Chapitre 4

Problèmes aux limites
Partie 1

1 Introuction

Les problèmes de la physique peuvent être formulés via des équations différentielles, souvent ces équations sont dépendantes du temps. Dans ce cas, la solution est la plupart du temps contraintes par des conditions aux limites . On parle alors de "problème aux limites".

2 Problème aux limites unidimensionnel

Soit un réel $L > 0$ et 3 fonctions $f(x), p(x)$ et $q(x)$ de $[0, L]$ dans $\mathbb{R}$ continues. On cherche une fonction y de classe $C^2([0, L])$ qui satisfait

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2y}{dx^2} + p(x)\dfrac{dy}{dx} + q(x)y = f(x) \quad x \in [0, L] \\ \\ cl(0) = c_0 \;\; cl(L) = c_L \qquad\qquad \textit{conditions aux limites} \end{cases}$$

Avec $cl(x)$ correspond à une de 2 options suivantes

$$cl(x) = \begin{cases} y(x) \qquad \textit{condition de Dirichlet} \\ \\ \dfrac{dy}{dx}(x) \quad \textit{condition de Neumann} \end{cases}$$

Le problème est un problème aux limites linéaire unidimensionnel du seconde ordre.

2.1 Résolution par différences finies

La méthode de différence finies consiste à approcher la solution exacte $y(x)$ sur $[0, L]$ aux $m + 1$ points $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = L$.
On prend $x_k = kh$ *avec* $k = 0, \ldots m$ *et* $h = L/m$, h est le pas de discrétisation.

On a les approximations suivantes

Différence progressive

$$\frac{dy}{dx}(x) \simeq \frac{y(x+h)-y(x)}{h}$$

Différence rétrograde

$$\frac{dy}{dx}(x) \simeq \frac{y(x)-y(x-h)}{h}$$

Différence centrée

$$\frac{dy}{dx}(x) \simeq \frac{y(x+h)-y(x-h)}{2h}$$

Dérivée seconde

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x) \simeq \frac{y(x+h)+y(x-h)-2y(x)}{h^2}$$

$y(x_k)$ sera noté par y_k.

Problème 1

Considérons le problème de Poisson suivant

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2y}{dx^2}(x) = f(x) \qquad x \in [0, L] \\ \\ cl(0) = c_0 \quad cl(L) = c_L \end{cases} \tag{1}$$

Pour tout $x_k, k \neq 0, m$, l'équation (1) donne

$$f(x_k) = -\frac{d^2y}{dx^2}(x_k) \simeq \frac{-y_{k-1} - y_{k+1} + 2y_k}{h^2}$$

Cela permet d'obtenir $m-1$ équations linéaires reliant les différentes valeurs y_i qui forme un systèmes de $m-1$ équations avec $m+1$ inconnus.

$$\left\{\begin{array}{llllllll} -y_0 & +2y_1 & -y_2 & & & & = h^2 f(x_1) \\ & -y_1 & +2y_2 & -y_3 & & & = h^2 f(x_2) \\ & & -y_2 & +2y_3 & -y_4 & & = h^2 f(x_2) \\ \\ & & & & & \ldots\ldots & \\ \\ & & & -y_{m-2} & +2y_{m-1} & -y_m & = h^2 f(x_{m-1}) \end{array}\right. \tag{2}$$

Les deux autres équations sont obtenus en utilisant les conditions aux limites.

