Cours 1

Processus markovien de sauts

1-1 Chaines de Markov à temps continu

Une chaine de Markov à temps continu est un processus aléatoire $(X_t)_{t\geq 0}$ dont l'évolution future est indépendante du passé sachant l'état présent. Par rapport au chaines de Markov à temps discret $(X_n)_{n\geq 0}$, la différence se situe dans le fait que la chaine peut changer d'état à n'importe quel moment de $T = [0, +\infty[$ et non uniquement à des instants entiers. Lorsque le processus prend ses valeurs dans un espace d'états E au plus dénombrable, typiquement E fini ($E = \mathbb{N}$), on parle de processus markovien de sauts.

Définition 1

Le processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$ est une chaine de Markov à temps continu si :

$\forall\ 0 \leq t_0 < t_1 <..< t_n < t$,$\forall\ i_0, i_1, .., i_n, i \in E.\ On\ a$

$$P\big(X_t = i \mid X_{t_0} = i_0, .., X_{t_n} = i_n\big) = P\big(X_t = i \mid X_{t_n} = i_n\big)$$

C'est la propriété de Markov, l'évolution future est indépendante du passé sachant l'état présent

Définition 2 (chaine de Markov homogène)

La chaine de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ est homogène si pour tous $t, s \in \mathbb{R}^+$, pour tous $i, j \in E$, on a

$$p_{ij}(t) = P(X_{t+s} = j | X_s = i)$$

Remarque dans toute la suite, on ne considérera que des processus homogènes.

Définition 3 (matrice de transition)

La matrice de transition $P(t) = \big(p_{ij}(t)\big)_{i,j\in E}$ vérifie les deux propriétés suivantes :

i- $\forall i, j \in E,\ \forall t > 0\ ,\quad p_{ij}(t) \geq 0$

ii- $\forall i, j \in E,\ \forall t > 0\ ,\quad \sum_{j\in E} p_{ij}(t) = 1$

1-1-1 Générateur infinitésimal

Considérons un temps de séjour S_i à un état $i \geq 0$, $S_i \hookrightarrow Exp(\lambda_i)$, $0 \leq \lambda_i < \infty$. Les probabilités de transition conditionnelles étant donné qu'il y a changement d'état à partir de i sont notées q_{ij}. C'est-à-dire lorsqu'on quitte l'état i, il y a transition de i vers j $(i \neq j)$ avec probabilité q_{ij} indépendamment des temps de séjour et des transitions qui ont précédé. On a $q_{ij} = 0$ si $i = j$ et

$$\sum_j q_{ij} = 1$$

Les probabilités de transition infinitésimales sont données par

$$p_{ij}(h) = \begin{cases} \lambda_i q_{ij}(h) + o(h) & si \quad i \neq j \\ 1 - \lambda_i h + o(h) & si \quad i = j \end{cases}$$

Où,

q_{ij} sont les probabilités de transition lorsqu'il y a changement d'état .

$o(h)$ représente la probabilité de réalisation de l'évènement avec au moins deux changements d'états.

On en déduit que

$$\frac{p_{ij}(h) - p_{ij}(0)}{h} = \begin{cases} \lambda_i q_{ij} + \dfrac{o(h)}{h} & si \quad i \neq j \\ -\lambda_i + \dfrac{o(h)}{h} & si \quad i = j \end{cases}$$

Où $p_{ij}(0) = \begin{cases} 1 & si \ i = j \\ 0 & si \ non \end{cases}$

Alors , on a

$$a_{ij} = \lim_{h \to 0} \frac{p_{ij}(h) - p_{ij}(0)}{h} = \begin{cases} \lambda_i q_{ij} & si \ i \neq j \\ -\lambda_i & si \ i = j \end{cases}$$

Définition 4

On appelle générateur infinitésimal (ou matrice génératrice), la matrice dont le terme général est a_{ij} pour $i \neq j$ et $-\lambda_i$ pour le terme diagonal d'ordre i. Cette matrice est notée A.

