

Ahmed Lesfari

# Distributions, analyse de FOURIER et transformation de LAPLACE

Cours et exercices





# Distributions, analyse de Fourier et transformation de Laplace

Cours et exercices

Ahmed Lesfari



- Arithmétique et cryptologie*, Gilles Bailly-Maitre, 312 pages, 2012.
- Calcul différentiel*, Marcel Grangé, 240 pages, 2012.
- Concevoir et programmer en C++*, Philippe d'Anfray, 576 pages, 2012.
- Convolution, séries et intégrales de Fourier*, Jacques Peyrière, 120 pages, 2012.
- De l'intégration aux probabilités*, Olivier Garet, Aline Kurtzmann, 504 pages, 2011.
- Distributions, analyse de Fourier et transformation de Laplace - Cours et exercices*, Ahmed Lesfari, 384 pages, 2012.
- Éléments d'analyse réelle - Rappels de cours illustrés et exercices corrigés*, Mohamed Boucetta, 288 pages, 2012.
- Épistémologie mathématique*, Henri Lombardi, 216 pages, 2011.
- L'évolution des concepts de la physique de Newton à nos jours*, Jean-Louis Farvacque, 360 pages, 2012.
- Exercices de probabilités pour futurs ingénieurs et techniciens*, Antoine Clerc, 168 pages, 2012.
- Géométrie euclidienne élémentaire*, Aziz El Kacimi Alaoui, 240 pages, 2012.
- Ingénierie Dirigée par les Modèles*, Jean-Marc Jézéquel, Benoît Combemale, Didier Vojtisek, 144 pages, 2012.
- Intégration - Intégrale de Lebesgue et introduction à l'analyse fonctionnelle*, Thierry Goudon, 192 pages, 2011.
- Introduction à l'analyse des équations de Navier-Stokes*, Pierre Dreyfuss, 168 pages, 2012.
- Introduction à l'Optimisation - 2<sup>e</sup> édition*, Jean-Christophe Culioli, 384 pages, 2012.
- Le plan, la sphère et le théorème de Jordan*, Jean-Yves Le Dimet, 144 pages, 2012.
- Recherche Opérationnelle - Tome 1 - Méthodes d'optimisation*, Jacques Teghem, 624 pages, 2012.
- Statistique mathématique*, Benoît Cadre, Céline Vial, 192 pages, 2012.
- Suites et séries numériques. Suites et séries de fonctions*, Mohammed El Amrani, 456 pages, 2011.
- Systèmes de communications numériques*, Gaël Mahé, 216 pages, 2012.
- Théorie des groupes*, Felix Ulmer, 192 pages, 2012.
- Traité de géométrie affine*, Dominique Bour, 168 pages, 2012.
- Une introduction moderne à l'algèbre linéaire*, Vincent Blanlœil, 216 pages, 2012.

ISBN 978-2-7298-76296  
©Ellipses Édition Marketing S.A., 2012  
32, rue Bargue 75740 Paris cedex 15



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).  
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

*A El Rhalia, Reda, Hicham et Imad.*



# Avant-propos

La théorie des distributions fut construite par le mathématicien L. Schwartz entre 1944 et 1950 et lui valut la médaille Fields en 1950. Comme la plupart de grandes découvertes scientifiques, la théorie de distributions est construite sur des bases provenant de travaux effectués par de nombreux chercheurs : Heaviside en 1893, Wiener en 1925, Dirac en 1926-27, Hadamard en 1932, Bochner en 1932, Leray en 1934, Sobolev en 1936, Carleman en 1944, etc. L'objectif a été de généraliser la notion de fonction, afin de donner un sens mathématique correct à des objets manipulés par les physiciens et les ingénieurs.

La théorie des distributions est importante aussi bien en mathématiques que dans plusieurs disciplines scientifiques. Elle s'est révélée être une nécessité pour le progrès de plusieurs théories en physique et en ingénierie où beaucoup de problèmes discontinus conduisent naturellement, entre autres, à des équations différentielles dont les solutions sont des distributions plutôt que des fonctions ordinaires. La théorie assure un certain nombre d'opérations indispensables auxquelles les fonctions ne se prêtent pas toujours et a apporté les outils mathématiques dont les physiciens et les ingénieurs avaient tant besoin. L'exemple le plus célèbre de distribution est l'impulsion de Dirac, indispensable aussi bien pour la formulation de la mécanique quantique qu'en analyse harmonique et en traitement du signal. Elle s'est révélée en particulier être un moyen efficace pour mieux comprendre le produit de convolution et la transformée de Fourier qui sont des instruments puissants de calcul en traitement du signal. D'ailleurs il ne faut pas être étonné que l'un des premiers articles de Schwartz sur la théorie des distributions fut publié en 1948 dans les Annales des Télécommunications (Généralisation de la notion de fonction et de dérivation ; théorie des distributions. Annales des Télécommunications, vol. 3, pp. 135-140, 1948).

Par ailleurs un autre point important qu'apporte la théorie des distributions sur celle des fonctions provient de ce que les distributions sont dérivables autant de fois que l'on veut, ce qui n'est évidemment pas le cas des fonctions. Au sens des distributions, la dérivabilité s'étend même à des fonctions discontinues, qui sont indéfiniment dérивables. L'approche utilisée par Schwartz est basée sur la

dualité dans les espaces topologiques. Il s'agit là d'un concept abstrait, profond et apparemment sans relation avec la physique. Une telle théorie nécessite donc un bagage mathématique assez poussé en analyse fonctionnelle, notamment sur la notion de convergence forte qui détermine une topologie adéquate dans des espaces de fonctions régulières ou de convergence faible dans les espaces duaux de distributions.

En physique, on rencontre souvent des problèmes faisant intervenir des ondes ou des vibrations ou encore des oscillations. Dans chaque cas, la décomposition d'une vibration en une somme de vibrations élémentaires ou harmoniques pose le problème de la représentation d'une fonction par une série trigonométrique. Cette décomposition s'appelle analyse spectrale. L'exemple le plus ancien et le plus important est donné par les séries de Fourier qui trouvent leur origine dans l'étude de problèmes de la physique. En effet, la théorie de l'analyse de Fourier (séries de Fourier et leur version "continue" intégrales de Fourier) est issue de l'étude de diverses équations de la physique mathématique, comme l'équation de la chaleur. Faute de pouvoir résoudre ces équations, on a cherché à représenter leurs solutions sous forme de séries de fonctions trigonométriques. C'est Euler, à propos d'un mémoire de Bernoulli sur les cordes vibrantes qui a posé le problème de la représentation d'une fonction par une série trigonométrique. Ce problème a été repris en 1807 par Fourier dans ses travaux concernant l'équation de la chaleur qui a affirmé que l'on pouvait représenter ainsi des classes de fonctions beaucoup plus larges que celle des fonctions analytiques. En 1822, Fourier exposa les séries et la transformation de Fourier dans son traité intitulé : *Théorie analytique de la chaleur*. Des démonstrations rigoureuses de ce fait ont ensuite été données par d'autres mathématiciens, notamment Cauchy et Dirichlet. D'autres résultats importants ont été obtenus par Dirichlet, Dini, du Bois-Reymond, Fejér, Cesàro, Kahane, Katznelson, Carleson, Kolmogorov et d'autres.

L'étude des séries de Fourier est délicate et il fallut plus d'un siècle pour éclaircir plusieurs questions relatives à ces séries. Cette étude et les difficultés qu'elle souleva a obligé les mathématiciens à formaliser des notions telles que la continuité, la dérivabilité, la convergence selon divers modes et elle est à la base de théories fondamentales : intégrales de Riemann, intégrales de Lebesgue, théorie des ensembles (Cantor 1870) ainsi que les premiers concepts de l'analyse fonctionnelle. À la suite des travaux sur les séries de Fourier émergèrent plusieurs spécialités nouvelles : analyse harmonique, théorie du signal, ondelettes et qui font encore actuellement l'objet de recherches actives. A l'heure actuelle, l'analyse de Fourier constitue l'un des moyens les plus puissants de l'analyse et intervient dans la plupart des domaines des mathématiques et de la physique. Elle constitue avec les transformées de Laplace (transformations intégrales proche des transformées de Fourier) et autres transformations inté-

grales (transformée de Fourier discrète, transformée de Fourier rapide, transformée en Z, etc.) un des outils mathématiques les plus utilisés dans plusieurs branches techniques avec des applications vastes et diverses. On les rencontre par exemple dans l'étude des signaux périodiques, des circuits électriques, des ondes cérébrales, dans la synthèse sonore, le traitement d'images, pour ne citer que quelques uns.

Cet ouvrage s'organise en trois grandes parties, respectivement intitulées : Distributions, Analyse de Fourier et Transformation de Laplace, ainsi qu'un Appendice. On trouvera une description détaillée de toutes ces notions dans l'introduction propre à chaque chapitre. Chaque chapitre commence par un exposé clair et précis de la théorie (définitions, propositions, remarques, etc.). En général, j'ai rédigé des démonstrations complètes, détaillées et accessible à un large public. Par ailleurs, le souci de rendre les notations aussi simples que possible a conduit à raisonner souvent dans le cas d'une variable avec des indications sur les quelques changements que demande le cas de plusieurs variables. De nombreux exemples se trouvent disséminés dans le texte. En outre, comme il s'adresse principalement à tous les étudiants scientifiques entrant dans un établissement d'enseignement supérieur, chaque chapitre comporte de nombreux exercices de difficulté variée complètement résolus, ainsi que des exercices proposés avec éventuellement des réponses ou des indications. Certains exercices ont fait l'objet de questions d'examen au cours des dernières années. Par ailleurs parmi ces exercices il y en a des classiques, que l'on retrouvera certainement ailleurs, et d'autres qui sont vraisemblablement originaux. A la fin, j'ai inclus une bibliographie comportant un petit nombre d'ouvrages fondamentaux facilement accessibles. C'est avec reconnaissance que j'accueillerai les critiques et suggestions que les lecteurs voudront bien me faire parvenir.

Cet ouvrage est destiné aux étudiants de licence ou master de mathématiques (L2, L3, M1) ainsi qu'aux élèves des grandes écoles scientifiques et techniques. Il peut également être utile aux enseignants.

E-mail : lesfariahmed@yahoo.fr



# Table des matières

<b>I DISTRIBUTIONS</b>	<b>13</b>
<b>1 Définitions et exemples</b>	<b>15</b>
1.1 Espace des fonctions test $\mathcal{D}$ . . . . .	16
1.2 Définition d'une distribution . . . . .	18
1.3 Exemples de distributions . . . . .	20
1.3.1 Fonctions localement sommables . . . . .	20
1.3.2 Distribution de Dirac . . . . .	24
1.3.3 Mesures . . . . .	25
1.4 Quelques définitions et propriétés locales . . . . .	25
1.5 Extension de l'espace $\mathcal{D}$ : espaces $\mathcal{C}$ , $\mathcal{E}$ et $\mathcal{S}$	28
1.6 Exercices résolus . . . . .	29
1.7 Exercices proposés . . . . .	37
<b>2 Dérivation des distributions</b>	<b>41</b>
2.1 Définition et propriétés . . . . .	42
2.2 Exemples . . . . .	43
2.2.1 Dérivée de la fonction d'Heaviside	43
2.2.2 Dérivée de la distribution de Dirac . . . . .	43
2.2.3 Dérivée d'une fonction discontinue . . . . .	44
2.3 Extension au cas de plusieurs variables . . . . .	45
2.4 Exercices résolus . . . . .	46
2.5 Exercices proposés . . . . .	63
<b>3 Opérations élémentaires</b>	<b>67</b>
3.1 Multiplication des distributions . . . . .	67
3.2 Translation d'une distribution . . . . .	69
3.3 Changement d'échelle . . . . .	70
3.4 Transposée et parité d'une distribution . . . . .	70
3.5 Exercices résolus . . . . .	71
3.6 Exercices proposés . . . . .	81

<b>4 Convergence des distributions</b>	<b>85</b>
4.1 Définitions et propriétés . . . . .	85
4.2 Exercices résolus . . . . .	89
4.3 Exercices proposés . . . . .	101
<b>5 Convolution</b>	<b>105</b>
5.1 Produit tensoriel . . . . .	105
5.2 Convolution des fonctions . . . . .	110
5.3 Convolution des distributions . . . . .	113
5.4 Algèbre de convolution . . . . .	118
5.5 Équation de convolution . . . . .	119
5.5.1 Définitions et propriétés . . . . .	119
5.5.2 Opérateurs différentiels à coefficients constants . . . . .	121
5.5.3 Équations différentielles linéaires à coefficients constants	124
5.6 Exercices résolus . . . . .	126
5.7 Exercices proposés . . . . .	136
<b>II ANALYSE DE FOURIER</b>	<b>139</b>
<b>6 Séries de Fourier</b>	<b>141</b>
6.1 Séries trigonométriques . . . . .	142
6.2 Séries de Fourier, Théorème de Dirichlet . . . . .	147
6.3 Cesaro, Fejér, Jordan et Weierstrass . . . . .	164
6.4 Égalité de Parseval et inégalité de Bessel . . . . .	169
6.5 Séries de Fourier des distributions . . . . .	173
6.6 Exercices résolus . . . . .	180
6.7 Exercices proposés . . . . .	224
<b>7 Transformée de Fourier</b>	<b>235</b>
7.1 Transformée de Fourier dans $\mathcal{L}^1$ . . . . .	236
7.2 Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}$ . . . . .	243
7.3 Transformée de Fourier des distributions . . . . .	248
7.4 Transformée de Fourier dans $\mathcal{L}^2$ . . . . .	257
7.5 Transformée de Fourier à plusieurs variables . . . . .	261
7.6 Exercices résolus . . . . .	264
7.7 Exercices proposés . . . . .	284

<b>III TRANSFORMATION DE LAPLACE</b>	<b>289</b>
<b>8 Transformée de Laplace</b>	<b>291</b>
8.1 Transformée de Laplace des fonctions . . . . .	291
8.2 Transformée de Laplace des distributions . . . . .	303
8.3 Applications . . . . .	307
8.3.1 Équations différentielles . . . . .	307
8.3.2 Résolution des équations de convolution . . . . .	312
8.3.3 Résolution des équations intégrales . . . . .	313
8.3.4 Etude de la stabilité de quelques systèmes non-linaires .	316
8.4 Exercices résolus . . . . .	322
8.5 Exercices proposés . . . . .	358
<b>9 Appendice</b>	<b>365</b>
9.1 Éléments de topologie . . . . .	365
9.2 Mesure et intégrale de Lebesgue . . . . .	371
<b>Bibliographie</b>	<b>379</b>
<b>Index</b>	<b>381</b>



Première partie

# DISTRIBUTIONS



# Chapitre 1

## Définitions et exemples

### Introduction

Dans ce chapitre on introduit tout d'abord un espace de base, noté  $\mathcal{D}$ , constitué de fonctions indéfiniment dérivables à support borné. Ensuite on donne les exemples 1.1.3 et 1.1.4 de fonctions appartenant à l'espace  $\mathcal{D}$ . Ces fonctions sont souvent utilisées aussi bien dans les démonstrations de quelques théorèmes que dans la résolution de nombreux exercices. Une distribution  $T$  est une fonctionnelle linéaire

$$T : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}(\text{ou } \mathbb{C}), \quad \varphi \longmapsto \langle T, \varphi \rangle,$$

et continue (en un sens qui sera précisé) sur l'espace  $\mathcal{D}$ . On donne d'autres définitions équivalentes, utiles en pratique. Les distributions forment un espace vectoriel, noté  $\mathcal{D}'$ , dual de  $\mathcal{D}$ . On montre que les fonctions localement sommables déterminent des distributions :

$$\mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}(\text{ou } \mathbb{C}), \quad \varphi \longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx.$$

Ce résultat nous sera d'un grand recours pour la suite car pour définir les opérations sur les distributions on commence tout d'abord par les définir sur les fonctions localement sommables et ensuite on généralise les définitions obtenues à l'ensemble des distributions. Un autre exemple important est la distribution  $\delta$  de Dirac (elle représente une masse ou une charge +1 placée à l'origine). On la définit d'une manière rigoureuse et on explique pourquoi elle ne peut pas être une fonction. Ensuite on définit une mesure comme étant une fonctionnelle linéaire continue (dans un sens qui sera précisé) sur l'espace  $\mathcal{C}$  des fonctions continues à support borné. On montre que toute mesure est une distribution et que la réciproque n'est pas nécessairement vraie. La distribution  $\delta$  de Dirac

est une mesure. A partir de quelques définitions locales sur des ouverts recouvrant  $\mathbb{R}^n$ , on reconstitue la définition globale d'une distribution sur  $\mathbb{R}^n$ . C'est l'objet du théorème du recollement par morceaux, que nous démontrons. Ceci nous permet d'introduire la notion de support d'une distribution. Nous verrons qu'une distribution particulière peut admettre une extension à un espace plus large que  $\mathcal{D}$ . Enfin plusieurs exercices concernant la valeur principale de Cauchy, les supports des fonctions et des distributions, la parité des distributions, les parties finies de Hadamard, etc., sont traités en détail. Les exercices 1.6.1 et 1.6.3 sont très importants et seront souvent utilisés par la suite.

## 1.1 Espace des fonctions test $\mathcal{D}$

**Définition 1.1.1** *On définit le support d'une fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) par*

$$\text{supp } f = \text{adh } \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\},$$

*c'est-à-dire l'adhérence de l'ensemble des  $x$  tels que  $f(x)$  est non identiquement nulle. Autrement dit, c'est le plus petit ensemble fermé en dehors duquel  $f$  est identiquement nulle.*

**Exemple 1.1.1** *Soit  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $r = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ . On pose*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-r^2}} & \text{si } r < 1 \\ 0 & \text{si } r \geq 1 \end{cases}$$

*On a  $\text{supp } f = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$  ; la boule de centre 0 et de rayon 1.*

**Définition 1.1.2** *On désigne par  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , ou tout simplement,  $\mathcal{D}$  l'ensemble des fonctions indéfiniment dérивables à support borné*

$$\mathcal{D} = \{\varphi \in C^\infty : \text{supp } \varphi \text{ borné}\}.$$

*Cet ensemble s'appelle espace de base et ses éléments fonctions de base (ou fonctions tests).*

Notons que  $\mathcal{D}$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  (si  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , alors  $\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \in \mathcal{D}$ ) de dimension infinie. Il n'est pas évident que l'espace  $\mathcal{D}$  contient d'autres fonctions que les fonctions nulles. Nous donnerons ci-après (voir exemples 1.1.3 et 1.1.4 ainsi que l'exercice 1.7.1) quelques exemples de telles fonctions et qui seront utiles par la suite.

**Exemple 1.1.2** La fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

est de classe  $C^\infty$ . Si  $x < 0$ , toutes les dérivées de  $f$  sont nulles. Si  $x = 0$ , les dérivées à gauche de  $f$  sont nulles. Si  $x > 0$ , on a

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad f''(x) = \frac{4 - 6x^2}{x^6} e^{-\frac{1}{x^2}}, \dots, f^{(k)}(x) = \frac{P(x)}{x^{3k}} e^{-\frac{1}{x^2}},$$

où  $P(x)$  est un polynôme. Dès lors,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{(k)}(x) = P(0) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{3k}} = P(0) \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u^{\frac{3k}{2}}}{e^u} = 0,$$

il suffit d'appliquer plusieurs fois la règle de l'Hospital. Enfin, si  $x = 0$ , les dérivées à droite de  $f$  sont nulles :  $f^{(k)}(0) = 0, \forall k \in \mathbb{N}$ . En effet, procérons par récurrence sur  $k$ . Pour  $k = 0$ , c'est évident. Supposons que  $f^{(k)}(0) = 0$  et montrons que :  $f^{(k+1)}(0) = 0$ . On a

$$f^{(k+1)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} P(x) \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{3k+1}} = P(0) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{3k+1}} = 0.$$

Ainsi  $f(x)$  est indéfiniment dérivable.

**Exemple 1.1.3** La fonction  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

appartient à  $\mathcal{D}$ . En effet, si  $|x| > 1$ , alors  $\varphi(x) = 0$  et  $\varphi \in C^\infty$ . De même, si  $|x| < 1$ ,  $\frac{1}{1-x^2} \in C^\infty$  et  $\varphi(x) = e^{-\frac{1}{1-x^2}} \in C^\infty$ . Si  $|x| = 1$ , on utilise le même raisonnement que dans l'exemple précédent. On montre dans ce cas que l'on a  $\varphi^{(k)}(x) = 0$ , donc  $\varphi \in C^\infty$ . En outre,  $\text{supp } \varphi = [-1, 1]$  et par conséquent  $\varphi \in \mathcal{D}$ .

**Exemple 1.1.4 (Lemme d'Urysohn) :** Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R}^n$ . Alors il existe une fonction  $\varphi \in \mathcal{D}$  telle que :

- (i)  $0 \leq \varphi(x) \leq 1$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ .
- (ii)  $\varphi(x) = 1$  sur  $K$ .
- (iii)  $\varphi(x) = 0$  en dehors d'un ouvert contenant  $K$ .

**Notation :** Si  $\varphi$  est une fonction de  $\mathcal{D}$  et si  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  est un multi-indice, on pose

$$D^\alpha \varphi = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

avec  $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ .

**Remarque 1.1.1** On peut munir l'espace  $\mathcal{D}$  de la topologie limite inductive, en introduisant une famille de semi-normes mais dans tout ce qui va suivre, la connaissance de cette topologie n'est pas nécessaire ; il suffit de connaître la notion de convergence des suites dans  $\mathcal{D}$ .

**Définition 1.1.3** On dit qu'une suite de fonctions  $(\varphi_k) \in \mathcal{D}$  converge dans  $\mathcal{D}$  vers une fonction  $\varphi \in \mathcal{D}$  si :

- (i) tous les supports des  $\varphi_k$  sont contenus dans un même compact  $K$ .
- (ii) pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , la suite des dérivées  $(\varphi_k^{(j)})$  converge uniformément<sup>1</sup> vers  $\varphi^{(j)}$  sur  $K$ .

**Remarque 1.1.2** Dans le cas de plusieurs variables, la condition (ii) est remplacée par celle-ci : (ii)' Pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , la suite  $(D^\alpha \varphi_k)$  converge uniformément vers  $D^\alpha \varphi$  sur  $K$ .

**Notation :** On écrit  $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$  pour dire que  $(\varphi_k)$  converge dans  $\mathcal{D}$  vers  $\varphi$ .

## 1.2 Définition d'une distribution

**Définition 1.2.1** On appelle distribution  $T$  une fonctionnelle linéaire continue sur  $\mathcal{D}$ .

(i) fonctionnelle linéaire signifie : une application  $T$  de  $\mathcal{D}$  dans  $\mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) faisant correspondre à une fonction  $\varphi \in \mathcal{D}$ , un nombre noté  $\langle T, \varphi \rangle$  tel que : pour tous  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , on a

$$\langle T, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \rangle = \alpha\langle T, \varphi_1 \rangle + \beta\langle T, \varphi_2 \rangle.$$

Au lieu de fonctionnelle linéaire, on dit aussi forme linéaire.

(ii) continue signifie : si la suite  $(\varphi_k)$  converge dans  $\mathcal{D}$  vers  $\varphi$ , alors  $\langle T, \varphi_k \rangle$  converge au sens usuel vers  $\langle T, \varphi \rangle$ .

Autrement dit, une fonctionnelle linéaire sur  $\mathcal{D}$  définit une distribution si pour toute suite  $(\varphi_k) \in \mathcal{D}$  qui converge dans  $\mathcal{D}$  vers zéro, la suite  $\langle T, \varphi_k \rangle$  converge au sens usuel vers zéro.

---

<sup>1</sup> La suite  $(\varphi_k^{(j)})$  converge uniformément vers  $\varphi^{(j)}$  dans  $K$  si, quel que soit  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $N(\varepsilon)$  tel que, pour tout  $k \geq N(\varepsilon)$  et tout  $x \in K$ , on ait  $|\varphi_k^{(j)}(x) - \varphi^{(j)}(x)| \leq \varepsilon$  c'est-à-dire si  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} |\varphi_k^{(j)}(x) - \varphi^{(j)}(x)| = 0$ .

**Proposition 1.2.2** Une fonctionnelle linéaire sur  $\mathcal{D}$  est une distribution si et seulement si, pour tout compact  $K$  et pour toute fonction  $\varphi \in \mathcal{D}$  avec  $\text{supp } \varphi \subset K$ , il existe une constante  $C > 0$  et un entier  $m$  tels que :

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sum_{j=0}^m \sup_{x \in K} |\varphi_k^{(j)}(x)|. \quad (1.2.1)$$

*Démonstration* : Soit  $T$  une distribution sur  $\mathcal{D}$  et supposons que pour toute constante  $C > 0$  et tout entier  $m$ , il existe un compact  $K$  et une fonction  $\varphi_k \in \mathcal{D}$ ,  $\text{supp } \varphi_k \subset K$  tels que :

$$|\langle T, \varphi_k \rangle| \leq C \sum_{j=0}^m \sup_{x \in K} |\varphi_k^{(j)}(x)|.$$

Choisissons  $C = m = k$  et posons  $\psi_k = \frac{\varphi_k}{\langle T, \varphi_k \rangle}$ . La fonction  $\psi_k$  appartient à  $\mathcal{D}$  car  $\psi_k \in \mathcal{C}^\infty$  et  $\text{supp } \psi_k \subset \text{supp } \varphi_k \subset K$ . Dès lors,

$$1 = \langle T, \psi_k \rangle \geq k \sum_{j=0}^k \sup_{x \in K} |\psi_k^{(j)}(x)|,$$

et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sup_{x \in K} |\psi_k^{(j)}(x)| \right) = 0, \quad k \geq j$$

c'est-à-dire  $\psi_k^{(j)}$  converge uniformément vers 0 ce qui est absurde puisque  $\langle T, \psi_k \rangle$  ne converge pas (au sens usuel) vers 0. Réciproquement, supposons que la suite  $(\varphi_k)$  converge dans  $\mathcal{D}$  vers 0 c'est-à-dire  $\text{supp } \varphi_k \subset K$  et  $\varphi_k^{(j)}(x)$  converge uniformément vers 0. Donc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sup_{x \in K} |\varphi_k^{(j)}(x)| \right) = 0,$$

et d'après (1.2.1),  $\langle T, \varphi_k \rangle$  converge (au sens usuel) vers 0. Donc la définition précédente et la proposition 1.2.2 sont équivalentes.  $\square$

**Remarques 1.2.1** a) Dans le cas de plusieurs variables, l'expression (1.2.1) est évidemment remplacée par celle-ci

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi(x)|.$$

b) Une distribution n'a pas de valeur en un point, mais on peut parler de la valeur d'une distribution dans un ouvert quelconque.

c) On dira qu'une distribution  $T$  est réelle si  $\langle T, \varphi \rangle$  est réel où  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Toute distribution arbitraire  $T$  peut s'écrire sous la forme  $T = R + iS$  où  $R$  et  $S$  sont des distributions réelles, autrement dit,

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle R, \varphi \rangle + i\langle S, \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

De même, on définit la distribution complexe conjuguée (notée  $\bar{T}$ ) d'une distribution  $T$  en posant

$$\langle \bar{T}, \varphi \rangle = \overline{\langle T, \varphi \rangle}, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Soient  $T_1, T_2, T$  des distributions et  $\lambda$  un scalaire. On définit la somme  $T_1 + T_2$  et le produit  $\lambda T$ , par les relations :

$$\begin{aligned}\langle T_1 + T_2, \varphi \rangle &= \langle T_1, \varphi \rangle + \langle T_2, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D} \\ \langle \lambda T, \varphi \rangle &= \lambda \langle T, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}\end{aligned}$$

Les applications  $T_1 + T_2$  et  $\lambda T$  de  $\mathcal{D}$  dans  $\mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ), sont des distributions. Donc

**Proposition 1.2.3** *Les distributions forment un espace vectoriel que l'on note  $\mathcal{D}'$  (espace dual de  $\mathcal{D}$ ).*

Soit  $\mathcal{D}^m$  l'espace vectoriel des fonctions ayant des dérivées d'ordre  $j$  continues pour  $0 \leq j \leq m$  et à support borné.

**Définition 1.2.4** *On dit qu'une suite de fonctions  $(\varphi_k) \in \mathcal{D}^m$  converge dans  $\mathcal{D}^m$  vers une fonction  $\varphi \in \mathcal{D}^m$  si :*

- (i) *tous les supports des  $\varphi_k$  sont contenus dans un même compact  $K$ .*
- (ii) *pour tout  $j \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq j \leq m$ , la suite des dérivées  $(\varphi_k^{(j)})$  converge uniformément vers  $\varphi^{(j)}$  sur  $K$ .*

*Toute fonctionnelle linéaire continue sur  $\mathcal{D}^m$  est dite distribution d'ordre  $m$ . Autrement dit, d'après la proposition 1.2.2, la distribution  $T$  est dite d'ordre  $m$  lorsque l'inégalité (1.2.1) est satisfaite pour  $0 \leq j \leq m$ . De telles distributions constituent un espace vectoriel noté  $\mathcal{D}'^m$ .*

## 1.3 Exemples de distributions

### 1.3.1 Fonctions localement sommables

**Définition 1.3.1** *Une fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) est dite localement sommable si elle est sommable sur tout ensemble borné  $K$  de  $\mathbb{R}^n$ , c'est-à-dire, si*

$$\int_K |f(x)| dx < +\infty.$$

*On dit aussi qu'elle est localement intégrable.*

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) une fonction localement sommable. Nous allons montrer que  $f(x)$  engendre une distribution  $T_f$  par

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

L'intégrale ci-dessus existe car on intègre en fait, non sur  $\mathbb{R}$ , mais sur le support borné de  $\varphi$ .

(i)  $T_f$  est linéaire en effet, soient  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,

$$\begin{aligned} \langle T_f, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\alpha\varphi_1(x) + \beta\varphi_2(x))dx, \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_1(x)dx + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_2(x)dx, \\ &= \alpha \langle T_f, \varphi_1 \rangle + \langle T_f, \varphi_2 \rangle. \end{aligned}$$

(ii)  $T_f$  est continue : en effet, par hypothèse la suite  $(\varphi_k)$  converge vers  $\varphi$  dans  $\mathcal{D}$ , c'est-à-dire tous les supports des  $\varphi_k$  sont contenus dans un même compact  $[a, b]$  et pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , la suite des dérivées  $(\varphi_k^{(j)})$  converge uniformément vers  $\varphi^{(j)}$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sup_{x \in [a, b]} |\varphi_k^{(j)}(x) - \varphi^{(j)}(x)| \right) = 0.$$

Montrons que  $\langle T_f, \varphi_k \rangle$  converge vers  $\langle T_f, \varphi \rangle$ . On a

$$\begin{aligned} |\langle T_f, \varphi_k \rangle - \langle T_f, \varphi \rangle| &= |\langle T_f, \varphi_k - \varphi \rangle|, \\ &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\varphi_k(x) - \varphi(x))dx \right|, \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)||\varphi_k(x) - \varphi(x)|dx, \\ &\leq \left( \int_a^b |f(x)|dx \right) \cdot \sup_{x \in [a, b]} |\varphi_k(x) - \varphi(x)|. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

**Proposition 1.3.2** *Toute fonction  $f(x)$  localement sommable définit une distribution  $T_f$  par*

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Dans  $\mathbb{R}^n$ , toute fonction  $f(x_1, \dots, x_n)$  localement sommable définit une distribution  $T_f$  par la relation

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_n) \varphi(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots x_n, \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

**Proposition 1.3.3** *Deux fonctions  $f$  et  $g$  localement sommables définissent la même distribution si et seulement si elles sont égales presque partout.*

*Démonstration :* Si  $f(x) = g(x)$  presque partout, alors  $\langle T_f, \varphi \rangle = \langle T_g, \varphi \rangle$ , quel que soit  $\varphi \in \mathcal{D}$ . Montrons que la réciproque est vraie. Par hypothèse, on a  $\langle T_f, \varphi \rangle = \langle T_g, \varphi \rangle$ , c'est-à-dire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \varphi(x) dx,$$

qui peut encore s'écrire  $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \varphi(x) dx = 0$ , où  $h(x) = f(x) - g(x)$ . Il s'agit de montrer que  $h(x) = 0$  presque partout. Pour cela, posons  $\psi_k = (\varphi_\alpha(x))^{1/k}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  où  $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction définie par

$$\varphi_\alpha(x) = \begin{cases} e^{-\frac{\alpha}{\alpha^2-x^2}} & \text{si } |x| < \alpha \\ 0 & \text{si } |x| \geq \alpha \end{cases}$$

avec  $\alpha > 0$ , une constante. Comme dans l'exemple 1.1.3, on a  $\psi_k \in \mathcal{D}$  avec  $\text{supp } \psi_k = [-\alpha, \alpha]$ . Posons  $g_k(x) = h(x)\psi_k(x)$ . Pour tout  $x \in ]-\alpha, \alpha[$ , on a  $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = h(x)$ . En outre, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x \in \mathbb{R}$ , il existe une fonction sommable qui majore  $|g_k(x)|$  :

$$|g_k(x)| = |h(x)\psi_k(x)| \leq |h(x)| \cdot \sup_{\mathbb{R}} |\psi_k(x)|.$$

Ainsi, les hypothèses du théorème de convergence dominée de Lebesgue sont satisfaites et on peut donc permute limite et intégrale :

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\psi_k(x) dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} h(x) dx,$$

car  $\text{supp } \psi_k = [-\alpha, \alpha]$  et  $\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k(x) = 1$ . D'où,  $h(x) = 0$  sur  $[-\alpha, \alpha]$  et puisque  $\alpha$  est arbitraire,  $h(x) = 0$  presque partout sur  $\mathbb{R}$ .  $\square$

**Remarque 1.3.1** *D'après les deux propositions précédentes, on convient dans la suite d'identifier le symbole  $f$  qui représente la fonction localement sommable définie presque partout, à celui qui représente la distribution  $T_f$  qui lui est associée :  $T_f = f$ .*

**Exemple 1.3.1** Toute constante  $C$  définit une distribution telle que :

$$\langle C, \varphi \rangle = C \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

**Exemple 1.3.2** La fonction

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{C})$$

est localement sommable si et seulement si  $\operatorname{Re} \alpha > -1$ . Elle détermine donc une distribution sur  $\mathbb{R}$  en posant

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^\alpha \varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

(Voir aussi l'exercice 1.7.9).

**Exemple 1.3.3** L'application

$$\mathcal{D} \ni \varphi \longmapsto \langle f, \varphi \rangle = \int_a^b \varphi(x) dx,$$

définit une distribution sur  $\mathbb{R}$ . En effet, on a

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_a^b \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \varphi(x) dx = \langle g, \varphi \rangle,$$

où

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est une fonction localement sommable.

**Exemple 1.3.4** La fonction  $\ln|x|$  définit une distribution sur  $\mathbb{R}$  car elle est localement sommable. En effet, la fonction  $\ln|x|$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$ , donc elle est localement sommable. Dans un voisinage de 0 par exemple  $] -1, 1 [$ , l'intégrale  $\int_{-1}^1 |\ln|x|| dx$  est convergente ; on a  $\int_0^1 \ln x dx = -1$ , donc  $\int_0^1 \ln x dx$  existe. Même argument pour l'intégrale  $\int_{-1}^0 \ln(-x) dx$ . (Une autre méthode : la fonction  $\ln|x|$  pour  $x \neq 0$  est localement sommable dans  $\mathbb{R}$  car dans un voisinage de 0, on a  $|\ln|x|| \leq \frac{1}{|x|^\alpha}$  pour  $0 < \alpha < 1$ ).

### 1.3.2 Distribution de Dirac

**Définition 1.3.4** La distribution de Dirac à l'origine est une fonctionnelle, notée  $\delta$ , défini par  $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$ ,  $\varphi \in \mathcal{D}$ .

On vérifie aisément qu'il s'agit bien d'une distribution : pour tous  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , on a  $\alpha\varphi_1(0) + \beta\varphi_2(0) = (\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2)(0)$ , et dès lors

$$\langle \delta, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \rangle = \alpha\langle \delta, \varphi_1 \rangle + \beta\langle \delta, \varphi_2 \rangle,$$

donc  $\delta$  est linéaire. Pour la continuité, on a par hypothèse  $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ . Donc  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(0) = \varphi(0)$  et par conséquent,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \delta, \varphi_k \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle$ . La distribution  $\delta$  représente une masse (ou une charge) +1 placée au point 0. On définit de même la distribution de Dirac  $\delta_a$  au point  $a$  par  $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$ ,  $\varphi \in \mathcal{D}$ . Elle représente une masse (ou une charge) +1 placée au point  $a$ .

**Remarque 1.3.2** Les physiciens utilisent l'écriture

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0),$$

où

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \neq 0 \\ \infty & \text{pour } x = 0 \end{cases} \quad (1.3.1)$$

de sorte que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1. \quad (1.3.2)$$

En fait, cette écriture est incorrecte car le symbole  $\delta(x)$  n'a pas de sens (il n'y a pas de valeur de  $\delta$  en  $x$ ). De plus  $\delta(x)$  n'appartient pas à la classe de fonctions localement sommables (voir exercice 1.7.4). Aucune fonction ne peut satisfaire aux relations (1.3.1) et (1.3.2) qui sont contradictoires : en effet, d'après (1.3.1),  $\delta(x)$  est nul partout sauf au point 0, donc  $\delta(x)$  est presque partout nul et d'après une propriété de Lebesgue, son intégrale est nulle ce qui contredit (1.3.2).

Par la suite, nous écrirons indifféremment  $\delta$  ou  $\delta(x)$ ,  $\delta_a$  ou  $\delta_a(x)$  ou encore  $\delta(x - a)$ .

Les distributions de la forme

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{D},$$

sont dites régulières, les autres (celles qu'on ne peut pas mettre sous la forme ci-dessus) sont dites singulières (par exemple la distribution de Dirac).

Il n'est pas possible de représenter une distribution singulière sur un graphe mais, par convention, on symbolise la distribution de Dirac  $\delta_a(x)$  au point  $a$ , par une flèche (ou un baton) verticale de longueur unité.

Toute combinaison linéaire des distributions de Dirac en différents points, forme une distribution singulière appelée peigne de Dirac et est symbolisée par

$$\Delta(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

### 1.3.3 Mesures

Soit  $\mathcal{C}$  l'espace des fonctions continues et à support borné. Cet espace est muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Une suite de fonctions  $(\varphi_k) \in \mathcal{C}$  converge dans  $\mathcal{C}$  vers une fonction  $\varphi \in \mathcal{C}$  si :

- (i) tous les supports des  $\varphi_k$  sont contenus dans un même compact  $K$ .
- (ii) la suite  $(\varphi_k)$  converge uniformément vers  $\varphi$  sur  $K$ .

**Définition 1.3.5** *Une mesure est une fonctionnelle linéaire et continue sur l'espace  $\mathcal{C}$ .*

Les mesures forment un espace vectoriel noté  $\mathcal{C}'$  (dual de  $\mathcal{C}$ ). L'espace  $\mathcal{D}$  est un sous-espace vectoriel de l'espace  $\mathcal{C}$ . Toute mesure définit une distribution mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie. Cependant, on peut montrer qu'une distribution positive est une mesure positive (une distribution  $T$  est dite positive si, pour toute fonction positive  $\varphi$  de  $\mathcal{D}$ , le nombre  $\langle T, \varphi \rangle$  est positif).

**Exemple 1.3.5**  $\delta$  est une mesure (on dit mesure de Dirac) et est définie par  $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$ . Pour que cette expression ait un sens, il n'est pas nécessaire que  $\varphi \in \mathcal{D}$ , il suffit que  $\varphi$  soit continue à l'origine.

## 1.4 Quelques définitions et propriétés locales

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , un ouvert. On dit qu'une distribution  $T$  est nulle sur  $\Omega$  si l'on a  $\langle T, \varphi \rangle = 0$ , pour toute fonction  $\varphi \in \mathcal{D}$ , ayant son support dans  $\Omega$ .

**Exemple 1.4.1** La distribution  $\delta$  de Dirac est nulle sur tout ouvert ne contenant pas l'origine, par exemple  $\mathbb{R}^*$ . En effet,  $0 \notin \text{supp } \varphi$  et  $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) = 0$ .

Deux distributions  $T_1$  et  $T_2$  sont dites égales sur  $\Omega$ , si pour toute fonction  $\varphi \in \mathcal{D}$ , ayant son support dans  $\Omega$ ,  $\langle T_1, \varphi \rangle = \langle T_2, \varphi \rangle$ , ou de manière équivalente si la distribution  $T_1 - T_2$  est nulle sur  $\Omega$ .

**Exemple 1.4.2** Les distributions  $T$  et  $T + \delta$  sont égales sur tout ouvert ne contenant pas l'origine. En effet, ceci résulte immédiatement de l'exemple précédent puisque la différence de ces distributions est égale à  $\delta$ .

On définit une distribution sur  $\Omega$ , par analogie sur  $\mathbb{R}^n$ , comme suit : On désigne par  $\mathcal{D}_\Omega$  le sous-espace de  $\mathcal{D}$ , constitué des fonctions  $\varphi$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  ayant un support inclus dans  $\Omega$ . Une suite  $(\varphi_k) \in \mathcal{D}_\Omega$  converge vers  $\varphi$  si tous les supports des  $\varphi_k$  sont contenus dans un même compact  $K \subset \Omega$  et si pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , la suite des dérivées  $(\varphi_k^{(j)})$  converge uniformément vers  $\varphi^{(j)}$  sur  $K$ . Par définition, une distribution sur  $\Omega$  est une fonctionnelle linéaire et continue sur  $\mathcal{D}_\Omega$ .

A partir de ces définitions locales sur des ouverts recouvrant  $\mathbb{R}^n$ , on peut reconstituer la définition globale d'une distribution sur  $\mathbb{R}^n$ . C'est l'objet du théorème du recollement par morceaux (voir ci-dessous). Définissons tout d'abord ce qu'est une partition de l'unité : Soit  $(\Omega_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $\Omega$  où  $I$  désigne un ensemble (d'indices) quelconque. On démontre l'existence de fonctions  $g_i$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  telles que :

- (i)  $g_i(x) \geq 0$  pour tout  $x \in \Omega$ .
- (ii)  $\text{supp } g_i \subset \Omega_i$  pour tout  $i \in I$ .
- (iii) sur tout compact de  $\Omega$ , un nombre fini des  $g_i$  sont différents de 0.
- (iv)  $\sum_{i \in I} g_i(x) = 1$  pour tout  $x \in \Omega$ .

Une telle famille  $(g_i)_{i \in I}$  est dite partition de l'unité relative au recouvrement  $(\Omega_i)_{i \in I}$ .

**Proposition 1.4.1** (théorème de recollement par morceaux) : Soit  $\Omega = \cup \Omega_i$  où  $\Omega_i$  sont des ouverts. Supposons définie sur chaque  $\Omega_i$ , une distribution  $T_i$  telle que :  $T_i = T_j$  sur  $\Omega_i \cap \Omega_j$ . Il existe alors sur  $\Omega$  une distribution  $T$  unique qui, sur chaque  $\Omega_i$ , se réduit à  $T_i$ .

*Démonstration* : Soit  $(g_i)_{i \in I}$  une partition de l'unité dans  $\Omega$ , relative au recouvrement  $(\Omega_i)_{i \in I}$ . Unicité : Supposons que  $T$  existe et que  $T = T_i$  sur  $\Omega_i$ . Soit  $\varphi \in \mathcal{D}_\Omega$ , on a  $g_i \varphi \in \mathcal{D}_{\Omega_i}$  et  $\varphi = \sum_{i \in I} g_i \varphi$ . Cette somme est finie puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de  $g_i$  qui sont différents de 0 sur  $\text{supp } \varphi$ . Dès lors,

$$\langle T, \varphi \rangle = \left\langle T, \sum_{i \in I} g_i \varphi \right\rangle = \sum_{i \in I} \langle T, g_i \varphi \rangle.$$

Or (voir exercice 1.6.4),

$$\text{supp } (g_i \varphi) \subset \text{supp } g_i \cap \text{supp } \varphi \subset \text{supp } g_i \subset \Omega_i,$$

et nous avons supposé que  $T = T_i$  sur  $\Omega_i$ , donc

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{i \in I} \langle T_i, g_i \varphi \rangle. \quad (1.4.1)$$

Si  $T$  existe, elle est unique et est définie par (1.4.1). Existence de  $T$  : Montrons que l'application définie par (1.4.1) détermine une distribution. Elle est évidemment linéaire. En ce qui concerne la continuité, soit  $K \subset \Omega$ , un compact et  $J$  un ensemble (fini) d'indices  $i \in I$  tel que :  $g_i(x) \neq 0$  sur  $K$ . On suppose que  $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}_K} \varphi$ , d'où  $g_i \varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}_{\Omega_i}} g_i \varphi$ , quel que soit  $i \in J$ . Dès lors,  $\langle T_i, g_i \varphi_k \rangle \xrightarrow{\mathbb{C}} \langle T_i, g_i \varphi \rangle$ , et par conséquent

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{i \in J} \langle T_i, g_i \varphi_k \rangle \xrightarrow{\mathbb{C}} \sum_{i \in J} \langle T_i, g_i \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle.$$

Montrons que, sur chaque  $\Omega_j$ , la distribution  $T$  se réduit à  $T_j$ , quel que soit  $j \in I$ . En effet, soit  $\varphi \in \mathcal{D}_{\Omega_j}$  avec  $\text{supp } \varphi \subset \Omega_j$  et  $j \in I$ . D'après l'exercice 1.6.4, on a  $\text{supp}(g_i \varphi) \subset \text{supp } g_i \cap \text{supp } \varphi \subset \Omega_i \cap \Omega_j$ , et par hypothèse  $T_i = T_j$  sur  $\Omega_i \cap \Omega_j$ . Donc

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{i \in I} \langle T_j, g_i \varphi \rangle = \left\langle T_j, \sum_{i \in I} g_i \varphi \right\rangle = \langle T_j, \varphi \rangle,$$

ce qui achève la démonstration.  $\square$

Considérons tous les ouverts  $\Omega_i$  où  $T$  s'annule. Le plus grand ouvert sur lequel  $T$  est nulle est  $\Omega = \cup \Omega_i$ . L'existence de cet ouvert est justifiée par le théorème précédent. Son complémentaire  $\Omega^c$ , est appelé support de la distribution  $T$  (noté  $\text{supp } T$ ), c'est-à-dire le plus petit fermé en dehors duquel  $T$  s'annule. Autrement dit,  $x \in \text{supp } T$  si et seulement si  $T$  est nulle sur aucun voisinage de  $x$ .

**Exemple 1.4.3** *Le support de la distribution  $\delta$  de Dirac est  $\{0\}$ . En effet, d'après l'exemple 1.4.1,  $\delta$  s'annule sur  $\mathbb{R}^*$  et dès lors  $\text{supp } \delta = \{0\}$ .*

**Exemple 1.4.4** *Si  $T_f$  est la distribution associée à une fonction continue  $f$ , alors  $\text{supp } T_f = \text{supp } f$ . En effet, posons  $F = \text{supp } f$  et montrons que  $\text{supp } T_f \subset F$ . Soit  $\varphi \in \mathcal{D}$  telle que :  $\text{supp } \varphi \subset F^c$ . Comme  $f = 0$  sur  $\text{supp } \varphi$ , alors  $\langle T_f, \varphi \rangle = 0$ , c'est-à-dire  $T_f$  est nulle sur  $F^c$ . Dès lors,*

$$\text{supp } T_f \subset (F^c)^c = F = \text{supp } f.$$

*Il reste à prouver que  $\text{supp } f \subset \text{supp } T_f$ . Soit  $x \in F = \text{supp } f$  et montrons que  $x \in \text{supp } T_f$ . On va raisonner par l'absurde en supposant que  $x \notin \text{supp } T_f$ .*

Dans ce cas, il existe un intervalle  $I = ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$  tel que : pour toute fonction  $\varphi \in \mathcal{D}$  ayant son support dans  $I$ ,

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx = 0,$$

sur  $I$ . Dès lors,  $f$  est nulle sur  $I$  et par conséquent  $I \cap F = \emptyset$ . Donc,  $x \notin F$  ce qui est absurde.

## 1.5 Extension de l'espace $\mathcal{D}$ : espaces $\mathcal{C}$ , $\mathcal{E}$ et $\mathcal{S}$

Nous avons défini les distributions sur l'espace de base  $\mathcal{D}$ . Or ils existent des distributions particulières qui sont définies comme des fonctionnelles linéaires et continues sur des espaces plus larges que  $\mathcal{D}$ .

Soit  $f(x)$  une fonction localement sommable. Cette fonction peut représenter la densité avec laquelle est répartie uniformément sur l'axe réel une masse, une charge électrique, une loi de probabilité, etc. L'expression

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx,$$

représente la masse totale lorsque l'on fait  $\varphi(x) = 1$ , c'est-à-dire

$$\langle f, 1 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx,$$

mais  $\varphi(x) = 1 \notin \mathcal{D}$ . Le moment d'inertie de cette répartition de masse par rapport à l'origine s'écrit

$$\langle f, x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x).x^2 dx,$$

mais alors  $\varphi(x) = x^2 \notin \mathcal{D}$ .

Une distribution particulière peut admettre une extension à un espace plus large que  $\mathcal{D}$ . Nous allons définir une extension comme suit :

i) Soit  $T$  une distribution dont le support est compact. Soit  $\mathcal{E} = \mathcal{C}^\infty$ , l'espace des fonctions indéfiniment dérивables. D'après l'exemple 1.1.4, on sait qu'on peut construire une fonction  $\alpha \in \mathcal{D}$  égale à 1 sur un voisinage du supp  $T$ . On sait aussi (exercice 1.6.5) que pour toute fonction  $\varphi \in \mathcal{C}$ ,  $\alpha\varphi \in \mathcal{D}$  et dès lors  $\langle T, \alpha\varphi \rangle$  existe. Ce nombre est indépendant du choix de  $\alpha$ . En effet, soit  $\beta$  une fonction de  $\mathcal{D}$  égale à 1 sur un voisinage du supp  $T$ , on a  $(\alpha - \beta)\varphi \in \mathcal{D}$  et supp  $(\alpha - \beta)\varphi \subset (\text{supp } T)^c$ . Donc  $\langle T, \alpha\varphi \rangle = \langle T, \beta\varphi \rangle$ . On peut donc définir une application

$$T : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi \longmapsto \langle T, \varphi \rangle,$$

en posant  $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha\varphi \rangle$ , avec  $\alpha \in \mathcal{D}$  et  $\alpha = 1$  sur un voisinage du supp  $T$ . Cette définition étend la fonctionnelle  $T$  à l'espace  $\mathcal{E}$ . On vérifie aisément que la fonctionnelle  $T$  ainsi définie sur  $\mathcal{E}$  est linéaire et continue. Pour la continuité sur  $\mathcal{E}$ , on utilisera la définition de convergence suivante : une suite  $(\varphi_k)$  de  $\mathcal{E}$  converge vers  $\varphi \in \mathcal{E}$ , si pour tout compact  $K$  et tout  $j \in \mathbb{N}$ , la suite  $(\varphi_k^{(j)})$  converge uniformément sur  $K$  vers  $\varphi^{(j)}$ . On notera  $\mathcal{E}'$  (dual de  $\mathcal{E}$ ) l'ensemble des distributions à support compact. C'est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{D}'$ . On démontre que l'espace des distributions à support compact  $\mathcal{E}'$  est identique à l'espace des fonctionnelles linéaires et continues sur  $\mathcal{E}$ .

*ii)* Soit  $T$  une distribution dont le support n'est pas compact. Soit  $\varphi \in \mathcal{E}$  une fonction telle que :  $\text{supp } \varphi \cap \text{supp } T$  est borné. En procédant comme précédemment, on définit une extension de  $T$  à l'espace de ces fonctions  $\varphi$  (espace plus large que  $\mathcal{D}$ ), en posant  $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha\varphi \rangle$ , avec  $\alpha \in \mathcal{D}$  valant 1 sur un voisinage de  $\text{supp } \varphi \cap \text{supp } T$ .

Nous avons vu dans la section 1.3.3, que les mesures sont des distributions particulières définies sur l'espace  $\mathcal{C}$  des fonctions continues à support borné. Un autre espace, fréquemment rencontré, est l'espace de Schwartz

$$\mathcal{S} = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty : \forall p, q \in \mathbb{N}, \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^p \varphi^{(q)}(x)| < \infty\},$$

formé par les fonctions  $\varphi$  à décroissance rapide. Autrement dit,

$$\mathcal{S} = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty : \forall p, q \in \mathbb{N}, \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x^p \varphi^{(q)}(x)| = 0\},$$

ou, ce qui revient au même,  $\mathcal{S}$  est l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables telles que :  $\varphi$  et toutes ses dérivées décroissent plus rapidement que toute puissance de  $\frac{1}{|x|}$  quand  $|x| \rightarrow \infty$ . Notons que  $\mathcal{S}$  est un espace vectoriel et que  $\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{C}$ . L'espace  $\mathcal{S}$  sera étudié en détail dans le chapitre des transformées de Fourier où on définira à cette occasion des distributions d'un type particulier, appelés distributions tempérées.

## 1.6 Exercices résolus

**Exercice 1.6.1** 1) Soit  $I$  un intervalle et  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$ . Montrer que si  $x_0$  et  $x_0 + x \in I$ , alors

$$f(x_0 + x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 f^{(n+1)}(x_0 + tx)(1-t)^n dt.$$

(formule de Taylor d'ordre  $n$  avec reste sous forme intégrale).

2) Pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}$ , on pose

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + x^{n+1} \theta(x), \quad x \in \mathbb{R}^*$$

et  $\varphi^{(n+1)}(0) = (n+1)! \theta(0)$ .

a) Montrer que la fonction  $\theta$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

b) On suppose que  $\text{supp } \varphi \subset [-c, c]$ ,  $c > 0$ . Montrer que

$$\sup_{x \in [-c, c]} |\theta(x)| \leq A \sup_{x \in [-c, c]} |\varphi^{(n+1)}(x)|,$$

où  $A > 0$ , est une constante.

Solution : 1) Sans restreindre la généralité, on peut supposer que  $x_0 = 0$ . D'après le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, on a

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(u) du.$$

La formule d'intégration par parties, nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + [(u-x)f'(u)]_0^x - \int_0^x (u-x)f''(u) du, \\ &= f(0) + xf'(0) + \int_0^x (x-u)f''(u) du, \\ &= f(0) + xf'(0) - \left[ \frac{(x-u)^2}{2} f''(0) \right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-u)^2}{2} f^{(3)}(u) du, \\ &= f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{1}{2} \int_0^x (x-u)^2 f^{(3)}(u) du, \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{1}{n!} \int_0^x (x-u)^n f^{(n+1)}(u) du. \end{aligned}$$

On va raisonner par récurrence. Pour  $n = 1, 2$  la formule ci-dessus est satisfaite. Supposons qu'elle est vraie à l'ordre  $n$  et montrons qu'elle est vraie à l'ordre  $n+1$ . Comme

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n!} \int_0^x (x-u)^n f^{(n+1)}(u) du \\ &= \frac{1}{n!} \left( - \left[ \frac{(x-u)^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(u) \right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-u)^{n+1}}{n+1} f^{(n+2)}(u) du \right), \\ &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0) + \frac{1}{(n+1)!} \int_0^1 (x-u)^{n+1} f^{(n+2)}(u) du, \end{aligned}$$

alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{1}{(n+1)!} \int_0^x (x-u)^{(n+1)} f^{(n+2)}(u) du.$$

Pour obtenir la formule en question, il suffit de poser  $u = tx$ , d'où

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(tx) dt.$$

2) a) Il suffit évidemment de montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \theta(0)$ . Comme  $\varphi \in \mathcal{D}$ , alors d'après la question précédente, on a

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \varphi^{(k)}(0) + \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 \varphi^{(n+1)}(tx)(1-t)^n dt,$$

et donc  $\theta(x) = \frac{1}{n!} \int_0^1 \varphi^{(n+1)}(tx)(1-t)^n dt$ ,  $x \neq 0$ . Dès lors,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) &= \frac{1}{n!} \int_0^1 \lim_{x \rightarrow 0} \varphi^{(n+1)}(tx)(1-t)^n dt, \\ &= \frac{1}{n!} \varphi^{(n+1)}(0) \int_0^1 \lim_{x \rightarrow 0} (1-t)^n dt, \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \varphi^{(n+1)}(0), \\ &= \theta(0). \end{aligned}$$

b) Pour  $x \in [-c, c]$ ,  $x \neq 0$ , on a

$$\begin{aligned} |\theta(x)| &\leq \frac{1}{n!} \int_0^1 |\varphi^{(n+1)}(tx)| (1-t)^n dt, \\ &\leq \frac{1}{n!} \sup_{x \in [-c, c], x \neq 0} |\varphi^{(n+1)}(tx)| \int_0^1 (1-t)^n dt, \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x \in [-c, c], x \neq 0} |\varphi^{(n+1)}(x)|, \\ &\leq A \sup_{x \in [-c, c]} |\varphi^{(n+1)}(x)|, \end{aligned}$$

où  $A = \frac{1}{(n+1)!}$ . Pour  $x = 0$ , on a

$$\theta(0) = \frac{1}{(n+1)!} |\varphi^{(n+1)}(0)| \leq A \sup_{x \in [-c, c]} |\varphi^{(n+1)}(x)|.$$

**Exercice 1.6.2** Pour toute fonction  $\varphi \in \mathcal{D}$ , on considère une application sur  $\mathcal{D}$ , en posant

$$\langle T, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \varphi\left(\frac{1}{k}\right) - n\varphi(0) - \varphi'(0) \ln n \right).$$

Prouver que cette application existe et qu'elle détermine une distribution sur  $\mathbb{R}$ . Quelle est son ordre ? On pourra utiliser le résultat suivant :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = C = 0,5772\dots (\text{constante d'Euler}).$$

Solution : Soit  $\varphi \in \mathcal{D}$ , on a d'après l'exercice 1.6.1 (avec  $n = 1$ ),

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + x^2\theta(x),$$

où  $\theta$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |\theta(x)| \leq A \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi''(x)|$ . Dès lors,

$$\begin{aligned} \langle T, \varphi \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \left( \varphi(0) + \frac{1}{k}\varphi'(0) + \frac{1}{k^2}\theta\left(\frac{1}{k}\right) \right) - n\varphi(0) - \varphi'(0) \ln n \right), \\ &= \varphi'(0) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^2}\theta\left(\frac{1}{k}\right), \\ &= C\varphi'(0) + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^2}\theta\left(\frac{1}{k}\right). \end{aligned}$$

Comme  $|\frac{1}{k^2}\theta(\frac{1}{k})| \leq \frac{1}{k^2} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi''(x)|$ , et que  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A}{k^2} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi''(x)|$  est une série convergente, alors d'après le critère de comparaison, la série  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\theta(\frac{1}{k})$  converge aussi, donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}\theta\left(\frac{1}{k}\right)$  existe et est finie. Donc,

$$\langle T, \varphi \rangle = C\varphi'(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\theta\left(\frac{1}{k}\right),$$

existe. L'application proposée est linéaire et en outre si  $[a, b]$  désigne un compact de  $\mathbb{R}$ , alors

$$\begin{aligned} |\langle T, \varphi \rangle| &= |C\varphi'(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\theta\left(\frac{1}{k}\right)|, \\ &\leq C \sup_{x \in [a, b]} |\varphi'(x)| + \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right) A \sup_{x \in [a, b]} |\varphi''(x)|, \end{aligned}$$

donc il s'agit bien d'une distribution. Son ordre est évidemment  $\leq 2$ .

**Exercice 1.6.3** Pour toute fonction  $\varphi \in \mathcal{D}$  et tout  $\varepsilon > 0$ , on définit une application sur  $\mathcal{D}$ , appelée valeur principale de Cauchy, en posant

$$\begin{aligned}\langle \text{vp} \frac{1}{x}, \varphi \rangle &= \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right), \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx.\end{aligned}$$

- a) Montrer que cette application a bien un sens.
- b) Montrer qu'elle est une distribution sur  $\mathbb{R}$  et déterminer son ordre.

Solution : a) Soit  $\varphi \in \mathcal{D}$ , on a d'après l'exercice 1.6.1 (avec  $n = 1$ ),

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + x^2\theta(x),$$

où  $\theta$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |\theta(x)| \leq A \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi''(x)|$ . On suppose que  $\text{supp } \varphi \subset [-c, c]$  et on pose  $\psi(x) = \varphi'(0) + x\theta(x)$ , d'où  $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$ , avec  $\psi$  continue sur  $\mathbb{R}$ . On a

$$\begin{aligned}\langle \text{vp} \frac{1}{x}, \varphi \rangle &= \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx, \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c \geq |x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx, \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c \geq |x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(0) + x\psi(x)}{x} dx, \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-c}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(0)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^c \frac{\varphi(0)}{x} dx + \int_{-c}^{-\varepsilon} \psi(x) dx + \int_{\varepsilon}^c \psi(x) dx \right), \\ &= \int_{-c}^c \psi(x) dx,\end{aligned}$$

et l'application  $\text{vp} \frac{1}{x}$  a donc bien un sens.

- b) L'application  $\text{vp} \frac{1}{x}$  est linéaire car si  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  et  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}$ , alors

$$\begin{aligned}\langle \text{vp} \frac{1}{x}, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\alpha\varphi_1(x) + \beta\varphi_2(x)}{x} dx, \\ &= \alpha \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi_1(x)}{x} dx + \beta \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi_2(x)}{x} dx, \\ &= \alpha \langle \text{vp} \frac{1}{x}, \varphi_1 \rangle + \beta \langle \text{vp} \frac{1}{x}, \varphi_2 \rangle.\end{aligned}$$

Montrons que l'application proposée est continue. Cela veut dire que si la suite  $(\varphi_k)$  converge dans  $\mathcal{D}$  vers  $\varphi$  (c'est-à-dire  $\text{supp } \varphi_k \subset [-c, c]$  et  $(\varphi_k^{(j)})$  converge uniformément vers  $\varphi^{(j)}$ ), alors  $\langle \text{vp } \frac{1}{x}, \alpha \varphi_k \rangle$  converge vers  $\langle \text{vp } \frac{1}{x}, \alpha \varphi \rangle$ . On a

$$\begin{aligned} \left| \langle \text{vp } \frac{1}{x}, \varphi_k \rangle - \langle \text{vp } \frac{1}{x}, \varphi \rangle \right| &= \left| \langle \text{vp } \frac{1}{x}, \varphi_k - \varphi \rangle \right|, \\ &= \left| \int_{-c}^c (\psi_k(x) - \psi(x)) dx \right|, \quad (\text{d'après } a)), \\ &\leq \int_{-c}^c |\psi_k(x) - \psi(x)| dx. \end{aligned}$$

Or d'après le théorème des accroissements finis (si une fonction  $f$  est continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ , alors il existe  $\xi \in ]a, b[$  tel que :  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$ ), on a

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \varphi'(\xi), \quad \xi \in ]0, x[.$$

En outre,  $|\psi(x)| = |\varphi'(\xi)| \leq \sup_{x \in [-c, c]} |\varphi'(x)|$ , et par conséquent,

$$\left| \langle \text{vp } \frac{1}{x}, \varphi_k \rangle - \langle \text{vp } \frac{1}{x}, \varphi \rangle \right| \leq \int_{-c}^c \sup_{x \in [-c, c]} |\varphi'_k(x) - \varphi'(x)| = 2 \sup_{x \in [-c, c]} |\varphi'_k(x) - \varphi'(x)|.$$

Comme  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sup_{x \in [-c, c]} |\varphi'_k(x) - \varphi'(x)| \right) = 0$  (convergence uniforme), alors  $\langle \text{vp } \frac{1}{x}, \varphi_k \rangle$  converge vers  $\langle \text{vp } \frac{1}{x}, \varphi \rangle$ . En conclusion, l'application proposée détermine une distribution sur  $\mathbb{R}$  et son ordre est  $\leq 1$ . Une autre méthode pour montrer que  $\text{vp } \frac{1}{x}$  est une distribution, consiste à utiliser la proposition 1.2.2. En effet, d'après la question  $a)$ , on a  $\langle \text{vp } \frac{1}{x}, \varphi \rangle = \int_{-c}^c \psi(x) dx$ , et on sait que  $|\psi(x)| \leq \sup_{x \in [-c, c]} |\varphi'(x)|$ , donc

$$\left| \langle \text{vp } \frac{1}{x}, \varphi \rangle \right| \leq 2c \sup_{x \in [-c, c]} |\varphi'(x)|,$$

ce qui montre que  $\text{vp } \frac{1}{x}$  est une distribution d'ordre  $\leq 1$ .

**Exercice 1.6.4** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions quelconques. Montrer que :

$$\text{supp } (fg) \subset \text{supp } f \cap \text{supp } g.$$

Solution : On considère les ensembles

$$A = \{x : f(x) \neq 0\}, \quad B = \{x : g(x) \neq 0\}, \quad A \cap B = \{x : (fg)(x) \neq 0\}.$$

Comme  $A \cap B \subset A$  et  $A \cap B \subset B$ , alors on a  $\text{adh } (A \cap B) \subset \text{adh } A$  et  $\text{adh } (A \cap B) \subset \text{adh } B$ . Par conséquent,  $\text{adh } (A \cap B) \subset \text{adh } A \cap \text{adh } B$ , et le résultat s'en déduit.

**Exercice 1.6.5** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Montrer que si  $\varphi \in \mathcal{D}$ , alors  $f\varphi \in \mathcal{D}$ . Conclusion ?

Solution : Il est évident que  $f\varphi \in \mathcal{C}^\infty$ . En outre, on sait d'après l'exercice précédent que  $\text{supp}(f\varphi) \subset \text{supp } f \cap \text{supp } \varphi$ , donc  $\text{supp}(f\varphi) \subset \text{supp } \varphi$ , et par conséquent  $f\varphi \in \mathcal{D}$ . L'espace  $\mathcal{D}$  muni de la multiplication ordinaire est ainsi un anneau.

**Exercice 1.6.6** Montrer que seules les applications b) et d) déterminent des distributions.

$$a) \mathcal{D} \ni \varphi \longmapsto \langle f, \varphi \rangle = \int_0^1 |\varphi(x)| dx.$$

$$b) \mathcal{D} \ni \varphi \longmapsto \langle f, \varphi \rangle = \sum_{j=0}^n \varphi^{(j)}(0).$$

$$c) \mathcal{D} \ni \varphi \longmapsto \langle f, \varphi \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi^{(j)}(0).$$

$$d) \mathcal{D} \ni \varphi \longmapsto \langle f, \varphi \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi^{(j)}(j).$$

Solution : a) L'application en question ne détermine pas une distribution car elle n'est pas linéaire.

b) L'application proposée est évidemment linéaire. Montrons qu'elle est continue. Si la suite  $(\varphi_k)$  converge dans  $\mathcal{D}$  vers  $\varphi$ , cela veut dire que tous les supports des  $\varphi_k$  sont contenus dans un même compact et que pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , la suite  $(\varphi_k^{(j)})$  converge uniformément vers  $\varphi^{(j)}$ . Dès lors, la suite  $\langle f, \varphi_k \rangle = \sum_{j=0}^n \varphi_k^{(j)}(0)$  converge vers  $\sum_{j=0}^n \varphi^{(j)}(0) = \langle f, \varphi \rangle$ . Donc il s'agit bien d'une distribution.

c) La série  $\sum_{j=0}^{\infty} \varphi^{(j)}(0)$  peut ne pas converger puisque on ne sait rien sur  $\varphi^{(j)}(0)$ . En effet, soit  $f \in \mathcal{C}^\infty$  telle que :  $f(0) \neq 0$  (par exemple  $f(x) = e^x$ ). D'après l'exemple 1.1.a (ou l'exercice 1.7.1), on peut toujours construire une fonction  $\psi \in \mathcal{D}$  telle que :  $\psi(x) = 1$  sur l'intervalle compact  $[-a, a]$ . La fonction  $\varphi(x) = f(x)\psi(x)$  appartient à  $\mathcal{D}$  et on a  $\varphi^{(j)} = f(0) \neq 0$ . La série en question diverge car la condition nécessaire de convergence n'est pas satisfaite. Par conséquent, l'application proposée n'est pas une distribution.

d) Comme  $\varphi \in \mathcal{D}$ , on peut donc supposer que :  $\text{supp } \varphi \subset [-n, n]$ . Dans ce cas, on a aussi  $\text{supp } \varphi^{(j)} \subset [-n, n]$ . Alors pour  $j \notin [0, n]$  on a  $\varphi^{(j)}(j) = 0$  et par conséquent  $\langle f, \varphi \rangle = \sum_{j=0}^n \varphi^{(j)}(j)$ . Cette application est évidemment linéaire et continue sur  $\mathcal{D}$ . Donc elle détermine une distribution.

**Exercice 1.6.7** La fonction de Heaviside (dite échelon unité) est définie par

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et détermine une distribution notée  $H$ . Déterminer les intervalles de  $\mathbb{R}$  sur lesquels les distributions  $H + \delta$  et  $\Delta$  (peigne de Dirac) sont nulles.

Solution : Soit  $\varphi \in \mathcal{D}$ , on a

$$\langle H + \delta, \varphi \rangle = \langle H, \varphi \rangle + \langle \delta, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx + \varphi(0) = 0 \text{ sur } ]-\infty, 0[.$$

De même, on a

$$\langle \Delta + \delta, \varphi \rangle = \left\langle \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k, \varphi \right\rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle \delta_k, \varphi \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k(0) = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

**Exercice 1.6.8** Soit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{sur } \{a\} \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

la fonction caractéristique de  $\{a\}$  et soit  $f$  la distribution associée à cette fonction. Déterminer  $\text{supp } f(x)$  et  $\text{supp } f$ .

Solution : Il est évident que  $\text{supp } f(x) = \{a\}$ . Comme  $f$  est une distribution régulière, on peut écrire

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx.$$

En outre,  $f(x)$  est presque partout nulle et d'après Lebesgue  $\langle f, \varphi \rangle = 0$ , donc  $f = 0$  et par conséquent  $\text{supp } f = \emptyset$ .

**Exercice 1.6.9** Soient  $\varphi \in \mathcal{D}$  et  $T$  une distribution. On suppose que les supports de  $T$  et  $\varphi$  sont disjoints. Montrer que :  $\langle T, \varphi \rangle = 0$ .

Solution : Soit  $\Omega$  le plus grand ouvert où  $T = 0$ . Son complémentaire  $\Omega^c$  est, par définition, le support de  $T$ . Par hypothèse,  $\text{supp } T \cap \text{supp } \varphi = \emptyset$ , donc  $\text{supp } \varphi \subset \Omega$  et dès lors  $\langle T, \varphi \rangle = 0$ .

**Exercice 1.6.10** Démontrer que le support de la distribution  $\text{vp}_{\frac{1}{x}}$  est  $\mathbb{R}$ .

Solution : Posons  $F = \text{supp vp } \frac{1}{x}$  et désignons par  $F^c$  le complémentaire de  $F$ . Par définition,  $F$  est le plus petit fermé tel que :  $\text{vp } \frac{1}{x}$  est nulle dans  $F^c$ . Cela veut dire que :  $\langle \text{vp } \frac{1}{x}, \varphi \rangle = 0$ , pour toute fonction  $\varphi \in \mathcal{D}$ , ayant son support dans  $F^c$ . Pour montrer que  $F = \mathbb{R}$ , on va raisonner par l'absurde. On suppose que  $F$  n'est pas égal à  $\mathbb{R}$  avec  $\langle \text{vp } \frac{1}{x}, \varphi \rangle = 0$ , pour toute fonction  $\varphi \in \mathcal{D}$ , ayant son support dans  $F^c \neq \emptyset$ . On montre dans ce cas qu'on peut construire une fonction  $\psi \in \mathcal{D}$ , ayant son support dans  $F^c$  telle que  $\langle \text{vp } \frac{1}{x}, \psi \rangle = 0$ , ce qui est absurde. En effet, on sait que  $F^c \neq \emptyset$  et de plus  $F^c$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$ , donc tout élément  $a \in F^c$  est intérieur à  $F^c$ , c'est-à-dire il existe  $r > 0$  tel que :  $[a - r, a + r] \subset F^c$ . En d'autres termes,  $F^c$  est voisinage de  $a$ . Considérons une fonction  $\psi \in \mathcal{D}$ , définie par  $\psi(x) = x\varphi(x)$  avec (voir exemple 1.1.3)

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{r^2-(x-a)^2}} & \text{si } |x - a| < r \\ 0 & \text{si } |x - a| \geq r \end{cases}$$

On a  $\text{supp } \psi = [a - r, a + r]$  et

$$\langle \text{vp } \frac{1}{x}, \psi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\psi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x|>\varepsilon} \varphi(x) dx = \int_{a-r}^{a+r} \varphi(x) dx.$$

Puisque  $\varphi(x) > 0$  sur  $]a - r, a + r[$ , alors  $\langle \text{vp } \frac{1}{x}, \psi \rangle$  est aussi  $> 0$ , ce qui est contradictoire. Donc  $F = \mathbb{R}$ .

## 1.7 Exercices proposés

**Exercice 1.7.1** *On considère les fonctions suivantes :*

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases} \quad \Pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } |x| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

*La fonction  $\Pi(x)$  s'appelle "fonction porte" (elle est couramment utilisée en théorie du signal). On sait, d'après l'exemple 1.1.3, que la fonction  $\varphi$  appartient à  $\mathcal{D}$ . Posons*

$$\theta(x) = \frac{\varphi(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx}, \quad \psi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \theta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0.$$

- 1) Exprimer  $\varphi(x)$  à l'aide de la fonction  $\Pi(x)$ .
- 2) Etablir une relation simple entre  $\psi_\varepsilon(x)$  et  $\Pi(x)$ .
- 3) Prouver que  $\psi_\varepsilon \in \mathcal{D}$  et déterminer son support.
- 4) Calculer  $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_\varepsilon(x) dx$ .

5) Soit  $f$  une fonction localement sommable à support borné. Montrer que la fonction

$$F_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \psi_\varepsilon(x-y) dy,$$

appartient à  $\mathcal{D}$ .

6) En déduire que si  $[a, b]$  est un compact quelconque de  $\mathbb{R}$ , alors il existe une fonction  $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}$  égale à 1 dans  $[a, b]$ .

Réponse : On obtient 1)  $\varphi(x) = \Pi\left(\frac{x}{2}\right) e^{-\frac{1-x^2}{1-x^2}}$ . 2)  $\psi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \Pi\left(\frac{x}{2\varepsilon}\right) e^{-\frac{1-x^2/\varepsilon^2}{1-x^2/\varepsilon^2}}$ .  
 3)  $\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \in \mathcal{C}^\infty$  et  $\text{supp } \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = [-\varepsilon, \varepsilon]$ , donc  $\psi_\varepsilon(x) \in \mathcal{D}$ ,  $\text{supp } \psi_\varepsilon(x) = [-\varepsilon, \varepsilon]$ .  
 4)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_\varepsilon(x) dx = 1$ .

**Exercice 1.7.2** Déterminer le support de la distribution  $T$  de l'exercice 1.6.2, ainsi que celui de la distribution  $S = \alpha\delta_a + \beta\delta_b$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes.

Réponse :  $\text{supp } T = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ ,  $\text{supp } S = \{a, b\}$ .

**Exercice 1.7.3** Pour toute fonction  $\varphi \in \mathcal{D}$ , on définit une application  $T$  sur  $\mathcal{D}$ , en posant

$$\langle T, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{f(x)\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(x)\varphi(x)}{x} dx \right),$$

où  $f$  est une fonction localement sommable. Prouver que  $T$  est une distribution.

**Exercice 1.7.4** Montrer que la distribution de Dirac ne peut être associée à une fonction localement sommable.

Indication : Soit  $f(x)$  une fonction localement sommable et  $f$  la distribution qui lui est associée. On peut raisonner par l'absurde en supposant que  $f = \delta$ . On construit une fonction  $\varphi \in \mathcal{D}$  de telle façon que :  $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \neq 0$  et  $\langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x) dx = 0$ , ce qui est absurde.

**Exercice 1.7.5** Soit  $H$  la distribution d'Heaviside et  $Pf \frac{H(x)}{x}$  la distribution définie par

$$\langle Pf \frac{H(x)}{x}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)\varphi(x)}{x} dx + \varphi(0) \ln \varepsilon \right),$$

où  $\varphi \in \mathcal{D}$ . Déterminer les supports des distributions  $H$ ,  $\frac{H(x)}{x}$  et  $Pf \frac{H(x)}{x}$ .

Réponse : Tous les supports sont égaux à  $[0, +\infty[$ .

**Exercice 1.7.6** Soit  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ . On pose

$$\varphi_\alpha(x) = \begin{cases} e^{-\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - r^2}} & \text{si } r < \alpha \\ 0 & \text{si } r \geq \alpha \end{cases}$$

et on désigne par  $\mathcal{C}$  l'espace des fonctions continues à support borné.

1) Soit  $f \in \mathcal{C}$ . Montrer que la fonction

$$f_\alpha(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \varphi_\alpha(x-t) dt,$$

appartient à  $\mathcal{D}$ .

2) En posant

$$g_\alpha(x) = \frac{f_\alpha(x)}{\int_{|x| \leq \alpha} \varphi_\alpha(x) dx},$$

et en remarquant d'après la question précédente que  $g_\alpha \in \mathcal{D}$ , montrer que toute fonction de  $\mathcal{C}$ , peut être approchée uniformément par une fonction de  $\mathcal{D}$  (théorème d'approximation de Weierstrass).

**Exercice 1.7.7** Soient  $T_1$  et  $T_2$  deux distributions. Montrer que :

$$\text{supp } (T_1 + T_2) \subset \text{supp } T_1 \cup \text{supp } T_2.$$

**Exercice 1.7.8** On considère l'application

$$\varphi \mapsto \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} \varphi(x) dx,$$

où  $\varphi \in \mathcal{D}$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re} \alpha > 0$  et  $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$  est la fonction gamma d'Euler. Montrer que cette application détermine une distribution et calculer sa valeur pour  $\alpha = -k$  où  $k \in \mathbb{N}$ .

Réponse :  $\delta^{(k)}$ .

**Exercice 1.7.9** a) On considère la fonction définie par

$$x_+^\alpha = \begin{cases} x^\alpha & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

où  $\alpha \in \mathbb{C}$  et  $\operatorname{Re} \alpha > -1$ . Montrer que cette fonction détermine une distribution sur  $\mathbb{R}$ .

b) On suppose maintenant que  $-2 < \alpha < -1$ . La fonction définie ci-dessus n'étant pas intégrable sur  $[-1, 1]$ , on lui associe une application notée  $\operatorname{Pf} x_+^\alpha$  en posant

$$\langle \operatorname{Pf} x_+^\alpha, \varphi \rangle = - \int_{-\infty}^0 \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \varphi'(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{|x| \geq \varepsilon} x^\alpha \varphi(x) dx + \frac{\varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1} \varphi(\varepsilon) \right).$$

Montrer que cette application détermine une distribution.



# Chapitre 2

## Dérivation des distributions

### Introduction

Dans ce chapitre on définit la dérivée au sens des distributions et on montre que les distributions sont indéfiniment dérивables et que leurs dérivées successives sont aussi des distributions. L'un des avantages de la théorie des distributions est que (contrairement aux fonctions quelconques) toute distribution peut être dérivée autant de fois qu'on le veut. C'est là un résultat essentiel des distributions et c'est pour l'obtenir que nous avons exigé que les fonctions de l'espace  $\mathcal{D}$  soient elles mêmes indéfiniment dérивables. Nous avons montré dans le chapitre précédent, que toute fonction localement sommable détermine une distribution, on peut donc lui associer une dérivée au sens des distributions, qui est aussi une distribution mais pas forcément une fonction. Les distributions sont utilisées un peu partout dans les disciplines faisant appel au calcul différentiel car elles sont toujours dérивables alors que les dérivées au sens usuel n'existent pas toujours. Ensuite on introduit la notion de primitive d'une distribution et on verra au chapitre 3, que toute distribution possède une infinité de primitives ne différant que par une constante. La fonction d'Heaviside  $H(x)$  nulle pour  $x < 0$  et égale à 1 pour  $x \geq 0$ , a pour dérivée la mesure de  $\delta$  de Dirac. La discontinuité que présente  $H(x)$  à l'origine apparaît dans la dérivée de la distribution associée, sous la forme d'une masse (+1) ponctuelle placée à l'origine. Plus généralement, on montre que les sauts que subit une fonction en ses points de discontinuités apparaissent dans la distribution dérivée sous forme de masses ponctuelles placées aux points de discontinuités. La dérivée de la distribution de Dirac représente ce qu'on appelle en physique un "doublet". De nombreux exercices importants sont étudiés : valeur principale de Cauchy, parties finies de Hadamard, opérateur de Laplace, opérateur des ondes, opérateur de Cauchy-Riemann, Noyau de Gauss, équation de la chaleur, etc.

## 2.1 Définition et propriétés

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ . En faisant une intégration par parties, on obtient immédiatement

$$\langle f', \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) \varphi(x) dx = -\langle f, \varphi' \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}$$

car  $\varphi(\pm\infty) = 0$ . On est donc conduit à la définition générale suivante :

**Définition 2.1.1** *On appelle dérivée  $T'$  d'une distribution  $T$ , la fonctionnelle définie par la relation*

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}$$

**Proposition 2.1.2** *Toute distribution admet des dérivées de tout ordre qui sont aussi des distributions.*

*Démonstration :* Soient  $T$  une distribution et  $\varphi \in \mathcal{D}$ . On a par définition,

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle, \quad \langle T'', \varphi \rangle = -\langle T', \varphi' \rangle = \langle T, \varphi'' \rangle, \dots \langle T^{(j)}, \varphi \rangle = (-1)^j \langle T, \varphi^{(j)} \rangle,$$

où  $\varphi', \varphi'', \dots, \varphi^{(j)}$  existent car  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$ . Montrons maintenant que  $T^{(j)}$  est une distribution. Elle est linéaire : soient  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , on a

$$\langle T^{(j)}, \alpha \varphi_1 + \beta \varphi_2 \rangle = \alpha \langle T^{(j)}, \varphi_1 \rangle + \beta \langle T^{(j)}, \varphi_2 \rangle.$$

Pour établir la continuité de  $T^{(j)}$ , on suppose que la suite  $(\varphi_k)$  converge dans  $\mathcal{D}$  vers  $\varphi$ . Alors, par définition,  $(\varphi_k^{(j)})$  converge uniformément vers  $\varphi^{(j)}$  et par conséquent

$$\langle T^{(j)}, \varphi_k \rangle = (-1)^j \langle T, \varphi_k^{(j)} \rangle,$$

converge vers

$$(-1)^j \langle T, \varphi^{(j)} \rangle = \langle T^{(j)}, \varphi \rangle,$$

ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Remarque 2.1.1** *Soient  $T \in \mathcal{D}'$  et  $g \in \mathcal{C}^\infty$ . On montre (voir chapitre 3) que :  $(gT)' = g'T + gT'$  et (voir chapitre 4)  $\frac{T(x+h)-T(x)}{h}$  tend vers  $T'$  lorsque  $h \rightarrow 0$ .*

**Définition 2.1.3** *On dit qu'une distribution  $T$  est primitive d'une distribution  $S$  si et seulement si  $T' = S$ .*

**Remarque 2.1.2** *On montrera au chapitre 3, que les seules solutions de l'équation différentielle  $T' = 0$  sont les constantes. Ceci nous permettra d'en déduire que toute distribution possède une infinité de primitives ne différant que par une constante.*

## 2.2 Exemples

### 2.2.1 Dérivée de la fonction d'Heaviside

Rappelons que la fonction d'Heaviside (dite échelon unité) est définie par

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et détermine une distribution notée  $H$ . Au sens des fonctions, la dérivée de  $H(x)$  n'existe pas au point  $x = 0$ . Mais au sens des distributions, on a pour  $\varphi \in \mathcal{D}$ ,

$$\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle, = - \int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle,$$

car  $\varphi(+\infty) = 0$ . Par conséquent,  $H' = \delta$ , c'est-à-dire la distribution  $H$  a pour dérivée la distribution de Dirac. La discontinuité que représente  $H(x)$  à l'origine apparaît dans la dérivée de la distribution associée, sous la forme d'une masse (+1) ponctuelle placée à l'origine. Remarquons qu'il n'est pas nécessaire de préciser la valeur de  $H(x)$  pour  $x = 0$ , qui est un ensemble de mesure nulle. Par réitations, on obtient

$$H^{(m+1)} = \delta^{(m)}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

### 2.2.2 Dérivée de la distribution de Dirac

On a

$$\langle \delta', \varphi \rangle = -\langle \delta, \varphi' \rangle = -\varphi'(0).$$

En général, on a

$$\langle \delta^{(m)}, \varphi \rangle = (-1)^m \varphi^{(m)}(0), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Soient  $-\frac{k}{\varepsilon}$  et  $\frac{k}{\varepsilon}$  deux masses placées respectivement aux points  $a$  et  $a + \varepsilon$ . Lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on obtient un doublet. Il sera représenté par la dérivée de la distribution de Dirac au point  $a$ . En effet, la distribution définie par cette répartition est

$$T_\varepsilon = \frac{k}{\varepsilon} \delta_{a+\varepsilon} - \frac{k}{\varepsilon} \delta_a,$$

et

$$\langle T_\varepsilon, \varphi \rangle = \frac{k}{\varepsilon} \langle \delta_{a+\varepsilon}, \varphi \rangle - \frac{k}{\varepsilon} \langle \delta_a, \varphi \rangle = \frac{k}{\varepsilon} \varphi(a + \varepsilon) - \frac{k}{\varepsilon} \varphi(a) = k \frac{\varphi(a + \varepsilon) - \varphi(a)}{\varepsilon}.$$

Si  $\varphi(x) = 1$ , on retrouve la masse totale, c'est-à-dire zéro. Si  $\varphi(x) = x^2$ , on retrouve le moment d'inertie de cette distribution, c'est-à-dire  $k(\varepsilon + 2a)$ . Lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle T_\varepsilon, \varphi \rangle = k \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(a + \varepsilon) - \varphi(a)}{\varepsilon} = k \langle \delta_a, \varphi' \rangle = -k \langle \delta'_a, \varphi \rangle,$$

d'où  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon = -k \delta'_a$ .

### 2.2.3 Dérivée d'une fonction discontinue

Soit  $f(x)$  une fonction de classe  $C^1$  pour  $x < 0$  et  $x > 0$ , mais présentant une discontinuité de première espèce en  $x = 0$ , c'est-à-dire les limites

$$f(0^+) \equiv \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \quad f(0^-) \equiv \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x),$$

existent et sont distinctes. Au point  $x = 0$ , la fonction  $f$  subit un saut  $\sigma_0$ , c'est-à-dire  $\sigma_0 = f(0^+) - f(0^-)$ . On désigne par  $f$  la distribution associée à  $f(x)$ , par  $f'$  la dérivée de cette distribution et par  $\{f'\}$  la distribution associée à la dérivée usuelle de  $f(x)$  pour  $x < 0$  et  $x > 0$  et qui n'est pas définie pour  $x = 0$ . On a

$$\begin{aligned} \langle f', \varphi \rangle &= -\langle f, \varphi' \rangle, \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx, \\ &= - \int_{-\infty}^0 f(x) \varphi(x) dx - \int_0^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx, \\ &= -f(x)\varphi(x)|_{-\infty}^0 + \int_{-\infty}^0 f'(x)\varphi(x) dx \\ &\quad - f(x)\varphi(x)|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} f'(x)\varphi(x) dx, \\ &= (f(0^+) - f(0^-))\varphi(0) + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x) dx, \\ &= \sigma_0 \langle \delta, \varphi \rangle + \langle \{f'\}, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$f' = \{f'\} + \sigma_0 \delta.$$

Le saut  $\sigma_0$  de  $f$  apparaît, dans la distribution dérivée, sous forme d'une masse ponctuelle  $\sigma_0$  au point de discontinuité. En prenant  $f = H$ ,  $\sigma_0 = 1$ ,  $\{f'\} = 0$ , on retrouve le résultat précédent, c'est-à-dire  $H' = \delta$ .

Supposons que  $f(x)$  soit une fonction indéfiniment dérivable. En désignant par  $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ , les sauts respectifs de  $f'(x), f''(x), \dots$ , à l'origine, on aura en dérivant à nouveau :

$$f'' = \{f''\} + \sigma_0 \delta' + \sigma_1 \delta,$$

$$f^{(m)} = \{f^{(m)}\} + \sigma_0 \delta^{(m-1)} + \sigma_1 \delta^{(m-2)} + \dots + \sigma_{m-1} \delta,$$

où  $f^{(m)}$  désigne les dérivées successives de la distribution  $f$  et  $\{f^{(m)}\}$  désigne les distributions associées aux dérivées usuelles de  $f(x)$  pour  $x < 0$  et  $x > 0$  et qui ne sont pas définies pour  $x = 0$ . Plus généralement, si  $f(x)$  admet des discontinuités aux points  $a_1, a_2, \dots$ , avec des sauts respectifs  $\tau_1, \tau_2, \dots$ , on aura

$$f' = \{f'\} + \sum_k \tau_k \delta_{a_k}.$$

## 2.3 Extension au cas de plusieurs variables

Dans le cas de plusieurs variables, on définit la dérivée  $\frac{\partial T}{\partial x_i}$  d'une distribution  $T$ , par

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

On a

$$\left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j}, \varphi \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle = \left\langle T, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right\rangle,$$

où  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathcal{C}^\infty$ , donc  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i}$ , et par conséquent

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Plus généralement, on a

$$\langle D^k T, \varphi \rangle = (-1)^{|k|} \langle T, D^k \varphi \rangle,$$

où  $k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{N}^m$  avec  $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_m$  et  $D^k$  désigne l'opérateur

$$D^k = \frac{\partial^{k_1}}{\partial x_1^{k_1}} \cdot \frac{\partial^{k_2}}{\partial x_2^{k_2}} \cdots \frac{\partial^{k_m}}{\partial x_m^{k_m}} = \frac{\partial^{k_1+k_2+\dots+k_m}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_m^{k_m}}.$$

## 2.4 Exercices résolus

**Exercice 2.4.1** Démontrer au sens des distributions les fonctions suivantes :

- a)  $\operatorname{sgn}(x) = \frac{|x|}{x}$  (fonction signe)
- b)  $f(x) = \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(x)$  c'est-à-dire la fonction caractéristique de  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ , égale à 1 si  $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  et à 0 sinon.

Solution : a) On a

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Soit  $\varphi \in \mathcal{D}$ , on a

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{sgn}', \varphi \rangle &= -\langle \operatorname{sgn}, \varphi' \rangle, \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sgn}(x) \varphi'(x) dx, \\ &= \int_{-\infty}^0 \varphi'(x) dx - \int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx, \\ &= 2\varphi(0), \\ &= 2\langle \delta, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

d'où  $\operatorname{sgn}' = 2\delta$ . Une méthode rapide consiste à utiliser la formule établie dans la section 2.3. En effet, la fonction  $\operatorname{sgn}(x)$  subit un saut  $\sigma_0 = 2$  et sa dérivée au sens des fonctions vaut 0. Donc

$$\operatorname{sgn}' = \{\operatorname{sgn}\}' + \sigma_0 \delta' = 2\delta'.$$

b) On a

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Soit  $\varphi \in \mathcal{D}$ , on a

$$\begin{aligned} \langle f', \varphi \rangle &= -\langle f, \varphi' \rangle, \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi'(x) dx, \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \varphi'(x) dx, \\ &= -\varphi\left(\frac{1}{2}\right) + \varphi\left(-\frac{1}{2}\right), \\ &= -\langle \delta_{\frac{1}{2}}, \varphi \rangle + \langle \delta_{-\frac{1}{2}}, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

d'où  $f' = \delta_{-\frac{1}{2}} - \delta_{\frac{1}{2}} = \delta(x + \frac{1}{2}) - \delta(x - \frac{1}{2})$ . Comme dans la question précédente, on peut utiliser la formule établie dans la section 2.3. En effet, la fonction  $f(x)$  admet deux discontinuités aux points  $-\frac{1}{2}$  et  $\frac{1}{2}$  avec des sauts respectifs  $\tau_{-\frac{1}{2}} = 1$  et  $\tau_{\frac{1}{2}} = -1$ . Sa dérivée au sens des fonctions est nulle. Donc

$$f' = \{f\}' + \tau_{-\frac{1}{2}}\delta_{-\frac{1}{2}} + \tau_{\frac{1}{2}}\delta_{\frac{1}{2}} = \delta_{-\frac{1}{2}} - \delta_{\frac{1}{2}}.$$

**Exercice 2.4.2** Soit  $vp \frac{1}{x}$  la distribution (voir exercice 1.6.3) définie par

$$\langle vp \frac{1}{x}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right), \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

1) Calculer au sens des distributions

- a)  $(vp \frac{1}{x})'$ .
- b)  $(vp \frac{1}{x})''$ .

2) Pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}$ , on pose

$$\langle Pf \frac{1}{x^2}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - 2 \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} dx \right),$$

$$\langle Pf \frac{1}{x^3}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^3} dx - 2 \frac{\varphi'(0)}{\varepsilon} dx \right),$$

Le symbole  $Pf \dots$  désigne la partie finie de  $\dots$

a) Chercher une relation simple entre  $Pf \frac{1}{x^2}$  et  $(vp \frac{1}{x})'$  ainsi qu'entre  $Pf \frac{1}{x^3}$  et  $(vp \frac{1}{x})''$ .

b) Les applications  $Pf \frac{1}{x^2}$  et  $Pf \frac{1}{x^3}$  sont-elles des distributions sur  $\mathbb{R}$ ? Justifier la réponse.

Solution : 1) a) On a

$$\begin{aligned} \langle (vp \frac{1}{x})', \varphi \rangle &= -\langle vp \frac{1}{x}, \varphi' \rangle, \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x} dx, \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi'(x)}{x} dx \right), \end{aligned}$$

En effectuant une intégration par parties, on obtient

$$\langle (vp \frac{1}{x})', \varphi \rangle = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( -\frac{\varphi(-\varepsilon) + \varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} + \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx \right).$$

Or d'après l'exercice 1.6.1, on a

$$\varphi(\varepsilon) = \varphi(0) + \varepsilon\varphi'(0) + \varepsilon^2\theta(\varepsilon), \quad \varphi(-\varepsilon) = \varphi(0) - \varepsilon\varphi'(0) + \varepsilon^2\theta(-\varepsilon),$$

d'où

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(-\varepsilon) + \varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ 2 \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \varepsilon(\theta(\varepsilon) + \theta(-\varepsilon)) \right\} = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(0)}{\varepsilon}.$$

Par conséquent,

$$\langle (\text{vp } \frac{1}{x})', \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( 2 \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} - \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx \right).$$

b) On a

$$\langle (\text{vp } \frac{1}{x}''), \varphi \rangle = -\langle (\text{vp } \frac{1}{x})', \varphi' \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( -2 \frac{\varphi'(0)}{\varepsilon} + \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x^2} dx \right),$$

d'après la question précédente. Puisque

$$\begin{aligned} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x^2} dx &= \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x^2} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi'(x)}{x^2} dx, \\ &= \frac{\varphi(x)}{x^2} \Big|_{-\infty}^{-\varepsilon} + 2 \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^3} dx + \frac{\varphi(x)}{x^2} \Big|_{\varepsilon}^{\infty} + 2 \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^3} dx, \\ &= \frac{\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)}{\varepsilon^2} + 2 \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^3} dx, \end{aligned}$$

alors

$$\langle (\text{vp } \frac{1}{x}''), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( -2 \frac{\varphi'(0)}{\varepsilon} + \frac{\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)}{\varepsilon^2} + 2 \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^3} dx \right).$$

Or d'après l'exercice 1.6.1, on a

$$\begin{aligned} \varphi(\varepsilon) &= \varphi(0) + \varepsilon\varphi'(0) + \frac{\varepsilon^2}{2}\varphi''(0) + \varepsilon^3\theta(\varepsilon), \\ \varphi(-\varepsilon) &= \varphi(0) - \varepsilon\varphi'(0) + \frac{\varepsilon^2}{2}\varphi''(0) - \varepsilon^3\theta(-\varepsilon), \end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(-\varepsilon) + \varphi(\varepsilon)}{\varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ -2 \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} - \varepsilon(\theta(-\varepsilon) + \theta(\varepsilon)) \right\} = -2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi'(0)}{\varepsilon}.$$

Par conséquent,

$$\langle (\text{vp } \frac{1}{x})'', \varphi \rangle = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( -2 \frac{\varphi'(0)}{\varepsilon} + \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^3} dx \right).$$

2) a) On déduit immédiatement de 1) que

$$\text{Pf } \frac{1}{x^2} = -(\text{vp } \frac{1}{x})', \quad 2\text{Pf } \frac{1}{x^3} = (\text{vp } \frac{1}{x})''.$$

b) Une distribution étant toujours dérivable, on déduit de a) que  $\text{Pf } \frac{1}{x^2}$  et  $\text{Pf } \frac{1}{x^3}$  sont aussi des distributions.

**Exercice 2.4.3** *Exprimer les applications b) et d) de l'exercice 1.6.6 en fonction de la distribution de Dirac*

Solution : Pour b), on a

$$\langle f, \varphi \rangle = \sum_{j=0}^n \varphi^{(j)}(0) = \sum_{j=0}^n \langle \delta, \varphi^{(j)} \rangle = \sum_{j=0}^n (-1)^j \langle \delta^{(j)}, \varphi \rangle,$$

et par conséquent,

$$f = \sum_{j=0}^n (-1)^j \delta^{(j)}.$$

De même, pour d), on a

$$\langle f, \varphi \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi^{(j)}(j) = \sum_{j=0}^{\infty} \langle \delta_j, \varphi^{(j)} \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \langle \delta_j^{(j)}, \varphi \rangle,$$

et donc

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \delta_j^{(j)}.$$

**Exercice 2.4.4** *Montrer que la fonction  $\ln|x|$  détermine une distribution sur  $\mathbb{R}$  et prouver qu'au sens des distributions*

$$(\ln|x|)' = \text{vp } \frac{1}{x}.$$

Solution : La fonction  $\ln|x|$  définit une distribution sur  $\mathbb{R}$  car elle est localement sommable. En effet, la fonction  $\ln|x|$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$ , donc localement

sommable. En outre, dans un voisinage de 0 par exemple  $] -1, 1[$ , l'intégrale  $\int_{-1}^1 |\ln|x||dx$  est convergente : on a

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\epsilon^1 \ln x dx = -1,$$

donc  $\int_0^1 \ln x dx$  existe. Même argument pour  $\int_{-1}^0 \ln(-x) dx$ . (Une autre méthode : la fonction  $\ln|x|$ ,  $x \neq 0$ , est localement sommable dans  $\mathbb{R}$  car dans un voisinage de 0, on a  $|\ln|x|| \leq \frac{1}{|x|^\alpha}$ , pour  $0 < \alpha < 1$ ). La dérivée de  $\ln|x|$ , au sens des fonctions, n'est pas localement sommable. Mais au sens des distributions, on a

$$\begin{aligned} \langle (\ln|x|)', \varphi \rangle &= -\langle \ln|x|, \varphi' \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D} \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \ln|x| \varphi'(x) dx, \\ &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{-\epsilon} \ln(-x) \varphi'(x) dx + \int_{\epsilon}^{+\infty} \ln x \varphi'(x) dx \right), \\ &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \ln(-x) \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{-\epsilon} - \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right. \\ &\quad \left. + \ln x \varphi(x) \Big|_{\epsilon}^{+\infty} - \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right), \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\varphi(\epsilon) - \varphi(-\epsilon)) \ln \epsilon \\ &\quad + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right). \end{aligned}$$

Comme (voir exercice 1.6.1),

$$\varphi(\epsilon) = \varphi(0) + \epsilon \varphi'(0) + \epsilon^2 \theta(\epsilon), \quad \varphi(-\epsilon) = \varphi(0) - \epsilon \varphi'(0) + \epsilon^2 \theta(-\epsilon),$$

alors  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\varphi(\epsilon) - \varphi(-\epsilon)) \ln \epsilon = 0$ , et par conséquent

$$\langle (\ln|x|)', \varphi \rangle = \langle \text{vp } \frac{1}{x}, \varphi \rangle.$$

**Exercice 2.4.5** Soit  $T^{(n)}$  la dérivée  $n$ ième d'une distribution arbitraire  $T$ . Montrer que  $\text{supp } T^{(n)} \subset \text{supp } T$ . La réciproque est-elle vraie ? Justifier la réponse.

Solution : Soient  $\Omega$  le plus grand ouvert où  $T = 0$  et  $W$  le plus grand ouvert où  $T^{(n)} = 0$ . Par définition, on a  $\text{supp } T = \Omega^c$  et  $\text{supp } T^{(n)} = W^c$ . Puisque  $T = 0$  sur  $\Omega$ , alors  $T^{(n)} = 0$  sur  $\Omega$ . Dès lors,  $W \supset \Omega$  et par conséquent  $W^c \subset \Omega^c$ . La réciproque est fausse. En effet, considérons la distribution  $T = \text{constante}$ . On a  $\text{supp } T = \mathbb{R}$  alors que  $\text{supp } T^{(n)} = \emptyset$ .

**Exercice 2.4.6** Calculer au sens des distributions, les dérivées successives de la fonction  $|x|$ .

Solution : Posons  $y = |x|$ . On a

$$y = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}, \quad y' = \begin{cases} -1 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Au point  $x = 0$ , la fonction  $y'$  est discontinue et subit un saut  $\sigma_1 = 2$ . On a

$$y'' = \{y''\} + \sigma_0\delta' + \sigma_1\delta = 2\delta, \quad y^{(3)} = 2\delta', \dots, y^{(n)} = 2\delta^{(n-2)}, n \geq 2$$

On obtient immédiatement ce résultat en utilisant la formule (voir section 2.3) :

$$y^{(n)} = \{y^{(n)}\} + \sigma_0\delta^{(n-1)} + \sigma_1\delta^{(n-2)} + \dots + \sigma_{n-1}\delta.$$

Ici  $\{y^{(n)}\} = 0$ ,  $\sigma_1 = 2$  et  $\sigma_0 = \sigma_2 = \sigma_3 = \dots = \sigma_n = 0$ .

**Exercice 2.4.7** Soient  $H(x)$  la fonction d'Heaviside,  $\alpha$  et  $\omega$  des constantes réelles. Prouver, au sens des distributions, les relations suivantes :

- a)  $\left(\frac{d}{dx} - \alpha\right) H(x)e^{\alpha x} = \delta$ .
- b)  $\left(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2\right) \frac{H(x)\sin \omega x}{\omega} = \delta$ .

Solution : a) Soit  $\varphi \in \mathcal{D}$ . On a

$$\begin{aligned} & \left\langle \left(\frac{d}{dx} - \alpha\right) H(x)e^{\alpha x}, \varphi \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{d}{dx} H(x)e^{\alpha x}, \varphi \right\rangle - \alpha \langle H(x)e^{\alpha x}, \varphi \rangle, \\ &= -\langle H(x)e^{\alpha x}, \varphi' \rangle - \alpha \langle H(x)e^{\alpha x}, \varphi \rangle, \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)e^{\alpha x} \varphi'(x) dx - \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)e^{\alpha x} \varphi(x) dx, \\ &= - \int_0^{+\infty} e^{\alpha x} \varphi'(x) dx - \alpha \int_0^{+\infty} e^{\alpha x} \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

Or

$$\int_0^{+\infty} e^{\alpha x} \varphi'(x) dx = e^{\alpha x} \varphi(x)|_0^{+\infty} + \alpha \int_0^{+\infty} e^{\alpha x} \varphi(x) dx,$$

donc

$$\left\langle \left(\frac{d}{dx} - \alpha\right) H(x)e^{\alpha x}, \varphi \right\rangle = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle,$$

d'où  $\left(\frac{d}{dx} - \alpha\right) H(x)e^{\alpha x} = \delta$ . On peut retrouver le même résultat, en procédant comme suit,

$$\left(\frac{d}{dx} - \alpha\right) H(x)e^{\alpha x} = \frac{d}{dx}(H(x)e^{\alpha x}) - \alpha H(x)e^{\alpha x} = \delta e^{\alpha x} = \delta.$$

b) Soit  $\varphi \in \mathcal{D}$ . On a

$$\begin{aligned} & \left\langle \left( \frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 \right) \frac{H(x) \sin \omega x}{\omega}, \varphi \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{H(x) \sin \omega x}{\omega}, \varphi'' \right\rangle + \omega \langle H(x) \sin \omega x, \varphi \rangle, \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega x}{\omega} \varphi''(x) dx + \omega \int_0^{+\infty} \sin \omega x \varphi(x) dx, \\ &= \frac{\sin \omega x}{\omega} \varphi'(x) \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \cos \omega x \varphi'(x) dx + \omega \int_0^{+\infty} \sin \omega x \varphi(x) dx, \\ &= - \int_0^{+\infty} \cos \omega x \varphi'(x) dx + \omega \int_0^{+\infty} \sin \omega x \varphi(x) dx, \\ &= - \cos \omega x \varphi(x) \Big|_0^{+\infty} - \omega \int_0^{+\infty} \sin \omega x \varphi(x) dx + \omega \int_0^{+\infty} \sin \omega x \varphi(x) dx, \\ &= \varphi(0), \\ &= \langle \delta, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

d'où  $\left(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2\right) \frac{H(x) \sin \omega x}{\omega} = \delta$ . On peut retrouver le même résultat, en procédant comme suit,

$$\begin{aligned} & \left( \frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 \right) \frac{H(x) \sin \omega x}{\omega} \\ &= \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{H(x) \sin \omega x}{\omega} \right) + \omega H(x) \sin \omega x, \\ &= \frac{d}{dx} \left( \frac{H'(x) \sin \omega x}{\omega} + H(x) \cos \omega x \right) + \omega H(x) \sin \omega x, \\ &= \frac{d}{dx} \left( \frac{\delta \sin \omega x}{\omega} + H(x) \cos \omega x \right) + \omega H(x) \sin \omega x, \\ &= \frac{d}{dx} (H(x) \cos \omega x) + \omega H(x) \sin \omega x, \\ &= H'(x) \cos \omega x - \omega H(x) \sin \omega x + \omega H(x) \sin \omega x, \\ &= \delta \cos \omega x, \\ &= \delta. \end{aligned}$$

**Exercice 2.4.8** Soit  $u(x, t)$  la fonction définie dans  $\mathbb{R}^2$  par

$$u(x, t) = \begin{cases} \alpha & \text{si } t^2 - x^2 \geq 0, t \geq 0, \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

a) Montrer que  $u(x, t)$  définit une distribution dans  $\mathbb{R}^2$  et déterminer son support.

b) Calculer, au sens des distributions, l'expression  $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$  étant l'opérateur des ondes.

c) Déterminer  $\alpha$  de façon que  $u(x, t)$  soit solution de l'équation suivante :

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \delta,$$

où  $v$  est une constante positive et  $\delta = \delta(x, t)$  la distribution de Dirac.

