## 4.3 Exercices

**Exercice 1 :** Le code d'une carte bancaire est composé de 4 chiffres. Calculer la probabilité des évènements suivants :

**1/** $A$ : "avoir un code composé de 2 chiffres pairs".

**2/** $B$ : "avoir un code composé de 4 chiffres égaux".

**3/** $C$ : "avoir un code contient au moins 1 chiffre premier".

**Exercice 2 :** Un agriculteur a acheté 15 petits d'arbres d'agrumes dont 8 sont des orangers, 5 sont des citronniers et le reste des pamplemoussiers. Il a pris 3 arbres au hasard pour les planter dans le jardin de sa maison. Calculer la probabilité que les trois arbres plantés dans le jardin de la maison soient :

**1/** $A$ : "un oranger, un citronnier et un pamplemoussier".

**2/** $B$ : "des orangers".

**3/** $C$ : "deux orangers et un citronnier".

**Exercice 3 :** On prend au hasard et en même temps, 3 néons dans un lot de 15 dont 5 sont défectueuses. Calculer la probabilité des évènements :

**1/** $A$ : "au moins un est défectueux".

**2/** $B$ : "les 3 sont défectueux".

**3/** $C$ : "exactement un néon est défectueux".

**Exercice 4 :** Un industriel doit vérifier l'état de marche de ses machines. D'après des statistiques récentes, il a évalué à 15% la probabilité pour qu'une machine tombe en panne en 3 ans parmi toutes ees machines.
La probabilité de devenir hors d'usage suite à une panne grave est évaluée à 80%, cette probabilité est de 10% pour une machine n'ayant jamais eu de panne.

**1/** Calculer la probabilité pour une machine donnée de plus de 3 ans d'être hors d'usage ?

**2/** En déduire la probabilité pour une machine donnée de plus de 3 ans ne tombe pas en panne (reste en usage) ?

**Exercice 5 :** Un fumeur décide d'arrêter de fumer, après avoir lu une série de statistiques effrayantes sur les risques de santé liés au tabac.
D'après des statistiques, on estime les probabilités suivantes :

**i/** Si cette personne n'a pas fumé un jour $J_n$, alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant $J_{n+1}$ est $0,3$.

**ii/** Si elle a fumé un jour $J_n$, alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant $J_{n+1}$ est $0,9$.

**1/** Quelle est la probabilité $P_{n+1}$ pour qu'elle fume le jour $J_{n+1}$ en fonction de la probabilité $P_n$ pour qu'elle fume le jour $J_n$?

**2/** Calculer la limite de $P_n$.

**3/** Va-t-elle finir par s'arrêter de fumer ?

## 4.4 Corrigés

**Exercice 1 :**

On considère l'ensemble $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Il est clair que le cardinal de l'ensemble $E$ est : $CardE = 10$.

1/ **La probabilité $P(A)$ pour avoir un code composé de deux chiffres paires :**

On a

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{\text{nombre des codes composés de deux chiffres paires}}{\text{nombre de tous les codes possibles}} \\ &= \frac{n}{N} \end{aligned}$$

où

$$N = A_{10}^4 = 10^4, \text{ un arrangement avec répétition,}$$

et

$$\begin{aligned} n &= A_5^2 A_5^2 \text{ un arrangement avec répétition pour les chiffres pairs et impairs} \\ &= 5^2.5^2 \\ &= 625. \end{aligned}$$

car le nombre de chiffres pairs de l'ensemble $E =$ au nombre de chiffres impairs $= 5$.

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{n}{N} \\ &= \frac{625}{10000} \\ &= 0,0625. \end{aligned}$$

2/ **La probabilité $P(B)$ pour avoir un code composé de 4 chiffres égaux :**

On a

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{\text{nombre des codes composés de 4 chiffres égaux}}{\text{nombre de tous les codes possibles}} \\ &= \frac{10}{10000} \\ &= 0,001. \end{aligned}$$

1. **La probabilité $P(C)$ pour avoir un code contenant au moins un chiffre premier :**

Les chiffres premiers de l'ensemble $E$ sont : $\{2,3,5,7\}$.

On a

$$\begin{aligned} P(C) &= \frac{\text{nombre des codes contenant au moins un chiffre premier}}{\text{nombre de tous les codes possibles}} \\ &= \frac{n}{N}, \end{aligned}$$

avec $N = 10000$ et

$$\begin{aligned} n &= A_4^1 \times A_6^3 + A_4^2 \times A_6^2 + A_4^3 \times A_6^1 + A_4^4 \\ &\quad \text{(car l'ensemble } E \text{ a 4 chiffres premiers et 6 chiffres non premiers)} \\ &= 4 \times 6^3 + 4^2 \times 6^2 + 4^3 \times 6 + 4^4 \\ &= 2080. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} P(C) &= \frac{2080}{10000} \\ &= 0,2080. \end{aligned}$$

