Université Hassiba Benbouali - Chlef
Année universitaire :2019-2020
Niveau :1me Master M A S

Facult e de SEI
Département de Mathématiques
Module : Programmation Linéaire

Corrigée de la feuille d'exercices N 2

Exercice 1 *L'optimum est un clairement obtenu en un sommet. Ce point est a l'intersection des droites :*

$$2x_2 = 19 \quad et \quad 7x_1 - 2x_2 = 107.$$

Par conséquent, la solution optimale est $x^* = (18, 9.5)$ *et la valeur de la fonction objectif est* $z^* = 4 \times 18 + 9.5 = 81.5$.

Exercice 2 *Cherchons le dual* (D) *de* $(P1)$

$$(D1) \Longleftrightarrow \begin{cases} z\,(\max) = 6y_1 + 2y_2 - 2y_3 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 \geq -2 \\ y_1 - y_2 - 3y_3 \geq -1 \\ -3y_1 + 2y_2 - 2y_3 \geq 1 \\ 6y_1 + 2y_2 - 2y_3 \geq 1 \\ y_i \text{ de signe qcq}, \; i = 1,2,3 \end{cases}$$

verifions que $x^* = (3,0,1,3)^\top$ *est une solution admissible de* $(P1)$

$$\begin{aligned} 2 \times 3 + 0 - 3 \times 1 + 3 &= 6 \\ 3 - 0 + 2 \times 1 - 3 &= 2 \\ 3 - 3 \times 0 - 2 \times 1 - 3 &= -2 \end{aligned}$$

Cherchons y^* *solution admissible du dual avec* (x^*, y^*) *vérifie le théorème des écatrs complémentaires,*

$$\begin{cases} x_1^* = 3 > 0 \\ x_2^* = 1 > 0 \\ x_3^* = 3 > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2y_1^* + y_2^* + y_3^* = -2 \\ -3y_1^* + 2y_2 - 2y_3^* = 1 \\ 6y_1^* + 2y_2^* - 2y_3^* = 1 \end{cases} \Longrightarrow y^* = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)^\top.$$

On vérifie que y^* *est solution admissible de* $(D1)$. *Rest à vérifier la contrainte (2) du dual*

$$-\frac{1}{3} + \frac{2}{3} - 3\left(-\frac{2}{3}\right) \geq -1$$

Coclusions :$(x^*, y^*) \in S_{(P1)} \times S_{(D1)}$ *vérifie le théorème des écatrs complémentaires, alors* x^* *est une solution optimal de* $(P1)$.

Exercice 3 1. *La forme standard*

$$(PS) \begin{cases} z(\max) = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 90 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 40 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_6 = 80 \\ x_i \geq 0, \; i = 1, ..., 6 \end{cases}$$

$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$	$\mathbf{x}_5$	$\mathbf{x}_6$	$\mathbf{b}_i$	**V.b**
3	4	2	1	0	0	90	$\mathbf{x}_4$
2^*	1	1	0	1	0	40	$\mathbf{x}_5$
1	3	2	0	0	1	80	$\mathbf{x}_6$
5	**4**	**3**	**0**	**0**	**0**	**0**	$-\mathbf{z}$
0	$\frac{5}{2}^*$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	0	30	$\mathbf{x}_4$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	20	$\mathbf{x}_1$
0	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	60	$\mathbf{x}_6$
0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	0	-100	$-z$
0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0	12	$\mathbf{x}_2$
1	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	0	14	$\mathbf{x}_1$
0	0	1^*	-1	1	1	30	$\mathbf{x}_6$
0	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{8}{5}$	0	-118	$-z$
0	1	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	6	$\mathbf{x}_2$
1	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	2	$\mathbf{x}_1$
0	0	1	-1	1	1	30	$\mathbf{x}_3$
0	0	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{9}{5}$	$-\frac{1}{5}$	-124	$-z$

La base $B=\{1,2,3\}$ *est optimale. La solution correspondante est :*
$x_1 = 2,\ x_2 = 6,\ x_3 = 30$ *et* $z = 124.$

2.
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. *Le dual*
$$(PL) \begin{cases} w(\min) = 90\lambda_1 + 40\lambda_2 + 80\lambda_3 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \geq 5 \\ 4\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 \geq 4 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \geq 3 \\ \lambda_i \geq 0,\ i = 1,2,3 \end{cases}$$

