1. Opérations sur les matrices

Soit K un corps. On peut faire des opérations avec les matrices à coefficients dans ce corps. Selon les opérations, on doit mettre des conditions sur les dimensions des matrices en jeu.

(1) Les calculs possibles

(a) Matrices de même dimension, addition, combinaison linéaire
(b) Produit de matrices
(c) Calcul d'inverse
(d) Calcul de puissances n-ème

(2) Les erreurs à éviter

(a) Simplification trop rapide
(b) Attention à la formule du binôme

(a) Matrice de même dimension
Soient $A = (a_{i,j})_{i=1\dots p,\ j=1\dots n}$ et $B = (b_{i,j})_{i=1\dots p,\ j=1\dots n}$ deux matrices de taille (p, n), autrement dit à p lignes et n colonnes. Alors on peut définir une combinaison linéaire de ces deux matrices. Plus précisément, si $\lambda \in K$ et $\mu \in K$ on définit :

$$\lambda A + \mu B = (\lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j})_{i=1\dots p,\ j=1\dots n}$$

NB : En particulier, on peut additionner deux matrices de même taille mais, en général on ne peut pas les multiplier.

(b) Produit de matrices
Soient $A = (a_{i,j})_{i=1\dots p,\ j=1\dots n}$ et $B = (b_{i,j})_{i=1\dots n,\ j=1\dots m}$ deux matrices de taille (p, n) et (n, m), autrement dit telles que le nombre de colonnes de A soit le même que le nombre de lignes de B. Alors on peut définir le produit AB de ces deux matrices. Plus précisément, on a :

$$AB = (c_{i,j})_{i=1\dots p,\ j=1\dots m} \text{ avec } c_{i,j} = \Sigma_{k=1\dots n} a_{i,k} b_{k,j})$$

Le nombre de lignes de AB est égal au nombre de ligne de A et le nombre de colonne de AB est le nombre de colonne de B.

NB : En général on ne peut pas calculer le produit BA, sauf si $m = p$.

(c) Calcul d'inverse

Définition. *On dit qu'une matrice A carrée $n \times n$ à cœfficients dans un corps K est inversible si il existe une matrice carrée $n \times n$, B telle que $AB = BA = Id$.*

Il est facile de voir que, la matrice A est inversible si et seulement si l'application linéaire qui peut lui être associée $f : K^n \longrightarrow K^n$, dans la base canonique de K^n est un isomorphisme.
On dispose de différentes méthodes pour le calcul de l'inverse.

(d) Calcul des puissances n-ème d'une matrice

Soit A une matrice carrée à coefficients dans un corps K. Alors on peut calculer sa puissance n-ème.

(e) Erreurs de calcul fréquentes
On doit prendre garde aux particularités du calcul matriciel par rapport aux habitudes acquises avec les opérations sur les nombres.

— Simplification trop rapide
Soit A, B, C des matrices de tailles convenables pour que les calculs ci-dessous est un sens.
— Si $AB = 0$ cela n'implique pas a priori $A = 0$ ou $B = 0$;
— Si $AC = BC$ cela n'implique pas a priori $A = B$;

— Attention à la formule du binôme !
Soit A et B des matrices de même taille. En général la formule du binôme ne peut s'appliquer.

$$(A+B)^n \neq \Sigma_{i=1\ldots n} \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} A^i B^{n-i}$$

Si A et B commutent ($AB = BA$), par exemple si l'une des matrices est la matrice identité I, alors on peut démontrer et utiliser la formule du binôme.

Un exemple de combinaison linéaire

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{alors } 2A + B = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Un exemple de produit

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 7 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{alors } AB = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour multiplier ces deux matrices il est plus pratique de les disposer comme ci-dessous :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ & \\ & \\ & \end{pmatrix} \end{array}$$

Quelques contre-exemples

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{alors } AC = BC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \text{ bien que } A \neq B.$$

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{on a } (A+B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = A^2 + AB + BA + B^2.$$

$$\text{alors que } A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Rappel sur les matrices

Dans la suite $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si $\mathbf{A}$ est un anneau, on notera $M_{m,n}(\mathbf{A})$ l'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes à valeurs dans A; si $n = m$, $M_n(\mathbf{A}) = M_{m,n}(\mathbf{A})$. peut être l'ensemble des matrices carrées $M_n(\mathbb{K})$ pour raisonner "par bloks".

$$A = (a_{ij})_{i\ j} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbf{A})$$

avec i l'indice de ligne, j l'indice de colonne, et les $a_{ij} \in \mathbf{A}$ dits "ses éléments".

