III La convergence en loi

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé.

Définition:

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. On note par F_n la fonction de répartition de X_n. Soit X une v.a.r. de fonction de répartition F. On dira que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X (on écrit $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$) si

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

en tout point x de continuité de F.

On a le théorème suivant:

Théorème:

La convergence en probabilité entraine la convergence en loi.

Preuve:

On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X. On alors

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \alpha) = 0 \text{ pour tout } \alpha > 0.$$

Soit x un point de continuité de F et montrons que $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$. On a $F_n(x) = P(X_n \le x)$ et

$$\begin{aligned} \{X_n \le x\} &= \{X_n \le x\} \cap \Omega = \{X_n \le x\} \cap (\{X \le x+\alpha\} \cup \{X > x+\alpha\}) \\ &= \{X_n \le x; X \le x+\alpha\} \cup \{X_n \le x; X > x+\alpha\} \\ &\subset \{X \le x+\alpha\} \cup \{X - X_n > \alpha\}, \end{aligned}$$

d'où

$$\{X_n \le x\} \subset \{X \le x+\alpha\} \cup \{|X - X_n| > \alpha\}.$$

La probabilité étant monotone et sou-additive, alors on a

$$\begin{aligned} P(X_n \le x) &\le P\{X \le x+\alpha\} \cup \{|X - X_n| > \alpha\} \\ &\le P(X \le x+\alpha) + P(|X - X_n| > \alpha), \end{aligned}$$

qui signifie que

$$F_n(x) \le F(x+\alpha) + P(|X - X_n| > \alpha) \qquad (*)$$

En échangeant (X_n et X) et (x et $x-\alpha$), obtient

$$F(x-\alpha) \le F_n(x) + P(|X - X_n| > \alpha) \qquad (**)$$

et en combinant $(*)$ et $(**)$, on obtient

$$F(x-\alpha) - P(|X - X_n| > \alpha) \le F_n(x) \le F(x+\alpha) + P(|X - X_n| > \alpha),$$

d'où en retranchant $F(x)$, on obtient

$$\begin{aligned} F(x-\alpha) - F(x) - P(|X - X_n| > \alpha) &\le F_n(x) - F(x) \\ &\le F(x+\alpha) - F(x) + P(|X - X_n| > \alpha) \qquad (***) \end{aligned}$$

F étant continue en x on peut écrire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |y - x| < \delta \Rightarrow |F(y) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On déduit que pour $\alpha < \delta$, puisque F est croissante (la valeur absolue peut être supprimée):

$$F(x + \alpha) - F(x) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } F(x - \alpha) - F(x) < \frac{\varepsilon}{2},$$

d'où d'aprés $(***)$

$$-\frac{\varepsilon}{2} - P(|X - X_n| > \alpha) \leq F_n(x) - F(x) \leq P(|X - X_n| > \alpha) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il suffit de choisir n assez grand pour que $P(|X - X_n| > \alpha) < \frac{\varepsilon}{2}$ d'aprés la convergence en probabilité de (X_n) vers X. On obtient alors

$$-\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \leq F_n(x) - F(x) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},$$

qui signifie que $\lim_{n \to \infty} F_n(x) = F(x)$, ce qui montre la convergence en loi.■

Remarque:

La réciproque est faausse en général. En effet; si on considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $v.a.r.$ de même loi que X. Alors il est clair que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ car $F_n = F$, mais il n'y a aucune raison que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers X.

La proposition suivante exprime la convergence en loi en terme de probabilités.

Proposition:

$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ si et seulement pour tous $a < b$ tels que F soit continue en en a et b, on a

$$\lim_{n \to \infty} P(a < X_n \leq b) = P(a < X \leq b).$$

Preuve:

1.La condition est nécessaire, puisque $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, alors on a

$$\lim_{n \to \infty} P(a < X_n \leq b) = \lim_{n \to \infty} (F_n(b) - F_n(a)) = F(b) - F(a) = P(a < X \leq b).$$

2.Soit $b \in \mathbb{R}$ un point de continuité de F. Remarquons que toute fonction croissant est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut être sur un ensemble dénombrable de points. Ceci nous permet de trouver une suite $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de points de continuité de F, qui converge vers $-\infty$, et on a dans ce cas

$$\lim_{n \to \infty} P(a_m < X_n \leq b) = P(a_m < X \leq b) \text{ pour tout entier naturel } m,$$

d'où

$$\lim_{n \to \infty} (F_n(b) - F_n(a_m)) = F(b) - F(a_m),$$

et comme $\lim_{m\to\infty} F_n(a_m) = \lim_{m\to\infty} F(a_m) = 0$, alors

$$\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}(F_n(b) - F_n(a_m))\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty}(F_n(b) - F_n(a_m))\right) = \lim_{n\to\infty} F_n(b)$$

et

$$\lim_{m\to\infty}((F(b) - F(a_m))) = F(b).$$

Par suite $\lim_{n\to\infty} F_n(b) = F(b)$, d'où l'affirmation.■

Cas des variables aléatoires discrétes:

Supposons que les $v.a.$ X_n et X sont discrétes et telles que

$$D_{X_n} \subset D_X \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On pose

$$D_X = \{x_0, x_1, ...\}.$$

On a alors

$$F\left(x_i^+\right) = F(x_i) = \sum_{x\leq x_i} P(X = x) = P(X \leq x_i)$$

et

$$F\left(x_i^-\right) = \sum_{x<x_i} P(X = x) = P(X < x_i).$$

Ainsi D_X est exactement l'ensemble des points de discontinuité de F, d'où la deuxième définition de la convergence en loi (dans lecas des $v.a.d.$).

Définition:

Soit (X_n) et X des $v.a.d.$ telles que

$$D_{X_n} \subset D_X = \{x_0, x_1, ...\} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ si est seulement si

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = x_i) = P(X = x_i) \text{ pour tout } i \in \mathbb{N}$$

En effet, il suffit d'appliquer la dernière proposition avec

$$a < x_i \leq b < x_{i+1}.$$