CHAPITRE 03 SECTION 01 : Calcul combinatoire et dénombrement

A. Principe additif et multiplicatif

1) Notion de dénombrement

Définitions :
- Un ensemble E est **fini** lorsqu'il admet un nombre fini d'éléments.
- Le nombre d'éléments de E est appelé le **cardinal** de l'ensemble et il est noté : $Card(E)$ ou $|E|$.
- **Dénombrer**, c'est compter le nombre d'éléments que contient un ensemble fini, c'est à dire en déterminer le cardinal.

Exemples :
- L'ensemble E des joueurs d'une équipe de foot est un ensemble fini. Alors $Card(E) = 11$.
- L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels n'est pas un ensemble fini.

Définition : On dit que deux ensembles sont **disjoints**, s'ils n'ont aucun élément en commun.

2) Principe additif

Propriété (principe additif) : Soit $E_1, E_2, \dots, E_p$, p ensembles finis deux à deux disjoints.
Alors $Card\left(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_p\right) = Card(E_1) + Card(E_2) + \cdots + Card\left(E_p\right)$

Exemple :
Soit $E_1 = \{a\,;b\,;c\,;d\}$ et $E_2 = \{\alpha\,;\beta\,;\gamma\}$
Alors E_1 et E_2 sont disjoints et on a :
$Card(E_1 \cup E_2) = Card(E_1) + Card(E_2) = 4 + 3 = 7$

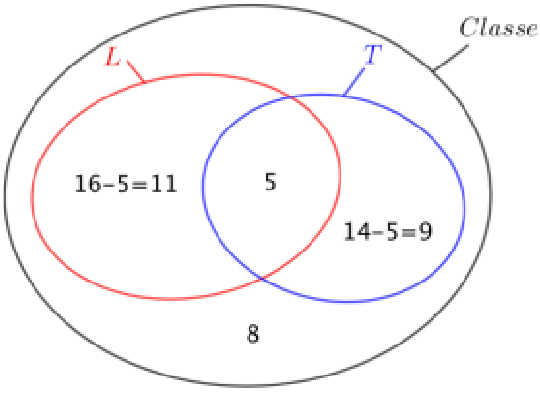
Méthode : Dénombrer en utilisant un diagramme

Dans une classe, deux options sont proposées : latin et théâtre.
On sait que, 16 élèves pratiquent le latin, 14 le théâtre, 5 pratiquent les deux options et 8 n'en pratiquent aucune.
Calculer le nombre d'élèves de cette classe.

Correction
Soit L l'ensemble des élèves pratiquant le latin et T l'ensemble des élèves pratiquant le théâtre.
On a alors : $Card(L) = 16$
$Card(T) = 14$
$Card(L \cap T) = 5$

$$Card(\bar{L} \cap \bar{T}) = 8$$

On ne peut pas utiliser le principe additif car les ensembles L et T ne sont pas disjoints.
On schématise alors la situation à l'aide d'un diagramme :



On en déduit le nombre d'élèves de la classe en utilisant le principe additif sur des ensembles disjoints, soit : $11 + 5 + 9 + 8 = 33$.

3. Principe multiplicatif

<u>Exemple :</u>

On considère les 3 ensembles suivants :

$E_1 = \{renard\ roux, renard\ noir, renard\ blanc\}$

$E_2 = \{femme\ rousse, femme\ brune, femme\ blonde\}$

$E_3 = \{robe\ rouge, robe\ noire, robe\ blanche\}$

Les femmes choisissent une robe et un renard de façon aléatoire.

On appelle produit cartésien $E_1 \times E_2 \times E_3$, l'ensemble de tous les triplets formés d'un élément de E_1, d'un élément de E_2 et d'un élément de E_3.

