Université Hassiba Benbouali - Chlef Année univ : 2021-2022
Faculté des sciences exactes et informatiques *Département de de Mathématiques*

1^{ere} ***Master mathématique appliquée et statistique***
Matière : Programmation Linéaire 1 (**Série d'exercices+ Correction)**

Exercice 1 *Un atelier fabrique des tables et des bureaux.*

— *Chaque table nécessite* $2,5h$ *pour l'assemblage,* $3h$ *pour le polissage et* $1h$ *pour la mise en caisse.*
— *Chaque bureau exige* $1h$ *pour l'assemblage,* $3h$ *pour le polissage et* $2h$ *pour la mise en caisse.*

L'entreprise ne peut disposer, chaque semaine, de plus de $10h$ *pour l'assemblage, de* $15h$ *pour le polissage et de* $8h$ *pour la mise en caisse. Sa marge de profit est de* 3000 *DA par table et de* 4000 *DA par bureau. Combien de tables et de bureaux doit-on produire afin d'obtenir un profit hebdomadaires maximal ?*

Solution 1 ***Identification des variables*** *: Le profit hebdomadaire évolue en fonction du nombre de tables et bureaux fabriqués. Le problème consiste donc a déterminer les nombres de tables et bureaux qui permettent de réaliser le profit le plus important. On note :*

$x_1 =$ *le nombre de tables a fabriquer par semaine*
$x_2 =$ *le nombre de bureaux a fabriquer par semaine*

Fonction objectif : *Le profit hebdomadaire* z *s'obtient a partir de l'expression,*

$$z = 30x_1 + 40x_2.$$

L'objectif poursuivi consiste à trouver le couple de valeurs x_1 *et* x_2 *qui maximise le profit hebdomadaire* z *:*

$$\max z = 30x_1 + 40x_2.$$

Contraintes : *Les valeurs prises par* x_1 *et* x_2 *sont limitées par les disponibilités des ateliers. Ainsi, il convient de prendre en compte :*

– ***Contraintes de production :*** *Par exemple, le temps utilisé pour assembler tables et bureaux ne peut excéder les* $10 heures$ *disponibles. Ce qui s'écrit donc :*

$$2.5x_1 + x_2 \leq 10.$$

De même, pour le polissage et la mise en caisse, on écrit

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\leq 10 \\ x_1 + 5x_2 &\leq 8. \end{aligned}$$

– ***Contraintes de non-négativité*** *: Ce type de contraintes ne figure pas de manière explicite dans l'énoncé. Cependant son caractère est évident car les nombres de tables et de bureaux à fabriquer ne peuvent être que positives ou nulles :*

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Le programme linéaire ainsi défini s' ecrit :

$$\begin{cases} \max & z = 30x_1 + 40x_2 & \\ s.c & 2.5x_1 + x_2 & \leq 10 \\ & 3x_1 + x_2 & \leq 10 \\ & x_1 + 5x_2 & \leq 8 \\ & \quad x_1 \geq 0, x_2 & \geq 0. \end{cases}$$

Exercice 2 *Une entreprise fabrique deux produits différents. L'un d'eux nécessite $\frac{1}{4}$ d'heure par unité pour les travaux d'assemblage, $\frac{1}{8}$ d'heure pour les travaux de contrôle qualité et 120 Dinars pour les matières premières. L'autre produit nécessite $\frac{1}{3}$ d'heure par unité pour les travaux d'assemblage, $\frac{1}{3}$ d'heure pour les travaux de contrôle de qualité et 90 Dinars pour les matières premières. Compte tenu de la disponibilité actuelle du personnel dans l'entreprise, il y a au maximum 90 heures de montage et 80 heures de contrôle qualité par jour. Le premier produit décrit a une valeur marchande (prix de vente) de 900 Dinars par unité et pour le second, cette valeur correspond à 800 Dinars par unité. En outre, il a été estimé que la limite de vente quotidienne maximale pour le premier produit décrit est de 200 unités, et il n'y a pas de limite de vente quotidienne maximale pour le deuxième produit.*

Écrire sous forme de programme linéaire P le problème consistant à déterminer le plan de fabrication maximisant les bénéfices de l'entreprise, puis résoudre P graphiquement.

