U.H.B.C. Chlef (02.07.1443≡03.02.2022)
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département des Mathématiques

Année Universitaire: 2021/2022
Niveau: 2ème Master/ Option: M.A.S.
Module: Processus Stochastiques 3.

Examen Final (1h30min) "Corrigé-type"

$(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien standard sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$.

1. Calcul en justifiant tous les passages:

   (a) $\mathbb{E}(B_4^2 + 3B_4 - 4) \underset{de\ l'espérance}{\overset{linéarité}{=}} \underbrace{\mathbb{E}(B_4^2)}_{=4} + 3\underbrace{\mathbb{E}(B_4)}_{=0} - 4 = 0$ car $B_4 \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,4)$ $\boxed{\text{1 point}}$

   (b) $\mathbb{E}(B_3^2/\mathcal{F}_2) = \mathbb{E}(B_3^2 - 3 + 3/\mathcal{F}_2) = \underbrace{\mathbb{E}(B_3^2 - 3/\mathcal{F}_2)}_{=B_2^2-2} + 3 = B_2^2 + 1$ car $(B_t^2 - t)_{t\geq 0}$ est une martingale.

   $\boxed{\text{1 point}}$

   (c) $\mathbb{E}(e^{3B_4}/\mathcal{F}_3) = \mathbb{E}(e^{3B_4 - \frac{3^2}{2}4 + 18}/\mathcal{F}_3) = \underbrace{\mathbb{E}(e^{3B_4 - \frac{3^2}{2}4}/\mathcal{F}_3)}_{=e^{3B_3 - \frac{3^2}{2}3}} e^{18} = e^{3B_3 + \frac{9}{2}}$ car $(e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t})_{t\geq 0}$ est une martingale. $\boxed{\text{1 point}}$

   (d) $\mathbb{E}\left[(B_3 - B_1)\int_0^2 \sqrt{t}dB_t\right] = \mathbb{E}\left[\int_1^3 dB_t \int_0^2 \sqrt{t}dB_t\right] = \int_1^2 \sqrt{t}dt = \frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{2}{3}$ $\boxed{\text{1 point}}$

   (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{k=2n} \left(B_{k/n} - B_{(k-1)/n}\right)^2 = 2$ car c'est la variation quadratique du MB sur $[0,2]$. $\boxed{\text{1 point}}$

   (f) $\dfrac{\partial^2 F_{(B_1,B_2)}}{\partial x \partial y}(1,5) = f_{(B_1,B_2)}(1,5)$ avec $f_{(B_1,B_2)}$ est la densité conjointe du vecteur (B_1, B_2), d'où

   $$f_{(B_1,B_2)}(1,5) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(2-1)}} e^{-\dfrac{(5-1)^2}{2(2-1)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-0)}} e^{-\dfrac{(1-0)^2}{2(1-0)}} = \frac{1}{2\pi} e^{-\dfrac{17}{2}} \quad \boxed{\text{1.5 point}}$$

2. Donner la loi ainsi que ses paramètres des variables aléatoires suivantes:

   (a) $X = \int_0^2 \sqrt{s}dB_s \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \int_0^2 sds) = \mathcal{N}(0,2)$ $\boxed{\text{1.5 point}}$

   (b) $Y = \int_0^3 dB_s \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \int_0^3 f^2(s)ds)$ avec
   $\int_0^3 f^2(s)ds = \int_0^3 \left[-\mathbf{1}_{[0,1[}(s) + \mathbf{1}_{[1,2[}(s) + 2.\mathbf{1}_{[2,3]}(s)\right]^2 ds$
   $= \int_0^1 (-1)^2 ds + \int_1^2 1^2 ds + \int_2^3 2^2 ds = 6$ $\boxed{\text{1.5 point}}$

3. Montrons que $X_t = B_t^3 - 3tB_t$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}-$martingale.

   (a) **Adaptation:** X_t est une composition de $fonctions$: $x \longmapsto x^3 - 3tx$ et $t \longmapsto B_t$
   la 1ère est boréliènne et la 2ème est $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}-$ adaptée. $\boxed{\text{0.5 point}}$

   (b) **Intégrabilité:** $|X_t| \leq |B_t^3| + 3t|B_t|$
   D'où: (en utilisant l'aide, avec $X = B_t^2$ et $Y = B_t$), on a
   $\mathbb{E}|X_t| \leq \sqrt{\mathbb{E}B_t^4 \mathbb{E}B_t^2} + 3t\mathbb{E}|B_t|$ de même: $\mathbb{E}|B_t| \leq \sqrt{\mathbb{E}B_t^2} = \sqrt{t}$
   Par conséquent: $\mathbb{E}|X_t| \leq \sqrt{3}t\sqrt{t} + 3t\sqrt{t} < \infty$ $\forall t \geq 0$. $\boxed{\text{1 point}}$

