Chapitre 1

Rappels fondamentaux sur les variables aléatoires

1.1 Introduction

Dans la plupart des phénomènes aléatoires, le résultat d'une épreuve peut se traduire par une « grandeur » mathématique, très souvent représentée par un nombre entier ou un nombre réel. La notion mathématique qui représente efficacement ce genre de situation concrète est celle de variable aléatoire (notée également v.a.). Ainsi le temps de désintégration d'un atome radioactif, le pourcentage de réponses « oui » à une question posée dans un sondage ou le nombre d'enfants d'un couple sont des exemples de variables aléatoires.
Tout au long de ce chapitre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ désignera un espace de probabilité.

Définition 1.1 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité et soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable. Une application mesurable : $X : \Omega \rightarrow E$ est appelée variable aléatoire (v.a) à valeurs dans E, telle que*

$$\forall B \in \mathcal{E} : X^{-1}(B) \in \mathcal{F}.$$

Exemple 1.1 *On lance un dé non truqué deux fois, alors*

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), ..., (6,6)\}$$

et soit la v.a X *définie par* $X(i,j) = \min(i,j)$, *alors* $X(\Omega) = \{1, 2, ..., 6\}$.

1.2 Loi de probabilité

Définition 1.2 *La loi de la v.a* X *est la mesure image de* P *par* X. *C'est la mesure de probabilité sur* $(E, \mathcal{E})$, *notée* P_X *; définie par*

$$P_X(B) = P\left(X^{-1}(B)\right), \forall B \in \mathcal{E}.$$

En pratique ; on écrit plutôt

$$P_X(B) = P(\omega \in \Omega : X(\omega) \in B).$$

1.2.1 Variables aléatoires discrètes

C'est le cas où E est dénombrable et $\mathcal{E}$ est l'ensemble des parties de E.

Définition 1.3 *La loi de la v.a* X *(ou bien la distribution) est*

$$P_X = \sum_{x \in E} p_x \delta_x$$

où $p_x = P(X = x)$ *et* δ_x *désigne la mesure de Dirac en* x. *En effet*

$$P_X(B) = P(\omega \in \Omega : X(\omega) \in B) = P\left(\bigcup_{x \in B} \{X = x\}\right) = \sum_{x \in E} p_x \delta_x(B).$$

En pratique, trouver la loi d'une v.a discrète, c'est donc calculer toutes les probabilités $P(X = x)$ *pour* $x \in E$.

Exemple 1.2 *Revenons à l'exemple précédant*

$$\begin{aligned} p_1 = P(X = 1) &= P(\{\min(i,j) = 1, (i,j) \in \Omega\}) \\ &= P(\{(1,1), ..., (1,6), (2,1), (3,1), ..., (6,1)\}) = \frac{11}{36} \end{aligned}$$

de la même manière

$$p_2 = \frac{9}{36}, p_3 = \frac{7}{36}, p_4 = \frac{5}{36}, p_5 = \frac{3}{36}, p_6 = \frac{1}{36}.$$

Remarque 1.1 *Remarquons que*

$$\sum_{x \in E} p_x \delta_x (E) = P_X (E) = 1.$$

1.2.2 Variables aléatoires continues à densité

Définition 1.4 *Une v.a X à valeur dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est dite à densité si P_X est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ. Le théorème de Radon-Nikodym montre qu'il existe une fonction borélienne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ telle que*

$$P_X (B) = \int_B f (x)\, dx, \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Remarque 1.2 1. *On particulier :* $P_X (\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} f (x)\, dx = 1.$

2. *La fonction f est appelée la densité ou bien la loi de X.*

1.3 Fonction de répartition

Définition 1.5 *Si X est une v.a, la fonction de répartition de X est la fonction $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ définie par*

$$F_X (t) = P (X \leq t) = P_X (]-\infty, t]), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Remarque 1.3 1. *F_X est croissante, continue à droite et* $\lim_{t \to -\infty} F_X (t) = 0$, $\lim_{t \to +\infty} F_X (t) = 1$. *Inversement, si on se donne une fonction F ayant ces propriétés, alors il existe un unique mesure de probabilité μ tell que :* $\mu (]-\infty, t]) = F (t), \forall t \in \mathbb{R}.$

