1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'introduire les notions de base de la théorie des probabilités, et surtout de permettre d'acquérir le raisonnement probabiliste. le Calcul des Probabilités ne fait appel, dans ses commencements, qu'à des notions assez simples de théorie des ensembles et de dénombrement.
Le Calcul des Probabilités vise à évaluer a priori, les chances dans une expérience réalisée dans des conditions déterminées mais dont l'issue comporte un élément d'incertitude ou de hasard.
La probabilité est une notion dont la présentation est délicate, historiquement la notion de probabilité a été d'abord introduite dans le cas où on pouvait définir un système d'événements équiprobables, mais progressivement il a fallu l'étendre pour pouvoir décrire des épreuves plus complexes.
Nous allons présenter un peu de terminologie et quelques concepts probabilistes nécessaires à la modélisation d'un phénomène aléatoire.

2 Expériences aléatoires et événements

2.1 Expériences aléatoires

On appelle expérience aléatoire ou épreuve, toute expérience dont le résultat est régi par le hasard, lorsqu'on répète l'expérience dans les même conditions.
Quelques exemples des expériences aléatoires :

. Si l'expérience consiste à jeter un dé équilibré à 6 faces, alors l'ensemble fondamental est constitué de 6 éléments : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
. Lorsqu'on lance deux pièces de monnaie, l'ensemble fondamental est constitué de quatre éléments : $\Omega = \{(P, P),\ (P, F),\ (F, P),\ (F, F)\}$.

2.2 Espace des événements

L'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire est représenté par un ensemble noté Ω, appelé espace des événements ou ensemble fondamental.
Les sous-ensembles de Ω contenant un seul élément sont appelés les évènements élémentaires.

L'ensemble de tous les sous-ensembles possibles de Ω est appelé l'ensemble des parties de Ω et est noté $\mathcal{P}(\Omega)$.

2.2.1 Tribu

Lorsque Ω n'est ni fini, ni dénombrable, par exemple $\Omega = [0; 1]$ ou $\Omega = R$, certains sous-ensembles de Ω seront trop complexes pour qu'on puisse en définir ou calculer une probabilité. On se restreindra donc à une famille $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ contenant les sous-ensembles dont on pourra définir ou calculer une probabilité, appelés évènements.
Par souci de cohérence, cette famille devra vérifier certaines contraintes de stabilité : elle devra être ce que l'on appelle une tribu.

Définition 1. Une famille $\mathcal{F}$ de sous-ensembles de Ω, i.e. $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, est une tribu sur Ω si elle :
- . contient l'ensemble vide ~~ou~~ et Ω : $\emptyset \in \mathcal{F}$ ~~ou~~ et $\Omega \in \mathcal{F}$,
- . est stable par passage au complémentaire : $\forall A \in \mathcal{F},\ \bar{A} \in \mathcal{F}$,
- . est stable par union dénombrable : pour toute suite $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{F}$, $\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$.

On peut remarquer qu'une tribu est par définition stable par unions finies, intersections finies ou dénombrables.

Exemple 1. *1. Tribu triviale* : $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$;

2. Tribu pleine : $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$;

3. Tribu engendrée par un sous-ensemble A de Ω : $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, A, \bar{A}\}$.

Remarque Les évènements élémentaires contiennent en général l'information maximale dont on dispose sur une expérience aléatoire.

2.3 Réalisation d'un événement

Soit A un événement quelconque lié à une expérience aléatoire. On dit que l'événement A s'est réalisé, lorsque l'issue, notée ω, de cette expérience appartient à A ($\omega \in A$). Dans le cas contraire ($\omega \notin A$) on dira que l'événement A ne s'est pas réalisé. Ainsi on a :
A réalisé $\Longleftrightarrow$ $\bar{A}$ non réalisé.

