

Cours programmation linéaire (Chapitre 3)

Première année Master MAS

14 mars 2020

# Table des matières

<b>1</b>	<b>La mode du simplexe</b>	<b>3</b>
1.1	La mode du simplexe sur des exemples . . . . .	3
1.1.1	Exemple 1 . . . . .	3
1.1.2	Exemple 2 . . . . .	10
1.1.3	Exemple 3 . . . . .	11
1.2	Le cas gral . . . . .	13
1.2.1	Cout réduits, La forme réduite . . . . .	13
15		

# Chapitre 1

## Rappels

## Chapitre 2

### Méthode graphique

## Chapitre 3

# La mode du simplexe

Pour déterminer la ( ou les ) solution(s) optimal(s) d'un problème de programmation linéaire, il suffit, après avoir mis le problème sous forme standard, de s'intéresser aux solutions de base admissibles, c'est-à-dire aux sommets du polyèdre  $P$  (s'il est non vide).

Toutefois, il n'est pas pensable de simplement énumérer toutes les solutions de base admissibles. Le nombre maximum de bases<sup>1</sup> du problème sous forme standard (*en supposant  $\text{rang}(A) = m < n$* ) est

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

et donc, pour un problème de grande dimension, une telle énumération est exclue car le temps de calcul deviendrait prohibitif.

Une procédure "intelligence" est donc nécessaire : *l'algorithme simplexe*<sup>2</sup>

### 3.1 La mode du simplexe sur des exemples

#### 3.1.1 Exemple 1

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tilde{z} = \max z & = 4x_1 + 5x_2 \\ s.c. & 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

#### Passage à la forme standard

---

1. Cette borne supérieure est atteinte si toutes les sous-matrices  $(m \times n)$  de  $A$  sont régulières.

2. Le terme "simplexe" - qui donne son nom à la mode - désigne un polyèdre convexe de  $\mathbb{R}^n$  possédant  $(n+1)$  sommets.

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{z} = \max \quad z = \quad 4x_1 \quad +5x_2 \quad +0.x_3 \quad +0.x_4 \quad +0.x_5 \\ \text{s.c.} \quad \quad \quad 2x_1 \quad + x_2 \quad + \mathbf{x}_3 \quad \quad \quad \quad \quad \quad = 8 \\ \quad \quad \quad \quad x_1 \quad +2x_2 \quad \quad \quad + \mathbf{x}_4 \quad \quad \quad \quad \quad = 7 \\ \quad \quad \quad \quad \quad + x_2 \quad \quad \quad \quad \quad + \mathbf{x}_5 \quad \quad \quad = 3 \\ \quad \quad \quad x_1, \quad x_2 \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5 \quad \geq 0 \end{array} \right.$$

il y a 9 points intssants (intersection de contraintes), 5 points admissibles.

Enumération de ces 9 points comme solution de la forme standard (solutions de base).

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	<i>sol de base</i>	<i>admissible</i>	<i>pt extreme</i>
<b>0</b>	<b>0</b>	8	7	3	✓	✓	(0, 0)
<b>0</b>	8	<b>0</b>	-9	-5	✓	✗	
<b>0</b>	3.5	4.5	<b>0</b>	-0.5	✓	✗	
<b>0</b>	3	5	1	<b>0</b>	✓	✓	(0, 3)
4	<b>0</b>	<b>0</b>	3	3	✓	✓	(4, 0)
7	<b>0</b>	-6	<b>0</b>	3	✓	✗	
	<b>0</b>			<b>0</b>	✗	✗	
3	2	<b>0</b>	<b>0</b>	1	✓	✓	(3, 2)
2.5	3	<b>0</b>	-1.5	<b>0</b>	✓	✗	
1	3	3	<b>0</b>	<b>0</b>	✓	✓	(1, 3)

**Remarque 1** *Points extrs*  $\iff$  *Solutions de base admissibles*

### Base et solution de base

Base initiale?  $\{x_3, x_4, x_5\}$  par exemple :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 \quad + x_2 \quad + \mathbf{x}_3 \quad \quad \quad \quad \quad = 8 \\ x_1 \quad +2x_2 \quad \quad \quad + \mathbf{x}_4 \quad \quad \quad \quad \quad = 7 \\ \quad \quad \quad + x_2 \quad \quad \quad \quad \quad + \mathbf{x}_5 \quad \quad \quad = 3 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x_3 = 8 - 2x_1 - x_2 \\ x_4 = 7 - x_1 - 2x_2 \\ x_5 = 3 - x_2 \end{array} \right.$$

$x_3, x_4, x_5$  = variables de base,  $x_1, x_2$  = variables hors base.

