USTHB
Faculté de Mathématiques
Master 1 SPA
Séries chronologiques 1

Corrigé de l'examen de fin du second semestre

Exercice 1

L'hypothèse d'inversibilité permet d'identifier le processus générateur des données à partir de la fonction d'autocorrélation. En effet, si cette hypothèse n'est pas imposée, on peut trouver au moins deux processus qui possèdent la même fonction d'autocorrélation, par exemple $X_t = \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1}$ et $Y_t = u_t + \frac{1}{\theta}u_{t-1}$ où (ϵ_t) et (u_t) sont des bruits blancs de variances finies.

a) Le processus $X_t = (1 - 0.4B)\epsilon_t$ est inversible car la racine de $1 - 0.4z$ est à l'extérieur du disque unité.

b) Le processus $X_t = (1 - 0.4B + 1.2B^2)\epsilon_t$ est tel que $1 - 0.4z + 1.2z^2$ a ses racines $z_1 = \frac{0.4+\sqrt{-4.64}}{2.4} = 0.166\,67 + 0.897\,53i$ et $z_2 = \frac{0.4-\sqrt{-4.64}}{2.4} = 0.166\,67 - 0.897\,53i$ à l'intérieur du disque unité. Il est non inversible.

c) Le processus $X_t = \left(\sum_{i=0}^{\infty}(-0.3)^i B^i\right)\epsilon_t = (1 + 0.3B)^{-1}\epsilon_t$. Par conséquent $\epsilon_t = (1 + 0.3B)X_t$. Il est inversible.

d) Le processus $X_t = \left(\sum_{i=0}^{\infty}(1.2)^i B^i\right)\epsilon_t$ est tel que la série $\sum_{i=0}^{\infty}(1.2)^i$ n'est pas convergente. Il n'est pas inversible.

Exercice 2

A)

1) $X_t = 0.2X_{t-1} + 0.15X_{t-2} + \epsilon_t + 0.3\epsilon_{t-2}, t \in \mathbb{Z}$ est un processus $ARMA(2, 2)$.

2) Vérifions si (X_t) est stationnaire : $1 - 0.2z - 0.15z^2 = 0 \Rightarrow \Delta = 0.04 + 4 \times 0.15 = 0.64 = (0.8)^2$ D'où $z_1 = \frac{0.2+0.8}{-0.3} = -3.\,333\,3$ et $z_2 = \frac{0.2-0.8}{-0.3} = 2.0$. Les racines étant à l'extérieur du disque unité, ce processus est stationnaire au second ordre. Si on dispose de T observations de ce processus $x_1, ..., x_T$, on pourra faire des prévisions, à cout terme, de valeurs futures $\widehat{X}_T(h) = \mathbb{E}(X_{T+h} \mid \mathcal{F}_T), h = 1, 2, ...$ étant l'horizon de la prévision et $\mathcal{F}_T$ étant l'information disponible jusqu'à l'instant T. Plus l'horizon de prévision s'éloigne, plus les prévisions deviennent biaisées.

3) La représentation causale

$$(1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2)X_t = \epsilon_t + 0.3\epsilon_{t-2} \Leftrightarrow X_t = \sum_{i=0}^{\infty}\xi_i B^i(\epsilon_t + 0.3\epsilon_{t-2}) \text{ où } \xi_0 = 1,$$

$\xi_1 = \varphi_1$, $\xi_i = \varphi_1\xi_{i-1} + \varphi_2\xi_{i-2}$, $\xi_j = 0$ si $j < 0$.

D'où $X_t = \sum_{i=0}^{\infty}\xi_i\epsilon_{t-i} + 0.3\sum_{i=0}^{\infty}\xi_i\epsilon_{t-2-i} = \epsilon_t + \xi_1\epsilon_{t-1} + \sum_{i=2}^{\infty}\xi_i\epsilon_{t-i} + 0.3\sum_{i=0}^{\infty}\xi_i\epsilon_{t-2-i}$.

