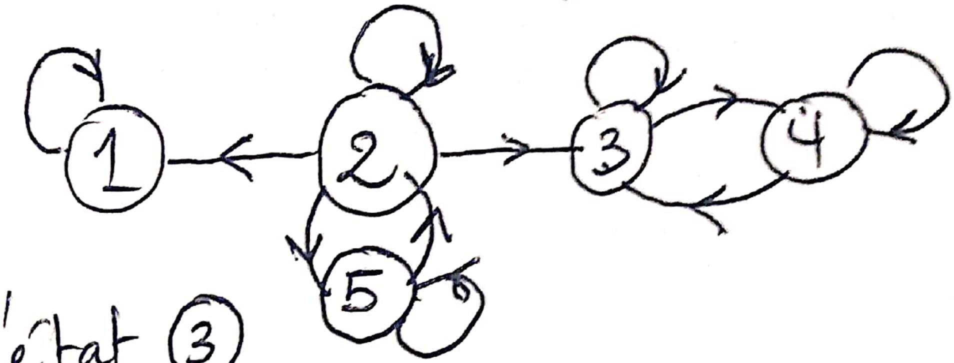
Transience – Récurrence

انتقالية تراجعية

Exple :



*Prenons l'état (3)

Si on démarre par l'état (3), c.à.d. $X_0 = 3$ alors après un certain temps, la chaine retournera éventuellement à l'état (3), en d'autre terme, si $X_0 = (3)$, La chaine ne pourra jamais quitter cet état sans retour, car le chemin (trajectoire) du non retour n'existe ~~jamais~~ pas.

* Par contre, si on prend l'état (2).

$X_0 = 2$; il existe une possibilité de ne jamais retourner à (2)

L'état ② est dit <u>récurrent</u> (R), par contre l'état ③ est dit <u>transient</u> ou transitoire (T).

<u>Définition</u> : Un état (i) ∈ E est dit récurrent si après chaque visite de l'état (i), la chaine de Markov retourne éventuellement pour une autre visite avec proba. 1. Sinon, il est dit "transitoire"

* <u>Le temps du 1er retour à l'état (i)</u> : T_i

$$T_i \overset{déf}{:=} \min\{n \geq 1 : X_n = i\} \quad (X_0 = i).$$

avec : $T_i = \infty$ si la C.M. ne retournera jamais à (i).

Par exemple : $\{T_i = n\} = \{X_0 = i, X_1 \neq i, \ldots, X_{n-1} \neq i, X_n = i\}$

<u>Remarque</u> : $\{T_i < \infty\}$ i.e. la C.M. retournera à (i)

Deuxième définition de l'état récurrent et de l'état transitoire :

L'état $i \in E$ est dit "récurrent" si

$$f_i = \underbrace{\mathbb{P}_i(T_i < \infty)}_{\mathbb{P}(T_i < \infty / X_0 = i)} = 1$$

$f_i = 1$ i.e. q'on est sûr de retourner à l'état i, d'où la récurrence.

et i est dit transitoire si

$$\mathbb{P}_i(T_i < \infty) < 1 \quad (f_i < 1)$$

ou bien : $1 - f_i = \mathbb{P}_i(T_i = \infty) = 1 - \underbrace{\mathbb{P}(T_i < \infty)}_{< 1} > 0$

c.à.d. c'est possible de ne jamais retourner à i.

$i \to$ Récurrent si $f_i = 1$

$i \to$ Transitoire si $f_i < 1$

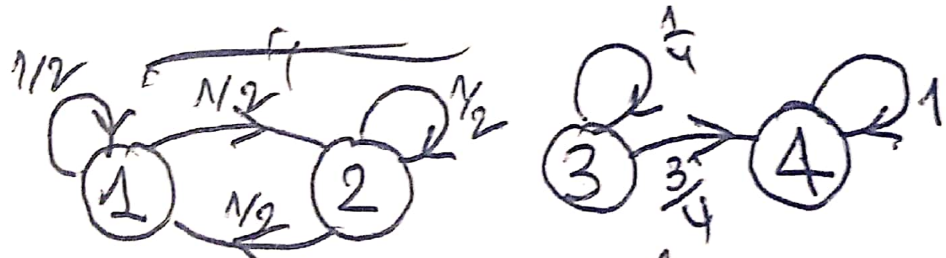
La proba. $(1 - f_i)$ représente la proba.

de quitter (i) sans retour.

<u>Intuition</u> :

Il existe une grande différence entre les états $\boxed{\text{récurrents}}$ et les états $\boxed{\text{transitoires}}$.

* La C.M. passe la plupart de son temps en basculant entre les états récurrents.
* À long-terme, la C.M. <u>quitte</u> les états récurrents <u>sans retour</u>.

<u>Exple</u> : 

1- La C.M. est-elle irréductible ?

2- Classifier les états suivant la <u>réc</u>. (R) et la <u>trans</u>. (T).

1- $\exists$ 3 classes de communication :

$E_1 = \{1,2\}$, $E_2 = \{3\}$, $E_3 = \{4\}$.

La c.m. n'est pas irréductible.

2- <u>La récurrence et la transience</u>

<u>Intuitivement</u> :

- $i = 1$: si $X_0 = 1$, la proba. de ne jamais retourner à 1 est nulle.

c.à.d. $1 - f_1 = 0 \Rightarrow \boxed{f_1 = 1}$

D'où l'état 1 est récurrent R.

- de m. pour $i = 2$. $\boxed{f_2 = 1} \Rightarrow$ 2 est R

- $i = 3$, on voit bien d'après le graphe,

~~que le ~~proba~~ temps T_3 du 1er retour à 3 $= 1$, $T_3 \neq 1$~~ [illegible]

Scanné avec CamScanner

La C.M. peut quitter l'état 3 (vers 4) sans retour $\Rightarrow$ 3 est transitoire (T)

i.e. $f_3 < 1$. $(1 - f_i > 0)$

- Pour $i = 4$, on peut toujour retourner à 4 $\Rightarrow$ 4 est (R) : $\boxed{f_4 = 1}$.

Formellement :

- $1 - f_1 = \mathbb{P}(\text{de ne jamais retourner à } 1 / X_0 = 1)$

$= \mathbb{P}(\text{passer à } 2 \text{ et y rester pour toujours} / X_0 = 1)$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}_{\text{passer à } 2} \cdot \underbrace{\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\text{rester das } 2 \text{ pour toujours}}$$

$= 0$

$\Rightarrow \boxed{f_1 = 1} \Rightarrow$ 1 est (R)

- $1 - f_2 = 0 \Rightarrow f_2 = 1$ D'où (2) est (R)

- L'état $i = (3)$ Calculons $1 - f_3$.

$1 - f_3 = \mathbb{P}\left[\text{de ne jamais revisiter } (3) / X_0 = 3\right]$

$= \mathbb{P}\left[\text{passer à } (4) / X_0 = 3\right] = P_{34}$

$= 3/4$

$\Rightarrow \boxed{f_3 = \frac{1}{4} < 1} \Rightarrow$ (3) est (T).

- L'état $i = (4)$

$1 - f_4 = \mathbb{P}[\underbrace{\text{quitter } (4) \text{ sans retour} / X_0 = 4}_{\text{Impossible}}]$.

$= 0$

$\boxed{f_4 = 1}$ L'état (4) est (R).