Distributions et E.D.P

T. Menacer
Université Mohammed kheider Biskra
Département de Mathématiques

February 21, 2021

Contents

Contents **i**

Introduction **iii**

Définitions et propriétés fondamantales des distributions **v**

Introduction v
L'espace de fonctions tests D vii
Les distributions x

Opérations sur les distributions **xxi**
Addition xxi
Multiplication par une constante xxi
La translaté d'une distribution xxi
Multiplication par fonction de classe C^∞ xxii
Dérivée d'une distribution xxiii

Convergence des distributions **xxix**
Définitions et propriétés xxix
Les distributions à plusieurs dimensions xxxi

Convolution des distributions **xxx**
Convolution xxxv
Convolution des fonctions xl
Convolution des distributions xlii
Algèbre de convolution xlvi

Transformée de Fourier des distributions **li**
Transformée de Fourier dans L^1 li
Transformée de Fourier dans S (espace de Schwartz) lv
Transformée de Fourier des distributions lvi

Bibliography **lxi**

Introduction

Définitions et propriétés fondamantales des distributions

Introduction

Notations et conventions

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sera toujours un sous-ensemble ouvert et non vide, $\Omega =^c \mathbb{R}^n \backslash \Omega$ dénote le complément de Ω dans $\mathbb{R}^n$.

- Si $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $|x| = \left(x_1^2, x_2^2, ..., x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

- Un élément $\alpha \in \mathbb{N}^n$ est appelé multi-indice, si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on pose $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ longueur de α et $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!...\alpha_n!$. Pour $x \in \mathbb{R}^n, x^n = x_1^{\alpha_1}.x_2^{\alpha_2}...x_n^{\alpha_n}$.

- Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$,on note $\alpha \leq \beta$ si $\alpha_1 \leq \beta_1, ..., \alpha_n \leq \beta_n$ et on pose aussi $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} = \overset{n}{\underset{i=1}{II}} \begin{pmatrix} \alpha! \\ \beta! \end{pmatrix}$ où $\begin{pmatrix} \alpha! \\ \beta! \end{pmatrix}$ représente le coefficient binomial $\frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$

- Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ on écrit: $D_f^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha 1} \partial x_2^{\alpha 2} ... \partial x_n^{\alpha n}}$

- Pou $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\Omega)$ désigne l'éspace des fonctions f $p-$intégrables sur Ω, $L^p(\Omega)$ est un éspace de Banach pour la norme $\|f\|_p^p = \int_{\Omega} |f(x)|^p \, dx$

- Pour $p = \infty, L^{\infty}(\Omega)$ désigne l'éspace des fonctions f mesurables sur Ω.

Motivation

Exemple introductif

Supposons qu'on a un signal physique d'une très grande intensité sur une région très petite dans l'espace (par exemple une charge éléctrique très concentrée dans un petit voisinage d'un point et nulle ailleursc'est ce que les physicients appellent une charge ponctuelle). Supposons que la quantité totale de charge est connue, égale par exemple à 1 Nous pouvons considérer une densité de charge (pour simplifier on suppose que la charge est en dimension 1 et qu'elle est concentrée autour du point O) qui sera une fonction ρ

$$\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / \rho(x) = \begin{cases} grande, si\ x \in petit\ intervalle\ autour\ de\ 0 \\ 0\ ailleurs \end{cases}$$

Mais de tel sorte que $\int_{\Omega} \rho(x)\, dx = 1$.

Par exemple $\rho_n(x) = \begin{cases} n, si\ x \in \left[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right] \\ 0\ sinon. \end{cases}$

avec n un nombre très grand, on aimerait avoir une limite, pour $n \to +\infty$ d'une telle fonction.

Le physicien **P. Dirac** a introduit et utilisé une fonction $\delta : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ qui est vue comme un sorte de limite pour $n \to +\infty$

- La fonction δ (appelée aussi la fonction de Dirac) est telleque:

  1. $\delta(x) = +\infty$
  2. $\delta(x) = 0, \forall x \neq 0$

3. $\int_{\mathbb{R}} \delta(x)\, dx = 1.$

- L'existence d'une telle fonction contredit la théorie de l'intégration de Lebesgue ($\delta = 0$ $p.p, x \in \mathbb{R} \Longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \delta(x)\, dx = 0$, en introduira une limite de la fonction ρ qui sortira du cadre des fonctions : ça sera une distribution.

L'espace de fonctions tests D

On rappelle

- $C^0(\Omega)$ ou $C(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ $/ f$ est continue$\}$
- $k \in \mathbb{N}; C^k(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ $/ f$ est $k-$ fois continument diffentiable$\}$
- $C^\infty(\Omega) = \underset{k\in\mathbb{N}}{\cap} C^k(\Omega)$ c'est l'espace des fonctions indéfinement differentiable sur Ω

Définition 1 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi \in C(\Omega)$.*

Le support de φ, noté $Supp(\varphi)$, est l'adhérence des $x \in \Omega$ tels que $\varphi(x) \neq 0$.

$$Supp(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}$$

Le support de φ est donc un ensemble fermé en dehors duquel φ est nulle et en outre c'est le plus petit ensemble possédant cette propriété.

Remarque 2 $x_0 \in Supp(\varphi) \Longleftrightarrow \exists V_{x_0} : \varphi(x) \neq 0, \forall x \in V_{x_0}$

Remarque 3 *Le complément du $Supp(\varphi)$ est le plus grand ouvert où est nulle.*

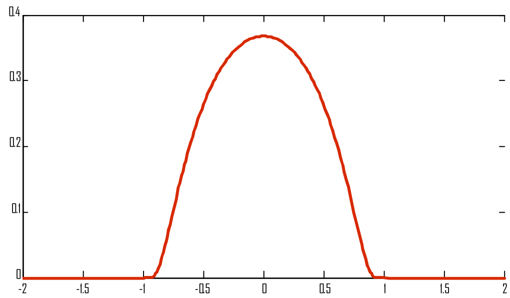

Figure 1: Graphe de fonction φ_1

Exemple 4 *On considère $n = 1$ et $\Omega = \mathbb{R}$*

$$\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \ / \ \varphi_1(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{+1}{x^2-1}\right) & si \ |x| < 1 \\ 0, \ si \ |x| \geq 1 \end{cases}$$

$Supp(\varphi_1) = [-1; +1]$

Propriètés du support

i) $\varphi = 0 \Longleftrightarrow Supp(\varphi) = \emptyset$

ii) $Supp(\varphi.\psi) \subset Supp(\varphi) \cap Supp(\psi)$

iii) $Supp\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \subset Supp(\varphi), i = 1, ..., n$ si $\varphi \in C^1(\Omega)$.

Définition 5 *On définit l'ensemble $D(\Omega)$ comme l'espace des fonctions à valeurs complexes définies sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, indéfiniment dérivables et à support borné.*

Exemple 6 *Si $\varphi = 0$ (fonction constante, alors $\varphi \in D(\Omega)$ car $Supp(\varphi) = \emptyset$ et $\varphi \in C^\infty(\Omega)$.*

Exemple 7 *φ_1 définie précédement est de $D(\Omega)$ car $Supp(\varphi_1) = [-1; +1]$ (compact $\subset \mathbb{R}$) et $\varphi_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$.*

Lemme 8 *Si $\varphi \in D(\Omega)$ et $f \in C^\infty(\Omega)$, alors $\varphi.f \in D(\Omega)$*

Preuve. $\varphi.f \in C^\infty(\mathbb{R})$ et en plus $Supp(\varphi.f) \subset Supp(\varphi)$
donc comme $Supp(\varphi)$ est compact $Supp(\varphi.f)$ est compact aussi. ■

Remarque 9 *Le lemme précédent donne une manière de construire beaucoup des éléments de $D(\Omega)$ si on en connait un seul par exemple $x\varphi_1(x), \sin x\varphi_1(x$ sont dans $D(\mathbb{R})$.*

Proposition 10 *Toute combinaison linéaire des éléments de $D(\Omega)$ est encore un élément de $D(\Omega)$ (i.e $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in D(\Omega)$ on a $\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \in D(\Omega)$*

Remarque 11 *Donc $D(\Omega)$ est un espace vectoriel de dimension infinie.*

Topologie de D

Pour définir la topologie de l'espace $D(\Omega)$ nous allons définir la notion de convergence des suites d'éléments de cet espace.

Définition 12 *Soit $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite des éléments de $D(\Omega)$ et $\varphi \in D(\Omega)$. On dit que $\varphi_n \underset{n\to\infty}{\to} \varphi$ au sens de $D(\Omega)$ si les deux conditions suivantes sont satisfaites:*

1. *Il existe un ensemble compact $K \subset \Omega$ fixe, indépendant de n telque $Supp(\varphi_n) \subset K, \forall n \in \mathbb{N}$ et aussi $Supp(\varphi) \subset K$.*

2. *$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, la suite $\{D^\alpha\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur K vers $D^\alpha\varphi$,ie*

   $\sup\limits_{x\in K} |D^\alpha\varphi_n(x) - D^\alpha\varphi(x)| \to 0$, *pour $n \to \infty$*

Exemple 13 *La suite* $\psi_1(x) = \frac{1}{n}\varphi_1(x)$ *appartient à* $D(\mathbb{R})$

Alors que la suite $\psi_2(x) = \varphi_1\left(\frac{x}{n}\right) \in D(\mathbb{R})$ *ne converge pas dans* $D(\mathbb{R})$ *quand* $n \to \infty$ *(car il ne peut pas exister un compact* K *en dehors duquel toutes les* $\varphi_n(x)$ *s'annulent*

Exemple 14 *Soit* $\varphi \in D(\mathbb{R})$ *Posons, pour* $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_n(x) = \varphi\left(x + \frac{1}{n+1}\right) - \varphi(x)$$

