4 Factorielles et coefficients binomiaux

4.1 définitions

Pour *n* > 0, n **factorielle**, noté n**!** d´désigne le produit des *n* premiers nombres naturels:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n - 1) \cdot n \tag{1}$$

On ´étend cette d´définition en posant:

$$0! = 1 \tag{2}$$

Soient *k* et *n* des nombres entiers positifs vérifiant $0 \leq k \leq n$.

On appelle **coefficient binomial** le nombre C_k^n défini par la formule directe:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (3)$$

Exemple 1

$$C_3^7 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$$

4.2 Propriétés des coefficients binomiaux

Valeur initiale:

$$C_0^0 = 1$$

Formule de récurrence :

$$C_k^n = C_k^{n-1} + C_{k-1}^{n-1} \tag{4}$$

Ces deux formules permettent de calculer de proche en proche les coefficients binomiaux, elles se programment très facilement au tableur ou dans un langage de programmation.

Exemple 2

$$C_4^{10} + C_3^{10} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot (7+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = C_4^{11}$$

En plaçant les valeurs des coefficients binomiaux dans un tableau de forme triangulaire, on obtient le **triangle de Pascal** :

$n \backslash k$	0	1	2	3	4
0	$C_0 0$				
1	$C_0 1$	$C_1 1$			
2	$C_0 2$	$C_1 2$	$C_2 2$		
3	$C_0 3$	$C_1 3$	$C_2 3$	$C_3 3$	
4	$C_0 4$	$C_1 4$	$C_2 4$	$C_3 4$	$C_4 4$

Table 1: Triangle de Pascal des coefficients binomiaux

Chaque ´élément est la somme de ceux situés au-dessus et au-dessus à gauche de lui-même, conformément `a la formule de récurrence.
On peut observer la symétrie :

$$C_k^n = C_{n-k}^n \tag{5}$$

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Table 2: Triangle de Pascal

Exemple 3

$$C_5^8 = C_3^8 = 56$$

On a les valeurs particulières:

$$C_0^n = C_n^n = 1 \tag{6}$$

$$C_1^n = C_{n-1}^n = n \tag{7}$$

4.3 Binôme de Newton

Lorsque *n* est un nombre naturel, on a la formule du binôme:

$$\boldsymbol{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \, a^k b^{n-k}} \tag{9}$$

$$C_2^n = C_{n-2}^n = \frac{n(n-1)}{2} \tag{8}$$

Exemple 4
Pour $n = 0,1,2,3,4,5$:

$(a + b)^0 = 1$

$(a + b)^1 = a + b$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

La preuve se fait par récurrence, nous donnerons un argument convaincant au chapitre suivant.

Exemple 5
Voici un exemple numérique:

$$(1 + x)^8 = 1 + 8x + 28x^2 + 56x^3 + 70x^4 + 56x^5 + 28x^6 + 8x^7 + x^8$$

Le polynôme obtenu est homogène et du cinquième degré par rapport à a et b.
On démontre aussi que

$$C_0^n + C_1^n + C_2^n + ... + C_{n-1}^n + C_n^n = 2^n$$

2 Analyse combinatoire

L'analyse combinatoire s'occupe de dénombrements. Elle a des applications en calcul des probabilités.
De nombreux problèmes de dénombrement se ramènent au nombre de manières de ranger k objets choisis parmi n.
Avant tout dénombrement, il faut s'assurer si, dans la manière de ranger les objets, l'ordre compte ou non, si certains objets sont répètes ou non, si tous les objets sont pris ou non.
Selon les cas, la manière de compter change complétement.
Ainsi, on appelera:

- **groupement sans répétition**, le rangement qui ne renferme que des objets distincts.
- **groupement avec répétition** celui qui contient plusieurs objets indistinguables. et

selon que l'ordre compte ou non, on aura affaire `a: - des **arrangements** ou des **permutations** si l'ordre compte - des **combinaisons** si l'ordre ne compte pas.

Dans les problèmes de dénombrement, on a recours aux deux principes fondamentaux suivants:

Le principe de multiplication:
Si une expérience peut se décomposer en k opérations successives qui peuvent s'effectuer de $n_1,n_2,...,n_k$ manières distinctes, alors l'expérience peut se faire de

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$$

manières différentes.

