Référence : Nils Berglund. Martingales et calcul stochastique. DEA. Université d'Orléans, 2010, pp.91.

3.1 Sous-tribus et filtrations

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable. Une *sous-tribu* de $\mathcal{F}$ est une sous-famille $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$ qui est également une tribu. On dit parfois que la tribu $\mathcal{F}_1$ est plus grossière que la tribu $\mathcal{F}$, et que $\mathcal{F}$ est plus fine que $\mathcal{F}_1$. On notera que si X est une variable aléatoire réelle, on a l'implication

$$X \subseteq \mathcal{F}_1 \Rightarrow X \subseteq \mathcal{F} . \tag{3.1.1}$$

Une fonction non mesurable peut donc être rendue mesurable en choisissant une tribu plus fine.

Exemple 3.1.1.

1. La plus petite sous-tribu de $\mathcal{F}$ est la *tribu triviale* $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. On remarquera que si

   X est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_0$, alors la préimage $X^{-1}(y)$ d'un point y doit être égal soit à Ω tout entier, soit à l'ensemble vide, ce qui implique que X doit être constante. En d'autres termes, les variables aléatoires mesurables par rapport à la tribu triviale sont les fonctions constantes.
2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$. Alors on vérifie aisément que
   $$\sigma(X) := \{X^{-1}(A) \colon A \in \mathcal{E}\} , \tag{3.1.2}$$
   où $X^{-1}(A) := \{\omega \in \Omega \colon X(\omega) \in A\}$, est une sous-tribu de $\mathcal{F}$. C'est la plus petite sous-tribu de $\mathcal{F}$ par rapport à laquelle X soit mesurable.
3. Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$, alors
   $$\sigma(X_1, \dots, X_n) := \{(X_1, \dots, X_n)^{-1}(A) \colon A \in \mathcal{E}^{\otimes n}\} , \tag{3.1.3}$$
   où $(X_1, \dots, X_n)^{-1}(A) := \{\omega \in \Omega \colon (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \in A\}$, est une sous-tribu de $\mathcal{F}$. C'est la plus petite sous-tribu de $\mathcal{F}$ par rapport à laquelle les variables aléatoires $X_1, \dots X_n$ soient toutes mesurables.

L'exemple ci-dessus donne une interprétation importante de la notion de sous-tribu. En effet, $\sigma(X)$ représente l'ensemble des événements qu'on est potentiellement capable de distinguer en mesurant la variable X. Autrement dit, $\sigma(X)$ est l'information que X peut fournir sur l'espace probabilisé.

Définition 3.1.2 (Filtration, processus adapté).

1. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé. Une* filtration *de* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *est une suite croissante de sous-tribus*
$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n \subset \cdots \subset \mathcal{F} . \tag{3.1.4}$$
On dit alors que $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}, \mathbb{P})$ *est un* espace probabilisé filtré.
2. *Soit* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *un processus stochastique sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*. On dit que le processus est* adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_n\}$ *si* X_n *est mesurable par rapport à* $\mathcal{F}_n$ *pour tout* n*.*

Un choix minimal de filtration adaptée est la *filtration canonique* (ou *naturelle*)
$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n) . \tag{3.1.5}$$
Dans ce cas, $\mathcal{F}_n$ représente l'information disponible au temps n, si l'on observe le processus stochastique.

Exemple 3.1.3. Considérons la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$. Dans ce cas, $E = \mathbb{Z}$ et $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$. Le choix de Ω est arbitraire, il suffit de le prendre "assez grand" pour distinguer toutes les réalisations possibles de la marche. Un choix pratique est l'ensemble $\Omega = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ des suites infinies de -1 et de 1, avec la convention que le $n$ième élément de le suite spécifie la direction du $n$ième pas de la marche. En d'autres termes,
$$X_n(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i . \tag{3.1.6}$$
La tribu associée est $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\{-1,1\})^{\otimes\mathbb{N}} = \{\emptyset, \{-1\}, \{1\}, \{-1,1\}\}^{\otimes\mathbb{N}}$.

