Corrigé de l'examen final

EXERCICE N° 1:

Soit $(X_1,\ldots,X_n)$ un échantillon de v.a. i.i.d de la loi uniforme $\mathcal{U}\left[\theta-\frac{1}{2},\theta+\frac{1}{2}\right]$. On note $X_{(1)}=\min(X_1,\ldots,X_n)$ et $X_{(n)}=\max(X_1,\ldots,X_n)$.

1. La fonction de répartition de $X_{(1)}$. On pose $Y=X_{(1)}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_Y(y) &= \mathbb{P}(Y\le y)=\mathbb{P}(\min(X_1,\ldots,X_n)\le y)=1-\mathbb{P}(\min(X_1,\ldots,X_n)>y)\\ &= 1-\mathbb{P}(X_1>y,\ldots,X_n>y)=1-\mathbb{P}(X_1>y)\times\cdots\times\mathbb{P}(X_n>y)\\ &= 1-[\mathbb{P}(X>y)]^n=1-[1-\mathbb{F}_X(y)]^n=1-\left[\theta+\frac{1}{2}-y\right]^n\end{aligned}$$

2. La fonction de répartition de $X_{(n)}$. On pose $Z=X_{(n)}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_Z(z) &= \mathbb{P}(Z\le z)=\mathbb{P}(\max(X_1,\ldots,X_n)\le z)\\ &= \mathbb{P}(X_1\le z,\ldots,X_n\le z)=\mathbb{P}(X_1\le z)\times\cdots\times\mathbb{P}(X_n\le z)\\ &= [\mathbb{P}(X\le z)]^n=[\mathbb{F}_X(z)]^n=\left[z-\theta+\frac{1}{2}\right]^n\end{aligned}$$

3. Pour tout $\epsilon>0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|X_{(1)}-\left(\theta-\frac{1}{2}\right)\right|>\epsilon\right) &= \mathbb{P}\left(X_{(1)}>\epsilon+\left(\theta-\frac{1}{2}\right)\right)=1-\mathbb{P}\left(X_{(1)}\le\epsilon+\left(\theta-\frac{1}{2}\right)\right)\\ &= 1-\mathbb{F}_Y\left(\epsilon+\left(\theta-\frac{1}{2}\right)\right)=\left[\theta+\frac{1}{2}-\epsilon-\left(\theta-\frac{1}{2}\right)\right]^n=[1-\epsilon]^n\end{aligned}$$

Donc,

$$\forall\epsilon>0,\ \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\left|X_{(1)}-\left(\theta-\frac{1}{2}\right)\right|>\epsilon\right)=\lim_{n\to+\infty}[1-\epsilon]^n=0.$$

Alors $X_{(1)}\xrightarrow[n\to+\infty]{P}\theta-\frac{1}{2}$.

Pour tout $\epsilon>0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|X_{(n)}-\left(\theta+\frac{1}{2}\right)\right|>\epsilon\right) &= \mathbb{P}\left(X_{(n)}<-\epsilon+\left(\theta+\frac{1}{2}\right)\right)\\ &= \mathbb{F}_Z\left(\theta+\frac{1}{2}-\epsilon\right)=\left[\theta+\frac{1}{2}-\epsilon-\theta+\frac{1}{2}\right]^n=[1-\epsilon]^n\end{aligned}$$

Donc,

$$\forall\epsilon>0,\ \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\left|X_{(n)}-\left(\theta+\frac{1}{2}\right)\right|>\epsilon\right)=\lim_{n\to+\infty}[1-\epsilon]^n=0.$$

Alors $X_{(n)}\xrightarrow[n\to+\infty]{P}\theta+\frac{1}{2}$.

4. On a $X_{(1)}\xrightarrow[n\to+\infty]{P}\theta-\frac{1}{2}$ et $X_{(n)}\xrightarrow[n\to+\infty]{P}\theta+\frac{1}{2}$. Alors, par le théorème de l'image continue $\dfrac{X_{(1)}+X_{(n)}}{2}$ converge en probabilité vers θ.

EXERCICE N° 2:

Soit $(X_1,\dots,X_n)$ un échantillon de v.a. i.i.d de même loi que X, où X admet pour densité de probabilité :

$$f_X(x)=\frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(\ln x-\theta)^2}{2}\right),\ \text{pour } x>0$$

avec $\theta\in\mathbb{R}$.

