

SÉRIES CHRONOLOGIQUES

Chap1: Introduction & concept générale

Mr.HAMEL Elhadj

Département de Mathématiques

Université Hassiba Benbouali - Chlef

2021-2022

Plan

- 1 Chap1 : Introduction & concept générale

Introduction

Nous présentons dans ce cours l'analyse des séries temporelles qui est employée dans de nombreuses domaines telle que economie , finance ,médecine,traitement de signal , sciences et techniques. Nous mettons notamment l'accent sur les méthodes d'analyse et de prévision telles qu'elles sont utilisées, . Nous insistons sur les aspects statistiques de ces méthodes et sur leurs limites respectives . Nous abordons également quelques illustrations simples de ces méthodes, nous donnons des indications sur les logiciels employés, et quelques aspects de calcul.

C'est quoi une série chronologique ?

Définitions

Une série chronologique est encore appelée chronique ou série temporelle or (time series). est une collection de données où bien suite d'observations obtenue de manière séquentielle au cours du temps. notées $(X_t)_{t \in T}$, où T est appelé espace de temps.

Il y a donc typiquement deux variables associées :

- une variable quantitative dont les données sont dépendantes.
- une variable "temps".

Notons que l'indice temps peut être selon les cas, la seconde, la minute, l'heure, le jour, la semaine , le mois, le trimestre, l'année

L'objectif

On s'intéresse dans l'étude des séries temporelles à l'évolution au cours du temps d'un phénomène.

l'étude des séries temporelles a trois objectifs :

- DÉCRIRE l'évolution d'une grandeur dans le temps ;
- EXPLIQUER et interpréter les phénomènes observés ;
- PREVOIR le phénomène étudié au cours du temps.

On dispose d'observations à des dates différentes, c-à-d d'une suite de valeurs numériques indicées par le temps.

C'est quoi une série chronologique ?

Notation

Dans la suite on notera la série chronologique de longueur n par $\{X_{t \in T}\}$ où T est l'ensemble ordonné des instants d'observation, ie. $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$.

- t_1, t_2, \dots, t_n sont les n instants successifs d'observation
- $\{X_{t_j}\}$ est la valeur mesurée à l'instant t_j ,

Représentations graphiques

On utilise essentiellement deux types de graphes pour représenter les séries temporelles :

- des diagrammes en coordonnées cartésiennes : le temps est porté en abscisses et les valeurs de la variable observée en ordonnées. le nuage formé par les points $(t_j, y_j)_{1 \leq j \leq n}$ que l'on relie par des segments de droites.
- des diagrammes en graphes superposés.
- des diagrammes en coordonnées polaires.

Intérêt de la représentation graphique :

la représentation graphique permet de trouver et de repérer les caractéristiques de la chronique, comme

- une tendance
- un cycle
- un phénomène périodique
- des variations accidentelles
- des fluctuations irrégulières
-

Domaines d'application

Nombreux domaines d'application : on rencontre des séries chronologiques en

- **Economie , Finance** : le cours d'une action, le prix d'une option d'achat ou de vente, ... le PIB, le taux d'inflation, le niveau des exportations, le taux de chômage, ...
- **biologie, médecine** : analyse d'électrocardiogrammes.
- **Traitement du signal et phénomènes ondulatoires** : signaux de communications, de radars, de sonars, analyse de la parole, signal neuronique, etc
- **données météorologiques , pollution**
- **démographie ;**
- ...

Présentation d'une série chronologique

Une série chronologique est présentée soit sous la forme d'un tableau à deux colonnes, contenant n lignes :

t	X_t
1	X_1
2	X_2
\vdots	\vdots
n	X_n

Présentation d'une série chronologique

soit sous la forme d'un tableau a deux entré contenant p colonnes et n lignes :

par exemple les lignes repsente les année et les colonnes par (jours, mois, trimestre ,)

$Anne \backslash trimestre$	1	2	...	j	...	p
1	X_{11}	X_{12}		X_{1j}		X_{1p}
2	X_{21}	X_{22}		X_{2j}		X_{2p}
\vdots						
i				X_{ij}		X_{ip}
\vdots						
n	X_{n1}	X_{n2}		X_{nj}		X_{np}

Examples of Time Series

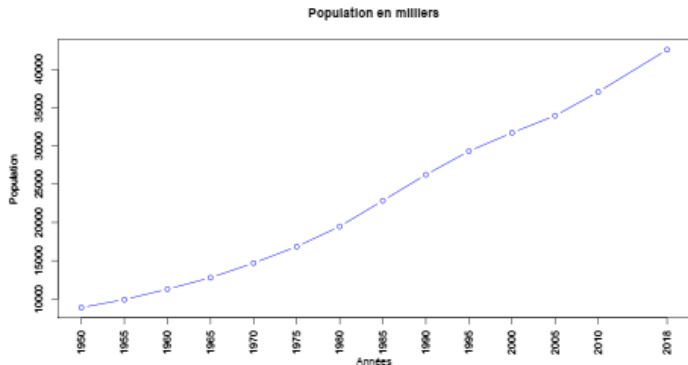


Figure: la population Algérienne 1960-2018

La série de données augmente de façon linéaire.