On met les variables hors base à 0, on en déduit les valeur des variables de base

$$x_1 = x_2 = 0 \implies \left\{ \begin{array}{l} x_3 = 8 - 2x_1 - x_2 = 8 \\ x_4 = 7 - x_1 - 2x_2 = 7 \\ x_5 = 3 - x_2 = 3 \end{array} \right.$$

### Base voisine et pivotage

Deux sommets voisins correspondent à deux bases  $B$  et  $B'$  telles qu'on remplace une variable de  $B$  pour obtenir  $B'$ .

— passer à un sommet voisin = changer de base (base voisine) → principe du pivotage.

### Qui faire entrer dans la base ?

Essayons avec  $x_2$  : quelle est la valeur *max* que pourra avoir  $x_2$  ?

$$\begin{aligned}x_3 &= 8 - 2x_1 - x_2 \geq 0 \implies x_2 \leq 8 \\x_4 &= 7 - x_1 - 2x_2 \geq 0 \implies x_2 \leq 3.5 \\x_5 &= 3 - x_2 \geq 0 \implies x_2 \leq 3\end{aligned}$$

Bilan :  $x_{2_{max}} = 3$ , pour  $x_2 = x_{2_{max}}$  on a :

$$\begin{aligned}x_3 &= 5 - 2x_1 \\x_4 &= 1 - x_1 \\x_5 &= 0\end{aligned}$$

La nouvelle base :  $\{x_3, x_4, x_5\} \cup \{x_2\} / \{x_5\} = \{x_2, x_3, x_4\}$

La nouvelle solution :  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 3, 5, 1, 0)$

### Vers un algorithme de résolution

Méthode de résolution "na" : énumérer tous les sommets, calculer  $f$  sur ces points, prendre le sommet pour lequel  $f$  est optimisé :

- fonctionne : nombre fini de sommets ;
- limitation : ce nombre peut être très grand en général...

**L'algorithme du simplexe** (G. B. Dantzig 1947) Algorithme itératif permettant de résoudre un problème de programmation linéaire.

### Principe d'amélioration locale

À partir d'un sommet, chercher un sommet voisin qui améliore l'objectif.

### Principe d'amélioration locale (maximisation) :

Soit  $x_0$  sommet non optimum. Alors il existe  $x$ , un **sommet voisin** de  $x_0$ , tel que  $f(x) > f(x_0)$ .

**Méthode de résolution** : on part d'un sommet  $x_0$  quelconque, on passe à un sommet voisin pour lequel  $f$  augmente, et ainsi de suite.

**Remarque 2** on passe d'un problème continu (variables réelles) à un problème discret (nombre fini de sommets)...

### Illustration 2D :

$$\begin{aligned}x_0 = (0, 0); z = 0 &\longrightarrow x = (0, 3); z = 15 \\x = (0, 3); z = 15 &\longrightarrow x = (1, 3); z = 19 \\x = (1, 3); z = 19 &\longrightarrow x = (3, 2); z = 22\end{aligned}$$

plus d'amélioration locale possible  $\implies$  optimum

## L'algorithme du simplexe : Illustration concrète

### 1- Standardisation :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \max z & = & 4x_1 + 5x_2 \\ \text{s.c.} & 2x_1 + x_2 & \leq 8 \\ & x_1 + 2x_2 & \leq 7 \\ & x_2 & \leq 3 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array} \right.$$

### Passage à la forme standard

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \max z = & 4x_1 & +5x_2 & +0.x_3 & +0.x_4 & +0.x_5 \\ \text{s.c.} & 2x_1 & + x_2 & + \mathbf{x}_3 & & = 8 \\ & x_1 & +2x_2 & & + \mathbf{x}_4 & = 7 \\ & & + x_2 & & & + \mathbf{x}_5 = 3 \\ & x_1, & x_2 & x_3, & x_4, & x_5 \geq 0 \end{array} \right.$$

