

Examen final

Questions de cours. [3 pts]

1. Citer un avantage et un inconvénient de la méthode de Monte-Carlo pour le calcul d'intégrales.
2. Citer le théorème central limite et dire son rôle dans la méthode de Monte Carlo.
3. Supposons *le seul générateur* qu'on a est un générateur physique(basé sur un phénomène quantique) permet de simuler des variables indépendantes de loi *exponentielle de paramètre 1*. Comment simuler les autres lois de probabilités?

Exercice 1. [3 pts] Soit la densité f donné par

$$f(x) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+3)^2}{8}} + 2e^{-3x} \mathbf{1}_{[0, \infty[}(x).$$

Donner une méthode de simulation de f , en disposant de seulement un générateur de loi uniforme $[0, 1]$ (*runif*)

Exercice 2. [5 pts] Soit la densité de probabilité d'une loi $G(b)$ de paramètre $b \in \mathbb{R}_+$.

$$f(x) = C|x|e^{-bx^2}.$$

1. Trouver la constante de normalisation C en fonction de b .
2. Donner un algorithme pour simuler la loi de $G(1)$ en se basant sur la méthode d'inversion.
3. Dédurre une méthode pour simuler $G(b)$ en se basant sur $G(1)$ et justifier votre méthode.
4. Donner une méthode de simulation de la densité donné par

$$f_m(x) = M|x| \sum_{k=1}^m e^{-\frac{x^2}{k^2}} \quad \text{où } m \in \mathbb{N}^*.$$

Exercice 3. [5 pts] Soit la densité par

$$f(x) = Mxe^{-x} \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(x).$$

1. Peut-on la simuler par acceptation-rejet ? Comment ? Qu'elle est la densité g ? le c optimal ?
2. Donner le programme en langage R, qui implémente la question 1.
3. Peut-on estimer(approximer) la constante M par Monte Carlo ? Comment?

Exercice 4. [3 pts]

1. Expliquer comment approximer l'intégrale J par Monte-Carlo, de 2 manières différentes.

$$J = \int_1^4 \int_0^4 \frac{e^{-2y}}{x^2 + 1} dx dy$$

Exercice 5. [3 pts] Soit le programme suivant en langage R.

```
#####
n=1e4; X=rep(0,n)
for(k in 1:n){ V=runif(1);
while(V < 2/3){ V=runif(1) }
X[k]=V
}
#####
```



Programme R.

1. Quelle est la loi qu'on simule par ce programme ? Montrer le !
2. Modifier le programme, en ajoutant les instructions nécessaires pour calculer un intervalle de confiance à 97% du taux d'acceptation de cet algorithme. Que vaut le taux d'acceptation théorique ?