Umbb/FS/Master/Stat.

Module: **Econométrie.**

Année universitaire 2021-2022

Master MSS semestre 3

Janv 202

Préparation EMD Econométrie.

NB:Vous M'envoyer le plutôt votre travail je vous envoie le corrigé.

Modèles Econométriques Linéaires

Modèle de Regression Linéaire Multiple (Présentation. Estimation . Tests et validation . Prévision)

A) Partie Théorique (Questions de cours)

Présentation:

<u>Présentation du Modèle</u>: Soit $y_i = a_0 + a_1 x_{i1} + a_2 x_{i2} + \epsilon_i$ pour $i = 1, ..., n$.

Pour alléger les écritures, on prends le nombre de variables explicatives $p = 2$ et on laisse le nombre d'observations n>1.

(i) Ecrire le modèle sous forme matricielle, bien noter les dimensions des matrices notées: $Y, X, A,$ et ϵ.

et donner les différentes appélations de Y, X et ϵ

(ii) Exprimerϵ en fonction de Y, X et A.

Noter S=$\epsilon' \epsilon$ =$(\epsilon_1 ...., \epsilon_n) \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ . \\ . \\ \epsilon_n \end{pmatrix}$

(iii)Résoudre l'équation $\dfrac{\partial S}{\partial A} = 0$

En déduire

$$\hat{A} = \arg\min S = (X'X)^{-1}X'Y$$

bien noter la dimension $\hat{A}$

où $X\prime$ désigne la transposée de$X$

(iv) Donner les matrices$X\prime X$et$X\prime Y$ en fonctions de x_{i1}, x_{i2} et y_i,avec i=1,..,n. Généraliser pour p quelconque x_{i1}, x_{i2} ,.., , x_{ip}

Estimation(Propriétes des estimateurs)

<u>Etude du Biais de $\hat{A}$:</u>

Dans l'expression de $\hat{A}$ remplacer Y par son expression en fonction de A

(v)Montrer que $\hat{A} = A + (X'X)^{-1}X'\epsilon$

Déduire $E(\hat{A}) = A$ en rappelant les conditons

Matrice Variance covariance de $\hat{A}$ noté $V_{\hat{A}}$

(vi)Calculer la matrice $(\hat{A} - A)(\hat{A} - A)\prime$ et calculer son espérance

Déduire que

$$V_{\hat{A}} = \sigma^2_\epsilon (X'X)^{-1}$$

en rappelant les conditions.

où σ^2_ϵ désigne la variance commune de l'erreur ϵ

Montrer que la matrice

$$V_{\hat{A}} = \sigma^2_\epsilon (X'X)^{-1}$$

tend vers la matrice nulle lorsque n$\rightarrow \infty$

Déduire que l'estimateur $\hat{A}$ de A est **B.L.U.E**(**B**est **L**inéair **U**nbiased **E**stimateur)

Estimateur de la matrice variance covariance $V_{\hat{A}}$ noté $\hat{V}_{\hat{A}}$

(vii)Montrer que: $V_{\hat{A}} = \sigma^2_\epsilon (X'X)^{-1} \Rightarrow \hat{V}_{\hat{A}} = \hat{\sigma}^2_\epsilon (X'X)^{-1}$ où $\hat{\sigma}^2_\epsilon$ désigne l'estimateur de σ^2_ϵ

Calcul de $\hat{\epsilon} = Y - \hat{Y}$(Developpement du résidu)

Dans l'expression $\hat{\epsilon} = Y - \hat{Y}$ remplacer $\hat{A}$ par $A + (X'X)^{-1}X'\epsilon$(voir v)

(viii) Déduire $\hat{\epsilon} = [I - X(\acute{X}X)^{-1}\acute{X}]\epsilon$

Mettre$\hat{\epsilon} = \Gamma\epsilon$ avec $\Gamma = \left[I - X(\acute{X}X)^{-1}\acute{X}\right]$

Propriétes de Γ

(ix) Montrer que Γest symétrique($\Gamma = \acute{\Gamma}$)et idempotente ($\Gamma \times \Gamma = \Gamma$)

(x)

Déduire $\hat{\epsilon}'\hat{\epsilon} = \epsilon'\Gamma\epsilon$

et E($\hat{\epsilon}'\hat{\epsilon}$) $=\sigma_\epsilon^2 tr(\Gamma)$ où tr désigne la trace de la matrice.

