MASTER MSS 1 Semestre 2

STATISTIQUE DES PROCESSUS

Conditionnement Dans Le Modèle Gaussien
Rappels de cours et exercices corrigés

RAHMOUNE AHMED

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université M'hamed Bougara-Boumerdes-

UMBB

Mars 2022

Rappels de cours

Soit Z_n=$\begin{pmatrix} X_{n_X} \\ Y_{n_Y} \end{pmatrix}$ où $n = n_X + n_Y$ un vecteur **Gaussien sur** $\mathbb{R}^n$.

Z_n est subdivisé en 2vecteurs où X_{n_X} jouant le rôle d'une variable explicative et Y_{n_Y} prenant le rôle d'une variable à expliquée

Ainsi **L'espace** $\mathbb{R}^n$ est considéré comme produit cartésien de deux espaces $\mathbb{R}^{n_X}$ et $\mathbb{R}^{n_Y}$.

On a: $Z_n = \begin{pmatrix} X_{n_X} \\ Y_{n_Y} \end{pmatrix}$ est Gausienne de moyenne le vecteur $E(Z)_n = \begin{pmatrix} E(X_{n_X}) \\ E(Y_{n_Y}) \end{pmatrix}$ et de matrice variance covariance notée $\Gamma_Z = \begin{bmatrix} \Gamma_X & \Gamma_0 \\ \Gamma_0^T & \Gamma_Y \end{bmatrix}$ où $\Gamma_0 = \Gamma_{X,Y} = E(X - E(X))(Y - E(Y))^T)$

on suppose que la matrice variance covariance du vecteur X_{n_X} notés Γ_X **est définie positive(det** $\Gamma_X > 0$)

Soit $x \in \mathbb{R}^{n_X}$

Alors:

(i) la loi de $Y/X = x$ **est une loi Gaussienne**

$$\mathcal{N}(E(Y/X = x), \Gamma_Y^{X=x})$$

(ii) **D'espérance** $E(Y/X = x)$

définie:

$$E(Y/X = x) = E(Y) + a(x - E(X)) \text{ où } a = \Gamma_0^T.\Gamma_X^{-1}$$

(iii) De matrice variance covariance notée $\Gamma_Y^{X=x}$

définie

$$\Gamma_Y^{X=x} = \Gamma_Y - \Gamma_0^T.\Gamma_X^{-1}\Gamma_0$$

Remarques:

1) $E(Y/X)$ comme variable aléatoire dépendante de$X$est de nature Gaussienne car$X$ est Gaussien et$aX+b$est Gaussienne.

2) $E(Y/X=x)$ coincide avec la **regression** de $Y/X=x$

Exercices Avec Corrections Détaillées

Exercice 1

$n = n_X + n_Y = 1+1$

Soit $Z_{n=2} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ un vecteur Gaussien de moyenne $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, de matrice variance covariance $\Gamma = \Gamma_Z = \begin{bmatrix} \Gamma_X & \Gamma_0 \\ \Gamma_0^T & \Gamma_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

(i) Vérifier que Γest une matrice de variance covariance

(ii) Déterminer les lois de X et Y.

(iii) Est ce qu'ils sont indépendantes? justifier.

(iv) Quelle est la loi de$Y/X=x$

(v) Donner sa moyenne (Calculer $E(Y/X=x)$) et particuliérement au point$x=-2$. Que remarquez vous?

(vi) Donner sa variance var$(Y/X=x)$

Solution 1

(i) Γ est une matrice carrée d'ordre 2, symétrique ($\Gamma = \Gamma^T$) et définie positve($\det\Gamma = 5 > 0$)

(ii) comme le vecteur $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ est Gaussien il s'ensuit que les composantes Xet Y sont aussi Gaussien.

