Remarque 1.4 : La proba. conditionnelle d'un évènement $A \in \mathcal{F}$ sachant une ss-tribu $\mathcal{G}$ est définie par :
$$\mathbb{P}(A/\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A/\mathcal{G}).$$

⚠ à retenir que $\mathbb{P}(A/\mathcal{G})$ est une v.a. bornée, car $0 \leqslant \mathbb{P}(A/\mathcal{G}) \leqslant 1$ p.s.

L'existence et l'unicité p.s d'une version de $\mathbb{E}(X/\mathcal{G})$

La déf^{t} 1.4 de Kolmogorov est en fait aussi un Théorème(1.2) assurant l'existence d'une version de l'esp. cond. $\mathbb{E}(X/\mathcal{G})$ ainsi que son unicité p.s.

Preuve du Théorème 1.2 Exercice.

Réf. D. Williams, Probability with Martingales Cambridge University Press, 1991. pp. 85-87

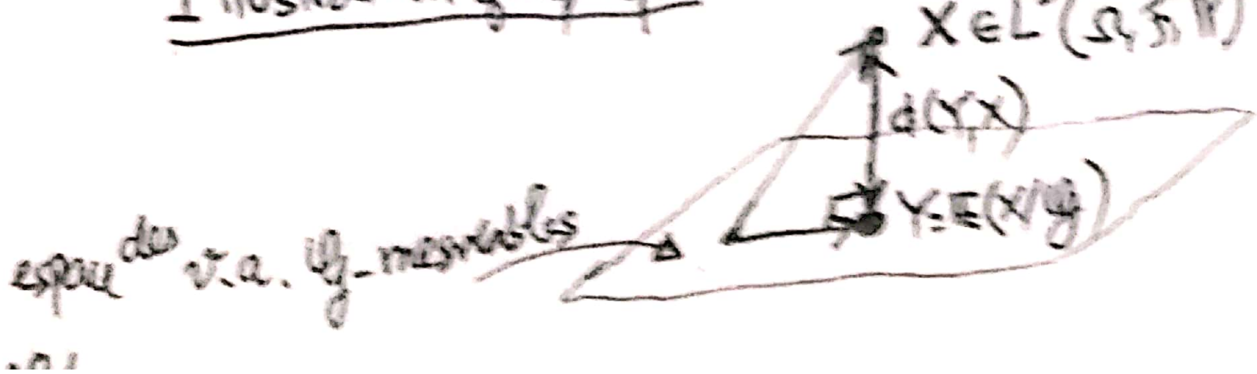
Remarque 1.5 : « Espérance conditionnelle et projection orthogonale dans un espace de Hilbert. »

Si $\mathbb{E}(X^2) < \infty$, alors l'esp. cond. $Y = \mathbb{E}(X/\mathcal{G})$ est une version de la projection orthogonale de X sur $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$, ce qui signifie que Y $(\mathbb{E}(X/\mathcal{G}))$ est le meilleur estimateur - en termes des moindres carrés - $\mathcal{G}$-mesurable de la v.a. X : Parmi toutes les fcts (v.a) $\mathcal{G}$-mesurables (i.e. tous les estimateurs qui peuvent être calculés en se basant sur l'information fournie par $\mathcal{G}$);

Y $(\mathbb{E}(X/\mathcal{G}))$ minimise : $\underbrace{\mathbb{E}[(Y-X)^2]}$

$$\mathbb{E}[(Y-X)^2] = d(Y,X) = \|Y-X\|^2_{L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})}$$

Illustration graphique



1.5. Propriétés de l'esp. conditionnelle

Proposition 12. Soit $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\mathcal{G}$ une ss-tribu de $\mathcal{F}$.

(1) Si $X = c$: c^{te}, p.s alors $\mathbb{E}(X/\mathcal{G}) = c$, p.s.

(2) [Espérances itérées] « Très utile » : $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X/\mathcal{G})\right] = \mathbb{E}(X)$

(3) [Avoir toute l'information] : si X est $\mathcal{G}$-mes.,
Alors $\mathbb{E}(X/\mathcal{G}) = X$, p.s

(4) [Faire sortir ce qui est connu] : Si Y est $\mathcal{G}$-mesurable et $XY \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, alors :

$$\mathbb{E}(XY/\mathcal{G}) = Y\,\mathbb{E}(X/\mathcal{G}), \text{ p.s.}$$

(5) [Absence de l'information] : Soit $\mathcal{F}^0 = \{\emptyset, \Omega\}$, la ss_tribu triviale, alors :

$$\mathbb{E}(X/\mathcal{F}^0) = \mathbb{E}(X), \text{ p.s.}$$

(6) [Linéarité] : Y : v.a. $\in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, a, b : c^{tes}.
Alors : $\mathbb{E}(aX + bY/\mathcal{G}) = a\,\mathbb{E}(X/\mathcal{G}) + b\,\mathbb{E}(Y/\mathcal{G})$

(7) [Positivité] : Si $X \geq 0$, p.s, alors $\mathbb{E}(X/\mathcal{G}) \geq 0$, p.s.

