
Série d'exercices

1-Modélisation d'un programmation linéaire

Exercise 1 *Un atelier fabrique des tables et des bureaux.*

- Chaque table nécessite 2,5h pour l'assemblage, 3h pour le polissage et 1h pour la mise en caisse.
- Chaque bureau exige 1h pour l'assemblage, 3h pour le polissage et 2h pour la mise en caisse.

L'entreprise ne peut disposer, chaque semaine, de plus de 10h pour l'assemblage, de 15h pour le polissage et de 8h pour la mise en caisse.

Sa marge de profit est de 30 euro par table et de 40 euro par bureau.

Combien de tables et de bureaux doit-on produire afin d'obtenir un profit hebdomadaires maximal ?

Exercise 2 *Un agriculteur souhaite mélanger des engrais de façon à obtenir au minimum 15unités de potasse, 20unités de nitrates et 24unités de phosphates. Il achète deux types d'engrais.*

- Le type 1 procure 3unités de potasse, 1unité de nitrates et 3unités de phosphates. Il coûte 120euro.
- Le type 2 procure 1unité de potasse, 5unités de nitrates et 2unités de phosphates. Il coûte 60euro.

Exprimer à l'aide d'un programme linéaire la combinaison d'engrais qui remplira les conditions exigées au moindre coût.

Exercise 3 *Une entreprise a la faculté de fabriquer, sur une machine donnée travaillant 45heures par semaine, trois types de produits différents P1, P2 et P3. Une unité du produit P1 laisse un profit net de 4euros, une unité de P2 un profit de 12euros, et enfin, pour P3 de 3euros. Les rendements de la machine sont, respectivement pour les trois produits : 50, 25 et 75 articles par heure. On sait, grâce à une étude de marché que les possibilités de vente ne dépassent pas 1000unités de P1, 500unités de P2 et 1500unités de P3, par semaine. On se pose le problème de répartir la capacité de production entre les trois produits, de manière à maximiser le profit hebdomadaire.*

Exercice 4 *Considérons une usine où, grâce à la présence de deux chaînes, il est possible d'assembler simultanément deux modèles de voiture. On peut produire 100 voitures du premier type en 6 heures. On peut aussi produire 100 voitures du second type en 5 heures seulement. Le nombre d'heures de travail est au maximum de 60 heures par semaine. Les voitures produites sont enlevées une fois par semaine et doivent être stockées dans un dépôt de 15000m^2 . Une voiture du type 1 occupe 10m^2 une voiture du type 2 occupe 20m^2 .*

La marge (différence entre le prix de vente et le coût de la production) sur le premier type de voiture est de 50000euros par véhicule tandis que, sur le second, elle est de 45000euros par véhicule. La demande pour le premier type de voiture est limitée à 800unités par semaine ; la demande pour le deuxième type est tellement forte qu'on peut la considérer comme illimitée.

Combien de voitures de chaque type le constructeur doit-il produire par semaine pour maximiser son profit ?

Résolution graphique d'un P.L, Forme canonique, forme standard, base, base admissibles, base optimale

Exercice 5 *Reprendre les Exercices 1 et 2, et trouver les solutions optimales à l'aide de la méthode graphique.*

Exercice 6 *On considère une entreprise produisant deux biens en quantités x_1 et x_2 respectivement sous contraintes de capacités de production relatives à deux ateliers de production. Le programme linéaire correspondant à la maximisation de la marge est le suivant :*

$$\begin{cases} \max & z = 3x_1 + 4x_2 \\ \text{s.c} & 2x_1 & \leq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 & \leq 18 \\ & x_1, x_2 & \geq 0. \end{cases}$$

- Déterminer graphiquement le sommet optimal et donner ses coordonnées.
- Mettre le problème sous la forme d'égalité par l'ajout de variables d'écart.
- À l'optimum, quelles sont les variables en base et les variables hors base ?
- Des progrès importants dans l'organisation du travail permettraient de réduire le temps d'usinage du second bien dans le premier atelier. La première contrainte devient donc $\alpha x_2 \leq 12$, où α ; le nouveau temps d'usinage, est un paramètre inférieure à 2.

Jusqu'à quelle valeur peut-on faire descendre pour que la même base (c'est-à-dire les mêmes variables de base) reste optimale ?

- En dessous de cette valeur quel est le sommet optimal (donner ses coordonnées) et quelle est la nouvelle base (c'est-à-dire quelles sont les nouvelles variables de base) ?

Exercice 7 On considère le P.L :

$$\begin{cases} \max & z = 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 10x_4 + 3x_5 \\ \text{s.c} & 7x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 8x_5 = 37 \\ & 5x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 6x_5 = 26 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

On pose $J = \{1; 3\}$

- 1) J est-il une base ?
- 2) Est-ce une base admissible ?
- 3) Est-ce une base optimale ?

Exercice 8 Formuler le problème dual à chaque problème primal :

$$\begin{cases} \max & -x_1 - 2x_2 + x_3 \\ \text{s.c} & x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 4 \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 6 \\ & x_1 + x_3 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0, \quad x_3 \text{ de signe qcq.} \end{cases} \quad \begin{cases} \min & x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{s.c} & x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 12 \\ & -x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 10 \\ & x_1 + x_2 = 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0, \quad x_3 \text{ de signe qcq.} \end{cases}$$

Exercice 9 Soit le problème de maximisation écrit sous la forme canonique

$$\begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Montrer que le dual de son dual est le problème primal lui-même.

Exercice 10 Soit le problème de minimisation suivante :

$$\begin{cases} \min & -3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.c} & -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & x_1 - 4x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

- 1) Formuler son dual.
- 2) Montrer que son dual est impossible.

Exercice 11 Soit à résoudre le programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} \max & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.c} & -2x_1 + 4x_2 \leq 8 \\ & x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_1 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

- 1) Résoudre le problème primal par l'algorithme du simplexe.
- 2) Rappeler le théorème des écarts complémentaires.
- 3) En déduire la solution du dual.

Exercise 12 *Soit le problème*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 \\ s.c. & 2x_1 - 3x_2 \leq 2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 11 \\ & -x_1 + x_2 \leq 3 \\ & 0 \leq x_1 \leq 4 \\ & 0 \leq x_2 \leq 0. \end{array} \right.$$

- 1) Formuler le problème dual.
- 2) Sachant que $x^* = (3; 5)$; en déduire la solution optimale dual.
- 3) Peut-on s'assurer de la réponse trouver en 2).