Chapitre 4

Lois usuelles

Le but de ce chapitre est de donner les principales caractéristiques des variables aléatoires les plus utilisées en calcul des probabilités, nous commençons par les variables aléatoires discrètes. toutes les variables aléatoires de ce chapitre sont définies sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, I\!P)$.

4.1 Lois discrètes

4.1.1 Loi de Dirac

Définition 4.1. Soient $a \in \mathbb{R}$, X une variable aléatoire réelle. On dit que X suit une loi de Dirac concentrée en a si $I\!P(X = a) = 1$. (On note $X \hookrightarrow \delta_a$).

Remarque 4.1. Il n'est pas difficile de voir que si $X \hookrightarrow \delta_a$, alors sa fonction de masse est donnée par

$$p_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = a \\ 0 & \text{si } x \neq a \end{cases}$$

Par conséquent, $\mathbb{E}(X) = a$ et $Var(X) = 0 = \sigma_X^2$.

Proposition 4.1. Soient $X \hookrightarrow \delta_a$, M_X, sa fonction génératrice des moments et φ_X sa fonction caractéristique, alors

$$M_X(t) = e^{at}, \qquad \varphi_X(t) = e^{iat},$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

4.1.2 Loi de Bernoulli

Définition 4.2. Soient $0 < p < 1$, X une variable aléatoire réelle. On dit que X suit une loi de bernoulli de paramètre p (on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$) si X est à valeurs dans $\{0, 1\}$ avec

$$P(X = 1) = p = 1 - P(X = 0).$$

Remarque 4.2. La variable de Bernoulli est souvent utilisée pour modéliser une experience aléatoire qui n'a que deux issues. En général, le chiffre 1 est atribué au "succès" alors que 0 est attribué à "l'echec". Dans une expérience aléatoire de Bernoulli, le paramètre p est donc la probabilité du "succès".

Il n'est pas difficile de montrer

Proposition 4.2. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors

1. La fonction de masse de X est donnée par

$$p_X(k) = \begin{cases} p^k(1-p)^{1-k} & \text{si } k \in \{0, 1\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. $\mathbb{E}(X) = p$, $Var(X) = p(1-p)$ et $\sigma_X = \sqrt{p(1-p)}$.

Proposition 4.3. Soient $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, M_X, sa fonction génératrice des moments et φ_X sa fonction caractéristique, alors

$$M_X(t) = 1 - p + pe^t, \qquad \varphi_X(t) = 1 - p + pe^{it},$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

4.1.3 Loi binomiale

Définition 4.3. Soient $n \geq 1$ et $0 < p < 1$. On répète une experience de Bernoulli n fois de manière indépendantes et on note par X la variable aléatoitre qui compte le nombre de fois où on a obtenu le chiffre 1. On dit que la variable X ainsi définie suit une loi binomiale de paramètres n et p. (on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$)

Remarque 4.3. d'après cette définition, on peut affirmer que

– Une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p est tout simplement une variable de comptage, elle compte le nombre de "succès" obtenus lorsqu'on répète la même expérience plusieurs fois.

– Le paramètre n est un entier positif, il désigne le nombre de répétitions, alors que p est la probabilité du "succès"

– Une variable binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, est à valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, ..., n\}$.

Proposition 4.4. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, alors

1. La fonction de masse de X est donnée par

$$p_X(k) = \begin{cases} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } k \in \{0, 1, .., n\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. $\mathbb{E}(X) = np,\ Var(X) = np(1-p)$ et $\sigma_X = \sqrt{np(1-p)}$.

Exemple 4.1. Dans un exercice militaire, un soldat a le droit de tirer sur une cible mobile 10 fois, si la probabilité d'atteindre cette cible est 0.7, quelle est la probabilité que ce soldat atteigne la cible au moins 2 fois.

