Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Université Hassiba Benbouali de Chlef
Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة حسيبة بن بوعلي بالشلف
كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي

قسم الرياضيات

U.H.B.C. Chlef	A.U. 2019/2020
Faculté des Sciences Exactes	Niveau: $1^{ère}$ Master/ Option: M.A.S.
Département des maths	Module: Processus Stochastiques 2

SERIE D'EXERCICES N°3 (Decomposition de Doob, Temps D'Arrêt, Théorème d'arrêt)

1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré et $X_n = \sum_{m=1}^{n} 1_{B_m}$, avec $B_n \in \mathcal{F}_n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}^*} - sous - martingale.$
   (b) Donner la décomposition de Doob de X_n.
   (c) Particulariser au cas: $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$

2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}^*} - martingale$ de carré intégrable et $X_0 = 0$ $p.s.$
   (a) Montrer que $(X_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}^*} - sous - martingale.$
   (b) Donner la décomposotion de Doob de X_n^2.
   (c) Montrer que pour tout $n \geq 1$: la variable aléatoire $\Delta < X >_n$ est (une version de) la variance conditionnelle de X_n sachant $\mathcal{F}_{n-1}$.
   (d) Cas particulier: si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$.
      - Montrer que $(X_n^2 - n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale. (Indication: Montrer d'abord que $< X >_n$).

3. Soient τ et σ deux $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ temps d'arrêt. Montrer que:
   (a) si $\tau = k \in \mathbb{N}$ alors $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_k$.
   (b) $\tau \wedge \sigma$, $\tau \vee \sigma$ et $\tau + \sigma$ sont des $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ temps d'arrêt.
   (c) si $\tau \leq \sigma$ alors $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\sigma$
   (d) $\mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma} = \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$.
   (e) $\{\tau < \sigma\} \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$ et $\{\tau = \sigma\} \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$.

4. Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux surmartingales (respectivement martingales) et τ un temps d'arrêt tel que:

$$X_\tau \leq Y_\tau \ (respectivement \ X_\tau = Y_\tau) \ p.s. \ sur \ \{\tau < +\infty\}$$

   Soit:

$$Z_n = Y_n 1_{\{n<\tau\}} + X_n 1_{\{\tau\leq n\}}.$$

   - Montrer que $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une *surmartingale* (respectivement une martingale)

5. (Théorème d'arrêt) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingales et τ un temps d'arrêt tels que:

$$(i)\ \tau < \infty\ p.s.,\ (ii)\ X_\tau \in L^1\ et\ (iii)\ \mathbb{E}(|X_n|\,1_{\{\tau>n\}} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0)$$

- Montrer que:

$$(a)\ \mathbb{E}(|X_\tau|\,1_{\{\tau>n\}}) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0;\ (b)\ \mathbb{E}\,|X_{\tau\wedge n} - X_\tau| \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0;\ (c)\ \mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0).$$

6. (Une réciproque du théorème d'arrêt) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus intégrable adapté.

- Montrer que si l'on a $\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0)$ pour *tout temps d'arrêt borné* τ, alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale.

7. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$.Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $a < 0 < b$, et on définit les variables aléatoires:

$$\tau_a = \inf\{n \geq 0 : X_n = a\}\,;\ \tau_b = \inf\{n \geq 0 : X_n = b\}\ \ et\ \tau_{a,b} = \tau_a \wedge \tau_b.$$

Soit $A = \{\tau_{a,b} = \tau_a\}$ l'évènement où X atteint "a" avant "b".

Le but de cet exercice est de calculer $\mathbb{P}(A)$.

(a) Montrer que $\limsup_{n\to+\infty} X_n = +\infty$.

(b) Montrer que $(X_n^{\tau_{a,b}})_{n\in\mathbb{N}}$ (*processus arrêté*) est une martingale.

(c) Montrer que $\left|X_n^{\tau_{a,b}}\right| < b - a$.

(d) Par le théorème de la convergence dominé, montrer que: $\mathbb{E}(X_n^{\tau_{a,b}}) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(X_{\tau_{a,b}})$.

(e) Exprimer $\mathbb{E}(X_{\tau_{a,b}})$ en fonction de a, b *et* $\mathbb{P}(\{\tau_{a,b} = \tau_a\})$.

(f) En déduire $\mathbb{P}(A)$.

8. (Examen 2015/2016) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une marche aléatoire symétrique simple sur $\mathbb{Z}$, $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $a < 0 < b$, et soient

$$\tau_a = \inf\{n \in \mathbb{N}, X_n = a\}\,, \tau_b = \inf\{n \in \mathbb{N}, X_n = b\}\ et\ \tau_{a,b} = \tau_a \wedge \tau_b.$$

1) Montrer que $\tau_{a,b}$ est fini $p.s.$

2) Calculer $< X >_n$, le crochet de la martingale $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3) En déduire que $(X_n^2 - n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale.

4) Montrer que $E(X^2_{\tau_{a,b}\wedge n} - \tau_{a,b} \wedge n) = 0$

5) Utiliser le théorème de la convergence monotone sur $(\tau_{a,b} \wedge n)_{n\in\mathbb{N}}$ et le fait que $\tau_{a,b} < \infty$ pour montrer que $E(X^2_{\tau_{a,b}}) = E(\tau_{a,b})$. (Ind. si $X_n \geq 0$ et $X_n \nearrow X$ $p.s.$ alors $E(X_n) \nearrow E(X\ )$)

6) Ecrire $E(X^2_{\tau_{a,b}})$ en fonction de a, b *et* $P(\tau_{a,b} = \tau_a)$.

7) Montrer que $E(\tau_{a,b}) = |a|.b$ (on donne $P(\tau_{a,b} = \tau_a) = \dfrac{b}{b-a}$).

8) Montrer par le théorème de la convergence monotone que: $\lim_{b\to+\infty} E(\tau_{a,b}) = E(\tau_a)$.

9) En déduire la valeur de $E(\tau_a)$.

10) τ_a est-il borné?

11) Montrer que $E(X_{\tau_b}/\mathcal{F}_0) \neq E(X_0)$. Pourquoi le théorème d'arrêt ne marche pas dans ce cas?