Corrigé de serie 1 pag:1

EXO:1

- Si $x<0$, f et toutes ses dérivées sont nulles
- Si $x=0$, les dérivées à gauche de f sont nulles
- Si $x>0$, on a

$f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$, $f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$, $f''(x)=\frac{-6x^2+4}{x^6}e^{-\frac{1}{x^2}}, \dots$

$f^{(k)}(x)=\frac{P(x)}{x^{3k}}e^{-\frac{1}{x^2}}$, où $p(x)$ est un polynôme et $k\in\mathbb{N}^*$

et Montrons cette formule par récurrence :

on suppose que $f^{(k)}(x)=\frac{P_1(x)}{x^{3k}}e^{-\frac{1}{x^2}}$ (k arié)

et on montre que $f^{(k+1)}(x)=\frac{P_2(x)\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{3(k+1)}}$

On a $f^{(k+1)}(x)=\left(f^{(k)}(x)\right)'$

$$=\frac{P_1'(x)\cdot x^{3k}-3x^{3k-1}\cdot P_1(x)}{x^{6k}}\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}+\frac{P_1(x)}{x^{3k}}\cdot\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\left[\frac{P_1'(x)-3x^{-1}\cdot P_1(x)}{x^{3k}}+\frac{2P_1(x)}{x^{3(k+1)}}\right]e^{-\frac{1}{x^2}}$$ (simplification par x^{3k})

$$=\left[\frac{P_1'(x)\cdot x^3+3x^2P_1(x)+2P_1(x)}{x^{3(k+1)}}\right]e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\frac{P_2(x)}{x^{3(k+1)}}e^{-\frac{1}{x^2}}\ /\ P_2(x)=x^3P_1'(x)+3x^2P_1(x)+2P_1(x)$$

d'autre par $\lim_{x\to 0} f^{(k)}(x)=P(0)\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{3k}}$ $\forall k\in\mathbb{N}$

$$=P(0)\lim_{y\to\infty}\frac{y^{\frac{3k}{2}}}{e^{y}}=0$$

(Regle de l'Hopital.)

donc $\lim_{x\to 0} f^{(k)}(x)=\lim_{x\to 0} f^{(k)}(x)=f^{(k)}(0)=0$

Exo 2

- si $|x|>1$, on a $\varphi(x)=0$ et $\varphi \in C^\infty$
- si $|x|<1$, $\varphi \in C^\infty$ (φ est composition de $\begin{cases} x \mapsto e^{-x} \in C^\infty \\ x \mapsto \frac{1}{1-x^2} \in C^\infty \end{cases}$)
- si $|x| = 1$. c'est à dire $x = \pm 1$

même méthode de Exo 1, on montre que $\varphi^{(k)}(x) = 0$, donc en globale $\varphi \in C^\infty$.

En outre, $\operatorname{supp}\varphi = [-1, 1]$ et par conséquent $\varphi \in D$

Exo 3

$$\varphi_n \xrightarrow{\text{Dans } D} \varphi \iff \begin{cases} \operatorname{supp}\varphi_n \subset K \text{ (compact) } \forall n, \\ \varphi_n^{(k)} \xrightarrow{\text{unif}} \varphi^{(k)}, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

- on a $\varphi_n \longrightarrow \varphi = 0$ (simplement), $\underset{n\to 0}{\ell}\varphi_n = 0$

donc si (φ_n) ~~...~~ converge dans D, alors $\varphi_n \to \varphi = 0$

on suppose que $\operatorname{supp}\varphi \subset [-a, a]$ / $a>0$ (car $\varphi \in D$)

- 1) si $x \in \operatorname{supp}\varphi_n \Rightarrow nx \in \operatorname{supp}\varphi \Rightarrow -a \leq nx \leq a$

$\Rightarrow -\frac{a}{n} \leq x \leq \frac{a}{n}$

$\Rightarrow \operatorname{supp}\varphi_n \subset [-\frac{a}{n}, \frac{a}{n}] \subset [-a, a]$ contenu dans le

alors $\operatorname{supp}\varphi_n \subset [-a, a]$ même kompact.

