Introduction à la programmation linéaire en variables entières

Belgacem Rachid

Univ de Chlef(UHBC)

8 février 2021

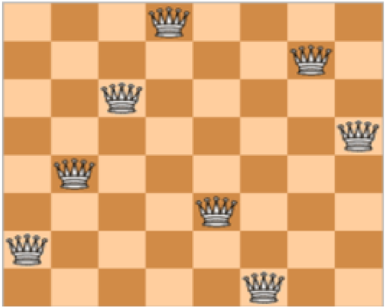
Un exemple de problème

Un exemple de problème

De nombreux problèmes d'optimisation en pratique, peuvent être modélisés comme un programmes linéaires dont les variables soit astreintes à être entières ou même binaires.

Comment placer n dames sur un échiquier de $n \times n$ cases sans que les dames ne puissent se menacer mutuellement ?

Une solution pour $n = 8 \rightarrow$



Résolution naïve :
Vérifier les n^n solutions candidates !

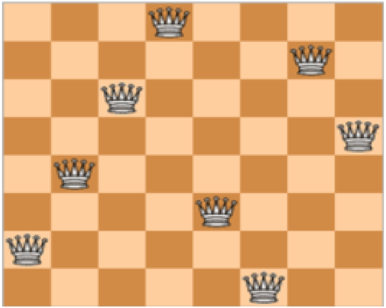
Même lorsque $n = 4$ il y a 256 posibilités

Un exemple de problème

De nombreux problèmes d'optimisation en pratique, peuvent être modélisés comme un programmes linéaires dont les variables soit astreintes à être entières ou même binaires.

Comment placer n dames sur un échiquier de $n \times n$ cases sans que les dames ne puissent se menacer mutuellement ?

Une solution pour $n = 8 \rightarrow$



Résolution naïve :
Vérifier les n^n solutions candidates !

Même lorsque $n = 4$ il y a 256 posibilités

Un exemple de problème : Sac a dos

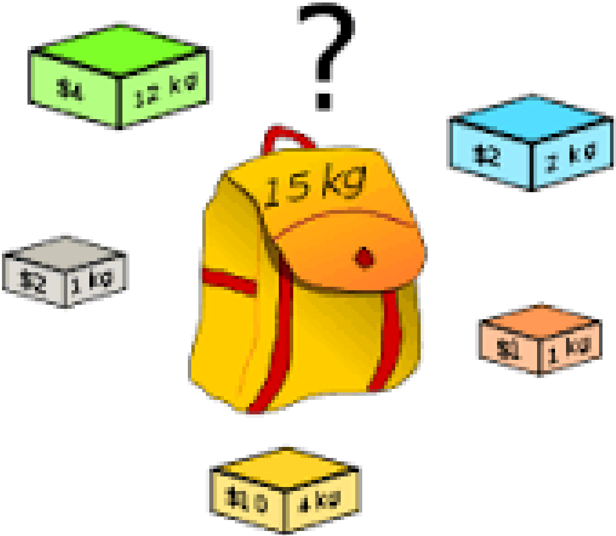


Figure –

Introduction

La programmation en nombres entiers exprime l'optimisation d'une fonction linéaire soumise à un ensemble de contraintes linéaires sur des variables entières dit les contraintes d'intégrité.
Dans le problème générale de la programmation linéaire (LP), toutes les inconnues peuvent varier de façon continu, on utilise généralement l'algorithme simplexe pour résoudre ce problème (LP), cependant les solution obtenues sont des résultats exactes (valeurs réelles). Pour un problème linéaire discret (ILP), la réalisation se fait à l'unité de production d'un certain nombre de tables, nombre de bouteiller d'eau ...ect.
La solution optimale de ce problème donc appartient à $\mathbb{N}$, puisque il est impossible de fabrique 2.5 tables, dans ce cas, soit on fabrique 2 ou 3 tables.
Si on essaie alors d'arrondir à une valeur entière voisine, il se peut que la solution ainsi trouvée soit éloignée de la solution optimale, ou même ne soit pas réalisable. Dans telles situations, il est donc souhaitable d' utiliser une méthode plus adaptée.

