Université Hassiba Benbouali - Chlef Année univ : 2021-2022
Faculté des sciences exactes et informatiques *Département de de Mathématiques*

1^{ere} ***Master mathématique appliquée et statistique***

Corrigé de l'examen de Programmation Linaire 1

Solution 1 *Les variables de décision sont la quantité de boîtiers des trois types de batteries, que nous noterons* $x_A, x_B\ , x_G$.

La fonction objectif à maximiser est le profit total moins les coûts totaux. Le profit est évidemment donné par

$$2500x_A + 2000x_B + 3000x_G$$

il faut y soustraire les contributions du coût du cuivre et de la main-d'œuvre, égales respectivement à

$$500(x_B + 2x_G)$$

et

$$1200x_A + 600x_B + 400x_G$$

et donc, en réordonnant les termes, la fonction objectif devient

$$z = 1300x_A + 900x_B + 1600x_G.$$

Il y a trois contraintes. La première exprime la contrainte sur la disponibilité du cuivre :

$$x_B + 2x_G \leq 4000$$

les deuxième et troisième concernent les restrictions à la production des batteries Alpha :

$$x_A \geq 2x_B, \quad x_A \leq x_G$$

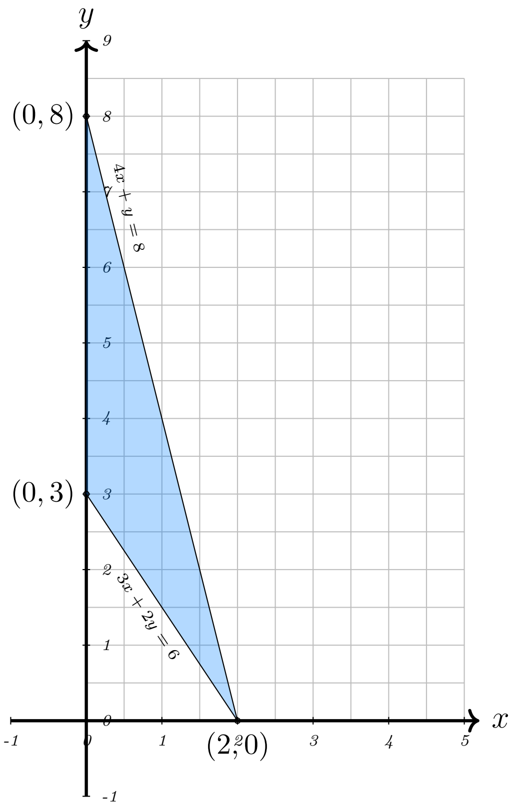
l'ajout des contraintes de non-négativité complète la formulation.

$$\begin{cases} \max 1300x_A + 900x_B + 1600x_G \\ x_B + 2x_G \leq 4000 \\ x_A \geq 2x_B \\ x_A \leq x_G \\ x_A, x_B, x_G \geq 0. \end{cases}$$

Solution 2 *(1) Les droites de délimitation sont*

$$x = 0, \quad y = 0, \quad 3x + 2y = 6, \quad 4x + y = 8$$

et l'ensemble des solutions admissibles S est présenté ci-dessous.



Les sommets de S sont :

$$p_1 = (2; 0); \qquad p_2 = (0; 3); \quad p_3 = (0; 8)$$

(2) *S'il s'agit d'un problème de maximisation, on veut que la fonction objectif soit constante le long du segment de droite joignant p_1 et p_3 ; c'est-à-dire,*

$$z = 4x + y$$

de sorte que

$$a = 4 \text{ et } b = 1.$$

(3) *S'il s'agit d'un problème de minimisation, on veut que la fonction objectif soit constante le long du segment de droite joignant $p1$ et p_2 ; c'est-à-dire*

$$z = 3x + 2y;$$

de sorte que

$$a = 3 \quad \text{et} \quad b = 2$$

Solution 3 *Dans toute solution de base, il peut y avoir au plus $m = 2$ variables non nulles, de sorte qu'au moins $s - m = 5 - 2 = 3$ variables doivent être 0 :*

(a)Soit $x_1 = 0$; $x_3 = 0$; les contraintes deviennent $\begin{cases} 3x_2 + 4x_5 = 2 \\ -2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$ *et pour toute solution de base, au moins une des autres variables doit également être nulle.*

(i) Si $x_2 = 0$; le système d'équations devient $\begin{cases} 4x_5 = 2 \\ -2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$

L'unique solution est $x_4 = \frac{1}{4}$; $x_5 = \frac{1}{2}$; c'est une solution de base réalisable.

