Programme de Module mesure et Integration.

CH1) Rappels sur la théorie des ensembles.

CH2) des limits sup et limite inf

CH3) Algèbre, tribus, classes monotons.

CH4) Applications mesurables.

CH5) Mesures positivs, Mesure exterieurs, ~~mesure de~~

CH6) Mesurs de Borel et théorème de Carathéodory.

CH7) L'Integrale de Lebesgue

et ~~Comparaison avec l'Integral~~

CH8) Comparaison avec l'Integral de Riemann

CH9) espaces $\mathcal{L}^p$ et L^p.

CH2 : limite sup limite inf :-

Définition :-

On appelle la droite achevée et on la note par $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble ~~des réels~~ $\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty, +\infty\} \cup \mathbb{R}$

avec $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombre reells.

propriétés :

1) $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}$: $-\infty \leq x \leq +\infty$

2) $(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty$

3) $(\pm\infty).(\pm\infty) = +\infty$ et $(\pm\infty).(\mp\infty) = -\infty$.

4) $\forall x \in \mathbb{R}$; $x.(\pm\infty) = (\pm\infty).x = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \mp\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}$

~~Définition :- soit (x_n) une suite reells, on appelle limite supperieure de $(x_n)_n$ (resp. limite inférieur de $(x_n)_n$) le nombre M (resp. m) tel que :~~

~~lim x~~

Définition : soit $(x_n)_n$ une suite reells. on appelle limite supperieure de $(x_n)_n$ (resp. limite inférieur de $(x_n)_n$)

le nombre M (resp. m) tel que :

$$M = \overline{\lim}\, x_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_k \{ x_k \,,\, k \geq n \} \right)$$

$$m = \underline{\lim}\, x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\inf_k \{ x_k \,,\, k \geq n \} \right)$$

ou bien

$$M = \overline{\lim}\, x_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} y_n \qquad \text{avec : } y_n = \sup \{ x_k \,,\, k \geq n \}$$

$$m = \underline{\lim}\, x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} z_n \qquad \text{avec : } z_n = \inf \{ x_k \,,\, k \geq n \}$$

Rappelle : propriété caractéristique de borne sup

M = borne sup

$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ - - - ——

propriétés :

proposition : soit $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ Alors

$$\overline{\lim}\, x_n = - \underline{\lim}\, (-x_n)$$

preuve : -

On a : si $A \subset \mathbb{R}$ Alors

$$\inf(A) = -\sup(-A) \quad \text{et} \quad \sup(A) = -\inf(-A)$$

Alors :

$$\overline{\lim}\, x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \big(\overbrace{\sup\{x_k \,,\, k \geq n\}}^{A} \big)$$

$$= -\sup_{n\in\mathbb{N}} \big(-\sup_k \{x_k \,,\, k\geq n\} \big)$$

$$= -\sup_n \big(\inf\{-x_k \,,\, k\geq n\} \big)$$

$$= -\underline{\lim}\,(-x_n)_n$$

~~pro~~ théorème : -

soient $(x_n)_n$, (y_n) deux suite reels ; Alors

1/ $\underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n \leq \underline{\lim}\,(x_n + y_n)$

2/ $\underline{\lim}\,(x_n + y_n) \leq \overline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n$

3/ $\overline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n \leq \overline{\lim}\,(x_n + y_n)$

4/ $\overline{\lim}\,(x_n + y_n) \leq \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$.

preuve :

1/ On a :

$$\forall n\in\mathbb{N} \,;\, \exists n_0 \in \mathbb{N} \,.\, n \geq n_0 \Rightarrow \inf_{k\geq n_0} x_k + \inf_{k\geq n_0} y_k \leq x_n + y_n$$

$$\Rightarrow \inf_{k\geq n_0} x_k + \inf_{k\geq n_0} y_k \leq \inf_n (x_n+y_n) \leq \underline{\lim}\,(x_n+y_n) \quad \text{—— } (*)$$

en plus :

