حلول تمارين السلسلة -2-

إحتمالات .

حل التمرين 4:

لتكن الأحداث: A: حدث "الشخص المختار عشوائيا يعرف البلد A"

B: "الشخص المختار عشوائيا يعرف البلد B"

C: " " " " " " C"

ومنه

$P(A)=0{,}42,\ P(B)=0{,}55,\ P(C)=0{,}34,$

$P(A\cap B)=0{,}18,\ P(A\cap C)=0{,}1,\ P(B\cap C)=0{,}15,\ P(A\cap B\cap C)=0{,}08$

1 - حساب إحتمال: معرفة أحد البلدان على الأقل أي نحسب

$P(A\cup B\cup C)$

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C).$$

2 حساب احتمال: عدم معرفة أي بلد من البلدان الثلاث أي نحسب

$P(\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C})$

$$P(\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C).$$

3 حساب احتمال: معرفة بلدين بالضبط أي: إما A و B أو A و C أو B و C. أي نحسب

$$P((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C))=P(A\cap B)+P(A\cap C)+P(B\cap C)-P((A\cap B)\cap(A\cap B))-P((A\cap B)\cap(B\cap C))-P((A\cap C)\cap(B\cap C))+P((A\cap B)\cap(A\cap C)\cap(B\cap C))$$

$$=P(A\cap B)+P(A\cap C)+P(B\cap C)-2P(A\cap B\cap C)$$

4 حساب احتمال معرفة A وعدم معرفة B و C. أي نحسب

$P(A\cap\bar{B}\cap\bar{C})$

$$\mathbb{P}(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = \mathbb{P}(A \cap (\overline{B \cup C})) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap (B \cup C))$$
$$= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C))$$
$$= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

6) نعرف A و B ونعرف C (بنفس الطريقة السابقة)
$\mathbb{P}(A \cap B \cap \bar{C})$

حل التمرين الخامس

1) حساب احتمال أن يكون الأبناء من نفس الجنس
أي إما 5 ذكور أو 5 بنات أي نحسب

$$\mathbb{P}[\underbrace{(G \cap G \cap G \cap G \cap G) \cup (F \cap F \cap F \cap F \cap F)}_{\text{حدثان متنافيان}}] =$$

$$\mathbb{P}(\underbrace{G \cap G \cap G \cap G \cap G}_{\text{أحداث مستقلة}}) + \mathbb{P}(\underbrace{F \cap F \cap F \cap F \cap F}_{\text{أحداث مستقلة}}) =$$

$$(\mathbb{P}(G))^5 + (\mathbb{P}(F))^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

2) حساب احتمال: أن يكون الأبناء الثلاث الأكبر سنا ذكور والاثنان الآخران إناث

$$\mathbb{P}(\underbrace{G \cap G \cap G \cap F \cap F}_{\text{أحداث مستقلة}}) = [\mathbb{P}(G)]^3 \times (\mathbb{P}(F))^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

3) حساب احتمال: هناك بالضبط 3 ذكور من بين 5 أبناء.
أي نحسب احتمال أن يكون لدينا 3 ذكور و بنتان دون الاهتمام بالترتيب أي نحسب

$$C_5^3 \times \mathbb{P}(G \cap G \cap G \cap F \cap F).$$

4) حساب احتمال: الولدان الأولان ذكران، يعني أنه لا يهم بقية الأبناء إن كانوا ذكورا أو إناثا.
(يترك للطالب)

5) حساب احتمال : وقوع على الأقل فتاة : هناك إما 1 بنت أو 2 أو 3 أو 4 أو 5 أو 6 ، ومنه نستنتج أن هذا الحدث هو عكس أن يكون الأبناء 5 ذكور.

وعليه : احتمال أن تكون هناك على الأقل فتاة $= 1-\mathbb{P}(G\cap G\cap G\cap G\cap G)$

حل التمرين السادس :

A = حدث : التعرض لحادث سيارة "

B : " = القيادة في حالة سكر "

1 - حساب : $\mathbb{P}(B)$، $\mathbb{P}(B^c)$، $\mathbb{P}(A|B)$، $\mathbb{P}(A^c|B)$، $\mathbb{P}(A|B^c)$، $\mathbb{P}(A^c|B^c)$

$$\mathbb{P}(B)=\frac{1}{100} \quad , \quad \mathbb{P}(B^c)=1-\mathbb{P}(B)$$

$$\mathbb{P}(A|B)=\frac{1}{50} \quad , \quad \mathbb{P}(A^c|B)=1-\mathbb{P}(A|B).$$

$$\mathbb{P}(A|B^c)=\frac{1}{1000} \quad , \quad \mathbb{P}(A^c|B^c)=1-\mathbb{P}(A|B^c).$$

2) تعيين الاحتمالات :

$\mathbb{P}(A^c\cap B)$، $\mathbb{P}(A\cap B^c)$، $\mathbb{P}(A\cap B)$
$\mathbb{P}(A^c\cap B^c)$

$$\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(A|B)$$

$$\mathbb{P}(A\cap B^c)=\mathbb{P}(B^c)\cdot\mathbb{P}(A|B^c)$$

$$\mathbb{P}(A^c\cap B)=\mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(A^c|B)$$

$$\mathbb{P}(A^c\cap B^c)=\mathbb{P}(B^c)\cdot\mathbb{P}(A^c|B^c).$$

استنتاج : $\mathbb{P}(A)$ و $\mathbb{P}(B|A)$.

