

Chapitre 1

Processus stochastiques en temps continu

1.1 Généralités

Soit un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) . Rappelons qu'une application

$$Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

est appelée une variable aléatoire si Z est mesurable comme application de (Ω, \mathcal{F}) dans $(\mathbb{R}, \beta(\mathbb{R}))$ où $\beta(\mathbb{R})$ est la σ -algèbre de borel dans \mathbb{R} .

C'est quoi un processus stochastique? cest simplement une famille de variable aléatoire.

Définition 1.1 Soit $I = [0, T]$ pour $T \in (0, \infty)$ ou $I = [0, \infty)$. une famille de variables aléatoires $X = (X_t)_{t \in I}$ avec $X_t : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée un processus stochastique avec indice l'ensemble I .

Remarque 1.2 La définition d'un processus stochastique peut être plus générale en donnant un ensemble I plus général et un autre espace d'état que \mathbb{R} .

Dans notre cas il y'a deux différents aspects dans le processus stochastique X .

- 1) La famille $X = (X_t)_{t \in I}$ décrit des fonctions aléatoires par

$$\omega \longmapsto f(\omega) = (X_t(\omega))_{t \in I}$$

la fonction $f(\omega) = (t \longmapsto X_t(\omega))$ est appelée la trajectoire de X .

- 2) La famille $X = (X_t)_{t \in I}$ décrit un processus qui est par rapport au temps t une famille de variables aléatoires ordonnée $t \longmapsto X_t$.

Définition 1.3 Soit $X = (X_t)_{t \in I}$ et $Y = (Y_t)_{t \in I}$ des processus stochastiques dans (Ω, \mathcal{F}, P) . Les processus X et Y sont dit indistinguables si et seulement si

$$P(X_t = Y_t, t \in I) = 1.$$

La définition exige que l'ensemble $\{\omega \in \Omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega), t \in I\}$ est mesurable. Ce n'est pas le cas en général

Exemple 1.4 Soit $I = [0, \infty)$, $\Omega = [0, 2)$, $Y_t = 0$

$$X_t(\omega) := \begin{cases} 0 : \omega \in [0, 1] \\ 0 : \omega \in (1, 2), t \neq \omega \\ 1 : \omega \in (1, 2), t = \omega \end{cases}$$

et $\mathcal{F} := \sigma(X_t : t \geq 0) = \sigma\{\{t\}, t \in (1, 2)\}$
mais $\{\omega \in \Omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega), t \geq 0\} = [0, 1] \in \mathcal{F}$.

Définition 1.5 Soit $X = (X_t)_{t \in I}$ et $Y = (Y_t)_{t \in I}$ des processus stochastiques dans (Ω, \mathcal{F}, P) . Les processus X et Y sont modification l'un de l'autre si

$$P(X_t = Y_t) = 1 \quad \forall t \in I.$$

Définition 1.6 Soit $X = (X_t)_{t \in I}$ et $Y = (Y_t)_{t \in I}$ des processus stochastiques dans (Ω, \mathcal{F}, P) et $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ respectivement. Alors X et Y ont la même distribution (loi) fini-dimensionnelle si

$$P((X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in B) = P'((Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}) \in B)$$

$$\forall 0 \leq t_1 < \dots < t_n \in I, \quad n = 1, 2, \dots \text{ et } B \in \beta(\mathbb{R}^n).$$

Proposition 1.7 1) Si X et Y sont indistinguables alors ils sont modification l'un de l'autre. la réciproque n'est pas vraie en général.

2) Si X et Y sont modification l'un de l'autre, alors ils ont la même distribution (loi) fini dimensionnelle. la réciproque est fausse.

Preuve. 1) Fixons $t \in I$ on a que

$$P(X_t = Y_t) \geq P(X_s = Y_s, s \in I) = 1$$

2) Soit $N_t = \{X_t \neq Y_t\}$ donc $P(N_t) = 0$. alors pour $B \in \beta(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} P((X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in B) &= P(\{(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in B\} \setminus (N_{t_1}, \dots, N_{t_n})) \\ &= P(\{(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}) \in B\} \setminus (N_{t_1}, \dots, N_{t_n})) \\ &= P((Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}) \in B) \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Proposition 1.8 Supposons que X et Y sont modification l'un de l'autre et que les trajectoires de X et Y sont continues à gauche (ou continues à droite). Alors les processus X et Y sont indistinguables.

