Cours de probabilité Avancée

Diffalah LAISSAOUI

Université de Médéa
Faculté des sciences
Département de mathématiques et Informatique

L3 Maths

Mars 2022

Loi uniforme discrète :
Une variable aléatoire réelle X est dite variable aléatoire de loi uniforme discrète sur un ensemble $D = \{1, 2, 3, ..., n\}$ fini si on a, pour tout x dans D :

$$P_X(\{x\}) = P(X = x) = \frac{1}{card(D)}.$$

$X \rightsquigarrow U(D)$.
Loi de Bernoulli :
Une variable aléatoire réelle X est de Bernoulli si elle ne prend que les valeurs 0 et 1 avec des probabilités non nulles.

$$f_X(x) = \begin{cases} p \text{ si } x = 1 \\ q \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

$X \rightsquigarrow B(p)$.

Lois de probabilités discrètes usuelles

Exemple

Lancer d'une pièce de monnaie

$$X = \begin{cases} 0 \text{ si on obtient pile} \\ 1 \text{ si on obtient face} \end{cases}$$

$P(X = 0) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$.

Exemple

Une Urne contient 10 *boules,* 4 *noires et* 6 *blanche.*

$$X = \begin{cases} 0 \text{ si on tire une boule noire} \\ 1 \text{ si on tire une boule blanche} \end{cases}$$

$P(X = 0) = \frac{2}{5}$, $P(X = 1) = \frac{3}{5}$.

Propriétés

L'espérance et la variance d'une variable aléatoire X suivant une loi de Bernoulli de paramètre p sont égales respectivement à : $E(X) = p$ et $Var(X) = p(1-p) = pq$.

Loi Binomiale :

Une variable aléatoire réelle X suit une loi de Binomiale de paramètre n et p si

$$f_X(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \ k = 0, 1, ..., n. \ 0 < p < 1.$$

$X \rightsquigarrow B(n, p)$.

Exemple

Une urne contient des boules blanches et noires, soit p la probabilité de tires une boule blanche et $q = 1 - p$ *la probabilité de tirer une boule noires ; on tire n boule avec remise, quelle est la probabilité d'obtenir k boules blanches ?.la probabilité d'obtenir k boules blanches est*

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \ k = 0, 1, ..., n.$$

Exemple

Une pièce de monnaie on lance n fois ; quelle est la probabilité d'avoir k pile ?

$$P(X = k) = C_n^k (\frac{1}{2})^k (\frac{1}{2})^{n-k} = C_n^k (\frac{1}{2})^n, \; k = 0, 1, ..., n.$$

Propriétés

L'espérance et la variance d'une variable aléatoire X suivant une loi Binomiale de paramètres n et p sont égales respectivement à :
$E(X) = np$ et $Var(X) = np(1 - p) = npq$.

Loi de Poisson :

Une variable aléatoire réelle X suit une loi de Poisson de paramètre λ, $(\lambda > 0)$ si

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k \exp(-\lambda)}{k!},\ k = 0, 1, ..., \infty.$$

$X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Exemple

Une usine produit des bouteilles d'eau. Parmi celles-ci, 3% sont défectueuses. On appelle X la variable aléatoire qui, à tout lot de 100 bouteilles prises au hasard, associe le nombre de bouteilles défectueuses. On admet que X suit une loi de Poisson de paramètre 3. Déterminer la probabilité qu'un tel lot ait deux bouteilles défectueuses ?.

Solution

Soit X le nombre de bouteilles défectueuses,

$$P(X = 2) = \frac{(100 \times 0.03)^2 \exp(-3)}{2!}.$$

Propriétés

L'espérance et la variance d'une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètres λ sont égales respectivement à $E[X] = \lambda$ et $Var[X] = \lambda$.

Remarque

La loi de Poisson est utilisée pour décrire plusieurs types de phénomènes comme le nombre d'appels reçus par un standard téléphonique pendant une période donnée, etc.

Remarque

La loi de Poisson est encore utilisée lorsque nous étudions le nombre d'apparitions de certains phénomènes rares.

Loi Géometrique :
Une variable aléatoire réelle X suit une loi géometrique de paramètre p $(0 < p < 1)$ si

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1},\ k = 1, 2, ..., \infty.$$

Exemple

Une urne contient une proportion p de boule blanches et une proportion $q = 1 - p$ de boule noire $(0 < p < 1)$; on tire successivement des boules une a une avec remise, soit X le rang de la premier boule blanche tirée.

Solution

$$\begin{aligned} P(X &= k) = P(1^{er} bn \text{ et } 2^{eme} bn \text{ et } ....(k-1)^{eme} bn \text{ et } k^{eme} bb) \\ &= (P(bn))^{k-1} P(bb) = pq^{k-1}. \end{aligned}$$

Propriétés

L'espérance et la variance d'une variable aléatoire X suivant une loi géométrique de paramètres p sont égales respectivement à $E[X] = \frac{1}{p}$ et $Var[X] = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}$.

