Cours programmation linéaire (Chapitre 1)

Première année Master MAS

29 mars 2020

Table des matières

Chapitre 1

Rappels d'algèbre linéaire

1.1 Sous-espaces vectoriels.

Dnition 1 *Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Soient $r \in \mathbb{N}^*, u_1, ..., u_r, v \in V$, alors*

i) si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v = \lambda u_1$, on dit que v est colinéaire à u_1.

ii) si $r \geq 2$ et si il existe $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{R}$ tels que $v =_{j=1}^{r} \lambda_j u_j = \lambda_1 u_1 + ... + \lambda_r u_r$, on dit que le vecteur v est une combinaison linéaire des vecteurs $u_1, ..., u_r$. Si de plus ${}_{j=1}^{r}\lambda_j = 1, \;\; \lambda_j \geq 0$, la combinaison linéaire est appelée combinaison convexe.

— Des vecteurs $u_1, ..., u_r$ sont linéairement indépendants si :

$$ {}_{j=1}^{r}\lambda_j u_j = 0 \rightarrow \lambda_j = 0. $$

— La dimension de V est le nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants dans V.

— Soit $u_1, ..., u_n$ une base de V. La représentation d'un vecteur quelconque u de V comme combinaison linéaire de vecteurs de la baseest unique :

$$ \exists \lambda_j \;\; \text{unique} \;\; | \; u =_{j=1}^{n} \lambda_j u_j. $$

Remarque 1 *Le vecteur nul est colinéaire à tout autre vecteur car $0 = 0u$, pour tout $u \in V$.*

Seul le vectoriel euclidien $V \equiv \mathbb{R}^n$ sera considéré.

1.2 Rang d'une matrice

Une matrice $A = \{a_{ij} : i = 1, ..., m; \;\; j = 1, ..., n\}$, de dimensiom $m \times n$, peut être considérée comme formée de m vecteurs lignes de dimension n : $\alpha_i = (\alpha_{ij}; \; j = 1, ..., n), \;\; i = 1, ..., m,$ ou n vecteurs colonnes de dimension m : $a_j = (a_{ij}; \; i = 1, ..., m), \;\; j = 1, ..., n,$

— Le nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants parmi les m vecteurs lignes est égale au le nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants parmi les n vecteurs colonnes ; c'est ce nombre que l'on appelle le rang de la matrice A, noté $r(A)$.

— Le rang d'une matrice A est le nombre de lignes non nulles dans sa forme échelonnée en lignes. Par exemple la matrice suivante A se réduit en sa forme échelonnée en lignes par les pivotages

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 2 & -5 & 10 & 3 \\ 3 & -8 & 17 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[L3\longleftarrow L3-3L1]{L2\longleftarrow L2-2L1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L3\longleftarrow L3-L2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Donc on a $r(A) = 3$. Pour la matrice suivante

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L2\longleftarrow L2-L1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L3\longleftarrow L3-L2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on a $r(B) = 2$.

— une matrice carrée B, de dimension $m \times m$ est dite régulière si son rang est m; dans ce cas elle est inversible et la matrice inverse B^{-1} de dimension $m \times m$ vérifie $B^{-1}B = BB^{-1} = I$, où I représente la matrice identité de dimension $m \times m$.

— La matrice transposée de la matrice A de dimension $m \times n$ est notée A^T et est de dimension $n \times m$

$$A^T = \left(a_{ji}^T \equiv a_{ij}\,; \quad j = 1, ..., n, \; i = 1, ..., m\right)$$

ses n vecteurs lignes sont a_j^T ($j = 1, ..., n$) et ses m vecteurs colonnes sont $\alpha_i^T = (i = 1, ..., m)$.

1.3 Système d'équations

Soit un système de m équations à n inconnues

$${}_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i = 1, ..., m,$$

où en notation vectorielle, $Ax = b$

— Si

- $r(A) \prec r(A, b)$: Le système est impossible et ne possède aucune solution.
- $r(A) = r(A, b) = n$: Le système possède une solution unique.
- $r(A) = r(A, b) \prec n$: Le système possède une infinité de solutions.

— $r(A) = m$ (ce qui implique $m \leq n$), Le système $Ax = b$ possède

-une solution unique si $m = n$; cette solution est $x = A^{-1}b$.

-une infinité de solutions si $m \prec n$.

— Si B est une matrice régulière de dimension m, les système $Ax = b$ et $BAx = Bb$ sont équivalents.

1.4 Examples

Exemple 1 *Considérons le système* (S) : $\begin{cases} 3x - y + z - 4t = 0 \\ 6x - 2y + z - 8t = 0 \end{cases}$ *d'inconnue* $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. *Ce système est de rang* 2; $(m = 2 \prec n = 4)$. *Le système possède une infinité de solutions.* $\mathcal{S}$=$\{(x, 3x - 4t, 0, t)\}$.

