Université de Blida 1, Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Module : Plans d'expériences

Année universitaire 2016/2017
Durée 1h.30

Examen

Exercice 1 (6 pts)

On considère le modèle de régression linéaire multiple suivant:

$$Y = X\hat{a} + e$$

où le vecteur Y à valeurs dans R^n représente la variable à expliquer, X est une matrice réelle de taille n × p de rang p, $\hat{a} \in R^p$(inconnu) et e est le vecteur des bruits à valeurs dans R^n .

1. Quelles sont les conditions standards imposées au vecteur des bruits e dans l'exécution de la méthode des moindres carrées?
2. Si, on pose $\hat{Y} = X\hat{a}$, la prévision de la valeur de Y, donnez le critère de la méthode des moindres carrées pour déterminer $\hat{a}$. Puis montrer que : $\hat{a} = ({}^tXX)^{-1}\ {}^tXY$.
3. Déterminez l'espérance mathématique et l variance de $\hat{a}$. Que peut-on conclure.
4. Dans le cas où la matrice X est orthogonale, déterminer la valeur de $\hat{a}$.

Exercice 2 (7 pts)

Soit à étudier trois facteurs qualitatifs x^1, x^2 et x^3 sur une réponse mesurable y ,

1. Donnez le nombre d'expériences, la matrice d'expériences et le modèle mathématique si l'on décide d'utiliser un plan d'expériences te type factorielles complet.
2. Quelle est l'avantage d'utilisation de ce type de ce type de plans dans le calcul des coefficients? justifier votre réponse.
3. Si y=$^t(1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8)$, déterminez la matrice des effets, puis calculez les coefficients de modèle à établir.
4. calculez le vecteur des réponses prédites $\hat{y}$, en déduire le vecteur des résidus e . Déterminez le tableau regroupant tous les résultats de l'analyse de la variance. Est-ce que on peut appliquer les testes d'hypothèses. justifier votre réponse.
5. Si l'on décider d'utiliser le modèle $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$, déterminez le coefficients de ce modèle. En déduire le tableau de l'analyse de la variance associé à ce modèle mathématique.

Exercice 3 (7 pts)

1. Quel est l'avantage d'utiliser les plans d'expériences fractionnaires par rapport aux plans d'expériences factoriels complets?
2. Soit à étudier 5 facteurs par un plan d'expériences fractionnaire, Déterminer tous les plans fractionnaires possibles à utiliser.
3. Si l'on décide d'utiliser le plan fractionnaire 2^{5-2} et de choisir la colonne 123 pour étudier le 4$^{\text{ième}}$ facteur et la colonne 23 pour le 5$^{\text{ième}}$ facteur supplémentaire.
   a. Donner le modèle mathématique qu'on peut utiliser pour étudier ces 5 facteurs.
   b. Déterminer tous les générateurs d'aliases possibles. En déduire les relations entre les contrastes et les coefficients du modèle pour un plan 2^5.

Bon courage

Correction de l'examen

Exercice 1

1.

-les erreurs ε_i doivent être distribuées suivant une loi Normale de moyenne 0 et de variance σ^2, N$(0,\sigma)$, ce qui s'écrire :

$$E\ (\varepsilon_i) = 0$$
$$var\ (\varepsilon_i) = \sigma^2$$

2.Le critère de la méthode des moindres carées:

Lorsque on estime les inconnues $a_0, a_1, ..., a_q$ par $\hat{a}_0, \hat{a}_1, ..., \hat{a}_q$ nous pouvons calculer la réponse au point i par :

$$\hat{y}_i = \hat{a}_0 + \hat{a}_1\ x_{i1} + \hat{a}_2\ x_{i2} + ... + \hat{a}_j\ x_{ij} + ... + \hat{a}_q\ x_{iq}$$

La valeur $\hat{y}_i$ diffère du résultat expérimental y_i de la quantité e_i (de même que les $\hat{a}_i$ sont les estimateurs de a_i, les e_i, sont des estimations des ε_i).

$$y_i = \hat{y}_i + e_i.$$

Nous écrirons cette égalité quelque soit i, nous obtenons le système linéaire :

$$\begin{cases} y_1 = \hat{a}_0 + a_1\ x_{11} + \hat{a}_2\ x_{12} + ... + \hat{a}_j\ x_{1j} + ... + \hat{a}_q\ x_{1q} + e_1 \\ y_2 = \hat{a}_0 + \hat{a}_1\ x_{21} + \hat{a}_2\ x_{22} + ... + \hat{a}_j\ x_{2j} + ... + \hat{a}_q\ x_{2q} + e_2 \\ \vdots \\ y_i = \hat{a}_0 + a_1\ x_{i1} + \hat{a}_2\ x_{i2} + ... + \hat{a}_j\ x_{ij} + ... + \hat{a}_q\ x_{iq} + e_i \\ \vdots \\ y_N = \hat{a}_0 + a_1\ x_{N1} + \hat{a}_2\ x_{N2} + ... + \hat{a}_j\ x_{Nj} + ... + \hat{a}_q\ x_{Nq} + e_N \end{cases}$$

