Chapitre 3

Processus stochastiques à temps continu

Dans beaucoup de cas il est nécessaire d'avoir recours à des modèles stochastiques faisant intervenir tous les instants appartenant à un intervalle donné, c'est à dire à des processus à temps continu. On s'intéresse dans ce chapitre aux processus qui sont à valeurs dans un espace d'états au plus dénombrable$E$ et possèdent la propriété de Markov tels que les chaînes de Markov, Processus de Poisson, Processus de naissance et de mort et leur application au système d'attente M/M/1.

3-1 Chaîne de Markov en temps continu

Définition 1 Le processus stochastique $(X(t))_{t\geq 0}$ est une chaîne de Markov en temps continu si pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour toute suite d'instants $0 \leq t_0 < t_1 <..< t_n < t$ et tous états $i, i_0, .., i_n$on a

$$P(X(t) = i|\, X(t_n) = i_n, .., X(t_1) = i_1, X(t_0) = i_0) = P(X(t) = i \;\; |X(t_n) = i_n)$$

Définition 2 (Probabilités de transition)

Pour tous réels positifs t et t' et pour tous états i et $j$les probabilités de transition sont définies par:

$$p_{ij}(t', t) = P(X(t) = j|\, X(t') = i)$$

Lorsque les probabilités de transition sur un intervalle de temps de longueur $t$sont définies par

$$p_{ij}(t) = P(X(t) = j|\, X(0) = i)$$

one dit queLa chaîne de Markov est homogène.
Dans la suite, on ne considèrera que des chaînes de Markov homogènes.

Remarque 1 Les chaînes à temps discret et les chaînes à temps continu ont des propriétés analogues.
La plus importante de ces propriétés est d'être des processus sans mémoire : leur comportement futur étant donné l'état présent ne dépend pas des états et des temps de séjour passés.

Définition 3 (Matrice de transition)

la matrice $P(t)$ dont les éléments sont les probabilités de transition $p_{ij}(t)$, $i, j \in E$ est appelée matrice de transition sur un intervalle de temps de longueur t vérifiant :

- $p_{ij}(t) \geq 0 \;\; , i, j \;\in E$
- $\sum_{j\in E} p_{ij}(t) = 1 \;\; , i \in E \,, t \geq 0$

Si = $\{0,1, .., m\}$, la matrice de transition $P(t)$ est donnée par

$$P(t) = \begin{pmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) & \dots & p_{0m}(t) \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) & \dots & p_{1m}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{m0}(t) & p_{m1}(t) & \dots & p_{mm}(t) \end{pmatrix}$$

Théorème 1 : Equations de Chapman Kolmogorov

Soit $(X(t))_{t\geq 0}$ une chaîne de Markov en temps continu à espace d'états$E$, de probabilité de transition $p_{ij}(t) i, j \ \in E$. Alors

$$p_{ij}(t+s) = \sum_{k\in E} p_{ik}\,(t) p_{kj}(s)\,,\quad t, s \geq 0\,, i\,, j \ \in E$$

En notation matricielle, $P(t+s) = P(t)P(s)$

On peut donc voir une chaîne de Markov en temps continu comme une famille de matrices de transition $P(t)$, $t \geq 0$ satisfaisant l'équation ci-dessus. Néanmoins, on ajoute l'hypothèse de régularité suivante :

$$\lim_{t\to 0} P(t) = I\,,$$

Où, I est la matrice identité.

3-1-1 Générateur infinitésimal

Une matrice carrée $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j\in E}$ définie par $A = \lim_{t\to 0^+} \frac{P(t)-I}{t}$ est appelée générateur infinitésimal (ou matrice génératrice) si :

- La somme de chaque ligne de A est nulle
- Les éléments sur la diagonale sont négatifs ou nuls et les autres sont positifs ou nuls.
- On a

$$a_{ij} = \lim_{t\to 0^+} \frac{p_{ij}(t)}{t} \qquad si \ \ i \neq j$$

$$a_{ii} = -\lambda_i = \lim_{t\to 0^+} \frac{p_{ii}(t) - 1}{t} \quad sinon$$

La constante $a_{ij,} i, j \in E$, $i \neq j$ est le taux e transition infinitésimal de l'état i vers l'état j.
Le coefficient positif - a_{ii} = λ_i est le taux de transition instantané de départ de l'état .

