Departement de Mathematiques
Universite de Biskra
Module

$2^{ième}$ Année Master Maths
Premier semestre, année 2021/2022
Mouvement Brownien et calcul stochastique

Feuille 2 : Exercices sur le mouvement Brownien.

Exercice 1. Soit Z une variable aléatoire de loi normale centrée et réduite. Pour tout $t \geq 0$, nous posons $X_t = \sqrt{t}Z$. Le processus stochastique $X = (X_t)_{t\geq 0}$ a des trajectoires continues et $\forall t \geq 0$, X_t est de loi $N(0,t)$. Est-ce que X est un mouvement Brownien? Justifiez votre réponse.

Exercice 2. Soit W et $\widetilde{W}$, deux mouvements Browniens standard indépendants l'un de l'autre, et ρ, une constante entre 0 et 1. Pour tout $t \geq 0$, nous posons $X_t = \rho W_t + \sqrt{1-\rho^2}\widetilde{W}$. Le processus stochastique $X = (X_t)_{t\geq 0}$ a des trajectoires continues et $\forall t \geq 0$, X_t est de loi $N(0,t)$. Est-ce que X est un mouvement Brownien? Justifiez votre réponse.

Exercice 3. Soit W un mouvement Brownien standard construit sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$. Posons

$$X = \exp\left[\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right].$$

Montrer que $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est une martingale.

Exercice 4. Soit W un mouvement Brownien standard construit sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$.
. Montrer que $\{W_t^2 - t : t \geq 0\}$ est une martingale.

Exercice 5. Soit W un mouvement Brownien standard. Montrez que

$$Cov[W_t, W_s] = \min(s,t) = s \wedge t$$

Exercice 6. Soit W_t un mouvement Brownien standard. Montrez que

(1) Pour tout $s > 0$, $\{W_{t+s} - W_s : t \geq 0\}$
(2) $\{-W_t : t \geq 0\}$
(3) $\left\{cW_{\frac{t}{c^2}} : t \geq 0\right\}$
(4) $\left\{V_0 = 0 \text{ et } V_t = tW_{\frac{1}{t}} \text{ si } t > 0 : t \geq 0\right\}$

sont des mouvements Browniens standard.

(1)

Exo 1

Z. v.a $Z \sim N(0,1)$, $t \geq 0$ $X_t = \sqrt{t}\, Z$.

- $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ā des trajectoires contin
- $X_t \sim N(0,t)$

X es MVB ?

- $X_0 = 0$

X n'est pas un MVB car.

$0 \leq s \leq t < \infty$

$Var(X_t - X_s) = Var(\sqrt{t} Z - \sqrt{s} Z) = (\sqrt{t} - \sqrt{s})^2 Var(Z) = (\sqrt{t} - \sqrt{s})^2$

$= t + s - 2\sqrt{t}\sqrt{s} \neq t - s$

Exo 2

W, $\tilde{W}$ 2 MB ($W_0 = 0$ et $\tilde{W}_0 = 0$), W et $\tilde{W}$ sont indépendant.

$\rho \in [0,1]$. $\forall t \geq 0$, $X_t = \rho W_t + \sqrt{1-\rho^2}\, \tilde{W}_t$

- $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ā des trajectoire continues.

$X_t \sim N(0,t)$

- X et M.B ?

$X_0 = 0$

(1) accroissement indépendants ?

(2) accroissement stationnaires

(2)

$X_t - X_s = \rho(\underbrace{W_t - W_s}_{N(0,t-s)}) + \sqrt{1-s^2}(\underbrace{\tilde{W}_t - \tilde{W}_s}_{N(0,t-s)})$

$\Rightarrow X_t - X_s \sim N(0, \rho^2(t-s))$.

