Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Université Hassiba Benbouali de Chlef
Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة حسيبة بن بوعلي بالشلف
كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي
قسم الرياضيات

Année Universitaire :2017/2018 **Niveau** :$1^{ère}$ *Année M.A.S.* **Module** :*Processus Stochastiques* 1

Examen final

I. Considérons la chaîne de Markov d'espace d'états $\mathbf{E} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ et de Matrice des transitions:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

1. Tracer le diagramme des transitions et déterminer les classes de communication.
2. Identifier les classes récurrentes et les classes transitoires.
3. Calculer la période de chaque classe.
4. Laquelle (lesquelles) des classes admettant une loi limite? Justifier.

II. Deux satellites de communication sont placés sur une orbite. La durée de vie d'un satellite est exponentiellement distribuée de moyenne $1/\mu$, $\mu > 0$. Si l'un tombe en panne, son remplaçant sera envoyé. Le temps nécessaire pour préparer et envoyer un remplaçant est exponentiellement distribué de moyenne $1/\lambda$, $\lambda > 0$. Soit X_t : le nombre des satellites sur l'orbite à l'instant t.

Supposons que $(X_t)_{t\geq 0}$ est une C.M.T.C.

1. Comment appelle-t-on ce type de C.M.?
2. Tracer le diagramme des transitions.
3. Trouver la loi limite de cette chaîne.
4. À long-terme, quel est le nombre moyen des satellites sur l'orbite? c.à.d. trouver $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{E}\left[X(t)/X(0) = i\right]$ *pour* $i = 0, 1, 2$.

III. Considérons les processus de Naissance et de Mort simples suivants

1. Soit $(X_1(t))_{t\geq 0}$ un processus dit de $Mort\ Pure$, i.e. un processus de Naissance et de Mort avec des taux de naissance nuls. Supposons que l'espace d'états est fini, $\mathbf{E} = \{0, 1, 2, ..., N\}$, et considérons les taux de mortalité $\mu_1, ..., \mu_N$. Soit T_e *le temps d'extinction*, i.e. le temps nécessaire pour que $X_1(t)$ atteigne zéro (la définition formelle est $T_e \overset{\Delta}{=} \inf\{t > 0 : X_1(T_e) = 0\}$).

(a) Tracer le diagramme des transitions.

(b) Calculer le temps moyen d'extinction sous la condition que $X_1(0) = N$, (i.e. $\mathbf{E}[T_e \,/ X_1(0) = N]$).

2. Soit $X_2(t)$ un processus de Naissance et de Mort d'espace d'états $E = \{0, 1, 2, ..., 2N\}$, de taux de naissance

$$\lambda_k = \begin{cases} 0 \text{ } pour \text{ } k = 0, ..., N-1 \\ \lambda \text{ } pour \text{ } k = N, ..., 2N-1 \end{cases}$$

avec $\lambda > 0$, et de taux de mortalité

$$\mu_k = \begin{cases} \mu \quad pour \quad k = 1, ..., N \\ 0 \text{ } pour \text{ } k = N+1, ..., 2N \end{cases}$$

avec $\mu > 0$.

(a) Tracer le diagramme de transition.

(b) Supposons que $X_2(0) = N$ et soit T le temps de la première atteinte de l'état "0" ou de l'état "$2N$" (en d'autres termes, le temps de la première atteinte de l'une des extrémités).

- Calculer la moyenne de T (i.e. $\mathbf{E}[T \,/ X_2(0) = N]$).

IV. Soit $(N_t)_{t \geq 0}$ un *processus de Poisson homogène* d'intensité $\lambda > 0$. Soient $s, t \in \mathbb{R}_+$ avec $0 < t < s$.

1. Calculer les probabilités suivantes: (Conditionner par l'évènement antérieur)

(a) $P(N_s = 2/N_t = 1)$;

(b) $P(N_s = 2 \text{ } et \text{ } N_t = 1)$;

(c) $P(N_s - N_t = 1)$.

2. Montrer que $(N_t)_{t \geq 0}$ est à accroissements stationnaires.

V. **Questions de cours**

- Répondre par **Vrai** ou **Faux**

(a) Pour une C.M. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}, X_{n+1}$ et X_{n-1} sont indépendantes pour toute n.

(b) La période d'un état absorbant est infinie.

(c) On peut avoir une seule classe récurrente nulle dans une C.M.

(d) Une C.M. d'espace d'états fini peut avoir un état récurrent nul.

(e) Le temps de retour à un état transitoire est toujours infini.

(f) Si tous les états sont récurrents alors la C.M. est irréductible.

(g) Une C.M. peut avoir plus qu'une loi invariante.

BONUS: X est une *variable aléatoire absolument continue*.Montrer que : X est sans mémoire si et seulement si elle est *exponentiellement* distribuée.