U.H.B.C. Chlef
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département des Mathématiques

Année Universitaire: Covid19/2020
Niveau: $1^{ère}$ Master/ Option: M.A.S.
Module: Processus Stochastiques 2.

Examen Final (2 Heures)

Documents Non Autorisés

1. **Questions de cours**

Soit X une variable alatoire dfinie sur $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ indpendante d'une sous-tribu $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$.
- Montrer que: $\mathbb{E}(X/\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$

2. **Espérance Conditionnelle.**

2.1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $X, Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Supposons que $\mathbb{E}(X/\sigma(Y)) = Y$ et $\mathbb{E}(Y/\sigma(X)) = X$
- Montrer que:

$$\forall c \in \mathbb{R}\text{: } \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\{Y\leq c\}}) = \mathbb{E}(Y\mathbb{1}_{\{Y\leq c\}}) \text{ et } \mathbb{E}(Y\mathbb{1}_{\{X\leq c\}}) = \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\{X\leq c\}}).$$

2.2. Soit $X_1, X_2, X_3, \ldots$une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi commune $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$ et $S_n = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n$.
Calculer les espérances conditionnelles suivantes:

a. $\mathbb{E}(X_1/\sigma(S_n))$
b. $\mathbb{E}(S_n/\sigma(X_1))$
c. $\mathbb{E}(S^2_{n+m}/\sigma(S_n))$

2.3. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ avec $\Omega = \{-1, 0, 1\}, \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathbb{P}(\{-1\}) = \mathbb{P}(\{0\}) = \mathbb{P}(\{1\}) = 1/3$, et considérons aussi les sous-tribus de $\mathcal{F}$

$\mathcal{G} = \{\emptyset, \{-1\}, \{0, 1\}, \Omega\}$, $\mathcal{H} = \{\emptyset, \{1\}, \{-1, 0\}, \Omega\}$.
Soit $X :\to \mathbb{R}, X(\omega) = \omega$. Calculer:

(a) $\mathbb{E}(X/\mathcal{G})$
(b) $\mathbb{E}(X/\mathcal{H})$
(c) $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X/\mathcal{G})/\mathcal{H})$
(d) $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X/\mathcal{H})/\mathcal{G})$

3. **Martingale à temps discret.**

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ ($\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$) définie sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. $(C_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables alatoires bornes sur le mme espace telleque:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, C_n \text{ est } \mathcal{F}_{n-1}\text{-mesurable .}$$

Posons:

$$Y_n = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} C_k(X_k - X_{k-1}) & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

(a) Montrer que $(Y_n)_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$-martingale.
(b) Si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$-sous-martingale, quand-est-ce que $(Y_n)_{n\geq 0}$ le sera aussi?

MASTER 1 M.A.S. 19/20

Processus Stochastiques 2

Corrigé-type.

Nom & Prénom :	.... :اللقب و الإسم
Niveau :	.... :المستوى
Groupe :	.... :الفوج
N d'inscription :	.... :رقم التسجيل
Examen de :	.... :إمتحان في مادة

Examen Final.

1. Question de Cours : X v.a. $\in L^1$, $X \perp \mathcal{G}$.

Mq. $\mathbb{E}(X/\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$?

Vérifions les 2 conditions de la déf. de Kolmogorov.

0.1 (i) $\mathbb{E}(X)$ est une c^{te} par conséquent elle est $\mathcal{F}$-mesurable donc $\mathcal{G}$-mesurable.

02 (ii) Si $A \in \mathcal{G}$:

$$\mathbb{E}(X 1\!\!1_A) = \mathbb{E}(X).\mathbb{E}(1\!\!1_A) \quad (\text{car } X \perp \mathcal{G})$$
$$= \mathbb{E}[\mathbb{E}(X).1\!\!1_A] \quad (\text{car } \mathbb{E}(X) : \text{constante})$$

Donc on a bien $\mathbb{E}(X/\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$ p.s.

2. Espérance conditionnelles :

2.1 1 (i) On a $\mathbb{E}(X/\sigma(Y)) = Y$, d'après la 2ème cond. de la déf. de Kolmogorov.

$$\forall A \in \sigma(Y) : \mathbb{E}(X 1\!\!1_A) = \mathbb{E}(Y 1\!\!1_A) \quad (*)$$

Comme Y : v.a., $\forall c \in \mathbb{R}$ $\{Y \leq c\} = Y^{-1}(]-\infty, c]) \in \sigma(Y)$.

Donc il suffit de prendre ds $(*)$: $A = \{Y \leq c\}$.

(1) (ii) de même pour la 2ème égalité, il suffit de changer les rôles entre X et Y.

2.2.

(1) (a) $\mathbb{E}(X_1/\sigma(S_n))$

On sait que: $\mathbb{E}(S_n/\sigma(S_n)) = S_n$.

