0.1 Description de $\overline{S}$:

Il est impossible de représenter les éléments de $\overline{S}$, néanmoins on peut donner une description de $\overline{S}$ à travers les exemples suivants:

Exemple 1 : *Soit α un processus adapté, continu et tel que* $\mathbb{E}(\sup_{s\leq t}\alpha_s^2) < \infty$, *alors $\alpha \in \overline{S}$ et on a :*

$$\int_0^t \alpha_s dB_s = \lim_{L^2} \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_{\frac{p}{n}t}(B_{\frac{p+1}{n}t} - B_{\frac{p}{n}t}).$$

En effet; soit (α^n) la suite des processus tassés de α sur la subdivision

$$0 < \frac{t}{n} < .... < \frac{(n-1)\,t}{n} < t < ....,$$

définie par :

$$\alpha_s^n\,(\omega) = \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_{\frac{p}{n}t}\,(\omega)\, 1_{[\frac{p}{n}t,\frac{p+1}{n}t[}(s).$$

Il est clair que $\alpha^n \in S$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrons que (α^n) converge α dans $L^2(\Omega \times [0,t])$, c'est à dire que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left((\int_0^t (\alpha_s^n - \alpha_s)^2 ds) \right) = 0.$$

On a, d'une part

$$(|\alpha_s^n - \alpha_s|)^2 \leq (|\alpha_s^n| + |\alpha_s|)^2 \leq 2\left(|\alpha_s^n|^2 + |\alpha_s|^2\right) \leq 4\sup_{s\leq t}\alpha_s^2.$$

D'autre part, $\alpha_s^n = \alpha_{\frac{p}{n}t}$ pour tout $s \in [\frac{p}{n}t, \frac{p+1}{n}t[$, d'où $|\alpha_s^n - \alpha_s| = |\alpha_{\frac{p}{n}t} - \alpha_s|$. Comme $|s - \frac{p}{n}t\,| \leq \frac{t}{n}$ et comme α est continu, alors $\lim_{n\to\infty}\,(\alpha_s^n - \alpha_s) = 0$.

Ainsi la suite de variables aléatoires $(\alpha_s^n - \alpha_s)^2$ est domineée par $4\sup_{s\leq t}\alpha_s^2$ qui est intégrable et converge vers 0, d'où d'après le théorème de la convergence dominée

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\int_0^t (\alpha_s^n - \alpha_s)^2 ds) = 0.$$

Ainsi $\alpha \in \overline{S}$ et on a $\int_0^t \alpha_s dB_s = \lim_{L^2} \int_0^t \alpha_s^n dB_s$, or

$$\int_0^t \alpha_s^n dB_s = \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_{\frac{p}{n}t}(B_{\frac{p+1}{n}t\wedge t} - B_{\frac{p}{n}t\wedge t}) = \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_{\frac{p}{n}t}(B_{\frac{p+1}{n}t} - B_{\frac{p}{n}t}),$$

d'où

$$\int_0^t \alpha_s dB_s = \lim_{L^2} \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_{\frac{p}{n}t}(B_{\frac{p+1}{n}t} - B_{\frac{p}{n}t})$$

Remarque:
1− *On a aussi*

$$\int_0^t \alpha_s dB_s = \lim_{L^2} \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_{\frac{p}{n}\wedge t}(B_{\frac{(p+1)}{n}t\wedge t} - B_{\frac{p}{n}\wedge t})$$

Il suffit de reprendre la même démonstration en utilisant la subdivision

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < ..... < \frac{p}{n} < .....$$

2− *Si f est une fonction déterministe de $L^2(\mathbb{R}_+, dt)$ alors*

$$\int_0^t f(s)dB_s \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, ||f||^2_{L^2([0,t])}).$$

En effet, on a

$$\int_0^t f(s)dB_s = \lim_{L^2} \sum_{p=0}^{n-1} f(\frac{p}{n}t)(B_{\frac{p+1}{n}t} - B_{\frac{p}{n}t}).$$

Comme $B_{\frac{p+1}{n}t} - B_{\frac{p}{n}t} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \frac{t}{n})$ et sont indépendantes, alors

$$\sum_{p=0}^{n-1} f(\frac{p}{n}t)(B_{\frac{p+1}{n}t} - B_{\frac{p}{n}t}) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \sum_{p=0}^{n-1} f^2(\frac{p}{n}t) var(B_{\frac{p+1}{n}t} - B_{\frac{p}{n}t})),$$

or

$$\sum_{0}^{n-1} f^2(\frac{p}{n}t) var(B_{\frac{p+1}{n}t} - B_{\frac{p}{n}t})) = \sum_{p=0}^{n-1} f^2(\frac{p}{n}t)\frac{t}{n} = \int_0^t f^2(s)ds,$$

d'où l'affirmation.

