Université.Badji Mokhtar.Annaba. **année 2020-2021**

<u>Solution série1 de S.C</u>

<u>Ex1</u>:

1) Soit $X_t = a+b\varepsilon_t+c\varepsilon_{t-2}$ où $\varepsilon_t \backsim i.i.d.N(0,\sigma^2)$. Pour vérifier si le processus est stationnaire, il faut calculer l'espérance, la variance et la fonction d'ACV.

*

$$\begin{aligned} E(X_t) &= a + bE(\varepsilon_t) + cE(\varepsilon_{t-2}) \\ &= a, \text{ cst.} \end{aligned}$$

*

$$\begin{aligned} V(X_t) &= V(a + b\varepsilon_t + c\varepsilon_{t-2}) \\ &= \left(b^2 + c^2\right)\sigma^2, \text{cst.} \end{aligned}$$

*Calculons la covariance pour $h \geq 0$ (on rappelle que γ_h est paire)

$$\begin{aligned} \gamma_h &= Cov(X_t, X_{t-h}) \\ &= Cov(a + b\varepsilon_t + c\varepsilon_{t-2}, a + b\varepsilon_{t-h} + c\varepsilon_{t-h-2}) \\ &= b^2Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-h}) + bcCov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-h-2}) + cbCov(\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-h}) + c^2Cov(\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-h-2}) \\ &= \begin{cases} (b^2 + c^2)\sigma^2 & \text{si } h = 0 \\ cb\sigma^2 & \text{si } h = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

On remarque que γ_h ne dépend pas de t, d'où le processus est stationnaire. (A vous de faire 2 et 3).

4) Soit $X_t = \sum_{j=0}^{k} a_j\varepsilon_{t-j},\ a_j \in \mathbb{R}$,alors

*

$$\begin{aligned} E(X_t) &= E\left(\sum_{j=0}^{k} a_j\varepsilon_{t-j}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{k} a_jE(\varepsilon_{t-j}) \\ &= 0, \quad \text{cst.} \end{aligned}$$

*Puisque $V(X_t) = \gamma_0$,alors on calcule γ_h

$$\begin{aligned} \gamma_h &= Cov(X_t, X_{t-h}) \\ &= Cov\left(\sum_{j=0}^{k} a_j\varepsilon_{t-j}, \sum_{i=0}^{k} a_i\varepsilon_{t-h-i}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{k} a_ja_iCov(\varepsilon_{t-j}, \varepsilon_{t-h-i}) \\ &= \begin{cases} \sigma^2 \sum\limits_{i=0}^{k} a_{h+i}a_i & \text{si } j = h + i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

La fonction de covariance ne dépend pas de t, donc le processus est stationnaire.
<u>Ex2:</u>
I) 1) $Z_t = \varepsilon_t^2 - 1$, où $\varepsilon_t \backsim i.i.d\,(0,1)$, vérifions que Z_t est un bruit blanc faible:
*

$$\begin{aligned} E(Z_t) &= E\left(\varepsilon_t^2 - 1\right) \\ &= E\left(\varepsilon_t^2\right) - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

*

$$\begin{aligned} V(Z_t) &= V\left(\varepsilon_t^2 - 1\right) \\ &= V\left(\varepsilon_t^2\right) \\ &= E\left(\varepsilon_t^4\right) - E\left(\varepsilon_t^2\right)^2 \\ &= E\left(\varepsilon_t^4\right) - 1 > 0 \end{aligned}$$

car en utilisant l'inégalité de Jensen avec $\varphi(x) = x^2$ qui est strictement convexe, on a $E\left(\varepsilon_t^4\right) > E\left(\varepsilon_t^2\right)^2$d'où le résultat et c'est fini car le moment d'ordre 4 est fini.
*Pour $h \neq 0$,on a

$$\begin{aligned} \gamma_h &= Cov\,(Z_t, Z_{t-h}) \\ &= Cov\left(\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-h}^2\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc Z_t est un bruit blanc faible et c'est aussi un bruit blanc fort car $\varepsilon_t \backsim i.i.d \Longrightarrow \varepsilon_t^k \backsim i.i.d \Longrightarrow \varepsilon_t^2 - 1 = Z_t \backsim i.i.d.$

2) $Z_t = \varepsilon_t \varepsilon_{t-1}$. (A vous de manipuler).
II) Soit $\varepsilon_t \backsim i.i.d.N\,(0,1)$ et soit k un entier positif et $Z_t = \varepsilon_t \varepsilon_{t-1} ... \varepsilon_{t-k}$.Montrons que Z_t est un bruit blanc faible.
*

$$\begin{aligned} E(Z_t) &= E\left(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1} ... \varepsilon_{t-k}\right) \\ &= E(\varepsilon_t) \cdots E(\varepsilon_t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

