RAPPELS DE PROBABILITE (1ère Année et plus)

Elements de probabilité des évènements

L'objet de la théorie des probabilités est de fournir un formalisme mathématique précis, propre à décrire des situations dans lesquelles intervient le "hasard", c'est-à-dire des situations dans lesquelles un certain nombre de conditions étant réunies (les causes), plusieurs conséquences sont possibles(les effets) sans que l'on puisse a priori savoir laquelle sera réalisée. Une telle situation apparaît lors d'une expérience aléatoire ou stochastique (par opposition à une expérience déterministe pour laquelle l'issue est certaine).

1 Expérience

En probabilité, une expérience se réfère à toute action ou activité dont le résultat est aléatoire(au sens physique le plus large), par exemple le lancer d'une pièce ou d'un dé, choisir une carte dans un paquet, mesurer la durée du trajet du domicile au travail,...

Définition 1-1 *L'espace des échantillons- ou ensemble fondamental- noté Ω, d'une expérience $\mathcal{E}$, est l'ensemble de toutes les réalisations possibles de cette expérience.*

Exemples:

1) $\mathcal{E}$ = lancer d'une pièce, $\Omega = \{P, F\}$

2) $\mathcal{E}$ = lancer d'un dé, $\Omega = \{1, 2, ..., 6\}$

3) $\mathcal{E}$ = lancer de deux dés, $\Omega = \{1, 2, ..., 6\}^2$

4) Nombre de jours d'utilisation d'une voiture avant de faire le plein(ou la vidange), $\Omega = \mathbb{N}^*$

5) durée de vie d'une lampe, $\Omega = \mathbb{R}^+$

Remarque: L'ensemble Ω peut être fini(ex 1),2),3)) infini dénombrable(4)) ou non dénombrable(5)).

2 Evènements

En probabilité, on ne s'intéresse pas uniquement aux réalisations individuelles(issues), mais aussi à toute partie ou sous- ensemble de réalisations à partir de Ω.

Définition 2-1 *On appelle évènement tout sous-ensemble de Ω, dont on sait au vu de l'expérience s'il est réalisé ou non, autrement dit, lorsqu'une expérience est faite, un évènement A est dit réalisé si la réalisation obtenue dans l'expérience est contenue dans A.*

Exemple:

$\Omega = \{1, 2, ..., 6\}$,l'expérience est le lancer d'un dé

On a les évènements A ="obtenir un 2" , B ="obtenir un nombre impair", C ="obtenir un multiple de 3".

Ainsi $A = \{2\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{3, 6\}$, A ne contient qu'un seul élément, il est appelé évènement élémentaire.

Définition 2-2 (lien avec le langage des ensembles)

a) Le contraire de A(complé.), noté $\overline{A}$, est l'ensemble des réalisations de Ω **qui ne sont pas dans** A.

b) l'intersection de A et B,notée $A \cap B$ (on lit A et B) est l'évènement contenant les réalisations qui sont dans A et B.

c) La réunion de deux évènements A et B,notée $A \cup B$(on lit A ou B) est l'évènement contenant les réalisations qui sont soit dans A soit dans B, ou dans les deux.

d) On a aussi les lois de Morgan $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

e) Ω est appelé l'évènement certain et $\varnothing$ est l'évènement impossible.

Définition 2-3 *Deux évènements A et B sont dits incompatibles(disjoints) s'ils n'ont pas de réalisations communes, et on écrit $A \cap B = \varnothing$ (dans l'exemple précédent A et C sont incompatibles).*

3 Axiomes, propriétés des probabilités

Etant donné une expérience $\mathcal{E}$ et son ensemble fondamental Ω,l'objectif de la probabilité est d'assigner à chaque évènement A un nombre $P(A)$, appelé la probabilité de l'évènement A et qui nous donne une mesure précise des chances de réalisation de l'évènement A. Pour avoir une certaine cohérence avec la notion intuitive de probabilité, cette probabilité doit satisfaire à certains axiomes.

1) $\forall A \subset \Omega \qquad 0 \leq P(A) \leq 1$

2) $P(\Omega) = 1$

3) Si $A \cap B = \varnothing$, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Conséquences:

a) $P(\varnothing) = 0$

b) $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$

Nous allons examiner la notion de probabilité dans un cas particulier.

