Définition 18 $\dfrac{(g'(\theta))^2}{I_n(\theta)}$ = *B.C.R "Borne de Cramer-Rao".*

Définition 19 *T ESB de $g(\theta)$ est dit efficace ssi : $var(T) = BCR$.*

Théorème 20 *T estimateur efficace de $g(\theta)$ ssi :*

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \log \mathcal{L}(\theta, \underline{x}) = k(\theta)\left[T(x) - g(\theta)\right]$$

Théorème 21 *La BCR ne peut être atteinte que si la loi de X est de la forme exponentielle. Sous cette condition, il n'existe qu'une seule fonction $g(\theta)$ qui puissent être estimer efficacement $g(\theta) = -\dfrac{\beta'(\theta)}{\alpha'(\theta)}$. L'estimateur de $g(\theta)$ est alors $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a(x_i)$ et la variance minimale est telle que : $V(T) = \dfrac{g'(\theta)}{n\alpha'(\theta)}$.*

$f(x,\theta) = c(\theta)\exp[a(x)\alpha(\theta)]\,h(x)$

$\log f(x,\theta) = a(x)\alpha(\theta) + \log(c(\theta)) + \log(h(x))$

$= a(x)\alpha(\theta) + \beta(\theta) + b(x)$

Exemple : n ech de $X \rightsquigarrow N(m, \sigma^2)$ avec σ^2 connu.

3.5 Cas vectoriel

• Pour les mêmes raisons dans le cas où θ est réel, on ne peut trouver un estimateur optimal pour $g(\theta)$. On se limitera alors aux estimateurs sans biais de $g(\theta)$. Càd : $E(T_i(x)) = g_i(\theta), \forall i = 1, ..., p$. Au quelle cas : $R(T,\theta) = \sum\limits_{i=1}^{p} var(T_i)$.

• Un estimateur T sera dit meilleur qu'un autre estimateur T' si :

$$R(T,\theta) \leq R(T',\theta) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p} var(T_i) = \sum_{i=1}^{p} var(T_i')$$

$$\Leftrightarrow tr\ v^T \leq tr\ v^{T'}, \forall \theta \in \Theta, \text{ où } v^T \text{ est la matrice de var-cov de } T.$$

Remarques : *i/* Pour avoir les relations précédentes, il est nécessaire que la matrice $v^{T'} - v^T$ soit symétrique définie positive.

ii/ T est meilleur que T' ssi : $v^{T'} - v^T$ est semi définie positive.

le support de

• **E.S.B.V.U.M :**

$i/$ $T^* = E_\theta(T/S)$ meilleur que T : $v^{E_\theta(T/S)} \leq v^T \Leftrightarrow v^T - v^{E_\theta(T/S)}$ est semi définie positive,$\forall\theta \in \Theta$.

$ii/$ T ESB de $g(\theta) \Leftrightarrow E(T_i) = g_i(\theta)$. Dans ce cas : $B.C.R. = J.I_n^{-1}(\theta)\,J'$,où J est la matrice Jacobienne de g : $J = \left(\frac{\partial}{\partial\theta_j} g_i(\theta)\right)_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq k}$.

• **Estimateur efficace :**

$i/$ $\forall T$ ESB de $g(\theta)$: $v^T > J.I_n^{-1}(\theta)\,J'$.

$ii/$ T efficace$\Leftrightarrow v^T = J.I_n^{-1}(\theta)\,J'$.

• **Cas particulier :**

Si $g(\theta) = \theta \Rightarrow J = I$. Dans ce cas : $B.C.R = I_n^{-1}(\theta) = n^{-1}I^{-1}(\theta)$.

Exemple : n ech de $X \rightsquigarrow N(m, \sigma^2)$ avec m, σ^2 inconnus. Trouver l'E.S.B.V.U.M de (m, σ^2).

• **Efficacité :**

Définition 22 *On appelle efficacité d'un ESB de $g(\theta)$ le nombre noté e_T défini par :*

$$e_T = \frac{BCR}{var(T)}.$$

Remarque : $0 < e_T \leq 1$.

Définition 23 *Soit T et T' deux ESB de $g(\theta)$. On appelle efficacité de T par rapport à T' $e_{T/T'}$ la quantité :*

$$e_{T/T'} = \frac{varT'}{varT} = \frac{e_T}{e_{T'}}.$$

Remarque : Si $e_{T/T'} < 1 \Leftrightarrow T'$ meilleur que T.