Alors, $\varphi_n \to 0$ *dans* $D(\mathbb{R})$

En effet, si $Supp(\varphi) \subset [-a, a] /, a > 0$ *alors pour tout* n, $Supp(\varphi_n) \subset [-a-1, a+1]$ *.Puis, par le théorème des accroissements finis, pour tout* $k \in \mathbb{N}$,

$\left|\varphi^{(k)}\left(x + \frac{1}{n+1}\right) - \varphi^{(k)}(x)\right| \leq \frac{1}{n+1} \sup\left|\varphi^{(k+1)}\right| \to 0$

lorsque n *tend vers l'infini.*

Les distributions

Définition 15 *Une application* f *de* $D(\Omega)$ *dans* $\mathbb{C}$ *est appelée une fonctionnelle et on note sa valeur par* $< f, \varphi >, \forall \varphi \in D(\Omega)$

Définition 16 *une fonctionnelle linéaire* f *définie sur* $D(\Omega)$ *est dite continue si pour toute suite de fonctions test* $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *qui converge vers la fonction nulle (zéro) dans* $D(\Omega)$, *la suite numérique* $\{< f, \varphi_n >\}_{n \in \mathbb{N}}$ *converge vers zéro.*

Définition 17 *On appelle distribution définie dans* Ω *toute fonctionnelle linéaire et continue sur* $D(\Omega)$ *.*

Définition 18 *L'espace de toutes les distributions définies dans* Ω *est appelé espace des distributions et noté* $D^{`}(\Omega)$ *ou simplement* $D^{`}$

Remarque 19 *T:D* $\rightarrow \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ $\varphi \rightarrow < T, \varphi >= T(\varphi)$

- *Linéairité* $\begin{cases} < T, \varphi_1 + \varphi_2 >=< T, \varphi_1 > + < T, \varphi_2 > \\ < T, \lambda\varphi >= \lambda < T, \varphi >, \lambda \in \mathbb{C} \end{cases}$

- *Continuité: Si* $\underset{j \to +\infty}{\varphi_j \to \varphi}$ (*dans D*), *alors la suite* $\underset{j \to +\infty}{< T, \varphi_j > \to} < T, \varphi >$ (*dans* $\mathbb{C}$)

  C'est à dire $\underset{j \to +\infty}{\varphi_j \to \varphi} \Longrightarrow \lim\limits_{j \to +\infty} \lfloor < T, \varphi_j - \varphi > \rfloor = 0.$

Proposition 20 *Les distributions définies dans* Ω *forment un espace vectoriel, (c'est l'espace dual de* $D(\Omega)$*))*

Remarque 21 *Dans un premier temps et afin de simplifier les formules, on se place dans* $\mathbb{R}$ *(Si* $x \in \mathbb{R}^n$*, il faut considérer des intégrales multiples, des dérivées partielles et les ensembles bornés* K *sont des bornés de* $\mathbb{R}^n$*.*

Types de distributions

Les distributions sont en quelque sorte une généralisation des fonctions. Il existe des distributions très liées à la notion des fonctions, on les appellera distributions régulières et d'autre qui sont complètement nouveaux appelées distributions singulières dont l'objet δ.

Les distributions régulières

Proposition 22 *A toute fonction* f *localement intégrable sur* $\mathbb{R}$*, on associe la distribution régulière notée* T_f*, définie par*

$$\forall \varphi \in D < T_f, \varphi > \overset{déf}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \varphi(x)\, dx$$

Preuve. Cet intégral a un sens car on intègre sur K, le support de φ, $f\varphi$ est localement intégrable

- T_f est linéaire (évident

- T_f est continue

Soit $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $D(\mathbb{R})$ converge vers zéro dans $D(\mathbb{R})$ telque $\sup \varphi_n \subset [a,b]$ alors

$$\begin{aligned} \lfloor < T_f, \varphi_n > \rfloor &\leq \int_a^b \lfloor f(x)\,\varphi(x) \rfloor\, dx \\ &\leq \sup_{[a,b]} \lfloor \varphi_n(x) \rfloor \int_a^b \lfloor f(x) \rfloor\, dx \to 0, \text{quand } n \to \infty \end{aligned}$$

car $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro dans $D(\mathbb{R})$

■

Définition 23 *Les distributions qui sont définies par des fonctions localement intégrables sont appelées distributions régulières*

Proposition 24 *Deux fonctions localement intégrables sur Ω définissent la même distribution si, et seulement, si elles sont égales presque partout.*

Notation: Cela revient à ne parler que de classes de fonctions $p.p$ égales et la distribution T_f est alors associée à la classe de fonctions $p.p$ égales à f (pour alléger l'écriture, on confond souvent f avec T_f

$$\forall \varphi \in D, < f(x), \varphi(x) >= \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

Exemple 25 $f(x) = \cos x$

f est non intégrable sur $\mathbb{R}$, mais loc-intégrable

donc

$$\forall \varphi \in D, < \cos x, \varphi(x) >= \int_{\mathbb{R}} \cos x \varphi(x)\, dx$$

A l'intérieur de crochets, cos *est la distribution régulière sous l'intégrale il s'agit de la fonction trigonométrique cosinus représentant la classe des fonctions presque partout égales à* $\cos x$.

Les distributions singulières

Une distribution T qui n'est pas associée à une fonction loc-intégrable est une distribution singulière

Exemple 26 *La distribution de Dirac au point a est noté δ_a et est définie par:*

$$\forall \varphi \in D, < \delta_a, \varphi >= \varphi(a).$$

Au point origine on note δ

$$\forall \varphi \in D, < \delta, \varphi >= \varphi(0).$$

1. *δ est linéaire sur $D(\mathbb{R})$*

   $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in D$ *et* α, β *deux réels*

   $< \delta, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 >= \alpha < \delta, \varphi_1 > +\beta < \delta, \varphi_2 >$

2. *La continuité*

   Soit $\{\varphi_n\} \to 0$ *dans* $D(\mathbb{R})$, *on a* $< \delta, \varphi_n >= \varphi_n(0) \to 0$ *quand* $n \to +\infty$

   donc δ est une fonctionnelle linéaire continue sur $D(\mathbb{R})$

Remarque 27 *δ n'est pas régulière*

Supposons qu'elle est définue par une fonction loc-intégrable, alors on aura

$$\varphi(0) = <\delta, \varphi> = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)\,dx, \forall\varphi \in D(\mathbb{R})$$

Soit $\varphi(x) = \rho\left(\frac{x}{a}\right), a > 0$ *où* ρ *est la fonction définue par* $\rho(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{1-x^2}\right), \text{ si } |x| \leq 1 \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$

$$\textit{Alors } \exp(-1) = \int_{-a}^{+a} \delta(x)\exp\left(\frac{-a^2}{a^2-x^2}\right)dx$$

C'est -à -dire

$$\exp(-1) \leq \exp(-1)\int_{-a}^{+a} |\delta(x)|\,dx \to 0, \textit{ quand } a \to 0^+$$

donc $\exp(-1) \leq 0$ *contraduction*

Remarque 28 *Même résonnement pour la distribution* δ_a

Propriétés

1. $\delta(x) = \delta(-x)$
2. $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x), a \neq 0.$
3. $\delta\left(x^2 - a^2\right) = \frac{1}{2|a|}\left[\delta(x-a) + \delta(x+a)\right]$

Exemple 29 (Valeur principale de Cauchy) *La fonction* $x \to \frac{1}{x}$ *n'est pas loc-intégrable sur* $\mathbb{R}$ *mais elle l'est sur* $\mathbb{R}^*$

$$V.P\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx \overset{déf}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx \ \forall\varphi \in D$$

Proposition 30 *Pour toute fonction test $\varphi \in D(\mathbb{R})$*

La limite V.P $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \overset{déf}{=} \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$ *existe et est une distribubtion sur* $\mathbb{R}$ *et appelée valeur principale de* $\frac{1}{x}$ *et noté vp*$\left(\frac{1}{x}\right)$

Preuve. En effet, si $\varphi \in D(\mathbb{R})$ et soit $a > 0/\ Supp(\varphi) \subset [-a, a]$, en utilisant le développement de taylor, on peut écrire $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$, où $\psi(x)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Alors si $\varepsilon < a$

$$\int_{\varepsilon}^{a} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \varphi(0) \int_{\varepsilon}^{a} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{a} \psi(x)\, dx$$

et

$$\int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = -\varphi(0) \int_{\varepsilon}^{a} \frac{1}{x} dx + \int_{-a}^{-\varepsilon} \psi(x)\, dx$$

d'où

$$\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{-a}^{-\varepsilon} \psi(x)\, dx + \int_{\varepsilon}^{a} \psi(x)\, dx$$

et puisque $\psi(x)$ est continue en $x = a$,alors

$$vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{-a}^{a} \psi(x)\, dx$$

ie $< vp\left(\frac{1}{x}\right), \varphi >= \int_{-a}^{a} \psi(x)\, dx$

- Il est clair que $vp\left(\frac{1}{x}\right)$ est linéaire sur $D(\mathbb{R})$

- La continuité

  Montrons que $vp\left(\frac{1}{x}\right)$ est continue sur $D(\mathbb{R})$

Soient $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $D(\mathbb{R})$ qui converge vers zéro dans $D(\mathbb{R})$ et $a > 0$, tel que $Supp(\varphi_n) \subset [-a, a], \forall n \in \mathbb{N}$, alors on peut écrire

$$\begin{aligned}
\left|< vp\left(\frac{1}{x}\right), \varphi_n >\right| &= \left|\int_{-a}^{a} \psi(x)\, dx\right| \\
&= \left|\int_{-a}^{a} \frac{\varphi_n(x) - \varphi(0)}{x} dx\right| \\
&\leq \int_{-a}^{a} \frac{1}{|x|} \left|\int_0^x |\varphi_n'(t)|\, dt\right| dx \\
&\leq 2a \sup_{[-a,a]} |\varphi_n'(x)| \to 0, \text{quand } n \to +\infty
\end{aligned}$$

