Université Mostefa Ben Boulaïd - Batna 2
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques
Mathématiques Appliquées L3

TD 03

Exercice 1 (***Intégrale d'une fonction étagée positive***).
Soient $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, et $A, B \in \mathcal{F}$. Calculer

1. $\int_A \mathbf{1}_B \mathsf{d}\mu$.
2. $\int_X f \mathsf{d}\mu$ *avec* $f(x) = \begin{cases} 3 & si\ x \in A \\ 2 & sinon \end{cases}$

Exercice 2 (***Intégrale d'une fonction étagée positive***).
Calculer l'intégral de Lebesgue sur l'intervalle $[0, +\infty[$ des fonctions f et g tel que :

1. $f(x) = e^{-[x]}$.
2. $g(x) = \dfrac{1}{[x]!}$,

d'où $[x] = \{n \in \mathbb{N}; n \leq x < n\}$.

Exercice 3 (***Mesure à densité f par rapport à μ***).
Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to [0; +\infty]$ une fonction numérique mesurable positive. Définissons la fonction d'ensembles $\varphi : \mathcal{M} \to [0; +\infty]$ par

$$\varphi(A) := \int_A f \mathsf{d}\mu, \quad A \in \mathcal{M}$$

1. *Montrer que φ est une mesure sur $(X, \mathcal{M})$. (On dit que φ est de densité f par rapport à μ.)*
2. *Soit g une fonction numérique mesurable positive. Montrer que* $\displaystyle\int_X g \mathsf{d}\varphi = \int_X fg \mathsf{d}\mu$

Exercice 4 (***Théorème de convergence monotone***).
Calculer

1. $\lim_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{[0,\frac{\pi}{2}]} 1 - e^{-n\cos x} \mathsf{d}\lambda$.
2. $\displaystyle\int_{[0,1]} \frac{-\ln(1-x)}{x} \mathsf{d}\lambda$.
3. $\lim_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{[0,1]} (1 - x^n) \mathsf{d}\lambda$.
4. $\lim_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{[0,+\infty]} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-bx} \mathsf{d}\lambda, \quad b > 1$.

Exercice 5 (***Cours***) *Soit $f : X \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable positive. Montrer :*

1. *(Inégalité de Tchebychev). Pour tout nombre réel $a > 0$ on a*

$$\mu\left(\{x \in X : f(x) \geq a\}\right) \leq \frac{1}{a} \int f \mathsf{d}\mu.$$

2. $\displaystyle\int f \mathsf{d}\mu = 0$ *si et seulement si $f = 0$ presque partout.*
3. *Si* $\displaystyle\int f \mathsf{d}\mu < +\infty$ *alors $f < +\infty$ presque partout.*
4. *Si $f, g \in \mathcal{M}(X, \overline{\mathbb{R}}_+)$ telles que $f = g$ presque partout. Alors* $\displaystyle\int_X f \mathsf{d}\mu = \int_X g \mathsf{d}\mu$

Exercice 6 (***Méthode graduelle, Application d'inégalité de Tchebychev***)
Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace mesuré,* $f \in \mathcal{M}(X, \overline{\mathbb{R}}_+)$ *et* $A \in \mathcal{F}$.

1. *Montrer que* $\mu(A) = 0 \Rightarrow \int_A f \mathsf{d}\mu = 0.$
2. *Montrer par un exemple que l'implication inverse n'est pas vérifiée.*
3. *Montrer que*
$$\int_A f \mathsf{d}\mu = 0. \Rightarrow \mu(A \cap \{x \in X : f(x) > 0\}) = 0$$
et en particulier
$$\int_X f \mathsf{d}\mu = 0. \Rightarrow \mu(\{x \in X : f(x) > 0\}) = 0$$

Exercice 7 (***Théorème de Convergence dominée***)
Calculer les limites suivantes

1. $\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^2x^2} \mathsf{d}x$
2. $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin(\frac{1}{nx}) \mathsf{d}x$
3. $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathsf{d}x.$
4. $\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(\frac{x}{n}\right) \frac{n}{x(1+x^2)} \mathsf{d}x.$
5. $\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{1+\cos^{2n}(x)} e^{-|x|} \mathsf{d}x.$
6. $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{x}{n}\right) e^{-x} \mathsf{d}x.$

Exercice 8 (***Théorème de Convergence dominée***)
Pour $n \geq 1$ *et* $x \in [0, 1]$ *, on pose*
$$f_n(x) = nx(1-x)^n.$$

1. *Démontrer que, pour tout* $x \in [0,1]$ *et tout* $n \geq 1$*, on a* $|f_n(x)| \leq 1$.
2. *En déduire*
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 nx(1-x)^n \mathsf{d}x.$$

Exercice 9 (***Intégrale d'une série de fonctions***)

1. *Démontrer que*
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^{2n}(1-x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}.$$
2. *En déduire que*
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2.$$