SPA Master 1, Séries Chronologiques1

Corrigé de l'exercice 4, Série N◦3

1) $X_t = 0.8X_{t-1} + \epsilon_t,\ \ \{\epsilon_t\} \sim WN(0, \sigma_\epsilon^2)$.

- Ce processus est stationnaire et causal car la racine du polynôme $\phi(z) = 1 - 0.8z$ est à l'extérieur du disque unité : $\phi(z) = 0 \Leftrightarrow 1 - 0.8z = 0 \Leftrightarrow z = 1.25$. $|z| > 1$. Donc $\mathbb{E}(X_t) = \mu$ et $Var(X_t) = \gamma_0, \forall t$.

  $\mu = 0$ car en appliquant l'opérateur espérance à l'équation, on obtient $\mu = 0.8\mu \Leftrightarrow 0.2\mu = 0 \Rightarrow \mu = 0$.

  $\gamma_h = \mathbb{E}(X_t X_{t-h}) = \mathbb{E}[(0.8X_{t-1} + \epsilon_t)X_{t-h}] = 0.8\gamma_{h-1} + \mathbb{E}(\epsilon_t X_{t-h})$.
  $-$ Si $h = 0$, $\gamma_0 = 0.8\gamma_1 + \sigma_\epsilon^2$.

  $-$ Si $|h| \geq 1$, $\gamma_h = 0.8\gamma_{h-1}$ car le passé du processus n'est pas corrélé avec le présent et le futur du bruit blanc, (le processus étant causal).

  D'où $\gamma_1 = 0.8\gamma_0$. De l'équation $\gamma_0 = 0.8\gamma_1 + \sigma_\epsilon^2$, on déduit que $\gamma_0 \simeq 2.777\sigma_\epsilon^2$, $\gamma_1 \simeq 2.2116\sigma_\epsilon^2$, $\gamma_2 \simeq 1.77\sigma_\epsilon^2$ et $\gamma_3 \simeq 1.416\sigma_\epsilon^2 = Cov(X_1, X_4) = Cov(X_4, X_1)$. Idem pour $\gamma_1 = Cov(X_1, X_2) = Cov(X_2, X_1) = Cov(X_2, X_3) = Cov(X_3, X_2) = Cov(X_3, X_4) = Cov(X_4, X_3)$ et $\gamma_2 = Cov(X_1, X_3) = Cov(X_3, X_1) = Cov(X_2, X_4) = Cov(X_4, X_2)$.

- $Var(\frac{X_1+X_2+X_3+X_4}{4}) = \frac{1}{16}\left\{\sum_{i=1}^{4} Var(X_i) + \sum_{i=1}^{4}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{4} Cov(X_i, X_j)\right\} = \frac{1}{16}(4\times 2.777 + 6 \times 2.2116 + 4 \times 1.77 + 2 \times 1.416)\sigma_\epsilon^2$
  $= 2.143\,1\sigma_\epsilon^2$.

2) $X_t = X_{t-1} - 0.25X_{t-2} + \epsilon_t - 0.25\epsilon_{t-1}$.

- C'est un modèle $ARMA(2, 1)$. Ce modèle est stationnaire et causal cat la racine double du polynôme caractéristique est à l'extérieur du disque unité (on trouve $z_1 = z_2 = 2$).

- Représentation causale $(1 - B + 0.25B^2)X_t = \epsilon_t - 0.25\epsilon_{t-1} \Leftrightarrow X_t = (1 - B + 0.25B^2)^{-1}(\epsilon_t - 0.25\epsilon_{t-1}) \Leftrightarrow$

  $X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i B^i(\epsilon_t - 0.25\epsilon_{t-1})$ avec $\xi_0 = 1$, $\xi_1 = \phi_1$, $\xi_i = \phi_1\xi_{i-1} + \phi_2\xi_{i-2}, i \geq 2$.

  D'où $X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i B^i(\epsilon_t - 0.25\epsilon_{t-1}) = X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i\epsilon_{t-i} - 0.25\sum_{i=0}^{\infty} \xi_i\epsilon_{t-1-i} = \epsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i\epsilon_{t-i} - 0.25\sum_{i=0}^{\infty} \xi_i\epsilon_{t-1-i}$

  $= \epsilon_t + \sum_{i=0}^{\infty} \xi_{i+1}\epsilon_{t-1-i} - 0.25\sum_{i=0}^{\infty} \xi_i\epsilon_{t-1-i} = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i\epsilon_{t-i}$ avec $\psi_0 = 1$, $\psi_1 = \xi_1 - 0.25$ et $\psi_i = \xi_i - 0.25\xi_{i-1}$, $i \geq 2$.

- c), d) et 3) à faire.

  4) Considérons le processus $ARMA(2,1)$

$$X_t = 0.5X_{t-1} + 0.36X_{t-2} + \epsilon_t + 0.5\epsilon_{t-1}$$

  Ce processus est stationnaire et causal car les racines du polynôme caractéristique $z_1 = -2.5$ et $z_2 = 1.111$ sont à l'extérieur du disque unité.

  On montre que $\mathbb{E}(X_t) = 0, \forall t$ (faire le calcul).

  $\gamma_h = Cov(X_t, X_{t-h}) = \mathbb{E}(X_t X_{t-h}) = \mathbb{E}[(0.5X_{t-1} + 0.36X_{t-2} + \epsilon_t + 0.5\epsilon_{t-1})X_{t-h}]$

  $\Leftrightarrow \gamma_h = 0.5\gamma_{h-1} + 0.36\gamma_{h-2} + \mathbb{E}(\epsilon_t X_{t-h}) + 0.5\mathbb{E}(\epsilon_{t-1}X_{t-h})$.

- 1) $h = 0$: $\gamma_0 = 0.5\gamma_1 + 0.36\gamma_2 + \underbrace{\mathbb{E}(\epsilon_t X_t)}_{(1)} + 0.5\underbrace{\mathbb{E}(\epsilon_{t-1}X_t)}_{(2)}$

  $(1) = \sigma_\epsilon^2$ (on remplace X_t par so expression).

  $(2) = \mathbb{E}[\epsilon_{t-1}(0.5X_{t-1} + 0.36X_{t-2} + \epsilon_t + 0.5\epsilon_{t-1})] = \sigma_\epsilon^2$.

  D'où les équations :

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= 0.5\gamma_1 + 0.36\gamma_2 + 1.5\sigma_\epsilon^2 \text{ (faire le calcul)} \\
\gamma_1 &= 0.5\gamma_0 + 0.36\gamma_1 + 0.5\sigma_\epsilon^2 \\
\gamma_h &= 0.5\gamma_{h-1} + 0.36\gamma_{h-2} \text{ si } |h| \geq 2
\end{aligned}$$

  Il est demandé de résoudre ce système. Déterminer d'abord γ_0, γ_1 et γ_2. On pose ensuite $\rho_h = \frac{\gamma_h}{\gamma_0}$. On peut revenir ensuite à $\gamma_h = \rho_h \gamma_0$.