<u>SOLUTION</u>:

Cette expérience aléatoire consiste à répéter la même expérience (tirer sur une cible) 10 fois de suite. c'est donc une expérience binomiale. Soit X la variable aléatoire qui modélise cette expérience, on a $X \hookrightarrow \mathcal{B}(10, 0.7)$ et on cherche $\mathbb{P}\Big(X \geq 2\Big)$. Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\Big(X \geq 2\Big) &= 1 - \mathbb{P}\Big(X < 2\Big) \\ &= 1 - \Big(\mathbb{P}\Big(X = 0\Big) + \mathbb{P}\Big(X = 1\Big)\Big) \\ &= 1 - \Big(C_{10}^0 (1-0.7)^{10} + C_{10}^1 (0.7)(1-0.7)^9\Big) \\ &= 0.856. \end{aligned}$$

Proposition 4.5. Soient $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p),\ M_X$ sa fonction génératrice des moments et φ_X sa fonction caractéristique, alors

$$M_X(t) = (1 - p + pe^t)^n, \qquad \varphi_X(t) = (1 - p + pe^{it})^n,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

4.1.4 Loi de Poisson

Définition 4.4. Soient $\lambda > 0$. On dit que la variable X suit une loi de Poisson de paramètre λ (on note $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$), si sa fonction de masse est donnée par

$$p_X(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Remarque 4.4. On rappelle que si $x \in \mathbb{R}$, alors

$$e^x = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{x^k}{k!}.$$

Ainsi p_X est bien une fonction de masse.

Proposition 4.6. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors

$$\mathbb{E}(X) = \lambda = Var(X) \quad \text{et} \quad \sigma_X = \sqrt{\lambda}.$$

Exemple 4.2. Dans la gare ferroviaire d'Oran, un guichet vend en moyenne 2 billets chaque demi-heure pour le trajet Oran-Alger. Quelle est la probabilité que ce guichet vende 6 billets pour ce trajet dans un intervalle de 2 heures ?
<u>Solution</u>:

Soit X la v. a. r qui modélise le nombre de billets vendu par ce guichet pendant 2 heures. Il faut remarquer que pour une loi de Poisson, la moyenne est exactement le paramètre, ainsi pour 2 heures la moyenne est $\mathbb{E}(X) = 8$. Par suite on cherche $\mathbb{P}\Big(X = 6\Big)$. on a

$$\mathbb{P}\Big(X = 6\Big) = e^{-8}\frac{8^6}{6!} = 0.106$$

Proposition 4.7. Soient $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, M_X sa fonction génératrice des moments et φ_X sa fonction caractéristique, alors

$$M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}, \qquad \varphi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)},$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

4.1.5 Loi géométrique

Définition 4.5. Soient $0 < p < 1$. On dit que la variable X suit une loi géométrique de paramètre p (on note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$), si sa fonction de masse est donnée par

$$p_X(k) = p(1-p)^{k-1}, \qquad k \in \mathbb{N}^*.$$

Proposition 4.8. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}, \quad Var(X) = \frac{1-p}{p^2} \quad \text{et} \quad \sigma_X = \frac{\sqrt{1-p}}{p}.$$

Proposition 4.9. Soient $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, M_X, sa fonction génératrice des moments et φ_X sa fonction caractéristique, alors

$$M_X(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t} \qquad \text{et} \qquad \varphi_X(u) = \frac{pe^{iu}}{1-(1-p)e^{iu}},$$

pour $t \in]-\infty, -\ln(1-p)[$ et $u \in \mathbb{R}$.

4.1.6 Loi hypergéométrique

Définition 4.6. Soit une urne contenant N boules dont une proportion p de boules blanches. On prélève de cette urne un échantillon (sans remise) de n boules. On note par X la variable aléatoire qui donne le nombre de boules blanches de l'échantillon. On dit que X suit une loi hypergéométrique de paramètres $N,\ n,\ p$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, p)$.

D'après le chapitre 1, on a

Proposition 4.10. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, p)$, alors

$$p_X(k) = \begin{cases} \frac{C_{Np}^k C_{qN}^{n-x}}{C_N^n} & \text{si } \max(0, n-Nq) \leq k \leq \min(n, Np) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $q = 1-p$.