Exemple 1 la matrice A donnée par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

est un générateur infinitésimal de la chaîne de Markov $X(t)$

Proposition 1 L'unique solution du système différentiel avec condition initiale

$$\begin{cases} P(0) = I \\ P'(t) = AP(t) = P(t)A \end{cases}$$

est la matrice de transition

$$P(t) = e^{At} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(At)^n}{n!}$$

3-1-2 Calcul de la matrice $P(t)$

Le calcul de la matrice $P(t) = e^{At}$ est facile lorsque A est une matrice diagonalisable : $A = UDU^{-1}$, Où D est la matrice diagonale des valeurs propres de A et Uest une matrice inversible dont les colonnes sont des vecteurs propres à droite associés à ces valeurs propres .Son exponentielle est alors

$$P(t) = e^{At} = Ue^{Dt}U^{-1}$$

Exemple 2 Reprenons l'exemple précédent .Pour calculer$P(t)$, on diagonalise la matrice A. On a donc $A = UDU^{-1}$. Les valeurs propres sont alors obtenus en solutionnant l'équation caractéristique

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$\det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)(-1-\lambda) - 1 = \lambda(\lambda+2) = 0$. D'où $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = -2$.

Les vecteurs propres associés sont obtenus en solutionnant l'équation :

$$(A - \lambda_i I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , i = 0,1$$

Pour $\lambda_0 = 0$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Pour $\lambda_1 = -2$ alors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On définit donc $U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

on trouve alors

$$U^{-1} = \frac{1}{detU}\ {}^{t}Com(U) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Finalement, on obtient

$$P(t) = e^{At} = Ue^{Dt}U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Ainsi , $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

On remarque que toutes les lignes de la matrice de transition limite sont identiques, Ce qui signifie que la chaîne oublie l'état initial à long terme . De plus, les valeurs sur chaque ligne correspondent aux proportions moyennes de temps à long terme dans les états 0,1 respectivement.

3-1-3 Loi de $X(t)$

La loi à l'instant t de la chaine de Markov en temps continu $(X(t))_{t\geq 0}$ de loi initiale $\pi(0)$ et de générateur infinitésimal A, est donnée par

$$\pi(t) = \pi(0)\, P(t) = \pi(0)e^{At}$$

Où$\pi(0) = \big(P(X(0) = 0), P(X(0) = 1)\big)$ et $\pi(t) = \big(P(X(t) = 0), P(X(t) = 1)\big)$

Exemple 3 : supposons qu'à l'instant initial$\pi(0) = (0,1)$alors à l'instant t

$$\pi(t) = (0,1)\begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2t} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2t} \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2t} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2t} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2t},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2t}\right)$$

3-1-4 Classification des états

-Un état j est accessible depuis un état i s'il existe $t \geq 0$ tel que $p_{ij}(t) > 0$
-Deux états i et j communiquent s'il existe $t_1 \geq 0$, $t_2 \geq 0$ tels que $p_{ij}(t_1) > 0$ et $p_{ji}(t_2) > 0$
-Une chaîne de Markov en temps continu est irréductible si tous ses états communiquent.

Les propriétés d'irréductibilité, de récurrence et de transience d'une chaîne de Markov en temps continu sont les mêmes que celles d'une chaînes de Markov discrètes .

3-1-5 Distribution stationnaire

Un vecteur de probabilité $\pi = (\pi_i)_{i\in E}$ est stationnaire si pour tout j et pour tout ≥ 0 , on a

$$\sum_{i\in E} \pi_i\, p_{ij}(t) = \pi_j$$

qui s'écrit$\pi\, P(t) = \pi$

Théorème2 Soit une chaîne de Markov en temps continu de générateur A . Si πest une distribution stationnaire , elle satisfait l'équation d'équilibre

$$\pi A = 0$$

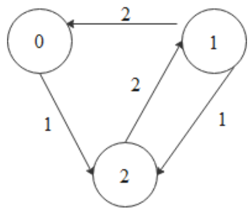
Avec $\sum_{i\in E} \pi_i = 1$

Théorème 3 une chaîne de Markov en temps continu irréductible possède une unique distribution stationnaire $(\pi_j)_{j\in E}$ indépendante de la distribution initiale , elle est égale à $\pi_j = \lim\limits_{t\to+\infty} p_{ij}(t)$

Exemple 4 le générateur d'une chaîne de Markov en temps continu à valeurs dans $E = \{0,1,2\}$ est donné par

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & -3 & 1\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}$$