X suit la loi $\mathcal{N}(\mu = -2, \sigma^2 = 2)$

Y suit la loi $\mathcal{N}(\mu = 1, \sigma^2 = 3)$

(iii) X et Y ne sont pas indépendantes, en effet on a $cov(X,Y) = 0 \Leftrightarrow X$ indept àY

comme cov(X,Y)=1 alors X et Y sont dépendants

(iv) La la loi de $Y/X = x$ est Gaussienne $\mathcal{N}(E(Y/X = x), \Gamma_Y^{X=x})$

(v) La moyenne

premiére écriture

$E(Y/X = x) = ax + b$
où $a = \dfrac{cov(X,Y)}{var(X)} = \dfrac{1}{2}$
et $b = E(Y) - aE(X) = 1 + 1 = 2$

Ainsi

$$E(Y/X = x) = \frac{1}{2}x + 2$$

La deuxième écriture

On remplace b par sa valeur

$E(Y/X = x) = ax + E(Y) - aE(X)$

$E(Y/X = x) = E(Y) + a(x - E(X))$

Ainsi

$$E(Y/X = x) = 1 + \frac{1}{2}(x + 2)$$

Sa valeur au point $x = -2$ est la valeur 1

Remarque:

D'une façon générale $E(Y/X = x)$ passe par le point $\begin{pmatrix} E(X) \\ E(Y) \end{pmatrix}$

(vi) de variance

$\Gamma_Y^{X=x} = \Gamma_Y - \Gamma_0^T.\Gamma_X^{-1}\Gamma_0$
$var(Y/X = x) = var(Y) - \dfrac{cov^2(X,Y)}{Var(X)}$
$var(Y/X = x) = 3 - \dfrac{(1)^2}{2} = \frac{5}{2}$

finalement

$Y/X = x$ suit la loi $\mathcal{N}(E(Y/X = x) = \frac{1}{2}x + 2, \Gamma_Y^{X=x} = \frac{5}{2})$

ainsi

Résultat finale

la loi conditionnelleY/X est une loi Normale centré en $\frac{1}{2}X+2$ et de variance $\frac{5}{2}$

Exercice 2

Soit $Z=\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ un vecteur Gaussien de moyenne $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, de matrice variance covariance

$$\Gamma = \Gamma_Z = \begin{bmatrix} \Gamma_X & \Gamma_0 \\ \Gamma_0^T & \Gamma_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Var(X) & cov(X,Y) \\ cov(Y,X) & Var(Y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$$

(i) Quelle est la loi de$Y/X=x$

(ii) Calculer sa moyenne au point$x$ (Calculer $E(Y/X=x)$)

(iii)Déduire la variable aléatoire $E(Y/X)$. Donner sa loi.

(iv) Evaluer sa variance var$(Y/X=x)$

(v) Comparer les lois de $Y/X=x$ des deux exercices 1 et 2. Que Remarquez vous?. justifier.

Solution 2

(i) La la loi de $Y/X=x$ est Gaussienne $\mathcal{N}(E(Y/X=x),\Gamma_Y^{X=x})$

(ii) de moyenne $E(Y/X=x)=ax+b$

où $a=\dfrac{cov(X,Y)}{var(X)}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

et $b=E(Y)-aE(X)=3-\dfrac{2}{2}=2$

donc $E(Y/X=x)=\frac{1}{2}x+2$ ou d'une autre façon

$E(Y/X=x)=E(Y)+a(x-E(X))=3+\dfrac{1}{2}(x-2)$

(iii) $E(Y/X)=\frac{1}{2}X+2$

sa loi est Gaussienne de moyenne$\frac{1}{2}E(X)+2=3$

et de variance$\frac{1}{4}var(X)=1$

Finalement $E(Y/X)$ suit $\mathcal{N}(3,1)$

(iv)Evaluer var$(Y/X=x)$

On a la formule Générale

$$\Gamma_Y^{X=x} = \Gamma_Y - \Gamma_0^T.\Gamma_X^{-1}\Gamma_0$$

$var(Y/X = x) = var(Y) - \dfrac{cov^2(X,Y)}{Var(X)} = 9 - \dfrac{4}{4} = 8$

Finalement

La la loi de $Y/X = x$ est Gaussienne $\mathcal{N}(E(Y/X = x) = \frac{1}{2}x + 2, \Gamma_Y^{X=x} = 8)$

