Ch. 1. Espérance Conditionnelle

Plan: 1.1. Conditionnement sur un évènement
1.2. Conditionnement sur une v.a. discrète
1.3 Conditionnement sur une v.a. arbitraire
But $\longrightarrow$ 1.4 Conditionnement sur une sous tribu.

1.1. Cond. sur un événement : est déjà fait en classe, faisons un rappel :

$X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$; $B \in \mathcal{F}$ t.q. $\mathbb{P}(B) \neq 0$

$$\boxed{\mathbb{E}(X/B) = \mathbb{E}_B(X) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_B X \, d\mathbb{P}.}$$

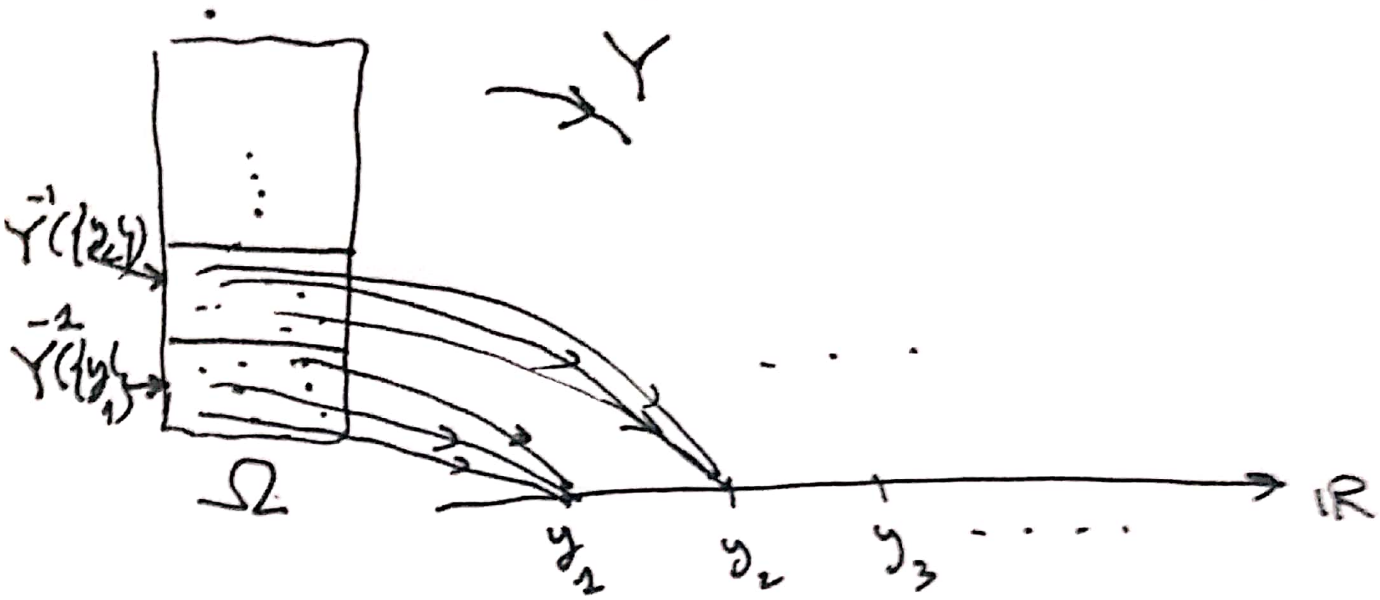
Rq : Dans ce cas $\mathbb{E}(X/B)$ est une constante.

1.2. Cond. sur une v.a. discrète : également fait au cours en classe, il reste des exples.

Rappel : $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, Y : v.a. discrète.

