الحل النموذجي للواجب المنزلي في مقياس الاحتمالات.

حل التمرين الأول

① تعيين قيمة a :

بما أن $\mathbb{P}_X$ هو قانون احتمال فهو يحقق الشرط

$$X(\Omega)=\{-2,-1,0,1,2\} \quad , \quad \sum_{x_i \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x_i)=1$$

وعليه $\mathbb{P}(X=-2)+\mathbb{P}(X=-1)+\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(X=2)=1$

ومنه $\boxed{a=\frac{1}{4}}$

② تعيين دالة التوزيع F_X

لتكن F_X دالة توزيع المتغير العشوائي X والمعرفة كمايلي

$$\forall x\in\mathbb{R},\ F_X(x)=\mathbb{P}(X\leq x)=\sum_{x_i\leq x}\mathbb{P}(X=x_i)$$

$$=\begin{cases} 0 & , \text{si } x<-2 \\ \mathbb{P}(X=-2) & , \text{si } -2\leq x<-1 \\ \mathbb{P}(X=-2)+\mathbb{P}(X=-1) & , \text{si } -1\leq x<0 \\ \mathbb{P}(X=-2)+\mathbb{P}(X=-1)+\mathbb{P}(X=0) & , \text{si } 0\leq x<1 \\ \mathbb{P}(X=-2)+\mathbb{P}(X=-1)+\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=1) & , \text{si } 1\leq x<2 \\ \mathbb{P}(X=-2)+\mathbb{P}(X=-1)+\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(X=2) & , \text{si } x\geq 2 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 0 & , \text{si } x<-2 \\ \frac{1}{6} & , \text{si } -2\leq x<-1. \\ \frac{5}{12} & , \text{si } -1\leq x<0. \\ \frac{7}{12} & , \text{si } 0\leq x<1 \\ \frac{10}{12} & , \text{si } 1\leq x<2 \\ 1 & , \text{si } x\geq 2. \end{cases}$$

3- حساب التوقع الرياضي و التباين

$$E(X)=\sum_{x_i\in X(\Omega)} x_i\, \mathbb{P}(X=x_i)=(-2)\times\frac{1}{6}+(-1)\times\frac{1}{4}+(0)\frac{1}{6}+(1)\times\frac{1}{4}+(2)\times\frac{1}{6}$$

$$\boxed{E(X)=0}$$

$$Var(X)=E(X^2)-(\overset{0}{E(X)})^2=E(X^2)$$

$$E(X^2)=\sum_{x_i\in X(\Omega)} x_i^2\, \mathbb{P}(X=x_i)=(-2)^2\times\frac{1}{6}+(-1)^2\times\frac{1}{4}+(0)^2\times\frac{1}{6}+(1)^2\times\frac{1}{4}+(2)^2\times\frac{1}{6}$$

$$\boxed{E(X^2)=\frac{22}{12}=Var(X)}$$

④ ليكن المتغير العشوائي $Y=\frac{X^2}{2}$

- تعيين مجموعة قيم Y و قانون احتماله

$$Y(\Omega)=\{2,\frac{1}{2},0\}$$

$$\mathbb{P}(Y=2)=\mathbb{P}(\{X=-2\}\cup\{X=+2\})=\mathbb{P}(X=-2)+\mathbb{P}(X=2).$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(Y=\frac{1}{2})=\mathbb{P}(\{X=-1\}\cup\{X=1\})=\mathbb{P}(X=-1)+\mathbb{P}(X=1).$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(Y=0)=\mathbb{P}(X=0)=\frac{1}{6}$$

لدينا

$$\mathbb{P}(Y=0)+\mathbb{P}(Y=2)+\mathbb{P}(Y=\frac{1}{2})=1$$

وبذلك نكون قد عرفنا قانون إحتمال المتغير العشوائي Y.

