Université de Sidi Bel Abbès
Faculté des Sciences
Département de Mathématique

Année 2011/2012.
Module: Statistique et application.
3-ème cycle.

Concours de Statistique Non Paramétrique

Problème 1 *Soit X une variable aléatoire définie sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeur dans $\mathbb{R}$. pour tout $x \in \mathbb{R}$, on désigne par F la fonction de répartition de X, qu'on suppose qu'elle est $(k+1)$-fois continûment dérivable et par f la fonction de densité, qu'on suppose qu'elle est strictement positive, et de classe C^k au voisinage de x.*

Etant donné $X_1, X_2, \ldots, X_n$ une suite de variable aléatoire réelle de même loi que X, l'estimateur de la fonction de répartition par la méthode du noyau noté $F_n(x)$, défini par:

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right), \forall x \in \mathbb{R}$$

où K est noyau et h_n est une suite de réels positifs, vérifiants

1. *Le noyau K est supposé d'ordre k intégrable, d'intégrale égale à 1, borné et positif et à support compact $(0,1)$, vérifiant:*

   (i) $\displaystyle\int t^j K(t)dt = 0 \ \forall j = 1, \ldots, k-1, \text{ et } 0 < |\int t^k K(t)dt| < \infty.$

   (ii) $\exists A < \infty, \ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *on a:* $|K^{(i)}(x_1) - K^{(i)}(x_2)| \leq A|x_1 - x_2|$, *où* $i = 0, 1$.

2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} h_n = 0$ *et* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^\beta h_n = \infty \ \ \forall \beta > 0, \quad j = 0, 1.$

On déduit de F_n un estimateur de la densité, noté f_n, défini par

$$f_n(x) = F_n^{(1)}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h_n} K^{(1)}\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right) = \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^{n} K^{(1)}\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right)$$

Montrer qu'on a

1.
$$|f_n(x) - f(x)| = O(h_n^k) + O\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_n}}\right), \ p.co. \quad et \quad \exists \delta > 0 : \ \mathbb{P}\left(f_n(x) < \delta\right) < \infty.$$

2.
$$|F_n(x) - F(x)| = O(h_n^k) + O\left(\sqrt{\frac{\log n}{n}}\right), p.co.$$

3.
$$\exists \delta > 0 \quad tel\ que \ \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left\{\inf_{x\in\mathbb{R}} |1 - F_n(x)| < \delta\right\} < \infty.$$