Université de Sidi Bel Abbès
Faculté des Sciences
Département de Mathématique

Année 2011/2012.
Module: Statistique et application.
3ème Année Licence SMAEF.

Concours de Statistique Non Paramétrique

Problème 1 *Soit $K : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction quelconque et soit h un réel positif. On appelle estimateur à noyau la fonction*

$$f_n = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{X_i - x}{h}\right)$$

où K est le noyau de cet estimateur et h est la fenêtre. Montrer que si K est positive et $\int_{\mathbb{R}} K(u)du = 1$, alors $f_n(.)$ est une densité de probabilité. De plus, f_n est continue si K est continue. Lorsqu'on définit un estimateur à noyau, on a non-seulement le choix de la fenêtre $h > 0$ mais aussi celui du noyau K. Il y a un certain nombre de conditions qui sont considérées comme usuelles pour les noyaux et qui permettent d'analyser le risque de l'estimateur à noyau qui en résulte.

HYPOTHÈSE K *: On suppose que K vérifie les 4 conditions suivantes :*

1. $\int_{\mathbb{R}} K(u)du = 1,$
2. *K est une fonction paire ou, plus généralement,* $\int_{\mathbb{R}} uK(u)du = 0,$
3. $\int_{\mathbb{R}} u^2|K(u)|du < \infty,$
4. $\int_{\mathbb{R}} K(u)^2du < \infty,$

(i) Si les trois premières conditions de l'hypothèse K sont remplies et f est une densité bornée dont la dérivée seconde est bornée, montrer que

$$|Biais\,(f_n(x))| \leq C_1 h^2,$$

où $C_1 = 1/2 \sup_{z\in\mathbb{R}} |f"(z)| \int_{\mathbb{R}} u^2\,|K(u)|\,du.$

(ii) Si, de plus, la condition 4 de l'hypothèse K est satisfaite, montrer que

$$Var\,(f_n(x)) \leq \frac{C_2}{nh}$$

avec $C_2 = \sup_{z\in\mathbb{R}} f(z) \int_{\mathbb{R}} K(u)^2du.$

Bon Courage