$$\forall \varepsilon>0, \exists n_1\in\mathbb{N} : \inf_{k\geq n_1} x_k > \overbrace{\underline{\lim}\, x_n}^{M_1} - \varepsilon \,;\, \left(M_1 = \underline{\lim}\, x_n = \sup \inf_{k\geq n_1} x_k \right)$$

et

$$\forall \varepsilon>0, \exists n_2\in\mathbb{N} : \inf_{k\geq n_2} (y_k) > \overbrace{\underline{\lim}\, y_n}^{M_2} - \varepsilon \,;\, \left(M_2 = \underline{\lim}\, y_n = \sup \inf_{k\geq n_2} y_k \right)$$

prenons $n = \max(n_1, n_2)$ on obtient :

$$\forall \varepsilon>0, \exists n = \max(n_1,n_2) : \underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n - 2\varepsilon < \inf_{k\geq n} x_k + \inf_{k\geq n} y_k \overset{(*)}{\leq} \underline{\lim}\,(x_n+y_n)$$

donc :

$$\boxed{\underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n \leq \underline{\lim}\,(x_n+y_n)} \quad \text{—— } (1)$$

2/ $$\underline{\lim}\,(x_n+y_n) + \underline{\lim}\,(-x_n) \overset{①}{\leq} \underline{\lim}\,(x_n+y_n-x_n)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\lim}\,(x_n+y_n) \leq \underbrace{-\,\underline{\lim}\,(-x_n)}_{=} + \underline{\lim}\; y_n$$

$$\boxed{\underline{\lim}\,(x_n+y_n) \leq \overline{\lim}\; x_n + \underline{\lim}\; y_n} \quad —— ②$$

③/ $$\underline{\lim}\,(-x_n-y_n) \overset{①}{\geq} \underline{\lim}\,(-x_n) + \underline{\lim}\,(-y_n)$$

$$\Rightarrow \quad -\overline{\lim}\,(x_n+y_n) = \underline{\lim}\,(-(x_n+y_n)) \geq -\overline{\lim}\; x_n - \overline{\lim}\; y_n$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\overline{\lim}\,(x_n+y_n) \leq \overline{\lim}\; x_n + \overline{\lim}\; y_n}$$

4/ $$\overline{\lim}\,(x_n+y_n-y_n) \overset{③}{\leq} \overline{\lim}\,(x_n+y_n) + \overline{\lim}\,(-y_n)$$

$$\Rightarrow \quad \overline{\lim}\; x_n \leq \overline{\lim}\,(x_n+y_n) - \underline{\lim}\,(y_n)$$

$$\leq \overline{\lim}\,(x_n+y_n) + \underline{\lim}\,(y_n)$$

donc :

$$\boxed{\overline{\lim}\; x_n + \underline{\lim}\; y_n \leq \overline{\lim}\,(x_n+y_n)}$$

exemple : $\boxed{x_n = (-1)^n, \quad y_n = (-1)^{n+1}}$ | * Exemple sur le théorème (05)

Définition :

Soit $(A_i)_i$ une famille de parties de On définie la limite sup (resp. inf) de la famille $(A_i)_i$ par :

$$\overline{\lim}(A_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)$$

$$\underline{\lim}(A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right)$$

Remarque : $\underline{\lim}(A_n) \subset \overline{\lim}(A_n)$

CH3// Algèbres, tribus, classes monotones :

1/ Algèbres :

Soit E un ensemble et $\mathcal{A}$ une collection de parties de E

On dit que $\mathcal{A}$ est une Algèbre sur E si

a/ $\mathcal{A} \neq \emptyset$ $(E \in \mathcal{A})$.

b/ $\forall A, B \in \mathcal{A}$ alors $A \cup B \in \mathcal{A}$

c/ $\forall A \in \mathcal{A}$; alors $A^c \in \mathcal{A}$

Exemple : 1/ $\mathcal{P}(E)$ est une Algèbre sur E

2/ $\{A \subset \mathbb{R} \,/\, [0,1] \subset A$ ou $[0;1] \cap A = \emptyset\}$ est une Algèbre sur $\mathbb{R}$.

