0.1 Introduction

Soit une pièce de monnaie dont on ne connait pas la probababilité de pile p. On veut savoir si : $p \geq \frac{1}{2}$ ou si $p < \frac{1}{2}$. Ce problème est dit test d'hypothèses, plus précisément test de l'hypothèse $p \geq \frac{1}{2}$ contre hypothèse $p < \frac{1}{2}$. Il s'agit de prendre une décision (laquelle des deux hypothèses en présence est vraie) sur la base d'observations $(x_1, x_2, ..., x_n)$, par exemple $(\pi, \pi, f, f, f, f, \pi, ...)$ faites sur n lancers de cette pièce. Une règle de décision possible et naturelle est de décider $p \geq \frac{1}{2}$ si $F_n(pile) = \overline{x} \geq \frac{1}{2}$ et de décider $p < \frac{1}{2}$ si $F_n(pile) = \overline{x} < \frac{1}{2}$.

Un test d'hypothèses est donc une règle de décision pour trancher entre deux hypothèses en présence.

Par ailleurs il peut y avoir erreur de décision : comment mesurer cette erreur ?

Question : peut-on dévellopper une procédure de choix qui entaine la plus petite erreur possible ?

0.2 Définitions

Dans toute la suite on considèrera un modèle statistique $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, (P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ associé à l'observation d'une v.a X de loi P_θ. Le plus souvent ça sera un modèle d'échantillon $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, (\mathcal{P}_\theta)_{\theta\in\Theta})^{(n)}$ où les lois seront supposées admettre des densités f_θ. Le modèle sera écrit, alors,$(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, (f_\theta)_{\theta\in\Theta})^{(n)}$.

Définition 1. On appelle hypothèse toute partie de $\mathcal{P}_0$ de $\mathcal{P}$. Si le modèle est paramétrique, c'est à dire $\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ alors une hypothèse est, de manière équivalente, une partie Θ_0 de Θ. Une hypothèse est dite simple si elle se réduit à un seul élément. Sinon elle est dite composite.

Exemple 2.
1. "$\theta = 1$" "$\theta = -3$","$\theta = (1, 2)$", d'une manière générale "$\theta = \theta_0$" sont des hypothèses simples.
2. "$\theta \leq 1$" "$\theta > -3$","$\theta \neq 0$" , d'une manière générale "$\theta \leq \theta_0$","$\theta > \theta_0$""$\theta \neq \theta_0$"sont des hypothèses composites.

Notation : on notera les hypothèses : H_0 : "$\theta \in \Theta_0$" et : H_1 : "$\theta \in \Theta_1$"

Définition 3. On appelle fonction test (déterministe) une application

$$\phi : \mathcal{X} \longrightarrow \{0, 1\}x \ \longrightarrow \phi(x)$$

A toute fonction test est associé la fonction décision : $d(x) = d_0$ si $\phi(x) = 0$ et $d(x) = d_1$ si $\phi(x) = 1$.

Une fonction test correspond à une partition de $\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 \cup \mathcal{X}_1$ avec $\mathcal{X}_0 = \{x \in \mathcal{X} \backslash \phi(x) = 0\}$ et $X_1 = \{x \in \mathcal{X} \backslash \phi(x) = 1\}$. $\mathcal{X}_1$ la région de $\mathcal{X}$ conduisant au rejet de $\mathcal{P}_0$ est dite région critique du test et sera noté par la suite C. On peut alors écrire $\phi(x) = 1_C(x)$.