### Forme tableau

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$	<i>variables de base</i>
2	1	1	0	0	8	$x_3$
1	2	0	1	0	7	$x_4$
0	1	0	0	1	3	$x_5$
4	5	0	0	0	0	$-z$

Base initiale ?  $\{x_3, x_4, x_5\}$  par exemple :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 2x_1 & + x_2 & + \mathbf{x}_3 & = 8 \\ x_1 & +2x_2 & & + \mathbf{x}_4 = 7 \\ & + x_2 & & + \mathbf{x}_5 = 3 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x_3 = 8 - 2x_1 - x_2 \\ x_4 = 7 - x_1 - 2x_2 \\ x_5 = 3 - x_2 \end{array} \right.$$

$x_3, x_4, x_5$  = variables de base,  $x_1, x_2$  = variables hors base.

On met les variables hors base à 0, on en déduit les valeur des variables de base

$$x_1 = x_2 = 0 \implies \left\{ \begin{array}{l} x_3 = 8 - 2x_1 - x_2 = 8 \\ x_4 = 7 - x_1 - 2x_2 = 7 \\ x_5 = 3 - x_2 = 3 \end{array} \right.$$



### Solution de base associée

On met les variables hors base à 0, on en déduit :

— valeur des variables de base.

— valeur de  $z$ .

Ici :

$$x_1 = x_2 = 0 \implies \begin{cases} x_3 = 8 - 2x_1 - x_2 = 8 \\ x_4 = 7 - x_1 - 2x_2 = 7 \\ x_5 = 3 - x_2 = 3 \end{cases}$$

et

$$z = 4x_1 + 5x_2 = 0$$

### Changement de base

Observation essentielle :  $z = 4x_1 + 5x_2 = 0 \implies$  on peut augmenter  $z$ .

si  $x_1$  ou  $x_2$  rentre dans la base.

Essayons avec  $x_2$  : quelle est la valeur *max* que pourra avoir  $x_2$  ?

$$x_3 = 8 - 2x_1 - x_2 \geq 0 \implies x_2 \leq 8$$

$$x_4 = 7 - x_1 - 2x_2 \geq 0 \implies x_2 \leq 3.5$$

$$x_5 = 3 - x_2 \geq 0 \implies x_2 \leq 3$$

$$\text{Bilan : } x_{2_{max}} = \min\left(\frac{8}{1}, \frac{7}{2}, \frac{3}{1}\right) = 3,$$

### Forme tableau

$\downarrow$

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$	variables de base
2	1	1	0	0	8	$x_3$
1	2	0	1	0	7	$x_4$
0	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</span>	0	0	1	3	$x_5$
4	5	0	0	0	0	$-z$

$\longrightarrow$

pour  $x_2 = x_{2_{max}}$  on a :

$$x_3 = 5 - 2x_1$$

$$x_4 = 1 - x_1$$

$$x_5 = 0$$

La nouvelle base :  $\{x_3, x_4, x_5\} \cup \{x_2\} / \{x_5\} = \{x_2, x_3, x_4\}$

La nouvelle solution :  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 3, 5, 1, 0)$

Nouvelle base :  $\{x_2, x_3, x_4\}$

$$\begin{cases} x_3 = 8 - 2x_1 - x_2 \\ x_4 = 7 - x_1 - 2x_2 \\ x_5 = 3 - x_2 \end{cases} \implies \begin{cases} x_3 = 8 - 2x_1 - x_2 = 5 - 2x_1 + x_5 \\ x_4 = 7 - x_1 - 2x_2 = 1 - x_1 + 2x_5 \\ x_2 = 3 - x_5 \end{cases}$$

Exprimons  $z$  en fonction des variables hors base :

$$z = 4x_1 + 5x_2 = 15 + 4x_1 - 5x_5$$

Solution de base associée

$$x_1 = x_5 = 0 \implies \begin{cases} x_3 = 5 - 2x_1 + x_5 = 5 \\ x_4 = 1 - x_1 + 2x_5 = 1 \\ x_2 = 3 - x_5 = 3 \end{cases} \quad \text{et} \quad z = 15$$

**Forme tableau**

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$	<i>variables de base</i>
2	0	1	0	-1	5	$x_3$
1	0	0	1	-2	1	$x_4$
0	1	0	0	1	3	$x_2$
4	0	0	0	-5	-15	$-z$

**2- Ittion**  $z = 15 + 4x_1 - 5x_2$  peut encore augmenter si  $x_1$  entre dans la base.

Si  $x_1$  entre, qui sort ?

