Université de Sidi Bel Abbès
Faculté des Sciences Exactes
Durée: 1H30

Département Probabilités et Statistiques
2ème Année Master Probabilités et Applications

Examen : Modèles autorégressifs

Exercice 1

On considère le processus MA(2) définit par :

$$x_t = \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1} - \theta_2 \epsilon_{t-2},$$

avec, ϵ_t est un bruit blanc qui suit la loi $\mathcal{N}(0.1)$. On sait que les racines de l'équation caractérisqtique sont $\lambda_1 = 0.935$, et $\lambda_2 = -0.535$

- Déterminez les valeurs de θ_1 et θ_2. 2
- Ce processus est il stationnaire ? 1
- Déduisez l'inversibilité de ce processus en prouvons que les racines sont en dehors du cercle unité, à partir de λ_1 et λ_2. 1
- Déterminez la ACF et les trois premiers coefficients de la PACF, avec son code R. 4 2,5
- Donnez la représentation $AR(\infty)$ de ce processus et donnez les trois premiers coefficients de cette représentation, avec son code R. 2,5

Exercice 2 . 4 points.

Parmi les processus $X = (X_t)_t$ suivants, lesquels sont stationnaires (justifiez votre réponse) ?

1* A et B deux variables indépendantes, $A; B \sim N(1;1)$

$$X_t = A\cos(t) + B\sin(t)$$ 1

2* Soient A et B deux variables aléatoires réelles centrées indépendantes, de même variance.

$$X_t = A\cos(\frac{\pi}{3}t) + B\sin(\frac{\pi}{3}t)$$ 3

Exercice 3 3 points

1- Quelle est le but de la décomposition d'une série temporelle, donnez la définition de l'ACF. $\boxed{0,75}$ $\boxed{0,25}$

Corrigé type
Modèles autorégressifs.

Exercice 1 :

Q1) On considère le processus MA(2) definit par.

$$x_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}.$$

avec $\lambda_1 = 0{,}935$ et $\lambda_2 = -0{,}535$.

l'equation caractéristique $\lambda_t^2 - \theta_1 \lambda_t - \theta_2 = 0$

Nous calculons $\Delta = b^2 - 4AC$.

$\Delta = \theta_1^2 + 4\theta_2$ avec $\sqrt{\Delta} = \sqrt{\theta_1^2 + 4\theta_2}$

donc $\lambda_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ donc $\lambda_1 = \dfrac{\theta_1 - \sqrt{\theta_1^2+4\theta_2}}{2}$,

et $\lambda_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ donc $\lambda_2 = \dfrac{\theta_1 + \sqrt{\theta_1^2+4\theta_2}}{2}$.

on a $\lambda_1 + \lambda_2 = \theta_1$ alors $\theta_1 = 0{,}935 - 0{,}535 =$

$$\boxed{\theta_1 = 0{,}4}$$

et $\lambda_1 \times \lambda_2 = (a-b)\cdot(a+b) = a^2 - b^2$.

alors $\lambda_1 \times \lambda_2 = \left(\dfrac{\theta_1^2}{4}\right) - \left(\dfrac{\theta_1^2 + 4\theta_2}{4}\right)$ alors $\lambda_1 \times \lambda_2 = -\theta_2$.

alors $\boxed{\theta_2 = 0{,}5}$

donc l'équation caractéristique devient :

$$X_t = \varepsilon_t - 0{,}4\varepsilon_{t-1} - 0{,}5\varepsilon_{t-2}.$$

Q2 = Oui par définition, tout processus MA d'ordre fini est stationnaire.

Q3 - Déduisons l'inversibilité de ce processus en prouvons que les racines sont en dehors du cercle unité.

Le polynôme caractéristiques admet deux solution

$\lambda_1 = \dfrac{1}{L_1} = \dfrac{1}{0{,}7} = 0{,}93$ et $\lambda_2 = \dfrac{1}{L_2} = \dfrac{1}{1{,}87} \Rightarrow L_2 = |-1{,}87| > 1$

donc $L_1 = |1{,}07| > 1$ donc les racines du polynômes sont en dehors du cercle unité → inversibilité.

Q_4 = Déterminons la Acf.

