Estimer les paramètres de la v.a X qui suit les lois suivantes :

1- $X \sim \mathcal{B}(p)$ 3- $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

2- $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ 4- $X \sim \mathcal{U}[\theta_1, \theta_2]$.

Solution:

méthode des moments

① $X \sim \mathcal{B}(p) \longrightarrow \mathcal{X} = \{0,1\}$, $E(X) = p$.

$\frac{1}{n}\sum X_i = \bar{X} = E(X)$

$\Rightarrow \bar{X} = p \longrightarrow \hat{p} = \bar{x} \rightarrow$ estimateur de p par la méthode des moments.

② $X \sim \mathcal{E}(\lambda) \longrightarrow \mathcal{X} = \mathbb{R}^+$, $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

$\bar{X} = E(X)$

$\Rightarrow \bar{X} = \frac{1}{\lambda}$ d'où $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}$ estimateur de λ.

③ $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2) \rightarrow \mathcal{X} = \mathbb{R}$, $E(X) = m$ et $V(X) = \sigma^2$

$\bar{X} = E(X) = m$

$S^2 = V(X) = \sigma^2$ d'où $\begin{pmatrix} \bar{X} \\ S^2 \end{pmatrix}$ estimateur de $\begin{pmatrix} m \\ \sigma^2 \end{pmatrix}$

④ $X \sim \mathcal{U}[\theta_1, \theta_2] \longrightarrow \mathcal{X} = [\theta_1, \theta_2]$, $E(X) = \frac{\theta_1+\theta_2}{2}$ et $V(X) = \frac{(\theta_2-\theta_1)^2}{12}$

$\bar{X} = E(X)$

$S^2 = V(X)$ $\Rightarrow \begin{cases} \bar{X} = \frac{\theta_1+\theta_2}{2} \\ S^2 = \frac{(\theta_2-\theta_1)^2}{12} \end{cases}$ système à résoudre.

$\Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = 2\bar{X} - \theta_2 \quad \cdots ① \\ \theta_1 = \theta_2 - S\sqrt{12} \cdots ② \end{cases}$ ①+② $\{ 2\theta_1 = 2\bar{X} - \sqrt{12}\,S \Rightarrow \boxed{\hat{\theta}_1 = \bar{x} - \sqrt{3}\,s}$

$\hat{\theta}_2 = \bar{x} + \sqrt{3}\,s$

d'où $\begin{pmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} - \sqrt{3}\,s \\ \bar{x} + \sqrt{3}\,s \end{pmatrix}$ est l'estimateur de $\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$

(*) Trouver un E.S.B apporté par un n-éch de $X \sim N(m, \sigma^2)$

Solution:

E.S.B pour m

on sait que $E(\bar{X}) = m = E(X)$

donc $\bar{X}$ est un E.S.B pour m

$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum X_i$ = moyenne empirique

$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n} \sum X_i\right)$
$= \frac{1}{n} \sum E(X_i) = \frac{1}{n} \sum m$
$= \frac{1}{\cancel{n}} \cancel{n} m = m$

E.S.B pour σ^2

de même on sait que $E(S^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$

car: $\frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

Si la v.a $Y \sim \chi^2_n$
$\Rightarrow E(Y) = n$
$V(Y) = 2n.$

$\Rightarrow E\left(\frac{nS^2}{\sigma^2}\right) = n-1 \Rightarrow E(S^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$

comme $E(S^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2 \neq \sigma^2 \Rightarrow S^2$ est un estimateur biaisé de σ^2

mais $\lim\limits_{n \to \infty} E(S^2) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n-1}{n} \sigma^2 = \sigma^2$

$\Rightarrow S^2$ est un estimateur asymptotiquement sans biais de σ^2

or $E\left(\frac{n}{n-1} S^2\right) = \frac{n}{n-1} E(S^2) = \frac{\cancel{n}}{\cancel{n-1}} \frac{\cancel{n-1}}{\cancel{n}} \sigma^2 = \sigma^2$

d'où $\frac{n}{n-1} S^2$ est un E.S.B pour σ^2

Remarque:

- $S^2 = \frac{1}{n} \sum (X_i - \bar{X})^2$ = Variance empirique.
- $\frac{n}{n-1} S^2 = \frac{n}{n-1} \frac{1}{n} \sum (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2 = S'^2$
= Variance empirique corrigé

