1. Un ensemble I de sommets dans un graphe simple $G = (V, E)$ est un ensemble indépendant dans G si deux sommets de I ne sont pas adjacents. Un ensemble K de sommets dans G est appelé couverture de sommets si chaque arête du graphe est incidente à au moins un sommet de K. Montrer qu'un ensemble K de sommets est une couverture de sommets si et seulement si son complément $(V - K)$ est un ensemble indépendant.

Solution: Si K est une couverture de vertex, deux sommets de $(V - K)$ ne peuvent pas être adjacents, donc $(V - K)$ est un ensemble indépendant. Par contre, si I est un ensemble indépendant dans G, sur les deux sommets joints par une arête, au moins un devrait être dans $(V - I)$. En d'autres termes, chaque arête est adjacente à un sommet dans $(V - I)$, donc $(V - I)$ est une couverture de vertex.

2. Un ensemble indépendant I dans un graphe simple G est un ensemble indépendant maximum s'il n'y a pas d'ensemble indépendant I' dans G tel que $|I'| > |I|$. Le nombre de sommets dans un ensemble maximum indépendant dans G est le nombre d'indépendance $\alpha(G)$ du graphe G. Une couverture de vertex K dans un graphe G est une couverture de vertex minimale s'il n'y a pas de couverture de vertex K' telle que $|K'| < |K|$. Le nombre de sommets dans une couverture de sommets minimum est appelé le nombre de recouvrement de sommets $\beta(G)$ du graphe G. Trouvez le numéro de recouvrement de sommets et le numéro d'indépendance du graphe de la Figure(1).

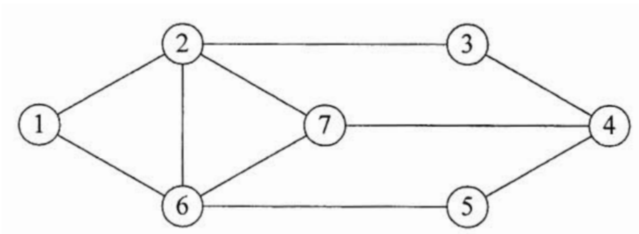

FIGURE 1 – Graphe 1

Solution: L'ensemble $\{1, 3, 7, 5\}$ est un ensemble indépendant maximum, donc le nombre d'indépendance des sommets du graphe est 4. L'ensemble $\{2, 4, 6\}$ est une couverture de sommets minimum, donc le nombre de sommets couvrant est 3.

3. Montrez que dans un graphe simple G d'ordre n, $\alpha(G) + \beta(G) = n$.

Solution: Soit I un ensemble maximum indépendant dans G. Donc $|I| = \alpha(G)$ et $|(V - I)| = n - \alpha(G)$. Mais $(V - I)$ est une couverture de vertex. Donc $|(V - I)| \geq \beta(G)$, et par conséquent, $n \geq \alpha(G) + \beta(G)$. D'autre part, supposons que K soit une couverture minimale de sommets dans G. Alors $|K| = \beta(G)$ et $|(V - K)| = n - \beta(G)$. Mais $(V - K)$ est un ensemble de sommets indépendant.

Donc $|(V-K)| \leq \alpha(G)$, et par conséquent, $n \leq \alpha(G)+\beta(G)$. Ainsi l'égalité est établie.

4. Un ensemble indépendant est un ensemble indépendant maximal s'il ne s'agit pas d'un sous-ensemble propre d'un autre ensemble indépendant. Montrer qu'un ensemble indépendant est un ensemble de sommets dominant si et seulement si c'est un ensemble indépendant maximal.

Solution: Soit I un ensemble indépendant maximal. Si cet ensemble n'est pas un ensemble dominant, il y aura un sommet v qui n'est adjacent à aucun sommet de I. Dans ce cas, $I \cup \{v\}$ est un ensemble indépendant violant la maximalité de I. Inversement, supposons l'ensemble indépendant I est également un ensemble dominant. Si I n'est pas un ensemble indépendant maximal, il existe un ensemble indépendant J tel que I est un sous-ensemble propre de J. Il y a donc un sommet dans $(J-I)$ qui n'est adjacent à aucun sommet dans I contredisant l'hypothèse que I est un ensemble dominant.

