Modélisation

November 7, 2023

Modélisation
La modélisation vient nécessairement en amont de tout processus d'optimisation. Comment traduire un problème concret, énoncé en français, en en une formulation mathématiquequi va permettre son analyse et sa résolution?
Les problèmes de robinets sur lesquells des générations de potaches se sont arrachés les cheuveux constituent un exemple amussant d'exercices de modélisation, Dans ce chapitre, nous en proposons quelques uns dans le domaine d'optimisation.

Le besoin d'optimiser découle directement du besoin d'organiser. Optimiser consiste à identifier une configuration optimale, ou un *optimum* d'un système, au sens large du terme. Nous utilisons ici la définition 1.1, donnée par Larousse(2000)

Definition

(du latin optimus, le meilleur) Etat, degré de développement de quelque chose jugé le plus favorable au regard de circonstances données

Dans le cadre d'une démarche scientifique, cette définition nécessite quelques précisions. En général, le quelque chose est défini par le contexte. Nous donnerons quelques exemples explicites par la suite. Par contre, comment peut-on juger que l'état est favorable, et comment peut on décrire formellement les circonstances?

La réponse à ces questions constitue une étape essentielle à toute optimisation: la modélisation mathématique(voir définition 1.2 de Larousse, 2000). La démarche de modélisation consiste en trois étapes:

- L'identification des variables de décision, c'est-à-dire les composantes du système concerné sur lesquelles il est possible d'agir afin d'améliorer son fonctionnement. En général, si ces variables sont au nombre de n, elles sont réprésentées par un vecteur de $\mathbb{R}^n$, souvent noté $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$. En pratique, cette étape est probablementla plus compliquées car seules l'expérience en modélisation et une bonne connaissance du problème concret guident les choix. La plus importante car tout le reste du processus en dépend. Un choix inapproprié de variable de décision peut générer un problème d'optimisation trop compliqué et impossible à résoudre.
- La descriptio de la méthode permettant d'évaluer l'état du système concerné, étant donné une configuration des variables de décision. Dans ce chapitre, nous supposons que le modélisateur est capable d'identifier une formule, une fonction, fournissant une mesure de l'état du système, mesure qu'il désire rendre la plus petite possible ou la plus grande possible. Cette fonction, appelée fonction objectif, est notée,f et la mesure précitée obtenue pour les variables de décision x est un nombre réel noté $f(x)$.
- La description mathématique des circonstances, ou contraintes, précisant les valeurs que les variables de décision peuvent prendre.

Definition

Modèle mathématique Représentation mathématique d'un phénomène physique, économique, humain, etc., réalisée afin de pouvoir mieux étudier celui-ci.

La démarche de modélisation est à la fois passionnante et difficile. En effet, aucune recette universelle n'existe et le nombre de modélisations possibles pour un problème donné n'a de limites que l'imagination du modélisateur. Cependant, il est essentiel de bien maîtriser les outils d'optimisation, et d'en connaître les hypothèses sous-jacentes afin de développer le modèle adéquat pour l'analyse visée. Dans ce chapitre, nous proposons quelques exemples simples d'exercices de modélisation. A chaque fois, nous présentons une modélisation possible.

L'entreprise Swisscom voudrait installer une antenne pour connecter quatre nouveaux clients importants à son réseau. Cette antenne doit se trouver au plus proche de chaque client, e donnant la priorité aux meilleurs clients. Cependant, afin d'éviter les proliférations d'antennes de télécomunication, il lui est interdit d'installer cette nouvelle antenne à une distance inférieure à 10 km des deux autres antennes, situées respectivement aux coordonnées $(-5, 10)$ et $(5, 0)$ et réprésentées par le symbole($\star$) dans la figure 1. Les coordonnées sont exprimées en *km* à partir du siège central Swisscom. Pour chaque client, Swisscom connaît sa situation géographique, ainsi que le nombre d'heures de communication que le client compte consommer par mois. Ces données sont reprises dans le tableau 1. A quel endroit l'entreprise Swisscom doit-elle installer sa nouvelle antenne?

