Chapitre 1

Rappels de Théorie de la mesure et Probabilité

1.1 Rappels de Théorie de la Mesure et de l'Intégration

1.1.1 Tribu

On définit une tribu, ou σ-algèbre, par :

Définition 1.1 (Tribu)**.** Une *Tribu* $\mathcal{A}$ est une collection d'ensembles A_i vérifiant :
1/ $\emptyset \in \mathcal{A}$
2/ Si $A \in \mathcal{A}$ alors $A^c \in \mathcal{A}$
3/ $\cup_i A_i \in \mathcal{A}$ si $A_i \in \mathcal{A}$.

Soit un ensemble Ω muni d'une σ-algèbre $\mathcal{F}$. On appelle le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ *espace mesurable*. Si Ω est l'espace des événements élémentaires d'une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ alors $(\Omega, \mathcal{F})$ est dit *espace probabilisable*.

Définition 1.2 (Tribu borélienne)**.** On appelle *tribu borélienne* de $\mathbb{R}$ la tribu $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}$.

Notation 1.1. $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ *et* $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$.

Tribu produit

Soit $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ deux espaces mesurables. On appelle tribu produit de $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ la tribu engendrée dans $\Omega_1 \times \Omega_2$ par

$$\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 = \{A_1 \times A_2 : \ A_1 \in \mathcal{F}_1 \text{ et } A_2 \in \mathcal{F}_2\}$$

notée par $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$.

$$\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 = \sigma\left(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2\right).$$

Définition 1.3 (Mesure)**.** Une *mesure* μ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est une application de l'ensemble $\mathcal{F}$ vers $[0, +\infty]$ telle que :

1/ $\mu(\emptyset) = 0$,
2/ (σ-additivité) pour toute suite $(A_n)_{n\geq 1}$ dans $\mathcal{F}$ telle que $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$, on a

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n).$$

Dans ce cas, le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est appelé *espace mesuré*.
Pour toute suite $(A_n)_{n\geq 1}$ dans $\mathcal{F}$, on a la propriété de *sous σ-additivité* :

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(A_n).$$

Définition 1.4 (Mesure finie)**.** Une mesure sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est dite finie si $\mu(\Omega) < +\infty$.

Définition 1.5 (Mesure de probabilités)**.** Une mesure μ est dite *mesure de probabilités* si $\mu(\Omega) = 1$.

Une mesure de probabilités est notée par P et l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ est appelé dans ce cas *espace de probabilité* ou *espace probabilisé*.

Définition 1.6. Une mesure μ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est dite σ-finie s'il existe une suite $(A_n)_{n\geq 1}$ dans $\mathcal{F}$ telle que $\Omega = \bigcup_{n\geq 1} A_n$ et $\mu(A_n) < +\infty \ \forall n \geq 1$.

Exemple 1.1. *Un exemple de mesure σ-finie est la mesure de Lebesgue λ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. On a $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n\geq 1}]-n, +n[$ et $\lambda(]-n, +n[) = 2n$.*

1.1.2 Continuité monotone séquentielle

Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite dans $\mathcal{F}$. On peut voir $\limsup A_n = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k$ comme l'événement qui arrive "infiniment souvent". On définit la limite inférieure des événements par $\liminf A_n = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k$. Intuitivement, $\liminf A_n$ est l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que ω appartienne à une infinité de A_n. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré.

Proposition 1.1 (Continuité monotone séquentielle)**.** ***1****/ Si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ une suite croissante d'événements $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$, et $A = \cup_{n\geq 1} A_n$ et on note $\{A_n\} \nearrow A$, alors*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A) = \mu(\bigcup_{n\geq 1} A_n) \tag{1.1}$$

2*/ Si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ une suite décroissante d'événements $A = \cap_{n\geq 1} A_n \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots \subseteq A_1$, on note $\{A_n\} \searrow A$, et il existe un n_0 tel que $\mu(A_{n_0}) < \infty$, alors*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A) = \mu(\bigcap_{n\geq 1} A_n) \tag{1.2}$$

Proposition 1.2 (Lemme de Borel-Cantelli)**.** *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite dans $\mathcal{F}$ telle que $\sum\limits_{n\geq 1} \mu(A_n) < +\infty$. Alors*

$$\mu(\limsup A_n) = 0 \tag{1.3}$$

La preuve est instructive.

