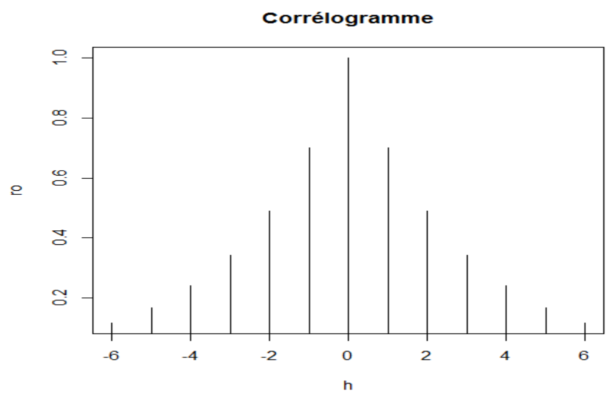
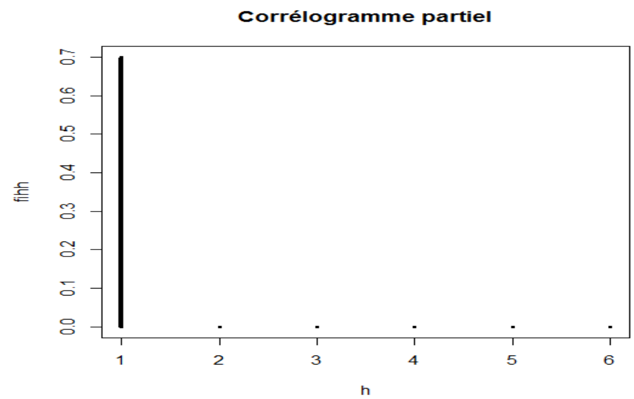
Université.Badji Mokhtar.Annaba. **année 2020-2021**

Série2 de S.C: Processus ARMA

Ex1

1-La FAC du processus: $X_t - \mu = 0.7\,(X_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t$ est $\rho_h = 0.7^h$. Le graphe de ρ_h s'appelle le corrélogramme, pour $h = -6, ..., 6$ on a le graphe suivant





On remarque la parité de cette fonction, dorénavant on prend uniquement le coté positif. Calculons la fonction d'ACP:

$$\varphi_{11} = \rho_1 = 0.7; \varphi_{hh} = 0, \forall h > 1$$

2-La FAC du processus: $X_t = \frac{1}{3}X_{t-1} + \frac{2}{9}X_{t-2} + \varepsilon_t$ est

$$\rho_h = \frac{1}{3}\rho_{h-1} + \frac{2}{9}\rho_{h-2}$$

La solution est donnée par

$$\rho_h = a\lambda_1^h + b\lambda_2^h$$

où a et b sont des constantes à trouver à partir des conditions initiales et λ_1, λ_2 sont les solutions de l'équation caractéristique: $\lambda^2 - \frac{1}{3}\lambda - \frac{2}{9} = 0$, les solutions sont $\lambda_1 = \frac{2}{3}$ et $\lambda_2 = -\frac{1}{3}$ d'où

$$\rho_h = a\left(\frac{2}{3}\right)^h + b\left(-\frac{1}{3}\right)^h$$

les conditions initiales sont $\rho_0 = 1$ et $\rho_1 = \frac{3}{7}$ (trouver à partir de ρ_h), alors

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b = \frac{3}{7} \end{cases}$$

d'où $a = \frac{16}{21}$ et $b = \frac{5}{21}$, d'où le résultat.

3-Pour étudier la stationnarité d'un processus AR, on cherche les solutions de l'équation caractéristique. $X_t = X_{t-1} + cX_{t-2} - cX_{t-3} + \varepsilon_t \Longrightarrow (1 - L - cL^2 + cL^3)\,X_t = \varepsilon_t$, donc l'équation caractéristique est

$$\lambda^3 - \lambda^2 - c\lambda + c = 0$$

c'est clair que $\lambda = 1$ est une solution, donc le processus est non stationnaire.
<u>Ex2:</u> I-Calculer la fonction d'autocovariance des modèles suivants:
1-$Y_t = (1 + 2.4L + 0.8L^2)\,\varepsilon_t \Longrightarrow Y_t = \varepsilon_t + 2.4\varepsilon_{t-1} + 0.8\varepsilon_{t-2} : Y_t \backsim MA\,(2)\,.$
Sa fonction d'ACV est

