Chapitre 1

Notions de Base

1.1 Droite réelle achevée

1.1.1 Définition et Notation

Définition 1.1.1. *On appelle droite reèlle achevée, l'ensemble* $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$*. Elle se note* $\overline{\mathbb{R}}$*. Soit alors*

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

Remarque 1.1.1. *Dans cette définition* $+\infty$ *et* $-\infty$ *n'ont plus de sens, elles ne sont que des symboles.*

1.1.2 Opérations dans $\overline{\mathbb{R}}$

Par définition, on a $\mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{R}}$, il est donc raisonable d'etendre les opérations de $\mathbb{R}$ à $\overline{\mathbb{R}}$ de sorte qu'on ait

1. $\forall a \in \mathbb{R} : a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$.
2. $\forall a \in \mathbb{R} : a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$.
3. $\forall a \in \mathbb{R},\ a \neq 0 : a \times (+\infty) = (+\infty) \times a = \begin{cases} +\infty & si\ a > 0 \\ -\infty & si\ a < 0. \end{cases}$
4. $+\infty + (+\infty) = +\infty$ et $-\infty + (-\infty) = -\infty$.

Remarque 1.1.2. *Dans* $\overline{\mathbb{R}}$*,* $+\infty - \infty$ *et* $-\infty + \infty$ *ne sont pas définies, le cas d'indétermination* $0 \times (\pm\infty)$ *dans* $\mathbb{R}$ *réduite à* 0 *dans* $\overline{\mathbb{R}}$ *c'est-à-dire* $0 \times (\pm\infty) = 0$ *dans* $\overline{\mathbb{R}}$*. Ceci sera justifié plus bas à l'aide des intégrales.*

1.1.3 Quelques propriétés

Proposition 1.1.1. *1. Ni l'addition ni la multiplication sont simplifiable dans* $\overline{\mathbb{R}}$*, autrement dit*

i) $a + c = b + c$ *n'entraine pas nécessairement que* $a = b$ *sauf si* $-\infty < c < +\infty$*.*

ii) $a.c = b.c$ *n'entraine pas nécessairement que* $a = b$ *sauf si* $c \neq 0$ *et* $-\infty < c < +\infty$*.*

2. *Si $a \neq 0$, alors l'équation $x + a = x$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$ mais dans $\bar{\mathbb{R}}$ admet les deux solutions $+\infty$ et $-\infty$. (Cette équation peut être apparu par exemple si on veut calculer la limite de la suite définie par $u_{n+1} = u_n + a, \quad a \in \mathbb{R}$).*
3. *$\overline{\mathbb{R}}$ est compact pour sa topologie qui induit sur $\mathbb{R}$ sa toplologie usuelle. Cette topologie est définie par la base*

$$\mathscr{B} = \{]a, b[,\ [-\infty, c[,\ ]d, +\infty],\ \ a, b, c, d \in \mathbb{R},\ a < b\}.$$

Rappelons aussi que cette topologie est metrisable, puisque elle est compatible, par exemple, avec la distance d définie par :

$$d(x, y) = |Arctan\ x - Arctan|\ y,\ \forall x, y \in \overline{\mathbb{R}},$$

avec

$$Arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2} \quad et \quad Arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}.$$

On a églement, la propriété fondamentale suivante :

Proposition 1.1.2 (fondamentale). *Toute suite monotone $(x_n)_n$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ est convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$ et on a :*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} \sup\limits_{n\geq 0} x_n & si\ (x_n)_n\ est\ croissante, \\ \inf\limits_{n\geq 0} x_n & si\ (x_n)_n\ est\ décroissante. \end{cases}$$

Remarque 1.1.3. *Cette proposition est très importante, remarquer qu'elle n'exige pas que la suite doive être bornée ! (ni supérieurement ni inferieurment).*

1.1.4 Ordre dans $\overline{\mathbb{R}}$

$\overline{\mathbb{R}}$ est partiellement ordonné par la relation d'ordre $\leq$ obtenue en prolongeant celle de $\mathbb{R}$, et totalement ordonné par la relation d'ordre $<$ pour laquelle on a

$$\forall x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty.$$

1.2 Ensembles dénombrables

Définition 1.2.1. *Un ensemble X est dit dénombrable si il est fini ou satisfait à l'une des situations suivantes :*
- Il existe une bijection de X dans $\mathbb{N}$,
- Il existe une injection de X dans $\mathbb{N}$,
- Il existe une surjection de $\mathbb{N}$ dans X.

