Master1 SPA
Fac Maths

série1

Exercise 1 *Soit X une v.a de loi de probabilité uniforme sur* $[0,1]$.

1) Quelle est la loi de $U = 1 - X$?

2) Calculer la densité de la v.a $Y = \frac{-\log X}{\lambda}$ où λ est une constante positive.

3) En déduire la loi de la v.a $Z = \frac{-\log(1-X)}{\lambda}$.

Exercise 2 *Soit X une v.a de loi $\mathcal{N}(0,4)$. Calculer $P(X^2 \leq\ 4)$.*

Exercise 3 *Soient n v.a indépendantes $X_1, ..., X_n$ de même loi $\mathcal{E}xp(\lambda)$,$\lambda > 0$. Soit $U = \max_{1\leq i\leq n} X_i$ et $V = \min_{1\leq i\leq n} X_i$.*

1) Exprimer les fonctions de répartition de U et V en fonction de celle de $X_1, ..., X_n$.

2) U et V sont-elles continues? Si oui calculer leurs fonctions de densité.

Exercise 4 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{a}{1+x^2}$. Déterminer a pour que f soit la densité de probabilité d'une variable aléatoire X. Déterminer la fonction de répartition de X. X admet-elle une espérance?*

Exercise 5 *Soient m, σ deux réels. On dit que X suit une loi log-normale de paramètres (m, σ^2) si $Y = \log X$ suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On supposera dans la suite $m = 0$ et $\sigma = 1$.*

1- Exprimer la fonction de répartition de X à l'aide de la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite.

2- Calculer sa densité.

3- Démontrer que $E(X) = \sqrt{e}$.

Exercise 6 *si $Y = X^2$ avec X défini sur $\mathbb{R}$ et suit $\mathcal{N}(0,1)$*

1) Donner sa fonction de répartition ainsi que sa fonction de densité de probabilité.

2) calculer sa fonction caractéristique.

Exercise 7 *Soit $a > 0$ et $\theta > 0$, deux paramètres et X une v.a de densité*

$$f(x) = \frac{K}{x^{\theta+1}} 1_{[a,+\infty[}(x)$$

1) Déterminer K en fonction a et θ.

2) Calculer les moments de X.

3) Déterminer la loi de $Y = \log\left(\frac{X}{a}\right)$.

4) Calculer $E(Y)$.

Exercise 8 *Soient X,Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de même loi. On suppose qu'elles possèdent un moment d'ordre 2 et on note σ^2 leur variance commune. On suppose de plus que $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ a même loi que X.*

1. *Démontrer que X est d'espérance nulle.*
2. *Donner un développement limité à l'ordre 2 de φ_X.*
3. *Démontrer que $\forall n \geq 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\left(\varphi_X\left(\frac{t}{2^{n/2}}\right)\right)^{2^n} = \varphi_X(t)$.*
4. *En déduire que X suit une loi normale dont on précisera les paramètres.*
5. *Retrouver ce résultat en appliquant le théorème limite central.*

Exercise 9 *Soit la v.a $X \sim G(p)$.*

1) Verifier que cette loi appartient à la famille des lois exponentielles.

2)Calculer la fonction caractéristique de X.

3)En déduire $E(X)$ et $var(X)$.

Exercise 10 *Soit (X, Y) un couple de v.a réelles dont la densité est définie sur $\mathbb{R}^2$ par*

$f_{X,Y}(x, y) = \theta^2 e^{-\theta x} \mathbf{1}_{\{0 \leq y \leq x\}} \qquad \theta \in \mathbb{R}_+^2$

1) Montrer que X et Y suivent des lois Gamma.

2) Montrer que $\frac{Y}{X}$ suit une loi uniforme.

3) Déterminer la loi de $Z = 2\theta Y$

Exercise 11 *Soient $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$et N des variables aléatoires indépendantes. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et que$(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$, c'est-à-dire*

$\forall n \in N$, $P(N = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$ *et* $\forall i \in \mathbb{N}, P(Y_i = 1) = 1 - P(Y_i = 0) = p$.

