U.H.B.C. Chlef (22.10.1442≡03.06.2021) Année Universitaire: 2020/2021
Faculté des Sciences Exactes et Informatique Niveau: $2^{ème}$ Master/ Option: M.A.S.
Département des Mathématiques Module: Processus Stochastiques 3.

EXAMEN FINAL (1H)

$(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien standard sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$.

1. Donner la loi ainsi que ses paramètres des variables aléatoires suivantes:

   (a) $X = \int_0^1 s dB_s$;

   (b) $Y = \int_a^3 f(s)dB_s$ avec $f(s) = -\mathbf{1}_{[0,1[}(s) + \mathbf{1}_{[1,2[}(s) + 2.\mathbf{1}_{[2,3[}(s)$

2. Discuter les valeurs des paramètres réels α, β, λ et μ pour que les deux processus stochastiques:

$$\begin{cases} M_t := \alpha B_t^2 + \beta t \\ N_t := \exp(\lambda B_t + \mu t) \end{cases}$$

   soient des $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0} - martingales$.

3. Soit $f \in L^2([a,b])$ et $(M_t)_{a\leq t\leq b}$ le processus stochastique défini par:

$$M_t := \int_a^t f(u)dB_u, \ a \leq u \leq b,$$

   (a) Montrer que $\forall t \in [a,\, b] : \mathbb{E}\,|M_t| < \infty$.

   (b) Montrer que $\forall t \in [a,\, b] : (M_t)_{a\leq t\leq b}$ est $(\mathcal{F}_t)_{a\leq t\leq b} - adapté$.

   (c) Soit $s \in [a,\, t]$, utiliser les étapes de la construction de l'intégrale de Wiener pour prouver que:

$$\mathbb{E}\left[\int_s^t f(u)dB_u \big/ \mathcal{F}_s\right] = 0$$

   (d) En déduire de (a), (b) et (c) que $(M_t)_{a\leq t\leq b}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{a\leq t\leq b} - martingale$.

4. Montrer que pour toutes fonctions $f, g \in L^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$

$$\langle \int_b^b f(t)dB(t), \int_b^b g(t)dB(t)\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, g\rangle_{L^2_{ad}([a,b]\times\Omega)}$$

   Indication: Utiliser $xy = \dfrac{1}{4}[(x+y)^2 - (x-y)^2]$

5. Calculer

   (a) $E(B_s B_t^2)$ avec $s, t \geq 0$

   (b) $E(B_t^2/\mathcal{F}_s)$ avec $s, t \geq 0$