Exemple 2 *Soit dans* $\mathbb{R}^3$ *le système*

$$(S) : \begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ -x + my + 2z = 5 \\ 7x + 3y + (m - 5) z = 7 \end{cases}$$

où m *est un paramètre réel.*

Soit $m \in \mathbb{R}$. En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\det(S) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & m & 2 \\ 7 & 3 & m-5 \end{vmatrix} = 2(m-1)(m-6).$$

Le système est de Cramer si et seulement si $m \in \mathbb{R} - \{1, 6\}$.

— Si $m \in \mathbb{R} - \{1, 6\}$, les formules de Cramer fournissent :

$$x = \frac{1}{2(m-1)(m-6)} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & m & 2 \\ 7 & 3 & m-5 \end{vmatrix} = \frac{2m-9}{m-1}, y = \frac{1}{2(m-1)(m-6)} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 7 & 7 & m-5 \end{vmatrix} = \frac{7}{m-1},$$

$$z = \frac{1}{2(m-1)(m-6)} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & m & 5 \\ 7 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \frac{7}{m-1},$$

Si $m \in \mathbb{R} - \{1, 6\}$, $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{2m-9}{m-1}, \frac{7}{m-1}, \frac{7}{m-1} \right) \right\}$.

— Si $m \in \{1, 6\}, \det(S) = 0$. Puisque $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, on peut choisir les deux premières équations comme équations principales et x et z comme inconnues principales. Le système des deux premières équations s'écrit $\begin{cases} 2x + z = 4 - 3y \\ -x + 2z = 5 - my \end{cases}$ et équivaut à $\begin{cases} x = \frac{3+(m-6)y}{5} \\ z = \frac{14-(2m+3)y}{5} \end{cases}$. La dernière équation fournit alors une condition nécessaire et suffisante de compatibilité (les termes en y disparaissent si $m \in \{1, 6\}$ car dans le cas contraire le système serait de Cramer ce qui n'est pas).

$$7x+3y+(m-5)\,z=7 \Leftrightarrow 7\frac{3+(m-6)\,y}{5}+3y+(m-5)\,\frac{14-(2m+3)\,y}{5}=7 \Leftrightarrow m=6.$$

Si $m=1$, le système n'a pas de solution et si $m=6$, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left\{\left(\frac{3}{5},y,\frac{14-15y}{5}\right)\right\}$.

1.5 Polydères convexes

Un ensemble $C\in\mathbb{R}^n$ est convexe si pour tout $x,y\in C$, et tout $\lambda\in[0,1]$, on a $\lambda x+(1-\lambda)\,y\in C$

Un ensemble C convexe est caractérisé par le fait que toute combinaison convexe de points de C appartient à C.

$$\left.\begin{array}{c} x_1,...,x_k\in C \\ {}_{j=1}^{r}\lambda_j=1,\ \lambda_j\geq 0 \end{array}\right\}\Longrightarrow{}_{j=1}^{k}\lambda_j x_j\in C.$$

L'intersection de plusieurs ensembles convexes est un ensemble convexe.

Soient a un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ et b un scalaire.

- L'ensemble $\left\{x\in\mathbb{R}^n;\quad a^Tx=b\right\}$ est appelé un hyperplan.

- L'ensemble $\left\{x\in\mathbb{R}^n;\quad a^Tx\geq b\right\}$ est appelé un demi-espace.(Un hyperplan est la frontière du demiespace correspondant).

Un polyèdre est un ensemble qui peut être décrit comme

$$P=\{x\in\mathbb{R}^n;\quad Ax\leq b\}$$

où A est une matrice $m\times n$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^m$.

Un polyèdre est un intersection fini de plusieurs demi-espaces .

Un polytope est un polyèdre borné, c'est-à-dire un polyèdre P pour lequel il existe une constante c telle que $\|x\|_2\leq c$, pour tout $x\in P$.

Les polyèdres et les polytopes sont des ensembles convexes.

Chapitre 2

Formulation d'un problème de programmation linéaire

La programmation mathématique est le no, donné aux problèmes d'optimisation sous contraintes : il s'agit de rechercher l'optimum d'une fonction de variables, étant donné que celles-ci doivent vérifier un certain nombre d'équations et /ou d'in"quations appelées contraintes.