Son graphe de transition est



A partir du graphe, on remarque que la chaîne est irréductible donc elle possède une unique distribution stationnaire calculée par

$$\begin{cases}\pi A=0\\ \sum_{i\in E}\pi_i=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\pi_0+2\pi_1=0\\ -3\pi_1+2\pi_2=0\\ \pi_0+\pi_1-2\pi_2=0\\ \pi_0+\pi_1+\pi_2=1\end{cases}$$

Ce qui donne $\pi_0=2\pi_1$ et $\pi_2=\frac{3}{2}\pi_1$. De l'équation $\pi_0+\pi_1+\pi_2=1$, on obtient

$2\pi_1\ +\pi_1+\frac{3}{2}\pi_1=1$d'où$\pi_1=\frac{2}{9}$, $\pi_0=\frac{4}{9}$ et $\pi_2=\frac{3}{9}$, $\pi=\left(\frac{4}{9},\frac{2}{9},\frac{3}{9}\right)$

3-2 Processus de Poisson

Un processus de Poisson est un modèle mathématique modélisant des évènements aléatoires qui se reproduisent au cours du temps : naissances , pannes , appels téléphoniques ,…
De tels évènements peuvent être décrits à l'aide d'un processus de comptage $(N(t))_{t\geq 0}$.

3-2-1 Processus de comptage

Un processus$(N(t))_{t\geq 0}$ est un processus de comptage si et seulement si

- i- $N(t)\geq 0$,
- ii- $N(t)$est un processus croissant ,
- iii- pour tout $s<t$, $N(t)-N(s)$est le nombre d'évènements(ou sauts) intervenus dans l'intervalle de temps $(s,t]$.

Définition 4 un processus de comptage $(N(t))_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson d'intensité ou de taux λ (λ> 0) si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

- i- $N(0)=0$,
- ii- $N(t)$ est à accroissements indépendants,
- iii- $N(t)$ est à accroissements stationnaires,
- iv- la probabilité que deux évènements ou plus se produisent dans un intervalle de longueur h estnégligeable par rapport à la probabilité qu'il n' y ait qu'un seul évènement :

$$P(N(h)=k)=\begin{cases}1-\lambda h+o(h) & si\quad k=0\\ \lambda h+o\,(h) & si\quad k=1\\ o(h) & si\quad k\geq 2\end{cases}$$

$o(h)$est une fonction de h telle que$\lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h}=0$

Théorème 4 Soit $(N(t))_{t\geq 0}$ un processus de Poisson d'intensité λ> 0 . La v.a $N(t)$ représentant le nombre des évènements dans tout intervalle de temps de longueur$t>0$ suit une loi de Poisson de paramètre λt.Autrement dit :

$$P(N(t)=k)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!},\qquad k=0,1,..$$

Il s'ensuit que $E(N(t))=\lambda t=Var\,(N(t))$

Oùλ est le nombre moyen d'évènements par unité de temps .

Exemple 6 On suppose que$(N(t))_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson d'intensité 4 évènements par heure.

1- La probabilité qu'il y aura au moins un évènement durant les 2 prochaines heures est

$$P(N(2)\geq 1)=1-P(N(2)=0)=1-e^{-8}\frac{(8)^0}{0!}$$

2- Sachant qu'il y a eu 4 évènements durant les 2 dernières heures, la probabilité qu'il n y ait eu aucun évènement durant les 30 dernières minutes est .

$$P(N(1/2)=0\,|N(2)=4)=\frac{P(N(1/2)=0\,,N(2)=4)}{P(N(2)=4)}=\frac{P(N(1/2)=0,N(2)-N(1/2)=4)}{P(N(2)=4)}$$

$$P(N(1/2)=0\,|N(2)=4)=\frac{P(N(1/2)=0)P(N(2)-N(1/2)=4)}{P(N(2)=4)}$$

$$=\frac{P(N(1/2)=0)P(N(3/2)=4)}{P(N(2)=4)}$$

$$=\frac{e^{-2}\frac{(2)^0}{0\,!}e^{-6}\frac{(6)^4}{4\,!}}{e^{-8}\frac{(8)^4}{4\,!}}=\left(\frac{6}{8}\right)^4=\left(\frac{3}{4}\right)^4$$