La matrice A une matrice carrée à coefficients a_{ij} réels positifs sauf sur la diagonale. La somme des coefficients d'une même ligne de A vaut zéro.

$$\sum_{j \in E} a_{ij} = 0$$

En notation matricielle, on a $AI = 0$. Où I est un vecteur dont toutes les composantes sont égales à 1 et 0 est un vecteur dont toutes les composantes sont égales à 0.

Exemple

La matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ est une matrice génératrice sur l'ensemble des états $E = \{1,2,3\}$.

1-1-2 Equation de Chapman Kolmogorov

Pour les probabilités de transition de l'instant 0 à l'instant $t + h$ $(h > 0)$, on considère l'état à l'instant intermédiaire t. On obtient

$$p_{ij}(t+h) = \sum_{k\in E} p_{ik}(t)p_{kj}(h)$$

En notation matricielle, on a

$$P(t+h) = P(t)P(h)$$

D'où $\frac{P(t+h)-P(t)}{h} = P(t)\frac{P(h)-I}{h}$

Où I est la matrice identité. On conclut alors que

$$\acute{P}(t) = \lim_{h\to 0}\frac{P(t+h)-P(t)}{h} = P(t)\lim_{h\to 0}\frac{P(h)-I}{h} = P(t)A$$

C'est l'équation progressive de Kolmogorov .

De même, si on considère l'état à l'instant intermédiaire h entre 0 et $t+h$ et qu'on laisse tendre h vers 0, on obtient l'équation différentielle matricielle

$$\acute{P}(t) = AP(t)$$

C'est l'équation rétrograde de Kolmogorov.

Les équations progressives et rétrogrades de Kolmogorov ont comme solution

$$P(t) = e^{At} = \sum_{n\geq 0}\frac{(At)^n}{n!} \ , t \geq 0$$

Pour calculer $P(t)$, on suppose que le générateur A est diagonalisable. On a donc

$$A = SDS^{-1}$$

Où, D la matrice diagonale des valeurs propres de A et S est une matrice inversible dont les colonnes sont des vecteurs propres associés à ces valeurs propres. On a alors

$$e^{At} = P(t) = Se^{Dt}S^{-1}$$

1-1-3 Conditionnement sur le premier changement d'état

La probabilité d'atteindre un état à partir d'un autre état dans une chaine de Markov à temps continu peut être obtenue en conditionnant sur le premier changement d'état. Considérons par exemple l'espérance τ_i du temps avant d'atteindre un état 0 à partir d'un autre état.

$$\tau_i = E(\text{temps avant l'état 0} \mid \text{départ de l'état } i)$$

$$\tau_i = \frac{1}{\lambda_i} + \sum_j q_{ij}\tau_j$$

Où $\frac{1}{\lambda_i}$ est l'espérance d'un temps de séjour à l'état i ($i \neq 0$). Il suffit donc de résoudre le système avec $\tau_0 = 0$.

1-1-4 Classification des états

- Un état j est accessible depuis un état i s'il existe $t \geq 0$ tel que $p_{ij}(t) > 0$
- Deux états i et j communiquent s'il existe $t_1 \geq 0$, $t_2 \geq 0$ tels que $p_{ij}(t_1) > 0$ et $p_{ji}(t_2) > 0$
- Une chaîne de Markov en temps continu est irréductible si tous ses états communiquent.

Les propriétés d'irréductibilité, de récurrence et de transience d'une chaîne de Markov en temps continu sont les mêmes que celles d'une chaînes de Markov discrètes.

Remarque une chaine de Markov en temps continu ne peut pas être périodique puisque le temps passé dans un état quelconque est décrit par une variable aléatoire continue.

Définition 5 Un état i est absorbant si pour tout t

$$p_{ii}(t) = P(X(t) = i | X(0) = i) = 1$$

1-1-5 Loi de X_t

La loi à l'instant t de la chaîne de Markov en temps continu $(X_t)_{t\geq 0}$ de loi initiale $\pi(0)$ et de générateur infinitésimal A, est donnée par

$$\pi(t) = \pi(0)P(t) = \pi(0)e^{At}$$

1-1-6 Distribution stationnaire et théorème ergodique

1- Distribution stationnaire

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus markovien de sauts sur un nombre fini d'états. On suppose la chaine irréductible avec un temps de séjour à tout état i de loi $Exp(\lambda_i)$.

