Université Hassiba Benbouali - Chlef
Faculté des Sciences- Déparetement de mathématique
1^{ere} **Master mathématique appliquée et statistique**

Examen de la matière Programmation Mathématique, 16-12-2015, CORRECTION

Exercice 1 1. *La forme standard*

$$(PS)\begin{cases} z(\max) = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 90 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 40 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_6 = 80 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, ..., 6 \end{cases}$$

$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$	$\mathbf{x}_5$	$\mathbf{x}_6$	$\mathbf{b}_i$	**V.b**
3	4	2	1	0	0	90	$\mathbf{x}_4$
2^*	1	1	0	1	0	40	$\mathbf{x}_5$
1	3	2	0	0	1	80	$\mathbf{x}_6$
5	**4**	**3**	**0**	**0**	**0**	**0**	$-\mathbf{z}$
0	$\frac{5}{2}^*$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	0	30	$\mathbf{x}_4$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	20	$\mathbf{x}_1$
0	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	60	$\mathbf{x}_6$
0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	0	-100	$-z$
0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0	12	$\mathbf{x}_2$
1	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	0	14	$\mathbf{x}_1$
0	0	1^*	-1	1	1	30	$\mathbf{x}_6$
0	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{8}{5}$	0	-118	$-z$
0	1	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	6	$\mathbf{x}_2$
1	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	2	$\mathbf{x}_1$
0	0	1	-1	1	1	30	$\mathbf{x}_3$
0	0	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{9}{5}$	$-\frac{1}{5}$	-124	$-z$

La base $B=\{1,2,3\}$ *est optimale. La solution correspondante est :*
$x_1 = 2,\ x_2 = 6,\ x_3 = 30$ *et* $z = 124$.

2.
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. *Le dual*

$$(PL)\begin{cases} w(\min) = 90\lambda_1 + 40\lambda_2 + 80\lambda_3 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \geq 5 \\ 4\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 \geq 4 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \geq 3 \\ \lambda_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

4. $\lambda^* = \left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5}, \frac{1}{5}\right)^\top$ *est une solution admissible car,*

$$3\left(\frac{2}{5}\right) + 2\left(\frac{9}{5}\right) + \frac{1}{5} = 5 \geq 5$$
$$4\left(\frac{2}{5}\right) + \frac{9}{5} + 3\left(\frac{1}{5}\right) = 4 \geq 4$$
$$2\left(\frac{2}{5}\right) + \frac{9}{5} + 2\left(\frac{1}{5}\right) = 3 \geq 3$$

5. $w^* = 90\left(\frac{2}{5}\right) + 40\left(\frac{9}{5}\right) + 80\left(\frac{1}{5}\right) = 124 = z^*$, *ainsi* λ^* *est une solution optimale de* (D).

6. *La base $B=\{1,2,3\}$ est optimale pour (P)*

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90+\alpha \\ 40 \\ 80 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 90+\alpha \\ 40 \\ 80 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 90+\alpha \\ 40 \\ 80 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} b_1 = \frac{3}{5}(10+\alpha) \geq 0 \\ b_2 = 10+\alpha \geq 0 \\ b_3 = 30-\alpha \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha \geq -10 \\ \alpha \geq -10 \\ \alpha \leq 30 \end{cases} \Longrightarrow -10 \leq \alpha \leq 30$$

Exercice 2

$$(PL) \Leftrightarrow \begin{cases} z = \min x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ x_1 - 5x_2 + 7x_3 + x_4 = -8 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_5 = 2 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_6 = -2 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, ..., 6 \end{cases}$$

$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_6}$	**s.m**	**V.b**
-1	5	-7^*	1	0	0	-8	$\mathbf{x_4}$
2	-4	2	0	1	0	2	$\mathbf{x_5}$
-1	3	-2	0	0	1	-2	$\mathbf{x_6}$
1	**3**	**2**	**0**	**0**	**0**	**0**	$-\mathbf{z}$
$\frac{1}{7}$	$-\frac{5}{7}$	1	$-\frac{1}{7}$	0	0	$\frac{8}{7}$	$\mathbf{x_3}$
$\frac{12}{7}$	$-\frac{18}{7}^*$	0	$\frac{2}{7}$	0	0	$-\frac{2}{7}$	$\mathbf{x_5}$
$-\frac{5}{7}$	$\frac{11}{7}$	0	$-\frac{2}{7}$	0	1	$\frac{2}{7}$	$\mathbf{x_6}$
$\frac{5}{7}$	$\frac{31}{7}$	0	$\frac{2}{7}$	0	0	$-\frac{16}{7}$	$-z$
$-\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{5}{18}$	0	$\frac{11}{9}$	$\mathbf{x_3}$
$-\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{7}{18}$	0	$\frac{1}{9}$	$\mathbf{x_2}$
$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{9}$	$\frac{11}{18}$	1	$\frac{1}{9}$	$\mathbf{x_6}$
$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{47}{36}$	0	$-\frac{25}{9}$	$-z$

Exercice 3 *Cherchons le dual (D) de $(P1)$*

$$(D1) \Longleftrightarrow \begin{cases} z\,(\max) = 6y_1 + 2y_2 - 2y_3 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 \geq -2 \\ y_1 - y_2 - 3y_3 \geq -1 \\ -3y_1 + 2y_2 - 2y_3 \geq 1 \\ 6y_1 + 2y_2 - 2y_3 \geq 1 \\ y_i \text{ de signe qcq},\ i = 1,2,3 \end{cases}$$

verifions que $x^* = (3,0,1,3)^\top$ est une solution admissible de $(P1)$

$$\begin{aligned} 2\times 3 + 0 - 3\times 1 + 3 &= 6 \\ 3 - 0 + 2\times 1 - 3 &= 2 \\ 3 - 3\times 0 - 2\times 1 - 3 &= -2 \end{aligned}$$

Cherchons y^* solution admissible du dual avec (x^*, y^*) vérifie le théorème des écatrs complémentaires,

$$\begin{cases} x_1^* = 3 > 0 \\ x_2^* = 1 > 0 \\ x_3^* = 3 > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2y_1^* + y_2^* + y_3^* = -2 \\ -3y_1^* + 2y_2 - 2y_3^* = 1 \\ 6y_1^* + 2y_2^* - 2y_3^* = 1 \end{cases} \Longrightarrow y^* = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)^\top .$$

On vérifie que y^* *est solution admissible de* $(D1)$. *Rest à vérifier la contrainte (2) du dual*

$$-\frac{1}{3} + \frac{2}{3} - 3\left(-\frac{2}{3}\right) \geq -1$$

Coclusions :$(x^*, y^*) \in S_{(P1)} \times S_{(D1)}$ *vérifie le théorème des écatrs complémentaires, alors* x^* *est une solution optimal de* $(P1)$.

Exercice 4 *L'optimum est un clairement obtenu en un sommet. Ce point est a l'intersection des droites :*

$$2x_2 = 19 \quad et \quad 7x_1 - 2x_2 = 107.$$

Par conséquent, la solution optimale est $x^* = (18, 9.5)$ *et la valeur de la fonction objectif est* $z^* = 4 \times 18 + 9.5 = 81.5$.