3-2-2 Loi des temps d'attente et des inter-évènements

Soit $(N(t))_{t\geq 0}$ un processus de Poisson de taux λet soitτ_n la durée séparant le $(n-1)$ ième évènement du n ième évènement. On pose $S_n=\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_n, n\in\mathbb{N}^*$, S_n représente le temps écoulé jusqu'à la réalisation du $n^{\text{ième}}$ évènement**.** On a pour tout$n\in\mathbb{N}^*$, $\tau_1=S_1$ et $\tau_n=S_n-S_{n-1}$ pour tout $n\geq 2$.
Ainsi la connaissance de la famille $(S_n)_{n\geq 1}$ équivaut à celle de la famille $(\tau_n)_{n\geq 1}$.
D'autre part , $S_n\ \leq t$ signifie que le nième évènement a eu lieu à l'instant t ou avant. C'est-à-dire jusqu'à l'instant t , au moins n évènements ont eu lieu, i.e $N(t)\geq n$. Ainsi

$$P(S_n\ \leq t\,)=P(N(t)\geq n)$$

et $P(N(t)=n)=P(S_n\ \leq t\,)-P(S_{n+1}\ \leq t\,)$

Par conséquent , la connaissance de $(N(t))_{t\geq 0}$ équivaut à celle de $(S_n)_{n\geq 1}$.

Théorème 5 La suite des instants inter évènements (ou inter arrivées)$(\tau_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées selon une loi exponentielle de paramètre λ .

Théorème 6 Le temps d'attente du nième évènement S_n est la somme de n variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, elle suit donc la loi gamma de paramètres n et λ. $S_n \hookrightarrow \Gamma(n, \lambda)$

Exemple7 On suppose que les nouveaux arrivants au Québec arrivent selon un processus de Poisson d'intensité λ = 1 par jour **.**

1- Soit τ_{11} le temps d'attente entre le 10 ième immigrant et le 11 ième immigrant. La v.a $\tau_{11} \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$

La probabilité que τ_{11} soit supérieur à 2 jours est :

$$P(\tau_{11} > 2) = 1 - P(\tau_{11} \leq 2) = 1 - \left(1 - e^{-2\lambda}\right) = e^{-2\lambda} = e^{-2}$$

2- On suppose que le temps écoulé jusqu'au 10 ième immigrant est .$S_{10} \hookrightarrow \Gamma(10,1)$

$$E(S_{10}) = \frac{n}{\lambda} = 10\,jours \quad \text{et} \quad Var(S_{10}) = \frac{n}{\lambda^2} = 10\,jours$$

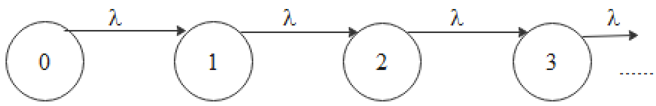
Définition 5 un processus de Poisson$(N(t))_{t\geq 0}$ est une chaîne de Markov en temps continu à valeurs dans $\mathbb{N}$ de générateur infinitésimal .

$$a_{ii} = -\lambda, \quad a_{i,i+1} = \lambda \;, a_{ij} = 0\text{sinon}$$

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & & \dots & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

On dit alors que le processus $(N(t))_{t\geq 0}$ est d'intensité, ou de taux λ

Graphe associé à un processus de Poisson



A partir des équations de Kolmogorov (proposition 1) , on a

$$P(N(t) - N(0) = n \mid N(0) = i) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \,, n \geq 0$$

Supposons toujours $N(0) = 0$, $N(t)$ représente le nombre d'évènements survenus entre l'instant 0 et l'instant t. Pour tout $n \geq 0$,

$$P(N(t) = n\,) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

C'est-à-dire à t fixé, la variable aléatoire $N(t)$ suit une loi de Poisson de paramètre λt.

3-2-3 Propriétés

1- Décomposition : Un processus de Poisson$(N(t))_{t\geq 0}$ d'intensité λ peut être décomposé en deux processus de Poisson $N_1(t)$ et $N_2(t)$ de la manière suivante : Chaque évènement est soumis à une expérience de Bernoulli qui l'attribue avec des probabilités p et 1-p . On admet que ces attributions sont indépendantes les unes des autres et indépendantes de l'état du processus. Alors les processus $N_1\ (t)$ et $N_2\ (t)$ sont des processus de Poisson de paramètres respectifs $\lambda\, p$ et $\lambda(1-p)$.

