Exercice1:

Soit $x \in F^{\perp}$, alors $\langle x, y\rangle = 0$ pour tout $y \in F$. En particulier $\langle x, y\rangle = 0$ pour tout $y \in E \subset F$, d'où $x \in E^{\perp}$, ce qui prouve que $F^{\perp} \subset E^{\perp}$.

Exercice 2:

Comme $\mathcal{V} \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{F}$, alors on a les inclusions suivantes:

$$\begin{array}{rclr} L^2(\Omega, \mathcal{U}, P) & \subset & L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) & (1) \\ L^2(\Omega, \mathcal{V}, P) & \subset & L^2(\Omega, \mathcal{U}, P) & (2) \\ L^2(\Omega, \mathcal{V}, P) & \subset & L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) & (3) \end{array}$$

Comme $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, alors on a d'aprés (1),

$$X = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{U}) + X^{\perp}, \text{ où } X^{\perp} \in \left(L^2(\Omega, \mathcal{U}, P)\right)^{\perp}.$$

De (2) on en déduit que

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{U}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{U}) \mid \mathcal{V}) + Y^{\perp}, \text{ où } Y^{\perp} \in \left(L^2(\Omega, \mathcal{V}, P)\right)^{\perp},$$

d'où

$$X = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{U}) \mid \mathcal{V}) + Y^{\perp} + X^{\perp}.$$

Comme $L^2(\Omega, \mathcal{V}, P) \subset L^2(\Omega, \mathcal{U}, P)$, alors d'aprés l'exercice 1, $\left(L^2(\Omega, \mathcal{U}, P)\right)^{\perp} \subset \left(L^2(\Omega, \mathcal{V}, P)\right)^{\perp}$, d'où $X^{\perp} \in \left(L^2(\Omega, \mathcal{V}, P)\right)^{\perp}$. Par suite $Y^{\perp} + X^{\perp} \in \left(L^2(\Omega, \mathcal{V}, P)\right)^{\perp}$. Ainsi X est une somme d'un élément $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{U}) \mid \mathcal{V})$ de $L^2(\Omega, \mathcal{V}, P)$ et d'un élément $Y^{\perp} + X^{\perp}$ de $\left(L^2(\Omega, \mathcal{V}, P)\right)^{\perp}$. Il résulte de l'unicité de la représentation de X que

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{V}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{U}) \mid \mathcal{V}).$$

Exercice 3:

1.On pose:

$$X_i = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_i) \text{ pour } i = 1, 2$$

et

$$\begin{array}{rcl} (1) & = & \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_1))^2\right), \\ (2) & = & \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_2))^2\right), \\ (3) & = & \mathbb{E}\left((\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_2) - \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_1))^2\right). \end{array}$$

On a

$$\begin{array}{rcl} (1) & = & \mathbb{E}(X - X_1)^2 = \mathbb{E}\left(X^2\right) + \mathbb{E}\left(X_1^2\right) - 2\mathbb{E}(X X_1) \\ & = & \mathbb{E}\left(X^2\right) + \mathbb{E}\left(X_1^2\right) - 2\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mathcal{F}_1 \mid) X_1) \\ & = & \mathbb{E}\left(X^2\right) + \mathbb{E}\left(X_1^2\right) - 2\mathbb{E}\left(X_1^2\right) \\ & = & \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}\left(X_1^2\right). \end{array}$$

De la même manière on montre que

$$(2) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}\left(X_2^2\right).$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
(3) &= \mathbb{E}\left((X_2 - X_1)^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left(X_2^2\right) + \mathbb{E}\left(X_1^2\right) - 2\mathbb{E}\left(X_1 X_2\right) \\
&= \mathbb{E}\left(X_2^2\right) + \mathbb{E}\left(X_1^2\right) - 2\mathbb{E}\left(X_1 X_2\right)
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X_1 X_2\right) &= \mathbb{E}\left(X_1 \mathbb{E}\left(X_2 \mid \mathcal{F}_1\right)\right) = \mathbb{E}\left(X_1 \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{F}_2\right) \mid \mathcal{F}_1\right)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(X_1 \mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{F}_1\right)\right) \text{ d'aprés la prop. d'emboitement} \\
&= \mathbb{E}\left(X_1^2\right),
\end{aligned}$$

d'où en remplacant dans (3),

$$(3) = \mathbb{E}\left(X_2^2\right) - \mathbb{E}\left(X_1^2\right).$$

Ainsi, on a

$$(2) + (3) = \left(\mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}\left(X_2^2\right)\right) + \left(\mathbb{E}\left(X_2^2\right) - \mathbb{E}\left(X_1^2\right)\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}\left(X_1^2\right) = (1).$$

