Département de Mathématiques
Maste1, Contrôle Optimal, Actuariat et Proba-States

Série de TD N°2 d'Analyse Numérique Matricielle

Exercice 1: *(8 points)* On considère le système $Ax = b$, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \text{ quelconque}$$

Etudier la convergence des méthodes de Jacobi et de Relaxation.

Exercice 2: *(8 points)* Pour résoudre le système par blocs

$$\begin{pmatrix} A_1 & B \\ B & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

on considère les deux méthodes suivantes:

$$(1) \begin{cases} A_1 x^{(k+1)} + B y^{(k)} = b_1 \\ B x^{(k)} + A_2 y^{(k+1)} = b_2 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} A_1 x^{(k+1)} + B y^{(k)} = b_1 \\ B x^{(k+1)} + A_2 y^{(k+1)} = b_2 \end{cases}$$

1- Trouver des conditions suffisantes pour que ces schémas soient convergent pour toute donnée initiales $x^{(0)}$, $y^{(0)}$.

2- Ecrire le système (1) sous forme matricielle $z^{(k+1)} = Cz^{(k)} + c$, où $z^{(k)} = \begin{pmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \end{pmatrix}$.

3- Calculer le rayon spéctral de C.

4- Ecrire le système (2) sous forme matricielle $z^{(k+1)} = Dz^{(k)} + d$, où $z^{(k)} = \begin{pmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \end{pmatrix}$.

5- Calculer le rayon spéctral de C.

6- Comparer les deux méthodes.

Exercice 3: *(4 points)* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = (1+\omega)P - (N + \omega P)$, avec $P^{-1}N$ inversible et de valeurs propres réelles $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n < 1$.

Trouver les valeurs de ω pour lesquelles la méthode itérative

$$(1+\omega)Px^{(k+1)} = (N + \omega P)\, x^{(k)} + b, \qquad k \geq 0$$

converge vers la solution du système $Ax = b$ pour tout $x^{(0)}$.

Pr. BOURAS Med Chérif