Chapitre 5

Calcul stochastique

5.1 Intégrale d'Itô

La démarche repose sur la technique de l'intégration en theorie de la mesure. On définit l'intégrale pour des fonctions étagées puis on généralise par approximation de processus convergents dans L^2.

Définition 5.1. Une fonction étagée est une fonction aléatoire $\phi(t,\omega)$ de la forme

$$\phi(t,\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} X_i(\omega) 1_{]t_i,t_{i+1}]}$$

avec $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n$ et X_i de carée intégrable et prévisible (X_i est $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable).

L'intégrale stochastique d'Itô est définie pour les fonction aléatoire ϕ satisfaisant la condition :

$$\int_a^b E(\phi^2(t))dt < \infty, \tag{5.1}$$

si $E(\phi^2(t))$ existe.

Définition 5.2 (Intégrale d'Itô)**.** Soit $\phi(t)$ une fonction aléatoire satisfaisant (5.1), et $a = t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1} = b$ une partition de $[a,b]$, $\triangle t = t_{i+1} - t_i = (b-a)/n$, et $\triangle W(t_i) = W(t_{i+1}) - W(t_i)$, où $W(t)$ est un processus de Wiener. L'intégrale d'Itô de ϕ est définie par la convergence en moyenne quadratique

$$\sum_{i=1}^{n} \phi(t_i)\triangle W(t_i) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{L}^2} \int_a^b \phi(t)dW(t) \tag{5.2}$$

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \phi(t_i)\triangle W(t_i) - \int_a^b \phi(t)dW(t)\right)^2\right] = 0.$$

Théorème 5.1. *Soit $\phi(t)$ une fonction aléatoire satisfaisant* (5.1) *et $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ la filtration associée au processus de Wiener. Alors*

(i) $E\left[\int_a^b \phi(t)dW(t)\right] = 0$

(ii) $E\left[\left(\int_a^b \phi(t)dW(t)\right)^2\right] = \int_a^b E(\phi^2(t))dt.$ *(isométrie)*

(iii) $E\left[\int_0^t \phi(u)dW(u) \mid \mathcal{F}_s\right] = \int_0^s \phi(u)dW(u)$ *(martingale)*

Exemple 5.1. *Montrons*

$$\int_0^t W(s)dW(s) = \frac{1}{2}W^2(t) - \frac{t}{2}. \tag{5.3}$$

Notons $\triangle W(t_i) = \triangle W_i$ *et* $W(t_i) = W_i$ *pour la partition* $0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_{n+1} = t$ *et* $\triangle t = t/n$. *D'après la définition de l'intégrale d'Itô on a la convergence dans* L^2

$$\int_0^t W(s)dW(s) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n W_i \triangle W_i.$$

Notons que $\triangle(W_i^2) = (\triangle W_i)^2 + 2W_i\triangle W_i$. *Cela donne*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n W_i\triangle W_i &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n [\triangle(W_i^2) - (\triangle W_i)^2] \\ &= \frac{1}{2}W_{n+1}^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (\triangle W_i)^2 \\ &= \frac{1}{2}W^2(t) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (\triangle W_i)^2\end{aligned}$$

puisque $W_{n+1} = W(t)$ *et* $W(t_1) = W(0) = 0$. *On a besoin de montrer que* $\sum_{i=1}^n (\triangle W_i)^2$ *converge vers* t *dans* L^2. *Montrons alors*

$$E\left[\left(t - \sum_{i=1}^n (\triangle W_i)^2\right)^2\right] \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

En utilisant les moments d'ordre 2 et 4 de la loi normale $E[(\triangle W_i)^2] = \triangle t$ *et* $E[(\triangle W_i)^2] = 3(\triangle t)^2 = 3(t/n)^2$, *et le fait que* $\triangle W_i$ *est indépendant de* $\triangle W_j$ *pour* $i \neq j$ *on obtient*

$$\begin{aligned}E\left[\left(t - \sum_{i=1}^n (\triangle W_i)^2\right)^2\right] &= E\left[t^2 - 2t\sum_{i=1}^n (\triangle W_i)^2 + \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n (\triangle W_i)^2(\triangle W_j)^2\right]. \\ &= t^2 - 2t(t) + E\left[\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n (\triangle W_i)^2(\triangle W_j)^2\right].\end{aligned}$$

5.2 Équations Différentielles Stochastiques

Évaluer l'intégrale stochastique en utilisant la définition est souvent difficile. On pose, par exemple

$$X(t) = \int_0^t W(s)dW(s).$$

Cette equation intégrale peut s'écrire sous forme différentielle

$$\begin{cases} dX(t) = W(t)dW(t), \\ X(0) = 0. \end{cases}$$

Cette dernière forme est une équation différentielle stochastique d'Itô. Mais le processus de Wiener n'étant pas différentiable, l'expression $dW(t)$ n'a de sense que dans la définition de l'intégrale stochastique. Nous allons voir la relation entre les équations différentielles stochastiques et les processus de diffusion.

