UMBB / Faculté des sciences
Département de Maths

Master : MSS / S3
Matière : Processus stochastiques 1.

Correction de la série 2.

Exercice 2 :

2) Si un jour il neige, le temps le plus probable pour le lendemain est la neige car $P_{NN} = 1/2 > P_{NB} > P_{NP}$.

Exercice 3 :

2) La chaîne est irréductible car tous les états communiquent entre eux.
- La chaîne est récurrente positive car elle est définie sur un nombre fini d'états.
- Période : $d(i) = \text{pgcd}\{n \geq 1 ; P_{ii}^{(n)} > 0\}$.

$P_{11} > 0$, $P_{11}^{(2)} > 0$, $P_{11}^{(3)} > 0$, ... donc $d(1) = \text{pgcd}\{1, 2, 3, \dots\} = 1$.

Comme la chaîne est irréductible alors $d(1) = d(2) = d(3) = 1$.

Donc la chaîne est ergodique.

1) La probabilité cherchée est $p = P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1, \dots, X_{n-1} = 1, X_n \neq 1 / X_0 = 1)$

$p = P(X_1 = 1 / X_0 = 1) P(X_2 = 1 / X_1 = 1) \dots P(X_n \neq 1 / X_{n-1} = 1)$ car X_n une chaîne de Mark

$= P_{11}^{n-1} P(X_n \neq 1 / X_{n-1} = 1) = P_{11}^{n-1} \left(P(X_n = 2 / X_{n-1} = 1) + P(X_n = 3 / X_{n-1} = 1) \right)$

$= P_{11}^{n-1} (P_{12} + P_{13}) = (1/2)^n$

3) Par le théorème ergodique, $\lim_{n \to \infty} P^{(n)} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{pmatrix}$

où $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ est la distribution stationnaire qui doit satisfaire le système d'équation linéaire suivant :

$$\begin{cases} 1/2\,\pi_1 + 1/2\,\pi_3 = \pi_1 \\ 1/2\,\pi_1 + 1/2\,\pi_2 + 1/2\,\pi_3 = \pi_2 \\ 1/2\,\pi_2 = \pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \pi_1 = 1/4,\ \pi_2 = 1/2 \text{ et } \pi_3 = 1/4.$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} P^{(n)} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.

1. Notons la probabilité $P[X_5=3, X_6=1, X_7=3, X_8=3 / X_4=2]$ P

$$P = \frac{P(X_4=2, X_5=3, X_6=1, X_7=3, X_8=3)}{P(X_4=2)}$$

$$= \frac{P(X_4=2)P(X_5=3/X_4=2)P(X_6=1/X_5=3,X_4=2)P(X_7=3/X_6=1,X_5=3,X_4=2)P(X_8=3/X_7=3,X_6=1,X_5=3,X_4=2)}{P(X_4=2)}$$

$$= \frac{\cancel{P(X_4=2)}P(X_5=3/X_4=2)P(X_6=1/X_5=3)P(X_7=3/X_6=1)P(X_8=3/X_7=3)}{\cancel{P(X_4=2)}}$$ car X_n une chaîne de Markov

$$= P(X_5=3/X_4=2)P(X_6=1/X_5=3)P(X_7=3/X_6=1)P(X_8=3/X_7=3)$$

$$= P_{23} \cdot P_{31} \cdot P_{13} \cdot P_{33} = 3/4 \times 4/5 \times 1 \times 1/5 = 12/100$$

2. On calcule $P(X_5 \neq 4, X_4=4, X_3=4, X_2=4, X_1=4 / X_0=4) = q$

$$q = \frac{P(X_0=4, X_1=4, X_2=4, X_3=4, X_4=4, X_5 \neq 4)}{P(X_0=4)}$$

$$= P(X_1=4/X_0=4)P(X_2=4/X_1=4)P(X_3=4/X_4=4)P(X_{\cdot}=4/X_{\cdot}=4)P(X_5 \neq 4/X_4=4)$$

$$= P_{44}^4 \, P(X_5 \neq 4/X_4=4) = P_{44}^{(4)}\left(P(X_5=1/X_4=4)+P(X_5=2/X_4=4)+P(X_5=3/X_4=4)\right)$$

$$= P_{44}^4\left(P_{41}+P_{42}+P_{43}\right) = (1/2)^4 \cdot \left(\frac{1}{5}+\frac{3}{10}\right) = (1/2)^5$$

3. On calcule $P(X_2=4) = \sum_{j \in E} \pi_j(0)\, P_{j4}^{(2)}$

$$= \pi_1(0)P_{14}^{(2)} + \pi_2(0)P_{24}^{(2)} + \pi_3(0)P_{34}^{(2)} + \pi_4(0)P_{44}^{(2)}$$

$$= \frac{1}{4}\left(P_{14}^{(2)} + P_{24}^{(2)} + P_{34}^{(2)} + P_{44}^{(2)}\right).$$

Pour trouver le résultat, On calcule la matrice P^2.

$$P^2 = \begin{pmatrix} 4/5 & 0 & 1/5 & 0 \\ 3/5 & \frac{1}{16} & 27/80 & 0 \\ 4/25 & 0 & \frac{21}{25} & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{9}{40} & 17/40 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Donc $P(X_2=4) = \frac{1}{4}\left(0+0+0+\frac{1}{4}\right) = 1/16$.

