Série N°3

Exercice1
Soit X une variable aléatoire représentant la durée de vie d'un élément. $R(t)$ est sa fonction de fiabilité.
1) Montrer que le temps moyen de bon fonctionnement $(MTBF)$, T_0 est égal à:

$$T_0 = \int_0^\infty R(t)\, dt$$

2) Montrer que :

$$Var(X) = 2\int_0^\infty tR(t)\, dt - (T_0)^2$$

Exercice 2
La durée de vie d'un homme H est distribuée selon une loi $\exp(\lambda)$;sa fonction de hasard est $h_H(t) = \lambda$. La durée de vie de son épouse F a pour fonction de hasard : $h_F(t) = \dfrac{2t}{\theta^2}$; $\theta > 0$.
Les variables aléatoires H et F sont indépendantes et on pose: $T = \min(H, F)$
1. Quelle est la loi suivie par F, il s'agit de trouver sa fonction de fiabilité $S_F(t)$ et sa densité $f_F(t)$.
2. Déterminez la fonction de hasard de T, sa densité et sa fonction de survie.

Exercice3
On considère le système suivant, où les variables aléatoires de Bernouli X_1, X_2, X_3 représentent les états de fonctionnement de chacun des composants C_1, C_2, C_3. C_1, C_2 sont montés en parallèle, puis l'ensemble est monté en série avec C_3. (faire un schéma)
Les fiabilités des trois composants C_1, C_2, C_3 sont respectivement $r_1 = 0,66$; $r_2 = 0,64$; et $r_3 = 0,96$. Lorsque le composant C_3 fonctionne, le composant C_1 a la probabilité $p_{1/3} = \frac{2}{3}$de fonctionner, et C_2 une probabilité $p_{2/3} = \frac{3}{4}$ de fonctionner.
Lorsque le composant C_3 ne fonctionne pas, le composant C_1 a la probabilité $p_{1/non3} = \frac{1}{2}$de fonctionner et C_2 fonctionne avec la probabilité $p_{2/non3} = \frac{1}{2}$.
1) Etablir une expression de la fonction de structure $\phi(x_1, x_2, x_3)$ du système.
2) Déterminer les nombres suivants $E(X_1X_3)$ et $E(X_2X_3)$.
3) On suppose que les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes sous chacune des probabilités conditionnelles $P_{(X_3=0)}$ et $P_{(X_3=1)}$ calculez $E(X_1X_2X_3)$.
4) En déduire que la fiabilité du système est $r_{sys} = 0,88$.

Exercice4
On s'interesse, dans le cadre de la modélisation de la mortalité, au modèle

$$h(x) = \gamma + \frac{\alpha \exp(\beta x)}{1 - \exp(\beta x)}$$

Où h est la fonction de hasard du modèle (utilisé par **Thatcher et Bongaarts**)
Question 1: Montrer que la fonction de survie est:

$$S(x) = \exp(-\gamma)\left(\frac{1 + \alpha \exp(\beta x)}{1 + \alpha}\right)^{-\frac{1}{\beta}}$$

Question 2: Dans la suite, on pose $\gamma = 0$ et $a = \ln(\alpha)$. On s'intéresse à l'estimation des paramètres du modèle par maximum de vraisemblance à partir d'un $n-$échantillon $(X_1, X_2, ...X_n)$ de X.
-Ecrire alors la densité du modèle $f(x, a, \beta)$ en fonction de $h(x, a, \beta)$ et $S(x, a, \beta)$
-Calculer les expressions suivantes en fonction de $h(x)$ et $S(x)$:

$$\frac{\partial}{\partial a}\ln h(x)\,; \quad \frac{\partial}{\partial \beta}\ln h(x)\,; \quad \frac{\partial}{\partial a}\ln S(x)\,; \quad \frac{\partial}{\partial \beta}\ln S(x)$$

– Donner l'expression de la vraisemblance $L(x, a, \beta)$ et de la log-vraisemblance en fonction de $h(x)$ et $S(x)$.
-En déduire les équations normales à résoudre pour estimer (a, β) par maximum de vraisemblance.