Sorbonne Université
Master de mathématiques

Probabilités approfondies

Fascicule d'exercices

Année 2019–2020

Cours : Thierry LÉVY
Travaux dirigés : Shen LIN, Emmanuel SCHERTZER, Camille TARDIF

Chapitre 0

Rappels de probabilités

Espaces de probabilité et variables aléatoires

Exercice 0.1. Un document a été perdu. La probabilité pour qu'il se trouve dans un meuble est p, $0 < p < 1$. Ce meuble comporte sept tiroirs. On explore six tiroirs sans trouver le document. Quelle est la probabilité de le trouver dans le septième ?

Exercice 0.2. Soient $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ des événements d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

1. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $\mathbf{1}_{\cap_{k=1}^n A_k} = \prod_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k}$.
2. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $\mathbf{1}_{\cup_{k=1}^n A_k} = 1 - \prod_{k=1}^n (1 - \mathbf{1}_{A_k})$.
3. On pose $p_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k})$. Montrer que

$$\mathbb{P}(\cup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} p_k \, .$$

4. n personnes participent à un *père Noël secret* : les n noms (que l'on suppose tous différents) sont écrits sur des étiquettes, et chaque personne tire au hasard une étiquette (et la garde) – le nom écrit sur cette étiquette est celui de la personne à qui elle doit faire un cadeau. On note $p(n)$ la probabilité qu'au moins une personne tire une étiquette avec son propre nom. Expliciter $p(n)$. Calculer $\lim_{n\to\infty} p(n)$.

Exercice 0.3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes prenant toutes les valeurs entières entre 1 et n suivant les probabilités :

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = 1/n, \qquad k \in \{1, \cdots, n\}.$$

Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$ et $\mathbb{P}(X \geq Y)$. Déterminer la loi de $X - Y$.

Exercice 0.4. Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \cdots\}$ définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. On suppose que, pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{P}(T \geq n) > 0$ et, pour tous $n, p \geq 1$, $\mathbb{P}(T \geq n + p \,|\, T \geq n) = \mathbb{P}(T \geq p)$. Montrer que T suit une loi géométrique.

Exercice 0.5. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. On considère ε et X des variables aléatoires réelles indépendantes définies sur cet espace. On suppose que ε a pour loi : $\mathbb{P}(\varepsilon = -1) = \mathbb{P}(\varepsilon = 1) = 1/2$.

1. Montrer que εX et ε sont indépendantes si et seulement si la loi de X est symétrique (c'est-à-dire, X a la même loi que $-X$).
2. Construire un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ pour lequel il existe deux sous-tribus $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ indépendantes et une variable aléatoire Y telle que :
   (a) Y est $\sigma(\mathscr{A} \cup \mathscr{B})$-mesurable,
   (b) Y est indépendante de $\mathscr{B}$,
   (c) Y n'est pas $\mathscr{A}$-mesurable.
3. Construire un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ pour lequel il existe deux sous-tribus $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ indépendantes et une variable aléatoire Z telle que :
   (a) Z est $\sigma(\mathscr{A} \cup \mathscr{B})$-mesurable,
   (b) Z est indépendante de $\mathscr{B}$,
   (c) Z est indépendante de $\mathscr{A}$.

Exercice 0.6. On considère n variables aléatoires indépendantes $X_1, \cdots, X_n$ à valeurs dans $\{1, 2, \cdots, r\}$ et de même loi donnée par $\mathbb{P}(X_1 = i) = p_i$, $1 \leq i \leq r$. On définit $Z_i = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_j = i\}}$.

1. Déterminer la loi de Z_1. A quelle condition les variables aléatoires Z_i ont-elles même loi ?
2. Calculer la covariance de Z_1 et Z_2. Les variables aléatoires Z_1 et Z_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 0.7. On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit la loi gamma de paramètre $a > 0$ si X admet la densité

$$\frac{1}{\Gamma(a)} e^{-x} x^{a-1} \mathbf{1}_{\{x>0\}}.$$

1. Soit U une variable aléatoire de loi gamma de paramètre a. Calculer explicitement les moments $\mathbb{E}(U^n)$, $n \in \mathbb{N}$.
2. Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de loi gamma de paramètres respectifs a et b. Montrer que les variables aléatoires $U/(U+V)$ et $U+V$ sont indépendantes et expliciter la loi de $U/(U+V)$.

Exercice 0.8. Soient $X_1, X_2, \cdots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $S_0 = 0$ et, pour $1 \leq k \leq n$, $S_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$.

1. Déterminer la loi du vecteur aléatoire $(S_1, S_2, \cdots, S_n)$.
2. Montrer que la variable aléatoire $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ admet pour densité

$$f_{S_n}(s_n) = \lambda^n e^{-\lambda s_n} \frac{s_n^{n-1}}{(n-1)!} \mathbf{1}_{\{s_n>0\}}.$$

3. Déterminer la fonction caractéristique de S_n.
4. Calculer de deux manières $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathrm{Var}\,(S_n)$.

Convergences de suites de variables aléatoires

Exercice 0.9. Dans les cas suivants, quels sont les différents modes de convergence que la suite de variables aléatoires réelles $(X_n,\, n \geq 1)$ est susceptible de réaliser.

1. $\mathbb{P}\left(X_n = 1 - \frac{1}{n}\right) = \mathbb{P}\left(X_n = 1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$.
2. $\mathbb{P}\left(X_n = \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2^n}$, $\mathbb{P}(X_n = n) = 1 - \frac{1}{2^n}$.
3. $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$, $\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n}$.
4. $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - p_n$, $\mathbb{P}(X_n = 1) = p_n$, où les X_n sont supposées indépendantes ; dans ce cas, donner une condition nécessaire et suffisante portant sur la suite (p_n) pour que
   (a) (X_n) converge p.s. ;
   (b) (X_n) converge dans L^1 ;
   (c) (X_n) converge en loi (i.e., $\mathbb{E}(f(X_n)) \to \mathbb{E}(f(X))$ quand $n \to \infty$ pour toute application continue bornée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

Exercice 0.10. Soient $(X_n,\, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et X une variable aléatoire réelle.

1. Montrer que, si pour tout $\varepsilon > 0$, $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty$, alors $X_n \to X$ p.s. (quand $n \to \infty$).
2. On suppose que $X_n \to 0$ p.s. (resp. $X_n \to X$ p.s.). Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) < \infty$ (resp. $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty$).
3. Conclure.

Exercice 0.11 (Pas de convergence en probabilité pour la moyenne de Césaro)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, X_n étant de fonction de répartition donnée par

$$F_n(x) = 0 \text{ si } x \leq 0 \qquad \text{et} \qquad F_n(x) = 1 - \frac{1}{x+n} \text{ si } x > 0.$$

On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, et $Y_n = \frac{S_n}{n}$. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 0, mais pas la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 0.12. Soit $(X_n,\, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires de même loi uniforme sur $[0,\, 1]$. On pose

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{n} \text{ si } X_n \leq \frac{1}{n}, \\ T_n &= 1 \text{ si } X_n > \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

1. Montrer que la suite (T_n) converge en probabilité et trouver sa limite.
2. Vérifier que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|T_{n^2} - 1| > \varepsilon) \leq +\infty$. En déduire la convergence presque sûre de la suite (T_{n^2}).

Exercice 0.13. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi de Bernouilli de paramètre $p \in]0,1[$. On définit

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{2^k}\,.$$

1. Montrer que, presque sûrement, Y_n converge. On note Y sa limite. Montrer que Y est une variable aléatoire.
2. Si $p = 1/2$, donner la loi de Y.

   Indication : utiliser la convergence de la fonction de répartition.

Exercice 0.14. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes avec $\mathbb{E}[X_n] = 0$ pour tout $n \geq 1$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. On suppose que $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Var}(X_n) < +\infty$.

1. Montrer que S_n converge dans L^2 vers une variable aléatoire S.

   Indication : on pourra utiliser le fait que L^2 est complet, i.e. que chaque suite de Cauchy a une limite.
2. En déduire que $E[S] = 0$ et $\mathrm{Var}(S - S_n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathrm{Var}(X_k)$ pour tout n.
3. Montrer que si on a de plus $\sum_{n=1}^{+\infty} n\,\mathrm{Var}(X_n) < +\infty$, alors la convergence a lieu presque sûrement.

Exercice 0.15.
1. Soit U une v.a. uniformément répartie sur $[0,1]$ et $(U_n)_{(n\geq 0)}$ une suite de v.a. indépendantes ayant chacune la même loi que U. Soit d'autre part Y une v.a. exponentielle de paramètre 1 (ayant donc comme densité $\exp(-x)1_{\mathbb{R}_+}(x)$). Pour tout $n \geq 1$, on pose $Z_n = n\min\{U_1, \ldots, U_n\}$. Monter que Z_n converge en loi vers Y.
2. Soit maintenant X une v.a. à valeurs dans $[0,\infty[$ et $(X_n)_{(n\geq 1)}$ une suite de v.a. indépendantes ayant chacune la même loi que X. Montrer que
   (a) Si $P\{X > x\} = o(1/x)$ lorsque $x \to +\infty$ alors

   $$Z_n = \frac{1}{n}\max\{X_1, \cdots, X_n\}$$

   converge en loi vers 0.

   (b) Si $P\{X > x\} \sim \alpha/x^{\lambda}$ lorsque $x \to +\infty$, avec $\alpha, \lambda > 0$ alors

   $$Z_n = \frac{1}{n^{1/\lambda}}\max\{X_1, \cdots, X_n\}$$

   converge vers une variable aléatoire dite de Fréchet, dont la fonction de répartition est donnée par $P\{Y \leq t\} = \exp(-\alpha t^{-\lambda})1_{\mathbb{R}_+}(t)$.

Exercice 0.16 (Lemme de Slutsky)**.** Montrer que si X_n converge en loi vers X, et si Y_n converge en loi vers une constante c (montrer qu'elle converge alors en probabilité), alors le couple (X_n, Y_n) converge en loi vers le couple (X, c).

Donner un contre exemple où X_n converge en loi vers X, Y_n converge en loi vers Y (v.a. non constante), mais où le couple (X_n, Y_n) ne converge pas en loi.

Exercice 0.17. Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires réelles intégrables convergeant presque sûrement vers une variable aléatoire X intégrable. On suppose de plus que $\mathbb{E}(|X_n|) \to \mathbb{E}(|X|)$ quand $n \to \infty$. Montrer que la suite (X_n) converge vers X dans L^1.

Exercice 0.18. Soient $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoire réelles indépendantes, de loi exponentielle de paramètre 1.

1. Montrer que pour tout $k \geq 1$, $\mathbb{P}$(il existe une infinité de n tel que $X_n \geq k) = 1$.
2. En déduire que p.s. $\limsup_{n\to\infty} X_n = +\infty$.

   On pose $Y_n := \prod_{i=1}^n X_i$.
3. Que vaut $\mathbb{E}[Y_n]$?
4. Montrer que $\mathbb{E}[\sqrt{X_1}] = \sqrt{\pi}/2$. En déduire la valeur de $\mathbb{E}[\sqrt{Y_n}]$.
5. Montrer que, pour tout $t > 0$, $\mathbb{P}(Y_n \geq t) \leq \frac{1}{\sqrt{t}}(\sqrt{\pi}/2)^n$.
6. En déduire que p.s. $\lim_{n\to\infty} Y_n = 0$.

Autour de la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$

Dans les exercices qui suivent, $(X_n, n \geq 1)$ est une famille de variables aléatoires i.i.d. telle que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_1 = -1) = 1-p$, $0 < p < 1$. On pose $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ pour $n \geq 1$.

Exercice 0.19. 1. Pour $n \geq 1$, calculer $\mathbb{P}(S_n = 0)$.

2. Etudier $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(S_n = 0)$. Que peut-on en conclure ?
3. Si $p \neq 1/2$, retrouver cette conclusion en utilisant la LGN (loi des grands nombres).

Exercice 0.20. On suppose que $p = 1/2$, et on cherche à montrer que presque sûrement, on a $\limsup S_n = +\infty$ <u>et</u> $\liminf S_n = -\infty$.

1. Pour $K \geq 1$, on considère les événements
$$A_n = \{X_{nK+1} = \cdots = X_{(n+1)K} = +1\} \qquad n \geq 1\,.$$
   Montrer que pour tout K, $\mathbb{P}$-p.s. A_n est réalisé infiniment souvent.
2. En déduire que pour tout K, $\mathbb{P}\big(-K/2 < S_n < K/2 \text{ pour tout } n \geq 1\big) = 0$, puis que
$$\mathbb{P}\big(\{\limsup S_n = +\infty\} \cup \{\liminf S_n = -\infty\}\big) = 1\,.$$
3. Montrer que l'événement $\{\limsup S_n = +\infty\}$ appartient à la tribu queue $\mathcal{Q}_\infty$, et utiliser la loi du 0-1 de Kolmogorov pour conclure que $\mathbb{P}\big(\limsup S_n = +\infty\big) = 1$.

Exercice 0.21. On suppose de nouveau dans cette question que $p = 1/2$, et on pose $M_n = \max_{0\leq i\leq n}\{S_i\}$.

