Université Mohammed Sedik Benyahia-Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

THEORIE DES COPULES ET VALEURS EXTREMES

Niveau : Première Année Master

Spécialité : Probabilités et Statistique

Année universitaire 2019/2020

Enseignant : GHERDA Mebrouk

Chapitre 1

Modes de Convergence

Soit X une varible alétoire et (X_n) une suite de variables alétoires définies sue le même espace probabilisé $(\Omega,\ \Lambda,\ P)$.

1.1 Convergence en probabilité : $X_n \longrightarrow_P X$

Définition 1.1. *lasuite*(X_n) *Converge en probabilit é vers* X *si* $\forall\varepsilon > 0\ \lim_{n\longrightarrow\infty} P\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) = 0$

La loi faible des grands nombres

Si les variables aléatoires X_n *sont deux à deux non covarié es, de même loi, d'espérance* μ *de variance* σ^2*, alors* $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow_P \mu$.

1.2 Convergence en moyenne quadratique : $X_n \longrightarrow_{mq} X$

Définition 1.2. *la suite* (X_n) *Converge en moyenne quadratique vers* X *si* $\lim_{n\longrightarrow\infty} P\left((X_n - X)^2\right) = 0$

Propriétés : (X_n) *Converge en moyenne quadratique vers* X *si et seulement si* $\lim_{n\longrightarrow\infty} E\left(X_n\right) = E\left(X\right)$ *et* $\lim_{n\longrightarrow\infty} var\left(X_n - X\right) = 0$.

1.3 Convergence presque sûre : $X_n \longrightarrow_{ps} X$.

Définition 1.3. *la suite* (X_n) *Converge presque sû rement vers* X *si* $P\left(w/\lim_{0\to\infty} X_n(w) = X(w)\right) = 1$

Loi forte des grands nombres

Si les variables aléatoires X_n *sont mutuellement indépendantes de même loi, d'espérance* μ*, alors* $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow_{Ps} \mu$.

1.4 Convergence en loi : $X_n \longrightarrow_l X$

Soit F_n *la fonction de répartition de* X_n *et* F *celle de* X.

Définition 1.4. *la suite* (X_n) *Converge en loi vers* X *si por tout* x *où* F *est continue,* $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$.

Distance de Kolmogorov entre deux fonction de répartition G_1 *et* G_2*. Elle est définit par* $\Delta(G_1, G_2) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |G_1(x) - G_2(x)|$.

Propriétés de la convergence en loi *-Si* $\lim_{n\to\infty} \Delta(F_n, F) = 0$ *alors* $X_n \longrightarrow_l X$.

-Si F *est continue alors :* $X_n \longrightarrow_l X$ *si et seulement si* $\lim_{n\to\infty} \Delta(F_n, F) = 0$.

-Si X_n *et* X *sot des variables aléatoires à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *alors* $X_n \longrightarrow_l X$ *si et seulement si :* $\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = P(X = k)$.

-Soit a *et* b *deux réels. Si* $X_n \longrightarrow_l X$ *alors* $aX_n + b \longrightarrow_l aX + b$.

Théorème limite centrale

Si les variables aléatoires X_n *sont mutuellement indépendantes de même loi, d'espérance* μ *et d'écart-type* σ *diff érent de* 0 *alors :*

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right) \longrightarrow_l X$$

où X *est une variable aléatoire de loi de Laplace-Gauss centré e réduite.*

1.5 Liens entre les différents type de convergence.

Ils se résume de la façon suivante :

$X_n \longrightarrow_{Ps} X \Longrightarrow X_n \longrightarrow_P X \Longrightarrow X_n \longrightarrow_l X$

$X_n \longrightarrow_{mq} X \Longrightarrow X_n \longrightarrow_P X \Longrightarrow X_n \longrightarrow_l X$

La convergence en loi est la seule qui ne fait intervenir que les lois des variables aléatoires.

Dans le cas où X est une variables aléatoire égale à a ou presque sûrement égale à a :

$$X_n \longrightarrow_P X \Leftrightarrow X_n \longrightarrow_l X$$

1.6 Théorème limite centrale généralisée

Le théorème de la limite centrale générailsée admet plusieurs généralisations qui donnent la convergence en loi de la suite de sommes finies, normalisées, de variables aléatoires vers une loi de probabilité normale sous des hypothèses plus faibles. Ces généralisations n'exigent pas que les variables aléatoires à sommer suivent la même loi, mais font appel à d'autres conditions.

1.6.1 éorème limite centrale de Lindeberg

Soit $(X_n \; n \in \mathbb{N}^*)$ *une suite de variables aléatoires non dégénérées et indépendantes à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *et* $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$,

Supposons que : $\forall i \in \mathbb{N}^*,\ E\left(X_i^2\right) < \infty$

Si $\forall \epsilon > 0,\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{var(S_n)} \sum\limits_{i=1}^{n} \left\{ \left[X_i - E\left(X_i\right)\right]^2 I_{\left[|X_i - E(X_i)| \geq \epsilon\sqrt{var(S_n)}\right]} \right\} = 0$
(condition d Lindberg)alors :

$$\frac{S_n - E\left(S_n\right)}{\sqrt{var\left(S_n\right)}} \rightarrow_l N\left(0,1\right)$$

1.6.2 Théorème limite centrale de Lyapounov

Soit $(X_n \; n \in \mathbb{N}^*)$ *une suite de variables aléatoires non dégén érées et indépendantes à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *et* $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, *Supposons que :* $\exists \delta > 0$ *tel que* $\forall i \in \mathbb{N}^*,\ E\left(|X_i|^{\delta+2}\right) < \infty$

Si $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{[var(S_n)]^{\frac{2+\delta}{2}}} \sum_{i=1}^{n} \left\{[X_i - E(X_i)]^{2+\delta}\right\} = 0$ *(condition* ***Lyapounov)***

alors

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{var(S_n)}} \to_l N(0,1)$$

Chapitre 2

VALEURS EXTREMES

2.1 Lois de probabilité indéfiniment divisible et lois $\alpha - stables$

2.1.1 Lois de probabilité indéfiniment divisible

Idée : *Comment peut-on déterminer toutes les lois de probabilité qui s'expriment comme limites en loi d'une suite de somme de n $(n \in \mathbb{N}^*)$ variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées à valeurs dans $\mathbb{R}$?.*

Définition 2.1. *Une variables aléatoire X ou la loi de probabilité de X est dite indéfiniment divisible si : $\forall n \in \mathbb{N}^* \exists X_1, X_2, ..., X_n$ telles que $X = (d) X_1 + X_2 + ... + X_n$*

avec $X_1 + X_2, ..., X_n$ des variables aléatoires ind épendantes et identiquement distribuées à valeurs dans R .

Définition 2.2. *Soient X une variable aléatire à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction caractéristique de sa loi de probabilité. On a :*

X est indéfiniment divisible $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists\ \phi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = [\phi_n(t)]^n$

avec : ϕ_n est une fonction caractéristique d'une certaine loi de probabilité.

Dans ce cas, on dit que φ est une fonction caractéristique indéfiniment divisible, c-à-d si elle peut s'exprimer comme puissance $n^{ème}$ d'une autre fonction caractéristique.

: La variable aléatoir X est indéfiniment divisible si et seulement si elle est la limite en loi d'une suite de variables alétoire réelles $(S_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$, où S_n est la somme de n variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées.

Définition 2.3. *(fonction caracéristique)*

Soit X une variable aléatoire quelconque (positive ou né gative) de fonction de répartition F, la fonction $\varphi_X(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, définie par $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_X(t) = \int e^{itx} dF(x) = E(e^{itX})$ est dite fonction caractéristique de la v.a X de la loi de X. $t \in \mathbb{R}$, $|e^{it}| = 1$, d'où $|\varphi(t)| \leq \int |dF(x)| = 1$, $\varphi(0) = 1$

2.2 Théorèmeme (Gnedenko-Kolmogorov)

1. Si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction caractéristique d'une loi de probabilité indé finiment divisible, alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) \neq 0$.

2. Si $(X_n\ n \in \mathbb{N}^*)$ une suite de variables aléatoires indéfiniment divisibles telles que $X_n \to (L)\, X$

alors X est une variable aléatoire indéfiniment divisible

3. Si $X_1, X_2, ..., X_n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ sont n variables aléatoires réelles indéfiniment divisibles,

alors $\sum_{i=1}^{n} X_i$ est une variable aléatoire réelle indéfiniment divisible.

2.2.1 Exemples

***1** :Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $N(\mu, \sigma^2)$, $(\mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0)$, alors sa fonction caractéristique φ s'é crit comme suit*

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = \exp\left\{i\mu t - \frac{t^2}{2}\sigma^2\right\} = \left[\exp\left\{i\frac{\mu}{n}t - \frac{t^2}{2}\frac{\sigma^2}{n}\right\}\right]^n$$

Or : la la fonction φ_n $(n \in \mathbb{N}^*)$ définie par : $\varphi_n(t) = \left[\exp\left\{i\frac{\mu}{n}t - \frac{t^2}{2}\frac{\sigma^2}{n}\right\}\right]$ est la fonction caractéristique de la loi normale $N\left(\dfrac{\mu}{n}, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$. Donc la loi de probabilité normale est une loi indé finiment divisible.

***2** : Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson $P(\lambda)$, $(\lambda > 0)$, alors sa fonction caractéristique φ s'é crit comme suit :*

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = \exp\left\{\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right\} = \left[\exp\left\{\frac{\lambda}{n}\left(e^{it} - 1\right)\right\}\right]^n,\ n \in \mathbb{N}^*$$

Or : la la fonction φ_n $(n \in \mathbb{N}^*)$ définie par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_n(t) = \left[\exp\left\{\frac{\lambda}{n}\left(e^{it} - 1\right)\right\}\right]^n$ est la fonction caractéristique de la loi de Poisson $P\left(\dfrac{\lambda}{n}\right)$.Donc la loi de Poisson est une loi indéfiniment divisible.

