CHAPITRE 2

Processus Stationnaires

Les processus dont les propriétés ne varient pas dans le temps jouent un rôle important dans l'analyse des séries chronologiques. Cette invariance dans le temps est appelée *stationnarité*. Elle est préalable à une prévision des valeurs futures. On ne peut se projeter dans l'avenir (prévision des valeurs futures) que si le processus générateur de nos données est "stable". Cette stabilité est à la base de la stationnarité. Il existe divers types de stationnarité. Nous nous intéressons à :

- la stationnarité faible (ou au second ordre ou en covariance).
- la stationnarité forte ou stricte.

1 Propriétés de base

1.1 Stationnarité au second ordre

Définition 1 *Un processus* $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ *est dit* ***du second ordre*** *si* $E(X_t^2) < \infty, \forall t$.

Remarque 2 *En particulier, les moments croisés seront finis, i.e.,* $E(|X_t X_{t+h}|) < \infty, \forall t, h \in \mathbb{Z}$. *Ceci peut être montré à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

Définition 3 *Un processus* $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ *est dit* ***stationnaire au second ordre*** *si :*

1. *Il est du second ordre.*
2. $E(X_t)$ *est constante,* $\forall t \in \mathbb{Z}$.
3. $Cov(X_t, X_{t-h}) = Cov(X_t, X_{t+h}) = \gamma_h, \forall t, h \in \mathbb{Z}$.

Remarque 4 *De tels processus sont dits univariés à temps discret (Voir Chapitre 1 pour plus de détails). Si* $t \in [0,1]$ *par exemple, alors le processus est dit à temps continu. Nous ne nous intéresserons qu'aux processus linéaires à temps discret.*

Exercice 5 *Montrer que* $\gamma_h = \gamma_{-h}, \forall h \in \mathbb{Z}$.

La condition 3. ci-dessus signifie que, pour un processus stationnaire au second ordre, γ_h ne dépend que de l'écart entre les instants $(t-(t-h)=h)$.

$\{\gamma_h, h \in \mathbb{Z}\}$ est appelée **la fonction d'autocovariance** (FACV ou ACVF en anglais : AutoCoVariance Function). Elle a été définie au chapitre 1. Il en est de même de **la fonction d'autocorrélation** (FAC ou ACF en anglais) $\{\rho_h, h \in \mathbb{Z}\}$ où $\rho_h = \frac{\gamma_h}{\gamma_0}$.

h est appelé le retard ou lag (en anglais).

La FACV (ACVF) ou la FAC (ACF) fournissent une mesure utile du degré de dépendance parmi les valeurs d'une série chronologique en des instants différents et, pour cette raison, elle joue un rôle important dans l'identification du processus générateur, i.e., qui a donné naissance aux données et donc, dans la prévision des valeurs futures de la série en fonction des valeurs présente et passées.

Définition 6 *Soit* $x_1, ..., x_n$ *une série chronologique. La moyenne empirique est* $\overline{x}_n = \frac{\Sigma_{i=1}^n x_i}{n}$. *La fonction d'autocovariance empirique est* $\widehat{\gamma}_h = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-|h|}(x_t - \overline{x}_n)(x_{t+|h|} - \overline{x}_n)$, $-n < h < n$. *La fonction d'autocorrélation empirique* $\widehat{\rho}_h = \frac{\widehat{\gamma}_h}{\widehat{\gamma}_0}, -n < h < n$.

Remarque 7 *L'utilisation de la division par* n *dans* $\widehat{\gamma}_h$ *assure que la matrice de covariance* $\widehat{\Gamma}_n = (\widehat{\gamma}_{i-j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ *est semi-définie positive. Il en est de même de* $\widehat{R}_n = (\widehat{\rho}_{i-j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$.

$\widehat{\rho}_0 = 1$.

On a :

- $\gamma_0 > 0$.
- $|\gamma_h| \le \gamma_0, \forall h$.

- $\gamma_h = \gamma_{-h}, \forall h$.

Et la fonction d'autocorrélation vérifie :

- $\rho_0 = 1$.
- $|\rho_h| \leq 1, \forall h$.
- $\rho_h = \rho_{-h}, \forall h$.