Solution : a) La fonction  $u(x, t)$  définit une distribution dans  $\mathbb{R}^2$  car elle est localement sommable. Le support de  $u(x, t)$  est le cône :  $t^2 - x^2 \geq 0, t \geq 0$ .

b) Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ , alors par définition

$$\left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \varphi \right\rangle = \left\langle u, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\rangle = \left\langle u, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\rangle - \left\langle u, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\rangle.$$

On a

$$\begin{aligned} \left\langle u, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dx dt, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{|x|}^{+\infty} \alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dt \right) dx, \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) \Big|_{|x|}^{+\infty} dx, \\ &= -\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, |x|) dx, \\ &= -\alpha \left( \int_{-\infty}^0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, -x) dx + \int_0^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, x) dx \right), \\ &= -\alpha \left( \int_0^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(-x, x) dx + \int_0^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, x) dx \right). \end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned}\left\langle u, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx dt, \\ &= \int_0^{+\infty} \left( \int_{-t}^t \alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx \right) dt, \\ &= \alpha \int_0^{+\infty} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \right|_{x=-t}^t dt, \\ &= \alpha \int_0^{+\infty} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, t) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(-t, t) \right) dt.\end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \varphi \right\rangle &= -\alpha \int_0^{+\infty} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, x) dx + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, t) dt \right) \\ &\quad -\alpha \int_0^{+\infty} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t}(-x, x) dx - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(-t, t) dt \right).\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}d\varphi(x, t) &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) dx + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) dt, \\ d\varphi(-x, t) &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x}(-x, t) dx + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(-x, t) dt,\end{aligned}$$

et pour  $x = t = s$ , on a

$$\begin{aligned}d\varphi(s, s) &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}(s, s) dx + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, s) dt, \\ d\varphi(-s, s) &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x}(-s, s) dx + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(-s, s) dt.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \varphi \right\rangle &= -\alpha \int_0^{+\infty} d\varphi(s, s) - \alpha \int_0^{+\infty} d\varphi(-s, s), \\ &= 2\alpha\varphi(0, 0), \\ &= 2\alpha\langle \delta, \varphi \rangle,\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\alpha\delta, \quad \delta = \delta(x, t).$$

c) En remplaçant  $t$  par  $vt$  dans l'équation précédente, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 2\alpha\delta(x, vt), \\ &= \frac{2\alpha}{v}\delta(x, t). \end{aligned}$$

Donc pour satisfaire à l'équation proposée, on doit avoir  $\alpha = \frac{v}{2}$ .

**Exercice 2.4.9** Soit  $Pf \frac{H(x)}{x^k}$  la distribution définie par

$$\left\langle Pf \frac{H(x)}{x^k}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^k} dx + A \right\},$$

où

$$A \equiv - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\varphi^{(i-1)}(0)}{(i-1)!} \cdot \frac{1}{(k-i)\varepsilon^{k-i}} + \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} \ln \varepsilon,$$

et  $H(x)$  est la fonction d'Heaviside,  $\varphi \in \mathcal{D}$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ . Etablir la relation

$$\left( Pf \frac{H(x)}{x^k} \right)' = -k Pf \frac{H(x)}{x^{k+1}} + (-1)^k \frac{\delta^{(k)}}{k!}.$$

Solution : Soit  $\varphi \in \mathcal{D}$ . On a

$$\left\langle \left( Pf \frac{H(x)}{x^k} \right)', \varphi \right\rangle = - \left\langle Pf \frac{H(x)}{x^k}, \varphi'(x) \right\rangle = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi'(x)}{x^k} dx + B \right\},$$

où

$$B \equiv - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\varphi^{(i)}(0)}{(i-1)!} \cdot \frac{1}{(k-i)\varepsilon^{k-i}} + \frac{\varphi^{(k)}(0)}{(k-1)!} \ln \varepsilon.$$

En faisant une intégration par parties, on obtient

$$\left\langle \left( Pf \frac{H(x)}{x^k} \right)', \varphi \right\rangle = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ -\frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon^k} + k \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^{k+1}} dx + B \right\}.$$

En remplaçant  $\varphi$  par l'expression (voir exercice 1.6.1),

$$\varphi(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\varepsilon^i}{i!} \varphi^{(i)}(0) + \varepsilon^k \theta(\varepsilon), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \theta(\varepsilon) = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!},$$

un calcul direct montre que :

$$\left\langle \left( Pf \frac{H(x)}{x^k} \right)', \varphi \right\rangle = -k \left\langle Pf \frac{H(x)}{x^{k+1}}, \varphi \right\rangle + \frac{(-1)^k}{k!} \left\langle \delta^{(k)}, \varphi \right\rangle,$$

d'où le résultat.

**Exercice 2.4.10** Soit  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  et  $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ , l'opérateur de Cauchy-Riemann. Calculer, au sens des distributions, l'expression  $\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{z} \right)$ .

Solution : La fonction  $\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy}$  est une distribution sur  $\mathbb{R}^2$  car elle est localement sommable. Soit  $\varphi(x, y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ . On a, par définition,

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{z} \right), \varphi \right\rangle = - \left\langle \frac{1}{z}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right\rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x+iy} \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right).$$

Pour calculer cette intégrale double, on va utiliser le théorème du changement de variables et par la suite le théorème de Fubini. En coordonnées polaires  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,  $0 < r < +\infty$ ,  $0 < \theta < 2\pi$ , on sait que les opérateurs :  $\frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial}{\partial r}$  et  $\frac{\partial}{\partial \theta}$  sont liés par les équations

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Posons  $\psi(r, \theta) = \varphi(r \cos \theta, r \sin \theta)$ . L'intégrale précédente s'écrit (en tenant compte du fait que le jacobien de la transformation est  $r$ ) sous la forme

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{z} \right), \varphi \right\rangle &= - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) dr d\theta, \\ &= - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\partial \psi}{\partial r} dr d\theta - \frac{i}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} dr d\theta, \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \psi(0, \theta) d\theta - \frac{i}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{r} (\psi(r, 2\pi) - \psi(r, 0)) dr, \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \varphi(0, 0) d\theta, \\ &= \pi \varphi(0, 0), \\ &= \pi \langle \delta, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Finalement

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{z} \right) = \pi \delta.$$

**Exercice 2.4.11** Montrer qu'au sens des distributions,

$$(H(x) \ln x)' = Pf \frac{H(x)}{x},$$

où  $H(x)$  est la fonction d'Heaviside et  $Pf \frac{H(x)}{x}$  la distribution définie par

$$\langle Pf \frac{H(x)}{x}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \varphi(0) \ln \varepsilon \right),$$

pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}$ .

Solution : Soit  $\varphi \in \mathcal{D}$ . On a

$$\begin{aligned}\langle (H(x) \ln x)', \varphi \rangle &= -\langle H(x) \ln x, \varphi'(x) \rangle, \\ &= - \int_0^\infty \ln x \cdot \varphi'(x) dx, \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^\infty \ln x \cdot \varphi'(x) dx, \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \varphi(x) \ln x|_\varepsilon^\infty - \int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x} dx \right\}, \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \varphi(\varepsilon) \ln \varepsilon + \int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x} dx \right\}.\end{aligned}$$

Comme  $\varphi \in \mathcal{D}$ , on a d'après l'exercice 1.6.1,  $\varphi(\varepsilon) = \varphi(0) + \varepsilon \varphi'(0) + \varepsilon^2 \theta(\varepsilon)$ , où  $\theta$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . On pose  $\psi(\varepsilon) = \varphi'(0) + \varepsilon \theta(\varepsilon)$ , d'où  $\varphi(\varepsilon) = \varphi(0) + \varepsilon \psi(\varepsilon)$ , avec  $\psi$  continue sur  $\mathbb{R}$ . On a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(\varepsilon) \ln \varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varphi(0) + \varepsilon \psi(\varepsilon)) \ln \varepsilon = \varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \varepsilon,$$

et par conséquent

$$\langle (H(x) \ln x)', \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \varphi(0) \ln \varepsilon + \int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x} dx \right\} = \left\langle \text{Pf } \frac{H(x)}{x}, \varphi \right\rangle.$$

**Exercice 2.4.12** Soient  $\varphi \in \mathcal{D}$  et  $x \in \mathbb{R}$ . On pose  $D = -\frac{d^2}{dx^2} + 4\frac{d}{dx}$ , et

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^a f(x) \varphi(x) dx + \int_a^{+\infty} g(x) \varphi(x) dx,$$

où  $a$  est une constante,  $f$  et  $g$  sont deux fonctions de classe  $C^2$  vérifiant les conditions :  $Df(x) = Dg(x) = 0$ ,  $f(a) - g(a) = 1$ ,  $f'(a) - g'(a) = 5$ . Montrer qu'au sens des distributions  $DT = \delta'_a + \delta_a$ .

Solution : Soit  $\varphi \in \mathcal{D}$ . On a

$$\langle DT, \varphi \rangle = \langle -T'' + 4T', \varphi \rangle = \langle -T'', \varphi \rangle + 4\langle T', \varphi \rangle.$$

En utilisant deux fois la formule d'intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\langle T, \varphi'' \rangle &= \int_{-\infty}^a f(x) \varphi''(x) dx + \int_a^\infty g(x) \varphi''(x) dx, \\ &= (f(a) - g(a))\varphi'(a) - (f'(a) - g'(a))\varphi(a) \\ &\quad + \int_{-\infty}^a f''(x) \varphi(x) dx + \int_{-\infty}^a g''(x) \varphi(x) dx.\end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned}\langle T, \varphi' \rangle &= \int_{-\infty}^a f(x)\varphi'(x)dx + \int_a^\infty g(x)\varphi'(x)dx, \\ &= (f(a) - g(a))\varphi(a) - \int_{-\infty}^a f'(x)\varphi(x)dx - \int_a^\infty g'(x)\varphi(x)dx.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\langle DT, \varphi \rangle &= (g(a) - f(a))(\varphi'(a) + 4\varphi(a)) + (f'(a) - g'(a))\varphi(a) \\ &\quad + \int_{-\infty}^a Df(x)\varphi(x)dx + \int_a^\infty Dg(x)\varphi(x)dx.\end{aligned}$$

On a donc, en utilisant les conditions mentionnées dans l'énoncé,

$$\langle DT, \varphi \rangle = -\varphi'(a) + \varphi(a) = -\langle \delta_a, \varphi' \rangle + \langle \delta_a, \varphi \rangle = \langle \delta'_a + \delta_a, \varphi \rangle,$$

d'où le résultat.

**Exercice 2.4.13** Soit  $\varphi \in \mathcal{D}$ , une fonction quelconque. On considère une sphère  $S$  de centre 0, de rayon  $\varphi = r$  et un volume  $V$  de  $\mathbb{R}^3$  défini par  $0 < \varphi < r < a < \infty$ , où  $a$  est choisi assez grand pour que  $\varphi$  et ses dérivées partielles soient nulles pour  $r = a$ . Désignons par  $n$  la normale (positive) à  $S$  dirigée vers l'intérieur de  $V$ , par  $dS$  un élément d'aire de  $S$  et par  $\frac{\partial}{\partial n}$  la dérivée normale. Calculer dans  $\mathbb{R}^3$ , le laplacien de la distribution  $f$  associée à la fonction  $f(x, y, z) = \frac{1}{r}$  où  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Montrer que :

a)  $\langle \Delta f, \varphi \rangle = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int \int \int_{r>\rho} f \Delta \varphi dx dy dz.$

b)  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho} \int \int_{r=\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = 0.$

c)  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho^2} \int \int_{r=\rho} \varphi dS = 4\pi \langle \delta, \varphi \rangle.$

d) Montrer qu'en appliquant la formule de Green :

$$\int \int \int_{\rho < r < a} (f \Delta \varphi - \varphi \Delta f) dV = \int \int_{r=\rho} \left( \varphi \frac{\partial f}{\partial n} - f \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS,$$

il vient  $\Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta$ .

Solution : Montrons tout d'abord qu'au sens des fonctions, on a sur  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ,  $\Delta f = 0$ . En effet,

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \\ &= \left( -\frac{1}{r^3} + 3\frac{x^2}{r^5} \right) + \left( -\frac{1}{r^3} + 3\frac{y^2}{r^5} \right) + \left( -\frac{1}{r^3} + 3\frac{z^2}{r^5} \right), \\ &= -\frac{3}{r^3} + 3\frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^5}, \\ &= 0 \text{ sur } \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.\end{aligned}$$

a) Comme  $f = \frac{1}{r}$  est une fonction localement sommable, elle définit donc une distribution. On a, au sens des distributions,

$$\langle \Delta f, \varphi \rangle = \langle f, \Delta \varphi \rangle = \int \int \int_{\mathbb{R}^3} f \Delta \varphi dx dy dz = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int \int \int_{r>\rho} f \Delta \varphi dx dy dz.$$

b) On a

$$\left| \frac{1}{\rho} \int \int_{r=\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS \right| \leq \frac{1}{\rho} \int \int_{r=\rho} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right| dS.$$

Or  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  est bornée, donc il existe une constante  $M > 0$  telle que :  $\left| \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right| \leq M$ , et dès lors

$$\left| \frac{1}{\rho} \int \int_{r=\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS \right| \leq \frac{M}{\rho} \int \int_{r=\rho} dS = \frac{M}{\rho} \cdot 4\pi\rho^2 = 4\pi M \rho.$$

Par conséquent,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho} \int \int_{r=\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = 0.$$

c) Posons  $\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi(x) - \varphi(0)$ . D'où,

$$\begin{aligned} \int \int_{r=\rho} \varphi dS &= \int \int_{r=\rho} \varphi(0) dS + \int \int_{r=\rho} (\varphi(x) - \varphi(0)) dS, \\ &= \varphi(0) \cdot 4\pi\rho^2 + \int \int_{r=\rho} (\varphi(x) - \varphi(0)) dS, \\ &= 4\pi\rho^2 \langle \delta, \varphi \rangle + \int \int_{r=\rho} (\varphi(x) - \varphi(0)) dS, \end{aligned}$$

et

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho} \int \int_{r=\rho} \varphi dS = 4\pi \langle \delta, \varphi \rangle + \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho^2} \int \int_{r=\rho} (\varphi(x) - \varphi(0)) dS.$$

Par hypothèse,  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$ , donc  $\varphi$  est continue et puisque  $\text{supp } \varphi$  est compact alors  $\varphi$  est uniformément continue (en vertu du théorème de Heine qui dit que toute fonction continue sur un compact est uniformément continue). Donc quel que soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $A > 0$  tel que l'inégalité  $|x| \leq A$  entraîne  $|\varphi(x) - \varphi(0)| \leq \varepsilon$ , pour tout  $x \in \text{supp } \varphi$ . Dès lors,

$$\left| \frac{1}{\rho^2} \int \int_{r=\rho} (\varphi(x) - \varphi(0)) dS \right| \leq \frac{\varepsilon}{\rho^2} \int \int_{r=\rho} dS = 4\pi\varepsilon,$$

et

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho} \int \int_{r=\rho} \varphi dS = 4\pi \langle \delta, \varphi \rangle.$$

Finalement, en appliquant la formule de Green,

$$\int \int \int_{\rho < r < a} (f \Delta \varphi - \varphi \Delta f) dV = \int \int_{r=\rho} \left( \varphi \frac{\partial f}{\partial n} - f \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS,$$

et en tenant compte du fait que  $\Delta \frac{1}{r} = 0$ , à l'extérieur de  $S$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int \int \int_{\rho < r < a} \frac{1}{r} \Delta \varphi dV &= \int \int_{r=\rho} \left( \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS, \\ &= -\frac{1}{\rho^2} \int \int_{r=\rho} \varphi dS - \frac{1}{\rho} \int \int_{r=\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS, \end{aligned}$$

car la normale intérieure à  $V$  est intérieure à  $S$  ( $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$ ). Par conséquent,

$$\langle \Delta \frac{1}{r}, \varphi \rangle = -4\pi \langle \delta, \varphi \rangle,$$

c'est-à-dire  $\Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta$ , au sens des distributions.

**Exercice 2.4.14** Soit  $f(x)$  une fonction de la variable  $x$  satisfaisant aux conditions suivantes :

(i)  $f(x) = 0$  pour  $x < -1$  et  $x > 1$ .

(ii)  $f$  est indéfiniment dérivable sur  $] -1, \xi[ \cup ] \xi, 1[$ , où  $\xi \in ] -1, 1[$ .

(iii)  $f(x)$  et ses dérivées possèdent des discontinuités de première espèce aux points  $x = -1$ ,  $x = \xi$  et  $x = 1$ .

1) Calculer au sens des distributions, l'expression :  $f'' + \omega^2 f$  où  $\omega \in \mathbb{R}$ , en fonction des dérivées usuelles de  $f(x)$ .

2) Est-il possible de déterminer  $f$  et les constantes  $\alpha$  et  $\beta$  pour que l'on ait

$$f'' + \omega^2 f = \delta_\xi + \alpha \delta_{-1} + \beta \delta_1, \quad (2.4.1)$$

où  $\delta_a$  désigne la distribution de Dirac au point  $a$ ? Montrer que, sauf si  $\omega$  est de la forme  $k\frac{\pi}{2}$ , où  $k$  est un entier relatif, le problème admet une solution unique. Calculer alors  $f$  ainsi que les constantes  $\alpha$  et  $\beta$ .

3) Soit  $\varphi \in \mathcal{D}$ , une fonction inconnue, dont on sait qu'elle vérifie les relations

$$\varphi'' + \omega^2 \varphi = \Psi(x), \quad \varphi(-1) = L, \quad \varphi(+1) = M.$$

On suppose que la fonction  $\Psi(x)$  et les constantes  $L$  et  $M$  sont connues. Montrer que la formule (2.4.1) permet de calculer  $\varphi(\xi)$  pour tout  $\xi \in ] -1, 1[$ , sauf pour les valeurs exceptionnelles de  $\omega$ .

Solution : 1) On applique la formule obtenue dans la section 2.2.3 (pour  $k = 0, 1, 2$ ), avec un léger changement de notations. On a

$$f' = \{f'\} + \tau_0(-1)\delta_{-1} + \tau_1(\xi)\delta_\xi + \tau_2(1)\delta_1,$$

où  $\tau_0(-1) = f(-1^+)$  est le saut de  $f$  au point  $-1$ ,  $\tau_1(\xi) = f(\xi^+) - f(\xi^-)$  est le saut de  $f$  au point  $\xi$  et  $\tau_2(1) = f(1^-)$  est le saut de  $f$  au point  $1$ . De même, on a

$$f'' = \{f''\} + \tau_0(-1)\delta'_{-1} + \tau_1(\xi)\delta'_\xi + \tau_2(1)\delta'_1 + \sigma_0(-1)\delta_{-1} + \sigma_1(\xi)\delta_\xi + \sigma_2(1)\delta_1,$$

où  $\sigma_0(-1) = f'(-1^+)$  est le saut de  $f'$  au point  $-1$ ,  $\sigma_1(\xi) = f'(\xi^+) - f'(\xi^-)$  est le saut de  $f'$  au point  $\xi$  et  $\sigma_2(1) = f'(1^-)$  est le saut de  $f'$  au point  $1$ . Dès lors,

$$\begin{aligned} f'' + \omega^2 f &= \{f''\} + \omega^2 \{f'\} + (\sigma_0(-1) + \omega^2 \tau_0(-1)) \delta_{-1} \\ &\quad + (\sigma_1(\xi) + \omega^2 \tau_1(\xi)) \delta_\xi + (\sigma_2(1) + \omega^2 \tau_2(1)) \delta_1 \quad (2.4.2) \\ &\quad \tau_0(-1)\delta'_{-1} + \tau_1(\xi)\delta'_\xi + \tau_2(1)\delta'_1. \end{aligned}$$

2) En comparant les expressions (2.4.1) et (2.4.2), on doit avoir

$$\sigma_0(-1) + \omega^2 \tau_0(-1) = \alpha, \quad \sigma_1(\xi) + \omega^2 \tau_1(\xi) = 1, \quad \sigma_2(1) + \omega^2 \tau_2(1) = \beta,$$

et  $\tau_0(-1) = \tau_1(\xi) = \tau_2(1) = 0$ . D'où,

$$\alpha = \sigma_0(-1) = f'(-1^+), \quad \beta = \sigma_2(1) = f'(1^-),$$

et  $\sigma_1(\xi) = 1$ ,  $\tau_0(-1) = \tau_1(\xi) = \tau_2(1) = 0$ . Déterminons maintenant  $f$ . Notons d'abord qu'au sens classique, on doit avoir

$$f'' + \omega^2 f = 0, \quad x \in ]-1, \xi[ \cup ]\xi, 1[$$

et par conséquent

$$f(x) = \begin{cases} C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x, & x \in ]-1, \xi[ \\ C_3 \cos \omega x + C_4 \sin \omega x, & x \in ]\xi, 1[ \end{cases} \quad (2.4.3)$$

La fonction  $f$  est continue aux points  $-1$ ,  $\xi$  et  $1$  (car on a vu que les sauts  $\tau_0(-1)$ ,  $\tau_1(\xi)$ ,  $\tau_2(1)$  sont égales à 0), donc

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) = \sigma_0(-1) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) = f(\xi^+) - f(\xi^-) = \sigma_1(\xi) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = \sigma_2(1) = 0,$$

et explicitement,

$$\begin{aligned} C_1 \cos \omega + C_2 \sin \omega &= 0, \\ C_1 \cos \omega \xi + C_2 \sin \omega \xi &= C_3 \cos \omega \xi + C_4 \sin \omega \xi, \\ C_3 \cos \omega + C_4 \sin \omega &= 0. \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Par hypothèse,  $f'$  a des discontinuités aux points  $-1, \xi, 1$  et on vient de voir que les sauts correspondants à ces points sont respectivement  $\alpha, 1, \beta$ . Comme

$$f'(x) = \begin{cases} -C_1 \omega \sin \omega x + C_2 \omega \cos \omega x & x \in ]-1, \xi[ \\ -C_3 \omega \sin \omega x + C_4 \omega \cos \omega x & x \in ]\xi, 1[ \end{cases}$$

alors

$$\alpha = \sigma_0(-1) = f'(-1^+) = C_1 \omega \sin \omega + C_2 \omega \cos \omega,$$

$$1 = \sigma_1(\xi) = f'(\xi^+) - f'(\xi^-) = -C_3 \omega \sin \omega \xi + C_4 \omega \cos \omega \xi + C_1 \omega \sin \omega \xi - C_2 \omega \cos \omega \xi,$$

$$\beta = \sigma_2(1) = f'(1^-) = -C_3 \omega \sin \omega + C_4 \omega \cos \omega.$$

En rassemblant ces équations avec celles obtenues dans (2.4.4), on obtient finalement le système suivant :

$$AX = B,$$

où

$$A = \begin{pmatrix} \cos \omega & \sin \omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos \omega \xi & \sin \omega \xi & -\cos \omega \xi & -\sin \omega \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \omega & \sin \omega & 0 & 0 \\ \omega \sin \omega & \omega \cos \omega & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \omega \sin \omega \xi & -\omega \cos \omega \xi & -\omega \sin \omega \xi & \omega \cos \omega \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega \sin \omega & \omega \cos \omega & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$X = (C_1 \ C_2 \ C_3 \ C_4 \ \alpha \ \beta)^T, \quad X = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)^T.$$

Le système ci-dessus admet une solution unique (méthode de Cramer) si et seulement si  $\det A \neq 0$ . On a

$$\det A = -2\omega(\cos \omega \sin \omega)(\sin^2 \omega \xi + \cos^2 \omega \xi) = -2\omega(\cos \omega \sin \omega),$$

et par conséquent  $\det A \neq 0$  si  $\omega \neq \frac{k\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . La résolution de ce système dans ce cas ne pose aucun problème, on trouve

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{-\cos \omega \xi \sin \omega + \cos \omega \sin \omega \xi}{2\omega \cos \omega} = \frac{\sin \omega(\xi - 1)}{2\omega \cos \omega}, \\ C_2 &= \frac{-\cos \omega \xi \sin \omega + \cos \omega \sin \omega \xi}{2\omega \sin \omega} = \frac{\sin \omega(\xi - 1)}{2\omega \sin \omega}, \\ C_3 &= -\frac{\cos \omega \xi \sin \omega + \cos \omega \sin \omega \xi}{2\omega \cos \omega} = -\frac{\sin \omega(\xi + 1)}{2\omega \cos \omega}, \\ C_4 &= \frac{\cos \omega \xi \sin \omega + \cos \omega \sin \omega \xi}{2\omega (\sin \omega)} = \frac{\sin \omega(\xi + 1)}{2\omega \sin \omega}, \\ \alpha &= \frac{-\cos \omega \xi \sin \omega + \cos \omega \sin \omega \xi}{2\cos \omega \sin \omega} = \frac{\sin \omega(\xi - 1)}{2\cos \omega \sin \omega}, \\ \beta &= \frac{\cos \omega \xi \sin \omega + \cos \omega \sin \omega \xi}{2\cos \omega \sin \omega} = \frac{\sin \omega(\xi + 1)}{2\cos \omega \sin \omega}. \end{aligned}$$

En remplaçant ces expressions dans (2.4.3), on obtient

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin \omega(\xi - 1)}{2\omega \cos \omega} \cos \omega x + \frac{\sin \omega(\xi - 1)}{2\omega \sin \omega} \sin \omega x, & x \in ]-1, \xi[ \\ -\frac{\sin \omega(\xi + 1)}{2\omega \cos \omega} \cos \omega x + \frac{\sin \omega(\xi + 1)}{2\omega \sin \omega} \sin \omega x, & x \in ]\xi, 1[ \end{cases}$$

3) Soit  $\varphi \in \mathcal{D}$ . On a

$$\begin{aligned} \langle f'' + \omega^2 f, \varphi \rangle &= \langle \delta_\xi + \alpha \delta_{-1} + \beta \delta_1, \varphi \rangle, \\ &= \langle \delta_\xi, \varphi \rangle + \alpha \langle \delta_{-1}, \varphi \rangle + \beta \langle \delta_1, \varphi \rangle, \\ &= \varphi(\xi) + \alpha \varphi(-1) + \beta \varphi(1), \\ &= \varphi(\xi) + \alpha L + \beta M. \end{aligned}$$

Or  $\langle f'' + \omega^2 f, \varphi \rangle = \langle f, \varphi'' + \omega^2 \varphi \rangle = \langle f, \psi \rangle$ , donc

$$\varphi(\xi) = \langle f, \psi \rangle - \alpha L - \beta M,$$

ou encore

$$\varphi(\xi) = \int_{-1}^1 f(x) \psi(x) dx - \alpha(\xi) L - \beta(\xi) M.$$

## 2.5 Exercices proposés

**Exercice 2.5.1** On considère, dans  $\mathbb{R}^2$ , la fonction  $\ln r$  où  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Montrer que cette fonction est localement sommable dans  $\mathbb{R}^2$ . Déterminer le laplacien de la distribution associée à cette fonction.

Réponse :  $\Delta \ln r = 2\pi \delta$ .

**Exercice 2.5.2** Dériver au sens des distributions la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

et exprimer le résultat à l'aide de la fonction d'Heaviside  $H(x)$ .

Réponse :  $f' = \delta - H(x) \sin x$ .

**Exercice 2.5.3** Soit  $\varphi \in \mathcal{D}$  et  $T$  une distribution.

- a) Montrer que si  $\varphi(x) = \varphi'(x) = \varphi''(x) = \dots = 0$  sur  $\text{supp } T$ , alors  $\langle T, \varphi \rangle = 0$ .
- b) Montrer à l'aide d'exemples que la condition  $\varphi(x) = 0$  sur  $\text{supp } T$ , n'implique pas  $\langle T, \varphi \rangle = 0$ .

Réponse : b)  $\varphi(x) = 0$  sur  $\text{supp } \delta = \text{supp } \delta' = \{0\}$ . Pourtant  $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) = 0$  et  $\langle \delta', \varphi \rangle = -\varphi'(0) = -1$ .

**Exercice 2.5.4** Calculer les dérivées secondes des distributions suivantes :

- a)  $1 - |x|$  si  $|x| < 1$ , 0 sinon.
- b)  $e^{-3|x|}$ .
- c)  $|\sin x|$ .

Réponse : a)  $\delta_1 - 2\delta + \delta_{-1}$ , b)  $9e^{-3|x|} - 6\delta$ , c)  $2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{k\pi} - |\sin x|$ .

**Exercice 2.5.5** Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \int_0^x g(t)dt$ , où  $g$  est une fonction localement sommable. Montrer que  $f$  est continue et que dans  $\mathcal{D}'$ , on a  $f' = g$ .

**Exercice 2.5.6** Soit la fonction  $E(x, t)$  (appelée noyau de Gauss) définie dans  $\mathbb{R}^2$  par

$$E(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} H(t) e^{-\frac{x^2}{4t}},$$

où  $H(t)$  est la fonction d'Heaviside.

- a) Montrer que  $E(x, t)$  définit une distribution dans  $\mathbb{R}^2$ .
- b) Montrer qu'au sens des distributions,

$$\frac{\partial E}{\partial t} - \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \delta(x, y).$$

- c) Déterminer la solution de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial E}{\partial t} - \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = 0, \quad t > 0$$

qui satisfait à la condition initiale :  $E(x, 0) = f(x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .

**Exercice 2.5.7** Soit  $\text{vp } \frac{1}{x}$  la distribution définie dans l'exercice 1.6.3. Calculer dans  $\mathcal{D}'$ ,  $(\text{vp } \frac{1}{x})^{(n)}$ .

Réponse :  $(-1)^n n! \text{Pf } \frac{1}{x^{n+1}}$  où  $\text{Pf } \frac{1}{x^k}$  est la distribution définie par

$$\left\langle \text{Pf } \frac{1}{x^k}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^k} dx + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(-1)^{(k-j)} - 1}{(k-j)\varepsilon^{k-j}} \cdot \frac{\varphi^{(j-1)}(0)}{(j-1)!} \right\}, \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

**Exercice 2.5.8** On considère, dans  $\mathbb{R}^3$ , la fonction  $\frac{e^{-ikr}}{r}$  où  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  et  $k$  une constante. Soit  $f$  la distribution associée à cette fonction. Montrer que  $f$  satisfait, quel que soit  $r$ , à l'équation

$$\Delta f + k^2 f = -4\pi\delta,$$

où  $\Delta f$  est le laplacien de  $f$ .

**Exercice 2.5.9** Soit  $E(x)$  la partie entière du réel  $x$ , c'est-à-dire l'unique entier tel que :  $E(x) \leq x < E(x) + 1$ . Démontrer au sens des distributions  $E(x)$ .

Réponse :  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k$ .

**Exercice 2.5.10** Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $T$  une distribution sur  $\Omega$ . Soient  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  l'opérateur de Laplace dans  $\mathbb{R}^2$  et  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ , l'opérateur de Cauchy-Riemann.

a) (Lemme de Weyl) : Montrer que si  $\Delta T = 0$ , alors  $T$  est une fonction de classe  $C^\infty$ .

b) En déduire que si  $\frac{\partial T}{\partial \bar{z}} = 0$ , alors  $T$  est une fonction holomorphe sur  $\Omega$ .



# Chapitre 3

## Opérations élémentaires

### Introduction

Il n'est pas possible de définir la multiplication de deux distributions dans le cas général. Cependant, si  $g$  est une fonction indéfiniment dérivable et  $T$  une distribution quelconque, on peut définir le produit  $gT$  de  $g$  par  $T$  en posant :  $\langle gT, \varphi \rangle = \langle T, g\varphi \rangle$ ,  $\varphi \in \mathcal{D}$ . On en déduit quelques formules (exemple 3.1.1) importantes en physique et souvent utilisées dans la suite. Ensuite on étudie le problème de la division ainsi que quelques questions concernant la translation d'une distribution et le changement d'échelle. Enfin, la résolution des équations fera l'objet d'un nombre considérable d'exercices intéressants.

### 3.1 Multiplication des distributions

Le produit de deux distributions arbitraires n'est pas toujours défini. Si une distribution est définie par une fonction localement sommable  $f(x)$ , le produit  $f^2(x)$  n'est pas forcément sommable. Par exemple, la fonction  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  est localement sommable mais  $f^2(x) = \frac{1}{|x|}$  n'est pas sommable à l'origine. Dans ce qui suit, nous allons définir le produit d'une distribution  $T$  par une fonction  $g$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Supposons tout d'abord que cette distribution soit associée à une fonction  $f(x)$  localement sommable. On a, pour  $\varphi \in \mathcal{D}$ ,

$$\langle gf, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\varphi(x)dx. = \langle f, g\varphi \rangle.$$

Rappelons que  $g\varphi \in \mathcal{D}$  (voir exercice 1.6.5). On est ainsi conduit à la

**Définition 3.1.1** *Le produit d'une distribution quelconque  $T$  par une fonction  $g$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  est défini par*

$$\langle gT, \varphi \rangle = \langle T, g\varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

On vérifie aisément que le produit ainsi défini est bien une distribution. En effet, soient  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , on a

$$\langle gT, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \rangle = \alpha\langle gT, \varphi_1 \rangle + \beta\langle gT, \varphi_2 \rangle,$$

donc  $gT$  est linéaire. Pour la continuité, on a par hypothèse  $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ . Donc  $g\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} g\varphi$  et dès lors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle gT, \varphi_k \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle T, g\varphi_k \rangle = \langle T, g\varphi \rangle = \langle gT, \varphi \rangle.$$

**Exemple 3.1.1** Si  $\delta$  est la distribution de Dirac à l'origine et  $g \in \mathcal{C}^1$ , alors

$$g\delta = g(0)\delta, \quad g\delta' = g(0)\delta' - g'(0)\delta.$$

En effet, soit  $\varphi \in \mathcal{D}$ , on a

$$\langle g\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, g\varphi \rangle = g(0)\varphi(0) = g(0)\langle \delta, \varphi \rangle.$$

De même, on a

$$\langle g\delta', \varphi \rangle = \langle \delta', g\varphi \rangle = -\langle \delta, g'\varphi + g\varphi' \rangle = -\langle \delta, g'\varphi \rangle - \langle \delta, g\varphi' \rangle,$$

d'où

$$\langle g\delta', \varphi \rangle = -g'(0)\varphi(0) - g(0)\varphi'(0) = -g'(0)\langle \delta, \varphi \rangle + g(0)\langle \delta', \varphi \rangle.$$

**Remarque 3.1.1** Si dans l'exemple précédent, on choisit  $g(x) = x$ , alors on aura en particulier  $g(0) = 0$  et donc  $x\delta = 0$ . On en déduit que le produit  $gT = 0$  peut être nul sans que  $g$  ou  $T$  soit nulle.

**Proposition 3.1.2** Les solutions de l'équation  $xT = 0$  dans  $\mathcal{D}'$ , sont les distributions  $T = c\delta$  où  $c \in \mathbb{C}$ .

*Démonstration :* D'après la remarque précédente, on a  $x\delta = 0$ . Réciproquement, supposons que  $xT = 0$ . Alors, pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}$ , on a

$$0 = \langle xT, \varphi \rangle = \langle T, x\varphi \rangle,$$

c'est-à-dire  $\langle T, \psi \rangle = 0$  pour tout  $\psi \in \mathcal{D}$  telle que  $\psi(0) = 0$ . Une fonction  $\psi \in \mathcal{D}$  s'annule en 0, si et seulement si, elle s'écrit sous la forme  $\psi = x\varphi$ . L'ensemble  $E = \{\psi \in \mathcal{D} : \psi(0) = 0\}$ , est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{D}$ . Soit  $\theta \in \mathcal{D}$  telle que :  $\theta(0) = 1$ . Evidemment,  $\theta \notin E$  et toute fonction  $\varphi \in \mathcal{D}$  peut s'écrire de façon unique sous la forme  $\varphi = \psi + \varphi(0)\theta$ ,  $\psi \in E$ . On a

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \psi \rangle + \varphi(0)\langle T, \theta \rangle = c\varphi(0),$$

avec  $c = \langle T, \theta \rangle$ . Comme  $\varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$ , on en déduit que  $T = c\delta$ .  $\square$

**Remarque 3.1.2** La solution générale de l'équation :  $xT = S$ , où  $S$  est une distribution donnée, est égale à la somme d'une solution particulière  $T_0$  de cette équation et de la solution générale de l'équation homogène. On en déduit de la proposition précédente, que cette solution s'écrit sous la forme :  $T = c\delta + T_0$ ,  $c \in \mathbb{C}$ . En effet, si  $T$  et  $T_0$  sont solutions de  $xT = S$ , alors  $x(T - T_0) = 0$ , d'où  $T - T_0 = c\delta$ ,  $c \in \mathbb{C}$ .

## 3.2 Translation d'une distribution

Soit  $f(x)$  une fonction localement sommable et  $f$  la distribution qui lui est associée. On veut déterminer la distribution associée à  $f(x - a)$  où  $a$  est une constante. Posons par définition,  $(\tau_a f)(x) = f(x - a)$ . On a, pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}$ ,

$$\langle \tau_a f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (\tau_a f)(x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - a) \varphi(x) dx.$$

En posant  $y = x - a$ , on obtient

$$\langle \tau_a f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \varphi(y + a) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) (\tau_a \varphi)(y) dy = \langle f, \tau_a \varphi \rangle.$$

Et généralement, pour une distribution  $T$ , on a  $\langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_a \varphi \rangle$ , soit explicitement,  $\langle T(x - a), \varphi(x) \rangle = \langle T(x), \varphi(x + a) \rangle$ .

**Définition 3.2.1** La distribution  $\tau_a T$  définie ci-dessus est dite translatée de  $T$  par la translation  $a$ .

**Exemple 3.2.1** La distribution de Dirac  $\delta_a$  au point  $a$ , représente la translatée de  $\delta$  par  $a$ ,

$$\langle \tau_a \delta, \varphi \rangle = \langle \delta, \tau_a \varphi \rangle = \langle \delta(x), \varphi(x + a) \rangle = \varphi(a) = \langle \delta_a, \varphi \rangle.$$

Ainsi  $\tau_a \delta = \delta_a$  ou  $\tau_a \delta(x) = \delta(x - a)$ .

**Exemple 3.2.2** La translatée de la distribution valeur principale de Cauchy  $\text{vp } \frac{1}{x}$  par  $a$  est égale à  $\text{vp } \frac{1}{x-a}$ .

**Définition 3.2.2** On dit qu'une distribution  $T$  est périodique de période  $a > 0$ , si  $\tau_a T = T$  ou  $T(x - a) = T(x)$ , c'est-à-dire  $\langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$ , soit explicitement,

$$\langle T(x - a), \varphi(x) \rangle = \langle T(x), \varphi(x) \rangle, \quad \langle T(x), \varphi(x + a) \rangle = \langle T(x), \varphi(x) \rangle,$$

ou encore

$$\langle T(x), \varphi(x + a) - \varphi(x) \rangle = 0.$$

### 3.3 Changement d'échelle

On veut exprimer  $T(ax)$  en fonction de  $T(x)$  où  $a$  est une constante non nulle. Pour une fonction localement sommable  $f(x)$ , on a

$$\begin{aligned}\langle f(ax), \varphi(x) \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax)\varphi(x)dx, \\ &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi\left(\frac{x}{a}\right)dx, \\ &= \frac{1}{|a|} \left\langle f(x), \varphi\left(\frac{x}{a}\right) \right\rangle.\end{aligned}$$

Dès lors,

**Définition 3.3.1** *La dilatée d'une distribution  $T$  est la distribution définie par*

$$\langle T(ax), \varphi(x) \rangle = \frac{1}{|a|} \left\langle T(x), \varphi\left(\frac{x}{a}\right) \right\rangle.$$

**Exemple 3.3.1** *Pour la distribution  $\delta$  de Dirac, on a*

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x), \quad a \neq 0.$$

### 3.4 Transposée et parité d'une distribution

Soit  $f$  une fonction localement sommable et soit  $\overset{\vee}{f} : x \mapsto f(-x)$ , sa transposée. La distribution  $T_f^\vee$  associée à  $\overset{\vee}{f}$  est déterminée par

$$\langle T_f^\vee, \varphi \rangle = \int f(-x)\varphi(x)dx = \int f(x)\varphi(-x)dx = \langle T, \overset{\vee}{\varphi} \rangle,$$

où  $\overset{\vee}{\varphi}(x) = \varphi(-x)$ .

**Définition 3.4.1** *La transposée d'une distribution  $T$ , notée  $\overset{\vee}{T}$ , est la distribution définie par*

$$\langle \overset{\vee}{T}, \varphi \rangle = \langle T, \overset{\vee}{\varphi} \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

La notion de transposée d'une distribution permet de définir les distributions paires et impaires comme pour les fonctions.

**Définition 3.4.2** Une distribution  $T$  est dite paire si  $\overset{\vee}{T} = T$ , c'est-à-dire

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

et elle est dite impaire si  $\overset{\vee}{T} = -T$ , c'est-à-dire

$$\langle T, \varphi \rangle = -\langle T, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

**Exemple 3.4.1** Les distributions  $\delta$  et  $vp \frac{1}{x}$  sont respectivement paire et impaire (voir exercice 3.5.13).

## 3.5 Exercices résolus

**Exercice 3.5.1** Soit  $g$  une fonction de classe  $C^\infty$  et  $T$  une distribution. Montrer que

$$(gT)' = g'T + gT'.$$

*Application : Démontrer au sens des distributions la fonction*

$$f(x) = \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(x) \cdot \cos \pi x, \quad \text{où} \quad \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{sur } [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Solution : Soit  $\varphi \in \mathcal{D}$ . On a

$$\langle gT', \varphi \rangle = \langle T', g\varphi \rangle = -\langle T, g'\varphi + g\varphi' \rangle = -\langle g'T, \varphi \rangle - \langle gT, \varphi' \rangle,$$

ou

$$\langle gT', \varphi \rangle = -\langle g'T, \varphi \rangle + \langle (gT)', \varphi \rangle = \langle (gT)' - g'T, \varphi \rangle.$$

En utilisant le résultat trouvé dans l'exercice 2.4.1, on obtient

$$f' = \left( \delta_{-\frac{1}{2}}(x) - \delta_{\frac{1}{2}}(x) \right) \cos \pi x - \pi \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(x) \cdot \sin \pi x = -\pi \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(x) \cdot \sin \pi x.$$

**Exercice 3.5.2** Soit  $vp \frac{1}{x}$  la distribution définie dans l'exercice 1.6.3 et soit  $Pf \frac{1}{x^m}$  la distribution définie sur  $\mathcal{D}$  par

$$\langle Pf \frac{1}{x^m}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^m} dx + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{(-1)^{(m-j)} - 1}{(m-j)\varepsilon^{m-j}} \cdot \frac{\varphi^{(j-1)}(0)}{(j-1)!} \right), \quad \varphi \in \mathcal{D},$$

pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}$ . Montrer que :

a)  $x vp \frac{1}{x} = 1$ .

b)  $x^m Pf \frac{1}{x^m} = 1$ .

Solution : a) On a

$$\langle x \text{vp } \frac{1}{x}, \varphi \rangle = \langle \text{vp } \frac{1}{x}, x\varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \varphi(x) dx + \int_{\varepsilon}^{+\varepsilon} \varphi(x) dx \right),$$

d'où

$$\langle x \text{vp } \frac{1}{x}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = \langle 1, \varphi \rangle.$$

b) On a

$$\langle x^m \text{Pf } \frac{1}{x^m}, \varphi \rangle = \langle \text{Pf } \frac{1}{x^m}, x^m \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = \langle 1, \varphi \rangle.$$

**Exercice 3.5.3** 1°) Déterminer toutes les distributions solution de l'équation :

a)  $xT = 1$ .

b)  $(x - \alpha)T = P(x)$  où  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $P(x)$  un polynôme.

2°) Soit  $\text{Pf } \frac{1}{x^2}$  la distribution définie dans l'exercice 3.5.2 (avec  $m = 2$ ). Calculer  $x \text{Pf } \frac{1}{x^2}$ .

3°) Résoudre dans  $\mathcal{D}'$  l'équation :  $xT = \text{vp } \frac{1}{x}$ , où  $\text{vp } \frac{1}{x}$  est la distribution définie dans l'exercice 1.6.3.

Solution : 1°) a) On peut être tenté de choisir la fonction  $\frac{1}{x}$  comme solution de cette équation mais cette fonction n'est pas localement sommable et ne définit pas une distribution régulière. La solution de l'équation  $xT = 1$  est égale à la somme d'une solution particulière de cette équation et de la solution générale de l'équation homogène.

(\*) Solution de l'équation homogène  $xT = 0$  : D'après la proposition 3.1.2, on sait que :  $T = c\delta$ ,  $c \in \mathbb{C}$ .

(\*) Solution particulière  $T_0$  : D'après l'exercice 3.5.2,  $\text{vp } \frac{1}{x} = 1$ , donc on peut choisir  $T_0 = \text{vp } \frac{1}{x}$ . Par conséquent, la solution de l'équation proposée est

$$T = c\delta + \text{vp } \frac{1}{x}, \quad c \in \mathbb{C}.$$

b) Comme dans a), la solution de l'équation  $(x - \alpha)T = P(x)$  est de la forme :  $T = c\delta_\alpha + T_0$ , où  $c \in \mathbb{C}$  et  $T_0$  est une distribution particulière. D'après l'exercice 3.5.2, on a  $(x - \alpha)\text{vp } \frac{1}{x-\alpha} = 1$ , d'où

$$(x - \alpha)P(x)\text{vp } \frac{1}{x-\alpha} = P(x).$$

On peut donc choisir  $T_0 = P(x)\text{vp } \frac{1}{x-\alpha}$ . Par conséquent,

$$T = c\delta_\alpha + P(x)\text{vp } \frac{1}{x-\alpha}, \quad c \in \mathbb{C}.$$

2°) Comme

$$\langle \text{Pf } \frac{1}{x^2}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - 2 \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} \right),$$

alors

$$\langle x \text{Pf } \frac{1}{x^2}, \varphi \rangle = \langle \text{Pf } \frac{1}{x^2}, x\varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \langle \text{vp } \frac{1}{x}, \varphi \rangle,$$

et par conséquent

$$x \text{Pf } \frac{1}{x^2} = \text{vp } \frac{1}{x}.$$

3°) On procède comme dans la question 1°). La solution générale de  $xT = 0$  est  $T = c\delta$ ,  $c \in \mathbb{C}$ . Pour obtenir une solution particulière  $T_0$  de  $xT = \text{vp } \frac{1}{x}$ , il suffit (d'après la question 2°), de choisir  $T_0 = \text{Pf } \frac{1}{x^2}$ . Par conséquent, la solution générale de l'équation proposée est

$$T = c\delta + \text{Pf } \frac{1}{x^2}, \quad c \in \mathbb{C}.$$

**Exercice 3.5.4** Soient  $f$  une fonction indéfiniment dérivable et  $T$  une distribution. Montrer que :

$$\{x : f(x) \neq 0\} \cap \text{supp } T \subset \text{supp } (fT) \subset \text{supp } f \cap \text{supp } T.$$

Solution : Posons  $A = \{x : f(x) \neq 0\}$ ,  $\text{supp } f = \text{adh } A = B$ ,  $\text{supp } T = F$  et  $\text{supp } (fT) = E$ . Par définition, quel que soit  $\varphi \in \mathcal{D}$ , on a

$$\langle T, \varphi \rangle = 0, \quad \text{supp } \varphi \subset F^c,$$

et

$$\langle fT, \varphi \rangle = 0, \quad \text{supp } \varphi \subset E^c.$$

(i) Montrons que  $A \cap F \subset E$ . Pour cela, il suffit de montrer que si  $u \notin A$  et  $u \notin E$  alors  $u \notin F$ . Par hypothèse, il existe un voisinage de  $u$ , notée  $V(u)$ , tel que :  $V(u) \subset E^c$ ,  $f(u) \neq 0$ ,  $\langle fT, \varphi \rangle = 0$ , pour toute fonction  $\varphi \in \mathcal{D}$ , ayant son support dans  $V(u)$ . On sait que  $f\varphi \in \mathcal{D}$  (voir exercice 1.6.5) et dès lors  $0 = \langle fT, \varphi \rangle = \langle T, f\varphi \rangle$ . Par conséquent,  $V(u) \subset F^c$  et donc  $u \notin F$ .

(ii) Montrons que  $E \subset B \cap F$ . Pour cela, il suffit de montrer que si  $u \notin B$  ou  $u \notin F$  alors  $u \notin E$ . Soit  $u \notin B$ , alors  $f(u) = 0$  et  $f(u)\varphi(u) = 0$ , quel que soit  $\varphi \in \mathcal{D}$ . Dès lors,  $0 = \langle T, f\varphi \rangle = \langle fT, \varphi \rangle$ , et donc  $u \notin E$ . Rappelons que  $u \in F$  si et seulement si  $T$  n'est nulle sur aucun voisinage  $V(u)$  de  $u$ . Donc si  $u \notin F$ , alors  $\langle T, \varphi \rangle = 0$ , pour toute fonction  $\varphi \in \mathcal{D}$ , ayant son support dans  $V(u)$ . Dès lors,  $\langle T, f\varphi \rangle = \langle fT, \varphi \rangle = 0$ , et donc  $u \notin E$ .

**Exercice 3.5.5** *On pose*

$$T_\alpha = \cos \alpha x \cdot \text{vp} \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

où  $\text{vp} \frac{1}{x}$  est la distribution définie dans l'exercice 1.6.3.

- a) Montrer que  $T_\alpha$  définit une distribution sur  $\mathbb{R}$ .
- b) Déterminer  $\text{supp } T_\alpha$ .

Solution : a) Soit  $\varphi \in \mathcal{D}$ . On a

$$\langle T_\alpha, \varphi \rangle = \langle \cos \alpha x \cdot \text{vp} \frac{1}{x}, \varphi \rangle = \langle \text{vp} \frac{1}{x}, \cos \alpha x \cdot \varphi(x) \rangle.$$

Comme  $\cos \alpha x \in \mathcal{C}^\infty$  et  $\varphi \in \mathcal{D}$ , alors  $\cos \alpha x \cdot \varphi(x) \in \mathcal{D}$ , en vertu de l'exercice 1.6.5. En outre, on sait (voir exercice 1.6.3) que  $\text{vp} \frac{1}{x}$  définit une distribution sur  $\mathbb{R}$ , donc il en ira de même pour  $T_\alpha$ .

b) Posons

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \cos \alpha x \neq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2\alpha} + \frac{k\pi}{\alpha}, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

D'après l'exercice 3.5.4, on peut écrire

$$A \cap \text{supp } \text{vp} \frac{1}{x} \subset \text{supp } T_\alpha \subset \text{supp } \cos \alpha x \cap \text{supp } \text{vp} \frac{1}{x}.$$

Comme  $\text{supp } \text{vp} \frac{1}{x} = \mathbb{R}$  (voir exercice 1.6.11) et  $\text{supp } \cos \alpha x = \text{adh } A = \mathbb{R}$ , alors  $A \subset \text{supp } T_\alpha \subset \mathbb{R}$ . Dès lors,  $\text{adh } A \subset \text{adh supp } T_\alpha \subset \mathbb{R}$ , c'est-à-dire  $\mathbb{R} \subset \text{supp } T_\alpha \subset \mathbb{R}$ , et par conséquent  $\text{supp } T_\alpha = \mathbb{R}$ .

**Exercice 3.5.6** *Soit  $\text{vp} \frac{1}{x}$  la distribution définie dans l'exercice 1.6.3. Vérifier que le produit  $\frac{1}{\text{sh } x} \text{vp} \frac{1}{x}$ , détermine une distribution sur  $\mathbb{R}$  et résoudre dans  $\mathcal{D}'$  l'équation :*

$$xT = \frac{1}{\text{sh } x}.$$

Solution : La vérification résulte immédiatement de la note (après la définition 3.1.1) car la fonction  $\frac{1}{\text{sh } x}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et  $\text{vp} \frac{1}{x}$  est une distribution sur  $\mathbb{R}$ . La solution générale de  $xT = 0$  est  $T = c\delta$ ,  $c \in \mathbb{C}$ . Pour obtenir une solution particulière  $T_0$ , on utilise (voir exercice 3.5.2) le fait que :  $x \text{vp} \frac{1}{x} = 1$ . Comme  $\frac{1}{\text{sh } x} \text{vp} \frac{1}{x}$  a un sens, alors  $x \frac{1}{\text{sh } x} \text{vp} \frac{1}{x} = \frac{1}{\text{sh } x}$ , et dès lors  $T_0 = \frac{1}{\text{sh } x} \text{vp} \frac{1}{x}$ . Donc la solution de l'équation proposée est

$$T = c\delta + \frac{1}{\text{sh } x} \text{vp} \frac{1}{x}, \quad c \in \mathbb{C}.$$

**Exercice 3.5.7** Calculer la distribution :  $x^m \delta^{(n)}$ , ( $m, n \in \mathbb{N}$ ), où  $\delta^{(n)}$  est la dérivée  $n$ ième de la mesure de Dirac sur  $\mathbb{R}$ .

Solution : Soit  $\varphi \in \mathcal{D}$ . On a

$$\langle x^m \delta^{(n)}, \varphi \rangle = \langle \delta^{(n)}, x^m \varphi \rangle = (-1)^n \langle \delta, (x^m \varphi)^{(n)} \rangle = (-1)^n (x^m \varphi)^{(n)}(0).$$

Rappelons que si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions de classe  $C^\infty$ , alors la formule de Leibniz fournit

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

Dès lors,

$$(x^m \varphi)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} (x^m)^{(k)} \varphi^{(n-k)}(x).$$

Pour  $m \leq n$ , on décompose la formule ci-dessus comme suit :

$$\begin{aligned} (x^m \varphi)^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{n!}{k!(n-k)!} (x^m)^{(k)} \varphi^{(n-k)}(x) \\ &\quad + \frac{n!}{m!(n-m)!} (x^m)^{(m)} \varphi^{(n-m)}(x) \\ &\quad + \sum_{k=m+1}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} (x^m)^{(k)} \varphi^{(n-k)}(x). \end{aligned}$$

Or

$$(x^m)^{(k)} = \begin{cases} m(m-1)\cdots(m-k+1)x^{m-k} & \text{si } m > k \\ m! & \text{si } m = k \\ 0 & \text{si } m < k \end{cases}$$

donc

$$(x^m \varphi)^{(n)}(0) = \frac{n!}{m!(n-m)!} m! \varphi^{(n-m)}(0) = \frac{n!}{(n-m)!} \langle \delta, \varphi^{(n-m)} \rangle,$$

ou encore

$$(x^m \varphi)^{(n)}(0) = (-1)^{m-n} \frac{n!}{(n-m)!} \langle \delta^{(n-m)}, \varphi \rangle.$$

Par conséquent,

$$x^m \delta^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si } m > n \\ (-1)^m \frac{n!}{(n-m)!} \delta^{(n-m)} & \text{si } m \leq n \end{cases}$$

**Exercice 3.5.8** Soit l'équation :  $x^m T = 0$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .

a) Montrer que les distributions vérifiant cette équation s'écrivent sous la forme :

$$T = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta^{(k)}, \quad c_k \in \mathbb{C}.$$

b) En déduire l'expression générale des distributions  $T$  qui vérifient l'équation :  $x^m T = 1$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .

c) Même question pour l'équation :  $(x - \alpha)^m T = P(x)$ , où  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $P(x)$  un polynôme.

Solution : a) Si  $m = 1$ , alors  $xT = 0$  et d'après la proposition 3.1.2,  $T = c\delta$ ,  $c \in \mathbb{C}$ . Si  $m = 2$ , alors  $x^2 T = 0$ , c'est-à-dire  $x(xT) = 0$  et de nouveau d'après la proposition 3.1.2,  $xT = c\delta$ ,  $c \in \mathbb{C}$ . Pour résoudre cette dernière équation, on va procéder comme dans les exercices précédents :

- Solution générale de  $xT = 0$  :  $T = c_0 \delta$ ,  $c_0 \in \mathbb{C}$ .
- Solution particulière  $T_0$  de  $xT = c\delta$  : D'après l'exercice 3.5.7, on a

$$x^m \delta^{(n)} = (-1)^m \frac{n!}{(n-m)!} \delta^{(n-m)} \quad m \leq n.$$

On prend  $m = n = 1$ , d'où  $x\delta' = -\delta$ , c'est-à-dire  $x(-c\delta') = c\delta$ . On peut donc choisir  $T_0 = -c\delta'$ . Par conséquent,

$$T = c_0 \delta - c\delta' = c_0 \delta + c_1 \delta', \quad c_1 \equiv -c.$$

Supposons que la solution de l'équation  $x^m T = 0$ , s'écrit

$$T = c_0 \delta + c_1 \delta' + \cdots + c_{m-1} \delta^{(m-1)} = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta^{(k)}, \quad c_k \in \mathbb{C}$$

et montrons que la solution de  $x^{m+1} T = 0$ , est  $T = \sum_{k=0}^m c_k \delta^{(k)}$ ,  $c_k \in \mathbb{C}$ . L'équation  $x^{m+1} T = 0$ , s'écrit sous la forme  $x(x^m)T = 0$  et d'après la proposition 3.1.2, on a  $x^m T = c\delta$ . On a supposé que la solution générale de  $x^m T = 0$  est  $T = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta^{(k)}$ ,  $c_k \in \mathbb{C}$ . Pour obtenir une solution particulière de l'équation :  $x^m T = c\delta$ , on note tout d'abord que d'après l'exercice 3.5.7, on a

$$x^m \delta^{(n)} = (-1)^m \frac{n!}{(n-m)!} \delta^{(n-m)} \quad m \leq n$$

On choisit  $m = n$ , d'où  $x^m \delta^{(m)} = (-1)^m m! \delta$ , c'est-à-dire

$$x^m \left( c \frac{(-1)^m}{m!} \delta^{(m)} \right) = c\delta.$$

On peut donc choisir  $T_0 = c_m \delta^{(m)}$ ,  $c_m \equiv c \frac{(-1)^m}{m!}$ . Par conséquent,

$$T = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta^{(k)} + c_m \delta^{(m)} = \sum_{k=0}^m c_k \delta^{(k)}, \quad c_k \in \mathbb{C}$$

b) D'après la question a), la solution de l'équation homogène :  $x^m T = 0$  est  $T = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta^{(k)}$ ,  $c_k \in \mathbb{C}$ . Par ailleurs, on a déjà montré (exercice 3.5.2) que :  $x^m \text{Pf } \frac{1}{x^m} = 1$ . Dès lors, une solution particulière de  $x^m T = c\delta$ , est donnée par  $T_0 = \text{Pf } \frac{1}{x^m}$ . Par conséquent, la solution générale de l'équation proposée est

$$T = \text{Pf } \frac{1}{x^m} + \sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta^{(k)}, \quad c_k \in \mathbb{C}.$$

c) Comme dans la question précédente, on a  $T = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta^{(k)} + T_0$ ,  $c_k \in \mathbb{C}$  où  $T_0$  est une solution particulière. Comme  $(x - \alpha)^m \text{Pf } \frac{1}{(x-\alpha)^m} = 1$  (d'après l'exercice 3.5.2), alors  $(x - \alpha)^m \text{Pf } \frac{1}{(x-\alpha)^m} = P(x)$ , et on peut choisir comme solution particulière  $T_0 = \text{Pf } \frac{1}{(x-\alpha)^m}$ . Donc

$$T = \text{Pf } \frac{1}{(x - \alpha)^m} + \sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta_\alpha^{(k)}, \quad c_k \in \mathbb{C}.$$

**Exercice 3.5.9** Trouver l'expression générale des distributions  $T$  qui vérifient l'équation :  $(x^2 - \alpha^2) T = 1$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ .

Solution : (\*) Solution de l'équation homogène :  $(x^2 - \alpha^2) T = 0$ . On écrit  $(x - \alpha)(x + \alpha)T = 0$ , et on sait que :  $(x - \alpha)\delta_\alpha = 0$ ,  $(x + \alpha)\delta_{-\alpha} = 0$ , d'où  $T = c\delta_\alpha + d\delta_{-\alpha}$ , ( $c, d \in \mathbb{C}$ ).

(\*\*) Solution particulière  $T_0$  de l'équation :  $(x^2 - \alpha^2) T = 1$ . On déduit de l'exercice 3.5.2, que :  $(x - \alpha) \text{vp } \frac{1}{x-\alpha} = 1$  et  $(x + \alpha) \text{vp } \frac{1}{x+\alpha} = 1$ , d'où  $T_0 = a \text{vp } \frac{1}{x-\alpha} + b \text{vp } \frac{1}{x+\alpha}$ , où  $a$  et  $b$  sont à déterminer. On a

$$(x - \alpha)(x + \alpha) \left( a \text{vp } \frac{1}{x - \alpha} + b \text{vp } \frac{1}{x + \alpha} \right) = 1,$$

c'est-à-dire  $(x + \alpha)a + (x - \alpha)b = 1$ , d'où  $a + b = 0$  et  $a - b = \frac{1}{\alpha}$ . Donc

$$T_0 = \frac{1}{2\alpha} \left( \text{vp } \frac{1}{x - \alpha} - \text{vp } \frac{1}{x + \alpha} \right),$$

et par conséquent la solution générale de l'équation proposée s'écrit

$$T = \frac{1}{2\alpha} \left( \text{vp } \frac{1}{x - \alpha} - \text{vp } \frac{1}{x + \alpha} \right) + c\delta_\alpha + d\delta_{-\alpha}, \quad (c, d \in \mathbb{C}).$$

**Exercice 3.5.10** Résoudre dans  $\mathcal{D}'$  les équations suivantes :

a)  $x^m T = \delta$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .

b)  $xT = \sum_{k=0}^p c_k \delta^{(k)}$ ,  $c_k \in \mathbb{C}$ .

*Solution :* a) (\*) Solution de l'équation homogène :  $x^m T = 0$ . D'après l'exercice 3.5.8, cette équation possède la solution  $T = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta^{(k)}$ ,  $c_k \in \mathbb{C}$ .

(\*\*) Solution particulière  $T_0$  de  $x^m T = \delta$ . D'après l'exercice 3.5.7, on sait que

$$x^m \delta^{(n)} = (-1)^m \frac{n!}{(n-m)!} \delta^{(n-m)}, \quad n \geq m$$

Posons  $m = n$ , d'où  $x^m \frac{(-1)^m}{m!} \delta^{(m)} = \delta$ . On choisit  $T_0 = \frac{(-1)^m}{m!} \delta^{(m)}$ . Par conséquent, la solution de l'équation proposée est

$$T = \frac{(-1)^m}{m!} \delta^{(m)} + \sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta^{(k)}, \quad c_k \in \mathbb{C}.$$

b) (\*) Solution de l'équation homogène  $xT = 0$  :  $T = c\delta$ ,  $c \in \mathbb{C}$ .

(\*\*) Solution particulière  $T_0$  de  $xT = \sum_{k=0}^p c_k \delta^{(k)}$ . De nouveau (d'après l'exercice 3.5.7), on a

$$x^m \delta^{(n)} = (-1)^m \frac{n!}{(n-m)!} \delta^{(n-m)}, \quad n \geq m$$

Pour  $m = 1$  et  $n = k + 1$ , on a  $x\delta^{(k+1)} = -(k+1)\delta^{(k)}$ , d'où

$$x \sum_{k=0}^p c_k \frac{-1}{k+1} \delta^{(k+1)} = \sum_{k=0}^p c_k \delta^{(k)}.$$

On peut donc choisir  $T_0 = - \sum_{k=0}^p \frac{c_k}{k+1} \delta^{(k+1)}$ . Par conséquent, la solution cherchée est

$$T = c\delta - \sum_{k=0}^p \frac{c_k}{k+1} \delta^{(k+1)},$$

où  $c$  et  $c_k$  sont des constantes.

**Exercice 3.5.11** Soient  $g \in \mathcal{C}^\infty$  et  $T$  une distribution. Montrer que si  $gT = 0$ , alors  $g(x) = 0$  sur  $\text{supp } T$ . Réciproque ?

Solution : Soit  $F = \text{supp } T$ . Par définition, on a  $T = 0$  sur  $F^c$  (complémentaire de  $F$ ). Pour montrer que  $g(x) = 0$  sur  $F$ , il suffit de prouver que  $T = 0$  sur l'ensemble  $\{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}$ . Soit  $\varphi \in \mathcal{D}$  à support contenu dans cet ensemble. On a

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, g \frac{\varphi}{g} \rangle = \langle gT, \frac{\varphi}{g} \rangle = 0,$$

car  $\frac{\varphi}{g} \in \mathcal{D}$  et par hypothèse  $gT = 0$ . La réciproque n'est pas nécessairement vraie. En effet, d'après l'exemple 3.1.1, on sait que

$$g\delta' = -g'(0)\delta + g(0)\delta'.$$

Choisissons  $g(x) = x$ . On a  $g \in \mathcal{C}^\infty$  et  $g(x) = 0$  sur  $\text{supp } \delta' = \{0\}$  et pourtant  $g\delta' = x\delta' = -\delta$ .

**Exercice 3.5.12** Soit  $T \in \mathcal{D}'$ .

a) Montrer que les seules solutions de l'équation différentielle :  $T' = 0$  sont les constantes.

b) Résoudre l'équation différentielle :  $xT' + T = 0$ .

Solution : a) Toute constante est évidemment solution de l'équation  $T' = 0$ . Réciproquement, supposons que  $T' = 0$ . Alors pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}$ , on a

$$0 = \langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle.$$

L'ensemble  $E = \{\psi \in \mathcal{D} : \psi(x) = \varphi'(x) \text{ où } \varphi \in \mathcal{D}\}$ , est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{D}$ . Montrons qu'une condition nécessaire et suffisante pour que  $\psi \in E$  est  $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)dx = 0$ ,  $\psi \in \mathcal{D}$ . En effet, si  $\psi(x) = \varphi'(x)$ , alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)dx = \varphi(x)|_{-\infty}^{+\infty} = 0,$$

car  $\text{supp } \varphi$  est borné. Inversement, soit  $\varphi(x) = \int_{-\infty}^x \psi(x)dx$ . On vérifie que  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  (en effet  $\psi \in \mathcal{C}^\infty$  et  $\text{supp } \psi$  est borné car  $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)dx = 0$ ). On fixe  $\theta \in \mathcal{D}$  telle que :  $\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)dx = 1$ . Evidemment,  $\theta \notin E$  et toute fonction  $\varphi \in \mathcal{D}$  peut s'écrire de façon unique sous la forme

$$\varphi = \psi + \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx \right) \theta, \quad \psi \in E.$$

On a

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \psi \rangle + \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx \right) \langle T, \theta \rangle = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx \right) \langle T, \theta \rangle,$$

car  $\langle T, \psi \rangle = 0$ . En posant  $\langle T, \theta \rangle = C$ , on obtient

$$\langle T, \varphi \rangle = C \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = \langle C, \varphi \rangle,$$

donc  $T = C$ .

b) L'équation proposée s'écrit  $(xT)' = 0$ , et d'après a),  $xT = C$ , où  $C$  est une constante. La solution de cette équation s'écrit  $T = a\delta + T_0$ ,  $a \in \mathbb{C}$  où  $T_0$  est une solution particulière de  $xT = C$ . On la détermine de la façon suivante : D'après l'exercice 3.5.2, on sait que  $x \operatorname{vp} \frac{1}{x} = 1$ , d'où  $x(C \operatorname{vp} \frac{1}{x}) = C$  et  $T_0 = C \operatorname{vp} \frac{1}{x}$ . Par conséquent,

$$T = a\delta + C \operatorname{vp} \frac{1}{x}.$$

**Exercice 3.5.13** a)  $T$  étant une distribution, étudier la parité des distributions  $U, V$  définies par

$$\mathcal{D} \ni \varphi \longmapsto \langle U, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle + \left\langle T, \overset{\vee}{\varphi} \right\rangle,$$

$$\mathcal{D} \ni \varphi \longmapsto \langle V, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle - \left\langle T, \overset{\vee}{\varphi} \right\rangle.$$

b) En déduire que toute distribution  $T$  est la somme d'une distribution paire et d'une distribution impaire.

c) Etudier la parité des distributions  $\delta$  et  $\operatorname{vp} \frac{1}{x}$ .

Solution : a) La distribution  $U$  est paire car

$$\langle U, \overset{\vee}{\varphi} \rangle = \langle T, \overset{\vee}{\varphi} \rangle + \langle T, \overset{\vee}{\overset{\vee}{\varphi}} \rangle = \langle T, \overset{\vee}{\varphi} \rangle + \langle T, \varphi \rangle = \langle U, \varphi \rangle.$$

La distribution  $V$  est impaire car

$$\langle V, \overset{\vee}{\varphi} \rangle = \langle T, \overset{\vee}{\varphi} \rangle - \langle T, \overset{\vee}{\overset{\vee}{\varphi}} \rangle = \langle T, \overset{\vee}{\varphi} \rangle - \langle T, \varphi \rangle = -\langle V, \varphi \rangle.$$

b) Il suffit de remarquer que

$$\langle T, \varphi \rangle = \frac{\langle T, \varphi \rangle + \langle T, \overset{\vee}{\varphi} \rangle}{2} + \frac{\langle T, \varphi \rangle - \langle T, \overset{\vee}{\varphi} \rangle}{2} = \frac{\langle U, \varphi \rangle}{2} + \frac{\langle V, \varphi \rangle}{2}.$$

On montre (par exemple en raisonnant par l'absurde) que cette décomposition est unique.

c) La distribution  $\delta$  est paire car

$$\langle \delta(x), \overset{\vee}{\varphi}(x) \rangle = \langle \delta(x), \varphi(-x) \rangle = \varphi(0) = \langle \delta(x), \varphi(x) \rangle,$$

c'est-à-dire,  $\langle \delta, \overset{\vee}{\varphi} \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle$ . La distribution vp  $\frac{1}{x}$  est impaire car

$$\begin{aligned} \langle \text{vp } \frac{1}{x}, \overset{\vee}{\varphi}(x) \rangle &= \langle \text{vp } \frac{1}{x}, \varphi(-x) \rangle, \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(-x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(-x)}{x} dx \right), \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right), \\ &= -\langle \text{vp } \frac{1}{x}, \varphi(x) \rangle, \end{aligned}$$

c'est-à-dire,  $\langle \text{vp } \frac{1}{x}, \overset{\vee}{\varphi} \rangle = -\langle \text{vp } \frac{1}{x}, \varphi \rangle$ .

## 3.6 Exercices proposés

**Exercice 3.6.1** Soient  $\varphi \in \mathcal{D}$  et  $c > 0$  tels que :  $\text{supp } \varphi \subset [-c, c]$ . On définit une application  $T$  sur  $\mathcal{D}$  en posant,

$$\langle T, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \varphi(0) \ln \varepsilon \right).$$

a) Montrer que :

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_0^c \frac{\varphi(x) + \varphi(0)}{x} dx + \varphi(0) \ln c.$$

b) Prouver que  $T$  est une distribution sur  $\mathbb{R}$  et déterminer son ordre ainsi que son support.

c) Calculer au sens des distributions  $xT' + T$ .

d) Trouver une primitive de  $T$ .

**Exercice 3.6.2** Soient  $T \in \mathcal{D}'$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On dit que  $T$  est homogène de degré  $\alpha$  si, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  et tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $T(\lambda x) = \lambda^\alpha T(x)$ .

a) Montrer que les distributions  $\delta$ ,  $\delta'$ , vp  $\frac{1}{x}$ ,  $T^{(n)}$  (où  $T$  est une distribution d'ordre  $\alpha$ ), sont homogènes et déterminer leur degré d'homogénéité.

b) Soit  $\varphi \in \mathcal{D}$  et posons

$$\varphi_\lambda = \varphi(\lambda x), \quad f(\lambda) = \langle T, \varphi_\lambda \rangle.$$

Montrer que  $f$  est une fonction dérivable (au sens usuel) et que sa dérivée est donnée par

$$f'(\lambda) = \left\langle T, \sum_k x_k \varphi_\lambda^{(k)} \right\rangle.$$

c) En déduire la formule d'Euler :

$$\sum_{k=1}^n x_k T^{(k)} = \alpha T.$$

**Exercice 3.6.3** Résoudre dans  $\mathcal{D}'$  l'équation :  $(\sin \pi x).T = S$ , où  $S$  est une distribution connue.

Réponse :  $T = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \delta_k + T_0$  où  $c_k \in \mathbb{C}$  et  $T_0$  une solution particulière de l'équation proposée.

**Exercice 3.6.4** Soit  $I = [a, b]$  un intervalle borné. On dit qu'une fonction  $f$  est à variation bornée sur  $I$ , s'il existe une constante  $C \geq 0$  telle que pour toute subdivision de  $I$  ;  $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k = b$ , on ait

$$\sum_{i=0}^{k-1} |f(\alpha_{i+1}) - f(\alpha_i)| \leq C.$$

Soit  $T \in \mathcal{D}'$ . Montrer que  $T$  a pour dérivée une mesure si et seulement si  $T$  est une fonction à variation bornée sur  $I$ .

**Exercice 3.6.5** Rappelons qu'une distribution  $T$  est une primitive d'une distribution  $S$  si  $T' = S$ . Montrer que toute distribution admet une infinité de primitives ne différant que par une constante.

Indication : Quel que soit  $\varphi \in \mathcal{D}$ , on a

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle = \langle S, \varphi \rangle.$$

Il suffit dès lors d'utiliser la décomposition

$$\varphi = \psi + \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx \right) \theta, \quad \psi \in E$$

de l'exercice 3.5.12.

**Exercice 3.6.6** Soient  $g$  une fonction de classe  $C^\infty$ ,  $S$  une distribution connue et  $T$  une distribution inconnue.

- a) On suppose que  $g(a) = 0$  et  $g'(a) \neq 0$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Résoudre dans  $\mathcal{D}'$  l'équation :  $g(x)T = 0$ .
- b) On suppose que  $g(x) \neq 0$ , quel que soit  $x \in \mathbb{R}$ . Résoudre dans  $\mathcal{D}'$  l'équation :  $g(x)T = S$ .
- c) Même question que dans b) lorsque  $g(x)$  a une infinité de zéros multiples.

Réponse : a)  $T = c\delta_a$ ,  $c \in \mathbb{C}$ , b)  $T = \frac{S}{g(x)}$ , c) une infinité de solutions.

**Exercice 3.6.7** On considère l'équation différentielle linéaire :

$$P_0(x)T^{(n)} + P_1(x)T^{(n-1)} + \cdots + P_n(x)T = Q(x),$$

où les coefficients  $P_0, P_1, \dots, P_n$  et le second membre  $Q$  sont des fonctions de la variable réelle  $x$ . On suppose que  $P_0, P_1, \dots, P_n, Q$  sont de classe  $C^\infty$  et que  $P_0(x)$  ne s'annule pas dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que les seules solutions dans  $\mathcal{D}'$  de l'équation ci-dessus, sont les solutions usuelles de cette équation.

**Exercice 3.6.8** Soit  $T \in \mathcal{D}'$ . Déterminer la solution générale de l'équation :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

**Exercice 3.6.9** Soient  $g \in C^\infty$  et  $T \in \mathcal{D}'$ . Etablir la formule de Leibniz :

$$(gT)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} g^{(k)} T^{(n-k)}.$$

**Exercice 3.6.10** Résoudre dans  $\mathcal{D}'$  l'équation différentielle :

$$xT' + T = Pf \frac{H(x)}{x},$$

où  $H(x)$  est la fonction d'Heaviside et  $Pf \frac{H(x)}{x}$  est la partie finie définie dans l'exercice 2.4.9.

Réponse : En utilisant l'exercice 3.5.12, on trouve

$$T = Pf \frac{H(x) \ln x}{x} + C_1 \text{vp} \frac{1}{x} + C_2 \delta,$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes.



# Chapitre 4

# Convergence des distributions

## Introduction

Dans ce chapitre, on introduit la notion de convergence au sens des distributions. Comme la dérivation est une opération continue dans  $\mathcal{D}'$ , on en déduit que la limite d'une dérivée dans  $\mathcal{D}'$  est la dérivée de la limite. En outre, une série convergeant dans  $\mathcal{D}'$  peut être dérivée terme à terme autant de fois que l'on veut. Ce sont là des différences fondamentales que présentent les suites (ou séries) de distributions avec les suites (ou séries) de fonctions. Plusieurs suites (ou séries) divergentes au sens des fonctions, convergent au sens des distributions. Par exemple la suite  $(\cos kx)$  diverge au sens des fonctions mais nous verrons qu'elle converge au sens des distributions vers 0. Divers exercices concernant la fonction logarithmique, l'identité de Sokhotski, la suite de Dirac, etc., sont traités en détail.

## 4.1 Définitions et propriétés

**Définition 4.1.1** a) *On dit qu'une suite de distributions  $(T_k)$  converge dans  $\mathcal{D}'$  vers une distribution  $T$  si pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}$ , la suite numérique  $\langle T_k, \varphi \rangle$  converge dans  $\mathbb{C}$  vers le nombre  $\langle T, \varphi \rangle$ .*

b) *On dit qu'une série de distributions  $\sum T_k$  converge dans  $\mathcal{D}'$  et a pour somme la distribution  $T$ , si pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}$ , la série numérique  $\sum \langle T_k, \varphi \rangle$  converge dans  $\mathbb{C}$  et a pour somme le nombre  $\langle T, \varphi \rangle$ .*

Il s'agit de la convergence simple (dans l'espace des distributions  $\mathcal{D}'$ ).

**Notation** : On écrit parfois  $T_k \xrightarrow{\mathcal{D}'} T$  (resp.  $\sum T_k \xrightarrow{\mathcal{D}'} T$ ) pour dire que  $(T_k)$  (resp.  $\sum T_k$ ) converge dans  $\mathcal{D}'$  vers  $T$ .

**Exemple 4.1.1** Montrons que :  $\delta_k \xrightarrow{\mathcal{D}'} 0$ . En effet, on a  $\langle \delta_k, \varphi \rangle = \varphi(k)$  et puisque  $\varphi$  est à support borné, alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \delta_k, \varphi \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(k) = 0.$$

**Proposition 4.1.2** Soit  $(f_k(x))$  une suite de fonctions localement sommables et supposons qu'elle converge uniformément vers une fonction  $f(x)$ . Alors la fonction  $f(x)$  est localement sommable et la suite des distributions  $(f_k)$  associées aux fonctions  $f_k(x)$  converge vers la distribution  $f$  associée à  $f(x)$ .

Démonstration : On a

$$\begin{aligned} |\langle f_k, \varphi \rangle - \langle f, \varphi \rangle| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f_k(x) - f(x))\varphi(x)dx \right|, \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f_k(x) - f(x)| |\varphi(x)| dx, \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_k(x) - f(x)| \cdot \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)| dx \right). \end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_k(x) - f(x)| \right) = 0,$$

(convergence uniforme) et que  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)| dx$  est finie ( $\varphi$  est à support borné), alors  $\langle f_k, \varphi \rangle$  converge vers  $\langle f, \varphi \rangle$ . La fonction  $f(x)$  est évidemment localement sommable ; il suffit de remarquer que

$$\int_K |f(x)| dx \leq \int_K |f_k(x)| dx + \int_K |f_k(x) - f(x)| dx,$$

où  $K$  est un compact.  $\square$

**Proposition 4.1.3** Soit  $(f_k(x))$  une suite de fonctions localement sommables. Supposons que :

(i) la suite  $(f_k(x))$  converge simplement presque partout vers une fonction  $f(x)$ .

(ii) il existe une fonction localement sommable  $g(x)$  telle que :  $|f_k(x)| \leq g(x)$ .

Alors la fonction  $f(x)$  est localement sommable et la suite des distributions  $(f_k)$  associées aux fonctions  $f_k(x)$  converge vers la distribution  $f$  associée à  $f(x)$ .

*Démonstration :* Les hypothèses du théorème de convergence dominée de Lebesgue étant satisfaites, la fonction  $f(x)$  est localement sommable et pour toute fonction  $\varphi \in \mathcal{D}$ , on a

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} \langle f_k, \varphi \rangle &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x) \varphi(x) dx, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \varphi(x) dx, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx, \\ &= \langle f, \varphi \rangle,\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Proposition 4.1.4 a)** Si une suite de distributions  $(T_k)$  converge vers une distribution  $T$ , alors les distributions dérivées  $(T'_k)$  convergent vers  $T'$ .

b) Toute série de distributions convergente, est dérivable terme à terme.

*Démonstration :* Il suffit de démontrer a). On a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle T'_k, \varphi \rangle = - \lim_{k \rightarrow \infty} \langle T_k, \varphi' \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle = \langle T', \varphi \rangle,$$

d'où  $\lim_{k \rightarrow \infty} T'_k = T'$ .  $\square$

**Exemple 4.1.2** La suite de fonctions  $f_k(x) = \frac{\sin kx}{k}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , converge vers  $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = 0$ . Etudions la convergence de la suite dérivée  $f'_k(x) = \cos kx$ . Au sens classique, la suite  $(f'_k(x))$  diverge. Au sens des distributions, la suite  $(f'_k)$  converge vers 0, en vertu de la proposition précédente. En effet, soit  $\varphi \in \mathcal{D}$  avec  $\text{supp } \varphi = [a, b]$ . On a

$$\langle f'_k, \varphi \rangle = - \langle f_k, \varphi' \rangle = - \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin kx \cdot \varphi'(x) dx,$$

d'où

$$|\langle f'_k, \varphi \rangle| \leq \frac{1}{k} \left( \int_a^b |\sin kx| dx \right) \cdot \sup_{x \in [a, b]} |\varphi'(x)| = \frac{b-a}{k} \cdot \sup_{x \in [a, b]} |\varphi'(x)|,$$

et par conséquent  $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle f'_k, \varphi \rangle = 0$ .

**Proposition 4.1.5** Si  $(f_k(x))$  est une suite de fonctions telles que :

(i)  $f_k(x) \geq 0$  pour  $|x| \leq C$ ,  $C > 0$  fixé.

(ii)  $f_k(x)$  converge vers 0 uniformément dans tout intervalle ne contenant pas l'origine.

(iii) quel que soit  $a > 0$  (fixé),  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-a}^a f_k(x) dx = 1$ .

Alors la suite  $(f_k)$  converge vers la distribution  $\delta$  de Dirac.

*Démonstration :* Soit  $\varphi \in \mathcal{D}$ . Montrons que :  $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle f_k, \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle$ . On a

$$\begin{aligned}\langle f_k, \varphi \rangle - \langle \delta, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x) \varphi(x) dx - \varphi(0), \\ &= \int_{|x| \leq a} f_k(x) \varphi(x) dx + \int_{|x| > a} f_k(x) \varphi(x) dx - \varphi(0), \\ &= \int_{|x| \leq a} f_k(x)(\varphi(x) - \varphi(0) + \varphi(0)) dx \\ &\quad + \int_{|x| > a} f_k(x) \varphi(x) dx - \varphi(0), \\ &= \int_{|x| \leq a} f_k(x)(\varphi(x) - \varphi(0)) dx + \int_{|x| > a} f_k(x) \varphi(x) dx \\ &\quad + \varphi(0) \left( \int_{|x| \leq a} f_k(x) dx - 1 \right).\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}|\langle f_k, \varphi \rangle - \langle \delta, \varphi \rangle| &\leq \int_{|x| \leq a} f_k(x)|\varphi(x) - \varphi(0)| dx + \left| \int_{|x| > a} f_k(x) \varphi(x) dx \right| \\ &\quad + |\varphi(0)| \left| \int_{|x| \leq a} f_k(x) dx - 1 \right|.\end{aligned}$$

- La continuité de  $\varphi$  montre que pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut choisir  $0 < a \leq k$  tel que l'inégalité  $|x| \leq a$  entraîne  $|\varphi(x) - \varphi(0)| \leq \varepsilon$ . Dès lors,

$$\int_{|x| \leq a} f_k(x)|\varphi(x) - \varphi(0)| dx \leq \varepsilon \int_{|x| \leq a} f_k(x) dx.$$

Or d'après l'hypothèse (iii),  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{|x| \leq a} f_k(x) dx = 1$ , donc il existe une constante  $M > 0$  telle que :  $\int_{|x| \leq a} f_k(x) dx \leq M$ . Par conséquent,

$$\int_{|x| \leq a} f_k(x)|\varphi(x) - \varphi(0)| dx \leq \varepsilon M.$$

D'après l'hypothèse (ii), il existe  $N_1 > 0$  tel que l'inégalité  $k \geq N_1$  entraîne  $\left| \int_{|x| > a} f_k(x) \varphi(x) dx \right| \leq \varepsilon$ . D'après l'hypothèse (iii), on peut choisir  $a > 0$  et  $N_2 > 0$  tel que l'inégalité  $k \geq N_2$  entraîne  $\left| \int_{|x| \leq a} f_k(x) dx - 1 \right| \leq \varepsilon$ . On déduit de ce qui précéde, que pour  $k \geq \max(N_1, N_2)$ ,  $|\langle f_k, \varphi \rangle - \langle \delta, \varphi \rangle| \leq \varepsilon$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Définition 4.1.6** On dit qu'une suite de fonctions localement sommables  $(f_k)$  converge dans  $\mathcal{L}^1$  vers  $f$  si  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int |f_k - f| dx = 0$ . On dit aussi que  $(f_k)$  converge en moyenne vers  $f$ .

**Proposition 4.1.7** Soit  $(f_k)$  une suite de fonctions localement sommables. Si cette suite converge dans  $\mathcal{L}^1$  vers  $f$ , alors elle converge dans  $\mathcal{D}'$  vers  $f$ .

*Démonstration :* Soit  $\varphi \in \mathcal{D}$  avec  $\text{supp } \varphi \subset [a, b] \subset \mathbb{R}$ . On a

$$|\langle f_k - f, \varphi \rangle| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f_k - f)(x) \varphi(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_k(x) - f(x)| dx \cdot \sup_{x \in [a, b]} |\varphi(x)|,$$

d'où le résultat.  $\square$

## 4.2 Exercices résolus

**Exercice 4.2.1** On considère une fonction  $\varphi \in \mathcal{D}$ , de support  $[a, b]$ .

1°) Montrer que les intégrales

$$I = \int_a^b \sin kx \cdot \varphi(x) dx, \quad J = \int_a^b \cos kx \cdot \varphi(x) dx,$$

tendent vers 0 quand  $k \rightarrow \infty$ . (En fait un lemme de Riemann-Lebesgue montre que ce résultat reste valable si on suppose seulement que  $\varphi$  est borné et intégrable).

2°) En déduire que la distribution  $\frac{\sin kx}{\pi x}$  converge vers la distribution  $\delta$  de Dirac.

*Solution :* 1°) On a

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b \sin kx \cdot \varphi(x) dx, \\ &= -\frac{\cos kx \cdot \varphi(x)}{k} \Big|_a^b + \frac{1}{k} \int_a^b \cos kx \cdot \varphi'(x) dx, \\ &= \frac{\cos ka \cdot \varphi(a) - \cos kb \cdot \varphi(b)}{k} + \frac{1}{k} \int_a^b \cos kx \cdot \varphi'(x) dx, \end{aligned}$$

et

$$|I| \leq \frac{|\varphi(a)| + |\varphi(b)|}{k} + \frac{1}{k} \int_a^b |\varphi'(x)| dx.$$

D'où  $I$  tend vers 0 quand  $k \rightarrow \infty$ . On montre de la même façon que  $J$  tend aussi vers 0 lorsque  $k \rightarrow \infty$ .

2°) On a

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\sin kx}{\pi x}, \varphi \right\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin kx}{\pi x} \varphi(x) dx, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin kx}{\pi x} (\varphi(0) + \varphi(x) - \varphi(0)) dx, \\ &= \frac{\varphi(0)}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin kx}{x} dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin kx \cdot \psi(x) dx,\end{aligned}$$

où

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}, x \neq 0, \quad \psi(0) = \varphi'(0).$$

On sait que  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin kx}{x} dx = \pi$ , et que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin kx \cdot \psi(x) dx = 0, \quad (\text{d'après } 1^\circ)$$

donc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle \frac{\sin kx}{\pi x}, \varphi \right\rangle = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin kx}{\pi x} = \delta.$$

### Exercice 4.2.2 Calculer

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\delta_a - \delta_{-a}}{2a},$$

où  $\delta_a$  est la distribution de Dirac au point  $a$ .

Solution : Soit  $\varphi \in \mathcal{D}$ . On a

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\delta_a - \delta_{-a}}{2a}, \varphi \right\rangle &= \frac{1}{2a} (\langle \delta_a, \varphi \rangle - \langle \delta_{-a}, \varphi \rangle), \\ &= \frac{1}{2a} (\varphi(a) - \varphi(-a)), \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\varphi(a) - \varphi(0)}{a - 0} + \frac{\varphi(-a) - \varphi(0)}{-a - 0} \right),\end{aligned}$$

et

$$\lim_{a \leftarrow 0} \left\langle \frac{\delta_a - \delta_{-a}}{2a}, \varphi \right\rangle = \frac{1}{2} (\varphi'(0) + \varphi'(-0)) = \langle \delta, \varphi' \rangle = -\langle \delta', \varphi \rangle.$$

Par conséquent,

$$\lim_{a \leftarrow 0} \frac{\delta_a - \delta_{-a}}{2a} = -\delta'.$$

**Exercice 4.2.3** Calculer au sens des distributions

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \cos \alpha x. \text{vp} \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

où  $\text{vp} \frac{1}{x}$  est la distribution définie dans l'exercice 1.6.3.

Solution : Nous avons montré dans l'exercice 3.5.5, que  $\cos \alpha x. \text{vp} \frac{1}{x}$  définit une distribution sur  $\mathbb{R}$ . Dès lors

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\langle \cos \alpha x. \text{vp} \frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \left\langle \text{vp} \frac{1}{x}, \lim_{\alpha \rightarrow 0} \cos \alpha x. \varphi(x) \right\rangle = \left\langle \text{vp} \frac{1}{x}, \varphi(x) \right\rangle,$$

en vertu de l'exercice 3.5.5. Donc  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \cos \alpha x. \text{vp} \frac{1}{x} = \text{vp} \frac{1}{x}$ .

**Exercice 4.2.4** Soient  $z = x + iy$  un nombre complexe non nul,  $r > 0$  son module et  $\theta \in [-\pi, \pi[$  son argument. On définit la détermination principale de la fonction logarithmique par la formule

$$\ln z = \ln r + i\theta = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + i \arctan \frac{y}{x}.$$

Montrer que cette fonction détermine une distribution et calculer sa limite dans  $\mathcal{D}'$  lorsque  $x \rightarrow 0$ .

Solution : La fonction  $\ln(x+iy)$  est localement sommable, donc détermine une distribution. Dans  $\mathcal{D}'$ , on a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x+iy) = \begin{cases} \ln y + i\frac{\pi}{2} & \text{si } y > 0 \\ \ln(-y) - i\frac{\pi}{2} & \text{si } y < 0 \end{cases} = \ln|y| + i\frac{\pi}{2} \text{sgn}(y),$$

où

$$\text{sgn}(y) = \frac{|y|}{y} = \begin{cases} 1 & \text{si } y > 0 \\ -1 & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

De même, on montre que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(x+iy) = \ln|y| - i\frac{\pi}{2} \text{sgn}(y).$$

**Exercice 4.2.5** On définit pour  $k \geq 1$ , trois suites de fonctions par

$$f_k(x) = \frac{1}{x + \frac{i}{k}}, \quad g_k(x) = \frac{1}{x - \frac{i}{k}}, \quad h_k(x) = \frac{x}{x^2 + \frac{1}{k^2}}.$$

Etudier la convergence des distributions associées à ces fonctions.

Solution : Les fonctions  $f_k(x)$ ,  $g_k(x)$  et  $h_k(x)$  définissent des distributions car elles sont localement sommables. Examinons tout d'abord la convergence de la distribution associée à  $f_k(x)$ . On a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{x + \frac{i}{k}} = \frac{1}{x}.$$

Or la fonction  $\frac{1}{x}$  n'est pas localement sommable et en outre ne définit pas une distribution, donc il faut chercher une autre limite. On vérifie aisément qu'au sens des distributions,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln \left( x + \frac{i}{k} \right) &= \frac{d}{dx} \sqrt{x^2 + \frac{1}{k^2}} + i \frac{d}{dx} \arctan \frac{1}{kx}, \quad (\text{voir exercice 4.2.4}), \\ &= \frac{x}{x^2 + \frac{1}{k^2}} - \frac{i}{k} \frac{1}{x^2 + \frac{1}{k^2}}, \\ &= \frac{1}{x + \frac{i}{k}}. \end{aligned}$$

La dérivation étant continue dans  $\mathcal{D}'$ , il en résulte que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{x + \frac{i}{k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} \ln \left( x + \frac{i}{k} \right) = \frac{d}{dx} \left( \lim_{k \rightarrow \infty} \ln \left( x + \frac{i}{k} \right) \right).$$

Comme (voir exercice 4.2.4),

$$\ln \left( x + \frac{i}{k} \right) = \ln \sqrt{x^2 + \frac{1}{k^2}} + i \arctan \frac{1}{kx},$$

alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \ln \left( x + \frac{i}{k} \right) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) + i\pi & \text{si } x < 0 \end{cases} = \ln |x| + i\pi H(-x),$$

où

$$H(-x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Dès lors,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( x + \frac{i}{k} \right) = \frac{d}{dx} ((\ln |x|) + i\pi H(-x)).$$

Or  $\frac{d}{dx} (\ln |x|) = \text{vp} \frac{1}{x}$  (voir exercice 2.4.4) et  $\frac{d}{dx} H(-x) = -\delta$ , donc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{x + \frac{i}{k}} = \text{vp} \frac{1}{x} - i\pi\delta.$$

De même, on montre que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{x - \frac{i}{k}} = \text{vp} \frac{1}{x} + i\pi\delta.$$

Enfin, pour étudier la convergence de la distribution associée à la fonction  $h_k(x)$ , remarquons que

$$h_k(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x + \frac{i}{k}} + \frac{1}{x - \frac{i}{k}} \right).$$

Comme

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{x \pm \frac{i}{k}} = \text{vp} \frac{1}{x} \mp i\pi\delta,$$

alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + \frac{1}{k^2}} = \text{vp} \frac{1}{x}.$$

**Note :** L'expression

$$\frac{1}{x \pm \frac{i}{k}} = \text{vp} \frac{1}{x} \mp i\pi\delta,$$

est connue sous le nom d'identité de Sokhotski.

**Exercice 4.2.6** *Prouver, au sens des distributions, la relation*

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\alpha}{\pi(x^2 + \alpha^2)} = \delta, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Solution : La fonction  $\frac{\alpha}{\pi(x^2 + \alpha^2)}$  étant localement sommable, définit une distribution. On a

$$\frac{\alpha}{\pi(x^2 + \alpha^2)} = \frac{i}{2\pi} \left( \frac{1}{x + i\alpha} - \frac{1}{x - i\alpha} \right),$$

et comme dans l'exercice 4.2.5,

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\alpha}{\pi(x^2 + \alpha^2)} &= \frac{i}{2\pi} \left( \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{x + i\alpha} - \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{x - i\alpha} \right), \\ &= \frac{i}{2\pi} \left( \text{vp} \frac{1}{x} - i\pi\delta - \text{vp} \frac{1}{x} - i\pi\delta \right), \\ &= \delta. \end{aligned}$$

**Exercice 4.2.7** On considère les deux suites de fonctions réelles définies par

$$f_k(x) = \sqrt{k} \int_{-1}^x e^{-kt^2} dt, \quad g_k(x) = \sqrt{k} e^{-kx^2}.$$

On désigne par  $f_k$  et  $g_k$  les distributions associées à ces fonctions.

1°) Déterminer la limite, dans  $\mathcal{D}'$ , de la suite  $(f_k)$  lorsque  $k \rightarrow \infty$ .

2°) En déduire que, dans  $\mathcal{D}'$ , la suite  $(g_k)$  converge vers  $c\delta$  où  $c$  est une constante à déterminer.

Solution : 1°) On a clairement

$$|f_k(x)| \leq \sqrt{k} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-kt^2} dt,$$

puisque  $e^{-kt^2}$  est positive. Or  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-kt^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{k}}$ , donc  $|f_k(x)| \leq \sqrt{\pi}$ . Posons  $u = \sqrt{k}t$ . D'où

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \begin{cases} \sqrt{\pi} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} = \sqrt{\pi} H(x),$$

où  $H(x)$  est la fonction d'Heaviside. Les hypothèses de la proposition 4.1.3 étant satisfaites, on en déduit que dans  $\mathcal{D}'$ ,  $f_k$  converge vers  $\sqrt{\pi}H$ .

2°) Comme

$$f'_k(x) = \sqrt{k}e^{-kx^2} = g_k(x),$$

alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_k = \lim_{k \rightarrow \infty} f'_k = \sqrt{\pi}H' = \sqrt{\pi}\delta,$$

en vertu de la proposition 4.1.4.

**Exercice 4.2.8** Soit  $T$  une distribution quelconque. Montrer qu'au sens des distributions

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(x+h) - T(x)}{h} = T'.$$

Solution : Remarquons que :

$$\frac{T(x+h) - T(x)}{h} = \frac{\tau_{-h}T - T}{h},$$

où  $\tau_{-h}T$  est la translatée de  $T$  par  $-h$ . Pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}$ , on a

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\tau_{-h}T - T}{h}, \varphi \right\rangle &= \frac{1}{h} \langle \tau_{-h}T, \varphi \rangle - \frac{1}{h} \langle T, \varphi \rangle, \\ &= \left\langle T, \frac{\tau_h\varphi - \varphi}{h} \right\rangle, \\ &= \left\langle T, \frac{\varphi(x-h) - \varphi(x)}{h} \right\rangle, \\ &= \langle T, \Phi_h \rangle, \end{aligned}$$

où  $\Phi_h = \frac{\varphi(x-h)-\varphi(x)}{h} \in \mathcal{D}$ . Le problème consiste à prouver que, pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}$ ,  $\lim_{h \rightarrow 0} \langle T, \Phi_h \rangle = \langle T, -\varphi' \rangle$ . Comme  $T$  est continue sur  $\mathcal{D}$ , il suffit de montrer que  $\Phi_h$  tend vers  $-\varphi'$  au sens de la convergence sur  $\mathcal{D}$ . Notons tout d'abord que tous les supports des  $\Phi_h$  sont contenus dans un même compact. Montrons que pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , la suite des dérivées  $(\Phi_h^{(j)})$  converge uniformément vers  $-\varphi^{(j+1)}$ . En effet, on a

$$\Phi_h^{(j)}(x) = \frac{\varphi^{(j)}(x-h) - \varphi^{(j)}(x)}{h} = - \int_0^1 \varphi^{(j+1)}(x-ht) dt,$$

et

$$\left| \Phi_h^{(j)}(x) + \varphi^{(j+1)}(x) \right| \leq \int_0^1 \left| \varphi^{(j+1)}(x) - \varphi^{(j+1)}(x-ht) \right| dt.$$

Les hypothèses du théorème des accroissements finis étant satisfaites, alors il existe  $\xi \in ]x-ht, x[$  tel que :

$$\varphi^{(j+1)}(x) - \varphi^{(j+1)}(x-ht) = ht\varphi^{(j+2)}(\xi).$$

Dès lors,

$$\left| \Phi_h^{(j)}(x) + \varphi^{(j+1)}(x) \right| \leq \int_0^1 \left| ht\varphi^{(j+2)}(\xi) \right| dt \leq \frac{|h|}{2} M,$$

où  $M$  est une borne supérieure de  $|\varphi^{(j+2)}|$ . Donc  $\Phi_h^{(j)}$  tend uniformément vers  $-\varphi^{(j+1)}$  quand  $h \rightarrow 0$ . Par conséquent,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\langle \frac{\tau-hT-T}{h}, \varphi \right\rangle = \lim_{h \rightarrow 0} \langle T, \Phi_h \rangle = \langle T, -\varphi' \rangle = \langle T', \varphi \rangle,$$

d'où le résultat.

**Exercice 4.2.9** Soit  $\varepsilon > 0$ . On note  $f_\varepsilon$  la distribution associée à la fonction localement sommable  $f_\varepsilon(x)$  définie par

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{si } x \in [0, \varepsilon] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que, dans  $\mathcal{D}'$ ,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon = \delta$ .

Solution : Soit  $\varphi \in \mathcal{D}$ . On a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle f_\varepsilon, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \varphi(x) dx.$$

D'après le théorème de la moyenne (si une fonction  $f$  est continue sur un intervalle  $[a, b]$ , alors il existe  $\xi \in ]a, b[$  tel que :  $\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(\xi)$ ), on peut écrire

$$\int_0^\varepsilon \varphi(x)dx = \varepsilon\varphi(\xi), \quad \xi \in ]0, \varepsilon[,$$

et dès lors

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle f_\varepsilon, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(\varepsilon) = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle.$$

**Exercice 4.2.10** Soient  $f(x)$  une fonction sommable telle que son intégrale sur  $\mathbb{R}$  vaut 1 et  $f_k(x) = kf(kx)$ , la suite (de Dirac) associée à cette fonction. Soit  $\varphi \in \mathcal{D}$ . Vérifier que la suite de fonctions définie par  $g_k(u) = f(u)\varphi(\frac{u}{k})$ , où  $u = kx$ , satisfait aux hypothèses du théorème de convergence dominée de Lebesgue. Calculer, au sens des distributions, la limite de  $f_k$  lorsque  $k \rightarrow \infty$ .

*Solution :* Pour tout  $u \in \mathbb{R}$ , la suite  $(g_k)$  converge simplement vers une fonction sommable  $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(u) = \varphi(0)f(u)$ . En outre, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  et tout  $u \in \mathbb{R}$ , il existe une fonction sommable qui majore  $|g_k(u)|$ ,

$$|g_k(u)| \leq |f(u)| \cdot \sup_{\mathbb{R}} |\varphi(u)|.$$

On a

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \langle f_k, \varphi \rangle &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x)\varphi(x)dx, \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} kf(kx)\varphi(x)dx, \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\varphi\left(\frac{u}{k}\right)du, \end{aligned}$$

avec  $u = kx$ . Les hypothèses du théorème de convergence dominée de Lebesgue étant satisfaites, on peut donc permute limite et intégrale,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \langle f_k, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{k \rightarrow \infty} f(u)\varphi\left(\frac{u}{k}\right)du, \\ &= \varphi(0) \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)du, \\ &= \varphi(0) \quad \text{par hypothèse}, \\ &= \langle \delta, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Par conséquent,  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = \delta$ .

**Exercice 4.2.11** Soit  $(f_k)$  la suite de fonctions définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f_k(x) = k\sqrt{k}xe^{-kx^2}, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Etudier la convergence, dans  $\mathcal{D}'$ , de  $(f_k)$  en utilisant :

- a) le théorème de convergence dominée de Lebesgue.
- b) la méthode des développements de Taylor.

Solution : Notons tout d'abord que les fonctions  $f_k(x)$  déterminent des distributions sur  $\mathbb{R}$  car elles sont localement sommables.

a) Soit  $\varphi \in \mathcal{D}$ . On a

$$\langle f_k, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} k\sqrt{k}xe^{-kx^2} \varphi(x) dx = \sqrt{k} \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2} \varphi\left(\frac{t}{\sqrt{k}}\right) dt,$$

où  $t = \sqrt{k}x$ . On fait une intégration par parties, en posant :

$$u = \varphi\left(\frac{t}{\sqrt{k}}\right), \quad du = \frac{1}{\sqrt{k}}\varphi'\left(\frac{t}{\sqrt{k}}\right) dt, \quad dv = te^{-t^2} dt, \quad v = -\frac{1}{2}e^{-t^2}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \langle f_k, \varphi \rangle &= -\frac{\sqrt{k}}{2}e^{-t^2}\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{k}}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\varphi'\left(\frac{t}{\sqrt{k}}\right) dt, \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\varphi'\left(\frac{t}{\sqrt{k}}\right) dt, \quad (\text{car } \text{supp } \varphi \text{ est borné}), \end{aligned}$$

et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle f_k, \varphi \rangle = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\varphi'\left(\frac{t}{\sqrt{k}}\right) dt.$$

Posons  $g_k(t) = e^{-t^2}\varphi'\left(\frac{t}{\sqrt{k}}\right)$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(t) = \varphi'(0)e^{-t^2}.$$

En outre, pour  $k \in \mathbb{N}^*$  et tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $|g_k(t)| \leq e^{-t^2} \sup_{\mathbb{R}} |\varphi'(t)|$ . Ainsi les hypothèses du théorème de convergence dominée de Lebesgue sont satisfaites

et on peut donc permute limite et intégrale,

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} \langle f_k, \varphi \rangle &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \varphi' \left( \frac{t}{\sqrt{k}} \right) dt, \\ &= \frac{\varphi'(0)}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt, \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \varphi'(0), \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \langle \delta, \varphi' \rangle, \\ &= -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \langle \delta', \varphi \rangle.\end{aligned}$$

b) Soit  $\varphi \in \mathcal{D}$ . On a

$$\langle f_k, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} k \sqrt{k} x e^{-kx^2} \varphi(x) dx.$$

On a (d'après l'exercice 1.6.1, avec  $n = 1$ ),

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x \varphi'(0) + x^2 \theta(x),$$

où  $\theta$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et  $\sup_{\mathbb{R}} |\theta(x)| \leq A \sup_{\mathbb{R}} |\varphi''(x)|$ , avec  $A > 0$  une constante. Dès lors,

$$\begin{aligned}\langle f_k, \varphi \rangle &= k \sqrt{k} \left( \varphi(0) \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-kx^2} dx + \varphi'(0) \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-kx^2} dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-kx^2} \theta(x) dx \right).\end{aligned}$$

Pour la première intégrale, on a  $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-kx^2} dx = 0$ , car  $x e^{-kx^2}$  est impaire. La seconde intégrale s'écrit  $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-kx^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} x^2 e^{-kx^2} dx$ . On fait une intégration par parties, en posant

$$u = x, \quad du = dx, \quad dv = x e^{-kx^2} dx, \quad v = -\frac{1}{2k} e^{-kx^2}.$$

D'où

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-kx^2} dx = -\frac{x}{2k} e^{-kx^2} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{2k} \int_0^{+\infty} e^{-kx^2} dx = \frac{1}{4k} \sqrt{\frac{\pi}{k}},$$

car  $\varphi$  est à support borné et  $\int_0^{+\infty} e^{-kx^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{k}}$ . Dès lors,

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-kx^2} dx = \frac{1}{2k} \sqrt{\frac{\pi}{k}}.$$

Par conséquent,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle f_k, \varphi \rangle = \frac{\pi}{2} \varphi'(0) + \lim_{k \rightarrow \infty} k\sqrt{k} \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-kx^2} \theta(x) dx.$$

Posons  $\text{supp } \varphi = [-c, c]$ . On a

$$\begin{aligned} \left| k\sqrt{k} \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-kx^2} \theta(x) dx \right| &\leq k\sqrt{k} \int_{-c}^c c^3 e^{-kc^2} \cdot A \sup_{x \in [-c, c]} |\varphi''(x)| dx, \\ &= 2k\sqrt{k} c^4 e^{-kc^2} \cdot A \sup_{x \in [-c, c]} |\varphi''(x)| dx, \end{aligned}$$

et cette dernière expression tend vers 0 lorsque  $k \rightarrow \infty$ . Finalement,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle f_k, \varphi \rangle = \frac{\pi}{2} \varphi'(0) = \frac{\pi}{2} \langle \delta, \varphi' \rangle = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \langle \delta', \varphi \rangle.$$

**Exercice 4.2.12** Déterminer la limite, quand  $\alpha \rightarrow 0$ , de la distribution définie par

$$T_\alpha = \frac{1}{2\alpha} \left( vp \frac{1}{x-\alpha} - vp \frac{1}{x+\alpha} \right),$$

où  $vp \frac{1}{x}$  est la distribution définie dans l'exercice 1.6.3.