- 2) $\varphi^{(k)} \xrightarrow{\text{unif}} \varphi = 0$??

on a $\varphi_n'(x) = \varphi'(nx)$

$\Rightarrow \|\varphi_n'\|_\infty = \|\varphi'\|_\infty$

mais $\underset{n\to\infty}{\ell}\|\varphi_n'\| \not\longrightarrow 0$ ~~et p suite~~ don $\varphi_n^{(k)} \overset{\text{unif}}{\not\longrightarrow} \varphi = 0$

EXO 04

on considère la fonction

$$\theta(t) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{1-t^2}}, & si\ |t|<1. \\ 0, & sinon \end{cases}$$

on a $\theta \in D(\mathbb{R})$.

donc $f_n(t) = \frac{1}{2^n}\theta\left(\frac{t}{n}\right)$.

parsuite $f_n^{(k)}(t) = \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{n^k}\theta^{(k)}\left(\frac{t}{n}\right)$.

si K est un compact de $\mathbb{R}$, on a

$$\sup_{x\in K}|f_n^{(k)}(x)| \leq \frac{1}{2^n n^k}\|\theta^{(k)}\|_\infty.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in K}|f_n^{(k)}(x)| = 0$$

donc $f_n^{(k)} \xrightarrow{\text{uniforment}} 0$ sur K

- comme $supp(f_n) = [-n, n]$
donc ~~∄~~ un compact qui contient tous les supports de (f_n).

et parsuite la convergence

EXO 5

Soit $a>0$ / $supp\,\psi \subset [-a,a]$

toute primitive de de ψ s'ecrit

$$\varphi(x) = c + \int_{-a}^{x}\psi(t)\,dt$$

supposons qu'il existe φ / $supp\,\varphi \subset [-b,b]$

- pour $x \leq \min(-a,-b)$, on a $\varphi(x) = 0$
et $\int_{-a}^{x}\psi(t)\,dt = 0 \Rightarrow C = 0.$

De plus, pour $x = \max(a,b)$, on a $\varphi(x) = 0$ et $\int_{-a}^{x}\psi(t)\,dt = \int_{-a}^{a}\psi(t)\,dt$

Il est donc nécessaire que $\int_{-a}^{a} \psi(t)\,dt = 0$

Réciproquement, si $\int_{-a}^{a} \psi(t)\,dt = 0$, alors la fonction

$\varphi(x) = \int_{a}^{x} \psi(t)\,dt$ définit bien une primitive de ψ à support dans $[-a, a]$.

Exo 6

Posons $\gamma(x) = \varphi(x) - \varphi(0)\theta(x)$, alors $\gamma(x) \in D(\mathbb{R})$ et de plus $\gamma(0) = 0$

On a $\gamma(x) = \int_{0}^{x} \gamma'(t)\,dt$

Par le changement de variable

$t = ux \Rightarrow dt = x\,dt$ $\quad t = 0 \to u = 0$, $t = x \to u = 1$

donc $\gamma(x) = x \int_{0}^{1} \gamma'(ux)\,du$.

- La fonction $x \longmapsto \int_{0}^{1} \gamma'(ux)\,du$ est de classe C^{∞}

Posons $\psi(x) = \int_{0}^{1} \gamma'(ux)\,du$. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \gamma(x) = x\,\psi(x)$$

- Reste à demontrer que ψ est à support compact. (pour que ψ soit dans $D(\mathbb{R})$)

On a γ est à support compact.

donc $\exists\, a > 0 \,/\, \gamma(x) = 0$, si $x \notin [-a, a]$

$\Rightarrow \psi(x) = 0$ et donc ψ est à support compact.

Exo 01

1) On a $\{x : \lambda f(x) \neq 0\} = \{x : f(x) \neq 0\}$ car $\lambda \neq 0$

donc $\overline{\{x : \lambda f(x) \neq 0\}} = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$

$\Rightarrow supp(\lambda f) = supp f$.

2) On considère les ensembles

$A = \{x : f(x) \neq 0\}$, $B = \{x : g(x) \neq 0\}$

$A \cap B = \{x : (fg)(x) \neq 0\}$

On a $\begin{cases} A \cap B \subset A \\ \text{et} \\ A \cap B \subset B \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \\ \overline{A \cap B} \subset \overline{B} \end{matrix} \Rightarrow \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

$\Rightarrow supp(f \cdot g) \subset supp f \cap supp g$.

2ème méthode :

si $x \in supp(f \cdot g) \Rightarrow f \cdot g(x) \neq 0$

$\Rightarrow f(x) \neq 0$ et $g(x) \neq 0$.

$\Rightarrow x \in supp f$ et $x \in supp g$.

$\Rightarrow x \in supp f \cap supp g$

donc $supp f \cdot g \subset supp f \cap supp g$

3) On a $x_0 \in supp f \Leftrightarrow \exists V_{x_0} / f(x) \neq 0 \ \forall x \in V_{x_0}$

donc

si $x_0 \in supp(f+g) \Leftrightarrow \exists V_{x_0} / (f+g)(x_0) \neq 0 \ \forall x \in V_{x_0}$

$\Rightarrow f(x) \neq 0$ ou $g(x) \neq 0$, $\forall x \in V_{x_0}$

$\Rightarrow x_0 \in supp f \cup supp g$.

