Processus de Poisson

1-1 Introduction

De nombreux phénomènes aléatoires se manifestent par des « arrivées » survenant une par une à des instants aléatoires successifs**.**

Exemples

- Arrivées d'appels à une centrale téléphonique
- Passage de véhicules à un péage d'autoroute
- Arrivées de clients à un guichet, occurrence d'accidents dans une ville, pannes de machines dans une usine,..

De tels phénomènes peuvent se définir par la famille $(S_n)_{n\geq 1}$des temps d'arrivées qui sont des variables aléatoires, mais on peut aussi le faire à partir du processus de comptage $(N(t))_{t\geq 0}$ ou par la famille $(\tau_n)_{n\geq 1}$ des intervalles de temps entre deux arrivées.

1-2 Processus de Comptage

Soit $N(t)$ le nombre d'évènements apparus jusqu'à l'instant t et $N(t+s)-N(s)$ est le nombre d'évènements apparus entre s et $s+t$.
L'espace des états E du processus $(N(t))_{t\geq 0}$ est discret ($E=\mathbb{N}$)et l'espace des temps est continu . Donc le processus $(N(t))_{t\geq 0}$ est un processus aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ tel que $N(0)=0$.

Définition 1

Un processus est dit homogène ou stationnaire dans le temps, si pour tout s et pour tout t, l'accroissement $N(t+s)-N(s)$ suit la même loi que $N(t)$.

Définition 2

Un processus de comptage est une suite de variables aléatoires réelles $(N(t))_{t\geq 0}$ tels que

i- $N(0)=0$
ii- $\forall t>0,\ N(t)\in\mathbb{N}^*$
iii- $t\mapsto N(t)$ est croissant

1-3 Définitions d'un processus de Poisson

Définition 3

Un processus de comptage $(N(t))_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson d'intensité ou de taux λ($\lambda>0$) si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

i- $N(0)=0$,
ii- $(N(t))_{t\geq 0}$ est un processus à accroissements indépendants,

iii- $(N(t))_{t\geq 0}$ est un processus à accroissements stationnaires,

iv- La probabilité que deux événements ou plus se produisent dans un petit intervalle h est négligeable par rapport à la probabilité qu'il n'y ait qu'un seul événement :

$$P(N(h)=k)=\begin{cases} 1-\lambda h+o(h) & si \quad k=0 \\ \lambda h+o\,(h) & si \quad k=1 \\ o(h) & si \quad k\geq 2 \end{cases}$$

$o(h)$est une fonction de h telle que$\lim\limits_{h\to 0}\frac{o(h)}{h}=0$

Définition 4

Un processus de Poisson d'intensité λ est un processus de comptage $(N(t))_{t\geq 0}$ tels que :

i- $(N(t))_{t\geq 0}$ est un processus stationnaire,

ii- $(N(t))_{t\geq 0}$ est un processus à accroissements indépendants ,

iii- Pour tout $t\geq 0$, la variable $N(t)$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda\, t$

$$P(N(t)=k)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} \quad ,k\geq 0$$

Il en résulte $E(N(t))=\lambda\, t$ et $Var\big(N(t)\big)=\lambda\, t$

Exemple 1

Des voitures arrivent vers une station service sous la forme d'un processus de Poisson d'intensité λ=5/h . Si l'on sait que deux voitures arrivent pendant la première heure, quelle est la probabilité que :

1- Les deux voitures arrivent pendant la première demi- heure
2- Exactement une voiture arrive pendant la première demi-heure.

