①

Corrigé type ADD

Ex : 1 (05 points)

1/ - Dans le cas où on observe des variables quantitatives avec des unités de mesures différents 01

- Il faut centré et réduire le tableau X 01

2/ _ on a $C^1 = X' M u_1 = X' u_1$ $\quad M = I_p$

$$X'X C^1 = X'\underbrace{XX'}u_1 \quad , \quad V = \frac{1}{n} XX' \ , \ D_p = \frac{1}{n} I_n$$

$$= X' n V u_1 \qquad VMu_1 = Vu_1 = \lambda_1 u_1$$

$$= n X' \lambda_1 u_1$$

$$= n \lambda_1 X' u_1$$

01,5

$$= n \lambda_1 C^1 \qquad \text{Donc } \frac{1}{n} X'X C^1 = \lambda_1 C^1$$

- C^1 : est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ qui contient les coordonnés de projections des individus sur l'axe Δu_1. 0,5

- $\|C^1\|_{D_p} = \sqrt{Var(C^1)} = \sqrt{\lambda_1}$. 01

Exercice : 2 (15 points)

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to \text{Service} \\ \to \text{Qualité} \\ \to \text{Prix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} n = 4 \\ p = 3 \\ (p \leq n) \end{array}$$

1/ $\bar{x}^j = \sum_{i=1}^{n} p_i x_{ji}$, $M = I_3$, $D_p = \frac{1}{4} \cdot I_4$

01

$\bar{x}^1 = \frac{1}{4}(-2-1+2+1) = 0$ $\quad$ et $\bar{x} = \frac{1}{4}(-1+0-1+2) = 0$

$\bar{x}^2 = \frac{1}{4}(3+1-1-3) = 0$ $\quad g = 0_{\mathbb{R}^3}$ coïncide avec

② l'origine de $\mathbb{R}^3$ $\longrightarrow$ le tableaux X st Centré

$X_c = X$.

2/ $\mathrm{cov}(x^1, x^1) \overset{\text{déf}}{=} \langle x^1 - \bar{x}_1 \mathbb{1}, x^1 - \bar{x}^1 \mathbb{1} \rangle_{D_p}$

$= \frac{1}{n} \langle x^1, x^1 \rangle$

$= \|x^1\|^2_{D_p} = \frac{1}{4}\left((-2)^2 + (-1)^2 + 2^2 + 1^2\right)$

$= \frac{10}{4} = 5/2$ 0,5

• $\mathrm{cov}(x^1, x^1) = \mathrm{Var}(x^1)$

$= \|x^1\|_{D_p}$ st la norme de la première variable x^1 do $\mathbb{R}^n$. 0,5

De même : $\mathrm{cov}(x^1, x^2) = \langle x^1, x^2 \rangle_{D_p}$ $\quad \bar{x}^1 = \bar{x}^2 = 0$

$D_p = \frac{1}{n} I_n$

$= \frac{1}{4}(-2, -1, 2, 1)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{n} x^{1'} . x^2$ 0,5

et ainsi de suite

$= -\frac{12}{4} = -3$ (le p.s entre les deux premières variables)

• $V = X D_p X' = \frac{1}{n} X X'$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 10 & -12 & 2 \\ -12 & 20 & -8 \\ 2 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5/2 & -3 & 1/2 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1/2 & -2 & 3/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -6 & 1 \\ -6 & 10 & -4 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

symétrique

01,5

(3)

- $R = D_{1/\sigma} \cdot V \cdot D_{1/\sigma}$ où $D_{1/\sigma} = \begin{pmatrix} 1/\sigma_x^1 & & 0 \\ & 1/\sigma_x^2 & \\ 0 & & 1/\sigma_x^3 \end{pmatrix}$

Les écarts types sont $\sigma_{x^1} = \sqrt{\frac{5}{2}}$, $\sigma_{x^2} = \sqrt{5}$, $\sigma_{x^3} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

$$D_{1/\sigma} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{5}} & & 0 \\ & 1/\sqrt{5} & \\ 0 & & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

