Université: Mohamed Khieder
Faculté des Sciences exactes, des Sciences de la nature et de la vie
Département: de Mathématiques
Module: Les Lois des proba. 2017/2018

Serie d'exercice N01

Exercice 1

1) Montrer que si X et Y sont deux v.a.r presque-sûrement égales, alors elles ont la même loi. Montrer que la réciproque est fausse.

2) Soient X et Y deux v.a.r de même loi, g une application borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que les v.a.r $g(X)$ et $g(Y)$ ont la même loi.

Soit Z une autre v.a.r., montrer que les v.a.r. XZ et YZ n'ont pas nécessairement la même loi.

3) Soit X une v.a.r. de loi $\mathcal{N}_1(0,1)$. La v.a.r à valeurs $\mathbb{R}^2$, (X,X) est-elle une v.a.r. absolument continue sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2

1) Sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},P)$, on considère une v.a. X dont la fonction de répartition est donnée par

$$F_X(t) := \frac{1}{2}\left(e^t 1_{]-\infty,0[}(t) + (2-e^{-t})1_{[0,+\infty[}(t)\right).$$

Déterminer la loi de la v.a. $Y = |X|$.

2) On suppose que Z est une v.a. de fonction de répartition

$$F_Z(t) = \frac{1}{4}(t+2)\, 1_{[-1,0[\cup[1,2[}(t) + \frac{3}{4} 1_{[0,1[}(t) + 1_{[2,+\infty[}(t).$$

Donner une représentation graphique de F_Z.

Exercice 3

Sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},P)$,on considère une v.a. réelle positive X de fonction de répartition F_X, pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$E[X^n] = \int_0^{+\infty} nt^{n-1}P(X>t)dt = \int_0^{-\infty} nt^{n-1}(1-F_X(t))dt.$$

Montrer par un exemple que l'hypothèse X positive est nécessaire.

Exercice 4

On considère un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},P)$. En utilisant la relation de l'exercice précédent, calculer l'espérance et la variance des variables aléatoires suivantes

1) X de fonction de répartition

$$F_X(t) := t1_{[0,1[}(t) + 1_{[1,+\infty[}(t).$$

2) Y de fonction de répartition

$$F_Y(t) := (1-e^{-\alpha t})1_{[0,+\infty[}(t) \text{ où } \alpha > 0.$$

3) Z de fonction de répartition

$$F_Z(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-a} \frac{a^n}{n!} 1_{[n,+\infty[}(t)$$

Exercice 6

Soit X la v. a. absolument continue, répartie uniformément sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

1) quelle est la densité f de X, $E(X)$, $E(X^2)$, $\mathrm{Var}(X)$
2) quelle est la densité g de $Y = X^2$, $E(Y)$, $\mathrm{Var}(Y)$.
3) on pose $Z = tgX$, quelle est la densité h de Z, et $E(Z)$.

Exercice 7

Soient 2 v.a. définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$, on suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ. On suppose également qu'étant donné $(X = n)$, Y suit une loi binomiale de paramètre n et p.

Quelle est la loi de Y.

X **Exercice 08.**

1) Soit $X = (X_1, X_2)$ une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. On suppose que X est absolument continue, i.e. que la loi $P_{(X_1,X_2)}$ admet une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda^{(2)}$ sur $\mathbb{R}^2$.

a) Montrer que la loi P_{X_1} de X_1 admet une densité f_1, par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda^{(1)}$ sur $\mathbb{R}$, que l'on exprimera à l'aide de f.

b) Calculer f_1 et f_2 lorsque f est donnée par

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} e^{-x_1} & \text{si } x_1 \succeq x_2 \succeq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

A-t-on $f(x_1, x_2) := f_1(x_1) f_2(x_2)$, pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$?

2) Soit X une v.a. réelle absolument continue. La v.a. (X, X) à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, est-elle absolument continue?

X **Exercice 09.** Sur un espace probabilisé (Ω, F, P), on considère un couple de v.a. (X, Y) à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ dont la loi $P_{(X,Y)}$ admet la densité

$$f(x, y) = \alpha \left(1 - x^2\right) 1_{[0,1]}(x)\, y e^{-3y} 1_{[0,+\infty[}(y),$$

où α est un réel, par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda^{(2)}$ sur $\mathbb{R}^2$.

1) Déterminer la valeur du réel α.
2) Déterminer les lois marginales du couple (X, Y).
3) Calculer $P(0 < X \leq 2, Y \geq 1)$.
4) Calculer la matrice de dispersion de (X, Y).

$P_X(A) = P(X \in A) = P \circ X^{-1}(A)$

$\int_{\mathbb{R}} g(x)\, d\delta_a(x) = g(a)$

Université Mohamed Khider
Faculté des Sciences exactes, des Sciences de la nature et de la vie
Département : de Mathématiques
Module: Lois des Proba. 2017/2018

loi unif $\boxed{dP_X(x) = 1_{[a,b]}(x)\,dx}$

Serie d'exercice N°02

Exercice 01. Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de lois respectives

$$P_X := p\delta_1 + q\delta_0, \quad p\delta_1(x) + q\delta_0(x)$$

et

$$P_Y := \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\alpha} \frac{\alpha^k}{k!} \delta_k,$$

où $p \in]0,1[$, $q := 1-p$, $\alpha > 0$. On pose, pour tout $\omega \in \Omega$, $Z(\omega) = 0$ si $X(\omega) = 0$ et $Z(\omega) = Y(\omega)$ si $X(\omega) = 1$.

1. Montrer que Z définit presque-sûrement une v.a.r. (i.e. qu'il existe une v.a.r. Z' presque-sûrement égale à Z).
2. Déterminer la loi de Z (i.e. la loi de Z').
3. Calculer l'espérance et la variance de Z.

Exercice 02. Sur un espace probabilisé (Ω, F, P), on considère une v.a. (X, Y) à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de loi $P_{(X,Y)} := \alpha(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)$ où α est un réel, μ_1 la mesure sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ admettant

$$f(x,y) := \frac{1}{x^2} e^{-y} 1_{[1,+\infty[}(x)\, 1_{[0,+\infty[}(y)$$

comme densité par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda^{(2)}$, μ_2 la mesure uniformément répartie sur $[0,1] \times \{0\}$ c-à-d la mesure produit de la loi uniforme sur $[0,1]$ et de la mesure de Dirac en 0, et μ_3 la mesure discrète $\mu_3 := \delta_{(1,1)} - \delta_{(-1,2)}$.

1. Déterminer la valeur du réel α
2. Déterminer les lois des v.a.r. X et Y.

Exercice 03. Soient $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, où $n \in \mathbb{N}^*$, une suite de probabilités sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'on peut construire un espace de probabilité (Ω, F, P) et une suite indépendante $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de v.a.r. définies sur (Ω, F, P) telle que, pour tout $1 \leq k \leq n$, μ_k soit la loi de la v.a.r. X_k.

Exercice 04. Soit (X, Y) un couple indépendant de v.a.r. On suppose que X suit la loi uniforme $U[0,1]$ et Y la loi exponentielle $\xi(1)$. Calculer la loi de la v.a.r. $Z := X + Y$.

Exercice 05. Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de loi binomiales respectives $\mathrm{Bin}(n,p)$ et $\mathrm{Bin}(m,p)$, où $n, m \in \mathbb{N}^*$ et $0 < p < 1$, sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

1. Montrer que la v.a.r $X + Y$ est une v.a.r. binomiale de loi $\mathrm{Bin}(n - m, p)$.
2. Quelle est la loi conditionnelle de X sachant $X + Y = k$ où $k \in \mathbb{N}$ est fixé?

Exercice 06. On considère un couple indépendant de v.a.r. (X, Y). On suppose que X est absolument continue de densité f_X et Y une variable discrète qui prend ses valeurs dans $\{y_n, n \in I\}$, $I \subseteq \mathbb{N}$ où $(y_n)_{n \in I}$. Montrer en calculant sa densité que la v.a.r. $Z := X + Y$ est absolument continue.