3 : *Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Cauchy $C(a,h)$ $(a \in \mathbb{R},\ h > 0)$, alors sa fonction caractéristique φ s'écrit comme suit :*

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = \exp\{iat - h|t|\} = \left[\exp\left(i\frac{a}{n}t - \frac{h}{n}|t|\right)\right]^n,\ n \in \mathbb{N}^*$$

Or : la la fonction φ_n $(n \in \mathbb{N}^*)$ définie par : $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_n(t) = \left[\exp\left(i\frac{a}{n}t - \frac{h}{n}|t|\right)\right]^n$ est la fonction caractéristique de la loi de Cauchy $C\left(\frac{a}{n}, \frac{h}{n}\right)$.Donc la loi de Cauchy est une loi indéfiniment divisible.

Loi de Cauchy : *La v.a X suit la loi de Cauchy si sa densité de probabilité est donnée par f(x)=$\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(x-a)^2}$, pout x$\in \mathbb{R}$.sa $fonction$ $caractéristique$ et $\varphi_X(t) = e^{-|t|}$.*

2.3 LOIS α-STABLES

Définition 2.4. *UnevariablealatoirXdans $R^{\ d}$ si pour tout $a,\ b \in \mathbb{R}_+$ Il existe $C \in \mathbb{R}_+$ et un vecteur $D \in \mathbb{R}^d$tels que*

$$aX_1 + bX_2 = (d)CX + D*$$

où X_1 , X_2 sont des copies indépendantes de X.
Le nombre C vérifie $C^\alpha = a^\alpha + b^\alpha$ pour un nombre $1 \le \alpha \le 2$
Si $D = 0$, on dit que X est strictement $\alpha - stable$.

Définition 2.5. *Si$X \rightsquigarrow N(\mu, \sigma^2)$ alors aX_1,,bX_2 suivent respectivement $N\left(a\mu, (a\sigma)^2\right)$ et $N\left(b\mu, (b\sigma)^2\right)$*
$CX + D \rightsquigarrow N\left(C\mu + D, (C\sigma)^2\right)$
si on prend $C^2 = a^2 + b^2$ et $D = (a + b - C)\mu$, l'égalité $*$ est établie.
donc les lois normales sont 2-stables.

Définition 2.6. *Une variable aléatoir X dans $\mathbb{R}$ si pour tout $a,\ b \in \mathbb{R}_+$ Il existe $c \in \mathbb{R}_+$ et un vecteur $d \in \mathbb{R}^d$tels que*

$$aX_1 + bX_2 = (d)cX + d**$$

La fonction caractéristique pour x>0, 0<$\alpha \le 2$, -1$\le \beta \le 1$, μ et t$\in \mathbb{R}$, est définie par

$$\Psi(t) = E(\exp(itX)) = \exp\left[i\mu t - \gamma^\alpha |t|^\alpha (1 - \beta sign(t)) W(\alpha, t)\right]$$

où

$$W(\alpha, t) = \begin{cases} \tan\frac{\pi\alpha}{2},\ si\ \alpha \neq 1 \\ -\frac{2}{\pi}sign(t)\log|t|,\ si\alpha = 1 \end{cases}$$

et

$$sign\,(t) = \begin{cases} 1 & si \quad t > 0 \\ 0 & si \quad t = 0 \\ -1 & si \quad t < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} E(\exp(itX))dt$$

On appelle

α : *exposant caractéristique.*

γ : *paramètre d'échelle.*

β : *paramètre d'asymétrie.*

μ : *paramètre de localisation*

NOTATION $X = (d)\, S(\alpha,\, \gamma,\, \beta,\, \mu)$ *signifie que* X *est distribuée selon une loi stable de paramètres* $\alpha,\, \gamma,\, \beta,\, \mu$.

On note $S\alpha S$ *la distribution centré est symétrique de variable aléatoire* X, *soit* $\beta = \mu = 0$.

Propriété : *Si* X_1 *et* X_2 *deux variables aléatoires indépendantes avec* $X_i = (d)\, S(\alpha,\, \gamma_i,\, \beta_i,\, \mu_i)$, $i = 1,\, 2$ *alors* $X_1 + X_2 = (d)\, S(\alpha,\, \gamma,\, \beta,\, \mu)$

Alors on a la relation suivante :

$$\beta = \frac{\beta_1 \gamma_1^\alpha + \beta_2 \gamma_2^\alpha}{\gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha},\ \ \gamma = (\gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}},\ \ \mu = \mu_1 + \mu_2$$

Les statistiques d'ordre

Soient n *variables aléatoires iid* $X_1, ..., X_n$. *Rangeons ces variables al´ eatoires par "ordre croissant de grandeur". Pour cela, nous introduisons la notation* $X_{i:n}$ *avec* $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \cdots \leq X_{n-1:n} \leq X_{n:n}$, $X_{i:n}$ *est donc la* $i-$*ième statistique d'ordre (ou statistique d'ordre* i*) dans un échantillon de taille* n. *Soient* n *observations* $x_1, ..., x_n$. *La valeur observée de* $X_{i:n}$ *est notée* $x_{i:n}$ *et* $x = (x_1, ..., x_n)$ *est le vecteur des observations. Deux statistiques d'ordre sont particulièrement intéressantes pour l'étude des évènements extrêmes. Ce sont les statistiques d'ordre extrême qui correspondent à la plus petite statistique d'ordre* $X_{1:n}$ *(ou statistique du minimum)* $X_{1:n} = min(X_1, ..., X_n)$ *et à la plus grande statistique d'ordre* $X_{n:n}$ *(ou statistique du maximum)* $X_{n:n} = max(X_1, ..., X_n)$. *L'2cart des statistiques d'ordre* $W_{i,j:n} = X_{j:n} - X_{i:n}$ $(i < j)$. *L'*

´ *ecart* $W = W_{1,n:n} = X_{n:n} - X_{1:n}$ *est appelée la d*

´ *eviation extrême.*

Remarque 1. *Même si les variables aléatoires* $X_1, ..., X_n$ *sont indépendantes, les statistiques d'ordre ne sont pas indépendantes (par définition).*

l'expression de la distribution de $X_{i:n}$ *est*

$$F_{i:n}(x) = Pr\{X_{i:n} \leq x\} = n \sum_{r=i}^{n} C_n^r [F(x)]^r [1 - F(x)]^{n-r}$$

Nous en dduisons que la fonction de densité est

$$f_{i:n}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} [F(x)]^{i-1} [1 - F(x)]^{n-i} f(x)$$

Pour les statistiques d'ordre extrême, nous obtenons des expressions très simples. En effet, nous avons

$$F_{1:n}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n \quad et \quad f_{1:n}(x) = n[1 - F(x)]^{n-1} f(x)$$

pour la statistique du minimum et

$$F_{n:n}(x) = [F(x)]^n \quad et \quad f_{n:n}(x) = n[F(x)]^{n-1} f(x)$$

pour la statistique du maximum.

2.3.1 Le théorème de Fisher-Tippet

Ce théorème permet de caractériser la loi de distribution des extrêmes

Supposons n variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ *indépendantes et de même loi de distribution F. S'il existe des constantes* a_n *et* b_n *et une distribution limite non dégénérée G telles que*

$$\lim_{n \to \infty} Pr \left(\frac{\chi_n^+ - b_n}{a_n} \leq x \right) = G(x) \qquad \forall x \in R$$

alors G appartient à l'un des trois types suivants de distribution :

$$\begin{cases} TypeI \quad (Gumbel) \quad G(x) = exp(-e^{-x}) \qquad x \in \mathbb{R} \quad g(x) = exp(-x - e^{-x}) \\ \\ TypeII \qquad (Frechet) \quad G(x) = \begin{cases} 0 \ si \ \ x \leq 0 \\ exp(-x^{-\alpha}) \quad si \ \ x > 0 \end{cases} \\ \\ g(x) = \begin{cases} 0 \\ \alpha x^{-(1+\alpha)} exp(-x^{-\alpha}) \end{cases} \\ \\ TypeIII \quad (Weibull) \quad G(x) = \begin{cases} exp(-(-x)^{\alpha}) \quad si \ x \ \ \leq 0 \\ 1 \ si \ \ x > 0 \end{cases} \\ \\ g(x) = \begin{cases} \alpha(-x)^{\alpha-1} exp(-(-x)^{\alpha}) \\ 0 \end{cases} \end{cases}$$

Ce théorème présente un intarêt important, car si l'ensemble des distributions est 'grand', l'ensemble des distributions de valeurs extrêmes est lui tr'es petit.

ce théor'eme n'est valable que si les séquences $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ existent et admettent une limite.

le cas de la distribution exponentielle

Nous avons $F(x) = 1 - \exp(-x))$ Nous remarquons que

$$\begin{aligned} Pr\left(\frac{X}{}n^{+} - b_n a_n \leq x\right) &= Pr\left(X_n^{+} \leq a_n x + b_n\right) \\ &= F_n(a_n x + b_n) = [1 - \exp p(-a_n x - b_n)]^n \end{aligned}$$

Si nous posons $a_n = 1$ et $b_n = \ln n$, nous avons

$$\lim_{n\to\infty} Pr\left(\frac{X_n^{+} - b_n}{a_n} \leq x\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}e^{-x}\right)^n = \exp(-\exp(-x))$$

car

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

$F^n(x - \ln n)$ *converge vers la distribution Gumbel.*

$F(x) = 1 - \exp(-x))$ $F^n(x - \ln n) = (1 - \exp(-x + \ln(n)))^n$

Remarque 2. *Pour distinguer les trois distributions, on utilise généralement les notations suivantes : Λ pour la distribution Gumbel, Φ_α pour la distribution Frechet et Ψ_α pour la distribution Weibull*

Remarque 3. *Les distributions Λ, Φ_α et Ψ_α sont appelées les distributions de valeurs extrêmes et les variables aléatoires correspondantes sont les variables aléatoires extrémales.*

Nous considérons maintenant les différences entre les trois distributions Λ, Φ_α et Ψ_α. Sur le graphique 2.8, nous représentons les fonctions de densité de Λ,
Phi_1 et Ψ_1. Nous remarquons que ces distributions sont très différentes. Néanmoins, la distribution Weibull est reliée à la distribution Frechet par la relation suivante : $\Psi_\alpha(x) = \Phi_\alpha\left(-\frac{1}{x}\right)$

2.3.2 Caractérisation des domaines d'attraction

On dit qu'une distribution F appartient au max-domaine d'attraction de G, et on note $F \in MDA(G)$ si la distribution du maximum normalisée converge vers G. L'exponentielle appartient au max-domaine d'attraction de Λ. Voici d'autres exemples :

– *MDA(Λ)*

Exponentielle, Gaussienne, Gamma, Lognormale, etc.

