U.D.L Sidi Bel Abbès
Faculté des Sciences Exactes
Département : Probabilités-Statistique
Master 2 : Statistique et Applications

Module : Mathématiques Financières
Responsable : M. HAMMAD
Dimanche 14/01/2024
Durée : 1h30mn

EXAMEN FINAL

Exercice 1 (05 points).

- Quelle condition doit satisfaire l'intégrale stochastique $I(H)_t$ pour être bien défini ?.
- Quelles sont ses propriétés ?.

Exercice 2 (15 points).

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien standard dans la filtration est notée $(\mathcal{F}_t)_t$.

1. Montrer que la v.a $X_t = \displaystyle\int_0^t \sin s dB_s$ est bien définie. 02 points
2. X_t est-elle une martingale ?. Déduire son Espérance. 02 points
3. Calculer sa covariance $Cov(X_t, X_s)$. 02,5 points
4. X_t est-il un processus Gaussien ?. Justifier. 01,5
5. Déduire $\mathbb{E}(X_t^2)$. 01
6. Vérifier que X_t est un processus d'Itô et donner sa formule explicite. 01+02
7. Soit $t > s \geq 0$, Calculer $\mathbb{E}(e^{X_t - X_s} | \mathcal{F}_s)$. 03

① Corrigé type : Examen Final 2023 / 2024 Mathématiques Financières

Question de Cours : (05 points)

1/ On se donne un $\mathcal{F}_t$ - mouvement Brownien et $(H_t)_{0 \le t \le T}$ un Processus $\mathcal{F}_t$ - adapté.

On peut définir l'intégrale stochastique $(I(H)_t)_{0 \le t \le T} = \left(\int_0^t H_s \, dB_s\right)_{0 \le t \le T}$ dès que $\int_0^T H_s^2 \, ds < +\infty$ $\mathbb{P}$.p.s

01

2/ Ses propriétés : 04 points

* L'intégrale stochastique est un opérateur linéaire.
* $(I(H_t))_t$ est une fonction continue en t.
* $\left(\int_0^t H_s \, dB_s\right)_{0 \le t \le T}$ est une $\mathcal{F}_t$ - martingale d'état initiale nulle.
* $\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t H_s \, dB_s\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t H_s^2 \, ds\right)$ Propriété d'isométrie
* $\mathbb{E}\left(\sup_{t \le T} \left|\int_0^t H_s \, dB_s\right|^2\right) \le 4 \, \mathbb{E}\left(\int_0^T H_s^2 \, ds\right)$.

Exercice 2 : (15 points)

$(B_t)_{t \ge 0}$ un mouvement Brownien standard adapté à $(\mathcal{F}_t)_t$

1/ $X_t = \int_0^t \sin u \, dB_u$ est bien défini si $\int_0^t \sin^2 u \, du < +\infty$ $\mathbb{P}$.p.s

(2) 1/ $\sin^2 u = \frac{1}{2}[1 - \cos 2u]$ donc

$$\int_0^t \sin^2 u \, du = \frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin 2t < +\infty \quad \mathbb{P}.p.s$$

02

2/ $(X_t)_t$ est une intégrale stochastique d'après la question de cours et la question 1/

02

$(X_t)_t$ est une martingale d'Espérance nulle

3/ $Cov(X_t, X_s) = \mathbb{E}(X_t X_s) = \mathbb{E}\left(\left(\int_0^{s\wedge t} \sin u \, dB_u\right)^2\right)$

Isométrie

$$= \mathbb{E}\left(\int_0^{s\wedge t} \sin^2 u \, du\right)$$

$$= \frac{s\wedge t}{2} - \frac{1}{4}\sin 2(s\wedge t)$$ 02,5

4/ Par construction de l'intégrale stochastique : $(I(H))_t$, X_t est une somme de v.a gaussien indépendantes $B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$ donc une v.a. gaussienne en plus centré et de 01,5

$Var(X_t) = \mathbb{E}(X_t^2) = \frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin 2t \longrightarrow 5/$ 01

on note $\mathbb{E}(X_t^2) = \Phi(t)$.

6/ $dX_t = \sin t \, dB_t$ est un Processus d'Ito avec $K_t = 0$ et $H_t = \sin t$ avec $X_0 = 0$ - $\mathcal{F}_0$ - mesurable et $\int_0^t (|K_s| + |H_s^2|) ds < +\infty \longrightarrow$ vérifiée d'après 1/

01

③

6/ Par la formule Produit (Intégration par Partie)

Soit $\begin{cases} Y_t = \sin t \\ Z_t = dB_t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_t = 0 \\ H'_t = 1 \end{cases} \Rightarrow \langle \cancel{Y}, \cancel{Z} \rangle_t = H_t H'_t = 0$

donc : $Y_t Z_t = Y_0 Z_0 + \int_0^t Y_s dZ_s + \int_0^t Z_s dY_s + \langle Y, Z \rangle_t$

i.e : $\sin t \cdot B_t = 0 + \int_0^t \sin s \, dB_s + \int_0^t \cos s \cdot B_s \, ds$

$\Rightarrow \quad X_t = \sin t \cdot B_t - \int_0^t \cos s \cdot B_s \, ds$ 02

7/ soit $t > s > 0$; Calculons $\mathbb{E}(e^{X_t - X_s} / \mathcal{F}_s)$

d'après une Proposition de Cours si $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

alors $\mathbb{E}(Y) = e^{\sigma^2/2}$, i.e $X_t \sim \mathcal{N}(0, \Phi(t))$

alors $\mathbb{E}(e^{X_t}) = e^{\Phi(t)/2}$ car $Var(X_t) = \Phi(t)$

Pour $t > s$:

$X_t - X_s = \int_s^t \sin u \, dB_u$ est $\perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s$ vu que ; $t > s$ $B_t - B_s \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s$.

Donc $\mathbb{E}(e^{X_t - X_s} / \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(e^{X_t - X_s}) = e^{\frac{\Phi(t) - \Phi(s)}{2}}$

$\frac{\Phi(t) - \Phi(s)}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(t-s) - \frac{1}{4}(\sin 2t - \sin 2s)\right]$

donc $\mathbb{E}(e^{X_t - X_s} / \mathcal{F}_s) = e^{\frac{1}{4}(t-s) - \frac{1}{8}(\sin 2t - \sin 2s)}$

03