Cours 1

Processus de Poisson

1-1 Introduction

De nombreux phénomènes aléatoires se manifestent par des « arrivées » survenant une par une à des instants aléatoires successifs.

Exemples

- Arrivées d'appels à une centrale téléphonique
- Passage de véhicules à un péage d'autoroute
- Arrivées de clients à un guichet, occurrence d'accidents dans une ville, pannes de machines dans une usine,..

De tels phénomènes peuvent se définir par la famille $(S_n)_{n\geq 1}$des temps d'arrivées qui sont des variables aléatoires, mais on peut aussi le faire à partir du processus de comptage $(N(t))_{t\geq 0}$ ou par la famille $(\tau_n)_{n\geq 1}$ des intervalles de temps entre deux arrivées.

1-2 Processus de Comptage

Soit $N(t)$ le nombre d'évènements apparus jusqu'à l'instant t et $N(t+s)-N(s)$ est le nombre d'évènements apparus entre s et $s+t$.
L'espace des états E du processus $(N(t))_{t\geq 0}$ est discret ($E=\mathbb{N}$)et l'espace des temps est continu . Donc le processus $(N(t))_{t\geq 0}$ est un processus aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ tel que $N(0)=0$.

Définition 1

Un processus est dit homogène ou stationnaire dans le temps, si pour tout s et pour tout t, l'accroissement $N(t+s)-N(s)$ suit la même loi que $N(t)$.

Définition 2

Un processus de comptage est une suite de variables aléatoires réelles $(N(t))_{t\geq 0}$ tels que

i- $N(0)=0$
ii- $\forall t>0,\ N(t)\in\mathbb{N}^*$
iii- $t\mapsto N(t)$ est croissant

1-3 Définitions d'un processus de Poisson

Définition 3

Un processus de comptage $(N(t))_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson d'intensité ou de taux λ ($\lambda>0$) si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

i- $N(0)=0$,
ii- $(N(t))_{t\geq 0}$ est un processus à accroissements indépendants,

iii- $(N(t))_{t\geq 0}$ est un processus à accroissements stationnaires,

iv- La probabilité que deux événements ou plus se produisent dans un petit intervalle h est négligeable par rapport à la probabilité qu'il n'y ait qu'un seul événement :

$$P(N(h)=k)=\begin{cases} 1-\lambda h+o(h) & si \quad k=0 \\ \lambda h+o\,(h) & si \quad k=1 \\ o(h) & si \quad k\geq 2 \end{cases}$$

$o(h)$ est une fonction de h telle que $\lim\limits_{h\to 0}\frac{o(h)}{h}=0$

Définition 4

Un processus de Poisson d'intensité λ est un processus de comptage $(N(t))_{t\geq 0}$ tels que :

i- $(N(t))_{t\geq 0}$ est un processus stationnaire,

ii- $(N(t))_{t\geq 0}$ est un processus à accroissements indépendants ,

iii- Pour tout $t\geq 0$, la variable $N(t)$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda\, t$

$$P(N(t)=k)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} \quad ,k\geq 0$$

Il en résulte $E(N(t))=\lambda\, t$ et $Var\big(N(t)\big)=\lambda\, t$

Exemple 1

Des clients arrivent au guichet d'une banque selon un processus de Poisson d'intensité λ=10 /h .

1- Sachant que deux clients sont arrivés durant 5 premières minutes, calculer la probabilité que les deux soient arrivés pendant les deux premières minutes.
2- Sachant que deux clients sont arrivés durant 5 premières minutes, calculer la probabilité qu'au moins un soit arrivé durant les deux premières minutes.

