Exo1 (6 point) Corrigé type stat 2 Exo1 1

① Montrons que si ϕ est une fonction bijective et si T est exhaustive pour θ, aussi $T^* = \phi(T)$ et aussi exhaustive pour θ.

Démonstration.

Notons que $T = \phi^{-1}[\phi(T)] = \phi^{-1}(T^*)$. 0,25

et $f(\vec{x}/\theta) = h(\vec{x}) \cdot K(T,\theta) = h(x) \cdot K(\phi^{-1}(T^*), \theta)$ 0,25

$= h(x) = K^*(\phi^{-1}(T), \theta)$ 1

ce qui implique que T^* est exhaustive pour θ.

② Montrons que $T(X_1 \dots X_n) = \frac{1}{n} \sum \ln\left(\frac{X_i}{a}\right)$ est exhaustive pour θ.

$$L(x_1 \dots x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i^{\frac{1}{\theta}-1}}{\theta a^{1/\theta}}\right) \mathbb{1}_{0 \leq x_i \leq a}$$ 0,25

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{\theta a^{\frac{1}{\theta}}}\right)^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{\theta}-1}}_{g_\theta(T(x_1 \dots x_n))} \underbrace{\mathbb{1}_{\max x_i \leq a} \mathbb{1}_{\min x_i \geq 0}}_{h(x_1 \dots x_n)}$$ 0,25 0,25

D'après le théorème de factorisation $T(X_1 \dots X_n) = \prod_{i=1}^{n} X_i$ est une statistique exhaustive pour θ;

ou

$$f_\theta(x_i) = \frac{x_i^{\frac{1}{\theta}-1}}{\theta a^{1/\theta}} \mathbb{1}_{0 \leq x_i \leq a} = \frac{1}{\theta a^{\frac{1}{\theta}}} \mathbb{1}_{0 \leq x_i \leq a} \, e^{\left(\frac{1}{\theta}-1\right)\ln x_i}$$ 1

ou $c(\theta) = \frac{1}{\theta a^{\frac{1}{\theta}}}$, $h(x) = \mathbb{1}_{0 \leq x_i \leq a}$, $\alpha(\theta) = \frac{1}{\theta} - 1$ et $T(x) = \ln X$ 1

donc $T(X) = \ln X$ est une statistique privilégiée et dans le cas d'un modèle d'échantillonnage la statistique 0,25

$T_\theta(X_1 \dots X_n) = \sum_{i=1}^{n} \ln(X_i)$ est exhaustive pour le paramètre 0,25 1

L'application $x \longrightarrow \frac{1}{n}\left(\ln\left(\frac{x}{a}\right)\right)$ est une bijection 0,25 | Exo 1-2

sur $\mathbb{R}_+^*$ 0,25 d'où la statistique $\frac{1}{n}\sum \ln\left(\frac{X_i}{a}\right)$ | Exo 2-1

est aussi exhaustive pour θ. 0,25

Exo2 = 4 point

par le lemme de Neyman-pearson, on vous trouver une solution $\frac{L(H_1)}{L(H_0)} > k$. 0,25

on a la fonction de densité de la loi Beta :

$$f(m,n) = \frac{1}{\beta(m,n)} x^{m-1}(1-x)^{n-1} \qquad x>0$$

avec

$$\beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$ 0,25

donc $B(B,1) = \frac{\Gamma(B)\cdot\Gamma(1)^{=1}}{\Gamma(B+1)}$

On a $\Gamma(n) = (n-1)!$

donc $\Gamma(1) = (1-1)! = 0! = 1$

et on a $\Gamma(B) = (B-1)!$

$\Gamma(B+1) = B!$

donc $\beta(B,1) = \frac{(B-1)!\cdot 1}{B!} = \frac{\cancel{(B-1)!}}{B\,\cancel{(B-1)!}} = \frac{1}{B}$ 0,25

Nous remplaçons dans $f(B,1)$.