Exemple 8: Des particules arrivent vers un comptoir suivant un processus de Poisson d'intensité λ = 6 particules par minute. Chaque particule a la probabilité 2/3 d'être enregistrée par le comptoir.
Les particules enregistrées forment un processus de Poisson d'intensité λp = 4 particules / minute

2- Superposition : Soit $N_1\ (t)$ et $N_2\ (t)$ deux processus de Poisson indépendants d'intensités λ_1 et λ_2 alors le processus $N(t) = N_1\ (t) + N_2\ (t)$, $t \geq 0$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda=\lambda_1 + \lambda_2$.

Exemple 9 On considère que les documents électroniques arrivent d'un point 1 ou d'un point 2 à un nœud selon des processus de Poisson d'intensité $\lambda_1 = 0.5$ et $\lambda_2 = 2$ respectivement.
Les documents arrivent donc à un nœud selon un processus de Poisson d'intensité $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 2.5$.

3-3 Processus de naissance et de mort

Les processus de naissance et de mort peuvent modéliser l'évolution d'une population au cours du temps, le nombre de clients dans une file d'attente, etc.

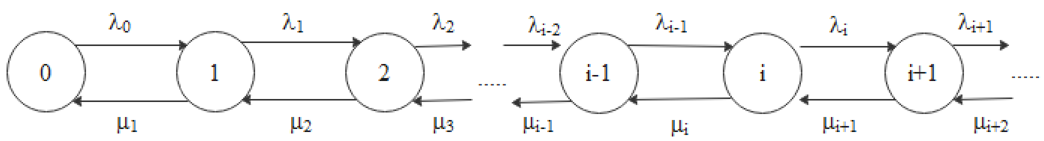
Définition 6 un processus de naissance et de mort est une chaine de Markov en temps continu $(X(t))_{t\geq 0}$ à valeurs dans ℕ, dont le générateur infinitésimal $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j\in\mathbb{N}}$ est de la forme :

$$a_{i,i+1} = \lambda_i > 0 \ \ ,\ a_{i,i-1} = \mu_i > 0\,,\ \ a_{ij} = 0 \ \ si \ \ |i-j| \geq 2$$

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & \dots & .. & .. \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & .. & .. \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & 0 & .. \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Les coefficients positifs λ_i et μ_i sont appelés taux de transition , λ_i , $i \geq 0$ est le taux de naissance et μ_i , $i \geq 1$ est le taux de mort .

Le graphe de transition est :



Les transitions possibles à partir de l'état i ne peuvent se faire que vers l'état $(i-1)$, en cas de mort, où vers l'état $(i+1)$, en cas de naissance.

3-3-1 Distribution stationnaire

La distribution stationnaire π est solution de l'équation $\pi A = 0$ équivalente au système linéaire :

$$-\lambda_0\pi_0 + \mu_1\pi_1 = 0$$

$$\forall i \geq 1 \ \ ,\ \ \lambda_{i-1}\pi_{i-1} - (\lambda_{i+}\mu_i)\pi_i + \mu_{i+1}\pi_{i+1} = 0$$

Les calculs donnent pour i quelconque

$$\begin{cases} \pi_1 = \dfrac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0 \\ \pi_2 = \dfrac{\lambda_1}{\mu_2}\pi_1 \\ \pi_3 = \dfrac{\lambda_2}{\mu_3}\pi_2 \\ \vdots \\ \pi_i = \dfrac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}\pi_{i-1} \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = \dfrac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0 \\ \pi_2 = \dfrac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}\pi_0 \\ \pi_3 = \dfrac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2\mu_3}\pi_0 \\ \vdots \\ \pi_i = \dfrac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2 \dots\dots \lambda_{i-1}}{\mu_1\mu_2\mu_3 \dots\dots \mu_i}\pi_0 \\ \vdots \end{cases}$$

D'où il vient :

$$\forall n \geq 1,\ \ \pi_n = \pi_0 \left(\frac{\lambda_0\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2 \dots . \mu_n}\right)$$

Compte tenu de la relation $\sum_{n=0}^{+\infty} \pi_n = 1$, la valeur de$\pi_0$ est donnée par la formule

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \pi_n = \pi_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \pi_n = \pi_0 + \pi_0 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2 \dots . \mu_n} = \pi_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2 \dots . \mu_n}\right) = 1$$

On trouve

$$\pi_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2 \dots . \mu_n}\right)^{-1}$$

Si la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2 \dots \mu_n}$ est convergente, alors il y a une distribution stationnaire. Sinon , on a $\pi_0 = 0$

D'où $\pi_n = 0$ pour tout n : Dans ce cas, il n' y a pas de loi stationnaire. Dans ce cas, Le processus est transitoire.