Déterminer la loi conditionnelle de $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{N+1} Y_i$ *sachant N.*

Exercise 12 *Soit (X, Y) un couple de v.a réelles dont la densité est définie sur $\mathbb{R}^2$ par*

$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp(\frac{1}{2} x(1 + y^2) \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x) \qquad \theta \in \mathbb{R}_+^2$

1. Quelle est la loi de Y sachant $X = x$ avec $x > 0$.

2. Calculer $E(Y|X = x)$ puis expliciter $E(Y|X)$.

3. Montrer que $E[E(Y|X)]$ existe mais que $E(Y)$ n'existe pas.

Exercise 13 *Soit (X, Y) un vecteur aléatoire de loi uniforme sur le triangle $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/0 \leq y \leq x \leq 1\}$, c'est-à-dire de densité*

$f_{(X,Y)}(x, y) = 2 \times 1_{0 \leq y \leq x \leq 1}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1.(a) Donner la loi de Y sachant X.

(b) En déduire $E(Y|X)$.

(c) Calculer $E(Y)$ et $E(XY)$.

2. Montrer que $Z = YX$ est bien définie presque sûrement et donner la conditionnelle de Z sachant X. Montrer que Z est indépendant de X et donner sa loi.

Solution des exercices

EXO1

On a $f_X(x) = 1_{[0,1]}(x)$ et donc

$$\begin{aligned} F_U(x) &= P(U \leq x) = P(1 - X \leq x) \\ &= P(X \geq 1 - x) \\ &= 1 - F_X(1 - x). \end{aligned}$$

Donc U est une v.a absolument continue de fonction de densité :

$$f_U(x) = f_X(1-x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 - x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\Rightarrow f_U(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \Rightarrow U \sim \mathcal{U}\,[0,1]$

2) On a

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P\left(\frac{-\log(X)}{\lambda} \leq y\right) = P\left(-\log(X) \leq \lambda y\right) \\ &= P\left(\log(X) \geq -\lambda y\right) = P\left(X \geq e^{-\lambda y}\right) = 1 - P\left(X < e^{-\lambda y}\right) \\ &= P\left(\log(X) \geq -\lambda y\right) = P\left(X \geq e^{-\lambda y}\right) = 1 - P\left(X < e^{-\lambda y}\right) \\ &= 1 - F_X(e^{-\lambda y}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y} f_X(e^{-\lambda y}) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & \text{si } \lambda e^{-\lambda y} \in [0,1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & \text{si } y \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

$\Rightarrow Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$

3) $Z = \frac{-\log(1-X)}{\lambda} \sim \mathcal{E}(\lambda)$ même preuve que 2) en utilisant le résultat obtenu en 1) : $U = 1 - X \sim \mathcal{U}\,[0,1]$

EXO2

On pose $Z = \frac{X^2}{4} = \left(\frac{X}{2}\right)^2$. La v.a $X \sim \mathcal{N}(0,4) \Rightarrow \frac{X}{2} \sim \mathcal{N}(0,1)$. Ceci implique que $Z \sim \chi^2\,(1)$.

$$\begin{aligned} P(X^2 &\leq 4) = P(4Z \leq 4) \\ &= P(Z \leq 1) = F_Z(1) \end{aligned}$$

$F_Z(1)$ est lue sur la table du χ^2.

EXO3

1) a-

$$\begin{aligned} F_U(y) &= P(U \leq y) = P(\max_{1 \leq i \leq n} X_i \leq y) \\ &= P(X_i \leq y \forall i) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq y) \\ &= \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(y) = (F_X(y))^n \end{aligned}$$

b-

$$\begin{aligned}
F_V(y) &= P(V \leq y) = P(\min_{1\leq i\leq n} X_i \leq y) \\
&= 1 - P(\min_{1\leq i\leq n} X_i > y) = 1 - P(X_i > y \ \ \forall i) \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i > y) = 1 - (P(X_i > y))^n \\
&= 1 - (1 - P(X_i \leq y))^n = 1 - (1 - F_X(y))^n
\end{aligned}$$

2) a-$F_U(y) = (F_X(y))^n \Longrightarrow U$ continue

$$\Rightarrow f_U(y) = \frac{\partial F_U(y)}{\partial y} = \frac{\partial (F_X(y))^n}{\partial y} = n\,(F_X(y))^{n-1}\, f_X(y).$$