   (c) **Propriété Clé:** Soit $s \leq t$, on sait que:

   $$\begin{cases} B_t - B_s \perp \mathcal{F}_s ...(1) \\ B_t - B_s \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, t-s)...(2) \\ \mathbb{E}(B_t - B_s)^3 = 0...(3) \\ B_t \ est\ \mathcal{F}_t - mesurable...(4) \\ \mathbb{E}(B_t/\mathcal{F}_s) = B_s...(5) \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(B_t^3/\mathcal{F}_s\right) &= \mathbb{E}\left[\left(B_t - B_s + B_s\right)^3/\mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(B_t - B_s\right)^3 + 3\left(B_t - B_s\right)^2 B_s + 3\left(B_t - B_s\right) B_s^2 + B_s^3/\mathcal{F}_s\right] \\
&\overset{(1)+(4)}{=} \mathbb{E}\left(B_t - B_s\right)^3 + 3B_s\mathbb{E}\left(B_t - B_s\right)^2 + 3B_s^2\mathbb{E}\left(B_t - B_s\right) + B_s^3 \\
&\overset{(2)+(3)+(5)}{=} B_s^3 + 3B_s(t-s) \\
&\overset{(5)}{=} B_s^3 - 3sB_s + \mathbb{E}\left(3tB_t/\mathcal{F}_s\right) \\
\Longrightarrow\ & \mathbb{E}\left(B_t^3 - 3tB_t/\mathcal{F}_s\right) = B_s^3 - 3sB_s \ \boxed{\text{1.5 point}}
\end{aligned}$$

4. les valeurs des paramètres réels α, β, λ et μ pour que les deux processus stochastiques:

$$\begin{cases} M_t := \alpha B_t^2 - |\beta|\, t \\ N_t := \exp(\lambda B_t - \mu^2 t) \end{cases}$$

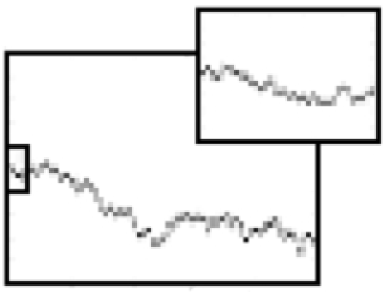
soient des $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ – **martingales**.

(a) On sait que $(B_t^2 - t)_{t\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ – **martingale** $\Longrightarrow (\alpha B_t^2 - |\beta|\, t)_{t\geq 0}$ est une martingale si $\boxed{\alpha = |\beta|}$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

(b) On sait que $(\exp(\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t))_{t\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ – **martingale** $\Longrightarrow (\alpha B_t^2 - |\beta|\, t)_{t\geq 0}$ est une martingale si $\boxed{\mu^2 = \frac{\lambda^2}{2}}$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

5. "*Le mouvement Brownien est un* **fractal aléatoire**".

Les trajectoires sont **nulle part différentiables** de plus la **longueur des trajectoires est infinie**, par conséquent si on change **l'échelle temporelle** par **accélération** ou décélération et **l'échelle spatiale** par **compression** ou dépression, l'aspect des trajectoires restera le même c'est-à-dire le mouvement Brownien est **auto-similaire** (même aspect à différentes échelles) $\boxed{\text{0.125 x 6 point}}$



$\boxed{\text{0.25 point}}$

6. Répondre par **Vrai** ou **Faux** en corrigeant la réponse fausse:

(a) La variation quadratique du mouvement Brownien est infinie, **Faux** $\boxed{\text{0.25 point}}$

La variation quadratique du mouvement Brownien est **non nulle.** $\boxed{\text{0.75 point}}$

(b) La variation totale du mouvement Brownien est non nulle, **Vraie** $\boxed{\text{1 point}}$

de plus *la variation totale du mouvement Brownien est* **infinie.**

(c) Si la variation quadratique d'un processus est non nulle alors sa variation totale est finie. **Faux** $\boxed{\text{0.25 point}}$

Si la variation quadratique d'un processus est non nulle alors sa variation totale est **infinie.** $\boxed{\text{0.75 point}}$

(d) L'infinité de la longueur des trajectoires d'un processus signifie que sa variation quadratique est infinie. **Faux** $\boxed{\text{0.25 point}}$

L'infinité de la longueur des trajectoires d'un processus signifie que sa variation quadratique est **non nulle.** $\boxed{\text{0.75 point}}$

(e) L'intégrale $\int_a^b f(s)dB_s$ existe au sens de *Riemann-Stieljes* **trajectoire par trajectoire** si la fonction f est à variation quadratique bornée. **Faux** $\boxed{\text{0.5 point}}$

L'intégrale $\int_a^b f(s)dB_s$ existe au sens de Riemann-Stieljes trajectoire par trajectoire si la fonction f est à variation ***totale*** *bornée.* $\boxed{\textit{1 point}}$