

1 Exercice N°1(8 pts)

I] On considère une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres " n " et " p " inconnus, et vérifiant

$$E(X) = 43.2 \text{ et } V(X) = 27.648$$

1. Trouvez les paramètres (n, p) de la binomiale.
2. Peut-on approximer cette loi avec une loi normale ? si oui, donnez ses paramètres.

II] Dans une usine, des machines fabriquent des plaques de tôle, on définit X la variable aléatoire «épaisseur de la plaque en mm», on suppose que X suit une loi normale de paramètres $m = 0.3$, et $\sigma = 0.1$

1. Calculez la probabilité pour que X soit supérieur à $0.36mm$
2. Calculez la probabilité pour que X soit compris entre $0.25mm$ et $0.35mm$

2 Exercice N°2 (6 pts)

On dit qu'une variable aléatoire discrète (infinie) X suit une loi géométrique de paramètre θ , $0 < \theta < 1$, si sa fonction de masse (sa loi) est donnée par:

$$P_X(k) = \theta (1 - \theta)^{k-1}, \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*$$

1. Calculer en fonction de θ , la probabilité suivante: $P(X \geq 3)$.
2. Calculer en fonction de θ , $E(X)$.

Dans cet exercice on utilisera un résultat bien connu en analyse sur la série géométrique et ses dérivées ainsi, on sait que, pour tout $|q| < 1$, on a:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$


3 Exercice N°3 (6 pts)

I] Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires de densité $f_{(X,Y)}$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x+y)\exp(-y) & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \text{ et } y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi marginale de X, en déduire la loi conditionnelle de Y sachant X
2. Calculer $E(12XY)$

Table donnant $P(Z < t)$ pour une variable aléatoire suivant $N(0,1)$



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Table pour les grandes valeurs

t	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4	4,5
$\Phi(t)$	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,999928	0,999968	0,999997

"Elevez vos mots, pas votre voix, car c'est la pluie qui fait pousser les fleurs,
pas le tonnerre" (Djalla el dine el rumi)

4 Solution

4.1 Exercice N°1 (8 pts)

I] On considère une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres " n " et " p " inconnus, et vérifiant

$$\begin{cases} E(X) = np = 43.2 \\ V(X) = npq = 27.648 \end{cases} \quad (0.5pt) \implies \frac{V(X)}{E(X)} = q = 0.64 \quad (0.5pt)$$

On en déduit que

$$p = 1 - q = 0.36 \quad (0.5pt)$$

$$n = \frac{E(X)}{p} = \frac{43.2}{0.36} = 120 \quad (0.5pt)$$

- Peut-on approximer cette loi avec une loi normale ? Oui. On sait que si X suit une binomiale de paramètres (n, p) , pour un " n " assez grand (en pratique $n \geq 30$) et pour:

$$\begin{cases} np = 43.2 \geq 5 \\ \text{et} \\ nq = 76.8 \geq 5 \end{cases} \quad (1pt)$$

alors X peut être approximé par une loi normale aux paramètres: $X \hookrightarrow N(np, \sqrt{npq})$ ie $X \hookrightarrow N(43.2, 5.26)$ (1pt)

II] Dans une usine, des machines fabriquent des plaques de tôle, on définit X la variable aléatoire «épaisseur de la plaque en mm», on suppose que X suit une loi normale de paramètres $m = 0.3$, et $\sigma = 0.1$

1. Calculez la probabilité pour que X soit supérieur à $0.36mm$

$$\begin{aligned} P(X \geq 0.36) &= 1 - P(X \leq 0.36) && (0.25pt) \\ &= 1 - P\left(\frac{X - 0.3}{0.1} \leq \frac{0.36 - 0.3}{0.1}\right) && (0.25pt) \\ &= 1 - P(Z \leq 0.6) \text{ avec } Z = \frac{X - m}{\sigma} \hookrightarrow N(0, 1) && (0.5pt) \\ &= 1 - F(0.6) \\ &= 1 - 0.725 && (0.5pt) \\ &= 0.275 && (0.5pt) \end{aligned}$$

2. Calculez la probabilité pour que X soit compris entre $0.25mn$ et $0.35mn$

$$\begin{aligned} P(0.25 \leq X \leq 0.35) &= P\left(\frac{0.25 - 0.3}{0.1} \leq \frac{X - 0.3}{0.1} \leq \frac{0.35 - 0.3}{0.1}\right) && (0.5pt) \\ &= P(-0.5 \leq Z \leq 0.5) \\ &= 2F(0.5) - 1 && (0.5pt) \\ &= 2 \times 0.691 - 1 && (0.5pt) \\ &= 0.382 && (0.5pt) \end{aligned}$$

