Université 8 Mai 1945
Faculté de Mathématiques, de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Concours d'accès à la formation doctorale de $3^{\text{ème}}$ cycle (LMD)	**21/01/2023**

Spécialité : Probabilités et équations différentielles stochastiques
Epreuve écrite 1 : Probabilités   Durée : 1h30

Exercice I [6 pts]
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on deinit :

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - \cos(2\pi n x) & \text{si } \ 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier que f_n est une densité de probabilité.
2. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, calculer la fonction de répartition F_n associée à f_n.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $F_n(x)$ tend vers la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0, 1]$.
4. Pour $x \in \mathbf{R}$, est-ce que $f_n(x)$ converge lorsque n tend vers l'infini ? Conclure.

Exercice II [7 pts]
Considérons deux variables X et Y indépendantes ayant des espérances mathématiques notées m_X et m_Y et des variances σ_X^2 et σ_Y^2.

1. Exprimer en fonction de ces paramètres la variance de la variable produit $Z = X.Y$.
2. Dans quel cas, cette variance est-elle égale au produit des variances $\sigma_X^2 \sigma_Y^2$.
3. Utiliser les resultats précédents pour prouver que le produit de deux lois de poisson indépendantes n'est pas une loi de poisson.

Sachant que si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors $m_X = \sigma_X^2 = \lambda$.

Exercice III [7 pts]
Soit f une fonction de densité. On définit

$$f_{\varepsilon,a}(x) = (1-\varepsilon)f(x) + \frac{\varepsilon}{a} f\left(\frac{x-1}{a}\right)$$

une perturbation de f, $\varepsilon > 0$ et $a > 1$ sont deux constantes réelles.

1. Montrer que $f_{\varepsilon,a}$ est une fonction de densité.
2. Soit f une fonction de densité d'une distribution normale X avec une espérance 0 et variance 1. Calculer l'espérance $E(Y)$ et la variance $var(Y)$ où $Y \sim f_{\varepsilon,a}$.
3. Supposons que f est symétrique par rapport à l'origine. Est-ce qu'on peut conclure que l'espérance $E(X) = 0$? Justifier votre réponse.

Université 8 Mai 1945

Faculté de Mathématiques, de l'Informatique et des Sciences de la Matière

Département de Mathématiques

Concours d'accès à la formation doctorale de 3ème cycle (LMD) 2022/2023

Spécialité : Probabilités et équations différentielles stochastiques

Epreuve écrite 2 : Modélisation stochastique **Durée : 2h00mn** 21/01/2023

Exercice 1 [7 pts] (Couples aléatoires)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi admet la densité conjointe suivante :

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x,y) &= 4y(x-y)\exp\{-(x+y)\}\mathbf{1}_D(x,y), \\ D &= \{(x,y) \; : \; 0 \leq y \leq x\}. \end{aligned}$$

1. Déterminer la densité marginale de Y, puis la densité de la loi conditionnelle de X sachant Y.
2. Calculer $E[X|Y]$.
3. Calculer $P(X < 1|Y = y)$, selon les cas : $y \leq 1$ et $y > 1$.

Exercice 2 [6 pts] (EDS)

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ un espace probabilisé filtré, et $(B_t)_{t\geq 0}$ un $(\mathcal{F}_t)$−mouvement brownien défini sur cet espace.

On définit le processus

$$Y_t = tB_t.$$

1. Calculer dY_t.
2. Calculer l'espérance de Y_t.
3. Calculer $E\left(Y_t Y_s\right)$.

Exercice 3 [7 pts] (Modélisation stochastique)

Soit la formule du coefficient de sécurité :

$$\beta = \frac{K + n\rho\mu}{\sigma\sqrt{n}}.$$

On suppose qu'un risque peut être modélisé par un nombre de sinistres N obéissant à la loi :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(N = k) = p(1-p)^k, \quad 0 < p < 1.$$

Par ailleurs, les montants de sinistres Y ont la densité de probabilité :

$$f(y) = \lambda \exp(-\lambda y), \quad y > 0,\ \lambda > 0\ .$$

1. Quels sont l'espérance et la variance de N ? Même question pour Y ?
2. En déduire l'expression de l'espérance mathématique et de la variance de

$$X = \sum_{i=1}^{N} Y_i, \text{ où } X \text{ représente la charge totale des sinistres.}$$

3. Déterminer les valeurs des paramètres p et λ pour que $E(N) = 0.1$ et $E(Y) = 9750$. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
4. Quelles conditions doivent être vérifiées par le nombre n de contrats pour que le coefficient de sécurité β soit au moins égal à 4, lorsque le capital $K = 500000$ DZD , $\sigma = 4468$ et $\rho\mu = 145$?