Ainsi

la loi conditionnelleY/X est une loi Normale centré en $\frac{1}{2}X + 2$ et de variance 8

(v) Comparaison

En exercice 1 pour le couple

$Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ un vecteur Gaussien de moyenne $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, de matrice variance covariance $\Gamma = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

On a trouvé: la loi conditionnelleY/X est une loi Normale centré en

$$\text{La moyenne } E(Y/X) = \frac{1}{2}X + 2$$

et de variance

$$\text{La variance } Var(Y/X) = \frac{5}{2}$$

En exercice 2 pour le couple

Soit $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ un vecteur Gaussien de moyenne $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, de matrice variance covariance $\Gamma = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$

On a trouvé: la loi conditionnelleY/X est une loi Normale centré en

$$\text{La moyenne } E(Y/X) = \frac{1}{2}X + 2$$

et de variance

$$\text{La variance } Var(Y/X) = 8$$

Remarque ils ont la **même** moyenne $E(Y/X) = \frac{1}{2}X + 2$ et de variance différentes.

justification: Voir leurs matrice variance covariance

$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; \Gamma_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$ on constate le rapport $\dfrac{cov(X,Y)}{Var(X)}$ est le même

$a_1 = \dfrac{cov(X,Y)}{Var(X)} = \dfrac{1}{2}$

$a_2 = \dfrac{cov(X,Y)}{Var(X)} = \dfrac{2}{4}$

et $b_1 = E(Y) - aE(X) = 1 + \dfrac{2}{2} = 2$

$b_2 = E(Y) - aE(X) = 3 - \dfrac{2}{2} = 2$

Exercice 3

Soit $Z_3 = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ un vecteur Gaussien de moyenne $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, de matrice variance covariance

$$\Gamma = \Gamma_{Z_3} = \begin{bmatrix} varX_1 & cov(X_1,X_2) & cov(X_1,X_3) \\ cov(X_2,X_1) & var(X_2) & cov(X_2,X_3) \\ cov(X_3,X_1) & cov(X_3,X_2) & var(X_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1) Déterminer $E(X_1/ \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \end{pmatrix})$

Solution 3

X_1 joue le rôle d'une variable à expliquer, elle est plongée dans $\mathbb{R}$(on a $n_1 = 1$) et $\begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ jouent le rôle d'une variable explicative plongée dans $\mathbb{R}^2$(on a $n_2 = 2$)

La matrice variance covariance du vecteur $\begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ est $\Gamma_{(X_2,X_3)} = \begin{pmatrix} var(X_2) & cov(X_2,X_3) \\ cov(X_3,X_2) & var(X_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ($\det\Gamma_{(X_2,X_3)} = 4 - 1 = 3$)

Ainsi $\Gamma^{-1}_{(X_2,X_3)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Ainsi d'aprés la formule*

$E(X_1/\begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = E(X_1) + a(\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} E(X_2) \\ E(X_3) \end{pmatrix})$ où $a = \Gamma_0^T.\ \Gamma^{-1}_{(X_2,X_3)}$

avec $\Gamma_0 = \mathbf{\Gamma}_{(X_1,(X_2,X_3))} = (\mathbf{\Gamma}_{(X_1,X2)}, \mathbf{\Gamma}_{(X_1,X_3)})$ La matrice covariance entre variable expliquée X_1 et explicatives (X_2, X_3) qui n'est autre que la matrice composée de covariance entre X_1 et chacune des deux X_2 et X_3