Nous nous contenterons sur les conditions de cohérence. En effet, pour que la somme ou le produit puisse être effectué, il faut que les tailles soient "compatibles, sinon, l'opération n'est pas définie. Ces tailles sont :

$$M_{m,n}(\mathbf{A}) \times M_{s,t}(\mathbf{A}) \to M_{l,r}(\mathbf{A}) : (A,B) \mapsto A+B \quad \textbf{si} \quad (m = s = l, n = t = r);$$
$$M_{m,n}(\mathbf{A}) \times M_{s,t}(\mathbf{A}) \to M_{l,r}(\mathbf{A}) : (A,B) \mapsto AB \quad \textbf{si} \quad (n = s, l = m, r = t).$$

Vecteurs colonne. Nous considérons les éléments de $\mathbf{A}^m$ comme "des colonnes", ainsi, il y a "égalité" entre $\mathbf{A}^m$ et $M_{m,1}(\mathbf{A})$ malgré la représentation habituelle, qui nous fait penser aux éléments d'un produit cartésien comme des lignes. Nous aurons souvent usage de la transposition $X \in \mathbb{K}^m \mapsto x = X^T \in M_{1,m}(\mathbb{K})$ ainsi un élément de $\mathbb{K}^m$ est en correspondance biunivoque (et linéaire) avec la matrice ligne de ses coordonnées :

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \leftrightarrow X = x^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} x_i \mathbb{E}_{i1}.$$

Ceci, en plus de correspondre à une pratique dans la littérature, nous permets d'épargner de l'espace dans un texte, par exemple.

Une matrice A est dite **inversible**, si c'est une matrice carrée et s'il existe une deuxième matrice B telle que $AB = BA = I$, la matrice identité. Dans ce cas, B est notée A^{-1} et elle est unique. Le déterminant, fonction polynomiale de ces éléments, permet de déterminer si une matrice carrée est inversible ou non *dans le cas d'un corps*; A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Une matrice qui n'est pas inversible, est dite singulière.

Remarquons $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ et que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Il est utile de relier,

Transposition. Notation : Si $A = (a_{ji}) \in M_{m,n}(A)$, ${}^{t}\!A = A^T$ est la matrice dont l'élément en ligne i et colonne j, noté a^T_{ij} est le scalaire a_{ji}.

Les deux formules suivantes sont élémentaires, mais très importantes ! $(A+B)^T = A^T + B^T$, $\quad (AB)^T = B^T A^T$.

Trace d'une matrice : Pour chaque matrice $A \in M_{m,n}(\mathbf{A})$ nous définissons sa trace, comme la somme des coefficients dans la diagonale.

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{\min(n,m)} a_{ii}$$

où $\min(n, m)$ est le minimum de n et m et c'est le nombre d'éléments de la diagonale.

Les **matrices triangulaires supérieures** se définissent sans peine, en disant que c'est une matrice carrée $A = (a_{ij})$ qui vérifie : si $j < i \Rightarrow a_{ij} = 0$. Tout ce qui est strictement en-dessous de la diagonale est nul. Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de l'espace de toutes les matrices carrées, en fait, puisque le produit de deux matrices triangulaires supérieurs est encore triangulaire supérieur, il s'agit d'une sous-algèbre.

Les **matrices triangulaires inférieures** sont les transposées des matrices triangulaires supérieures. Il s'agit encore, d'une sous algèbre. Nous aurons peut-être l'opportunité d'utiliser des matrices strictement triangulaires, ce sont celles où en plus la diagonale est nulle.

Posons une fois pour toutes la notation suivante, si X est, soit un vecteur (colonne ou ligne) ou une liste ordonnée de quantités, $X = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$,

$$diag(X) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} \in M_{n,n}(\mathbf{A})$$

matrice diagonale, avec sur sa diagonale les quantités données.