Construisons maintenant la filtration naturelle. Tout d'abord, $X_0 = 0$ n'est pas vraiment aléatoire. Nous avons pour tout $A \subset \mathbb{Z}$
$$X_0^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \colon X_0 = 0 \in A\} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } 0 \notin A , \\ \Omega & \text{si } 0 \in A , \end{cases} \tag{3.1.7}$$
de sorte que
$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\} \tag{3.1.8}$$
est la tribu triviale.

Pour $n = 1$, on observe que $(X_0, X_1)(\Omega) = \{(0, -1), (0, 1)\}$. Il y a donc quatre cas à distinguer, selon qu'aucun, l'un ou l'autre, ou les deux points appartiennent à $A \subset \mathbb{Z}^2$. Ainsi,
$$(X_0, X_1)^{-1}(A) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } (0,-1) \notin A \text{ et } (0,1) \notin A , \\ \{\omega \colon \omega_1 = 1\} & \text{si } (0,-1) \notin A \text{ et } (0,1) \in A , \\ \{\omega \colon \omega_1 = -1\} & \text{si } (0,-1) \in A \text{ et } (0,1) \notin A , \\ \Omega & \text{si } (0,-1) \in A \text{ et } (0,1) \in A , \end{cases} \tag{3.1.9}$$
et par conséquent
$$\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \{\omega \colon \omega_1 = 1\}, \{\omega \colon \omega_1 = -1\}, \Omega\} . \tag{3.1.10}$$
Ceci traduit bien le fait que $\mathcal{F}_1$ contient l'information disponible au temps 1 : On sait distinguer tous les événements dépendant du premier pas de la marche. Les variables aléatoires mesurables par rapport à $\mathcal{F}_1$ sont précisément celles qui ne dépendent que de ω_1.

Jusqu'au temps $n = 2$, il y a quatre trajectoires possibles, puisque $(X_0, X_1, X_2)(\Omega) = \{(0, -1, -2), (0, -1, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 2)\}$. Il suit par un raisonnement analogue que $\mathcal{F}_2$ contient $2^4 = 16$ éléments, qui se distinguent par quels points parmi ces quatre sont contenus dans A. Les variables aléatoires mesurables par rapport à $\mathcal{F}_2$ sont précisément celles qui ne dépendent que de ω_1 et ω_2.

Il est maintenant facile de généraliser à des n quelconques.

Martingales

Le nom *martingale* est synonime de *jeu équitable*, c'est-à-dire d'un jeu où le gain que l'on peut espérer faire en tout temps ultérieur est égal à la somme gagnée au moment présent. En probabilités, on appelle donc martingale un processus stochastique $\{X_n\}_n$ tel que l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X_m|X_n)$ est égale à X_n pour tout $m \geqslant n$. Les martingales, ainsi que leurs variantes les sous-martingales et les surmartingales, jouissent de nombreuses propriétés qui les rendent très utiles dans l'étude de processus stochastiques plus généraux. Nous allons voir quelques-unes de ces propriétés dans ce chapitre et les suivants.

4.1 Definitions et exemples

Définition 4.1.1 (Martingale, sous- et surmartingale). *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}_n, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé filtré. Une* martingale *par rapport à la filtration* $\{\mathcal{F}_n\}_n$ *est un processus stochastique* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tel que*

1. $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *;*
2. $\{X_n\}_n$ *est adapté à la filtration* $\{\mathcal{F}_n\}_n$*;*
3. $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *.*

Si la dernière condition est remplacée par $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leqslant X_n$ *on dit que* $\{X_n\}_n$ *est une* surmartingale, *et si elle est remplacée par* $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geqslant X_n$ *on dit que c'est une* sous-martingale.

On notera qu'en termes de jeu, une surmartingale est défavorable au joueur, alors qu'une sous-martingale lui est favorable (la terminologie vient de la notion de fonction sous-harmonique).

Exemple 4.1.2.