$P_Z = \sum P(Z=k)\,\delta_k$

Exercice 07. Soit X une v.a. à valeurs $\mathbb{R}^d$, φ une application borélienne de $\mathbb{R}^d$ dans $[0, +\infty[$. Montrer que, pour tout $a > 0$

$$P(\varphi(X) \geq a) \leq \frac{1}{a} E(\varphi(X)).$$

Exercice 08.

1. Sur un espace probabilisé (Ω, F, P), on considère une v.a.r. X centrée et de variance $\sigma^2 < +\infty$. Montrer que, pour tout $a > 0$

$$a \leq E\left[(a - x) 1_{(X \leq a)}\right] \leq (P(X \leq a))^{\frac{1}{2}} \sqrt{\sigma^2 + a^2}.$$

En déduire que

$$P(X > a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$

2. Une usine fabrique chaque semaine un nombre aléatoire Y d'objets. On suppose $E[Y] = 100$ et $Var(Y) = 400$. Trouver à l'aide de la question précédente un majorant de la probabilité que la production hebdomadaire dépasse 120. Comparer ce résultat avec celui obtenu par application de l'inégalité de Bienaymé Tchebycheff.

Université: Mohamed Khieder
Faculté des Sciences exactes, des Sciences de la nature et de la vie
Département: de Mathématiques
Module: Lois des Probe. 2017/2018
Niveau: 1er année master

Serie d'exercice N03

X Exercice 01.

Sient X et $(X_n)_{\mathbb{N}}$ une famille de v.a.

1) Montrer les égalités entre événements

$$\{(X_n)_{\mathbb{N}} \text{ ne converge pas vers } X\} = \bigcup_{\varepsilon\in]0,+\infty[} \limsup_n \{|X_n - X| > \varepsilon\},$$
$$= \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} \limsup_n \left\{|X_n - X| > \frac{1}{p}\right\}.$$

2) Montrer que $(X_n)_{\mathbb{N}}$ converge p.s. vers X si. et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbf{P}\left(\limsup_n \{|X_n - X| > \varepsilon\}\right) = 0.$$

3) Montrer que si, pour tout $\varepsilon > 0$, la série

$$\sum_n \mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$$

converge alors la suite $(X_n)_{\mathbb{N}}$ converge p.s. vers X.

X Exercice 02.

Soit f une application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ de carré intégrable au sens de Lebesgue sur $[0,1]$. On considère une suite indépendante $(U_n)_{\mathbb{N}}$ de v.a.r. de loi uniforme sur $[0,1]$. Démontrer en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff, que la suite des moyennes empiriques $I_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(U_k)$ associée à la suite de v.a.r. $(f(U_n))_{\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers l'intégrale au sens de Lebesgue $\int_{[0,1]} f d\lambda$.

X Exercice 03.

Soient (X_n) une suite de v.a.r. de carré intégrable non corrélées. On suppose qu'il existe un réel μ et un réel positif C tels que, pour tout $n \geq 1$, $E[X_n] = \mu$ et $var(X_n) \leq C$. Montrer que la suite $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ converge vers μ dans L_2 et en probabilité.

X Exercice 04.

Montrer à l'aide de la loi forte des grands nombres que

1.

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) d\lambda^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = f\left(\frac{1}{2}\right),$$

où $\lambda^{(n)}$ est la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$ et f une application continue bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Indication: On pourra considérer une suite indépendante de v.a.r. $(X_i)_{i\geq 1}$ de même loi uniforme $U([0,1])$.

2.

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k\geq 0} e^{-\alpha n} \frac{(\alpha n)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) = f(\alpha),$$

où α est un réel strictement positif et f une application continue bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Indication: On pourra considérer une suite indépendante de v.a.r. $(Y_i)_{i\geq 1}$ de même loi de Poisson $P(\alpha)$.

Exercice 05.

C.V $L_2 \Rightarrow$ C.V en proba

Soient f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et $x \in [0,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons S_n une v.a.r. binomiale de loi $B(n,x)$.

1) Montrer que $p_n(x) := E\left[f\left(\frac{1}{n}S_n\right)\right]$ est un polynôme en x appelé polynôme de *Bernstein* de f.

2) En utilisant l'uniforme continuité de f sur $[0,1]$ (compact) montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} |p_n(x) - f(x)| &\leq E\left[\left|f\left(\frac{1}{n}S_n\right) - f(x)\right|\right] \\ &\leq \varepsilon P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - x\right| < \delta\right) + 2P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - x\right| \geq \delta\right) \sup_{0\leq x\leq 1} |f(x)| \end{aligned}$$

f continue sur $[0,1]$ compact ⇒ f est unif cont et bornée

En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0,1]$,

$$|p_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon + 2\frac{x(1-x)}{n\delta^2} \sup_{0\leq x\leq 1} |f(x)|$$

3) Démontrer le théorème de Weierstrass: Tous application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ est limite uniforme sur $[0,1]$ d'une suite de polynômes.

Exercice 06.

Etudier la convergence étroite de la suite de probabilités $(\mu_n)_{n\geq 1}$ de densités respectives $(f_n)_{n\geq 1}$ où pour tout $n \geq 1$, f_n est définie par $f_n(x) := nx^{n-1}\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$.

Exercice 07.

Soit $(p_n)_{\mathbb{N}}$ une suite de réels de $]0,1[$ telle que

p_n suite réel de $]0,1[$ ⇔ $p_n \sim$ Bin(n, p_n))

$$\lim_n (np_n) = \alpha \in]0, +\infty[.$$

Montrer que la suite de probabilités $(B(n,p_n))_{\mathbb{N}}$ converge étroitement vers la probabilité de Poisson $P(\alpha)$

Exercice 08.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $v.a.r$ définies sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ et f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une $v.a.r$ X. Montrer que la suite $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $f(X)$.

Exercice 09.

1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r qui converge en loi vers une $v.a.r$ constante a (i.e. la suite $(\mathbf{P}_{X_n})_{n\geq 1}$ converge étroitement vers δ_a). Montrer que la convergence a lieu également en probabilité.

2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite indépendante de v.a.r de même loi de Cauchy $C(1)$. Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n := \sum_{k=1}^{k=n} X_k$. Etudier les convergence en probabilité et en loi des suites $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}S_n\right)_{n\geq 1}$, $\left(\frac{1}{n}S_n\right)_{n\geq 1}$ et $\left(\frac{1}{n^2}S_n\right)_{n\geq 1}$.

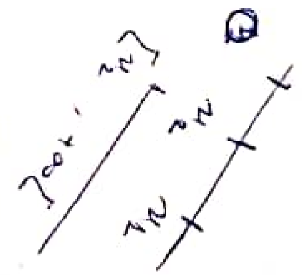
ne cv pas en loi ⇒ ne cv pas ...

Exercice 10.

Soient X une v.a.r. et $(X_n)_{\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r., on suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{X_n} := \delta_{x_n}$ où $x_n \in \mathbb{R}$.

1) Si $P_X = \delta_x$, $x \in \mathbb{R}$, montrer que la suite $(X_n)_{\mathbb{N}}$ converge en loi vers X si et seulement si $(x_n)_{\mathbb{N}}$ converge vers x.

2) Montrer que si la suite $(X_n)_{\mathbb{N}}$ converge en loi vers X, alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $P_X = \delta_x$.