L'espérance de X_t

$$E(X_t) = E(\varepsilon_t - 0{,}4\,\varepsilon_{t-1} - 0{,}5\,\varepsilon_{t-2})$$

$$\boxed{E(X_t) = 0}$$ 0,25

la varice de X_t. $V(X_t) = E(X_t^2) - (E(X_t))^2$, avec $E(X_t) = 0$

$$\cancel{V}(X_t) = \cancel{E}(X_t^2) = E(\varepsilon_t - 0{,}4\,\varepsilon_{t-1} - 0{,}5\,\varepsilon_{t-2})^2$$

$$V(X_t) = \underbrace{E(\varepsilon_t^2)}_{\sigma^2} + 2(-0{,}4)\,\overset{=0}{E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1})} - 2(-0{,}3)\,\overset{=0}{E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-2})}$$
$$+ \underbrace{(-0{,}4)^2 E(\varepsilon_{t-1})^2}_{+\,\theta_1^2 \sigma^2} + 2\cdot\cancel{(0{,}4)}(0{,}5)\,\cancel{E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2})} + \underbrace{(0{,}5)^2 E(\varepsilon_{t-2}^2)}_{\theta_2^2\sigma^2}$$

$$\text{donc } V(X_t) = \sigma^2 + 0 + 0 + \theta_1^2\sigma^2 + 0 + \theta_2^2\sigma^2$$
$$= (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\,\sigma_\varepsilon^2 = (1 + 0{,}16 + 0{,}25)$$
$$\gamma(0) = \boxed{V(X_t) = 1{,}41}$$ 0,75

$$\gamma(k) = E(X_t - \mu)\cdot(X_{t-k} - \mu)$$
$$= cov(X_t, X_{t-k}) = E(X_t, X_{t-k})$$

$$\gamma(1) = E((\varepsilon_t - 0{,}4\,\varepsilon_{t-1} - 0{,}5\,\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-1} - 0{,}4\,\varepsilon_{t-2} - 0{,}5\,\varepsilon_{t-3}))$$
$$= E(\varepsilon_t \cancel{\varepsilon_{t-1}}) - 0{,}4 (E(\varepsilon_t \cancel{\varepsilon_{t-2}}) - 0{,}5\, E(\cancel{\varepsilon_t}\varepsilon_{t-3})$$
$$- 0{,}4\, E(\varepsilon_{t-1}^2) + 0{,}16\,(\cancel{\varepsilon_{t-1}}\varepsilon_{t-2}) + 0{,}2\,E(\varepsilon_{t-1}\cancel{\varepsilon_{t-3}}) - 0{,}5\,E(\cancel{\varepsilon_{t-2}}\varepsilon_{t-1})$$
$$+ 0{,}2\,E(\varepsilon_{t-2}^2) + 0{,}25\,E(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-3})$$

$$\text{don } \gamma(1) = (-0{,}4\,\sigma^2 + 0{,}2)\,\sigma^2 = -0{,}2$$

Alors $\boxed{\gamma(1) = -0{,}2}$

0,75

3

$$\gamma(2) = E\left(\left(\varepsilon_t - 0{,}4\,\varepsilon_{t-1} - 0{,}5\,\varepsilon_{t-2}\right)\times\left(\varepsilon_{t-2} - 0{,}4\,\varepsilon_{t-3} - 0{,}5\,\varepsilon_{t-4}\right)\right)$$

$$= -0{,}5\,\sigma^2 = -0{,}5 \qquad 0{,}5$$

donc $\boxed{\gamma(2) = -0{,}5}$

$\boxed{\gamma(3) = 0}$ 0,25

~~ACF~~ :

Alors $\gamma(k) = \begin{cases} 1{,}41 & \text{si } k=0 \\ -0{,}2 & \text{si } k=1 \\ -0{,}5 & \text{si } k=2 \\ 0 & \text{si } k>2. \end{cases}$

ACF : auto-corrélation-function.

$$\rho(k) = \frac{\gamma(0)}{\gamma(k)}$$

donc $\rho(k) = \begin{cases} 1 \; = 0{,}25 & \text{si } k=0 \\ -0{,}14 \;\; 0{,}25 & \text{si } k=1 \\ -0{,}35 \;\; 0{,}25 & \text{si } k=2 \\ 0 \;\; 0{,}25 & k\geq 3. \end{cases}$

PACF. $\phi_{kk} = \dfrac{\det R^*(k)}{\det R^\alpha(k)}$.