■

Ordre d'une distribution

Théor■me 31 *Une fonctionnelle linéaire sur D est une distribution si, et seulement, si pour tout compact K et pour toute fonction $\varphi \in D$ avec $supp\varphi \subset K$, il existe une constante $C > 0$, et un entier m tel que:*

$$|< T, \varphi >| \leq C \sum_{j=0}^{m} \sup_{x\in K} \left|\varphi^{(j)}(x)\right| \tag{1}$$

Remarque 32 *Dans le cas de plusieurs variables, l'expression* (1) *est évidement remplacée par*

$$|< T, \varphi >| \leq C \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in K} |D^{\alpha}\varphi(x)|$$

Définition 33 *L'entier m dans* (1) *peut dépendre du compact K, si par contre un même m est valable pour tous les compacts on dit que la distribution f est d'ordre inférieur ou égal à m.*

Exemple 34 1. *Toute distribution régulière est d'ordre zéro*

Soit $R > 0$ *tel que le support de* φ *soit inclus dans* $[-R, R]$. *On a*

$\forall \varphi \in D < T_f, \varphi > \overset{déf}{=} \int_{-R}^{+R} f(x) \varphi(x) \, dx$

donc

$$\begin{aligned} |< T_f, \varphi >| &\leq \int_{-R}^{+R} |f(x) \varphi(x)| \, dx \\ &\leq \sup_{x \in [-R,R]} |\varphi(x)| \int_{-R}^{+R} |f(x)| \, dx \\ &= C \sup_{x \in [-R,R]} |\varphi(x)| \end{aligned}$$

Tel que $C = \int_{-R}^{+R} |f(x)| \, dx$

La distribution est donc bien d'ordre zéro

2. *La distribution de Dirac est d'ordre zéro.*

   $\forall \varphi \in D, < \delta, \varphi >= \varphi(0)$

   donc $|< \delta, \varphi >| = |\varphi(0)| \leq \sup |\varphi(x)|$

3. *L' ordre de la distribution valeur principale est inférieur ou égal à* 1.

   Soit $R > 0$ *tel que le support de* φ *soit inclus dans* $[-R, R]$. *On a*

$$\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{R \geq |x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{R \geq |x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx$$

Or, on a

$$\frac{|\varphi(x) - \varphi(0)|}{x} \leq \|\varphi`\|_\infty$$

donc

$$\int_{R \geq |x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx \leq 2R \|\varphi`\|_\infty$$

Et comme $< vp\left(\frac{1}{x}\right), \varphi > \overset{déf}{=} \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \ \forall \varphi \in D$

Alors $< vp\left(\frac{1}{x}\right), \varphi > \leq 2R \left\| \varphi' \right\|_\infty = 2R \sup\limits_{x \in [-R,R]} \left| \varphi'(x) \right|$

La distribution est donc bien d'ordre inférieur ou égal à 1.

- *Montrons que* $vp\left(\frac{1}{x}\right)$ *est exactement d'ordre* 1.

Supposons par l'absurde qu'elle soit d'ordre 0*. Alors on aurait l'inégalité :*

$$\left| vp\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq C \sup_{x \in [-R,R]} |\varphi|$$

Pour $n > 1$, *considérons la suite* $(\varphi_n) \in D(\mathbb{R})$ *telle que :* $\begin{cases} 0 \leq \varphi \\ \varphi_n = \\ \varphi_n = 0 \text{ sur }] \end{cases}$

Il est facile de voir $\sup\limits_{\mathbb{R}} |\varphi_n| = 1$.

D'autre part, pour $\varepsilon \leq \frac{1}{2n}$, *on a*

$\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi_n(x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{2n}}^{2} \frac{\varphi_n(x)}{x} dx \geq \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{x} dx = \ln n$

Donc, $< vp\left(\frac{1}{x}\right), \varphi_n > \geq \ln n$

et on ne peut avoir une inégalité du type de la première. Contradiction.

Support d'une distribution

Définition 35 *Soit* $f \in D'(\Omega)$ *et* W *un ouvert contenu de* Ω*. On dit que* f *est nulle dans* W *dans si* $< f, \varphi >= 0, \forall \varphi \in D(W)$.

Lemme 36 *Soit* $(w_i)_{i \in I}$ *une famille d'ouverts de* Ω *et* $W = \underset{i \in I}{\cup} w_i$*. Si* $f \in D'(\Omega)$ *est nulle dans chaque* w_i*, alors* f *est nulle dans* W*.*

Définition 37 *Pour $f \in D^{`}(\Omega)$, le support de f que l'on note $Supp(f)$ est le complémentaire du plus grand ouvert ou f est nulle.*

Propriétés:

$\mathbf{P}_1$ $x_0 \notin Supp(f) \Leftrightarrow \exists V_{x_0}$ voisinage de x_0 tel que $< f, \varphi >= 0, \forall \varphi \in D(V_{x_0})$.

$\mathbf{P}_2$ $x_0 \in Supp(f) \Leftrightarrow \forall V_{x_0}\ \exists\ \varphi \in D(V_{x_0})\ /\ < f, \varphi > \neq 0.$

$\mathbf{P}_3$ $Supp(f) \subset F \Leftrightarrow f = 0$ dans C_F.

Exemple 38 *1. $Supp(\delta) = \emptyset, \delta$ s'annulle sur $\mathbb{R}^*$*

2. Si T_f est la distribution associée à une fonction continue f, alors $Supp(T_f) = Supp(f)$.

En effet, posons $F = Supp(f)$

- *Montrons que $Supp(T_f) \subset F$*
  Soit $\varphi \in D\ /\ Supp(\varphi) \subset F^c$,comme $f = 0$ sur $Supp(\varphi)$, alors $< T_f, \varphi >= 0$ c'est à dire $T_f = 0$ sur F^c
  Dés lors $Supp(\varphi) \subset (F^c)^c = F = Supp(f)$.
- *Il reste à prouver que $Supp(f) \subset Supp(T_f)$.*
  Soit $x \in F = Supp(f)$
  On suppose que $x \notin Supp(f)$
  Donc $\exists\ I =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\ /\forall \varphi \in D$ ayant son support dans $I, < T_f, \varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx$, sur I. Délors, f est nulle sur I et par consequent $I \cap F = \emptyset$,donc $x \notin F$ ce qui absurde.

Opérations sur les distributions

Plusieurs opérations définies pour les fonctions peuvent être prolongées de la même manière pour les distributions.

Addition

Définition 39 $\forall f, g \in D^{\backprime}(\Omega)$,
$f+g$ est la distribution définie par:

$$< f+g, \varphi > = < f, \varphi > + < g, \varphi >, \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Multiplication par une constante

Définition 40 $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ *et* $\forall f \in D^{\backprime}(\Omega)$,
λf est la distribution définie par:

$$< \lambda f, \varphi > = < f, \lambda \varphi >, \forall \varphi \in D(\Omega).$$

La translaté d'une distribution

On a $\forall f \in Loc(\mathbb{R}^n)$ et $\forall a \in \mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x-a)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x+a)\,dx, \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$$

Donc,

Définition 41 *Pour $f \in D^{`}(\Omega)$ et $a \in \mathbb{R}^n$.*
On définit la translaté de la distribution f par

$$< f(x-a), \varphi(x) >=< f(x), \varphi(x+a) >, \forall \varphi \in D(\Omega).$$

- De là, on a

$$\begin{aligned} < & \delta(x-a), \varphi(x) >=< \delta(x), \varphi(x+a) > \\ = & \varphi(a), \forall \varphi \in D(\Omega). \end{aligned}$$

Multiplication par fonction de classe C^{∞}

La multiplication et la division des distributions ne sont pas toujours valable

Exemple 42 $f(x) = g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \in D^{`}(\mathbb{R})$ *(Loc-intégrable)*
Mais $f(x) \times g(x) = \frac{1}{|x|} \notin D^{`}(\mathbb{R})$ *(non Loc-intégrable)*

Définition 43 *Soit $f \in D^{`}(\Omega)$ et $g(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$.*
La fonctionnelle linéaire gf définit sur $D(\Omega)$, une distribution par

$$< gf, \varphi >=< f, g\varphi >, \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Propriètés

$\mathbf{P}_1$ Pour $f_1, f_2 \in D^{`}(\Omega)$ et $g_1, g_2 \in C^{\infty}$, on a

$$\begin{aligned} (g_1 + g_2) f_1 &= g_1 f_1 + g_2 f_2, \\ (g_1 g_2) f_1 &= g_1 (g_2 f_2), \\ g_1 (f_1 + f_2) &= g_1 f_1 + g_1 f_2 \end{aligned}$$

$\mathbf{P}_2$ Pour $f \in D^{`}(\Omega)$ et $g \in C^{\infty}(\Omega)$, on a

$$Supp(gf) \subset Supp(g) \cap Supp(f)$$

Exemple 44 *1. Si $g \in C^{\infty}(\Omega)$ et $x_0 \in \Omega$, on a:*

$$g\delta(x - x_0) = g(x_0)\,\delta(x - x_0)$$

En pariculier sur $\mathbb{R}$ on a:

$$x^n\delta = 0, \forall n \geq 1$$

2. Le produit $\cos x\delta$ est une distribution définie sur $D(\Omega)$ par

$$< \cos x\delta, \varphi >=< \delta, \cos x\varphi >= \varphi(0)\,, \forall\varphi \in D(\Omega)\,.$$

Proposition 45 *Si $f \in D^{\backprime}(\Omega)$,on a équivalence entre les deux assertions suivantes.*

a) *$xf = 0$ au sens de $D^{\backprime}(\Omega)$*

b) *$f = c\delta$ où $c \in \mathbb{C}$ et δ est la distribution de Dirac.*

Dérivée d'une distribution

Fonctions continues

Soit f une fonction continument dérivable,on a :