Exemple 10 Un atelier comprend 3 machines automatiques qui sont entretenues par un opérateur. Pour chaque machine, la durée de bon fonctionnement est une variable aléatoire exponentielle de paramètre λ L'opérateur ne peut réparer qu'une seule machine à la fois, le temps de réparation suit une distribution exponentielle de paramètre μ. Déterminer pour $\lambda = \mu/3$.

1- Le générateur infinitésimal et son graphe des transitions.
2- La probabilité que l'opérateur ne soit pas occupé.
3- Le nombre moyen de machines en pannes.

Solution

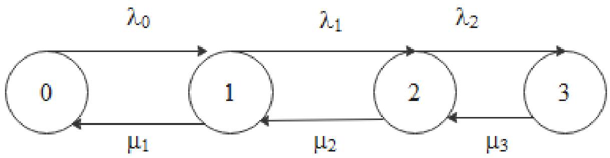
Le nombre de machines en pannes est un processus de naissance et de mort à valeurs dans $\{0,1,2,3\}$, de taux de transition

$$\lambda_0 = 3\lambda = \mu\ , \qquad \lambda_1 = 2\lambda = \frac{2}{3}\mu\ ,\ \ \lambda_2 = \lambda = \frac{\mu}{3}$$
$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$$

1- Le générateur infinitésimal est

$$A = \begin{pmatrix} -\mu & \mu & 0 & 0 \\ \mu & -5\mu/3 & 2\mu/3 & 0 \\ 0 & \mu & -4\mu/3 & \mu/3 \\ 0 & 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

2- Le graphe de transition est



3- On a $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{3} < 1$ donc la distribution stationnaire existe, elle est égale à

$$\pi_n = \pi_0 \frac{\lambda_0\lambda_1..\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2..\mu_n} \quad ,n = 1,2,3$$

et $\pi_0 = \left(1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2} + \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2\mu_3}\right)^{-1} = \left(1 + 1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9}\right)^{-1} = \frac{9}{26}$

d'où $\pi_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0 = \frac{9}{26}$, $\pi_2 = \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}\pi_0 = \frac{6}{26}$ et $\pi_3 = \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2\mu_3}\pi_0 = \frac{2}{26}$

4-La probabilité que l'opérateur ne soit pas occupé est $\pi_0 = \frac{9}{26}$

5- Le nombre moyen de machines en pannes est

$$E(X) = \sum_{n=0}^{3} n\,\pi_n = 0 \times \pi_0 + \pi_1 + 2\pi_2 + 3\pi_3 = \frac{27}{26}$$

3-4 Système d'attente

Un système d'attente comprend un espace de service avec un ou plusieurs serveurs montés en parallèle et un espace d'attente dans lequel se forme une file d'attente. Il peut être résumé comme suit : Des clients arrivent à un certain endroit et réclament un service. Les instants d'arrivées et les durées de service sont généralement des quantité aléatoire. Si un poste de service est libre, le client qui arrive se dirige immédiatement vers ce poste où il est servi, sinon il prend place dans la file d'attente dans laquelle les clients se rangent selon leur ordre d'arrivée.

3-4-1 Caractéristiques d'un système d'attente

Un système d'attente est caractérisé par :

- Processus des arrivées : qui est la plupart du temps un processus de Poisson. La distribution des intervalles séparant deux arrivées successives est exponentielle.
-Temps de service : est le temps séparant le début et la fin du service .

Nombre de serveurs : un système d'attente peut disposer d'un ou plusieurs serveurs s . La plupart du temps, les serveurs sont supposés identiques (ont la même distribution) et indépendants les uns des autres.

-Capacité du système : peut être finie ou infinie lorsque la capacité Kest illimitée ($K < \infty$),la longueur de la file d'attente est K-s . Dans ce cas , un client qui arrive alors que cette dernière est pleine est perdue.

-Discipline **:**Les disciplines les plus courantes sont : FIFO : (first in first out) premier arrivé premier servi, LIFO : (last in first out) dernier arrivé premier servi , Random (aléatoire) le client est choisi aléatoirement..

