Université Mohamed Khider Biskra **Département de Mathématiques.**
Mokhtar HAFAYED **2013/2014, $1^{ème}$ Master.**
Epreuve N° $-$ 1 **Prob Approf.**

Exercice 1: (6-points) *1+2+1,5+1,5 points*

Soit X une variable aleatoire reelle integrable définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Soit Ψ une fonction convexe, telle que $\Psi(X)$ est intégrable.

1. Montrer que $\mathbb{E}(\Psi(X) \mid \mathcal{G}) \geq \Psi\left(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})\right)$.
2. Déduire que si $X > 0$: $[\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})]^p \leq \mathbb{E}(X^p \mid \mathcal{G})$, $\forall p \geq 1$ et $\mathbb{E}(X^p \mid \mathcal{G}) \leq [\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})]^p$, $\forall p \in [0, 1]$. Donner un exemple.
3. Si $\mathcal{H}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$ telle que $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, montrer que

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{H}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X \mid \mathcal{H}) \mid \mathcal{G}\right] = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{H}).$$

4. Montrer que $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})\right] = \mathbb{E}(X)$, et $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})Y\right] = \mathbb{E}\left[XY\right]$ pour toute variable aleatoire $Y - \mathcal{G}$ mesurable

Exercice 2: (6-points) *2+2+2 points*

1. Soit X_n une suite de variables aleatoires independantes definie par la loi de probabilité:

$$X_n \in \{0, \gamma_n\} : P\{X_n = \gamma_n\} = p_n, \qquad P\{X_n = 0\} = 1 - p_n.$$

telle que $\lim_{n \to +\infty} p_n = 0, \qquad \gamma_n > 0, \qquad 0 < p_n < 1,$

(i) Montrer que X_n *converge preque surement* vers 0 si et seulement si la serie $\sum_n p_n$ est convergente, et que X_n *converge en moyenne* si et seulement si $\gamma_n \gamma_n \to 0$, quand $n \to +\infty$.

(ii) Montrer que X_n *converge en probabilité* vers.0

2. Soit X une variable aleatoire de variance finie et c un réel. Montrer que $\mathbb{E}\left[(X-c)^2\right] = \mathbb{V}ar(X) + \left(\mathbb{E}(X) - c\right)^2$ et déduire qu'une suite X_n converge en moyenne quadratique vers c ssi, $\mathbb{V}ar(X_n)$ tend vers 0 et $\mathbb{E}(X_n)$ tend vers c.

Exercice 3. (8-points) *1+1+1+1+1+1,5+1,5 points*

1. Montrer au moyen d'un contre exemple qu'une suite de v.a:

(i) $X_n \xrightarrow{P} X$ n'implique pas $X_n \xrightarrow{p.s} X$,

(ii) $X_n \xrightarrow{Loi} X$ n'implique pas $X_n \xrightarrow{P} X$.

2. Montrer au moyen d'un exemple qu'une suite de v.a

(i) X_n converge en moyenne mais pas en moyenne quadratique.

(ii) X_n converge presque surement mais pas en en moyenne.

(iii) X_n converge en Loi vers une constante c implique que X_n converge en probabilité vers c

3. Utiliser le théorème limite central pour montrer que la suite $X_n = e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$ converge vers $\frac{1}{2}$ quand $n \to +\infty$.

4. Si X_n une suite de variables aleatoires independantes, Montrer que si $\sum_n X_n$ converge presque surement, alors pour tout $a > 0$:

$$\sum_n P\left(|X_n| > a\right) < +\infty.$$