Exemple 1.2.1. *Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables, les ensembles $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ ne le sont pas.*
Pour $\mathbb{N}$ il suffit de considérer l'identité (qui est une bijection). Quant à $\mathbb{Z}$ l'application $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ telle que

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & si\ n\ est\ paire, \\ \frac{n+1}{-2} & si\ n\ est\ impaire, \end{cases}$$

fait l'affaire.

Propriétés 1.2.2. *Les propriétés suivantes sont immediates*

1. *Toute partie d'un ensemble dénombrable est dénombrable (restriction).*
2. *Toute réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable. Ce résultat est faux pour une réunion quelconque*
   Exemple. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'ensemble $\{x\}$ est dénombrable mais $\underset{x\in[0,1]}{\cup}\{x\} = [0,1]$ ne le soit pas*
3. *Tout ensemble contient une partie non dénombrable est non dénombrable.*

1.3 Fonctions indicatrices (caractéristiques) d'un ensemble

Définition 1.3.1. *Soit A une partie d'un ensemble non vide X. On appelle fonction indicatrice (ou caractéristique) de A, l'application réelle, notée χ_A (parfois 1_A) définie sur X par :*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A, \\ 0 & si \quad x \notin A. \end{cases} \tag{1.3.1}$$

Propriétés 1.3.1. *I. Soit A et B deux parties d'un ensemble non vide X. Alors*

1. $A \subset B \Longrightarrow \chi_A \leq \chi_B$ *et* $A = B \Longleftrightarrow \chi_A = \chi_B$.
2. $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B} = \sup\{\chi_A,\ \chi_B\}$.
3. $\chi_{A\cap B} = \chi_A.\chi_B = \inf\{\chi_A,\ \chi_B\}$.
4. $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$.
5. *Si $B \subset A$ alors* $\chi_{A-B} = \chi_A - \chi_B$.
6. $\chi_{A\Delta B} = |\chi_A - \chi_B|$.
7. *Pour toute suite $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de X et $I \subseteq \mathbb{N}$*

$$\chi_{\underset{i\in I}{\cup}A_i} = \sup_{i\in I}\chi_{A_i} \quad et \quad \chi_{\underset{i\in I}{\cap}A_i} = \inf_{i\in I}\chi_{A_i}.$$

II. Si $f : X \longrightarrow Y$ une application et $B \subset Y$ alors : $\chi_{f^{-1}(B)} = \chi_B \circ f$.

Preuve. Soit A et B deux parties de X.
1. i) Si $x \in A$ alors $x \in B$ et donc $\chi_A(x) = \chi_B(x) = 1$.
i) Si $x \notin B$ alors $\chi_A(x) = \chi_B(x) = 0$.
ii) Si $x \notin A$ et $x \in B$ alors $\chi_A(x) = 0$ et $\chi_B(x) = 1$. Par suite $\chi_A(x) < \chi_B(x)$.
2. i) Si $x \notin A \cup B$ alors $x \notin A$ et $x \notin B$. Par suite

$$\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x) = 0 = \sup\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}.$$

ii) Si $x \in A \cup B$, on distingue trois cas :
Cas 1 : $x \in A$ et $x \notin B$. Dans ce cas $\chi_A(x) = 1$ et $\chi_B(x) = 0$. Donc

$$\chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x) = 1 = \chi_{A\cup B}(x) = \sup\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}.$$

Cas 2 : $x \notin A$ et $x \in B$. Dans ce cas $\chi_A(x) = 0$ et $\chi_B(x) = 1$. D'où

$$\chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x) = 1 = \chi_{A\cup B}(x) = \sup\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}.$$