E.S.B pour $\begin{pmatrix} m \\ \sigma^2 \end{pmatrix}$

on a: $\begin{pmatrix} \bar{X} \\ S^2 \end{pmatrix}$ Estimateur biaisé de $\begin{pmatrix} m \\ \sigma^2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \bar{X} \\ S'^2 \end{pmatrix}$ E.S.B de $\begin{pmatrix} m \\ \sigma^2 \end{pmatrix}$

(*) trouver l'e.m.v des paramètres des v.a suivantes :

① $X \sim \mathcal{B}(p)$

② $X \sim \mathcal{U}[0,\theta]$

③ $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$

<u>solution:</u>

① $X \sim \mathcal{B}(p) \to \mathcal{X} = \{0,1\}$. $P(X=x) = p^x q^{1-x}$.

estimateur de maximum de vraisemblance (e.m.v).

- $L(\underset{\sim}{x},p) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i} q^{1-x_i} = p^{\sum x_i} (1-p)^{n-\sum x_i}$
- $\log L(\underset{\sim}{x},p) = \sum x_i \log(p) + (n-\sum x_i)\log(1-p)$
- $\frac{\partial}{\partial p}\log L(\underset{\sim}{x},p) = 0 \Rightarrow \frac{\sum x_i}{p} - \frac{(n-\sum x_i)}{1-p} = 0$

$$\Rightarrow \frac{(1-p)\sum x_i - (n-\sum x_i)p}{p(1-p)} = 0$$

$\Rightarrow (1-p)\sum x_i - (n-\sum x_i)p = 0$

$\Rightarrow \sum x_i - \cancel{p\sum x_i} - np + \cancel{p\sum x_i} = 0$

$\Rightarrow p = \frac{\sum x_i}{n} \Rightarrow \boxed{\hat{p} = \bar{x}}$

- $\frac{\partial^2}{\partial p^2}\log L(\underset{\sim}{x},p) \overset{?}{<} 0 \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial p^2}\log L(\underset{\sim}{x},p) = -\frac{\sum x_i}{p^2} - \frac{n-\sum x_i}{(1-p)^2} \overset{?}{<} 0$

on a $\hat{p} = \bar{x} \Rightarrow -\frac{\sum x_i}{\bar{x}^2} - \frac{n-\sum x_i}{(1-\bar{x})^2} = -\frac{n\cancel{\bar{x}}}{\bar{x}^{\cancel{2}}} - \frac{n\cancel{(1-\bar{x})}}{(1-\bar{x})^{\cancel{2}}} = \frac{-n}{\bar{x}} - \frac{n}{(1-\bar{x})}$

$= \frac{-n(1-\bar{x}) - n\bar{x}}{\bar{x}(1-\bar{x})} = \frac{-n}{\bar{x}(1-\bar{x})} < 0$

car $n>0$ et $x_i \in \{0,1\}$
$\Rightarrow \bar{x} \geq 0$ et $(1-\bar{x}) \geq 0$

$\Rightarrow \boxed{\hat{p} = \bar{x}}$ est l'e.m.v de p.

② $X \sim \mathcal{U}[0,\theta] \to \mathcal{X} = [0,\theta]$ et $f_X(x) = \frac{1}{\theta}\mathbb{1}_{[0,\theta]}(x)$.

- $L(\underset{\sim}{x},\theta) = \prod f_{X_i}(x_i) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n \mathbb{1}_{\{\min x_i \geq 0\}} \mathbb{1}_{\{\max x_i \leq \theta\}}$

- $\log L(\underset{\sim}{x}, \theta) = -n \log \theta$
- $\frac{\partial}{\partial \theta} \log L(\underset{\sim}{x}, \theta) = 0 \Rightarrow -\frac{n}{\theta} = 0 \Rightarrow -n = 0$ a aucun sens

Remarque: l'estimateur toujours en fonction de x_i

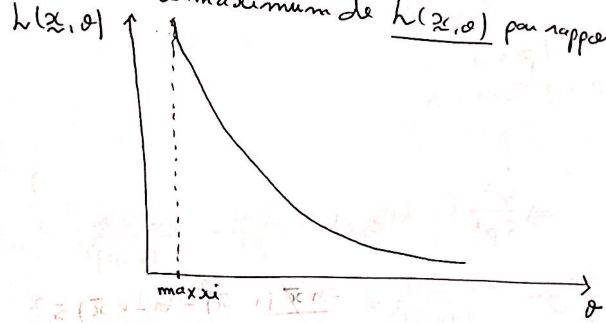
donc toujours si le support de la v.a X dépend de paramètre on fait une étude directe pour donner l'e.m.v de (ou des) paramètre (ou paramètres).