*

$$\begin{aligned} V(Z_t) &= V\left(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1} ... \varepsilon_{t-k}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

*Pour $h \neq 0$

$$\begin{aligned} \gamma_h &= Cov\,(Z_t, Z_{t-h}) \\ &= E\left(\left(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1} ... \varepsilon_{t-k}\right)\left(\varepsilon_{t-h} \varepsilon_{t-h-1} ... \varepsilon_{t-h-k}\right)\right) \\ &= E(\varepsilon_t)\, E\left(\left(\varepsilon_{t-1} ... \varepsilon_{t-k}\right)\left(\varepsilon_{t-h} \varepsilon_{t-h-1} ... \varepsilon_{t-h-k}\right)\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc Z_t est un bruit blanc faible. Pour montrer que Z_t n'est pas un bruit blanc fort, il suffit de montrer qu'il n'est pas indépendant, pour cela calculons

$$\begin{aligned} Cov\left(Z_t^2, Z_{t-1}^2\right) &= E\left(\left(\varepsilon_t^2\varepsilon_{t-1}^2...\varepsilon_{t-k}^2\right)\left(\varepsilon_{t-1}^2\varepsilon_{t-2}^2...\varepsilon_{t-k-1}^2\right)\right) - E\left(Z_t^2\right)E\left(Z_{t-1}^2\right) \\ &= 3^k - 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Donc Z_t^2 et Z_{t-1}^2 ne sont pas indépendant d'où le processus Z_t n'est pas indépendant et par conséquent n'est pas un BB fort.

<u>Ex3:</u> Pour trouver la solution, on va itérer jusqu'a n ensuite on fait tendre n vers l'infini

1) Soit

$$\begin{aligned} X_t &= 1 + 0.3X_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= 1 + 0.3\left(1 + 0.3X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}\right) + \varepsilon_t \\ &= 1 + 0.3 + 0.3^2X_{t-2} + 0.3\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ &\vdots \\ &= 1 + 0.3 + \cdots + 0.3^{n-1} + 0.3^nX_{t-n} + 0.3^{n-1}\varepsilon_{t-n+1} + \cdots 0.3\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= \frac{1-0.3^n}{1-0.3} + 0.3^nX_{t-n} + \sum_{i=0}^{n-1} 0.3^i\varepsilon_{t-i} \end{aligned}$$

Quand $n \to \infty$, $X_t = \frac{10}{7} + \sum\limits_{i=0}^{\infty} 0.3^i\varepsilon_{t-i}$, on retrouve la représentation de Wold, cette solution est causale et stationnaire (combinaison linéaire de processus stationnaires), avec $E\left(X_t\right) = \frac{10}{7}$ et

$$\begin{aligned} \gamma_h &= Cov\left(\sum_{i=0}^{\infty} 0.3^i\varepsilon_{t-i}, \sum_{j=0}^{\infty} 0.3^j\varepsilon_{t-h-j}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} 0.3^{i+j}Cov\left(\varepsilon_{t-i}, \varepsilon_{t-h-j}\right) \\ &= \sigma^2\sum_{j=0}^{\infty} 0.3^{h+2j} \\ &= 0.3^h\sigma^2\sum_{j=0}^{\infty} 0.3^{2j} \\ &= \frac{0.3^h}{1-0.3^2}\sigma^2 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \rho_h &= \frac{\gamma_h}{\gamma_0} \\ &= 0.3^h, h \geq 0. \end{aligned}$$

2) Soit $X_t = 1 + 3X_{t-1} + \varepsilon_t$, en faisant les mêmes calculs on trouve $X_t \to \infty$ quand $n \to \infty$,

on a pas de solution causale mais on peut trouver une solution stationnaire:

$$\begin{aligned}
X_t &= -\frac{1}{3}+\frac{1}{3}X_{t+1}-\frac{1}{3}\varepsilon_{t+1} \\
&= -\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}X_{t+2}-\frac{1}{3}\varepsilon_{t+2}\right)-\frac{1}{3}\varepsilon_{t+1} \\
&= -\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^2 X_{t+2}-\left(\frac{1}{3}\right)^2 \varepsilon_{t+2}-\frac{1}{3}\varepsilon_{t+1} \\
&\vdots \\
&= -\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^n X_{t+n}-\left(\frac{1}{3}\right)^n \varepsilon_{t+n}-\cdots-\frac{1}{3}\varepsilon_{t+1}.
\end{aligned}$$

