U.D.L Sidi Bel Abbès — Module : ADD
Faculté des Sciences Exactes — Responsable : M. HAMMAD
Département : Probabilités-Statistique — Mardi 16/01/2024
Master 2 : SA&PA — Durée :1h30

EXAMEN FINAL

Question de Cours (04 points).

Écrire à partir de la définition de l'inertie totale I_g, les différentes formules possibles qu'on peut extraires.

Exercice (16 points).

Soit $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $Z = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ trois variables décrites par quatre individus A, B, C, et D munis de poids égaux. On désir effectuer une ACP sur des variables centrées réduites.

- 01,5 — Calculer le vecteur moyen du nuage des individus.
- 03,5 — Calculer le tableau Z de données centrées réduites. Déduire la matrice de corrélations R.
- 03,5 — Calculer les éléments propres de R. Déduire la valeur de l'inertie globale du nuage des individus.
- 01,5 — Déterminer les deux premiers axes factoriels de l'ACP normée. Déduire la part d'inertie de chaque axe de représentation.
- 02 — Trouver les coordonnées de projection des individus sur les deux axes.
- 02 — Représenter le nuage des points individus sur le plan factoriel.
- 02 — Calculer la contribution (INR) des individus A et B relativement à l'inertie globale.

Corrigé Type Examen

ADD _ 2023 _ 2024

Questions de cours : Voir le cours.

Exercice (16 points)

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } Z = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$p = 3$

$n = 4$

$p_i = \frac{1}{4} \quad \forall i = \overline{1,4}$

ACP normée (centrée - réduite)

1/ $\forall j = \overline{1,3} \quad \bar{x}^j = \sum_{i=1}^{4} p_i x_{ji} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{4} x_{ji}$

$\forall j = \overline{1,3} \quad \bar{x}^j = 1 \rightarrow g = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2/ $Var(x^j) = \|x^j\|^2_{D_p} = D_p(x^j, x^j) = x^{j'} \cdot D_p \, x^j$

$\sigma_1^2 = x^{1'} \cdot D_p \, x^1 = \frac{1}{4} (-1, 1, 0, 0) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}$

$\sigma_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\sigma_2^2 = x^{2'} \cdot D_p \cdot x^2 = 1$ et $\sigma_3^2 = x^{3'} \cdot D_p \, x^3 = 1$

Sachant que x^1, x^2, x^3 sont les variables centrée

i.e $X_c = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

donc $D_{1/\sigma} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2/. $Z = D_{1/\sigma} \cdot X_C = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & +1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$R = Z \cdot D_p \cdot Z' = \frac{1}{4} ZZ' = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 2\sqrt{2} & 0 \\ 2\sqrt{2} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3/ les éléments propres de R

$\det(R - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

$+ \quad - \quad +$

$= (1-\lambda) \begin{bmatrix} 1-\lambda & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]$

$= (1-\lambda)\left[\left(1-\lambda-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(1-\lambda+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

$\lambda = \begin{cases} 1 \\ \text{ou} \\ 1+\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{ou} \\ 1-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ donc $\begin{cases} \lambda_1 = 1+\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 1-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

D'après la question de cours

$I_g = \sum_{j=1}^{3} \lambda_j = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 3$.

$U_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$(R - \lambda I_3) U_1 = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\sqrt{2}}{2} y = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $F_{\lambda_1} = \{(x, y, z) = (x, x, 0) = x(1,1,0) / x \in \mathbb{R}\}$ est le sous-espace propre associé à λ_1 engendré par $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \|U_1\| = \sqrt{2} + 1$

4/ $\Rightarrow$ Le premier axe factorielle ΔU_1 engendré par $U_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, de même pour $\lambda_2 = 1$, on trouve

$$U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \|U_2\| = 1.$$

$\Rightarrow$ Le deuxième axe factorielle ΔU_2 est engendré par, $U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\text{Part}(\Delta U_1) = \frac{\lambda_1}{I_g} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{3} = \frac{1{,}73}{3} = 0{,}57 \ (57\%)$$

$$\text{Part}(\Delta U_2) = \frac{\lambda_2}{I_g} = \frac{1}{3} = 0{,}33 \ (33\%)$$