En utilisant l'intégration par parties avec φ a support borné

$$\begin{aligned}
\forall\varphi &\in D(\mathbb{R})\,, < f^{\backprime}(x)\,, \varphi(x) >= \textstyle\int_{\mathbb{R}} f^{\backprime}(x)\,\varphi(x)\,dx \\
&= [f\varphi]_{-\infty}^{+\infty} - \textstyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi^{\backprime}(x)\,dx \\
&= - < f(x)\,, \varphi^{\backprime}(x) >
\end{aligned}$$

Cela conduit à la définition suivante

Définition 46 *La dérivée d'une distribution $T \in D^{\backprime}$et notée par $T^{\backprime}$ est définie par:*

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}), < T^{\backprime}, \varphi > \overset{déf}{=} - < T, \varphi^{\backprime} > .$$

- On remarque que c'est bien une distribution

$$\begin{cases} 1.\,\text{Si } \ \varphi \in D \Longrightarrow \varphi^{\backprime} \in D \\ 2.\,\text{Si } \ \varphi_n \to \varphi \text{ dans } D \ \Longrightarrow \varphi_n^{\backprime} \to \varphi^{\backprime} \text{ dans } D \\ 3.T \text{ est continue} \Longrightarrow T^{\backprime} \text{ est aussi continue} \end{cases}$$

- Dérivons une seconde fois

$$\begin{aligned} \forall \varphi &\in D(\mathbb{R}), < T^{\backprime\backprime}, \varphi >= - < T^{\backprime}, \varphi^{\backprime} > \\ &= < T, \varphi^{\backprime\backprime} > \end{aligned}$$

Proposition 47 *Toute distribution est indéfiniment dérivable et on a*

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}), < T^{(k)}, \varphi >= (-1)^{(k)} < T, \varphi^{(k)} >$$

Remarque 48 *Soient $T \in D^{\backprime}$ et $g \in C^{+\infty}$, on montre que*

$$(gT)^{\backprime} = g^{\backprime}T + gT^{\backprime} et \lim_{h \to 0} \frac{T(x+h) - T(x)}{h} = T^{\backprime}$$

Définition 49 *On dit qu'une distribution T une primitive d'une distribution S si, seulement, si $T^{\backprime} = S$*

Remarque 50 *Les seulles solutions de l'équation $T^{\backprime} = 0$ sont les constantes.*

Remarque 51 *Si f est continement dérivable, sa dérivée aux sens des distributions coincide avec sa dérivée usuel*

Exemple 52 $f(x) = \cos x,\ f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
&< \cos' x, \varphi(x) >= - < \cos x, \varphi'(x) > \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \cos x \times \varphi'(x)\, dx \\
&= [\cos x \varphi(x)]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{\mathbb{R}} \cos' x \times \varphi(x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \cos' x \times \varphi(x)\, dx \\
&= < \sin x, \varphi(x) > \\
\textit{donc, } \cos' x &= \sin x
\end{aligned}$$

Exemple 53

$$\begin{aligned}
&< \delta', \varphi >= - < \delta, \varphi' >= -\varphi'(0) \\
&< \delta'_a, \varphi >= - < \delta_a, \varphi' >= -\varphi'(a)
\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}
&< \delta'', \varphi >= - < \delta', \varphi' > \\
&= < \delta, \varphi'' >= \varphi'(0)
\end{aligned}$$

Et par recurence on peut avoir
$< \delta^{(k)}, \varphi >= (-1)^k \varphi^{(k)}(0)$

Fonctions discontinues

Considérons la fonction de Heaviside H

$$H(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x < 0 \\ \frac{1}{2}, \text{ si } x = 0 \\ 1, \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

$H \in L_{loc}(\mathbb{R})$,donc elle définit une distribution régulière

$$\begin{aligned} < & H^{\backprime}(x), \varphi(x) >= - < H(x), \varphi^{\backprime}(x) > \\ = & -\int_{\mathbb{R}} H(x) \times \varphi^{\backprime}(x)\, dx \\ = & -\int_0^{+\infty} \varphi^{\backprime}(x)\, dx \\ = & \varphi(0) \\ = & < \delta, \varphi > . \end{aligned}$$

On a donc $H^{\backprime} = \delta$, ainsi, la discontinuité de H apparait dans sa dérivée sous forme d'une masse ponctuelle.

Pour généraliser, considérons une fonction continue et dérivable (au sens des fonctions)

- Pour $x < a$ et $x > a$, supposons que f admette pour chacune des dérivées, une limite à gauche, $f^{(k)}(a^-)$ et à droite $f^{(k)}(a^+)$ de a.
- On note $\sigma_k(a) = f^{(k)}(a^+) - f^{(k)}(a^-)$, le saut en $x = a$, pour la dérivée $k^{ième}$ de f.

On a

$$\begin{aligned} < & T_f^{\backprime}(x), \varphi(x) >=< T_f(x), \varphi^{\backprime}(x) > \\ = & \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi^{\backprime}(x)\, dx = -\int_{-\infty}^{a^-} f(x)\varphi^{\backprime}(x)\, dx - \int_{a^+}^{+\infty} f(x)\varphi^{\backprime}(x)\, dx \\ = & -[f(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{a^-} + \int_{-\infty}^{a^-} f^{\backprime}(x)\varphi(x)\, dx - [f(x)\varphi(x)]_{a^+}^{+\infty^-} + \int_{a^+}^{+\infty} f^{\backprime}(x)\varphi(\end{aligned}$$

φ est continue en a, on obtient

$$T_f^{\backprime}(x), \varphi(x) >= \sigma_0(a)\varphi(a) + \int_{\mathbb{R}} f^{\backprime}(x)\varphi(x)\, dx$$

c(est -à- dire dans $D^{\backprime}$

$$T_f^{\backprime} = T_{f^{\backprime}} + \sigma_0(a)\delta_a$$

Proposition 54 (Formule de sauts) *Soit f une fonction continue par morceau et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$.*

On note $\sigma_0(a) = f(a^+) - f(a^-)$ le saut signé de f en a.

La dérivée de T_f dans D' est donnée par

$$\begin{aligned} T_f' &= T_{f'} + \sigma_0(a)\,\delta_a \\ &= \sigma_0 < \delta_a, \varphi > + < f', \varphi > \end{aligned}$$

En général

$$T_f^{(k)} = T_{f^{(k)}} + \sigma_0(a)\,\delta_a^{(k-1)} + ... + \sigma_{k-1}(a)\,\delta_a$$

Exemple 55 $T' = [H'] + 1 \times \delta = \delta$

Exemple 56

$$H(x)\cos x = \begin{cases} \cos x, \ \textit{pour } x > 0 \\ 0, \ \textit{pour } x < 0 \end{cases}$$

Elle a une discontinuité en $x = 0$

Parsuite

$$(H(x)\cos x)' = -H(x)\sin x + \delta$$

Cas des fonctions de plusieurs variables

Dans le cas de plusieurs variables, on définit la dérivée

$$\begin{aligned} &< \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi >= - < T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} >, i = 1, 2, ..., n \\ &< \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j}, \varphi >= - < \frac{\partial T}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} > \\ &= < T, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i} >=< T, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} >, \text{ car } \varphi \in C^\infty \end{aligned}$$

En général

$$< D^{(k)}T, \varphi >= (-1)^{(k)} < T, D^{(k)}\varphi >$$

Convergence des distributions

Définitions et propriétés

Définition 57 • *On dit qu'une suite de distributions* (T_n) *converge dans* $D^{\backprime}$ *vers une distribution* T *, si pour tout* $\varphi \in D$*, la suite* $< T_n,\varphi >$ *converge dans* $\mathbb{C}$ *vers le nombre* $< T,\varphi >$ *.*

C'est à dire

$$(T_n) \xrightarrow{D^{\backprime}} T \Longleftrightarrow \forall \varphi \in D :< T_n, \varphi > \xrightarrow{\mathbb{C}} < T, \varphi >$$

• *On dit qu'une série de distributions* $\sum\limits_{n\geq 0} T_n$ *converge dans* $D^{\backprime}$ *et a pour somme la distribution* T*, si pour tout* $\varphi \in D$*, la série numérique* $\sum\limits_{n\geq 0} < T_n, \varphi >$ *converge dans* $\mathbb{C}$ *et a pour somme le nombre* $< T, \varphi >$ *.*

$$\sum T_n \xrightarrow{D^{\backprime}} T \Longleftrightarrow \forall \varphi \in D : \sum < T_n, \varphi > \xrightarrow{\mathbb{C}} < T, \varphi >$$

Il sagit de la convergence simple dans $D^{\backprime}$*.*

Exemple 58 $(\delta_n) \xrightarrow{D^{\backprime}} 0$

En effet, on a $< \delta_n, 0 >= \varphi(n)$ *et puisque* φ *a support borné, alors* $\lim\limits_{n\to\infty} < \delta_n, \varphi >= \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(n) = 0.$

Proposition 59 *Si* $f_n \in L^1_{loc}$ *et* $f_n \overset{unif}{\rightarrow} f$*, alors* $f \in L^1_{loc}$ *et* (f_n) *converge vers la distribution* f *associée à la fonction* f*.*

Preuve.