La photo présente 3 triplets, de gauche à droite :

$(renard\ blanc, femme\ brune, robe\ rouge)$

$(renard\ roux, femme\ blonde, robe\ noire)$

$(renard\ noir, femme\ rousse, robe\ blanche)$

Intuitivement, on peut penser qu'il existe $3 \times 3 \times 3 = 27$ triplets différents.

Définitions : Soit p ensembles finis $E_1, E_2, \dots, E_p$.
- Le produit cartésien $E_1 \times E_2$ est l'ensemble des **couples** (a_1, a_2)
où $a_1 \in E_1$ et $a_2 \in E_2$.
- Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times E_3$ est l'ensemble des **triplets** (a_1, a_2, a_3)
où $a_1 \in E_1$, $a_2 \in E_2$ et $a_3 \in E_3$.
- Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ est l'ensemble des **p-uplets** $(a_1, a_2, \dots, a_p)$
où $a_1 \in E_1$, $a_2 \in E_2$ … $a_p \in E_p$.

UPLET = Liste

Propriété (principe multiplicatif) : Soit p ensembles finis $E_1, E_2, \dots, E_p$. Alors on a :

$$Card(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p) = Card(E_1) \times Card(E_2) \times \dots \times Card(E_p)$$

Méthode : Appliquer le principe multiplicatif pour dénombrer

Un restaurant propose sur sa carte 3 entrées, 4 plats de résistance et 2 desserts.
a) Combien de menus différents composés d'une entrée, d'un plat et d'un dessert peut-on constituer ?
b) Même question si le dessert est une tarte aux pommes imposée.

Correction

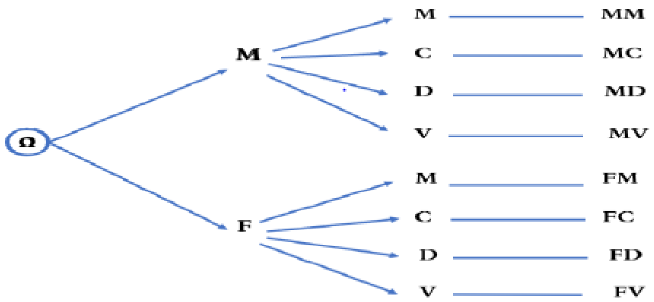
a) Soit E l'ensemble des entrées, P celui des plats et D celui des desserts.
On considère alors les triplets de la forme (entrée, plat, dessert) éléments de $E \times P \times D$.
D'après le principe multiplicatif, on a :
$Card(E \times P \times D) = Card(E) \times Card(P) \times Card(D) = 3 \times 4 \times 2 = 24$.

Il existe 24 menus différents.

b) $Card(E \times P) = Card(E) \times Card(P) = 3 \times 4 = 12$

Il existe 12 menus différents dont le dessert est une tarte aux pommes.

EXEMPLE / Supposons Hommes - femmes et leurs situations familliales (Marié, celibataire , Divorcé et veuf (ve))



B- K-uplets, arrangements et permutations

1. Dénombrement des k-uplets : Arrangement avec répétition

⚠ **Ici, l'ordre des éléments compte et les éléments peuvent se répéter.** ⚠

Exemple :
Si on effectue un produit cartésien d'un ensemble sur lui-même, on note $E \times E = E^2$.

On lance par exemple deux dés à six faces. On note $E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ l'ensemble des résultats possibles pour un dé.
Alors E^2 est l'ensemble des couples possibles correspondants aux résultats du lancer de deux dés. On a par exemple :

$$(1, 2) \in E^2$$
$$(6, 3) \in E^2$$
$$(5, 5) \in E^2$$

D'après le principe multiplicatif, il existe $6 \times 6 = 6^2$ couples possibles.

