

3.2 Processus VAR

3.2.1 Introduction

Les processus $VAR(p)$, Vector AR , sont une généralisation des processus autorégressifs au cas multivarié. Ils ont été introduits par Sims (1980) qui a reçu le prix Nobel en 2011 pour ces recherches sur la cause et l'effet en macroéconomie. Les modèles VAR sont compatibles avec l'approche économique où les variables d'un seul système sont traitées conjointement (chaque variable dépend des autres variables).

3.2.2 Représentation VAR

Soit X un processus stochastique de dimension k . X_t est un VAR d'ordre p si la forme du modèle dynamique linéaire générale du processus est

$$X_t = \delta + A_1 X_{t-1} + \dots + A_p X_{t-p} + \varepsilon_t \quad (1)$$

$A_i : i = 1, \dots, p$ sont des matrices quadratiques de dimension k .

ε_t : Vecteur des résidus de dimension k au temps t .

δ : Vecteur de constantes de dimension k .

La formule (1) peut être réécrite de façon compacte :

$$A_p(L) X_t = \delta + \varepsilon_t \quad (1')$$

avec $A_p(L) = I_k - A_1 L - \dots - A_p L^p$ et $E(\varepsilon_t) = 0$, $E(\varepsilon_t \varepsilon_t') = \Sigma$, $E(\varepsilon_t \varepsilon_s') = 0$ pour $t \neq s$.

Ce système est stable si et seulement si toutes les variables sont stationnaires c.à.d : les racines de l'équation du polynôme retard

$$\det(I_k - A_1 z - \dots - A_p z^p) = 0$$

sont en module supérieures à 1.

Sous cette condition le système (1') a la représentation $MA(\infty)$

$$\begin{aligned} X_t &= A_p^{-1}(L) \delta + A_p^{-1}(L) \varepsilon_t \\ &= \mu + \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots \\ &= \mu + \Psi(L) \varepsilon_t \end{aligned}$$

avec : $\psi_0 = I_k$, $\Psi(L) = I_k - \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \equiv A_p^{-1}(L)$, $\mu = A_p^{-1}(1) \delta$.

Les matrices d'autocovariance (ACV) sont définies par

$$\Gamma_X(h) = E((X_t - \mu)(X_{t-h} - \mu)')$$

On pose $\delta = 0 \implies \mu = 0$, à partir de (1) on a :

$$E(X_t X_{t-h}') = A_1 E(X_{t-1} X_{t-h}') + \cdots + A_p E(X_{t-p} X_{t-h}') + E(\varepsilon_t X_{t-h}')$$

d'où pour $h \geq 0$:

$$\begin{aligned} \Gamma_X(h) &= A_1 \Gamma_X(h-1) + \cdots + A_p \Gamma_X(h-p), \quad h > 0 \\ \Gamma_X(0) &= A_1 \Gamma_X(-1) + \cdots + A_p \Gamma_X(-p) + \Sigma \\ &= A_1 \Gamma_X(1)' + \cdots + A_p \Gamma_X(p)' + \Sigma \end{aligned}$$

car $\gamma_{ij}(h) = \gamma_{ji}(-h) \implies \Gamma_X(h) = \Gamma_X(-h)'$.

On rappelle que $\rho_{ij}(h) = \frac{\gamma_{ij}(h)}{\sqrt{\gamma_{ii}(0) \gamma_{jj}(0)}}$, $i, j = 1, \dots, k$, d'où la matrice d'autocorrélation

(AC) :

$$R_X(h) = D^{-1} \Gamma_X(h) D^{-1},$$

avec

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\gamma_{11}(0)}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\gamma_{22}(0)}} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\sqrt{\gamma_{kk}(0)}} \end{pmatrix}.$$

Exemple : Soit le modèle VAR(1) suivant

$$\begin{pmatrix} X_{1,t} \\ X_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.3 \\ -0.3 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{1,t-1} \\ X_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{pmatrix}$$

avec $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.7 \\ 0.7 & 1.49 \end{pmatrix}$.

1- Donner la représentation compacte.

La représentation compacte est

$$\left(I_2 - \begin{pmatrix} 0.6 & -0.3 \\ -0.3 & 0.6 \end{pmatrix} L \right) X_t = \varepsilon_t,$$

avec $X_t = \begin{pmatrix} X_{1,t} \\ X_{2,t} \end{pmatrix}$ et $\varepsilon_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{pmatrix}$.

2-Le modèle est il stationnaire ?

