حل تمارين السلسلة

[illegible] 3 سنة

حل التمرين الأول

① دالة الكثافة f_X و دالة التوزيع

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{20}, & \text{si } x \in [-5, 15] \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -5 \end{cases}$$

② حساب التوقع الرياضي و التباين.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{20}\, dx =$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\, dx =$$

③ حساب الاحتمالات

$$P(X \leq 2) = \int_{-5}^{2} f(x)\, dx = \frac{7}{20}$$

$$P(-1 \leq X \leq 1) = \frac{1}{10}$$

$$P(-1 \leq X \leq 2 \mid X \geq 0) = \frac{P(\{-1 \leq X \leq 2\} \cap \{X \geq 0\})}{P(X \geq 0)} = \frac{P(0 \leq X \leq 2)}{P(X \geq 0)}$$

$$= \frac{2/20}{\frac{15}{20}} = \frac{2}{15}$$

$$P(Y \geq 1 \mid X \leq 10) = P\left(\frac{X+5}{10} \geq 1 \mid X \leq 10\right) = P(X \geq 5 \mid X \leq 10)$$

$$= \frac{P((X \geq 5) \cap (X \leq 10))}{P(X \leq 10)} = \frac{P(5 \leq X \leq 10)}{P(X \leq 10)} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

التمرين الثاني :

لدينا $X \sim \mathcal{E}(3)$ إذن دالة الكثافة الاحتمالية تكون من الشكل

$$f(x) = \begin{cases} 3e^{-3x} & , \text{si } x \geq 0 \\ 0 & , \text{sinon.} \end{cases}$$

① حساب التوقع الرياضي والتباين.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f_X(x) \, dx = \int_0^{+\infty} 3x e^{-3x} dx.$$

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) \, dx - (E(X))^2.$$

② حساب الاحتمالات

$$P(X \leq 3) = \int_0^3 f_X(x) \, dx.$$

$$P(X \geq 4) = \int_4^{+\infty} f_X(x) \, dx.$$

$$P(2 \leq X \leq 4) = \int_2^4 f_X(x) \, dx.$$

$$P(X \geq 4 \mid X \geq 2) = \frac{P(X \geq 4 \cap X \geq 2)}{P(X \geq 2)} = \frac{P(X \geq 4)}{P(X \geq 2)}$$

$$P(X \geq a+b \mid X \geq a) = \frac{P((X \geq a+b) \cap (X \geq a))}{P(X \geq a)} = \frac{P(X \geq a+b)}{P(X \geq a)}$$

$$P(X \geq a) = 1 - P(X < a) = 1 - \int_0^a 3e^{-3x} dx = 1 - [-e^{-3x}]_0^a$$

$$= 1 - (-e^{-3a} + 1) = e^{-3a}.$$

et $P(X \geq a+b) = e^{-3(a+b)}$.

$$\frac{P(X \geq a+b)}{P(X \geq a)} = \frac{\cancel{e^{-3a}} \times e^{-3b}}{\cancel{e^{-3a}}} = e^{-3b}.$$

حل التمرين الثالث

1) $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

$\mathbb{P}(X \geq 1.35) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 1.35) = 1 - \Phi_X(1.35) =$

$\mathbb{P}(X \leq -0.56) = \mathbb{P}(X \geq 0.56) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 0.56) = 1 - \Phi_X(0.56)$

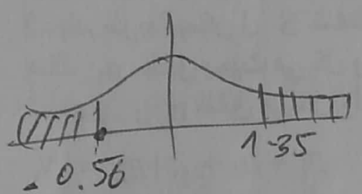
$=$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(-0.56 \leq X \leq 1.35) &= \Phi_X(1.35) - \Phi_X(-0.56) \\
&= \Phi_X(1.35) - [1 - \Phi_X(0.56)] \\
&= \Phi_X(1.35) + \Phi_X(0.56) - 1.
\end{aligned}$$

$=$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(-0.56 \geq X \text{ ou } X \geq 1.35) &= \mathbb{P}(X \geq 1.35) + \mathbb{P}(X \leq -0.56) \\
&= [1 - \mathbb{P}(X \leq 1.35)] + [1 - \Phi_X(0.56)]
\end{aligned}$$

$=$



2) $X \sim \mathcal{N}(12, 2^2) \Rightarrow Z = \frac{X-12}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$\mathbb{P}(X \leq 13) = \mathbb{P}\left(\frac{X-12}{2} \leq \frac{13-12}{2}\right) = \mathbb{P}(Z \leq 0.5) = \Phi_Z(0.5)$

$=$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq 11) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 11) &= 1 - \mathbb{P}\left(\frac{X-12}{2} \leq \frac{11-12}{2}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}(Z \leq -0.5) \\
&= 1 - \Phi_Z(-0.5)
\end{aligned}$$

$=$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(11 \leq X \leq 13) &= \mathbb{P}\left(\frac{11-12}{2} \leq \frac{X-12}{2} \leq \frac{13-12}{2}\right) \\
&= \mathbb{P}(-0.5 \leq Z \leq 0.5) \\
&= \Phi_Z(0.5) - \Phi_Z(-0.5) = \Phi_Z(0.5) - [1 - \Phi_Z(0.5)] \\
&= 2\,\Phi_Z(0.5) - 1
\end{aligned}$$