Le problème le plus simple de programmation mathématique est celui de programmation linéaire $(P.L)$; il s'agit de la situation où à la fois la fonction à optimiser et les contraintes à respecter sont linéaires.

un problème de programmation linéaire est caractérisé par une fonction objectif (ou fonction économique) linéaire (à minimiser ou à maximiser) de la forme

$$f(x) = c_1x_1 + ... + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_nx_n \tag{2.1}$$

et un nombre fini de contraintes linéaires de la forme

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n &\geq b_1 \\ a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n &\geq b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n &\geq b_m. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Rappelons également que, en introduisant les vecteurs : $c \in \mathbb{R}^n$ défini par $c = (c_1, ..., c_n)^T$, $x \in \mathbb{R}^n$ défini par $x = (x_1, ..., x_n)^T$, et $b = (b_1, ..., b_n)^T$, et la matrice $(m \times n)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

un problème de programmation linéaire général peut être écrit sous la forme

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b. \end{cases}$$

Notons que, $a_i^T, i = 1, ..., m$, désignent les lignes de la matrice A, chaque contrainte du problème, ou chaque inégalité de 2.2 peuvent s'écrire sous la forme $a_i^T x \geq b_i, i = 1, ..., m$.

2.1 Formulation d'un problème de maximisation

Exemple 3 *Une entreprise fabrique deux produits A et B, en utilisant une machine m et deux matières premières p et q. On dispose chaque jour de 8 heures de m, de 10 kg de p et de $36kg$ de q. On suppose que :*

— la production d'une unité de A nécessite $2kg$ de p et $9kg$ de q, et utilise la machine m durant 1 heure ;

— la production d'une unité de B nécessite $2kg$ de p et $4kg$ de q, et utilise la machine m durant 2 heure ;

— les profits réalisés sont de 50 UM par unité de A et $60UM$ par unité de B. (UM=unité de monnaie)

L'objectif que poursuit l'entreprise est de maximiser le profit qu'elle pourra tirer, par jour, de ces 2 produits en utilisant au mieux ses ressources.

Le tableau suivant résume les données afférentes à ce problème de production :

	A	B	*Disponible*
m	$1kg$	$2kg$	$8kg$
p	$2kg$	$2kg$	$10kg$
q	$9kg$	$4kg$	$36kg$
$Profit\ unitaire$	$50UM$	$60UM$	

La construction d'un modèle linéaire

Quelles sont les informations dont doit disposer le directeur de l'entreprise pour considérer que son problème est résolu ? Il suffit de connaître la quantité du produit A et la quantité du produit B à fabriquer quotidiennement, n'est-ce pas ?

Agissons comme si ces quantités nous étaient connues et dénotons-les par :

x_1 = la quantité du produit A à produire

x_2 = la quantité du produit B à produire

Les variables x_1 et x_2 sont dites variables de décision.

Quel profit l'entreprise retirera-t-elle de la vente de ces deux produits ? Il s'agit d'additionner les bénéfices à tirer de chacun des 2 produits :

— pour le produit A, elle retire 50 UM par unité et en fabrique x_1 unités ; cette production lui rapporte donc un profit de (50 x1) UM ;

— de même, la quantité x2 du produit B lui permet de faire un profit de (60 x2) UM.

Le profit total à tirer des deux produits s'élève donc à :

$$(50x_1 + 60x_2)UM$$

Nous dénoterons ce profit total par z et laisserons implicite l'unité monétaire :

$$z = 50x_1 + 60x_2$$

Nous cherchons évidemment à rendre z aussi grand que possible en donnant à x_1 et x_2 des valeurs appropriées.

La grandeur z est une fonction qui, à chaque plan de production (une quantité de A, une quantité de B), associe le nombre de dirhams que l'entreprise retirerait comme profit si elle adoptait ce plan. Cette fonction z, qui traduit l'objectif de notre problème, s'appelle fonction objectif ou fonction économique. Et, comme nous cherchons à rendre z aussi grand que possible, nous écrivons :

$$Maximiser\ z\ où\ z = 50x_1 + 60x_2$$

ce que généralement l'on convient d'abréger comme suit :

$$\max\ z = 50x1 + 60x2$$

S'il ne s'agissait pour l'entreprise que de maximizer z, il suffirait de laisser augmenter x_1 ou x_2 pour que z prenne une valeur aussi grande qu'elle le souhaite.

Mais s'attendre à de tels profits s'apparente plus au rêve qu'à la situation de notre entreprise. Il y a bien sûr des empêchements naturels, appelés contraintes, qui freinent le rêve d'un profit infini. Prenons en considération tour à tour chacune des contraintes.