Après calcul $R = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-3\sqrt{2}}{5} & \frac{\sqrt{15}}{15} \\ \frac{-3\sqrt{2}}{5} & 1 & -2\frac{\sqrt{30}}{15} \\ \frac{\sqrt{15}}{15} & -\frac{2\sqrt{30}}{15} & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -6/\sqrt{50} & 1/\sqrt{15} \\ -6/\sqrt{50} & 1 & -4/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{15} & -4/\sqrt{30} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow R = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}85 & 0{,}26 \\ -0{,}85 & 1 & -0{,}73 \\ 0{,}26 & -0{,}73 & 1 \end{pmatrix}$$

01,5

- On travaille sur la matrice de variance-covariance (tableau initial non réduit) 0,5
- Si elle admet une valeur propre nulle, alors son déterminant doit être nul car $[\det V = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3]$

ou $[\det(V - \lambda I_p) = 0$, si $\lambda = 0] \Rightarrow [\det V = 0]$

$$\det V = \frac{1}{2^3}\left\{5[30-16] + 6(-18+4) + 1(24-10)\right\}$$

$$= \frac{1}{2^3}\left\{70 - 84 + 14\right\} = 0$$ 01

- Cela implique qu'il existe une combinaison linéaire entre

④ variables initiales dans le tableau X. 0,5

En effet, on peut vérifié facilement que $x^3 = -(x^1 + x^2)$

* Ceci indique aussi qu'il n'est pas nécessaire de mesurer l'une des trois variables i.e deux suffisent puisqu'on peut reconstituer la troisième à l'aide des deux autres.

• On donne $\lambda_1 = 61/8$, $Tr(V) = \sum_{j=1}^{3} \lambda_j = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$

$I_g = Tr(V) = \frac{1}{2}(5+10+3) = 9 \Rightarrow \lambda_2 = 9 - \frac{61}{8} = \frac{72-61}{8} = \frac{11}{8}$

$\lambda_1 = \frac{61}{8} > \lambda_2 = \frac{11}{8} > \lambda_3 = 0$ 01

$P_1(\Delta u_1) = \frac{I_{\Delta u_1^{\perp}}}{I_g} = \frac{61}{8} \times \frac{1}{9} \simeq 0,85$ (Soit 85%

$P_1(\Delta u_2) = \frac{I_{\Delta u_2^{\perp}}}{I_g} = \frac{11}{8} \times \frac{1}{9} \simeq 0,15$ (Soit 15%

Plan $\Delta u_1 \oplus \Delta u_2 \Rightarrow Part(P) = Part(\Delta u_1) + Part(\Delta u_2)$
$\simeq 100\%$ 01

On retient deux axes pour une représentation parfaite 100%. 0,5

$$C^1 = X \cdot u_1 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -4/5 \\ 3/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - \frac{12}{5} - 3/10 \\ -1/2 - 4/5 \\ 1 + 4/5 - 3/10 \\ 1/2 + \frac{12}{5} + 6/10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{37}{10} \\ -\frac{13}{10} \\ 15/10 \\ 35/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3,7 \\ -1,3 \\ 1,5 \\ 3,5 \end{pmatrix}$$

