SPA Master 1 : <u>Corrigé de l'examen</u>

<u>Exercice 1</u>

Soit $X_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + S_t + Y_t$

$S_t = S_{t+3}$; $\sum_{j=1}^{3} S_{t+j} = 0$

$$\frac{1}{9}\left(-B^2+4B+3+4B^{-1}-B^{-2}\right)X_t = \frac{1}{9}\Big\{-a_0 - a_1(t-2) - a_2(t-2)^2 - a_3(t-2)^3 - S_{t-2}$$
$$+4a_0 + 4a_1(t-1) + 4a_2(t-1)^2 + 4a_3(t-1)^3 + 4S_{t-1}$$
$$+3a_0 + 3a_1 t + 3a_2 t^2 + 3a_3 t^3 + 3S_t$$
$$+4a_0 + 4a_1(t+1) + 4a_2(t+1)^2 + 4a_3(t+1)^3 + 4S_{t+1}$$
$$-a_0 - a_1(t+2) - a_2(t+2)^2 - a_3(t+2)^3 - S_{t+2}\Big\}$$

$$+\frac{1}{9}\left(-Y_{t-2} + 4Y_{t-1} + 3Y_t + 4Y_{t+1} - Y_{t+2}\right)$$

Un calcul simple donne :

$$= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \underbrace{-S_{t-2} + \underbrace{4S_{t-1} + 3S_t + 4S_{t+1}}_{= S_{t-1}+S_{t+1}} - S_{t+2}}_{=0}$$

$$+\frac{1}{9}\left(-Y_{t-2} + 4Y_{t-1} + 3Y_t + 4Y_{t+1} - Y_{t+2}\right)$$

/ On teste H_0 : " $\theta = 0$ " vs H_1 : " $\theta \neq 0$ "

La statistique de test est $\hat{\theta}/\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}$. Sa valeur calculée est donnée entre parenthèses. On remarque que tous les paramètres sont significatifs.

Test sur les résidus de chaque modèle.

On teste H_0 : " $\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_{40} = 0$ " vs H_1 : " $\exists j = \overline{1,40}$; $\rho_j \neq 0$ "

On utilise la statistique de Box-Ljung :

$$BL(40) = T(T+2)\sum_{h=1}^{40} \frac{\hat{\rho}_j^2}{T-j} \sim \chi^2(40 - \text{nbre de param. estimés})$$

Pour le premier modèle $BL(40) \sim \chi^2_{40-2} \equiv \chi^2_{38}$

Sa valeur calculée est égale à 53,45.

La valeur tabulée est égale à

On rejette donc H_0.

Pour le deuxième modèle $BL(40) \sim \chi^2_{40-3} \equiv \chi^2_{37}$

Sa valeur calculée est égale à 23,45. Elle est inférieure à la valeur tabulée.

On accepte donc H_0. On choisit donc le modèle 2.

Exercice 2

A/ 1) L'exemple $Y_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$

$Z_t = \varepsilon_t + \frac{1}{\theta} \varepsilon_{t-1}$ a été vu en cours

L'inversibilité permet d'identifier la partie moyenne mobile.

2) Si un processus est stationnaire et causal, il est "stable". On peut donc se projeter sur le futur et calculer des prévisions.

B/ • $E|S_m| \leq \sum_{j=1}^{m} |\theta|^j \sigma < +\infty$, $\forall m$ et également lorsque $m \to \infty$. On conclut que la série $\sum_{j=1}^{\infty} \theta^j X_{n-j}$ converge absolument presque sûrement.

• $E\left(S_m - \sum_{j=1}^{\infty} \theta^j X_{n-j}\right)^2 = E\left(\sum_{j=m+1}^{\infty} \theta^j (X_{n-j} - \mu)\right)^2$

$$= \sum_{j=m+1} \theta^{2j} \, E(X_{n-j} - \mu)$$

$$+ \sum_{\substack{j=m+1 \\ j \neq k}}^{\infty} \sum_{k=m+1}^{\infty} \theta^{j+k} \, \gamma_{j-k} \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$$

On conclut que $S_m \xrightarrow[m \to \infty]{m.q} \sum_{j=1}^{\infty} \theta^{j} X_{n-j}$

Exercice 3

Soit le processus ARMA(2,2) donné par l'équation aux récurrences stochastique

$$y_t = 0.2\, y_{t-1} + 0.5\, y_{t-2} + \varepsilon_t - 0.4\, \varepsilon_{t-1} + 0.04\, \varepsilon_{t-2}$$

1)

- $\varphi(z) = 1 - 0.2\, z - 0.5\, z^2$ a pour racines

$$z_1 = \frac{0.2 + \sqrt{2.04}}{-1} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{0.2 - \sqrt{2.04}}{-1}$$

qui sont > 1 en module. On conclut que le processus est stationnaire et causal.