– *MDA(Φ_α)*

Cauchy, Pareto, $\alpha - stable(\alpha<2), etc.$

– *MDA(Ψ_α)$Uniforme, Beta, etc.$*

Nous voyons que les trois distributions de valeurs extrêmes sont très différentes en terme de max-domaine d'attraction :

1. Dans le max-domaine d'attraction de la distribution Gumbel, nous trouvons des distributions qui n'ont pas de queues épaisses.

2. Dans le max-domaine d'attraction de la distribution Frechet, nous trouvons des distributions qui ont des queues épaisses.

3. Dans le max-domaine d'attraction de la distribution Weibull, nous trouvons des distributions à support fini, ce qui implique que le support du maximum soit born à droite. Cela a des implications d'un point de vue financier, puisque la problématique va être de choisir entre lesdistributions $\Lambda et \Phi_\alpha (etdanscecas, quellevaleurpour \alpha ?) pourmodliserlemaximum.$

Sachant la distribution F, nous voudrions connaître à quel max-domaine d'attraction elle appartient et quelles sont les constantes de normalisation. La réponse est relativement complexe et n'est pas unique. Nous indiquons ici les critères les plus utilisés.

Définition 2.7. *Une fonction f est dite à variation réguli'ere d'indice α et on note $f \in RV\alpha$ si pour tout $x > 0$, on a*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(tx)}{f(t)} = x^{\alpha}$$

Définition 2.8. *$F \in MDA(\Phi_\alpha)$ si et seulement si $1 - F \in RV - \alpha$. Dans ce cas, $a_n = F^{-1}\left(1 - n^{-1}\right)$ et $b_n = 0$. Ce théorème formulé par Gnedenko [1943] permet de caractériser très simplement les distributions $F \in MDA(\Phi_\alpha)$. En effet, elles doivent vérifier lim*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = x^{-\alpha}$$

Prenons par exemple le cas de la distribution Pareto. Nous avons $F(x) = 1 - x^{-1/\gamma}$ Nous en déduisons que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{tx - \dfrac{1}{\gamma}}{x - \dfrac{1}{\gamma}} = x - \frac{1}{\gamma}$$

Donc $1 - F \in RV - 1/\gamma$ et $F \in MDA\left(\Phi 1/\gamma\right)$.

Remarquons que $a_n = F^{-1}\left(1 - n^{-1}\right) = n\gamma$. Bien sûr, nous vérifions

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} F_n(a_n x + b_n) &= \lim_{n\to\infty} F_n(n^{\gamma} x) = \\ \lim_{n\to\infty} F_n \left(1 - \frac{x-\dfrac{1}{\gamma}}{n}\right) &= \exp -x^{-\dfrac{1}{\gamma}} \end{aligned}$$

Le théorème prècédent suggère une vérification graphique de la propriété $F \in MDA(\Phi\alpha)$. Nous avons $\dfrac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} \simeq x^{-\alpha}$ pour t suffisamment grand. Dans ce cas, nous vérifions que $\ln(1 - F(tx)) \simeq \ln(1 - F(t)) - \alpha \ln x$.

<u>Par exemple</u>, nous vérifions graphiquement que la distribution gaussienne n'appartient pas au max-domaine d'attraction de la distribution Frechet

Voyons maintenant comment nous pouvons caractériser $MDA(\Psi_\alpha)$ et $MDA(\Lambda)$.

$F \in MDA(\Psi_\alpha)$ si et seulement si $1 - F\left(x_0 - x^{-1}\right) \in RV - \alpha$ et $x_0 < \infty$. Dans ce cas, $a_n = x_0 - F^{-1}\left(1 - n^{-1}\right)$ et $b_n = x_0$.

Exemple 2.9. *la distribution uniforme. Nous avons*

$$x_0 = 1. \lim_{t\to\infty} \frac{1 - F\left(1 - t^{-1}x^{-1}\right)}{1 - F(t^{-1})} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^{-1}x^{-1}}{t^{-1}} = x^{-1}$$

Donc $F \in MDA(3a81)$. *Remarquons que* $a_n = 1 - F^{-1}\left(1 - n^{-1}\right) = n^{-1}$. *Bien sûr, nous vérifions*

$$\lim_{n\to\infty} Fn(a_n x + b_n) = \lim_{n\to\infty} F^n\left(n^{-1}x + 1\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp(x)$$

La caractérisation de $MDA(\Lambda)$ *est la plus difficile à é noncer. Tout d'abord, il n'existe pas une condition nécessaire et suffisante relativement simple. Gén´*

eralement, les auteurs présentent une condition suffisante basée sur la représentation d'une fonction Von Mises. Cependant, cette représentation est difficile à manipuler, tout comme la CNS formulée par Gnedenko [1943]. Si la distribution F *est de classe* $C2$, *une condition suffisante relativement simple à vàrifier est la suivante*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(1 - F(x))\partial^2 F(x)}{\left(\partial F(x)\right)^2} = -1$$

Exemple : *la distribution exponentielle. Nous avons*

$$F(x) = 1 - \exp(-x),\ \partial F(x) = \exp(-x)\ et\ \partial^2 F(x) = -\exp(-x)$$

Nous v

´ erifions que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(1 - F(x))\cdot\partial^2 F(x)}{(\partial F(x))^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\exp(-x)\cdot\exp(-x)}{(\exp(-x))^2} = -1$$

Exemple : *la distribution gaussienne, nous avons*

$$F(x) = \Phi(x),\ \partial F(x) = \Phi(x)\ et\ \partial^2 F(x) = -x\Phi(x)$$

En utilisant la règle de L'Hospital, nous en déduisons que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(1 - F(x))\cdot\partial^2 F(x)}{(\partial F(x))^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x\Phi(-x)}{\Phi(x)} = -1$$

Chapitre 3

Les copules et ces propriétés

3.1 Introduction aux copules

Les copules représentent un outil innovant pour modéliser la structure de dépendence de pleusieurs variables aléatoires, introduit par Abé Sklar en 1959. Elles sont des fonctions de répartition définie sur $[0,1]^n$ *dont les loi marginales sont égales à la loi uniforme, les copules permet de distingué les comportement des distributions conjointes peut s'avirer difficile lorsqu'on modélise le comportement conjointe de deux phénomènes dont les marges ne sont pas normales.*
Pour facilité la tâche nous nous intéressons plus particulièrement à l'étude des copules bivariées.

-***Néologisme*** *Le concept de copule a été introduit par Sklar en 1959 afin de résoudre un problème de probabilité énoncé par Maurice Fréchet. Ce problème concernait les espaces métriques aléatoires.*

-***Objectif :*** *les copules sont un outil largement utilisé pour étudier la dépendance.*

-***Problématique*** *Un ensemble de mesures de dépendance entre les variables aléatoires a été proposé comme le coefficient de corrélation de Pearson, le tau de Kendall et le rho de Spearman, bien que ces mesures sont simples à calculer et peuvent être facilement interprétées, elles ne sont pas en mesure de détecter toutes les formes de dépendances, donc il était indéniable de trouver un autre moyen pour résoudre ce problème. En effet, la fonction copule a l'avantage de modéliser complètement la dépendance entre les variables.*

-***Notion*** *les copules sont des fonctions de répartition particulières, qui lient les fonctions de répartition multivariées de lois de probabilité dans* $\mathbb{R}^d$*, pour* $d \geq 2$*, aux fonctions de répartition marginales* *de leurs coordonnées. La caractéristique des copules permet de séparer les distributions marginales de la structure de dépendance.*

Plus précisément, soit $X_2, X_2, ...X_d$ *une suite de vecteurs aléatoires à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$*, définis sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *; de fonction de répartition conjointe* H *et de marginales* F_i *pour* $1 \leq i \leq d$*. D'aprés Sklar (1959), il existe une fonction de répartition multivariée* C*, telle que :*

$$H(x_1, ...x_d) = C(F_1(x_1), ..., F_d(x_d)) \tag{3.1}$$

Cette représentation montre la manière avec laquelle la fonction copule associe la loi de répartition conjointe aux lois marginales univariées.

3.2 Les mesures de dépendence

3.2.1 Coefficient de corrélation linéaire

Définition 3.1. *Soient* X *et* Y *deux variables aléatoires ayant des variances finies. Le coefficient de corrélation linéaire des variables* X *et* Y *est donné par :*

$$r(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}.$$

Où $Cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ *est la covariance entre* X *et* Y *;* $Var(X)$*,* $Var(Y)$ *correspondent aux variances respectives des variable* X*,* Y

La définition du coefficient de corrélation linéaire est donc subordonnée à l'existence des variances de X *et* Y*.*

Dans le cadre d'une dépendance linéaire parfaite, $Y = aX + b$*, (*$a \neq 0$ *;* $b \in \mathbb{R}$*), le coefficient de corrélation est égal à +1 ou -1 selon le signe de a.*

D'autre part, ce coefficient de corrélation reste invariant par des transformations linéaires strictement croissantes des variables aléatoires. En effet : $r(aX + b, cY + d) = sign(ac) \times r(X, Y)$

Néanmoins, ce coefficient ne demeure pas constant sous l'hypothèse d'une transformation croissante non linéaire.

3.2.2 Les coefficients de corrélation de tau de Kendall et de rho de Spearman

Les définitions de ces deux coefficients sont intimement liées à la notion de concordance. Ils constituent une alternative au coefficient de corrélation linéaire, qui n'est pas comme nous l'avons montré auparavant la mesure de dépendance la plus appropriée de souffre de certaine lacunes.

