Fiabilité

Assia Chadli
Université Badji Mokhtar Annaba

Cours Master 1 : Actuariat & prob-stat. (Semestre 2)

Chapitre 4 : Fiabilité des systèmes

Table des matières

[1]

[1]Chadli Assia : cours de fiabilité

Chapitre 1

Systèmes cohérents

Pour caractériser l'aptitude d'un système à l'exploitation, on introduit la notion d'indicateur de panne (i.p.) qui est une variable aléatoire f dichotomique

$$f = \begin{cases} 1 & \text{si le système est en bon état (b.e)} \\ 0 & \text{si le système est en panne(e.p)} \end{cases}$$

Si p est la probabilité que le système soit en b.e. ; alors $P(f = 1) = p$ et donc $P(f = 0) = 1 - p$. Il est clair que la v.a. f est une variable de Bernouli.

$$E(f) = p \quad \text{et} \quad Var(f) = p(1-p)$$

Soit un système d'i.p. f ; constitué de n éléménts d'i.p. $x_1, x_2, ...x_n$.

Définition 1 *La fonction* $f = f\left(\underset{-}{x}\right) = f(x_1, x_2, ...x_n)$ *est appelée fonction de structure du système d'ordre* n.

Si W_i désigne la durée de vie de l'élément n°i ; on introduit le processus aléatoire indicateur

$$X_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } W_i > t \\ 0 & \text{si } W_i \leq t \leq \end{cases}$$

Dans ce cas, la fonction de fiabilité de l'élément i

$$R_i(t) = \begin{cases} P(X_i(s) = 1; \quad \text{pour } 0 \leq s \leq t) \\ = P(X_i(t) = 1) = E(X_i(t)) \end{cases}$$

Et, la fiabilité du système est alors

$$\begin{aligned} R(t) &= P(X(s)=1; \quad \text{pour } 0 \le s \le t) \\ \textit{où} \quad X(t) &= \begin{cases} 1 & si\ W > t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Il est bien entendu que W désigne la durée de vie du système.

Pour de tels systèmes, la fonction de fiabilité dépend de la fiabilité de chaque élément

$$R(t) = h_f(R_1(t), R_2(t), ..., R_n(t))$$

Soit $p_i = P(X_i = 1) = E(X_i)$ et soit $\underline{x} = (x_1, x_2, ...x_n)$ où les x_i sont les fonctions de structure des éléments i

Théorème 2 *La fiabilité du système est donnée par*

$$h = h\left(\underline{p}\right) = P\left(f\left(\underline{x} = 1\right)\right) = E\left(f\left(\underline{x}\right)\right)$$

Si les éléments sont identiques, alors $p_1 = p_2 = ... = p_n = p$; *alors on note*

$$h = h\left(\underline{p}\right) = h(p)$$

1.1 Les structures les plus courantes

1.1.1 Structures en série

Les durées de vie des éléments sont supposées indépendantes. Soit un système d'i.p. f ; constitué de n éléménts d'i.p. $x_1, x_2, ...x_n$. alors la fonction de structure d'un système en série est :

$$\begin{aligned} f\left(\underline{x}\right) &= f(x_1, x_2, ...x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i = \min(x_1, x_2, ...x_n) \\ f\left(\underline{x}\right) &= \begin{cases} 1 & \text{si tous les éléments fonctionnent} \\ 0 \text{ si au moins un élément est en panne} \end{cases} \end{aligned}$$

Pour les systèmes statiques ; la fiabilité vaut

$$h = h\left(\underset{-}{p}\right) = \prod_{i=1}^{n} p_i$$

Dans le cas d'un système dynamique ; la fiabilité vaut

$$R(t) = \exp\left[-\int_0^t r(y)\,dy\right]$$

Où $r(y) = r_1(y) + r_2(y) + ... + r_n(y)$; étant entendu que $r(y)$ est le taux de panne du système et $r_i(y)$ est le taux de panne de l'élément i.

Exemple 3 *Dans le cas d'un système en série constitué d'éléments à taux de panne constants ; on a :* $r_i(y) = a_i$ *;alors la fiabilité du système est*

$$R(t) = \exp\left[-\int_0^t \sum_{i=1}^{n} a_i dy\right] = \exp\left[-\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) t\right]$$

On en déduit aisément le TMBF

$$T_0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} a_i}$$

Exercice : Calculer la fonction de fiabilité et le TMBF d'un système en série constitués de n éléments indépendants ayant chacun un taux de panne $r_i(y) = c_i y$. (loi de Rayleigh).

1.1.2 Structures en parallèle

Dans le cas d'un système en parallèle de n éléments indépendants, la fonction de structure est :

$$\begin{aligned} f\left(\underset{-}{x}\right) &= \begin{matrix} 1 \quad \text{si au moins un élément fonctionne} \\ 0 \text{ si tous les éléments sont en panne} \end{matrix} \\ &= \bigvee_{i=1}^{n} x_i = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i) \end{aligned}$$

On en déduit la fonction de fiabilité

$$h = h\left(\underline{p}\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - p_i)$$

Pour un système dynamique (qui dépend du temps) ; la fonction de fiabilité est

$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - R_i(t)) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \int_0^t r_i(y)\,dy\right)$$

Dans le cas particulier où les durées de vie des éléments sont exponentielles, on a $R_i(t) = \exp(-a_i t)$; pour $i = 1, ..., n$; alors on peut écrire que la fiabilité du système est :

$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - \exp(-a_i t))$$

Si les éléments sont identiques, i.e. $a_i = a$ pout tout i ; alors la fiabilité du système est :

$$R(t) = 1 - (1 - \exp(-at))^n$$

Exercice

Montrer que dans ce cas, le temps moyen de bon fonctionnement du système est

$$T_0^S = \int_0^t R(t)\,dt = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}\right)$$

1.1.3 Structure "k parmi n" (éléments indépendants)

Dans ce cas, la fonction de structure est :

$$f\left(\underline{x}\right) = \begin{cases} 1 \quad \text{si} \ \sum_{i=1}^{n} x_i \geq k \\ 0 \ \text{si} \ \sum_{i=1}^{n} x_i < k \end{cases}$$

Pour un système statique (indépendant du temps) constitué d'éléments identiques ; la fonction de fiabilité est :

$$h = h\left(\underline{p}\right) = \sum_{i=1}^{n} C_n^i p^i (1 - p)^{n-i}$$

Définition 4 *Le ième élément est dit non essentiel pour la structure f, si f ne dépend pas de la valeur de x_i (dans le cas contraire, on dit qu il est essentiel*

$$f\left(1_i, \underset{-}{x}\right) = f\left(0_i, \underset{-}{x}\right)$$

Où $(1_i, x) = (x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_n)$.

1.1.4 Théorème fondamental de décomposition

Théorème 5 *Il s'agit du théorème fondamental de décomposition d'une fonction de structure*

Définition 6 ***Théorème 7*** *Toute fonction de structure d'ordre n ; peut être représentée sous l'une des deux formes suivantes*

$$f\left(\underset{-}{x}\right) = x_i f\left(1_i, \underset{-}{x}\right) + (1 - x_i)\, f\left(0_i, \underset{-}{x}\right) \tag{1}$$

Ou bien

$$f\left(\underset{-}{x}\right) = \sum_{\underset{-}{y}} \prod_{j=1}^{n} x_j^{y_j} \left(1 - x_j\right)^{1-y_j} f\left(\underset{-}{y}\right) \tag{2}$$

Où la somme est étendue aux vecteurs binaires d'ordre n.