Université de Sidi Bel Abbes. 2019/2020
Faculté des Sciences Exactes **Master SA**
Département de Proba-Stat Stat-Nonparam

Examen Final

Problème. *Soit X une variable aléatoire définie sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeur dans $\mathbb{R}$. pour tout $x \in \mathbb{R}$, on désigne par F la fonction de répartition de X, qu'on suppose qu'elle est $(k+1)$-fois continûment dérivable et par f la fonction de densité, qu'on suppose qu'elle est strictement positive, et de classe C^k au voisinage de x.*

Etant donné $X_1, X_2, \ldots, X_n$ une suite de variable aléatoire réelle de même loi que X, l'estimateur de la fonction de répartition par la méthode du noyau noté $F_n(x)$, défini par:

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right), \forall x \in \mathbb{R}$$

où K est noyau et h_n est une suite de réels positifs, vérifiants

(1) *Le noyau K est supposé d'ordre k intégrable, d'intégrale égale à 1, borné et positif et à support compact $(0, 1)$, vérifiant:*
   (i) $\displaystyle\int t^j K(t)dt = 0 \ \forall j = 1, \ldots, k-1,$ *et* $0 < |\int t^k K(t)dt| < \infty.$
   (ii) $\exists A < \infty,\ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *on a:* $|K^{(i)}(x_1) - K^{(i)}(x_2)| \leq A|x_1 - x_2|,$ *où* $i = 0, 1.$

(2) $\lim_{n\to+\infty} h_n = 0$ *et* $\lim_{n\to+\infty} n^\beta h_n = \infty \quad \forall\ \beta > 0, \quad j = 0, 1.$

On déduit de F_n un estimateur de la densité, noté f_n, défini par

$$f_n(x) = F_n^{(1)}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h_n} K^{(1)}\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right) = \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^{n} K^{(1)}\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right)$$

Montrer qu'on a

(1) $|f_n(x) - f(x)| = \mathcal{O}(h_n^k) + \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_n}}\right),$ *p.co.* *et* $\exists \delta > 0 :\ \mathbb{P}\left(f_n(x) < \delta\right) < \infty.$

(2) $|F_n(x) - F(x)| = \mathcal{O}(h_n^k) + \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\log n}{n}}\right),$ *p.co.*

(3) $\exists \delta > 0$ *tel que* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left\{\inf_{x\in\mathbb{R}} |1 - F_n(x)| < \delta\right\} < \infty.$