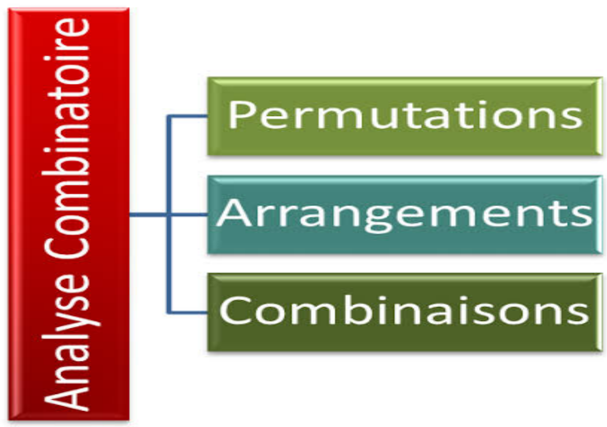
Université de Blida 1
Faculté des sciences
Département de 1 er année Tronc commun MI
Module : Introduction aux probabilités et aux statistiques descriptives

Chapitre 4
Analyse combinatoire



Réalisé par : Mme Messaoudi N
Mail : messlina2012@ gmail.com
Année universitaire : 2019/2020

0.1 Introduction :

L'analyse combinatoire est une branche des mathématiques qui étudie le dénombrement (ou le comptage) des objets et permet de répondre à des questions telles que :

▶ Combien de nombres différents de 4 chiffres peut-on former ?

▶ Dans une classe de 24 étudiants, on doit élire deux étudiants, délégué et son adjoint de la classe. Combien existe-t-il de paires différentes possibles ?

Le but de ce chapitre est d'apprendre à dénombrer des ensembles finis dans des conditions variées. La connaissance des méthodes de dénombrement est indispensable au calcul élémentaire des *probabilités.*

Les méthodes de dénombrement sont classées selon 3 catégories :

• Les arrangements • Les permutations • Les combinaisons

Exemple introductif : On considère un ensemble E ayant 3 éléments, E $= \{a, b, c\}$ choisir 2 éléments dans cet ensemble peut se faire de plusieurs manières différentes suivant que l'on ordonne les éléments et que l'on autorise la possibilité de choisir plusieurs fois le même objet ou non.

On visualise tous les cas possibles dans le tableau ci-dessous :

	répétition	sans répétition
avec ordre	aa ab ac ba bb bc ca cb cc	ab ac ba bc ca cb
sans ordre	aa ab ac bb bc cc	ab ac bc

0.2 Principe fondamentale de dénombrement (principe de multiplication)

Problème : On dispose de k cases distinctes et l'on désire placer un objet dans chacune des cases. Le choix du :

1 er objet se fait parmi les objets d'un ensemble A_1,
2 ème objet se fait parmi les objets d'un ensemble A_2,
3 ème objet se fait parmi les objets d'un ensemble A_3,
$\vdots$
k ème objet se fait parmi les objets d'un ensemble A_k,

Question : De combien de façons différentes peut-on le faire ?

On peut résoudre ce problème en utilisant une des méthodes suivantes :
- La méthode d'énumération **(diagramme en arbre)**
- La méthode de dénombrement **(principe de multiplication)**

a) <u>La méthode d'énumération (diagramme en arbre)</u>

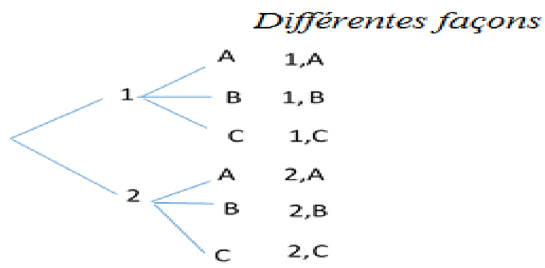
Diagramme en arbre permet de dénombrer des choix d'éléments pris dans un certain ordre. On le trace comme suit :

Au premier niveau, une première série de branches indique les choix d'un premier élément ;

Au deuxième niveau, une autre série de branches indique les choix d'un deuxième élément;
Etc.

Pour dénombrer tous les choix, il suffit de compter les branches au bout de l'arbre.