Propriété : Soit un ensemble fini E à n éléments.
Alors le nombre de k-uplets est égal à :

$$Card(E^k) = n^k$$

$$rA_n^k = n^k$$

2. ARRANGEMENTS sans répétitions OU K-UPLETS D'ÉLÉMENTS DISTINCTS

⚠ **Ici, l'ordre des éléments compte et les éléments ne se répètent pas.** ⚠

Exemple :
On considère l'ensemble $E = \{a\,;b\,;o\,;p\,;r\}$.
- (b, o, a) et (r, a, p) sont des triplets d'éléments distincts de E.
- (b, a, r, b, a, r) n'est pas un 6-uplet d'éléments distincts de E car des éléments se répètent.
- (p, r, o, b, a) est un 5-uplet différent de (b, a, p, r, o). L'ordre des éléments est à prendre en compte.

Calculons par exemple le nombre de triplets d'éléments distincts de E.
- Il existe 5 choix pour la 1ère lettre.
- La 1ère lettre étant fixée, il existe 4 choix pour la 2e lettre. Car il n'y a pas répétition d'éléments.
- Les deux premières lettres étant fixées, il existe 3 choix pour la 3e lettre.

En appliquant le principe multiplicatif, le nombre de triplets d'éléments distincts de E est égal à : $5 \times 4 \times 3 = 60$.

Définition : Soit E un ensemble à n éléments. Et $k \leq n$.
Un **k-uplets d'éléments distincts** de E est un k-uplet pour lequel tous les éléments sont différents.
Un k-uplets d'éléments distincts est également appelé **arrangement** de k éléments parmi n.

Définition : On appelle **factorielle n** le produit de tous les nombres entiers de 1 à n. Et on note : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$

Remarque : $n!$ se lit

n factorielle

Exemples :
$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$
$100! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 99 \times 100$
$1! = 1$
$0! = 1$ par convention

Propriété : Soit E un ensemble à n éléments.
Le nombre de k-uplet d'éléments distincts de E est égal à :

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

3. Permutations (sans répétitions) = n de n

⚠ **Ici, l'ordre des éléments compte et les éléments ne se répètent pas.** ⚠

Exemple : On considère l'ensemble $E = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\}$.
$(1, 3, 2, 5, 4)$ et $(5, 1, 2, 3, 4)$ sont des 5-uplets qui utilisent tous les éléments de E.
On les appelle des permutations de E.

Définition : Soit E un ensemble à n éléments.
Une **permutation** de E est un n-uplet éléments distincts de E.

Remarque : Une permutation d'un ensemble à n élément est un n-uplet d'un ensemble à n éléments. Pour une permutation, on a $k = n$.

Propriété : Soit E un ensemble à n éléments.
Le nombre de permutations de E est égal à $n!$.

Exemple :
Il existe $3! = 6$ façons différentes que 3 personnes s'assoient sur un banc à 3 places.

$$P_n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots\ldots \times 3 \times 2 \times 1$$

$$P_n = n!$$

Permutations avec répétitions :

$$P_n^{n_1, n_2, \ldots\ldots n_k} = \frac{n!}{n_1!\ n_2!\ n_3! \ldots \ldots n_k!}$$

C. COMBINAISONS

1) Nombre de combinaisons

⚠ **Ici, l'ordre des éléments n'a pas d'importance et les éléments ne se répètent pas.** ⚠

Exemple : On considère l'ensemble $E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$.
Le sous-ensemble $\{1 ; 2 ; 3\}$ est appelée une combinaison de E à 3 éléments.
Le sous-ensemble $\{2 ; 5\}$ est appelée une combinaison de E à 2 éléments.
Pour une combinaison, l'ordre n'a pas d'importance. Ainsi $\{1 ; 2\}$ et $\{2 ; 1\}$ correspondent à la même combinaison de E.

Définition : Soit E un ensemble à n éléments. Et $k \leq n$.
Une **combinaison** de k éléments de E est un sous-ensemble de E.

Propriété : Soit E un ensemble à n éléments.
Le nombre de combinaisons de k éléments de E est égal à :

$$\frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Ce nombre se note : $\binom{n}{k}$.

