Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Badji Mokhtar-Annaba

Masters: -Probabilités et Statistique
-Actuariat

Probabilités1(Série N°1)

Exercice 1:

Montrer que les moments d'une *v.a.r.* X de loi normale centrée réduite sont donnés par

$$\mathbb{E}\left(X^{2n}\right)=\frac{(2n)!}{2^n n!},\qquad \mathbb{E}\left(X^{2n}\right)=0,\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Exercice 2:

Soit X une *v.a.r.* de loi normale centrée réduite et Z une *v.a.d.* indépendante de X, uniformément distribuée sur $\{-1,1\}$.

1.Montrer que la *v.a.* ZX est gaussienne.

2.Montrer que le couple aléatoire (X,ZX) n'est pas gaussien.

2.Montrer que X et ZX ne sont pas indépendantes bien que leur covariance soit nulle.

Exercice 3:

On considère un vecteur aléatoire gaussien X de dimension 3, de moyenne $m=(1,3,5)$ et de matrice des covariances

$$C=\begin{pmatrix}7&2&2\\2&3&1\\2&1&5\end{pmatrix}.$$

Calculer $\mathbb{E}\left(X_1\exp\left(X_1+2X_2+3X_3\right)\right)$ (On calculera d'abord $\mathbb{E}\left(\exp\left(\lambda X_1+2X_2+3X_3\right)\right)$ pour $\lambda\in\mathbb{R}$).

Exercice 4:

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de *v.a.r. i.i.d.* de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On pose

$$B_n=\sum_{k=1}^{n}X_k,\ n\geq 1.$$

1.Ecrire la matrice des covariances du vecteur aléatoire $B={}^T\left(B_1,B_2,...,B_n\right)$.

2.Ecrire sa densité dans le cas où $n=3$.

Exercice 5:

Soit X un vecteur aléatoire gaussien de dimension n de matrice des covariances C et d'espérance $m\in\mathbb{R}^n$. On suppose que $C=A.D.{}^TA$, où D est une matrice diagonale inversible et A est une matrice orthogonale.

1.Montrer que le vecteur $Y:={}^TA\left(X-m\right)$ est gaussien, dont on précisera sa moyenne m_Y et sa matrices des covariances.

2.En déduire la loi de Y_i pour $i=1,2,...,n$ et que ces *v.a.* sont indépendantes.

3.En déduire que Y et X ont des densités.