- Il est inversible si $\Theta(z) = 0 \Rightarrow |z| > 1$.

$$\Theta(z) = 1 - 0.4\, z + 0.04\, z^2$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow z_1 = z_2 = 0.4/0.08 = 5 > 1.$$

2) $\gamma_1 = \operatorname{cov}(y_t, y_{t-1}) = 0.2\, \gamma_0 + 0.5\, \gamma_1 - 0.4\, \sigma_\varepsilon^2 + 0.04 \operatorname{cov}(y_{t-1}, \varepsilon_t$

$$\operatorname{cov}(y_{t-1}, \varepsilon_{t-2}) = 0.2 \operatorname{cov}(y_{t-2}, \varepsilon_{t-2}) + 0.5\, \underbrace{\operatorname{cov}(y_{t-3}, \varepsilon_{t-2})}_{=0}$$

$$+ \operatorname{cov}(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}) - 0.4\, \sigma_\varepsilon^2$$

D'où $\gamma_1 (1 - 0.5) = 0.2\, \gamma_0 + \sigma_\varepsilon^2 \, (-0.4 + 0.008 - 0.016)$

$$\Rightarrow \quad \gamma_1 = 0{,}4\,\gamma_0 + 0.816\,\sigma_\varepsilon^2 \qquad (1)$$

même

$$\gamma_0 = 0{,}2\,\gamma_1 + 0{,}5\,\gamma_2 + \operatorname{cov}(\varepsilon_t, y_t) - 0{,}4\operatorname{cov}(\varepsilon_{t-1}, y_t) + 0{,}04\operatorname{cov}(\varepsilon_{t-2}, y_t)$$

- $\operatorname{cov}(\varepsilon_t, y_t) = \sigma_\varepsilon^2$
- $\operatorname{cov}(\varepsilon_{t-1}, y_t) = 0{,}2\,\sigma_\varepsilon^2 - 0{,}4\,\sigma_\varepsilon^2 = -0{,}2\,\sigma_\varepsilon^2$
- $\operatorname{cov}(\varepsilon_{t-2}, y_t) = \operatorname{cov}(\varepsilon_{t-2}, 0{,}2\,y_{t-1} + 0{,}5\,y_{t-2} + \varepsilon_t - 0{,}4\,\varepsilon_{t-1} + 0{,}04\,\varepsilon_{t-2})$

$$= 0{,}2\operatorname{cov}(\varepsilon_{t-2}, y_{t-1}) + 0{,}5\,\sigma_\varepsilon^2 + 0{,}04\,\sigma_\varepsilon^2$$

$$= \underbrace{0{,}2 \times (-0{,}2\,\sigma_\varepsilon^2)}_{-0{,}04\,\sigma_\varepsilon^2} + 0{,}54\,\sigma_\varepsilon^2$$

$$= 0{,}5\,\sigma_\varepsilon^2$$

D'où

$$\gamma_0 = 0{,}2\,\gamma_1 + 0{,}5\,\gamma_2 + \sigma_\varepsilon^2\underbrace{(1 + 0{,}08 + 0{,}04 \times 0{,}5)}_{=\,1{,}1}$$

$$\gamma_2 = 0{,}2\,\gamma_1 + 0{,}5\,\gamma_0 + 0{,}04\,\sigma_\varepsilon^2 \qquad (3)$$

On a un système de 3 $\underbrace{\text{équations}}_{(1),\,(2)\text{ et }(3)}$ à 3 inconnues γ_0, γ_1 et γ_2.

