Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Badji Mokhtar-Annaba

Master 1: -Probabité et Statistique
-Actuariat
Série N°3

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien réel standard défini sur un espace probabilisé $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$.

Exercice 1:

Soient S et T deux $t.d'a.$.

Montrer que $S \wedge T$ et $S \vee T$ sont également des $t.d'a.$.

Exercice 2:(formule d'intégration par parties)

Soient X et Y deux semi-martingales.

Montrer que

$$d\left(X_t Y_t\right) = X_t dY_t + Y_t dX_t + dX_t dY_t$$

Indication: Utilisé le fait que

$$X_t Y_t - X_0 Y_0 = \sum_{p=0}^{n-1} \left(X_{\frac{p+1}{n}t} Y_{\frac{p+1}{n}t} - X_{\frac{p}{n}t} Y_{\frac{p}{n}t} \right).$$

Exercice 3:

Soient X une semi-martingale et $F \in C^2\left(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}\right)$.

Ecrire $F\left(t, X_t\right)$ sous forme de semi-martingale.

Exercice 4:

Soit $\left(\widetilde{B}_t\right)_{t\geq 0}$ un processus tel que pour tout $u \in \mathbb{R}$ et pour tout $A \in \mathcal{F}_s$ $(s < t)$

$$\mathbb{E}\left(e^{iu\left(\widetilde{B}_t - \widetilde{B}_s\right)} \mathbf{1}_A\right) = P(A) - \frac{u^2}{2} \int_s^t \mathbb{E}\left(e^{iu\left(\widetilde{B}_\tau - \widetilde{B}_s\right)} \mathbf{1}_A\right) d\tau \quad (*)$$

1) Résoudre l'EDO satisfaite par

$$f^s(t) = \mathbb{E}\left(e^{iu\left(\widetilde{B}_t - \widetilde{B}_s\right)} \mathbf{1}_A\right).$$

2) Montrer que $\left(\widetilde{B}_t\right)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien.

Exercice 5:

Soient X et Y deux semi-martingales tels que $\int_0^t Y_s * dX_s$ soit définie.

Montrer que

$$\int_0^t Y_s * dX_s \underset{L^1}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{\left(Y_{\frac{p+1}{n}t} + Y_{\frac{p}{n}t}\right)}{2} \left(X_{\frac{p+1}{n}t} - X_{\frac{p}{n}t}\right).$$

Solutions

Exercice 1:

On a pour tout $t \geq 0$

$$\{S \wedge T \leq t\} = \{S \leq t\} \cup \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

et

$$\{S \vee T \leq t\} = \{S \leq t\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t,$$

d'où $S \wedge T$ et $S \vee T$ sont des $t.d'a.$.

Généralisation: Si (T_n) est une suite de $t.d'a.$ alors comme

$$\left\{ \underset{n \in \mathbb{N}}{\wedge} T_n \leq t \right\} = \underset{n \in \mathbb{N}}{\cup} \{T_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

et

$$\left\{ \underset{n \in \mathbb{N}}{\vee} T_n \leq t \right\} = \underset{n \in \mathbb{N}}{\cap} \{T_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t,$$

d'où $\underset{n \in \mathbb{N}}{\wedge} T_n$ et $\underset{n \in \mathbb{N}}{\vee} T_n$ sont également des $t.d'a.$

Exercice 2:

On pose

$$dX_t = \alpha_t dB_t + \beta_t dt \text{ et } dX_t = \alpha'_t dB_t + \beta'_t dt$$

On doit montrer

$$X_t Y_t - X_0 Y_0 = \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t dX_s dY_s.$$

On a

$$\begin{aligned} X_t Y_t - X_0 Y_0 &= \sum_{p=0}^{n-1} \left(X_{\frac{p+1}{n}t} Y_{\frac{p+1}{n}t} - X_{\frac{p}{n}t} Y_{\frac{p}{n}t} \right) \\ &= U_n + V_n + W_n, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{p=0}^{n-1} X_{\frac{p}{n}t} \left(Y_{\frac{p+1}{n}t} - Y_{\frac{p}{n}t} \right), \\ V_n &= \sum_{p=0}^{n-1} Y_{\frac{p}{n}t} \left(X_{\frac{p+1}{n}t} - X_{\frac{p}{n}t} \right) \text{ et} \\ W_n &= \sum_{p=0}^{n-1} \left(X_{\frac{p+1}{n}t} - X_{\frac{p}{n}t} \right) \left(Y_{\frac{p+1}{n}t} - Y_{\frac{p}{n}t} \right) \end{aligned}$$

On sait, d'après le cours, que la suite de variables aléatoires (U_n) (resp.(V_n)) converge vers $\int_0^t Y_s dX_s$ (resp.$\int_0^t X_s dY_s$) dans $L^1(\Omega)$. Il suffit alors de montrer que la suite (W_n) converge vers $\int_0^t dX_s dY_s = \int_0^t \alpha_s \alpha'_s ds$ dans $L^1(\Omega)$.

