Chapitre 1 (la suite)
Approximation des EDP par la méthode des différences finies

Remarque. Si la dérivée quatrième e u est nulle ($u^{(4)} = 0$), alors l'erreur de consistance $\varepsilon_h(u) = 0$, c'est-à-dire $A(u_h - \pi_h(u)) = 0$. La matrice A est inversible et on en déduit que $u_h - \pi_h(u)$, c'est-à-dire $\forall i \in \{0, \ldots, N\}, u_i = u(x_i)$. La solution discrète coïncide donc avec la solution exacte en chacun des sommets (intérieur ou non) du maillage.

Définition. *L'erreur de convergence* de la méthode des différences finies appliqué au problème (2) peut être quantifier par exemple par la quantité $\|u_h - \pi_h(u)\|_\infty$. Rappelons que

$$A_h u_h = b_h, \quad \text{et } A_h \pi_h(u) = b_h + \varepsilon_h(u)$$

Par différence

$$A_h(u_h - \pi_h(u)) = -\varepsilon_h(u)$$

En d'autre terme

$$u_h - \pi_h(u) = -(A_h)^{-1}\varepsilon_h(u)$$

On a le résultat suivant

Théorème. Supposons que $C \geq 0$. Si la solution u de problème (2) est de classe $\mathcal{C}^{(4)}$ sur $[0, 1]$, alors le schéma numérique $(2)'$ est convergent d'ordre 2 pour la norme $\|.\|_\infty$. Plus précisément on a

$$\|u_h - \pi_h(u)\|_\infty \leq \frac{h^2}{96} \sup_{[0,1]} |u^{(4)}(x)|$$

Démonstration. Nous allons utiliser l'estimation suivante

$$\|A_h^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{8}$$

On a

$$\|u_h - \pi_h(u)\|_\infty = \|(A_h)^{-1}\varepsilon_h(u)\|_\infty \leq \|(A_h)^{-1}\|_\infty.\|\varepsilon_h(u)\|_\infty \leq \frac{1}{8}\|\varepsilon_h(u)\|_\infty$$

Ce qui donne

$$\|u_h - \pi_h(u)\|_\infty \leq \frac{h^2}{96} \sup_{[0,1]} |u^{(4)}|$$

(car nous avons déjà montré que $\|\varepsilon_h(u)\|_\infty \leq \dfrac{h^2}{12} \sup_{[0,1]} |u^{(4)}(x)|$)

II. Cas de la dimension 2

Considérons le problème de Dirichlet homogène suivant

$$\begin{cases} - \triangle u(x) = f(x,y), \quad si \quad (x,y) \in \Omega =]0,1[\times]0,1[, \\ \\ u(x,y) = 0, \quad si \quad (x,y) \in \Gamma. \end{cases} \tag{3}$$

où f est une fonction donnée, continue sur $[0,1]$. Ce problème admet une solution dont nous nous proposons de calculer une valeur approchée à l'aide de la méthode des différences finies :

On recouvre Ω par des rectangles élémentaires de taille $h_x = 1/N_x$ dans la direction x et $h_y = 1/N_y$ dans la direction y. On cherche pour tout $i \in \{0, 1, \ldots N_x\}$ et $j \in \{0, 1, \ldots N_y\}$ une approximation de $u(ih_x, jh_y)$, qu'on la note u_i^j. Pour cela, on approche les dérivées secondes par le schéma à trois points :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(x+h_x,.) - 2u(x,.) + u(x-h_x,.)}{h_x^2}$$

(la variable y ne joue aucun rôle dans cette approximation)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u(.,y+h_y) - 2u(.,y) + u(.,y-h_y)}{h_y^2}$$

(la variable x ne joue aucun rôle dans cette approximation)

Cela donne le schéma numérique suivant

$$\begin{cases} -\dfrac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h_x^2} - \dfrac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{h_y^2} = f(ih_x, jh_y) \\ \\ \quad i \in 1, \ldots, N_x - 1 \ et \ j \in 1, \ldots, N_y - 1 \\ \\ u_i^j = 0, \ pour \ i \in \{0, N_x\} \ ou \ pour \ j \in \{0, N_y\} \end{cases} \tag{3.1}$$

Ce schéma s'appelle ***schéma à cinq points du laplacien***. Il s'agit d'un schéma centré où pour évaluer u au point (ih_x, jh_y), on utilise les valeurs de u en cinq points centrés autour de (ih_x, jh_y) : le point (ih_x, jh_y) lui-même et les points $(ih_x, (j-1)h_y)$, $(ih_x, (j+1)h_y)$ $((i-1)h_x, jh_y)$ et $((i+1)h_x, jh_y)$

Si on note par $h = max(h_x, h_y)$. L'écriture matricielle de (3.1) est $C_h u_h = b_h$ où C_h est une matrice par blocs. Si on numérote les inconnues de la manière suivante $u_1^1, \ldots, u_1^{N_y-1}, u_2^1, \ldots, u_1^{N_y-1}, u_3^1, \ldots, u_{N_x-1}^{N_y-1}$, c'est-à-dire en balayant le maillage ligne par ligne. La matrice C_h est formée de $(N_y - 1)^2$ blocs et chaque bloc est de taille $(N_x - 1) \times (N_x - 1)$.

$$C_h = \begin{bmatrix} A & D & 0 & 0 & 0... & 0 \\ D & A & D & 0 & 0... & 0 \\ 0 & D & A & D & 0... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0.. & 0 & ..0 & D & A & D \\ 0.. & 0 & .. & 0 & D & A \end{bmatrix}$$

où A et D sont les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} a & -b_1 & 0 & 0 & 0... & 0 \\ -b_1 & a & -b_1 & 0 & 0... & 0 \\ 0 & -b_1 & a & -b_1 & 0... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0.. & 0 & ..0 & -b_1 & a & -b_1 \\ 0.. & 0 & .. & 0 & -b_1 & a \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -b_2 & 0 & 0 & 0 & 0... & 0 \\ 0 & -b_2 & 0 & 0 & 0... & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & 0 & 0... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0.. & 0 & ..0 & 0 & -b_2 & 0 \\ 0.. & 0 & .. & 0 & 0 & -b_2 \end{bmatrix}$$

où

$$b_1 = \frac{1}{h_x^2}, \quad b_2 = \frac{1}{h_y^2}, \quad et \quad a = 2(b_1 + b_2).$$

La matrice C_h est symétrique définie positive, monotone et il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle que $\|C_h\|_\infty \leq C$. La méthode est convergente d'ordre deux pour u de classe $\mathcal{C}^4$.