Solution du Problème 2. *Commençons par calculer le biais : en faisant le changement de variable suivant*

$$y = x + uh, \quad dy = hdu$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(f_n(x)\right) &= \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[K\left(\frac{X_i - x}{h}\right)\right] \\
&= \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}} K\left(\frac{y-x}{h}\right) f(y)dy \\
&= \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}} K\left(\frac{y-x}{h}\right) f(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} K(u)f(x+uh)du.
\end{aligned}$$

En effectuant un dévelopement limité à l'ordre 2, avec $\zeta_u \in [x, x+uh]$, il vient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(f_n(x)\right) &= \int_{\mathbb{R}} K(u)f(x+uh)du \\
&= \int_{\mathbb{R}} K(u)[f(x) + (uh)f'(x) + \frac{(uh)^2}{2}f"(\zeta_u)]du \\
&= f(x)\underbrace{\int_{\mathbb{R}} K(u)du}_{=1} + hf'(x)\underbrace{\int_{\mathbb{R}} uK(u)du}_{=0} + \frac{h^2}{2}ds\int_{\mathbb{R}} u^2K(u)f"(\zeta_u)du. \\
&= \int_{\mathbb{R}} K(u)f(x+uh)du.
\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}
|Biais\left(f_n(x)\right)| &= |\mathbb{E}[f_n(x)] - f(x)| \\
&\leq \frac{h^2}{2}\left|\int_{\mathbb{R}} u^2K(u)f"(\zeta_u)du\right| \\
&\leq \frac{h^2}{2}\int_{\mathbb{R}} u^2|K(u)||f"(\zeta_u)|du \\
&\leq h^2\underbrace{\frac{\max_x |f"(x)|}{2}\int_{\mathbb{R}} u^2|K(u)|du}_{C_1}
\end{aligned}$$

d'où la première partie.

Pour prouver la seconde partie, on utilise le faite que les variables aléatoires $Y_i = K\left((X_i - x)/h\right)$, $i = 1\ldots,n$ sont i.i.d. et que la variance de la somme de *variables indépendantes coïncide avec la somme des variances :*

$$\begin{aligned}
Var\left[f_n(x)\right] &= \frac{1}{(nh)^2} Var\left[\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{X_i - x}{h}\right)\right] \\
&= \frac{1}{(nh)^2} \sum_{i=1}^{n} Var\left[K\left(\frac{X_i - x}{h}\right)\right] \\
&= \frac{1}{(nh)^2} \times n \times Var\left[K\left(\frac{X_1 - x}{h}\right)\right] \\
&\leq \frac{1}{(nh)^2} \mathbb{E}\left[K\left(\frac{X_1 - x}{h}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{(nh)^2} \int_{\mathbb{R}} K\left(\frac{y - x}{h}\right)^2 f(y)dy \\
&= \frac{1}{nh} \int_{\mathbb{R}} K(u)^2 f(x = uh)du \\
&\leq \frac{1}{nh} \underbrace{\sum_{z} f(z) \int_{\mathbb{R}} K(u)^2 du}_{C_2}.
\end{aligned}$$

C'est exactement ce qu'il fallait démontrer.

Solution du Problème 3. (1) *Soit X une variable aléatoire définie sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeur dans $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on désigne par F la fonction de répartition de X, et par f la fonction de densité.*

Etant donné $X_1, X_2, \ldots, X_n$ une suite de variable aléatoire réelle de même loi que X, l'estimateur de la fonction de répartition par la méthode du noyau noté $F_n(x)$, défini par :

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right), \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

où K est noyau et λ_n est une suite de réels positifs. On déduit de F_n un estimateur de la fonction de répartition et de la densité, noté f_n, défini par

$$\begin{aligned}
f_n(x) &= F_n^{(1)}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h_n} K^{(1)}\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right) \\
&= \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^{n} K^{(1)}\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right)
\end{aligned}$$

En vertu de sa définition, l'estimateur natural de la fonction de hasard, noté $\lambda_n(x)$, est définie par :

$$\lambda_n(x) = \frac{f_n(x)}{1 - F_n(x)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} K^{(1)}\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \int_{x}^{+\infty} K^{(1)}\left(\frac{t - X_i}{h_n}\right) dt}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