quand $n \to \infty$, la solution stationnaire est $X_t = -\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^i \varepsilon_{t+1+i}$,de moyenne $E(X_t) = -\frac{1}{2}$ et $\rho_h = \left(\frac{1}{3}\right)^h, h \geq 0$. Par la suite, on considère toujours les solutions stationnaires causales.
(A vous de faire la 3 de la même façon).
Ex4: I) Soit $X_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_t \backsim BB(0,\sigma^2)$.
1) La fonction γ_h:

$$\begin{aligned}
\gamma_h &= Cov(X_t, X_{t-h}) \\
&= Cov(\varepsilon_t+\theta\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-h}+\theta\varepsilon_{t-h-2}) \\
&= \begin{cases} (1+\theta^2)\sigma^2 & \text{si } h=0 \\ \theta\sigma^2 & \text{si } h=2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

2) Calcul de $V((X_1+X_2+X_3+X_4)/4)$ pour $\theta = 0.8$ et $\sigma^2 = 1$:

$$V((X_1+X_2+X_3+X_4)/4) = \frac{1}{16}(4\gamma_0+3\gamma_1+2\gamma_2+\gamma_3)$$

sachant que $\gamma_1 = \gamma_3 = 0$ alors

$$V((X_1+X_2+X_3+X_4)/4) = \frac{1}{16}\left(4\left(1+\theta^2\right)\sigma^2+2\theta\sigma^2\right)$$

il suffit de remplacer par les valeurs données.
Ex5: 1) Soit la suite $X_{t,n} = \sum_{k=0}^{n}\varphi^k\varepsilon_{t-k}$, pour montrer la CV en MQ on utilise le critère de Cauchy, soit $n > m > 0$, alors

$$\begin{aligned}
E(X_{t,n}-X_{t,m})^2 &= E\left(\sum_{k=m+1}^{n}\varphi^k\varepsilon_{t-k}\right)^2 \\
&\leq \left(\sum_{k=m+1}^{n}\left|\varphi^k\right|\sigma\right)^2 \to 0
\end{aligned}$$

quand $m \to \infty$, donc la suite converge en MQ. D'un autre coté

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\varphi^k\varepsilon_{t-k}\right| = \lim\uparrow\sum_{k=0}^{n}\left|\varphi^k\varepsilon_{t-k}\right|$$

existe dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, en utilisant le TCM on a

$$E\sum_{k=0}^{\infty}\left|\varphi^{k}\varepsilon_{t-k}\right|=E\left|\varepsilon_{t}\right|\sum_{k=0}^{\infty}\left|\varphi^{k}\right|<\infty$$

ce qui montre que la limite $\sum_{k=0}^{\infty}\left|\varphi^{k}\varepsilon_{t-k}\right|$ est finie presque surement. D'où le résultat.
Ex6: L'operateur retard:
1-$X_t=0.3X_{t-1}+\varepsilon_t \Longleftrightarrow (1-0.3L)\,X_t=\varepsilon_t$.
2-$X_t=\varepsilon_t-1.3\varepsilon_{t-1}+0.4\varepsilon_{t-2} \Longleftrightarrow X_t=(1-1.3L+0.4L^2)\,\varepsilon_t$.
5-$X_t+1.9X_{t-1}-0.88X_{t-2}=\varepsilon_t+0.2\varepsilon_{t-1}+0.7\varepsilon_{t-2} \Longleftrightarrow (1+1.9L-088L^2)\,X_t=(1+0.2L+0.7L^2)\,\varepsilon_t$.
Ex7: I) Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ deux processus stationnaires non corrélés, on note $E(X_t)=\mu_X$ et $E(Y_t)=\mu_Y$ alors

$$\begin{aligned}E(Z_t) &= E(X_t)+E(Y_t)\\ &= \mu_X+\mu_Y,\ \text{cst}\end{aligned}$$

d'un autre coté

$$\begin{aligned}\gamma_h(Z) &= Cov(Z_t,Z_{t-h})\\ &= Cov(X_t+Y_t,X_{t-h}+Y_{t-h})\\ &= Cov(X_t,X_{t-h})+Cov(Y_t,Y_{t-h})\\ &= \gamma_h(X)+\gamma_h(Y)\,.\ \text{indépendant de } t,\end{aligned}$$

donc le processus Z_t est stationnaire d'ordre 2, pour la densité spectrale, il suffit de remplacer $\gamma_h(Z)$ dans la définition.
IV) La densité spectrale normalisée est obtenu en divisant les 2 cotés de la définition de la DS par γ_0, alors on a la même définition avec ρ_h à la place de γ_h.

$$\rho_h=2\int_0^{\pi}2(\pi-\omega)/\pi^2\cos(\omega h)\,d\omega$$

A vous de faire les calculs.