Ex4:
I)1- Faites les graphes des AC et ACP avec l'intervalle de confiance $IC\left(\rho_h\right)=[-0.25,0.25]$.
2-D'après le graphe on remarque que $\widehat{\rho}_h=0, \forall h>5$ et $\widehat{\varphi}_{hh}=0, \forall h>2$, on pourra proposer plusieurs modèles mais le plus adéquat c'est le modèle $AR(2)$
3- *On estime les paramètres par la méthode des moments

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\widehat{\varphi}_1\\ \widehat{\varphi}_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & 0.912\\ 0.912 & 1\end{pmatrix}^{-1}\times\begin{pmatrix}0.912\\ 0.801\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1.07\\ -0.18\end{pmatrix}\end{aligned}$$

*Pour trouver les écarts types on doit trouver la distribution asymptotique des coefficients:

$$\sqrt{n}\left(\begin{pmatrix}\widehat{\varphi}_1\\ \widehat{\varphi}_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}\right)\xrightarrow{d} N\left(0,\sigma^2\Gamma^{-1}\right)$$

$\widehat{\sigma}^2=\widehat{\gamma}_0\left(1-\widehat{\varphi}_1\widehat{\rho}_1-\widehat{\varphi}_2\widehat{\rho}_2\right)$ d'où $\widehat{\sigma}^2=0.015$

$$\begin{aligned}Var\left(\begin{pmatrix}\widehat{\varphi}_1\\ \widehat{\varphi}_2\end{pmatrix}\right) &= \frac{\widehat{\sigma}^2}{n\widehat{\gamma}_0}\begin{pmatrix}1 & \widehat{\rho}_1\\ \widehat{\rho}_1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\\ &= \frac{0.015}{60\times 0.089}\times\begin{pmatrix}1 & 0.912\\ 0.912 & 1\end{pmatrix}^{-1}\\ &= \begin{pmatrix}0.017 & -0.015\\ -0.015 & 0.017\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Conclusion: On doit tester la significativité des coefficients.
-Test de Student pour φ_1 : $t_{\varphi_1}=\frac{\left|\widehat{\varphi}_1\right|}{\sqrt{Var\left(\widehat{\varphi}_1\right)}}=8.20>1.96\Longrightarrow\varphi_1\neq 0$.
-Test de Student pour φ_2 : $t_{\varphi_2}=\frac{\left|\widehat{\varphi}_2\right|}{\sqrt{Var\left(\widehat{\varphi}_2\right)}}=1.38<1.96\Longrightarrow\varphi_2=0$.

<u>Ex5</u>:
I) Pour les processus MA(1) et AR(1): fait au cours.
*$(1-L)(1-0.2L)X_t=(1-0.5L)\,\varepsilon_t\Longrightarrow\left(1-1.2L+0.2L^2\right)X_t=\varepsilon_t-0.5\varepsilon_{t-1}$ d'où

$$X_t=1.2X_{t-1}-0.2X_{t-2}+\varepsilon_t-0.5\varepsilon_{t-1}$$

On rappelle que $\widehat{X}_t(h)=E\left(X_{t+h}/I_t\right)$, on doit remplacer h par 1,2...jusqu'à trouver une généralisation.
Pour $h=1$,

$$\begin{aligned}\widehat{X}_t(1) &= E\left(X_{t+1}/I_t\right)\\ &= E\left(1.2X_t-0.2X_{t-1}+\varepsilon_{t+1}-0.5\varepsilon_t\right)\\ &= 1.2X_t-0.2X_{t-1}-0.5\varepsilon_t\end{aligned}$$

Pour $h=2$,

$$\begin{aligned}\widehat{X}_t(2) &= E\left(X_{t+2}/I_t\right)\\ &= E\left(1.2X_{t+1}-0.2X_t+\varepsilon_{t+2}-0.5\varepsilon_{t+1}\right)\\ &= 1.2\widehat{X}_t(1)-0.2X_t\end{aligned}$$

Pour $h = 3$,

$$\begin{aligned} \widehat{X}_t(3) &= E\left(X_{t+3}/I_t\right) \\ &= E\left(1.2X_{t+2} - 0.2X_{t+1} + \varepsilon_{t+3} - 0.5\varepsilon_{t+2}\right) \\ &= 1.2\widehat{X}_t(2) - 0.2\widehat{X}_t\left(1\right) \end{aligned}$$

$\forall h > 2, \widehat{X}_t(h) = 1.2\widehat{X}_t(h-1) - 0.2\widehat{X}_t\left(h-2\right).$
*La variance de l'erreur de prévision pour $h = 1, 2, 3.$
Pour $h = 1$:

$$\begin{aligned} e_t\left(1\right) &= X_{t+1} - \widehat{X}_t(1) \\ &= \varepsilon_{t+1}. \end{aligned}$$

d'où $Var\left(e_t\left(1\right)\right) = \sigma_\varepsilon^2$. Pour $h = 2$:

$$\begin{aligned} e_t\left(2\right) &= X_{t+2} - \widehat{X}_t(2) \\ &= \varepsilon_{t+2} - 0.5\varepsilon_{t+1} + 1.2e_t\left(1\right) \\ &= \varepsilon_{t+2} + 0.7\varepsilon_{t+1}. \end{aligned}$$

d'où $Var\left(e_t\left(2\right)\right) = 1.49\sigma_\varepsilon^2$. Pour $h = 3$:

$$\begin{aligned} e_t\left(3\right) &= X_{t+3} - \widehat{X}_t(3) \\ &= \varepsilon_{t+3} - 0.5\varepsilon_{t+2} + 1.2e_t\left(2\right) - 0.2e_t\left(1\right) \\ &= \varepsilon_{t+3} - 0.5\varepsilon_{t+2} + 1.2\left(\varepsilon_{t+2} + 0.7\varepsilon_{t+1}\right) - 0.2\varepsilon_{t+1}. \\ &= \varepsilon_{t+3} + 0.7\varepsilon_{t+2} + 0.64\varepsilon_{t+1} \end{aligned}$$

d'où $Var\left(e_t\left(3\right)\right) = 1.89\sigma_\varepsilon^2$.
Si $\varepsilon_N = 1, X_N = 4, X_{N-1} = 3$ et $\sigma_\varepsilon^2 = 2$ alors $\widehat{X}_N\left(2\right) = 1.2\left[1.2X_N - 0.2X_{N-1} - 0.5\varepsilon_N\right] - 0.2X_N = 3.64$ et la variance de l'erreur de prévision est $Var\left(e_N\left(2\right)\right) = 1.49\sigma_\varepsilon^2 \Longrightarrow$ l'écart type est 1.72.
II) Je donne la solution de la question 2, les autres questions se font exactement de la même manière.
2-a. Soit $X_t \backsim ARIMA\left(0,1,1\right)$, donc

$$\left(1-L\right)X_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1} \Longrightarrow X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$$

Pour $h = 1$,

$$\begin{aligned} \widehat{X}_t(1) &= E\left(X_{t+1}/I_t\right) \\ &= E\left(X_t + \varepsilon_{t+1} - \theta\varepsilon_t\right) \\ &= X_t - \theta\varepsilon_t \end{aligned}$$

Pour $h = 2$,

$$\begin{aligned} \widehat{X}_t(2) &= E\left(X_{t+2}/I_t\right) \\ &= E\left(X_{t+1} + \varepsilon_{t+2} - \theta\varepsilon_{t+1}\right) \\ &= \widehat{X}_t(1) \end{aligned}$$

$\forall h>1, \widehat{X}_t(h)=\widehat{X}_t(h-1)$.
b-La variance de l'erreur de prévision.Pour $h=1$:

$$\begin{aligned} e_t(1) &= X_{t+1}-\widehat{X}_t(1) \\ &= \varepsilon_{t+1}. \end{aligned}$$

d'où $Var\left(e_t(1)\right)=\sigma^2$. Pour $h>1$:

$$\begin{aligned} e_t(h) &= X_{t+h}-\widehat{X}_t(h) \\ &= \varepsilon_{t+h}-\theta\varepsilon_{t+h-1}. \end{aligned}$$

d'où $Var\left(e_t(h)\right)=\left(1+\theta^2\right)\sigma^2$.
<u>Ex6</u>:
1-Soit $X_t \backsim ARIMA(1,2,0)$

$$\begin{aligned} (1-L)^2(1-\varphi L)X_t &= \varepsilon_t \Longrightarrow \left(1-2L+L^2\right)(1-\varphi L)X_t=\varepsilon_t \\ &\Longrightarrow \left(1-(2+\varphi)L+(1+2\varphi)L^2-\varphi L^3\right)X_t=\varepsilon_t \\ &\Longrightarrow X_t=(2+\varphi)X_{t-1}-(1+2\varphi)X_{t-2}+\varphi X_{t-3}+\varepsilon_t. \end{aligned}$$

Pour $h=1$,

$$\begin{aligned} \widehat{X}_t(1) &= E\left(X_{t+1}/I_t\right) \\ &= (2+\varphi)X_t-(1+2\varphi)X_{t-1}+\varphi X_{t-2}. \end{aligned}$$

Pour $h=2$,

$$\begin{aligned} \widehat{X}_t(2) &= E\left(X_{t+2}/I_t\right) \\ &= (2+\varphi)\widehat{X}_t(1)-(1+2\varphi)X_t+\varphi X_{t-1}. \end{aligned}$$

On déduit que $\forall h>3$: $\widehat{X}_t(h)=(2+\varphi)\widehat{X}_t(h-1)-(1+2\varphi)\widehat{X}_t(h-2)+\varphi\widehat{X}_t(h-3)$.
2-
a-Identification du modèle.

$$(1+0.6L)\left(X_t-2X_{t-1}+X_{t-2}\right)=(1+0.6L)(1-L)^2X_t$$

Donc $X_t \backsim ARIMA(1,2,0)$
b-Soit $W_t=\Delta^2X_t \Longrightarrow W_t \backsim AR(1)$
c-La prévision de X_{12} est $\widehat{X}_{10}(2)$:

$$\begin{aligned} \widehat{X}_{10}(2) &= (2+\varphi)\widehat{X}_{10}(1)-(1+2\varphi)X_{10}+\varphi X_9 \\ &= (2+\varphi)\left[(2+\varphi)X_{10}-(1+2\varphi)X_9+\varphi X_8\right]-(1+2\varphi)X_{10}+\varphi X_9 \end{aligned}$$

avec $\varphi=-0.6$, $X_8=3$, $X_9=8$ et $X_{10}=9$, on trouve $\widehat{X}_{10}(2)=14.36$.
L'erreur moyenne quadratique:

$$\begin{aligned} E\left(X_{10+2}-\widehat{X}_{10}(2)\right)^2 &= E\left(\varepsilon_{12}+(2+\varphi)\varepsilon_{11}\right)^2 \\ &= \sigma^2\left(1+(2+\varphi)^2\right). \end{aligned}$$