$$R(k) = \begin{pmatrix} \rho(0) & \rho(1) & \cdots & \rho(k-1) \\ \rho(1) & \rho(0) & \ddots & \rho(k-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \cdots & \rho(0) \end{pmatrix},$$

$$R^*(k) = \begin{pmatrix} \rho(0) & \rho(1) & \cdots & \rho(k-2) & \rho(1) \\ & \ddots & & & \rho(2) \\ & & \ddots & & \vdots \\ \rho(k-2) & & \cdots & \rho(k-3) & \rho(k) \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & & & \end{pmatrix},$$

donc $\phi_{11} = \rho(1) = \boxed{-0{,}14}$, $\quad \phi_{11} = \dfrac{\rho(1)}{\rho(0)} = \boxed{-0{,}14}$

$$\phi_{22} = \frac{R^*(2)}{R(2)} = \frac{\begin{vmatrix} \rho(0) & \rho(1) \\ \rho(1) & \rho(2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \rho(0) & \rho(1) \\ \rho(1) & \rho(0) \end{vmatrix}} = \frac{\rho(0)\,\rho(2) - \rho^2(1)}{\rho^2(0) - \rho^2(1)} = \boxed{-0{,}38}$$

$$\phi_{33} = \frac{R^{*3}}{R^*(3)} = \frac{\begin{vmatrix} \rho(0) & \rho(1) & \rho(1) \\ \rho(1) & \rho(0) & \rho(2) \\ \rho(2) & \rho(1) & \rho(3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \rho(0) & \rho(1) & \rho(2) \\ \rho(1) & \rho(0) & \rho(1) \\ \rho(2) & \rho(1) & \rho(0) \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -0{,}14 & -0{,}14 \\ -0{,}14 & 1 & -0{,}35 \\ -0{,}35 & -0{,}14 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -0{,}14 & -0{,}35 \\ -0{,}14 & 1 & -0{,}14 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 1 & -0,35 \\ -0,14 & 0 \end{vmatrix} + 0,14 \begin{vmatrix} -0,14 & -0,35 \\ -0,35 & 0 \end{vmatrix} - 0,14 \begin{vmatrix} -0,14 & 1 \\ -0,35 & -0,14 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -0,14 \\ -0,14 & 1 \end{vmatrix} + 0,14 \begin{vmatrix} -0,14 & -0,14 \\ -0,35 & 0 \end{vmatrix} - 0,35 \begin{vmatrix} -0,14 & 1 \\ -0,35 & -0,14 \end{vmatrix}} = \frac{-0,02}{0,82}$$

donc $\phi_{33} = -0,024.$

• Representation $AR(\infty)$.

Comme x_t est inversible, il admet une représentation $AR(\infty)$: on a:

$$\tilde{x}_t = \varepsilon_t - 0,4\,\varepsilon_{t-1} - 0,5\,\varepsilon_{t-2}).$$

$$= (1 - 0,5L - 0,3L^2)\,\varepsilon_t = \theta(L)\,\varepsilon_t.$$

$$\Leftrightarrow (\theta(L)^{-1})\,\tilde{x}_t = \pi(L)\cdot\tilde{x}_t = \varepsilon_t.$$

telle que:

$\pi(L)\cdot\theta(L) = 1$ c.a.d.

$$(1 + \pi_1 L + \pi_2 L + \pi_3 L^3 + \dots) + (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \theta_3 L^3) = 1$$

donc $1 + (\pi_1 + \theta_1)L + (\pi_2 + \pi_1\theta_1 + \theta_2)L^2 + (\pi_3 + \pi_2\theta_1 + \pi_1\theta_2)L^3$

$+ (\pi_4 + \pi_3\theta_1 + \pi_2\theta_2) = 1$.

par identification, on obtient:

$\pi_1 + \theta_1 = 0 \Leftrightarrow \pi_1 = -\theta_1 = -(-0,4) = \boxed{\pi_1 = 0,4.}$

$\pi_2 + \pi_1\theta_1 + \theta_2 \Leftrightarrow \pi_2 = -\pi_1\theta_1 - \theta_2 = (0,4)\cdot(-0,4) - 0,5$

$$\boxed{\pi_2 = 0,66}$$

$\pi_3 + \pi_2\theta_1 + \pi_1\theta_2 = 0 \Leftrightarrow \pi_3 = -\pi_2\theta_1 - \pi_2\theta_2 = -\theta_1^3 + 2\theta_1\theta_2$

$\pi_3 = 0,46.$

Donc la formule d'une façon générale des coefficient π_j vérifiant la relation suivante.