Examples of Time Series

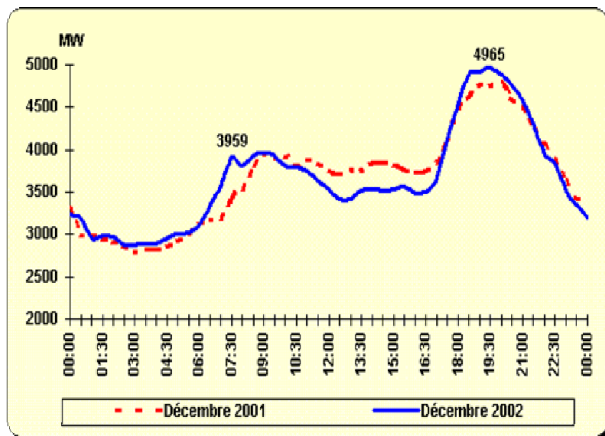


Figure: Courbes de charge-annuelle moyenne Source Sonelgaz

Examples of Time Series

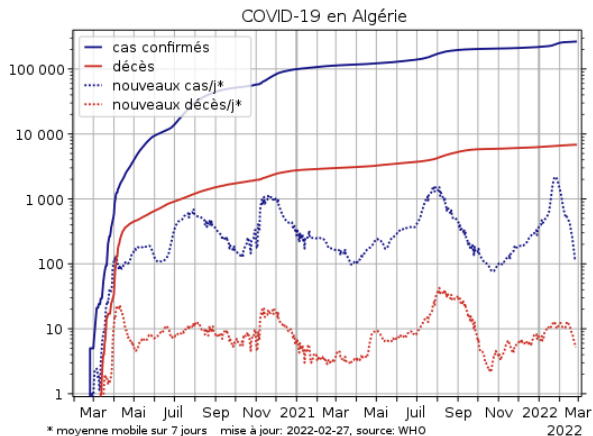


Figure: COVID-19-Algeria (mars2020-mars2022)

Examples of Time Series

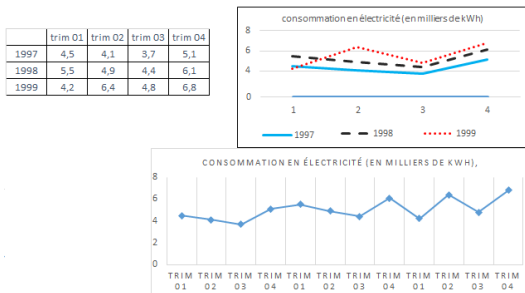
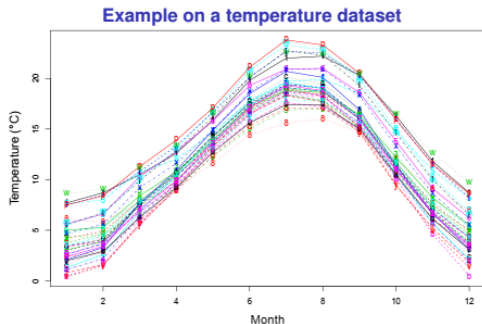


Figure: consommation en électricité (en milliers de kWh).

- Quelle est la différence entre les deux graphes ?

Examples of Time Series



Dataset: Temperature at $n = 36$ cities (individuals) for $p = 12$ months (variables).

Figure: consommation en électricité (en milliers de kWh).

- Quelle est la différence entre les deux graphes ?

Examples of Time Series

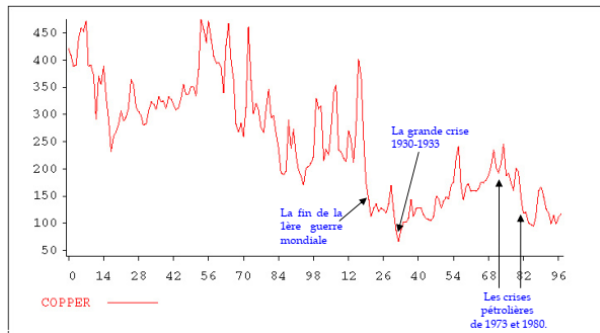


Figure: les prix du cuivre (1800-1997).