3/ $\{]a,b[\mid a,b \in \mathbb{R} \}$ n'est pas une algèbre sur $\mathbb{R}$

__proposition__ : soit $\mathcal{A}$ une algèbre sur E, on a les propriétés suivantes :

1/ $E \in \mathcal{A}$

2/ $\emptyset \in \mathcal{A}$

3/ $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad : \quad A \cap B \in \mathcal{A}$

4/ $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad : \quad A \setminus B \in \mathcal{A}$

~~6/~~ $\cancel{\forall \mathcal{A}_i \text{ fini} \in \mathcal{A} \quad : \quad \bigcup_i \mathcal{A} \in}$

5/ $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad : \quad A \Delta B \in \mathcal{A}$

__preuve__ :-

1/2/ On a : $\mathcal{A} \neq \emptyset$, soit $A_0 \in \mathcal{A}$, __Alors__

$$E = A_0 \cup A_0^c \in \mathcal{A}$$

et $\emptyset = E^c \in \mathcal{A}$

soit $A, B \in \mathcal{A}$. On a : __Alors__ $A^c, B^c \in \mathcal{A}$

$$\cancel{A \cap B = (A^c \cup B^c) \in \mathcal{A}}$$

$$\Rightarrow \quad A^c \cup B^c = A \cap B \in \mathcal{A} \quad \text{--- } 3/$$

en plus On a : $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$ — 4/

et aussi : $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{A}$. — 5/

Lemme 1/ Proposition :

soit $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ une famille d'algèbres sur E

Alors $\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ est une algèbre sur E

preuve :

a/ On a ~~$\forall i \in I$: $\mathcal{A}_i$ ... $\bigcap_{i\in I}$~~

on a : $\forall i \in I$: $E \in \mathcal{A}_i$

$$E \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i \text{ donc } \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i \neq \emptyset$$

b/ soit $A, B \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i \Rightarrow A, B \in \mathcal{A}_i \; , \forall i \in I$

$$\Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}_i \; , \forall i \in I$$

$$\Rightarrow A \cup B \in \bigcap_i \mathcal{A}_i$$

c/ soit $A \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i \Rightarrow A \in \mathcal{A}_i \; , \forall i$

$$\Rightarrow A^c \in \mathcal{A}_i \; , \forall i$$

$$\Rightarrow A^c \in \bigcap_i \mathcal{A}_i$$

LH

Définition :

Soit $\mathcal{E}$ une collection de parties de E (pas nécessairement algèbre).
la plus petite algèbre contenant $\mathcal{E}$ s'appelle l'algèbre engendrée par $\mathcal{E}$. est aussi l'intersection de toute les algèbres contenant $\mathcal{E}$.

2/ tribus :

Soit E un ensemble, et soit $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(E)$.
On dit que $\mathcal{T}$ est une tribus (6-algèbres) sur E si

1/ $\mathcal{T} \neq \emptyset$ $\quad (E \in \mathcal{T})$.

2/ $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$

3/ $\forall A \in \mathcal{T} \Rightarrow A^c \in \mathcal{T}$

Définition : si $\mathcal{T}$ est une tribu sur E
On dit que $(E, \mathcal{T})$ est un espace mesurable
et pour $B \in \mathcal{T}$; B s'appelle ensemble mesurable.

~~Lemme~~ ou proposition :

Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille des tribus sur E

Alors $\bigcap_{i\in I} T_i$ est aussi une tribu sur E.

preuve : - c'est similaire à celle de proposition précédente.

Théorème : soit E un ensemble et $\mathcal{E} \in \mathcal{P}(E)$.

il existe une plus petite tribu sur E contenant $\mathcal{E}$.

