Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Badji Mokhtar-Annaba

Masters: -Probabilités et Statistique
-Actuariat

Probabilités1(Série N°2)

Exercice 1:

1−Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de *v.a.d.* *i.i.d.* telles que

$$P(X_n = 1) = p \text{ et } P(X_n = 0) = q = 1 - p.$$

On pose pour tout $n \geq 1$

$$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n.$$

Etablir que

$$\forall \delta > 0, \text{ on a } P\left(\left|n^{-1}S_n - p\right| > \delta\right) \leq \frac{1}{4n\delta^2}.$$

2−Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ et soit $\varepsilon > 0$. On considère pour tout $n \geq 1$, le polynôme

$$B_n(p) = \mathbb{E}\left(f\left(n^{-1}S_n\right)\right).$$

Montrer que pour n très grand, on a

$$\sup_{x\in[0,1]} |B_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Indications:

Utiliser les propriétés suivantes, d'une fonctiion continue sur un compact:

$-f$ est bonée: $|f(x)| \leq K$ pour tout $x \in [0,1]$

$-f$ est uniformémént continue:$\exists\delta > 0 : |x - y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Exercice 2:

Soit $X_N \rightsquigarrow \mathcal{H}(N, n, p)$ (loi hypergéométrique de paramètres N, n et p). Notons S l'esnsemble des entiers naturels N tels que Np soit un entier. Montrer que

$$X_N \xrightarrow{\mathcal{L}} X \text{ de loi binomiale } \mathcal{B}(n, p).$$

Exercice 3:

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de *v.a.d.* telle que pour tout entier n on ait

$$X_n \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p_n) \text{ où } p_n \text{ est tel que } \lim_{n\to\infty} np_n = \lambda.$$

Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une *v.a.d.* X de loi de Poisson de paramètre λ, $\mathcal{P}(\lambda)$.