

Corrigé TD1 : Introduction aux Statistiques Bayésiennes

Yann Traonmilin

Janvier 2018

Rappel On rappelle les définitions des lois usuelles :

1. La loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ sur \mathbb{R} est définie par sa densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

2. La loi Beta de paramètres α et β et $B(\alpha, \beta)$ a pour densité

$$f_{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{(\beta-1)} \chi_{[0,1]}(x).$$

où la constante $\frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} = \int_0^1 u^{(\alpha-1)}(1-u)^{(\beta-1)} du$ est une constante de renormalisation.

On peut remarquer que la loi de densité uniforme sur $[0, 1]$ est un cas particulier de la loi Beta pour les paramètres $\alpha = \beta = 1$.

Exercice 1. Dans ces deux cas:

1. Cas 1 :

$$L(\theta, k) = C_n^k \lambda^k (1-\lambda)^{n-k} \quad (1)$$

Cas 2 :

$$L(\lambda, k_1, k_2, \dots, k_n) = \prod_{i=1, n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k_i}}{k_i!} = e^{-n\lambda} \lambda^n \prod_{i=1, n} \frac{1}{k_i!} \quad (2)$$

2. cas 1 : on retombe sur le calcul de la loi Bernouilli

3. cas 2 : On prend le log de L , ce qui revient à calculer

$$\hat{\lambda} = \arg \max_{\lambda \in \mathbb{R}^+} -n\lambda + n \log(\lambda) + C = \arg \max_{\theta \in \mathbb{R}} G(\lambda) \quad (3)$$

On cherche $\hat{\lambda}$ tel que $G'(\hat{\lambda}) = 0$, ce qui donne $\frac{s}{\hat{\lambda}} = n$ et $\hat{\theta} = \frac{s}{n}$

Exercice 2.

1. Formule de Bayes avec proba totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\theta = \theta_1 | X_i = a) &= \frac{\mathbb{P}(X_i = a | \theta = \theta_1) \mathbb{P}(\theta = \theta_1)}{\mathbb{P}(X_i = a | \theta = \theta_1) \mathbb{P}(\theta = \theta_1) + \mathbb{P}(X_i = a | \theta = \theta_2) \mathbb{P}(\theta = \theta_2)} \\ &= \frac{\theta_1 p_1}{\theta_1 p_1 + \theta_2 (1 - p_1)}\end{aligned}\quad (4)$$

2. Formule de Bayes avec proba totales + indépendance (conditionnelle) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\theta = \theta_2 | (X_1 = a, X_2 = b)) &= \frac{\mathbb{P}((X_1 = a, X_2 = b) | \theta = \theta_2) \mathbb{P}(\theta = \theta_2)}{\mathbb{P}((X_1 = a, X_2 = b) | \theta = \theta_2) \mathbb{P}(\theta = \theta_2) + \mathbb{P}((X_1 = a, X_2 = b) | \theta = \theta_1) \mathbb{P}(\theta = \theta_1)} \\ &= \frac{\theta_2 (1 - \theta_2) (1 - p_1)}{\theta_2 (1 - \theta_2) (1 - p_1) + \theta_1 (1 - \theta_1) p_1}\end{aligned}\quad (5)$$

3. La fonction $p_1/(1 - p_1)$ est croissante sur $[0, 1]$. Ainsi $\mathbb{P}(\theta = \theta_2 | (X_1 = a, X_2 = b))$ décroît en fonction de p_1 . Plus l'*a priori* sur θ_2 est fort, plus la probabilité a postérieur sur θ_2 est forte.

4. Soit k le nombre de a . Formule de Bayes avec proba totales :

$$\mathbb{P}(\theta = \theta_1 | X = x) = \frac{\theta_1^k (1 - \theta_1)^{n-k} (1 - p_1)}{\theta_1^k (1 - \theta_1)^{n-k} (1 - p_1) + \theta_2^k (1 - \theta_2)^{n-k} (1 - p_1)}\quad (6)$$

Exercice 3.