5/ Les coordonnées de projection des individus sur les deux axes : $C^1 = Z' U_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$$C^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1+\sqrt{2}/2 \\ +1+\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,71 \\ +1,71 \\ 0,71 \\ -0,71 \end{pmatrix}$$

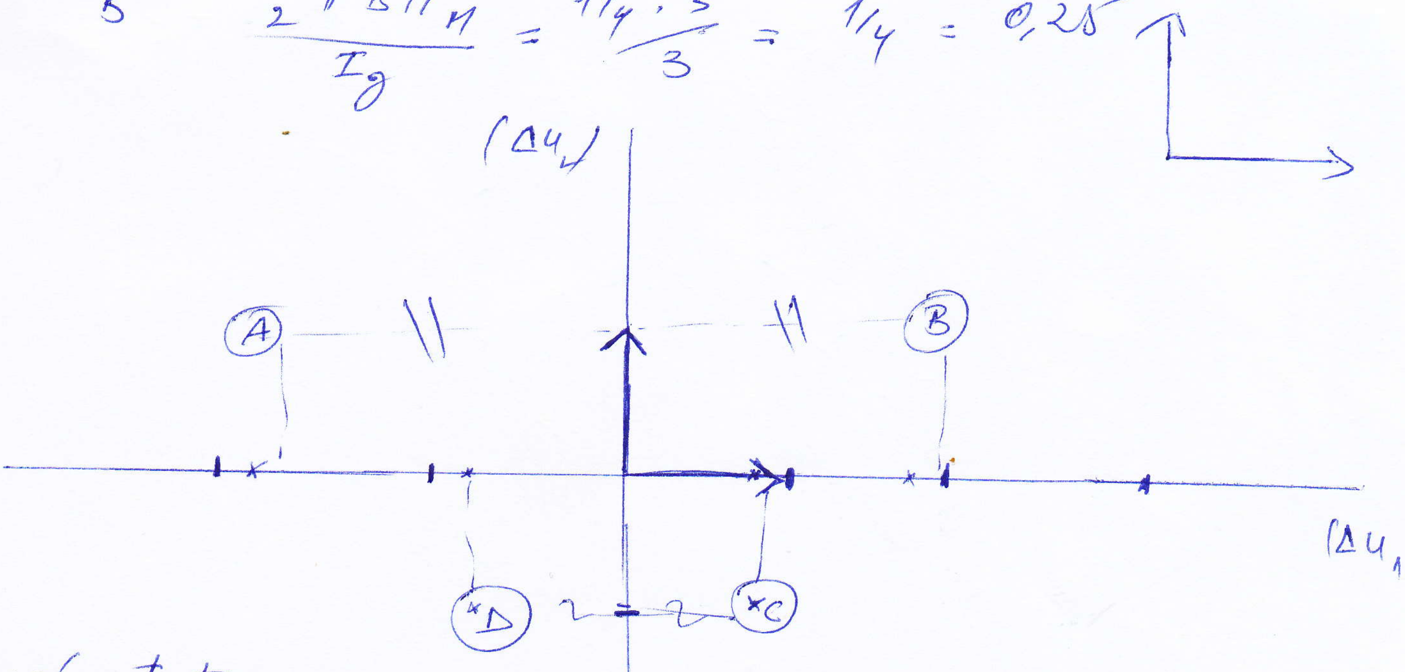
$$C^2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

A $(-1,71 ; 1)$; B $(1,71 ; 1)$; C $(0,71 ; -1)$;
D $(-0,71 ; -1)$.

7/ $I_g = 3$. La contribution des individus A et B relativement à l'inertie totale.

$$iNR_A = \frac{p_1 \|A\|^2_M}{I_g} = \frac{1/4 \cdot 3}{3} = 1/4 = 0,25$$

$$iNR_B = \frac{p_2 \|B\|^2_M}{I_g} = \frac{1/4 \cdot 3}{3} = 1/4 = 0,25$$



- Représentations du nuage individus sur le plan factoriel