Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Université Hassiba Benbouali de Chlef
Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة حسيبة بن بوعلي بالشلف
كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي

قسم الرياضيات

Année Universitaire :2017/2018 **Niveau** :$2^{ème}$ *Année M.A.S.* **Module** :*Processus Stochastiques 3*

Examen final

On suppose que $(B_t)_{t\geq 0}$ est un M.B.S. sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$

1. Soit $X_t : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un processus stochastique, soit $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^{(X)}$ désigne la tribu engendrée par $\{X_s(.); s \leq t\}$ (*i.e. la filtration canonique du processus* $(X_t)_{t\geq 0}$).
   (a) Montrer que si $(X_t)_{t\geq 0}$ est une martingale p.r.p. à une *certaine* filtration $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$, alors il l'est également pour sa propre filtration $\left(\mathcal{F}_t^{(X)}\right)_{t\geq 0}$.
   (b) Montrer que si $(X_t)_{t\geq 0}$ est une martingale p.r.p. à $\left(\mathcal{F}_t^{(X)}\right)_{t\geq 0}$, alors
   $$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0) \quad \textit{pour tout } t \geq 0. \qquad (*)$$
   (c) Calculer $\mathbb{E}(B_t^3/\mathcal{F}_s)$ en fonction de s, t et B_s $(s < t)$.
   (d) Donner un exemple d'un processus stochastique satisfaisant $(*)$ et qui *n'est pas* une martingale p.r.p. à sa propre filtration $\left(\mathcal{F}_t^{(X)}\right)_{t\geq 0}$.

2. Vérifier si les processus suivants sont des $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ −martingales :
   (a) $X_t = B_t + 4t$;
   (b) $X_t = B_t^2$;
   (c) $X_t = t^2 B_t - 2\int_0^t sB_s ds$.
   (d) $X_t = B_t^3 + \lambda t B_t$ (discuter suivant les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$.)

3. Supposons que f, $g \in L^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$ et qu'il existe deux constantes C, D telles que:
   $$C + \int_a^b f(t,\omega)dB_t(\omega) = D + \int_a^b g(t,\omega)dB_t(\omega) \quad \textit{pour presque tout } \omega \in \Omega.$$
   (a) Montrer que $C = D$.
   (b) En déduire (*par l'isométrie d'Itô*) que
   $$f(t,\omega) = g(t,\omega) \quad \textit{pour presque tout } (t,\omega) \in [a,b]\times\Omega.$$

4. Utiliser la formule d'Itô pour prouver que les processus suivants sont des $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ −martingales:
   (a) $X_t = e^{\frac{1}{2}t} \sin B_t$;

(b) $X_t = (B_t + t)Exp(-B_t - \frac{1}{2}t)$.

5. Soit le processus $Y_t = e^{\alpha B_t}, \alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) Calculer $d(Y_t)$ et vérifier que $\mathbb{E}(dY_t) = d\mathbb{E}(Y_t)$.

   (b) En résolvant une $E.D.O.$, montrer que:

$$\mathbb{E}(e^{\alpha B_t}) = e^{\frac{\alpha^2}{2}t}$$

6. Soit le processus X_t solution forte de l'$E.D.S.$

$$dX_t = \alpha X_t dt + \beta X_t dB_t.$$

   - Calculer $\mathbb{E}(X_t)$.(*Utiliser le résultat de l'exercice précédent*).

7. Soit X_t une intégrale d'Itô

$$dX_t = f(t,\omega)dB_t(\omega) \text{ } où \text{ } f \in L^2_{ad}([0,T] \times \Omega), \ 0 \leq t \leq T.$$

   (a) Donner un exemple pour montrer que $(X_t^2)_{t \geq 0}$ n'est pas,en général, une martingale.

   (b) Montrer que si f est bornée alors

$$M_t := X_t^2 - < X >_t \text{ est une martingale.}$$

8. *Geometric Mean – Reverting Process*. Le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit géométrique de mean-reverting s'il est solution de l'E.D.S.

$$dX_t = \lambda(\theta - \log(X_t))X_t dt + \sigma X_t dB_t, \ X_0 > 0.$$

   où λ, θ et σ sont des constantes.

   (a) En appliquant la formule d'Itô à $Y_t = \ln(X_t)$, montrer que le processus de diffusion peut être réduit au processus d'*Ornstein – Uhlenbeck* donné par

$$dY_t = \left[\lambda(\theta - Y_t) - \frac{1}{2}\sigma^2\right] dt + \sigma dB_t$$

   (b) Montrer que pour tout $t < T$,

$$\ln(X_T) = (\ln X_t)e^{-\lambda(T-t)} + (\theta - \frac{\sigma^2}{2\lambda})(1 - e^{-\lambda(T-t)}) + \int_t^T \sigma e^{-\lambda(T-t)} dB_s.$$

   (c) En utilisant les propriétés de l'intégrale stochastique dans l'expression ci-dessus, calculer

$$\mathbb{E}(X_T/X_t = x) \text{ } et \text{ } \mathbb{V}ar(X_T/X_t = x).$$

   (d) Quelle est la loi de la variable aléatoire X_T sachant $X_t = x$?