حلول تمارين السلسلة الرابعة

متغيرات!

حل التمرين الأول:

- حساب $E(2X+4Y)$, $Var(2X+4Y)$, $\sigma(2X+4Y)$, $E(X.Y)$, $E(X^2)$

$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x.\mathbb{P}(X=x) = 1\times0.7 + 2\times0.1 + 4\times0.2 = \boxed{1.7}$

$E(Y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} y.\mathbb{P}(Y=y) = 1\times0.2 + 4\times0.4 + 6\times0.1 + 7\times0.3 = \boxed{4.5}$

$E(X^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^2.\mathbb{P}(X=x) = 1^2\times0.7 + 2^2\times0.1 + 4^2\times0.2 = \boxed{4.31}$

$E(Y^2) = \sum_{y \in Y(\Omega)} y^2.\mathbb{P}(Y=y) = 1^2\times0.2 + 4^2\times0.4 + 6^2\times0.1 + 7^2\times0.3 = \boxed{24.9}$

$E(X.Y) = E(X).E(Y) = 1.7\times4.5 = \boxed{7.65}$ لأن X و Y مستقلان

$E(2X+4Y) = 2E(X) + 4E(Y) = 2\times1.7 + 4\times4.5 = \boxed{21.4}$

$Var(2X+4Y) = 2^2 Var(X) + 4^2 Var(Y) = 4\times1.41 + 16\times4.65 = \boxed{80.04}$

$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 4.3 - (1.7)^2 = \boxed{1.41}$

$Var(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 24.9 - (4.5)^2 = \boxed{4.65}$

$\sigma(2X+4Y) = \sqrt{Var(2X+4Y)} = \sqrt{80.04}$

ب- إيجاد قانون احتمال X+Y و X.Y.

ب1) قانون احتمال X+Y

ليكن $Z = X+Y$ القيم الممكنة لـ Z هي

$Z(\Omega) = \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

$\mathbb{P}(Z=2) = \mathbb{P}(X=1, Y=1) = \mathbb{P}(X=1).\mathbb{P}(Y=1)$ لأن X و Y مستقلان

$= 0.7\times0.2 = \boxed{0.14}$

$\mathbb{P}(Z=3) = \mathbb{P}(X=2, Y=1) = \mathbb{P}(X=2).\mathbb{P}(Y=1) = 0.1\times0.2 = \boxed{0.02}$

$\mathbb{P}(Z=5) = \mathbb{P}(X=1, Y=4) + \mathbb{P}(X=4, Y=1) = 0.32$

Scanned by CamScanner

$\mathbb{P}(Z=6) = \mathbb{P}(X=2, Y=4) = \boxed{0.04}$

$\mathbb{P}(Z=7) = \mathbb{P}(X=1, Y=6) = \boxed{0.07}$

$\mathbb{P}(Z=8) = \mathbb{P}(X=1, Y=7) + \mathbb{P}(X=2, Y=6) + \mathbb{P}(X=4, Y=4)$

$\boxed{= 0.31}$

$\mathbb{P}(\cancel{Z}=9) = \mathbb{P}(X=2, Y=7) = \boxed{0.03}$

$\mathbb{P}(\cancel{Z}=10) = \mathbb{P}(X=4, Y=6) = \boxed{0.02}$

$\mathbb{P}(\cancel{Z}=11) = \mathbb{P}(X=4, Y=7) = 0.06$

نلاحظ أن

$\mathbb{P}(Z=2) + \mathbb{P}(Z=3) + \mathbb{P}(Z=5) + \mathbb{P}(Z=6) + \mathbb{P}(Z=7) + \mathbb{P}(Z=8)$
$+ \mathbb{P}(Z=9) + \mathbb{P}(Z=10) + \mathbb{P}(Z=11) = 1$

وعليه نكون قد عرفنا قانون احتمال $X+Y$.

ب) قانون احتمال $X.Y$.