Exemple 4. Dans l'exemple de l'introduction, la région critique est $C = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \backslash \overline{x} < \frac{1}{2}\}$ ce qui correpond au test

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \overline{x} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si} \quad \overline{x} \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

	vraie valeur "$\theta = \theta_0$"	vraie valeur "$\theta = \theta_1$"
décider "$\theta = \theta_0$"	décision juste	erreur de 2ème espèce
décider "$\theta = \theta_1$"	erreur de 1ère espèce	décision juste

TABLE 1 – Différentes erreurs d'un test

Définition 5. On appelle fonction test (aléatoire) une application :$\phi : \mathcal{X} \longrightarrow [0,1]$, auquel est associé la règle de décision :

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{décider } H_1 \text{ vraie} \\ \gamma & \text{décider } H_1 \text{ vraie avec la probabilité } \gamma \\ 0 & \text{décider } H_0 \text{ vraie} \end{cases}$$

Exemple 6. Pour l'exemple précédent on peut considérer le test suivant

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \overline{x} < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \text{si} \quad \overline{x} = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si} \quad \overline{x} > \frac{1}{2} \end{cases}$$

on rejette H_0 si $\overline{x} < \frac{1}{2}$

on rejette H_0 avec la probabilité $\frac{1}{3}$ si $\overline{x} = \frac{1}{2}$

on accepte H_0 si $\overline{x} > \frac{1}{2}$

Tout test peut conduire à des décisions érronées. Question : comment mesurer ces erreurs ?

Définition 7. La fonction puissance d'un test Φ de région critique C est la fonction β_Φ définie sur $\Theta_0 \cup \Theta_1$ par

$$\beta_\Phi(\theta) = P_\theta(C)$$

Le niveau de signification de ce test α_Φ est défini par

$$\alpha_\Phi = \sup_{\theta \in \Theta_0} \beta_\Phi(\theta)$$

Considérons le problème de test de l'hypothèse simple "$\theta = \theta_0$" contre l' hypothèse simple "$\theta = \theta_1$".

Dans ce cas on peut se tromper de deux manières :

Décider que "$\theta = \theta_0$" est vrai alors que c'est "$\theta = \theta_1$" qui l'est.

Décider que "$\theta = \theta_1$" est vrai alors que c'est "$\theta = \theta_0$" qui l'est.

Ces deux erreurs sont dites respectivement erreurs de première et deuxième espèce et mesurées par

$\alpha_\Phi = P_{\theta_0}(\textit{décider } "\theta = \theta_1"\ ) = \beta_\Phi(\theta_0)$

$P_{\theta_1}(\textit{décider } "\theta = \theta_0"\ ) = 1 - \beta_\Phi(\theta_1) = 1 - \beta_\Phi$

Un test idéal serait donc un test qui aurait les plus petites erreurs de première et deuxième espèce .

Il est facile de voir que cela n'est pas possible car dès que $\alpha_\Phi \downarrow$ alors $1 - \beta_\Phi \uparrow$.

Point de vue de Neymann-Pearson :

Puisqu'il n'est pas possible de trouver un test meilleur que tous les autres, alors on va restreidre la classe des tests considérés, en se limitant aux tests ayant une erreur de première espèce inférieure à un certain seuil α.

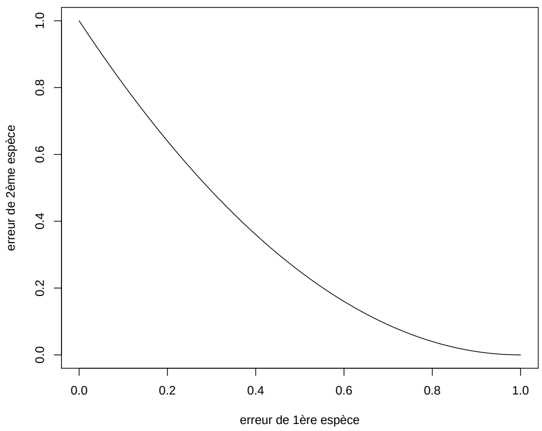

FIGURE 1 – Erreurs

0.3 Tests d'hypothèses simples

Définition 8. Un test Φ est dit le plus puissant au niveau α $(0 < \alpha < 1)$ l'hypothèse simple "$\theta = \theta_0$" contre l' hypothèse simple "$\theta = \theta_1$" si :