Valeur max de  $x_1$  :

$$x_3 = 5 - 2x_1 + x_5 \geq 0 \implies x_1 \leq 2.5$$

$$x_4 = 1 - x_1 + 2x_5 \geq 0 \implies x_1 \leq 1$$

$$x_2 = 3 - x_5 \geq 0 \implies \text{aucune contrainte sur } x_1$$

Bilan :  $x_{1_{max}} = \min(\frac{5}{2}, \frac{1}{1}) = 1$ , et  $x_4$  sort.

**Forme tableau**

↓

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$	<i>variables de base</i>
2	0	1	0	-1	5	$x_3$
1	0	0	1	-2	1	$x_4$
0	1	0	0	1	3	$x_2$
4	0	0	0	-5	-15	$-z$

→

$$x_3 = 5 - 2x_1$$

$$x_4 = 1 - x_1$$

$$x_5 = 0$$

La nouvelle base :  $\{x_1, x_2, x_3\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_3 = 3 + 2x_4 - 3x_5 \\ x_1 = 1 - x_4 + 2x_5 \\ x_2 = 3 - x_5 \\ z = 19 - 4x_4 + 3x_5 \end{array} \right.$$

**Forme tableau**

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$	<i>variables de base</i>
0	0	1	-2	3	3	$x_3$
1	0	0	1	-2	1	$x_1$
0	1	0	0	1	3	$x_2$
0	0	0	-4	-3	-19	$-z$

**3- Ittion (suite)**  $z = 19 - 4x_4 + 3x_5$  peut encore augmenter si  $x_5$  entre dans la base.

Si  $x_5$  entre, qui sort ?

Valeur max de  $x_5$  :

$$x_3 = 3 + 2x_4 - 3x_5 \geq 0 \implies x_5 \leq 1$$

$$x_1 = 1 - x_4 + 2x_5 \geq 0 \implies \text{aucune contrainte sur } x_5$$

$$x_2 = 3 - x_5 \geq 0 \implies x_5 \leq 3$$

Bilan :  $x_{5_{max}} = \min(\frac{1}{1}, \frac{1}{1}) = 1$ , et  $x_3$  sort.

La nouvelle base :  $\{x_1, x_2, x_5\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_5 = 1 + \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_3 \\ x_1 = 3 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_3 \\ x_2 = 2 - \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_3 \\ z = 22 - 2x_4 - x_3 \end{array} \right.$$

**Forme tableau**

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$	variables de base
0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	1	$x_5$
1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	3	$x_1$
0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	2	$x_2$
0	0	-1	-2	0	-22	$-z$

**4- Terminaison** On a :  $z = 22 - 2x_3 - x_4$ , donc  $z^* \leq 22$

Or la solution de base  $x_1 = 3; x_2 = 2; x_5 = 1$  donne  $z \leq 22 \rightarrow$  L'optimum

La condition de terminaison concerne les coefficients de  $z$  exprimés avec les variables hors base.

### 3.1.2 Exemple 2

**1-Standardisation :**

$$\left\{ \begin{array}{lll} \max z & = & 3x_1 + 4x_2 \\ \text{s.c.} & x_1 + 2x_2 & \leq 21 \\ & x_1 + x_2 & \leq 12 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array} \right.$$

**Passage forme standard**

$$\left\{ \begin{array}{llllll} \max z = & 3x_1 & +4x_2 & +0.x_3 & +0.x_4 & \\ \text{s.c.} & x_1 & + 2x_2 & + x_3 & & = 21 \\ & x_1 & +x_2 & & + x_4 & = 12 \\ & x_1, & x_2 & x_3, & x_4 & \geq 0 \end{array} \right.$$

