Université de Constantine1
Département des mathématiques
Master 2(SPA)
Année universitaire (2021-2022)

Série de travaux dirigés n3

Exercice1
Soit $(X_t)_{t\in Z}$ un processus stationnaire du second ordre centré de fonction d'autocovariance γ. $\gamma(h)=\gamma(-h)$
moyenne
En appliquant l'equation d'ortogonalité, trouver le meilleur prédicteur linéaire $\widehat{X}_{t+1} = P_{\overline{sp}\{X_t, X_{t-1}\}}(X_{t+1})$.
$X_{t+1} = \phi_1 X_t + \phi_2 X_{t-1}$

Exercice2
Soient les processus temporels suivants
$X_t = \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1}$, $Y_t = \eta_t + \frac{1}{\theta}\eta_{t-1}$.
où $(\epsilon_t)_{t\in Z}$ et $(\eta_t)_{t\in Z}$ sont deux processus bruit blanc $bb(0, \sigma^2)$.
$|\theta| < 1$, $\theta \neq 0$.
1).Discuter la stationnarité, la causalité et l'inversibilité du processus (X_t).
2).Calculer sa fonction d'autocovariance et autocorrélation $\gamma_X(h)$, $\rho_X(h)$.
3).Déterminer la fonction génératrice du processus (Y_t).
4).Déduire que ces deux processus ont la meme fonction d'autocorrélation.
5).Donner l'expression du prédicteur linéaire $\widehat{X}_{t+1}$ basé sur $\{\epsilon_t, \epsilon_{t-1}, \ldots\}$.
6) En déduire l'expression du prédicteur linéaire $\widehat{X}_{t+1}$ basé sur $\{X_t, X_{t-1}, \ldots\}$.
7) Calculer l'erreur de prédiction.

Exercice3 :
Soit le processus stationnaire $X_t = aX_{t-1} + \epsilon_t + b\epsilon_{t-1}$, avec $|a| < 1$, $|b| < 1$.

- 1- Ecrire X_t sous la forme d'un développement moyenne mobile infinie.
- 2- Déterminer les fonctions d'aotocovariance $\gamma(0), \gamma(1)$. Passer par le bruit blanc
- 3.Donner l'expression du prédicteur linéaire $\widehat{X}_{t+h} = P_{\overline{sp}\{X_t, X_{t-1}, \cdots\}}(X_{t+h})$.

Exercice4 Soit le processus autorégressif

$$X_t - \sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t-i} = \epsilon_t, \; t \geq 0,$$

$(\epsilon_t)_{t\in Z}$ est un $bb(0, \sigma^2)$tels que ϵ_t sont indépendantes de $X_{t-1}, X_{t-2}, \cdots, \forall t > 0$, 0.

— Déterminer $P_{\overline{sp}\{X_{t+1},\cdots,X_{t+h-1}\}}(X_{t+h})$, $h \geq p+1$.

— Montrer que

$$P_{\overline{sp}\{X_{t+1},\cdots,X_{t+h-1}\}}(X_t) = \frac{1}{\phi^p}(X_{t+p} - \phi_1 X_{t+p-1} - \cdots - \phi_{p-1} X_{t+1}) - \frac{1}{\phi^p} P_{\overline{sp}\{X_{t+1},\cdots,X_{t+h-1}\}}(\epsilon_{t+p}).\ h \geq$$

— En déduire que la foction d'autocorrélation partielle vérifie

$$\phi(h) = 0,\ h \geq p+1$$

Le 01/12/2021

Série de Travaux dirigé N°03 !

