الفصل الأول: المتغيرات العشوائية

الدرس الثالث: المتغيرات العشوائية ثنائية البعد.

حل المثال 1

1) تعيين قانون الاحتمال المشترك لـ X و Y.

لدينا
$$X(\Omega)=\{0,1,2,3\}$$
$$Y(\Omega)=\{0,1,2\}$$

$$\mathbb{P}(X=x,Y=y)=\frac{C_4^x\times C_2^y\times C_4^{3-(x+y)}}{C_{10}^3},\ \forall x\in X(\Omega),y\in Y(\Omega)$$

2) تعيين القانون الهامشي لكل من X و Y.

لدينا بالتعريف بالنسبة لـ X

$$\mathbb{P}(X=x)=\sum_{y=0}^{2}\mathbb{P}(X=x,Y=y)$$

ومنه

$$\mathbb{P}(X=0)=\mathbb{P}(X=0,Y=0)+\mathbb{P}(X=0,Y=1)+\mathbb{P}(X=0,Y=2)$$
$$\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(X=1,Y=0)+\mathbb{P}(X=1,Y=1)+\mathbb{P}(X=1,Y=2)$$
$$\mathbb{P}(X=2)=\mathbb{P}(X=2,Y=0)+\mathbb{P}(X=2,Y=1)+\mathbb{P}(X=2,Y=2)$$
$$\mathbb{P}(X=3)=\mathbb{P}(X=3,Y=0)+\mathbb{P}(X=3,Y=1)+\mathbb{P}(X=3,Y=2)$$

بالنسبة لـ Y

$$\mathbb{P}(Y=y)=\sum_{x=0}^{3}\mathbb{P}(X=x,Y=y)$$
$$\mathbb{P}(Y=0)=\mathbb{P}(X=0,Y=0)+\mathbb{P}(X=1,Y=0)+\mathbb{P}(X=2,Y=0)+\mathbb{P}(X=3,Y=0)$$
$$\mathbb{P}(Y=1)=\mathbb{P}(X=0,Y=1)+\mathbb{P}(X=1,Y=1)+\mathbb{P}(X=2,Y=1)+\mathbb{P}(X=3,Y=1)$$
$$\mathbb{P}(Y=2)=\mathbb{P}(X=0,Y=2)+\mathbb{P}(X=1,Y=2)+\mathbb{P}(X=2,Y=2)+\mathbb{P}(X=3,Y=2)$$

ملاحظة: في السؤال 1 والسؤال 2 يجب من أن نتحقق من أن

1) $\sum_{x\in X(\Omega)}\sum_{y\in Y(\Omega)}\mathbb{P}(X=x,Y=y)=1$

2) $\sum_{x\in X(\Omega)}\mathbb{P}(X=x)=1,\ \sum_{y\in Y(\Omega)}\mathbb{P}(Y=y)=1.$

حل التمرين 2:

1) إثبات أن $f_{(X,Y)}$ كثافة احتمال.

$f_{(X,Y)}$ كثافة احتمال إذا: 1) $f_{(X,Y)}$ مستمرة $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

2) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 , f_{(X,Y)}(x,y) \geq 0$

3) $\int_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y)\, dx\, dy = 1$

من التعريف $f_{X,Y}$ نلاحظ أنها مستمرة وموجبة

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y)\, dx\, dy = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} 2e^{-x}e^{-2y}\, dx\, dy = 1$$

ومنه $f_{(X,Y)}$ كثافة احتمال.

2) حساب الاحتمالات

$$\mathbb{P}(X<a) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{a} f_{(X,Y)}(x,y)\, dx\, dy = 1-e^{-a}$$

$$\mathbb{P}(X<Y) = \int_0^{+\infty}\int_0^{y} f_{(X,Y)}(x,y)\, dx\, dy = \frac{1}{3}.$$

$$\mathbb{P}(X>1, Y<1) = \int_0^{1}\int_1^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\, dx\, dy = e^{-3}.$$

3) الكثافتين الهامشيتين

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\, dy = e^{-x}\mathbb{1}_{x\geq 0}.$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\, dx = 2e^{-2y}\mathbb{1}_{y\geq 0}.$$