1. $\alpha_\Phi \leq \alpha$
2. $\forall\ \Phi'$ autre test on a : $\alpha_{\Phi'} \leq \alpha \implies \beta_\Phi \geq \beta_{\Phi'}$

Théorème 9. *Soit le problème de test de l'hypothèse simple "$\theta = \theta_0$" contre l' alternative simple "$\theta = \theta_1$".*

Les tests les plus puissants sont de la forme

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & si\ \dfrac{L(\theta_1, \widetilde{x})}{L(\theta_0, \widetilde{x})} > K \\ \gamma & si\ \dfrac{L(\theta_1, \widetilde{x})}{L(\theta_0, \widetilde{x})} = K \\ 0 & si\ \dfrac{L(\theta_1, \widetilde{x})}{L(\theta_0, \widetilde{x})} \leq K \end{cases}$$

Démonstration. Rappelons que :

$\alpha = E_{\theta_0}(\Phi) = \int\limits_{\mathcal{X}} \Phi(x)L(\theta_0, x)dx,$

$\alpha_{\Phi'} = E_{\theta_0}(\Phi') = \int\limits_{\mathcal{X}} \Phi'(x)L(\theta_0, x)dx,$

$\beta_\Phi = E_{\theta_1}(\Phi) = \int\limits_{\mathcal{X}} \Phi(x)L(\theta_1, x)dx$

$\beta_{\Phi'} = E_{\theta_1}(\Phi') = \int\limits_{\mathcal{X}} \Phi'(x)L(\theta_1, x)dx$

Désignons par C la région critique de Φ

On a

$\int\limits_{\mathcal{X}}(\Phi(x) - \Phi'(x))(L(\theta_0, x) - KL(\theta_1, x))dx = \int\limits_{\mathcal{C}}(\Phi(x) - \Phi'(x))(L(\theta_1, x) - KL(\theta_0, x))dx + \int\limits_{\overline{\mathcal{C}'}}(\Phi(x) - \Phi'(x))(L(\theta_1, x) - KL(\theta_0, x))dx \geq 0$

$$\implies \int\limits_{\mathcal{X}}(\Phi(x) - \Phi'(x))(L(\theta_1, x)dx \geq K \int\limits_{\mathcal{X}}(\Phi(x) - \Phi'(x))L(\theta_0, x)dx$$

$\Longrightarrow (\beta_\Phi - \beta_{\Phi'}) \geq K(\alpha - \alpha_{\Phi'}) \geq 0$ $\square$

Remarque :
Si les lois de la famille $\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ sont absolument continues, alors les tests les plus puissants sont de la forme : $\Phi(x) = \begin{cases} 1 \quad \text{si} \ \dfrac{L(\theta_1, \widetilde{x})}{L(\theta_0, \widetilde{x})} > K \\ 0 \quad \text{si} \ \dfrac{L(\theta_1, \widetilde{x})}{L(\theta_0, \widetilde{x})} < K \end{cases}$

Exemple 10. Soit $(x_1, x_2, ..., x_n)$ un n-échantillon de $X \sim Exp(\lambda)$.

Déterminer le test le plus puissant au niveau α de "$\lambda = \lambda_0$" contre "$\lambda = \lambda_1$".

La famille des lois $\{Exp(\lambda) \backslash \lambda > 0\}$ est absolument continue donc le tests les plus puissants sont déterministes, d'après le lemne de Neymann-Pearson.

$$\Phi(\ \widetilde{x}) = \begin{cases} 1 \quad \text{si} \quad \dfrac{L(\lambda_1, \widetilde{x})}{L(\lambda_0, \widetilde{x})} > K \\ 0 \quad \text{si} \quad \dfrac{L(\lambda_1, \widetilde{x})}{L(\lambda_0, \widetilde{x})} \leq K \end{cases}$$

Ces tests sont de régions critiques $C = \{\ \widetilde{x} / \ \dfrac{L(\lambda_1, \widetilde{x})}{L(\lambda_0, \widetilde{x})} > K\} = \{\ \widetilde{x} / (\dfrac{\lambda_0}{\lambda_1})^n e^{-(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_0}) \sum\limits_{i=1}^{n} x_i} > K\}$