Exercice n° 2 :

1) $F_X(t) = \frac{1}{2}\left(e^t \mathbb{1}_{]-\infty,0[}(t) + (2-e^{-t})\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t)\right)$

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(|X| \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ P(-t \leq X \leq t) & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

si $t \geq 0$. $F_Y(t) = P(-t \leq X \leq t) = F_X(t) - F_X(-t)$

$$= \left(\frac{1}{2}(2-e^{-t}) - \frac{1}{2}e^{-t}\right)\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t)$$

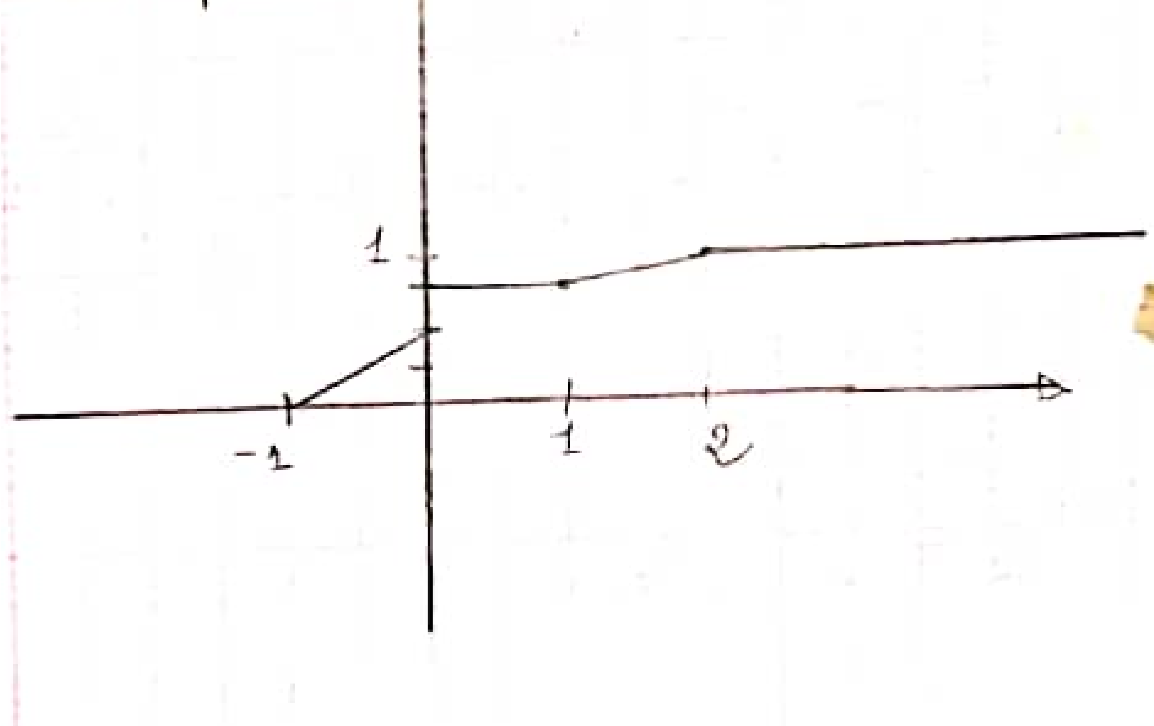
$$= (1-e^{-t})\,\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t) \quad \text{alors}$$

$Y \sim \mathcal{E}(1)$.

2) $F_Z(t) = \frac{1}{4}(t+2)\,\mathbb{1}_{[-1,0[\,\cup\,[1,2]}\,t + \frac{3}{4}\mathbb{1}_{[0,1]}(t) + \mathbb{1}_{[2,+\infty[}(t)$

En donne la représentation graphique de F_Z.

On donne la représentation



Exercice n° 3 :

On montre : $E(X^n) = \int_0^{\infty} n t^{n-1} P(X > t)\, dt$?

Sur l'espace mesuré $(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathcal{F} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^+), P \otimes \lambda)$

On définit $H(\cdot,\cdot) : \Omega \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$$(\omega, t) \longmapsto H(\omega, t) = n t^{n-1} \mathbb{1}_{]t, +\infty[}(X(\omega))$$

Notons que H est $\mathcal{F} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-mesurable.

Par le théorème de Fubini :

$$\int_{\Omega \times \mathbb{R}^+} H(\omega, t)\, d(P \otimes \lambda)(\omega, t) = \int_\Omega \Big[\int_{\mathbb{R}^+} H(\omega, t)\, \underbrace{d\lambda(t)}_{dt} \Big] dP(\omega) \quad (1)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^+} \Big[\int_\Omega H(\omega, t)\, dP(\omega) \Big] d\lambda(t) \quad (2)$$

$$(1) = \int_\Omega \Big[\int_{\mathbb{R}^+} n t^{n-1} \mathbb{1}_{]t, +\infty[}(X(\omega)) \Big] dP(\omega)$$

$$= \int_\Omega \Big[\int_{\mathbb{R}^+} n t^{n-1} \mathbb{1}_{[0, X(\omega)[}(t)\, dt \Big] dP(\omega) = \int_\Omega t^n \Big|_0^{X(\omega)} dP(\omega)$$

$$= \int_\Omega X^n(\omega)\, dP(\omega) = E(X^n)$$

$$(2) = \int_{\mathbb{R}^+} \Big[\int_\Omega n t^{n-1} \mathbb{1}_{]t, +\infty[}(X(\omega))\, dP(\omega) \Big] dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}^+} nt^{n-1} P(X>t)\, dt = E(X^n)$$

$$\mathbb{1}_{]t,+\infty[}(X(\omega)) = \begin{cases} 1 & \text{si } X(\omega) > t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \mathbb{1}_{[0,X(\omega)[}(t)$$

Exp:

Soit X v.a dont la loi est

$$E(\mathbb{1}_A(X)) = P(X \in A)$$

$$P_X = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1})$$

On remarque que X est a valeur ds $\{1,-1\}$

$$E(X^n) = \int_\Omega X^n\, dP = \int_{\mathbb{R}} x^n\, dP_X(x) = \int_{\mathbb{R}} x^n \frac{1}{2}(d\delta_1(x) + \delta_{-1}(x))$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{\mathbb{R}} x^n\, d\delta_1(x) + \int_{\mathbb{R}} x^n\, d\delta_{-1}(x)\right] = \frac{1}{2}\left[1 - (1)^n\right]$$

Car: $\int_{\mathbb{R}} g(x)\, d\delta_a = g(a)$. dirac

$$\int_{\mathbb{R}^+} nt^{n-1} P(X>t)\, dt \quad (*)$$

$$P(X>t) = P_X(]t,+\infty[) = \frac{1}{2}(\delta_1(]t,+\infty[) + \delta_{-1}(]t,+\infty[))$$

$$\delta_1(]t,+\infty[) = \begin{cases} 1 & \text{si } t<1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \mathbb{1}_{]-\infty,-1[}(t)$$

$$\delta_{-1}(]t,+\infty[) = \mathbb{1}_{]-\infty,-1[}(t)$$

(*):

$$\hookrightarrow = \int_{\mathbb{R}^+} nt^{n-1} \frac{1}{2}\left(\mathbb{1}_{]-\infty,1[}(t) + \mathbb{1}_{]-\infty,-1[}(t)\right) dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 nt^{n-1}\, dt = \frac{t^n}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} \neq E(X^n) = \frac{1}{2}(1-(-1)^n)$$

Exercice n°4 :

$$\boxed{E[X^n]} = \int_{\mathbb{R}^+} n\, t^{n-1} (1 - F_X(t))\, dt$$

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}^+} (1 - F_X(t))\, dt$$

$$E(X^2) = \int_{\mathbb{R}^+} 2t\, (1 - F_X(t))\, dt$$

1)

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}^+} \left(1 - t\, \mathbb{1}_{[0,1]}(t) - \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(t)\right) dt = \int_{\mathbb{R}^+} \left(\mathbb{1}_{[0,1]}(t) - t\, \mathbb{1}_{[0,1]}(t)\right) dt$$

$$= t\Big|_0^1 - \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

- $E(X^n) = \int_0^{+\infty} n\, t^{n-1} (1 - F_X(t))\, dt$
- $E(X) = \int_0^{+\infty} (1 - F_X(t))\, dt$

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} 2t\, (1 - F_X(t))\, dt$$

1) $1 - F_X(t) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(t) - t\, \mathbb{1}_{[0,1]}(t) - \mathbb{1}_{]1,+\infty[}(t)$

$$= \mathbb{1}_{]-\infty,1]}(t) - t\, \mathbb{1}_{[0,1]}(t).$$

$$E(X) = \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{]-\infty,1]}(t)\, dt - \int_0^{+\infty} t\, \mathbb{1}_{[0,1]}(t)\, dt$$

$$= \int_0^1 dt - \int_0^1 t\, dt = t\Big|_0^1 - \frac{1}{2} t^2\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Scanné avec CamScanner