2.4 Opération sur les événements

Définition 2. A et B étant 2 événements, on désigne par :

. $A \cup B$ l'événement qui est réalisé si l'un au moins des événements est réalisé.

$$\omega \in A \cup B \Longleftrightarrow \omega \in A \text{ ou } \omega \in B \text{ ("ou" non exclusif).}$$

. $A \cap B$ l'événement qui est réalisé si les deux événements A et B sont à la fois réalisés.

$$\omega \in A \cap B \Longleftrightarrow \omega \in A \text{ et } \omega \in B.$$

. $\bar{A}$ l'événement contraire de A, qui est réalisé si et seulement si A n'est pas réalisé.

$$\omega \in \bar{A} \Longleftrightarrow \omega \notin A.$$

. On écrit $A \subset B$ si B est réalisé chaque fois que A est réalisé c.à.d la réalisation de A entraine nécessairement celle de B.

$$A \subset B \Longleftrightarrow \omega \in A \Longrightarrow \omega \notin B.$$

. On appelle différence de deux événements A, B l'événement noté $A-B$, réalisé lorsque A est réalisé sans B.

$$\omega \in A - B \Longleftrightarrow \omega \in A \text{ et } \omega \notin B.$$

. Deux événements A et B sont dits incompatibles ou disjoints s'ils ne peuvent se réaliser simultanément, ou, autrement dit, si aucune éventualité élémentaire ne peut réaliser à la fois A et B, ou encore, si $A \cap B = \emptyset$.

Définition 3. *Système complet.*
Soit Ω l'espace des événement associé à une expérience aléatoire. Les événements A_1, $A_2, \ldots$, A_n, liés à cette expérience, forment un système complet de Ω si les conditions suivantes sont satisfaites :
1) $A_i \neq \emptyset \ \forall i = 1, 2, ..., n$;
2) $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j;\ i, j = 1, 2, ..., n$ 2 à 2 disjoints ;
3) $\cup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

On peut établir les correspondances suivantes entre le vocabulaire ensembliste et le vocabulaire probabiliste

notation	vocabulaire ensembliste	vocabulaire probabiliste
$\emptyset$	ensemble vide	événement impossible
Ω	ensemble plein	événement certain
$\omega \in \Omega$	élément de Ω	confondu avec $\{\omega\}$: événement élémentaire
$A \in \mathcal{A}$	sous ensemble de Ω	événement
$\omega \in A$	ω est dans la partie A	l'événement A est réalisé par ω
$A \subseteq B$	A est contenu dans B	A implique B
$A \cup B$	réunion de A et B	A ou B
$A \cap B$	intersection de A et B	A et B
$A \backslash B$	A privé de B	A et non B
$\bar{A} = C_A\Omega$	complémentaire de A dans Ω	événement contraire de A

2.5 Espace de probabilité

Soit Ω un ensemble fondamental qu'on munit d'une tribu. On obtient ce qu'on appelle un espace probabilisable $(\Omega,\ \mathcal{F})$.

Définition 4. On appelle probabilité sur $(\Omega,\ \mathcal{F})$, toute application notée P de $(\Omega,\ \mathcal{F})$ dans l'intervalle $[0, 1]$ telle que :
1. $P(\Omega) = 1$;
2. $0 \leq P(A) \leq 1$,
3. Si $A_1,\ A_2, ..., A_n$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles, alors

$$P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

En définissant une probabilité P sur un espace probabilisable $(\Omega,\ \mathcal{F})$, on obtient un espace dit probabilisé $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ ou espace de probabilité.

2.6 Conséquences de la définition

2.6.1 Probabilité de l'événement contraire

Soit A un événement quelconque de $\mathcal{F}$
$P(\Omega) = 1 = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$
$\Rightarrow\ P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
En particulier $P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 0$.

2.6.2 Probabilité de deux événements liés par l'inclusion

soient deux événements quelconques Aet B, tels que
$A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$.

En effet l'événement B peut se décomposer sous forme d'une somme de deux événements incompatibles :
$B = A \cup (B - A)$,
d'après l'axiome 3 de la probabilité : $P(B) = P(A) + P(B - A)$
comme $P(B - A) \geq 0$ alors $P(A) \leq P(B)$

2.6.3 Probabilité de la différence de deux événements

Soient Aet B deux événements quelconques.
Nous avons $A = (A - B) \cup (A \cap B)$,
alors $P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$,
d'où $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$,
ou encore : $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$.