Solution

Le nombre de voitures arrivant à la station à l'instant t, $N(t)$ est un processus de Poisson d'intensité λ=5/h. On a

$$P(N(t)=k)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} \quad ,k\geq 0$$

1- Sachant que deux voitures arrivent pendant la première heure, la probabilité que les deux voitures arrivent pendant la première demi- heure est

$$P\left(N\left(\frac{1}{2}\right)=2\,\middle|\,N(1)=2\right)=\frac{P\left(N\left(\frac{1}{2}\right)=2,N(1)=2\right)}{P(N(1)=2)}$$

$$= \frac{P\left(N\left(\frac{1}{2}\right)=2, N(1)-N\left(\frac{1}{2}\right)=0\right)}{P(N(1)=2)}$$

$$= \frac{P\left(N\left(\frac{1}{2}\right)=2 \quad \right)P\left(\quad N(1)-N\left(\frac{1}{2}\right)=0\right)}{P(N(1)=2)}$$

$$= \frac{P\left(N\left(\frac{1}{2}\right)=2\right)P\left(N\left(\frac{1}{2}\right)=0\right)}{P(N(1)=2)} = \frac{\frac{e^{-\frac{5}{2}}\left(\frac{5}{2}\right)^2}{2!} \times e^{-\frac{5}{2}}}{\frac{e^{-5}5^2}{2!}} = \frac{1}{4}$$

2- Sachant que deux voitures arrivent pendant la première heure, La probabilité qu'exactement une voiture arrive pendant la première demi-heure :

$$P\left(N\left(\frac{1}{2}\right)=1 \,\middle|\, N(1)=2\right) = \frac{P\left(N\left(\frac{1}{2}\right)=1, N(1)=2\right)}{P(N(1)=2)}$$

$$= \frac{P\left(N\left(\frac{1}{2}\right)=1, N(1)-N\left(\frac{1}{2}\right)=1\right)}{P(N(1)=2)}$$

$$= \frac{P\left(N\left(\frac{1}{2}\right)=1 \quad \right)P\left(\quad N(1)-N\left(\frac{1}{2}\right)=1\right)}{P(N(1)=2)}$$

$$= \frac{P\left(N\left(\frac{1}{2}\right)=1\right)P\left(N\left(\frac{1}{2}\right)=1\right)}{P(N(1)=2)}$$

$$= \frac{\frac{e^{-\frac{5}{2}}\left(\frac{5}{2}\right)}{1!} \times \frac{e^{-\frac{5}{2}}\left(\frac{5}{2}\right)}{1!}}{\frac{e^{-5}5^2}{2!}} = \frac{1}{2}$$

1-4 Distribution des temps d'attente et des inter-arrivées

On note

- S_n l'instant de la réalisation du n-ième évènement ;
- τ_n le n-ième temps d'attente. C'est la durée séparant le (n-1)ième évènement du n–ième évènement .

On a

- $S_n = \sum_{i=1}^{n} \tau_i$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
- $\tau_1 = 1$ et $\tau_n = S_n - S_{n-1}$, pour tout $n \geq 2$

Ainsi , la connaissance de la famille $(S_n)_{n\geq 1}$ est équivaut à celle de $(\tau_n)_{n\geq 1}$.

D'autre part, l'évènement $(S_n \leq t)$ signifie que le n −ième évènement a eu lieu à l'instant t ou avant, c'est à dire jusqu'à l'instant t, au moins n évènements ont eu lieu , $(N(t) \geq n)$.

et l'évènement $(S_{n+1} > t)$ signifie que le $(n+1)$-ième évènement a eu lieu après l'instant t, c'est-à-dire jusqu'à l'instant t au plus n évènements ont eu lieu $(N(t) \leq n)$. On a

$$P(N(t) = n) = P(S_n \leq t) - P(S_{n+1} \leq t)$$

Par conséquent la connaissance de $(N(t))_{t>0}$ équivaut à celle de $(S_n)_{n\geq 1}$.

