Université A. Mira – Bejaia

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques /M.I

28 – 10 – 2017

Concours National d'entrée en Doctorat LMD Mathématiques

Option: Probabilités Statistique

Epreuve: Probabilités-Statistique et Applications (Durée 2 heures)

Exercice 1. (points)

Soit (X, Y) un couple aleatoire de densite jointe :

$$f(x, y) = cx(y - x)e^{y}1_{0<x\leq y}.$$

1. Soit V une variable aleatoire qui suit une loi exponentielle de parametre λ. Quel est son moment d'ordre n.
2. Determiner c pour que f soit effectivement une densite.
3. Calculer $f_{X|Y=y}$, densite conditionnelle de X sachant $Y = y$.
4. En deduire $\mathbb{E}(X|Y)$ puis $\mathbb{E}(X)$.
5. Calculer $f_{Y|X=x}$, densite conditionnelle de Y sachant $X = x$.
6. En deduire $\mathbb{E}(Y|X)$ puis $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 2. (07 points)

On considère P la matrice définie sur l'espace $\mathbb{E} = \mathbb{N}^*$ par

$$P_{k1} = p_k \quad \text{et} \quad P_{kk+1} = q_k \quad \text{et} \quad P_{kj} = 0 \quad \text{sinon}, \ \forall k \geq 1$$

où p_k, q_k vérifient $0 < p_k < 1$ et $q_k = 1 - p_k$.

1. Montrer que P est une matrice stochastique.
2. Donner le graphe associé à P.
3. On considère $(X_n)_{n\geq 1}$ une chaîne de Markov de Matrice de transition P. Montrer que la chaîne est irréductible et apériodique.
4. On définit le temps de retour en 1 par $\tau_1 = \inf\{k > 0,\ X = 1\}$. Montrer que τ_1 est un temps d'arrêt.

5. On suppose que $p_k = p$ et $q_k = q$ ($0 < p < 1$ et $q = 1 - p$.)

   Montrer que τ_1 suit une loi géométrique de paramètre p.

6. Donner le critère de transience et de récurrence faisant intervenir le temps de retour. En déduire que la chaîne est récurrente.

Exercice 3. (06 points)

Bon Courage.