Ainsi : L'estimateur sans biais de la variance de l'erreur ϵ

$$\hat{\sigma}_\epsilon^2 = \frac{\sum_i \hat{\epsilon}_i^2}{n-p-1} = \frac{\acute{Y}\Gamma Y}{n-p-1} = \frac{SCR}{n-p-1}$$

où p le nombre de variables explicatives(notre exemple p=2)

Tests et validation

Tableau d'ANOVA et la notion de R^2 coefficient de Détermination

(xi) Vérifier cette équation:

$\sum_i (y_i - \bar{y})^2 = \sum_i (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_i (y_i - \hat{y})^2$

SCTot= SCExp+ SCRes

Variabilié Totale=Variabilité Expliquée par le Modèle+Variabilité Non expliquée par le Modèle (Résiduelle)

Compléter le tableau suivant:

Source de variation	Somme des carrés	Degrés de liberté	Carrée Moyenn
Modèle(Expliquée par le modèlede Régression)	SCExp ou SCRegr	?	$\frac{SCExp}{p}$
Résiduel(Non Expliquée par le Modèle)	SCRes	?	?
Totale	SCTot	n-1	-

Donner R^2 le coefficient de Détermination en fonction de SCTot, SCExp et SCRes. Qu'est ce qu'il exprime?

Que signifie R^2 proche de 1?

Que signifie R^2proche de 0?

R^2 corrigé noté $\bar{R}^2$ =? Quel est son rôle?

Test de Significativité globale de la régression(test de Fisher)

(xii)Donner H_0 et H_1.Donner la statistique du test et la distribution sous H_0.Donner la région critique.

Test de Significativité individuelle de la régression(test de Student)

(xiii)Donner H_0 et H_1.Donner la statistique du test et la distribution sous H_0.Donner la région critique.

Test de Durbin-Watson

(xiv)Donner H_0 et H_1.Donner la statistique du test et la distribution sous H_0.Donner la région critique.

Test du caractére aléatoire des erreurs(Test des runs ou des séquances)

(xv) Donner la statistique du test et la distribution sous H_0.Donner la région critique.

Test de Normalité des erreurs Test bde Kolmogorov Smirnov(Test KS)

(xvi) Donner la statistique du test et la distribution sous H_0.Donner la région critique.

B)Application:

Utiliser les résultats des Questions de cours Partie (A)

<u>Exercice</u>

Soit $y_i = a_0 + a_1 x_{i1} + a_2 x_{i2} + \epsilon_i$ pour $i = 1, 2, 3,$

i	x_{i1}	x_{i2}	y_i
1	3	1	6
2	2	3	4
3	1	2	5
4	2	1	9

Remarque: Prendre $\alpha = 5\%$. pour tous les tests.

(i) Estimer $A = (a_0\ ,\ a_1,\ a_2)'$

(ii) Evaluer SCT, SCExp et SCRésidus

(iii) Calculer R^2 et Présenter le Tableau de l'ANOVA.

(iv) Calculer V_A matrice variance covariance des estimateurs $\hat{A} = (\hat{a}_0\ ,\ \hat{a}_1,\ \hat{a}_2)'$de $A = (a_0\ ,\ a_1,\ a_2)'$et calculer $\hat{V}_{\hat{A}}$ l'estimateur de V_A.

(v) Effectuer le test de significativité individuelle de Student

Avec $(H_0 : a_1 = 0)$ contre $(H_1 : a_1 \neq 0)$

et $(H_0 : a_2 = 0)$ contre $(H_1 : a_2 \neq 0)$

(vi) Effectuer le test de significativité globale de Fischer.

(vii) Effectuer le test de Durbin Watson(D.W)

(viii) Effectuer le test du caractère aléatoire des erreurs(test des runs).

Prendre $H_0 : \epsilon$ est une séquence aléatoire.

(ix) Effectuer le test de Normalité des erreurs(test KS). Prendre $H_0 : \epsilon \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$.