2.6.4 Probabilité de l'union de deux événements

Soient A et B deux événements quelconques, alors :
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
l'événement $A \cup B$ peut s'écrire sous la forme suivante : $A \cup B = B + (A - B)$
d'après l'axiome 3 de la probabilité :
$P(A \cup B) = P(B) + P(A - B)$;
comme : $P(A - B) = P(A) + P(A \cap B)$;
on obtient $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Généralisation à n événements Dans le cas de n événements $A_1, A_2, ...A_n$, on a la formule générale suivante dite de Poincarré :

$$P(\cup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} S_k. \qquad (1)$$

où S_k représente la somme des probabilités de toutes les intersections possibles des n événement pris k à k.

Remarque 1. *La formule de Poincarré permet de calculer la probabilité qu'au moins un des événements parmi n, se réalise.*

Exemple 2. *Soient A_1, A_2, A_3, trois événements quelconques liés à une expérience aléatoire, on a :*
$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \sum_{k=1}^{3} (-1)^{k-1} S_k = S_1 - S_2 + S_3$.
$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - [P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3)] + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$,

d'où
$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

3 Caractérisation des probabilités dans le cas d'événements équiprobables

Soit $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ un espace de probabilité avec $\Omega = \{\omega_1,\ \omega_2,\ ...,\ \omega_n\}$ fini et $p_1 = P(\omega_1),\ p_2 = P(\omega_2), ...,\ p_n = P(\omega_n)$ la distribution de probabilité correspondante sur Ω.
Considérons le cas particulier où tous les résultats possibles ont la même probabilité de se réaliser(on dit qu'ils sont équiprobables), c'est-à-dire :
$p_1 = p_2 = ... = p_n$
Alors, comme$\Omega = \cup_{i=1}^{n}\{\omega_i\}$, $P(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} P(\{\omega_i\} = 1$,
d'où, d'après l'hypothèse d'équiprobabilité, pour tout $\omega_i \in \Omega$, $nP\{\omega_i\} = 1$,
c'est-à-dire : $P\{\omega_i\} = \frac{1}{n}$.
Si A est un événement quelconque de la tribu $\mathcal{F}$, composé de k événements élémentaires :
$A = \cup_{i=1}^{n}\{\omega_i\}$,
$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(\{\omega_i\} = \frac{1}{n}$.

Proposition 1. *Soit $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ un espace de probabilité fini de taille n, dont les événements élémentaires sont équiprobables, Pour tout événement A de $\mathcal{F}$, on a :*

$$P(A) = \frac{CardA}{Card\Omega} = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables\ \ A}{nombre\ total\ de\ cas\ possibles}. \qquad (2)$$

Attention ! Cette formule n'est valable que lorsque les événements élémentaires sont bien équiprobables. Dans ce cas, il suffit de savoir calculer le cardinal des ensembles considérés pour calculer les probabilités.

Exemple 3. *Une boite renferme 8 boules rouges, 3 boules blanches et 9 boules bleues. Si l'on extrait 3 boules au hasard, déterminer la probabilité pour que :*
a. Les trois boules soit rouges ;
b. 2 boules soient rouges et la 3^{eme} soit blanche ;
c. au moins l'une des boules soit blanche ;
d. chaque couleur soit représentée dans l'échantillon des trois boules extraites.

4 Probabilité conditionnelle, indépendance

La notion de probabilité conditionnelle est une notion fondamentale. En effet, on a souvent accès à la probabilité qu'un certain événement A soit réalisé, sous la condition qu'un événement B ait eu lieu, ce qui revient à restreindre l'univers Ω à B.