Ex 01 :

$$\hat{X}_{t+1} = \phi_1 X_t + \phi_2 X_{t-1}$$

Les équations d'orthogonalité : $\langle X_{n+1} - \sum \phi_{nj} X_{n+1-j} , X_{n+1-k} \rangle = 0$

$\langle X_{t+1} - \sum \phi_{tj} X_{t+1-j} , X_{t+1-k} \rangle$

$$\begin{cases} k=1 & \langle X_{t+1} - \underset{sp\{X_t, X_{t-1}\}}{P}(X_{t+1}) , X_t \rangle = 0 \\ k=2 & \langle X_{t+1} - \underset{sp\{X_t, X_{t-1}\}}{P}(X_{t+1}) , X_{t-1} \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle X_{t+1} - \phi_1 X_t - \phi_2 X_{t-1} , X_t \rangle = 0 \\ \langle X_{t+1} - \phi_1 X_t - \phi_2 X_{t-1} , X_{t-1} \rangle = 0 \end{cases}$$

$\ldots \rangle = E(X_t X_{t+k})$

$\ldots(X_t, X_{t+k})$

$X_{t-1} - E(X_t) E(X_{t+k})$

$$\begin{cases} \langle X_{t+1} , X_t \rangle - \phi_1 \langle X_t , X_t \rangle - \phi_2 \langle X_{t-1} , X_t \rangle = 0 \\ \langle X_{t+1} , X_{t-1} \rangle - \phi_1 \langle X_t , X_{t-1} \rangle - \phi_2 \langle X_{t-1} , X_{t-1} \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma(1) - \gamma(0) - \phi_2 \gamma(1) = 0 \\ \gamma(2) = \gamma(-2) - \phi_1 \gamma(-1) - \phi_2 (0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma(1) = \phi_1 \gamma(0) + \phi_2 \gamma(1) \\ \gamma(2) = \phi_1 \gamma(1) + \phi_2 \gamma(0) \end{cases}$$

Solution par méthode de Cramer.

$$\Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \gamma(0)^2 - \gamma(1)^2$$

$$\phi_1 = \frac{\begin{vmatrix} \gamma(1) & \gamma(1) \\ \gamma(2) & \gamma(0) \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\gamma(1)\gamma(0) - \gamma(2)\gamma(1)}{\Delta}$$

$$\phi_2 = \frac{\begin{vmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) \\ \gamma(1) & \gamma(2) \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\gamma(0)\gamma(2) - (\gamma(1))^2}{\Delta}$$

Exo2 : Solution sur la série

Solution d'Exo3 :

Soit le processus stationnaire $X_t = a X_{t-1} + \varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1}$

avec : $|a| < 1$, $|b| < 1$.

① X_t sous la forme d'un développement moyenne mobile infini ; MA(∞) 1ère Méth :

$$X_t = a X_{t-1} + \varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1}$$

$$X_t - a X_{t-1} = \varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1}$$

$$(1 - aB)X_t = (1 + bB)\varepsilon_t$$

$$X_t = (1 - aB)^{-1}(1 + bB)\varepsilon_t$$

On a $|a| < 1 \Rightarrow (1 - aB)^{-1} = \sum_{i\geq 0}(aB)^i$

$$X_t = \sum_{i\geq 0}(aB)^i(1 + bB)\varepsilon_t$$

$$X_t = \sum_{i\geq 0}\left[(aB)^i + b a^i B^{i+1}\right]\varepsilon_t$$

$$= \sum_{i\geq 0}(aB)^i\varepsilon_t + b\sum a^i B^{i+1}\varepsilon_t$$

$j = i+1 \Rightarrow i = j-1$, $i = 0 \Rightarrow j = 1$

$$X_t = \sum_{i\geq 0}(aB)^i\varepsilon_t + b\sum_{j\geq 1} a^{j-1}B^j\varepsilon_t$$

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{i\geq 1}(aB)^i\varepsilon_t + \frac{b}{a}\sum_{j\geq 1}(aB)^j\varepsilon_t$$

$$= \varepsilon_t + \sum_{i\geq 1}(aB)^i\left(1 + \frac{b}{a}\right)\varepsilon_t$$

$$= \varepsilon_t + \sum_{i\geq 1} a^i\left(1 + \frac{b}{a}\right)\varepsilon_{t-i}$$

Si $p \geq 1$:

$\psi_j - \sum_{k=1}^{\min(p,j)} \phi_k \psi_{j-k} = \theta_j$

$\psi_j - \sum_{k=1}^{\min(p,j)} \phi_k \psi_{j-k} = 0$

2° Méthode :

$X_t - a X_{t-1} = \varepsilon_t + b\, \varepsilon_{t-1}$

$X_t (1 - aB) = \varepsilon_t (1 + bB)$

$X_t = \frac{\theta(B)}{\phi(B)} \varepsilon_t$

$\frac{\theta(z)}{\phi(z)} = \psi(z) = \sum \psi_j z^j$ ARMA(1,1)

$\sum \psi_j = ?$

$p = 1$ $q = 1$

Pour $j = 0$:

$\psi_j - \sum_{k=1}^{\min(p,j)} \phi_k \psi_{j-k} = \theta_j$ $j \leq q$

$\psi_0 = \theta_0 = 1$

Pour $j = 1$:

$\psi_1 = \phi_1 \psi_0 + \theta_1$ $\phi(B) = 1 - aB$

$\psi_1 = a + b$

$p = 1$ $j = 2$

$\min(p,j) = 1$?

$\psi_2 - \sum_{k=1}^{1} \phi_k \psi_{j-k} = 0$

$\psi_2 - \phi_1 \psi_1 = 0$

$\psi_2 = a(a+b)$

Pour $j = 2$: $j = 2$ $j > q \Rightarrow \theta = 0$

$\psi_2 = \phi_1 \psi_1 - \phi_2 \psi_0$

$\psi_2 = a(a+b) = a^2 + ab$

$j = 3$

$\psi_3 = \phi_1 \psi_2 + \overset{\to 0}{\phi_2} \psi_1 + \overset{\to 0}{\phi_3} \psi_0$

$\psi_3 = a^2(a+b) = a^3 + a^2 b$

$X_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1} (a^j + a^{j-1} b)\, \varepsilon_{t-j}$

02) Les fonctions d'autocovariance $\gamma(0), \gamma(1)$:

*** $\gamma(0)$:**

1ère Méth: $\gamma(0) = Cov(X_t, X_t)$

$$= Var\left(\varepsilon_t + \sum_{i\geq 1} a^i \left(1+\frac{b}{a}\right)\varepsilon_{t-i}\right)$$

$$= Var(\varepsilon_t) + \left(1+\frac{b}{a}\right)^2 \sum_{i\geq 1} a^{2i}\, Var(\varepsilon_{t-i})$$

$$= \sigma^2 + \left(1+\frac{b}{a}\right)^2 \sigma^2 \sum_{i\geq 1} a^{2i}$$

$$= \sigma^2\left[1 + \left(1+\frac{b}{a}\right)^2 \left(\frac{a^2}{1-a^2}\right)\right]$$

2ème Méth:

$$\gamma(0) = Cov\left(\varepsilon_t + \sum_{i\geq 1} a^i\left(1+\frac{b}{a}\right)\varepsilon_{t-i},\ \varepsilon_t + \sum_{j\geq 1} a^j\left(1+\frac{b}{a}\right)\varepsilon_{t-j}\right)$$

$$= \sigma_\varepsilon^2 + \sum_{i\geq 1}\sum_{j\geq 1} a^i a^j \left(1+\frac{b}{a}\right)^2 Cov(\varepsilon_{t-i}, \varepsilon_{t-j})$$

$$= \sigma_\varepsilon^2 + \sigma^2 \sum_{i\geq 1}\sum_{j\geq 1} a^{2i}\left(1+\frac{b}{a}\right)^2$$