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} 2t\, \mathbb{1}_{]-\infty,1]}(t)\, dt - \int_0^{+\infty} 2t^2\, \mathbb{1}_{[0,1]}(t)\, dt$$

$$= \int_0^1 2t\, dt - \int_0^1 2t^2\, dt = t^2 \Big|_0^1 - \frac{2}{3} t^3 \Big|_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

2). $F_Y(t) = (1 - e^{-\alpha t})\, \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$, $\alpha > 0$.

$$1 - F_Y(t) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(t) - \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t) + e^{-\alpha t}\, \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t).$$

$$= \overset{0}{\mathbb{1}_{]-\infty,0[}(t)} + e^{-\alpha t}\, \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$$

$$E(Y) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\, dt = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\alpha}.$$

$$\bullet\ E(Y^2) = \int_0^{+\infty} 2t\, \overset{0}{\mathbb{1}_{]-\infty,0[}(t)}\, dt + \int_0^{+\infty} 2t\, e^{-\alpha t}\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} 2t\, e^{-\alpha t}\, dt$$

(intégration par Partie).

$$= -\frac{2t}{\alpha} e^{-\alpha t} \Big|_0^{+\infty} + \frac{2}{\alpha} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\, dt$$

$$= \frac{2}{\alpha} \left(-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} \Big|_0^{+\infty} \right) = \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{2}{\alpha^2}$$

$$\mathrm{Var}(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{2}{\alpha^2} - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 = \frac{2}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{\alpha^2}$$

③ $$F_Z = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\alpha} \frac{\alpha^n}{n!} \mathbb{1}_{[n,+\infty[}(t).$$

$$1 - F_Z = e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(t) - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha} \frac{\alpha^n}{n!} \mathbb{1}_{[n,+\infty[}(t)$$

$$= e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \left[\mathbb{1}_{\mathbb{R}}(t) - \mathbb{1}_{[n,+\infty[}(t) \right].$$

$$= e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \cdot \mathbb{1}_{]-\infty,n[}(t).$$

$$E(Z) = e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{]-\infty,n[}(t)\, dt$$

$$= e^{-\alpha} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{(n-1)!} = e^{-\alpha} \cdot \alpha \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!}}_{e^{\alpha}} = \cancel{e^{-\alpha}} \cdot \alpha \cdot \cancel{e^{\alpha}}$$

$$E(Z) = \alpha.$$

$$E(Z^2) = \int_0^{+\infty} 2t\, e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \cdot \mathbb{1}_{]-\infty,n[}(t)\, dt$$

$$= e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \int_0^n 2t\, dt$$

$$= e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \cdot t^2 \Big|_0^n = e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \cdot n^2.$$

$$= e^{-\alpha} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{(n-1)!} (n-1+1)$$

$$= e^{-\alpha} \left[\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{(n-1)!} \right]$$

$$= e^{-\alpha} \left[\alpha^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha^{n-2}}{(n-2)!} + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!} \right]$$

$$= e^{-\alpha} (\alpha^2 e^{\alpha} + \alpha e^{\alpha}) = \alpha^2 + \alpha$$

$Var(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = \alpha^2 + \alpha - \alpha^2 = \alpha$ loi poisson

<u>Exercice n°8</u> :

(X_1, X_2) abs continue alors $dP_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2)$
$= f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2)\, d\lambda^{(2)}(x_1,x_2) = f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2)\, dx_1 \, dx_2$

Montrer $dP_{X_1}(x_1) = f_{X_1}(x_1)\, dx_1$.

Soit $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ intégrable.

$$E[h(X_1)] = \int_{\mathbb{R}^2} h(x_1)\, \underbrace{dP_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2)}\, ;\, d\lambda^{(2)}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} h(x_1) f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2)\, dx_1\, dx_2 \quad (*)$$

$$⊛ = \int_{\mathbb{R}} h(x_1) \left[\int_{\mathbb{R}} f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2)\, dx_2 \right] dx_1$$

$$= \int_{\mathbb{R}} h(x_1) \underbrace{f_{X_1}(x_1)\, dx_1}, = \int_{\mathbb{R}} h(x_1)\, \underbrace{dP_{X_1}(x_1)}$$

$$f_{X_1}(x_1)\, dx_1 = dP_{X_1}(x_1)$$

$$f(x_1,x_2) = e^{-x_1}\, \mathbb{1}_{\{x_1 \geq x_2 \geq 0\}}(x_1,x_2)$$

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{\mathbb{R}} f(x_1,x_2)\, dx_2 = \int_{\mathbb{R}} e^{-x_1}\, \mathbb{1}_{\{x_1 \geq x_2 \geq 0\}}(x_1,x_2)$$

$$= e^{-x_1} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,x_1]}(x_2)\, dx_2\; \mathbb{1}_{[0,+\infty[}\, dx_1.$$

$$= x_1\, e^{-x_1} \cdot \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x_1).$$

$$f_{X_2}(x_2) = \int_{\mathbb{R}} f(x_1,x_2)\, dx_1 = \int_{\mathbb{R}} e^{-x_1} \cdot \mathbb{1}_{\{x_1 \geq x_2 \geq 0\}}(x_1,x_2)\, dx_1.$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-x_1}\, \mathbb{1}_{[x_2,+\infty[}(x_1)\, dx_1\; \mathbb{1}_{[x_2,+\infty[}(x_2)$$

$$= \int_{x_2}^{+\infty} e^{-x_1}\, dx_1\; \mathbb{1}_{[x_1,+\infty[}(x_2) = -e^{-x_1} \Big|_{x_2}^{+\infty} \cdot \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x_2)$$

$$= e^{-x_2} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x_2)$$

$f(x_1,x_2) \neq f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2)$ alors n'est pas indép

Exercice n° 9 :

$$f(x,y) = \alpha(1-x^2)\, \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\, y e^{-3y}\, \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(y)$$

1) La valeur de α :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) = 1.$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left(\int_0^{+\infty} \alpha(1+x^2) \cdot y \cdot e^{-3y}\, dy \right) dx = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \alpha(1+x^2) \left(\int_0^{+\infty} y e^{-3y}\, dy \right) dx = 1$$

$$u = y \longrightarrow u' = 1$$

$$v' = e^{-3y} \longrightarrow v = -\frac{1}{3} e^{-3y}.$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \alpha(1-x^2) \left(-\frac{1}{9} e^{-3y} \Big|_0^{+\infty} \right) dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9} \alpha \int_0^1 1 - x^2\, dx = 1 \Rightarrow \frac{1}{9} \alpha \left(x - \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 \right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9} \alpha \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{27}{2}$$

Scanné avec CamScanner

$$f(x,y) = \frac{27}{2}(1-x^2)\,\mathbb{1}_{[0,1]}(x)\, y e^{-3y}\,\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(y)$$

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy$$

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx$$

$$P(0 < X \leq 2, Y \geq 1) = \frac{27}{2}\int_0^2 (1+x^2)\,\mathbb{1}_{[0,1[}(x)\,dx$$

$$\cdot \int_1^{+\infty} y e^{-3y}\,dy$$

$$= \frac{27}{2}\int_0^1 (1-x^2)\,dx \int_0^{+\infty} y e^{-3y}\,dy$$

$$\frac{27}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{3} \times \frac{1}{9} = \frac{9}{9} = \boxed{1}$$

P

TD N°: 2 :

Exercice n°1 :

$$P_X = p\,\delta_1 + q\,\delta_2 \qquad p \in]0,1[\;,\; q = 1-p$$

$$P_Y = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\alpha} \frac{\alpha^k}{k!} \delta_k . \qquad \alpha > 0$$

$\omega \in \Omega$.