Solution

Le nombre de clients arrivant à la banque à l'instant t, $N(t)$ est un processus de Poisson d'intensité λ=10/h. On a

$$P(N(t)=k)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} \quad ,k\geq 0$$

1- Sachant que deux clients sont arrivés durant 5 premières minutes, la probabilité que les deux soient arrivés pendant les deux premières minutes est

$$P\left(N\left(\frac{1}{30}\right)=2\,\middle|\,N\left(\frac{1}{12}\right)=2\right)=\frac{P\left(N\left(\frac{1}{30}\right)=2,N\left(\frac{1}{12}\right)=2\right)}{P\left(N\left(\frac{1}{12}\right)=2\right)}$$

$$= \frac{P\left(N\left(\frac{1}{30}\right)=2, N\left(\frac{1}{12}\right)-N\left(\frac{1}{30}\right)=0\right)}{P\left(N\left(\frac{1}{12}\right)=2\right)}$$

$$= \frac{P\left(N\left(\frac{1}{30}\right)=2\quad\right)P\left(\quad N\left(\frac{1}{12}\right)-N\left(\frac{1}{30}\right)=0\right)}{P\left(N\left(\frac{1}{12}\right)=2\right)}$$

$$= \frac{P\left(N\left(\frac{1}{30}\right)=2\right)P\left(N\left(\frac{1}{20}\right)=0\right)}{P\left(N\left(\frac{1}{12}\right)=2\right)} = \frac{\frac{e^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^2}{2!}\times e^{-\frac{1}{2}}}{\frac{e^{-\frac{5}{6}}\left(\frac{5}{6}\right)^2}{2!}} = \frac{4}{25}$$

2- Sachant que deux clients sont arrivés durant 5 premières minutes, la probabilité qu'au moins un soit arrivé durant les deux premières minutes est

$$P\left(N\left(\frac{1}{30}\right)\geq 1 \,\middle|\, N\left(\frac{1}{12}\right)=2\right) = 1 - P\left(N\left(\frac{1}{30}\right)=0 \,\middle|\, N\left(\frac{1}{12}\right)=2\right)$$

$$P\left(N\left(\frac{1}{30}\right)\geq 1 \,\middle|\, N\left(\frac{1}{12}\right)=2\right) = 1 - \frac{P\left(N\left(\frac{1}{30}\right)=0, N\left(\frac{1}{12}\right)=2\right)}{P\left(N\left(\frac{1}{12}\right)=2\right)}$$

$$= 1 - \frac{P\left(N\left(\frac{1}{30}\right)=0, N\left(\frac{1}{12}\right)-N\left(\frac{1}{30}\right)=2\right)}{P\left(N\left(\frac{1}{12}\right)=2\right)}$$

$$= 1 - \frac{P\left(N\left(\frac{1}{30}\right)=0\quad\right)P\left(\quad N\left(\frac{1}{30}\right)-N\left(\frac{1}{12}\right)=2\right)}{P\left(N(\frac{1}{12})=2\right)}$$

$$= 1 - \frac{P\left(N\left(\frac{1}{30}\right)=0\right)P\left(N\left(\frac{1}{20}\right)=2\right)}{P\left(N\left(\frac{1}{12}\right)=2\right)}$$

$$= 1 - \frac{e^{-\frac{1}{3}}\times\frac{e^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!}}{\frac{e^{-\frac{5}{6}}\left(\frac{5}{6}\right)^2}{2!}} = \frac{16}{25}$$

1-4 Distribution des temps d'attente et des inter-arrivées

On note

- S_n l'instant de la réalisation du n-ième évènement ;
- τ_n le n-ième temps d'attente. C'est la durée séparant le (n-1) ième évènement du n–ième évènement .

On a

- $S_n = \sum_{i=1}^{n} \tau_i$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
- $\tau_1 = 1$ et $\tau_n = S_n - S_{n-1}$, pour tout $n \geq 2$

Ainsi, la connaissance de la famille $(S_n)_{n\geq 1}$ est équivaut à celle de $(\tau_n)_{n\geq 1}$.