Solution 2 ***Variables de décision :***

- x_1 *: le nombres des unités à produire du produit 1 chaque jours.*
- x_2 *: le nombres des unités à produire du produit 2 chaque jours.*

Fonction objectif :

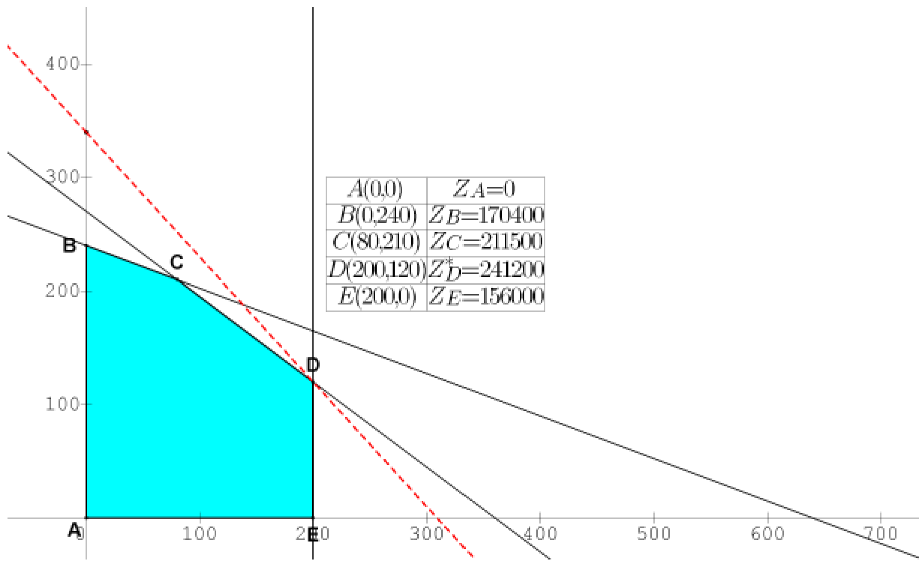
$$\begin{aligned} Z &= 900x_1 + 800x_2 - (120x_1 + 90x_2) \\ &= 780x_1 + 710x_2. \end{aligned}$$

Contraintes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 &\leq 90 \\ \frac{1}{8}x_1 + \frac{1}{3}x_2 &\leq 80 \\ x_1 &\leq 200 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

La première contrainte représente les limites d'heures de montage par jour. La deuxième contrainte est la disponibilité d'heures pour les tâches de contrôle qualité (également quotidiennes). La troisième établit une limite supérieure pour la production et les ventes quotidiennes du produit 1. De plus, les conditions de non-négativité pour les variables de décision sont incluses.

Le domaine des solutions réalisables a 5 sommets qui correspondent aux candidats optimaux du problème. En particulier, le sommet optimal est D pour que la solution optimale soit $x_1 = 200$ et $x_2 = 120$ avec une valeur optimale $V(P) = Z_D = 780 \times (200) + 710 \times (120) = 241200$ Dinars qui correspond au profit maximum



Exercice 3 *Une entreprise pharmaceutique produit des flacons de gel de stérilisation de trois types (G1, G2 et G3). Deux d'entre eux (G2 et G3), contenant de l'éthanol. Pour couvrir la production du mois prochain, L'éthanol peut être acheté au prix de 100 dinars / litre. Cependant, le fournisseur ne peut pas fournir plus de 4000 litres de l'éthanol. Le tableau suivant indique : la quantité de l'éthanol nécessaire pour produire une boîte de chaque type, les coûts de main-d'œuvre (par boîte produite) et les prix de détail (par boîte) :*

	Éthanol(litre par boîte)	*Coûts de main-d'œuvre*	*Prix de vente*
G1	-	*120*	*250*
G2	*1*	*60*	*200*
G3	*2*	*40*	*300*

Les trois types de gels doivent être produites en quantités telles que le nombre de boîtes de G1 soit au moins le double du nombre de boîtes de G2 et pas plus que le nombre de boîtes de G3. Écrire sous forme de programme linéaire PL le problème consistant à déterminer le plan de fabrication maximisant le profit de cette entreprise sous les contraintes décrites précédemment.

