Université de Jijel
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

MASTER ANALYSE FONCTIONNELLE

MASTER PROBABILITÉS ET STATISTIQUE

Distributions

Examen - 13 avril 2021

Toutes les réponses doivent être justifiées

Exercice 1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } 0 < x < \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Montrer que $f_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2) Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une constante positive C indépendante de n tel que

$$|\langle f_n, \phi\rangle - \phi(0)| \leq \frac{C}{n}.$$

En déduire la limite de f_n dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice 2. Montrer que l'application linéaire T définie par

$$\langle T, \phi\rangle = \lim_{k\to+\infty}\left(\sum_{j=1}^{k}\phi\left(\frac{1}{j}\right) - k\phi(0) - \ln(k)\,\phi'(0)\right), \qquad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

appartient à $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Quelle est son ordre?

Indication. On admettra que si $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ alors $\phi(x) = \phi(0) + x\phi'(0) + x^2\psi(x)$, où $\psi \in C(\mathbb{R})$ satisfait $\|\psi\|_{C(\mathbb{R})} \leq C\,\|\phi''\|_{C(\mathbb{R})}$. On admettra aussi que $\lim\limits_{k\to+\infty}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j} - \ln(k)\right)$ est une constante.

Exercice 3. Soient $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$ et soit F la fonction définie par

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

1) Vérifier que la fonction u définie par

$$u(x) = e^{-F(x)} \int_0^x e^{F(t)} g(t)\, dt$$

appartient à $C^\infty(\mathbb{R})$ et que c'est une solution usuelle de l'équation différentielle ordinaire

$$u' + fu = g.$$

2) Soit $T = u + e^{-F} S$ où $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Montrer que si T satisfait

$$T' + fT = g \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}),$$

alors $T \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Indication. On admettra que $S' = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ implique que S est une constante.