Université Badji Mokhtar
Département de Mathématiques

Annaba le 26/10/2019

Concours d'entrée en formation doctorale
Epreuve 1

Exercice1 (6 pts)

Soient (X, Y) deux variables aléatoires de densité de probabilités conjointe $f(x, y)$ définie par:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} kx^2y & \text{si } (x, y) \in D \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

D étant l'intérieur du triangle de sommets $(0,0), (1,0), (0,1)$.

1-a) Déterminer k ainsi que les densités marginales f_X et f_Y.

b) Calculer $E(X^n)$ et $E(Y^n)$.

2- a) Déterminer la densité de $X \mid Y = y$. Que peut on conclure?.

b) Calculer $E(X \mid Y = y)$.

c) En déduire $Cov(X, Y)$.Que peut on conclure?

d) Déterminer la densité de $U = E\left(\frac{5}{3}X^2 \mid Y\right)$.

Exercice2 (7 pts)

Soit $\lambda > 0$. Pour tout entier $n \geq \lambda$, on fixe $(X_i^n)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de paramètre $p_n = \frac{\lambda}{n}$. On considère alors la variable aléatoire

$$N_n = \frac{1}{n} inf\{i \geq 1; X_i^n = 1\}.$$

1.Donner la loi de la variable aléatoire N_n.

2.Donner la fonction caractéristique φ_n de N_n.

3.Démontrer que la suite (N_n) converge en loi vers une variable aléatoire réelle de loi exponentielle de paramètre λ.

Exercice3 (7 pts)

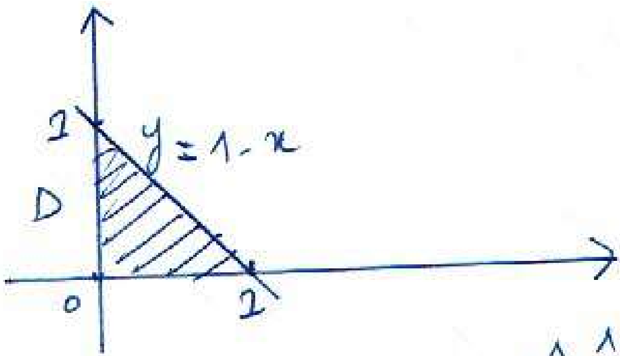
Soit le couple gaussien (X, Y) centré et de matrice des covariances la matrice identité. Soit (Z, T) le vecteur aléatoire défini par $Z = \frac{(X+Y)}{2}$, $T = \frac{(X-Y)}{2}$.On pose $U = \frac{(X-Z)^2}{2} + \frac{(Y-Z)^2}{2}$.

1. Quelle est la nature du vecteur (Z, T)? Calculer la matrice des covariances du vecteur (Z, T).
2. Les variables aléatoires Z et T sont elles indépendantes?
3. Calculer $\mathbb{E}(U)$ et $Var(U)$.
4. Montrer que Z et U sont indépendantes.
5. Déterminer la loi de U.

Solution Concours Doctorat - Annaba 2019 - Epreuve 1

Exercice 1:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} k x^2 y & , (x,y) \in D \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



1) a) $\iint_D f_{(X,Y)}(x,y)\, dx\, dy = k \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 y \, dy\, dx$

$$= k \int_0^1 x^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx$$

$$= \frac{k}{2} \int_0^1 x^2 (1-x)^2 \, dx$$

$$= \frac{k}{2} \int_0^1 x^2 (x^2 - 2x + 1)\, dx$$

$$= \frac{k}{2} \int_0^1 (x^4 - 2x^3 + x^2)\, dx$$

$$= \frac{k}{2} \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1$$

$$= \frac{k}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right)$$

$$= \frac{k}{60} = 1 \Rightarrow \boxed{k = 60}$$

(1) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\, dy$

$$= 60 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 y \, \mathbb{1}_{]0,1[}(x) \, \mathbb{1}_{\{0<y<1-x\}} \, dy$$

$$= 60x^2 \int_0^{1-x} y \, dy \, . \, \mathbb{1}_{]0,1[}(x)$$

$$= 60x^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} \mathbb{1}_{]0,1[}(x)$$