4.1 Exemple introductif

Une urne contient 5 boules dont 3 sont rouges et 2 sont blanches. On tire successivement et sans remise 2 boules sans avoir regardé la $1^{ère}$ boule tirée. Quelle est la probabilité que la $2^{ème}$ boule tirée soit rouge ?
On se place dans le modèle équiprobable. Soit R l'événement :
R :"la $2^{ème}$ boule tirée est rouge".
La probabilité de R dépend du résultat 1^{er} du tirage.
. Si la $1^{ère}$ boule tirée est rouge :$P(R) = \frac{|R|}{|\Omega|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
. Si la $1^{ère}$ boule tirée est blanche :$P(R) = \frac{|R|}{|\Omega|} = \frac{3}{4}$.
En raisonnant de cette manière, on n'a pas évalué la probabilité de l'événement R mais plutôt la probabilité de R sachant qu'un autre événement s'est produit.

Définition 5. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité et A et B deux événements quelconques de $\mathcal{F}$ avec $P(B) > 0$. on appelle probabilité de A conditionnellement à B, ou sachant B, la probabilité notée $P(A\backslash B)$ définie par :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{B} \qquad (3)$$

On peut écrire aussi :$P(A \cap B) = P(A\backslash B)P(B)$.

D'une manière analogue :

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{A} \qquad (4)$$

Soit :$P(A \cap B) = P(B/A)P(A)$.

Remarque 2. *la probabilité conditionnelle sachant B, $P(./B)$, est une nouvelle probabilité et possède donc toutes les propriétés d'une probabilité.*

Exemple 4. *On lance deux dés équilibrés. Quelle est la probabilité d'obtenir une somme supérieure à 6, sachant que l'un des deux dés indique un 2 ?*

Proposition 2. *formule des probabilités composées.*
Soient $A_1, A_2, ...A_n$ n événements quelconques, alors

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_n \cap ... \cap A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2)...P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}). \quad (5)$$

Exemple 5. *Dans une urne on met 7 boules rouges et 3 boules blanches. On tire au hasard 3 boules de l'urne l'une après l'autre sans remettre la boule tirée. Déterminer la probabilité d'avoir : une rouge d'abord, une rouge au deuxième tirage et une blanche au troisième.*

Proposition 3. *Pour tout A et B dans $\mathcal{F}$ avec $P(B) > 0$,*

1. $P(A/B) = P(A \cap B/B)$.
2. *Si* $B \subset A$ *alors* $P(A/B) = 1$.
3. *Si* $A \cap B = \emptyset$ *alors* $P(A/B) = 0$.
4. *On a* $P(\bar{A}/B) = 1 - P(A/B)$.
5. *Si* $(A_i)_{i_in\mathbb{N}}$ *est une famille d'événements deux à deux incompatibles, alors* $P(\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i/B) = \sum_{i\in\mathbb{N}} P(A_i/B)$.

4.2 Formule des probabilités totales

Théorème 6. *Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet de Ω tel que $P(A_i) > 0$ pour tout $i \in I$. Pour tout $B \in \mathcal{F}$, on a alors*

$$P(B) = \sum_{i\in I} P(B \cap A_i) = \sum_{i\in I} P(B/A_i)P(A_i). \quad (6)$$

Démonstration. L'événement B peut se décomposer sous la forme :
$B = B \cap \Omega = B \cap (\cup_{i\in I} A_i) = \cup_{i\in I}(B \cap A_i)$,
vu que les A_i sont 2 à 2 incompatibles, les événements $(B \cap A_i)$ sont 2 à 2 incompatibles, alors :
$P(B) = P(\cup_{i\in I}(B \cap A_i) = \sum_{i\in I} P(B \cap A_i)$,
et comme $P(B \cap A_i) = P(B/A_i)P(A_i)$,
alors, $P(B) = \sum_{i\in I} P(B/A_i)P(A_i)$.
Cette formule est dite formule des probabilités totales. □

Corollaire 7. *Formule de Bayes.*
Considérons un système complet d'événements $(A_i)_{i\ inI}$ et soit B un événement quelconque tel que $P(B) > 0$. Alors :

$$P(A_j/B) = \frac{P(B/A_j)P(A_j)}{\sum_{i\in I} P(B/A_i)P(A_i)}. \quad (7)$$

cours de probabilité (page 9 et page 10).

