Corrigé du TD1. Anal fctelle

Exo1. a) $\|\cdot\|_p$: i) Soit $x=(x_i)_{i=\overline{1,n}} \in \mathbb{C}^n$.

i.1. $x=0 \Rightarrow \|x\|_p = 0$.

i.2. $\|x\|_p = 0 \Rightarrow \left(\sum_{p=1}^{n} |x_p|^p\right)^{1/p} = 0 \Rightarrow |x_p| = 0,\ p=\overline{1,n} \Rightarrow x_p = 0,\ p=\overline{1,n}$

$\Rightarrow x = 0_{\mathbb{C}^n}$.

ii. Soit $x=(x_k)_{k=\overline{1,n}} \in \mathbb{C}^n$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\|\lambda x\|_p = \left(\sum_{p=1}^{n} |\lambda x_p|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{p=1}^{n} |\lambda|^p |x_p|^p\right)^{1/p} = \left(|\lambda|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{p=1}^{n} |x_p|^p\right)^{1/p}$$

$$= |\lambda|\, \|x\|_p .$$

iii. Soient $x=(x_k)_{k=\overline{1,n}}$, $y=(y_k)_{k=\overline{1,n}} \in \mathbb{C}^n$.

$$\|x+y\|_p = \left(\sum_{p=1}^{n} |x_p + y_p|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{p=1}^{n} (|x_p| + |y_p|)^p\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{p=1}^{n} |x_p|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{p=1}^{n} |y_p|^p\right)^{1/p} \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$ par l'inégalité de Minkowski. $\square$

De (i), (ii) et (iii), $\|\cdot\|_p$ est 1 norme sur $\mathbb{C}^n$.

↳ $\|\cdot\|_\infty$: De la même manière.

b) Soit $x=(x_p)_{p=\overline{1,n}} \in \mathbb{C}^n$. On a :

$$\|x\|_\infty^p = \left(\sup_{k=\overline{1,n}} |x_k|\right)^p = \sup_{k=\overline{1,n}} |x_k|^p \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p = \|x\|_p^p .$$

D'où $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \quad \dots (1)$.

D'autre part,

$$\|x\|_p^p = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \leq \sum_{k=1}^{n} \sup_{k=\overline{1,n}} |x_k|^p \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\sup_{k=\overline{1,n}} |x_k|\right)^p =$$

$$= n \|x\|_\infty^p .$$

D'où $\|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty$ -- (2)

De (1) et (2), $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty$.

Ce qui montre que les normes $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes sur $\mathbb{C}^n$. $\square$

Exo2. 1) $\|\cdot\|_1$: i) Soit $f \in E$. $\|f\|_1 = 0 \Rightarrow \int_a^b |f(t)|\, dt = 0$

$\Rightarrow |f(t)| = 0$, $t \in [a,b]$ (car $|f|$ est 1 fct. continue et positive sur $[a,b]$)

$\Rightarrow f = 0$ sur $[a,b]$.

De m̂, si $f = 0$, alors $\|f\|_1 = 0$.

(ii) et (iii) sont faciles à vérifier.

$\|\cdot\|_2$: (i) et (ii) de la m̂ manière que $\|\cdot\|_1$.

iii) Soient $f, g \in E$: $\|f+g\|_2^2 = \int_a^b |(f+g)(t)|^2 dt =$

$\int_a^b |f(t)|^2 dt + \int_a^b |g(t)|^2 dt + 2\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt \leq$

$\leq \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + 2\|f\|_2 \|g\|_2$ (par l'inég de C.S.)

$= (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2$. D'où, $\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$. $\square$

$\|\cdot\|_\infty$: De la m̂ manière.

2) Soit $f \in E$. $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,dt = \int_a^b |f(t)|.1\,dt \leq$

$\leq \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{1/2} \left(\int_a^b 1^2 dt\right)^{1/2}$ (par Cauchy-Schwartz)

$\leq \sqrt{b-a}\, \|f\|_2$.

D'autre part, $\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{1/2} \leq \left(\int_a^b \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$

$\leq \left[\left(\sup_{t\in[a,b]} |f(t)|\right)^2\right]^{1/2} \left(\int_a^b dt\right)^{1/2} \leq \sqrt{b-a}\, \|f\|_\infty$.

D'où, $\|f\|_1 \leq \sqrt{b-a}\, \|f\|_2 \leq \sqrt{b-a}\, \|f\|_\infty$, $f \in E$.

3) Soit $f_n(t) = t^n$, $t \in [0,1]$, $n \geq 1$.

$\|f_n\|_\infty = \sup_{0\leq t\leq 1} |t^n| = 1$ et $\|f\|_1 = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$.

D'où, $\frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} = n+1 \longrightarrow +\infty$, $(n \to +\infty)$

Donc $\forall A > 0$, $\exists N_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n > N_0 : \|f_n\|_\infty > A \|f_n\|_1$.

D'où, il n'existe aucun $c_2 > 0$ tq $\|f_n\|_\infty < c_2 \|f_n\|_1$.

Les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont donc pas équivalentes sur E. $\square$

Exercice 3. 1) Démonstration analogue à celle du cours, chapitre 2, Proposition 2.3, avec $Y = \mathbb{R}$ est complet.

2) Déf. Soit E 1 e.v. normé, et soit $F \subseteq E$. F est dit fermé si : $\forall (x_n)_n \in F$ avec $(x_n)_n$ convergente, alors

$$\lim_{n \to +\infty} x_n \in F.$$

Soit donc $(f_n)_n$ 1 suite ds F avec $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$, i.e., $\boxed{f \in \mathcal{F}_1 ??}$

$$\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0 \quad \text{...}(*)$$ (la norme de $\mathcal{F}_1$ est celle de $B(\mathbb{R}, \mathbb{R})$)

On a donc : les f_n sont toutes continues sur $\mathbb{R}$ car $f_n \in \mathcal{F}_1$, $n \geq 1$

De plus, par $(*)$, $(f_n)_n \longrightarrow f$ unif^t sur $\mathbb{R}$.

Par le Thm de la continuité (Analyse 03), f est aussi continue sur $\mathbb{R}$, et de plus :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to +\infty} f_n(x) \right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} 0 = 0$$ (car $f_n \in \mathcal{F}_1$, $n \geq 1$).

Par suite, $f \in \mathcal{F}_1$, et $\mathcal{F}_1$ est donc fermé ds $B(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

3) Un fermé dans 1 complet est aussi complet. $(\mathcal{F}_1, \|\cdot\|_\infty)$ est donc complet. $\square$

Ex 4 : 1) Soit $T : E \to F$ linéaire.
et soit $x \in E$. Comme $\dim E = n < +\infty$, il existe ds E
1 base finie $(e_1, e_2, \dots, e_n)$. Donc $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $i = \overline{1,n}$

D'où : $\|Tx\|_F = \|T(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i)\|_F = \|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(e_i)\|_F \leq$

$\leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \|Te_i\|_F \leq \sum_{i=1}^{n} (|\lambda_i| \max_{i=\overline{1,n}} \|Te_i\|) \leq$

$\leq \max_{i=\overline{1,n}} \|Te_i\| \|x\|_1$ car $(Te_i)_{i=\overline{1,n}}$ sont de nombre fini.
et $\|.\|_1$ est équivalente à la norme $\|.\|_E$ car $\dim E < +\infty$
d'où T est continue. $\square$

2) Calcul direct.