Exemple 0.1. *On dispose de 2 cases et on désire placer un objet dans chaque case. Si A_1 = {1, 2} et A_2 = {A, B, C}, de combien de façons différentes peut-on le faire ?*



On remarque que le nombre de *façons différentes* pour placer un objet dans chacune des deux cases égal à : (6) qui est le produit du nombre de possibilités différentes (2) de placer un objet de A_1 dans une première case, par le nombre de possibilités différentes (3) de placer un objet de A_2 dans une deuxième case (après que la première case a été remplie).

La méthode d'énumération devient impossible à appliquer lorsque le nombre d'objets augmente. Il est néanmoins possible d'obtenir un tel dénombrement sans énumération grâce au principe de multiplication.

b) La méthode de dénombrement (principe de multiplication)

Principe de multiplication : Soit un ensemble A_1 constitué de n_1 objets distincts et un ensemble A_2 constitué de n_2 objets distincts. Le nombre de façons différentes de placer un objet de A_1 dans une première case et un objet de A_2 dans une seconde case est donné par :

$$n_1 \times n_2$$

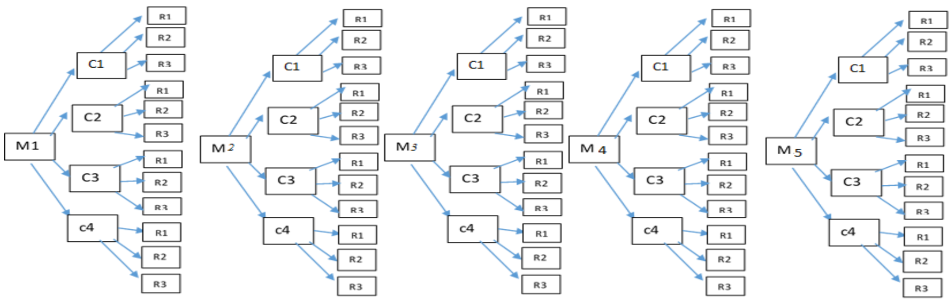
Le principe de multiplication se généralise à plusieurs cases et la solution du problème de la page précédente sera :

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times ... \times n_k = \prod_{i=1}^{k} n_i$$

$n_1 = card(A_1)$
$n_2 = card(A_2)$
...
$n_k = card(A_k)$
Cardinal (A) : le nombre d'éléments de l'ensemble A.

Exemple 0.2. *Supposons que pour vous aider à choisir un objet (une voiture), on vous pose trois questions sur (modèle, couleur , motorisation).*

Pour le modèle (M), on a 5 propositions différentes;
la couleur (C), il y a 4 couleurs ,
la motorisation (R), on vous propose 3.
M= $\{M1, M2, M3, M4, M5\}$, $C = \{C1, C2, C3, C4\}$, $R = \{R1, R2, R3\}$.



Le nombre total de voitures différentes est : $|M| \times |C| \times |R| = 5 \times 4 \times 3 = 60$ voitures.

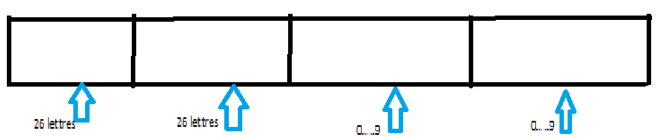
Exemple 0.3. *Un restaurant affiche le menu suivant :*

Potage	Entrée	Plat principal	Dessert
tomate	Crevette	agneau	gâteau
Légume	Salade	boeuf	fruit
		truite	

Combien existe-t-il de choix différents de repas complets?
Comme $|Potage| = 2$, $|entrée| = 2$, $|Plan\ principal\ | = 3$, $|Dessert| = 2$. Donc il y a :

$$2 \times 2 \times 3 \times 2 = 24 \ \text{ choix différents de repas complets}$$

Exemple 0.4. *Quel est le nombre de code que l 'on peut former où les deux premiers sont des lettres de l' alphabet français et les deux derniers sont des chiffres?*



Le code contient 4 cases, les deux premières sont des lettres et les deux dernières sont des chiffres.

