Série 4 (Mesure et intégration)

Exercice 1. (∗) *Soit* $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$ *l'espace mesuré, où* m *est la mesure de dénombrement sur* $\mathbb{N}$ *définie par* $m(A) = card(A)$ *pour toute partie* A *de* $\mathbb{N}$. *Soit* $f : \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}_+$. *On peut également voir* f *comme une suite réelle* $u_n = f(n)$. *En remarquant que* f *s'écrit sous la forme* $f = \sum\limits_{n \geq 0} f(n).\mathbb{I}_{\{n\}}$ *montrer que* f *est mesurable puis expliciter la valeur de* $\int\limits_{\mathbb{N}} f dm$.

Exercice 2. *Soit* $\{f_n\}_n$ *une suite de fonctions mesurables et positives sur l'espace mesuré* $(X, \mathcal{A}, \mu)$, *qui converge simplement vers une fonction* f. *Montrer que s'il existe* $M > 0$ *telle que* $\int\limits_X f_n d\mu \leq M$; *pour tout entier* n, *alors on obtient* $\int\limits_X f d\mu \leq M$.

Exercice 3. *Soit* $\{f_n\}_{n \geq 0}$ *une suite décroissante de fonctions mesurables et positives sur l'espace mesuré* $(X, \mathcal{A}, \mu)$, *qui converge presque partout sur* X *vers une fonction* f. *On suppose que* $\int\limits_X f_0 d\mu < +\infty$. *Montrer que* $\lim\limits_{n \to +\infty} \int\limits_X f_n d\mu = \int\limits_X f d\mu < +\infty$. *Peut-on supprimer l'hypothèse* $\int\limits_X f_0 d\mu < +\infty$ *? Si non donner un contre exemple.*

Exercice 4. *Dans* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ *on définit la suite de fonctions* $\{f_n\}_{n \geq 0}$ *par* $f_n(x) = \left(1 - e^{-nx^2}\right) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$.

Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \int\limits_{[0, \infty[} f_n(x)\ d\lambda(x)$.

Exercice 5. (∗) *Soit* $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *la suite de fonctions définies par* $f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & ; 0 \leq x \leq 1/n, \\ 2n - n^2 x & ; 1/n < x \leq 2/ \\ 0 & ; \textit{sinon.} \end{cases}$

1- Calculer $f = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n$. *2- Calculer* $\lim\limits_{n \to +\infty} \int\limits_0^{+\infty} f_n(x) dx$. *Que peut-on dire ?*

Exercice 6. *Montrer que les fonctions suivantes sont boréliennes puis calculer* $\lim\limits_{n \to +\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f_n d\lambda$.

1- $f_n(x) = \dfrac{x^n}{\sqrt{1 - x^2}} \mathbb{I}_{]-1,1[}(x)$. *et* $f(\pm 1) = 0$. *2-* $f_n(x) = n \sin(x/n) e^{-x}.\mathbb{I}_{\mathbb{R}+}(x)$.

3- $f_n(x) = \dfrac{1}{1 + x^2 + x^n}.\mathbb{I}_{\mathbb{R}+}(x)$.**(∗)** *4- .*$f_n(x) = (\tan x)^n\, \mathbb{I}_{[0, \pi/4]}(x)$.**(∗)**

Exercice 7. *On définit sur* $\mathbb{R}_+$ *la fonction* F *par* $F(t) = \int\limits_0^{+\infty} \exp(-x^2 - tx) dx$.

1- Montrer que F *est bien définie et continue sur* $[0, +\infty[$.
2- Montrer que F *est dérivable sur* $[0, +\infty[$ *puis calculer* $F'(0)$.

Exercice 8. *On définit pour tout* $x \in \mathbb{R}_+$ *la fonction* f *par* $f(x) = \int\limits_0^{+\infty} \sin(tx) \exp(-t^2) dt$. *Montrer que* f *est bien définie et elle est de classe* $C^1([0, +\infty[)$. *Calculer* $f'(0)$.