4.2 Exercice N°2 (6 pts)

On dit qu'une variable aléatoire discrète (infinie) X suit une loi géométrique de paramètre θ , $0 < \theta < 1$, si sa fonction de masse (sa loi) est donnée par:

$$P_X(k) = \theta (1 - \theta)^{k-1}, \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*$$

1. Calculer en fonction de θ , la probabilité suivante: $P(X \geq 3)$.

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X < 3) \text{ car } P(A) = 1 - P(\bar{A}) \\ &= 1 - P(X \leq 2) \quad (0.5pt) \\ &= 1 - \sum_{k \leq 2} P(X = k) \\ &= 1 - [P(X = 1) + P(X = 2)] \quad (0.5pt) \\ &= 1 - \theta - \theta(1 - \theta) \quad (0.5pt) \\ &= \theta^2 - 2\theta + 1 = (\theta - 1)^2 \quad (0.5pt) \end{aligned}$$

2. Calculer en fonction de θ , $E(X)$.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \text{en dérivant} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad (2) \quad (1pt)$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k \geq 1} k \cdot P_X(k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \theta (1 - \theta)^{k-1} \quad (0.5pt) \\ &= \theta \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot (1 - \theta)^{k-1} \\ &= \theta \left[\sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot (q)^{k-1} \right] \text{ avec } q = 1 - \theta \quad (0.5pt) \\ &= \theta \left[\frac{1}{[1 - (1 - \theta)]^2} \right] \text{ en utilisant (2)} \quad (1pt) \\ &= \theta \left[\frac{1}{\theta^2} \right] \\ &= \frac{1}{\theta} \quad (1pt) \end{aligned}$$

4.3 Exercice N°3 (6 pts)

I] Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité $f_{(X, Y)}$.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4} (x + y) \exp(-y) & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \text{ et } y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi marginale de X,
 en effet pour $0 \leq x \leq 2$

$$\begin{aligned}
 f_X(x) &= \int_0^{+\infty} f(x, y) dy && (0.5pt) \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{4} (x + y) (\exp - (y)) dy \\
 &= \frac{1}{4} x \int_0^{+\infty} e^{-y} dy + \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} y \cdot e^{-y} dy && (0.5pt) \\
 &= \frac{1}{4} x [-e^{-y}]_0^{+\infty} + \frac{1}{4} [-y \cdot e^{-y}]_0^{+\infty} + \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} e^{-y} dy && (0.5pt) \\
 &= \frac{1}{4} x [0 + 1] + \frac{1}{4} ([0 + 0] + [-e^{-y}]_0^{+\infty}) && (0.5pt) \\
 &= \frac{x + 1}{4}
 \end{aligned}$$

Conclusion

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} (x + 1) & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (0.5pt)$$

en déduire la loi conditionnelle de Y sachant X

$$f_{Y/X}(x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{x + y}{x + 1} \cdot e^{-y} \quad (1pt)$$

2. Calculer $E(12XY)$

$$\begin{aligned}
 E(12XY) &= 12E(XY) \\
 &= 12 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy \cdot f(x, y) \, dx dy \quad (0.5pt) \\
 &= 3 \int_0^{+\infty} \left[\int_0^2 xy \cdot (x + y) \cdot e^{-y} \, dx \right] dy \\
 &= 3 \int_0^{+\infty} e^{-y} \left[\int_0^2 (x^2 y + xy^2) \, dx \right] dy \quad (0.5pt) \\
 &= 3 \int_0^{+\infty} e^{-y} \left[\frac{x^3}{3} y + \frac{x^2}{2} y^2 \right]_0^2 dy \\
 &= 3 \int_0^{+\infty} e^{-y} \left[\frac{8}{3} y + \frac{4}{2} y^2 \right] dy \\
 &= 8 \int_0^{+\infty} y \cdot e^{-y} \, dy + 6 \int_0^{+\infty} y^2 \cdot e^{-y} \, dy \quad (0.5pt) \\
 &= 8 \int_0^{+\infty} y \cdot e^{-y} \, dy + 6 \left[(-2ye^{-y})_0^{+\infty} + 2 \int_0^{+\infty} y \cdot e^{-y} \, dy \right] \quad (0.5pt) \\
 &= 20 \cdot \int_0^{+\infty} y \cdot e^{-y} \, dy \\
 &= 20 \quad (0.5pt)
 \end{aligned}$$

5 Exercice N°1(10 pts)

I] Soit X une v.a. à valeurs dans \mathbb{N} , telle que, pour tout entier $k \geq 1$:

$$P(X = k) = \frac{4}{k} \cdot P(X = k - 1)$$

- Déterminer la loi de X , en déduire $P(X \leq 2)$ (3pts)

