U.D.L Sidi Bel Abbès — Module : Mathématiques Financières
Faculté des Sciences Exactes — Responsable : M. HAMMAD
Département : Probabilités-Statistique — Mercredi 09/01/2023
Master 2 : Statistique et ses Applications — Durée : 1h30mn

EXAMEN FINAL

Exercice 1(14 points).

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t-$mouvement brownien standard et soit μ et σ deux constantes réelles.

02 pt 1. Démontrer que le processus $Y_t = \exp\left\{\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right\}$ est une $\mathcal{F}_t-$martingale.

On considère l'équation différentielle stochastique :

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t, \quad X_0 = 1. \tag{1}$$

03 pts 2. Montrer que X_t est une solution de (1) où

$$X_t = \exp\left\{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t\right\}.$$

01,50 pt 3. Montrer que si $\mu \geq 0$, X est une sous-martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_t$.

0,50 pt 4. A quelle condition, X est une martingale ?.

0 1 pt 5. Déduire $\mathbb{E}(X_t)$.

03 pt 6. Écrire la formule d'Itô pour X_t^2.

01,5 + 01,5 pt 7. Calculer de deux façons différentes $\mathbb{E}(X_t^2)$.

Exercice 2 (06 points).

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien réel issu de 0 et notant $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, sa filtration naturelle. On définit le processus $(Z_t)_{t\geq 0}$ par :

$$Z_t = B_t - tB_1, \quad t \in [0, 1].$$

02 pt – Montrer que le processus Z est un processus gaussien indépendant de B_1.

02 pt – Déterminer sa moyenne $\mathbb{E}(Z_t)$ et sa fonction de covariance $Cov(Z_s, Z_t)$.

02 pt – Montrer que le processus Y, avec $Y_t = (1-t)B_{\frac{t}{1-t}}$, $t \in]0, 1[$ a la même loi que le processus Z.

Exercice : 1

$(B_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$- mouvement brownien Standard, μ et σ deux constantes réelles.

1/ Pour $s<t$: $\mathbb{E}(Y_t/\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}\left(e^{\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t} / \mathcal{F}_s\right)$

Car B_s est $\mathcal{F}_s$-mes. $\quad = \mathbb{E}\left(e^{\sigma(B_t - B_s)} / \mathcal{F}_s\right) \cdot e^{\sigma B_s - \frac{\sigma^2}{2}t}$

Comme $B_t - B_s \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s$ $\quad = \mathbb{E}\left(e^{\sigma(B_t - B_s)}\right) e^{\sigma B_s - \frac{\sigma^2}{2}t}$

$B_t - B_s$ est de même loi que B_{t-s} $\quad = \mathbb{E}\left(e^{\sigma B_{t-s}}\right) e^{\sigma B_s - \frac{\sigma^2}{2}t}$

Rappelons que si Y est gaussienne centrée réduite alors $\mathbb{E}(e^{\lambda Y}) = \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda y} e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} = e^{\frac{\lambda^2}{2}}$

donc $Y = \frac{B_{t-s}}{\sqrt{t-s}}$ est centrée réduite $\longrightarrow B_{t-s} = \sqrt{t-s}\cdot Y$

alors il vient $\mathbb{E}(Y_t/\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}\left(e^{\sigma\sqrt{t-s}\,Y}\right) e^{\sigma B_s - \frac{\sigma^2}{2}t}$

$$= e^{\frac{\sigma^2(t-s)}{2}} \cdot e^{\sigma B_s - \frac{\sigma^2}{2}t}$$

$$= e^{-\frac{\sigma^2}{2}s} \cdot e^{\sigma B_s}$$

- $\mathbb{E}(|Y_t|) < +\infty \quad \forall t$

$$= e^{\sigma B_s - \frac{\sigma^2}{2}s} = Y_s \quad \mathbb{P}.p.s$$

* voir le cours

2/ $dX_t = \mu X_t\,dt + \sigma X_t\,dB_t$, $X_0 = 1$ ... (1)

$$= X_t(\mu\,dt + \sigma dB_t)$$

i.e $\frac{dX_t}{X_t} = \mu\,dt + \sigma dB_t$ i.e $\log(X_t) = \int_0^t \mu\,ds + \sigma d$

avec X_t positive

Appliquons la formule d'Itô sur le processus $Y_t = f(X_t) = \log(X_t)$, où X_t est un processus d'Itô avec $K_s = \mu X_s$, $H_s = \sigma X_s$ et $d\langle X, X\rangle_s = H_s^2 ds = \sigma^2 X_s^2 ds$

donc $Y_t = \log(X_t) = \underbrace{\log X_0}_{=0} + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s) \cdot d\langle X, X\rangle_s$.

