République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed Khider - BISKRA
Faculté des Sciences Exactes
et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département de Mathématiques
Spécialité : *Probabilités et EDS, Stat non paramétrique, Analyse math et application*

Concours d'accès à la formation de troisième cycle (Doctorat LMD)
Date : 01/01/2021
Durée 01H, 30

Epreuve: Espace de Banach et Hilbert

Exercice 1 (07 pts):

Soient E un espace vectoriel normé et $T : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire. On pose $H = Ker\,(T)$.

1) Montrer que si T est continue alors H est fermé dans E.

2) Supposons que H est fermé dans E, soit $a \in E$ tel que $T\,(a) = 1$.

a- Montrer que l'ensemble $a + H = \{a + x : x \in H\}$ est fermé.

b- Montrer que $0 \notin a + H$.

c- Déduire qu'il existe $r > 0$ tel que $B\,(0, r) \cap (a + H) = \varnothing$.

d- Montrer que pour tout $x \in B\,(0, r)$ on a

$$|T\,(x)| \leq 1.$$

e- Déduire que T est continue sur E (remarquons que $\frac{rx}{2\|x\|} \in B\,(0, r)$).

Exercice 2 (07 pts):

Soit $E = C([0, 1])$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0, 1]$. On muni l'espace E de deux normes $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|$ qui font de E un espace de Banach où

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|.$$

Soit l'application identité définie par

$$Id : E_1 = (E, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow E_2 = (E, \|\cdot\|).$$

Supposons que

si $f_n, f \in E$ tels que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f_n - f\| = 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(t) = f(t)\ \forall t \in [0, 1]$.

1- Montrer que le graphe de Id est fermé.

2- Montrer que l'application Id est continue.

3- Montrer que l'application inverse Id^{-1} est continue.

4- En déduire que les deux normes sont équivalentes.

Exercice 3: (06 pts)

Soit H un espace préhilbertien réel et $T : H \longrightarrow H$ une isométrie, c'est à dire

$$\text{pour tout } x, y \in H : \|T\,(x) - T\,(y)\| = \|x - y\|.$$

De plus, supposons que $T\,(0) = 0$.

1- Montrer que T conserve le produit scalaire, c'est à dire

$$\text{Pour tout } x, y \in H : \langle T\,(x), T\,(y)\rangle = \langle x, y\rangle.$$

2- Déduire que T est linéaire (Indication: développer $\|T\,(x + y) - T\,(x) - T\,(y)\|^2$).

Sujet 1

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider - BISKRA
Faculté des Sciences Exactes
et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département de Mathématiques
Spécialité : *Probabilités et EDS, Stat non paramétrique, Analyse math et application*

Concours d'accès à la formation de trois. .ne cycle (Doctorat LMD)
Date : 01/04/2021
Durée 01H, 30

Epreuve: Espace de Banach et Hilbert

Exercice 1 (06 pts):

Soit H un espace de Hilbert. Soit F un sous espace vectoriel fermé de H. On définit l'application projection

$$P_F : H \to F$$

qui associe à tout $x \in H$ sa projection $P_F(x)$ dans F.

1) Montrer que

$$F = \{x \in H : P_F(x) = x\}.$$

2) Montrer que P_F est linéaire et continue, de plus $\|P_F\| = 1$.
3) Monter que $Ker(P_F) = F^{\perp}$ $\left(F^{\perp}\text{ est l'espace orthogonal de } F\right)$.
4) Montrer que pour tout $x \in H$ on a

$$\|x\|^2 = \|P_F(x)\|^2 + \|P_{F^{\perp}}(x)\|^2.$$

Exercice 2 (07 pts):

Soit l'espace de Hilbert réel $H = L^2([-1,1])$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt, \quad f, g \in H$$

et soit l'application $T : H \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$T(f) = \int_{-1}^{0} f(t)dt - \int_{0}^{1} f(t)dt, \quad f \in H.$$

1) Montrer que T est linéaire continue.
2) Calculer $\|T\|$. Indication: utiliser la fonction f_0 définie par

$$f_0(t) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2}, & \text{si } -1 \leq t < 0 \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

3) Déterminer une fonction $g \in H$ telle que $T(f) = \langle f, g\rangle$ pour tout $f \in H$.
4) Soit $Vect(g)$ le sous espace engendré par la fonction g, montrer que

$$\ker(T) = (Vect(g))^{\perp}.$$

5) Déterminer la projection sur $\ker(T)$ de la fonction $t \mapsto t$.