Exercice 5. La loi de X_2 est $\pi(2) = \pi(0) P^{(2)}$, $\pi(0) = (0{,}5,\ 0{,}5,\ 0)$

1/ On calcule la matrice $P^2 = P.P = \begin{pmatrix} 0{,}44 & 0{,}18 & 0{,}38 \\ 0{,}4 & 0{,}19 & 0{,}41 \\ 0{,}4 & 0{,}18 & 0{,}42 \end{pmatrix}$

Alors $\pi(2) = (0{,}5,\ 0{,}5,\ 0) \begin{pmatrix} 0{,}44 & 0{,}18 & 0{,}38 \\ 0{,}4 & 0{,}19 & 0{,}41 \\ 0{,}4 & 0{,}18 & 0{,}42 \end{pmatrix} = (0{,}42,\ 0{,}185,\ 0{,}395)$

2/ Calculons $P(X_1 = 2, X_2 = 1 / X_0 = 1) = p$

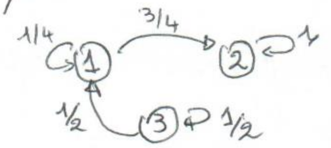
$$p = \frac{P(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 1)}{P(X_0 = 1)} = P(X_1 = 2 / X_0 = 1)\, P(X_2 = 1 / X_1 = 2).$$

$$= P_{12} P_{21} = 0{,}2 \times 0{,}5 = 0{,}1.$$

Exercice 6

Supposons que l'ensemble des états $E = \{1, 2, 3\}$.

Graphe :



On a 3 classes : $C_1 = \{1\}$ classe transitoire.

$C_2 = \{2\}$ classe récurrente et absorbante

$C_3 = \{3\}$ classe transitoire.

Distribution stationnaire

Les états transitoires ne possèdent pas de distribution stationnaire.

La classe C_2 est récurrente donc possède une distribution stationnaire π^{C_2} donnée par $\pi^{C_2} = (0, 1, 0)$.

2) Les valeurs propres: $\det(P - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1/4-\lambda & 3/4 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2-\lambda \end{pmatrix} = 0$

$$\det(P - \lambda I) = (1/2-\lambda)(1-\lambda)(1/4-\lambda) = 0,$$

En résolvant l'équation ci-dessu, On trouve les valeurs propres 1, $1/2$ et $1/4$.

Les vecteurs propres associés aux valeurs propres 1, $1/2$ et $1/4$ sont: donnés respectivement par:

$V_1 = (1,1,1)$, $V_2 = (0,0,1)$, $V_3 = (1,0,-2)$.

3/ Ecrire P sous la forme SDS^{-1},

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$ est la matrice diagonale des valeurs propres

$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ est la matrice des vecteurs propres.

et $S^{-1} = \dfrac{1}{\det S}\, {}^t\mathrm{Com}\, S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

On obtient finalement:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$P^n = SD^nS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1/4)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{n\to\infty} P^n = S \lim_{n\to\infty} D^n S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4) La distribution limite est $\pi = (0, 1, 0)$.

Exercice 7. $E = \{1, 2, 3, 4\}$.

Graphe :
$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "1"] & 2 \arrow[l, "1/2"'] \arrow[r, bend left, "1/2"] & 3 \arrow[l, bend left, "1/2"] \arrow[r, "1/2"] & 4 \arrow[loop right, "1"] \end{tikzcd}$$

classe transitoire : $C_1 = \{2, 3\}$.

classes récurrentes et absorbantes : $C_2 = \{1\}$ et $C_3 = \{4\}$.

On écrit P sous forme canonique :

$$P = \begin{array}{c|cc|cc} & 1 & 4 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 3 & \underbrace{0}_{R} & \underbrace{1/2} & \underbrace{1/2}_{Q} & \underbrace{0} \end{array}$$

Matrice fondamentale : $N = (I - Q)^{-1} = \dfrac{1}{\det(I-Q)}\, {}^t\mathrm{Com}(I-Q)$

On a $(I - Q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(I - Q) = 3/4$, $\mathrm{Com}(I-Q) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$ et ${}^t\mathrm{Com}(I-Q) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$

donc $N = 4/3 \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & 2/3 \\ 2/3 & 4/3 \end{pmatrix}$

2). Probabilités d'absorption : $B = N.R = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

La probabilité d'absorption en $\{4\}$ partant de l'état 2 est $b_{24} = 1/3$.

3) Temps moyens d'absorption : $\begin{pmatrix} t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = N.C = \begin{pmatrix} 4/3 & 2/3 \\ 2/3 & 4/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$