1

Université de Sidi Bel Abbès
Faculté des Sciences Exactes
Département de Probabilités et Statistiques

3ème année Mathématiques Appliquées
Module : Probabiltés avancées
2023-2024.

Corrigé type : examen de remplacement Probabiltés avancées

Question de cour(((3 points)))
En utilisant le Théorème de transformée de Fourier, montrer que $\phi_x(t) = e^{-|y|}$ est la fonction caratéristique associée à la loi de Cauchy.

Solution
Voir le cour

Exercice 1 (((5 points)))
En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que pour tout $x > 0$,

$$\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt \geqslant \sqrt{2\pi}\left(1 - \frac{1}{2x^2}\right).$$

Solution
Autrement dit, il nous faut montrer que pour tout $x > 0$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \geqslant 1 - \frac{1}{2x^2}$$ 0,5

On reconnaît dans le terme de gauche $\Phi(x)$, où Φ désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Prenons X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0, 1)$. X admet bien une espérance (qui est nulle) et une variance (égale à 1), donc l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous donne que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{V}[X]}{\varepsilon^2}$$ 0,5

Fixons-nous un $x > 0$. Alors, en appliquant l'inégalité précédente, pour $\varepsilon = x$, sachant que $\mathbb{E}[X] = 0$ et $\mathbb{V}[X] = 1$:
0,25 0,25

$$\mathbb{P}(|X| \geqslant x) \leqslant \frac{1}{x^2}$$ 0,5

2

Or,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X| \geqslant x) &= \mathbb{P}([X \leqslant -x] \cup [X \geqslant x]) \\ &= 1 - \mathbb{P}(-x < X < x) \\ &= 1 - (\Phi(x) - \Phi(-x)) \\ &= 1 - (2\Phi(x) - 1) = 2 - 2\Phi(x)\end{aligned}$$

1,5

On a donc $2(1 - \Phi(x)) \leqslant \frac{1}{x^2}$, d'où 1

$$\Phi(x) \geqslant 1 - \frac{1}{2x^2}$$ 0,5

ce qui est bien l'inégalité voulue.

Exercice 2 (((5 points)))

Utiliser le théorème limite central pour montrer que $F_n(n) = e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$ tend vers une limite que l'on pérsisera quand $n \to \infty$.

Indice :

— Une variable aléatoire de Poisson $P(n)$ a la même loi que (la somme de n variables aléatoires de Poisson indépendantes de paramètre 1 que l'on notera S_n).

— F_n la fonction de répartition de la variable aléatoire S_n.

Solution

Voir la solution de Exercice4 fiche TD4.

Exercice 3 (((7 points)))

Soit (X_n) une suite de v.a. indépendantes et de même loi, de densité f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & \text{si } x > \theta \\ 0 & \text{si } x \leqslant \theta \end{cases}$$

où θ est un nombre positif fixé. Montrer que $m_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ converge en moyenne quadratique vers θ.

Solution

Il faut d'abord déterminer la loi de probabilité de m_n : ((1 point))

3

$$P(m_n > x) = P\left\{\bigcap_{i=1}^{n}(X_i > x)\right\} = \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x) = [1 - F(x)]^n$$ 1

où F est la f.r. commune des variables X_i ; ainsi, m_n admet pour f.r. :

$$G_n(x) = 1 - [1 - F(x)]^n ((1 point))$$

et pour densité :

$$g_n(x) = n[1 - F(x)]^{n-1} f(x) = ne^{-n(x-\theta)} ((2 point))$$

pour $x > \theta$. On calcule alors : ((3 point)) 1

$$E(m_n - \theta)^2 = \int_\theta^{+\infty} (x-\theta)^2 ne^{-n(x-\theta)}dx = \frac{1}{n^2}\int_0^{+\infty} y^2 e^{-y} dy$$

0,25 0,5

$$= \frac{\Gamma(3)}{n^2} = \frac{2}{n^2} \to 0$$

1 0,25

et par conséquent on en conclut que pour $n \to \infty$:

$$m_n \underset{m.q.}{\to} \theta$$