3-4-2 Notations de Kendall

Un système d'attente est décrit par les notations de Kendall suivantes : Y / B /s /K
Où , Y : distribution du temps entre deux arrivées successives ,
B : distribution des temps de service,
s : le nombre de postes de service montée en parallèle,
K : la capacité du système

Les distributions Y et B sont spécifiées par la convention suivante :

M : distribution qui vérifie la propriété de Markov , processus de Poison pour les arrivés , Loi exponentielle pour le temps de service.
E_k : distribution d'Erlang .
D : cas déterministe

En plus, on utilise les grandeurs suivantes :

1/λ : intervalle moyen séparant deux arrivées successives, d'où λ est le taux des arrivées
1/μ : durée moyenne de service, d'où μ est le taux de service.
Lorsque les distributions sont exponentielles, les taux λ et μ sont identiques aux paramètres de ces distributions

Par exemple , M/D/2/5 signifie que le flux d'arrivée des clients est Poissonnien, la loi des services est déterministe, il y a deux serveurs et la capacité du système est limitée égale à 5 . La longueur de la file d'attente vaut 5-2=3. Si on ne spécifie pas le dernier paramètre celui-ci est infini.

3-4-3 Formule de Little

On considère les notations suivantes :

L : nombre moyen de clients dans le système

L_q : nombre moyen de clients dans la fie d'attente

W : Temps de séjourmoyen d'un client dans le système

W_q : Temps d'attente moyen d'un client

Pour tout système d'attente on a les formules suivantes :

$$L = \lambda_e W, \quad L_q = \lambda_e W_q \ , \ W = W_q + \frac{1}{\mu} \quad \text{et} \quad L = L_q + \frac{\lambda_e}{\mu}$$

λ_e taux d'entrée des clients dans le système . Si la capacité du système est infinie on a $\lambda_e = \lambda$ sinon $\lambda_e < \lambda$

3-4-4Système d'attente M/M/1 /∞

Dans ce système, le flux d'arrivées est de Poisson d'intensité λ, le temps de service est exponentielle de paramètre , la capacité de la file est illimitée et il y a un seul serveur. La discipline est FIFO.

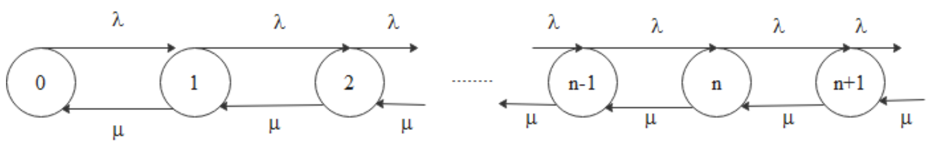
Cette file d'attente correspond à un processus de naissance et de Mort de taux de transition constants :

$$\lambda_i = \lambda \ , \ i \geq 0 \quad \text{ et } \quad \mu_i = \mu i \geq 1$$

Proposition 2 Le processus stochastique $(X(t))_{t\geq 0}$ représentant le nombre de clients dans la file d'attente M/M/1 est une chaine de Markov en temps continu à espace d'états $\mathbb{N}$ et de générateur A :

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 & \ddots \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Son graphe de transition est



Ce processus est irréductible, donc s'il admet une distribution stationnaire alors celle-ci est unique.

Théorème 7

Soit un système M/M/1 de taux $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ tels que $\lambda < \mu$. Alors, la probabilité qu'il y ait n clients dans le système en régime stationnaire est donnée par :

$$\pi_n = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n, n \geq 0$$

L'expression $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ est souvent appelée coefficient d'utilisation du système ou encore intensité du trafic.

En Particulier, la probabilité que le serveur soit inoccupé est $\pi_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$

2 -Paramètres de Performance

A partir de la distribution stationnaire du processus $(X(t))_{t\geq 0}$ on peut calculer les paramètres suivants :

$$L = \frac{\rho}{1-\rho}, \ L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}, W = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} \quad \text{et} \quad W_q = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}, \ \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Exemple 11 Des camions arrivent à une station service pour passer des tests de sécurité suivant un processus de Poisson d'intensité 6 camions par jour. La durée des tests pour chaque camion est une variable aléatoire exponentielle d'espérance mathématique de 1h.30mn. On suppose que l'arrivée des camions ne s'interrompt pas et que la station travaille 24 heures sur 24. On considère $X(t)$ le nombre de camions à la station service à l'instant t.En prenant l'heure pour unité de temps on a les taux de transition $\lambda = 1/4$ et $\mu = 2/3$.
Puisque $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{8} < 1$ alors la distribution stationnaire existe, elle est égale à

$$\pi_n = \left(1 - \frac{3}{8}\right)\left(\frac{3}{8}\right)^n$$

3- Les paramètres de Performance sont :

$L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{3}{5}$, $L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{9}{40}$, $W = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{12}{5}h$, $W_q = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)} = \frac{36}{40}$.