Lorsque $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$

$$\Longrightarrow f_X(y) = \lambda e^{-\lambda y} 1_{\{y>0\}} \ \text{ et } F_X(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda y} \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$
$$\Rightarrow f_U(y) = n(1 - e^{-\lambda y})^{n-1} \lambda e^{-\lambda y} 1_{\{y>0\}}\ .$$

b- $F_V(y) = 1 - (1 - F_X(y))^n \Longrightarrow V$ continue

$$\Rightarrow f_V(y) = \frac{\partial F_V(y)}{\partial y} = n(1 - F_X(y))^{n-1} \times f_X(y)$$

Lorsque $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$

$$\Longrightarrow f_X(y) = \lambda e^{-\lambda y} 1_{\{y>0\}} \ \text{ et } F_X(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda y} \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
f_V(y) &= n(1 - \left[1 - e^{-\lambda y}\right])^{n-1} \times \lambda e^{-\lambda y} 1_{\{y>0\}} \\
&= n(e^{-\lambda y})^{n-1} \times \lambda e^{-\lambda y} 1_{\{y>0\}} \ = n\lambda e^{-n\lambda y} 1_{\{y>0\}}\ .
\end{aligned}$$

Donc $V \sim \mathcal{E}xp(n\lambda)$.

<u>EXO4</u>

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et positive. Elle va être la densité de probabilité d'une variable aléatoire X si elle est intégrable et si $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Une primitive de $\frac{1}{1+x^2}$est $\arctan(x)$ i.e $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x)$. On a donc

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = a \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) - a \lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = a\pi.$$

Ainsi, f est la densité de probabilité d'une variable aléatoire X si et seulement si $a = \frac{1}{\pi}$. Dans ce cas, la fonction de répartition de X est donnée par

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{1}{\pi} \arctan(t) + \frac{1}{2}.$$

Enfin, X n'admet pas d'espérance car la fonction $xf(x)$ **n'est pas intégrable** sur $\mathbb{R}$. En effet, au voisinage de $+\infty$, on a $xf(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{\pi x}$ et on conclut par comparaison à une intégrale de Riemann divergente.

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx = \int_{\mathbb{R}} x \frac{1}{(1+x^2)\pi} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{2x}{(1+x^2)} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\log(1+x^2)\right]_{-\infty}^{+\infty} \quad \text{n'existe pas} \end{aligned}$$

EXO5

1- $X = e^Y$ ne prend ses valeurs que dans $[0, +\infty[$. On en déduit que $F_X(x) = 0$ si $x \leq 0$. Pour $x > 0$, on a $X \leq x \Longleftrightarrow Y \leq \log x$ et donc $F_X(x) = \Phi(\log x)$.

2-Il suffit de dériver, et on trouve

$$f_X(x) = \tfrac{1}{x} \Phi'(\log x) 1_{[0,+\infty[}(x) = \tfrac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(\log x)^2}{2}} 1_{[0,+\infty[}(x).$$

3 -Plutôt que d'utiliser la densité, on va utiliser un théorème et écrire

$$E(X) = E(e^Y) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^y e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \sqrt{e} \times \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(y-1)^2}{2}} dy.$$

Après changement de variables $u = y - 1$, on reconnait

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(y-1)^2}{2}} dy = 1$$

D'où le résultat.

EXO6

X défini sur $\mathbb{R}$ et suit $\mathcal{N}(0,1) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$

-fonction de répartition de Y :

$$P(Y < y) = P(-\sqrt{y} < X < +\sqrt{y}) \Rightarrow G(y) = F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y})$$

-densité de probabilité de Y :

$$g(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} f(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} f(-\sqrt{y}) \Rightarrow g(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \left[f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y}) \right]$$

en particulier $g(y) = \frac{f(\sqrt{y})}{\sqrt{y}}$car f est une fonction paire.

$$Y = X^2 \Longrightarrow g(y) = \frac{f(\sqrt{y})}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-1/2} \exp\left(-\frac{y}{2}\right)$$

-fonction caractéristique de Y

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= E(e^{itX^2}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(1-2it)x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}u^2}}{(1-2it)^{1/2}} du \end{aligned}$$

en posant $u = (1-2it)^{1/2} x \Rightarrow du = (1-2it)^{1/2} dx \Rightarrow dx = \frac{du}{(1-2it)^{1/2}}$, on déduit que

$$\varphi(t) = (1-2it)^{-1/2}.$$

EXO7

EXO8

1. L'espérance de $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ doit être égale à l'espérance de X. Si on note m cette valeur, on doit donc avoir $2\sqrt{m} = m$, ce qui donne $m = 0$.