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
A &:= \{X_t = Y_t, t \in I\} = \{X_t = Y_t, t \in I \cap \mathbb{Q}\} \\
\text{dons } A &\in \mathcal{F} \text{ et} \\
P(A) &= P(X_t = Y_t, t \in I \cap \mathbb{Q}) \\
&= 1 - P(X_t \neq Y_t, t \in I \cap \mathbb{Q}) \\
&\geq 1 - \sum_{t \in I \cap \mathbb{Q}} P(X_t \neq Y_t) = 1. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Définition 1.9 Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace de probabilité. Une famille de sous σ -algèbres (tribus) $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ de \mathcal{F} est une filtration si c'est une famille croissante, au sens où

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}, \forall 0 \leq s \leq t \in I$$

Le quadruplet $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \in I})$ est appelé la base stochastique (ou espace de probabilité filtré)

- Il faut comprendre \mathcal{F}_t comme "l'information au temps t " plus le temps croît ($s \leq t$), plus on a d'information ($\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$).
- Une filtration $\{\mathcal{G}_t, t \in I\}$ est dite plus grosse que $\{\mathcal{F}_t, t \in I\}$ si $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$, $\forall t \in I$.
- Une filtration est dite normale si elle vérifie les propriétés supplémentaires
 - Les négligeables au sens large sont dans tous \mathcal{F}_t :

$$P(A) = 0 \implies A \in \mathcal{F}_0.$$

- La filtration est continue à droite :

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s.$$

Définition 1.10 Soit $X = (X_t)_{t \in I}$, $X_t : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ un processus stochastique dans (Ω, \mathcal{F}, P) et soit $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ une filtration.

1) Le processus X est dit mesurable si la fonction $(\omega, t) \longmapsto X_t(\omega)$ considérée comme une fonction entre $\Omega \times I$ dans \mathbb{R} est mesurable par rapport à $\mathcal{F} \otimes \beta(I)$ et $\beta(\mathbb{R})$.

2) Le processus X est progressivement mesurable par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ si $\forall s \in I$ la fonction $(\omega, t) \longmapsto X_t(\omega)$ considérée comme fonction de $\Omega \times [0, s]$ dans \mathbb{R} est mesurable par rapport à $\mathcal{F} \otimes \beta([0, s])$ et $\beta(\mathbb{R})$.

3) Le processus X est dit adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ (\mathcal{F}_t -adapté) si pour $t \in I$ on a que X_t est \mathcal{F}_t -mesurable.

A un processus stochastique X on peut associer sa filtration naturelle $(\sigma(X_s, s \leq t, t \in I))$, qui est la plus petite filtration telle que le processus stochastique X soit adapté.

A un processus stochastique X on peut associer plus généralement sa filtration naturelle complétée $\{\sigma_t^X, t \in I\}$ définie par

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(\sigma(X_s, s \leq t), \mathcal{N})$$

où \mathcal{N} désigne la tribu des négligeables pour P .

La tribu \mathcal{F}_t^X représente l'information portée par $X_s, s \leq t$, et les négligeables. Evidemment, X est un processus \mathcal{F}_t^X -adapté.

Proposition 1.11 *Un processus progressivement mesurable est mesurable adapté.*

(Toutes les autres implications entre prog. mesurable, mesurable et adapté ne sont pas vraies en générale).

Preuve. 1) $I = [0, \infty)$.

Supposons que X est progressivement mesurable. Montrons que X est mesurable.

Soit $n = 1, 2, \dots$ on pose $X^n : \Omega \times [0, n] \longrightarrow \mathbb{R}$ donné par

$$X^n(\omega, t) := X_t(\omega)$$

est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_n \otimes \beta([0, n])$ par hypothèse.

