Exo 1

1) puisque g est continue sur le segment $[0,1]$, elle y est bornée et atteint ses bornes

Si $M = \max_{x\in[0,1]} |g(x)|$. Alors on a

$$\|Tf\|_1 = \int_0^1 |f(x)g(x)|\,dx \leq M\int_0^1 |f(x)|\,dx \leq M\cdot\|f\|_1$$

ceci prouve que T est continue.

2) on a $\|Tf\| = \int_0^1 |f(x)g(x)|\,dx \leq \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$ (Inégalité de cauchy-Schwarz)

$$= C\|f\|_2$$

avec $C = \left(\int_0^1 |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

C est un réel, car g est continue sur $[0,1]$ donc bornée et on a $C \leq \|g\|_\infty$.

3) supposons que T est continue. Alors $\exists C>0$ tel que, $\forall P\in E$, on a $\|TP\| \leq C\|P\|$.

Soit $n \geq 0$. pour $P = X^n$, on trouve $TP = nX^{n-1}$, d'où $n = \|TP\| \leq C\|P\| = C$

ceci est impossible car $\mathbb{N}$ n'est pas majorée. Donc T n'est pas continue.

EXO 2

Soit l'operateur linéaire $A : E \longrightarrow F$ / $\dim E = n$

Soit $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E, donc $\forall x \in E$ $x = \sum_{i=1} \lambda_i e_i$

on defenit sur E la norme ~~$\|\cdot\|_\infty$~~

$\|\cdot\|_\infty = \sup_{i=1,n} |\lambda_i|$ (équivalente à chaque $\|\cdot\|_E$ car $\dim E < \infty$

On a $\|A x\|_F = \|A \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\|_F = \|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A(e_i)\|_F$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \cdot \|A(e_i)\|_F$$

$$\leq \sum \sup |\lambda_i| \cdot \|A(e_i)\|_F .$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \|x\|_\infty \cdot \|A(e_i)\|_F = M \|x\|_\infty$$

tel que $M = \sum_{i=1} \|A(e_i)\|_F > 0$

et par suite A est borné.

Exo 3

On remarque que l'application Tr est linéaire
De plus, soit $A=(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$.

Alors $|Tr(A)| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_{ii}|$
$\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$
$\leq \sum_{i=1}^{n} N(A) \leq nN(A)$.

Ceci prouve que l'application trace est continue et que $\|Tr\| \leq n$. De plus, on a
$$Tr(I_n) = n \text{ et } N(I_n) = 1.$$
Ainsi, on a exactement $\|Tr\| = n$.

Exo 04

On remarque d'abord que Tf, étant une primitive d'une fonction continue, est bien de classe C^1 donc appartient à F. De plus, pour tout $x \in [0,1]$ on a $|Tf(x)| \leq \int_0^x |f(t)|dt \leq x\|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ car $x \in [0,1]$

De plus, $(Tf)' = f$ et donc $\|(Tf)'\|_\infty = \|f\|_\infty$.
On en déduit que $\|Tf\|_F \leq 2\|f\|_\infty$, ce qui prouve que T est continue et que $\|T\| \leq 2$.

. Maintenant on montre que $\|T\| = 2$.
Puisque $\|(Tf)'\|_\infty = \|f\|_\infty$, il n'y a (jamais) aucune perte dans cette majoration, et on est amené à chercher une fonction $f \in E$ telle que $\int_0^1 f(t)\,dt = \|f\|_\infty$. Prenons $f = 1$.
Alors $\|f\|_\infty = 1$, $Tf(x) = x$ et donc $\|Tf\|_\infty = 1$. il vient $\|Tf\|_F = 2\|f\|_\infty$, et donc on a effectivement $\|T\| = 2$

Exo 5

$A : E \longrightarrow F.$

- On a par définition
$\|A\| = \inf\{c>0 / \|Ax\|_F \leq c.\|x\|_E\}$

donc $\dfrac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} \leq c$ si $x \neq 0$

$\Rightarrow$ c est majorant de $\dfrac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E}$.

alors $\sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} = \inf\{c>0\} = \|A\|$.

donc $\boxed{\|A\| = \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E}}$.

- De plus
$\|A\| = \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup\limits_{x\neq 0} \left\|\dfrac{1}{\|x\|}.Ax\right\|$
$= \sup\limits_{x\neq 0} \left\|A\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \sup\limits_{\|y\|=1} \|Ay\|$
$= \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$

- on a $\sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| \leq \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| \longrightarrow (1)$

$(S(0,1) = \{x \in E / \|x\| = 1\} \subset \overline{B(0,1)}$

$\forall x \in E / \|x\| \leq 1, x \neq 0$
$\|Ax\| = \|x\|.\left\|A\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$

et par suite $\sup\limits_{\substack{\|x\|\leq 1\\ x\neq 0}} \|Ax\| \leq \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| \longrightarrow (2)$

de (1) et (2) $\sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup\limits_{\substack{\|x\|\leq 1\\ x\neq 0}} \|Ax\|$.