Remarque

Cette loi sert généralement lorsque nous nous intéressons au temps d'attente du premier succès, c'est-à-dire au nombre d'essais nécessaires pour obtenir un succès, lors d'une succession d'expériences aléatoires indépendantes n'ayant que deux issues possibles : le succès avec une probabilité p et l'échec avec une probabilité $1 - p$.

Remarque

La loi géométrique est parfois utilisée pour modéliser des durées de vie. Par exemple, la loi géométrique est le modèle discret de la mort d'une particule radioactive. La loi géométrique est la version discrète d'une loi absolument continue : la loi exponentielle.

Loi Hypergéometrique :
Une variable aléatoire réelle X suit une loi Hypergéometrique de paramètre N, n, p si

$$P(X = k) = \frac{C_{N_p}^{k} C_{N_q}^{n-k}}{C_N^n}, \; k = 0, 1, ..., n, \; N_p + N_q = N.$$

$X \rightsquigarrow \mathcal{H}(N, n, p), k = 0, 1, ..., n.$

Example

n personnes soit choisies au hasard d'une population de M_1 personnes de type 1 et M_2 personnes de type 2 ; soit X le nombre de personnes selectionnées de type 1.

Solution

$$P(X=k)=\frac{C_{M_1}^{k}C_{M_2}^{n-k}}{C_{M_1+M_2}^{n}},\ k=0,1,.....,n.$$

avec la notation précedente on a $N=M_1+M_2$, $p=\frac{M_1}{N}$, $q=\frac{M_2}{N}$.

Propriétés

L'espérance et la variance d'une variable aléatoire X suivant une loi hypergéométrique de paramètres N,n,p sont égales respectivement à $E[X]=np$ et $Var[X]=np(1-p)\frac{N-n}{N-1}=npq\frac{N-n}{N-1}$.

Remarque

L'espérance d'une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$ est égale à l'espérance d'une loi binomiale $B(n, p)$.

Remarque

La variance d'une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$ est égale à la variance d'une loi binomiale $B(n, p)$ au facteur multiplicatif $\frac{N-n}{N-1}$ près. Dans un contexte statistique, ce facteur s'appelle le facteur d'exhaustivité. Il est toujours inférieur ou égal à 1.

Loi gamma $\Gamma(\alpha, \lambda)$
La loi exponentielle est un cas particulier d'une famille de lois appelées lois gamma.

Definition

Une variable aléatoire X à valeurs dans $[0, +\infty[$ suit une loi gamma de paramètres α et λ $(\alpha > 0, \lambda > 0)$, notée $\Gamma(\alpha, \lambda)$, si X est une variable continue et admet pour densité de probabilité la fonction f_X suivante

$$f_X(x) = \Gamma(x, \alpha, \lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\lambda x) \text{ pour } x \geq 0 \\ 0 \text{ pour } x < 0 \end{cases}$$

ou $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \exp(-x) dx$ est la fonction gamma d'Euler.

Remarque

Pour $\alpha = 1$, $\Gamma(1, \lambda)$ *coïncide avec* $\mathcal{E}(\lambda)$.

Propriétés

1. La fonction de répartition d'une loi gamma $\Gamma(\alpha, \lambda)$ n'a pas de forme explicite.
2. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi gamma $\Gamma(\alpha, \lambda)$. Nous avons : $E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}$ et $Var(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$.
3. Si (X_1, X_2) est un couple de variables aléatoires indépendantes de lois respectivement gamma $\Gamma(\alpha_1, \lambda)$ et gamma $\Gamma(\alpha_2, \lambda)$ alors la somme $X_1 + X_2$ suit une loi gamma $\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$.
4. La loi gamma $\Gamma(n, \lambda)$ (n entier > 0, $\lambda > 0$) coïncide avec la loi de la somme de n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

Lois bêta de 1ère espèce $\beta_1(a, b)$

Définition

Une variable aléatoire X *à valeurs dans* $[0, 1]$ *suit une loi bêta de 1ère espèce de paramètres a et b* $(a > 0, b > 0)$*, notée* $\beta_1(a, b)$*, si* X *est une variable continue et admet pour densité de probabilité la fonction* f_X *suivante*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{\beta(a,b)} & \text{pour } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ou $\beta(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ *qui est la fonction bêta.*

Propriétés

1. La fonction de répartition d'une loi bêta de $1^{ère}$ espèce $\beta_1(a, b)$ n'a pas de forme explicite.
2. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi bêta de $1^{ère}$ espèce $\beta_1(a, b)$. Nous avons :

$$E(X) = \frac{a}{a+b}$$

et

$$Var(X) = \frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}.$$

La loi normale centrée-réduite

Définition

Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}$ suit une loi normale centrée-réduite, notée $N(0,1)$, si X est une variable continue et admet pour densité de probabilité la fonction f_X suivante

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2}), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Propriétés de la loi normale centrée-réduite

1. La fonction de répartition de la loi normale $N(0,1)$, notée généralement ϕ, est égale à

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp(-\frac{t^2}{2})dt, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

2. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $N(0,1)$. Nous avons : $E(X) = 0$ et $Var(X) = 1$. C'est la raison pour laquelle la loi est appelée centrée réduite

et est notée $N(0,1)$.