Proposition 8 *La fonction d'autocovariance de tout processus stationnaire $\{X_t\}$ est semi-définie positive.*

Preuve. Soit $\underline{X}_n = (X_n, ..., X_1)'$ et soit $\underline{a} = (a_1, , a_n)' \in \mathbb{R}^n$. Et soit $\Gamma_n = Var(\underline{X}_n)$. Alors $Var(\underline{a}'\underline{X}_n) = \underline{a}'\Gamma_n\underline{a} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i\gamma_{i-j}a_j \geq 0$, i.e., Γ_n est semi-définie positive. ■

Exercice 9 *Soient A et B deux variables aléatoires centrées-réduites, non corrélées. Soit $X_t = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t), t \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\{X_t\}$ est un processus stationnaire.*

Solution 10 $E(X_t^2) = \cos^2(\omega t)E(A^2) + \sin^2(\omega t)E(B^2) = 1 < \infty$. *Ce processus est du second ordre.*

- $E(X_t) = 0$, $\forall t$. *Il est stationnaire en moyenne.*
-
$$\begin{aligned}
Cov(X_t, X_{t-h}) &= E(X_tX_{t-h}) \\
&= E(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))(A\cos(\omega(t-h)) + B\sin(\omega(t-h))) \\
&= E(A^2)(\cos(\omega t)\cos(\omega(t-h)) + E(B^2)\sin(\omega t)\sin(\omega(t-h) \\
&= \cos(\omega t)\cos(\omega(t-h)) + \sin(\omega t)\sin(\omega(t-h)) \\
&= \cos(\omega t - \omega(t-h)) = \cos(\omega h) = \gamma_h, \forall h.
\end{aligned}$$

Ce processus est donc stationnaire au second ordre.

Dans ce qui suit, le processus sera noté $\{X_t\}$.

Exercice 11 *Soit $\{X_t\}$ un processus solution de l'équation aux différences stochastiques*

$$X_t = \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1}$$

où $\{\epsilon_t\}$ est un processus bruit blanc faible de variance σ_ϵ^2 ($\{\epsilon_t\} \sim BB(0, \sigma_\epsilon^2) \equiv WN(0, \sigma_\epsilon^2)$,voir Chapitre 1).

1) Calculer la fonction d'autocovariance de $\{X_t\}$.

2) Déduire la fonction d'autocorrélation.

1.2 Stationnarité stricte

Définition 12 *Un processus $\{X_t\}$ est dit strictement stationnaire si $(X_1, ..., X_n)' \overset{d}{\equiv} (X_{1+h}, ..., X_{n+h})'$, $\forall h, n,\ n \geq 1, h \in \mathbb{Z}$. ($\overset{d}{\equiv}$signifie que les deux vecteurs aléatoires ont la même loi de probabilité conjointe). Cela se traduit par : $\{X_t\}$ est strictement stationnaire si : $F_{X_{t_1},...,X_{t_n}}(x_1, ..., x_n) = F_{X_{t_1+h},...,X_{t_n+h}}(x_1, ..., x_n)$, $\forall n,\ n \geq 1, \forall h, t_1, ..., t_n \in \mathbb{Z}, \forall x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$, où $F_{X_{t_1},...,X_{t_n}}$ est la fonction de répartition conjointe.*

Propriétés d'un processus strictement stationnaire

1. Les variables aléatoires X_t sont identiquement distribuées.
2. $(X_t, X_{t+h}) \overset{d}{\equiv} (X_1, X_{1+h}), \forall t, h.$
3. $\{X_t\}$ est aussi faiblement stationnaire si $E(X_t^2) < \infty, \forall t.$
4. La stationnarité faible n'implique pas la stationnarité stricte sauf si le processus est gaussien.

Soit $\{\epsilon_t\}$ un processus bruit blanc fort gaussien de variance 1. Soit $X_t = \begin{cases} \epsilon_t \text{ si } t \text{ est pair} \\ \frac{\epsilon_t^2 - 1}{\sqrt{2}} \text{ si } t \text{ est impair} \end{cases}$

1) Montrer que $\{X_t\}$ est stationnaire au second ordre.

2) Calculer $P(X_t > 1)$. Déduire que $\{X_t\}$ n'est pas strictement stationnaire.

2 Processus linéaires

La classe des modèles de séries chronologiques linéaires, qui inclut la classe des modèles autorégressifs moyenne mobile ($ARMA$: **A**uto**R**egressive **M**oving **A**verage en anglais) fournit un cadre général pour l'étude des processus stationnaires. Ceci est à la base du théorème de décomposition de Wold qui sera formulé plus loin.

Définition 13 *Le processus aléatoire $\{X_t\}$ est un **processus linéaire** s'il possède la représentation*

$$X_t = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_i \epsilon_{t-i}, \forall t \tag{1}$$

où $\{\epsilon_t\}$ est un bruit blanc $WN(0, \sigma_\epsilon^2)$ et $\{\psi_i\}$ est une suite de constantes vérifiant $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |\psi_i| < \infty$.

