Université Mohamed Khider Biskra
Faculté des FSENV
Département de Mathématiques

Stat D'ordre
Master-2
2021/2022.

Correction de L'interrogation 02

Correction de l'exercice 01

1. La fonction de répartition de X est F définie par $\forall t \in \mathbb{R}$, $F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\, dx$.

   Or une primitive de $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

   De plus $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{1+e^{-x}} = 0$ d'où la fonction de répartition de X est définie par :

   $\forall t \in \mathbb{R},\ F(t) = \dfrac{1}{1+e^{-t}}$.

   $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont des variables aléatoires indépendantes, de même densité f , donc de fonction de répartition F.
   $T_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.
   Déterminons alors la fonction de répartition de T_n.
   On a :
   Soit $t \in \mathbb{R}$, $[T_n \leqslant t] = ([X_1 \leqslant t] \cap [X_2 \leqslant t] \cap \ldots \cap [X_n) \leqslant t]) = \bigcap_{k=1}^{n} [X_k \leqslant t]$.

   D'où :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}([T_n \leqslant t]) &= \mathrm{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \leqslant t]\right) && \text{par indépendance de } X_1, \ldots, X_n \\
&= \prod_{k=1}^{n} \mathrm{P}([X_k \leqslant t]) && X_k \text{ même loi que } X \\
&= F^n(t) \\
&= \frac{1}{(1+e^{-t})^n}
\end{aligned}$$

   Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}, F_{T_n}(t) = \dfrac{1}{(1+e^{-t})^n}$.

2. On a $U_n = T_n - \ln n$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}([U_n \leqslant t]) &= \mathrm{P}([T_n - \ln n \leqslant t]) \\
&= \mathrm{P}([T_n \leqslant t + \ln n]) \\
&= F_{T_n}(t + \ln n) \\
&= \frac{1}{(1 + e^{-t-\ln n})^n} \\
&= \left(1 + \frac{e^{-t}}{n}\right)^{-n}
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{P}([U_n \leqslant t]) = \left(1 + \frac{e^{-t}}{n}\right)^{-n}.$$

3. Pour $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, on vient de montrer que :

$$\mathrm{P}([U_n \leqslant t]) = \left(1 + \frac{e^{-t}}{n}\right)^{-n} = e^{-n\ln\left(1+\frac{e^{-t}}{n}\right)}.$$

Or $\ln(1+h) \underset{h\to 0}{\sim} h$, $\frac{e^{-t}}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\ln\left(1 + \frac{e^{-t}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-t}}{n}$

et $-n\ln\left(1 + \dfrac{e^{-t}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n \cdot \frac{e^{-t}}{n} = -e^{-t}$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}([U_n \leqslant t]) = e^{-e^{-t}}$.

Montrons que $g : t \mapsto e^{-e^{-t}}$ est une fonction de répartition d'une certaine variable à densité.
On a :

- g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ en tant que composées de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- Ensuite : $\lim\limits_{t\to-\infty} g(t) = 0$ par composées de limites,
  et $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = e^0 = 1$.
- Enfin $\forall t \in \mathbb{R}$, $g'(t) = e^{-t}e^{-e^{-t}} > 0$, donc g est une fonction strictement croissante.

Conclusion : $\forall t \in \mathbb{R}$, $g : t \mapsto e^{-e^{-t}}$ est une fonction de répartition d'une certaine variable aléatoire U de densité : $t \mapsto e^{-t}e^{-e^{-t}}$ définie sur $\mathbb{R}$.
Donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers U $(U_n \xrightarrow{\mathcal{L}} U)$.

Correction de l'exercice 02

1) La densité de la v.a.r. générique dans ce modèle de la loi uniforme est :

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta}\mathbb{1}_{[0,\theta]}(x).$$

La vraisemblance de l'échantillon $(x_1, \ldots, x_n)$ est alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x_1,\ldots,x_n;\theta) &= \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = \frac{1}{\theta^n}\prod_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{[0,\theta]}(x_i)\\ &= \frac{1}{\theta^n}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(\inf_{i=1,\ldots,n} x_i)\mathbb{1}_{[0,\theta]}(\sup_{i=1,\ldots,n} x_i) = \frac{1}{\theta^n}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x_{(1)})\mathbb{1}_{]-\infty,\theta]}(x_{(n)}).\end{aligned}$$

2) La fonction $\theta \mapsto \mathcal{L}(x_1,\ldots,x_n;\theta)$ est nulle sur l'intervalle $]-\infty, x_{(n)}[$ et coïncide avec la fonction $1/\theta^n$ sur $[x_{(n)}, +\infty[$. Cette fonction n'est pas continue en $x_{(n)}$ (et donc pas dérivable). Ainsi elle n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$. On ne peut donc appliquer le raisonnement habituel (recherche du zéro de la dérivée première).

Mais il apparait clairement que le maximum de la vraisemblance est atteint en $\theta = x_{(n)}$ puisque avant (strictement) ce point la vraisemblance est nulle, qu'en ce point elle prend la valeur

$$\mathcal{L}(x_1,\ldots,x_n;x_{(n)}) = \frac{1}{\left(x_{(n)}\right)^n}$$

et qu'après elle est décroissante. Ainsi l'estimateur du maximum de vraisemblance est

$$\hat{\theta}_n = X_{(n)}.$$