



### TP N°3

#### EXERCICE N° 1:

1. Si  $X$  est une variable aléatoire suivant une loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ , trouver la densité  $f_{|X|}(t)$  de la loi suivie par  $|X|$ .
2. En prenant la densité  $g(t) = e^{-t}$  de la loi exponentielle  $\mathcal{E}(1)$ , trouver la plus petite constante  $c$  telle que  $f_{|X|}(t) \leq cg(t)$  sur  $[0, +\infty[$ .
3. Donner une représentation graphique des courbes de  $f_{|X|}$  et  $cg$ .
4. Simuler un échantillon de taille 100 de la loi de  $|X|$  par la méthode d'acceptation-rejet. On précisera combien il aura fallu d'itérations.

#### EXERCICE N° 2:

1. Donner la densité de la loi  $\text{Beta}(3, 5)$  sur l'intervalle  $[0, 1]$ .
2. Trouver l'abscisse du point où  $f$  est maximale. Quelle est la signification de ce point ? Quelle est la valeur à l'optimum  $c$  correspondante.
3. Définir un algorithme d'acceptation-rejet utilisant la distribution uniforme sur  $[0, 1]$ .
4. Quel est le taux moyen d'acceptation ?
5. Générer avec R un échantillon de taille 150. Représenter, sur un même graphique, l'histogramme de l'échantillon et la densité.
6. Que fait le programme qui suit :

```
M <- 2.305
curve(dbeta(x, 3, 5), from=0, to=1, ylim=c(0, M))
r <- runif(300, min=0, max=1)
u <- runif(300, min=0, max=1)
below <- which(M*u*dunif(r, min=0, max=1) <= dbeta(r, 3, 5))
points(r[below], M*u[below], pch="+", col='red')
points(r[-below], M*u[-below], pch="-")
```

EXERCICE N° 3: On veut simuler une loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$  en utilisant comme proposition une loi de Laplace de paramètre  $\lambda > 0$ , c'est-à-dire de densité

$$g(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}.$$

Déterminer la valeur de  $\lambda$  qui permet de minimiser la probabilité de rejet. Écrire en R un code qui permet de simuler en utilisant cette méthode.

EXERCICE N° 4: On veut générer une variable  $X$  suivant une loi Gamma  $\Gamma(3/2, 1)$  de densité notée  $f$ . On utilise une technique de rejet avec comme loi de proposition une exponentielle  $\mathcal{E}(2/3)$  de densité notée  $g$ .

1. Déterminer  $m = \sup_{x>0} \frac{f(x)}{g(x)}$ . Quelle est le nombre moyen de simulations de la loi exponentielle pour aboutir à une réalisation de la loi Gamma ?
2. Représenter sur un même graphique un histogramme de réalisations de  $X$  et la densité  $f$ .
3. Intuitivement, qu'est-ce qui a guidé le choix du paramètre  $2/3$  comme paramètre de l'exponentielle ?