Case comporte une lettre : on choisit une lettre parmi les 26 lettres de l' alphabet français (A,....,Z). Donc, on a 26 choix.

Case numérique : on a le choix d 'un chiffre parmi les 10 chiffres $(0, 1, 2, 3, ..., 9)$. Alors on a : 10 choix.

$$\text{Au total, on peut former : } 26 \times 26 \times 10 \times 10 = 67600 \text{ codes possibles}$$

Exemple 0.5. *Combien y a t il de nombres de* 4 *chiffres dans le cas où :*

a) Les nombres dont les chiffres sont différents (sans répétition):
(un nombre de 4 chiffres ne commence pas par 0) :
Soit A$_j$ l' ensemble des possibilités (j=1,2,3,4);
$|A_1| = 9, |A_2| = 10, |A_3| = 8, \ |A_4| = 7.$
D où : $9 \times 10 \times 8 \times 7 = 5040$ mots.
b) Les 4 chiffres sont quelconques (le premier doit être différent de 0)
$|A_1| = 9, |A_2| = 10, |A_3| =10, |A_4| = 10.$ D où : $9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9 \times 10^3$ mots.

Exemple 0.6. *Combien y a t il de mots (avec ou sans signification) de 4 lettres l' alphabet français dans le cas où :*

a) les mots sont quelconques : 26^4

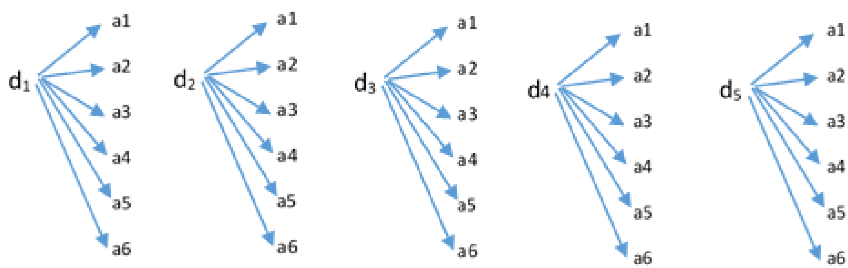
b) les mots sont différents (sans répétition): $26 \times 25 \times 24 \times 23$.

Exemple 0.7. *On lance deux dès équilibrés. Combien de couple peut on former?*

$\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $|\Omega_1| = 6$.
$\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $|\Omega_2| = 6$.
C=$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), ..., (6, 6)\}$ ensemble des couples.
D où, le nombre de couples est $|C| = |\Omega_1| \times |\Omega_2| = 36$ couples.

Exemple 0.8. *Dans les élections des comités pédagogiques,* 5 *étudiants se présentent pour la place de délégué et* 6 *pour celle d'adjoint.*

$\Omega_1 = \{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5\}$; $\Omega_2 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$
Un comité : (Délégué et son adjoint)



Le nombre total de comités : $|\Omega_1| \times |\Omega_2| = 5 \times 6 = 30$.

0.3 Arrangement

Définition 0.9. *Etant donné n éléments distincts, on appelle arrangement (ou arrangement sans répétition) ou de ces n éléments pris p à p, tout groupe formé par p éléments **distincts** choisis dans **un certain ordre** parmi les n éléments.*

Exemple 0.10. *Les 3 lettres (a,b,c) prises deux à deux conduisent aux* 6 *arrangements suivants :*

$$ab, ba, ac, ca, bc, cb$$

Remarque 0.11. *Les arrangements ab et ba sont distincts (ab ≠ba) .*

Pour construire un tel arrangement :

supposons que l'on dispose de p cases numérotés de 1 à p dans lesquelles nous plaçons les p éléments choisis, chaque case ne contenant qu'un élément à la fois

1	2	3	4	5	......	p

p éléments choisis parmi n

Pour remplir la 1 ère case $\rightarrow$ on doit choisir un élément quelconque parmi n éléments, choix qui peut s'effectuer de n façons différentes.

Pour remplir la deuxième case $\rightarrow$ le choix portera sur les $n-1$ éléments restants. Pour remplir les 2 premières cases $\rightarrow$ le nombre total de choix possibles est : $n \times (n-1)$; et ainsi de suite....