Nous cherchons les valeurs des $\hat{a}_j$ qui minimisent la somme des carrés des écarts $\sum e_i^2$. Concrètement nous cherchons le modèle linéaire qui passe au plus prés de l'ensemble des points expérimentaux. Pour simplifier l'écriture, nous adoptons la notation matricielle :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1q} \\ 1 & x_{21} & \cdots & x_{2j} & \cdots & x_{2q} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{i1} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{iq} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{N1} & \cdots & x_{Nj} & \cdots & x_{Nq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_j \\ \vdots \\ \hat{a}_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_N \end{pmatrix}$$

Le système à résoudre s'écrit : $y = X\ \hat{A} + e$, et le critère des moindres carrés ${}^t ee$ soit minimale

3. En utilisant le critère précédent,

on a :

$$\begin{aligned} {}^t ee &= {}^t(y - X\hat{A})(y - X\hat{A}) \\ &= ({}^t y - {}^t\hat{A}\,{}^t X)(y - X\hat{A}) \\ &= {}^t yy - {}^t\hat{A}\,{}^t Xy - {}^t yX\hat{A} + {}^t\hat{A}\,{}^t XX\hat{A} \\ &= {}^t yy - 2\,{}^t\hat{A}\,{}^t Xy + {}^t\hat{A}\,{}^t XX\hat{A} \end{aligned}$$

Calculons la dérivée de ${}^t ee$ par rapport à l'inconnue $\hat{A}$:

$$\frac{\partial({}^t ee)}{\partial\hat{A}} = \frac{\partial({}^t yy)}{\partial\hat{A}} - 2\,\frac{\partial({}^t\hat{A}\,{}^t Xy)}{\partial\hat{A}} + \frac{\partial({}^t\hat{A}\,{}^t XX\hat{A})}{\partial\hat{A}}$$

Où :

- $\frac{\partial({}^t yy)}{\partial\hat{A}} = 0$ car ${}^t yy$ ne dépend pas de $\hat{A}$
- $\frac{\partial({}^t\hat{A}\,{}^t Xy)}{\partial\hat{A}} = {}^t Xy$ car ${}^t\hat{A}\,{}^t Xy$ est une forme linéaire en $\hat{A}$
- $\frac{\partial({}^t\hat{A}\,{}^t XX\hat{A})}{\partial\hat{A}} = 2\,{}^t XX\hat{A}$ car ${}^t\hat{A}\,{}^t XX\hat{A}$ est une forme quadratique en $\hat{A}$

Il vient donc :

$$\frac{\partial({}^t ee)}{\partial\hat{A}} = -2\,{}^t Xy + 2\,{}^t XX\hat{A}$$

La valeur de $\hat{A}$ qui minimise ${}^t ee$ doit vérifier :

$$\begin{aligned} \frac{\partial({}^t ee)}{\partial\hat{A}} = 0 &\Rightarrow -2\,{}^t Xy + 2\,{}^t XX\hat{A} = 0 \\ &\Rightarrow {}^t XX\hat{A} = {}^t Xy \end{aligned}$$

Si la matrice $({}^t XX)^{-1}$ n'est pas singulière on a :

$$\hat{A} = ({}^t XX)^{-1}\,{}^t Xy$$

3. Espérance mathématique des coefficients

D'après la formule trouvée dans la question 3, l'espérance mathématique de $\hat{A}$ a pour expression :

$$E(\hat{A}) = E[({}^tXX)^{-1}\,{}^tXy]$$
$$= ({}^tXX)^{-1}\,{}^tX\;E(y)$$

Car les éléments de X sont considérés comme fixes. En désignant par A le vecteur des coefficients vrais et ε le vecteur des N écarts entre les résultats expérimentaux et les réponses théoriques alors :

$$y = XA + \varepsilon$$

Et

$$E(y) = E(XA+\varepsilon) = E(XA)$$
$$= X\;E(A)$$

car $E(\varepsilon) = 0$ par hypothèse. Nous trouvons :

$$E(\hat{A}) = ({}^tXX)^{-1}\,{}^tXXA = A$$

Le résultat que nous venons d'établir signifie que les distributions des $\hat{a}_i$ sont centrés sur les valeurs vraies a_i.

