U.D.L Sidi Bel Abbès
Faculté des Sciences Exactes
Département : Probabilités-Statistique
3^{eme} Année Licence : Mathématiques Appliquées

Module : AED
Responsable : M. HAMMAD
Mercredi 21/01/2024
Durée :1h30

EXAMEN FINAL

Question de Cours (04 points).

Écrire l'algorithme de l'ACP.

Exercice (16 points).

Soit un ensemble de six étudiants caractérisés par trois notes chacun (notes des matières : Probabilités, Statistique et Optimisation).

	I1	I2	I3	I4	I5	I6
P	8	4	6	10	8	0
S	1	6	8	4	2	3
O	0	5	7	7	5	6

On donne $\lambda = 12$, valeur propre de VM.

12,50
- Appliquer une analyse en composantes principales (ACP) sur des données centrées non réduites.

02
- Représenter le nuage des points individus sur le plan factoriel.

01,50
- Calculer la contribution (INR) des individus $I1$, $I2$, et $I3$ relativement à l'inertie globale.

Corrigé type

ADD — 2023/2024

Questions de Cours : Voir le cours (04 points)

Exercice 1 (16 points)

1/ $\bar{x}^j = \sum_{i=1}^{6} p_i x_{ji} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_{ji}$, $p_i = \frac{1}{6}$ $\forall i = \overline{1,6}$

$M = I_p = I_3$, $D_p = \frac{1}{6} I_6$

$$g = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$ 01,5

Tableau Centré : $X_c = (x_{ji} - \bar{x}^j)_{\substack{1 \le i \le 6 \\ 1 \le j \le 3}}$

$$X_c = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 4 & 2 & -6 \\ -3 & 2 & 4 & 0 & -2 & -1 \\ -5 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ 01,5

Pour une ACP centré non réduite

$$V = X_c D_p X_c' = \frac{1}{6} X_c X_c' = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 64 & -8 & -8 \\ -8 & 34 & 22 \\ -8 & 22 & 34 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot S$$ 01,5

$I_g = Tr(VM) = Tr(V) = \frac{64+34+34}{6} = \frac{132}{6} = 22$

or $I_g = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 22$, $\lambda_1 = 12$ 01

On : $\lambda_2 + \lambda_3 = 22 - 12 = 10$ 0,5 , $\det S = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 192$ 01

$\Downarrow$

$Det(VM - \lambda I_3) = P_\lambda$ Pour Calculer les $v.p$

$\lambda_2 \cdot \lambda_3 = \frac{192}{12}$

alors $\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 10 \\ \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 16 \end{cases}$ (1) 0,5

(1) $\to$ $\lambda_3 = 10 - \lambda_2$, on remplace ds (2)

$\lambda_2(10-\lambda_2) = 16 \iff \lambda_2^2 - 10\lambda_2 + 16 = 0$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = 12 \\ \lambda_2 = 8 \\ \lambda_3 = 2 \end{cases}$$

01

Pour $\lambda_1 = 12 \Rightarrow (VM - \lambda_1 I_3) U_1 = 0_{\mathbb{R}^3}$ avec

$U_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $x, y, z \in \mathbb{R}$.

$$\frac{1}{6} S U_1 - \lambda I U_1 = 0_{\mathbb{R}^3} \iff SU_1 - 72 I_3 U_1 = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\iff \begin{cases} -8x - 8y - 8z = 0 & (1) \\ -8x - 38y + 22z = 0 & (2) \\ -8x + 22y - 38z = 0 & (3) \end{cases}$$

$y = z$ et $\cancel{x} = -2y$

$\Rightarrow U_1 = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$ i.e $U = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} y$, $y \in \mathbb{R}$

$\|U_1\| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6} \neq 1 \Rightarrow \boxed{U_{1n} = \frac{\sqrt{6}}{6} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ 01

De même Pour $\lambda_2 = 8 \rightarrow \boxed{U_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ 01

facultatif :

et pour $\lambda_3 = 2 \rightarrow \boxed{U_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$

Qualite de représentation

$$Part(\Delta u_1) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} = \frac{12}{22} = 0,54 \text{ soit } 54\% \ (<80\%$$

$$Part(\Delta u_2) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} = \frac{8}{22} = 0,36 \text{ soit } 36\% \ (<80\%$$

$$P = \Delta u_1 \oplus \Delta u_2 \Rightarrow Part(P) = 0,90 \text{ soit } 90\%$$

Donc Il y a deux axes principaux Δu_1 et Δu_2 relatifs aux v.p λ_1 et λ_2.

