Théorie des graphes

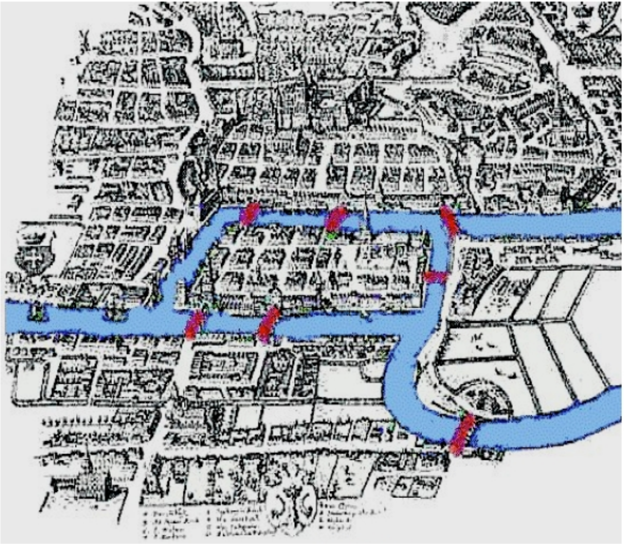
Chapitre 1: Notions fondamentales de la théorie des graphes

2023 - 2024

Introduction et historique

L'histoire de la théorie des graphes débute peut-être avec les travaux d'Euler au $18^{ème}$ siècle et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tels que celui des ponts de Königsberg, où les habitants de Königsberg se demandaient s'il était possible, en partant d'un quartier quelconque de la ville, de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même et de revenir à leur point de départ).

Introduction et historique



Les sept ponts de Königsberg

Le problème posé consistait, à partir d'une terre quelconque A, B, C ou D, à traverser chacun des ponts une fois et une seule et à revenir à son point de départ. Euler présenta cette situation par à l'aide d'un "**schéma**", comme le montre la figure représentant **les terres par des points** et **les ponts par des traits.**

Introduction et historique

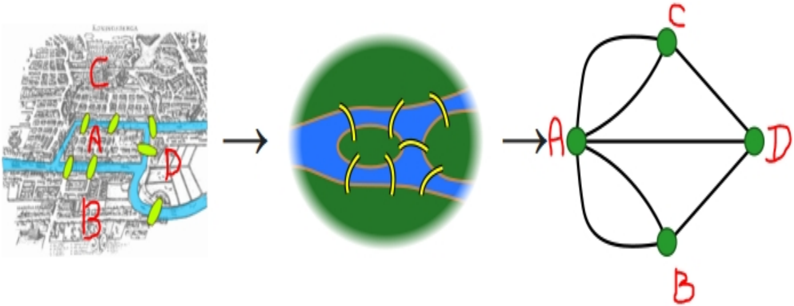


Figure: Graphe associés au problème des ponts de Königsberg

Comme nous le montrons ultérieurement, Euler démontra que ce problème n'a pas de solution. Le problème de ponts de Königsberg est identique à celui consistant à tracer une figure géométrique sans lever le crayon et sans repasser plusieurs fois sur le même trait.

Un graphe permet de décrire un ensemble d'objets et leurs relations, c'est à dire les liens entre les objets.

- Les objets sont appelés les **noeuds**, ou encore les **sommets** du graphe.

Introduction et historique

Un graphe permet de décrire un ensemble d'objets et leurs relations, c'est à dire les liens entre les objets.

- Les objets sont appelés les **noeuds**, ou encore les **sommets** du graphe.
- Un lien entre deux objets est appelé une **arête** ou bien un **arc**.

Définition

Soient V un ensemble (fini ou infini) et E une partie de $V \times V$ (i.e., une relation sur V). Le graphe $G = (V, E)$ est la donnée du couple (V, E). Les ´éléments de V sont appelés les **sommets** *ou* **noeuds** *de G. Les ´éléments de E sont appelés les* **arcs** *(si G est orienté) ou* **arêtes** *(si G est non orienté) de G. Si V est fini, on parlera de graphe fini.*

On parlera donc parfois de graphe orienté ou de graphe dirigé. Soit I un ensemble d'indices. Si $V = \{v_i | i \in I\}$ et si $a = (v_i, v_j)$, $i, j \in I$, on pourra alors parler de l'origine v_i et de la destination v_j de l'arc a. On dit que v_i et v_j sont les **extrémités de l'arc** a et que a relie v_i à v_j . Si $b = (v_i, v_i)$, on parle généralement de la **boucle** b. Les sommets sont représentés par des points et si (v_i, v_j) est un arc, alors on trace une **flèche** de v_i vers v_j dans ce cas v_i et v_j sont dit **adjacents** des **voisins** . Deux **arcs sont adjacents** s'ils ont au moins une extrémité en commun.