$\pi_j + \pi_{j-1}\theta_1 + \pi_{j-2}\theta_2 = 0$ pour tous $j > 1$ avec $\pi_0 = 1$

Solution Exo 2

5

1) $A \perp\!\!\!\perp B$ avec $A, B \rightsquigarrow N(1,1)$

$X_t = A\cos(t) + B\sin(t)$

$$E(X_t) = E(A\cos(t) + B\sin(t)) = \mathbb{E}(A)\cos(t) + \mathbb{E}(B)\sin(t)$$
$$= \cos(t) + \sin(t).$$

1

$E(X_t)$ dépend de t $\Rightarrow X_t$ n'est pas stationnaire.

---

2) $A \perp\!\!\!\perp B$, $E(A) = E(B) = 0$, $Var(A) = Var(B) = E(A^2) = E(B^2) = \sigma^2$

$$X_t = A\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) + B\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$$

$$E(X_t) = \underbrace{E(A)}_{0}\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) + \underbrace{E(B)}_{0}\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) = 0$$

donc $\boxed{E(X_t) = 0}$

$$Var(X_t) = \underbrace{E(A^2)}_{\sigma^2} \cdot \cos^2\frac{\pi}{3}t + \underbrace{E(B)^2}_{\sigma^2} \sin^2\frac{\pi}{3}t$$

3

donc $V(X_t) = \sigma^2$

$$\gamma(k) = Cov(X_t, X_{t+k}) = E(X_t, X_{t+k})$$

$$= E\left(A\cos\frac{\pi}{3}t + B\sin\frac{\pi}{3}t\right)\left(A\cos\frac{\pi}{3}(t-k) + B\sin\frac{\pi}{3}(t-k)\right)$$

$$\Rightarrow \gamma(k) = \sigma^2\left(\cos\frac{\pi}{3}t\cos\frac{\pi}{3}(t-k) + \sin\frac{\pi}{3}t\sin\frac{\pi}{3}(t-k)\right)$$

On a $\cos(a-b) = \cos a\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.

$$\Rightarrow \gamma(k) = \sigma^2\cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}(t-k)\right) = \sigma^2\cos\left(\frac{\pi}{3}k\right).$$

$E(X_t)$, $Var(X_t)$, $\gamma(k)$ ne dépend pas de t

donc X_t est stationnaire.

Solution Exercice 3 : L6

1) Quelle est le but de la décomposition d'une série tempo.

Le but de la décomposition d'une serie chronologique est de mieux comprendre, de mieux d'écrire l'évolution de la série et de prévoir son evolution.

0,75

2) Donnez la définition de l'ACF 0,25

La fonction d'autocorrélation est une mesure de la corrélation entre les observations. d'une serie chronologique séparées par k unité de temps (y_t et y_{t-k}).

3) Qu'est ce qu'on doit appliquer pour transformer une serie temporelle multiplicatif à une serie temporelle additif ?

• multiplicatif x log = additif. 0,5

4) Donnons l'intérprétation du shéma suivant

c'est quoi les pics et les lignes pointillés.

pic important au niveau du décolage 1, suivi par un motif en vague décroissant qui alterne entre corrélation positive et négative.

1

Les lignes pointillées représentent les bandes de confiance par défaut a $\boxed{95\%}$.

0,25

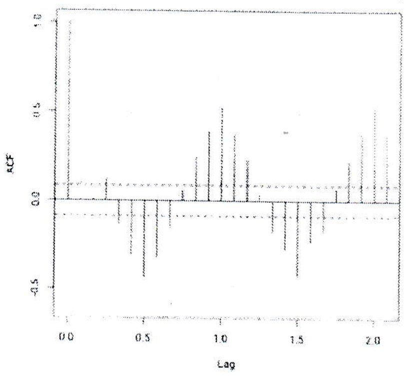
pic = ACF séparées par k unité de temps.

0,25

2- Quest ce qu'on doit appliquer pour transformer une série temporelle multiplicatif a une série temporelle additif. 0,5

3- Donnez l'interprétation du shéma suivant, c'est quoi les pics et les lignes pontillées.

1 0,25 0,25



Bon courage!

Dr W.B. Benammar