1. Soit $\{X_n\}_n$ la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$, et soit $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$ la filtration canonique. On remarque que $X_{n+1} - X_n$ est indépendant de $\mathcal{F}_n$, ce qui permet d'écrire

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n) = X_n + \mathbb{E}(X_{n+1} - X_n) = X_n \;, \quad (4.1.1)$$

montrant que la [illegible]le. Cela traduit le fait que si l'on sait où [illegible]leure estimation de sa position aux temps ultérieurs est donnée par celle au temps n.

2. Soit $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ un ensemble dénombrable, et soit $\{X_n\}_n$ une chaîne de Markov sur $\mathcal{X}$, de matrice de transition $P = (p_{i,j})_{i,j\in\mathcal{X}}$. Alors l'équation (3.2.13) implique

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \sum_{j\in\mathcal{X}} j p_{X_n,j} \ . \tag{4.1.2}$$

Par conséquent la chaîne est une martingale si $\sum_j j p_{i,j} = i$ pour tout $i \in \mathcal{X}$, une surmartingale si $\sum_j j p_{i,j} \leqslant i$ pour tout $i \in \mathcal{X}$, et une sous-martingale si $\sum_j j p_{i,j} \geqslant i$ pour tout $i \in \mathcal{X}$. Comme $\sum_j p_{i,j} = 1$, la condition d'être une martingale peut aussi s'écrire $\sum_j (j-i)p_{i,j} = 0$ (respectivement $\leqslant 0$ pour une surmartingale et $\geqslant 0$ pour une sous-martingale).

3. **Urne de Polya :** On considère une urne contenant r boules rouges et v boules vertes. De manière répétée, on tire une boule de l'urne, puis on la remet en ajoutant un nombre fixé c de boules de la même couleur. Soit r_n le nombre de boules rouges après le $n$ième tirage, v_n le nombre de boules vertes, et $X_n = r_n/(r_n + v_n)$ la proportion de boules rouges. On aura donc

$$X_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{r_n + c}{r_n + v_n + c} & \text{avec probabilité } \dfrac{r_n}{r_n + v_n} = X_n \ , \\[2ex] \dfrac{r_n}{r_n + v_n + c} & \text{avec probabilité } \dfrac{v_n}{r_n + v_n} = 1 - X_n \ , \end{cases} \tag{4.1.3}$$

de sorte que

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|X_n) = \frac{r_n + c}{r_n + v_n + c}\,\frac{r_n}{r_n + v_n} + \frac{r_n}{r_n + v_n + c}\,\frac{v_n}{r_n + v_n} = \frac{r_n}{r_n + v_n} = X_n \ . \tag{4.1.4}$$

La suite $\{X_n\}_n$ est donc une martingale (par rapport à la filtration canonique).

4.2 Inégalités

Commençons par vérifier que le fait de ne faire intervenir que des temps consécutifs n et $n+1$ dans la définition n'est pas une restriction, mais que la monotonie s'étend à tous les temps.

Proposition 4.2.1. *Si $\{X_n\}_n$ est une surmartingale (respectivement une sous-martingale, une martingale), alors*

$$\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_m) \leqslant X_m \qquad \forall n > m \geqslant 0 \tag{4.2.1}$$

(respectivement $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_m) \geqslant X_m$, $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_m) = X_m$).

Démonstration. Considérons le premier cas. Le résultat suit de la définition si $n = m+1$. Si $n = m+k$ avec $k \geqslant 2$, alors par la Proposition 3.2.5,

$$\mathbb{E}(X_{m+k}|\mathcal{F}_m) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{m+k}|\mathcal{F}_{m+k-1})|\mathcal{F}_m) \leqslant \mathbb{E}(X_{m+k-1}|\mathcal{F}_m) \ . \tag{4.2.2}$$

Le résultat suit alors par récurrence. Si $\{X_n\}_n$ est une sous-martingale, il suffit d'observer que $\{-X_n\}_n$ est une surmartingale et d'appliquer la linéarité. Enfin, si $\{X_n\}_n$ est une martingale, alors c'est à la fois une surmartingale et une sous-martingale, d'où la conclusion (ce raisonnement en trois pas est typique pour les martingales). □

Un deuxième type important d'inégalité s'obtient en appliquant une fonction convexe à un processus. Nous énoncerons simplement les résultats dans l'un des trois cas sur-sous- ou martingale, mais souvent d'autres inégalités s'obtiennent dans les autres cas par linéarité.