Définition 3.2. *Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2) deux observations d'un couples de variable aléatoire continue (X, Y) sont dit :*

- ***concordantes*** *:si*

$$(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0 \Longleftrightarrow (x_1 < x_2 \text{ et } y_1 < y_2) \text{ ou } (x_1 > x_2 \text{ et } y_1 > y_2)$$

- ***discordantes*** *:si*

$$(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) < 0 \Longleftrightarrow (x_1 < x_2 \text{ et } y_1 > y_2) \text{ ou } (x_1 > x_2 \text{ et } y_1 < y_2)$$

Définition 3.3. *La fonction de concordance entre les deux vecteurs aliatoires (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) est définie par :*

$$Q = \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0]$$

a/ Le tau de Kendall :

Définition 3.4. *soient (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) deux vecteurs aléatoires continus i.i.d de fonction de répartition conjointe H et de fonctions marginales F (pour X_1, X_2) et G (pourY_1, Y_2). Le tau de Kendall noté τ est définie par :*

$$\tau = \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0].$$

Le tau de Kendall possède les propriétés suivantes :

- *Le taux de Kendall est symétrique, c'est-à-dire : $\tau(X_1, X_2) = \tau(X_2, X_1)$*

- $-1 \leq \tau \leq +1$.

- *si X et Y sont comonotones alors $\tau = 1$ (la concordance la plus solide).*

- *si X et Y sont antimonotones alors $\tau = -1$ (la discordance la plus solide).*

- *si* X *et* Y *sont indépendantes alors* $\tau = 0$*, mais lorsque* $\tau = 0$ *les variables* X *et* Y *ne sont pas forcément indépendantes .*

- *si* a *et* b *sont des fonction strictement croissante, alors* $\tau(a(X), b(Y)) = \tau(X, Y)$.

b/ Le rho de Spearman :

La valeur de ce coefficient dénote par ρ*, est équivalente au coefficient de corrélation de Pearson. Il a été développé par Charles Spearman (1904). La définition de cette mesure est la suivante :*

Définition 3.5. *soient* (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) *et* (X_3, Y_3) *trois vecteurs aléatoires indépendants de même loi* H*. Le coefficient de corrélation de Spearman est définie par :*

$$\rho = 3\mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] - \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0]$$

Les propriétés du ρ *sont les suivantes :*

- ρ *existe toujours.*

- $-1 \leq \rho \leq +1$.

- *si* X *et* Y *sont comonotones alors* $\rho = 1$

- *si* X *et* Y *sont antimonotones alors* $\rho = -1$

- *si* X *et* Y *sont indépendantes alors :* $\rho = 0$

- *Il est invariant sous transformation non lineare strictement croissante c'est -à-dire si* a *et* b *sont deux fonctions strictements croissantes, alors :*$\rho(a(X), b(Y)) = \rho(X, Y)$.

3.3 Les copules

3.3.1 Définition d'une copule

Dans tout la suite I *désigne l'intervalle [0,1] .*

Définition 3.6. *on appelle copule bivariée toute fonction* C *définie de* $I^2 \longrightarrow I$ *qui possède les propriétés suivantes*

1. $\forall (u, v) \in I^2, C(u, 0) = C(0, v) = 0$

2. $\forall (u,v) \in I^2, C(u,1) = C(1,v) = u$

3. *C est 2-croissante c-à-d :* $\forall (u_1,u_2),(v_1,v_2) \in I \times I$ *avec* $u_1 \leq u_2 et v_1 \leq v_2, C(u_1,u_2) - C(v_1,u_2) - C(u_1,v_2) + C(v_1,v_2) \geq 0$

Cette définition signifie que C est une distribution des marginales uniformes.

Soient U_1, U_2 *deux variable aléatoires uniformes , alors :* $C(u_1,u_2) = \mathbb{P}(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2)$

La propriété (1) implique que : $\mathbb{P}(U_1 \leq 0, U_2 \leq u_2) = \mathbb{P}(U_1 \leq u_1, U_2 \leq 0) = 0$

La propriété (2) implique que : $\mathbb{P}(U_1 \leq 1, U_2 \leq u_2) = \mathbb{P}(U_1 \leq u_1, U_2 \leq 1) = u$

C est une distribution de probabilité ce qui implique que : $\mathbb{P}(u_1 \leq U_1 \leq v_1, u_2 \leq U_2 \leq v_2) = C(v_1,v_2) - C(v_1,u_2) - C(u_1,v_2) + C(u_1,u_2)$

Exemple 3.7.

1. $\forall (u,v) \in I^2$ *: la fonction* $M(u,v) = min(u,v)$ *définie une copule.En effet :*
   - $\forall (u,v) \in I^2, min(u,0) = min(0,v) = 0 \Rightarrow M$ *est vérifier (1)*
   - $\forall u \in I, min(u,1) = min(1,u) = u \Rightarrow M$ *est vérifier (2)*
   - $\forall (u_1,v_2),(u_2,v_2) \in I \times I,$ *avec* $u_1 \leq u_2$ *et* $v_1 \leq v_2$
     - *si* $u_1 \leq v_1$ *et* $u_2 \leq v_2$ *alors :*$min(v_1,v_2) - min(v_1,u_2) - min(u_1,v_2) + min(u_1,u_2) \geq u_2 - u_2 = 0.$
     - *si* $u_1 \leq v_1$ *et* $u_2 \geq v_2$ *alors :* $min(v_1,v_2) - min(v_1,u_2) - min(u_1,v_2) + min(u_1,u_2) \geq v_2 - v_1 \geq 0.$
     - *si* $u_1 \geq v_1$ *et* $u_2 \leq v_2$ *alors :* $min(v_1,v_2) - min(v_1,u_2) - min(u_1,v_2) + min(u_1,u_2) \geq u_2 - u_1 \geq 0.$
     - *si* $u_1 \geq v_1$ *et* $u_2 \geq v_2$ *alors :* $min(v_1,v_2) - min(v_1,u_2) - min(u_1,v_2) + min(u_1,u_2) \geq v_2 - v_2 = 0.$

     D'ou M est une copule.

2. $\forall (u,v) \in I^2$ *,la fonction* $W(u,v) = max(u+v-1,0)$ *définie une copule.*

3. *On a aussi* $\forall (u,v) \in I^2, \prod(u,v) = uv$ *définie une copule appelle la copule d'indépendance.*

3.3.2 Théorème d'existence (théorème de sklar)

Ce théorème est fondamentale dans la théorie des copules , il permet d'élucider le rôle que joue la copule dans la relation conjointe et les distribution marginales.

Définition 3.8. *soit (x, y) un vecteur aléatoire.Une fonction de distribution bivariée est une fonction H de $\mathbb{R}^2$ tel que :*

- $*$ *H est 2-croissante*
- $*$ $\lim_{x\to+\infty} H(x,y) = \lim_{y\to+\infty} H(x,y) = 0$
- $*$ $\lim_{x\to-\infty y\to-\infty} H(x,y) = 1$

Lorsque (x, y) admet une fonction de distribution jointe alors les distributions marginales de x et y sont respectivement donnée par $F_X(x) = \lim_{y\to\infty} H(x, y)$,et $G_Y(y) = \lim_{x\to\infty} H(x, y)$.

Théorème 3.9. *Soit H une fonction de distribution bivariée ayant comme fonction de distribution marginale F et G , alors il existe une copule C telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = C(F(x), G(y))$*

Proposition 3.10. *Soit x une variable aléatoire de fonction de distribution F ,alors*

1. *Si u est uniforme sur $[0, 1]$, alors $F^{-1}(u) \xrightarrow{d} F$*
2. *F est continue ,alors $F(x) \xrightarrow{d} u(0, 1)$*

Revenant à la preuve de ce théorème :

$$H(x, y) = \mathbb{P}(X \le x, Y \le y) \qquad = \mathbb{P}\big(F_X^{-1}(u_1) \le x, G_Y^{-1}(u_2) \le y\big)$$
$$= \mathbb{P}\big(u_1 \le F(x), u_2 \le G(y)\big) \qquad = C\big(F(x), G(y)\big).$$

Si F et G sont continues,alors C est unique.

Sinon ,lorsque les marginales ne sont pas continues,il est toujours possible de définir une copule mais elle ci n'est plus unique et de ce fait perd beaucoup de son intérêt ,elle définit de manière unique sur $(Im(F) \times Im(G))$.En effet :on pose $F(x) = u$,$G(y) = v$ on peut toujours poser :$C(u, v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v))$.

Définition 3.11 (Inverse généralisé)**.** *Soit F une fonction de distribution. L'inverse généralisé $F^{[-1]}$ de F est une fonction définie de la façon suivante :*

$$F^{[-1]} = \inf\{x/F(x) \ge t\} = sup\{x/F(x) \le t\}$$

Remarque 4. *Si la fonction F est strictement croissante, alors la notion de l'inverse généralisé coïncide avec la notion d'inverse ou de réciproque c'est-à-dire $F^{[-1]} = F^{-1}$.*

Exemple 3.12. *soit*

$$H(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)(e^y-1)}{X+2e^y-1}, & sur[-1,1]\times[0,+\infty] \\ 1-e^{-y}, & sur]1,+\infty[\times[0,+\infty[\\ 0, & ailleurs \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \lim_{y\longrightarrow+\infty} H(x,y) & &= H(x,+\infty) = \frac{(x+1)(e^{+\infty}-1)}{X+2e^{+\infty}-1} \\ &= \lim_{y\longrightarrow+\infty} \frac{(x+1)(e^{y}-1)}{X+2e^{y}-1} & &= \frac{x+1}{2} \\ G_Y(y) &= \lim_{x\longrightarrow+\infty} H(x,y) & &= \lim_{x\longrightarrow+\infty} 1-e^{-y} = 1-e^{-y} \end{aligned}$$

alors : $F^{-1}(u) = 2u - 1$ *et* $G^{-1}(v) = \ln \dfrac{1}{1-v}$
et donc : $C(u,v) = uv$

Remarque 5. *Si C est une copule et F et G des fonction de répartition, alors la fonction H est une fonction de répartition jointe dont les marginales sont F et G.*

3.3.3 Propriétés des copules

Les résultats suivants donnent les propriétés et les théorèmes les plus importants d'une copule bivariée.