Représentation MA(∞)

$$\left(1-\varphi_1 B-\varphi_2 B^2\right) y_t = \left(1+\theta_1 B+\theta_2 B^2\right)\varepsilon_t .$$

$$\left(1-\varphi_1 B-\varphi_2 B^2\right)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i B^i$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{avec } \psi_0 = 1 \qquad \psi_1 = \varphi_1 \\ \text{et } \psi_i = \varphi_1 \psi_{i-1} + \varphi_2 \psi_{i-2}\end{array}}$$

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i B^i \left(1+\theta_1 B+\theta_2 B^2\right)\varepsilon_t$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i} + \theta_1 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i-1}$$

$$+ \theta_2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i-2}$$

$$= \varepsilon_t + \left(\varphi_1+\theta_1\right)\varepsilon_{t-1} + \sum_{i=0}^{\infty} \overbrace{\left(\psi_{i+2}+\theta_1\psi_{i+1}+\theta_2\psi_i\right)}^{=\Psi_{i+2}} \varepsilon_{t-i-2}$$

$\Psi_0 = 1 \quad \Psi_1 = \varphi_1+\theta_1 , \ \Psi_i = \psi_i + \theta_1 \psi_{i-1} + \theta_2 \psi_{i-2} \ ; i \geqslant 2$

C'est la représentation MA(∞)

Représentation AR(∞)

$$\left(1-\varphi_1 B-\varphi_2 B^2\right) y_t = \left(1+\theta_1 B+\theta_2 B^2\right) \varepsilon_t$$

Si le modèle ARMA(2,2) est inversible, alors

on a la représentation AR(∞)

$$\varepsilon_t = \left(1+\theta_1 B+\theta_2 B^2\right)^{-1} \left(1-\varphi_1 B-\varphi_2 B^2\right) y_t$$

$$\left(1+\theta_1 B+\theta_2 B^2\right)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i B^i$$

avec $\pi_0 = 1$, $\pi_1 = -\theta_1$

et $\pi_i = -\theta_1 \pi_{i-1} - \theta_2 \pi_{i-2}$

D'où
$$\varepsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i y_{t-i} - \varphi_1 \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i y_{t-i-1} - \varphi_2 \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i y_{t-i-2}$$

$$= y_t + \left(\pi_1 - \varphi_1\right) y_{t-1} + \sum_{i=0}^{\infty} \left(\pi_{i+2} - \varphi_1 \pi_{i+1} - \varphi_2 \pi_i\right) y_{t\cdot}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i^* y_{t-i}$$

avec $\pi_0^* = 1$, $\pi_1^* = \pi_1 - \varphi_1 = -\theta_1 - \varphi_1$

et $\pi_i^* = \pi_i - \varphi_1 \pi_{i-1} - \varphi_2 \pi_{i-2}$; $i \geqslant 2$.

B/ $\hat{\rho}_1 = 0.33$ $\hat{\rho}_2 = -0.068$ $\hat{\rho}_3 = -0.093$

$\hat{\rho}_4 = -0.024$ $\hat{\rho}_5 = 0.009$

) $\hat{\varphi}_{11} = \hat{\rho}_1 = 0.33$

$$\hat{\varphi}_{22} = \frac{\hat{\rho}_2 - \hat{\rho}_1^2}{1 - \hat{\rho}_1^2} = 0.1985$$

$$\hat{\varphi}_{33} = \frac{\hat{\rho}_3 - \hat{\varphi}_{2,1}\hat{\rho}_2 - \hat{\varphi}_{2,2}\hat{\rho}_1}{1 - \hat{\varphi}_{2,1}\hat{\rho}_1 - \hat{\varphi}_{22}\hat{\rho}_2} = -0.1563$$

car $\hat{\varphi}_{21} = \hat{\varphi}_{11} - \hat{\varphi}_{22}\hat{\varphi}_{11} = 0.2645$

etc.

) • On teste H_0 : "$\rho_h = 0$" vs H_1 : "$\rho_h \neq 0$"

pour $h = 1$, la statistique de test est :

$\dfrac{\hat{\rho}_1}{\sqrt{\frac{1}{T}}}$. Sa valeur calculée est $\dfrac{0.33}{\sqrt{\frac{1}{10}}} \simeq 1.04$

On accepte H_0. Les autres autocorrélations sont plus petites que $\hat{\rho}_1$. On peut donc affirmer au seuil $\alpha = 0.05$ que $\rho_h = 0$; $h = 1, 2, \ldots$

• On teste H_0 : "$\varphi_{hh} = 0$" vs H_1 : "$\varphi_{hh} \neq 0$"

La statistique de test est $\sqrt{T}\,\hat{\varphi}_{hh}$.

On accepte H_0 au seuil $\alpha = 0.05$. Il s'agit d'un WN