On remarque qu'il y a deux cas

1er cas : $\lambda_1 > \lambda_0$

Les tests les plus puissants sont alors de la forme :

$$\Phi(\ \widetilde{x}) = \begin{cases} 1 \quad \text{si} \quad \{\ \widetilde{x} / \sum\limits_{i=1}^{n} x_i < K'\} \ \text{si} \ \lambda_1 > \lambda_0 \\ 0 \quad \text{si} \quad \{\ \widetilde{x} / \sum\limits_{i=1}^{n} x_i > K'\} \ \text{si} \ \lambda_1 < \lambda_0 \end{cases}$$

2ème cas : $\lambda_1 < \lambda_0$

$$\Phi(\ \widetilde{x}) = \begin{cases} 1 \quad \text{si} \quad \{\ \widetilde{x} / \sum\limits_{i=1}^{n} x_i > K'\} \ \text{si} \ \lambda_1 > \lambda_0 \\ 0 \quad \text{si} \quad \{\ \widetilde{x} / \sum\limits_{i=1}^{n} x_i < K'\} \ \text{si} \ \lambda_1 < \lambda_0 \end{cases}$$

Théorème 11. *Pour tout α dans [0,1], il existe un test de la forme précédente de niveau α.*

Démonstration. On doit avoir :

$$\alpha_\Phi = P\left(\frac{L(\theta_1, \widetilde{X})}{L(\theta_0, \widetilde{X})} > K\right) + \gamma P\left(\frac{L(\theta_1, \widetilde{X})}{L(\theta_0, \widetilde{X})} = K\right) = 1 - F_Z(K) + \gamma\left(F_Z(K) - F_Z(K_-)\right) = \alpha \quad (1)$$

En notant $Z = \dfrac{L(\theta_1, \widetilde{X})}{L(\theta_0, \widetilde{X})}$

1^{er} cas : Z absolument continue

F_Z continue strictement croissante $\Longrightarrow$

$F_Z(K) - F_Z(K_-) = 0$ et $1 - F_Z(K) = \alpha \ \Longrightarrow$

$K = F_Z^{-1}(1 - \alpha)$, γ quelconque

$2^{ème}$ cas : Z discrète

en général $F_Z(K) - F_Z(K_-) \neq 0$

L'équation (1) admet comme solution

$\gamma = \dfrac{\alpha - (1 - F_Z(K))}{F_Z(K) - F_Z(K_-)}$ $\square$

Exemple précédent : Pour déterminer ce test il suffit d'écrire : $P_{\lambda_0}(C) = \alpha$.