$+ N(0, (1-\rho^2)(t-s))$

v.a gaussiennes independant ②

$X_t - X_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$

$Var(X_t - X_s) = \rho^2(t-s) + (1-\rho^2)(t-s) = t-s$

) $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4 < \infty$

$X_{t_2} - X_{t_1}$, $X_{t_4} - X_{t_3}$, il suffit de vérifier que leurs covariance.
covariance est nulle.

$cov(X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_4} - X_{t_3}) \overset{?}{=} 0.$ بأن نصفر التغاير

car gaussien les normal.

$= Cov(\rho(W_{t_2} - W_{t_1}) + \sqrt{1-\rho^2}(\tilde{W}_{t_2} - \tilde{W}_{t_1}), \rho(W_{t_4} - W_{t_3}) + \sqrt{1-\rho^2}(\tilde{W}_{t_4} - \tilde{W}_{t_3}))$

$= \rho^2 Cov(W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_4} - W_{t_3}) + \rho\sqrt{1-\rho^2}\, cov(W_{t_2} - W_{t_2}, \tilde{W}_{t_4} - \tilde{W}_{t_3})$

$+ \rho\sqrt{1-\rho^2}\, cov(\tilde{W}_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_4} - W_{t_3})$

$+ (1-\rho^2)\, cov(\tilde{W}_{t_2} - \tilde{W}_{t_2}, \tilde{W}_{t_4} - \tilde{W}_{t_3}) = 0$

Ex 3

W MB standard.

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$

$X_t = \exp\left[\delta W_t - \frac{\delta^2}{2} t\right]$.

X est une martingal.

① ~~l'infali~~ l'integrabilité

$E[|X_t|] = E\left[\left|\exp\left[\delta W_t - \frac{\delta^2}{2} t\right]\right|\right]$

$= E\left[\exp\left[\delta W_t - \frac{\delta^2}{2} t\right]\right]$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\delta w - \frac{\delta^2}{t} t\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \times \exp\left(\frac{-w^2}{2t}\right) dw$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{(w - t\delta)^2}{2t}\right) dw$

$\downarrow$

fct densite de $\mathcal{N}(t\delta, t)$

② $f(w) = \exp\left(\delta w - \frac{\delta^2}{2} t\right)$ fct continue W_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

$\Rightarrow X$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

③ $0 \leq s \leq t < \infty$, $E\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] \overset{s}{=} X_s E\left[\frac{X_t}{X_s} \middle| \mathcal{F}_s\right]$

$X_s > 0$

indep

$= X_s E\left[\frac{\exp(\delta W_t - \frac{\delta^2}{2} t)}{\exp(\delta W_s - \frac{\delta^2}{2} s)} \middle/ \mathcal{F}_s\right] = X_s E\left[\exp\left(\delta (W_t - W_s) - \frac{\delta^2}{2}(t-s)\right)\right]$

$W_t - W_s$ independant de $\mathcal{F}_s$

$= X_s \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\exp\left(\delta w - \frac{\delta^2}{2}(t-s)\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t-s}} \exp\left(\frac{-w^2}{2(t-s)}\right)\right) dw$

$= X_s \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t-s}} \exp\left(-\frac{(w-(t-s)\delta)^2}{2(t-s)}\right) dw = X_s.$

Exo 4 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$

W MB standard.

$W_t^2 - t$ est une martingale.

① $W_t^2 - t$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

fonction continue de W_t, qui est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

② $E\left[|W_t^2 - t|\right] \leq E\left[W_t^2 + t\right] = E\left[W_t^2\right] + t = 2t < \infty$

③ $0 \leq s \leq t$, $E\left[W_t^2 - t \mid \mathcal{F}_s\right] = E\left(\left(W_t - W_s + W_s\right)^2 - t \mid \mathcal{F}_s\right)$

$= E\left[(W_t - W_s)^2 + 2W_s(W_t - W_s) + W_s^2 - t \mid \mathcal{F}_s\right].$