$$= 30 x^2 (1-x)^2 \mathbb{1}_{]0,1[}(x)$$

$$f_X(x) = 30 (x^4 - 2x^3 + x^2) \mathbb{1}_{]0,1[}(x)$$

$y = 1-x \Leftrightarrow x = 1-y$

$$\cdot f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y) \, dx$$

$$= 60 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 y \, \mathbb{1}_{]0,1[}(y) \, \mathbb{1}_{\{0 < x < 1-y\}} \, dx$$

$$= 60 y \int_0^{1-y} x^2 \, dx \, \mathbb{1}_{]0,1[}(y)$$

$$= 60 y \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{1-y} \mathbb{1}_{]0,1[}(y)$$

$$= 20 \, y \, (1-y)^3 \, \mathbb{1}_{]0,1[}(y).$$

b) $$E(X^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_X(x) \, dx$$

$$= 30 \int_0^1 x^{n+2} (1-x)^2 \, dx$$

$$= 30 \, B(n+3, 3)$$

$$= 30 \times \frac{\Gamma(n+3) \, \Gamma(3)}{\Gamma(n+6)}$$

$$= 30 \times \frac{(n+2)! \times 2!}{(n+5)!}$$

2 $$= \frac{60}{(n+5)(n+4)(n+3)}$$

$$\bullet\ E(Y^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^n f_Y(y)\, dy$$

$$= 20 \int_0^1 y^{n+1} (1-y)^3\, dy$$

$$= 20\ B(n+2, 4)$$

$$= 20 \times \frac{\Gamma(n+2)\Gamma(4)}{\Gamma(n+6)}$$

$$= 20 \times \frac{(n+1)! \times 3!}{(n+5)!}$$

$$= \frac{120}{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)}$$

2) a) $$f_X^{Y=y}(x) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{60x^2 \cancel{y}\, 1_{]0,1[}(y)\, 1_{]0,1-y[}(x)}{20 \cancel{y} (1-y)^3\, 1_{]0,1[}(y)}$$

$$= \frac{3x^2}{(1-y)^3} 1_{]0,1[}(y)\, 1_{]0,1-y[}(x)$$

On conclut que X et Y ne sont pas indépendantes

car $f_X^{Y=y}(x) \neq f_X(x)$.

b) $$E(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X^{Y=y}(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3x^3}{(1-y)^3} 1_{]0,1[}(y)\, 1_{]0,1-y[}(x)\, dx$$

$$= \int_0^{1-y} \frac{3x^3}{(1-y)^3}\, dx\ 1_{]0,1[}(y)$$

$$= \frac{3}{(1-y)^3} 1_{]0,1[}(y) \times \left[\int_0^{1-y} x^3 \, dx \right]$$

$$= \frac{3}{(1-y)^3} 1_{]0,1[}(y) \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^{1-y}$$

$$= \frac{3}{4(1-y)^3} \times (1-y)^4 \, 1_{]0,1[}(y)$$

$$= \frac{3}{4}(1-y) \, 1_{]0,1[}(y)$$

c) $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$$E(XY) = E(E(XY|Y))$$

$$= E(Y \, E(X|Y))$$

$$= E\Big(Y \Big(\frac{3}{4}(1-Y) \underbrace{1_{]0,1[}(Y)}_{1 \text{ p.s.}}\Big)\Big)$$

$$= \frac{3}{4} E(Y(1-Y))$$

et $E(X) = E(E(X|Y)) = E\left(\frac{3}{4}(1-Y)\right)$

$$\Rightarrow \mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{3}{4} E(Y(1-Y)) - \frac{3}{4} E(1-Y) E(Y)$$

$$= \frac{3}{4} \mathrm{Cov}(Y, 1-Y)$$

$$= \frac{3}{4} [\underbrace{\mathrm{Cov}(Y,1)}_{0} - \mathrm{Cov}(Y,Y)]$$

$$= -\frac{3}{4} \mathrm{Var}(Y)$$

$$= -\frac{3}{4} \left(E(Y^2) - (E(Y))^2 \right)$$

4

$$= -\frac{3}{4} \left(120 \times \frac{3!}{7!} - \left(120 \times \frac{2!}{6!}\right)^2 \right)$$

$$= -\frac{3}{4}\left(\frac{\cancel{120}}{7\times\cancel{6}\times5\times4} - \left(\frac{\cancel{120}}{\cancel{6}\times5\times4\times3}\right)^2\right)$$

$$= -\frac{3}{4}\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right)$$

$$= -\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{63}}$$

$$= -\frac{1}{42}$$

on conclut que X et Y sont négativement corrélées.