Proposition 4.2.2.

1. *Soit X_n une martingale par rapport à $\mathcal{F}_n$, et soit φ une fonction convexe telle que $\mathbb{E}(|\varphi(X_n)|) < \infty$ pour tout n. Alors $\varphi(X_n)$ est une sous-martingale par rapport à $\mathcal{F}_n$.*
2. *Soit X_n une sous-martingale par rapport à $\mathcal{F}_n$ et φ une fonction convexe croissante telle que $\mathbb{E}(|\varphi(X_n)|) < \infty$ pour tout n. Alors $\varphi(X_n)$ est une sous-martingale par rapport à $\mathcal{F}_n$.*

DÉMONSTRATION.

1. Par l'inégalité de Jensen, $\mathbb{E}(\varphi(X_{n+1})|\mathcal{F}_n) \geqslant \varphi(\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)) = \varphi(X_n)$.
2. Par l'inégalité de Jensen, $\mathbb{E}(\varphi(X_{n+1})|\mathcal{F}_n) \geqslant \varphi(\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)) \geqslant \varphi(X_n)$. □

Plusieurs cas particuliers de fonctions φ joueront un rôle dans la suite. Pour deux nombres réels a et b, nous notons $a \wedge b$ leur minimum et $a \vee b$ leur maximum. De plus, $a^+ = a \vee 0$ dénote la partie positive de a et $a^- = (-a) \vee 0$ sa partie négative.

Corollaire 4.2.3.

1. *Si $p \geqslant 1$ et X_n est une martingale telle que $\mathbb{E}(|X_n|^p) < \infty$ pour tout n, alors $|X_n|^p$ est une sous-martingale.*
2. *Si X_n est une sous-martingale, alors $(X_n - a)^+$ est une sous-martingale.*
3. *Si X_n est une surmartingale, alors $X_n \wedge a$ est une surmartingale.*

4.3 Décomposition de Doob, processus croissant

Définition 4.3.1 (Processus prévisible). *Soit $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ une filtration. Une suite $\{H_n\}_{n\geqslant 0}$ est un* processus prévisible *si $H_n \subseteq \mathcal{F}_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$.*

La notion de prévisibilité se comprend facilement dans le cadre de la théorie des jeux (et par conséquent également dans celle des marchés financiers, ce qui est essentiellement pareil). Supposons en effet qu'un joueur mise de manière répétée sur le résultat d'une expérience aléatoire, telle que le jet d'une pièce de monnaie. Une stratégie est une manière de décider la somme misée à chaque tour, en fonction des gains précédents. Par exemple, le joueur peut décider de doubler la mise à chaque tour, ou de miser une proportion fixée de la somme qu'il a gagnée. Toute stratégie doit être prévisible, car elle ne peut pas dépendre de résultats futurs du jeu. De même, un investisseur décide de la manière de placer ses capitaux en fonction de l'information disponible au temps présent, à moins de commettre une délit d'initié.

Considérons le cas particulier où le joueur gagne un euro pour chaque euro misé si la pièce tombe sur Pile, et perd chaque euro misé si elle tombe sur Face. Soit X_n la somme totale qu'aurait gagnée au temps n un joueur misant un Euro à chaque coup. Un joueur suivant la stratégie H aura alors gagné au temps n la somme

$$(H \cdot X)_n := \sum_{m=1}^{n} H_m(X_m - X_{m-1}) , \tag{4.3.1}$$

puisque $X_m - X_{m-1}$ vaut 1 ou -1 selon que la pièce est tombée sur Pile au Face lors du $n$ième jet. Le résultat suivant affirme qu'il n'existe pas de stratégie gagnante dans ce jeu.