(4)

$$E\left[(W_t - W_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] - 2W_s E\left[W_t - W_s \mid \mathcal{F}_s\right] + W_s^2 - t$$

$$= E\left[(W_t - W_s)^2\right] + 2W_s E\left[\overset{\overset{0}{\shortparallel}}{W_t - W_s}\right] + W_s^2 - t.$$

$$= t - s + W_s^2 - t = W_s^2 - s.$$

EX05 W M.B standard. (croissance MB)

$$\mathrm{Cov}(W_s, W_t) = \min(s,t)$$

On suppose que $0 < s < t$

$$\mathrm{Cov}(W_t, W_s) = \mathrm{Cov}(W_t - W_s + W_s, W_s). \quad \text{accroissement}$$

$$= \mathrm{Cov}(W_t - W_s, W_s) + \mathrm{Cov}(W_s, W_s)$$

$$= 0 + \mathrm{Var}(W_s) = s = \min(s,t).$$

EX06 W M.B standard.

1) $s > 0$, $\{W_{t+s} - W_s : t \geq 0\}$:

On pose $Z_t = W_{t+s} - W_s$, $\quad s > 0$, $t \geq 0$.

On a :

(*) $Z_0 = W_s - W_s = 0.$

$$Z_{t_k} - Z_{t_{k-1}} = (W_{t_k+s} - W_s) - (W_{t_{k-1}+s} - W_s) = (W_{t_k+s} - W_{t_{k-1}+s})$$

est passque si on a.

$0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$

le v.a : $W_{t_1+s} - W_{t_0+s}$, $W_{t_2+s} - W_{t_1+s}$, ..., $W_{t_k+s} - W_{t_{k-1}+s}$

sont independant.

$\Rightarrow Z_{t_1}-Z_{t_0}, Z_{t_2}-Z_{t_1}, \dots, Z_{t_k}-Z_{t_{k-1}}$

sont independant

⊛ $\forall u, t \geq 0$ tq : $u < t$

$(Z_t - Z_u = (W_{t+S} - W_s) - (W_{u+S} - W_s) = W_{t+S} - W_{u+S}$

acc du M.B W.

suit la loi normale d'espérance nulle et de variance

$(t+S - (u+S)) = t-u.$

$Z_t - Z_\mu \sim N(0, t-\mu).$

⊛ $\forall w \in \omega$, la trajectoire de $Z_t(w) = W_{t+S}(w) - W_s(w)$ est continu.

Puisque $t \longrightarrow W_t(w)$ est continue..

2) $Y_t = -W_t \quad , t \geq 0$

⊛ $Y_0 = W_0 = 0$

⊛ $Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}} = W_{t_{k-1}} - W_{t_k}$

Puisque si on a $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$.

$W_{t_1} - W_{t_2}, W_{t_1} - W_{t_2}, \dots W_{t_{k-1}} - W_{t_k}$. Sont indépendants

$\Rightarrow Y_{t_1} - Y_{t_0}, Y_{t_2} - Y_{t_1}, \dots Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}}$

sont indépendants

⊛ $s, t \geq 0$, tq $s < t$

$$Y_t - Y_s = W_s - W_t \quad (6)$$

Suit la loi normale d'espace 0 et de variance $t-s$.

(*) Les trajectoires.

$\forall w \in \omega : t \longrightarrow Y_t(w)$ est continues.

$= -W_t(w)$

$t \longmapsto W_t(w)$ continues.

(3) $X_t = c W_{t/c^2} \quad t \geq 0 \quad c \neq 0$

(*) $X_0 = c W_0 / c^2 = 0$.

(*) $X_{t_k} - X_{t_{k-1}} = c W_{\frac{t_k}{c^2}} - c W_{\frac{t_{k-1}}{c^2}}$

$= c\left(W_{\frac{t_k}{c^2}} - W_{\frac{t_{k-1}}{c^2}} \right)$

Puisque on a a pour

$0 \leq t_0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k$.

les v.a.