2. Puisque X admet un moment d'ordre 2, φ_X est de classe C^2. Elle admet donc un développement limité à l'ordre 2 en 0 donné par

$$\varphi_X(u) = \varphi_X(0) + \varphi_X^{'}(0)\frac{u}{1!} + \varphi_X^{''}(0)\frac{u^2}{2!} + o(u^2).$$

Or, $\varphi_X(0) = 1$, $\varphi_X^{'}(0) = iE(X) = 0$ et $\varphi_X^{''}(0) = -E(X^2) = -\sigma^2$. On en déduit que

$$\varphi_X(u) = 1 + \frac{-\sigma^2}{2} u^2 + o(u^2).$$

3. On va d'abord prouver que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\left[\varphi_X\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right]^2 = \varphi_X(t)$. Une récurrence élémentaire aboutit ensuite au résultat. En effet, puisque X et Y sont indépendantes,

$$\varphi_X(t) = \varphi_{(X+Y)/\sqrt{2}}(t) = \varphi_{X/\sqrt{2}}(t)\varphi_{Y/\sqrt{2}}(t) = [\varphi_{X/\sqrt{2}}(t)]^2.$$

Or,

$$\varphi_{X/\sqrt{2}}(t) = \int_{\Omega} e^{itX(\omega)/\sqrt{2}} dP(\omega) = \varphi_X(t/\sqrt{2}).$$

On en déduit le résultat.

4. Fixons $t \in \mathbb{R}$ et soit $n \geq 1$. Alors, en introduisant le développement limité dans l'expression précédente, on trouve :

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \left(1 + \frac{-\sigma^2}{2} \times \frac{t^2}{2^n} + o\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)^{2^n} \\
&= \exp(2^n \log(1 + \frac{-\sigma^2}{2} \times \frac{t^2}{2^n} + o(\frac{1}{2^n})) \\
&= \exp(-\frac{-\sigma^2 t^2}{2} + o(1)).
\end{aligned}$$

La quantité de gauche ne dépend pas de n, et si on fait tendre n vers $+\infty$ on trouve

$$\varphi_X(t) = \exp(-\frac{-\sigma^2 t^2}{2}).$$

On reconnait la fonction caractéristique d'une loi normale de paramètres 0 et σ^2. La fonction caractéristique caractérisant la loi, on en déduit que $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

5. Soit (X_i) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi que X. Alors, on prouve aisément par récurrence que

$$S_n = \tfrac{X_1 + \cdots + X_{2^n}}{2^{n/2}}$$

a même loi que X. Or, le théorème limite central garantit que S_n converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Donc X a pour loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$

EXO9

1) $X \sim G(p) \Longleftrightarrow P(X = x) = p(1-p)^{x-1}\ \forall x \geq 1$.

Or $G(p) \in$ à la famille des lois exponentielles$\Longleftrightarrow P(X = x) = c(p) \exp\{\alpha(p) a(x)\} h(x)$.

On écrit:

$$P(X = x) = p(1-p)^{x-1} = \tfrac{p}{1-p} \times (1-p)^x = \tfrac{p}{1-p} \times \exp\{x \log(1-p)\} \times 1.$$

On pose $c(p) = \frac{p}{1-p}$, $a(x) = x$, $\alpha(p) = \log(1-p)$ et $h(x) = 1\ \forall x$.

2) La fonction caractéristique de X:

$$\varphi_X(t) = Ee^{itX} = \sum_{x \geq 1} e^{itx} p(1-p)^{x-1} = pe^{it} \sum_{x \geq 1} \left[e^{it}(1-p)\right]^{x-1} = pe^{it} \sum_{x \geq 1} t^{x-1}$$

où $t = e^{it}(1-p)$, on a $|t| = \left|e^{it}(1-p)\right| < 1$.

$\Longrightarrow \sum_{x \geq 1} t^{x-1} = \frac{1}{1-t} = \frac{1}{1-e^{it}(1-p)} \Longrightarrow \varphi_X(t) = \frac{pe^{it}}{1-e^{it}(1-p)}$.