5. Montrez que s'il y a au moins deux personnes qui ne se connaissent pas parmi un ensemble d'individus, il est possible de choisir des personnes de cet ensemble pour former un comité de telle sorte qu'aucun membre du comité ne se connaisse et que chaque individu en l'ensemble non inclus dans le comité est connu d'au moins une personne du comité.

Solution: Construisez un graphe dans lequel chaque sommet représente un individu dans l'ensemble V de personnes. Joignez deux sommets par une arête si les deux individus représentés par ces sommets se connaissent. Le graphe simple G donc construit est connu comme le graphe de connaissance de l'ensemble V. Par hypothèse, G a un ensemble indépendant constitué d'au moins deux personnes. Maintenant, tout ensemble indépendant maximal dans G sera un ensemble dominant indépendant comme indiqué dans le problème précédent. Et un comité n'est rien d'autre qu'un groupe indépendant dominant. (Si G est complet, le problème est trivial. L'ensemble de singleton composé de n'importe quel individu est un comité.)

6. Trouvez le nombre d'arêtes dans le graphe complet avec n sommets.

Solution: Supposons que l'ensemble de sommets soit $V=\{1,2,\ldots,n\}$. Un sommet i peut être sélectionné de n manières. Il y a exactement $(n-1)$ arêtes entre un sommet sélectionné i et les $(n-1)$ sommets restant. L'arête joignant i et un autre sommet j est la même que l'arête joignant j et i. Ainsi, le nombre d'arêtes dans K_n est $n(n-1)/2$. De manière équivalente, une arête dans K_n est construite en choisissant deux sommets quelconques parmi un ensemble de n sommets et en les joignant. Le nombre de façons de choisir deux éléments quelconques parmi un ensemble de n éléments est $n(n-1)/2$.

7. Trouvez le nombre de graphes étiquetés non équivalents avec n sommets.

Solution: Soit $L(n, k)$ le nombre de graphes étiquetés non équivalents avec n sommets et k arêtes. Puis le nombre de graphes non équivalents d'ordre n est $L(n, 0) + L(n, 1) + \ldots + L(n, r)$, où r est le nombre d'arêtes dans un graphe complet à n sommets. Nous pouvons maintenant choisir k arêtes parmi r arêtes de $C(r, k)$ manière , où $C(r, k)$ est le coefficient binomial représentant le nombre de manières de choisir k éléments parmi un ensemble de r éléments. Ainsi $L(n, k)$ est égal à $C(r, k)$. Donc, le nombre total de graphes étiquetés avec n sommets est $C(r, 0) + C(r, 1) + \ldots + C(r, r)$, qui est le développement binomial de $(1+1)^r$. La réponse est donc 2^r, où $r = n(n-1)/2$.

8. Chaque chaine dans un graphe entre v et w contient un chemin entre v et w, et chaque chaine dirigée de v à w dans un digraphe contient un chemin dirigé de v à w.

Solution: Soit W une chaine entre v et w. Si $v = w$, il y a le chemin trivial sans arêtes. Par conséquent, supposons que v et w ne sont pas le même sommet. Supposons que W est la chaine $v = v_0 - v_1 - \cdots - v_n = w$. Il est possible que le même sommet ait plus d'une étiquette dans cette séquence. Si aucun sommet du graphe n'apparaît plus d'une fois dans la séquence, nous avons un chemin entre v et w. Sinon, il y aura au moins un sommet qui apparaîtra comme v_i et v_j dans la séquence avec $i < j$. Si nous supprimons les termes $v_{i+1}, v_{i+2}, \cdots, v_j$ de la séquence, nous avons encore une chaine entre v et w qui contient moins d'arêtes. Nous continuons ce processus jusqu'à ce que chaque sommet répété n'apparaisse qu'une seule fois dans la chaine ; à ce stade, nous avons un chemin entre v et w. La preuve dans le cas des chaines dirigées est similaire.

9. Si les arêtes d'un graphe sont étiquetées $e_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ et l'ensemble des chemins entre deux sommets v et w sont étiquetés $p_i (i = 1, 2, \ldots, k)$, la matrice de chemin v, w est la matrice binaire $k \times m$ P_{uv} dans laquelle l'entrée (i, j) correspondant au chemin p_i qui vaut 1 si p_i contient l'arête e_j et 0 sinon. Obtenez une matrice de chemin entre les sommets 1 et 3 sur la figure(2).