Solution : Soit  $\varphi \in \mathcal{D}$ . On a

$$\begin{aligned} \langle T_\alpha, \varphi \rangle &= \left\langle \frac{1}{2\alpha} \left( vp \frac{1}{x-\alpha} - vp \frac{1}{x+\alpha} \right), \varphi \right\rangle, \\ &= \frac{1}{2\alpha} \left\langle vp \frac{1}{x-\alpha}, \varphi \right\rangle - \frac{1}{2\alpha} \left\langle vp \frac{1}{x+\alpha}, \varphi \right\rangle. \end{aligned}$$

Or la distribution  $vp \frac{1}{x \pm \alpha}$  est la translatée de  $vp \frac{1}{x}$  par la translation  $\mp \alpha$ , donc

$$\begin{aligned} \langle T_\alpha, \varphi \rangle &= \frac{1}{2\alpha} \left\langle vp \frac{1}{x}, \varphi(x + \alpha) \right\rangle - \frac{1}{2\alpha} \left\langle vp \frac{1}{x}, \varphi(x - \alpha) \right\rangle, \\ &= \left\langle vp \frac{1}{x}, \frac{\varphi(x + \alpha) - \varphi(x - \alpha)}{2\alpha} \right\rangle, \\ &= \left\langle vp \frac{1}{x}, \Phi_\alpha \right\rangle, \end{aligned}$$

où  $\Phi_\alpha = \frac{\varphi(x + \alpha) - \varphi(x - \alpha)}{2\alpha} \in \mathcal{D}$ . On a pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \Phi_\alpha = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left( \frac{\varphi(x + \alpha) - \varphi(x)}{\alpha} + \frac{\varphi(x - \alpha) - \varphi(x)}{-\alpha} \right) = \varphi'(x),$$

et on montre comme dans l'exercice 4.2.8, que  $\Phi_\alpha$  tend vers  $\varphi'$  au sens de la convergence sur  $\mathcal{D}$ . Comme  $vp\frac{1}{x}$  est continue sur  $\mathcal{D}$ , alors

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha \rightarrow 0} \langle T_\alpha, \varphi \rangle &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\langle vp\frac{1}{x}, \Phi_\alpha \right\rangle, \\ &= \left\langle vp\frac{1}{x}, \varphi' \right\rangle, \\ &= - \left\langle \left( vp\frac{1}{x} \right)', \varphi \right\rangle, \\ &= \left\langle Pf\frac{1}{x^2}, \varphi \right\rangle, \quad (\text{voir exercice 2.4.2}).\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} T_\alpha = - \left( vp\frac{1}{x} \right)' = Pf\frac{1}{x^2}.$$

**Exercice 4.2.13** Soit  $\varepsilon > 0$ . On note  $\chi_{[-\varepsilon, \varepsilon]}(x)$  la fonction caractéristique de  $[-\varepsilon, \varepsilon]$ , égale à 1 sur  $[-\varepsilon, \varepsilon]$  et à 0 ailleurs. Posons

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \chi_{[-\varepsilon, \varepsilon]}(x).$$

Montrer qu'au sens des distributions,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon = \frac{2(-1)^n}{(n+1)!} \delta^{(n)}.$$

Solution : La fonction  $f_\varepsilon(x)$  détermine une distribution car elle est localement sommable. Par définition, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle f_\varepsilon, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

On a d'après l'exercice 1.6.1.,

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \varphi^{(k)}(0) + x^{n+1} \theta(x),$$

où  $\theta$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et  $\sup_{x \in [-c, c]} |\theta(x)| \leq A \sup_{x \in [-c, c]} |\varphi^{(n+1)}(x)|$ , avec  $A > 0$ ,  $c > \varepsilon$  des constantes. Dès lors,

$$\begin{aligned}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi(x) dx &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \varphi^{(k)}(0) dx + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x^{n+1} \theta(x) dx, \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{\varepsilon^{k+1} - (-\varepsilon)^{k+1}}{(k+1)!} \varphi^{(k)}(0) + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x^{n+1} \theta(x) dx.\end{aligned}$$

Or

$$\varepsilon^{k+1} - (-\varepsilon)^{k+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 2p + 1 \\ 2\varepsilon^{2p+1} & \text{si } k = 2p \end{cases}$$

donc

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi(x) dx = 2 \sum_{p=0}^{n/2} \frac{\varepsilon^{2p+1}}{(2p+1)!} \varphi^{(2p)}(0) + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x^{n+1} \theta(x) dx,$$

et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle f_\varepsilon, \varphi \rangle = 2 \frac{\varphi^{(n)}(0)}{(n+1)!} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x^{n+1} \theta(x) dx.$$

Comme

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x^{n+1} \theta(x) dx \right| &\leq \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |x^{n+1}| |\theta(x)| dx, \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \left( \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |x^{n+1}| dx \right) A \sup_{x \in [-c, c]} |\varphi^{(n+1)}(x)|, \\ &= \frac{2}{\varepsilon^{n+1}} \left( \int_0^{\varepsilon} |x^{n+1}| dx \right) A \sup_{x \in [-c, c]} |\varphi^{(n+1)}(x)|, \\ &= \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^{n+2}} A \sup_{x \in [-c, c]} |\varphi^{(n+1)}(x)|, \end{aligned}$$

alors

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x^{n+1} \theta(x) dx = 0,$$

et par conséquent

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle f_\varepsilon, \varphi \rangle = 2 \frac{\varphi^{(n)}(0)}{(n+1)!} \langle \delta, \varphi^{(n)} \rangle = \frac{2(-1)^n}{(n+1)!} \langle \delta^{(n)}, \varphi \rangle.$$

## 4.3 Exercices proposés

**Exercice 4.3.1** Montrer que la suite de fonctions

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{k} & \text{si } |x| < k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

converge dans  $\mathcal{D}'$  vers une limite que l'on précisera.

Réponse : 1.

**Exercice 4.3.2** Calculer dans l'espace des distributions sur  $\mathbb{R}$ , les limites suivantes :

$$a) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{\varepsilon}}{\pi x}.$$

$$b) \lim_{k \rightarrow \infty} \sin kx.$$

Réponse : a)  $\delta$  (voir exercice 4.2.1), b) 0.

**Exercice 4.3.3** Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{ikx}$ . Montrer que cette fonction détermine une distribution et qu'elle converge vers une distribution à déterminer.

Réponse : La fonction  $f(x)$  est localement sommable et la distribution qui lui est associée converge vers  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{2\pi k}$ .

**Exercice 4.3.4** On définit pour  $k \geq 1$ , une suite de fonctions réelles par

$$f_k(x) = k \left(1 - \frac{x^2}{k}\right)^{k^3}$$

a) Soit  $\varphi \in \mathcal{D}$ . Déterminer  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x) \varphi(x) dx$ .

b) Calculer au sens des distributions  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k$ .

Réponse : a)  $\varphi(0)$ , b)  $\sqrt{\pi}\delta$ .

**Exercice 4.3.5** Déterminer la limite pour  $a \rightarrow 0$  de  $\frac{\delta_a + \delta_{-a} - 2\delta}{a^2}$ , où  $\delta_a$  est la distribution de Dirac au point  $a$ .

Réponse :  $\delta''$ .

**Exercice 4.3.6** Calculer au sens des distributions  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^k f\left(\frac{j}{k}\right) \delta_{1/k}$ , où  $f$  est une fonction continue par morceaux sur l'intervalle  $[0, 1]$ .

Réponse : La limite est égale à la distribution associée à la fonction  $f$ .

**Exercice 4.3.7** On considère les fonctions définies par

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt & si \ x \geq 0 \\ 0 & si \ x < 0 \end{cases}$$

et

$$f_\lambda(x) = H(x) \int_0^\lambda \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt,$$

où  $\lambda > 0$  et  $H(x)$  est la fonction d'Heaviside. On désigne par  $f_\lambda$  la distribution régulième associée à la fonction  $f_\lambda(x)$  et par  $f$  celle associée à  $f(x)$ .

1) Calculer pour tout  $x \neq 0$ , l'expression :  $f''(x) + f(x)$ .

2) Calculer  $f_\lambda'' + f_\lambda$ .

3) Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \langle Pf \frac{H(x)}{x}, \varphi \rangle,$$

où  $\varphi \in \mathcal{D}$  et  $Pf \frac{H(x)}{x}$  est la partie finie définie dans l'exercice 2.4.9 et que l'on peut l'écrire aussi sous la forme :  $Pf \frac{H(x)}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{H(x-\varepsilon)}{x} + \delta(x) \ln \varepsilon \right)$ .

4) En déduire que dans  $\mathcal{D}'$ ,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left( \frac{1 - e^{-\lambda x}}{x} H(x) - \delta \ln \lambda \right) = Pf \frac{H(x)}{x} + C\delta,$$

où  $C$  est une constante.

5) En utilisant les résultats obtenus dans les questions 2) et 4), calculer l'expression :  $f'' + f$ .

6) Montrer que :  $C = - \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x dx$  (constante d'Euler).

Réponse : On obtient 1)  $\frac{H(x)}{x}$ , 2)  $\frac{1-e^{-\lambda x}}{x} H(x) + \arctan \lambda \cdot \delta' - \frac{1}{2} \ln(1 + \lambda^2) \delta$  et 5)  $Pf \frac{H(x)}{x} + C\delta + \frac{\pi}{2} \delta'$ .

**Exercice 4.3.8** Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on considère la suite définie par

$$f_k(x) = \begin{cases} -k & \text{si } |x| < \frac{1}{2k} \\ 2k & \text{si } \frac{1}{2k} < |x| < \frac{1}{k} \\ 0 & \text{si } |x| > \frac{1}{k} \end{cases}$$

Calculer au sens des distributions  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k$ .

Réponse :  $\delta$ .



# Chapitre 5

# Convolution

## Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude du produit de convolution des distributions. Il commence par une étude détaillée et systématique du produit tensoriel. Après un rapide exposé sur le produit de convolution des fonctions, nous passons alors à l'étude proprement dite du produit de convolution des distributions. Nous accordons une attention particulière aux algèbres de convolution, aux équations de convolution et à leurs applications à la recherche de l'inverse des opérateurs différentiels ainsi qu'à la résolution des équations différentielles. Le produit de convolution intervient souvent dans l'analyse des systèmes linéaires et homogènes. Le reste du chapitre comporte des exercices résolus ainsi que des exercices proposés.

### 5.1 Produit tensoriel

Soient  $f(x)$  et  $g(y)$  deux fonctions localement sommables respectivement sur  $\mathbb{R}^m$  et sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 5.1.1** *Le produit tensoriel (ou direct) de  $f$  et  $g$  est une application, notée  $f \otimes g$ , définie par*

$$f \otimes g : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto (f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y).$$

On montre aisément que  $f \otimes g$  est localement sommable sur  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ . En effet, soit  $K$  un borné de  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ . On a

$$\int_K |(f \otimes g)(x, y)| dx dy \leq \left( \int_K |f(x)| dx \right) \cdot \left( \int_K |g(y)| dy \right) < +\infty.$$

Donc  $f \otimes g$  détermine une distribution et on a, pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ ,  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\begin{aligned}\langle f \otimes g, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} (f \otimes g)(x, y) \varphi(x, y) dx dy, \\ &= \int_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} f(x) g(y) \varphi(x, y) dx dy, \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} f(x) dx \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \varphi(x, y) dy, \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) dy \int_{\mathbb{R}^m} f(x) \varphi(x, y) dx,\end{aligned}$$

en vertu du théorème de Fubini. Ces relations s'écrivent encore sous la forme

$$\langle f \otimes g, \varphi \rangle = \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle = \langle g(y), \langle f(x), \varphi(x, y) \rangle \rangle.$$

En particulier, si  $\varphi(x, y)$  est de la forme  $\varphi(x, y) = u(x)v(y)$ , avec  $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$  et  $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , alors

$$\begin{aligned}\langle f \otimes g, u \otimes v \rangle &= \int_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} f(x) g(y) u(x) v(y) dx dy, \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}^m} f(x) u(x) dx \right) \cdot \left( \int_{\mathbb{R}^n} g(y) v(y) dy \right), \\ &= \langle f, u \rangle \langle g, v \rangle.\end{aligned}$$

**Exemple 5.1.1** *Le produit tensoriel des fonctions*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}, \quad g(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

est donné par

$$(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \text{ et } y > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \text{ et } y < 0 \end{cases}$$

Considérons deux distributions  $S \equiv S_x \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$  et  $T \equiv T_y \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ .

**Proposition 5.1.2** *Il existe une distribution unique  $W \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$  telle que :*

- i) pour tout  $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$  et tout  $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\langle W, u \otimes v \rangle = \langle S, u \rangle \langle T, v \rangle$ .
- ii) pour  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ ,  $\langle W, \varphi \rangle = \langle S_x, \langle T_y, \varphi(x, y) \rangle \rangle = \langle T_y, \langle S_x, \varphi(x, y) \rangle \rangle$ .

La démonstration de cette proposition utilise les deux lemmes suivants :

**Lemme 5.1.3** Soient  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  et  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ . Considérons l'application

$$x \longmapsto \theta(x) = \langle T_y, \varphi(x, y) \rangle.$$

Alors,

a) la fonction  $\theta(x)$  appartient à l'espace  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$  et ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation sous le signe distribution :

$$D_x^\alpha \theta(x) = \langle T_y, D_x^\alpha \varphi(x, y) \rangle,$$

où  $D_x^\alpha$  désigne une dérivation d'ordre  $\alpha$  en  $x$ .

b) si  $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)} \varphi$ , alors  $\theta_k \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)} \theta$  (où  $\theta_k(x) \equiv \langle T_y, \varphi_k(x, y) \rangle$ ).

*Démonstration* : Voir exercice 5.6.11.

**Lemme 5.1.4** L'espace  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ .

*Démonstration* : Voir exercice 5.6.12.

*Démonstration de la proposition 5.1.2* : Pour l'existence, considérons une application  $W$  sur  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ , définie par

$$\langle W, \varphi \rangle = \langle S_x, \langle T_y, \varphi(x, y) \rangle \rangle,$$

où  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ . Cette application a bien un sens car d'après le lemme 5.1.3, a), la fonction définie par  $\theta(x) = \langle T_y, \varphi(x, y) \rangle$  appartient à  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ . L'application en question est linéaire. Montrons qu'elle est continue. Autrement dit, montrons que si la suite  $(\varphi_k)$  converge dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$  vers  $\varphi$ , alors  $\langle W, \varphi_k \rangle$  converge vers  $\langle W, \varphi \rangle$ . Posons  $\theta_k(x) = \langle T_y, \varphi_k(x, y) \rangle$ . On a  $\langle W, \varphi_k \rangle = \langle S_x, \theta_k(x) \rangle$ . Or d'après le lemme 5.1.3, b), la suite  $(\theta_k)$  converge dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$  vers  $\theta$ , donc  $\langle W, \varphi_k \rangle$  converge vers  $\langle S_x, \theta_k(x) \rangle = \langle W, \varphi \rangle$ . Par conséquent, l'application  $W$  détermine une distribution. Si  $\varphi(x, y)$  est de la forme  $\varphi(x, y) = u(x)v(y)$  avec  $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$  et  $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , alors

$$\begin{aligned} \langle W, u \otimes v \rangle &= \langle S_x, \langle T_y, u(x)v(y) \rangle \rangle, \\ &= \langle S_x, u(x)\langle T_y, v(y) \rangle \rangle, \\ &= \langle S_x, u(x) \rangle \langle T_y, v(y) \rangle, \\ &= \langle S, u \rangle \langle T, v \rangle. \end{aligned}$$

On obtient le même résultat en choisissant la distribution définie par

$$\langle W, \varphi \rangle = \langle T_y, \langle S_x, \varphi(x, y) \rangle \rangle.$$

Enfin, l'unicité de  $W$  résulte immédiatement du lemme 5.1.4 de densité.  $\square$

**Définition 5.1.5** La distribution  $W$  définie dans la proposition précédente, s'appelle le produit tensoriel (ou direct) des distributions  $S$  et  $T$ . Elle est notée  $W = S \otimes T$ .

**Exemple 5.1.2** Soit  $a, b \in \mathbb{R}$ . On a  $\delta_a \otimes \delta_b = \delta_{(a,b)}$ . En effet, on a pour  $\varphi \in \mathcal{D}$ ,

$$\langle \delta_a \otimes \delta_b, \varphi \rangle = \langle \delta_{a_x}, \langle \delta_{b_y}, \varphi(x, y) \rangle \rangle = \langle \delta_{a_x}, \varphi(x, b) \rangle = \varphi(a, b) = \langle \delta_{(a,b)}, \varphi \rangle.$$

**Proposition 5.1.6** (Distributivité par rapport à l'addition) : Soit  $S, T_1, T_2 \in \mathcal{D}'$ . On a

$$S \otimes (T_1 + T_2) = S \otimes T_1 + S \otimes T_2.$$

*Démonstration* : En effet, cette propriété résulte immédiatement de la définition du produit tensoriel.  $\square$

**Proposition 5.1.7** (Associativité) : Soient  $R \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^l)$ ,  $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$  et  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . Alors

$$(R \otimes S) \otimes T = R \otimes (S \otimes T).$$

*Démonstration* : En effet, soit  $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^l)$ ,  $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ ,  $w \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . On a

$$\begin{aligned} \langle (R \otimes S) \otimes T, u \otimes v \otimes w \rangle &= \langle R \otimes S, u \otimes v \rangle \langle T, w \rangle, \\ &= \langle R, u \rangle \langle S, v \rangle \langle T, w \rangle, \\ &= \langle R \otimes (S \otimes T), u \otimes v \otimes w \rangle, \end{aligned}$$

d'où le résultat.  $\square$

On écrit  $R \otimes S \otimes T = (R \otimes S) \otimes T = R \otimes (S \otimes T)$ . Cette distribution appartient à l'espace  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ .

**Proposition 5.1.8** (Support du produit tensoriel) : Soient  $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$  et  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . Alors

$$\text{supp}(S \otimes T) = \text{supp}S \times \text{supp}T.$$

*Démonstration* : En effet, montrons tout d'abord que

$$\text{supp}S \times \text{supp}T \subset \text{supp}(S \otimes T).$$

Autrement dit si  $(x, y) \in \text{supp}S \times \text{supp}T$ , la distribution  $S \otimes T$  n'est nulle sur aucun voisinage de  $(x, y)$ . Désignons par  $\mathcal{V}(x)$  un voisinage de  $x$  dans  $\mathbb{R}^m$ ,  $\mathcal{V}(y)$  un voisinage de  $y$  dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{V}(x) \times \mathcal{V}(y)$  un voisinage de  $(x, y)$  dans  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ . Puisque  $x \in \text{supp}S$ , alors il existe une fonction  $u \in \mathcal{D}(\mathcal{V}(x))$  telle que :  $\langle S, u \rangle \neq 0$ . De même, comme  $y \in \text{supp}T$ , alors il existe une fonction  $v \in \mathcal{D}(\mathcal{V}(y))$  telle que :

que :  $\langle T, v \rangle \neq 0$ . Donc on peut trouver une fonction  $u \otimes v \in \mathcal{D}(\mathcal{V}(x)\mathcal{V}(y))$  telle que :  $\langle S \otimes T, u \otimes v \rangle = \langle S, u \rangle \langle T, v \rangle \neq 0$ . Montrons maintenant que

$$\text{supp}(S \otimes T) \subset \text{supp}S \times \text{supp}T.$$

Autrement dit si  $(x, y) \notin \text{supp}S \times \text{supp}T$ , alors  $(x, y) \notin \text{supp}(S \otimes T)$ . Supposons par exemple que  $x \notin \text{supp}S$ . Il existe alors un voisinage  $\mathcal{V}(x)$  de  $x$  tel que : pour toute fonction  $\theta \in \mathcal{D}(\mathcal{V}(x))$ ,  $\langle S, \theta \rangle = 0$ . Soit  $\mathcal{V}(y)$  un voisinage de  $y$  et considérons une fonction  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{V}(x) \times \mathcal{V}(y))$ . Dès lors,  $\theta(x) = \langle T_y, \varphi(x, y) \rangle \in \mathcal{D}(\mathcal{V}(x))$  et  $\langle S \otimes T, \varphi \rangle = \langle S, \theta \rangle = 0$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Proposition 5.1.9** *Soit  $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ ,  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$ ,  $g \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ . On a*

$$(f \otimes g)(S \otimes T) = (fS) \otimes (gT).$$

*Démonstration :* En effet, soit  $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ ,  $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . On a

$$\begin{aligned} \langle (f \otimes g)(S \otimes T), u \otimes v \rangle &= \langle S \otimes T, (f \otimes g)(u \otimes v) \rangle, \\ &= \langle S \otimes T, (fu) \otimes (gv) \rangle, \\ &= \langle S, fu \rangle \langle T, gv \rangle, \\ &= \langle fS, u \rangle \langle gT, v \rangle, \\ &= \langle (fS) \otimes (gT), u \otimes v \rangle, \end{aligned}$$

d'où le résultat.  $\square$

**Proposition 5.1.10** (*Dérivation du produit tensoriel*) : Soient  $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$  et  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . Alors

$$D_x^\alpha D_y^\beta (S \otimes T) = D_x^\alpha S \otimes D_y^\beta T,$$

où  $D_x^\alpha$  désigne une dérivation d'ordre  $\alpha$  en  $x$  et  $D_y^\beta$  une dérivation d'ordre  $\beta$  en  $y$ . En particulier, on a

$$\frac{\partial}{\partial x} (S \otimes T) = \frac{\partial}{\partial x} (S_x \otimes T_y) = \frac{\partial S}{\partial x} \otimes T,$$

et

$$\frac{\partial}{\partial y} (S \otimes T) = \frac{\partial}{\partial y} (S_x \otimes T_y) = S \otimes \frac{\partial T}{\partial y}.$$

*Démonstration :* En effet, pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ ,

$$\begin{aligned} \langle D_x^\alpha D_y^\beta (S \otimes T), \varphi \rangle &= (-1)^{\alpha+\beta} \langle S \otimes T, D_x^\alpha D_y^\beta \varphi \rangle, \\ &= (-1)^{\alpha+\beta} \langle D_x, \langle T_y, D_x^\alpha D_y^\beta \varphi(x, y) \rangle \rangle, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \langle D_x^\alpha S \otimes D_y^\beta T, \varphi \rangle &= \langle (D_x^\alpha S)_x, \langle (D_y^\beta T)_y, \varphi(x, y) \rangle \rangle, \\
 &= (-1)^\beta \langle (D_x^\alpha S)_x, \langle T_y, D_y^\beta \varphi(x, y) \rangle \rangle, \\
 &= (-1)^{\alpha+\beta} \langle S_x, D_x^\alpha \langle T_y, D_y^\beta \varphi(x, y) \rangle \rangle, \\
 &= (-1)^{\alpha+\beta} \langle S_x, \langle T_y, D_x^\alpha D_y^\beta \varphi(x, y) \rangle \rangle,
 \end{aligned}$$

en vertu du lemme 5.1.3, a).  $\square$

**Proposition 5.1.11** (*Continuité du produit tensoriel*) : Soient  $(S_\alpha)$  et  $(T_\alpha)$  deux familles de distributions dépendant d'un paramètre  $\alpha$  telles que :

$$\lim_{\alpha \rightarrow \lambda} S_\alpha = S, \quad \lim_{\alpha \rightarrow \lambda} T_\alpha = T,$$

où  $\lambda$  est fini ou non. Alors

$$\lim_{\alpha \rightarrow \lambda} (S_\alpha \otimes T_\alpha) = S \otimes T.$$

Nous admettrons ce résultat (voir [10] p.110 ou [12] p.211).

## 5.2 Convolution des fonctions

**Définition 5.2.1** On définit le produit de convolution (quand il existe) de deux fonctions  $f$  et  $g$  par

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

On dit aussi que  $f * g$  est la convolée de  $f$  et  $g$ .

On notera que le produit de convolution est commutatif : si  $f * g$  existe, le produit  $g * f$  existe aussi et on a  $f * g = g * f$ . En effet, en faisant le changement de variable  $u = x - t$ , on aura

$$f * g = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)f(x-u)du = g * f.$$

On notera aussi que le produit de convolution est distributif par rapport à l'addition : si  $f * g$  et  $f * h$  existent, alors  $f * (\alpha g + \beta h)$  existe aussi et on a

$$f * (\alpha g + \beta h) = \alpha(f * g) + \beta(f * h).$$

Cela résulte de la linéarité de l'intégrale.

**Proposition 5.2.2** Soit  $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ . Alors,

- a)  $f * g$  existe presque partout,  $f * g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ .
- b)  $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$ .
- c)  $(f * g) * h = f * (g * h)$  où  $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ .

*Démonstration :* a) En effectuant le changement de variables :  $u = t$ ,  $v = x - t$ , dont le jacobien est égal à 1, on obtient immédiatement

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| |g(x-t)| dx dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)| du \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |g(v)| dv < +\infty,$$

pour tout  $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ . Dès lors, la fonction  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dx$  existe presque partout et  $f * g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ , en vertu du théorème de Fubini.

b) On a

$$\begin{aligned} \|f * g\|_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |(f * g)(x)| dx, \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| |g(x-t)| dt dx, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)| du \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |g(v)| dv, \\ &= \|f\|_1 \cdot \|g\|_1, \end{aligned}$$

d'après ce qui précède.

c) On a

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt, \quad x \in \mathbb{R} \\ ((f * g) * h)(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(x)h(y-x)dx, \quad y \in \mathbb{R} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)h(y-x)dt dx, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (g * h)(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(s)h(z-s)ds, \quad z \in \mathbb{R} \\ ((f * (g * h))(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(r)(g * h)(y-r)dr, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(r)g(s)h(y-r-s)dr ds. \end{aligned}$$

En posant  $r = t$ , et  $s = x - t$ , on obtient le résultat cherché.  $\square$

**Proposition 5.2.3** Soit  $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ . Alors, la fonction  $f * g$  existe et on a

$$|f * g|_\infty \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2.$$

*Démonstration :* En posant  $\tau_t g(x) = g(x - t)$ , on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau_t g(x)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x - t)|^2 dt, = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(s)|^2 ds < +\infty,$$

où  $s = x - t$  et dès lors  $\tau_t g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ . L'inégalité de Schwarz entraîne que

$$\begin{aligned} |f * g|^2(x) &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \tau_t g(x) dt \right|^2, \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |\tau_t g(x)|^2 dt, \\ &= \|f\|_2^2 \cdot \|g\|_2^2. \end{aligned}$$

Donc  $f * g$  est bien définie et  $|f * g|_\infty \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$ .  $\square$

**Remarque 5.2.1** Nous avons montré dans la proposition 5.2.2, que si  $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ , alors  $f * g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ . Par contre, si  $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ , alors  $f * g$  existe mais peut ne pas appartenir à  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ .

**Définition 5.2.4** Une fonction  $f$  est dite causale si  $f(t) = 0$ ,  $t < 0$ .

On peut également la définir par la relation  $f(t) = 2f_p(t) = 2f_i(t)$ ,  $t > 0$  où

$$f_p(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2}, \quad f_i(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}$$

car pour  $t > 0$ , on a  $f(-t) = 0$ .

**Proposition 5.2.5** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues et causales. Alors,

a) la fonction  $f * g$  existe. Elle est causale et on a

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(t)g(x - t) dt = \int_0^x g(t)f(x - t) dt.$$

b) On a  $(f * g) * h = f * (g * h)$ , où  $h$  est causale. En outre ces fonctions sont causales.

*Démonstration :* C'est une conséquence immédiate des définitions.  $\square$

Il existe bien d'autres conditions suffisantes pour l'existence de  $f * g$ . Par exemple, si  $\text{supp } f$  et  $\text{supp } g$  sont bornés à gauche (resp. à droite), c'est-à-dire  $\text{supp } f \subset [a, +\infty[$  (resp.  $] -\infty, a]$ ) et  $\text{supp } g \subset [b, +\infty[$  (resp.  $] -\infty, b]$ ), alors  $f * g$  existe et  $\text{supp } (f * g)$  est borné à gauche (resp. à droite). Signalons aussi que si  $f$  et  $g$  sont continues et si  $\text{supp } f$  et  $\text{supp } g$  sont bornés, alors  $f * g$  existe et  $\text{supp } (f * g)$  est borné. Enfin, d'autres cas dans lesquels le produit de convolution existe seront énoncés à titre d'exercice.

### 5.3 Convolution des distributions

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ . On a, pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}$ ,

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t) \varphi(x) dt dx.$$

En posant  $u = t$ ,  $v = x - t$ , on obtient

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) g(v) \varphi(u+v) du dv,$$

ce qui nous conduit à écrire cette expression sous la forme

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \langle f \otimes g, \varphi(u+v) \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}$$

où  $f \otimes g$  est le produit tensoriel de  $f$  et  $g$ . Cette expression fait intervenir la fonction

$$(u, v) \mapsto \psi(u, v) = \varphi(u+v), \quad (u, v \in \mathbb{R})$$

à laquelle il s'agit d'appliquer le produit  $f \otimes g$ . Or si  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , la fonction  $\psi$  est indéfiniment dérivable mais n'appartient pas à  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$  car son support n'est pas borné. En effet, si  $\text{supp } \varphi = [a, b]$ , alors  $(u, v) \in \text{supp } \psi$  si et seulement si  $u + v \in \text{supp } \varphi$ , et  $\text{supp } \psi = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : a \leq u + v \leq b\}$ , c'est-à-dire une bande de  $\mathbb{R}^2$  délimitée par les droites d'équations  $u + v = a$  et  $u + v = b$ .

Soient  $S$  et  $T$  deux distributions. S'inspirant de ce qui vient d'être fait, on va définir le produit de convolution de  $S$  et  $T$  et essayer de trouver des conditions d'existence de ce produit. La difficulté vient du fait que  $\psi$  n'appartient pas à  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$  et celle-ci sera surmontée moyennant l'utilisation d'une extension de  $S * T$  (voir ci-dessous) à l'espace de ces fonctions  $\psi$  (espace plus large que  $\mathcal{D}$ ) comme cela a été fait dans la section 1.5 du chapitre 1.

**Définition 5.3.1** *On définit le produit de convolution (quand il existe) de deux distributions  $S$  et  $T$  par*

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S_x \otimes T_y, \varphi(x+y) \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

où  $S_x \otimes T_y$  est le produit tensoriel de  $S$  et  $T$ .

Pour que cette définition ait un sens, il faut que  $S * T$  existe. On a déjà vu que si  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , alors  $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$  et  $\text{supp } \psi$  n'est pas borné. Supposons que  $\text{supp } \psi \cap \text{supp } (S_x \otimes T_y)$  soit borné. En procédant comme dans la section 1.5 du chapitre 1, on définit une extension de  $S * T$  à l'espace des fonctions  $\psi$ , en posant

$$\langle S * T, \psi \rangle = \langle S_x \otimes T_y, \psi \rangle = \langle S_x \otimes T_y, \alpha \psi \rangle,$$

avec  $\alpha \in \mathcal{D}$  valant 1 sur un voisinage de  $\text{supp } \psi \cap \text{supp } (S_x \otimes T_y)$ . D'après la proposition 5.1.8,  $\text{supp } (S_x \otimes T_y) = \text{supp } S \times \text{supp } T$ . On arrive ainsi à la condition suffisante suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Le produit de convolution } S * T \text{ aura un sens si} \\ \text{supp } \psi \cap (\text{supp } S \times \text{supp } T) \\ \text{est borné} \end{array} \right.$$

Cette condition est satisfaite par exemple lorsque :

(i)  $\text{supp } S$  ou  $\text{supp } T$  est borné : En effet, supposons par exemple  $\text{supp } S$  borné, alors pour tout  $(x, y) \in \text{supp } \psi \cap \text{supp } S \times \text{supp } T$ , on a  $x \in \text{supp } S$ ,  $y \in \text{supp } T$  et  $x + y \in \text{supp } \varphi$ . Donc  $x$  et  $x + y$  sont bornés. Comme  $y = (x + y) - x$ , on en déduit que  $y$  est aussi borné. Même raisonnement pour le cas où  $\text{supp } T$  est borné.

(ii)  $\text{supp } S$  et  $\text{supp } T$  sont bornés d'un même côté : En effet, supposons que  $\text{supp } S$  et  $\text{supp } T$  soient bornés à gauche, c'est-à-dire  $\text{supp } S \subset [c_1, +\infty[$  et  $\text{supp } T \subset [c_2, +\infty[$ . Pour tout  $(x, y) \in \text{supp } \psi \cap (\text{supp } S \times \text{supp } T)$ , on a  $x \geq c_1$  et  $y \geq c_2$ . Comme  $x + y \in \text{supp } \varphi$ , alors il existe une constante  $c$  telle que :  $x + y \leq c$ . Dès lors,  $c_1 \leq x \leq c - y \leq c - c_2$  et  $c_2 \leq y \leq c - x \leq c - c_1$ . Donc  $x$  et  $y$  sont bornés. Même raisonnement pour le cas où  $\text{supp } S$  et  $\text{supp } T$  sont bornés à droite.

**Proposition 5.3.2 (Commutativité) :** Soit  $S, T \in \mathcal{D}'$ . Si  $S * T$  existe, alors

$$S * T = T * S.$$

*Démonstration* : En effet, pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}$ ,

$$\begin{aligned} \langle S * T, \varphi \rangle &= \langle S_x \otimes T_y, \varphi(x + y) \rangle, \\ &= \langle S_x, \langle T_y, \varphi(x + y) \rangle \rangle, \\ &= \langle S_y, \langle T_x, \varphi(y + x) \rangle \rangle, \\ &= \langle T_x \otimes S_y, \varphi(x + y) \rangle, \\ &= \langle T * S, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

d'où le résultat.  $\square$

**Proposition 5.3.3 (Distributivité par rapport à l'addition) :** Soit  $S, T_1, T_2 \in \mathcal{D}'$ . Si  $S * T_1$  et  $S * T_2$  existent, alors

$$S * (T_1 + T_2) = S * T_1 + S * T_2.$$

*Démonstration* : En effet, il suffit d'utiliser la distributivité du produit tensoriel (voir proposition 5.1.6) et la linéarité des distributions.  $\square$

**Proposition 5.3.4 (Associativité) :** Soit  $R, S, T \in \mathcal{D}'$ . On a

$$(R * S) * T = R * (S * T),$$

si deux au moins de ces distributions sont à supports bornés ou si toutes ces distributions ont leurs supports bornés d'un même côté.

*Démonstration :* En effet, pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}$ ,

$$\begin{aligned} \langle (R * S) * T, \varphi \rangle &= \langle (R * S)_x \otimes T_z, \varphi(x + z) \rangle, \\ &= \langle (R * S)_x, \langle T_z, \varphi(x + z) \rangle \rangle, \\ &= \langle R_x \otimes S_y, \langle T_z, \varphi(x + y + z) \rangle \rangle, \\ &= \langle R_x \otimes S_y \otimes T_z, \varphi(x + y + z) \rangle. \end{aligned}$$

On montre de même que,

$$\langle R * (S * T), \varphi \rangle = \langle R_x \otimes S_y \otimes T_z, \varphi(x + y + z) \rangle,$$

et la démonstration s'achève.  $\square$

Il faut bien noter qu'en général  $(R * S) * T \neq R * (S * T)$ , voir exercice 5.6.4.

**Proposition 5.3.5 (Support d'une convolution) :** Soit  $S, T \in \mathcal{D}'$  et supposons que  $S * T$  existe. Alors

$$\text{supp}(S * T) \subset \overline{\text{supp}S + \text{supp}T}.$$

*Démonstration :* En effet, posons  $F = \text{supp}S + \text{supp}T$ . L'ensemble  $F$  est un fermé puisque  $\text{supp}S$  et  $\text{supp}T$  sont des fermés et  $\text{supp}\psi \cap (\text{supp}S \times \text{supp}T)$  est borné,  $\psi(x, y) = \varphi(x + y)$ . Soit  $\varphi \in \mathcal{D}$  telle que :  $\text{supp}\varphi \subset F^c$  et montrons que  $\langle S * T, \varphi \rangle = 0$ . Par définition,  $\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S_x \otimes T_y, \varphi(x + y) \rangle$ . On sait (proposition 5.1.8) que :  $\text{supp}S_x \otimes T_y = \text{supp}S_x \times \text{supp}T_y$ , et que  $(x, y) \in \text{supp}\psi$  si et seulement si  $x + y \in \text{supp}\varphi$ ,  $\text{supp}\psi = \{(x, y) : x + y \in \text{supp}\varphi\}$ . Si  $x \in \text{supp}S$  et  $y \in \text{supp}T$ , alors  $x + y \in \text{supp}S + \text{supp}T$ . Or  $\text{supp}\varphi \cap F = \emptyset$ , on en déduit que  $\text{supp}\psi \cap \text{supp}S_x \otimes T_y = \emptyset$ . D'où,  $\langle S_x \otimes T_y, \varphi(x + y) \rangle = 0$ , c'est-à-dire  $\langle S * T, \varphi \rangle = 0$  et la démonstration est complète.  $\square$

**Proposition 5.3.6** Pour tout  $T \in \mathcal{D}'$ , on a  $T * \delta = \delta * T = T$ . En outre,

$$T * \delta^{(k)} = T^{(k)}, \quad k \in \mathbb{N}$$

*Démonstration :* En effet,  $T * \delta$  existe puisque  $\text{supp}\delta = \{0\}$  est borné (voir exemple 1.4.3) et d'après la proposition 5.3.2,  $T * \delta = \delta * T$ . D'où, pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}$ , on a

$$\begin{aligned} \langle T * \delta, \varphi \rangle &= \langle T_x \otimes \delta_y, \varphi(x + y) \rangle, \\ &= \langle T_x, \langle \delta_y, \varphi(x + y) \rangle \rangle, \\ &= \langle T_x, \varphi(x) \rangle, \\ &= \langle T, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned} \langle T * \delta^{(k)}, \varphi \rangle &= \langle T_x \otimes \delta_y^{(k)}, \varphi(x + y) \rangle, \\ &= \langle T_x, \langle \delta_y^{(k)}, \varphi(x + y) \rangle \rangle, \\ &= \langle T_x, (-1)^k \langle \delta_y, \varphi^{(k)}(x + y) \rangle \rangle, \\ &= (-1)^k \langle T_x, \varphi^{(k)}(x) \rangle, \\ &= \langle T^{(k)}, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Proposition 5.3.7 (Dérivation d'une convolution) :** Soit  $S, T \in \mathcal{D}'$ . Si  $S * T$  existe, alors

$$(S * T)' = S' * T = S * T',$$

et plus généralement

$$D^\alpha(S * T) = D^\alpha S * T = S * D^\alpha T,$$

où  $D^\alpha$  désigne une dérivation d'ordre  $\alpha$ .

*Démonstration :* En effet, pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}$ , on a

$$\begin{aligned} \langle (S * T)', \varphi \rangle &= -\langle S * T, \varphi' \rangle, \\ &= -\langle S_x \otimes T_y, \varphi'(x + y) \rangle, \\ &= -\langle S_x, \langle T_y, \varphi'(x + y) \rangle \rangle, \\ &= \langle S_x, -\langle T_y, \varphi'(x + y) \rangle \rangle, \\ &= \langle S_x, \langle T'_y, \varphi(x + y) \rangle \rangle, \\ &= \langle S_x \otimes T'_y, \varphi(x + y) \rangle, \\ &= \langle S * T', \varphi \rangle, \end{aligned}$$

d'où  $(S * T)' = S * T'$ . En tenant compte de la commutativité, on obtient aussi  $(S * T)' = S' * T$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Proposition 5.3.8** (*Translation d'une convolution*) : Soit  $S, T \in \mathcal{D}'$ . Si  $S * T$  existe, alors

$$\tau_a(S * T) = S * (\tau_a T) = (\tau_a S) * T.$$

En particulier,  $\delta_a * T = \tau_a T$ , soit explicitement,  $\delta(x - a) * T(x) = T(x - a)$ .

*Démonstration* : En effet, pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}$ , on a

$$\begin{aligned} \langle \tau_a(S * T), \varphi \rangle &= \langle S * T, \tau_{-a}\varphi \rangle, \\ &= \langle S_x \otimes T_y, \tau_{-a}\varphi(x + y) \rangle, \\ &= \langle S_x, \langle T_y, \tau_{-a}\varphi(x + y) \rangle \rangle, \\ &= \langle S_x, \langle \tau_a T_y, \varphi(x + y) \rangle \rangle, \\ &= \langle S_x \otimes (\tau_a T_y), \varphi(x + y) \rangle, \\ &= \langle S * (\tau_a T), \varphi \rangle, \end{aligned}$$

d'où  $\tau_a(S * T) = S * (\tau_a T)$ . On montre de même que  $\tau_a(S * T) = (\tau_a S) * T$ . En particulier, si  $S = \delta$ , alors

$$\tau_a(\delta * T) = \delta * (\tau_a T) = (\tau_a \delta) * T.$$

D'après la proposition 5.3.6, on a  $\delta * T = \delta$ . Donc  $\tau_a T = \delta_a * T$ .  $\square$

**Proposition 5.3.9** (*Continuité de la convolution*) : Soient  $(S_\alpha)$  et  $(T_\alpha)$  deux familles de distributions dépendantes d'un paramètre  $\alpha$  telles que :  $\lim_{\alpha \rightarrow \lambda} S_\alpha = S$ ,  $\lim_{\alpha \rightarrow \lambda} T_\alpha = T$  ( $\lambda$  fini ou non). Posons  $\psi(x, y) = \varphi(x + y)$ ,  $\varphi \in \mathcal{D}$  et supposons que  $\text{supp } S_\alpha$  et  $\text{supp } T_\alpha$  soient contenus dans deux ensembles fermés fixes  $A$  et  $B$  tels que :  $\text{supp } \psi \cap (A \times B)$  soit borné. Alors,

$$\lim_{\alpha \rightarrow \lambda} (S_\alpha * T_\alpha) = S * T.$$

*Cas particulier* : soient  $T_\alpha, T$  des distributions comme ci-dessus et  $S$  une distribution quelconque. Si l'une des conditions suivantes est vérifiée,

- (i)  $\text{supp } T_\alpha$  est contenu dans un ensemble fermé fixe.
- (ii)  $\text{supp } S$  est borné.
- (iii)  $\text{supp } T_\alpha$  et  $\text{supp } S$  sont contenus dans le demi-espace  $x \geq 0$ .

Alors

$$\lim_{\alpha \rightarrow \lambda} (S * T_\alpha) = S * T.$$

*Démonstration* : En effet, ce résultat résulte de celui que nous avons admis (proposition 5.1.11) sur la continuité du produit tensoriel.  $\square$

**Proposition 5.3.10** (*Régularisation des distributions*) : Soient  $T$  une distribution et  $f$  une fonction de classe  $C^\infty$ . Si  $T * f$  existe, alors c'est une fonction de classe  $C^\infty$ , donnée par

$$T * f(t) = \langle T_x, f(t - x) \rangle = g(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

*Démonstration* : Soit  $\varphi \in \mathcal{D}$ . On a

$$\begin{aligned} \langle T * f, \varphi \rangle &= \langle T_x \otimes f(t), \varphi(x + t) \rangle, \\ &= \langle T_x, \langle f(t), \varphi(x + t) \rangle \rangle, \\ &= \left\langle T_x, \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi(x + t) dt \right\rangle, \\ &= \left\langle T_x, \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - x) \varphi(t) dt \right\rangle, \\ &= \langle T_x, \langle \varphi(t), f(t - x) \rangle \rangle, \\ &= \langle \varphi(t), \langle T_x, f(t - x) \rangle \rangle, \\ &= \langle \langle T_x, f(t - x) \rangle, \varphi(t) \rangle, \\ &= \langle g(t), \varphi(t) \rangle, \end{aligned}$$

où  $g(t) = \langle T_x, f(t - x) \rangle$ . On a

$$\begin{aligned} g'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t + h) - g(t)}{h}, \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\langle T_x, f(t + h - x) - \langle T_x, f(t - x) \rangle \rangle}{h}, \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\langle T_x, \frac{f(t + h - x) - f(t - x)}{h} \right\rangle, \end{aligned}$$

et on montre, comme dans l'exercice 4.2.8, que  $g'(t) = \langle T_x, f'(t - x) \rangle$ . On procède de même pour les dérivées successives et on obtient finalement l'expression  $g^{(k)}(t) = \langle T_x, f^{(k)}(t - x) \rangle$ . La démonstration s'achève.  $\square$

**Remarque 5.3.1** Dans la proposition précédente, si  $f \in \mathcal{D}$  et  $T \in \mathcal{D}'$  alors le produit de convolution  $T * f$  existe car  $\text{supp } f$  est borné. De même, si  $f \in \mathcal{E} = C^\infty$  et  $T \in \mathcal{E}'$  alors  $\text{supp } T$  est borné et  $T * f$  existe.

## 5.4 Algèbre de convolution

**Définition 5.4.1** Une algèbre de convolution  $\mathcal{A}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{D}'$  tel que : (i) quels que soient  $S$  et  $T$  dans  $\mathcal{A}$ , le produit de convolution  $S * T$  existe et appartient à  $\mathcal{A}$ . (ii) le produit de convolution, dans  $\mathcal{A}$ , est associatif et  $\delta \in \mathcal{A}$ .

Dans une algèbre de convolution  $\mathcal{A}$ , le produit de convolution joue le rôle de la multiplication et est commutatif. Dans  $\mathcal{A}$ , la distribution  $\delta$  de Dirac joue le rôle d'élément neutre.

**Exemple 5.4.1** *L'ensemble  $\mathcal{E}'$  des distributions à support borné est une algèbre de convolution.*

**Exemple 5.4.2** *L'ensemble  $\mathcal{D}'_+$  des distributions sur  $\mathbb{R}$  à support dans  $\mathbb{R}_+$  est une algèbre de convolution.*

## 5.5 Équation de convolution

### 5.5.1 Définitions et propriétés

Soient  $A$  et  $B$  deux distributions données appartenant à une algèbre de convolution  $\mathcal{A}$ .

**Définition 5.5.1** a) *On appelle équation de convolution, toute équation de la forme  $A * X = B$ , où  $X$  est une distribution inconnue appartenant à  $\mathcal{A}$ .*

b) *On appelle inverse  $A^{-1}$  de  $A$  dans  $\mathcal{A}$ , toute solution  $X$  de l'équation  $A * X = \delta$ , où  $\delta$  est la distribution de Dirac. On dit que  $A^{-1}$  est une solution élémentaire de l'équation  $A * X = B$ .*

Le problème consiste à étudier l'existence et l'unicité de la solution  $X$  dans l'algèbre de convolution  $\mathcal{A}$ .

**Proposition 5.5.2** *Si  $A$  possède un inverse  $A^{-1}$  dans une algèbre de convolution  $\mathcal{A}$ , alors cet inverse est unique et l'équation  $A * X = B$ ,  $B \in \mathcal{A}$ , a une solution unique donnée par  $X = A^{-1} * B$ .*

*Démonstration :* En effet,  $A$  admet un inverse unique car si  $A * X = \delta$  avait une autre solution  $Y$  dans  $\mathcal{A}$ , on aurait  $A * Y = \delta$  ou, compte tenu de la commutativité,  $Y * A = \delta$ . Dès lors,

$$Y = Y * \delta = Y * (A * X) = (Y * A) * X = \delta * X = X.$$

On déduit par convolution des deux membres de l'équation  $A * X = B$  par  $A^{-1}$  que :  $A^{-1} * A * X = A^{-1} * B$ , c'est-à-dire  $X = A^{-1} * B$ .  $\square$

**Remarques 5.5.1** a) *Nous venons de voir que si, dans  $\mathcal{A}$ , l'inverse  $A^{-1}$  existe, alors l'équation  $A * X = B$  admet une solution unique. Or  $A^{-1}$  peut ne pas exister comme le montre l'exemple suivant : soient  $A$  une fonction de  $\mathcal{D}$  et  $X$  une distribution quelconque. On sait alors (remarque 5.3.1) que le produit*

de convolution  $A * X$  existe et que (proposition 5.3.10) c'est une fonction de classe  $C^\infty$ . Celle-ci ne peut être égale à  $\delta$  et donc  $A^{-1}$  n'existe pas.

b) Si l'inverse  $A^{-1}$  n'existe pas, alors l'équation  $A * X = B$  n'a pas de solution pour  $B = \delta$ , mais peut avoir plusieurs solutions (pour certaines valeurs de  $B$ ), ou au contraire n'avoir aucune solution. Signalons que l'unicité de la solution est encore assurée dans le cas où  $\mathcal{A}$  est une algèbre de convolution sans diviseurs de zéros (c'est-à-dire quels que soient  $S$  et  $T$  dans  $\mathcal{A}$ ,  $S * T = 0$  si et seulement si  $S = 0$  ou  $T = 0$ ), c'est le cas par exemple des algèbres  $\mathcal{E}'$  et  $\mathcal{D}'_+$ .

c) Il se peut que l'équation  $A * X = B$  où  $A, B \in \mathcal{A}$ , possède une solution dans l'algèbre de convolution  $\mathcal{A}$  et une autre solution n'appartenant pas à  $\mathcal{A}$ . Par exemple, l'équation

$$(\delta' - c^2\delta) * X = \delta, \quad c \neq 0$$

possède dans  $\mathcal{D}'_+$  la solution  $\frac{1}{c}H(x)\text{sh}(cx)$  et une autre solution  $\frac{1}{2c}e^{-c|x|}$  qui n'appartient pas à  $\mathcal{D}'_+$ .

**Exemple 5.5.1** Soient  $S, T \in \mathcal{D}'_+$  et  $S^{-1}, T^{-1}$  leurs inverses respectifs. Alors

$$(S * T)^{-1} = S^{-1} * T^{-1}.$$

En effet, comme  $S$  et  $T$  sont à support bornés, le produit de convolution  $S * T$  existe, il est commutatif (proposition 5.3.2) et associatif (proposition 5.3.4). Dès lors,

$$(S * T) * (S^{-1} * T^{-1}) = (S * S^{-1}) * (T * T^{-1}) = \delta * \delta = \delta.$$

**Exemple 5.5.2** Montrons que :

$$(\delta' - c\delta)^{-1} = H(t)e^{ct},$$

où  $c \in \mathbb{C}$  et  $H(t)$  est la fonction de Heaviside. En effet, on a

$$\begin{aligned} (\delta' - c\delta)^{-1} * H(t)e^{ct} &= \delta' * H(t)e^{ct} - c\delta * H(t)e^{ct}, \\ &= (H(t)e^{ct})' - cH(t)e^{ct}, \\ &= H'(t)e^{ct}, \\ &= \delta e^{ct}, \\ &= \delta. \end{aligned}$$

### 5.5.2 Opérateurs différentiels à coefficients constants

Soit  $D$  un opérateur différentiel d'ordre  $m$ , à coefficients constants :

$$D = \frac{d^m}{dt^m} + a_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + \cdots + a_{m-1} \frac{d}{dt} + a_m.$$

On a

$$D\delta = \delta^{(m)} + a_1\delta^{(m-1)} + \cdots + a_{m-1}\delta' + a_m\delta,$$

où  $\delta^{(m)}$  est la dérivée  $m^{\text{ième}}$  de la distribution  $\delta$  de Dirac. On veut déterminer l'inverse de convolution de  $D\delta$ .

**Proposition 5.5.3** *Dans  $\mathcal{D}'_+$ , l'inverse de  $D\delta$  est donné par*

$$(D\delta)^{-1} = H(t)Z(t),$$

où  $H(t)$  est la fonction de Heaviside et  $Z$  est la solution de l'équation :  $DZ = 0$ , vérifiant les conditions initiales suivantes :

$$Z(0) = Z'(0) = \cdots = Z^{(m-2)}(0) = 0, \quad Z^{(m-1)}(0) = 1.$$

*Démonstration* : Il suffit de vérifier que  $X = (D\delta)^{-1} = H(t)Z(t)$ , est bien solution de l'équation :  $D\delta * X = \delta$ . Cette dernière s'écrit

$$\left( \delta^{(m)} + a_1\delta^{(m-1)} + \cdots + a_{m-1}\delta' + a_m\delta \right) * X = \delta,$$

c'est-à-dire

$$\delta^{(m)} * X + a_1\delta^{(m-1)} * X + \cdots + a_{m-1}\delta' * X + a_m\delta * X = \delta,$$

ou, en tenant compte de la proposition 5.3.6,

$$X^{(m)} + a_1X^{(m-1)} + \cdots + a_{m-1}X' + a_mX = \delta,$$

ou encore, sous forme condensée  $DX = \delta$ . Comme  $X = HZ$ , alors

$$X' = \delta' * H'Z + HZ' = \delta Z(0) + HZ',$$

$$X'' = \delta'Z(0) + H'Z' + HZ'' = \delta'Z(0) + \delta Z'(0) + HZ'',$$

$$X^{(m-1)} = \delta^{(m-2)}Z(0) + \cdots + \delta Z^{(m-2)}(0) + HZ^{(m-1)},$$

$$X^{(m)} = \delta^{(m-1)}Z(0) + \cdots + \delta Z^{(m-1)}(0) + HZ^{(m)}.$$

En tenant compte des conditions initiales, on obtient

$$X = HZ, \quad X' = HZ', \dots, X^{(m-1)} = HZ^{(m-1)}, \quad X^{(m)} = \delta + HZ^{(m)}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} DX &= \delta + HZ^{(m)} + a_1HZ^{(m-1)} + \cdots + a_{m-1}HZ' + a_mHZ, \\ &= \delta + H(Z^{(m)} + a_1Z^{(m-1)} + \cdots + a_{m-1}Z' + a_mZ), \\ &= \delta + H.DZ, \\ &= \delta. \end{aligned}$$

car  $DZ=0$  par hypothèse et la proposition est démontrée.  $\square$

Nous allons déterminer, dans  $\mathcal{D}'_+$ , les inverses de convolution de quelques opérateurs couramment utilisés.

**Exemple 5.5.3** L'inverse de convolution de l'opérateur

$$D = \frac{d}{dt} - \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

est

$$(D\delta)^{-1} = H(t)e^{\lambda t},$$

où  $H(t)$  est la fonction de Heaviside. En effet, d'après la proposition précédente, on a  $(D\delta)^{-1} = H(t)Z(t)$ , où  $Z(t)$  est solution de l'équation  $DZ = 0$  avec  $Z(0) = 1$ . On a

$$DZ = \left( \frac{d}{dt} - \lambda \right) Z = Z' - \lambda Z = 0,$$

donc  $Z(t) = Ce^{\lambda t}$ . Comme  $Z(0) = C = 1$ , alors  $Z(t) = e^{\lambda t}$  et par conséquent  $(D\delta)^{-1} = H(t)e^{\lambda t}$ .

**Exemple 5.5.4** L'inverse de convolution de l'opérateur

$$D = \frac{d^2}{dt^2} + \omega^2, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

est

$$(D\delta)^{-1} = H(t) \frac{\sin \omega t}{\omega},$$

où  $H(t)$  est la fonction de Heaviside. En effet, comme dans l'exemple précédent, on a  $(D\delta)^{-1} = H(t)Z(t)$ , où  $Z(t)$  est solution de l'équation  $DZ = 0$  avec  $Z(0) = 0$  et  $Z'(0) = 1$ . On a

$$DZ = \left( \frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) Z = Z'' + \omega^2 Z = 0.$$

Cette équation possède la solution  $Z(t) = C_1 e^{-i\omega t} + C_2 e^{i\omega t}$ . Comme

$$Z(0) = C_1 + C_2 = 0, \quad Z'(0) = -C_1 i\omega + C_2 i\omega = 1,$$

alors  $C_1 = \frac{i}{2\omega}$  et  $C_2 = -\frac{i}{2\omega}$ . Donc

$$Z(t) = \frac{i}{2\omega} (e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}) = \frac{\sin \omega t}{\omega},$$

et par conséquent  $(D\delta)^{-1} = H(t) \frac{\sin \omega t}{\omega}$ .

**Exemple 5.5.5** Soit l'opérateur différentiel

$$D = \frac{d^m}{dt^m} + a_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + \cdots + a_{m-1} \frac{d}{dt} + a_m,$$

où  $a_1, \dots, a_m$  sont des constantes. L'inverse de convolution de  $D$  est

$$(D\delta)^{-1} = H(t)e^{r_1 t} * H(t)e^{r_2 t} * \cdots * H(t)e^{r_m t},$$

où  $H(t)$  est la fonction de Heaviside et  $r_1, r_2, \dots, r_m$  sont les racines de l'équation :

$$r^m + a_1 r^{m-1} + \cdots + a_{m-1} r + a_m = 0.$$

En effet, on sait (proposition 5.5.3) que  $(D\delta)^{-1} = H(t)Z(t)$ , où  $Z$  est solution de l'équation  $DZ = 0$  avec

$$Z(0) = Z'(0) = \cdots = Z^{(m-2)}(0) = 0, \quad Z^{(m-1)}(0) = 1.$$

L'équation  $DZ = 0$  s'écrit sous la forme

$$Z^{(m)} + a_1 Z^{(m-1)} + \cdots + a_{m-1} Z + a_m = 0,$$

et son polynôme caractéristique est

$$P(r) = r^m + a_1 r^{m-1} + \cdots + a_{m-1} r + a_m = (r - r_1)(r - r_2) \cdots (r - r_m),$$

où  $r_1, r_2, \dots, r_m$  sont les racines de  $P(r) = 0$ . On a de même,

$$\begin{aligned} D &= \frac{d^m}{dt^m} + a_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + \cdots + a_{m-1} \frac{d}{dt} + a_m, \\ &= \left( \frac{d}{dt} - r_1 \right) \left( \frac{d}{dt} - r_2 \right) \cdots \left( \frac{d}{dt} - r_m \right). \end{aligned}$$

On sait qu'on peut associer à la formule  $r^m \cdot r^n = r^{m+n}$ , la relation suivante :  $\delta^{(m)} * \delta^{(n)} = \delta^{(m+n)}$  (voir exercice 5.6.5). En fait l'ensemble des polynômes  $P(r)$  ci-dessus, muni de la multiplication ordinaire est isomorphe à celui des polynômes différentiels  $D\delta$  ci-dessus, muni du produit de convolution. On a

$$D\delta = (\delta' - r_1 \delta) * (\delta' - r_2 \delta) * \cdots * (\delta' - r_m \delta),$$

et d'après les exemples 5.5.1 et 5.5.2,

$$\begin{aligned} (D\delta)^{-1} &= (\delta' - r_1 \delta)^{-1} * (\delta' - r_2 \delta)^{-1} * \cdots * (\delta' - r_m \delta)^{-1}, \\ &= H(t)e^{r_1 t} * H(t)e^{r_2 t} * \cdots * H(t)e^{r_m t}. \end{aligned}$$

### 5.5.3 Équations différentielles linéaires à coefficients constants

Considérons, dans  $\mathcal{D}'_+$ , l'équation différentielle

$$DX = B,$$

où

$$D = \frac{d^m}{dt^m} + a_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + \cdots + a_{m-1} \frac{d}{dt} + a_m,$$

et  $B$  une distribution connue. Comme

$$X = \delta * X, \quad \frac{dX}{dt} = \delta' * X, \dots, \frac{d^m X}{dt^m} = \delta^{(m)} * X,$$

l'équation précédente s'écrit

$$\left( \delta^{(m)} + a_1 \delta^{(m-1)} + \cdots + a_{m-1} \delta' + a_m \delta \right) * X = B,$$

c'est-à-dire  $D\delta * X = B$ , et admet la solution unique  $X = (D\delta)^{-1} * B$  (proposition 5.5.2), avec (voir exemple 5.5.5)

$$\begin{aligned} (D\delta)^{-1} &= (\delta' - r_1 \delta)^{-1} * (\delta' - r_2 \delta)^{-1} * \cdots * (\delta' - r_m \delta)^{-1}, \\ &= H(t)e^{r_1 t} * H(t)e^{r_2 t} * \cdots * H(t)e^{r_m t}, \end{aligned}$$

où  $r_1, r_2, \dots, r_m$  sont les racines de l'équation :

$$r^m + a_1 r^{m-1} + \cdots + a_{m-1} r + a_m = 0.$$

**Exemple 5.5.6** Soit l'équation :  $DX = B$ , où  $D = \frac{d^2}{dt^2} + \omega^2$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$  et  $B$  une distribution donnée. Cette équation s'écrit sous la forme  $D\delta * X = B$ , où  $D\delta = \delta'' + \omega^2 \delta$ . On a

$$\begin{aligned} (D\delta)^{-1} &= (\delta' - i\omega \delta)^{-1} * (\delta' + i\omega \delta)^{-1}, \\ &= H(t)e^{i\omega t} * H(t)e^{-i\omega t}, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)e^{i\omega x}(t-x)e^{-i\omega(t-x)}dx, \\ &= H(t)\frac{\sin \omega t}{\omega}, \end{aligned}$$

c'est ce que nous avons obtenu dans l'exemple 41. Comme  $H(t)\frac{\sin \omega t}{\omega} \in \mathcal{D}'_+$ , l'équation en question a une solution unique donnée par

$$X = (D\delta)^{-1} * B = H(t)\frac{\sin \omega t}{\omega} * B.$$

Considérons l'équation différentielle

$$\frac{d^m y}{dt^m} + a_1 \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \cdots + a_{m-1} \frac{dy}{dt} + a_m = f(t),$$

où  $f(t)$  est une fonction connue. On veut déterminer la solution  $y(t)$  sur  $[0, +\infty[$  satisfaisant aux conditions initiales suivantes :

$$y(0) = y_0, y'(0) = y'_0, \dots, y^{(m-1)}(0) = y_0^{(m-1)}.$$

L'équation ci-dessus s'écrit  $Dy = f$ , où

$$D = \frac{d^m}{dt^m} + a_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + \cdots + a_{m-1} \frac{d}{dt} + a_m.$$

On pose  $X = Hy$  et on calcule, comme dans la démonstration de la proposition 5.5.3, les dérivées  $X', X'', \dots, X^{(m)}$ . On obtient

$$DX = HDy + \sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta^{(k)},$$

où

$$c_k = y_0^{(m-k-1)} + a_1 y_0^{(m-k-2)} + \cdots + a_{m-k-1} y_0.$$

En posant  $(D\delta)^{-1} = H(t)Z(t)$ , la solution cherchée s'écrit

$$X = HZ * \left( HDy + \sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta^{(k)} \right) = HZ * \left( Hf + \sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta^{(k)} \right),$$

d'où, pour  $t \geq 0$ ,

$$y(t) = HZ * Hf + \sum_{k=0}^{m-1} c_k HZ * \delta^{(k)} = \int_0^t Z(t-x)f(x)dx + \sum_{k=0}^{m-1} c_k Z^{(k)}(t).$$

**Exemple 5.5.7** Soit l'équation :  $Dy = t^2 e^{-2t}$ , où  $D = \frac{d^2}{dt^2} + 4 \frac{d}{dt} + 4$ . Déterminons la solution de cette équation avec

$$y(0) = y_0 = \frac{1}{12}, \quad y'(0) = y'_0 = -\frac{1}{12}.$$

D'après ce qui précède, on a pour  $t \geq 0$ ,

$$y(t) = \int_0^t Z(t-x)f(x)dx + \sum_{k=0}^{m-1} c_k Z^{(k)}(t).$$

Ici  $f(t-x) = (t-x)^2 e^{-2(t-x)}$ ,  $m = 2$ ,  $c_0 = y'_0 + a_1 y_0 = -\frac{1}{12} + 4 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$  et  $c_1 = y_0 = \frac{1}{12}$ . Déterminons  $Z(t)$ . L'équation caractéristique

$$r^2 + 4r + 4 = (r+2)^2,$$

possède une racine double  $r_1 = r_2 = 2$ . D'où

$$\begin{aligned} HZ &= (D\delta)^{-1}, \\ &= H(t)e^{-2t} * H(t)e^{-2t}, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)e^{-2x} H(t-x)e^{-2(t-x)} dx, \\ &= H(t) \int_0^t e^{-2x} dx, \\ &= H(t)te^{-2t}. \end{aligned}$$

et dès lors  $Z(t) = te^{-2t}$ . Donc, pour  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t xe^{-2x} (t-x)^2 e^{-2(t-x)} dx + c_0 Z(t) + c_1 Z'(t), \\ y'(0) &= e^{-2t} \int_0^t (x^3 - 2tx^2 + t^2x) dx + \frac{1}{4}te^{-2t} + \frac{1}{12}e^{-2t}(1-2t), \\ &= (t^4 + t + 1) \frac{e^{-2t}}{12}. \end{aligned}$$

**Remarque 5.5.2** Une autre méthode intitulée calcul symbolique (voir chapitres 7 et 8) permet d'étudier de manière simple ces questions.

## 5.6 Exercices résolus

**Exercice 5.6.1** Calculer au sens des distributions l'expression :

$$\frac{\partial^n H(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n},$$

où  $H(x_1, \dots, x_n) = H(x_1) \otimes \dots \otimes H(x_n)$  est le produit de  $n$  fonctions de Heaviside.

Solution : D'après la proposition 5.1.10, on a

$$\frac{\partial^n H}{\partial x_1 \dots \partial x_n} = \frac{\partial H}{\partial x_1} \otimes \dots \otimes \frac{\partial H}{\partial x_n} = \delta_{x_1} \otimes \dots \otimes \delta_{x_n} = \delta_{(x_1, \dots, x_n)},$$

en vertu de l'exemple 5.1.2.

**Exercice 5.6.2** Dans  $\mathbb{R}$ , on considère la fonction

$$G_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma > 0$$

Cette fonction joue un rôle important aussi bien en théorie des probabilités qu'en analyse statistique. Elle représente la densité normale (ou gaussienne ou encore de Gauss-Laplace). Le nombre  $\sigma > 0$  est l'écart-type. Prouver la relation :

$$G_\sigma * G_\tau = G_{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}.$$

Solution : Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a

$$G_\sigma * G_\tau(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_\sigma(t) G_\tau(x-t) dt = \frac{1}{2\pi\sigma\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{t^2}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\frac{(x-t)^2}{\tau^2}} dt,$$

Un calcul direct montre que

$$\frac{t^2}{\sigma^2} + \frac{(x-t)^2}{\tau^2} = \frac{x^2}{\sigma^2 + \tau^2} + \frac{\sigma^2 + \tau^2}{\sigma^2\tau^2} \left( t - \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \tau^2} x \right)^2,$$

et dès lors

$$G_\sigma * G_\tau(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2(\sigma^2 + \tau^2)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{\sigma^2 + \tau^2}{\sigma^2\tau^2} u^2 - \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \tau^2} x u} dt.$$

Posons  $u = \frac{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}{\sigma\tau} \left( t - \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \tau^2} x \right)$ , d'où

$$G_\sigma * G_\tau(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} e^{-\frac{x^2}{2(\sigma^2 + \tau^2)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Or  $I \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi}$  (en effet, on a

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2+v^2}{2}} du dv.$$

On applique la formule de changement de variables :  $u = r \cos \theta$ ,  $v = r \sin \theta$  et  $r$  le jacobien. On obtient

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr \right) d\theta = 2\pi,$$

d'où  $I = \sqrt{2\pi}$ ). D'où

$$G_\sigma * G_\tau(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} e^{-\frac{x^2}{2(\sigma^2 + \tau^2)}} = G_{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}(x).$$

**Exercice 5.6.3** Soit  $T$  une distribution à support borné.

a) Montrer que  $T * 1$  est une constante.

b) Montrer que  $T * P$  est un polynôme où  $P$  est un polynôme de degré  $n$ .

Solution : Comme  $\text{supp } T$  est borné, alors  $T * 1$  et  $T * P$  existent et d'après la proposition 5.3.10, ce sont des fonctions de classe  $C^\infty$ . Pour a),  $T * 1 = \langle T, 1 \rangle$  est une constante. Pour b), on a

$$T * P(y) = \langle T_x, P(y - x) \rangle = \langle T_x, \sum_{k=0}^n \frac{y^k}{k!} P^{(k)}(-x) \rangle = \sum_{k=0}^n \frac{y^k}{k!} \langle T_x, P^{(k)}(-x) \rangle,$$

d'où le résultat.

**Exercice 5.6.4** Soient  $R$ ,  $T$  et  $S$  des distributions quelconques. Donner un exemple montrant que  $(R * S) * T$  et  $R * (S * T)$  sont bien définis mais non égaux.

Solution : Il suffit de choisir  $R = 1$ ,  $S = \delta'$  et  $T = H$  (distribution d'Heaviside). On a

$$(R * S) * T = (1 * \delta') * H = 1' * H = 0 * H = 0.$$

De même, on a

$$R * (S * T) = 1 * (\delta' * H) = 1 * H' = 1 * \delta = 1.$$

Donc  $(R * S) * T \neq R * (S * T)$ .

**Exercice 5.6.5** Calculer les produits de convolution suivants :

a)  $\delta_a * \delta_b$ .

b)  $\delta^{(m)} * \delta^{(n)}$

Solution : a) Soit  $\varphi \in \mathcal{D}$ , on a

$$\begin{aligned} \langle \delta_a * \delta_b, \varphi \rangle &= \langle \delta_a(x) \otimes \delta_b(y), \varphi(x + y) \rangle, \\ &= \langle \delta_a(x), \langle \delta_b(y), \varphi(x + y) \rangle \rangle, \\ &= \langle \delta_a(x), \varphi(x + y) \rangle, \\ &= \varphi(x + y), \\ &= \langle \delta_{a+b}, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

D'où  $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$ .

b) Soit  $\varphi \in \mathcal{D}$ , on a

$$\begin{aligned}
 \langle \delta^{(m)} * \delta^{(n)}, \varphi \rangle &= \langle \delta_x^{(m)} * \delta_y^{(n)}, \varphi(x+y) \rangle, \\
 &= \langle \delta_x^{(m)}, \langle \delta_y^{(n)}, \varphi(x+y) \rangle \rangle, \\
 &= \langle \delta_x^{(m)}, (-1)^n \langle \delta_y, \varphi^{(n)}(x+y) \rangle \rangle, \\
 &= \langle \delta_x^{(m)}, (-1)^n \varphi^{(n)}(x) \rangle, \\
 &= (-1)^{m+n} \langle \delta_x, \varphi^{(m+n)}(x) \rangle, \\
 &= (-1)^{m+n} \varphi^{(m+n)}(x), \\
 &= \langle \delta^{(m+n)}, \varphi \rangle.
 \end{aligned}$$

D'où  $\delta^{(m)} * \delta^{(n)} = \delta^{(m+n)}$ .

**Exercice 5.6.6** Calculer le produit de convolution :  $H(x) * (x^2 H(x))$ , où  $H(x)$  est la fonction de Heaviside.

Solution : Soit  $\varphi \in \mathcal{D}$ , on a

$$\begin{aligned}
 \langle H(x) * (x^2 H(x)), \varphi \rangle &= \langle H(x) \otimes (y^2 H(y)), \varphi(x+y) \rangle, \\
 &= \langle H(x), \langle y^2 H(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle, \\
 &= \left\langle H(x), \int_0^\infty y^2 \varphi(x+y) dy \right\rangle, \\
 &= \int_0^\infty \int_0^\infty y^2 \varphi(x+y) dy dx, \\
 &= \int_0^\infty \left( \int_0^\infty \varphi(x+y) dx \right) y^2 dy.
 \end{aligned}$$

Posons  $\psi(y) = \int_0^\infty \varphi(x+y) dx$ , d'où

$$\begin{aligned}
 \langle H(x) * (x^2 H(x)), \varphi \rangle &= \int_0^\infty \psi(y) y^2 dy, \\
 &= \frac{y^3}{3} \psi(y) \Big|_0^\infty - \frac{1}{3} \int_0^\infty y^3 \psi'(y) dy, \\
 &= -\frac{1}{3} \int_0^\infty y^3 \psi'(y) dy.
 \end{aligned}$$

Or  $\psi(y) = \int_y^\infty \varphi(u) du$ ,  $u = x+y$ , donc  $\psi'(y) = -\varphi(y)$  et

$$\langle H(x) * (x^2 H(x)), \varphi \rangle = \frac{1}{3} \int_0^\infty y^3 \varphi(y) dy = \frac{1}{3} \int_0^\infty x^3 \varphi(x) dx = \left\langle \frac{x^3}{3} H(x), \varphi \right\rangle.$$

Par conséquent,

$$H(x) * (x^2 H(x)) = \frac{x^3}{3} H(x).$$

Une autre méthode est proposée dans l'exercice 5.6.8.

### **Exercice 5.6.7** Calculer le produit de convolution

$$(H(x) \cos x) * (\delta'(x) + H(x)),$$

où  $H(x)$  est la fonction de Heaviside.

Solution : On a

$$\begin{aligned} & (H(x) \cos x) * (\delta'(x) + H(x)) \\ &= (H(x) \cos x) * \delta'(x) + (H(x) \cos x) * H(x), \\ &= (H(x) \cos x)' + H(x) * (H(x) \cos x), \\ &= H'(x) \cos x - H(x) \sin x + H(x) * (H(x) \cos x), \\ &= \delta \cos x - H(x) \sin x + H(x) * (H(x) \cos x), \\ &= \delta \cos x - H(x) \sin x + H(x) * (H(x) \cos x). \end{aligned}$$

Calculons  $H(x) * (H(x) \cos x)$ . Comme dans l'exercice précédent, on a pour  $\varphi \in \mathcal{D}$ ,

$$\begin{aligned} \langle H(x) * (H(x) \cos x), \varphi \rangle &= \langle H(x) \otimes (H(x) \cos x), \varphi(x+y) \rangle, \\ &= \langle H(x), \langle H(y) \cos y, \varphi(x+y) \rangle \rangle, \\ &= \left\langle H(x), \int_0^\infty \cos y \varphi(x+y) dy \right\rangle, \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \cos y \varphi(x+y) dy dx, \\ &= \int_0^\infty \left( \int_0^\infty \varphi(x+y) dx \right) \cos y dy. \end{aligned}$$

Posons  $\psi(y) = \int_0^\infty \varphi(x+y) dx$ , d'où

$$\begin{aligned} \langle H(x) * (H(x) \cos y), \varphi \rangle &= \int_0^\infty \psi(y) \cos y dy, \\ &= \psi(y) \sin y \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \sin y \psi'(y) dy, \\ &= - \int_0^\infty \sin y \psi'(y) dy. \end{aligned}$$

Or  $\psi(y) = \int_y^\infty \varphi(u)du$ ,  $u = x + y$ , donc  $\psi'(y) = -\varphi(y)$  et dès lors

$$\langle H(x)*(H(x)\cos y), \varphi \rangle = \int_0^\infty \sin y \varphi(y) dy = \int_0^\infty \sin x \varphi(x) dx = \langle \sin x H(x), \varphi \rangle.$$

Donc  $H(x)*(H(x)\cos y) = \sin x H(x)$  et par conséquent

$$(H(x)\cos x) * (\delta'(x) + H(x)) = \delta.$$

**Exercice 5.6.8** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions localement sommables. Montrer que

$$(H(x-a)f(x)) * (H(x-b)g(x)) = H(x-a-b) \int_a^{x-b} f(t)g(x-t) dt,$$

où  $H(x)$  est la fonction de Heaviside. Application : calculer le produit de convolution proposée dans l'exercice 5.6.6.

Solution : Notons que  $\text{supp } H(x-a)$  et  $\text{supp } H(x-b)$  sont inclus respectivement dans  $[a, +\infty[$  et  $[b, +\infty[$ . En outre, on sait d'après l'exercice 1.6.4 que :

$$\text{supp } H(x-a)f(x) \subset \text{supp } H(x-a) \cap \text{supp } f(x),$$

$$\text{supp } H(x-b)g(x) \subset \text{supp } H(x-b) \cap \text{supp } g(x).$$

Donc  $\text{supp } Hf$  et  $\text{supp } Hg$  sont bornés d'un même côté et par conséquent le produit  $Hf * Hg$  existe. On a

$$\begin{aligned} & (H(x-a)f(x)) * (H(x-b)g(x)) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} H(t-a)f(t)H(x-t-b)g(x-t) dt, \\ &= \begin{cases} 0 \text{ si } t < a \text{ ou } t > x-b, c'est -- dire x > a+b \\ \int_a^{x-b} f(t)g(x-t) dt \text{ si } x > a+b \end{cases}, \\ &= H(x-a-b) \int_a^{x-b} f(t)g(x-t) dt. \end{aligned}$$

Application : ici  $a = b = 0$ ,  $f(x) = 1$  et  $g(x) = x^2$ . Les fonctions  $f$  et  $g$  étant sommables, on a d'après ce qui précède

$$H(x) * (x^2 H(x)) = H(x) \int_0^x (x-t)^2 dt = H(x) \frac{x^3}{3}.$$

**Exercice 5.6.9** On considère, dans  $\mathbb{R}^3$ , l'équation suivante :  $\Delta u = -4\pi f$ , où  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  est le laplacien et  $f(x, y, z)$  une fonction donnée. Posons  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  et supposons que  $\text{supp } f$  est borné. Montrer que la fonction  $\frac{1}{r} * f$  est solution de l'équation ci-dessus et déterminer la solution générale de l'équation de convolution :

$$\Delta \delta * u = -4\pi f.$$

Solution : Pour  $f = \delta$ , l'équation proposée s'écrit  $\Delta u = -4\pi\delta$ . Notons que  $\frac{1}{r}$  est solution de cette dernière. En effet, d'après l'exercice 2.4.13, le laplacien de la fonction  $\frac{1}{r}$  où  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  est donné par  $\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta$ . Par hypothèse,  $f$  est à support borné. Dès lors, la fonction  $\frac{1}{r} * f$  est solution de l'équation en question. La solution générale de l'équation :  $\Delta \delta * u = -4\pi f$ , est  $\frac{1}{r} * f + \varphi$ , où  $\varphi$  (appelée fonction harmonique) est une solution de l'équation homogène  $\Delta u = 0$ . En effet, en tenant compte de l'exercice 2.4.13, on obtient

$$\Delta u = \Delta \left( \frac{1}{r} * f + \varphi \right) = \Delta \left( \frac{1}{r} * f \right) + \Delta \varphi = \Delta \left( \frac{1}{r} \right) * f = -4\pi\delta * f = -4\pi f.$$

**Exercice 5.6.10** Calculer les inverses, dans  $\mathcal{D}'_+$ , des distributions suivantes :

- a)  $H$ ,
- b)  $\delta'$ ,
- c)  $\delta' + H$ .

Solution : a) Par définition, l'inverse de  $H$  dans  $\mathcal{D}'_+$  s'obtient en résolvant l'équation :  $H * X = \delta$ . On a  $(H * X)' = \delta'$ , d'où  $H' * X = \delta$ , c'est-à-dire  $\delta * X = \delta'$  et par conséquent,  $X = \delta'$ .

b) Résolvons l'équation :  $\delta' * X = \delta$ . On a  $(\delta * X)' = \delta$ , d'où  $X' = \delta$  et par conséquent,  $X = H$ .

c) Comme précédemment, on cherche  $X$  dans  $\mathcal{D}'_+$  tel que :  $(\delta' + H) * X = \delta$ . On a

$$((\delta' + H) * X)' = \delta',$$

d'où

$$\begin{aligned} (\delta' + H)' * X &= \delta', \\ (\delta'' + \delta) * X &= \delta', \\ X &= (\delta'' + \delta)^{-1} * \delta'. \end{aligned}$$

D'après l'exemple 5.5.4 ou 5.5.6, on sait que :  $(\delta'' + \delta)^{-1} = H(t) \sin t$ , donc  $X = H \sin t * \delta' = (H \sin t * \delta)' = (H \sin t)' = H' \sin t + H \cos t = \delta \sin t + H \cos t$ , et par conséquent  $X = H(t) \cos t$ .

**Exercice 5.6.11** Soit  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ . Considérons l'application

$$x \longmapsto \theta(x) = \langle T_y, \varphi(x, y) \rangle.$$

a) Montrer que la fonction  $\theta(x)$  appartient à l'espace  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$  et ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation sous le signe distribution :

$$D_x^\alpha \theta(x) = \langle T_y, D_x^\alpha \varphi(x, y) \rangle,$$

où  $D_x^\alpha$  désigne une dérivation d'ordre  $\alpha$  en  $x$ .

b) Montrer que si  $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)} \varphi$ , alors  $\theta_k \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)} \theta$  où  $\theta_k(x) \equiv \langle T_y, \varphi_k(x, y) \rangle$ .

*Solution* : a) Soit  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ . Notons tout d'abord que la fonction  $\theta(x)$  est bien définie. En effet, comme  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$  alors  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^m$  car  $\varphi \in C^\infty$  par rapport à  $y$  et en outre  $\text{supp } \varphi$  est borné. Donc  $\theta(x)$  existe pour tout  $x$ . Dans la suite, on peut sans restreindre la généralité, supposer que  $m = n = 1$ . Désignons par  $\Omega_1$  (resp.  $\Omega_2$ ), la projection de  $\text{supp } \varphi$  sur l'axe des  $x$  (resp.  $y$ ). Montrons que le support de  $\theta$  est borné. En effet, si  $x \notin \Omega_1$ , alors  $(x, y) \notin \text{supp } \varphi$ , d'où  $\varphi(x, y) = 0$  pour tout  $y$  et dès lors  $\text{supp } \theta \subset \Omega_1$ . Montrons que la fonction  $\theta$  est continue partout. En effet, pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}$ , on a

$$\theta(x) - \theta(x_0) = \langle T_y, \varphi(x, y) - \varphi(x_0, y) \rangle.$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_2)$ . Dès lors,  $\varphi(x, y)$  et  $D_y^\alpha \varphi(x, y)$  sont uniformément continues. Donc lorsque  $x \rightarrow x_0$ ,  $\varphi(x, y)$  et  $D_y^\alpha \varphi(x, y)$  tendent uniformément en  $y$  dans  $\Omega_2$  vers  $\varphi(x_0, y)$  et  $D_y^\alpha \varphi(x_0, y)$  respectivement. Par conséquent, lorsque  $x \rightarrow x_0$ ,  $\varphi(x, y) \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega_2)} \varphi(x_0, y)$  et

$$\langle T_y, \varphi(x, y) - \varphi(x_0, y) \rangle \rightarrow 0,$$

c'est-à-dire  $\theta(x) \rightarrow \theta(x_0)$ . Montrons que  $\theta'(x) = \langle T_y, D_x \varphi(x, y) \rangle$ . En effet, soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ . On a

$$\frac{\theta(x_0 + h) - \theta(x_0)}{h} = \langle T_y, \psi_h(y) \rangle,$$

où

$$\psi_h(y) = \frac{\varphi(x_0 + h, y) - \varphi(x_0, y)}{h} = D_x \varphi(x_0, y) + \frac{h}{2} D'_x \varphi(x_0 + \theta h, y),$$

avec  $0 < \theta < 1$ . Lorsque  $h \rightarrow 0$ ,  $\psi_h(y)$  tend uniformément vers  $D_x \varphi(x_0, y)$ . Et pour tout  $h$ ,  $\psi_h(y) - D_x \varphi(x_0, y) \in \mathcal{D}(\Omega_2)$ . De même, pour tout multi-indice  $\alpha$ , lorsque  $h \rightarrow 0$ ,  $D_y^\alpha \psi_h(y)$  tend uniformément vers  $D_x(D_y^\alpha \varphi)(x_0, y)$  dans  $\Omega_2$ .

b) Par hypothèse  $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)} \varphi$ , donc il existe un compact  $K$  tel que, pour tout  $k$ ,  $\text{supp } \varphi \subset K$  et  $\text{supp } \varphi_k \subset K$ . Dès lors,  $\text{supp } \theta \subset \Omega_1$  et  $\text{supp } \theta_k \subset \Omega_1$ . Pour tout multi-indice  $\alpha$  et tout multi-indice  $\beta$ ,  $D_y^\alpha D_x^\beta \varphi_k(x, y)$  tend uniformément vers  $D_y^\alpha D_x^\beta \varphi(x, y)$  dans  $\text{supp } \varphi$  et donc

$$D_x^\beta \varphi_k(x, y) \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega_2)} D_x^\beta \varphi(x, y).$$

Il s'ensuit que l'expression  $D_x^\beta \theta_k(x) = \langle T_y, D_x^\beta \varphi_k(x, y) \rangle$ , tend uniformément vers  $\langle T_y, D_x^\beta \varphi(x, y) \rangle = D_x^\beta \theta(x)$ , dans  $\Omega_1$  et par conséquent  $\theta_k(x, y) \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)} \theta$ .

**Exercice 5.6.12** *Démontrer que :  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ .*

Solution : Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ . D'après le théorème d'approximation de Weierstrass, il existe une suite de polynômes  $(P_k(x, y))$  telle que, pour tout multi-indice  $\alpha$ , la suite  $(D^\alpha P_k(x, y))$  converge uniformément sur tout compact, vers  $D^\alpha \varphi(x, y)$ . Il ne s'agit pas de la convergence dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ . Dès lors, au lieu de  $P_k(x, y)$ , on considère la suite définie par

$$f_k(x, y) = \psi_1(x) \psi_2(y) P_k(x, y),$$

où  $\psi_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ ,  $\psi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  avec  $\psi_1 = 1$  et  $\psi_2 = 1$  sur le support de  $\varphi$ . Plus précisément,  $\psi_1 = 1$  sur la première projection du support de  $\varphi$  tandis que  $\psi_2 = 1$  dans le voisinage de la seconde projection du support de  $\varphi$ . On a  $f_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  et chacune des suites  $D^\alpha f_k(x, y)$  tend uniformément vers

$$D^\alpha (\psi_1 \psi_2 \varphi)(x, y) = (\psi_1 \psi_2 D^\alpha \varphi)(x, y).$$

**Exercice 5.6.13** *Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Le potentiel électrique  $V(x, y, z)$  produit par une distribution de charge  $\rho(x, y, z)$  est donné par  $V = \rho * \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}$ , où  $r$  est la distance des charges électriques et  $\varepsilon_0$  est la permittivité du vide. Montrer que :*

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (\text{équation de Laplace})$$

où  $\Delta V$  est le laplacien de  $V$ .

Solution : On a

$$\Delta V = \Delta \left( \rho * \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r} \right) = \rho * \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \Delta \left( \frac{1}{r} \right).$$

Au sens des distributions, on a  $\Delta \left( \frac{1}{r} \right) = -4\pi\delta$  (voir exercice 2.4.13). Par conséquent,  $\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ .

**Exercice 5.6.14** On rappelle que la fonction gamma d'Euler  $\Gamma(x)$ , est définie par l'intégrale

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0$$

et la fonction bêta d'Euler par

$$B(p, q) == \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \quad p > 0, q > 0$$

a) Etablir la formule :  $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ .

b) Calculer l'expression :

$$H(x) \frac{x^{p-1}}{\Gamma(p)} e^{\alpha x} * H(x) \frac{x^{q-1}}{\Gamma(q)} e^{\alpha x},$$

( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ ) où  $H(x)$  est la fonction de Heaviside.

Solution : a) Pour  $p > 0$  et  $q > 0$ , on a

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)} u^{2p-1} v^{2q-1} du dv, \\ &= 4 \int_0^\infty \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1} \sin^{2q-1} \theta d\theta \right) e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} dr, \end{aligned}$$

avec  $u = r \cos \theta$  et  $v = r \sin \theta$ . Comme

$$B(p, q) = B(q, p) = \int_0^1 x^{q-1} (1-x)^{p-1} dx = 2 \int_0^{\frac{p}{2}} \sin^{2q-1} \theta \cos^{2p-1} \theta d\theta,$$

où  $x = \sin^2 \theta$  et

$$\Gamma(p+q) = \int_0^\infty e^{-t} t^{p+q-1} dt = 2 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{p+q-1} dr, \quad t = r^2$$

alors

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = B(p, q)\Gamma(p+q).$$

b) D'après l'exercice 5.6.8, on a pour  $x > 0$ ,

$$\begin{aligned}
 & \left( H(x) \frac{x^{p-1}}{\Gamma(p)} e^{\alpha x} \right) * \left( H(x) \frac{x^{q-1}}{\Gamma(q)} e^{\alpha x} \right) \\
 &= H(x) \int_0^x \frac{t^{p-1}}{\Gamma(p)} e^{\alpha x} \frac{(x-t)^{q-1}}{\Gamma(q)} e^{\alpha(x-t)} dt, \\
 &= H(x) \frac{e^{\alpha x}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^x t^{p-1} (x-t)^{q-1} dt, \\
 &= H(x) \frac{e^{\alpha x}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} x^{p+q-1} \int_0^1 u^{p-1} (1-u)^{q-1} du, \quad u = \frac{t}{x} \\
 &= H(x) \frac{e^{\alpha x}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} x^{p+q-1} B(p, q), \\
 &= H(x) \frac{e^{\alpha x}}{\Gamma(p+q)} x^{p+q-1},
 \end{aligned}$$

en vertu de la question a).

## 5.7 Exercices proposés

**Exercice 5.7.1** Soit  $f$  la fonction numérique définie dans  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in ]-1, 1[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Calculer les produits de convolution  $f * f$  et  $f' * f'$  où  $f'$  désigne la dérivée de  $f(x)$  au sens des distributions.

b) Trouver une relation entre  $f' * f'$  et  $f * f$ .

**Exercice 5.7.2** Dans  $\mathbb{R}$ , on considère la fonction (de Cauchy),

$$F_a(x) = \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)}, \quad a > 0$$

Déterminer  $F_a * F_b$ .

Réponse :  $F_a * F_b = F_{a+b}$ .

**Exercice 5.7.3** Calculer les produits de convolution suivants :

a)

$$e^{-|x|} * e^{-|x|}.$$

b)

$$H(x)e^x * H(x)\sinh 2x,$$

où  $H(x)$  est la fonction de Heaviside.

**Exercice 5.7.4** Calculer les produits de convolution suivants :

a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n * \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n.$$

b)

$$H(x)e^{\alpha x} * H(x)e^{\beta x},$$

où  $H(x)$  est la fonction de Heaviside et  $\alpha \neq \beta$ .

Réponse : a)  $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\delta_n$ , b)  $H(x) \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\alpha - \beta}$ .

**Exercice 5.7.5** Calculer les inverses dans  $\mathcal{D}'_+$  des distributions suivantes :

a)  $\delta + 2\delta' + 4\delta'' + 8\delta'''$ .

b)  $\delta + 4H(t) \cos 2t$  où  $H(t)$  est la fonction de Heaviside.

Réponse : a)  $\frac{1}{4}(e^{-\frac{t}{2}} - \cos \frac{t}{2} + \sin \frac{t}{2})H(t)$ , b)  $\delta + 4H(x)(2t-1)e^{-2t}$ .

**Exercice 5.7.6** Résoudre dans  $\mathcal{D}'_+$  l'équation suivante :

$$DT = 2\delta', \quad T \in \mathcal{D}'_+$$

où  $D = \frac{d^3}{dt^3} - 2\frac{d^2}{dt^2} + \frac{d}{dt} - 2$ .

Réponse :  $T = \frac{2}{5}(2e^{2t} - 2\cos t + \sin t)H(t)$ .

**Exercice 5.7.7** Soient  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  et  $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ . Montrer que  $f * g$  existe,  $f * g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  et

$$\|f * g\|_2 \leq \|f\|_1 \|g\|_2.$$



# Deuxième partie

# ANALYSE DE FOURIER



# Chapitre 6

## Séries de Fourier

### Introduction

On expose dans ce chapitre les concepts théoriques et pratiques des séries de Fourier. Comme nous l'avons évoqué dans l'introduction de cet ouvrage, l'étude des séries de Fourier fut capitale dans l'histoire des mathématiques : elle obligea les mathématiciens à formaliser des notions telles que la continuité, la dérivabilité et la convergence selon divers modes et elle est à la base de plusieurs théories fondamentales. L'exposé s'ouvre par une introduction à la théorie des séries trigonométriques et aborde ensuite l'étude des séries de Fourier proprement dites. On démontre le théorème de Dirichlet donnant des conditions suffisantes pour qu'une fonction soit représentable par une série de Fourier. On aborde aussi quelques notions liées à la convergence en moyenne quadratique, l'égalité de Parseval et l'inégalité de Bessel. On étudie en détail d'autres résultats intéressants sous formes de théorèmes ou d'exercices liés à la question du développement d'une fonction en série de Fourier. On aborde en particulier la convergence des séries de Fourier au sens de Cesaro ainsi que les théorèmes de Fejér, de Jordan et d'approximation de Weierstrass. La série de Fourier d'une distribution périodique quelconque converge toujours vers cette distribution. Le reste du chapitre comporte de nombreux exercices résolus ainsi que des exercices proposés avec éventuellement des réponses ou des indications. Citons à titre d'exemple, une condition de Dini sur la convergence, les problèmes de dérivation et d'intégration, le curieux phénomène de Gibbs qui concerne l'étude du développement en série de Fourier au voisinage d'un point de discontinuité, les polynômes de Bernoulli, la projection orthogonale, l'équation de la chaleur et celle de la corde vibrante, le filtre RC, l'inégalité isopérimétrique, etc.

## 6.1 Séries trigonométriques

**Définition 6.1.1** *On appelle série trigonométrique, une série de la forme*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad x \in \mathbb{R} \quad (6.1.1)$$

où les  $a_k$  et  $b_k$  sont des nombres réels ou complexes.

**Remarque 6.1.1** *En fait une série trigonométrique s'écrit sous la forme*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad x \in \mathbb{R}$$

*Mais comme  $\sin 0 = 0$ , on peut sans restreindre la généralité, poser  $b_0 = 0$ . En outre, nous avons désigné par  $\frac{a_0}{2}$  le terme d'indice 0 (contrairement à ce qui a été fait dans l'exercice 6.6.24). Ceci provient du fait que  $a_0$  est choisi de façon à se calculer par la même formule (voir plus loin) que les autres  $a_k$ .*

**Proposition 6.1.2** *Si les séries numériques  $\sum a_k$  et  $\sum b_k$  convergent absolument, alors la série trigonométrique (6.1.1) converge normalement dans  $\mathbb{R}$ . En outre, sa somme est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ .*

*Démonstration :* Notons que

$$|a_k \cos kx + b_k \sin kx| \leq |a_k| + |b_k| \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Par hypothèse, les séries numériques  $\sum |a_k|$  et  $\sum |b_k|$  convergent, donc la série  $\sum (|a_k| + |b_k|)$  converge aussi et d'après le critère de Weierstrass la série (6.1.1) converge normalement dans  $\mathbb{R}$ . En outre, comme  $a_k \cos kx + b_k \sin kx$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , on déduit du théorème de continuité que la somme de la série (6.1.1) est continue sur  $\mathbb{R}$  et la démonstration s'achève.  $\square$

**Exemple 6.1.1** *Les deux séries  $\sum \frac{\cos kx}{k^2}$  et  $\sum \frac{\sin kx}{k^2}$ , convergent normalement sur  $\mathbb{R}$ .*

**Proposition 6.1.3** *Si  $(a_k)$  et  $(b_k)$  sont des suites réelles positives, décroissantes et tendant vers zéro, alors la série trigonométrique (6.1.1) converge simplement pour tout  $x \neq 2l\pi$ ,  $l \in \mathbb{Z}$  et uniformément sur tout intervalle de la forme  $[\alpha, 2\pi - \alpha]$  pour tout  $l \in \mathbb{Z}$  et  $\alpha \in ]0, \pi[$ . En outre, sa somme est une fonction continue sur  $]2l\pi, 2(l+1)\pi[$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ .*

*Démonstration :* En effet, on a

$$\sum_{k=0}^n (\cos kx + i \sin kx) = \sum_{k=0}^n e^{ikx} = \frac{1 - \cos(k+1)x - i \sin(k+1)x}{1 - \cos x - i \sin x}.$$

En utilisant les formules élémentaires suivantes :

$$\begin{aligned} 1 - \cos x &= 2 \sin^2 \frac{x}{2}, & 1 - \cos(k+1)x &= 2 \sin^2 \frac{(k+1)x}{2}, \\ \sin x &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}, & \sin(k+1)x &= 2 \sin \frac{(k+1)x}{2} \cos \frac{(k+1)x}{2}, \end{aligned}$$

on obtient immédiatement

$$\sum_{k=0}^n (\cos kx + i \sin kx) = \frac{\sin \frac{(k+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{e^{\frac{i(k+1)x}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}}} = \frac{\sin \frac{(k+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \left( \cos \frac{kx}{2} + i \sin \frac{kx}{2} \right).$$

Dès lors,

$$\sum_{k=0}^n \cos kx = \frac{\sin \frac{(k+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cos \frac{kx}{2}, \quad \sum_{k=0}^n \sin kx = \frac{\sin \frac{(k+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{kx}{2}.$$

On en déduit les inégalités

$$\left| \sum_{k=0}^n \cos kx \right| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|}, \quad \left| \sum_{k=0}^n \sin kx \right| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|},$$

ce qui montre que les deux sommes sont majorées pour  $x \neq 2l\pi$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ . Par hypothèse  $(a_k)$  et  $(b_k)$  sont deux suites réelles positives, décroissantes et de limite nulle. D'après le critère d'Abel-Dirichlet, les séries  $\sum a_k \cos kx$  et  $\sum b_k \sin kx$  convergent simplement pour tout  $x \neq 2l\pi$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ . Pour ceux qui ne veulent pas se contenter de vérifier les hypothèses du critère d'Abel-Dirichlet et d'en déduire le résultat, nous allons voir comment on peut le redémontrer en détail pour ces séries particulières. Posons  $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \sin kx$ . On va effectuer une transformation d'Abel,

$$\begin{aligned} \sum_{k=m+1}^n b_k \sin kx &= b_{m+1} \sin(m+1)x + b_{m+2} \sin(m+2)x + \cdots + b_n \sin nx, \\ &= b_{m+1}(S_{m+1} - S_m) + b_{m+2}(S_{m+2} - S_{m+1}) \\ &\quad + \cdots + b_n(S_n - S_{n-1}), \\ &= -b_{m+1}S_m + (b_{m+1} - b_{m+2})S_{m+1} + (b_{m+2} - b_{m+3})S_{m+2} \\ &\quad + \cdots + (b_{n-1} - b_n)S_{n-1} + b_nS_n, \\ &= b_nS_n - b_{m+1}S_m + \sum_{k=m+1}^n (b_k - b_{k+1})S_k, \end{aligned}$$

quels que soient  $m, n$  dans  $\mathbb{N}^*$  avec  $m < n$ . Par hypothèse  $(b_k)$  est positive et décroissante. Par ailleurs, on a montré ci-dessus que  $|S_n| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|}$ , d'où

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=m+1}^n b_k \sin kx \right| &\leq b_n |S_n| - b_{m+1} |S_m| + \sum_{k=m+1}^n (b_k - b_{k+1}) |S_k|, \\ &\leq \frac{2b_{m+1}}{|\sin \frac{x}{2}|}, \quad x \neq 2l\pi, l \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$ , alors il existe  $N$  tel que :  $\frac{2b_N}{|\sin \frac{x}{2}|} \leq \varepsilon$ . Dès lors, pour  $m, n$  avec  $N \leq m < n$ , on a

$$\left| \sum_{k=m+1}^n b_k \sin kx \right| \leq \frac{2b_N}{|\sin \frac{x}{2}|} \leq \varepsilon,$$

et la série  $\sum b_k \sin kx$  converge simplement pour tout  $x \neq 2l\pi, l \in \mathbb{Z}$ , en vertu du critère de Cauchy. Pour  $x = 2l\pi, l \in \mathbb{Z}$ , cette série est nulle et par conséquent elle converge simplement sur  $\mathbb{R}$ . On montre de même que la série  $\sum a_k \cos kx$  converge simplement pour tout  $x \neq 2l\pi, l \in \mathbb{Z}$ . Par conséquent, la série (6.1.1) converge simplement pour tout  $x \neq 2l\pi, l \in \mathbb{Z}$ . Par ailleurs, si  $\alpha \in ]0, \pi[$  alors pour tout  $x \in [\alpha, 2\pi - \alpha]$ , on a  $\sin \frac{x}{2} \geq \sin \frac{\alpha}{2} > 0$  et dès lors

$$\left| \sum_{k=m+1}^n b_k \sin kx \right| \leq \frac{2b_{m+1}}{|\sin \frac{x}{2}|} \leq \frac{2b_{m+1}}{|\sin \frac{\alpha}{2}|} \leq \varepsilon.$$

Comme ci-dessus, il existe  $N$  tel que :  $\frac{2b_N}{|\sin \frac{\alpha}{2}|} \leq \varepsilon$  et on a pour  $m, n$  vérifiant  $N \leq m < n$ ,

$$\left| \sum_{k=m+1}^n b_k \sin kx \right| \leq \varepsilon,$$

d'où la convergence uniforme de la série  $\sum b_k \sin kx$  sur  $[\alpha, 2\pi - \alpha]$  d'après le critère de Cauchy. On obtient la même conclusion pour la série  $\sum a_k \cos kx$  sauf pour  $k = 0$  où sa nature dépend de celle de la série numérique  $\sum a_k$ . La conclusion concernant la série (6.1.1) en découle. On notera que  $]0, 2\pi[$  est inclus dans l'intervalle  $[\alpha, 2\pi - \alpha]$ ,  $\alpha \in ]0, \pi[$  et que la somme de la série (6.1.1) est continue sur  $]2l\pi, 2(l+1)\pi[, l \in \mathbb{Z}$ . La démonstration est complète.  $\square$

**Exemple 6.1.2** Les séries  $\sum \frac{\cos kx}{k}$ ,  $\sum \frac{\sin kx}{k}$  convergent pour tout  $x \neq 2l\pi, l \in \mathbb{Z}$  et leur sommes sont des fonctions continues en tout point  $x \neq 2l\pi, l \in \mathbb{Z}$ .

**Propriété 6.1.4** Si la série trigonométrique (6.1.1) converge vers  $f(x)$  sur  $[-\pi, \pi]$ , alors  $f(x)$  est  $2\pi$ -périodique, c'est-à-dire  $f(x + 2\pi) = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Pour plus de précisions concernant la propriété ci-dessus, supposons que la série (6.1.1) converge en un point  $x \in \mathbb{R}$  vers  $f(x)$  ;

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Pour tout  $l \in \mathbb{Z}$ , on a  $\cos(k(x+2l\pi)) = \cos kx$ ,  $\sin(k(x+2l\pi)) = \sin kx$ , donc la série (6.1.1) converge en tout point  $x + 2l\pi$ ,  $l \in \mathbb{Z}$  et  $f(x) = f(x + 2l\pi)$ , c'est-à-dire  $f$  est une fonction périodique. Par conséquent, l'étude des fonctions  $2\pi$ -périodiques sur  $\mathbb{R}$ , peut se faire tout d'abord sur  $[-\pi, \pi]$  (ou sur  $[0, 2\pi]$ ) que l'on prolongera ensuite sur  $\mathbb{R}$  via la relation  $f(x) = f(x + 2l\pi)$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ ,  $x \in ]-\pi, \pi[$ . Notons que si  $f(-\pi) = f(\pi)$ , alors on posera  $f(\pi) = f(\pi + 2l\pi)$ . Mais cette dernière égalité n'est plus valable si  $f(-\pi) \neq f(\pi)$  et il suffit dans ce cas de donner une valeur quelconque à  $f$  tout en sachant que ce choix ne modifie pas la série (6.1.1).

**Propriété 6.1.5** Soit  $f$  une fonction définie, intégrable sur  $[-\pi, \pi]$  et développable en série trigonométrique

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Si cette série est intégrable terme à terme, ce développement est unique (ceci est vérifié par exemple lorsque la série converge uniformément sur  $[-\pi, \pi]$ ).

*Démonstration :* En effet, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \\ f(x) \cos lx &= \frac{a_0}{2} \cos lx + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx \cos lx + b_k \sin kx \cos lx), \\ f(x) \sin lx &= \frac{a_0}{2} \sin lx + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx \sin lx + b_k \sin kx \sin lx). \end{aligned}$$

Par hypothèse, on peut intégrer ces expressions terme à terme. Donc

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx \right).$$

De même, on a

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos lx dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos lx dx \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos lx dx \right). \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(k+l)x + \cos(k-l)x) dx, \\ &= \frac{1}{2} \begin{cases} \left[ \frac{\sin(k+l)x}{k+l} + \frac{\sin(k-l)x}{k-l} \right]_{-\pi}^{\pi} & \text{si } k \neq l \\ \left[ \frac{\sin(k+l)x}{k+l} + x \right]_{-\pi}^{\pi} & \text{si } k = l \end{cases}, \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq l \\ \pi & \text{si } k = l \end{cases}, \end{aligned}$$

et  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos lx dx = 0$ , alors  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos lx dx = a_l \pi$  d'où

$$a_l = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos lx dx.$$

On obtient de façon analogue,

$$b_l = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin lx dx,$$

ce qui achève la démonstration.  $\square$

Série trigonométrique associée à une série entière : Soit

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

une série entière de rayon de convergence  $r > 0$ . Posons

$$z = \rho e^{ix} = \rho(\cos x + i \sin x), \quad 0 < \rho < r, \quad x \in \mathbb{R}.$$

On a  $z^k = \rho^k (\cos kx + i \sin kx)$  et par conséquent

$$f(\rho e^{ix}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^k e^{ikx} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^k (\cos kx + i \sin kx).$$

Cette série converge normalement sur  $\mathbb{R}$  en vertu du critère de Weierstrass puisque  $|a_k \rho^k (\cos kx + i \sin kx)| \leq |a_k| \rho^k$  et  $\sum |a_k| \rho^k$  converge car d'après le critère de la racine de Cauchy, on a

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k| \rho^k} = \rho \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{\rho}{r} < 1.$$

Si la fonction  $f$  est à valeurs réelles,  $a_k$  et  $b_k$  sont nécessairement réels. On a

$$\operatorname{Re} f(\rho e^{ikx}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^k \cos kx, \quad \operatorname{Im} f(\rho e^{ikx}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^k \sin kx.$$

## 6.2 Séries de Fourier, Théorème de Dirichlet

**Définition 6.2.1** Soit  $f$  une fonction définie et intégrable sur l'intervalle  $[-\pi, \pi]$ . Les nombres  $a_k$  et  $b_k$  définis par

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad k \geq 0, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, \quad k \geq 1, \end{aligned} \tag{6.2.1}$$

s'appellent coefficients de Fourier de  $f$  et la série trigonométrique

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{6.2.2}$$

est dite série de Fourier de  $f$ .

