Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Université Hassiba Benbouali de Chlef
Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة حسيبة بن بوعلي بالشلف
كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي

قسم الرياضيات

Année Universitaire :2017/2018 **Niveau** :$1^{ère}$ *Année M.A.S.* **Module** :*Processus Stochastiques* 1

Examen final

I. Considérons la chaîne de Markov d'espace d'états $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ et de Matrice des transitions:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

1. Tracer le diagramme des transitions et déterminer les classes de communication.
2. Identifier les classes récurrentes et les classes transitoires.
3. Calculer la période de chaque classe.
4. Laquelle (lesquelles) des classes admettant une loi limite? Justifier.

II. Deux satellites de communication sont placés sur une orbite. La durée de vie d'un satellite est exponentiellement distribuée de moyenne $1/\mu$, $\mu > 0$. Si l'un tombe en panne, son remplaçant sera envoyé. Le temps nécessaire pour préparer et envoyer un remplaçant est exponentiellement distribué de moyenne $1/\lambda$, $\lambda > 0$. Soit X_t : le nombre des satellites sur l'orbite à l'instant t.

Supposons que $(X_t)_{t\geq 0}$ est une C.M.T.C.

1. Comment appelle-t-on ce type de C.M.?
2. Tracer le diagramme des transitions.
3. Trouver la loi limite de cette chaîne.
4. À long-terme, quel est le nombre moyen des satellites sur l'orbite? c.à.d. trouver $\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}\left[X(t)/X(0) = i\right]$ *pour* $i = 0, 1, 2$.

III. Considérons les processus de Naissance et de Mort simples suivants

1. Soit $(X_1(t))_{t\geq 0}$ un processus dit de *Mort Pure*, i.e. un processus de Naissance et de Mort avec des taux de naissance nuls. Supposons que l'espace d'états est fini, $\mathbf{E} = \{0, 1, 2, ..., N\}$, et considérons les taux de mortalité $\mu_1, ..., \mu_N$. Soit T_e *le temps d'extinction*, i.e. le temps nécessaire pour que $X_1(t)$ atteigne zéro (la définition formelle est $T_e \triangleq \inf\{t > 0 : X_1(T_e) = 0\}$).

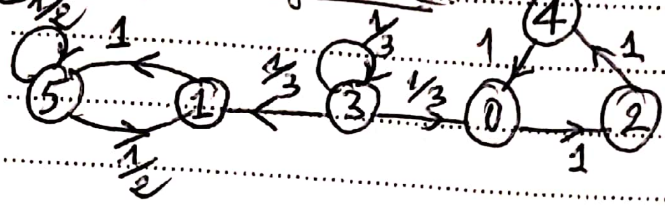
Nom & Prénom :.. ....اللقب و الإسم:
Niveau :.. ....المستوى:
Groupe :.. ....الفوج:
N d'inscription :.. ....رقم التسجيل:
Examen de :.. ....إمتحان في مادة:

03,75

Master 1 MAS / Examen final / Processus Stochastique 1

I. 1.a diagramme :

01



0,75 • Classes de communication $\{0,2,4\}$, $\{3\}$, $\{1,5\}$

0,75 2 Classes récurrentes $\{1,5\}$ et $\{0,2,4\}$
Classe transitoire $\{3\}$

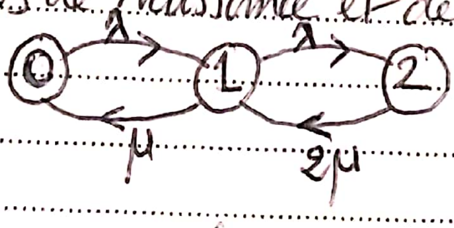
0,75 3 $d(0)=d(2)=d(4)=3$
$d(3)=1$
$d(1)=d(5)=1$

0,50 4 La classe $\{1,5\}$ car elle est récurrente et Apériodique

II. 04,50

0,50 1 Processus de Naissance et de Mort à temps continu.