$c\left(W_{\frac{t_1}{c^2}} - W_{\frac{t_0}{c^2}}\right), c\left(W_{\frac{t_2}{c^2}} - W_{\frac{t_1}{c^2}}\right), \dots;$

$\dots; \left(W_{\frac{t_k}{c^2}} - W_{\frac{t_k}{c^2}}\right)$

$\Rightarrow X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$

sont independants.

$*$ $s,t \geq 0$, $s<t$, (W normal / cW normal)

$X_t - X_s = c\left(W_{t/c^2} - W_{s/c^2}\right)$

est de la normale d'espérance ;

$E[X_t - X_s] = c\,E\left[W_{t/c^2} - W_{t/c^2}\right] = 0$.

la Variance : $Var(X_t - X_s) = c^2\,Var\left(W_{t/c^2} - W_{s/c^2}\right)$

$= c^2\left(t/c^2 - s/c^2\right) = t - s$.

$*$ $\forall\, w \in \Omega$; les trajectoire

$t \longmapsto X_t(w) = c\,W_{t/c^2}(w)$ sont continus

Puisque les trajectoire $t \longmapsto W_t(w)$ sont continus.

(4) $V_t = \begin{cases} 0 & si\ t=0 \\ t\,W_{1/t} & si\ t>0 \end{cases}$

$*$ $V_0 = 0$

$\to \frac{1}{s} > \frac{1}{t}$

$*$ $V_t - V_s$, $s,t \geq 0$ $s<t$

$= t\,W_{1/t} - s\,W_{1/s} = t\,W_{1/t} - s\,W_{1/s} + s\,W_{1/s} - s\,W_{1/s}$

$= -s\left(W_{1/s} - W_{1/t}\right) + (t-s)\,W_{1/t}$

acc du M.B N sont gaussien

c'est une combinaison linéaire de v.a normale.

$\Rightarrow V_t - V_s$ $s<t$

est normale.

$E[V_t - V_s] = E\left[t\,W_{1/t} - s\,W_{1/s}\right] = t\,E\left[W_{1/t}\right] - s\,E\left[W_{1/s}\right] = 0$

la variance.

$Var(V_t - V_s) = Var\left(-s\left(W_{1/s} - W_{1/t}\right) + (t-s)W_{1/t}\right)$

$= Var\left[-s\left(W_{1/s} - W_{1/t}\right)\right] + Var\left[(t-s)W_{1/t}\right]$

Puisque $\left(W_{1/s} - W_{1/t}\right)$ et $W_{1/t}$ sont independant

$= S^2 Var\left(W_{1/s} - W_{1/t}\right) + (t-s)^2 Var\left(W_{1/t}\right)$

$= S^2\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{t}\right) + (t-s)^2 \frac{1}{t}$

......

$= t-s$ dans le cas $\left(\begin{array}{l} s,t > 0 \\ s<t \end{array}\right)$

de l cas $V_t - V_s$, $V_t - V_0 = V_t = t\,W_{1/t}$.

ous $=0$ $s<t$.

$V_t = t\,W_{1/t}$ suit la loi normale.

l'esperance: $E(V_t) = E\left(t\,W_{1/t}\right) = 0$.

la variance;

$Var(V_t) = Var\left(t\,W_{1/t}\right) = t^2\,Var\left(W_{1/t}\right) = t^2\,\frac{1}{t} = t$.

(*) $\forall\, 0 \leq t_1 \leq t_2 < t_3 < t_4$.