① $Z(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } X(\omega) = 0 \\ Y(\omega) & \text{si } X(\omega) = 1 . \end{cases}$

Soit $Z' = XY$ est une v.a.r

$$P(Z = Z') = P(Z \neq XY) = P(\{Z \neq 0\} \text{ et } \{Z \neq Y\})$$

$$= P(X \neq 0 \text{ et } (X \neq 1)) = 0$$

($x \neq 0$ et $x \neq 1$ محال) Bernoulli

$$P(Z = Z') = P(Z = XY) = P\{Z = 0\} \text{ ou } P\{Z = Y\}$$

$$= P(\{X = 0\} \text{ ou } \{X = 1\}) = 1$$

$$P_{XY} = P_X \otimes P_Y \quad (X \perp\!\!\!\perp Y)$$

② Determiner la loi de Z :

$$E(Z) = E(h(XY)) = \int_{\Omega} h(XY)\, dP_{(X,Y)}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} h(x,y)\, dP_{(X,Y)}(x,y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} h(xy)\, dP_X(x)\, dP_X(y) = \int_{\mathbb{R}} \Big[\int_{\mathbb{R}} h(xy)\, dP_X(x) \Big] dP_Y(y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(p \int_{\mathbb{R}} h(x,y)\, d\delta_1(x) + q \int_{\mathbb{R}} h(x,y)\, d\delta_0(x) \right] dP_Y(y)$$

$$= p \int_{\mathbb{R}} h(y)\, dP_Y(y) + q\, h(0) \int_{\mathbb{R}} dP_Y(y)$$

$$h(k) = \int_{\mathbb{R}} h(z)\, d\delta_k(z)$$

$$= p e^{-\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \int_{\mathbb{R}} h(y)\, d\delta_k(y) + q\, h(0) \underbrace{e^{-\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha^k}{k!}}_{=1} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \boxed{\;} d\delta_k(y)}_{h(0)}$$

$$= p e^{-\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \cancel{[} h(k) + q\, h(0) \cancel{]}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} h(z) \left(p e^{-\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha^k}{k!} d\delta_k + q\, d\delta_0(z) \right)$$

$$E(h(Z)) = \int_{\Omega} h(Z)\, dP = \int_{\mathbb{R}} h(z)\, dP_Z(z)$$

$$P_Z(\cdot) = p e^{-\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \delta_k(\cdot) + q\, \delta_0(\cdot) = p\, \delta_Y(\cdot) + q\, \delta_0(\cdot)$$

$$E(Z) = \int_{\Omega} Z\, dP = \int_{\mathbb{R}} z\, dP_Z(z)$$

$$= p e^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \int_{\mathbb{R}} z\, d\delta_k(z) + q \int_{\mathbb{R}} z\, d\delta_0(z)$$

$$= p e^{-\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \cdot k + q \times 0$$

$$= pe^{-\alpha}\alpha \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha^{k-1}}{(k-1)!} = p\alpha.$$

$E(Z) = E(XY) = E(X)E(Y) = p\alpha.$

$Var(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2.$

$$E(Z^2) = \int_\Omega Z^2\, dP = \int_{\mathbb{R}} z^2\, dP_Z(z) = pe^{-\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \int_{\mathbb{R}} z^2\, d\delta_k(z)$$

$$+ q\int_{\mathbb{R}} z^2\, d\delta_0(z) = pe^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} k^2.$$

$$= pe^{-\alpha}\left(\alpha^2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\alpha^{(k-2)}}{(k-2)!} + \alpha \sum \frac{\alpha^{k-1}}{(k-1)!} \right)$$

$$= pe^{-\alpha}(\alpha^2 e^{\alpha} + \alpha e^{\alpha}) = p(\alpha^2 + \alpha)$$

$$E(Z) = p(\alpha^2+\alpha) - p^2\alpha^2 = p\alpha^2 - p^2\alpha^2 + p\alpha = p\alpha(\alpha + p\alpha + 1)$$

Exercice n° 2 :

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ espace probabilisé

$\mu_{(x,y)} = \alpha(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\mu_1 = ?$ $f(x,y) = \frac{1}{x^2} e^{-y} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x) \cdot \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(y).$

$d\mu_1(x,y) = f(x,y)\, d\lambda^{(2)}(x,y)$

$d\mu_2(x,y) = dP_X(x) \otimes d\delta_0(y)$ $\qquad X \sim U[0,1].$

c.à.d. $dP_X(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\, d\lambda(x).$

$d\mu_3(x,y) = \delta\delta_{(1,1)}(x,y) + d\delta_{(1,2)}(x,y)$

$$\mu_1(\mathbb{R}^2) = \int_{\mathbb{R}^2} d\mu_1(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \boxed{1}$$

$$\mu_2(\mathbb{R}^2) = \int_{\mathbb{R}^2} d\mu_2(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\,dx \cdot \int_{\mathbb{R}} d\delta_0(y) = 1$$

$$\mu_3(\mathbb{R}^2) = \int_{\mathbb{R}^2} d\mu_3(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} d\delta_{(1,1)}(x,y) + \int_{\mathbb{R}} d\delta_{(-1,2)}\,d(x,y)$$

$$= 1 + 1 = \boxed{2}$$

$$\int_{\mathbb{R}} P_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$$

$$P_X(\mathbb{R}) = 1$$

$P_{(X,Y)}$ est une loi de proba $\Leftrightarrow P_{(X,Y)}(\mathbb{R}^2) = 1$

alors $\mu_1(\mathbb{R}^2) + \mu_2(\mathbb{R}^2) + \mu_3(\mathbb{R}^2) = 1$

$\Rightarrow \alpha(1+1+2) = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{4}$

$$dP_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{x^2}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)\, e^{-y}\, \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(y)\, d\lambda^2(x,y)$$

$$+ \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\, d\lambda(x)\, d\delta_0(y) + d\delta_{(1,1)}(x,y) + d\delta_{(-1,2)}(x,y)\Big)$$

② Déterminer les lois des v.a.r X et Y :

$$d\mathbb{P}_X(x) = \int_{\mathbb{R}} d\mathbb{P}_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{4}\Big[\frac{1}{x^2} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-y} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(y)}$$

$$+ \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\, d\lambda(x)\, d\delta_0(y) = 1 + \int_{\mathbb{R}} d\delta_{(1,1)}(x,y) + \overset{=1}{\int_{\mathbb{R}}} d\delta_{(-1,2)}(x,y)$$

$$= \frac{1}{4}\Big(\Big[\frac{1}{x^2} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x) + \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x) \Big] d\lambda(x) + d\delta_1(x) + d\delta_{-1}(x) \Big)$$

cas discret

$$\int_{\mathbb{R}\times A} d\delta(x,y) = \delta_{(1,1)}(\mathbb{R}\times A) = \begin{cases} 1 & \text{si } (1,1)\in \mathbb{R}\times A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

loi de Y :

$$d\mathbb{P}_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} d\mathbb{P}_{(X,Y)}(x,y)$$

$$= \frac{1}{4}\Big[e^{-y} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(y)\, d\lambda(y) \cdot \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)\, d\lambda(x)$$

$$+ d\delta_0(y) \cdot \Big[\underbrace{\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\, d\lambda(x)}_{=1} + \overset{=1}{\int_{\mathbb{R}}} d\delta_{(1,1)}(x,y) + \int_{\mathbb{R}} d\delta_{(-1,2)}(x,y) \Big]$$

$$= \frac{1}{4}\Big(e^{-y} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(y)\, d\lambda(y) + d\delta_0(y) + d\delta_1(y) + d\delta_2(y) \Big)$$

$$d\delta_a(x) = \delta_a(dx)$$

$$\int_{A\times\mathbb{R}} d\delta_{(a,b)}(x,y) = d\delta_{(a,b)}(A\times\mathbb{R}) = d\delta_a(A) = \int_A d\delta_a(x)$$

Exercice n°3 : Posons $\Omega = \mathbb{R}^n$.

$F = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ et $P = \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \dots \otimes \mu_n$

Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ une v.a.r à valeur dans $\mathbb{R}^n$

tq : $\forall k = \overline{1.n}$, $X_k : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\omega \longmapsto X_k(\omega) = \omega_k.$$

$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \longmapsto X_k(\omega_1, \dots, \omega_n) = \omega_k.$

$X(\omega) = (X_1(\omega_1, \dots, \omega_n), \dots, X_i(\omega_1, \dots, \omega_n))$

$= (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$

$X(\omega) = \omega$ l'application identique.