II] Soit X une v.a.r qui suit une loi de poisson de paramètre λ .
 $[X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda), \lambda > 0, X(\Omega) = \mathbb{N}]$. On pose

$$Y = 4 \left\lfloor \frac{X}{2} \right\rfloor - 2X + 1 \text{ où } \left\lfloor \frac{X}{2} \right\rfloor \text{ est la partie entière de } \frac{X}{2}$$

1. Déterminer la loi de Y en fonction de λ (3pts)
2. Calculer $E(Y)$ en fonction de λ . [indication: $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$] (2pts)
3. Déterminer la loi de Y^2 , en déduire la variance de Y : $V(Y)$ (2pts)

6 Exercice N°2 (10 pts)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité $f_{(X,Y)}$.

$$f(x, y) = \begin{cases} \exp[-(x+y)] & \text{si } x > 0 \text{ et } y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer les densités marginales de X et Y . (2pts)
2. X et Y sont-elles des v.a indépendantes?, justifiez. (0.5pt)
3. Calculer la covariance de (x, y) : $cov(x, y)$, en déduire $E(xy)$. (1pt)
4. Calculer $P(X \geq 2 \cap Y \geq 1)$ et $P(X \geq 2 \cup Y \geq 3)$. (2pts)
5. On pose $(Z, U) = (X+Y, 3X-Y)$. déterminer la loi du couple (Z, U) . (3pts)
6. En déduire, la densité de la variable aléatoire $Z = X + Y$. (1.5pts)

"Celui qui entend avec ses oreilles devient conteur; celui qui écoute avec son coeur devient conscient et celui qui exhorte avec son acte devient un guide"

Imam Shaffii

"On ne peut pas labourer, semer, récolter et manger le même jour"

proverbe africain

7 Solution

7.1 Exercice N°1

I] Soit X une v.a. à valeurs dans \mathbb{N} , déterminer la loi de X :

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \frac{4}{k} \cdot P(X = k-1) \\ &= \frac{4}{k} \cdot \frac{4}{k-1} \cdot P(X = k-2) \\ &= \frac{4}{k} \cdot \frac{4}{k-1} \cdot \dots \cdot \frac{4}{1} \cdot P(X = 0) \\ &= \frac{4^k}{k!} \cdot P(X = 0) \quad (0.5pt) \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} P(X = k) = 1 &\Leftrightarrow \sum_{k \geq 0} \frac{4^k}{k!} \cdot P(X = 0) = 1 \quad (0.5pt) \\ \Rightarrow P(X = 0) &= e^{-4} \quad (0.5pt) \end{aligned}$$

car $\sum_{n \geq 0} \frac{4^n}{n!} = e^4$, conclusion:

$$P(X = k) = \frac{4^k}{k!} \cdot e^{-4}, \quad k \geq 0 \quad (0.25pt)$$

donc $X \hookrightarrow \mathcal{P}(4)$ X est une loi de poisson de paramètre 4 $(0.25pt)$

- En déduire $P(X \leq 2)$

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \quad (0.5pt) \\ &= e^{-4} \left(\frac{4^0}{0!} + \frac{4^1}{1!} + \frac{4^2}{2!} \right) \\ &= e^{-4} (1 + 4 + 8) = 13 \cdot e^{-4} \quad (0.5pt) \\ &= 0.238 \end{aligned}$$

II] Soit X une v.a.r qui suit une loi de poisson de paramètre λ .

[$X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$, $X(\Omega) = \mathbb{N}$]. On pose

$$Y = 4 \left\lfloor \frac{X}{2} \right\rfloor - 2X + 1 \text{ où } \left\lfloor \frac{X}{2} \right\rfloor \text{ est la partie entière de } \frac{X}{2}$$

1. Déterminer la loi de Y en fonction de λ

Si $X=2k$ (pair)

$$\begin{aligned} Y &= 4 \left\lfloor \frac{X}{2} \right\rfloor - 2X + 1 \\ \Rightarrow Y &= 4 \left\lfloor \frac{2k}{2} \right\rfloor - 2(2k) + 1 \\ \Rightarrow Y &= 4k - 4k + 1 = 1 \quad (0.5pt) \end{aligned}$$

Si $X=2k+1$ (impair)

$$\begin{aligned}
 Y &= 4 \left\lfloor \frac{X}{2} \right\rfloor - 2X + 1 \\
 \Rightarrow Y &= 4 \left\lfloor \frac{2k+1}{2} \right\rfloor - 2(2k+1) + 1 \\
 \Rightarrow Y &= 4k - 4k - 2 + 1 = -1 \quad (0.5pt)
 \end{aligned}$$