**Remarque 6.2.1** On écrit

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

pour dire que la série (6.2.2) est la série de Fourier associée à la fonction  $f$ . Le fait que les intégrales (6.2.1) existent, n'impliquent pas que la série (6.2.2) converge et, même si elle converge, sa somme n'est pas nécessairement égale à la fonction  $f(x)$ .

**Remarque 6.2.2** Au lieu de considérer l'intervalle  $[-\pi, \pi]$ , on peut considérer tout autre intervalle d'amplitude  $2\pi$ , par exemple  $[0, 2\pi]$ .

**Propriété 6.2.2** Pour une fonction  $f$ ,  $2L$ -périodique, définie et intégrable sur un intervalle  $[-L, L]$  d'amplitude quelconque finie, la série de Fourier associée à la fonction  $f$  est donnée par

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right),$$

où

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx, \quad k \geq 0 \\ b_k &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx, \quad k \geq 1 \end{aligned} \tag{6.2.3}$$

*Démonstration :* En effet, on a  $-L \leq x \leq L$  d'où  $-\pi \leq \frac{\pi x}{L} \leq \pi$ , ce qui suggère le changement de variable suivant :  $t = \frac{\pi x}{L}$ , c'est-à-dire  $x = \frac{Lt}{\pi}$ . Posons

$$f(x) = f\left(\frac{Lt}{\pi}\right) \equiv g(t).$$

La fonction  $g$  étant  $2\pi$ -périodique, sa série de Fourier s'écrit

$$g(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

où

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos kt dt, \quad k \geq 0, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin kt dt, \quad k \geq 1. \end{aligned} \tag{6.2.4}$$

Dès lors,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right),$$

où

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos kt dt = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx, \quad k \geq 0 \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin kt dt = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx, \quad k \geq 1 \end{aligned} \tag{6.2.5}$$

ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Remarque 6.2.3** Soit  $f$  une fonction  $2L$ -périodique, définie et intégrable sur un intervalle  $[-L, L]$ . Au lieu de développer  $f(x)$  en série de Fourier sur  $[-L, L]$ , on peut la développer, moyannant le changement de variable  $t = \frac{\pi x}{L}$ , sur l'intervalle  $[-\pi, \pi]$ .

**Propriété 6.2.3** Pour une fonction  $f$ ,  $2L$ -périodique, définie et intégrable sur un intervalle  $[\alpha, \alpha + 2L]$  où  $\alpha$  est une constante arbitraire, on a

$$\int_{-L}^L f(x)dx = \int_{\alpha}^{\alpha+2L} f(x)dx.$$

*Démonstration :* En effet, on a

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2L} f(x)dx = \int_{\alpha}^{-L} f(x)dx + \int_{-L}^L f(x)dx + \int_L^{\alpha+2L} f(x)dx.$$

Or

$$\begin{aligned} \int_L^{\alpha+2L} f(x)dx &= \int_{-L}^{\alpha} f(t + 2L)dt, \quad t = x - 2L, \\ &= - \int_{\alpha}^{-L} f(t)dt \text{ car } f \text{ est } 2L\text{-périodique,} \\ &= - \int_{\alpha}^{-L} f(x)dx, \end{aligned}$$

d'où le résultat.  $\square$

D'après la propriété précédente, on peut donc remplacer l'intervalle  $[-L, L]$  par  $[\alpha, \alpha + 2L]$  et les coefficients de Fourier deviennent :

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{L} \int_{\alpha}^{\alpha+2L} f(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx, \quad k \geq 0 \\ b_k &= \frac{1}{L} \int_{\alpha}^{\alpha+2L} f(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx, \quad k \geq 1 \end{aligned} \tag{6.2.6}$$

**Propriété 6.2.4** Si  $f$  est paire, alors

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos kx dx, \quad b_k = 0,$$

et

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx. \quad (\text{série cosinus}).$$

*Si  $f$  est impaire, alors*

$$a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin kx dx,$$

et

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx. \quad (\text{série sinus}).$$

*Démonstration :* En effet, la preuve résulte immédiatement du fait que si  $f$  est paire (resp. impaire), alors  $f(x) \cos kx$  est paire (resp. impaire) et  $f(x) \sin kx$  est impaire (resp. paire).  $\square$

**Remarque 6.2.4** Soit  $f$  une fonction  $2L$ -périodique, définie sur l'intervalle  $[0, L]$ . On peut lui faire correspondre soit une fonction paire, soit une fonction impaire, définie sur  $[-L, L]$ . On procède comme suit : On prolonge  $f(x)$  sur  $[-L, 0]$  de telle façon qu'on ait pour  $x \in [-L, 0]$ ,  $f(x) = f(-x)$  ou  $f(x) = -f(-x)$ . Dans le premier cas, la fonction  $f$  sera paire sur  $[-L, L]$ , d'où  $a_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos kx dx$  et  $b_k = 0$ . Dans le second cas,  $f$  sera impaire sur  $[-L, L]$ , d'où  $a_k = 0$  et  $b_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin kx dx$ .

**Exemple 6.2.1** Considérons sur  $[-\pi, \pi]$ , la fonction  $f(x) = x$ . Cette fonction étant impaire, on a

$$a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin kx dx = 2 \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Par conséquent, la série de Fourier associée à  $f$  est

$$f(x) \sim 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

**Exemple 6.2.2** Considérons sur  $[-\pi, \pi]$ , la fonction  $f(x) = x^2$ . Cette fonction étant paire, on a

$$b_k = 0, \quad a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

et

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos kx dx = 4 \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

D'où,

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos kx, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

**Proposition 6.2.5** En notation complexe, la série de Fourier d'une fonction  $2\pi$ -périodique  $f$  s'écrit sous la forme

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$

où

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

*Démonstration :* En effet, on a

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \left( \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} \right) + b_k \left( \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \right) \right), \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \left( \frac{a_k - ib_k}{2} \right) e^{ikx} + \left( \frac{a_k + ib_k}{2i} \right) e^{-ikx} \right). \end{aligned}$$

On pose  $c_0 = \frac{a_0}{2}$ ,  $c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$ ,  $c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2i}$ . D'où

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}), \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Exprimons  $c_k$  et  $c_{-k}$  au moyen d'intégrales. On a

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2} (a_k - ib_k), \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx - \frac{i}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \right), \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos kx - \sin kx) dx, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \end{aligned}$$

De même, on obtient

$$c_{-k} = \frac{1}{2} (a_k + ib_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ikx} dx.$$

Finalement,

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbb{Z},$$

ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Remarque 6.2.5** On déduit de ce qui précède que si  $f$  est  $2L$ -périodique, sa série de Fourier s'écrit en notation complexe sous la forme

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i \frac{k\pi}{L} x},$$

où

$$c_k = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i \frac{k\pi}{L} x} dx, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**Exemple 6.2.3** Soit  $f$  la fonction  $2\pi$ -périodique, définie sur  $]-\pi, \pi[$  par  $f(x) = e^x$ ,  $-\pi < x < \pi$ . La valeur de  $f$  pour  $x = \pi$  est arbitraire. On a

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x dx = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi} = \frac{\sinh \pi}{\pi},$$

et

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-ikx} dx = \frac{\sinh \pi}{\pi} \cdot \frac{(-1)^k}{1 - ik}.$$

Or  $c_0 = \frac{a_0}{2}$ ,  $c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$ ,  $c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}$ , d'où

$$\begin{aligned} a_0 &= 2c_0 = 2 \frac{\sinh \pi}{\pi}, \\ a_k &= c_k + c_{-k} = 2 \frac{\sinh \pi}{\pi} \cdot \frac{(-1)^k}{1 + k^2}, \\ b_k &= i(c_k - c_{-k}) = -2 \frac{\sinh \pi}{\pi} \cdot \frac{(-1)^k k}{1 + k^2}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$f(x) \sim \frac{\sinh \pi}{\pi} + 2 \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1 + k^2} (\cos kx - k \sin kx).$$

Plusieurs questions se posent : La série de Fourier associée à une fonction  $f$  est-elle convergente ? En cas de convergence, peut-on dire que la somme de cette série coïncide avec  $f$  et de quel type est la convergence ? Tout d'abord, on déduit de ce qui précède que si la série de Fourier associée à une fonction

continue converge uniformément, alors elle converge vers cette fonction. Pour une fonction  $f$  localement sommable, sa série de Fourier existe et ses coefficients de Fourier tendent vers zéro quand  $k \rightarrow \infty$  mais le problème qui se pose : cette série converge-t-elle ? et sa somme est-t-elle égale à  $f(x)$  ? Après un rappel sur les fonctions réglées et une nouvelle notion de dérivée à droite et à gauche adaptée à l'étude des séries de Fourier, on aborde le théorème de Dirichlet donnant des conditions suffisantes pour qu'une fonction soit représentable par une série de Fourier. D'autres questions et réponses seront évoquées plus loin.

**Proposition 6.2.6** *Si la série de Fourier associée à une fonction continue  $f$  converge uniformément, alors elle converge vers  $f$ .*

*Démonstration :* La preuve de cette proposition résulte immédiatement de la propriété 6.1.5.  $\square$

Soient  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou  $\mathbb{C}$ ) et  $x \in [a, b]$ . Nous noterons  $f(x+0)$  et  $f(x-0)$  les limites à droite et à gauche de  $f$  en  $x$ , c'est-à-dire

$$f(x+0) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} f(x+h), \quad f(x-0) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} f(x-h).$$

Aux extrémités  $a$  et  $b$ , la limite n'est définie que d'un côté.

On dit que la fonction  $f$  possède une discontinuité de première espèce au point  $x \in [a, b]$  si  $f$  n'est pas continue en  $x$  et si les limites  $f(x+0)$  et  $f(x-0)$  existent et sont distinctes.

**Définition 6.2.7** *Une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $[a, b]$ , est dite réglée si elle admet une limite à droite en tout point de  $[a, b[$  et une limite à gauche en tout point de  $]a, b]$ .*

Les points de discontinuité des fonctions réglées sont toujours de première espèce. On montre aisément que toute fonction réglée est bornée et intégrable au sens de Riemann.

#### Exemples importants de fonctions réglées :

1) Toute fonction continue est réglée.

2) Toute fonction continue par morceaux est réglée. Une fonction  $f$  est dite continue par morceaux sur un intervalle  $[a, b]$ , si ce dernier admet une subdivision par un nombre fini de points :  $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k = b$ , telle que dans chaque intervalle  $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ ,  $0 \leq i \leq k - 1$ ,  $f$  soit continue et possède une limite finie aux extrémités droite et gauche. (Certains auteurs appellent de telles fonctions, des fonctions réglées continues par morceaux).

3) Toute fonction en escalier est réglée. Une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $[a, b]$ , est dite en escalier s'il existe une subdivision de  $[a, b] : a = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k = b$ , telle que  $f$  soit constante dans chacun des intervalles ouverts  $\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ ,  $0 \leq i \leq k - 1$ . Une fonction  $f$  est réglée si et seulement si  $f$  est limite d'une suite uniformément convergente de fonctions en escalier.

4) Toute fonction numérique monotone est réglée.

5) Toute fonction à variation bornée est réglée. Une fonction  $f$  est dite à variation bornée sur  $[a, b]$ , s'il existe une constante  $C \geq 0$  telle que pour toute subdivision de  $[a, b] : a = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k = b$ , on ait

$$\sum_{i=0}^{k-1} |f(\alpha_{i+1}) - f(\alpha_i)| \leq C.$$

On montre que toute fonction  $f$ , différence de deux fonctions bornées et non décroissante, est à variation bornée. Toute fonction monotone est à variation bornée. Toute fonction admettant une dérivée à droite et à gauche en chaque point est à variation bornée. Mais une fonction continue n'est pas toujours à variation bornée.

**Définition 6.2.8** *On appelle dérivée à droite de  $f$  au point  $x$ , la limite (si elle existe) suivante :*

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(x+h) - f(x+0)}{h}.$$

*De même, on appelle dérivée à gauche de  $f$  au point  $x$ , la limite (si elle existe) suivante :*

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(x-0) - f(x-h)}{h}.$$

Le résultat suivant (appelé lemme ou théorème de Riemann-Lebesgue), obtenu par Riemann a été généralisé par la suite par Lebesgue (voir aussi proposition 7.1.2 du chapitre transformée de Fourier).

**Lemme 6.2.9** *Si  $f$  est une fonction bornée et intégrable sur  $[a, b]$ , alors*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x dx = 0.$$

*Démonstration :* Soit  $\varepsilon > 0$ . Par hypothèse la fonction  $f$  est bornée et intégrable au sens de Riemann, il existe donc une subdivision de  $[a, b] : a = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k = b$  telle que :

$$\sum_{i=1}^k \left( \sup_{[\alpha_{i-1}, \alpha_i]} f - \inf_{[\alpha_{i-1}, \alpha_i]} f \right) (\alpha_i - \alpha_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) \cos \lambda x dx &= \sum_{i=1}^k \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} f(x) \cos \lambda x dx, \\ &= \sum_{i=1}^k f(\alpha_{i-1}) \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} \cos \lambda x dx \\ &\quad + \sum_{i=1}^k \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} (f(x) - f(\alpha_{i-1})) \cos \lambda x dx.\end{aligned}$$

En désignant par  $M$  la borne de  $f$ , on obtient

$$\begin{aligned}&\left| \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^k |f(\alpha_{i-1})| \left| \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} \cos \lambda x dx \right| + \sum_{i=1}^k \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} |f(x) - f(\alpha_{i-1})| |\cos \lambda x| dx, \\ &\leq \sum_{i=1}^k M \left| \frac{\sin \lambda \alpha_i - \sin \lambda \alpha_{i-1}}{\lambda} \right| + \sum_{i=1}^k \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} \left( \sup_{[\alpha_{i-1}, \alpha_i]} f - \inf_{[\alpha_{i-1}, \alpha_i]} f \right) dx, \\ &\leq \sum_{i=1}^k M \cdot \frac{2}{|\lambda|} + \sum_{i=1}^k \left( \sup_{[\alpha_{i-1}, \alpha_i]} f - \inf_{[\alpha_{i-1}, \alpha_i]} f \right) (\alpha_i - \alpha_{i-1}), \\ &< \frac{2kM}{|\lambda|} + \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Dès lors, pour  $|\lambda| > \frac{4kM}{\varepsilon}$ , on a  $\left| \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx \right| < \varepsilon$  et par conséquent, on a  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx = 0$ . On montre de même que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x dx = 0,$$

et le lemme est démontré.  $\square$

**Théorème 6.2.10 (Dirichlet).** Soit  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique sur  $\mathbb{R}$ , réglée et dérivable à droite et à gauche sur  $\mathbb{R}$ . Alors la série de Fourier de  $f$  converge simplement en tout point  $x$  vers

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \quad (\text{régularisée de } f).$$

En particulier, si  $f$  est continue au point  $x$ , sa série de Fourier converge vers la fonction  $f(x)$ .

*Démonstration :* Posons

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

et étudions la convergence de cette suite. On a

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \left[ \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt \right) \cos kx + \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt \right) \sin kx \right], \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx) \right] dt, \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) \right) dt. \end{aligned} \tag{6.2.7}$$

La suite de la preuve va se faire en plusieurs étapes :

i) Montrons que pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$D_n(\tau) \equiv \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k\tau = \begin{cases} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\tau}{2 \sin \frac{\tau}{2}} & \text{si } \tau \neq 2l\pi, l \in \mathbb{Z} \\ n + \frac{1}{2} & \text{sinon} \end{cases} \tag{6.2.8}$$

$D_n(\tau)$  s'appelle noyau de Dirichlet. En effet, si  $\sin \frac{\tau}{2} \neq 0$ , c'est-à-dire  $\tau \neq 2l\pi$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ , alors

$$D_n(\tau) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \left( \frac{e^{ik\tau} + e^{-ik\tau}}{2} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^n e^{ik\tau} = \frac{1}{2} e^{-in\tau} \sum_{p=0}^{2n} e^{ip\tau},$$

d'où

$$D_n(\tau) = \frac{1}{2} e^{-in\tau} \left( \frac{1 - e^{(2n+1)i\tau}}{1 - e^{i\tau}} \right),$$

où  $e^{i\tau} \neq 1$  car  $\tau \neq 2l\pi$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ . En multipliant le numérateur et le dénominateur de cette expression par  $e^{-i\frac{\tau}{2}}$ , on obtient

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k\tau = \frac{1}{2} \left( \frac{e^{-i(n+\frac{1}{2})\tau} - e^{i(n+\frac{1}{2})\tau}}{e^{-i\frac{\tau}{2}} - e^{i\frac{\tau}{2}}} \right) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\tau}{2 \sin \frac{\tau}{2}}.$$

Si  $\sin \frac{\tau}{2} = 0$ , c'est-à-dire  $\tau = 2l\pi$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ , alors en ce point la fonction  $\frac{\sin(n + \frac{1}{2})\tau}{2 \sin \frac{\tau}{2}}$  n'est pas définie mais comme dans ce cas  $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k\tau = n + \frac{1}{2}$ , alors il suffit de la prolonger continûment en ce point par  $n + \frac{1}{2}$ .

ii) En remplaçant (6.2.8) dans (6.2.7) avec  $\tau = t - x$ , on obtient

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(t-x)}{2 \sin \frac{(t-x)}{2}} dt, \quad (\text{intégrale de Dirichlet}). \quad (6.2.9)$$

La fonction sous le signe intégrale est  $2\pi$ -périodique, donc d'après la propriété 6.2.3, on a

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \varphi(t) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(t-x)}{t-x} dt,$$

où  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $x \in ]\alpha, \alpha + 2\pi[$  et  $\varphi(t) \equiv f(t) \frac{t-x}{2 \sin \frac{(t-x)}{2}}$ .

iii) Montrons que la fonction  $\varphi$  est dérivable à droite et à gauche sur  $\mathbb{R}$ . En effet, pour  $t - x \neq 0$ , c'est évident puisque  $\frac{t-x}{2 \sin \frac{(t-x)}{2}}$  est une fonction de classe  $C^\infty$  et  $f$  est dérivable à droite et à gauche sur  $\mathbb{R}$  (par hypothèse). Lorsque  $t$  tend vers  $x$ , on procède comme suit : on a

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x+0)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(x+h) \frac{h}{2 \sin \frac{h}{2}} - \varphi(x+0)}{h}.$$

Or

$$\lim_{\substack{t \rightarrow x \\ t > x}} \varphi(t) = \lim_{\substack{t \rightarrow x \\ t > x}} f(t) \frac{t-x}{2 \sin \frac{(t-x)}{2}} = f(x+0),$$

d'où

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x+0)}{h} &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(x+h) \frac{h}{2 \sin \frac{h}{2}} - f(x+0)}{h}, \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(x+h) - f(x+0)}{h} \\ &\quad + \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(x+h) \left( \frac{h}{2 \sin \frac{h}{2}} - 1 \right)}{h}, \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(x+h) - f(x+0)}{h} \\ &\quad + f(x+0) \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{\frac{h}{2} - \sin \frac{h}{2}}{h \sin \frac{h}{2}}, \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(x+h) - f(x+0)}{h}, \end{aligned}$$

et cette limite existe car par hypothèse  $f$  est dérivable à droite et à gauche. De même, on a

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{\varphi(x-0) - \varphi(x+h)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(x-0) - f(x-h) \frac{h}{2 \sin \frac{h}{2}}}{h},$$

car

$$\lim_{\substack{t \rightarrow x \\ t > x}} \varphi(t) = \lim_{\substack{t \rightarrow x \\ t < x}} f(t) \frac{t-x}{2 \sin \frac{(t-x)}{2}} = f(x-0).$$

Comme ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{\varphi(x-0) - \varphi(x+h)}{h} &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(x-0) - f(x-h)}{h} \\ &\quad + \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(x-h) \left( \frac{h}{2 \sin \frac{h}{2}} - 1 \right)}{h}, \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(x-0) - f(x-h)}{h} \\ &\quad + f(x-0) \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{\frac{h}{2} - \sin \frac{h}{2}}{h \sin \frac{h}{2}}, \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(x-0) - f(x-h)}{h}, \end{aligned}$$

Cette limite existe par hypothèse puisque  $f$  est supposée dérivable à gauche. Finalement, la fonction  $\varphi$  est dérivable à droite et à gauche sur  $\mathbb{R}$ .

iv) Déterminons maintenant  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$ . On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \varphi(t) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(t-x)}{t-x} dt.$$

Notons que

$$\begin{aligned} &\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \varphi(t) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(t-x)}{t-x} dt \\ &= \int_{\alpha}^x \varphi(t) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(t-x)}{t-x} dt + \int_x^{\alpha+2\pi} \varphi(t) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(t-x)}{t-x} dt, \end{aligned}$$

où  $x \in ]\alpha, \alpha + 2\pi[$ . En posant  $u \equiv x - t$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha}^x \varphi(t) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(t-x)}{t-x} dt \\ &= \int_0^{x-\alpha} \varphi(x-u) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{u} du, \\ &= \varphi(x+0) \int_0^{x-\alpha} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{u} du, \\ &= \int_0^{x-\alpha} \varphi(x-u) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{u} du, \\ &= \int_0^{x-\alpha} \varphi(x-u) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{u} du, \\ &\quad + \int_0^{x-\alpha} \frac{\varphi(x-u) - \varphi(x+0)}{u} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) u du. \end{aligned}$$

De même, en posant  $u \equiv t-x$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \int_x^{\alpha+2\pi} \varphi(t) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(t-x)}{t-x} dt \\ &= \int_0^{\alpha+2\pi-x} \varphi(x+v) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})v}{v} dv, \\ &= \varphi(x-0) \int_0^{\alpha+2\pi-x} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})v}{v} dv \\ &\quad + \int_0^{\alpha+2\pi-x} \frac{\varphi(x-0) - \varphi(x+v)}{v} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) v dv. \end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \varphi(t) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(t-x)}{t-x} dt \\ &= \varphi(x+0) \int_0^{x-\alpha} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{u} du \\ &\quad + \varphi(x-0) \int_0^{\alpha+2\pi-x} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})v}{v} dv \\ &\quad + \int_0^{x-\alpha} \frac{\varphi(x-u) - \varphi(x+0)}{u} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) u du \\ &\quad + \int_0^{\alpha+2\pi-x} \frac{\varphi(x-0) - \varphi(x+v)}{v} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) v dv. \end{aligned}$$

En posant  $r \equiv (n + \frac{1}{2}) u$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x+0) \int_0^{x-\alpha} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{u} du \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x+0) \int_0^{(n+\frac{1}{2})(x-\alpha)} \frac{\sin r}{r} dr, \\ &= \frac{\pi}{2} \varphi(x+0), \end{aligned}$$

car  $\int_0^\infty \frac{\sin r}{r} dr = \frac{\pi}{2}$ . On obtient de même, en posant  $s \equiv (n + \frac{1}{2}) v$ ,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x-0) \int_0^{\alpha+2\pi-x} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})v}{v} dv \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x-0) \int_0^{(n+\frac{1}{2})(\alpha+2\pi-x)} \frac{\sin s}{s} ds, \\ &= \frac{\pi}{2} \varphi(x-0). \end{aligned}$$

Nous avons montré dans *iii)* que la fonction  $\varphi$  est dérivable à droite et à gauche sur  $\mathbb{R}$ . Donc  $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\varphi(x-u)-\varphi(x+0)}{u}$  et  $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\varphi(x-0)-\varphi(x+v)}{v}$  existent et puisque  $\varphi$  est réglée, on en déduit que les fonctions  $\frac{\varphi(x-u)-\varphi(x+0)}{u}$  et  $\frac{\varphi(x-0)-\varphi(x+v)}{v}$  sont aussi réglées respectivement sur  $[0, x - \alpha]$  et  $[0, \alpha + 2\pi - x]$ . Ces fonctions sont donc bornées et intégrables respectivement sur ces intervalles et d'après le lemme 6.2.9,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x+0) \int_0^{x-\alpha} \frac{\varphi(x-u)-\varphi(x+0)}{u} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) u du \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x+0) \int_0^{x-\alpha} \frac{\varphi(x-0)-\varphi(x+v)}{v} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) v dv = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} \varphi(x+0) + \frac{\pi}{2} \varphi(x-0) \right) = \frac{\varphi(x+0) + \varphi(x-0)}{2}.$$

Or  $\varphi(t) = f(t) \frac{t-x}{2 \sin \frac{(t-x)}{2}}$ , donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2},$$

et par conséquent la série de Fourier de  $f$  converge simplement en tout point vers  $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ . En particulier, si  $f$  est continue en  $x$ , c'est-à-dire

$$f(x+0) = f(x-0) = f(x),$$

alors sa série de Fourier converge vers  $f(x)$ . Le théorème est démontré.  $\square$

**Remarque 6.2.6** Le théorème que l'on vient de prouver se généralise évidemment aux séries de Fourier de fonctions  $2L$ -périodique, définie et intégrable sur un intervalle  $[-L, L]$  d'amplitude quelconque finie.

**Remarque 6.2.7** Soulignons que la convergence de la série de Fourier au point  $x$ , ne dépend que du comportement de  $f(x)$  au voisinage de  $x$ . Par conséquent, si on modifie la valeur de  $f$  en un seul point, sa série de Fourier n'est pas modifiée, puisque les coefficients sont définis par des intégrales.

**Remarque 6.2.8** Si la fonction  $f$  est définie seulement sur  $[-\pi, \pi]$ , on peut la prolonger par périodicité en une fonction sur  $\mathbb{R}$ , sauf aux points  $\pm\pi$  (et généralement aux points  $\pi + 2k\pi$ ) lorsque  $f(\pi) \neq f(-\pi)$ . Le théorème de Dirichlet s'applique à la fonction ainsi prolongée. Dès lors, si  $f$  satisfait aux hypothèses du théorème de Dirichlet, la série de Fourier converge vers

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2},$$

en tout point intérieur au segment où les dérivées à droite et à gauche existent. Cependant, aux extrémités  $x = \pm\pi$  (et généralement aux points  $\pi + 2k\pi$ ), la série converge vers

$$\frac{f(\pi-0) + f(-\pi+0)}{2},$$

pourvu que  $f$  possède une dérivée à droite en  $x = -\pi$  et une dérivée à gauche en  $x = \pi$ , car  $f(-\pi-0) = f(\pi-0)$  et  $f(\pi+0) = f(-\pi+0)$  (et généralement,  $f(\pi+2k\pi-0) = f(\pi-0)$ ,  $f(\pi+2k\pi+0) = f(-\pi+0)$ ).

**Exemple 6.2.4** Soit  $f$  la fonction  $2\pi$ -périodique, définie dans l'intervalle  $[-\pi, \pi]$  par  $f(x) = |x|$ . La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et dérivable à droite et à gauche sur  $\mathbb{R}$ . Comme elle est paire, on a donc  $b_k = 0$ ,  $\forall k \geq 1$  et

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x dx = \pi, \\ a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos kx dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 2p \\ -\frac{4}{\pi(2p+1)^2} & \text{si } k = 2p+1 \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient ainsi la série :

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)^2}, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

D'après le théorème de Dirichlet, cette série converge et sa somme est égale à  $f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . En particulier, pour  $x = 0$ ,

$$f(0) = 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2},$$

donc

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Notons enfin que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

d'où la somme d'Euler

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

**Exemple 6.2.5** Reprenons l'exemple 6.2.3 de la fonction  $f$ ,  $2\pi$ -périodique, définie sur l'intervalle  $]-\pi, \pi]$  par  $f(x) = e^x$ ,  $-\pi < x < \pi$ . La valeur de  $f$  en  $x = \pi$  est quelconque. Nous avons montré précédemment que

$$f(x) \sim \frac{\sinh \pi}{\pi} + 2 \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2} (\cos kx - k \sin kx).$$

La fonction  $f$  est réglée et dérivable à droite et à gauche sur  $\mathbb{R}$ . D'après le théorème de Dirichlet, en tout point où  $f$  est continue, c'est-à-dire pour tout  $x \neq (2l+1)\pi$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ , on a

$$e^x = \frac{\sinh \pi}{\pi} + 2 \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2} (\cos kx - k \sin kx).$$

Au point de discontinuité  $x = \pi$ , on a

$$\frac{f(\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \frac{e^{-\pi} + e^{\pi}}{2} = \cosh \pi,$$

et par conséquent,

$$\cosh \pi = \frac{\sinh \pi}{\pi} + 2 \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}.$$

Le théorème que l'on vient de démontrer peut être considéré comme un cas particulier d'un résultat plus général (voir exercice 6.6.9). On a prouvé que pour une fonction  $2\pi$ -périodique, si ses discontinuités (si elles existent) sont de première espèce et sont en nombre fini dans tout intervalle fini et si en outre,

cette fonction admet en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche alors sa série de Fourier converge et on a :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \begin{cases} \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} & \text{si } f \text{ est discontinue en } x \\ f(x) & \text{si } f \text{ est continue en } x \end{cases}$$

De plus la convergence est uniforme sur tout intervalle où la fonction  $f$  est continue. Par ailleurs, le théorème de Dirichlet permet de calculer la somme de certaines séries numériques.

Rappelons qu'une fonction  $f$  est dite de classe  $C^1$  par morceaux sur un intervalle  $[a, b]$ , si ce dernier admet une subdivision par un nombre fini de points :  $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k = b$ , telle que dans chaque intervalle  $\left] \alpha_i, \alpha_{i+1} \right[$ ,  $0 \leq i \leq k-1$ ,  $f$  soit la restriction d'une fonction de  $C^1([a_i, \alpha_{i+1}])$ . Une fonction  $2\pi$ -périodique est de classe  $C^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$  si elle l'est sur  $[0, 2\pi]$ . On démontre que si  $f$  est une fonction  $2\pi$ -périodique de classe  $C^1$  par morceaux et continue sur  $\mathbb{R}$ , alors sa série de Fourier converge vers  $f$  normalement sur  $\mathbb{R}$ . On peut considérer le théorème de convergence uniforme de Dirichlet comme étant une version globale de celui de convergence simple. Pour une fonction périodique et continûment dérivable au voisinage de tout point d'un intervalle, la série de Fourier de  $f$  converge uniformément vers  $f$  sur cet intervalle. Evidemment si la fonction  $f$  possède des points de discontinuité, la convergence n'est pas uniforme sur  $\mathbb{R}$ .

Par ailleurs, la raison qui empêche une fonction à ne pas admettre un développement en série de Fourier, n'a rien à voir avec la discontinuité de cette fonction. En effet, on peut construire une fonction continue mais dont la série de Fourier diverge. Ces questions seront étudiées en détail dans la section 6.3 ainsi que dans les sections consacrées aux exercices.

**Théorème 6.2.11** *Soit  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique, continue sur  $\mathbb{R}$  et de classe  $C^1$  par morceaux. Alors la série de Fourier de  $f$  converge normalement (et par suite absolument et uniformément) vers  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .*

*Démonstration :* Voir exercice 6.6.20.

**Remarque 6.2.9** *Une question se pose : que se passe-t-il exactement au voisinage d'un point de discontinuité de la fonction  $f$  ? Lorsqu'on limite le développement de Fourier de  $f(x)$  à un certain nombre  $n$  fixé (même très grand) de termes, on obtient une valeur approchée de  $f(x)$ . La courbe approchée obtenue dans ce cas, présente des oscillations de part et d'autre de la courbe d'équation  $y = f(x)$  et plus précisément, c'est au voisinage du point de discontinuité que la courbe approchée s'écarte le plus de la courbe exacte. D'après le théorème de Dirichlet, lorsqu'on augmente le nombre de termes, la série de Fourier approxime*

*de mieux en mieux la fonction en dehors de ses points de discontinuités, mais on constate qu'elle va au-delà de la valeur de la discontinuité.*

*Nous avons démontré que la série de Fourier de  $f(x)$  converge simplement en tout point  $x$  vers  $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ , mais cela ne signifie pas que le graphe de la somme partielle*

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

*converge vers celui de  $f(x)$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . La position du maximum ou minimum tend vers le point de discontinuité, mais la valeur à ce maximum ou minimum ne tend pas vers la valeur de  $f(x \pm 0)$ . Ce phénomène, s'appelle "phénomène de Gibbs", et fera l'objet d'une étude détaillée dans l'exercice 6.6.21. Ce phénomène fut pour la première fois expliqué du point de vue mathématique par J.W. Gibbs en 1899 et porte depuis lors son nom. Il se traduit par des oscillations du graphe de la somme partielle  $S_n$  autour des points de discontinuité. Cette singularité provient du non convergence uniforme de la série de Fourier au voisinage du point de discontinuité. Contrairement à ce que l'intuition pourrait suggérer, une augmentation de  $n$  ne réduira pas l'amplitude de l'oscillation. Au contraire, l'écart reste supérieur à une valeur seuil, aussi grand soit l'entier  $n$ . Par ailleurs, on remarque que l'oscillation s'effectuera sur des intervalles de plus en plus petits.*

### 6.3 Cesaro, Fejér, Jordan et Weierstrass

Nous avons vu précédemment certaines conditions suffisantes de convergence pour une série de Fourier. Ils en existent d'autres. Une question se pose : est-ce que la série de Fourier associée à une fonction continue converge toujours ? La réponse est non. En effet, Fejér (1910) a montré que la série de Fourier d'une fonction continue pouvait diverger. Il a par contre démontré qu'elle converge vers  $f$  au sens de Cesaro. Le premier exemple de fonction continue périodique dont la série de Fourier diverge en un point a été fourni en 1873 par du Bois-Reymond (il a considéré une fonction oscillant indéfiniment autour de 0). Par ailleurs, ce n'est que plus tard qu'on a pu montrer (Kahane et Katznelson 1966, Hunt 1967) que pour chaque ensemble de mesure nulle, il existe au moins une fonction continue telle que sa série de Fourier diverge sur cet ensemble. Réciproquement, Carleson a montré en 1966 que pour toute fonction continue périodique la série de Fourier converge sauf éventuellement sur un ensemble de mesure nulle (autrement dit, la série de Fourier d'une fonction de carré sommable converge presque partout vers cette fonction). On notera

aussi (Kolmogorov 1926) qu'il existe des fonctions périodiques localement sommables dont la série de Fourier diverge partout sur  $\mathbb{R}$ . Pour toutes ces questions voir, entre autres, les exercices 6.7.14, 6.7.15 et 6.7.16.

**Définition 6.3.1** Soit  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  une série et  $(S_n)$  la suite de ses sommes partielles. Posons

$$\sigma_1 = S_1, \quad \sigma_2 = \frac{S_1 + S_2}{2}, \dots, \sigma_n = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n}.$$

On dit que la série  $\sum a_k$  converge au sens de Cesaro (ou en moyenne) et a pour somme  $\sigma$  si et seulement si la suite  $(\sigma_n)$  converge vers  $\sigma$ .

On montre que si la série  $\sum a_k$  converge au sens usuel et a pour somme  $S$ , alors elle converge au sens de Cesaro vers la même somme. Inversement, une série peut converger au sens de Cesaro et diverger au sens usuel. Par exemple la série  $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  diverge au sens usuel mais converge au sens de Cesaro vers  $\frac{1}{2}$ .

**Théorème 6.3.2 (Fejér).** Soit  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique et continue sur  $\mathbb{R}$ . Alors, la série de Fourier de  $f$  converge au sens de Cesaro vers  $f(x)$ , uniformément sur  $\mathbb{R}$ .

*Démonstration :* Soit  $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ , la somme partielle de la série de Fourier de  $f$ . On a montré (voir (6.2.9)) que

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(t-x)}{2 \sin \frac{t-x}{2}} dt, \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} du, \quad u \equiv t-x \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} du, \end{aligned}$$

en vertu de la propriété 6.2.3, car la fonction sous le signe intégral est  $2\pi$ -périodique en  $u$ . Considérons la suite  $\sigma_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(x)$ , et montrons que  $(\sigma_n(x))$  converge uniformément vers  $f(x)$  sur  $\mathbb{R}$ . La preuve peut se faire avec une méthode analogue à celle employée précédemment, comme on peut raisonner autrement. On a

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \frac{\sin(k + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} du, \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \Phi_n(u) du, \quad (\text{intégrale de Fejér}) \end{aligned}$$

où  $\Phi_n(u) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(k+\frac{1}{2})u}{2n \sin \frac{u}{2}}$ . Notons que

$$\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)u = \operatorname{Im} e^{i(k+\frac{1}{2})u} = \operatorname{Im} e^{i\frac{u}{2}} \cdot (e^{iu})^k,$$

d'où

$$\Phi_n(u) = \frac{1}{2n \sin \frac{u}{2}} \operatorname{Im} \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{u}{2}} \cdot (e^{iu})^k = \frac{1}{2n \sin \frac{u}{2}} \operatorname{Im} e^{i\frac{u}{2}} \cdot \frac{1 - e^{inu}}{1 - e^{iu}},$$

ou

$$\Phi_n(u) = \frac{1}{2n \sin \frac{u}{2}} \operatorname{Im} \frac{1 - e^{inu}}{e^{-i\frac{u}{2}} - e^{i\frac{u}{2}}} = \frac{1}{2n \sin \frac{u}{2}} \operatorname{Im} \frac{e^{inu} - 1}{2i \sin \frac{u}{2}},$$

ou encore

$$\Phi_n(u) = \frac{1}{2n \sin \frac{u}{2}} \cdot \frac{(1 - \cos nu)}{2 \sin \frac{u}{2}} = \frac{1}{2n} \left( \frac{\sin n\frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}} \right)^2, \quad (\text{noyau de Fejér}).$$

Notons aussi que  $\Phi_n$  est paire,  $\Phi_n(u) \geq 0$  et  $\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(u) du = 1$  (en effet, en posant  $f(x) \equiv 1$  dans l'intégrale de Fejér, on obtient  $\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(u) du$ ). En outre, on a dans ce cas

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(k + \frac{1}{2})u}{2n \sin \frac{u}{2}} du = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^k \cos ju \right) du = 1.$$

On a

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) - f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+u) - f(x)) \Phi_n(u) du, \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 (f(x+u) - f(x)) \Phi_n(u) du \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\pi} (f(x+u) - f(x)) \Phi_n(u) du \right), \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} ((f(x-u) - f(x)) \Phi_n(-u) du \\ &\quad + (f(x+u) - f(x)) \Phi_n(u) du), \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)) \Phi_n(u) du, \end{aligned}$$

car  $\Phi_n$  est paire. Soit  $\varepsilon > 0$ . Par hypothèse la fonction  $f$  est continue en  $x$  et périodique, donc elle est bornée et elle est uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ .

Dès lors, il existe  $\delta \in ]0, \pi[$  tel que : pour tous  $x_1, x_2$ ,  $|x_1 - x_2| \leq \delta$  entraîne  $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$  et pour tout  $u \in [0, \delta]$ , on a

$$|f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)| \leq |f(x+u) - f(x)| + |f(x-u) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} |\sigma_n(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^\delta |f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)| \Phi_n(u) du \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi |f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)| \Phi_n(u) du, \end{aligned}$$

car  $\Phi_n \geq 0$ . On a d'une part,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\delta |f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)| \Phi_n(u) du &\leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^\delta \Phi_n(u) du, \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^\pi \Phi_n(u) du, \\ &= \frac{\varepsilon}{4\pi}, \end{aligned}$$

car  $\int_0^\pi \Phi_n(u) du = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \Phi_n(u) du = \frac{1}{2}$ . D'autre part, puisque

$$\Phi_n(u) = \frac{1}{2n} \left( \frac{\sin n\frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}} \right)^2 \leq \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{\left( \sin \frac{\delta}{2} \right)^2},$$

sur  $[\delta, \pi]$ , alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi |f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)| \Phi_n(u) du &\leq \frac{1}{2n\pi \left( \sin \frac{\delta}{2} \right)^2} \int_\delta^\pi |f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)| du, \\ &\leq \frac{1}{2n\pi \left( \sin \frac{\delta}{2} \right)^2} \int_\delta^\pi (|f(x+u) - f(x)| + |f(x-u) - f(x)|) du, \\ &\leq \frac{1}{2n\pi \left( \sin \frac{\delta}{2} \right)^2} \cdot 4M(\pi - \delta), \text{ où } M = \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\}, \\ &\leq \frac{2M}{n \left( \sin \frac{\delta}{2} \right)^2} \longrightarrow 0 \text{ lorsque } n \longrightarrow \infty \end{aligned}$$

Il existe donc  $n_0$  tel que : pour  $n \geq n_0$  et  $\delta$  donné, on ait

$$\frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi |f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)| \Phi_n(u) du \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Finalement, on obtient  $|\sigma_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ , c'est-à-dire la suite  $(\sigma_n(x))$  converge uniformément vers  $f(x)$  sur  $\mathbb{R}$  et la démonstration du théorème est complète.  $\square$

De la condition suffisante de convergence des  $(\sigma_k)$ , on peut passer à des conditions suffisantes de convergence pour des  $(S_k)$ . Il en résulte notamment le théorème suivant qui contient en fait le théorème 6.2.10.

**Théorème 6.3.3 (Jordan).** *Si  $f$  est périodique et à variation bornée sur un intervalle d'une période, sa série de Fourier converge pour tous les  $x$  vers  $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ . De plus, la convergence vers  $f(x)$  est uniforme sur tout intervalle où  $f$  est continue.*

*Démonstration :* Il suffit d'utiliser une méthode similaire à celle utilisée précédemment (pour le détail voir exercice 6.6.13).  $\square$

Comme application du théorème de Fejér, on a le résultat suivant :

**Théorème 6.3.4 (d'approximation de Weierstrass).** *Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a, b]$ . Quel que soit  $\varepsilon > 0$ , il existe un polynôme  $P$  tel que, pour tout  $x \in [a, b]$ , on ait  $|f(x) - P(x)| \leq \varepsilon$ .*

*Démonstration :* Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction continue et soit  $g$  le prolongement de  $f$  sur l'intervalle  $[2a-b, b]$  de façon paire. Autrement dit  $g(x) = f(x)$  si  $x \in [a, b]$  et  $g(x) = f(2a-b)$  si  $x \in [2a-b, a]$ . La fonction  $g$  est continue,  $g(2a-b) = g(b)$  et on peut donc la prolonger sur  $\mathbb{R}$  en une fonction  $h$ . Cette dernière est une fonction continue et  $2(b-a)$ -périodique. Soit  $\varepsilon > 0$ . D'après le théorème de Fejér, la suite  $(\sigma_n(x))$  converge uniformément dans  $\mathbb{R}$  vers  $h(x)$ , c'est-à-dire il existe un entier  $N(\varepsilon)$  tel que, pour tout  $n \geq N(\varepsilon)$  et tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$|h(x) - \sigma_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6.3.1)$$

Par ailleurs,

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left( \alpha_k \cos \frac{k\pi}{b-a} x + \beta_k \sin \frac{k\pi}{b-a} x \right),$$

est développable en série entière (puisque les fonctions cos et sin le sont sur  $\mathbb{R}$ ) et celle-ci converge uniformément sur  $[a, b]$  (un compact). Dans ce qui suit,  $P$  désigne la somme partielle de la série entière de  $\sigma_n(x)$ .  $P$  est un polynôme vérifiant pour tout  $x \in [a, b]$ ,

$$|\sigma_n(x) - P(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6.3.2)$$

Puisque  $h(x) = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , on déduit des relations (6.3.1) et (6.3.2),

$$|f(x) - P(x)| \leq |f(x) - \sigma_n(x)| + |\sigma_n(x) - P(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

pour tout  $x \in [a, b]$  et le théorème est démontré.  $\square$

## 6.4 Égalité de Parseval et inégalité de Bessel

Soit  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique et supposons pour le moment que sa série de Fourier converge uniformément vers  $f(x)$  ;

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

En multipliant les deux membres de l'égalité ci-dessus par  $f(x)$  et en intégrant terme à terme sur  $[-\pi, \pi]$ , on obtient l'égalité suivante, dite égalité de Parseval :

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

Cette égalité est satisfaite pour une fonction  $2\pi$ -périodique réglée ou plus généralement de carré intégrable (c'est-à-dire  $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$ ) sur une période (voir plus loin). Physiquement, l'égalité de Parseval signifie que l'énergie totale d'un phénomène périodique est égale à la somme des énergies associées aux différents harmoniques.

**Définition 6.4.1** Soit  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique. On dit que le polynôme trigonométrique

$$T_n(x) \equiv \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx),$$

approche  $f(x)$  en moyenne quadratique si les coefficients  $\alpha_k$  et  $\beta_k$  sont tels que :

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_n(x))^2 dx,$$

soit minimum.

**Proposition 6.4.2** Parmi tous les polynômes trigonométriques d'ordre  $n$ , c'est le polynôme dont les coefficients  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$  sont les coefficients de Fourier de la fonction  $f$ , c'est-à-dire

$$\alpha_k = a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad \beta_k = b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx,$$

qui réalise la meilleure approximation en moyenne quadratique de cette fonction. Autrement dit, pour tout  $n$ , on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_n(x))^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_n(x))^2 dx.$$

*Démonstration :* On a

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_n(x))^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x)T_n(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} T_n^2(x) dx.$$

Calculons séparément chaque expression. On a

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)T_n(x) dx &= \frac{\alpha_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \left( \alpha_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + \beta_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx \right), \\ &= \frac{\alpha_0 a_0 \pi}{2} + \pi \sum_{k=1}^n (\alpha_k a_k + \beta_k b_k). \end{aligned}$$

Par ailleurs, un calcul direct montre que :

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} T_n^2(x) dx \\ &= \frac{\alpha_0^2}{4} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \alpha_0 \sum_{k=1}^n \left( \alpha_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + \beta_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx + 2 \sum_{\substack{k,j=1 \\ k \neq j}}^n \alpha_k \alpha_j \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos jx dx \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \beta_k^2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx + 2 \sum_{\substack{k,j=1 \\ k \neq j}}^n \beta_k \beta_j \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin jx dx \\ &\quad + 2 \sum_{\substack{k,j=1 \\ k \neq j}}^n \alpha_k \beta_j \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin jx dx, \\ &= \frac{\alpha_0^2 \pi}{2} + \pi \sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 + \beta_k^2). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_n(x))^2 dx &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \alpha_0 a_0 \pi - 2\pi \sum_{k=1}^n (\alpha_k a_k + \beta_k b_k) \\
 &\quad + \frac{\alpha_0^2 \pi}{2} + \pi \sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 + \beta_k^2), \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \frac{\pi}{2} (\alpha_0^2 - 2\alpha_0 a_0) \\
 &\quad + \pi \sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 - 2\alpha_k a_k) + (\beta_k^2 - 2\beta_k b_k)), \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \frac{\pi}{2} (\alpha_0 - a_0)^2 - \frac{a_0^2 \pi}{2} \\
 &\quad + \pi \sum_{k=1}^n ((\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2) - \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2), \\
 &= A - B,
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 A &\equiv \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{a_0^2 \pi}{2} - \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2), \\
 B &\equiv \frac{\pi}{2} (\alpha_0 - a_0)^2 + \pi \sum_{k=1}^n ((\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2).
 \end{aligned}$$

Comme  $A$  est indépendante de  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$  et que  $B$  est positive, alors le minimum sera atteint quand  $\alpha_k = a_k$  et  $\beta_k = b_k$ . Il s'en suit que

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_n(x))^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{a_0^2 \pi}{2} - \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \geq 0, \quad (6.4.1)$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_n(x))^2 dx &= \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_n(x))^2 dx + \frac{\pi}{2} (\alpha_0 - a_0)^2 \\
 &\quad + \pi \sum_{k=1}^n ((\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2).
 \end{aligned}$$

La démonstration s'achève.  $\square$

**Corollaire 6.4.3** *On a l'inégalité de Bessel*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

*Démonstration :* Il suffit d'utiliser la relation (6.4.1).  $\square$

**Définition 6.4.4** *Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_n(x))^2 dx = 0$ , on dit alors que la série*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

*converge en moyenne quadratique vers  $f(x)$ .*

**Proposition 6.4.5** *Soit  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique et réglée. Alors*

- a) *Il existe une suite de fonctions continues convergeant vers  $f$  en moyenne quadratique.*
- b) *La série de Fourier de  $f$  converge en moyenne quadratique vers  $f$ .*

*Démonstration :* a) Soit  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction réglée et soit  $\varepsilon > 0$ . On peut construire une fonction en escalier  $g_\varepsilon : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  telle que l'on ait  $\|f - g_\varepsilon\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2\pi}$ , d'où  $\|f - g_\varepsilon\|_2 \leq \sqrt{2\pi} \|f - g_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon$ . Notons  $c_1 < c_2 < \dots < c_m$  les points de discontinuités de  $g_\varepsilon$ . En modifiant  $g_\varepsilon$  dans les voisinages  $[c_j - \delta, c_j + \delta]$  avec  $\delta$  suffisamment petit, on peut construire une fonction continue  $h : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , telle que :  $\|g_\varepsilon - h\|_2 \leq \varepsilon$ . Plus précisément, on définit par exemple la fonction continue  $h$  sur  $[-\pi, \pi]$  comme suit : on pose  $h(x) = f(x)$  pour  $x \notin [c_1 - \delta, c_1 + \delta] \cup \dots \cup [c_m - \delta, c_m + \delta]$  et on choisit  $h$  affine pour  $x \in [c_j - \delta, c_j + \delta]$ ,  $1 \leq j \leq m$ . On aura donc

$$\|g_\varepsilon - h\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (g_\varepsilon(x) - h(x))^2 dx = \sum_{j=1}^m \int_{c_j - \delta}^{c_j + \delta} (g_\varepsilon(x) - h(x))^2 dx < \varepsilon.$$

b) Soit  $\varepsilon > 0$ . D'après a), on peut construire une fonction continue  $h$  telle que l'on ait  $\|f - h\|_2 \leq \varepsilon$ . Pour la suite, on peut utiliser le théorème d'approximation de Weierstrass trigonométrique, comme on peut procéder autrement. En effet, d'après ce qui précéde et l'inégalité de Minkowski, on a

$$\|f - h\|_2 \leq \|f - g_\varepsilon\|_2 + \|g_\varepsilon - h\|_2 \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \quad (6.4.2)$$

Soit  $(\sigma_n)$  la suite des sommes de Cesaro construite pour la fonction  $4\pi$ -périodique, continue et égale à  $f(x)$  pour  $x \in [-\pi, \pi]$  et à  $f(-2\pi - x)$  pour  $x \in [-3\pi, -\pi[$ .

D'après la proposition 6.4.2, on a  $\|h - S_n(h)\|_2^2 \leq \|h - \sigma_n\|_2^2$ , où ici  $S_n(h)$  désigne la somme partielle de la série de Fourier de  $h$ . La suite  $(\sigma_n)$  des polynômes trigonométriques converge uniformément vers  $h$  sur  $[-\pi, \pi]$ , donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} (h(x) - \sigma_n(x))^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} (h(x) - \sigma_n(x))^2 dx = 0,$$

et par conséquent  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|h - S_n(h)\|_2^2 = 0$ . Autrement dit, il existe un entier  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $\|h - S_n(h)\|_2 \leq \varepsilon$ . Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \|S_n(h - f)\|_2 &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \|h - f\|_2, \quad (\text{d'après (6.4.1)}) \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{\sqrt{\pi}}, \quad (\text{d'après (6.4.2)}) \end{aligned}$$

En regroupant ces différentes expressions, on obtient

$$\|f - S_n(f)\|_2 \leq \|f - h\|_2 + \|h - S_n(h)\|_2 + \|S_n(h - f)\|_2 \leq 2\varepsilon + \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{\sqrt{\pi}}.$$

Autrement dit, on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n(f)\|_2^2 = 0$ , ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

**Corollaire 6.4.6** *Soit  $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ , une fonction réglée. On a l'égalité de Parseval*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

*Démonstration :* Il suffit d'utiliser la relation (6.4.1) ainsi que la proposition précédente.  $\square$

## 6.5 Séries de Fourier des distributions

**Définition 6.5.1** *On dit qu'une distribution  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  est périodique de période  $a$  (en abrégé :  $a$ -périodique) si  $\tau_a T = T$ , où  $\tau_a T$  est la translatée de  $T$  par  $a$ .*

Pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}$ , cette définition signifie que

$$\langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-a} \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle,$$

c'est-à-dire

$$\langle T_x, \varphi(x+a) \rangle = \langle T_x, \varphi(x) \rangle.$$

L'ensemble des périodes forme un sous-groupe (discret) et le plus petit des nombres  $a$  s'appelle période fondamentale. On obtient des notions similaires pour le cas de distributions  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ .

**Exemple 6.5.1** Si  $f$  est une fonction localement sommable et  $a$ -périodique, alors la distribution régulière qui lui est associée est aussi  $a$ -périodique.

**Exemple 6.5.2** Le peigne de Dirac (voir section 1.3.2) défini par

$$\Delta(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

est une distribution 1-périodique.

**Exemple 6.5.3** Si  $T$  est une distribution  $a$ -périodique, alors sa dérivée  $T'$  est aussi  $a$ -périodique.

Considérons l'intervalle  $[\alpha, \alpha + 2\pi] \subset \mathbb{R}$  où  $\alpha$  est arbitraire. On peut identifier cet intervalle au groupe quotient  $\mathbb{R}/2k\mathbb{Z}$  de  $\mathbb{R}$  par un sous groupe discret (réseau). Autrement dit, l'identification peut se faire à un cercle  $\Gamma$  de centre 0 et de longueur  $2\pi$ . On fixe une origine et une orientation sur  $\Gamma$ . A tout point de cet intervalle correspond dans  $\mathbb{R}$  sa classe d'équivalence ou ce qui revient au même, à tout point d'abscisse curviligne  $s$  de  $\Gamma$  correspond un élément d'abscisse  $x$  de  $\mathbb{R}$ . Ceci permet d'associer biunivoquement à toute fonction  $f$  sur  $\Gamma$  une fonction  $\tilde{f}$  sur  $\mathbb{R}$  de période  $2\pi$  telle que :  $\tilde{f}(x) = f(s)$ . On désigne par  $\mathcal{D}(\Gamma)$  l'ensemble des fonctions indéfiniment différentiables sur le cercle  $\Gamma$ . Notons que pour les fonctions  $\varphi \in \mathcal{D}(\Gamma)$ , on n'est plus obligé de supposer qu'elles sont à support borné. En fait,  $\Gamma$  est borné et l'exigence de périodicité remplace celle de support borné. La fonction  $\tilde{\varphi}$  associée à  $\varphi \in \mathcal{D}(\Gamma)$  est  $2\pi$ -périodique sur  $\mathbb{R}$  et n'appartient pas à  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ .

**Définition 6.5.2** On dit qu'une suite de fonctions  $(\varphi_k) \in \mathcal{D}(\Gamma)$  converge dans  $\mathcal{D}(\Gamma)$  vers une fonction  $\varphi \in \mathcal{D}(\Gamma)$  si pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , la suite des dérivées  $(\varphi_k^{(j)})$  converge uniformément vers  $\varphi^{(j)}$  sur  $\Gamma$ .

**Définition 6.5.3** On appelle distribution  $T$  sur le cercle  $\Gamma$ , toute fonctionnelle linéaire continue sur  $\mathcal{D}(\Gamma)$ . La continuité signifie que si une suite  $(\varphi_k)$  converge dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  vers  $\varphi$ , alors  $\langle T, \varphi_k \rangle$  converge vers  $\langle T, \varphi \rangle$ .

On désigne par  $\mathcal{D}'(\Gamma)$  l'ensemble des distributions sur le cercle  $\Gamma$ , cet ensemble est un espace vectoriel. Toute fonction localement sommable sur  $\Gamma$  détermine une distribution régulière que l'on note encore  $f$  et telle que pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\Gamma)$ ,

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\Gamma} f(s) \varphi(s) ds = \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \tilde{f}(x) \tilde{\varphi}(x) dx, \quad \alpha = \text{constante.}$$

Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  et considérons la fonction  $\tilde{\Phi}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2k\pi)$ . Notons que le support de  $\varphi$  est borné et  $\tilde{\Phi}$  est bien définie. La fonction  $\tilde{\Phi}$  est  $2\pi$ -périodique, indéfiniment dérivable et il lui correspond une fonction  $\Phi \in \mathcal{D}(\Gamma)$ . A une distribution  $T$  sur le cercle  $\Gamma$ , on associe la distribution  $\tilde{T}$  sur  $\mathbb{R}$  telle que :  $\langle \tilde{T}, \varphi \rangle = \langle T, \Phi \rangle$ . On vérifie aisément que  $\tilde{T}$  est une distribution  $2\pi$ -périodique :  $\langle \tilde{T}_x, \varphi(x + 2\pi) \rangle = \langle \tilde{T}_x, \varphi(x) \rangle$ . En effet, on a

$$\langle \tau_{2\pi} \tilde{T}, \varphi \rangle = \langle \tilde{T}, \tau_{-2\pi} \varphi \rangle = \langle \tilde{T}_x, \varphi(x + 2\pi) \rangle = \langle T, \Phi \rangle = \langle \tilde{T}, \varphi \rangle,$$

car si l'on remplace  $\varphi(x)$  par  $\varphi(x + 2\pi)$ , alors  $\tilde{\Phi}$  et  $\Phi$  ne change pas.

Dans le cas d'une distribution régulière  $f$ , on a

$$\begin{aligned} \langle \tilde{f}, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(x) \varphi(x) dx, \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \tilde{f}(x) \varphi(x) dx, \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(x) \varphi(x + 2k\pi) dx, \\ &= \int_0^{2\pi} \tilde{f}(x) \tilde{\Phi}(x) dx, \\ &= \int_{\Gamma} f(s) \Phi(s) ds, \\ &= \langle f, \Phi \rangle. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

**Proposition 6.5.4** *A toute distribution  $2\pi$ -périodique  $T$  sur le cercle, correspond biunivoquement une distribution  $\tilde{T}$  sur  $\mathbb{R}$ .*

On définit comme dans le chapitre 5, le produit de convolution de deux distributions  $S$  et  $T$  sur le cercle par

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S_s \otimes T_t, \varphi(s + t) \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Gamma)$$

où  $s, t \in \Gamma$ . Il faut bien noter que toute distribution sur le cercle  $\Gamma$  est à support borné. Dès lors, le produit de convolution ci-dessus est toujours défini car si  $\varphi \in \mathcal{D}(\Gamma)$  et  $\psi(s, t) = \varphi(s + t)$ , alors  $\psi \in \mathcal{D}_{s,t}(\Gamma)$ . Notons aussi que pour tout  $T \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ , on a  $T * \delta = \delta * T = T$ , et  $T * \delta^{(k)} = T^{(k)}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  où  $T^{(k)}$  est la dérivée  $k^{\text{ième}}$  par rapport à  $s$ . L'ensemble  $\mathcal{D}'(\Gamma)$  est une algèbre de convolution et la distribution  $\delta$  de Dirac joue le rôle d'élément neutre. En cas de besoin, on peut se référer au chapitre 5 pour d'autres propriétés.

**Définition 6.5.5** On appelle coefficients de Fourier d'une distribution  $T \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ , les nombres

$$c_k \equiv c_k(T) = \frac{1}{2\pi} \langle T_s, e^{-iks} \rangle, \quad k \in \mathbb{Z}$$

et série de Fourier de  $T$  la série

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(T) e^{iks}.$$

**Remarques 6.5.1** a) La série ci-dessus peut évidemment s'écrire en introduisant comme dans les sections précédentes, les coefficients  $a_k$  et  $b_k$ .

b) Lorsque la distribution  $T$  est définie par une fonction intégrable  $f$ , alors  $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(s) e^{-iks} ds$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  où  $\alpha$  est quelconque. Dans la définition ci-dessus, lorsque  $T$  est  $a$ -périodique, alors ses coefficients de Fourier s'écrivent  $c_k = \frac{1}{a} \langle T_s, e^{-\frac{2\pi iks}{a}} \rangle$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  et sa série de Fourier est  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(T) e^{\frac{2\pi iks}{a}}$ .

c) Comme pour les fonctions, la série de Fourier d'une distribution paire (resp. impaire) n'a que des termes en cosinus (resp. sinus). En effet, il suffit d'adapter les définitions et notations utilisées dans la section 3.4 du chapitre 3. De la formule  $\langle T, \varphi \rangle = \langle \overset{\vee}{T}, \varphi \rangle$ ,  $\varphi \in \mathcal{D}$ , on tire la relation suivante :

$$c_{-k} = \frac{1}{2\pi} \langle T_s, e^{iks} \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \overset{\vee}{T}_s, e^{-iks} \rangle.$$

Si la distribution  $T$  est paire, alors par définition  $\overset{\vee}{T} = T$ , d'où

$$c_{-k} = \frac{1}{2\pi} \langle T_s, e^{iks} \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle T_s, e^{-iks} \rangle = c_k,$$

ce qui implique

$$c_k = c_{-k} = \frac{1}{2\pi} \langle T_s, \cos ks \rangle,$$

et  $a_k = 2c_k$ ,  $b_k = 0$ . De même, si  $T$  est impaire, c'est-à-dire  $\overset{\vee}{T} = -T$ , on aura

$$c_{-k} = \frac{1}{2\pi} \langle T_s, e^{iks} \rangle = -\frac{1}{2\pi} \langle T_s, e^{-iks} \rangle = -c_k,$$

d'où

$$c_k = -c_{-k} = \frac{i}{2\pi} \langle T_s, \sin ks \rangle,$$

et  $a_k = 0$ ,  $b_k = 2ic_k$ .

d) En tenant compte de la formule (remarque 1.2.1, c) du chapitre 1),

$$\langle \overset{\vee}{T}, \varphi \rangle = \overline{\langle T, \varphi \rangle}, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

définissant la distribution complexe conjuguée  $\bar{T}$  d'une distribution  $T$ , on obtient

$$\frac{1}{2\pi} \langle \bar{T}_s, e^{-iks} \rangle = \frac{1}{2\pi} \overline{\langle T_s, e^{iks} \rangle} = \bar{c}_{-k},$$

où  $c_k$  est le coefficient de Fourier de  $T$ . Dès lors, si  $T$  est réelle alors  $c_{-k} = \bar{c}_k$ .

Rappelons qu'une série de la forme  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k$  est dite convergente si la série  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + a_{-k})$  converge et on pose dans ce cas

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + a_{-k}).$$

Considérons la série trigonométrique  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{iks}$  où  $c_k$  sont des constantes. Supposons que  $|c_k| \leq \lambda |k|^{\alpha}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  où  $\lambda, \alpha$  sont des constantes (c'est-à-dire la suite  $(c_k)$  est à croissance lente). Dès lors,  $\left| c_k \frac{e^{iks}}{(ik)^{\alpha+2}} \right| = \left| \frac{c_k}{k^{\alpha+2}} \right| \leq \frac{\lambda}{k^2}$ , et puisque  $\frac{\lambda}{k^2}$  est le terme général d'une série convergente, alors la série de distributions  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{e^{iks}}{(ik)^{\alpha+2}}$  converge uniformément. Or  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{iks}$  est la dérivée  $(\alpha+2)$ ième de cette série. Ainsi, si  $|c_k| \leq \lambda |k|^{\alpha}$  alors la série de distributions  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{iks}$  converge. On peut montrer que cette condition est aussi nécessaire. En définitive, on a

**Proposition 6.5.6** Une série trigonométrique  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{iks}$  converge vers une distribution sur le cercle  $\Gamma$ , si et seulement si, la suite des  $|c_k|$  est majorée par une puissance de  $k$  quand  $k$  tend vers l'infini.

En théorie des distributions et contrairement à l'analyse classique, la distinction entre séries trigonométriques et séries de Fourier n'est plus nécessaire. En effet, au sens des distributions, toute série trigonométrique convergente représente le développement d'une distribution périodique. En outre, si au sens classique une série trigonométrique représente le développement d'une fonction périodique, alors elle la représente aussi au sens des distributions. Toute distribution périodique a une série de Fourier, qui converge vers cette distribution. Toute série trigonométrique dont les coefficients sont à croissance lente converge vers une distribution périodique dont elle est la série de Fourier. Nous allons voir tout cela en détail.

**Proposition 6.5.7** La série de Fourier de la distribution  $\delta$  de Dirac sur le cercle  $\Gamma$ , converge dans  $\mathcal{D}'(\Gamma)$  vers  $\delta$ .

*Démonstration :* En effet, on a  $c_k = \frac{1}{2\pi} \langle \delta_s, e^{-iks} \rangle = \frac{1}{2\pi}$ . Nous allons montrer que :  $\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{iks} = \delta$ . Cette série de distributions converge dans  $\mathcal{D}'(\Gamma)$ .

Pour montrer que sa somme, notée  $T$ , est égale à  $\delta$ , on procède comme suit, on a pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\Gamma)$ ,

$$\langle T, \varphi e^{is} \rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle e^{iks}, \varphi e^{is} \rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \varphi(s) e^{i(k+1)s} ds = \langle T, \varphi \rangle,$$

donc  $\langle T, (e^{is} - 1)\varphi \rangle = 0$ . On pose  $\psi(s) = (e^{is} - 1)\varphi$ , d'où pour  $\varphi \in \mathcal{D}(\Gamma)$ ,  $\psi \in \mathcal{D}(\Gamma)$  et  $\psi(0) = 0$ . Réciproquement, soit  $\psi \in \mathcal{D}(\Gamma)$  telle que :  $\psi(0) = 0$ , on a

$$\varphi(s) = \frac{\psi(s)}{e^{is} - 1} = \frac{\psi(s)}{\cos s - 1 + i \sin s} = \psi(s) \frac{\cos s - 1 - i \sin s}{2(1 - \cos s)},$$

ou

$$\varphi(s) = \psi(s) \frac{-2 \sin^2 \frac{s}{2} - 2i \sin \frac{s}{2} \cos \frac{s}{2}}{4 \sin^2 \frac{s}{2}} = \psi(s) \frac{e^{-i\frac{s}{2}}}{2i \sin \frac{s}{2}}.$$

Notons que  $\varphi \in \mathcal{D}(\Gamma)$ ,  $\varphi$  est  $2\pi$ -périodique et  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$ . Pour toute fonction  $\psi \in \mathcal{D}(\Gamma)$  telle que  $\psi(0) = 0$ , on a  $\langle T, \psi \rangle = 0$ . En s'inspirant de ce qui a été fait dans le chapitre 3 (proposition 3.1.2), on montre que  $T$  est proportionnelle à  $\delta$ . En effet, soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\Gamma)$  et posons  $\psi(s) = \varphi(s) - \varphi(0)$ . On a

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \psi + \varphi(0) \rangle = \langle T, \psi \rangle + \langle T, \varphi(0) \rangle = C\varphi(0),$$

avec

$$C = \langle T, 1 \rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} e^{iks} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} ds = 1.$$

Par conséquent,  $\langle T, \varphi \rangle = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$  et  $\delta = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{iks}$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Proposition 6.5.8** *La série de Fourier d'une distribution  $T$  sur le cercle  $\Gamma$ , converge dans  $\mathcal{D}'(\Gamma)$  vers  $T$ . Autrement dit, toute distribution sur  $\Gamma$  est développable en une série de Fourier et est identique à la somme de cette série.*

*Démonstration :* Pour tout  $T \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ , on a  $T = T * \delta$ . D'après la proposition 5.3.9, on a pour tout  $T \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ ,

$$T = T * \delta = T * \left( \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{iks} \right) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} T * e^{iks}.$$

En tenant compte de la proposition 5.3.10, on obtient

$$T = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle T_t, e^{ik(s-t)} \rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{iks} \langle T_t, e^{-ikt} \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{iks},$$

où  $c_k = \frac{1}{2\pi} \langle T_t, e^{-ikt} \rangle$  et la proposition est démontrée.  $\square$

**Proposition 6.5.9** Soient  $T$  et  $S$  deux distributions sur le cercle,  $2\pi$ -périodiques et soient  $c_k(T)$  et  $c_k(S)$  les coefficients de Fourier de leurs séries de Fourier respectives. Alors

$$c_k(T * S) = 2\pi c_k(T)c_k(S),$$

et

$$T * S = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(T)c_k(S)e^{iks}.$$

*Démonstration :* Voir exercice 6.6.29  $\square$

On considère dans  $\mathcal{D}'(\Gamma)$ , l'équation de convolution  $A * X = B$ , où  $A$  et  $B$  sont deux distributions données sur le cercle  $\Gamma$  et  $X$  une distribution inconnue. Si  $X$  est une solution, elle est donc la somme de la série de Fourier

$$X = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{b_k}{a_k} e^{iks},$$

où  $a_k, b_k$  sont les coefficients de Fourier de  $A, B$  respectivement. Ces deux coefficients sont liés au coefficient  $x_k$  de  $X$  par la formule (proposition précédente),  $2\pi a_k x_k = b_k$ . Réciproquement, supposons qu'il existe  $x_k$  telles que les formules ci-dessus soient satisfaites. Si la série  $\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{b_k}{a_k} e^{iks}$  converge alors elle représente la solution cherchée. Nous avons vu précédemment que la convergence de cette série est assurée si la condition (nécessaire et suffisante) suivante est satisfaite :  $|x_k| \leq \lambda |k|^\alpha$  où  $\lambda > 0$  et  $\alpha > 0$ . Notons que si parmi les coefficients  $a_k$ , il y en a qui sont nuls (disons  $a_p = 0$ ) alors de deux choses l'une : si les coefficients  $b_p$  correspondants sont tous nuls, alors l'équation  $A * X = B$  admet une infinité de solutions si la condition de convergence ci-dessus est satisfaite. Si par contre, les coefficients  $b_p$  ne sont pas tous nuls, alors dans ce cas l'équation  $A * X = B$  n'admet pas de solution. Par ailleurs, l'algèbre de convolution  $\mathcal{D}'(\Gamma)$  a des diviseurs de zéro (rappelons que  $A$  est diviseur de zéro dans  $\mathcal{D}'(\Gamma)$ , s'il existe  $X \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ ,  $X \neq 0$  tel que  $A * X = 0$ ). Ainsi l'équation  $A * X = 0$ ,  $A \neq 0$ , n'entraîne pas  $X = 0$ . Ceci est vérifié si et seulement s'ils existent des  $x_k$  non tous nuls tels que : pour tout  $k$ ,  $a_k x_k = 0$  ou ce qui revient au même si et seulement si certains  $a_k$  sont nuls. Dès lors, les diviseurs de zéro dans  $\mathcal{D}'(\Gamma)$  sont les distributions dont certains coefficients de Fourier sont nuls. Pour que l'équation de convolution  $A * X = B$ , admet une solution unique pour tout  $B$ , il faut que  $A$  ne soit pas diviseur de zéro. Aussi, l'existence d'un inverse de  $A$  n'est pas assurée si  $A$  est diviseur de zéro.

## 6.6 Exercices résolus

**Exercice 6.6.1** Déterminer les séries de Fourier associées aux fonctions  $2\pi$ -périodiques suivantes :

a)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-\pi, 0] \\ x & \text{si } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

b)

$$g(x) = e^x \text{ si } x \in [-\pi, \pi].$$

Solution : a) On a  $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{3\pi}{8}$ , et la méthode d'intégration par parties fournit

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{1}{k^2 \pi} \left( \cos \frac{k\pi}{2} - 1 \right),$$

et

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{1}{k^2 \pi} \sin \frac{k\pi}{2} - \frac{(-1)^k}{2k}.$$

D'où  $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ , c'est-à-dire

$$f(x) \sim \frac{3\pi}{16} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{(\cos \frac{k\pi}{2} - 1)}{k^2 \pi} \cos kx + \left( \frac{\sin \frac{k\pi}{2}}{k^2 \pi} - \frac{(-1)^k}{2k} \right) \sin kx \right).$$

b) De même, on a  $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x dx = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi}$ , et la méthode d'intégration par parties fournit

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos kx dx = \frac{(-1)^k}{1+k^2} \left( \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \right), \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin kx dx = -ka_k. \end{aligned}$$

Par conséquent  $g(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ , c'est-à-dire

$$e^x \sim \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2} (\cos kx - k \sin kx) \right).$$

**Exercice 6.6.2** Soit  $f$  la fonction de période  $2\pi$  qui vaut  $(\pi^2 - x^2)^2$  quand  $x \in [-\pi, \pi]$ . Trouver le développement en série de Fourier de  $f$ . Peut-on calculer la série de Fourier de  $f'$  en dérivant terme à terme celle de  $f$  ?

Solution : La fonction  $f$  est  $2\pi$ -périodique, elle est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Elle est donc développable en série de Fourier en vertu du théorème de Dirichlet, c'est-à-dire on a pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

où  $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx$ ,  $k \geq 0$  et  $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx$ ,  $k \geq 1$ . Puisque la fonction  $f$  est paire, alors  $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2)^2 dx = \frac{16\pi^4}{15}$  et  $b_k = 0$ ,  $k \geq 1$ . La méthode d'intégration par parties fournit

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2)^2 \cos kx dx = -\frac{48(-1)^k}{k^4}.$$

D'où,

$$f(x) = \frac{8\pi^4}{15} - 48 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^4} \cos kx.$$

La série dérivée a pour terme général :  $\frac{48(-1)^k}{k^3} \sin kx$ . Or

$$\left| \frac{48(-1)^k}{k^3} \sin kx \right| \leq \frac{48}{k^3},$$

et puisque  $\sum \frac{48}{k^3}$  converge, alors d'après le critère de Weierstrass la série de fonctions  $\sum \frac{48(-1)^k}{k^3} \sin kx$  converge normalement (donc absolument et uniformément) sur  $\mathbb{R}$ . Les hypothèses du théorème de dérivation étant satisfaites, il en résulte que la fonction  $f$  est dérivable et on a

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{48(-1)^k}{k^3} \sin kx.$$

**Exercice 6.6.3** Soit  $f$  la fonction définie par

$$f(x) = \sup\{\sin x, 0\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Montrer que cette fonction est développable en série de Fourier. Déterminer cette série ainsi que le domaine de convergence uniforme.

b) En déduire la valeur de  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2 - 1}$ .

c) Développer en série de Fourier la fonction  $g$  définie par

$$g(x) = |\sin x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Solution : a) Notons tout d'abord que

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } \sin x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction  $f$  est  $2\pi$ -périodique, elle est continue et admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche. D'après le théorème de Dirichlet cette fonction est développable en série de Fourier. Plus précisément, on a pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

où  $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx$ ,  $k \geq 0$  et  $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx$ ,  $k \geq 1$ . On a

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = \frac{2}{\pi}, \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos kx dx = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{1+(-1)^k}{1-k^2} & \text{si } k \neq 1 \\ 0 & \text{si } k = 1 \end{cases}, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \sin kx dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } k = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient ainsi la série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{1}{\pi} + \frac{\sin x}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\pi} \left( \frac{1+(-1)^k}{1-k^2} \right) \cos kx.$$

D'après le théorème de Dirichlet, la somme de cette série est égale à  $f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Or

$$\frac{1+(-1)^k}{1-k^2} = \begin{cases} \frac{2}{1-4l^2} & \text{si } k = 2l \\ 0 & \text{si } k = 2l+1 \end{cases}$$

donc

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{\sin x}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos 2lx}{1-4l^2}.$$

Le domaine de convergence uniforme de cette série est  $\mathbb{R}$  (cette série converge normalement sur  $\mathbb{R}$  en vertu du critère de Weierstrass car  $\left| \frac{\cos 2lx}{1-4l^2} \right| \leq \frac{1}{4l^2-1}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  et  $\sum \frac{1}{4l^2-1}$  converge).

b) Pour  $x = \frac{\pi}{2}$ , on a

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{1-4l^2},$$

d'où

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{4l^2 - 1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

c) La fonction  $g$  est paire,  $\pi$ -périodique, continue sur  $\mathbb{R}$  et de classe  $C^1$  par morceaux. Elle est donc développable en série de Fourier et celle-ci converge vers  $g(x)$  en tout point  $x \in \mathbb{R}$ . Notons que  $f(x) = \frac{1}{2}(\sin x + g(x))$ . On a montré dans a) que pour  $0 < x < \pi$ , on a

$$\sin x = \frac{1}{\pi} + \frac{\sin x}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos 2lx}{1 - 4l^2},$$

d'où

$$\sin x = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos 2lx}{1 - 4l^2}.$$

Cette série est  $\pi$ -périodique et représente le développement de  $g(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 6.6.4** Soit  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  et considérons la fonction définie par

$$f(x) = \cos \alpha x, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

- a) Montrer que  $f$  est développable en série de Fourier et déterminer cette série.
- b) Etudier la convergence de la série obtenue dans a).
- c) En déduire les relations :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\sin \alpha \pi} &= \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha^2 - k^2}, \\ \pi \cot \alpha \pi &= \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - k^2}, \\ \frac{\pi^2}{\sin^2 \alpha \pi} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\alpha - k)^2}. \end{aligned}$$

Solution : a) La fonction  $f$  est  $2\pi$ -périodique. En outre, elle est continue et admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche, donc le théorème de Dirichlet s'applique ; c'est-à-dire on a pour tout  $x$ ,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

où  $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx$ ,  $k \geq 0$  et  $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx$ ,  $k \geq 1$ . Notons que  $f$  est paire, d'où  $b_k = 0$  et

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos \alpha x dx = \frac{2 \sin \alpha \pi}{\alpha \pi}, \\ a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos \alpha x \cos kx dx, \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos(\alpha + k)x - \cos(\alpha - k)x) dx, \\ &= \frac{(-1)^k \sin \alpha \pi}{\pi} \left( \frac{1}{\alpha + k} + \frac{1}{\alpha - k} \right), \\ &= \frac{2(-1)^k \alpha \sin \alpha \pi}{\alpha^2 - k^2}. \end{aligned}$$

D'après le théorème de Dirichlet, on a pour tout  $x \in [-\pi, \pi]$ ,

$$\cos \alpha x = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \left( \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha^2 - k^2} \cos kx \right). \quad (6.6.1)$$

b) La série en question converge normalement (donc absolument et uniformément) sur  $\mathbb{R}$  en vertu du critère de Weierstrass car

$$\left| \frac{(-1)^k}{\alpha^2 - k^2} \cos kx \right| \leq \frac{1}{k^2 - \alpha^2},$$

pour  $k > |\alpha|$  et  $\sum \frac{1}{k^2 - \alpha^2}$  converge.

c) Divisons les deux membres de l'expression (6.6.1) par  $\sin \alpha \pi$  (on peut le faire car  $\sin \alpha \pi \neq 0$  pour  $\alpha \notin \mathbb{Z}$ ). On obtient pour tout  $x \in [-\pi, \pi]$ ,

$$\frac{\cos \alpha x}{\sin \alpha \pi} = \frac{1}{\alpha \pi} + \frac{2\alpha}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha^2 - k^2} \cos kx.$$

En posant successivement  $x = 0$  et  $x = \pi$  dans cette égalité, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\sin \alpha \pi} &= \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha^2 - k^2}, \\ \pi \cot \alpha \pi &= \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - k^2}. \end{aligned} \quad (6.6.2)$$

Pour obtenir la dernière relation, il suffit de remarquer que compte tenu de l'identité de Parseval,

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx,$$

on a

$$\frac{2 \sin^2 \alpha\pi}{\alpha^2\pi^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \alpha\pi}{\pi^2} \left( \frac{1}{\alpha+k} + \frac{1}{\alpha-k} \right)^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \alpha x dx.$$

En utilisant la relation (6.6.2), on obtient

$$\frac{\sin^2 \alpha\pi}{\pi^2} \left( \frac{2}{\alpha^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\alpha+k} + \frac{1}{\alpha-k} \right)^2 + \frac{\pi}{\alpha} \cot \alpha\pi - \frac{1}{\alpha^2} \right) = 1 + \frac{\sin 2\alpha\pi}{2\alpha\pi},$$

ou

$$\frac{\sin^2 \alpha\pi}{\pi^2} \left( \frac{1}{\alpha^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\alpha+k} + \frac{1}{\alpha-k} \right)^2 + \frac{\pi \cos \alpha\pi}{\alpha \sin \alpha\pi} \right) = 1 + \frac{\sin \alpha\pi \cos \alpha\pi}{\alpha\pi},$$

ou encore

$$\frac{\sin^2 \alpha\pi}{\pi^2} \left( \frac{1}{\alpha^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\alpha+k} + \frac{1}{\alpha-k} \right)^2 \right) = 1.$$

D'où l'expression

$$\frac{1}{\alpha^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\alpha+k} + \frac{1}{\alpha-k} \right)^2 = \frac{\pi^2}{\sin^2 \alpha\pi},$$

que l'on peut encore écrire sous la forme

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\alpha-k)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \alpha\pi}.$$

**Exercice 6.6.5** Soit  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique sur  $\mathbb{R}$  et intégrable sur  $[-\pi, \pi]$ . On suppose qu'il existe  $M \geq 0$  tel que pour tout  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|^\alpha,$$

pour  $|x_1 - x_2| \leq \delta$ ,  $\delta > 0$  et  $0 < \alpha \leq 1$ . Etudier la convergence de la série de Fourier de  $f$ .

Solution : Soit  $S_n(x)$  la somme partielle de la série de Fourier de  $f$ . On a

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) \right) dt, \quad (\text{voir (6.2.7)}) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(t-x)}{2 \sin \frac{(t-x)}{2}} dt, \quad (\text{voir (6.2.9)}) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} du, \quad u \equiv t-x \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} du, \end{aligned}$$

en vertu de la propriété 6.2.3, car la fonction sous le signe intégral est  $2\pi$ -périodique en  $u$ . En posant  $f(x) \equiv 1$  dans l'expression ci-dessus, on obtient

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} du = 1.$$

(En effet,

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} du = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ku \right) du = 1).$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} S_n(x) - f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+u) - f(x)) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} du, \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} g(u) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} du, \end{aligned} \quad (6.6.3)$$

où  $g(u) \equiv f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Par hypothèse, il existe  $M \geq 0$  tel que pour tout  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|^\alpha$ , pour  $|x_1 - x_2| \leq \delta$ ,  $\delta > 0$  et  $0 < \alpha \leq 1$ . Dès lors,

$$|g(u)| \leq |f(x+u) - f(x)| + |f(x-u) - f(x)| \leq 2M|u|^\alpha,$$

et il existe  $\delta_0 : 0 < \delta_0 < \inf(\delta, \pi)$  tel que pour tout  $n$ ,

$$\frac{1}{\pi} \left| \int_0^{\delta_0} g(u) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} du \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta_0} Mu^{\alpha-1} \cdot \frac{u}{\sin \frac{u}{2}} du.$$

L'expression dans le second membre ci-dessus est une intégrale convergente puisque  $\alpha \in ]0, 1]$ , d'où

$$\frac{1}{\pi} \left| \int_0^{\delta_0} g(u) \frac{\sin(n + \frac{1}{2}) u}{2 \sin \frac{u}{2}} du \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6.6.4)$$

La fonction  $u \mapsto \frac{g(u)}{2 \sin \frac{u}{2}}$  étant intégrable sur  $[\delta_0, \pi]$ , on a d'après le lemme 6.2.9,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{\delta_0}^{\pi} \frac{g(u)}{2 \sin \frac{u}{2}} \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) u du = 0.$$

Il existe donc  $n_0$  tel que : pour  $n \geq n_0$  et  $\delta$  donné, on ait

$$\frac{1}{\pi} \left| \int_{\delta_0}^{\pi} \frac{g(u)}{2 \sin \frac{u}{2}} \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) u du \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6.6.5)$$

D'après (6.6.3), (6.6.4) et (6.6.5), on a

$$|S_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

c'est-à-dire la série de Fourier de  $f$  converge en  $x$  vers  $f(x)$ .

**Exercice 6.6.6** Soit la fonction périodique de période  $2\pi$  définie par

$$f(x) = |\sin^3 x|, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

a) Déterminer la série de Fourier associée à cette fonction.

b) Etudier la convergence uniforme de la série obtenue dans a) ainsi que celle de ses séries dérivées première et seconde. En déduire que la somme de cette série est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Cette somme admet-elle une dérivée troisième ? Justifier la réponse.

c) Montrer que la fonction  $f$  est développable en série de Fourier et montrer qu'elle coincide avec la somme obtenue précédemment.

Solution : a) Soit

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

la série de Fourier associée à la fonction  $f$  où  $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx$ ,  $k \geq 0$  et  $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx$ ,  $k \geq 1$ . Notons que la fonction  $f$  est paire. D'où  $b_k = 0$ ,  $k \geq 1$ ,

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^3 x dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4} dx = \frac{8}{3\pi},$$

et

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin^3 x \cos kx dx, \\
 &= \frac{3}{2\pi} \int_0^\pi \sin x \cos kx dx - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \sin 3x \cos kx dx, \\
 &= \frac{3}{4\pi} \int_0^\pi (\sin(x+1)x - \sin(k-1)x) dx \\
 &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi (\sin(x+3)x - \sin(k-3)x) dx, \\
 &= \frac{3}{4\pi} \left[ -\frac{\cos(x+1)x}{k+1} + \frac{\cos(k-1)x}{k-1} \right]_0^\pi \\
 &\quad - \frac{1}{4\pi} \left[ -\frac{\cos(x+3)x}{k+3} + \frac{\cos(k-3)x}{k-3} \right]_0^\pi, \\
 &= \frac{12((-1)^k + 1)}{\pi(k^2 - 1)(k^2 - 9)}.
 \end{aligned}$$

Or

$$(-1)^k + 1 = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 2l + 1 \\ 2 & \text{si } k = 2l \end{cases}$$

donc

$$a_k = \frac{24}{\pi(4l^2 - 1)(4l^2 - 9)}.$$

Par conséquent,

$$\frac{4}{3\pi} + \frac{24}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos 2lx}{(4l^2 - 1)(4l^2 - 9)},$$

est la série de Fourier associée à  $f$

b) On a pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $l \geq 2$ ,

$$\left| \frac{\cos 2lx}{(4l^2 - 1)(4l^2 - 9)} \right| \leq \frac{1}{(4l^2 - 1)(4l^2 - 9)}.$$

Puisque la série  $\sum \frac{1}{(4l^2 - 1)(4l^2 - 9)}$  converge, alors d'après le critère de Weierstrass la série  $\sum \frac{\cos 2lx}{(4l^2 - 1)(4l^2 - 9)}$  converge normalement (et par suite uniformément) sur  $\mathbb{R}$ . Dérivons formellement cette série,

$$-\frac{48}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l \sin 2lx}{(4l^2 - 1)(4l^2 - 9)}.$$

Comme ci-dessus, on a pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $l \geq 2$ ,

$$\left| \frac{l \sin 2lx}{(4l^2 - 1)(4l^2 - 9)} \right| \leq \frac{l}{(4l^2 - 1)(4l^2 - 9)},$$

la série  $\sum \frac{l}{(4l^2-1)(4l^2-9)}$  converge et d'après le critère de Weierstrass la série  $\sum \frac{l \sin 2lx}{(4l^2-1)(4l^2-9)}$  converge normalement (donc uniformément) sur  $\mathbb{R}$ . La dérivation est donc justifiée en vertu du théorème de dérivation. De même, on dérive formellement la nouvelle série obtenue,

$$-\frac{96}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l^2 \cos 2lx}{(4l^2-1)(4l^2-9)}.$$

On a

$$\left| \frac{l^2 \cos 2lx}{(4l^2-1)(4l^2-9)} \right| \leq \frac{l^2}{(4l^2-1)(4l^2-9)},$$

et puisque la série  $\sum \frac{l^2}{(4l^2-1)(4l^2-9)}$  converge, alors la convergence normale (et donc uniforme) sur  $\mathbb{R}$  de la série  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{l^2 \cos 2lx}{(4l^2-1)(4l^2-9)}$  résulte du critère de Weierstrass et ici aussi la dérivation est justifiée. Par conséquent, la somme de la série en question est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ . De nouveau, dérivons formellement la dernière série obtenue,

$$-\frac{192}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l^3 \sin 2lx}{(4l^2-1)(4l^2-9)}.$$

Pour l'étude de la convergence uniforme de cette série, on ne peut plus utiliser le critère de Weierstrass, par contre on peut utiliser le critère d'Abel-Dirichlet. En effet, la suite  $\left( \frac{l^3}{(4l^2-1)(4l^2-9)} \right)$  décroît vers 0 lorsque  $l \rightarrow \infty$  et (voir l'inégalité obtenue dans la preuve de la proposition 6.1.3) :

$$\left| \sum_{l=1}^{\infty} \sin 2lx \right| \leq \frac{1}{|\sin x|}, \quad x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

D'après le critère d'Abel-Dirichlet, la série  $\sum \frac{l^3 \sin 2lx}{(4l^2-1)(4l^2-9)}$  converge uniformément dans tout intervalle ne contenant pas de points d'abscisse  $k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Pour  $x = k\pi$ , cette série converge évidemment. En conclusion, la somme de la série initiale admet une dérivée troisième en tout point  $x \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

c) La fonction  $f$  est  $2\pi$ -périodique, elle est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . D'après le théorème de Dirichlet  $f$  est développable en série de Fourier, c'est-à-dire on a pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = |\sin^3 x| = \frac{4}{3\pi} + \frac{24}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos 2lx}{(4l^2-1)(4l^2-9)}.$$

**Exercice 6.6.7** Soit  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique. On suppose que la dérivée  $f'(x)$  est continue et qu'il existe une constante  $M$  telle que :  $|f'(x)| \leq M$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Montrer que les coefficients de Fourier  $a_k$  et  $b_k$  satisfont aux inégalités suivantes :

$$|a_k| \leq 2 \frac{M}{k}, \quad |b_k| \leq 2 \frac{M}{k}, \quad k \in \mathbb{N}^*$$

Solution : On a

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \\ &= \frac{1}{k\pi} f(x) \sin kx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin kx dx, \\ &= -\frac{1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin kx dx, \end{aligned}$$

d'où  $|a_k| \leq \frac{1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} M dx = 2 \frac{M}{k}$ . De même, on a

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, \\ &= -\frac{1}{k\pi} f(x) \cos kx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos kx dx, \\ &= \frac{1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos kx dx, \end{aligned}$$

d'où  $|b_k| \leq \frac{1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} M dx = 2 \frac{M}{k}$ .

**Exercice 6.6.8** Soit  $f$  la fonction définie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \frac{1}{\cos x + \cosh \alpha},$$

où  $\alpha$  est un nombre réel strictement supérieur à 0. Montrer que cette fonction est développable en série de Fourier et déterminer cette série.

Solution : Rappelons que la fonction  $\cosh$  est une application de  $\mathbb{R}$  dans  $[1, +\infty[$  définie par  $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ , strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$ . Pour un nombre réel  $\alpha > 0$ , on a  $\cosh \alpha > 0$  et  $\cos x + \cosh \alpha > 0$ . La fonction  $f$  est  $2\pi$ -périodique, elle est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Elle est donc développable en série de Fourier en vertu du théorème de Dirichlet, c'est-à-dire on a pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

où  $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx$ ,  $k \geq 0$  et  $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx$ ,  $k \geq 1$ . Puisque la fonction  $f$  est paire, alors  $b_k = 0$ ,  $k \geq 1$ , et

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos kx}{\cos x + \cosh \alpha} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos kx}{\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} + \cosh \alpha} dx,$$

d'où

$$a_k = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{e^{ix}}{(e^{ix} + e^{\alpha})(e^{ix} + e^{-\alpha})} \cos kx dx,$$

ou

$$a_k = \frac{2}{\pi \sinh \alpha} \int_0^{\pi} \frac{e^{\alpha}(e^{ix} + e^{-\alpha}) - e^{-\alpha}(e^{ix} + e^{\alpha})}{(e^{ix} + e^{\alpha})(e^{ix} + e^{-\alpha})} \cos kx dx,$$

ou encore

$$a_k = \frac{2}{\pi \sinh \alpha} \int_0^{\pi} \left( \frac{e^{\alpha}}{e^{ix} + e^{\alpha}} - \frac{e^{-\alpha}}{e^{ix} + e^{-\alpha}} \right) \cos kx dx.$$

Or

$$\frac{e^{\alpha}}{e^{ix} + e^{\alpha}} = \frac{1}{1 + \frac{e^{ix}}{e^{\alpha}}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-n\alpha} e^{inx},$$

car  $\left| \frac{e^{ix}}{e^{\alpha}} \right| = \frac{1}{e^{\alpha}} < 1$  et

$$\begin{aligned} \frac{e^{-\alpha}}{e^{ix} + e^{-\alpha}} &= \frac{e^{-\alpha} e^{-ix}}{1 + \frac{e^{-\alpha}}{e^{ix}}}, \\ &= \frac{e^{-\alpha}}{e^{-ix}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-n\alpha} e^{-inx}, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-(n+1)\alpha} e^{-i(n+1)x}, \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n\alpha} e^{-inx}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi \sinh \alpha} \int_0^{\pi} \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-n\alpha} e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n\alpha} e^{-inx} \right) \cos kx dx, \\ &= \frac{2}{\pi \sinh \alpha} \int_0^{\pi} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n\alpha} (e^{inx} + e^{-inx}) \right) \cos kx dx, \\ &= \frac{2}{\pi \sinh \alpha} \int_0^{\pi} \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n\alpha} \cos nx \right) \cos kx dx, \\ &= \frac{2}{\pi \sinh \alpha} \int_0^{\pi} \cos kx dx + \frac{4}{\pi \sinh \alpha} \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n\alpha} \cos nx \cos kx dx. \end{aligned}$$

Comme  $|(-1)^n e^{-n\alpha} \cos nx| \leq e^{-n\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ , converge, alors d'après le critère de Weierstrass la série  $\sum (-1)^n e^{-n\alpha} \cos nx \cos kx$  converge normalement (donc absolument et uniformément) sur  $\mathbb{R}$ . Les hypothèses du théorème d'intégration étant satisfaites, il en résulte que l'on peut permute les deux signes et par conséquent

$$a_k = \frac{2}{\pi \sinh \alpha} \int_0^\pi \cos kx dx + \frac{4}{\pi \sinh \alpha} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n\alpha} \int_0^\pi \cos nx \cos kx dx.$$

En tenant compte du fait que  $\int_0^\pi \cos kx dx = 0$  et

$$\int_0^\pi \cos nx \cos kx dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos(n+k)x + \cos(n-k)x) dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } n = k \\ 0 & \text{si } n \neq k \end{cases}$$

on obtient finalement

$$a_k = \frac{2}{\sinh \alpha} (-1)^k e^{-k\alpha}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Par conséquent, la série de Fourier de la fonction  $f$  s'écrit

$$f(x) = \frac{1}{\sinh \alpha} \left( 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-k\alpha} \cos kx \right).$$

**Exercice 6.6.9** Soit  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique sur  $\mathbb{R}$  et intégrable sur  $[-\pi, \pi]$ . On suppose que les limites à droite et à gauche de  $f$  en  $x$  existent.

a) (Dini). Montrer que si l'intégrale

$$\int_0^\delta \frac{f(x+u) + f(x-u) - f(x+0) - f(x-0)}{u} du,$$

converge absolument, alors la série de Fourier associée à la fonction  $f$  converge au point  $x$  vers  $\frac{f(x+0) - f(x-0)}{2}$ . Que peut-on dire si la fonction  $f$  est continue au point  $x$  ?

b) Montrer que si  $f$  admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche au point  $x$ , alors l'intégrale ci-dessus converge absolument.

Solution : a) Il suffit de reprendre la solution proposée dans l'exercice 6.6.5. On a

$$S_n(x) - \frac{f(x+0) - f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g(u) \frac{\sin(n + \frac{1}{2}) u}{2 \sin \frac{u}{2}} du,$$

où  $g(u) \equiv f(x+u) + f(x-u) + f(x+0) - f(x-0)$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Par hypothèse, l'intégrale  $\int_0^\delta \frac{|g(u)|}{u} du$  converge. Dès lors, il existe  $\delta_0 : 0 < \delta_0 < \inf(\delta, \pi)$  tel que pour tout  $n$ ,

$$\frac{1}{\pi} \left| \int_0^{\delta_0} g(u) \frac{\sin(n + \frac{1}{2}) u}{2 \sin \frac{u}{2}} du \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta_0} \frac{|g(u)|}{u} \cdot \frac{u}{\sin \frac{u}{2}} du \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

La fonction  $u \mapsto \frac{g(u)}{2 \sin \frac{u}{2}}$  est intégrable sur  $[\delta_0, \pi]$  et d'après le lemme 6.2.9, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{\delta_0}^{\pi} \frac{g(u)}{2 \sin \frac{u}{2}} \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) u du = 0.$$

Il existe donc  $n_0$  tel que : pour  $n \geq n_0$  et  $\delta$  donné, on ait

$$\frac{1}{\pi} \left| \int_{\delta_0}^{\pi} \frac{g(u)}{2 \sin \frac{u}{2}} \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) u du \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquent,

$$\left| S_n(x) - \frac{f(x+0) - f(x-0)}{2} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

la série de Fourier de  $f$  converge en  $x$  vers  $\frac{f(x+0) - f(x-0)}{2}$ . En outre, si  $f$  est continue en  $x$ , alors la série de Fourier de  $f$  converge au point  $x$  vers  $f(x)$ .

b) Notons tout d'abord que

$$\begin{aligned} & \int_0^\delta \frac{|f(x+u) + f(x-u) - f(x+0) - f(x-0)|}{u} du \\ & \leq \int_0^\delta \frac{|f(x+u) - f(x+0)|}{u} du + \int_0^\delta \frac{|f(x-0) - f(x-u)|}{u} du. \end{aligned}$$

Dire que  $f$  admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche au point  $x$ , cela signifie que les limites

$$f'(x+0) \equiv \lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u > 0}} \frac{f(x+u) - f(x+0)}{u}, \quad f'(x-0) \equiv \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(x-0) - f(x-h)}{u},$$

existent. Dès lors, les fonctions

$$g(u) = \begin{cases} \frac{|f(x+u) - f(x+0)|}{f'(x+0)} & \text{si } u \in ]0, \delta] \\ 0 & \text{si } u = 0 \end{cases}$$

et

$$h(u) = \begin{cases} \frac{|f(x-0) - f(x-u)|}{f'(x-0)} & \text{si } u \in ]0, \delta] \\ 0 & \text{si } u = 0 \end{cases}$$

sont bornées sur  $[0, \delta]$  et donc intégrables sur tout intervalle de la forme  $[\varepsilon, \delta]$  où  $0 < \varepsilon < \delta$ . Par conséquent, les fonctions  $g$  et  $h$  sont intégrables sur  $[0, \delta]$  et

$$\int_0^\delta \frac{|f(x+u) + f(x-u) - f(x+0) - f(x-0)|}{u} du,$$

est une intégrale convergente.

**Exercice 6.6.10** Soit  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique, continue et développable en une série de Fourier dont les coefficients de Fourier sont  $a_k = \frac{1}{3^k}$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$  et  $b_k = 0$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer explicitement cette fonction.

Solution : On a

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \\
 &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{3^k}, \\
 &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} e^{ikx}}{3^k}, \\
 &= \frac{1}{2} + \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{e^{ix}}{3} \right)^k, \\
 &= \frac{1}{2} + \operatorname{Re} \left( \frac{e^{ix}}{3 - e^{ix}} \right), \text{ car } \left| \frac{e^{ix}}{3} \right| = \frac{1}{3} < 1 \\
 &= \frac{2}{5 - 3 \cos x}.
 \end{aligned}$$

**Exercice 6.6.11** Soit  $f$  la fonction périodique de période  $2\pi$  définie sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$  par

$$x \mapsto f(x) = \cosh(x - \pi).$$

1) Déterminer la série de Fourier associée à la fonction  $f$ .

2) Montrer que la série obtenue converge uniformément vers  $f$ .

3) En déduire les valeurs des sommes  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}$  et  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2}$ .

4) Montrer que la série  $\sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-|x+2l\pi|}$  converge uniformément sur  $[0, 2\pi]$

vers une fonction continue  $g$ .

5) Montrer que  $g$  est développable en série de Fourier et préciser cette série.

6) Calculer explicitement  $g(x)$  et en déduire les résultats obtenus dans les questions 1) et 2).

Solution : 1) On a

$$f(x) = \cosh(x - \pi) = \frac{e^{x-\pi} + e^{-x+\pi}}{2}.$$

Par hypothèse,  $f$  est  $2\pi$ -périodique, d'où

$$f(-x) = f(-x + 2\pi) = ch(-x + \pi) = \frac{e^{-x+\pi} + e^{x-\pi}}{2} = f(x).$$

Donc la fonction  $f$  est paire et par conséquent  $b_k = 0$ ,  $k \geq 1$  et

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cosh(x - \pi) \cos kx dx, \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left( \frac{e^{x-\pi} + e^{-x+\pi}}{2} \right) \left( \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} \right) dx, \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cosh((ik+1)x - \pi) + (\cosh((ik-1)x + \pi))) dx, \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{\sinh((ik+1)x - \pi)}{ik+1} + \frac{(\sinh((ik-1)x + \pi))}{ik-1} \right) \Big|_0^\pi, \\ &= \frac{2 \sinh \pi}{\pi(1+k^2)}. \end{aligned}$$

Dès lors,

$$f(x) \sim \frac{\sinh \pi}{\pi} + \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{1+k^2}.$$

2) On a pour tout  $x$ ,  $\left| \frac{\cos kx}{1+k^2} \right| \leq \frac{1}{1+k^2}$ . Puisque la série  $\sum \frac{1}{1+k^2}$  converge, alors d'après le critère de Weierstrass la série  $\sum \frac{\cos kx}{1+k^2}$  converge normalement, donc elle converge absolument et uniformément. Par conséquent

$$f(x) = \cosh(x - \pi) = \frac{\sinh \pi}{\pi} + \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{1+k^2}, \quad x \in [0, 2\pi]$$

3) Pour  $x = 0$ , on obtient (d'après 2)),

$$\cosh(-\pi) = \cosh(\pi) = \frac{\sinh \pi}{\pi} + \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2},$$

et on en déduit immédiatement ,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} \coth \pi.$$

De même, avec  $x = \pi$ , on obtient

$$\cosh(0) = 1 = \frac{\sinh \pi}{\pi} + \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2},$$

d'où,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2 \sinh \pi}.$$

4) Pour tout  $x \in [0, 2\pi]$ , on a

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-|x+2l\pi|} = \sum_{l=-\infty}^{-1} e^{x+2l\pi} + \sum_{l=0}^{\infty} e^{-x-2l\pi} = \sum_{l=1}^{\infty} e^{x-2l\pi} + \sum_{l=0}^{\infty} e^{-x-2l\pi}.$$

Comme  $e^{x-2l\pi} = e^x (e^{-2\pi})^l \leq e^{2\pi} (e^{-2\pi})^l$ , et que  $\sum_{l=1}^{\infty} (e^{-2\pi})^l$  converge, alors d'après le critère de Weierstrass la série  $\sum_{l=1}^{\infty} e^{x-2l\pi}$  converge normalement (donc absolument et uniformément) sur  $[0, 2\pi]$ . On obtient la même conclusion pour la série  $\sum_{l=0}^{\infty} e^{-x-2l\pi}$  puisque  $e^{-x-2l\pi} = e^{-x} (e^{-2\pi})^l \leq (e^{-2\pi})^l$ , et  $\sum_{l=1}^{\infty} (e^{-2\pi})^l$  converge. Par conséquent, la série  $\sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-|x+2l\pi|}$  converge uniformément sur  $[0, 2\pi]$  vers une fonction continue  $g$ , en vertu du théorème de continuité (en fait, on montre que  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$ ).

5) La fonction  $g$  est  $2\pi$ -périodique, c'est-à-dire

$$g(x + 2\pi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-|x+2(1+l)\pi|} = g(x).$$

D'après 4), on sait que  $g$  est continue. Pour pouvoir appliquer le théorème de Dirichlet, il faut montrer que cette fonction admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche (en fait, la dérivable de  $g$  résulte immédiatement du théorème de dérivation car toutes les hypothèses sont satisfaites y compris la convergence uniforme des séries dérivées de  $\sum e^{x-2l\pi}$  et  $\sum e^{-x-2l\pi}$ ; il suffit d'utiliser le même type de raisonnement fait dans 4). Dès lors,

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

où  $a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \cos kx dx$  et  $b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \sin kx dx$ . On a

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-|x+2l\pi|} \right) \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-|x+2l\pi|} \cos kx dx,$$

car la série converge uniformément d'après 4). En posant  $y = x + 2l\pi$ , on obtient

$$a_k = \frac{1}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{2l\pi}^{2l\pi+2\pi} e^{-|y|} \cos ky dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|} \cos ky dy.$$

Cette intégrale converge absolument, donc la fonction sous le signe intégral est intégrable au sens de Lebesgue. De même, on obtient

$$b_k = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|} \sin ky dy.$$

Or la fonction  $e^{-|y|} \sin ky$  est impaire, d'où  $b_k = 0$  et par conséquent

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|} dy + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|} \cos ky dy \right) \cos kx.$$

6) La fonction  $e^{-|y|} \cos xy$  étant paire, on a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|} \cos xy dy &= 2 \int_0^{\infty} e^{-y} \cos xy dy, \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{-y} \left( \frac{e^{ixy} + e^{-ixy}}{2} \right) dy, \\ &= \int_0^{\infty} (e^{-y+ixy} + e^{-y-ixy}) dy, \\ &= \left[ \frac{e^{-y+ixy}}{-1+ix} + \frac{e^{-y-ixy}}{-1-ix} \right]_{y=0}^{y=\infty}, \\ &= \frac{2}{1+x^2}. \end{aligned}$$

On a donc d'après 5),

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|} dy + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|} \cos ky dy \right) \cos kx = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{1+k^2}.$$

De même, on a d'après 4),

$$g(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-|x+2l\pi|} = \sum_{l=1}^{\infty} e^{x-2l\pi} + \sum_{l=0}^{\infty} e^{-x-2l\pi},$$

ou

$$g(x) = (e^x e^{-2\pi} + e^{-x}) \left( 1 + e^{-2\pi} + (e^{-2\pi})^2 + \dots \right),$$

ou encore

$$g(x) = \frac{e^x e^{-2\pi} + e^{-x}}{1 - e^{-2\pi}} = \frac{e^x e^{-\pi} + e^{-x} e^{\pi}}{e^{\pi} - e^{-\pi}} = \frac{\coth(x - \pi)}{\sinh \pi}.$$

En tenant compte des résultats obtenus ci-dessus, on obtient finalement

$$\coth(x - \pi) = \frac{\sinh \pi}{\pi} + \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{1+k^2}, \quad x \in [0, 2\pi]$$

**Exercice 6.6.12** Démontrer que :

$$\arcsin(\sin x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{2}}{k^2} \sin kx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Solution : La fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \arcsin(\sin x)$ , est  $2\pi$ -périodique, continue et dérivable à droite et à gauche sur  $\mathbb{R}$ . D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de cette fonction converge vers  $f$ , c'est-à-dire

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Notons que la fonction  $f$  est impaire, donc  $a_k = 0, \forall k \in \mathbb{N}$  et

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx.$$

Or  $f(x)$  est égale à  $x$  si  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  et à  $\pi - x$  si  $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ , donc

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin kx dx + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx, \\ &= \frac{2}{\pi} \left( -\frac{\pi}{2k} \cos \frac{k\pi}{2} + \frac{1}{k^2} \sin \frac{k\pi}{2} \right) + \frac{2}{\pi} \left( \frac{\pi}{2k} \cos \frac{k\pi}{2} + \frac{1}{k^2} \sin \frac{k\pi}{2} \right), \\ &= \frac{4}{\pi k^2} \sin \frac{k\pi}{2}, \end{aligned}$$

et le résultat en découle.

