Université Hassiba Benbouali Chlef
Faculté des Sciences Exactes & Informatique

Année Universitaire 2021/2022
Département de Mathématiques

Courigé Examen Final Séries Chronologiques MASTER I : Mathématiques .Appliquée& Statistique.)

Exercice 01 : ______ (06 pts)

01 1. Une série chronologique est l'observation d'une variable (généralement) quantitative au cours du temps.

01 2. Les trois composantes principales sont : la composante tendancielle, la composante saisonnière, et la composante résiduelle.

01 3. Les trois schémas de composition usuels sont : modèle additif :$x_t = z_t + s_t + \epsilon_t$. modèle multiplicatif :$x_t = z_t.s_t.\epsilon_t$. et le modèle mixte(hybrid) :$x_t = z_t.s_t + \epsilon_t$.

01 4. un processus ARMA(p,q)est un processus stationnaire et c'est une combinaison de processus moyenne mobile (MA) et processus autoregréssif(AR).

$$\forall t \in \mathbb{Z}, X_t - \phi_1 X_{t-1} - .... - \phi_p X_{t-p} = \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1} - .... - \theta_q \epsilon_{t-q}$$

01 5. Faux : $(1 - 1.66B + 0.66B^2)x_t = (1 - B)u_t \Longleftrightarrow x_t - 1.66x_{t-1} + 0.66x_{t-2} = u_t - u_{t-1}$ c'est $ARMA(2,1)$.

01 6. Faux : $(1 - B^2)x_t + x_{t-2} = (1 - 0.66B)u_t \Longleftrightarrow x_t = u_t - 0.66u_{t-1}$ c'est $MA(1)$ n'est pas un $MA(2)$.

Exercice 02 : ______ (07 pts)

	2009	2010	2011	2012	2013
I	6	9	6	12	15
II	6	12	12	15	18
III	9	15	15	21	24

	2009	2010	2011	2012	2013
I		10	11	14	**18**
II	**7**	12	**11**	16	**19**
III	**8**	11	**13**	17	

1.5 1. les principales caractéristiques présentes dans les graphiques de la série.
graphe à gauche :Représentation graphique avec périodes successives , il y a une tendance linéaire et une saisonnalité.
graphe à droite :Représentation graphique avec périodes superposées qui nous aidé a avoir la nature du modèle étudie.

01 2. le modele est multiplicative d'aprés la régle du bande paralelle où le graphisme superposé.

1.5 3. les entrées du tableau de gauche marquées .

4. On suppose maintenant que le modèle de la chronique est additif ,

(a) les coefficients saisonniers. la série $X_t - m_t(3)$

	2009	2010	2011	2012	2013
I		-1	-5	-2	-3
II	-1	0	1	-1	-1
III	1	4	2	4	

1.5 . les coefficient saisonnière

$$\begin{cases} s1_{cor} = -2.75 - (-0.133) = -2.616 \\ s2_{cor} = -0.4 - (-0.133) = -0.266 \\ s3_{cor} = 2.75 - (-0.133) = 2.88 \end{cases}.$$

(b) les valeurs de la série corrigée par variation saisonniéres (CVS) pour l'année 2013.

1.5

$$\begin{cases} X_{CVS} = 15 + (-2.616) = 12.38 \\ X_{CVS} = 18 + (-0.226) = 17.73 \\ X_{CVS} = 24 + (2.88) = 26.88 \end{cases}$$

Exercice 03 :______________________________(07 pts)

Soit (ϵ_t) un bruit blanc (faible)de variance σ^2 et (X_t) un processus stationnaire centré au second ordre, vérifiant la relation de récurence

$$X_t = -0,4X_{t-1} + 0,12X_{t-2} + \epsilon_t. \quad et \quad \mathbb{E}(\epsilon_t.X_{t-h}) = 0$$

01

1. C'est un AR(2), ou ARMA(2,0).

01

2. la forme du polynôme retard $\phi(B)$ et ses racines.

$$\phi(B) = (1 + 0,4B - 0.12B^2) = (1 + 0,6B)(1 - 0,2B)$$

dont les racines sont $\underline{-1/0,6 = -1.66}$ et $\underline{1/0,2 = 5}$, qui sont plus grandes que 1 (en valeur absolue).

