Université de Biskra
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Concours d'entrée en Doctorat de Mathématiques Appliquées

Epreuve de Probabilités

Exercice 1 (6 points)

1) Soit X une variable aléatoire L^p-intégrable, avec $p \geq 1$. Montrer que pour tout $\lambda > 0$ on a

$$P\left(|X| \geq \lambda\right) \leq \frac{E\left[|X|^p\right]}{\lambda^p}.$$

2) Soit X une variable aléatoire L^2-intégrable. Montrer que pour tout $\lambda > 0$ on a

$$P\left(|X - E\left[X\right]| \geq \lambda\right) \leq \frac{Var\left[X\right]}{\lambda^2}.$$

3) On jette 3600 fois un dé et on appelle S le nombre de fois où apparaît le numéro 1. Quelle est la loi de S ? Donner sa moyenne et sa variance.

Exprimer sous forme d'une somme la probabilité que ce nombre soit compris strictement entre 480 et 720. Grâce à l'inégalité de *Tchebychev*, minorer cette probabilité.

Exercice 2 (8 points)

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi gaussienne de moyenne 0 et de variance 1. On définit la suite

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} c^k X_k \text{ avec } c \text{ une constante telle que } -1 < c < 1.$$

1) Montrer que la suite (S_n) est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)$ des X_i, définie par

$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, ..., X_n)$

2) Montrer qu'il existe une variable aléatoire S telle que la martingale (S_n) converge presque surement vers S.

3) Montrer en utilisant la fonction caratéristique que la variable aléatoire S suit une loi gaussienne de moyenne 0 et de variance $\dfrac{1}{1-c^2}$.

4) Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi gaussienne de moyenne 0 et de variance 1. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la suite $Y_n = \exp\left\{\alpha S_n - \dfrac{n\alpha^2}{2}\right\}$ est une martingale.

Exercice 3 (6 points)

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, $(X, \mathcal{X})$ un espace mesurable et φ une application mesurable de Ω dans X . On définit la mesure image de μ par l'application φ par:

$\forall A \in X : \mu_\varphi(A) = \mu(\varphi^{-1}(A))$

1- Montrer que μ_φ est une mesure sur $(X, \mathcal{X})$.

2- Montrer que pour toute fonction mesurable positive $f : X \to \mathbb{R}$ on a

$\int_X f.d\mu_\varphi = \int_\Omega f \circ \varphi.d\mu.$