Correction de l'examen final du premier semestre Système dynamique

Correction de l'exercice 01 $\boxed{\text{7 Points}}$

1. (a) Si $y_0 \neq 0$ la fonction $f = \sqrt{|y(t)|}$ est de classe C^1 au voisinage de y_0, alors la fonction $f = \sqrt{|y(t)|}$ est lipschitzienne au voisinage de y_0 $\boxed{\text{0.5 Point}}$ et le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'une unique solution locale $\boxed{\text{0.5 Point}}$.

   (b) La fonction $f = \sqrt{|y(t)|}$ n'est pas lipschitzienne au voisinage de $y = 0$. Sa dérivée tend vers ∞ lorsque $y \longrightarrow 0$ $\boxed{\text{0.5 Point}}$. Ainsi on ne peut pas évoquer le théorème de Cauchy-Lipschitz. En fait si $y = 0$ il y a une infinité de solutions $\boxed{\text{0.5 Point}}$.

2. (a) Si $y_0 \neq 0$ la solution se calcule par séparation des variables. On intègre l'équation différentielle :

$$\int_{t_0}^{t} \frac{y'(t)}{\sqrt{|y(t)|}} dt = \int_{t_0}^{t} dt.$$

   i. Si $y_0 > 0$ on trouve :

$$2\sqrt{y(t)} - 2\sqrt{y_0} = t - t_0.$$

   Donc l'unique solution du problème de Cauchy est donnée par :

$$y(t) = \frac{1}{4}(t - t_0 + 2\sqrt{y_0})^2. \boxed{\text{1 Point}}$$

   Noter que $y(t)$ est définie pour $t > t_0 - 2\sqrt{y_0}$ $\boxed{\text{0.5 Point}}$.

   ii. Si $y_0 < 0$ on trouve :

$$2\sqrt{-y(t)} - 2\sqrt{-y_0} = t - t_0.$$

   Donc l'unique solution du problème de Cauchy est donnée par :

$$y(t) = -\frac{1}{4}(t - t_0 + 2\sqrt{-y_0})^2. \boxed{\text{1 Point}}$$

   Noter que $y(t)$ est définie pour $t < t_0 + 2\sqrt{y_0}$ $\boxed{\text{0.5 Point}}$.

   (b) Si $y = 0$ il y a une infinité de solutions. Par exemple la fonction constante $y(t) = 0$ est une solution du problème de Cauchy $\boxed{\text{0.5 Point}}$ et pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $\quad a < 0 < b$ la fonction : $\begin{cases} -\frac{1}{4}(t+a)^2 & t < a \\ \frac{1}{4}(t-b)^2 & t > b \\ 0 & a \leq t \leq b \end{cases}$ est une solution du problème de Cauchy $\boxed{\text{1.5 Point}}$.

Correction de l'exercice 02 $\boxed{\text{13 Points}}$

On introduit les changements de variable.

$$U = \frac{f'}{f^2}\ ,\quad V = \frac{f''}{f^3}$$

Si on considère l'intervalle maximal droit $I = [\tau, \tau + t[$ sur lequel une solution f de l'équation $(1')$ qui ne s'annule pas sur cet intervalle et si on pose :

$$\forall t \in I, s = \int_{\tau}^{t} f\left(\zeta\right) d\zeta \qquad u(s) = \frac{f'(t)}{f^2(t)} \text{ et } v(s) = \frac{f''(t)}{f^3(t)} \tag{1}$$

On trouve :

$$\dot{u} = \frac{du}{ds} = \frac{du}{dt} \times \frac{dt}{ds} = \frac{du}{dt} \times \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{f''f^2 - 2f'^2 f}{f^4} \times \frac{1}{f} = \frac{f''}{f^3} - 2\frac{f'^2}{f^4}$$

Où le point (.) indique la dérivation par rapport à s.

Alors :

$$\dot{u} = v - 2u^2 = p(u, v).\boxed{\text{0.5 Point}}$$

Et :

$$\dot{v} = \frac{dv}{ds} = \frac{dv}{dt} \times \frac{dt}{ds} = \frac{dv}{dt} \times \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{f'''f^3 - 3f'f''f}{f^6} \times \frac{1}{f} = \frac{f'''f^2 - 3ff'f''}{f^6}\boxed{\text{0.5 Point}}$$

De $(1')$ on obtient le système :

$$\begin{cases} \dot{u} = p(u, v) = v - 2u^2 \\ \dot{v} = Q_m(u, v) = -(m+2)v + (2m+1)u^2 - 3uv \end{cases} \tag{2}$$

-1.0.1 les points singuliers.

les points singuliers du système (2) sont :

$O(0, 0)$ $\boxed{\text{0.5 Point}}$ et $A(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ $\boxed{\text{0.5 Point}}$.

Pour le point singulier A.

La matrice Jacobienne associée au système (2) au point A est donnée par $\boxed{\text{0.5 Point}}$:

$$J_A = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial u}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & \frac{\partial p}{\partial v}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ \frac{\partial Q}{\partial u}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & \frac{\partial Q}{\partial v}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -\frac{4m+5}{2} & -\frac{2m+1}{2} \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de J_A sont les solutions de l'équation :

$det(J_A - \lambda I) = 0$ $\boxed{0.5 \text{ Point}}$.

