Solution de l'exercice 4 de la Série N°2 : ACP

Exercice 1 *Une étude gastronomique a conduit à apprécier le service, la qualité et le prix de quatre restaurants. Pour cela, un expert à note ces restaurants avec des notes allant de* -3 *à* 3*. Les résultats sont les suivants:*

Restaurant	***Service***	***Qualité***	***Prix***
$\mathbf{R}_1$	-2	$+3$	-1
$\mathbf{R}_2$	-1	$+1$	0
$\mathbf{R}_3$	$+2$	-1	-1
$\mathbf{R}_4$	$+1$	-3	2

La matrice de variances-covariances est

$$\mathbf{V}=\begin{pmatrix} 5/2 & -3 & 1/2 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1/2 & -2 & 3/2 \end{pmatrix},$$

et celle de corrélations (aux erreurs arrondies près) est

$$\mathbf{R}=\begin{pmatrix} 1 & -0.85 & 0.26 \\ -0.85 & 1 & -0.73 \\ 0.26 & -0.73 & 1 \end{pmatrix}.$$

1*. Etude de valeurs propres:*
i) Vérifier que $\mathbf{V}$ *admet une valeur propre* $\lambda_3 = 0$*.*
ii) On donne $\lambda_1 = 30.5/4$*. Déduire la valeur de* λ_2*.*
iii) Calculer les pourcentages d'inerties. Quelle est la dimension à retenir?
2*. Les vecteurs propres associés à* λ_1 *et* λ_2*, aux erreurs arrondies près, sont*

$$\mathbf{u}_1^* = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.8 \\ 0.3 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{u}_2^* = \begin{pmatrix} 0.65 \\ 0.11 \\ -0.75 \end{pmatrix}.$$

i) Déterminer les composantes principales qui correspondent aux axes principaux associés à $\mathbf{u}_1^*$ *et* $\mathbf{u}_2^*$ *respectivement.*
ii) Représenter les individus dans le plan principal $(1,2)$*.*
3*. Représentation des variables:*
i) Déterminer les corrélations entre les variables originelles et les composantes principales.
ii) Représenter les variables sur le cercle des corrélations dans le plan factoriel $(1,2)$*.*
iii) Interpréter les résultats.

* *

Solution

Question 1:

i) On sait que: λ une v.a propre $\iff \det(\mathbf{V}-\lambda\mathbf{Id}_3)=0$. Donc pour vérifier que $\lambda=0$ est une valeur propre de la matrice $\mathbf{V}$, il suffit s'assurer que $\det\mathbf{V}=0$. En effet

$$\det\mathbf{V}=\begin{vmatrix} 5/2 & -3 & 1/2 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1/2 & -2 & 3/2 \end{vmatrix}=0.$$

:**ii)** On donne $\lambda_1=30.5/4=7.625$, avec $\lambda_3=0$. Nous avons

$$\text{Trace}\,(\mathbf{V})=5/2+5+3/2. \tag{1}$$

D'autre part la trace d'une matrice carée égale à la somme de ses valeurs propres. Donc

$$\text{Trace}\,(\mathbf{V})=30.5/4+\lambda_2+0. \tag{2}$$

Les équations (1) et (2) ensembles, impliquent que $\lambda_2=1.375$.

iii) Calcul des pourcentages d'inerties (PI):

$$\text{PI de chaque exe principal}=\frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\times 100,\ i=1,2,3.$$

Premier axe principal E_1 :

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\times 100&=\frac{7.625}{7.625+1.375+0}\times 100\\ &=84.722\%.\end{aligned}$$

Deuxième axe principal E_2 :

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\times 100&=\frac{1.375}{7.625+1.375+0}\times 100\\ &=15.278\%.\end{aligned}$$

Troisième axe principal E_3 :

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\times 100&=\frac{0}{7.625+1.375+0}\times 100\\ &=0\%.\end{aligned}$$

Dimension à retenir:

$$\begin{aligned}\text{PI}\,(E_1\oplus E_2)&=\text{PI}\,(E_1)+\text{PI}\,(E_2)\\ &=84.722+15.278=100\%.\end{aligned}$$

La dimension à retenir est (1×2), c'est le plan $E_1\oplus E_2$, car ce dernier a un le plus grand poucentage d'inertie.