3) On sait que $EX^k = \frac{\varphi_X(0)}{i^k} = \frac{1}{i^k}\ \frac{\partial^k \varphi_X(t)}{\partial t^k}\Big|_{t=0}$

a- $EX \quad : \quad k = 1$

$$\frac{\partial \varphi_X(t)}{\partial t} = \frac{\partial(\frac{pe^{it}}{1-e^{it}(1-p)})}{\partial t} = ip\frac{e^{it}}{(pe^{it} - e^{it} + 1)^2}$$

en $t=0 \Longrightarrow ip\frac{e^{i0}}{(pe^{i0}-e^{i0}+1)^2}=\frac{i}{p} \Rightarrow EX=\frac{1}{p}$
b- $varX$ et d'abord EX^2: $k=2$

$$\frac{\partial^2\varphi_X(t)}{\partial t^2}=\frac{\partial\left(ip\frac{e^{it}}{(pe^{it}-e^{it}+1)^2}\right)}{\partial t}=-pe^{it}\frac{e^{it}-pe^{it}+1}{(pe^{it}-e^{it}+1)^3}$$

en $t=0 \Longrightarrow -pe^{i0}\frac{e^{i0}-pe^{it0}+1}{(pe^{i0}-e^{i0}+1)^3}=\frac{1}{p^2}(p-2) \Longrightarrow EX^2=-\frac{p-2}{p^2}$.
d'où $varX=-\frac{p-2}{p^2}-\frac{1}{p^2}=-\frac{1}{p^2}(p-1)=\frac{1-p}{p^2}$

EXO10

1)a-Loi marginale de X

$$f_X(x)=\int_0^x f_{X,Y}(x,y)dy=\int_0^x \theta^2 e^{-\theta x}dy=\theta^2 x e^{-\theta x}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}$$

$\Longrightarrow X\sim\gamma(2,\theta)$
b-Loi marginale de Y

$$f_X(y)=\int_y^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx=\int_y^{+\infty}\theta^2 e^{-\theta x}dx=\theta^2\left[-\frac{1}{\theta}e^{-\theta x}\right]_y^{+\infty}=\theta e^{-\theta y}\mathbf{1}_{\{y>0\}}$$

$\Longrightarrow Y\sim\gamma(1,\theta)\sim\mathcal{E}xp(\theta)$
2) On pose $U=\frac{Y}{X}$ et $V=X \Longrightarrow Y=UX$

$$\begin{pmatrix} Y=UV \\ X=V \end{pmatrix} \Longrightarrow f_{U,Y}(u,v)=f_{X,Y}(\varphi^{-1}(u,v))\left|\det J\right|$$

où $|\det J|=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ v & u \end{vmatrix}=|-v|$

$$f_{X,Y}((v,uv))\left|-v\right|=v\theta^2 e^{-\theta v}\mathbf{1}_{\{0<uv<v\}} \Longrightarrow f_{U,V}(u,v)=v\theta^2 e^{-\theta v}\mathbf{1}_{\{0<u<1,v>0\}}$$

$$\Longrightarrow f_U(u)=\int_0^{+\infty} f_{U,V}(u,v)dv=\int_0^{+\infty} v\theta^2 e^{-\theta v}dv=\theta^2\int_0^{+\infty} ve^{-\theta v}dv$$

$$\int ve^{-\theta v}dv=-\frac{1}{\theta^2}e^{-v\theta}(v\theta+1) \Longrightarrow f_U(u)=1 \Longrightarrow U=\frac{Y}{X}\sim\mathcal{U}[0,1].$$

3) La loi de Z

$$F_Z(z)=P(Z<z)=P(2\theta Y<z)=P(Y<\frac{z}{2\theta})=F_Y(\frac{z}{2\theta}).$$

EXO11

Nous avons, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$P(X=k|N=n) = P\left(\sum_{i=1}^{N+1} Y_i = k|N=n\right) = P\left(\sum_{i=1}^{n+1} Y_i = k|N=n\right) = P\left(\sum_{i=1}^{n+1} Y_i = k\right)$

par indépendance de (Y_i) et de $\boxed{P(N=n) =} C_k^{n+1} p^k (1-p)^{n+1-k}$. Ainsi,

$$P(X=k|N) = C_k^{N+1} p^k (1-p)^{N+1-k}$$

EXO12

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{1}{2}x(1+y^2)\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x) \qquad \theta \in \mathbb{R}_+^2$$

1. Quelle est la loi de Y sachant $X=x$ avec $x>0$.

$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x}{2}(1+y^2)\right)dy = \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{x}{2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{xy^2}{2}\right)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{xy^2}{2}\right)dy$