ليكن $M = X.Y$ ومنه القيم الممكنة للمتغير العشوائي M هي

$M(\Omega) = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 12, 14, 16, 24, 28\}$

$\mathbb{P}(M=1) = \mathbb{P}(X=1, Y=1) = \mathbb{P}(X=1) \cdot \mathbb{P}(Y=1) = \boxed{0.14}$

$\mathbb{P}(M=2) = \mathbb{P}(X=2, Y=1) = \boxed{0.02}$

$\mathbb{P}(M=4) = \mathbb{P}(X=1, Y=4) + \mathbb{P}(X=4, Y=1) = \boxed{0.32}$

$\mathbb{P}(M=6) = \mathbb{P}(X=1, Y=6) = \boxed{0.07}$

$\mathbb{P}(M=7) = \mathbb{P}(X=1, Y=7) = \boxed{0.21}$

$\mathbb{P}(M=8) = \mathbb{P}(X=2, Y=4) = \boxed{0.04}$

$\mathbb{P}(M=12) = \mathbb{P}(X=2, Y=6) = \boxed{0.01}$

$\mathbb{P}(M=14) = \mathbb{P}(X=2, Y=7) = \boxed{0.03}$

$\mathbb{P}(M=16) = \mathbb{P}(X=4, Y=4) = \boxed{0.08}$

$\mathbb{P}(M=24) = \mathbb{P}(X=4, Y=6) = \boxed{0.02}$

$\mathbb{P}(M=28) = \mathbb{P}(X=4, Y=7) = \boxed{0.06}$

وبما أن

$\mathbb{P}(M=1) + \mathbb{P}(M=2) + \mathbb{P}(M=4) + \mathbb{P}(M=6) + \mathbb{P}(M=7) + \mathbb{P}(M=8)$
$+ \mathbb{P}(M=12) + \mathbb{P}(M=14) + \mathbb{P}(M=16) + \mathbb{P}(M=24) + \mathbb{P}(M=28) = 1$

نكون قد عرفنا قانون احتمال $X.Y$.

Scanned by CamScanner

2) حساب: $E(X^2)$, $E(X.Y)$, $\sigma(2X+4Y)$, $Var(2X+4Y)$, $E(2X+4Y)$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx=\int_0^1 x\,dx=\boxed{\frac{1}{2}}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx=\int_0^1 x^2\,dx=\boxed{\frac{1}{3}}$$

$$Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\boxed{\frac{1}{12}}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\,dy=\int_{-1}^0 y(y+1)\,dy+\int_0^1 y(1-y)\,dy=\boxed{0}$$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y)\,dy=\int_{-1}^0 y^2(y+1)\,dy+\int_0^1 y^2(1-y)\,dy$$

$$=\boxed{\frac{1}{12}}$$

$$Var(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=\frac{1}{12}-0=\boxed{\frac{1}{12}}$$

$E(X.Y)=E(X).E(Y)=0$ لأن X و Y مستقلان

$$E(2X+4Y)=2E(X)+4E(Y)=\boxed{1}$$

$$Var(2X+4Y)=4Var(X)+16Var(Y)=\frac{4}{12}+\frac{16}{12}=\boxed{\frac{5}{3}}$$

$$\sigma(2X+4Y)=\sqrt{\frac{5}{3}}$$

حل التمرين الثاني

X و Y متغيرات عشوائيان مستقلان

و ليكن $Z=(X,Y)$

وعليه التوقع الرياضي $E(Z)$ للمتغير العشوائي Z ثنائي البعد هو الشعاع ثنائي البعد:

$$E(Z)=(E(X),E(Y))$$
$$=(3.4,\ 2.4)$$

مصفوفة التغاير التباين هي

بما أن $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$ و $Cov(X,Y)=0$ لأن X و Y مستقلان

Scanned by CamScanner

$$\begin{pmatrix} Var(X) & Cov(X,Y) \\ Cov(Y,X) & Var(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,25 & 0 \\ 0 & 3.04 \end{pmatrix}$$

حل السؤال الثالث:

لدينا

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} (1-e^{-x})(1-e^{-y}) & , \text{Si } x \geq 0 \wedge y \geq 0 \\ 0 & , \text{Sinon.} \end{cases}$$

① حساب $f_{(X,Y)}$ ، f_x ، f_y + الاستنتاج

لدينا

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{(X,Y)}(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial F_{(X,Y)}(x,y)}{\partial y}\right]$$

$$= \begin{cases} e^{-x} \cdot e^{-y} & , \text{Si } x \geq 0 \wedge y \geq 0 \\ 0 & , \text{Sinon} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy = \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{-y}\,dy = \begin{cases} e^{-x} & , \text{Si } x \geq 0 \\ 0 & , \text{Sinon} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{-y}\,dx = \begin{cases} e^{-y} & , \text{Si } y \geq 0 \\ 0 & , \text{Sinon} \end{cases}$$

نلاحظ أن $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ ومنه نستنتج استقلال X و Y.