Contrainte relative à la machine m Le temps d'utilisation de la machine m pour fabriquer les produits A et B ne peut excéder les 8 heures disponibles :

$$Temps\ d'utilisation\ de\ m \leq 8 :$$

Or, ce temps utilisé est la somme des heures consacrées à chacun des types de produits. Pour le produit A, le temps nécessaire à la fabrication de la quantité x_1 se calcule ainsi :

$$1heure/(unitédeA) \times x_1(unité\ de\ A) = x_1 heures$$

pour le produit B, on procède de façon analogue :

$$2heure/(unitédeB) \times x_2(unité\ de\ B) = 2x_2 heures$$

La contrainte relative à la machine m s'écrit donc :

$$x_1 + 2x_2 \leq 8 \tag{2.3}$$

On emploie le signe « $\leq$ », et non « $=$», car il n'est pas obligatoire que toutes les heures disponibles soient utilisées pour la fabrication des produits A et B, bien qu'il ne soit pas interdit qu'il en soit ainsi.

Contraintes relatives aux matières premières En s'inspirant de la contrainte relative à la machine, ces contraintes s'écrivent tout naturellement :

$$2x_1 + 2x_2 \leq 10 \tag{2.4}$$

$$9x_1 + 4x_2 \leq 36 \tag{2.5}$$

Contraintes de positivité Elles assurent que la solution ne comporte pas des valeurs négatives (inacceptables).

$$x_1; x_2 > 0;$$

Le modèle se résume ainsi :

$$\begin{cases} \max\ z = 50x_1 + 60x_2 \\ \quad x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ \quad 2x_1 + 2x_2 \leq 10 \qquad soit \quad x_1 + x_2 \leq 5 \\ \quad 9x_1 + 4x_2 \leq 36 \\ \quad x_1; x_2 > 0 \end{cases}$$

2.1.1 Variables d'écart

Afin de ramener les contraintes à des égalités (qui sont plus faciles à traiter que les inégalités), on introduit des variables d'écart. Ces variables seront toujours, comme les variables de décision x_1 et x_2, positives ou nulles.

Après l'ajout des variables d'écart $x_3, x_4\ et\ x_5$ relatives aux contraintes $(m), (p)$ et (q), nous obtenons la formulation :

$$\begin{cases} \max\ z = 50x_1 + 60x_2 & & \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 8 \\ 2x_1 + 2x_2 \quad +x_4 & = & 10 \\ 9x_1 + 4x_2 \qquad +x_5 & = & 36 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0 \end{cases}$$

La variable d'écart d'une contrainte représente la quantité disponible non utilisée.

C'est l'écart entre la disponibilité et le besoin.

2.2 Formulation d'un problème de minimisation

Exemple 4 *Un agriculteur souhaite que son troupeau consomme la plus faible ration quotidienne de trois éléments nutritifs A, B et C. Les exigences quotidiennes sont de 16 pour A, 12 pour B et 18 pour C. L'agriculteur achète deux types d'aliments P et Q :*

— une unité de P comprend 2 unités de A, 1 unité de B et 1 unité de C ; et elle coûte 20 UM ;

— une unité de Q comprend 1 unité de A, 1 unité de B et 3 unités de C ; et elle coûte 40 UM.

L'agriculteur cherche la combinaison la moins coûteuse des quantités de P et Q qui respectera l'exigence de consommation minimale d'éléments nutritifs.

Le tableau suivant résume les données afférentes à ce problème :

	P	Q	Besoins minimaux
A	2	1	16
B	1	1	12
C	1	3	18
Coût unitaire	20 UM	40 UM	

Appelons x_1 et x_2 les quantités des aliments P et Q qu'il faut acheter. L'objectif de l'agriculteur est évidemment de minimiser le coût total des aliments qu'il faut

acheter. Mathématiquement cela s'écrit :

$$Minimiser\ z = 20x_1 + 40x_2$$

ce que généralement l'on convient d'abréger comme suit :

$$\min z = 20x_1 + 40x_2$$

Chacun des 3 éléments nutritifs à considérer donne lieu à une contrainte, qui vise à exiger que les aliments, dans leur ensemble, satisfassent les besoins quotidiens du troupeau. On obtient :

$$2x_1 + x_2 \geq 16 \tag{2.6}$$

$$x_1 + x_2 \geq 12 \tag{2.7}$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 18 \tag{2.8}$$

Les contraintes ci-dessus emploie le signe « $\geq$ » parce qu'il faut respecter les exigences de consommation minimales, mais que celles-ci peuvent être dépassées.