(2) *On considère la décomposition suivante*

$$\begin{aligned}
\lambda_n(x) - \lambda(x) &= \frac{f_n(x)}{1-F_n(x)} - \frac{f(x)}{1-F(x)} \\
&= \frac{f_n(x) - f_n(x)F(x) - f(x) + f(x)F_n(x)}{(1-F_n(x))(1-F(x))} \\
&= \frac{1}{1-F_n(x)}\left[(f_n(x)-f(x)) + \frac{f(x)}{1-F(x)}(F_n(x)-F(x))\right]. \qquad (1)
\end{aligned}$$

(3) *Nous avons déjà démontré la convergence presque complète de $F_n(x)$ vers $F(x)$. Autrement dit, nous avons*

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{|F_n(x) - F(x)| > \epsilon\} < \infty.$$

D'autre part, on a par hypothèse $F(x) < 1$, c'est à dire

$$1 - F_n(x) \geq F(x) - F_n(x).$$

Ainsi,

$$\inf_{x\in S}|1-F_n(x)| \leq (1-\sup_{x\in S}F(x))/2 \Rightarrow \sup_{x\in S}|F_n(x)-F(x)| \geq (1-\sup_{x\in S}F(x))/2.$$

En terme de probabilité, on obtient

$$\mathbb{P}\{\inf_{x\in S}|1-F_n(x)| < \delta\} \leq \mathbb{P}\{\sup_{x\in S}|F_n(x)-F(x)| \geq (1-\sup_{x\in S}F(x))/2\} < \infty.$$

Finalement, il suffit de prendre $\delta = (1 - \sup_{x\in S} F(x))/2$ pour achever la démonstration.

(4) *On démontre la convergence presque complète uniforme sur un compact réel de $\lambda_n(x)$ vers $\lambda(x)$, autrement dit*

$$\sup_{x\in S}|\lambda_n(x) - \lambda(x)| = O(h_n^k) + O\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_n}}\right) \qquad p.co. \qquad (2)$$

En utilisant la décomposition (1) on peut déduire que,

$$\sup_{x\in S}|\lambda_n(x)-\lambda(x)| \leq$$

$$\frac{1}{\inf_{x\in S}|1-F_n(x)|}\left[\sup_{x\in S}|f_n(x)-f(x)| + \frac{\sup_{x\in S}|f(x)|}{\inf_{x\in S}|1-F(x)|}\sup_{x\in S}|F_n(x)-F(x)|\right]$$

Ainsi, la démonstration de (2) repose sur les résultats suivants

$$\sup_{x\in S}|F_n(x)-F(x)| = O(h_n^k) + O\left(\sqrt{\frac{\log n}{n}}\right), \qquad p.co \qquad (3)$$

$$\sup_{x\in S}|f_n(x)-f(x)| = O(h_n^k) + O\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_n}}\right), \qquad p.co \qquad (4)$$

$$\exists \delta > 0 \quad telque \quad \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\left\{\inf_{x\in S}|1-F_n(x)| < \delta\right\} < \infty.$$

de même la preuve de (3) (resp. (4)) est basée respectivement sur les décompositions suivantes

$$F_n(x) - F(x) = F_n(x) - \mathbb{E}[F_n(x)] + \mathbb{E}[F_n(x)] - F(x)$$

$$f_n(x) - f(x) = f_n(x) - \mathbb{E}[f_n(x)] + \mathbb{E}[f_n(x)] - f(x)$$

La démonstration de (4) repose sur les résultats suivants

(5) $$\mathbb{E}[f_n(x)] - f(x) = O(h_n^k).$$

(6) $$f_n(x) - \mathbb{E}[f_n(x)] = O\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_n}}\right), \qquad p.co.$$

Concernant l'équation (5) on a

$$\mathbb{E}[f_n(x)] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{nh_n}\sum_{i=1}^{n} K^{(1)}\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right)\right] = \frac{1}{nh_n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[K^{(1)}\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right)\right]$$

comme les variables X_i sont i.i.d alors

$$\mathbb{E}\left[K^{(1)}\left(\frac{x - X_1}{h_n}\right)\right] = \mathbb{E}\left[K^{(1)}\left(\frac{x - X_2}{h_n}\right)\right] = \ldots = \mathbb{E}\left[K^{(1)}\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right)\right]$$

donc

$$\mathbb{E}[f_n(x)] = \frac{1}{h_n}\mathbb{E}\left[K^{(1)}\left(\frac{x - X}{h_n}\right)\right] = \frac{1}{h_n}\int K^{(1)}\left(\frac{x - u}{h_n}\right) f(u)du.$$