- حساب التوقع الرياضي والتباين لـ Y.

$$E(Y)=\sum_{y_i\in Y(\Omega)} y_i\, \mathbb{P}(Y=y_i)=2\cdot\mathbb{P}(Y=2)+\frac{1}{2}\times\mathbb{P}(Y=\frac{1}{2})+0\cdot\mathbb{P}(Y=0)$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\boxed{\frac{11}{12}}$$

$$Var(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2,\quad E(Y^2)=\sum_{y_i\in Y(\Omega)} y_i^2\, \mathbb{P}(Y=y_i).$$

$$E(Y^2) = (2)^2\, \mathbb{P}(Y=2) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \mathbb{P}(Y=2) + 0^2 \cdot \mathbb{P}(Y=0)$$
$$= \frac{4}{3} + \frac{1}{8} = \frac{35}{24}$$

$$Var(X) = \frac{35}{24} - \left(\frac{11}{12}\right)^2 = \frac{35}{24} - \frac{121}{132}$$

حل التمرين الثاني

$$f_X(x) = \begin{cases} 3e^{-3x} & , \text{si } x \geq 0 \\ 0 & , \text{si } x < 0 \end{cases}$$

① إيجاد عبارة دالة التوزيع

لتكن F_X دالة توزيع المتغير العشوائي X، المعرفة كمايلي

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt.$$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt & , \text{si } x < 0. \\ \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt & , \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0\, dt = 0 & , \text{si } x < 0 \\ \int_{0}^{x} 3e^{-3t}\, dt = 1 - e^{-3x} & , \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & , \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-3x} & , \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

② - أحسب الاحتمالات:

$$\mathbb{P}(X \leq 2) = F_X(2) = 1 - e^{-6}$$

$$\mathbb{P}(X \geq 4) = 1 - \mathbb{P}(X < 4) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 4)$$ لأن X مستمر

$$= 1 - F_X(4) = 1 - (1 - e^{-12}) = e^{-12}.$$

$$\mathbb{P}(2 \leq X \leq 4) = F_X(4) - F_X(2) = 1 - e^{-12} - (1 - e^{-6}) = e^{-12} + e^{-6}$$

0,25 0,25

$$\mathbb{P}(X \geq 4 \mid X \geq 2) = \frac{\mathbb{P}(X \geq 4, X \geq 2)}{\mathbb{P}(X \geq 2)} = \frac{\mathbb{P}(X \geq 4)}{\mathbb{P}(X \geq 2)} = \frac{1 - \mathbb{P}(X \leq 4)}{1 - \mathbb{P}(X \leq 2)}$$

0,25 0,25 0,25

$$= \frac{1 - F_X(4)}{1 - F_X(2)} = \frac{1 - (1 - e^{-12})}{1 - (1 - e^{-6})} = \frac{e^{-12}}{e^{-6}} = e^{-6}$$

0,25

④ - بيان أن الاحتمال $\mathbb{P}(X \geq a + h \mid X \geq a)$ لا يتعلق ب a.

$$\mathbb{P}(X \geq a + h \mid X \geq a) = \frac{\mathbb{P}(\{X \geq a + h\} \cap \{X \geq a\})}{\mathbb{P}(X \geq a)}$$

0,25

$$= \frac{\mathbb{P}(X \geq a + h)}{\mathbb{P}(X \geq a)} = \frac{1 - \mathbb{P}(X \leq a + h)}{1 - \mathbb{P}(X \leq a)}$$

0,25 0,25

$$= \frac{1 - (1 - e^{-3(a+h)})}{1 - (1 - e^{-3a})} = \frac{\cancel{e^{-3a}} \cdot e^{-3h}}{\cancel{e^{-3a}}} = e^{-3h}$$

0,25

ومنه نستنتج أن الاحتمال $\mathbb{P}(X \geq a + h \mid X \geq a)$ لا يتعلق ب a.

- حساب $E(X)$ و $Var(X)$

0,25

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} x \underbrace{f_X(x)}_{0}\,dx + \int_{0}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^{+\infty} 3x e^{-3x}\,dx$$

0,25 $= \boxed{\frac{1}{3}}$

0,25

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f_X(x)\,dx = E(X^2) - (E(X))^2 = \boxed{\frac{1}{9}}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_0^{+\infty} 3x^2 e^{-3x}\,dx$$ (تكامل بالتجزئة مرتين)

0,25