$\mu_k = P_{X_k}$?

$k \in A$

$P(\{\omega : X_k(\omega) \in A\}) = P(\{X_k \in A\}) = P(X \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \dots \times A$

A de rang k. $(P(X_k \in A)) = P(X_1 \in \mathbb{R}, \dots, X_k \in A, \dots X_n \in \mathbb{R})^{\mathbb{R}^n}$

$$P(X_k \in A) = \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \dots \otimes \mu_n (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times A \times \dots \times \mathbb{R})$$

$$= P_{X_k}(A) = \underbrace{\mu_1(\mathbb{R})}_{=1} \otimes \underbrace{\mu_2(\mathbb{R})}_{=1} \times \dots \mu_k(A) \dots \otimes \underbrace{\mu_n(\mathbb{R})}_{=1}$$

$$= \mu_k(A).$$

$$P_{X_k}(A) = \mu_k(A).$$

Scanné avec CamScanner

L'indépendance :

$P_{(X_1,\dots,X_n)} = P_{X_1} \otimes P_{X_2} \otimes \dots \otimes P_{X_n}$?

$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ $\quad A = A_1,\dots,A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
P_{(X_1,\dots,X_n)}(A) &= P(\omega : (X_1(\omega),\dots,X_n(\omega)) \in A \\
&= \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n (\omega : (\omega_1,\dots,\omega_n) \in A) \\
&= \mu_1(\omega_1 \in A_1) \otimes \mu_2(\omega_2 \in A_2) \otimes \dots \otimes \mu_n(\omega_n \in A_n) \\
&= \mu_1(X_1 \in A_1) \otimes \dots \otimes \mu_n(X_n \in A_n) \\
&= P(\omega_1 \in A_1) \otimes \dots \otimes P(\omega_n \in A_n) \\
&= P_{X_1}(A_1) \otimes \dots \otimes P_{X_n}(A_n)
\end{aligned}$$

Exercice n° 4 : (contrôle (2014-2015) Ex01

$X \sim \mathcal{U}[0,1]$

$Y \sim \mathcal{E}(1)$.

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(t)\, f_Y(z-t)\, dt \quad (*).$$

$$f_X(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x), \quad f_Y(y) = e^{-y}\, \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(y).$$

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \cdot e^{-(z-t)}\, \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(z-t)\, dt.$$

$z - t \geq 0 \Rightarrow z \geq t \Rightarrow t \in [0, z]$. $\quad z = Y + X$

$$\cancel{(*) = e^{-z}\left[\int_{\mathbb{R}} e^{t}\, \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(z) + \int_0^z \right.}$$

$$(*) = e^{-z}\left[\int_{\mathbb{R}} e^t \mathbb{1}_{[0,1]\cap[0,z]}(t)\,dt\right]\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(z)$$

$$= e^{-z}\left(\int_0^1 e^t\,\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(z) + \int_0^z e^t\,\mathbb{1}_{[0,1]}(z)\right)$$

$$= e^{-z}\left((e-1)\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(z) + (e^z-1)\mathbb{1}_{[0,1]}(z)\right)$$

Exercice n° 5 :

$X \sim Bin(n,p)$, X à valeur ds $\{0,\dots,n\}$

$Y \sim Bin(m,p)$, Y à valeur ds $\{0,\dots,m\}$.

$Z = X+Y$ à valeur $\{0,1,\dots,n+m\}$.

1) $P_Z(\cdot) = \sum_{k=0}^{n+m} P(Z=k)\,\delta_k(\cdot)$

$$P(Z=k) = P(X+Y=k) = P\left(\{X+Y=k\}\bigcup_{i=0}^{k}\{Y=i\}\right)$$

$$= P(X=0, Y=k) + P(X=1, Y=k-1) + P(X=2, Y=k-2)\dots$$

$$= \sum_{i=0}^{k} P(X=i, Y=k-i) = \sum_{i=0}^{k} P(X=i)P(Y=k-i)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} C_n^i\, p^i . q^{n-i} . C_m^{k-i}\, p^{k-i} . q^{m-k+i}$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{k} C_n^i C_m^{k-i}\right) p^k . q^{n+m-k}.$$

$$= C_{n+m}^{k} p^k . q^{n+m-k}$$

Alors $Z \sim Bin(n+m, p)$

② $P_X(\cdot / X+Y=k) = \sum_{i=0}^{n} P(X=i / X+Y=k)\, \delta_i(\cdot)$

$$P(X=i / X+Y=k) = \frac{P((X=i) \cap (X+Y=k))}{P(X+Y=k)}$$

$$= \frac{P(X=i\,;\, Y=k-i)}{P(X+Y=k)}$$

$$= \frac{P(X=i).P(Y=k-i)}{P(X+Y=k)} = \frac{C_n^i p^i . q^{n-i} C_m^{k-i} p^{k-i} . q^{m-k+i}}{C_{m+n}^{k} p^k q^{n+m-k}}$$

$$= \frac{C_n^i C_m^{k-i}}{C_{n+m}^{k}}$$ (loi hypergeométrie)

$$P_X(\cdot / X+Y=k) = \sum_{i=0}^{n} \frac{C_n^i C_m^{k-i}}{C_{n+m}^{k}} \delta_i(\cdot)$$

Exercice n° 6 :

Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ intégrable

$E(h(Z)) = E(h(X+Y))$

$$E(h(Z)) = \int_{\Omega} h(Z)\, dP$$

$$= \int_{\mathbb{R}} h(z)\, dP_Z(z)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} h(z) \cdot f_Z(z)\, dz$$

$$\int_{\Omega} h(X+Y)\, dP = \int_{\mathbb{R}^2} h(x,y)\, dP_{(X,Y)}(x,y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} h(x+y)\, dP_Y(y) \right) dP_X(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} h(x+y) \sum P(Y=y_n)\, d\delta_{y_n}(y) \right) f_X(x)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \sum_{n \in \mathbb{N}} P(Y=y) h(x+y_n) f_X(x)\, dx.$$

Posons :

$$z = x + y_n \Rightarrow x = z - y_n \Rightarrow dx = dz.$$

$$= \int_{\mathbb{R}} h(z) \sum_{n \in I} \underbrace{\boxed{P(Y=y_n) f_X(z-y_n)\, dz}}_{f_Z(z)}.$$

$$= \int_{\mathbb{R}} h(z) \sum_{n \in I} P(Y=y_n) f_X(z-y_n)\, dz.$$

$$\Rightarrow f_Z(z) = \sum_{n \in I} P(Y=y_n) f_X(z-y_n)$$

alors Z est abs continue

$$\int_{\mathbb{R}} f_Z(z)\,dz = 1 \,??$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \sum P(Y = y_n) f_Z(z_n - y)$$
$$= \underbrace{\sum P(Y = y_n)}_{=1} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx}_{=1}$$
$$= 1 \times 1 = 1$$

Exercice n°7 :

X un v a à valeur $\mathbb{R}^d$

$\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow [0, +\infty[$ (app borélienne)

On montre que : $a > 0$: $P(\varphi(x) \geq a) \leq \frac{1}{a} E(\varphi(x))$

$\cdot\, E(\varphi(x)) = E(\varphi(x) \mathbb{1}_{\{\varphi(x) \geq a\}}) + E(\varphi(x) \mathbb{1}_{\{\varphi(x) < a\}})$

$\Rightarrow E(\varphi(x)) \geq E(\varphi(x) \mathbb{1}_{\{\varphi(x) \geq a\}}) \geq E(a \mathbb{1}_{\{\varphi(x) \geq a\}})$

$E(\varphi(x)) \geq a \cdot P(\varphi(x) \geq a)$, $P(A) = E(\mathbb{1}_A)$

$\Rightarrow$

$$P(\varphi(x) \geq a) \leq \frac{1}{a} E(\varphi(X)).$$

Exercice n° 08 :