Définition

Definition

Un programme linéaire à variables entières mixtes noté "$MILP$"(Mixed Integer Linear Programming) est donné par la matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, les vecteurs $c \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $b \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ et un nombre $p \in \mathbb{N}^*$. L'objectif du problème est de trouver un vecteur x solution du problème d'optimisation suivant :

$$(MILP)\begin{cases} \max\ z = \ c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}_+^p \times \mathbb{R}^{n-p}. \end{cases}$$

Si $p = 0$ alors il n'y a pas de contraintes d'intégralité, donc nous obtenons le programme linéaire (LP). D'autre part, si $p = n$, on parle d'un programme linéaire en nombres entiers noté "ILP" (Integer Linear Programming) :

$$(ILP)\begin{cases} \max\ z = \ c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}_+^n, \end{cases} \tag{1}$$

Définition

dans un (ILP), si $x \in B = \{0, 1\}$, nous avons un programme linéaire binaire noté "BIP" (Binary integer programming) :

$$(BIP) \begin{cases} \max \ z = \ c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \\ x \in \{0, 1\}^n. \end{cases}$$

Complexité

Les problèmes généraux de programmation linéaire en variables entières (ILP), $(MILP)$ ou (BIP) sont beaucoup plus difficiles à résoudre que le problème de programmation linéaire en variables continues (LP). L'étude initiale du problème (LP) nous a montré immédiatement que :

- L'obtention de la solution optimale ne nécessite pas de s'intéresser qu'à un nombre fini de solutions, à savoir les seuls sommets du polyèdre $D = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$.
- Ces sommets sont facilement caractérisables et ils peuvent donc être aisément déterminés.

Par contre, dans les situations (ILP), $(MILP)$ ou (BIP), la solution optimale n'est, en général, pas un sommet de D et donc un point intérieur ou point situé n'importe où sur la frontière. On perd ainsi toute caractérisation particulière de la solution optimale qui est, pour cette raison, bien difficile à déterminer.

Relaxation des contraintes

Une technique simple de relaxation consiste à ignorer certaines contraintes du problème. On obtient un problème dont la solution optimale est plus facile à calculer. Par exemple soit un polyèdre D défini par deux ensembles de contraintes :

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n : A_1 x \leq b_1, A_2 x \leq b_2\}.$$

La suppression d'un des deux ensembles de contraintes - par exemple le second - permet d'obtenir un polyèdre convexe

$$D^{'} = \{x \in \mathbb{R}^n : A_1 x \leq b_1\},$$

tel que le problème relaxé $(RILP)$ définie par

$$(RILP) \left\{ \begin{array}{cc} & z^* = \max \ c^\top x \\ \text{s.t.} & x \in R^{(i)} = D^{'(i)} \bigcap \mathbb{R}^n_+ \end{array} \right.$$

est un problème classique, simple à résoudre. Le problème relaxé $(RILP)$ est alors appelé sous problème du problème (ILP).

Remarque

Le problème d'affectation est une relaxation du problème du voyageur de commerce TSP.

Relaxation linéaire continue

La relaxation linéaire continue est basé sur un changement des contraintes d'intégralité à des contraintes non-d'intégralité.
On considère le (ILP) (donné par (2.1))dont l'ensemble S des solutions admissibles est fini.
La relaxation (RILP) de (ILP) est le (LP) (donné par (1.1)). Il s'agit d'un relâchement des contraintes d'intégrité $x_j \in \mathbb{N}\ \forall j = 1, ..., n$ en $x \in \mathbb{R}_+^n$.

Remarque

1- Pour un problème de maximisation (resp minimisation), la solution optimale du (PL) donne une borne supérieure (resp inférieure) de la solution optimale du (ILP) ie :

$$z^{PL} \geq z^{IPL}(resp \quad z^{PL} \leq z^{IPL}).$$

2- La relaxation linéaire ne donne pas seulement une borne supérieure ou inférieure, mais par fois la solution optimale si cette ci est entier (voir l'exemple 2).
3- Une méthode immédiate pour résoudre efficacement un (ILP) consiste à résoudre le problème relaxé (LP) puis à prendre comme solution la solution la plus proche.