Conclusion : Si $X \in D_X = \mathbb{N}$ alors $Y \in D_Y = \{-1, 1\}$, calculons sa loi :

$$\begin{aligned}
 P(Y = -1) &= P(\cup_{k \geq 0} (X = 2k+1)) \quad (0.5pt) \\
 &= \sum_{k \geq 0} P(X = 2k+1) \\
 &= \sum_{k \geq 0} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot sh\lambda \quad (0.5pt)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(Y = +1) &= P(\cup_{k \geq 0} (X = 2k)) \quad (0.5pt) \\
 &= \sum_{k \geq 0} P(X = 2k) \\
 &= \sum_{k \geq 0} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot ch\lambda \quad (0.5pt)
 \end{aligned}$$

Or ceci définit bien une fonction de masse; vérification:

$$\lambda \succ 0, \text{ donc } ch\lambda \succ 0 \text{ et } sh\lambda \succ 0 \Rightarrow P(Y = \pm 1) \geq 0$$

$$\begin{aligned}
 P(Y = -1) + P(Y = +1) &= e^{-\lambda} (sh\lambda + ch\lambda) \\
 &= e^{-\lambda} \left(\frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{2} + \frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2} \right) \\
 &= e^{-\lambda} \times e^{+\lambda} = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{de plus, } ch\lambda &= \frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2} = \frac{1}{2} \left[\sum_{n \geq 0} \frac{\lambda^n}{n!} + \sum_{k \geq 0} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\sum_{n \geq 0} \frac{\lambda^n}{n!} (1^n + (-1)^n) \right] \quad \text{si } n = 2k \text{ pair} \\
 &= \sum_{k \geq 0} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \text{ même raisonnement pour le shx}
 \end{aligned}$$

2. Calculer $E(Y)$ en fonction de λ . [indication: $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$]

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= \sum_i y_i \times P(Y = y_i) & (0.5pt) \\
 &= 1 \times P(Y = +1) - 1 \times P(Y = -1) & (0.5pt) \\
 &= e^{-\lambda} (ch\lambda - sh\lambda) & (0.5pt) \\
 &= e^{-\lambda} \left(\frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2} - \frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{2} \right) \\
 &= e^{-\lambda} \times e^{-\lambda} = e^{-2\lambda} & (0.5pt)
 \end{aligned}$$

3. Déterminer la loi de Y^2 , en déduire la variance de Y : $V(Y)$

Si on pose $Z=Y^2$ alors $D_Z = \{1\}$ ie que la v.a Z est une constante (v.a.certaine) donc sa loi $P(Z=1)=1$ (0.5pt) ainsi,

$$E(Z) = \sum_i z_i \times P(Z = z_i) = 1 \times P(Z = 1) = 1 \quad (0.5pt)$$

On en déduit que

$$E(Z) = E(Y^2) = 1 \quad (0.25pt)$$

$$\begin{aligned}
 Var(Y) &= E(Y^2) - [E(Y)]^2 & (0.25pt) \\
 &= 1 - e^{-4\lambda} & (0.5pt)
 \end{aligned}$$

7.2 Exercice N°2

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité $f_{(X, Y)}$.

$$f(x, y) = \begin{cases} \exp[-(x+y)] & \text{si } x > 0 \text{ et } y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer les densités marginales de X et Y .

Densité marginale de X , $f_X(x)$: Si $x > 0$

$$\begin{aligned}
 f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy & (0.25pt) \\
 &= \int_0^{+\infty} \exp[-(x+y)] dy \\
 &= e^{-x} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-y} dy & (0.25pt) \\
 &= e^{-x} \cdot [-e^{-y}]_0^{+\infty} \\
 &= e^{-x} \cdot [0 + e^0] & (0.25pt)
 \end{aligned}$$

Conclusion:

$$f_X(x) = e^{-x} \cdot 1_{]0, +\infty[}(x)$$

Donc X suit une loi exponentielle de paramètre 1: $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ (0.25pt)

Densité marginale de Y, $f_Y(y)$: Il suffit de remarquer de $f(x, y)$ est symétrique en (x, y) (0.25pt) et que $D_X = D_Y =]0, +\infty[$ (0.5pt) ainsi on aura le meme résultat

Donc Y suit une loi exponentielle de paramètre 1: $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ (0.25pt)

