Université de Sidi Bel Abbès
Faculté des Sciences Exactes
Département de Probabilités et Statistiques

2ème année Master PA
Module : modèles autorégressifs

Examen de modèle autorégressif

Exercice 1 (((7 points)))

Questions

1. Insérer des commentaires pour chaque commande pour expliquer les étapes de la désaisonnalisation. (voir le cour((4))
2. Pourquoi avons nous inséré le (-1) dans cette commande :
   reg=lm(y t+s1+s2+s3+s4+s5+s6+s7+s8+s9+s10+s11+s12-1). voir le cour((2))
3. Pourquoi insérer le log dans la commande y=log(x) voir le cour((1)).

Exercice 2 (((1.5 points)))

Vrai ou Faux (sans justification) sont les résultats suivants :

(a) Les autocorrélations partielles d'un modèle $MA(4)$ sont nulles $\forall h > 4$.(Faux(0.5))

(b) Les autocorrélations partielles d'un modèle $AR(4)$ sont nulles $\forall h > 4$.(Vrai(0.5))

(c) Le modèle : $\left(1 - \frac{2}{3}L\right) X_t = \left(1 - \frac{3}{2}L\right) \varepsilon_t$ est un bruit blanc.(Vrai(0.5))

Exercice 3

(((1 points))) Parmi les processus $(X_t)_t$ suivants, lesquels sont stationnaires (justifiez votre réponse) ?

(a) $X_t = A\cos(t) + B\sin(t)$ avec A et B deux variables indépendantes, $A, B \sim \mathcal{N}(1,1)$.(((0.5)))

(b) $X_t = A\cos(t) + B\sin(t)$ avec A et B deux variables indépendantes, de loi uniforme sur $[-1/2, 1/2]$.((0.5))

Exercice 4 (((10,5 points)))

$$Y_t = -0,4Y_{t-1} + 0,12Y_{t-2} + \epsilon_t$$

où $\epsilon_t \sim BB(0,1)$.

(1) De quel processus s'agit-il ? Le modèle est-il stationnaire ? Le modèle est-il inversible ? Justifiez vos réponses.((1))

(2) Calculer l'espérance de $\boldsymbol{Y}_t$ ((0.5)). Montrer que la fonction d'autocovariance notée $(\gamma(k))_{0\leq k\leq t}$ vérifie une relation de récurrence de la forme :

$$\gamma(k) = a\gamma(k-1) + b\gamma(k-2), \quad \text{pour } k \geq 2((1.5))$$

où a et b sont des constantes à préciser.

(3) Calculer les cinq premiers valeurs de la fonction d'autocorrélation $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$.((2))

(4) calculer les trois premier valeurs de la fonction d'autocorrélation partielle π_1, π_2, π_3.((2)) Peut-on estimer π_k pour tout $k \geq 4$.

(5) Peut-on écrire $\{Y_t\}$ sous la forme de MA(∞) ?((0.5)) Justifier votre réponse. calculer les cinq premiers coefficients $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ et ψ_4 de la représentation MA(∞) de $\{Y_t\}$.((3))

corrigé type

Exo1 : voir le cours

Exo2

(a) faux

(b) vrai

(c) vrai

Exo3.

Voir le TD

(a) non stationnaire

(b) stationnaire

Exo4

- $Y_t = -0,4\, Y_{t-1} + 0,12\, Y_{t-2} + \varepsilon_t$

le processus est un processus $AR(2)$

(1) Y_t dépend que des Y_{t-1} et Y_{t-2}

- Stationnaire ?

$$Y_t + 0,4\, Y_{t-1} - 0,12\, Y_{t-2} = \varepsilon_t$$

$$\underbrace{(1 + 0,4\, L - 0,12\, L^2)}\, Y_t = \varepsilon_t$$

$$\theta(x) = 1 + 0,4x - 0,12x^2 = 0$$

$$\Delta = (0,4)^2 + 4 \cdot 0,12 = 0,64 > 0$$

$$x_1 = \frac{-0,4 - 0,8}{2(-0,12)} = |5| > 1$$

$$x_2 = \frac{-0,4 + 0,8}{2(-0,12)} = |-1,66| > 1$$

donc les racines sont en dehors du cercle unité

donc il est stationnaire.

- Inverssible?

tout processus auto-regressive (AR) est inverssible.