Variance des coefficients

Par définition la variance de $\hat{A}$ est :

$$var(\hat{A}) = E[(\hat{A}-A)\;{}^t(\hat{A}-A)]$$

Remplaçons $\hat{A}$ par $({}^tXX)^{-1}\,{}^tXy$ et y par $XA+\varepsilon$. Nous obtenons :

$$(\hat{A}-A) = ({}^tXX)^{-1}\,{}^tX(XA+\varepsilon) - A = A + ({}^tXX)^{-1}\,{}^tX\varepsilon - A = (\,{}^tXX)^{-1}\,{}^tX\varepsilon$$

Puisque $${}^t(\hat{A}-A) = {}^t\varepsilon\;X\;({}^tXX)^{-1}$$

Donc $$var(\hat{A}) = E[({}^tXX)^{-1}\,{}^tX\;\varepsilon\;{}^t\varepsilon\;X({}^tXX)^{-1}] = ({}^tXX)^{-1}\,{}^tX\;E(\varepsilon\;{}^t\varepsilon)\;X({}^tXX)^{-1}$$

Remplaçons $E(\varepsilon\;{}^t\varepsilon)$ par $E[(\varepsilon-0)\;{}^t(\varepsilon-0)] = var(\varepsilon) = \sigma^2$. Nous pouvons écrire :

$$var(\hat{A}) = ({}^tXX)^{-1}\,{}^tX\sigma^2\;X(\,{}^tXX)^{-1}$$
$$= \sigma^2({}^tXX)^{-1}\,{}^tXX\;({}^tXX)^{-1}$$

$$\Rightarrow var(\hat{A}) = \sigma^2({}^tXX)^{-1}$$

4. Si la matrice X est orthogonale alors : $\hat{a} = \frac{1}{n}\;{}^tXy$

Exercice 2

1. nombre d'expériences: 2^3

Matrice d'expériences:

−1	−1	−1
+1	−1	−1
−1	+1	−1
+1	+1	−1
−1	−1	+1
+1	−1	+1
−1	+1	+1
+1	+1	+1

Modèle mathématique:

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 + a_{123}x_1x_2x_3$$

2. L'avantage d'utiliser les plans factorielles complets est que le calcul des coefficients est très facile le faite que la matrice est orthogonale.

3.Matrice des effets:

.

Essai N°	Moy	1	2	3	12	13	23	123
1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1
2	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
3	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
4	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1
5	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
6	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1
7	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1
8	1	1	1	1	1	1	1	1

les coefficients du modèle

$$a_0 = 4.5, a_1 = 0.5\ , a_2 = 1, a_3 = 2\ , a_{12} = 0\ , a_{13} = 0, a_{23} = 0, a_{123} = 0$$

4.$\hat{y} = y\ et\ e = 0.$

5. Tableau d'analyse de la variance:

Somme carrées	Formule	Résultat	DDL	Variance
Totale	$\sum_{i=1}^{i=N} y_i^2 - N\bar{y}^2$	42	7	$\frac{42}{7} = 6$
D'ajustement	$\sum_{i=1}^{i=N} \hat{y}_i^2 - N\bar{y}^2$	42	7	$\frac{42}{7} = 6$
Résiduelle	$\sum_{i=1}^{i=N} e_i^2$	0	0	impossible

6. Si l'on décider d'utiliser le modèle $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$, alors la matrice d'effet sera:

Essai N°	Moy	1	2	3
1	1	-1	-1	-1
2	1	1	-1	-1
3	1	-1	1	-1
4	1	1	1	-1
5	1	-1	-1	1
6	1	1	-1	1
7	1	-1	1	1
8	1	1	1	1

et les coefficients seront toujours calculés par la formule des moindres carrées, on obtient:

$$a_0 = 4.5, a_1 = 0.5\,, a_2 = 1, a_3 = 2$$

Dans ce cas on recalcule les réponses prédites $\hat{y}$ et le vecteur des résidus $\hat{e}$, on obtient ainsi les mêmes résultats obtenus dans la question précédente.

Exercice 3:

1. L'avantage d'utiliser les plans fractionnaires est pour minimiser le nombre d'essais.

2. Les plans fractionnaires possibles à utiliser pour étudier 5 facteurs sont: $2^{5-1}, 2^{5-2}$.

3.le modèle mathématique est; $y = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 + c_4x_5 + c_5x_5$.

4.$\begin{cases} 5 = 23 \\ 4 = 123 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 = 235 \\ 1 = 1234 \end{cases} \rightarrow 1 = 145 \rightarrow 1 = 235 = 145 = 1234$

Pour le calcule des contrastes on a:

$$\begin{cases} 1 = 1 + 145 + 235 + 1234 \\ 2 = 2 + 35 + 134 + 1245 \\ 3 = 3 + 25 + 124 + 1345 \\ 4 = 4 + 15 + 123 + 2345 \\ 5 = 5 + 14 + 23 + 12345 \\ 12 = 12 + 34 + 135 + 245 \\ 13 = 13 + 24 + 125 + 345 \end{cases}$$