$$\begin{cases} f'(X_s) = \frac{1}{X_s} \\ f''(X_s) = -\frac{1}{X_s^2} \\ f(X_0) = \log(1) = 0 \end{cases}$$

Donc :

$$Y_t = \int_0^t \frac{(\mu ds + \sigma dB_s)\cancel{X_s}}{\cancel{X_s}} - \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t ds$$

$$= (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t \quad / B_0 = 0$$

$$Y_t = \log X_t \iff X_t = e^{Y_t} = e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t}$$

3/

D'après la question (1) $X_t = e^{\mu t} \cdot \cancel{X_t}$ et

$$\mathbb{E}(X_t / \mathcal{F}_s) = e^{\mu t}\,\mathbb{E}(Y_t / \mathcal{F}_s) \quad \forall\ t \geq s$$

$$= e^{\mu t} \cdot Y_s = e^{\mu(t-s)} \cdot X_s \geq X_s$$

$\mu \geq 0$, $t - s \geq 0$ avec $X_s = e^{\mu s} \cdot Y_s$, $\mathbb{P}$.p.s

4/ X est une Martingale si $\mu = 0$
i.e si on a l'égalité

1/ Écrivons la Formule d'Itô pour $f(X_t) = X_t^2$, on a $f(X_0) = X_0^2 = 1$

f est une fct $\mathcal{C}^2$, $f'(X_t) = 2X_t$ et $f''(X_t) = 2$.

③

$$X_t^2 = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\,dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\,d\langle X,X\rangle_s$$

$$= 1 + \int_0^t 2X_s\left[\mu X_s\,ds + \sigma X_s\,dB_s\right] + \sigma^2\int_0^t X_s^2\,ds$$

$$= 1 + \int_0^t X_s^2(2\mu + \sigma^2)\,ds + \int_0^t \sigma X_s\,dB_s$$

ou bien $dX_t^2 = X_t^2(2\mu+\sigma^2)\,dt + \sigma X_t\,dB_t$

⑤

$\mathbb{E}(X_t) = e^{\mu t}\cdot\mathbb{E}(Y_t)$ avec Y_t une $\mathcal{F}_t$-Martingale

$= e^{\mu t}\,\mathbb{E}(Y_0)$ avec $Y_0 = e^{\sigma B_0 - 0\cdot\frac{\sigma^2}{2}}$

$= e^{\mu t}$ $\quad B_0 = 0,\quad = e^0 = 1$

⑦

$\mathbb{E}(X_t^2) = e^{2\mu t}\,\mathbb{E}(Y_t^2)$ avec $Y_t^2 = e^{-\sigma^2 t}\cdot e^{2\sigma B_t}$

$= e^{2\mu t}\cdot e^{-\sigma^2 t}\,\mathbb{E}(e^{2\sigma B_t})$, Posons $Y_t = \frac{B_t}{\sigma}$

$= e^{2\mu t}\cdot e^{-\sigma^2 t}\cdot\mathbb{E}(e^{2\sigma\sqrt{t}\cdot Y})$ avec Y gaussien centré réduit

$= e^{2\mu t}e^{-\sigma^2 t}e^{2\sigma^2 t}$

$= e^{2\mu t + \sigma^2 t} = e^{(2\mu+\sigma^2)t}$

Rq :

Vous pouvez calculer $\mathbb{E}(X_t^2)$. En passant par la Formule d'Itô aboutée sur X_t^2

Il suffit de résoudre l'EDO :