Comme dans cet exemple $X \leadsto U_{[0,\theta]}$

le support de la v.a X est $\mathcal{X} = [0, \theta]$ dépend de paramètre θ

On a: $L(\underset{\sim}{x}, \theta) = \frac{1}{\theta^n} 1\!\!1_{\{\max x_i \leq \theta\}} 1\!\!1_{\{\min x_i \geq 0\}}$.

On cherche le maximum de $\underline{L(\underset{\sim}{x}, \theta)}$ par rapport à $\underline{\underline{\theta}}$.



$L(\underset{\sim}{x}, \theta) = \frac{1}{\theta^n} 1\!\!1_{\{\max x_i \leq \theta\}} 1\!\!1_{\{\min x_i \geq 0\}}$.

comme $\max x_i \leq \theta \Rightarrow \theta \in [\max x_i, +\infty[$

$L(\underset{\sim}{x}, \theta)$ atteint son maximum quand $\theta = \max x_i$ (c.à.d pour la plus petite valeur de θ)

$\Rightarrow \boxed{\hat{\theta} = \max x_i \text{ est e.m.v pour } \theta}$

si $\theta \in \mathbb{R}^k$, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$

dans le cas vectoriel il est très difficile de vérifier que tous point stationnaire (dérivée première est nulle) est un maximum.

③ $X \sim N(m, \sigma^2)$, $\mathcal{X} = \mathbb{R}$, $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2}$

$\cdot L(\underset{\sim}{x}, m, \sigma^2) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{\sum(x_i - m)^2}{2\sigma^2}}$

$\cdot \log L(\underset{\sim}{x}, m, \sigma^2) = -n\log(\sqrt{2\pi}) - \frac{n}{2}\log \sigma^2 - \frac{\sum(x_i - m)^2}{2\sigma^2}$

$$\begin{cases} \cdot \frac{\partial}{\partial m}\log L(\underset{\sim}{x}, m, \sigma^2) = 0 \\ \cdot \frac{\partial}{\partial \sigma^2}\log L(\underset{\sim}{x}, m, \sigma^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sum(x_i - m)}{\sigma^2} = 0 & \text{---- ①} \\ \frac{-n}{2\sigma^2} + \frac{\sum(x_i - m)^2}{2\sigma^4} = 0 & \text{--- ②} \end{cases}$$

① $\longrightarrow \sum x_i - nm = 0 \Rightarrow \boxed{\hat{m} = \bar{x}}$

② $\longrightarrow -n\sigma^2 + \sum(x_i - m)^2 = 0$ comme $\hat{m} = \bar{x}$ on remplace m par son estimateur $\bar{x}$

$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n} = S^2 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = S^2$

d'où $\binom{\bar{x}}{s^2}$ est l'e.m.v de $\binom{m}{\sigma^2}$.

④ Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. trouver l'e.m.v de $\lambda e^{-\lambda} = P(X=1)$.

<u>Solution:</u>

$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\mathcal{X} = \mathbb{N}$, $P(X = x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$ donc $P(X=1) = \underline{e^{-\lambda}\lambda}$

alors on cherche l'e.m.v pour λ.

$\cdot L(\underset{\sim}{x}, \lambda) = e^{-n\lambda}\frac{\lambda^{\sum x_i}}{\prod x_i!}$ $\cdot \log L(\underset{\sim}{x}, \lambda) = -n\lambda + \sum x_i \log\lambda + \log\left(\frac{1}{\prod x_i!}\right)$

$\cdot \frac{\partial}{\partial\lambda}\log L(\underset{\sim}{x}, \lambda) = 0 \Rightarrow -n + \frac{\sum x_i}{\lambda} = 0 \Rightarrow -n\lambda + \sum x_i = 0 \Rightarrow \boxed{\hat{\lambda} = \bar{x}}$

$\cdot \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\log L(\underset{\sim}{x}, \lambda) \overset{?}{<} 0 \Rightarrow -\frac{\sum x_i}{\lambda^2}\Big|_{\hat{\lambda}=\bar{x}} \Rightarrow \frac{-n\bar{x}}{\bar{x}^2} = \frac{-n}{\bar{x}} < 0$ car $x_i \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow \frac{\sum x_i}{n} = \bar{x} \geq 0$

d'où $\boxed{\hat{\lambda} = \bar{x}}$ est l'e.m.v pour λ donc l'e.m.v pour $\lambda e^{-\lambda}$ $\boxed{= \bar{x}e^{-\bar{x}}}$

on remplace λ par son e.m.v dans l'expression.

