Licence Mathématiques 3^{ième} année **2021/2022**
Matière: Mesure et intégration

Micro - interrogation n° 2

Exercice 1 Répondre par vraie ou faux, en justifiant votre réponse .
1- La fonction $f : (E, \mathcal{A}) \to (F, \mathcal{B})$ est mesurable si et seulement si pour tout $A \in \mathcal{A}$ on a $f(A) \in \mathcal{B}$.
2- Soit $\{f_n\}_{n\geq 0}$ une suite de de fonctions mesurables de $(E, \mathcal{A})$ dans $\mathbb{R}$, qui converge simplement vers f sur E. Alors f est aussi mesurable.
3- Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et $f : E \to \mathbb{R}$ est une fonction mersurable, alors elle est continue.

Exercice 2 Montrer que les fonctions suivantes sont mesurables et λ-intégrables puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f_n(x) d\lambda$

(a) $f_n(x) = \dfrac{x}{x^n + e^x} \mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x)$. (b) $f_n(x) = f(x) \exp(-n \sin^2 x)$ sur $\mathbb{R}$ où $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Licence Mathématiques 3^{ième} année **2021/2022**
Matière: Mesure et intégration

Micro - interrogation n° 2

Exercice 1 Répondre par vraie ou faux, en justifiant votre réponse .
1- La fonction $f : (E, \mathcal{A}) \to (F, \mathcal{B})$ est mesurable si et seulement si pour tout $A \in \mathcal{A}$ on a $f(A) \in \mathcal{B}$.
2- Soit $\{f_n\}_{n\geq 0}$ une suite de de fonctions mesurables de $(E, \mathcal{A})$ dans $\mathbb{R}$, qui converge simplement vers f sur E. Alors f est aussi mesurable.
3- Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et $f : E \to \mathbb{R}$ est une fonction mersurable, alors elle est continue.

Exercice 2 Montrer que les fonctions suivantes sont mesurables et λ-intégrables puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f_n(x) d\lambda$

(a) $f_n(x) = \dfrac{x}{x^n + e^x} \mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x)$. (b) $f_n(x) = f(x) \exp(-n \sin^2 x)$ sur $\mathbb{R}$ où $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Corrigé de la micro-interrogation

Exercice 1 .

1- Faux,(0.5 pt) car la définition est : f est mesurable $\iff f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ pour tout $B \in \mathcal{B}$. (0.5 pt)

2- Vraie (0.5 pt), c'est une propriété des fonctions mesurables . (0.5 pt)

3- Faux (0.5 pt), si on prend $f(x) = \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x)$ sur $\mathbb{R}$, cette fonction est mesurable, car $\mathbb{Q} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, mais elle est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.(0.5 pt)

Exercice 2

(a) $(*)$ Pour tout $n \in \mathbb{N},: f_n(x) = \dfrac{x}{x^n + e^x}\mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x)$,alors les f_n sont continues sur $\mathbb{R}^*$ (0.25 pt) $\Longrightarrow$ .elles sont mesurables (boréliennes)(0.25 pt)

$(*)$ On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ $|f_n(x)| \leq \dfrac{x}{e^x}\mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x) = xe^{-x}\mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x) = g(x)$ sur $\mathbb{R}$ (0.25 pt) . Comme g est intégrable au sens de Lebesgue ($\lambda-$intégrable) sur $\mathbb{R}$, les $f_n; n \geq 0$, sont tous $\lambda-$intégrable sur $\mathbb{R}$ (0.25 pt)

$(*)$ On a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{x^n + e^x} & : x \geq 0 \\ 0 & : \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x} & : 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{1}{1+e} & : x = 1 \\ 0 & : \text{sinon} \end{cases}$ (0.25 pt)

$(*)$ Comme $|f_n| \leq g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $\{f_n\}_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, alors d'après le T.C.D.(0.25 pt). on a

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)d\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)d\lambda(x)\,(0.25\ pt) \\ &= \int_{[0,1[} xe^{-x}d\lambda(x) = \int_0^1 xe^{-x}dx = 1 - 2e^{-1}\,(0.25\ pt)\,. \end{aligned}$$

(b) $(*)$ Pour tout $n \in \mathbb{N},: f_n(x) = f(x)\exp(-n\sin^2 x)$ sur $\mathbb{R}$ où $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.
On a $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow f$ est borélienne. En plus la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ (0.25 pt) . Donc les f_n sont boréliennes (0.25 pt)

$(*)$ On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ sur $\mathbb{R}$ (0.25 pt) . On a $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, alors les $f_n; n \geq 0$, sont tous $\lambda-$intégrable sur $\mathbb{R}$ (0.25 pt)

$(*)$ On a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ p.p. sur $\mathbb{R}$ ($\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\left(k\dfrac{\pi}{2}\right) = f\left(k\dfrac{\pi}{2}\right)$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$).(0.25 pt)

$(*)$ Comme $|f_n| \leq |f| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $\{f_n\}_n$ converge simplement p.p. sur $\mathbb{R}$, alors d'après le T.C.D.(0.25 pt). on a

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)d\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)d\lambda(x)\,(0.25\ pt) \\ &= \int_{\mathbb{R}} 0d\lambda(x) = 0\,(0.25\ pt)\,. \end{aligned}$$