4. $\lambda^* = \left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5}, \frac{1}{5}\right)^\top$ *est une solution admissible car,*
$$\begin{aligned} 3\left(\tfrac{2}{5}\right) + 2\left(\tfrac{9}{5}\right) + \tfrac{1}{5} &= 5 \geq 5 \\ 4\left(\tfrac{2}{5}\right) + \tfrac{9}{5} + 3\left(\tfrac{1}{5}\right) &= 4 \geq 4 \\ 2\left(\tfrac{2}{5}\right) + \tfrac{9}{5} + 2\left(\tfrac{1}{5}\right) &= 3 \geq 3 \end{aligned}$$

5. $w^* = 90\left(\frac{2}{5}\right) + 40\left(\frac{9}{5}\right) + 80\left(\frac{1}{5}\right) = 124 = z^*$, *ainsi* λ^* *est une solution optimale de* (D).
6. *La base* $B = \{1,2,3\}$ *est optimale pour* (P)
$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90+\alpha \\ 40 \\ 80 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 90+\alpha \\ 40 \\ 80 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 90+\alpha \\ 40 \\ 80 \end{pmatrix}$$
$$\begin{cases} b_1 = \frac{3}{5}(10+\alpha) \geq 0 \\ b_2 = 10+\alpha \geq 0 \\ b_3 = 30-\alpha \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha \geq -10 \\ \alpha \geq -10 \\ \alpha \leq 30 \end{cases} \Longrightarrow -10 \leq \alpha \leq 30$$

Exercice 4

$$(PL) \Leftrightarrow \begin{cases} z = \min x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ x_1 - 5x_2 + 7x_3 + x_4 = -8 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_5 = 2 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_6 = -2 \\ x_i \geq 0, \ i = 1, ..., 6 \end{cases}$$

$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_6}$	**s.m**	**V.b**
-1	5	-7^*	1	0	0	-8	$\mathbf{x_4}$
2	-4	2	0	1	0	2	$\mathbf{x_5}$
-1	3	-2	0	0	1	-2	$\mathbf{x_6}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{-z}$
$\frac{1}{7}$	$-\frac{5}{7}$	1	$-\frac{1}{7}$	0	0	$\frac{8}{7}$	$\mathbf{x_3}$
$\frac{12}{7}$	$-\frac{18}{7}^*$	0	$\frac{2}{7}$	0	0	$-\frac{2}{7}$	$\mathbf{x_5}$
$-\frac{5}{7}$	$\frac{11}{7}$	0	$-\frac{2}{7}$	0	1	$\frac{2}{7}$	$\mathbf{x_6}$
$\frac{5}{7}$	$\frac{31}{7}$	0	$\frac{2}{7}$	0	0	$-\frac{16}{7}$	$-z$
$-\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{5}{18}$	0	$\frac{11}{9}$	$\mathbf{x_3}$
$-\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{7}{18}$	0	$\frac{1}{9}$	$\mathbf{x_2}$
$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{9}$	$\frac{11}{18}$	1	$\frac{1}{9}$	$\mathbf{x_6}$
$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{47}{36}$	0	$-\frac{25}{9}$	$-z$

Exercice 5

1. *Le dual du problème posé est :*

$$\begin{cases} \min w = \ 4\lambda_1 + 3\lambda_2 + 5\lambda_3 + \lambda_4 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 + 3\lambda_4 \geq 7 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 + \lambda_4 \geq 6 \\ 5\lambda_1 - 2\lambda_2 + 4\lambda_3 + 2\lambda_4 \geq 5 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 - \lambda_4 \geq -2 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 - 2\lambda_4 \geq 3 \\ \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0, \lambda_4 \geq 0 \end{cases}$$

2. *La troisième contrainte du problème primal n'est pas saturée. Donc la variable duale associée à cette contrainte est null :* $\lambda_3 = 0$

$$\lambda_1 (x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 2x_5 - 4)$$
$$= \lambda_1 \left(0 + 3 \times \tfrac{4}{3} + 5 \times \tfrac{2}{3} - 2 \times \tfrac{5}{3} + 2 \times 0 - 4\right) = \lambda_1 \times 0 = 0$$

on ne peut rien dire

$$\lambda_2 (4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 - 3)$$
$$= \lambda_2 \left(4 \times 0 + 2 \times \tfrac{4}{3} - 2 \times \tfrac{2}{3} + \tfrac{5}{3} + 0 - 3\right) = \lambda_2 \times 0 = 0$$

on ne peut rien dire

$$\lambda_3 (2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 - 5)$$
$$= \lambda_3 \left(2 \times 0 + 4 \times \tfrac{4}{3} + 4 \times \tfrac{2}{3} - 2 \times \tfrac{5}{3} + 5 \times 0 - 5\right)$$
$$= \lambda_3 \times \tfrac{-1}{3} = 0 \Longrightarrow \lambda_3 = 0$$

$$\lambda_4 (3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 - 1)$$
$$= \lambda_4 \left(3 \times 0 + \tfrac{4}{3} + 2 \times \tfrac{2}{3} - \tfrac{5}{3} - 2 \times 0 - 1\right) = \lambda_4 \times 0 = 0$$

on ne peut rien dire

D'autre part, les varaibles x_2, x_3 et x_4 sont strictement positives. Ce qui implique que la deuxième, la troisième et la quatrième contrainte duales sont saturées.

