Serie N°1

Exercice1

On considère pour modéliser le fonctionnement d'un appareil jusqu'à sa défaillance le modèle de survie $T = \min(E, W)$ où les variables E et W sont indépendantes, E suivant une loi exponentielle $\exp\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ et W une loi de Weibull $W(\alpha, \beta)$définies par leurs fonction de hasard (taux de panne) ainsi:

$$h_E(t) = \frac{1}{\lambda} \text{ et } h_W(t) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1}$$

Question 1: Pour chacune des lois E et W montrer que les fonctions de fiabilité sont respectivement:

$$S_E(t) = \exp\left(-\frac{1}{\lambda}t\right) \text{ et } S_W(t) = \exp\left(-\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}$$

Question 2: Déterminer la fonction de répartition $F_T(t)$ et la densité $f_T(t)$ de la variable aléatoire T. En déduire sa fonction de hasard $h_T(t)$.

Exercice2

a) Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\exp(\lambda)$; on considére un n-échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de X

On pose $Y = \max\limits_{i=1,...,n}(X_i)$ et $Z = \min\limits_{i=1,...,n}(X_i)$

Donner la loi de chacune des variables aléatoire Y et Z.

b) Le système de propulsion d'un avion est composé de 4 moteurs. Le taux de défaillance d'un moteur est de 0,00015 panne par heure. Les moteurs tombent en panne indépendamment les uns des autres.

1. Donner la fiabilité de l'avion au bout de 1000 heures si les 4 moteurs doivent tomber en panne pour que l'avion s'écrase.

2. Même question si la défaillance d'un seul moteur entraîne la chute de l'avion.