Cours de probabilité Avancée

Diffalah LAISSAOUI

Université de Médéa
Faculté des sciences
Département de mathématiques et Informatique

L3 Maths

Mai 2022

Loi faible des grands nombres :

La loi des grands nombres a été formalisée au XVIIe siècle lors de la découverte de nouveaux langages mathématiques.
Essentiellement, la loi des grands nombres indique que lorsque l'on fait un tirage aléatoire dans une série de grande taille, plus on augmente la taille de l'échantillon, plus les caractéristiques statistiques du tirage (l'échantillon) se rapprochent des caractéristiques statistiques de la population. Mais il est intéressant de noter que la taille de l'échantillon à prendre pour approcher les caractéristiques de la population initiale ne dépend que faiblement voire pas du tout de la taille de la série initiale.

Loi faible des grands nombres :

Théorème

Supposons tout d'abord que nous ayons à traiter n variables aléatoires : $X_1, X_2, \ldots X_n$*. Elles sont indépendantes 2 à 2, distribuées selon la même densité de probabilité et possèdent toutes les mêmes moyenne et variance. Alors, on pose* $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ *de sorte que :*

$$\lim_{n \to \infty} P(\left| \frac{S_n}{n} - E(X) \right| \geq \epsilon) = 0$$

Loi fort des grands nombres :

Théorème

Considèrons n variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi de probabilité, intégrables (i.e. $E(|X|) < \infty$*). En reprenant les notations ci-dessus, la loi forte des grands nombres précise que* $\frac{S_n}{n}$*, converge vers* $E(X)$ *" presque sûrement ". C'est-à-dire que :*

$$P\{\lim_{n\to\infty}(\frac{S_n}{n}) = E(X)\} = 1$$

Théorème central limite :

Théorème

Si (X_n) *est une suite de variable aléatoire indépendantes et de meme loi, admettant des moments d'ordres un et deux notés* $m = E(X_n)$ *et* $\sigma^2 = V(X_n)$, *alors :*

$$\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \underset{loi}{\longrightarrow} N(0,1).$$