$$\begin{array}{rcl} \gamma_h & = & Cov\,(\varepsilon_t + 2.4\varepsilon_{t-1} + 0.8\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-h} + 2.4\varepsilon_{t-h-1} + 0.8\varepsilon_{t-h-2}) \\ & = & \left\{ \begin{array}{c} (1 + 2.4^2 + 0.8^2) \quad \text{si } h = 0 \\ 2.4 + 0.8 \times 2.4 \quad \text{si } h = 1 \\ 0.8 \quad \text{si } h = 2 \\ 0 \quad \text{sinon} \end{array} \right. \end{array}$$

2-$(1 - 1.1L + 0.18L^2)\,Y_t = \varepsilon_t \Longrightarrow Y_t = 1.1Y_{t-1} - 0.18Y_{t-2} : Y_t \backsim AR\,(2)\,.$
Sa fonction d'ACV est

$$\gamma_h = 1.1\gamma_{h-1} - 0.18\gamma_{h-2},\ \forall h \geq 1 \text{ et } \gamma_0 = 1.1\gamma_1 - 0.18\gamma_2 + 1$$

La solution est donnée par

$$\gamma_h = a\lambda_1^h + b\lambda_2^h$$

où a et b sont des constantes à trouver à partir des conditions initiales et λ_1, λ_2 sont les solutions de l'équation caractéristique: $\lambda^2 - 1.1\lambda + 0.18 = 0$, les solutions sont $\lambda_1 = 0.2$ et $\lambda_2 = 0.9$ d'où

$$\gamma_h = a\,(0.2)^h + b\,(0.9)^h$$

les conditions initiales sont γ_0 et γ_1, alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 = 1.1\gamma_0 - 0.18\gamma_1 \Longrightarrow \gamma_1 = 0.93\gamma_0 \\ \gamma_2 = 1.1\gamma_1 - 0.18\gamma_0 \Longrightarrow \gamma_2 = 0.84\gamma_0 \end{array} \right.$$

d'où $\gamma_0 = 7.8$ et $\gamma_1 = 7.25$ alors

$$\left\{ \begin{array}{c} a + b = 7.8 \\ 0.2a + 0.9b = 7.25 \end{array} \right.$$

d'où $a = -0.33$ et $b = 8.13$, finalement

$$\gamma_h = -0.33\,(0.2)^h + 8.13\,(0.9)^h$$

II) Pour trouver la fonction d'AC, on doit d'abord calculer la fonction d'ACV du processus: $X_t = \varepsilon_t + 0.7\varepsilon_{t-1} - 0.2\varepsilon_{t-2}$

$$\gamma_h = \left\{ \begin{array}{c} 1 + 0.7^2 + 0.2^2 = 1.53 \quad \text{si} \quad h = 0 \\ 0.7 - 0.2 \times 0.7 = 0.56 \quad \text{si} \quad h = 1 \\ -0.2 \quad \text{si} \quad h = 2 \\ 0 \quad \text{sinon} \end{array} \right.$$

d'où

$$\rho_h = \left\{ \begin{array}{c} \frac{0.56}{1.53} = 0.36 \quad \text{si } h = 1 \\ \frac{-0.2}{1.53} = -0.13 \quad \text{si } h = 2 \\ 0 \quad \text{sinon} \end{array} \right.$$

III-Soit $X_t = 0.5X_{t-1} + \varepsilon_t - 0.3\varepsilon_{t-1} \Longrightarrow (1-0.5L)\, X_t = (1-0.3L)\, \varepsilon_t$
*La forme $MA(\infty)$ du modèle est

$$\begin{aligned} X_t &= \frac{1-0.3L}{1-0.5L}\varepsilon_t \\ &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i L^i\right) \varepsilon_t \end{aligned}$$

donc

$$(1-0.5L)\left(\psi_0 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \cdots\right) = 1 - 0.3L$$

par identification, on a

$$\begin{cases} \psi_0 = 1 \\ \psi_1 - 0.5\psi_0 = -0.3 \Longrightarrow \psi_1 = 0.2 \\ \psi_2 - 0.5\psi_1 = 0 \\ \vdots \\ \psi_i - 0.5\psi_{i-1} = 0 \end{cases}$$

