**Département de Mathématiques**
**Faculté des Sciences**
**Université Badji Mokhtar-Annaba**

**Master 1: -Probabilités et Statistique**
**-Actuariat**

## Série N°2

Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien réel standard défini sur un espace probabilisé $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$

**Exercice 1:**

Soient $s, t \in \mathbb{R}$■.

1) Calculer $\mathbb{E}\left(B_t B_s\right)$.

2) On suppose $s < t$. Donner la loi de $B_t + B_s$ et celle du couple $(B_t, B_s)$.

**Exercice 2:**

Soit $X$ processus intégrable, adapté, à accroissements indépendants par rapport au passé et tel que $\mathbb{E}\left(X_t - X_s\right) = 0$ pour tous $s, t \geq 0$.

Montrer que $X$ est une martingale.

**Exercice 3:**

Soit $\alpha \in \overline{S}$. Montrer que le processus $M$ défini par $M_t = \int\limits_0^t \alpha_s dB_s$ est une martingale.

**Exercice 4:**

Soit $\alpha \in \overline{S}$. Montrer que le processus $M$ défini par

$$M_t = \left(\int\limits_0^t \alpha_s dB_s\right)^2 - \int\limits_0^t \alpha_s^2 ds$$

est adapté et intégrable.

**Exercice5:**

Montrer que

$$T := \inf\left\{s \geq 0 : |B_s| > 1\right\}$$

est un temps d'arrêt.

**Exercice 6:**

Montrer que que la représentation d'une semi-martingale est unique à une égalité presque surement prés.

**Solutions des exercices**

**Exercice 1:**

1) Si $s \leq t$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(B_t B_s) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(B_t B_s \mid \mathcal{F}_s)) \\
&= \mathbb{E}(B_s \mathbb{E}(B_t \mid \mathcal{F}_s)) \text{ car } B_s \text{ est } \mathcal{F}_s - \text{mesurable} \\
&= \mathbb{E}\left(B_s^2\right) \text{ car } (B_t)_{t \geq 0} \text{ est une martingale} \\
&= s \text{ car } B_s \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, s)
\end{aligned}$$

d'où

$$\mathbb{E}(B_t B_s) = s \wedge t$$

2) Comme $B_t - B_s \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, s)$ et comme $B_t - B_s$ et $B_s$ sont indépendantes, alors

$$B_t + B_s = (B_t - B_s) + 2B_s \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, (t-s) + 4s) = \mathcal{N}(0, t + 3s)$$

Pour tous $\alpha, \beta$ réels la variable aléatoire

$$\alpha B_t + \beta B_s = \alpha (B_t - B_s) + (\alpha + \beta) B_s \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(0, \alpha^2 (t - s) + (\alpha + \beta)^2 s\right)$$

Le couple $(B_t, B_s)$ est donc gaussien. De plus

$$\mathbb{E}(B_t) = \mathbb{E}(B_s) = 0 \text{ et } cov(B_t, B_s) = \mathbb{E}(B_t B_t) = s$$

Il résulte que

$$(B_t, B_s) \rightsquigarrow \mathcal{N}\left((0,0), \begin{pmatrix} t & s \\ s & s \end{pmatrix}\right)$$

**Exercice 2:**

Il suffit de montrer que $\mathbb{E}(X_t - X_s \mid \mathcal{F}_s) = 0$ pour tous $s \leq t$ .

Comme $X$ est à accroissements indépendants par rapport au passé, alors la variable aléatoire $X_t - X_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$, d'où

$$\mathbb{E}(X_t - X_s \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(X_t - X_s) = 0$$

**Exercice 3:**

*Cas où* $\alpha \in S$.

$M$ est adapté. En effet, on a

$$M_t = \sum_k \alpha_{t_k \wedge t} \left(B_{t_{k+1} \wedge t} - B_{t_k \wedge t}\right)$$

Comme $\mathcal{F}_{t_k \wedge t} \subset \mathcal{F}_{t_{k+1} \wedge t} \subset \mathcal{F}_t$ et comme $(B_t)$ et $\alpha$ sont adaptés, alors chacune des variables aléatoires $\alpha_{t_k \wedge t}, B_{t_{k+1} \wedge t}$ et $B_{t_k \wedge t}$ est $\mathcal{F}_t -$ mesurable. Il résulte que $M_t$ est $\mathcal{F}_t -$mesurable, comme étant la somme de produit de différences de variables aléatoires mesurables. $M$ est donc adapté.

Comme $\mathbb{E}\left(M_t^2\right)=\mathbb{E}\left(\int\limits_0^t \alpha_s^2 ds\right)$ alors $\mathbb{E}\left(|M_t|\right)\leq \mathbb{E}\left(M_t^2\right)<\infty$.

On a,

$$M_{t+h}-M_t=\sum_k \alpha_{\widehat{t_k}}\left(B_{\widehat{t}_{k+1}}-B_{\widehat{t_k}}\right)$$