1. Soit $k \in \mathbb{Z}$, et $y \geq k$, $y \geq 1$. Montrer que $\mathbb{P}(S_n = k, M_n \geq y) = \mathbb{P}(S_n = 2y - k)$.
   Indication : on pourra introduire le temps $\tau = \inf\{i; S_i = y\}$, et utiliser un argument dit de réflexion (faire un dessin).
2. En déduire que $\mathbb{P}(M_n \geq y) = 2\mathbb{P}(S_n \geq y) - \mathbb{P}(S_n = y)$ pour tout $y \geq 1$.
3. On pose $M_\infty = \lim_{n\to\infty} M_n$. Montrer que pour tout $y \geq 1$, $\mathbb{P}(M_\infty \leq y) = 0$.
   On admettra qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\mathbb{P}(S_n = y) \leq C/\sqrt{n}$ pour tout $n, y \geq 1$ (pas si dur, mais calculatoire).
4. En déduire que $\mathbb{P}(M_\infty = +\infty) = 1$ (on a retrouvé le résultat de la question précédente).

Exercice 0.22. On prend $p = 1/2$ de nouveau. On note $T_0 = \inf\{n \geq 1; S_n = 0\}$, et $f_n = \mathbb{P}(T_0 = n)$, $u_n = \mathbb{P}(S_n = 0)$ ($u_0 = 1$).

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$
$$u_n = f_1 u_{n-1} + f_2 u_{n-2} + \cdots + f_n u_0 \,.$$
2. On considère les fonction génératrices $F(s) = \sum_{n\geq 1} f_n s^n$ et $U(s) = \sum_{n\geq 0} u_n s^n$ pour $s \in [0, 1[$. Montrer que $U(s) = 1 + U(s)F(s)$.
3. Calculer u_n pour tout n, puis calculer $U(s)$. En déduire $F(s)$, puis la valeur de f_n pour tout n.

Exercices supplémentaires

Exercice 0.23.
1. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On tire successivement sans remise n boules de l'urne ($1 \leq n \leq N$). Quel est l'ensemble Ω des résultats possibles ? Calculer card(Ω), le cardinal de Ω.
2. Désormais, on suppose que les résultats possibles sont équiprobables. Les boules numérotées de 1 à M sont rouges ($M < N$) et les boules numérotées de $M + 1$ à N sont blanches. On introduit les événements A_k, $1 \leq k \leq n$, définis par $A_k = \{$la k-ième boule tirée est rouge$\}$.
   (a) Calculer les $\mathbb{P}(A_k)$.
   (b) Calculer, pour $k \neq \ell$, les $\mathbb{P}(A_k \cap A_\ell)$.
3. On introduit les variables aléatoires Z_k, $1 \leq k \leq n$, définies par $Z_k = 1$ si la k-ième boule tirée est rouge, et $Z_k = 0$ sinon. On pose $S_n = Z_1 + \cdots + Z_n$. On note p le rapport M/N.
   (a) Calculer Var(S_n) en fonction de n et p.
   (b) Calculer la limite de Var(S_n), n fixé, quand M et N tendent vers l'infini de telle sorte que p tende vers un réel p_0, $0 < p_0 < 1$.

Exercice 0.24. Montrer qu'une suite de variables aléatoires (X_n, $n \geq 1$) converge en probabilité vers une variable aléatoire X si et seulement si
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big(\frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|}\Big) = 0 \,.$$

Exercice 0.25. 1. Soient $X_1, \cdots, X_n, \cdots$ des variables aléatoires réelles i.i.d. telles que $\mathbb{E}(X_1^4) < \infty$. On pose $Z_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$. Montrer que Z_n tend vers $\mathbb{E}(X_1)$ p.s. quand n tend vers l'infini (on demande en fait de démontrer dans un cas particulier la loi forte des grands nombres : cf. exercice 17 qui suit).

2. Établir que, pour toute fonction continue f de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 f\left(\frac{x_1 + x_2 \cdots + x_n}{n}\right) dx_1 \cdots dx_n = f(\frac{1}{2}) .$$

3. En déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) = f(p) \,, \quad p \in [0,1].$$

4. Établir que, pour toute fonction continue et bornée f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq 0} e^{-\lambda n} \frac{(\lambda n)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) = f(\lambda) \,, \quad \lambda \in]0, \infty[\,.$$

Exercice 0.26. Soit $(X_n,\, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. On suppose que $\mathbb{E}(|X_1|) < \infty$. On pose, pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
S_n &= X_1 + \cdots + X_n \,, \\
Y_n &= \max(S_1 - a, S_2 - 2a, \cdots, S_n - na) \,, \\
\overline{Y}_n &= \max(S_2 - S_1 - a, S_3 - S_1 - 2a, \cdots, S_{n+1} - S_1 - na) \,, \\
Y &= \sup(S_1 - a, S_2 - 2a, \cdots, S_n - na, \cdots) \,, \\
\overline{Y} &= \sup(S_2 - S_1 - a, S_3 - S_1 - 2a, \cdots, S_{n+1} - S_1 - na, \cdots) \,.
\end{aligned}$$

1. Montrer que les suites $(Y_n,\, n \geq 1)$ et $(\overline{Y}_n,\, n \geq 1)$ ont même loi, c'est-à-dire que pour tout $m \geq 1$, les vecteurs aléatoires $(Y_n,\, 1 \leq n \leq m)$ et $(\overline{Y}_n,\, 1 \leq n \leq m)$ ont même loi. En déduire que $\mathbb{P}(Y = \infty) = \mathbb{P}(\overline{Y} = \infty)$.
2. Déduire de la loi 0–1 de Kolmogorov que $\mathbb{P}(Y = \infty) = 0$ ou 1.
3. Prouver la relation $Y_{n+1} - \overline{Y}_n = \max(X_1 - a - \overline{Y}_n, X_1 - a)$.
4. En déduire que $\mathbb{E}(X_1) < a$ implique $Y < \infty$ p.s.
5. (Loi forte des grands nombres) Conclure que $\frac{S_n}{n} \to \mathbb{E}(X_1)$ p.s. quand $n \to \infty$.

Chapitre 1

Espérance conditionnelle

Sauf mention du contraire, toutes les variables aléatoires sont définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

Généralités et calculs

Exercice 1.1. (Questions de cours)
Soient A un événement et X une variable aléatoire réelle positive, resp. intégrable.

1. Soit $B \in \mathscr{F}$ tel que l'on ait $\mathbb{P}(B) > 0$ et $\mathbb{P}(B^c) > 0$. On introduit la sous-tribu $\mathscr{G}$ de $\mathscr{F}$ définie par $\mathscr{G} = \{\Omega, \varnothing, B, B^c\}$. Donner
   - les probabilités conditionnelles de A sachant B, de A sachant B^c.
   - la probabilité conditionnelle de A sachant $\mathscr{G}$.
   - l'espérance conditionnelle de X sachant B, de X sachant B^c.
   - l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathscr{G}$.
2. Soit $(B_1, B_2, \cdots, B_k, \cdots)$ une partition dénombrable (finie ou infinie) de Ω dans $\mathscr{F}$ telle que $\mathbb{P}(B_k) > 0$, $\forall k$. Soit $\mathscr{G} := \sigma(B_1, B_2, \cdots, B_k, \cdots)$. Donner
   - la probabilité conditionnelle de A sachant $\mathscr{G}$.
   - l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathscr{G}$.
3. Soit Y une variable aléatoire réelle discrète prenant les valeurs $y_1, y_2, \cdots, y_k, \cdots$ Donner
   - la probabilité conditionnelle de A sachant Y.
   - l'espérance conditionnelle de X sachant Y.

Exercice 1.2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une famille de variables aléatoires réelles indépendantes, de même loi et d'espérance $\mu = \mathbb{E}[X_1]$. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante de la famille $(X_n)_{n\geq 1}$. On pose $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ (si $N = 0$, on pose par convention $S = 0$).

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{E}[S \mid N = n]$. En déduire $\mathbb{E}[S \mid N]$ puis $\mathbb{E}[S]$.
2. Pour $r \in [0, 1]$, calculer $\mathbb{E}[r^S \mid N]$ en fonction de $\phi_{X_1}(r) = \mathbb{E}[r^{X_1}]$. En déduire la fonction génératrice de S en fonction de celle de X_1 et de celle de N.

Exercice 1.3. Le nombre de bus passant à l'arrêt Jussieu lors de la prochaine heure, que l'on note N, est une variable de Poisson de paramètre λ. Étant donné N, les temps de passage des bus (en heure) sont $T_1, T_2, \ldots, T_N$, qui sont N variables indépendantes, uniformément distribuées sur $[0,1]$. On note $T = \min\{T_1, \ldots, T_N\}$ le temps d'attente du prochain bus.

1. Calculer $\mathbb{P}(T > t \mid N = n)$ pour $t \in [0,1]$.
2. Montrer que $\mathbb{E}[T \mid N = n] = \frac{1}{n+1}$, et en déduire $\mathbb{E}[T \mid N]$.
3. En déduire $\mathbb{E}[T]$.

Exercice 1.4. Soient X_1 et X_2 des variables aléatoires indépendantes et binomiales de paramètres respectifs (n_1, p) et (n_2, p).

1. Déterminer $\mathbb{P}(X_1 = k \,|\, X_1 + X_2 = n)$.
2. Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X_1 \,|\, X_1 + X_2)$.
3. Mêmes questions en supposant que X_1 et X_2 sont des variables aléatoires indépendantes, de loi de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.

Exercice 1.5. Soient X et Y des variables aléatoires réelles, Z une variable aléatoire à valeurs dans un espace mesurable $(E, \mathscr{E})$ et $\mathscr{G}$ une sous-tribu de $\mathscr{F}$. Que peut-on dire, sous réserve d'hypothèses convenables, des espérances conditionnelles suivantes :

1. $\mathbb{E}(f(Z) \,|\, Z)$ avec $f : (E, \mathscr{E}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ mesurable ;
2. $\mathbb{E}(X \,|\, Z)$ avec X $\sigma(Z)$-mesurable, $\mathbb{E}(X \,|\, \mathscr{G})$ avec X $\mathscr{G}$-mesurable ;
3. $\mathbb{E}(XY \,|\, Z)$ avec X $\sigma(Z)$-mesurable, $\mathbb{E}(XY \,|\, \mathscr{G})$ avec X $\mathscr{G}$-mesurable ;
4. $\mathbb{E}(X \,|\, Z)$ quand X et Z sont indépendantes, $\mathbb{E}(X \,|\, \mathscr{G})$ quand X et $\mathscr{G}$ sont indépendantes ;
5. $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \,|\, Z))$, $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \,|\, \mathscr{G}))$.

Exercice 1.6. Soit X une variable aléatoire réelle de carré intégrable et soit $\mathscr{G}$ une sous-tribu de $\mathscr{F}$. Que peut-on dire de X si $(\mathbb{E}(X \,|\, \mathscr{G}))^2 = \mathbb{E}(X^2 \,|\, \mathscr{G})$ p.s. ?

Exercice 1.7. Soient X_1 et X_2 des variables indépendantes à valeurs dans des espaces mesurés E_1 et E_2 respectivement, de lois respectives ν_1 et ν_2. Soit $f : E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée (resp. positive).

1. Montrer que
$$\mathbb{E}[f(X_1, X_2) \,|\, X_1] = \int_{E_2} f(X_1, u) d\nu_2(u) \qquad \text{p.s.}$$
2. Soit Z une v.a. à valeurs dans $[0,1]$ et soit N une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction génératrice $\phi(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(N = n) x^n$. Montrer que $\mathbb{E}(Z^N | Z) = \phi(Z)$ p.s.
3. Soient X et U deux v.a. réelles indépendantes. Montrer que $\mathbb{E}(\mathbf{1}_{U \leq X} | X) = F(X)$ p.s. avec F fonction de répartition de U. Exprimer également la quantité $\mathbb{E}(\exp(2\mathbf{1}_{U \leq X}) | X)$ à partir de $F(X)$.

Exercice 1.8. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. Quelle est l'espérance conditionnelle de $(Y - X)^+$ sachant X ?

Exercice 1.9 (Partiel 2017)**.** Soient λ et μ sont deux réels strictement positifs, et soient X et Y deux v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}_+$ respectivement telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\mathbb{P}(X = n, Y \leq t) = \mu \int_0^t \frac{(\lambda y)^n}{n!} e^{-(\lambda+\mu)y} dy\,.$$

1. Quelle est la loi marginale de X ? Quelle est celle de Y ?
   On rappelle que pour tout $a > 0$ et $n \geq 1$, $\int_0^\infty a^{n+1} y^n e^{-ay} dy = n!\,.$
2. Calculer $\mathbb{E}\left[Y|X\right]$.
3. Calculer $\mathbb{E}\left[\frac{Y}{X+1}\right]$.
4. Calculer $\mathbb{P}\left(X = n|Y\right) = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{X=n}|Y\right]$ ainsi que $\mathbb{E}\left[X|Y\right]$.

Exercice 1.10. Soient X_1 et X_2 des variables aléatoires indépendantes, de lois exponentielles de même paramètre λ.

1. Calculer $\mathbb{E}[\max(X_1, X_2) \,|\, X_1]$.
2. Calculer $\mathbb{E}[\max(X_1, X_2)]$.
3. Calculer $\mathbb{E}[\max(X_1, X_2) \,|\, X_1 + X_2]$.
4. Calculer $\mathbb{E}[X_1 \,|\, \min(X_1, X_2)]$.

Exercice 1.11 (Partiel 2016)**.** Soit $\alpha > 0$. Soient B et U deux variables indépendantes telles que U est uniforme sur l'intervalle $]0, 1[$, et B est à valeurs positives et B^α est intégrable. On définit la variable C par

$$C = f(B, U) = 2U(B + U^2)^\alpha.$$

Justifier que C est intégrable et calculer $E(C|B)$.