Description d'une série chronologique

Dans l'analyse d'une série temporelle, on cherche à repérer un certain nombre de comportement :

- y a-t-il une tendance générale à la hausse ou à la baisse ?
- y a-t-il des fluctuations répétitives ?
- y a-t-il des phénomènes qui se reproduisent sur des périodes longues ?
- y a-t-il des fluctuations exceptionnelles ?

Les questions posées reviennent à rechercher des réponses pour faire la description d'une série chronologique .

Description d'une série chronologique

On considère qu'une série chronologique (X_t) est la résultante de différentes composantes fondamentales :

- la **tendance (ou trend)** (Z_t) représente l'évolution à long terme de la série et traduit son comportement "moyen".
- la **composante saisonnière (ou saisonnalité)** (S_t) correspond à un phénomène qui se répète à intervalles de temps réguliers (périodiques).
- la **composante résiduelle (ou bruit ou résidu)** (ε_t) correspond à des fluctuations irrégulières, de faible intensité mais de nature aléatoire.
- **des phénomènes accidentels** (grèves, météo exceptionnelle, crash financier) peuvent notamment intervenir.

Afin de formaliser ces quatres composantes, on cherche à établir des modèles théoriques permettant de rendre compte mathématiquement du comportement de la variable étudiée en fonction du temps.

Modélisation

- Un modèle est une image simplifiée de la réalité qui vise à traduire les mécanismes de fonctionnement du phénomène étudié et permet de mieux les comprendre.
- Un modèle peut être meilleur qu'un autre pour décrire la réalité. Plusieurs questions se posent alors :
 - comment mesurer cette qualité ?
 - comment diagnostiquer un modèle ?
- Nous présentons dans la suite une petite liste qui sert à résumer et classifier les différents modèles envisagés dans ce cours.

Modélisation

Après avoir détecté graphiquement quelles sont les composantes présentes, il faut proposer un modèle. Nous allons étudier les deux principaux modèles de décomposition : *le modèle additif et le modèle multiplicatif*.

Ces modèles identifient *le trend , les variations saisonnières et les variations accidentelles* .

Modélisation

- ① **le modèle additif.** C'est le "modèle classique de décomposition" dans le traitement des modèles d'ajustement. La variable X_t s'écrit comme le somme de trois termes :

$$X_t = Z_t + S_t + \varepsilon_t,$$

où Z_t représente la tendance (déterministe), S_t la saisonnalité (déterministe aussi) et ε_t les composantes ("erreurs au modèle") aléatoires iid.

Modélisation

- ① **le modèle multiplicatif.** La variable X_t s'écrit au terme d'erreur près comme le produit de la tendance et d'une composante de saisonnalité .

$$X_t = Z_t \times S_t \times \varepsilon_t,$$

Le modèle multiplicatif est généralement utilisé pour des données de type économique.

Modélisation

- ❶ **Les modèles mixtes** . Il s'agit là des modèles où addition et multiplication sont utilisées. On peut supposer, par exemple, que la composante saisonnière agit de façon multiplicative, alors que les fluctuations irrégulières sont additives :

$$X_t = Z_t \times (1 + S_t) + \varepsilon_t,$$

(toutes les autres combinaisons sont également possibles...)

La modélisation stochastique des séries temporelles commence en observant leur graphique et en cherchant une décomposition additive ou multiplicative. Nous étudierons ensuite le modèle additif (le modèle multiplicatif revient à un modèle additif pour le logarithme des données).

Une fois un modèle obtenu, il peut être utilisé pour la prédiction des valeurs futures.

Quelques Modèles de tendance Z_t

L'analyse graphique de la série doit permettre de se déterminer en faveur d'une courbe dont l'équation donnera un ajustement paramétrique de la tendance. Il est donc important de savoir caractériser le type de courbe en présence

- **Droite** : On parle alors d'ajustement linéaire. La variation de X_t est proportionnelle à celle de temps "t" . $Z(t) = a.t + b$ avec a et b des paramètres à déterminer.
- **Parabole** : $Z(t) = at^2 + bt + c$
- **Courbe polynômiale** : $Z(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + + a_pt^p$
- **Courbe exponentielle** : $Z(t) = a \exp(bt) + c$
- **Double Exponentielle où Courbe de Gompertz**
 $Z(t) = \exp a^{e^{(bt)}} + c$
- **Courbe logistique** $Z(t) = \frac{1}{be^{-at} + c}$
- ...

la composante saisonnière

la composante saisonnière exprime **un phénomène qui se reproduit de manière analogue sur chaque intervalle de temps successif**.