Résolution

Exercice 1. *(Application du TCM)*
Soit $f : (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ *où* $m(A) = card(A)$, $\forall A \subset \mathbb{N}$. *On a*

$$f = \sum_{n \geq 0} f(n)\mathbb{I}_{\{n\}} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} f(k)\mathbb{I}_{\{k\}} = \lim_{n \to +\infty} f_n,$$

(limite simple) avec $f_n = \sum_{k=0}^{n} f(k)\mathbb{I}_{\{k\}} \geq 0$ *est une fonction étagée, mesurable* $\forall n \in \mathbb{N}$, *la suite* $\{f_n\}_{n \geq 0}$ *est croissante* $(f_n \leq f_{n+1})$. *Alors* f *est mesurable (voir exercice* 6 *série* 3*) et on a :*

$$\int_{\mathbb{N}} f_n dm = \sum_{k=0}^{n} f(k) m(\{k\}) = \sum_{k=0}^{n} f(k).$$

D'après le TCM on a : $\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{N}} f_n dm = \int_{\mathbb{N}} \lim_{n \to +\infty} f_n dm \Leftrightarrow \int_{\mathbb{N}} f(n) dm = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} f(k) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k).$

Exercice 2. *(Application du lemme de Fatou)*
$\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de fonctions mesurables positives de* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *vers* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *telle que* $\forall n \in \mathbb{N}$: $\int_X f_n d\mu \leq M$. *Supposons que* $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$. *D'après le lemme de Fatou on a :* $\int_X \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n d\mu$, *et d'après la convergence simple on a :* $\lim_{n \to +\infty} \inf f_n = f$. *Alors* $\int_X f d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n d\mu$. *Comme* $\int_X f_n d\mu \leq M$, $\forall n \geq 0$ *on obtient* $\liminf_n \int_X f_n d\mu \leq M$, *d'où* $\int_X f d\mu \leq M$

Exercice 3. *(Hypothèses du TCM)*
Soit $\{f_n\}_{n \geq 0}$ *une suite décroissante de fonctions mesurables positives. On montre que*

$$si \int_X f_0 d\mu < +\infty \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n \to +\infty} f_n d\mu.$$

Si on veut appliquer le TCM, on doit construire une suite croissante de fonctions mesurables et positives sur l'espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$, *qu'on note par* $\{g_n\}_{n \geq 0}$. *Comme* $\{f_n\}_{n \geq 0} \searrow$ *alors* $f_{n+1} \leq f_n \leq ... \leq f_0$. *Posons :* $\forall n \geq 0$, $g_n = f_0 - f_n \geq 0$ *; donc* $\{g_n\}_{n \geq 0} \nearrow$ *de fonctions mesurables positives et* $g_n \to g = f_0 - f$, μ*-p.p, alors (d'après le TCM) ona*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_X g_n d\mu = \int_X \lim_{n \to +\infty} g_n d\mu \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} \int_X (f_0 - f_n) d\mu = \int_X (f_0 - f) d\mu$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_X f_0 d\mu - \lim_{n\to+\infty} \int\limits_X f_n d\mu = \int\limits_X f_0 d\mu - \int\limits_X f d\mu.$$

Comme $\int\limits_X f_0 d\mu < +\infty$, *on peut retrancher cette quantité de chaque membre de l'égalité pour avoir*

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_X f_n d\mu = \int\limits_X \lim_{n\to+\infty} f_n \; d\mu = \int\limits_{X f d\mu} .$$

On ne peut pas supprimer la condition $\int\limits_X f_0 d\mu < +\infty$.

Contre exemple : *On prend* $f_{n:} : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ *telle que* $f_n = \mathbb{I}_{[n,+\infty[}$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *La suite* $\{f_n\}_n$ *est décroissante. On a* $\int\limits_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = \lambda\left([n, +\infty[\right) = +\infty$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Mais* $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = 0$.

Remarque. *On peut aussi utiliser le TCD en remarquant qu'on a :* $|f_n| = f_n \le f_0$ *et* f_0 *est intégrable.*

Exercice 4. *(Application du TCM)*

On considère dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ *la suite de fonctions* $\{f_n\}_{n\ge0}$ *définie par*

$$f_n(x) = \left(1 - e^{-nx^2}\right)\mathbb{I}_{R_+} = \begin{cases} 1 - e^{-nx^2} & : x \ge 0 \\ 0 & : sinon \end{cases}$$

- $f_n \ge 0; \;\; \forall n \in \mathbb{N}$.
- f_n *est continue sur* $\mathbb{R} \Rightarrow$ *borélienne ;* $\forall n \ge 0$.
- *Comme* $e^{nx^2} \le e^{(n+1)x^2} \Rightarrow 1 - e^{-nx^2} \le 1 - e^{-(n+1)x^2} \Rightarrow f_n(x) \le f_{n+1}(x) \Rightarrow \{f_n\}_n$*est une suite croissante.*