Par conséquent le prolongement $\tilde{X}^n : \Omega \times [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ donné par

$$\tilde{X}^n(\omega, t) := X_{t \wedge n}(\omega)$$

est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_n \otimes \beta([0, \infty))$ donc par rapport à $\mathcal{F} \otimes \beta([0, \infty))$ ceci peut être vérifiée en considérant

$$\tilde{X}^n = X^n \circ J_n \text{ avec}$$

$$J_n : \Omega \times [0, \infty) \longrightarrow \Omega \times [0, n] \text{ donnée par}$$

$$J_n(\omega, t) = (\omega, t \wedge n).$$

Finalement on remarque que

$$X_t(\omega) = \lim_{n \longrightarrow \infty} X_{t \wedge n}$$

et que X est $\mathcal{F} \otimes \beta([0, \infty))$ -mesurable comme limite d'applications mesurables.

2) Fixons $t \in I$. Alors

$$X_t : \Omega \times [0, t] \longrightarrow \mathbb{R}$$

est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_t \otimes \beta([0, t])$ par hypothèse. Alors le théorème de Fubini donne que X_t est \mathcal{F}_t -mesurable.

3) Soit $I = [0, \infty)$, $B \subseteq [0, \infty)$ un ensemble non mesurable et définissons

$$\begin{aligned} X_t &:= 1 \text{ si } t \in B \\ X_t &:= 0 \text{ si } t \notin B \end{aligned}$$

alors X_t est constant, mais

$$\{(\omega, t) \in \Omega \times [0, \infty) : X_t(\omega) = 1\} = \Omega \times B$$

est non mesurable.

\Rightarrow le processus est adapté mais n'est pas mesurable ou progressivement mesurable. ■

Proposition 1.12 *Un processus adapté tel que toutes les trajectoires sont continues à gauche (ou à droite) est progressivement mesurable.*

Preuve. Considérons le cas des trajectoires continues à droite.

Pour $s = 0$ on a que l'application :

$$(\omega, 0) \longmapsto X_0(\omega)$$

est mesurable quand on considère cette application entre $(\Omega \times \{0\}, \mathcal{F}_0 \otimes \beta(\{0\}))$ et $(\mathbb{R}, \beta(\mathbb{R}))$.

Considérons maintenant $s > 0$. On a à montrer que

$$(\omega, t) \longmapsto X_t(\omega)$$

est mesurable considérée comme application de $(\Omega \times [0, s], \mathcal{F}_s \otimes \beta([0, s]))$ et $(\mathbb{R}, \beta(\mathbb{R}))$.

Pour $n \in \{1, 2, \dots\}$ on définit

$$F_n : \Omega \times [0, s] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\omega, t) \longmapsto X_t^{(n)}(\omega)$$

avec $X_t^{(n)}(\omega) := X_{\frac{k-1}{2^n}s}(\omega)$ pour $\frac{k-1}{2^n} < t \leq \frac{k}{2^n}$ et $k = 1, \dots, 2^n$

et $X_0^{(n)}(\omega) := X_0(\omega)$.

F_n est mesurable considérée comme application entre $(\Omega \times [0, s], \mathcal{F}_s \otimes \beta([0, s]))$ et $(\mathbb{R}, \beta(\mathbb{R}))$, par conséquent il s'ensuit que

$$X_t(\omega) = \lim_{n \longrightarrow \infty} F_n(\omega, t)$$

par la continuité à droite des trajectoires de X . ■

Définition 1.13 Soit $(X_t)_{t \in I}$ un processus $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ -adapté et tel que $E|X_t| < \infty \forall t \geq 0$.

1. X est appelé martingale si $\forall 0 \leq s \leq t \in I$ on a

$$E(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s \text{ p.s.}$$

2. X est appelé sous-martingale si $\forall 0 \leq s \leq t \in I$ on a

$$E(X_t | \mathcal{F}_s) \geq X_s \text{ p.s.}$$

3. X est appelé sur-martingale si $\forall 0 \leq s \leq t \in I$ on a

$$E(X_t | \mathcal{F}_s) \leq X_s \text{ p.s.}$$

Définition 1.14 Soit $X = (X_t)_{t \in I}$ un processus stochastique.

1. Le processus X est continu si $t \mapsto X_t(\omega)$ est continue $\forall \omega \in \Omega$.
2. Le processus X est càdlàg (continu à droite, limité à gauche) si $t \mapsto X_t(\omega)$ est continue à droite et a des limites à gauche $\forall \omega \in \Omega$.
3. Le processus X est càglàd (continu à gauche, limité à droite) si $t \mapsto X_t(\omega)$ est continue à gauche et a des limites à droite $\forall \omega \in \Omega$.