Propriétés principale

Théorème 3.13. *(La continuité) :*
Soit C une copule bivariée ; $\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in I$, avec $u_1 \leq u_2$ et $v_1 \leq v_2$, on a :
$\mid C(u_2,v_2) - C(u_1,v_1) \mid \leqslant \mid u_2 - u_1 \mid + \mid v_2 - v_1 \mid$

Théorème 3.14. *(La différentiabilité) : Soit C une copule bivariée ;$\forall u_1, u_2 \in I$*

1. *Les dérivés partielles :* $\dfrac{\partial C(u_1,u_2)}{\partial u_j}$ *existent p.s et* $0 \leq \dfrac{\partial C(u_1,u_2)}{\partial u_j} \leq 1, \forall j = 1,2.$
2. *Les fonctions de la forme* $\dfrac{\partial C(u_1,u_2)}{\partial u_j}$ *sont bien définies et décroissantes sur I p.s.*

Exemple 3.15. *Les dérivés partielles de la copule $W(u,v) = max(u+v-1,0)$ existent à chaque fois $u+v-1 \neq 0$ c'est-à-dire : $v \neq 1-u$. Depuis $max(u+v-1,0) = u+v-1$ à chaque fois que $v > 1-u$, elles sont :*

$$\frac{\partial C(u,v)}{\partial u} = \frac{\partial C(u,v)}{\partial v} = \begin{cases} 0, & si : v < 1-u \\ 1, & si : v > 1-u \end{cases}$$

Si $\dfrac{\partial C(u,v)}{\partial v}$ *et* $\dfrac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u \partial v}$ *sont continues sur $[0,1]$ et* $\dfrac{\partial C(u,v)}{\partial u}$ *existe quel que soit $u \in [0,1]$ quand $v = 0$,alors* $\dfrac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u \partial v}$ *et* $\dfrac{\partial^2 C(u,v)}{\partial v \partial u}$ *existent dans $[0,1]^2$ et* $\dfrac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u \partial v} = \dfrac{\partial^2 C(u,v)}{\partial v \partial u}$

Remarque 6. *(La densité) :*
Les copules admettent des densités de probabilité,si la densité c associe à la copule C existe, alors elle

est définie par : $c(u,v) = \dfrac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u \partial v}$.
Si la fonction de répartition conjointe H est absolument continue, en utilisant le théorème de Sklar nous pouvons exprimer la densité d'un vecteur aléatoire (X,Y) en fonction de densité de sa copule et de ses fonctions de répartition marginale F et G, ainsi que les fonctions de densités f et g par : $h(x,y) = c(F(x), G(y))f(x)g(y)$.

Théorème 3.16. *(Convexité et concavité) :*
Soit $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in I^2$ et $\forall \lambda \in I$
On dit due C est convexe si :

$$C(\lambda a_1 + (1-\lambda)b_1, \lambda a_2 + (1-\lambda)b_2) \leq \lambda C(a_1, a_2) + (1-\lambda)C(a_1, a_2)$$

On dit que C est concave si :

$$C(\lambda a_1 + (1-\lambda)b_1, \lambda a_2 + (1-\lambda)b_2) \geq \lambda C(a_1, a_2) + (1-\lambda)C(a_1, a_2)$$

La relation d'ordre partiel sur les copules

Définition 3.17. *Soient C_1 et C_2 deux copules, on dit que C_1 est plus petit que C_2 et on note :$C_1 \prec C_2$ si $C_1(u,v) \leq C_2(u,v), \forall u,v \in [0,1]$.*
Cette relation est une relation d'ordre partiel

3.3.4 Les bornes de Fréchet-Hoeffding

Tout copule C admet une borne inférieure et une borne supérieure déterminée par le théorème suivant :

Théorème 3.18. *(Fréchet-Hoeffding) :*
Soit C une copule alors :$W(u,v) \leq C(u,v) \leq M(u,v)$, $\forall u,v \in I$.
telles que :$W(u,v) = max(u+v-1, 0)$ et $M(u,v) = min(u,v)$ représentent les bornes inférieure et supérieure de Fréchet-Hoeffding.

Démonstration. Soit $(u,v) \in I^2$.Puisque$C(u,v) \leq C(u,1) = u$ et $C(u,v) \leq C(1,v) = v$,alors $C(u,v) \leq min(u,v) = M(u,v)$,d'où la deuxième inégalité. Pour démentrer la première inégalité, nous utilisons le fait que $C(u,v) \geq 0$, et l'inégalité (3) de la définition(1.2.1) on a :

$$\begin{aligned} C(1,1) - C(1,v) - C(u,1) + C(u,v) \geq 0 &\Longrightarrow 1 - v - u + C(u,v) \geq 0. \\ &\Longrightarrow C(u,v) \geq u + v - 1. \\ &\Longrightarrow C(u,v) \geq max(u+v-1,0). \\ &\Longrightarrow C(u,v) \geq W(u,v). \end{aligned}$$

D'où la première inégalité. □

Remarque 7. *Comme conséquence du théorème de Sklar, les copules W et M sont appelées respectivement les limites inférieure et supérieure de Fréchet l'inégalité $W \leq C \leq M$ peut-être récrite comme :* $max(F(x) + G(y) - 1, 0) \leq H(x,y) \leq min(F(x), G(y))$
est connue sous le nom de l'inégalité de Fréchet-Hoeffding.

3.3.5 Copules et variable aléatoire

Symétrie

Soit X, Y deux variable aléatoire continue de fonction de répartition jointe H et de marginale F et G, et soit C la copule associe on dit que X, Y sont échangeable ssi $F = G$ et $\forall u, v \in I^2$ si $C(u,v) = C(v,u)$ on dit que C est symétrique.

3.3.6 Invariance fonctionnelle

L'un des théorèmes essentiels à la théorie des copules est celui de l'invariance par transformations strictement croissantes.

Soient deux variable aléatoire continue X,Y de marges F et G et de copule $C_{X,Y}$, si α et β deux fonctions strictement croissantes alors :

$$C(\alpha(X), \beta(Y)) = C(X,Y)$$

Ainsi la copule $C_{X,Y}$ est invariante par transformations strictement croissantes des variables aléatoires.

Démonstration. On peut démontrer ce théorème facilement à l'aide de lois de probabilités, comme suit : soient F_1, G_1, F_2, G_2les fonctions de répartition de $X, Y, \alpha(X)$ et $\beta(Y)$respectivement.
Les fonctions α et β sont strictement croissantes, alors :

$$F_2 = \mathbb{P}(\alpha(X) \leq x) = \mathbb{P}(X \leq \alpha^{-1}(x)) = F_1(\alpha^{-1}(x))$$

aussi

$$G_2 = \mathbb{P}(\beta(Y) \leq y) = \mathbb{P}(Y \leq \beta^{-1}(y)) = G_1(\beta^{-1}(y))$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
C_{\alpha(X),\beta(Y)}(F_2(x), G_2(y)) &= \mathbb{P}(\alpha(X) \leq x, \beta(Y) \leq y) \\
&= \mathbb{P}(X \leq \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)) \\
&= C_{\alpha(X),\beta(Y)}(F_1(\alpha^{-1}(x)), G_1(\beta^{-1}(y))) \\
&= C_{X,Y}(F_2(x), G_2(y))
\end{aligned}$$

□

Par exemple : nous avons

$$\begin{aligned}
C_{X,Y} &= C_{ln(XY)} \\
&= C_{lnXlnY} \\
&= C_{XexpY} \\
&= C_{\sqrt{X}exp(Y)} \\
&. \\
&. \\
&.
\end{aligned}$$

Une transformation croissante ne modifie donc pas la copule ,mais seulement les loi marginale.

Théorème 3.19. *Soient X, Y des variables aléatoires continues de copule $C_{X,Y}$. Soient α et β deux fonctions strictement monotone sur $Im(X)$ et $Im(Y)$, respectivement*

1. *Si α est strictement croissante et β est strictement décroissante alors :*

$$C_{\alpha(X),\beta(Y)}(u, v) = u - C_{XY}(u, 1 - v)$$

2. *Si α est strictement décroissante et β est strictement croissante alors :*

$$C_{\alpha(X),\beta(Y)}(u, v) = v - C_{XY}(1 - u, v)$$

3. *Si α et β sont tous les deux décroissantes alors :*

$$C_{\alpha(X),\beta(Y)}(u, v) = u + v - 1 + C_{X,Y}(1 - u, 1 - v)$$

3.3.7 L'indépendence

Si X,et Y sont des variables aléatoires continues ,alors :X, Y sont indépendantes ssi $C_{XY} = \Pi$ avec $\Pi(u, v) = uv$ pour tout $u, v \in I$

Démonstration. — Si X et Y sont indépendantes alors :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, H(x, y) = F(x)G(y)$$

$$\begin{aligned}\forall u, v \in I, C_{XY}(u, v) &= H\Big(F^{-1}(u), G^{-1}(v)\Big)\\ &= F\Big(F^{-1}(u)\Big)G\Big(G^{-1}(v)\Big) = uv = \Pi(u, v)\end{aligned}$$

— si $C_{XY} = \Pi$ alors

$$\begin{aligned}\forall x, y \in I, C_{XY}(u, v) &= \Pi(u, v) = uv\\ &\Longrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}, H(x, y) = C_{XY}\Big(F(x), G(y)\Big)\\ &= \Pi\Big(F(x), G(y)\Big) = F(x)G(y)\end{aligned}$$

Les variables aléatoires X et Y sont donc indépendantes.

□

3.3.8 La notion de dépendence des queues

Cette notion est trés importante dans l'étude de la dépendence asymptotique entre deux variables aléatoires X et Y. Ce concepte sera totalement basé sur celui des copules. L'objectif est donc l'étude de la dépendence dans la queue commune de la distribution bivariée.

Le concept de dépendance de queue fournit une description de la dépendance au niveau des queues de distribution. La dépendance de queue est une mesure locale contrairement au tau de Kendall et au rho de Spearman qui mesurent la dépendance sur l'ensemble de la distribution.

