Série 2 : $\mathscr{E}$iespace mesurable

Exercice 1 Soit $E = \{0, 1; 2\}$. Donner toutes les tribus que contient $\mathscr{P}(E)$.

Exercice 2 Soient $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}'$ deux familles de parties d'un ensemble E. Montrer que

1. $\mathscr{S} \subset \mathscr{S}' \Rightarrow \sigma(\mathscr{S}) \subset \sigma(\mathscr{S}')$,
2. $\mathscr{S} \subset \sigma(\mathscr{S}') \Leftrightarrow \sigma(\mathscr{S}) \subset \sigma(\mathscr{S}')$,
3. $\sigma(\mathscr{S}) = \sigma(\mathscr{S}^c)$,
4. la tribu engendrée par $\mathscr{S}$ est l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathscr{S}$.

Exercice 3 Soient (E, τ) un espace mesurable et $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de E. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \inf A_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \sup A_n$ sont des parties mesurables de E.

Exercice 4 Soit $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$. On note l'ensemble

$$\mathcal{B}_{[0;1]} = \{B \cap [0, 1],\ B \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

1. Soit $\tau_{[0;1]} = \{C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : C \subset [0, 1]\}$. Montrer que $\mathcal{B}_{[0;1]} = \tau_{[0;1]}$.
2. Montrer que $\mathcal{B}_{[0;1]}$ est une tribu sur $[0, 1]$ dite la tribu trace de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sur $[0, 1]$.

Exercice 5 Soient E un ensemble non vide et $\tau \subset \mathscr{P}(E)$ la famille des parties de E définie par

$$\tau = \{A \in \mathscr{P}(E) :\ A \,\text{ou}\, A^c \,\text{est dénombrable}\}.$$

1. Montrer que τ est une tribu sur E.
2. Montrer que $\tau = \sigma(\mathscr{S})$, où $\mathscr{S} = \{\{x\},\ x \in E\}$.
3. En déduire que si E est au plus dénombrable, alors $\tau = \mathscr{P}(E)$.

Exercice 6 Soient E et F deux ensembles non vides et $f : E \to F$ une application.

1. Montrer que si τ' est une tribu sur F alors $f^{-1}(\tau') = \{f^{-1}(B) :\ B \in \tau'\}$ est une tribu sur E.
2. Montrer que si τ est une tribue sur E, $f(\tau) = \{f(A) :\ A \in \tau\}$ n'est en gnéral pas une tribu sur F.
3. Montrer en revanche que $\mathcal{L} = \{B \in \mathscr{P}(F) :\ f^{-1}(B) \in \tau\}$ est une tribu sur F.
4. Montrer que si $\mathscr{C}$ est une famille de parties de F alors $f^{-1}(\sigma(\mathscr{C})) = \sigma(f^{-1}(\mathscr{C}))$.

Exercice 7 Soit $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(\mathbb{R}) &= \sigma(\{]a, b[,\ a, b \in \mathbb{Q},\ a < b\}) \\
&= \sigma(\{[a, b],\ a, b \in \mathbb{Q},\ a \le b\}) \\
&= \sigma(\{]a, b],\ a, b \in \mathbb{Q},\ a \le b\}) \\
&= \sigma(\{[a, b[,\ a, b \in \mathbb{Q},\ a \le b\}) \\
&= \sigma(\{] - \infty, a[,\ a \in \mathbb{Q}\}) \\
&= \sigma(\{[a;\ +\infty[,\ a \in \mathbb{Q}\}) \\
&= \sigma(\{] - \infty, a],\ a \in \mathbb{Q}\}) \\
&= \sigma\{]a;\ +\infty[,\ a \in \mathbb{Q}\}).
\end{aligned}$$

1. F. Zouyed, email :fzouyed@gmail.com, Laboratoire des Mathématiques appliquées $\mathcal{LMA}$