*** $\gamma(1)$:**

$$\gamma(1) = Cov(X_t, X_{t+1})$$

$$= Cov\left(\varepsilon_t + \left(1+\frac{b}{a}\right)\sum_{i\geq 1} a^i \varepsilon_{t-i},\ \varepsilon_{t+1} + \left(1+\frac{b}{a}\right)\sum_{j\geq 1} a^j \varepsilon_{t+1-j}\right)$$

$$= \underbrace{Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+1})} + \underbrace{\left(1+\frac{b}{a}\right)\sum_{j\geq 1} a^j\, Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+1-j})}$$

$$1 \qquad = \frac{a^4}{1-a^2} \qquad + \underbrace{\left(1+\frac{b}{a}\right)\sum_{i\geq 1} a^i\, Cov(\varepsilon_{t-i}, \varepsilon_{t+1})} + \underbrace{\left(1+\frac{b}{a}\right)^2 \sum_{i\geq 1}\sum_{j\geq 1} a^i a^j\, Cov(\varepsilon_{t-i}, \varepsilon_{t+1-j})}_{j=i+1}$$

$i = j-1$, $j = i+1$

$i = 1$, $j = 2$

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)^2 \sum_{i\geq 1} a^{2i+1}$$

$= (a+b)\sigma^2 + \sigma^2 (1+\frac{b}{a})^2 \sum_{i\geq 2} a^{2i+1}$

$= \sigma^2 [(a+b) + (1+\frac{b}{a})^2 a \sum_{i\geq 2} a^{2i}]$

$= \sigma^2 [(a+b) + (1+\frac{b}{a})^2 (\frac{a^5}{1-a^2})]$

(Q3) $P_{\overline{sp}\{X_t, X_{t-1}\dots\}}(X_{t+h}) = \hat{X}_{t+h}$

$X_t = \varepsilon_t + \sum_{i\geq 1} a^i (1+\frac{b}{a}) \varepsilon_{t-i}$

$X_{t+h} = \varepsilon_{t+h} + \sum_{i\geq 1} a^i (1+\frac{b}{a}) \varepsilon_{t-i+h}$

$\hat{X}_{t+h} = \sum_{i\geq h} a^i (1+\frac{b}{a}) \varepsilon_{t-i+h}$

$= P_{\overline{sp}\{\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}\dots\}}(X_{t+h})$

$\hat{X}_{t+h} = \sum_{i\geq h} a^i (1+\frac{b}{a}) B^{i-h} \varepsilon_t$

puisque X_t et inversible

$\varepsilon_t = \frac{(1-aB)}{(1+bB)} X_t = (1-aB)(1+bB)^{-1} X_t$

$$\hat{X}_{t+k} = \sum_{i \geq k} a^{i} \left(1+\frac{b}{a}\right) B^{i-k} \left[(1-aB)(1+bB)^{-1} X_t\right]$$

$$\hat{X}_{t+k} = \left(1+\frac{b}{a}\right) \sum_{i \geq k} a^{i} B^{i-k} (1-aB)(1+bB)^{-1} X_t$$

$$p = i - k \Rightarrow i = p + k$$

$$\hat{X}_{t+k} = \left(1+\frac{b}{a}\right) \sum_{p \geq 0} a^{p+k} B^{p} (1-aB)(1+bB)^{-1} X_t$$

$$\hat{X}_{t+k} = \left(1+\frac{b}{a}\right) a^{k} \underbrace{\cancel{\sum_{p \geq 0} a^{p} B^{p}}}_{= (1-aB)^{-1}} \cancel{(1-aB)} (1+bB)^{-1} X_t$$

$$\hat{X}_{t+k} = \left(1+\frac{b}{a}\right) a^{k} (1+bB)^{-1} X_t$$

$$\hat{X}_{t+k} = \left(1+\frac{b}{a}\right) a^{k} \sum_{j \geq 0} (-1)^{j} b B^{j} X_t$$

$$\hat{X}_{t+k} = \left(1+\frac{b}{a}\right) a^{k} \sum_{j \geq 0} (-1)^{j} b^{j} X_{t-j} \ldots$$

Exo4 : Soit le processus autoregressif :

$$X_t - \sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t-i} = \varepsilon_t \quad , \quad t \geq 0$$