Pour la p ème case $\rightarrow$ le choix portera sur $n-(p-1)$ éléments.

Donc, **le nombre total d'arrangements** de p éléments choisis parmi n est :

$$A_n^p = n \times (n-1) \times ... \times (n-p+1)$$

Ou bien :

$$A_n^p = \begin{array}{l} \dfrac{n!}{(n-p)!}, \text{ si } 0 \leqslant p \leqslant n \\ 0 \quad \text{sinon} \end{array}$$

(par convention $0! = 1$).

Exemple 0.12. *Combien y t-il de mots (avec ou sans signification) de* 4 *lettres peut on former avec l'alphabet français , si une lettre ne figure qu'une seule fois.*

$A_{26}^4 = \frac{26!}{(26-4)!} = \frac{26!}{22!} = 26 \times 25 \times 24 \times 23 = 358\ 800$ mots

Exemple 0.13. *Combien y t-il de manières d'assoir* 8 *personnes sur banc qui comporte que* 4 *places.*

Pour occuper la 1 er place , il y a 8 manières.
Pour occuper la 2 ème place , il y a 7 manières.
Pour occuper la 3ème place , il y a 6 manières.
Pour occuper la 4 ème place , il y a 5 manières.
On obtient $A_8^4 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$ manières.

0.4 Arrangement avec répétition (ou p-arrangement , ou p-listes)

Définition 0.14. *: On appelle $p-$arrangement avec répétition (ou $p-$listes) de p éléments parmi n éléments distincts, une suite ordonnée de ces p éléments avec répétition d'un ou plusieurs de ces éléments.*

Exemple 0.15. *Les 3 lettres (a,b,c) prises deux à deux conduisent aux* 9 *($2-$listes) suivantes : $aa, ab, ac, bb, ba, bc, cc, ca, cb$*

Considérons n éléments distincts et p cases à remplir (p peut être inférieur, égal ou supérieur à n).

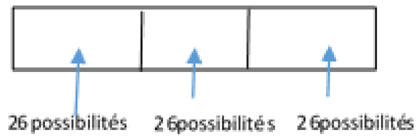
Pour remplir la 1 ère case $\rightarrow$on a le choix de n éléments.
Pour remplir la 2 ème case $\rightarrow$ on a toujours le même choix : n possibilités. ,
Pour remplir la p ème case $\rightarrow$ on a aussi n possibilités.
On conclut que:

Le nombre d'arrangements avec répétition de n éléments pris p à p (ou p$-listes$) est :

$$A_n^p = \underbrace{n \times n \times ... \times n}_{p\ fois} = n^p$$

Exemple 0.16. *Combien de mots de 3 lettres peut on former avec l'alphabet français?*

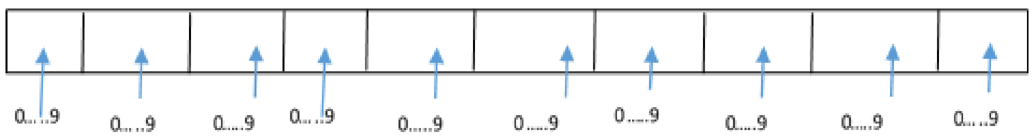
On a 26 lettres de l'alphabet.



Le nombre de mots est $26 \times 26 \times 26 = 26^3$.

Exemple 0.17. *La capacité d'un standard téléphonique de numéro de* 10 *chiffres, chaque chiffre peut être choisi de* 10 *façons. Combien de lignes téléphonique sont possibles ?*

On aura : $10 \times 10 \times 10.... \times 10 = 10^{10}$ lignes téléphonique possible.