Exercice 1.12. Soit X une variable aléatoire réelle intégrable. On suppose que la loi de X est symétrique (c'est-à-dire, X a la même loi que $-X$), et pose $Y = |X|$.

1. Montrer que $\mathbb{E}(X \,|\, Y) = \mathbb{E}(X)$ p.s.
2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 1.13. Soient X et Y des variables aléatoires réelles intégrables, et soit $\mathscr{G}$ une sous-tribu de $\mathscr{F}$. Montrer que si $X = Y$ p.s., alors $\mathbb{E}(X \,|\, \mathscr{G}) = \mathbb{E}(Y \,|\, \mathscr{G})$ p.s.

Exercice 1.14. Soient X et Y des variables aléatoires réelles intégrables, et soit $\mathscr{G}$ une sous-tribu de $\mathscr{F}$.

(i) Montrer que $\mathbb{E}(X \,|\, \mathscr{G}) \leq \mathbb{E}(Y \,|\, \mathscr{G})$ p.s., si et seulement si $\mathbb{E}(X\,\mathbf{1}_A) \leq \mathbb{E}(Y\,\mathbf{1}_A)$ pour tout $A \in \mathscr{G}$.

(ii) Montrer que $\mathbb{E}(X \,|\, \mathscr{G}) = \mathbb{E}(Y \,|\, \mathscr{G})$ p.s., si et seulement si $\mathbb{E}(X\,\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(Y\,\mathbf{1}_A)$ pour tout $A \in \mathscr{G}$.

Exercice 1.15. Soit X une variable aléatoire réelle intégrable. Soient Z et $\widetilde{Z}$ des variables aléatoires à valeurs dans $(E,\, \mathscr{E})$ et $(\widetilde{E},\, \widetilde{\mathscr{E}})$, respectivement. On suppose que $\mathbb{E}(X \,|\, Z,\, \widetilde{Z})$ est $\sigma(Z)$-mesurable. Montrer que $\mathbb{E}(X \,|\, Z,\, \widetilde{Z}) = \mathbb{E}(X \,|\, Z)$ p.s.

Variables gaussiennes

Exercice 1.16. Soient X_1, X_2, X_3 trois variables aléatoires réelles gaussiennes centrées réduites indépendantes. On pose $U = 2X_1 - X_2 - X_3$, $V = X_1 + X_2 + X_3$, $W = 3X_1 + X_2 - 4X_3$.

1. Quelles sont les lois de U, V et W ? Quels sont les couples indépendants parmi les couples (U, V), (U, W), (V, W) ?
2. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $W = aU + Z$ avec U et Z indépendantes. En déduire $\mathbb{E}(W \mid U)$, $\mathbb{E}(W^2 \mid U)$ et $\mathbb{E}(W^3 \mid U)$.

Exercice 1.17. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles gaussiennes centrées réduites indépendantes. On pose $Z = X + Y$, $W = X - Y$.

1. Montrer que Z et W sont indépendantes. Quelle est la loi de W ?
2. En déduire l'espérance conditionnelle de X sachant Z.
3. Calculer $\mathbb{E}(XY \mid Z)$ et $\mathbb{E}(XYZ \mid Z)$.

Exercice 1.18 (Partiel 2016)**.** Soient X et Y deux variables aléatoires normales centrées réduites $\mathcal{N}(0, 1)$ indépendantes. On pose $Z = X + 2Y$. Montrer qu'il existe un unique a tel que $X = aZ + W$ avec W indépendant de Z. En déduire l'expression de $E(X|Z)$ et $E(X^2|Z)$.

Exercice 1.19. Soit $Z = (X, Y)$ un vecteur aléatoire gaussien à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. On suppose que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0$, $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = 1$ et que $\mathrm{Cov}(X, Y) = \rho$ avec $|\rho| < 1$. On pose $U = X - \rho Y$, $V = \sqrt{1 - \rho^2} Y$.

1. Calculer $\mathbb{E}(X \mid Y)$.
2. Quelles sont les lois de U et V ? Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $\mathbb{E}(U^2V^2)$, $\mathbb{E}(UV^3)$, $\mathbb{E}(V^4)$. En déduire $\mathbb{E}(X^2Y^2)$.

Exercice 1.20. Soit (X_1, X_2) un couple de variables aléatoires admettant la densité de probabilité

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - \rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1 - \rho^2)} (x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2) \right) ,$$

où $\rho \in [0, 1[$.

1. Vérifier que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$ et trouver les densités marginales de X_1 et X_2. A quelle condition les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
2. On intoduit les coordonnées polaires (R, Φ) du couple (X_1, X_2) : $R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$ et $\Phi \in [0, 2\pi[$ est définie par
$$\cos \Phi = \frac{X_1}{R} \quad \text{et} \quad \sin \Phi = \frac{X_2}{R} \text{ si } R > 0, \;\; \Phi = 0 \text{ si } R = 0.$$
Déterminer la densité du couple (R, Φ), puis celle de Φ.
3. Déterminer la densité de R lorsque $\rho = 0$. Que peut-on dire des variables aléatoires R et Φ dans ce cas ?

Chapitre 2

Filtration, temps d'arrêt et martingales

On rappelle les notations

$$s \wedge t := \min\{s, t\}, \qquad s \vee t := \max\{s, t\}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Sauf mention du contraire, toutes les martingales sont définies sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega,\ \mathscr{F},\ (\mathscr{F}_n),\ \mathbb{P})$.

2.1 Filtrations, temps d'arrêt, martingales

Exercice 2.1. Soient $(\Omega,\ \mathscr{F},\ (\mathscr{F}_n),\ \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré, T et S deux temps d'arrêt, $\mathscr{F}_T$ et $\mathscr{F}_S$ les tribus respectives des événements antérieurs à T et S. Montrer que (cf. cours)

1. $S \wedge T$, $S \vee T$, $S + T$ sont des temps d'arrêt.
2. Si T est un temps d'arrêt constant ($T = p$ avec $p \in \mathbb{N}$), alors $\mathscr{F}_T = \mathscr{F}_p$,
3. Si $S \leq T$, $\mathscr{F}_S \subset \mathscr{F}_T$,
4. $\mathscr{F}_{S\wedge T} = \mathscr{F}_S \cap \mathscr{F}_T$,
5. $\{S < T\} \in \mathscr{F}_S \cap \mathscr{F}_T$, $\{S = T\} \in \mathscr{F}_S \cap \mathscr{F}_T$.

Exercice 2.2. On considère une suite $(X_n,\ n \geq 0)$ de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $[0,\ 1]$, indépendantes et de même loi uniforme sur $[0,\ 1]$. On pose, pour $n \geq 0$, $\mathscr{F}_n = \sigma(X_k, k \leq n)$. On introduit la variable aléatoire

$$T = \inf\{n \geq 1;\ X_n > X_0\},\ = \infty \text{ si } \varnothing.$$

1. Montrer que T est un temps d'arrêt de la filtration $\mathscr{F}_n$.
2. Déterminer la loi de T. Calculer son espérance.

Exercice 2.3 (Marche aléatoire et Martingales)**.** Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathbb{P}(X_1 = +1) = p$ et $\mathbb{P}(X_1 = -1) = 1 - p$, et soit la filtration $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. On note $\mu = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var} X_1$.

1. Montrer que $S_n - n\mu$ et $M_n := (S_n - n\mu)^2 - n\sigma^2$ sont des martingales relativement à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
2. Montrer que $\left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}$ est une martingale relativement à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
3. Soit $\psi(x) = pe^x + (1-p)e^{-x}$, et soit θ une solution de l'équation $\psi(\theta) = 1$. Montrer que $e^{\theta S_n}/\psi(\theta)^n$ est une martingale relativement à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 2.4. Soit $(\xi_n,\, n \geq 0)$, une suite de variables réelles, indépendantes, centrées et de carrés intégrables : $\mathbb{E}[\xi_n] = 0$ et $\sigma_n^2 = \mathbb{E}[\xi_n^2] < \infty$. On pose $S_n = \xi_0 + \cdots + \xi_n$.

1. Montrer que $(S_n)_{n\geq 0}$ est une martingale relativement à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
2. Montrer que $\tau = \inf\{n\,;\, |S_n| \geq x\}$ est un temps d'arrêt.
3. En utilisant τ, montrer l'inégalité de Kolmogorov :

$$\mathbb{P}\Big(\max_{0\leq i\leq n} |S_i| \; \geq x \Big) \leq x^{-2}\, \mathrm{Var}(S_n) \;,$$

   valable pour tout réel $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$. La quantité $\mathrm{Var}(S_n)$ est la variance de S_n, que l'on calculera en fonction de $(\sigma_i^2,\, i \geq 0)$.

Exercice 2.5. Soit $(\xi_n,\, n \geq 0)$, une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, intégrables telles que $\mathbb{E}[\xi_n] = 0$, pour tout $n \geq 0$. On fixe $p \geq 1$, on pose $X_0^{(p)} = X_1^{(p)} = \cdots = X_{p-1}^{(p)} = 0$ et pour tout $n \geq p$, on pose

$$X_n^{(p)} = \sum_{1\leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n} \xi_{i_1}\xi_{i_2}\cdots\xi_{i_p} \;.$$

Montrer que $(X_n^{(p)},\, n \geq 0)$ est une martingale relativement à la filtration $(\mathscr{F}_n)$, donnée par $\mathscr{F}_n = \sigma(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ si $n \geq 1$ et $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$.

Exercice 2.6. Soient $(X_n,\, n \geq 0)$ et $(Y_n,\, n \geq 0)$ deux sous-martingales. Montrer que $(X_n \vee Y_n,\, n \geq 0)$ est également une sous-martingale.

Exercice 2.7. Trouver une sous-martingale dont le carré n'est pas une surmartingale (*Indication : faire très simple*).

Exercice 2.8. On considère l'espace de probabilité filtré $(\Omega,\, \mathscr{F},\, (\mathscr{F}_n),\, \mathbb{P})$ où $\Omega = \mathbb{N}^* := \{1,\, 2,\, \cdots\}$, $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\mathbb{N}^*)$ (la tribu de toutes les parties — y compris $\varnothing$ et $\mathbb{N}^*$ — de $\mathbb{N}^*$), $\mathbb{P}(\{n\}) = 1/n - 1/(n+1)$, $\mathscr{F}_n = \sigma\big(\{1\}, \cdots, \{n\}, [n+1, \infty[\big)$. On considère la suite de variables aléatoires réelles $X_n = (n+1)\, \mathbf{1}_{[n+1,\infty[}$.

1. Montrer que, pour la filtration $(\mathscr{F}_n)$, (X_n) est une martingale positive. Vérifier que $X_n \to 0$ p.s. X_n converge-t-elle dans L^1 ?
2. Quelle est la valeur de $\sup_{n\geq 0} X_n(k),\; k \in \mathbb{N}^*$? En déduire $\mathbb{E}\big(\sup_{n\geq 0} X_n\big)$.

Exercice 2.9. Soient $(\xi_n,\, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi $\mathscr{N}(0,\,1)$ et $(\alpha_n,\, n \geq 1)$ une suite de réels. On pose $X_0 := 1$ et $\mathscr{F}_0 := \{\varnothing,\, \Omega\}$, et pour $n \geq 1$,

$$\mathscr{F}_n = \sigma(\xi_1,\, \cdots,\, \xi_n)\,, \qquad X_n = \exp\Big(\sum_{k=1}^n \alpha_k \xi_k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \alpha_k^2\Big)\,.$$

1. Montrer que (X_n) est une $(\mathscr{F}_n)$-martingale et que X_n converge p.s.
2. On suppose que $\sum_{k=1}^\infty \alpha_k^2 = \infty$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} X_n = 0$ p.s. La martingale (X_n) est-elle fermée ?

Exercice 2.10. Soient (X_n) et (Y_n) deux martingales de carré intégrable.

1. Montrer que, pour $n \geq m$, $\mathbb{E}(X_m Y_n \,|\, \mathscr{F}_m) = X_m Y_m$ p.s. et donc en particulier que $\mathbb{E}(X_m X_n \,|\, \mathscr{F}_m) = X_m X_m$ p.s.
2. Montrer que, pour $m < n \leq p < q$, $\mathrm{Cov}(X_n - X_m, Y_q - Y_p) = 0$.
3. Montrer que
$$\mathbb{E}((X_n - X_0)^2) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}((X_k - X_{k-1})^2).$$

Exercice 2.11.