4 Equiprobabilité $\left(\Omega \text{ fini}\right)$

On dit qu'on est dans une situation d'équiprobabilité si et seulement si toutes les éventualités ont les mêmes chances de se réaliser. C'est le cas de tout ce qui se fait au hasard: lancer d'une pièce non truquée, de dés parfaits, tirage d'une boule dans une urne, tirage d'une carte dans un paquet de cartes,...

Dans ce cas, on définit la probabilité de réalisation d'un évènement A, notée $P(A)$ comme étant le rapport du nombre

d'éventualités favorables à la réalisation de l'évènement A au nombre de toutes les éventualités(réalisations)possibles.

Soit

$$P(A) = \frac{Card\ A}{Card\ \Omega}$$

5 Notions de probabilité avec Ω quelconque

Définition 5-1 Tribu (ou $\sigma-$algèbre)

*Un ensemble $\mathcal{F}$ est appelé tribu (**des évènements**) si et seulement si*

1) $\Omega \in \mathcal{F}$

2) $\forall A \in \mathcal{F}$ *alors* $\overline{A} \in \mathcal{F}$

3) Toute union dénombrable d'éléments de F *est un élément de* $\in F$*, autrement dit, si* $\forall i \in I \subset \mathbb{N},\ A_i \in \mathcal{F}$,

$$\text{alors} \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}$$

Remarque:

- Si Ω est fini, l'ensemble des parties de Ω, soit $\mathcal{P}(\Omega)$ forme une tribu.

Exemple:

1) Lancer d'une pièce, $\Omega = \{P, F\}, \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\varnothing, \Omega, \{P\}, \{F\}\}$ est une tribu.

2) $\Omega = \{1, 2, 3\}, \mathcal{F} = \{\{2, 3\}, \{1\}, \varnothing, \Omega\}$ est une tribu.

3) $\Omega = \{1, 2, 3\}, \mathcal{F} = \{\varnothing, \Omega, \{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ n'est pas une tribu, car par exemple, $\{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\} \notin \mathcal{F}$.

4) $\Omega = \mathbb{R}$, dans ce cas, la tribu adéquate est celle qui contient tous les intervalles de $\mathbb{R}$, on l'appelle la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$, notée $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ est appelé espace probabilisable, nous donnons maintenant la définition générale d'une probabilité.

Axiomes de Kolmogorov

Définition 5-2 On appelle probabilité toute application P *de* $\mathcal{F}$ *dans* $[0, 1]$ *telle que*

$P : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1]$ *vérifiant*

1) $P(\Omega) = 1$

2) *Pour toute famille d'évènements* $(A_i)_{i \geq 1}$ *deux à deux incompatibles*

$(A_i \cap A_j = \varnothing\ \forall i \neq j)$, on a

$$P\left(\bigcup_{i \geq 1} A_i\right) = \sum_{i \geq 1} P(A_i)$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *s'appelle espace probabilisé.*

Remarque: L'équiprobabilité vérifie 1) et 2).

Propriétés des probabilités

Proposition 5-3 Si P *est une probabilité sur* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *alors*

1) $P(\varnothing) = 0$

2) $\forall A \in \mathcal{F}\ \ P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

3) $\forall A \in \mathcal{F}, \forall B \in \mathcal{F}\ \ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Exercice: Montrer ces propriétés.

Corollaire 5-4 Deux évènements A *et* B *sont incompatibles si et seulement si* $P(A \cap B) = 0$.

Remarque: Nous avons ainsi un outil mathématique pratique qui nous permet d'étudier l'incompatibilité de deux évènements sans passer par la définition de l'incompatibilité.

Proposition 5-5 Si A et B sont deux évènements,

$$\text{Si } A \subset B, \text{ alors } P(A) \leq P(B)$$

La réciproque est fausse comme le montre l'exemple suivant

Dans le lancer de deux dés, soit $A =$"la somme des deux dés est ≤ 4" et $B =$"la somme des deux dés est paire"

On a

$$\begin{aligned} Card\,\Omega &= 6^2 = 36 \\ P(A) &= \frac{6}{36}, \;\; P(B) = \frac{18}{36} \end{aligned}$$

Bien sûr

$$P(A) \leq P(B) \quad \text{mais } A \subsetneq B \text{ car par exemple } (1,2) \notin B$$

1- Variables aléatoires réelles

Dans la plupart des phénomènes aléatoires, le résultat (ou l'issue) d'une épreuve peut se traduire par une "grandeur" mathématique, très souvent représentée par un **nombre entier** ou un **nombre réel.** La notion mathématique qui représente efficacement ce genre de situation concrète est celle de **variable aléatoire(**notée **v.a.**). Ainsi, le temps de désintégration d'un atome radioactif, le temps d'attente à un guichet, le nombre de voiture arrivant à une station service pendant une durée donnée, le nombre de "1" obtenus après plusieurs lancers successifs d'un dé ... sont des exemples de variables aléatoires.