On a d'autre part

Proposition 4.11. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, p)$, alors

$$\mathbb{E}(X) = np, \quad Var(X) = \frac{N-n}{N-1}np(1-p) \quad \text{et} \quad \sigma_X = \sqrt{\frac{N-n}{N-1}np(1-p)}.$$

4.2 Lois absolument continue

4.2.1 Loi uniforme

Définition 4.7. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[a, b]$ si sa fonction de densité f est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[a,b]}$.

Il n'est pas difficile de montrer

Proposition 4.12. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[a,b]}$, alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}, \quad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \quad \text{et} \quad \sigma_X = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

De même, on a

Proposition 4.13. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[a,b]}$, alors

$$M_X(t) = \begin{cases} \frac{e^{bt}-e^{at}}{(b-a)t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\varphi_X(t) = \begin{cases} \frac{e^{ibt}-e^{iat}}{i(b-a)t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

4.2.2 Loi exponentielle

Définition 4.8. Soit $\lambda > 0$. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ si sa fonction de densité f est donnée par

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \, \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

Il n'est pas difficile de montrer

Proposition 4.14. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} \quad \text{et} \quad \sigma_X = \frac{1}{\lambda}.$$

De même, on a

Proposition 4.15. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors

$$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} \qquad \text{et} \qquad \varphi_X(u) = \frac{\lambda}{\lambda - iu},$$

pour $t \in]-\infty, \lambda[$ et $u \in \mathbb{R}$.

4.2.3 Loi gamma

Définition 4.9. Soient $r > 0, \lambda > 0$. On définit la fonction Γ par

$$\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} x^{r-1} e^{-x} dx$$

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi gamma de paramètres r, λ si sa fonction de densité f est donnée par

$$f(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} \, \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$$

On note $X \hookrightarrow \Gamma(\lambda, r)$.

Proposition 4.16. Soit $X \hookrightarrow \Gamma(\lambda, r)$, alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{r}{\lambda}, \quad Var(X) = \frac{r^2}{\lambda^2} \quad \text{et} \quad \sigma_X = \frac{r}{\lambda}.$$

De même

Proposition 4.17. Soit $X \hookrightarrow \Gamma(\lambda, r)$, alors

$$M_X(t) = \Big(\frac{\lambda}{\lambda - t}\Big)^r, \qquad \varphi_X(u) = \Big(\frac{\lambda}{\lambda - iu}\Big)^r,$$

pour $t \in]-\infty, \lambda[$ et $u \in \mathbb{R}$.

4.2.4 Loi de Laplace

Définition 4.10. On dit qu'une variable aléatoire suit une loi de Laplace si sa fonction de densité est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{L}$.

Proposition 4.18. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{L}$, alors

$$\mathbb{E}(X) = 0, \quad Var(X) = 2 \quad \text{et} \quad \sigma_X = \sqrt{2}.$$

Proposition 4.19. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{L}$, alors

$$M_X(t) = \frac{1}{1 - t^2}, \qquad \varphi_X(u) = \frac{1}{1 + u^2},$$

pour tout $t \in]-1, 1[$ et $u \in \mathbb{R}$.

4.2.5 Loi de Cauchy

Définition 4.11. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Cauchy si sa fonction de densité f est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{C}$.

Proposition 4.20. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{C}$, alors

$$\varphi_X(t) = e^{-|t|},$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

4.2.6 Loi normale centrée réduite

Définition 4.12. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de normale centrée réduite (ou gaussienne centrée réduite) si sa fonction de densité f est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

Proposition 4.21. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, alors

$$\mathbb{E}(X) = 0, \quad Var(X) = 1 = \sigma_X.$$

Proposition 4.22. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, alors

$$M_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}}, \qquad \varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}},$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

4.2.7 Loi normale

Définition 4.13. Soient $\mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0$. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de normale ou gaussienne si sa fonction de densité f est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Proposition 4.23. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors

$$\mathbb{E}(X) = \mu, \quad Var(X) = \sigma^2, \qquad \sigma_X = \sigma.$$

Proposition 4.24. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors

$$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{t^2}{2\sigma^2}}, \qquad \text{et} \qquad \varphi_X(t) = e^{i\mu t - \frac{t^2}{2\sigma^2}},$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

