IV Fonctions caractéristiques

4.1. Somme de variables aléatoires réelles indépendantes

On se propose de trouver la loi de la *v.a.r*; $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$, où $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Proposition:

Soient X_1, X_2 deux v.a.c, de densité respectivement f_1 et f_2. Alors v.a.r. $X_1 + X_2$ admet pour densité, la fonction f donnée par:

$$f(y) = \int_{\mathbb{R}} f_1(u)\ \ f_2(y-u)\,du = \int_{\mathbb{R}} f_2(v)\ \ f_2(y-v)\,dv$$

Preuve:

On considère le couple aléatoire

$$Y = (Y_1, Y_2) = (X_1 + X_2, X_2).$$

Alors $Y = h(X)$, où $X = (X_1, X_2)$ et $h : \mathbb{R}^2 \to Y = (Y_1, Y_2)$, définie par

$$h(x_1, x_2) = (x_{1+}x_2, x_2).$$

h ainsi définie est un difféomorphisme (*i.e.* h est bijective, inversible et également h^{-1}). De plus

$$h^{-1}(y_1, y_2) = (y_{1-}y_2, y_2),$$

d'où d'après la formule des transformations de vecteurs aléatoires, la densité du vecteur alatoire Y est:

$$f_Y(y_1, y_2) = f_X\left(h^{-1}(y_1, y_2)\right)\left|J\left(h^{-1}(y_1, y_2)\right)\right|,$$

où f_X est la densité de X et J est déterminant de la matrice jacobienne de h^{-1}. On a

$$J\left(h^{-1}(y_1, y_2)\right) \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Comme X_1 et X_2 sont indépendantes, alors

$$f_X(x_1, x_2) = f_1(x_1)\, f_2(x_2),$$

d'où

$$f_Y(y_1, y_2) = f_X(y_{1-}y_2, y_2) = f_1(y_{1-}y_2)\, f_2(y_2).$$

Il résulte que la densité marginale f_{Y_1} est

$$f_{Y_1}(y_1) = \int_{\mathbb{R}} f_Y(y_1, y_2)\,dy_2 = \int_{\mathbb{R}} f_1(y_{1-}y_2)\, f_2(y_2)\,dy_2,$$

ce qu'il fallait démontrer.■

Notation:
On pose:

$$f_1 * f_2\,(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f_1\,(u)\;\; f_2\,(t-u)\,du$$

Définition:
$f_1 * f_2$ s'appelle le produit de concolution de f_1 et f_2.
On notera le produit de convolution est commutatif et associatif.
Généralisation:
On suppose que les v.a. $X_1, X_2, ..., X_n$ sont absolument continues de densités respectivement $f_1, f_2, ..., f_n$. Alors, la v.a. S admet comme densité la fonction:

$$f = f_1 * f_2 * ... * f_n.$$

Preuve:
Se démontre par récurrence. En effet, la propriété étant vraie pour $n = 2$ d'après la proposition précédante. Suppoant q'elle est vraie au rang $p < n$, c'est à dire que la densité de $X_1 + X_2 + ... + X_{n-1}$ est

$$f_{X_1+X_2+...+X_{n-1}} = f_1 * f_2 * ... * f_{n-1}.$$

Comme $X_1+X_2+...+X_n = (X_1 + X_2 + ... + X_{n-1})+X_n$ et comme les variables aléatoires $X_1 + X_2 + ... + X_{n-1}$ et X_n sont indépendantes, alors on a d'après la proposition précédante

$$f_{X_1+X_2+...+X_n} = f_{X_1+X_2+...+X_{n-1}}*f_n = (f_1 * f_2 * ... * f_{n-1})*f_n = f_1*f_2*...*f_n,$$

ce qui achève la démonstration.■

Exemple:
Supposons que $X_i \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu_i, \sigma_i^2\right)$ pour $i = 1, 2$. Les densités respectives de X_i et de $X = X_1 + X_2$ $(i = 1, 2)$ sont