(1) s'écrit de façon plus compacte

$$X_t = \Psi(B)\epsilon_t$$

où $\Psi(B) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_i B^i$.

Un processus linéaire est un processus **moyenne mobile d'ordre** ∞ ($MA(\infty)$) si $\psi_i = 0$ pour $i < 0$, i.e.,

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \epsilon_{t-i}, \forall t$$

Remarque 14 *La condition $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |\psi_i| < \infty$ assure que la somme infinie dans (1) converge presque sûrement (ps).*

En effet, nous avons :

1) $E(|\epsilon_t|) < \sigma$ car, en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $E(|\epsilon_t|) \leq (E(\epsilon_t^2))^{1/2} = \sigma$

2) $E(|X_t|) = E(\left|\sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_i \epsilon_{t-i}\right|) \leq \sum_{i=-\infty}^{\infty} |\psi_i| E(|\epsilon_{t-i}|) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |\psi_i| E(|\epsilon_t|) \leq \sigma \sum_{i=-\infty}^{\infty} |\psi_i| < \infty$ ceci impliquant que $|X_t| < \infty$, ps et donc la somme infinie converge ps.

Remarque 15 *La condition donnée dans la remarque 1 assure aussi que* $\sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_i^2 < \infty$. *En effet* $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |\psi_i| < \infty \Leftrightarrow \left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} |\psi_i|\right)^2 < \infty \Leftrightarrow \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_i| \left|\psi_j\right| < \infty \Leftrightarrow \sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_i^2 + \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{j=-\infty \\ i \neq j}}^{\infty} |\psi_i| \left|\psi_j\right| < \infty$. *Donc la somme infinie dans* (1) *converge en moyenne quadratique. En effet* $E(\sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_i \epsilon_{t-i} - \sum_{i=-n}^{n} \psi_i \epsilon_{t-i})^2 = \sigma^2 \sum_{|i|>n} \psi_i^2 \to 0$ *quand* $n \to \infty$ *car c'est le reste d'une série convergente.*

Remarque 16 *1) La condition* (ψ_i) *absolument sommable est plus forte que la condition* (ψ_i) *de carré sommable. Il existe des processus linéaires pour lesquels la suite* (ψ_i) *est de carré sommable mais n'est pas absolument sommable.*

2) L'opérateur $\Psi(B)$ *peut être interprété comme un filtre qui est appliqué au bruit blanc* $\{\epsilon_t\}$ *qui est l'input pour produire le processus* $\{X_t\}$ *qui est l'output.*

La proposition suivante établit qu'un filtre linéaire appliqué à un processus stationnaire produit un processus stationnaire.

Proposition 17 *Soit* $\{Z_t\}$ *un processus stationnaire de moyenne* 0 *et de fonction d'autocovariance* $\left\{\gamma_h^Z\right\}$. *Si* $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |\psi_i| < \infty$, *alors le processus* $X_t = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_i Z_{t-i}$ *est stationnaire de moyenne* 0 *et de fonction d'autocovariance*

$$\gamma_h^X = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_k \gamma_{h+k-j}^Z$$

Dans le cas spécial où $\{X_t\}$ *est un processus linéaire alors* $\gamma_h^X = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_{j-h} \sigma_\epsilon^2$.

Preuve. 1) $E(X_t) = E(\sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_i Z_{t-i}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_i E(Z_{t-i}) = 0$. L'interchangement entre les opérateurs $\sum_{i=-\infty}^{\infty}$ et espérance peut être justifié par l'absolue sommabilité des ψ_i. (La moyenne ne dépend pas de t : elle est constante).

2) $E(X_t X_{t-h}) = E(\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\psi_j\psi_k Z_{t-j}Z_{t-h-k}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\psi_j\psi_k E(Z_{t-j}Z_{t-h-k}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\psi_j\psi_k\gamma^Z_{h+k-j}$ (elle ne dépend que de la différence entre les instants qui est $t-j-(t-h-k) = h+k-j$).

Le cas spécial d'un processus linéaire se distingue par le fait que $Z_t = \epsilon_t$ et donc

$$\begin{aligned} E(Z_{t-j}Z_{t-h-k}) &= E(\epsilon_{t-j}\epsilon_{t-h-k}) = \begin{cases} \sigma_\epsilon^2 \text{ si } t-j = t-h-k \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sigma_\epsilon^2 \text{ si } k = j-h \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

■

Ceci montre que le processus $\{X_t\}$ défini par (1) est stationnaire au second ordre. L'absolue convergence de (1) implique que des filtres de la forme $\boldsymbol{\alpha}(B) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\alpha_j B^j$ et $\boldsymbol{\beta}(B) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\beta_j B^j$ avec des coefficients absolument sommables peuvent être appliqués à un processus stationnaire $\{Y_t\}$ pour générer un nouveau processus stationnaire

$$W_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\psi_j Y_{t-j} = \Psi(B)Y_t$$

où $\Psi(B) = \boldsymbol{\alpha}(B)\boldsymbol{\beta}(B)$ et $\psi_j = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha_k\beta_{j-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\beta_k\alpha_{j-k}$. (A montrer en exercice).