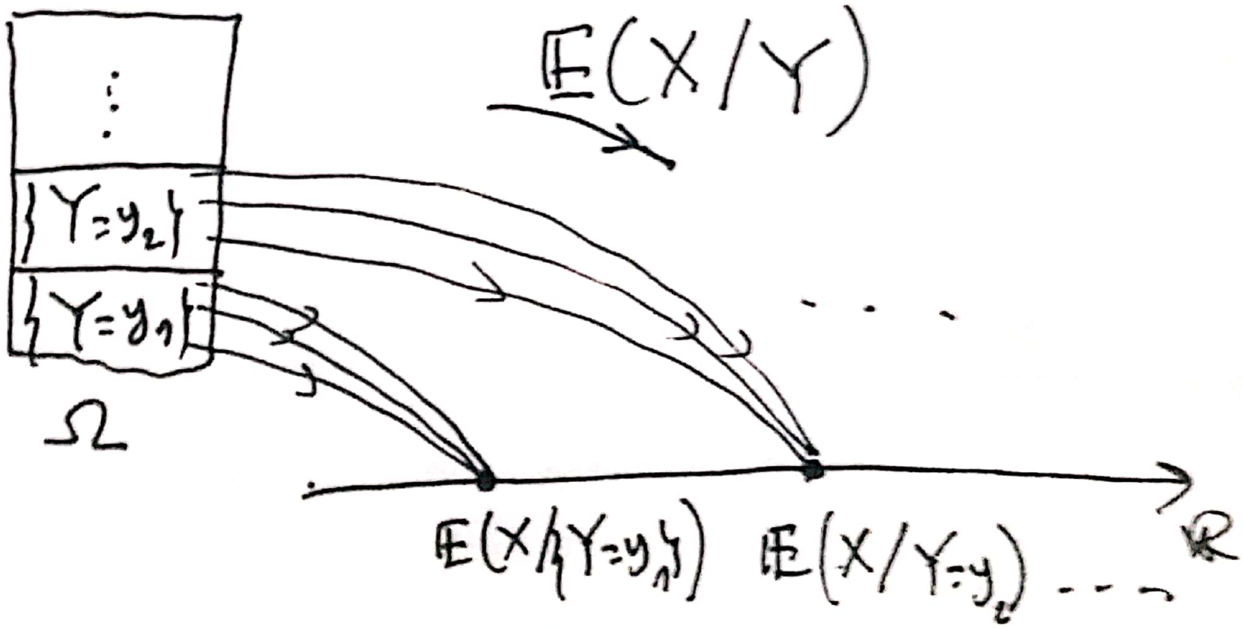
$$\begin{aligned} Z(\omega) &:= \mathbb{E}(X/Y)(\omega) \\ &= \mathbb{E}(X/Y(\omega)) \\ &= \sum_{y_i \in Y(\Omega)} \mathbb{E}(X/Y = y_i) \mathbb{1}_{\{Y = y_i\}}(\omega) \end{aligned}$$

Rq : • La v.a. Y fait une partition de Ω. (voir le diagramme ci-dessous)



• Chaque partie $\{Y = y_i\} = Y^{-1}(\{y_i\})$ est dite « atome »

• La v.a. $Z := \mathbb{E}(X/Y)$ (Montrer que Z est une v.a.) est donnée par :



Rq : $\mathbb{E}(X/Y)$ est constante sur chaque atome.

Exples 1.2 X : v.a. définie comme dans l'exple 1

Y : v.a. donnant la somme des valeurs des 2 premières pces (10 et 20) si le résultat est Pile.

Question : Chercher $\mathbb{E}(X/Y)$!

Solution :

D'abord cherchons $Y(\Omega)$: les valeurs possibles de Y.

w	PP	PF	FP	FF
$Y(w)$	30	10	20	0

$$Y(\Omega) = \{\underset{y_1}{0}, \underset{y_2}{10}, \underset{y_3}{20}, \underset{y_4}{30}\}.$$

- L'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X/Y)$ dépend de la valeur de Y, donc de $y_i \in Y(\Omega)$
- D'après la déf^{t} donnée ds le cours :

$$\mathbb{E}(X/Y)(w) = \sum_{y_i \in Y(\Omega) = \{0,10,20,30\}} \mathbb{E}(X/Y=y_i)\, \mathbb{1}_{\{Y=y_i\}}(w)$$

$$= \begin{cases} \mathbb{E}(X/Y=0) & \text{si } Y(w)=0 \\ \mathbb{E}(X/Y=10) & \text{si } Y(w)=10 \\ \mathbb{E}(X/Y=20) & \text{si } Y(w)=20 \\ \mathbb{E}(X/Y=30) & \text{si } Y(w)=30 \end{cases}$$

Le calcul se fait par :

$$\mathbb{E}(X / Y = y_i) = \frac{1}{\mathbb{P}(Y = y_i)} \int_{\{Y = y_i\}} X \, d\mathbb{P}$$

<u>Exple de calcul :</u>

si $Y = y_3 = 30 \Rightarrow \{Y = y_3 = 30\} = \{PPP, PPF\}$

$$\mathbb{P}(Y = y_3) = 1/8 + 1/8 = 2/8 = 1/4 .$$

$$\int_{\{PPP, PPF\}} X \, d\mathbb{P} = X(PPP) . \mathbb{P}(PPP) + X(PPF) . \mathbb{P}(\{PPF\})$$

$$= 80 . 1/8 + 30 . 1/8 .$$

<u>D'm</u> : $\mathbb{E}(X / Y = 30) = 55$

De m., on trouvera :

$$\mathbb{E}(X/Y)(w) = \begin{cases} 25 & \text{si } Y(w) = 0 \\ 35 & \text{si } Y(w) = 10 \\ 45 & \text{si } Y(w) = 20 \\ 55 & \text{si } Y(w) = 30 . \end{cases}$$

<u>Exercice</u> 1.1 Soit l'espace de proba :

$(\Omega = [0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \mathbb{P} = \text{Leb : mesure de Lebesgue})$

Chercher $\mathbb{E}(X/Y)$ si :

$$X(w) = 2w^2 \text{ et } Y(w) = \begin{cases} 1 & \text{si } w \in [0, 1/3] \\ 2 & \text{si } w \in]1/3, 2/3[\\ 0 & \text{si } w \in [2/3, 1] \end{cases}$$

La proposition ci-dessous donne une caractérisation exhaustive (·alatii) de l'esp. cond. dans notre cas, et qui servira plus tard à définir l'esp. cond.

