U.D.L Sidi Bel Abbès — **Module : Mathématiques Financières**
Faculté des Sciences Exactes — **Responsable : M. HAMMAD**
Département : Probabilités-Statistique — **Mercredi 15/01/2020**
Master 2 : Statistique et ses Applications — **Durée : 1h30mn**

EXAMEN FINAL

<u>Exercice 1</u> (11 points).

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ une base stochastique, W un mouvement brownien standard et λ une constante réelle. Soit

$$\begin{cases} dX_t = -\lambda^2 X_t^2(1-X_t)dt + \lambda X_t(1-X_t)dW_t, \\ X_0 = x \in]0,1[. \end{cases}$$

On admet que X prend ses valeurs dans l'intervalle $]0,1[$. On pose $Y_t = \dfrac{X_t}{1-X_t}$.

1. Vérifier que X_t est un processus d'Itô.
2. Quelle est l'E.D.S (Équation Différentielle Stochastique) vérifiée par Y?.
3. Résoudre cette E.D.S et donner une formule explicite de Y.
4. Déduire que $X_t = \dfrac{x\exp[\lambda W_t - \lambda^2 t/2]}{x\exp[\lambda W_t - \lambda^2 t/2] + 1 - x}$.

<u>Exercice 2</u> (09 points).

Soit $(W_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien réel issu de 0 et on note $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle.

1. Calculer pour tout couple (s,t) les quantitées $\mathbb{E}(W_s W_t^2)$, $\mathbb{E}(W_t \mid \mathcal{F}_s)$ et pour $t \geq s$ $\mathbb{E}(W_t \mid W_s)$.
2. Calculer $\mathbb{E}(W_t^2 W_s^2)$ sachant que pour une v.a. gaussienne centrée Z de variance σ^2, on a $\mathbb{E}(Z^4) = 3\sigma^4$.
3. Quelle est la loi de $W_t + W_s$?.
4. Soit θ_s une v.a. bornée $\mathcal{F}_s-$mesurable.
   Calculer pour tout $t \geq s$, $\mathbb{E}[\theta_s(W_t - W_s)]$ et $\mathbb{E}[\theta_s(W_t - W_s)^2]$.