D'autre part, l'évènement $(S_n \leq t)$ signifie que le n –ième évènement a eu lieu à l'instant t ou avant, c'est à dire jusqu'à l'instant t, au moins n évènements ont eu lieu , $(N(t) \geq n)$.
et l'évènement $(S_{n+1} > t)$ signifie que le (n+1)-ième évènement a eu lieu après l'instant t, c'est-à-dire jusqu'à l'instant t au plus n évènements ont eu lieu $(N(t) \leq n)$. On a

$$P(N(t) = n) = P(S_n \leq t) - P(S_{n+1} \leq t)$$

Par conséquent la connaissance de $(N(t))_{t>0}$ équivaut à celle de $(S_n)_{n\geq 1}$.

Théorème 1

i- La suite des inter -évènements (ou inter -arrivées) $(\tau_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) de loi exponentielle de paramètre λ .

ii- Le temps d'attente $S_n = \tau_1 + \cdots + \tau_n$ suit la loi gamma de paramètres n et λ de densité

$$f_{S_n}(s) = \frac{e^{-\lambda s} \lambda^n s^{n-1}}{(\mathrm{n}-1)!}, \qquad n \in \mathbb{N}\,, si \;\; s \geq 0\,, \;\; f_{S_n}(s) = 0 \; si \; non$$

$E(S_n) = \frac{n}{\lambda}$ et $Var\,(S_n) = \frac{n}{\lambda^2}$

Théorème 2

$(N(t))_{t\geq 0}$ un processus de Poisson d'intensité λ si et seulement si les variables aléatoires τ_n sont indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ.

1-5 Instants d'occurrence d'un évènement

Soit $N(t)$, $t \geq 0$ un processus de Poisson d'intensité λ et supposons qu'un évènement se produise dans l'intervalle [0,t] . La variable aléatoire décrivant les instants d'occurrence de cet évènement a une distribution continue uniforme sur [0 ,t] .

En effet , soit $0 < s < t$, on a

$$P(\tau_1 < s \,|N(t) = 1) = \frac{P(\tau_1 < s,\; N(t) = 1)}{P(N(t) = 1)} = \frac{P(N(s) = 1, N(t) = 1)}{P(N(t) = 1)}$$
$$= \frac{P(N(s) = 1, N(t) - N(s) = 0)}{P(N(t) = 1)} = \frac{P(N(s) = 1)P(N(t) - N(s) = 0)}{P(N(t) = 1)}$$

$$= \frac{P(N(s)=1)P(N(t-s)=0)}{P(N(t)=1)} = \frac{\lambda s e^{-\lambda t} e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}$$

1-6 Propriétés

1-6-1 Processus de Poisson et loi Binomiale

Soit $(N(t))_{t\geq 0}$ un processus de Poisson d'intensité λ. Pour tout $s \leq t$, la loi conditionnelle de $N(s)$ sachant $N(t) = n$ est une loi binomiale de paramètres n et $\frac{s}{t}$.

1-6-2 Décomposition

Un processus de Poisson $(N(t))_{t\geq 0}$ d'intensité λ peut être décomposé en deux processus partiels de la façon suivante :
Chaque évènement est soumis à une expérience de Bernoulli qui l'attribue avec des probabilités p et $1-p$. On admet que ces attributions sont indépendantes les unes des autres et indépendantes de l'état de processus $(N(t))_{t\geq 0}$ alors $(N_1(t))_{t\geq 0}$ et $(N_2(t))_{t\geq 0}$ sont deux processus de Poisson indépendants de paramètres λp et $\lambda(1-p)$ respectivement.

1-6-3 Superposition

Soient $(N_1(t))_{t\geq 0}$ et $(N_2(t))_{t\geq 0}$ deux processus de Poisson indépendants d'intensités respectives $\lambda_1$et λ_2 . Alors le processus $N(t) = N_1(t)+N_2(t)$, $t \geq 0$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda_1 + \lambda_2$.