$M'_t = (2\mu+\sigma^2)\,M_t\,dt$; avec $M_t = \mathbb{E}(X_t^2)$

et $\mathbb{E}(X_t^2) = 1 + \int_0^t (2\mu+\sigma^2)\,\mathbb{E}(X_s^2)\,ds + \mathbb{E}\left(\sigma\int_0^t X_s\,dB_s\right)$

on a

$$\mathbb{E}(X_t^2) = (2\mu+\sigma^2)\int_0^t \mathbb{E}(X_s^2)\,ds$$ et

$\sigma\int_0^t X_s\,dB_s$ est une Martingale d'espérance nulle

donc $\frac{M_t'}{M_t} = (2\mu+\sigma^2)\,dt \iff \begin{cases} M_t = C e^{(2\mu+\sigma^2)t} \\ M_0 = 1 \end{cases}$

i.e $C = 1$

Donc $\mathbb{E}(X_t^2) = e^{(2\mu+\sigma^2)t}$

Exercice : 2

(4)

- Le processus $Z_t = B_t - t.B_1$, $\forall t \in [0,1]$ est un Processus gaussien car $\forall \alpha_i \in \mathbb{R}$, $\forall t_i \in [0,1]$

$$\sum_i \alpha_i Z_{t_i} = \underbrace{\sum_i \alpha_i B_i}_{\text{v.a gaussienne}} - \underbrace{\sum_i \alpha_i t_i}_{\text{scalaire}} \cdot B_1$$

Donc une v.a.r gaussienne. $\mathbb{E}(Z_t) = \mathbb{E}(B_t) - t\,\mathbb{E}(B_1) = 0$

- De même le vecteur (Z_t, B_1) st gaussien car ses composantes sont des v.a.r gaussiennes

. De plus $\mathbb{E}(Z_t \cdot B_1) = \mathbb{E}((B_t - t.B_1).B_1)$ $\forall t \in [0,1]$

$$= \mathbb{E}(B_t \cdot B_1) - t\,\mathbb{E}(B_1^2)$$

$$= \min(t \wedge 1) - t.1$$

$$= t - t = 0 = \mathbb{E}(Z_t).\mathbb{E}(B_1)$$

Donc $Z_t \perp\!\!\!\perp B_1$.

$\mathrm{Cov}(Z_s, Z_t) = \mathbb{E}(Z_s \cdot Z_t) = \mathbb{E}((B_s - s.B_1)(B_t - t.B_1))$

$\forall s,t \in [0,1]$

$$= \mathbb{E}(B_s B_t) - t\,\mathbb{E}(B_s B_1) - s\,\mathbb{E}(B_1 B_t) -$$

$$s t \underbrace{\mathbb{E}(B_1^2)}_{=1} = \min(s,t) - ts - st + st$$

$$= \min(s,t) - st$$

- Soit $Y_t = (1-t)\, B_{\frac{t}{1-t}}$ le processus Y st gaussien

car $\sum_i \alpha_i Y_{t_i} = \sum_i \alpha_i B_{\frac{t_i}{1-t_i}} (1-t_i)$

$$= \sum_i \beta_i \cdot B_{s_i}$$ avec $\beta_i = \alpha_i(1-t_i)$ un scalaire réelle, $s_i = \frac{t_i}{1-t_i}$.

= une v.a. gaussienne car ...

on $\mathbb{E}(Y_t) = (1-t)\,\mathbb{E}\left(B_{\frac{t}{1-t}}\right) = 0$

pour $s<t$: $\mathbb{E}(Y_s Y_t) = (1-s)(1-t)\,\mathbb{E}\left(B_{\frac{t}{1-t}} B_{\frac{s}{1-s}}\right)$

$= (1-s)(1-t)\dfrac{s}{1-s}$

$= (1-t)s$.

$$\begin{cases} s \leq t \\ \dfrac{1}{1-s} \leq \dfrac{1}{1-t} \end{cases}$$

$\Downarrow$

$\dfrac{s}{1-s} \leq \dfrac{t}{1-t}$

- donc $\min\left(\dfrac{s}{1-s}, \dfrac{t}{1-t}\right) = \dfrac{s}{1-s}$
- Y_t est de même loi que Z_t.