(*) ① $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$; Donner l'E.S.B.V.U.M de m.

② $X \sim \mathcal{U}[0, \theta]$: Donner l'E.S.B.V.U.M de θ.

Solution:

①. On a montré que $\underset{\overset{\parallel}{}}{\overset{T}{}}\bar{X}$ est un E.S.B pour m dans les exemples précédents.

• $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ ⫫ de m

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2} = \underbrace{\frac{e^{-\frac{m^2}{\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}}_{C(m)} \underbrace{e^{\frac{m x}{\sigma^2}}}_{\{\alpha(m) R(x)\}} \underbrace{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}_{h(x)}$$

$\Rightarrow \overset{S}{\overset{\parallel}{\sum x_i}}$ est une stat exh et complète (Voir page 23 de cours)

alors $E(T|S)$ est l'unique E.S.B.V.U.M pour m.

$E(\bar{X} / \sum X_i) = E(\frac{1}{n}\sum X_i / \sum X_i) = \underset{\text{E.S.B.V.U.M}}{\bar{X}}$ car $E(f(S)|S) = f(S)$.

② $X \sim \mathcal{U}_{[0,\theta]}$, $\mathcal{X} = [0, \theta]$.

a) E.S.B pour θ.

par la méthode des moments : $\bar{X} = E(X) = \frac{\theta}{2} \Rightarrow \overset{T}{\overset{\parallel}{\hat{\theta}}} = 2\bar{X}$

$\Rightarrow 2\bar{X}$ est un estimateur pour θ il reste de vérifier est-ce-qu'il est sans biais ou biaisé.

$\boxed{E(2\bar{X}) = 2E(\bar{X}) = 2E(X) = 2\frac{\theta}{2} = \theta} \Rightarrow 2\bar{X}$ est un E.S.B pour θ

toujours $E(\bar{X}) = E(X)$ ∀ la v.a X.

b) stat exh et complète pour θ

stat exh on a trouvé que $\max x_i = S$ est une stat exh pour θ donc il reste de vérifier est ce quelle est complète.

le support de la v.a $X = \mathcal{X} = [0, \theta] \notin \mathcal{F}(\mathcal{E})$ famille exponentielle.

$E(h(S)) = 0 \Rightarrow h(s) = 0$

on cherche $E(S) = ??$ où $S = \max X_i$

$P(S \leq s) = P(\max X_i \leq s) = P(X_1 \leq s, \dots, X_n \leq s) = P(X_1 \leq s) \dots P(X_n \leq s)$

$= [P(X \leq s)]^n$ car toutes les v.a X_i sont i.i.d

$\Rightarrow f_S(s) = \frac{\partial [F_X(s)]^n}{\partial s} = n f_X(s)[F_X(s)]^{n-1}$

• $P(S \leq s) = F_S(s)$ • $P(X \leq s) = F_X(s)$	$f_S(s) = \frac{\partial F_S(s)}{\partial s}$

$f_S(s) = n \frac{1}{\theta^n} s^{n-1} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(s)$

$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \int_0^x \frac{1}{\theta} dt & \text{si } 0 \leq x < \theta \\ 1 & \text{si } x \geq \theta \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{\theta} & \text{si } 0 \leq x < \theta \\ 1 & \text{si } x \geq \theta \end{cases}$

$\Rightarrow E(h(S)) = 0 \Rightarrow \int_0^\theta h(s) f_S(s)\, ds = 0$

$\Rightarrow \int_0^\theta h(s) n \frac{1}{\theta^n} s^{n-1}\, ds = 0$ on a: $\begin{cases} \frac{n}{\theta^n} \neq 0 \ \forall n > 0 \text{ et } \theta > 0 \\ s^{n-1} \neq 0 \ \forall n > 0 \\ \Rightarrow h(s) = 0 \end{cases}$

d'où S est une stat exh et complète.

de ⓐ et ⓑ: $E(T/S) = E(2\overline{X}/\max X_i)$ est l'unique E.S.B.V.U.M pour θ.

Remarque: ——— est difficile pour le calculer pour faciliter le calcul de E.S.B.V.U.M toujours on cherche un E.S.B à partir de l'e.m.v (non plus la méthode des moments)

① donc d'après l'exemple précédant on a trouvé que $\max X_i$ est e.m.v pour θ.