1. Pour les conditions $y_0 = c_0$ et $y_m = c_L$ (de Dirichlet).

Le système obtenu est

$$\left\{\begin{array}{llllll} +2y_1 & -y_2 & & & & = h^2 f(x_1) + y_0 \\ -y_1 & +2y_2 & -y_3 & & & = h^2 f(x_2) \\ & -y_2 & +2y_3 & -y_4 & & = h^2 f(x_2) \\ & & & & & \\ & \ldots\ldots & & & & \\ & & & & & \\ & & & -y_{m-2} & +2y_{m-1} & = h^2 f(x_{m-1}) - y_m \end{array}\right.$$

que l'on peut assembler sous forme matricielle $A_h Y = F_h$, où

$$A_h = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0\ldots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0\ldots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0\ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0.. & 0 & ..0 & -1 & 2 & -1 \\ 0.. & 0 & .. & . & -1 & 2 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_{m-1} \end{bmatrix},$$

$$F_h = h^2 \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \\ \vdots \\ f(x_{m-1}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_m \end{bmatrix}.$$

2. Pour les conditions $\frac{dy}{dx}(0) = c_0$ et $y_m = c_L$ (de Dirichlet).

On utilise l'approximation

$$c_0 \simeq \frac{y_1 - y_0}{h}$$

pour l'ajouter au système (2), ce qui donnera

$$\left\{\begin{array}{llllll} -y_0 & +y_1 & & & & = c_0 h \\ -y_0+ & 2y_1 & -y_2 & & & = h^2 f(x_1) \\ & -y_1 & +2y_2 & -y_3 & & = h^2 f(x_2) \\ & -y_2 & +2y_3 & -y_4 & & = h^2 f(x_2) \\ & & & & & \\ & & & \ldots\ldots & & \\ & & & & & \\ & & & -y_{m-2} & +2y_{m-1} & = h^2 f(x_{m-1}) - y_m \end{array}\right.$$

L'écriture matricielle dans ce cas est $A'_h Y' = F'_h$, où

$$A'_h = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0... & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0... & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0... & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0.. & 0 & ..0 & & -1 & 2 \end{bmatrix}, Y' = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_{m-1} \end{bmatrix},$$

$$F'_h = h^2 \begin{bmatrix} 0 \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{m-1}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_0 h \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_m \end{bmatrix}.$$

Nous cherchons alors à résoudre un système de $m-1$ équations linéaires. Il existe plusieurs méthodes itératives pour effectuer le calcul.

Problème 2

Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2y}{dx^2}(x) + c(x)y(x) = f(x) \quad x \in [0,1] \quad , \\ \\ y(0) = c_0 \quad y(1) = c_1 \end{cases} \tag{3}$$

où f et c sont deux fonctions données sur $[0,1]$ avec $f \in L^2([0,1])$, $c \in L^\infty([0,1])$ et $c \geq 0$.

Pour tout $x_k, k \neq 0, m$, l'équation (3) peut s'écrire

$$\frac{-y_{k-1} + 2y_k - y_{k+1}}{h^2} + c(x_k)y_k \simeq f(x_k).$$

Ce qui donne

$$-y_{k-1} + (2 + h^2 c(x_k))y_k - y_{k+1} \simeq h^2 f(x_k)$$

et

$$\begin{cases} (2 + h^2 c(x_1))y_1 - y_2 = h^2 f(x_1) + y_0 \\ -y_1 + (2 + h^2 c(x_2))y_2 - y_3 = h^2 f(x_2) \\ -y_2 + (2 + h^2 c(x_3))y_3 - y_4 = h^2 f(x_3) \\ \\ \\ ...... \\ \\ -y_{m-2} + (2 + h^2 c(x_{m-1}))y_{m-1} = h^2 f(x_{m-1}) + y_m \end{cases}$$

Matriciellement, le problème s'écrit $A_h Y = F_h$, où

$$A_h = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0... & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0... & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0.. & 0 & ..0 & -1 & 2 & -1 \\ 0.. & 0 & .. & . & -1 & 2 \end{bmatrix} + h^2 \begin{bmatrix} c(x_1) & 0 & 0 & 0 & 0... \\ 0 & c(x_2) & 0 & 0 & 0... \\ 0 & 0 & c(x_3) & 0 & 0... \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \\ 0.. & 0 & ..0 & & c(x_{m-1}) \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{m-2} \\ y_{m-1} \end{bmatrix}, \; F_h = h^2 \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{m-2}) \\ f(x_{m-1}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_1 \end{bmatrix}.$$