Rappels d'algèbre

1) Image réciproque

Soient E et F deux ensembles, soit f une application de E dans F, et B une partie de F.

On définit l'image réciproque de B par

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

Remarque: l'image réciproque existe(c'est un ensemble) et est définie quelle que soit l'application f, contrairement à l'application réciproque qui nécessite la bijectivité de l'application f.

2) Propriétés de l'image réciproque

Théorème

Si f est une application de E dans F, alors

$$f^{-1}(\varnothing) = \varnothing \qquad f^{-1}(F) = E$$

$f^{-1}\left(\overline{B}\right) = \overline{f^{-1}(B)}$ $\quad \forall B \subset F, \overline{B}$ désignant le complémentaire ou contraire de B

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n\in I} B_n\right) = \bigcup_{n\in I} f^{-1}(B_n) \text{ et } f^{-1}\left(\bigcap_{n\in I} B_n\right) = \bigcap_{n\in I} f^{-1}(B_n) \quad \forall B_n \subset F \ \ , n \in I$$

où I désigne un ensemble d'indices,$I \subseteq \mathbb{N}$

1-1 Notion de variable aléatoire réelle

Définition et notations

Définition 1-1-1 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé. On appelle variable aléatoire réelle, notée X toute application (mesurable) de$(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, autrement dit $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ ou plus simplement, de manière équivalente, $\forall a \in \mathbb{R}$, $X^{-1}(]-\infty, a]) \in \mathcal{F}$, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ étant appelée la **tribu borélienne engendrée** par les intervalles de $\mathbb{R}$.*

Remarque: Afin d'éclaicir la notion de 'tribu borélienne engendrée', dans le cadre de ce cours, on ne considèrera comme boréliens uniquement les intervalles de $\mathbb{R}$ et ceux obtenus par intersection, réunion ou passage au complémentaire d'autres intervalles du fait que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$est la tribu adéquate.

Notation: *Si X est une variable aléatoire réelle et B un borélien de $\mathbb{R}$*

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}$$

Comme $X^{-1}(B) \in \mathcal{F},\ X^{-1}(B)$ est donc un évènement, on peut ainsi déterminer sa probabilité. On note

$$P\left(X^{-1}(B)\right) = P(X \in B)$$

où B peut se présenter sous plusieurs formes

$$B = \{a\}, a \in \mathbb{R},\ \text{alors } P\left(X^{-1}(B)\right) = P(X = a)$$

$$B =]-\infty, a] \qquad P\left(X^{-1}(B)\right) = P(X \leq a)$$

$$B =]a, b] \qquad P\left(X^{-1}(B)\right) = P(a < X \leq b)$$

$$B =]a, +\infty[\qquad P\left(X^{-1}(B)\right) = (X > a)$$

1-2 Propriétés d'une variable aléatoire réelle

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle.

Théorème 1-2-1 *Soit P_X l'application de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ dans $[0, 1]$, définie par*

$$P_X(B) = P(X \in B) = P\left(X^{-1}(B)\right)$$

alors P_X est une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

P_X est ainsi la loi de probabilité de X, on dit que X suit la loi P_X et on note $X \hookrightarrow P_X$

Exercice: Montrer que P_X est une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

(Voir rappel sur la définition d'une probabilité)

Démonstration:

D'après les rappels sur l'image réciproque comme $X : \Omega \to \mathbb{R}$

a) $X^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega \Longrightarrow P\left(X^{-1}(\mathbb{R})\right) = P(X \in \mathbb{R}) = P_X(\mathbb{R}) = P(\Omega) = 1$ et donc $\boxed{P_X(\mathbb{R}) = 1}$

b) Soit (B_n)une famille dénombrable de boréliens deux à deux incompatibles (ou disjoints) alors

$$\begin{aligned} P_X\left(\bigcup_{n\geq 1} B_n\right) &= P\left(X \in \bigcup_{n\geq 1} B_n\right) = P\left(X^{-1}\left(\bigcup_{n\geq 1} B_n\right)\right) = \\ &= P\left(\bigcup_{n\geq 1} X^{-1}(B_n)\right) \end{aligned}$$

