Solution Série 2 (ARMA)

Exercice1

On a le processus $AR(1)$ suivant: $X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$.

1. La condition de stationnarité dépend des solutions du polynôme caractéristique

$$1 - \varphi_1 z = 0$$

la solution est $z = \frac{1}{\varphi_1}$,cette solution doit être en valeur absolue supérieur à 1 c.à.d $\left|\frac{1}{\varphi_1}\right| > 1 \Longleftrightarrow |\varphi_1| < 1$.

2. La variance:

$$\begin{aligned} V(X_t) &= V(\varphi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t) \\ &= \varphi_1^2 V(X_{t-1}) + V(\varepsilon_t) \end{aligned}$$

d'où

$$V(X_t) = \frac{\sigma^2}{1 - \varphi_1^2}$$

3. Calcul de γ_h :

$$\gamma_h = \varphi_1 \gamma_{h-1}$$

par itération on obtient

$$\gamma_h = \varphi_1^h \gamma_0$$

où $\gamma_0 = V(X_t)$.

$$\lim \gamma_h = 0 \text{ quand } h \ \to \infty.$$

4. Lautocorrélation partielle

$$\begin{aligned} r_1 &= \rho_1 \\ &= \frac{\gamma_1}{\gamma_0} \\ &= \varphi_1. \end{aligned}$$

5. La prévision pour $h = 1$

$$\begin{aligned} \widehat{X}_t(1) &= E(X_{t+1}/I_t) \\ &= \varphi_1 X_t. \end{aligned}$$

Exercice 2

On a le processus $AR(2)$ suivant: $X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$.

1. γ_1 et γ_2 en fonction de γ_0.

D'aprés l'équation

$$\gamma_h = \varphi_1 \gamma_{h-1} + \varphi_2 \gamma_{h-2}$$

d'où

$$\gamma_1 = \varphi_1 \gamma_0 + \varphi_2 \gamma_1 \Longrightarrow \gamma_1 = \frac{\varphi_1}{1 - \varphi_2} \gamma_0$$

et

$$
\begin{aligned}
\gamma_2 &= \varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_0 \\
&= \left(\frac{\varphi_1^2}{1-\varphi_2} + \varphi_2\right)\gamma_0
\end{aligned}
$$

2. $X_t = 1.5X_{t-1} - 0.56X_{t-2} + \varepsilon_t$
Stationnarité? Le polynome caractéristique

$$1 - 1.5z + 0.56z^2 = 0$$

$\Delta = 0.01 \Longrightarrow z_1 = 1.25$ et $z_2 = 1.42$ donc le processus est stationnaire.
a. La variance: on a $\gamma_1 = 0.96\gamma_0$ et $\gamma_2 = 0.88\gamma_0$:

$$
\begin{aligned}
\gamma_0 &= 1.5\gamma_1 - 0.56\gamma_2 + \sigma^2 \Longrightarrow (1 - 1.5\times 0.96 + 0.56\times 0.88)\,\gamma_0 = \sigma^2 \\
&\Longrightarrow \gamma_0 = 20\sigma^2.
\end{aligned}
$$

d'où $\gamma_1 = 19.2\sigma^2$ et $\gamma_2 = 17.6\sigma^2$.
3. La prévision

$$\widehat{X}_t(1) = 1.5X_t - 0.56X_t$$

Exercice 3
On a le processus $MA(1)$ suivant: $X_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1}$
1. Stationnarité?
Les processus MA sont stationnaires parce qu'ils sont formés du bruit blanc qui est stationnaire.
2. La variance

$$
\begin{aligned}
V(X_t) &= V(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1}) \\
&= V(\varepsilon_t) + \theta_1^2 V(\varepsilon_{t-1}) \\
&= 1 + \theta_1^2
\end{aligned}
$$

3. γ_1?

$$
\begin{aligned}
\gamma_1 &= cov(X_t, X_{t-1}) \\
&= E(X_t X_{t-1}) \\
&= E((\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1} - \theta_1\varepsilon_{t-2})) \\
&= E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}) - \theta_1 E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-2}) - \theta_1 E\left(\varepsilon_{t-1}^2\right) + \theta_1^2 E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2}) \\
&= -\theta_1\sigma^2
\end{aligned}
$$

4. La prévision

$$\widehat{X}_t(1) = -\theta_1\varepsilon_t$$