**Exercice 6.6.13** Soit  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique sur  $\mathbb{R}$ , intégrable sur  $[-\pi, \pi]$  et à variation bornée sur un intervalle d'une période. Montrer que la série de Fourier de  $f$  converge pour tous les  $x$  vers  $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ .

Solution : On utilise une méthode similaire à celle utilisée dans la preuve du théorème 6.2.10. D'après (6.2.9), on a

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(t-x)}{2 \sin \frac{(t-x)}{2}} dt.$$

En posant  $u \equiv t - x$ , on obtient

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} du = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} du,$$

en vertu de la propriété 6.2.3. Dès lors,

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x+u) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} du + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x+u) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} du,$$

ou

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varphi(u) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} du,$$

avec  $\varphi(u) \equiv f(x+u) + f(x-u)$  ou encore

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \varphi(u) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} du + \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi \varphi(u) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} du \equiv I + J.$$

Notons tout d'abord que d'après le lemme 6.2.9, l'intégrale  $J$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Concernant l'intégrale  $I$ , on procède comme suit : On a

$$I = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \varphi(u) \frac{\frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{u} du.$$

Par hypothèse la fonction  $f$  est à variation bornée, il en est donc de même pour  $\varphi$ . Or la fonction  $u \mapsto \frac{u}{\sin \frac{u}{2}}$ , est croissante sur l'intervalle  $[0, \delta]$ , on en déduit que la fonction  $x \mapsto \varphi(u) \frac{\frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}}$ , est aussi à variation bornée sur  $[0, \delta]$ . Rappelons que toute fonction à variation bornée est différence de deux fonctions monotones. Dès lors, en ajoutant et retranchant de  $\varphi(u)$  la valeur  $\varphi(0+0)$ , on obtient

$$I = I_1 + I_2,$$

où

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \varphi(0+0) \int_0^\delta \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{u} du,$$

et

$$I_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta (\varphi(u) - \varphi(0+0)) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{u} du.$$

Notons que  $I_1 = \frac{1}{\pi} \varphi(0+0) \int_0^{(n+\frac{1}{2})\delta} \frac{\sin t}{t} dt$  où  $t \equiv (n + \frac{1}{2})u$  et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_1 = \frac{1}{\pi} \varphi(0+0) \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \varphi(0+0).$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Pour  $x \in ]0, \delta[$ , on a  $0 \leq \varphi(u) - \varphi(0+0) < \varepsilon$  et d'après le second théorème de la moyenne,

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{\pi} (\varphi(\delta) - \varphi(0+0)) \int_a^\delta \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{u} du, \quad a \in [0, \delta] \\ &= \frac{1}{\pi} (\varphi(\delta) - \varphi(0+0)) \int_{(n+\frac{1}{2})a}^{(n+\frac{1}{2})\delta} \frac{\sin t}{t} dt, \quad t \equiv (n + \frac{1}{2})u. \end{aligned}$$

Dès lors,

$$|I_2| \leq \frac{\varepsilon}{\pi} \left| \int_{(n+\frac{1}{2})a}^{(n+\frac{1}{2})\delta} \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq \frac{\varepsilon M}{\pi},$$

car la fonction  $t \mapsto \int_{(n+\frac{1}{2})a}^{(n+\frac{1}{2})\delta} \frac{\sin t}{t} dt$ , est bornée puisque

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^N \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Par conséquent, lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , l'intégrale  $I$  (et donc  $S_n$ ) tend vers  $\frac{1}{2}\varphi(0+0) = \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$ .

**Exercice 6.6.14** *On considère la série de fonctions*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^3 kx}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

a) Montrer que cette série converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  et désignons par  $S$  la somme de cette série. Montrer que  $S$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

b) Montrer que  $S$  est développable en série de Fourier et déterminer explicitement  $S$ .

Solution : a) Posons  $f_k(x) = \frac{\sin^3 kx}{k!}$ . On a  $|f_k(x)| \leq \frac{1}{k!}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  et  $\sum \frac{1}{k!}$  converge (il suffit d'utiliser le critère du quotient de d'Alembert), donc la série  $\sum f_k$  converge normalement (et par suite uniformément) sur  $\mathbb{R}$  en vertu du critère de Weierstrass. D'après le théorème de continuité, la somme  $S$  de cette série est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ . On a  $f'_k(x) = \frac{3k}{k!} \sin^2 kx \cos kx$ , et  $|f'_k(x)| \leq \frac{3k}{k!}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Comme ci-dessus, la série dérivée  $\sum f'_k$  converge normalement (et donc uniformément) sur  $\mathbb{R}$  et d'après le théorème de dérivation,  $S$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On montre aisément que la dérivée  $n$ ième de  $f_k(x)$  satisfait à  $|f_k^{(n)}(x)| \leq \frac{Ck^n}{k!}$ ,  $C = \text{constante}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Evidemment, la série  $\sum \frac{Ck^n}{k!}$  converge (d'après le critère du quotient de d'Alembert car  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)^n}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{k^n} = 0 < 1$ ) et la série  $\sum f_k^{(n)}$  converge normalement (et donc uniformément) sur  $\mathbb{R}$ . On en déduit comme ci-dessus que  $S$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

b) Notons que

$$f_k(x) = \frac{3}{4} \frac{\sin kx}{k!} - \frac{1}{4} \frac{\sin 3kx}{k!} = \operatorname{Im} \left( \frac{3}{4} \frac{e^{ikx}}{k!} - \frac{1}{4} \frac{e^{3ikx}}{k!} \right).$$

Les séries  $\sum \frac{e^{ikx}}{k!}$  et  $\sum \frac{e^{3ikx}}{k!}$  convergent normalement (et donc uniformément) sur  $\mathbb{R}$  et on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k!} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(e^{ix})^k}{k!} = e^{e^{ix}} - 1, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{3ikx}}{k!} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(e^{3ix})^k}{k!} = e^{e^{3ix}} - 1.\end{aligned}$$

Dès lors,

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \frac{3}{4} e^{\cos x} \sin(\sin x) - \frac{1}{4} e^{\cos 3x} \sin(\sin 3x),$$

et de la convergence uniforme, on déduit que ce développement représente la série de Fourier de la fonction  $S$ .

**Exercice 6.6.15** Soit  $f$  une fonction intégrable sur l'intervalle  $[-\pi, \pi]$  et différentiable au point  $x_0$ . Montrer que la série de Fourier de  $f$  converge vers  $f(x_0)$ .

Solution : Par hypothèse,  $f$  est différentiable au point  $x_0$ , donc

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0),$$

existe. Soit  $\varphi$  le prolongement continu en  $x_0$  de  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ . Autrement dit (caractérisation de Carathéodory), on a  $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\varphi(x)$ . Sans restreindre la généralité, on peut supposer que  $x_0 = 0$  et  $f(x_0) = 0$  (il suffit de faire respectivement une translation horizontale et une translation verticale). Donc  $f(x) = x\varphi(x)$ , où  $\varphi$  est continue. La fonction  $\psi(x) \equiv \frac{f(x)}{e^{ix} - 1}$ , est évidemment continue en 0. En notation complexe, la série de Fourier de  $f$  s'écrit (proposition 6.2.5), sous la forme

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

D'où

$$\begin{aligned}c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) (e^{ix} - 1) e^{-ikx} dx, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) e^{-i(k-1)x} dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) e^{-ikx} dx, \\ &= d_{k-1} - d_k,\end{aligned}$$

où  $d_k$  désignent les coefficients de Fourier de la fonction  $\psi$ . On a

$$S_n(x) \equiv \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} = \sum_{k=-n}^n (d_{k-1} - d_k) e^{ikx},$$

et

$$S_n(0) = \sum_{k=-n}^n (d_{k-1} - d_k) = d_{-n-1} - d_n, \quad (\text{série télescopique}).$$

En appliquant le lemme 6.2.9, à la fonction  $\psi$  et aux coefficients  $d_n$ , on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (d_{-n-1} - d_n) = 0 = f(0).$$

**Exercice 6.6.16** Développer en série de Fourier les fonctions suivantes :

$$x \mapsto e^{\cos x} \cos(\sin x), \quad x \mapsto e^{\cos x} \sin(\sin x).$$

Solution : On a

$$\begin{aligned} e^{\cos x} \cos(\sin x) + ie^{\cos x} \sin(\sin x) &= e^{\cos x} e^{i \sin x}, \\ &= e^{e^{ix}}, \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{ix})^k}{k!}, \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\cos kx}{k!} + i \frac{\sin kx}{k!} \right). \end{aligned}$$

D'après le critère de Weierstrass, les séries  $\sum \frac{\cos kx}{k!}$  et  $\sum \frac{\sin kx}{k!}$  convergent normalement (et donc uniformément) sur  $\mathbb{R}$ . Dès lors, les développements

$$e^{\cos x} \cos(\sin x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos kx}{k!},$$

et

$$e^{\cos x} \sin(\sin x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin kx}{k!},$$

représentent les séries de Fourier cherchées.

**Exercice 6.6.17** Montrer que la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$$

n'est pas une série de Fourier (d'une fonction intégrable  $f$ ).

Solution : La série en question converge pour tout  $x$ , en vertu du critère d'Abel-Dirichlet (voir la preuve de la proposition 6.1.3). On raisonne par l'absurde. Supposons que cette série soit la série de Fourier d'une fonction intégrable  $f$ . D'après l'inégalité de Bessel (voir section 6.4), c'est-à-dire

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx,$$

on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2\alpha}} \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

Or  $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$  est fini, d'où la série  $\sum \frac{1}{k^{2\alpha}}$  converge ce qui est absurde car cette série diverge si  $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ . Par conséquent, la série proposée n'est la série de Fourier d'aucune fonction.

**Exercice 6.6.18** 1) Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  avec  $a < b$  et soit  $f$  et  $g$  deux fonctions bornées intégrables. On suppose que dans l'intervalle  $[a, b]$  les dérivées  $f'$  et  $g'$  existent sauf en un nombre fini de points. Montrer que si  $f'$  et  $g'$  sont réglées, alors

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

(Autrement dit, la formule d'intégration par parties est encore valable dans ce cas).

2) Soit  $f$  une fonction continue sur  $[-\pi, \pi]$  avec  $f(-\pi) = f(\pi)$ . On suppose que la dérivée  $f'(x)$  est une fonction réglée et admet une dérivée à droite et une droite à gauche. Montrer qu'en tout point  $x$  où  $f'(x)$  est continue, si

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

est la série de Fourier de  $f$ , alors on peut la dériver terme à terme et on a

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k(-a_k \sin kx + b_k \cos kx).$$

(Notons que la convergence uniforme de la série dérivée n'est pas exigée).

Solution : 1) On a

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f'(x)g(x)dx &= \int_a^{c_1} f'(x)g(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f'(x)g(x)dx \\
 &\quad + \cdots + \int_{c_{n-1}}^{c_n} f'(x)g(x)dx + \int_{c_n}^b f'(x)g(x)dx, \\
 &= f(c_1)g(c_1) - f(a)g(a) - \int_a^{c_1} f(x)g'(x)dx \\
 &\quad + f(c_2)g(c_2) - f(c_1)g(c_1) - \int_{c_1}^{c_2} f(x)g'(x)dx \\
 &\quad + f(c_n)g(c_n) - f(c_{n-1})g(c_{n-1}) - \int_{c_{n-1}}^{c_n} f(x)g'(x)dx \\
 &\quad + f(b)g(b) - f(c_n)g(c_n) - \int_{c_n}^b f(x)g'(x)dx.
 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f'(x)g(x)dx &= f(b)g(b) - f(a)g(a) \\
 &\quad - \left( \int_a^{c_1} f(x)g'(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)g'(x)dx + \cdots + \int_{c_n}^b f(x)g'(x)dx \right), \\
 &= f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.
 \end{aligned}$$

2) Par hypothèse  $f'$  est réglée et admet une dérivée à droite et à gauche, donc (théorème 6.2.10) la série de Fourier de  $f'$  converge simplement en tout point  $x$  vers  $\frac{1}{2}(f'(x+0) + f'(x-0))$ . En outre, en tout point  $x$  où  $f'$  est continue, sa série de Fourier converge vers  $f'(x)$ , c'est-à-dire

$$f'(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx),$$

où  $\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos kx dx$  et  $\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin kx dx$  sont les coefficients de Fourier de  $f'$ . Puisque  $f(-\pi) = f(\pi)$ , alors

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)dx = \frac{1}{\pi} (f(\pi) - f(-\pi)) = 0,$$

et d'après 1), on a

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos kx dx, \\ &= \frac{1}{\pi} f(x) \cos kx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, \\ &= kb_k,\end{aligned}$$

où  $b_k$  est le coefficient de Fourier de  $f$ . De même, on a

$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin kx dx = -ka_k,$$

où  $a_k$  est le coefficient de Fourier de  $f$ .

**Exercice 6.6.19** Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $[-\pi, \pi]$ .

a) Montrer qu'on peut intégrer terme à terme la série de Fourier de  $f$ , c'est-à-dire

$$\int f(x) dx = \frac{a_0}{2}x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (a_k \sin kx - b_k \cos kx) + \text{constante.}$$

(Notons que la convergence de la série de Fourier de  $f$  n'est pas exigée et on peut affirmer que la série intégrée converge vers une primitive de  $f$ ).

b) En déduire que

$$\int_{-\pi}^x f(t) dt = \frac{a_0}{2}(x + \pi) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (a_k \sin kx - b_k \cos kx + (-1)^k b_k).$$

Solution : a) La fonction définie par  $F(x) = \int_{-\pi}^x f(t) dt - \frac{a_0}{2}\pi$ , est continue et sa dérivée  $F'(x) = f(x) - \frac{a_0}{2}$ , est continue par morceaux. Notons que  $F$  admet en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche. On a  $F(-\pi) = \frac{a_0}{2}\pi$  et

$$F(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt - \frac{a_0}{2}\pi = \pi a_0 - \frac{a_0}{2}\pi = -\frac{a_0}{2}\pi = F(-\pi).$$

La fonction  $F$  admet un prolongement continu périodique et possède en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche. D'après le théorème 6.2.10, on a

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx),$$

où  $\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos kx dx$  et  $\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin kx dx$ . En utilisant la méthode de l'intégration par parties tout en tenant compte de l'expression de  $F'(x)$  ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos kx dx, \\ &= \frac{1}{k\pi} F(x) \sin kx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( f(x) - \frac{a_0}{2} \right) \sin kx dx, \\ &= -\frac{b_k}{k}.\end{aligned}$$

De même, on obtient  $\beta_k = \frac{a_k}{k}$ . D'où

$$\begin{aligned}\int f(x) dx &= \frac{a_0}{2} x + F(x) + C, \quad C \equiv \text{constante} \\ &= \frac{a_0}{2} x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (-b_k \cos kx + a_k \sin kx) + K, \quad K \equiv C + \frac{a_0}{2}\end{aligned}$$

**Exercice 6.6.20** Soit  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique, continue sur  $\mathbb{R}$  et de classe  $C^1$  par morceaux. Montrer que la série de Fourier de  $f$  converge normalement (et par suite absolument et uniformément) vers  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

Solution : D'après le théorème de Dirichlet, on sait qu'il y a convergence simple vers  $f$ , puisque l'hypothèse de continuité implique que  $f(x)$  coincide avec sa régularisée  $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$  pour tout  $x$ . Soient  $a_k, b_k$  les coefficients de Fourier de  $f$  et  $A_k, B_k$  ceux de  $f'$ . En tous points  $x \in [0, 2\pi]$ ,  $x \neq \alpha_i$  (points de discontinuités), la dérivée existe et admet en  $\alpha_i$  une limite à droite et une limite à gauche. En  $\alpha_i$ , on prolonge la fonction  $f'$  de telle façon qu'elle coïncide avec sa régularisée. Dès lors, on considère  $f'$  comme étant une fonction  $2\pi$ -périodique et continue par morceaux (donc réglée). Pour déterminer les coefficients de Fourier  $A_k$  et  $B_k$ , on procède comme dans l'exercice 6.6.18. On obtient  $A_k = kb_k$ ,  $B_k = -ka_k$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$  (la convergence de la série de  $f'$  n'est pas exigée). D'après l'inégalité de Schwarz, on a  $|a_k \cos kx + b_k \sin kx| \leq \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ . On va montrer que la série numérique  $\sum \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$  converge. On a

$$S_n \equiv \sum_{k=1}^n \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{A_k^2}{k^2} + \frac{B_k^2}{k^2}} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n (A_k^2 + B_k^2)} \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}},$$

en vertu de l'inégalité de Schwarz dans  $\mathbb{R}^n$  (le produit scalaire est inférieur ou

égal au produit des normes). Dès lors,

$$S_n \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (A_k^2 + B_k^2)} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}.$$

On sait que  $\sum \frac{1}{k^2}$  est une série convergente. En tenant compte de l'égalité de Parseval (ou de l'inégalité de Bessel), la série  $\sum \sqrt{A_k^2 + B_k^2}$  converge aussi. La suite des sommes partielles ( $S_n$ ) est donc majorée par une constante indépendante de  $n$  et puisque la série  $\sum \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$  est à termes positifs, on en déduit qu'elle converge. Par conséquent, la série  $\sum (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$  converge normalement (critère de Weierstrass) et par suite absolument et uniformément sur  $\mathbb{R}$ . Montrons que la limite est la fonction  $f$ . D'après le théorème de continuité, la somme (disons  $S$ ) de la série  $\sum (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$  est une fonction continue. Puisque cette série converge uniformément vers  $S$ , elle converge en moyenne quadratique vers  $S$ . De l'unicité de la limite,  $S$  et  $f$  sont égales pour la norme de la moyenne quadratique et

$$\int_0^{2\pi} (f(x) - S(x))^2 dx = 0.$$

La fonction  $f - S$  étant continue, on en déduit que pour tout  $x$ ,  $f(x) = S(x)$ .

**Exercice 6.6.21 (Phénomène de Gibbs).** Soit  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique, impaire et définie par

$$\begin{cases} f(x) = 1 & \text{si } 0 < x < \pi \\ f(0) = f(\pi) = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que  $f$  est développable en série de Fourier et déterminer cette série.

b) On désigne par  $S_n(x)$  la somme partielle

$$S_n(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$$

Montrer que la suite ( $S_n$ ) ne converge pas uniformément sur  $\mathbb{R}$ .

c) Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin(2k+1)x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$$

et désignons cette expression par  $T_n(x)$ . En déduire que

$$|T_n(x)| \leq \frac{1}{\sin \varepsilon}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$$

où  $\varepsilon$  est un nombre réel  $\in ]0, \frac{\pi}{2}[$ .

d) Montrer que

$$|f(x) - S_n(x)| \leq \frac{4}{n\pi \sin \varepsilon}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon], \varepsilon \in ]0, \frac{\pi}{2}[$$

En déduire que la suite  $(S_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur tout compact de  $]0, \pi[$ .

e) Montrer que

$$S'_n(x) = \frac{2 \sin 2nx}{\pi \sin x}, \quad \forall x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$$

et en déduire que  $S_n$  admet un premier maximum en  $\alpha_n = \frac{\pi}{2n}$ .

f) Montrer que

$$S_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin 2nt}{\sin t} dt, \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

et qu'en outre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\alpha_n) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx,$$

où  $\alpha_n = \frac{\pi}{2n}$  (voir e)).

g) Montrer que la suite  $(S_n(x))$  ne converge pas uniformément vers  $f(x)$  sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$ .

Solution : a) La fonction  $f$  est réglée et admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche. D'après le théorème de Dirichlet, elle est développable en série de Fourier et cette dernière converge vers  $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$  pour toute valeur  $x$  où  $f$  est discontinue et vers  $f(x)$  pour toute valeur de  $x$  où  $f$  est continue. Plus précisément, la série de Fourier de  $f$  converge simplement vers

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1-1}{2} = 0, \text{ pour } x=0 \text{ ou } \pi,$$

et vers  $f(x)$  pour  $0 < x < \pi$ . Or en chaque point de discontinuité  $x_0 = 0$  ou  $\pi$ , on a

$$f(x_0) = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2},$$

car  $f(0) = f(\pi) = 0$ , donc dans tous les cas la somme de la série de Fourier de  $f$  coïncide avec  $f$ . Déterminons explicitement la série de Fourier en question. Comme  $f$  est impaire, alors  $a_k = 0$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$  et

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin kx dx = \frac{2(1 - (-1)^k)}{k\pi} \int_0^{\pi} \sin kx dx,$$

ou

$$b_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 2p \\ \frac{4}{(2p+1)\pi} & \text{si } k = 2p+1 \end{cases}$$

b) Il suffit d'utiliser le théorème de continuité. En effet, les fonctions  $S_n$  sont continues sur  $\mathbb{R}$  mais la fonction  $f$  est discontinue. Donc il ne peut y avoir convergence uniforme sur  $\mathbb{R}$ .

c) Montrons que

$$\sin x \cdot T_n(x) = \sin^2 nx, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$$

On a

$$\sin x \cdot T_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin x \sin(2k+1)x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos 2kx - \cos 2(k+1)x}{2} = \sin^2 nx.$$

En outre,  $\forall x \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$ ,  $\varepsilon \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ ; c'est-à-dire  $0 < \varepsilon \leq x \leq \pi - \varepsilon < \pi$ , la fonction  $\sin x$  est positive et on déduit de l'égalité ci-dessus,

$$|T_n(x)| \leq \frac{\sin^2 nx}{\sin x} \leq \frac{1}{\sin \varepsilon}, \quad \forall x \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon], \varepsilon \in ]0, \frac{\pi}{2}[$$

d) Soient  $n, p \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$ ,  $\varepsilon \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ . On a

$$\begin{aligned} S_{n+p}(x) - S_n(x) &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{n+p-1} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}, \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}, \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{T_{k+1}(x) - T_k(x)}{2k+1}, \quad (\text{d'après c})) \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{T_k(x)}{2k-1} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{T_k(x)}{2k+1}, \\ &= \frac{4}{\pi} \frac{T_{n+p}(x)}{2(n+p)-1} - \frac{4}{\pi} \frac{T_n(x)}{2n+1} + \frac{8}{\pi} \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \frac{T_k(x)}{4k^2-1}. \end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} |S_{n+p}(x) - S_n(x)| &\leq \frac{4}{\pi} \frac{|T_{n+p}(x)|}{2(n+p)-1} + \frac{4}{\pi} \frac{|T_n(x)|}{2n+1} + \frac{8}{\pi} \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \frac{|T_k(x)|}{4k^2-1}, \\ &\leq \frac{4}{\pi(2(n+p)-1)\sin \varepsilon} + \frac{4}{\pi(2n+1)\sin \varepsilon} \\ &\quad + \frac{8}{\pi \sin \varepsilon} \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \frac{1}{4k^2-1}, \end{aligned}$$

en vertu de c). En faisant tendre  $p$  vers  $+\infty$ , on obtient

$$|f(x) - S_n(x)| \leq \frac{4}{\pi(2n+1)\sin \varepsilon} + \frac{8}{\pi \sin \varepsilon} \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \frac{1}{4k^2-1},$$

puisque la série de terme général  $\frac{1}{4k^2-1}$  est une série convergente. Le reste d'ordre  $n$  de cette série tend vers 0 et l'inégalité ci-dessus est valable  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Le résultat en découle. Par ailleurs, le second membre de l'inégalité que l'on vient de démontrer, tend vers 0 indépendamment de  $x$  sur tout compact de  $]0, \pi[$ . Par conséquent, la suite  $(S_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur tout compact de  $]0, \pi[$ .

e) On peut raisonner comme dans c), comme on peut le faire autrement. En effet, on a

$$S'_n(x) = \frac{4}{\pi} \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(2k+1)x} = \frac{4}{\pi} \operatorname{Re} e^{ix} \cdot \frac{1 - e^{i2nx}}{1 - e^{i2x}} = \frac{2 \sin 2nx}{\pi \sin x},$$

où  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ . Dès lors, le premier point où  $S'_n(x) = 0$  est  $\alpha_n = \frac{\pi}{2n}$  (ce point est un maximum puisque pour  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2n}$ , c'est-à-dire  $0 \leq 2nx \leq \pi$ , on a  $\sin 2nx \geq 0$  et au passage par  $\frac{\pi}{2n}$ , cette fonction change de signe).

f) La première égalité résulte immédiatement de e) puisque  $S(0) = 0$ . Pour le calcul de la limite de  $S_n(\alpha_n)$ , on procède comme suit : on a

$$\begin{aligned} S_n(\alpha_n) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha_n} \frac{\sin 2nt}{\sin t} dt, \quad \alpha_n = \frac{\pi}{2n} \\ &= \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \frac{\sin u}{\sin \frac{u}{2n}} du, \quad u \equiv 2nt \\ &= \int_0^\pi \varphi_n(u) du, \end{aligned}$$

où

$$\varphi_n(u) = \frac{\sin u}{n\pi \sin \frac{u}{2n}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall u \in ]0, \pi]$$

Notons que  $\varphi_n$  est continue sur  $]0, \pi[$  et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin u}{n\pi \sin \frac{u}{2n}} = \frac{2 \sin u}{\pi u} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{u}{2n}}{\sin \frac{u}{2n}} = \frac{2 \sin u}{\pi u}.$$

La suite  $(\varphi_n)$  converge simplement sur  $]0, \pi]$  vers la fonction  $\varphi(x) = \frac{2 \sin u}{\pi u}$ . Cette dernière est continue et intégrable sur  $]0, \pi]$ . Par ailleurs, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $u \in ]0, \pi[$ , on a  $\frac{u}{2n} \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  et  $\sin \frac{u}{2n} \geq \frac{u}{n\pi}$  (en général, pour  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , on a  $\sin \theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$ ), ce qui implique la double inégalité :  $0 \leq \varphi_n(u) \leq \frac{\sin u}{u}$ . Les hypothèses du théorème de convergence dominée étant satisfaites, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\alpha_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \varphi_n(u) = \int_0^\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin u}{u} du \simeq 1,179.$$

(Pour montrer que  $\int_0^\pi \frac{\sin u}{u} du \simeq 1,8519$ , plusieurs méthodes sont possibles. On va utiliser la théorie des séries entières ainsi que le critère des séries alternées de Leibniz sur les séries numériques. On a

$$\sin u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} u^{2k+1},$$

d'où

$$\frac{\sin u}{u} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} u^{2k}, \quad u \neq 0.$$

Le rayon de cette série entière est égal à l'infini et la fonction ci-dessus admet un prolongement par continuité en 0. Une série entière converge uniformément sur tout compact inclus dans l'intervalle ouvert de convergence. Ici la série converge sur  $\mathbb{R}$  et on peut choisir en particulier l'intervalle qui nous intéresse  $[0, \pi]$ . Dès lors, on peut intégrer sur cette intervalle cette série terme à terme

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\sin u}{u} du &= \int_0^\pi \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} u^{2k+1} \right) du, \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \int_0^\pi u^{2k} du, \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \pi^{2k+1}}{(2k+1)!(2k+1)}, \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k, \end{aligned}$$

où

$$a_k = \frac{\pi^{2k+1}}{(2k+1)!(2k+1)}.$$

Notons que  $(a_k)$  est une suite décroissante de nombres positifs convergeant vers zéro. La série  $\sum(-1)^k a_k$  est une série alternée et satisfait au critère de Leibniz, donc elle converge et on a

$$A_{2n+1} \leq \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \leq A_{2n},$$

où  $A_p$  désigne la somme partielle d'ordre  $p$  de cette série. On a en particulier

$$\begin{aligned} 1,85190 \simeq \sum_{k=0}^5 \frac{(-1)^k \pi^{2k+1}}{(2k+1)!(2k+1)} &\leq \int_0^\pi \frac{\sin u}{u} du, \\ &\leq \sum_{k=0}^6 \frac{(-1)^k \pi^{2k+1}}{(2k+1)!(2k+1)} \simeq 1,85193, \end{aligned}$$

et par conséquent  $\int_0^\pi \frac{\sin u}{u} du \simeq 1,8519$ .

g) Pour montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{x \in ]0, \frac{\pi}{2}[} |S_n(x) - f(x)| \right) \neq 0,$$

il suffit de trouver une suite numérique  $(\alpha_n)$  telle que  $S_n(\alpha_n) - f(\alpha_n)$  ne tend pas vers zéro. Or  $|S_n(\alpha_n) - f(\alpha_n)| = |S_n(\alpha_n) - 1|$ , et d'après la question précédente, la limite de cette expression vaut  $|1,179 - 1| = 0,179$ . Cette dernière est strictement supérieure à 0, d'où  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup(|S_n(\alpha_n) - f(\alpha_n)|) \neq 0$ . Par conséquent  $(S_n(x))$  ne converge pas uniformément vers  $f(x)$  sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$ .

**Exercice 6.6.22** *On dit qu'une suite  $(B_n)$  de polynômes est une suite de polynômes de Bernoulli si les conditions suivantes sont satisfaites :*

$$\begin{aligned} B_1(x) &= x - \frac{1}{2}, \\ B'_n(x) &= B_{n-1}(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \\ \int_0^1 B_n(x) dx &= 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

a) Etablir l'existence et l'unicité de cette suite.

b) Calculer  $B_2(x), \dots, B_6(x)$ .

c) Montrer que pour  $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ ,  $B_n(0) = B_n(1)$ . Cette relation est-elle valable si  $n = 1$  ?

d) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $f_n$  la fonction périodique de période 1, qui coïncide avec  $B_n$  pour  $x \in ]0, 1[$  et est égale à  $\frac{1}{2}(B_n(0) + B_n(1))$  pour  $x = 0$ . Déterminer la série de Fourier de cette fonction et préciser sa convergence.

e) On rappelle que la fonction Zéta de Riemann est définie par

$$\zeta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}, \quad \forall x > 1$$

Exprimer, pour tout entier  $k \geq 1$ ,  $\zeta(2n)$  en fonction des polynômes de Bernoulli. En déduire les sommes des séries :  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$  et  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6}$ .

Solution : a) On utilise un raisonnement par récurrence. Pour  $n = 1$ , on a  $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$ . Pour  $n \geq 2$ , on suppose que l'on a construit  $B_{n-1}(x)$  et on détermine  $B_n(x)$ . De la relation  $B'_n(x) = B_{n-1}(x)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ , on tire

$$B_n(x) = \int_0^x B_{n-1}(t) dt + C,$$

où  $C$  est une constante. D'où

$$\int_0^1 B_n(x) dx = \int_0^1 \left( \int_0^x B_{n-1}(t) dt \right) dx + C.$$

Or  $\int_0^1 B_n(x) dx = 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , donc  $C = - \int_0^1 \left( \int_0^x B_{n-1}(t) dt \right) dx$  et par conséquent

$$B_n(x) = \int_0^x B_{n-1}(t) dt - \int_0^1 \left( \int_0^x B_{n-1}(t) dt \right) dx.$$

Ainsi  $B_n(x)$  existe et est unique.

b) En remplaçant dans la formule ci-dessus, on obtient immédiatement

$$B_2 = \int_0^x \left( t - \frac{1}{2} \right) dt - \int_0^1 \left( \int_0^x \left( t - \frac{1}{2} \right) dt \right) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12},$$

$$B_3 = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12},$$

$$B_4 = \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{24} - \frac{1}{720},$$

$$B_5 = \frac{x^5}{120} - \frac{x^4}{48} + \frac{x^3}{72} - \frac{x}{720},$$

$$B_6 = \frac{x^6}{720} - \frac{x^5}{240} + \frac{x^4}{288} - \frac{x^2}{1440} + \frac{1}{30240}.$$

c) Pour  $n \geq 2$ , on a

$$B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B'_n(x) dx = \int_0^1 B_{n-1}(x) dx = 0,$$

d'où  $B_n(1) = B_n(0)$ . Cette relation n'est pas valable pour  $n = 1$  car pour ce cas on a  $B_1(1) \neq B_1(0)$ .

d) Les hypothèses du théorème de Dirichlet étant satisfaites, on en déduit que la fonction  $f_n$  est développable en série de Fourier. Nous allons utiliser la forme complexe  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f_n) e^{i2\pi kx}$ , où  $c_k(f_n) = \int_0^1 f_n(x) e^{-i2\pi kx} dx$ . Pour  $n \geq 2$ ,  $k \in \mathbb{Z}^*$ , on a

$$\begin{aligned} c_k(f_n) &= \int_0^1 B_n(x) e^{-i2\pi kx} dx, \\ &= -\frac{B_n(x) e^{-i2\pi kx}}{i2\pi k} \Big|_0^1 + \frac{1}{i2\pi k} \int_0^1 B_{n-1}(x) e^{-i2\pi kx} dx, \\ &= \frac{1}{i2\pi k} \int_0^1 B_{n-1}(x) e^{-i2\pi kx} dx, \text{ car } B_n(1) = B_n(0), \forall n \geq 2 \\ &= \frac{c_k(f_{n-1})}{i2\pi k}. \end{aligned}$$

Pour  $n = 1$ ,  $k \in \mathbb{Z}^*$ , on a

$$\begin{aligned} c_k(f_1) &= \int_0^1 B_1(x) e^{-i2\pi kx} dx, \\ &= \int_0^1 \left( x - \frac{1}{2} \right) e^{-i2\pi x} dx, \\ &= -\frac{\left( x - \frac{1}{2} \right) e^{-i2\pi kx}}{i2\pi k} \Big|_0^1 + \frac{1}{i2\pi k} \int_0^1 e^{-i2\pi kx} dx, \\ &= -\frac{1}{i2\pi k}. \end{aligned}$$

Dès lors,

$$c_k(f_1) = -\frac{1}{i2\pi k}, \quad c_k(f_n) = \frac{c_k(f_{n-1})}{i2\pi k}, \quad n \geq 2$$

et par récurrence, on obtient finalement

$$c_k(f_n) = -\frac{1}{(i2\pi k)^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{Z}^*$$

La série de Fourier de  $f_n$  est

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{-1}{(i2\pi k)^n} e^{i2\pi kx} \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{(i2\pi k)^n} \left( (-1)^n e^{-i2\pi kx} + e^{i2\pi kx} \right), \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{(i2\pi k)^n} \left( (-1)^n e^{-i2\pi kx} + e^{i2\pi kx} \right), \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{(i2\pi k)^n} (((-1)^n + 1) \cos 2\pi kx - i((-1)^n - 1) \sin 2\pi kx).
 \end{aligned}$$

La fonction  $f_n$ ,  $n \geq 2$ , est continue alors que  $f_1$  est discontinue. Comme  $f_n$  satisfait pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  aux hypothèses du théorème de Dirichlet, alors on en déduit que la série de Fourier ci-dessus converge simplement vers  $f_1$  et uniformément vers  $f_n$ ,  $n \geq 2$ . On peut écrire la série ci-dessus autrement. Comme

$$(-1)^n + 1 = \begin{cases} 2 & \text{si } x = 2p \\ 0 & \text{si } x = 2p + 1 \end{cases}, \quad (-1)^n - 1 = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 2p \\ -2 & \text{si } x = 2p + 1 \end{cases},$$

alors pour  $n = 2p$ , la série ci-dessus s'écrit sous la forme  $\frac{2(-1)^{p+1}}{(2\pi)^{2p}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi kx}{k^{2p}}$  et pour  $n = 2p + 1$ , sous la forme  $\frac{2(-1)^{p+1}}{(2\pi)^{2p+1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi kx}{k^{2p+1}}$ .

e) Pour  $p \geq 1$ , on a

$$f_{2p}(x) = \frac{2(-1)^{p+1}}{(2\pi)^{2p}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi kx}{k^{2p}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Dès lors,

$$f_{2p}(0) = \frac{2(-1)^{p+1}}{(2\pi)^{2p}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2p}} = \frac{2(-1)^{p+1}}{(2\pi)^{2p}} \zeta(2p),$$

d'où

$$\zeta(2p) = (-1)^{p+1} 2^{2p-1} \pi^{2p} f_{2p}(0) = (-1)^{p+1} 2^{2p-1} \pi^{2p} B_{2p}(0).$$

On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} &= \zeta(2) = 2\pi^2 B_2(0) = \frac{\pi^2}{6}, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} &= \zeta(4) = -2^3 \pi^4 B_4(0) = \frac{\pi^4}{90}, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} &= \zeta(6) = 2^5 \pi^6 B_6(0) = \frac{\pi^6}{945}.\end{aligned}$$

**Exercice 6.6.23** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions  $2\pi$ -périodiques, intégrables, bornées et soit  $(f * g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)dt$ , le produit de convolution de  $f$  et  $g$ . On désigne par  $c_k$ ,  $d_k$ ,  $\alpha_k$  les coefficients de Fourier complexes de  $f$ ,  $g$ ,  $f * g$  respectivement. Montrer que :  $c_k d_k = \frac{1}{2\pi} \alpha_k$ .

Solution : On a

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f * g)(x) e^{-ikx} dx, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t) dt \right) e^{-ikx} dx, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} g(x-t) e^{-i(k-t)} dx \right) f(t) e^{-ikt} dt, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_{-\pi-t}^{\pi-t} g(u) e^{-iu} dx \right) f(t) e^{-ikt} dt, \quad u \equiv x-t \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} g(u) e^{-iu} dx \right) f(t) e^{-ikt} dt, \quad (g(u)e^{-iu} \text{ est } 2\pi\text{-périodique}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (2\pi d_k) f(t) e^{-ikt} dt, \\ &= 2\pi d_k c_k.\end{aligned}$$

**Exercice 6.6.24** On considère l'espace  $C([-\pi, \pi], \mathbb{R})$  des fonctions continues sur  $[-\pi, \pi]$ , muni du produit scalaire  $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$ . Soit  $S$  le sous-espace de  $C([-\pi, \pi], \mathbb{R})$  engendré par les fonctions  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{2n}$  où

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \varphi_{2k-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx, \quad \varphi_{2k}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx, \quad k \geq 1.$$

a) Montrer que les fonctions  $\varphi_k$  sont orthonormées.

b) Soit  $f \in C([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ . Déterminer la projection orthogonale  $p$  de  $f$  sur l'espace  $S$ . Montrer que :  $p = \sum_{k=0}^{2n} c_k \varphi_k$ , où  $c_k = \langle f, \varphi_k \rangle$ ,  $0 \leq k \leq 2n$ .

Solution : a) En effet, un simple calcul basé sur des formules classiques de trigonométrie montre que :  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lxdx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin lxdx = \pi$  si  $k = l$ , 0 si  $k \neq l$  et  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin lxdx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kxdx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kxdx = 0$ .

b) L'espace  $\mathcal{S}$  est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des fonctions  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{2n}$ . Notons que  $\dim \mathcal{S} = 2n + 1$  car  $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{2n})$  est une base de l'espace  $\mathcal{S}$ . Soit  $f \in C([-\pi, \pi], \mathbb{R})$  et soit  $p$  la projection orthogonale de  $f$  sur  $\mathcal{S}$ . Cette projection est définie par les conditions suivantes :  $p \in \mathcal{S}$  et  $f - p \in \mathcal{S}^\perp$ , ce qui donne les conditions d'orthogonalité  $\langle f - p, \varphi_k \rangle = 0$ ,  $k = 0, 1, \dots, 2n$  où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire. Rappelons que  $p$  est la meilleure approximation de  $f$  dans  $\mathcal{S}$ , en ce sens que  $p$  est la fonction dans l'espace  $\mathcal{S}$  pour laquelle la norme définie par  $\|f - p\| = \left( \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - p(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$  est minimale. On a  $p = \sum_{k=0}^{2n} c_k \varphi_k$ , où les coefficients  $c_k$  se calculent à partir des conditions d'orthogonalité  $\langle f - p, \varphi_k \rangle = 0$ ,  $k = 0, 1, \dots, 2n$ . En effet, on a  $\langle f - \sum_{k=0}^{2n} c_k \varphi_k, \varphi_k \rangle = 0$ , d'où  $\langle f, \varphi_k \rangle - \sum_{k=0}^{2n} c_k \langle \varphi_k, \varphi_k \rangle = 0$ . Or les fonctions  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{2n}$  sont orthogonales et normées, d'où  $\langle \varphi_k, \varphi_l \rangle = \delta_{kl}$  (symbole de Kronecker) et dès lors  $\langle f, \varphi_k \rangle = c_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, 2n$ . Par conséquent

$$\begin{aligned} c_0 &= \langle f, \varphi_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \\ c_{2k-1} &= \langle f, \varphi_{2k-1} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, \\ c_{2k} &= \langle f, \varphi_{2k} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{k=0}^{2n} c_k \varphi_k(x), \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx \right) \sin x + \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx \right) \cos x \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right) \sin nx + \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx \right) \cos nx, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx \right) \cos kx \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right) \sin kx, \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \end{aligned} \tag{6.6.6}$$

avec

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, k \geq 1$$

L'expression (6.6.6) s'appelle polynôme trigonométrique d'ordre  $n$ . Les nombres  $a_k, b_k$  sont appelés coefficients de Fourier de  $f$  (nous avons signalé dans la remarque 6.1.1, que contrairement à ce qui a été fait ici,  $a_0$  a été choisi dans ce chapitre de façon à se calculer par la même formule (6.2.1) que les autres  $a_k$ ).

**Exercice 6.6.25** 1) Expliquer brièvement comment les séries de Fourier peuvent être utilisées pour résoudre certaines équations différentielles. On pourra considérer par exemple l'équation différentielle linéaire

$$ay'' + by' + cy = f(x),$$

à coefficients constants et où  $f$  est une fonction périodique connue.

2) On considère l'équation différentielle

$$y' + \lambda y = f(x), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}$$

où  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , est une fonction continue et  $2\pi$ -périodique.

a) Déterminer la solution sous forme intégrale de l'équation différentielle ci-dessus et montrer qu'elle est  $2\pi$ -périodique si et seulement si  $y(0) = y(2\pi)$ .

b) Montrer que l'équation différentielle ci-dessus admet une solution unique développable en série de Fourier et déterminer cette série sous forme complexe.

Solution : 1) On procède comme suit : on calcule formellement le coefficient de Fourier  $c_k(y)$  associé à la solution  $y$ . On a  $c_k(ay'' + by' + cy) = c_k(f)$ , d'où

$$ac_k(y'') + bc_k(y') + cc_k(y) = c_k(f).$$

En tenant compte du fait qu'en général (on procède par intégration par parties),  $c_k(y^{(n)}) = (ik)^n c_k(y)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , on obtient

$$-ak^2 c_k(y) + ibk c_k(y) + cc_k(y) = c_k(f),$$

et dès lors,  $c_k(y) = \frac{c_k(f)}{c + ibk - ak^2}$ . On détermine ensuite  $c_k(f)$  à l'aide de la proposition 6.2.5 et on montre que la série de Fourier  $y(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(y) e^{ikx}$ , est la solution cherchée.

2) a) La solution générale de l'équation différentielle en question est la somme de l'équation générale de l'équation homogène  $y' + \lambda y = 0$  et d'une solution particulière de l'équation  $y' + \lambda y = f(x)$ . La solution de l'équation homogène est évidemment de la forme  $y = Ce^{-\lambda x}$  où  $C$  est une constante. Pour

déterminer une solution particulière de l'équation non homogène, on utilise la méthode de la variation de la constante. On pose  $y(x) = C(x)e^{-\lambda x}$  où  $C(x)$  est variable et on résout la nouvelle équation obtenue en  $C(x)$ . En remplaçant cette expression dans l'équation  $y' + \lambda y = f(x)$  et après simplification, on obtient  $C'(x) = e^{\lambda x}f(x)$ , d'où  $C(x) = \int_0^x f(t)e^{\lambda t}dt + K$  où  $K$  est une constante. La solution générale de l'équation différentielle proposée est donc

$$y(x) = Ke^{-\lambda x} + e^{-\lambda x} \int_0^x f(t)e^{\lambda t}dt,$$

avec  $K = y(0)$ . Supposons que  $y(0) = y(2\pi)$  et soit  $\zeta(x) = y(x+2\pi)$  la solution de l'équation différentielle en question. On a  $\zeta(0) = y(2\pi) = y(0)$ , d'où  $\zeta = y$ . Si réciproquement,  $y$  est  $2\pi$ -périodique, alors évidemment  $y(0) = y(2\pi)$ . Dès lors, la solution  $y$  est  $2\pi$ -périodique si et seulement si  $y(0) = y(2\pi)$ . Cette dernière condition s'écrit explicitement sous la forme

$$y(0) = y(2\pi) = y(0)e^{-2\pi\lambda} + e^{-\lambda x} \int_0^{2\pi} f(t)e^{\lambda t}dt,$$

d'où  $y(0)(e^{2\pi\lambda} - 1) = \int_0^{2\pi} f(t)e^{\lambda t}dt$ , où  $e^{2\pi\lambda} \neq 1$  puisque  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}$ .

b) D'après ce qui précède, l'équation différentielle en question admet une solution unique  $\zeta$  qui s'écrit sous la forme

$$\frac{1}{e^{2\pi\lambda} - 1} \int_0^{2\pi} f(t)e^{\lambda t}dt, \quad \alpha \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}.$$

Cette solution étant  $2\pi$ -périodique et de classe  $\mathcal{C}^1$ , elle est donc développable en série de Fourier. Elle s'écrit en notation complexe sous la forme

$$\zeta(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\zeta) e^{ikx},$$

où  $c_k(\zeta) = \frac{c_k(f)}{\lambda + ik}$ , s'obtient en procédant comme dans 1).

**Exercice 6.6.26 (Equation de la chaleur).** Soit une plaque carrée dont les côtés ont la longueur  $\pi$  et telle que : ses faces sont isolées, trois de ses côtés sont maintenus à la température zéro, le quatrième côté est maintenu à la température  $T_0$ . La température au point  $(x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi]$  et à l'instant  $t \geq 0$  est représentée par une fonction  $u(x, y)$  satisfaisant (dans  $[0, \pi] \times [0, \pi]$ ) à l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

où  $C \neq 0$  est une constante. Notre problème consiste à déterminer la température d'état stationnaire ( $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ ) en tout point de la plaque. Dans ce cas, l'équation aux dérivées partielles précédente devient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (6.6.7)$$

Cette équation s'appelle équation de Laplace en deux variables. Les conditions aux limites s'expriment par

$$u(0, y) = u(x, 0) = u(\pi, y) = 0, \quad u(x, \pi) = T_0.$$

Résoudre l'équation (6.6.7), par la méthode de séparation des variables et les séries de Fourier.

Solution : On cherche des solutions particulières de (6.6.7) sous la forme :

$$u(x, y) = f(x)g(y),$$

c'est-à-dire sous forme d'un produit de deux fonctions dépendant chacune d'une seule variable. En substituant cette expression dans (6.6.7), on obtient

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = -\frac{g''(y)}{g(y)}.$$

Le membre de gauche de cette égalité est une fonction de  $x$  et celui de droite est une fonction de  $y$ . Comme ils sont égaux, ils ne dépendent ni de  $x$  ni de  $y$  et sont donc égaux à une constante que l'on désigne par  $-\lambda^2$ . On obtient donc deux équations :  $f''(x) + \lambda^2 f(x) = 0$  et  $g''(y) - \lambda^2 g(y) = 0$ . En résolvant ces équations, on trouve  $f(x) = a \cos \lambda x + b \sin \lambda x$  et  $g(x) = c \coth \lambda y + d \sinh \lambda y$ . D'où

$$u(x, y) = (a \cos \lambda x + b \sin \lambda x)(c \coth \lambda y + d \sinh \lambda y).$$

Les conditions aux limites  $u(0, y) = 0$  et  $u(x, 0) = 0$  entraînent respectivement  $a = 0$  et  $c = 0$ , et la condition  $u(\pi, y) = 0$  donne  $bd \sin \lambda \pi \sinh \lambda y = 0$ . Pour obtenir une solution non triviale, c'est-à-dire  $b \neq 0$  et  $d \neq 0$ , il faut choisir  $\lambda = k$  où  $k = 1, 2, \dots$ . Dès lors  $u_k(x, y) = A_k \sin kx \cdot \sinh ky$ . Pour satisfaire à la dernière condition :  $u(x, \pi) = T_0$ , on utilise d'abord le principe de superposition pour obtenir la solution générale :

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin kx \cdot \sinh ky. \quad (6.6.8)$$

Puis en se basant sur la condition aux limites

$$u(x, \pi) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sinh k\pi \sin kx = T_0, \quad (6.6.9)$$

on détermine les coefficients  $A_k$  de la manière suivante : l'équation (6.6.9) représente le développement en série de Fourier de la constante  $T_0$  dans l'intervalle  $[0, \pi[$ . En posant  $u(x, \pi) = -T_0$  pour  $x \in [-\pi, 0[,$  la fonction  $u(x, \pi)$  est définie dans l'intervalle  $[-\pi, \pi[$ , et comme il s'agit d'une fonction impaire, on a pour son développement en série de Fourier :

$$u(x, \pi) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx = T_0, \quad (6.6.10)$$

où

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u(x, \pi) \sin kx dx = \frac{2T_0}{\pi} \int_0^\pi \sin kx dx = \frac{2T_0(1 - \cos k\pi)}{\pi k}.$$

En comparant (6.6.9) et (6.6.10), on obtient  $A_k = \frac{2T_0(1 - \cos k\pi)}{\pi k \sinh k\pi}$ . Finalement, en portant ces valeurs dans (6.6.8), on obtient la solution :

$$u(x, y) = \frac{2T_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos k\pi)}{\pi k \sinh k\pi} \sin kx \cdot \sinh ky.$$

**Exercice 6.6.27 (Filtre RC).** Considérons un circuit électrique composé d'un condensateur de capacité  $C$ , d'une résistance  $R$ , d'une source de tension continue (variable avec le temps)  $V(t)$  et d'un interrupteur. La différence de potentiel (ou tension) aux bornes de la résistance est donnée par  $V_R = Ri$ . Désignons par  $V_C$  la tension aux bornes du condensateur.

a) Montrer que

$$\frac{dV_C}{dt} + \frac{V_C}{RC} = \frac{V}{RC}. \quad (6.6.11)$$

b) Pour que l'équation ci-dessus possède une solution unique, il faut fournir une condition initiale. Supposons que l'interrupteur se ferme pour  $t = 0$ . Avant cet instant, il ne pouvait y avoir de courant dans le circuit, mais le condensateur pouvait avoir une certaine charge que l'on désigne par  $Q_0$ . Que vaut dans ce cas  $V_C(0)$  ?

c) Supposons que la tension  $V$  soit donnée par un train d'impulsion périodiques. Qu'elle est la représentation en série de Fourier complexe de  $V$  ?

d) On sait que la solution de l'équation différentielle (6.6.11) est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière de l'équation complète. On suppose que la solution particulière soit périodique ayant la même période  $T$  que  $V(t)$ . Déterminer la solution de l'équation (6.6.11).

Solution : a) La loi de Kirchoff exprime que la somme des différences de potentiel le long d'une boucle de circuit doit être nulle, on en déduit que :  $V = V_R + V - C = Ri + V - C$ , d'où  $i = \frac{V - V_C}{R}$ . Par définition de la capacité, on a  $i = C \frac{dV_C}{dt}$ , donc  $\frac{dV_C}{dt} + \frac{V_C}{RC} = \frac{V}{RC}$ , c'est une équation différentielle du premier ordre linéaire à coefficients constants et avec second membre.

b) Comme  $i = C \frac{dV_C}{dt}$ , on en déduit  $V_C = \frac{1}{C} \left( \int_0^t i(\tau) d\tau + Q_0 \right)$ . On a donc, pour  $t = 0$ ,  $V_C(0) = \frac{Q_0}{C}$ .

c) Comme  $V$  est décrite par une fonction  $T$ -périodique, la représentation en série de Fourier complexe de  $V$  est donnée par  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega_k t}$ ,  $\omega_k = \frac{2\pi k}{T}$ , où

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_0^T V(t) e^{-i\omega_k t} dt, \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} V(t) e^{-i\omega_k t} dt, \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} V_0 e^{-i\omega_k t} dt, \\ &= \frac{V_0}{T} \cdot \frac{e^{-i\omega_k \Delta T/2} - e^{i\omega_k \Delta T/2}}{-i\omega_k}, \\ &= \frac{2V_0}{T\omega_k} \left( \frac{e^{i\omega_k \Delta T/2} - e^{-i\omega_k \Delta T/2}}{2i} \right), \\ &= \frac{2V_0}{T\omega_k} \sin \left( \omega_k \frac{\Delta T}{2} \right), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$c_k = \frac{V_0 \Delta T}{T} \cdot \frac{\sin \left( \omega_k \frac{\Delta T}{2} \right)}{\omega_k \frac{\Delta T}{2}}. \quad (6.6.12)$$

d) L'équation homogène :  $\frac{dV_C}{dt} + \frac{V_C}{RC} = 0$ , admet évidemment la solution :  $\alpha e^{-\frac{t}{RC}}$ ,  $\alpha \equiv$  constante. Cette solution s'appelle réponse transitoire du circuit car elle disparaît avec le temps. Par hypothèse, la solution particulière, est supposée  $T$ -périodique. Elle s'écrit donc sous la forme  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* e^{i\omega_k t}$ , et s'appelle réponse permanente ou forcée du circuit. Par conséquent,

$$V_C = \alpha e^{-\frac{t}{RC}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* e^{i\omega_k t}.$$

L'équation différentielle (6.6.11) devient  $V = RC \frac{dV_C}{dt} + V_C$ , d'où

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega_k t} &= RC \left( -\frac{\alpha}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} i\omega_k c_k^* e^{i\omega_k t} \right) \\ &\quad + \alpha e^{-\frac{t}{RC}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* e^{i\omega_k t}, \\ &= RC \sum_{k=-\infty}^{\infty} i\omega_k c_k^* e^{i\omega_k t} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* e^{i\omega_k t}.\end{aligned}$$

Puisque les fonctions  $e^{i\omega_k t}$  sont linéairement indépendantes, alors on en déduit que :  $c_k = RCi\omega_k c_k^* + c_k^*$ , où  $c_k^* = \frac{c_k}{1+i\omega_k RC}$ , et pour  $c_k$  voir (6.6.12). La fonction  $F(i\omega) = \frac{1}{1+i\omega RC}$ , s'appelle réponse de fréquence du circuit. Son module  $|F(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}}$ , s'appelle réponse d'amplitude du circuit, tandis que son argument  $\arg F(i\omega) = -\arg \tan(\omega RC)$ , est appelé réponse de phase du circuit.

**Exercice 6.6.28** Soit  $f$  la distribution associée à la fonction  $2\pi$ -périodique définie par  $f(x) = x$ ,  $-\pi < x < \pi$ , et soit  $\Gamma$  le cercle de longueur  $2\pi$ . Montrer qu'en tout point d'abscisse curvilinear  $s$  de  $\Gamma$ ,

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin ks.$$

Solution : D'après la section 2.2.3 du chapitre 2, la dérivée  $f'$  au sens des distributions de cette fonction est  $f' = 1 - 2\pi\delta_\pi$ . Comme

$$c_k(\delta_\pi) = \frac{1}{2\pi} \langle (\delta_\pi)_s, e^{-iks} \rangle = \frac{1}{2\pi} e^{-ik\pi} = \frac{(-1)^k}{2\pi},$$

on déduit immédiatement de la proposition 6.5.7, que

$$\delta_\pi = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{iks}.$$

Dès lors,  $f' = 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{iks}$ . Par ailleurs, on sait que

$$f' = \sum_{k=-\infty}^{\infty} ik c_k(f) e^{iks},$$

donc  $c_k(f) = \frac{(-1)^k i}{k}$ . Dès lors,

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{iks} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k i}{k} (e^{iks} - e^{-iks}) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin ks.$$

**Exercice 6.6.29** Soient  $T$  et  $S$  deux distributions sur le cercle,  $2\pi$ -périodiques et soit  $c_k(T)$  et  $c_k(S)$  les coefficients de Fourier de leurs séries de Fourier respectives. Montrer que :  $c_k(T * S) = 2\pi c_k(T)c_k(S)$ , et

$$T * S = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(T)c_k(S)e^{iks}.$$

Solution : On a

$$\begin{aligned} c_k(T * S) &= \frac{1}{2\pi} \langle (T * S)_s, e^{-iks} \rangle, \\ &= \frac{1}{2\pi} \langle T_s \otimes S_t, e^{-ik(s+t)} \rangle, \\ &= \frac{1}{2\pi} \langle T_\xi, e^{-ik\xi} \rangle \langle S_\eta, e^{-ik\eta} \rangle, \\ &= 2\pi c_k(T)c_k(S). \end{aligned}$$

On a montré dans la proposition 6.5.7 que la série de Fourier d'une distribution  $T$  sur le cercle  $\Gamma$  converge toujours dans  $\mathcal{D}'(\Gamma)$  vers  $T$ , donc

$$T * S = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(T)c_k(S)e^{iks}.$$

## 6.7 Exercices proposés

**Exercice 6.7.1** Montrer que la fonction

$$x \mapsto f(x) = \arcsin(\cos x),$$

est développable en série de Fourier, déterminer cette série et préciser sa convergence.

Réponse : Il suffit de remarquer que :  $\arcsin(\cos x) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x))$ , et d'utiliser l'exercice 6.6.12. La convergence est normale (et par suite absolue et uniforme).

**Exercice 6.7.2** Soit  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique, définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \pi & \text{si } x \in ]0, \pi] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- a) Tracer le graphe de  $f$ .
- b) Déterminer la série de Fourier associée à  $f$ .
- c) Etudier la convergence de la série obtenue dans b).
- d) En déduire la somme de la série  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2}$ .

**Exercice 6.7.3** Soit  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique, impaire, définie par

$$f(x) = x(\pi - x), \quad x \in [0, \pi]$$

Montrer que  $f$  est développable en série de Fourier et déterminer cette série.

Réponse : Par hypothèse la fonction  $f$  est impaire. On prolonge (voir remarque 6.2.4) la fonction  $f$  sur  $[-\pi, 0]$  de telle façon qu'on ait pour  $x \in [-\pi, 0]$ ,  $f(x) = -f(-x)$ . On a

$$f(x) = \begin{cases} x(\pi + x) & \text{si } x \in [-\pi, 0] \\ x(\pi - x) & \text{si } x \in [0, \pi] \end{cases}$$

La fonction  $f$  est continue et satisfait à toutes les conditions du théorème de Dirichlet. Dès lors, elle est développable en série de Fourier. En outre,  $f$  étant impaire, on a  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $a_k = 0$  et  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x(\pi - x) \sin kx dx = \frac{4}{\pi} \left( \frac{1 - (-1)^k}{k^3} \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 2p \\ \frac{8}{\pi(2p+1)^3} & \text{si } k = 2p+1 \end{cases},$$

On obtient l'expression

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{1 - (-1)^k}{k^3} \sin kx = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{8}{\pi(2p+1)^3} \sin(2p+1)x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

**Exercice 6.7.4** Soit  $g$  la fonction définie par

$$g(x) = \sup\{\cos x, 0\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que cette fonction est développable en série de Fourier et préciser cette série

Réponse : Il suffit de noter que  $g(x) = f(x + \frac{\pi}{2})$  où  $f$  est la fonction définie dans l'exercice 6.6.3 et d'utiliser les résultats obtenus dans cet exercice.

**Exercice 6.7.5** Soit  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique, paire et définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{\alpha^2}(2\alpha - x) & \text{si } x \in [0, 2\alpha] \\ 0 & \text{si } x \in [2\alpha, \pi] \end{cases}$$

où  $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ .

a) Quelle est la série de Fourier associée à  $f$  ?

c) Etudier la convergence uniforme de la série obtenue dans a), en utilisant deux méthodes : une étude directe et le théorème de Dirichlet.

d) En déduire les sommes des séries :  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k\alpha}{k^2}$  et  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin^2 k\alpha}{k^2}$ .

Réponse : a)

$$f(x) \sim 2 + \frac{2}{\alpha^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos 2k\alpha}{k^2} \cos kx = 2 + \frac{4}{\alpha^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k\alpha}{k^2} \cos kx.$$

b) Une méthode directe consiste à utiliser le critère de Weierstrass et on obtient la convergence uniforme sur  $\mathbb{R}$ . Le même résultat s'obtient en utilisant le théorème de Dirichlet puisque  $f$  est continue et toutes les autres hypothèses sont satisfaites.

c) Avec  $x = 0$ , on obtient  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k\alpha}{k^2} = \frac{\alpha(\pi-\alpha)}{2}$ . De même, avec  $x = \pi$ , on obtient  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin^2 k\alpha}{k^2} = -\frac{\alpha^2}{2}$ .

**Exercice 6.7.6** Déterminer la série de Fourier associée à la fonction

$$x \longmapsto f(x) = x - E(x),$$

où  $E(x)$  désigne la partie entière de  $x$ .

Réponse : La fonction  $f$  est périodique de période 1 et la série de Fourier en question est  $\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k\pi x)}{k}$ .

**Exercice 6.7.7** Soit  $f$  la fonction  $2\pi$ -périodique, définie par

$$f(x) = \left(\frac{x}{\pi}\right)^{2n} \quad -\pi \leq x \leq \pi, n \in \mathbb{N}$$

a) Montrer que  $f$  est développable en série de Fourier.

b) Calculer les coefficients de Fourier de  $f$ . (Indication : considérer l'intégrale  $I_n = \int_0^\pi x^{2n} \cos kx dx$  et prouver la relation de récurrence suivante :

$$k^2 I_n = 2n(-1)^k \pi^{2n-1} - 2n(2n-1)I_{n-1},$$

puis en déduire  $I_n$ ). Ecrire la série de Fourier de  $f$ .

c) Déduire de ce qui précède les sommes des séries

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^4}.$$

Réponse : a)  $f$  est continue en tout point, admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche. D'après le théorème de Dirichlet cette fonction est développable en série de Fourier.

b)  $f$  est paire, d'où  $b_k = 0 \forall k \geq 0$  et

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx = \frac{2}{2n+1},$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos kx dx = 2(-1)^{k+1}(2n)! \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^j}{(\pi k)^{2j}(2n-2j+1)!}, n \geq 1$$

D'où, pour  $-\pi \leq x \leq \pi$ ,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \\ &= \frac{1}{2n+1} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( 2(-1)^{k+1}(2n)! \left( \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^j}{(\pi k)^{2j}(2n-2j+1)!} \right) \cos kx \right). \end{aligned}$$

c) En particulier, pour  $x = \pi$ ,  $n = 1$ , on obtient  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ . Pour  $x = \pi$ ,  $n = 2$ , on trouve  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$ . Pour  $x = 0$ ,  $n = 1$ , on obtient  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}$  et pour  $x = 0$ ,  $n = 2$ , on a  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^4} = -\frac{7\pi^4}{720}$ .

**Exercice 6.7.8** Soit  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique, définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \in ]-\pi, \pi[ \\ C & \text{si } x = \pi \end{cases}$$

où  $C$  est une constante.

a) Tracer le graphe de  $f$ .

b) Calculer les coefficients de Fourier de  $f$  et en déduire la série de Fourier associée à  $f$ .

c) Déterminer la constante  $C$  pour que la série obtenue en b) converge simplement en tout point  $x$ .

d) En déduire la somme de la série :  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2}$ .

Réponse : b) On a

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x dx = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi} = \frac{2 \sinh \pi}{\pi},$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos kx dx = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi} \frac{(-1)^k}{1+k^2} = \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \frac{(-1)^k}{1+k^2},$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin kx dx = -\frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi} \frac{(-1)^k k}{1+k^2} = -\frac{2 \sinh \pi}{\pi} \frac{(-1)^k k}{1+k^2},$$

et par conséquent, la série de Fourier associée à  $f$  s'écrit

$$\frac{\sinh \pi}{\pi} + \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2} (\cos kx - k \sin kx).$$

c) Les hypothèses du théorème de Dirichlet étant satisfaites, on en déduit que la série de Fourier ci-dessus converge simplement en tout point de discontinuité  $x$  vers  $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$  et en tout point de continuité  $x$  vers  $f(x)$ . Ici, on a au point de discontinuité  $x = \pi$ ,

$$\frac{f(\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \frac{e^\pi + e^{-\pi}}{2} = \cosh \pi,$$

et en tout point de continuité  $x$  (c'est-à-dire  $x \neq \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots$ ),

$$e^x = \frac{\sinh \pi}{\pi} + \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2} (\cos kx - k \sin kx).$$

Lorsque  $C = \cosh \pi$ , la série ci-dessus converge simplement en tout point  $x$ .

d) Il suffit de remplacer  $x = 0$  dans l'expression ci-dessus, on obtient

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2} = \frac{\pi - \sinh \pi}{2 \sinh \pi}.$$

**Exercice 6.7.9** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , une fonction  $2\pi$ -périodique, continue et de classe  $C^1$  par morceaux. Montrer que la série de Fourier associée à  $f$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$  vers  $f$ .

**Exercice 6.7.10** Montrer que la somme de la série

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kx}{\ln k},$$

est une fonction continue sur un ensemble à préciser. Montrer que cette série ne peut être une série de Fourier (d'une fonction intégrable  $f$ ).

Réponse : La série proposée converge simplement sur  $\mathbb{R}$  et converge uniformément sur  $[\alpha, 2\pi - \alpha]$ ,  $\alpha \in ]0, \pi[$ , vers une fonction continue sur  $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ . Pour le reste, il suffit d'utiliser un raisonnement par l'absurde comme dans l'exercice 6.6.17.

**Exercice 6.7.11** Soit  $f(x_1, \dots, x_n)$  une fonction  $2\pi$ -périodique en  $x_1, \dots, x_n$  et supposons qu'elle est de classe  $C^1$ . Déterminer la série de Fourier de cette fonction.

Réponse : On trouve

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k_1, \dots, k_n=-\infty}^{\infty} c_{k_1, \dots, k_n} e^{i(k_1 x_1 + \dots + k_n x_n)},$$

où

$$c_{k_1, \dots, k_n} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} f(x_1, \dots, x_n) e^{-i(k_1 x_1 + \dots + k_n x_n)} dx_1 \dots dx_n,$$

où  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$ .

**Exercice 6.7.12** On considère l'équation aux dérivées partielles (équation de la corde vibrante) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0$$

où  $u(x, t)$  est l'amplitude des mouvements transversaux de la corde et  $c > 0$  est une constante (vitesse de la propagation) connue. On suppose que la corde est homogène et tendue entre ses extrémités fixes 0 et  $l$ . Déterminer la solution de cette équation qui satisfait aux conditions suivantes :

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x) & (\text{déformation initiale de la corde en } t = 0), \quad 0 < x < l, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, & 0 < x < l, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Réponse : Il suffit d'utiliser un raisonnement similaire à celui de l'exercice 6.6.26, en posant (méthode de séparation des variables) :  $u(x, t) = f(x)g(t)$ . On obtient  $u_k(x, t) = A_k \sin \frac{k\pi}{l} x \cos \frac{k\pi c}{l} t$ , et via le principe de superposition,

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi}{l} x \cos \frac{k\pi c}{l} t.$$

En se basant sur la condition aux limites

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi}{l} x,$$

on détermine les coefficients  $A_k$  à l'aide de la méthode des séries de Fourier et on obtient finalement la solution

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{2}{l} \int_0^{\infty} f(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx \right) \sin \frac{k\pi}{l} x \cos \frac{k\pi c}{l} t.$$

**Exercice 6.7.13** On considère l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0$$

où  $u : [0, L] \times [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, t) \mapsto u(x, t)$  est une fonction continue sur  $[0, L] \times [0, +\infty[$  et de classe  $C^\infty$  sur  $]0, L[ \times ]0, +\infty[$ . On suppose satisfaites les conditions aux limites :  $u(x, t) = u(L, t) = 0$ ,  $L > 0$ , ainsi que les conditions initiales :  $u(x, 0) = \varphi(x)$ , où  $\varphi : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction  $2L$ -périodique, impaire et de classe  $C^4$ . Déterminer  $u(x, t)$ ,  $0 \leq x \leq L$ , à l'aide des séries de Fourier.

Indication : Comme dans l'exercice 6.6.26, on utilise la méthode de séparation des variables en posant :  $u(x, t) = f(x)g(t)$ , on détermine  $f$ ,  $g$  et on applique le principe de superposition. Ensuite, on prolonge la fonction  $\varphi$  sur  $[-L, 0]$  de manière impaire et on la décompose en série de Fourier.

**Exercice 6.7.14 (Exemple de Féjer).** On considère la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , paire,  $2\pi$ -périodique définie par

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin(2^{k^3} + 1) \frac{x}{2}.$$

Montrer que  $f$  est continue et que sa série de Fourier diverge en 0.

**Exercice 6.7.15** On considère une variante de l'exercice précédent. Soit

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in ]0, \pi[ \\ f(-x) & \text{si } x \in ]-\pi, 0[ \end{cases}$$

où la fonction  $f$  est définie dans l'exercice 6.7.14. Soit  $S_n$  la somme partielle de la série de Fourier (associée à  $g$ ) en  $x = 0$ . Montrer que :

$$S_{2^{l^3}-1} > \frac{\ln(2^{l^3} + 1)}{2\pi l^2}.$$

En déduire que la série de Fourier de  $g$  en  $x = 0$  diverge.

Réponse : La série de Fourier en question converge normalement (donc uniformément) sur  $\mathbb{R}$  vers une fonction continue  $f$  (théorème de continuité). En posant  $n = 2^{l^3} - 1$ , l'inégalité en résulte. Pour  $l$  assez grand,  $\ln(2^{l^3} + 1)$  est équivalent à  $l^3 \ln 2$ , d'où  $S_{2^{l^3}-1} > \frac{l \ln 2}{2\pi}$  et la suite  $(S_n)$  diverge.

**Exercice 6.7.16** (*Exemple de Kolmogorov*). Soit  $(p_k)$  une suite de polynômes trigonométriques satisfaisant aux conditions :  $\deg p_i < \deg p_j, i < j$ ,  $p_k(x) \geq 0$ ,  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_k(x) dx = 1$ , pour tout  $x$  et pour tout  $k$ . Soit  $n_k \in \{1, \dots, \deg p_k\}$  un entier tendant vers l'infini et soit  $\Omega_k \subset \mathbb{R}$  :  $\Omega_i \subset \Omega_j, i < j$ ,  $\bigcup_k \Omega_k = ]0, 2\pi[$ . On suppose que pour tout  $x \in \Omega_k$ , il existe  $l_x \in \{n_k, \dots, \deg p_k\}$  tel que :  $\sum_{l=1}^k p_l(x) \geq \omega_k$ , où  $\omega_k$  tend vers l'infini. On associe à chaque polynôme  $p_k$  l'entier  $n_k$  défini ci-dessus. Montrer que la série de Fourier de la fonction

$$f(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{p_{k_l}(x)}{\sqrt{\omega_{k_l}}},$$

ne converge nulle part où  $(k_l)$  est une suite tendant suffisamment vite vers l'infini.

**Exercice 6.7.17 a)** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction  $2\pi$ -périodique, de classe  $C^1$  par morceaux, continue sur  $\mathbb{R}$  et de moyenne nulle sur une période (c'est-à-dire satisfaisant à  $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$ ). Montrer que

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 dx, \quad (\text{inégalité de Wirtinger})$$

Montrer que l'égalité a lieu si et seulement si  $f(x) = ae^{-ix} + be^{ix}$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $a$  et  $b$  sont des constantes.

b) Soit  $C$  une courbe de classe  $C^1$ , régulière, fermée, sans point double et de longueur  $L$ . Montrer que l'aire (noté  $A$ ) du compact dont  $C$  est la frontière, satisfait à  $A \leq \frac{L^2}{4\pi}$  (inégalité isopérimétrique). Montrer que l'égalité n'a lieu que pour le cercle. Interpréter géométriquement ce résultat.

Indication : a) Appliquer l'égalité de Parseval aux fonctions  $f$  et  $f'$ . b) La preuve peut se faire à l'aide de l'inégalité de Wirtinger.

**Exercice 6.7.18** (*Formule sommatoire de Poisson*). Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , une fonction de classe  $C^1$  telle que :  $x \mapsto (1+x^2)|f(x)|$  et  $x \mapsto (1+x^2)|f'(x)|$  soient bornées.

a) Montrer que la fonction  $\varphi : x \mapsto \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+2k\pi)$ , est de classe  $C^1$  et  $2\pi$ -périodique.

b) Montrer que la fonction  $\widehat{f} : x \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-itx} dt$ , est bien définie sur  $\mathbb{R}$ , puis, en utilisant le développement en série de Fourier de  $\varphi$ , que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(2k\pi).$$

**Exercice 6.7.19** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions périodiques, localement sommables. On suppose que le produit  $fg$  est localement sommable. Exprimer le coefficient de Fourier de  $fg$  en fonction de ceux de  $f$  et  $g$ .

Réponse : Soient  $c_k(f)$ ,  $c_k(g)$  et  $c_k(fg)$ , les coefficients de Fourier de  $f$ ,  $g$ , et  $fg$  respectivement. Alors  $c_k(fg) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{k-j}(f)c_j(g)$ .

**Exercice 6.7.20** On considère la distribution périodique  $T$  définie par

$$T = x^2 \Pi(x) * \Delta(x),$$

où  $\Pi(x)$  est la fonction porte (voir exercice 1.7.1, chapitre 1) et  $\Delta(x)$  est le peigne de Dirac (voir section 1.3.2, chapitre 1).

- a) Ecrire le développement en série de Fourier de la distribution  $T$ .
- b) Déterminer au sens des distributions  $T''$  ainsi que sa série de Fourier.
- c) En déduire le développement en série de Fourier de  $\Delta(x)$ .

Indication : a) La fonction  $\frac{1}{2}$ -périodique  $x \mapsto x^2 \Pi(x) * \Delta(x)$  étant paire, sa série de Fourier n'a que des termes en cosinus. b) Utiliser le fait que la dérivation terme à terme d'une série de Fourier de distributions de  $\mathcal{D}'(\Gamma)$  est une opération légitime. Trouver une relation liant les coefficients de Fourier de  $T''$  à ceux de  $T$ . c) Utiliser les expressions de  $T''$  trouvées précédemment. On trouve  $\Delta(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k x}$ .

**Exercice 6.7.21** On considère la distribution  $a$ -périodique

$$T = vp \frac{1}{\sin \omega x}, \quad \omega \equiv \frac{2\pi}{a}$$

Déterminer les coefficients de Fourier de  $T$

Réponse : D'après la définition de la valeur principale de Cauchy, on peut écrire

$$c_k = \lim_{(\delta, \epsilon) \rightarrow (0, 0)} \frac{1}{a} \left( \int_{-\frac{a(1-\delta)}{2}}^{-\frac{a\epsilon}{2}} \frac{e^{-ik\omega x}}{\sin \omega x} dx + \int_{\frac{a\epsilon}{2}}^{\frac{a(1-\delta)}{2}} \frac{e^{-ik\omega x}}{\sin \omega x} dx \right).$$

On considère tout d'abord le cas  $k > 0$ . On pose  $z = e^{-ik\omega x}$ , le problème se ramène au calcul de l'intégrale d'une fonction d'une variable complexe de la forme  $\frac{z^k}{z^2 - 1}$ . Cette dernière a deux pôles simples :  $-1$ ,  $1$  et de résidus respectifs  $\frac{(-1)^{k+1}}{2}$ ,  $\frac{1}{2}$ . Le reste découle du théorème des résidus et on obtient l'expression  $c_k = -i \frac{1 - (-1)^k}{2}$ ,  $k \geq 0$  et puisque  $\sin \omega x$  est réelle, il en résulte que  $c_k = i \frac{1 - (-1)^k}{2}$ ,  $k < 0$ .

**Exercice 6.7.22** Déterminer le développement en série de Fourier de la distribution définie par  $T = \ln |\sin x|$ .

Réponse :  $T$  est une distribution  $\pi$ -périodique, régulière et paire. Sa série de Fourier n'a que des termes en cosinus. On trouve  $T = -\ln 2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{k}$ .

**Exercice 6.7.23** Ecrire la série de Fourier de la distribution :  $T = vp \cot x$ .

Réponse :  $T$  est une distribution  $\pi$ -périodique, impaire et sa série de Fourier n'a que des termes en sinus. On obtient  $T = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sin 2kx$ , par calcul direct ou en montrant que cette distribution est la dérivée de celle définie dans l'exercice précédent.



# Chapitre 7

## Transformée de Fourier

### Introduction

Nous allons d'abord étudier la transformée de Fourier

$$\mathcal{L}^1 \longrightarrow \mathcal{C}_0, \quad f \longmapsto \widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \omega x} dx, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

dans le cadre de l'espace  $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ . Ici  $\mathcal{C}_0$  désigne l'ensemble des fonctions continues qui tendent vers 0 en  $+\infty$ . On démontre qu'effectivement  $\widehat{f}$  est une fonction continue qui tend vers 0 à l'infini. Une telle fonction est une injection non surjective de  $\mathcal{L}^1$  sur  $\mathcal{C}_0$ . Le fait que  $\widehat{f}$  n'est pas intégrable, le problème d'inversion de la transformée de Fourier va se poser. Pour le résoudre, on suppose que la transformée de Fourier elle-même est dans  $\mathcal{L}^1$ . Plus précisément, on établit la formule sommatoire de Poisson de laquelle on déduira la formule d'inversion de Fourier qui permet de retrouver  $f$  à partir de  $\widehat{f}$  lorsque cette dernière est intégrable. Ensuite, on considère un nouvel espace fonctionnel appelé espace de Schwartz, dénoté  $\mathcal{S}$ , et constitué des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide. Pour cet espace, la transformée de Fourier

$$\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}, \quad f \longmapsto \widehat{f} = \overset{\vee}{f},$$

est un isomorphisme topologique dont l'inversion (la transformée de Fourier de la transformée de Fourier) redonne la fonction de départ. Ici la fonction  $\overset{\vee}{f}$  désigne  $f(-x)$ . On étudie aussi la transformée de Fourier des distributions tempérées (des fonctionnelles  $T$  linéaires continues sur l'espace  $\mathcal{S}$  et à valeurs dans  $\mathbb{C}$ ),

$$\langle \widehat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \widehat{\varphi} \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

L'isomorphisme entre  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}$  peut se transposer dans le cas de ces distributions et il y a conservation de la norme  $\mathcal{L}^2$ . Enfin, on étudie la transformée de Fourier

sur l'espace de Hilbert  $\mathcal{L}^2$ . Comme  $\mathcal{L}^2 \not\subset \mathcal{L}^1$ , la définition de  $\widehat{f}$  donnée pour  $f \in \mathcal{L}^1$  ne s'applique pas pour un élément de  $\mathcal{L}^2$ . Cependant, l'espace  $\mathcal{S}$  étant dense dans  $\mathcal{L}^2$  alors la transformée de Fourier se prolonge continûment à tout  $\mathcal{L}^2$ . On montre que tout élément de  $\mathcal{L}^2$  est limite au sens de la topologie de  $\mathcal{L}^2$  (autrement dit, il s'agit de la convergence en moyenne quadratique) d'une suite d'éléments de l'espace  $\mathcal{S}$ . Pour l'espace  $\mathcal{L}^2$ , on a à nouveau un isomorphisme topologique

$$\mathcal{L}^2 \longrightarrow \mathcal{L}^2, \quad f \longmapsto \widehat{f}(\omega) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\text{dans } \mathcal{L}^2) \int_{-\lambda}^{\lambda} f(x) e^{-2\pi i \omega x} dx, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

mais la transformée de Fourier devient une transformée définie par une limite en moyenne. On donnera aussi un aperçu sur la transformation de Fourier à plusieurs variables et dont les propriétés sont similaires à celles étudiées pour le cas d'une variable. Comme dans les autres chapitres, le reste de celui-ci comporte de nombreux exercices complètement résolus ainsi que des exercices proposés avec éventuellement des réponses ou des indications.

## 7.1 Transformée de Fourier dans $\mathcal{L}^1$

**Définition 7.1.1** Soit  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) une fonction appartenant à  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ . On appelle transformée de Fourier de  $f$ , la fonction  $\widehat{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$  définie par

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \omega x} dx, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

Cette intégrale est bien définie puisque  $|f(x)e^{-2\pi i \omega x}| = |f(x)|$  et  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ . On écrira symboliquement :  $\widehat{f} = \mathcal{F}f$  ou  $\widehat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f(x)\}$ . D'autres notations existent dans la littérature.

**Remarque 7.1.1** Nous verrons plus loin que sous certaines conditions ( $f \in \mathcal{L}^1$  et  $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1$ , exercice 7.6.24 ou encore proposition 7.3.9), on peut obtenir  $f(x)$  à partir de  $\widehat{f}(\omega)$  par la transformation inverse (dite formule d'inversion de Fourier)

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{2\pi i \omega x} d\omega,$$

et nous écrirons  $f = \overline{\mathcal{F}}\widehat{f} = \mathcal{F}^{-1}\widehat{f}$  ou  $f(x) = \overline{\mathcal{F}}\{\widehat{f}(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\widehat{f}(\omega)\}$ . On dira transformée de Fourier de  $\widehat{f}$  (ou cotransformée). Et plus généralement, si  $f$  n'est pas continue en  $x$ , on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{2\pi i \omega x} d\omega = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2},$$

où  $f(x+0)$  et  $f(x-0)$  sont les limites à droite et à gauche de  $f(x)$ . Soulignons aussi que certains auteurs adoptent d'autres définitions et le lecteur est censé en tenir compte. Citons par exemple les formules

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-\pi i \omega x} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{\pi i \omega x} d\omega,$$

ou

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-\pi i \omega x} dx, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{\pi i \omega x} d\omega,$$

et il en existe d'autres. Au point de vue des mathématiques, les paires de formules ci-dessus sont équivalentes et aussi conventionnelles les unes que les autres. Il va de soi que la théorie mathématique de l'intégrale de Fourier ne dépend en rien du choix particulier de dimensions pour les variables.

**Remarque 7.1.2** Il faut noter que la transformée de Fourier n'existe pas toujours. Par exemple, la fonction  $f(x) = x^2$  n'admet pas de transformée de Fourier car l'intégrale  $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-2\pi i \omega x} dx$  n'existe pour aucune valeur de  $\omega$ .

Nous allons voir que si  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ , alors  $\widehat{f}$  est une fonction continue qui tend vers 0 à l'infini. Ce résultat souvent utilisé est connu sous le nom de lemme ou théorème de Riemann-Lebesgue (voir aussi lemme 6.2.9 du chapitre précédent).

**Proposition 7.1.2** Si  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ , alors  $\widehat{f}$  est continue, bornée,  $\widehat{f}(\omega)$  tend vers 0 quand  $\omega \rightarrow \pm\infty$  et  $\|\widehat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_1$ .

*Démonstration :* On a

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i \omega x} dx, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

La fonction sous le signe intégrale est continue pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$  et est mesurable pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ . En outre, on a

$$|f(x)e^{-2\pi i \omega x}| = |f(x)|, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

Le second membre appartient à  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  et d'après le théorème de continuité pour les fonctions définies par une intégrale, la fonction  $\widehat{f}$  est continue. Par ailleurs, on a

$$|\widehat{f}(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \|f\|_1, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

ce qui montre que  $\widehat{f}$  est bornée. De plus,

$$\|\widehat{f}\|_{\infty} = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |\widehat{f}(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \|f\|_1.$$

Montrons maintenant que  $\widehat{f}(\omega)$  tend vers 0 quand  $\omega \rightarrow \pm\infty$ . En effet, l'espace des fonctions continues par morceaux à support borné sur  $\mathbb{R}$  ou celui des fonctions en escalier est dense dans  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ . Toute fonction  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  peut être approchée au sens de la norme de  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  par une suite de fonctions en escalier à support borné. On peut donc trouver une fonction en escalier  $\varphi$ ; cela signifie qu'il existe des intervalles bornés  $[\alpha_{k-1}, \alpha_k]$  et des valeurs  $c_1, \dots, c_n$  tels que :

$$\varphi = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{1}_{[\alpha_{k-1}, \alpha_k]},$$

où  $\mathbf{1}_{[\alpha_{k-1}, \alpha_k]}$  désigne la fonction caractéristique de  $[\alpha_{k-1}, \alpha_k]$ , c'est-à-dire égale à 1 si  $x \in [\alpha_{k-1}, \alpha_k]$  et à 0 sinon. Donc  $\varphi$  s'écrit comme combinaison linéaire finie de fonctions caractéristiques d'intervalles et on peut calculer sa transformée de Fourier  $\widehat{\varphi}$  par linéarité. Plus précisément, on a

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{1}_{[\alpha_{k-1}, \alpha_k]} \right) e^{-2\pi i \omega x} dx, \\ &= \sum_{k=1}^n c_k \int_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} e^{-2\pi i \omega x} dx, \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{ic_k}{2\pi\omega} (e^{-2\pi i \omega \alpha_k} - e^{-2\pi i \omega \alpha_{k-1}}). \end{aligned}$$

Dès lors

$$|\widehat{\varphi}(\omega)| \leq \frac{1}{\pi} \left( \sum_{k=1}^n |c_k| \right) \frac{1}{|\omega|},$$

et pour  $\omega \rightarrow \pm\infty$ , on a  $|\widehat{\varphi}(\omega)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Par conséquent,

$$|\widehat{f}(\omega)| \leq |\widehat{f}(\omega) - \widehat{\varphi}(\omega)| + |\widehat{\varphi}(\omega)| \leq \varepsilon,$$

et la démonstration s'achève.  $\square$

On montre (voir exercice 7.6.27) que si  $f, g \in \mathcal{L}^1$  et si  $\widehat{f}(\omega) = \widehat{g}(\omega)$  alors  $f = g$  pour presque tout point de  $\mathbb{R}$ . En particulier, si  $f$  et  $g$  sont continues et si  $f$  et  $\widehat{g}$  sont égales alors  $f$  et  $g$  le sont aussi.

Nous allons étudier ci-dessous un certain nombre de propriétés élémentaires sur les transformées de Fourier.

**Propriété 7.1.3 (Linéarité).** Soient  $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Alors

$$\mathcal{F}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha \mathcal{F}\{f(x)\} + \beta \mathcal{F}\{g(x)\}.$$

*Démonstration :* La preuve résulte de la linéarité de l'intégrale.  $\square$

**Propriété 7.1.4 (Translation).** Soient  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  et  $c \in \mathbb{R}$ . Alors

$$\mathcal{F}\{f(x - c)\} = e^{-2\pi i \omega c} \widehat{f}(\omega).$$

*Démonstration :* On a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(x - c)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x - c) e^{-2\pi i \omega x} dx, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-2\pi i \omega(u+c)} du, \quad u \equiv x - c \\ &= e^{-2\pi i \omega c} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-2\pi i \omega u} du, \\ &= e^{-2\pi i \omega c} \widehat{f}(\omega), \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Propriété 7.1.5 (Modulation).** Soient  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  et  $\omega_0 \in \mathbb{R}$ . Alors

$$\mathcal{F}\{e^{2\pi i \omega_0 x} f(x)\} = \widehat{f}(\omega - \omega_0).$$

*Démonstration :* On a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{e^{2\pi i \omega_0 x} f(x)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \omega_0 x} f(x) e^{-2\pi i \omega x} dx, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i (\omega - \omega_0)x} dx, \\ &= \widehat{f}(\omega - \omega_0), \end{aligned}$$

et achève la démonstration.  $\square$

**Propriété 7.1.6 (Changement d'échelle).** Soient  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  et  $c \in \mathbb{R}^*$ . Alors

$$\mathcal{F}\{f(cx)\} = \frac{1}{|c|} \widehat{f}\left(\frac{\omega}{c}\right).$$

En outre, la transformée de Fourier d'une fonction paire (resp. impaire) est paire (resp. impaire).

*Démonstration :* On a

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(cx)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(cx)e^{-2\pi i \omega x} dx, \\ &= \frac{1}{|c|} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-\frac{2\pi i \omega u}{c}} du, \quad u \equiv cx \\ &= \frac{1}{|c|} \widehat{f}\left(\frac{\omega}{c}\right).\end{aligned}$$

En particulier, on a  $\mathcal{F}\{f(-x)\} = \widehat{f}(-\omega)$  et le résultat en découle.  $\square$

**Propriété 7.1.7 (Conjugaison complexe).** Soit  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ . Alors

$$\mathcal{F}\{\overline{f}(x)\} = \overline{\widehat{f}}(-\omega).$$

*Démonstration :* On a

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\overline{f}(x)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f}(x)e^{-2\pi i \omega x} dx, \\ &= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{2\pi i \omega x} dx}, \\ &= \overline{\widehat{f}}(-\omega),\end{aligned}$$

et la démonstration s'achève.  $\square$

Nous allons maintenant étudier la transformée de Fourier d'une dérivée.

**Proposition 7.1.8** Soit  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ . Supposons que  $f$  est dérivable et que  $f' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ . Alors

$$\mathcal{F}\{f'(x)\} = 2\pi i \omega \mathcal{F}\{f(x)\} = 2\pi i \omega \widehat{f}(\omega).$$

Si en outre,  $f$  admet des dérivées jusqu'à l'ordre  $n$  qui sont dans  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ , alors

$$\mathcal{F}\{f^{(n)}(x)\} = (2\pi i \omega)^n \mathcal{F}\{f(x)\} = (2\pi i \omega)^n \widehat{f}(\omega).$$

*Démonstration :* En effet, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f'(x)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-2\pi i \omega x} dx, \\ &= f(x)e^{-2\pi i \omega x} \Big|_{-\infty}^{\infty} + 2\pi i \omega \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i \omega x} dx.\end{aligned}$$

On sait que si une fonction intégrable admet une limite, alors cette dernière est nulle. Par hypothèse,  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  et il suffit de montrer que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$  existe. Notons que

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f(t)dt.$$

Comme  $f'$  est intégrable, alors  $f(x)$  a une limite finie pour  $x \rightarrow \pm\infty$ . Cette limite ne peut être que zéro car sinon  $f$  ne serait pas intégrable. Dès lors,

$$\mathcal{F}\{f'(x)\} = 2\pi i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i\omega x}dx = 2\pi i\omega \widehat{f}(\omega).$$

Plus généralement, puisque  $f$  admet des dérivées jusqu'à l'ordre  $n$  alors en répétant le processus ci-dessus, on obtient

$$\mathcal{F}\{f^{(n)}(x)\} = (2\pi i\omega)^n \widehat{f}(\omega),$$

ce qui achève la démonstration.  $\square$

Le résultat suivant montre que plus la fonction  $f$  est dérivable, à dérivées dans  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ , plus sa transformée de Fourier  $\widehat{f}$  décroît rapidement à l'infini.

**Proposition 7.1.9** *Si  $f$  admet des dérivées jusqu'à l'ordre  $n$  qui sont dans  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ , alors*

$$|\widehat{f}(\omega)| \leq \frac{C}{|\omega|^n}, \quad C \equiv \text{constante}$$

ce qui montre que plus  $n$  est grand, plus  $\widehat{f}$  décroît rapidement à l'infini.

*Démonstration :* En effet, de la formule (voir proposition précédente)

$$\mathcal{F}\{f^{(n)}(x)\} = (2\pi i\omega)^n \widehat{f}(\omega),$$

on déduit immédiatement

$$|\widehat{f}(\omega)| \leq \frac{1}{(2\pi|\omega|)^n} \int_{-\infty}^{\infty} |f^{(n)}(x)|dx \leq \frac{C}{|\omega|^n},$$

où  $C \equiv \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} |f^{(n)}(x)|dx$ . La démonstration s'achève.  $\square$

**Proposition 7.1.10** *Soit  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ . Si  $xf(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ , alors  $\widehat{f}$  est dérivable et l'on a*

$$\frac{d\widehat{f}(\omega)}{d\omega} = \mathcal{F}\{-2\pi ix f(x)\}.$$

*Si en outre,  $x^n f(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  alors*

$$\frac{d^n \widehat{f}(\omega)}{d\omega^n} = \mathcal{F}\{(-2\pi ix)^n f(x)\}.$$

*Démonstration :* On a

$$\frac{d\widehat{f}(\omega)}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i \omega x} dx.$$

Comme

$$|-2\pi i x f(x) e^{-2\pi i \omega x}| = 2\pi |x f(x)|,$$

et que par hypothèse  $x f(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ , alors d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale,

$$\frac{d\widehat{f}(\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} -2\pi i x f(x) e^{-2\pi i \omega x} dx = \mathcal{F}\{-2\pi i x f(x)\}.$$

Plus généralement, si  $x^n f(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ , on obtient en répétant le processus ci-dessus la formule

$$\frac{d^n \widehat{f}(\omega)}{d\omega^n} = \mathcal{F}\{(-2\pi i x)^n f(x)\},$$

et la démonstration s'achève.  $\square$

**Proposition 7.1.11** *Sous les hypothèses de la proposition précédente, on a*

$$\frac{d^n \widehat{f}(\omega)}{d\omega^n} \leq (2\pi)^n \int_{-\infty}^{\infty} |x^n f(x)| dx,$$

*ce qui signifie que plus  $f$  décroît rapidement à l'infini, plus  $n$  est grand (c'est-à-dire plus  $\widehat{f}$  est dérivable et ses dérivées sont bornées).*

*Démonstration :* Il suffit d'utiliser la proposition précédente.  $\square$

**Proposition 7.1.12** *Soit  $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ . Alors  $f * g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  et*

$$\mathcal{F}\{(f * g)(x)\} = \mathcal{F}\{f(x)\} \mathcal{F}\{g(x)\}.$$

*Autrement dit, la transformée de Fourier d'un produit de convolution est égale au produit ordinaire des transformées de Fourier de chaque facteur.*

*Démonstration :* On a

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t) dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

D'où

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{(f * g)(x)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x) e^{-2\pi i \omega x} dx, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t) e^{-2\pi i \omega x} dt dx, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \omega t} g(x-t) e^{-2\pi i \omega(x-t)} dt dx.\end{aligned}$$

Posons  $u = t$  et  $v = x - t$ . D'après le théorème du changement de variables dans les intégrales multiples, on a

$$\mathcal{F}\{(f * g)(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-2\pi i \omega u} g(v) e^{-2\pi i \omega v} |J| du dv,$$

avec

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Dès lors,

$$\mathcal{F}\{(f * g)(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-2\pi i \omega u} du \int_{-\infty}^{\infty} g(v) e^{-2\pi i \omega v} dv = \mathcal{F}\{f(x)\} \mathcal{F}\{g(x)\},$$

ce qui achève la démonstration.  $\square$

## 7.2 Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}$

Dans la section 7.3, nous serons amenés à définir la transformée de Fourier (notée  $\mathcal{FT}$ ) d'une distribution  $T$  en posant  $\langle \mathcal{FT}, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle$  où

$$\mathcal{F}\varphi = \widehat{\varphi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-2\pi i \omega x} dx, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

désigne la transformée de Fourier de  $\varphi$ . Or  $\varphi \in \mathcal{D}$  n'implique pas  $\widehat{\varphi} \in \mathcal{D}$ . En effet, si le support de  $\varphi$  est borné, on peut prolonger  $\widehat{\varphi}$  dans  $\mathbb{C}$  en une fonction entière et donc pour  $\varphi \neq 0$ , le support de  $\widehat{\varphi}$  n'est pas borné. Pour résoudre ce problème, Schwartz lui-même a eu l'idée de substituer à  $\mathcal{D}$  un espace noté  $\mathcal{S}$  qui porte son nom. Nous verrons que l'un des avantages de l'utilisation de l'espace  $\mathcal{S}$  est que si  $\varphi \in \mathcal{S}$  alors  $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$ . Rappelons la définition de cet espace que nous avons déjà évoqué dans la section 1.5 (chapitre 1).

**Définition 7.2.1** L'espace de Schwartz des fonctions indéfiniment dérивables à décroissance rapide est défini par

$$\mathcal{S} = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty : \forall m, n \in \mathbb{N}, \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^m \varphi^{(n)}(x)| < \infty\}.$$

Autrement dit,

$$\mathcal{S} = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty : \forall m, n \in \mathbb{N}, \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x^m \varphi^{(n)}(x)| = 0\},$$

ou ce qui revient au même,  $\mathcal{S}$  est l'ensemble des fonctions indéfiniment dérивables telle que  $\varphi$  et toutes ses dérivées décroissent plus rapidement que toute puissance de  $\frac{1}{|x|}$  quand  $|x| \rightarrow \infty$ .

Notons que  $\mathcal{S}$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  (si  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , alors  $\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \in \mathcal{S}$ ). Il est clair que :  $\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{E}$ . L'espace  $\mathcal{S}$  est une algèbre pour la convolution : si  $f, g \in \mathcal{S}$  alors  $f * g \in \mathcal{S}$ .

**Exemple 7.2.1** La fonction  $e^{-x^2}$  est indéfiniment dérivable et

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^m e^{-x^2} = 0,$$

elle est à décroissance rapide et donc  $e^{-x^2} \in \mathcal{S}$ .

**Exemple 7.2.2** La fonction  $e^{-|x|}$  est à décroissance rapide mais n'est pas de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , donc  $e^{-|x|} \notin \mathcal{S}$ .

**Exemple 7.2.3** La fonction  $\frac{1}{1+x^2}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  mais n'est pas à décroissance rapide, donc  $\frac{1}{1+x^2} \notin \mathcal{S}$ .

**Définition 7.2.2** On dit qu'une suite de fonctions  $(\varphi_k)$  de  $\mathcal{S}$  converge dans  $\mathcal{S}$  vers  $\varphi$  si pour tout  $m, n \in \mathbb{N}$ , la suite  $(x^m \varphi_k^{(n)}(x))$  converge uniformément vers  $x^m \varphi^{(n)}(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Remarque 7.2.1** Toute fonction  $\varphi \in \mathcal{S}$  est évidemment bornée et sommable. Il s'agit de conséquences immédiates des définitions. En outre, si  $\varphi \in \mathcal{S}$  alors  $x^m \varphi^{(n)}$  et  $(x^m \varphi)^{(n)}$  appartiennent à  $\mathcal{S}$ , pour tout  $m, n \in \mathbb{N}$ .

Notons que si  $\varphi \in \mathcal{S}$  alors  $\varphi \in \mathcal{L}^1$ , donc  $\widehat{\varphi}$  existe et on a

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-2\pi i \omega x} dx, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

**Proposition 7.2.3** L'espace  $\mathcal{S}$  est inclus dans  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ .

*Démonstration :* Soit  $\varphi \in \mathcal{S}$  et montrons que pour tout  $m, n \in \mathbb{N}$ , alors  $x^m \varphi^{(n)} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ . En effet, posons

$$\psi(x) = \begin{cases} \max_{x \in [-1, 1]} |x^m \varphi^{(n)}(x)| & \text{si } |x| \leq 1 \\ \frac{C}{x^2} & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

où  $C \equiv \sup_{\mathbb{R}} |x^{m+2}\varphi^{(n)}(x)| < \infty$ . Notons que  $\psi \in \mathcal{L}^1$  et  $|x^m\varphi^{(n)}(x)| \leq \psi(x)$ . La fonction  $x^m\varphi^{(n)}$  est continue, donc elle est mesurable et appartient à  $\mathcal{L}^1$ . De même, on a  $\psi^2 \in \mathcal{L}^1$ ,  $|x^m\varphi^{(n)}(x)|^2 \leq \psi^2(x)$  et dès lors  $x^m\varphi^{(n)} \in \mathcal{L}^2$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Proposition 7.2.4** Soit  $\varphi \in \mathcal{S}$ . Alors  $\widehat{\varphi} \in \mathcal{C}^\infty$  et on a

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi}^{(n)}(\omega) &= (-2\pi i)^n \widehat{\psi}(\omega), \quad \psi(x) \equiv x^n \varphi(x) \\ \widehat{\varphi^{(m)}}(\omega) &= (2\pi i \omega)^m \widehat{\varphi}(\omega).\end{aligned}$$

*Démonstration :* Pour  $n = 0$ , la première relation est vraie. Supposons qu'elle soit vraie au rang  $n$  et montrons qu'elle est vraie au rang  $n + 1$ . D'après la proposition 7.1.10, on a

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi}^{(n)}(\omega) &= \mathcal{F}\{(-2\pi i x)^n \varphi(x)\}, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (-2\pi i x)^n \varphi(x) e^{-2\pi i \omega x} dx, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x, \omega) dx,\end{aligned}$$

où  $u(x, \omega)$  désigne la fonction sous le signe intégral. Notons que  $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$  et pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ , on a

$$|u(x, \omega)| = |(2\pi x)^n \varphi(x)| \in \mathcal{L}^1, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial \omega}(x, \omega) \right| = |(2\pi x)^{n+1} \varphi(x)| \in \mathcal{L}^1.$$

En utilisant la formule de Leibniz, on obtient que  $\widehat{\varphi}^{(n)}$  est dérivable et

$$\widehat{\varphi}^{(n+1)}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial \omega}(x, \omega) dx = (-2\pi i)^{n+1} \mathcal{F}\{x^{n+1} \varphi(x)\}.$$

Concernant la seconde relation, il est clair qu'elle est vraie pour  $m = 0$ . Supposons qu'elle soit vraie au rang  $m$  et montrons qu'elle est vraie au rang  $m + 1$ . En utilisant la proposition 7.1.10 (ou une intégration par parties), on obtient immédiatement

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi^{(m+1)}}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(m+1)}(x) e^{-2\pi i \omega x} dx, \\ &= \mathcal{F}\{\varphi^{(m+1)}(x)\}, \\ &= (2\pi i \omega)^{m+1} \widehat{\varphi}(\omega).\end{aligned}$$

La démonstration s'achève.  $\square$

**Proposition 7.2.5** Si  $\varphi \in \mathcal{S}$ , alors  $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$ . Autrement dit, l'espace  $\mathcal{S}$  est stable par transformée de Fourier.

*Démonstration :* En effet, d'après la proposition précédente,  $\widehat{\varphi} \in \mathcal{C}^\infty$  et

$$\widehat{\varphi}^{(n)}(\omega) = (-2\pi i)^n \widehat{\psi}(\omega),$$

où  $\psi(x) \equiv x^n \varphi(x)$ . Dès lors, pour tout  $m, n \in \mathbb{N}$ ,

$$(2\pi i \omega)^m \widehat{\varphi}^{(n)}(\omega) = (2\pi i \omega)^m (-2\pi i)^n \widehat{\psi}(\omega) = (-2\pi i)^n \widehat{\psi^{(m)}}(\omega).$$

En utilisant la proposition 7.1.2, on obtient

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}} |\omega^m \widehat{\varphi}^{(n)}(\omega)| = (2\pi)^{n-m} \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |\widehat{\psi^{(m)}}(\omega)| < \infty,$$

ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Proposition 7.2.6** Si une suite  $(\varphi_k)$  converge dans  $\mathcal{S}$  vers une fonction  $\varphi$ , alors  $\widehat{\varphi}_k$  converge dans  $\mathcal{S}$  vers  $\widehat{\varphi}$ .

*Démonstration :* Il suffit de montrer que si  $\varphi_k(x) \rightarrow 0$  dans  $\mathcal{S}$ , alors  $\widehat{\varphi}_k(\omega) \rightarrow 0$  dans  $\mathcal{S}$ . Pour tout  $m, n \in \mathbb{N}$ , la suite  $(x^n \varphi_k^{(m)}(x))$  converge uniformément vers 0. En raisonnant comme dans la proposition précédente, on montre que  $\omega^m \widehat{\varphi}^{(n)}$  converge uniformément vers 0. En effet, on a

$$(2\pi i \omega)^m \widehat{\varphi}_k^{(n)}(\omega) = \mathcal{F}\{((-2\pi i)\varphi_k(x))^{(m)}\},$$

d'où

$$|\omega^m \widehat{\varphi}_k^{(m)}(\omega)| \leq (2\pi)^{(n-m)} \| (x^n \varphi_k(x))^{(m)} \|_1.$$

Le second membre de l'inégalité ci-dessus est une combinaison linéaire de termes de la forme  $\int_{-\infty}^{\infty} |x^\alpha \varphi_k^{(\beta)}(x)| dx$ ,  $0 \leq \alpha \leq n$ ,  $0 \leq \beta \leq m$ . On pose comme dans la proposition 7.2.3,

$$\psi(x) = \begin{cases} \max_{x \in [-1, 1]} |x^\alpha \varphi^{(\beta)}(x)| & \text{si } |x| \leq 1 \\ \frac{C}{x^2} & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

où  $C \equiv \sup_{\mathbb{R}} |x^{\alpha+2} \varphi^{(\beta)}(x)| < \infty$ . La fonction  $\psi \in \mathcal{L}^1$  et on a  $|x^{\alpha+2} \varphi^{(\beta)}(x)| \leq \psi(x)$ . Notons que pour  $\varepsilon > 0$  arbitraire et  $k$  assez grand,  $\int_{-1}^1 |x^\alpha \varphi_k^{(\beta)}(x)| dx \leq 2\varepsilon$  car  $|x^\alpha \varphi_k^{(\beta)}(x)| \leq \varepsilon$ . De même, on a

$$\int_{-\infty}^{-1} |x^{\alpha+2} \varphi_k^{(\beta)}(x)| dx + \int_1^{\infty} |x^{\alpha+2} \varphi_k^{(\beta)}(x)| dx \leq 2 \int_1^{\infty} \frac{\varepsilon}{x^2} dx = 2\varepsilon.$$

La démonstration s'achève.  $\square$

On déduit de ce qui précède, le résultat suivant :

**Proposition 7.2.7** *La transformée de Fourier est une application linéaire continue de l'espace  $\mathcal{S}$  dans lui-même.*

**Proposition 7.2.8** (*Formule de Plancherel*). *Si  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ , alors*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \bar{\psi}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(\omega) \overline{\widehat{\psi}}(\omega) d\omega.$$

*Démonstration :* Montrons d'abord que si  $f, g \in \mathcal{S}$ , alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \bar{g}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) g(\omega) d\omega.$$

La fonction  $fg \in \mathcal{L}^1$  et d'après le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \bar{g}(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left( \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-2\pi i \omega x} d\omega \right) dx, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \omega x} dx \right) d\omega, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) \widehat{f}(\omega) d\omega. \end{aligned}$$

On pose dans cette formule,  $\varphi = f$  et  $\psi = \bar{g}$ . D'après la formule d'inversion de Fourier, on a

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(x) e^{2\pi i \omega x} dx, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}(x) e^{2\pi i \omega x} dx, \\ &= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-2\pi i \omega x} dx}, \\ &= \overline{\widehat{\psi}}(\omega), \end{aligned}$$

et d'après la formule ci-dessus, on obtient finalement

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \bar{\psi}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(x) \overline{\widehat{\psi}}(\omega) d\omega,$$

ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Remarque 7.2.2** *Pour une preuve de la formule de Plancherel où cette fois on suppose que  $\varphi \in \mathcal{L}^1$  et  $\psi \in \mathcal{S}$ , voir exercice 7.6.25.*

### 7.3 Transformée de Fourier des distributions

**Définition 7.3.1** *On appelle distribution tempérée, toute fonctionnelle linéaire continue définie sur  $\mathcal{S}$  et à valeurs dans  $\mathbb{C}$ .*

Les distributions tempérées forment un espace vectoriel que l'on note  $\mathcal{S}'$  (espace dual de  $\mathcal{S}$ ). On vérifie que :  $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$ . Comme dans la proposition 1.2.2 (chapitre 1), on a une caractérisation des distributions tempérées : une fonctionnelle linéaire  $T$  sur  $\mathcal{S}$  est une distribution tempérée si et seulement s'il existe  $C > 0$  et  $n \in \mathbb{N}$  tels que, pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}$ , on ait

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^n dx.$$

**Exemple 7.3.1** *Si  $f$  est localement sommable, alors la distribution qui lui est associée n'est en général pas tempérée (voir exercice 7.6.15).*

**Définition 7.3.2** *Une fonction  $f$  est dite à croissance lente si pour  $|x|$  grand,  $|f(x)| \leq A|x|^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  où  $A$  est une constante.*

Par exemple, une constante, un polynôme sont à croissance lente. En revanche, la fonction  $e^x$  n'est pas à croissance lente.