Sujet 2

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed Khider - BISKRA
Faculté des Sciences Exactes
et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département de Mathématiques
Spécialité : *Probabilités et EDS, Stat non paramétrique, Analyse math et application*

Concours d'accès à la formation de troisième cycle (Doctorat LMD)
Date : 01/04/2021
Durée 01H, 30

Epreuve: Espace de Banach et Hilbert

Exercice 3 (07 pts):

On considère sur $E = C([0,1], \mathbb{R})$ les deux normes

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

On note que $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$, $f \in E$.
1) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : t \longrightarrow t^n$, $f_n \in E$. Calculer $\|f_n\|_1$ puis $\|f_n\|_\infty$ et en déduire qu'il n'existe pas de nombre $C \geq 0$ tel que $\|f_n\|_\infty \leq C\|f_n\|_1$, pour tout $f \in E$.
2) Pour $n \geq 1$, soit $g_n(t) = \min\left(n, \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$. Démontrer que

$$\|g_{n+p} - g_n\|_1 = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}, \text{ pour tout } p \geq 1.$$

En déduire que (g_n) est de Cauchy pour $\|.\|_1$. Vérifier ensuite que (g_n) n'a pas de limite dans E. Conclure.
3) On suppose que E est muni de la norme $\|.\|_\infty$. Soit

$$A = \{f \in E : \quad |f(x)| < 1, \quad \forall x \in [0,1]\}.$$

Montrer que A est ouvert. Déterminer son adhérence $\overline{A}$.

Sujet 2

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed Khider - BISKRA
Faculté des Sciences Exactes
et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département de Mathématiques
Spécialité : *Probabilités et EDS, Stat non paramétrique, Analyse math et application*

Concours d'accès à la formation de troisième cycle (Doctorat LMD)
Date : 01/04/2021
Durée 01H, 30

Epreuve: Espace de Banach et Hilbert

Exercice 1 (06 pts):

1) Soit H un espace de Hilbert et a un élément non nul de H.
Montrer que pour tout $x \in H$, on a

$$d(x, \{a\}^{\perp}) = \frac{|\langle x, a\rangle|}{\|a\|}$$

2) On considère l'espace de Hilbert $L^2([0,1])$.
a) Montrer que toute $f \in L^2([0,1])$ est intégrable sur $[0,1]$.
b) On considère

$$F = \left\{ f \in L^2([0,1]) : \int_0^1 f(t)\,dt = 0 \right\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2([0,1])$.
c) Déterminer $F^{\perp}$.
d) Calculer $d(f, F)$ pour $f(t) = e^t$.

Exercice 2 (08 pts)

1) Citer le Théorème de Banach-Steinhauss pour une suite d'opérateurs linéaires bornés $(T_n)_n$.

2) Soit $c_0 = \left\{ (x_i)_{i\geq 1} \subset \mathbb{R} : \lim_{i \longrightarrow +\infty} x_i \longrightarrow 0 \right\}$ muni de la norme

$$\|x\|_\infty = \|(x_i)_{i\geq 1}\|_\infty = \sup_{i\geq 1} |x_i|.$$

Soit $(a_i)_{i\geq 1}$ une suite dans $\mathbb{R}$ vérifiant $(a_i x_i)_{i\geq 1} \in c_0$ pour toute $(x_i)_{i\geq 1} \in c_0$. On définit l'application $T : c_0 \longrightarrow c_0$ par

$$T\left((x_i)_{i\geq 1}\right) = (a_i x_i)_{i\geq 1} = (a_1 x_1, a_2 x_2, \ldots).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les applications $T_n : c_0 \longrightarrow c_0$ par

$$T_n\left((x_i)_{i\geq 1}\right) = (a_1 x_1, a_2 x_2, \ldots, a_n x_n, 0, 0, \ldots).$$

a) Montrer que les T_n sont linéaires et continues.
b) Utiliser la suite $e_i = (0, 0, \ldots, \underset{(rang\ i)}{1}, 0, 0 \ldots)$ pour montrer que

$$\|T_n\| = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|\}, \text{ pour tout } n \geq 1.$$

c) Montrer que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} T_n(x) = T(x)$ dans c_0, pour tout $x = (x_i)_{i\geq 1} \in c_0$.