On effectue un changement d'indice dans la première somme infinie. On pose $i' = i - 2$. On obtient :

$X_t = \epsilon_t + \xi_1 \epsilon_{t-1} + \sum_{i'=0}^{\infty} \xi_{i'+2} \epsilon_{t-i-2} + 0.3 \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i \epsilon_{t-2-i} = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \epsilon_{t-i}$ avec $\psi_0 = 1$, $\psi_1 = \xi_1$ et $\psi_i = \xi_i + 0.3\xi_{i-2}$, $i = 2, 3, ...$

4) La fonction d'autocovariance

Ce processus étant stationnaire et causal $\mathbb{E}(X_t) = \mu$ vérifie $\mu = 0.2\mu + 0.15\mu \Leftrightarrow 0.65\mu = 0$ d'où $\mu = 0$. Ainsi $\gamma_h = Cov(X_t, X_{t-h}) = \mathbb{E}(X_t X_{t-h})$

$\Leftrightarrow \gamma_h = \mathbb{E}\left[(0.2X_{t-1} + 0.15X_{t-2} + \epsilon_t + 0.3\epsilon_{t-2})X_{t-h}\right] = 0.2\gamma_{h-1} + 0.15\gamma_{h-2} + \mathbb{E}(\epsilon_t X_{t-h}) + 0.3\mathbb{E}(\epsilon_{t-2} X_{t-h})$

- Pour $h = 0$, $\gamma_0 = 0.2\gamma_1 + 0.15\gamma_2 + \underbrace{\mathbb{E}(\epsilon_t X_t)}_{(1)} + 0.3\underbrace{\mathbb{E}(\epsilon_{t-2} X_t)}_{(2)}$

  $(1) = \sigma_\epsilon^2$.

  $(2) = 0.2\mathbb{E}(\epsilon_{t-2}X_{t-1}) + 0.15\underbrace{\mathbb{E}(\epsilon_{t-2}X_{t-2})}_{=\sigma_\epsilon^2} + \underbrace{\mathbb{E}(\epsilon_{t-2}\epsilon_t)}_{=0} + 0.3\underbrace{\mathbb{E}(\epsilon_{t-2}^2)}_{=\sigma_\epsilon^2}$ et $\mathbb{E}(\epsilon_{t-2}X_{t-1}) =$

  $0.2\underbrace{\mathbb{E}(\epsilon_{t-2}X_{t-2})}_{\sigma_\epsilon^2} + 0.15\underbrace{\mathbb{E}(\epsilon_{t-2}X_{t-3})}_{=0} + \underbrace{\mathbb{E}(\epsilon_{t-2}\epsilon_{t-1})}_{=0} + 0.3\underbrace{\mathbb{E}(\epsilon_{t-2}\epsilon_{t-3})}_{=0}$

  D'où $\gamma_0 = 0.2\gamma_1 + 0.15\gamma_2 + 1.147\sigma_\epsilon^2$

- Pour $h = \pm 1, \gamma_1 = 0.2\gamma_0 + 0.15\gamma_1 + \mathbb{E}(\epsilon_t X_{t-1}) + 0.3\underbrace{\mathbb{E}(\epsilon_{t-2}X_{t-1})}_{(1)}$

  $(1) = 0.06\sigma_\epsilon^2$

  D'où $\gamma_1 = 0.2\gamma_0 + 0.15\gamma_1 + 0.06\sigma_\epsilon^2$

- Pour $h = \pm 2, \gamma_2 = 0.2\gamma_1 + 0.15\gamma_0 + 0.3\mathbb{E}(\epsilon_{t-2}X_{t-2}) \Leftrightarrow \gamma_2 = 0.2\gamma_1 + 0.15\gamma_0 + 0.3\sigma_\epsilon^2$

- Pour $|h| \geq 3, \gamma_h = 0.2\gamma_{h-1} + 0.15\gamma_{h-2}$.

  Des équations :

  $\gamma_0 = 0.2\gamma_1 + 0.15\gamma_2 + 1.147\sigma_\epsilon^2$ (1) $0.95294\gamma_0 = 0.15\gamma_2 + 1.161058\sigma_\epsilon^2 \Leftrightarrow \gamma_0 = 0.1574\gamma_2 + 1.2184\sigma_\epsilon^2 \Rightarrow \gamma_0 = 1.3084\sigma_\epsilon^2$ (voir 2 lignes ci-dessous).

