Université Dr.Moulay Tahar de Saida. — 12 novembre 2013
Faculté des Sciences — Durée: 1h30
Département de mathématiques

Concours d'accès à l'Ecole doctorale
Modèles stochastiques, Statistique et Applications
1^{ere} Epreuve: Statistique Para.-NonPara.
Sujet 1

Exercice 1. (1) *Soient deux populations gaussiennes P_1 et P_2. On suppose que $m_1 = m_2 = m$ et $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. On extrait de chaque population un échantillon de taille n_1 et n_2 respectivement. Montrer que*

$$\frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1'^2(n_2-1)S_2'^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_1}}}$$

suit une loi de Student à $n_1 + n_2 - 2$ degrés de liberté.

(2) *Soit P une population réparti suivant une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$. Deux échantillons de tailles respectives $n_1 = 12$ et $n_2 = 18$ ont pour moyennes $\overline{x}_1 = 22.23$ et $\overline{x}_2 = 21.98$ et écart-type $S_1' = 0.18$ et $S_2' = 0.23$ respectivement. Peut-on conclure que ces deux échantillons proviennent d'une même population pour un seuil de signification de 5%.*

Comme K est d'intégrale qui vaut 1, on a:

Exercice 2. *Soit $X_1, X_2, \dots X_n$ un n-échantillon de X de fonction de répartition F et de densité f et soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) < 1$. Admettant que que la fonction de hasard $\lambda(x) = \dfrac{f(x)}{1-F(x)}$ est un paramètre fonctionnel.*

(1) *Déduire un estimateur $\lambda_n(x)$ pour $\lambda(x)$ par la méthode du noyau.*
(2) *Montrer que*

$$\lambda_n(x) - \lambda(x) = \frac{f_n(x) - f(x)}{1 - f_n(x)} + (F_n(x) - F(x))\,\frac{\lambda(x)}{1 - F_n(x)}$$

(3) *En utilisant la convergence presque complète de $F_n(x)$ vers $F(x)$ montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que:*

$$\sum_n \mathbb{P}\left[(1 - F_n(x)) < \delta\right] < \infty$$

(4) *Etudier la convergence presque complète de l'estimateur $\lambda_n(x)$.*