Université Hassiba Benbouali de Chlef **Année Universitaire : 2019-2020**
Faculté des Sciences Exactes et Informatique **Module : Théorie des Opérateurs**
Département de Mathématiques **Niveau : Master 1**

Feuille de TD 2

Exercice 1.

. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$.
1. Montrer que $\mathcal{V}^{\perp} = \overline{\mathcal{V}}^{\perp}$.
2. On suppose que $\mathcal{V}$ est fermé (Uniquement dans cette question). Montrer que $\left(\mathcal{V}^{\perp}\right)^{\perp} = \mathcal{V}$.
3. En déduire que $\left(\mathcal{V}^{\perp}\right)^{\perp} = \overline{\mathcal{V}}$.
4. En déduire que $\mathcal{V}$ est dense dans $\mathcal{H}$ si et seulement si $\mathcal{V}^{\perp} = \{0\}$.

Exercice 2.

a. 1. Montrer que

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{4} P(k)Q(k), \quad P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$$

définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Trouver une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

b. On cherche à calculer

$$I = \inf_{a,b,c \in \mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (x^3 + ax^2 + bx + c)^2 e^{-x} dx$$

1. Montrer que

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}\, dx, \quad P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Montrer que le problème du calcul de I revient à trouver la distance de X^3 à $\mathbb{R}_2[X]$ pour la norme induite par ce produit scalaire.
3. Trouver I.

Exercice 3.

Soit $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormale dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Soient

$$F_n = Vect\{e_i\}_{i=\overline{0,n}}, \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \text{et } F = Vect\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$$

On considère la projection orthogonale P_n de $\mathcal{H}$ sur F_n, $(n \in \mathbb{N})$. Montrer que

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i, \; x \in \mathcal{H}, \; (n \in \mathbb{N})$$

2. Montrer que pour tout $x \in \mathcal{H}$:

$$\sum_{i=0}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2 + \|x - \pi_n(x)\|^2 = \|x\|^2$$

3. En déduire l'inégalité de Bessel

$$\sum_{i=0}^{+\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2, \ x \in \mathcal{H}$$

4. On définit $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$. Montrer l'identité de Parseval

$$\sum_{i=0}^{+\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 + (d(x, F))^2 = \|x\|^2, \quad x \in \mathcal{H}$$

Exercice 4.

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, et soit a un vecteur non nul dans $\mathcal{H}$. Posons $\mathcal{M} = \overline{\{a\}}$, le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$ engendré par a.

a. Montrer que $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}$. (Somme directe orthogonale)

b. Soit $x \in \mathcal{H}$. Calculer $(d(x, \mathcal{M}))^2 + (d(x, \mathcal{M}^{\perp}))^2$.

c. Exprimer $d(x, \mathcal{M}^{\perp})$ en fonction du vecteur a.

d. Montrer que pour tout $x, \ x \in \mathcal{H}$:

$$d(x, \mathcal{M}^{\perp}) = \frac{|\langle x, a \rangle|}{\|a\|}$$