Cas 3 : $x \in A$ et $x \in B$. Dans ce cas $\chi_A(x) = 1$ et $\chi_B(x) = 1$. Donc

$$\chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x) = 1 = \chi_{A\cup B}(x) = \sup\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}.$$

3. On procède de même que dans 2).
4) On a d'une part, grâce à la propriété (2)

$$\chi_{A\cup A^c} = \chi_A + \chi_{A^c},$$

et d'autre part

$$\chi_{A\cup A^c} = \chi_X = 1,$$

d'où le résultat.
5) On procède de même que dans 2).
II) Soit $B \subset Y$. Alors,
i) Si $x \in f^{-1}(B)$:
On a d'une part $\chi_{f^{-1}(B)}(x) = 1$ et d'autre part $x \in f^{-1}(B) \Longrightarrow f(x) \in B$ d'où

$$(\chi_B \circ f)(x) = \chi_B(f(x)) = 1.$$

ii) Si $x \notin f^{-1}(B)$:
Alors on a d'une part $\chi_{f^{-1}(B)}(x) = 0$. D'autre part $x \notin f^{-1}(B) \Longrightarrow f(x) \notin B$ d'où

$$(\chi_B \circ f)(x) = \chi_B(f(x)) = 0.$$

□

Enfin, on peut démontrer par la récurrence sur n la proposition suivante :

Proposition 1.3.1. *Soit X un ensemble non vide. Si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments deux à deux disjoints alors on a*

$$\chi_{\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} A_i} = \sum_{i\in\mathbb{N}} \chi_{A_i}. \tag{1.3.2}$$

1.4 Limite superieure-limite inferieure

1.4.1 Cas d'une suite numérique

Définition 1.4.1. *Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$. On appelle limite supérieure et limite inférieure de $(x_n)_n$, les éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ qu'on les note respectivement $\overline{\lim} x_n$ et $\underline{\lim} x_n$ définis par*

$$\overline{\lim} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{p\geq n} x_p = \inf_{n\geq 1} \sup_{p\geq n} x_p, \tag{1.4.1}$$

et

$$\underline{\lim} x_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{p\geq n} x_p = \sup_{n\geq 1} \inf_{p\geq n} x_p. \tag{1.4.2}$$

Exemple 1.4.1. *Soit* $(x_n)_n$ *la suite définie par*

$$x_n = (-1)^n, \ n \geq 1.$$

Alors

$$\overline{\lim} x_n = 1 \quad et \quad \underline{\lim} x_n = -1.$$

Proposition 1.4.1. *Une suite* (x_n) *d'éléments de* $\overline{\mathbb{R}}$ *converge dans* $\overline{\mathbb{R}}$ *vers* l *si et seulement si*

$$\overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n = l \tag{1.4.3}$$

Quelques propriétés. Soient $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites numériques. Alors

1. $\underline{\lim}(-x_n) = -\overline{\lim} x_n$ et $\overline{\lim}(-x_n) = -\underline{\lim} x_n$.
2. $\underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$.
3. $\underline{\lim} x_n + \underline{\lim} y_n \leq \underline{\lim}(x_n + y_n)$.
4. $\overline{\lim} x_n + \overline{\lim} y_n \leq \overline{\lim}(x_n + y_n)$.

Preuve. La preuve de ces propriétés découle immediatement des propriétés de la borne superieure et la borne inferieure. Il suffit de rappeler que si A et B sont deux ensembles non vides alors

$$\sup(-A) = -\inf(A) \quad et \quad \inf(-A) = -\sup(A).$$

$$\sup(A + B) \leq \sup(A) + \sup(B) \quad et \quad \inf(A) + \inf(B) \leq \inf(A + B).$$

□

Remarque 1.4.2. *Toutes ces propriétés deviennent des égalités si l'une (au moins) des suites est convergente. En particulier si* $(y_n)_n$ *converge vers* l $(l \in \mathbb{R})$ *alors*

$$\underline{\lim}(x_n + y_n) = \underline{\lim} x_n + l \quad et \quad \overline{\lim}(x_n + y_n) = \overline{\lim} x_n + l$$