② حساب F_X ، F_Y ، $f_{X|Y}$ ، $f_{Y|X}$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \begin{cases} 0 & , \text{Si } x < 0 \\ 1-e^{-x} & , \text{Si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)\,dt = \begin{cases} 0 & , \text{Si } y < 0 \\ 1-e^{-y} & , \text{Si } y \geq 0 \end{cases}$$

$f_{X|Y} = f_X$ و $f_{Y|X} = f_Y$

لأن X و Y مستقلان.

ومنه $Cov(X,Y) = 0$

$\rho(X,Y) = 0.$

Scanned by CamScanner

حل التمرين الرابع :

1) تعيين قيمة β :

لدينا $\left(\mathbb{P}(X=x, Y=y)\right)_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$ تعرف قانون احتمال الثنائي (X,Y) فإن

$\beta > 0$ و

$$\sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X=x, Y=y) = 1$$

وعليه

$$\mathbb{P}(X=-2, Y=-1) + \mathbb{P}(X=-2, Y=1) + \mathbb{P}(X=-2, Y=2) + \mathbb{P}(X=0, Y=-1) + \mathbb{P}(X=0, Y=1) + \mathbb{P}(X=0, Y=2) + \mathbb{P}(X=1, Y=-1) + \mathbb{P}(X=1, Y=1) + \mathbb{P}(X=1, Y=2) = 1$$

ومنه نجد $\boxed{\beta = 0.05}$

2) إيجاد القانونين الهامشيين لكل من X و Y.

بالنسبة لـ X :

$$\mathbb{P}(X=x_i) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{3} (X=x_i, Y=y_j)\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{3} \mathbb{P}(X=x_i, Y=y_j)$$

$$\mathbb{P}(X=-2) = \mathbb{P}(X=-2, Y=-1) + \mathbb{P}(X=-2, Y=1) + \mathbb{P}(X=-2, Y=2) = \boxed{0{,}45}$$
$$\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(X=0, Y=-1) + \mathbb{P}(X=0, Y=1) + \mathbb{P}(X=0, Y=2) = \boxed{0{,}25}$$
$$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(X=1, Y=-1) + \mathbb{P}(X=1, Y=+1) + \mathbb{P}(X=1, Y=2) = \boxed{0{,}3}$$

بما أن $\mathbb{P}(X=-2) + \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) = 1$

فإننا نكون قد عينا قانون الاحتمال الهامشي لـ X.

بالنسبة لـ Y

$$\mathbb{P}(Y=y_j) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{3} (X=x_i, Y=y_j)\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(X=x_i, Y=y_j)$$

$$\mathbb{P}(Y=-1) = \mathbb{P}(X=-2, Y=-1) + \mathbb{P}(X=0, Y=-1) + \mathbb{P}(X=1, Y=-1) = \boxed{0{,}5}$$

$$\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(X=-2, Y=1) + \mathbb{P}(X=0, Y=+1) + \mathbb{P}(X=1, Y=+1) = \boxed{0{,}3}$$

Scanned by CamScanner

$\mathbb{P}(Y=2) = \mathbb{P}(X=-2, Y=2) + \mathbb{P}(X=0, Y=2) + \mathbb{P}(X=1, Y=2)$
$= \boxed{0,2}$

علما أن $\mathbb{P}(Y=-1) + \mathbb{P}(Y=1) + \mathbb{P}(Y=2) = 1.0$
وبذلك نكون قد عينا قانون الاحتمال الهامشي لـ Y.