1. L'espérance de X :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_0^{+\infty} x\frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(\ln x-\theta)^2}{2}\right)\mathrm{d}x=\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{e}^{y+\theta}\mathrm{d}y}_{y=\ln x-\theta}\\ &= \underbrace{\mathrm{e}^{\theta}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}(y-1)^2+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}y}_{ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)}=\mathrm{e}^{\theta+\frac{1}{2}}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}(y-1)^2\right)\mathrm{d}y}_{=1}\\ &= \mathrm{e}^{\theta+\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

La variance de X :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= \int_0^{+\infty} x^2\frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(\ln x-\theta)^2}{2}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(\ln x-\theta)^2}{2}\right)\mathrm{d}x\\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{y+\theta}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{e}^{y+\theta}\mathrm{d}y}_{y=\ln x-\theta}=\mathrm{e}^{2\theta}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}+2y\right)\mathrm{d}y\\ &= \mathrm{e}^{2\theta}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}(y-2)^2+2\right)\mathrm{d}y}_{ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)}=\mathrm{e}^{2\theta+2}.\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Var}[X]=\mathrm{e}^{2\theta+2}-\mathrm{e}^{2\theta+1}=\mathrm{e}^{2\theta+1}(\mathrm{e}-1)$.

2. On résout l'équation

$$\mathrm{e}^{\theta+\frac{1}{2}}=\bar{X}_n\Longrightarrow\theta+\frac{1}{2}=\ln\bar{X}_n$$

L'estimateur des moments est

$$\widetilde{\theta}_n=\ln\bar{X}_n-\frac{1}{2}.$$

3. Par le théorème centrale limite $\sqrt{n}\left(\bar{X}_n-\mathrm{e}^{\theta+\frac{1}{2}}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}}\mathcal{N}\left(0,\mathrm{e}^{2\theta+1}(\mathrm{e}-1)\right)$.

En appliquant la méthode delta avec $\phi(x)=\ln x-\frac{1}{2}$ et $\phi'(x)=\frac{1}{x}$, on obtient $\sqrt{n}\left(\widetilde{\theta}_n-\theta\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}}\mathcal{N}(0,\mathrm{e}-1)$.

4. La vraisemblance de $(X_1,\dots,X_n)$ est définie par

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x_1,\dots,x_n;\theta) &:= \prod_{i=1}^n f_X(x_i)=\prod_{i=1}^n\frac{1}{x_i\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(\ln x_i-\theta)^2}{2}\right)\\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n(\ln x_i-\theta)^2\right)\prod_{i=1}^n\frac{1}{x_i}\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\ln \mathcal{L}(x_1,\ldots,x_n;\theta) &= -n\ln\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\theta)^2 - \sum_{i=1}^{n}\ln x_i \\ \frac{\partial}{\partial\theta}\ln \mathcal{L}(x_1,\ldots,x_n;\theta) &= \sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\theta) = -n\theta + \sum_{i=1}^{n}\ln x_i\end{aligned}$$

On obtient :

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln \mathcal{L}(x_1,\ldots,x_n;\theta) = 0 \iff \widehat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$$

5. L'information de Fisher $I_n(\theta)$:

$$I_n(\theta) = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln \mathcal{L}(X_1,\ldots,X_n;\theta)\right] = n$$

La loi asymptotique de $\widehat{\theta}_n$ est donnée par :

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\theta}_n-\theta\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

EXERCICE N° 3:

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. de densité f :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Soit la fonction $\psi_\theta(x) = (x-\theta)^3$ et $\hat{\theta}_n$ le Z-estimateur définit comme le zéro de la fonction

$$\mathbb{P}_n\psi_\theta := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\psi_\theta(X_i)$$

1. Notons que $\mathbb{E}(X-\theta)^3 < \infty$ pour tout $\theta\in\mathbb{R}$. Donc par la loi des grands nombres $\mathbb{P}_n\psi_\theta$ converge en probabilité vers $\mathbb{P}_{\theta_0}\psi_\theta = \mathbb{E}(X-\theta)^3$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X-\theta)^3 &= \mathbb{E}[X^3] - 3\theta\mathbb{E}[X^2] + 3\theta^2\mathbb{E}[X] - \theta^3 \\ &= 0 - 3\theta + 0 - \theta^3 = -\theta(\theta^2+3) \qquad (1)\end{aligned}$$

2. De l'équation (1), $\mathbb{P}_{\theta_0}\psi_{\theta_0} = 0$ pour $\theta_0 = 0$.
3. Évidemment chaque application $\theta\mapsto\mathbb{P}_n\psi_\theta$ est non-croissante. Comme Ψ est strictement monotone et $\Psi(0)=0$, nous avons $\Psi(-\epsilon) > 0 > \Psi(\epsilon)$, pour tout $\epsilon > 0$. Alors $\hat{\theta}_n$ est un estimateur consistant de θ_0, en utilisant la Proposition du cours.
4. Par le théorème de normalité asymptotique des Z-estimateurs $\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n-\theta_0\right)$ est asymptotiquement normale, de moyenne 0 et de variance

$$\frac{\mathbb{P}_{\theta_0}\psi_{\theta_0}^2}{(\mathbb{P}_{\theta_0}\dot{\psi}_{\theta_0})^2} = \frac{\mathbb{E}[X^6]}{(3\mathbb{E}[X^2])^2} = \frac{16}{3}.$$