1. *Décomposition de Doob.* Soit (X_n) une sous-martingale. Démontrer que X_n s'écrit de manière unique sous la forme
$$X_n = M_n + A_n$$
où M_n est une martingale et A_n un processus croissant prévisible, i.e. $0 = A_0 \leq A_1 \leq \cdots A_n \leq \cdots$ et, pour $n \geq 1$, A_n est $\mathscr{F}_{n-1}$-mesurable. (Indication : introduire les différences $X_k - \mathbb{E}[X_k|\mathscr{F}_{n-1}]$.)
On appelle cette décomposition *décomposition de Doob*.
2. *Exemple 1.* Soit Y_1, Y_2, $\cdots$, Y_n, $\cdots$ des variables aléatoires réelles i.i.d., définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. On suppose que $\mathbb{E}(Y_1) = 0$ et que $\mathbb{E}(Y_1^2) < \infty$. On pose $X_0 = 0$, $\mathscr{F}_0 = \{\Omega, \varnothing\}$ et, pour $n \geq 1$, $X_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, $\mathscr{F}_n = \sigma(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$.
   (a) Montrer que (X_n) est une martingale de carré intégrable et déterminer la décomposition de Doob de la sous-martingale (X_n^2) (on posera $\sigma^2 = \mathbb{E}(Y_1^2)$).
   (b) Soit T un temps d'arrêt (pour la filtration $\mathscr{F}_n$) intégrable. Montrer que $\sup_n \mathbb{E}(X_{T\wedge n}^2) < \infty$. En déduire que $\mathbb{E}(X_T^2) = \mathbb{E}(T)\sigma^2$.
3. *Exemple 2.* On garde les hypothèses et notations précédentes. On suppose en particulier que les variables aléatoires Y_n ont pour loi commune : $\mathbb{P}(Y_n = -1) = \mathbb{P}(Y_n = 1) = 1/2$.
On pose
$$M_0 = 0 \text{ et, pour } n \geq 1,\ M_n = \sum_{k=1}^n \mathrm{sgn}(X_{k-1}) Y_k$$
où $\mathrm{sgn}(x) = 1$ si $x > 0$, $= -1$ si $x < 0$, $= 0$ si $x = 0$.

(a) Montrer que (M_n) est une martingale de carré intégrable et déterminer la décomposition de Doob de la sous-martingale (M_n^2) ?

(b) Quelle est la décomposition de Doob de la sous-martingale $(|X_n|,\, n \geq 0)$?

(c) Montrer que pour tout $n \geq 1$, M_n est $\sigma(|X_1|, \cdots, |X_n|)$-mesurable.

Exercice 2.12. On considère l'évolution du capital d'une assurance au cours du temps. Soit $S_0 = x > 0$, le capital initial, $c > 0$ le montant des revenus des cotisations par an et $X_n \geq 0$ le coût des dommages pour l'année n. Le capital à la fin de l'année n est donc $S_n = x + nc - \sum_{k=1}^n X_k$. L'assurance est dite ruinée si son capital devient négatif, i.e., si $\tau = \inf\{k \geq 0; S_k < 0\}$ est fini.

On suppose $(X_k,\, k \geq 1)$ i.i.d. positives avec $\mathbb{E}(e^{\lambda X_k}) < \infty$, $\forall\, \lambda > 0$. Le but ici est de majorer la probabilité de ruine $\mathbb{P}(\tau < \infty)$. On pose $\mathscr{F}_n := \sigma(X_1, \cdots, X_n)$.

1. Vérifier que $\mathbb{E}(X_1) > c$ implique $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$.
2. On suppose dorénavant que $\mathbb{E}(X_1) < c$ et $\mathbb{P}(X_1 > c) > 0$. Soit $\varphi(\lambda) := \mathbb{E}(e^{\lambda(X_1 - c)})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\varphi'' > 0$, $\varphi'(0) < 0$ et
$$\lim_{\lambda \to \infty} \varphi(\lambda) = \infty.$$
Dessiner le graphe de φ et montrer qu'il existe un et un seul $\lambda_0 > 0$ tel que $\mathbb{E}(e^{\lambda_0 X_1}) = e^{\lambda_0 c}$.
3. Montrer que $V_n = \exp(-\lambda_0 S_n + \lambda_0 x)$ est une martingale positive.
4. Pour $N \geq 1$ montrer que
$$\mathbb{E}(V_N\, \mathbf{1}_{\{\tau \leq N\}}) = \sum_{k=1}^N \mathbb{E}(V_k\, \mathbf{1}_{\{\tau = k\}}) \geq e^{\lambda_0 x}\, \mathbb{P}(\tau \leq N).$$
5. En déduire que $\mathbb{P}(\tau < \infty) \leq e^{-\lambda_0 x}$.

Exercice 2.13 (Examen 2016)**.** Soit $(\xi_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et iden- tiquement distribuées. On suppose qu'il existe un réel $t > 0$ tel que $\mathbb{E}[e^{t\xi_1}] = 1$. Soit $x > 0$ un réel. Montrer que
$$\mathbb{P}\big(\exists\, n \geq 0 \text{ tel que } \xi_1 + \cdots + \xi_n \geq x\big) \leq e^{-tx}\,.$$

Indication : utiliser le temps d'arrêt $\tau = \inf\{n; \xi_1 + \cdots + \xi_n \geq x\}$, et une martingale adaptée.

Théorèmes d'arrêt

Exercice 2.14. (Partiel 2016) Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathbb{P}(X_1 = +1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$, et soit la filtration $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. On fixe un entier $N \geq 1$, et pour $x \in \{0, \ldots, N\}$, on considère la marche aléatoire issue de x : $S_0 = x$ et pour $n \geq 1$ $S_n = x + \sum_{k=1}^n X_i$.

1. Montrer que S_n et $M_n := S_n^2 - n$ sont des martingales relativement à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
2. On considère le temps $T := \inf\{n\,;\, S_n = 0 \text{ ou } S_n = N\}$. Montrer que T est un temps d'arrêt.
3. Pour $m \geq 0$, on introduit l'événement $A_m = \{X_{mN+1} = \cdots = X_{(m+1)N} = +1\}$. Montrer que pour $q \geq 1$, $\{T > qN\} \subset \bigcap_{m=0}^{q-1} A_m^c$, et en déduire une majoration de $\mathbb{P}(T > qN)$. Montrer que $\mathbb{E}[T] = \sum_{j\geq 0} \mathbb{P}(T > j) < +\infty$ et que $T < +\infty$ p.s.
4. Calculer $\mathbb{E}[S_T]$ et en déduire que $\mathbb{P}(S_T = 0) = 1 - x/N$.
5. Calculer $\mathbb{E}[M_T]$ et en déduire $\mathbb{E}[T]$.

Exercice 2.15. (Un jeu de cartes à un seul joueur). On prend un jeu de 52 cartes, on les retourne une à une ; le joueur peut, une et une seule fois au cours du jeu, dire *"rouge la prochaine !"*, il gagne si la carte suivante est rouge, sinon il perd. On se demande quelles sont les stratégies de jeu qui optimisent la probabilité de victoire.

1. Soit R_n (pour $0 \leq n \leq 51$) le nombre de cartes rouges encore dans le jeu après avoir retourné n cartes. Soit A_n l'événement $\{$la n-ième carte retournée est rouge$\}$. Calculer $\mathbb{P}(A_{n+1} \,|\, R_n = j)$, pour $j \in \{0, \cdots, 26\}$, $n \in \{0, \cdots, 50\}$.
2. Calculer $\mathbb{P}(R_{n+1} = j \,|\, R_n) = \mathbb{P}(R_{n+1} = j \,|\, \mathscr{F}_n)$, où $\mathscr{F}_n := \sigma(R_0, \cdots, R_n)$, $n \in \{0, \cdots, 50\}$, $j \in \{0, \cdots, 26\}$. Montrer que
$$\mathbb{E}(R_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n) = R_n - \frac{R_n}{52 - n}, \qquad n = 0, \cdots, 50.$$
Montrer que $X_n := R_n/(52-n)$, $n = 0, \cdots, 50$, est une martingale par rapport à la filtration $(\mathscr{F}_n)$ et que $X_n = \mathbb{P}(A_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n)$.
3. On définit $\tau = n \in \{0, \cdots, 51\}$ si le joueur dit *"rouge la prochaine !"* avant de retourner la $(n+1)$-ième carte. Montrer que τ est un temps d'arrêt et que la probabilité de victoire est $\mathbb{E}(X_\tau)$. Montrer que, pour toute stratégie, la probabilité p de victoire dans ce jeu est toujours la même et calculer p.

Exercice 2.16. Soit $(\xi_n,\, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telle que $\mathbb{P}(\xi_1 = 1) = \mathbb{P}(\xi_1 = -1) = 1/2$. La variable aléatoire ξ_n s'interprète comme un pari qui est gagné si $\xi_n = 1$ et qui est perdu si $\xi_n = -1$. A l'étape n du jeu, un joueur mise une certaine somme $S_n > 0$, il remporte $2S_n$ (en faisant ainsi un gain de S_n) si $\xi_n = 1$ (il gagne le pari) et perd sa mise si $\xi_n = -1$ (il perd le pari). On pose $X_0 = S_0 = 0$ et $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ et pour tout $n \geq 1$, on pose
$$X_n = S_1\xi_1 + \cdots + S_n\xi_n \quad \text{et} \quad \mathscr{F}_n = \sigma(\xi_1, \cdots, \xi_n)\ .$$
La variable aléatoire X_n représente le gain algébrique du joueur après la n-ième partie. Comme le joueur ne devine pas l'avenir, S_n ne dépend que de $(\xi_1, \cdots, \xi_{n-1})$, c'est-à-dire que $(S_n,\, n \geq 1)$ est $(\mathscr{F}_n)$-prévisible. On suppose que pour tout $n \geq 1$, S_n est intégrable.

1. Montrer que $(X_n,\, n \geq 0)$ est une $(\mathscr{F}_n)$-martingale.

2. Le joueur adopte la stratégie suivante : à chaque pari qu'il perd, le joueur double la mise pour le pari suivant. Il arrête de jouer lorsqu'il gagne au moins une fois. On suppose qu'il part d'une mise initiale de deux euros. On a alors $S_n = 2^n$. On note T la première fois où le joueur gagne.
$$T = \inf\{n \geq 1 \,:\, \xi_n = 1\}.$$
Montrer que $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$. Calculer le gain moyen du joueur, c'est-à-dire $\mathbb{E}[X_T]$. Si cela vous semble merveilleux, calculez $\mathbb{E}[X_{T-1}]$ qui est la perte moyenne du joueur juste avant qu'il ne gagne. Que pensez-vous de cette stratégie ?
3. On suppose que le joueur ne dispose que d'une réserve d'argent égale à 2^{n_0} euros (avec $n_0 \geq 2$) et que les mises doivent être payées comptant, ce qui force le joueur à quitter le jeu (éventuellemment avec des dettes) lorsqu'il n'a plus d'argent. Il choisit prudemment de s'arrêter la première fois qu'il gagne. Quelle est la probabilité qu'il termine le jeu avec des dettes ? Si on ne joue qu'une fois à ce jeu dans sa vie, faut-il jouer ? Quelle est le gain (algébrique) moyen ?

Exercice 2.17 (Partiel 2017)**.** Soit (Z_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. avec $\mathbb{P}(Z_n = 1) = \mathbb{P}(Z_n = -1) = 1/2$. Soit $S_0 = 0$ et $S_n = Z_1 + \cdots Z_n$ pour $n \geq 1$. On définit $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \cdots, Z_n)$ pour $n \geq 1$.

Soit $a \in \mathbb{N}^*$ et λ tel que $0 < \lambda < \frac{\pi}{2a}$. Enfin, on définit $\tau = \inf\{k \in \mathbb{N} \,:\, |S_k| = a\}$ le temps de sortie de l'intervalle $]-a, a[$.

1. Monter que τ est un temps d'arrêt.
2. Montrer que $X_n = (\cos(\lambda))^{-n} \cos(\lambda S_n)$ est une martingale.
3. Montrer que $\mathbb{E}(X_{n\wedge\tau}) \geq \cos(\lambda a)\mathbb{E}(\cos(\lambda)^{-n\wedge\tau})$.
4. Monter que $\mathbb{E}(\cos(\lambda)^{-\tau}) \leq (\cos(\lambda a))^{-1}$ et que $\tau < \infty$ p.s..
5. Montrer que la martingale $(X_{n\wedge\tau})$ est fermée.
6. Que vaut $\mathbb{E}(\cos(\lambda)^{-\tau})$? Est-il vrai que τ appartienne à L^p pour tout $p \geq 1$?

Convergence de martingales

Exercice 2.18. Soient Y_1, Y_2, $\cdots$ des variables aléatoires i.i.d. telles que
$$\mathbb{P}(Y_1 = -1) = q, \qquad \mathbb{P}(Y_1 = 1) = p, \qquad \text{avec } p + q = 1,\ 0 < p < q < 1.$$
On pose $X_0 = 0$, $Z_0 = 1$, et pour $n \geq 1$, $X_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, $Z_n = \left(\dfrac{q}{p}\right)^{X_n}$.