Une distribution stationnaire $\pi = (\lambda_i)_{i\in E}$ pour cette chaine est définie par les trois conditions suivantes.

i- $\pi_j > 0 \quad \forall j \in E$;
ii- $\sum_{j\in E} \pi_j = 1$
iii- $\pi A = 0$

La condition (i) et (ii) montrent que la distribution stationnaire est une distribution de probabilité strictement positive.
La condition (iii) signifie que le flot de sortie de l'état j est égale au flot d'entrée à l'état j. C'est l'équation stationnaire.

2- Théorème ergodique

Si $(X_t)_t$ est une chaine de Markov irréductible sur un nombre fini d'états, alors on a

$$p_{ij}(t) = P(X(t) = j \mid X(0) = i) \to \pi_j \quad \text{lorsque} t \to +\infty$$

Par le théorème ergodique, la probabilité π_j correspond à la fraction moyenne de temps à long terme que la chaine passe à l'état j.

1-1-7 Chaîne de Markov incluse

Soit $(Z_n, n \geq 0)$ la suite des états visités par la chaîne de Markov homogène $(X(t))_{t\geq 0}$ d'espace d'état$E$, et de générateur $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j\in E}$ alors le processus $(Z_n, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov en temps discret homogène , d'espace d'état E et de matrice de transition $Q^* = \left(q_{ij}^*\right)_{i,j\in E}$ donnée par

$$si \;\; \lambda_i > 0 \;, \quad q_{ij}^* = \begin{cases} \dfrac{a_{ij}}{\lambda_i} & si \;\; i \neq j \\ 0 \quad si \quad i = j \end{cases}$$

$$si \;\; \lambda_i = 0 \;, \quad q_{ij}^* = \begin{cases} 0 & si \quad i \neq j \\ 1 & si \quad i = j \end{cases}$$

En outre , $\lambda_i > 0$ si et seulement i n'est pas absorbant . La chaîne de Markov $(Z_n, n \geq 0)$ est appelée chaine incluse .

1-2 Processus de Poisson

Un processus de Poisson est un processus markovien de sauts $(N_t)_{t\geq 0}$ qui compte le nombre d'arrivées d'un évènement qui se produisent au hasard dans le temps à un taux constant. L'intensité d'un processus de Poisson est le taux instantané $\lambda > 0$ avec lequel les arrivées se produisent. Dans un processus de Poisson d'intensité λ, les temps entre deux arrivées consécutives, appelés temps d'inter- arrivées, sont indépendants et de loi exponentielle de paramètre λ.

Définition 6 un processus de Poisson$(N_t)_{t\geq 0}$ est une chaîne de Markov en temps continu à valeurs dans $\mathbb{N}$ de générateur infinitésimal .

$$a_{ii} = -\lambda,$$

$$a_{i,i+1} = \lambda$$

$$a_{ij} = 0 \quad \text{sinon}$$

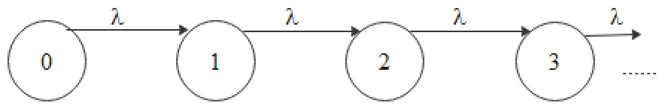
On dit alors que le processus $(N_t)_{t\geq 0}$ est d'intensité, ou de taux λ

Remarque

- On supposera généralement que $N_0 = 0$

- On note $(N_t)_{t\geq 0}$ au lieu de $(X_t)_{t\geq, 0}$, car N_t correspond souvent au nombre d'évènements qui sont survenus entre l'instant 0 et l'instant t, par exemple le nombre de voitures arrivant au péage, le nombre d'appels à un central téléphonique,.. etc

Graphe associé à un processus de Poisson



Nombre d'arrivées dans un intervalle de temps

Si $(N_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson d'intensité λ, alors le nombre d'arrivées dans l'intervalle de temps $[0, t]$ suit une loi de Poisson de paramètre λt.

$$P(N_t = n) = p_{0j}(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

Pour tout $n \geq 0$. Ceci explique pourquoi on l'appelle processus de Poisson.