comme les B_n sont incompatibles, il en est de même des $X^{-1}(B_n)$c'est -à-dire $X^{-1}(B_i) \cap X^{-1}(B_j)$ $\forall i \neq j$ et d'après la propriété de la probabilité (voir rappels) on aura

$$P\left(\bigcup_{n\geq 1} X^{-1}(B_n)\right) = \sum_{n\geq 1} P\left(X^{-1}(B_n)\right) = \sum_{n\geq 1} P_X(B_n)$$

d'où

$$\boxed{P_X\left(\bigcup_{n\geq 1} B_n\right) = \sum_{n\geq 1} P_X(B_n)}$$

1-3 Support d'une variable aléatoire réelle

Définition 1-3-1

L'ensemble image de Ω par X,noté $X(\Omega)$ est appelé support de X.Il existe deux types de support.

a) $X(\Omega)$ est fini ou infini dénombrable,i.e. $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ...\}$ ou $X(\Omega) \subseteq \mathbb{N}, \mathbb{Z}, ...$on dit alors que X est une variable aléatoire discrète, qu'on note v.a.d.

b) $X(\Omega)$ *est infini non dénombrable,* $X(\Omega)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, *i.e.*$X(\Omega) = [a,b], [a,b[,]a,b[, [a,+\infty[,]-\infty,a], ...$on *dit alors que X est une variable aléatoire continue, qu'on note v.a.c.*

1-4 Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle

Définition 1-4-1

On appelle fonction de répartition d'une v.a. X, notée F_X , la fonction définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad F_X(x) = P(X \leq x)$$

que l'on peut écrire aussi (d'après ce qui précède) $F_X(x) = P\left(X^{-1}(]-\infty, x])\right) = P(X \in]-\infty, x]) = P_X(]-\infty, x])$

Théorème 1-4-2 (admis)

Si F_X est la fonction de répartition d'une v.a. X, alors

$$a)\quad 0 \leq F_X(x) \leq 1 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$$b)\quad F_X \text{ est croissante sur } \mathbb{R}$$

$$c)\quad F_X \text{ est continue à droite en tout point}$$

$$d)\quad \lim_{x\longrightarrow -\infty} F_X(x) = 0 \qquad \lim_{x\longrightarrow +\infty} F_X(x) = 1$$

On admet le lemme suivant qui peut s'avérer utile

Lemme:

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements monotone (au sens de l'inclusion des ensembles) sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},P)$,alors

$$a)\ si\ \ A_n \subset A_{n+1}\ \ alors\ \ P\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\lim_{n\to+\infty} A_n\right)$$

$$b)\ si\ \ A_{n+1} \subset A_n\ \ alors\ \ P\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\lim_{n\to+\infty} A_n\right)$$

1-4-3 Propriétés supplémentaires de F_X

1) Soient $a<b$

$\{X\leq b\} = \{X\leq a\}\cup\{a<X\leq b\}$ réunion d'évènements incompatibles

on a

$$P(X\leq b) = P(X\leq a) + P(a<X\leq b)$$

autrement dit

$$F_X(b) = F_X(a) + P(a<X\leq b)$$

d'où

$$P(a<X\leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

2)

$$\{X\leq a\}\cup\{X>a\} = \Omega$$

d'où

$$P(X>a) = 1 - P(X\leq a)$$

3) Si on pose $B_n = \left]-\infty, x-\frac{1}{n}\right]$. Les intervalles B_n forment une suite croissante d'intervalles de $\mathbb{R}$,et on a

$$]-\infty,x[= \bigcup_n \left]-\infty, x-\frac{1}{n}\right]$$

$$\begin{aligned}
P(X<x) &= P_X(]-\infty,x[) = P_X\left(\bigcup_n \left]-\infty, x-\frac{1}{n}\right]\right) = \\
&= P_X\left(\bigcup_n B_n\right) = P_X\left(\lim_{n\longrightarrow+\infty} B_n\right) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} P_X(B_n) \\
&\quad \text{(d'après le lemme précédent avec } B_n \text{au lieu de } A_n \text{ et } P_X \text{ au lieu de } P. \\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty} P\left(X\leq x-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} F_X\left(x-\frac{1}{n}\right) = \lim_{y\nearrow x} F_X(y) = F_X\left(x^-\right)
\end{aligned}$$

donc

$$P(X<x)=F_X\left(x^-\right)$$

comme

$$\{X\leq x\}=\{X<x\}\cup\{X=x\}$$

alors en prenant les probabilités de ces évènements, il vient

$$F_X(x)=F_X\left(x^-\right)+P(X=x)$$

Si F_X est continue en x, alors

$$P(X=x)=0$$

2- Variables aléatoires discrètes(v.a.d.)

