Corrigé du TD 2. Anal fctelle

Exo1. a) 1) On suppose que $f=0$ et on montre que f n'est pas surjective (غامرة).

Rappel : $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ est surjective $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall y \in \mathbb{C}, \exists x \in X : y = f(x)$

Comme f est nulle sur X, $\forall x \in X : f(x) = 0$

donc $\exists y = 1 \in \mathbb{C}$ tq $\forall x \in X : f(x) \neq 1 = y$.

f n'est donc pas surjective sur X.

2) l'inverse, on suppose que f est surjective, et on montre que $f \neq 0$ sur X.

Comme f est surjective, l'élément $y = 1 \in \mathbb{C}$ admet un antécédent (سابقة) $x \in X$, i.e., $\exists x \in X$ tq $f(x) = 1$.

donc $f \neq 0$ sur X. □

b) $\Leftarrow$) Evident

$\Rightarrow$) Soit $H = \ker f = \ker g$. Alors, il existe $F \subset X$ tq $X = F \oplus H$ (le supplémentaire).

d'où, $\forall x \in X$, $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in F$, $x_2 \in H$.

Donc, $f(x) = f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = \underset{\neq 0}{f(x_1)}$ car $x_1 \notin \ker f$ ($x_1 \notin \ker f$, $x_1 \notin \ker g$)

et $g(x) = g(x_1 + x_2) = g(x_1) \neq 0$

D'où $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x_1)}{g(x_1)} \neq 0$ et donc $f(x) = \dfrac{f(x_1)}{g(x_1)} \cdot g(x)$

$f(x) = \lambda\, g(x)$, $\lambda \neq 0$.

□

Exo2. 1) i) Soit $x=(x_n)_n \in \mathcal{P}$. $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ / tq $\forall n \geq N_0$: $x_n = 0$

D'où $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| = \sum_{p=1}^{N_0} |x_p| + \sum_{p=N_0+1}^{+\infty} |x_p| = \sum_{p=1}^{N_0} |x_p| < +\infty$.

donc $x \in l_1$.

ii) Soit $x \in l_1$. Donc $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| < +\infty$. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ est donc convergente. par suite, $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$. D'où, $x \in C_0$.

iii) Si $x=(x_n)_n \in C_0$, alors $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$. $(x_n)_n$ est donc cvgte. Elle est donc bornée. D'où, $x=(x_n)_n \in l_\infty$.

2) Soit $x \in l_1$. $\|x\|_1 = \sum_{p=1}^{+\infty} |x_p| \geq \sup_{p\geq 1} |x_p| = \|x\|_\infty$.

3) Soit $x=(x_n)_n \in l_1$. Donc $\|x\|_1 = \sum_{p=1}^{+\infty} |x_p| < +\infty$. Par conséquent,

$$R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} |x_p| = \sum_{p=1}^{+\infty} |x_p| - \sum_{p=1}^{n} |x_p| = S - S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. (*)$$

Car $S_n \to S, (n\to+\infty)$.

On a donc $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots) \in l_1$

et on pose $X_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots) \in \mathcal{P}$.

et l'on a donc : $\|x - X_n\|_1 = \|(0, 0, \ldots, \underset{n}{0}, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)\|_1$

$$= \sum_{p=n+1}^{+\infty} |x_p| = R_n \longrightarrow 0, n\to+\infty \text{ par } (*)$$

d'où, $\overline{\mathcal{P}} = (l_1, \|.\|_1)$.

3. $\overline{\mathcal{P}} = (C_0, \|\cdot\|_\infty)$. Soit $x=(x_n)_n \in C_0$. donc $\|x\|_\infty = \sup_{n\geq 1}|x_n| < +\infty$

et $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.

D'où, $\forall \varepsilon>0, \exists N_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq N_0 : |x_n - 0| = |x_n| < \varepsilon$.

$\Rightarrow \sup_{n\geq N_0} |x_n| < \varepsilon, \ \forall \varepsilon>0$. $(**)$

on a donc $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{N_0}, x_{N_0+1}, \ldots)$

Si on pose $X_n = (x_1, x_2, \ldots, x_{N_0}, 0, 0, 0, \ldots) \in \mathcal{P}$

on aura: $\|x - X_n\|_\infty = \|(0, 0, \ldots, \underset{N_0}{0}, x_{N_0+1}, x_{N_0+2}, \ldots)\|_\infty$

$= \sup_{n\geq N_0} |x_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par $(**)$

D'où $\overline{\mathcal{P}} = (C_0, \|\cdot\|_\infty)$.

4. $\overline{\mathcal{P}} \neq (l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$? : $x_n = 1, n \geq 1$.

c-à-d, $x = (1, 1, \ldots, 1, 1, \ldots) \in l_\infty$ car

$\|x\|_\infty = 1 < +\infty$. D'où, si on suppose qu'il

existe $X_n \in \mathcal{P}$ tq $\lim_{n\to+\infty} \|X_n - x\|_\infty = 0$, alors: $\ldots(***)$

$X_n = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{N_0}, 0, 0, \ldots) \in \mathcal{P}$.

D'où $x - X_n = (1-\alpha_1, 1-\alpha_2, \ldots, 1-\alpha_{N_0}, 1, \ldots, 1, \ldots)$

$\|x - X_n\|_\infty = \sup\{|1-\alpha_i|, 1\leq i \leq N_0, \}$ ou $\|x - X_n\|_\infty = 1$.

. si $\|x - X_n\|_\infty = 1 \not\to 0$ contradiction avec $(***)$.

. si $\|x - X_n\|_\infty = |1-\alpha_j|, 1 \leq j \leq N_0$. donc $|1-\alpha_j| = 0$

c-à-d, $\alpha_j = 1$.

D'où $\|x - X_n\|_\infty = \|(0,0,0,\dots,0,1,1,\dots)\|_\infty$
$= 1 \not\to 0$ No contradiction.

D'où $(X_n)_n$ n'existe pas. $\overline{P} \neq (\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$.

6- Analogue à la preuve du Thm 2.3, chapitre 2, page 18. (Cours)