Solution 3 *Les variables de décision sont la quantité de boîtes des trois types de gels, que nous indiquerons avec* x_1,x_2, x_3. *La fonction objectif à maximiser est le profit total moins les coûts totaux. Le profit est évidemment donné par*

$$250x_1 + 200x_2 + 300x_3$$

à cela il faut soustraire les contributions du coût de l'éthanol et du travail, égales respectivement à

$$100\,(x_2 + 2x_3)$$

et

$$120x_1 + 60x_2 + 40x_3$$

et par conséquent, en réorganisant les termes, la fonction objectif résulte

$$130x_1 + 40x_2 + 60x_3.$$

Il y a trois contraintes. Le premier exprime la contrainte sur la disponibilité de l'éthanol :

$$x_2 + 2x_3 \leq 4000$$

les deuxième et troisième concernent les restrictions à la production de G1 :

$$\begin{array}{rcl} x_1 & \geq & 2x_2 \\ x_1 & \leq & x_3. \end{array}$$

l'ajout des contraintes de non-négativité complète la formulation

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

ainsi, le problème peut être formulé comme suit

$$\max Z = 130x_1 + 40x_2 + 60x_3$$

$$s.c \left\{ \begin{array}{c} x_2 + 2x_3 \leq 4000 \\ 2x_2 - x_1 \leq 0 \\ x_1 - x_3 \leq 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{array} \right.$$

Exercice 4 *Une industrie manufacturière peut fabriquer* 5 *types de produits que nous désignons généralement avec* P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 *en utilisant* 2 *processus de production qui se produisent grâce à l'utilisation de deux machines que nous désignons par* M_1 *et* M_2*. Après déduction du coût de la matière première, chaque unité de produit donne les bénéfices suivants (en milliers de dinars)*

P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
250	300	500	450	180

Chaque unité de produit nécessite un certain temps de chacun des 2 *processus ; le tableau suivant montre les temps de traitement (en heures) de chaque machine pour obtenir une unité de chacun des produits finis*

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
M_1	10	15	7	18	–
M_2	9	13	–	–	20

De plus, l'assemblage final de chaque unité de chaque produit nécessite 18 *heures de travail par un ouvrier. L'usine dispose de* 4 *machines* M_1 *et* 3 *machines* M_2 *qui fonctionnent* 5 *jours par semaine pendant* 2 *équipes de* 8 *heures par jour. Les ouvriers employés dans l'assemblée sont* 10 *et chacun d'eux travaille* 5 *jours par semaine pour un quart de* 8 *heures. Trouvez la quantité de chaque produit à produire pour maximiser le profit total.*

Solution 4 - *Variables de décision.* *Il est naturel d'introduire les variables réelles* x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 *représentant respectivement les quantités de produit* P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 *qui doivent être fabriquées en une semaine.*

- ***Fonction objectif.*** *Chaque unité de produit fini contribue au bénéfice total selon le tableau donné. Le profit total sera donc*

$$250x_1 + 300x_2 + 500x_3 + 450x_4 + 180x_5. \tag{1}$$

L'objectif de l'usine sera de choisir les variables x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 *de sorte que l'expression* (1) *du profit soit maximisée.*

- ***Contraintes.*** *Évidemment la capacité de production de l'usine tant du point de vue des machines que du point de vue des ouvriers limite les valeurs que peuvent prendre les variables* x_j, $j = 1, ..., 5$. *Il n'y a que* 4 *machines* M_1 *qui fonctionnent pour un total de* 320 *heures par semaine et puisque chaque unité de produit* P_1 *utilise la machine* M_1 *pendant* 10 *heures, chaque unité de produit* P_2 *l'utilise pendant* 15 *heures et ainsi de suite pour les autres produits, nous devons avoir*

$$10x_1 + 15x_2 + 7x_3 + 18x_4 \leq 320. \tag{2}$$

En raisonnant de la même manière pour la machine M_2 *on obtient*

$$9x_1 + 13x_2 + 20x_5 \leq 240. \tag{3}$$

De plus, il n'y a que 10 hommes pour l'assemblée, qui travaillent chacun 40 heures par semaine et ont donc une capacité de travail hebdomadaire de 400 heures. Étant donné que chaque unité de produit fournit 18 heures de travail d'assemblage, nous devons avoir

$$18x_1 + 18x_2 + 18x_3 + 18x_4 + 18x_5 \leq 400. \tag{4}$$

Les expressions (2), (3) *et* (4) *constituent les contraintes du modèle. Il existe également des contraintes implicites dues au fait que les variables* x_j, $j = 1, ..., 5$ *représentant des quantités de produit ne peuvent pas être négatives. Cette limitation doit être explicitée et donc les contraintes doivent être ajoutées*