2-1 Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Soit X une v.a.d. et $X(\Omega)$ son support. $X(\Omega)$ est donc de la forme

$$X(\Omega)=\{x_1,x_2,...\} \quad \text{fini ou infini dénombrable}$$

La loi de probabilité P_X (ou distribution) de X est déterminée par la donnée de la probabilité de l'évènement $X^{-1}(\{x_k\})$ soit $P\left(X^{-1}(\{x_k\})\right)=P_X(\{x_k\})=P(X=x_k)\,,\ \forall\ k\in I\subseteq\mathbb{N}$, et on a

$$\begin{cases} P(X=x_k)\geq 0, \quad \forall k\in I \\ \displaystyle\sum_{x_k\in X(\Omega)} P(X=x_k)=1 \end{cases}$$

Remarque: Soit $B\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, ainsi $B\subset X(\Omega)$,on a alors

$$P_X(B)=\sum_{x_k\in B} P_X(\{x_k\})$$

2-2 Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète

Définition 2-2-1 *On a*

$$F_X(x)=P(X\leq x)=\sum_{x_k\in X(\Omega)/x_k\leq x} P(X=x_k)$$

Exemple: Soit l'expérience qui consiste en le lancer de 2 dés d'où $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}^2$, on considère la variable aléatoire X telle que $X(\omega)=$"nombre de fois que l'on obtient "1"quand ω se réalise". Le support de la variable X est alors

$X(\Omega)=\{0,1,2\}$

On a donc

$$\begin{aligned}
X^{-1}(\{0\}) &= \{\omega = (i,j) \in \Omega \mid X(\omega) = 0\} = \{2,3,4,5,6\}^2 \\
X^{-1}(\{1\}) &= \{\omega = (1,j), j \in \{2,3,4,5,6\}\} \cup \{\omega = (i,1), i \in \{2,3,4,5,6\}\} \\
X^{-1}(\{2\}) &= \{(1,1)\}
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
P\left(X^{-1}(\{0\})\right) &= P(X=0) = \frac{25}{36} \\
P\left(X^{-1}(\{1\})\right) &= P(X=1) = \frac{10}{36} \\
P\left(X^{-1}(\{2\})\right) &= P(X=2) = \frac{1}{36}
\end{aligned}$$

2-3 Fonction d'une v.a.d.

Soit X une v.a.d. , $X(\Omega) = \{x_k \mid k \in I\}$ et φ une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie en tout point de $X(\Omega)$ par

$$\begin{aligned}
\varphi(X) \quad &: \quad \Omega \to \mathbb{R} \\
\omega \quad &\mapsto \quad \varphi(X(\omega))
\end{aligned}$$

Proposition 2-3-1:
Soit X une v.a.d., alors $Y = \varphi(X)$ est une v.a.d. à support $Y(\Omega) = \{\varphi(x_k) \mid k \in I\}$ et de plus

$$\forall y \in Y(\Omega) \quad P_Y(y) = \sum_{k \in I, \varphi(x_k) = y} P_X(x_k)$$

Exemple: Soit X une v.a.d.,$X(\Omega) = \{-2,-1,0,1\}$ avec

$$P(X=-2) = P(X=-1) = P(X=0) = P(X=1) = \frac{1}{4}$$

Soit $Y = X^2$, alors $Y(\Omega) = \{0,1,4\}$avec

$$P(Y=0) = \frac{1}{4} \qquad P(Y=1) = \frac{1}{2} \qquad P(Y=2) = \frac{1}{4}$$

2-4 Moments d'une variable aléatoire discrète

2-4-2 Espérance mathématique

La définition générale (abstraite) de l'espérance mathématique notée $E(X)$ est donnée par

$$E(X) = \int_{\Omega} X(\omega)\, dP(\omega)$$

Dans le cas d'une v.a.d. ,c'est le nombre réel, noté $E\left(X\right)$(s'il existe), défini par$E\left(X-E\left(X\right)\right)^2$

$$E\left(X\right)=\sum_{x_k\in X(\Omega)}x_kP\left(X=x_k\right)$$

2-4-3 Variance

C'est le nombre positif, noté $Var\left(X\right)$, défini par

$$V\left(X\right)=\sum_{x_k\in X(\Omega)}\left(x_k-E\left(X\right)\right)^2P\left(X=x_k\right)=E\left(X-E\left(X\right)\right)^2$$