(2) - calculer $E(Y_t)$?

$$Y_t = -0,4\, Y_{t-1} + 0,12\, Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

puisque Y_t est stationnaire donc $E(Y_t)$ est une constante $= \hat{\mu}$ (elle ne dépend de t)

$$E(Y_t) = E(-0,4\, Y_{t-1} + 0,12\, Y_{t-2} + \varepsilon_t)$$

$$= -0,4\, E(Y_{t-1}) + 0,12\, E(Y_{t-2}) + \underbrace{E(\varepsilon_t)}_{=0}$$

$$\hat{\mu} = -0,4\, \hat{\mu} + 0,12\, \hat{\mu} + 0$$

$\mu + 0{,}4\mu - 0{,}12\mu = 0 \Rightarrow \mu = 0$

donc $E(Y_t) = 0$

- $\gamma(k) = a\,\gamma(k-1) + b\,\gamma(k-2)$ pour $k \geq 2$?

On a $\gamma(k) = E(Y_t\, Y_{t-k})$

$$= E\left(\left(-0{,}4\,Y_{t-1} + 0{,}12\,Y_{t-2} + \varepsilon_t\right) Y_{t-k}\right)$$

$$= -0{,}4\,E(Y_{t-1}\, Y_{t-k}) + 0{,}12\,E(Y_{t-2}\, Y_{t-k}) + \underbrace{E(\varepsilon_t\, Y_{t-k})}_{=0}$$

$$\gamma(k) = -0{,}4\,\gamma(k-1) + 0{,}12\,\gamma(k-2) \quad k \geq 2$$

$a = -0{,}4$ et $b = 0{,}12$

(3) - $\gamma(0) = E(Y_t^2) = E\left(\left(-0{,}4\,Y_{t-1} + 0{,}12\,Y_{t-2} + \varepsilon_t\right)^2\right)$

$$0{,}4^2\, E(Y_{t-1}^2) + 0{,}12^2\, E(Y_{t-2}^2) + E(\varepsilon_t^2) + 2(-0{,}4 \cdot 0{,}12)\, E(Y_t Y_{t-1})$$
$$+ 2(-0{,}4)\, \underbrace{E(Y_{t-1}\varepsilon_t)}_{0} + 2(0{,}12)\, \underbrace{E(Y_{t-2}\,\varepsilon_t)}_{0}$$

$$\gamma(0) = 0{,}16\,\gamma(0) + 0{,}0144\,\gamma(0) + 1 - 0{,}096\,\gamma(1)$$

$$\boxed{0{,}8256\,\gamma(0) = 1 - 0{,}096\,\gamma(1)} \quad (1)$$

$E(Y_t\, Y_{t-1}) = \gamma(1)$

$E\left(\left(-0{,}4\,Y_{t-1} + 0{,}12\,Y_{t-2} + \varepsilon_t\right) Y_{t-1}\right) = \gamma(1)$

$\gamma(1) = -0{,}4\,\gamma(0) + 0{,}12\,\gamma(1)$

$$\boxed{\gamma(0) = -2{,}2\,\gamma(1)} \quad \ldots (2)$$

je remplace (2) dans (1) donc $0{,}8256(-2{,}2)\gamma(1) = 1 - 0{,}096\,\gamma(1)$

$\gamma(1) = -0{,}5812$ et $\gamma(0) = 1{,}2786$

ou directement par la formule

$$\gamma(0) = \frac{(1-\phi_1)\sigma^2}{(1+\phi_2)(1-\phi_1-\phi_2)(1+\phi_1-\phi_2)}$$

donc on a la d'une manière générale:

$\gamma(k) = \phi_1\gamma(k-1) + \phi_2\gamma(k-2)$ pour $k>0$

$\gamma(2) = -0{,}4\gamma(1) + 0{,}12\gamma(0) = 0{,}3859$

$\gamma(3) = -0{,}4\gamma(2) + 0{,}12\gamma(1) = -0{,}2241$

$\gamma(4) = -0{,}4\gamma(3) + 0{,}12\gamma(2) = -0{,}1359$

- $\rho(0) = \frac{\gamma(0)}{\gamma(0)} = 1$, $\rho(1) = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = -0{,}4544$

$\rho(2) = \frac{\gamma(2)}{\gamma(0)} = 0{,}307$, $\rho(3) = \frac{\gamma(3)}{\gamma(0)} = -0{,}1752$

$\rho(4) = \frac{\gamma(4)}{\gamma(0)} = 0{,}1062$

(3) la PACF d'un processus AR(2) est nulle sauf les deux premières corrélations qui sont différent

$\pi_1 = \rho(1) = -0{,}4544$

$$\pi_2 = \frac{\overset{=1}{\rho(0)} \times \rho(2) - \rho(1)^2}{\rho(0)^2 - \rho(1)^2} \qquad \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho(2)-\rho(1)}{1-\rho^2(1)}$$

$\pi_3 = 0$, $\pi_4 = 0$.

$\pi_k = 0 \quad \forall k \geq 3$