1. ***La dépendence de queue supérieure** :*
   Prenons deux variables aléatoires continues X, Y ayant pour fonction de distribution respectives F_X et G_Y le coefficient de dépendence de queue supérieure de X et Y est défini par la limite λ_u si elle existe :

$$\lambda_u = \lim_{u \to 1^-} \mathbb{P}(Y > F_Y^{-1}(u)/X > F_X^{-1}(u))$$

- *Si toutefois cette limite de* $\lambda_u \in [0,1]$ *existe.*
  La quantité λ_u *est une fonction de copule et est donc invariante par transformation croissante.*
- *Si* $\lambda_u \in]0,1]$*, on dit que* X *et* Y *sont asymptotique dépendantes au niveau supérieur de la queue de distribution.*
- *Si* $\lambda_u = 0$*, on dit que* X *et* Y *sont asymptotique indépendantes au niveau supérieur de la queue de distribution.*

2. ***La dépendence de queue inférieure :***
   En gardant, les mêmes notations qu'auparavant, le coefficient de dépendence de queue inférieure de X *et* Y *est défini par la limite* λ_l *si elle existe :*

$$\lambda_l = \lim_{l \to 0^+} \mathbb{P}(Y > F_Y^{-1}(u)/X > F_X^{-1}(u))$$

- *Si* $\lambda_l \in]0,1]$ *on dit que* X *et* Y *sont asymptotiquement dépendantes au niveau inférieur de la queue de distribution*

- *Si* $\lambda_l = 0$ *alors, il n'ya pas de dépendance de queue au niveau inférieure de la distribution.*

On peut exprimer λ_u *et* λ_l *à l'aide de la copule* C *de couple* (X, Y) *tel que décrit dans la proposition suivante :*

Proposition 3.20. *Etant donné deux variables aléatoires* X *et* Y *de copule* $C(X, Y)$*, on a :*

$$\lambda_u = \lim_{u \to 1^-} \frac{C(u,u) - 2u + 1}{1-u}$$
$$\lambda_l = \lim_{u \to 0^+} \frac{C(u,u)}{u}$$

Exemple 3.21.

— *Pour la copule M, nous obtenons :*

$$\lambda_u = \lim_{u \to 1^-} \frac{1 - 2u + min(u,u)}{1-u} \qquad = \lim_{u \to 1^-} \frac{1-2u+u}{1-u} = 1.$$
$$\lambda_l = \lim_{u \to 0^+} \frac{min(u,u)}{u} \qquad = \lim_{u \to 0^+} \frac{u}{u} = 1.$$

— *Pour la copule W,nous obtenons :*

$$\lambda_u = \lim_{u \to 1^-} \frac{1 - 2u + max(2u-1,0)}{1-u} \qquad = 0.$$
$$\lambda_l = \lim_{u \to 0^+} \frac{max(2u-1,0)}{u} \qquad = 0.$$

— *Pour la copule produit* Π *:*

$$\lambda_u = \lim_{u \to 1^{-1}} \frac{1-2u+u^2}{1-u} \qquad = \lim_{u \to 1^{-1}} (1-u) \ = 0.$$
$$\lambda_l = \lim_{u \to 0^+} \frac{u^2}{u} \qquad = \lim_{u \to 0^+} u = 0.$$

3.3.9 Les mesures de dépendence en fonction de la copule

Le tau de Kendall et le rho de Spearman sont deux mesures de concordance bien connues en statistique. Elles donnent une mesure de la corrélation entre les rangs des observations, à la différence du coefficient de corrélation linéaire qui lui mesure la corrélation entre les valeurs des observations. Elles offrent par ailleurs l'avantage de s'exprimer simplement en fonction de la copule associée au couple de variables aléatoires.

[Le tau de Kendall] Soit (X, Y)un couple de variable aléatoire continues de copule C le tau de Kendall est la différence entre la probabilité de concordance et la probabilité de discordance, son expression en terme de copule est la suivante :

$$\begin{aligned}\tau(X,Y) &= 4\int_0^1\int_0^1 C(u,v)dC(u,v)\\ &= 4\int_0^1\int_0^1 \partial_u C(u,v)\partial_v C(u,v)dudv\\ &= 4\mathbb{E}\big(C(u,v)\big)-1.\end{aligned}$$

[Le rho de spearman] Soit (X, Y) un couple de variable aléatoire continues de copule C, alors :

$$\begin{aligned}\rho(X,Y) &= 12\int_0^1\int_0^1 uvdC(u,v)-3\\ &= 12\int_0^1\int_0^1 C(u,v)dudv-3.\end{aligned}$$

3.4 Les copules paramétriques

3.4.1 Copule Archimédienne

La classe de copules Archimédiennes est une classe importante. Il y a plusieurs raisons qui justifient leurs utilisations, entre autres :

1. *Grande varièteé de familles paramétriques.*
2. *Les propriétés particulières et intéressantes que cette classe possède.*
3. *La facilité avec laquelle peuvent êtres construites et simulées.*
4. *La grande varièteé des différentes structures de dépendance*

L'idée de la copule archimidienne de générateur φ est que la transformée $w(u) = \exp(-\varphi(u))$ appliquée aux marginale rend les composantes indépendantes.

Définition 3.22. *Soit :*$\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$*,continue, décroissante et convexe, telle que :*$\varphi(1) = 0$*,alors :est dite générateur.La fonction inverse généralisée de* φ *est définie par :*

$$\varphi^{[-1]}(u) = \begin{cases} \varphi^{-1}(u) & , si 0 \leq u \leq \varphi(0) \\ 0 & , si \varphi(0) \leq u \leq \infty \end{cases} \tag{3.2}$$

Si $\varphi(0) = \infty$ *,alors* φ *est strictement décroissante.*

Définition 3.23. *Une copule est dit archimédienne si elle d'écrire sous la forme :*

$$C(u,v) = \begin{cases} \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)), & si \varphi(u) + \varphi(v) \leq \varphi(0) \\ 0, & sinon \end{cases}$$

Propriétés d'une copule Archimédienne

Les copules Archimédiennes jouent un rôle important car elles présentent de nombreuses propriétés intéressantes. Par exemple, Genest et MacKay (1986) donnent une caractérisation d'une copule Archimédienne.

Soit C *une copule archimédienne avec un générateur* φ *alors,*

- C *est symétrique, c'est à dire* $C(u,v) = C(v,u)$
- *est associative, c'est à dire* $C(u, C(v,w)) = C(C(u,v),w)$ *pour tout* $u, v, w \in I$

Soient X *et* Y *des variables aléatoires dont la copule* C *est Archimédienne avec le générateur* $\varphi \in \Omega$ *Alors, le tau de kendall de* X_1 *et* X_2 *est donné par :*

$$\tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt$$

Soit C *une copule Archimédienne tel que* $\varphi^{[-1]}(t) = \varphi^{-1}(t)$.

- *Si* $((\varphi^{-1})')(0)$ *est finie alors,*

  $$C(u,v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v))$$

  n'a pas de dépendance supérieure au niveau de la queue de distribution.

- C *présente une dépendance supérieure au niveau de la queue de distribution alors,* $(\varphi^{-1})'(0) = -\infty$

  $$\lambda(u) = 2 - 2 \lim_{s \to 0} \frac{(\varphi^{-1})'(2s)}{(\varphi^{-1})'(s)}$$

  On peut aussi citer un résultat similaire pour les indices de queue inférieurs.

Théorème 3.24. *Soit* C *une copule Archimédienne tel que* $\varphi^{[-1]}(t) = \varphi^{-1}(t)$*.Le coefficient de dépendance de queue inférieure de la copule est donnée par :*

$$\lambda(l) = \lim_{s \to 0} \frac{(\varphi^{-1})'(2s)}{(\varphi^{-1})'(s)}$$

La densité d'une copule Archimédienne

La densité d'une copule Archimédienne, de générateur deux fois différentiable, est donnée par :

$$c_\alpha(u,v) = \frac{\varphi_X''(C_\alpha(u,v))\varphi_X'(u)\varphi_X'(v)}{(\varphi_X' C_\alpha(u,v))^3}$$

Nous allons, dans la suite de cette partie citer quelques copules parmi les plus célèbres de cette famille.

3.4.2 Les familles des copules archimédienne

1. ***copule Clayton** :*

   Soit la fonction génératrice : $\varphi(t) = \dfrac{t^{-\beta}-1}{\beta}$ *,et de pseudo inverse :*$\varphi^{[-1]}(t) = (\beta t+1)^{-\frac{1}{\beta}}$ *avec* $\beta \in [-1,\infty[\setminus\{0\}$*.En appliquant l'expression(1.1), on trouve la famille des copules de Clayton ; sa fonction est donnée par :*

   $$C_\beta(u,v) = max((u^{-\beta}+v^{-\beta}-1)^{-\frac{1}{\beta}},0).$$

   Pour $\beta > 0$*, les copules sont strictes et l'expression de la copule sera donnée par :*

   $$C_\beta(u,v) = (u^{-\beta}+v^{-\beta}-1)^{-\frac{1}{\beta}}.$$

   Remarque 8.

   $\lim_{\beta\to+\infty} C_\beta = M$
   $\lim_{\beta\to 0} C_\beta = \Pi$
   $\lim_{\beta\to -1} C_\beta = W$

   - *Le tau de kendall pour la copule de clayton est donné par :*

     $$\tau(\beta) = \frac{1}{(2\beta+1)}$$

   - *Dépendance de queue : Considérons la famille de clayton* $C_\beta(u,v) = (u^{-\beta}+v^{-\beta})$ *avec* $\beta \leq 0$*. On a pour cette famille* $\varphi(t) = \beta^{-1}(t^{-\beta}-1)$*.Il vient donc* $\varphi^{-1}(t) = (1+\beta t)^{\frac{-1}{\beta}}$ *d'où le résultat suivante :*

     $$\lambda_l = 2\lim_{\beta\to 0}\left[\frac{-(1+2\beta s)^{\frac{-1}{\beta-1}}}{-(1+\beta s)^{\frac{-1}{\beta}}}\right] = 2^{\frac{-1}{\beta}}$$

2. ***Copule de Gumbel** :*

   Prenons comme générateur $\varphi(t) = (-ln(t))^\alpha$ *avec* $\alpha > 1$*, et son pseudo-inverse* $\varphi^{-1}(t) = \exp\{-t^{\frac{1}{\alpha}}\}$*. La fonction ainsi définie satisfait à les conditions du théorème sur les copules archimédiennes, ce qui permet générer la copule de Gumbel en prenant :*

   $$C_\alpha(u,v) = \exp(-((-\ln(u))^\alpha + (-ln(v))^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}).$$

Remarque 9.