L'étendue de cet intervalle qui est constante est appelée **période** et sera notée **P** dans la suite. La plupart du temps, on suppose que la composante saisonnière est constante sur chaque période P , c'est-à-dire

$$S_{t+P} = S_t, \quad \forall t.$$

Cela revient à dire que l'effet net du saisonnier sur une période est nul ; ce qui est naturel puisqu'il est repris dans la tendance générale de la série chronologique. Il s'agit là du modèle le plus simple dans lequel le saisonnier est caractérisé par P coefficients c_1, \dots, c_P .

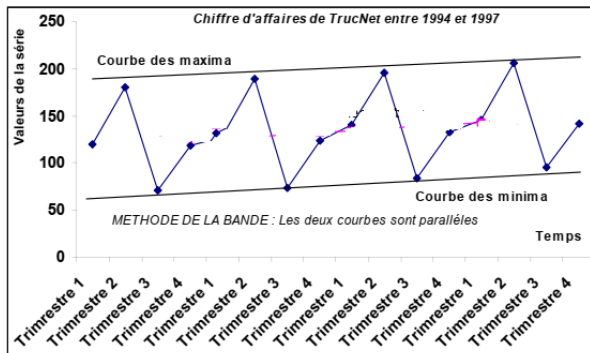
Lorsque $P = 4$, la série est trimestrielle ($S_{t+4} = S_t$) ; lorsque $P = 12$, la série est mensuelle ($S_{t+12} = S_t$) On suppose par ailleurs que l'effet du saisonnier est en moyenne nul sur une

période, ce qui signifie que $\sum_{i=1}^P c_i = 0$.

Choix du modèle

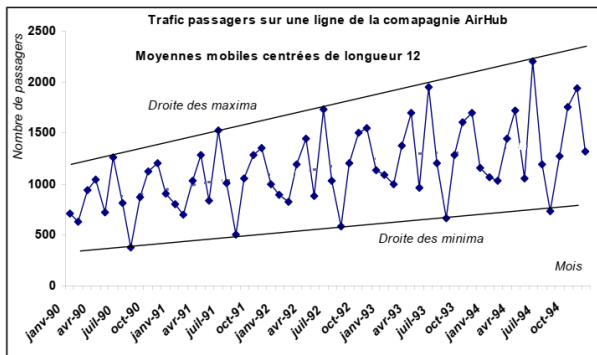
- ① **Méthode du profil où les Graphiques des séries superposées selon chaque période :** On superpose les saisons représentées par des courbes de profil sur un même graphique. Si ces courbes sont **parallèles**, le modèle est additif, autrement le modèle est multiplicatif.
- ② **Méthode de la bande :** Sur le graphique de la série, on trace une droite passant respectivement par **les minima et par les maxima de chaque saison**. Si ces deux droites sont **parallèles**, nous sommes en présence d'un modèle additif. Dans le cas contraire, c'est un modèle multiplicatif.

Exemple de schéma additif



Modèle additif. Amplitude constante autour de la tendance.

Exemple de schéma multiplicatif



L'amplitude de la série n'est plus constante au cours du temps : elle varie au cours du temps proportionnellement à la tendance Z_t au bruit près. Dans ce modèle, on considère que les amplitudes des fluctuations dépendent du niveau.

Méthode du tableau de Buys et Ballot

On calcule pour chacune des années, la moyenne arithmétique et l'écart-type.

<div>Trimestre</div> <div>Année</div>	1	...	j	...	p	Moyennes	Écarts-types
1	$X_{1,1}$		$X_{1,j}$		$X_{1,p}$	\bar{X}_1	σ_1
⋮							
i	$X_{i,1}$		$X_{i,j}$		$X_{i,p}$	\bar{X}_i	σ_i
⋮							
n	$X_{n,1}$		$X_{n,j}$		$X_{n,p}$	\bar{X}_n	σ_n

Méthode du tableau de Buys et Ballot(suite)

- 2** Faisons la régression linéaire entre les écarts-types et les moyennes par la formule suivante : $\sigma_i = a\overline{X}_i + b$
- ▶ Si La pente a de la droite des moindres carrés est très **proche de 0**, le modèle est **additif**,
 - ▶ Si La pente a de la droite des moindres carrés **n'est pas nulle**, le modèle est **multiplicatif**.