Faculté des Mathématiques USTHB **Année 2015/2016**

Master 1 ISMTID Module: **Processus Stochastiques 2**

Série 2
Espérance Conditionnelle et Martingales

Exercice 1 *Soit* $X \in (\Omega, \mathcal{F}, P)$ *i.e.,* X *est* $\mathcal{F}$ *mesurable, une v.a telle que* $E(|X|) < +\infty$. *Montrer que si* $\mathcal{A} = \{\Omega, \emptyset\}$ *alors* $E(X \mid \mathcal{A}) = E(X)$ *p.s.*

Exercice 2 *Si* $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$ *deux* $\sigma-$*algèbres. Montrer que:*
1/ $E\left(E(Y \mid \mathcal{A}_1) \mid \mathcal{A}_2\right) = E(Y \mid \mathcal{A}_1)$
2/ $E\left(E(Y \mid \mathcal{A}_2) \mid \mathcal{A}_1\right) = E(Y \mid \mathcal{A}_1)$

Exercice 3 *Soit* X, Y *deux v.a. telles que la v.a.* $X - Y$ *est indépendante de la* $\sigma-$*algèbre* $\mathcal{A}$, *avec* $E(X-Y) = m$ *et variance* $V(X-Y) = \sigma^2$. *On suppose que* Y *est* $\mathcal{A}$*-mesurable.*
1/ *Calculer* $E(X - Y \,|\mathcal{A})$. *En déduire* $E(X\,|\mathcal{A})$
2/ *Calculer* $E\left[(X-Y)^2\,|\mathcal{A}\right]$. *En déduire* $E(X^2\,|\mathcal{A})$.

Exercice 4 *Soit* Y *une v.a. intégrable et* $\mathcal{F}_n$ *une filtration. Montrer que* $X_n = E\left(Y \mid \mathcal{F}_n\right)$ *est une martingale.*

Exercice 5 *Soit* X_n *une marche aléatoire, i.e.* $X_n = Z_1 + ... + Z_n$, *avec* (Z_n) *une suite de v.a. i.i.d. telles que* $P(Z_n = 1) = P(Z_n = -1) = \frac{1}{2}$. *Montrer que* $X_n^2 - n$ *est une martingale relativement à la filtration* $\mathcal{F}_n = \sigma\left(Z_1, ..., Z_n\right)$.

Exercice 6 *Lequels de ces temps représente un temps d'arrêt:*
1/ Un joueur décide de s'arrêter au temps T_1 *où sa fortune est maximale.*
2/ Un joueur décide de s'arrêter au temps T_2 *lorsque sa fortune dépasse le double de sa mise initiale.*
3/ Un actionnaire demande à son banquier de vendre ses actions au temps T_3 *où le cours de l'action atteint son maximum.*
4/ Un actionnaire demande à son banquier de vendre au temps T_4 *où le cours de l'action a réalisé pour la première fois une progression de 15% sur les 100 derniers jours*

Exercice 7 *Soit* S *et* T *deux temps d'arrêt relativement à la filtration* $\mathcal{F}_n$. *Montrer que* $S+T$ *et* $S \wedge T$ *sont des temps d'arrêts.*

Exercice 8 *Deux joueurs jouent à un jeu équitable. On note* Z_n *le résultat de la* $n^{ième}$ *partie pour le premier joueur. Les* Z_n *sont indépendantes et:* $P(Z_n = +1) = P(Z_n = -1) = 1/2$. *On note* $\mathcal{F}_n$ *la filtration engendrée par les résultats des n premières parties, et* X_n *la fortune du premier joueur après la* $n^{ième}$ *partie. Sa fortune initiale est fixée:* $X_0 = a$. *pour tout* $n \geq 1$, *on a donc:* $X_n = a + Z_1 + ... + Z_n$. *Le second joueur a une fortune initiale fixée à* b *et la partie se termine par la ruine de l'un des deux joueurs. On définit donc:* $T = \min\left\{n,\ X_n = 0 \text{ ou } X_n = a+b\right\}$.
1/ *Montrer que* $\left(X_n\right)_n$ *est une martingale et que* T *est un temps d'arrêt, relativement à* $\left(\mathcal{F}_n\right)$.

2/ *Montrer que:* $P(T>n) \leq P(0<X_n<a+b)$. *Déduire du théorème de la limite centrale que* $P(T>n)$ *tend vers* 0, *puis que* T *est fini.*
3/ *Déduire du théorème d'arrêt que:* $P(X_T=0)=\dfrac{b}{a+b}$ *et* $P(X_T=a+b)=\dfrac{a}{a+b}$.
4/ *Montrer que* $E(X_T^2)-E(T)=a^2$. *Conclure que* $E(T)=ab$.
5/ *Observons que pour tout réel* λ : $E\left[e^{\lambda Z_n}\right]=\frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2}=\cosh(\lambda)$. *Pour tout* $n\geq 0$, *on pose* $Y_n(\lambda)=\exp(\lambda X_n)(\cosh(\lambda))^{-n}$. *Montrer que* $(Y_n(\lambda))_n$ *est une martingale.*
6/ *Déduire du théorème d'arrêt que:* $E\left[(\cosh(\lambda))^{-T}\left(I_0(X_T)+e^{\lambda(a+b)}I_{a+b}(X_T)\right)\right]=e^{\lambda a}$.

Exercice 9 *Trois joueurs jouent à un jeu équitable: chacun a la même probabilité* $(1/3)$ *de gagner. A chaque partie il y a un gagnant, qui reçoit* $+2$. *Les deux autres perdent* -1 *chacun. On note* $\mathcal{F}_n$ *la filtration engendrée par les résultats des* n *premières parties, et* X_n, Y_n, Z_n *les fortunes respectives des trois joueurs à l'issue des* n *premières parties. Les fortunes initiales sont fixées:* $X_0=a$, $Y_0=b$, $Z_0=c$. *Chacune des trois supérieures ou égale à 1. On note* $s=a+b+c$ *la fortune totale, qui reste constante au cours du jeu.*
1/ Montrer que (X_n), (Y_n) *et* (Z_n) *sont des martingales relativement à* $\mathcal{F}_n$.
2/ Exprimer $E\left(X_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n\right)$ *en fonction de* X_n. *Vérifier que* (X_n^2) *est une sous-martingale.*
3/ Exprimer $E(X_{n+1}Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)$ *en fonction de* X_nY_n. *En déduire que* (X_nY_n) *est une sur-martingale.*
4/ Exprimer $E(X_{n+1}Y_{n+1}Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)$ *en fonction de* $X_nY_nZ_n$. *En déduire que* $(X_nY_nZ_n)$ *est une sur-martingale.*
5/ On note $R_n=X_nY_nZ_n+n(s-2)$. *Montrer que* (R_n) *est une martingale.*
6/ On note T *le premier instant de ruine de l'un des joueurs:* $T=\inf\{n\geq 1,\ X_nY_nZ_n=0\}$. *Montrer que* T *est un temps d'arrêt fini.*
7/ Déduire du théorème d'arrêt que $E(T)=\dfrac{abc}{s-2}$. *que se passe-t-il dans le cas particulier* $a=b=c=1$?