Université Abou berkBelkaid Tlemcen (2020/2021)
Faculté des sciences
Département de mathématiques (L2)
Examen de probabilités (1h40mn)

1 Exercice N°1(10pts)

I] Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que, pour tout entier $k \geq 1$:

$$P(X = k) = \frac{4}{k} \cdot P(X = k - 1)$$

- Déterminer la loi de X, en déduire $P(X \leq 2)$ (3pts)

II] Soit X une v.a.r qui suit une loi de poisson de paramètre λ.
[$X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda),\ \lambda \succ 0,\ X(\Omega) = \mathbb{N}$]. On pose

$$Y = 4\left[\frac{X}{2}\right] - 2X + 1 \text{ } où \text{ } \left[\frac{X}{2}\right] \text{ est la partie entière de } \frac{X}{2}$$

1. Déterminer la loi de Y en fonction de λ (3pts)
2. Calculer E(Y) en fonction de λ. [indication: $chx = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $shx = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$] (2pts)
3. Déterminer la loi de de Y^2, en déduire la variance de Y: V(Y) (2pts)

2 Exercice N°2 (10pts)

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires de densité $f_{(X,Y)}$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \exp\left[-(x+y)\right] & si \quad x \succ 0 \ et \ y \succ 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer les densités marginales de X et Y. (2pts)
2. X et Y sont-elles des v.a indépendantes?, justifiez. (0.5pt)
3. Calculer la covariance de (x,y): $cov(x,y)$, en déduire E(xy). (1pt)
4. Calculer $P(X \geq 2 \cap Y \geq 1)$ et $P(X \geq 2 \cup Y \geq 3)$. (2pts)
5. On pose $(Z,U) = (X+Y, 3X-Y)$. déterminer la loi du couple (Z,U).(3pts)
6. En déduire, la densité de la variable aléatoire $Z = X + Y$.(1.5pts)

"Celui qui entend avec ses oreilles devient conteur; celui qui écoute avec son coeur devient conscient et celui qui exhorte avec son acte devient un guide"
Imam Shaffii
"On ne peut pas labourer, semer, récolter et manger le même jour"
proverbe africain

3 Solution

3.1 Exercice N°1

I] Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$,déterminer la loi de X :

$$\begin{aligned} P(X &= k) = \frac{4}{k} \cdot P(X = k-1) \\ &= \frac{4}{k} \cdot \frac{4}{k-1} \cdot P(X = k-2) \\ &= \frac{4}{k} \cdot \frac{4}{k-1} \cdot ... \cdot \frac{4}{1} \cdot P(X = 0) \\ &= \frac{4^k}{k!} \cdot P(X = 0) \qquad (0.5pt) \end{aligned}$$

Or

$$\sum_{k \geq 0} P(X = k) = 1 \Leftrightarrow \sum_{k \geq 0} \frac{4^k}{k!} \cdot P(X = 0) = 1 \qquad (0.5pt)$$

$$\Longrightarrow P(X = 0) = e^{-4} \quad (0.5pt)$$

car $\sum_{n\geq 0} \mathrm{x}^n \, \overline{{\scriptstyle n! = e^x,}}$conclusion:

$$P(X = k) = \frac{4^k}{k!} \cdot e^{-4}, \quad k \geq 0 \qquad (0.25pt)$$

donc $X \hookrightarrow \mathcal{P}(4)$ X est une loi de poisson de paramétre 4 (0.25pt)

- En déduire $P(X \leq 2)$

$$\begin{aligned} P(X &\leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \qquad (0.5pt) \\ &= e^{-4} \left(\frac{4^0}{0!} + \frac{4^1}{1!} + \frac{4^2}{2!} \right) \\ &= e^{-4} (1 + 4 + 8) = 13 \cdot e^{-4} \qquad (0.5pt) \\ &= 0.238 \end{aligned}$$

II] Soit X une v.a.r qui suit une loi de poisson de paramètre λ.
[$X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda), \ \lambda \succ 0, \ X(\Omega) = \mathbb{N}$]. On pose

$$Y = 4 \left[\frac{X}{2} \right] - 2X + 1 \ \textit{où} \ \left[\frac{X}{2} \right] \text{ est la partie entière de } \frac{X}{2}$$

1. Déterminer la loi de Y en fonction de λ

   Si X=2k (pair)

$$\begin{aligned} Y &= 4 \left[\frac{X}{2} \right] - 2X + 1 \\ &\Longrightarrow Y = 4 \left[\frac{2k}{2} \right] - 2(2k) + 1 \\ &\Longrightarrow Y = 4k - 4k + 1 = 1 \qquad (0.5pt) \end{aligned}$$