On cherche les racines de $\left| I_2 - \begin{pmatrix} 0.6 & -0.3 \\ -0.3 & 0.6 \end{pmatrix} z \right| = 0$,

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.6 & -0.3 \\ -0.3 & 0.6 \end{pmatrix} z \right| = \left| \begin{pmatrix} 1-0.6z & 0.3z \\ 0.3z & 1-0.6z \end{pmatrix} \right| = 0,$$

on obtient $0.27z^2 - 1.2z + 1 = 0$, les solutions sont $z_1 = \frac{10}{9}$ et $z_2 = \frac{10}{3}$, il est clair que $|z_1| > 1$ et $|z_2| > 1$ donc le système est stable.

3-Donner la représentation $MA(\infty)$.

$$\left(I_2 - \begin{pmatrix} 0.6 & -0.3 \\ -0.3 & 0.6 \end{pmatrix} L \right) X_t = \varepsilon_t \implies X_t = \left(I_2 - \begin{pmatrix} 0.6 & -0.3 \\ -0.3 & 0.6 \end{pmatrix} L \right)^{-1} \varepsilon_t$$

Donc

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 0.6 & -0.3 \\ -0.3 & 0.6 \end{pmatrix}^j \varepsilon_{t-j}.$$

explicitement

$$\begin{pmatrix} X_{1,t} \\ X_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.6 & -0.3 \\ -0.3 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.45 & -0.36 \\ -0.36 & 0.45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-2} \\ \varepsilon_{2,t-2} \end{pmatrix} + \dots$$

4-Calculer la matrice de variance de ce processus.

D'après les formules précédentes on a

$$\Gamma_X(0) = A_1 \Gamma_X(1)' + \Sigma \quad \text{et} \quad \Gamma_X(1) = A_1 \Gamma_X(0)$$

d'où

$$\Gamma_X(0) = A_1 \Gamma_X(0) A_1' + \Sigma$$

On pose $\Gamma_X(0) = \begin{pmatrix} \gamma_{11}(0) & \gamma_{12}(0) \\ \gamma_{12}(0) & \gamma_{22}(0) \end{pmatrix}$ où $\gamma_{11}(0) = \text{Var}(X_{1,t})$, $\gamma_{22}(0) = \text{Var}(X_{2,t})$ et $\gamma_{12}(0) = \text{cov}(X_{1,t}, X_{2,t})$.

On doit résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 0.64\gamma_{11}(0) + 0.36\gamma_{12}(0) - 0.09\gamma_{22}(0) = 1 \\ 0.18\gamma_{11}(0) + 0.55\gamma_{12}(0) + 0.18\gamma_{22}(0) = 0.7 \\ -0.09\gamma_{11}(0) + 0.36\gamma_{12}(0) + 0.64\gamma_{22}(0) = 1.49 \end{cases}$$

on obtient

$$\gamma_{11}(0) = 2.17, \gamma_{12}(0) = -0.37 \quad \text{et} \quad \gamma_{22}(0) = 2.84.$$

$\Rightarrow \Gamma_X(0) = \begin{pmatrix} 2.17 & -0.37 \\ -0.37 & 2.84 \end{pmatrix}$. En déduit la corrélation instantanée entre $X_{1,t}$ et $X_{2,t}$:

$$\rho_{12}(0) = \frac{-0.37}{\sqrt{2.17 \times 2.84}} = -0.14904.$$

3.2.3 Identification, estimation et validation

Au premier semestre, nous avons vu que pour identifier un processus AR univarié il suffisait d'utiliser sa fonction d'ACP, dans le cas d'un AR multivarié c'est différent, on vient de voir dans l'exemple la difficulté de calculer les fonctions Γ_X dont la dimension augmente avec k et p . Alors dans le cas VAR, on utilise 2 méthodes : la première c'est par tâtonnement : par exemple pour des séries trimestrielles on utilise un $VAR(4)$ et pour des séries mensuelles on utilise un $VAR(12)$...etc avec la contrainte : $kp < \frac{n}{3}$. La 2ème méthode qui est plus objective est l'utilisation des critères d'informations : AIC,...

Pour l'estimation, on peut utiliser la méthode du MV ou bien la méthode des MC (comme au 1er semestre). Dans la validation, on commence par tester la significativité des paramètres

avec le test de student ensuite on applique les tests de non corrélation et de normalité sur les résidus.

3.2.4 Prévision

Prévision à l'horizon 1

$$\begin{aligned}\widehat{X}_t(1) &= E(X_{t+1}/I_t) \\ &= \delta + A_1 X_t + \cdots + A_p X_{t-p+1}.\end{aligned}$$

A partir de la représentation *VMA*

$$\widehat{X}_t(1) = \mu + \psi_1 \varepsilon_t + \psi_2 \varepsilon_{t-1} + \cdots$$

La forme *VAR* nous permet de calculer les prévisions et la forme *VMA* nous permet de calculer l'erreur prévisionnelle.