1-3- Processus de naissance et de mort

Les processus de naissance et de mort peuvent modéliser l'évolution d'une population au cours du temps, le nombre de clients dans une file d'attente, etc.

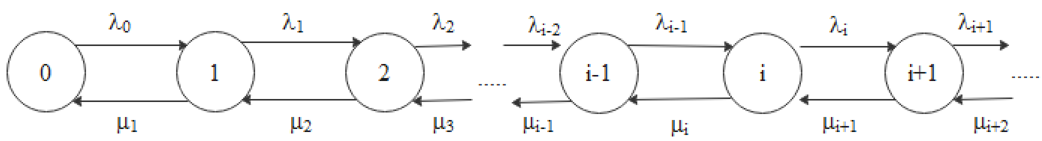
Définition 7 un processus de naissance et de mort est un processus markovien de sauts $(X_t)_{t\geq 0}$à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont le générateur infinitésimal $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j\in\mathbb{N}}$ est de la forme :

$$a_{i,i+1} = \lambda_i > 0 \ , \ a_{i,i-1} = \mu_i > 0 \, , \ a_{ij} = 0 \ \ si \ \ |i-j| \geq 2$$

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & \cdots & .. & .. \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & .. & .. \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & 0 & .. \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Les coefficients positifs λ_i et μ_i sont appelés taux de transition, λ_i , $i \geq 0$ est le taux de naissance et μ_i , $i \geq 1$ est le taux de mort . Les transitions possibles à partir de l'état i ne peuvent se faire que vers l'état $(i-1)$, en cas de mort, où vers l'état $(i+1)$, en cas de naissance

Le graphe de transition est :



1- Distribution stationnaire

La distribution stationnaire π est solution de l'équation$\pi A = 0$ équivalente au système linéaire :

$$-\lambda_0 \pi_0 + \mu_1 \pi_1 = 0$$

$$\forall i \geq 1 \ , \ \lambda_{i-1}\pi_{i-1} - (\lambda_{i+}\mu_i)\pi_i + \mu_{i+1}\pi_{i+1} = 0$$

Les calculs donnent pour i quelconque

$$\begin{cases} \pi_1 = \dfrac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0 \\ \pi_2 = \dfrac{\lambda_1}{\mu_2}\pi_1 \\ \pi_3 = \dfrac{\lambda_2}{\mu_3}\pi_2 \\ \vdots \\ \pi_i = \dfrac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}\pi_{i-1} \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = \dfrac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0 \\ \pi_2 = \dfrac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}\pi_0 \\ \pi_3 = \dfrac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2\mu_3}\pi_0 \\ \vdots \\ \pi_i = \dfrac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2 \ldots\ldots \lambda_{i-1}}{\mu_1\mu_2\mu_3 \ldots\ldots \mu_i}\pi_0 \\ \vdots \end{cases}$$

D'où il vient :

$$\forall n \geq 1, \ \ \pi_n = \pi_0 \left(\frac{\lambda_0\lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2 \ldots . \mu_n}\right)$$

Compte tenu de la relation $\sum_{n=0}^{+\infty} \pi_n = 1$, la valeur de π_0 est donnée par la formule

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \pi_n = \pi_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \pi_n = \pi_0 + \pi_0 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2 \ldots . \mu_n} = \pi_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2 \ldots . \mu_n}\right) = 1$$

On trouve

$$\pi_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2 \ldots . \mu_n}\right)^{-1}$$

Si la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2 \ldots \mu_n}$ est convergente, alors il y a une distribution stationnaire. Sinon, on a $\pi_0 = 0$.

D'où $\pi_n = 0$ pour tout n . Dans ce cas, il n' y a pas de loi stationnaire.