(*) Pour de montrer que $V_{t_2} - V_{t_1}$, $V_{t_4} - V_{t_3}$ sont independant il suffit de demonter que la covariance $V_{t_2} - V_{t_1}$, $V_{t_4} - V_{t_1}$ nulle, On suppose que $t_1 > 0$ (9)

alors : $0 < 1/t_4 < 1/t_3 < 1/t_2 < 1/t_1$

$Cov(V_{t_2} - V_{t_1}, V_{t_4} - V_{t_2}) = Cov(t_2 W_{1/t_2} - t_1 W_{1/t_1}, t_4 W_{1/t_4} - t_3 W_{1/t_3})$

Puisque $cov(W_t, W_s) = \min(s,t)$

$- t_2 t_4 \frac{1}{t_4} - t_2 t_3 \cdot \frac{1}{t_3} - t_1 t_4 \frac{1}{t_4} + t_1 \cdot t_3 \frac{1}{t_3}$

$= t_2 - t_2 - t_1 + t_1 = 0.$

On suppose $t_1 = 0$.

$Cov(V_{t_2} - V_{t_1}, V_{t_4} - V_{t_3}) = cov(t_2 W_{1/t_2}, t_4 W_{1/t_4} - t_3 W_{1/t_3})$

$= t_2 - t_2 = 0.$

(*) les trajectoire de V_t

$t \longmapsto V_t(w) = t W_{1/t}$ sont continues.

Pour $t > 0$ $\forall w \in \Omega$

Puisque les trajectoire $t \longrightarrow W_{1/t}$ et la fct° $t \longrightarrow t$ sont continus $(t > 0)$

* la continuité en $t = 0$ $\lim_{t \to 0} t W_{1/t} \overset{?}{=} 0$ p.s $w \in \Omega$

les trajectoire $t \longrightarrow V_t(w)$ sont continues $\forall w \in \Omega$

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
UNIVERSITE DE BISKRA
MODULE

$2^{ième}$ Année Master Maths
Premier semestre, année 2021/2022
Mouvement Brownien et calcul stochastique

Feuille 3 : Exercices sur l'intégrale de Wiener

Exercice 1. 1. justifier que la variable aléatoire $X_t = \int_0^t (\sin s) dB_s$ est bien définie comme intégrale de Wiener.

2. Justifier que X est un processus gaussien. Calculer son espérance et sa variance $E(X_s X_t)$.

3. Montrer que le processus X est une martingale.

4. Quelle est la variation quadratique de X ?

5. Montrer que $X_t = (\sin t) B_t - \int_0^t (\cos s)\, B_s ds$.

Exercice 2. Donner la loi de la variable aléatoire

$$Y = \int_0^{+\infty} \exp(-s) dB_s.$$

On commencera par vérifier que Y est bien définie.

Exercice 3. Etant donné un mouvement brownien réel $(B_t)_{t\geq 0}$, on définit le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ par :

$$\forall t \geq 0, X_t = \int_0^{t^{1/2}} (2s)^{1/2}\, dB_s.$$

Montrer que ce procesus est gaussien. Calculer son espérance et sa covariance. En déduire que X est un mouvement brownien.

Exercice 4. Etant données deux fonctions f et g dans $L^2(\mathbb{R}_+)$, on suppose que

$$\int_0^{+\infty} f(s) dB_s = \int_0^{+\infty} g(s) dB_s.$$

Que peut-on dire de f et g ?

Exercice 5. Soit $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+)$. Donner la loi de $\left(\int_0^t f(s) dB_s\right)_{t\geq 0}$.

Serie 3 :

Ex 01

$$X_t = \int_0^t (\sin s)\, dB_s$$

$t \geq 0$.

① X_t est bien défini (Integrale de Wiener) la fonction. $\sin s$, $s \in [0,t]$ est une fonction déterministe. c'est integrable winer.