On la note par $\sigma_E(\mathcal{E})$ ou $\sigma(\mathcal{E})$

Démonstration :

On a : $\sigma_E(\mathcal{E}) = \bigcap \{ T \ / \ \text{Tribu} \supset \mathcal{E} \}$

Définition : soit E un ensemble $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(E)$

la plus petite tribu contenant $\mathcal{E}$ (est aussi la tribu

Intersection de toute des tribus contenant $\mathcal{E}$)

s'appelle la tribu engendrée par $\mathcal{E}$

et ~~On~~ la note par : $\sigma(\mathcal{E})$ (ou bien ~~$\mathcal{M}_E$~~ ($\sigma_E(\mathcal{E})$))

si $\sigma(\mathcal{E})$ est dénombrable On dit que $\sigma(\mathcal{E})$ ou $(E, \sigma(\mathcal{E}))$ est dénombrablement engendrée (ou) séparable.

proposition :- si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont deux collections de parties de E telles que $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$, Alors $\sigma(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{E}')$
(en particulier si $\mathcal{E}'$ est une tribu Alors $\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}'$).

preuve :- Evidemment On a :

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{E}' \subset \sigma(\mathcal{E}') \text{ et } \cancel{\text{donc}}$$

et puisque $\sigma(\mathcal{E})$ = la plus petite tribu Contenant $\mathcal{E}$

Alors $\sigma(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{E}')$

Définition :- soit (E, τ) un espace topologique, la tribu $\sigma_E(\tau)$ est appelée tribu borélienne de (E, τ) et notée $B(E, \tau)$ ou $\mathcal{B}(E)$

proposition :- On note par : $\mathcal{E}_1$ l'ensemble de tous les ouverts de $\mathbb{R}$

$$\mathcal{E}_2 = \{]a, b[\ , \ a, b \in \mathbb{R} \ , \ a < b \}$$

$$\mathcal{E}_3 = \{]a, +\infty[\ , \ a \in \mathbb{R} \}$$

Alors $\sigma(\mathcal{E}_1) = \sigma(\mathcal{E}_2) = \sigma(\mathcal{E}_3)$

preuve :-

~~Comme : $\mathcal{E}_2 \subset \mathcal{E}_1$ Alors~~

On a par définition : $\sigma(\mathcal{E}_1) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

et comme $\mathcal{E}_2 \subset \mathcal{E}_1$ Alors $\sigma(\mathcal{E}_2) \subset \sigma(\mathcal{E}_1)$ —— (1)

montrons Alors $\sigma(\mathcal{E}_1) \subset \sigma(\mathcal{E}_2)$??

soit O un ouvert de $\mathbb{R}$, $(O \neq \emptyset)$

On a $\emptyset \in \sigma(\mathcal{E}_2)$

~~il existe $(I_n)_{n\in A}$, $A \subseteq \mathbb{N}$ tq $O = \bigcup_{n \in A} I_n$~~

il existe $(I_n)_{n \in A}$, $A \subseteq \mathbb{N}$ tq $O = \bigcup_{n \in A} I_n$

Comme $I_n \in \mathcal{E}_2 \subset \sigma(\mathcal{E}_2)$, $\forall n \in A$ et $\emptyset \in \sigma(\mathcal{E}_2)$

$\Rightarrow \bigcup_{n \in A} I_n \in \sigma(\mathcal{E}_2) \Rightarrow \mathcal{E}_1 \subset \sigma(\mathcal{E}_2)$

$\Rightarrow \sigma(\mathcal{E}_1) \subset \sigma(\mathcal{E}_2)$ —— (2)

(1) et (2) $\Rightarrow \sigma(\mathcal{E}_1) = \sigma(\mathcal{E}_2)$

~~lemme~~ :

montrons que $\forall\, O$ ouvert $\neq \emptyset$ de $\mathbb{R}$ ~~est~~ un réunion au plus dénombrable d'intervalls ouvert

c.à.d $\forall\, O$ ouvert de $\mathbb{R}$: $\exists (I_n)_{n\in A}$; $A \subseteq \mathbb{N}$
I_n intervalle.

tq $O = \bigcup_{n\in A} I_n$.

preuve :

soit O un ouvert de $\mathbb{R}$, $O \neq \emptyset$

on pose $A = \{(\beta,\gamma)\in \mathbb{Q}^2 ;\ \beta<\gamma\ ,\ ]\beta,\gamma[\subset O\}$

$$\Rightarrow \bigcup_{(\beta,\gamma)\in A}]\beta,\gamma[\subset O \quad —— \ (*)$$

montrons que $O \subset \bigcup_{(\beta,\gamma)}]\beta,\gamma[$. ??