. est-ce que $\max X_i$ est un E.S.B (est-ce que e.m.v est un E.S.B pour θ).

$\underset{S}{\underset{\shortparallel}{\max X_i}}$ est E.S.B ssi $E(\max X_i) = \theta$.

$E(S) = \int_0^\theta s f_S(s)\, ds = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta s^n\, ds = \boxed{\frac{n}{n+1}\theta} \neq \theta$

$\Rightarrow S$ est un E.B pour θ mais $\boxed{\frac{n+1}{n} S} = T$ est un E.S.B pour θ

② on a prouvé que $S = \max X_i$ est une stat exh et complète pour θ.

de ① et ② $E(T|S) = E\left(\frac{n+1}{n} S / S\right) = \frac{n+1}{n} S = \frac{n+1}{n} \max X_i$

est l'unique E.S.B.V.U.M pour θ.

* Trouver l'estimateur efficace de m dans le cas où σ^2 connue d'une v.a $X \sim N(m, \sigma^2)$.

<u>Solution:</u>

n-éch de $X \sim N(m, \sigma^2)$ avec σ^2 connue

$\mathcal{X} = \mathbb{R}$, $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2}$.

<u>1ère méthode</u>: <u>théorème 20</u>:

T efficace $\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial\theta} \log L(x, \theta) = k(\theta)\left[T(x) - g(\theta)\right]$

- $L(x, m) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i - m)^2}$
- $\log L(x, m) = -n\log(\sigma\sqrt{2\pi}) - \frac{\sum(x_i - m)^2}{2\sigma^2}$
- $\frac{\partial}{\partial m}\log L(x, m) = \frac{\sum(x_i - m)}{\sigma^2} = \frac{\sum x_i}{\sigma^2} - \frac{nm}{\sigma^2}$

$$= \frac{n}{\sigma^2}\left[\frac{\sum x_i}{n} - m\right] = \underbrace{\frac{n}{\sigma^2}}\left[\underbrace{\bar{x}} - \underbrace{m}\right]$$

d'où $T(x) = \bar{x}$ est l'estimateur efficace pour m.

<u>2ème méthode</u>: <u>forme exponentielle</u> <u>théorème 21</u>

- $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ ∀ m
- $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$
- $\log f_X(x) = -\log(\sigma\sqrt{2\pi}) - \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} = -\log(\sigma\sqrt{2\pi}) - \frac{(x^2 + m^2 - 2xm)}{2\sigma^2}$

$$= -\log(\sigma\sqrt{2\pi}) - \frac{x^2}{2\sigma^2} - \frac{m^2}{2\sigma^2} + \frac{2xm}{2\sigma^2} = \underbrace{x}_{a(x)}\underbrace{\frac{m}{\sigma^2}}_{\alpha(m)} \underbrace{- \frac{m^2}{2\sigma^2}}_{B(m)} \underbrace{- \log(\sigma\sqrt{2\pi}) - \frac{x^2}{2\sigma^2}}_{b(x)}$$

$\Rightarrow \begin{cases} a(x) = x \\ \alpha(m) = m/\sigma^2 \\ B(m) = m^2/2\sigma^2 \end{cases}$ et $b(x) = -\left[\log(\sigma\sqrt{2\pi}) + x^2/2\sigma^2\right]$

seule la fonction : $g(m) = \frac{-\beta'(m)}{\alpha'(m)}$ qui peut être estimée efficacement

$\beta'(m) = \frac{\partial \beta(m)}{\partial m} = \frac{-m}{\sigma^2}$, $\alpha'(m) = \frac{\partial \alpha(m)}{\partial m} = \frac{1}{\sigma^2}$

$\Rightarrow g(m) = \frac{-(-m/\sigma^2)}{1/\sigma^2} = \boxed{m}$ $\Rightarrow$ que la fonction $g(m) = m$ qui peut être estimée efficacement

<u>et</u> $T(x) = \frac{1}{n}\sum a(x_i)$ est le seul estimateur efficace pour m

$$\boxed{T(x) = \frac{1}{n}\sum x_i = \bar{x}}$$

<u>de plus</u> : $V(T) = \frac{g'(m)}{n\alpha'(m)} = \frac{\frac{\partial \overset{g(m)}{\overset{\shortparallel}{m}}}{\partial m}}{n\frac{\partial \alpha(m)}{\partial m}} = \frac{1}{n \cdot \frac{1}{\sigma^2}} = \boxed{\frac{\sigma^2}{n}}$

• n-éch de $X \sim N(m, \sigma^2)$ avec m et σ^2 inconnus

trouver E.S.B.V.U.M pour (m, σ^2).