$\lim_{\alpha\to\infty} C_\alpha = M$

$\lim_{\alpha\to 1} C_\alpha = \Pi$

- *Dépendance de queue :Considérons la famille de Gumbel, rappelons que* $\varphi(t) = (-\ln(t))^\alpha$ *avec* $\alpha \geq 1$ *. On a bien* $\varphi[-1] = \varphi^{-1}(t)$ *. On peut donc appliquer le theoreme on obtient :*

$$\lambda_u = 2 - 2^{\frac{1}{\alpha}} \lim_{s\to 0}\left[\frac{\exp(-(2s)^{\frac{1}{\alpha}})}{\exp(-(s)^{\frac{1}{\alpha}})}\right] = 2 - 2^{\frac{1}{\alpha}}$$

De même on a $\lambda_l = 0$

3. ***copule de Frank*** *:*

Soit :$\varphi(t) = -\ln(\frac{e^{\theta t}-1}{e^\theta - 1})$ *avec* $\theta \neq 0$*, l'application de la fonction (1.1) nous donne la famille de Frank qui est définie comme suit :*

$$C_\theta(u,v) = -\frac{1}{\theta}\ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta v}-1)}{e^{-\theta}-1}\right).$$

Remarque 10.

$\lim_{\theta\to-\infty} C_\theta = W.$

$\lim_{\theta\to+\infty} C_\theta = M.$

$\lim_{\theta\to 0} C_\theta = \Pi.$

Le tau de kendall correspond à cette famille donné par la formule suivante :

$$\tau(\theta) = 1 - \frac{4}{\theta} + \frac{4}{\theta^2}\int_0^\theta \frac{t}{e^t - 1}dt \tag{3.3}$$

Remarque 11. *La famille de Frank n'a pas de dépendance de queue supérieur et inférieur*

3.4.3 les copules elliptiques

Les copules elliptiques sont définies à partir des lois de distribution elliptique.
Dans ce qui suit, nous donnons quelques définitions de la distribution elliptique ainsi que deux exemples classiques de cette famille de copules qui sont la copule Gaussienne et la copule de student.

Définition 3.25. *Un vecteur aléatoire* $X = (X_1, X_2)$ *est de distribution elliptique s'il admet la représentation suivante :*

$$X = \mu + RAU$$

Où :

— $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$

— *U est un vecteur aléatoire uniforme sur la sphère unité de $\mathbb{R}^2$*

— *R est un vecteur aléatoire indépendant de U*

— *A est une matrice de dimension $n \times n$ telle que $\Sigma = AA^t$ est non singulière.*

Définition 3.26. *La fonction de densité d'une distribution elliptique (si elle existe) est donnée par :*

$$f(x) = \mid \Sigma \mid^{-\frac{1}{2}} g((X-\mu)^t(X-\mu))$$

où g est une fonction définie de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, dite génératrice de densité, uniquement déterminée par la fonction de distribution de R.

1. ***La copule Gaussienne :***

   La copule gaussienne fait partie de la famille des copules elliptique. L'importance de cette copule réside dans le fait qu'elle est sous-jacente à la distribution normale multivariée.

   Définition 3.27. *Soit $X = (X_1, X_2)$ un vecteur aléatoire gaussien ($X \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$),avec Σ une matrice de covariance. Notons par :ϕ_Σ et ϕ les fonction de distribution X et $X_i, i = 1, 2$ respectivement. Le vecteur aléatoire Gaussien possède une copule appelée copule Gaussienne donnée par :*

$$\begin{aligned} C(u,,v) &= \phi_\Sigma(\phi^{-1}(u), \phi^{-1}(v)) \\ &= \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp(-\frac{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2}{2(1-\rho^2)} dx_1 dx_2) \\ &= \int_0^u \int_0^v \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp(-\frac{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2}{2(1-\rho^2)} + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

   avec $x_1 = \phi^{-1}(u)$,$x_2 = \phi^{-1}(v)$
   et ρ est le coefficient de corrélation ($\rho \in [-1, 1]$)

   Les propriétés de la copule Gaussiennes :

   - *Tau de kendall et Rho de spearman : nous pouvons montrer que le tau de Kendall d'une copule Gaussienne est donné par :*

$$\tau = \frac{2}{\pi} arcsin(\rho)$$

     tle rho de Spearman par :

$$\rho = \frac{6}{\pi} arcsin\frac{\rho}{2}$$

   - *Dépendance de queue : cette copule n'a pas de dépendance de queue ($\lambda_l = \lambda_u = 0$), sauf pour une corrélation parfaite de 1 c'est à dire :*

$$\lambda_l = \lambda_u = \begin{cases} 0 & Si \rho < 1 \\ 1 & Si \rho = 1 \end{cases}$$

2. ***La copule de student :***

Définition 3.28. *Soit $\rho \in [0,1]$, la fonction de répartition de Student à υ degré de liberté est définie par :*

$$t_{\rho,\upsilon}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho}}\left(1+\frac{s^2+t^2-2\rho st}{\upsilon(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{\upsilon+2}{2}} dsdt$$

Définition 3.29. *La copule de Student est une copule paramétrique, paramétrée par le coefficient de corrélation linéaire ρ et de degré de liberté υ. Cette copule est définie par :*

$$C_{\rho,\upsilon}(u,v) = t_{\rho,\upsilon}(t_\upsilon^{-1}(u), t_\upsilon^{-1}(v)) = \int_{-\infty}^{t_\upsilon^{-1}(u)}\int_{-\infty}^{t_\upsilon^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho}}\left(1+\frac{s^2+t^2-2\rho st}{\upsilon(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{\upsilon+2}{2}} dsdt$$

Si $\upsilon \longrightarrow \infty$, alors la copule de student converge vers la copule gaussienne et dans ce cas trés difficile de différencier entre ces deux copules.

Les propriétés de la copule student :

- *Tau de kandell et Rho de spearman :le tau de Kendall de la copule Student est exactement le même que celui de la copule gaussienne.*
- *Dépendance de queue :Comme la copule Student est symétrique, nous avons*

$$\begin{aligned}
\lambda_u &= 2 \lim_{u\longrightarrow 1^-} \mathbb{P}\{U_2 > u \setminus U_1 = u\} \\
&= 2 - 2 \lim_{u\longrightarrow 1^{-1}} t_{\upsilon+1}\left(\left(\frac{\upsilon+1}{\upsilon+[t_\upsilon^{-1}(u)]^2}\right)\frac{t_\upsilon^{-1}(u)-\rho t_\upsilon^{-1}(u)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \\
&= 2 - 2t_{\upsilon+1}\left(\left(\frac{(\upsilon+1)(1-\rho)}{1+\rho}\right)^{1/2}\right)
\end{aligned}$$

3.4.4 Copule des valeurs extrêmes

Une autre classe particulière des copules est celle des valeurs extrêmes. Le nom "extreme value copula" suggère un lien entre la théorie des valeurs extrêmes et ses copules. Dans le cas bidimensionnel, Geoffroy [1958], Tiago de Olivera [1958] et Sibuya [1960] ont donné la forme générale des copules des valeurs extrêmes.

Définition 3.30. *On appelle copule des valeurs extrêmes, toute copule C vérifiant la propriété suivante :*

$$C(u^t, v^t) = C^t(u,v), \forall u, v \in I^2, \forall t > 0$$

Où

$$C^{\frac{1}{t}}(u^t, v^t) = C(u,v)$$

Exemple 3.31.

— *On considère la copule de Galambos comme exemple on a :*

$$C_\theta(u,v) = uv\exp\{-\{(-\ln u)^{-\theta} + (-\ln v)^{-\theta}\}^{\frac{-1}{\theta}}\}, \forall\theta \geq 0$$

Donc

$$\begin{aligned}
C_\theta(u^t,v^t) &= u^tv^t\exp\{-(-\ln u^t)^{-\theta} + (-\ln v^t)^{-\theta\frac{-1}{\theta}}\} \\
&= u^tv^t\exp\{-\{(-t\ln u)^{-\theta} + (-t\ln v)^{-\theta}\}^{\frac{-1}{\theta}}\} \\
&= u^tv^t\exp\{-t\{(-\ln u)^{-\theta} + (-\ln v)^{-\theta}\}^{\frac{-1}{\theta}}\} \\
&= u^tv^t\exp\{-\{(-\ln u)^{-\theta} + (-\ln v)^{-\theta}\}^{\frac{-1}{\theta}}\}^t \\
&= (u^tv^t\exp\{-\{(-\ln u)^{-\theta} + (-\ln v)^{-\theta}\}^{\frac{-1}{\theta}}\})^t \\
&= C_\theta^t(u,v)
\end{aligned}$$

Qui est une copule bivariée de valeurs extrêmes notée BVE

— *la copule de Gumbel est une copule de valeurs extrêmes, en effet :*

$$\begin{aligned}
C_\theta(u^t,v^t) &= \exp\{-\{(-\ln u^t)^{\theta} + (-\ln v^t)^{\theta}\}^{\frac{1}{\theta}}\} \\
&= \exp\{-\{(-t\ln u)^{\theta} + (-t\ln v)^{\theta}\}^{\frac{1}{\theta}}\} \\
&= \exp\{-t\{(-\ln u)^{\theta} + (-\ln v)^{\theta}\}^{\frac{1}{\theta}}\} \\
&= \exp\{-\{(-\ln u)^{\theta} + (-\ln v)^{\theta}\}^{\frac{1}{\theta}}\}^t \\
&= (\exp\{-\{(-\ln u)^{\theta} + (-\ln v)^{\theta}\}^{\frac{1}{\theta}}\})^t \\
&= C_\theta^t(u,v)
\end{aligned}$$

3.4.5 Copule Archimax

Nous considérons une nouvelle famille de copules introduite par Capéra et al (2000) qui englobe la plupart des familles connues des copules,notamment les copules Archimédiennes et toutes les copules de valeurs extrêmes.Cette nouvelle famille offre plus de flexibilité pour la modélisation.En effet, nous pouvons connaître a priori les différents max-domaines d'attraction.

