Université Mohamed khider Biskra

Faculté des sciences exactes et sciences de la nature et de vie
Département de mathématiques
Module: Théorie des martingales.
Année:2020/2021

TD2. Martingale à temps discret

Exercice1:(Changement de tribus) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ est aussi une martingale pour la filtration canonique $(\sigma(X_1, X_2, ..., X_n))_{n\geq 1}$.

Exercice 2: Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$une suite de v.a.r. indépendantes de même loi donnée par : $P(Z_n = 1) = p$, $P(Z_n = -1) = 1 - p$. On pose $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et $B_n = \sigma(Z_1, ..., Z_n)$ pour $n \geq 1$. Soit $(b_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. positives bornées, telles que b_n soit $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable pour tout $n \geq 1$, on définit un jeu en décidant que si $Z_n = 1$, on gagne b_n , et si $Z_n = -1$, on pert b_n. Soit S_0 la fortune initiale, S_n la fortune après le n-iéme coup.
Montrer que $(S_n)_{n\geq 1}$est une martingale si $p = \frac{1}{2}$, une sous-martingale si $p > \frac{1}{2}$, une sur-martingale si $p < \frac{1}{2}$.

Exercice 3: Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une sur-martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Soit $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a.positives et bornées, ε_n étant $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable pour $n \geq 1$ et ε_0 constante. On pose $Z_0 = X_0$, et pour $n \geq 1$, $Z_n = X_n - X_{n-1}$.Montrer que la suite $Y_n = \varepsilon_0 Z_0 + ... + \varepsilon_n Z_n$ est une sur-martingale.

Exercice 4: Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ et $(Y_n)_{n\geq 1}$ deux martingales. Montrere que $(X_n \wedge Y_n)_{n\geq 1}$ est une sur-martingale et que et $(X_n \vee Y_n)_{n\geq 1}$ est une sous-martingale.

Exercice 5:(Martingale équidistribuée) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une sMG telle que toutes les v.a.r. X_n aient même loi.
1-Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ est une MG.
2-Montrer que, pour tout réel a, $(X_n \wedge a)_{n\geq 1}$ et $(X_n \vee a)_{n\geq 1}$sont MG. (On note $\wedge$ et $\vee$ pour inf et sup.)
3-En déduire que, si $n > m$ pour tout réel a, sur l'ensemble $\{X_m \geq a\}$ X_n est p.s supérieur ou égale à a.
4- En déduire que $X_1 = ... = X_n = ...$ P-p.s.