$\sin s$ $s \in [0,t]$ est une fonction carré integrable.

$$\int_0^t \sin^2 s\, ds < \infty.$$

$$\int_0^t \sin^2 s\, ds = \int_0^t \frac{1-\cos(2s)}{2}\, ds = \int_0^t \frac{1}{2}\, ds - \int \frac{\cos(2s)}{2}\, ds.$$

$$= \frac{t}{2} - \frac{\sin 2s}{4}\Big|_0^t = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin(2t)$$

$$\int_0^t \sin^2 ds \leq \int_0^t ds = t < \infty, \quad t \geq 0.$$

On est dans le cadre le integrale de Winer

$\Rightarrow X_t$ est bien défine

Dapres le cours on sait que l'integral de Winer est un proc gossi[en] centré est de covariance

$$\Gamma(s,t) = \operatorname{cov}(X_s, X_t) = \int_0^{s\wedge t} \sin^2 u\, du.$$

$$= \frac{1}{2}(s\wedge t) - \frac{\sin(2(s\wedge t))}{4} = \Gamma(t,t) + \Gamma(s,s) - 2\Gamma(s,t) + X^2$$

CamScanner المسموحة ضوئيا بـ

③ X est un martingale.

D'après le cours X est une martingale

$(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus adapté par rapport

à $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}$ (Filtration naturelle du MB B).

$$\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, 0\leq s\leq t).$$

X est de carré intégrable $E(X_t^2) = \Gamma(t,t) = \frac{2t - \sin(2t)}{4} < +\infty$

intégrable définit un processus à accroissements indépendants.

$$E(X_t|\mathcal{F}_s) = E(X_t - X_s) = E(X_t - X_s + X_s|\mathcal{F}_s) = E(X_t - X_s) + X_s$$

puisque $X_t - X_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$ $= 0 + X_s = X_s$.

X_s est $\mathcal{F}_s$ mesurable.

4) Variation quadratique de X

$I(\theta)$, θ est un "bon processus"

$$\langle I(\theta)\rangle_t = \int_0^t \theta_u^2\, du.$$

soit $s\leq t$ $\circ$ IV

$$E(X_t^2|\mathcal{F}_s) = E((X_t - X_s + X_s)^2|\mathcal{F}_s) = E((X_t - X_s)^2|\mathcal{F}_s) + 2X_s \cancel{E(X_t-X_s)} + X_s^2$$

(X_s est $\mathcal{F}_s$-mesurable)

$$= E[(X_t - X_s)^2] + 2X_s \times 0 + X_s^2 = Var(X_t - X_s) + X_s^2$$

$= \Gamma(t,t) + \Gamma(s,s) - 2\Gamma(s,t) + X_s^2$

$= \Gamma(t,t) - \Gamma(s,s) + X_s^2 .$

$\Big|$ car $\Gamma(s,t) = \Gamma(s \wedge t, s \wedge t)$, $s \leq t$

$\Rightarrow \left(X_t^2 - \Gamma(t,t)\right)_{t \geq 0}$ est une martingale

$\Rightarrow$ La Variance quadratique de X $\langle X \rangle_t = \Gamma(t,t)$

$= \frac{1}{2} t - \frac{1}{4} \sin(2t) = \int_0^t \sin^2 u \, du.$

5) X martin... $X_t^2 = M_t + A_t$

X_s^2 MG Variation quadratique

carré borné = Variation fini

$X_t = (\sin t) B_s - \int_0^t (\cos(s)) B_s \, ds .$

$X_t = \int_0^t \sin s \, dB_s = \sin s . B_s \Big|_0^t - \int_0^t \cos s \; B_s \, ds.$

$= \sin t . B_t - \int_0^t \cos(s) . B_s \, ds$. (F. I. P.P).

Ex 02

$Y = \int_0^{+\infty} \exp(-s) \, dB_s$ loi de Y.

$\exp(-s)$ est une fonction t. de carrés intégrable sur $[0, +\infty[$.

$\cdot \int_0^{+\infty} (\exp(-s))^2 ds = \int_0^{+\infty} \exp(-2X) \, ds .$

$X_t + \sqrt{s})$

$$= \frac{\exp(-2s)}{-2}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2} < \infty$$

Nous semme dan le cadre de l'integral de Winer.

