Chapitre 1: Rappels et compléments de probabilités: Fonctions génératrices

Rabah Messaci

Département de Probabilités-Statistique
USTHB

Octobre 2011

Fonctions génératrices

Les fonctions génératrices des moments, comme les fonctions caractéristiques sont un outil puissant en probabilités. Elles permettent notamment de simplifier beaucoup de calculs. Elle est à distinguer de la notion de fonction génératrice des moments factoriels définie uniquement pour les v.a entières (à valeurs dans N), quoique possédant des propriétés identiques.

Fonctions génératrices

Définition : fonctions génératrices

On appele fonction génératrice des moments de la v.a X la fonction définie sur une partie $D \subset R$ dans R_+ par

$$\Psi_X(t) = E(e^{tX})$$

Remarques

- Le domaine de définition D dépend de la v.a X
- Si X est discrète $\Psi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{tx_i} P(X = x_i)$
- Si X est absolument continue de densité f_X on a $\Psi_X(t) = \int_R e^{tx} f_X(x) dx$

Fonctions génératrices

Exemples

- $X \sim B(p); \Psi_X(t) = p + qe^t$
- $X \sim B(n,p); \Psi_X(t) = (p + qe^t)^n$
- $X \sim P(\lambda); \Psi_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$
- $X \sim \gamma(a,b); \Psi_X(t) = \dfrac{1}{(1 - \frac{t}{b})^a}$
- $X \sim N(m,\sigma^2); \Psi_X(t) = e^{tm + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}$ en particulier si $X \sim N(0,1); \Psi_X(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}$

Fonctions génératrices

Théorème 1

Soit X et Y deux v.a de lois de probabilités P_X et P_Y. On a :

$$P_X = P_Y \iff \Psi_X = \Psi_Y$$

Théorème 2

Soit X et Y deux v.a indépendantes. On a :
$\Psi_{X+Y}(t) = \Psi_X(t)\Psi_Y(t) \quad \forall t$

Démonstration : $\Psi_{X+Y}(t) = E(e^{t(X+Y)})$
$= E(e^{tX})E(e^{tY}) = \Psi_X(t)\Psi_Y(t)$

Fonctions génératrices

Exemples

1. $X_i \sim B(p),\ 1 \leq i \leq n$ i.i.d $\implies \sum_{i=1}^{n} X_1 \sim B(n,p)$
2. $X_i \sim P(\lambda_i),\ 1 \leq i \leq n$ i.i.d $\implies \sum_{i=1}^{n} X_1 \sim P(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)$
3. $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2),\ 1 \leq i \leq n$ i.i.d $\implies \sum_{i=1}^{n} X_1 \sim N(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2)$
4. $X_1 \sim \gamma(a_1, b), X_2 \sim \gamma(a_2, b) \implies X_1 + X_2 \backsim \gamma(a_1 + a_2, b)$

Fonctions génératrices

Démonstration

1. $\Psi_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = E(e^{t\sum_{i=1}^{n} X_i}) = \prod_{i=1}^{n} E(e^{tX_i}) = (p+qe^t)^n$
   $\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n,p)$
2. $\Psi_{X_1+X_2}(t) = E(e^{t(X_1+X_2)}) = E(e^{tX_1})E(e^{tX_2}) = \frac{1}{(1-\frac{t}{b})^{a_1}} \frac{1}{(1-\frac{t}{b})^{a_2}} =$
   $\frac{1}{(1-\frac{t}{b})^{a_1+a_2}} \Longrightarrow X_1+X_2 \sim \gamma(a_1+a_2, b)$

Même démonstration pour les autres exemples

Fonctions génératrices

Théorème 3

Soit X une v.a.r, X admet un moment d'ordre k si et seulement si Ψ_X est dérivable à l'ordre k au point 0 et on a :

$$E(X^k) = \Psi_X^{(k)}(0)$$

Fonctions génératrices de vecteurs aléatoires

Définition

On appele fonction génératrice des moments du vecteur aléatoire $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ la fonction définie sur une partie $D \subset R^n$ dans R_+ par

$$\Psi_X(t) = E(e^{<t,X>}) = E(e^{\sum_{i=1}^{n} t_i X_i})$$

Exemple

$X \sim N_n(m, \Sigma); \Psi_X(t) = e^{<t,m>+\frac{1}{2}t^{'}\Sigma t}$ Cas particulier :
$X \sim N_n(0, I_n); \Psi_X(t) = e^{\frac{1}{2}t^{'}t}$