On a, d'après l'identité

$$xy = \frac{1}{4}\left\{(x+y)^2 - (x-y)^2\right\} \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} W_n &= \frac{1}{4}\left\{\sum_{p=0}^{n-1}\left(\left(X_{\frac{p+1}{n}t} + Y_{\frac{p+1}{n}t}\right) - \left(X_{\frac{p}{n}t} + Y_{\frac{p}{n}t}\right)\right)^2\right. \\ &\left. - \sum_{p=0}^{n-1}\left(\left(X_{\frac{p+1}{n}t} - Y_{\frac{p+1}{n}t}\right) - \left(X_{\frac{p}{n}t} - Y_{\frac{p}{n}t}\right)\right)^2\right\}. \end{aligned}$$

On considère les semi-martingales Z et Z' définies par

$$Z_t = X_t + Y_t \text{ et } Z'_t = X_t - Y_t,$$

d'où

$$dZ_t = dX_t + dY_t = (\alpha_t + \alpha'_t)\, dB_t + \left(\beta_t + \beta'_t\right) dt \text{ et } dZ_t dZ_t = (\alpha_t + \alpha'_t)^2\, dt.$$

De même

$$dZ'_t = dX_t - dY_t = (\alpha_t - \alpha'_t)\, dB_t + \left(\beta_t - \beta'_t\right) dt \text{ et } dZ'_t dZ'_t = (\alpha_t - \alpha'_t)^2\, dt.$$

On a alors

$$W_n = \frac{1}{4}\left\{\sum_{p=0}^{n-1}\left(Z_{\frac{p+1}{n}t} - Z_{\frac{p}{n}t}\right)^2 - \sum_{p=0}^{n-1}\left(Z'_{\frac{p+1}{n}t} - Z'_{\frac{p}{n}t}\right)^2\right\}.$$

Or $\sum_{p=0}^{n-1}\left(Z_{\frac{p+1}{n}t} - Z_{\frac{p}{n}t}\right)^2$ (resp.$\sum_{p=0}^{n-1}\left(Z'_{\frac{p+1}{n}t} - Z'_{\frac{p}{n}t}\right)^2$) converge dans $L^1(\Omega)$ vers $\int_0^t (\alpha_s + \alpha'_s)^2\, ds$ (resp.$\int_0^t (\alpha_s - \alpha'_s)^2\, ds$). Ainsi W_n converge vers

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\left\{\int_0^t (\alpha_s + \alpha'_s)^2\, ds - \int_0^t (\alpha_s - \alpha'_s)^2\, ds\right\} &= \int_0^t \left\{\frac{1}{4}\left\{(\alpha_s + \alpha'_s)^2 - (\alpha_s - \alpha'_s)^2\right\}\right\} ds \\ &= \int_0^t \alpha_s \alpha'_s ds = \int_0^t dX_s dY_s. \end{aligned}$$

Exercice 3:

On a $dX_t = \alpha_t dB_t + \beta_t dt$, d'où d'après la formule d'Itô à deux variables:

$$\begin{aligned} dF(t,X_t) &= \frac{\partial F}{\partial t}(t,X_t)\,dt + \frac{\partial F}{\partial x}(t,X_t)\,dX_t + \\ & \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(t,X_t)\,dtdt + 2\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x}(t,X_t)\,dtdX_t + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,X_t)\,dX_t dX_t\right\}. \end{aligned}$$

Comme $dtdt = dtdX_t = 0$ et $dX_t dX = \alpha_t^2 dt$, alors

$$\begin{aligned} dF(t,X_t) &= \frac{\partial F}{\partial t}(t,X_t)\,dt + \frac{\partial F}{\partial x}(t,X_t)\,(\alpha_t dB_t + \beta_t dt) + \frac{\alpha_t^2}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,X_t)\,dt \\ &= \alpha_t \frac{\partial F}{\partial x}(t,X_t)\,dB_t + \left(\frac{\partial F}{\partial t}(t,X_t) + \beta_t \frac{\partial F}{\partial x}(t,X_t) + \frac{\alpha_t^2}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,X_t)\right) dt, \end{aligned}$$

d'où en intégrant

$$F(t,X_t) = F(0,X_0) + \int_0^t \alpha_s \frac{\partial F}{\partial x}(s,X_s)\,dB_s + \int_0^t \left(\frac{\partial F}{\partial t}(s,X_s) + \beta_s \frac{\partial F}{\partial x}(s,X_s) + \frac{\alpha_s^2}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s,X_s)\right) ds.$$

$M_t = \int_0^t \alpha_s \frac{\partial F}{\partial x}(s,X_s)\,dB_s$ est la partie martingale de $F(t,X_t)$ et

$$V_t = \int_0^t \left(\frac{\partial F}{\partial t}(s,X_s) + \beta_s \frac{\partial F}{\partial x}(s,X_s) + \frac{\alpha_s^2}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s,X_s)\right) ds$$

est sa partie à variations finies.

