Université Hassiba Benbouali de Chlef **Année Universitaire : 2019-2020**
Faculté des Sciences Exactes et Informatique **Module : Théorie des Opérateurs**
Département de Mathématiques **Niveau : Master 1**

Corrigé du TD 2

Exercice 1.

1. On montre les deux inclusions en utilisant la définition de l'orthogonal.

2. Il suffit de montrer que $\left(\mathcal{V}^{\perp}\right)^{\perp} \subseteq \mathcal{V}$.
$\mathcal{V}$ est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, alors, $\mathcal{H} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}^{\perp}$ par le Théorème 2 de la décomposition orthogonale. i.e., pour tout $x \in \mathcal{H}$, il existe $x_1 \in \mathcal{V}, x_2 \in \mathcal{V}^{\perp}$ uniques tels que $x = x_1 + x_2$. De plus, $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$.

Soit donc $x \in \mathcal{V}^{\perp\perp} \doteq \left(\mathcal{V}^{\perp}\right)^{\perp}$. Alors, $x \in \mathcal{H}$. Donc, $x = x_1 + x_2$ où, $x_1 \in \mathcal{V}, x_2 \in \mathcal{V}^{\perp}$. D'où

$$0 = \langle x, x_2 \rangle = \langle x_1 + x_2, x_2 \rangle = \langle x_2, x_2 \rangle = \|x_2\|^2$$

D'où, $x_2 = 0$. Par suite, $x = x_1 \in \mathcal{V}$.

3. Déduction directe des questions (1) et (2).

4. Par (1), on aura

$$\overline{\mathcal{V}} = H \Rightarrow \overline{\mathcal{V}}^{\perp} = H^{\perp} \Rightarrow \mathcal{V}^{\perp} = \{0\}$$

De même, et par (2), on obtiendra

$$\mathcal{V}^{\perp} = \{0\} \Rightarrow \mathcal{V}^{\perp\perp} = \{0\}^{\perp} \Rightarrow \overline{\mathcal{V}} = H$$

Exercice 2.

a. 1. Montrer que

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{4} P(k)Q(k), \quad P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$$

définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Trouver une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

b. On cherche à calculer

$$I = \inf_{a,b,c \in \mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (x^3 + ax^2 + bx + c)^2 e^{-x} dx$$

1. Montrer que

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}\, dx, \quad P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Montrer que le problème du calcul de I revient à trouver la distance de X^3 à $\mathbb{R}_2[X]$ pour la norme induite par ce produit scalaire.
3. Trouver I.

Exercice 3.

Soit $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormale dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Soient

$$F_n = Vect\left\{e_i\right\}_{i=\overline{0,n}}, \quad (n\in\mathbb{N}) \quad \text{et } F = Vect\left\{e_i\right\}_{i\in\mathbb{N}}$$

On considère la projection orthogonale P_n de $\mathcal{H}$ sur F_n, $(n\in\mathbb{N})$. Montrer que

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \langle x, e_i\rangle\, e_i, \ x\in\mathcal{H}, \ (n\in\mathbb{N})$$

2. Montrer que pour tout $x\in\mathcal{H}$:

$$\sum_{i=0}^{n} \left|\langle x, e_i\rangle\right|^2 + \left\|x-\pi_n(x)\right\|^2 = \left\|x\right\|^2$$

3. En déduire l'inégalité de Bessel

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \left|\langle x, e_i\rangle\right|^2 \leq \left\|x\right\|^2, \ x\in\mathcal{H}$$

4. On définit $d(x,F) = \inf_{y\in F} \left\|x-y\right\|$. Montrer l'identité de Parseval

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \left|\langle x, e_i\rangle\right|^2 + (d(x,F))^2 = \left\|x\right\|^2, \quad x\in\mathcal{H}$$

Exercice 4.

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, et soit a un vecteur non nul dans $\mathcal{H}$. Posons $\mathcal{M} = \overline{\{a\}}$, le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$ engendré par a.

a. Montrer que $\mathcal{H} = \mathcal{M}\oplus\mathcal{M}^{\perp}$. (Somme directe orthogonale)

b. Soit $x\in\mathcal{H}$. Calculer $(d(x,\mathcal{M}))^2 + (d(x,\mathcal{M}^{\perp}))^2$.

c. Exprimer $d(x,\mathcal{M}^{\perp})$ en fonction du vecteur a.

d. Montrer que pour tout $x, \ x\in\mathcal{H}$:

$$d(x,\mathcal{M}^{\perp}) = \frac{\left|\langle x, a\rangle\right|}{\|a\|}$$