Université de Biskra
Faculté des FSENV
Département de Mathématiques

2^{eme} semestre, année 2020/2021
3^{eme} année licence Maths
Module: Probabilités Avancées

T.D. $N^0 1$

Exercice n^0 01: Dans un jeu; on utilise un dé à quatre faces numérotées 0, 2, 3 et 5 et on dispose aussi d'une urne contenant trois billes numérotées respectivement 1, 3 et 5.
On procède le jeu de la façon suivante : on lance le dé puis on tire une bille. Si le dé donne 0, on ne gagne rien. Sinon, on gagne 5 € si le dé et la bille portent le même numéro. Sinon, on gagne 1 €. Soit X la variable aléatoire correspondant au gain du joueur.

1. Donner l'univers Ω.
2. Donner $X(\Omega)$.
3. Donner la loi de X et son espérance $E(X)$. L'organisateur qui propose ce jeu demande de payer 3 € pour jouer une fois. Quelle est sa rémunération moyenne ?

Exercice n^0 02: On suppose que la variable aléatoire X suit la loi uniforme sur l'ensemble

$$X(\Omega) = \{-3, -2, 1, 4\}$$

1. Donner la loi de X.
2. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et l'écart-type de X.
3. On définit la variable aléatoire $Y = 2X + 1$, calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.

Exercice n^0 03: Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\alpha}{k!}$.

1. Calculer α.
2. Calculer $E[X]$ et $E[X(X-1)]$. En déduire la variance et l'écart-type de X.

Exercice n^0 04 (Devoir): Calculer l'espérance et la variance des lois usuelles suivantes: loi de Bernoulli, Binomiale, Poisson, Géométrique, Hypergéométrique et Binomiale négative. Vérifier la propriété « sans mémoire » de la loi géométrique.

Exercice n^0 05: Soit $f(x)$ la fonction définie par:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad x \geq 0, \lambda > 0$$

1. Démontrer que $f(x)$ est une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition et l'espérance de X.

3. On suppose que la durée de vie d'un disque dur est distribuée selon une loi exponentielle. Le fabricant veut garantir que le disque dur a une probabilité inférieure à $0,001$ de tomber en panne sur un an. Quelle durée de vie moyenne minimale doit avoir le disque dur ?

Exercice n^0 06: Soit une fonction F définie de la façon suivante :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -2 \\ \frac{1}{8}(x+2)^2 & \text{si } x \in]-2, 0] \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & \text{si } x \in]0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} .$$

1. Est ce que F est une fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle absolument continue?

2. On suppose que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X, trouver sa densité.

3. Calculer $\mathbb{P}\left(-1 \leq X \leq 0.5\right)$.

Exercice n^0 07: Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $(-1, 1)$.

1. Déterminer la loi de $Y = |X|$.

   a. Soit φ la fonction de $(-1, 1)$ dans $\mathbb{R}$ définie par

   $$\varphi(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+X}{1-X} \right)$$

   étudier les variations de φ. Montrer que φ réalise une bijection de $(-1, 1)$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa bijection réciproque.

   b. On définit une variable aléatoire Z par

   $$Z = \varphi(X) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+X}{1-X} \right)$$

   déterminer la fonction de répartition et une densité de Z.

Exercice n^0 08: Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}\left(0, 1\right)$. Calculer la densité de $Z = e^x$. La loi de Z s'appelle la loi log-normale.