$=$

* إيجاد قيمة n بحيث $P(X \le n) = 0.95$

$$P(X \le n) = 0.95 \Leftrightarrow P\left(\frac{X-12}{2} \le \frac{n-12}{2}\right) = 0.95$$

$$\Leftrightarrow P\left(Z \le \frac{n-12}{2}\right) = 0.95$$

نبحث في جدول قيم الاحتمالات للقانون $\mathcal{N}(0,1)$ عن أقرب قيمة ممكنة لـ $0,95$ نجدها 0.9505 ثم نسقطها على القيم الموافقة لـ z فنجد $z = 0,65$

ثم نحل معادلة المجهول فيها n نجد $n = 13.5$

* إيجاد قيمة n بحيث $P(X \ge n) = 0.95$

$$P(X \ge n) = 0,95 \Leftrightarrow 1 - P(X \le n) = 0,95 \Leftrightarrow 1 - P\left(\frac{X-12}{2} \le \frac{n-12}{2}\right) = 0,95$$

$$\Leftrightarrow P\left(Z \le \frac{n-12}{2}\right) = 0,05$$

نبحث في جدول الاحتمالات القانون $\mathcal{N}(0,1)$ عن أقرب قيمة لـ $0,05$ ثم نحل معادلة المجهول فيها هو n.

حل التمرين الرابع:

$X \sim \mathcal{N}(200, 15^2) \Rightarrow Z = X - 200$

المطلوب إيجاد قيمة a بحيث

$$P(200 - 2a \le X \le 200 + 2a) = 0.9$$

$$P(200 - 2a \le X \le 200 + 2a) = 0.9 \Leftrightarrow P\left(\frac{200 - 2a - 200}{15} \le \frac{X - 200}{15} \le \frac{200 + 2a - 200}{15}\right)$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{-2a}{15} \le Z \le \frac{2a}{15}\right) = 0.9$$

$$\Leftrightarrow \Phi_Z\left(\frac{2a}{15}\right) - \Phi_Z\left(\frac{-2a}{15}\right) = 0.9$$

$$\Leftrightarrow \Phi_Z\left(\frac{2a}{15}\right) - \left[1 - \Phi_Z\left(\frac{2a}{15}\right)\right] = 0.9$$

$$\Leftrightarrow 2\Phi_Z\left(\frac{2a}{15}\right) - 1 = 0.9$$

$$\Leftrightarrow \Phi_Z\left(\frac{2a}{15}\right) = 0.95$$

نبحث عن أقرب قيمة لـ $0,95$ في جدول الاحتمالات للقانون $\mathcal{N}(0,1)$ نجدها 0.9505 ثم نسقطها على قيم z نجد

$$\frac{2a}{15} = 1,65$$

ثم نحصل معادلة المجهول فيها α فنجد

$$\boxed{\alpha = 12{,}375}$$

2) $X \sim \mathcal{N}(120, \sigma^2)$

$$\mathbb{P}(100 \leq X \leq 140) = 0.92 \Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\frac{100-120}{\sigma} \leq \frac{X-120}{\sigma} \leq \frac{140-120}{\sigma}\right)$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\frac{-20}{\sigma} \leq Z \leq \frac{20}{\sigma}\right) = 0.92$$

$$\Leftrightarrow \Phi_Z\left(\frac{20}{\sigma}\right) - \Phi_Z\left(\frac{-20}{\sigma}\right) = 0{,}92$$

$$\Leftrightarrow 2\Phi_Z\left(\frac{20}{\sigma}\right) - 1 = 0.92$$

$$\Leftrightarrow \Phi_Z\left(\frac{20}{\sigma}\right) = 0{,}96$$

ومنه

$$\boxed{\sigma = 11{,}36} \Leftarrow \frac{20}{\sigma} = 1.76$$

حل السلسلة السادسة

لدينا $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ ، $\alpha>0$

① التأكد من المساويات :

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} x^{1-1}e^{-x}dx=\int_0^{+\infty} e^{-x}dx=1.$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})=\int_0^{+\infty} x^{\frac{1}{2}-1}e^{-x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$$

نقوم بتبديل متغير كما يلي : نضع $\sqrt{x}=y$ ومنه

$$x=y^2 \Rightarrow dx=2y\,dy$$

ثم بالتعويض في $\Gamma(\frac{1}{2})$ فنجد

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-y^2}}{\cancel{y}}2\cancel{y}dy=2\int_0^{+\infty}e^{-y^2}dy=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy=\sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma(1+\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{(1+\alpha)-1}e^{-x}dx=\int_0^{+\infty}x^{\alpha}e^{-x}dx=\alpha\Gamma(\alpha).$$

$\Gamma(n)\overset{?}{=}(n-1)!$

من أجل $n=1$ نجد
$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}x^0e^{-x}dx=1$$

من أجل $n=2$ نجد
$$\Gamma(2)=\int_0^{+\infty}x\,e^{-x}dx=1$$

من أجل $n=3$ نجد (تكامل بالتجزئة 2 مرة)
$$\Gamma(3)=\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx=2$$

من أجل $n=4$ نجد
$$\Gamma(4)=\int_0^{+\infty}x^3e^{-x}dx=6$$

ومنه نستنتج أن
$$\Gamma(n)=(n-1)!.$$

② إثبات أن إذا كان $X\sim\Gamma(\frac{n}{2},2)$ فإن $X\sim\chi^2(n)$

تحقق من عبارتي الكثافتين الاحتماليتين لكل من $\chi^2(n)$

و $\Gamma(\frac{n}{2}, 2)$ علما أن $\Gamma(n) = (n-1)!$

ب: تحقق من كثافتي احتمال $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ و $X \sim \Gamma(1, \frac{1}{\lambda})$

السؤال 3: ملغى.