Université Blida1
Faculté des Sciences
Département de Maths

Juin 2022

Rattrapage de Statistique
(1h30)

Exercice1: (7points)
Sur un grand nombre de personnes, on a constaté que la répartition X du taux de cholestérol suit une loi normale avec les résultats suivants:
56% ont un taux inférieur à 165cg
34% ont un taux compris entre 165cg et 180 cg
10% ont un taux supérieur à 180cg
1) Trouver la moyenne m et la variance σ^2 de X

2) Quel est le nombre de personnes qu'il faut prévoir de soigner dans une population de 10000 personnes, si le taux maximum toléré sans traitement est de 182cg

Exercice2: (7 points)
1) Montrer qu'un estimateur sans biais et efficace est convergent.
2) a)Calculer la moyenne et la variance de la loi uniforme sur $[0, 2a]$ avec $a \succ 0$
b) La moyenne d'échantillon $\overline{X}$ est-elle un estimateur sans biais et convergent du paramètre a?
c) Si $X_1, X_2, ..., X_n$ est un un n-échantillonde la loi uniforme sur $[0, 2a]$ déterminer la loi de $Y = Sup X_i$
d) Calculer E(Y) et Var(Y). En déduire un nouvel estimateurconvergent et sans biais de a.Comparer ces deux estimateurs et en déduire le plus efficace.

Exercice3:(6points)
a) Soit X_1, X_2, X_3, X_4 des va indépendantes tq $X_1, X_2 \rightsquigarrow N(0, \sigma^2)$ et $X_3, X_4 \rightsquigarrow N(m, \sigma^2)$.Trouver les lois de
1) $Y = \frac{(X_1+X_2)^2+(X_3-X_4)^2}{2\sigma^2}$ 2)$Z = \frac{(X_3-X_4)^2}{X_1^2+X_2^2}$
b) Soit $T_i \rightsquigarrow N(i; 2i)$ $i = 1, 2, 3, 4$
Les T_i étant indépendantes construire une va qui suit la loi de
(1) χ_3^2 (2)t_2 (3)$F_{1,2}$

Correction Rattrapage Stat Juin 2022

Exo1 : On a $X \rightsquigarrow N(m,\sigma)$ donc $\frac{X-m}{\sigma} \rightsquigarrow N(0,1)$ (0,5)

1°/ On a $P(X<165) = 0,56$

$P\left(\frac{X-m}{\sigma} < \frac{165-m}{\sigma}\right) = 0,56$ (0,5)

$\Phi\left(\frac{165-m}{\sigma}\right) = 0,56 \rightarrow \boxed{\frac{165-m}{\sigma} = 0,15}$ (1,0) (Table) (*)

$P(165 < X < 180) = 0,34$ (0,5)

$P\left(\frac{165-m}{\sigma} < N(0,1) < \frac{180-m}{\sigma}\right) = 0,34$

$\Phi\left(\frac{180-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{165-m}{\sigma}\right) = 0,34$

donc $\Phi\left(\frac{180-m}{\sigma}\right) = 0,90$ (0,5) $\rightarrow \boxed{\frac{180-m}{\sigma} = 1,28}$ (Table) (1,0) (**)

(*) et (**) $\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} m = 163 \text{ cg} \\ \sigma = 13,3 \text{ cg} \end{array}}$ (1)

2°/ $P(X > 182) = P\left(\frac{X-m}{\sigma} > \frac{182-m}{\sigma}\right) = P\left(N(0,1) > \frac{182-163}{13,3}\right)$ (1)

$= 1 - \Phi(1,428) = 1 - 0,9236 = 0,0744$

donc le nbre de personnes à soigner est $10000 \times 0,0744 = 744$ personnes (1)

Exo2 : a) Un estimateur T est convergent vers a si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \alpha > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$

tq $\forall n > N \Rightarrow P(|T-a| > \varepsilon) < \alpha \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

b) Soit T un estimateur sans biais et efficace du paramètre a

donc $E(T) = a$ et $\operatorname{Var} T = \frac{1}{I_n(a)} = \frac{1}{n I_1(a)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc T est un

estimateur convergent de a. avec $I_1(a) = E\left[\left(\frac{\partial}{\partial a} \ln f(X_1,a)\right)^2\right]$. (1)

c) Si $X \sim \mathcal{U}_{[0,2a]}$ $\quad f_X(x) = \frac{1}{2a} \mathbb{1}_{[0,2a]}(x)$ (0,5)

$E(X) = \frac{1}{2a}\int_0^{2a} x\,dx = a$ (0,5)

$E(X^2) = \frac{1}{2a}\int_0^{2a} x^2\,dx = \frac{4a^2}{3} \Rightarrow \operatorname{Var} X = \frac{a^2}{3}$ (0,5)

Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ est un n-échantillon de la loi $\mathcal{U}_{[0,2a]}$ on a

$$E(\bar{X}) = a \quad \text{et} \quad \operatorname{Var} \bar{X} = \frac{a^2}{3n}$$ (1)

donc $\bar{X}$ est un estimateur sans biais et convergent de a. (0,5)

d) Si $T = \operatorname{Sup} X_i$

$F_T(t) = P(T < t) = P(\operatorname{Sup} X_i < t) = P(X_i < t, \forall i) = (F_X(t))^n$