Exemple 0.18. *Le nombre de tirages différents de p boules dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n est égal à n^p lorsque les tirages sont non exhaustifs (c'est à dire avec remise après chaque tirage).*

En résumé :
L'arrangment sans répétition $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
L'arrangement avec répétition (p$-$listes) : $A_n^p = n^p$

0.5 Permutations de n éléments

0.5.1 Permutation sans répetition

Définition 0.19. *On appelle permutation sans répétition (ou permutation) de n éléments distincts, toutes suites ordonnées de n objets ou tout arrangement de n éléments parmi n.*

Exemple 0.20. *Les permutations des trois lettres (a,b, c) sont :*

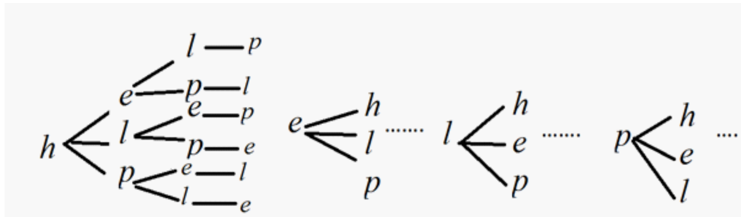
$$abc, acb, bac, bca, cab, cba$$

La permutation de n éléments constitue un cas particulier d'arrangement sans répétition de p éléments pris parmi n lorsque $p = n$.

Le nombre P_n des permutations de n éléments est égal :

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{0!} = n! = n \times (n-1) \times ...3 \times 2 \times 1$$

Exemple 0.21. *Combien de mots différents peut on écrire avec les lettres du mot :* ***help.***



Comptons le nombre de possibilité :
1 er lettre : 4 possibilités
2 ème lettre : 3 possibilités
3 ème lettre :2 possibilités
4 ème lettre : 1 possibilité
Au total : $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4!$ =24 mots possibles.

Exemple 0.22. *De combien de façons différentes, 3 garçons et 2 filles peuvent-ils prendre place sur un banc ?* G_1 G_2 G_3 F_1F_2

La 1 er personne a le choix entre 5 places
La 2 ème personne a le choix entre 4 places
La 3 ème personne a le choix entre 3 places
La 4 ème personne a le choix entre 2 places
La 5 ème personne a le choix entre 1 place.
On a donc $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ places

0.5.2 Permutations avec répétition

On considère n éléments non tous distincts. On les répartit en k groupes, les éléments de chaque groupe sont identiques

$$\underset{n_1}{(x_1, x_1, ..., x_1)} \quad ; \underset{n_2}{(x_2, x_2, ..., x_2)} \quad ;......; \quad \underset{n_k}{(x_k, x_k, ..., x_k)}$$

avec $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$

Le nombre de permutations avec répétition de ces n **éléments est** :

$$P^n_{n_1,n_2,...,n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

Exemple 0.23. *Combien de mots différents peut on former à partir des lettres du mot* ***Tasse.***

Il y a 5! permutations quand les "deux s" sont distincts.

On remarque que $\begin{cases} Ta\ s_1s_2e \\ Ta\ s_2s_1e \end{cases}$ forment le même mot (quand on supprime les indices).

Il y a 2! façons différentes de placer les "2s".

Par conséquent , on aura :

$$\frac{5!}{2!} = 60 \text{ mots différents}$$

Exemple 0.24. *Combien de mots peut on former avec les lettres du mots ARRANGER*

Le nombre de lettres du mot est $n = 8$
Le nombre de répétition de la lettre A est $n_1 = 2$
Le nombre de répétition de la lettre R est $n_2 = 3$
Le nombre de répétition de la lettre N est $n_3 = 1$
Le nombre de répétition de la lettre G est $n_4 = 1$
Le nombre de répétition de la lettre E est $n_5 = 3$
On obtient $:\frac{8!}{2!3!1!1!1!} = 3360$ mots.

Exemple 0.25. *De combien de façons peut on ranger 5 boules blanches (B), 3 noires(N) et 2 rouges(R) (on suppose que les boules de même couleur sont identiques).*

Le nombre total de boules est $n = 10$
On dévise les boules en trois groupes d'éléments identiques
BBBBB NNN RR
Le nombre de rangement est : $\frac{10!}{5!3!2!} = 2520$

0.6 Combinaisons

Définition 0.26. *On appelle combinaison (ou tous simplement combinaison) de p éléments parmi n, une partie de p éléments distincts (sans répétition) et non ordonnée (on ne tient donc pas compte de l'ordre dans lequel se trouvent ces éléments).*

Exemple 0.27. *On considère l'ensemble* $\{a, b, c\}$ *. Le nombre de parties à deux éléments sont :* $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$.