Enfin, il faut pas oublier qu'on peut pas acheter des quantités négatives de P ou Q :

$$x_1; x_2 \geq 0$$

Le modèle se résume ainsi :

$$\begin{cases} \min z = 20x_1 + 40x_2 \\ 2x_1 + x_2 \geq 16 \\ x_1 + x_2 \geq 12 \\ x_1 + 3x_2 \geq 18 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2.2.1 Forme canonique

Pour obtenir cette forme équivalente, toutes les contraintes d'égalités sont mises sous forme d'inégalité au prix du dédoublement suivant

$$r_i x = d_i \leftrightarrow \begin{cases} r_i x \leq d_i \\ r_i x \geq d_i \end{cases} .$$

En notation vectorielle, la forme canonique est donc

$$\begin{aligned} \min z &= c^T x \\ Tx &\geq d \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

2.2.2 Forme standard

Pour obtenir cette forme équivalente, toutes les contraintes d'inégalité sont mises sous forme d'égalité par l'introduction de variables d'écart non négatives

$$r_i x \geq d_i \leftrightarrow r_i x - x_i^e = d_i \quad \text{et} \quad x_i^e \geq 0.$$

$$r_i x \leq d_i \leftrightarrow r_i x + x_i^e = d_i \quad \text{et} \quad x_i^e \geq 0.$$

En notation vectorielle, la forme standard est donc

$$\begin{aligned} \min z &= c^T x \\ Tx &= d \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Ces variables d'écart mesure donc l'écart positif entre les premies et les seconds membres des contraintes.

Exemple 5 *Soit un problème sous la forme générale :*

$$\begin{array}{lll} \max\ x_1 - 4x_2 & & \\ x_1 & \leq & 7 \\ 3x_1 - 2x_2 & \geq & 4 \\ x_1 + x_2 & = & 5 \\ x_1 \geq 0 & \textit{et} & x_2 \textit{ de signe qeq} \end{array}$$

En se ramenant à des variables non négatives, $x_2 = x_2^+ - x_2^-$ *et en modifiant la notation* $x_1 = x_1$, $x_2 = x_2^+$, $x_3 = x_2^-$ *, le problème devient*

$$\begin{array}{lll} \max\ x_1 - 4x_2 + 4x_3 & & \\ x_1 & \leq & 7 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 & \geq & 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 & = & 5 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, & & x_3 \geq 0, \end{array}$$

Ses formes canonique et standard sont respectivement

$$\begin{array}{lll} \min -\ x_1 + 4x_2 - 4x_3 & & \\ -x_1 & \geq & -7 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 & \geq & 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 & \geq & 5 \\ -x_1 - x_2 + x_3 & \geq & -5 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, & & x_3 \geq 0, \end{array}$$

$$
\begin{array}{llll}
\min - x_1 + 4x_2 - 4x_3 & & & \\
x_1 & +x_4 & = & 7 \\
3x_1 - 2x_2 + 2x_3 & -x_5 & = & 4 \\
x_1 + x_2 - x_3 & & = & 5 \\
x_i \geq 0, \quad i = 1, ..., 5 & & & x_3 \geq 0,
\end{array}
$$

(x_4 et x_5 sont des variables d'écart)

2.3 Interprétation géométrique d'un problème de programmation linéaire

Reprenons la formulation d'un problème de programmation linéaire, sans aucune restriction, nous pouvons supposer qu'il est de la forme

$$
\begin{array}{rcll}
\min\ z & = & cx & \\
r_i x & \geq & d_i, & i = 1, ..., p \\
r_i x & = & d_i, & i = p+1, ..., m \\
x & \geq & 0 &
\end{array}
$$

($p = m$ correspond à la forme canonique, $p = 0$ correspond à la forme standard).

Une solution du problème est par définition une valeur des variables permettant de vérifier les contraintes réelles des variables, une solution admissible est une solution qui vérifie également les contraintes de non-négativité, l'ensemble des solutions admissibles -noté $\mathcal{D}-$ est donc

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n \backslash \ \ r_i x \geq d_i, \quad i = 1, ..., p, \ \ r_i x = d_i, \quad i = p+1, ..., m; \ \ x \geq 0\}$$

Une solution optimale du problème est par définition une solution admissible qui minimize la fonction z;

$$\tilde{x} \ \textit{solution optimale} \leftrightarrow \tilde{x} \in \mathcal{D} \text{ et } \tilde{x} \leq cx \quad \forall x \in \mathcal{D}$$

Deux espaces peuvent être associés au problème. Le plus important est l'espace des décisions : c'est un espace à n dimensions muni du repère euclidien orthonormé des variables $(x_1, ..., x_n)$.

fhF3.4774in2.7433in0ptFigure

Cet espace permettra de représenter l'ensemble $\mathcal{D}$ et de caractériser la (les) solution(s) optimale(s).

Par ailleurs, l'espace des contraintes est un espace à m dimensions muni d'un repère euclidien orthonormé $(e_1, ..., e_m)$. Il permet de représenter les vecteurs t_j et d, et jouera un rôle important dans l'étude de la dualité.

fhF3.3881in2.7875in0ptFigure

Le problème, mis sous sa forme standard

$$\begin{aligned} \min\ z &= cx \\ Tx &= d \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

peut s'écrire

$$\min\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} t_j x_j &= d \\ x_j &\geq 0. \end{aligned}$$

L'ensembledes combinaisons linéaires positives des vecteurs t_j constitue dans l'espace des contraintes un cône polyédrique de sommet origine. Par conséquent, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des solutions admissible est que le vecteur d soit situé à l'intérieur du cône polyédrique engendré par les vecteurs $t_j, \ \ j = 1, ..., n$.