d) on a:

$$E\left(\frac{5}{3}X^2 \mid Y=y\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{5}{3}x^2 f_X^{Y=y}(x)\,dx$$

$$= \frac{5}{(1-y)^3}\, 1_{]0,1[}(y) \int_0^{1-y} x^4\,dx$$

$$= \frac{5}{(1-y)^3}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^{1-y} 1_{]0,1[}(y)$$

$$= \frac{(1-y)^5}{(1-y)^3}\, 1_{]0,1[}(y) = (1-y)^2\, 1_{]0,1[}(y)$$

$$\Rightarrow U = E\left(\frac{5}{3}X^2 \mid Y\right) = (1-Y)^2 \text{ p.s.}$$

Donc la f.r. de U est:

$$F_U(t) = P(U \leq t) = P((1-Y)^2 \leq t) = 0 \text{ si } t \leq 0.$$

si $t > 0$: $F_U(t) = P(1-Y \leq \sqrt{t})$

$$= P(Y \geq 1-\sqrt{t})$$

$$= 1 - F_Y(1-\sqrt{t}) \quad (F_Y : \text{f.r. de } Y)$$

Donc la densité de U est :

$$f_U(t) = F'_U(t)$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{t}} f_Y(1-\sqrt{t})$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{t}} \times 20(1-\sqrt{t}) \times (\sqrt{t})^3 \, 1_{]0,1[}(1-\sqrt{t})$$

or $0 < 1-\sqrt{t} < 1 \iff -1 < -\sqrt{t} < 0$
$\iff 0 < \sqrt{t} < 1$
car $t>0$ $\iff 0 < t < 1.$

Donc $1_{]0,1[}(1-\sqrt{t}) = 1_{]0,1[}(t)$

$$\Rightarrow f_U(t) = 10(1-\sqrt{t})(\sqrt{t})^2 \, 1_{]0,1[}(t)$$
$$f_U(t) = 10\,t(1-\sqrt{t}) \, 1_{]0,1[}(t).$$

Exercice 2:

1) Le support de la loi de N_n est

$$S = \left\{ \frac{k}{n},\ k \geq 1 \right\}.$$

et pour $k \geq 1$ on a:

$$P\left(N_n = \frac{k}{n}\right) = P\left(X_1^n = 0,\ X_2^n = 0,\ \dots,\ X_{k-1}^n = 0,\ X_k^n = 1\right)$$

$$= P(X_1^n = 0)\,P(X_2^n = 0)\cdots P(X_{k-1}^n = 0)\,P(X_k^n = 1)$$

$$= (1-p_n)^{k-1} \times p_n$$

$$= p_n (1-p_n)^{k-1}.$$

2) $$\varphi_n(t) = E\left(e^{itN_n}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} e^{it\frac{k}{n}} P\left(N_n = \frac{k}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} e^{it\frac{k}{n}} \times p_n (1-p_n)^{k-1}$$

$$= p_n e^{\frac{it}{n}} \sum_{k=1}^{+\infty} e^{\frac{it(k-1)}{n}} (1-p_n)^{k-1}$$

$$= p_n e^{\frac{it}{n}} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(e^{\frac{it}{n}} (1-p_n)\right)^j, \quad j = k-1$$

$$= \frac{p_n e^{\frac{it}{n}}}{1-(1-p_n)e^{\frac{it}{n}}}$$

(la série converge car $\left|e^{\frac{it}{n}}(1-p_n)\right| = 1-p_n \in [0,1[$.)