2.On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(var\left(X \mid \mathcal{F}_1\right)\right) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X^2 \mid \mathcal{F}_1\right) - \left(\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{F}_1\right)\right)^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X^2 \mid \mathcal{F}_1\right)\right) - \mathbb{E}\left(\left(\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{F}_1\right)\right)^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}\left(\left(\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{F}_1\right)\right)^2\right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
var\left(\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{F}_1\right)\right) &= \mathbb{E}\left(\left(\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{F}_1\right)\right)^2\right) - \left(\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{F}_1\right)\right)\right)^2 \\
&= \mathbb{E}\left(\left(\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{F}_1\right)\right)^2\right) - \left(\mathbb{E}\left(X\right)\right)^2,
\end{aligned}$$

d'où

$$\mathbb{E}\left(var\left(X \mid \mathcal{F}_1\right)\right) + var\left(\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{F}_1\right)\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \left(\mathbb{E}\left(X\right)\right)^2 = var\left(X\right).$$

Exercice 4:
On a

$$var\left(X \mid \mathcal{F}_1\right) = \mathbb{E}\left(X^2 \mid \mathcal{F}_1\right) - \left(\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{F}_1\right)\right)^2 \text{ avec } \mathcal{F}_1 = \sigma\left(N\right).$$

On calcule d'abord $\mathbb{E}\left(X^2 \mid N=n\right)$ et $\mathbb{E}\left(X \mid N=n\right)$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X^2 \mid N=n\right) &= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2 \mid N=n\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2\right) \text{ car } \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2 \text{ et } N \text{ sont ind} \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 + \sum_{i\neq j}^{n} Y_i Y_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(Y_i^2\right) + 2\sum_{i<j}^{n} \mathbb{E}\left(Y_i Y_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(Y_i^2\right) + 2\sum_{i<j}^{n} \mathbb{E}\left(Y_i\right)\mathbb{E}\left(Y_j\right) \text{ car } Y_i \text{ et } Y_j \text{ sont ind}
\end{aligned}$$

Comme $\sigma^2 = \mathbb{E}\left(Y_i^2\right) - \left(\mathbb{E}\left(Y_i\right)\right)^2 = \mathbb{E}\left(Y_i^2\right) - \mu^2$, alors $\mathbb{E}\left(Y_i^2\right) = \sigma^2 + \mu^2$ et on a

$$\mathbb{E}\left(X^2 \mid N=n\right) = n\left(\sigma^2+\mu^2\right) + n\left(n-1\right)\mu^2 = n\sigma^2 + n^2\mu^2,$$

d'où

$$\mathbb{E}\left(X^2 \mid \mathcal{F}_1\right) = \mathbb{E}\left(X^2 \mid N\right) = N\sigma^2 + N^2\mu^2$$

De même

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X \mid N=n\right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i \mid N=n\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(Y_i\right) = n\mu,
\end{aligned}$$

d'où

$$\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{F}_1\right) = \mathbb{E}\left(X \mid N\right) = N\mu$$

Ainsi

$$var\left(X \mid \mathcal{F}_1\right) = \mathbb{E}\left(X^2 \mid \mathcal{F}_1\right) - \left(\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{F}_1\right)\right)^2 = N\sigma^2 + N^2\mu^2 - N^2\mu^2 = N\sigma^2,$$

d'où

$$\mathbb{E}\left(var\left(X \mid \mathcal{F}_1\right)\right) = \sigma^2\mathbb{E}\left(N\right).$$

D'autre part

$$var\left(\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{F}_1\right)\right) = var\left(N\mu\right) = \mu^2 var\left(N\right),$$

d'où, d'aprés l'exercice précédant,

$$\begin{aligned} var(X) &= \mathbb{E}(var(X \mid \mathcal{F}_1)) + var(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_1)) \\ &= \sigma^2 \mathbb{E}(N) + \mu^2 var(N) \end{aligned}$$

Exercice 5:

1.On a

$$\mathbb{E}(X-Y \mid \mathcal{U}) = \mathbb{E}(X-Y) = m \text{ car } X-Y \text{ est ind de } \mathcal{U}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X \mid \mathcal{U}) &= \mathbb{E}(X-Y \mid \mathcal{U}) + \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{U}) \\ &= m+Y \text{ car } Y \text{ est } \mathcal{U}-\text{mesurable} \end{aligned}$$

2.On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left((X-Y)^2 \mid \mathcal{U}\right) &= \mathbb{E}\left((X-Y)^2\right) \text{ car } X-Y \text{ est ind de } \mathcal{U} \\ &= var(X-Y) + (\mathbb{E}(X-Y))^2 \\ &= \sigma^2 + m^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(X^2 \mid \mathcal{U}\right) &= \mathbb{E}\left(((X-Y)+Y)^2 \mid \mathcal{U}\right) \\ &= \mathbb{E}\left((X-Y)^2 + Y^2 + 2Y(X-Y) \mid \mathcal{U}\right) \\ &= \mathbb{E}\left((X-Y)^2 \mid \mathcal{U}\right) + \mathbb{E}\left(Y^2 \mid \mathcal{U}\right) + 2\mathbb{E}(Y(X-Y) \mid \mathcal{U}) \\ &= \sigma^2 + m^2 + Y^2 + 2Y\mathbb{E}(X-Y \mid \mathcal{U}) \text{ car } Y \text{ est } \mathcal{U}-\text{mesurable} \\ &= \sigma^2 + m^2 + Y^2 + 2mY \\ &= \sigma^2 + (m+Y)^2 . \end{aligned}$$