Exercice 12

Soit $X(t)$ est le montant de dividendes reçus au cours de la periode $(0,t]$

Alors
$$X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } N(t)=0 \\ d_1 & \text{si } N(t)=1 \\ d_1+d_2 & \text{si } N(t)=2 \\ ----- & \\ \sum_{i=1}^{n} d_i & \text{si } N(t)=n \\ --- & \end{cases}$$

Comme $N(t)$ est de loi de Poisson d'espérance λt,

$$P(N(t)=n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

er $$E[X(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} x_n P(X(t)=x_n] = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right) P[N(t)=n]$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right) e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

Si les montants des dividendes sont tous égaux à d alors

$$E[X(t)] = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} d\right) e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}(n d)\, e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} = d\lambda t \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}$$
$$= d\lambda t\, e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$
$$= d\lambda t$$

Le montant espéré au cours de la première année est

$$E[X(365)] = d\lambda \times 365.$$