Théorème 1

i- La suite des inter -évènements (ou inter -arrivées) $(\tau_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) de loi exponentielle de paramètre λ .

ii- Le temps d'attente $S_n = \tau_1 + \cdots + \tau_n$ suit la loi gamma de paramètres n et λ de densité

$$f_{S_n}(s) = \frac{e^{-\lambda s}\lambda^n s^{n-1}}{(\mathrm{n}-1)!}, \qquad n \in \mathbb{N}\,, si\;\; s \geq 0\,,\;\; f_{S_n}(s) = 0\; si\; non$$

$E(S_n) = \frac{n}{\lambda}$ et $Var\,(S_n) = \frac{n}{\lambda^2}$

Théorème 2

$(N(t))_{t\geq 0}$ un processus de Poisson d'intensité λ si et seulement si les variables aléatoires τ_n sont indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ.

1-4 Instants d'occurrence d'un évènement

Soit $N(t), t \geq 0$ un processus de Poisson d'intensité λ et supposons qu'un évènement se produise dans l'intervalle $[0,t]$. La variable aléatoire décrivant les instants d'occurrence de cet évènement a une distribution continue uniforme sur $[0\,,t]$.

En effet , soit $0 < s < t$, par définition de Y on a

$$P(\tau_1 < s\,|N(t) = 1) = \frac{P(\tau_1 < s,\; N(t) = 1)}{P(N(t) = 1)} = \frac{P(N(s) = 1, N(t) = 1)}{P(N(t) = 1)}$$

$$= \frac{P(N(s) = 1, N(t) - N(s) = 0)}{P(N(t) = 1)}$$

$$= \frac{P(N(s) = 1)P(N(t) - N(s) = 0)}{P(N(t) = 1)}$$

$$= \frac{P(N(s)=1)P(N(t-s)=0)}{P(N(t)=1)} = \frac{\lambda s e^{-\lambda t} e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}$$

1-6 Propriétés

1-6-1 Processus de Poisson et loi Binomiale

Soit $(N(t))_{t\geq 0}$ un processus de Poisson d'intensité λ. Pour tout $s \leq t$, la loi conditionnelle de $N(s)$ sachant $N(t)=n$ est une loi binomiale de paramètres n et $\frac{s}{t}$.

1-6-2 Décomposition - Superposition

Un processus de Poisson $(N(t))_{t\geq 0}$ d'intensité λ peut être décomposé en deux processus partiels de la façon suivante :
Chaque évènement est soumis à une expérience de Bernoulli qui l'attribue avec des probabilités p et $1-p$. On admet que ces attributions sont indépendantes les unes des autres et indépendantes de l'état de processus $(N(t))_{t\geq 0}$ alors $(N_1(t))_{t\geq 0}$ et $(N_2(t))_{t\geq 0}$ sont deux processus de Poisson indépendants de paramètres λp et $\lambda(1-p)$ respectivement.

Exemple 2

Les voitures qui passent devant une station service forment un processus de Poisson $(N(t))_{t\geq 0}$ d'intensité λ, chaque voiture a la probabilité p de s'arrêter à la station . Alors, les voitures qui s'arrêtent à la station forment un processus de Poisson $(N_1(t))_{t\geq 0}$ d'intensité λp et les voitures qui passent devant la station sans s'arrêter forment un processus de Poisson $(N_2(t))_{t\geq 0}$ d'intensité $\lambda(1-p)$. De plus, ces deux processus sont indépendants.

Solution

On va montrer que le processus $(N_1(t))_{t\geq 0}$ des voitures qui s'arrêtent à la station est un processus de Poisson d'intensité . On calcule :

$$P(N_1(t)=k) = \sum_{n=k}^{\infty} P(N_1(t)=k \mid N(t)=n)P(N(t)=n)$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda t}(\lambda p t)^k}{k!} \sum_{n-k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t(1-p))^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-\lambda p t}(\lambda p t)^k}{k!}$$

Superposition : Soient $(N_1(t))_{t\geq 0}$ et $(N_2(t))_{t\geq 0}$ deux processus de Poisson indépendants d'intensités respectives $\lambda_1$et λ_2 . Alors le processus $N(t) = N_1(t)$+$N_2(t)$, $t \geq 0$ est un processus de Poisson d'intensité λ_1 + λ_2 .