Donc d'après le TCM on a :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) d\lambda(x) &= \lim_{n\to+\infty} \int_{[0,\infty[} \left(1 - e^{-nx^2}\right) d\lambda(x) = \int_{[0,+\infty[} \lim_{n\to+\infty} \left(1 - e^{-nx^2}\right) d\lambda(x) \\ &\Rightarrow \int_{[0,+\infty[} d\lambda(x) = \int_0^{+\infty} dx = +\infty. \end{aligned}$$

Exercice 5. *(Hypothèses du TCD)*

Soit $f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, *tel que :*

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & ; 0 \le x \le \dfrac{1}{n}, \\ 2n - n^2 x & ; \dfrac{1}{n} < x \le \dfrac{2}{n}, \\ 0 & ; sinon. \end{cases}$$

f_n *est continue sur* $\mathbb{R}$ $\forall n \ge 1$.

1- *Pour* $x = 0$ *on a* $f_n(0) = 0 \;\; \forall x \ge 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$.

Si $x > 0 \overset{(Archimède)}{\Longrightarrow} \exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ *tel que :* $\dfrac{2}{n_0} < x$. *Alors* $\forall n \geq n_0$, *on a :* $\dfrac{2}{n} \leq \dfrac{2}{n_0} < x \Rightarrow$
$\forall n \geq n_0 :\ f_n(x) = f_{n_0}(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0.$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 = f(x);\quad \forall x \geq 0.$

2- $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\int\limits_0^{1/n} n^2 x dx + \int\limits_{1/n}^{2/n} (2n - n^2 x) dx \right) = 1 \neq \int\limits_0^{+\infty} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)dx = 0.$

<u>*Conclusion :*</u> $\{f_n\}_{n\geq 1}$ *n'est pas dominée par une fonction intégrable, car* $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$

<u>Exercice</u> 6. `(Application du TCD)`

1- $f_n(x) = \dfrac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} I_{]-1,1[}(x)$ *et* $f(\pm 1) = 0$

– f_n *est continue sur* $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\forall n \geq 1$ *donc elle est borélienne* $\forall n \geq 1$.

– $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} \mathbb{I}_{]-1,1[} = \dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty} x^n \mathbb{I}_{]-1,1[}(x)}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ *car* $\left(|x| < 1 \Rightarrow x^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \right)$.

– $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathbb{I}_{]-1,1[}(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. *Car :* $\int\limits_{\mathbb{R}} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathbb{I}_{]-1,1[} d\lambda = \int\limits_{-1}^{1} \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin x\ ]_{-1}^{1} =$
$\pi < +\infty$.

Donc d'après le TCD on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = \int\limits_{\mathbb{R}} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n d\lambda = 0$

2- $f_n(x) = n \sin\left(\dfrac{x}{n}\right)\ e^{-x} I_{\mathbb{R}_+}(x)$

– f_n *est continue sur* $\mathbb{R}$, $\forall n \geq 1$ *donc elle est borélienne* $\forall n \geq 1$.

– $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} x \dfrac{\sin\left(\dfrac{x}{n}\right)}{\dfrac{x}{n}}\ e^{-x}\mathbb{I}_{\mathbb{R}_+} = x\ e^{-x}\mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}$.

– $|f_n(x)| = n\ e^{-x}\mathbb{I}_{\mathbb{R}_+} \left|\sin\left(\dfrac{x}{n}\right)\right| = x \left| \dfrac{\sin\left(\dfrac{x}{n}\right)}{\dfrac{x}{n}} \right|\ e^{-x}\mathbb{I}_{\mathbb{R}_+} \leq x\ e^{-x}\mathbb{I}_{\mathbb{R}_+} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Donc d'après le TCD on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = \int_0^{+\infty} x\ e^{-x} dx = \left[-x\ e^{-x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$$

3- $f_n(x) = \dfrac{1}{1 + x^2 + x^n} I_{\mathbb{R}_+}(x)$

– f_n *est borélienne* $\forall n \geq 1$ *(car elle est continue sur* $\mathbb{R}^*$*)*

–

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2} & : \ 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{1}{3} & : \ x = 1 \\ 0 & : \ \textit{sinon} \end{cases}$$

– $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{1+x^2}\mathbb{I}_{\mathbb{R}_+} = g(x)$ *et on a :* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}\mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x\ ]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} < +\infty$. *Donc* $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \Rightarrow f_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}),\ \forall n$.

