Exercice

$X_1 = 2\ kg,\ X_2 = 3\ kg,\ X_3 = 6\ kg,\ X_4 = 8\ kg\ et\ X_5 = 11kg$
1. La population étudiée :5 pièces de rechange.
Le caractère: le poids des pièces
La nature du caractère : quantitative (mésurable).

2. $N = 5$.

3. $\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i = \frac{2+3+6+8+11}{5} = 6$

$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n} x_i^2 - \overline{X}^2} = \sqrt{(\frac{2^2+3^2+6^2+8^2+11^2}{5}) - 6^2} = \sqrt{46.8 - 36} =$
$\sqrt{10.8} = 3.2863$

4. $n = 2$
Nombre d'échantilons : $k = C_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!*2!} = 10\ échantillons$

5. $\{(X_1, X_2); (X_1, X_3); (X_1, X_4); (X_1, X_5); (X_2, X_3); (X_2, X_4); (X_2, X_5); (X_3, X_4); (X_3, X_5); (X_4, X_5)\}$
$\{(2,3); (2,6); (2,8); ...; (8,11)\}$.
$\left\{\overline{X_1} = \frac{2+3}{2} = 2.5;\ \overline{X_2} = \frac{2+6}{2} = 4; \overline{X_3} = \frac{2+8}{2} = 5; ...\overline{X_{10}} = \frac{8+11}{2} = 9.5\right\}$

6. $\mu_{\overline{X}} = \frac{1}{10}\sum_{i=1i}^{k} \overline{x}_i = \frac{2.5+4+5+...+9.5}{10} = 6$

$\sigma_{\overline{X}} = \sqrt{V(\overline{X})} = \sqrt{\frac{1}{10}\sum_{n=1}^{n} \overline{x}_i^2 - \mu_{\overline{X}}^2} = \sqrt{(\frac{2.5^2+4^2+5^2+...+9.5^2}{10}) - 6^2} = \sqrt{40.05 - 36} =$
$\sqrt{4.05} = 2.0125$.

7. Vérification des lois du cours:

$$\begin{cases} \mu_{\overline{X}} = \mu_X \\ \sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

$\mu_{\overline{X}} = 6 = \mu_X\ (\ juste)$
$\sigma_{\overline{X}} = 2.0125$
$\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{3.2863}{\sqrt{2}} = 2.3238$
$\Longrightarrow \sigma_{\overline{X}} \neq \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$

$$\left\{\begin{array}{c} N = 5\ finie \\ tirage\ sans\ remise \\ n \geq 0.05 * N \\ 2 > 0.05 * 5 = 0.25 \end{array}\right. \Longrightarrow on\ applique\ le\ coeficient\ de\ correction$$

$\Longrightarrow \sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} * \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$
$\sigma_{\overline{X}} = 2.0125$

$\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} * \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{3.\,286\,3}{\sqrt{2}} * \sqrt{\frac{5-2}{5-1}} = 2.\,012\,4 = \sigma_{\overline{X}}$
$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} * \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$

$\Rightarrow$ les lois du cours sont justes
8-Répétiton des mêmes questions dans le cas d'un tirage avec remise.

Nombre d'échantilons : $k = 5^2 = 25$ *échantillons*
$\{(X_1, X_1); (X_1, X_2); (X_1, X_3); (X_1, X_4); (X_1, X_5); (X_2, X_1); (X_2, X_2); (X_2, X_3); ...; (X_5, X_5)\}$
$\{(2,2); (2,3); (2,6); ...; (11,11)\}$.
$\left\{\overline{X_1} = \frac{2+2}{2} = 2;\ \overline{X_2} = \frac{2+3}{2} = 2.5; \overline{X_3} = \frac{2+6}{2} = 4; ...\overline{X_{25}} = \frac{11+11}{2} = 11\right\}$
$\mu_{\overline{X}} = \frac{1}{25} \sum_{i=1i}^{k} \overline{x}_i = \frac{2+2.5+4+...+11}{25} = 6$

$$\sigma_{\overline{X}} = \sqrt{V\left(\overline{X}\right)} = \sqrt{\frac{1}{25} \sum_{n=1}^{n} \overline{x}_i^2 - \mu_{\overline{X}}^2} = \sqrt{\left(\frac{22^2+2.5^2+4^2+...+11^2}{25}\right) - 6^2} = \sqrt{41.4 - 36} = \sqrt{5.\,4} = 2.\,323\,8.$$

Vérification des lois du cours:

$$\begin{cases} \mu_{\overline{X}} = \mu_X \\ \sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

$\mu_{\overline{X}} = 6 = \mu_X$
$\sigma_{\overline{X}} = 2.\,323\,8$
$\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{3.\,286\,3}{\sqrt{2}} = 2.\,323\,8$
$\Longrightarrow \sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$

$\Rightarrow$ les lois du cours sont justes.