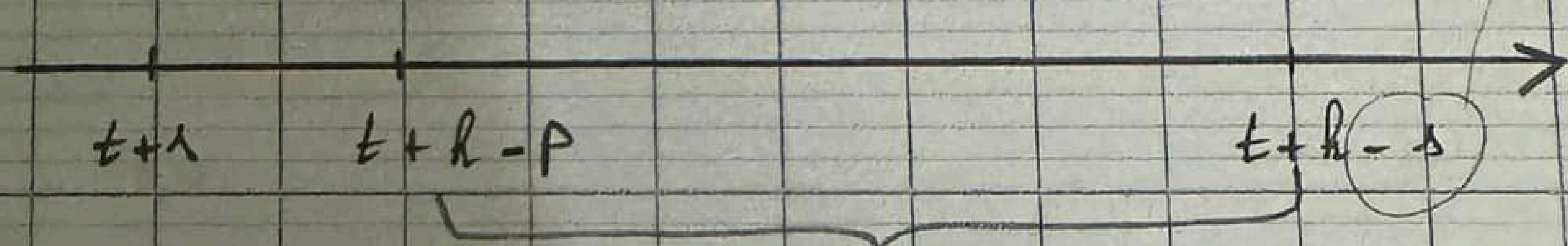
$(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$: est un bruit blanc $(0, \sigma^2)$ tels que ε_t sont indépendants de $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots$, $\forall t > 0$

• Trouvons $P_{\overline{sp}\{X_{t+1}, \dots, X_{t+h-1}\}}(X_{t+h})$, $h \geq p+1$:

$$X_{t+h} = \sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t+h-i} + \varepsilon_{t+h}$$

$$= \phi_1 X_{t+h-1} + \phi_2 X_{t+h-2} + \dots + \phi_p X_{t+h-p}$$

$$h \geq p+1 \Longrightarrow h - p \geq 1$$



$$P_{\overline{sp}\{X_{t+1}, \dots, X_{t+h-1}\}}(X_{t+h}) = E\left[X_{t+h} / X_{t+1} \dots X_{t+h-1}\right]$$

$$= E\left[\sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t-i+h} + \varepsilon_{t+h} / X_{t+1} \dots X_{t+h-1}\right]$$

$= E\left[\sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t-k-i} \mid X_{t-1} \dots X_{t-k-1}\right] + E\left[\varepsilon_{t-k} \mid X_{t-1} \dots X_{t-k-1}\right]$

$E(\varepsilon_{t-k}) = 0$

$= E\left[\phi_1 X_{t-k-1} + \phi_2 X_{t-k-2} + \dots + \phi_p X_{t-k-p}\right]$

$= E\left[\phi_1 X_{t-k-1} + \dots + \phi_p X_{t-k-p} \mid X_{t-1}, X_{t-2} \dots X_{t-k-1}\right]$

$= \phi_p X_{t-k-p} + \phi_{p-1} X_{t-k-p+1} + \dots + \phi_1 X_{t-k-1}$

Montrer que :

$P(X_t \mid X_{t+1} \dots X_{t+k-1}) = \frac{1}{\phi_p}(X_{t+p} - \phi_1 X_{t+p-1} - \dots - \phi_{p-1} X_{t+1})$

$- \frac{1}{\phi_p} P(\varepsilon_{t+p} \mid X_{t+1} \dots X_{t+k-1})$

$X_{t+p} = \sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t+p-i} + \varepsilon_{t+p}$

$= \phi_1 X_{t+p-1} + \dots + \boxed{\phi_p X_t} + \varepsilon_{t+p}$

$\phi_p X_t = X_{t+p} - \phi_1 X_{t+p-1} - \dots - \phi_{p-1} X_{t+1} - \varepsilon_{t+p}$