Exemple

Example

Soit le problème (ILP) suivant :

$$(ILP)\begin{cases} \max\ z = \ y \\ -x+y \leq 1 \\ 3x+2y \leq 12 \\ 2x+3y \leq 12 \\ x, y \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

En variables continues, la solution optimale est $x = 9/5, y = 14/5$, qui n'est pas entière.
Un arrondi de cette solution serait $x = 2$ et $y = 3$, qui n'est pas admissible pour (ILP) et n'est pas la solution entière du problème. La solution entière du problème est $(x, y) = \{(1, 2), (2, 2)\}$, on remarque même qu'elle est éloignée de la solution optimale continue.

Exemple

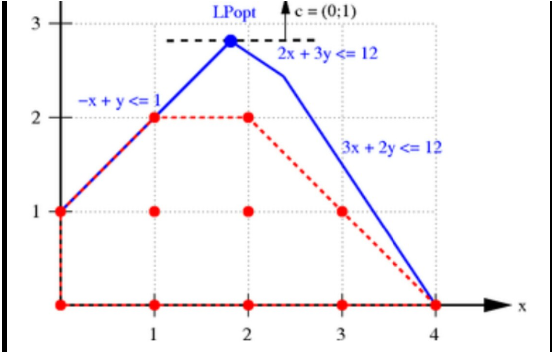


Figure – Représentation graphique des solutions admissibles pour l'exemple (2.1)

Un exemple de problème

Example

Soit le problème (ILP) suivant :

$$(ILP)\begin{cases} z & = \max x_1 + 2x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_i \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

La relaxation linéaire de (ILP) a une solution optimale $x^* = (3, 3)$. Comme les $x_i i = \overline{1, 2}$ sont entier, alors le problème (ILP) associé a la même solution.

Problème d'affectation linéaire

Le problème d'affectation linéaire (LAP" Linéaire Asignment Problem") est un problème particulier de problème linéaire en variables binaires. Il consiste à affecter n tâches à n agents. Pour tout couples $(i,j)(i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n})$, l'affectation de i à j entraîne un coût de réalisation noté c_{ij} $(c_{ij} \geqslant 0)$. Chaque agent peut réaliser une unique tâche (et vice versa) .
Il s'agit donc de définir une permutation de n objets ou une bijection de $\{1,...,n\}$ sur $\{1,...,n\}$. L'objectif est de minimiser le coût total des affectations afin de réaliser toutes les tâches.

Formulation de problème d'affectation linéaire

Désignons par $i = \overline{1, n}$ les agents, et $j = \overline{1, n}$ les tâches. introduisons les n^2 variables binaires et $2n$ contraintes.
Les variables de décisions sont définit comme suit :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si l'agent réalise la tâche } j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les contraintes du problème d'affectation s'écrivent sous la forme :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \text{pour } i = \overline{1, n}.$$

Chaque agent i fait une seule tâche j

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \text{pour } j = \overline{1, n}.$$

Chaque tâche j est réalisée par un seul agent i

Formulation de problème d'affectation linéaire

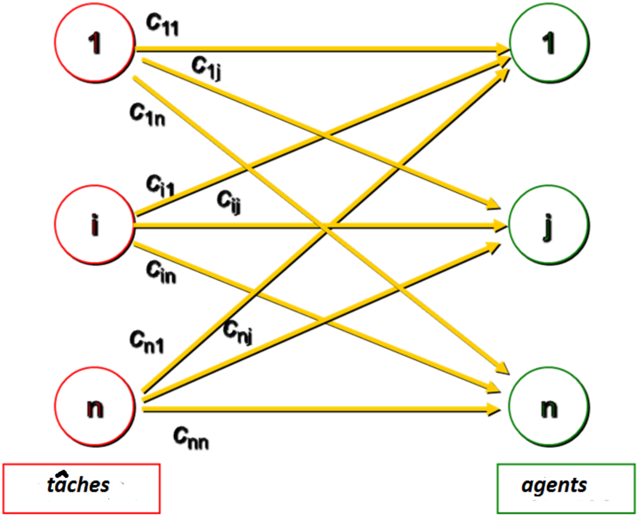


Figure – Problème d'affectation linéaire

Formulation de problème d'affectation linéaire

Le problème d'affectation linéaire s'écrit sous la forme :

$$(LAP)\begin{cases} \min \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = \overline{1,n} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = \overline{1,n} \\ x_{ij} \in \{0,1\} \qquad i = \overline{1,n} \qquad j = \overline{1,n}. \end{cases}$$