1-6-4 Nombre d'évènements pendant un intervalle aléatoire

Pour certaines applications, on considère le nombre N d'évènements qui ont lieu pendant un intervalle de durée aléatoire U dont la densité de probabilité $f(u)$ est supposée connue. On a

$$P(N = n |\, U = u) = \frac{e^{-\lambda u}(\lambda u)^n}{n!}$$

D'où ,

$$P(N = n) = \int_0^\infty P(N = n|\, U = u) f(u) du$$

La fonction génératrice de N s'écrit

$$g(z) = \int_0^\infty e^{\lambda u(z-1)} f(u) du$$

On obtient donc l'espérance et la variance de la variable N :

$$E(N) = \lambda\, E(U)$$

et

$$Var\,(N) = \lambda\, E(U) + \lambda^2\, Var(U)$$

Exemple 2

Soient $(N_1(t))_{t\geq 0}$ et $(N_2(t))_{t\geq 0}$ deux processus de Poisson indépendants d'intensités respectives $\lambda_1$et λ_2. On s'intéresse à la distribution du nombre d'évènements X de N_1 se produisant entre deux évènements consécutifs de N_2. On a

$$P(X = n|\, U = u) = \frac{e^{-\lambda_1 u}(\lambda_1 u)^n}{n!}\,, \qquad n \geq 0$$

et

$$f(u) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 u}\ ,\ \ u \geq 0$$

Donc

$$P(X = n) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda_1 u}(\lambda_1 u)^n}{n!} \lambda_2 e^{-\lambda_2 u} du = \lambda_1^n \lambda_2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-u(\lambda_1+\lambda_2)}(u)^n}{n!} du$$
$$= \frac{\lambda_1^n \lambda_2}{(\lambda_1+\lambda_2)^{n+1}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u(\lambda_1+\lambda_2)} u^n (\lambda_1+\lambda_2)^{n+1}}{n!} du$$

$\frac{e^{-u(\lambda_1+\lambda_2)} u^n (\lambda_1+\lambda_2)^{n+1}}{n!}$ est l'expression de la densité de la loi gamma de paramètres $(\lambda_1 + \lambda_2)$ et n dont l'intégrale entre o et l'infini vaut 1. Il en résulte que

$$P(X = n) = \frac{\lambda_1^n \lambda_2}{(\lambda_1+\lambda_2)^{n+1}}$$

La variable X suit la loi géométrique de paramètre $\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$.

1-6- 5 Processus de Bernoulli

Une manière de construire le processus de Poisson consiste à le considérer comme cas limite d'un processus de comptage connu sous le nom de processus de Bernoulli. Pour cela, on discrétise l'échelle du temps en partitionnant l'intervalle $[0,t]$ en n intervalles de même longueur $h = \frac{t}{n}$. On admet que :

- La probabilité p_n qu'un évènement se produise dans un tel intervalle est

$$p_n = \lambda h + o(h)$$

- La probabilité que plusieurs évènements se produisent dans un intervalle de longueur h est négligeable et est égale à o(h).
- Les évènements associés à des intervalles distincts se produisent indépendamment les uns des autres.

On appelle **processus de Bernoulli** d'intensité λ, la suite d'évènements ainsi définie. De tels processus sont utilisés pour décrire l'arrivée des clients vers un système d'attente dans le cas où l'échelle de temps est discrète.

Le nombre d'évènements $N(t)$ réalisés dans [0,t] suit alors une loi binomiale de paramètre n et p_n :

$$P(N(t) = k) = C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k}, k \in \{0, \dots, n\}$$

Fixons maintenant le temps t. Si le nombre d'intervalles n tend vers l'infini, il en résulte que

$$P(N(t) = k) = C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \to \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$$

Le processus de Poisson est un processus limite d'une suite de processus de Bernoulli ayant la même intensité λ.

1-7 Processus de Poisson composé

Soit $(N(t))_{t\geq 0}$ un processus de Poisson d'intensité λ et $(Y_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, et indépendantes du processus $(N(t))_{t\geq 0}$.