Donc :

$$X_t = \frac{1}{\phi_p}\left(X_{t+p} - \phi_1 X_{t+p-1} - \dots - \phi_{p-1} X_{t+1}\right) - \frac{1}{\phi_p}\varepsilon_{t+p}$$

$$E\left(X_t / X_{t+1}, \dots, X_{t+h-1}\right) =$$

$$E\left(\frac{1}{\phi_p}\left(X_{t+p} - \phi_1 X_{t+p-1} - \dots - \phi_{p-1} X_{t+1}\right) - \frac{1}{\phi}\varepsilon_{t+p} / X_{t+1}, \dots, X_{t+h-1}\right)$$

$$E\left(\frac{1}{\phi_p}\left(X_{t+p} - \phi_1 X_{t+p-1} - \dots - \phi_{p-1} X_{t-1} / X_{t+1}, \dots, X_{t+h-1}\right)\right.$$

$$\left. X_{t+1}, \dots, X_{t+h-1}\right)$$

$$- \frac{1}{\phi_p} E\left(\varepsilon_{t+p} / X_{t+1}, \dots, X_{t+h-1}\right)$$

$$= \frac{1}{\phi_p} E\left(X_{t+p} - \phi \right.$$

$$\Rightarrow P_{\overline{sp}\{X_{t+1}, \dots, X_{t+h-1}\}}(X_t) = \frac{1}{\phi^p}\left(X_{t+p} - \phi_1 X_{t+p-1} - \dots - \phi_{p-1} X_{t+1}\right) - \frac{1}{\phi^p} P_{\overline{sp}\{X_{t+1}, \dots, X_{t+h-1}\}}(\varepsilon_{t+p})$$

$$= \frac{1}{\phi^p}\left(X_{t+p} - \phi_1 X_{t+p-1} - \dots - \phi_{p-1} X_t\right.$$

$$- \frac{1}{\phi^p} P_{\overline{sp}\{X_t}\left(\varepsilon_{t+p}\right)$$

Q3/ En déduire ;

$$\phi(h) = 0 \quad , \quad h \geq p + 1$$

$$\phi(h) = \mathrm{cov}\left(X_{t+h} - P(X_{t+h}), X_t - P_{\overline{sp}\{X_{t+1}, \dots, X_{t+h-1}\}}(X_t)\right)$$

Montrons que :

$$\mathrm{cov}\Big(\underbrace{X_{t+h} - P_{\overline{sp}\{X_{t+1}, \dots, X_{t+h-1}\}}(X_{t+h})}_{\varepsilon_{t+h}}, X_t - P_{\overline{sp}\{X_{t+1}, \dots, X_{t+h-1}\}}(X_t)\Big) = 0 \ ?$$

$$X_{t+h} = \sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t+h-i} + \varepsilon_{t+h}$$

$$= \underset{\overline{sp}\{X_{t+1}, \dots, X_{t+h-1}\}}{P}(X_{t+h}) + \varepsilon_{t+h}$$

$$\mathrm{Cov}\left(\varepsilon_{t+h}, X_t - \underset{\overline{sp}\{X_{t+1}, \dots, X_{t+h-1}\}}{P}(X_t)\right)$$

$$= \mathrm{Cov}\left(\varepsilon_{t+h}, X_t - \frac{1}{\phi_p}\left(X_{t+p} - \dots - \phi_{p-1} X_{t+1}\right)\right.$$

$$\left. - \frac{1}{\phi_p} E\left(\varepsilon_{t+p} / X_{t+1}, \dots, X_{t+h-1}\right)\right)$$

$$= \mathrm{Cov}\left(\varepsilon_{t+h} - \frac{1}{\phi_p} E\left(\varepsilon_{t+p} / X_{t+1}, \dots, X_{t+h-1}\right)\right)$$

$E(\varepsilon_{t+h}) = 0$

$$= -\frac{1}{\phi_p} E\left(\varepsilon_{t+h}\, E\left(\varepsilon_{t+p} / X_{t+1}, \dots, X_{t+h-1}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{\phi_p} E\left(\varepsilon_{t+h}\right) = 0$$ Indépendant de la base.