**Forme tableau**

$$\downarrow$$

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b$	variables de base
$L_1$	1	2	1	0	21	$x_3$
$L_2$	1	1	0	1	12	$x_4$
$L_z$	3	4	0	0	0	$-z$

$$\longrightarrow$$

$$I = \{3, 4\}, J = \{1, 2\}$$

Le choix de la variable entrante :

Le coefficient dans la fonction  $z$  de la variable entrante est le plus grand des coefficients (positifs) de  $z$ .

$$x_3 = 21 - 2x_2 \geq 0 \implies x_2 \leq \frac{21}{2}$$

$$x_2 \leq 12$$

$$\implies x_{2_{max}} = \min\left(\frac{21}{2}, 12\right) = \frac{21}{2}$$

Le choix de la variable sortante :

la variable sortante correspond au plus petit des rapports (positifs) entre le second membre et les coefficients associe la variable entrante.

$$I_1 = \{2, 4\}, J_1 = \{1, 3\}$$

$$\downarrow$$

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$	<i>variables de base</i>
$L'_1 = \frac{1}{2}L_1$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{21}{2}$	$x_2$
$L'_2 = L_2 - L'_1$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{3}{2}$	$x_4$
$L'_z = L_z - 2L'_1$	1	0	-2	0	0	-42	$-z$

$$\longrightarrow$$

pour  $x_1 = x_{1_{max}}$  on a :

$$x_{1_{max}} = \min\left(\frac{21}{\frac{1}{2}}, \frac{3}{\frac{1}{2}}\right) = 3$$

Donc :  $I_2 = \{2, 1\}, J_2 = \{3, 4\}$

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b$	<i>variables de base</i>
$L''_1 = L'_1 - L'_2$	0	1	1	-1	9	$x_2$
$L''_2 = 2L'_2$	1	0	-1	2	3	$x_1$
$L''_z = L'_z - L''_1$	0	0	-1	-2	-45	$-z$

**Remarque 3** 1.  $L_z < 0$  condition d'optimalité pour un problème de max.

2.  $L_z > 0$  condition d'optimalité pour un problème de min.

### 3.1.3 Exemple 3

Standardisation :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \min z & = & 3x_1 - 6x_2 \\ s.c. & -x_1 - 2x_2 & \leq 1 \\ & -2x_1 - x_2 & \leq 0 \\ & -x_1 + x_2 & \leq 1 \\ & -2x_1 + 4x_2 & \leq 13 \\ & 4x_1 - x_2 & \leq 23 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array} \right.$$

Passage à la forme standard

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \min z = & 3x_1 & -6x_2 + 0.x_3 + 0.x_4 + 0.x_5 + 0.x_6 + 0.x_7 \\ s.c. & -x_1 & -2x_2 + \mathbf{x}_3 = 1 \\ & -2x_1 & -x_2 + \mathbf{x}_4 = 0 \\ & -x_1 & +x_2 + \mathbf{x}_5 = 1 \\ & -2x_1 & +4x_2 + \mathbf{x}_6 = 13 \\ & 4x_1 & -x_2 + \mathbf{x}_7 = 23 \\ & x_1, & x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{array} \right.$$

Forme tableau

↓

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$b$	<i>variables de base</i>
$L_1$	-1	-2	1	0	0	0	0	1	$x_3$
$L_2$	-2	-1	0	1	0	0	0	0	$x_4$
$L_3$	-1	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</span>	0	0	1	0	0	1	$x_5$
$L_4$	-2	4	0	0	0	1	0	13	$x_6$
$L_5$	4	-1	0	0	0	0	1	23	$x_7$
$L_z$	3	-6	0	0	0	0	0	0	$-z$

→

$$I = \{3, 4, 5, 6, 7\}, J = \{1, 2\}$$

$$\min(\frac{1}{1}, \frac{13}{4}) = 1$$

$$I_1 = \{3, 4, 2, 6, 7\}, J_1 = \{1, 5\}$$

↓

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$b$	<i>variables de base</i>
$L'_1 = 2L_3 - L_1$	-3	0	1	0	2	0	0	3	$x_3$
$L'_2 = L_3 + L_2$	-3	1	0	1	1	0	0	1	$x_4$
$L'_3 = L_3$	-1	0	0	0	0	0	0	1	$x_2$
$L'_4 = 4L_3 - L_4$	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</span>	0	0	0	-4	1	0	9	$x_6$
$L'_5 = L_3 + L_5$	3	0	0	0	1	0	1	24	$x_7$
$L'_z = 6L_3 + L_z$	-3	0	0	0	6	0	0	6	$-z$