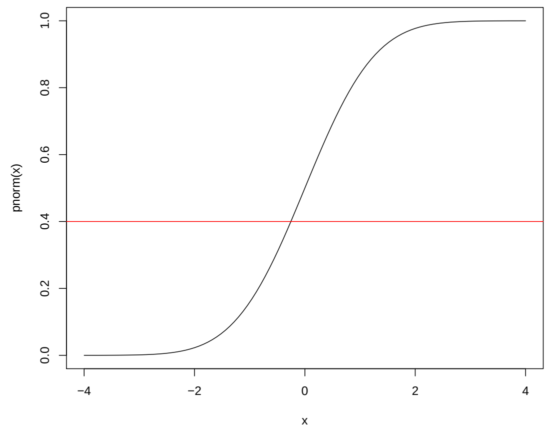

FIGURE 2 – Cas absolument continu

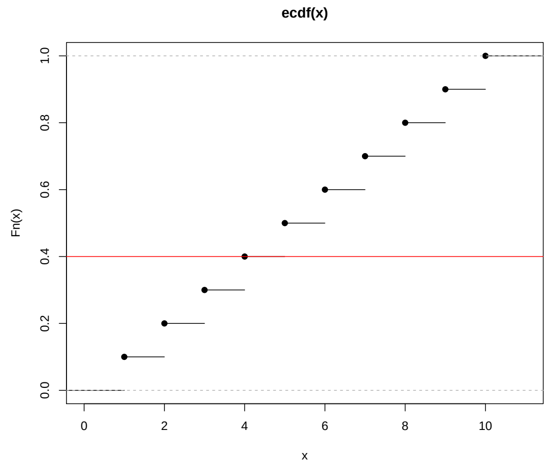

FIGURE 3 – Cas discret

Dans le cas $\lambda_1 > \lambda_0$, on a $P(\sum_{i=1}^{n} x_i < K') = F_{\gamma(n, \frac{1}{\lambda_0})}(K') = F_{\chi^2_{2n}}(\frac{1}{2\lambda_0}K')$.

On déduit $K' = 2\lambda_0\chi^2_{2n}(\ \alpha)$.
Pour le deuxième cas $\lambda_1 > \lambda_0$, on obtient $K' = 2\lambda_0\chi^2_{2n}(1 - \alpha)$.

0.4 Tests sur les paramètres de la loi normale

La loi normale étant très importante en statistique car
- utilisée pour modéliser beaucoup de phénomènes d'une part
- utilisée comme loi asymptotique (lorsque la taille de l'échantillon est grand)

Les tests portant sur ses paramètres (moyenne et variance) ont une grande importance.

Exemple 12. "$m = m_0$" contre "$m = m_1$"

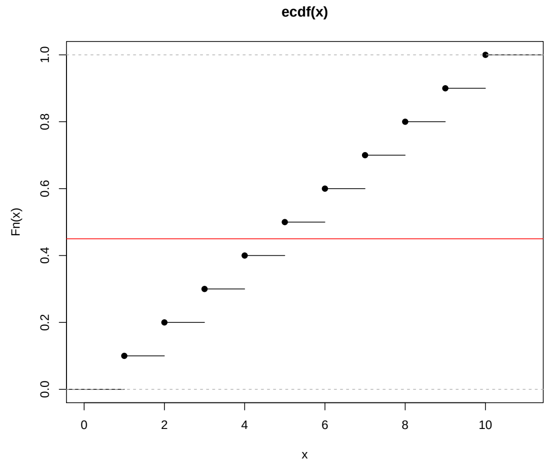

FIGURE 4 – Cas discret

La famille des lois $\{N(m, \sigma^2), m \in R\}$ est absolument continue donc le tests les plus puissants sont déterministes, d'après le lemne de Neymann-Pearson.

$$\Phi(\widetilde{x}) = \begin{cases} 1 \text{ si } & \dfrac{L(m_1, \widetilde{x})}{L(m_0, \widetilde{x})} > K \\ 0 \text{ si } & \dfrac{L(m_1, \widetilde{x})}{L(m_0, \widetilde{x})} \leq K \end{cases}$$

Les tests sont de région critique

$$C = \{ \widetilde{x} / \frac{L(m_1, \widetilde{x})}{L(m_0, \widetilde{x})} > K\} = \left\{ \widetilde{x} / \frac{\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x_i - m_1)^2}{\sigma^2}} \right)}{\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x_i - m_0)^2}{\sigma^2}} \right)} > K \right\}$$

$$= \left\{ \widetilde{x} / e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i (m_1 - m_0)}{\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(m_1^2 - m_0^2)}{\sigma^2}} > K \right\}$$

On peut distinguer deux cas :

1er cas : $m_1 > m_0$

$$C = \{ \widetilde{x} / \sum_{i=1}^{n} x_i > K'\} = \{ \widetilde{x} / \overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} > K''\}$$

2ème cas : $m_1 < m_0$

$$C = \{ \widetilde{x} / \sum_{i=1}^{n} x_i < K'\} = \{ \widetilde{x} / \overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} < K''\}$$

Les tests les plus puissants sont alors de la forme :

