Université Saâd Dahlab - Blida 1
2020/2021

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Concours d'accès à la formation doctorale

Filière : Mathématiques

Épreuve 1 : Analyse et topologie, Durée : 1h30

Exercice 1 (6 points)

Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1+2^n n x^2}.$$

1. Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
2. Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt$ et $\lim_{n\to+\infty} I_n$. En déduire que la suite $(f_n)_n$ n'est pas uniformément convergente sur $[0,1]$.
3. Donner une démonstration directe du fait que la suite $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

Exercice 2 (7 points)

Pour tout réel positif x on pose :

$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2, \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt$$

1. Montrer que f et g sont bien définies et calculer leurs dérivées. On ne cherchera pas à calculer les intégrales qui interviendront.
2. Montrer que, pour tout réel positif x, $f(x)+g(x)=\frac{\pi}{4}$.
3. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
4. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

Exercice 3 (7 points)

On considère (E,d) tel que $E = C([0,\pi],\mathbb{R})$ et

$$d(f,g) = \sqrt{\int_0^\pi (f(t)-g(t))^2 dt}.$$

Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de E définie par $f_n(x) = \sin(nx)$.

1. Montrer que (E,d) est un espace métrique.
2. Calculer $d(f_n, 0)$, $n \geqslant 1$.
3. Montrer que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ n'admet aucune valeur d'adhérence.
4. En déduire que E n'est pas localement compact.

Université Blida 1

Faculté des Sciences, Département de Mathématiques

Concours d'accés à la formation doctorale en mathématiques

Epreuve de Spécialité (Probabilités et Statistique)

Durée : 02 heures

Exercice 1 (06.5 points) *NB : Les deux parties sont indépendantes*

Partie A : *Soit (X,Y) de loi uniforme sur $D(0;R)$ disque de centre O et de rayon $R(R>0)$.*

1. *Donner la densité de (X,Y).*
2. *Déterminer les densités marginales de X et Y.*
3. *X et Y sont-elles indépendantes ?*

Partie B : *Soit f définie par :*

$$f(x,y)=\begin{cases} \alpha\, e^{-(x+y)} & si \;\; 0\leq x\leq y \\ 0 & sinon \end{cases}.$$

1. *Déterminer α pour que f soit la densité d'un vecteur aléatoire (X,Y).*
2. *Déterminer les densités marginales*
3. *X et Y sont-elles indépendantes ?*

Exercice 2 (06.5 points) *Soit (X,Y) un vecteur aléatoire de densité*

$$f_{(X,Y)}(x,y)=\lambda^2 e^{-\lambda y} \;\; si \;\; 0\leq x\leq y \quad (\lambda>0)$$

Calculer :

1. *La densité conditionnelle de Y sachant que $(X=x)$, $(f_{Y|X}(y|x))$.*
2. *La fonction de répartition conditionnelle de Y sachant que $X=x$ $\quad (F_{Y|X}(y|x))$.*
3. *L'espérance conditionnelle de Y sachant que $X=x$ $\quad E(Y|X=x)$.*
4. *La densité de $Z=E(Y|X)$.*
5. *La densité de $T=Y-X$.*

Exercice 3 (07 points) *Les éléments d'une population possèdent un caractère X qui suit une loi de probabilité dont la densité est*

$$f_{a,\theta}(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta(x-a)}, & si\ x \geq a \\ 0, & sinon \end{cases},$$

où θ et a sont strictement positifs.

1. *Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un n–échantillon de v.a. i.i.d. de même densité $f_{a,\theta}$. On suppose que θ est connu.*
   (a) *Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{a}_n$ pour a.*
   (b) *$\hat{a}_n$ est-il sans biais, convergent, exhaustif?*
2. *Supposons que a est connu.*
   (a) *Proposer un estimateur $\hat{\theta}_n$ de θ par la méthode du maximum de vraisemblance.*
   (b) *Chercher la densité de probabilité de la variable $Y = \theta \sum_{i=1}^{n}(X_i - a)$, où les X_i sont i.i.d. de même loi que X.*
   (c) *$\hat{\theta}_n$ est-il non biaisé? Si non, construire un estimateur sans biais $\hat{\theta}_n^1$ de θ et vérifier s'il est convergent, efficace et exhaustif.*