2. *Si X est une v.a discrète :* $F_X (t) = \sum_{x \in]-\infty, t]} P (X = x).$

3. *Si X est une v.a continue :* $F_X (t) = \int_{]-\infty, t]} f (x)\, dx.$

4. *Soit* $a, b \in \mathbb{R}$ *avec* $a < b$: $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

Exemple 1.3 *Revenons à l'exemple précédent : calculons* $F_X(3.5)$ *alors*

$$F_X(3.5) = \sum_{x=1}^{3.5} P(X = x) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{3}{4}.$$

Exemple 1.4 *Soit la fonction définie par :* $f(x) = 2e^{-x} - 2e^{-2x}$ *si* $x \geq 0$.

1. *Montrer que* f *est une fonction de densité d'une v.a* X.
2. *Calculer la fonction de répartition de* X.

Solution 1 1. *On a :*

$$1 \leq 2 \Leftrightarrow (\textit{comme } x \geq 0)\, x \leq 2x \Leftrightarrow 2e^{-2x} \leq 2e^{-x} \Leftrightarrow 2e^{-x} - 2e^{-2x} \geq 0$$

alors $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, *et*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = \int_0^{+\infty} \left(2e^{-x} - 2e^{-2x}\right) dx = 1,$$

donc f *est une fonction de densité d'une v.a* X.

2. $F_X(t) = P(X \leq t) = \int_{]-\infty,t]} f(x)\, dx$

i) Si $t < 0$: $F_X(t) = 0$.

ii) Si $t \geq 0$: $F_X(t) = \int_{]-\infty,0[} f(x)\, dx + \int_{[0,t]} f(x)\, dx = e^{-2t} - 2e^{-t} + 1$.

1.4 Espérance et Variance

Une loi de probabilité peut être caractérisée par certaines valeurs typiques correspondant aux notions de valeur centrale, de dispersion et de forme de distribution.

1.4.1 Espérance mathématique

L'espérance d'une variable aléatoire $E(X)$ correspond à la moyenne des valeurs possibles de X pondérées par les probabilités associées à ces valeurs. C'est un paramètre de position qui correspond au moment d'ordre 1 de la variable aléatoire X. C'est l'équivalent de la moyenne arithmétique $\bar{X}$. En effet lorsque le nombre d'épreuves n est grand, X tend vers $E(X)$.

Variables aléatoires discrètes

Définition 1.6 *Si X est une variable aléatoire discrète définie sur un univers probabilisé Ω, on appelle espérance de X, le réel défini par*

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega) = \sum_{x \in E} xP\left(X = x\right).$$

Remarque 1.4 *Si $X\left(\Omega\right)$ est infini, on n'est pas sûr que l'espérance existe.*

Exemple 1.5 *Revenons à l'exemple précédent*

x_i	1	2	3	4	5	6	$\sum$
p_i	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	1
x_ip_i	$\frac{11}{36}$	$\frac{18}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{20}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{91}{36}$

donc $E(X) = \dfrac{91}{36} = 2.53.$

Variables aléatoires continues

Définition 1.7 *Si X est une variable aléatoire absolument continue de densité f, on appelle espérance de X, le réel $E(X)$, défini par*

$$E(X) = \int_E x dP_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \, dx$$

si cette intégrale est convergente.

Exemple 1.6 *Revenons à l'exemple précédent*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \, dx = \int_0^{+\infty} x \left(2e^{-x} - 2e^{-2x}\right) dx \overset{IPP}{=} \frac{3}{2}.$$

Propriétés de l'espérance

Les propriétés de l'espérance valent aussi bien pour une variable aléatoire discrète ou une variable aléatoire absolument continue.