1. Montrer que (Z_n) est une martingale positive. Montrer que $Z_n \to 0$ p.s.
2. On pose, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $T_k = \inf\{n \geq 0 \,;\, X_n \geq k\}$. En considérant la martingale $(Z_{T_k\wedge n})$ et la décomposition
$$Z_{T_k\wedge n} = Z_{T_k\wedge n}\mathbf{1}_{\{T_k<\infty\}} + Z_{T_k\wedge n}\mathbf{1}_{\{T_k=\infty\}}\,,$$
montrer que
$$\mathbb{P}(T_k < \infty) = \left(\frac{p}{q}\right)^k.$$

3. En déduire que $\sup_{n\geq 0} X_n$ suit une loi géométrique de paramètre $1 - p/q$, et ainsi que
$$\mathbb{E}(\sup_{n\geq 0} X_n) = \frac{p}{q-p}.$$

Exercice 2.19. Soient Y_1, Y_2, $\cdots$ des variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbb{P}(Y_1 = 1) = p$, $\mathbb{P}(Y_1 = -1) = q = 1 - p$, avec $0 < p < 1$. On pose
$$S_0 = 0\,, \quad S_n = Y_1 + \cdots + Y_n\,, \quad n \geq 1\,, \quad \mathscr{F}_n = \sigma(S_0, \cdots, S_n)$$
et, pour tout θ réel ,
$$\phi(\theta) = \mathbb{E}(e^{\theta Y_1})\,, \quad X_n = \frac{e^{\theta S_n}}{\phi(\theta)^n}.$$

1. Donner le tableau de variation de la fonction $\theta \mapsto \phi(\theta)$.
2. Montrer que (X_n) est une martingale et que, dans le cas où $\theta \neq 0$, X_n converge p.s. vers 0.
3. Soit $T = \inf\{n > 0;\, S_n = 1\}$. Montrer que, pour $\theta > \max(0, \ln(q/p))$, $\mathbb{E}\big(\phi(\theta)^{-T}\,\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}\big) = e^{-\theta}$, en déduire que $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ si $p \geq q$, $\mathbb{P}(T < \infty) = p/q$ si $p < q$, et
$$\mathbb{E}\big(s^T\,\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}\big) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4pqs^2}}{2qs} \quad (0 \leq s \leq 1).$$

Exercice 2.20. Soit $(\sigma_n,\, n \geq 1)$ une suite i.i.d. telle que $\mathbb{P}(\sigma_n = 1) = \mathbb{P}(\sigma_n = -1) = \frac{1}{2}$. Introduire une martingale opportune pour montrer la convergence p.s. de la série
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n}{n}.$$

Exercice 2.21. On considère un jeu de hasard entre un joueur et le croupier d'un casino. Le capital total en jeu est 1 : après la n-ième partie le capital du joueur est $X_n \in [0,1]$ et le capital du croupier est $1 - X_n$. Au début le capital du joueur est une constante $X_0 = p \in]0,1[$ et le capital du croupier est $1 - p$.

La règle du jeu est que, après les n premières parties, la probabilité pour le joueur de gagner l'$(n+1)$-ième partie est X_n, et la probabilité de perdre est $1 - X_n$; si le joueur gagne, il obtient la moitié du capital du croupier ; s'il perd, il cède la moitié de son capital au croupier.

Ce qui se traduit en formule : pour toute $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ borélienne bornée,
$$\mathbb{E}\left(f(X_{n+1})\,|\,\mathscr{F}_n\right) \;=\; X_n \cdot f\left(X_n + \frac{1 - X_n}{2}\right) + (1 - X_n)\cdot f\left(\frac{X_n}{2}\right), \qquad (*)$$
où $(\mathscr{F}_n)$ est la filtration naturelle de (X_n).

1. Prouver que (X_n) est une martingale.
2. Prouver que X_n converge p.s. et dans L^2 vers une variable Z.
3. Prouver que $\mathbb{E}(X_{n+1}^2) = \mathbb{E}(3X_n^2 + X_n)/4$. En déduire que $\mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{E}(Z) = p$.

4. Prouver que toute variable aléatoire W, telle que $0 \leq W \leq 1$ et $\mathbb{E}(W(1-W)) = 0$, est une variable aléatoire de Bernoulli. En déduire la loi de Z.
5. Pour tout $n \geq 0$, soit $Y_n := 2X_{n+1} - X_n$. Montrer, à l'aide de la formule $(*)$, que
$$\mathbb{P}(Y_n = 0 \,|\, \mathscr{F}_n) = 1 - X_n, \qquad \mathbb{P}(Y_n = 1 \,|\, \mathscr{F}_n) = X_n,$$
et en déduire la loi de Y_n.
6. Considérer les événements $G_n := \{Y_n = 1\}$, $P_n := \{Y_n = 0\}$. Prouver que $Y_n \to_n Z$ p.s. et en déduire que
$$\mathbb{P}\left(\liminf_{n\to\infty} G_n\right) = p, \qquad \mathbb{P}\left(\liminf_{n\to\infty} P_n\right) = 1 - p.$$
Les variables aléatoires Y_n, $n \geq 0$, sont-elles indépendantes ?
7. Quelle est l'interprétation des résultats des points 4, 5 et 6 en termes de victoire/perte du joueur ?

Exercice 2.22. On a une population de taille fixée $N \in \mathbb{N}^*$ qui se renouvelle entièrement à chaque génération et dont chaque individu est de type a ou A. Chaque individu de la génération $n+1$ choisit son (seul) parent de la génération n de façon uniforme et indépendante des autres individus et hérite le type du parent.

On note X_n le nombre d'individus de type a dans la génération n et $\mathscr{F}_n := \sigma(X_0, \cdots, X_n)$. On a alors $\mathbb{P}(X_{n+1} = i \,|\, \mathscr{F}_n) = C_N^i \,(\frac{X_n}{N})^i (1 - \frac{X_n}{N})^{N-i}$, pour tout $i \in \{0, \cdots, N\}$. On suppose que p.s. $X_0 = k \in \{0, \cdots, N\}$.

1. Montrer que $(X_n,\, n \geq 0)$ est une martingale et discuter la convergence de X_n vers une variable X_∞ quand $n \to \infty$.
2. Montrer que $M_n := \left(\frac{N}{N-1}\right)^n X_n(N - X_n)$ est une martingale.
3. Calculer $\mathbb{E}(X_\infty)$ et $\mathbb{E}(X_\infty(N - X_\infty))$.
4. Calculer la loi de X_∞ et commenter.

Exercice 2.23 (Urne de Polya à deux couleurs)**.** On considère qu'une urne contient, à l'instant 0, b boules blanches et a boules rouges. On suppose que l'on dispose, à côté, d'un stock illimité de boules blanches et de boules rouges. A l'étape 1, on tire une boule au hasard dans l'urne : si elle est blanche, on remet cette boule en y ajoutant une boule blanche prise dans le stock ; si la boule tirée est rouge, on la remet et on y ajoute une boule rouge prise dans le stock. On fait de même à l'étape 2, 3 ... etc, en supposant qu'à chaque étape les tirages sont uniformes et indépendants. On note B_n le nombre de boules blanches à l'instant n, d'où il y a au total $a + b + n$ boules dans l'urne. La proportion de boules blanches à l'instant n est notée $X_n = B_n/(a + b + n)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{F}_n = \sigma(B_0, \cdots, B_n)$.

1. Montrer que $(X_n,\, n \geq 0)$ est une $(\mathscr{F}_n)$-martingale positive avec $|X_n| \leq 1$, $\forall n \geq 0$. En déduire que la limite $\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty$ a lieu presque sûrement et dans L^p, pour tout $p \in [1, \infty[$.
2. Montrer que la limite X_∞ vérifie $\mathbb{P}(X_\infty = 0) < 1$ et $\mathbb{P}(X_\infty = 1) < 1$. Qu'est-ce-que cela signifie sur la coloration de l'urne au cours du temps et asymptotiquement ?

3. On fixe $k \in \mathbb{N}$, et pose, pour tout $n \geq 0$,

$$Y_n^{(k)} = \frac{B_n(B_n+1)\cdots(B_n+k-1)}{(a+b+n)(a+b+n+1)\cdots(a+b+n+k-1)}\,.$$

   Montrer que $(Y_n^{(k)},\, n \geq 0)$ est une $(\mathscr{F}_n)$-martingale positive, avec $|Y_n^{(k)}| \leq 1$, $\forall n$. En déduire qu'elle converge p.s. et dans L^1 vers une limite notée $Y_\infty^{(k)}$. Calculer $\mathbb{E}[Y_\infty^{(k)}]$ en fonction de b et de a.
4. Montrer que $Y_\infty^{(k)} = (X_\infty)^k$ p.s. En déduire $\mathbb{E}[(X_\infty)^k]$ explicitement en fonction de b et de a.
5. Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $[0,1]$ dont la loi admet la densité $f(x) = C_{a,b}(1-x)^{a-1}x^{b-1}$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Trouver la constante $C_{a,b}$. Montrer que $\mathbb{E}[Z^k] = \mathbb{E}[(X_\infty)^k]$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire que Z et X_∞ ont la même loi, autrement dit que X_∞ suit la loi bêta de paramètres a et b.

Exercice 2.24. Soit $(U_n,\, n \geq 0)$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telle que $\mathbb{P}(U_n = 1) = p$, $\mathbb{P}(U_n = 0) = q = 1-p$, $0 < p < 1$. On pose

$$T = \inf\{n \geq 0\ ;\ U_n = 1\}, \quad T = \infty \text{ si } U_n = 0 \text{ pour tout } n \geq 0.$$

Pour $n \geq 0$ on pose $X_n = \dfrac{1}{q^n}\mathbf{1}_{\{T>n\}}$.

1. Montrer que (X_n) est une martingale (on précisera la filtration $(\mathscr{F}_n)$).
2. Montrer que X_n converge p.s. vers 0.
3. A-t-on $\sup_n \mathbb{E}(|X_n|) < \infty$? A-t-on $\sup_n \mathbb{E}(X_n^2) < \infty$?
4. La martingale (X_n) est-elle fermée ?
5. La suite $Y_n = \sqrt{X_n}$ est-elle uniformément intégrable ?

Exercice 2.25. Soit X une variable aléatoire réelle de loi $\mathscr{N}(0,\sigma^2)$, avec $\sigma^2 \in\,]0,\infty[$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit η_k une variable aléatoire de loi $\mathscr{N}(0,\varepsilon_k^2)$, avec $\varepsilon_k > 0$. On suppose que $X, \eta_0, \eta_1, \cdots$ sont indépendantes. On définit $Y_k = X + \eta_k$, $k \in \mathbb{N}$ et $\mathscr{F}_n = \sigma(Y_0,\cdots,Y_n)$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{F}_\infty = \sigma(Y_n, n \geq 0)$.

Nous essayons de mesurer une quantité aléatoire X avec une suite indépendante d'expériences. L'expérience k donne comme résultat $Y_k = X + \eta_k$, où η_k est une erreur qui dépend de la précision des instruments. Après n expériences, la meilleure prévision possible sur X est

$$X_n := \mathbb{E}(X \,|\, \mathscr{F}_n) = \mathbb{E}(X \,|\, Y_0,\cdots,Y_n).$$

On se demande s'il est possible d'obtenir la valeur de X quand n tend vers l'infini, et notamment si X_n converge vers X.

1. Montrer que (X_n) est une martingale et que X_n converge p.s. et dans L^1 vers une variable aléatoire X_∞. Quelle est la relation entre X et X_∞ ?
2. Montrer que $\sup_n \mathbb{E}(X_n^2) < \infty$. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :
   a) $X_n \to X$ dans L^2 ; b) $X_n \to X$ dans L^1 ; c) X est $\mathscr{F}_\infty$-mesurable.

3. Calculer $\mathbb{E}(Y_iY_j)$, $\mathbb{E}(Y_i^2)$ et $\mathbb{E}(XY_i)$ pour $i, j \geq 0$, $i \neq j$. Montrer que pour tous $n \geq 0$ et $i = 0, \cdots, n$, on a $\mathbb{E}(Z_nY_i) = 0$, où
$$Z_n := X - \frac{\sigma^2}{1 + \sigma^2 \sum_{k=0}^n \varepsilon_k^{-2}} \sum_{j=0}^n \varepsilon_j^{-2} Y_j.$$
4. Montrer que pour tout $n \geq 0$ la variable aléatoire Z_n est indépendante de $\{Y_0, \cdots, Y_n\}$ et en déduire que $X_n = X - Z_n$.
5. Calculer $\mathbb{E}((X-X_n)^2)$ et montrer que $X_n \to X$ dans L^2 si et seulement si $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^n \varepsilon_i^{-2} = \infty$.
6. Discuter le cas $\varepsilon_i = \varepsilon > 0$ pour tout $i \geq 0$, notamment les liens avec la loi des grands nombres.

Exercice 2.26. Soit $(Y_n,\, n \geq 0)$ une suite de variables aléatoires réelles positives définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ indépendantes et de même espérance 1. On pose, pour $n \geq 0$, $\mathscr{F}_n = \sigma(Y_0, \cdots, Y_n)$ et $X_n = Y_0 \cdots Y_n$.

1. Montrer que X_n, resp. $\sqrt{X_n}$, est une $(\mathscr{F}_n)$-martingale, resp. surmartingale.
2. Montrer que le produit infini $\prod_{k=0}^\infty \mathbb{E}(\sqrt{Y_k})$ converge dans $\mathbb{R}_+$. On note ℓ sa limite.
3. On suppose que $\ell = 0$. Montrer que $\sqrt{X_n} \to 0$ p.s. La martingale (X_n) est-elle fermée ?
4. On suppose $\ell > 0$. Montrer que $\sqrt{X_n}$ est une suite de Cauchy dans L^2. En déduire que (X_n) est fermée.
5. Application
Soient p et q deux probabilités distinctes sur un ensemble dénombrable E et (Z_n) une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans E et de même loi q. On suppose que, pour tout $x \in E$, $q(x) > 0$ (notations : $p(x) := p(\{x\})$ et $q(x) := q(\{x\})$, $x \in E$). On pose
$$X_n = \frac{p(Z_0)}{q(Z_0)} \cdots \frac{p(Z_n)}{q(Z_n)}.$$
À partir de ce qui précède, montrer que $X_n \to 0$ p.s.