On obtient donc le système suivante :

$$\begin{cases} 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 + \lambda_4 = 6 \\ 5\lambda_1 - 2\lambda_2 + 4\lambda_3 + 2\lambda_4 = 5 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 - \lambda_4 = -2 \end{cases}$$

Comme $\lambda_3 = 0$, le système précédent devient

$$\begin{cases} 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_4 = 6 \\ 5\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_4 = 5 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4 = -2 \end{cases}$$

En résolvant ce système, on obtient :

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = 1$$

Cette solution ne satisfait pas la dernière contrainte du problème dual. Elle n'est donc pas réalisable et par suite la solution primale proposée n'est pas optimale.

Exercice 6 *1.*

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$s.m$	$v.b$
1	$\boxed{2}$	3	0	0	1	5	x_1
0	4	1	0	1	2	11	x_5
0	3	4	1	0	2	8	x_4
0	5	4	0	0	3	0	$-z$
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$s.m$	$v.b$
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	x_2
-2	0	-5	0	1	0	1	x_5
$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	$\boxed{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$	x_4
$-\frac{5}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{25}{2}$	$-z$
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$s.m$	$v.b$
2	1	2	-1	0	0	2	x_2
-2	0	-5	0	1	0	1	x_5
-3	0	-1	2	0	1	1	x_6
-1	0	-3	-1	0	0	-13	$-z$

Tous les couts réduits sont négatifs ou nuls.
$\Longrightarrow$ *solution optimale* $x = (0, 2, 0, 0, 1, 1)$ *de valeur* $z^* = 13$.

2. $B = \{2, 5, 6\}$
3. *On prend* $\lambda^\top = c_B^\top A_B^{-1}$:

$$A_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \lambda^\top = (5\ 0\ \ 3) \,.\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = (1 \quad 0 \quad 1)$$

4. *- On vérifie bien que x est primal-admissible.*
- Par construction on sait déjà que $c^\top x = \lambda^\top b$
En effet $c^\top x = 13 = \lambda^\top b$
- Reste donc à vérifier que λ est duale-admissible :
Ecrivons le duale :

$$\begin{cases} \min w = \ 5\lambda_1 + 11\lambda_2 + 8\lambda_3 \\ \lambda_1 \geq 0 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 3\lambda_3 \geq 5 \\ 3\lambda_1 + 1\lambda_2 + 4\lambda_3 \geq 4 \\ \lambda_3 \geq 0 \\ \lambda_2 \geq 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 \geq 3 \end{cases}$$

$\lambda^\top = (1\ ,0,\ 1)$ *est bien dual-réalisable*
x *et* λ *sont donc bien des solutions optimales recherchées.*

5. *Rappelons que les couts réduits sont :* $d_N^\top = c_N^\top - \underbrace{c_B^\top A_B^{-1}}_{\lambda^\top} A_N$

On obtient donc :

$d_N^\top = (0\ 4\ 0) - (1\ ,0,\ 1) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (-1\ ,-3,\ -1)$

Il est logique que tous les couts réduits sont négatifs, puisque x est une solution optimale ! (problème max)

Exercice 7 — *Réalisabilité :*

$Ax = \alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2 + ... + \alpha_k Ax_k$

Etant donné que $x_1, x_2, ..., x_k$ *sont solutions de* (P) *alors* $Ax_i = b$. *Ainsi,*

$$\begin{aligned} Ax &= \alpha_1 b + \alpha_2 b + ... + \alpha_k b \\ &= b \times \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1 \\ &= b \end{aligned}$$

— *Optimalité :*

$cx = \alpha_1 cx_1 + \alpha_2 cx_2 + ... + \alpha_k cx_k$

Etant donné que $x_1, x_2, ..., x_k$ *sont solutions de* (P) *alors* $cx_i = z$. *Ainsi,*

$$\begin{aligned} cx &= \alpha_1 z + \alpha_2 z + ... + \alpha_k z \\ &= z \times \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1 \\ &= z \end{aligned}$$

D'où

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_k x_k \quad où \quad \alpha_i \in [0, 1] \quad et \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$$

est solution de (P).