Démonstration. On a $\limsup A_n = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k$. Pour tout $n \geq 1$ on note $B_n = \bigcup_{k\geq n} A_k$. On a alors que la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ est décroissante

$$\{B_n\} \searrow B = \bigcap_{n\geq 1} B_n = \limsup A_n.$$

D'après la continuité monotone séquentielle (1.2)

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(B) = \mu(\bigcap_{n\geq 1} A_n), \tag{1.4}$$

mais

$$\mu(B_n) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \mu(A_k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

car reste d'une série convergente d'après l'hypothèse que $\sum_{n\geq 1} \mu(A_n) < +\infty$.
D'où $\mu(\limsup A_n) = 0$. □

1.1.3 Application mesurable et variable aléatoire

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(S, \mathcal{A})$ deux espaces mesurables.

Définition 1.7 (Application mesurable)**.** On dit que f est une *application mesurable* de $(\Omega, \mathcal{F})$ vers $(S, \mathcal{A})$, ou $(\mathcal{F}, \mathcal{A})$-mesurable, si $\forall\, B \in \mathcal{A} : f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

Si $\{f_n\}_{n\geq 1}$ est une suite d'applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$ alors $\limsup f_n = \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} f_k$ et $\liminf f_n = \inf_{n\geq 1} \sup_{k\geq n} f_k$ sont aussi des applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$. En effet, il suffit de voir que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\{\sup f_n < t\} = \cap_{n\geq 1} \{f_n < t\} \in \mathcal{F}$ et que $\inf f_n = -\sup(-f_n)$.

Définition 1.8 (Variable aléatoire)**.** Une *variable aléatoire* (v.a.) X est une application mesurable d'un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$ vers $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, i.e., $\forall\, B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} : X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.
On dit dans ce cas que X est $\mathcal{F}$-mesurable.

Remarque 1.1. $X^{-1}(B) = \{X \in B\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$

La σ-algèbre engendrée par X, notée par $\sigma(X)$, est la plus petite σ-algèbre engendrée par l'ensemble $\{X^{-1}(B), B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}$.

Définition 1.9. À partir de toute v.a. X, on peut construire une mesure de probabilité

$$P_X(B) = P(X \in B) = P[X^{-1}(B)]$$

sur $\mathbb{R}$ définie pour $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

P_X est appelée *distribution*, ou *loi*, de X.
La tribu borélienne étant aussi engendrée par les intervalles ouverts de la forme $]-\infty, a[$ alors la distribution d'une v.a. X est entièrement connu avec sa *fonction de distribution*, ou de *répartition* :

$$F_X(y) = P(X < y) = P(X \in]-\infty, y[) = P_X(]-\infty, y[). \tag{1.5}$$

On muni l'espace probabilisable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ de la mesure de probabilité P_X, ainsi la variable aléatoire X engendre un espace de probabilité $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, P_X)$:

$$X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, P_X)$$

1.2 Intégrale par rapport à une mesure

1.2.1 Fonctions étagées

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable.

Définition 1.10 (Fonctions simples)**.** Une application $S : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ est dite *simple* (ou étagée), s'il existe une suite finie $a_1, \ldots, a_m$ de nombres finis réels et une suite finie $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{F}$ telles que $\Omega = \bigcup_{i=1}^m A_i$ et

$$S = \sum_{i=1}^{m} a_i I_{A_i}, \tag{1.6}$$

où I_{A_i} est l'indicatrice de l'ensemble A_i.

L'intégrale d'une application simple (1.6), par rapport à une mesure μ sur $(\Omega, \mathcal{F})$, est

$$\int_\Omega S\, d\mu = \sum_{i=1}^{m} a_i \mu(A_i).$$

Un théorème fondamental en théorie de la mesure stipule que toute fonction positive mesurable est limite croissante de fonctions étagées.