4.3 Approximation de la loi binomiale

Soient $n \geq 1, 0 < p < 1$ et $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et supposons que le produit np tends vers $\lambda > 0$ lorsque $n \to +\infty$ et $p \to 0$. Dans ce cas, pour n assez grand on peut remplacer p par $\frac{\lambda}{n}$. D'autre part si $k \in \{0, 1, ..., n\}$, alors

$$p_X(k) = I\!P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},$$

ainsi pour tout $k \in \{0, 1, ..., n\}$:

$$\begin{aligned} p_X(k) &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{n^k(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})}{k!} (\frac{p}{1-p})^k (1-p)^n \\ &= \frac{(np)^k}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})(1-\frac{\lambda}{n})^n. \end{aligned}$$

Mais

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(np)^k}{k!}=\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}(1-\frac{\lambda}{n})^n=e^{-\lambda}.$$

Par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty}p_X(k)=e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}$$

qui est la fonction de masse d'une loi de Poisson de paramètre λ, on a démontré le résultat suivant :

Théorème 4.1. Soient $n \geq 1, 0 < p < 1$ et X une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n,p)$. Supposons que $np \to \lambda$ lorsque $n \to +\infty$ et $p \to 0$. Alors

$$\mathcal{B}(n,p) \simeq \mathcal{P}(\lambda).$$

Afin d'illustrer ce résultat, considérons l'exemple suivant :

Exemple 4.3. Dans un pays le pourcentage des personne atteints d'une certaine maladie génétique est de 0.4%. Quelle est la probabilité de trouver au plus 2 personnes atteintes de cette maladie dans un village de 250 personnes ?

<u>SOLUTION</u>:

Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes atteinte de cette maladie dans ce village de 250 personnes. Il est clair qu'on cherche $\mathbb{P}(X \leq 2)$ et que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(250, 0.004)$. Ainsi n et assez grand et p est petit, de plus le produit $np = 250 \times 0.004 = 1$, donc si $\widetilde{X} \hookrightarrow \mathcal{P}(1)$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq 2) &= \mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(X=2) \\
&\simeq \mathbb{P}(\widetilde{X}=0)+\mathbb{P}(\widetilde{X}=1)+\mathbb{P}(\widetilde{X}=2) \\
&= e^{-1}+e^{-1}+\frac{e^{-1}}{2} \\
&= \frac{5}{2}e^{-1}.
\end{aligned}$$

Remarque 4.5. Dans la pratique, ce résultat nous permet de remplacer la loi $\mathcal{B}(n,p)$ par la loi $\mathcal{P}(np)$ lorsque le produit np est très petit. L'avantage de la loi de Poisson est qu'elle ne dépend que d'un seul paramètre. Bien évidement ceci reste une approximation, mais elle est acceptable dès que $n > 50$ et $p < 0.1$.

4.4 Transformation d'une variable aléatoire

Commençons par introduire la notion de support pour une variable aléatoire

Définition 4.14. Soit X une variable aléatoire réelle.

- Si X est discrète de fonction de masse p_X, alors on appelle support de X l'ensemble $\{x \in \mathbb{R},\ p_X(x) \neq 0\}$.
- Si X est absolument continue de fonction de densité f_X, alors on appelle support de X l'ensemble $\{x \in \mathbb{R},\ f_X(x) \neq 0\}$.

Le support d'une variable aléatoire X est noté $supp(X)$

Dans plusieurs situations, on est amené à utilisér non pas une variable aléatoire X de loi usuelle mais une fonction de celle-ci, i. e. $Y = h(X)$ où h est une fonction réelle. il devient donc naturel de chercher une méthode qui permet de déduire les principales caractéristique la nouvelle variable Y à partir de celles de X. Dans cette section on propose une méthode pour le faire à partir de 4 exemples, en distingant le cas bijectif et la cas non-bijectif.

Tout au long de ce paragraphe $h:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction.

