USTHB
Faculté de Mathématiques
Master 1 SPA
Séries chronologiques 1

Série d'exercices N°2

Exercice 1

Supposons que $X_1, X_2, ...,$ est un processus stationnaire de moyenne μ et de fonction d'autocorrélation $\{\rho_h, h \in \mathbb{Z}\}$

Montrer que le meilleur prédicteur de X_{n+h} de la forme $aX_n + b$ est obtenu en choisissant $a = \rho_h$ et $b = \mu(1 - \rho_h)$.

Exercice 2

Montrer que le processus $X_t = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t), t \in \mathbb{Z}$, (où A et B sont des variables aléatoires non corrélées de moyenne 0 et de variance 1 et ω est une fréquence fixée dans l'intervalle $[0, \pi]$) est stationnaire et trouver sa moyenne et sa fonction d'autocovariance.

Déduire que la fonction $\kappa_h = \cos(\omega h), h \in \mathbb{Z}$ est semi-définie positive. (Voir cours chapitre 2, proposition 8).

Exercice 3

1) Trouver la fonction d'autocovariance du processus $X_t = \epsilon_t + 0.3\epsilon_{t-1} - 0.4\epsilon_{t-2}$, where $\{\epsilon_t\} \sim WN(0, 1)$.

2) Trouver la fonction d'autocovariance du processus $Y_t = \widetilde{\epsilon}_t - 1.2\widetilde{\epsilon}_{t-1} - 1.6\widetilde{\epsilon}_{t-2}$, where $\{\widetilde{\epsilon}_t\} \sim WN(0, 0.25)$.

Comparer avec le réponse trouvée en 1).

Exercice 4

1) Montrer que $\gamma_h = 1, \forall h$ est la fonction d'autocovariance du processus $X_t = A$ où A est une variable aléatoire centrée-réduite.

2) Trouver les processus correspondant au fonctions d'autocovariance suivantes :

a) $\gamma_h = (-1)^h, h \in \mathbb{Z}$.

b) $\gamma_h = 1 + \cos\frac{\pi h}{2} + \cos\frac{\pi h}{4}, h \in \mathbb{Z}$.

c) $\gamma_h = \begin{cases} 1 \text{ si } h = 0 \\ 0.4 \text{ si } h = \pm 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Exercice 5

Montrer, en utilisant la série géométrique $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} x^i$ pour $|x| < 1$ que $\frac{1}{1-\phi z} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \phi^{-i} z^{-i}$ pour $|\phi| > 1$ et $|z| \geq 1$.

Exercice 6

Montrer que les équations autorégressives $X_t = \phi X_{t-1} + \epsilon_t, t \in \mathbb{Z}$ n'ont pas de solution stationnaire au second ordre pour $|\phi| = 1$.

(Indication : on exprimera X_t en fonction de X_0 que l'on supposera constante, puis on calculera les caractéristiques −moyenne, fonction d'autocovariance− de ce processus).

Exercice 7

Soit $\{Y_t\}$ un processus vérifiant l'équation $Y_t = X_t + W_t$ où $\{X_t\}$ est un processus $AR(1)$ causal, i.e., $X_t = \phi X_{t-1} + \epsilon_t$ et $|\phi| < 1$, $\{W_t\} \sim WN(0, \sigma_W^2)$, $\{\epsilon_t\} \sim WN(0, \sigma_\epsilon^2)$ et $E(W_s \epsilon_t) = 0, \forall s, t$.

1) Montrer que $\{Y_t\}$ est un processus stationnaire au second ordre.

2) Montrer que le processus $\{U_t\}$ défini par $U_t = Y_t - \phi Y_{t-1}$ est $1-$dépendant, i.e., que $\{U_t\}$ est un processus $MA(1)$.

3) Conclure que $\{Y_t\}$ est un processus $ARMA(1,1)$ dont on déterminera les paramètres.

Exercice 8

Calculer les coefficients ψ_i et π_j, $i, j \in \mathbb{N}$ des développements $X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \epsilon_{t-i}$ et $\epsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-i}$ pour le processus $ARMA(1,1)$ défini par les équations $X_t = 0.5X_{t-1} + \epsilon_t + 0.5\epsilon_{t-1}$, $\{\epsilon_t\} \sim WN(0, \sigma_\epsilon^2)$.

Exercice 9

A) Supposons que pour une série chronologique de taille $T = 100$ provenant d'un processus $AR(1)$ de moyenne $\mu, \phi = 0.6$ et $\sigma_\epsilon^2 = 2$ on ait obtenu $\overline{X}_{100} = 0.271$.

1) Construire un intervalle de confiance approximatif de niveau de confiance 0.95 pour μ.

2) Les observations sont-elles compatibles avec l'hypothèse $H_0 : \mu = 0$?

B) Supposons que pour une série chronologique de taille $T = 100$ provenant d'un processus $MA(1)$ de moyenne $\mu, \theta = -0.6$ et $\sigma_\epsilon^2 = 1$ on ait obtenu $\overline{X}_{100} = 0.157$.

1) Construire un intervalle de confiance approximatif de niveau de confiance 0.95 pour μ.

2) Les observations sont-elles compatibles avec l'hypothèse $H_0 : \mu = 0$?

C) Supposons que pour une série chronologique de taille $T = 100$, on ait obtenu $\widehat{\rho}_1 = 0.438$ et $\widehat{\rho}_2 = 0.145$.

1) En supposant que les observations proviennent d'un modèle $AR(1)$, construire un intervalle de confiance approximatif de niveau de confiance 0.95 pour ρ_1 et ρ_2. Peut-on conclure que les observations proviennent d'un modèle $AR(1)$ avec $\phi = 0.8$?

2) En supposant que les observations proviennent d'un modèle $MA(1)$, construire un intervalle de confiance approximatif de niveau de confiance 0.95 pour ρ_1 et ρ_2. Peut-on conclure que les observations proviennent d'un modèle $MA(1)$ avec $\theta = 0.6$?

Exercice 10

1) Montrer que le processus donné dans l'**Exercice 2** s'écrit : $X_t = 2\cos(\omega)X_{t-1} - X_{t-2}$. (Indication : développer $\cos(\omega t) = \cos((\omega t - 1) + \omega)$ et $\sin(\omega t) = \sin((\omega t - 1) + \omega)$).

2) Trouver $P_1 X_2$ et son erreur quadratique moyenne.

3) Trouver $P_2 X_3$ et son erreur quadratique moyenne.

4) Trouver $P_n X_{n+1}$ et son erreur quadratique moyenne.