Feuille 5

Exercice 1. a) Démontrez qu'il existe une solution unique de l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = a(b - X_t)dt + \sigma dB_t$$

b) Déterminez de façon explicite cette solution

Exercice 2. On considère l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dX_t = -\beta X_t dt + \sigma dB_t, \qquad X_0 = x$$

où $\beta > 0$.
1) Quelle est l'équation différentielle stochastique vérifiée par $Y_t := X_t e^{\beta t}$?
2) Si $g(t)$ est une fonction déterministe, montere que $\int_0^t g(s)dB_s$ est Gaussien $\mathcal{N}\left(0, \int_0^t g^2(s)ds\right)$.
3) Quelle est la loi de X_t?
4) Trouver la limite (en loi) de X_t quand $t \longrightarrow \infty$

Exercice 3. (Mouvement Brownien geométrique)
Pour $r, \sigma > 0$, on considère l'EDS linéaire avec coefficients constants:

$$dX_t = rX_t dt + \sigma X_t dB_t, \qquad X_0 = x_0$$

c'est léquation de Black and Scholes pour la tendance du prix d'un stock.
1) Démontrer que la solution explicite est

$$X_t = x_0 e^{\left(r - \sigma^2/2\right)t} e^{\sigma B_t}$$

2) Déduire que $\ln(X_t)$ est un mouvement Brownien avec dérive.
3) Déduire que X_t a la loi log-normale.

Exercice 4. 1) Montrer que l'EDS

$$dX_t = b(t)X_t dt + \sigma(t)dB_t$$

admet la solution explicite

$$X_t = x_0 e^{\Lambda(t)} + e^{\Lambda(t)} \int_0^t e^{-\Lambda(s)} \sigma(s) dB_s$$

où $\Lambda(t) = \int_0^t b(s)ds$
2) Démontrer que la solution X_t est un processus Gaussien et calculer son espérance, covariance et variance

Exercice 5. (Pont Brownien)
Soit $\tilde{B}_t = B_t - tB_1, \qquad 0 \leq t \leq 1$ avec B_t un mouvement Brownien standard.
1) Montrer que $\tilde{B}_t$ est un processus Gaussien centré indépendant de B_1 avec covariance

$$E\left(\tilde{B}_s \tilde{B}_t\right) = s(1-t) pour 0 \leq t \leq 1$$

2) Soit X_t la solution de l'EDS

$$\begin{aligned} dX_t &= -\frac{X_t}{1-t}dt + dB_t, \qquad 0 \leq t \leq 1 \\ X_0 &= 0 \end{aligned}$$

Montrer que X_t et $\tilde{B}_t$ ont la même loi

Exercice 6. On considère le processus X_t solution de l'EDS

$$dX_t = -b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t$$

et soit $Y_t = v\left(X_t\right)$, avec $v(x) = \int^x \frac{1}{\sigma(z)} dz$.
Montrer que l'EDS pour X_t se transforme en une EDS pour Y_t avec coefficient de diffusion égale à 1 et dérive

$$\left[\frac{b(x)}{\sigma(x)} - \frac{\sigma'(x)}{2}\right]_{x = v^{-1}(y)}$$