(suite de l'ex 5)

. La convergence du schéma

Pour étudier la convergence du schéma, on va essayer de majorer l'erreur de discrétisation.

$$e_i^j = \bar{u}_i^j - u_i^j \quad \left(\begin{array}{c}\text{en cours, on l'a noté par.}\\ u_i^j - \pi_h(u)_i^j\end{array}\right)$$

où u_i^j est calculé par le schéma numérique déjà trouvé

et $\bar{u}_i^j$ est la solution du problème continu (P) en

$(x_i = ih, t_j = jk)$.

. Par déf de l'erreur de consistance :

$$\frac{e_i^{j+1} - e_i^j}{k} + \frac{e_{i+1}^j - e_{i-1}^j}{2h} - \varepsilon \frac{e_{i+1}^j + e_{i-1}^j - 2e_i^j}{h^2} = \varepsilon(u)_i^j.$$

(on a déjà : $\|\varepsilon(u)^{(j)}\|_\infty \leq c(h^2 + k)$

soit encore :

$$e_i^{j+1} = \left(1 - \frac{2\varepsilon k}{h^2}\right) e_i^j + \left(\frac{k\varepsilon}{h^2} - \frac{k}{2h}\right) e_{i+1}^j + \left(\frac{\varepsilon k}{h^2} + \frac{k}{2h}\right) e_{i-1}^j + k\,\underline{\underline{\varepsilon(u)_i^j}}$$

et de la même manière que précédemment (pour montrer que $\|u^{(j)}\|_\infty \leq \|u^{(0)}\|_\infty \quad \forall j = 1, M$) et sous les mêmes conditions qui sont $\begin{cases} 1 - \dfrac{2\varepsilon k}{h^2} \geq 0 \\ \dfrac{\varepsilon k}{h^2} - \dfrac{k}{2a} \geq 0 \end{cases}$ $\quad (*)$

on a : $\|e^{(j+1)}\|_\infty \leq \|e^{(j)}\|_\infty + c(k+h^2).k$

$$\leq \|e^{(j-1)}\|_\infty + c(k+h^2)k + c(k+h^2).k$$

$$\leq \left(\|e^{(j-2)}\|_\infty + c(h^2+k)k\right) + 2c(k+h^2)k$$

$$\vdots$$

$$\cancel{\leq \|e^{(0)}\|_\infty + j\,c\,k(h^2+k)}$$

$$\leq \|e^{(0)}\|_\infty + (j+1)\,c\,k(h^2+k)$$

Et donc : $\|e^{(j)}\|_\infty \leq \|e^{(0)}\|_\infty + j\,c\,k(h^2+k)$

Mais pour $t=0$, $\|e^{(0)}\|_\infty = 0$, alors

$$\|e^{(j)}\|_\infty \leq j\,c\,k(h^2+k) = T(h^2+k)$$

Donc sous les conditions $(*)$, on a $\|e^{(j)}\|_\infty \longrightarrow 0$ quand $k, h \longrightarrow 0$, ce qui prouve que le schéma est convergent.