Exercice 2.27. On sait (cf. cours) que, pour une martingale (X_n), $\mathbb{E}[(\sup_{n\geq 0} |X_n|)^2] \leq 4 \sup_{n\geq 0} \mathbb{E}(X_n^2)$: ainsi, si $\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}(X_n^2) < \infty$, alors, $\sup_{n\geq 0} |X_n| \in L^2$.

Dans cet exercice on se propose de prouver que, si $\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}[|X_n| \ln^+(|X_n|)] < \infty$, alors $\sup_n |X_n| \in L^1$. [Notation : $\ln^+ x := \ln \max\{x, 1\}$.]

Soit (X_n) une martingale.

1. Montrer que, pour $u \geq 1$, $\dfrac{1}{u} \ln u \leq \dfrac{1}{e}$. En déduire que pour tous réels $0 < x \leq y$, on a $x \ln y \leq x \ln x + \frac{y}{e}$, puis $x \ln y \leq x \ln^+ x + \frac{y}{e}$, et enfin $x \ln^+ y \leq x \ln^+ x + \frac{y}{e}$.
2. Rappelons la version suivante de l'inégalité maximale : si (M_n) est une sous-martingale, alors $\lambda\, \mathbb{P}(\max_{0\leq k\leq n} M_k \geq \lambda) \leq \mathbb{E}(M_n \mathbf{1}_{\{\max_{0\leq k\leq n} M_k \geq \lambda\}})$ pour tout entier $n \geq 0$ et tout réel $\lambda \geq 0$.
À partir de l'inégalité maximale appliquée à la sous-martingale $(|X_n|)$, montrer que
$$\int_1^\infty \mathbb{P}\big(\max_{0\leq k\leq n} |X_k| \geq a\big) da \leq \int_\Omega |X_n| \ln^+ \big(\max_{0\leq k\leq n} |X_k|\big) d\mathbb{P}.$$

3. Conclure que

$$\mathbb{E}\big(\sup_{n\geq 0}|X_n|\big) \leq \frac{e}{e-1}\big(1+\sup_{n\geq 0}\mathbb{E}(|X_n|\ln^+|X_n|)\big).$$

Exercice 2.28 (Pour aller plus loin). Le but de cet exercice atypique est de traiter de manière probabiliste par la théorie des martingales deux questions d'analyse. Pour cela, nous allons construire un espace de probabilité filtré explicite. Soit $\Omega = [0,1[$ et $\mathcal{F}$ la tribu borélienne sur Ω. Soit $\mathbb{P}$ la mesure de Lebesgue sur Ω. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq 2^n - 1[$, soit $B_{n,k} = [k/2^n, (k+1)/2^n[$. Soit $\mathcal{F}_n$ la sous-tribu de $\mathcal{F}$ engendrée par la partition $(B_{n,k})_{0\leq k<2^n}$. Nous rappelons que la tribu engendrée par toutes les $\mathcal{F}_n$ est la tribu borélienne.

Toute fonction mesurable F sur $[0,1[$ à valeurs réelles peut ainsi être considérée comme une variable aléatoire sur Ω.

1. Montrer que les $\mathcal{F}_n$ forment une filtration sur $(\Omega,\mathcal{F})$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$ et $0 \leq k < 2^n$, $\mathbb{E}(\mathbf{1}_{B_{n,k}}|\mathcal{F}_{n-1}) = (1/2)\mathbf{1}_{B_{n-1,p(k)}}$ où $p(k)$ est l'unique entier tel que $k = 2p(k)$ ou $k = 2p(k)+1$.
3. Supposons F intégrable sur $[0,1[$. Soit $F_n = \mathbb{E}(F|\mathcal{F}_n)$. Montrer que, pour presque tout $x \in \Omega$,
$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1}\left(2^n\int_{B_{n,k}} F(x)dx\right)\mathbf{1}_{B_{n,k}}(x)$$
4. Montrer que $(F_n, n \geq 0)$ est une martingale et étudier sa convergence presque sûre et dans L^1.
5. En déduire le résultat d'analyse suivant : toute fonction f intégrable sur $[0,1[$ est égale presque partout à la limite de ses moyennes locales $2^n\int_{B_{n,\lfloor 2^n x\rfloor}} f(x)dx$.
6. Supposons que F admette une limite l en 1 et que F étendue sur $[0,1]$ soit K-Lipschitz. Soit G_n la fonction définie pour tout $x \in \Omega$ par :
$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} 2^n\left(F\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - F\left(\frac{k}{2^n}\right)\right)\mathbf{1}_{B_{n,k}}(x)$$
avec la convention $F(1) = l$. Montrer que $|G_n(x)| < K$ pour tout $x \in [0,1[$ et que, pour tout $x \in [0,1[$, on a
$$\left|F_n(x) - F(0) - \int_0^x G_n(u)du\right| \leq 2K/2^n$$
7. Montrer que G_n est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$ et montrer que $\sup_n \mathbb{E}(G_n^2) < \infty$. Conclure au sujet de la convergence presque sûre, dans L^1 et dans L^2 de G_n vers une v.a. G. Conclure également au sujet de la convergence presque sûre de $\int_0^x G_n(u)du$ quand $n \to \infty$.
8. En déduire proprement le résultat d'analyse suivant : pour tout fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ intégrable et K-Lipschitz, montrer qu'il existe une fonction g mesurable bornée sur $[0,1]$ telle que, pour tout $x \in [0,1]$, on ait $f(x) = f(0) + \int_0^x g(u)du$.

Chapitre 3

Chaînes de Markov

Matrices de transition, calculs

Exercice 3.1. Une chaîne de Markov à valeurs dans $\{0,1\}$ a toujours une matrice de transition de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

1. Décrire la chaîne dans le cas où $p = q = 0$ puis dans le cas où $p = q = 1$. On supposera par la suite que $(p,q) \neq (0,0)$.
2. Calculer M^n. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = i \mid X_0 = j)$ pour tout $i, j \in \{0,1\}$.
3. Un virus peut exister sous N formes différentes. A chaque instant, avec probabilité $1-a$, il reste sous sa forme où il est, ou avec la probabilité respective a, il mute sous une forme différente, uniformement choisie parmi les autres $N-1$ formes. Quelle est la probabilité que la forme du virus au temps n est la même qu'au temps 0 ?
   Suggestion : réduire le problème à l'analyse d'une CM à deux états.

Exercice 3.2. À une probabilité quelconque α sur $\{2, 3, \cdots\}$ on associe une chaîne de Markov $(X_n,\, n \geq 0)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi initiale δ_0 et de matrice de transition Q définie par

$$Q(0,i) = \alpha(i+1)\,, \quad Q(i,i-1) = 1\,, \quad i \geq 1\,.$$

[Notation : $\alpha(x) := \alpha(\{x\})$.] On pose $S = \inf\{n \geq 1; X_n = 0\}$, $= \infty$ si $\varnothing$ (premier temps de retour à l'origine). Quelle est la loi de S ?

Exercice 3.3. Reprendre les deux feuilles précédentes sur les martingales et identifier, s'il y en a, les chaînes de Markov dans les exercices 2.4, 2.10, 2.12, 2.13, 2.17 et 2.19. Vous donnerez à chaque fois la filtration associée ainsi que la matrice de transition et la loi initiale.

Exercice 3.4. Un joueur fréquente 3 casinos numérotés 1, 2 et 3. Chaque jour il choisit l'un des deux casinos où il n'est pas allé la veille suivant une même probabilité $\frac{1}{2}$. Le premier jour, jour 0, il choisit l'un des trois casinos suivant une loi de probabilité μ sur $E := \{1,2,3\}$. On note X_n la variable aléatoire égale au numéro du casino fréquenté par le joueur le jour n. On considérera la suite $(X_n,\, n \geq 0)$ comme une chaîne de Markov définie sur $(\Omega, \mathscr{F})$ sous les lois $\mathbb{P}_\mu$; on précisera la matrice de transition Q.

1. Calculer les puissances Q^n de Q, puis $\lim_{n\to\infty} Q^n$.
2. Calculer $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_\mu(X_n = j)$, pour $j = 1$, 2 et 3.

Exercice 3.5. Soient $(Y_n,\, n \geq 1)$ une suite i.i.d. de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre $p \in]0,\, 1[$ et $X_0 := 0$, $X_n := Y_1 + \cdots + Y_n$ pour $n \geq 1$. Remarquer que $X_{n+1} \geq X_n$ p.s. pour tout n. Soit pour tout $y \in \mathbb{N}$ le temps d'arrêt $T_y := \inf\{n \geq 0 : X_n = y\}$ ($\inf \varnothing := \infty$).

1. Montrer, à l'aide de la loi des grands nombres, que $\lim_{n\to\infty} X_n = \infty$ p.s. et en déduire que $\mathbb{P}(T_y < \infty) = 1$.
2. Montrer que $M_n := X_n - np$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathscr{F}_n)$ engendrée par (X_n).
3. Calculer $\mathbb{E}(T_y)$, en utilisant la martingale arrêtée $(M_{n\wedge T_y})$.

Soit $N(y) := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_k = y\}}$ le nombre de visites de (X_n) à $y \in \mathbb{N}$.

(4) Calculer $\mathbf{1}_{\{X_k = y\}}$ pour $k < T_y$, $T_y \leq k < T_{y+1}$ et $k \geq T_{y+1}$, respectivement. En déduire que $N(y) = T_{y+1} - T_y$ p.s. et la valeur de $\mathbb{E}[N(y)]$.

On remarque que (X_n) est une marche aléatoire avec matrice de transition Q donnée par $Q(x,x) = 1 - p$, $Q(x, x+1) = p$, $x \in \mathbb{N}$ (on ne demande pas de le prouver).

(5) Calculer la loi de X_n et la loi de T_1.

(6) Prouver, à l'aide de la loi de Markov forte et du point 4, que $N(y)$ a même loi que T_1.

(7) Calculer la loi de T_y.

Exercice 3.6. Soit $X = (\Omega,\, \mathscr{F},\, (\mathscr{F}_n),\, (X_n),\, \mathbb{P}_x)$ une chaîne de Markov canonique à valeurs dans E dénombrable, de matrice de transition Q.

1. On suppose que la chaîne (X_n) a pour loi initiale μ. Soit T un temps d'arrêt tel que $\mathbb{P}_\mu(T < \infty) = 1$. Que peut-on dire de la suite $(X_{T+n},\, n \geq 0)$?
2. Soit S un temps d'arrêt tel que, pour tout $x \in E$, $\mathbb{P}_x(S < \infty) = 1$. On pose
$$S_0 = 0 \quad \text{et, pour } n \geq 0, \quad S_{n+1} = S_n + S \circ \theta_{S_n}.$$
   (a) Montrer que, pour tout $x \in E$, les S_n sont $\mathbb{P}_x$-p.s. finis.
   (b) Montrer que la suite $(X_{S_n},\, n \geq 0)$ associée à la filtration $(\mathscr{F}_{S_n},\, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov dont la matrice de transition est donnée par
$$Q_S(x,y) = \mathbb{P}_x(X_S = y).$$

Exercice 3.7. Dans cet exercice on considère une suite $(X_n,\, n \geq 0)$ de variables aléatoires i.i.d. de loi géométrique de paramètre $p \in]0,\, 1[$, qui modélisent, par exemple, la durée d'un stock d'ampoules. Les ampoules sont numérotées à partir de 0 ; elles sont allumées toutes au même instant ; X_n est la durée de l'ampoule n.

On définit les temps des records successifs de durée des ampoules :
$$\tau_0 := 0, \qquad \tau_{n+1} := \inf\{k > \tau_n : X_k > X_{\tau_n}\}, \qquad n \geq 0,$$
et les records successifs $Z_n := X_{\tau_n}$, $n \geq 0$. Donc Z_n est la n-ième record de durée que l'on rencontre dans la suite (X_n). Dans la suite on considère une chaîne de Markov (X_n) dans $\mathbb{N}^*$ sous forme canonique $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n), X_n, (\mathbb{P}_x)_{x\in\mathbb{N}^*})$ avec matrice de transition
$$Q(x,y) = q^{y-1}\, p, \qquad x, y \in \mathbb{N}^*.$$

1. Montrer que sous $\mathbb{P}_x$ la suite $(X_n,\, n \geq 0)$ est indépendante, X_n est une variable géométrique de paramètre p pour tout $n \geq 1$, et $\mathbb{P}_x(X_0 = x) = 1$.
2. Soit $x \in \mathbb{N}^*$ fixé. Calculer
$$\mathbb{P}_x(X_1 \leq x,\, \cdots,\, X_{k-1} \leq x,\, X_k > y), \qquad k, y \in \mathbb{N}^*,\ y \geq x.$$
3. On définit $\tau := \inf\{n \geq 1 : X_n > X_0\}$, $\inf \varnothing := \infty$. Calculer
$$\mathbb{P}_x(\tau = k,\ X_k > y), \qquad k, y \in \mathbb{N}^*,\ y \geq x.$$
Montrer que, sous $\mathbb{P}_x$, τ est une variable géométrique avec un paramètre que l'on déterminera et que X_τ a la même loi que $x + X_1$. Le couple (τ, X_τ) est-il indépendant sous $\mathbb{P}_x$?
4. Montrer que $\pi(x) = q^{x-1}p,\ \ x \in \mathbb{N}^*$, est la seule mesure de probabilité invariante pour Q. Montrer que $\mathbb{P}_\pi(\tau < \infty) = 1$ et $\mathbb{E}_\pi(\tau) = \infty$.
5. Montrer que τ est un temps d'arrêt. On peut dans la suite utiliser le fait que pour les temps τ_n définis ci-dessus l'on a $\tau_{n+1} = \tau_n + \tau \circ \theta_{\tau_n}$ et donc τ_n est aussi un temps d'arrêt (fini $\mathbb{P}_x$-p.s. pour tout $x \in \mathbb{N}^*$).
6. Montrer que $(Z_n,\, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov dans $\mathbb{N}^*$ sous $\mathbb{P}_x$ par rapport à la filtration $(\mathscr{F}_{\tau_n})$. Calculer sa matrice de transition et sa loi initiale.
7. Calculer pour toute fonction bornée $f : \mathbb{N}^* \mapsto \mathbb{R}$ l'espérance conditionnelle de $f(Z_{n+1} - Z_n)$ sachant $\mathscr{F}_{\tau_n}$. Montrer que la suite $(Z_n - Z_{n-1},\, n \geq 1)$ est i.i.d. sous $\mathbb{P}_x$.
8. Calculer la limite $\mathbb{P}_x$-presque sûre de Z_n/n, pour tout $x \in \mathbb{N}^*$.

