Université Mohamed Khider, Biskra
Faculté des Sc. Exactes et Sc. de la Nature et la Vie
Département de Mathématiques
Master 1: 2021/2022
Module: Tests Statistiques

Corrigé-type de l'examen

Solution de l'exercice 1. ($10pts$)

1) Donner la statistique du test ($1pt$) est sa loi de probabilité ($1pt$), pour:
a. un test de la moyenne d'une population gaussienne de variance connue:

$$T := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{\mathcal{D}}{=} \mathcal{N}(0,1) \text{ (sous } \mu = \mu_0\text{)}. \ (2pts)$$

b. un test de comparaison de deux moyennes de deux populations gaussiennes indépendantes de variances connues:

$$\frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} \overset{\mathcal{D}}{=} \mathcal{N}(0,1) \text{ (sous } \mu_1 = \mu_2\text{)}. \ (2pts)$$

c. un test de comparaison de deux moyennes de deux populations gaussiennes indépendantes telles que les tailles des deux échantillons égales à $n_1 = 25 > 20$ et $n_2 = 27 > 0$ respectivement:

$$\frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\widetilde{S}\sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{27}}} \rightsquigarrow t(25 + 27 - 2) \text{ (Student à 50 ddl)}. \ (2pts)$$

Remarque: Dans le cours, j'ai dit que quand les deux variances sont les supérieures à 20, on peut supposer que les variances sont égales.

d. un test de comparaisons de deux variances de deux populations gaussiennes indépendantes:

$$\frac{\frac{n_1\widetilde{S}_1^2/\sigma_1^2}{n_1-1}}{\frac{n_2\widetilde{S}_2^2/\sigma_2^2}{n_2-1}} \rightsquigarrow F(n_1 - 1, n_2 - 1), \ \left(\text{sous } H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2\right), \ (2pts)$$

loi de Fisher à $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ ddl.

2. Donner la définition du rapport de vraisemblance maximale ($1pt$) et dans quel cas on utilise ce dernier ($1pt$):

$$R = R(x_1, ..., x_n) = \frac{\sup_{\theta\in\Theta_1} L(x_1, ..., x_n; \theta)}{\sup_{\theta\in\Theta_0} L(x_1, ..., x_n; \theta)}. \ (2pts)$$

Ce test est utile surtout là où les méthodes précédentes sont échoué. Il s'applique aussi le cas où le paramètre θ est vectoriel: $\theta = (\theta_1, ..., \theta_p) \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$.

* *

Solution de l'exercice 2. ($10pts$)

1) Il s'agit ici d'un test bilatéral. ($1pt$)

2) L'hypothèse nulle H_0 et l'hyppthèse alternative H_1 sont

$$\begin{cases} H_0 : & \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1 : & \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases} \ (2pts)$$

Nous avons $\alpha = 0.1$, $n_1 = 21$, $n_2 = 9$, $\widetilde{s}_{1,obs}^2 = 5.20$, $\widetilde{s}_{2,obs}^2 = 2.30$.

3) La statistique de test (variable de décision) à utiliser est:

$$\frac{\frac{21\widetilde{S}_1^2/\sigma_1^2}{20}}{\frac{9\widetilde{S}_2^2/\sigma_2^2}{8}} \rightsquigarrow F(20, 8), \ \left(\text{sous } H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2\right), \ (2pts)$$

où $F(20, 8)$ désigne la loi de Fisher à $(20, 8)$ degrés de liberté.

4) A un seuil de signification $\alpha = 10\%$, la région critique associée est

$$W = \left\{ \left(x_1^{(1)}, ..., x_1^{(21)}; x_2^{(1)}, ..., x_2^{(9)} \right) \in \mathbb{R}^{30} \mid \frac{\widetilde{s}_1^2}{\widetilde{s}_2^2} \geq \frac{9 \times 20}{21 \times 8} c_1 \text{ ou } \frac{\widetilde{s}_1^2}{\widetilde{s}_2^2} \leq \frac{9 \times 20}{21 \times 8} c_2 \right\},$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes telles que $\mathbf{P}\left(F\left(20, 8\right) \geq c_1\right) = \mathbf{P}\left(F\left(20, 8\right) \leq c_2\right) = 0.1/2 = 0.05$. De la table statistique de la loi Fisher on obtient $c_1 = 3.15$. Pour trouver la valeur de c_2, on utilise la formule suivante:

$$F\left(\nu_1, \nu_2\right) \overset{\mathcal{D}}{=} \frac{1}{F\left(\nu_2, \nu_1\right)}.$$

Donc $\mathbf{P}\left(F\left(20, 8\right) \leq c_2\right) = 0.05 \Longleftrightarrow \mathbf{P}\left(F\left(8, 20\right) \geq 1/c_2\right) = 0.025$. De la table statistique on obtient $1/c_2 = 2.45$ ce qui donne $c_2 = 0.408$. La région critique est donc

$$W = \left\{ \left(x_1^{(1)}, ..., x_1^{(21)}; x_2^{(1)}, ..., x_2^{(9)} \right) \in \mathbb{R}^{30} \mid \frac{\widetilde{s}_1^2}{\widetilde{s}_2^2} \geq 3.375 \text{ ou } \frac{\widetilde{s}_1^2}{\widetilde{s}_2^2} \leq 0.437 \right\}. \ (4pts)$$

5) Nous avons $\widetilde{s}_{1,obs}^2 / \widetilde{s}_{2,obs}^2 = 5.20/2.30 = 2.2609$. Cette valeur est ni ≥ 3.375 ni ≤ 0.437, donc on accepte l'égalité des deux variances, c'est à dire $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$. $(1pt)$