1-3-1 Système d'attente

On considère un système d'attente de type M/M/s/∞. La lettre M signifie sans mémoire, et une notation utilisée pour signifier une loi exponentielle. Ainsi, le premier M signifie que le temps d'inter-arrivées, suit une loi exponentielle de paramètre λ. Le deuxième M signifie que le temps de service d'un client suit aussi une loi exponentielle de paramètre μ. Les temps entre les arrivées consécutives et les temps de service sont tous supposés indépendants. Le processus d'arrivée est donc un processus de Poisson. s représente le nombre de serveurs pour les clients dans le système. La capacité du système est illimitée. Le nombre de clients X_t en attente ou en service à l'instant t, $t \geq 0$ est un processus de naissance et de mort dont les paramètres dépendent du nombre de serveurs. Quatre systèmes sont à considérer :

- M/M/1/∞. Dans le cas où il n'y a qu'un seul serveur, celui-ci est occupé dés qu'il y a au moins un client dans le système . Ainsi, on a

$$\lambda_i = \lambda\,, i \geq 0 \qquad \mu_i = \mu\,, i \geq 1 \quad \text{et} \quad \mu_0 = 0$$

- M/M/s/∞ pour 1< $s < \infty$. Dans ce cas, le nombre de serveurs occupés est égale au nombre de clients dans le système jusqu'à un maximum donné par s. Le taux de naissance est le même que précédemment, soit $\lambda_i = \lambda\,, i \geq 0$ mais le taux de mort est

$$\mu_i = i\mu \quad si \;\; 0 \leq i \leq s \quad \text{et} \quad \mu_i = s\mu \quad si \quad i \geq s+1$$

- M/M/s/K. Dans ce système, le taux d'arrivée des clients s'annule dés que le nombre de clients présents dans le système est égal à K. Les clients arrivent selon un processus de Poisson d'intensité λ, le temps de service est une loi exponentielle de paramètre μ. Il y a s serveurs et la capacité du système est égale à K.
  Le processus représentant le nombre de clients dans le système est un processus de naissance et de mort tels que : $\lambda_i = \lambda\,, i = 0,..,K$ et $\mu_i = i\mu \;\; si \;\; i < s$ et $\mu_i = s\mu \;\; si \;\; i \geq s$

- M/M/∞ . Dans ce cas, le nombre de serveurs occupés est égal au nombre de clients dans le système, qui n'est jamais saturé. Le taux de naissance est toujours $\lambda_i = \lambda$, alors que le taux de mort est $\mu_i = i\mu$, pour $i \geq 0$.

Exercices

Exercice 1

Un homme d'affaires voyage entre Paris, Bordeaux et Marseille. Il passe dans chaque ville un temps de loi exponentielle, de moyenne 1/4 de mois pour Paris et Bordeaux, et de 1/5 de mois pour Marseille. S'il est à Paris, il va à Bordeaux ou Marseille avec probabilité 1/2. S'il est à Bordeaux, il va à Paris avec probabilité 3/4 et à Marseille avec probabilité 1/4. Après avoir visité Marseille, il retourne toujours à Paris.

1- Donner le générateur du processus markovien de sauts décrivant l'itinéraire de l'homme d'affaires.
2- Déterminer la fraction de temps qu'il passe dans chaque ville.
3- Combien de voyages fait-il en moyenne de Paris à Bordeaux par année ?

Exercice 2 (Devoir)

Un petit magasin d'informatique peut avoir au plus trois ordinateurs en stock. Des clients arrivent avec un taux de 2 clients par semaine. Si au moins un ordinateur est en stock, le client l'achète. S'il reste au plus un ordinateur, le tenancier du magasin commande deux nouveaux ordinateurs, qui sont livrés après un temps de loi exponentielle de moyenne 1 semaine.

1- Donner le générateur du processus décrivant le nombre d'ordinateurs en stock.
2- Déterminer la distribution stationnaire.
3- Quel est le taux de vente d'ordinateurs ?

Exercice 3

On considère un processus markovien de sauts X_t sur $E = \{1,2,3,4\}$, de générateur infinitésimal

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1- Représenter le processus de sauts sous forme de graphe.
2- Déterminer la distribution stationnaire.
3- Le processus X_t est-il irréductible ?

Exercice 4

On modélise la désintégration radioactive de N atomes par un processus de sauts markovien $(X_t)_{t\geq 0}$ sur $\{0,1,..,N\}$ de taux μ, X_t désignant le nombre d'atomes non désintégrés au temps t. On considère le cas $N = 1$.