Par conséquent, en utilisant le TCD on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

4- $f_n(x) = (\tan x)^n\, \mathbb{I}_{[0,\pi/4]}(x)$

– f_n *est borélienne* $\forall n \geq 1$ *(car elle est continue sur* $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$ *).*

– $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ *p.p sur* $\mathbb{R}$

– $|f_n(x)| \leq \mathbb{I}_{[0,\pi/4]}(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \Rightarrow f_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}),\ \forall n \geq 0.$

Alors d'après le TCD on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = 0.$$

Pour la résolution des exercices suivants, on applique les **Théorèmes de la continuité** et de **la dérivation sous l'intégrale** (voir Théorème 1.7.3 et Théorème 1.7.4 chapitre 3 du cours).

Exercice 7. *(Intégrale à paramètre)*

$F(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2-tx}dx$, *pour* $t \geq 0$

1- – *La fonction* $x \longmapsto e^{-x^2-tx}$ *est continue sur* $\mathbb{R}_+$ *donc intégrable sur tout intervalle de la forme* $[0,a]$, $\forall a > 0$ *(l'intégrale au sens de Riemann coïncide avec celui de Lebesgue),*

$$\left|e^{-x^2-tx}\right| = e^{-x^2}e^{-tx} \leq e^{-x^2},\ \forall t,x \geq 0$$

avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx < +\infty$ *donc* F *est bien définie sur* $\mathbb{R}_+$.

– *La fonction* $t \longmapsto e^{-x^2-tx}$ *est continue sur* $\mathbb{R}_+ \Rightarrow$ *la fonction* F *est aussi continue sur* $\mathbb{R}_+$.

2- *La fonction* $t \longmapsto e^{-x^2-tx}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+$ *(sur* $\mathbb{R}$*)*, $\forall x \in [0,+\infty[$ *et*

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-x^2-tx}\right) = -x\ e^{-x^2-tx},\ \forall t,x \geq 0.$$

En plus, on a

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-x^2-tx}\right)\right| = x\ e^{-x^2-tx} \leq x\ e^{-x^2},\ \forall x,t \geq 0$$

et

$$\int_0^{+\infty} x\, e^{-x^2} dx = \left[-\frac{-1}{2}\, e^{-x^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2} < +\infty.$$

Donc F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et sa dérivée est donnée par

$$F'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{-x^2 - tx} \right) dx = -\int_0^{+\infty} x\, e^{-x^2-tx} dx, \quad \forall t \geq 0.$$

$$F'(0) = -\int_0^{+\infty} x\, e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}.$$

<u>Exercice</u> 8. *(Intégrale à paramètre)*

$\forall x \in \mathbb{R}_+$ *on considère la fonction* $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(tx)\, e^{-t^2} dt.$

1. *On montre que f est bien définie i.e. qu' on doit avoir $\int_0^{+\infty} |\sin(tx)\, e^{-t^2}| dt < +\infty$?*
   La fonction $t \mapsto \sin(tx)\, e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc intégrable sur tout intervalle de la forme $[0, a]$, $\forall a > 0$ (l'intégrale au sens de Riemann coïncide avec celui de Lebesgue), et comme

$$\left| \sin(tx)\, e^{-t^2} \right| \leq e^{-t^2} = g(t), \ \forall x, t \in \mathbb{R}_+$$

   avec $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$ alors F est bien définie.

2. *On montre que $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$:*

   (i) *Comme la fonction $x \longmapsto \sin(tx)\, e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, alors $x \longmapsto f(x)$ l'est aussi.*

   (ii) *La fonction $x \longmapsto \sin(tx)\, e^{-t^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et sa dérivée est donnée par*

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sin(tx)\, e^{-t^2}) = t\cos(tx) e^{-t^2} \ \forall x, t \in \mathbb{R}_+,$$

   en plus

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \left(\sin(tx)\, e^{-t^2} \right) \right| \leq t e^{-t^2} = h(t) \text{ et } h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+),$$

   alors f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et sa dérivée est donnée par

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}(\sin(tx)\, e^{-t^2}) dt = \int_0^{+\infty} t\cos(tx)\, e^{-t^2} dt, \forall x \geq 0.$$

   (iii) *La fonction $x \longmapsto t\cos(tx)\, e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ alors f' l'est aussi.*

3. $f'(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}$

BONNE CHANCE