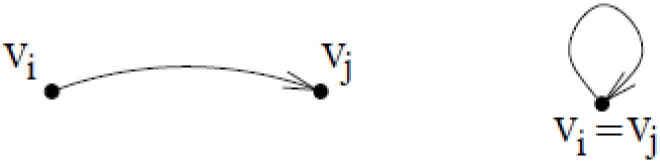


Figure: Un arc reliant deux sommets, une boucle.

Définition

Soient $G = (V, E)$ un graphe orienté. On dit que le sommet x est un **succésseur** *(resp.* **prédécesseur***) d'un sommet y s'il existe un arc u du graphe G dont l'extrémité terminale est (resp. initiale) x.*

(x est un succésseur de y c-à-d l'arc $u=\{y, x\}$, x est un prédécesseur de y c-à-d l'arc $u=\{x, y\}$)

On note par:

- $\Gamma_G^+(x)$: l'ensemble des succésseur de x dans G.

On note par:

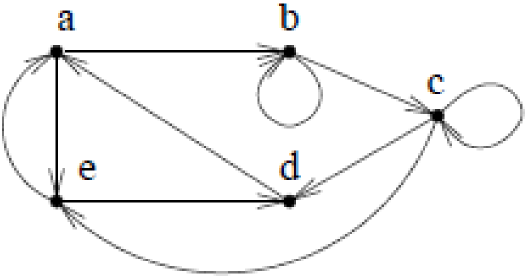
- $\Gamma_G^+(x)$: l'ensemble des succésseur de x dans G.
- $\Gamma_G^-(x)$: l'ensemble des sprédécesseur de x dans G.

On note par:

- $\Gamma_G^+(x)$: l'ensemble des succésseur de x dans G.
- $\Gamma_G^-(x)$: l'ensemble des sprédécesseur de x dans G.
- $\Gamma_G(x) = \Gamma_G^+(x) \cup \Gamma_G^-(x)$: l'ensemble des **voisins** de x dans G.

Exemple

Soit le graphe $G = (V, E)$ *où* $V = \{a, b, c, d, e\}$ *et*
$E = \{(a, b), (a, e), (b, b), (b, c), (c, c), (c, d), (c, e), (d, a), (e, a), (e, d)\}$.
Celui-ci est représenté à la figure ci-après. Par exemple,
$\Gamma_G^+(a) = \{(a, b), (a, e)\}$.



Définition

Soit $G = (V, U)$ un graphe orienté. A tout sommet $x \in V$, on définit:

- **Le demi degré extérieur de** x *dans* G *noté par* $d_G^+(x)$ *la quantité* $|\Gamma_G^+(x)|$.
- **Le demi degré intérieur de** x *dans* G *noté par* $d_G^-(x)$ *la quantité* $|\Gamma_G^-(x)|$.
- **Le demi degré de** x *dans* G *noté par* $d_G(x)$ *la quantité* $d_G^+(x) + d_G^-(x)$.

Dans l'exemple précédent, $d_G^+(d) = 1$ et $d_G^-(a) = 2$.

Théorème (1)

Pour tout graphe $G = (X, U)$, on a:

1. $\sum_{x \in X} d_G^+(x) = \sum_{x \in X} d_G^-(x) = |U|.$

Preuve.

■

Théorème (1)

Pour tout graphe $G = (X, U)$*, on a:*

1. $\sum\limits_{x \in X} d_G^+(x) = \sum\limits_{x \in X} d_G^-(x) = |U|$.
2. $\sum\limits_{x \in X} d_G(x) = 2|U|$.

Preuve.

■

Théorème (1)

Pour tout graphe $G = (X, U)$, on a:

1. $\sum\limits_{x \in X} d_G^+(x) = \sum\limits_{x \in X} d_G^-(x) = |U|$.
2. $\sum\limits_{x \in X} d_G(x) = 2|U|$.

Preuve.

1. Pour chaque arc u, il y a une extrémité initiale et une extrémité terminale. Par conséquent, on a autant d'extrémités initiales et d'extrémités terminales que le cardinal de U.

