Feuille 4

Exercice 1. Soit B_t un Mouvement Brownien. Pour quelles valeurs de a et $b \in \mathbb{R}$ le processus

$$Z_t = \int_0^t s^a e^{bB_s} dB_s$$

est bien définie?

Pour quelles valeurs a et $b \in \mathbb{R}$ le processus Z est une martingale de carré intégrable.

Exercice 2. Montrer que

(1) $\int_0^t B_s dBs = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t$

(2) $\int_0^t sdBs = tB_t - \int_0^t dBs$

(3) $\int_0^t B_s^2 dBs = \frac{1}{3}B_t^3 - \int_0^t dBs$

Exercice 3. Soit B_t un Mouvement Brownien standard. calculer l'équation différentielle stochastique i.e. dZ_t, des processus suivants:

(1) $Z_t = (X_t)^2$ où $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t$.
(2) $Z_t = 3 + t + e^{B_t}$
(3) $Z_t = e^{\alpha t}$
(4) $Z_t = \int_0^t g(s)dBs$
(5) $Z_t = e^{\alpha B_t}$
(6) $Z_t = e^{\alpha X_t}$ où $dX_t = \mu dt + \sigma dB_t$

Exercice 4. Pour $\lambda > 0$, soit

$$X_t = \int_0^t e^{-\lambda s} dBs$$

Montrer que $X_t = e^{-\lambda t}B_t + \lambda \int_0^t e^{-\lambda s} Bsds$

Exercice 5. Montrer que $X_t = \int_0^t \sin sdBs$ est bien définie

i) Montrer que X_t est un processus Gaussien et calculer $E(X_t)$ et $E(X_s X_t)$
ii) Calculer $E(X_t / \mathcal{F}_s)$
iii) Montrer que $X_t = \sin tB_t - \int_0^t \cos sB_s ds$

Exercice 6. 1) En utlisant la formule d'Itô, montrer que $M_t = B_t^3 - 3\int_0^t B_s ds$ est une martingale

2) Utliser la formule d'Itô pour montrer que $tB_t = \int_0^t B_s ds + \int_0^t sdB_s$

3) Vérifier si le processus $X_t = B_t^3 - 3tB_t$ est une martingale

Exercice 7. Utiliser la formule d'Itô pour calculer $E\left(B_t^6\right)$.