- $$\begin{aligned} \left|< f_n(x), \varphi(x) > - < f(x), \varphi(x) >\right| &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} (f_n(x) - f(x))\,\varphi(x)\,d \right. \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left|(f_n(x) - f(x))\right| \left|\varphi(x)\right| \\ &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|(f_n(x) - f(x))\right| \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi \end{aligned}$$

  Comme $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|(f_n(x) - f(x))\right| = 0$ (*convergence uniforme*)

  et que $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|\,dx$ *est finie* $(\varphi \in D)$*.*

- $$\int_K |f(x)|\,dx \leq \int_K |f_n(x)|\,dx + \int_K |f_n(x) - f(x)|\,dx$$

  où K *est compact donc* $f \in L^1_{loc}$*.*

■

Proposition 60 *Soit* $f \in L^1_{loc}$

Supposons

1. $f_n(x) \overset{c.s.p.p}{\rightarrow} f(x)$*.*

2. $\exists\ g \in L^1_{loc} : |f_n(x)| \leq g(x)$*.*

   Alors $f \in L^1_{loc}$ *et* (f_n) *est une suite de distribution associée à* (f_n) *converge vers la distribution* f *ie* $< f_n, \varphi > \rightarrow < f, \varphi >$*.*

Preuve. Les hypothèses du théorème de convergence dominée de Lebesgue étant satisfaites, $f \in L^1_{loc}$

$\forall \varphi \in D$, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} &< f_n, \varphi >= \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,\varphi(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\varphi(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx \\
&= < f, \varphi > .
\end{aligned}$$

■

Proposition 61 a) *Si une suite de distributions* $(T_n) \xrightarrow{D'} T$, *alors* $(T'_n) \xrightarrow{D'} T'$.

b) *Toute série de distributions convergente, est dérivable terme à terme.*

Preuve.

a) On a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} &< T'_n, \varphi >= -\lim_{n\to\infty} < T_n, \varphi' > \\
&= -< T, \varphi' > \\
&= < T', \varphi > .
\end{aligned}$$

■

Exemple 62 $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}, n \in \mathbb{N}^*$,

$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

$f'_n(x) = \cos(nx)$, *au sens classique* $f'_n(x)$ *diverge.*

Mais au sens de distributions, la suite $(f_n^{`}) \to 0$,*en vertu de la proposition précédente.*

En effet

Soit $\varphi \in D$ *avec* $supp(\varphi) = [a, b]$, *on a*

$< f_n^{`}, \varphi >= - < f_n, \varphi^{`} >= -\frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(nx) . \varphi^{`}(x)\, dx$

d'où

$$\begin{aligned} < \; f_n^{`}, \varphi > &\leq \frac{1}{n} \int_a^b |\sin(nx)| \,. \sup_{x\in[a,b]} |\varphi^{`}(x)|\, dx \\ &\leq \frac{1}{n} \int_a^b \sup_{x\in[a,b]} |\varphi^{`}(x)|\, dx \\ &\leq \frac{b-a}{n} . \sup_{x\in[a,b]} |\varphi^{`}(x)| \end{aligned}$$

Par conséquent $\lim_{n\to\infty} < f_n^{`}, \varphi >= 0$

Proposition 63 *Si* (f_n) *une suie de fonctions telles que*

i) $f_n(x) \geq 0$ *pour* $|x| \leq c, c > 0$ *fixé*

ii) $(f_n) \xrightarrow{unif} 0$ *dans tout intervalle ne contenant pas l'origine.*

iii) $\forall a > 0$ *fixé,* $\lim_{n\to\infty} \int_{-a}^{a} f_n(x)\, dx = 1$.

Alors la suite (f_n) *converge vers la distribution de Dirac* δ

Définition 64 *On dit qu'une suite de fonctions localement intgrable* (f_n) *converge dans* L^1 *vers* f *si* $\lim_{n\to+\infty} \int |f_n - f|\, dx = 0$, *on dit aussi que* (f_n) *converge vers* f.

Proposition 65 *Soit* (f_n) *une suite de fonctions dans* L^1_{loc}, *si* (f_n) *converge vers* f *dans* L^1_{loc}, *alors elle converge dans vers* f *dans* $D^{`}$.

Preuve. Soit $\varphi \in D$, avec supp$\varphi \subset [a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

On a

$$\begin{aligned} |< f_n - f, \varphi >| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f_n - f)(x)\, \varphi(x)\, dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx. \sup_{x \in [a,b]} |\varphi(x)| \end{aligned}$$

■

Sur-ensembles de D

Définition 66 *On définit et on note S l'espace des fonctions réelles ou complexe sur $\mathbb{R}$ indéfiniment dérvables, décroissant à l'infini, ainsi que toutes leurs dérivées plus vite que toutes les puissances de $\frac{1}{|x|}$.*

$$S = \left\{ \varphi \in C^{\infty}, \forall\ m,\ n \in \mathbb{N}, \lim_{|x| \to \infty} \left| x^m \varphi^{(n)}(x) \right| = 0 \right\}$$

Exemple 67 $x \mapsto e^{-x^2} \in C^{\infty}$ *et* $\lim_{|x| \to \infty} x^m e^{-x^2} = 0$

Elle est décroissante rapide et donc $x \mapsto e^{-x^2} \in S$.

Exemple 68 $x \mapsto e^{-|x|}$ *est décroissance rapide mais* $\notin C^{\infty}$, *donc* $x \mapsto e^{-|x|} \notin S$.

Exemple 69 $x \mapsto \frac{1}{1+x^2} \in C^{\infty}$, *mais n'est pas à décoissance rapide, donc* $x \mapsto \frac{1}{1+x^2} \notin S$.

Définition 70 *On dit qu'une suite des fonctions* (φ_n) *de* S *converge dans* S *vers* φ *si pour tout* $m, n \in \mathbb{N}$, *la suite* $\left(x^m \varphi_n^{(n)}(x) \right)$ *converge uniformment vers* $x^m \varphi^{(n)}(x)$ *sur* $\mathbb{R}$.

Définition 71 *On définit et on note ε l'espace des fonctions réelles ou complexe sur $\mathbb{R}$ indéfiniment dérvables à support quelconque.*

Définition 72 *On dit que la suite (φ_n) converge dans ε vers φ si, et seulemement, si la suite $\left(\varphi_n^{(k)}\right)$ converge uniformément vers $\varphi^{(k)}$ sur tout compact*

Remarque 73 $D \subset S \subset \varepsilon$.

Sur-ensembles de $D^{\backprime}$

$S^{\backprime}$ espace des distributions à support compact

Définition 74 *Une distribution de $S^{\backprime}$ (temprée) est une fonctionnelle linéaire et continue sur S.*

Définition 75 *Une distribution de $\varepsilon^{\backprime}$ (à support borné) est une fonctionnelle linéaire et continue sur ε.*

Remarque 76 $\varepsilon^{\backprime} \subset S^{\backprime} \subset D^{\backprime}$.

Les distributions à plusieurs dimensions

Définition et exemples

Soit D^α, l'opérateur différentiel d'ordre $\alpha, |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$

$D^\alpha = \frac{D^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$

Si $\varphi(x) \in D \;/ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$D^\alpha \varphi(x) = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}} \varphi(x_1, x_1, ..., x_n)$ existent $\forall |\alpha|$.

Exemple 77 $\varphi(x) = \begin{cases} 0, \; si \;\; \|x\| \geq 1 \\ e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}}, si \;\; \|x\| \leq 1 \end{cases}$

avec $\|x\|$, la norme de x dans $\mathbb{R}^n$.

Remarque 78 *La convergence dans $D(\mathbb{R}^n)$ s'énonce de la même façon dans $\mathbb{R}$ et la définition reste la même.*

Distributions régulières sur $\mathbb{R}^3$

Définition 79 *Les fonctions localement intégrables $f(x)$ (Intégrables sur tout parallélépipede borné K de $\mathbb{R}^3$), définissent des distributions régulières*

$$\forall\varphi \in D, < T_f, \varphi > \overset{déf}{=} \int\int\int_K f(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Distributions sengulières sur $\mathbb{R}^3$

Exemple 80 (Distribution ponctuelle de Dirac en a) *Pour un point $a \in \mathbb{R}^3$, elle se note δ_a et se définit comme suit*

$$\forall\varphi \in D, < \delta_a, \varphi > \overset{déf}{=} \varphi(a).$$

Exemple 81 (Distribution superficielle de Dirac dans $\mathbb{R}^3$) *Soit S une surface dans $\mathbb{R}^3$. Elle se note δ_S et se définit par:*

$$\forall\varphi \in D, < \delta_S, \varphi > \overset{déf}{=} \int\int_S \varphi ds$$

Exemple 82 (Distribution linéaire de Dirac dans $\mathbb{R}^3$) *Soit l une courbe dans $\mathbb{R}^3$. Elle se note δ_l et se définit par:*

$$\forall\varphi \in D, < \delta_l, \varphi > \overset{déf}{=} \int\int_l \varphi dl$$

Dérrivation d'une distribution

Définition 83

$$\forall\varphi \in D, < D^k T, \varphi > \overset{déf}{=} < (-1)^{|\alpha|} < T, D^\alpha \varphi >$$

Exemple 84 $\forall\varphi \in D, < \delta'_{x_1}, \varphi > = - < \delta, \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} > = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(0,0,0).$

Convolution des distributions

Convolution

Produit tensoriel

Soient $f(x)$ et $g(y)$ deux fonctions localement intégrables sur $\mathbb{R}$

Définition 85 *Le produit tensoriel (ou direct) de* f *et* g *est une application, notée*

$$\begin{array}{rcl} f\otimes g & : & \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f\otimes g(x,y)=f(x)\,g(y) \end{array}$$

$f\otimes g\in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^2\right)$

- On a pour tout compact $K\subset\mathbb{R}^2$

$$\int_K |f\otimes g(x,y)|\,dxdy \le \int_K |f(x)|\,dx\int_K |g(y)|\,dy<\infty$$

Donc $f\otimes g$ détermine une distribution

- $\forall \varphi \in D(\mathbb{R}\times\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
< \ f\otimes g, \varphi > &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f\otimes g)(x,y)\,\varphi(x,y)\,dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,g(y)\,(x,y)\,\varphi(x,y)\,dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\,(x,y)\,\varphi(x,y)\,dy\right)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,(x,y)\,\varphi(x,y)\,dx\right)dy
\end{aligned}$$

