Faculté des Sciences Exactes

Département de Probabilités-Statistique

2020/21

Première année Master

Examen : Chaînes de Markov

Exercice 1. **10 points** *Soit X une chaîne de Markov à espaces d'états $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et de matrice de transition*

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1 *Montrer que X est irréductible récurrente positive et calculer sa probabilité invariante.*

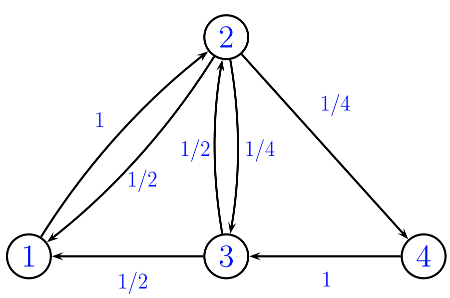
2 *Quel est le temps moyen de retour à l'état "i".*

3 *Que peut-on dire sur le comportement de*

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Réponse :

1 D'après le graphe de la chaîne



la trajectoire de l'état "3" à elle même et qui passe par tous les autres états, représentée dans le graphe suivant

$$3 \xrightarrow{1/2} 1 \xrightarrow{1} 2 \xrightarrow{1/4} 4 \xrightarrow{1} 3$$

montre que la chaîne est **irréductible**. **2 points**

Du fait que l'espace des états est fini, l'irréductibilité implique que notre chaîne est **récurrente positive**. **2 points**

Et par suite elle admet une probabilité invariante unique $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$, qui vérifie le système linéaire $\pi Q = \pi\,; \quad \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1$. **1 point**

Ce système linéaire de cinq équations à quatre inconnues admet un solution unique $\pi = \frac{1}{10}(3, 4, 2, 1)$. **1 point**

2 Pour tout $i \in E$, on a $\pi_i = \dfrac{1}{\mathbb{E}_i(\mathrm{T}^i)}$, avec $T^i = \inf(n \geq 1,\ X_n = i)$ le temps du retour à l'état "i". Donc le temps moyen de retour à l'état "i", $\mathbb{E}_i(\mathrm{T}^i) = \dfrac{1}{\pi_i}$.

Cependant le temps moyen de retour

à l'état "1" est $\mathbb{E}_1(\mathrm{T}^1) = \dfrac{1}{\pi_1} = \dfrac{10}{3} = 3.33$,

à l'état "2", $\mathbb{E}_2(\mathrm{T}^2) = \dfrac{1}{\pi_2} = \dfrac{10}{4} = 2.5$, **2 points**

à l'état "3", $\mathbb{E}_3(\mathrm{T}^3) = \dfrac{1}{\pi_3} = \dfrac{10}{2} = 5$,

et à l'état "4", $\mathbb{E}_4(\mathrm{T}^4) = \dfrac{1}{\pi_4} = 10$.

3 Puisque la chaîne est irréductible récurrente positive, alors

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow \mathbb{E}(\pi) = \sum_{i=1}^{4} i\pi_i \;=\; \frac{21}{10} = 2.1\ . \quad \boxed{\textbf{2 points}}$$

Exercice 2. $\boxed{\textbf{10 points}}$ *Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov sur $\{1,2,3,4\}$ de matrice de transition*

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1 *Dessiner le graphe correspondant.*

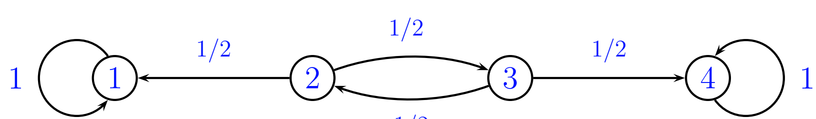
2 *Classer les états de la chaîne.*

3 *Quelle est la probabilité que la chaîne issue 2 soit absorbée en 4 ?*

4 *Quel est le temps moyen d'absorption de la chaîne issue de 2 ?*

Réponse :

1 Graphe de la chaîne :



$\boxed{\textbf{2 points}}$

2 D'après le graphe de la chaîne, il est clair que "1" et "4" sont des états absorbants ainsi que Les états "2" et "3" sont transients. $\boxed{\textbf{2 points}}$

3 On considère l'ordre suivant des états $2, 3, 1, 4$. D'après le graphe de la chaîne, la matrice de transition canonique est

$$\mathrm{P}' = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Q} & \mathrm{R} \\ 0 & \mathrm{I}_2 \end{pmatrix}$$ **2 points**

La matrice fondamentale de la chaîne est

$$\mathrm{F} = (\mathrm{I} - \mathrm{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$ **1 point**

et la matrice donnant les probabilités d'absorption

$$\mathrm{B} = FR = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{j=1} & \text{j=4} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{i=2} \\ \\ \text{i=3} \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ & \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{array}$$ **1 point**

Conclusion : La probabilité que la chaîne issue 2 soit absorbée en 4 est $\mathbb{P}_2(X_\tau = 4) = \dfrac{1}{3}$. **1 point**

4 La matrice fondamentale de la chaîne est

$$F = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{j=1} & \text{j=4} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{i=2} \\ \\ \text{i=3} \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ & \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \end{array}$$

Donc le temps moyen d'absorption de la chaîne issue de 2 est

$$\mathbb{E}_2(\tau) = f_{2,1} + f_{2,4} = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2.$$ **1 point**

A. GHERIBALLAH