$\Rightarrow$ l'integrale $Y = \int_0^{+\infty} \exp(-s)\, dB_s$ est Bien definie

l'integrale de Wiener est normalement distribue (Suit la loi normal). $Y \sim N(0, \int_0^{+\infty} (e^{-s})^2 ds)$

$\sim N(0, \frac{1}{2})$

جيد أيضا

Exo 3 : B - MB réel.

$X_t = \int_0^t (2s)^{\frac{1}{2}} dB_s$. la fonction $(2s)^{1/2}$ est une fonction déterministe $\Rightarrow$ dans le cadre de l'intégral de Winer.

$(2s)^{\frac{1}{2}}$ est de carre integrable ds ; $[0, \sqrt{t}]$, $t \geq 0$.

On a

$$\int_0^{t^{1/2}} ((2s)^{\frac{1}{2}})^2 ds = \int_0^{t^{1/2}} 2s\, ds = t < \infty$$

$\Rightarrow$ l'intégrale de Wiener, $X_t = \int_0^t (2s)^{1/2} dB_s$ est bien def

X_t est un processus gaussien.

$$E(X_t) = E\left(\int_0^t (2s)^{\frac{1}{2}} dB_s\right) = 0$$

$$E(X_t^2) = E\left(\left(\int_0^t (2s)^{\frac{1}{2}} dB_s\right)^2\right) = \int_0^{t^{1/2}} 2s\, ds = t$$

$$\Rightarrow X_t \longrightarrow N(0, t)$$

$s < t$

$$E(X_s X_t) = E\left(\int_0^{s^{1/2}} (2u)^{1/2} dB_u \cdot \int_0^{t^{1/2}} (2u)^{1/2} dB_u\right)$$

$$= E\left(\int_0^{t^{1/2}} 1\!\!1_{[0,s^{1/2}]}(u)(2u)^{1/2} dB_u \cdot \int_0^{t^{1/2}} (2u)^{1/2} dB_u\right)$$

$$= \int_0^{t^{1/2}} E\, 1\!\!1_{[0,s^{1/2}]}(u)\left|(2u)^{1/2}\right|^2 du = \int_0^{t^{1/2}} 1\!\!1_{[0,s^{1/2}]}(u)\, du = s = \min(s,t).$$

X_t est une martingale.

X_t - est un processus gaussien $E(X_t) = 0$, $E(X_t^2) = t$,

$E(X_s X_t) = s \wedge t$, caracteration de Levy

$\Rightarrow X_t$ - Mouvement Bronien.

Ex 04 $f \cdot g \in L^2(\mathbb{R}_+)$, $\int_0^{+\infty} f(s)\,dB_s = \int_0^{+\infty} g(s)\,dB_s$.

Que peut-on dire de f et g ?

$f \cdot g \in L^2$ les intégral, $\int_0^{+\infty} f(s)\,dB_s$ ماذا نستنتج عن f و g .

$\int_0^{+\infty} g(s)\,dB_s$ sont bien défines. (integrales de Winerl

- suivent la loi normale. $\mathcal{N}\left(0, \int_0^{+\infty} f^2(s)\,ds\right)$, $\mathcal{N}\left(0, \int_0^{+\infty} g^2(s)\,ds\right)$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} f^2(s)\,ds = \int_0^{+\infty} g^2(s)\,ds \Rightarrow \underline{f^2 = g^2 \cdot p \cdot p}$$

CamScanner المسوحة ضوئيا بـ

Exo5

Exo5 $f \in L^2_{Loc}(\mathbb{R}_+)$, La loi $\left(\int_0^t f(s)\,dB_s\right)_{t\geq 0}$.

$f \in L^2_{Loc}(\mathbb{R}_+)$, $\int_0^t f^2(s)\,ds < \infty$
$t \in \mathbb{R}_+ \not\Rightarrow \int_0^{+\infty} f^2(s)\,ds < \infty$,

$\int_0^t f(s)\,dB_s$ — est bien défine comme une intégrale de wiener.

$\mathcal{N}\left(0, \int_0^t f^2(s)\,ds\right)$.