<u>Proposition 1.1</u> : si X : v.a. $\in L^1$ et Y : v.a. discrète. sur le m. espace, alors :

(1) $\mathbb{E}(X/Y)$ est $\sigma(Y)$-mesurable ;

(2) Pour tout $A \in \sigma(Y)$:

$$\int_A \mathbb{E}(X/Y)\,d\mathbb{P} = \int_A X\,d\mathbb{P}.$$

Avant de démontrer ce résultat, donnons un sens intuitif aux résultats (1) et (2).

<u>Sens intuitif</u> :

(1) $\mathbb{E}(X/Y)$ est $\sigma(Y)$-mesurable veut dire que pour décider la valeur de $\mathbb{E}(X/Y)$ on doit fournir ~~tout~~ <u>l'information</u> minimale sur Y $[\sigma(Y)]$, en d'autres termes : $\mathbb{E}(X/Y)$ dépend de Y.

-/

(2) peut être écrite sous la forme :

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X/Y)\mathbb{1}_A\right] = \mathbb{E}(X\mathbb{1}_A) ; \forall A \in \sigma(Y)$$

C.à.d. une fois <u>une information</u> A sur Y est donnée ($A \in \sigma(Y)$) ; $\mathbb{E}(X/Y)$ et $\mathbb{E}(X)$ se coïncident en <u>moyenne</u> sur A.

—||—

<u>Preuve de la proposition 1.1</u> :

- Supposons que $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots\}$ (Y : discrète)

Alors les événements $\{Y=y_1\}, \{Y=y_2\}, \dots$ forment une partition de Ω.

- $\sigma(Y) = \sigma(\{Y=y_1\}, \{Y=y_2\}, \dots)$.

Donc (d'après d'1 résultat de la théorie de la mesure) :

$$A \in \sigma(Y) \Leftrightarrow A = \bigcup_I \{Y = y_i\}$$

[I : sous-ensble de l'ensble de tous les indices de y_i ds $Y(\Omega)$]

→ <u>Exples</u> : $A = \{Y=y_1\} \cup \{Y=y_2\} \cup \{Y=y_4\}$

<u>ou</u>

$A = \{Y=y_5\} \cup \{Y=y_{10}\}$

<u>ou</u>

$A = \Omega$ <u>ou</u> $A = \emptyset \dots$

(1) : Comme $\mathbb{E}(X/Y)$ est constante sur chaque atome $\{Y=y_i\}$ alors $\mathbb{E}(X/Y)$ est $\sigma(Y)$-mesurable. (voir l'exercice 1 du T.D n° 1).

(2) Pour tout n, on a :

$$\int_{\{Y=y_n\}} \mathbb{E}(X/Y)\,d\mathbb{P} = \int_{\{Y=y_n\}} \mathbb{E}(X/\overbrace{Y=y_n}^{\text{car } \{Y=y_n\}})\,d\mathbb{P}$$

$$= \int_{\{Y=y_n\}} \frac{1}{\mathbb{P}(Y=y_n)} \cdot \int_{\{Y=y_n\}} X\,d\mathbb{P}\,\,d\mathbb{P}$$

Constante

$$= \int_{\{Y=y_n\}} X\,d\mathbb{P} \cdot \underbrace{\frac{1}{\mathbb{P}(Y=y_n)} \int_{\{Y=y_n\}} d\mathbb{P}}_{=1}$$

Soit $A \in \sigma(Y)$, on a vu que A est une réunion dénombrable des ensbles de la forme $\{Y=y_n\}$ (disjoints 2 à 2), il s'en suit :

$$\int_A E(X/Y)\,d\mathbb{P} = \int_{\bigcup_I \{Y=y_n\}} E(X/Y)\,d\mathbb{P}$$

$$= \sum_I \int_{\{Y=y_n\}} E(X/Y)\,d\mathbb{P} \; ;$$ car $\{Y=y_n\}$ sont disjoints 2 à 2.

$$= \sum_I \int_{\{Y=y_n\}} X\,d\mathbb{P}$$ d'après (1)

$$= \int_{\bigcup_I \{Y=y_n\}} X\,d\mathbb{P}$$

$$= \int_A X\,d\mathbb{P}.$$

C.Q.F.D.