Université Blida 1 le 20 Mai 2018
Faculté des Sciences
Département de Maths 3ème année Maths

Examen de Statistique

Exercice 1:(4 points) Soient $X_1, X_2, ...X_n$ n variables aléatoires indépendantes suivant la même loi $N(0,1)$. On définit

$\overline{X}_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X_i$ et $\overline{X}_{n-k} = \frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n} X_i$

Trouver la loi de:

(1) $Y = \frac{1}{2}(\overline{X}_k - \overline{X}_{n-k})$; (2) $T = k\,\overline{X}_k^2 + (n-k)\,\overline{X}_{n-k}^2$;
(3) $Z = \frac{X_1^2}{X_3^2}$; (4) $W = \frac{X_1}{|X_n|}$

Exercice 2:(6,5 points)

(1) Montrer qu'un estimateur sans biais et efficace est convergent.
(2) a) Calculer la moyenne et la variance de la loi uniforme sur $[0, 2a]$ a étant un réèl positif strictement.

b) La moyenne d'échantillon $\overline{X}$ est-elle un estimateur sans biais et convergent du paramètre a?

c) $X_1, X_2, ...X_n$ étant un n-échantillon de la loi uniforme sur $[0, 2a]$ déterminer la loi de la v.a.r $Y = SupX_i \in$

d) Calculer E(Y) et Var(Y). En déduire un nouvel estimateur sans biais et convergent de a. Lequel de ces deux estimateurs est le plus efficace?

Exercice 3: (5 points)

Un échantillon de 12 transistors indique une durée de vie moyenne $\overline{X} = 9000h$ avec un écart-type $\sigma = 3000h$.

Trouver les limites pour la durée de vie réèle X pour une grande production, avec un intervalle de confiance de:

(a)95% ; (b)99%

Exercice 4:(5 points)

L'écart-type des tailles de n=11 veaux choisis au hasard dans un élevage de 1000 veaux est de 10 cm. Trouver une limite inférieure de l'écart-type σ pour la totalité des veaux avec un coefficient de confiance égal à:(a)95% ; (b)99%.

Remarque:Les exercices 1 et 2 serviront pour 50% dans la note de TD.

L3 Maths Correction Examen Maths Statistique Inférentielle Mai 2018

Exo 1 : $X_i \rightsquigarrow N(0,1)$ $\forall i = \overline{1,n}$

$$\sum_{i=1}^{k} X_i \rightsquigarrow N(0,k) \Rightarrow \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X_i = \overline{X}_k \rightsquigarrow N(0, 1/k)$$

$$\sum_{i=k+1}^{n} X_i \rightsquigarrow N(0, n-k) \Rightarrow \frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n} X_i = \overline{X}_{n-k} \rightsquigarrow N\left(0, \frac{1}{n-k}\right)$$

donc ① $Y = \frac{1}{2}\left(\overline{X}_k - \overline{X}_{n-k}\right) \rightsquigarrow N\left(0, \frac{n}{4k(n-k)}\right)$ 1,5 pt

② $\sqrt{k}\,\overline{X}_k \rightsquigarrow N(0,1) \Rightarrow k\overline{X}_k^2 \rightsquigarrow \chi^2_1 = \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$\sqrt{n-k}\,\overline{X}_{n-k} \rightsquigarrow N(0,1) \Rightarrow (n-k)\overline{X}_{n-k}^2 \rightsquigarrow \chi^2_1 = \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

donc $T = k\overline{X}_k^2 + (n-k)\overline{X}_{n-k}^2 \rightsquigarrow \chi^2_2 = \Gamma\left(1, \frac{1}{2}\right)$ 1,5 pt

③ $\left.\begin{array}{l} X_1^2 \rightsquigarrow \chi^2_1 \\ X_3^2 \rightsquigarrow \chi^2_1 \end{array}\right\} \Rightarrow Z = \frac{X_1^2}{X_3^2} \rightsquigarrow F_{1,1}$ 1 pt

④ $\left.\begin{array}{l} X_1 \rightsquigarrow N(0,1) \\ X_n^2 \rightsquigarrow \chi^2_1 \end{array}\right\} \Rightarrow W = \frac{X_1}{|X_n|} = \frac{X_1}{\sqrt{\frac{X_n^2}{1}}} \rightsquigarrow t_1$ 1 pt

Exo 2 :

① Soit T un estimateur sans biais et efficace de a

donc on a $E(T) = a$ et $\operatorname{Var} T = \frac{1}{I_n(a)} = \frac{1}{n I_1(a)}$ $\left(I_1(a) = E\left(\frac{\partial}{\partial a}\ln f(x,a)\right)^2\right)$

1,5 pt

Par conséquent $\lim_{n \to +\infty} \operatorname{Var} T = \lim_{\infty} \frac{1}{n I_1(a)} = 0 \Rightarrow$ T est donc un estimateur convergent de a.