Remarque: on utilise souvent l'écart-type de X, défini par $\sigma\left(X\right)=\sqrt{V\left(X\right)}$

Si X est une grandeur physique, l'écart-type de X a la même unité de grandeur que X, ce qui est plus intéressant dans la pratique.

3-4-4 Moments d'ordre n d'une v.a.d.
C'est le nombre réel, noté $E(X^n) = m_n$,défini par

$$m_n = \sum_{x_k \in X(\Omega)} x_k^n P(X = x_k)$$

Remarque: $m_1 = E(X)$, $\quad m_2 = E(X^2)$ et donc $V(X) = m_2 - m_1^2$

3- Variables aléatoires continues(v.a.c.)

Soit X une variable aléatoire à support $X(\Omega)$ non dénombrable (intervalle de $\mathbb{R}$), X est donc une v.a.c. Parmi ces variables aléatoire continues, on s'intéresse aux v.a.c. dites à **densité.**

3-1 Définition d'une densité de probabilité

Soit X est une v.a.c. définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on dit que X est à densité si les conditions suivantes **1)** et **2)** sont vérifiées.

1) il existe une fonction notée $\boxed{f_X\text{, } \textbf{continue par morceaux, positive, intégrable} \text{ sur } \mathbb{R}}$ et vérifiant pour tout intervalle B de $\mathbb{R}$

$$P(X \in B) = \int_B f_X(x)\,dx$$

Par exemple

$$\begin{aligned} B &= [a,b] \quad P(X \in [a,b]) = \int_a^b f_X(x)\,dx \\ B &= [a,+\infty[\quad P(X \in [a,+\infty[) = \int_a^{+\infty} f_X(x)\,dx = \lim_{A \to +\infty} \int_a^A f_X(x)\,dx \end{aligned}$$

2) f_X doit vérifier

$$\boxed{P(X \in \mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx = 1}$$

Dans ce cas, f_X est appelée **densité de probabilité** de X
Remarque: Si X est une v.a.c. à **densité**, alors

$$P(X = a) = 0 \qquad \forall a \in \mathbb{R}$$

3-2 Fonction de répartition d'une v.a.c. à densité

Définition: La fonction de répartition, notée F_X est naturellement définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)\,dt = \lim_{A \to -\infty} \int_A^x f_X(t)\,dt$$

remarque:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \qquad P(a \leq X \leq B) = F_X(b) - F_X(a)$$

Dans le cas à densité, la fonction de répartition F_X est continue pour tout $x \in \mathbb{R}$ car $P(X = x) = 0$ ce qui implique que $F_X(x) = F_X(x^-)$ et alors F_X est dérivable en un point de continuité de f_X et on a

$$\boxed{F_X' = f_X}$$

3-3 Moments d'ordre n

Définition 3-3-1 Espérance mathématique

C'est le nombre réel(s'il existe) défini par

$$\boxed{E(X) = \int_{\mathbb{R}} x \; f_X(x)\, dx}$$

Définition 3-3-2 Variance

C'est le nombre réel ***positif*** *défini par*

$$Var(X) = \int_{\mathbb{R}} (x - E(X))^2 \; f_X(x)\, dx$$

Définition 3-3-3 Moment d'ordre n

C'est le nombre réel(s'il existe) défini par,

$$\boxed{E(X^n) = \int_{\mathbb{R}} x^n \; f_X(x)\, dx \qquad n \geq 1}$$

On peut généraliser la définition précédente.

