Université Mohamed Khider Biskra
Faculté des FSENV
Département de Mathématiques

Correction de l'examen de Statistique des valeurs extrêmes

Exercice-1

tout réel $t > 0$, on sait que $\mathbb{P}(X_1 > t) = \exp(-\lambda t)$ et donc

$$\mathbb{P}(L_n \leqslant t) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n}\{X_i \leqslant t\}\Big) = 1 - \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i > t\}\Big)$$
$$= 1 - (\mathbb{P}(X_1 > t))^n = 1 - \exp(-n\lambda t)\,,$$

on note que $\mathbb{P}(L_n \leqslant t) = 0$ pour $t \leqslant 0$.

$\mathbb{P}(U_n \leqslant t) = (1 - \exp(-\lambda t))^n$ pour $t > 0$ et $\mathbb{P}(U_n \leqslant t) = 0$ pour $t \leqslant 0$,

2.

$t > 0$,

$$\mathbb{P}(Y_n \leqslant t) = \mathbb{P}\Big(L_n \leqslant \frac{t}{n\lambda}\Big) = 1 - \exp(-t)\,,$$

et $\mathbb{P}(Y_n \leqslant t) = 0$ pour $t \leqslant 0$. On reconnaît donc que Y_n suit la loi exponentielle de paramètre 1.

3. Pour tout réel $t \geqslant -\ln(n)$, on a d'après la question 1 :

$$F_n(t) = \mathbb{P}\Big(U_n \leqslant \frac{t + \ln(n)}{\lambda}\Big)$$
$$= \Big(1 - \exp\Big(-\lambda\,\frac{t + \ln(n)}{\lambda}\Big)\Big)^n = \Big(1 - \frac{\exp(-t)}{n}\Big)^n\,.$$

Or (c'est une limite très classique), pour tout réel x,

$$\Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n = \exp\Big(n\,\ln\Big(1 + \frac{x}{n}\Big)\Big) = \exp(x + o(1)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(x)\,,$$

où l'on a utilisé $\ln(1 + u) = u + o(u)$ lorsque $u \to 0$.
On en déduit que, pour tout réel t, qui est bien supérieur à $-\ln(n)$ pour n assez grand,

$$F_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F(t) \overset{\text{déf.}}{=} \exp(-\exp(-t))\,.$$

On vérifie sans mal que F est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, (strictement) croissante, tendant vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$: c'est donc bien une fonction de répartition. Pour l'anecdote, c'est celle de la loi dite de Gumbel. Remarquons que nous venons de démontrer que $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers la loi de Gumbel.

4.

En effet, d'après les calculs de la question 3, pour tout réel $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\Big(\frac{Z_n}{\ln(n)} < \varepsilon\Big) = \mathbb{P}\Big(\frac{Z_n}{\ln(n)} \leqslant \varepsilon\Big) = F_n\big(\varepsilon \ln(n)\big) = \left(1 - \frac{\exp\big(-\varepsilon \ln(n)\big)}{n}\right)^n$$
$$= \Big(1 - \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\Big)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1\,,$$

$$\ln\Big(\Big(1 - \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\Big)^n\Big) = n\,\ln\Big(1 - \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\Big) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \times -\frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\,.$$

De la même façon, pour $\varepsilon \in \,]0,1[$ et $n \geqslant 2$,

$$\mathbb{P}\Big(\frac{Z_n}{\ln(n)} \leqslant -\varepsilon\Big) = F_n\big(-\varepsilon \ln(n)\big) = \left(1 - \frac{\exp\big(\varepsilon \ln(n)\big)}{n}\right)^n = \big(1 - n^{\varepsilon-1}\big)^n$$
$$= \exp\Big(n \ln\big(1 - n^{\varepsilon-1}\big)\Big) \leqslant \exp(-n^{\varepsilon}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\,,$$

où l'on a utilisé l'inégalité bien connue $\ln(1+u) \leqslant u$ valable pour tout réel $u > -1$. Résumons ce que nous avons prouvé : pour tout $\varepsilon \in \,]0,1[$,

$$\mathbb{P}\Big(\Big|\frac{Z_n}{\ln(n)}\Big| \geqslant \varepsilon\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\,,$$

Exercice-2

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On rappelle la notation $S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_i \leq x\}}$.