**Exemple 7.3.2** *Toute fonction localement sommable et à croissance lente, détermine une distribution tempérée (voir exercice 7.6.16).*

**Exemple 7.3.3** *Si  $f$  est localement sommable et si elle est de carré sommable, alors elle détermine une distribution tempérée (voir exercice 7.6.17).*

**Exemple 7.3.4** *Si  $f$  est sommable, alors elle détermine une distribution tempérée (voir exercice 7.6.18).*

**Exemple 7.3.5**  $\delta$  et  $vp \frac{1}{x}$  sont des distributions tempérées.

**Exemple 7.3.6** *Toute distribution à support borné est tempérée.*

**Exemple 7.3.7** *Si une distribution est tempérée, alors ses dérivées le sont aussi (voir exercice 7.6.19).*

**Exemple 7.3.8** *Si une distribution  $T$  est tempérée et si  $\alpha$  est une fonction de classe  $C^\infty$  à croissance lente ainsi que ses dérivées (en particulier un polynôme), alors  $\alpha T$  est tempérée (voir exercice 7.6.20).*

Soit  $f \in \mathcal{L}^1$  ou  $\mathcal{L}^2$ . On a vu que la distribution associée à cette fonction est tempérée. Dès lors, pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}$ , on a

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}f, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) \varphi(\omega) d\omega, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \omega x} dx \right) \varphi(\omega) d\omega, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(\omega) e^{-2\pi i \omega x} dx d\omega.\end{aligned}$$

Notons que  $|f(x)\varphi(\omega)e^{-2\pi i \omega x}| = |f(x)||\varphi(\omega)|$ . Puisque  $f\varphi$  est une fonction sommable, alors l'intégrale ci-dessus converge et la permutation des deux intégrales ci-dessus est légitime. Donc

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}f, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left( \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-2\pi i \omega x} d\omega \right) dx, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \widehat{\varphi}(x) dx, \\ &= \langle f, \mathcal{F}\varphi \rangle.\end{aligned}$$

En général, pour une distribution tempérée  $T$ , on a

**Définition 7.3.3** La transformée de Fourier d'une distribution tempérée  $T$  est la distribution  $\mathcal{F}T$  (que l'on note aussi  $\widehat{T}$ ) définie par

$$\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}$$

**Proposition 7.3.4** Si  $T \in \mathcal{S}'$ , alors  $\mathcal{F}T \in \mathcal{S}'$ .

*Démonstration :* Notons que le second membre de la relation

$$\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}$$

est bien définie car  $\varphi \in \mathcal{S}$  implique  $\mathcal{F}\varphi \in \mathcal{S}$ . La fonctionnelle  $\mathcal{F}T$  est évidemment linéaire sur  $\mathcal{S}$ . Elle est continue car si une suite  $(\varphi_k)$  converge vers  $\varphi$  dans  $\mathcal{S}$ , alors  $\mathcal{F}\varphi_k$  converge vers  $\mathcal{F}\varphi$  dans  $\mathcal{S}$  (voir proposition 7.2.6). Dès lors, puisque  $T$  est continue, on en déduit que  $\langle T, \mathcal{F}\varphi_k \rangle$  converge vers  $\langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle$ ; autrement dit vers  $\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle$ . Donc  $\mathcal{F}T$  est bien une distribution tempérée et la démonstration s'achève.  $\square$

**Remarque 7.3.1** De même, on définit la transformée de Fourier (conjuguée)  $\overline{\mathcal{F}}$  de  $\mathcal{F}$  en posant

$$\langle \overline{\mathcal{F}}T, \varphi \rangle = \langle T, \overline{\mathcal{F}}\varphi \rangle,$$

pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}$  et  $T \in \mathcal{S}'$  avec  $\overline{\mathcal{F}}\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)e^{2\pi i \omega x} dx$ . Par ailleurs, si  $\varphi \in \mathcal{S}$  et  $T \in \mathcal{S}'$ , alors

$$\langle \overline{\mathcal{F}}T, \varphi \rangle = \langle T, \overline{\mathcal{F}}\varphi \rangle = \langle T, \overline{\mathcal{F}\varphi} \rangle = \langle \overline{T}, \overline{\mathcal{F}\varphi} \rangle = \langle \overline{\mathcal{F}T}, \overline{\varphi} \rangle = \langle \overline{\mathcal{F}T}, \varphi \rangle,$$

d'où  $\overline{\mathcal{F}T} = \overline{\mathcal{F}\overline{T}}$ .

En s'inspirant des propositions 7.1.8 et 7.1.10, on obtient

**Proposition 7.3.5** *Si  $T$  est une distribution tempérée, alors sa dérivée  $T'$  est aussi tempérée et on a*

$$\mathcal{F}T' = 2\pi i \omega \mathcal{F}T, \quad c'est-à-dire \quad \widehat{T}' = 2\pi i \omega \widehat{T}.$$

Plus généralement, pour la dérivée d'ordre  $n$ , on a

$$\mathcal{F}T^{(n)} = (2\pi i \omega)^n \mathcal{F}T, \quad c'est-à-dire \quad \widehat{T^{(n)}} = (2\pi i \omega)^n \widehat{T}.$$

*Démonstration :* En effet, par hypothèse  $\varphi \in \mathcal{S}$ , donc  $\varphi' \in \mathcal{S}$  et on a

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}T', \varphi \rangle &= \langle T', \mathcal{F}\varphi \rangle, \\ &= \langle T, -(\mathcal{F}\varphi)' \rangle, \\ &= \langle T, \mathcal{F}(2\pi i x \varphi) \rangle, \\ &= \langle \mathcal{F}T, 2\pi i x \varphi \rangle, \\ &= \langle 2\pi i x \mathcal{F}T, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

D'où  $\mathcal{F}T' = 2\pi i \omega \mathcal{F}T$ ; produit d'une distribution par une fonction de classe  $C^\infty$ . En répétant le processus ci-dessus, on obtient  $\mathcal{F}T^{(n)} = (2\pi i \omega)^n \mathcal{F}T$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Proposition 7.3.6** *Si  $T$  est une distribution tempérée, alors*

$$(\mathcal{F}T)' = \mathcal{F}(-2\pi i x T),$$

et plus généralement, on a

$$(\mathcal{F}T)^{(n)} = \mathcal{F}\left((-2\pi i x)^{(n)} T\right).$$

*Démonstration :* En effet, on raisonne comme dans la proposition précédente. On a

$$\begin{aligned} \langle (\mathcal{F}T)', \varphi \rangle &= \langle \mathcal{F}T, -\varphi' \rangle, \\ &= \langle T, -\mathcal{F}\varphi' \rangle, \\ &= \langle T, -2\pi i x \mathcal{F}\varphi \rangle, \\ &= \langle -2\pi i x T, \mathcal{F}\varphi \rangle, \\ &= \langle \mathcal{F}(-2\pi i x T), \varphi \rangle, \end{aligned}$$

d'où le résultat. Même raisonnement pour  $(\mathcal{F}T)^{(n)} = \mathcal{F}((-2\pi ix)^{(n)}T)$  et la démonstration s'achève.  $\square$

De même, on montre comme précédemment que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(T(x - c)) &= e^{-2\pi i \omega c} \widehat{T}(\omega), \quad c \in \mathbb{R} \\ \mathcal{F}(T(cx)) &= \frac{1}{|c|} \widehat{T}\left(\frac{\omega}{c}\right), \quad c \in \mathbb{R}^*\end{aligned}\tag{7.3.1}$$

**Proposition 7.3.7** *Si  $T$  est une distribution à support borné, sa transformée de Fourier  $\mathcal{F}T$  est une fonction  $g$  telle que :*

$$g(\omega) = \langle T_x, e^{-2\pi i \omega x} \rangle.$$

*La fonction  $g$  est indéfiniment dérivable qui se prolonge en une fonction holomorphe entière dans le plan complexe.*

*Démonstration :* En effet, nous avons déjà montré que  $T$  étant à support borné alors,  $\langle T_x, e^{-2\pi i \omega x} \rangle$  existe et c'est une fonction indéfiniment dérivable qui se prolonge en une fonction holomorphe entière dans le plan complexe (voir lemme 5.1.3 et exercice 5.1.6 du chapitre convolution). On a

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle &= \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle, \\ &= \left\langle T_x, \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega) e^{-2\pi i \omega x} d\omega \right\rangle, \\ &= \langle T_x, \langle \varphi(\omega), e^{-2\pi i \omega x} \rangle \rangle, \\ &= \langle T_x \cdot \varphi(\omega), e^{-2\pi i \omega x} \rangle, \\ &= \langle \varphi(\omega), \langle T_x, e^{-2\pi i \omega x} \rangle \rangle, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega) \langle T_x, e^{-2\pi i \omega x} \rangle d\omega, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega) g(\omega) d\omega, \\ &= \langle g, \varphi \rangle,\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Exemple 7.3.9** *La transformée de Fourier de la distribution  $\delta$  de Dirac est  $\mathcal{F}\delta = 1$ . En effet le support de  $\delta$  étant  $\{0\}$  (exemple 1.4.3 du chapitre 1), on peut donc appliquer la proposition précédente. On a immédiatement*

$$\mathcal{F}\delta = g(\omega) = \langle \delta_x, e^{-2\pi i \omega x} \rangle = 1.$$

**Exemple 7.3.10** *La transformée de Fourier de la dérivée  $n^{ième}$  de la distribution  $\delta$  de Dirac est  $\mathcal{F}\delta^{(n)} = (2\pi i \omega)^n$  (voir exercice 7.6.21).*

**Proposition 7.3.8** (*Formule sommatoire de Poisson*) . Si  $\varphi \in \mathcal{S}$ , alors

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(k).$$

*Démonstration :* Notons d'abord que ces séries convergent absolument. En effet, posons  $C = \max\{C_1, C_2, C_3\}$  où

$$C_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^2 \varphi(x)|, \quad C_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^2 \varphi'(x)|, \quad C_3 = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |\omega^2 \widehat{\varphi}(\omega)|.$$

On a  $C < +\infty$  et la convergence des séries ci-dessus découle des inégalités (proposition 7.1.9),

$$|\varphi(k)| \leq \frac{C}{k^2}, \quad |\widehat{\varphi}(k)| \leq \frac{C}{k^2}, \quad k \in \mathbb{Z}^*$$

puisque  $\frac{C}{k^2}$  est le terme général d'une série absolument convergente. Considérons la distribution (peigne de Dirac),

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Celle-ci est tempérée car l'application

$$\varphi \mapsto \left\langle \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k(x), \varphi(x) \right\rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(k),$$

est linéaire et continue de  $\mathcal{S}$  sur  $\mathbb{R}$ . Nous allons voir que  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k(x)$  est invariant par la transformée de Fourier  $\mathcal{F}$ . Cette dernière étant une opération continue, alors

$$\mathcal{F} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k(x) \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F} \delta_k(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \omega k} \equiv T(\omega),$$

en vertu de la proposition 7.3.7. Cette distribution est tempérée et elle est périodique de période 1. Pour déterminer  $T(\omega)$ , on va utiliser un raisonnement similaire à celui qui a été fait dans la proposition 6.5.7 (chapitre précédent), tout en tenant compte des constantes intervenant dans le problème. On a

$$e^{2\pi i \omega} T(\omega) = e^{2\pi i \omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \omega k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \omega(k-1)} = T(\omega),$$

d'où  $g(\omega)T = 0$  où  $g(\omega) \equiv e^{2\pi i\omega} - 1$ . La fonction  $g$  est indéfiniment différentiable et en outre  $g(\omega) = 0$  si et seulement si  $\omega \in \mathbb{N}$  avec  $g'(\omega) \neq 0$ . Dès lors (voir chapitre 3),

$$T(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta_k(\omega).$$

Les coefficients  $c_k$  sont tous égaux à une même constante  $c$ . En effet, la distribution  $T$  étant 1-périodique, cela signifie que  $\tau_1 T = T$  où la distribution  $\tau_1 T$  est la translatée de  $T$  par la translation 1. Donc

$$T(\omega) = c \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k(\omega).$$

On vérifie aisément que  $c = 1$ . En effet, si  $\Pi(\omega)$  est la fonction porte définie dans l'exercice 1.7.1, alors

$$\langle T(\omega), \Pi(\omega) \rangle = \left\langle c \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k(\omega), \Pi(\omega) \right\rangle = c\Pi(0) = c.$$

Or

$$\langle T(\omega), \Pi(\omega) \rangle = \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i\omega k} d\omega = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i\omega k} d\omega = 1,$$

car

$$\int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i\omega k} d\omega = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$$

donc  $c = 1$ . Une autre méthode consiste à noter que puisque  $\widehat{T} = T$ , alors  $c^2 = 1$ , c'est-à-dire  $c = \pm 1$ . Le seul cas valable est  $c = 1$  car les fonctions de  $\mathcal{S}$  sont positives ainsi que leurs transformées. Dès lors,

$$T(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k(\omega).$$

Autrement dit,

$$\mathcal{F} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k(x) \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k(\omega).$$

Comme  $\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle$ ,  $\varphi \in \mathcal{S}$ , ce résultat est équivalent à

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(k), \quad \varphi \in \mathcal{S}$$

et la démonstration est complète.  $\square$

**Remarque 7.3.2** Considérons la distribution tempérée  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{ak}(x)$ ,  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . On obtient évidemment

$$\mathcal{F} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{ak}(x) \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{ak}(\omega), \quad a \in \mathbb{R}_+^*$$

et pour toute fonction  $\varphi \in \mathcal{S}$ , la formule sommatoire de Poisson s'écrit

$$\frac{1}{a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi \left( \frac{k}{a} \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(ka).$$

**Remarque 7.3.3** On peut trouver d'autres conditions suffisantes pour que la formule sommatoire de Poisson soit valable (voir par exemple exercice 7.7.8). Pour une autre preuve de la proposition ci-dessus, voir exercice 7.6.23.

**Proposition 7.3.9** (Formule d'inversion de Fourier). Si  $\varphi \in \mathcal{S}$ , alors

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(\omega) e^{2\pi i \omega x} d\omega.$$

*Démonstration :* Soit  $\psi(x) = e^{2\pi i tx} \varphi(x)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . La formule sommatoire de Poisson (proposition 7.3.8), s'écrit

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\widehat{\psi}}(k),$$

et d'après (7.3.1),

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi itk} \varphi(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(k-t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\widehat{\varphi}}(k) e^{-2\pi itk}.$$

Ces séries convergent absolument et uniformément sur  $[0, 1]$  (en effet, il suffit de noter que  $|e^{2\pi itk} \varphi(k)| \leq |\varphi(k)|$  et  $\sum |\varphi(k)|$  converge, voir proposition 7.3.8). L'intégration terme à terme en  $t$  sur  $[0, 1]$  est donc légitime. On obtient alors  $\varphi(0) = \widehat{\widehat{\varphi}}(0)$ . Considérons maintenant la fonction  $\zeta(x) = \varphi(x + t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Nous avons déjà vu que :  $\widehat{\zeta}(\omega) = \widehat{\varphi}(\omega) e^{2\pi i \omega t}$ ,  $\widehat{\zeta}(x) = \widehat{\varphi}(x - t)$ , et d'après ce qui précède, on a  $\varphi(t) = \zeta(0) = \widehat{\varphi}(0) = \widehat{\varphi}(-t)$ . Autrement dit,  $\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(\omega) e^{2\pi i \omega x} d\omega$ , et la démonstration s'achève.  $\square$

**Remarque 7.3.4** Concernant la formule d'inversion de Fourier, on montre (voir exercice 7.6.24) que si  $f \in \mathcal{L}^1$  telle que :  $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1$ , alors

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{2\pi i \omega x} d\omega,$$

presque partout en  $x \in \mathbb{R}$ .

**Proposition 7.3.10** Si  $\mathcal{S}$  est muni du produit scalaire canonique

$$(\varphi|\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\bar{\psi}(x)dx,$$

alors la transformation de Fourier

$$\mathcal{F}: \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}, \quad \varphi \longmapsto \widehat{\varphi} = \mathcal{F}\varphi,$$

est un isomorphisme et on a l'égalité de Plancherel

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\varphi}(\omega)|^2 d\omega.$$

*Démonstration :* L'espace  $\mathcal{S}$  étant inclus dans  $\mathcal{L}^1$ , alors d'après la formule de Plancherel (proposition 7.2.7), le produit scalaire ci-dessus est conservé. Soit  $\varphi \in \mathcal{S}$  et posons  $\psi = \widehat{\varphi}$ . La formule d'inversion de Fourier (proposition 7.3.9) donne  $\varphi = \widehat{\psi}$ . Dès lors, la transformation de Fourier est surjective et comme elle est évidemment linéaire, le résultat en découle.  $\square$

**Proposition 7.3.11** Pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}$ , on a

$$\mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}\varphi) = \varphi, \quad \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}\varphi) = \varphi.$$

Autrement dit, dans l'espace  $\mathcal{S}$  les transformées  $\mathcal{F}$  et  $\overline{\mathcal{F}}$  sont inverses l'une de l'autre.

*Démonstration :* Posons  $\mathcal{F}\varphi = U$  et  $\overline{\mathcal{F}}U = V$ . On a  $U \in \mathcal{S}$ ,  $V \in \mathcal{S}$  et

$$\begin{aligned} V(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} U(x)e^{2\pi i \omega x} dx, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)e^{-2\pi i xt} dt \right) e^{2\pi i \omega x} dx, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)e^{-2\pi i x(t-\omega)} dx dt, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda + \omega)e^{-2\pi i x\lambda} dx d\lambda, \quad \lambda \equiv t - \omega \\ &= \left\langle 1_x, \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda + \omega)e^{-2\pi i x\lambda} d\lambda \right\rangle, \\ &= \langle 1, \mathcal{F}\Phi_{\omega} \rangle, \end{aligned}$$

où  $\mathcal{F}\Phi_{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\omega}(\lambda)e^{-2\pi i x\lambda} d\lambda$  et  $\Phi_{\omega}(\lambda) \equiv \varphi(\lambda + \omega)$ . Dès lors,

$$V(\omega) = \langle \mathcal{F}1, \Phi_{\omega} \rangle = \langle \delta, \Phi_{\omega} \rangle = \Phi_{\omega}(0) = \varphi(\omega).$$

D'où  $V = \varphi$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Remarque 7.3.5** Les formules de réciprocité de Fourier (voir proposition 7.3.9), peuvent être notées sous la forme :  $\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}\varphi) = \varphi$ ,  $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}\varphi) = \varphi$ .

**Proposition 7.3.12** Pour tout  $T \in \mathcal{S}'$ , on a

$$\mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}T) = T, \quad \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}T) = T.$$

Autrement dit, dans l'espace  $\mathcal{S}$  les transformées  $\mathcal{F}$  et  $\overline{\mathcal{F}}$  sont inverses l'une de l'autre.

*Démonstration :* Soient  $\varphi \in \mathcal{S}$  et  $T \in \mathcal{S}'$ . On a  $\mathcal{F}T \in \mathcal{S}'$  et  $\overline{\mathcal{F}} \in \mathcal{S}'$ . Dès lors,

$$\langle \mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}T), \varphi \rangle = \langle \overline{\mathcal{F}}T, \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle T, \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}\varphi) \rangle = \langle T, \varphi \rangle,$$

et

$$\langle \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}T), \varphi \rangle = \langle \mathcal{F}T, \overline{\mathcal{F}}\varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}\varphi) \rangle = \langle T, \varphi \rangle.$$

La démonstration s'achève.  $\square$

**Remarque 7.3.6** Ici aussi, on peut remplacer dans les formules de réciprocité de Fourier ci-dessus,  $\overline{\mathcal{F}}$  par la notation  $\mathcal{F}^{-1}$ .

**Exemple 7.3.11** La transformée de Fourier de la distribution tempérée associée à la fonction constante 1 est égale à la distribution  $\delta$  de Dirac. En effet, on a

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}1, \varphi \rangle &= \langle 1, \mathcal{F}\varphi \rangle, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}\varphi)(x) dx, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}\varphi)(x) e^{2\pi i \omega x} d\omega, \\ &= \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}\varphi)(0), \\ &= \varphi(0) \\ &= \langle \delta, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

d'où  $\mathcal{F}1 = \delta$ . Pour une autre preuve de ce résultat, voir exercice 7.6.26.

**Proposition 7.3.13** Soient  $S$  et  $T$  deux distributions à supports bornés. Alors, le support du produit de convolution  $S * T$  est borné et on a

$$\mathcal{F}(S * T) = (\mathcal{F}S) \cdot (\mathcal{F}T)$$

*Démonstration :* Rappelons (chapitre 5) que le produit de convolution de deux distributions  $S$  et  $T$  existe si l'une des supports  $\text{supp } S$  ou  $\text{supp } T$  est borné. Dans ce cas  $\text{supp } (S * T)$  est aussi borné car il est inclus dans l'adhérence de la somme du support de  $S$  et du support de  $T$  (voir proposition 5.3.5). Dès lors, en vertu de la proposition 7.3.7,  $\mathcal{F}(S * T)$  est une fonction définie par

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(S * T) &= \langle S * T, e^{-2\pi i \omega x} \rangle, \text{ (proposition 7.3.7)} \\ &= \langle S_x \otimes T_y, e^{-2\pi i \omega(x+y)} \rangle, \\ &= \langle S_x, e^{-2\pi i \omega x} \rangle \langle T_y, e^{-2\pi i \omega x} \rangle, \text{ (proposition 5.1.2)} \\ &= (\mathcal{F}S) \cdot (\mathcal{F}T), \text{ (proposition 7.3.7)}\end{aligned}$$

et la démonstration s'achève.  $\square$

**Remarque 7.3.7** *Le résultat ci-dessus est valable dans des hypothèses plus générales. Par ailleurs, le produit  $(\mathcal{F}S) \cdot (\mathcal{F}T)$  ne peut être défini en toute généralité. Si  $S$  est une distribution à support borné et  $T$  une distribution tempérée quelconque, dans ce cas le produit  $(\mathcal{F}S) \cdot (\mathcal{F}T)$  doit être interprété comme le produit d'une distribution par une fonction de classe  $C^\infty$ . Notons aussi que si  $S$  et  $T$  sont des distributions tempérées et ont des supports bornés inférieurement, alors (chapitre 5) le produit  $S * T$  est bien défini mais le produit  $(\mathcal{F}S) \cdot (\mathcal{F}T)$  n'est en général pas défini. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer le cas de la distribution de Heaviside.*

Réciproquement, en posant  $\overline{\mathcal{F}}S = U$  et  $\overline{\mathcal{F}}T = V$ , on sait d'après les formules de réciprocités de Fourier que

$$\mathcal{F}U = \mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}S) = S, \quad \mathcal{F}V = \mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}T) = T,$$

et on aura

$$\mathcal{F}(ST) = \mathcal{F}S * \mathcal{F}T.$$

## 7.4 Transformée de Fourier dans $\mathcal{L}^2$

Considérons l'ensemble  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  (que l'on note simplement  $\mathcal{L}^2$ ) des fonctions  $f(x)$  à valeurs complexes, de carré intégrable au sens de Lebesgue. Rappelons que l'on définit sur  $\mathcal{L}^2$  un produit scalaire

$$(f|g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx,$$

une norme notée

$$\|f\|_2 = \sqrt{(f|f)} = \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \right)^{\frac{1}{2}},$$

ainsi qu'une distance

$$\|f - g\|_2 = \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)|^2 dx < \infty \right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'espace  $\mathcal{L}^2$  est complet pour la topologie métrique définie par la distance ci-dessus et c'est un espace de Hilbert.

On aimerait définir la transformation de Fourier d'une fonction  $f \in \mathcal{L}^2$ . Notons d'abord qu'il n'existe pas de relation d'inclusion entre  $\mathcal{L}^1$  et  $\mathcal{L}^2$ . Pour s'en convaincre, il suffit de considérer les fonctions suivantes :  $f(x) = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}}$ ,  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$  et  $h(x) = e^{-x^2}$ . On vérifie aisément que  $f \in \mathcal{L}^1$  mais  $f \notin \mathcal{L}^2$ ,  $g \in \mathcal{L}^2$  mais  $g \notin \mathcal{L}^1$ ,  $h \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2$ . Dès lors, puisque  $\mathcal{L}^2 \not\subseteq \mathcal{L}^1$ , on ne peut pas utiliser en général les formules des transformées de Fourier relatives aux espaces  $\mathcal{L}^1$  et  $\mathcal{S}$ , introduites dans les sections précédentes.

Nous verrons que lorsque  $\lambda \rightarrow \infty$ , l'intégrale  $\int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)e^{-2\pi i \omega x} dx$  converge en moyenne quadratique (c'est-à-dire pour la norme  $\|\cdot\|_2$  ou si on veut au sens de la topologie de  $\mathcal{L}^2$ ) vers une fonction  $\hat{f}$  dite transformée de Fourier-Plancherel ou simplement transformée de Fourier de  $f$ . La fonction  $\hat{f}$  appartient à  $\mathcal{L}^2$  et la formule d'inversion de Fourier est satisfaite. L'idée est la suivante : on montre que la transformée de Fourier envoie l'espace de Schwartz  $\mathcal{S}$  dans  $\mathcal{L}^2$  et que c'est une isométrie pour la norme de  $\mathcal{L}^2$ . En tenant compte de la densité de l'espace  $\mathcal{S}$  dans  $\mathcal{L}^2$ , on peut utiliser le prolongement par continuité de la transformée de Fourier vue comme application linéaire de  $\mathcal{S}$  dans  $\mathcal{S}$ . La transformée de Fourier (Plancherel) d'une fonction de  $\mathcal{L}^2$  est définie comme une limite de transformées de Fourier de fonctions de  $\mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2$ .

**Proposition 7.4.1** *Les espaces  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{S}$  sont denses dans  $\mathcal{L}^2$ .*

*Démonstration :* Montrons d'abord que  $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}^2$ . En effet, si  $\varphi_k \rightarrow 0$  dans  $\mathcal{S}$ , alors  $\varphi_k(x) \rightarrow 0$  uniformément dans  $\mathbb{R}$ . Pour  $|x| \geq C$ , on a  $|\varphi_k(x)|^2 \leq \frac{K}{|x|^2}$  où  $C$  et  $K$  sont des constantes. Dès lors,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_k(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{-C} |\varphi_k(x)|^2 dx + \int_C^{\infty} |\varphi_k(x)|^2 dx + \int_{-C}^C |\varphi_k(x)|^2 dx,$$

et cette expression tend vers 0, en vertu du théorème de Lebesgue. Montrons maintenant que  $\mathcal{D}$  est dense dans  $\mathcal{L}^2$ . L'adhérence adh  $\mathcal{D}$  dans  $\mathcal{L}^2$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $\mathcal{L}^2$ . L'espace de Hilbert  $\mathcal{L}^2$  étant complet, on déduit<sup>1</sup> que :  $\mathcal{L}^2 = \text{adh } \mathcal{D} \oplus (\text{adh } \mathcal{D})^\perp$ . Soit  $\varphi \in \text{adh } \mathcal{D}^\perp$ , alors pour tout  $\psi \in \mathcal{D}$ , on a

$$0 = (\varphi|\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\overline{\psi}(x) dx.$$

---

<sup>1</sup>En général, si  $H$  est un espace de Hilbert et si  $U$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $H$ , alors  $H = U \oplus U^\perp$ .

D'après l'exercice 7.7.11, on a  $\varphi(x) = 0$  presque partout sur  $\mathbb{R}$ . Autrement dit,  $\varphi = 0$  dans  $\mathcal{L}^2$  et dès lors  $(\text{adh } \mathcal{D})^\perp = \{0\}$  et  $\mathcal{L}^2 = \text{adh } \mathcal{D}$ . Montrons enfin que  $\mathcal{S}$  est dense dans  $\mathcal{L}^2$ . Notons que  $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ , puisque les fonctions sont à support compact. Dès lors,  $\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{L}^2$  et le résultat résulte immédiatement de ce qui précède, ce qui achève la démonstration.  $\square$

Soit  $f \in \mathcal{L}^2$ . Comme  $\mathcal{S}$  est dense dans  $\mathcal{L}^2$ , il existe une suite  $(f_n)$  de  $\mathcal{S}$  telle que :  $f_n \rightarrow f$  dans  $\mathcal{L}^2$ . La proposition 7.3.10, donne

$$\begin{aligned}\|\widehat{f}_n - \widehat{f}_{n+m}\|_2 &= \|\widehat{f_n - f_{n+m}}\|_2, \\ &= \|f_n - f_{n+m}\|_2, \\ &= \|f_n - f\|_2 + \|f - f_{n+m}\|_2,\end{aligned}$$

et pour  $n \rightarrow \infty$ , cette expression tend uniformément (en  $m$ ) vers 0. Dès lors,  $(\widehat{f}_n)$  est une suite de Cauchy dans l'espace  $\mathcal{L}^2$ . Ce dernier étant complet, on en déduit qu'il existe une limite notée  $\mathcal{F}f \in \mathcal{L}^2$  telle que :  $\|\widehat{f}_n - \mathcal{F}f\|_2 \rightarrow 0$ . Par ailleurs, on vérifie aisément que  $\mathcal{F}f$  ne dépend pas de la suite  $(f_n)$ . En effet, si  $(g_n)$  est une suite de  $\mathcal{S}$  telle que :  $\|g_n - f\|_2 \rightarrow 0$ , alors

$$\|\widehat{g}_n - \widehat{f}_n\|_2 = \|\widehat{g_n - f_n}\|_2 = \|g_n - f_n\|_2 = \|g_n - f\|_2 + \|f - f_n\|_2,$$

et cette expression tend vers 0 lorsque  $n \rightarrow 0$ . Par conséquent, lorsque  $n \rightarrow 0$ , on a  $\|\widehat{g}_n - \mathcal{F}f\|_2 \rightarrow 0$ .

En particulier, si  $f \in \mathcal{S}$ , alors  $\mathcal{F}f = \widehat{f}$ . Il est à noter que pour une fonction quelconque  $f \in \mathcal{L}^2$ , l'intégrale  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i \omega x} dx$  n'a pas de sens ; elle a seulement un sens si  $f \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2$ .

D'après la proposition 7.3.10, la transformée de Fourier dans l'espace  $\mathcal{S}$  est linéaire et conserve le produit scalaire. En passant à la limite, on montre qu'il en est de même dans  $\mathcal{L}^2$ .

On a vu ci-dessus que  $\widehat{f}_n \rightarrow \mathcal{F}f$  dans  $\mathcal{L}^2$ . Dès lors,  $\widehat{\widehat{f}_n} \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{F}f)$  dans  $\mathcal{L}^2$ . Si  $g_n(x) = \widehat{\widehat{f}_n}(-x)$  et  $g(x) = \mathcal{F}(\mathcal{F}f)(-x)$ , alors  $g_n \rightarrow g$  dans  $\mathcal{L}^2$ . En tenant compte de la formule d'inversion de Fourier, on déduit que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = \widehat{\widehat{f}_n}(-x) = g_n(x)$ , et donc  $f(x) = g(x) = \mathcal{F}(\mathcal{F}f)(-x)$ , presque partout sur  $\mathbb{R}$ .

En posant  $g = \mathcal{F}(\mathcal{F}(\mathcal{F}f))$  dans cette expression, on obtient  $f = \mathcal{F}g$  et la transformée de Fourier est surjective.

Soit  $g \in \mathcal{S}$ . En tenant compte de la formule de Plancherel et de ce qui précède, on obtient

$$\int_{-\infty}^{\infty} f \overline{\widehat{g}} = \int_{-\infty}^{\infty} f \overline{g} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f \overline{\mathcal{F}g} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f \overline{\widehat{g}}.$$

En prenant  $\varphi = \widehat{f} - \mathcal{F}f$  et  $g = \widehat{\psi}$  où  $\psi \in \mathcal{S}$  est quelconque, on obtient  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi \bar{\psi} = 0$ .  $\widehat{f}$  étant continue et  $\mathcal{F}f \in \mathcal{L}^2$ , alors la fonction  $\varphi$  restreinte à l'intervalle  $] -k, k[$  appartient à  $\mathcal{L}^1(] -k, k[)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ . D'après l'exercice 7.7.11,  $f(x) = 0$  presque partout sur  $\mathbb{R}$ .

En rassemblant tous ces résultats, on obtient le théorème suivant :

**Théorème 7.4.2** *La transformation de Fourier  $\mathcal{L}^2 \rightarrow \mathcal{L}^2$ ,  $f \mapsto \mathcal{F}f$ , est un isomorphisme et en particulier, on a l'égalité de Plancherel  $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$ . De plus, l'inverse de cette transformation est donné par  $\mathcal{F}^{-1}f(x) = \mathcal{F}f(-x)$ , presque partout sur  $\mathbb{R}$ . Si  $f \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2$ , alors  $\mathcal{F}f = \widehat{f}$  presque partout sur  $\mathbb{R}$ .*

**Remarque 7.4.1** *On peut reformuler ce qui précède en disant que  $\mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2$  est dense dans  $\mathcal{L}^2$  et que si  $f \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2$ , alors  $\widehat{f} \in \mathcal{L}^2$ . La transformation de Fourier  $\mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2 \rightarrow \mathcal{L}^2$ ,  $f \mapsto \widehat{f}$ , se prolonge de manière unique en une application linéaire continue  $\mathcal{F} : \mathcal{L}^2 \rightarrow \mathcal{L}^2$ ,  $f \mapsto \mathcal{F}f$ . En outre,  $\mathcal{F}$  est une isométrie c'est-à-dire*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}\{f(x)\}|^2 d\omega, \quad \forall f \in \mathcal{L}^2$$

*et elle est bijective. Autrement dit,  $\mathcal{F}$  est unitaire ; elle est inversible d'inverse  $\overline{\mathcal{F}}$  que l'on note aussi  $\mathcal{F}^{-1}$  avec  $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = f$ ,  $\forall f \in \mathcal{L}^2$ , elle conserve le produit scalaire  $(\mathcal{F}f|\mathcal{F}g) = (f|g)$ ,  $\forall f, g \in \mathcal{L}^2$  et en particulier  $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$ . Pour toute fonction  $f \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2$ , on a*

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} f(x) e^{-2\pi i \omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \omega x} dx = \widehat{f}(\omega).$$

*On utilise dans d'autres ouvrages la notation suivante :*

$$\widehat{f}(\omega) = \underset{\lambda \rightarrow \infty}{l.i.m.} \int_{-\lambda}^{\lambda} f(x) e^{-2\pi i \omega x} dx,$$

*avec des points entre les lettres l, i, et m. Il faut bien noter que la limite ci-dessus n'est pas une limite au sens ponctuelle du terme mais une limite en moyenne ; c'est une limite au sens de la norme de l'espace de Hilbert  $\mathcal{L}^2$ . On trouvera aussi la notation suivante :*

$$\widehat{f}(\omega) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathcal{L}^2 \int_{-\lambda}^{\lambda} f(x) e^{-2\pi i \omega x} dx.$$

**Proposition 7.4.3** *Si  $f, g \in \mathcal{L}^2$ , alors  $\widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}$ .*

*Démonstration :* Notons d'abord que le produit de convolution

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

est bien défini car si  $u_x(t) = \bar{g}(x-t)$ , alors  $u_x \in \mathcal{L}^2$  et  $f * g(x) = (f|u_x)$ . Puisque  $\int_{-\infty}^{\infty} fg = (f|\bar{g})$ , on en déduit que  $fg \in \mathcal{L}^1$ . Par ailleurs, la fonction  $h(t) = \bar{g}(x)e^{2\pi itx}$  et

$$\widehat{fg}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)e^{-2\pi itx}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\bar{g}(t)e^{2\pi itx}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\bar{\widehat{g}}(\omega)d\omega,$$

en vertu de la conservation du produit scalaire. Dès lors, en tenant compte de l'exercice 7.6.28, on obtient

$$\begin{aligned} \widehat{fg}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\bar{\widehat{g}}(\omega-x)d\omega, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\widehat{\bar{g}}(x-\omega)d\omega, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\widehat{g}(x-\omega)d\omega, \\ &= \widehat{f} * \widehat{g}(x), \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.  $\square$

## 7.5 Transformée de Fourier à plusieurs variables

En général, les définitions et propriétés étudiées précédemment pour la transformée de Fourier d'une fonction à une variable se généralisent immédiatement à la dimension arbitraire  $n$ . Nous allons ici nous contenter de citer quelques-unes. Rappelons que pour les propriétés de dérivations, on utilise les notations suivantes : si  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  est un multi-indice, on note  $\partial^\alpha$  (ou  $D^\alpha$ ) l'opérateur

$$\partial^\alpha = \frac{D^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}},$$

et pour  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ .

Soient  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$  et  $(\omega|x) = \sum_{k=1}^n \omega_k x_k$ , le produit scalaire dans  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ . On appelle transformée de Fourier de  $f$ , la fonction à valeurs complexes définie par

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i(\omega|x)}dx,$$

c'est-à-dire

$$\widehat{f}(\omega_1, \dots, \omega_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) e^{-2\pi i(\omega_1 x_1 + \dots + \omega_n x_n)} dx_1 \dots dx_n.$$

Si la transformée de Fourier de  $f$  appartient elle-même à  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ , on a alors la formule d'inversion

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\omega) e^{2\pi i(\omega|x|)} d\omega.$$

Dans le cas où la fonction  $f(x)$  se factorise,  $f(x) = f_1(x_1)f_2(x_2)\dots f_n(x_n)$  où  $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ , alors sa transformée de Fourier se factorise aussi

$$\widehat{f}(\omega) = f_1(\omega_1)f_2(\omega_2)\dots f_n(\omega_n).$$

Il suffit d'utiliser le théorème de Fubini.

Lorsque la fonction  $f(x)$  de plusieurs variables  $x_1, \dots, x_n$  est radiale c'est-à-dire elle dépend seulement de  $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$  et s'écrit donc sous la forme  $f(x) = f_0(\|x\|_2)$ , alors sa transformée de Fourier est aussi radiale. Voyons par exemple avec plus de détail le cas d'une fonction radiale sur  $\mathbb{R}^2$ ,  $f(x) = f_0(\|x\|_2)$ . Soit  $x_1 = r \cos \theta$ ,  $x_2 = r \sin \theta$ ,  $r \in \mathbb{R}^+$ ,  $\theta \in [0, 2\pi[$ . De même, soit  $\omega_1 = \rho \cos \alpha$ ,  $\omega_2 = \rho \sin \alpha$ ,  $\rho \in \mathbb{R}^+$ ,  $\alpha \in [0, 2\pi[$ . On a

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\omega) &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f_0(r) e^{-2\pi i \rho r \cos(\theta - \alpha)} r dr d\theta, \\ &= \int_0^\infty r f_0(r) \left( \int_0^{2\pi} e^{-2\pi i \rho r \cos(\theta - \alpha)} d\theta \right) dr, \\ &= \int_0^\infty r f_0(r) \left( \int_{-\pi}^{\pi} e^{2\pi i \rho r \sin \lambda} d\lambda \right) dr, \quad \lambda = \theta - \alpha - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

car la fonction dépendant de  $\lambda$  est  $2\pi$ -périodique. En général, l'expression ci-dessus ne s'exprime pas à l'aide de fonctions élémentaires mais on voit bien qu'elle est indépendante de  $\alpha$ . Par ailleurs, en introduisant la fonction  $J_0$  de Bessel<sup>2</sup> d'ordre 0, c'est-à-dire

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2\pi i \rho r \sin \lambda} d\lambda = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin \lambda) d\lambda,$$

---

<sup>2</sup>Pour information, la fonction  $J_0$  admet un développement en série entière au voisinage de l'origine,

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \frac{x^{2k}}{2^{2k}}.$$

En effet, on vérifie aisément que les conditions d'utilisation du théorème de Fubini sont satisfaites. On développe la fonction  $\cos(x \sin x)$  en puissances de  $x$ , on intègre terme à terme l'expression obtenue et on intègre  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} \lambda d\lambda$  plusieurs fois par parties. On obtient finalement la série entière ci-dessus dont le rayon de convergence est infini. On vérifie aussi que la fonction  $J_0$  est solution de l'équation différentielle de Bessel :  $xy'' + y' + xy = 0$ .

on obtient

$$\widehat{f}(\omega) = 2\pi \int_0^\infty r f_0(r) J_0(2\pi\rho r) dr.$$

L'espace  $\mathcal{S}$  de Schwartz est l'espace des fonctions  $\varphi$  de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n$  à décroissance rapide, c'est-à-dire telles que pour tous  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ , on ait

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| = 0.$$

On montre comme dans le cas d'une variable que la transformation de Fourier  $\mathcal{F}$  est une application linéaire continue de  $\mathcal{S}$  dans lui-même et que celle-ci coïncide avec celle habituelle sur  $\mathcal{L}^1$ . Comme nous l'avons déjà signalé, les propriétés que nous avons démontré se généralisent sans aucune difficulté. Citons à titre d'exemple les formules,

$$\widehat{\partial^\alpha \varphi} = 2\pi i x^\alpha \widehat{\varphi}, \quad \partial^\alpha \widehat{\varphi} = \mathcal{F}(-2\pi i x^\alpha \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{S}$$

la transformée de Fourier inverse, la formule de réciprocité pour  $\varphi \in \mathcal{S}$  reste la même ( $\psi = \mathcal{F}\varphi \iff \varphi = \mathcal{F}^{-1}\psi$ ), etc.

Soit  $\mathcal{S}'$  l'espace des distributions tempérées sur  $\mathbb{R}^n$ , c'est-à-dire l'espace des fonctionnelles linéaires continues sur  $\mathcal{S}$ . On montre comme précédemment que les distributions associées à des fonctions localement sommables et à croissance lente appartiennent à l'espace  $\mathcal{S}'$ . Celui-ci contient évidemment les distributions associées aux fonctions qui sont localement sommables et de carré sommable ainsi que les distributions ayant un support borné. Par ailleurs, la transformée de Fourier est une application linéaire continue de  $\mathcal{S}'$  dans lui-même,

$$\forall T \in \mathcal{S}', \forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad \langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle, \quad (\text{c'est-à-dire } \langle \widehat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \widehat{\varphi} \rangle).$$

Toutes les propriétés vues avant se généralisent aisément. Par exemple,

$$\mathcal{F}\delta = 1, \quad \mathcal{F}(\partial^\alpha \delta) = 2\pi i x^\alpha, \dots$$

La transformation de Fourier d'une distribution à support compact peut-être prolongée en une fonction analytique sur  $\mathbb{C}^n$  tout entier. Plus précisément, le théorème de Paley-Wiener classique (voir [10], [12, tome 2, p.41], [11, p.305]) s'énonce comme suit : soient  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}^n$  et  $a > 0$ . Alors  $f$  est l'image de Fourier d'une fonction  $\varphi \in \mathcal{D}$  à support inclus dans la boule  $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < a\}$  si et seulement si  $f$  est prolongeable en une fonction  $g$  holomorphe sur  $\mathbb{C}^n$  et vérifiant une majoration du type

$$|g(z)| \leq C_k (1 + \|z\|)^{-k} e^{a\|\operatorname{Im} z\|}, \quad z \in \mathbb{C}^n, C_k > 0, k \in \mathbb{N}$$

$$\|\operatorname{Im} z\|^2 = \sum_{j=1}^n \|\operatorname{Im} z_j\|^2, \quad z = (z_1, \dots, z_n) \text{ et } \operatorname{Im} z_j = \text{partie imaginaire de } z_j.$$

La transformée de Fourier à plusieurs variables est très utilisée dans l'étude des équations aux dérivées partielles (voir les différents exercices proposés plus loin).

## 7.6 Exercices résolus

**Exercice 7.6.1** Calculer la transformée de Fourier de la fonction définie par  $f(x) = e^{-\pi x^2}$ .

Solution : On a  $f \in \mathcal{S}$  et  $\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i \omega x} dx$ . D'après la proposition 7.2.4, on a

$$\begin{aligned} (\widehat{f}(\omega))' &= -2\pi i \widehat{g}(\omega) \quad \text{où } g(x) = xf(x), \\ &= -2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-2\pi i \omega x} dx, \\ &= -2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\pi x^2} e^{-2\pi i \omega x} dx. \end{aligned}$$

En faisant une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} (\widehat{f}(\omega))' &= -2\pi i \left( -\frac{1}{2\pi} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i \omega x} \Big|_{-\infty}^{\infty} - i\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i \omega x} dx \right), \\ &= -2\pi \omega \widehat{f}(\omega). \end{aligned}$$

La solution de cette équation différentielle est immédiate,  $\widehat{f}(\omega) = Ce^{-2\pi i \omega^2}$  où  $C$  est une constante. Pour déterminer cette dernière, on procède comme suit :

$$\widehat{f}(0) = C = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = 1,$$

où  $t = \sqrt{\pi x}$ . Par conséquent,  $\widehat{f}(\omega) = e^{-\pi \omega^2}$ . Une autre méthode pour déterminer la constante  $C$ , consiste à utiliser la formule sommatoire de Poisson. En effet, on a

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k),$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\pi k^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Ce^{-\pi k^2},$$

d'où  $C = 1$ .

**Exercice 7.6.2** Soit  $f \in \mathcal{L}^1$ .

a) Montrer que la transformée de Fourier (cosinus et sinus) peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = 2 \int_0^{\infty} f_{\text{paire}}(x) \cos 2\pi \omega x dx - 2i \int_0^{\infty} f_{\text{impaire}}(x) \sin 2\pi \omega x dx,$$

où  $f_{\text{paire}}$  désigne une fonction paire et  $f_{\text{impaire}}$  une fonction impaire.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la transformée de Fourier d'une fonction réelle soit réelle.

c) Montrer que si  $f$  est paire, alors  $\mathcal{F}\{f(x)\} = 2 \int_0^\infty f(x) \cos 2\pi\omega x dx$  et si  $f$  est impaire, alors  $\mathcal{F}\{f(x)\} = 2 \int_0^\infty f(x) \sin 2\pi\omega x dx$ .

Solution : a) On utilise le fait que

$$f(x) = f_{\text{paire}}(x) + f_{\text{impaire}}(x),$$

où  $f_{\text{paire}}(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$  est une fonction paire et  $f_{\text{impaire}}(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$  est une fonction impaire. D'où

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(x)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \omega x} dx, \\ &= 2 \int_0^{\infty} f_{\text{paire}}(x) \cos 2\pi\omega x dx - 2i \int_0^{\infty} f_{\text{impaire}}(x) \sin 2\pi\omega x dx. \end{aligned}$$

b) On déduit de la question précédente que si  $f$  est réelle alors sa transformée de Fourier est réelle si et seulement si  $f$  est paire.

c) Si  $f$  est paire, alors  $f(x) \cos 2\pi\omega x$  est paire et  $f(x) \sin 2\pi\omega x$  est impaire. Dès lors,

$$2 \int_0^{\infty} f(x) \cos 2\pi\omega x dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos 2\pi\omega x dx,$$

et

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin 2\pi\omega x dx = 0.$$

Dans ce cas,

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos 2\pi\omega x dx.$$

Si  $f$  est impaire, alors  $f(x) \cos 2\pi\omega x$  est impaire et  $f(x) \sin 2\pi\omega x$  est paire. D'où,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos 2\pi\omega x dx = 0,$$

et

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin 2\pi\omega x dx = 2 \int_0^{\infty} f(x) \sin 2\pi\omega x dx.$$

Dès lors,

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = -2i \int_0^{\infty} f(x) \sin 2\pi\omega x dx.$$

**Exercice 7.6.3** a) Calculer la transformée de Fourier de la fonction porte

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } |x| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

b) Même question pour la fonction triangle

$$\Delta(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

c) Exprimer  $\Delta'(x)$  à l'aide de  $\Pi(x)$ .

d) En utilisant la relation obtenue dans c), retrouver le résultat de b).

e) Déterminer le produit de convolution  $\Pi * \Pi$  et en déduire le résultat obtenu dans la question b).

Solution : a) On a

$$\widehat{\Pi}(\omega) = \mathcal{F}\{\Pi(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(x) e^{-2\pi i \omega x} dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \cos 2\pi \omega x dx = \frac{\sin \pi \omega}{\pi \omega}.$$

b) Notons que la fonction  $\Delta$  est paire. D'après l'exercice précédent, on a pour  $\omega \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta}(\omega) &= \mathcal{F}\{\Delta(x)\} = 2 \int_0^{\infty} \Delta(x) \cos 2\pi \omega x dx, \\ &= 2 \int_0^1 (1-x) \cos 2\pi \omega x dx, \\ &= \left. \frac{(1-x) \sin 2\pi \omega}{2\pi^2 \omega^2} \right|_0^1 + \frac{1}{\pi \omega} \int_0^1 \sin 2\pi \omega x dx, \\ &= \frac{1 - \cos 2\pi \omega}{\pi^2 \omega^2}, \\ &= \frac{\sin^2 \pi \omega}{\pi^2 \omega^2}. \end{aligned}$$

Pour  $\omega = 0$ , on a  $\widehat{\Delta}(0) = 1$ .

c) On vérifie aisément que :  $\Delta'(x) = \Pi(x + \frac{1}{2}) - \Pi(x - \frac{1}{2})$ .

d) On a

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta}' &= \mathcal{F}\{\Delta'(x)\} = \mathcal{F}\{\Pi(x + \frac{1}{2})\} - \mathcal{F}\{\Pi(x - \frac{1}{2})\}, \\ &= e^{\pi i \omega} \mathcal{F}\{\Pi(x)\} - e^{-\pi i \omega} \mathcal{F}\{\Pi(x)\} \quad (\text{propriété 7.1.4}), \\ &= 2i \sin \pi \omega \mathcal{F}\{\Pi(x)\}, \\ &= 2i \frac{\sin^2 \pi \omega}{\pi \omega} \quad (\text{d'après a})). \end{aligned}$$

Or  $\mathcal{F}\{\Delta'(x)\} = 2\pi i\omega \mathcal{F}\{\Delta(x)\}$  (proposition 7.1.8), donc

$$\mathcal{F}\{\Delta(x)\} = \frac{\sin^2 \pi \omega}{\pi^2 \omega^2}.$$

e) On a

$$\begin{aligned} \Pi * \Pi(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(t)\Pi(x-t)dt, \quad x \in \mathbb{R} \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Pi(x-t)dt, \\ &= \int_{x+\frac{1}{2}}^{x-\frac{1}{2}} \Pi(s)ds, \quad s = x-t \\ &= \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 < x < 0 \\ 1-x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases} \\ &= \Delta(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Or, d'après la proposition 7.1.12, on sait que :

$$\mathcal{F}\{\Pi * \Pi(x)\} = \mathcal{F}\{\Pi(x)\}\mathcal{F}\{\Pi(x)\},$$

donc

$$\mathcal{F}\{\Delta(x)\} = \frac{\sin^2 \pi \omega}{\pi^2 \omega^2}.$$

**Exercice 7.6.4** Montrer que la fonction thêta de Jacobi

$$\theta(s) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi sk^2}, \quad s > 0$$

vérifie l'équation fonctionnelle suivante :

$$\theta\left(\frac{1}{s}\right) - \sqrt{s}\theta(s) = 0.$$

Solution : Nous avons montré dans l'exercice 7.6.1, que la transformée de Fourier de la fonction  $e^{-\pi x^2} \in \mathcal{S}$  est

$$\mathcal{F}\{e^{-\pi x^2}\} = e^{-\pi \omega^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i \omega x} dx.$$

En posant  $u = \sqrt{s}x$ ,  $v = \frac{1}{\sqrt{s}}\omega$  dans cette relation, on obtient

$$e^{-\pi sv^2} = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{u^2}{s}} e^{-2\pi i v u} du.$$

Dès lors,

$$\mathcal{F}\{e^{-\pi \frac{x^2}{s}}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi \frac{x^2}{s}} e^{-2\pi i \omega x} dx = \sqrt{s} e^{-\pi s \omega^2},$$

et la formule sommatoire de Poisson s'écrit

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\pi \frac{k^2}{s}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sqrt{s} e^{-\pi s k^2}.$$

On en déduit que

$$\theta\left(\frac{1}{s}\right) = \sqrt{s} \theta(s),$$

où  $\theta(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\pi s k^2}$ .

**Exercice 7.6.5 a)** Déterminer la transformée de Fourier de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

b) En déduire la transformée de Fourier de la fonction

$$f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}.$$

Solution : a) A l'aide de la méthode des résidus, on trouve

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i \omega x}}{1+x^2} dx = \pi e^{-2\pi|\omega|}.$$

b) On a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{\frac{x}{(1+x^2)^2}\right\} &= \mathcal{F}\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)'\right\}, \\ &= -\frac{1}{2} \mathcal{F}\left\{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'\right\}, \\ &= -\pi i \omega \mathcal{F}\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\}, \quad (\text{proposition 7.1.8}) \\ &= -\pi^2 i \omega e^{-2\pi|\omega|}, \quad (\text{d'après a})) \end{aligned}$$

**Exercice 7.6.6** En utilisant la transformée de Fourier, déterminer la solution  $u(x, t)$  de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a > 0$$

avec la condition initiale :  $u(x, 0) = \varphi(x)$  où  $\varphi(x)$  est la température à l'instant  $t = 0$ .

Solution : Pour résoudre l'équation ci-dessus, on considère la transformée de Fourier par rapport à la variable  $x$  seulement. On a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) e^{-2\pi i \omega x} dx = a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) e^{-2\pi i \omega x} dx,$$

et

$$\mathcal{F}\{u(x, t)\} \hat{u}(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-2\pi i \omega x} dx.$$

En tenant compte de la proposition 7.1.8, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\right\} &= \widehat{\frac{\partial u}{\partial \omega}}(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) e^{-2\pi i \omega x} dx = 2\pi i \omega \hat{u}(\omega, t), \\ \mathcal{F}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)\right\} &= \widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial \omega^2}}(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) e^{-2\pi i \omega x} dx = -4\pi^2 \omega^2 \hat{u}(\omega, t), \end{aligned}$$

Dès lors, l'équation précédente s'écrit sous la forme

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega, t) = -4a\pi^2 \omega^2 \hat{u}(\omega, t).$$

En intégrant cette équation en l'inconnue  $\hat{u}(\omega, t)$  de la variable  $t$ , on obtient

$$\hat{u}(\omega, t) = C e^{-4a\pi^2 \omega^2 t}.$$

Or

$$\hat{u}(\omega, 0) = C = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) e^{-2\pi i \omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-2\pi i \omega x} dx,$$

donc

$$\hat{u}(\omega, t) = e^{-4a\pi^2 \omega^2 t} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-2\pi i \omega x} dx = e^{-4a\pi^2 \omega^2 t} \hat{\varphi}(\omega),$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{F}\{u(x, t)\} = e^{-4a\pi^2 \omega^2 t} \mathcal{F}\{\varphi(x)\}.$$

Comme  $\mathcal{F}\{f * g\} = \mathcal{F}\{f\}\mathcal{F}\{g\}$ , on peut poser  $u(x, t) = f * g$ , avec  $f = \varphi(x)$  donnée et  $g$  telle que :  $\mathcal{F}\{g\} = \widehat{g}(\omega) = e^{-4a\pi^2\omega^2t}$ . D'après l'exercice 7.6.1, on a

$$g = \frac{1}{4\pi\sqrt{a\pi t}}e^{-\frac{x^2}{16a\pi^2t}}.$$

Finalement, on obtient la solution

$$u(x, t) = \varphi * \frac{1}{4\pi\sqrt{a\pi t}}e^{-\frac{x^2}{16a\pi^2t}} = \frac{1}{4\pi\sqrt{a\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{16a\pi^2t}} dy.$$

**Exercice 7.6.7** En utilisant la transformée de Fourier, résoudre l'équation intégrale suivante :

$$f(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y)f(y)dy,$$

où  $g$  et  $k$  sont des fonctions connues ainsi que leurs transformées de Fourier respectivement  $G$  et  $K$ .

Solution : On a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(x)\} &= \widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i\omega x}dx, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( g(x) + \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y)f(y)dy \right) e^{-2\pi i\omega x}dx, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-2\pi i\omega x}dx \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y)e^{-2\pi i\omega x}dx, \\ &= \widehat{g}(\omega) + \int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy \int_{-\infty}^{\infty} k(z)e^{-2\pi i\omega(y+z)}dz, z = x - y \\ &= \widehat{g}(\omega) + \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-2\pi i\omega y}dy \int_{-\infty}^{\infty} k(z)e^{-2\pi i\omega z}dz, \\ &= \widehat{g}(\omega) + \widehat{f}(\omega)\widehat{k}(\omega). \end{aligned}$$

D'où  $\widehat{f}(\omega) = \frac{\widehat{g}(\omega)}{1-\widehat{k}(\omega)}$  et d'après la formule d'inversion de Fourier, on a

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{g}(\omega)}{1-\widehat{k}(\omega)} e^{2\pi i\omega x} d\omega.$$

**Exercice 7.6.8** On considère l'équation fonctionnelle suivante :

$$f(x) + A(f(x-1) + f(x+1)) = u(x),$$

où  $u(x)$  est une fonction connue, absolument intégrable sur  $\mathbb{R}$  et  $A$  une constante. Supposons que la transformée de Fourier de la fonction  $f$  et son inverse existent. Déterminer  $f(x)$  sous forme intégrale. Quelle condition doit vérifier  $A$  ?

Solution : En tenant compte des propriétés 7.1.3 et 7.1.4, on obtient

$$\mathcal{F}\{f(x)\} + A(\mathcal{F}\{f(x-1)\} + \mathcal{F}\{f(x+1)\}) = \mathcal{F}\{u(x)\},$$

et

$$\widehat{f}(\omega) + A(e^{2\pi i\omega}\widehat{f}(\omega) + e^{-2\pi i\omega}\widehat{f}(\omega)) = \widehat{u}(\omega).$$

D'où

$$(1 + 2A \cos 2\pi\omega)\widehat{f}(\omega) = \widehat{u}(\omega),$$

ce qui implique

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{\widehat{u}(\omega)}{1 + 2A \cos 2\pi\omega}.$$

La formule d'inversion de Fourier s'écrit dans ce cas

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{u}(\omega)}{1 + 2A \cos 2\pi\omega} e^{2\pi i\omega x} d\omega.$$

On doit avoir  $1 + 2A \cos 2\pi\omega \neq 0$ , c'est-à-dire  $|A| < \frac{1}{2}$ .

**Exercice 7.6.9** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions absolument et de carré intégrable sur  $\mathbb{R}$ . La fonction de corrélation  $\varphi_{fg}(x)$  de  $f(x)$  et  $g(x)$  est définie par

$$\varphi_{fg}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x+y)dy.$$

a) Montrer que :

$$\varphi_{fg}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}}(\omega)\widehat{g}(\omega)e^{2\pi i\omega x}d\omega.$$

b) En déduire l'identité de Parseval :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

c) Calculer l'intégrale :  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$ .

Solution : a) On a

$$\begin{aligned}\varphi_{fg}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left( \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(\omega) e^{2\pi i \omega(x+y)} d\omega \right) dx, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{2\pi i \omega y} dy \right) \widehat{g}(\omega) e^{2\pi i \omega x} dx, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}}(\omega) \widehat{g}(\omega) e^{2\pi i \omega x} d\omega,\end{aligned}$$

car  $f$  est à valeurs réelles.

b) Pour  $x = 0$ , la formule ci-dessus s'écrit

$$\varphi_{fg}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}}(\omega) \widehat{g}(\omega) d\omega.$$

Et si en particulier  $f(x) = g(x)$ , on obtient

$$\varphi_{ff}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}}(\omega) \widehat{f}(\omega) e^{2\pi i \omega x} d\omega.$$

c) La transformée de Fourier de la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

est

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-1}^1 e^{-2\pi i \omega x} dx = \frac{\sin 2\pi \omega}{\pi \omega}.$$

En remplaçant ces fonctions dans l'identité de Parseval, on obtient

$$\int_{-1}^1 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 2\pi \omega}{\pi^2 \omega^2} d\omega,$$

d'où

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \pi.$$

**Exercice 7.6.10** a) Montrer qu'il n'existe pas d'unité sur l'espace  $\mathcal{L}^1$  pour la convolution.

b) Montrer que la transformation de Fourier  $\mathcal{L}^1 \rightarrow \mathcal{C}_0$ ,  $f \mapsto \widehat{f}$ , est une injection non surjective.

Solution : a) On raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe  $\zeta \in \mathcal{L}^1$  tel que pour toute fonction  $f \in \mathcal{L}^1$ , on ait  $f * \zeta = f$ . D'après la proposition 7.1.12, on a  $\widehat{f * \zeta} = \widehat{f\zeta} = \widehat{f}$ . Dès lors,  $\widehat{f}(\widehat{\zeta} - 1) = 0$ . On a montré dans l'exercice 7.6.1, que la transformée de Fourier de la fonction  $e^{-\pi x^2}$  est égale à  $e^{-\pi \omega^2}$ . En choisissant,  $f(x) = e^{-\pi x^2}$ , on obtient  $e^{-\pi \omega^2}(\widehat{\zeta}(\omega) - 1) = 0$ . D'où  $\widehat{\zeta}(\omega) = 1$ , ce qui est contradictoire car d'après la proposition 7.1.2, la transformée de Fourier de  $\zeta$  doit tendre vers 0 à l'infini. Par conséquent, l'espace  $\mathcal{L}^1$  est sans unité pour la convolution.

b) Supposons que  $\widehat{f} = 0$ . Comme  $f \in \mathcal{L}^1$ , alors  $f = 0$  presque partout et l'application en question est injective (voir aussi l'exercice 7.6.24, c)). Pour montrer qu'elle n'est pas surjective, on utilise le fait qu'une application linéaire continue surjective entre deux espaces vectoriels normés complets est ouverte (théorème de Banach-Schauder ou théorème de l'application ouverte). Considérons les fonctions indicatrices :  $\zeta(x) = \mathbf{1}_{[-k,k]}$ ,  $\eta(x) = \mathbf{1}_{[-1,1]}$  et posons  $f = \widehat{\zeta * \eta}$ . On a

$$\begin{aligned}\widehat{\zeta}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(x) e^{-2\pi i \omega x} dx = \int_{-k}^k e^{-2\pi i \omega x} dx = \frac{\sin 2\pi k \omega}{\pi \omega}, \\ \widehat{\eta}(\omega) &= \frac{\sin 2\pi \omega}{\pi \omega}, \\ f(\omega) &= \widehat{\zeta}(\omega) \widehat{\eta}(\omega) = \frac{\sin 2\pi \omega \sin 2\pi k \omega}{\pi^2 \omega^2}.\end{aligned}$$

Notons que  $f \in \mathcal{L}^1$  alors que  $\zeta \notin \mathcal{L}^1$ . On déduit de l'application ouverte ci-dessus, l'existence d'une constante  $M > 0$  telle que la norme de  $f$  pour  $\mathcal{L}^1$  est majorée par  $M \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |\widehat{f}(\omega)|$ . Or la norme de  $f$  pour  $\mathcal{C}_0$  est uniformément bornée, donc  $\|f\|_1 \leq M \|\widehat{f}\|_{\mathcal{C}_0}$ . Le membre à gauche tend vers l'infini pour  $k \rightarrow \infty$ , tandis que celui à droite est majorée par une constante, ce qui est absurde.

**Exercice 7.6.11** Montrer que la transformée de Fourier d'une distribution paire est une distribution paire et que celle d'une distribution impaire est aussi impaire.

Solution : Soit  $T \in \mathcal{S}'$  une distribution paire. Autrement dit (définition 3.4.2, chapitre 3),  $\overset{\vee}{T} = T$ , c'est-à-dire  $\langle T, \overset{\vee}{\varphi} \rangle = \langle T, \varphi \rangle$ ,  $\forall \varphi \in \mathcal{S}$ , où  $\overset{\vee}{\varphi} : x \mapsto \varphi(-x)$ . On a

$$\langle \mathcal{F}T, \overset{\vee}{\varphi} \rangle = \langle T, \mathcal{F}\overset{\vee}{\varphi} \rangle = \langle T, \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(-x) e^{-2\pi i \omega x} dx \rangle = \langle T, \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{2\pi i \omega x} dx \rangle,$$

ou

$$\langle \mathcal{F}T, \overset{\vee}{\varphi} \rangle = \langle T, \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(-x) e^{-2\pi i (-\omega)x} dx \rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi(-\omega) \rangle = \langle T, \overset{\vee}{\mathcal{F}\varphi} \rangle.$$

On a montré dans la proposition 7.2.5, que si  $\varphi \in \mathcal{S}$  alors la transformée de Fourier  $\widehat{\varphi} = \mathcal{F}\varphi$  de  $\varphi$  appartient aussi à  $\mathcal{S}$ . Dès lors, puisque par hypothèse  $T$  est paire alors la dernière relation s'écrit  $\langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle \mathcal{FT}, \varphi \rangle$ . Par conséquent,  $\langle \mathcal{FT}, \overset{\vee}{\varphi} \rangle = \langle \mathcal{FT}, \varphi \rangle$ , et  $\mathcal{FT}$  est paire. Supposons maintenant que la distribution  $T$  est impaire (définition 3.4.2, chapitre 3), c'est-à-dire  $\overset{\vee}{T} = -T$  ou  $\langle T, \overset{\vee}{\varphi} \rangle = -\langle T, \varphi \rangle$ ,  $\forall \varphi \in \mathcal{S}$ , avec  $\overset{\vee}{\varphi}(x) = \varphi(-x)$ . On a  $\langle \mathcal{FT}, \overset{\vee}{\varphi} \rangle = \langle T, \mathcal{F}\overset{\vee}{\varphi} \rangle$ , et en raisonnant comme ci-dessus, on obtient

$$\langle \mathcal{FT}, \overset{\vee}{\varphi} \rangle = \langle T, \mathcal{F}\overset{\vee}{\varphi} \rangle = -\langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle = -\langle \mathcal{FT}, \varphi \rangle,$$

et  $\mathcal{FT}$  est impaire.

**Exercice 7.6.12** Déterminer les transformées de Fourier  $\mathcal{F}(\text{vp}_x^{\frac{1}{x}})$  et  $\overline{\mathcal{F}}(\text{vp}_x^{\frac{1}{x}})$  où  $\text{vp}_x^{\frac{1}{x}}$  est la valeur principale de Cauchy.

Solution : D'après l'exercice 3.5.2, on a  $x \text{vp}_x^{\frac{1}{x}} = 1$ . D'où,  $\mathcal{F}(x \text{vp}_x^{\frac{1}{x}}) = \mathcal{F}1$ . Or  $\mathcal{F}1 = \delta = \frac{d}{d\omega} H(\omega)$  où  $H$  est la distribution de Heaviside et par ailleurs  $\mathcal{F}(x \text{vp}_x^{\frac{1}{x}}) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}(\text{vp}_x^{\frac{1}{x}})$  (proposition 7.1.10), donc

$$-\frac{1}{2\pi i} \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}(\text{vp}_x^{\frac{1}{x}}) = \frac{d}{d\omega} H(\omega),$$

c'est-à-dire  $\mathcal{F}(\text{vp}_x^{\frac{1}{x}}) = -2\pi i H(\omega) + C$ , où  $C$  est une constante à déterminer. La distribution  $\text{vp}_x^{\frac{1}{x}}$  étant impaire car

$$\int_{|x| \geq \varepsilon} \varphi(-x) dx = - \int_{|x| \geq \varepsilon} \varphi(x) dx,$$

alors sa transformée de Fourier est aussi impaire (exercice précédent). Dès lors,  $-2\pi i + C = -C$  d'où  $C = \pi i$ . Finalement

$$\mathcal{F}(\text{vp}_x^{\frac{1}{x}}) = -2\pi i H(\omega) + \pi i = \begin{cases} -\pi i & \text{si } \omega > 0 \\ \pi i & \text{si } \omega < 0 \end{cases}$$

On montre de même que

$$\overline{\mathcal{F}}(\text{vp}_x^{\frac{1}{x}}) = 2\pi i H(\omega) - \pi i.$$

**Exercice 7.6.13** Déterminer les transformées de Fourier  $\mathcal{FH}$  et  $\overline{\mathcal{F}}H$  de la distribution de Heaviside.

Solution : La fonction  $H(x)$  n'est pas sommable et n'a pas une transformée de Fourier au sens des fonctions. Or cette fonction est à croissance lente à l'infini (car elle est bornée), donc elle détermine une distribution tempérée et comme on le sait cette dernière a une transformée de Fourier. On a  $H' = \delta$ , d'où  $\widehat{H}' = \widehat{\delta} = 1$ . Or  $\widehat{H}' = 2\pi i\omega \widehat{H}$ , donc  $2\pi i\omega \widehat{H} = 1$ . On peut être tenté de choisir  $\frac{1}{2\pi i\omega}$  comme solution de cette équation. Or cette fonction n'est pas localement sommable et l'équation ci-dessus n'a pas de solution unique. On va procéder autrement. On a montré dans l'exercice 7.6.12, que :  $\mathcal{F}(\text{vp } \frac{1}{x}) = -2\pi i H(\omega) + \pi i$ . En appliquant  $\mathcal{F}$  à cette équation, on obtient  $\mathcal{FF}(\text{vp } \frac{1}{x}) = -2\pi i \mathcal{FH}(\omega) + \pi i \delta$ , car  $\mathcal{F}1 = \delta$ . D'où  $\mathcal{FH} = \frac{\delta}{2} - \frac{1}{2\pi i} \mathcal{FF}(\text{vp } \frac{1}{x})$ . La distribution  $\text{vp } \frac{1}{x}$  est paire et d'après l'exercice précédent,

$$\overline{\mathcal{F}}(\text{vp } \frac{1}{x}) = 2\pi i H(\omega) - \pi i = -\mathcal{F}(\text{vp } \frac{1}{x}).$$

D'où

$$\mathcal{FF}(\text{vp } \frac{1}{x}) = -\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}(\text{vp } \frac{1}{x}) = -\text{vp } \frac{1}{x},$$

en vertu de la proposition 7.3.12. Finalement, on a

$$\mathcal{FH} = \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2\pi i} \text{vp } \frac{1}{x}.$$

De même, en appliquant  $\overline{\mathcal{F}}$  à l'égalité mentionnée au début de la solution, on obtient  $\overline{\mathcal{FF}}(\text{vp } \frac{1}{x}) = -2\pi i \overline{\mathcal{FH}} + \pi i \delta$ , car  $\overline{\mathcal{F}1} = \delta$ . D'où

$$\overline{\mathcal{FH}} = \frac{\delta}{2} - \frac{1}{2\pi i} \overline{\mathcal{FF}}(\text{vp } \frac{1}{x}) = \frac{\delta}{2} - \frac{1}{2\pi i} \text{vp } \frac{1}{x},$$

en vertu de la proposition 7.3.12.

**Exercice 7.6.14 a)** Déterminer une relation simple entre  $|x|$  et la fonction  $H(x)$  de Heaviside.

b) Calculer la transformée de Fourier de la fonction  $|x|$ .

c) En déduire la transformée de Fourier de la distribution partie finie  $Pf \frac{1}{x^2}$ .

Solution : a) Rappelons que la fonction  $H(x)$  de Heaviside est égale à 1 si  $x > 0$ , 0 si  $x < 0$ . Dès lors,  $|x| = xH(x) - xH(-x)$ , car pour  $x > 0$  les deux membres sont égales à  $x$  et pour  $x < 0$  à  $-x$ .

b) D'après la question précédente, on peut écrire

$$\mathcal{F}\{|x|\} = \mathcal{F}\{xH(x)\} - \mathcal{F}\{xH(-x)\}, \quad (\text{propriété 7.1.3})$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \frac{d}{d\omega} \mathcal{FH}(\omega) + \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{d\omega} \mathcal{FH}(-\omega), \quad (\text{proposition 7.1.10})$$

D'après l'exercice 7.6.13, on sait que :  $\mathcal{F}H = \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2\pi i} \text{vp } \frac{1}{x}$ . Déterminons  $\mathcal{F}H(-\omega)$ . On a

$$\langle \mathcal{F}H(-\omega), \varphi \rangle = \langle \overset{\vee}{\mathcal{F}H}, \varphi \rangle = \langle \overset{\vee}{H}, \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle H, \overset{\vee}{\mathcal{F}\varphi} \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}$$

Or

$$\overset{\vee}{\mathcal{F}\varphi}(\omega) = \mathcal{F}\varphi(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{2\pi i \omega x} dx = \overline{\mathcal{F}}\varphi(\omega),$$

donc  $\langle \mathcal{F}H(-\omega), \varphi \rangle = \langle H, \overline{\mathcal{F}}\varphi \rangle = \langle \overline{\mathcal{F}}H, \varphi \rangle$ , d'où

$$\mathcal{F}H(\omega) = \overline{\mathcal{F}}H = \frac{\delta}{2} - \frac{1}{2\pi i} \text{vp } \frac{1}{\omega}, \quad (\text{exercice 7.6.13})$$

Finallement,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{|x|\} &= -\frac{1}{2\pi i} \frac{d}{d\omega} \left( \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2\pi i} \text{vp } \frac{1}{\omega} \right) + \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{d\omega} \left( \frac{\delta}{2} - \frac{1}{2\pi i} \text{vp } \frac{1}{\omega} \right), \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \frac{d}{d\omega} \left( \text{vp } \frac{1}{\omega} \right), \\ &= -\frac{1}{2\pi^2} \text{Pf } \frac{1}{\omega^2} \quad (\text{exercice 2.4.2, chapitre 2}) \end{aligned}$$

D'après b), on a  $\mathcal{F}\{|x|\} = -\frac{1}{2\pi^2} \text{Pf } \frac{1}{\omega^2}$ . D'où  $\mathcal{FF}\{|x|\} = -\frac{1}{2\pi^2} \mathcal{F}(\text{Pf } \frac{1}{\omega^2})$ . Or  $\mathcal{FF}\{|x|\} = |x|$ , donc

$$\mathcal{F}\left(\text{Pf } \frac{1}{\omega^2}\right) = -2\pi^2|x|.$$

**Exercice 7.6.15** Montrer que si  $f$  est localement sommable, alors la distribution qui lui est associée n'est en général pas tempérée.

Solution : Il suffit de considérer la fonction  $f(x) = e^x$  avec  $\varphi(x) = \frac{1}{\cosh x}$ . On aura

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{\cosh x} dx = \infty.$$

**Exercice 7.6.16** Montrer que toute fonction localement sommable et à croissance lente, détermine une distribution tempérée.

Solution : Soit  $f$  une fonction à croissance lente, c'est-à-dire pour  $|x|$  grand,  $|f(x)| \leq A|x|^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  où  $A$  est une constante. Si  $\varphi \in \mathcal{S}$ , il existe une constante  $B$  telle que :  $|\varphi(x)| \leq \frac{B}{|x|^{k+2}}$ , pour  $|x| \rightarrow \infty$ . Dès lors,  $|f(x)\varphi(x)| \leq \frac{AB}{|x|^2}$ , pour  $|x| \rightarrow \infty$ , et par conséquent  $\langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$ , existe. Elle est linéaire et on vérifie aisément qu'elle est continue dans  $\mathcal{S}$ .

**Exercice 7.6.17** Montrer que si  $f$  est localement sommable et si elle est de carré sommable, alors elle détermine une distribution tempérée.

Solution : En effet, d'après l'inégalité de Schwarz, on a

$$\left( \int f(x)(\varphi_k(x) - \varphi(x)) \right)^2 \leq \int f^2(x)dx \int (\varphi_k(x) - \varphi(x))^2 dx.$$

Or  $(\varphi_k - \varphi) \in \mathcal{L}^2$ ,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi_k(x) - \varphi(x))^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\varphi_k - \varphi)^2(x).(1+x^2)}{1+x^2} dx, \\ &\leq \pi \sup_{x \in \mathbb{R}} |(\varphi_k - \varphi)(x).(1+x^2)|, \end{aligned}$$

et puisque  $\varphi_k$  tend vers  $\varphi$  dans  $\mathcal{S}$ , alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sup_{x \in \mathbb{R}} |(\varphi_k - \varphi)(x).(1+x^2)| \right) = 0,$$

et le résultat en découle.

**Exercice 7.6.18** Montrer que si  $f$  est sommable, alors elle détermine une distribution tempérée.

Solution : En effet, à l'infini la sommabilité de  $f$  implique celle de  $f^2$ . La distribution associée à  $f$  est à croissance lente à l'infini puisqu'elle ne croît pas à l'infini.

**Exercice 7.6.19** Montrer que si une distribution est tempérée, alors ses dérivées le sont aussi.

Solution : On a  $\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle$ . Si  $\varphi \in \mathcal{S}$ , on a aussi  $\varphi' \in \mathcal{S}$  et donc  $\langle T, \varphi' \rangle$  a un sens, d'où le résultat.

**Exercice 7.6.20** Montrer que si une distribution  $T$  est tempérée et si  $\alpha$  est une fonction de classe  $C^\infty$  à croissance lente ainsi que ses dérivées (en particulier un polynôme), alors  $\alpha T$  est tempérée.

Solution : On a  $\langle \alpha T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha \varphi \rangle$  et si  $\varphi \in \mathcal{S}$ , alors on a aussi  $\alpha \varphi \in \mathcal{S}$ .

**Exercice 7.6.21** Déterminer la transformée de Fourier de la dérivée  $n$ ième de la distribution  $\delta$  de Dirac.

Solution : En tenant compte de la proposition 7.3.5 et de l'exemple précédent, on obtient

$$\mathcal{F}\delta^{(n)} = (2\pi i\omega)^n \mathcal{F}\delta = (2\pi i\omega)^n.$$

On peut aussi appliquer directement la proposition 7.3.6 puisque en général, le support de la dérivée  $n^{\text{ième}}$  d'une distribution arbitraire est inclus dans celui de la distribution (exercice 2.4.5, chapitre 2).

**Exercice 7.6.22** Nous avons montré dans la proposition 7.3.7 que si  $T$  est une distribution à support borné, sa transformée de Fourier est une fonction indéfiniment dérivable qui se prolonge en une fonction holomorphe entière dans le plan complexe. Que se passe-t-il si la distribution  $T$  n'est plus à support borné ?

Solution : Nous allons voir que si  $T$  n'est plus à support borné, alors la fonction en question peut se transformer en une distribution singulière. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer la distribution tempérée  $T = 1$ . En remplaçant  $T = 1$  dans la relation  $\mathcal{F}T' = 2\pi i\omega \mathcal{F}T$ , on obtient  $\omega \mathcal{F}1 = 0$ . D'après la proposition 3.1.2 (chapitre 3), la solution de cette équation est  $\mathcal{F}1 = c\delta$  où  $c$  est une constante à déterminer. Posons  $T = 1$  et  $\varphi(x) = e^{-\pi x^2}$  dans la définition  $\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle$ . On obtient

$$\langle \mathcal{F}1, \varphi \rangle = \langle 1, \mathcal{F}\varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx.$$

Or

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = 1, \quad t = \sqrt{\pi}x$$

donc  $\langle \mathcal{F}1, \varphi \rangle = 1$ . Par ailleurs, puisque  $\langle \mathcal{F}1, \varphi \rangle = \langle c\delta, \varphi \rangle = c\varphi(0) = c$ , alors  $c = 1$ . Par conséquent  $\mathcal{F}1 = \delta$  (distribution singulière). Notons que la fonction 1 n'appartient ni à  $\mathcal{L}^1$ , ni à  $\mathcal{L}^2$  et sa transformée de Fourier au sens des fonctions n'existe pas.

**Exercice 7.6.23** Donner une nouvelle démonstration de la proposition 7.3.8 (formule sommatoire de Poisson) : si  $\varphi \in \mathcal{S}$ , alors

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(k).$$

Solution : On a déjà vu au début de la preuve de la proposition 7.3.8 que les séries ci-dessus convergent absolument. Considérons maintenant la fonction définie par  $\psi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(x + n)$ . En utilisant le même raisonnement et

en tenant compte du fait que pour  $x \in [0, 1]$ ,  $\max |\varphi(x + n)| \leq \frac{C}{n^2}$  si  $n \geq 1$  et  $\max |\varphi(x + n)| \leq \frac{C}{(n+1)^2}$  si  $n \leq -2$ , alors on montre que cette série ainsi que la série dérivée converge normalement (donc absolument et uniformément) sur  $\mathbb{R}$  et en particulier sur le compact  $[0, 1]$  vers la fonction  $\psi$ . Cette dernière est continûment dérivable (en vertu du théorème de dérivation des séries) et elle est 1-périodique. D'après la proposition 6.2.6 (chapitre 6), si une série de Fourier associée à une fonction continue converge uniformément alors elle converge vers cette fonction. Donc notre fonction  $\psi$  admet pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , un développement en série de Fourier sous la forme

$$\psi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i k x}.$$

On adopte ici la notation complexe (voir proposition 6.2.5, chapitre 6), tout en tenant compte de la modification du coefficient  $2\pi$ . Calculons le coefficient  $c_k$  d'indice  $k$ . On a

$$c_k = \int_0^1 \psi(x) e^{-2\pi i k x} dx = \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(x + n) e^{-2\pi i k x} dx.$$

La convergence de la série étant uniforme sur le compact  $[0, 1]$ , on peut donc intervertir les deux signes. D'où

$$c_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 \varphi(x + n) e^{-2\pi i k x} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} \varphi(t) e^{-2\pi i k t} dt,$$

ou

$$c_k = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-2\pi i k t} dt = \widehat{\varphi}(k).$$

Par conséquent,

$$\psi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(k) e^{2\pi i k x},$$

et pour  $x = 0$ , on obtient le résultat annoncé.

**Exercice 7.6.24 a)** (*Formule d'inversion de Fourier*). Montrer que si  $f \in \mathcal{L}^1$  et  $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1$ , alors

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{2\pi i \omega x} d\omega,$$

presque partout en  $x \in \mathbb{R}$  (voir aussi proposition 7.3.9).

b) Montrer que si en outre la fonction  $f$  est continue alors la formule ci-dessus est valable pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

c) Montrer que la transformée de Fourier est injective sur  $\mathcal{L}^1$ .

Solution : a) On considère une fonction auxilière (approximation de l'identité dans  $\mathcal{L}^1$ ) :  $g_\alpha(x) = e^{-\pi\alpha|x|}$ ,  $\alpha > 0$ . La transformée de Fourier de  $g_\alpha \in \mathcal{L}^1$  se calcule aisément et on obtient

$$\begin{aligned}\widehat{g}_\alpha(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi\alpha|x|} e^{-2\pi i \omega x} dx, \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{\pi\alpha x - 2\pi i \omega x} dx + \int_0^{\infty} e^{-\pi\alpha x - 2\pi i \omega x} dx, \\ &= \frac{1}{\pi\alpha - 2\pi i \omega} + \frac{1}{\pi\alpha + 2\pi i \omega}, \\ &= \frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2 + 4\omega^2)}.\end{aligned}$$

Soit  $f \in \mathcal{L}^1$ . On a

$$\begin{aligned}f * \widehat{g}_\alpha(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) \widehat{g}_\alpha(t) dt, \quad x \in \mathbb{R} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) \left( \int_{-\infty}^{\infty} g_\alpha(s) e^{-2\pi i ts} ds \right) dt,\end{aligned}$$

et d'après le théorème de Fubini, on peut permuter les deux signes intégrales,

$$f * \widehat{g}_\alpha(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g_\alpha(s) \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) e^{-2\pi i ts} dt \right) ds,$$

car

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g_\alpha(s)f(x-t)e^{-2\pi i ts}| dt ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g_\alpha(s)f(x-t)| dt ds, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |g_\alpha(s)| ds \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)| dt < +\infty\end{aligned}$$

En posant  $y = x - t$ , on obtient

$$\begin{aligned}f * \widehat{g}_\alpha(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} g_\alpha(s) \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-2\pi i (x-y)s} dy \right) ds, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g_\alpha(s) \widehat{f}(s) e^{2\pi i xs} ds.\end{aligned}\tag{7.6.1}$$

On va faire tendre  $\alpha$  vers 0 des deux côtés de la formule ci-dessus. Pour le membre de droite, notons que :  $|g_\alpha(s)\widehat{f}(s)e^{2\pi i xs}| \leq |\widehat{f}(s)|$ , et par hypothèse

$\widehat{f} \in \mathcal{L}^1$ , donc l'utilisation du théorème de convergence dominée est légitime et on a

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} g_{\alpha}(s) \widehat{f}(s) e^{2\pi ixs} ds = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s) e^{2\pi ixs} ds.$$

Passons maintenant au calcul de  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} f * \widehat{g}_{\alpha}(x)$ . On montre que la fonction  $f * \widehat{g}_{\alpha}(x)$  tend vers  $f$  dans  $\mathcal{L}^1$  lorsque  $\alpha \rightarrow 0$ . Autrement dit  $\|f * \widehat{g}_{\alpha} - f\|_1$  tend vers 0 lorsque  $\alpha \rightarrow 0$  ou encore  $f * \widehat{g}_{\alpha}$  tend vers  $f$  en moyenne. Notons que pour tout  $\alpha > 0$ ,  $\widehat{g}_{\alpha}(\omega) \geq 0$  et  $\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(\omega) d\omega = 1$ . Dès lors,

$$\begin{aligned} f * \widehat{g}_{\alpha}(x) - f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) \widehat{g}_{\alpha}(t) dt - f(x), \quad x \in \mathbb{R} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (f(x-t) - f(x)) \widehat{g}_{\alpha}(t) dt, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\tau_t f - f)(x) \widehat{g}_{\alpha}(t) dt, \quad \tau_t f(x) = f(x-t) \end{aligned}$$

D'où,

$$\|f * \widehat{g}_{\alpha} - f\|_1 \leq \int_{-\infty}^{\infty} \|\tau_t f - f\|_1 \widehat{g}_{\alpha}(t) dt.$$

Or d'après la propriété 7.1.6, on sait que :  $\widehat{g}_{\alpha}(t) = \frac{1}{\alpha} \widehat{g}\left(\frac{t}{\alpha}\right)$ , donc en posant  $t = \alpha u$ , on obtient

$$\|f * \widehat{g}_{\alpha} - f\|_1 \leq \int_{-\infty}^{\infty} \|\tau_{\alpha u} f - f\|_1 \widehat{g}(u) du.$$

La fonction  $\alpha \mapsto \|\tau_{\alpha u} f - f\|_1$  est continue et tend vers 0 lorsque  $\alpha \rightarrow 0$ . Cette fonction est bornée  $\|\tau_{\alpha u} f - f\|_1 \leq 2\|f\|_1$ , car le membre de gauche est majoré par la norme de chacun des termes et de plus la norme est invariante par translation. D'où  $\|\tau_{\alpha u} f - f\|_1 \widehat{g}(u) \leq 2\|f\|_1 \widehat{g}(u)$ , et puisque  $\widehat{g} \in \mathcal{L}^1$ , on peut donc appliquer le théorème de convergence dominée. En conclusion, lorsque  $\alpha \rightarrow 0$ ; le membre de gauche de (7.6.1) tend vers  $f$  dans  $\mathcal{L}^1$  et celui de droite tend vers  $\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s) e^{2\pi ixs} ds$  et la démonstration s'achève.

b) Soit  $\Omega$  un sous-ensemble négligeable de  $\mathbb{R}$ . Les fonctions  $f$  et celle définie par  $\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{2\pi i\omega x} d\omega$  sont égales sur le complémentaire  $\Omega^c$  de  $\Omega$ . Donc elles sont égales sur un ensemble dense et il résulte de ce qui précède que ces fonctions coïncident pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

c) Si  $\widehat{f}(\omega) = 0$ ,  $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1$  alors  $f(x) = 0$  pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$  d'après la question a). Donc  $f = 0$  dans  $\mathcal{L}^1$ .

**Exercice 7.6.25 (Formule de Plancherel).** Soient  $\varphi \in \mathcal{L}^1$  et  $\psi \in \mathcal{S}$ . Montrer (voir aussi proposition 7.2.8) que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \overline{\psi}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(x) \overline{\widehat{\psi}}(x) dx.$$

Solution : On vérifie aisément que  $\varphi\bar{\psi} \in \mathcal{L}^1$  et  $\widehat{\varphi}\bar{\psi} \in \mathcal{L}^1$ . Puisque  $\psi \in \mathcal{S}$ , alors d'après la proposition 7.3.9, on a

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\bar{\psi}(x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \left( \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}(\omega)e^{-2\pi i \omega x}d\omega \right) dx, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}(\omega) \left( \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)e^{-2\pi i \omega x}dx \right) d\omega, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}(\omega)\widehat{\varphi}d\omega,\end{aligned}$$

en vertu du théorème de convergence dominée car

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \varphi(x)\bar{\psi}(\omega)e^{-2\pi i \omega x} \right| d\omega dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \varphi(x)\bar{\psi}(\omega) \right| d\omega dx, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|dx \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{\psi}(\omega)|d\omega < +\infty\end{aligned}$$

Dès lors,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\bar{\psi}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}(\omega)\widehat{\varphi}(\omega)d\omega.$$

**Exercice 7.6.26** Donner une autre preuve du résultat  $\mathcal{F}1 = \delta$ .

Solution : On a

$$\langle \mathcal{F}1, \varphi \rangle = \langle 1, \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle 1, \Phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega)d\omega,$$

où  $\Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)e^{-2\pi i \omega x}dx$ . D'après la formule d'inversion de Fourier, on sait que :  $\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega)e^{2\pi i \omega x}d\omega$ , d'où  $\varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega)d\omega$  et par conséquent  $\langle \mathcal{F}1, \varphi \rangle = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$ . Donc,  $\mathcal{F}1 = \delta$  (distribution singulière).

**Exercice 7.6.27** Soient  $f \in \mathcal{L}^1$  et  $g \in \mathcal{L}^1$ . On suppose que  $\widehat{f}(\omega) = \widehat{g}(\omega)$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $f$  et  $g$  sont égales presque partout.

Solution : Posons  $\varphi = f - g$ . On a  $\varphi \in \mathcal{L}^1$  et  $\widehat{\varphi}(\omega) = 0$ . D'après le théorème d'inversion de Fourier (exercice 7.6.24), la fonction  $\varphi$  est presque nulle ou ce qui revient au même les fonctions  $f$  et  $g$  sont égales presque partout.

**Exercice 7.6.28** Soient  $f \in \mathcal{L}^2$  et  $c \in \mathbb{R}$ . Montrer que si

$$g(x) = e^{2\pi i cx}f(x), \quad h(x) = f(x - c),$$

alors presque partout sur  $\mathbb{R}$ ,

$$\widehat{g}(\omega) = \widehat{f}(\omega - c), \quad \widehat{h}(\omega) = e^{2\pi i \omega c}\widehat{f}(\omega), \quad \widehat{\overline{f}}(\omega) = \widehat{\overline{f}}(-\omega).$$

Solution : Soit  $f_n$ ) une suite dans  $S$  telle que  $\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$ . En posant

$$g_n(x) = e^{2\pi i \omega c} x f_n(x),$$

et

$$h_n(x) = f_n(x + c),$$

on montre que  $\|g_n - g\|_2 \rightarrow 0$  et  $\|h_n - h\|_2 \rightarrow 0$ . D'après la propriété 7.1.5 (modulation), on a  $\widehat{g}_n(\omega) = \widehat{f}_n(\omega - c)$ , et d'après la propriété 7.1.4 (translation), on a  $\widehat{h}_n(\omega) = e^{2\pi i \omega c} \widehat{f}_n(\omega)$ . Or  $\|\widehat{g}_n - \widehat{g}\|_2 \rightarrow 0$  et  $\|\widehat{h}_n - \widehat{h}\|_2 \rightarrow 0$  (en effet, il suffit d'utiliser un raisonnement similaire à celui qui a été fait au début de la section transformée de Fourier dans  $\mathcal{L}^2$ ). On en déduit que  $\widehat{g}(\omega) = \widehat{f}(\omega - c)$  et  $\widehat{h}(\omega) = e^{2\pi i \omega c} \widehat{f}(\omega)$ . Pour la dernière relation, notons que puisque  $\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$ , alors  $\|\overline{f}_n - \overline{f}\|_2 \rightarrow 0$ . Par ailleurs, on a

$$\widehat{\overline{f}}_n(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f}_n(x) e^{2\pi i \omega x} dx = \widehat{\overline{f}}_n(-\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

et donc  $\|\widehat{\overline{f}}_n - \widehat{\overline{f}}\|_2 \rightarrow 0$  et  $\|g_n - g\|_2 \rightarrow 0$  où  $g_n(\omega) = \widehat{\overline{f}}(-\omega)$ . Par conséquent,  $\widehat{\overline{f}} = g$  dans  $\mathcal{L}^2$ , c'est-à-dire  $\widehat{\overline{f}}(\omega) = \widehat{\overline{f}}(-\omega)$ .

**Exercice 7.6.29** Montrer que si  $f, g \in \mathcal{L}^2$ , alors  $f * g$  est continue et bornée sur  $\mathbb{R}$  et en outre  $f * g = g * f$ .

Solution : Pour prouver la continuité de  $f * g$ , on ne peut pas utiliser le théorème de continuité des fonctions définies par une intégrale car celui-ci ne s'applique pas. On va procéder autrement. La transformée de Fourier étant surjective dans  $\mathcal{L}^2$ , il existe donc  $u, v \in \mathcal{L}^2$  tels que :  $f = \widehat{u}$  et  $g = \widehat{v}$ . Nous avons déjà montré (proposition 7.4.3) que pour  $f, g \in \mathcal{L}^2$ , alors  $\widehat{f}g = \widehat{f} * \widehat{g}$  presque partout. Dès lors,

$$f * g = \widehat{u} * \widehat{v} = \widehat{uv} = \widehat{vu} = \widehat{v} * \widehat{u} = g * f.$$

Par ailleurs, puisque  $uv \in \mathcal{L}^1$ , alors  $\widehat{uv}$  est continue et bornée sur  $\mathbb{R}$  en vertu de la proposition 7.1.2. Dès lors,  $f * g = \widehat{uv}$  est continue et bornée sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 7.6.30** Soit  $f$  une fonction de classe  $C^\infty$ . Montrer que si  $\text{supp } f$  est compact alors  $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{2\pi i \omega x} d\omega.$$

Solution : Par hypothèse  $\text{supp } f$  est compact et  $f'$  est continue. D'après le théorème 7.4.2 (voir aussi remarque 7.4.1), on a  $\widehat{f}' \in \mathcal{L}^2$ . Or  $\widehat{f}' = 2\pi i x \widehat{f}$ , donc  $x \widehat{f} \in \mathcal{L}^2$ . Par ailleurs,

$$\int_{|x| \geq 1} |\widehat{f}(x)| dx = \int_{|x| \geq 1} \left| \frac{x \widehat{f}(x)}{x} \right| dx \leq \sqrt{\int_{|x| \geq 1} \frac{dx}{x^2}} \sqrt{\int_{|x| \geq 1} |x \widehat{f}(x)|^2 dx} < \infty,$$

en vertu de l'inégalité de Schwarz. En outre, comme la fonction  $f$  est continue alors elle est intégrable sur  $[-1, 1]$  et dès lors  $\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(x)| dx < \infty$ . Autrement dit,  $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1$  et le résultat en découle (voir exercice 7.6.24).

## 7.7 Exercices proposés

**Exercice 7.7.1** Calculer la transformée de Fourier de la fonction définie par  $f(x) = H(x)e^{-\alpha x}$  où  $H(x)$  est la fonction de Heaviside.

Réponse :  $\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\alpha + 2\pi i\omega}$ ,  $\alpha > 0$ .

**Exercice 7.7.2** Calculer la transformée de Fourier de la fonction définie par  $f(x) = \frac{1}{\cosh x}$ .

Réponse : En appliquant la méthode des résidus à la fonction  $f(z) = \frac{e^{-2\pi i\omega z}}{\cosh z}$  où  $0 \leq \text{Im } z \leq \pi$ , on trouve  $\widehat{f}(\omega) = \frac{\pi}{\cosh \pi^2 \omega}$ .

**Exercice 7.7.3** Soit  $f \in \mathcal{L}^1$ . Montrer que si  $f \in \mathcal{L}^\infty$  et si  $\widehat{f} \geq 0$ , alors  $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1$ .

**Exercice 7.7.4** Déterminer la transformée de Fourier de la fonction de  $\mathcal{L}^2$  suivante :  $f(x) = \frac{\sin \alpha x}{x}$ . Même question pour la fonction  $g(x) = \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x}$ .

Réponse :

$$\widehat{f}(\omega) = \begin{cases} \pi|\alpha| & \text{si } |\omega| < \frac{\alpha}{2\pi} \\ 0 & \text{si } |\omega| > \frac{\alpha}{2\pi} \end{cases},$$

$$\widehat{g}(\omega) = \begin{cases} -\frac{\pi i}{2} & \text{si } \frac{\beta - \alpha}{2\pi} < \omega < \frac{\alpha + \beta}{2\pi} \\ \frac{\pi i}{2} & \text{si } -\frac{\alpha + \beta}{2\pi} < \omega < \frac{\alpha - \beta}{2\pi} \end{cases}$$

**Exercice 7.7.5** Montrer que la transformée de Fourier d'une fonction  $f$  réelle, satisfait à la relation :  $\widehat{f}(\omega) = \overline{\widehat{f}(-\omega)}$ .

**Exercice 7.7.6** Montrer que la transformée de Fourier d'une fonction  $f$  telle que :  $f(x) = \overline{f(-x)}$ , est réelle.

**Exercice 7.7.7** Déterminer les transformées de Fourier des distributions suivantes :

$$T_1 = \operatorname{sgn} x, \quad T_2 = x^{2n} \operatorname{sgn} x, (n \text{ entier}), \quad T_3 = \operatorname{sgn} (\sin \alpha x).$$

Réponse : On obtient,

$$\widehat{T}_1(\omega) = \frac{1}{\pi i \omega}, \quad \widehat{T}_2(\omega) = \frac{(2n)!}{(2\pi i \omega)^{2n+1}}, \quad \widehat{T}_3(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn} \alpha}{\pi i (2k+1)} \delta \left( \omega - \frac{2k+1}{2\pi} \alpha \right).$$

**Exercice 7.7.8** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction telle qu'il existe  $M > 0$  et  $\alpha > 1$  avec  $|f(x)| \leq \frac{M}{(1+|x|)^{\alpha}}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Montrer que si  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| < \infty$ , alors

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k).$$

Indication : Voir proposition 7.3.8 et exercice 7.6.23.

**Exercice 7.7.9** En utilisant la formule sommatoire de Poisson, déterminer la somme de la série :  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$ .

Réponse :  $\frac{\pi^3}{32}$ .

**Exercice 7.7.10** Utiliser la formule de Parseval-Plancherel pour calculer l'intégrale  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ .

Réponse :  $\frac{\pi}{2}$ .

**Exercice 7.7.11** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $x \mapsto f(x)$ , une fonction telle que la restriction de  $f$  à l'intervalle  $] -k, k[$  appartient à  $\mathcal{L}^1(-k, k)$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que si pour tout  $g \in \mathcal{D}$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g}(x) dx = 0,$$

alors  $f(x) = 0$  presque partout sur  $\mathbb{R}$ .

Indication : Montrer d'abord que l'intégrale  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g}(x) dx$  a bien un sens. Considérer ensuite la suite de fonctions  $g_n(x) = \varphi(x) e^{i\pi \frac{nx}{k}}$  où  $\varphi$  est une fonction de  $\mathcal{D}$  définie par  $\varphi(x) = e^{\frac{1}{x^2-k^2}}$  si  $|x| < k$  et  $\varphi(x) = 0$  si  $|x| \geq k$ . On a

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g_n(x) dx = \int_{-n}^n f(x) \varphi(x) e^{\frac{1}{x^2-k^2}} dx.$$

On en déduit que  $f(x) = 0$  presque partout sur  $] -k, k[$  et ensuite  $f(x) = 0$  presque partout sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 7.7.12** Soit  $f$  une fonction localement sommable telle que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x)|}{1+|x|^{\alpha}} dx, \quad \alpha \in \mathbb{N},$$

converge. Montrer que cette fonction détermine une distribution tempérée.

**Exercice 7.7.13** Soient  $(T_k)$  une suite de distributions tempérées et  $(\widehat{T}_k)$  une suite de transformées de Fourier. Montrer que si  $(T_k)$  converge vers  $T$ , alors  $(\widehat{T}_k)$  converge vers  $\widehat{T}$ . Trouver un exemple montrant que ce résultat n'est pas valable dans le cas des fonctions.

**Exercice 7.7.14** En utilisant la transformée de Fourier, déterminer la solution  $u(x, t)$  de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$$

avec la condition :  $u(x, 0) = \varphi(x)$  (fonction connue) et  $\lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) = 0$ . (On suppose évidemment que  $u$  et  $f$  satisfont aux conditions d'utilisation des transformées de Fourier).

Réponse : En utilisant un raisonnement similaire à celui de l'exercice 7.6.6, on obtient la solution  $u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-t)^2+y^2} \varphi(t) dt$ .

**Exercice 7.7.15** Même question que l'exercice précédent pour l'équation des cordes vibrantes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+$$

avec les conditions :

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x),$$

où  $\varphi$  et  $\psi$  sont des fonctions connues.

Réponse :  $u(x, t) = \frac{\varphi(x+\alpha t)+\varphi(x-\alpha t)}{2} + \frac{1}{2\alpha} \int_{x-\alpha t}^{x+\alpha t} \psi(s) ds$ .

**Exercice 7.7.16** Soit  $f$  une fonction telle que :  $\widehat{f}(\omega) = 0$ ,  $\forall \omega \in [-c, c]$ , où  $c > 0$ . Montrer que  $\widehat{f}(\omega)$  étant à support borné, sa transformée inverse est de classe  $C^\infty$  et  $f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f)(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . En outre, on a

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{2c}\right) \frac{\sin \pi(2cx - k)}{\pi(2cx - k)}.$$

**Exercice 7.7.17** Soient  $f \in \mathcal{L}^1$  et  $(a_k)$  une suite numérique positive telle que :  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ . On pose

$$\varphi_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a_k|\omega|} \widehat{f}(\omega) e^{-2\pi i \omega x} d\omega, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

Montrer que la suite de fonctions  $(\varphi_k)$  converge dans  $\mathcal{L}^1$  vers la fonction  $f$ .

Indication : Utiliser un raisonnement similaire à celui fait dans l'exercice 7.6.24, en choisissant comme fonction auxiliaire :  $g_k(x) = e^{-a_k|\omega|}$  et considérer la fonction

$$\varphi_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g_k(x) \widehat{f}(\omega) e^{-2\pi i \omega x} d\omega,$$

$\omega \in \mathbb{R}$ . On montre par la suite que  $\|\varphi_k - f\|_1$  tend vers 0 lorsque  $k \rightarrow 0$ .

**Exercice 7.7.18** Déterminer la transformée de Fourier de la fonction radiale

$$f(x) = \frac{1}{\|x\|} e^{\lambda \|x\|}, \quad (\text{potentiel de Yukawa})$$

où  $\lambda$  est une constante strictement positive.

Réponse :  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(\lambda^2 + \|k\|^2)}$ .



**Troisième partie**

**TRANSFORMATION DE**

**LAPLACE**



# Chapitre 8

## Transformée de Laplace

### Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude d'une transformation intégrale d'un usage fréquent : la transformée de Laplace. C'est en gros la généralisation de la transformée de Fourier. La classe des fonctions admettant une transformée de Laplace est plus vaste que celle des fonctions pour lesquelles la transformée de Fourier est définie. La transformée de Laplace  $F(p)$  est une fonction de la variable complexe  $p$ . Néanmoins, dans beaucoup d'applications, l'utilisation des transformées de Laplace se résume à des manipulations algébriques et à la consultation d'un dictionnaire de transformées. Nous allons d'abord étudier la transformée de Laplace d'une fonction  $f(x)$  localement sommable définie sur  $\mathbb{R}_+$  (fonction causale, c'est-à-dire  $f(x) = 0$  pour  $x < 0$ ). On étudie le problème d'inversion de la transformée de Laplace qui consiste à déterminer une fonction  $f(x)$  dont  $F(p)$  soit la transformée de Laplace. Ensuite on étudie la transformée de Laplace des distributions. La transformée de Laplace est un outil très efficace pour résoudre des équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles ainsi que des équations fonctionnelles ou intégrales. Le reste du chapitre comporte de nombreux exercices importants complètement résolus ainsi que des exercices proposés avec éventuellement des réponses ou des indications.