Exercice 4:

1) On a, d'après la relation $(*)$,

$$f^s(t) = P(A) - \frac{u^2}{2}\int_s^t f^s(\tau)\,d\tau,$$

d'où en dérivant on voit que $f^s(t)$ est la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\frac{u^2}{2} y \\ y(s) = P(A) \end{cases},$$

qui admet comme solution

$$f^s(t) = P(A)\,e^{-\frac{u^2}{2}(t-s)}$$

2) On a d'après 1)

$$\mathbb{E}\left(e^{iu\left(\widetilde{B}_t - \widetilde{B}_s\right)}\mathbf{1}_A\right) = P(A)\,e^{-\frac{u^2}{2}(t-s)}.$$

En particulier pour $A = \Omega$, on obtient $\mathbb{E}\left(e^{iu\left(\widetilde{B}_t - \widetilde{B}_s\right)}\right) = e^{-\frac{u^2}{2}(t-s)}$, qui n'est autre que la fonction caractéristique de la loi $\mathcal{N}(0, t-s)$. Il résulte que $\widetilde{B}_t - \widetilde{B}_s \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, t-s)$.

D'autre part, comme $P(A) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A)$ alors

$$\mathbb{E}\left(e^{iu\left(\widetilde{B}_t - \widetilde{B}_s\right)}\mathbf{1}_A\right) = \mathbb{E}\left(e^{-\frac{u^2}{2}(t-s)}\mathbf{1}_A\right) \text{ ceci pour tout } A \in \mathcal{F}_s.$$

Il résulte que

$$\mathbb{E}\left(e^{iu\left(\widetilde{B}_t - \widetilde{B}_s\right)} \mid \mathcal{F}_s\right) = e^{-\frac{u^2}{2}(t-s)},$$

d'où

$$\mathbb{E}\left(e^{iu\left(\widetilde{B}_t - \widetilde{B}_s\right)} \mid \mathcal{F}_s\right) = \mathbb{E}\left(e^{iu\left(\widetilde{B}_t - \widetilde{B}_s\right)}\right)$$

qui signifie que la variable aléatoire $e^{iu\left(\widetilde{B}_t - \widetilde{B}_s\right)}$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$ et donc $\widetilde{B}_t - \widetilde{B}_s$ est aussi indépendante de $\mathcal{F}_s$.

Ainsi le processus $\left(\widetilde{B}_t\right)_{t \geq 0}$ est adapté, à accroissements indépendants du passé et l'accroissements $\widetilde{B}_t - \widetilde{B}_s$ suit la loi $\mathcal{N}(0, t-s)$, c'est donc un mouvement brownien.

Exercice 5:

On a

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{n-1} \frac{\left(Y_{\frac{p+1}{n}t} + Y_{\frac{p}{n}t}\right)}{2}\left(X_{\frac{p+1}{n}t} - X_{\frac{p}{n}t}\right) &= \sum_{p=0}^{n-1} Y_{\frac{p}{n}t}\left(X_{\frac{p+1}{n}t} - X_{\frac{p}{n}t}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{n-1}\left(X_{\frac{p+1}{n}t} - X_{\frac{p}{n}t}\right)\left(Y_{\frac{p+1}{n}t} - Y_{\frac{p}{n}t}\right).\end{aligned}$$

La somme $\sum\limits_{p=0}^{n-1} Y_{\frac{p}{n}t}\left(X_{\frac{p+1}{n}t} - X_{\frac{p}{n}t}\right)$ converge dans $L^1(\Omega)$, d'après le cours, vers $\int\limits_0^t Y_s dX_s$ et la somme $\sum\limits_{p=0}^{n-1}\left(X_{\frac{p+1}{n}t} - X_{\frac{p}{n}t}\right)\left(Y_{\frac{p+1}{n}t} - Y_{\frac{p}{n}t}\right)$ converge, d'après l'exercice précédant, vers $\int\limits_0^t dX_s dY_s$. Il résulte que $\sum\limits_{p=0}^{n-1} \frac{\left(Y_{\frac{p+1}{n}t} + Y_{\frac{p}{n}t}\right)}{2}\left(X_{\frac{p+1}{n}t} - X_{\frac{p}{n}t}\right)$ converge dans $L^1(\Omega)$ vers $\int\limits_0^t Y_s dX_s + \frac{1}{2}\int\limits_0^t dX_s dY_s = \int\limits_0^t Y_s * dX_s$.