**Université Mohammed kheider Biskra**
**Département de Mathématiques**
**$1^{i\grave{e}me}$ année Master: 2020 - 2021**
**Module : Théorie des opérateurs**
**T D : 1**

**Exercice 1** *Déterminer si l'application* $T:(E,N_1)\to(F,N_2)$ *est continue dans les cas suivants*

1. $E=C([0,1],\mathbb{R})$ *muni de la norme* $\|f\|_1=\int_0^1|f(t)|\,dt$ ,
   $T:(E,\|.\|_1)\to(E,\|.\|_1)$ *et* $f\longmapsto fg$ *où* $g\in E$ *est fixé.*

2. $E=C([0,1],\mathbb{R})$ *muni de la norme* $\|f\|_2=\left(\int_0^1|f(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$ ,
   $F=C([0,1],\mathbb{R})$ *muni de la norme* $\|f\|_1=\int_0^1|f(t)|\,dt$ *et*
   $T:(E,\|.\|_2)\to(F,\|.\|_1)$ $f\longmapsto fg$ *où* $g\in E$ *est fixé.*

3. $E=\mathbb{R}[X]$ *muni de la norme* $\left\|\sum\limits_{k\geq0}a_kx^k\right\|=\sum\limits_{k\geq0}|a_k|$,
   $T:(E,\|.\|)\to(E,\|.\|)$ *et* $p\longmapsto p'$

**Exercice 2** *Montrer que si l'espace vectoriel* $E$ *est de dimension finie, alors tout opérateur linéaire* $A:E\to F$ *est borné.*

**Exercice 3** *Soit* $E=M_n(\mathbb{R})$*muni de la norme* $N$ *définie pour tout*
$A=(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ *par* $N(A)=\sup_{i=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\right\}$ *(on admet qu'il s'agit d'une norme)*
*Démontrer que l'application trace* $T_r:E\to\mathbb{R}$ *est continue, et calculer sa norme.*

**Exercice 4** *Soit* $E=C([0,1])$ *muni de* $\|.\|_\infty$ *et* $F=C([0,1])$ *muni de* $\|f\|_F=\|f\|_\infty+\|f'.\|_\infty$*.Soit* $T:E\to F$ *défini par* $Tf(x)=\int_0^x f(t)\,dt$*. Démontrer que* $T$ *est continue et calculer sa norme.*

**Exercice 5** *Montrer que si* $A:E\to F$ *est un opérateur linéaire borné alors,*
$$\|A\|=\sup_{\|x\|\leq1}\|A(x)\|=\sup_{\|x\|\neq0}\frac{\|A(x)\|}{\|x\|}=\sup_{\|x\|=1}\|A(x)\|$$

**Exercice 6** *Soit* $E = l^2$, $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ *une suite bornée dans* $\mathbb{C}$ *et* $M = \sup_n |\lambda_n|$.
*Soit* $T : l^2 \to l^2$ *définie par :*

$$Tx = y, \text{ avec } y = (\lambda_n x_n)_{n\geq 1} \text{ si } x = (x_n)_{n\geq 1} \in E.$$

*Montrer que* $T$ *est linéaire, continue, et calculer sa norme*