Solution: Dans le graphe illustré sur la figure(2), il y a trois chemins, $p_1 : 1-2-3$, $p_2 : 1-4-3$ et $p_3 : 1-2-5-3$, entre le sommet 1 et le sommet 3. Les arêtes sont étiquetées comme indiqué. La matrice à $1, 3$ chemins de ce graphique par rapport à cet étiquetage est

$$P = P_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

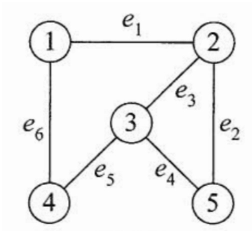

FIGURE 2 – Graphe 2

(Les colonnes sont étiquetées dans l'ordre des arêtes : $e_1, \ldots, e_6$.)

10. Si l'arête définie dans un graphe simple est étiquetée $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ et l'ensemble des cycles est étiqueté $\{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$, la matrice des cycles du graphe est la $k \times m$ matrice binaire C définie comme suit. Dans la ligne correspondant au $i-$ème cycle C_i, l'entrée (i, j) vaut 1 si et seulement si e_j est une arête de C_i. Obtenez une matrice des cycles du graphe de la figure(3).

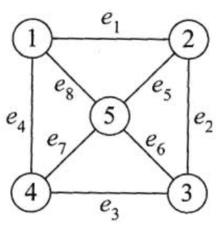

FIGURE 3 – Graphe 3

Solution: Les cinq cycles de la figure(3) sont $C_1 = \{e_1, e_5, e_8\}$, $C_2 = \{e_2, e_5, e_6\}$, $C_3 = \{e_3, e_6, e_7\}$, $C_4 = \{e_4, e_7, e_8\}$, et $C_5 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. La matrice cyclique C est la matrice 5×8 suivante :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Les colonnes sont étiquetées dans l'ordre des arêtes : $e_1, \ldots, e_8$.)

11. Prouver le théorème : Un graphe simple avec trois sommets ou plus est biparti si et seulement s'il n'a pas de cycles impairs.

Solution: Soit $G = (X, Y, E)$ un graphe biparti. Il est facile de voir que s'il y a un cycle C dans G, C devrait avoir un nombre pair de sommets (et donc un nombre pair d'arêtes) puisque les sommets de C sont alternativement de X et de Y. Ainsi C est un cycle pair. D'un autre côté, supposons que $G = (V, E)$ n'a pas de cycles impairs. Supposons sans perte de généralité que G est connecté. Soit $d(u, v)$ la longueur d'un chemin entre u et v de longueur minimale. Un chemin u, v de longueur $d(u, v)$ est appelé chemin le plus court entre u et v. Soit u un sommet de G. Définir $X = \{x \in V : d(u, x) \textit{ est pair}\}$ et $Y = V - X$. Nous devons établir que chaque fois que v et entre deux sommets dans X (ou dans Y), il n'y a pas d'arête joignant v et w.

Cas(i) : Soit v tout sommet de X autre que u. Il y a un chemin de longueur paire entre u et v. S'il y a une arête entre u et v, nous obtiendrons un cycle impair. Donc u n'est adjacent à aucun sommet de X.

Cas(ii) : Soient v et w deux sommets de X autres que u. Supposons qu'il y ait une arête e joignant v et w. Soit P un chemin u, v le plus court de longueur $2m$, et soit Q un chemin u, w le plus court de longueur $2n$. Si ces deux chemins les plus courts n'ont pas de sommet commun autre que u, ces deux chemins et l'arête formeront ensemble un cycle impair. Si les deux chemins ont des sommets communs, soit u' ce sommet commun tel que le sous-chemin P' entre u' et v et le sous-chemin Q' entre u' et w n'aient pas de sommet en commun. Puisque P et Q sont les chemins les plus courts, le sous-chemin de P entre u et u' est le chemin le plus court (u, u'). Le sous-chemin de Q entre u et u' est également le chemin le plus court (u, u'). Ainsi, ces deux sous-chemins ont un nombre égal d'arêtes. Soit k la longueur du plus court chemin entre u et u'. Alors la longueur du sous-chemin de P entre u' et v est de $2m - k$, et la longueur du sous-chemin de Q entre u' et w est de $2n - k$. S'il y a une arête entre v et w, nous aurons un cycle de longueur $(2m - k) + (2n - k) + 1$, ce qui sera un cycle impair. Il n'y a donc pas deux sommets dans X adjacents.

