le 20/01/2019.

Rattrapage du C.C. "Equation différentielle Stochastiques et Applications"

Durée 1h 30 mn.

Dans tout le sujet $\{W_t\}$ est un mvt brownien standard

Exercice 1: On considère le processus stochastique

$$\{C_t = C_0 e^{\alpha W_t}, \quad t \geq 0\}, \quad C_0 \geq 0 \quad C_0 = \text{constante}$$

1) Ecrire l'EDS associée au processus $\{C_t\}_{t\geq 0}$.

2) Notons $\{X_t, \quad t \geq 0\}$ le processus défini par l'EDS :

$$dX_t = \mu X_t \, dt + \sigma X_t \, dW_t^*$$

où $\{W_t^*\}$ et un mvt browmen indépendant de $\{W_t\}$

Etablir l'EDS vérifiée par le capital risqué défini par :

$$(Y_t)_{t\geq 0} = (X_t C_t)_{t \geq 0}.$$

Exercice 2:

1) Vérifier les conditions d'existence et d'unicité de la solution de l'EDS :

$$\begin{cases} dX_t = a(b - X_t)\, dt + \sigma \, dW_t \\ X_0 = 1 \end{cases}$$

où a, b, σ sont des constantes réelles.

2) Donner le processus solution lorsque $a = 1, b = 1$ et $\sigma = 1$.

Proposition de solution de l'épreuve de rattrapage ①

Exercice 1.

1) Soit $f(\omega) = C_0 e^{\alpha\omega}$. Comme $\frac{d}{d\omega} f(\omega) = C_0 \alpha e^{\alpha\omega}$ et $\frac{d^2}{d\omega^2} f(\omega) = C_0 \alpha^2 e^{\alpha\omega}$

$$f(W_t) = C_t \,,\ \frac{df}{d\omega}(W_t) = \alpha C_t \,,\ \frac{d^2 f}{d\omega^2} dW_t = \alpha^2 C_t.$$

et par le lemme de Itô, nous avons alors :

$$dC_t = \alpha C_t dW_t + \frac{\alpha^2}{2} C_t dt$$

2) La règle de multiplication des processus stochastiques donne

$$dY_t = d(X_t \cdot C_t) = X_t dC_t + C_t dX_t + d\langle X, C\rangle_t =$$

$$= X_t\left(\alpha C_t dW_t + \frac{\alpha^2}{2} C_t dt\right) + C_t\left(\mu X_t dt + \sigma X_t dW_t^*\right)$$
$$= \alpha Y_t dW_t + \frac{\alpha^2}{2} Y_t dt + \mu Y_t dt + \sigma Y_t dW_t^*$$

$$dY_t = \alpha Y_t dW_t + \sigma Y_t dW_t^* + \left(\frac{\alpha^2}{2} + \mu\right) Y_t dt$$

Exercice 2:

1) Nous devons vérifier les conditions :

i) $|b(x,t) - b(y,t)| + |\sigma(x,t) - \sigma(y,t)| \leq K|x-y| \quad \forall t \geq 0$

ii) $|b(x,t)| + |\sigma(x,t)| \leq K(1+|x|) \,, \quad \forall t \geq 0.$

iii) $E(X_0^2) < +\infty$

i) $|b(x,t) - b(y,t)| + |\sigma(x,t) - \sigma(y,t)| = |a(b-x) - a(b-y)| + |\sigma - \sigma| =$
$= |a|\,|x-y|.$

ii) $|b(x,t)| + |\sigma(x,t)| = |a(b-x)| + \sigma \leq |ab| + |a||x| + \sigma \leq$
$\leq \underbrace{\max(|ab| + \sigma, |a|)}_{=K} (1+|x|).$

iii) ~~Comme~~ Si la condition initiale n'est pas précisée on choisira X_0 comme dans la 3ème condition ou simplement $X_0 = cte$ ici nous avons simplement $X_0 = 1$.

si $a=1$, $b=1$ et $\sigma=1$ on obtient l'EDS ②

$$\begin{cases} dX_t = (1 - X_t)dt + dW_t & (1) \\ X_0 = 1 \end{cases}$$

On pose $Z_t = X_t - 1$ alors $dZ_t = dX_t$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} dZ_t = -Z_t\, dt + dW_t \\ Z_0 = 0 \end{cases}$$

alors $Z_t = Z_0 e^{-t} + e^{-t}\int_0^t e^s\, dW_s = e^{-t}\int_0^t e^s\, dW_s$

Revenant à X_t nous avons :

$$X_t = 1 + e^{-t}\int_0^t e^s\, dW_s$$