■

Théorème (1)

Pour tout graphe $G = (X, U)$, on a:

1. $\sum\limits_{x \in X} d_G^+(x) = \sum\limits_{x \in X} d_G^-(x) = |U|$.
2. $\sum\limits_{x \in X} d_G(x) = 2|U|$.

Preuve.

1. Pour chaque arc u, il y a une extrémité initiale et une extrémité terminale. Par conséquent, on a autant d'extrémités initiales et d'extrémités terminales que le cardinal de U.
2. Est une conséquence directe de la définition du degré de (1).

■

Corollaire

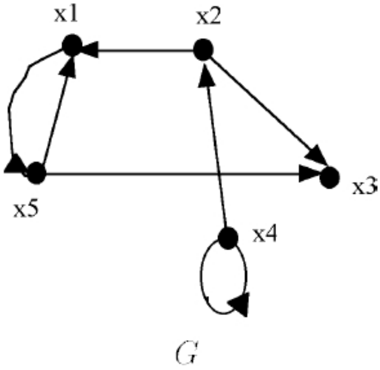
Pour tout graphe $G = (X, U)$, le nombre de sommet de degré impair est pair.

Preuve. Soient V_1, V_2 l'ensemble des sommets de degrés impairs et pairs respectivement. Il est clair que V_1 et V_2 est une partition de V. D'après le Théorème (1), on a :
$\sum_{x \in X} d_G(x) = \sum_{x \in V_1} d_G(x) + \sum_{x \in V_2} d_G(x) = 2|U|$.
D'où $\sum_{x \in V_1} d_G(x) = 2|U| - \sum_{x \in V_2} d_G(x) = 2|U| - 2k$.
Donc puisque la somme est pair, $|V_1|$ est pair. ∎

Definition

Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté, avec $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$: La matrice d'adjacence du graphe G est la matrice $M(G) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients $m_{i;j}$sont définis par:

$$m_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } \ (x_i, x_j) \notin U \\ 1\text{si } \ (x_i, x_j) \in U \end{cases}$$

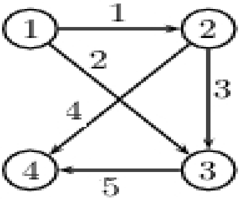


$$M(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definition

Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté d'ordre n et de taille m. La matrice d'incidence de G est une matrice $A(G) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ dont les coefficients $a_{i;j}$sont définis par:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si l'arc } u_j \text{ admet le sommet } x_i \text{ comme extrémité initiale;} \\ -1 \text{ si l'arc } u_j \text{ admet le sommet } x_i \text{ comme extrémité terminale;} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

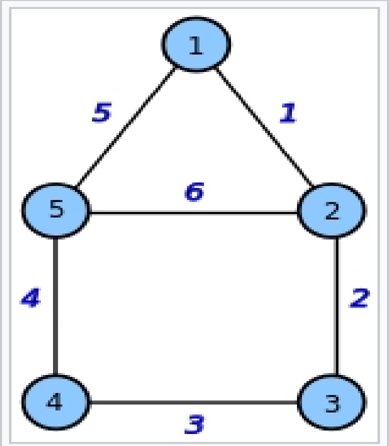


$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Definition

Soit $G = (X, U)$ un graphe **non orienté** d'ordre n et de taille m. La matrice d'incidence de G est une matrice $A(G) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ dont les coefficients $a_{i;j}$sont définis par:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si l'arête } u_j \text{ admet le sommet } x_i \text{ comme extrémité;} \\ 2 \text{ si l'arc } u_j \text{ est unne boucle sur } x_i; \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$



1
5
1
6
5
2
4
2
4
3
3

Définitions et premiers exemples

Graphes orientés (**matrice** d'incidence)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition

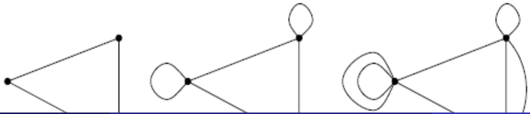
Soit $G = (X, U)$ *un graphe orienté et soient* x, y *deux sommets de* X.
Désignons par $m_G^+(x, y)$ *le nombre d'arcs ayant* x *pour extrémité initiale et* y *pour extrémité terminale.*
On appelle **multiplicité d'un graphe** *la quantité*

$$p = \max\left\{m_G^+(x, y) \ : x, \ y \in X\right\}.$$

Dans ce cas, G *est dit un* p-**graphe.**

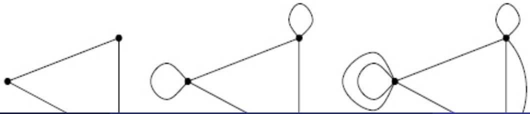
Définition

1. *Un multigraphe est un graphe sans orientation. A la place d'arc on dira* ***arête****.*