Or:

$$\mathbb{E}(S_n/\sigma(S_n)) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i/\sigma(S_n)).$$

Comme les X_i ont la même esp. cond. (par symétrie): $\sum \mathbb{E}(X_i/\sigma(S_n)) = n.\mathbb{E}(X_1/\sigma(S_n))$

Donc:
$$\boxed{\mathbb{E}(X_1/\sigma(S_n)) = \frac{S_n}{n}}$$

(1) (b) $\mathbb{E}(S_n/\sigma(X_1))$.

On a: $\mathbb{E}(X_1/\sigma(X_1)) = X_1$ et $\mathbb{E}(X_i/\sigma(X_1)) = \mathbb{E}(X_i) = 0,\ i \neq 1$.

donc:

$$\mathbb{E}(S_n/\sigma(X_1)) = \mathbb{E}\left[X_1 + X_2 + \dots + X_n/\sigma(X_1)\right] = X_1 + \underbrace{\sum_{i \neq 1} \mathbb{E}(X_i/\sigma(X_1))}_{0}$$

car X_i : centrées.

Donc:
$$\boxed{\mathbb{E}(S_n/\sigma(X_1)) = X_1}$$

(2) (a) $\mathbb{E}(S_{n+m}^2/\sigma(S_n))$

On a: $S_{n+m}^2 = (S_n + X_{n+1} + \dots + X_{n+m})^2$
$= S_n^2 + (X_{n+1} + \dots + X_{n+m})^2 + 2 S_n (X_{n+1} + \dots + X_{n+m})$.

D'où, $\mathbb{E}(S_{n+m}^2 / \sigma(S_n)) = S_n^2 + \mathbb{E}\underbrace{(X_{n+1} + \cdots + X_{n+m})^2}_{\text{indép.}} + 2S_n \underbrace{\mathbb{E}(X_{n+1} + \cdots + X_{n+m})}_{0}$

$= S_n^2 + m$

Car, $\mathbb{E}(X_i^2) = 1$, $\mathbb{E}(X_i) = 0$ $\forall i$

$\mathbb{E}(X_i X_j) = 0$ si $i \neq j$.

On a : $\boxed{\mathbb{E}(S_{n+m}^2 / \sigma(S_n)) = S_n^2 + m.}$

2.3.

1 (a) $\mathbb{E}(X/\mathcal{G})$.

On a : $\mathcal{G} = \{\emptyset, \{-1\}, \{0,1\}, \Omega\} = \sigma(\mathbb{1}_{\{-1\}})$.

Donc, ~~$\mathbb{E}(X/\mathbb{1}_{\{-1\}}) = \mathbb{E}(X/\{X=-1\})\mathbb{1}_{\{X=-1\}} + \mathbb{E}(X/$~~

$\mathbb{E}(X/\sigma(\mathbb{1}_{\{-1\}})) = \mathbb{E}(X/\{-1\})\mathbb{1}_{\{-1\}} + \mathbb{E}(X/\{0,1\})\mathbb{1}_{\{0,1\}}$

avec $\mathbb{E}(X/\{-1\}) = \frac{1}{\mathbb{P}(\{-1\})} \int_{\{-1\}} X \, d\mathbb{P} = \frac{(-1) \cdot 1/3}{1/3} = -1$

et $\mathbb{E}(X/\{0,1\}) = \frac{1}{\mathbb{P}(\{0,1\})} \int_{\{0,1\}} X \, d\mathbb{P} = \frac{0 \cdot 1/3 + 1 \cdot 1/3}{2/3} = 1/2$.

Conclusion.

ω	-1	0	1
$\mathbb{E}(X/\mathcal{G})(\omega)$	-1	$1/2$	$1/2$

tableau 1

1 (b) $\mathbb{E}(X|\mathcal{H})$

On a : $\mathcal{H} = \{\emptyset, \{1\}, \{-1,0\}, \Omega\} = \sigma(1\!\!1_{\{1\}})$.

De m̂ comme ds (a) :

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(X/\{1\})\,1\!\!1_{\{1\}} + \mathbb{E}(X/\{0,-1\})\,1\!\!1_{\{0,-1\}}$$

$$= 1 \cdot 1\!\!1_{\{1\}} - \tfrac{1}{2}\,1\!\!1_{\{0,-1\}}$$

Conclusion :

ω	-1	0	1
$\mathbb{E}(X|\mathcal{H})(\omega)$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1

Tableau 2 -

1,5 (c) $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X/\mathcal{G})/\mathcal{H})$