$a = E(a-X)$ car X centré

$$= E\left[(a-X)\mathbb{1}_{\{a-X\geq a\}}\right] + E\left[\underbrace{(a-X)\mathbb{1}_{\{a-X<0\}}}_{<0}\right]$$

$$\leq E\left[(a-X)\mathbb{1}_{\{X\leq a\}}\right]$$

$$\leq \left(E(a-x)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(E\left(\mathbb{1}_{\{X\leq a\}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

d'après l'inégalité de Cauchy Schwartz :

$$E(f.g) \leq \left(E(f^2)\right)^{\frac{1}{2}} . \left(E(g^2)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (a^2+\sigma^2)^{\frac{1}{2}} . \left(P(X\leq a)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$E\left((X-a)^2\right) = \underbrace{E(X^2)}_{var(X)} - 2a\underbrace{E(X)}_{=0} + a^2 = \sigma^2 + a^2.$$

car X centré

Alors : $a \leq E\left((a-X)\mathbb{1}_{\{X\leq a\}}\right) \leq \left(P(X\leq a)\right)^{\frac{1}{2}}(\sigma^2+a^2)^{\frac{1}{2}}$

Alors : $a^2 \leq (a^2+\sigma^2)P(X\leq a)$ $\varphi(u) = a$

$$P(X\leq a) \geq \frac{a^2}{a^2+\sigma^2}$$

$$1 - P(X>a) \geq \frac{a^2}{a^2+\sigma^2}$$

$$P(X>a) \leq 1 - \frac{a^2}{a^2+\sigma^2} = \frac{a^2+\sigma^2-a^2}{a^2+\sigma^2}$$

$X \sim B(p)$: $P_X = p\delta_1 + q\delta_0$

$$P(X \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2+\sigma^2}$$

② Y v.a $\quad E(Y) = 100$, $Var(Y) = 400$

$$Var(X) = \sum (X_i - E(X))^2 = \sum_{i \geq n} (x_i - 100)^2$$

$$P(X \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2+a^2}$$

Posons : $X = Y - E(Y) = Y - 100$

$$P(Y \geq 120) = P(Y - E(Y) \geq 120 - 100) = P(X \geq 20) \leq \frac{400}{20^2+400} = \frac{400}{800} = \frac{1}{2}$$

$Var(X) = Var(Y)$

Inégalité de Tchebychef.

$\forall \varepsilon > 0$, $P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$

$\Rightarrow P(|Y - 100| \geq 20) \leq \frac{400}{20^2} = 1$

$P(|Y - 100| \geq 20) \leq 1$

$0{,}99 \leq \boxed{1}$

Exp.

Soient X et Y 2 v.a indépendantes de Bernoulli de paramètre p.

Calculer $P(Z = k / Y)$ tq $Z = X + Y$ à valeurs ds $\{0, 1, 2\}$

$$P(Z = k / Y) = P(Z = k / Y = 0)\, \mathbb{1}_{\{Y=0\}}(\omega) + P(Z = k / Y = 1)\, \mathbb{1}_{\{Y=1\}}(\omega)$$

- $P(Z = k / Y = 0) = \frac{P(Z = k, Y = 0)}{P(Y = 0)} = \frac{P(X = k) P(Y = 0)}{P(Y = 0)}$

$= P(X = k)$

EXO 7:

$$X \sim P(\alpha) : \quad P(X=n) = e^{-\alpha}\frac{\alpha^n}{n!}$$

$$P(Y=i / X=n) = C_n^i \, p^i q^{n-i}$$

Quelle est la loi de Y ?

$$P(Y=j) = P(\{Y=j\} \cap \Omega)$$

$$= P(\{Y=j\} \cap (\cup \{X=n\}))$$

$$= \cup P(\{Y=j\} \cap \{X=n\})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(\{Y=j\} \cap \{X=n\})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(Y=j / X=n) \times P(X=n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_n^j \, p^j q^{n-j} e^{-\alpha}\frac{\alpha^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cancel{n!}}{j!(n-j)!} p^j q^{n-j} . e^{-\alpha}\frac{\alpha^n}{\cancel{n!}}$$

$$= \frac{p^j \; q^{-j}}{j! \; (n-j)!} \sum q^n e^{-\alpha} \alpha^n$$

$$\frac{1}{j!}\left(\frac{p}{q}\right)^j \sum q^n . \frac{e^{-\alpha}\alpha^n}{(n-j)!}$$

$$\cancel{\frac{1}{j!}\left(\frac{p}{q}\right)^j \sum q^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{(n-j)!}}$$

$$\cancel{\frac{1}{j!}\left(\frac{p}{q}\right)^j e^{-\lambda} \sum q^n \frac{\lambda^n}{(n-j)!}}$$

$$\frac{1}{j!}\left(\frac{p}{q}\right)^j \sum (q\lambda)^n \frac{e^{-\lambda}}{(n-j)!}$$

$$\frac{1}{j!}\left(\frac{p}{q}\right)^j e^{-\lambda} \sum \frac{(q\lambda)^{n-j}}{(n-j)!}$$

$$\frac{1}{j!}\left(\frac{p}{q}\right)^j e^{-\lambda} (q\lambda)^j \underbrace{\sum \frac{(q\lambda)^{n-j}}{(n-j)!}}_{e^{q\lambda}}$$

$$\frac{1}{j!}\left(\frac{p}{q}\right)^j e^{-\lambda} (q\lambda)^j e^{q\lambda}$$

$$= \left(\frac{q\lambda p}{q}\right)^j \frac{1}{j!} e^{-\lambda\overbrace{(1-q)}^{p}}$$

$$\frac{(\lambda p)^j}{j!} e^{-\lambda p} \sim P(\lambda p)$$

Exo7 : $X \sim P(\lambda)$. $P(X=k)\ e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

$P(Y=i / X=n) = C_n^i\, p^i q^{n-i}$

Déterminer la loi de Y ?

On a : $P(Y=j) = P(\{Y=j\} \cap \Omega)$

$= P\left(\{Y=j\} \cap \bigcup_{n=0}^{\infty} \{X=n\}\right)$

$= \sum_{n=0}^{\infty} P(\{Y=j\} \cap \{X=n\})$

$= \sum_{n=0}^{\infty} P(\{Y=j / X=n\} \times P(X=n)$

$= \sum_{n=0}^{\infty} C_n^j\, p^j q^{n-j}\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} C_n^j\, p^j q^n \cdot q^{-j} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$

$= p^j q^{-j} \sum \frac{\cancel{n!}}{j!(n-j)!} \cdot q^n \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{\cancel{n!}}$

$= e^{-\lambda} \frac{1}{j!} \left(\frac{p}{q}\right)^j \sum q^n \cdot \cancel{e^{-\lambda}} \frac{\lambda^n}{\cancel{j!}(n-j)!}$

$= \frac{e^{-\lambda}}{j!} \left(\frac{p}{q}\right)^j \sum q^n \frac{\lambda^{n-j+j}}{(n-j)!} = \frac{e^{-\lambda}}{j!} \sum \frac{(q\lambda)^{n-j+j}}{(n-j)!}$

$\cancel{e^{-\lambda} \lambda^j \left(\frac{p}{q}\right)^j} = \frac{e^{-\lambda}}{j!} \left(\frac{p}{q}\right)^j (q\lambda)^j \sum \frac{(q\lambda)^{n-j}}{(n-j)!}$

Scanné avec CamScanner

Exo6 :

$$X \sim \mathcal{U}_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$$

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x\, f_X(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} x \ \mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}\, dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\, dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2}$$

$$\boxed{E(X) = 0}$$

$$E(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 \ \mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}\, dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{3}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{\pi^3}{2}\right) = \frac{\cancel{2}\pi^3}{12 \times \cancel{2}} = \boxed{\frac{\pi^3}{12}}$$

Scanné avec CamScanner

$$Var(x) = E(x^2) - \overset{0}{\cancel{E(x)^2}} = \frac{\pi^3}{12}$$

$$g_Y(y) = ? \qquad Y = X^2$$

$$P_Y(t) = P(Y \leq t) = P(X^2 \leq t)$$
$$= P(-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t})$$
$$= F_X(\sqrt{t}) - F_X(-\sqrt{t})$$