$f(B,1) = \frac{1}{1/\beta} x^{B-1} = \beta\, x^{B-1}$. 0,25

Donc la fonction de vraissemblance

$L(B) = \beta\, x^{B-1}$ donc

$\frac{L(H_1)}{L(H_0)} = \frac{B_1\, x^{B_1-1}}{1 \cdot x^{1-1}} > k$. 0,25

$= B_1\, x^{B_1-1} > k \Rightarrow x^{B_1-1} > k/B_1 \; k_1$ 0,25

2

$\Rightarrow x^{B_1 - 1} > k_1 \Rightarrow x > k_1^{1/B_1 - 1} = k^*$. 0,5

Exo 2-2

alors le meilleur test est

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & x > k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$ 0,25

avec k est déterminé par la formule

$\mathbb{E}_{H_0}(\phi(x)) = \alpha$ 0,25

$\mathbb{P}_{H_0}(x > k) = \alpha$ 0,25 $H_0 = B = 1$

$$= \int_k^1 1 \cdot x^{1-1}\, dx = \alpha \quad = \int_k^1 1\, dx = \alpha$$ 0,25

$$= [x]_k^1 = \alpha \Rightarrow 1 - k = \alpha$$

donc $k = 1 - \alpha$ 0,25

alors par le lemme de Neyman Pearson.

le test le plus puissant de taille α est

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 1 - \alpha. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$ 0,5

Exo3 : partie 1 (2 point)

La fonction de distribution conditionnelle du minimum et du maximum :

$$F_{X_{(1)}X_{(n)}} = \mathbb{P}(X_{(1)} \leq x, \quad X_{(n)} \leq y). \quad (*) \qquad 0,25$$

donc ce n'est pas claire comment écrire cela en terme donc X_i individuelle.

donc on utilise $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$ $\quad 0,25$

donc $\mathbb{P}(X_n \leq y) = \mathbb{P}(X_{(1)} \leq x, \quad X_{(n)} \leq y) + \mathbb{P}(X_{(1)} > x, X_{(n)} \leq y)$

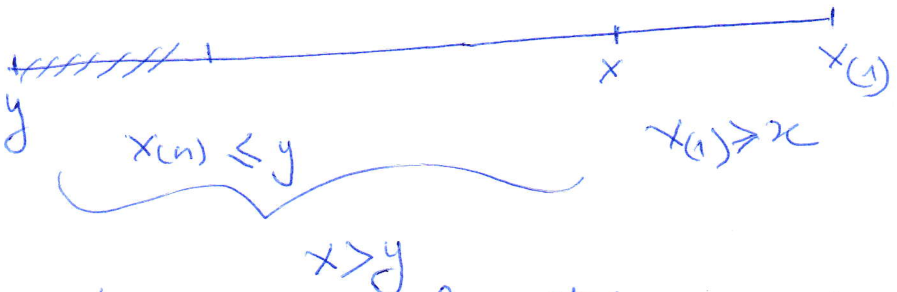
$(*)$ devient $\mathbb{P}(X_{(1)} \leq x, \quad X_{(n)} \leq y) = \mathbb{P}(X_{(n)} \leq y) - \mathbb{P}(X_{(1)} > x, X_{(n)} \leq y)$ $\quad 0,25$

on a deux cas :

Cas 1 : si $x \geq y$

$$\mathbb{P}(X_{(1)} \leq x, \quad X_{(n)} \leq y) = \mathbb{P}[X_{(n)} \leq y] - \overbrace{\mathbb{P}(X_{(1)} \geq x, \quad X_{(n)} \leq y)}^{\mathrm{I}} \qquad 0,25$$

Le dessin de I

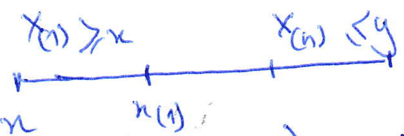


L'ordre statistique n'est pas entre le x et y et en plus y'a pas d'intersection donc $\mathrm{I} = 0$. $\quad 0,25$

alors $\mathbb{P}(X_{(1)} \leq x, \quad X_{(n)} \leq y] = \mathbb{P}[X_{(n)} \leq y]$

