Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Hassiba Benbouali de Chlef
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة حسيبة بن بوعلي بالشلف
كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي
قسم الرياضيات

U.H.B.C. Chlef
Faculté des Sciences Exactes
Département des maths


A.U. 2019/2020
Niveau: $1^{ère}$ Master/ Option: M.A.S.
Module: Processus Stochastiques 2

## Serie d'exercices n°2 ( Martingales à temps discret)

1. On lance une pièce de monnaie une infinité de fois. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ le processus défini par:

$$X_n = \mathbf{1}_{\{Pile\}} - \mathbf{1}_{\{Face\}} \text{ pour le } n^{ième} \text{ lancer},$$

et soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sa filtration canonique. Pour chacun des évènements suivants, trouver le plus petit $n$ tel que l'évènement soit dans $\mathcal{F}_n$ :

   (a) $A = \{$la première occurence de Pile et précédée de pas plus de 10 Faces$\}$
   (b) $B = \{$il y a au moins un Pile dans la suite $X_1, X_2, ...\}$
   (c) $C = \{$les 100 premiers lancers produisent le même résultat$\}$
   (d) $D = \{$il n'y a pas plus de 2 Piles et 2 Faces parmi les 5 premiers lancers$\}$

2. Montrer que $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, ..., X_n)$ est la plus petite filtration à laquelle $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est adapté.

3. Montrer que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$- martingale, alors $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) = ...$

4. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$- martingale. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une martingale par rapport à sa filtration canonique.

5. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une *marche aléatoire symétrique* dans $\mathbb{Z}$, c.à.d.

$$X_n = Z_1 + Z_2 + ... + Z_n,$$

où $Z_1, Z_2, ...$ est une suite de $v.a.$ $i.i.d.$ avec $\mathbb{P}(Z_n = -1) = \mathbb{P}(Z_n = 1) = \dfrac{1}{2}$.

- Montrer que $(X_n^2 - n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une martingale p.r.p. à $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, Z_2, ..., Z_n)$.

6. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}-$martingale de carré intégrable telleque: $(X_{n+1} - X_n) \perp \mathcal{F}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Montrer que $Z_n = [X_n - \mathbb{E}(X_n)]^2 - \mathbb{V}ar(X_n)$; $n \in \mathbb{N}$ est une martingale.

7. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}-$sous-martingale et $K \in \mathbb{R}$. Montrer que $(X_n \vee K)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi.

8. Montrer qu'un processus prévisible intégrable est une martingale si et seulement s'il presque sûrement constant.

9. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}-$martingale de carré intégrable. Montrer que les accroissements de $X$ sont 2 à 2 orthogonaux, i.e. $\forall n \neq m : \mathbb{E}\left[(X_{n+1}-X_n)(X_{m+1}-X_m)\right] = 0$.

10. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires sur $[0,1]$ définies par:

$$\begin{cases} X_0 = a \ p.s. \ (a : constante\ fixée\ dans\ [0,1]); \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = \frac{X_n}{2} \big/ \mathcal{F}_n) = 1 - X_n = 1 - \mathbb{P}(X_{n+1} = \frac{X_n+1}{2} \big/ \mathcal{F}_n). \end{cases}$$

où $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la filtration canonique de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}-$martingale.

11. Problème supplémentaire (référence: Probability with Martingales, David Williams, Combridge University Press 1991 (pages 231-232) :

**Martingales**

**E10.1. Pólya's urn**

At time 0, an urn contains 1 black ball and 1 white ball. At each time 1,2,3,..., a ball is chosen at random from the urn and is replaced together with a new ball of the same colour. Just after time $n$, there are therefore $n+2$ balls in the urn, of which $B_n + 1$ are black, where $B_n$ is the number of black balls chosen by time $n$.

Let $M_n = (B_n+1)/(n+2)$, the proportion of black balls in the urn just after time $n$. Prove that (relative to a natural filtration which you should specify) $M$ is a martingale.

Prove that $\mathsf{P}(B_n = k) = (n+1)^{-1}$ for $0 \le k \le n$. What is the distribution of $\Theta$, where $\Theta := \lim M_n$?

Prove that for $0 < \theta < 1$,

$$N_n^\theta := \frac{(n+1)!}{B_n!(n-B_n)!}\,\theta^{B_n}(1-\theta)^{n-B_n}$$

defines a martingale $N^\theta$. (*Continued at E10.8.*)