Remarque 3. *On peut voir qu'il s'agit de comprendre la formule de Bayes comme une moyenne pondérée et que nos intuitions sont souvent mises à mal lorsque l'un des événement du conditionnement B ou A est relativement rare.*

4.2.1 Représentation en arbre des modèles probabilistes

Exemple 6. *Une enquête a montré que : avant de passer l'épreuve théorique du permis de conduire 75% des candidats ont travaillé très sérieusement cette épreuve.*
Lorsqu'un candidat a travaillé très sérieusement, il réussit le code dans 80% des cas. Lorsqu'un un candidat n'a pas beaucoup travaillé, il ne réussit le code dans 70% des cas. On interroge au hasard un candidat qui vient de passer l'épreuve théorique. pas
Considérons les deux évènements :
T : « le candidat a travaillé très sérieusement » ; R : « le candidat a réussi le code » 1. Représentez cette situation par un arbre.
2. Calculez la probabilité de l'évènement : le candidat a travaillé très sérieusement et a obtenu le code.
3. Montrez que la probabilité $P(R)$ qu'un candidat réussisse à l'épreuve théorique est égale à $0,675$.
4. Sachant qu'un candidat interrogé vient d'échouer. Quelle est la probabilité qu'il ait travaillé très sérieusement.

4.3 Indépendance d'événements

La notion d'indépendance est fondamentale en probabilités. Intuitivement, deux évènements sont indépendants si la réalisation de l'un n'a aucune influence sur la réalisation ou non de l'autre.

Définition 8. Deux événements A, B d'un espace probabilisé $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ sont indépendants si et seulement si :

$$P(A \cap B) = P(A).P(B). \tag{8}$$

Remarque 4. *-Si $P(A) = 0$ ou 1, A est indépendant de tout évènement, y compris de lui-même.*
-Deux évènements A et B incompatibles ne sont indépendants que si l'un des deux est de probabilité nulle.

Exemple 7. *En supposant l'équiprobabilité des répartitions en garçons et filles d'une famille de trois enfants, étudier l'indépendance des événements :*

A :" le premier enfant est une fille",
B :" le troisième enfant est un garçon".

Théorème 9. *Soit A et B deux évènements indépendants. Alors*
1. A et $\bar{B}$ sont indépendants,
2. $\bar{A}$ et B sont indépendants,
3. $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

Démonstration. 1. $A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$
implique que $P(A) = P(A \cap \bar{B}) + p(A \cap B) = P(A \cap \bar{B}) + P(A)P(B)$
d'où $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)[1 - P(B)] = P(A)P(\bar{B})$.
Les autres points se démontrent de la même manière. □

4.3.1 Conséquences pour les probabilités conditionnelles

Supposons que ni A ni B ne soient de probabilité nulle.
Si A et B sont indépendants, alors on a : $P(A/B) = P(A)$ et $P(B/A) = P(B)$, et on retrouve la notion intuitive d'indépendance.

4.3.2 Événement mutuellement indépendants

Définition 10. Soit $(A_i)_{i \in \mathcal{N}}$ une suite d'évènements. Alors on dit qu'ils sont :- deux à deux indépendants si pour tout $(i,j) \in \mathcal{N}^2$, $i \neq j$, A_i A_j sont indépendants, - mutuellement indépendants si pour tout sous-ensemble fini $\{i_1, i_2, ..., i_k\}$ de $\mathcal{N}$, $P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k) = P(A_1)P(A_2)...P(A_k)$.

Exemple 8. *On jette deux fois de suite une pièces de monnaie équilibré. Étudions l'indépendance mutuelle des événements :*
A :" la première pièce donne Pile",
B :" la seconde pièce donne Face",
C : " les deux pièces donnent le même résultat".

5 Exercices

Exercice 1. *Une agence de voyage fait un sondage statistique sur la connaissance de deux pays A, B : l'Algérie et la France. On constate que parmi les personnes interrogées, 42% connaissent A, 55% connaissent B et 34% connaissent A et B. Un voyage est prévu pour l'une des personnes ayant répondu au sondage. On tire au sort le gagnant. Quelle est la probabilité pour que le gagnant soit une personne :*
1. connaissant au moins l'un de ces deux pays ?