

U. D. L DE SIDI BEL ABBÈS

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Concours d'accès à l'Ecole doctorale

Calcul Stochastique- Statistique et Applications

1<sup>ère</sup> Epreuve : Recherche opérationnelle et Equations différentielles stochastiques  
et Processus stochastique

Sujet 1

**Exercice 01**

Résoudre le problème (P) par la méthode dual simplexe et en déduire la solution optimale du dual :

$$\begin{cases} Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \longrightarrow \min \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 2 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 \leq -3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 6 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 3 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

**Exercice 02**

Soit l'EDS

$$dX_t = \alpha X_t dt + b dB_t, \quad X_0 = x$$

1. On pose  $Y_t = e^{-\alpha t} X_t$ , calculer la dynamique de  $Y_t$ .
2. Exprimer  $Y_t$  sous la forme intégrale. En déduire la forme de  $X_t$ .
3. Calculer  $\mathbb{E}(Y_t)$  et  $\mathbb{E}(Y_t^2)$ .
4. Exprimer  $Y_t$  pour  $t > s$ , sous la forme  $Y_t = Y_s + \int_s^t g(u) dB_u$  où l'on explicitera la fonction  $g$ .
5. Calculer  $\mathbb{E}(Y_t/\mathcal{F}_s)$  et  $Var(Y_t/\mathcal{F}_s)$ .
6. En déduire  $\mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_s)$  et  $Var(X_t/\mathcal{F}_s)$ .

U. D. L DE SIDI BEL ABBÈS

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Concours d'accès à l'Ecole doctorale

Calcul Stochastique- Statistique et Applications

1<sup>ère</sup> Epreuve : Recherche opérationnelle et Equations différentielles stochastiques  
et Processus stochastique

Sujet 2

**Exercice 01**

Avant l'arrivée massif de nouveaux modèles, un vendeur de téléphones portables veut écouler rapidement son stock composé de huit appareils, quatre kits 'mains libres' et dix-neuf cartes avec des communications prépayées. Après une étude de marché, il sait très bien que dans cette période de soldes, il peut proposer aux clients un téléphone avec deux cartes et que cette offre va lui rapporter un profit net de sept dinars. Il peut aussi préparer à l'avance un coffret composé d'un téléphone, d'un kit "mains libres" et de trois cartes, ce qui va lui rapporter un profit net de neuf dinars. Il est assuré de pouvoir vendre tranquillement n'importe quelle quantité de ces offres dans la limite du stock disponible. Quelle quantité de chaque offre notre vendeur doit-il préparer pour maximiser son profit net ? (Utiliser pour cela la méthode du simplexe).

**Exercice 02**

Soit  $a, \alpha, b, \beta$  quatre constantes réelles. On considère l'équation différentielle stochastique

$$\begin{aligned}dX_t &= (a + \alpha X_t) dt + (b + \beta X_t) dB_t, \\X_0 &= x\end{aligned}$$

1. Montrer que cette équation admet une solution unique.

2. On note  $m(t) = \mathbb{E}(X_t)$  et  $M(t) = \mathbb{E}(X_t^2)$ .

(i) Montrer que  $m(t)$  est l'unique solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{aligned}y' - \alpha y &= a \\y(0) &= x\end{aligned}$$

(ii) Ecrire la formule d'Itô pour  $X_t^2$ . En déduire que  $M(t)$  est l'unique solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{aligned}y' - (2\alpha + \beta^2)y &= 2(a + b\beta)m(t) + b^2 \\y(0) &= x^2\end{aligned}$$

(iii) En déduire  $\mathbb{E}(X_t)$ ,  $Var(X_t)$  dans le cas  $a = \beta = 0$ .

U. D. L DE SIDI BEL ABBÈS

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Concours d'accès à l'Ecole doctorale

Calcul Stochastique- Statistique et Applications

1<sup>ère</sup> Epreuve : Recherche opérationnelle et Equations différentielles stochastiques  
et Processus stochastique

Sujet 3

**Exercice 01**

Une firme fabrique deux produits  $P_1$  et  $P_2$  à l'aide de matières premières  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$ . Le plan de production est le suivant :

	$P_1$	$P_2$
$M_1$	2	1
$M_2$	4	2
$M_3$	0	1

La direction de la firme dispose des matières premières  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$  en quantités respectives 8, 7 et 3 tonnes. Le profit dû à la fabrication d'une unité de  $P_1$  est égale à 5, et celui d'une unité de  $P_2$  à 6. La tâche de la direction est de faire un profit maximum tout en respectant les contraintes sur les matières premières.

1. Ecrire le problème de programmation linéaire relatif à ce problème, et résoudre le problème graphiquement.
2. En utilisant la méthode du simplexe trouvez la solution de ce problème.

**Exercice 02**

Soit l'EDS

$$dX_t = X_t dt + dB_t, \quad X_0 = x$$

1. On pose  $Y_t = e^{-t} X_t$ , calculer la dynamique de  $Y_t$ .
2. Exprimer  $Y_t$  sous la forme intégrale.
3. Calculer  $\mathbb{E}(Y_t)$  et  $\mathbb{E}(Y_t^2)$ .
4. Exprimer  $Y_t$  pour  $t > s$ , sous la forme  $Y_t = Y_s + \int_s^t g(u) dB_u$  où l'on explicitera la fonction  $g$ .
5. Calculer  $\mathbb{E}(Y_t/\mathcal{F}_s)$  et  $Var(Y_t/\mathcal{F}_s)$ .
6. En déduire  $\mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_s)$  et  $Var(X_t/\mathcal{F}_s)$ .