Choisir sujet 3

Université Mohamed Khider - BISKRA
Faculté des Sciences Exactes
et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département de Mathématiques
Spécialité : *Probabilités et EDS, Stat non paramétrique, Analyse math et application*

Concours d'accès à la formation de troisième cycle (Doctorat LMD)
Date : 01/04/2021
Durée 01H, 30

Epreuve: Espace de Banach et Hilbert

d) Montrer que la suite $(a_i)_{i\geq 1}$ est bornée.

Exercice 3 (06 pts):

Soit $(x_n)_n$ une suite dans la boule unité fermée d'un espace de Hilbert H qui converge faiblement vers ω de H de norme 1 ($\|\omega\| = 1$).

1) Montrer que

$$\forall z \in \mathbb{C} : 1 - \mathcal{R}e(z) \leq |1 - z| .$$

2) Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \langle x_n, \omega \rangle .$$

3) Montrer que la suite $(x_n)_n$ converge fortement (en norme) vers ω.

Corrigé type (Examen coucours Doctorat Biskra)

06 pts

Exercice 1.

1) On sait que $\{a\}^{\perp}$ est un sous espace vectoriel de H.
Par définition, on a donc

$$d\left(x, \{a\}^{\perp}\right) = \|x - P(x)\|, \quad 0,5$$

où $P(x)$ est la projection orthogonale de x sur $\{a\}^{\perp}$.
Ecrivons x dans la décomposition orthogonale de H

$$H = \mathbb{K}a \oplus \{a\}^{\perp}; \quad 0,5$$

on a

$$x = ta + P(x),$$

avec $t \in \mathbb{K}$. Comme $P(x) \perp a$, ona

$$\langle x, a\rangle = \langle ta, a\rangle = t\|a\|^2. \quad 0,5$$

Il en résulte, puisque $\|x - P(x)\| = \|ta\|$, que

$$d(x, \{a\}^{\perp}) = \frac{|\langle x, a\rangle|}{\|a\|}. \quad 0,5$$

2)

a) Cela résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz:

$$\int_0^1 |f(t)|\, dt = \left(\int_0^1 1dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |f(t)|^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_2 < +\infty. \quad 0,5$$

b) Puisque

$$\left|\int_0^1 f(t)dt\right| \leq \int_0^1 |f(t)|\, dt \leq \|f\|_2, \quad 0,5$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et a), il s'ensuit que l'application

$$f \in L^2([0,1]) \mapsto \int_0^1 f(t)dt \quad 0,5$$

est linéaire et continue.

Comme F est son noyau, c'est un sous-espace vectoriel fermé.

c) Pour toute $f \in L^2([0,1])$, on a

$$\int_0^1 f(t)dt = \langle f, \mathbf{1}\rangle \quad 0,5$$

0,5

Donc $F = (Vect\{\mathbf{1}\})^{\perp}$ alors

$$F^{\perp} = \left(\{\mathbf{1}\}^{\perp}\right)^{\perp} = Vect\{\mathbf{1}\} \quad 0,5$$

est le sous espace vectoriel fermé engendré par $\mathbf{1}$. C'est à dire le sous espace vectoriel fermé constitué par les fonctions constantes $a\mathbf{1}, a \in \mathbb{K}$.

d) Puisque $F = (Vect\{\mathbf{1}\})^{\perp}$, on a par la question 1)

$$d(f, F) = \frac{|\langle f, \mathbf{1}\rangle|}{\|\mathbf{1}\|_2} = \int_0^1 f(t)\, dt \quad 0,5$$

pour $f(t) = e^t$, cela donne

$$d(f, F) = e - 1. \quad 0,5$$

06/13

Exercice 3.