1-6-3 Nombre d'évènements pendant un intervalle aléatoire

Pour certaines applications, on considère le nombre N d'évènements qui ont lieu pendant un intervalle de durée aléatoire U dont la densité de probabilité $f(u)$ est supposée connue. On a

$$P(N = n|\ U = u) = \frac{e^{-\lambda u}(\lambda u)^n}{n!}$$

D'où ,

$$P(N = n) = \int_0^{\infty} P(N = n|\ U = u) f(u) du$$

La fonction génératrice de N s'écrit

$$g(z) = \int_0^{\infty} e^{\lambda u(z-1)}\, f(u) du$$

On obtient donc l'espérance et la variance de la variable N :

$$E(N) = \lambda\, E(U)$$

et

$$Var\,(N) = \lambda\, E(U) + \lambda^2\, Var(U)$$

Exemple 3

Soient $(N_1(t))_{t\geq 0}$ et $(N_2(t))_{t\geq 0}$ deux processus de Poisson indépendants d'intensités respectives $\lambda_1$et λ_2. On s'intéresse à la distribution du nombre d'évènements X de N_1 se produisant entre deux évènements consécutifs de N_2. On a

$$P(X = n|\ U = u) = \frac{e^{-\lambda_1 u}(\lambda_1 u)^n}{n!}\ , \qquad n \geq 0$$

et

$$f(u) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 u}\ ,\ \ u \geq 0$$

Donc

$$P(X=n)=\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda_1 u}(\lambda_1 u)^n}{n!}\lambda_2 e^{-\lambda_2 u}du=\lambda_1^n\lambda_2\int_0^\infty \frac{e^{-u(\lambda_1+\lambda_2)}(u)^n}{n!}du$$
$$=\frac{\lambda_1^n\lambda_2}{(\lambda_1+\lambda_2)^{n+1}}\int_0^\infty \frac{e^{-u(\lambda_1+\lambda_2)}u^n(\lambda_1+\lambda_2)^{n+1}}{n!}du$$

$\frac{e^{-u(\lambda_1+\lambda_2)}u^n(\lambda_1+\lambda_2)^{n+1}}{n!}$ est l'expression de la densité de la loi gamma de paramètres $(\lambda_1+\lambda_2)$ et n dont l'intégrale entre o et l'infini vaut 1. Il en résulte que

$$P(X=n)=\frac{\lambda_1^n\lambda_2}{(\lambda_1+\lambda_2)^{n+1}}$$

La variable X suit la loi géométrique de paramètre $\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$.

1-6- 4 Processus de Bernoulli

Une manière de construire le processus de Poisson consiste à le considérer comme cas limite d'un processus de comptage connu sous le nom de processus de Bernoulli. Pour cela, on discrétise l'échelle du temps en partitionnant l'intervalle $[0,t]$ en n intervalles de même longueur $h=\frac{t}{n}$. On admet que :

- La probabilité p_n qu'un évènement se produise dans un tel intervalle est
$$p_n=\lambda h+o(h)$$
- La probabilité que plusieurs évènements se produisent dans un intervalle de longueur h est négligeable et est égale à o(h).
- Les évènements associés à des intervalles distincts se produisent indépendamment les uns des autres.

On appelle **processus de Bernoulli** d'intensité λ, la suite d'évènements ainsi définie. De tels processus sont utilisés pour décrire l'arrivée des clients vers un système d'attente dans le cas où l'échelle de temps est discrète.

Le nombre d'évènements $N(t)$ réalisés dans $[0,t]$ suit alors une loi binomiale de paramètre n et p_n :

$$P(N(t)=k)=C_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k}, k\in\{0,\dots,n\}$$

Fixons maintenant le temps t. Si le nombre d'intervalles n tend vers l'infini, il en résulte que

$$P(N(t)=k)=C_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k}\to\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$$

Le processus de Poisson est un processus limite d'une suite de processus de Bernoulli ayant la même intensité λ.