L'algorithme simplexe(voir chapitre 3) repose sur trois propriétés :

- la caractérisation géométrique de l'ensemble $\mathcal{D}$.

- la caractérisation géométrique de la (des) solution(s) optimale(s) et l'importance à cet égard des points extrême de $\mathcal{D}$.

- la caractérisation algébrique de ces points extrême.

2.3.1 Caractérisation des solutions admissibles

Propriété

L'ensemble $\mathcal{D}$ des solutions admissibles d'un problème de programmation linéaire est soit

— un polytope ;

— un polyèdre convexe, non vide mais non borné ;

— un ensemble vide.

2.3.2 Exemples

Lorsqu'un problème de programmation linéaire ne contient que deux variables, le problème peut être efficacement représenté sur le plan cartésien et sa solution peut être déterminée de manière élémentaire avec de simples déductions géométriques.

Exemple 6

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & \leq & 8 & (1) \\ -2x_1 + 3x_2 & \leq & 6 & (2) \\ x_1 - x_2 & \leq & 2 & (3) \\ x_1 \geq 0 & & & (4) \\ x_2 \geq 0 & & & (5) \end{cases}$$

fhF3.9529in2.7518in0ptFigure

Exemple 7

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & \geq & 8 & (1') \\ -2x_1 + 3x_2 & \geq & 6 & (2') \\ x_1 - x_2 & \geq & 2 & (3') \\ x_1 \geq 0 & & & (4) \\ x_2 \geq 0 & & & (5) \end{cases}$$

fhF3.6033in3.127in0ptFigure

Exemple 8

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & \leq & 8 & (1) \\ -2x_1 + 3x_2 & \geq & 6 & (2') \\ x_1 - x_2 & \geq & 2 & (3') \\ x_1 \geq 0 & & & (4) \\ x_2 \geq 0 & & & (5) \end{cases}$$

fhF3.6569in2.8411in0ptFigure

2.3.3 Caractérisation géométrique des solutions optimales

Propriété

a) Si $\mathcal{D}$ est un polytope

– soit la solution optimale est unique et est située en un sommet de $\mathcal{D}$

– soit il existe une infinité de solutions optimales qui sont les points d'une face de $\mathcal{D}$, ces solutions optimales sont donc combinaison convexe d'un nombre fini de sommets.

b) Si $\mathcal{D}$ est un polydère convexe, non vide mais non bornée, en plus des situations décrites ci-dessus, il est possible que le problème n'ait pas de solution optimale à distance finie, il existe alors une solution admissible (à l'infini) telle que $z = -\infty$.

c) Si $\mathcal{D} = \emptyset$, le problème n'a pas de solution optimale.

Exemples

Exemple 9

$$\begin{cases} \max z = & 6x_1 + 5x_2 & & \\ & x_1 + x_2 & \leq 8 & (1) \\ & -2x_1 + 3x_2 & \leq 6 & (2) \\ & x_1 - x_2 & \leq 2 & (3) \\ & x_1 & \geq 0 & (4) \\ & x_2 & \geq 0 & (5) \end{cases}$$

fhF3.5404in2.7969in0ptFigure

ftbpF3.5854in2.7969in0ptFigure

Dnition 2 *On appelle base associée au problème* (PL), *toute sous matrice carrée* B *de* A *d'ordre* m *et inversible. Notons par :*

A_i *les colonnes de* A.

$I = \{i/ \text{ la colonne } A_i \text{ est dans } B\}$.

Par exemple

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$I = \{3, 4\}$

$J = \{i/ \ i \notin I\} \Longrightarrow J = \{1, 2\}$

$$\begin{aligned} Ax &= b \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \\ &\Leftrightarrow A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n = b \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} A_ix_i = b \\ &\Leftrightarrow \sum_{i \in I} A_ix_i + \sum_{i \in J} A_ix_i = b \\ &\Leftrightarrow Bx_B + Nx_N = b. \end{aligned}$$

$I \cup J = \{1, 2, ..., n\}$

On peut permuter entre les colonnes de sorte que $A = [B/N]$

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} x_B &= \{x_i, i \in I\} \\ x_N &= \{x_i, i \in J\} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} Ax &= b \Leftrightarrow Bx_B + Nx_N = b \\ &\Leftrightarrow x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b. \end{aligned}$$

Dnition 3 *Les coefficients du vecteur $x_B\,(x_i, i \in I)$ sont appellés variable de base et les coefficients du vecteur $x_N = (x_i, i \in J)$ sont appellés variable hors base.*