$\Gamma_0 = \mathbf{\Gamma}_{(X_1,(X_2,X_3))} = (\mathbf{\Gamma}_{(X_1,X2)}, \mathbf{\Gamma}_{(X_1,X_3)}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ainsi $\Gamma_0^T = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$

Ainsi $a = \Gamma_0^T.\ \Gamma^{-1}_{(X_2,X_3)} = \frac{1}{3}(-1 \quad 1) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$

puisque le vecteur initiale est centrée

on a:

$E(X_1/\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}(\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -x_2 + x_3$

$E(X_1/\begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}) = -X_2 + X_3$

Exercice 4

Même question

pour

Soit $Z_3 = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ un vecteur Gaussien de moyenne $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, de matrice variance covariance $\Gamma = \ \Gamma_{Z_3} == \left[\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}\right]$ $\qquad$ $\det(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}) = 5$

1) Déterminer $E(X_1/\begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \end{pmatrix})$

2)Déterminer $E(\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} /X_3)$

solution 4

1) Déterminer $E(X_1/\begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \end{pmatrix})$

$E(Y/X=x)=E(Y)+a(x-E(X))$ où $a=\Gamma_0^T.\Gamma_X^{-1}=\Gamma_{(Y,X)}^T.\Gamma_X^{-1}$

$Y=X_1$

$X=\begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$

$E(X_1/\begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}) \quad = E(X_1)+a(\begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} E(X_2) \\ E(X_3) \end{pmatrix}$

on a $\Gamma_0=\Gamma_{(X_1,(X_2,X_3))}=(cov((X_1,X_2),cov(X_1,X_3))=\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ (matrice ligne)

$\Gamma_X=\Gamma(X_2,X_3)=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (\det\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}=8)$

$\Gamma_X^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$

$a=\Gamma_0.\Gamma_X^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$

$E(X_1/\begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}) \quad = E(X_1)+a(\begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} E(X_2) \\ E(X_3) \end{pmatrix}=1+\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right]$

$E(X_1/\begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}) = 1+\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_2+1 \\ X_3-1 \end{bmatrix}=\frac{1}{4}X_2+\frac{1}{8}X_3+\frac{9}{8}$

au point $\begin{matrix} X_2=x_2 \\ X_3=x_3 \end{matrix}$

$E(X_1/\begin{pmatrix} X_2=x_2 \\ X_3=x_3 \end{pmatrix})=\frac{1}{4}x_2+\frac{1}{8}x_3+\frac{9}{8}$

2)Déterminer $E(\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}/X_3)$

Ona $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ variable à expliquée est dans un espace $\mathbb{R}^2$ et X_3 la variable explicative est dans une droite $\mathbb{R}$

D'aprés la formule

$E(Y/X=x)=E(Y)+a(x-E(X))$ où $a=\Gamma_0^T.\Gamma_X^{-1}=\Gamma_{(Y,X)}^T.\Gamma_X^{-1}$

$Y = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ ainsi $E(Y) = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

et $X = X_3$ ainsi $E(X_3) = 1$ et $\Gamma_{X_3} = var(X_3) = 4$

$\Gamma_{X_3}^{-1} = \frac{1}{4}$ et

$\Gamma_0 = \Gamma_{(Y,X)}$ la matrice covariance entre variable expliquée et variable explicative

$\Gamma_{((X_1,X_2),X_3)} = (\Gamma_{(X_1,X_3)}, \Gamma_{(X_2,X_3)}) = (1,2)$

Ainsi $a = \Gamma_{((X_1,X_2),X_3)}^T \Gamma_{X_3}^{-1} \quad = \frac{1}{4}(1,2)^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$E(\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} / X_3 = x_3) = E(\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}) + a(x_3 - E(X_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} (x_3 - 1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}x_3 + \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

$E(\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} / X_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} (X_3 - 1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}X_3 + \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2}X_3 - \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

Exercice 5

Soit $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}$ un vecteur Gaussien de moyenne E(X)=$\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ et de matrice variance covariance $\Gamma_X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(i) Loi marginale de $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_4 \end{bmatrix}$