$$= [F(y)]^n \qquad 0,25$$

Cas 2 $\quad x < y$



$\mathbb{P}(X_{(1)} \leq x, \quad X_{(n)} \leq y) = \mathbb{P}(X_{(n)} \leq y) - \mathbb{P}(X_{(1)} > x, X_{(n)} < y)$

donc l'ordre statistique est entre x et y. $\quad 0,25$

$\mathbb{P}(X_{(1)} \leq x, \quad X_{(n)} < y) = \mathbb{P}(X_{(n)} \leq y) - \mathbb{P}(x < X_1 < y \,\ldots\, x < X_n < y)$

$$= [F(y)]^n - \mathbb{P}[x < X_i \leq y]^n. \qquad 0,25$$

Exo: 3 partie 2 2 point

Exo3-2

- Si X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 sont des variables aléatoires i.i.d qui suit la loi exponentiel avec un paramètre λ

Calculez : (a) $P(\min(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) \leq a)$

(b) $P(\max(X_1 \cdots X_5) \leq a)$

Solution:

Remarquons que a $P(X_{(1)} \leq a) = F_{X_{(1)}} = \int_a^a f_{x_{(1)}} \, dx$.

b $P(X_{(5)} \leq a)$.

- Nous rappelons que

(i) une loi expo avec un paramètre λ:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} \, dt = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$1 - F(x) = e^{-\lambda x}$$

(ii) La d probabilité de densité de la j ème ordre statistique de n variables aléatoire

$$f_{X_{(j)}}(x) = \frac{n!}{(n-j)!\,(j-1)!} [F(x)]^{j-1} [1 - F(x)]^{n-j} f(x)$$

(a) $f_{X_{(1)}}(x) = \frac{5!}{4!\,0!} [1 - F(x)]^{5-1} f(x)$

$= 5\lambda e^{-5\lambda}$

$P(X_{(1)} \leq a) = \int_0^a 5\lambda e^{-5\lambda} \, dx$

$= \left[e^{-5\lambda x} \right]_0^a$

0,5

$P(X_1 \leq a) = 1 - e^{-5\lambda x}$

0,5

5

$$f_{X_{(5)}}(x) = 5 \cdot (1 - e^{-\lambda x})^4 \cdot \lambda e^{-\lambda x}$$

$$P(X_{(5)} \leq a) = \int_0^a 5 (1 - e^{-\lambda x})^4 \lambda e^{-\lambda x} \, dx$$

0,5

$$u = (1 - e^{-\lambda x}) \qquad = \int_0^{1 - e^{-\lambda a}} 5 \cdot u^4 \, du$$

$$= \left[u^5 \right]_0^{1 - e^{-\lambda a}} = (1 - e^{-\lambda a})^5$$

0,5

Exo 4 = 6 point

$$Y_i \sim \text{Binomial}(m_i\ \psi_i) \qquad \psi_i = \frac{\exp(\beta_0+\beta_1 x)}{1+\exp(\beta_0+\beta_1 x_i)}$$

$$f_Y(y,\beta) = \prod_{i=1}^{n} \binom{m_i}{y_i} \psi_i(\beta)^{y_i} (1-\psi_i(\beta))^{m_i-y_i}$$ 1

$$= \frac{\prod_{i=1}^{n} \binom{m_i}{y_i}}{\prod_{i=1}^{n} (1+\exp(\beta_0+\beta_1 x_i))^{m_i}} \exp\left(\beta_0 \sum_{i=1}^{n} y_i + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)$$ 1

pour y et y^*

$$\frac{f_Y(y,\beta)}{f_Y(y^*,\beta)} = \frac{\prod_{i=1}^{n} \binom{m_i}{y_i}}{\prod_{i=1}^{n} \binom{m_i}{y_i^*}} \exp\left\{\beta_0\left(\sum y_i - \sum_{i=1}^{n} y_i^*\right) - \beta_1\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i^*\right)\right\}$$ 2,5

Donc le ratio ne dépend pas de β si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i^* \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i^*$$ 0,5

0,5

Donc $T(Y) = \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\ ,\ \sum_{i=1}^{n} x_i Y_i\right)$ 0,5

est une statistique exhaustive minimal.

~~6~~ 7