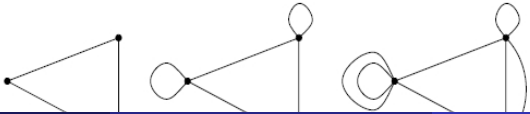
Définition

1. *Un multigraphe est un graphe sans orientation. A la place d'arc on dira* **arête**.
2. *Un multigraphe est* **simple** *s'il est sans boucles et sans arêtes multiples.*



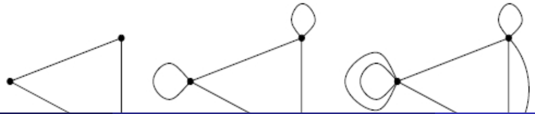
Définition

1. *Un multigraphe est un graphe sans orientation. A la place d'arc on dira* **arête***.*
2. *Un multigraphe est* **simple** *s'il est sans boucles et sans arêtes multiples.*
3. *Une arête reliant deux sommets x et y est notée en général xy ou bien par (x, y).*



Définition

1. *Un multigraphe est un graphe sans orientation. A la place d'arc on dira* **arête***.*
2. *Un multigraphe est* **simple** *s'il est sans boucles et sans arêtes multiples.*
3. *Une arête reliant deux sommets x et y est notée en général xy ou bien par (x, y).*
4. *L'***ordre d'un graphe,** *noté n, est le nombre de sommets de ce graphe.*

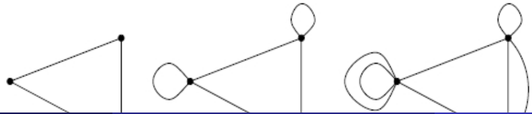


Définitions et premiers exemples

Multigraphe et graphe simple

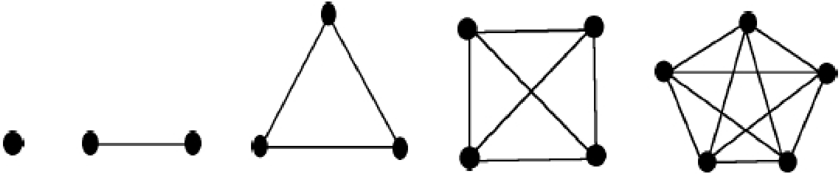
Définition

1. *Un multigraphe est un graphe sans orientation. A la place d'arc on dira* **arête***.*
2. *Un multigraphe est* **simple** *s'il est sans boucles et sans arêtes multiples.*
3. *Une arête reliant deux sommets x et y est notée en général xy ou bien par (x, y).*
4. *L'***ordre d'un graphe,** *noté n, est le nombre de sommets de ce graphe.*
5. *La* **taille d'un graphe,***, noté m, est le nombre de ses arêtes.*



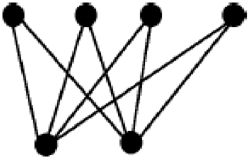
- Le **voisinage ouvert** d'un sommet v d'un graphe $G = (V, E)$ est défini par l'ensemble suivant $N_G(v) = \{u \in V : uv \in E\}$.
- Le **voisinage fermé** d'un sommet v d'un graphe $G = (V, E)$, noté $N_G[v]$, est $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$.
- Le nombre de voisins d'un sommet v d'un graphe G est appelé **degré** de v, noté $d_G(v)$ (ie. $d_G(v) = |N_G(v)|$).
- Le degré d'une arête uv d'un graphe $G = (V, E)$, noté $d_G(uv)$, est défini comme suit $d_G(uv) = |N(u)| + |N(v)| - 2$.
- Les sommets **isolés** sont de degré nul.
- Un sommet de degré 1 est dit sommet **pendant**, et tout sommet adjacent à un sommet pendant est appelé **support**.
- Le degré minimum et le degré maximum d'un graphe G sont notés par $\delta(G)$ et $\Delta(G)$ respectivement.

- **Graphe complet** d'ordre n, noté K_n, est un graphe dont tous ses sommets sont deux à deux adjacents.



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

- Un graphe $G = (V, E)$ est dit **biparti** si l'ensemble de ses sommets V peut être partitionné en deux sous-ensembles disjoints V_1 et V_2 de sorte que deux sommets de V_i ne soient jamais adjacents pour tout $i \in \{1, 2\}$. Si tous les sommets de V_1 sont adjacents à tous les sommets de V_2, alors G est dit **biparti complet**, noté $K_{m,n}$ avec $m = |V_1|$ et $n = |V_2|$. Le graphe $K_{1,n}$ est dit *étoile*.