  $\gamma_1 = 0.2\gamma_0 + 0.15\gamma_1 + 0.06\sigma_\epsilon^2$ (2) $\Leftrightarrow 0.85\gamma_1 = 0.2\gamma_0 + 0.06\sigma_\epsilon^2 \Leftrightarrow \gamma_1 = 0,235294\gamma_0 + 0.07029\sigma_\epsilon^2 \Rightarrow \gamma_1 = 0.3781\sigma_\epsilon^2$

  $\gamma_2 = 0.2\gamma_1 + 0.15\gamma_0 + 0.3\sigma_\epsilon^2$ (3) $\gamma_2 = 0.19706\gamma_0 + 0.314058\sigma_\epsilon^2 \Rightarrow \gamma_2 = 0.03102\gamma_2 + 0.554158\sigma_\epsilon^2 \Rightarrow \gamma_2 = 0.5719\sigma_\epsilon^2$

  $\gamma_3 = 0.2\gamma_2 + 0.15\gamma_1 = 0.2 \times 0.5719\sigma_\epsilon^2 + 0.15 \times 0.3781\sigma_\epsilon^2 = 0.171\,10\sigma_\epsilon^2$

  $\gamma_4 = 0.2\gamma_3 + 0.15\gamma_2 = (0.2 \times 0.171\,10 + 0.15 \times 0.5719)\sigma_\epsilon^2 = 0.120\,01\sigma_\epsilon^2$

- $\gamma_5 = (0.2 * 0.120\,01 + 0.15 * 0.171\,10)\,\sigma_\epsilon^2 = 0.04966\,7\sigma_\epsilon^2$ et $\rho_5 = 0.04\,966\,7/1.3084 = 0.037\,96$

Calcul de la fonction d'autocorrélation

$\rho_h = \gamma_h / \gamma_0, h = \pm 1, \pm 2, ...$ $\rho_0 = 1$

Des relations précédentes, on déduit que : $\rho_1 = 0.2890$ et $\rho_2 = 0.4371$, $\rho_3 = 0.130\,77$, $\rho_4 = 0.09\,172\,3$

$\rho_h = 0.2\rho_{h-1} + 0.15\rho_{h-2}$, $h = 3, 4, ...$ Posons $\rho_h = r^h$. Donc $r^h = 0.2r^{h-1} + 0.15r^{h-2} \Rightarrow r^2 - 0.2r - 0.15 = 0$, d'où $r_1 = -0.3$ et $r_2 = 0.5$. Ce sont bien les inverses de z_1 et z_2 trouvées en 2).

D'où $\rho_h = C_1(-0.3)^h + C_2(0.5)^h$, $h = 3, 4, ...$ $\begin{cases} \rho_3 = -0.027C_1 + 0.125C_2 = 0.130\,77 \\ \rho_4 = 0.0081C_1 + 0.0625C_2 = 0.09\,172\,3 \end{cases}$

Trouver C_1 et C_2. $C_1 = 1.196527$, $C_2 = 1.30461$.

Vérification

$\rho_5 = 1.196527 \times (-0.3)^5 + 1.30461 \times (0.5)^5 = 3.\,786\,2 \times 10^{-2} = 0.037852$

5) Prévisions

$\widehat{X}_t(1) = \mathbb{E}(X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = 0.2X_t + 0.15X_{t-1} + 0.3\epsilon_{t-1}$

$\widehat{X}_t(2) = \mathbb{E}(X_{t+2} \mid \mathcal{F}_t) = 0.2\widehat{X}_t(1) + 0.15X_t + 0.3\epsilon_t$

$\widehat{X}_t(3) = \mathbb{E}(X_{t+3} \mid \mathcal{F}_t) = 0.2\widehat{X}_t(2) + 0.15\widehat{X}_t(1)$

B) à faire.

Exercice 3

Voir TD