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.$$

La formulation finale sera donc

$$\left\{\begin{array}{r} \max 250x_1 + 300x_2 + 500x_3 + 450x_4 + 180x_5 \\ 10x_1 + 15x_2 + 7x_3 + 18x_4 \leq 320. \\ 9x_1 + 13x_2 + 20x_5 \leq 240. \\ 18x_1 + 18x_2 + 18x_3 + 18x_4 + 18x_5 \leq 400. \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{array}\right.$$

Exercice 5 *a) Écrire le problème de programmation linéaire suivant sous forme matricielle.*

$$\begin{cases} Maximiser \quad z = 120x + 100y \\ \quad 2x + 2y \leq 8 \\ \quad 5x + 3y \leq 15 \\ \quad x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

b) Montrer que

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad et \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

sont des solutions réalisables. Calculez également les valeurs de la fonction objectif pour ces solutions réalisables.

c) Vérifier que

$$x_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad x_5 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ne sont pas des solutions réalisables.

Solution 5 *a) Posons* $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 120 \\ 100 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}$. *Ce problème peut alors être exprimé sous forme matricielle comme suit*

$$\begin{cases} \max z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \quad \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2} \end{cases} .$$

b) Il est clair que $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$, *de plus, on a* $\mathbf{Ax}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$, *donc* $\mathbf{x}_1$ *est une solution réalisable.*

De même, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$, *de plus, on a* $\mathbf{Ax}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$, *donc* $\mathbf{x}_2$ *est une solution réalisable.*

c) On a $\mathbf{Ax}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 18 \end{pmatrix} \nleq \mathbf{b}$, *donc* $\mathbf{x}_3$ *n'est pas une solution réalisable.*

On a $\mathbf{Ax}_4 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix} \nleq \mathbf{b}$, *donc* $\mathbf{x}_4$ *n'est pas une solution réalisable.*

La premiere composante du vecteur $\mathbf{x}_5$ *est négative, donc* $\mathbf{x}_5$ *n'est pas une solution réalisable.*

Exercice 6 *Écrire le problème de programmation linéaire suivant sous forme standard.*

$$Maximiser \quad z = [2 \ \ 3 \ \ 5] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad s.c \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}.$$

Solution 6 *La forme canonique est*

$$\begin{cases} \max 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5. \\ x_1 + x_2 - 2x_5 \leq 8. \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 10. \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

En ajoutant des variables d'écart x_4, x_5, x_6, *on obtient la forme standard suivant :*

$$\begin{cases} \max 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 5. \\ x_1 + x_2 - 2x_5 + x_5 \leq 8. \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_6 \leq 10. \\ x_i \geq 0, i = 1, ..., 6. \end{cases}$$

Exercice 7 *Considérons le problème de la programmation linéaire*

$$\begin{cases} Maximiser \quad z = 2x + 5y \\ \qquad 2x + 3y \leq 10 \\ \qquad 5x + y \leq 12 \\ \qquad x + 5y \leq 15 \\ \qquad x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

(a) *Vérifiez que* $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *est une solution réalisable.*

(b) *Pour la solution réalisable en a, trouvez les valeurs correspondantes pour les variables d'écart.*

Solution 7 (a) *On* $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \geq 0$, *de plus il vérifie les contraintes, car*

$$\begin{cases} 2 \times 1 + 3 \times 2 = 8 \leq 10 \\ 5 \times 1 + 2 = 7 \leq 12 \\ 1 + 5 \times 2 = 11 \leq 15 \end{cases}.$$