Si X=2k+1 (impair)

$$\begin{aligned} Y &= 4\left[\frac{X}{2}\right]-2X+1 \\ &\Longrightarrow Y=4\left[\frac{2k+1}{2}\right]-2\left(2k+1\right)+1 \\ &\Longrightarrow Y=4k-4k-2+1=-1 \qquad (0.5pt) \end{aligned}$$

Conclusion : Si $X \in D_X = \mathbb{N}$ alors $Y \in D_Y = \{-1,1\}$ *, calculons sa loi :*

$$\begin{aligned} P(Y &= -1) = P(\cup_{k\geq 0}\left(X=2k+1\right)) \qquad (0.5pt) \\ &= \sum_{k\geq 0} P(X=2k+1) \\ &= \sum_{k\geq 0} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!}\cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\cdot sh\lambda \quad (0.5pt) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Y &= +1) = P(\cup_{k\geq 0}\left(X=2k\right)) \qquad (0.5pt) \\ &= \sum_{k\geq 0} P(X=2k) \\ &= \sum_{k\geq 0} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}\cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\cdot ch\lambda \qquad (0.5pt) \end{aligned}$$

Or ceci définit bien une fonction de masse; vérification:

$$\lambda \succ 0,\ donc\ \ ch\lambda \succ 0\ et\ sh\lambda\ \succ 0 \Longrightarrow P(Y=\pm 1)\geq 0$$

$$\begin{aligned} P(Y &= -1)+P(Y=+1) = e^{-\lambda}\left(sh\lambda + ch\lambda\right) \\ &= e^{-\lambda}\left(\frac{e^{\lambda}-e^{-\lambda}}{2}+\frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2}\right) \\ &= e^{-\lambda}\times e^{+\lambda} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{de plus, } ch\lambda &= \frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2} = \frac{1}{2}\left[\sum_{n\geq 0}\frac{\lambda^n}{n!}+\sum_{k\geq 0}\frac{(-\lambda)^n}{n!}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\sum_{n\geq 0}\frac{\lambda^n}{n!}\left(1^n+(-1)^n\right)\right] \quad si\ n=2k\ pair \\ &= \sum_{k\geq 0}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \text{ même raisonnement pour le shx} \end{aligned}$$

2. Calculer E(Y) en fonction de λ. [indication: $chx = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $shx = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$]

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_i y_i \times P(Y = y_i) \qquad (0.5pt) \\
&= 1 \times P(Y = +1) - 1 \times P(Y = -1) \qquad (0.5pt) \\
&= e^{-\lambda}\,(ch\lambda - sh\lambda) \qquad (0.5pt) \\
&= e^{-\lambda}\left(\frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2} - \frac{e^{\lambda}-e^{-\lambda}}{2}\right) \\
&= e^{-\lambda} \times e^{-\lambda} = e^{-2\lambda} \qquad (0.5pt)
\end{aligned}$$

3. Déterminer la loi de de Y^2, en déduire la variance de Y: V(Y)

   Si on pose $Z=Y^2$ alors $D_Z = \{1\}$ ie que la v.a Z est une constante (v.a.certaine) donc sa loi P(Z=1)=1 (0.5pt) ainsi,

$$E(Z) = \sum_i z_i \times P(Z = z_i) \;= 1 \times\; P(Z = 1) \;= 1 \qquad (0.5pt)$$

   On en déduit que

$$E(Z) = E(Y^2) = 1 \qquad (0.25pt)$$

$$\begin{aligned}
Var(Y) &= E(Y^2) - [E(Y)]^2 \qquad (0.25pt) \\
&= 1 - e^{-4\lambda} \qquad (0.5pt)
\end{aligned}$$

3.2 Exercice N°2

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires de densité $f_{(X,Y)}$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \exp\left[-(x+y)\right] & si \quad x \succ 0 \;et\; y \succ 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer les densités marginales de X et Y.

   Densité marginale de X, $f_X(x)$: Si $x \succ 0$

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\; dy \qquad (0.25pt) \\
&= \int_0^{+\infty} \exp\left[-(x+y)\right]\; dy \\
&= e^{-x} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-y}\; dy \qquad (0.25pt) \\
&= e^{-x} \cdot \left[-e^{-y}\right]_0^{+\infty} \\
&= e^{-x} \cdot \left[0 + e^0\right] \qquad (0.25pt)
\end{aligned}$$

Conclusion:

$$f_X(x) = e^{-x} \cdot 1_{]0,+\infty[}(x)$$

Donc X suit une loi exponentielle de paramétre 1: $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \qquad (0.25pt)$

Densité marginale de Y, $f_Y(y)$: Il suffit de remarquer de $f(x,y)$ est symétrique en $(x,y)(0.25pt)$ et que $D_X = D_Y =]0,+\infty[$ $(0.5pt)$ ainsi on aura le meme résultat

Donc Y suit une loi exponentielle de paramétre 1: $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \qquad (0.25pt)$