Récurrence, transience, chaînes irréductibles récurrentes

Exercice 3.8. On considère une chaîne de Markov $(X_n, n \geq 0)$ dans $E = \{1, 2, 3\}$ avec matrice de transition
$$Q := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

1. Classer les états. Quelles sont les classes de récurrence/transience ? Déterminer les états x tels que $G(x,\, x) = \infty$, où G est la fonction de Green. Déterminer également si $G(x,\, y) = 0$.
2. Montrer que G satisfait la formule $G = I + QG$, où I est la matrice identité. En déduire la valeur de G et donc les valeurs de $\mathbb{E}_x(N_y)$ pour tous $x, y \in E$, où N_y est le nombre de visite de X à y.
3. On s'intéresse à présent au temps de première visite en 1 (i.e., $T_{\{1\}} = \inf\{n \geq 0; X_n = 1\}$) en fonction du point de départ. On introduit alors $v(x) = \mathbb{E}_x(T_{\{1\}})$. Montrer que
$$v(x) = 1 + (Qv)(x), \quad x \in \{2, 3\}, \qquad v(1) = 0.$$
En déduire la valeur de $\mathbb{E}_x(T_{\{1\}})$ pour tout $x \in E$.

4. Que peut-on dire de $\mathbb{E}_x(T_{\{3\}})$ où $T_{\{3\}}$ est le temps de première visite de $\{3\}$?
5. Calculer une mesure de probabilité invariante et dire si elle est unique.
6. Soit $T_{\{1,2\}}$ le premier temps de visite de X à l'ensemble $\{1, 2\}$. Quelle est la loi de $T_{\{1,2\}}$ sous $\mathbb{P}_3$?
7. Remarquer que $\mathbb{E}_3(T_{\{1,2\}}) = \mathbb{E}_3(N_3)$. Quelle en est la raison ?

Exercice 3.9. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n), (X_n), \mathbb{P}_x)$ une chaîne de Markov canonique à valeurs dans E dénombrable, de matrice de transition Q. Soient $x, y, z \in E$. Prouver que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x\Big(\mathbf{1}_{\{T_y<\infty\}} \sum_{n\geq T_y} \mathbf{1}_{\{X_n=z\}}\Big) &= \mathbb{P}_x(T_y < \infty)G(y, z) \\ &= \frac{G(x, y)}{G(y, y)}G(y, z) \ \text{ (si } y \text{ transient).} \end{aligned}$$

Exercice 3.10. Soit $Q := (p(x,\, y),\, x,\, y \in E)$ une matrice de transition sur un espace d'états dénombrable E et soit π une mesure de probabilité invariante telle que $\pi(x) > 0$ pour tout $x \in E$. Soit $Q^* := (p^*(x,\, y),\, x,\, y \in E)$ définie par

$$p^*(x, y) := \frac{p(y,\, x)\pi(y)}{\pi(x)}, \qquad x,\, y \in E.$$

1. Montrer que Q^* est une matrice de transition sur E et que π est une mesure de probabilité invariante pour Q^*. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $Q^* = Q$.
2. Soit $(X_n,\, n \geq 0)$ une chaîne de Markov canonique avec matrice de transition Q. Soit $N \in \mathbb{N}$ fixé et $X^*_n := X_{N-n}$. Calculer $\mathbb{P}_\pi(X^*_0 = x_0, \cdots , X^*_N = x_N)$ et en déduire que $(X^*_n,\, n \in [0,\, N])$ est, sous $\mathbb{P}_\pi$, une chaîne de Markov avec loi initiale π et matrice de transition Q^*.
3. Soit maintenant $p \in]0,\, 1[$ et Q la matrice de transition sur $\mathbb{N} = \{0, 1, \cdots\}$ donnée par
$$p(x, y) = p\mathbf{1}_{\{y=x+1\}} + (1 - p)\mathbf{1}_{\{y=0\}}, \qquad x, y \in \mathbb{N}.$$
Calculer une mesure de probabilité invariante π et dire si elle est unique. Calculer Q^* et vérifier que dans ce cas
$$p^*(x, y) = \mathbf{1}_{\{y=x-1\}} + \pi(y)\mathbf{1}_{\{x=0\}}, \qquad x, y \in \mathbb{N}.$$
Dessiner les trajectoires typiques de X et X^* dans ce cas.

Exercice 3.11. On considère la chaîne de Markov d'espace d'états $\mathbb{N}$ et de matrice de transition $Q := (p(i,\, j),\, i,\, j \in \mathbb{N})$ définie par

$$p(i, 0) = q_i \text{ et } p(i, i + 1) = p_i \ \text{ pour tout } i \in \mathbb{N}\,,$$

où, pour tout i, $p_i + q_i = 1$, $p_i > 0, q_i > 0$.

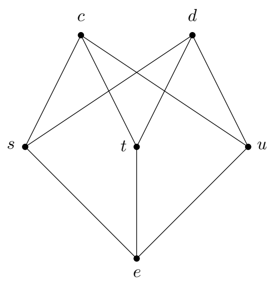
1. Vérifier que la chaîne est irréductible.
2. A quelle condition sur les p_i existe-t-il une mesure invariante. Dans ce cas prouver que la chaîne est récurrente.
3. Sous quelle condition sur les p_i la chaîne est-elle récurrente positive ?

Exercice 3.12. Soit $(X_n,\, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\{0,\, 1\}$ avec $\mathbb{P}(X_n = 0) = \mathbb{P}(X_n = 1) = 1/2$. On s'intéresse aux blocs de 3 zéros consécutifs sans compter 2 fois 2 blocs de 3 zéros consécutifs qui se chevauchent. Lorsqu'il y a 2 blocs de 3 zéros consécutifs qui se chevauchent, on compte seulement le premier.
On note N_n le nombre de blocs comptés entre les instants 1 et n. On veut calculer la limite de la fréquence empirique de ces blocs, i.e., la limite p.s. de N_n/n.
Pour ce faire on utilise une chaîne de Markov $Y = (Y_n,\, n \geq 0)$ à 4 états $0, 1, 2, 3$, d'état initial 0 (0 état de repos) qui mémorise le nombre de zéros consécutifs et retombe à l'état de repos lorsqu'on a compté 3 zéros consécutifs. Par exemple : si $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, \cdots) = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, \cdots)$, alors
$(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6, Y_7, \cdots) = (1, 0, 1, 2, 3, 1, 0, \cdots)$ et $N_7 = 1 = \sum_{k=1}^{7} \mathbf{1}_{\{Y_k = 3\}}$. La matrice de transition $Q := (p(x,\, y),\, x,\, y \in \{0,\, 1,\, 2,\, 3\})$ de la chaîne Y est donnée par

$$\begin{aligned} p(0,0) &= p(0,1) = \frac{1}{2}, \qquad p(1,0) = p(1,2) = \frac{1}{2} \\ p(2,0) &= p(2,3) = \frac{1}{2}, \qquad p(3,0) = p(3,1) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

1. Vérifier que la chaîne Y est irréductible récurrente positive. Calculer sa probabilité invariante.
2. En déduire la limite p.s. de N_n/n.

Exercice 3.13 (examen 2017)**.** On considère la marche au hasard sur le graphe suivant :



qu'on étudie comme une chaîne de Markov sur l'espace d'états $\{e, s, t, u, c, d\}$.

1. Cette chaîne de Markov est-elle irréductible ? Quels sont ses états récurrents ?
2. Déterminer toutes les mesures invariantes de cette chaîne de Markov.
3. Entre deux visites en t, combien de fois la chaîne de Markov passe-t-elle, en moyenne, en c ?
4. Partant de u, combien de temps la chaîne met-elle, en moyenne, à revenir en u ?
5. Partant de e, quelle proportion du temps la chaîne passe-t-elle, asymptotiquement, dans le sous-ensemble $\{c, d\}$ de E ?
6. Partant de e, combien de temps la chaîne met-elle, en moyenne, à atteindre d ?

Convergence vers la loi stationnaire

Exercice 3.14. On considère une chaîne de Markov (X_n) dans $E = \{1, 2, 3\}$ avec matrice de transition $Q := (p(x, y), x, y \in E)$

$$p := \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Quelles sont les classes de récurrence/transience ?
2. Calculer une mesure de probabilité invariante et dire si elle est unique et si elle est réversible.
3. Calculer pour tout $x \in E$ le temps moyen de retour à x, $\mathbb{E}_x(S_x)$.
4. Calculer la période de tout $x \in E$. Quelle est la limite des probabilités de transition $[Q^n](x, y)$, quand $n \to \infty$?

Exercice 3.15 (2eme session 2017)**.** Un professeur anglais posseède un nombre entier $N \geq 1$ de parapluies, répartis entre son bureau et son domicile. Il se rend à son bureau à pied le matin et rentre chez lui à pied le soir. S'il pleut, et s'il en a un à sa disposition, il prend un parapluie. S'il fait beau, il n'en prend pas. On suppose qu'à chaque trajet du professeur il pleut avec probabilité $p \in]0, 1[$, indépendamment des trajets preéceédents.

1. Écrire la matrice de transition d ?une chaîne de Markov sur l'espace d'états $\{0, ..., N\}$ qui modélise convenablement ce probleème, l'entier k correspondant à la situation où il y a k parapluies à l'endroit où se trouve le professeur.
2. Cette chaîne de Markov est-elle irréductible ? Quels sont ses états récurrents ?
3. Déterminer toutes les mesures invariantes de cette chaiîne.
4. Quelle est, asymptotiquement, la proportion des trajets durant lesquels le professeur marche sous la pluie sans parapluie ? Vérifier que pour $p = \frac{1}{2}$, cette proportion vaut $\frac{1}{4N+2}$.
5. Quelle est la période de la chaîne de Markov que nous sommes en train d'étudier ?

Exercice 3.16. (Produit de 2 chaînes indépendantes).
Soient $X = (X_n)$ et $Y = (Y_n)$ deux chaînes de Markov canoniques indépendantes d'espaces d'états E et F, de matrice de transition Q et R respectivement. La chaîne produit est par définition la chaîne $Z = (Z_n)$ où $Z_n = (X_n, Y_n)$. On vérifie sans peine que la chaîne Z est une chaîne de Markov de matrice de transition

$$S\big((x, y), (x', y')\big) = Q(x, x')R(y, y'), \quad x, x' \in E, \ y, y' \in F.$$

1. Exprimer les coefficients de S^n en fonction des coefficients de Q^n et R^n.
2. Montrer que si X et Y sont irréductibles de période 1, alors la chaîne $Z = (Z_n)$ est irréductible de période 1.
3. Donner un contre-exemple pour lequel X et Y sont irréductibles de période 2 et pour lequel Z n'est pas irréductible.

4. Supposons que Q et R admettent des probabilités invariantes respectives ρ et σ. Trouver une probabilité invariante π pour la chaîne produit.
5. On considère un damier à 16 cases (numérotées successivement de 1 à 16 de gauche à droite, de haut en bas ; les cases sont de couleur noire ou blanche alternée) sur lequel se déplacent indépendamment l'une de l'autre deux souris ; chaque souris passe d'une case à l'une des k cases voisines avec la probabilité $1/k$ (les déplacements diagonaux sont proscrits).

   Quel est l'intervalle de temps moyen séparant deux rencontres successives sur la case 7 ?

Exercice 3.17 (examen 2018)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans E dénombrable. On suppose que la chaîne est irréductible et qu'il existe une mesure de probabilité π sur E qui soit invariante.

On fixe $x \in E$ et on considère un temps d'arrêt S tel que $\mathbb{P}_x$-presque sûrement, on a $1 \leq S < +\infty$ et $X_S = x$. Plus généralement, on définit la suite de temps d'arrêts successifs $S_2 = S + S \circ \theta_S$, $S_3 = S_2 + S \circ \theta_{S_2}, \ldots, S_{i+1} = S_i + S \circ \theta_{S_i}$, etc. On pose $S_0 = 0$ par convention.