par itération on aura $\psi_i = 0.5^{i-1}\psi_1, \forall i \geq 1$ d'où

$$X_t = \varepsilon_t + 0.2\sum_{i=0}^{\infty} 0.5^{i-1}\varepsilon_{t-i}.$$

*La forme $AR\,(\infty)$

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \frac{1-0.5L}{1-0.3L}X_t \\ &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i L^i\right) X_t \end{aligned}$$

il suffit de calculer les constantes c_i.
IV) a) $\rho_h = 0.4\rho_{h-1}, \forall h > 2 \Longrightarrow X_t \backsim ARMA\,(1,2)$;b) $\rho_h = 0, \forall h > 3 \Longrightarrow X_t \backsim ARMA\,(0,3)$;c) $\rho_h = 0.2\rho_{h-2}\ \forall h > 1 \Longrightarrow X_t \backsim ARMA\,(2,1)$.
<u>Ex3:</u> Soit: $X_t = 1 + 1.5X_{t-1} - 0.56X_{t-2} + \varepsilon_t$ avec ε_t est un bruit blanc $N(0,1)$.
1-Stationnarité:

$$\left(1 - 1.5L + 0.56L^2\right) X_t = 1 + \varepsilon_t$$

L'équation caractéristique est

$$\lambda^2 - 1.5\lambda + 0.56 = 0$$

les solutions sont $\lambda_1 = 0.7$ et $\lambda_2 = 0.8$ et vérifient $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| < 1$, donc le processus est stationnaire.
Calculer de $E(X_t)$:

$$E(X_t) = 1 + 1.5E(X_{t-1}) - 0.56E(X_{t-2})$$

par stationnarité on obtient $E(X_t) = \frac{1}{1-1.5+0.56} = 16.667$.
2-a-La fonction d'ACV est (on a supposé que la série est centrée):

$$\gamma_h = 1.5\gamma_{h-1} - 0.56\gamma_{h-2},\ \forall h \geq 1 \text{ et } \gamma_0 = 1.5\gamma_1 - 0.56\gamma_2 + 1$$

on commence par calculer γ_1 et γ_2 en fonction de γ_0 :

$$\left\{\begin{array}{l}\gamma_1 = 1.5\gamma_0 - 0.56\gamma_1 \Longrightarrow \gamma_1 = 0.96\gamma_0 \\ \gamma_2 = 1.5\gamma_1 - 0.56\gamma_0 \Longrightarrow \gamma_2 = 0.88\gamma_0\end{array}\right.$$

d'où $\gamma_0 = 19$, $\gamma_1 = 18.24, \gamma_2 = 16.72, \gamma_3 = 14.86$ et $\gamma_4 = 12.927$.
b-La fonction d'AC

$$\rho_h = 1.5\rho_{h-1} - 0.56\rho_{h-2},$$

La solution est donnée par

$$\rho_h = a\,(0.7)^h + b\,(0.8)^h$$

avec

$$\left\{\begin{array}{c}a + b = 1 \\ 0.7a + 0.8b = 0.96\end{array}\right.$$

d'où $a = -1.6$ et $b = 2.6$, donc

$$\rho_h = -1.6\,(0.7)^h + 2.6\,(0.8)^h\,.$$

c-La fonction d'ACP

$$\left\{\begin{array}{c}\varphi_{11} = \rho_1 = 0.96 \\ \varphi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1-\rho_1^2} = -0.53 \\ \varphi_{hh} = 0, \quad \forall h > 2\end{array}\right.$$

3-La représentation $MA(\infty)$ de X_t

$$\begin{aligned} X_t &= \frac{1}{(1-1.5+0.56)} + \frac{1}{(1-1.5L+0.56L^2)}\varepsilon_t \\ &= 16.66 + \left(\sum_{i=0}^{\infty}\psi_i L^i\right)\varepsilon_t \end{aligned}$$

d'où

$$\left(1 - 1.5L + 0.56L^2\right)\left(\psi_0 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \cdots\right) = 1$$

par identification, on a

$$\left\{\begin{array}{c}\psi_0 = 1 \\ \psi_1 - 1.5\psi_0 = 0 \Longrightarrow \psi_1 = 1.5 \\ \psi_2 - 1.5\psi_1 + 0.56\psi_0 = 0 \\ \vdots \\ \psi_i - 1.5\psi_{i-1} + 0.56\psi_0 = 0\end{array}\right.$$

la solution de cette équation est

$$\psi_i = a\,(0.7)^i + b\,(0.8)^i$$

avec

$$\left\{\begin{array}{c}a + b = \psi_0 = 1 \\ 0.7a + 0.8b = \psi_1 = 1.5\end{array}\right.$$

d'où $a = -7$ et $b = 8$ donc

$$X_t = 16.66 + \sum_{i=0}^{\infty} \left(-7\,(0.7)^i + 8\,(0.8)^i \right) \varepsilon_{t-i}$$

C'est la représentation de Wold.