2) $X \rightsquigarrow \mathcal{U}_{[0,2a]}$ $\qquad f_X(x) = \frac{1}{2a} \mathbb{1}_{[0,2a]}(x)$

a) $E(X) = \frac{1}{2a}\int_0^{2a} x\,dx = a$ (0,5)

$E(X^2) = \frac{1}{2a}\int_0^{2a} x^2\,dx = \frac{4a^2}{3} \Rightarrow \mathrm{Var}X = \frac{a^2}{3}$ (0,5)

b) $X_1, X_2, \dots, X_n$ étant un n-échantillon issu de X, on a

$E(\bar{X}) = a$ et $\mathrm{Var}(\bar{X}) = \frac{a^2}{3n}$. (0,5)

Comme $\lim_{\infty} \mathrm{Var}(\bar{X}) = 0 \Rightarrow \bar{X}$ est un estimateur sb et convergent de a (0,5)

c) $F_Y(y) = P(Y < y) = P(\operatorname{Sup} X_i < y) = (P(X < y))^n = F_X^n(y)$ (0,5)

avec $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{2a} & \text{si } 0 \leq x \leq 2a \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \Rightarrow F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \left(\frac{y}{2a}\right)^n & \text{si } 0 \leq y \leq 2a \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

d'où $f_Y(y) = n F_X^{n-1}(y) \cdot f_X(y) = \begin{cases} \frac{n \cdot y^{n-1}}{(2a)^n} & \text{si } 0 \leq y \leq 2a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ (1)

d) $E(Y) = \int_0^{2a} y f_Y(y)\,dy = \frac{2an}{n+1}$ (0,5)

$E(Y^2) = \int y^2 f(y)\,dy = \frac{4a^2 n}{n+2} \Rightarrow \mathrm{Var}Y = \frac{4a^2 n}{(n+2)(n+1)^2}$ (0,5)

Si on pose $T = \frac{n+1}{2n} Y$ on a $E(T) = a$ càd T est sb de a

et $\mathrm{Var}T = \left(\frac{n+1}{2n}\right)^2 \cdot \frac{4a^2 n}{(n+2)(n+1)^2} = \frac{a^2}{n(n+2)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ (0,5)

T est donc un estimateur sans biais et convergent de a

On a $\mathrm{Var}T < \mathrm{Var}\bar{X} \Rightarrow$ T est plus efficace que $\bar{X}$ (0

Exercice 3 : On suppose que $X \leadsto N(m, \sigma)$ avec m et σ inconnus

$$\bar{X} \leadsto N(m, \sigma/\sqrt{n}) \Rightarrow \frac{\bar{X}-m}{\sigma/\sqrt{n}} \leadsto N(0,1)$$

et $n\frac{S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \bar{X}}{\sigma}\right)^2 \leadsto \chi^2_{n-1}$

1 pt

donc $T = \dfrac{\frac{\bar{X}-m}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{nS^2}{\sigma^2(n-1)}}} = \dfrac{\bar{X}-m}{S}\sqrt{n-1} \leadsto t_{n-1} = t_{12-1} = t_{11}$

Student à 11 ddl

avec $n = 12$ et $\bar{X} = 9000$ et $S = 3000$.

Comme la loi de Student est symétrique, on doit avoir

$P(|T| < t) = \alpha$ 0,5

$P\left(-t < \frac{\bar{X}-m}{S}\sqrt{n-1} < t\right) = \alpha.$

$\Leftrightarrow P\left(-t < \frac{\bar{X}-m}{S}\sqrt{n-1} < t\right) = \alpha$ 0,5

$\Leftrightarrow P\left(\bar{X} - \frac{St}{\sqrt{n-1}} < m < \bar{X} + \frac{St}{\sqrt{n-1}}\right) = \alpha.$

Pour $\alpha = 0{,}95$ on a $t = 2{,}201$ (0,5) $\Rightarrow$ $m \in [7093{,}88 ; 10906{,}12]$ 1

" $\alpha = 0{,}99$ " " $t = 3{,}106$ (0,5) $\Rightarrow$ $m \in [6310{,}12 ; 11689{,}87]$. 1

Exo 4 : On a $n\frac{S^2}{\sigma^2} \leadsto \chi^2_{n-1} = \chi^2_{11-1}$ Khi-deux à 10 ddl.

donc $P\left(\chi^2_{10} = \frac{nS^2}{\sigma^2} > t\right) = 1-\alpha) \Leftrightarrow P\left(\sigma^2 < \frac{nS^2}{t}\right) = 1-\alpha$

Pour $\alpha = 95\% \Rightarrow t = 18{,}31$ (0,5) $\Rightarrow P\left(\sigma^2 < \frac{11 \times 100}{18{,}31}\right) = P(\sigma < 7{,}75)$ (0,5)

" $\alpha = 99\% \Rightarrow t = 23{,}21$ (0,5) $\Rightarrow P(\sigma < 6{,}88)$ (0,5)

càd qu'avec un coefficient de confiance égal à 95% (resp : 99%) l'écart-type de la population totale doit être supérieur à 7,75 (resp : 6,88)