<u>Remarque</u>: Si $n = d$ alors $p_n = 1$ et dans ce cas $N_n = \frac{1}{n}$ p.s. donc la loi de N_n est Dirac au point $\frac{1}{n}$ et $\varphi_n(t) = e^{\frac{it}{n}}$.

3) Soit $t \in \mathbb{R}$ on va calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \varphi_n(t)$

On a :

$$\varphi_n(t) = \frac{\lambda e^{\frac{it}{n}}}{n\left(1-\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)e^{\frac{it}{n}}\right)} \quad (F.I.\ \infty \times 0)$$

$$= \frac{\lambda e^{\frac{it}{n}}}{n\left(1-\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\left(1+\frac{it}{n}-\frac{t^2}{2n^2}+o\left(\frac{t^2}{n^2}\right)\right)\right)} \quad \text{(Développement limité)}$$

$$= \frac{\lambda e^{\frac{it}{n}}}{n-\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\left(n+it-\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)}$$

$$= \frac{\lambda e^{\frac{it}{n}}}{\cancel{n}-\cancel{n}-it+\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{t^2}{n}\right)+\lambda+\frac{\lambda it}{n}-\frac{\lambda t^2}{2n^3}+o\left(\frac{t^2}{n^2}\right)}$$

Donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \varphi_n(t) = \frac{\lambda}{-it+\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

qui est la f. c. de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$

Donc d'après le théorème de Lévy, la suite (N_n) converge en loi vers une v. a. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

Exercice 3 :

1) on a : $(Z,T)^t = A(X,Y)^t$

avec $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

Puisque $(Z,T)^t$ est une transformation linéaire du vecteur gaussien $(X,Y)^t$ alors $(Z,T)^t$ est aussi un vecteur gaussien.

on note $\Lambda_{(Z,T)}$ la matrice des covariances de (Z,T)

et $\Lambda_{(X,Y)}$ " " (X,Y) $(\Lambda_{(X,Y)} = I_2)$

on a :

$$\Lambda_{(Z,T)} = A\,\Lambda_{(X,Y)}\,A^t$$
$$= A\,I_2\,A^t$$
$$= A\,A^t = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

2) Puisque $(Z,T)^t$ est un vecteur gaussien et Z et T sont non corrélés (car $\Lambda_{(Z,T)}$ est diagonale) alors Z et T sont indépendantes.

3) on a : $X - Z = X - \frac{X}{2} - \frac{Y}{2} = \frac{X}{2} - \frac{Y}{2} = T$

et $Y - Z = Y - \frac{X}{2} - \frac{Y}{2} = \frac{Y}{2} - \frac{X}{2} = -T$

Donc : $U = \frac{T^2}{2} + \frac{T^2}{2} = T^2$

$E(U) = E(T^2) = Var(T)$ (car $T = \frac{X-Y}{2}$ est centré)

$\Rightarrow E(U) = \frac{1}{2}$

$Var(U) = E(U^2) - (E(U))^2$

$E(U^2) = E(T^4)$

$= \sigma^4 E\left(\frac{T^4}{\sigma^4}\right)$ (σ : l'écart-type de T)

or $E\left(\frac{T^4}{\sigma^4}\right) = 3$ (kurtosis de T)

$\Rightarrow E(U^2) = 3\sigma^4 = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$.

$\Rightarrow Var(U) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

4) Puisque Z et T sont indépendantes et $U = T^2$ est une fct mesurable de T $\Rightarrow$ Z et U sont indépendantes.

5) on a: $T \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$

$\Rightarrow \sqrt{2}\, T \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$\Rightarrow 2T^2 \sim \chi^2_1$.

$\Rightarrow 2U \sim \chi^2_1$

Donc la f.r. de U est donnée par :

$F_U(t) = P(U \leq t) = P(2U \leq 2t) = F_{\chi^2_1}(2t)$ $F_{\chi^2_1}$: f.r. de la loi χ^2_1.

$\Rightarrow$ la densité de U est:

$f_U(t) = 2 f_{\chi^2_1}(2t)$ ($f_{\chi^2_1}$: densité de la loi χ^2_1)

$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-\frac{2t}{2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^*_+}(t)$

$f_U(t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^*_+}(t)$

10