(En basant sur si $a = 0$ et $b = 0 \Rightarrow a + b = 0$

et par la contraposée : si $a + b \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

Suite de EXO 09

- On a $\operatorname{supp} f(x) = \{a\}$ (définition de $f(x)$)

Comme f est une distribution régulière, on peut écrire $\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx$

En outre $f(x)$ est presque partout nulle et d'après Lebesgue $\langle T_f, \varphi \rangle = 0$, donc $T_f = 0$ et par conséquent $\operatorname{supp} T_f = \emptyset$.

EXO 10

Soit $\varphi \in D$, on a

$$\langle H + \delta, \varphi \rangle = \langle H, \varphi \rangle + \langle \delta, \varphi \rangle = \begin{cases} \int_0^{\infty} \varphi(x)\,dx + \varphi(0) & \text{sur } [0, \infty[\\ 0 & \text{sur }]-\infty, 0[\end{cases}$$

De même

$$\langle \Delta + \delta, \varphi \rangle = \langle \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k, \varphi \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle \delta_k, \varphi \rangle$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k(0)$$

$$= 0 \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},$$

Corrigé de serie 1 page 1

EXO : 1

- Si $x<0$, f et toutes ses dérivées sont nulles
- Si $x=0$, les dérivées à gauche de f sont nulles
- Si $x>0$, on a

$$f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}},\quad f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}},\quad f''(x)=\frac{-6x^2+4}{x^6}e^{-\frac{1}{x^2}},\ \dots$$

$$f^{(k)}(x)=\frac{P(x)}{x^{3k}}e^{-\frac{1}{x^2}}$$ où $P(x)$ est un polynôme et $k\in\mathbb{N}^*$.

et Montrons cette formule par récurrence.

On suppose que $f^{(k)}(x)=\frac{P_1(x)}{x^{3k}}e^{-\frac{1}{x^2}}$ (vraie)

et on montre que $f^{(k+1)}(x)=\frac{P_2(x)\,e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{3(k+1)}}$

On a $f^{(k+1)}(x)=\left(f^{(k)}(x)\right)'$

$$=\frac{P_1'(x)\cdot x^{3k}-3x^{3k-1}\cdot P_1(x)}{x^{6k}}\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}+\frac{P_1(x)}{x^{3k}}\cdot\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\left[\frac{P_1'(x)-3x^{-1}\cdot P_1(x)}{x^{3k}}+\frac{2P_1(x)}{x^{3(k+1)}}\right]e^{-\frac{1}{x^2}}$$ (simplification par x^{3k}

$$=\frac{P_1'(x)\cdot x^3+3x^2P_1(x)+2P_1(x)}{x^{3(k+1)}}\Big]e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\frac{P_2(x)}{x^{3(k+1)}}e^{-\frac{1}{x^2}}\ /\ P_2(x)=x^3P_1'(x)+3x^2P_1(x)+2P_1(x)$$

d'autre par $\lim_{x\to0}f^{(k)}(x)=P(0)\lim_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{3k}}$ $\forall k\in\mathbb{N}$

$$=P(0)\lim_{y\to\infty}\frac{y^{\frac{3k}{2}}}{e^y}=0$$

(Regle de l'Hopital.)

donc $\lim_{x\to0}f^{(k)}(x)=\lim_{x\to0}f^{(k)}(x)=f^{(k)}(0)=0$

Exo 2

- Si $|x|>1$, on a $\varphi(x)=0$ et $\varphi \in C^{\infty}$
- Si $|x|<1$, $\varphi \in C^{\infty}$ (φ est composition de $\begin{cases} x \mapsto e^{-x} \in C^{\infty} \\ x \mapsto \frac{1}{1-x^2} \in C^{\infty} \end{cases}$)
- Si $|x|=1$. c'est à dire $x=\pm 1$

même méthode de Exo 1, on montre que $\varphi^{(k)}(x)=0$, donc en globale $\varphi \in C^{\infty}$.