Proposition 1.1 *Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω, admettant une espérance, alors*

1. $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.
2. $E(aX) = aE(X)$, $\forall a \in \mathbb{R}$.
3. *Si* $X \geq 0$ *alors* $E(X) \geq 0$.
4. *Si X est un caractère constant tel que :* $\forall \omega \in \Omega \; X(\omega) = k$ *alors* $E(X) = k$.

Proof. Voici pourquoi :

Nous démontrerons les propriétés dans le cas de deux variables aléatoires discrètes avec p_i , la probabilité de réalisation de $\{X = x_i\}$ et $\{Y = y_i\}$ et n évènements élémentaires.

1. $E(X+Y) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) \, p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i + \sum_{i=1}^{n} y_i p_i = E(X) + E(Y)$.
2. $E(aX) = \sum_{i=1}^{n} (a x_i) \, p_i = a \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = aE(X)$.

3. $X \geq 0$ implique que $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \geq 0$ et comme une probabilité est toujours positive, alors $E(X) \geq 0$.
4. $E(X) = \sum_{i=1}^{n} k p_i = k \sum_{i=1}^{n} p_i = k$ car par définition $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

■

Théorème 1.1 *Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même Ω, alors*

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Changement de variable

Variables aléatoires discrètes

Proposition 1.2 *Soient X une v.a discrète et h une fonction numérique dont l'ensemble de définition contient $X(\Omega)$. Si $E(h(X))$ existe*

$$E(h(X)) = \sum_{x \in E} h(x) P(X = x).$$

Variables aléatoires continues

Proposition 1.3 *Soit X une v.a à valeur dans $(E, \mathcal{E})$. Pour tout fonction mesurable $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a*

$$E(h(X)) = \int_E h(x) \, dP_X \left[\overset{si\ X\ a.c}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) f(x) \, dx \right].$$

Si $Y = h \circ X$ et h bijective, on a

$$P_Y(B) = P\left(Y^{-1}(B)\right) = P\left((h \circ X)^{-1}(B)\right) = P\left(X^{-1} \circ h^{-1}(B)\right) = P_X\left(h^{-1}(B)\right).$$

1.4.2 Moments d'ordre r et variance

Définition 1.8 *Soit X une variable aléatoire et soit $r \geq 1$ un entier. Le moment d'ordre r de X est définition la quantité $E(X^r)$. La quantité $E(|X|^r)$ est appelée moment absolu d'ordre r.*

Remarque 1.5 1. *Si $r = 1$, le moment d'ordre 1 est simplement l'espérance de X.*

2. *Si X est une v.a discrète :* $E(X^r) = \sum_{x \in E} x^r P(X = x)$.

3. *Si X est une v.a continue :* $E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)\,dx$.

4. *On dit que la a.v X est centrée si elle est intégrable et si $E(X) = 0$.*

Définition 1.9 *Soit $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. La variance de X est*

$$Var(X) = E(X - E(X))^2$$

et l'écart type de X est

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}.$$

Remarque 1.6 1. *On a $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.*

2. *$Var(X)$ mesure la dispersion de X autour de sa moyenne $E(X)$.*

3. *$Var(X) = 0$ si et seulement si X est constante p.s.*

4. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$, alors*

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X).$$

5. *Pour tout $a \in \mathbb{R}$*

$$E\left[(X - a)^2\right] = Var(X) + [E(X) - a]^2.$$

1.4.3 Inégalités utiles

Dans ce paragraphe on donne deux inégalités, ces inégalités sont valables pour les variables aléatoires discrètes et les variables aléatoires absolument continues, leur intérêt réside dans le fait qu'elles ne font pas appel à la loi de la variable aléatoire considérée.

Inégalité de Markov

Soient $a > 0$, X une variable aléatoire réelle, avec $E(|X|) < \infty$, alors

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|)}{a}.$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebycheff

Soient $a > 0$, X une variable aléatoire réelle, avec $E\left(|X|^2\right) < \infty$, alors

$$P\left(|X - E(X)| \geq a\right) \leq \frac{Var\left(X\right)}{a^2}.$$

1.5 Lois usuelles

On donne ici quelques exemples importants de lois dans les deux cas.