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
UNIVERSITE DE BISKRA
MODULE

$2^{ième}$ Année Master Maths
Premier semestre, année 2021/2022
Mouvement Brownien et calcul stochastique

Feuille 4

Exercice 1. Soit B_t un Mouvement Brownien. Pour quelles valeurs de a et $b \in \mathbb{R}$ le processus

$$Z_t = \int_0^t s^a e^{bB_s} dB_s$$

est bien définie?

Pour quelles valeurs a et $b \in \mathbb{R}$ le processus Z est une martingale de carré intégrable.

Exercice 2. Montrer que

(1) $\int_0^t B_s dBs = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t$

(2) $\int_0^t s dBs = tB_t - \int_0^t dBs$

(3) $\int_0^t B_s^2 dBs = \frac{1}{3}B_t^3 - \int_0^t dBs$

Exercice 3. Soit B_t un Mouvement Brownien standard. calculer l'équation différentielle stochastique i.e. dZ_t, des processus suivants:

(1) $Z_t = (X_t)^2$ où $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t$.
(2) $Z_t = 3 + t + e^{B_t}$
(3) $Z_t = e^{\alpha t}$
(4) $Z_t = \int_0^t g(s) dBs$
(5) $Z_t = e^{\alpha B_t}$
(6) $Z_t = e^{\alpha X_t}$ où $dX_t = \mu dt + \sigma dB_t$

Exercice 4. Pour $\lambda > 0$, soit

$$X_t = \int_0^t e^{-\lambda s} dBs$$

Montrer que $X_t = e^{-\lambda t} B_t + \lambda \int_0^t e^{-\lambda s} Bsds$

Exercice 5. Montrer que $X_t = \int_0^t \sin s dBs$ est bien définie

i) Montrer que X_t est un processus Gaussien et calculer $E(X_t)$ et $E(X_s X_t)$

ii) Calculer $E(X_t / \mathcal{F}_s)$

iii) Montrer que $X_t = \sin t B_t - \int_0^t \cos s B_s ds$

Exercice 6. 1) En utlisant la formule d'Itô, montrer que $M_t = B_t^3 - 3\int_0^t B_s ds$ est une martingale

2) Utliser la formule d'Itô pour montrer que $tB_t = \int_0^t B_s ds + \int_0^t s dB_s$

3) Vérifier si le processus $X_t = B_t^3 - 3tB_t$ est une martingale

Exercice 7. Utiliser la formule d'Itô pour calculer $E(B_t^6)$.

Série 4

Exo 1 : B - Mouvement Brownien.

$$Z_t = \int_0^t s^a e^{bB_s} dB_s \quad , a,b \in \mathbb{R} \quad , a? . b? , Z_t \text{ bien défini}$$

intégrale d'Itô, $s^a e^{bB_s}$ est un proc-stoc

qui n'est pas déterministe !.

l'intégrale, $Z_t = \int_0^t s^a e^{bB_s} dB_s$ est bien définie

$\Longleftrightarrow s^a e^{bB_s} \in L^2_{loc}([0,t])$

$\int_0^t (s^a e^{bB_s})^2 ds < +\infty$ en P.p.s.

$= \int_0^t s^{2a} . e^{2bB_s} ds$.

e^{2bB_s} so est continu, il n'a pas de singularités

dans $[0,t]$, s^{2a} d'un fonction intégrable dans

$[0,t]$ $a > -\frac{1}{2}$ (d'après cours - Z_t est un martingale locale.

Z_t est une martingale de carré intégrable.

si $s^a e^{bB_s} \in L^2[0,t])$

$\int_0^t s^{2a} . E(e^{2bB_s}) ds < +\infty$

transformation de la place

$E\left(e^{2bB_s}\right) = e^{1/2\,(2b)s} = e^{2b^2 s}$.

donc d condition est ave $a > -1/2$

$\Rightarrow Z_t$ est une martingale de carrée integrable.