1.2 Exemples de processus stochastiques

1.2.1 Mouvement Brownien

Le mouvement brownien en deux dimensions a été observé en 1828 par Robert Brown comme diffusion du pollen dans l'eau. Après, le mouvement Brownien en dimension un a été utilisé par Louis Bachelier en 1900 pour modéliser les marchés financiers et en 1905 par Albert Einstein.

La première preuve rigoureuse de son existence (mathématique) a été donnée par Norbert Wiener en 1921.

Proposition 1.15 Il existe un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) et un processus $W = (W_t)_{t \geq 0}$ avec $W_0 = 0$ tel que

- i. $(W_t)_{t \geq 0}$ est continu.
- ii. Pour tout $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n \leq s < t < \infty$ la variable aléatoire $W_t - W_s$ est indépendante de $(W_{s_1}, \dots, W_{s_n})$ (Accroissements indépendants).
- iii. Pour tout $0 \leq s < t < \infty$ on a $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ (Accroissements stationnaires).

Définition 1.16 Un processus satisfaisant les propriétés de la proposition précédente est appelé mouvement Brownien standard.

1.2.2 Processus de Poisson

Supposons qu'on a une ampoule. Les statistiques montrent que la probabilité qu'une ampoule tombe en panne est en chaque temps la même. Par conséquent, il n'y a pas un sens de changer l'ampoule avant qu'elle soit en panne.

Comment modéliser ceci ?

On exige d'avoir une distribution (loi) sans mémoire et ceci est la distribution exponentielle.

Ceci donne la construction suivante :

On prend des variables aléatoires indépendantes

$$\Delta_1, \Delta_2, \dots : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{avec } \Delta_i \geq 0 \text{ et } P(\Delta_i \in B) = \int_B \lambda e^{-\lambda t} dt$$

pour $B \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$, où $\lambda > 0$ est un paramètre pour modéliser le temps pour panne.

Les variables aléatoires Δ_i ont une distribution exponentielle avec paramètre $\lambda > 0$.

posons $S_1 := \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n$ avec $S_0 = 0$ donne le temps que la n ème ampoule tombe en panne.

La fonction inverse :

$$N_t := \max \{n \geq 0; S_n \leq t\}$$

décrit le nombre des ampoules qui tombent en panne jusqu'au temps t .

Définition 1.17 $(N_t)_{t \geq 0}$ est appelé processus de poisson avec intensité $\lambda > 0$.

Proposition 1.18

- i) $(N_t)_{t \geq 0}$ est un processus càdlàg.
- ii) $N_t - N_s$ est indépendant de $(N_{s_1}, N_{s_2}, \dots, N_{s_n})$ pour $0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_n \leq s < t < \infty$.
- iii) $N_t - N_s$ a une loi de Poisson avec paramètre $\lambda(t - s)$, ceci signifie que

$$P(N_t - N_s = k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

pour $\mu = \lambda(t - s)$.

1.2.3 Processus de Lévy

Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$, $X_0 \equiv 0$ est appelé processus de Lévy si

- i. X est càdlàg.
- ii. Pour tout $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n \leq s < t < \infty$ la variable aléatoire $X_t - X_s$ est indépendante de $(X_{s_1}, \dots, X_{s_n})$ (Accroissements indépendantes).
- iii. Pour tout $0 \leq s < t < \infty$ on a $X_t - X_s$ a la même distribution que X_{t-s} (Accroissements stationnaires).

1.3 Processus Gaussiens

Définition 1.19 1. Une variable aléatoire $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée variable aléatoire gaussienne si $P(f = m) = 1$ on ils existent $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ tels que

$$P(f \in B) = \int_B e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi\sigma}}$$

$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Les paramètres m et σ^2 sont appelés l'espérance (moyenne) et variance respectivement.

2. Un vecteur $f = (f_1, \dots, f_n) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est appelé vecteur gaussien si $\forall a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\langle f(\omega), a \rangle := \sum_{i=1}^n a_i f_i(\omega)$$

est gaussien.