0,5 2



$\lambda_0=\lambda_1=\lambda$
$\mu_1=\mu$, $\mu_2=2\mu$

3 D'après l'exercice 2 (voir T.D. C.M.T.C) :

0,5

$$\begin{cases} \pi_i = \dfrac{\lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \, \mu_2 \cdots \mu_i} \pi_0 , \quad i \geq 1 \\ \pi_0 = \left(1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{2} \dfrac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i} \right)^{-1} \end{cases}$$

D'où :

$$
\begin{cases}
\pi_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2}\right)^{-1} = \frac{2\mu^2}{2\mu^2 + 2\lambda\mu + \lambda^2} & 0{,}5 \\
\pi_1 = \frac{\lambda}{\mu}\pi_0 = \frac{2\lambda\mu}{2\mu^2 + 2\lambda\mu + \lambda^2} & 0{,}5 \\
\pi_2 = \left(\frac{\lambda^2}{2\mu^2}\right)\pi_0 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2 + 2\lambda\mu + \lambda^2} & 0{,}5
\end{cases}
$$

On a :

$\boxed{4}$ $\mathbb{E}[X_t / X_0 = i] = \sum_{j=0}^{2} j\, P_{ij}(t)$, $i \in \{0,1,2\}$.

0,50 et comme : $\lim_{t\to\infty} P_{ij}(t) = \pi_j$ pour tt i, alors :

0,50 $\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[X_t / X_0 = i] = \lim_{t\to+\infty} \sum_{j=0}^{2} j\, P_{ij}(t)$

$$= \sum_{j=0}^{2} j\,\pi_j \quad \text{(somme finie)}$$

0,50

$$= \pi_1 + 2\pi_2$$

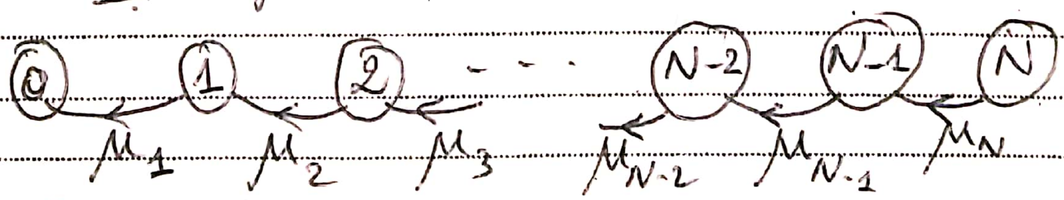
$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}(X_t / X_0 = i) = \frac{2\lambda\mu + 2\lambda^2}{2\mu^2 + \lambda\mu + \lambda^2}} \quad \text{pour tt } i \in \{0,1,2\}$$

04,50 III

1 $X_1(t)$

$\boxed{a}$ Diagramme des transitions :

0,50



~~b~~

Nom & Prénom :........................	........................:اللقب و الإسم
Niveau :........................	........................:المستوى
Groupe :........................	........................:الفوج
N°d'inscription :........................	........................:رقم التسجيل
Examen de :........................	........................:إمتحان في مادة

$\boxed{b}$ On sait que le temps de sejour dans un état $i \in \{1, \dots, N\}$

$\tau_i \rightsquigarrow Exp(\mu_i)$

i.e. le temps moyen pour faire une transition de $(i) \to (i+1)$

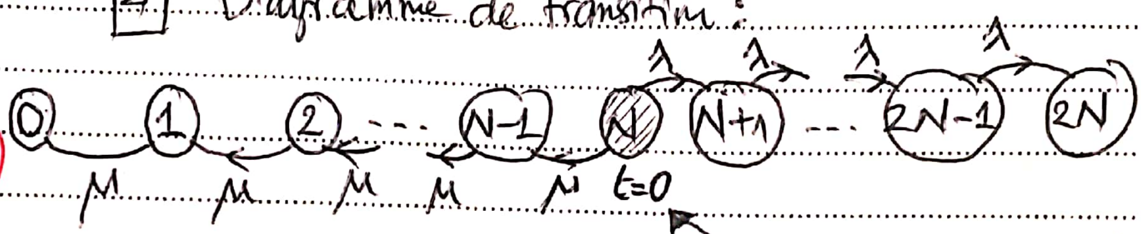
est $E(\tau_i) \frac{1}{\mu_i}$;

01

D'où : $E(T_e / X_1(0) = N) = \frac{1}{\mu_N} + \frac{1}{\mu_{N-1}} + \dots + \frac{1}{\mu_1} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\mu_i}$.

