Correction de l'examen (2023-2024)

Module : Calcul stochastique

I/ Questions de cours : Voir le cours. 8 pts

* **exercice 1 :** Calculer $\mathbb{E}\left[B_t \int_0^t f(s)\, dB_s\right]$

4 pt

$$= \mathbb{E}\left[\int_0^t dB_s \int_0^t f(s)\, dB_s\right]$$

(s'écrit sous la forme : $\left(\mathbb{E}\left[\int_0^t K_s\, dB_s \int_0^t H_s\, dB_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t K_s H_s\, ds\right]\right.$

Isometrie d'Ito

$$\text{Donc : } \mathbb{E}\left[\int_0^t dB_s \int_0^t f(s)\, dB_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t 1 \cdot f(s)\, ds\right]$$

$$= \int_0^t \mathbb{E}(f(s))\, ds = \int_0^t f(s)\, ds$$

Car f est une fct déterministe.

* **exercice 2 :** 8 pts

$$X_t = \int_0^t \sigma_s\, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2\, ds$$

$$\Rightarrow dX_t = \sigma_t\, dB_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2\, dt$$

Par la formule d'Ito on a :

1/ • $Y_t = \exp[X_t]$

$$dY_t = e^{X_t}\, dX_t + \frac{1}{2} e^{X_t} \sigma^2(t)\, dt$$

$$= Y_t\left[\sigma_t\, dB_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2\, dt\right] + \frac{1}{2} Y_t \sigma_t^2\, dt$$

$$dY_t = Y_t \sigma_t\, dB_t \Rightarrow Y_t = Y_0 + \int_0^t Y_s \sigma_s\, dB_s$$

2) Le processus Y est une martingale si :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t Y_s^2 \sigma^2(s)\, ds\right] < \infty$$

2pts • si σ est cte : $Y_t = \exp\left[\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2} t\right]$

donc Y_t est la martingale exponentielle associée à B_t

$$\mathbb{E}(Y_t) = \mathbb{E}(Y_0) = 1$$

2pts • si $\sigma = 1$, $Y_t = \exp\left[B_t - \frac{t}{2}\right]$

• $Z_t = \frac{1}{Y_t}$, par la formule d'ITO

2pts.
$$dZ_t = -\frac{Y_t \sigma(t)}{Y_t^2} dB_t + \frac{1}{2} \frac{2 Y_t^2 \sigma^2(t)}{Y_t^3} dt$$

$$= -\frac{\sigma(t)}{Y_t} dB_t + \frac{\sigma^2(t)}{\sigma^2(t)} dt$$

$$= Z_t\left[(-\sigma(t))\, dB_t + \sigma^2(t)\, dt\right]$$

$$\Rightarrow Z_t = Z_0 \exp\left[-\int_0^t \sigma(s)\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s)\, ds\right]$$

6