1.4.2 Cas d'une suite de fonctions

Définition 1.4.2. *Soit* $(f_n)_n$ *une suite de fonctions définies sur une partie non vide* X *de* $\overline{\mathbb{R}}$. *On appelle limite supérieure et limite inférieure de* $(f_n)_n$, *les fonctions qu'on les note respectivement* $\overline{\lim} f_n$ *et* $\underline{\lim} f_n$ *définies sur* X *par*
Pour tout $x \in X$

$$\overline{\lim} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sup_{p \geq n} f_p(x) = \inf_{n \geq 1} \sup_{p \geq n} f_p(x), \tag{1.4.4}$$

et

$$\underline{\lim} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \inf_{p \geq n} f_p(x) = \sup_{n \geq 1} \inf_{p \geq n} f_p(x). \tag{1.4.5}$$

Exemple 1.4.3. *Soit la suite de fonctions définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f_n(x) = x^n, \ n \geq 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

On peut vérifier aisément que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\overline{\lim} f_n(x) = \begin{cases} 0 & si \ |x| < 1 \\ 1 & si \ |x| = 1 \\ +\infty & si \ |x| > 1, \end{cases} \quad et \ \underline{\lim\, f_n}(x) = \begin{cases} +\infty, & si \ x > 1 \\ 1 & si \ x = 1 \\ 0 & si \ |x| < 1 \\ -1 & si \ x = -1 \\ -\infty, & si \ x < 1. \end{cases}$$

Proposition 1.4.2. *Une suite de fonctions (f_n) définie sur un ensemble non vide X converge simplement vers une application $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ si et seulement*

$$\overline{\lim} f_n(x) = \underline{\lim}\, f_n(x) \quad \textit{pour tout } x \in X. \tag{1.4.6}$$

Remarque 1.4.4. *Les même propriétés du cas d'une suite numérique demeurent vraies dans le cas d'une suite de fonctions.*

1.4.3 Cas d'une suite d'ensembles

Définition 1.4.3. *Soit $(A_n)_n$ une suite de parties d'un ensemble non vide X. On appelle limite superieure et limite inferieure de la suite $(A_n)_n$ les parties de X notée respectivement $\overline{\lim} A_n$ et $\underline{\lim} A_n$ définies par*

$$\overline{\lim} A_n = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{p\geq n} A_p, \quad \textit{et} \quad \underline{\lim} A_n = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{p\geq n} A_p. \tag{1.4.7}$$

Example. Prenons $X = \mathbb{R}$ et soit la suite définie par

$$A_n = \left[(-1)^n,\ 1 + \frac{1}{n}\right].$$

On a alors,

$$\overline{\lim} A_n = [-1,\ 1], \quad \textit{et} \quad \underline{\lim} A_n = \{1\}.$$

Quelques propriétés. Soit $(A_n)_n$ une suite de parties d'un ensemble non vide X. Alors

1. $\underline{\lim} A_n \subset \overline{\lim} A_n$.
2. $\underline{\lim} A_n^c = (\overline{\lim} A_n)^c$, et $\overline{\lim} A_n^c = (\underline{\lim} A_n)^c$.
3. $\chi_{\underline{\lim} A_n} = \underline{\lim} \chi_{A_n}$ et $\chi_{\overline{\lim} A_n} = \overline{\lim} \chi_{A_n}$

1.5 Exercies

Exercice 1.5.1. *Soit $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ une famille de parties d'un ensemble non vide E. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$B_n = A_n - \bigcup_{p=0}^{n-1} A_p\ ; \quad B_0 = A_0$$

1. *Montrer que*
   i) $\bigcup_{n\geq 0} B_n = \bigcup_{n\geq 0} A_n$
   ii) $\forall n \neq m : B_n \cap B_m = \phi$
2. *Que peut on en déduire ?*

Exercice 1.5.2. *Soit $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite disjointe de parties d'un ensemble non vide X. Montrer que*

$$\chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{A_n}$$

Exercice 1.5.3. *Calculer les limites supérieure et inférieure des suites définies par*

$$u_n = (-1)^n\,,\ v_n = (-1)^n + \frac{1}{n},\ w_n = \frac{(-1)^n}{n^2} + \frac{1}{n}$$