En outre, $\operatorname{supp}\varphi = [-1,1]$ et par conséquent $\varphi \in D$

Exo 3

$\varphi_n \xrightarrow{\text{Dans } D} \varphi \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{supp}\varphi_n \subset K \text{(compact)} \ \forall n, \\ \varphi_n^{(k)} \xrightarrow{\text{unif}} \varphi^{(k)}, \ \forall k \in \mathbb{N}. \end{cases}$

- On a $\varphi_n \longrightarrow \varphi = 0$ (simplement) $\lim\limits_{n\to 0} \varphi_n = 0$

donc si (φ_n) ~~~~ converge dans D, alors $\varphi_n \to \varphi = 0$

On suppose que $\operatorname{supp}\varphi \subset [-a,a]$ / $a>0$ (car $\varphi \in D$)

- 1) si $x \in \operatorname{supp}\varphi_n \Rightarrow nx \in \operatorname{supp}\varphi \Rightarrow -a \leq nx \leq a$

$\Rightarrow -\frac{a}{n} \leq x \leq \frac{a}{n}$

$\Rightarrow \operatorname{supp}\varphi_n \subset [-\frac{a}{n}, \frac{a}{n}] \subset [-a,a]$

alors $\operatorname{supp}\varphi_n \subset [-a,a]$ contenu dans le même kompact.

- 2) $\varphi_n^{(k)} \xrightarrow{\text{unif}} \varphi = 0$??

on a $\varphi_n'(x) = \varphi'(nx)$

$\Rightarrow \|\varphi_n'\|_\infty = \|\varphi'\|_\infty$

mais $\lim\limits_{n\to\infty} \|\varphi_n'\| \not\longrightarrow 0$ donc $\varphi_n^{(k)} \overset{\text{unif.}}{\not\longrightarrow} \varphi = 0$

~~et par suite~~

EXO 04

on considère la fonction

$$\theta(t) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{1-t^2}}, & si\ |t|<1. \\ 0, & sinon \end{cases}$$

on a $\theta \in D(\mathbb{R})$.

donc $f_n(t) = \frac{1}{2^n}\theta(\frac{t}{n})$.

parsuite $f_n^{(k)}(t) = \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{n^k}\theta^{(k)}(\frac{t}{n})$.

si K est un compact de $\mathbb{R}$, on a

$$\sup_{x\in K}|f_n^{(k)}(x)| \leq \frac{1}{2^n n^k}\|\theta^{(k)}\|_\infty.$$

$$\Rightarrow \ell \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in K}|f_n^{(k)}(x)| = 0$$

donc $f_n^{(k)} \xrightarrow{\text{uniforment}} 0$ sur K

- Comme $supp(f_n) = [-n, n]$ donc $\cancel{\exists}$ un compact qui contient tous les supports de (f_n).

et parsuite la convergence

EXO 5

Soit $a>0$ / $supp\,\psi \subset [-a, a]$

toute primitive $\cancel{\varphi}$ de de ψ s'écrit

$$\varphi(x) = C + \int_{-a}^{x}\psi(t)\,dt$$

supposons qu'il existe ~~...~~ φ / $supp\,\varphi \subset [-b, b]$

- pour $x \leq \min(-a, -b)$, on a $\varphi(x) = 0$

et $\int_{-a}^{x}\psi(t)\,dt = 0 \Rightarrow C = 0$.

De plus, pour $x = \max(a, b)$, on a

$\varphi(x) = 0$ et $\int_{-a}^{x}\psi(t)\,dt = \int_{-a}^{a}\psi(t)\,dt$

Il est donc nécessaire que $\int_{-a}^{a} \psi(t)dt = 0$

Réciproquement si $\int_{-a}^{a} \psi(t)\,dt = 0$, alors la fonction $\varphi(x) = \int_{a}^{x} \psi(t)\,dt$ définit bien une primitive de ψ à support dans $[-a, a]$.

Exo 6

Posons $\gamma(x) = \varphi(x) - \varphi(0)\theta(x)$, alors $\gamma(x) \in D(\mathbb{R})$

et de plus $\gamma(0) = 0$

On a $\gamma(x) = \int_{0}^{x} \gamma(t)\,dt$

Par le changement de variable

$t = ux \Rightarrow dt = x\,dt$ $\quad t = 0 \to u = 0$

$t = x \to u = 1$

donc $\gamma(x) = x\int_{0}^{1} \gamma'(ux)\,du$.

- La fonction $x \longmapsto \int_{0}^{1} \gamma'(ux)\,du$ est de classe C^∞

Posons $\psi(x) = \int_{0}^{1} \gamma'(ux)\,du$. Alors

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \gamma(x) = x\,\psi(x)$

- Reste à demontrer que ψ est à support compact. (pour que ψ soit dans $D(\mathbb{R})$)

on a γ est à support compact.

donc $\exists\, a > 0 \,/\, \gamma(x) = 0$, si $x \notin [-a, a]$

$\Rightarrow \psi(x) = 0$ et donc ψ est à support compact.

