Fiabilité

Assia Chadli
Université Badji Mokhtar Annaba

Cours Master 1 : Actuariat & prob-stat. (Semestre 2)

Chapitre 3 : Modèles usuels en fiabilité

Table des matières

Chapitre 1

Modèles usuels en fiabilité

1.1 Modèle exponentiel

Dans ce modèle, on peut admettre que le taux de panne $r(t)$ est constant ; $r(t) = a$. on en déduit la fonction de fiabilité $R(t) = \exp\left\{-\int_0^t r(x)\,dx\right\} = \exp(-at)$. il est alors clair que la v.a. W obéit à une loi exponentielle de paramètre a.

$$\begin{aligned} F(t) &= 1 - \exp(-at) \\ f(t) &= a\exp(-at) \end{aligned}$$

Théorème 1 *la loi exponentielle possède la propriété d'absebce de mémoire*

1) La probabilité de bon fonctionnement dans $(t, t+T)$ ne dépend pas de t mais uniquement de T.

2) La loi exponentielle est la seule loi continue qui possède cette propriété.

Pour démontrer le premier point, il suffit de calculer

$$P(t \leq W \leq t+T/W \geq t) = \frac{P((t \leq W \leq t+T) \cap (W \geq t))}{P(W \geq t)} = \frac{P(W \geq t+T)}{P(W \geq t)} = \frac{\exp(-a(t+T))}{\exp a(-t)} = \text{ex}$$

Remarque 2 *Un taux de défaillance constant signifie intuitivement que le composant exponentiel est aussi bon à tout instant qu'à l'état neuf (as good as new).*

Remarque 3 *Si h est petit ($h \to 0$); alors* $P(W \leq h) = ah + o(h)$

En effet ; dans un voisinage de 0, $1 - \exp(-ah) = 1 - (1 - ah) + o(h) = ah + o(h)$. *ce qui signifie : si à* $t = t_0$ *l'élement fonctionne, alors la probabilité qu'il tombe en panne dans* $(t_0, t_0 + h)$ *est* $ah + 0(h)$.

Théorème 4 *Si pour tout i, la v.a.* $W_i \rightsquigarrow \exp(a_i)$ *et si les v.a.* W_i *sont indépendantes alors la v.a.*

1) $W_{\min} = \min(W_1, ...W_n) \rightsquigarrow \exp(a_{\min})$ *avec* $a_{\min} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$

2) De plus, indépendemment de $t \geq 0$

$$P(W_{\min} = w_i / W_{\min} = t) = \frac{a_i}{a_{\min}}; \quad 1 \leq i \leq n$$

Démonstration. *1)* $P(W_{\min} \geq t) = P(\min W_i \geq t) = P((W_1 \geq t) \cap (W_2 \geq t) \cap ... \cap (W_n \geq t)) = \exp\left(-t \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)$ ■

Montrons le second point du théorème

$$P(W_{\min} = w_i / W_{\min} = t) = \lim_{h \to 0} \frac{P(W_{\min} = w_i, t \leq W_{\min} \leq t + h)}{P(t \leq W_{\min} \leq t + h)}$$

Cependant,

$$\begin{aligned}
P(W_{\min} = w_i, t \leq W_{\min} \leq t + h) &= P(t \leq W_{\min} \leq t + h, W_j > W_{i;} i \neq j) \\
&= \int\limits_t^{t+h} a_i \exp(-a_i x) P(W_j > x; j \neq i) \, dx \\
&= \int\limits_t^{t+h} a_i \exp(-a_i x) \exp\left(-\sum_{j \neq i} a_j x\right) dx \\
&= a_i \int\limits_t^{t+h} \exp(-a_{\min} x) \, dx = a_i \exp(-a_{\min} t) \, h + O(h)
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$P\left(t \leq W_{\min} \leq t+h\right) = \int_{t}^{t+h} a_{\min} \exp\left(-a_{\min} x\right) dx = a_{\min} \exp\left(-a_{\min} h\right)$$

En substituant ces deux dernières formules dans l'expression de la probabilité conditionnelle cherchée ; on obtient le résultat du théorème.