1.5.1 Lois discrètes

Loi de Bernoulli

Définition 1.10 *Soient $0 < p < 1$, X une variable aléatoire réelle. On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p (on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$) si X est à valeurs dans $\{0, 1\}$ avec*

$$P(X = 1) = p \text{ et } P(X = 0) = 1 - p = q,$$
$$E\left(X\right) = p \text{ et } Var\left(X\right) = pq.$$

Remarque 1.7 *La variable de Bernoulli est souvent utilisée pour modéliser une expérience aléatoire qui n'a que deux issues. En général, le chiffre 1 est attribué au "succès" alors que 0 est attribué à "l'échec". Dans une expérience aléatoire de Bernoulli, le paramètre p est donc la probabilité du "succès".*

Exemple 1.7 *X est le résultat du lancer une pièce truquée qui tombe sur pile avec probabilité p.*

Loi binomiale

Soient $n \geq 1$ et $0 < p < 1$. On répète une expérience de Bernoulli n fois de manière indépendantes et on note par X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où on a obtenu le chiffre 1. On dit que la variable X ainsi définie suit une loi binomiale de paramètres n et p. (on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$).

Le paramètre n est un entier positif, il désigne le nombre de répétitions, alors que p est la probabilité du "succès". Une variable binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, est à valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, ..., n\}$ avec distribution

$$\begin{aligned} &p_k = P\left(X = k\right) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad q = 1 - p, k = \overline{0, n}, \\ &E\left(X\right) = np \text{ et } Var\left(X\right) = npq. \end{aligned}$$

Exemple 1.8 *X est le nombre de piles en n lancers la pièce truquée qui tombe sur pile avec probabilité p.*

Loi géométrique

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre $p \in \left]0, 1\right[$, (on note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$) si l'on a

$$\begin{aligned} &p_k = P\left(X = k\right) = pq^{k-1}, k = \overline{1, n}, \\ &E\left(X\right) = \frac{1}{p} \text{ et } Var\left(X\right) = \frac{1-p}{p^2}. \end{aligned}$$

Exemple 1.9 *On lance une pièce de monnaie truquée qui tombe sur pile avec probabilité p jusqu'à obtention de pile. Le nombre de lancers effectués suit une loi géométrique de paramètre p.*

Loi de Poisson

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ, (on note $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$) si l'on a

$$\begin{aligned} &p_k = P\left(X = k\right) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, k \in \mathbb{N}, \\ &E\left(X\right) = Var\left(X\right) = \lambda. \end{aligned}$$

1.5.2 Lois à densité usuelles

Loi uniforme

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[a, b]$ si sa fonction de densité f est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$, sa fonction de répartition est donnée par

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \dfrac{t-a}{b-a} & \text{si } t \in [a, b] \\ 1 & \text{si } t > b \end{cases} \quad \text{et}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2},\ Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Loi exponentielle

Soit $\lambda > 0$. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ si sa fonction de densité f est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

on note $X \hookrightarrow \mathcal{E}([a, b])$, sa fonction de répartition est donnée par

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad \text{et}$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda},\ Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Loi normale (loi gaussienne) de paramètres m et σ^2

La loi normale est une loi centrale dans la théorie des probabilités. Elle est notamment très utilisée en statistique.

Soit $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 > 0$. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi normale ou gaussienne (on note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$), si sa fonction de densité f est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2\pi}} \exp\left(\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right), \qquad \text{avec } x \in \mathbb{R}.$$

Les paramètres m et σ s'interprète comme

$$E(X) = m \text{ et } Var(X) = \sigma^2.$$

On remarque aussi que, si on pose $U = \dfrac{X-m}{\sigma}$ alors la fonction de densité de U est donnée par

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2u\pi}} \exp\left(\frac{u^2}{2}\right), \qquad \text{avec } u \in \mathbb{R}$$

qui est la densité de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ (on note $U \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$).