Corrigé Série 4

Exercice 1

$\forall n \geq 1 \ \ X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $P\left(X_n = 1\right) = \frac{1}{n^2}$ et $P\left(X_n = 0\right) = 1 - \frac{1}{n^2}$

Posons $A_n = \{X_n = 1\}$, par hypothèse, $P\left(A_n\right) = \frac{1}{n^2}, \forall n \geq 1$, donc

$$\sum_{n\geq 1} P\left(A_n\right) < \infty$$

D'après le lemme de Borel-Cantelli, $P\left(\limsup_n A_n\right) = 0$,

ou de manière équivalente $P\left(\sum_{n\geq 1} 1_{A_n} = \infty\right) = 0$ c'est-à-dire

$$P\left(\sum_{n\geq 1} 1_{A_n} < \infty\right) = 1,$$

il suffit alors de remarquer que $X_n = 1_{A_n}$.

Exercice 2

a) On note par F_X la fonction de répartition de X, donc $F_X(x) = P(X \leq x)$
La fonction de répartition de U_n est définie par $F_{U_n}(x) = P\left(U_n \leq x\right)$,
on a alors

$$\begin{aligned} F_{U_n}(x) &= P\left(U_n \leq x\right) = P\left(\max_{1\leq i\leq n} X_i \leq x\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \leq x\}\right) = \\ &= \prod_{i=1}^{n} P\left(X_i \leq x\right) \text{ par indépendance} \\ &= \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x) = \left(F_X(x)\right)^n \text{ car les v.a.} X_i \text{ sont de même loi que } X \end{aligned}$$

b) De la même manière

$$\begin{aligned} F_{L_n}(x) &= P\left(L_n \leq x\right) = P\left(\min_{1\leq i\leq n} X_i \leq x\right) = 1 - P\left(\min_{1\leq i\leq n} X_i > x\right) = \\ &= 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i > x\}\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P\left(X_i > x\right) \text{ par indépendance} \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(1 - P\left(X_i \leq x\right)\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(1 - F_{X_i}(x)\right) = 1 - \left(1 - F_X(x)\right)^n \\ &\quad \text{car les v.a.} X_i \text{ sont de même loi que } X \end{aligned}$$

c) Pour tout $n \geq 1$, la variable aléatoire nL_n est à valeurs dans $[0, n]$ car chaque X_i est à valeurs dans $[0, 1]$

donc $\forall x < 0 \quad P\left(nL_n \leq x\right) = 0$
En outre, $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,1]}$, donc $F_X\left(x\right) = x1_{[0,1]}\left(x\right)$
Soit $x \geq 0$,pour tout $n \geq x$,

$$\begin{aligned} P\left(nL_n \leq x\right) &= P\left(L_n \leq \frac{x}{n}\right) = \\ &= 1 - \left(1 - F_X(\frac{x}{n}\right))^n = \\ &= 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} P\left(nL_n \leq x\right) = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \left(1 - e^{-x}\right) 1_{\{x \geq 0\}}\left(x\right)$
qui est la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 1.

Exercice 3
1) Soit $\varepsilon > 0$ un réel, pour tout $n \geq 1$,on a $P\left(\left|X_n + 1\right| > \varepsilon\right) = \dfrac{1}{n^2}$,donc

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} P\left(\left|X_n + 1\right| > \varepsilon\right) = 0$$

et $\left(X_n\right)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers -1
2) On a, $\forall n \geq 1, P\left(X_n \neq 1\right) = \dfrac{1}{n^2}$,donc, en posant $A_n = \{X_n \neq 1\}$

$$\sum_{n \geq 1} P\left(A_n\right) < \infty$$

D'après Borel-Cantelli, cela signifie qu'avec probabilité 1, il n'y a qu'un nombre fini de valeurs de n pour lesquellesX_n n'est pas égal à 1, autrement dit, avec probabilité 1, X_n est égal à 1 pour n assez grand, c'est-à-dire que la suite $\left(X_n\right)_{n \geq 1}$ converge presque sûrement vers -1.
3) Si la convergence L^1de la la suite $\left(X_n\right)_{n \geq 1}$était possible,
on aurait nécessairement

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} E\left(X_n\right) = E\left(-1\right) = -1$$

or, $\forall n \geq 1$

$$E\left(X_n\right) = -1 \times \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + \left(n^2 - 1\right) \times \frac{1}{n^2} = 0$$

Il n'y a donc pas de convergence L^1de la la suite $\left(X_n\right)_{n \geq 1}$.

Exercice 4
On a pour tout $i \geq 1$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{P}\left(1\right)$, on sait $E\left(X_i\right) = 1$ et $V\left(X_i\right) = 1$
S_n est la somme de n variables aléatoires indépendantes,
et de même loi $\mathcal{P}\left(1\right)$, alors (cours) $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$

est une variable aléatoire de loi $\mathcal{P}(n)$, et dont la loi est donnée par

$$P(S_n = k) = e^{-n}\frac{n^k}{k!}, \quad k = 0, 1, ...$$

$$\begin{aligned} P(S_n \leq n) &= P\left(\bigcup_{k=0}^{n} \{S_n = k\}\right) = \\ &= \sum_{k=0}^{n} P(S_n = k) = \\ &= e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} P(S_n \leq n) &= P(S_n - n \leq 0) = \\ &= P\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0\right) \end{aligned}$$

Le théorème central limite nous permet alors d'écrire

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} P\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2}$$

et on a le résultat suivant concernant une limite de suite

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$$

autrement dit

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} e^n$$