Client	Coord	Heures
1	(5,10)	200
2	(10,5)	150
3	(0,12)	200
4	(12,0)	300

Table 1: Données sur les clients de Swisscom

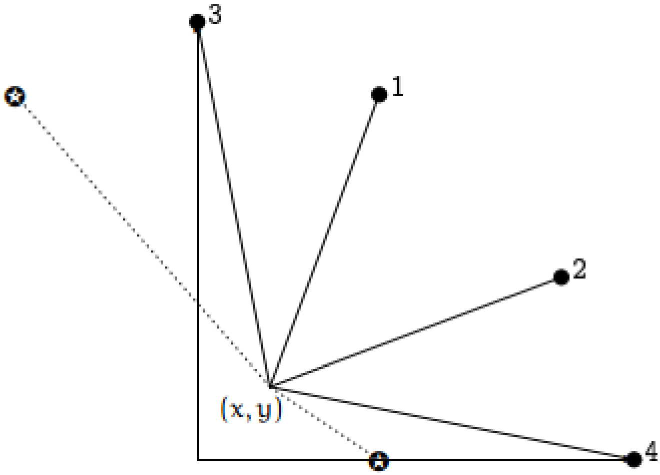

Figure 1: Problème de Swisscom

La démarche de modélisation se passe en trois étapes.
Variables de décision Swisscom doit identifier l'emplacement idéal pour son antenne, c'est-à-dire les coordonnées de cet emplacement. Nous définissons donc deux variables de décision x_1 et x_2 représentant ces coordonnées.
Fonction objectif La distance $d_i(x_1, x_2)$ entre un client i situé aux coordonnées (a, b) et l'antenne est donnée par

$$d_i(x_1, x_2) = \sqrt{(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2}$$

Afin de tenir compte du temps de communications, nous mesurons la somme des distances pondérées par les heures consommées:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) \quad &= 200d_1(x_1, x_2) + 150d_2(x_1, x_2) \\ &\quad +200d_3(x_1, x_2) + 300d_4(x_1, x_2) \\ &= 200\sqrt{(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 10)^2} \\ &\quad +150\sqrt{(x_1 - 10)^2 + (x_2 - 5)^2} \\ &\quad +200\sqrt{x_1^2 + (x_2 - 12)^2} \\ &\quad +300\sqrt{(x_1 - 12)^2 + x_2^2} \end{aligned}$$

Contraintes Les contraintes sur les distances entre les antennes peuvent s'écrire

$$\sqrt{(x_1 + 5)^2 + (x_2 - 10)^2} \geq 10$$

et

$$\sqrt{(x_1 - 5)^2 + x_2^2} \geq 10$$

Nous pouvons rassembler les différentes étapes de modélisation pour obtenir le problème d'optimisation suivant:

$$\begin{aligned}\min_{(x_1,x_2)} f(x_1,x_2) = \quad & 200\sqrt{(x_1-5)^2+(x_2-10)^2}+150\sqrt{(x_1-10)^2+(x_2-5)^2} \\ & +200\sqrt{x_1^2+(x_2-12)^2}+300\sqrt{(x_1-12)^2+x_2^2}\end{aligned}$$

sous contraintes

$$\sqrt{(x_1+5)^2+(x_2-10)^2} \geq 10$$

$$\sqrt{(x_1-5)^2+x_2^2} \geq 10$$

James Bond, l'agent secret 007 a pour mission de désamorcer une bombe nucléaire sur un yakht amarré à 50 mètres du rivage. Pour l'instant, James Bond se trouve à 100 mètres du point le plus proche de yacht sur la plage. Il est capable de courir sur la plage à 18km/h, et de nager à 10km/h. Etant donné qu'il lui faut 30 secondes pour désamorcer la bombe, et que celle-ci est programmée pour exploser dans 65 secondes, James Bond aura-t-il le temps de sauver le monde libre? Cette question cruciale, illustrée par la figure 2, peut être résolue par un problème d'optimisation.

La démarche de modélisation se passe en trois étapes.
Variables de décision La décision que doit prendre James Bond afin d'arriver le plus tôt possible sur le yacht consiste à choisir à quel moment il arrête de courir sur la plage pour commencer à nager vers le yakht. Nous définissons donc une variable de décision x représentant la distance en mètres courue sur la plage.
Fonction objectif L'objectif étant de minimiser le temps de parcours jusqu'au yakht, la fonction objectif associe à une décision x le temps correspondant, en secondes. Etant donné que James Bond court à 18 km/h, les x mètres sur la plage seront parcourus en $\frac{3.6x}{18}$ secondes, c'est-à-dire $x/5$ secondes. A partir de là, il devra nager une distance de

$$\sqrt{50^2 + (100 - x)^2}$$

à la vitesse de 10km/h. Cela lui prendra donc

$$\frac{3.6}{10}\sqrt{50^2+(100-x)^2} = 0.36\sqrt{50^2+(100-x)^2}$$

secondes. La fonction objectif est donc

$$f(x) = \frac{x}{5} + 0.36\sqrt{50^2+(100-x)^2}$$

Noter que les décisions triviales telles que $x = 0$ et $x = 100$ ont des conséquences désastreuses pour l'avenir de la planète. Une démarche d'optimisation s'avère indispensable.

Contraintes Un agent secret tel que James Bond ne souffre d'aucune contrainte! Par contre, la validité mathématique du modèle nécessite la contrainte suivante

$$0 \le x \le 100$$

Nous pouvons rassembler les différentes étapes de modélisation pour obtenir le problème d'optimisation suivant:

$$\min_x f(x) = \frac{x}{5} + 0.36\sqrt{50^2+(100-x)^2}$$

sous contrainte

$$x \ge 0$$

$$x \le 100$$