Rappels
Couples de variables aléatoires possdant une densité.

Densités et densités marginales

Définition 1. Une *densité* sur $\mathbb{R}^2$ est une fonction intégrable $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = 1 \ .$$

On dit qu'un couple (X_1, X_2) de variables aléatoires réelles admet la densité f si

$$\mathbb{P}\big\{(X_1, X_2) \in B\big\} = \int_B f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$$

pour tout borélien $B \subset \mathbb{R}^2$ (donc en particulier pour tout ouvert et tout fermé B).

En appliquant cette définition aux ensembles de la forme $B =]-\infty, t_1] \times]-\infty, t_2]$, on obtient

$$F_{X_1,X_2}(t_1, t_2) := \mathbb{P}\big\{X_1 \leqslant t_1, X_2 \leqslant t_2\big\} = \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \ .$$

Le résultat ne dépend pas de l'ordre dans lequel on effectue les intégrations (cela suit du théorème de Fubini). La fonction F_{X_1,X_2} joue donc un rôle analogue à celui de la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle.

De plus, la fonction de répartition de X_1 est donnée par

$$F_{X_1}(t_1) = \mathbb{P}\big\{X_1 \leqslant t_1\big\} = \lim_{t_2 \to \infty} F_{X_1,X_2}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \ .$$

On a une expression analogue pour F_{X_2}.

Définition 2. On appelle *première* et *seconde densité marginale* de f les fonctions

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_2 \ , \\ f_2(x_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1 \ . \end{aligned}$$

Avec ces définitions, on a

$$F_{X_1}(t_1) = \int_{-\infty}^{t_1} f_1(x_1)\,\mathrm{d}x_1 \ , \qquad F_{X_2}(t_2) = \int_{-\infty}^{t_2} f_2(x_2)\,\mathrm{d}x_2 \ ,$$

c'est-à-dire que $f_1 = f_{X_1}$ est la densité de X_1 et $f_2 = f_{X_2}$ est la densité de X_2.

Indépendance

Théorème 3. *Soit (X_1, X_2) un couple de variables aléatoires réelles, admettant une densité f, de marginales f_1 et f_2. Alors X_1 et X_2 sont indépendantes si et seulement si*

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2) \ .$$

Théorème de transfert

Théorème 4. *Soit $X = (X_1, X_2)$ un couple de variables aléatoires réelles, admettant une densité f. Une fonction continue $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ admet une espérance si et seulement si*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \bigl|\phi(x_1, x_2)\bigr| f(x_1, x_2) \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 < \infty \; .$$

Dans ce cas

$$\mathbb{E}(\phi(X)) = \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x_1, x_2) f(x_1, x_2) \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \; .$$

Définition 5. Soit (X_1, X_2) un couple de variables aléatoires réelles telles que $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$ et $\mathbb{E}(X_2^2) < \infty$. Alors leur covariance est définie par

$$\operatorname{cov}(X_1, X_2) = \mathbb{E}\bigl([X_1 - \mathbb{E}(X_1)][X_2 - \mathbb{E}(X_2)]\bigr) \; .$$

Si $\operatorname{cov}(X_1, X_2) = 0$, on dit que X_1 et X_2 sont *non corrélées.*

Théorème 6. *Deux variables aléatoires indépendantes sont non corrélées.*

Changement de variable

Soient $A, B \subset \mathbb{R}^2$ des ouverts. Un *difféomorphisme* de A vers B est une bijection continûment différentiable $\varphi : A \to B$ dont la réciproque φ^{-1} est également continûment différentiable.

Théorème 7. *Soit $X = (X_1, X_2)$ un couple de variables aléatoires admettant la densité f_X. Soient $A, B \subset \mathbb{R}^2$ des ouverts tels que $f_X(x_1, x_2) = 0$ si $(x_1, x_2) \notin A$ et soit g un difféomorphisme de A vers B. Alors $Y = g(X)$ est un couple de variables aléatoires admettant la densité*

$$f_Y(y_1, y_2) = f_X(g^{-1}(y_1, y_2)) \bigl|\operatorname{Jac} g^{-1}(y_1, y_2)\bigr|$$

où, pour une application différentiable $h : B \to A$,

$$\operatorname{Jac} h(y_1, y_2) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} & \frac{\partial h_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial y_1} & \frac{\partial h_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}$$

dénote son Jacobien*.*

Somme de variables aléatoires

Théorème 8. *Soit (X_1, X_2) un couple de variables aléatoires réelles, admettant une densité f_X. Alors la variable aléatoire $Y = X_1 + X_2$ admet la densité*

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(y - x_2, x_2) \, \mathrm{d}x_2 \; .$$

Corollaire 9. *Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles indépendantes, de densités respectives f_1 et f_2. Alors $Y = X_1 + X_2$ admet la densité*

$$f_Y(y) = (f_1 \star f_2)(y) := \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y - x_2) f_2(x_2) \, \mathrm{d}x_2 \; .$$

$f_1 \star f_2$ est appelée la convolution *de f_1 et f_2.*

Exercices

Exercice 1 (Algorithme de Box–Müller)**.** Soient U et V deux variables aléatoires réelles, indépendantes, de loi uniforme sur $[0,1]$. Déterminer la densité du couple

$$(X,Y) = \left(\sqrt{-2\log(U)}\cos(2\pi V), \sqrt{-2\log(U)}\sin(2\pi V)\right) .$$

Quelles sont les lois marginales de X et de Y ? Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 2. Soit X une variable de loi normale centrée réduite.

1. Soit $Y = |X|$. Calculer $\operatorname{cov}(X,Y)$. Que peut-on en déduire ?
2. Même question si $Y = Z\operatorname{sign}(X)$, où Z est indépendante de X, et de même loi que X.
3. Même question si $Y = Z$ si $X \geqslant 0$ et $Y = -2Z$ si $Z < 0$.

Exercice 3 (Variables aléatoires gaussiennes)**.** Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

une matrice symétrique, définie positive ($\det A > 0$ et $\operatorname{Tr} A > 0$). Pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on note

$$\langle x, Ax\rangle = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 .$$

On considère un couple (X_1, X_2) de variables aléatoires réelles de densité

$$f(x_1,x_2) = \frac{\sqrt{\det A}}{2\pi}\,\mathrm{e}^{-\langle x,Ax\rangle/2} .$$

1. Calculer la covariance de X_1 et X_2.
2. Montrer que les variables X_1 et X_2 sont indépendantes si et seulement si elles sont non corrélées.
3. Calculer la densité de $X_1 + X_2$.
4. Calculer les lois marginales de X_1 et de X_2.

Exercice 4 (Loi Gamma)**.** Soient $X_1, X_2, \dots$ des variables aléatoires réelles indépendantes, de loi exponentielle de paramètre 1. Calculer par récurrence sur n la densité de

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

pour tout $n \geqslant 2$.