Exo 07

1) On a ~~...~~

$\{x : \lambda f(x) \neq 0\} = \{x : f(x) \neq 0\}$ car $\lambda \neq 0$

donc $\overline{\{x : \lambda f(x) \neq 0\}} = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$

$\Rightarrow \operatorname{sup}(\lambda f) = \operatorname{sup} f$.

2) On considère les ensembles

$A = \{x : f(x) \neq 0\}$, $B = \{x : g(x) \neq 0\}$

$A \cap B = \{x : (fg)(x) \neq 0\}$

On a $\begin{cases} A \cap B \subset A \\ \text{et} \\ A \cap B \subset B \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \\ \overline{A \cap B} \subset \overline{B} \end{matrix} \Rightarrow \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

$\Rightarrow \operatorname{supp}(f \cdot g) \subset \operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} g$.

2e Methode :

si $x \in \operatorname{supp}(f \cdot g) \Rightarrow f \cdot g(x) \neq 0$

$\Rightarrow f(x) \neq 0$ et $g(x) \neq 0$

$\Rightarrow x \in \operatorname{supp} f$ et $x \in \operatorname{supp} g$.

$\Rightarrow x \in \operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} g$.

donc $\operatorname{supp} f \cdot g \subset \operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} g$

3) On a $x_0 \in \operatorname{supp} f \Leftrightarrow$ ~~$\forall V_x / V \cap A \neq \phi$~~ $\exists V_{x_0} / f(x) \neq 0 \ \forall x \in V_{x_0}$

donc

si $x_0 \in \operatorname{supp}(f+g) \Leftrightarrow \exists V_{x_0} / (f+g)(x_0) \neq 0 \ \forall x \in V_{x_0}$

$\Rightarrow f(x) \neq 0$ ou $g(x) \neq 0$, $\forall x \in V_{x_0}$

$\Rightarrow x_0 \in \operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} g$.

(En basant sur si $a = 0$ et $b = 0 \Rightarrow a + b = 0$
et par la contraposée : si $a + b \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

suite de EXO 09

- On a $\mathrm{supp} f(x) = \{a\}$ (définition de $f(x)$)

Comme f est une distribution régulière,

on peut écrire $\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx$

En outre $f(x)$ est presque partout nulle et d'après Lebesgue $\langle T_f, \varphi \rangle = 0$, donc $T_f = 0$ et par conséquent $\mathrm{supp}\, T_f = \emptyset$.

EXO 10

Soit $\varphi \in D$, on a

$$\langle H + \delta, \varphi \rangle = \langle H, \varphi \rangle + \langle \delta, \varphi \rangle = \begin{cases} \int_0^{\infty} \varphi(x)\,dx + \varphi(0) & \text{sur } [0, \infty[\\ 0 & \text{sur }]-\infty, 0[\end{cases}$$

De même

$$\langle \Delta + \delta, \varphi \rangle = \langle \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k, \varphi \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle \delta_k, \varphi \rangle$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k(0)$$

$$= 0 \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

EXO 08

On a $\langle f, \varphi \rangle = \int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi(x)\,dx = \langle g, \varphi \rangle$

avec $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

g est une fonction localement intégrable donc elle définit une distribution régulière

EXO 09

1). Soit Ω le plus grand ouvert / $T = 0$

donc $\Omega^c = \text{supp}(T)$ (par définition)

on a $\text{supp}\,T \cap \text{supp}\,\varphi = \phi$ (par hypothèse)

donc $\text{supp}\,\varphi \subset \Omega$ (si $x \in \text{supp}\,\varphi \Rightarrow x \notin \text{supp}\,T$ $\Rightarrow T = 0 \Rightarrow x \in \Omega$)

et, dès lors $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

2. Posons $F = \text{supp}\, f$

- $\text{supp}\,T_f \subset F$?

Soit $\varphi \in D$ / $\text{supp}\,\varphi \subset F^c$, alors $\langle T_f, \varphi \rangle = 0$,

comme $f = 0$ sur $\text{supp}\,\varphi$, alors

ie $T_f = 0$ sur F^c.

Dès lors, $\text{supp}\,T_f \subset (F^c)^c = F = \text{supp}\, f$.

- $F \subset \text{supp}\,T_f$?

Soit $x \in F = \text{supp}\, f$

supposons que $x \notin \text{supp}\,T_f$.

Donc $\exists\, \varepsilon > 0$ / $I =]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$

telque $\forall \varphi \in D$ où $\text{supp}\,\varphi \subset I$, on a

$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx = 0$, sur I

$\Rightarrow f = 0$ sur $I \Rightarrow I \cap F = \phi \Rightarrow x \notin F$ contradiction