Calculons $F_X(t) = \int_0^t f_X(y)\,dy = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{t}{2a} & \text{si } 0 \le t \le 2a \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

donc $F_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ (y/2a)^n & \text{si } 0 \le y \le 2a \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ (1)

et $f_T(t) = n(F_X(t))^{n-1} f_X(t)$

$= \begin{cases} \frac{nt^{n-1}}{(2a)^n} & \text{si } 0 \le t \le 2a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ (1)

e) $E(T) = \int_0^{2a} t f_T(t)\,dt = \int_0^{2a} \frac{nt^n}{(2a)^n}\,dt = \frac{2an}{n+1}$ (0,5)

$E(T^2) = \int_0^{2a} \frac{nt^{n+1}}{(2a)^n}\,dt = \frac{4a^2 n}{n+2} \Rightarrow \operatorname{Var} T = \frac{4a^2 n}{n+2} - \frac{4a^2 n^{\cancel{2}}}{(n+1)^2} = \frac{4a^2 n}{(n+2)(n+1)^2}$ (0,5)

(1)

(0,50)

(1)

(1) en posant $Y = \frac{n+1}{2n} T$ on a $E(Y) = a$ Y est donc un estimateur SB de a (0,5)

et $\text{Var}\, Y = \left(\frac{n+1}{2n}\right)^2 \text{Var}\, T = \frac{a^2}{n(n+2)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (0,5)

Y est un estimateur sans biais et convergent de a (1)

On a $\text{Var}\, Y \leq \text{Var}\, Z \Rightarrow Y$ est plus efficace que $\overline{Z}$

Exo3

1) (1) $\frac{X_1+X_2}{\sigma\sqrt{2}} \sim N(0,1) \Rightarrow \frac{(X_1+X_2)^2}{2\sigma^2} \sim \chi^2_1$

$\frac{X_3-X_4}{\sigma\sqrt{2}} \sim N(0,1) \Rightarrow \frac{(X_3-X_4)^2}{2\sigma^2} \sim \chi^2_1$ (1,0)

donc $\frac{(X_1+X_2)^2+(X_3-X_4)^2}{2\sigma^2} \sim \chi^2_2$

(2) $\frac{(X_3-X_4)^2}{2\sigma^2} \sim \chi^2_1$ donc $Z = \dfrac{\frac{(X_3-X_4)^2}{2\sigma^2}}{\left(\frac{X_1^2+X_2^2}{\sigma^2}\right)/2} \sim F_{1,2}$ (1.0)

$\frac{X_1^2}{\sigma^2} + \frac{X_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_2$

b) $Y_i \sim N(i, 2i) \Rightarrow \frac{Y_i - i}{\sqrt{2i}} \sim N(0,1)$

$\Rightarrow \left(\frac{Y_i - i}{\sqrt{2i}}\right)^2 \sim \chi^2_1$ (1.0)

donc (1) $\left(\frac{Y_1-1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{Y_2-2}{\sqrt{4}}\right)^2 + \left(\frac{Y_3-3}{\sqrt{6}}\right)^2 \sim \chi^2_3$ (1,0)

(10)

donc $\dfrac{(X_1+X_2)^2+(X_3-X_4)^2}{2\sigma^2} \leadsto \chi^2_2$ (1.5)

(2) $\dfrac{(X_3-X_4)^2}{2\sigma^2} \leadsto \chi^2_1$

$\dfrac{X_1^2}{\sigma^2}+\dfrac{X_2^2}{\sigma^2} \leadsto \chi^2_2$

donc $Z = \dfrac{\dfrac{(X_3-X_4)^2}{2\sigma^2}}{\left(\dfrac{X_1^2+X_2^2}{\sigma^2}\right)/2} \leadsto F_{1,2}$ (1.5)

b) $Y_i \leadsto N(i, 2i) \Rightarrow \dfrac{Y_i-i}{\sqrt{2i}} \leadsto N(0,1)$

$\Rightarrow \left(\dfrac{Y_i-i}{\sqrt{2i}}\right)^2 \leadsto \chi^2_1$ (1.5)

donc (1) $\left(\dfrac{Y_1-1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{Y_2-2}{\sqrt{4}}\right)^2+\left(\dfrac{Y_3-3}{\sqrt{6}}\right)^2 \leadsto \chi^2_3$ (1.5)

(1)

(2) Si $X = \dfrac{Y_1-1}{\sqrt{2}} \leadsto N(0,1)$

et $Z = \sum_{i=1}^{3}\left(\dfrac{Y_i-i}{\sqrt{2i}}\right)^2 \leadsto \chi^2_3$

donc $\dfrac{X}{\sqrt{Z/3}} \leadsto t_3$ Student à 3 ddl (1)

(3) Si $X = \left(\dfrac{Y_1-1}{\sqrt{2}}\right)^2 \leadsto \chi^2_1$

et $Z = \left(\dfrac{Y_2-2}{\sqrt{4}}\right)^2+\left(\dfrac{Y_3-3}{\sqrt{6}}\right)^2 \leadsto \chi^2_2$

donc $F = \dfrac{X/1}{Z/2} = \dfrac{2X}{Z} \leadsto F_{1,2}$ (1)