Approximation de Certaines Lois.

1) Approximation d'une loi hypergéométrique par une loi binomiale.

Théorème: Soit $X \sim \mathcal{H}(N,n,p)$ alors $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ quand $N \longrightarrow +\infty$.

i.e $X \sim \mathcal{H}(N,n,p) \xrightarrow[N \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{B}(n,p)$.

Preuve: Soit $X \sim \mathcal{H}(N,n,p)$, alors

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{C_{Np}^{k}\, C_{Nq}^{(n-k)}}{C_N^n}$$

Posons: $Np = M$ alors $Nq = N-M$. $\Rightarrow$

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{C_M^k \cdot C_{N-M}^{(n-k)}}{C_N^n}$$

$$= \frac{\dfrac{M!}{k!\,(M-k)!} \times \dfrac{(N-M)!}{(n-k)!\,(N-M-n+k)!}}{\dfrac{N!}{n!\cdot(N-n)!}}$$

$$= \frac{M!}{k!\,(M-k)!} \cdot \frac{(N-M)!}{(n-k)!\,(N-M-n+k)!} \cdot \frac{n!\,(N-n)!}{N!}$$

$$= C_n^k \cdot \frac{M\cdot(M-1)\cdots(M-k+1)\cdot(N-M)(N-M-1)\cdots(N-M-n+k+1)}{N(N-1)\cdots(N-n+1)}.$$

$$= C_n^k \prod_{i=0}^{k-1} \frac{M-i}{N-i} \cdot \prod_{j=0}^{n-k-1} \frac{N-M-j}{N-k-j}$$

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{M-i}{N-i} = \lim_{N \to +\infty} \frac{\frac{M}{N} - i/N}{1 - i/N} = p.$$

" Comme $M = Np \Rightarrow \frac{M}{N} = p$ "

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{N-M-j}{N-k-j} = \lim_{N \to +\infty} \frac{1 - p - j/N}{1 - k/N - j/N} = 1-p$$

Finalement $\lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}(X = k) = C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k}.$

Approximation **

$$\boxed{\text{On fait cette approximation à partir de } N > 10n}$$

2) Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson.

Théorème: Soient $n \geq 1$, $0 < p < 1$ et $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ supposons que $np \xrightarrow[\substack{n \to +\infty \\ p \to 0}]{} \lambda$, alors

$$X \sim \mathcal{B}(n,p) \xrightarrow[n \to +\infty,\, p \to 0]{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda).$$

Preuve:

Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ alors

$$\mathbb{P}(X=k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n\}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X=k) = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{n^k (1-\frac{1}{n}) \cdot (1-\frac{2}{n}) \cdots (1-\frac{k-1}{n})}{k!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{(n \cdot p)^k}{k!} \cdot (1-\frac{1}{n}) \cdots (1-\frac{k-1}{n}) \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{(n \cdot p)^k}{k!} \cdot (1-\frac{1}{n}) \cdots (1-\frac{k-1}{n}) \cdot (1-p)^n \cdot (1-p)^{-k}$$

alors pour n assez grand On peut remplacer p par $\frac{\lambda}{n}$, alors

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{(np)^k}{k!} \cdot (1-\frac{1}{n}) \cdots (1-\frac{k-1}{n}) \cdot (1-\frac{\lambda}{n})^n (1-\frac{\lambda}{n})^{-k}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$ puisque $$\lim_{n \to +\infty} (1-\frac{\lambda}{n})^n = e^{-\lambda}$$

et donc $X \xrightarrow[\substack{n \to +\infty \\ p \to 0}]{} \mathcal{P}(\lambda)$

Approximation **

On fait cette approximation si :

* $p < 0{,}4$ et $n = 3$ (ce qui fait $np < 1{,}2$)
* $p < 0{,}3$ et $n = 30$ (ce qui fait $np < 9$)
* $p < 0{,}2$ et $n = 300$ (ce qui fait $np < 60$)
* $0 < np < 10$
* $p < 0{,}1$ et $n \geq 30$
* $np \leq 10$ et $n \geq 1500p$.

3) Approximation d'une loi de Poisson Par une loi normale.

Théorème :

Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors

$$Y = \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Preuve : Soit $u \in \mathbb{R}$.

$\varphi_X(u) = e^{\lambda(e^{iu} - 1)}$, alors

$$\varphi_Y(u) = \mathbb{E}\left(e^{iuY}\right) = \mathbb{E}\left(e^{iu\left(\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)}\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(e^{iu\frac{X}{\sqrt{\lambda}}} \cdot e^{-iu\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda}}}\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(e^{iu\frac{X}{\sqrt{\lambda}}}\right) \cdot e^{-iu\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda}}} = \varphi_X\left(\frac{u}{\sqrt{\lambda}}\right) \cdot e^{-iu\sqrt{\lambda}}$$

$$= e^{\lambda(e^{iu/\sqrt{\lambda}} - 1)} \cdot e^{-iu\sqrt{\lambda}}$$

$$\Rightarrow \ln \varphi_Y(u) = \lambda\left(e^{iu/\sqrt{\lambda}} - 1\right) - iu\sqrt{\lambda}$$

$$\underset{0}{\overset{D.L}{\sim}} \lambda\left(1 + \frac{iu}{\sqrt{\lambda}} + \frac{(iu)^2}{2\sqrt{\lambda}^2} - 1\right) - iu\sqrt{\lambda}$$

$$= \lambda \cdot \frac{(iu)^2}{2\sqrt{\lambda}^2} = \frac{-u^2}{2}$$

$$\Rightarrow \varphi_Y(u) = e^{-\frac{u^2}{2}} \Rightarrow Y \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Approximation **

On fait cette approximation si $\lambda > 15$.

4) Approximation d'une loi binomiale par une loi normale.

Théorème de Moivre-Laplace.

Soit $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X - np}{\sqrt{npq}} \leq x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

C-à-d : si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ alors X converge vers une loi normale de paramètre np et npq.

Approximation **

On fait cette approximation si :

* $n \geq 30$, $np \geq 15$ et $nq \geq 5$.
* $npq > 9$ ou $npq > 18$
* $np > 9$ et $p < 1/2$