01

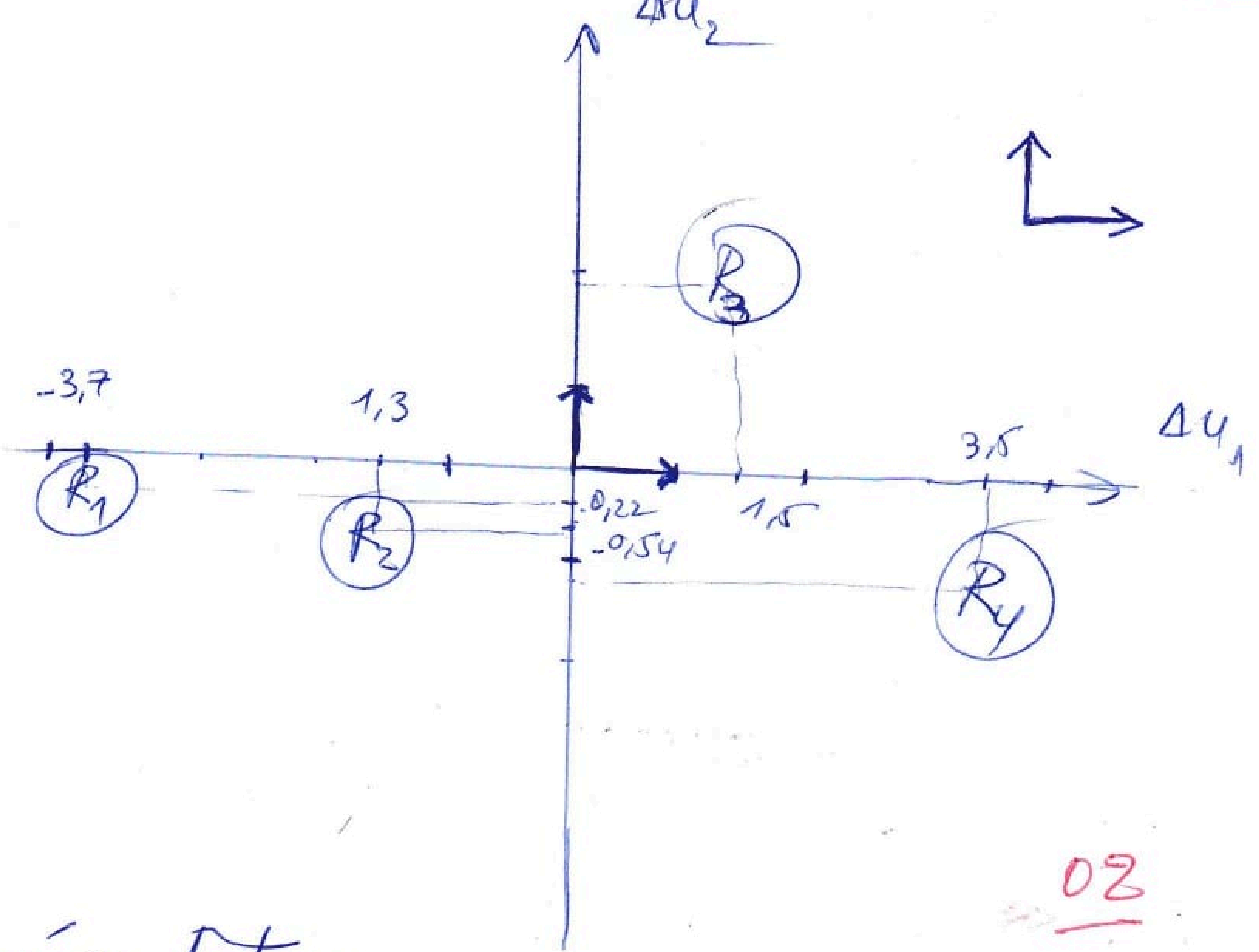
⑤

$$C^2 = X' u_2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,65 \\ 0,11 \\ -0,75 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1,3 + 0,33 + 0,75 \\ -0,65 + 0,11 \\ 1,3 - 0,11 + 0,75 \\ 0,65 - 0,33 - 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,22 \\ -0,54 \\ 1,94 \\ -1,18 \end{pmatrix}$$ 01

$R_1(-3,7 , -0,22)$, $R_2(-1,3 , -0,54)$

$R_3(1,5 , 1,94)$, $R_4(3,5 , -1,18)$ 0,5



02

- La représentation graphique des individus sur le plan principal : $P = \Delta u_1 \oplus \Delta u_2$