$$f_i\,(t) = \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu_i}{\sigma_i}\right)^2} \text{ et } f\,(t) = f_1 * f_2\,(t) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}q(t,u)}du,$$

où

$$\begin{aligned} q\,(t,u) &= \left(\frac{u-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{t-u-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 \\ &= u^2\left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right) - 2u\left(\frac{t-\mu_2}{\sigma_2} + \frac{\mu_1}{\sigma_1}\right) + \frac{(t-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} + \frac{\mu_1^2}{\sigma_1^2} \\ &= \left(u\frac{\sigma}{\sigma_1\sigma_2}\right)^2 - 2u\left(\frac{t-\mu_2}{\sigma_2} + \frac{\mu_1}{\sigma_1}\right) + \frac{(t-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} + \frac{\mu_1^2}{\sigma_1^2}, \end{aligned}$$

d'où en posant

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 \text{ et } \sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2,$$

$$\begin{aligned}
q(t,u) &= \left[u\frac{\sigma}{\sigma_1\sigma_2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma}\left(\frac{t-\mu_2}{\sigma_2^2} + \frac{\mu_1}{\sigma_1^2}\right)\right]^2 \\
&\quad + \frac{(t-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} + \frac{\mu_1^2}{\sigma_1^2} - \left(\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma}\left(\frac{t-\mu_2}{\sigma_2^2} + \frac{\mu_1}{\sigma_1^2}\right)\right)^2 \\
&= \left[u\frac{\sigma}{\sigma_1\sigma_2} - \alpha\right]^2 + \frac{(t-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} + \frac{\mu_1^2}{\sigma_1^2} \\
&\quad - \left[\left(\frac{\sigma_1}{\sigma}\right)^2 \frac{(t-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma}\right)^2 \frac{\mu_1^2}{\sigma_1^2} + 2\frac{(t-\mu_2)\mu_1}{\sigma^2}\right] \\
&= \left[u\frac{\sigma}{\sigma_1\sigma_2} - \alpha\right]^2 + \frac{(t-\mu_2)^2}{\sigma^2} + \frac{\mu_1^2}{\sigma^2} - 2\frac{(t-\mu_2)\mu_1}{\sigma^2} \\
&= \left[u\frac{\sigma}{\sigma_1\sigma_2} - \alpha\right]^2 + \frac{(t-\mu)^2}{\sigma^2},
\end{aligned}$$

où $\alpha = \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma}\left(\frac{t-\mu_2}{\sigma_2^2} + \frac{\mu_1}{\sigma_1^2}\right)$. Il résulte que

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}\left[u\frac{\sigma}{\sigma_1\sigma_2}-\alpha\right]^2} du e^{-\frac{1}{2}\frac{(t-\mu)^2}{\sigma^2}}.$$

Or

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}\left[u\frac{\sigma}{\sigma_1\sigma_2}-\alpha\right]^2} du = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}\frac{\left[u-\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma}\alpha\right]^2}{\left(\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma}\right)^2}} du = \sqrt{2\pi}\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma}$$

car la fonction $g(u) = \frac{\sigma}{\sigma_1\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{\left[u-\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma}\alpha\right]^2}{\left(\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma}\right)^2}}$ est la densité de la loi $\mathcal{N}\left(\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma}\alpha, \left(\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma}\right)^2\right)$ donc son intégrale vaut 1. On conclut que

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(t-\mu)^2}{\sigma^2}}.$$

Cela signifie que $X_1 + X_2 \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Ainsi la somme de deux variables aléatoires gaussiennes est également gaussienne.

4.2. Variables aléatoires complexes, fonctions caractéristiques

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé.

Définition:

On appelle variable aléatoire complexe (on écrit v.a.com.), toute application $X : \Omega \to \mathbb{C}$ *le*

corps des nombres complexes telle que $X_1 = \mathrm{Re}(X)$ *et* $X_2 = \mathrm{Im}(X)$ *soit des variables*

aléatoires réelles.