Théorème 1.1. *[Fondamental] Toute application mesurable positive f est limite croissante de fonctions simples $\{S_n\}_n$*

$$f = \lim_{n\to\infty} \nearrow S_n$$

Démonstration. Pour tout $n \geq 1$ et $x \in \Omega$ posons

$$S_n(x) = \begin{cases} \frac{k-1}{2^n}, & \text{si } \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}; \quad 1 \leq k \leq n2^n , \\ n, & \text{si } f(x) \geq n . \end{cases} \tag{1.7}$$

c'est-à-dire

$$S_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathbf{1}_{\{\frac{k-1}{2^n} < f < \frac{k}{2^n}\}} + n\mathbf{1}_{\{f \geq n\}}. \tag{1.8}$$

Alors $\{S_n\}_n$ est une suite croissante de fonctions simples mesurables et positives.
Montrons que $f(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$.
Si $f(x) < +\infty$, alors pour tout $n \geq 1$ avec $f(x) < n$ on a

$$0 < f(x) - S_n(x) < \frac{1}{2^n}.$$

Si $f(x) = +\infty$, alors $f(x) > n$ pour tout $n \geq 1$, et donc $S_n(x) = n$ pour tout $n \geq 1$, ce qui implique

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x) = +\infty.$$

□

Définition 1.11. Soit f une fonction mesurable positive. On appelle partie positive de f (respectivement partie négative de f) la fonction mesurable positive $f^+ = \sup(0, f)$ (respectivement $f^- = \sup(0, -f) = -\inf(0, f)$. On a alors

$$f = f^+ - f^-$$

et $|f| = f^+ + f^-$.

Théorème 1.2. *Toute fonction mesurable f, de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$, est limite simple d'une suite $\{S_n\}_n$ de fonctions étagées.*

Démonstration. On a $f = f^+ - f^-$ où $f^+ \geq 0$ et $f^- \geq 0$. D'après le Théorème 1.1 il existe deux suites de fonctions positives simples $\{S'_n\}_n$ et $\{S''_n\}_n$ telles que $f^+ = \lim_{n\to\infty} \nearrow S'_n$ et $f^- = \lim_{n\to\infty} \nearrow S''_n$ et ainsi

$$f = \lim_{n\to\infty} (S'_n - S''_n).$$

□

Définition 1.12. Soit f une fonction mesurable positive. On appelle intégrale de f

$$\int_\Omega f\, d\mu = \sup_{\substack{S \leq f \\ S \text{ simple}}} \int_\Omega S\, d\mu \tag{1.9}$$

Théorème 1.3 (Convergence monotone de Beppo-Levy)**.** *Soit $\{f_n\}_n$ une suite croissante de fonctions mesurables positives, telle que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. Alors*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu &= \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n\, d\mu \\ &= \int_\Omega f\, d\mu \end{aligned} \tag{1.10}$$

Démonstration. La limite f est mesurable. □

1.2.2 Théorème de Radon-Nikodym

Définition 1.13. Une mesure ν sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est dite dominée par μ si $\forall A \in \mathcal{F} : \mu(A) = 0$ implique $\nu(A) = 0$.

Théorème 1.4. *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable, μ une mesure σ-finie et ν une mesure dominée par μ. Alors, il existe une fonction mesurable essentiellement unique telle que :*

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu$$

La fonction f est appelée densité de ν par rapport à μ et on note $f = \frac{d\nu}{d\mu}$.

1.3 Espérance

Définition 1.14. Une v.a. X est dite *intégrable* si :

$$\int_\Omega |X| dP < \infty. \tag{1.11}$$

Si une variable aléatoire X est intégrable, elle admet alors une espérance définit par :

Définition 1.15. On définit l'espérance d'une v.a. X par :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_\Omega X(\omega) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} x dP_X(x) && (1.12) \\ &= \int_{\mathbb{R}} x dF_X(x) && (1.13) \end{aligned}$$

où $F_X(x)$ est la fonction de répartition de X, si elle existe.