Le nombre de combinaison est donné par :

$$C_n^p = \begin{cases} \frac{n!}{p!(n-p)!}, & \text{si } 0 \leqslant p \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(C_n^p est appelé le coefficient binomial).

La justification de cette formule est aisée. En effet, ayant une combinaison de p objets et il y a $p!$ manières de les ordonner, d' où :

$$p! C_n^p = A_n^p$$

Exemple 0.28. *Trouver le nombre de façons différentes de désigner 2 étudiants parmi 5 candidats pour représenter leurs camarades.*

Les étudiants sont : E1, E2, E3, E4, E5.
Les différentes façons pour désigner 2 étudiants :
(E1, E2), (E1, E3), (E1, E4), (E1, E5), (E2, E3), (E2, E4), (E2, E5),
(E3, E4), (E3, E5), (E4, E5).
Le nombre de toutes les possibilités est $C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$ façons.

Exemple 0.29. *Une urne contient* 6 *boules blanches et* 4 *noires. On tire en une seule fois 3 boules. Quel est le nombre de façons :*

a) de tirer 3 boules :C_{10}^3
b) de tirer 3 boules blanches : C_6^3
c) de tirer 1 boule blanche et 2 noires : $C_6^1 \ C_4^2$

0.6.1 Combinaison avec répétition

On appelle combinaison avec répétition de p éléments pris parmi n éléments distincts, une suite non ordonnée de ces p éléments avec répétition de 1 ou plusieurs éléments.

Le nombre de combinaison avec répétition est donné par :

$$K_n^p = C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$$

Exemple 0.30. *Les combinaison avec répétition de 2 éléments parmi 3 (a,b,c) sont :*

$$aa; ab; ac; bb; bc, cc$$

$K_3^2 = \frac{(3+2-1)!}{2!(3-1)!} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4.3}{2} = 6$

0.6.2 Propriétés des coefficients binomiaux :

1) $\forall n \in \mathbb{N} : C_n^0 = C_n^n = 1.$

2)$\forall n, p \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant p \leqslant n : C_n^{n-p} = C_n^p$

3)$\forall n, p \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant p \leqslant n : C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$

Triangle de Pascal et Binôme de Newton :

Le triangle de Pascal est une présentation des coefficients binomiaux dans un triangle.

On représente dans un tableau de forme triangulaire les nombres C_n^p , où n étant le numéro de la ligne et p un numéro de colonne. On obtient le triangle de Pascal :

n /p	0	1	2	3	4
0	C_0^0				
1	C_1^0	C_1^1			
2	C_2^0	C_2^1	C_2^2		
3	C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3	
4	C_4^0	C_4^1	C_4^2	C_4^3	C_4^4

On peut observer la symétrie: $C_n^{n-p} = C_n^p$.

Les coefficients C_n^p pour $0 \leqslant p \leqslant n$ figurent à la n ième ligne. Le triangle est construit en plaçant des 1 aux extrémités de chaque ligne et en complétant la ligne en reportant la somme des deux nombres adjacents (C_{n-1}^{p-1} et C_{n-1}^p) de la ligne supérieure. D' où le triangle de Pascal :

$n\backslash p$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Formule du binôme :

Etant donné deux variables quelconques a et b (qui peuvent être des nombres réels). On a alors, pour tout entier positif "n" :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p \, a^{n-p} \, b^p$$

Cette formule est dite formule de *binome de Newton*.

Les coefficients de $(a+b)^n$ pour différentes valeurs de n sont obtenus par la propriétés $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$ (ou bien du triangle de Pascal).

Par exemple, pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$:

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 \\
(a+b)^1 &= a+b \\
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
(a+b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5
\end{aligned}$$

En résumé :

Disposition	Avec répétition	Sans répétition
avec ordre	n^p Arrangement avec répétition (ou p listes)	A_n^p ou P_n (si $p = n$) Arrangement ou Permutation
Sans ordre	K_n^p Combinaison avec répétition	C_n^p Combinaison