En vertu du théorème de Fubini. Ces relations s'écrivent encore sous la forme

$$\begin{aligned}
< \ f\otimes g, \varphi > &= < f(x), < g(y), \varphi(x,y) >> \\
&= < g(y), < f(x), \varphi(x,y) >>
\end{aligned}$$

Cas particulier

Si $\varphi(x,y) = u(x)\,v(y) \,/ u \in D(\mathbb{R}), v \in D(\mathbb{R})$

Alors

$$\begin{aligned}
< \ f\otimes g, u\otimes v &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x)\,g(y)\,u(x)\,v(y)\,dxdy \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)\,u(x)\,dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} g(y)\,v(y)\,dy\right) \\
&< \ f,u > \times < g,v >
\end{aligned}$$

Exemple 86 $f(x) = \begin{matrix} 1, si\ x>0 \\ 0,\ \ si\ x<0 \end{matrix}, g(y) = \begin{matrix} 1, si\ x>0 \\ 0,\ \ si\ x<0 \end{matrix}$

$$(f\otimes g)(x,y) = f(x)\,g(y) = \begin{matrix} 1, si\ x>0\ \ et\ y>0 \\ 0,\ \ si\ x<0\ \ et\ y<0 \end{matrix}$$

Généralisation
$\forall T$ et $S \in D$'
$S \otimes T$ est défini comme la distribution

$$\begin{aligned}\forall\varphi(x,y) &\in D\left(\mathbb{R}^2\right) < S\otimes T,\varphi >=< S(x)\,T(y)\,,\varphi(x,y) > \\ &< S(x)\,,< T(y)\,,\varphi(x,y) >>\end{aligned}$$

Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^m)\,,\ g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} f\otimes g &: \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto f\otimes g(x,y) = f(x)\,g(y) \\ x &= (x_1,x_2,...,x_m)\,, y=(y_1,y_2,...,y_n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &< f\otimes g,\varphi >= \int_{\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n}(f\otimes g)(x,y)\,\varphi(x,y)\,dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\,dx\int_{\mathbb{R}^n} g(y)\,\varphi(x,y)\,dy\end{aligned}$$

Remarque 87 $f\otimes g \neq g\otimes f$

Exemple 88 *Soient a et $b\in\mathbb{R}$, on a $\delta_a\otimes\delta_b=\delta_{(a,b)}$*
En effet:

$$\begin{aligned}\forall\varphi &\in D, < \delta_a\otimes\delta_b,\varphi >=< \delta_{ax}, < \delta_{by},\varphi(x,y) >> \\ &= < \delta_{ax},\varphi(x,b) > \\ &= \varphi(a,b) \\ &= < \delta_{(a,b)},\varphi >\end{aligned}$$

Propriétés

1. S, T_1et $T_2 \in D`$

$$S \otimes (T_1 + T_2) = S \otimes T_1 + S \otimes T_2$$

2. $R \in D`\left(\mathbb{R}^l\right), S \in D`(\mathbb{R}^m)$, et $T \in D`(\mathbb{R}^n)$

   Alors

$$(R \otimes S) \otimes T = R \otimes (S \otimes T)$$

3. $$Supp\,(S \otimes T) = SuppS \times SuppT, \forall S \in D`(\mathbb{R}^m), T \in D`(\mathbb{R}^n)$$

Convolution des fonctions

Définition 89 *On définit le produit de convolution (quand il existe) de deux fonctions f et g par*

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g(x-t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\, g(t)\, dt, x \in \mathbb{R}$$

$f * g$ est la convolée de f et g.

- Si $f * g$ existe

$$f * g = g * f$$

  Il suffit de poser $u = x - t$

- Si $f * g$ et $f * h$ existent, alors

  $f * (\alpha g + \beta h)$ existe aussi et on a

$$f * (\alpha g + \beta h) = \alpha(f * g) + \beta(f * h)$$

Proposition 90 *Soient f et $g \in L^2(\mathbb{R})$, alors $f*g$ existe et on a* $|f*g|_\infty \leq \|f\|_2 \|g\|_2$

Remarque 91 *Si f et $g \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow f*g \in L^1(\mathbb{R})$*

Si f et $g \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow f*g$ existe mais peut être $f*g \notin L^2(\mathbb{R})$.

Définition 92 *Une fonction f est dite causale si $f(t) = 0, t < 0$*

$$\begin{aligned} f(t) &= 2f_p(t) = 2f_i(t), t > 0 \\ &\text{où} \\ f_p(t) &= \frac{f(t)+f(-t)}{2}, f_i(t) = \frac{f(t)-f(-t)}{2} \end{aligned}$$

Car pour, $t > 0$, on a $f(-t) = 0$

Proposition 93 *Soient f et g deux fonctions continues et causales, alors*

a) *$f*g$ existe, elle est causale et on a*

$$(f*g)(x) = \int_0^x f(t)\, g(x-t)\, dt = \int_0^x g(t)\, f(x-t)\, dt$$

b) *On a*

$$(f*g)*h = f*(g*h)$$

,où h est causale

Convolution des distributions

Soient f et g deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$, on a pour tout $\varphi \in D$

$$< \ f * g, \varphi >= \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x)\, \varphi(x)\, dx$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g(x-t)\, \varphi(x)\, dtdx$$

En posant $u = t, v = x - t$, on obtient

$$< f * g, \varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, g(v)\, \varphi(u+v)\, dudv$$

donc $< f * g, \varphi >=< f \otimes g, \varphi(u+v) >, \varphi \in D$
Mais si $\varphi \in D(\mathbb{R})$, la fonction

$$\psi : (u,v) \mapsto \psi(u,v) = \varphi(u+v) \notin D\left(\mathbb{R}^2\right)$$

Car son support n'est pas borné
Si $Supp\varphi = [a,b]$,
$(u,v) \in Supp\psi \Longleftrightarrow u + v \in Supp\varphi$ et
$Supp\psi = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / a \leq u + v \leq b\right\}$ est une bonde de $\mathbb{R}^2$

Définition 94 *On définit le produit de convolution (quand il existe) de deux distributions S et T par :*

$$< S * T, \varphi >=< S_x \otimes T_y, \varphi(x+y) >, \forall \varphi \in D$$

où S_x et T_y est le produit tensoriel de S et T.

Propriétés

a) Commutativité: Soient S et $T \in D'$

Si $S * T$ existe alors

$$S * T = T * s$$

En effet

$$\begin{aligned} < & \ S * T, \varphi >=< S_x \otimes T_y, \varphi(x+y) > \\ = & \ < S_x, < T_y, \varphi(x+y) >> \\ = & \ < S_y, < T_x, \varphi(y+x) >> \\ = & \ < T_x, < S_y, \varphi(x+y) >> \\ = & \ < T * s, \varphi > . \end{aligned}$$

b) Distributivité par rapport à l'addition

Soient S,T_1 et $T_2 \in D$'

Si $S * T_1$ et $S * T_2$ existent, alors

$$S * (T_1 * T_2) = S * T_1 + S * T_2$$

c) Associativité

Soient R, S et $T \in D$',on a

$$(R * S) * T = R * (S * T),$$

si deux au moins de ces distributions ont leurs supports bornés d'un même côté.

En effet pour tout $\varphi \in D$

$$\begin{aligned} < & \ (R * S) * T, \varphi >=< (R * S)_x \otimes T_z, \varphi(x+z) > \\ = & \ < (R * S)_x, < T_z, \varphi(x+z) >> \\ = & \ < R_x \otimes S_y, < T_z, \varphi(x+y+z) >> \\ = & \ < R_x \otimes S_y \otimes T_z, \varphi(x+y+z) > \end{aligned}$$

On montre de même que

$$< R * (S * T), \varphi >=< R_x \otimes S_y \otimes T_z, \varphi(x + y + z) >$$

Remarque 95 *En général*

$$(R * S) * T \neq R * (S * T)$$

Il suffit de prendre $R = 1, S = \delta'$ *et* $T = H$ *(distribution de Heaviside)*

Proposition 96 *Pour tout* $T \in D'$*, on a*

$$T * \delta = \delta * T = T$$

En outre

$$T * \delta^{(n)} = T^{(n)}, n \in \mathbb{N}$$

Preuve.

- $T * \delta$ existe puisque $Supp\delta = \{0\}$ est borné

$$\begin{aligned} &< T * \delta, \varphi >=< T_x \otimes \delta_y, \varphi(x, y) > \\ &= < T_x, < \delta_y, \varphi(x, y) >> \\ &= < T_x, \varphi(x) > \\ &= < T, \varphi > \end{aligned}$$

- De même on a

$$\begin{aligned} &< T * \delta^{(n)}, \varphi >=< T_x \otimes \delta_y^{(n)}, \varphi(x, y) > \\ &= < T_x, < \delta_y^{(n)}, \varphi(x, y) >> \\ &= < T_x, (-)^n < \delta_y, \varphi^{(n)}(x, y) >> \\ &= (-)^n < T_x, \varphi^{(n)}(x) > \\ &= < T^{(n)}, \varphi > \end{aligned}$$

■

Proposition 97 (Dérivation d'une convolution) *Soient S et $T \in D'$*
Si $S * T$ existe, alors

$$(S * T)' = S' * T = S * T'$$

et plus généralement

$$D^{\alpha} (S * T) = D^{\alpha} S * T = S * D^{\alpha} T$$

Preuve.