Posons : $Y = \mathbb{E}(X/\mathcal{G})$. Y est donnée par le tableau 1. $Y(-1) = -1$, $Y(0) = Y(1) = 1/2$

$$\mathbb{E}(Y/\mathcal{H}) = \mathbb{E}(Y/1\!\!1_{\{1\}})$$

$$= \mathbb{E}(Y/\{1\})\,1\!\!1_{\{1\}} + \mathbb{E}(Y/\{-1,0\})\,1\!\!1_{\{-1,0\}}.$$

avec :

$$\mathbb{E}(Y/\{1\}) = \frac{1}{\mathbb{P}(\{1\})}\int_{\{1\}} Y\,d\mathbb{P} = \frac{Y(1)\,\mathbb{P}(\{1\})}{\mathbb{P}(\{1\})} = \frac{1/2 \cdot 1/3}{1/3} = 1/2$$

et

$$\mathbb{E}(Y/\{-1,0\}) = \frac{1}{\mathbb{P}(\{-1,0\})}\int_{\{-1,0\}} Y\,d\mathbb{P} = \frac{-1 \cdot 1/3 + 1/2 \cdot 1/3}{2/3} = -1/4$$

Conclusion :

ω	-1	0	1
$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X/\mathcal{G})/\mathcal{H})$	$-1/4$	$-1/4$	$1/2$

1,5 (d) $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X/\mathcal{H})/\mathcal{G}]$.

Posons : $Z = \mathbb{E}(X/\mathcal{H})$. Z est donné par le tableau 2. $Z(-1) = Z(0) = -1/2$, $Z(1) = 1$.

$$\mathbb{E}(Z/\mathcal{G}) = \mathbb{E}(Z/\sigma(\mathbb{1}_{\{-1\}}))$$

$$= \mathbb{E}(Z/\{-1\})\mathbb{1}_{\{-1\}} + \mathbb{E}(Z/\{0,1\})\mathbb{1}_{\{0,1\}}.$$

avec :

$$\mathbb{E}(Z/\{-1\}) = \frac{1}{\mathbb{P}(\{-1\})}\int_{\{-1\}} Z\,d\mathbb{P} = \frac{-1/2 \cdot 1/3}{1/3} = -1/2$$

et

$$\mathbb{E}(Z/\{0,1\}) = \frac{1}{\mathbb{P}(\{0,1\})}\int_{\{0,1\}} Z\,d\mathbb{P} = \frac{-1/2 \cdot 1/3 + 1 \cdot 1/3}{2/3} = 1/4$$

Conclusion :

ω	-1	0	1
$\mathbb{E}[\mathbb{E}(X/\mathcal{H})/\mathcal{G}]$	$-1/2$	$1/4$	$1/4$

3. Martingales à temps discret.

(a) Mq $(Y_n)_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ - mart.

1 (i) Adaptation :

$n=0$: $Y_0 = 0 = c^{te}$ $\mathcal{F}_0$-mesurable.

$n \neq 0$:

$$Y_n = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \underset{\mathcal{F}_{k-1}\text{-mes}}{C_k} (\underset{\mathcal{F}_k\text{-mes}}{X_k} - \underset{\mathcal{F}_{k-1}\text{-mes}}{X_{k-1}})}_{\mathcal{F}_k\text{-mes.}}$$

Comme $k \leq n$: $(\mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n)$

Y_n est $\mathcal{F}_n$-mes. $\forall n \geq 1$.

1 (ii) Intégrabilité :

$$\mathbb{E}|Y_n| \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[|C_k(X_k - X_{k-1})|\right]$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} M\left[\underset{\infty}{\mathbb{E}|X_k|} + \underset{\infty}{\mathbb{E}|X_{k-1}|}\right]$$

$\left[|C_k| \leq M \ \forall k \text{ car } (C_n) \text{ bornée.}\right]$

($(X_n)_n$ - mart.

Somme finie de quantités finies $\Rightarrow \mathbb{E}|Y_n| < \infty$ $\forall n$.

2 (iii) Propriété clé :

Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{E}(Y_{n+1} / \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n+1} C_k (X_k - X_{k-1}) / \mathcal{F}_n\right].$$

$$= \mathbb{E}\left[\underbrace{Y_n}_{\mathcal{F}_n\text{-mes}} + \underbrace{C_{n+1}}_{\mathcal{F}_n\text{-mes}} (X_{n+1} - X_n) / \mathcal{F}_n\right].$$

$$= Y_n + C_{n+1} \underbrace{\mathbb{E}\left[X_{n+1} - X_n / \mathcal{F}_n\right]}_{0 \text{ car } (X_n)_n \text{ mart.}} \quad \text{---} (*)$$

//

(b) Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ est une ss mart.

2 d'après $(*)$:

pour que l'inégalité de la propriété clé de sous_mart. ne change pas, il suffit que $C_{n+1} \geq 0 \quad \forall n \geq 0$.

C.à.d : La condition suffisante pour que $(Y_n)_{n \geq 0}$ soit une ss_mart. est :

$$\forall n \geq 1 : \quad C_n \geq 0 \text{ p.s}$$