2. X et Y sont-elles des v.a indépendantes?, justifiez. (0.5pt)

$$D_{(X,Y)} = D_X \times D_Y$$

$$f(x, y) = f_X(x) \times f_Y(y)$$

Conclusion X et Y sont bien indépendantes

3. Calculer la covariance de (x,y): $cov(x, y)$, en déduire $E(xy)$. (1pt)

$$X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \implies cov(x, y) = 0 \quad (0.25pt)$$

$$\left. \begin{array}{l} cov(x, y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) \\ cov(x, y) = 0 \end{array} \right\} \implies E(XY) = E(X) \cdot E(Y) \quad (0.25pt)$$

$$X \text{ et } Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \implies E(X) = E(Y) = 1 \quad (0.25pt)$$

$$E(XY) = E(X) \cdot E(Y) = 1 \quad (0.25pt)$$

4. Calculer $P(X \geq 2 \cap Y \geq 1)$ et $P(X \geq 2 \cup Y \geq 3)$. (2pts)

$$P(X \geq 2 \cap Y \geq 1) = P(X \geq 2) \cdot P(Y \geq 1) \quad \text{car indep} \quad (0.25pt)$$

$$= (1 - F_X(2)) \cdot (1 - F_Y(1)) \quad (0.25pt)$$

$$= e^{-2} \cdot e^{-1} = e^{-3} \quad (0.25pt)$$

$$= 0.049$$

$$P(X \geq 2 \cup Y \geq 3) = P(X \geq 2) + P(Y \geq 3) - P(X \geq 2 \cap Y \geq 3) \quad (0.25pt)$$

$$= P(X \geq 2) + P(Y \geq 3) - P(X \geq 2) \cdot P(Y \geq 3) \quad \text{indep} \quad (0.25pt)$$

$$= (1 - F_X(2)) + (1 - F_Y(3)) - (1 - F_X(2)) \cdot (1 - F_Y(3)) \quad (0.25pt)$$

$$= e^{-2} + e^{-3} - e^{-2} \cdot e^{-3} \quad (0.25pt)$$

$$= e^{-2} + e^{-3} - e^{-5} = 0.178$$

Ou bien

$$P(X \geq 2 \cup Y \geq 3) = 1 - P(X < 2 \cap Y < 3)$$

$$= 1 - P(X < 2)P(Y < 3)$$

$$= 1 - F_X(2)F_Y(3)$$

$$= 1 - (1 - e^{-2})(1 - e^{-3})$$

$$= e^{-2} + e^{-3} - e^{-5} = 0.178$$

Rappel:

$$X \text{ et } Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \implies F_X(x) = (1 - e^{-x}) \cdot 1_{]0, +\infty[} \quad (0.25pt)$$

5. On pose $(Z, U) = (X+Y, 3X-Y)$. déterminer la loi du couple (Z, U) . (3pts)

$$\begin{cases} Z = X + Y \\ U = 3X - Y \end{cases} \implies \begin{cases} X = \frac{Z+U}{4} \\ Y = \frac{3Z-U}{4} \end{cases} \quad (0.5pt)$$

Calculons le jacobien

$$J = \begin{vmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 3/4 & -1/4 \end{vmatrix} = -\frac{1}{16} - \frac{3}{16} = -\frac{1}{4} \quad (0.5pt)$$

Ainsi la loi du couple (Z, U) est :

$$\begin{aligned} f_{(Z,U)}(z, u) &= f_{(X,Y)}\left(\frac{Z+U}{4}, \frac{3Z-U}{4}\right) \cdot |J| \quad (0.5pt) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \exp\left[-\left(\frac{Z+U}{4} + \frac{3Z-U}{4}\right)\right] \\ &= \frac{1}{4} \cdot e^{-z} \quad (0.5pt) \end{aligned}$$

Domaine de variation du couple (Z, U) (1pt)

$$Z = X + Y \succ 0$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} X = \frac{Z+U}{4} \succ 0 \\ Y = \frac{3Z-U}{4} \succ 0 \end{cases} &\implies \begin{cases} Z+U \succ 0 \\ 3Z-U \succ 0 \end{cases} \\ &\implies -Z \prec U \prec 3Z \end{aligned}$$

6. En déduire, la densité de la variable aléatoire $Z = X + Y$.

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(Z,U)}(z, u) \cdot du \quad (0.25pt) \\ &= \int_{-z}^{3z} \frac{1}{4} \cdot e^{-z} \cdot du \quad (0.5pt) \\ &= \frac{1}{4} \cdot e^{-z} \cdot [u]_{-z}^{3z} \\ &= z \cdot e^{-z} \quad (0.25pt) \end{aligned}$$

conclusion

$$f_Z(z) = z \cdot e^{-z} \cdot 1_{]0, +\infty[}(z) \quad (0.5pt)$$