Pour calculer cette intégrale on considére le changement des variables on pose $z = (x - u)/h_n \Rightarrow dz = -du/h_n \Rightarrow du = -h_n dz$ et $u = x - zh_n$ pour arriver à :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f_n(x)] &= -\int_{+\infty}^{-\infty} K^{(1)}(z) f(x - zh_n)dz \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} K^{(1)}(z) f(x - zh_n)dz.\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse que la densité est de classe $\mathcal{C}^k$, il suffit de développer f au voisinage de x (D.L.T).

Ceci s'écrit, pour θ_z entre x et $x + zh_n$ on a :

$$f(x - zh_n) = f(x) + \sum_{j=1}^{k-1}\frac{(-1)^j (zh_n)^j}{j!} f^{(j)}(x) + \frac{(-1)^k (zh_n)^k}{k!} f^{(k)}(\theta_z).$$

Puisque K est un noyau de densité borné intégrable et d'ordre k on aboutit à

$$\mathbb{E}[f_n(x)] = f(x) + \frac{(-1)^k h_n^k}{k!}\int z^k K^{'}(z) f^{(k)}(\theta_z)dz$$

La continuité de $f^{(k)}$ et la compacité du support compact de $K^{'}$ assurent la convergence uniforme en z de $f^{(k)}(\theta_z)$ vers $f^{(k)}(x)$, ainsi

$$\mathbb{E}[f_n(x)] = f(x) + (-1)^k h_n^k \int z^k K^{'}(z)dz \frac{f^{(k)}(x)}{k!} + O(h_n^k).$$

Concernant l'équation (6), on applique l'inégalité de type Bernestein aux variables :

$$\Delta_i = \frac{1}{h_n}\left[K^{(1)}\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right) - \mathbb{E}\left[K^{(1)}\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right)\right]\right]$$

pour cela il faut majorer $|\Delta_i|$ *ainsi que* $\mathbb{E}[\Delta_i^2]$.

Le fait que K *est un noyau de densité borné intégrable et d'ordre* k, *ça nous permet de construire la première borne, ainsi* $\exists\ C$ *une constante finie telle que :*

$$|\Delta_i| \leq \frac{C}{h_n}.$$

Posons

$$\Gamma_i = \frac{1}{h_n} K^{(1)}\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right)$$

calculons le moment d'ordre 2

$$\mathbb{E}[\Gamma_i^2] = \frac{1}{h_n}\mathbb{E}\left(\frac{1}{h_n}K^{'2}\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right)\right) = \frac{1}{h_n^2}\int K^{'2}\left(\frac{x - u}{h_n}\right) f(u)du$$

on pose $z = (x - u)/h_n$ *pour aboutir à*

$$\mathbb{E}[\Gamma_i^2] = \frac{1}{h_n}\int K^{'2}(z) f(x - zh_n)dz.$$

Puisque f *est bornée car continue sur le support compact de* K, *on a l'existence d'une constante finie* C *telle que :*

$$\mathbb{E}[\Gamma_i^2] \leq \frac{C}{h_n}$$

d'une manière évidente on a l'existence d'une constante finie C *telle que :*

$$\mathbb{E}[\Delta_i^2] \leq \frac{C}{h_n}$$

Ainsi, pour ϵ *suffisamment petit on a :*

(7) $$\mathbb{P}\left(|f_n(x) - \mathbb{E}[f_n(x)]| > \epsilon\right) \leq 2\exp\left(-\frac{n\epsilon^2}{4C}\right)$$

On applique (7) à $\epsilon = \epsilon_0\sqrt{\frac{\log n}{nh_n}}$, *on aura pour tout* ϵ_0, $\exists\ C > 0$ *:*

$$\mathbb{P}\left(|f_n(x) - \mathbb{E}[f_n(x)]| > \epsilon_0\sqrt{\frac{\log n}{nh_n}}\right) \leq 2\exp(-C\epsilon_0^2\log n).$$

Pour ϵ_0 *bien choisi, le terme à droite est celui d'une série convergente.*

La preuve (3) repose sur les résultats suivants

(8) $$\mathbb{E}[F_n(x)] - F(x) = O(h_n^k).$$

(9) $$F_n(x) - \mathbb{E}[F_n(x)] = O\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_n}}\right), \qquad p.co.$$

Concernant l'équation (8) La preuve est similaire à celle de la preuve de l'équation (5) en remplaçant f *par* F *et* $\mathbb{E}[f_n]$ *par* $\mathbb{E}[F_n]$.