Théorème 5 *Dans les conditions du théorème précedent ; notons par N_h le nombre de pannes dans l'intervalle temps $(t_0, t_0 + h)$:*

1) $P\left(N_h = 0\right) = 1 - a_{\min} h + o\left(h\right)$

2) $P\left(N_h = 1\right) = a_{\min} h + o\left(h\right)$

3) $P\left(N_h \geq 1\right) = a_{\min} h + o\left(h\right)$

4) $P\left(N_h \geq 2\right) = o\left(h\right)$

Démonstration. *l'évenement* $(N_h = 0)$ *signifie* $(W_{\min} > h)$

$P\left(N_h = 0\right) = \exp\left(-ah\right) = 1 - a_{\min} h + o\left(h\right)$ *(développement de* $\exp\left(-a_{\min} h\right)$ *dans un voisinage de 0*

$P\left(N_h \geq 1\right) = 1 - P\left(N_h = 0\right) = a_{\min} h + o\left(h\right)$

La probabilité pour qu'il y ait exactement une panne dans $(t_0, t_0 + h)$ *est*

$$P\left(N_h = 1\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \left(W_i < h\right); W_j > h \text{ pour tout } j \neq i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left[a_i h + o\left(h\right)\right] \exp\left(-\sum_{j \neq i} a_j h\right) = a_{\min} h + o\left(h\right.$$

■

Enfin, $P\left(N_h \geq 2\right) = P\left(N_h \geq 1\right) - P\left(N_h = 1\right) = o\left(h\right).$

Remarque 6 *Les résultats ci-dessus peuvent être appliqués aux durées de réparations ou d'ispection. Supposons qu'à la date t_0 n équipements sont en cours de réparation (ou inspection) et soit W_i la durée écoulée depuis t_0 jusqu'à la fin de la réparation (ou inspection) de l'élément numéro i ; alors la probabilité pour qu'une réparation (ou inspection) se termine* *au cours du temps* $(t_0, t_0 + h)$ *vaut* $a_{\min}h + o(h)$. *De plus,* $\dfrac{a_i}{a_{\min}}$ *est la probabilité pour que ce soit la réparation (ou inspection) de l'élément numéro i qui se termine.*

Cette probabilité est indépendante de t.

1.2 Modèle log-normal

La durée de vie T a une distribution log-normale si $Y = \log(T)$ est une distribution normale.

Ainsi, si Y est une gaussienne d'espérance μ_Y et de variance σ_Y^2 et donc de densité

$$\phi(y) = \frac{1}{\sigma_Y \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right], \qquad -\infty \quad < y < \infty$$

alors,

$$f(t) = \frac{1}{t\sigma_Y \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(t)-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right], \; t > 0.$$

où μ est le paramètre d'échelle et σ est le paramètre de forme. Contrairement à la loi normale, les paramètres ne donnent pas la moyenne et la variance de la loi.

et la fonction de survie d'une variable suivantune loi log-normale est donnée par

$$S(t) = 1 - \Phi\left(\frac{\log(t)-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)$$

Où $\Phi(.)$ est la fonction de répartition d'une loi gaussienne centrée-réduite,

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-v^2} dv$$

Le taux de panne est de la forme

$$r(t) = \frac{\frac{1}{\sigma_Y \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right]}{1 - \Phi\left(\frac{\log(t)-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)}$$

Pour évaluer $S(t)$ et donc aussi $r(t)$ il est nécessaire d'évaluer numériquement l'intégrale ce qui affecte les temps de calcul. Avec la distribution log-normale, la fonction de risque $h(t)$ est croissante puis décroissante avec $r(0) = 0$ et $\lim_{t\to\infty} r(t) = 0$.

Comme la fonction de risque décroît pour de grandes valeurs de t, la distribution ne paraît pas plausible comme modèle de survie dans la plupart des situations. Malgré cela, ce modèle peut être intéressant lorsque de très grandes valeurs de t ne sont pas d'un intérêt particulier.

Exercise 7 *Pour ce modèle ; calculer La MTBF et la variance.*

1.3 Modèle de Weibull

1.3.1 Modèle de Weibull à trois paramètres

La loi de Weibull est la plus populaire des lois utilisées dans plusieurs domaines (électronique, mécanique,...). Elle permet de modéliser en particulier de nombreuses situations d'usure de matériel. Elle caractérise le comportement du système dans les trois phases de vie, période de jeunesse, période de vie utile et période d'usure ou vieillissement dépend des trois paramètres suivants : β, η et γ. La densité de probabilité d'une loi de Weibull a pour expression

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta}(\frac{t-\gamma}{\eta})^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}}, t \geq \gamma.$$

Où : β est le paramètre de forme ($\beta > 0$).

η est le paramètre d'échelle ($\beta > 0$).

γ est le paramètre de position ($\gamma \geq 0$).