01

3. $\gamma(0)$ en fonction de $\gamma(1)$ et σ^2 . X_t centré $\Longrightarrow \mathbb{E}(X_t) = 0$
$\gamma(0) = V(X_t) = \mathbb{E}(X_t^2) = \mathbb{E}[-0,4X_{t-1} + 0,12X_{t-2} + \epsilon_t]^2$
On va alors développer le terme de droite. On va passer les détails, mais on se souvient que $\mathbb{E}(\epsilon_t.X_{t-h}) = 0$ Aussi,on a

$$\mathbb{E}(X_t^2) = [0,4^2 + 0,12^2]\mathbb{E}(X_t^2) - 2.0,4.0,12\mathbb{E}(X_tX_{t-1}) + 0 + \mathbb{E}(\epsilon_t^2)$$
$$0.825\mathbb{E}(X_t^2) = -0.096\mathbb{E}(X_tX_{t-1}) + \mathbb{E}(\epsilon_t^2)$$

donc $\boxed{\gamma(0) = V(X_t) = \mathbb{E}(X_t^2) = \frac{\sigma^2 - 0.096\gamma(1)}{0.825}}$

01

4. montrer que vérifie une relation de récurrence de $\gamma(h)$
Notons que le processus est centré. et $\gamma(h) = E(X_t.X_{t-h})$ on a

$$X_t = -0,4X_{t-1} + 0,12X_{t-2} + \epsilon_t$$

si on multiplie l'équation de récurence par X_{t-h} on trouve

$$X_tX_{t-h} = -0,4X_{t-1}X_{t-h} + 0,12X_{t-2}X_{t-h} + \epsilon_tX_{t-h}$$

en prenant l'espérance des termes de l'équation précédante,avec $\mathbb{E}(\epsilon_t.X_{t-h}) = 0$ on a $\boxed{\gamma(h) = a\gamma(h-1) + b\gamma(h-2), \quad pour \quad h \geq 2.}$ telque $a = -0,4$ et $b = 0,12$.

01

5. $\rho(h)$ que vérifie une relation de récurrence
d'aprés la définition on $\rho(h) = \dfrac{\gamma_x(h)}{\gamma_x(0)}$ donc d'aprés la relation

$$\gamma(h) = a\gamma(h-1) + b\gamma(h-2), \quad pour \quad h \geq 2.$$

en divisant par $\gamma(0)$, on trouve la relation $\boxed{\rho(h) = a\rho(h-1) + b\rho(h-2), \quad pour \quad h \geq 2.}$ telque $a = -0,4$ et $b = 0,12$.

6. $\rho(1)$ et$\gamma(0)$ à partir des relation récurrentes précédentes.
   d'aprés la relation

02

$$\gamma(h) = a\gamma(h-1) + b\gamma(h-2), \quad pour \quad h \geq 2.$$

si $h = 1$ on a

$$\gamma(1) = a\gamma(0) + b\gamma(1).$$

en divisant par $\gamma(0)$

$$\rho(1) = -0.4 + 0.12\rho(1), .$$

donc $\boxed{\rho(1) = \frac{-0.4}{1-0.12} = \frac{-5}{11} = -0.454,}$
concernant $\gamma(0) = V(X_t) = \mathbb{E}(X_t^2)$ puisque X_t centré et d'aprés (3) on a .

$$0.825\mathbb{E}(X_t^2) = -0.096\mathbb{E}(X_t X_{t-1}) + \mathbb{E}(\epsilon_t^2) \Longleftrightarrow 0.825\gamma(0) = \sigma^2 - 0.096\gamma(1)$$

d'aprés l'énigalité (l'indication) $\gamma(1) = \rho(1)\mathbb{E}(X_t^2) = \rho(1)\gamma(0)$ donc
. $0.825\gamma(0) = \sigma^2 - 0.096\gamma(1) \Longleftrightarrow 0.825\gamma(0) = \sigma^2 - 0.096 \times (-0.454)\gamma(0) \Longrightarrow \boxed{\gamma(0) = \frac{\sigma^2}{0.7815}}$

Indication : la fonction d'autocovariance, $\gamma(h) = \gamma(-h) = E(X_t.X_{t-h})$ *, la fonction d'autocorrélation* $\rho(h) = \dfrac{\gamma_x(h)}{\gamma_x(0)}$ *,* $\gamma_x(0) = Var(X_t)$ *et* $\gamma(1) = \rho(1)\mathbb{E}(X_t^2)$

Fin