**Exercice 2 :**

On calcule, d'abord, le nombre de possibilités $N$ des 3 arbres :

On prend trois arbres d'un ensemble de 15 arbres, alors

$$\begin{aligned} N &= C_{15}^{3} \\ &= \frac{15!}{3!12!} \\ &= 455. \end{aligned}$$

1/ **La probabilité $P(A)$ pour planter un oranger, un citronnier et un pamplemoussier :**

On a

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{C_8^1 C_5^1 C_2^1}{C_{15}^3} \\ &= \frac{8 \times 5 \times 2}{455} \\ &= 0,1758. \end{aligned}$$

2/ **La probabilité $P(B)$ pour planter des orangers :**

On a

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{C_8^3}{C_{15}^3} \\ &= \frac{56}{455} \\ &= 0,1231. \end{aligned}$$

3/ **La probabilité $P(C)$ pour planter deux orangers et un citronnier :**

On a

$$\begin{aligned} P(C) &= \frac{C_8^2 C_5^1}{C_{15}^3} \\ &= \frac{28.5}{455} \\ &= 0,3077. \end{aligned}$$

**Exercice 3 :**

Tout d'abord, on calcule le nombre de possibilités $N$ des 3 néons. On prend trois néons d'un lot de 15 néons.

$$\begin{aligned} N &= C_{15}^3 \\ &= 455. \end{aligned}$$

1/ **La probabilité $P(A)$ pour qu'au moins un néon soit défectueux :**

On a

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{C_5^1 C_{10}^2 + C_5^2 C_{10}^1 + C_5^3}{C_{15}^3} \\ &= \frac{5 \times 45 + 10 \times 10 + 10}{455} \\ &= 0,7363. \end{aligned}$$

2/ **La probabilité $P(B)$ pour que les 3 néons soient défectueux :**

On a

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{C_5^3}{C_{15}^3} \\ &= \frac{10}{455} \\ &= 0,0220. \end{aligned}$$

3/ **La probabilité $P(C)$ pour avoir exactement un néon défectueux :**

On a

$$\begin{aligned} P(C) &= \frac{C_5^1 C_{10}^2}{C_{15}^3} \\ &= \frac{5 \times 45}{455} \\ &= 0,4945. \end{aligned}$$

**Exercice 4** : On a

- $15\% = 0,15$ est la probabilité de l'évènement "Panne", qu'on note $panne$. Parmi ces 15%, on a
  - ☐ $80\% = 0,80$ est la probabilité de l'évènement "devenir hors d'usage suite à une panne grave", qu'on note $HU/panne$.
  - ☐ $10\% = 0,10$ est la probabilité de l'évènement "n'ayant jamais tomber en panne", qu'on note $HU/non\, panne$.
- $85\% = 0,85 = 100\% - 15\%$ est la probabilité de l'évènement " Non Panne", qu'on note $non\, panne$.

1/ La probabilité $P(HU)$ d'une machine donnée de plus de 3 ans d'être hors d'usage **:**

$$\begin{aligned} P(HU) &= P(HU/panne)P(panne) + P(HU/non\ panne)P(non\ panne) \\ &= 0,80 \times 0,15 + 0,10 \times 0,85 \\ &= 0,205. \end{aligned}$$

2/ La probabilité $P(U)$ d'une machine donnée de plus de 3 ans reste en usage **:**

$$\begin{aligned} P(U) &= 1 - P(HU) \\ &= 1 - 0,205 \\ &= 0,795. \end{aligned}$$

**Exercice 5** : Soit l'évènement $F_n$ : *"fumer le $n^{ème}$ jour"*, $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P_n = P(F_n)$.

**1/** Il est clair que

$$P\left(\overline{F_n}\right) = 1 - P_n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

On a

$$P\left(\overline{F_{n+1}}/F_n\right) = 0,9 \; et \; P\left(\overline{F_{n+1}}/\overline{F_n}\right) = 0,3$$

et

$$\begin{aligned} P\left(\overline{F_{n+1}}\right) &= P\left(\overline{F_{n+1}}/F_n\right) P\left(F_n\right) + P\left(\overline{F_{n+1}}/\overline{F_n}\right) P\left(\overline{F_n}\right) \\ &= 0,9P_n + 0,3\left(1 - P_n\right). \end{aligned}$$

Alors

$$1 - P_{n+1} = 0,9P_n + 0,3\left(1 - P_n\right)$$

D'où

$$P_{n+1} = -0,6P_n + 0,7.$$

**2/** La limite $l$ de $P_n$ qunad $n \to +\infty$ (si elle existe) vérifie l'équation

$$\begin{aligned} l &= -0,6l + 0,7 \\ &\Rightarrow \; l = 0,4375. \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n \to +\infty} P_n = 0,4375 = 43,75\%.$$

**3/** Comme $P_n = P\left(F_n\right) = 43,75\%$, cette personne ne va pas finir par s'arrêter de fumer ($\lim\limits_{n \to +\infty} P_n \neq 0$).