où $\left(\widehat{t_k}\right)$ est la subdivision de l'intervalle $[t,t+h]$ formée à l'aide de $t,t+h$ et des $k$ qui appartiennent à $[t,t+h]$, d'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(M_{t+h}-M_t\mid\mathcal{F}_t\right) &= \sum_k \mathbb{E}\left(\alpha_{\widehat{t_k}}\left(B_{\widehat{t}_{k+1}}-B_{\widehat{t_k}}\right)\mid\mathcal{F}_t\right)\\
&= \sum_k \mathbb{E}\left(\alpha_{\widehat{t_k}}\left(B_{\widehat{t}_{k+1}}-B_{\widehat{t_k}}\right)\mid\mathcal{F}_t\right)\\
&= \sum_k \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\alpha_{\widehat{t_k}}\left(B_{\widehat{t}_{k+1}}-B_{\widehat{t_k}}\right)\mid\mathcal{F}_{\widehat{t_k}}\right)\mid\mathcal{F}_t\right)\\
&= \sum_k \mathbb{E}\left(\alpha_{\widehat{t_k}}\mathbb{E}\left(B_{\widehat{t}_{k+1}}-B_{\widehat{t_k}}\mid\mathcal{F}_{\widehat{t_k}}\right)\mid\mathcal{F}_t\right) \text{ car } \alpha \text{ est adapté}\\
&= 0 \text{ car } \mathbb{E}\left(B_{\widehat{t}_{k+1}}-B_{\widehat{t_k}}\mid\mathcal{F}_{\widehat{t_k}}\right)=0 \text{ ( } (B_t) \text{ est une martingale)}
\end{aligned}$$

$M$ est doc une martingale.

*Cas où* $\alpha\in\overline{S}$

Soit $(\alpha_n)$ une suite de $S$ qui converge vers $\alpha$ dans $L^2(\Omega\times[0,t])$. On pose $M_t^n=\int\limits_0^t \alpha_s^n dB_s$. On sait, par définition de l'intégrale stochastique, que la suite de variables aléatoires $(M_t^n)$ converge dans $L^2(\Omega)$ vers $M_t$. Il résulte alors que $M$ est adapté et appartient à $L^2(\Omega)$ donc intégrable.

il suffit de montrer que la suite de variables aléatoires $\left(\mathbb{E}\left(M_{t+h}^n\mid\mathcal{F}_t\right)\right)$ converge vers $\mathbb{E}\left(M_{t+h}\mid\mathcal{F}_t\right)$ dans $L^2(\Omega)$ grâce à l'unicité de la limite.

On a

$$\begin{aligned}
0 &\leq \mathbb{E}\left(\left(\mathbb{E}\left(M_{t+h}^n\mid\mathcal{F}_t\right)-\mathbb{E}\left(M_{t+h}\mid\mathcal{F}_t\right)\right)^2\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(M_{t+h}^n-M_{t+h}\mid\mathcal{F}_t\right)^2\right)\\
&= \left|\left|\mathbb{E}\left(M_{t+h}^n-M_{t+h}\mid\mathcal{F}_t\right)\right|\right|_2^2\\
&\leq \left|\left|M_{t+h}^n-M_{t+h}\right|\right|_2^2
\end{aligned}$$

car l'espérance conditionnelle contracte la norme.

Ainsi $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}\left(\left(\mathbb{E}\left(M_{t+h}^n\mid\mathcal{F}_t\right)-\mathbb{E}\left(M_{t+h}\mid\mathcal{F}_t\right)\right)^2\right)=0$, d'où l'affirmation. $M$ $\underset{n\to\infty}{}$ est donc une martingale.

**Exercice 4:**

Comme le processus $\left(\int\limits_0^t \alpha_s dB_s\right)_{t\geq 0}$ est une martingale, alors la variable aléatoire $\left(\int\limits_0^t \alpha_s dB_s\right)^2$ est $\mathcal{F}_t-$mesurable et comme

$$\int_0^t \alpha_s^2 ds = \sum_k \alpha_{t_k\wedge t}^2 \left(t_{k+1}\wedge t - t_k \wedge t\right)$$

est aussi $\mathcal{F}_t-$mesurable pour tout $t \geq 0$. On en déduit que la variable aléatoire $M_t$ est $\mathcal{F}_t-$mesurable pour tout $t \geq 0$, qui signifie que le processus $M$ est adapté.

Comme

$$|M_t| \leq \left(\int_0^t \alpha_s dB_s\right)^2 + \int_0^t \alpha_s^2 ds,$$

alors

$$\mathbb{E}\left(|M_t|\right) \leq \mathbb{E}\left(\int_0^t \alpha_s dB_s\right)^2 + \mathbb{E}\left(\int_0^t \alpha_s^2 ds\right) = 2\mathbb{E}\left(\int_0^t \alpha_s^2 ds\right) < \infty$$

qui signifie que le processus $M$ est intégrable.

**Exercice 5:**

On a pour tout $t \geq 0$, à cause de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$,

$$\{T > t\} = \bigcap_{s\leq t} \{|B_s| \leq 1\} = \bigcap_{\substack{s\leq t\\ s\in\mathbb{Q}}} \{|B_s| \leq 1\}.$$

Or chacun des ensembles $\{|B_s| \leq 1\} = B_s^{-1}\left([-1,1]\right) \in \mathcal{F}_t$ et comme la tribu $\mathcal{F}_t$ est stable par rapport à l'intersection dénombrable, alors l'événement $\{T > t\}$ appartient à $\mathcal{F}_t$, d'où $T$ est un temps d'arrêt.

**Exercice 6:**

Soient

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + M_t + V_t \\ &= X_0 + M_t' + V_t', \end{aligned}$$

deux représentations de la semi-martingale $X$, où $M$ et $M'$sont des martingales et $V$ et $V'$ sont des processus à variations finies. Alors on a par différence $M_t - M_t' = V_t' - V_t$.

Comme $M - M'$ est une martingale et $V' - V$ est un processus à variations finies, alors $M_t - M_t' = V_t' - V_t = 0$ $p.s.$pour tout $\geq 0$, doù

$M_t = M_t'$ et $V_t' = V_t$ $p.s.$pour tout $\geq 0$.