1-7 Processus de Poisson composé

Soit $(N(t))_{t\geq 0}$ un processus de Poisson d'intensité λ et $(Y_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, et indépendantes du processus $(N(t))_{t\geq 0}$.

Le processus $(X(t))_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ défini par

$$X(t) = Y_1 + Y_2 + .. + Y_{N(t)}$$

est appelé processus de Poisson composé .

Caractéristiques

Soit $G_X(z,t)$ la fonction génératrice de $X(t)$ et $h_Y(z)$ celle de Y . Alors

$$G_X(z,t) = e^{\lambda t(h(z)-1)}$$

$$E\big(X(t)\big) = \lambda t E(Y_1)$$

$$Var\big(X(t)\big) = \lambda t E(Y_1^2)$$

Exemple 4

Dans un magasin, les clients arrivent selon un processus de Poisson avec intensité $\lambda = 10$ clients par heure .On suppose que les achats effectués par les clients sont des variables aléatoires i.i.d avec moyenne 30 et écart type 10.
Calculer l'espérance et la variance du total des ventes sur une période de 8 heure

Solution

Le nombre total des ventes $X(t)$ est un processus Poisson composé d'intensité λ.

On a $X(t) = Y_1 + \cdots + Y_{N(t)}$

Où , $N(t)$ est le nombre de clients au magasin et (Y_i) sont les achats effectués par les clients

Donc $E\big(X(t)\big) = \lambda t\, E(Y_1) = 10 \times 8 \times 30 = 2400$

Et $Var\,\big(X(t)\big) = \lambda t\, E(Y_1^2) = \lambda t(Var(Y_1) + E^2(Y_1)) = 10 \times 8(100 + 900) = 80000$

Série n° 1

Exercice 1 Des clients arrivent dans un restaurant selon un processus de Poisson d'intensité 20 clients par heure. Le restaurant ouvre ses portes à 11h. Trouver :

1- La probabilité d'avoir au moins 3 clients dans le restaurant entre 11h et 11h 15.
2- L'espérance et la variance du nombre de clients arrivant entre 11h30 et 11h50.
3- La probabilité que le temps entre deux arrivées successives soit plus de 2 minutes.

Exercice 2 On considère que le nombre d'accidents de travail en une journée suit un processus de Poisson de taux 2 accidents par jour.

1- Quelle est la probabilité qu'il y ait moins de 2 accidents en une journée quelconque ?
2- Quelle est la probabilité qu'une journée passe sans accident ?
3- Calculer la probabilité conditionnelle suivante : $P(N(1) = 1/N(2) = 4)$

Exercice 3 Dans une ville, les trains arrivent à la gare selon un processus de Poisson à raison de 2 trains par heure en moyenne. Une personne arrive à la gare où un employé lui signale que le train est passé il y a une heure déjà. Quelle est la probabilité que cette personne décide attendre plus de 10 minutes avant de voir arriver le train suivant ?

Exercice 4 On suppose que le processus de Poisson avec intensité $\lambda = 6$ par heure est un bon modèle pour décrire les passages d'automobiles d'un pays C vers un pays E à un certain poste frontalier. Autrement dit , on suppose que les temps entre les passages successifs d'automobiles allant de C vers E à ce poste frontalier sont des variables aléatoires exponentielles indépendantes les unes des autres.

1- Quelle est la probabilité que durant la prochaine heure exactement 4 automobiles franchiront ce poste frontalier en direction de E .

2- Les douaniers inspectent une automobile sur dix. Ils viennent tout juste d'inspecter une automobile. Ils vont donc laisser les 9 prochaines automobiles sans les inspecter, puis ils vont inspecter la suivante. Et ainsi de suite. Calculer l'espérance et l'écart-type du temps qui s'écoule entre deux inspections.