1er cas : $m_1 > m_0$

$$C = \{ \widetilde{x} / \sum_{i=1}^{n} x_i > K'\} = \{ \widetilde{x} / \overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} > K''\}$$

2ème cas : $m_1 < m_0$

$C = \{\ \widetilde{x}/\sum_{i=1}^{n} x_i < K'\} = \{\ \widetilde{x}/\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} < K''\}$

Si on cherche le test le plus puissant au niveau α

on doit avoir dans le cas $m_1 > m_0$: $P_{m_0}(C) = P_{m_0}(\sum_{i=1}^{n} x_i > K') = \alpha$

$\implies \alpha = 1 - F_{N(nm_0,n\sigma^2)}(K') \implies K' = F^{-1}_{N(0,1)}(1-\alpha) = q_{1-\alpha}$

$$\text{Ainsi} \begin{cases} \text{si } \sum_{i=1}^{n} x_i > nm_0 + \sqrt{n}\sigma q_{1-\alpha} & \text{on décide } m = m_1 \\ \text{si } \sum_{i=1}^{n} x_i \leq nm_0 + \sqrt{n}\sigma q_{1-\alpha} & \text{on décide } m = m_0 \end{cases}$$

$$\text{ou encore} \begin{cases} \text{si } \overline{x} > m_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha} & \text{on décide } m = m_1 \\ \text{si } \overline{x} \leq m_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha} & \text{on décide } m = m_0 \end{cases}$$

Si $m_1 < m_0$ les calculs donnent

$$\begin{cases} \text{si } \overline{x} < m_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{\alpha} = K_\alpha & \text{on décide } m = m_1 \\ \text{si } \overline{x} \geq m_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{\alpha} = K_\alpha & \text{on décide } m = m_0 \end{cases}$$

Calcul de la puissance du test le plus puissant au niveau α

cas : $m_1 > m_0$

$\beta = P_{m_1}(C) = P_{m_1}(\sum_{i=1}^{n} x_i > K_\alpha) = 1 - F_{N(nm_1,n\sigma^2)}(K_\alpha)$

$= 1 - F_{N(0,1)}(\frac{K_\alpha - nm_1}{\sqrt{n}\sigma}) = 1 - \Phi\left(\frac{n(m_0 - m_1) + \sqrt{n}\sigma q_{1-\alpha}}{\sqrt{n}\sigma}\right)$

Exemple 13. "$\sigma^2 = \sigma_0^2$" contre "$\sigma^2 = \sigma_1^2$"

La famille des lois $\{N(m,\sigma^2), \sigma^2 \in R\}$ est absolument continue donc le tests les plus puissants sont déterministes, d'après le lemne de Neymann-Pearson.

$$\Phi(\ \widetilde{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \frac{L(\sigma_1^2, \widetilde{x})}{L(\sigma_0^2, \widetilde{x})} > K \\ 0 & \text{si} \quad \frac{L(\sigma_1^2, \widetilde{x})}{L(\sigma_0^2, \widetilde{x})} \leq K \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^n e^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2})\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2} > K \\ 0 & \text{si} \quad \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^n e^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2})\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2} \leq K \end{cases}$$

1er cas : $\sigma_1^2 > \sigma_0^2$

$$\Phi(\ \widetilde{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 > K \\ 0 & \text{si} \quad \sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 \leq K \end{cases}$$

2ème cas : $\sigma_1^2 < \sigma_0^2$

$$\Phi(\ \widetilde{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 < K \\ 0 & \text{si} \quad \sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 \geq K \end{cases}$$

Le test le plus puissant au niveau α s'obtient en écrivant que :

$P_{\sigma_0^2}(C) = P_{\sigma_0^2}(\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 > K_\alpha) = \alpha \implies$

$$P_{\sigma_0^2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2}{\sigma_0^2} > \frac{K'}{\sigma_0^2}\right) = 1 - F_{\chi_n^2}(K_\alpha) = \alpha \implies$$