Cas(iii) : Supposons v et w dans Y. Ensuite, comme dans **(ii)**, le sous-chemin de u' à v de longueur $(2m - 1) - k$, le sous-chemin de u' à w de longueur $(2n - 1)$, et l'arête joignant v et w formera un cycle impair. Ainsi, deux sommets de Y ne sont pas adjacents.

Cas(iv) : Supposons que u soit le seul sommet de X. Les sommets restants sont tous dans Y. Chaque arête est de u jusqu'à un sommet de Y.

Ceci complète la preuve.

12. Une matrice est appelée matrice totalement unimodulaire (TU) si le déterminant de chaque sous-matrice carrée est soit -1, soit 0 ou 1. Montrez que chaque entrée d'une matrice TU est -1 ou 0 ou 1 mais que l'inverse n'est pas vrai.

Solution: Chaque entrée d'une matrice TU est le déterminant d'une matrice 1×1 ; par conséquent, il vaut -1 ou 0 ou 1. D'autre part, la matrice avec la première ligne $[1\ \ -1]$ et la deuxième ligne $[1\ 1]$ n'est pas une matrice TU puisque son déterminant est 2.

13. Montrer que la matrice $A = [a_{ij}]$ dans laquelle chaque élément vaut -1 ou 0 ou 1 est une matrice TU si elle satisfait les deux conditions suivantes : **(i)** aucune colonne ne peut avoir plus de deux éléments différents de zéro, et **(ii)** il est possible de partitionner l'ensemble I de lignes de la matrice en ensembles I_1 et I_2 de telle sorte que si a_{ij} et a_{kj} sont les deux éléments non nuls de la colonne j, les lignes i et k appartiennent au même sous-ensemble de la partition si et seulement si elles sont de signe opposé.

Solution: Soit C toute sous-matrice $k \times k$ de A. La preuve est par récurrence sur k.
Si $k = 1$, le théorème est vrai.
Supposons que cela soit valable pour $(k-1)$. Soit C' une sous-matrice $(k-1)\times(k-1)$ de A. Par hypothèse, le déterminant de C' est -1 ou 0 ou 1. Il existe trois possibilités différentes :
1. C a une colonne dans laquelle chaque entrée est 0. Alors le déterminant de C est 0.
2. C a une colonne avec exactement une entrée différente de zéro qui pourrait être -1 ou 1. En développant le déterminant de C le long de cette colonne, nous constatons que ce déterminant de C est -1 ou 0 ou 1.
3. Chaque colonne de C a exactement deux entrées différentes de zéro. Supposons que $E = \{r_1, r_2, \ldots, r_k\}$ est l'ensemble des lignes de C. Par hypothèse, l'ensemble des k lignes est partitionné en deux sous-ensembles I_1 et I_2. Sans perte de généralité, supposons que I_1 est l'ensemble des p premières lignes et I_2 est l'ensemble des $(k-p)$ lignes restantes. Il est possible que $p = 0$. Par la manière dont ces deux sous-ensembles sont construits, il est facile de voir que $r_1 + r_2 + \cdots + r_p = r_{p+1} + \cdots + r_k$, montrant que E est un ensemble linéairement dépendant. Ainsi le déterminant de C est 0 dans ce cas.

14. Le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorer les sommets d'un graphe de telle sorte que chaque sommet ait une couleur unique et que deux sommets adjacents n'obtiennent pas la même couleur est appelé le nombre chromatique (ou le nombre chromatique des sommets) du graphe. Montrer qu'un graphe est biparti si et seulement si son nombre chromatique est deux.

Solution: Dans le graphe biparti $G = (X, Y, E)$, attribuez la même couleur (par exemple le rouge) à chaque sommet de X. Ensuite, attribuez une couleur unique autre que le rouge (par exemple le bleu) à chaque sommet de Y. Ainsi le nombre chromatique de G est 2. D'autre part, supposons que le nombre chromatique de $G = (V, E)$ soit deux. Soit X l'ensemble des sommets tels que chaque sommet de X a la même couleur. Soit $Y = (V - X)$. Alors chaque arête de G est entre un sommet de X et un sommet de Y. Donc $G = (X, Y, E)$.