Remarque 1.2. On a la relation suivante avec l'espérance d'une variable aléatoire X ayant une densité $f_X(x)$ sur $\mathbb{R}$ et une fonction de répartition $F_X(x)$:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx = \int_{\mathbb{R}} x dF_X(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} x dP_X(x) = \int_\Omega X(\omega) dP(\omega) \end{aligned}$$

Remarque 1.3. On peut écrire l'integrale par rapport à la mesure de probabilité P sans la variable muette ω, dans le cas où il n y a pas de confusion. Par exemple, pour l'espérance :

$$E(X) = \int_\Omega X(\omega) dP(\omega) = \int_\Omega X dP.$$

Pour un événement $A \in \mathcal{F}$, on a l'intégrale de X sur A

$$E[X 1_A] = \int_\Omega X 1_A \, dP = \int_A X \, dP.$$

1.3.1 Espérance conditionnelle sachant un événement

Définition 1.16. Soit X une v.a. intégrable, $E(|X|) < +\infty$, et $A \in \mathcal{F}$ tel que $P(A) > 0$. L'espérance conditionnelle de X sachant A est :

$$\begin{aligned} E(X \mid A) =& \frac{E[X I_A]}{P(A)} && (1.14) \\ =& \frac{1}{P(A)} \int_A X dP && (1.15) \end{aligned}$$

1.4 Processus Aléatoires

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ un espace de probabilité et $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable. On considère une application :

$$\begin{aligned} X :& \mathbb{T} \times \Omega \longrightarrow E \\ & (t, \omega) \longmapsto X(t, \omega). \end{aligned}$$

Dans le cas $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, on dit que X est une suite aléatoire.
Dans le cas $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_+$, on dit que X est une fonction aléatoire.
Pour le cas $\mathbb{T} = \mathbb{Z}^d$ ou $\mathbb{R}^d$, on dit que X est un champ aléatoire (random field).
Dans le cas où $E = \mathbb{R}$ on parle de Processus Stochastique réel.

Exemple 1.2. *Considérons des fréquences $f_k > 0$, des modulations d'amplitude $\lambda_k > 0$ avec $\sum_k \lambda_k < \infty$ et*

$$X(t, \omega) = \sum_{k \geq 1} \lambda_k A_k(\omega) \sin\{2\pi f_k t + \phi_k(\omega)\},$$

$t \in \mathbb{T} = \mathbb{R}$, avec une suite indépendante identiquement distribuée $(A_k, \phi_k)_k$ définie sur Ω à valeurs dans $(0, 1] \times (-\pi, \pi]$.
La fonction aléatoire X est la superposition d'ondes avec amplitudes et phases aléatoires, c'est un modèle couramment utilisé en théorie du signal.

1.4.1 Loi d'un Processus Aléatoire

On considère, sans perte de généralités, que $E = \mathbb{R}$, $\mathcal{E} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ et $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}$ ou $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$.
La trajectoire de $\mathbf{X}$ est l'application

$$\mathbf{X} : \omega \longmapsto \{\mathbf{X}(t, \omega)\}_{t \in \mathbb{T}}$$

de Ω dans l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ des applications de $\mathbb{T}$ dans $\mathbb{R}$.
Soit $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{T}}, \otimes_{t \in \mathbb{T}} \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\right)$, où $\otimes_{t \in \mathbb{T}} \mathbb{R}$ est la tribu engendrée par les cylindres mesurables de dimensions finie, i.e., les sous-ensembles de $\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$ de la forme $C = \prod_{t \in \mathbb{T}} A_t$ avec $A_t \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ et $\mathrm{Card}\{t : A_t \neq \mathbb{R}\} < \infty$.