Définition:

Une v.a.com. $X = X_1 + iX_2$ *est dite intégrable si* X_1 *et* X_2 *sont des v.a.r. intégrables. Dans* *ce cas on définit l'espérance mathématique de X comme étant le nombre complexe*

$$\mathbb{E}(X) := \mathbb{E}(X_1) + i\mathbb{E}(X_2).$$

On notera que l'application $X \mapsto \mathbb{E}(X)$ est linéaire et que $\mathbb{E}(X) = \int\limits_{\Omega} X dP$ au sens de Lebesgue. Il est immédiat que l'ensemble des *v.a.com.* est un espace vectoriel. De plus le théorème de la convergence dominée de Lebesgue est encore valable pour une suite de *v.a.com.* et que si X est une *v.a.com.*, alors on a

$$|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|).$$

Cependant le théorème de la convergence monotone n'a pas de sens, car il n'y a pas d'ordre dans $\mathbb{C}$.

Définition:

Soit X un vecteur aléatoire de dimension n. On appelle fonction caractéristique de X, la

fonction $\varphi_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, définie par:

$$\varphi_X(u) = \mathbb{E}\left(e^{i\langle u,X\rangle}\right),$$

où $\langle .,. \rangle$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.

Remarques:

(i)On a

$$\varphi_X(u) = \int\limits_{\Omega} e^{i\langle u,X\rangle} dP = \mathbb{E}(\cos\langle u,X\rangle) + i\mathbb{E}(\sin\langle u,X\rangle).$$

(ii)Si X est continu (resp.discret) de densité f (resp. de fonction de masse $P(X=x)$),

alors on a

$$\varphi_X(u) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{i\langle u,x\rangle} dx \text{ (resp. } \varphi_X(u) = \sum_{x\in\mathbb{R}^n} P(X=x) e^{i\langle u,x\rangle}.$$

Cela ignifie que φ_X n'est autre que la transformé de Fourrier de f (resp. $P(X=x)$).

(iii)On a $\varphi_X(0) = 1$ et $|\varphi_X(u)| \leq 1$ pour tout $u \in \mathbb{R}^n$.

En effet $\varphi_X(0) = \mathbb{E}(1) = 1$ et $|\varphi_X(u)| \leq \mathbb{E}\left(\left|e^{i\langle u,X\rangle}\right|\right) = \mathbb{E}(1) = 1$.

(vi)On a

$$\overline{\varphi_X(u)} = \varphi_X(-u).$$

En effet;

$$\overline{\varphi_X(u)} = \mathbb{E}\left(\overline{e^{i\langle u,X\rangle}}\right) = \mathbb{E}\left(e^{-i\langle u,X\rangle}\right) = \varphi_X(-u)$$

(v)La fonction $u \mapsto \mathrm{Re}(\varphi_X(u))$ est paire, alors que la fonction $u \mapsto \mathrm{Im}(\varphi_X(u))$ est impaire.

En effet

$$\mathrm{Re}\left(\varphi_X(u)\right) = \frac{\varphi_X(u) + \overline{\varphi_X(u)}}{2} = \frac{\varphi_X(u) + \varphi_X(-u)}{2}$$

et

$$\mathrm{Im}\left(\varphi_X(u)\right) = \frac{\varphi_X(u) - \overline{\varphi_X(u)}}{2i} = \frac{\varphi_X(u) - \varphi_X(-u)}{2i}.$$

Proposition:

Soient X un vecteur aléatoire de dimension n, $b \in \mathbb{R}^n$ et A une matrice carrée de

dimension n. Alors la fonction caractéristique du vecteur alatoire $Y := AX + b$ est donnée

par

$$\varphi_Y(u) = e^{i\langle u,b\rangle}\varphi_X\left({}^T\!Au\right).$$

Démonstration:

On a par linéarité de l'espérance et bilinéarité du produit scalaire,

$$\varphi_Y(u) = \mathbb{E}\left(e^{iu(\langle u,Ax\rangle + \langle u,b\rangle)}\right) = e^{i\langle u,b\rangle}\mathbb{E}\left(e^{iu\langle u,Ax\rangle}\right) = e^{i\langle u,b\rangle}\mathbb{E}\left(e^{iu\left\langle {}^T\!Au,X\right\rangle}\right) = e^{i\langle u,b\rangle}\varphi_X\left({}^T\!Au\right).$$

■

Exemples:

1.Si $X \rightsquigarrow \mathcal{U}([-T,T])$ (la loi uniforme sur l'intervalle symétrique $[-T,T]$); X admet pour densité la fonction $f(x) = \frac{1}{2T}\mathbf{1}_{[-T,T]}(x)$, d'où

$$\varphi_X(u) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{iux}dx = \frac{1}{2iuT}\left[e^{iux}\right]_{-T}^{T} = \frac{\sin(Tu)}{Tu} \text{ si } u \neq 0.$$

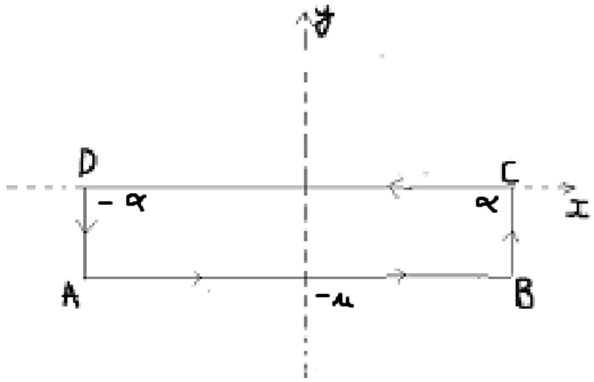
2.Si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$, ce qui signifie que X admet comme densité, la fonction:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

On a

$$\varphi_X(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}e^{iux}dx = \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x-iu)^2}dx \qquad (*)$$

Pour calculer l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x-iu)^2}dx$, on utilise le contour fermé orienté suivant (ici, on suppose que $u > 0$, le raisonnement est le même si $u < 0$):



Comme la fonction $e^{-\frac{z^2}{2}}$ est holomorphe, son intégrale dur le contour $ABCD$ est nulle. En outre, on a

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \int_{\overrightarrow{BC}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right| = \left| \int_{-u}^{0} e^{-\frac{1}{2}(\alpha - ix)^2} dx \right| = e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \left| \int_{-u}^{0} e^{\left(\frac{x^2}{2} - iux\right)} dx \right| \\ &\leq e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \int_{-u}^{0} \left| e^{-iux} \right| e^{\frac{x^2}{2}} dx = e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \int_{0}^{|u|} e^{\frac{x^2}{2}} dx, \end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{\alpha \to \infty} \int_{\overrightarrow{BC}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0.$$

Par la même méthode, on montre que

$$0 \leq \left| \int_{\overrightarrow{DA}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right| \leq e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \int_{0}^{|u|} e^{\frac{x^2}{2}} dx.$$

Par suite

$$\lim_{\alpha \to \infty} \int_{\overrightarrow{DA}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0.$$

Il résulte que

$$\lim_{\alpha \to \infty} \left(\int_{\overrightarrow{AB}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \int_{\overrightarrow{DC}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right) = 0.$$

Or

$$\lim_{\alpha \to \infty} \int_{\overrightarrow{AB}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-iu)^2} dx \text{ et } \lim_{\alpha \to \infty} \int_{\overrightarrow{DC}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi},$$

d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-iu)^2} dx = \sqrt{2\pi}$$

et par suite

$$\varphi_X(u) = e^{-\frac{1}{2}u^2},$$

d'aprés la formule $(*)$.

