Université Mohamed Khider, Biskra
Faculté des Sc. Exactes et Sc. de la Nature et la Vie
Département de Mathématiques
Master 1: 2021/2022

Solution Exo1-Série N°2

Exercice 1 *Soit X une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\theta > 0$. On souhaite tester l'hpothèse nulle $H_0 : \theta = 2$ contre l'alternative $H_1 : \theta = 1$ sur la base d'une seule observation. Déterminer les deux risques associés à la région de rejet $[1, \infty[$.*

****

Solution. Tout d'abord on doit noter qu'il sagit d'un échantillon de taille $n = 1$. La région critique est définie par

$$W = [1, \infty[= \{x_1 \in \mathbb{R} : \ x_1 \geq 1\} = \{x_1 \geq 1\},$$

c'est la probabilité de rejeter H_0. Le risque de première espèce est définit par:

$$\begin{aligned}
\alpha(\theta) &= \mathbf{P}(\text{rejeter } H_0 \ \mid H_0 \text{ vraie}) \\
&= \mathbf{P}(W \mid H_0 \text{ vraie}) \\
&= \mathbf{P}(X_1 \geq 1 \mid \theta = 2) = \mathbf{P}_{\theta=2}(X_1 \geq 2) \\
&= \left[e^{-x/\theta}\right]_{x=1,\theta=2} = e^{-1/2}.
\end{aligned}$$

Le risque de deuxième espèce est définit par:

$$\begin{aligned}
\beta(\theta) &= \mathbf{P}(\text{accepter } H_0 \ \mid H_1 \text{ vraie}) \\
&= \mathbf{P}\left(\overline{W} \mid H_1 \text{ vraie}\right) \\
&= \mathbf{P}(X_1 < 1 \mid \theta = 1) = \mathbf{P}_{\theta=1}(X_1 \leq 1) \\
&= \left[1 - e^{-x/\theta}\right]_{x=1,\theta=1} = 1 - e^{-1}.
\end{aligned}$$