Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Hassiba Benbouali de Chlef

Faculté des Sciences Exactes & Informatique

Département de Mathématiques

Théorie des Opérateurs

Cours et exercices

Par

Dr. Aissa NASLI BAKIR

Première Année Master

Année Universitaire : 2018/2019

Chapitre 1

Espaces de Hilbert

1.1 Espaces pré-Hilbertiens

1.1.1 Produit scalaire

Définition 1.1. *(Rappel) Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$.*
Une application $f\colon E \times E \to \mathbb{C}$ est dite bilinéaire si pour tous $x, x', y, y' \in E$, et tout $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$f(\lambda x + x', y) = \lambda f(x, y) + f(x', y)$$

et

$$f(x, \lambda y + y\ ) = \lambda f(x, y) + f(x, y\,')$$

Définition 1.2. *Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Un produit scalaire sur E, est une application bilinéaire $\langle ., . \rangle : E \times E \to \mathbb{C}$ et vérifiant :*

i. $\forall x \in E : \langle x, x \rangle \geq 0$ *(Positivité)*

ii. $\forall x \in E : \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *(Séparation)*

iii. $\forall x, y \in E : \overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle$ *(Anti-symétrie)*

iv. $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C} : \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ *(Homogénéité)* *v.* $\forall x, y, z \in E : \langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

Définition 1.3. *Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est dit espace pré-Hilbertien.*

Exemples 1. $E = \mathbb{C}^n$. L'application $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$ pour tous $x = (x_i)_{i=1}^n, y = (y_i)_{i=1}^n \in E$, définit bien un produit scalaire sur E.

$(E, \langle ., .\rangle)$ est donc un espace pré-Hilbertien.

2. Considérons l'espace

$$\ell_2 := \left\{ x = (x_n)_n \subset \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty \right\}$$

et l'application $\langle ., .\rangle$ sur $\ell_2 \times \ell_2$ définie par

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i \overline{y_i},\ x = (x_i)_{i=1}^{+\infty},\ y = (y_i)_{i=1}^{+\infty} \in \ell_2$$

Cette application est bien définie sur ℓ_2. En effet, si $x = (x_i)_{i=1}^n, y = (y_i)_{i=1}^n \in \ell_2$, alors

$$|\langle x, y\rangle| = \left| \sum_{i=1}^{+\infty} x_i \overline{y_i} \right| \leq \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i \overline{y_i}| \leq \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^2 + \sum_{i=1}^{+\infty} |y_i|^2\right) < +\infty$$

car $x, y \in \ell_2$. Il est facile de montrer que $\langle ., .\rangle$ est un produit scalaire sur ℓ_2, et

$(\ell_2, \langle ., .\rangle)$ est donc un espace pré-Hilbertien.

3. De même pour l'espace

$$E = L_2([a, b], \mathbb{C}) = \left\{ f : [a, b] \to \mathbb{C} : \int_a^b |f(t)|^2 \, dt < +\infty \right\}$$

muni de l'application $\langle ., .\rangle$ où

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt,\ f, g \in E$$

.

Exercice Montrer que dans un espace pré-Hilbertien $(E, \langle ., . \rangle)$:

$$\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$$

pour tous $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

1.1.2 Inégalité de Cauchy-Bunyakowski-Schwartz

Théorème 1.1. *Soit $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace pré-Hilbertien, et soient $x, y \in E$. Alors,*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle}.\sqrt{\langle y, y \rangle} \tag{1.1}$$

Preuve. Si $\langle x, y \rangle = 0$, l'inégalité (1.1) est triviale. On suppose que $\langle x, y \rangle \neq 0$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a

$$0 \leq \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle - 2Re(\lambda \langle y, x \rangle) + |\lambda|^2 \langle y, y \rangle \tag{1.2}$$

Pour $\lambda = \frac{\langle x,x \rangle}{\langle y,x \rangle}$, on aura dans (1.2)

$$\langle x, x \rangle - 2 \langle x, x \rangle + \frac{\langle x, x \rangle^2}{|\langle y, x \rangle|^2} \langle y, y \rangle \geq 0$$

Comme $\langle x, x \rangle \geq 0$,

$$\frac{\langle x, x \rangle}{|\langle y, x \rangle|^2} \langle y, y \rangle - 1 \geq 0$$

et l'inégalité (1.1) est vérifiée. ■

1.1.3 Norme associée à un produit scalaire

Proposition 1.1. *Soit $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace pré-Hilbertien. L'application $\|.\| : E \to \mathbb{R}_+$ définie par*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle},\ x \in E$$

est une norme sur E.