15. Supposons que chaque ensemble d'une famille de sous-ensembles d'un ensemble fini soit représenté comme un sommet. Deux sommets représentant deux sous-ensembles distincts appartenant à la famille sont joints par une arête s'ils ont au moins un élément

en commun. Le graphe simple ainsi construit est appelé graphe d'intersection de la famille de sous-ensembles de l'ensemble donné. Construire le graphe d'intersection de la famille de sous-ensembles de l'ensemble $X = \{1, 2, \ldots, 10\}$ avec la famille $\{A, E, C, D, E, F\}$, où $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $C = \{1, 2, 3\}$, $D = \{4, 5, 6, 8, 9\}$, $E = \{5, 6, 7, 9\}$ et $F = \{4, 6, 10\}$.

Solution: Les seules intersections non vides entre des paires d'ensembles distincts sont $A \cap C$, $A \cap D$, $A \cap E$, $B \cap C$, $B \cap D$, $B \cap F$, $D \cap E$, $D \cap F$ et $E \cap F$. Ainsi nous joignons A et C, A et D, A et E, B et C, B et D, B et F, D et E, D et F, et, enfin, E et F par arêtes. Le graphe d'intersection ainsi construit a six sommets et neuf arêtes, comme le montre la figure(4).

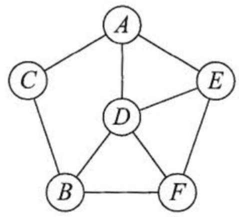

FIGURE 4 – Graphe 4

16. Le nombre d'intersection $\omega(G)$ d'un graphe G est le nombre minimum d'éléments dans un ensemble X tel que G est un graphe d'intersection d'une famille de sous-ensembles de X. Montrez que le numéro d'intersection d'un graphe connexe ne peut pas dépasser sa taille.

Solution: Supposons que le graphe connexe soit $G = (V, E)$, où $V = \{1, 2, \ldots, n\}$. Soit $X(i)$ l'ensemble des arêtes adjacentes au sommet i. Alors l'union de la famille $\{X(1), X(2), \ldots, X(n)\}$ est l'ensemble E. Ainsi G est le graphe d'intersection de la famille. Le numéro d'intersection ne peut donc pas dépasser la taille du graphe.

17. Trouvez le numéro d'intersection de K_n, où $n > 1$.

Solution: Le graphe complet à deux sommets est le graphe d'intersection de la famille $\{\{1\}, \{1, 2\}\}$, donc le numéro d'intersection est deux. Le graphe complet à trois sommets est le graphe d'intersection de la famille $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$, donc le numéro d'intersection est trois. Le numéro d'intersection de tout graphe complet avec n sommets (où $n > 3$) est inférieur à sa taille établie dans (a démontrer). Il est facile de voir que K_4 est le graphe d'intersection de la famille $\{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$, donc son numéro d'intersection est trois. Pour obtenir une famille de sous-ensembles pour K_5, nous introduisons un nouvel élément 4 et le joignons à chacun des ensembles de la famille de K_4. La famille constituée des quatre ensembles élargis et de l'ensemble singleton $\{4\}$ définit le graphe d'intersection correspondant à K_5. Ainsi, le nombre d'intersection pour K_5 est quatre. Par un simple argument inductif, il s'ensuit que le numéro d'intersection d'un graphe complet à n sommets (où $n > 3$) est $n - 1$.

18. Le graphe d'intersection d'une famille finie d'intervalles ouverts de la ligne réelle est appelé un graphe d'intervalles. Montrer que le graphe cyclique à n sommets est (isomorphe à) un graphe d'intervalle uniquement lorsque $n = 3$.

Solution: **(i)** Supposons que les sommets d'un graphe cyclique à trois sommets soient A, B et C. Donnez une affectation d'intervalles ouverts à ces trois sommets comme $I(A) = (a, a')$, $I(B) = (b, b')$ et $I(C) = (c, c')$, où $a < b < c < a' < b' < c'$. Les sommets de C_3 correspondent à ces trois intervalles ouverts.

