U.D.L Sidi Bel Abbès | Module : Mathématiques Financières
Faculté des Sciences Exactes | Responsable : M. HAMMAD
Département : Probabilités-Statistique | Mercredi 24/03/2021
Master 2 : Statistique et ses Applications | Durée : 1h30mn

# EXAMEN FINAL

**Exercice 1** **(10 points).**

Soient $Y_t$ et $Z_t$ deux processus d'Itô tels que,

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s \text{ et } Z_t = Z_0 + \int_0^t K_s^{'} ds + \int_0^t H_s^{'} dB_s.$$

Démontrer alors, que :

$$Y_t Z_t = Y_0 Z_0 + \int_0^t Y_s dZ_s + \int_0^t Z_s dY_s + \langle Y, Z\rangle_t$$

avec la convention :

$$\langle Y, Z\rangle_t = \int_0^t H_s H_s^{'} ds.$$

Soit $L_t = t \cdot [X_1(t) X_2(t)]$ avec :

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= f(t)dt + \sigma_1(t)dB_t \\ dX_2(t) &= \sigma_2(t)dB_t. \end{aligned}$$

Calculer $dL_t$.

**Exercice 2** **(10 points).**

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard et notant $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, sa filtration naturelle.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le processus :

$$Y_t = t^2 B_t - 2\int_0^t B_u du$$

soit une martingale. On pourra utiliser, sans démonstration, que

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t B_u du | \mathcal{F}_s\right) = \int_0^t \mathbb{E}\left(B_u | \mathcal{F}_s\right) du.$$

2. On considère l'équation :

$$\begin{cases} dY_t = -cY_t dt + \sigma dB_t \\ Y_0 = y_0 \end{cases}$$

où, $y_0, c$ et $\sigma$ sont des constantes réelles.
– Posont $Z_t = Y_t \cdot e^{ct}$, calculer la dynamique de $Z_t$.
– Expliciter $Z_t$ et déduire $Y_t$.