Par exemple

$$\int_0^t e^{-s}dB_s \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \int_0^t e^{-2s}ds) = \mathcal{N}(0, \frac{1-e^{-2t}}{2})$$

Exemple 2 : *Soit α un processus adapté, continu et tel que* $\mathbb{E}\left(\int_0^t \alpha_s^2 ds\right) < \infty$. *Alors $\alpha \in \overline{S}$.*

On considère la suite de processus tronqués (α^n) définie par $\alpha^n_t = \alpha_t \wedge n$.

Il suffit de monter que $\alpha^n \in \overline{S}$ et que (α^n) converge vers α dans $L^2(\Omega \times [0,t]$. Remarquons d'abord que α^n est adapté, continu et $|\alpha_t^n| \leq n$, d'où $\mathbb{E}(\sup_{s\leq t}|\alpha_s|) \leq n < \infty$. Il résulte de l'exemple 1 que $\alpha^n \in \overline{S}$.

En fait la suite (α^n) est monotone croissante convergente ponctuellement vers α. En effet, pour tout $(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$ et pour tout $n \geq N_0 := [\alpha_t(\omega)] + 1$ ($[x]$ désigne la partie entière de x) on a $\alpha_t(\omega) > n$, d'où $\alpha_t^n(\omega) = \alpha_t(\omega)$ $\forall n \geq N_0$. Par suite $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n = \alpha$. D'autre part, on a pour entier n et pour tout $(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$:

-ou bien $\alpha_t(\omega) \leq n$ et dans ce cas $\alpha_t^n(\omega) = \alpha_t^{n+1}(\omega) = \alpha_t(\omega)$,

-ou bien $n < \alpha_t(\omega) \leq n+1$ et dans ce cas $\alpha_t^n(\omega) = n < \alpha_t(\omega) = \alpha_t^{n+1}(\omega)$,

-ou bien $\alpha_t(\omega) > n+1$ et dans ce cas $\alpha_t^n(\omega) = n < n+1 = \alpha_t^{n+1}(\omega)$,

d'où la croissance de (α^n).

Ainsi (α^n) est une suite croissante de $\overline{S}$ convergente vers ponctuellement vers α. Il résulte du théorème de la convergence monotone que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\int_0^t (\alpha_s^n - \alpha_s)^2 ds\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t \lim_{n\to\infty} (\alpha_s^n - \alpha_s)^2 ds\right) = 0,$$

qui signifie que (α^n) convergente vers α dans $L^2(\Omega \times [0,t])$.

Exemple 3 :

L'ensemble des processus adaptés continus est dense dans $\overline{S}$.

Pour le voir, il suffit d'approcher toute processus simple par une suite de processus adaptés continus.

Soient α un processus simple et $\varepsilon > 0$. On pose $\alpha_t^\varepsilon := \alpha * \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{1}_{[0,\varepsilon[}(t)$, d'où

$$\alpha_t^\varepsilon = \int_{\mathbb{R}_+} \alpha_s \frac{1}{\varepsilon} 1_{[0,\varepsilon[}(t-s)ds = \frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^t \alpha_s ds,$$

et on a

$$\begin{aligned} |\alpha_t^\varepsilon - \alpha_t| &= |\frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^t \alpha_s ds - \frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^t \alpha_t ds| = \frac{1}{\varepsilon}|\int_{t-\varepsilon}^t (\alpha_t - \alpha_s)ds| \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^t |\alpha_t - \alpha_s|ds \\ &\leq \sup_{s\in[t-\varepsilon,t]} |\alpha_t - \alpha_s|. \end{aligned}$$

Ainsi

$$0 \leq |\alpha_t^\varepsilon - \alpha_t| \leq \sup_{s\in[t-\varepsilon,t]} |\alpha_t - \alpha_s|,$$

par suite

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_t^\varepsilon = \alpha,$$

d'où l'affirmation.

