U.H.B.C. Chlef
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département des Mathématiques

Année Universitaire: 2019/2020
Niveau: $1^{ère}$ Master/ Option: M.A.S.
Module: Processus Stochastiques 1.

EXAMEN DE RATTARPAGE (2 HEURES)

Documents Non Autorisés

1. **Questions de cours**

   Soit $X_1, X_2, X_3, ...$ une chaîne de Markov à espace d'état fini $E = \{1, 2, ..., N\}$ avec la matrice de transition $\mathbf{P}$. Parmi les affirmations suivantes, dites lesquelles impliquent lesquelles.

   (a) Il existe une loi de probabilité $\bar{\pi}$ telleque $\lim_{n\to\infty} \pi\mathbf{P}^n = \bar{\pi}$ pour toute loi de probabilité π.

   (b) $\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}^n = \begin{bmatrix} \bar{\pi} \\ \vdots \\ \bar{\pi} \end{bmatrix}$, pour une certaine loi de probabilité $\bar{\pi}$.

   (c) Il existe une loi de probabilité $\bar{\pi}$ telleque $\bar{\pi}\mathbf{P} = \bar{\pi}$.

   (d) $P_{ij} > 0$ pour tout $i, j \in E$

   (e) Il existe $n > 0$ telque $P_{ij}^{(n)} > 0$ pour tout $i, j \in E$

   (f) $P_{ij}^{(n)} > 0$ pour tout $i, j \in E$ et $n > 0$.

   (g) Pour tout $i, j \in E$, Il existe $n > 0$ telque $P_{ij}^{(n)} > 0$.

   (h) $X_1, X_2, X_3, ...$une chaîne de Markov irréductible.

   (i) $X_1, X_2, X_3, ...$une chaîne de Markov irréductible apériodique.

2. **Chaîne de Markov à temps discret**

   Soit $X_1, X_2, X_3, ...$une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $E = \{1, 2, 3\}$ de loi de probabilité $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1/2$, $\mathbb{P}(X_1 = 2) = 1/3$, $\mathbb{P}(X_1 = 3) = 1/6$

   (a) Expliquer pourquoi cette suite définit une Chaîne de Markov homogène.

   (b) Calculer la matrice de transition et la loi limite $\bar{\pi}$.

   (c) Donner la loi du temps de séjour et le temps moyen de séjour dans l'état 1.

   (d) Quel est le temps moyen du retour à l'état 2?

   (e) Donner le nombre moyen de visites de l'état 3.

   (f) Calculer la limite: $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{1}{m}\sum\limits_{n=1}^{m}(X_n)^r;\ r > 0$.

3. **Chaîne de Markov à temps continu.**

   Trois (3) satellites de communication sont placés sur une orbite. La durée de vie d'un satellite est exponentiellement distribuée de moyenne $1/\mu$, $\mu > 0$. Si l'un tombe en panne, son remplaçant sera envoyé. Le temps nécessaire pour préparer et envoyer un remplaçant est exponentiellement distribuée de moyenne $1/\lambda$, $\lambda > 0$. Soit $X(t)$ le nombre des satellites sur l'orbite à l'instant t. Supposons que $[X(t)]_{t\geq 0}$ est un processus de Markov à temps continu.

   (a) Tracer le diagramme des transitions.

   (b) Donner le générateur infinitésimal.

   (c) Ecrire les équations de Kolmogorov directes (forward) et rétrogrades (backward) du processus.

   (d) $[X(t)]_{t\geq 0}$ est-il un processus de Naissance et de Mort? Justifier!

   (e) Montrer que la limite $\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(X_t = i)$; $i \geq 0$ **existe**. Que représente cette limite?

   (f) Calculer la probabilité qu'à long-terme aucun satellite n'est sur l'orbite.