Université Hassiba Benbouali - Chlef Année univ : 2019-2020
Faculté des sciences exactes et informatiques *Département de de Mathématiques*

1^{ere} ***Master mathématique appliquée et statistique***

Correction de l'examen de la matière Programmation Linéaire 1

Exercice 1 *Les variables de décision sont la quantité de boîtes des trois types de gels, que nous indiquerons avec x_1,x_2, x_3. La fonction objectif à maximiser est le profit total moins les coûts totaux. Le profit est évidemment donné par*

$$250x_1 + 200x_2 + 300x_3$$

à cela il faut soustraire les contributions du coût de l'éthanol et du travail, égales respectivement à

$$100\,(x_2 + 2x_3)$$

et

$$120x_1 + 60x_2 + 40x_3$$

et par conséquent, en réorganisant les termes, la fonction objectif résulte

$$130x_1 + 40x_2 + 60x_3.$$

Il y a trois contraintes. Le premier exprime la contrainte sur la disponibilité de l'éthanol :

$$x_2 + 2x_3 \leq 4000$$

les deuxième et troisième concernent les restrictions à la production de G1 :

$$\begin{array}{rcl} x_1 & \geq & 2x_2 \\ x_1 & \leq & x_3. \end{array}$$

l'ajout des contraintes de non-négativité complète la formulation

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

ainsi, le problème peut être formulé comme suit

$$\max Z = 130x_1 + 40x_2 + 60x_3$$

$$s.c \left\{ \begin{array}{c} x_2 + 2x_3 \leq 4000 \\ 2x_2 - x_1 \leq 0 \\ x_1 - x_3 \leq 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{array} \right.$$

Exercice 2 *Soit le problème de programmation linéaire*

$$\max Z = 13x_1 + 10x_2$$

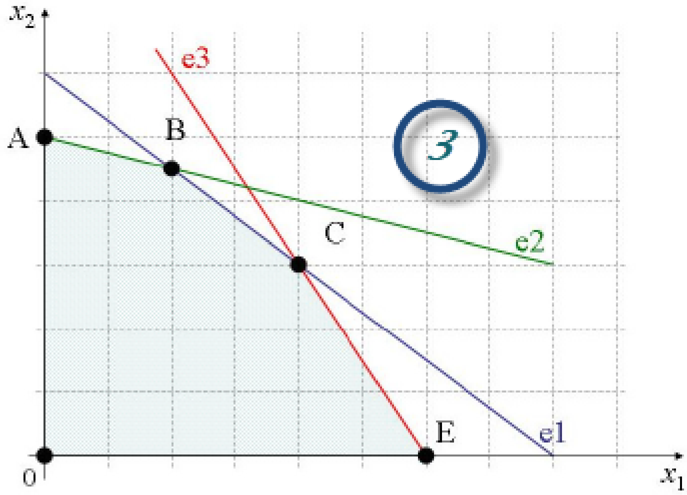

FIGURE 1 – Région admissible

$$s.c \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 24 & (e_1) \\ x_1 + 4x_2 \leq 20 & (e_1) \\ 3x_1 + 2x_3 \leq 18 & (e_1) \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

La région réalisable est représentée sur la figure . La recherche de l'optimum ne peut avoir lieu que sur les sommets. En calculant la valeur de la fonction objectif dans chaque sommet et en choisissant la valeur maximale, on obtient l'optimum au sommet C : $x_1 = 4, x_2 = 3$, *ainsi, le maximum de la fonction objectif égale à* 82 *(profit maximum égal à* 82*).*

Exercice 3 *Réécrivons le problème en forme standard en ajoutant des variables d'écart* x_4, x_5, x_6 *correspondant aux trois inégalités des contraintes*

$$\max Z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

$$s.c \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 90, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 40, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_6 = 80, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

V. de base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
x_4	3	4	2	1	0	0	90	$\frac{90}{3} = 30$
x_5	$\boxed{2}$	1	1	0	1	0	40	$\frac{40}{2} = 20 \rightarrow$
x_6	1	3	2	0	0	1	80	$\frac{80}{1} = 80$
Z	5 $\uparrow$	4	3	0	0	0	0	
x_4	0	$\boxed{\frac{5}{2}}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	0	30	$\frac{30}{2.5} = 12 \rightarrow$
x_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	20	$\frac{20}{0.5} = 40$
x_6	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	60	$\frac{60}{2.5} = 24$
Z	0	$\frac{3}{2}$ $\uparrow$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	0	-100	
x_2	0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0	12	$\frac{12}{\frac{1}{5}} = 60$
x_1	1	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	0	14	$\frac{14}{\frac{2}{5}} = 35$
x_6	0	0	$\boxed{1}$	-1	1	1	30	$\frac{30}{1} = 30 \rightarrow$
Z	0	0	$\frac{1}{5}$ $\uparrow$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{8}{5}$	0	-118	
x_2	0	1	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	6	
x_1	1	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	2	
x_3	0	0	1	-1	1	1	30	
Z	0	0	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{9}{5}$	$-\frac{1}{5}$	-124	

Il s'ensuit que la solution optimale est $(x_1, x_2, x_3) = (2, 6, 30)$ *et la valeur optimale est* $Z = 124$.