Le processus $(X(t))_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ défini par

$$X(t) = Y_1 + Y_2 + .. + Y_{N(t)}$$

est appelé processus de Poisson composé .

Caractéristiques

Soit $G_X(z,t)$ la fonction génératrice de $X(t)$ et $h_Y(z)$ celle de Y . Alors

$$G_X(z,t) = e^{\lambda t(h(z)-1)}$$

$$E\big(X(t)\big) = \lambda t E(Y_1)$$

$$Var\big(X(t)\big) = \lambda t E(Y_1^2)$$

Exemple 3

Dans un magasin, les clients arrivent selon un processus de Poisson avec intensité $\lambda = 10$ clients par heure .On suppose que les achats effectués par les clients sont des variables aléatoires i.i.d avec moyenne 30 et écart type 10.
Calculer l'espérance et la variance du total des ventes sur une période de 8 heures.

Solution

Le nombre total des ventes $X(t)$ est un processus Poisson composé d'intensité λ. On a

$$X(t) = Y_1 + \cdots + Y_{N(t)}$$

Où , $N(t)$ est le nombre de clients au magasin et (Y_i) sont les achats effectués par les clients

Donc $E\big(X(t)\big) = \lambda t\, E(Y_1) = 10 \times 8 \times 30 = 2400$

Et $Var\,\big(X(t)\big) = \lambda t\, E(Y_1^2) = \lambda t(Var(Y_1) + E^2(Y_1)) = 10 \times 8(100 + 900) = 80000$

1-8 Exercices

Exercice 1 Soit X une variable. On dit qu'elle suit une distribution (de probabilité) exponentielle de taux $\lambda > 0$ si

$$P(X > t) = e^{-\lambda t}\,, t > 0$$

1- Démontrer que $P(X > t + s|\, X > s) = P(X > t)$
2- Soit N une variable aléatire. On dit qu'elle suit une distribution (de probabilité) de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si

$$P(N = n) = \frac{e^{-\lambda}(\lambda)^n}{n!},\ \ n \geq 0$$

Calculer son espérance et sa variance.

Exercice 2 Des étudiants arrivent au bureau d'un enseignant pour consulter leur copie, suivant un processus de Poisson de taux 3 par heure. L'enseignant était censé être là à 8h mais n'est arrivé qu'à 10h. Quelle est la probabilité qu'aucun étudiant ne soit venu entre 8h et 10h ?

Exercice 3 Des malades arrivent chez un médecin suivant un processus de Poisson de taux 6 par heure. Le médecin ne reçoit pas de malades tant qu'il n' y a pas 3 malades dans la salle d'attente.

1- Quelle est la loi de la durée écoulée jusqu'au moment où le premier malade est reçu par le médecin ? quelle est sa moyenne ?
2- Quelle est la probabilité que personne ne soit reçu par le médecin en 30 minutes ?

Exercice 4 On suppose que le temps d'attente à la poste suit une loi exponentielle de moyenne 10 minutes.

1- Quelle est la probabilité qu'un client attende plus de 15 minutes ?
2- Sachant que le client a déjà au moins 10 minutes d'attente, quelle est la probabilité qu'il attende au moins 15 minutes ?

Exercice 5 Dans un serveur informatique, les requêtes arrivent selon un processus de Poisson, avec un taux de 60 requêtes par heure. Déterminer les probabilités suivantes :

1- L'intervalle entre les deux premières requêtes est compris entre 2 et 4 minutes
2- Aucune requête n'arrive entre 14h et 14h05.
3- Sachant que deux requêtes sont arrivées entre 14h et 14h10 au moins une est arrivée dans les 5 premières minutes.