(8) [Propriété de Tour] : Si $\mathcal{H}$ est une ss-tribu de $\mathcal{G}$, alors :

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X/\mathcal{H})/\mathcal{G}\right] = \mathbb{E}(X/\mathcal{H}) \quad p.s$$
$$= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X/\mathcal{G})/\mathcal{H}\right], p.s.$$

(9) [Monotonie] : si $X \leq Y$, p.s, alors :

$$\mathbb{E}(X/\mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(Y/\mathcal{G}), \ p.s.$$

(10) [Information en vain بدون جدوى] (Rôle de l'indépendance)

Si X est indépendante de $\mathcal{G}$ (i.e. $\sigma(X) \perp \mathcal{G}$),

alors : $\mathbb{E}(X/\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$, p.s.

(11) [Jensen conditionnelle] : Si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe, et $\mathbb{E}\left[|\varphi(X)|\right] < \infty$, alors : $\varphi\left[\mathbb{E}(X/\mathcal{G})\right] \leq \mathbb{E}\left[\varphi(X)/\mathcal{G}\right]$, p.s.

Cas particuliers & très importants :

(a) $\varphi(x) = |x|$: $|\mathbb{E}(X/\mathcal{G})| \leq \mathbb{E}(|X|/\mathcal{G})$, p.s.

(b) $\varphi(x) = x^2$: $\mathbb{E}^2(X/\mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(X^2/\mathcal{G})$, p.s.

(c) $\varphi(x) = x^p$, $p \geq 1$: $\|\mathbb{E}(X/\mathcal{G})\|_{L^p} \leq \|X\|_{L^p}$ p.s.

$\|\cdot\|_{L^p}$: La norme ds $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(12) $\mathbb{E}\left|\mathbb{E}(X/\mathcal{G})\right| \leq \mathbb{E}|X|$, p.s.

Preuve : Devoir de maison n° 1.
« à rendre avant la fin du chapitre suivant. »

Théorème 1.3-15 Soient $(X_n)_n$ une suite de v.a.

(1) Thm de la cvgce dominée conditionnelle : (1.3)

Si $|X_n| \leq X$, $\forall n$, $\mathbb{E}X < \infty$ et $X_n \xrightarrow[n]{} X$, p.s,
Alors $\mathbb{E}(X_n/\mathcal{G}) \longrightarrow \mathbb{E}(X/\mathcal{G})$, p.s.

(2) Thm de la convgce monotone conditionnelle : (1,4)

(i) Si $X_n \geq Y$, $\mathbb{E}Y > -\infty$ et $X_n \nearrow X$, p.s.
alors : $\mathbb{E}(X_n/\mathcal{G}) \nearrow \mathbb{E}(X/\mathcal{G})$, p.s.

(ii) Si $X_n \leq Y$, $\mathbb{E}Y < \infty$ et $X_n \searrow X$, p.s.
alors : $\mathbb{E}(X_n/\mathcal{G}) \searrow \mathbb{E}(X/\mathcal{G})$, p.s.

(3) Lemme de Fatou conditionnelle, (1.5)

(i) Si $X_n \geq Y$, $\mathbb{E}(Y) > -\infty$, alors :

$$\mathbb{E}\left[\liminf_n X_n / \mathcal{G}\right] \leq \liminf_n \mathbb{E}(X_n / \mathcal{G}), \text{ p.s.}$$

(ii) Si $X_n \leq Y$, $\mathbb{E}(Y) < \infty$, alors :

$$\limsup_n \mathbb{E}(X_n / \mathcal{G}) \leq \mathbb{E}\left[\limsup_n X_n / \mathcal{G}\right], \text{ p.s}$$

Preuve : (Voir D. Williams. p. 89).

ملاحظة :

Dans tout ce chapitre,

2 choses à retenir :

1 Thm de Kolmogorov, 1933 (Déf. de l'esp. cond)

2 Les propriétés de l'esp. Cond.