# SÉRIES TEMPORELLES

## MASTER I : MATHS.APPLIQ& STAT —- HOME WORK N° 4

Le 13 mai 2022 à 8:04

**EXERCICE 2** : Soit le processus suivant, supposé stationnaire, avec $\varepsilon_t$ un bruit blanc de variance $\sigma^2$ : $y_t = \sum_{k=1}^{p} a_k y_{t-k} + \varepsilon_t$

1)- Quel est le nom de ce processus ? Donner la formule de sa fonction d'autocovariance $\gamma(h)$ et celle de sa fonction d'autocorrélation $\rho(h)$.

2)- Vérifiez si les deux processus suivants sont stationnaires puis calculer les autocorrélations et autocorrélations partielles d'ordre 1, 2, et 3 pour ces processus.

$$y_t = 0.7y_{t-1} - 0.49y_{t-2} + \varepsilon_t \quad , \quad y_t = 0.8y_{t-1} + \varepsilon_t$$

**EXERCICE 3** : (Marche aléatoire). Soit $X = (X_t)_{t\in N}$ une marche aléatoire de dérive $\mu$ : $X_t = \mu + X_{t-1} + Z_t$ pour tout $t = 1$, où $X_0 = 0$ et où $(Z_t)_{t\in N}$ est un bruit blanc fort.

1. Calculer la fonction d'autocovariance $\gamma_X$ de $X$. Est-ce que $X$ est stationnaire ?
2. Le processus $(\Delta X_t)_{t\in N}$ est-il stationnaire ?

**EXERCICE 4** : Estimation des paramètres à partir les équations YULL-WALKER (YW)

On considère un échantillon contenant 1000 observations d'une variable. L'estimation de la ACF de cette série est donnée dans le tableau suivant :

| k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\rho(k)$ | 1 | 0.2214 | -0.695 | -0.4115 | 0.4022 | 0.4677 | -0.1597 | -0.429 |

On sait que cette série suit un modèle AR(3). Donner une estimation des paramètres de ce modèle.

**EXERCICE 5** : Soit $Z \sim BB(0, \sigma^2)$. et l'équation ARMA(1, 2) $X_t - 3X_{t-1} = Z_t - \frac{10}{3}Z_{t-1} + Z_{t-2}$

1. Préciser les polynômes $\Phi$ et $\Theta$ de l'équation ARMA(1, 2) et montrer qu'il existe une unique solution stationnaire ;
2. Cette solution est-elle causale ? Est-ce que $\Phi$ s'annule sur le disque unité ?
3. Calculer explicitement cette solution en fonction de Z ?
4. Cette solution est-elle inversible ?

**EXERCICE 6** : Soit le processus AR(2) défini comme la solution stationnaire de

$$X_t - \phi X_{t-1} - \phi^2 X_{t-2} = Z_t, \quad Z_t \sim WN(0, \sigma^2).$$

a) Pour quelles valeurs de $\phi$ une solution stationnaire existe-t-elle ?
b) Les estimateurs des moments suivants ont été obtenus après l'observation de$X_1, ..., X_{200}$ :

$$\gamma(0) = 6,06, \rho(1) = 0,687, \rho(2) = 0,610.$$

Trouver des estimateurs de $\phi$ et $\sigma^2$ à l'aide des équations de Yule–Walker. (Si vous trouvez plus d'une solution, retenir celle qui est stationnaire.)

**EXERCICE 7** : Soient $X = (X_t)_{t \in Z}$ et $Y = (Y_t)_{t \in Z}$ deux processus liés par la relation suivante

$$\begin{aligned} Y_t &= \phi Y_{t-1} + X_t + \varepsilon_t; \\ X_t &= \psi X_{t-1} + \eta_t; t \in Z; \end{aligned}$$

où $\varepsilon = (\varepsilon_t)_{t \in Z}$ et $\eta = (\eta_t)_{t \in Z}$ sont deux bruit blancs faibles décorrélés (C'est-à-dire pour tous $s, t \in Z$, on a $E[\varepsilon_t \eta_s] = 0$)., de variance 1, et $\phi$ et $\psi$ sont deux réels distincts dans $]0, 1[$.
1) Montrer que $X$ est bien défini et stationnaire.
2) Montrer que $W = (W_t)_{t \in Z}$ défini par $W_t = X_t + \varepsilon_t$ ; $t \in Z$ est stationnaire.
En déduire que Y est bien défini et stationnaire

On note B l'opérateur retard, défini par $BX_t = X_{t-1}$ pour $t \in Z$.
3) Montrer que $Z = (Z_t)_{t \in Z}$ défini par $Z_t = (1 - \phi B)(1 - B)Y_t; t \in Z$; est stationnaire et calculer sa fonction d'autocovariance.
4) En déduire que Z est un processus MA(1), c'est-à-dire qu'il vérifie $Z_t = \zeta_t + \vartheta \zeta_{t-1}; t \in Z$; où $\zeta = (\zeta_t)_{t \in Z}$ est un bruit blanc de variance $\sigma^2 > 0$ et $\vartheta \in R$.
5) En déduire que Y est un processus ARMA(p, q) dont on précisera les ordres p et q.
6) On suppose $\vartheta + \phi \neq 0$ et $\vartheta + \psi \neq 0$,
Montrer sans calcul qu'il existe une représentation causale de Y .
7) Montrer que l'on a la décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{(1 - \phi x)(1 - \psi x)} = \frac{1}{\phi - \psi} \left( \frac{\varphi}{1 - \phi x} - \frac{\psi}{1 - \psi x} \right)$$

8) En déduire la représentation causale $Y_t = \sum_{\ell \geq 0} a_\ell \zeta_{t-\ell}$ pour une suite $(a_\ell)_{\ell \in Z}$ que l'on explicitera.