### 8.1 Transformée de Laplace des fonctions

**Définition 8.1.1** Soit  $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ), une fonction localement sommable. On appelle transformée de Laplace de  $f(x)$  la fonction notée  $\mathcal{L}\{f(x)\}$

ou  $F(p)$  de la variable complexe  $p = \sigma + i\omega$  définie par

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = F(p) = \int_0^\infty f(x)e^{-px}dx. \quad (8.1.1)$$

La fonction  $f$  est appelée *original* de  $F$  et  $F$  l'*image* de  $f$ .

Les notations de la transformée de Laplace sont très variées. Citons à titre d'exemple :  $F(p) = \mathcal{L}\{f(x)\}$ ,  $\mathcal{L}(f)(p)$ ,  $\tilde{f}$ ,  $f(x) \leftarrow F(p)$ ,  $f(x) \supset F(p)$ .

**Remarques 8.1.1** a) Il faut noter que  $F(p)$  n'existe pas toujours. Pour s'en convaincre, il suffit de choisir l'exemple  $f(x) = e^{x^2}$ . Pour cette fonction l'intégrale ci-dessus n'est pas définie.

b) Les valeurs de  $f$  pour  $x < 0$ , n'interviennent pas dans la définition ci-dessus. Une fonction  $f$  telle que :  $f(x) = 0$  pour  $x < 0$  est dite *causale*. Évidemment, on peut rendre une fonction causale en la multipliant par la fonction de Heaviside.

c) Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) est une fonction localement sommable, on définit la transformée de Laplace bilatérale par

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = F(p) = \int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-px}dx.$$

Notons que la transformée de Laplace de  $f$  définie par (8.1.1) coïncide avec la transformée de Laplace bilatérale de  $H(x)f(x)$  où  $H(x)$  est la fonction de Heaviside.

d) Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  et possédant une transformée de Laplace  $\hat{f}$ . Soit  $p = \sigma + i\omega \in \mathbb{C}$ . Pour  $\sigma = 0$ , l'expression

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-i\omega x}dx = \hat{f}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right),$$

détermine un lien entre transformées de Laplace et de Fourier. La transformée de Laplace peut-être considérée comme une extension de la transformée de Fourier. Par ailleurs, pour  $\sigma$  quelconque fixé, on a

$$F(\sigma + i\omega) = \int_{-\infty}^\infty e^{-\sigma x}f(x)e^{-i\omega x}dx,$$

c'est-à-dire  $F(\sigma + i\omega)$  est la transformée de Fourier de la fonction  $f(x)e^{-\sigma x}$  prise en  $\frac{\omega}{2\pi}$ .

e) On verra dans l'exercice 8.4.1 que si  $f$  est une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ , nulle pour tout  $x < 0$ , continue par morceaux sur  $[0, +\infty[$  et si en outre ils existent des constantes  $M > 0$  et  $\sigma_0$  telles que :  $|f(x)| \leq M e^{\sigma_0 x}$ ,  $\forall x \geq x_0$ , (la fonction  $f$  est dite de type exponentielle à l'infini), alors la transformée de Laplace existe pour tout  $\sigma > \sigma_0$ .

**Proposition 8.1.2** Si l'intégrale (8.1.1) converge pour  $\operatorname{Re} p = \sigma_0$ , alors il en est de même pour tout  $p$  tel que :  $\operatorname{Re} p \geq \sigma_0$ .

*Démonstration* : En effet, on a

$$|f(x)e^{-px}| = |f(x)|e^{-\sigma x} \leq |f(x)|e^{-\sigma_0 x}.$$

Puisque  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|e^{-\sigma_0 x} dx$  existe, on en déduit que  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)e^{-px}| dx$  existe aussi. Par conséquent, la transformée de Laplace  $F(p)$  existe dans le demi-plan défini par  $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p \geq \sigma_0\}$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Corollaire 8.1.3** Si l'intégrale (8.1.1) diverge pour  $\operatorname{Re} p = \sigma_0$ , alors elle diverge pour  $\operatorname{Re} p < \sigma_0$ .

**Définition 8.1.4** Soit  $f \in \mathcal{L}_{loc}([0, +\infty[)$ . Le nombre

$$\sigma_0 = \inf \{\sigma \in \mathbb{R} : f(x)e^{\sigma x} \in \mathcal{L}_{loc}([0, +\infty[)\},$$

s'appelle abscisse de sommabilité ou abscisse de convergence absolue de la fonction  $f$ . Le demi-plan de convergence  $\{p = \sigma + i\omega : \operatorname{Re} p = \sigma > \sigma_0\}$  est le domaine de sommabilité sur lequel  $F(p)$  est défini.

**Exemple 8.1.1** La transformée de Laplace de la fonction d'Heaviside  $H(x)$  égale à 1 si  $x \geq 0$ , 0 si  $x \leq 0$ , est

$$\mathcal{L}\{H(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-px} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{pu}}{p} = \frac{1}{p},$$

pourvu que  $\operatorname{Re} p > 0$ , c'est-à-dire l'abscisse de sommabilité est  $\sigma_0 = 0$ .

Nous allons étudier ci-dessous un certain nombre de propriétés élémentaires sur les transformées de Laplace.

**Propriété 8.1.5 (Linéarité).** La transformée de Laplace est une application linéaire. Plus précisément, Pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , pour toutes fonctions  $f, g$ , d'abscisses de sommabilité respectives  $\sigma_0, \varsigma_0$ , alors

$$\mathcal{L}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(x)\} + \beta \mathcal{L}\{g(x)\} = \alpha F(p) + \beta G(p),$$

où  $\operatorname{Re} p > \max\{\sigma_0, \varsigma_0\}$ .

*Démonstration* : En effet, si les fonctions  $f$  et  $g$  admettent des transformées de Laplace :

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = F(p) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-px} dx, \quad \mathcal{L}\{g(x)\} = G(p) = \int_0^{\infty} g(x)e^{-px} dx,$$

alors

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} &= \int_0^\infty (\alpha f(x) + \beta g(x))e^{-px}dx, \\
 &= \alpha \int_0^\infty f(x)e^{-px}dx + \beta \int_0^\infty g(x)e^{-px}dx, \\
 &= \alpha \mathcal{L}\{f(x)\} + \beta \mathcal{L}\{g(x)\}, \\
 &= \alpha F(p) + \beta G(p),
 \end{aligned}$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes. Si les abscisses de sommabilité de  $f$  et  $g$  sont respectivement  $\sigma_0$  et  $\varsigma_0$ , alors le domaine de sommabilité sur lequel  $\alpha f + \beta g$  est défini est  $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > \max\{\sigma_0, \varsigma_0\}\}$ .  $\square$

**Propriété 8.1.6** (*Translation*). *Si  $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(p)$ , alors*

$$\mathcal{L}\{f(x - c)\} = e^{-cp}F(p), \quad \operatorname{Re} p > \sigma_0.$$

*Démonstration* : Posons

$$g(x) = \begin{cases} f(x - c) & \text{si } x > c \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{g(x)\} &= \int_0^\infty g(x)e^{-px}dx, \\
 &= \int_0^c g(x)e^{-px}dx + \int_c^\infty g(x)e^{-px}dx, \\
 &= \int_c^\infty f(x - c)e^{-px}dx, \\
 &= e^{-pc} \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt, \quad t = x - c \\
 &= e^{-pc}F(p),
 \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Propriété 8.1.7** *Si  $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(p)$ , alors*

$$\mathcal{L}\{f(x)e^{-\alpha x}\} = F(p + \alpha), \quad \operatorname{Re}(p + \alpha) > \sigma_0.$$

*Démonstration* : On a évidemment

$$\mathcal{L}\{f(x)e^{-\alpha x}\} = \int_0^\infty f(x)e^{-(\alpha+p)x}dx = F(p + \alpha),$$

d'où le résultat.  $\square$

**Propriété 8.1.8** (*Changement d'échelle*). Si  $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(p)$ , alors

$$\mathcal{L}\{f(cx)\} = \frac{1}{c}F\left(\frac{p}{c}\right), \quad c > 0.$$

*Démonstration* : On a

$$\mathcal{L}\{f(cx)\} = \int_0^\infty f(cx)e^{-px}dx = \frac{1}{c} \int_0^\infty f(t)e^{-\frac{p}{c}t}dt = \frac{1}{c}F\left(\frac{p}{c}\right),$$

où  $t = cx$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Propriété 8.1.9** (*Conjugaison complexe*). Si  $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(p)$ , alors

$$\mathcal{L}\{\bar{f}(x)\} = \overline{F(\bar{p})}.$$

*Démonstration* : On a

$$\mathcal{L}\{\bar{f}(x)\} = \int_0^\infty \bar{f}(x)e^{-px}dx = \overline{\int_0^\infty f(x)e^{-\bar{p}x}dx} = \overline{F(\bar{p})}$$

et la démonstration s'achève.  $\square$

**Exemple 8.1.2** Les transformées de Laplace des fonctions exponentielle et trigonométriques sont

$$\mathcal{L}\{e^{-\alpha x}\} = \int_0^\infty e^{-(\alpha+p)x}dx = \frac{1}{\alpha+p}, \quad \operatorname{Re} p > -\operatorname{Re} \alpha$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cos \omega x\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}}{2}\right\}, \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{i\omega x}\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-i\omega x}\}, \quad (\text{propriété 8.1.5}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{-i\omega + p}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{i\omega + p}\right), \\ &= \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \quad \operatorname{Re} p > 0 \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{L}\{\sin \omega x\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{2i}\right\} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

**Proposition 8.1.10** La transformée de Laplace d'une fonction localement sommable  $f$ , est une fonction holomorphe dans le domaine de sommabilité  $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > \sigma_0\}$  et on a la formule

$$F^{(n)}(p) = \int_0^\infty (-x)^n f(x)e^{-px}dx = (-1)^n \mathcal{L}\{x^n f(x)\}.$$

*Démonstration :* Soient  $F(p) = \int_0^\infty f(x)e^{-px}dx$ , la transformation de Laplace de  $f$  et  $\sigma_0$  l'abscisse de sommabilité de  $f$ . En dérivant formellement les deux membres, on obtient successivement,

$$F'(p) = - \int_0^\infty xf(x)e^{-px}dx, \quad , F^{(n)}(p) = \int_0^\infty (-x)^n f(x)e^{-px}dx.$$

Montrons que l'abscisse de sommabilité de  $(-x)^n f(x)$  est encore  $\sigma_0$ . En effet, par hypothèse  $f$  est localement sommable, donc on ne tiendra pas compte des grandes valeurs de  $x$ . Or à l'infini, les fonctions  $f(x)e^{-px}$  et  $(-x)^n f(x)e^{-px}$  ont même comportement, donc elles ont le même abscisse de sommabilité. Pour établir la formule de dérivation ci-dessus, il suffit de vérifier les conditions d'application du théorème de dérivation sous le signe somme. Notons que pour tout  $p = \sigma + i\omega$  avec  $\sigma > \sigma_0$ , on a

$$|(-x)^n f(x)e^{-px}| \leq x^n |f(x)| e^{-\sigma_0 x}.$$

La fonction  $x^n |f(x)| e^{-\sigma_0 x}$  est sommable et on en déduit que  $(-x)^n f(x)e^{-px}$  est sommable aussi et qu'il est donc légitime de dériver sous le signe somme tant que  $\sigma > \sigma_0$ . La démonstration s'achève.  $\square$

**Exemple 8.1.3** Déterminons la transformée de Laplace de  $x^n$ . D'après la proposition précédente, on a  $\mathcal{L}\{x^n f(x)\} = (-1)^n F^{(n)}(p)$ . Ici  $f(x) = 1$  et  $F(p) = \frac{1}{p}$ , d'où

$$\mathcal{L}\{x^n\} = (-1)^n \left(\frac{1}{p}\right)^{(n)}.$$

Explicitement, on a

$$\mathcal{L}\{x\} = \frac{1}{p^2}, \quad \mathcal{L}\{x^2\} = \frac{2}{p^3}, \quad , \mathcal{L}\{x^n\} = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Le résultat suivant joue un rôle important dans la résolution des équations intégrales.

**Propriété 8.1.11** Si  $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(p)$  et  $\mathcal{L}\{g(x)\} = G(p)$ , alors

$$\mathcal{L}\{(f * g)(x)\} = F(p)G(p), \quad \text{Re } p > \max\{\sigma_0, \varsigma_0\}$$

où  $\sigma_0$  et  $\varsigma_0$  sont les indices de sommabilité de  $f$  et  $g$  respectivement

*Démonstration :* On a

$$\mathcal{L}\{(f * g)(x)\} = \int_0^\infty (f * g)(x)e^{-px}dx = \int_0^\infty \left( \int_0^x f(t)g(x-t)dt \right) e^{-px}dx.$$

Notons que :  $0 \leq t \leq x$ ,  $0 \leq x < \infty$  ou  $0 \leq t < \infty$ ,  $t \leq x < \infty$ . Pour pouvoir utiliser le théorème de Fubini, il faut s'assurer que l'intégrale double :

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(t)g(x-t)e^{-px}dt dx,$$

converge. En effet, en posant  $\tau = x - t$  et en tenant compte du fait que le jacobien est égal à 1, cette intégrale se ramène à

$$\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt \int_0^\infty g(\tau)e^{-p\tau}d\tau.$$

Cette dernière existe car par hypothèse  $\mathcal{L}\{f(x)\}$  et  $\mathcal{L}\{g(x)\}$  existent. Dès lors,

$$\mathcal{L}\{(f * g)(x)\} = \mathcal{L}\{f(x)\}\mathcal{L}\{g(x)\} = F(p)G(p),$$

ce qui achève la démonstration.  $\square$

Le résultat suivant et sa généralisation (voir ci-dessous) concerne le lien entre la transformée de Laplace d'une fonction et de ses dérivées, il est particulièrement utile en pratique.

**Proposition 8.1.12** *Soit  $f$  une fonction localement sommable. On suppose que pour tout  $x > 0$ ,  $f$  est continue, sa dérivée  $f'(x)$  existe et est continue par morceaux. S'il existe des constantes  $M > 0$  et  $\sigma_0$  telles que :  $|f(x)| \leq M e^{\sigma_0 x}$ , pour tout  $x \geq x_0$ , alors*

$$\mathcal{L}\{f'(x)\} = p\mathcal{L}\{f(x)\} - f(0^+) = pF(p) - f(0^+), \quad \operatorname{Re} p > \sigma_0$$

*Démonstration* : On a pour tout  $p \in \mathbb{C}$  tel que :  $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ ,

$$\mathcal{L}\{f'(x)\} = \int_0^\infty f'(x)e^{-px}dx.$$

En faisant une intégration par parties, on obtient

$$\int_\epsilon^u f'(x)e^{-px}dx = f(u)e^{-pu} - f(\epsilon)e^{-p\epsilon} + p \int_\epsilon^u f(x)e^{-px}dx.$$

Comme  $|f(u)| \leq M e^{\sigma_0 u}$ , alors

$$f(u)e^{-pu} \leq M e^{\sigma_0 u} |e^{-pu}| = M e^{(\sigma_0 - \sigma)u}, \quad p = \sigma + i\omega.$$

Cette dernière expression tend vers 0 lorsque  $u \rightarrow +\infty$  car  $\operatorname{Re} p = \sigma > \sigma_0$ . Dès lors,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\epsilon^\infty f'(x)e^{-px}dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( p \int_\epsilon^u f(x)e^{-px}dx - f(\epsilon)e^{-p\epsilon} \right),$$

et cette limite existe si et seulement si  $f(0^+) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\varepsilon)$  existe. D'où,

$$\mathcal{L}\{f'(x)\} = p \int_0^\infty f(x)e^{-px} dx - f(0^+) = p\mathcal{L}\{f(x)\} - f(0^+),$$

ce qui achève la démonstration.  $\square$

En général, si  $f(x)$  est discontinue aux points  $x_1, \dots, x_n$ , alors

$$\mathcal{L}\{f'(x)\} = p\mathcal{L}\{f(x)\} - f(0^+) - \sum_{k=1}^n e^{-px_k} (f(x_k^+) - f(x_k^-)).$$

Notons aussi que les expressions ci-dessus se généralisent par récurrence pour les dérivées d'ordres supérieurs. Par exemple pour l'expression obtenue dans la proposition précédente, supposons que  $f$  est localement sommable,  $f$  est continue pour tout  $x > 0$ , les dérivées  $f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$  existent et sont continues par morceaux, il existe des constantes  $M > 0$  et  $\sigma_0$  telles que :  $|f(x)| \leq M e^{\sigma_0 x}$  pour tout  $x \geq x_0$ , alors

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(x)\} = p^n F(p) - p^{n-1} f(0^+) - p^{n-2} f'(0^+) - \dots - p f^{(n-2)}(0^+) - f^{(n-1)}(0^+).$$

En effet, pour  $n = 1$ , on vient de prouver que

$$\mathcal{L}\{f'(x)\} = p\mathcal{L}\{f(x)\} - f(0^+).$$

Supposons la formule en question vraie jusqu'au rang  $n$  et montrons qu'elle est vraie au rang  $n + 1$ . On a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f^{(n+1)}(x)\} &= p\mathcal{L}\{f^{(n)}(x)\} - f^{(n)}(0^+), \\ &= p(p^n F(p) - p^{n-1} f(0^+) - p^{n-2} f'(0^+) - \dots \\ &\quad - p f^{(n-2)}(0^+) - f^{(n-1)}(0^+)) - f^{(n)}(0^+), \\ &= p^{n+1} F(p) - p^n f(0^+) - p^{n-1} f'(0^+) - \dots \\ &\quad - p f^{(n-1)}(0^+) - f^{(n)}(0^+). \end{aligned}$$

**Proposition 8.1.13** *Si  $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(p)$ , alors*

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x f(t)dt\right\} = \frac{F(p)}{p}, \quad \text{Re } p > \max(0, \sigma_0).$$

*Démonstration :* Posons  $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ . D'après la proposition précédente, on a

$$\mathcal{L}\{g'(x)\} = p\mathcal{L}\{g(x)\} - g(0) = p\mathcal{L}\{g(x)\},$$

car  $g(0) = 0$ . Or  $g'(x) = f(x)$ , d'où  $\mathcal{L}\{g'(x)\} = \mathcal{L}\{f(x)\}$ . On en déduit que  $p\mathcal{L}\{g(x)\} = \mathcal{L}\{f(x)\}$ , c'est-à-dire

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x f(t)dt\right\} = \frac{\mathcal{L}\{f(x)\}}{p} = \frac{F(p)}{p},$$

ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

**Proposition 8.1.14** (*comportement à l'infini*). *Si  $f$  est une fonction ayant un abscisse de sommabilité  $\sigma_0$ , alors pour  $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ , on a  $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$ .*

*Démonstration :* Soit  $F(p) = \int_0^\infty f(x)e^{-px}dx$ . Posons  $p = \sigma_0 + i\omega = \sigma_0 + re^{i\theta}$ . Pour  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ , on a  $\cos \theta > 0$  et

$$\lim_{p \rightarrow \infty} |f(x)e^{-px}| = \lim_{p \rightarrow \infty} |f(x)|e^{-\sigma_0 x}e^{-r \cos \theta x} = 0,$$

et il suffit d'utiliser le théorème de convergence dominée pour avoir le résultat. Pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , on a  $p = \sigma_0 + ir$  et

$$F(p) = \int_0^\infty f(x)e^{-\sigma_0 x}e^{-irx}dx = \mathcal{F}\{f(x)e^{-\sigma_0 x}\}, \quad (\mathcal{F} : \text{transformée de Fourier})$$

Le résultat découle du lemme ou théorème de Riemann-Lebesgue.  $\square$

**Proposition 8.1.15** (*théorème de la valeur initiale*). *Soit  $f$  une fonction ayant une transformée de Laplace et telle que  $f(0^+)$  existe. Alors,*

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = f(0^+).$$

*Démonstration :* On a

$$\mathcal{L}\{f'(x)\} = \int_0^\infty f'(x)e^{-px}dx = pF(p) - f(0^+), \quad (\text{proposition 8.1.12})$$

D'après la proposition précédente, toute transformée de Laplace tend vers 0 quand  $p \rightarrow \infty$ . Par conséquent

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (pF(p) - f(0^+)) = 0,$$

ce qui achève la preuve.  $\square$

**Proposition 8.1.16** (*théorème de la valeur finale*). *Soit  $f$  une fonction ayant une transformée de Laplace et telle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(+\infty)$  existe et est finie. Alors,*

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = f(+\infty).$$

*Démonstration :* D'après le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{p \rightarrow 0} \int_0^\infty f'(x) e^{-px} dx = \int_0^\infty f'(x) dx = f(+\infty) - f(0^+).$$

Or d'après la proposition 8.1.12, on sait que :

$$\mathcal{L}\{f'(x)\} = pF(p) - f(0^+).$$

En comparant avec ce qui précède, on obtient

$$\lim_{p \rightarrow 0} (pF(p) - f(0^+)) = f(+\infty) - f(0^+),$$

et le résultat en découle.  $\square$

Considérons l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\lambda}^{\sigma+i\lambda} F(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\lambda}^{\sigma+i\lambda} \left( \int_0^\infty f(x) e^{-px} dx \right) e^{pt} dp,$$

où  $F(p)$  est la transformée de Laplace de  $f$ . En posant  $p = \sigma + i\omega$ ,  $dp = id\omega$ , l'intégrale ci-dessus s'écrit

$$\frac{1}{2\pi} e^{\sigma t} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left( \int_0^\infty (e^{-\sigma x} f(x)) e^{-i\omega x} dx \right) e^{i\omega t} d\omega.$$

Notons que lorsqu'on peut appliquer le théorème d'inversion de Fourier (chapitre précédent), alors la limite de l'expression ci-dessus lorsque  $\lambda \rightarrow \infty$ , est égale à  $f(x)$  si  $x > 0$  et à 0 si  $x < 0$ . Voyons avec un peu plus de détail la question d'inversion d'une transformée de Laplace.

**Proposition 8.1.17** *Soit  $F(p) = F(\sigma + i\omega)$  une fonction holomorphe dans le demi-plan  $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > \sigma_0\}$ . On suppose que  $\lim_{|p| \rightarrow +\infty} |F(p)| = 0$  pour  $\operatorname{Re} p > \sigma_0$  et pour tout  $\sigma > \sigma_0$ , la fonction*

$$\omega \in \mathbb{R} \longmapsto F(\sigma + i\omega),$$

*est sommable sur  $\mathbb{R}$  (c'est-à-dire  $F$  est une fonction sommable en  $\omega$ , pour tout  $\sigma > \sigma_0$ ). Alors l'original  $f$  de  $F$  est donné par la formule de Bromwich-Wagner suivante :*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p) e^{px} dp, \quad \sigma > \sigma_0 \tag{8.1.2}$$

*Démonstration :* Soit

$$F(p) = \int_0^\infty f(x)e^{-px}dx, \quad p = \sigma + i\omega, \operatorname{Re} p > \sigma_0$$

la transformée de Laplace de  $f$ . Soit  $p_0$  fixé tel que :  $\operatorname{Re} p_0 > \sigma$ . On a

$$\int_0^\infty f(x)e^{-p_0 x}dx = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \left( \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p)e^{px}dp \right) e^{-p_0 x}dx.$$

L'interversion de l'ordre des intégrations est ici légitime car si  $p = \sigma + i\omega$ ,  $dp = id\omega$ , alors

$$|F(p)e^{px}| = |F(\sigma + i\omega)e^{(\sigma+i\omega)x}| = |F(\sigma + i\omega)e^{\sigma x}|,$$

et l'intégrale  $\int_{-\infty}^\infty |F(\sigma + i\omega)e^{\sigma x}|d\omega$  converge car par hypothèse la fonction  $F$  est sommable pour tout  $\sigma > \sigma_0$ . Dès lors, puisque  $\operatorname{Re} p = \sigma < \operatorname{Re} p_0$ ; c'est-à-dire  $\operatorname{Re}(p - p_0) < 0$  et  $x > 0$ , alors

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(x)e^{-p_0 x}dx &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left( \int_0^\infty e^{(p-p_0)x}dx \right) F(p)dp, \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{F(p)}{p - p_0} dp. \end{aligned}$$

Pour calculer cette intégrale, il suffit d'utiliser la méthode habituelle des résidus. En effet, considérons le contour de Bromwich :

$$\mathcal{C} = \gamma \cup [\sigma - i\omega, \sigma + i\omega],$$

où

$$\gamma = \{p \in \mathbb{C}; |p| = r, \operatorname{Re} p > \sigma\},$$

est l'arc de cercle de rayon  $r$  et de centre 0. On a

$$\int_0^\infty f(x)e^{-p_0 x}dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\omega}^{\sigma+i\omega} \frac{F(p)}{p - p_0} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{F(p)}{p - p_0} dp.$$

Sur  $\gamma$ , on a

$$\left| \int_{\gamma} \frac{F(p)}{p - p_0} dp \right| \leq \frac{\pi r}{r - |p_0|} \sup_{p \in \gamma} |F(p)|.$$

Le second membre tend vers 0 lorsque  $r \rightarrow \infty$ , donc

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma} \frac{F(p)}{p - p_0} dp = 0.$$

Par ailleurs, sur  $\mathcal{C}$  la fonction  $\frac{F(p)}{p-p_0}$  possède un pôle simple en  $p = p_0$ . En appliquant le théorème des résidus, on obtient

$$\int_0^\infty f(x)e^{-p_0 x} dx = \frac{1}{2\pi i} 2\pi i \operatorname{Rés}\left(\frac{F(p)}{p-p_0}, p_0\right) = F(p_0),$$

ce qui achève la démonstration.  $\square$

Dans l'intégrale (8.1.2) de Bromwich-Wagner, l'intégration de la fonction d'une variable complexe se fait le long d'une droite parallèle à l'axe imaginaire d'abscisse  $\sigma > \sigma_0$ , située dans le domaine de convergence et parcourue de bas en haut. Toutes les singularités de  $F(p)$  sont à gauche de cette droite, puisque celle-ci est située à droite de l'abscisse de sommabilité  $\sigma_0$ . Dans certains cas, il est nécessaire de calculer cette intégrale, en utilisant les techniques d'intégration d'une fonction d'une variable complexe, notamment la méthode habituelle des résidus<sup>1</sup>. Pour des exemples d'utilisation de la formule de Bromwich, voir exercices 8.4.11, 8.4.13, 8.4.14, 8.4.32. Cependant, dans la plupart des applications courantes, l'image  $F(p)$  est une fraction rationnelle et il est plus simple d'effectuer une décomposition en éléments simples de la fonction plutôt que d'utiliser la formule de Bromwich-Wagner. Pour faciliter l'utilisation des transformées de Laplace usuelles, nous groupons quelques unes dans le tableau suivant :

---

<sup>1</sup>Rappelons que d'après le théorème de Cauchy, si  $f(z)$  est une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe  $\Omega \subset \mathbb{C}$  et si  $\gamma$  est un chemin fermé contenu dans  $\Omega$ , alors  $\int_\gamma f(z) dz = 0$ . De même, si  $f(z)$  est une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , sauf en  $z_1, z_2, \dots, z_k$ , si  $\gamma$  est un chemin fermé contenu dans  $\Omega$  entourant tous ces points et si  $\gamma_j$  ( $1 \leq j \leq k$ ) est un chemin fermé contenu dans le domaine intérieur à  $\gamma$  entourant  $z_j$  et n'entourant pas les autres  $z_l$  ( $l \neq j$ ), alors  $\int_\gamma f(z) dz = \sum_{j=1}^k \int_{\gamma_j} f(z) dz$ . Par ailleurs, d'après le théorème des résidus, si  $\Omega \subset \mathbb{C}$  est un domaine,  $z_1, z_2, \dots, z_k \in \Omega$  et  $f : \Omega \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_k\} \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction holomorphe, alors  $\int_\gamma f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{Rés}_j f(z, z_0)$ , où  $\gamma$  est un chemin fermé contenu dans  $\Omega$  à l'intérieur duquel sont contenues tous les  $z_j$ . Pour le calcul des résidus, on utilise souvent les formules suivantes : lorsque  $z_0$  est un pôle d'ordre  $m$  de  $f(z)$ , alors  $\operatorname{Rés}_j f(z, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z))$ . Lorsque  $z_0$  est un pôle simple de  $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ , avec  $P(z_0) \neq 0$  et  $Q(z_0) = 0$ , alors  $\operatorname{Rés}_j f(z, z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$  si  $Q'(z_0) \neq 0$ . Lorsque  $z_0$  est un point singulier essentiel de  $f(z)$ , le résidu s'obtient en développant  $f(z)$  en série de Laurent autour de  $z_0$ . Dans les résultats (lemmes de Jordan) qui suivent  $\gamma_1$  (resp.  $\gamma_2$ ) désignera le demi-cercle de centre 0 et de rayon  $r$  (resp.  $\varepsilon$ ). Si  $|f(z)| \leq \frac{M}{r^k}$  pour  $z = re^{i\theta}$ , où  $k > 1$  et  $M$  sont des constantes, alors  $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_1} f(z) dz = 0$ . Si  $|f(z)| \leq \frac{M}{r^k}$  pour  $z = re^{i\theta}$ , où  $k > 0$  et  $M$  sont des constantes, alors  $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_1} f(z) e^{imz} dz = 0$ . Si  $z = 0$  est un pôle simple de  $f(z)$ , alors  $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2} f(z) dz = -\pi i \operatorname{Rés}_j f(z, 0)$ . D'autres versions de ces lemmes existent dans la littérature. Pour les intégrales faisant appel à des "fonctions" multiformes, le principe de la méthode est le même, à ceci près que les intégrants multiformes doivent être uniformisés au moyen d'une coupure adéquate. Les contours d'intégration ne pouvant pas traverser ces coupures, l'intégrant sera déterminé univoquement par une de ses déterminations le long de ces contours.

$f(x)$	$F(p) = \mathcal{L}\{f(x)\} = \int_0^\infty f(x)e^{-px}dx$
1	$\frac{1}{p}$
$e^{ax}$	$\frac{1}{p-a}$
$x^n$	$\frac{n!}{p^{n+1}} = \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}}$
$x^\alpha, \alpha > 1$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$
$e^{bx} \sin ax$	$\frac{a}{(p-a)^2+a^2}$
$e^{bx} \cos ax$	$\frac{p-b}{(p-a)^2+a^2}$
$e^{bx} \sinh ax$	$\frac{a}{(p-a)^2-a^2}$
$e^{bx} \cosh ax$	$\frac{p-b}{(p-a)^2-a^2}$
$x \sin ax$	$\frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$
$x \cos ax$	$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$
$x^n e^{-ax}$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
$\ln x$	$-\frac{C+\ln p}{p}, C = 0.57721\dots, (\text{constante d'Euler})$

Dans ce tableau,  $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$ ,  $\operatorname{Re} \alpha > 0$ , désigne la fonction gamma d'Euler. On montre aisément que cette intégrale converge absolument sur le demi-plan complexe où  $\operatorname{Re} \alpha > 0$ . Une intégration par parties montre que :  $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$  et en particulier, on a  $\Gamma(n + 1) = n!$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

## 8.2 Transformée de Laplace des distributions

**Définition 8.2.1** Soit  $T$  une distribution de  $\mathcal{D}'_+$  (c'est-à-dire à support borné à gauche). Supposons qu'il existe  $\sigma_0 \in \mathbb{R}$  tel que pour  $\sigma > \sigma_0$ , la distribution  $e^{-\sigma x}T$  soit tempérée. Alors, la transformée de Laplace de  $T$  est la fonction de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  définie par

$$\mathcal{L}T(p) = \langle T, e^{-px} \rangle, \quad \operatorname{Re} p = \sigma > \sigma_0.$$

Comme pour les fonctions, ici aussi la borne inférieure des  $\sigma_0$  s'appelle abscisse de sommabilité. Il n'est pas difficile de montrer que l'expression ci-dessus a bien un sens. En effet, soit  $\alpha(x)$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ , de classe  $C^\infty$  à support limité à gauche et égale à 1 sur un voisinage de  $\mathbb{R}_+$ . Pour  $\operatorname{Re} p = \sigma > \sigma_0$ , il existe  $\sigma_1 \in \mathbb{R}$  tel que :  $\sigma_0 < \sigma_1 < \sigma$ . Dès lors,  $e^{-\sigma_1 x}T \in \mathcal{S}'$ ,  $\alpha(x)e^{-(p-\sigma_1)x}T \in \mathcal{S}'$  et l'expression  $\langle e^{-\sigma_1 x}T, \alpha(x)e^{-(p-\sigma_1)x} \rangle$  a un sens. Cette définition ne dépend ni du choix de  $\sigma_1$  ni celui de  $\alpha(x)$ . Pour  $\sigma_1$ , c'est évident. Pour  $\alpha(x)$ , soit  $\beta(x)$  une autre fonction satisfaisant aux mêmes hypothèses que  $\alpha(x)$ . Alors, la fonction  $\alpha(x) - \beta(x)$  est nulle sur un voisinage de  $\operatorname{supp} T$  et par conséquent l'expression  $\langle e^{-\sigma_1 x}T, (\alpha - \beta)(x)e^{-(p-\sigma_1)x} \rangle$  est nulle.

On peut définir la transformée de Laplace d'une distribution dans d'autres cas. Mais il faut bien noter que si  $T$  est une distribution quelconque, la fonction  $\mathcal{L}T(p)$  n'est pas définie puisque la fonction  $e^{-px}$  est de classe  $C^\infty$  mais n'est pas à support borné, donc  $e^{-px} \notin \mathcal{D}$ . Par contre si  $T \in \mathcal{S}'$ ,  $\mathcal{L}T(p)$  est définie (sur  $\text{Re } p > 0$ ) pour tout  $p$  tel que  $e^{-px}$  soit à décroissance rapide en tant que fonction de  $x$ .

**Exemple 8.2.1** La transformée de Laplace de la distribution  $\delta$  de Dirac est  $\mathcal{L}\delta = 1$ . En effet, on a  $\mathcal{L}\delta = \langle \delta, e^{-px} \rangle = 1$ .

**Exemple 8.2.2** La transformée de Laplace de la dérivée  $n^{\text{ième}}$  de la distribution  $\delta$  de Dirac est  $\mathcal{L}(\delta^{(n)}) = p^n$ . En effet, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\delta^{(n)}) &= \langle \delta^{(n)}, e^{-px} \rangle, \\ &= (-1)^n \langle \delta, (e^{-px})^{(n)} \rangle, \\ &= (-1)^n \langle \delta, (-p)^n e^{-px} \rangle, \\ &= (-1)^n (-p)^n, \\ &= p^n.\end{aligned}$$

**Remarque 8.2.1** Lorsque  $T$  est associée à une fonction localement sommable  $f$  de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ), on aura

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \langle f(x), e^{-px} \rangle = \int_0^\infty f(x) e^{-px} dx.$$

On retrouve ainsi la définition de la transformée de Laplace au sens des fonctions.

Comme pour les fonctions, la transformée de Laplace des distributions est évidemment linéaire. Si  $T \in \mathcal{D}'_+$  admet une transformée de Laplace pour  $\text{Re } p > \sigma_0$  et si  $S \in \mathcal{D}'_+$  admet une transformée de Laplace pour  $\text{Re } p > \varsigma_0$ , alors on a pour  $\text{Re } p > \max(\sigma_0, \varsigma_0)$ ,  $\mathcal{L}(\alpha T + \beta S) = \alpha(\mathcal{L}T + \beta(\mathcal{L}S))$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes.

**Proposition 8.2.2** Dans son demi-plan de définition  $\{p \in \mathbb{C} : \text{Re } p > \sigma_0\}$ , la fonction  $\mathcal{L}T(p)$  est holomorphe et on a

$$(\mathcal{L}T)^{(n)} = \mathcal{L}(-x^n)T.$$

*Démonstration :* En effet, soient  $p \in \mathbb{C}$  et  $h$  assez petit tels que :  $\operatorname{Re} p > \sigma_0$  et  $\operatorname{Re}(p+h) > \sigma_0$ . Posons  $F(p) = \mathcal{L}T(p)$ . D'où

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(p+h) - F(p)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \langle T, e^{-(p+h)x} \rangle - \langle T, e^{-px} \rangle \right), \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\langle T, \frac{e^{-(p+h)x} - e^{-px}}{h} \right\rangle.\end{aligned}$$

Quand  $h \rightarrow 0$ ,  $\frac{e^{-(p+h)x} - e^{-px}}{h}$  tend vers  $-xe^{-px}$ , au sens de la convergence dans  $\mathcal{S}$ . Dès lors,  $T$  étant continue, on a

$$F'(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(p+h) - F(p)}{h} = \langle T, -xe^{-px} \rangle,$$

et généralement,

$$F^{(n)}(p) = \langle T, (-x)^n e^{-px} \rangle = \langle (-x)^n T, e^{-px} \rangle,$$

d'où le résultat.  $\square$

**Proposition 8.2.3** Soient  $T, S \in \mathcal{D}'_+$  et possédant des transformées de Laplace  $\mathcal{L}T$  et  $\mathcal{L}S$ . Alors

$$\mathcal{L}(T * S) = (\mathcal{L}T)(\mathcal{L}S).$$

*Démonstration :* En effet, par hypothèse  $T, S \in \mathcal{D}'_+$ , donc  $T * S$  existe. Si  $\mathcal{L}T$  (resp.  $\mathcal{L}S$ ) est définie pour  $\operatorname{Re} p > \sigma_0$  (resp.  $\operatorname{Re} p > \varsigma_0$ ), alors

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(T * S)(p) &= \langle T * S, e^{-px} \rangle, \\ &= \langle T_u \otimes S_v, e^{-p(u+v)} \rangle, \\ &= \langle T_u, e^{-pu} \rangle \cdot \langle S_v, e^{-pv} \rangle, \\ &= (\mathcal{L}T)(p) \cdot (\mathcal{L}S)(p),\end{aligned}$$

pour  $\operatorname{Re} p > \max(\sigma_0, \varsigma_0)$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Exemple 8.2.3** En posant  $S = \delta$  dans la formule ci-dessus, on retrouve le résultat obtenu dans l'exemple 8.2.1. En effet, on a dans ce cas

$$\mathcal{L}(T * \delta) = (\mathcal{L}T)(\mathcal{L}\delta).$$

Or  $T * \delta = T$ , d'où  $\mathcal{L}T = (\mathcal{L}T)(\mathcal{L}\delta)$  et par conséquent  $\mathcal{L}\delta = 1$ .

**Proposition 8.2.4** Si  $T \in \mathcal{D}'_+$  et admet une transformée de Laplace  $\mathcal{L}T$ , alors

$$\mathcal{L}\left(T^{(n)}\right) = p^n(\mathcal{L}T).$$

*Démonstration :* En effet, puisque  $T^{(n)} = \delta^{(n)} * T$ , alors

$$\mathcal{L}(T^{(n)}) = \mathcal{L}(\delta^{(n)} * T) = \mathcal{L}(\delta^{(n)}) \cdot (\mathcal{L}T) = p^n(\mathcal{L}T),$$

ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Exemple 8.2.4** La transformée de Laplace de la dérivée  $n^{\text{ième}}$  de la distribution  $\delta$  de Dirac est  $\mathcal{L}(\delta^{(n)}) = p^n(\mathcal{L}\delta) = p^n$ . On retrouve ainsi le résultat obtenu dans l'exemple 8.2.2.

**Remarque 8.2.2** Il faut bien prendre garde que les dérivées dans la proposition précédente sont envisagées au sens des distributions. Si  $H(x)$  est la fonction de Heaviside et si  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ), est une fonction localement sommable ayant une transformée de Laplace  $\mathcal{L}\{f(x)\}$ , alors on peut écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(x)\} = F(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(x)f(x)e^{-px}dx, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_*(x)e^{-px}dx, \\ &= \langle f_*(x), e^{-px} \rangle, \\ &= \mathcal{L}\{f_*(x)\}, \end{aligned}$$

où  $f_*(x)$  est une fonction à support dans  $x \geq 0$  et  $f_*$  est la distribution qui lui est associée. Dans le cas où  $f(x)$  n'est pas à support dans  $x \geq 0$ , la formule établie dans la proposition 8.2.4 n'est pas définie pour  $f(x)$  mais on peut l'appliquer évidemment à la fonction  $H(x)f(x)$ . Par exemple pour la fonction  $e^{\alpha x}$ , on a

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha x}\} = \frac{1}{p - \alpha}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha,$$

et pour pouvoir appliquer la proposition 8.2.4, on considère la fonction  $H(x)e^{\alpha x}$ . Au point  $x = 0$ , cette dernière fonction subit un saut

$$\sigma_0 = H(0^+)e^{\alpha 0} - H(0^-)e^{\alpha 0} = 1.$$

On désigne par  $He^{\alpha x}$  la distribution associée à  $H(x)e^{\alpha x}$ , par  $(He^{\alpha x})'$  la dérivée de cette distribution et par  $\{(He^{\alpha x})'\}$  la distribution associée à la dérivée usuelle de  $H(x)e^{\alpha x}$  pour  $x < 0$  et  $x > 0$  et qui n'est pas définie pour  $x = 0$ . On a (voir section 2.2.3, chapitre 2),

$$(He^{\alpha x})' = \{(He^{\alpha x})'\} + \sigma_0\delta = \alpha H(x)e^{\alpha x} + \delta.$$

D'après la proposition 8.2.4, on a

$$\mathcal{L}\{\alpha H(x)e^{\alpha x} + \delta\} = p\mathcal{L}\{H(x)e^{\alpha x}\}.$$

Or d'après l'exercice 8.5.1, on a

$$\mathcal{L}\{H(x)e^{\alpha x}\} = \frac{1}{p - \alpha}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha,$$

donc

$$\mathcal{L}\{\alpha H(x)e^{\alpha x} + \delta\} = \frac{p}{p - \alpha},$$

et on vérifie que l'on a bien

$$\frac{\alpha}{p - \alpha} + 1 = \frac{p}{p - \alpha}.$$

Pour la transformée inverse de Laplace, on a le résultat suivant (voir par exemple [9, p.249-252]) :

**Proposition 8.2.5** *Une fonction holomorphe  $F(p)$  est la transformée de Laplace d'une distribution  $T \in \mathcal{D}'_+$  si et seulement s'il existe un demi-plan*

$$\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > \sigma_0, \sigma_0 \in \mathbb{R}\},$$

dans lequel on  $|F(p)| \leq P(|p|)$ , où  $P(|p|)$  est un polynôme en  $|p|$ .

## 8.3 Applications

L'utilisation de la transformée de Laplace dans la résolution des équations différentielles ou intégrales porte le nom de calcul symbolique. Cette méthode a été introduite sans justification par Heaviside et elle est à l'origine de la découverte des transformées de Laplace.

### 8.3.1 Équations différentielles

Soit l'équation différentielle linéaire d'ordre  $n$  à coefficients constants

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_0 x = y(t),$$

avec les conditions initiales

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}.$$

Pour déterminer la solution  $x = x(t)$ ,  $t \geq 0$ , de cette équation vérifiant les conditions initiales ci-dessus, on procède comme suit : on désigne par  $X(p)$  et  $Y(p)$  les transformées de Laplace de  $x(t)$  et  $y(t)$  respectivement. En prenant la transformée de Laplace des deux membres de l'équation différentielle ci-dessus,

tout en tenant compte de la propriété 8.1.5 de linéarité et la propriété 8.1.12 de la dérivation (ainsi que sa généralisation), on obtient

$$\begin{aligned} & a_0 \left( p^n X(p) - p^{n-1} X(0) - p^{n-2} X'(0) - \cdots - X^{(n-1)}(0) \right) \\ & + a_1 \left( p^{n-1} X(p) - p^{n-2} X(0) - p^{n-3} X'(0) - \cdots - X^{(n-2)}(0) \right) \\ & + \cdots + a_{n-1} (pX(p) - X(0)) + a_n X(p) = Y(p). \end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{Y(p)}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_{n-1} p + a_n} \\ &\quad + \cdots + \frac{U(p)}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_{n-1} p + a_n}, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} U(p) &= a_0 \left( p^{n-1} X(0) + p^{n-2} X'(0) + \cdots + X^{(n-1)}(0) \right) \\ &\quad + a_1 \left( p^{n-2} X(0) + p^{n-3} X'(0) + \cdots + X^{(n-2)}(0) \right) \\ &\quad + \cdots + a_{n-1} X(0). \end{aligned}$$

La solution  $x(t)$  (c'est-à-dire l'original de  $X(p)$ ) s'obtient par la transformée de Laplace inverse. Notons que puisque  $U(p)$  est un polynôme, alors si  $Y(p)$  est une fraction rationnelle,  $X(p)$  sera aussi une fraction rationnelle.

**Exemple 8.3.1** Considérons l'équation différentielle :

$$x''' - 3x'' + 3x' - x = t^2 e^t,$$

avec les conditions initiales :  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = 0$ ,  $x''(0) = 2$ . Posons  $X(p) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ . D'où

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x'''(t)\} - 3\mathcal{L}\{x''(t)\} + 3\mathcal{L}\{x'(t)\} - \mathcal{L}\{x(t)\} &= \mathcal{L}\{t^2 e^t\}, \\ p^3 X(p) - p^2 x(0) - px'(0) - x''(0) - 3(p^2 X(p) - px(0) - x'(0)) \\ + 3(pX(p) - x(0)) - X(p) &= \frac{2}{(p-1)^3}. \end{aligned}$$

En tenant compte des conditions initiales, on obtient

$$(p^3 - 3p^2 + 3p - 1) X(p) - p^2 + 3p - 1 = \frac{2}{(p-1)^3}.$$

D'où

$$X(p) = \frac{p^2 - 3p + 1}{(p-1)^3} + \frac{2}{(p-1)^6} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2} - \frac{1}{(p-1)^3} + \frac{2}{(p-1)^6}.$$

La solution  $x(t)$  cherchée est

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p-1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p-1)^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p-1)^3}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p-1)^6}\right\}.$$

Or

$$\mathcal{L}\left\{t^{n-1} \frac{e^{-\alpha t}}{(n-1)!}\right\} = \frac{1}{(p+\alpha)^n},$$

donc en prenant successivement  $n = 1, n = 2, n = 3, n = 6$  avec  $\alpha = -1$ , on obtient finalement

$$x(t) = \left(1 - t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^5}{60}\right) e^t.$$

La méthode de Laplace peut s'appliquer à l'étude de certaines équations différentielles à coefficients variables. Considérons à titre d'exemple l'équation suivante :

**Exemple 8.3.2** Déterminons la solution de l'équation différentielle :

$$tx'' + (1 - 2t)x' - 2x = 0,$$

satisfaisant aux conditions initiales :  $x(0) = 1, x'(0) = 2$ . On a

$$\mathcal{L}\{tx''\} + \mathcal{L}\{(1 - 2t)x'\} - 2\mathcal{L}\{x\} = 0.$$

Soit  $X(p) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ , la transformée de Laplace de  $x(t)$ . En tenant compte de la proposition 8.1.10, la proposition 8.1.12 et sa généralisation, on obtient

$$\mathcal{L}\{tx''(t)\} = -\frac{d}{dp}\mathcal{L}\{x''(t)\} = -\frac{d}{dp}(p^2 X(p) - px(0) - x'(0)),$$

d'où

$$\mathcal{L}\{tx''(t)\} = -p^2 X'(p) - 2pX(p) + x(0),$$

De même, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{(1 - 2t)x'\} &= \mathcal{L}\{x'(t)\} - 2\mathcal{L}\{tx'(t)\}, \\ &= pX(p) - x(0) + 2\frac{d}{dp}\mathcal{L}\{x'(t)\}, \\ &= pX(p) - x(0) + 2\frac{d}{dp}(pX(p) - x(0)), \\ &= pX(p) - x(0) + 2X(p) + 2pX'(p), \\ &= 2pX'(p) + (p+2)X(p) - x(0). \end{aligned}$$

L'équation précédente s'écrit donc sous la forme

$$(p - 2)X'(p) + X(p) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{dX(p)}{X(p)} + \frac{dp}{p-2} = 0,$$

d'où  $\ln X(p) + \ln(p-2) = \text{constante}$ , et par conséquent  $X(p) = \frac{C}{p-2}$ , où  $C$  est une constante à déterminer. Dès lors,

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(p)\} = C\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p-2}\right\} = Ce^{2t}.$$

Or par hypothèse  $x(0) = 1$ , donc  $C = 1$  et finalement  $x(t) = e^{2t}$  est la solution de l'équation différentielle en question.

La méthode de la transformée de Laplace peut être utilisé pour résoudre certaines équations aux dérivées partielles comme le montre l'exemple suivant :

**Exemple 8.3.3** Déterminons la solution  $u(x, t)$  de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

satisfaisant aux conditions :

$$u(x, 0) = \sin x, \quad u(0, t) = 0 = u(\pi, t) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0.$$

Soit  $U(x, p) = \mathcal{L}\{u(x, t)\}$  la transformée de Laplace de  $u(x, t)$ . On a

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}.$$

Or

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} &= \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial t} e^{-pt} dt, \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^s \frac{\partial u}{\partial t} e^{-pt} dt, \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left( u(x, t) e^{-pt} \Big|_0^s + p \int_0^s u(x, t) e^{-pt} dt \right), \\ &= p \int_0^\infty u(x, t) e^{-pt} dt - u(x, 0), \\ &= pU(x, p) - u(x, 0), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} &= \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} \right\}, \quad v = \frac{\partial u}{\partial x} \\
 &= \int_0^\infty \frac{\partial v}{\partial x} e^{-pt} dt, \\
 &= \frac{d}{dx} \int_0^\infty v(x, t) e^{-pt} dt, \\
 &= \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial x} e^{-pt} dt, \\
 &= \frac{d^2}{dx^2} \int_0^\infty u(x, t) e^{-pt} dt, \\
 &= \frac{d^2 U(x, p)}{dx^2},
 \end{aligned}$$

donc

$$pU(x, p) - u(x, 0) = \frac{d^2 U(x, p)}{dx^2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{d^2 U(x, p)}{dx^2} - pU(x, p) = \sin x.$$

*La solution de cette équation est égale la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation non homogène. La solution générale de l'équation homogène est évidemment égale à*

$$U(x, p) = C_1 e^{\sqrt{p}x} + C_2 e^{-\sqrt{p}x},$$

*où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes. Pour obtenir une solution particulière de l'équation avec second membre, il suffit de la chercher sous la forme  $C \sin x$ , on obtient rapidement  $C = -\frac{1}{p+1}$  et donc  $-\frac{\sin x}{p+1}$  est une solution particulière. La solution de l'équation ci-dessus est par conséquent égale à*

$$U(x, p) = C_1 e^{\sqrt{p}x} + C_2 e^{-\sqrt{p}x} - \frac{\sin x}{p+1}.$$

*Pour déterminer les constantes  $C_1$  et  $C_2$ , on procède comme suit : on a*

$$U(0, p) = C_1 + C_2, \quad U(\pi, p) = C_1 e^{\sqrt{p}\pi} + C_2 e^{-\sqrt{p}\pi}.$$

*Par hypothèse, on a*

$$\begin{aligned}
 U(0, p) &= \mathcal{L}\{u(0, t)\} = \int_0^\infty u(0, t) e^{-pt} dt = 0, \\
 U(\pi, p) &= \mathcal{L}\{u(\pi, t)\} = \int_0^\infty u(\pi, t) e^{-pt} dt = 0,
 \end{aligned}$$

donc  $C_1 + C_2 = 0$ ,  $C_1 e^{\sqrt{p}\pi} + C_2 e^{-\sqrt{p}\pi} = 0$ , ce qui implique :  $C_1 = C_2 = 0$  et

$$U(x, p) = -\frac{\sin x}{p+1}.$$

Finalement, la solution de l'équation proposée est

$$u(x, t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(x, p)\} = -e^{-t} \sin x.$$

### 8.3.2 Résolution des équations de convolution

On considère l'équation de convolution

$$a(t) * x(t) = b(t),$$

où l'inconnue est la distribution  $x$  et  $a, b$  sont des distributions données. Cette équation admet dans  $\mathcal{D}'_+$  une solution si  $a$  possède dans  $\mathcal{D}'_+$  un inverse de convolution noté  $a^{-1}$ . Dans ce cas la solution unique  $x$  est donnée par

$$x(t) = a^{-1} * b(t).$$

Soit  $A(p)$  la transformée de Laplace de  $a(t)$  et  $B(p)$  celle de  $b(t)$ . Si le module du complexe  $\frac{1}{A(p)}$  est majoré par un polynôme en la variable  $p$ , alors  $\frac{1}{A(p)}$  est la transformée de Laplace de  $a^{-1}$ . Dès lors, si  $\frac{B(p)}{A(p)}$  est majoré en module par un polynôme en la variable  $p$ , alors  $\frac{B(p)}{A(p)}$  est la transformée de Laplace de la solution  $x(t)$  de l'équation de convolution ci-dessus. Dans le cas où  $\frac{B(p)}{A(p)}$  n'est pas une transformée de Laplace, alors il se peut que la solution  $x(t)$  de l'équation ci-dessus existe mais n'admet pas de transformée de Laplace.

**Exemple 8.3.4** Soit

$$D\delta(t) * x(t) = b(t),$$

une équation de convolution où  $D$  est un opérateur différentiel à coefficients constants. Alors  $\mathcal{L}(D\delta(t))$  est un polynôme  $P(p)$  de la variable  $p$  et la transformée de Laplace de l'inverse de convolution  $(D\delta(t))^{-1}$  de  $D\delta(t)$  est donnée par  $\frac{1}{P(p)}$ . En utilisant une décomposition en éléments simples, on obtient

$$\frac{1}{P(p)} = \sum_k \frac{a_k}{(p - p_k)^{\alpha_k}},$$

et par conséquent

$$(D\delta(t))^{-1} = H(t) \sum_k a_k e^{-p_k t} \frac{t^{\alpha_k - 1}}{(\alpha_k - 1)!},$$

où  $H(t)$  est la fonction de Heaviside.

### 8.3.3 Résolution des équations intégrales

La transformée de Laplace permet d'étudier un grand nombre d'équations intégrales. La propriété relative au produit de convolution joue un rôle cruciale. C'est pour résoudre ce genre d'équations que Schwartz a inventé les distributions.

Une équation intégrale de Volterra de seconde espèce est une équation de la forme

$$f(x) = g(x) + \int_0^x k(x, t)f(t)dt,$$

où  $g$ ,  $k$  sont des fonctions connues et  $f$  une fonction inconnue. La fonction  $k$  est le noyau de cette équation. On considère le cas où le noyau dépend seulement de la différence  $x - t$ , c'est-à-dire  $k(x, t) = k(x - t)$  avec  $k$  à support dans  $\mathbb{R}_+$ . Soient  $F$ ,  $G$  et  $K$  les transformées de Laplace respectives de  $f$ ,  $g$  et  $k$ . En appliquant aux deux membres de l'équation ci-dessus la transformée de Laplace, on obtient

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \mathcal{L}\{g(x)\} + \mathcal{L}\left\{\int_0^x k(x-t)f(t)dt\right\}.$$

D'après la définition du produit de convolution et la propriété 8.1.11, on a

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x k(x-t)f(t)dt\right\} = \mathcal{L}\{(k * f)(x)\} = K(p)F(p),$$

d'où  $F(p) = G(p) + K(p)F(p)$ . Par conséquent

$$F(p) = \frac{G(p)}{1 - K(p)}, \quad K(p) \neq 1$$

L'original  $f(x)$  de  $F(p)$  est solution de l'équation intégrale en question.

**Exemple 8.3.5** Déterminons la solution de l'équation intégrale suivante :

$$f(x) = x^2 + \int_0^x \sin(x-t)f(t)dt.$$

En utilisant la transformée de Laplace comme ci-dessus, on écrit

$$f(x) = x^2 + \sin x * f(x), \quad x \geq 0$$

d'où

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \mathcal{L}\{x^2\} + \mathcal{L}\{\sin x * f(x)\}.$$

Dès lors,

$$F(p) = \frac{2}{p^3} + \frac{1}{p^2 + 1}F(p),$$

et

$$F(p) = \frac{2}{p^5} + \frac{2}{p^3}, \quad \operatorname{Re} p > 0$$

Par conséquent,

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \frac{x^4}{12} + x^2.$$

Le même procédé permet de résoudre des équations intégrales (non-linéaires) de Volterra du type

$$f(x) = g(x) + \int_0^x f(x-t)f(t)dt.$$

En effet, si  $F(p)$  est la transformée de Laplace de  $f(x)$  et  $G(p)$  celle de  $g(x)$ , alors

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \mathcal{L}\{g(x)\} + \mathcal{L}\left\{\int_0^x f(x-t)f(t)dt\right\},$$

d'où  $F(p) = G(p) + F^2(p)$  et par conséquent  $F(p) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4G(p)})$ . Si l'original  $f(x)$  de  $F(p)$  existe, il détermine la solution de l'équation en question. Pour un exemple d'application, voir l'exercice 8.4.21.

La méthode des transformées de Laplace peut s'appliquer aussi à la résolution des systèmes d'équations intégrales de Volterra du type

$$f_1(x) = g_1(x) + \int_0^x k_{11}(x-t)f_1(t)dt + \cdots + \int_0^x k_{1n}(x-t)f_n(t)dt,$$

$$f_n(x) = g_n(x) + \int_0^x k_{n1}(x-t)f_1(t)dt + \cdots + \int_0^x k_{nn}(x-t)f_n(t)dt,$$

où  $k_{ij}(x)$  et  $g_i(x)$ ,  $(1 \leq i, j \leq n)$ , sont des fonctions connues et admettant des transformées de Laplace  $K_{ij}(p)$  et  $G_i(p)$  respectivement. Pour déterminer la solution  $f_i(x)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , de ce système, on raisonne comme précédemment et on obtient le système d'équations algébrique suivant :

$$F_1(p) = G_1(p) + K_{11}(p)F_1(p) + \cdots + K_{1n}(p)F_n(p),$$

$$F_n(p) = G_n(p) + K_{n1}(p)F_1(p) + \cdots + K_{nn}(p)F_n(p),$$

où  $F_1(p), \dots, F_n(p)$  sont les transformées de Laplace de  $f_1(x), \dots, f_n(x)$ . En résolvant ce système, on obtient  $F_i(p)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , et par la suite les originaux  $f_i(x)$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Voir l'exercice 8.4.24, pour un exemple d'application.

La méthode décrite précédemment peut-être utilisée pour résoudre des équations de la forme

$$f^{(n)}(x) + a_1 f^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n f(x) + \sum_{j=0}^m \int_0^x k_j(x-t) f^{(j)}(t) dt = g(x),$$

où  $k_0(x), \dots, k_m(x), g(x)$  sont des fonctions connues et  $a_1, \dots, a_n$  sont des constantes. On cherche la solution  $f(x)$  satisfaisant aux conditions initiales :

$$f(0) = f_0, \dots, f^{(n-1)}(0) = f_0^{(n-1)}.$$

On désigne par  $K_0(p), \dots, K_m(p), G(p)$  les transformées de Laplace des fonctions  $k_0(x), \dots, k_m(x), g(x)$  respectivement. Appliquons la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation ci-dessus et utilisons les propriétés relatives à la dérivée et au produit de convolution. On obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f^{(n)}(x)\} + a_1 \mathcal{L}\{f^{(n-1)}(x)\} + \cdots + a_n \mathcal{L}\{f(x)\} \\ + \sum_{j=0}^m \mathcal{L}\left\{\int_0^x k_j(x-t) f^{(j)}(t) dt\right\} = \mathcal{L}\{g(x)\}, \end{aligned}$$

d'où

$$\left( p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n + \sum_{j=0}^m p^j K_j(p) \right) F(p) = \Phi(p),$$

où  $F(p)$  est la transformée de Laplace de  $f(x)$  et  $\Phi(p)$  est une fonction connue. On détermine donc  $F(p)$  et ensuite la solution  $f(x) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$  vérifiant les conditions initiales ci-dessus (voir l'exercice 8.4.25, pour un exemple d'application).

Une équation intégrale de Volterra de première espèce est une équation de la forme

$$g(x) = \int_0^x k(x,t) f(t) dt, \quad g(0) = 0 \tag{8.3.1}$$

où  $g, k$  sont des fonctions connues et  $f$  une fonction inconnue. Supposons que les fonctions  $g, g', k$  et  $\frac{\partial k}{\partial x}$  soient continues pour  $x \in [0, \delta]$ ,  $t \in [0, x]$ . En dérivant terme à terme l'équation ci-dessus, on obtient

$$g'(x) = k(x, x) f(x) + \int_0^x \frac{\partial k(x,t)}{\partial x} f(t) dt. \tag{8.3.2}$$

Toute solution  $f(x)$  continue sur  $[0, \delta]$  de l'équation (8.3.1) est aussi solution de l'équation (8.3.2) et réciproquement. Supposons que  $k(x, x) \neq 0$ , pour tout  $x \in [0, \delta]$ . On déduit de l'équation (8.3.2),

$$f(x) = \frac{g'(x)}{k(x, x)} - \int_0^x \frac{\frac{\partial k(x,t)}{\partial x}}{k(x, x)} f(t) dt.$$

On obtient ainsi une équation de Volterra de seconde espèce et on peut utiliser les méthodes décrites précédemment pour l'étudier. Dans le cas où  $k(x, x) = 0$ , on dérive l'équation (8.3.2) par rapport à  $x$  autant de fois que c'est nécessaire.

**Exemple 8.3.6** Déterminons la solution de l'équation intégrale

$$\sin x = \int_0^x e^{x-t} f(t) dt.$$

Ici  $g(x) = \sin x$  et  $k(x, t) = e^{x-t}$ . On a  $g(0) = 0$  et  $g, g', k, \frac{\partial k}{\partial x}$  sont continues. En dérivant l'équation ci-dessus par rapport à  $x$ , on obtient

$$\cos x = e^0 f(x) - \int_0^x e^{x-t} f(t) dt.$$

D'où

$$f(x) = \cos x - \int_0^x e^{x-t} f(t) dt = \cos x - e^x * f(x).$$

Soit  $F(p) = \mathcal{L}\{f(x)\}$  la transformée de Laplace de  $f(x)$ . On a

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \mathcal{L}\{\cos x\} - \mathcal{L}\{e^x\} \mathcal{L}\{f(x)\},$$

d'où

$$F(p) = \frac{p}{p^2 + 1} - \frac{1}{p-1} F(p).$$

Donc

$$F(p) = \frac{p}{p^2 + 1} - \frac{1}{p^2 + 1},$$

et par conséquent

$$f(x) = \cos x - \sin x.$$

### 8.3.4 Etude de la stabilité de quelques systèmes non-linaires

On considère le système d'équations différentielles non-linéaires du premier ordre suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, y), \\ \dot{y}(t) = g(x, y). \end{cases} \quad (8.3.3)$$

On suppose que  $f$  et  $g$  sont des fonctions continûment différentiables. Un point  $(x_0, y_0)$  est dit point d'équilibre (ou point stationnaire) du système ci-dessus si et seulement si  $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$ . Nous allons utiliser la méthode de Laplace pour étudier la stabilité du système ci-dessus et décrire quelques critères nécessaires et suffisants de stabilité. Posons  $\Delta x = x - x_0$  et  $\Delta y = y - y_0$ . D'où

$$\Delta \dot{x}(t) = f(x + \Delta x, y + \Delta y),$$

$$\Delta \dot{y}(t) = g(x + \Delta x, y + \Delta y).$$

En utilisant la formule de Taylor à l'ordre 1, on obtient

$$\Delta \dot{x}(t) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y,$$

$$\Delta \dot{y}(t) = g(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial g}{\partial y} \Delta y.$$

Or  $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$ , donc le système ci-dessus s'écrit sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \Delta \dot{x} \\ \Delta \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x_0, y_0)} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}.$$

Soient  $\Delta X(p) = \mathcal{L}\{\Delta x(t)\}$  et  $\Delta Y(p) = \mathcal{L}\{\Delta y(t)\}$  les transformées de Laplace de  $\Delta x(t)$  et  $\Delta y(t)$  respectivement. En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres des équations ci-dessus tout en tenant compte de la proposition 8.1.12, on obtient

$$p \begin{pmatrix} \Delta X(p) \\ \Delta Y(p) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta x(0) \\ \Delta y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x_0, y_0)} \begin{pmatrix} \Delta X(p) \\ \Delta Y(p) \end{pmatrix},$$

d'où

$$\begin{pmatrix} \Delta X(p) \\ \Delta Y(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p - \frac{\partial f}{\partial x} & -\frac{\partial f}{\partial y} \\ -\frac{\partial g}{\partial x} & p - \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x_0, y_0)}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{pmatrix}. \quad (8.3.4)$$

Si toutes les valeurs propres de la matrice

$$\begin{pmatrix} p - \frac{\partial f}{\partial x} & -\frac{\partial f}{\partial y} \\ -\frac{\partial g}{\partial x} & p - \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x_0, y_0)}, \quad (8.3.5)$$

se trouvent dans le demi-plan gauche :  $\operatorname{Re} p < 0$ , alors les trajectoires correspondant au système (8.3.3) dans le plan des  $x, y$ , s'approchent du point d'équilibre  $(x_0, y_0)$  lorsque  $t$  tend vers l'infini. On dit dans ce cas que le système (ou la solution, ou encore la position d'équilibre  $(x_0, y_0)$ ) est asymptotiquement stable. Si au moins une valeur propre possède une partie réelle positive, le système (8.3.3) est instable au point  $(x_0, y_0)$ . En cas de nullité des parties réelles la stabilité dépend des termes de la série de Taylor de degré supérieur à 1 ; il n'existe pas dans ce cas de critère exhaustif de stabilité (on parle d'équilibre indifférent).

En général la solution du système non-linéaire (8.3.3) ne s'exprime pas à l'aide de fonctions élémentaires. Pour l'étude de la stabilité (asymptotique) de

ce système on développe, lorsque ceci est possible, les fonctions  $f$  et  $g$  en série de Taylor<sup>2</sup> au voisinage du point  $(x_0, y_0)$ . Comme précédemment, on ne retient que les termes linéaires et l'analyse de la stabilité se réduit à la détermination du signe des parties réelles des valeurs propres, c'est-à-dire des racines du polynôme caractéristique lié au système.

Il est possible de faire cette analyse sans calculer explicitement les racines du polynôme caractéristique considéré. Supposons par exemple que le polynôme caractéristique s'écrit sous la forme

$$P(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n, \quad a_0 > 0$$

où les  $a_i$ , sont des coefficients réels. Alors une condition nécessaire pour que toutes les parties réelles des racines de l'équation  $P(\lambda) = 0$ , soient négatives est que tous les  $a_i > 0$ . Cette condition n'est suffisante que pour  $n \leq 2$ . Pour obtenir des conditions qui sont à la fois nécessaires et suffisantes, on utilise le critère suivant que l'on appelle critère de Routh ou de Routh-Hurwitz : pour que toutes les racines de l'équation  $P(\lambda) = 0$  aient des parties réelles négatives, il faut et il suffit que tous les mineurs principaux de la matrice de Hurwitz

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

soient strictement positifs. Les mineurs principaux de cette matrice sont

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \left| \begin{array}{cc} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{array} \right|, \dots, \Delta_n = \left| \begin{array}{cccc} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \end{array} \right|.$$

La condition nécessaire et suffisante de Routh-Hurwitz signifie que :

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \dots, \quad \Delta_n > 0.$$

Or  $\Delta_n = \Delta_{n-1} \cdot a_n$ , donc on peut remplacer  $\Delta_n > 0$  par  $a_n > 0$ .

---

<sup>2</sup>Rappelons que si  $F$  est une fonction définie sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$  et si  $F$  est de classe  $C^2$  sur  $\Omega$ , alors on a la formule de Taylor d'ordre 2 :

$$F(a+h) = F(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(a) h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j + o(\|h\|^2), \quad a \in \Omega$$

Par ailleurs Liénard et Chipart ont formulé d'autres conditions nécessaires et suffisantes de stabilité contenant moins d'inégalités sur les mineurs  $\Delta_i$  que ci-dessus. Plus précisément, pour que l'équation  $P(\lambda) = 0$  ait toutes ses racines à parties réelles négatives, il faut et il suffit que tous les  $a_i > 0$  et que

$$\Delta_{n-1} > 0, \quad \Delta_{n-3} > 0, \quad \Delta_{n-5} > 0, \dots$$

où les  $\Delta_i$  sont les mêmes que ci-dessus.

D'autres conditions nécessaires et suffisantes de stabilité ont été obtenu par Mikhaïlov. Son critère s'énonce comme suit : on pose  $\lambda = i\omega$ , d'où

$$P(\lambda) = P(i\omega) = u(\omega) + iv(\omega),$$

où

$$\begin{aligned} u(\omega) &= a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \dots \\ v(\omega) &= a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - \dots \end{aligned}$$

Étant donné le paramètre  $\omega$ , la grandeur  $P(i\omega)$  peut être représentée sur le plan  $uv$  sous la forme d'un vecteur. Alors pour que le système en question soit stable, il faut et il suffit que : lorsque  $\omega$  varie de 0 à  $+\infty$ , le vecteur  $f(i\omega)$  tourne d'un angle  $\frac{n\pi}{2}$  dans le sens positif et ne passe pas par l'origine des coordonnées. Une autre façon de formuler le critère de Mikhaïlov est le suivant : le système en question est stable si et seulement si  $a_n a_{n-1} > 0$  et que les racines des polynômes  $u(\omega) = 0$ ,  $v(\omega) = 0$ , soient toutes positives, distinctes et alternantes (c'est-à-dire qu'entre deux racines arbitraires de l'une de ces équations, on trouve une racine de l'autre équation).

Enfin et comme nous l'avons déjà signalé, en cas de nullité des parties réelles c'est-à-dire lorsque les racines de l'équation caractéristique sont situées sur l'axe imaginaire, le problème de la stabilité de la solution du système à étudier se complique alors considérablement.

**Exemple 8.3.7** Déterminons les positions d'équilibre du système ci-dessous et étudions sa stabilité :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \ln(y^2 - x), \\ \dot{y}(t) = x - y - 1. \end{cases}$$

Ici, on a  $f(x, y) = \ln(y^2 - x)$  et  $g(x, y) = x - y - 1$ . Les points d'équilibre  $(x_0, y_0)$  sont déterminés par les équations

$$\dot{x}(t) = \ln(y^2 - x) = 0, \quad \dot{y}(t) = x - y - 1 = 0,$$

c'est-à-dire  $\ln(x^2 - 3x + 1) = 0$ ,  $y = x - 1$  d'où  $(x_0, y_0) = (3, 2)$  et  $(x_0, y_0) = (0, -1)$ . Pour  $(x_0, y_0) = (3, 2)$ , la matrice (8.3.5) devient

$$\begin{pmatrix} p - \frac{\partial f}{\partial x} & -\frac{\partial f}{\partial y} \\ -\frac{\partial g}{\partial x} & p - \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(3,2)} = \begin{pmatrix} p + \frac{1}{y^2-x} & -\frac{2y}{y^2-x} \\ -1 & p+1 \end{pmatrix}_{(3,2)} = \begin{pmatrix} p+1 & -3 \\ -1 & p+1 \end{pmatrix}.$$

Les racines de l'équation caractéristique :  $p^2 + 2p - 2 = 0$ , sont  $-1 \pm \sqrt{3}$  et puisque l'une des parties réelles de ces racines est positive, on en déduit que le point d'équilibre  $(3, 2)$  du système proposé est instable. De même pour  $(x_0, y_0) = (0, -1)$ , la matrice (8.3.5) s'écrit

$$\begin{pmatrix} p - \frac{\partial f}{\partial x} & -\frac{\partial f}{\partial y} \\ -\frac{\partial g}{\partial x} & p - \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(3,2)} = \begin{pmatrix} p+1 & 2 \\ -1 & p+1 \end{pmatrix}.$$

Les racines de l'équation caractéristique :  $p^2 + 2p + 3 = 0$ , sont  $-1 \pm i\sqrt{2}$  et puisque les parties réelles de ces racines sont négatives, on en déduit que le point d'équilibre  $(3, 2)$  du système proposé est asymptotiquement stable.

**Exemple 8.3.8** Le pendule simple est constitué par un point matériel suspendu à l'extrémité d'un fil (ou une tige théoriquement sans masse) astreint à se mouvoir sans frottement sur un cercle vertical. On désigne par  $l$  la longueur du fil (c'est-à-dire le rayon du cercle),  $g$  l'accélération de la pesanteur et  $x$  l'angle instantané du fil avec la verticale. L'équation du mouvement est

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (8.3.6)$$

Appliquons la méthode de Laplace à l'étude du mouvement du pendule simple décrit par l'équation différentielle non-linéaire du second ordre ci-dessus. En posant  $\omega^2 = \frac{g}{l}$ ,  $x = \varphi(t)$  et  $y = \dot{\varphi}(t)$ , l'équation différentielle (8.3.6) se ramène au système suivant

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{\varphi} = y = f(x, y), \\ \dot{y}(t) &= \ddot{\varphi} = -\omega^2 \sin x = g(x, y). \end{aligned}$$

Pour déterminer les points d'équilibre  $(x_0, y_0)$  du système, il suffit de résoudre les équations  $f(x, y) = 0$ ,  $g(x, y) = 0$ . Les points d'équilibre sont donc donnés par  $(x_0, y_0) = (k\pi, 0)$  où  $k \in \mathbb{Z}$ . La fonction  $\sin x$  étant périodique, il suffit d'examiner la nature des points  $(0, 0)$  et  $(\pi, 0)$ . Pour  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ , la matrice (8.3.5) devient

$$\begin{pmatrix} p - \frac{\partial f}{\partial x} & -\frac{\partial f}{\partial y} \\ -\frac{\partial g}{\partial x} & p - \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} p & -1 \\ \omega^2 \cos x & p \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} p & -1 \\ \omega^2 & p \end{pmatrix}.$$

Les racines de l'équation caractéristique :  $p^2 + \omega^2 = 0$ , sont  $p = \pm i\omega$ . Comme ces racines se trouvent sur l'axe imaginaire  $\operatorname{Re} p = 0$ , on en déduit que l'équilibre est indifférent. Explicitement le système (8.3.4) s'écrit

$$\begin{pmatrix} \Delta X(p) \\ \Delta Y(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & -1 \\ \omega^2 & p \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{p^2 + \omega^2} \begin{pmatrix} p & 1 \\ -\omega^2 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \Delta X(p) &= \frac{p}{p^2 + \omega^2} \Delta x_0 + \frac{1}{p^2 + \omega^2} \Delta y_0, \\ \Delta Y(p) &= -\frac{\omega^2}{p^2 + \omega^2} \Delta x_0 + \frac{p}{p^2 + \omega^2} \Delta y_0, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \Delta x(t) &= \Delta x_0 \cos \omega t + \Delta y_0 \frac{\sin \omega t}{\omega}, \\ \Delta y(t) &= -\Delta x_0 \omega \sin \omega t + \Delta y_0 \cos \omega t. \end{aligned}$$

On montre aisément que la trajectoire du système en question dans le plan  $(x, y)$  est une ellipse centrée à l'origine. Cette trajectoire ne s'approche ni ne s'éloigne de l'origine lorsque  $t \rightarrow 0$ . L'origine est un point d'équilibre ni stable ni instable ; on dit qu'il est un centre. Pour  $(x_0, y_0) = (\pi, 0)$ , la matrice (8.3.5) devient

$$\begin{pmatrix} p - \frac{\partial f}{\partial x} & -\frac{\partial f}{\partial y} \\ -\frac{\partial g}{\partial x} & p - \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(\pi, 0)} = \begin{pmatrix} p & -1 \\ \omega^2 \cos x & p \end{pmatrix}_{(\pi, 0)} = \begin{pmatrix} p & -1 \\ -\omega^2 & p \end{pmatrix}.$$

Les racines de l'équation caractéristique :  $p^2 - \omega^2 = 0$ , sont  $p = \pm \omega$ . Une de ces racines se trouve dans le demi-plan droite  $\operatorname{Re} p > 0$ , donc le système en question est instable au point  $(\pi, 0)$ . Explicitement le système (8.3.4) s'écrit

$$\begin{pmatrix} \Delta X(p) \\ \Delta Y(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & -1 \\ -\omega^2 & p \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{p^2 - \omega^2} \begin{pmatrix} p & 1 \\ \omega^2 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \Delta X(p) &= \frac{p}{p^2 - \omega^2} \Delta x_0 + \frac{1}{p^2 - \omega^2} \Delta y_0, \\ \Delta Y(p) &= \frac{\omega^2}{p^2 - \omega^2} \Delta x_0 + \frac{p}{p^2 - \omega^2} \Delta y_0, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \Delta x(t) &= \Delta x_0 \cosh \omega t + \Delta y_0 \frac{\sinh \omega t}{\omega}, \\ \Delta y(t) &= \Delta x_0 \omega \sinh \omega t + \Delta y_0 \cosh \omega t. \end{aligned}$$

On montre que la trajectoire du système en question dans le plan  $(x, y)$  est une Hyperbole. Ce qui explique que le point d'équilibre  $(\pi, 0)$  est instable car la trajectoire s'éloigne de ce point lorsque  $t \rightarrow 0$ . Dans ce problème, on peut distinguer trois types de trajectoires : celles qui correspondent aux petites oscillations, celles (les séparatrices) qui joignent deux cols et enfin celles qui correspondent à une rotation complète autour du point de suspension du pendule.

## 8.4 Exercices résolus

**Exercice 8.4.1** Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  et telle que :

- (i)  $f(x) = 0, \forall x < 0$ .
- (ii)  $f$  est continue par morceaux sur  $[0, +\infty[$ .
- (iii) il existe des constantes  $M > 0$  et  $\sigma_0$  telles que :

$$\forall x \geq x_0, \quad |f(x)| \leq M e^{\sigma_0 x}.$$

Montrer que la transformée de Laplace existe pour tout  $\sigma > \sigma_0$ .

Solution : On a

$$\int_0^\infty f(x)e^{-px} dx = \int_0^{x_0} f(x)e^{-px} dx + \int_{x_0}^\infty f(x)e^{-px} dx.$$

L'intégrale  $\int_0^{x_0} f(x)e^{-px} dx$  existe car  $f$  est continue par morceaux. Concernant l'autre intégrale, notons que

$$|f(x)e^{-px}| = |f(x)e^{-(\sigma+i\omega)x}| \leq |f(x)|e^{-\sigma x} \leq M e^{-(\sigma-\sigma_0)x}, \quad (\text{d'après (iii)})$$

Or  $\int_{x_0}^\infty M e^{-(\sigma-\sigma_0)x} dx$  converge car  $\sigma > \sigma_0$ , donc d'après le critère de comparaison des intégrales généralisées, l'intégrale  $\int_{x_0}^\infty |f(x)e^{-px}| dx$  converge aussi, ce qui entraîne que  $\int_{x_0}^\infty f(x)e^{-px} dx$  existe. Par conséquent  $\int_0^\infty f(x)e^{-px} dx$  existe dans le demi-plan  $\{p \in \mathbb{R} : \operatorname{Re} p > \sigma_0\}$ .

**Exercice 8.4.2** Déterminer les transformées de Laplace des fonctions :

- a)  $x \mapsto \sin \sqrt{x}$ .
- b)  $x \mapsto \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ .

Solution : a) Au voisinage de 0, on a

$$\sin \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3!} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5!} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{7!} + \frac{x^{\frac{9}{2}}}{9!} - \dots$$

Or  $\mathcal{L}\{x^\alpha\} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$ , où  $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$ ,  $\text{Re } \alpha > 0$ , est la fonction gamma d'Euler, donc

$$\mathcal{L}\{\sin \sqrt{x}\} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + 1)}{p^{\frac{3}{2}}} - \frac{\Gamma(\frac{3}{2} + 1)}{3! p^{\frac{5}{2}}} + \frac{\Gamma(\frac{5}{2} + 1)}{5! p^{\frac{7}{2}}} - \frac{\Gamma(\frac{7}{2} + 1)}{7! p^{\frac{9}{2}}} + \frac{\Gamma(\frac{9}{2} + 1)}{9! p^{\frac{11}{2}}} - \dots$$

Une intégration par parties montre que :  $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$ , d'où

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) &= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \\ \Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right) &= \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \\ \Gamma\left(\frac{5}{2} + 1\right) &= \frac{5}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \\ \Gamma\left(\frac{7}{2} + 1\right) &= \frac{7}{2} \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \\ \Gamma\left(\frac{9}{2} + 1\right) &= \frac{9}{2} \Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{9}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

En remplaçant ces expressions dans l'équation ci-dessus, on obtient

$$\mathcal{L}\{\sin \sqrt{x}\} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{2p^{\frac{3}{2}}} \left( 1 - \left( \frac{1}{2^2 p} \right) + \frac{1}{2!} \left( \frac{1}{2^2 p} \right)^2 - \frac{1}{3!} \left( \frac{1}{2^2 p} \right)^3 + \dots \right),$$

d'où

$$\mathcal{L}\{\sin \sqrt{x}\} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{2p^{\frac{3}{2}}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2^2 p}\right)^k}{k!} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{2p^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{1}{2^2 p}}.$$

Or

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = 2 \int_0^\infty e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi},$$

donc

$$\mathcal{L}\{\sin \sqrt{x}\} = \frac{\sqrt{\pi} e^{-\frac{1}{4\pi}}}{2p^{\frac{3}{2}}}.$$

b) On a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right\} &= 2\mathcal{L}\{(\sin \sqrt{x})'\}, \\ &= 2\mathcal{L}\{f'(x)\}, \quad \text{où } f(x) = \sin \sqrt{x} \\ &= 2(\mathcal{L}\{f(x)\} - f(0)), \quad (\text{proposition 8.1.12}) \\ &= 2(\mathcal{L}\{\sin \sqrt{x}\} - 0), \\ &= \frac{\sqrt{\pi} e^{-\frac{1}{4\pi}}}{\sqrt{p}}, \quad (\text{d'après a})).\end{aligned}$$

**Exercice 8.4.3** Soient  $f$  une fonction périodique de période  $T > 0$  et  $F(p) = \mathcal{L}\{f(x)\}$  sa transformée de Laplace. Montrer que

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{Tp}} \int_0^T f(x)e^{-px} dx.$$

Solution : On a

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^\infty f(x)e^{-px} dx, \\ &= \int_0^T f(x)e^{-px} dx + \int_T^{2T} f(x)e^{-px} dx + \int_{2T}^{3T} f(x)e^{-px} dx + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{kT}^{(k+1)T} f(x)e^{-px} dx, \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^T f(u + kT)e^{-p(u+kT)} du, \quad u = x - kT \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^T f(u)e^{-pu} e^{-pkT} du, \quad (\text{car } f \text{ est périodique}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-pT})^k \int_0^T f(u)e^{-pu} du, \\ &= \frac{1}{1 - e^{-Tp}} \int_0^T f(u)e^{-pu} du. \end{aligned}$$

**Exercice 8.4.4** Calculer l'intégrale

$$\int_0^\infty x e^{-2x} \cos x dx,$$

avec la méthode de Laplace.

Solution : On a

$$\mathcal{L}\{x \cos x\} = \int_0^\infty x \cos x e^{-px} dx.$$

Or

$$\mathcal{L}\{x \cos x\} = -\frac{d}{dp} \mathcal{L}\{\cos x\} = -\frac{d}{dp} \left( \frac{p}{p^2 + 1} \right) = \frac{p^2 - 1}{(p^2 + 1)^2},$$

il suffit donc de remplacer  $p$  par 2 et on obtient

$$\int_0^\infty x e^{-2x} \cos x dx = \frac{3}{25}.$$

**Exercice 8.4.5** a) Soient  $H(x)$  la fonction de Heaviside et  $H(x)f(x)$  une fonction dont la transformée de Laplace est connue ainsi que son abscisse de sommabilité  $a$ . Déterminer la transformée de Fourier de  $H(x)f(x)e^{-\sigma x}$ ,  $\sigma > a$ .

b) En déduire la transformée de Fourier de la fonction  $H(x)e^{-\sigma x}$ ,  $\sigma > 0$ .

Solution : a) Pour tout  $\sigma > a$ , la fonction  $H(x)f(x)e^{-\sigma x}$  est sommable en  $x$ . Désignons par  $\mathcal{F}_\omega\{H(x)f(x)\}$  et  $F(p) = \mathcal{L}_p\{H(x)f(x)\}$  les transformées de Fourier et de Laplace de la fonction  $H(x)f(x)$  respectivement. On a

$$\mathcal{F}_\omega\{H(x)f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} H(x)f(x)e^{-2\pi i \omega x} dx = \int_0^{\infty} H(x)f(x)e^{-2\pi i \omega x} dx, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

et

$$\mathcal{L}_p\{H(x)f(x)\} = \int_0^{\infty} H(x)f(x)e^{-px} dx, \quad \operatorname{Re} p = \sigma > a$$

En posant  $p = \sigma + 2\pi i \omega$ , on obtient

$$\begin{aligned} F(\sigma + 2\pi i \omega) &= \mathcal{L}_{\sigma+2\pi i \omega}\{H(x)f(x)\}, \\ &= \int_0^{\infty} H(x)f(x)e^{-\sigma x} e^{-2\pi i \omega x} dx, \\ &= \mathcal{F}_\omega\{H(x)f(x)e^{-\sigma x}\}. \end{aligned}$$

Donc si on connaît la transformée de Laplace de la fonction  $H(x)f(x)$  d'abscisse de sommabilité  $a$ , alors on peut obtenir les transformées de Fourier de toutes les fonctions  $H(x)f(x)e^{-\sigma x}$ ,  $\sigma > a$ .

b) D'après la question précédente, on a

$$\mathcal{F}_\omega\{H(x)e^{-\sigma x}\} = \mathcal{L}_{\sigma+2\pi i \omega}\{H(x)\} = \frac{1}{\sigma + 2\pi i \omega},$$

car  $\mathcal{L}_p\{H(x)\} = \int_0^{\infty} H(x)e^{-px} dx = \frac{1}{p}$ ,  $\operatorname{Re} p > 0$ .

**Exercice 8.4.6** a) Soient  $H(x)$  la fonction de Heaviside et  $H(x)f(x)$  une fonction dont la transformée de Laplace  $\mathcal{L}_p\{H(x)f(x)\}$  est nulle sur un demi-plan  $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p = \sigma > \sigma_0\}$ . Montrer que  $H(x)f(x)$  est presque partout nulle.

b) En déduire que si  $F$  est une fonction holomorphe sur un demi-plan de la forme  $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > a\}$ , alors celle-ci ne peut posséder qu'un original au plus qui soit une fonction continue.

Solution : a) D'après l'exercice précédent, on a pour tout  $\operatorname{Re} p = \sigma > \sigma_0$  où  $\sigma_0$  peut toujours être supposé supérieur à l'abscisse de sommabilité,

$$\mathcal{F}_\omega\{H(x)f(x)e^{-\sigma x}\} = \mathcal{L}_p\{H(x)f(x)\} = 0.$$

La distribution associée à la fonction sommable  $H(x)f(x)e^{-\sigma x}$ ,  $\sigma > 0$ , est tempérée. Dès lors,

$$H(x)f(x)e^{-\sigma x} = \mathcal{F}_x^{-1}\mathcal{F}_\omega\{H(x)f(x)e^{-\sigma x}\} = \mathcal{F}_x^{-1}(0) = 0,$$

en vertu de la formule de réciprocité. Donc  $H(x)f(x)e^{-\sigma x}$  est nulle en tant que distribution et elle est presque partout nulle en tant que fonction, ce qui est le cas aussi pour  $H(x)f(x)$ .

b) D'après la question précédente, si les fonctions  $H(x)f(x)$  et  $H(x)g(x)$  ont même transformée de Laplace sur un demi-plan  $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > a\}$ , alors elles sont égales presque partout. En outre, si ces fonctions sont continues alors elles sont identiques.

**Exercice 8.4.7** *Etant donné une fonction  $F(p)$  holomorphe sur un demi-plan  $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > a\}$ , on suppose qu'une fonction continue  $H(x)f(x)$  existe et qu'elle est à support contenu dans  $\mathbb{R}_+$  ( $H(x)$  étant la fonction de Heaviside). Montrer que si  $F(\sigma_0 + 2\pi i\omega)$ ,  $\sigma_0 \geq a$ , est sommable en  $\omega$ , alors*

$$H(x)f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta_{\sigma_0}} F(p)e^{px} dp,$$

où  $\Delta_{\sigma_0}$  est la droite définie par  $\operatorname{Re} p = \sigma_0$  parcourue dans le sens des ordonnées croissantes.

Solution : Par hypothèse tous les points singuliers de  $F$  sont à gauche de la droite définie par  $\operatorname{Re} p = \sigma = a$ . En appliquant la transformée de Fourier inverse, il vient en tout point  $x$  où  $f$  est continue,

$$H(x)f(x)e^{-\sigma_0 x} = \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma_0 + 2\pi i\omega)e^{2\pi i\omega} d\omega.$$

Ceci entraîne,

$$H(x)f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma_0 + 2\pi i\omega)e^{\sigma_0 x}e^{2\pi i\omega} d\omega.$$

en posant  $p = \sigma_0 + 2\pi i\omega$ , on obtient le résultat annoncé.

**Exercice 8.4.8** *Montrer que si  $F(p)$  est la transformée de Laplace d'une fonction  $f$ , alors  $|F(p)|$  est borné sur un demi-plan  $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > \sigma_0\}$ .*

Solution : Si  $\operatorname{Re} p > a$  où  $a$  est l'abscisse de sommabilité de  $f$ , alors

$$F(p) = \mathcal{L}_p\{H(x)f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} H(x)f(x)e^{-px} dx.$$

Pour tout  $\sigma_0 > a$ , la fonction  $H(x)f(x)e^{-px}$  est sommable et on a

$$|F(p)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |H(x)f(x)|e^{-\sigma_0 x} dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |H(x)f(x)|e^{-\sigma x} dx \equiv M,$$

où  $M$  est une constante et  $\sigma = \operatorname{Re} p \geq \sigma_0$ .

**Exercice 8.4.9** Soit  $F(p)$  une fonction holomorphe sur le demi-plan défini par  $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p \geq a > 0\}$  et telle que  $|p^2 F(p)|$  soit borné dans ce demi-plan. Montrer que  $F$  est la transformée de Laplace d'une fonction continue  $f$ , à support dans  $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$  et

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta_{\sigma_0}} F(p)e^{px} dp,$$

où  $\Delta_{\sigma_0}$  est la droite du plan complexe d'abscisse  $\operatorname{Re} p = \sigma_0 > a$ .

Solution : Par hypothèse, il existe une constante  $M$  telle que :

$$|F(p)| \leq \frac{M}{|p|^2}, \quad \operatorname{Re} p \geq a > 0$$

Dès lors, pour tout  $\sigma_0 > a$ , on a

$$|F(\sigma_0 + 2\pi i\omega)| \leq \frac{M}{\sigma_0^2 + 4\pi^2\omega^2} < \frac{M}{a^2 + 4\pi^2\omega^2}, \quad a > 0$$

d'où  $F(\sigma_0 + 2\pi i\omega)$  est sommable en  $\omega$ . Notons que pour  $a < \sigma_0 < \sigma_1$ , on a

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} |F(\sigma_0 + 2\pi i\omega)| e^{p\sigma} d\sigma < \frac{M}{a^2 + 4\pi^2\omega^2} \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} e^{p\sigma} d\sigma.$$

Le second membre de cette inégalité tend vers 0 lorsque  $|\omega| \rightarrow +\infty$  et la fonction  $H(x)f(x)$  ne dépend pas du choix de  $\sigma_0$  sur la demi-droite  $\sigma > a$ . La continuité de la fonction  $H(x)f(x)$  est une conséquence immédiate du théorème de continuité des fonctions définies par des intégrales dépendant d'un paramètre. Montrons que cette fonction est nulle pour  $x < 0$ . On a

$$\begin{aligned} |H(x)f(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma_0 + 2\pi i\omega) e^{x\sigma_0} e^{2\pi i\omega} d\omega \right|, \\ &\leq e^{x\sigma_0} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\sigma_0 + 2\pi i\omega)| d\omega, \\ &< M e^{x\sigma_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{a^2 + 4\pi^2\omega^2}, \\ &= \frac{M e^{x\sigma_0}}{2a}, \quad a > 0. \end{aligned}$$

Pour  $x < 0$ , cette dernière expression tend vers 0 lorsque  $\sigma_0 \rightarrow +\infty$ . Or  $H(x)f(x)$  ne dépend pas de  $\sigma_0$ , donc cette fonction est nulle pour  $x < 0$ . Montrons maintenant que  $F(p)$  est bien la transformée de Laplace de la fonction  $H(x)f(x)$ . En effet, pour tout  $\sigma > a$ , on a  $a < \sigma_0 < \sigma$  et

$$|H(x)f(x)e^{-\sigma x}| = e^{(\sigma_0 - \sigma)x} |H(x)f(x)e^{-\sigma_0 x}| \leq \frac{M e^{(\sigma_0 - \sigma)x}}{2a} H(x).$$

Comme  $\sigma_0 - \sigma < 0$ , alors cette fonction est sommable en  $x$ . Dès lors,

$$H(x)f(x)e^{-\sigma x} = \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + 2\pi i\omega) e^{2\pi i\omega x} d\omega = \mathcal{F}_x^{-1}\{F(\sigma + 2\pi i\omega)\}.$$

L'inversion de cette fonction est légitime car  $H(x)f(x)e^{-\sigma x}$  est sommable en  $x$  et  $F(\sigma + 2\pi i\omega)$  est continue en  $\omega$ . Donc, pour tout  $\sigma > a$ , on a

$$\begin{aligned} F(\sigma + 2\pi i\omega) &= \mathcal{F}_{\omega}\{H(x)f(x)e^{-\sigma x}\}, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H(x)f(x)e^{-\sigma x} e^{-2\pi i\omega x} dx, \\ &= \int_0^{\infty} H(x)f(x)e^{-(\sigma+2\pi i\omega)x} dx, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$F(p) = \int_0^{\infty} H(x)f(x)e^{-px} dx = \mathcal{L}_p\{H(x)f(x)\}.$$

**Exercice 8.4.10** Déterminer la transformée de Laplace inverse de la fonction

$$F(p) = \frac{p}{(p^2 + 1)^2},$$

en utilisant deux méthodes différentes.

Solution : 1<sup>ère</sup> méthode : notons que

$$\left(\frac{1}{p^2 + 1}\right)' = -2 \frac{p}{(p^2 + 1)^2},$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{(p^2 + 1)^2}\right\} &= -\frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{p^2 + 1}\right)'\right\}, \\ &= \frac{x}{2} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2 + 1}\right\}, \quad (\text{proposition 8.1.10}) \\ &= \frac{x \sin x}{2}, \quad \left(\text{car } \mathcal{L}\{\sin x\} = \frac{1}{p^2 + 1}\right) \end{aligned}$$

2<sup>ème</sup> méthode : on a

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{p}{(p^2 + 1)^2} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{p}{p^2 + 1} \cdot \frac{1}{p^2 + 1} \right\}, \\
 &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{p}{p^2 + 1} \right\} * \left\{ \frac{1}{p^2 + 1} \right\}, \quad (\text{propriété 8.1.11}) \\
 &= \cos x * \sin x, \\
 &= \int_0^x \cos t \sin(x - t) dt, \\
 &= \int_0^x \cos t (\sin x \cos t - \cos x \sin t) dt, \\
 &= \frac{\sin x}{2} \int_0^x (1 + \cos 2t) dt - \frac{\cos x}{2} \int_0^x \sin 2t dt, \\
 &= \frac{x \sin x}{2}.
 \end{aligned}$$

**Exercice 8.4.11** Même question pour la fonction

$$F(p) = \frac{1}{(p^2 + 1)^2}.$$

Solution : 1<sup>ère</sup> méthode : on a

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(p^2 + 1)^2} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{F(p)}{p} \right\}, \quad \text{où } F(p) = \frac{p}{(p^2 + 1)^2} \\
 &= \int_0^x f(t) dt, \quad \text{où } f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}
 \end{aligned}$$

en vertu de la proposition 8.1.13. D'après l'exercice précédent,  $f(t) = \frac{t \sin t}{2}$ , donc

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(p^2 + 1)^2} \right\} = \frac{1}{2} \int_0^x t \sin t dt = \frac{\sin x - x \cos x}{2}.$$

2<sup>ème</sup> méthode : on utilise la formule de Bromwich-Wagner (voir proposition 8.1.17),

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p) e^{px} dp = \frac{1}{2\pi i} \oint_C F(p) e^{px} dp,$$

où  $C$  est le contour de Bromwich. La fonction  $F(p)e^{px}$  possède deux singularités :  $p = -i$ ,  $p = i$ ; ce sont deux pôles d'ordre 2. Calculons les résidus de  $F(p)e^{px}$  en ces pôles. On a

$$\text{Rés}(F(p)e^{px}, -i) = \lim_{p \rightarrow -i} \frac{d}{dp} ((p + i)^2 F(p) e^{px}) = (i - x) \frac{e^{-ix}}{4},$$

et

$$\text{Rés}(F(p)e^{px}, i) = \lim_{p \rightarrow i} \frac{d}{dp} ((p - i)^2 F(p)e^{px}) = -(i + x) \frac{e^{ix}}{4}.$$

D'après le théorème des résidus, on a

$$f(x) = \text{Rés}(F(p)e^{px}, -i) + \text{Rés}(F(p)e^{px}, i) = \frac{\sin x - x \cos x}{2}.$$

**Exercice 8.4.12** Déterminer la transformée de Laplace inverse des fonctions suivantes :

$$a) p \longmapsto \frac{p^2}{(p^2+1)^2}.$$

$$b) p \longmapsto \frac{p^3}{(p^2+1)^2}.$$

Solution : a) On a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{p^2}{(p^2+1)^2} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{p}{p^2+1} \cdot \frac{p}{p^2+1} \right\}, \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{p}{p^2+1} \right\} * \left\{ \frac{p}{p^2+1} \right\}, \quad (\text{propriété 8.1.11}) \\ &= \cos x * \cos x, \\ &= \int_0^x \cos t \cos(x-t) dt, \\ &= \frac{\sin x + x \cos x}{2}. \end{aligned}$$

b) Notons que

$$\frac{p^3}{(p^2+1)^2} = p \frac{p^2+1-1}{(p^2+1)^2} = \frac{p}{p^2+1} - \frac{p}{(p^2+1)^2}.$$

En tenant compte des résultats obtenus précédemment, on obtient

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{p^3}{(p^2+1)^2} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{p}{p^2+1} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{p}{(p^2+1)^2} \right\} = \cos x - \frac{x \sin x}{2}.$$

**Exercice 8.4.13** Déterminer la transformée de Laplace inverse de la fonction

$$F(p) = \frac{1}{(p+1)(p-2)},$$

en utilisant la formule de Bromwich-Wagner.

Solution : Notons d'abord que les conditions d'application de la proposition 8.1.17, sont satisfaites. Dès lors,

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p)e^{px} dp = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} F(p)e^{px} dp,$$

où  $\mathcal{C}$  est le contour de Bromwich. La fonction  $F(p)e^{px}$  possède deux singularités :  $p = -1$  un pôle simple et  $p = 2$  un pôle d'ordre 2. Calculons les résidus de  $F(p)e^{px}$  en ces points. On a

$$\text{Rés}(F(p)e^{px}, -1) = \lim_{p \rightarrow -1} (p+1)F(p)e^{px} = \frac{e^{-x}}{9},$$

et

$$\text{Rés}(F(p)e^{px}, 2) = \lim_{p \rightarrow 2} \frac{d}{dp} ((p-2)^2 F(p)e^{px}) = (x - \frac{1}{3}) \frac{e^{2x}}{3}.$$

D'après le théorème des résidus, on a

$$f(x) = \text{Rés}(F(p)e^{px}, -1) + \text{Rés}(F(p)e^{px}, 2) = \frac{e^{-x}}{9} + (x - \frac{1}{3}) \frac{e^{2x}}{3}.$$

**Exercice 8.4.14** Déterminer la fonction réelle causale  $f(x)$  dont la transformée de Laplace est

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}, \quad \text{Re } p > 0$$

Solution : On utilise la formule de Bromwich-Wagner :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\gamma}^{\sigma+i\gamma} F(p)e^{px} dp.$$

La fonction sous le signe intégral possède un point de branchement en  $p = 0$ . Pour uniformiser  $F(p)e^{px}$ , on considère comme coupure la partie de l'axe réel définie par  $x \leq 0$ . On va calculer l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} F(p)e^{px} dp.$$

Ici le contour de Bromwich  $\mathcal{C}$  est définie par  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_4 \cup \mathcal{C}_5 \cup \mathcal{C}_6$  où  $\mathcal{C}_1$  est le bord supérieur de la coupure,  $\mathcal{C}_3$  est le bord inférieur de la coupure,  $\mathcal{C}_2$  est l'arc de cercle de centre 0 et de rayon  $\varepsilon$  ; rejoignant les deux bords de la coupure,  $\mathcal{C}_4$  et  $\mathcal{C}_6$  sont deux arcs de cercles de centre 0 et de rayon  $R$  et enfin  $\mathcal{C}_5$  est une partie finie du domaine d'intégration (en fait une droite  $p = \sigma$ ). La

fonction  $F(p)e^{px}$  est uniforme sur  $\mathcal{C}$  et elle est holomorphe à l'intérieur de ce contour. D'après le théorème de Cauchy, on a

$$0 = \oint_{\mathcal{C}} F(p)e^{px} dp = \sum_{k=1}^6 \int_{\mathcal{C}_k} F(p)e^{px} dp.$$

Sur  $\mathcal{C}_1$ , on a  $p = \zeta e^{\pi i}$ ,  $\sqrt{p} = \sqrt{\zeta} e^{\frac{\pi i}{2}}$ ,  $\varepsilon \leq \zeta \leq R$ , d'où

$$\int_{\mathcal{C}_1} F(p)e^{px} dp = -i \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{-\zeta x}}{\sqrt{\zeta}} d\zeta.$$

Sur  $\mathcal{C}_3$ , on a  $p = \zeta e^{-\pi i}$ ,  $\sqrt{p} = \sqrt{\zeta} e^{-\frac{\pi i}{2}}$ ,  $\varepsilon \leq \zeta \leq R$ , d'où

$$\int_{\mathcal{C}_3} F(p)e^{px} dp = -i \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{-\zeta x}}{\sqrt{\zeta}} d\zeta.$$

Sur  $\mathcal{C}_2$ , on a  $p = \varepsilon e^{i\theta}$ ,  $\theta$  variant de  $-\pi$  à  $\pi$ , d'où

$$\int_{\mathcal{C}_2} F(p)e^{px} dp = -i \int_{-\pi}^{\pi} e^{\varepsilon e^{i\theta} x} \sqrt{\varepsilon e^{i\theta}} d\theta.$$

Sur  $\mathcal{C}_4$ , on a  $p = Re^{i\theta}$ ,  $\theta$  variant de  $\pi$  à  $2\pi - \theta_0$ , d'où

$$\int_{\mathcal{C}_4} F(p)e^{px} dp = i \int_{\pi}^{2\pi - \theta_0} e^{Re^{i\theta} x} \sqrt{Re^{i\theta}} d\theta.$$

Sur  $\mathcal{C}_6$ , on a  $p = Re^{i\theta}$ ,  $\theta$  variant de  $\theta_0$  à  $\pi$ , d'où

$$\int_{\mathcal{C}_6} F(p)e^{px} dp = i \int_{\theta_0}^{\pi} e^{Re^{i\theta} x} \sqrt{Re^{i\theta}} d\theta.$$

Sur  $\mathcal{C}_5$ , on a

$$\int_{\mathcal{C}_5} F(p)e^{px} dp = \int_{\sigma-i\gamma}^{\sigma+i\gamma} \frac{e^{px}}{\sqrt{p}} dp.$$

Calculons maintenant les limites de ces intégrales lorsque  $\gamma \rightarrow \infty$  (et donc  $R$ ) et  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Sur  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_3$ , on a

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_{\mathcal{C}_1} F(p)e^{px} dp = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_{\mathcal{C}_3} F(p)e^{px} dp = -i \int_0^\infty \frac{e^{-\zeta x}}{\sqrt{\zeta}} d\zeta.$$

Sur  $\mathcal{C}_2$ , on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{C}_2} F(p)e^{px} dp = 0.$$

Sur  $\mathcal{C}_4$  et  $\mathcal{C}_6$ , on a

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}_4} F(p) e^{px} dp = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}_6} F(p) e^{px} dp = 0,$$

en vertu du lemme de Jordan (en effet, prenons par exemple le cas de  $\mathcal{C}_6$  et soit  $\theta_1$  tel que :  $\frac{\pi}{2} < \theta_1 < \pi$ . On a

$$\left| \int_{\mathcal{C}_6} F(p) e^{px} dp \right| \leq \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{e^{Rx \cos \theta}}{\sqrt{R}} d\theta + \int_{\theta_1}^{\pi} \frac{e^{Rx \cos \theta}}{\sqrt{R}} d\theta.$$

On va faire tendre  $\theta_1$  vers  $\frac{\pi}{2}$  quand  $R \rightarrow \infty$ . Autrement dit, on choisit un abscisse  $\sigma_1 > 0$ , par exemple  $\sigma_1 = \sqrt[n]{R}$ ,  $n \geq 2$ , telle que :  $\cos \theta_1 = -\frac{\sigma_1}{R}$  où  $\sigma_1 > 0$  et  $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sigma_1}{R} = 0$ . Posons  $\theta = \arccos \frac{\zeta}{R}$ , d'où

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{e^{Rx \cos \theta}}{\sqrt{R}} d\theta = \frac{1}{R} \int_{-\sigma_1}^{\sigma} \frac{e^{\zeta x}}{\sqrt{R - \frac{\zeta^2}{R}}} d\zeta \leq \frac{1}{R} \frac{\sigma + \sigma_1}{\sqrt{R - \frac{\max(\sigma, \sigma_1)}{R}}} e^{\sigma x},$$

et

$$\int_{\theta_1}^{\pi} \frac{e^{Rx \cos \theta}}{\sqrt{R}} d\theta \leq \frac{\pi - \theta_1}{\sqrt{R}} e^{-\sigma_1 x}.$$

En remplaçant,  $\sigma_1 = \sqrt[n]{R}$ ,  $n \geq 2$ , dans ces expressions, on obtient

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathcal{C}_6} F(p) e^{px} dp \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \frac{\sigma + \sigma_1}{\sqrt{R - \frac{\max(\sigma, \sigma_1)}{R}}} e^{\sigma x} + \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\pi - \theta_1}{\sqrt{R}} e^{-\sigma_1 x} = 0.$$

Pour  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}_4} F(p) e^{px} dp = 0$ , on raisonne de manière similaire). Sur  $\mathcal{C}_5$ , on a

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}_5} F(p) e^{px} dp = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{px}}{\sqrt{p}} = 2\pi i f(x).$$

Par conséquent, on a

$$0 = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \int_{\mathcal{C}} F(p) e^{px} dp = -2i \int_0^\infty \frac{e^{-\zeta x}}{\sqrt{\zeta}} d\zeta + 2\pi i f(x),$$

d'où

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\zeta x}}{\sqrt{\zeta}} d\zeta = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-(\eta\sqrt{x})^2} d\eta, \quad \zeta = \eta^2$$

En posant  $t = \eta\sqrt{x}$ , on obtient finalement

$$f(x) = \frac{2}{\pi\sqrt{x}} \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}.$$

**Exercice 8.4.15** a) Montrer que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k \left(1 - \frac{x}{k}\right)^k \ln x dx = \int_0^\infty e^{-x} \ln x dx = -C,$$

où  $C = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} dt - \ln k \right) = 0,57721\dots$ , est la constante d'Euler.

b) Déterminer la transformée de Laplace de la distribution associée à la fonction  $H(x) \ln x$  où  $H(x)$  est la fonction de Heaviside.