3. Déterminants

Un déterminant est un objet mathématique très utile dans l'analyse et la résolution de systèmes d'équations linéaires. Les déterminants ne sont définis que pour les matrices carrées. Une matrice carrée a des dimensions horizontales et verticales identiques (c'est-à-dire une matrice nxn). La différence entre la forme d'une matrice et un déterminant d'une matrice est qu'un déterminant est affiché en utilisant des lignes droites à la place des crochets. Le déterminant est une quantité scalaire, ce qui signifie une quantité à un composant. Le déterminant est le plus souvent utilisé pour :

— tester si une matrice a ou non un inverse.
— test pour la dépendance linéaire des vecteurs (dans certaines situations)
— test d'existence / d'unicité des solutions de systèmes linéaires d'équations

3.1. Une nxn Matrice.

dans une nxn matrice, nous suivons certaines règles pour l'apparence de la matrice. Nous laissons v_i symboliser la ligne i^e. $(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$. Si cette ligne devait Ãªtre multipliée par α,la ligne semble Ãªtre $(\alpha a_{i1}, \alpha a_{i2}, ..., \alpha a_{in})$. De plus, si deux lignes ont été ajoutées, la i^{th} ligne et le j^{th} colonne, nous aurions $(a_{i1} + a_{j1}, a_{i2} + a_{j2}, ..., a_{in} + a_{jn})$. Une matrice d'unité apparaÃ®t avec les lignes suivantes : (1,0,0,...,0),(0,1,0,...,0),...,(0,0,0,...,1). Aussi, les lettres $e_1, ..., e_n$ décrire une ligne d'unité.

Dans une matrice nxn, il existe quelques formes dans lesquelles un déterminant est reconnu. Tout d'abord, le déterminant symbolise la fonction des variables n^2 $a_{ij}(i, j = 1, 2, ..., n)$. Le déterminant de cette fonction peut s'écrire :

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = |a_{ij}| = D(v_1, v_2, ...v_n)$$

3.2. **Propriétés des déterminants.**

(1) $D(v_1, v_2, ..., v_i, ..., v_n) = D(v_1, v_2, ..., v_i + v_j, ...v_n)$ $(i \neq j)$ (**Invariance**)

(2) $D(v_1, v_2, ..., \alpha v_i, ..., v_n) = \alpha D(v_1, v_2, ..., v_i + v_j, ...v_n)$ (**Homogénéité**)

(3) $D(e_1, e_2, ..., e_n) = 1$ (**Normalisation**)

3.3. **Règles pour les déterminants.** Les déterminants sont soit écrits comme $|A|$ où $detA$. Supposons maintenant que nous supprimions la ligne i^{th} et la colonne j^{th} a $(n-1)x(n-1)$ submatrix A_{ij} est formée. Le déterminant de cette sous-matrice est l'élément textit minor de a_{ij}. Le *cofacteur* de a_{ij} est $(-1)^{i+j}|A_{ij}|$. Nous écrivons également le cofacteur comme A^*_{ij}. Voici quelques règles pour les déterminants.

a. $|A| = |A'|, A' = transpose of A = (a_j i))$

b. Si deux lignes (ou colonnes) de A sont interchangées, produisant une matrice A_1, alors $|A| = -|A|$

c. Si deux lignes (ou colonnes) de A sont identiques, alors —A—=0

d. Si une ligne (ou colonne), v, de A est remplacée par kv produisant une matrice A_1, alors $|A|$=$k|A|$.

e. Si un multiple scalaire kv, de la ith ligne (ou colonne) est ajouté à la jth ligne (ou colonne) v_j, $(i \neq j)$ et la matrice A_1 résultats, alors $|A| = |A_1|$.

f. Un déterminant peut Ãªtre évalué en termes de cofacteurs : $|A| =$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A^*_{ij} \ 1 \leq j \leq n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A^*_{ij} \ 1 \leq i \leq n$$

3.4. $2X2$ **Matrice.** Le déterminant le plus basique est trouvé en utilisant une matrice $2x2$ sous la forme

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

le déterminant d'une $2x2$ matrice est trouvée en utilisant la formule suivante :

$$|A| = det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

3.4.1. *Exemple 1.* $2x2$ **Matrice** Utilisant la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

le déterminant doit etre

$$|A| = det(A) = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 * 3 - 5 * 2 = 2$$

3.5. $3x3$ **Matrice.** Le prochain type de matrice étudié est la matrice $3x3$. La forme de cette matrice est

$$B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Le déterminant d'une matrice $3x3$ est trouvé en utilisant la formule suivante :

$$|B| = det(B) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

3.5.1. *Exemple 2.* $3x3$ **Matrice** Utilisant la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

te déterminant doit etre

$$|B| = det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

N.B : Pour plus de détails consulter s'il vous plait le lien suivant : http ://exo7.emath.fr/ficpdf/fic00056.pdf