- $\forall \varphi \in D$

$$\begin{aligned} & < (S * T)', \varphi >= - < S * T, \varphi' > \\ &= - < S_x \otimes T_y, \varphi' (x + y) > \\ &= - < S_x, < T_y, \varphi' (x + y) >> \\ &= < S_x, - < T_y, \varphi' (x + y) >> \\ &= < S_x, < T'_y, \varphi (x + y) >> \\ &= < S_x \otimes T'_y, \varphi (x + y) > \\ &= < S * T', \varphi > \\ \text{d'où } (S * T)' &= S * T' \end{aligned}$$

avec la commutativité de la convolution, on obtient aussi $(S * T)' = S' * T$

■

Proposition 98 (Régularisation des distribtions) *Soient T une distribution et f une fonction de classe C^{∞}*
Si $T * f$ existe, alors c'est une fonction de classe C^{∞} donnée par

$$T * f (t) =< T_x, f (t - x) >= g (t), t \in \mathbb{R}$$

Algèbre de convolution

Définition 99 *Une Algèbre de convolution* $\bar{A}$ *est un sous-espace vectoriel de* $D^{\backprime}$ *telque*

i) $\forall S, T \in \bar{A} \Longrightarrow S * T \in \bar{A}$

ii) $\delta \in \bar{A}$ *et* $*$ *est associative dans* $\bar{A}$

Exemple 100
1. $\varepsilon^{\backprime}$ *(distribution à support borné) est une Algèbre de convolution*
2. $D^{\backprime}_{+}$*(distribution sur* $\mathbb{R}$ *à support dans* $\mathbb{R}_{+}$*) une Algèbre de convolution*

Equation de convolution

A et B deux distributions dans Algèbre $\bar{A}$

Définition 101 *On appelle équation de convolution, toute équation* $A * X = B$ *où* X *est une distribution inconue*

Définition 102 *On appelle inverse de* A *dans* $\bar{A}$*, on la note par* A^{-1}*, toute solution* X *de l'équation* $A * X = \delta$*, on dit que* A^{-1} *est une solution élémentaire de* $A * X = B$

- Le problème consiste à étudier l'existance et l'unicité de la solution X dans $\bar{A}$.

Proposition 103 *Si* A *possede une inverse* A^{-1} *dans* $\bar{A}$*, alors* A^{-1} *est unique et* $A * X = B$*,* $B \in \bar{A}$ *a une solution unique donnée par* $X = A^{-1} * B$.

Preuve. En effet, A admet une inverse unique car si $A * X = \delta$ avait une autre solution Y dans $\bar{A}$, on aurait $A * Y = \delta$, compte tenu de la commutativité, $Y * A = \delta$. Délors,

$$\begin{aligned} Y &= Y * \delta \\ &= Y * (A * X) = (Y * A) * X \\ &= \delta * X = X \end{aligned}$$

On deduit par convolution des deux membres de l'équation $A * X = B$ par A^{-1} que :

$$A^{-1} * A * X = A^{-1} * B$$

ie

$$X = A^{-1} * B$$

■

Remarque 104 **a)** A^{-1} *peut ne pas exister (la solution existe)*

b) *Si* A^{-1} *n'existe pas,* $A * X = B$ *n'a pas de solution pour* $B = \delta$.

c) *Il se peut que* $A * X = B$ / A *et* $B \in \bar{A}$ *possede une solution dans* $\bar{A}$ *et une autre solution* $\notin \bar{A}$.

Exemple 105 $S, T \in D'_+$ *et* S^{-1}, T^{-1} *leurs inverse , alors*

$$(S * T)^{-1} = S^{-1} * T^{-1}$$

En effet, comme S *et* T *sont à support bornés*
Le produit $S * T$ *existe, il est commutatif et associatif Délors,*

$$\begin{aligned} (S * T) * \left(S^{-1} * T^{-1}\right) &= \left(S * S^{-1}\right) * \left(T * T^{-1}\right) \\ &= \delta * \delta \\ &= \delta. \end{aligned}$$

Exemple 106 $\left(\delta^{`} - c\delta\right)^{-1} = H\left(x\right)e^{cx}, c \in \mathbb{C}, H$ *est fonction de Heaviside*

$$\begin{aligned}
\left(\delta^{`} - c\delta\right) * H\left(x\right)e^{cx} &= \delta^{`} * H\left(x\right)e^{cx} - c\delta * H\left(x\right)e^{cx} \\
&= \left(H\left(x\right)e^{cx}\right)^{`} - c * H\left(x\right)e^{cx} \\
&= H^{`}\left(x\right)e^{cx} \\
&= \delta e^{cx} \\
&= \delta
\end{aligned}$$

Opérateurs différentiels à coefficients constants

Soit D un opérateur différentil d'ordre m à coeficient constants

$$D = \frac{d^m}{dt^m} + a_1\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + ... + a_{m-1}\frac{d}{dt} + a_m$$

On a

$$D\delta = \delta^{(m)} + a_1\delta^{(m-1)} + ... + a_{m-1}\delta^{`} + a_m\delta$$

Equations différentielles linéaires à coefficients constants

Considérons dans $D^{`}_{+}$,

$$DX = B$$

où $D = \frac{d^m}{dt^m} + a_1\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + ... + a_{m-1}\frac{d}{dt} + a_m$, et B est distribution donnée Comme

$$X = \delta * X, \frac{dX}{dt} = \delta^{`} * X, ..., \frac{d^mX}{dt^m} = \delta^{(m)} * X$$

donc l'équation précédente s'écrit

$\left(\delta^{(m)} + a_1\delta^{(m-1)} + ... + a_{m-1}\delta' + a_m\delta\right) * X = B$
ie

$$D\delta * X = B$$

et admet la solution unique $X = (D\delta)^{-1} * B$
avec

$$\begin{aligned} (D\delta)^{-1} &= \left(\delta' - r_1\delta\right)^{-1} * \left(\delta' - r_2\delta\right)^{-1} * ... * \left(\delta' - r_m\delta\right)^{-1} \\ &= H(x)\, e^{r_1 x} * H(x)\, e^{r_2 x} * ... * H(x)\, e^{rmx} \end{aligned}$$

où $r_1, r_2, ..., r_m$ sont les solutions

$$r^m + a_1 r^{m-1} + ... + a_{m-1} r + a_m = 0$$

Exemple 107 *Soit l'équation*

$$DX = B$$

où $D = \frac{d^2}{dx^2} + w^2, w \in \mathbb{R}$ *et* B *distribution donnée cet équation s'écrit sous la forme :*
$D\delta * X = B,$ *où* $D\delta = \delta'' + w^2\delta,$ *on a*

$$\begin{aligned} (D\delta)^{-1} &= \left(\delta' - iw\delta\right)^{-1} * \left(\delta' + iw\delta\right)^{-1} \\ &= H(t)\, e^{iwt} * H(t)\, e^{-iwt} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)\, e^{iwx} (t-x)\, e^{-iwt(t-x)} dx, \\ & \quad H(t) \frac{\sin wt}{w} \end{aligned}$$

Transformée de Fourier des distributions

Transformée de Fourier dans L^1

Définition 108 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,(ou\ \mathbb{C})$ une fonction appartenant à $L^1(\mathbb{R})$*

On appelle transformée de Fourier de f, la fonction $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\widehat{f}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\pi i w x} dx, w \in \mathbb{R} \tag{2}$$

- *(2) est bien définie car $\left| f(x)\, e^{-2\pi i w x} \right| = |f(x)|$ et $f \in L^1$.*
- *On écrit $\widehat{f} = \mathcal{F} f$ ou $\widehat{f}(w) = \mathcal{F}\{f(x)\}$*

Remarque 109 *Sous certains conditions ($f \in L^1$ et $\widehat{f} \in L^1$), on peut obtenir $f(x)$ à partir de $\widehat{f}(w)$*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(w)\, e^{2\pi i w x} dw$$

On écrit $f = \overline{\mathcal{F}}\widehat{f} = \mathcal{F}^{-1}\widehat{f}$ ou$f(x) = \overline{\mathcal{F}}\left\{\widehat{f}(w)\right\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\widehat{f}(w)\right\}$

Plus généralement, si f n'est pas continue en x, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(w)\, e^{2\pi i w x} dw = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

Remarque 110 *La transformée de Fourier n'existe pas toujours, par exemple* $f(x) = x^2$
$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-2\pi iwx} dx$ *n'existe pour aucune valeur de* w.

Proposition 111 *Si* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *alors* $\widehat{f}$ *est continue, bornée,* $\widehat{f}(w)$ *tend vers 0 quand* $w \to +\infty$ *et* $\left\|\widehat{f}\right\|_\infty \leq \|f\|_1$

Propriétés

1. **Linéairité**: Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Alors,

$$\mathcal{F}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha \mathcal{F}\{f(x)\} + \beta \mathcal{F}\{g(x)\}$$

2. **Translation:** $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $c \in \mathbb{R}$. Alors

$$\mathcal{F}\{f(x) - c\} = e^{-2\pi iwx} \widehat{f}(w)$$

3. **Modulation,** $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $w_0 \in \mathbb{R}$. Alors

$$\mathcal{F}\left\{e^{2\pi iwx} f(x)\right\} = \widehat{f}(w - w_0)$$

4. **Changement d'échelle:** $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $c \in \mathbb{R}^*$. Alors

$$\mathcal{F}\{f(cx)\} = \frac{1}{|c|} \widehat{f}\left(\frac{w}{c}\right)$$

   - La transformée de Fourier d'une fonction paire (respectivement impaire) est paire (respectivement impaire).

