Umbb/FS/Maths/Stat.

Master MSS 1 (Analyse des Données)

ahmedrahmoune.umbb@gmail.com

Année universitaire 2021-2022

Analyse des Données (Méthodes Factorielles)

Feuille de travaux Dirigés n° 1

Notions : Distance, projection et dérivation matricielle.

Exercice 1

(i) Calculer les longueurs (pour la métrique euclédienne dite la métrique usuelle) des vecteurs suivants et le cosinus des angles entre ces vecteurs pris deux à deux.

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad x_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(ii) Déterminer les valeurs α telles que les vecteurs suivants soient normés (de norme 1)

$$y_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ 3\alpha \end{bmatrix}, \; y_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ \alpha \\ 2\alpha \end{bmatrix}, \; y_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3\alpha \\ 4\alpha \\ 12\alpha \end{bmatrix}$$

(iii)Déterminer la valeur α telle que les vecteurs $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \\ \alpha \end{bmatrix}$ soient ortogonaux

(iv) Déterminer α, β, et γ tels que le vecteur $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ soit orthogonal à chacun des vecteurs

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 2

Soient $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ et $Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ muni de la métrique $M = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ et Δ_u la droite passant par l'origine et engendrée par le vecteur u= $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(i) Calculer les longueurs pour la métrique M des vecteur X et Y.

(ii) Calculer le cosinus de l'angle (X,Y)

(iii) Calculer Pr_{Δ_u}(X) et Pr_{Δ_u}(Y)

Exercice 3

Dans tout ce qui suit $\mathbb{R}^p$ (p>1) est muni de la métrique usuelle M=I_p de produit scalaire noté $< \, , >$

A) On considère une droite Δ_u passant par l'origine de $\mathbb{R}^p$ et engendrée par un vecteur u.

(i) Caractériser les éléments de cette droite.

(ii) Soit x$\in \mathbb{R}^p$, calculer Pr_{Δ_u}(x) projection I_p-orthogonale de x sur Δ_u.

(iii)Que devient Pr_{Δ_u}(x) lorsque u est unitaire.

B) Soit le sous-espace vectoriel C engendré par les deux vecteurs $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix}$ et $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ . \\ . \\ p \end{bmatrix}$ de $\mathbb{R}^p$

(i) Caractériser les éléments de C.

(ii) Calculer $<u_1, u_1>$, $<u_2, u_1>$ et $<u_2, u_2>$

(iii) Soit $y \in \mathbb{R}^p$, déterminer $Pr_C(y)$ Projection I_p-orthogonale de y sur C.

Indication:
$\sum_{i=1}^{p} i^2 = \dfrac{p(p+1)(2p+1)}{6}$

Rappels sur les notions de dérivation matricielles: Soit $A_{n\times p} = [a_{ij}]$

1. Dérivée d'une matrice par rapport à une variable:
$\dfrac{dA}{dt}$ est une matrice $n\times p$ d'éléments $\dfrac{da_{ij}}{dt}$. A peut être un vecteur
2. Dérivée d'une fonction par rapport à une matrice:

Soit u une fonction des a_{ij}
$\dfrac{du}{dA}$ est une matrice $n\times p$ d'éléments $\dfrac{\partial u}{\partial a_{ij}}$. A peut être un vecteur
Application

Exercice 4

(1) Soit $X = \begin{bmatrix} 2t \\ \ln(2t-1) \\ \cos 3t \sin 2t \end{bmatrix}$

a) Calculer $V = \dfrac{dX}{dt}$, $\gamma = \dfrac{dV}{dt}$

b) Donner une signification de V et γ lorsque X désigne les coordonnées d'un mobile.

(2)Soit $Y = \begin{bmatrix} x & 2x^3 & 3x^{-4} \\ \exp x & \sin x & \ln x \end{bmatrix}$; $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{bmatrix}$ et $y = x_{11}x_{22} - x_{31}x_{12}$.Calculer $\dfrac{dY}{dx}$ et $\dfrac{dy}{dX}$

(3) Soit $A_{n\times 1}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ a_n \end{bmatrix}$ et $x_{n\times 1}=\begin{bmatrix} x_1 \\ \\ \\ \\ x_n \end{bmatrix}$ $u = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$.Calculer $\dfrac{du}{dx}$ et déduire que $\dfrac{dA'x}{dx} = \dfrac{dx'A}{dx} = A$

Exercice 5

Formulaire

Démontrer et vérifier sur des exemples simples.

$\dfrac{dx'My}{dM} = xy'$ où $x_{n\times 1}, y_{p\times 1}$ et $M_{n\times p}$

$\dfrac{dy'x}{dx} = \dfrac{dx'y}{dx}$ $où$ $x_{n\times 1}\ et y_{n\times 1}$

$\dfrac{dx'My}{dM'} = yx'$

$\dfrac{dx'Mx}{dx} = Mx + M'x$ où $M_{n\times n}$ et $x_{n\times 1}$

$\dfrac{dMN}{dt} = M\dfrac{dN}{dt} + \dfrac{dM}{dt}N$ où $M_{n\times p}$ et $N_{p\times q}$

$\dfrac{dM^{-1}}{dt} = -M^{-1}\dfrac{dM}{dt}M^{-1}$ où $M_{n\times n}$

$\dfrac{dx'M^{-1}x}{dM} = -(M^{-1})'xx'(M^{-1})'$ où $M_{n\times n}$ et $x_{n\times 1}$

$\dfrac{dtr(MN)}{dM} = N'$ $M_{n\times p}$ et $N_{p\times n}$

DEVOIR A remettre.