→

$$\min(\frac{9}{3}, \frac{24}{3}) = 3$$

$$\text{Donc } : I_1 = \{3, 4, 2, 1, 7\}, J_1 = \{6, 5\}$$

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$b$	<i>variables de base</i>
0	0	1	0	-2	1	0	12	$x_3$
0	1	0	1	-3	1	0	10	$x_4$
0	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	4	$x_2$
1	0	0	0	$-\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	3	$x_1$
0	0	0	0	5	-1	1	15	$x_7$
0	0	0	0	2	1	0	15	$-z$

La solution optimale est  $x^* = (x_1, x_2) = (3, 4)$

La valeur optimale :  $z^* = -15$

## 3.2 Le cas gral

### 3.2.1 Cout réduits, La forme réduite

Soit le probl (P.L) sous la forme standard

$$(P.L) \begin{cases} \tilde{z} = \max z & = c^\top x \\ Ax = & b \\ x \geq & 0 \end{cases}$$

$$A \text{ matrice } m \times n, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$B = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}, \quad N = \{1, 2, \dots, n\} - B$$

$$A = [A_B \ A_N], \quad A_B \in M_{m,m} \text{ inversible}, \quad A_N \in M_{m,n-m}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} Ax &= b \iff \begin{bmatrix} A_B & A_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = b \\ &\iff A_B x_B + A_N x_N = b \\ &\iff x_B + \underbrace{A_B^{-1} A_N}_{\tilde{A}_N} x_N = \underbrace{A_B^{-1} b}_{\tilde{b}}, \quad \tilde{A}_N = A_B^{-1} A_N, \quad \tilde{b} = A_B^{-1} b \\ &\iff x_B + \tilde{A}_N x_N = \tilde{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z &= c^T x \iff \begin{bmatrix} c_B & c_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} \\
&\iff z = c_B^T x_B + c_N^T x_N \\
&\iff z = c_B^T (\tilde{b} - \tilde{A}_N x_N) + c_N^T x_N \\
&\iff z = c_B^T \tilde{b} + \underbrace{(c_N^T - c_B^T \tilde{A}_N)}_{d_N^T} x_N \\
&\iff z = z_B + d_N^T x_N
\end{aligned}$$

Donc,

$$(PL) \iff \begin{cases} \max z = z_B + d_N^T x_N \\ x_B + \tilde{A}_N x_N = \tilde{b} \end{cases} \longleftarrow \text{La forme réduite}$$

à chaque ittion on a

$x_B$	$x_N$	$S.m$	$V.b$
$I_m$	$\tilde{A}_N$	$\tilde{b}$	$x_B$
0	$d_N^T$	$-z_B$	$-z$

$\downarrow x_l$					
$\tilde{a}_{11}$	$\tilde{a}_{12}$	$\tilde{a}_{1j}$	$\tilde{a}_{1l}$	$\tilde{a}_{1n}$	$\tilde{b}_1$
		$\tilde{a}_{ij}$	$\tilde{a}_{il}$	$\tilde{a}_{in}$	$\tilde{b}_i$
		$\tilde{a}_{pj}$	<span style="border: 1px solid black;"><math>\tilde{a}_{pl}</math></span>	$\tilde{a}_{pn}$	$\tilde{b}_p$ ←
$\tilde{a}_{m1}$	$\tilde{a}_{m2}$	$\tilde{a}_{mj}$	$\tilde{a}_{ml}$	$\tilde{a}_{mn}$	$\tilde{b}_m$
0		$d_j$	$d_l$	$d_{n-m}$	$-z_B$

$$\tilde{a}'_{pj} = \frac{\tilde{a}_{pj}}{\tilde{a}_{pl}} \quad \forall j = 1, \dots, n$$

$$\tilde{b}'_p = \frac{\tilde{b}_p}{\tilde{a}_{pl}}$$

$$\tilde{a}'_{ij} = \tilde{a}_{ij} - \frac{\tilde{a}_{il}\tilde{a}_{pj}}{\tilde{a}_{pl}} \quad \forall i \neq p, \forall j = 1, \dots, n$$

