Université Hassiba Benbouali de Chlef **Année Universitaire : 2019-2020**
Faculté des Sciences Exactes et Informatique **Matière : Théorie des Opérateurs**
Département de Mathématiques **Niveau : Master 1**

Corrigé du TD 1

Exercice 1.

a) 1.i. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Comme la fonction P^2 est continue et positive, (Un résultat de l'Analyse 1)

$$\langle P, P\rangle = 0 \Rightarrow \int_0^1 P^2(x)dx = 0 \Rightarrow P^2(x) = 0,\ x \in [0,1] \Rightarrow P(x) = 0,\ x \in [0,1]$$

D'où, $P(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}$, car le polynôme P admet un ensemble non dénombrable de racines dans l'intervalle $[0,1]$, (Nombre de racines est plus grand que le degré de P). Par suite, $P = 0$.
2.i. $P = 0 \Rightarrow \langle P, P\rangle = 0$.

Il est facile de montrer que les autres conditions du produit scalaire sont satisfaites.

b) Pour $P(X) = -X + 2 \in \mathbb{R}[X]$: $\langle P, P\rangle = -2 < 0$. Ce qui montre que l'application $\langle ., .\rangle$ n'est pas un produit scalaire sur E. (La seconde condition n'est pas vérifiée)

Exercice 2.

a. Calcul direct en commençant par le côté droit.

b. $(\Rightarrow)$ On calcule $\langle u(x), u(y)\rangle = \frac{1}{4}(\|u(x) + u(y)\|^2 - \|u(x) - u(y)\|^2)$ en utilisant la linéarité de u et le fait qu'elle est une isométrie.

$(\Leftarrow)$ On montre que u est linéaire par le développement de $\|u(x + \lambda y) - u(x) - \lambda u(y)\|^2$ qui vaut 0. Donc, $u(x + \lambda y) - u(x) - \lambda u(y) = 0$. Puis, on montre l'isométrie en calculant $\langle u(x), u(x)\rangle$.

Exercice 3.

1. La trace d'une matrice carrée est par définition, la somme des éléments diagonaux de cette matrice. Exemple, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix}$$

alors $tr(A) = 1 + 5 = 6$. Parmi ces propriétés :
a. $tr(I_n) = n$, où I_n est la matrice identité. (facile)
b. $tr(\alpha A + B) = \alpha tr(A) + tr(B)$ (facile)
c. $tr(AB) = tr(BA),\ A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$??
Preuve. Soient $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}, B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. Alors

$AB = C = (c_{ik})_{1\leq i,k\leq n}$, avec $c_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk},\ 1 \leq i,k \leq n$

Donc,

$$\begin{aligned} tr(AB) = tr(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ji}a_{ij} \\ &= \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} b_{qp}a_{pq} \\ &= tr(BA) \end{aligned}$$

De plus, $\langle A,B\rangle = tr(A^tB) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji}b_{ji}$. Donc,

i. $\langle A,A\rangle = tr(A^tA) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji}a_{ji} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji}^2 \geq 0.$

ii. Si $A = 0$, il est clair que$\langle A,A\rangle = 0$, et

si $\langle A,A\rangle = 0$, alors $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji}^2 = 0$. Donc, $a_{ji}^2 = 0, 1 \leq i,j \leq n$. D'où, $a_{ji} = 0, 1 \leq i,j \leq n$. Ce qui montre que $A = 0$.

Les autres conditions sont faciles à vérifier.

2. On a par l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\begin{aligned} \|AB\|^2 = \langle AB,AB\rangle = \langle C,C\rangle = tr(C^tC) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{ki}^2 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}b_{ji})^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{kj}^2 \sum_{j=1}^{n} b_{ji}^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{kj}^2 \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ji}^2 \\ &\leq \langle A,A\rangle\langle B,B\rangle \\ &\leq \|A\|^2\|B\|^2 \end{aligned}$$

3. Par récurrence sur p, et en utilisant la question (2).

Exercice 4.

a. Rappelons d'abord, que si $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $\deg P = \infty$, et si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $\deg P \leq n$. On vérifie facilement que $\langle .,.\rangle$ définit un prod. scal. sur $\mathbb{R}[X]$ et sur $\mathbb{R}_n[X]$.

b. $(\mathbb{R}_n[X], \langle .,.\rangle)$ est un espace pré-Hilbertien. Comme $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1 < +\infty$, $(\mathbb{R}_n[X], \langle .,.\rangle)$ est donc un espace de Hilbert.

c.1. On montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|P_n - \exp\|_\infty = 0$, i.e., $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{0\leq x\leq 1} |P_n(x) - \exp(x)| = 0$. et on utilise le développement limité à l'ordre n, de la fonction exp au voisinage de 0 qui est également

$P_n(x)$, avec reste de Lagrange. Il existe donc $c[0,1]$ tel que

$$\|P_n - \exp\|_\infty = \sup_{0\leq x\leq 1} |\frac{\exp^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}| = \sup_{0\leq x\leq 1} |\frac{\exp(c)}{(n+1)!}| \leq \sup_{0\leq x\leq 1} |\frac{1}{(n+1)!}| \to 0,\ (n \to +\infty)$$

Par conséquent, $\lim_{n\to+\infty} \|P_n - \exp\|_\infty = 0$.

c.2. On remarque que la norme associée au produit scalaire est la norme $\|.\|_2$. De plus, on sait que $\|.\|_2 \leq \sqrt{b-a}\,\|.\|_\infty = \|.\|_\infty$, $(b-a = 1-0 = 1)$ Donc,

$$\|P_n - \exp\|_2 \leq \|P_n - \exp\|_\infty \to 0,\ (n \to +\infty)$$

d'après la question (c.1). D'où, $\lim_{n\to+\infty} \|P_n - \exp\|_2 = 0$.

3. La suite $(P_n)_n$ est convergente pour la norme $\|.\|_2$ associée au produit scalaire vers la fonction $\exp$. Elle est donc de Cauchy dans $(\mathbb{R}[X], \langle .,. \rangle)$. Or, la fonction $\exp \notin \mathbb{R}[X]$????? Par conséquent, $(\mathbb{R}[X], \langle .,. \rangle)$ n'est pas complet. Il n'est donc pas un espace de Hilbert.