Exercice avec **correction détaillée.**

On se place dans un espace euclédien.

$$X_{n,p} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ avec } n = 4 \text{ et } p = 3$$

$\boxed{\text{Partie A}}$

Avec poids **uniformes**.

(i) Présenter nuage de $\mathcal{I}$ noté $\mathcal{N}(\mathcal{I})$ et calculer g

(ii) calculer XC la matrice centrée

(iii) Donner V la matrice variance covariance et déduire sa trace.

(iv) Calculer I_g l'inertie au point g dit inertie globale et comparer avec trace de V notée tr(V)

$\boxed{\text{Partie B}}$

Avec poids non uniformes

Soit la matrice des poids $N = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(i) Calculer g

(ii) Calculer XC

(iii) Calculer V

Correction de l'exercice 6

Partie A

Le nuage des individus

(i) $\mathcal{N}(I) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. on a: $g_{\mathcal{N}(I)} = \frac{1}{n}X^T 1_n = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(ii) $XC = X - 1_n * g^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$. i-e:

$$XC = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{Remarquer } g_{\mathcal{N}_c(I)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(iii) $V = \frac{1}{n} XC^T * XC$

$$V = \frac{1}{64}\begin{bmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{64}\begin{bmatrix} 44 & -36 & -8 \\ -36 & 44 & 8 \\ -8 & 8 & 16 \end{bmatrix} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 11 & -9 & -2 \\ -9 & 11 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

$tr(V) = \frac{1}{64}(44 + 44 + 16) = \frac{104}{64} = \frac{13}{8}$

(iv) Calculer I_g et comparer avec tr(V) :

$$I_g = \frac{1}{n}\sum_i (X_i - g)^T (X_i - g) = \frac{1}{64}\left\{ \begin{bmatrix} -5 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \ldots\ldots \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

$= \frac{1}{64}\{38 + 38 + 14 + 14\} = \frac{13}{8}$.

$I_g = tr(V) = \frac{13}{8}$

remarque on a aussi $I_g = \sum_i \lambda_i$

$$V = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 11 & -9 & -2 \\ -9 & 11 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \text{ eigenvalues: } \frac{1}{8}, \frac{3}{4} - \frac{3}{8}\sqrt{2}, \frac{3}{8}\sqrt{2} + \frac{3}{4}$$

où λ_i valeurs propres de V ainsi $\sum_i \lambda_i = \frac{1}{8} + \frac{3}{4} - \frac{3}{8}\sqrt{2} + \frac{3}{8}\sqrt{2} + \frac{3}{4} = \frac{13}{8}$

Partie B

$$\text{Soit } N = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ la matrice des poids}$$

(i) Calculer g

$$g = X^T * N * 1_n = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{8} \\ 0 \\ \frac{5}{8} \end{bmatrix} = \frac{5}{8}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

on a aussi $g = [\sum_i p_i X_i] = [\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{2}{8}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{4}{8}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}] = \begin{bmatrix} \frac{5}{8} \\ 0 \\ \frac{5}{8} \end{bmatrix}$

(ii) CalculerXC

On a $XC = [x_{ij} - g_j]$

$$XC = X - 1_n * g^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{8} \\ 0 \\ \frac{5}{8} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -\frac{13}{8} & 1 & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & -1 & -\frac{5}{8} \\ \frac{3}{8} & 0 & \frac{3}{8} \\ -\frac{5}{8} & 1 & -\frac{5}{8} \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -13 & 8 & 3 \\ 3 & -8 & -5 \\ 3 & 0 & 3 \\ -5 & 8 & -5 \end{bmatrix}$$

(iii) Calculer$V$

$V = X^T * N * X - g * g^T$ ou bien $V = XC^T * N * XC$

$$V = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{5}{8} \\ 0 \\ \frac{5}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{8} \\ 0 \\ \frac{5}{8} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{31}{64} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{64} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{64} & \frac{1}{8} & \frac{15}{64} \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{64} \begin{bmatrix} 31 & -24 & -1 \\ -24 & 32 & 8 \\ -1 & 8 & 15 \end{bmatrix}$$

ou bien

$$\text{V}=\frac{1}{8*8*8} \begin{bmatrix} -13 & 8 & 3 \\ 3 & -8 & -5 \\ 3 & 0 & 3 \\ -5 & 8 & -5 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -13 & 8 & 3 \\ 3 & -8 & -5 \\ 3 & 0 & 3 \\ -5 & 8 & -5 \end{bmatrix} = \frac{1}{8*64} \begin{bmatrix} 248 & -192 & -8 \\ -192 & 256 & 64 \\ -8 & 64 & 120 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{31}{64} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{64} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{64} & \frac{1}{8} & \frac{15}{64} \end{bmatrix}$$

DEVOIR

A remettre à votre enseignant personnellement, il sera noté.

Question:

Reprendre les mêmes questions avec la matrice des données.

$$X_{n,p} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} n = 4 \text{ et } p = 3$$

et pour la partie B(poids non uniformes)

$$N = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$