Concernant l'équation (9) la preuve est basée sur les mêmes arguments de la preuve de l'équation (6), tout en posant

$$\Delta_i = K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right) - \mathbb{E}\left[K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right)\right]$$

comme précédement sous les hypothèses du noyau K on arrive à l'existence d'une constante finie $C_1 > 0$ telle que

$$|\Delta_i| \leq C_1$$

posons

$$Y_i = K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right)$$

et calculons le moment d'ordre 2 de Y_i

$$\mathbb{E}[Y_i^2] = \mathbb{E}\left[K^2\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right)\right] = \int K^2\left(\frac{x - u}{h_n}\right) f(u)du$$

on effectue le changement de variable suivant $z = (x - u)/h_n$ pour aboutir à :

$$\mathbb{E}[Y_i^2] = \int K^2(z) f(x - zh_n)dz.$$

f est bornée (continue sur le support compact de K), donc il existe une constante finie $C_1 > 0$ telle que :

$$\mathbb{E}[Y_i^2] \leq C_1.$$

par suite

$$\mathbb{E}[\Delta_i^2] \leq C_1.$$

l'application de l'inégalité de type Bernestein, pour ϵ suffisamment petit nous donne

$$\mathbb{P}(|F_n(x) - \mathbb{E}[F_n(x)]| > \epsilon) \leq 2\exp\left(-\frac{n\epsilon^2}{4C_1}\right)$$

pour $\epsilon = \epsilon_0\sqrt{\frac{\log n}{n}}$, on aura pour tout ϵ_0 il existe une constante $C_1 > 0$ telle que :

$$\mathbb{P}\left(|F_n(x) - \mathbb{E}[F_n(x)]| > \epsilon_0\sqrt{\frac{\log n}{n}}\right) \leq 2\exp(-C\epsilon_0^2 \log n).$$

Ainsi pour ϵ_0 bien choisi, le terme à droite est celui d'une série convergente, et cela achève la preuve.

Solution du Problème 5. *(i) On a*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\max_{1\leq i\leq n} Z_i\right) &= \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left(\max_{1\leq i\leq n} \log\exp(\alpha Z_i)\right) \\
&= \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left[\log \max_{1\leq i\leq n} \exp(\alpha Z_i)\right] \\
&\leq \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left[\log \sum_{i=1}^{n} \exp(\alpha Z_i)\right].
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Jensen on obtient

$$\mathbb{E}\left[\log\sum_{i=1}^{n}\exp\left(\alpha Z_i\right)\right]\leq\log\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\exp\left(\alpha Z_i\right)\right]\leq\log(nC).$$

(ii) Chaque fois qu'on étudie un risque quadratique, on fait la décomposition biais/variance :

$$\mathbb{E}\left[\left(\widehat{f}(x)-f(x)\right)^2\right]=\left[\mathbb{E}\left(\widehat{f}(x)\right)-f(x)\right]^2+Var\left(\widehat{f}(x)\right).$$

On a pour tout x, $Var\left(\sum_{i=1}^{n}W_{n,i}(x)Y_i\right)=\sigma^2\sum_{i=1}^{n}W_{n,i}^2(x)$ *car les* Y_i *sont indépendants de variance* σ^2*, et le terme de variance s'écrit :*

$$Var\left(\widehat{f}(x)\right)=\sigma^2\sum_{i=1}^{n}W_{n,i}^2(x)$$

qui tend vers 0 *d'après l'hypothèse (1).*

Regardons maintenant le terme de biais. On a $\mathbb{E}(Y_i|X=x_i)=f(x_i)$*, donc*

