

Examen Final -Modèle type-

Exercice 1.

Soit X une variable aléatoire réelle qui suit une loi exponentielle. Sa fonction de répartition est donnée par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\frac{1}{\theta}x\right) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\theta > 0$ est un paramètre inconnu. Pour la suite, on suppose que l'on dispose d'un échantillon *i.i.d.* de taille n noté $\{X_1, \dots, X_n\}$ de même loi mère que X . L'objectif de l'exercice est de construire un estimateur de θ .

1. Donner la densité de X et la tracer pour $\theta = 1$. Montrer que l'espérance de X est telle que $E(X) = \theta$.
2. Soit

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

un estimateur de θ . En admettant que $V(X) = \theta^2$, calculer $E(T_n)$ et $V(T_n)$.

3. Etudier le biais et la variance de cet estimateur. Qu'en déduisez-vous?

Exercice 2.