*Solution :* a) On a  $\left(1 - \frac{x}{k}\right)^k = e^{k \ln(1 - \frac{x}{k})}$ . Or

$$\ln \left(1 - \frac{x}{k}\right) \leq e^{-x}, \quad 0 < x < k,$$

d'où  $\left(1 - \frac{x}{k}\right)^k \leq e^{-x}$ . Dès lors

$$\left| \left(1 - \frac{x}{k}\right) \ln x \cdot \mathbf{1}_{[0 \leq x \leq k]} \right| \leq e^{-x} |\ln x|.$$

La fonction  $e^{-x} |\ln x|$  est sommable et d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k \left(1 - \frac{x}{k}\right)^k \ln x dx = \int_0^k \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{k}\right)^k \ln x dx = \int_0^\infty e^{-x} \ln x dx.$$

On a

$$\begin{aligned} \int_0^k \left(1 - \frac{x}{k}\right)^k \ln x dx &= k \int_0^1 t^k \ln(1-t) dt, \quad t = 1 - \frac{x}{k} \\ &= k \left( \ln k \int_0^1 t^k dt + \int_0^1 t^k \ln(1-t) dt \right), \\ &= \frac{k}{k+1} \left( \ln k + \int_0^1 \frac{t^{k+1} - 1}{1-t} dt \right), \\ &= \frac{k}{k+1} \left( \ln k - \int_0^1 \sum_{j=0}^k t^j dt \right), \\ &= \frac{k}{k+1} \left( \ln k - \sum_{j=0}^k \int_0^1 t^j dt \right), \\ &= \frac{k}{k+1} \left( \ln k - \sum_{j=0}^k \frac{1}{j+1} dt \right), \\ &= \frac{k}{k+1} \left( \ln k - \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{j} dt \right). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x} \ln x dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k \left(1 - \frac{x}{k}\right)^k \ln x dx, \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k+1} \left( \ln k - \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} dt - \frac{1}{k+1} \right), \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \ln k - \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} dt \right), \\ &= -C,\end{aligned}$$

où  $C$  est la constante d'Euler.

b) La distribution associée à  $H(x) \ln x$  appartient à  $\mathcal{D}'_+$ , elle est tempérée, sa transformée de Laplace est une fonction holomorphe pour  $\operatorname{Re} p > 0$  et on a

$$\mathcal{L}(H(x) \ln x)(p) = \langle H(x) \ln x, e^{-px} \rangle = \int_0^\infty \ln x e^{-px} dx.$$

L'abscisse de sommabilité est ici égal à 0 car pour  $\operatorname{Re} p > 0$  l'intégrale ci-dessus converge et pour  $\operatorname{Re} p < 0$ , l'intégrale en question diverge. Supposons d'abord que  $p$  soit un réel positif et posons  $y = px$ . On a

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \ln x e^{-px} dx &= \int_0^\infty \ln \frac{y}{p} e^{-y} \frac{dy}{p}, \\ &= \frac{1}{p} \left( \int_0^\infty e^{-y} \ln y dy - \ln p \int_0^\infty e^{-y} dy \right), \\ &= \frac{1}{p} \left( -C - \ln p \int_0^\infty e^{-y} dy \right), \quad (\text{d'après } a)) \\ &= -\frac{C + \ln p}{p},\end{aligned}$$

où  $C$  est la constante d'Euler. Par ailleurs, puisque  $\mathcal{L}(H(x) \ln x)(p)$  est holomorphe pour  $\operatorname{Re} p > 0$  et que la fonction obtenue  $-\frac{C + \ln p}{p}$  (où  $\ln p$  désigne la détermination principale du logarithme complexe, c'est-à-dire celle qui est réelle sur le demi-axe réel positif) est holomorphe pour  $\operatorname{Re} p > 0$  alors (résultat obtenu par prolongement analytique) ces fonctions qui coïncident sur l'axe réel positif, coïncident partout. Par conséquent, pour  $\operatorname{Re} p > 0$ , on a

$$\mathcal{L}(H(x) \ln x)(p) = -\frac{C + \ln p}{p}.$$

**Exercice 8.4.16** Déterminer la transformée de Laplace  $\mathcal{L}\left(Pf \frac{H(x)}{x^k}\right)$  de la distribution  $Pf \frac{H(x)}{x^k}$  définie dans l'exercice 2.4.9 du chapitre 2.

Solution : Une des méthodes pour déterminer  $\mathcal{L}\left(\text{Pf } \frac{H(x)}{x^k}\right)$  nécessite un calcul des dérivées successives de la distribution  $\text{Pf } \frac{H(x)}{x^k}$ . Or il est plus facile d'utiliser les résultats obtenus dans les exercices 2.4.9 et 2.4.11 du chapitre 2, c'est-à-dire

$$\left(\text{Pf } \frac{H(x)}{x^k}\right)' = -k \text{Pf } \frac{H(x)}{x^{k+1}} + (-1)^k \frac{\delta^{(k)}}{k!},$$

et

$$(H(x) \ln x)' = \text{Pf } \frac{H(x)}{x}.$$

Donc en utilisant ces relations, on établit par récurrence que

$$\text{Pf } \frac{H(x)}{x^{k+1}} = \frac{(-1)^k}{k!} \left( (H(x) \ln x)^{(k+1)} + \left( \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \right) \delta^{(k)} \right).$$

On en déduit que :

$$\mathcal{L}\left(\text{Pf } \frac{H(x)}{x^{k+1}}\right) = \frac{(-1)^k}{k!} \left( \mathcal{L}\left((H(x) \ln x)^{(k+1)}\right) + \left( \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \right) \mathcal{L}\left(\delta^{(k)}\right) \right).$$

Or

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left((H(x) \ln x)^{(k+1)}\right) &= p^{k+1} \mathcal{L}(H(x) \ln x), \quad (\text{proposition 8.2.4}) \\ &= -p^{k+1}(C + \ln p), \quad (\text{exercice précédent}) \end{aligned}$$

où  $C$  est la constante d'Euler et  $\mathcal{L}(\delta^{(k)}) = p^k$  (exemple 8.2.2) donc

$$\mathcal{L}\left((H(x) \ln x)^{(k+1)}\right) = \frac{(-1)^k}{k!} p^k \left( \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} - C - \ln p \right).$$

**Exercice 8.4.17** Résoudre l'équation différentielle

$$\frac{d^3x}{dt^3} + x(t) = 0,$$

avec les conditions initiales :  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = 3$ ,  $x''(0) = 8$ , en utilisant la méthode de Laplace.

Solution : Soit  $X(p) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ , la transformée de Laplace de  $x(t)$ . On a

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^3x}{dt^3}\right\} + \mathcal{L}\{x(t)\} = 0.$$

Dès lors

$$\begin{aligned} p^2 X(p) - p^2 x(0) - px'(0) - x''(0) + X(p) &= 0, \\ p^2 X(p) - p^2 - 3p - 8 + X(p) &= 0, \end{aligned}$$

d'où

$$X(p) = \frac{p^2 + 3p + 8}{p^3 + 1}.$$

Décomposons  $X(p)$  en éléments simples. On a

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{p^2 + 3p + 8}{(p+1)(p^2 - p + 1)}, \\ &= \frac{2}{(p+1)} + \frac{6-p}{p^2 - p + 1}, \\ &= \frac{2}{(p+1)} - \frac{p - \frac{1}{2}}{\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2} + \frac{11}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\frac{3}{4}}}{\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2}, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$x(t) = 2e^{-t} + e^{\frac{t}{2}} \left( -\cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \frac{11}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right).$$

**Exercice 8.4.18** Résoudre, par la méthode de Laplace, l'équation différentielle

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x(t) = y(t),$$

avec les conditions initiales :  $x(0) = x'(0) = 0$  où  $y(t)$  est une fonction connue ayant une transformée de Laplace  $Y(p) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ .

Solution : Soit  $X(p) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ , la transformée de Laplace de  $x(t)$ . On a

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\} + \mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{y(t)\},$$

d'où

$$p^2 X(p) + X(p) = Y(p),$$

car  $x(0) = x'(0) = 0$  et donc

$$X(p) = \frac{1}{p^2 + 1} Y(p).$$

Or

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \mathcal{L}\{g(t)\} = F(p) G(p).$$

Ici  $F(p) = \frac{1}{p^2+1}$ , d'où  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \sin t$  et  $G(p) = Y(p)$ , d'où  $g(t) = y(t)$ . Par conséquent,

$$x(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_0^t y(\tau) \sin \tau d\tau.$$

**Exercice 8.4.19** On considère l'équation différentielle

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0,$$

avec les conditions initiales :  $x(0) = x_0$ ,  $x'(0) = v_0$ . Cette équation décrit le mouvement d'une particule de masse  $m$  qui se déplace le long d'une trajectoire rectiligne et se trouve attirée vers l'origine par une force  $kx$  où  $x$  est le déplacement et  $k > 0$ . L'expression  $c \frac{dx}{dt}$ , ( $c > 0$ ), désigne une autre force qui intervient dans le problème. Etudier le mouvement de cette particule par la méthode de Laplace.

Solution : Afin de ne pas alourdir les notations, on pose :  $\frac{c}{m} = 2\lambda$ ,  $\frac{k}{m} = \omega^2$  et l'équation ci-dessus s'écrit sous la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0.$$

Soit  $X(p) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ , la transformée de Laplace de  $x(t)$ . On a

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^2x}{dt^2} \right\} + 2\lambda \mathcal{L} \left\{ \frac{dx}{dt} \right\} + \omega^2 \mathcal{L}\{x\} = 0,$$

d'où

$$p^2 X(p) - px(0) - x'(0) + 2\omega(pX(p) - x(0)) + \omega^2 X(p) = 0,$$

ou

$$p^2 X(p) - px_0 - v_0 + 2\lambda p X(p) - 2\lambda x_0 + \omega^2 X(p) = 0,$$

ou encore

$$(p^2 + 2\lambda p + \omega^2)X(p) = px_0 + 2\lambda p + v_0.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{px_0 + 2\lambda p + v_0}{p^2 + 2\lambda p + \omega^2}, \\ &= \frac{(p + \lambda)x_0 + (\lambda x_0 + v_0)}{(p + \lambda)^2 + \omega^2 - \lambda^2}, \\ &= x_0 \frac{p + \lambda}{(p + \lambda)^2 + \omega^2 - \lambda^2} + (\lambda x_0 + v_0) \frac{1}{(p + \lambda)^2 + \omega^2 - \lambda^2}. \end{aligned}$$

Nous allons distinguer différents cas :

a) Si  $\omega^2 - \lambda^2 > 0$ , alors

$$X(p) = x_0 \frac{p + \lambda}{(p + \lambda)^2 + (\sqrt{\omega^2 - \lambda^2})^2} + \frac{(\lambda x_0 + v_0)}{\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}} \frac{\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}}{(p + \lambda)^2 + (\sqrt{\omega^2 - \lambda^2})^2},$$

d'où

$$x(t) = x_0 e^{-\lambda t} \cos \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} t + \frac{\lambda x_0 + v_0}{\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}} e^{-\lambda t} \sin \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} t.$$

b) Si  $\omega^2 - \lambda^2 = 0$ , alors

$$X(p) = x_0 \frac{1}{p + \lambda} + (\lambda x_0 + v_0) \frac{1}{(p + \lambda)^2},$$

d'où

$$x(t) = x_0 e^{-\lambda t} + (\lambda x_0 + v_0) t e^{-\lambda t}.$$

c) Si  $\omega^2 - \lambda^2 < 0$ , alors

$$X(p) = x_0 \frac{p + \lambda}{(p + \lambda)^2 - (\sqrt{\lambda^2 - \omega^2})^2} + \frac{(\lambda x_0 + v_0)}{\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}} \frac{\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}}{(p + \lambda)^2 - (\sqrt{\lambda^2 - \omega^2})^2},$$

d'où

$$x(t) = x_0 \cosh \sqrt{\lambda^2 - \omega^2} t + \frac{\lambda x_0 + v_0}{\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}} \sinh \sqrt{\lambda^2 - \omega^2} t.$$

**Exercice 8.4.20** On considère le système d'équations différentielles

$$\begin{aligned} \frac{dx_0(t)}{dt} + ax_0(t) &= 0, \\ \frac{dx_k(t)}{dt} + ax_k(t) &= ax_{k-1}(t), \quad k = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

avec les conditions initiales suivantes :  $x_0(t) = 1$ ,  $x_k(0) = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$

- a) Calculer explicitement la transformée de Laplace de la fonction :  $e^{-at} t^k$ .
- b) Déterminer la transformée de Laplace  $X_k(p) = \mathcal{L}\{x_k(t)\}$  de  $x_k(t)$ .
- c) En déduire la solution du système ci-dessus.

Solution : a) D'après la propriété 8.1.7, si  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$ , alors

$$\mathcal{L}\{f(t)e^{-at}\} = F(p + a), \quad \text{Re}(p + a) > \sigma_0.$$

Ici  $f(t) = t^k$  et  $F(p) = \mathcal{L}\{t^k\} = \frac{k!}{p^{k+1}}$ . Donc

$$\mathcal{L}\{e^{-at} t^k\} = \frac{k!}{(p + a)^{k+1}}.$$

b) On a

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \left\{ \frac{dx_0(t)}{dt} \right\} + a\mathcal{L}\{x_0(t)\} &= 0, \\ \mathcal{L} \left\{ \frac{dx_k(t)}{dt} \right\} + a\mathcal{L}\{x_k(t)\} &= a\mathcal{L}\{x_{k-1}(t)\}, \quad k = 1, 2, \dots, n\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}pX_0(p) - x_0(0) + aX_0(p) &= 0, \\ pX_k(p) - x_k(0) + aX_k(p) &= aX_{k-1}(p), \quad k = 1, 2, \dots, n\end{aligned}$$

En tenant compte des conditions initiales, on obtient

$$\begin{aligned}X_0(p) &= \frac{1}{p+a}, \\ X_k(p) &= \frac{a}{p+a}X_{k-1}(p), \quad k = 1, 2, \dots, n\end{aligned}$$

ou explicitement

$$X_0(p) = \frac{1}{p+a}, \quad X_1(p) = \frac{a}{(p+a)^2}, \quad X_2(p) = \frac{a^2}{(p+a)^3}, \dots$$

On montre aisément que

$$X_k(p) = \frac{a^k}{(p+a)^{k+1}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

c) On a

$$\begin{aligned}X_k(p) = \mathcal{L}\{x_k(t)\} &= \frac{a^k}{(p+a)^{k+1}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \\ &= \frac{a^k}{k!} \cdot \frac{k!}{(p+a)^{k+1}}, \\ &= \frac{a^k}{k!} \cdot \mathcal{L}\{e^{-at} t^k\},\end{aligned}$$

d'après la question précédente. Par conséquent,

$$x_k(t) = \frac{(at)^k e^{-at}}{k!}.$$

**Exercice 8.4.21** Résoudre l'équation intégrale

$$f(x) = \sin x + 2 \int_0^x \cos(x-t)f(t)dt.$$

Solution : L'équation ci-dessus s'écrit sous la forme

$$f(x) = \sin x + 2 \cos x * f(x).$$

En appliquant sur les deux membres de cette équation la transformée de Laplace, on obtient

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \mathcal{L}\{\sin x\} + 2\mathcal{L}\{\cos x\}\mathcal{L}\{f(x)\},$$

ou

$$F(p) = \frac{1}{p^2 + 1} + 2 \frac{p}{p^2 + 1} F(p).$$

Dès lors,  $F(p) = \frac{1}{(p-1)^2}$ , et par conséquent  $f(x) = xe^x$ .

**Exercice 8.4.22** Résoudre l'équation intégrale non-linéaire suivante :

$$x^3 - 6 \int_0^x f(x-t)f(t)dt = 0.$$

Solution : Soit  $F(p) = \mathcal{L}\{f(x)\}$  la transformée de Laplace de  $f(x)$ . On a

$$\mathcal{L}\{x^3\} - 6\mathcal{L}\left\{\int_0^x f(x-t)f(t)dt\right\} = 0,$$

ou  $\frac{6}{p^4} - 6F^2(p) = 0$ . D'où  $F(p) = \pm \frac{1}{p^2}$ , et  $f(x) = \pm x$  sont deux solutions de l'équation proposée.

**Exercice 8.4.23** Soit  $F(p) = \mathcal{L}\{f(x)\}$  la transformée de Laplace de  $f(x)$ . On considère l'équation intégrale

$$xf'(x) + 2 \int_0^x f(t) \sin(x-t)dt = \sin t, \quad t > 0$$

avec la condition initiale :  $f(0) = 1$ .

- a) Montrer que  $F(p)$  vérifie une équation différentielle linéaire de premier ordre et à coefficients variables.
- b) Déterminer  $F(p)$ .
- c) En déduire la solution  $f(x)$  de l'équation intégrale ci-dessus.

Solution : a) On a

$$xf'(x) + 2f(x) * \sin x = \sin x,$$

d'où

$$\mathcal{L}\{xf'(x)\} + 2\mathcal{L}\{f(x) * \sin x\} = \mathcal{L}\{\sin x\}.$$

Or

$$\mathcal{L}\{xf'(x)\} = -\frac{d}{dp}\mathcal{L}\{f'(x)\} = -\frac{d}{dp}\mathcal{L}\{pF(p) - f(0)\} = -F(p) - pF'(p),$$

et

$$\mathcal{L}\{f(x) * \sin x\} = \mathcal{L}\{f(x)\}\mathcal{L}\{\sin x\} = F(p) \cdot \frac{1}{p^2 + 1},$$

donc

$$-F(p) - pF'(p) + 2\frac{F(p)}{p^2 + 1},$$

ou encore

$$-p(p^2 + 1)F' + (1 - p^2)F = 1.$$

b) La solution de l'équation ci-dessus est égale à la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation en question. La solution générale de l'équation homogène

$$-p(p^2 + 1)F' + (1 - p^2)F = 0,$$

s'obtient aisément : on a

$$\frac{F'}{F} = -\frac{p^2 - 1}{p(p^2 + 1)} = \frac{1}{p} - \frac{2p}{p^2 + 1},$$

et donc  $F(p) = C \frac{p}{p^2 + 1}$ . Pour déterminer une solution particulière de l'équation non-homogène, on va utiliser la méthode de la variation de la constante. On a

$$F' = C' \frac{p}{p^2 + 1} + C \frac{1 - p^2}{(p^2 + 1)^2},$$

et l'équation en question devient

$$-p(p^2 + 1) \left( C' \frac{p}{p^2 + 1} + C \frac{1 - p^2}{(p^2 + 1)^2} \right) + (1 - p^2)C \frac{p}{p^2 + 1} = 1,$$

c'est-à-dire  $C' = -\frac{1}{p^2}$ , ce qui implique  $C = \frac{1}{p} + K$ , où  $K$  est une constante à déterminer. On a donc

$$F(p) = \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{Kp}{p^2 + 1}.$$

Or  $1 = f(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = K$ , et par conséquent

$$F(p) = \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{p}{p^2 + 1}.$$

c) On a

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p^2 + 1} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{p}{p^2 + 1} \right\},$$

d'où

$$f(x) = \sin x + \cos x, \quad x > 0$$

ou encore

$$f(x) = (\sin x + \cos x)H(x),$$

où  $H(x)$  est la fonction de Heaviside.

**Exercice 8.4.24** Résoudre le système d'équations intégrales suivant :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sin x + \int_0^x f_2(t)dt, \\ f_2(x) &= 1 - \cos x - \int_0^x f_1(t)dt. \end{aligned}$$

Solution : Soient  $F_1(p) = \mathcal{L}\{f_1(x)\}$  et  $F_2(p) = \mathcal{L}\{f_2(x)\}$  les transformées de Laplace des fonctions  $f_1(x)$  et  $f_2(x)$  respectivement. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f_1(x)\} &= \mathcal{L}\{\sin x\} + \mathcal{L}\left\{\int_0^x f_2(t)dt\right\}, \\ \mathcal{L}\{f_2(x)\} &= \mathcal{L}\{1 - \cos x\} - \mathcal{L}\left\{\int_0^x f_1(t)dt\right\}, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} F_1(p) &= \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{1}{p}F_2(p), \\ F_2(p) &= \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1} - \frac{1}{p}F_1(p). \end{aligned}$$

En résolvant ce système, on obtient

$$\begin{aligned} F_1(p) &= \frac{2}{p^2 + 1} - \frac{p^2}{(p^2 + 1)^2} - \frac{1}{(p^2 + 1)^2}, \\ F_2(p) &= \frac{p}{p^2 + 1} - \frac{p^3}{(p^2 + 1)^2} - \frac{p}{(p^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 2\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p^2 + 1} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{p^2}{(p^2 + 1)^2} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(p^2 + 1)^2} \right\}, \\ f_2(x) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{p}{p^2 + 1} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{p^3}{(p^2 + 1)^2} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{p}{(p^2 + 1)^2} \right\}. \end{aligned}$$

En utilisant par exemple la table des transformées de Laplace, c'est-à-dire

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2+1}\right\} = \sin x, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{p^2+1}\right\} = \cos x,$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p^2+1)^2}\right\} = \frac{\sin x - x \cos x}{2}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{(p^2+1)^2}\right\} = \frac{x \sin x}{2},$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p^2}{(p^2+1)^2}\right\} = \frac{\sin x + x \cos x}{2}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p^3}{(p^2+1)^2}\right\} = \cos x - \frac{x \sin x}{2},$$

on obtient finalement la solution  $f_1(x) = \sin x$ ,  $f_2(x) = 0$ .

**Exercice 8.4.25** Déterminer la solution de l'équation intégrale

$$f''(x) + \int_0^x e^{2(x-t)} f'(t) dt = e^{2x},$$

satisfaisant aux conditions initiales :  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$ .

Solution : Soit  $F(p) = \mathcal{L}\{f(x)\}$  la transformée de Laplace de  $f(x)$ . On a

$$\mathcal{L}\{f''(x)\} + \mathcal{L}\left\{\int_0^x e^{2(x-t)} f'(t) dt\right\} = \mathcal{L}\{e^{2x}\}.$$

Or

$$\mathcal{L}\{f''(x)\} = p^2 F(p) - p f(0) - f'(0) = p^2 F(p) - 1,$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\int_0^x e^{2(x-t)} f'(t) dt\right\} &= \mathcal{L}\{e^{2x} * f'(t)\}, \\ &= \mathcal{L}\{e^{2x}\} \mathcal{L}\{f'(t)\}, \\ &= \frac{1}{p-2} (p F(p) - f(0)), \\ &= \frac{p}{p-2} F(p), \end{aligned}$$

donc

$$p^2 F(p) - 1 + \frac{p}{p-2} F(p) = \frac{1}{p-2}.$$

D'où  $F(p) = \frac{1}{p(p-1)}$ , et par conséquent  $f(x) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = e^x - 1$ .

**Exercice 8.4.26** Déterminer la solution de l'équation intégrale

$$x = \int_0^x \cos(x-t) f(t) dt.$$

Solution : Ici  $g(x) = x$  et  $k(x, t) = \cos(x - t)$ . On a  $g(0) = 0$  et  $g, g', k, \frac{\partial k}{\partial x}$  sont continues. En dérivant l'équation ci-dessus par rapport à  $x$ , on obtient

$$1 = \cos 0 \cdot f(x) - \int_0^x \sin(x - t)f(t)dt.$$

D'où

$$f(x) = 1 + \int_0^x \sin(x - t)f(t)dt = 1 + \sin x * f(x).$$

Soit  $F(p) = \mathcal{L}\{f(x)\}$  la transformée de Laplace de  $f(x)$ . On a

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \mathcal{L}\{1\} - \mathcal{L}\{\sin x\}\mathcal{L}\{f(x)\},$$

d'où

$$F(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2 + 1}F(p).$$

Donc  $F(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^3}$ , et par conséquent  $f(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$ .

**Exercice 8.4.27** *On considère l'équation intégrale d'Abel définie par*

$$\int_0^x \frac{y(t)}{(x - t)^\alpha} dt = f(x), \quad 0 < \alpha < 1$$

où  $f(x)$  est une fonction connue. Le problème de l'inversion d'Abel consiste à déterminer  $y$  à partir de  $f$ .

1) On suppose que :  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

a) Supposons que  $f$  et  $y$  sont des fonctions continues et possèdent des transformées de Laplace  $F(p) = \mathcal{L}\{f(x)\}$  et  $Y(p) = \mathcal{L}\{y(x)\}$ . Déterminer  $y$ .

b) Supposons maintenant qu'en outre  $f$  est dérivable. Déterminer  $y$ .

c) Résoudre l'équation intégrale

$$\int_0^x \frac{y(t)}{\sqrt{x - t}} dt = x^2 + x + 1.$$

2) On suppose que :  $0 < \alpha < 1$ .

a) Supposons que  $f(0) = 0$ . Déterminer  $y$ .

b) Résoudre l'équation intégrale

$$\int_0^x \frac{y(t)}{(x - t)^{\frac{1}{3}}} dt = x(x + 1).$$

Solution : 1) a) On a

$$\int_0^x \frac{y(t)}{\sqrt{x-t}} dt = f(x),$$

ou

$$y(x) * \frac{1}{\sqrt{x}} = f(x).$$

Dès lors,

$$\mathcal{L} \left\{ y(x) * \frac{1}{\sqrt{x}} \right\} = \mathcal{L}\{f(x)\},$$

d'où

$$\mathcal{L}\{y(x)\} \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{\sqrt{x}} \right\} = \mathcal{L}\{f(x)\},$$

et

$$Y(p) \cdot \sqrt{\frac{\pi}{p}} = F(p), \quad \operatorname{Re} p > 0$$

Par conséquent,

$$Y(p) = \sqrt{\frac{p}{\pi}} F(p).$$

D'après la proposition 8.1.14, la transformée de Laplace d'une fonction doit tendre à l'infini vers 0. Or  $\sqrt{p}$  ne tend pas vers 0 quand  $p \rightarrow +\infty$ , donc elle ne peut être la transformée d'une fonction. Pour remédier à cela, divisons l'équation précédente par  $p$ . On obtient

$$\begin{aligned} \frac{Y(p)}{p} &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{p}} F(p), \\ &= \frac{1}{\pi} \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{\sqrt{x}} \right\} \mathcal{L}\{f(x)\}, \quad \text{car } \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{\sqrt{x}} \right\} = \sqrt{\frac{\pi}{p}}, \operatorname{Re} p > 0 \\ &= \frac{1}{\pi} \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{\sqrt{x}} * f(x) \right\}. \end{aligned}$$

Or d'après la proposition 8.1.13, on a

$$\frac{Y(p)}{p} = \mathcal{L} \left\{ \int_0^x y(t) dt \right\},$$

donc

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^x y(t) dt \right\} = \frac{1}{\pi} \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{\sqrt{x}} * f(x) \right\} = \frac{1}{\pi} \mathcal{L} \left\{ \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt \right\},$$

et

$$\int_0^x y(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt.$$

En dérivant les deux membres de cette équation par rapport à  $x$ , on obtient

$$y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt.$$

b) En intégrant par parties, on obtient

$$\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt = 2f(0)\sqrt{x} + 2 \int_0^x \sqrt{x-t} f'(t) dt.$$

Dès lors

$$\frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt = \frac{f(0)}{\sqrt{x}} + 2 \lim_{t \rightarrow x} \sqrt{x-t} f'(t) + \int_0^x \frac{f'(t)}{\sqrt{x-t}} dt.$$

L'expression de  $y$  obtenue dans a), s'écrit sous la forme

$$y = \frac{f(0)}{\pi \sqrt{x}} + \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{f'(t)}{\sqrt{x-t}} dt.$$

c) Ici  $f(x) = x^2 + x + 1$ , donc

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\pi \sqrt{x}} + \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{2t+1}{\sqrt{x-t}} dt, \\ &= \frac{1}{\pi \sqrt{x}} + \frac{1}{\pi} \left( \frac{2\sqrt{x}}{3} (4x+3) \right), \\ &= \frac{1}{3\pi} \left( \frac{8x^2+6x+3}{\sqrt{x}} \right). \end{aligned}$$

2) a) En raisonnant de manière analogue, on obtient

$$y(x) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^x f'(t)(x-t)^{\alpha-1} dt.$$

b) Ici  $f(x) = x(x+1)$  et  $f(0) = 0$ . D'après la question précédente, on a

$$y(x) = \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\pi} \int_0^x (2t+1)(x-t)^{(-\frac{2}{3})} dt = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \sqrt[3]{x}(3x+2).$$

**Exercice 8.4.28** On considère l'équation différentielle de Bessel

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

où  $y$  désigne la fonction inconnue.

a) En effectuant le changement de fonction :  $y = x^n u$ , déterminer l'équation (\*) que satisfait  $u$  considérée comme fonction de  $x$ .

b) On appelle fonction de Bessel de première espèce d'ordre  $n$  la fonction  $J_n$  définie par

$$x \mapsto J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \frac{1}{n!} u(x),$$

où  $u$  est solution de l'équation (\*). Déterminer les transformées de Laplace des fonctions de Bessel suivantes :  $J_0(x)$ ,  $J_0(ax)$  où  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $J_1(x)$  et  $J_n(x)$ . Indication : on pourra utiliser sans démonstration les résultats suivants,

$$J_0(x) = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + \cdots,$$

$$J_n(x) = \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n \left(1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2.4.(2n+2).(2n+4)} + \cdots\right),$$

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n\theta-x\sin\theta)} d\theta,$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, J_{n+1}(x) = -x^n \frac{d}{dx} \left( \frac{J_n(x)}{x^n} \right).$$

Solution : a) On obtient immédiatement l'équation (\*),

$$xu'' + (2n+1)u' + xu = 0.$$

b) La fonction  $J_0(x)$  vérifie l'équation différentielle

$$xJ_0''(x) + J_0'(x) + xJ_0(x) = 0.$$

d'où,

$$\mathcal{L}\{xJ_0''(x)\} + \mathcal{L}\{J_0'(x)\} + \mathcal{L}\{xJ_0(x)\} = 0.$$

Soit  $X(p) = \mathcal{L}\{J_0(x)\}$ , la transformée de Laplace de  $J_0(x)$ . Dès lors,

$$-\frac{d}{dp}(p^2X(p) - pJ_0(0) - J_0'(x)) + pX(p) - J_0(0) - \frac{d}{dp}X(p) = 0.$$

Or  $J_0(0) = 1$  et  $J_0'(0) = 0$ , donc

$$(p^2 + 1) \frac{d}{dp}X(p) + pX(p) = 0,$$

et par conséquent

$$X(p) = \frac{C}{\sqrt{p^2 + 1}},$$

où  $C$  est une constante. D'après la proposition 8.1.15, on a

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pX(p) = J_0(0),$$

ce qui montre que  $C = 1$  et finalement

$$X(p) = \mathcal{L}\{J_0(x)\} = \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}.$$

De même, on a pour  $a \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{J_0(ax)\} &= \int_0^\infty J_0(ax)e^{-px}dx, \\ &= \frac{1}{a} \int_0^\infty J_0(u)e^{-\frac{pu}{a}}du, \quad u = ax \\ &= \frac{1}{a} X\left(\frac{p}{a}\right), \end{aligned}$$

d'où

$$\mathcal{L}\{J_0(ax)\} = \frac{1}{a\sqrt{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{p^2 + a^2}}.$$

Déterminons maintenant  $\mathcal{L}\{J_1(x)\}$ . Puisque  $J_1(x) = -J'_0(x)$ , alors

$$\mathcal{L}\{J_1(x)\} = -\mathcal{L}\{J'_0(x)\} = -(pX(p) - J_0(0)) = -\frac{p}{\sqrt{p^2 + 1}} + 1,$$

et par conséquent

$$\mathcal{L}\{J_1(x)\} = \frac{\sqrt{p^2 + 1} - p}{\sqrt{p^2 + 1}}.$$

En raisonnant de manière similaire aux cas précédents, on montre que

$$\mathcal{L}\{J_n(x)\} = \frac{(\sqrt{p^2 + 1} - p)^n}{\sqrt{p^2 + 1}}, \quad \operatorname{Re} p > 0$$

Une autre méthode pour obtenir ce résultat consiste à utiliser le théorème des résidus. En effet, notons tout d'abord que pour  $\operatorname{Re} p > 0$ , l'intégrale  $\mathcal{L}\{J_n(x)\} = \int_0^\infty J_n(x)e^{-px}dx$  converge et  $\int_0^\infty e^{i(n\theta - x \sin \theta)} e^{-px} d\theta$  converge uniformément. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{J_n(x)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left( \int_{-\pi}^\pi e^{i(n\theta - x \sin \theta)} d\theta \right) e^{-px} dx, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \left( \int_0^\infty e^{-i(p+i \sin \theta)} dx \right) e^{inx} d\theta, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \frac{e^{inx}}{p + i \sin \theta} d\theta, \\ &= \frac{1}{\pi} \oint_\gamma f(z) dz, \end{aligned}$$

où

$$f(z) = \frac{z^n}{z^2 + 2pz - 1},$$

et  $\gamma$  est le cercle de centre 0 et de rayon 1. La fonction  $f(z)$  admet deux pôles  $z_1 = -p + \sqrt{p^2 + 1}$  et  $z_2 = -p - \sqrt{p^2 + 1}$ . Le seul pôle qui se trouve à l'intérieur de  $\gamma$  étant  $z_1$ , alors d'après le théorème des résidus, on a

$$\mathcal{L}\{J_n(x)\} = \frac{1}{\pi} \oint_{\gamma} f(z) dz = \frac{1}{\pi} 2\pi i \operatorname{Rés}(f(z), z_1) = \frac{(\sqrt{p^2 + 1} - p)^n}{\sqrt{p^2 + 1}}, \quad \operatorname{Re} p > 0$$

**Exercice 8.4.29** Déterminer la solution  $u(x, t)$  de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

qui satisfait aux conditions suivantes : pour  $x = 0$ , on a

$$u(0, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ f(t) & \text{si } t > 0 \end{cases}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ g(t) & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

où  $f$  et  $g$  sont deux fonctions données, définies pour  $t > 0$ . On pourra admettre la légitimité des calculs. On représentera  $u$  par une intégrale de la forme

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} (A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x) e^{-a^2 \omega^2 t} d\omega,$$

où  $A(\omega)$  est une fonction paire et  $B(\omega)$  est une fonction impaire et l'on se ramène à un problème de transformée de Laplace en posant  $p = a^2 \omega^2$ .

Solution : On a

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} (-\omega A(\omega) \sin \omega x + \omega B(\omega) \cos \omega x) e^{-a^2 \omega^2 t} d\omega,$$

et

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{-a^2 \omega^2 t} d\omega = f(t), \quad t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega B(\omega) e^{-a^2 \omega^2 t} d\omega = g(t), \quad t > 0 \end{aligned}$$

Par hypothèse,  $A(\omega)$  est une fonction paire et  $B(\omega)$  est une fonction impaire, donc  $A(\omega)e^{-a^2 \omega^2 t}$  et  $B(\omega)e^{-a^2 \omega^2 t}$  sont des fonctions paires. Dès lors,

$$\begin{aligned} f(t) &= 2 \int_0^{\infty} A(\omega) e^{-a^2 \omega^2 t} d\omega, \\ g(t) &= 2 \int_0^{\infty} \omega B(\omega) e^{-a^2 \omega^2 t} d\omega. \end{aligned}$$

En posant  $p = a^2\omega^2$ , on obtient

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^\infty \frac{A\left(\frac{\sqrt{p}}{a}\right)}{a\sqrt{p}} e^{-pt} dp = \mathcal{L} \left\{ \frac{A\left(\frac{\sqrt{p}}{a}\right)}{a\sqrt{p}} \right\}, \\ g(t) &= \int_0^\infty \frac{B\left(\frac{\sqrt{p}}{a}\right)}{a^2} e^{-pt} dp = \mathcal{L} \left\{ \frac{B\left(\frac{\sqrt{p}}{a}\right)}{a^2} \right\}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{A\left(\frac{\sqrt{p}}{a}\right)}{a\sqrt{p}} &= \mathcal{L}^{-1}\{f(t)\} \equiv F(p), \\ \frac{B\left(\frac{\sqrt{p}}{a}\right)}{a^2} &= \mathcal{L}^{-1}\{g(t)\} \equiv G(p), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} A(\omega) &= a^2\omega F(a^2\omega^2), \\ B(\omega) &= a^2\mathcal{L}^{-1}\{g(t)\} \equiv G(a^2\omega^2), \end{aligned}$$

et par conséquent

$$u(x, t) = a^2 \int_{-\infty}^{\infty} (F(a^2\omega^2)\omega \cos \omega x + G(a^2\omega^2) \sin \omega x) e^{-a^2\omega^2 t} d\omega.$$

**Exercice 8.4.30** Déterminer la solution  $u(x, t)$  de l'équation aux dérivées partielles (des ondes ou des cordes vibrantes) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

satisfaisant aux conditions :  $u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$ ,  $u(0, t) = \sin x$ ,  $x, t > 0$ .  
On suppose qu'il existe une constante  $M > 0$  tel que :  $|u(x, t)| \leq M$ .

Solution : Soit  $U(x, p) = \mathcal{L}\{u(x, t)\}$  la transformée de Laplace de  $u(x, t)$ . On a

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\} = \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\}.$$

On a montré dans l'exemple 8.3.3, que

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\} = \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial t} e^{-pt} dt = pU(x, p) - u(x, 0).$$

De même, on a

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\} &= \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} \right\}, \quad v = \frac{\partial u}{\partial t} \\
 &= p \mathcal{L}\{v(x, t)\} - v(x, 0), \\
 &= p \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\} - \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0), \\
 &= p(pU(x, p) - u(x, 0)) - \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0), \\
 &= p^2 U(x, p) - pu(x, 0) - \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0).
 \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} = \frac{d^2 U(x, p)}{dx^2}, \quad (\text{d'après l'exemple 8.3.3})$$

Dès lors, l'équation précédente s'écrit sous la forme

$$p^2 U(x, p) - pu(x, 0) - \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \frac{d^2 U(x, p)}{dx^2}.$$

Par hypothèse,  $u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$ , d'où

$$\frac{d^2 U(x, p)}{dx^2} - p^2 U(x, p) = 0,$$

donc

$$U(x, p) = C_1 e^{px} + C_2 e^{-px},$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes. Puisque  $|u(x, t)| \leq M$ , on en déduit que  $C_1 = 0$  et  $U(x, p) = C_2 e^{-px}$ . Pour déterminer  $C_2$ , notons que :  $U(0, p) = C_2$  et par hypothèse

$$U(0, p) = \mathcal{L}\{u(0, t)\} = \mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{p^2 + 1},$$

donc  $C_2 = \frac{1}{p^2 + 1}$  et par conséquent

$$U(x, p) = \frac{e^{-px}}{p^2 + 1}.$$

Finalement, la solution de l'équation proposée est

$$u(x, t) = \begin{cases} \sin(t - x) & \text{si } t > x \\ 0 & \text{si } t < x \end{cases}$$

**Exercice 8.4.31** Soit  $f(x, y)$  une fonction de deux variables  $x, y$  et supposons qu'elle satisfait aux conditions suivantes :

(i) pour  $x < 0$ , on a  $f(x, y) = 0$ .

(ii) pour  $x > 0$ ,  $f$  satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + a^2 b^2 f = 0, \quad (a^2 > 0, b^2 > 0)$$

(iii) pour  $x = 0$ , on a  $f(0, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = 0$ .

(iv)  $f$  est bornée lorsque  $y \rightarrow +\infty$ .

(v) pour  $y = 0$ , on a  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = -u(x)$  où  $u(x)$  est une fonction connue ayant une transformée de Laplace  $U(p) = \mathcal{L}\{u(x)\}$ .

En utilisant la méthode de Laplace, déterminer  $f(x, 0)$ .

Solution : On pose  $F(p, y) = \mathcal{L}\{f(x, y)\}$ . D'après (ii), on a

$$a^2 \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right\} - \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right\} + a^2 b^2 \mathcal{L}\{f\} = 0,$$

d'où

$$a^2 \left( p^2 F(p, y) - p f(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, y) \right) - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(p, y) + a^2 b^2 F(p, y) = 0.$$

En tenant compte de la condition (iii), on obtient

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(p, y) - a^2(p^2 + b^2)F(p, y) = 0.$$

La solution générale de cette équation est

$$F(p, y) = A e^{-a\sqrt{p^2+b^2}y} + B e^{a\sqrt{p^2+b^2}y}.$$

D'après (iv),  $f$  est bornée lorsque  $y \rightarrow +\infty$ , donc  $B = 0$ . Dès lors

$$F(p, y) = A e^{-a\sqrt{p^2+b^2}y},$$

et  $F(p, 0) = A$ . Pour déterminer la constante  $A$ , on procède comme suit : on a

$$\frac{\partial F}{\partial y}(p, y) = -A a \sqrt{p^2 + b^2} e^{-a\sqrt{p^2+b^2}y},$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial y}(p, 0) = -A a \sqrt{p^2 + b^2} = -\mathcal{L}\{u(x)\} = -U(p),$$

en vertu de (v). Donc

$$F(p, 0) = A = \frac{U(p)}{a\sqrt{p^2 + b^2}},$$

ou

$$\mathcal{L}\{f(x, 0)\} = \frac{1}{a\sqrt{p^2 + b^2}} U(p).$$

D'après l'exercice précédent,  $\frac{1}{a\sqrt{p^2 + b^2}}$  a pour original

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{a\sqrt{p^2 + b^2}}\right\} = \frac{1}{a} J_0(bx),$$

et  $U(p)$  a pour original  $\mathcal{L}^{-1}\{U(p)\} = u(x)$ . Dès lors, grâce au produit de convolution on a

$$f(x, 0) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{a\sqrt{p^2 + b^2}} U(p)\right\} = \frac{1}{a} J_0(bx) * u(x),$$

et finalement

$$f(x, 0) = \frac{1}{a} \int_0^x u(x - \tau) J_0(b\tau) d\tau.$$

**Exercice 8.4.32** Déterminer la solution  $u(x, t)$  de l'équation aux dérivées partielles :

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0,$$

satisfaisant aux conditions :

$$u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) = 0, \quad u(0, t) = 1, \quad x, t > 0.$$

On suppose que :  $|u(x, t)| \leq M$  où  $M > 0$  est une constante.

Solution : Soit  $U(x, p) = \mathcal{L}\{u(x, t)\}$  la transformée de Laplace de  $u(x, t)$ . On a

$$4\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\} + \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right\} = 0.$$

On a montré précédemment, que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial t} e^{-pt} dt = pU(x, p) - u(x, 0).$$

En raisonnant comme dans l'exemple 8.3.3, on obtient

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right\} = \frac{d^4 U(x, p)}{dx^4}.$$

En remplaçant ces expressions dans l'équation ci-dessus tout en tenant compte des conditions

$$u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0,$$

on obtient

$$\frac{d^4 U(x, p)}{dx^4} + 4p^2 U(x, p) = 0.$$

Cette équation admet la solution suivante :

$$\begin{aligned} U(x, p) &= c_1 e^{(1+i)\sqrt{p}x} + c_2 e^{(1-i)\sqrt{p}x} + c_3 e^{(-1+i)\sqrt{p}x} + c_4 e^{-(1+i)\sqrt{p}x}, \\ &= e^{\sqrt{p}x} (a \cos \sqrt{p}x + b \sin \sqrt{p}x) + e^{-\sqrt{p}x} (c \cos \sqrt{p}x + d \sin \sqrt{p}x), \end{aligned}$$

où

$$a = c_1 + c_2, \quad b = i(c_1 - c_2), \quad c = c_3 + c_4, \quad d = i(c_3 - c_4),$$

sont des constantes à déterminer. Par hypothèse il existe une constante  $M > 0$  tel que :  $|u(x, t)| \leq M$ , donc  $U(x, p)$  est bornée ce qui implique :  $a = b = 0$ . En outre,

$$U(0, p) = c = \frac{1}{p},$$

et

$$\frac{d^2 U(0, p)}{dx^2} = -2p \sqrt{p} d = 0,$$

d'où  $d = 0$ . Dès lors

$$U(x, p) = \frac{e^{-\sqrt{p}x}}{p} \cos \sqrt{p}x.$$

Pour déterminer  $u(x, t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(x, p)\}$ , on va utiliser la formule de Bromwich-Wagner :

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\gamma}^{\sigma+i\gamma} U(x, p) e^{pt} dp.$$

La fonction

$$U(x, p) e^{pt} = \frac{e^{-\sqrt{p}x+pt}}{p} \cos \sqrt{p}x,$$

possède un point de branchement en  $p = 0$ . Pour uniformiser  $U(x, p)e^{pt}$ , on utilise comme coupure la partie de l'axe réel définie par  $x \leq 0$ . Calculons l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C U(x, p) e^{pt} dp.$$

Ici le contour de Bromwich  $\mathcal{C}$  est définie par

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_4 \cup \mathcal{C}_5 \cup \mathcal{C}_6,$$

où  $\mathcal{C}_1$  est le bord supérieur de la coupure,  $\mathcal{C}_3$  est le bord inférieur de la coupure,  $\mathcal{C}_2$  est l'arc de cercle de centre 0 et de rayon  $\varepsilon$ ; rejoignant les deux bords de la coupure,  $\mathcal{C}_4$  et  $\mathcal{C}_6$  sont deux arcs de cercles de centre 0 et de rayon  $R$  et enfin  $\mathcal{C}_5$  est une partie finie du domaine d'intégration (en fait une droite  $p = \sigma$ ). La fonction  $U(x, p)e^{pt}$  est uniforme sur  $\mathcal{C}$  et elle est holomorphe à l'intérieur de ce contour. D'après le théorème de Cauchy, on a

$$0 = \oint_{\mathcal{C}} U(x, p)e^{pt} dp = \sum_{k=1}^6 \int_{\mathcal{C}_k} U(x, p)e^{pt} dp.$$

Sur  $\mathcal{C}_1$ , on a  $p = \zeta e^{\pi i}$ ,  $\sqrt{p} = \sqrt{\zeta} e^{\frac{\pi i}{2}}$ ,  $\varepsilon \leq \zeta \leq R$ , d'où

$$\int_{\mathcal{C}_1} U(x, p)e^{pt} dp = \int_R^\varepsilon \frac{e^{-i\sqrt{\zeta}x - \zeta t}}{\zeta} \cos i\sqrt{\zeta} x d\zeta = \int_R^\varepsilon \frac{e^{-i\sqrt{\zeta}x - \zeta t}}{\zeta} \cosh \sqrt{\zeta} x d\zeta.$$

Sur  $\mathcal{C}_3$ , on a  $p = \zeta e^{-\pi i}$ ,  $\sqrt{p} = \sqrt{\zeta} e^{-\frac{\pi i}{2}}$ ,  $\varepsilon \leq \zeta \leq R$ , d'où

$$\int_{\mathcal{C}_3} U(x, p)e^{pt} dp = \int_R^\varepsilon \frac{e^{i\sqrt{\zeta}x - \zeta t}}{\zeta} \cos i\sqrt{\zeta} x d\zeta = \int_R^\varepsilon \frac{e^{i\sqrt{\zeta}x - \zeta t}}{\zeta} \cosh \sqrt{\zeta} x d\zeta.$$

Sur  $\mathcal{C}_2$ , on a  $p = \varepsilon e^{i\theta}$ ,  $\theta$  variant de  $-\pi$  à  $\pi$ , d'où

$$\int_{\mathcal{C}_2} U(x, p)e^{pt} dp = i \int_{\pi}^{-\pi} e^{-\sqrt{\varepsilon e^{i\theta}}x + \varepsilon e^{i\theta}t} \cos \sqrt{\varepsilon e^{i\theta}} x d\theta.$$

Sur  $\mathcal{C}_4$ , on a  $p = Re^{i\theta}$ ,  $\theta$  variant de  $\pi$  à  $2\pi - \theta_0$ , d'où

$$\int_{\mathcal{C}_4} U(x, p)e^{pt} dp = i \int_{\pi}^{2\pi - \theta_0} e^{-\sqrt{Re^{i\theta}}x + Re^{i\theta}t} \cos \sqrt{Re^{i\theta}} x d\theta.$$

Sur  $\mathcal{C}_6$ , on a  $p = Re^{i\theta}$ ,  $\theta$  variant de  $\theta_0$  à  $\pi$ , d'où

$$\int_{\mathcal{C}_6} U(x, p)e^{pt} dp = i \int_{\theta_0}^{\pi} e^{-\sqrt{Re^{i\theta}}x + Re^{i\theta}t} \cos \sqrt{Re^{i\theta}} x d\theta.$$

Sur  $\mathcal{C}_5$ , on a

$$\int_{\mathcal{C}_5} U(x, p)e^{pt} dp = \int_{\sigma - i\gamma}^{\sigma + i\gamma} \frac{e^{-\sqrt{px+pt}}}{p} \cos \sqrt{px} dp.$$

Calculons maintenant les limites de ces intégrales lorsque  $\gamma \rightarrow \infty$  (et donc  $R$ ) et  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Sur  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_3$ , on a

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_{\mathcal{C}_1} U(x, p) e^{pt} dp = - \int_0^\infty \frac{e^{-i\sqrt{\zeta}x - \zeta t}}{\zeta} \cosh \sqrt{\zeta} x d\zeta,$$

et

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_{\mathcal{C}_3} U(x, p) e^{pt} dp = \int_0^\infty \frac{e^{i\sqrt{\zeta}x - \zeta t}}{\zeta} \cosh \sqrt{\zeta} x d\zeta.$$

Sur  $\mathcal{C}_2$ , on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{C}_2} U(x, p) e^{pt} dp = -2\pi i.$$

Sur  $\mathcal{C}_4$  et  $\mathcal{C}_6$ , on a

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}_4} U(x, p) e^{pt} dp = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}_6} U(x, p) e^{pt} dp = 0,$$

en vertu du lemme de Jordan (il suffit d'utiliser un raisonnement similaire à celui fait dans l'exercice 8.4.14). Sur  $\mathcal{C}_5$ , on a

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}_5} U(x, p) e^{pt} dp &= \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{-\sqrt{p}x + pt}}{p} \cos \sqrt{p} x dp, \\ &= 2\pi i u(x, t). \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_{\mathcal{C}} U(x, p) e^{pt} dp, \\ &= - \int_0^\infty \frac{e^{-i\sqrt{\zeta}x - \zeta t}}{\zeta} \cosh \sqrt{\zeta} x d\zeta + \int_0^\infty \frac{e^{i\sqrt{\zeta}x - \zeta t}}{\zeta} \cosh \sqrt{\zeta} x d\zeta \\ &\quad - 2\pi i + 2\pi i u(x, t), \\ &= \int_0^\infty \frac{2ie^{-\zeta t} \sin \sqrt{\zeta} x \cosh \sqrt{\zeta} x}{\zeta} d\zeta - 2\pi i + 2\pi i u(x, t), \end{aligned}$$

d'où

$$u(x, t) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\zeta t} \sin \sqrt{\zeta} x \cosh \sqrt{\zeta} x}{\zeta} d\zeta.$$

## 8.5 Exercices proposés

**Exercice 8.5.1** Soit  $H(x)$  la fonction de Heaviside. Déterminer les transformées de Laplace des fonctions suivantes :

- a)  $H(x)e^{-\alpha x}$ .
- b)  $H(x) \cos \omega x$ .
- c)  $H(x) \sin \omega x$ .
- d)  $H(x) \frac{x^n}{n!}$ .

Réponse : a)  $\frac{1}{p+\alpha}$ , b)  $\frac{p}{p^2+\omega^2}$ , c)  $\frac{\omega}{\omega^2+p^2}$ , d)  $\frac{1}{p^{n+1}}$ .

**Exercice 8.5.2** Soient  $f$  une fonction localement sommable, d'abscisse de sommabilité  $\sigma_0$  et  $F$  sa transformée de Laplace. Montrer qu'en tout point de continuité de  $f$ , on a la formule d'inversion suivante :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p)e^{px} dp, \quad \sigma > \sigma_0$$

**Exercice 8.5.3** Déterminer la transformée de Laplace de  $\sum_{k=0}^{\infty} \delta(x-k)$ .

Réponse :  $\frac{1}{1-e^{-p}}$ .

**Exercice 8.5.4** Déterminer les transformées de Laplace des fonctions suivantes :

- a)  $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ .
- b)  $g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ .

Réponse :

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{p + \sqrt{p^2 + 1}}{\sqrt{p^2 + 1}}}, \quad \mathcal{L}\{g(x)\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{-p + \sqrt{p^2 + 1}}{\sqrt{p^2 + 1}}},$$

où  $\operatorname{Re} p > 0$ .

**Exercice 8.5.5** Soient  $f(x)$  une fonction localement sommable et  $f$  la distribution associée ayant une transformée de Laplace  $F(p) = \mathcal{L}\{f(x)\}$  avec une abscisse de sommabilité  $\sigma$ .

a) Montrer que si  $\sigma > 0$ , alors  $f$  n'est pas tempérée et n'a donc pas de transformée de Fourier.

b) Montrer que si  $\sigma < 0$ , alors  $f$  admet une transformée de Fourier  $\widehat{f}$  avec  $\widehat{f}(\omega) = F(2\pi i\omega)$ .

c) Montrer que si  $\sigma = 0$ , alors

$$F(p) = G(p) + \sum_k \frac{\alpha_k}{(p - i\omega_k)^{n_k}},$$

où  $G(p) = \mathcal{L}\{g(x)\}$  est holomorphe pour  $\operatorname{Re} p \geq 0$  et  $i\omega_k$  sont les pôles de  $F(p) = \mathcal{L}\{f(x)\}$  pour  $\operatorname{Re} p = 0$ .

d) En déduire par transformation de Laplace inverse que

$$f(x) = g(x) + H(x) \sum_k \alpha_k e^{i\omega_k} \frac{x^{n_k-1}}{(n_k-1)!},$$

où  $H(x)$  est la fonction de Heaviside.

e) En posant  $\omega_k = 2\pi i \lambda_k$ , montrer que les transformées de Fourier de  $f$  et de  $g$  sont liées par les formules

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\omega) &= \widehat{g}(\omega) + \sum_k \left( \frac{(2\pi i)^{n_k-1}}{2(n_k-1)!} \alpha_k \delta^{(n_k-1)}(\omega - \lambda_k) + Pf \frac{\alpha_k}{2\pi i(\omega - \lambda_k)^{n_k}} \right), \\ &= Pf F(2\pi i\omega) + \sum_k \frac{(2\pi i)^{n_k-1}}{2(n_k-1)!} \alpha_k \delta^{(n_k-1)}(\omega - \lambda_k), \end{aligned}$$

où  $Pf$  est la distribution partie fine (voir par exemple l'exercice 3.5.2, du chapitre 3).

f) Utiliser la formule ci-dessus pour montrer que la transformée de Fourier de la fonction de Heaviside  $H(x)$  est

$$\widehat{H}(\omega) = vp \frac{1}{2\pi i\omega} + \frac{\delta}{2},$$

où  $vp$  est la distribution valeur principale de Cauchy (voir par exemple l'exercice 1.6.3, du chapitre 1).

**Exercice 8.5.6** Déterminer la transformée de Laplace de la distribution  $Pf \frac{x_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$  (voir exercice 1.7.9 du chapitre 1 pour les notations) où

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$$

est la fonction gamma d'Euler.

Réponse :  $\mathcal{L} \left( \text{Pf } \frac{x_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) (p) = \frac{1}{p^\alpha}$ .

**Exercice 8.5.7** Résoudre les équations différentielles suivantes :

- a)  $x'' - tx' + x = 1$ , où  $x(0) = 1$  et  $x'(0) = 2$ .
- b)  $tx'' + 2x' + tx = 0$ , où  $x(0) = 1$  et  $x(\pi) = 0$ .

Réponse : a)  $x(t) = 2t + 1$ , b)  $x(t) = \frac{\sin t}{t}$ .

**Exercice 8.5.8** Déterminer la solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

telle que :  $u(x, 0) = 20 \cos 3x - 5 \cos 9x$ ,  $u(\frac{\pi}{2}, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$ .

Réponse :  $u(x, t) = 20e^{-27t} \cos 3x - 5e^{-243t} \cos 9x$ .

**Exercice 8.5.9** Résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 4u - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

avec les conditions :  $u(x, 0) = 6 \sin x - 4 \cos 2x$ ,  $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ .

Réponse :  $u(x, t) = 6e^{-5t} \sin x - 4e^{-8t} \sin 2x$ .

**Exercice 8.5.10** Déterminer la solution de l'équation aux dérivées partielles

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + xe^{-y} = 0, \quad u(x, 0) = x, \quad 0 < x < 1, y > 0.$$

Réponse :  $u(x, y) = x(1 + y)e^{-y}$ .

**Exercice 8.5.11** Déterminer la solution  $u(x, y, t)$  de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

satisfaisant aux conditions :

$$u(0, y, t) = u(\pi, y, t) = u(x, y, 0) = 0, \quad u(x, 0, t) = \frac{1}{4},$$

où  $0 < x < \pi$ ,  $y, t > 0$ . On suppose qu'il existe une constante  $M > 0$  tel que :  $|u(x, y, t)| \leq M$ .

Réponse : Soit  $U(x, y, p) = \mathcal{L}\{u(x, y, t)\}$ . On trouve

$$U(x, y, p) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos k\pi)e^{-y\sqrt{k^2+p}} \sin kx}{kp}.$$

Comme

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-y\sqrt{k^2+p}}}{p}\right\} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{ye^{-(k^2\zeta + \frac{y^2}{4\zeta})}}{\zeta\sqrt{\zeta}} d\zeta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{y}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-(\eta^2 + \frac{k^2y^2}{4\eta^2})} d\eta,$$

où  $\eta^2 = \frac{y^2}{4\zeta}$ , on obtient

$$u(x, y, t) = \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos k\pi) \sin kx}{k} \int_{\frac{y}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-(\eta^2 + \frac{k^2y^2}{4\eta^2})} d\eta.$$

**Exercice 8.5.12** Résoudre les équations intégrales suivantes :

- a)  $f(x) = \cos x - \int_0^x (x-t) \cos(x-t) f(t) dt.$
- b)  $f(x) = \sinh x - \int_0^x \coth(x-t) f(t) dt.$

Réponse : a)  $f(x) = \frac{1}{3}(2 \cos \sqrt{3}x + 1)$ , b)  $f(x) = \frac{2}{\sqrt{5}} \sinh \frac{\sqrt{5}}{2} x e^{-\frac{x}{2}}$ .

**Exercice 8.5.13** Résoudre le système d'équations intégrales suivant :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1 + x + \int_0^x f_3(t) dt, \\ f_2(x) &= -x - \int_0^x (x-t) f_1(t) dt, \\ f_3(x) &= -1 + \cos x + \int_0^x f_1(t) dt. \end{aligned}$$

Réponse :  $f_1(x) = \frac{\sin x}{2} + (x+2)\frac{\cos x}{2}$ ,  $f_2(x) = 1 - x + \frac{\sin x}{2} - (x+2)\frac{\cos x}{2}$  et  $f_3(x) = -1 + \cos x - (x+2)\frac{\sin x}{2}$ .

**Exercice 8.5.14** Déterminer la solution de l'équation intégrale

$$f''(x) + f(x) + \int_0^x \sinh(x-t) f(t) dt + \int_0^x \cosh(x-t) f'(t) dt = \cosh x,$$

satisfaisant aux conditions initiales :  $f(0) = -1$ ,  $f'(0) = 1$ .

Réponse :  $f(x) = 1 - x + 2 \sin x - 2 \cos x$ .

**Exercice 8.5.15** On considère l'équation intégrale

$$f(x) = g(x) + \int_x^{+\infty} k(x-t)f(t)dt,$$

et on désigne par  $F(p)$  et  $G(p)$  les transformées de Laplace des fonctions  $f(x)$  et  $g(x)$  respectivement. On pose  $K(-p) = \int_0^{+\infty} k(-x)e^{px}dx$ .

a) Montrer que :  $\int_x^{+\infty} k(x-t)f(t)dt = K(-p)F(p)$ .

b) En utilisant la transformée de Laplace, montrer que :  $F(p) = \frac{G(p)}{1-K(-p)}$ , où  $K(-p) \neq 1$  et en déduire que

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{G(p)}{1-K(-p)} e^{px} dp,$$

est une solution particulière de l'équation proposée. Trouver des conditions nécessaires pour que la solution ci-dessus ait un sens.

c) Appliquer le résultat ci-dessus au cas où  $g(x) = x$  et  $k(x) = e^{2x}$ .

Réponse : c)  $f(x) = 2x + 1 + Ce^x$  où  $C$  est une constante arbitraire.

**Exercice 8.5.16** Déterminer la solution de l'équations intégrale :

$$y'(x) = \int_0^x y(t) \cos(x-t)dt,$$

satisfaisant à la condition initiale :  $y(0) = 1$ .

Réponse :  $y = 1 + \frac{x^2}{2}$ .

**Exercice 8.5.17** Déterminer la transformée de Laplace de la fonction de Bessel modifiée de première espèce d'ordre  $n$  définie par

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos \theta} \cos n\theta d\theta, \quad x \in \mathbb{R}$$

Réponse :  $\mathcal{L}\{I_n(x)\} = \frac{1}{\sqrt{p^2-1}} {}_{p+\sqrt{p^2-1}}^1 e^{-\sqrt{p^2-1}x^n}$ ,  $\operatorname{Re} p > 1$ .

**Exercice 8.5.18** Résoudre l'équations intégrale :

$$2f(x) = \int_0^x f(x-t) \cos(x-t)f(t)dt - \sinh x.$$

Réponse :  $f(x) = -I_1(x)$  où  $I_1$  désigne une fonction de Bessel modifiée de première espèce (voir exercice précédent).

**Exercice 8.5.19** Résoudre l'équation intégrale :

$$\int_0^x \frac{y(t)}{\sqrt{x-t}} dt = \sqrt{x}.$$

Réponse : En utilisant le résultat obtenu dans l'exercice 8.4.27, on obtient

$$y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{x-t}} dt = \frac{1}{2}.$$

**Exercice 8.5.20** Reprendre l'exercice 8.4.27, en supposant que  $f(0) \neq 0$ .

Indication : Considérer par exemple l'équation

$$\int_0^x \frac{y(t)}{\sqrt{x-t}} dt = x + 1.$$

**Exercice 8.5.21** Soient  $F(p) = \mathcal{L}\{f(x)\}$  la transformée de Laplace de  $f(x)$  et supposons qu'il existe une fonction  $u(x, \tau)$  telle que :

$$\int_0^\infty u(x, \tau) e^{-px} dx = U(p) e^{-\tau \lambda(p)},$$

où  $U(p)$  et  $\lambda(p)$  sont des fonctions analytiques. Posons

$$g(x) = \int_0^\infty f(\tau) u(x, \tau) d\tau.$$

- a) Déterminer la transformée  $G(p)$  de  $g(x)$  (théorème d'Efros).
- b) Etudier le cas particulier où  $u$  s'écrit sous la forme  $u(x, \tau) = u(x - \tau)$ .
- c) Même question si  $U(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}$  et  $\lambda(p) = \sqrt{p}$ .
- d) En déduire la solution de l'équation intégrale

$$\int_0^\infty f(t) e^{-\frac{t^2}{4x}} dt = \sqrt{\pi x}.$$

Réponse : a)  $G(p) = \int_0^\infty g(x) e^{-px} dx = U(p) \int_0^\infty f(\tau) e^{-\tau \lambda(p)} d\tau = U(p) F(\lambda(p))$ . Pour la question b), si  $u(x, \tau) = u(x - \tau)$ , alors  $\lambda(p) = p$  et on obtient la formule sur le produit de convolution :  $\mathcal{L}\left\{\int_0^\infty f(\tau) u(x - \tau) d\tau\right\} = F(p)U(p)$ . Pour c) on a  $\mathcal{L}\left\{\int_0^\infty f(\tau) u(x, \tau) d\tau\right\} = \frac{F(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}$ , où  $F(p) = \mathcal{L}\{f(x)\}$  et  $u(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} e^{-\frac{\tau^2}{4x}}$ . Pour d), on obtient  $f(x) = 1$ .

**Exercice 8.5.22** a) Déterminer la transformée de Laplace inverse de la fonction

$$F(p) = \frac{e^{-\sqrt{p}}}{p},$$

en utilisant la formule de Bromwich-Wagner.

b) En déduire la transformée de Laplace inverse de la fonction

$$F(p) = e^{-\sqrt{p}}.$$

Réponse : a)  $1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2\sqrt{x}}} e^{-t^2} dt$ , b)  $\frac{1}{2\pi} x^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{4x}}$ .

**Exercice 8.5.23** Déterminer la transformée de Laplace inverse de la fonction

$$F(p) = \ln \left( 1 + \frac{1}{p^2} \right).$$

Réponse :  $\frac{2(1-\cos x)}{x}$ .

# Chapitre 9

# Appendice

On a rassemblé dans cet appendice quelques notions sommaires sur la topologie dans  $\mathbb{R}^n$ , la théorie de la mesure et l'intégrale de Lebesgue. Les propriétés annoncées sont données sans démonstration et il est préférable de les passer en première lecture et de se borner à les consulter au moment de l'usage.

## 9.1 Éléments de topologie

On désigne par  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 1$  étant un entier) le produit cartésien

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n-facteurs}$$

Donc  $\mathbb{R}^n$  est l'ensemble de n-uplets ordonnés  $(x_1, \dots, x_n)$  de nombres réels. En définissant l'addition et la multiplication par un réel,

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \quad , \quad (x, y) \longmapsto x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \\ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \quad , \quad (\lambda, x) \longmapsto \lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n),\end{aligned}$$

on munit  $\mathbb{R}^n$  d'une structure d'espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ . Il est de dimension  $n$  et a pour base canonique les  $n$  vecteurs  $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$ .

**Définition 9.1.1** *On appelle norme sur un espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , une application  $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \longmapsto \|x\|$ , vérifiant les conditions suivantes :*

*(i)  $\forall x \in E$ ,  $\|x\| \geq 0$  et  $\|x\| = 0 \iff x = 0$ .*

*(ii)  $\forall x \in E$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ ,  $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ .*

*(iii)  $\forall x, y \in E$ ,  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (inégalité de Minkowski).*

*Un espace vectoriel muni d'une norme est dit espace vectoriel normé.*

**Exemple 9.1.1** Soit  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . On pose

$$\begin{aligned}\|x\|_1 &= |x_1| + \cdots + |x_n|. \\ \|x\|_2 &= \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}. \\ \|x\|_\infty &= \max(|x_1|, \dots, |x_n|).\end{aligned}$$

Les applications  $\|x\|_1, \|x\|_2, \|x\|_\infty : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ , sont des normes sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 9.1.2** Deux normes  $\|\cdot\|$  et  $\|\cdot\|'$  sont dites équivalentes s'il existe deux nombres réels  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$  tels que :

$$\alpha\|x\| \leq \|x\|' \leq \beta\|x\|, \quad \forall x \in E.$$

**Exercice 9.1.1** Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$ .

Les trois normes  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sont équivalentes sur  $\mathbb{R}^n$ . Lorsque le choix de ces normes est arbitraire, on utilise tout simplement la notation  $\|\cdot\|$ .

**Définition 9.1.3** On appelle distance de deux vecteurs  $x, y \in E$ , le nombre réel  $d(x, y) = \|x - y\|$ . Autrement dit, une distance sur  $E$  est une application  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ , satisfaisant aux conditions suivantes :

- (i)  $\forall x, y \in E$ ,  $d(x, y) \geq 0$  et  $d(x, y) = 0 \iff x = y$ .
- (ii)  $\forall x, y \in E$ ,  $d(x, y) = d(y, x)$  (symétrie).
- (iii)  $\forall x, y, z \in E$ ,  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (inégalité triangulaire).

Un ensemble muni d'une distance est dit espace métrique.

**Proposition 9.1.4**  $\forall x, y \in E$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ,  $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|d(x, y)$  (homogénéité).

**Exemple 9.1.2** Soit  $E$  un ensemble non vide et soit  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$  définie par

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

L'application  $d$  est une distance sur  $E$  dite distance discrète.

**Exemple 9.1.3** Soit  $A$  un ensemble non vide quelconque et soit  $E = B(A, \mathbb{R})$  l'ensemble des applications bornées sur  $A$ . L'application  $d$  définie par

$$\forall (f, g) \in E \times E, \quad d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)|, x \in A\},$$

est une distance sur  $E$ , appelée distance de la convergence uniforme sur  $A$ .

**Exercice 9.1.2** Montrer que les applications suivantes de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}_+$  sont bien des distances :  $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\forall y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\begin{aligned}(x, y) &\longmapsto d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|. \\(x, y) &\longmapsto d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}. \\(x, y) &\longmapsto d_\infty(x, y) = \max |x_i - y_i|, 1 \leq i \leq n.\end{aligned}$$

**Exemple 9.1.4** Soit  $E = C^0([a, b], \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions continues sur  $[a, b]$ . L'application  $d$  définie sur  $E \times E$  par

$$\forall (f, g) \in E \times E, \quad d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx,$$

est une distance sur  $E$ , dite distance de la convergence en moyenne.

**Exemple 9.1.5** Soient  $P$  et  $Q$  deux parties non vides de  $E$ . On appelle distance de  $P$  et de  $Q$ , et on note  $d(P, Q)$  la borne inférieure des distances des points de  $P$  et de  $Q$  :

$$d(P, Q) = \inf_{x \in P, y \in Q} d(x, y).$$

Lorsque  $P$  est réduit à un élément  $x$ , la distance de  $P$  et de  $Q$  s'appelle distance de  $x$  à  $Q$  et se note  $d(x, Q)$ . Mais, l'application

$$\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathbb{R}_+, (P, Q) \longmapsto d(P, Q),$$

n'est pas une distance sur l'ensemble  $\mathcal{P}(E)$  des parties de  $E$ .

**Remarque 9.1.1** Comme pour les normes, on dit que deux distances  $d$  et  $d'$  sont équivalentes sur  $E$ , s'il existe  $\alpha, \beta > 0$  tels que :

$$\alpha d(x, y) \leq d'(x, y) \leq \beta d(x, y), \quad \forall x, y \in E.$$

**Exercice 9.1.3** Montrer que les distances  $d_1$ ,  $d_2$  et  $d_\infty$  sont équivalentes.

**Définition 9.1.5** On appelle boule ouverte de centre  $a$  et de rayon  $r$ , l'ensemble  $B(a, r) = \{x \in E : d(x, a) < r\}$ . Lorsque  $d(x, a) \leq r$ , on dira que la boule est fermée et on note  $B[a, r]$  ou  $\overline{B}(a, r)$ .

**Exemple 9.1.6**  $S(a, r) = \{x \in E : d(x, a) = r\}$  est une sphère de centre  $a$  et de rayon  $r$ .

**Exercice 9.1.4** Montrer que si  $a \in \mathbb{R}^n$  et  $r > 0$ , alors

$$B_\infty \left[ a, \frac{r}{n} \right] \subset B_1[a, r] \subset B_2[a, r] \subset B_\infty[a, r],$$

où  $B_j[,]$  désigne la boule fermée relative à la norme  $\|\cdot\|_j$ . Dans  $\mathbb{R}^2$ , illustrer ce résultat sur une figure.

**Définition 9.1.6** On appelle voisinage d'un point  $a \in E$ , tout ensemble  $\mathcal{V}(a)$  qui contient une boule ouverte  $B(a, r)$ .

**Définition 9.1.7** Soit  $A$  une partie de  $E$  et soit  $a \in E$ . On dit que  $a$  est intérieur à  $A$  si  $A$  est un voisinage de  $a$ , c'est -à-dire s'il existe  $r > 0$  tel que :  $B(a, r) \subset A$ . L'intérieur de  $A$ , noté  $\text{int } A$  ou  $\overset{\circ}{A}$ , est l'ensemble

$$\text{int } A = \{a \in E : a \text{ est intérieur à } A\} = \{a \in E : A \text{ est voisinage de } a\}.$$

On a évidemment  $\text{int } A \subset A$  et

$$\text{int } [a, b] = \text{int } ]a, b[ = \text{int } ]a, b] = \text{int } [a, b[ = ]a, b[.$$

**Proposition 9.1.8** Soient  $A_1$  et  $A_2$  deux parties de  $E$ . Alors

$$A_1 \subseteq A_2 \implies \text{int } A_1 \subseteq \text{int } A_2,$$

$$\text{int } A_1 \cup \text{int } A_2 \subseteq \text{int } (A_1 \cup A_2),$$

$$\text{int } A_1 \cap \text{int } A_2 = \text{int } (A_1 \cap A_2).$$

**Définition 9.1.9** On dit qu'un point  $a \in E$  est adhérent à  $A$  si tout voisinage de  $a$  coupe  $A$ . Cela revient à dire que :  $\forall r > 0$ ,  $B(a, r) \cap A \neq \emptyset$ . L'adhérence (ou la fermeture) de  $A$ , notée  $\text{adh } A$  ou  $\overline{A}$ , est l'ensemble

$$\text{adh } A = \{a \in E : a \text{ est adhérent à } A\}.$$

On a  $\text{adh } A \supseteq A$  et

$$\text{adh } [a, b] = \text{adh } ]a, b[ = \text{adh } ]a, b] = \text{adh } [a, b[ = [a, b].$$

Lorsque  $\text{adh } A = E$ , on dira que  $A$  est dense dans  $E$ .

**Exercice 9.1.5** Montrer que  $\text{int } A = (\text{adh } A^c)^c$  et  $\text{adh } A = (\text{int } A^c)^c$ .

**Proposition 9.1.10** *Soient  $A_1$  et  $A_2$  deux parties de  $E$ . Alors*

$$A_1 \subseteq A_2 \implies \text{adh } A_1 \subseteq \text{adh } A_2,$$

$$\text{adh } A_1 \cup \text{adh } A_2 = \text{adh } (A_1 \cup A_2),$$

$$\text{adh } A_1 \cap \text{adh } A_2 \supseteq \text{adh } (A_1 \cap A_2).$$

**Exemple 9.1.7**  $\text{adh } \mathbb{Q}^n = \mathbb{R}^n$ .

**Définition 9.1.11** *La frontière de  $A$  est l'ensemble  $\text{fr } A = \text{adh } A \setminus \text{int } A$ .*

Notons que  $\text{fr } A$  est un fermé.

**Définition 9.1.12** *Soit  $A \subset E$ . On dit qu'un point  $a \in E$  est un point d'accumulation de  $A$  si tout voisinage de  $a$  contient un point de  $A$  autre que  $a$  (c'est-à-dire si  $a \in \text{adh } (A \setminus \{a\})$ ). Le point  $a$  est dit isolé s'il existe un voisinage de  $a$  ne contenant aucun point de  $A$  autre que  $a$ .*

**Remarque 9.1.2** *Un point isolé de  $A$  est un point de  $A$  qui n'est pas un point d'accumulation de  $A$ . Si  $C$  est l'ensemble des points d'accumulation de  $A$  et  $\mathcal{I}$  celui des points isolés de  $A$ , alors  $\mathcal{I} \subset A \subset \text{adh } A$ ,  $\mathcal{I} \cap C = \emptyset$  et  $\mathcal{I} \cup C = \text{adh } A$ .*

**Définition 9.1.13** *Soit  $A \subset E$ . On dit que  $A$  est ouvert si  $A = \emptyset$  ou*

$$\forall a \in A, \exists r > 0 : B(a, r) \subset A.$$

*Autrement dit,  $A$  est ouvert si  $\text{int } A = A$ .*

**Exemple 9.1.8**  $\emptyset, \mathbb{R}^n$  sont des ouverts.

**Proposition 9.1.14** *Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert et une intersection finie d'ouverts est un ouvert.*

**Exercice 9.1.6** *Montrer que toute boule sans bord est un ouvert. En déduire que l'intersection d'une famille infinie d'ouverts n'est pas en général un ouvert.*

**Proposition 9.1.15** *L'intérieur de  $A$  est le plus grand ouvert contenu dans  $A$ .*

**Remarque 9.1.3** *L'intérieur de  $A$  est la réunion de tous les ouverts contenus dans  $A$ .*

**Définition 9.1.16** *On dit que  $A$  est fermé si  $\text{adh } A = A$ . Autrement dit,  $A$  est fermé si son complémentaire est un ouvert.*

**Exemple 9.1.9**  $\emptyset, \mathbb{R}^n$  sont des fermés.

**Proposition 9.1.17** Une réunion finie de fermés est un fermé et une intersection quelconque de fermés est un fermé.

**Exercice 9.1.7** Montrer que la réunion infinie de fermés n'est pas en général un fermé.

**Proposition 9.1.18** L'adhérence de  $A$  est le plus petit fermé contenant  $A$ .

**Remarque 9.1.4** L'intérieur de  $A$  est l'intersection de tous les fermés contenant  $A$ .

**Définition 9.1.19** Un espace métrique  $E$  est dit connexe s'il satisfait à l'une des conditions équivalentes suivantes :

- (i)  $E$  et  $\emptyset$  sont les seules parties ouvertes et fermées.
- (ii) Il n'existe pas deux ouverts  $A_1$  et  $A_2$  tels que l'on ait  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$  et  $A_1 \cup A_2 = E$ .
- (iii)  $E$  n'est pas égal à la réunion de deux fermés disjoints.

**Définition 9.1.20** Soit  $A \subset E$  et  $I$  un ensemble (d'indices) quelconque. Une famille  $(A_k)_{k \in I}$  de parties de  $E$  constitue un recouvrement de  $A$  lorsque la réunion  $\bigcup_{k \in I} A_k$  contient  $A$ . Un recouvrement est dit ouvert si  $\forall k \in I$ ,  $A_k$  est un ouvert de  $E$  et il est dit fini si  $I$  est un ensemble fini.

**Définition 9.1.21** On dit que  $A \subset E$  est borné s'il existe  $a \in E$  et  $r > 0$  tel que :  $A \subset B[a, r]$ .

**Définition 9.1.22** On dit que  $A \subset E$  est compact si de tout recouvrement ouvert, on peut en extraire un recouvrement fini.

**Exemple 9.1.10**  $\mathbb{R}$  n'est pas compact,  $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$  est compact, les intervalles fermés bornés de  $\mathbb{R}$  sont compacts.

**Théorème 9.1.23** Soit  $A \subset E$ . Alors  $A$  est compact si et seulement si de toute suite d'éléments de  $A$ , on peut en extraire une sous-suite qui converge vers un élément de  $A$ .

Rappelons qu'une suite  $(f_k)$  est une suite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 : k > l \geq N \implies d(f_k, f_l) \leq \varepsilon.$$

Toute suite convergente est de Cauchy mais la réciproque n'est pas toujours vraie.

**Définition 9.1.24** Un espace métrique est dit complet si toute suite de Cauchy converge vers un élément de cet espace. Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.

**Exemple 9.1.11**  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_i)$ ,  $i = 1, 2, \infty$ , sont des espaces de Banach.

## 9.2 Mesure et intégrale de Lebesgue

**Définition 9.2.1** Soit  $\Omega$  un ensemble. Une classe  $\mathcal{A}$  de parties de  $\Omega$  est dite une tribu (ou  $\sigma$ -algèbre de Boole) sur  $\Omega$  si

- i)  $\Omega \in \mathcal{A}$ .
- ii)  $\forall A \in \mathcal{A}, A^c \in \mathcal{A}$ .
- iii) si  $A_1, A_2, \dots$  est une infinité dénombrable de parties de  $\mathcal{A}$ , alors  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ .

**Exemple 9.2.1**  $\{\emptyset, \Omega\}$  est une tribu (dite triviale) de  $\Omega$ .

**Exemple 9.2.2** L'ensemble des parties de  $\Omega$ , noté  $\mathcal{P}(\Omega)$ , est une tribu (dite grossière) de  $\Omega$ .

**Exemple 9.2.3**  $\{\emptyset, \mathbb{N}, \{1, 2\}, \{3, 4, \dots\}\}$  est une tribu sur  $\mathbb{N}$ .

**Exemple 9.2.4**  $\mathcal{A} = \{A : A \subseteq \mathbb{N} \text{ et } A \text{ fini}\}$  n'est pas une tribu sur  $\mathbb{N}$  car  $\mathbb{N} \notin \mathcal{A}$ .

**Définition 9.2.2** Soient  $\Omega$  un ensemble et  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  un ensemble de parties de  $\Omega$ . On appelle tribu  $\tau(\mathcal{B})$  engendrée par  $\mathcal{B}$ , la plus petite tribu contenant  $\mathcal{B}$ , c'est-à-dire  $\tau(\mathcal{B})$  est une tribu telle que :

- i)  $\mathcal{B} \subseteq \tau(\mathcal{B})$ .
- ii) pour toute autre tribu  $\mathcal{A}$  contenant  $\mathcal{B}$ ,  $\tau(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{A}$ .

**Exemple 9.2.5** Soient  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles de  $\Omega$ . On a

$$\tau(\{A\}) = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\},$$

et

$$\begin{aligned} \tau(\{A, B\}) &= \{\emptyset, \Omega, A, B, A^c, B^c, A \cup B, A^c \cup B, A \cup B^c, A^c \cup B^c, A \cap B, A^c \cap B, \\ &\quad A \cap B^c, A^c \cap B^c, (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c), (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)\}. \end{aligned}$$

**Définition 9.2.3** Soit  $\Omega = \mathbb{R}$  et  $\mathcal{B}$  la tribu de parties de  $\mathbb{R}$  engendrée par les intervalles de la forme  $] -\infty, a]$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . On dit que  $\mathcal{B}$  est la tribu borélienne (ou tribu de Borel) de  $\mathbb{R}$  et ses éléments sont appelés les boréliens de  $\mathbb{R}$ .

**Remarque 9.2.1** La tribu borélienne de  $\mathbb{R}$  contient tous les intervalles et tous les points de  $\mathbb{R}$ . La tribu borélienne de  $\mathbb{R}^n$  est la tribu engendrée par les parties de  $\mathbb{R}^n$  de la forme  $] -\infty, a_1] \times \cdots \times ] -\infty, a_n]$ , où  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ .

**Définition 9.2.4** a) Soit  $\Omega$  un ensemble muni d'une tribu  $\mathcal{B}$ . On dit qu'une fonction  $\mu : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$  est une mesure définie sur  $\mathcal{B}$  si

i)  $\exists B \in \mathcal{B}$  tel que :  $\mu(B) < \infty$ .

ii) si  $B_1, B_2, \dots$  est une infinité dénombrable de parties disjointes de  $\mathcal{B}$ , alors

$$\mu \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i),$$

c'est-à-dire  $\mu$  est dénombrablement ou complètement additive.

b) Un ensemble  $E \subset \Omega$  est dit mesurable lorsque  $E \in \mathcal{B}$ .

c) Une mesure définie sur  $\mathcal{B}$  est dite positive si,  $\forall B \in \mathcal{B}$ ,  $\mu(B) \geq 0$ .

**Exemple 9.2.6**  $\mu(\emptyset) = 0$ .

**Exemple 9.2.7** Mesure de Lesbegue :  $\mu([a, b]) = b - a = \text{longueur de } [a, b]$ .

**Exemple 9.2.8**  $\mu([a, b] \times [c, d]) = (b - a)(d - c) = \text{aire de } [a, b] \times [c, d]$ .

**Exemple 9.2.9** Mesure de Dirac au point  $a$  :  $\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{si } a \notin A \end{cases}$

**Définition 9.2.5** Soient  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  deux ensembles munis respectivement des tribus  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$ . On dit qu'une fonction  $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  est mesurable si,

$$\forall B_2 \in \mathcal{B}_2, f^{-1}(B_2) \in \mathcal{B}_1$$

**Notes concernant les définitions :** On trouvera dans la littérature d'autres définitions,

a) Une partie  $E \subseteq \mathbb{R}$  est dite de mesure nulle si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une suite  $(I_k)$  d'intervalles de longueur  $l_k$  telle que :

$$E \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} l_k \leq \varepsilon.$$

b) La locution "presque partout" (en abrégé p.p.) signifie sauf sur un ensemble de mesure nulle.

c) Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est dite mesurable s'il existe une suite  $(\varphi_k)$  de fonctions en escalier sur  $I$  qui converge simplement presque partout vers  $f$  sur  $I$ .

**Remarque 9.2.2** *Toutes les fonctions que l'on rencontre en pratique sont mesurables.*

Avant de définir l'intégrale au sens de Lesbegue, rappelons brièvement ce qu'est l'intégrale au sens de Riemann. Soit  $f$  une fonction réelle bornée définie sur un intervalle  $[a, b]$ . Pour définir l'intégrale au sens de Riemann, notée  $\int_a^b f(x)dx$ , on considère une subdivision de  $[a, b]$  en un nombre fini de points tels que :  $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k = b$ , et on écrit

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k (\alpha_{i+1} - \alpha_i) f(\xi_i), \quad \alpha_i \leq \xi_i \leq \alpha_{i+1}, \\ &\simeq \text{aire comprise entre le graphe de } f \text{ et l'axe } ox. \end{aligned}$$

Pour qu'une fonction bornée soit intégrable au sens de Riemann, il faut et il suffit que l'ensemble des points de discontinuités de  $f$  soit de mesure nulle.

En ce qui concerne l'intégrale de Lesbegue, l'idée principale de sa construction réside dans le fait de considérer une subdivision du domaine des valeurs de  $f$  (et non du domaine  $[a, b]$  de  $f$ , comme dans le cas de Riemann). Soit  $f(x)$  une fonction mesurable réelle et positive. Soit  $[m, M]$  un intervalle sur l'axe  $oy$  tel que :  $\text{Im } f \subset [c, d]$  et considérons une subdivision de  $[c, d]$  en un nombre fini de valeurs distinctes  $y_k$ . Posons

$$E_i = \{x \in [a, b] : y_i \leq f(x) \leq y_{i+1}\} = f^{-1}([y_i, y_{i+1}]),$$

et

$$\begin{aligned} \mu(E_i) &= \text{mesure de } E_i, \\ &= \text{longueur usuelle de } E_i \text{ si } E_i \text{ est un intervalle} \\ &\quad \text{ou une réunion finie d'intervalles disjoints.} \end{aligned}$$

**Définition 9.2.6 a)** *L'intégrale de Lesbegue  $\int f d\mu$  ( $\mu$  étant la mesure de Lesbegue) est la limite commune des sommes  $\sum_{i=1}^k y_i \mu(E_i)$  et  $\sum_{i=1}^k y_{i+1} \mu(E_i)$ . Autrement dit, l'expression  $\sum_{i=1}^k \eta_i \mu(E_i)$ ,  $\forall \eta_i \in [y_i, y_{i+1}]$ , représente une approximation de l'aire comprise entre le graphe de  $f$  et l'axe  $ox$ .*

*b)* *On dit qu'une fonction  $f$  est intégrable au sens de Lesbegue ou sommable si et seulement si  $f$  est mesurable et  $\int |f| d\mu$  est fini.*

**Définitions et propriétés diverses :** Une autre façon de définir l'intégrale au sens de Lesbegue, consiste à introduire la notion de fonction positive-mesurable intégrable. Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction.

a) On dit que  $f$  est positivement intégrable, s'il existe une suite croissante  $(\varphi_k)$  de fonctions en escalier sur  $I$  qui converge simplement vers  $f$  presque partout sur  $I$  et telle que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_I \varphi_k$  existe.

b) La fonction  $f$  est dite intégrable au sens de Lesbegue ou sommable sur  $I$ , si elle est la différence de deux fonctions  $f_1$  et  $f_2$  positivement intégrables c'est-à-dire si  $f = f_1 - f_2$ .

c) L'intégrale de Lesbegue de  $f$  sur  $I$  est  $\int_I f = \int_I f_1 - \int_I f_2$ .

d) Si  $f = f_1 - f_2 = g_1 - g_2$  avec  $f_1, f_2, g_1, g_2$  positivement intégrables sur  $I$ , alors  $\int_I f_1 - \int_I f_2 = \int_I g_1 - \int_I g_2$ . Autrement dit, l'intégrale  $\int_I f$  est indépendante du mode de représentation de la fonction  $f$  par une différence de fonctions positivement intégrables.

e) Si deux suites croissantes  $(\varphi_k)$  et  $(\psi_k)$  de fonctions en escalier vérifient les conditions de la définition précédente (voir fonction positivement intégrable) pour une même fonction  $f$ , alors  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_I \varphi_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_I \psi_k$ . Autrement dit, la limite  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_I \varphi_k$  qui intervient dans la définition de fonction positivement intégrable, ne dépend pas du choix de la suite  $(\varphi_k)$ .

f) Le nombre  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_I \varphi_k$ , est appelé l'intégrale de Lesbegue de  $f$  sur  $I$  et est noté  $\int_I f$ .

**Remarque 9.2.3** *Toute fonction intégrable au sens de Riemann est intégrable au sens de Lesbegue et les deux intégrales sont égales. L'intégrale de Lesbegue généralise celle de Riemann puisqu'elle permet d'intégrer des fonctions qui ne sont pas intégrables au sens de Riemann dès que les discontinuités ne forment pas un ensemble de mesure nulle.*

**Exemple 9.2.10** *La fonction de Dirichlet*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ est rationnel} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

*n'est pas intégrable au sens de Riemann (elle est discontinue en tout point), par contre, elle est intégrable au sens de Lesbegue et son intégrale est nulle.*

Dans la suite, les intégrales seront des intégrales au sens de Lesbegue et on utilisera souvent l'appellation "sommable".

**Remarques importantes pour les applications :** a) Une condition suffisante, très utilisée, pour montrer qu'une fonction est sommable est la suivante : une fonction  $f$  n'ayant qu'un nombre fini de points de discontinuité est sommable si et seulement si  $|f|$  est intégrable au sens de Riemann.

b) Soit  $[a, b]$  un intervalle quelconque,  $a$  ou  $b$  pouvant être fini ou non. Pour montrer que  $f$  est sommable sur  $[a, b]$ , il faut et il suffit de vérifier que

$\int_a^b |f(x)|dx$  converge. Pour traiter cette question, on pourra donc utiliser la définition de la convergence absolue ou (lorsque l'intégrale est difficile à calculer) utiliser les critères de comparaison, d'équivalence, etc.

**Exemple 9.2.11** La fonction définie par

$$f(x) = \frac{\sin x}{x^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+^*$$

est sommable sur  $[0, 1]$  pour  $0 < \alpha < 2$  et sur  $[1, \infty[$  pour  $\alpha > 1$ . En effet,

(\*)  $\int_0^1 \left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| dx$  converge si  $\alpha < 2$  et diverge si  $\alpha \geq 2$  car

$$\left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| = \frac{|\sin x|}{x^\alpha} \sim \frac{1}{x^{\alpha-1}} \text{ pour } x \rightarrow 0$$

et  $\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha-1}}$  converge si  $\alpha - 1 < 1$  et diverge si  $\alpha - 1 \geq 1$ .

(\*\*)  $\int_1^\infty \left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| dx$  converge pour  $\alpha > 1$  car

$$\left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| \leq \frac{1}{x^\alpha},$$

et  $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$  converge pour  $\alpha > 1$ . Pour  $0 < \alpha \leq 1$ , cette intégrale diverge car

$$\left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| \geq \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} = \frac{1 - \cos 2x}{2x^\alpha},$$

et  $\int_1^\infty \frac{1 - \cos 2x}{2x^\alpha} dx$  diverge pour  $0 < \alpha \leq 1$ .

**Définition 9.2.7** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . On note  $\mathcal{L}^1(\Omega)$  ou plus simplement  $L^1$ , l'espace vectoriel (sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) des fonctions sommables sur  $\Omega$ . L'espace  $L^1(\Omega)$  ou  $L^1$  est, par définition, le quotient de  $\mathcal{L}^1$  par la relation d'équivalence "égalité presque partout".

**Remarques 9.2.4** a) Pour montrer que  $f \in \mathcal{L}^1$ , il suffit de vérifier que l'intégrale  $\int_\Omega |f(x)|dx$  existe. De même, pour montrer que  $f \in \mathcal{L}^2$ , il suffit de vérifier que  $\int_\Omega |f(x)|^2 dx$  existe. Rappelons que si  $f$  est réelle,  $|f(x)|^2 = f^2(x)$  et si  $f$  est complexe,  $|f(x)|^2 = f(x)\overline{f(x)}$ .

b) Deux fonctions égales presque partout seront considérées comme égales. Et conformément à l'usage, on confondra d'une part  $\mathcal{L}^1$  et  $L^1$  et de l'autre  $\mathcal{L}^2$  et  $L^2$ .

**Exemple 9.2.12** La fonction

$$f : ]0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}},$$

appartient à  $L^1$  mais pas à  $L^2$ . Par contre la fonction

$$g : ]1, \infty[ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{x},$$

appartient à  $L^2$  mais pas à  $L^1$ .

**Propriétés :** 1) Si  $f, g \in L^1$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , alors  $\alpha f + \beta g \in L^1$  et

$$\int (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int f dx + \beta \int g dx.$$

2) Pour qu'une fonction  $f \in L^1$ , il faut et il suffit que  $|f| \in L^1$ . En outre

$$\left| \int f dx \right| \leq \int |f| dx.$$

3) Si  $f$  est mesurable et s'il existe une fonction positive  $g \in L^1$  telle que :  $|f(x)| \leq g(x)$  presque partout, alors  $f \in L^1$ .

4) Si  $f(x) \geq 0$  est mesurable, alors  $\int f dx = 0$  si et seulement si  $f = 0$  presque partout.

5) Si  $f \in L^1$  et  $f = g$  presque partout, alors  $g \in L^1$  et  $\int f dx = \int g dx$ .

6) La quantité

$$\|f\| = \int_{\Omega} |f(x)| dx,$$

est une norme sur  $L^1(\Omega)$ .

6) La quantité

$$\|f\| = \sqrt{\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx},$$

est une norme sur  $L^2(\Omega)$ .

7) Inégalité de Schwarz : Si  $f, g \in L^2$ , alors

$$\left| \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx \right|^2 \leq \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \int_{\Omega} |g(x)|^2 dx.$$

**Théorème 9.2.8 (de convergence dominée de Lebesgue) :** Soit  $(f_k)$  une suite de fonctions sommables. Si  $(f_k)$  converge simplement presque partout vers une fonction  $f$  et s'il existe une fonction sommable  $g$  telle que :  $|f_k(x)| \leq g(x)$  presque partout, alors  $f(x)$  est sommable et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x) dx = \int \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx = \int f(x) dx.$$

**Théorème 9.2.9 (de Fubini-Lebesgue) :** Si  $f(x, y)$  est sommable, alors les fonctions  $x \mapsto \int f(x, y) dy$  et  $y \mapsto \int f(x, y) dx$  sont définies presque partout et sont sommables. En outre

$$\int \left( \int f(x, y) dy \right) dx = \int \left( \int f(x, y) dx \right) dy.$$

**Remarques 9.2.5** a) On peut par convention, utiliser la notation  $\int dx \int f(x, y) dy$  pour  $\int (\int f(x, y) dy) dx$  et  $\int dy \int f(x, y) dx$  pour  $\int (\int f(x, y) dx) dy$ .

b) Le simple fait que  $f(x, y)$  soit sommable, n'implique pas que la fonction  $x \mapsto f(x, y)$  soit sommable pour tout  $y$  ni que  $y \mapsto f(x, y)$  soit sommable pour tout  $x$ .

Considérons l'application  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $y \mapsto g(y) = x$ , où  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . On a

$$x_1 = g_1(y_1, \dots, y_n), \quad x_2 = g_2(y_1, \dots, y_n), \quad \dots, \quad x_n = g_n(y_1, \dots, y_n).$$

On suppose que les dérivées partielles  $\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(y)$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , existent pour tout  $y \in \Omega$ . Par définition, le jacobien de  $g$  est

$$\det J_g(y) = \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} = \det \left( \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(y) \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

**Théorème 9.2.10 (de changement de variable) :** Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,

$$g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad y \mapsto g(y) = x,$$

une bijection de classe  $C^1$  telle que :  $\det J_g(y) \neq 0$ ,  $\forall y \in \Omega$  et

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x),$$

une fonction sommable où  $D \subset g(\Omega)$ . Alors  $(fog)|\det J_g(y)|$  est sommable sur  $g^{-1}(D)$  et

$$\int_D f = \int_{g^{-1}(D)} (fog) |\det J_g(y)|,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} & \int \int \cdots \int_D f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \\ &= \int \int \cdots \int_{g^{-1}(D)} (fog)(y_1, \dots, y_n) \left| \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \right| dy_1 \dots dy_n. \end{aligned}$$



# Bibliographie

- [1] Arsac, J. : *Transformation de Fourier et théorie des distributions*. Dunod, 1961.
- [2] Bayen, F. et Margaria, C. : *Distributions, analyse de Fourier, transformation de Laplace*. Tome 3, Ellipses, 1988, 1998.
- [3] Boccardo, N. : *Analyse fonctionnelle, une introduction pour physiciens*. Ellipses, 1984.
- [4] Gelfand, I.M. et Chilov, G.E. : *Les distributions* (4 volumes). Dunod, 1975.
- [5] Lebesgue, H. : *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*. Gauthier-Villars, 1904, 1928, J. Gabay, 1989.
- [6] Lesfari, A. : *Eléments d'analyse (séries et intégrales généralisées)*. Sochepress-Université, 1991, épuisé.
- [7] Lützen, J. : *The prehistory of the theory of distributions*. Springer, 1982.
- [8] Roddier, F. : *Distributions et transformation de Fourier*. Ediscience 1971, 1978, McGraw Hill 1984, 1988, 1993.
- [9] Schwartz, L. : *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*. Hermann, 1965, 1997.
- [10] Schwartz, L. : *Théorie des distributions*. Hermann, 1966, 1997.
- [11] Trèves, F. : *Topological vector spaces, distributions and kernels*. Academic press, 1973, Dover Publications Inc., 2007.
- [12] Vo-Khac Khoan : *Distributions, analyse de Fourier, opérateurs aux dérivées partielles* (2 tomes). Vuibert, 1970, Ellipses Marketing, 1998.
- [13] Zuily, C. : *Problèmes de distributions*. Hermann, 1978, Dunod, 2002, Casini, 2010.
- [14] Zygmund, A. : *Trigonometric series*. Cambridge university press, 1979, 1988, Fefferman, 2003.



# Index

- abscisse de convergence absolue, 293  
abscisse de sommabilité, 293  
algèbre de convolution, 118  
associativité du produit de convolution, 115  
associativité du produit tensoriel, 108  
calcul symbolique, 126  
changement d'échelle, 70  
coefficients de Fourier, 147, 218  
coefficients de Fourier d'une distribution, 176  
commutativité du produit de convolution, 114  
continuité du produit de convolution, 117  
continuité du produit tensoriel, 110  
convergence au sens de Cesaro, 165  
convergence dans  $\mathcal{D}$ , 18  
convergence dans  $\mathcal{D}'$ , 85  
convergence dans  $\mathcal{D}(\Gamma)$ , 174  
convergence dans  $\mathcal{D}^m$ , 20  
convergence dans  $\mathcal{L}^1$ , 89  
convergence en moyenne, 89, 165  
convergence en moyenne quadratique, 172  
critère de Liénard et Chipart, 319  
critère de Mikhaïlov, 319  
critère de Routh-Hurwitz, 318  
dérivation du produit de convolution, 116  
dérivation du produit tensoriel, 109  
dérivée d'une distribution, 42  
dilatée d'une distribution, 70  
distribution, 18  
distribution complexe conjuguée, 20  
distribution d'ordre  $m$ , 20  
distribution de Dirac, 24  
distribution homogène, 81  
distribution impaire, 71  
distribution nulle, 25  
distribution paire, 71  
distribution périodique, 69, 173  
distribution réelle, 20  
distribution sur le cercle  $\Gamma$ , 174  
distribution tempérée, 248  
domaine de sommabilité, 293  
égalité de Parseval, 169, 173  
égalité de Plancherel, 255  
équation de Bessel, 347  
équation de convolution, 119  
équation de la chaleur, 64, 219, 230, 269, 286, 350  
équation de la corde vibrante, 229  
équation de Laplace, 134  
équation des cordes vibrantes, 351  
équation des cordes vibrantes, 286  
équation des ondes, 351  
équation intégrale d'Abel, 345  
équation intégrale de Volterra, 313, 315  
équilibre indifférent, 317  
espace de base, 16  
espace de Schwartz, 29, 243, 263  
exemple de Féjer, 230

- exemple de Kolmogorov, 231  
 filtre RC, 221  
 fonction à croissance lente, 248  
 fonction bêta d'Euler, 135  
 fonction causale, 112, 292  
 fonction de Bessel, 262, 348, 362  
 fonction de Cauchy, 136  
 fonction de corrélation, 271  
 fonction de Heaviside, 36  
 fonction de type exponentielle à l'infini, 292  
 fonction gamma d'Euler, 135  
 fonction localement intégrable, 20  
 fonction localement sommable, 20  
 fonction porte, 37  
 fonction radiale, 262  
 fonction thêta de Jacobi, 267  
 fonction triangle, 266  
 fonction Zêta de Riemann, 213  
 fonctions de base, 16  
 fonctions tests, 16  
 formule d'Euler, 82  
 formule d'inversion de Fourier, 236, 254, 279  
 formule de Bromwich-Wagner, 300  
 formule de Leibniz, 83  
 formule de Plancherel, 247, 281  
 formule sommatoire de Poisson, 231, 252, 278  
 gaussienne, 127  
 identité de Parseval, 271  
 identité de Sokhotski, 93  
 image, 292  
 inégalité de Bessel, 172  
 inégalité de Wirtinger, 231  
 inégalité isopérimétrique, 231  
 intégrale de Dirichlet, 157  
 intégrale de Fejér, 165  
 inverse de convolution, 121  
 laplacien, 132, 134  
 laplacien de  $1/r$ , 58  
 lemme d'Urysohn, 17  
 lemme de Riemann-Lebesgue, 154, 237  
 lemme de Weyl, 65  
 loi de Kirchoff, 222  
 matrice de Hurwitz, 318  
 mesure, 25  
 multiplication (des distributions), 67  
 noyau de Dirichlet, 156  
 noyau de Fejér, 166  
 noyau de Gauss, 64  
 opérateur de Cauchy-Riemann, 56, 65  
 opérateur de Laplace, 65  
 opérateur des ondes, 53  
 original, 292  
 partie finie, 47  
 peigne de Dirac, 25  
 période fondamentale, 173  
 phénomène de Gibbs, 164  
 phénomène de Gibbs, 207  
 point d'équilibre, 316  
 point stationnaire, 316  
 polynôme trigonométrique, 218  
 potentiel de Yukawa, 287  
 primitive d'une distribution, 42  
 problème de l'inversion d'Abel, 345  
 produit de convolution, 110, 113  
 produit tensoriel ou direct, 105, 108  
 projection orthogonale, 216  
 régularisée, 155  
 régularisation d'une distribution, 118  
 série de Fourier, 147  
 série de Fourier d'une distribution, 176

- série trigonométrique, 142
  - solution élémentaire, 119
  - suite de polynômes de Bernoulli, 212
  - support d'une convolution, 115
  - support d'une distribution, 27
  - support d'une fonction, 16
  - support du produit tensoriel, 108
  - système asymptotiquement stable, 317
- 
- théorème d'approximation de Weierstrass, 168
  - théorème de Fejér, 165
  - théorème de Jordan, 168
  - théorème d'approximation de Weierstrass, 39
  - théorème d'Efros, 363
  - théorème de Dini, 192
  - théorème de Dirichlet, 155
  - théorème de la valeur finale, 299
  - théorème de la valeur initiale, 299
  - théorème de Paley-Wiener, 263
  - théorème de recollement par morceaux, 26
  - théorème de Riemann-Lebesgue, 154, 237
  - transformée de Fourier, 236, 249, 257, 261
  - transformée de Laplace, 291, 303
  - translatée d'une distribution, 69
  - translation d'une convolution, 117
  - transposée d'une distribution, 70
- 
- valeur principale, 33



Achevé d'imprimer en octobre 2012  
N° d'impression 1210.0227  
Dépot légal, octobre 2012  
Imprimé en France



# Distributions, analyse de Fourier et transformation de Laplace

Ce livre a pour but d'exposer de la manière la plus simple, mais rigoureuse sur le plan mathématique, une théorie fondamentale aussi bien en mathématique qu'en physique. L'ouvrage s'organise en trois grandes parties, respectivement intitulées : Distributions, Analyse de Fourier et Transformée de Laplace, ainsi qu'un appendice. On trouvera une description détaillée de toutes ces notions dans l'introduction propre à chaque chapitre. Chacun commence par un exposé clair et précis de la théorie (définitions, propositions, remarques, etc.). En général, les démonstrations sont complètes, détaillées et accessibles à un large public. Par ailleurs, le souci de rendre les notations aussi simples que possible a conduit à raisonner souvent dans le cas d'une variable avec des indications sur les quelques changements que demande le cas de plusieurs variables.

De nombreux exemples se trouvent disséminés dans le texte. En outre, comme il s'adresse principalement à tous les étudiants scientifiques entrant dans un établissement d'enseignement supérieur, chaque chapitre comporte de nombreux exercices de difficulté variée complètement résolus ainsi que des exercices proposés avec éventuellement des réponses ou des indications. Certains exercices ont fait l'objet de questions d'examen au cours des dernières années. Par ailleurs parmi ces exercices il y en a des classiques, que l'on retrouvera certainement ailleurs, et d'autres qui sont vraisemblablement originaux.

Cet ouvrage est destiné aux étudiants de licence ou master de mathématiques (L2, L3, M1) ainsi qu'aux élèves des grandes écoles scientifiques et techniques. Il peut également être utile aux enseignants.

*L'auteur, titulaire d'un doctorat d'état en sciences mathématiques, est professeur de l'enseignement supérieur à l'université Chouaïb Doukkali, faculté des sciences, département de mathématiques, El Jadida, Maroc.*



9 782729 876296

[www.editions-ellipses.fr](http://www.editions-ellipses.fr)