Définition 5.3. Un processus stochastique $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ satisfait une équation différentielle stochastique (EDS)

$$dX(t) = \mu(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dW(t), \tag{5.4}$$

si pour $t \geq 0$ il est solution de l'équation intégrale

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mu(X(s), s)ds + \int_0^t \sigma(X(s), s)dW(s), \tag{5.5}$$

le première intégrale est une intégrale de Riemann et la seconde une intégrale stochastique d'Itô.

Il existe un unique processus de Markov $\{X(t)\}_{0\leq t\leq T}$, solution de l'EDS (5.5) sur $[0, T]$, si les deux conditions suivantes sont satisfaites (voir Øksendal (2000) [1] pages 67-70). Il existe une constante $K > 0$ telle que

(a) $|\mu(x, t) - \mu(y, t)| + |\sigma(x, t) - \sigma(y, t)| \leq K|x - y|$, pour $x, y \in \mathbb{R}$ and $t \in [0, T]$ (Lipschitz)

(b) $|\mu(x, t)|^2 + |\sigma(x, t)|^2 \leq K^2(1 + |x|^2)$, pour $x \in \mathbb{R}$ and $t \in [0, T]$. (Linear growth)

Alors la solution $X(t)$ de l'EDS (5.5) est continue (p.s.), vérifie

$$\sup_{t\in[0,T]} E\left[X^2(t)\right] < \infty,$$

et est unique au sens que si X et Y sont deux solutions alors

$$P\left\{\sup_{t\in[0,T]} |X(t) - Y(t)| = 0\right\} = 1.$$

La condition (a) assure que la solution n'explose pas (ne devient pas infinie en temps fini). La condition (b) assure l'unicité.
Sous certaine conditions, la solution $X(t)$ de l'EDS (5.5) satisfaisant les conditions (a) et (b) est un processus de diffusion sur [0,T] avec comme equations de Kolmogorov progressive correspondante

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = -\frac{\partial[\mu(x, t)\mathbf{p}]}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2[\sigma^2(x, t)\mathbf{p}]}{\partial x^2}. \tag{5.6}$$

où $\mathbf{p}(x, t)$ est la densité de probabilité de $\{X(t)\}_{0\leq t\leq T}$.

Exemple 5.2. *On a vu que l'équation de diffusion* (4.8) *avec dérive a pour équation différentielle progressive*

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = -\mu\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x} + \frac{1}{2}V\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial x^2}. \tag{5.7}$$

$\mathbf{p}(x, 0) = \delta(x - x_0)$. *L'EDS correspondante est*

$$dX(t) = \mu dt + \sqrt{V}dW(t),$$

avec $X(0) = x_0$. *Ainsi* $X(t) \sim \mathcal{N}(x_0 + \mu t, Vt)$.

Exemple 5.3. *Supposons que* $X(t)$ *est solution de l'EDS*

$$dX(t) = (\lambda - \mu)X(t)dt + \sqrt{(\lambda + \mu)X(t)}dW(t),$$

avec $X(0) = x_0 > 0$ *pour* $X(t) \in [0, \infty)$, *où* λ *et* μ *sont des constantes positives. Alors* $X(t)$ *possède une densité de probabilité solution de l'équation de Kolmogorov progressive suivante :*

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = -(\lambda - \mu)\frac{\partial(x\mathbf{p})}{\partial x} + \frac{(\lambda + \mu)}{2}\frac{\partial^2(x\mathbf{p})}{\partial x^2}. \tag{5.8}$$

$x > 0$ *et* $\mathbf{p}(x, 0) = \delta(x - x_0)$.

1. Øksendal, B. 2000. *Stochastic Differential Equations : An Introduction with Applications*. 5th ed. Springer-Verlag.