Dans la colonne  $l$  :

$$\tilde{a}'_{pl} = \frac{\tilde{a}_{pl}}{\tilde{a}_{pl}} = 1$$

$$\tilde{a}'_{il} = \tilde{a}_{il} - \frac{\tilde{a}_{il} \times \tilde{a}_{pl}}{\tilde{a}_{pl}} = 0$$



$$\begin{aligned} i \neq p, \tilde{b}'_i &= \tilde{b}_i - \frac{\tilde{a}_{il} \times \tilde{b}_l}{\tilde{a}_{pl}} \\ \tilde{d}'_j &= \tilde{d}_j - \frac{\tilde{a}_{pj} \times \tilde{d}_l}{\tilde{a}_{pl}} \end{aligned}$$

### 3.2.2 Crit d'optimalit

**Th 1** Si  $d_N^\top \preceq 0$ . Alors la solution de base associ  $x=(x_B, x_N)$  est optimale

**Preuve.**  $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  admissible, et soit,  $x^* = (x_B^*, 0) = (\tilde{b}, 0)$ .

Montrons que  $z(x^*) \geq z(x), \forall x$  admissible.

$\forall i, x_i \geq 0, \forall x, z(x) = z_B + \underbrace{d_N^\top x_N}_{\leq 0} \leq z_B = z(x^*)$ , puisque  $d_N^\top x_N \leq 0 \implies z_B = x^*$ , d'o  $x^*$  solution optimale.

■

**Remarque 4** 1-Pour un PL de minimisation, le crit d'optimalit  $d_N^\top \geq 0$ .

2- si  $d_N^\top \not\leq 0$  on va soit procr e ittion ou remarquer le polye et non born  $\sup z = +\infty$

**Remarque 5** Si le critère d'optimalité n'est pas vérifié on va procéder soit à une itération ou remarquer le polyèdre est non borné et  $\sup(z) = +\infty$ .

Supposons que  $d_N^\top \not\leq 0$ . Cela signifie il existe donc des  $d_j \succ 0$ .

**Le choix de la variable entrante**

Notons par  $d_l = \max_{j \in N} \{d_j \succ 0\}$

On a deux cas :

**1<sup>er</sup> cas :**  $\forall i = 1, \dots, m, \tilde{a}_{il} \leq 0$

Alors, montrons que le polyèdre n'est pas borné et  $\sup(z) = +\infty$ .

En effet

Construisons la solution admissible.

$\forall i \in N - \{l\}, x_i = 0$  et  $x_l = t$ .

$x_N = (0, \dots, l, \dots, 0)$  solution n'est pas de base

$$x_B = \tilde{b} - t\tilde{A}_l \geq 0, \quad \text{où } \tilde{A}_l = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{1l} \\ \tilde{a}_{2l} \\ \vdots \\ \tilde{a}_{ml} \end{pmatrix}$$

$$x_B + \tilde{A}_N x_N \stackrel{?}{=} \tilde{b}$$

$$\tilde{b} - t\tilde{A}_l + \tilde{A}_N \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{b} - t\tilde{A}_l + \tilde{A}_N t = \tilde{b}$$

$$x = \begin{pmatrix} \tilde{b} - t\tilde{A}_l, \underbrace{t, \dots, 0}_{x_N} \end{pmatrix}$$

On a  $x$  admissible  $\forall t$ , donc le polyèdre non borné.

Calculons  $z(x)$  :

$$\begin{aligned}
z(x) &= z_B + d_N^\top x_N \\
&= z_B + t d_l
\end{aligned}$$

$$t \rightarrow +\infty, z(x) \rightarrow +\infty \implies \sup(z) = +\infty$$

$$\mathcal{Z}^{eme} cas : \exists l \in \{1, \dots, m\}, \tilde{a}_{il} > 0$$

Dans ce cas on va procéder à une itération, **la variable entrante étant**  $x_l$ . On va supposer maintenant que : l'ensemble de base  $B$  est non dégénéré.