Proposition: (fondamentale)

Pour tout $\alpha \in \overline{S}$, *le processus* M *défini par* $M_t = (\int\limits_0^t \alpha_s dB_s)^2 - \int\limits_0^t \alpha_s^2 ds$ *est une martingale.*

Notons que si $\alpha \equiv 1$ alors $M_t = B_t^2 - t$ qui est bien une martingale.

Démonstration:

En fait, il suffit de montrer que M est une martingale pour $\alpha \in S$, le cas général se déduit par par passage à la limite.

Le processus $(\int\limits_0^t \alpha_s dB_s)_{t\geq 0}$ étant une martingale donc adaptée, alors la variable aléatoire $(\int\limits_0^t \alpha_s dB_s)^2$ est $\mathcal{F}_t-$mesurable. Il en est de même pour

$$\int\limits_0^t \alpha_s^2 ds = \sum_k \alpha_{t_k}^2 \left(t_{k+1} \wedge t - t_k \wedge t\right)$$

et donc pour M_t aussi. Le processus M est donc adapté.

De plus

$$\mathbb{E}\left(|M_t|\right) \leq \mathbb{E}\left((\int\limits_0^t \alpha_s dB_s)^2 + \int\limits_0^t \alpha_s^2 ds\right) \leq \mathbb{E}(\int\limits_0^t \alpha_s dB_s)^2 + \mathbb{E}\left(\int\limits_0^t \alpha_s^2 ds\right) = 2\mathbb{E}\left(\int\limits_0^t \alpha_s^2 ds\right) < \infty$$

Il reste à montrer que $\mathbb{E}(M_{t+h} - M_t \mid \mathcal{F}_t) = 0$.

On a :

$$M_{t+h} - M_t = (\int\limits_0^{t+h} \alpha_s dB_s)^2 - (\int\limits_0^t \alpha_s dB_s)^2 - \int\limits_t^{t+h} \alpha_s^2 ds.$$

Il résulte de la linéarité de l'espérance conditionnelle et du fait que $(\int\limits_0^t \alpha_s dB_s)$ est une martingale, que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}((\int_t^{t+h} \alpha_s dB_s)^2 \quad | \quad \mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}((\int_0^{t+h} \alpha_s dB_s) - \int_0^t \alpha_s dB_s)^2 \mid \mathcal{F}_t) \\
&= \mathbb{E}((\int_0^{t+h} \alpha_s dB_s)^2 \mid \mathcal{F}_t) - 2\mathbb{E}(\int_0^{t+h} \alpha_s dB_s \int_0^t \alpha_s dB_s \mid \mathcal{F}_t) + \mathbb{E}((\int_0^t \alpha_s dB_s)^2 \mid \mathcal{F}_t) \\
&= \mathbb{E}((\int_0^{t+h} \alpha_s dB_s)^2 \mid \mathcal{F}_t) - 2\int_0^t \alpha_s dB_s \mathbb{E}[(\int_0^{t+h} \alpha_s dB_s) \mid \mathcal{F}_t] + (\int_0^t \alpha_s dB_s)^2 \\
&= \mathbb{E}((\int_0^{t+h} \alpha_s dB_s)^2 \mid \mathcal{F}_t) - (\int_0^t \alpha_s dB_s)^2 \\
&= \mathbb{E}((\int_0^{t+h} \alpha_s dB_s)^2 - (\int_0^t \alpha_s dB_s)^2 \mid \mathcal{F}_t).
\end{aligned}
$$

d'où

$$\mathbb{E}((\int_0^{t+h} \alpha_s dB_s)^2 - (\int_0^t \alpha_s dB_s)^2 \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}((\int_t^{t+h} \alpha_s dB_s)^2 \mid \mathcal{F}_t)$$

et par suite

$$\mathbb{E}\left(M_{t+h} - M_t \mid \mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}((\int_t^{t+h} \alpha_s dB_s)^2 \mid \mathcal{F}_t) - \mathbb{E}(\int_t^{t+h} \alpha_s^2 ds \mid \mathcal{F}_t).$$