- 1.

$$\pi(\theta | (X_1 = a, X_2 = a, X_3 = b)) \propto \theta^2 (1 - \theta) \chi_{[0,1]}\quad (7)$$

Pour déterminer la constante, on remarque que c'est une loi Beta $B(3, 2)$

2. on dérive $f(\theta) = \theta^2 (1 - \theta)$ $f'(\hat{\theta}) = 0 = 2\hat{\theta} - 3\hat{\theta}^2$ ce qui donne $\hat{\theta} = 2/3$

3. on note k le nombre de a

$$\pi(\theta | X = x) \propto \theta^k (1 - \theta)^{n-k} \chi_{[0,1]}\quad (8)$$

Pour déterminer la constante, on remarque que c'est une loi Beta $B(k + 1, n - k + 1)$

4. on dérive $f(\theta) = \theta^k (1 - \theta)^{n-k}$ $f'(\hat{\theta}) = 0 = k\hat{\theta}^{k-1} - n\hat{\theta}^{n-1}$ ce qui donne $\hat{\theta} = \left(\frac{k}{n}\right)^{1/(n-k)}$

Exercice 4.

- 1.

$$\pi(\theta | (X_1 = a, X_2 = a, X_3 = b)) \propto \theta^2 (1 - \theta) \theta^{\alpha-1} (1 - \theta)^{\beta-1} = \theta^{\alpha+1} (1 - \theta)^{\beta}\quad (9)$$

Pour déterminer la constante, on remarque que c'est une loi Beta $B(\alpha + 2, \beta + 1)$

2. on dérive $f(\theta) = \theta^{\alpha+1} (1 - \theta)^{\beta}$ $f'(\hat{\theta}) = 0 = (\alpha + 1)\hat{\theta}^{\alpha} - \beta\hat{\theta}^{\beta+1}$ ce qui donne $\hat{\theta} = \left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)^{1/(\beta+1-\alpha)}$

3. on note k le nombre de a

$$\pi(\theta | X = x) \propto \theta^{\alpha+k-1} (1 - \theta)^{\beta+n-k-1} \chi_{[0,1]}\quad (10)$$

Pour déterminer la constante, on remarque que c'est une loi Beta $B(\alpha + k, \beta + k)$

4. on dérive $f(\theta) = \theta^{\alpha+k-1} (1 - \theta)^{\beta+n-k-1} \chi_{[0,1]}$, ce qui donne $\hat{\theta} = \left(\frac{\alpha+k-1}{\beta+n-k-1}\right)^{1/(n-k+\beta-\alpha)}$

Exercice 5.

1. Comme la constante de normalisation d'une Gaussienne ne dépend pas de la moyenne, on a

$$\mathbb{P}(\theta = \theta_1 | X_1) = \frac{e^{-\frac{(X_1 - \theta_1)^2}{2\sigma^2}} p_1}{e^{-\frac{(X_1 - \theta_1)^2}{2\sigma^2}} p_1 + e^{-\frac{(X_1 - \theta_2)^2}{2\sigma^2}} (1 - p_1)} \quad (11)$$

- 2.

$$\mathbb{P}(\theta = \theta_1 | X) = \frac{e^{-\frac{\sum_i (X_i - \theta_1)^2}{2\sigma^2}} p_1}{e^{-\frac{\sum_i (X_i - \theta_1)^2}{2\sigma^2}} p_1 + e^{-\frac{\sum_i (X_i - \theta_2)^2}{2\sigma^2}} (1 - p_1)} \quad (12)$$

Exercice 6.

1. $\pi(\theta | x) = \mathcal{N}\left(\frac{\sigma^2 \theta_0 + \tau^2 x}{\sigma^2 + \tau^2}, \frac{\sigma^2 \tau^2}{\sigma^2 + \tau^2}\right).$
2. $\pi(\theta | x) = \mathcal{N}\left(\frac{\sigma^2 \theta_0 + \tau^2 \sum_i x_i}{\sigma^2 + \tau^2}, \frac{\sigma^2 \tau^2}{\sigma^2 + \tau^2}\right) = \mathcal{N}\left(\frac{\sigma^2 \theta_0 + \tau^2 n \left(\frac{1}{n} \sum_i x_i\right)}{\sigma^2 + \tau^2}, \frac{\sigma^2 \tau^2}{\sigma^2 + \tau^2}\right).$
3. Etude en fonction de n . Le max est la moyenne qui est une pondération entre la moyenne empirique et l'a priori