(ii) Nous devons montrer qu'une telle affectation d'intervalle n'est pas possible pour un graphe cyclique lorsque $n > 3$. Il suffit de le montrer lorsque $n = 4$. Supposons que les sommets soient A, B, C et D tels que Il n'y a pas d'arête entre A et C et pas d'arête entre la B et D. Ainsi, toute affectation d'intervalle $\{I(A), I(B), I(C) \text{ } et \text{ } I(D)\}$ devrait satisfaire l'exigence que les intervalles $I(B)$ et $I(D)$ sont disjoints et les intervalles $I(A) \cap I(B)$ et $I(A) \cap I(D)$ ne sont pas vides. Une fois ces affectations faites pour A, B et D, nous devons faire une affectation pour $I(C)$ telle que $I(C) \cap I(A)$ est vide et, en même temps, les deux ensembles $I(C) \cap I(B)$ et $I(C) \cap I(D)$ ne sont pas vides. Il est tout simplement impossible de faire une affectation $I(C)$ sans violer les affectations antérieures.

Ainsi, chaque graphe d'intervalle est un graphe d'intersection, mais un graphe d'intersection n'a pas besoin d'être un graphe d'intervalle en général.

19. Montrez qu'un graphe est un arbre si et seulement s'il existe un chemin unique entre chaque paire de sommets du graphe.

Solution: Supposons que le graphe G soit un arbre. Soit v et w deux sommets quelconques de G. Puisque G est connecté, il y a un chemin P entre v et w. Si Q est un autre chemin entre ces deux sommets, soit $e = \{v_i, v_{i+1}\}$ le premier bord de P qui n'est pas dans Q quand on passe de v à w le long de P. Soit W et W' l'ensemble de sommets intermédiaires entre v_i et w dans P et Q, respectivement. Si W et W' n'ont pas de sommets en commun, nous avons un cycle dans le graphe qui est acyclique par hypothèse. Si l'intersection de W et W' n'est pas vide, soit u le premier sommet commun lorsque nous allons de v_i à w soit le long de P soit le long de Q. Dans ce cas, nous localisons également un cycle dans le graphe. Par conséquent, il existe un chemin unique entre chaque paire de sommets d'arbre. Inversement, soit G un graphe dans lequel il existe un chemin unique entre chaque paire de sommets. Alors G est connecté. Supposons que G ne soit pas un arbre. Alors il y a un cycle C dans G. Évidemment, il y a deux chemins entre n'importe quelle paire de sommets dans C, ce qui contredit l'hypothèse.

20. Montrez qu'un graphe est un arbre si et seulement s'il est connecté et que chaque arête qu'il contient est un pont.

Solution: Si G est un arbre, il est lié par définition. Par le problème précédent, il existe un chemin unique entre chaque paire de sommets dans G. En particulier, l'arête e joignant deux sommets v et w est le chemin $P : v, e, w$. Si e est supprimé, il n'y a pas de chemin entre v et w. Ainsi, chaque arête d'un arbre est un pont. Pour établir l'inverse, supposons que le graphe connexe dans lequel chaque arête est un pont ne soit pas un arbre. Soit G' le sous-graphe de G obtenu à partir de G après suppression de l'arête $e = (v, w)$ appartenant à un cycle C de G. Ce graphe G' n'est pas connexe puisque e est un pont dans G. Soit p et q deux sommets arbitraires quelconques. Puisque G est connecté, il y a un chemin P entre p et q dans G. Si e n'est pas une arête dans ce chemin P, P est un chemin dans G' entre p et q. Supposons que e est une arête dans P. Soit P_1 le sous-chemin de P entre p et v, et soit P_2 le sous-chemin de P entre w et q. De plus, soit P' le chemin unique entre v et w dans le cycle qui ne contient pas e. Supposons que Q soit l'union de ces trois chemins. Alors Q est un chemin dans G' entre p et q. Il y a donc un chemin entre chaque paire de sommets dans G'. Mais G' n'est pas un graphe connexe. C'est une contradiction.

21. Un sommet de degré 1 dans un graphe est appelé un sommet terminal. Montrez que chaque arbre d'ordre deux ou plus a au moins deux sommets terminaux.