$K_{4,2}$

- **Graphe complémentaire** d'un graphe $G = (V, E)$, noté $\overline{G}$, est un graphe d'ensemble de sommets V et ensemble d'arêtes $E\left(\overline{G}\right) = \{uv : u, v \in V \text{ et } uv \notin E(G)\}$.
- Un graphe $G = (V, E)$ est dit *d-régulier* (resp., *d-arête régulier*) si tous ses sommets (resp., arêtes) sont de degré d. Si $d = 3$, alors G est dit *cubique*.

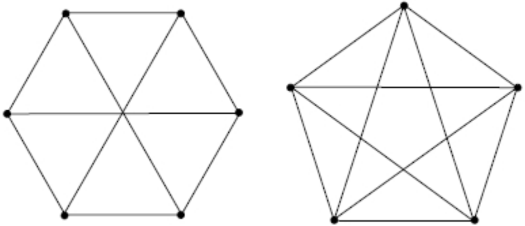


Figure: Des graphes 3-régulier (cubique) et 4-régulier.

- $H = (V', E')$ est un *sous-graphe* de $G = (V, E)$ si $V' \subseteq V$ et $E' \subseteq E$. En outre, si $E' = \{uv \in E : \; u, v \in V'\}$, alors H est dit sous-graphe induit (ou engendré) par V', dans ce cas H est noté par $G[V']$.
- $H = (V', E')$ est un *graphe partiel* d'un graphe $G = (V, E)$ si $V' = V$ et $E' \subseteq E$.

Remarque: Tout graphe G est un sous-graphe (resp. graphe partiel) de lui même.

- **Une chaîne** d'un graphe $G = (V, E)$ est une suite alternée de sommets et d'arêtes

$$C = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots v_{n-k} e_k v_k$$

tels que pour $1 \leq i \leq k$ les extrémités de e_i sont v_{i-1} et v_i. Dans ce cas, la chaîne C est dite de longueur k (au sens des arêtes).

- **Une chaîne** d'un graphe $G = (V, E)$ est une suite alternée de sommets et d'arêtes

$$C = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots v_{n-k} e_k v_k$$

tels que pour $1 \leq i \leq k$ les extrémités de e_i sont v_{i-1} et v_i. Dans ce cas, la chaîne C est dite de longueur k (au sens des arêtes).

- Une chaîne est dite **simple** si toutes ses arêtes sont distinctes et elle est dite **élémentaire** si tous ses sommets sont distincts.

- **Une chaîne** d'un graphe $G = (V, E)$ est une suite alternée de sommets et d'arêtes

$$C = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots v_{n-k} e_k v_k$$

  tels que pour $1 \leq i \leq k$ les extrémités de e_i sont v_{i-1} et v_i. Dans ce cas, la chaîne C est dite de longueur k (au sens des arêtes).
- Une chaîne est dite **simple** si toutes ses arêtes sont distinctes et elle est dite **élémentaire** si tous ses sommets sont distincts.
- Un **cycle** est une chaîne dans les deux extrémités sont confondues. De la même manière, on définit un **cycle simple** et un **cycle élémentaire**.

Soit $X = (X, U)$ un graphe orienté.

- Un chemin de v_0 à v_k est une suite alternée de sommets et d'arcs

$$\Gamma = v_0 u_1 v_1 u_2 v_2 \ldots v_{n-k} u_k v_k$$

tels que pour $1 \leq i \leq k$,

$$I(u_i) = v_{i-1} \text{ et } T(u_i) = v_i.$$

De la même manière, on définit un **chemin simple** et un **chemin élémentaire**, une **circuit simple** et une **circuit élémentaire**.

Soit $X = (X, U)$ un graphe orienté.

- Un chemin de v_0 à v_k est une suite alternée de sommets et d'arcs

$$\Gamma = v_0 u_1 v_1 u_2 v_2 \ldots v_{n-k} u_k v_k$$

tels que pour $1 \leq i \leq k$,

$$I(u_i) = v_{i-1} \text{ et } T(u_i) = v_i.$$

- Un circuit est un chemin qui se referme , c'est à dire $v_0 = v_k$.

De la même manière, on définit un **chemin simple** et un **chemin élémentaire**, une **circuit simple** et une **circuit élémentaire**.