On a

$$\int_t^{t+h} \alpha_s dB_s = \sum_k \alpha_{t_k^{"}} (B_{t_{k+1}^{"}} - B_{t_k^{"}}),$$

où $\left(t_k^{"}\right)$ est la subdivision de l'intervalle $[t, t+h]$ construite à l'aide de $t, t+h$ et les t_k qui appartiennent à $[t, t+h]$. On pose $C_k = \alpha_{t_k^{"}} (B_{t_{k+1}^{"}} - B_{t_k^{"}})$, d'où

$$(\int_t^{t+h} \alpha_s dB_s)^2 = (\sum_k C_k)^2 = \sum_{k,l} C_k C_{k+l}$$

et on a

$$\mathbb{E}((\int_t^{t+h} \alpha_s dB_s)^2 \mid \mathcal{F}_t) = \sum_{k,l} \mathbb{E}(C_k C_{k+l} \mid \mathcal{F}_t).$$

En fait $\mathbb{E}(C_k C_{k+l} \mid \mathcal{F}_t) = 0$ pour tout $l > 0$. En effet; comme $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t^{"}_{k+l}}$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(C_k C_{k+l} \quad \mid \quad & \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\mathbb{E}\left(C_k C_{k+l} \mid \mathcal{F}_{t^{"}_{k+l}}\right) \mid \mathcal{F}_t) \\
&= \mathbb{E}(\alpha_{t^{"}_k}(B_{t^{"}_{k+1}} - B_{t^{"}_k})\alpha_{t^{"}_{k+l}}\mathbb{E}((B_{t^{"}_{k+l+1}} - B_{t^{"}_{k+l}}) \mid \mathcal{F}_{t^{"}_{k+l}}) \mid \mathcal{F}_t) \\
&= \mathbb{E}(A_k \alpha_{t^{"}_{k+l}}\mathbb{E}(B_{t^{"}_{k++l1}} - B_{t^{"}_{k+l}} \mid \mathcal{F}_{t^{"}_{k+l}}) \mid \mathcal{F}_t) = 0 \text{ car } (B_t) \text{ est une martingale.}
\end{aligned}$$

Il résulte que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((\int_t^{t+h} \alpha_s dB_s)^2 \quad \mid \quad & \mathcal{F}_t) = \sum_k \mathbb{E}(C_k^2 \mid \mathcal{F}_t) \\
&= \sum_k \mathbb{E}(\alpha^2_{t^{"}_k}(B_{t^{"}_{k+1}} - B_{t^{"}_k})^2 \mid \mathcal{F}_t) \\
&= \sum_k \mathbb{E}(\mathbb{E}(\alpha^2_{t^{"}_k}(B_{t^{"}_{k+1}} - B_{t^{"}_k})^2 \mid \mathcal{F}_{t^{"}_k}) \mid \mathcal{F}_t) \\
&= \sum_k \mathbb{E}(\alpha^2_{t^{"}_k}\mathbb{E}((B_{t^{"}_{k+1}} - B_{t^{"}_k})^2 \mid \mathcal{F}_{t^{"}_k}) \mid \mathcal{F}_t) \\
&= \sum_k \mathbb{E}(\alpha^2_{t^{"}_k}\mathbb{E}((B_{t^{"}_{k+1}} - B_{t^{"}_k})^2) \mid \mathcal{F}_t) \\
&= \sum_k \mathbb{E}(\alpha^2_{t^{"}_k}(t^{"}_{k+1} - t^{"}_k) \mid \mathcal{F}_t) \\
&= \mathbb{E}(\sum_k \alpha^2_{t^{"}_k}(t^{"}_{k+1} - t^{"}_k) \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\int_t^{t+h} \alpha_s^2 ds \mid \mathcal{F}_t)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathbb{E}((\int_t^{t+h} \alpha_s dB_s)^2 \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\int_t^{t+h} \alpha_s^2 ds \mid \mathcal{F}_t),$$

d'où

$$\mathbb{E}\left(M_{t+h} - M_t \mid \mathcal{F}_t\right) = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.■