Lois de probabilités discrètes usuelles

La loi normale de paramètres μ et σ^2

Définition

Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}$ suit une loi normale de paramètres $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, notée $N(\mu, \blacksquare^2)$, si X est une variable continue et admet pour densité de probabilité la fonction f_X suivante

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Propriétés de la loi normale $N(\mu, \blacksquare^2)$

1. La fonction de répartition d'une loi normale $N(\mu, \blacksquare)$ est égale à $F_X(x) = P(X \leq x) = \phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$.
2. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale $N(\mu, \blacksquare)$. Nous avons : $E(X) = \mu$ et $Var(X) = \blacksquare^2$.

Loi du Khi-deux $\chi^2(p)$

Définition

Soit p un entier positif. Une variable aléatoire X suit une loi de Pearson ou loi du Khi-deux à p degrés de liberté, notée $\chi^2(p)$*, si X est une variable continue et admet pour densité de probabilité la fonction* f_X *suivante*

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\frac{p}{2}-1}\exp(-\frac{x}{2})}{2^{\frac{p}{2}}\Gamma(\frac{p}{2})} & \text{pour } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Loi du Khi-deux $\chi^2(p)$

Propriétés de la loi du Khi-deux $\chi^2(p)$

1. La fonction de répartition ne s'explicite pas. Cependant, il existe des tables de la fonction de répartition.
2. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi du Khi-deux $\chi^2(p)$. Nous avons : $E(X) = p$ et $Var(X) = 2p$.
3. Soit $X_1, ..., X_n$ une suite de v.a. indépendantes et identiquement distribuées qui suit la loi normale $N(0,1)$. Alors la variable aléatoire $\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ suit la loi du Khi-deux $\chi^2(n)$.
4. Soit une variable aléatoire. X_1 qui suit une loi du Khi-deux $\chi^2(n_1)$ et X_2 une variable aléatoire qui suit indépendamment de X_1 une loi du Khi-deux $\chi^2(n_2)$. Alors la v.a. $X_1 + X_2$ suit une

loi du Khi-deux $\chi^2(n_1 + n_2)$.

Loi de Student t(n)

Définition

Soit n un entier strictement positif. Une variable aléatoire X suit une loi de Student à n degrés de liberté, notée $t(n)$, si X est une variable continue et admet pour densité de probabilité la fonction f_X suivante

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})(1+\frac{t^2}{n})^{-(\frac{n+1}{2})}}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})} & \textit{pour } t \geq 0 \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

Propriétés de la loi de Student t(n)

1. La fonction de répartition ne s'explicite pas. Cependant, il existe des tables de la fonction de répartition.
2. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Student $t(n)$. Nous avons : si $n \geq 2$, $E(X) = 0$; si $n \geq 3$, $Var(X) = \frac{n}{n-2}$.
3. Soit une variable aléatoire. U qui suit une loi normale $N(0,1)$ et X une variable aléatoire qui suit indépendamment de U une loi du Khi-deux $\chi^2(n)$. Alors la variable aléatoire
$$T_n = \frac{U}{\sqrt{X/n}}$$
suit une loi de Student $t(n)$.
4. Pour $n = 1$, la loi est la loi de Cauchy. La loi de Cauchy est en fait la loi du rapport de deux variables qui suivent chacune indépendamment la loi normale $N(0,1)$.

Loi de Fisher-Snedecor F(n,p)

Définition

Soit n et p deux entiers positifs. Une variable aléatoire X suit une loi de Fisher-Snedecor (ou loi de Fisher) à n et p degrés de liberté, notée $F(n,p)$, si X est une variable continue et admet pour densité de probabilité la fonction f_X suivante

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\frac{n+p}{2})(\frac{n}{p})^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{p}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{t^{\frac{n-2}{2}}}{(1+\frac{n}{p}t)^{\frac{n+p}{2}}} & \textit{pour } t \geq 0 \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

Propriétés de la loi de Fisher-Snedecor F(n,p)

1. La fonction de répartition ne s'explicite pas. Cependant, il existe des tables de la fonction de répartition.
2. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Fisher $F(n,p)$. Nous avons : si $p \geq 3$, $E(X) = \frac{p}{p-2}$; si $p \geq 5$, $Var(X) = \frac{2p^2(n+p-2)}{n(p-2)^2(p-4)}$.
3. Soit X et Y étant deux variables aléatoires suivant indépendamment des lois du χ^2 à n et p degrés de liberté respectivement. Alors la variable aléatoire $\frac{X/n}{Y/p}$ suit une loi de Fisher-Snedecor à n degrés de liberté au numérateur et p degrés de liberté au dénominateur.