Ex4: Soit $X_t = 0.4X_{t-1} + \varepsilon_t - 0.7\varepsilon_{t-1}$, où ε_t est un bruit blanc $N(0,1)$.

1) La stationnarité:

$$(1 - 0.4L)\, X_t = (1 - 0.7L)\, \varepsilon_t$$

L'équation caractéristique: $\lambda - 0.4 = 0 \Longrightarrow \lambda = 0.4 < 1$ donc X_t est stationnaire de même on trouve qu'il est inversible.

2) Pour calculer ρ_h on doit d'abord trouverγ_h :

$$\begin{aligned} \gamma_h &= 0.4\gamma_{h-1} + E\left(\varepsilon_t X_{t-h}\right) - 0.7E\left(\varepsilon_{t-1} X_{t-h}\right) \\ &= \begin{cases} 0.4\gamma_1 + 1 - 0.7\,(0.4 - 0.7) = 0.4\gamma_1 + 1.21 \quad \text{si } h = 0 \\ 0.4\gamma_0 + 1 \quad \text{si } h = 1 \\ 0.4\gamma_{h-1} \quad \text{si } h > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

(En remplaçant γ_1 dans γ_0 vous pouvez trouver γ_0) d'où

$$\rho_h = \begin{cases} 0.4 + \frac{1}{\gamma_0} \quad \text{si } h = 1 \\ 0.4\rho_{h-1} \quad \text{si } h > 1 \end{cases}$$

La conclusion est que pour un $ARMA\,(1,1)$ la fonction d'AC est la même que celle d'un $AR\,(1)$ pour $h > 1$.

3) La forme $AR(\infty)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \frac{1 - 0.4L}{1 - 0.7L} X_t \\ &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i L^i \right) X_t \end{aligned}$$

trouvez les c_i.

Ex5: Soit: $X_t = 15 + \varepsilon_t + 0.6\varepsilon_{t-1} - 0.1\varepsilon_{t-2}$, où ε_t est un bruit blanc $N(0,1)$.

1) $X_t \backsim MA\,(1)$, donc il est toujours stationnaire, pour l'inversibilité, on réécrit le modèle avec l'opérateur retard

$$X_t = 15 + \left(1 + 0.6L - 0.1L^2\right) \varepsilon_t$$

l'équation caractéristique est $\lambda^2 + 0.6\lambda - 0.1 = 0$ les solutions sont $\lambda_1 = -0.73$ et $\lambda_2 = 0.13$. Les solutions sont en valeur absolue inférieur à 1 donc le processus est inversible.

2) La représentation $AR(\infty)$ de X_t:

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= -\frac{15}{1 + 0.6 - 0.1} + \frac{1}{1 + 0.6L - 0.1L^2} X_t \\ &= -10 + \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i L^i \right) X_t \end{aligned}$$

d'où

$$\left(1+0.6L-0.1L^2\right)\left(\psi_0+\psi_1 L+\psi_2 L^2+\cdots\right)=1$$

par identification, on a

$$\begin{cases} \psi_0=1 \\ \psi_1+0.6\psi_0=0 \Longrightarrow \psi_1=-0.6 \\ \psi_2+0.6\psi_1-0.1\psi_0=0 \\ \vdots \\ \psi_i+0.6\psi_{i-1}-0.1\psi_0=0 \end{cases}$$

la solution de cette équation est

$$\psi_i=a\left(-0.73\right)^i+b\left(0.13\right)^i$$

avec

$$\begin{cases} a+b=\psi_0=1 \\ -0.73a+0.13b=\psi_1=-0.6 \end{cases}$$

d'où $a=0.85$ et $b=0.15$ donc

$$\varepsilon_t=-10+\sum_{i=0}^{\infty}\left(0.85\left(-0.73\right)^i+0.15\left(0.13\right)^i\right)X_{t-i}$$