On déduit de l'égalité que

$$\{X_{(k(n),n)} \leq x \quad \text{à partir d'un certain rang}\}$$
$$= \left\{1 \leq \frac{S_n(x)}{k(n)} \quad \text{à partir d'un certain rang}\right\}.$$

La loi forte des grands nombres assure que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n(x)}{n} = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{X_i \leq x\}}\right] = F(x)$ presque sûrement. De plus on a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{k(n)} = \dfrac{1}{p}$ et donc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n(x)}{k(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n(x)}{n}\dfrac{n}{k(n)} = \dfrac{F(x)}{p}$ presque sûrement. En particulier, on a

$$\mathbb{P}\left(1 \leq \frac{S_n(x)}{k(n)} \text{ à partir d'un certain rang}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } F(x) < p, \text{ i.e. si } x < x_p, \\ 1 & \text{si } F(x) > p, \text{ i.e. si } x > x_p. \end{cases}$$

Cela implique donc que

$$\mathbb{P}\left(X_{(k(n),n)} \leq x \quad \text{à partir d'un certain rang}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_p, \\ 1 & \text{si } x > x_p. \end{cases}$$

Cela signifie que p.s. $\lim_{n\to\infty} X_{(k(n),n)} = x_p$.

Let $p \in (0,1)$. Assume that F_X is continuous and that there exists a unique solution x_p to the equation $F_X(x) = p$. Let $\{k_n, n \in \mathbb{N}\}$ be a sequence of integers such that $k_n \in [1:n]$, and $\lim_{n\to\infty} k_n/n = p$. Then, $\{X_{(k_n,n)}, n \in \mathbb{N}\}$ converges a.s. to x_p

PROOF. Fix $x \in \mathbb{R}$. Denote $S_n(x) = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{X_i \le x\}$. Note that for all $k \in \mathbb{N}$, we have the equivalence $\{S_n(x) \ge k\}$ if and only if there is at least k indexes $i \in [1:n]$ such that $X_i \le x$. We deduce

$$\{S_n(x) \ge k\} = \{X_{(k,n)} \le x\}$$

By taking the complement, we also have

$$\{S_n(x) < k\} = \{X_{(k,n)} > x\}$$

This implies the equality between these two events

$$\{\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \ge n_0 \quad X_{(k_n,n)} \le x\} = \{\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \ge n_0 \quad S_n(x) \ge k_n\}$$

Using $\lim_n k_n/n = p$ and the strong law of large numbers,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n(x)}{k_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n(x)}{n}\frac{n}{k_n} = \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}\{X_1 \le x\}]}{p} = \frac{F_X(x)}{F_X(x_p)} \quad \mathbb{P}-\text{a.s.}$$

Therefore if $x > x_p$, i.e. if $F_X(x) > F_X(x_p)$,

$$\mathbb{P}(\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \ge n_0, X_{(k_n,n)} \le x) = \mathbb{P}(\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \ge n_0, S_n(x) \ge k_n) = 1$$

Conversely, with a similar reasoning, if $x < x_p$ i.e. if $F_X(x) < F_X(x_p)$,

$$\mathbb{P}(\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \ge n_0, X_{(k_n,n)} > x) = \mathbb{P}(\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \ge n_0, S_n(x) < k_n) = 1$$

This shows that $\lim_n X_{(k_n,n)} = x_p$, $\mathbb{P}-$a.s.

Exercice-3

1) Il est évident que $F(\cdot)$ est continue, croissante sur $[0,\infty[$. De plus, $F(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$ et $F(x) \to 1$ lorsque $x \to \infty$. Le point terminal de $F(\cdot)$ est donc $+\infty$.

2) On a :

$$1 - F(x) = (1 + x^{\theta})^{-\lambda} = x^{-\theta\lambda}(1 + x^{-\theta})^{-\lambda} = x^{-1/\gamma}L(x),$$

avec $\gamma = 1/(\theta\lambda)$ et $L(x) = (1 + x^{-\theta})^{-\lambda} \to 1$ lorsque $x \to \infty$.

3) On a évidemment que $x^{-1/\gamma}(1 - F(x)) = L(x) = (1 + x^{-\theta})^{-\lambda}$. Cette fonction convergeant vers une constante, c'est une fonction à variations lentes.

On a :

$$\Delta(x) = \frac{xL'(x)}{L(x)} = \theta\lambda x^{-\theta}(1 + x^{-\theta})^{-1} = x^{-\theta}\ell(x),$$

avec $\ell(x) = \theta\lambda(1 + x^{-\theta})^{-1} \to \theta\lambda$ lorsque $x \to \infty$. Donc $\Delta(\cdot)$ est à variations régulières d'indice $-\theta$.