1- On a

$$\forall z \in \mathbb{C} : 1-\mathcal{R}e(z) \leq |1-\mathcal{R}e(z)| = \sqrt{(1-\mathcal{R}e(z))^2} \leq \sqrt{(1-\mathcal{R}e(z))^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = |1-z| . \quad (1)$$

2- Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers ω de norme 1, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \langle x_n, \omega\rangle = \langle \omega, \omega\rangle = \|\omega\|^2 = 1. \quad (2)$$

3- Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|x_n\| \leq 1$ et $\|\omega\| = 1$, on a d'après (1),

$$\begin{aligned}
\|x_n - \omega\|^2 &= \langle x_n - \omega, x_n - \omega\rangle = \|x_n\|^2 + \|\omega\|^2 - \langle x_n, \omega\rangle - \langle \omega, x_n\rangle \\
&= \|x_n\|^2 + \|\omega\|^2 - \langle x_n, \omega\rangle - \overline{\langle x_n, \omega\rangle} \\
&= \|x_n\|^2 + \|\omega\|^2 - 2\mathcal{R}e\left(\langle x_n, \omega\rangle\right) \quad \to 1 \\
&\leq 2 - 2\mathcal{R}e\left(\langle x_n, \omega\rangle\right) \\
&\leq 2\,|1 - \langle x_n, \omega\rangle| \quad \to 1
\end{aligned}$$

et comme d'après (2), $\lim_{n\to+\infty} \langle x_n, \omega\rangle = 1$ alors on a le résultat. → 1

$\sup \|T_n\| < \infty$, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, $\|T\| \leq \lim\limits_{n \to +\infty} \inf \|T_n\|$

b) D'après le théorème de Banach-Steinhaus on a

(1) $\sup\limits_n \|T_n\| < \infty \Rightarrow \sup\limits_n \left(\max\{|a_1|, \ldots, |a_n|\}\right) < \infty$

$\Rightarrow (a_i)_{i \geq 1}$ est bornée.

Exercice (02) (08pts)

(01) 1) a) $\forall x, y \in C_0$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $T_n(\alpha x + y) = \alpha T_n(x) + T_n(y)$.

$\|T_n(x)\|_\infty = \|(a_1 x_1, a_2 x_2, \dots, a_n x_n, 0, \dots)\|_\infty$

(1,5) $= \max_{1 \leq i \leq n} |a_i x_i| \leq \|(x_i)_i\|_\infty \cdot \max\{|a_1|, \dots, |a_n|\}$

donc T_n est continue avec $\|T_n\| \leq \max\{|a_1|, \dots, |a_n|\}$

b) $\|e_n\|_\infty = 1$ et pour tout $k = 1, \dots, n$ on a

(1,5) $\|T_n\| \geq \|T_n(e_i)\|_\infty = \|(0, 0, \dots, a_i, 0, \dots)\|_\infty = |a_i|$

ce qui donne $\|T_n\| \geq \max\{|a_1|, \dots, |a_n|\}$

par conséquent $\|T_n\| = \max\{|a_1|, \dots, |a_n|\}$.

2) pour tout $x = (x_i)_{i \geq 1} \in C_0$ on a

$\|T_n(x) - T(x)\|_\infty = \|(a_1 x_1, \dots, a_n x_n, 0, \dots) - (a_1 x_1, a_2 x_2, \dots)\|_\infty$

(1) $= \|(0, 0, \dots, -a_{n+1} x_{n+1}, \dots)\|_\infty$

$= \sup_{i \geq n+1} |a_i x_i|$

(01) puisque $(a_i x_i)_{i \geq 1} \in C_0$ pour tout $(x_i)_i \in C_0$ on a

$\lim_{n \to +\infty} \sup_{i \geq n+1} |a_i x_i| = 0$

d'où $\lim_{n \to +\infty} \|T_n(x) - T(x)\|_\infty = 0$

alors $\lim_{n \to +\infty} T_n(x) = T(x)$, $\forall x \in C_0$.

(01) 3) a) Soit X, Y deux espace de Banach et $(T_n) \subset \mathcal{L}(X, Y)$ avec $\lim_{n \to +\infty} T_n(x) = T(x)$, $\forall x \in X$ Alors:

(2)