Définition 1.17 (Loi d'un Processus Stochastique)**.** On appelle loi du processus stochastique $\mathbf{X}$ la mesure de probabilité $P_{\mathbf{X}}$ sur $\otimes_{t \in \mathbb{T}} \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, image de P par $\mathbf{X}$, définie par

$$P_{\mathbf{X}}(A) = \mathrm{P}(\mathbf{X} \in A), \tag{1.16}$$

où $A \in \otimes_{t \in \mathbb{T}} \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Puisque la classe des cylindres mesurables de dimension fini engendre la tribu, et est stable par intersection finie, le théorème de la classe monotone montre que la probabilité $P_{\mathbf{X}}$ est déterminée par ses valeurs sur cette classe. Si $C = \prod_{t \in \mathbb{T}} A_t$ est un cylindre et si $t_1, \ldots, t_n$ désignent les indices t pour lequels $A_t \neq \mathbb{R}$, la valeur de $P_{\mathbf{X}}(C)$ s'exprime à l'aide de la loi du vecteur fini-dimensionnel $(\mathbf{X}_{t_1}, \ldots, \mathbf{X}_{t_n})$, puisque

$$P_{\mathbf{X}}(C) = \mathrm{P}\left\{(\mathbf{X}_{t_1}, \ldots, \mathbf{X}_{t_n}) \in A_{t_1} \times \cdots \times A_{t_n}\right\}, \tag{1.17}$$

Théorème 1.5 (Théorème d'Extension de Kolmogorov)**.** *Soit* $\mathbf{X} = \{X_t, t \in \mathbb{T}\}$ *un processus stochastique. Alors les distributions de dimension infinie*

$$\mathrm{P}\left(\cap_{t=0}^{\infty}\{X_t \in A_t\}\right)$$

sont uniquement déterminées par les distributions de dimension finie

$$\mathrm{P}\left\{(\mathbf{X}_{t_1}, \ldots, \mathbf{X}_{t_n}) \in A_{t_1} \times \cdots \times A_{t_n}\right\}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{T}$*.*

1.4.2 Continuité d'un Processus Aléatoire

Il existe plusieurs notions de continuité de fonctions aléatoires réelles. Nous présentons l'une des plus importante. Dorénavant, $T \subset \mathbb{R}$ est un intervalle.

Définition 1.18. Une fonction aléatoire réelle continue est une fonction aléatoire réelle $\mathbf{X} : (t, \omega) \longmapsto \mathbf{X}(t, \omega) \in \mathbb{R}$, telle que

$$t \longmapsto \mathbf{X}(t, \omega) \text{ est continue } \forall \omega$$

On considérera aussi des processus stochastiques réels presque sûrement (p.s.) continues, i.e., telles que la propriété ci-dessus soit vraie pour presque tout ω.
$\mathbf{X}$ est continu à droite (resp. à gauche) si, pour presque tout $\omega \in \Omega$, la trajectoire

$$t \to X(t, \omega) \tag{1.18}$$

est continue à droite (resp. à gauche)
Soit $\mathbf{X} = \{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ et $\mathbf{Y} = \{Y(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ deux processus stochastiques. On dit que $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ sont indistinguables si, pour presque tout $\omega \in \Omega$, les trajectoires $t \to X(t, \omega)$ et $t \to Y(t, \omega)$ coïncident.
On dit que $\mathbf{Y}$ est une modification (ou version) de $\mathbf{X}$ si, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, il existe un ensemble négligeable $\mathcal{N}_t$ tel que $\omega \notin \mathcal{N}_t$ alors $X(t, \omega) = Y(t, \omega)$. En d'autres termes, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$P(X(t) = Y(t)) = 1.$$

Remarque 1.4. Si $\mathbf{Y}$ est une modification de $\mathbf{X}$ alors $\mathbf{Y}$ a la même loi que $\mathbf{X}$.

Théorème 1.6 (Théorème de Continuité de Kolmogorov)**.** *Supposons que le processus* $\mathbf{X} = \{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ *satisfait la condition suivante : Pour tout* $T > 0$ *il existe des constantes positives* α, β, D *telles que pour* $0 \leq s, t \leq T$

$$\mathrm{E}\left[|X_t - X_s|^{\alpha}\right] \leq D \cdot |t - s|^{1+\beta}. \tag{1.19}$$

Alors il existe une modification continue de $\mathbf{X}$*.*