5.2.1 Formule d'Itô

Théorème 5.2. *Soit $X(t)$ la solution de l'EDS :*

$$dX(t) = \mu(X(t),t)dt + \sigma(X(t),t)dW(t).$$

Si $F(x,t)$ est une fonction réelle définie pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [a,b]$, avec des dérivées partielles continues, $\partial F/\partial t$, $\partial F/\partial x$, et $\partial^2 F/\partial x^2$, alors

$$dF(X(t),t) = f(X(t),t)dt + g(X(t),t)dW(t), \tag{5.9}$$

où

$$f(x,t) = \frac{\partial F(x,t)}{\partial t} + \mu(x,t)\frac{\partial F(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(X(t),t)\frac{\partial^2 F(x,t)}{\partial x^2} \tag{5.10}$$

$$g(x,t) = \sigma(X(t),t)\frac{\partial F(x,t)}{\partial x}. \tag{5.11}$$

$$dF = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \mu\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right]dt + \sigma\frac{\partial F}{\partial x}dW(t). \tag{5.12}$$

Démonstration. En appliquant la formule de Taylor :

$$\begin{aligned} dF(x,t) &\approx \triangle F \\ &\approx \frac{\partial F}{\partial t}\triangle t + \frac{\partial F}{\partial x}\triangle x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(\triangle t)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\triangle x)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x}\triangle t \triangle x + \ldots. \end{aligned}$$

En remplaçant $\triangle x$ par $\mu\triangle t + \sigma\triangle W$ et $(\triangle x)^2$ par $\mu^2(\triangle t)^2 + 2\mu\sigma\triangle t\triangle W + \sigma^2(\triangle W)^2$ et en utilisant le fait que $E\left[(\triangle W)^2\right] = \triangle t$ et en approximant $(\triangle W)^2$ par $\triangle t$, on obtient

$$dF(x,t) = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \mu\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right]\triangle t + \sigma\frac{\partial F}{\partial x}\triangle W + \circ(\triangle t). \tag{5.13}$$

En faisant $\triangle t \to 0$ on obtient la formule d'Itô. □

Formule d'Itô pour intégrale stochastique

Exemple 5.4. *Montrons l'intégrale suivante en utilisant la formule d'Itô :*

$$\int_0^t W(s)dW(s) = \frac{1}{2}W^2(t) - \frac{t}{2}. \tag{5.14}$$

On applique la formule d'Itô pour $X(t) = W(t)$ et $F(x,t) = x^2$. L'EDS que vérifie $X(t)$ est

$$dX(t) = dW(t) = 0 \times dt + 1 \times dW(t)$$

donc $\mu = 0$ et $\sigma = 1$. On a aussi

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2.$$

Cela donne d'après (5.12)

$$dF(W(t),t) = dW(t)^2 = dt + 2W(t)dW(t) \tag{5.15}$$

On intègre (5.15) *de 0 à t,*

$$W(t)^2 - W(0)^2 = t + 2\int_0^t W(s)dW(s),$$

ce qui montre l'intégrale stochastique (5.14).

Formule d'Itô pour EDS

Exemple 5.5. *On considère l'EDS :*

$$dX(t) = \alpha X(t)dt + \beta X(t)dW(t), \tag{5.16}$$

avec $\alpha > 0$ *et* $\beta > 0$.
Le processus stochastique correspondant à cette EDS est le mouvement brownien géométrique. On utilise la formule d'Itô pour $F(x,t) = \ln(x)$. *On a*

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{-1}{x^2}.$$

La formule d'Itô (5.12) *donne*

$$\begin{aligned} dF(X(t),t) = d[\ln X(t)] &= \left(\alpha X(t)\frac{1}{X(t)} + \frac{1}{2}(\beta X(t))^2\frac{-1}{X(t)^2}\right)dt + \beta X(t)\frac{1}{X(t)}dW(t) \\ &= \left(\alpha - \frac{1}{2}\beta^2\right)dt + \beta dW(t). \end{aligned}$$

On intègre de 0 à t,

$$\ln\left(\frac{X(t)}{X(0)}\right) = \left(\alpha - \frac{1}{2}\beta^2\right)t + \beta W(t),$$

et la solution est

$$X(t) = X(0)\exp\left[\left(\alpha - \frac{1}{2}\beta^2\right)t + \beta W(t)\right].$$

Les moments d'une EDS

Exemple 5.6. *Soit l'EDS*

$$dX(t) = dt + X(t)dW(t), \ X(0) = 0. \tag{5.17}$$

Alors

$$X(t) = t + \int_0^t X(s)dW(s).$$

Il suit que $E(X(t)) = t$.
On applique la formule d'Itô à $F(x,t) = x^2$

$$d\left(X^2(t)\right) = \left(2X(t) + X^2(t)\right)dt + 2X^2(t)dW(t).$$

Ainsi

$$E\left(X^2(t)\right) = E\int_0^t \left(2X(s) + X^2(s)\right)ds.$$

Cela donne l'équation différentielle pour $E\left(X^2(t)\right)$

$$\frac{dE\left(X^2(t)\right)}{dt} = 2E\left(X(t)\right) + E\left(X^2(t)\right) = 2t + E\left(X^2(t)\right)$$

avec $E\left(X^2(0)\right) = 0$. *On obtient*

$$E\left(X^2(t)\right) = -2t - 2 + 2e^t.$$