$$\left[\mathbb{E}\left(\widehat{f}(x)\right)-f(x)\right]^2=\left[\sum_{i=1}^{n}W_{n,i}(x)f(x_i)-f(x)\right]^2=\left[\sum_{i=1}^{n}W_{n,i}(x)(f(x_i)-f(x))\right]^2,$$

en utilisant le fait que $\sum_{i=1}^{n}W_{n,i}(x)=1$*, puis par Cauchy-Schwarz on arrive à*

$$\begin{aligned}\left[\sum_{i=1}^{n}W_{n,i}(x)(f(x_i)-f(x))\right]^2 &\leq \left[\sum_{i=1}^{n}W_{n,i}(x)\right]\left[\sum_{i=1}^{n}W_{n,i}(x)(f(x_i)-f(x))^2\right]\\ &= \sum_{i=1}^{n}\mathbf{1}_{|x-x_i|>\delta}W_{n,i}(x)(f(x_i)-f(x))^2\\ &\quad+\sum_{i=1}^{n}\mathbf{1}_{|x-x_i|\leq\delta}W_{n,i}(x)(f(x_i)-f(x))^2\\ &\leq 4\|f\|_\infty^2 o(1)+\sup_{|u-v|\leq\delta}|r(u)-r(v)|^2.\end{aligned}$$

En utilisant la condition (2) on a donc pour tout $\delta>0$,

$$\limsup_{n\to\infty}\left[\mathbb{E}\left(\widehat{f}(x)\right)-f(x)\right]^2\leq\sup_{|u-v|\leq\delta}|f(u)-f(v)|^2,$$

qui tend vers 0 *quand* δ *tend vers* 0*, car* f *est continue sur* $[0,1]$ *compact, donc uniformément continue.*

(iii) D'après (ii) on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_0^1\left(\widehat{f}(x)-f(x)\right)^2dx\right] &= \int_0^1\mathbb{E}\left[\left(\widehat{f}(x)-f(x)\right)^2dx\right]\\ &= \int_0^1\left[\mathbb{E}\left(\widehat{f}(x)\right)-f(x)\right]^2dx+\int_0^1 Var\left(\widehat{f}(x)\right)dx.\end{aligned}$$

On a pour tout x, $Var\left(\sum_{i=1}^{n} W_{n,i}(x)Y_i\right) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} W_{n,i}^2(x)$ *car les* Y_i *sont indépendants de variance* σ^2*, et le terme de variance s'écrit :*

$$\int_0^1 Var\left(\widehat{f}(x)\right) dx = \sigma^2 \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} W_{n,i}^2(x) dx$$

qui tend vers 0 *d'après l'hypothèse (3).*

Regardons maintenant le terme de biais. On a $\mathbb{E}(Y_i) = f(x_i)$*, donc*

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left[\mathbb{E}\left(\widehat{f}(x)\right) - f(x)\right]^2 dx &= \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^{n} W_{n,i}(x) f(x_i) - f(x)\right]^2 dx \\ &= \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^{n} W_{n,i}(x)(f(x_i) - f(x))\right]^2 dx,\end{aligned}$$

en utilisant le fait que $\sum_{i=1}^{n} W_{n,i}(x) = 1$*, puis par Cauchy-Schwarz on arrive à*

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left[\sum_{i=1}^{n} W_{n,i}(x)(f(x_i) - f(x))\right]^2 dx &\leq \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^{n} W_{n,i}(x)\right]\left[\sum_{i=1}^{n} W_{n,i}(x)(f(x_i) - f(x))^2\right] dx \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_{|x-x_i|>\delta} W_{n,i}(x)(f(x_i) - f(x))^2 dx \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} \int_{|x-x_i|\leq\delta} W_{n,i}(x)(f(x_i) - f(x))^2 dx \\ &\leq 4\|f\|_\infty^2 o(1) + \sup_{|u-v|\leq\delta} |f(u) - f(v)|^2.\end{aligned}$$

En utilisant la condition(4) on a donc pour tout $\delta > 0$,

$$\limsup_{n\to\infty} \int_0^1 \left[\mathbb{E}\left(\widehat{f}(x)\right) - f(x)\right]^2 dx \leq \sup_{|u-v|\leq\delta} |f(u) - f(v)|^2,$$

qui tend vers 0 *quand* δ *tend vers* 0*, car* f *est continue sur* $[0, 1]$ *compact, donc uniformément continue.*