Université Mohammed kheider Biskra
Département de Mathématiques
$1^{ième}$ année Master: 2021 - 2022
Module : Distributions et EDP
TD : 1

Exercise 1 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1. Montrer que si $\varphi \in D$; alors $f\varphi \in D$.*

Exercise 2 1. *Montrer que La fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, si \ |x| < 1 \\ 0, \ si \ |x| \geq 1 \end{cases}$$

appartient à D.

1. *Soit la suite (f_n) de fonctions de $D(\mathbb{R})$ définie par :*

$$f_n(t) = \frac{1}{2^n} \exp\left(-\frac{1}{1 - \frac{|t|^2}{n^2}}\right) si \ |t| < n, 0 \ sinon.$$

Montrer que, pour chaque $k \geq 0$, la suite de fonctions $\left(f_n^{(k)}\right)$converge uniformément sur tout compact vers une fonction $g \in D(\mathbb{R})$ que l'on précisera. A-t-on convergence dans $D(\mathbb{R})$?

Exercise 3 1. *Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$. une fonction de classe C^{n+1}. Montrer que si x_0 et $x_o + x \in I$, alors*

$$f(x_o + x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 f^{(n+1)}(x_o + tx)(1-t)^n \, dt$$

(formule de Taylor d'ordre n avec reste sous forme intégrale).

2. *Pour tout $\varphi \in D$, on pose $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + x^{n+1}\theta(x), x \in \mathbb{R}^\star$ et $\varphi^{(n+1)}(0) = (n+1)!\theta(0)$*

   a) *Montrer que la fonction θ est continue sur $\mathbb{R}$.*

   b) *On suppose que supp $(\varphi) \subset [-c, c]$, $c > 0$. Montrer que*

$$\sup_{x \in [-c,c]} |\theta(x)| \leq A \sup_{x \in [-c,c]} \left|\varphi^{(n+1)}(x)\right|$$

où $A > 0$, est une constante.

Exercise 4 *Soit* φ, $\theta \in D(\mathbb{R})$ *tel que* $\theta(0) = 1$. *Démontrer qu'il existe* $\psi \in D(\mathbb{R})$ *tel que, pour tout* $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \varphi(0)\,\theta(x) + x\psi(x)\,.$$

Exercise 5 *Soient* f *et* g *deux fonctions quelconques.*
Montrer que

1. *Supp*$(\lambda.f) =$*Supp*$(f), \lambda \in \mathbb{R}^*$
2. *Supp*$(f.g) \subset$*Supp*$(f)\cap$*Supp*(g).
3. *Supp*$(f+g) \subset$*Supp*$(f)\cup$*Supp*(g).

Exercise 6 *Montrer que l'application*

$$\varphi \in D \longmapsto < f, \varphi >= \int_a^b \varphi(x)dx$$

définit une distribution sur $\mathbb{R}$.

Exercise 7 *Soient* $\varphi \in D$ *et* T *une distribution, on suppose que les supports de* T *et* φ *sont disjoints. Montrer que* $< T, \varphi >= 0$.

1. *Montrer que si* T_f *est la distribution associée à une fonction continue* f*, alors*
$$SuppT_f = Suppf$$
2. *Soit la fonction* $f \; : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par :*
$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ sur } \{a\} \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}, a \in \mathbb{R}$$
Déterminer $Suppf(x)$ *et* $SuppT_f$