(b) *Pour la forme standard, on ajoute les variables d'écarts* u, v, w *pour trouver cette forme*

$$\begin{cases} Maximiser \quad z = 2x + 5y \\ \qquad 2x + 3y + u = 10 \\ \qquad 5x + y + v = 12 \\ \qquad x + 5y + w = 15 \\ \qquad x, y, u, v, w \geq 0. \end{cases}$$

pour $x = 1, y = 2$ *on trouve*

$$\begin{cases} 2 \times 1 + 3 \times 2 + u = 8 \\ 5 \times 1 + 2 + v = 12 \\ 1 + 5 \times 2 + w = 15 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = 5 \\ w = 4 \end{cases}.$$

Exercice 8 *Considérons le problème de la programmation linéaire*

$$\begin{cases} Maximiser & \mathbf{z} = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ & \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{cases}$$

Si $\mathbf{x}_1$ *et* $\mathbf{x}_2$ *sont des solutions réalisables, montrer que* $\mathbf{x} = \frac{1}{3}\mathbf{x}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{x}_2$ *est une solution réalisable.*

Exercice 9 *Généraliser l'exercice précédent pour montrer que* $\mathbf{x} = r\mathbf{x}_1 + s\mathbf{x}_2$ *est une solution réalisable si* $r + s = 1$.

Exercice 10 *On considère une entreprise produisant deux biens en quantités* x_1 *et* x_2 *respectivement sous contraintes de capacités de production relatives a deux ateliers de production. Le programme linéaire correspondant a la maximisation de la marge est le suivant :*

$$\begin{cases} \max & z = 3x_1 + 4x_2 & \\ s.c & 2x_1 & \leq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 & \leq 18 \\ & x_1, x_2 & \geq 0. \end{cases}$$

(*a*) *Déterminer graphiquement le sommet optimal et donner ses coordonnées.*
(*b*) *Mettre le problème sous la forme d'égalité par l'ajout de variables d' écart.*
(*c*) *A l'optimum, quelles sont les variables en base et les variables hors base ?*
(*d*) *Des progrés importants dans l'organisation du travail permettraient de réduire le temps d'usinage du second bien dans le premier atelier. La première contrainte devient donc* $\alpha x_2 \leq 12$, *où* α *; le nouveau temps d'usinage, est un paramètrer inférieure a* 2.

Jusqu' a quelle valeur peut-on faire descendre pour que la même base (c'est- a-dire les mêmes variables de base) reste optimale ?

(*e*) *En dessous de cette valeur quel est le sommet optimal (donner ses coordonn ees) et quelle est la nouvelle base (c'est-a-dire quelles sont les nouvelles variables de base) ?*

Exercice 11 *On consid ere le P.L :*

$$\begin{cases} \max & z = 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 10x_4 + 3x_5 & \\ s.c & 7x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 8x_5 & = 37 \\ & 5x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 6x_5 & = 26 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq 0. \end{cases}$$

On pose $J = \{1; 3\}$

1) *J est- il une base ?*
2) *Est- ce une base admissible ?*
3) *Est- ce une base optimale ?*

Exercice 12 *Résoudre graphiquement les programmes linéaires suivants :*

$$(PL1)\begin{cases} \max z = 250x + 75y \\ s/c \quad 5x + y \leq 100 \\ x + y \leq 60 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases}, (PL2)\begin{cases} \max z = 4x_1 + x_2 \\ s/c \quad x_1 + x_2 \leq 50 \\ 3x_1 + x_2 \leq 90 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(PL3)\begin{cases} \min z = 200x_1 + 500x_2 \\ s/c \quad x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}, (PL4)\begin{cases} \max z = 3x_1 + 9x_2 \\ s/c \quad x_1 + 3x_2 \leq 60 \\ x_1 + x_2 \geq 10 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(PL5)\begin{cases} \min z = -50x_1 + 20x_2 \\ s/c \quad 2x_1 - x_2 \geq -5 \\ 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}, (PL6)\begin{cases} \min z = 3x_1 + 2x_2 \\ s/c \quad x_1 + x_2 \geq 8 \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 13 *Considérons le problème de la programmation linéaire*

$$\begin{cases} \max z = 3x + 2y \\ s/c \quad 2x - y \leq 6 \\ 2x + y \leq 10 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases},$$

(a) *Transformer ce problème en un problème sous forme canonique.*
(b) *Pour chaque point extrême du nouveau problème, identifier les variables de base.*
(c) *Résoudre géométriquement le problème.*