5. **Conjugaison complexe** $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors

$$\mathcal{F}\left\{\overline{f(x)}\right\} = \overline{\widehat{f}(w)}$$

Proposition 112 *Soit* $f \in L^1(\mathbb{R})$

Supposons que f *est dérivable et que* $f' \in L^1(\mathbb{R})$. *Alors*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f'(x)\} &= 2\pi i w \mathcal{F}\{f(x)\} \\ &= 2\pi i w \widehat{f}(w)\end{aligned}$$

Si en outre, f *admet des dérivées jusqu'à l'ordre* n *qui sont dans* $L^1(\mathbb{R})$, *alors*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left\{f^{(n)}(x)\right\} &= (2\pi i w)^n \mathcal{F}\{f(x)\} \\ &= (2\pi i w)^n \widehat{f}(w)\end{aligned}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f'(x)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-2\pi i w x} dx \\ & \left[f(x) e^{-2\pi i w x}\right]_{-\infty}^{+\infty} + 2\pi i w \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i w x} dx\end{aligned}$$

$f \in L^1(\mathbb{R}) : f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\, dt$

Comme f' est intégrable, donc $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$ est finie égalé à l et parsuite $l = 0$ car sinon f ne serait pas intégrable , donc

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f'(x)\} &= 2\pi i w \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i w x} dx \\ &= 2\pi i w \widehat{f}(w).\end{aligned}$$

et plus généralement

$$\mathcal{F}\left\{f^{(n)}(x)\right\} = (2\pi i w)^n \widehat{f}(w)$$

■

Proposition 113 *Si f admet des dérivées jusqu' à l'ordre n qui sont dans $L^1(\mathbb{R})$, alors $\left|\widehat{f}(w)\right| \leq \frac{c}{|w|^2}, c$ est une costante (plus n est grand plus $\widehat{f}$ décroit rapidement à l'infini)*

Proposition 114 *$f, g \in L^1(\mathbb{R})$,alors $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ et*

$$\mathcal{F}\{(f * g)(x)\} = \mathcal{F}\{f(x)\}\mathcal{F}\{g(x)\}.$$

Preuve. On a

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x-t) dt, x \in \mathbb{R}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{(f * g)(x)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(x) e^{-2\pi i w x} dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t) e^{-2\pi i w x} dt dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i w t} g(x-t) e^{-2\pi i w (x-t)} dt dx
\end{aligned}$$

Posons $u = t$ et $v = x - t$, d'après le théorème du changement de variables dans les intégrales multiples, on a

$$\mathcal{F}\{(f * g)(x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-2\pi i w u} g(v) e^{-2\pi i w (v)} du dv$$

avec $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$

Dés lors

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{(f*g)(x)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-2\pi i w u} du \int_{-\infty}^{+\infty} g(v)\, e^{-2\pi i w(v)} dv \\ &= \mathcal{F}\{f(x)\}\, \mathcal{F}\{g(x)\}\end{aligned}$$

■

Transformée de Fourier dans S (espace de Schwartz)

La transformée de Fourier (notée $\mathcal{F}T$) d'une distribution, en posant $<\mathcal{F}T, \varphi> = <T, \mathcal{F}\varphi>$ où

$$\mathcal{F}\varphi = \widehat{\varphi}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, e^{-2\pi i w x} dx, w \in \mathbb{R}$$

or $\varphi \in D$ n'implique pas $\widehat{\varphi} \in D$ (si le support de φ est borné tandis que le support de $\widehat{\varphi}$ n'est pas borné)

Rappelons que l'espace de Schwartz des fonctions indéfiniment dérivables à décroissante rapide est défini par

$$S = \left\{\varphi \in C^{\infty}, \forall m, n \in \mathbb{N}, \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|x^m \varphi^{(n)}(x)\right| < \infty\right\}$$

Autrement dit

$$S = \left\{\varphi \in C^{\infty}, \forall m, n \in \mathbb{N}, \lim_{|x|\to\infty} \left|x^m \varphi^{(n)}(x)\right| = 0\right\}$$

Remarque 115 *Si $\varphi \in S \Longrightarrow \varphi$ est bornée et intégrable donc $\widehat{\varphi}$ existe et on a*

$$\widehat{\varphi}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, e^{-2\pi i w x} dx, w \in \mathbb{R}$$

Proposition 116 *Soit $\varphi \in S$, alors $\widehat{\varphi} \in C^{\infty}$ et on a*

$$\widehat{\varphi}^{(n)}(w) = (-2\pi i)^{n} \widehat{\psi}(w), \psi(x) = x^{n} \varphi(x)$$

$$\widehat{\varphi^{(m)}}(w) = (2\pi i w)^{m} \widehat{\varphi}(x)$$

Proposition 117 *Si $\varphi \in S$, alors $\widehat{\varphi} \in S$,autrement dit, l'espace S est stable par transformée de Fourier*

Proposition 118 *Si une suite $(\varphi_n) \xrightarrow{S} \varphi$, alors $(\widehat{\varphi}_n) \xrightarrow{S} \widehat{\varphi}$*

Proposition 119 *La transformée de Fourier est une application linéaire continue de S dans S.*

Transformée de Fourier des distributions

Définition 120 *On appelle distribution tempérée, toute fonctionnelle linéaire continue définie sur S et à valeurs dans $\mathbb{C}$*

- Les distributions tempérées forment un espace vectoriel que l'on note S'.On vérifie que $S' \subset D'$

- Si T est tempérée linéaire sur S

$$T \text{ est tempérée} \Leftrightarrow |< T, \varphi >| \leq c \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^{n} dx$$

Définition 121 *Une fonction est dite à croissance lente si pour $|x|$ grand,*

$$|f(x)| \leq A |x|^{n}, n \in \mathbb{N}$$

où A est une constante.

Exemple 122 *Une constante, un polynome sont à croissance lente par contre e^x n'est pas à croissance lente.*

Exemple 123 *Toute fonction localement intégrable et à croissance lente, détermine une distribution tempérée*

Exemple 124 *Si f est intégrable, alors elle détermine une distribution tempérée.*

Exemple 125 *δ et $vp\frac{1}{x}$ sont des distributions tempérées*

Exemple 126 *Toute distribution à support borné est tempérée.*

Soit $f \in L^1$, donc la distribution associée à cette fonction est tempérée. Dés lors, pour tout $\varphi \in S$, on a

$$\begin{aligned} < \mathcal{F}f, \varphi > &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(w)\,\varphi(w)\,dw \qquad (3) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-2\pi i w x} dx \right) \varphi(w)\,dw \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(w)\,e^{-2\pi i w x} dx dw \end{aligned}$$

On a

$$\left| f(x)\,\varphi(w)\,e^{-2\pi i w x} \right| = |f(x)|\,|\varphi(w)|$$

Puisque $f\varphi$ est une fonction intégrable, alors l'intégrale (3) converge. Donc

$$\begin{aligned} < \mathcal{F}f, \varphi > &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,e^{-2\pi i w x} dw \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\widehat{\varphi}(x)\,dx \\ &= < f, \mathcal{F}\varphi > \end{aligned}$$

Définition 127 *La transformée de Fourier d'une distribution tempéré T est la distribution $\mathcal{F}T$ (que l'on note $\widehat{T}$ définie par*

$$< \mathcal{F}T, \varphi >=< T, \mathcal{F}\varphi >, \varphi \in S$$

Proposition 128 *Si $T \in S^{\backprime}$, alors $\mathcal{F}T \in S^{\backprime}$*

Remarque 129 *De même, on définit la transformée de Fourier (conjugué) $\overline{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}$ en posant $< \overline{\mathcal{F}}T, \varphi >=< T, \overline{\mathcal{F}}\varphi >$, pour tout $\varphi \in S$ et $T \in S^{\backprime}$,avec*

$$\overline{\mathcal{F}}\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{2\pi iwx} dx$$

Proposition 130 *Si T est une distribution tempérée, alors sa dérivée $T^{\backprime}$ est aussi tempéré et on a $\mathcal{F}T^{\backprime} = 2\pi iw\mathcal{F}T$, c'est à dire $\widehat{T^{\backprime}} = 2\pi iw\widehat{T}$*

Plus généralement, pour la dérivée d'ordre m, on a

$$\mathcal{F}T^{(m)} = (2\pi iw)^m \mathcal{F}T \rightarrow \widehat{T^{(m)}} = (2\pi iw)^m \widehat{T}$$

Preuve. En effet, par hypothèse $\varphi \in S$, donc $\varphi^{\backprime} \in S$ et on a

$$\begin{aligned}
< & \mathcal{F}T^{\backprime}, \varphi >=< T^{\backprime}, \mathcal{F}\varphi > \\
= & < T, -(\mathcal{F}\varphi)^{\backprime} > \\
= & < T, \mathcal{F}(2\pi ix\varphi) > \\
= & < \mathcal{F}T, 2\pi ix\varphi > \\
= & < 2\pi ix\mathcal{F}T, \varphi >
\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{F}T^{\backprime} = 2\pi ix\mathcal{F}T$ ■

Proposition 131 *Si T est une distribution tempérée, alors $(\mathcal{F}T)^{\backprime} = \mathcal{F}(-2\pi i$ et plus généralement $(\mathcal{F}T)^{(m)} = \mathcal{F}((-2\pi ix)^m T)$*

Proposition 132 *Soient S et T deux distributions à supports bornés. Alors le produit convolution $S * T$ est borné et on a*

$$\mathcal{F}(S * T) = (\mathcal{F}S) . (\mathcal{F}T)$$

Proposition 133 *Pour tout $\varphi \in S$, on a*

$$\mathcal{F}\left(\overline{\mathcal{F}}\varphi\right) = \varphi, \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}\varphi) = \varphi$$

Pour tout $T \in S$', on a

$$\mathcal{F}\left(\overline{\mathcal{F}}T\right) = T, \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}T) = T$$

Exemple 134 *La tranformée de Fourier de la distribution tempérée associée à la fonction 1 est égale à δ.*

$$\begin{aligned}
&< \mathcal{F}1, \varphi > = < 1, \mathcal{F}\varphi > \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{F}\varphi)(x)\, dw \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{F}\varphi)(x)\, e^{2\pi i w 0} dw \\
&= \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}\varphi)(0) \\
&= \varphi(0) \\
&= < \delta, \varphi >
\end{aligned}$$

Bibliography

[1] Lesfari. A., Distributions, analyse de FOURIER et transformation de LAPLACE Cours et exercices, Ellipses Édition Marketing S.A., 2012.

[2] BOUDJEDAA. B., UNE INTRODUCTION A LA THEORIE DES DISTRIBUTIONS, polycopié.pdf, Université Med Saddik Ben Yahia - Jijel 18000, ANNEE 2015/2016, Algérie.