Examen Final -Modèle type-

Exercice 1.

Soit X une variable aléatoire positive distribuée selon une loi de Rayleigh de paramètre σ^2. Sa fonction de densité est définie par :

$$f_X\left(x; \sigma^2\right) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad \forall x \in [0, +\infty[$$

On souhaite tester la valeur de σ^2 à partir d'un N -échantillon $\{X_1, \ldots, X_N\}$ i.i.d. de même loi que X. On considère le test :

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2$$

avec $\sigma_1^2 > \sigma_0^2$.

Question 1 En utilisant le lemme de Neyman Pearson, montrez que la région critique du test UPP de niveau α s'écrit sous la forme

$$W = \left\{ x_1, \ldots, x_N \mid \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 > A \right\}$$

où A désigne une constante déterminée par le risque de première espèce α.

Question 2 On admet que pour un échantillon de grande taille :

$$\frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \approx \mathcal{N}\left(\sigma^2, \frac{\sigma^4}{N}\right)$$

où le signe $\approx$ signifie "approximativement distribué selon". Montrez que le seuil critique du test de niveau α est :

$$A = \sigma_0^2 + \Phi^{-1}(1-\alpha)\frac{\sigma_0^2}{\sqrt{N}}$$

Question 3 Determinez la puissance de ce test en fonction de $\sigma_1^2, \sigma_0^2, N$ et α. Commentez.

Question 4 On souhaite tester l'hypothèse $H_0 : \sigma^2 = 2$ contre $H_1 : \sigma^2 = 4$ à partir d'un échantillon de taille $N = 100$. Pour cet échantillon, on obtient

$$\sum_{i=1}^{N} x_i^2 = 470$$

Construisez la région critique du test de niveau $\alpha = 10\%$ et concluez quant au rejet ou non de l'hypothèse nulle $H_0 : \sigma^2 = 2$.

Le quantil d'ordre $0,9$ dans la table d'une loi Gaussienne est $F^{-1}(0,9) = 1,2563$.