Dnition 4 *On appelle solution de base pour le problème (PL) toute solution du système $Bx_B + Nx_N = b$ avec $x_N = 0$; $x = (x_B, 0)$, quand $x_B = B^{-1}b \geq 0$ le vecteur $x = (x_B, 0)$ sera dit solution de base admissible.*

Dnition 5 *1) On dit que le vecteur x est une solution de base admissible non dégénérée si :*

$$x = (x_B, x_N) \quad \text{avec } x_B > 0, \quad i.e\ x_i > 0, \quad i \in I.$$

2) Si $\exists i_0 \in I / x_{i_0} = 0$ on dit que la solution de base admissible $(x_B, 0)$ est une solution dégénérée.

Exemple 10

$$\begin{cases} \max Z = 6x_1 + 5x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_5 = 2 \end{cases} \quad \text{avec } x_i \geq 0, i = 1, ..., 5$$

donc

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$C_3^5 = \frac{5!}{3!2!} = 10 \text{ (matrice inversible)}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \{1,2,3\}, \quad I_2 = \{2,3,4\}, \quad I_3 = \{3,4,5\}, \quad I_4 = \{1,2,4\}, \quad I_5 = \{1,2,5\}, \\ I_6 &= \{1,3,4\}, \quad I_7 = \{1,3,5\}, \quad I_8 = \{1,4,5\}, \quad I_9 = \{2,3,5\}, \quad I_{10} = \{2,4,5\}, \end{aligned}$$

Indices de base	*Système à résoudre*	*Solutions de base*
$I_1 = \{1,2,3\}$ $x_4 = x_5 = 0$	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 = 6 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$	$x_1 = 12, x_2 = 0, x_3 = -12$ (7), *solution de base non admissible*
$I_2 = \{2,3,4\}$ $x_1 = x_5 = 0$	$\begin{cases} x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_2 + x_4 = 6 \\ -x_2 = 2 \end{cases}$	$x_1 = -2, x_3 = 10, x_4 = 12$ (9), *solution de base non admissible*
$I_3 = \{3,4,5\}$ $x_1 = x_2 = 0$	$\begin{cases} x_3 = 8 \\ x_4 = 6 \\ x_5 = 2 \end{cases}$	$x_3 = 8, x_4 = 6, x_5 = 2$ (1), *solution de base admissible*
$I_4 = \{1,2,4\}$ $x_3 = x_5 = 0$	$\begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$	$x_1 = 5, x_2 = 3, x_4 = 7$ (4), *solution de base admissible optimale*
$I_5 = \{1,2,5\}$ $x_3 = x_4 = 0$	$\begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_5 = 2 \end{cases}$	$x_1 = 4, x_2 = 4, x_5 = 2$ (3), *solution de base admissible*
$I_6 = \{1,3,4\}$ $x_2 = x_5 = 0$	$\begin{cases} x_1 + x_3 = 8 \\ -2x_1 + x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$	$x_1 = 2, x_3 = 6, x_4 = 8$ (5), *solution de base admissible*
$I_7 = \{1,3,5\}$ $x_2 = x_4 = 0$	$\begin{cases} x_1 + x_3 = 8 \\ -2x_1 = 6 \\ x_1 + x_5 = 2 \end{cases}$	$x_1 = -3, x_3 = 11, x_5 = 5$ (10), *solution de base non admissible*
$I_8 = \{1,4,5\}$ $x_2 = x_3 = 0$	$\begin{cases} x_1 = 8 \\ -2x_1 + x_4 = 6 \\ x_1 + x_5 = 2 \end{cases}$	$x_1 = 8, x_4 = 22, x_5 = -6$ (8), *solution de base non admissible*
$I_9 = \{2,3,5\}$ $x_1 = x_4 = 0$	$\begin{cases} x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_2 = 6 \\ -x_2 + x_5 = 2 \end{cases}$	$x_2 = 2, x_3 = 6, x_5 = 4$ (2), *solution de base admissible*
$I_{10} = \{2,4,5\}$ $x_1 = x_3 = 0$	$\begin{cases} x_2 = 8 \\ 3x_2 + x_4 = 6 \\ -x_2 + x_5 = 2 \end{cases}$	$x_2 = 8, x_4 = -18, x_3 = 10$ (6), *solution de base non admissible*

Th 1 *Soit le problème (PL), où l'on suppose que la matrice A est de rang m.*

1) S'il existe une solution de (PL), alors il existe une solution de base admissible.

2) S'il existe une solution optimale, alors il existe une solution de base optimale

3) Les points extrêmes du polydère $S = \{x, Ax \leq b, x \geq 0\}$ sont les solutions de base admissible de (PL).