3.Si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. On sait que la *v.a.r.* $X^* := \frac{X-\mu}{\sigma} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$, d'où $\varphi_{X^*}(u) = e^{-\frac{1}{2}u^2}$. Comme $X = \sigma X^* + \mu$, alors on d'aprés la proposition précédante

$$\varphi_X(u) = e^{i\mu u}\varphi_{X^*}(\sigma u) = e^{i\mu u}e^{-\frac{1}{2}(\sigma u)^2}$$

soit

$$\varphi_X(u) = e^{i\mu u - \frac{1}{2}(\sigma u)^2}.$$

4.Soit X un vecteur aléatoire gaussien de dimension n tel que $X \rightsquigarrow \mathcal{N}_n(m, C)$. On sait que pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, la *v.a.r.* $\langle u, X\rangle$ est gaussienne. De plus

$$\mathbb{E}(\langle u, X\rangle) = \sum_{i=1}^{n} u_i \mathbb{E}(X_i) = \langle u, m\rangle \text{ et } var(\langle u, X\rangle) =^T u.C.u$$

Ainsi $\langle u, X\rangle \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, où $\mu = \langle u, m\rangle$ et $\sigma^2 =^T u.C.u$, d'où, d'aprés l'exemple précédant, sa fonction caractéristique

$$\varphi_{\langle u, X\rangle}(t) = e^{i\mu t - \frac{1}{2}(\sigma t)^2}.$$

La fonction caractéristique de X est donc

$$\varphi_X(u) = \mathbb{E}\left(e^{i\langle u, X\rangle}\right) = \varphi_{\langle u, X\rangle}(1) = e^{i\mu - \frac{1}{2}\sigma^2},$$

soit

$$\varphi_X(u) = e^{i\langle u, m\rangle - \frac{1}{2}{}^T u.C.u.}$$

Proposition:

Soient X_1, X_2 deux v.a.r. indépendantes, de fonctions caractéristiques respectivement

$\varphi_{X_1}, \varphi_{X_2}$. *Alors la fonction caractéristique de $X_1 + X_2$ est*:

$$\varphi_{X_1+X_2} = \varphi_{X_1}.\varphi_{X_2}.$$

Preuve:

Comme X_1 et X_2 sont indépendantes, alors on a $\mathbb{E}\left(e^{i\langle u, X_1\rangle}e^{i\langle u, X_2\rangle}\right) = \mathbb{E}\left(e^{i\langle u, X_1\rangle}\right)\mathbb{E}\left(e^{i\langle u, X_2\rangle}\right)$, d'où

$$\varphi_{X_1+X_2}(u) = \mathbb{E}\left(e^{i\langle u, X_1\rangle}e^{i\langle u, X_2\rangle}\right) = \mathbb{E}\left(e^{i\langle u, X_1\rangle}\right)\mathbb{E}\left(e^{i\langle u, X_2\rangle}\right) = \varphi_{X_1}(u)\varphi_{X_2}(u),$$

ce qu'il fallait démontrer.■

Généralisation:(se démontre par récurrence)
Si $X_1, X_2, ..., X_n$ sont des v.a.r. indépendantes, alors on a

$$\varphi_{X_1+X_2+...+X_n} = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}.$$

4.3. Formule d'inversion, moments
Proposition:
Soit X une v.a.r.de fonction caractéristique φ et de fonction de répartition F. Alors pour tout $a < b$, on a:

$$\frac{1}{2}\left[F(b) + F\left(b^-\right)\right] - \frac{1}{2}\left[F(ab) + F\left(a^-\right)\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-iau} - e^{-iub}}{iu} \varphi(u)\, du$$