2) $X_2(t)$

$\boxed{a}$ Diagramme de transition :



01

$\boxed{b}$ $X_2(0) = N$ i.e. qu'on démarre du milieu

On a 2 cas possibles pour la transition suivante :

E_N : "La transition suivante est une Naissance"

ou bien E_D : "La transition suivante est un Décès"

Alors, comme : $E_N \cup E_D = \Omega$, on a

0,50

$$E(T / X_2(0) = N) = E(T / X_2(0) = N, E_N) \, P(E_N / X_2(0) = N) + E(T / X_2(0) = N, E_D) \, P(E_D / X_2(0) = N).$$

i.e.

$$E(T / X_2(0) = N) = \frac{N}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{N}{\mu} \cdot \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{2N}{\lambda + \mu}$$

1,50

$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\lambda}$ Voir $\boxed{b}$

Proba d'avoir Naissance avant Décès

$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\mu}$ Voir $\boxed{b}$

Proba d'avoir un Décès avant Naissance

03,25

IV 1 $P_{ij}(t) = \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t}, t \geq 0$, $P_{ij}(t) = \mathbb{P}(N_{t+h} = j / N_h = i), h > 0$

0,50

a $P(N_s = 2 / N_t = 1) = P_{12}(s-t) = \frac{\lambda(s-t)}{1!} e^{-\lambda(s-t)}$

b $P(N_s = 2 \text{ et } N_t = 1) = P(N_s = 2 / N_t = 1)\,\mathbb{P}(N_t = 1)$

$= P_{12}(s-t)\frac{(\lambda t)^1}{1!} e^{-\lambda t}$

0,75

$= \lambda^2 t(s-t) e^{-\lambda s}$

[On sait que, $\mathbb{P}(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, t \geq 0, n \in \mathbb{N}$]

c $P(N_s - N_t = 1) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(N_s - N_t = 1 / N_t = i)\,\mathbb{P}(N_t = i)$

$= \sum_{i=0}^{+\infty} P(N_s = 1+i / N_t = i)\,\mathbb{P}(N_t = i)$

01

$= \sum_{i=0}^{+\infty} P_{i,i+1}(s-t)\,\mathbb{P}(N_t = i)$

$= \lambda(s-t) e^{-\lambda(s-t)} \underbrace{\left(\sum \mathbb{P}(N_t = i)\right)}_{=1}$

$= \lambda(s-t) e^{-\lambda(s-t)}$

2 Mq $P(N_s - N_t = k) = P(N_{s-t} = k)$ ~~$\frac{[\lambda(s-t)]^k}{k!}$~~

$= \frac{[\lambda(s-t)]^k}{k!} e^{-\lambda(s-t)}$

de m̂ que 1.c.

01

$\mathbb{P}(N_s - N_t = k) = \sum_{i=0} \mathbb{P}(N_s = i+k / N_t = i)\,\mathbb{P}(N_t = i)$

$= P_{i,i+k}(s-t) = \frac{[\lambda(s-t)]^k}{k!} e^{-\lambda(s-t)}$

(4/5)

Nom & Prénom :....................................	....................................اللقب و الإسم:
Niveau :....................................	....................................المستوى:
Groupe :....................................	....................................الفوج:
N° d'inscription :....................................	....................................رقم التسجيل:
Examen de :....................................	....................................إمتحان في مادة:

V) Questions de cours

a) Faux, b) Faux, c) Vrai, d) Faux, e) Faux, f) Faux, g) Vrai

0,50 × 7 + 0,5

Bonus :

1) $p^{té}$ de sans mémoire $\Rightarrow X \sim$ Exponentielle

$G(x) = \mathbb{P}(X > x) \Rightarrow G(t+t_0) = G(t).G(t_0)$

et $G(0) = \mathbb{P}(X > 0) = 1$.

Fixons t, et dérivons p.r.p à t_0

$$G'(t+t_0) = G(t)G'(t_0)$$

Posons $t_0 = 0$:

$$G'(t) = G'(0).G(t).$$

Soit $\lambda = -G'(0)$, $\lambda > 0$ ($G(x) = \mathbb{P}(X > x) \searrow$)

1,50

D'où :

$$\begin{cases} G'(t) = -\lambda G(t) \\ G(0) = 1 \end{cases}$$

Conclusion : $G(t) = \mathbb{P}(X > t) = e^{-\lambda t}$

$$X \sim Exp(\lambda), \quad \lambda > 0$$

0,50

2) La réciproque est facile.

$\mathbb{P}(X > s+t / X > t) = \mathbb{P}(X > s)$.

(05/05)