(ii) Calculer $E(X_1/X_2, X_4)$

(iii) Calculer Var($(X_1/X_2, X_4)$

(iv) Quelle est la loi de $X_1/X_2, X_4$

solution 5

La loi marginale du vecteur $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_4 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_4 \end{bmatrix}$ suit la loi $\mathcal{N}(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix})$

(ii) Calculer $E(X_1/X_2, X_4)$

On a la formule

$E(X_1/X_2, X_4) = b + a \begin{bmatrix} X_2 - E(X_2) \\ X_4 - E(X_4) \end{bmatrix}$

Avec $b = E(X_1)$

et $a = \Gamma^T_{X_1,(X_2,X_4)}.\Gamma^{-1}_{(X_2,X_4)}$ avec $\Gamma^T_{X_1,(X_2,X_4)} = [cov((X_1, X_2), cov(X_1, X_4)]$ (matrice ligne)

calcul

$b = E(X_1) = 3$

on a la matrice variance covariance globale $\Gamma_X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

d'où $\Gamma_{(X_2,X_4)} = \begin{bmatrix} var(X_2) & cov(X_2, X_4) \\ cov(X_2, X_4) & var(X_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

ainsi

$\Gamma^{-1}_{(X_2,X_4)} = \begin{bmatrix} var(X_2) & cov(X_2, X_4) \\ cov(X_2, X_4) & var(X_4) \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

et

$\Gamma^T_{X_1,(X_2,X_4)} = [cov((X_1, X_2), cov(X_1, X_4)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$

Ainsi

$a = \Gamma^T_{X_1,(X_2,X_4)}.\Gamma^{-1}_{(X_2,X_4)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

$E(X_1/X_2, X_4) = b + a \begin{bmatrix} X_2 - E(X_2) \\ X_4 - E(X_4) \end{bmatrix} = 3 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 - (-2) \\ X_4 - 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 - (-2) \\ X_4 - 4 \end{bmatrix} = X_2 + 2$$

$$E(X_1/X_2, X_4) = X_2 + 5$$

(iii)Calculer Var$((X_1/X_2, X_4)$

On a la formule (au début) du rappel

$$\Gamma_Y^{X=x} = \Gamma_Y - \Gamma_0^T . \Gamma_X^{-1} \Gamma_0$$

avec les rôles Y=X_1 et X=(X_2, X_4)

$$\Gamma_{X_1}^{X_2,X_4} = Var((X_1/X_2, X_4) = \Gamma_{X_1} - \Gamma^T_{(X_1,(X_2,X_4)}\Gamma^{-1}_{(X_2,X_4)}\Gamma_{(X_1,(X_2,X_4)}$$

où $\Gamma_0^T = \Gamma^T_{(X_1,(X_2,X_4)}$ est une matrice ligne

Comme la matrice globale des covariances est: $\Gamma_X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

on a Γ_{X_1}=var(X_1) = 2

$\Gamma^{-1}_{(X_2,X_4)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\Gamma^T_{(X_1,(X_2,X_4)} = \Gamma_{(X_1,(X_2,X_4)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$

Var$((X_1/X_2, X_4) = \Gamma_{X_1} - \Gamma^T_{(X_1,(X_2,X_4)}\Gamma^{-1}_{(X_2,X_4)}\Gamma_{(X_1,(X_2,X_4)} = 2 - \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$

Var$((X_1/X_2, X_4) = 2 - 1 = 1$

(iv) Quelle est la loi de $X_1/X_2, X_4$

$X_1/X_2, X_4$ suit une loi $\mathcal{N}(E(X_1/X_2X_4), Var((X_1/X_2, X_4)) = \mathcal{N}(X_2 + 5, 1)$

$$X_1/X_2, X_4 \text{ suit la loi Normale } \mathcal{N}(X_2 + 5, 1)$$