4.4.1 Le cas discret

Théorème 4.2. Soient X une variable aléatoire discrète, p_X sa fonction de masse et $supp(X)$ son support. On pose $Y = h(X)$, alors Y est une variable aléatoire discrète, son support $supp(Y) = h\Big(supp(X)\Big)$ et sa fonction de masse p_Y est donnée par

$$p_Y(y) = \begin{cases} \sum_{\{k/\ h(k)=y\}} p_X(k) & \text{si } y \in supp(Y) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple 4.4. Soit X une variable aléatoire discrète qui prend les valeurs $-1, 0, 1, 2$ avec les probabilités respectives $\frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{4},\ \frac{9}{16}$. Posons $h(x) = |x|$, on a dans ce cas $supp(X) = \{-1, 0, 1, 2\}$ et $supp(Y) = \{0, 1, 2\}$. Par suite :

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{16} & \text{si } y = 0 \\ \frac{3}{8} & \text{si } y = 1 \\ \frac{9}{16} & \text{si } y = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4.4.2 Le cas absolument continu

Théorème 4.3. Soient X une variable aléatoire absolument continue, f_X sa fonction de densité et $supp(X)$ son support. On pose $Y = h(X)$ et on suppose que la fonction h soit <u>bijective</u> sur $supp(X)$, et que sa fonction réciproque h^{-1} <u>admette une dérivée continue</u> sur $h(supp(X))$. Alors Y est une variable aléatoire absolument continue, son support $supp(Y) = h\Big(supp(X)\Big)$ et sa fonction de densité f_Y est donnée par

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h^{-1}(y))|(h^{-1})'(y)| & \text{si } y \in supp(Y) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple 4.5. Soient $X \hookrightarrow \mathcal{U}[1, 3]$, $h(x) = e^x$ et $Y = h(X)$. Il est clair que $supp(X) = [1, 3], supp(Y) = [e, e^3]$ et h est bijective sur $[1, 3]$, puisque $h^{-1}(x) = \ln(x)$, de plus h^{-1} admet une dérivée continue sur $[1, 3]$, ainsi la fonction de densité f_Y est donnée par

$$f_Y(y) = f_X(\ln(y))\frac{1}{y} = \frac{1}{2y}\mathbb{1}_{[e,e^3]}(y).$$

Exemple 4.6. Soient $\lambda > 0$, $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, $h(x) = \frac{1}{x}$ et $Y = h(X)$. On peut voir que $supp(X) = [0, +\infty[$, $supp(Y) =]0, +\infty[$ et h est bijective sur $]0, +\infty[$, puisque $h^{-1}(x) = \frac{1}{x}$, de plus h^{-1} admet une dérivée continue sur $]0, +\infty[$, ainsi la fonction de densité f_Y est donnée par

$$f_Y(y) = f_X(\frac{1}{y})|\frac{-1}{y^2}| = \frac{\lambda}{y^2}e^{-\frac{\lambda}{y}}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y).$$

Remarque 4.6. L'hypothèse de bijectivité de la fonction h sur tout le support de X est trop forte, en effet même si cette hypothèse n'est pas vérifiée on peut dans la plupart des cas partager le support de X en plusieurs parties de telle sorte que h soit bijective dans chaque partie, ainsi on peut appliquer le théorème sur chaque partie, pour le voir considérons :

Exemple 4.7. Soient $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, $h(x) = x^2$ et $Y = h(X)$. Dans ce cas $supp(X) = \mathbb{R}$, ainsi h n'est pas bijective sur $supp(X)$. Soit F_Y la fonction de répartition de Y et remarquons que $supp(Y) = [0, +\infty[$. Soit $y \in supp(Y)$, on peut écrire

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}\Big(Y \leq y\Big) \\ &= \mathbb{P}\Big(X^2 \leq y\Big) \\ &= \mathbb{P}\Big(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\Big) \\ &= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}). \end{aligned}$$

D'où

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}) + f_X(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}},$$

par conséquent

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{1}{2}y} \; \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(y).$$