Preuve. En effet,

i. Si $x \in E$ et $\|x\| = 0$, alors $\sqrt{\langle x, x\rangle} = 0$. Donc $\langle x, x\rangle = 0$. Par suite $x = 0$ (propriété du produit scalaie). De même, $\|0\| = \sqrt{\langle 0, 0\rangle} = 0$.

ii. Pour tous $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \|\lambda x\| &= \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda\overline{\lambda}\,\langle x, x\rangle} = \sqrt{|\lambda|^2\,\langle x, x\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle x, x\rangle} \\ &= |\lambda|\,\|x\| \end{aligned}$$

iii. Soient $x, y \in E$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on aura

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2Re\,\langle x, y\rangle \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,|\langle x, y\rangle| \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle} \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2 \\ &\leq (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

■

Définition 1.4. *La norme $\|.\|$ ainsi définie est dite norme associée au produit scalaire $\langle ., .\rangle$ sur E. (Ou norme issue du produit scalaire)*

Exemples Exprimer les normes associées aux produits scalaires sur les espaces définis dans les exemples 1,2 et 3 précédents.

Conséquences

1. Soient $x = (x_i)_{i=1}^{+\infty}, y = (y_i)_{i=1}^{+\infty} \in \ell_2$. Pour $a = (|x_i|)_{i=1}^{+\infty}, b = (|y_i|)_{i=1}^{+\infty} \in \ell_2$, on aura par l'inégalité de Cauchy-Schwartz que

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i y_i| \leq (\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=1}^{+\infty} |y_i|^2)^{\frac{1}{2}}$$

i.e.

$$\|ab\|_1 \leq \|a\|_2 \|b\|_2$$

Autrement dit, l'inégalité de Cauchy-Schwartz coïncide avec l'inégalité de Hölder.

2. Si $x = (x_i)_{i=1}^n, y = (y_i)_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n$. Pour $a = (|x_i|)_{i=1}^n, b = (|y_i|)_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n$, on pourra avoir toujours par l'inégalité de Cauchy-Schwartz que

$$\sum_{i=1}^n |x_i| \leq \sqrt{n}(\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$$

D'où,

$$\|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2$$

1.2 Propriétés

Soit $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace pré-Hilbertien, et soit $\|.\|$ la norme associée à son produit scalaie. Pour tous $x, y \in E$, on a

1. **Identité du parallélogramme**

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

2. **Identité de polarisation (** *On suppose que le corps de E est* $\mathbb{R}$)

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2)$$

Preuve. Calcul direct. ■

1.2.1 Continuité du produit scalaire

Proposition 1.2. *Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace pré-Hilbertien. Le produit scalaire $\langle .,. \rangle$ est une fonction continue sur $E \times E$.*

Preuve. Soient $(x_n)_n, (y_n)_n$ deux suites de E convergeant respectivement vers x, y dans E. On a donc

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &\leq |\langle x_n, y_n - y \rangle| + |\langle x_n - x, y \rangle| \\ &\leq \|x_n\| \, \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \, \|y\| \underset{n \to +\infty}{\to} 0 \end{aligned}$$

car $\|x_n\| \to \|x\|, (n \to +\infty)$. ■

1.3 Espace de Hilbert

Définition 1.5. *Une suite $(x_n)_n$ d' un espace pré-Hilbertien E est dite de Cauchy dans E si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n, m \in \mathbb{N} : (n > N \wedge m > N) \Rightarrow (\sqrt{\langle x_n - x_m, x_n - x_m \rangle} < \epsilon)$$

Définition 1.6. *La suite $(x_n)_n$ est dite convergente vers un élément $x \in E$, si*

$$\lim_{n \to +\infty} \|x_n - x\| = 0$$

i.e., si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq N) \Rightarrow (\|x_n - x\| < \epsilon)$$

et l'on écrit

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x$$

Définition 1.7. *Soit E un espace pré-Hilbertien. Si toute suite de Cauchy dans E est convergente dans E, l'espace E est dit complet.*

Définition 1.8. *Un espace pré-Hilbertien complet est dit espace de Hilbert.* [1]

Exemples 1. Les espaces $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$ et $L_2([a,b],\mathbb{C})$ sont des espaces de Hilbert.

2. Montrons que l'espace ℓ_2 est de Hilbert. Soit donc

$$x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \xi_3^{(n)}, ..., \xi_n^{(n)}, ...) \in \ell_2$$

une suite de Cauchy. Pour k fixé, on a

$$\left|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}\right| \leq \|x_n - x_m\| \to 0 \qquad (1)$$

quand $n, m \to +\infty$. La suite $\left(\xi_k^{(n)}\right)_{n\geq 1}$ est donc de Cauchy dans $\mathbb{C}$. Elle est donc convergente. Soit $\xi_k = \lim\limits_{n\to+\infty} \xi_k^{(n)}$, et posons $x = (\xi_1, \xi_2, , ...\xi_n, ..)$. Montrons que $x \in \ell_2$, et que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.