Démonstration:
On pose

$$\psi(u) = \frac{e^{-iau} - e^{-iub}}{iu} \varphi(u)$$

Remarquons que pour tout $y > 0$ et $a \geq 0$,

$$0 \leq \int_0^y \frac{\sin ax}{x} dx \leq \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

et

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ si } b > 0 \\ 0 \text{ si } b = 0 \\ -\frac{\pi}{2} \text{ si } b < 0 \end{cases}.$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \psi(u)\, du &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-iau} - e^{-iub}}{iu} \left(\int_\Omega e^{iuX(\omega)} P(d\omega) \right) du \\ &\overset{Thm.Fubini}{=} \frac{1}{2\pi} \int_\Omega \left(\int_{-T}^{T} \frac{e^{-iu(X(\omega)-a)} - e^{-iu(X(\omega)-b)}}{iu} du \right) P(d\omega) \\ &= \int_\Omega I(\omega, T)\, P(d\omega), \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$
\begin{aligned}
I(\omega,T) &= \int_{-T}^{T} \frac{e^{-iu(X(\omega)-a)} - e^{-iu(X(\omega)-b)}}{2\pi iu} du \\
&= \int_{-T}^{T} \frac{\cos u(X(\omega)-a) - \cos u(X(\omega)-b)}{2\pi iu} du \\
&\quad + \int_{-T}^{T} \frac{\sin u(X(\omega)-a) - \sin u(X(\omega)-b)}{2\pi u} du
\end{aligned}
$$

Comme la fonction $\frac{\cos u(X(\omega)-a)-\cos u(X(\omega)-b)}{iu}$ est impaire, alors

$$
\int_{-T}^{T} \frac{\cos u(X(\omega)-a) - \cos u(X(\omega)-b)}{2\pi iu} du = 0
$$

et comme la fonction $\frac{\sin u(X(\omega)-a)-\sin u(X(\omega)-b)}{u}$ est paire, alors

$$
\begin{aligned}
\int_{-T}^{T} \frac{\sin u(X(\omega)-a) - \sin u(X(\omega)-b)}{2\pi u} du &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{T} \frac{\sin u(X(\omega)-a) - \sin u(X(\omega)-b)}{u} du \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{T} \frac{\sin u(X(\omega)-a)}{u} du - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{T} \frac{\sin u(X(\omega)-b)}{u} du,
\end{aligned}
$$

d'où

$$
I(\omega,T) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{T} \frac{\sin u(X(\omega)-a)}{u} du - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{T} \frac{\sin u(X(\omega)-b)}{u} du
$$

et on a

$$
\begin{aligned}
\lim_{T\to\infty} I(\omega,T) &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{\sin u(X(\omega)-a)}{u} du - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{\sin u(X(\omega)-b)}{u} du \\
&= \left\{ \begin{array}{c}
-\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \text{ si } X(\omega) < a \\
0 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \text{ si } X(\omega) = a \\
\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \text{ si } a < X(\omega) < b \\
\frac{1}{2} - (0) = \frac{1}{2} \text{ si } X(\omega) = b \\
\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right) = 0 \text{ si } X(\omega) > a
\end{array} \right.
\end{aligned}
$$

Cela signifie que

$$
\lim_{T\to\infty} I(\omega,T) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{X=a\}} + \mathbf{1}_{\{a<X<b\}} + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{X=b\}}
$$

Comme

$$\begin{aligned}|I(\omega,T)| &\leq \frac{1}{\pi}\left|\int_0^T \frac{\sin u\,(X(\omega)-a)}{u}du\right| + \frac{1}{\pi}\left|\int_0^T \frac{\sin u\,(X(\omega)-b)}{u}du\right| \\ &\leq \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}du = 1,\end{aligned}$$

pour tout $\omega \in \Omega$ et pour tout $T > 0$, alors on peut appliqué le théorème de la convergence dominée de Lebesgue:

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty}\int_\Omega I(\omega,T)\,P(d\omega) &= \int_\Omega \lim_{T\to\infty} I(\omega,T)\,P(d\omega) \\ &= \frac{1}{2}P(X=a) + P(a<X<b) + \frac{1}{2}P(X=b) \\ &= \frac{1}{2}\left[F(a)-F\left(a^-\right)\right] + \frac{1}{2}\left[F(b)-F\left(b^-\right)\right] + \left[F\left(b^-\right)-F(a)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[F(b)+F\left(b^-\right)\right] - \frac{1}{2}\left[F(a)+Fa^-\right].\end{aligned}$$