Solution: Supposons que les degrés des n sommets d'un arbre soient d_i, où $i = 1, 2, \ldots, n$. Alors $d_1 + d_2 + \cdots + d_n = 2n - 2$. Si chaque degré est supérieur à 1, la somme des n degrés est d'au moins $2n$. Il y a donc au moins un sommet (disons le sommet 1) de degré 1. Alors $d_2 + d_3 + \cdots + d_n = 2n - 1$. Au moins un de ces $(n - 1)$ nombres positifs est nécessairement 1. Il y a donc un autre sommet de degré 1. Ainsi, au moins deux des degrés doivent être 1.

22. Prouver le théorème : Le centre d'un arbre est soit un ensemble singleton constitué d'un sommet unique, soit un ensemble composé de deux sommets adjacents.

Solution: Si un arbre a deux sommets, le centre est l'ensemble de ces deux sommets. S'il y a trois sommets dans un arbre, le centre est l'ensemble constitué du sommet non terminal. Un arbre à quatre sommets est soit $K_{1,3}$ (avec trois sommets terminaux), soit un chemin avec deux sommets terminaux. Dans le premier cas, la cardinalité du centre est 1 ; dans le dernier cas, le centre est l'ensemble de deux sommets non terminaux adjacents. Plus généralement, soit T un arbre à cinq sommets ou plus, et soit T' l'arbre obtenu à partir de T en supprimant simultanément tous les sommets terminaux de T. Observez que l'excentricité de tout sommet de T' est inférieure de un à l'excentricité de ce sommet de T. Ainsi, le centre de T est égal au centre de T'. Si le processus de suppression des sommets terminaux est effectué successivement, nous avons finalement un arbre avec quatre sommets ou moins.

23. Un arbre avec exactement un sommet v de degré 2 dans lequel le degré de chaque sommet non terminal (autre que v) est 3 est appelé un arbre binaire, et la racine de l'arbre binaire est le sommet unique de degré 2. Montrez que le nombre de sommets dans un arbre binaire est impair.

Solution: Chaque sommet autre que la racine est un sommet impair. Le nombre de sommets impairs est pair. Si nous incluons maintenant la racine également, le nombre total de sommets est impair.

24. Trouvez le vecteur unique correspondant à l'arbre étiqueté illustré à la figure(5).

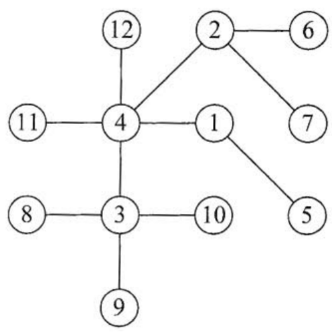

FIGURE 5 – Graphe 5

Solution: Puisqu'il y a 12 sommets dans T, on cherche un vecteur s à 10 composantes, chaque composante étant un entier compris entre 1 et 12. Ici $W = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ est l'ensemble de tous les sommets terminaux de T, avec des étiquettes disposées par ordre croissant. Le sommet adjacent à 5 est 1, donc $s_1 = 5$. En supprimant le sommet 5 de T, nous obtenons le sous-arbre (l'arbre courant, à nouveau noté T) dans lequel l'ensemble des sommets terminaux (l'ensemble courant, à nouveau désigné par W) est $W = \{1, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Le sommet adjacent à 1 est 4, donc $s_2 = 4$. En supprimant 1 de l'arborescence actuelle, nous obtenons $W = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ et $s_3 = 2$. Dans l'itération suivante, $W = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ et $s_4 = 2$. Dans l'itération suivante, $W = \{2, 8, 9, 10, 11, 12\}$ et $s_5 = 4$. Dans l'itération suivante, $W = \{8, 9, 10, 11, 12\}$ et $s_6 = 3$. Dans l'itération suivante, $W = \{9, 10, 11, 12\}$ et $s_7 = 3$. Dans l'itération suivante, $W = \{10, 11, 12\}$ et $s_8 = 3$. Dans l'itération suivante, $W = \{11, 12\}$ et $s_9 = 4$. Au stade final, nous avons l'arbre constitué de deux sommets 4 et 12, donc $s_{10} = 4$. Ainsi $S = [1\ 4\ 2\ 2\ 4\ 3\ 3\ 3\ 4\ 4\ ]$ est le vecteur unique défini par l'arbre étiqueté donné.