(ii) Si $x_4 = 0$; le système d'équations devient $\begin{cases} 3x_2 + 4x_5 = 2 \\ x_5 = 0 \end{cases}$

L'unique solution est $x_2 = \frac{2}{3}$; $x_5 = 0$; c'est une solution de base réalisable.

(iii) Si $x_5 = 0$; le système d'équations devient $\begin{cases} 3x_2 = 2 \\ -2x_4 = 0 \end{cases}$

L'unique solution est $x_2 = \frac{2}{3}$; $x_4 = 0$; c'est une solution de base réalisable.

(b)Soit $x_1 = 0$; $x_4 = 0$; les contraintes deviennent $\begin{cases} 3x_2 + 4x_3 + 4x_5 = 2 \\ x_5 = 0 \end{cases}$

(i) Si $x_2 = 0$; le système d'équations devient $\begin{cases} 4x_3 + 4x_5 = 2 \\ x_5 = 0 \end{cases}$

L'unique solution est $x_3 = \frac{1}{2}$; $x_5 = 0$; c'est une solution de base réalisable.

(ii) Si $x_3 = 0$; le système d'équations devient $\begin{cases} 3x_2 + 4x_5 = 2 \\ x_5 = 0 \end{cases}$

L'unique solution est $x_2 = \frac{2}{3}$; $x_5 = 0$; c'est une solution de base réalisable.

(iii) Si $x_5 = 0$; le système d'équations devient $\begin{cases} 3x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_5 = 0 \end{cases}$ *. Il existe une infinité de solutions $x_2 = t$; $x_3 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}t$; dont aucune n'est une solution de base.*

Solution 4

Forme standard	*Problème auxiliaire*
$\begin{cases} \max z = x_1 - x_2 - 4x_3 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - e_1 = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 - 5x_3 + e_2 = 6 \\ x_1, x_2, x_3, e_1, e_2 \geq 0. \end{cases}$	$\begin{cases} \min z' = a \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - e_1 + a = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 - 5x_3 + e_2 = 6 \\ x_1, x_2, x_3, e_1, e_2, a \geq 0. \end{cases}$

Phase 1

Le tableau initial de la phase 1 est

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	a	b
a	-2	1	-1	-1	0	1	1
e_2	3	5	-5	0	1	0	6
z	1	-1	-4	0	0	0	0
$z\prime$	0	0	0	0	0	1	0

$L_4 \longleftarrow L_4 - L_1$

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	a	b
a	-2	$\boxed{1}$	-1	-1	0	1	1
e_2	3	5	-5	0	1	0	6
z	1	-1	-4	0	0	0	0
$z\prime$	2	-1 $\uparrow$	1	1	0	0	0

$L_1 \longleftarrow L_1, \quad L_2 \longleftarrow L_2 - 5L_1, \quad L_3 \longleftarrow L_3 + L_1, \quad L_4 \longleftarrow L_4 + L_1$

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	a	b
x_2	-2	1	-1	-1	0	1	1
e_2	13	0	0	5	1	-5	1
z	-1	0	-5	-1	0	1	1
$z\prime$	0	0	0	0	0	0	0

Ceci est le tableau final de la phase 1 et représente la solution réalisable de base au problème auxiliaire donné par $x_1 = 0$ *;* $x_2 = 1$ *;* $x_3 = e_1 = 0$

Puisque la variable artificielle a est hors base, et $z\prime = 0$*, alors nous pouvons utiliser la solution* $x_1 = 0$ *;* $x_2 = 1$ *;* $x_3 = e_1 = 0$ *en tant que solution faisable de base initiale à la forme canonique du problème original. Le tableau final de la phase 1 peut alors être utilisé comme tableau initial de la phase 2,*

Phase 2

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	b
x_2	-2	1	-1	-1	0	1
e_2	13	0	0	5	1	1
z	-1	0	-5	-1	0	1

C'est le tableau final de la phase 2 et représente la solution optimale $x_1 = 0$ *;* $x_2 = 1$ *;* $x_3 = 0$

avec $z_{max} = -1$.