Série 3 : Processus stochastiques à temps continu

Exercice 1 On considère une chaîne de Markov en temps continu sur les états 0 et 1, de générateur

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu > 0$$

1- Donner le graphe de transition
2- Déterminer la distribution stationnaire
3- Déterminer la matrice $P(t)$. Calculer $\lim_{t \to +\infty} P(t)$
4- Si $\pi(0)$= (1,0) trouver $P(X(t) = 0)$

Exercice 2 Une chaîne de Markov en temps continu sur les états 0 , 1 et 2 possède comme générateur la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 4 & -6 & 2 \\ 0 & 8 & -8 \end{pmatrix}$$

Déterminer la fraction moyenne de temps à long terme que la chaîne passe à l'état 2.

Exercice 3 Une boutique qui vend des ordinateurs en garde au plus 3 en stock. Les acheteurs se présentent selon un processus de Poisson d'intensité 2 par semaine et ils repartent avec un ordinateur s'il y en a au moins un en stock. Lorsqu'il reste un seul ordinateur, la boutique en commande 2 et elle les reçoit après un temps de loi exponentielle d'espérance une semaine. Le générateur pour le nombre d'ordinateurs en stock est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

1- Déterminer la distribution stationnaire
2- Déterminer le nombre d'ordinateurs en stock.
3- Déterminer le nombre moyen d'ordinateurs vendus en une semaine.

Exercice 4 On suppose que les arrivées forment un processus de Poisson d'intensité 3.
1- Quelle est la probabilité que dans l'intervalle de temps [0 , 2]
  a- Trois clients exactement soient arrivés ?
  b- Aucun client ne soit arrivé
  c- Deux clients exactement soient arrivés
2- Quel est le nombre moyen d'arrivées dans l'intervalle [0; 12] ?
1- Au bout de combien de temps la moyenne des arrivées sera-t-elle égale à 15 ?

Exercice 5 Soit $(N(t))_{t\geq 0}$ un processus de Poisson d'intensité λ. Montrer que pour tout $s \leq t$, la loi conditionnelle de $N(s)$ sachant $N(t) = n$ est une loi binomiale de paramètre n et $\frac{s}{t}$.

Exercice 6 On suppose que les arrivées dans un magasin se font selon un processus de Poisson de taux 40 clients par heure. Ce magasin ouvre à 9h et ferme à 19h.
1- Calculer la probabilité qu'aucun client n'arrive entre 9h et 9h 15 sachant qu'il en est arrivé 3 entre 9h et 9h 30.

2- Un cadeau est offert par le magasin tous les 13 clients (c'est-à-dire au 13 e client, au 26e,etc.). Donner la loi de la durée espaçant deux cadeaux.
3- On suppose que chaque client a une probabilité $p = 0.2$ de faire un achat .Quelle est la probabilité qu'il y aura au moins un achat durant les 30 prochaines minutes.

Exercice 7 On considère un système M/M/1, un client arrive en moyenne toutes les 12 minutes et la durée moyenne de service est 8 minutes. Calculer la probabilité que 3 clients au moins attendent d'être servis**.**

Exercice 8 Un organisme public est ouvert chaque jour de 9h à 17h sans interruption .Il accueille , en moyenne 64 usagers par jour , un guichet unique sert à traiter le dossier de chaque usager , ceci en un temps moyen de 2.5 minutes .Les usagers si nécessaire, font la queue dans l'ordre de leur arrivée, même si la queue est importante, on ne refuse aucun usager. Une étude statistique a permis de conclure que la durée aléatoire des services suit une loi exponentielle et que les arrivées des usagers forment un processus de Poisson .

1- Donner la notation de Kendall de cette file d'attente
2- Donner l'expression de la distribution stationnaire
3- Quelle est en moyenne et par heure, la durée pendant laquelle l'employé du guichet ne s'occupe pas des usagers ?
4- Calculer la probabilité qu'un usager passe plus d'un quart d'heure dans le système.
5- Calculer le temps moyen passé par un usager dans le système (attente +service)
6- Calculer le temps moyen passé par un usager à attendre dans la file