On pose $\sigma^2 = \frac{1}{x}$ et on écrit $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{xy^2}{2}\right)dy = \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{x}}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{xy^2}{2}\right)dy = \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)dy = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$\Longrightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x}{2}\right) \times \frac{1}{\sqrt{x}}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x)$

$\Longrightarrow f_{Y|X=x}(y) = \frac{\frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{1}{2}x(1+y^2)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x}{2}\right)\times\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{x}\exp\left(-\frac{xy^2}{2}\right)$ qui est une $\mathcal{N}(0,\frac{1}{x})$

2. Calculer $E(Y|X=x)$ puis expliciter $E(Y|X)$.

$E(Y|X=x) = \int_{\mathbb{R}} y f_{Y|X=x}(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{x}\exp\left(-\frac{xy^2}{2}\right)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{x}\int_{-\infty}^{\infty} y\exp\left(-\frac{xy^2}{2}\right)dy$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{x}}\sqrt{x}\int_{-\infty}^{\infty} y\exp\left(-\frac{xy^2}{2}\right)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{x}}}\int_{-\infty}^{\infty} y\exp\left(-\frac{y^2}{2\times\frac{1}{x}}\right)dy = 0$

On en déduit que est une variable aléatoire constante et égale à 0.

3. Montrer que $E\left[E(Y|X)\right]$ existe mais que $E(Y)$ n'existe pas.

\# $E\left[E(Y|X)\right] = E\left[0\right] = 0$ et \# $E(Y) = \int_{\mathbb{R}} y f_Y(y)dy$

or $f_Y(y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{x}{2}(1+y^2)\right)dx = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{-\frac{1}{2}(1+y^2)}\left[\exp\left(-\frac{x}{2}(1+y^2)\right)\right]_0^{\infty} = \frac{1}{(1+y^2)\pi}$

$$\Longrightarrow E(Y)=\int_{\mathbb{R}} y f_Y(y)dy=\int_{\mathbb{R}} y\frac{1}{(1+y^2)\pi}dy=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{2y}{(1+y^2)}dy=\frac{1}{2\pi}\left[\log(1+y^2)\right]_{-\infty}^{+\infty}$$

n'exite pas

Remark 14 $Y\sim Cauchy(1)\Longrightarrow EY\ \ \exists\ \ pas$

$$f_Y(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\exp\left(\frac{x}{2}(1+y^2)\right)dx$$

EXO13

1.(a) La loi de$Y$ sachant X est une loi à densité donnée, donnée par

$$f_{Y|X}(y)=\frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)},\quad \forall y\in\mathbb{R},\text{ où } f_X(x)=\int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)dy=2x1_{0\leq x\leq 1}$$

En définitive, $f_{Y|X}(y)=\frac{1}{x}1_{0\leq y\leq x}$. En d'autres termes, conditionnellement à X, la loi de$Y$ est une distribution uniforme sur $[0,x]$.

(b) En utilisant le théorème conditionnel (Y est uniformément bornée donc intégrable),

$$E(Y|X=x)=\int_{\mathbb{R}} y f_{Y|X}(y)dy=\frac{1}{x}\int_{[0,x]} ydy.$$

En définitive, $E(Y|X=x)=\int_{\mathbb{R}} y f_{Y|X}(y)dy=\frac{x}{2}$

(c) Nous avons

$$E(Y)=E(E(Y|X))=E(X/2)=1/3.$$

De plus, X étant mesurable et XY intégrable (car uniformément borné),

$$E(XY)=E(XE(Y|X))=E(X^2/2)=1/4.$$

2. X est différent de 0 presque sûrement, donc $Z=Y/X$ est bien définie presque sûrement. Nous avons, pour toute fonction mesurable bornée φ,

$$E(\varphi(Z)|X)=\int_{\mathbb{R}^2}\varphi(y/X=x)f_{Y|X}(y)dy=\int_{[0,x]}\varphi(y/X=x)\frac{x}{2}dy=\frac{1}{2}\int_{[0,1]}\varphi(z)dz.$$

Nous en déduisons que la loi de Z sachant X est à densité donnée par $f_{Z|X}(z)=1_{[0,1]}(z)$,$\forall z\in\mathbb{R}$. Cette loi ne dépend pas de X, donc Z est indépendant de X et Z est de loi uniforme sur $[0,1]$.