Chapitre 1

Espaces de Banach

1.1 Rappel sur les espaces vectoriels normés

1.1.1 Norme sur un espace vectoriel

Définition 1.1. *(Rappel) Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.*
Une application $\|.\| : X \to \mathbb{R}_+$ est dite norme sur X si :

1. $\forall x \in X : \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *(Séparation)*
2. $\forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{C} : \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ *(Homogénéité)*
3. $\forall x, y \in X : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(Inégalité triangulaire)*

Définition 1.2. *Un espace vectoriel muni d'une norme est dit espace vectoriel normé.*

Exemples 1. Les applications $\|.\|_p$, $(1 \leq p < \infty)$ et $\|.\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{C}^n$ où

$$\|x\|_p = (\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

et

$$\|x\|_\infty = \max_{n\geq 1} |x_n| \,, \;\; x = (x_k)_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n$$

2. L'application $\|.\|_\infty$ sur l'espace vectoriel $X = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ des fonctions continues sur un segment compact $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et définie par

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|\,, \quad f \in X$$

est une norme sur X.

1.2 Espaces de Banach

Définition 1.3. *Une suite $(x_n)_n$ d' un espace vectoriel normé $(X, \|.\|)$ est dite de Cauchy dans X si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}/\forall n, m \in \mathbb{N} : (n > N \text{ et } m > N) \Rightarrow (\|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

Définition 1.4. *La suite $(x_n)_n$ est dite convergente vers un élément $x \in X$, si*

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0$$

i.e.,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}/\forall n \in \mathbb{N} : (n \geq N) \Rightarrow (\|x_n - x\| < \varepsilon)$$

et l'on écrit

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x$$

Définition 1.5. *Soit X un espace vectoriel normé. Si toute suite de Cauchy dans X est convergente dans X, l'espace X est dit complet.*

Définition 1.6. *Un espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach.* [1]

1. Stefan Banach (1892-1945) est un grand mathématicien polonais. Ses travaux ont surtout porté sur l'analyse fonctionnelle dont il est l'un des fondateurs.

Exemples 1. Les espaces $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$ et $L_2([a,b], \mathbb{C})$ sont des espaces de Banach.

2. Les espaces

$$\ell_p := \left\{ x = (x_n)_n \subset \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty \right\}, 1 \leq p < \infty$$

et

$$\ell_\infty := \left\{ x = (x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C} : \sup_{n \geq 1} |x_n| < +\infty \right\}$$

munis de normes

$$\|x\|_p = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \sup_{n\geq 1} |x_n|$$

respectivement où $x = (x_n)_{n\geq 1}$, sont des espaces de Banach.

Proposition 1.1. *L'espace ℓ_2 est complet.*

Preuve. Soit donc

$$x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \xi_3^{(n)}, ..., \xi_n^{(n)}, ...) \in \ell_2$$

une suite de Cauchy. Pour k fixé, on a

$$\left| \xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)} \right| \leq \|x_n - x_m\| \to 0 \qquad (1)$$

quand $n, m \to +\infty$. La suite $\left(\xi_k^{(n)} \right)_{n\geq 1}$ est donc de Cauchy dans $\mathbb{C}$. Elle est donc convergente. Soit $\xi_k = \lim\limits_{n\to+\infty} \xi_k^{(n)}$, et posons $x = (\xi_1, \xi_2, , ...\xi_n, ..)$. Montrons que $x \in \ell_2$, et que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.

Pour tout entier j, $j \geq 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{j} |\xi_k|^2 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{j} \left| \xi_k^{(n)} \right|^2 \qquad (2)$$

et

$$\sum_{k=1}^{j} \left| \xi_k^{(n)} \right|^2 \leq \|x_n\|^2 \qquad (3)$$

De plus, $\sup_{n\geq 1} \|x_n\| = M < +\infty$ car

$$|\|x_n\| - \|x_m\|| \leq \|x_n - x_m\| \to 0, n, m \to +\infty$$

Il s'ensuit donc de (2) et (3) que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left|\xi_k^{(n)}\right|^2 \leq M^2$$