Exercice 6 On suppose que les temps entre les passages successifs de voitures allant du Canada vers les Etats Unis au poste frontalier sont des variables aléatoires exponentielles de paramètre 6 par heure et sont indépendantes les unes des autres. Les douaniers américains inspectent une automobile sur dix. Il vont laisser passer les 9 prochaines voitures sans les inspecter, puis ils vont inspecter la suivante et ainsi de suite.

1- Calculer l'espérance et l'écart type du temps qui s'écoule entre deux inspections consécutives.
2- Calculer une approximation pour la probabilité qu'il ait au moins 150 voitures qui franchiront le poste frontalier durant les prochaines 24h.

Exercice 7 On admet que la durée de vie d'un appareil est exponentielle de paramètre $\lambda = 1/h$. Dès qu'un appareil tombe en panne, il est immédiatement remplacé par un élément identique.

1- Quelle est la distribution de l'instant d'apparition (ou d'occurrence) de la première panne sachant que le deuxième appareil fonctionne à l'instant $t = 3h$?
2- Si l'on dispose de 9 appareils, quelle est la probabilité que le temps total de service S soit au moins égale à 12h ?

Exercice 8 On considère une compagnie d'assurance qui s'occupe d'assurance automobile et habitation. On suppose que la proportion de contrat automobile est égale à 3/4 . Les sinistres arrivent selon un processus de Poisson d'intensité 10 par mois.

1- Quelle est la probabilité de ne pas avoir de sinistres habitation pendant 3 mois ?
2- Quelle est la probabilité d'avoir deux sinistres automobiles pendant 1 mois ?

Exercice 9 Les hommes (resp. les femmes) se présentent à l'entrée d'une grande surface suivant un processus de Poisson d'intensité 2/mn (resp 4/mn)

1- Quelle est la probabilité que moins de 2 femmes entrent pendant un intervalle de 3mn ?

2- Si 15 personnes se sont présentées pendant 5 minutes, quelle est la probabilité que 3 parmi elles soient des femmes ?

Exercice 10 l'arrivée des appels à un centre d'urgence est modélisée par un processus avec une intensité de 5 appels par heure. A chaque fois qu'un appel arrive on a une chance sur 5 que ce soit un appel pour incendie. Calculer :

1- La probabilité que le temps entre deux appels successifs soit au moins 10 minutes
2- La probabilité qu'il y aura 4 appels durant les 30 minutes sachant qu'il y a eu 2 appels durant les 10 premières minutes.
3- La probabilité qu'il y' aura durant les 4 prochaines heures exactement 3 appels pour incendies

Exercice 11 Le nombre de versement $N(t)$ d'indemnités effectués par une compagnie d'assurance en t jours est donné par un processus de Poisson de taux $\lambda = 4$ versements par jour. On suppose que le montant du ième versement est une variable aléatoire Y_i qui suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On fait l'hypothèse que les Y_i sont indépendantes, et indépendantes des $N(t)$ $(\forall t > 0)$.

1- Sachant que $E(Y_1) = 1000\ euros$, calculer p. Calculer Var (Y_1).
2- Soit $X(t)$ la variable aléatoire qui représente les versements totaux effectués par la compagnie en t jours. Calculer la moyenne et la variance des sommes versées en $t = 5\ jours$

Exercice 12 Considérons un titre boursier générant des dividendes à des instants que l'on ne serait prédire. Dans certains cas, il est possible de modéliser cette situation à l'aide d'un processus de Poisson. En effet, si nous définissons un évènement comme étant le versement de dividendes et, pour tout nombre réel positif t, $N(t)$ est le nombre de versements de dividendes durant l'intervalle de temps $]0, t]$, alors $\{N(t), t \geq 0\}$ est possiblement un processus de Poisson d'intensité λ. Pour les fins de ce problème, nous définissons l'unité de temps comme étant la journée. En supposant que nous recevons un montant $d_i > 0$ lors du i ième versement, calculer le montant espéré au cours de la première année. Pour faciliter la résolution du problème dans un premier temps, supposez que les versements sont tous du même montant, disons $d > 0$.