3- Quelle est l'espérance et quel est l'écart-type du nombre d'automobiles qui franchiront ce poste frontalier (en direction de E) durant les prochaines 24 heures ?

4- Calculer une approximation pour la probabilité qu'il y ait au moins 150 automobiles qui franchiront ce poste(en direction de E) durant les prochaines 24 heures .

Exercice 5 Le long d'une route à voie unique, l'écoulement des véhicules peut être décrit par un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 2/mn.$

1- Sachant que 4 véhicules sont passés en 3 mn, déterminer la probabilité que 3 véhicules sont passés dans les deux premières minutes.

3- Pour cause de travaux, on doit interrompre le trafic pendant une durée t. On compte alors une longueur de 8m de route occupée par véhicule immobilisé et on cherche la valeur de t telle que la
4- queue formée ne dépasse 250 m qu'avec une probabilité 0.2. Exprimer la condition à l'aide de N_t , puis à l'aide des temps inter- arrivés τ_i entre les véhicules. On donnera une estimation de t à l'aide du théorème central limite ,en considérant 30 comme grand. On donne $P(X \leq -0.84) = 0.2$ pour une variable X de loi normale $N(0,1)$.

Exercice 6 On admet que la durée de vie d'un appareil est exponentielle de paramètre $\lambda = 2/h$. Dès qu'un appareil tombe en panne, il est immédiatement remplacé par un élément identique. Quelle est la distribution de l'instant d'apparition (ou d'occurrence) de la première panne sachant que le deuxième appareil fonctionne à l'instant $t = 3h$.

Exercice 7 Les hommes (resp.les femmes) se présentent à l'entrée d'une grande surface suivant un processus de Poisson d'intensité 2/mn (resp 4/mn)
1- Quelle est la probabilité qu'au moins 3 hommes entrent pendant un intervalle de 2mn ?
2- Si 12 personnes se sont présentées pendant 2 minutes, quelle est la probabilité que 4 parmi elles soient des hommes ?

Exercice 8 A raison d'un véhicule toutes les 10 secondes en moyenne, le flux des véhicules dans une voie donnée comporte une proportion $p = 10\%$ de camions et une proportion $q = 90\%$ de voitures

1- Quelle est la probabilité qu'au moins un camion passe dans un intervalle d'une minute
2- Sachant que 10 camions sont passés dans un intervalle de 5 minutes, quel est le nombre moyen de véhicules qui sont passés dans cet intervalle ?
3- Trente véhicules sont passés durant 10 minutes, quelle est la probabilité que 3 parmi eux soient des camions

Exercice 9 Le nombre de versement $N(t)$ d'indemnités effectués par une compagnie d'assurance en t jours est donné par un processus de Poisson de taux $\lambda = 4$ versements par jour. On suppose que le montant du ième versement est une variable aléatoire Y_i qui suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On fait l'hypothèse que les Y_i sont indépendantes, et indépendantes des $N(t)$ $(\forall t > 0)$.
1- Sachant que $E(Y_1) = 1000\ euros$, calculer p. Calculer Var (Y_1).
2- Soit $X(t)$ la variable aléatoire qui représente les versements totaux effectués par la compagnie en t jours. Soit $G(z,t)$ la fonction génératrice de $X(t)$ et $h(z)$ celle de Y_1.
a- Montrer l'égalité : $G(z,t) = exp\big(\lambda t(h(z) - 1)\big)$
b- En déduire la moyenne et la variance des sommes versées en $t = 5\ jours$

Solution des exercices

Exercice 1

Le nombre de clients dans le restaurant $N(t)$ est un processus de Poisson d'intensité λ= 20/h.