Exemple 18 *Processus $AR(1)$*

Un processus $AR(1)$, $\{X_t\}$ est une solution de l'équation aux différences stochastiques

$$X_t = \phi X_{t-1} + \epsilon_t \ \ : X_t \text{ est écrit en fonction du passé et du présent du bruit} \qquad (2)$$

où $\{\epsilon_t\} \sim WN(0,\sigma_\epsilon^2)$ et ϵ_t est non corrélé avec X_s pour tout $s < t$. Pour montrer qu'une telle solution existe, si $|\phi| < 1$, et est l'unique solution de (2), on considère le processus linéaire

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty}\phi^i\epsilon_{t-i} \qquad (3)$$

$\sum_{i=0}^{\infty} \phi^i \epsilon_{t-i} = \epsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} \phi^i \epsilon_{t-i}$. *Posons* $j = i - 1$. *On obtient* $\epsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} \phi^i \epsilon_{t-i} = \epsilon_t + \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{j+1} \epsilon_{t-1-j} = \epsilon_t + \phi \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \epsilon_{t-1-j}$. *D'où* $X_t = \phi X_{t-1} + \epsilon_t$.

Montrons qu'elle est unique. Pour cela, supposons que $Y_t = \phi Y_{t-1} + \epsilon_t$ *où* $\{Y_t\}$ *est une autre processus. Alors,*

$$\begin{aligned} Y_t &= \phi Y_{t-1} + \epsilon_t \\ &= \epsilon_t + \phi \epsilon_{t-1} + \phi^2 Y_{t-1} \\ &= \cdots \\ &= \epsilon_t + \phi \epsilon_{t-1} + \phi^2 \epsilon_{t-2} + \cdots + \phi^k \epsilon_{t-k} + \phi^{k+1} Y_{t-k-1} \end{aligned}$$

Si $\{Y_t\}$ *est stationnaire au second ordre, alors* $E(Y_t^2) < \infty$ *et est indépendant de* t. *Ainsi*

$$\begin{aligned} E(Y_t - \sum_{i=0}^{k} \phi^i \epsilon_{t-i})^2 &= E(\phi^{k+1} Y_{t-k-1})^2 \\ &= \phi^{2k+2} E(Y_{t-k-1}^2) \\ &\rightarrow 0 \text{ quand } k \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Ceci implique que Y_t *est égal à la limite en moyenne quadratique* $\sum_{i=0}^{\infty} \phi^i \epsilon_{t-i}$ *et donc, le processus défini par l'équation* (3) *est l'unique solution stationnaire au second ordre de* (2).

Lorsque $|\phi| > 1$, *la série définie par* (3) *n'est pas convergente. Mais on peut réécrire le modèle* (2) *de façon que le processus à l'instant* t *(ou* $t-1$ *ou ...) s'écrive en fonction de son futur.*

$$X_{t-1} = -\frac{1}{\phi} \epsilon_t + \frac{1}{\phi} X_t \tag{4}$$

En itérant (4) *on obtient*

$$\begin{aligned} X_{t-1} &= -\frac{1}{\phi} \epsilon_t - \frac{1}{\phi^2} \epsilon_{t+1} + \frac{1}{\phi^2} X_{t+1} \\ &= \cdots \\ &= -\frac{1}{\phi} \epsilon_t - \frac{1}{\phi^2} \epsilon_{t+1} - \cdots - \frac{1}{\phi^{k+1}} \epsilon_{t+k+1} + \frac{1}{\phi^{k+1}} X_{t+k+1} \end{aligned}$$

En utilisant les mêmes arguments que ci-dessus, on montre que

$$X_t = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\phi^i} \epsilon_{t+i}$$

est l'unique solution stationnaire au second ordre de (4)*.*

Remarque 19 *Cette solution n'est pas très naturelle car X_t est corrélée avec le futur du bruit $\epsilon_{t+1}, \epsilon_{t+2}, \ldots$ Ceci contraste avec la solution* (3) *dans laquelle on voit que X_t est non corrélé avec ϵ_s pour $s > t$. On restreindra notre attention aux processus $AR(1)$ tels que $|\phi| < 1$.*