Exemple 6
Les localités A et B sont reliées par $n_1 = 3$ routes différentes et les localités B et C par $n_2 = 2$ routes différentes; alors il y a $N = 3{\times}2 = 6$ manières différentes de se rendre par la route de la localité A `a la localité C.

Exemple 7
Le nombre de plaques comportant une lettre dans $\{a,b,c,d,e\}$ et un nombre entre 1 et 4 vaut

$$n_1 = 5, n_2 = 4, N = n_1 n_2 = 20$$

Voir Table 3.

	a	b	c	d	e
1	a1	b1	c1	d1	e1
2	a2	b2	c2	d2	e2
3	a3	b3	c3	d3	e3
4	a4	b4	c4	d4	e4

Table 3: Exemple 7

Le principe d'addition:
Si une expérience A peut être réalisée de n façons distinctes et si une expérience B peut être réalisée de m manières différentes, les deux expériences ne pouvant être réalisées simultanément, alors il y a:

$$N = n + m$$

façons distinctes de réaliser A ou B.
Si les deux expériences peuvent être réalisées simultanément, alors la formule devient:

$$N = n + m - p$$

ou` p est le nombre de réalisations communes.

2.1 Arrangements et permutations simples

Une **permutation simple** est un arrangement de n objets, tous distincts, pris dans un ordre donné; leur nombre est

$$P_n = n! \tag{10}$$

Le rangement ordonné de r objets distincts choisis parmi $n \geq r$, s'appelle **arrangement simple** et leur nombre se note

$$A_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{11}$$

Remarque
Si $n = r$ alors $A_r^n = P_n$.

Exemple 8
Soient les 4 lettres *a,b,c* et *d*. Alors:
- *abcd,bcda,acdb* sont des permutations simples des 4 lettres.
- *bd,cb,ca* sont des arrangements simples de 2 lettres choisies parmi 4.

Il y a $P_4 = 4! = 24$ permutations des 4 lettres et $A_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$ choix ordonnés sans répétitions de 2 lettres parmi 4.

La formule précédente se justifie aisément:
Il y a n façons de choisir le premier objet, le deuxième objet doit être choisi parmi les $n - 1$ restants, le troisième objet doit être choisi parmi les $n - 2$ restants, etc... Ainsi, en vertu du principe de multiplication, on a:

$$A_r^n = n(n-1)(n-2)...(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Exemple 9
- Le nombre d'arrangements de 3 lettres choisies parmi 6 est $A_3^6 = 6 \times 5 \times 4 = 120$.
- Le nombre de permutations de 6 lettres est égal `a $P_6 = 6! = 720$.

Exemple 10 (Comites)
Le nombre de comités (président, secrétaire, caissier) de 3 membres que l'on peut former à partir de 8 personnes est égal `a

$$A_3^8 = \frac{8!}{(8-3)!} = 336$$

2.2 Arrangements avec répétition

Le nombre d'arrangements avec répétition de *r* objets choisis parmi *n*, est:

$$A'^n_r = n^r$$

(12) En effet, il y a *n* choix pour le premier objet, *n* choix pour le second, etc..

2.3 Combinaisons simples

Une **combinaison simple** de *r* objets, tous distincts, choisis parmi *n* est un sous-ensemble quelconque de *r* éléments choisis parmi n; on ne tient donc pas compte de l'ordre dans lequel se trouvent ces éléments; le nombre de combinaisons simples est

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (13)$$

La justification de cette formule est aisé, en effet, ayant une combinaison de *r* objets, il y a *r*! manières de les ordonner. Donc

$$r! \cdot C_r^n = A_r^n$$

Exemple 11 (délégations)
Le nombre de délégations de 3 membres que l'on peut former `a partir de 8 personnes est égal `a

$$C_3^8 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = 56$$

Remarquons qu'une délégation peut former 3! = 6 comités (élection indirecte). Et ainsi,
le nombre de comités est 56 · 6 = 336.

Exemple 12 (Le binôme de Newton)
Nous pouvons maintenant justifier la formule (9) du binôme par un exemple:

$$(a+b)^8 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$$

Le nombre de termes du type, par exemple, a^5b^3 sera donné par le nombre de produits du type *aaaaabbb,aaaababb,abababaaa*, etc..., donc par le nombre de mots de 8 lettres formés de 5 "*a*" et 3 "*b*". Il y en a autant qu'il y a de manières de choisir les 5 positions occupées par les "*a*". Le nombre de manière de choisir 5 positions parmi 8 est $C_5{}^8$.