1. Soit $y \in E$. Que peut-on dire de la convergence presque sûre et dans L^1 de la suite

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{X_k=y}?$$

2. Montrer que, sous $\mathbb{P}_x$, les variables aléatoires

$$\sum_{k=S_i}^{S_{i+1}-1} \mathbf{1}_{X_k=y} \quad i \geq 0,$$

   sont indépendantes et de même loi.
3. À l'aide de la loi forte des grands nombres et de la question 1, montrer que, quelque soit $y \in E$,

$$\mathbb{E}_x\left[\sum_{k=0}^{S-1} \mathbf{1}_{X_k=y}\right] = \pi(y)\mathbb{E}_x[S].$$

4. Pour $z \in E$, on note $T_z = \inf\{n \geq 1,\ X_n = z\}$. Soit S le premier temps de passage par x après avoir visité y. Exprimer $\mathbb{E}_x S$ en fonction de T_x et T_y.
5. En considérant le temps d'arrêt S, montrer que pout tous $x \neq y \in E$ on a

$$\pi(y)\mathbb{P}_y(T_x < T_y)(\mathbb{E}_x(T_y) + \mathbb{E}_y(T_x)) = 1.$$

Exercice 3.18. Serge aime beaucoup le vin. Après avoir trop bu, il s'endort et fait le rêve suivant : au départ il a une somme d'argent $x \in \mathbb{N}$ (en Euros) ; à chaque minute il boit un verre de vin, qui lui coûte un Euro ; chaque fois qu'il épuise son capital, il trouve un porte monnaie qui contient un nombre entier et aléatoire de pièces d'un Euro, et il recommence instantanément à acheter du vin et boire. Le rêve continue de la même façon indéfiniment.

On modélise le capital X_n à disposition de Serge à chaque minute $n \in \mathbb{N}$ à l'aide d'une chaîne de Markov sur $\mathbb{N} = \{0, 1, \cdots\}$, avec matrice de transition $Q := (p(x, y), x, y \in \mathbb{N})$ définie par

$$p(x,y) = \begin{cases} f(y+1) & x = 0,\ y \geq 0, \\ 1 & x > 0,\ y = x-1, \\ 0 & \text{sinon}, \end{cases}$$

où f est une probabilité sur $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \cdots\}$, $f : \mathbb{N}^* \mapsto]0, 1[$, $\sum_n f(n) = 1$, avec $f(y) > 0$ pour tout $y \in \mathbb{N}^*$. Sous $\mathbb{P}_x$, (X_n) est une chaîne de Markov sur $\mathbb{N} = \{0, 1, \cdots\}$ avec probabilité de transition Q et état initial déterministe $X_0 = x \in \mathbb{N}$. Si au temps i le capital de Serge est $y > 0$, au temps $i+1$ le capital sera $y-1$. Si au temps i le capital de Serge est nul, il trouve une quantité $y \geq 1$ de pièces avec probabilité $f(y)$, et il en dépense instantanément une, ainsi que son capital au temps $i+1$ sera $y-1$ avec probabilité $f(y)$. Soient $S_0 := 0$, $S_{n+1} := \inf\{i > S_n : X_i = 0\}$, les retours successifs à l'état 0.

1. Quelles sont les classes de communication de la chaîne de Markov (X_n) ?
2. Montrer que $\mathbb{P}_0(S_1 = n) = f(n)$, $n \geq 1$. En déduire la classification des états en classes récurrentes/transitoires.
3. Montrer que la mesure sur $\mathbb{N}$ définie par

$$\lambda(x) := \sum_{y=x+1}^{\infty} f(y), \qquad x \in \mathbb{N},$$

   est invariante pour Q et que toute mesure invariante est un multiple de λ.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que (X_n) soit récurrente positive. Montrer qu'il existe une seule mesure de probabilité invariante si et seulement si

$$m := \sum_n n\, f(n) < \infty.$$

   On suppose la condition $m < \infty$ satisfaite dans la suite.
5. Calculer la limite $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_x(X_n = y)$, pour tous $x, y \in \mathbb{N}$.
6. Définir $u(n) := \mathbb{P}_0(X_n = 0)$. Montrer que $\{X_0 = X_n = 0\} = \cup_{z\leq n}\{X_0 = X_n = 0,\ S_1 = z\}$ et en déduire que

$$u(n) = \sum_{z=1}^{n} f(z)\, u(n-z) = [f * u](n), \qquad n \geq 1.$$

7. Soit $t_i := S_i - S_{i-1}$, $i \geq 1$. Montrer que $(t_i,\ i \geq 1)$ est, sous $\mathbb{P}_0$, une suite i.i.d. et calculer $\mathbb{P}_0(t_i = n)$ (pour $n \geq 1$).
8. Montrer que $\mathbb{P}_0(S_i = n) = f^{i*}(n)$, où $f^{i*} = f * \cdots * f$ est la convolution i fois de f pour $i \geq 1$.
9. Montrer que $\{X_n = 0\} = \cup_{i=0}^{\infty}\{S_i = n\}$ et en déduire que

$$u(n) = \sum_{i=1}^{\infty} f^{i*}(n), \qquad n \geq 1.$$

10. Montrer le *Théorème du Renouvellement* : si u est définie par la formule précédente, alors

$$\lim_{n\to\infty} u(n) = \frac{1}{m}.$$

Problème : Processus de branchement

Le but de ce problème est d'étudier un type de processus, appelé *processus de branchement*, qui est largement utilisé en biologie pour décrire l'évolution d'une population dont la reproduction des individus est aléatoire ou, de manière plus générale, tous les problèmes où des structures d'arbres aléatoires apparaissent.

La problématique est la suivante : on considère des générations discrètes dont on renouvelle tous les individus d'une génération à la suivante. Chaque individu a un nombre aléatoire d'enfants, indépendamment de tous les autres individus et ce nombre peut être éventuellement nul. On s'intéresse alors à la taille de la population $(Z_n,\, n \geq 0)$ au cours du temps, sachant que l'on commence avec un unique individu ($Z_0 = 1$).

Pour décrire le nombre d'enfants de chaque individu (réel ou virtuel), on introduit une famille de variables aléatoires $(X_{k,n})_{(k,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ à valeurs entières, indépendantes, et de même loi ξ. Chaque $X_{k,n}$ représente le nombre d'enfants de l'individu k à la génération n (s'il existe). Nous introduisons alors la filtration associée $\mathscr{F}_n = \sigma(X_{k,i}; k \in \mathbb{N}^*, 1 \leq i \leq n)$ et $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$. La loi ξ est appelée *la loi de branchement.*

La taille de la population suit ainsi l'évolution suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Z_{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } Z_n = 0 \\ \sum_{k=1}^{Z_n} X_{k,n+1} & \text{si } Z_n > 0 \end{cases}$$

1. (un premier cas simple) Nous supposons tout d'abord $\xi(0) + \xi(1) = 1$. Interpréter cette condition en termes de nombre d'enfants. Comment évolue Z_n lorsque n augmente ? Nous supposons ensuite $\xi(0) = 0$: la population peut-elle s'éteindre ?

Nous supposerons désormais que $\xi(0) + \xi(1) < 1$ **et** $\xi(0) > 0$.

Nous introduisons les notations

$$m = \sum_{k\in\mathbb{N}} k\xi(k), \qquad \phi(r) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \xi(k)r^k \quad \text{pour } r \in [0,1]$$

qui sont la moyenne du nombre d'enfants d'un individu et la fonction génératrice de ce nombre. Nous définissons également les itérées de la fonction ϕ par $\phi_0(r) = r$ et $\phi_{n+1}(r) = \phi(\phi_n(r)) = \phi_n(\phi(r))$ pour $n \in \mathbb{N}$.

2. Calculer $\mathbb{E}(Z_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n)$ puis $\mathbb{E}(Z_n)$ pour tout n. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $r \in [0,1]$,

$$\mathbb{E}(r^{Z_{n+1}} \,|\, \mathscr{F}_n) = \phi(r)^{Z_n}$$

En déduire $\mathbb{E}(r^{Z_n})$.

3. Nous étudions les points fixes de la fonction ϕ selon la valeur de m. Étudier la fonction $r \mapsto \phi(r)$ et en déduire le nombre de solutions de l'équation $\phi(r) = r$ sur $[0, 1]$.

Nous appellerons q la plus petite solution de l'équation $\phi(r) = r$ sur $[0, 1]$. Montrer que la suite $(\phi_n(0),\, n \geq 0)$ est une suite croissante qui converge vers q.

Nous voulons savoir si la population survit ou s'éteint aux temps longs et introduisons dans ce but la variable aléatoire :

$$T = \inf \{n \in \mathbb{N}; Z_n = 0\} ,$$

avec la convention $\inf \varnothing = \infty$.

4. Montrer que $\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\}$. Montrer, en utilisant les résultats précédents sur la fonction ϕ, que

$$\mathbb{P}(T < \infty) = q \, .$$

Nous appellerons *extinction* l'événement $\{T < \infty\}$ et *survie* l'événement $\{T = \infty\}$. Le cas *critique* correspond à $m = 1$, le cas *surcritique* à $m > 1$ et le cas *sous-critique* à $m < 1$. Faire le lien avec la probabilité de survie.

5. Nous supposerons dans cette question $m > 1$ et introduisons les variables $M_n = q^{Z_n}$. Montrer que $(M_n,\, n \geq 0)$ est une martingale dont on étudiera la convergence. En déduire l'égalité presque sûre

$$\lim_{n \to \infty} q^{Z_n} \mathbf{1}_{\{T = \infty\}} = 0$$

puis en déduire l'égalité presque sûre

$$\mathbf{1}_{\{T=\infty\}} = \mathbf{1}_{\{\lim_{n\to\infty} Z_n = \infty\}} \, .$$

Conclure sur le comportement de la population lorsqu'elle ne s'éteint pas.

6. Nous supposons toujours $m > 1$ et supposons en plus que $\sigma^2 = \sum_{k \in \mathbb{N}} k^2 \xi(k) - m^2 < \infty$. En introduisant une martingale idoine, nous pouvons être en fait beaucoup plus précis sur le comportement de Z_n lorsque $n \to \infty$! Soit la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $W_n = Z_n / m^n$.

1. Montrer que $(W_n,\, n \geq 0)$ est une martingale.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$\mathbb{E}(Z_{n+1}^2 \,|\, \mathscr{F}_n) = m^2 Z_n^2 + \sigma^2 Z_n$$

   En déduire que $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(W_n^2) < \infty$. Conclure sur la convergence de la martingale (W_n), dont on notera la limite W_∞.
3. Introduisons la fonction $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $L(\lambda) = \mathbb{E}(e^{-\lambda W_\infty})$. Écrire une identité fonctionnelle faisant intervenir ϕ, L et m. Montrer que $\mathbb{P}(W_\infty = 0) = \lim_{\lambda \to \infty} L(\lambda)$. Conclure sur la valeur de $\mathbb{P}(W_\infty = 0)$.
4. En déduire l'égalité presque sûre $\mathbf{1}_{\{T=\infty\}} = \mathbf{1}_{\{W_\infty > 0\}}$ et en déduire que, si la population survit, alors Z_n croît exponentiellement et donner un équivalent.

7. Nous supposons à présent $m < 1$. Quelle est la limite presque sûre de (W_n) ? Est-ce une martingale fermée ?

Le point de vue des chaînes de Markov

Nous nous focalisons à nouveau au cas sur le plus intéressant $\xi(0) > 0$ et $\xi(0)+\xi(1) < 1$.

8. Montrer que (Z_n) est une chaîne de Markov dont on précisera la loi de transition en fonction des convolutions de la loi ξ.

9. Que peut-on dire de l'état 0 ? Quelles sont les classes d'états ? Discuter le caractère transient ou récurrent de ces classes d'états.

10. En déduire que, $\mathbb{P}$-presque sûrement, on a ou bien extinction ou bien divergence de la taille Z_n vers ∞, i.e.,

$$\mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N}, \forall k \geq n, Z_k = 0) + \mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} Z_n = \infty) = 1.$$

Quelques compléments pour réfléchir

Supposons à nouveau que $\sum_k k^2\xi(k) < \infty$. Nous nous plaçons à présent dans le cas où $m < 1$. Nous considérons à présent une modification du problème de départ. Nous conservons les mêmes variables aléatoires $X_{k,n}$ mais considérons une probabilité $\mathbb{Q}$ telle que les $X_{k,n}$ sont indépendantes, les $X_{k,n}$ avec $k > 1$ ont pour loi $\xi(k)$ et la variable $X_{1,n}$ a pour loi $k\xi(k)/m$. Nous supposerons qu'une telle probabilité $\mathbb{Q}$ existe et nous noterons $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$ l'espérance associée.

11.

1. Montrer que $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(r^{Z_{n+1}} \mid \mathscr{F}_n) = r\phi'(r)\phi(r)^{Z_n-1}/m$. Le processus (Z_n) s'éteint-il sous $\mathbb{Q}$?
2. Montrer que $\mathbb{E}(W_{n+1}r^{Z_{n+1}} \mid \mathscr{F}_n) = W_n r\phi'(r)\phi(r)^{Z_n-1}/m$. Le processus (Z_n) s'éteint-il sous $\mathbb{P}$?
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{R}$, bornée mesurable, on a

   $$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(f(Z_0, Z_1, \cdots, Z_n)) = \mathbb{E}(W_n f(Z_0, Z_1, \cdots, Z_n))$$

   En déduire la densité de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$ lorsque ces mesures sont restreintes à la tribu $\mathscr{G}_n = \sigma(Z_0, \cdots, Z_n)$.

Vous pouvez à présent utiliser ce changement de probabilité et étudier $\mathbb{Q}$ en détail pour en tirer des renseignements plus précis sur l'extinction de Z_n sous la probabilité $\mathbb{P}$.