On conclut que

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\psi(u)\,du = \lim_{T\to\infty}\int_\Omega I(\omega,T)\,P(d\omega) = \frac{1}{2}\left[F(b)+F\left(b^-\right)\right] - \frac{1}{2}\left[F(a)+Fa^-\right],$$

ce qui achève la démonstration.■

Théorème:(Formule d'inversion)

Si la fonction caractéristique φ d'une v.a.r. X est intégrable au sens de Lebesgue, alors

X admet une densité f donnée par:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux}\varphi(u)\,du$$

Preuve:

Montrons d'abord que laa fonction de répartition F de X est continue en tout point x de $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit (x_n) une suite croissante, convergente vers x et telle que $x_n < x$, F continue en x_n et $x - x_n \leq 1$. Posons:

$$\psi_n(u) = \frac{e^{-iux_n} - e^{-iux}}{iu}\varphi(u).$$

On a alors $\lim_{n\to\infty}\psi_n(u) = 0$ et pour tout n,

$$|\psi_n(u)| = \left|\int_{x_n}^{x} e^{-iut}dt\varphi(u)\right| \leq (x-x_n)|\varphi(u)| \leq |\varphi(u)| \text{ qui est intégrable.}$$

Il résulte de théorème de la convergence dominée que:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_n(u)=0.$$

De la dernière prposition et du fait que F soit continue en x_n on a $F(x_n^-)=F(x_n)$ et

$$\frac{1}{2}\left[F\left(x^-\right)+F(x)\right]-F(x_n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_n(u),$$

d'où, en passant à la limite,

$$\frac{1}{2}\left[F\left(x^-\right)+F(x)\right]-\lim_{n\to\infty}F(x_n)=0$$

et comme $\lim\limits_{n\to\infty}F(x_n)=F(x^-)$, alors

$$F\left(x^-\right)=F(x),$$

qui signifie que F est continue en tout point x de $\mathbb{R}$.

On déduit de la proposition précédante que pour tout $a<b$:

$$F(b)-F(a)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\varphi(u)\left(\int_a^b e^{-iux}dx\right)du=\int_a^b\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}e^{-iux}\varphi(u)\,du\right)dx,$$

d'après le théorème de Fibini, soit

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx,$$

où $f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}e^{-iux}\varphi(u)\,du$, qui signifie que f est la densité de X.$\blacksquare$

Proposition:

Soit $X\in\mathcal{L}^k$ une v.a.r.de fonction de répartition F et de *fonction caractéristique φ. Alors φ*

est k fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a:

$$\varphi^{(l)}(u)=\int_{\mathbb{R}}(iX)^l e^{iuX}dP,\quad l=1,2,...,k.$$

En particulier $\varphi^{(l)}(0)=i^l\mathbb{E}\left(X^l\right)$.

Preuve:

Pour ne pas alourdir la démonstration, on donne la preuve seulement dans le cas où $k=1$. On suppose donc que $X\in\mathcal{L}^1$ et on démontre que φ est dérivable et que sa dérivée est continue. On a, pour toute suite réelle (h_n) convergente vers 0,

$$\frac{\varphi(u+h_n)-\varphi(u)}{h_n}=\int\limits_{\Omega}\frac{e^{i(u+h_n)X(\omega)}-e^{iuX(\omega)}}{h_n}P(d\omega).$$

Comme

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{e^{i(u+h_n)X(\omega)}-e^{iuX(\omega)}}{h_n} &= iX(\omega)e^{iuX(\omega)} \text{ et}\\ \left|\frac{e^{i(u+h_n)X(\omega)}-e^{iuX(\omega)}}{h_n}\right| &= \left|iXe^{i(u+\theta h)X(\omega)}\right|\leq|X(\omega)|, \text{ qui est intégrable}\end{aligned}$$

