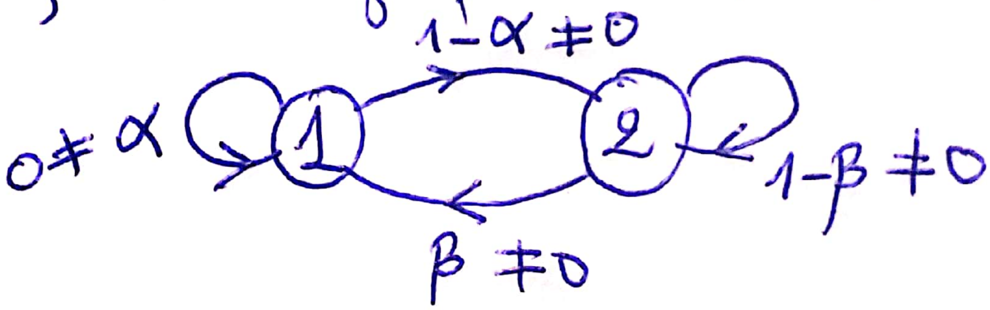
Exo 4 $P = \begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}$; $E = \{1, 2\}$.

$0 < \alpha, \beta < 1$ i.e $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$
$\beta \neq 0, \beta \neq 1$

(2) La loi invariante si elle existe.

Traçons le graphe des transitions:



Comme $0 < \alpha, \beta < 1$, alors. $P_{ij} > 0$, $\forall i, j \in E$

D'où la C.M. est :

① Apériodique

② Irréductible

+ E fini $\Longrightarrow$ ③ Récurrente.

Conclusion: la loi invariante existe et elle est unique; déterminée par le système :

$$\begin{cases} {}^t\pi P = {}^t\pi \\ \sum_{j=1}^{2} \pi_j = 1 \end{cases} \quad ; \quad {}^t\pi = (\pi_1 \quad \pi_2).$$

On a :

$$\begin{cases} \alpha \pi_1 + \beta \pi_2 = \pi_1 \\ (1-\alpha)\pi_1 + (1-\beta)\pi_2 = \pi_2 \; \cdots (*) \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \Rightarrow \boxed{\pi_2 = 1 - \pi_1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha \pi_1 + \beta(1-\pi_1) = \pi_1$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi_1 = \frac{\beta}{\underbrace{1+\beta-\alpha}_{\neq 0}}}$$

D'où : $\boxed{\pi_2 = 1 - \pi_1 = \dfrac{1-\alpha}{1+\beta-\alpha}}$.

(b) En déduire :

(i) à long-terme ($n \to \infty$), la proportion du temps de séjour ds 2 sachant que $X_0 = 1$

c.à.d, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n=2/X_0=1) = ?$

Comme la C.M. ~~est~~ admet une loi limite unique, alors :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n=2/X_0=1) = \lim_{n\to\infty} P^{(n)}_{12} = \boxed{\pi_2}$$

indép. de 1

(ii) Le temps moyen du 1er retour à 2 $/X_0=2$.

c.à.d, $$\boxed{\mathbb{E}(T_2/X_0=2) = \frac{1}{\pi_2}}$$

(iii) à long-terme $(n\to\infty)$, la proportion du temps que la C.M. est à l'état 2 sachant qu'elle était à l'état 1 à l'instant précédent.

(16) $\boxed{(1-\alpha)\pi_1}$

$$1 \xrightarrow{1-\alpha} 2$$

$n\to\infty$ π_1

Explication:

Regarder l'éq^t de la blonce (*)

$$\boxed{\pi_2} \quad \text{la proportion du temps de séj. dans ②}$$

$$\|$$

$$\boxed{\underbrace{(1-\alpha)}_{P_{12}}\pi_1} \oplus \boxed{\underbrace{(1-\beta)}_{P_{22}}\pi_2}$$

La proportion du temps de séjour ds ② sachant que l'état précédent est ①

La proportion du temps de séjour ds ② sachant que l'état précédent est ②