<u>solution :</u>

① on a trouvé que $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ S'^2 \end{pmatrix} = T$ E.S.B pour $\begin{pmatrix} m \\ \sigma^2 \end{pmatrix}$.

② stat exh et complète pour (m, σ^2)

on a $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ ⫫ de m et de σ^2

$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp - \frac{x^2 + m^2 - 2mx}{2\sigma^2} = \underbrace{\frac{e^{-\frac{m^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}}_{c(m,\sigma^2)} \exp\left[\underbrace{\frac{mx}{\sigma^2}}_{a_1(x)\,\alpha_1(m,\sigma^2)} - \underbrace{\frac{x^2}{2\sigma^2}}_{a_2(x)\,\alpha_2(m,\sigma^2)}\right] \times \underbrace{1}_{h(x)}$

$\Rightarrow \sum a_1(x) = \sum x_i$ stat exh pour m et $\sum a_2(x) = \sum x_i^2$ stat exh pour σ^2

d'où $S = (\sum x_i, \sum x_i^2)$ stat exh et complète pour (m, σ^2)

car la v.a $X \in \mathcal{F}^2(\mathcal{E})$ et comme la dim $S = 2$ et la dim des paramètres $= [(m, \sigma^2)]$ $\Rightarrow$ la stat exh déterminée à partir de la forme exponentielle est complète.

de ① et ②

$$E[T/S] = E\left(\left(\frac{\sum X_i}{n}, S'^2\right) / \left(\sum X_i, \sum X_i^2\right)\right] = T = \left(\bar{X}, S'^2\right)$$

est le seul E.S.B.V.U.M pour (m, σ^2)

* $T = (\bar{X}, S'^2)$ est-il-efficace :

T efficace $\Leftrightarrow V_\theta^T = B.C.R.$ où V_θ^T = matrice var-cov de T

où $B.C.R = J\, I_n^{-1}\, J'$ $\quad \Big|\; J = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(m,\sigma^2)}{\partial m} & \frac{\partial g_1(m,\sigma^2)}{\partial \sigma^2} \\ \frac{\partial g_2(m,\sigma^2)}{\partial m} & \frac{\partial g_2(m,\sigma^2)}{\partial \sigma^2} \end{pmatrix}$

ou $g(m,\sigma^2) = \left(g_1(m,\sigma^2), g_2(m,\sigma^2)\right) = (m, \sigma^2)$ } voir le cours page 31

$\Rightarrow J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ = matrice identitée $= I$

I_n^{-1} = l'inverse de la matrice d'information de fisher

on a trouvée dans les exp précédants que $I(m,\sigma^2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sigma^4} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow I_n(m,\sigma^2) = n\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sigma^4} \end{pmatrix} \Rightarrow I_n^{-1} = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & 2\sigma^4 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \underline{B.C.R} = n^{-1} I^{-1}(m,\sigma^2) = \frac{1}{n} I^{-1}(m,\sigma^2) = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{n} & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma^4}{n} \end{pmatrix}}$

le calcul de $V_\theta^T = V_{(m,\sigma^2)}^{(\bar{X}, S'^2)}$

$V = \begin{bmatrix} Var\,\bar{X} & cov(\bar{X}, S'^2) \\ cov(\bar{X}, S'^2) & Var\, S'^2 \end{bmatrix}$ où $V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{Var(X)}{n}$

$V(S'^2) = ??$ on a : $\frac{n-1}{\sigma^2} S'^2 \rightsquigarrow \chi^2_{n-1}$

$\Rightarrow V\left(\frac{(n-1)S'^2}{\sigma^2}\right) = 2(n-1) \Rightarrow V(S'^2)\left(\frac{n-1}{\sigma^2}\right)^2 = 2(n-1) \Rightarrow V(S'^2) = \frac{2\sigma^4}{(n-1)}$

alors $V_{(m,\sigma^2)}^{(\bar{X}, S'^2)} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{n} & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma^4}{n-1} \end{pmatrix}$ la $cov(\bar{X}, S'^2) = 0$ car $\bar{X} \perp\!\!\!\perp S'^2$

on a : $V_{(m,\sigma^2)}^{(\bar{X}, S'^2)} > B.C.R$ car $\frac{2\sigma^4}{n-1} > \frac{2\sigma^4}{n} \Rightarrow T = (\bar{X}, S'^2)$ n'est pas efficace.