Les paramètres $m = (m_1, \dots, m_n)$ avec $m_i := E f_i$ et $\sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1}$ avec $\sigma_{ij} := E(f_i - m_i)(f_j - m_j)$ sont appelés la moyenne (vecteur) et covariance (matrice) respectivement.

Pour une variable aléatoire $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ on peut calculer l'espérance et la variance par

$$m = E f \text{ et } \sigma^2 = E(f - m)^2.$$

Proposition 1.20 Supposons qu'on a deux vecteurs gaussiens $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ avec les mêmes paramètres (m, σ) . Alors f et g ont les mêmes lois.

Preuve. Si $\widehat{f}(a) := Ee^{i\langle f, a \rangle}$ et $\widehat{g}(a) := Ee^{i\langle g, a \rangle}$ sont les fonctions caractéristiques, par le théorème d'unicité, on a à démontrer que

$$\widehat{f}(a) = \widehat{g}(a), \forall a \in \mathbb{R}^n.$$

Pour cela il suffit de démontrer que les distributions de $\langle f, a \rangle$ et $\langle g, a \rangle$ sont les mêmes.

Vérifions l'espérance et la variance. On obtient

$$E \langle f, a \rangle = \sum_{i=1}^n a_i E f_i = \sum_{i=1}^n a_i m_i = \sum_{i=1}^n a_i E g_i = E \langle g, a \rangle$$

et

$$\begin{aligned} E (\langle f, a \rangle - E \langle f, a \rangle)^2 &= \sum_{i,j=1}^n a_i a_j E (f_i - m_i) (f_j - m_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_i a_j E (g_i - m_i) (g_j - m_j) \\ &= E (\langle g, a \rangle - E \langle g, a \rangle)^2. \end{aligned}$$

CQFD. ■

Définition 1.21 Un processus stochastique $X = (X_t)_{t \in I}$, $X_t : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelé gaussien si

$\forall n = 1, 2, \dots$ et $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \in I$ on a $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est un vecteur gaussien.

De plus, on trouve

$$m_t := E X_t \text{ et } \Gamma(s, t) := E (X_s - m_s) (X_t - m_t)$$

$$m = (m_t)_{t \in I} \text{ espérance (moyenne)}$$

$$(\Gamma(s, t))_{s, t \in I} \text{ covariance.}$$

Question : Est-ce qu'un processus gaussien existe ?

On démontre l'existence en analysant les lois fini-dimensionnelles d'un processus stochastique $X = (X_t)_{t \in I}$.

On utilise l'ensemble des indices $\Delta := \{(t_1, t_2, \dots, t_n) : n \geq 1, t_1, t_2, \dots, t_n \in I \text{ distincts}\}$.

Alors la famille $(\mu_{t_1, t_2, \dots, t_n})_{(t_1, t_2, \dots, t_n) \in \Delta}$ avec $\mu_{t_1, t_2, \dots, t_n}(B) := P((X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}) \in B)$ définit une famille de mesures telles que

$$\begin{aligned} \mu_{t_1, \dots, t_n}(B_1 \times \dots \times B_n) &= \mu_{\pi(t_1), \dots, \pi(t_n)}(B_{\pi(1)} \times \dots \times B_{\pi(n)}) \\ \mu_{t_1, \dots, t_n}(B_1 \times \dots \times B_{n-1} \times \mathbb{R}) &= \mu_{t_1, \dots, t_{n-1}}(B_1 \times \dots \times B_{n-1}) \\ \forall B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ et } \forall \text{ les permutations } \pi : \{1, \dots, n\} &\longrightarrow \{1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Définition 1.22 Une famille de mesures de probabilités $(\mu_{t_1, t_2, \dots, t_n})_{(t_1, t_2, \dots, t_n) \in \Delta}$ où $\mu_{t_1, t_2, \dots, t_n}$ est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ est appelée consistante si :

i) $\mu_{t_1, \dots, t_n}(B_1 \times \dots \times B_n) = \mu_{\pi(t_1), \dots, \pi(t_n)}(B_{\pi(1)} \times \dots \times B_{\pi(n)})$

$$\forall n = 1, 2, \dots$$

$$\forall B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

\forall les permutations $\pi : \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$.

ii) $\mu_{t_1, \dots, t_n}(B_1 \times \dots \times B_{n-1} \times \mathbb{R}) = \mu_{t_1, \dots, t_{n-1}}(B_1 \times \dots \times B_{n-1})$
 $\forall n \geq 2$ et $\forall B_1, \dots, B_{n-1} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

On montre q'une famille de mesures peut être générée à partir d'une seule mesure.