Preuve. 1) Soit x une solution admissible.

$$Ax = b, \quad x \geq 0, \quad , x_i \geq 0, \qquad i = 1, ..., m$$

Notons par $p = card \{i / \quad x_i > 0\}, \qquad \{x_1, x_2, ..., x_p\}$, on a

$$Ax = b \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p} x_i A_i = b$$

$\underline{1^{er} cas :}$ Si $\{A_1, A_2, ..., A_p\}$ linéairement indépendants $p \leq m$

$p = m : \ x = \left(\underbrace{x_1, x_2, ..., x_m}_{x_B}, \underbrace{0, 0, ..., 0}_{x_N} \right)$ $\rightarrow$solution de base admissible non dégénérée.

$p < m$: Par le théorème de base incomplète complétons $\left\{A_1, A_2, ..., A_p, A'_{p+1}, A'_{p+2}, ..., A'_m\right\}$ et $x = (x_1, x_2, ..., x_p, 0, 0, ..., 0)$ $\rightarrow$solution de base admissible et dégénérée.

$\underline{2^{ème} cas :}$ Si $\{A_1, A_2, ..., A_p\}$ liée

$\exists \ y_1, y_2, ..., y_p; \qquad \sum_{i=1}^{p} y_i A_i = 0$ avec les y_i non tous nul

Soit $y = (y_1, y_2, ..., y_p, 0, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$, soit $x - \varepsilon y \Longrightarrow A(x - \varepsilon y) \Longrightarrow Ax - \varepsilon Ay = b$

On peut toujours supposer que $\exists \ y_i > 0, \ x_i - \varepsilon y_i \ / \ \varepsilon$ trop petit de sorte que $x_i - \varepsilon y_i \geq 0, \forall i = \overline{1, p}$

prenons $\varepsilon_0 = \min \left\{ \frac{x_i}{y_i} / y_i > 0 \right\}, \quad \frac{x_p}{y_p} = \min \left\{ \frac{x_i}{y_i} / y_i > 0 \right\} \Longrightarrow x_p - \frac{x_p}{y_p} y_p = 0 \Longrightarrow x - \varepsilon_0 y = (x_1 - \varepsilon_0 y_1, ..., 0, 0, ..., 0)$

$\{A_1, A_2, ..., A_{p-1}\}$ $\rightarrow$voir si la famille est LI, si oui aller au $1^{er} cas$, sinon refaire le même raisonnement.

2) Soit x^* solution optimale $C^T x^* \leq C^T x \quad \forall x \in S$

$x^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_p^*\right), \quad \{A_1, A_2, ..., A_p\}$

$\underline{1^{er} cas :}$ $\{A_1, A_2, ..., A_p\}$ linéairement indépendants $p \leq m$

$$\begin{cases} p = m \ \text{ solution optimale de base non dégénérée} \\ p < m \end{cases}$$

$\underline{2^{ème} cas :}$ $\{A_1, A_2, ..., A_p\}$ liée

jusqu' a $x^* - \varepsilon y$ solution de base

$C^T x^* = C^T (x^* - \varepsilon y)$? Si x^* solution optimale$\Longrightarrow C^T y = 0$?

Supposons que $C^T y \neq 0, \quad C^T y > 0 \Longrightarrow x^* - \varepsilon y$ admissible.

3) Soit $x = (x_1, x_2, ..., x_m, 0, 0, ..., 0)$, Supposons $\exists y, z \ / x = (1 - \alpha) y + \alpha z, \ \ \alpha \in [0, 1]$

$x_i = (1 - \alpha) y_i + \alpha z_i \quad \forall i > m$

$y = (y_1, y_2, ..., y_m, 0, 0, ..., 0), \quad z = (z_1, z_2, ..., z_m, 0, 0, ..., 0)$

$A(x - y) = \sum_{i=1}^{m} A_i (x_i - y_i) = b - b = 0 \Longrightarrow (x_i - y_i) = 0 \quad \forall i = \overline{1, m} \Longrightarrow x = y$

On fait le même raisonnement.

Soit x un point extrême du polydère $Ax = b \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{k} A_i x_i = b \Longleftrightarrow A_1 x_1 + A_2 x_2 + ... + A_k x_k = b$

Montrons que $\{A_1, A_2, ..., A_k\}$ est libre

Supposons que $\{A_1, A_2, ..., A_k\}$ est liée $\exists y_1, y_2, ..., y_k \ / \sum_{i=1}^{k} A_i y_i = 0$

Soit $z_1 = x - \varepsilon y \rightarrow$ admissible et $z_2 = x + \varepsilon y \rightarrow$ admissible$\Longrightarrow x = \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2, \;\; \exists \alpha = \frac{1}{2} \in [0,1]$

■