01

Les composantes principales :

$$C^1 = X_c' M u_1 = X_c' u_{1n} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -6 & -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 6 \\ -6 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix} =$$

$$\sqrt{6}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

0,75

$$C^2 = X_c' M u_{2n} = X_c' u_{2n} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -6 & -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \\ 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

0,75

$$= \sqrt{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Les individus sont :

i_1 $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{3})$; i_2 $(\sqrt{6}, 0)$

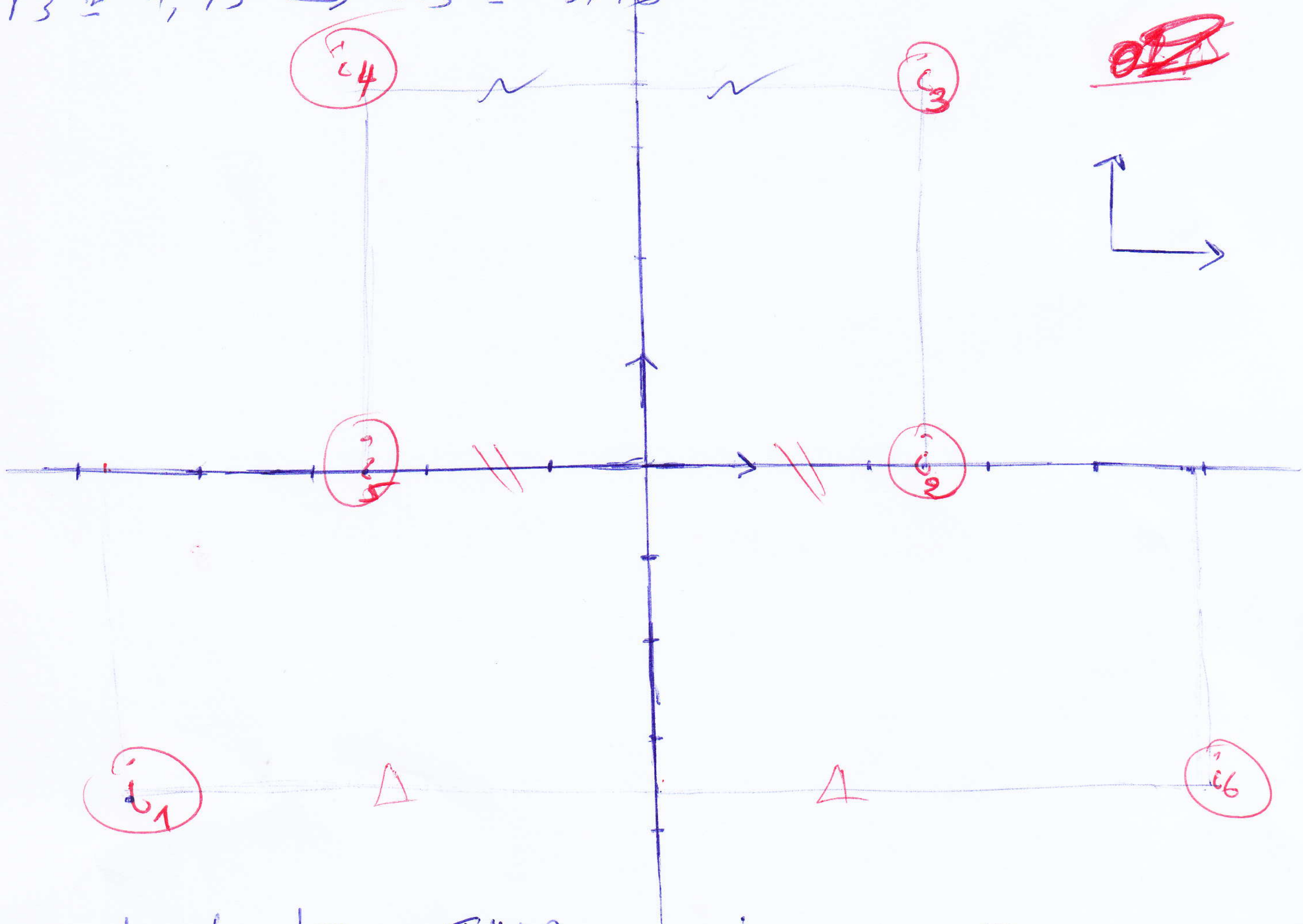
i_3 $(\sqrt{6}, 2\sqrt{3})$, i_4 $(-\sqrt{6}, 2\sqrt{3})$; i_5 $(-\sqrt{6}, 0)$

i_6 $(2\sqrt{6}, -2\sqrt{3})$

Représentation graphique

$\sqrt{6} \simeq 2,449 \simeq 2,5 \longrightarrow 2\sqrt{6} \simeq 4,89$

$\sqrt{3} \simeq 1,73 \longrightarrow 2\sqrt{3} \simeq 3,46$



Contribution INR des individus I_1, I_2 et I_3

$I_g = Tr(VM) = 22$

Pour i_1 : $INR_1 = \dfrac{P_1 \|x_1\|^2_M}{I_g} = \dfrac{1/6 \cdot 38}{22} \simeq 0,287$ 0,5

Pour i_2 : $INR_2 = \dfrac{P_2 \|x_2\|^2_M}{I_g} = \dfrac{1/6 \cdot 8}{22} \simeq 0,06$ 0,5

Pour i_3 : $INR_3 = \dfrac{P_3 \|x_3\|^2}{I_g} = \dfrac{1/6 \cdot 20}{22} \simeq 0,151$ 0,5

i_1 et i_2, i_3 sont les individus sur le tableau centré, Remarque : i_2 est proche de l'origine