Proposition 4.3.2. *Soit $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ une surmartingale et H_n un processus prévisible, non-négatif et borné pour tout n. Alors $(H\cdot X)_n$ est une surmartingale.*

Démonstration. Comme $H_{n+1} \subseteq \mathcal{F}_n$ et $(H\cdot X)_n \subseteq \mathcal{F}_n$, la linéarité de l'espérance conditionnelle implique

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((H\cdot X)_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= (H\cdot X)_n + \mathbb{E}(H_{n+1}(X_{n+1}-X_n)|\mathcal{F}_n)\\ &= (H\cdot X)_n + H_{n+1}\mathbb{E}(X_{n+1}-X_n|\mathcal{F}_n) \leqslant (H\cdot X)_n\ ,\end{aligned} \tag{4.3.2}$$

puisque $H_{n+1}\geqslant 0$ et $\mathbb{E}(X_{n+1}-X_n|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) - X_n \leqslant 0$. □

La décomposition de Doob permet d'écrire une sous-martingale comme la somme d'une martingale et d'un processus prévisible.

Proposition 4.3.3 (Décomposition de Doob). *Toute sous-martingale $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ peut être écrite d'une manière unique comme $X_n = M_n + A_n$, où M_n est une martingale et A_n est un processus prévisible croissant tel que $A_0 = 0$.*

Démonstration. La preuve est parfaitement constructive. Supposons d'abord que la décomposition existe, avec $\mathbb{E}(M_n|\mathcal{F}_{n-1}) = M_{n-1}$ et $A_n \subseteq \mathcal{F}_{n-1}$. Alors nécessairement

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}(M_n|\mathcal{F}_{n-1}) + \mathbb{E}(A_n|\mathcal{F}_{n-1})\\ &= M_{n-1} + A_n = X_{n-1} - A_{n-1} + A_n\ .\end{aligned} \tag{4.3.3}$$

Il en résulte les deux relations

$$A_n = A_{n-1} + \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) - X_{n-1} \tag{4.3.4}$$

et

$$M_n = X_n - A_n\ . \tag{4.3.5}$$

Ces deux relations définissent M_n et A_n univoquement. En effet, $A_0 = 0$ et donc $M_0 = X_0$ par hypothèse, de sorte que tous les M_n et A_n sont définis par récurrence. Le fait que X_n est une sous-martingale implique que $A_n \geqslant A_{n-1} \geqslant 0$. Par récurrence, $A_n \subseteq \mathcal{F}_{n-1}$. Enfin,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_n|\mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}(X_n - A_n|\mathcal{F}_{n-1})\\ &= \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) - A_n = X_{n-1} - A_{n-1} = M_{n-1}\ ,\end{aligned} \tag{4.3.6}$$

ce qui montre que M_n est bien une martingale. □

Un cas particulier important se présente si X_n est une martingale telle que $X_0 = 0$ et $\mathbb{E}(X_n^2) < \infty$ pour tout n. Dans ce cas, le Corollaire 4.2.3 implique que X_n^2 est une sous-martingale. La décomposition de Doob de X_n^2 s'écrit alors

$$X_n^2 = M_n + A_n\ , \tag{4.3.7}$$

où M_n est une martingale, et (4.3.4) implique

$$A_n = \sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}(X_m^2|\mathcal{F}_{m-1}) - X_{m-1}^2 = \sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}((X_m - X_{m-1})^2|\mathcal{F}_{m-1})\ . \tag{4.3.8}$$

Définition 4.3.4 (Processus croissant). *Le processus prévisible* (4.3.8) *est appelé le* processus croissant *ou le* crochet, *ou encore le* compensateur *de X_n, et noté $\langle X\rangle_n$.*

Le processus croissant $\langle X\rangle_n$ est une mesure de la variance de la trajectoire jusqu'au temps n. Nous verrons que sous certaines conditions, $\langle X\rangle_n$ converge vers une variable aléatoire $\langle X\rangle_\infty$, qui mesure alors la variance totale des trajectoires.