Université Hassiba Benbouali–Chlef
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

1$^{\text{ère}}$ **année Master MAS**
Séries Chronologiques
Année : 2019/2020

Série d'exercices n°3

EXERCICE N° 1:
Soient X et Y deux variables aléatoires. Montrer que la covariance entre ces deux variables peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbb{C}ov(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

EXERCICE N° 2:
Soit X une variable aléatoire de loi gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$, et $Y = X\mathbb{1}_{\{U=1\}} - X\mathbb{1}_{\{U=0\}}$ où U est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, indépendante de X.

1. Montrer que X et Y ont même loi ;
2. Montrer que $\mathbb{C}ov(X,Y) = 0$ mais que X et Y ne sont pas indépendantes ;
3. En déduire un processus qui est bruit blanc (faible) mais pas bruit blanc fort.

EXERCICE N° 3:
Soit $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc de variance $\sigma^2 > 0$.
Discuter dans chacun des cas suivants de la stationnarité de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

1. Lorsque $\forall t \in \mathbb{Z}$, $X_t = \epsilon_t - \epsilon_{t-1}$?
2. Le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ par
$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad X_t = a + b\epsilon_t + c\epsilon_{t-1}$$
est-il (faiblement) stationnaire ?
3. Lorsque $\forall t \in \mathbb{Z}$, $X_t = \epsilon_t\epsilon_{t-1}$, si ϵ est un bruit blanc fort ? Faible ?
4. Lorsque X est tel que $\forall t \in \mathbb{Z}$, $X_t - X_{t-1} = \epsilon_t$ (on supposera en outre que $\forall t > 0$, $\epsilon_t \perp\!\!\!\perp X_0$) ?
5. Lorsque $\forall t \in \mathbb{Z}$, $X_t = \epsilon_t \cos(ct) + \epsilon_{t-1}\sin(ct)$ pour $c \in \mathbb{R}$ donné ?
6. Lorsque $\forall t \in \mathbb{Z}$, $X_t = \sum_{i=0}^{t} \lambda^i (\epsilon_{t-i} - \epsilon_{t-i-1})$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ (discuter selon λ) ?
7. La somme de deux processus stationnaires est-elle stationnaire ?

EXERCICE N° 4:
On considère le processus modélisé par $Y_t = \beta t + s_t + U_t$ où $\beta \in \mathbb{R}$, où s_t est une fonction périodique de période 4, et où $U = (U_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus stationnaire.

1. le processus $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est-il stationnaire ?
2. Montrer que $Z = (1 - B^4)Y$ est stationnaire et calculer son auto-covariance en fonction de celle de U.

EXERCICE N° 5:
Soit X un processus avec tendance polynomiale d'ordre k :

$$X_t = \sum_{i=0}^{k} a_i t^i + U_t,$$

où les coefficients a_i appartiennent à $\mathbb{R}$ et (U_t) est un processus stationnaire.

1. Montrer que le processus obtenu par l'application de $(1-B)$ à (X_t), où B désigne l'opérateur retard, admet une tendance polynomiale d'ordre $k-1$.
   Que se passe-t-il si on applique $(1-B)^p$ à (X_t) pour $p \in \mathbb{N}$?
2. On considère maintenant le processus $Y_t = X_t + S_t$ où S_t est une fonction d-périodique. Comment rendre le processus (Y_t) stationnaire ?

EXERCICE N° 6:
On considère le processus défini par

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad X_t = a + bt + s_t + u_t$$

où $a, b \in \mathbb{R}$, $(s_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus saisonnier (périodique) de période 4 et $(u_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance σ^2 indépendant de s.

1. Le modèle est-il correctement paramétré ? Proposer le cas échéant une contrainte naturelle (que l'on supposera vérifiée par la suite) portant sur $(s_t)_t$.
   On définit l'opérateur

   $$M_4 : \left((Z_t)_t \mapsto \left(\frac{Z_t + Z_{t-1} + Z_{t-2} + Z_{t-3}}{4}\right)_t\right)$$

   et on considère le processus $Y = M_4 X$.
2. Donner l'expression de Y_t pour $t \in \mathbb{Z}$, et justifier l'intérêt de la transformation.
3. On définit alors $Z = \Delta Y$.
   Montrer que Z est stationnaire et calculer sa fonction d'auto-corrélation.

EXERCICE N° 7:
On considère le processus défini par $\forall t \in \mathbb{Z}$, $X_t = \epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1}$ où $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc et $\theta \in]-1, +1[$.

1. Montrer que X est stationnaire et calculer sa fonction d'auto-covariance.

EXERCICE N° 8:
Soit le processus défini :

$$Y_t = 1 + \epsilon_t - \frac{1}{2}\epsilon_{t-1}$$

Calculer la fonction d'auto-corrélation et donner une représentation graphique.