On a $F_X(t) = \frac{t-a}{b-a} = \frac{t - \frac{\pi}{2}}{\pi}$

$$P_Y(t) = \frac{\sqrt{t} - \frac{\pi}{2}}{\pi} - \left[\frac{-\sqrt{t} - \frac{\pi}{2}}{\pi}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{t} - \cancel{\frac{\pi}{2}} + \sqrt{t} + \cancel{\frac{\pi}{2}}}{\pi} = \frac{2\sqrt{t}}{\pi}$$

$$\boxed{P_Y(t) = \frac{2\sqrt{t}}{\pi}}$$

$$f_Y(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} \, \mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(\sqrt{t}) + \frac{1}{\pi} \frac{1}{2\sqrt{t}} \, \mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(-\sqrt{t})$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \sqrt{t} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi^2}{4} \leq t \leq \frac{\pi^2}{4}$$

$$\boxed{t \leq \frac{\pi^2}{4}}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq -\sqrt{t} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \sqrt{t} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{t \leq \frac{\pi^2}{4}}$$

$$f_Y(t) = \frac{1}{\pi 2\sqrt{t}} \, \mathbb{1}_{]0, \frac{\pi^2}{4}[}(t) + \frac{1}{\pi 2\sqrt{t}} \, \mathbb{1}_{[0, \frac{\pi^2}{4}]}(t)$$

$$f_Y(t) = \frac{1}{\pi\sqrt{t}} \, \mathbb{1}_{[0, \frac{\pi^2}{4}]}(t)$$

$P_Y(y) = ?$

$$F_Y(t) = \cancel{P_Y(y)} = P(Y \leq t) = P(X^2 \leq t)$$
$$= P(-\sqrt{t} \leq x^2 \leq \sqrt{t})$$
$$= F_X(\sqrt{t}) - F_X(-\sqrt{t})$$

<u>On a</u> :

$$f_Y(t) = \frac{dF_Y(t)}{dt} = \frac{dF_X(\sqrt{t})}{dt} f_X(\sqrt{t})$$
$$- \frac{dF_X(-\sqrt{t})}{dt} f_X(-\sqrt{t})$$
$$= \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right) \frac{1}{\pi} \mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(\sqrt{t})$$
$$+ \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right) \frac{1}{\pi} \mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(-\sqrt{t})$$

On a : $-\frac{\pi}{2} \leq \sqrt{t} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow t \leq \frac{\pi^2}{4}$

$-\frac{\pi}{2} \leq -\sqrt{t} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow t \leq \frac{\pi^2}{4}$

$$f_Y(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{\pi} \mathbb{1}_{[0, \frac{\pi^2}{4}]}(t) + \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{\pi} \mathbb{1}_{[0, \frac{\pi^2}{4}]}(t)$$

$$\boxed{f_Y(t) = \frac{1}{\pi\sqrt{t}} \mathbb{1}_{[0, \frac{\pi^2}{4}]}(t)}$$

$Z = tg\, x$

$P_Z = ?$

$F_Z(t) = P(Z \leq t) = P(tg\, x \leq t)$

$= P(\cancel{arctg(tg\, x)} \leq arct\ t)$

$(arctg\ t)' = \frac{1}{t^2+1}$ $\quad = P(x \leq arctg\ t)$

$= F_X(artg\ t)$

$f_Z(t) = \frac{dF_X(t)}{dt} = \frac{dF_X(arctg\ t)}{dt}\ f_X(x)$

$= \frac{1}{t^2+1} \left(\frac{1}{\pi}\right) \mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(arctg(t))$

$-\frac{\pi}{2} \leq arctg(t) \leq \frac{\pi}{2}$

$\mathbb{1}_{[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(arctg(t)) = \begin{cases} 1 & -\frac{\pi}{2} \leq arctg(t) \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$= \begin{cases} 1 & t \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(t)$

Exo 7: $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ $\quad X_n \to X$, $X \to \mathcal{P}(\alpha)$

$\lim P(X_n = k) = P(X = p_n)$

$\lim C_n^k p_n^k q_n^{n-k} = \lim \left(\frac{n!}{k!(n-k)!} p_n^k q_n^{n-k} \right)$

$$C_n^k \to \frac{n^k}{k!}$$

$$(1-p_n)^{n-k} \sim e^{n(-p_n)} \sim e^{-\alpha}$$

$$C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} \sim \left(\frac{n p_n}{k!}\right)^k e^{-n p_n}$$

$n \to \infty \Rightarrow \lim P(X_n = k) = \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}$

Exo 8: $X_n \xrightarrow{loi} X \Leftrightarrow \forall \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée

$E[\varphi(X_n)] \to E[\varphi(X)]$

f continue $X_n \xrightarrow{loi} X$

$f(X_n) \xrightarrow{loi} f(X)$?

$\forall \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ conti bornée

$E[\varphi(f(X_n))] \longrightarrow E[\varphi(f(X))]$

$E[\varphi \circ f(X_n)] \xrightarrow[n \to \infty]{} E[\varphi \circ f(X)]$

car f continue φ conti bornée alors $f \circ \varphi$ est conti bornée et comme $X_n \xrightarrow{loi} X$ alors $(*)$ est vérifiée

<u>Exo 9</u> $X_n \xrightarrow{\text{loi}} X \iff P_{X_n} \xrightarrow{\ell} \delta_a$

$\iff \forall \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cont borné

$E[\varphi(X_n)] \longrightarrow E[\varphi(a)] = \varphi(a)$

$X_n \xrightarrow{P} a$ (en proba) : $\forall \varepsilon > 0 : P(|X_n - a| \geq \varepsilon) \overset{?}{\to} 0$

Considérons :

$$f_\varepsilon(x) = \mathbb{1}_{]a-\varepsilon, a+\varepsilon[} + \frac{1}{\varepsilon}|x-a| \mathbb{1}$$

une fct continue borné

$E[f_\varepsilon(x)] \to E[f_\varepsilon(a)] = f_\varepsilon(a) = 0$

$$P(|X_n - a| \geq \varepsilon) = P(X_n \in]-a+\varepsilon, a+\varepsilon[^c)$$
$$= E[\mathbb{1}_{]a-\varepsilon, a+\varepsilon[^c}(X_n)]$$
$$\leq E[f_\varepsilon(X_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(2) si $X \sim C(1)$ alors sa fct caractéristique est $\phi_X(t) = E[e^{itX}] = e^{-|t|}$

$\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ CV en loi

$$\phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = E[e^{i\frac{t}{\sqrt{n}} S_n}] = E[e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}(X_1 + \dots X_n)}]$$
$$= E[e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}X_1}] E[e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}X_2}] \dots$$

(X_i) sont indep

$$\dots E[e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}X_n}]$$
$$= \phi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \phi_{X_2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \dots \phi_{X_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$$

Scanné avec CamScanner

Ex 10 :

$$X_n \xrightarrow{loi} X \qquad P_{X_n} = \delta_{x_n},\ P_X = \delta_x$$

$$\Leftrightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X$$

Supposons que $X_n \xrightarrow{loi} X$

$\forall f$ conti- borné $E[f(X_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} E[f(X)]$

$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad$$

$$f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$$

considérons $f_\varepsilon(t) = (x-\varepsilon)\,\mathbb{1}_{]-\infty, x-\varepsilon]}(t) + t\,\mathbb{1}_{[x-\varepsilon, x+\varepsilon]}(t) + (x+\varepsilon)\,\mathbb{1}_{]x+\varepsilon, +\infty[}(t)$

$f_\varepsilon(x_n) \to f_\varepsilon(x) = x$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N \Rightarrow |f_\varepsilon(x_n)| < \varepsilon$

donc $\varepsilon + x \leq f_\varepsilon(x_n) \leq \varepsilon + x$

$$f_\varepsilon(x_n) = x_n$$

donc $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X$