La fonction de fiabilité s'écrit :

$$S(t) = e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}}$$

Le taux de défaillance est donné par :

$$r(t) = \frac{\beta}{\eta}(\frac{t-\gamma}{\eta})^{\beta-1}$$

Suivant les valeurs de β, le taux de défaillance est soit décroissant ($\beta < 1$) soit constant ($\beta = 1$), soit croissant ($\beta > 1$).
La distribution de Weibull permet donc de représenter les trois périodes de la vie d'un dispositif décrites par la courbe en baignoire.
Le cas $\gamma > 0$ correspond à des dispositifs dont la probabilité de défaillance est nulle jusqu'à un certain âge γ.

1.3.2 Modèle de Weibull à deux paramètres

La distribution de Weibull est egalement une généralisation de l'exponentielle. Elle est caractérisée par deux paramètres,$\beta > 0, \eta > 0$ qui sont les paramètres de forme et d'échelle respectivement. La fonction de densité d'une telle loi est donnée par

$$f(t, \beta, \eta) = \frac{\beta}{\eta^\beta} t^{\beta-1} \exp[-(\frac{t}{\eta})^\beta], \qquad t > 0.$$

Ainssi nous remarquons que si $\beta = 1$,nous obtenons la loi exponentielle. La fonction de survie est $S(t) = \exp[-(\frac{t}{\eta})^\beta]$ et le taux de panne vaut $r(t) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}$, qui est donc de l'ordre de $t^{\beta-1}$.

La fonction de risque est monotone croissante si $\beta > 1$, monotone décroissante si $\beta < 1$ et constante pour $\beta = 1$, c'est pourquoi ce paramètre est appelé paramètre de forme. Comme η est un paramètre d'échelle, différentes valeurs de η changent seulement l'échelle sur l'axe horizontal, et non pas la forme de base du graphe. Le modèle est assez flexible, et on a montré qu'il constitue une bonne description de plusieurs types de données de survie. Le fait que les fonctions de densité, de survie et de risque aient une forme relativement simple explique également la popularité du modèle.

Soit T une variable aléatoire suivant une loi de Weibull, sa moyenne et sa variance sont données par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} E(T) &= \eta\Gamma(1+\frac{1}{\beta}) \\ Var(T) &= \eta^2\Gamma(1+\frac{2}{\beta}) - E(T)^2 \end{aligned}$$

Où $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ est la fonction gamma.

1.4 Le modèle Gamma

Le modèle Gamma est une autre généralisation naturelle du modèle exponentiel : supposons que la durée T_r soit la durée d'attente de la réalisation d'un service dans une file d'attente et que la file d'attente soit composée de r serveurs indépendants et identiques qui traitent chacun une partie du service (ils sont donc montés en série). On fait l'hypothèse que la durée de réalisation du traitement de chacun des serveurs est une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Alors la durée globale de service est la somme de r variables exponentielles de même paramètre ; on en déduit que la durée de service est distribuée selon une loi Gamma de paramètre (r, λ) ;

$$S_r(t) = \int_t^{+\infty} \frac{\lambda^r u^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda u} du$$

On a l'expression suivante pour le taux de panne : $h(t) = \frac{t^{r-1}e^{-\lambda t}}{\int_t^{+\infty} x^{r-1}e^{-\lambda x}dx}$.

L'espérance et la variance d'une loi Gamma sont données par : $E(T) = \frac{r}{\lambda}$ et $V(T) = \frac{r}{\lambda^2}$

On déduit de ces expressions que le coefficient de variation d'une distribution gamma est : $cv = \frac{\sigma(T)}{E(T)} = \frac{1}{\sqrt{r}}$.

On peut ainsi obtenir très simplement une estimation grossière du paramètre de forme en calculant l'inverse du carré du coefficient de variation. On peut également vérifier que la fonction de hasard $h_{r,\lambda}$ est croissante si $r > 1$ et décroissante si $r < 1$; de plus $\lim_{t\to+\infty} h_{r,\lambda}(t) = \lambda$,ce qui signifie qu'asymptotiquement on retrouve le modèle exponentiel.

1.5 Modèle de Rayleigh

La distribution de Rayleigh est fortement utilisée dans les modèles de survie, en particulier dans des études cliniques, car elle a la particularité d'avoir un taux de panne linéaire par rapport au temps $r(t) = \frac{t}{\sigma 2}$.

La fonction de densité $f(x)$ et la fonction de fiabilité $(S(t))$ et le taux de panne $h(t)$ dans un modèle de Rayleigh sont données par :

$$f(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \ ; \ x > 0, \sigma > 0$$

$$R(t) = 1 - F(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) ; \ t > 0$$

Et

$$r(t) = \frac{t}{\sigma^2}.$$

Exercise 8 *Pour ce modèle ; calculer le temps moyen de bon fonctionnement ainsi que la variance*