Définition 3-3-4 *Théorème de transfert*

Soit X une variable aléatoire continue, et Y la variable aléatoire donnée par $Y = \varphi(X), \varphi$ étant une application réelle, alors on définit l'éspérance mathématique de Y (si elle existe) par

$$E(Y) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, f_X(x)\, dx$$

3-4 Densité de probabilité de $Y = \varphi(X)$

Soit X une v.a.c., de fonction de répartition F_X et de densité f_X. Soit φ une application réelle et $Y = \varphi(X)$

On détermine la fonction de répartition de Y, soit F_Y, on a

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\varphi(X) \leq y)$$

Deux cas se présentent, φ **bijective ou non bijective**

a) Si φ est strictement croissante(donc bijective), alors il en est de même de φ^{-1},il vient

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(\varphi(X) \leq y) = P\left(X \leq \varphi^{-1}(y)\right) = \\ &= F_X\left(\varphi^{-1}(y)\right) \end{aligned}$$

puis par dérivation par rapport à y, on obtient la densité de Y.

b) Si φ est strictement décroissante

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(\varphi(X) \leq y) = P\left(X \geq \varphi^{-1}(y)\right) = \\ &= 1 - P\left(X < \varphi^{-1}(y)\right) = 1 - F_X\left(\varphi^{-1}(y)\right) \end{aligned}$$

Par dérivation par rapport à y, on obtient aussi la densité f_Y de Y

Le cas non bijectif se traite au "cas par cas" selon la nature de l'exemple, comme ci-joint:

Exemple

Soit X une variable aléatoire continue de densité f_X, cherchons la densité f_Y de $Y = X^2$. On a $Y = \varphi(X)$ avec $\varphi(x) = x^2$.

Dans ce cas, $\varphi'(x) = 2x$ positive pour $x > 0$ et négative pour $x < 0$, d'où φ n'est pas strictement monotone. Mais pour

$y > 0$, on a

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P\left(X^2 \leq y\right) = \\ &= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \end{aligned}$$

En dérivant, on obtient

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left(f_X\left(\sqrt{y}\right) + f_X\left(-\sqrt{y}\right)\right) & si \;\; y > 0 \\ 0 & si \;\; y < 0 \end{cases}$$

4- Propriétés de $E(X)$**et** $Var(X)$

Définition 4-1

*Une variable aléatoire réelle X est dite **centrée** si $E(X) = 0$, **réduite** $Var(X) = 1$*

Lemme 4-2

1) *Soit X une variable aléatoire telle que $E(X) = m$ et $Var(X) = \sigma^2$, alors*

$$Y = \frac{X - m}{\sigma}$$

est une variable aléatoire **centrée et réduite**.

2) *Si $Y = aX + b \qquad (a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors*

$$E(Y) = aE(X) + b \;\; et \;\; Var(Y) = a^2 V(X).$$

3)
$$Var\left(X\right)=E\left(X^{2}\right)-\left(E\left(X\right)\right)^{2}$$

5 -Inégalité de Markov et Bienaymé-Tchebyshev
Proposition 5-1
• Soit Z une v.a. positive,alors

$$\forall\varepsilon>0\qquad P\left(Z\geq\varepsilon\right)\leq\frac{E\left(Z\right)}{\varepsilon}$$

• Soit X une v.a.r. admettant un moment d'ordre 2 $\left(E\left(X^{2}\right)<\infty\right)$ alors

$$\forall\varepsilon>0\qquad P\left(\left|X-E\left(X\right)>\varepsilon\right|\right)\leq\frac{\sigma_{X}^{2}}{\varepsilon^{2}}$$

Démonstration:
Notons que pour toute variable aléatoire positive $Z>\varepsilon 1_{\{Z\geq\varepsilon\}}$. On en déduit la première inégalité

$$\begin{aligned}E\left(Z\right) &> E\left(\varepsilon 1_{\{Z\geq\varepsilon\}}\right)=\varepsilon E\left(1_{\{Z\geq\varepsilon\}}\right)= \\ &= \varepsilon P\left(Z\geq\varepsilon\right)\end{aligned}$$

La seconde inégalité en découle directement en considérant $Z=(X-E(X))^{2}$.
Exemple :
Si $E(X)=10$ et $\sigma=0.1$ sont les valeurs exactes de la moyenne et de l'écart-type d'une variable aléatoire X, sans aucune indication particulière sur la loi de X, on sait que X prendra des valeurs entre 9.7 et 10.3 avec une probabilité supérieure à 88%. Si on connait la loi de X, on ades estimations beaucoup plus précises.

Remarque:
Ces inégalités ont peu d'applications pratiques, car la majoration qu'elles fournissent est la plupart du temps excessive, mais elles sont valables quelle que soit la loi de X pourvu que l'on puisse définir une espérance et une variance... L'inégalité de Bienaymé-Tchebyshev permet toutefois de démontrer la loi faible des grands nombres.