E(X^2|Y) - 2YE(X|Y) + Y^2 = 0 \quad \text{ps}$$

D'où $Var(X-Y) = 0$, d'où $X = Y$ dans L^2, d'où $X = Y$ ps.

Exercice 10. Soient $X_1, \cdots, X_n$ des var indépendantes, intégrables et $\mathcal{B}$ la tribu définie par $\mathcal{B} = \sigma(X_1, \cdots, X_{n-1})$. Calculer $E(X_1 + \cdots + X_n|\mathcal{B})$ et $E(X_1 \cdots X_n|\mathcal{B})$.

Corrigé On a

$$E(X_1 + \cdots + X_n|\sigma(X_1,\ldots,X_n)) = X_1 + \cdots + X_{n-1}) + E(X_n|\sigma(X_1,\ldots,X_{n-1}) = X_1 + \cdots + X_{n-1} + E(X_n)\,.$$

De même, $E(X_1 \ldots X_n|\sigma(X_1,\ldots,X_n) = X_1 \ldots X_{n-1}E(X_n)$.

Exercice 11. Soit Y une var indépendante et de même loi que X. Calculer $E(X|X+Y)$ et $E(Y|X+Y)$.

Corrigé : Nous allons montrer que $E(X|X+Y) = E(Y|X+Y) = \frac{1}{2}(X+Y)$. La deuxième égalité résulte de la première, puisque $E(X+Y|X+Y) = X+Y$.

Pour montrer la première égalité, il suffit de montrer que pour tout borélien B, on a $E(X\mathbf{1_B}(X+Y)) = E(Y\mathbf{1}_B(X+Y)$.

Cette égalité est vraie si les couples $(X, X+Y)$ et $(Y, X+Y)$ ont même loi.

Ces couples ont même loi dès lors que (X,Y) et (Y,X) ont même loi.

Et (X,Y) et (Y,X) ont bien même loi, car X et Y sont indépendantes et de même loi.