~~لدينا~~ لدينا

$$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(B\cap A)+\mathbb{P}(\bar{B}\cap A)$$
$$=119\times10^{-5}$$

و

$$\mathbb{P}(B|A)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}=\frac{20}{119}.$$

باستعمال مبرهنة Bayes.

$$\mathbb{P}(B|D) = \frac{\mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(A|B)}{\mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(\bar{B})\cdot\mathbb{P}(A|\bar{B})}$$

$$= \frac{20}{119}$$

حل التمرين الثامن =

لتكن الأحداث A_1: "القناص البارع يصيب الهدف"

A_2: "القناص الأقل براعة يصيب الهدف"

B: إصابة الهدف من رمية واحدة.

ومنه $\mathbb{P}(B|A_1) = 0,8$ ، $\mathbb{P}(B|A_2) = 0,5$

① احتمال أن يكون القناص البارع

$$\mathbb{P}(A_1|\bar{B}) = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap \bar{B})}{\mathbb{P}(\bar{B})} = \frac{\mathbb{P}(\bar{B})\cdot\mathbb{P}(\bar{B}|A_1)}{1-\mathbb{P}(B)}$$

$$= \frac{(1-\mathbb{P}(B))\cdot(1-\mathbb{P}(B|A_1))}{1-\mathbb{P}(B)}$$

نحسب $\mathbb{P}(B)$

$$B = B \cap \Omega$$
$$= B \cap (A_1 \cup A_2) = \underbrace{(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2)}_{\text{حدثان متنافيان}}$$

ومنه

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A_1) + \mathbb{P}(B \cap A_2)$$
$$= \mathbb{P}(A_1)\cdot\mathbb{P}(B|A_1) + \mathbb{P}(A_2)\cdot\mathbb{P}(B|A_2)$$
$$= \frac{1}{2}\times 0,8 + \frac{1}{2}\times 0,5.$$

نعوض في $\mathbb{P}(A_1|\bar{B})$.

② المطلوب حساب $\mathbb{P}(A_1|\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap B_3)$.

$$\mathbb{P}(A_c \mid \overline{B_1} \cap B_2 \cap B_3) = \frac{\mathbb{P}(A_c \cap (\overline{B_1} \cap B_2 \cap B_3))}{\mathbb{P}(\overline{B_1} \cap B_2 \cap B_3)}$$

$\mathbb{P}(\overline{B_1} \cap B_2 \cap B_3) = \mathbb{P}(\overline{B_1}) \cdot \mathbb{P}(B_2) \cdot \mathbb{P}(B_3)$ لأن الأحداث B_1, B_2, B_3 مستقلة

$= (1 - \mathbb{P}(B))[\mathbb{P}(B)]^2$.

حل التمرين الثامن

- المطلوب تحديد الفترة الزمنية التي صنعت فيها الآلة الحاسبة المختارة عشوائيا.

لتكن الأحداث: A = الآلة الحاسبة المسحوبة صنعت في النهار.

B = " " " " المساء

C : " " " " الليل

D : " " " فيها عيب.

Ω تمثل مجموعة الآلات الحاسبة المنتجة في المصنع.

إذن

$\Omega = A \cup B \cup C$ و $\begin{cases} A \cap B = \emptyset \\ A \cap C = \emptyset \\ B \cap C = \emptyset \end{cases}$

أي أن $\{A, B, C\}$ تشكل تجزئة للمجموعة Ω.

$$D = D \cap \Omega = D \cap (A \cup B \cup C) = \underbrace{(D \cap A) \cup (D \cap B) \cap (D \cap C)}_{\text{أحداث متنافية}}$$

إذن:

$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(A \cap D) + \mathbb{P}(B \cap D) + \mathbb{P}(D \cap C)$

$= \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(D \mid A) + \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(D \mid B) + \mathbb{P}(C) \cdot \mathbb{P}(D \mid C)$

$\mathbb{P}(A) = 0{,}4,\ \mathbb{P}(B) = 0{,}3,\ \mathbb{P}(C) = 0{,}3$.

$\mathbb{P}(D \mid A) = 0{,}02,\ \mathbb{P}(D \mid B) = \mathbb{P}(D \mid C) = 0{,}03$.

لتحديد الفترة التي انتجت فيها الآلة الحاسبة المعطوبة نحسب الاحتمالات

$$P(A|D),\ P(B|D),\ P(C|D)$$

ثم نقارن بينها ونختار الفترة ذات الاحتمال الأكبر من بينها .

السؤال التاسع / يترك للطالب