**Université A. Mira de Béjaia**
**Faculté des Sciences Exactes**
**Département de Mathématiques**

**Concours national d'entrée en Doctorat LMD**
**Spécialité :** Mathématiques
**Options :** Analyse, Probabilités et Statistiques

*08/10/2016*

*Epreuve commune : Mathématiques de base*
*Durée : 02 heures*

**Problème 1 (10 points) :**

Soit $f$ la fonction réelle d'une variable réelle définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{x}{\ln x} & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de $f$.
2. Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1[$.
3. Etudier les variations de $f$ sur son domaine de définition.
4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\ln u_n} \qquad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}.$$

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \geq e$.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est convergente puis déterminer sa limite.
   (c) Montrer que pour tout réel $x \geq e$, on a : $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$.
   (d) En se servant du théorème des accroissements finis, montrer qu'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$|u_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4} |u_n - e|.$$

   (e) En déduire qu'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $|u_n - e| \leq (\frac{1}{4})^n$.
   (f) Sachant que $4^5 > 1000$, déterminer un entier $n_1$ à partir duquel $u_n$ est une valeur approchée du nombre $e$ à $10^{-12}$ près.
5. Considérons l'équation différentielle (en $y = y(x)$) suivante :

$$-x^2 y' + xy = y^2 \qquad (\mathscr{E}_1)$$

   (a) Montrer que si $y$ est une solution de $(\mathscr{E}_1)$ alors $z = \dfrac{1}{y}$ est une solution d'une équation différentielle linéaire de premier ordre $(\mathscr{E}_2)$ que l'on demande de préciser.
   (b) Résoudre l'équation $(\mathscr{E}_2)$ sur $]0, +\infty[$ puis justifier que ces solutions sont toutes de la forme $z(x) = \frac{\ln(ax)}{x}$ (avec $a > 0$).
   (c) En déduire les solutions de l'équation $(\mathscr{E}_1)$.

**Problème 2 (10 points) :**

Pour tout ce qui suit, $a$ et $b$ désignent deux nombres réels. On note par $\mathbb{R}_1[x]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, ayant un degré inférieur ou égale à 1. Pour tout $Q \in \mathbb{R}_1[x]$, on pose :

$$f(Q) = (x-a)(x-b)Q' - \left(x - \tfrac{a+b}{2}\right) Q \ .$$

1. Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_1[x]$.
2. Déterminer la matrice $A$ associée à $f$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_1[x]$ (**rappelons que la base canonique de $\mathbb{R}_1[x]$ est $B_c := \{1, x\}$**).
3. En déduire la condition nécessaire et suffisante sur $a$ et $b$ pour que $f$ soit un isomorphisme de $\mathbb{R}_1[x]$.
4. On suppose dans cette question que $a \neq b$.
   (a) Montrer que la famille $B := \{(x-a), (x-b)\}$ constitue une base de $\mathbb{R}_1[x]$.
   (b) Déterminer la matrice $D$ associée à $f$ relativement à la base $B$.
   (c) Déterminer la matrice de passage $P$ de la base $B_c$ vers la base $B$, puis calculer $P^{-1}$.
   (d) Donner les valeurs propres et les vecteurs propres de $A$.
   (e) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
   $$A^n = PD^nP^{-1}.$$
   (f) En déduire l'expression explicite de $A^n$ en fonction de $n$ (où $n$ est un entier naturel).
5. Soit $E$ l'ensemble défini par :
   $$E = \left\{\alpha\, \mathrm{I}_2 + \beta\, A + \gamma\, A^2 \ ;\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\}.$$
   (a) Montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ (**rappelons que $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels**).
   (b) Calculer $A^2$ et en déduire une base pour $E$ puis sa dimension.

Bon travail