soit $x\in O$, $\Rightarrow \exists\ \alpha_x > 0$ tq : $]x-\alpha_x, x+\alpha_x[\subset O$.

prenons : ~~$\beta_x \in \mathbb{Q}\cap]x-\alpha_x, x+\alpha_x[$~~

~~et $\gamma_x \in \mathbb{Q}\cap]x, \beta$~~

$\beta_x \in \mathbb{Q}\cap]x-\alpha_x, x[$

$\gamma_x \in \mathbb{Q}\cap]x, x+\alpha_x[$

Alors, $x\in]\beta_x, \gamma_x[$ et donc $(\beta_x,\gamma_x)\in A$.

d'où : $x\in]\beta_x,\gamma_x[\subset \bigcup_{(\beta,\gamma)\in A}]\beta,\gamma[\Rightarrow O \subset \bigcup_{(\beta,\gamma)\in A}]\beta,\gamma[$ —(**)

(*) et (**) $\Rightarrow$ $\boxed{O = \bigcup_{(\beta,\gamma)\in A}]\beta,\gamma[}$

(α) Cas des produits :

Soit (E_1, T_1) et (E_2, T_2) deux espaces mesurables.
On appelle tribu produit de T_1 et T_2 la plus petite tribu sur $E_1 \times E_2$ contenant

$$\{A_1 \times A_2 \,/\, A_1 \in T_1 \text{ et } A_2 \in T_2\}$$

On la note par : $T_1 \otimes T_2$ et on dit que les $A_1 \times A_2$ sont des ~~pavés~~ mesurables.

3) ~~classes~~ Classes monotones :

(Lorsque l'on a une algèbre $\mathcal{A}$ sur un ensemble E, on peut caractériser la tribu $\sigma_E(\mathcal{A})$ d'une manière qui sera très utile.)

Définition : On dit ~~que~~ qu'une collection $\mathcal{C}$ de partie de E est une classe monotone sur E si elle est stable par les unions de suites croissantes et les intersections de suites décroissantes.

et on note

$A_n \uparrow A$ croissante vers A avec $A = \bigcup_n A_n$

et $A_n \downarrow A$ décroissante vers A avec $A = \bigcap_n A_n$.

Alors.

$\mathcal{C}$ est une classe monotone ssi :

1/ $\mathcal{C} \neq \emptyset$

2/ $\forall (A_n) \subset \mathcal{C}$ ~~tq~~ : $A_n \uparrow A \Rightarrow A \in \mathcal{C}$.

3/ $\forall (A_n) \subset \mathcal{C}$ tq $A_n \downarrow A \Rightarrow A \in \mathcal{C}$.

proposition : toute intersection de classes monotones est une classe monotonne.

En ~~Ca~~ Conséquence, on peut parler de la plus petite classe monotone sur un ensemble E, contenant la collection $\mathcal{C}$, on la note par : $\mathcal{M}_E(\mathcal{C})$.

théorème :

Soit $\mathcal{A}$ une Algèbre sur E, on a alors

~~$\sigma(\mathcal{A})$ est~~ $\sigma_E(\mathcal{A}) = \mathcal{M}_E(\mathcal{A})$.

En particulier si $\mathcal{M}$ est une classe monotone contenant $\mathcal{A}$

Alors : $\sigma_E(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}$.

preuve :-

1/ Une tribu étant une classe monotone, Alors

$\mathcal{M}_E(\mathcal{A}) \subset \sigma_E(A)$ → tribu

la plus petite classe monotone.

2/ montrons que $\mathcal{M}_E(\mathcal{A})$ est une tribu. $\left(\sigma_E(A) \subset \mathcal{M}_E(\mathcal{A})\right)$??

a/ Soit $\mathcal{M}' = \{A \in \mathcal{M}_E(\mathcal{A}) \,/\, A^c \in \mathcal{M}_E(\mathcal{A})\}$

$\Rightarrow \mathcal{A} \subset \mathcal{M}' \subset \mathcal{M}_E(\mathcal{A})$

montrons que $\mathcal{M}'$ est une classe monotone.

