الجمهوريـــة الجزائريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
وزارة التعليـم العـالي و البحـث العلمـي

المدرسةالوطنيةالعلياللإحصاءوالاقتصادالتطبيقي
ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
نيابة مديرية التكوين في الدكتوراه والبحث العلميوالتطوير التكنولوجي والابتكار وترقية المقاولاتيـة
Sous-direction de la formation doctorale, de la recherche scientifique, du développementtechnologique, de l'innovation et de la promotion de l'entreprenariat

## Concours d'Accès à la Formation Doctorale 2021/2022

**Epreuve : Probabilités et Statistiques** **Durée :1h30**

**Exercice1** :

$p = 85\%$

I) Une compagnie d'autocars assurant le trajet direct entre deux villes constate que 15% des personnes ayant réservé ne se présentent pas à l'embarquement. Elle décide de pratiquer la surréservation, elle vend 60 tickets pour 55 sièges dans un autocar.
Soit $X$ la variable aléatoire « nombre de personnes ayant réservé qui se présentent pour embarquer ».

1) Déterminer la loi de la variable $X$.
2) Quelle est la probabilité que toute personne ayant réservé et se présentant à l'embarquement soit assurée d'un siège?

II) Les autocars passent par une région montagneuse, ils peuvent être ralentis par des incidents extérieurs (chute de pierres, passage de troupeaux,..). On note $Y$ la variable aléatoire qui mesure la distance, en kilomètres, que l'autocar va parcourir jusqu'à ce que survienne un incident. On admet que $Y$ suit une loi exponentielle. Une étude a montré qu'une fois sur deux, le premier incident survient avant le 89 ème kilomètre et une fois sur deux, il survient après le 89 ème kilomètre. $\frac{1}{2}$

1) Quelle est la distance moyenne, arrondie au kilomètre, parcourue par un autocar sans incident ?
2) Calculer la probabilité que la distance parcourue sans incident soit comprise entre 80 et 100 km.

III) L'entreprise met à la disposition des clients un guichet pour informations. Il y a 2% des chances pour qu'un client se présente au guichet dans un intervalle de 36 secondes. Quelle est la probabilité pour qu'au moins 5 clients se présentent en une heure ?

**Exercice2** :

$\lambda e^{-\lambda t}$

On considère une variable aléatoire $X$ admettant une densité $f$ définie par

$$f(x,\theta) = \frac{|x|}{\theta} exp\left\{-\frac{x^2}{\theta}\right\}, \quad x \epsilon IR, (\theta > 0)$$

Soit $X_1, X_2, \cdots, X_n$ un échantillon de $n$ variables aléatoires indépendantes, de même loi que $X$.

1. Montrer que $T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ une statistique exhaustive pour $\theta$.
2. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\tilde{\theta}_n$ de $\theta$.
3. L'estimateur $\tilde{\theta}_n$ est-il sans biais ? Est-il convergent ?
4. L'estimateur $\tilde{\theta}_n$ est-il efficace ?
5. Pour $n$ quelconque, existe-t-il un autre estimateur sans biais de $\theta$ dont la variance est strictement plus petit que celle de $\tilde{\theta}_n$ ?

**N.B** : $X^2$ suit une loi exponentielle $E(1/\theta)$ .

**Exercice3** :

En voulant louer un studio, deux personnes ont collecté les informations sur les loyers des studios mis en location.

Personne A a consulté les petites annonces et il a recueilli les 6 loyers (en unité monétaire) suivants : 388, 460, 650, 410, 270 et 780. $\bar{X} = 493$ $S = 166,996$

Personne B a collecté 300 annonces sur Internet dont le loyer moyen est de $\bar{x} = 550$ et d'écart-type $S_{300} = 250$.

On suppose que les deux échantillons sont constitués d'observations indépendantes.

1. Construire un intervalle de confiance à 95% pour le loyer moyen pour chacun des deux échantillons. Que constatez-vous ?
2. En supposant qu'on connaît la vraie valeur de la variance des loyers dans les deux échantillons considérés et que celle-ci est égale à la valeur estimée de la variance utilisée dans la question précédente, que deviendront les intervalles de confiance trouvés ? Justifiez votre réponse.
3. En regroupant les deux échantillons on obtient un autre échantillon.
   a) Donner une estimation ponctuelle du loyer moyen de cet échantillon.
   b) Calculer la variance du loyer moyen de cet échantillon.
   c) Construire un intervalle de confiance à 99% de la moyenne du loyer de l'échantillon (on suppose que les deux échantillons proviennent d'une loi normale).

334 65,2