Définition 3.32. *Une fonction bivariée est une copule archimax si et seulement si elle est de la forme*

$$C_{\varphi,A}(x,y) = \varphi^{-1}\big[\varphi(x) + \varphi(y)A\big(\frac{\varphi(x)}{\varphi(x)+\varphi(y)}\big)\big], \quad \forall x,y \in [0,1]$$

Avec

- $A : [0,1] \longrightarrow [1/2,1]$ *tels que* $Max(t,1/t) \leq A(t) \leq 1$ *pour tout* $t \in [0,1]$
- $\varphi : [0,1] \longrightarrow [0,+\infty]$ *est une fonction convexe décroissante qui vérifie* $\varphi(1) = 0$ *avec la convention suivante :* $\varphi(0) = \lim\limits_{t\longrightarrow 0^+} \varphi(t)$ *et* $\varphi^{-1}(s) = 0$ *pour tout* $s \geq \varphi(0)$

Nous pouvons remarquer que l'ensemble des copules archimax $C_{\varphi,A}$ contient les copules de valeurs extrêmes ainsi que les copules Archimédiennes. En effet, si l'on pose : $\varphi(t) = \ln(1/t)$, la copule $C_{\varphi,A}$ est alors une copule de valeurs extrêmes, i.e.,

$$C_{\varphi,A}(x,y) = C_A(x,y) = \exp\left\{ \ln(xy)\frac{ln(y)}{ln(xy)}\right\}$$

Si on pose $A(t) = 1$, on retrouve la forme générale des copules Archimédiennes :

$$C_{\varphi,A}(x,y) = C_{\varphi}(x,y) = \varphi^{-1}\big(\varphi(x) + \varphi(y)\big)$$

Exemple 3.33. *Soit la fonction de dépendance de Tawn (1988) donnée par :*

$$A(t) = \theta t^2 - \theta(t) + 1, \quad 0 \leq \theta \leq 1, t \in [0,1]$$

Considérons le générateur de Clayton

$$\varphi_{1,\eta}(t) = \frac{t^{-\eta} - 1}{\eta}, \eta \geq 0$$

et celui de Frank

$$\varphi_{1,\eta}(t) = -\ln\frac{1 - e^{-t\eta}}{1 - e^{\eta}}, \eta \in \mathbb{R}$$

$\varphi_{1,\eta}$ et $\varphi_{1,\eta}$ sont des copules Archimax.

Série de TD N° 3 avec solutions

ENONCES

Exercice 1 (construction d'une copule)

Déterminer les distributions marginales F(x) et G(y) associées à la distribution H(x,y) puis construire la copule C(u,v) associée à H par le théorème de Sklar.

a) $H(x;y) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)(e^y-1)}{x+2e^y-1} \; sur \; [-1;1][0;+\infty] \\ \quad 1-e^{-y} \; sur \;]1;\infty[[0;+\infty[\\ \quad 0 \qquad\qquad\qquad ailleurs \end{cases}$

b) $H_\theta(x;y) = exp\left\{-\left[(x+y)-\left(x^{-\theta}+y^{-\theta}\right)^{-\frac{1}{\theta}}\right]\right\}$

c) $H_\theta(x;y) = [1+\exp -x+\exp -y+(1-\theta)\exp -x*y]^{-1}; \theta\in[-1;1]$

Exercice 2 (générateur archimédien)

En supposant que la fonction φ_θ suivant est un générateur archimédien construire la copule C associée :

a) $\varphi_\theta(t) = \ln\left(\dfrac{1-\theta(1-t)}{t}\right)$

b) $\varphi_\theta(t) = -l\ln\left(1-(1-t)^\theta\right)$ *avec* $\theta\in[1;+\infty)$

c) $\varphi_\theta(t) = \dfrac{1}{\theta}\ln(1-\theta\ln t)$ *avec* $\theta\in]0;1]$

Exercice 3 (copule de distribution extrême)

Construire la copule C (u ; v) associée à la distribution G (x ; y)

1. $G_\theta(x_1;x_2) = \exp\left\{-\left[y_1+y_2-\dfrac{\theta y_1 y_2}{y_1+y_2}\right]\right\}; \theta\in[0;1]$

2. $G_{\theta,\delta}(x_1;x_2) = \exp\left\{(y_1+y_2)-\dfrac{y_1y_2\left\{y_1(\theta+\delta)+y_2(\theta+2\delta)\right\}}{(y_1+y_2)^2}\right\}$; *avec*

$\theta\geq 0; \theta+2\delta\leq 1, \theta+3\delta\geq 0$

Exercice 4

1. Calculer le tau de Kendall τ_θ associé à la copule C de Gumbel-Morgenstern

$C(u;v) = uv+uv(1-v)(1-u)$

2. Déterminer en fonction de son générateur φ l'expression du tau de Kendall d'une copule archimédienne.

Exercice 5

Calculer le rho de Spearman associé à la copule C dans les cas suivants :

1. $C_\theta(u;v) = uv + (1-v)(1-u)$ copule de Gumbel-Morgensternon

2. $C_{\alpha,\beta}; = M + (1-\alpha-\beta)\Pi + \beta W$; membre de la famille de Fréchet

SOLUTIONS

exercice 1 *Pour la distribution* $H(x;y) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)(e^y-1)}{x+2e^y-1} \; sur \; [-1;1][0;+\infty] \\ 1-e^{-y} \; sur \;]1;\infty[[0;+\infty[\\ 0 \qquad ailleurs \end{cases}$ *on vérifie que* $F^{-1}(u) = 2u-1$ $G^{-1} = -ln(1-v)$. *Par conséquentla copule associée est telle que :* $C(u,v) = \frac{uv}{u+v-uv}$; $\forall u, v \in I$

2- Pour tout $\theta \geq 1, ladistributionbivarieH_\theta(x;y) = exp\left\{-\left[(x+y) - \left(x^{-\theta}+y^{-\theta}\right)^{-\frac{1}{\theta}}\right]\right\}$ *définie sur [0 ;* $+\infty[x[0;\infty[admetpourmarges$ *: F (x) = G(x) = exp(-x) ;* $\forall x \in [0;\infty[soit \in [0;1[$*;* $F^1(u) = G^1(u) = \ln u$ *: La copule associée est telle que :* $C_\theta(u;v) = uvexp[-[(-\ln u)^{-\theta} + (-\ln v)^{-\theta}]^{\frac{-1}{\theta}}]$ *;* $\theta \geq 1;$ *; c'est la copule de Galambos.*

3. Pour tout réel $\theta \in [0;1]; H_\theta(x;y) = [1+\exp^{-x}+\exp^{-y}+(1-\theta)\exp -x-y]^{-1}, lacopuleassocieest:$ $C_\theta(u;v) = u+v-1+(1-u)(1-v)\exp[-\theta\ln(1-u)+(-\ln(v)\overline{\frac{-1}{\theta}}],\theta \geq 1.$

exercice 2 *a)* $\varphi_\theta(t) = ln(\dfrac{1-\theta(1-t)}{t}) \longrightarrow C_\theta(u;v) = uv\frac{uv}{1-\theta(1-u)(1-v)};\theta \in [1;1]b)\varphi_\theta(t) = -\ln(1-(1-t)^\theta)' avec\theta \in [1;\infty] \longrightarrow C_\theta(u;v) = 1-[(1-u)^\theta(1-v)^\theta-]$

c) $\varphi_\theta(t) = \dfrac{1}{\theta}\ln(1-\theta\ln t)$ *avec* $\theta \in]0;1]$*)*$\longrightarrow C_\theta(u;v) = uv\exp(-\theta\ln u\ln v)$

exercice 3

1- $G_\theta(x_1;x_2) = \exp\left\{-\left[y_1+y_2-\dfrac{\theta y_1y_2}{y_1+y_2}\right]\right\}$; $\theta \in [0;1]$ *;*
copule $C_\theta(u;v) = uv\exp[\dfrac{)f(u)g(v)}{f(u)+g(v)}]$

2. $G_{\theta,\delta}(x_1;x_2) = \exp\left\{(y_1+y_2) - \dfrac{y_1y_2\left\{y_1(\theta+\delta)+y_2(\theta+2\delta)\right\}}{(y_1+y_2)^2}\right\}$ *; avec* $\theta \geq 0; \theta+2\delta \leq 1, \theta+3\delta \geq 0$
copule : $C_\theta(u;v) = uv\exp[u^{'}v^{'}\dfrac{u^{'}(\theta+\delta)+v^{'}(2\delta+\theta)}{(u^{'}v^{'})^2}]$

exercice 4

1) Le tau de Kendall τ_θ *associé à la copule* C *de Gumbel-Morgenstern* $C(u;v) = uv+uv(1-v)(1-u)$

$\tau c = \frac{2\theta}{9}.Eneffet : \forall u; v \in I; C_\theta(u;v) = uv+\theta(u-u^2)(v-v^2) \Rightarrow \dfrac{\partial^2 C_\theta(u;v)}{\partial u} = 1+\theta(1-2u)(1-2v) \Rightarrow$
$C_\theta(u;v)\dfrac{\partial^2 C_\theta(u;v)}{\partial u} = [u+v+\theta(u-u^2(v-v^2))][1+\theta(1-2u)(1-2v)] = ...d'o \int\int_{I^2} \dfrac{\partial^2 C_\theta(u;v)}{\partial u} = \frac{1}{4}+\frac{\theta}{18} = \frac{2\theta}{9}$

2) $\tau c = 1 + 4\int_0^1 \dfrac{\varphi(t)}{\varphi}^{'} dt$

3) $\tau c = c = 1 - 4\int_0^1\int_0^1 \dfrac{\partial C(u,v)}{\partial u}\dfrac{\partial C(u,v)}{\partial v} dudv$

exercice 5

1) $C_{\theta\longrightarrow}(u;v) = uv + (1-v)(1-u)\ \rho_\theta = \dfrac{\theta}{3}(copuledeGumbel - Morgensternon)$

2)$C_{\alpha,\beta}; = M + (1-\alpha-\beta)\Pi + \beta W \longrightarrow \rho_{\alpha,\beta} = \alpha - \beta(membredelafamilledeFrchet$