Déterminer le générateur A. Calculer A^2 , puis A^n pour tout n. En déduire la matrice $P(t)$.

Exercice 5

On considère un processus markovien de sauts de générateur infinitésimal

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1- Donner le graphe représentatif
2- Déterminer la distribution stationnaire
3- Déterminer e^A grâce à 3 méthodes différentes :

i- En calculant directement les puissances successives de A
ii- En diagonalisant A

iii- En remarquant que $A = U - 2I$, où U est la matrice uniquement composée de 1 et I est la matrice identité.

Exercice 6

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus markovien de sauts à deux états $\{0,1\}$ de matrice génératrice

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

1- Montrer que le processus X_t est irréductible
2-Ecrire les équations de Kolmogorov pour $p_{00}(t)$ et $p_{10}(t)$.
3- Etablir une expression analytique simple pour $p_{00}(t)$ et $p_{10}(t)$
4- Chercher la distribution stationnaire.

Exercice 7

Une chaîne de Markov à temps continu sur les états 1,2 et 3 a comme générateur

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 4 & -6 & 2 \\ 0 & 8 & -8 \end{pmatrix}$$

1- Déterminer le temps moyen pour atteindre l'état 3 à partir de l'état 1.
2- Déterminer la fraction moyenne de temps à long terme que la chaîne passe à l'état 2.

Exercice 8

On considère un processus de Markov $(X_t,\ t \geq 0)$ sur un espace à 4 états $E = \{1,2,3,4\}$ de matrice génératrice

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & -7 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

1- Représenter la chaîne de Markov sous forme de graphe
2- Calculer la distribution stationnaire du processus
3- Rendre l'état 1 absorbant et calculer le temps moyen mis par le processus pour atteindre 1 depuis l'état 4.

Exercice 8

Un médecin a observé que la durée moyenne d'une consultation est de 15mn. Il se dit qu'en convoquant ses patients à des heures fixées, séparées par un intervalle de 20 minutes, il verra décroitre l'excessive occupation de sa salle d'attente. La durée de consultation suit une loi exponentielle et l'arrivée des clients peut être assimilée à un processus de Poisson.

1- Donner la matrice génératrice et représenter son graphe
2- Déterminer la distribution stationnaire

3- Calculer le nombre moyen de patients dans le cabinet. En déduire le temps moyen de séjour et le temps moyen d'attente.

Exercice 9

Une file M/M/∞ est l'extension (un peu irréaliste) d'une file M/M/s avec une infinité de serveurs identiques. Les arrivées sont poissoniennes de taux λ et le temps de service de chaque serveur est exponentiel de paramètre μ. Chaque client qui arrive se dirige vers l'un des serveurs libres.

1- Modéliser ceci par un processus de naissance et de mort dont on précisera les taux de naissance et de mort.
2- Montrer que la loi stationnaire est une loi de Poisson
3- Déterminer le nombre moyen de clients dans le système en régime stationnaire.

Exercice 10

On considère un salon de coiffure où se trouvent deux coiffeurs ayant chacun un poste de travail. Dans ce salon, il y a en plus une place pour l'attente éventuelle. Les clients arrivent suivant un processus de Poisson de taux 5 par heure. Si un client arrive et que le salon est plein, il repart aussitôt. On suppose que la durée d'une coupe est exponentielle de moyenne 30 minutes.

1- Donner le générateur infinitésimal et le graphe de transition.
2- Déterminer la loi stationnaire
3- Quel est le nombre moyen de clients dans le salon en régime stationnaire ?
4- Quel est le taux moyen d'entrée dans le système en régime stationnaire ?

Exercice 11

On considère un central téléphonique comprenant 3 lignes téléphoniques. Les appels arrivent selon un processus de Poisson de paramètre λ et le temps de service suit une loi exponentielle de paramètre μ.
Il n' y a pas de files d'attente.

1- Donner le générateur infinitésimal et le graphe de transition
2- Quel est le nombre moyen d'appels en régime stationnaire ?
3- Si λ= μ quel est le pourcentage des appels perdus ?