Soit $(A_n)_n \subset \mathcal{M}'$ tq $A_n \uparrow A$, On a alors $A_n \in \mathcal{M}_E \; \forall n$

$\Rightarrow A_n \in \mathcal{M}_E$

$\Rightarrow A_n^c \downarrow A^c$, Comme $A_n^c \in \mathcal{M}_E$, $\forall n$

Alors $A^c \in \mathcal{M}_E$ Alors $A \in \mathcal{M}'$

$\mathcal{M}'$ est donc classe monotone

b/ montrons que $\mathcal{M}_E$ est stable pour $\cup$. ??

Soit $A \in \mathcal{A}$. posons $\mathcal{M}^A = \{B \in \mathcal{M} \,/\, B \cup A \in \mathcal{M}_E\}$.

Alors $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}^A \subset \mathcal{M}_E$

si on montre que $\mathcal{M}^A_E$ est une classe monotone, on aura $\mathcal{M}^A = \mathcal{M}_E$.

16

~~maintenant on a : $B_n \cup A$~~

Soit $(B_n) \subset \mathcal{M}^A$ avec : $B_n \uparrow B$. Alors $B \in \mathcal{M}$ ($\mathcal{M}$ classe monotone) et $\mathcal{M}^A \subset \mathcal{M}$

On a $B_n \cup A \in \mathcal{M}$, $\forall n$ et ~~$B_n \uparrow B$~~. $B_n \cup A \uparrow B \cup A$

donc : $B \cup A \in \mathcal{M}$.

donc $B \in \mathcal{M}^A$ et de m̂, si $(B_n) \subset \mathcal{M}^A$ telle que $B_n \downarrow B$, on a :

$$B_n \cup A \in \mathcal{M},\ \forall n \text{ et } B_n \cup A \downarrow B \cup A$$

donc $B \cup A \in \mathcal{M}$

et $B \in \mathcal{M}^A$

donc $\mathcal{M}^A$ est une classe monotone. càd $\mathcal{M}^A = \mathcal{M}$

On obtient Alors :

$$\forall A \in \mathcal{A},\ \forall B \in \mathcal{M} : A \cup B \in \mathcal{M}.$$

Soit $B \in \mathcal{M}$. On pose

$$\mathcal{M}^B = \{C \in \mathcal{M} \;/\; C \cup B \in \mathcal{M}\}$$

de m̂ on peut montrer que $\mathcal{M}^B$ est une classe monotone et $\mathcal{M}^B = \mathcal{M}$.

et on obtient :

$$\forall A \in \mathcal{M}, \forall B \in \mathcal{M} \quad A \cup B \in \mathcal{M}.$$

et comme $\cup \emptyset = \emptyset \in \mathcal{A} \subset \mathcal{M}$,

On a donc $\mathcal{M}$ est stable par $\cup_f$.

γ) Montrons que $\mathcal{M}$ est stable pour $\cup_d$.

En effet si $(A_n)_n$ est suite dans $\mathcal{M}$, on a d'après β)

$$\cup A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left(\bigcup_{p=0}^{n} A_p \right)}_{B_n \uparrow \cup A_n} \in \mathcal{M}.$$

donc : $\mathcal{M}$ est une tribu.

CH 4) Applications mesurables :-

Soit E, F deux ensembles, soit $f : E \longrightarrow F$ une application de E dans F, soit $\mathcal{C}$ une collection de partie de F. ($\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(F)$).

On note par : $f^{-1}(\mathcal{C}) = \{ f^{-1}(C) \ / \ C \in \mathcal{C} \}$

Remarque : si $\mathcal{C}$ est une Algèbre (resp. Tribu, resp. topologie). Alors

$\boxed{f^{-1}(\mathcal{C})}$ est une algèbre (resp. tribu, resp. topologie). (Exercice).