Cas particuliers : Pour tout entier naturel n : $\binom{n}{0} = 1$ $\binom{n}{n} = 1$ $\binom{n}{1} = n$

Méthode : Dénombrer des combinaisons

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Une classe composée de 18 filles et 16 garçons va élire les 4 délégués. Dans cet exercice, on ne distingue pas les délégués et les délégués-adjoints.
a) Combien existe-t-il de possibilités pour cette élection ?
b) Emma dit qu'elle ne souhaite pas être élue si Bastien est élu. Dans ces conditions, combien existe-t-il de possibilités ?

Correction
a) On compte le nombre de combinaisons de 4 élèves parmi $18 + 16 = 34$ élèves, soit :

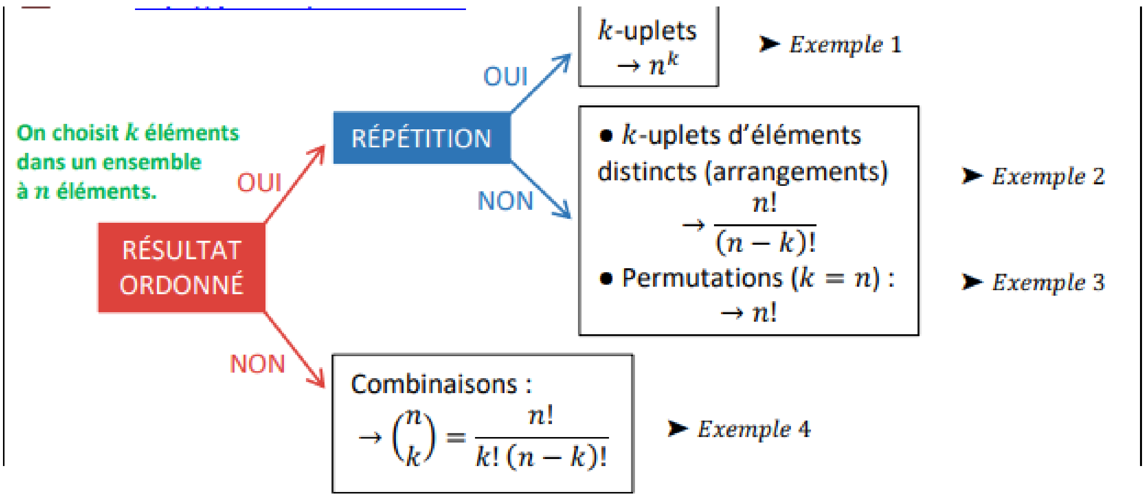
$$\binom{34}{4} = \frac{34!}{4!\,(34-4)!} = \frac{34!}{4!\,30!} = \frac{31 \times 32 \times 33 \times 34}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 46376$$

b) On commence par compter le nombre de possibilités tel que Emma et Bastien sont élus.
Si Emma et Bastien sont élus, il reste à choisir 2 élèves parmi 32, soit le nombre de combinaisons de 2 élèves parmi 32 élèves, soit encore :

$$\binom{32}{2} = \frac{32!}{2!\,(32-2)!} = \frac{32!}{2!\,30!} = \frac{31 \times 32}{1 \times 2} = 496$$

Ainsi dans ce cas, le nombre de possibilités est égal à $46376 - 496 = 45880$.

RESUME



Combinaison avec répétition

Exemple : soit un ensemble de 6 chiffres. Quel est le nombre de sous ensemble de 3 chiffres tirés avec répétition ? combinaison avec répétition

$$K_n^k = \mathrm{C}_{\mathrm{n+K-1}}^{\mathrm{k}} = \frac{(\mathrm{n+K-1})!}{\mathrm{k}!\,(\mathrm{n-1})!}$$

Quelques propriétés :

$$C_n^1 = n$$

$$C_n^0 = C_n^n = 1$$

A Partir du triangle de Pascal : on a

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$