, i.e., $x \in \ell_2$. D'autre part, pour $\epsilon > 0$, il existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tous n, m, $n > N$ et $m > N_\epsilon$, et tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{p} \left|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}\right|^2 \leq \|x_n - x_m\|^2 < \epsilon \qquad (4)$$

Fixons $n \geq N_\epsilon$ et faisons tendre m vers $+\infty$. De (1) et (4), on obtiendra pour tout p

$$\sum_{k=1}^{p} \left|\xi_k^{(n)} - \xi_k\right|^2 = \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=1}^{p} \left|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}\right|^2 \leq \epsilon$$

Par conséquent,

$$\|x_n - x\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \left|\xi_k^{(n)} - \xi_k\right|^2 \leq \epsilon$$

◄

Remarque On verra plus tard que les espaces $\ell_p, (1 \leq p \leq +\infty)$ sont tous complets.

1.2.1 Normes équivalentes

Définition 1.7. *Deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sur un espace vectoriel normé X sont dites équivalentes sur X s'il existe des constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que*

$$\|x\|_1 \leq c_1 \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1$$

pour tout $x, x \in X$.

Remarque Il est clair que si $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont des normes équivalentes sur X, alors toute suite de Cauchy $(x_n)_n$ qui converge dans $(X, \|.\|_1)$, converge également dans $(X, \|.\|_2)$ et l'inverse. De même, toute suite de Cauchy dans $(X, \|.\|_1)$ est une suite de Cauchy dans $(X, \|.\|_2)$.

On a donc le résultat important suivant

Théorème 1.1. *[?] Deux normes sur un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes.*

Remarque Ce résultat est généralement faux si le corps de l'espace X n'est pas complet. En effet, soit $X = \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbb{Q}\}$.
On vérifie aisément que X est un $\mathbb{Q}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. De plus, X est isomorphe à $\mathbb{Q}^2$. D'où, $\dim X = 2$.
On définit les applications $\|.\|_1, \quad \|.\|_2 : X \to \mathbb{R}$ par

$$\|a + b\sqrt{2}\|_1 = |a| + |b| \quad \text{et} \quad \|a + b\sqrt{2}\|_2 = |a + b\sqrt{2}|$$

On vérifie facilement que ces applications sont des normes sur X.
Considérons les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ où

$$u_n = (1 - \sqrt{2})^n \text{ et } \quad v_n = (1 + \sqrt{2})^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Les termes u_n et v_n peuvent être écrits sous la forme

$$u_n = a_n - b_n\sqrt{2} \quad \text{et} \quad v_n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

où $a_n, b_n \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$. Par conséquent,

$$a_n = \tfrac{u_n + v_n}{2}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, la suite $(a_n)_n$ est divergente et

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$$

D'où,

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n\|_1 = +\infty$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n\|_2 = 0$$

La suite $(\frac{\|u_n\|_1}{\|u_n\|_2})_n$ n'est donc pas bornée, et par suite, les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ ne sont pas équivalentes sur X.

1.3 Espaces de Banach séparables

Définition 1.8. *Un espace vectoriel normé X est dit séparable si X contient un ensemble dénombrable et dense dans X.*

Exemple L'espace $(\mathbb{R}, |.|)$ est séparable. L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dénombrable et dense dans $\mathbb{R}$.

Proposition 1.2. *Les espaces $\ell_p, (1 \leq p < \infty)$ cités ci-dessus, sont séparables. Toutefois, l'espace ℓ_∞ ne l'est pas.*

Remarque Si X est de Hilbert séparable, alors X admet une base orthonormale dénombrable $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$, et tout élément x de X s'écrit

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \varphi_n$$

où $\lambda_n \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$. Or, pour un espace de Banach, on a la définition suivante

Définition 1.9. *Une suite $(x_n)_n$ dans un epace de Banach X est dite base de Schauder pour X si pour tout $x \in X$, il existe une suite unique $(\alpha_k)_{k\geq 1}$ dans $\mathbb{C}$, telle que*

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n x_n$$

Exemple La base standard $(e_n)_{n\geq 1}$ où $e_n = (0, 0, ..., 1, 0, 0, ..)$ est une base de Schauder de l'espace $\ell_p, 1 \leq p < \infty$.

Remarque On verra plus tard qu'il existe des espaces de Hilbert non séparables.