③ بيان أن X و Y غير مستقلين

لدينا من أجل $X=-2$ و $Y=-1$

$\mathbb{P}(X=-2, Y=-1) = 0.2$ و $\mathbb{P}(X=-2) \cdot \mathbb{P}(Y=-1) = 0,45 \times 0.5$
$= 0.225$

$\exists (x_i, y_j) = (-2, -1) ; \mathbb{P}(X=2, Y=-1) \neq \mathbb{P}(X=2) \times \mathbb{P}(Y=-1)$

ومنه X و Y غير مستقلين.

④ حساب القانون الشرطي لـ X علما $Y=1$.

$\mathbb{P}(X=-2 / Y=1) = \frac{\mathbb{P}(X=-2, Y=1)}{\mathbb{P}(Y=1)} = \frac{0.2}{0.3} = \frac{2}{3}$

$\mathbb{P}(X=0 / Y=1) = \frac{\mathbb{P}(X=0, Y=1)}{\mathbb{P}(Y=1)} = \frac{0.1}{0.3} = \frac{1}{3}$.

$\mathbb{P}(X=1 / Y=1) = \frac{\mathbb{P}(X=1, Y=1)}{\mathbb{P}(Y=1)} = \frac{0}{3} = 0$.

مع العلم أن $\mathbb{P}(X=-2/Y=1) + \mathbb{P}(X=0/Y=1) + \mathbb{P}(X=1/Y=1) = 1$
وبذلك نكون قد عينا القانون الاحتمالي الشرطي لـ $X/Y=1$

استنتاج $E(X/Y=1)$

$E(X/Y=1) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \, \mathbb{P}(X=x / Y=1)$
$= -2 \cdot \mathbb{P}(X=-2/Y=1) + 0 \cdot \mathbb{P}(X=0/Y=1) + 1 \cdot \mathbb{P}(X=1/Y=1)$
$= -\frac{4}{3}$

⑤ حساب $E(XY)$ ثم $Cov(X,Y)$

$E(XY) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} xy \, \mathbb{P}(X=x, Y=y) = \boxed{-0,2}$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)\cdot E(Y)$$

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X = x) = -0{,}6.$$

$$E(Y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} y\,\mathbb{P}(Y = y) = 0.2$$

$$Cov(X,Y) = -0{,}2 - (-0.6)(0.2) = -0{,}08$$

حل التمرين الخامس:

① حساب قيمة k التي تجعل f كثافة احتمال

$f_{(X,Y)}$ كثافة احتمال $\Leftrightarrow$
$$\begin{cases} 1)\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f_{(X,Y)}(x,y) \geq 0 \\ 2)\ \int_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy = 1. \end{cases}$$

وعليه $f_{(X,Y)} \geq 0 \Rightarrow k \geq 0$ و

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy\,dx = 1 \Leftrightarrow \int_1^5\int_{-1}^{1} k\left(\frac{1}{x^2} + y^2\right)dy\,dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{k = \frac{15}{64}}$$

② إيجاد كثافتي الاحتمال الهامشيتين

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \begin{cases} 0 & , \text{si } x < 1 \vee x > 5 \\ \int_{-1}^{1} \frac{15}{64}\left(\frac{1}{x^2} + y^2\right)dy & , \text{si } 1 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & , \text{si } x < 1 \vee x > 5 \\ \frac{15}{32}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3}\right) & , \text{si } 1 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{si } y<-1 \vee y>1 \\ \int_1^5 \frac{15}{64}\left(\frac{1}{x^2}+y^2\right)dx, & \text{si } -1\le y\le 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{si } y<-1 \vee y>1 \\ \frac{15}{16}\left(y^2+\frac{1}{5}\right), & \text{si } -1\le y\le 1 \end{cases}$$

3- هل X و Y مستقلان

بما أن

$$f_{(X,Y)}(x,y) \neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$$

فإن X و Y غير مستقلين

4- حساب Cov(X,Y)

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)\cdot E(Y)$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_1^5 \frac{15}{32}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3}x\right)dx = \frac{15}{32}(\ln 5+4).$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\,dy = \int_{-1}^{1} \frac{15}{16}\left(y^3+\frac{1}{5}y\right)dy = 0$$

$$E(X\cdot Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\, f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy = 0$$

إذن

$$Cov(X,Y) = 0$$

مع أن X و Y غير مستقلين

Scanned by CamScanner