Pour tout entier j, $j \geq 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{j} |\xi_k|^2 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{j} \left|\xi_k^{(n)}\right|^2 \qquad (2)$$

et

$$\sum_{k=1}^{j} \left|\xi_k^{(n)}\right|^2 \leq \|x_n\|^2 \qquad (3)$$

De plus, $\sup\limits_{n\geq 1} \|x_n\| = M < +\infty$ car

$$|\|x_n\| - \|x_m\|| \leq \|x_n - x_m\| \to 0, n, m \to +\infty$$

1. David Hilbert (1862-1943) est un grand mathématicien allemand, connu par ses 23 fameux problèmes en Analyse mathématique présentés en 1900, et dits Hilbert Open Problems.

Il s'ensuit donc de (2) et (3) que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left|\xi_k^{(n)}\right|^2 \leq M^2$$

, i.e., $x \in \ell_2$. D'autre part, pour $\epsilon > 0$, il existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tous n, m, $n > N$ et $m > N_\epsilon$, et tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{p} \left|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}\right|^2 \leq \|x_n - x_m\|^2 < \epsilon \qquad (4)$$

Fixons $n \geq N_\epsilon$ et faisons tendre m vers $+\infty$. De (1) et (4), on obtiendra pour tout p

$$\sum_{k=1}^{p} \left|\xi_k^{(n)} - \xi_k\right|^2 = \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=1}^{p} \left|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}\right|^2 \leq \epsilon$$

Par conséquent,

$$\|x_n - x\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \left|\xi_k^{(n)} - \xi_k\right|^2 \leq \epsilon$$

■

1.4 Exercices

Exercice 1.1.

i. Soit $E = \mathbb{R}[X]$, l'espace vectoriel des polynômes de la variable réelle X et à coefficients réels. Les appilcations suivantes définissent-elles des produits scalaires sur E ?

$$\begin{aligned} \langle P, Q\rangle &= \int_0^1 P(x)Q(x)dx, \quad P, Q \in \mathbb{R}[X] \\ \langle P, Q\rangle &= P(1)Q'(0) + P'(0)Q(1), \quad P, Q \in \mathbb{R}[X] \end{aligned}$$

Exercice 1.2.

Soit $(\mathcal{H}, \langle ., .\rangle)$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$.

a. Montrer l'identité de polarisation

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2), \quad x, y \in \mathcal{H}$$

b. Une application linéaire $u\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est dite une isométrie si u conserve la norme, i.e.

$$\forall x \in \mathcal{H} : \|u(x)\| = \|x\|$$

où $\|.\|$ est la norme issue du produit scalaire sur $\mathcal{H}$. Montrer que u est une isométrie si et seulement si u conserve le produit scalaire, c-à-d

$$\forall x, y \in \mathcal{H} : \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$$

N.B. Pour $(\Rightarrow)$, utiliser l'identité de polarisation ,et pour $(\Leftarrow)$, le développement de

$\|u(x + \lambda y) - u(x) - \lambda u(y)\|^2$ pour $x, y \in \mathcal{H}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 1.3.

Montrer que l'espace vectoriel $\mathcal{E} = \mathcal{C}^0\left([-1,1], \mathbb{R}\right)$ des fonctions réelles continues sur $[-1,1]$, muni du produit scalaire

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt, \quad f,g \in \mathcal{E}$$

n'est pas de Hilbert. Utiliser la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ où

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & -1 \leq t \leq \frac{-1}{n} \\ nt+1, & \frac{-1}{n} \leq t \leq 0 \\ 1 & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}, \quad (n \geq 1)$$

Exercice 1.4.

Dans l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n, $(n \geq 1)$ et à coefficients réels, on définit la trace d'une matrice $\mathcal{A} = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ par $tr(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

1. Montrer que

$$\langle \mathcal{A}, \mathcal{B}\rangle = tr(\mathcal{A}^t\mathcal{B}), \quad \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où $\mathcal{A}^t$ est la matrice transposée de la matrice A.

2. Montrer que la norme associée à ce produit scalaire vérifie

$$\|\mathcal{A}\mathcal{B}\| \leq \|\mathcal{A}\| \, \|\mathcal{B}\|, \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

.

3. En déduire que $\|\mathcal{A}^p\| \leq \|\mathcal{A}\|^p$, $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$.

Exercice 1.5.

(Produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{R}_n[X]$)

a. Montrer que la relation

$$\langle P,Q\rangle = \int_{0}^{1} P(x)Q(x)dx, \quad P,Q \in \mathbb{R}[X]$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ et sur $\mathbb{R}_n[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Montrer que $(\mathbb{R}_n[X], \langle ., . \rangle)$ est un espace de Hilbert.

c. 1. Soit $P_n(x) = \sum\limits_{k=o}^{n} \frac{x^k}{k!}, x \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $(P_n)_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction $x \mapsto \exp(x)$.

2. En déduire que P_n converge vers la fonction $x \mapsto \exp(x)$ pour la norme associée au produit scalaire.

3. En déduire que $(\mathbb{R}[X], \langle ., . \rangle)$ n'est pas un espace de Hilbert.