Licence Mathématiques 3^{ième} année **2021/2022**
Matière: Mesure et intégration

Micro - interrogation n° 1

Exercice 1 Répondre par vraie ou faux, en justifiant votre réponse .
1- Soit $E = \{a, b, c, d\}$, alors $\mathcal{F} = \{E, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$ est une tribu sur E.
2- Soit $(E, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré , alors on a pour $A \in \mathcal{B}$: $\mu(E) = \mu(A) + \mu(A^c)$.
3- Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique, alors $\mathcal{T}$ est une $\sigma-$ algèbre sur E.
4- On considère λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, alors

$$\lambda(\mathbb{R}) = \lambda\left(\bigcup_{x\in\mathbb{R}} \{x\}\right) = \sum_{x\in\mathbb{R}} \lambda(\{x\}) = \sum_{x\in\mathbb{R}} 0 = 0..$$

Exerciec 2
(a) Soient $(E, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et $(A, B)^2 \in \mathcal{F}$. Montrer que si $A \subset B$ et $\mu(A) < +\infty$, alors $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.
(b) Soit B un borélien non vide de $\mathbb{R}$. Monter que si B est borné, alors $\lambda(B) < +\infty$.

Corrigé de la micro-interrogation

Exercice 1 .
1- Faux,(0.5 pt) car $\{a\} \in \mathcal{F}$ mais $\{a\}^c = \{b, c, d\} \notin \mathcal{F}$. (0.5 pt)
2- Vraie (0.5 pt), car $E = A \cup A^c$ et $A \cap A^c = \emptyset$, alors comme μ est une mesure on a :

$$\mu(E) = \mu(A \cup A^c) = \mu(A) + \mu(A^c) . (0.5\ pt)$$

3- Faux (0.5 pt), car si $A \in \mathcal{T} \iff A$ est un ouvert, doncA^c est un fermé.(0.5 pt)
4- Faux (0.5 pt), car la réunion est quelconque et dans ce cas on ne peut pas écrire

$$\lambda\left(\bigcup_{x\in\mathbb{R}} \{x\}\right) = \sum_{x\in\mathbb{R}} \lambda(\{x\})\ (0.5\ pt)$$

Exerciec 2
(a) Soient $(E, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et $(A, B)^2 \in \mathcal{F}$relle que $A \subset B$, alors

$$\left.\begin{array}{c} B = A \cup B \setminus A \\ \text{et} \\ A \cap B \setminus A = \emptyset \end{array} \quad (0.5\ pt)\right\} \Longrightarrow \mu(B) = \mu(A \cup B \setminus A) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) . \quad (0.5\ pt)$$

Comme $\mu(A) < +\infty$ on obtient $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$. (0.5 pt)

(b) Soit B un borélien borné non vide de $\mathbb{R}$, alors il existe deux réels finis m et M telle que

$$\forall x \in B : \inf B = m \leq x \leq M = \sup B. (0.5\ pt)$$

Donc $B \subset [m, M]$ $\quad$ (0.5 pt) , ce qui nous permet de dire que

$$\lambda(B) \leq \lambda([m, M]) = M - m < +\infty. (0.5\ pt)$$