Alors

$$\lambda_1 = \frac{-2m + 3 + \sqrt{4m^2 - 12m - 15}}{4} \boxed{0.5 \text{ Point}}, \lambda_2 = \frac{-2m + 3 - \sqrt{4m^2 - 12m - 15}}{4} \boxed{0.5 \text{ Point}}$$

1^{er} **Cas :** Si $\Delta < 0$ pour $\frac{3-2\sqrt{6}}{2} < m < \frac{3+2\sqrt{6}}{2}$ et si :

a- $tr(J_A) < 0 \Longrightarrow$ pour$\frac{3}{2} < m < \frac{3+2\sqrt{6}}{2}$, A est un foyer stable. $\boxed{0.5 \text{ Point}}$

b- $tr(J_A) > 0$ alors pour $frac3 - 2\sqrt{6}2 < m < \frac{3}{2}$, A est un foyer instable.$\boxed{0.5 \text{ Point}}$

c- $tr(J_A) = 0 \Longrightarrow$ $m = \frac{3}{2}$ alors A est un centre. $\boxed{0.5 \text{ Point}}$

2^{eme}**Cas :** si $\Delta > 0$, $m \in \left]-\infty, \frac{3-2\sqrt{6}}{2}\right[\cup \left]\frac{3+2\sqrt{6}}{2}, +\infty\right[$ et si :

a- $\lambda_1 \times \lambda_2 < 0$ alors A point selle. $\boxed{0.5 \text{ Point}}$

b- $\lambda_1 \times \lambda_2 > 0$ et $\lambda_1 + \lambda_2 > 0 \Longrightarrow m \leq \frac{3-2\sqrt{6}}{2}$ alors A est un nœud instable.$\boxed{0.5 \text{ Point}}$

c- $\lambda_1 \times \lambda_2 > 0$ et $\lambda_1 + \lambda_2 < 0 \Longrightarrow m \geq \frac{3+2\sqrt{6}}{2}$ alors A est un nœud stable.$\boxed{0.5 \text{ Point}}$

Pour le point singulier O.

La matrice jacobienne associée au point singulier O est $\boxed{0.5 \text{ Point}}$:

$$J_O = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -(m+2) \end{pmatrix}$$

les valeurs propres de J_O sont : $\lambda_1 = 0$ $\boxed{0.5 \text{ Point}}$, $\lambda_2 = -(m+2)$ $\boxed{0.5 \text{ Point}}$ et les sous espaces invariants associés sont respectivement :

$L_0 = S_p\{(0,1)\}$ $\boxed{0.5 \text{ Point}}$ et $L_1 = S_p\{(1, -(m+2))\}$ $\boxed{0.5 \text{ Point}}$.

En regardant le champ de vecteurs (2) au voisinage du point singulier O alors pour $m \neq -1$, le point singulier O est un point nœud selle (nœud-col (ou pli)) de multiplicité 2. Donc le champ de vecteurs admet une variété centrale W_0 tangente à L_0 et une variété W stable(respectivement instable) si $m > -1$ (respectivement si $m < -1$) tangente au sous-espace L.

2) les trajectoires représentant le système ($\mathcal{P}$) au voisinage du point singulier $O(0,0)$.

Proposition -1.0.1 . *Dans le voisinage de O, la variété W se situe au dessous de L quand $m < -2$ ou $m > -1$ et au dessus de L quand $-2 < m < -1$.*

preuve . *Puisque W est au moins de classe C^2 au voisinage de O et elle est tangente à L* $\boxed{0.5\ Point}$, *on peut la définir dans ce voisinage par $v = V_m(u)$ où V_m est une solution de l'équation :*
$(v - 2u^2)\, v' = -(m + 2)v + (2m + 1)u^2 - 3uv$ *(*), ($v' = \frac{dv}{du} = \frac{Q}{p}$).* $\boxed{0.5\ Point}$ *Et en écrivant :*

$$V_m(u) = -(m + 2)u + \beta u^2 + 0(u^2)$$

et en utilisant (*) on obtient :

$$\beta = -\frac{3(m + 1)}{2\,(m + 2)} \boxed{0.5\ Point}$$

Etudiant le signe de $L - V_m(u)$ obtient le résultat $\boxed{0.5\ Point}$.

Si $m = -1$ alors la variété W est donnée par : $W = \left\{(u, -u) \in \mathbb{R}^2 : u > -\frac{1}{2}\right\}$**.**

-1.0.2 Pour la variété centrale W_0.

Proposition -1.0.2 . *Dans le voisinage de O la variété centrale W_0 ce situe au-dessus de L_0 pour $m < -2$ ou $m > \frac{-1}{2}$ et elle est au dessous de L_0 quand $-2 < m < -1$.*

preuve . *En utilisant la régularité de W_0 au voisinage de O . Pour $|u|$ suffisamment petit on obtient : $v \approx \frac{2(m+1)}{m+2}u^2$ quand $u \longrightarrow 0$ ce qui achève la démonstration.* $\boxed{1.5\ Point}$

Pour $m = -\frac{1}{2}$, W_0 coïncide avec l'axe des u.