$K_\alpha = \sigma_0^2 F^{-1}_{\chi^2_n}(1-\alpha) = \sigma_0^2 \chi^2_n(1-\alpha)$

Conclusion

$$\begin{cases} \text{si } \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 \ > \sigma_0^2\chi^2_n(1-\alpha) \ \text{ on décide } \sigma^2 = \sigma_1^2 \\ \text{si } \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 \ > \sigma_0^2\chi^2_n(1-\alpha) \ \text{ on décide } \sigma^2 = \sigma_0^2 \end{cases}$$

Les précédents ne sont valables que lorsque σ^2 est connu (pour le test sur la moyenne) et lorsque m est connu (pour le test sur la variance).

En pratique les deux sont inconnues. Test de Sudent (test sur la moyenne m d'une loi normale lorsque σ^2 est inconnu)

Rappelons la région critique du test précédent

$C = \{\widetilde{x} \backslash x > K\} = \{\widetilde{x} \backslash \overline{x} > m_0 + \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha}\}$

Le test de Student consiste à remplacer σ par son estimateur S'.

On garde la même région critique

$C = \{\widetilde{x} \backslash \overline{x} > K\}$. Pour que le test soit de niveau α, il faut :

$P_{m_0}(C) = P_{m_0}(\overline{x} > K) = P_{m_0}(\dfrac{\overline{x} - m_0}{\frac{S'}{\sqrt{n}}} > \dfrac{K - m_0}{\frac{S'}{\sqrt{n}}}) = 1 - F_{St_{n-1}}\left(\dfrac{K - m_0}{\frac{S'}{\sqrt{n}}}\right) = \alpha$

$\implies K = m_0 + \dfrac{S'}{\sqrt{n}} t_{n-1}(1-\alpha)$

La région critique du test de Student au niveau α de "$m = m_0$" contre "$m = m_1$" est

$$C = \{\widetilde{x} \backslash \overline{x} > m_0 + \frac{S'}{\sqrt{n}} t_{n-1}(1-\alpha)\}$$

Question : Est-il encore le plus puissant au niveau α?

La région critique du test de Student au niveau α de "$m = m_0$" contre "$m = m_1$" est

$$C = \{\widetilde{x} \backslash \overline{x} > m_0 + \frac{S'}{\sqrt{n}} t_{n-1}(1-\alpha)\}$$

Question : Est-il encore le plus puissant au niveau α?

Exemple 14. La région critique du test de "$\sigma^2 = \sigma_0^2$" contre "$\sigma^2 = \sigma_1^2$" (si m est connu) et en supposons $\sigma_1^2 > \sigma_0^2$ est :

$C = \{\widetilde{x} \backslash \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - m_0)^2 \ > K > K\}$

Remplaçons m par son estimateur $\overline{x}$

$$\Phi(\ \widetilde{x}) = \begin{cases} 1 \quad \text{si} \quad \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \ > K \\ 0 \quad \text{si} \quad \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \le K \end{cases}$$

Le test le plus puissant au niveau α s'obtient en écrivant que :

$P_{\sigma_0^2}(C) = P_{\sigma_0^2}(\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \ > K_\alpha) = \alpha \implies P_{\sigma_0^2}\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{\sigma_0^2} > \dfrac{K'}{\sigma_0^2}\right) = 1 - F_{\chi^2_{n-1}}(K_\alpha) = \alpha \implies$

$K_\alpha = \sigma_0^2 F^{-1}_{\chi^2_{n-1}}(1-\alpha) = \sigma_0^2 \chi^2_{n-1}(1-\alpha)$

Conclusion

$$\begin{cases} \text{si } \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 \ > \sigma_0^2\chi^2_{n-1}(1-\alpha) \ \text{ on décide } \sigma^2 = \sigma_1^2 \\ \text{si } \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 \ > \sigma_0^2\chi^2_{n-1}(1-\alpha) \ \text{ on décide } \sigma^2 = \sigma_0^2 \end{cases}$$