1- La probabilité d'avoir au moins 3 clients dans le restaurant entre 11h et 11h 15 est :

$$P\left(N\left(\frac{1}{4}\right) \geq 3\right) = 1 - P\left(N\left(\frac{1}{4}\right) < 3\right) = 0.875$$

2- L'espérance et la variance du nombre de clients arrivant entre 11h 30 et 11h 50 est :

$$E\left(N\left(\frac{1}{3}\right)\right) = Var\left(N\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{20}{3}$$

3- La probabilité que le temps entre deux arrivées successives soit plus de 2 minutes :
On sait que le temps τ entre deux arrivées successives suit la loi exponentielle de paramètre λ. Donc

$$P\left(\tau > \frac{1}{30}\right) = e^{-\frac{2}{3}}$$

Exercice 2

D'après l'énoncé , le nombre d'accidents en jours est donné par la valeur du processus de Poisson $N(t)$ d'intensité 2.

1- La probabilité qu'il y ait moins de 2 accidents en une journée est :

$$P(N(1) < 2) = 3e^{-2}$$

2- La probabilité qu'une journée passe sans accidents est

$$P(N(1) = 0) = e^{-2}$$

3-

$$P\big(N(1) = 1 \,\big|\, N(2) = 4\big) = \frac{P(N(1) = 1, N(2) = 4)}{P(N(2) = 4)} = \frac{P(N(1) = 1, N(2) - N(1) = 3)}{P(N(2) = 4)}$$

$$= \frac{P(N(1) = 1 \quad)P(\quad N(2) - N(1) = 3)}{P(N(2) = 4)}$$

$$= \frac{P(N(1) = 1)P(N(1) = 3)}{P(N(2) = 4)} = \frac{1}{4}$$

Exercice 3

Soit τ le temps passé entre deux trains successifs, $\tau \hookrightarrow Exp(2)$. Donc la probabilité que la personne décide d'attendre plus de 10mn avant de voir arriver le train suivant est :

$$P\left(\tau > \frac{1}{6}\right) = e^{-\frac{1}{3}}$$

Exercice 6

$$P(\tau_1 < t\,|N(3) = 1) = \frac{P(N(t) = 1, N(3) = 1)}{P(N(3) = 1)}$$

$$= \frac{P(N(t) = 1, N(3) - N(t) = 0)}{P(N(3) = 1)}$$

$$= \frac{P(N(t) = 1)P(N(3) - N(t) = 0)}{P(N(3) = 1)}$$

$$= \frac{P(N(t) = 1)P(N(3-t) = 0)}{P(N(3) = 1)} = \frac{2te^{-2t}e^{-2(3-t)}}{6e^{-6}} = \frac{t}{3}$$

Exercice 8

Le nombre de véhicules $N(t) = N_C(t) + N_v(t)$ est un processus de Poisson d'intensité λ=6/min.

1- La probabilité qu'au moins un camion passe dans un intervalle d'une minute est

$$P(N_C(1) \geq 1) = 1 - P(N_C(1) < 1) = 1 - P(N_C(1) = 0) = 1 - e^{-0.6}$$

2- On calcule

$$E(N(5)/N_C(5) = 10) = E(N_C(5)|N_C(5) = 10) + E(N_v(5)\,|N_C(5) = 10)$$
$$= 10 + E\big(N_v(5)\big) = 10 + 5 \times 5.4 = 37$$

3- On calcule

$$P\big(N_C(10) = 3 \,\big|\, N(10) = 30\big) = \frac{P(N_C(10) = 3, N(10) = 30)}{P(N(10) = 30)} = \frac{P(N_C(10) = 3, N_v(10) = 27)}{P(N(10) = 30)}$$

$$= \frac{P(N_C(10) = 3)\, P(N_v(10) = 27)}{P(N(10) = 30)}$$

$$= \frac{e^{-10\times 0.6}\,\frac{(10\times 0.6)^3}{3!} \times e^{-10\times 5.4}\,\frac{(10\times 5.4)^{27}}{27!}}{e^{-10\times 6}\,\frac{(10\times 6)^{30}}{30!}} =$$