3) Calculer $\rho(k)$. pour $k=1,2,3$ Conclure. Calculer ϕ_{kk} pour $k=1,2$.
<u>**Ex6:**</u> **I-**Soit $X_t=\varphi_4 X_{t-4}+\varepsilon_t$ tel que $0<\varphi_4<1$ et $\varepsilon_t\to BB(0,\sigma^2)$.
La fonction ACV:

$$\gamma_h=\varphi_4\gamma_{h-4}, h>0 \text{ et } \gamma_0=\varphi_4\gamma_4+\sigma^2, h=0$$

par itération, on trouve

$$\gamma_h=\begin{cases} \varphi_4^k\gamma_0, & \text{si } h=4k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction d'AC

$$\rho_h=\begin{cases} \varphi_4^k, & \text{si } h=4k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

II-Faites le de la même manière.
III- Pour la DS, on utilise la propriété à la place de la définition
1- $X_t=0.7X_{t-1}+\varepsilon_t \Longrightarrow \left(1-0.7L\right)X_t=\varepsilon_t$ d'où $X_t=\frac{1}{1-0.7L}\varepsilon_t$, donc

$$\begin{aligned} f_X\left(\omega\right) &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\left(1-0.7e^{-i\omega}\right)\left(1-0.7e^{i\omega}\right)} \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1.49-1.4\cos\omega}. \end{aligned}$$

Faites 2- de la même manière.
3-Pour ce modèle, on va utiliser la définition pour voir comment cela marche (bien sur quand on vous donne le choix utiliser toujours la propriété)
$X_t=\varepsilon_t-0.5\varepsilon_{t-1} \Longrightarrow X_t \backsim MA\left(1\right)$, sa fonction d'ACV est

$$\gamma_h=\begin{cases} 1.25 & \text{si } h=0 \\ -0.5 & \text{si } h=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Sa densité spectrale est

$$\begin{aligned} f_X(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{h=-\infty}^{+\infty}\gamma_h e^{-i\omega h} \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\gamma_{-1}e^{i\omega}+\gamma_0+\gamma_1 e^{-i\omega}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}(1.25-\cos\omega). \end{aligned}$$

4-$X_t=\varepsilon_t+0.5\varepsilon_{t-1}-0.3\varepsilon_{t-2}\Longrightarrow X_t=\left(1+0.5L-0.3L^2\right)\varepsilon_t$, d'où la DS est

$$f_X(\omega)=\frac{1}{2\pi}\left(1+0.5e^{-i\omega}-0.3e^{-2i\omega}\right)\left(1+0.5e^{i\omega}-0.3e^{2i\omega}\right).$$

A vous de faire le produit.
5-$X_t=0.4X_{t-1}+\varepsilon_t+0.9\varepsilon_{t-1}\Longrightarrow(1-0.4L)X_t=(1+0.9L)\varepsilon_t$, d'où

$$f_X(\omega)=\frac{1}{2\pi}\frac{1.81+1.8\cos\omega}{1.16-0.8\cos\omega}$$

Ex7: Pour classer les modèles il faut les réécrire avec l'operateur retard:
a-$X_t-0.5X_{t-1}=\varepsilon_t\Longrightarrow(1-0.5L)X_t=\varepsilon_t\Longrightarrow X_t\backsim ARIMA(1,0,0)$.
b-$X_t=\varepsilon_t-1.3\varepsilon_{t-1}+0.4\varepsilon_{t-2}\Longrightarrow X_t\backsim ARIMA(0,0,2)$.
c-$X_t-0.5X_{t-1}=\varepsilon_t-1.3\varepsilon_{t-1}+0.4\varepsilon_{t-2}\Longrightarrow X_t\backsim ARIMA(1,0,2)$.
d-C'est le cas le plus intéressant: $\left(1-1.2L+0.2L^2\right)X_t=(1-0.5L)\varepsilon_t$.
On doit trouver les solutions de l'équation caractéristique: $\lambda^2-1.2\lambda+0.2=0\Longleftrightarrow\lambda=1$ ou $\lambda=0.2$, donc

$$(1-L)(1-0.2L)X_t=(1-0.5L)\varepsilon_t\Longrightarrow X_t\backsim ARIMA(1,1,1).$$