2. X et Y sont-elles des v.a indépendantes?, justifiez. (0.5pt)

$$D_{(X,Y)} = D_X \times D_Y$$

$$f(x,y) = f_X(x) \times \ f_Y(y)$$

Conclusion X et Y sont bien indépendantes

3. Calculer la covariance de (x,y): $cov(x,y)$, en déduire E(xy). (1pt)

$$X \ et \ Y \ indépendantes \Longrightarrow cov(x,y) = 0 \qquad (0.25pt)$$

$$\left.\begin{array}{r} cov(x,y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) \\ cov(x,y) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow E(XY) = E(X) \cdot E(Y) \quad (0.25pt)$$

$$X \ et \ Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \Longrightarrow E(X) = E(Y) = 1 \qquad (0.25pt)$$

$$E(XY) = E(X) \cdot E(Y) \ = 1 \quad (0.25pt)$$

4. Calculer $P(X \geq 2 \cap Y \geq 1)$ et $P(X \geq 2 \cup Y \geq 3)$. (2pts)

$$\begin{aligned} P(X &\geq 2 \cap Y \geq 1) = P(X \geq 2) \cdot P(Y \geq 1) \quad car \ indep \qquad (0.25pt) \\ &= (1 - F_X(2)) \cdot (1 - F_Y(1)) \qquad (0.25pt) \\ &= e^{-2} \cdot e^{-1} = e^{-3} \qquad (0.25pt) \\ &= 0.049 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X &\geq 2 \cup Y \geq 3) = P(X \geq 2) + P(Y \geq 3) - P(X \geq 2 \cap Y \geq 3) \qquad (0.25pt) \\ &= P(X \geq 2) + P(Y \geq 3) - P(X \geq 2) \cdot P(Y \geq 3) \quad indep \qquad (0.25pt) \\ &= (1 - F_X(2)) + (1 - F_Y(3)) - (1 - F_X(2)) \cdot (1 - F_Y(3)) \qquad (0.25pt) \\ &= e^{-2} + e^{-3} - e^{-2} \cdot e^{-3} \qquad (0.25pt) \\ &= e^{-2} + e^{-3} - e^{-5} = 0.178 \end{aligned}$$

Ou bien

$$\begin{aligned} P(X &\geq 2 \cup Y \geq 3) = 1 - P(X \prec 2 \cap Y \prec 3) \\ &= 1 - P(X \prec 2) P(Y \prec 3) \\ &= 1 - F_X(2) F_Y(3) \\ &= 1 - \left(1 - e^{-2}\right)\left(1 - e^{-3}\right) \\ &= e^{-2} + e^{-3} - e^{-5} = 0.178 \end{aligned}$$

Rappel:

$$X \ et \ Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \Longrightarrow F_X(x) = \left(1 - e^{-x}\right) \cdot 1_{]0,+\infty[} \qquad (0.25pt)$$

5. On pose $(Z,U) = (X+Y, 3X-Y)$. déterminer la loi du couple (Z,U).(3pts)

$$\begin{cases} Z = X+Y \\ U = 3X-Y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} X = \frac{Z+U}{4} \\ Y = \frac{3Z-U}{4} \end{cases} \quad (0.5pt)$$

Calculons le jacobien

$$J = \begin{vmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 3/4 & -1/4 \end{vmatrix} = -\frac{1}{16} - \frac{3}{16} = -\frac{1}{4} \qquad (0.5pt)$$

Ainsi la loi du couple (Z,U) est :

$$\begin{aligned} f_{(Z,U)}(z,u) &= f_{(X,Y)}(\frac{Z+U}{4}, \frac{3Z-U}{4}) \cdot |J| \qquad (0.5pt) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \exp\left[-\left(\frac{Z+U}{4} + \frac{3Z-U}{4}\right)\right] \\ &= \frac{1}{4} \cdot e^{-z} \qquad (0.5pt) \end{aligned}$$

Domaine de variation du couple (Z,U) $(1pt)$

$$Z = X+Y \succ 0$$

$$\begin{cases} X = \frac{Z+U}{4} \succ 0 \\ Y = \frac{3Z-U}{4} \succ 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} Z+U \succ 0 \\ 3Z-U \succ 0 \end{cases} \Longrightarrow -Z \prec U \prec 3Z$$

6. En déduire, la densité de la variable aléatoire $Z = X+Y$.

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(Z,U)}(z,u) \cdot du \quad (0.25pt) \\ &= \int_{-z}^{3z} \frac{1}{4} \cdot e^{-z} \cdot du \quad (0.5pt) \\ &= \frac{1}{4} \cdot e^{-z} \cdot [u]_{-z}^{3z} \\ &= z \cdot e^{-z} \qquad (0.25pt) \end{aligned}$$

conclusion

$$f_Z(z) = z \cdot e^{-z} \cdot 1_{]0,+\infty[}(z) \qquad (0.5pt)$$