alors on a, d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi(u+h_n)-\varphi(u)}{h_n} &= \int\limits_{\Omega}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{i(u+h_n)X(\omega)}-e^{iuX(\omega)}}{h_n}\right)P(d\omega)\\ &= \int\limits_{\Omega}iXe^{iuX(\omega)}P(d\omega)\\ &= \int\limits_{\Omega}iXe^{iuX}dP,\end{aligned}$$

qui signifie que φ est dérivable et

$$\varphi'(u)=\int\limits_{\Omega}iXe^{iuX}dP.$$

On considère maintenant une suite (u_n) qui converge vers u. Comme

$$\lim_{n\to\infty}iX(\omega)e^{iu_nX(\omega)}=iX(\omega)e^{iuX(\omega)} \text{ et comme } \left|iX(\omega)e^{iu_nX(\omega)}\right|\leq|X(\omega)|,$$

alors on a d'après le théorème de la convergence dominée

$$\lim_{n\to\infty}\varphi'(u_n)=\int\limits_{\Omega}iXe^{iuX}dP=\varphi(u).$$

φ est donc 1 fois continument dérivable, ce qu'il fallait démontrer.■

Corollaire:

Dans les mêmes condition de la proposition précédante, φ admet vun développement de

Taylor d'ordre k au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}\varphi(u) &= \varphi(0)+\varphi'(0)\frac{u}{1!}+.....+\varphi^{(k)}(0)\frac{u^k}{k!}+o\left(|u|^k\right)\\ &= 1+i\mathbb{E}(X)\frac{u}{1!}-\mathbb{E}\left(X^2\right)\frac{u^2}{2!}+...+(i)^k\,\mathbb{E}\left(X^k\right)\frac{u^k}{k!}+o\left(|u|^k\right)\end{aligned}$$

On admettra le théorème suivant:

Théorème (de Lèvy):

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de v.a.r.. On note par* φ_n *la fonction caractéristique de* $X_n, n \geq 1$.

On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(u) = \varphi(u), u \in \mathbb{R}$, *où* φ *est une fonction caractéristique d'une*

v.a.r. X, *continue en* 0. *Alors*

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X.$$

Théorème (de la limite centrale)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de v.a.r. i.i.d. et de même loi que* X, *où* $\mathbb{E}(X) = 0$ *et*

$\sigma^2 := var(X) < \infty$. *Soit* $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ *et* $Z_n = \frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}$. *Alors*

$$Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y, \text{ où } Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1).$$

Preuve:

D'après le théorème de Lèvy, il suffit de montrer que la fonction caractéristique φ_{Z_n} de Z_n converge vers la fonction carctéristique de la loi $\mathcal{N}(0,1)$, qui n'est autre que $e^{-\frac{u^2}{2}}$ (qui est continue en 0). On a, en notant par φ la fonction caractéristique de X, φ admet un développement de Taylor d'ordre $2 : \varphi(u) = 1 - \sigma^2 \frac{u^2}{2} + o(u^2)$, d'où

$$\begin{aligned}
\varphi_{Z_n}(u) &= \mathbb{E}\left(e^{iu\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}}\right) = \varphi_{S_n}\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \left(\varphi\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n \\
&= \left\{1 - \frac{u^2}{2n} + o\left(\frac{u^2}{\sigma^2 n}\right)\right\}^n,
\end{aligned}$$

d'où en passant au logarithme

$$\begin{aligned}
\log \varphi_{Z_n}(u) &= n \log\left\{1 - \frac{u^2}{2n} + o\left(\frac{u^2}{\sigma^2 n}\right)\right\} \\
&= n\left\{-\frac{u^2}{2n} + o\left(\frac{u^2}{\sigma^2 n}\right)\right\} \\
&= -\frac{u^2}{2} + no\left(\frac{u^2}{\sigma^2 n}\right),
\end{aligned}$$

Il résulte que

$$\lim_{n\to\infty} \log \varphi_{Z_n}(u) = -\frac{u^2}{2} \text{ et } \lim_{n\to\infty} \varphi_{Z_n}(u) = e^{-\frac{u^2}{2}},$$

ce qu'il fallait démontrer.■