Question 2: la matrice des données est

$$\mathbf{X}^*=\begin{pmatrix} -2 & +3 & -1 \\ -1 & +1 & 0 \\ +2 & -1 & -1 \\ +1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le centre de gravité:

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_{i1} \\ \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_{i2} \\ \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_{i3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice centrée des donnees:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}^* - \mathbf{1}_3\mathbf{g}^t = \mathbf{X}^*.$$

i) Composantes principales:

$$c_1 = \mathbf{X}\mathbf{u}_1^* = \begin{pmatrix} -2 & +3 & -1 \\ -1 & +1 & 0 \\ +2 & -1 & -1 \\ +1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.8 \\ 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.7 \\ -1.3 \\ 1.5 \\ 3.5 \end{pmatrix},$$

et

$$c_2 = \mathbf{X}\mathbf{u}_2^* = \begin{pmatrix} -2 & +3 & -1 \\ -1 & +1 & 0 \\ +2 & -1 & -1 \\ +1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.65 \\ 0.11 \\ -0.75 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} -0.22 \\ -0.54 \\ 1.94 \\ -1.18 \end{pmatrix}.$$

ii) Représentation dans le plan $E_1 \oplus E_2$:

Restaurant	$\mathbf{c}_1$	$\mathbf{c}_2$
$\mathbf{R}_1$	-3.7	-0.22
$\mathbf{R}_2$	-1.3	-0.54
$\mathbf{R}_3$	1.5	1.94
$\mathbf{R}_4$	3.5	-1.18

3. **Question 3:** On note.

$$v_1 := \text{Service},\ v_2 := \text{qualité},\ v_3 := \text{prix}.$$

i) Corrélations: $\mathbf{cor}\,(c_k, v_j) = \sqrt{\lambda_k}\frac{u_{kj}}{s_j}$, $k, j = 1, 2, 3$. Donc

$$\mathbf{cor}\,(c_1, v_1) = \sqrt{\lambda_1}\frac{u_{11}}{s_1},\ \mathbf{cor}\,(c_2, v_1) = \sqrt{\lambda_2}\frac{u_{21}}{s_1},$$

$$\mathbf{cor}\,(c_1, v_2) = \sqrt{\lambda_1}\frac{u_{12}}{s_2},\ \mathbf{cor}\,(c_2, v_2) = \sqrt{\lambda_2}\frac{u_{22}}{s_2}$$

et

$$\mathbf{cor}\,(c_1, v_3) = \sqrt{\lambda_1}\frac{u_{13}}{s_3},\ \mathbf{cor}\,(c_2, v_3) = \sqrt{\lambda_2}\frac{u_{23}}{s_3}.$$

Application:

$$\mathbf{cor}\,(c_1, v_1) = \sqrt{7.625}\frac{0.5}{\sqrt{5/2}} \simeq 0.87,\ \mathbf{cor}\,(c_2, v_1) = \sqrt{1.375}\frac{0.65}{\sqrt{5/2}} \simeq 0.48$$

$$\mathbf{cor}\,(c_1, v_2) = \sqrt{7.625}\frac{-0.8}{\sqrt{5}} \simeq -0.98,\ \mathbf{cor}\,(c_2, v_2) = \sqrt{1.375}\frac{0.11}{\sqrt{5}} \simeq 0.05$$

$$\mathbf{cor}\,(c_1, v_3) = \sqrt{7.625}\frac{0.3}{\sqrt{3/2}} \simeq 0.27,\ \mathbf{cor}\,(c_2, v_3) = \sqrt{1.375}\frac{-0.75}{\sqrt{3/2}} \simeq -0.71.$$

Questions (ii) et (iii) se traites dans le salle de TD.