**Le choix de la variable sortante  $x_p$**  est déterminé d'après la règle suivante :

**Pour la ligne  $p$**

$$p \text{ vérifie } \frac{\tilde{b}_p}{\tilde{a}_{pl}} = \min \left\{ \frac{\tilde{b}_i}{\tilde{a}_{il}} : \tilde{a}_{il} > 0 \right\}$$

On aura une nouvelle base :

$$B' = \{B - \{p\}\} \cup \{l\}, N' = \{N - \{l\}\} \cup \{p\}$$

Montrons qu'en utilisant cette règle et la méthode du pivot, la nouvelle base sera aussi admissible.

En effet, l'ancienne solution de base  $x = (x_B = \tilde{b}, x_N = 0)$

Soit  $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$

$$\forall i \in N - \{l\}, x'_i = 0, x'_l = \tilde{b}'_p \geq 0$$

$\forall i \neq p$ , calculons le nouveau  $\tilde{b}'_p$  on a,

$$\frac{\tilde{b}_p}{\tilde{a}_{pl}} \leq \frac{\tilde{b}_i}{\tilde{a}_{il}}, \quad \tilde{a}_{il} > 0$$

ce qui entraîne à que

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{b}_i}{\tilde{a}_{il}} - \frac{\tilde{b}_p}{\tilde{a}_{pl}} &\geq 0 \\
\Rightarrow \frac{1}{\tilde{a}_{il}} \underbrace{\left( \tilde{b}_i - \frac{\tilde{b}_p \tilde{a}_{il}}{\tilde{a}_{pl}} \right)}_{\tilde{b}'_i \geq 0} &\geq 0
\end{aligned}$$

et pour  $i = p$

$$\tilde{b}'_p = \frac{\tilde{b}_p}{\tilde{a}_{pl}}$$

Montrons que  $z'_B \geq z_B$  i.e  $z$  augmente.

La nouvelle solution  $x' = (x_{B'} = \tilde{b}', x_{N'} = 0)$

$$\begin{aligned}
z(x') &= z_B + d_N^\top x'_N \\
&= z_B + d_l \tilde{b}'_l \geq z_B
\end{aligned}$$

Si  $B$  est non dégénérée et si le choix de la variable sortante est unique, alors la nouvelle base  $B'$  est aussi non dégénérée et  $z$  augmente strictement ( $z'_B > z_B$ )

En effet

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{b}_i}{\tilde{a}_{il}} - \frac{\tilde{b}_p}{\tilde{a}_{pl}} &> 0, \quad \tilde{a}_{il} > 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{\tilde{a}_{il}} \underbrace{\left( \tilde{b}_i - \frac{\tilde{b}_p \tilde{a}_{il}}{\tilde{a}_{pl}} \right)}_{\tilde{b}'_i > 0} &> 0, i \neq p \end{aligned}$$

Donc, le nouveau  $\tilde{b}'_i > 0$ .

On a,  $z_{B'} = z_B + d_l \tilde{b}'_l \geq z_B$

**Exercice 1** Montrer que si  $B$  est non dégénérée et si le choix de la variable sortante n'est pas unique. Alors la nouvelle  $B'$  est dégénérée.

**Solution 1** Si le choix de la variable sortante n'est pas unique,

$$\begin{aligned} \exists p, q : \frac{\tilde{b}_p}{\tilde{a}_{pl}} = \frac{\tilde{b}_q}{\tilde{a}_{ql}} = \min \left\{ \frac{\tilde{b}_i}{\tilde{a}_{il}} : \tilde{a}_{il} > 0 \right\} \\ \tilde{b}'_q = \tilde{b}_q - \frac{\tilde{b}_p \tilde{a}_{ql}}{\tilde{a}_{pl}} = 0 \end{aligned}$$

On a montré le théorème suivante :

**Th 2** Supposons que le programme linéaire est non dégénérée et qu'il admette au moins une solution optimale ( avec  $z_{\max}$  fini ). Alors à chaque itération du simplexe le choix de la ligne du pivot ( i.e de la variable sortante) est unique et l'objectif croit strictement. Comme le nombre d'ensemble de base est fini ( il est inférieur ou égale à  $C_n^m$  ), il résulte qu'après un nombre fini d'itérations l'algorithme va trouver une solution de base optimale. Cela montre aussi que, si le programme admet une solution optimale, alors il existe toujours de base optimale.