Cette mesure est définie dans la σ -algèbre suivante :

Définition 1.23 Soit $\mathcal{B}(\mathcal{R}^I)$ la plus petite σ -algèbre qui contient tous les cylindres

$$A := \{(\xi_t)_{t \in I} : (\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}) \in B\}$$

$$\forall (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \Delta \text{ et } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Proposition 1.24 (Daniell 1918 - Kolmogorov 1933) Supposons qu'on a une famille de mesures de probabilités consistante $(\mu_{t_1, t_2, \dots, t_n})_{(t_1, t_2, \dots, t_n) \in \Delta}$. Alors il existe une mesure de probabilité sur $\mathcal{B}(\mathcal{R}^I)$ telle que

$$\mu((\xi_t)_{t \in I} : (\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}) \in B) = \mu_{t_1, t_2, \dots, t_n}(B)$$

$$\forall (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \Delta \text{ et } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Application

Proposition 1.25 Soit $(\Gamma(s, t))_{s, t \in I}$ semi-définie positive et symétrique, c'est-à-dire

$$\sum_{i, j=1}^n \Gamma(t_i, t_j) a_i a_j \geq 0$$

et

$$\Gamma(s, t) = \Gamma(t, s)$$

$\forall s, t, t_1, \dots, t_n \in I$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

Alors il existe un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ et un processus gaussien $X = (X_t)_{t \in I}$ défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ avec

1. $EX_t = 0$
2. $EX_s X_t = \Gamma(s, t)$

Remarque 1.26 Si $X = (X_t)_{t \in I} \subseteq L_2$ avec $EX_t = 0$ et $\Gamma(s, t) := EX_s X_t$ on a toujours

Γ est semi-définie positive et symétrique.

Exemple 1.27 (Mouvement Brownien) Soit $I = [0, +\infty)$. On a

$$\Gamma(s, t) := \min\{s, t\} = \int_0^\infty \chi_{[0, s]}(\xi) \chi_{[0, t]}(\xi) d\xi$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{i, j=1}^n \Gamma(t_i, t_j) a_i a_j &= \int_0^\infty \sum_{i, j=1}^n a_i \chi_{[0, t_i]}(\xi) a_j \chi_{[0, t_j]}(\xi) d\xi \\ &= \int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^n a_i \chi_{[0, t_i]}(\xi) \right)^2 d\xi \\ &= \geq 0 \end{aligned}$$

On a construit des processus stochastiques avec certaines distributions fini-dimensionnelles. Dans le cas d'un processus gaussien ceci est fait par la structure de la covariance.

L'étape suivante, on exige les propriétés qu'on veut sur les trajectoires.

Proposition 1.28 (Kolmogorov) Soit $X = (X_t)_{t \in [0, 1]}$, $X_t : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une famille de variables aléatoires telles qu'il existe des constantes $c, \varepsilon > 0$ et $p \in [1, \infty)$ avec

$$E |X_t - X_s|^p \leq c |t - s|^{1+\varepsilon}.$$

Alors il existe une modification Y du processus X tel que

$$E \sup_{s \neq t} \left(\frac{|Y_t - Y_s|}{|t - s|^\alpha} \right)^p < \infty$$

$$\forall 0 < \alpha < \varepsilon/p.$$

et que toutes les trajectoires sont continues.

Proposition 1.29 Soit $W = (W_t)_{t \geq 0}$ un processus gaussien avec espérance $m(t) = 0$ et covariance $\Gamma(s, t) = E W_s W_t = \min\{s, t\}$. Alors il existe une modification $B = (B_t)_{t \geq 0}$ de $W = (W_t)_{t \geq 0}$ telle que toutes les trajectoires sont continues et

$$E \sup_{0 \leq s < t \leq T} \left(\frac{|B_t - B_s|}{|t - s|^\alpha} \right)^p < \infty$$

$$\forall 0 < \alpha < 1/2, \quad 0 < p < \infty \text{ et } T > 0.$$