Université Mohamed Khider Biskra **Département de Mathématiques**
Faculté des SESNV **Master-1.**
Module: Prob Approf **M Hafayed**
Contrôle N° − 1 **11/01/2016.**

Exercice 1:

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, $\mathcal{G}$ sous tribu de $\mathcal{F}$ et X une variable aleatoire. Soit $\Phi_{\mathcal{G}}$ une application definie par:

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{G}}(X) \quad &: \quad \mathbb{L}^q(\Omega, F, P) \longrightarrow \mathbb{L}^q(\Omega, F, P) \\ X \quad &\longmapsto \quad \Phi_{\mathcal{G}}(X) = \mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{G}\right). \end{aligned}$$

(1) Montrer que $\Phi_{\mathcal{G}}$ est une application lineaire continue croissante telle que $\Phi_{\mathcal{G}} \circ \Phi_{\mathcal{G}} = \Phi_{\mathcal{G}}$
(2) Montrer que $\mathbb{E}\left(\Phi_{\mathcal{G}}(X)\right) = \mathbb{E}\left(X\right)$.
(3) Montrer que si X est $\mathcal{G}-$mesurables, alors $\Phi_{\mathcal{G}} \circ \Phi_{\mathcal{G}} \circ \Phi_{\mathcal{G}} \circ ... \circ \Phi_{\mathcal{G}} = X$.
(4) Montrer que si $\Phi_{\mathcal{G}}(X) = Z$ et $\Phi_{\mathcal{G}}(X^2) = Z^2$ alors $X = Z \qquad p.s.$
(5) Montrer que si f une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{E}\left(|X|\right), \mathbb{E}\left(|f(X)|\right)$ sont finies alors $f \circ \Phi_{\mathcal{G}} \leqslant \Phi_{\mathcal{G}} \circ f$.
(6) Montrer que si ξ est une variable aleatoire $\mathcal{G}-$mesurables, alors $\Phi_{\mathcal{G}}(\xi X) = \xi \Phi_{\mathcal{G}}(X)$.
(7) Si $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ deux tribus telles que $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$, alors

$$\Phi_{\mathcal{G}_1} \circ \Phi_{\mathcal{G}_2}(X) = \Phi_{\mathcal{G}_2} \circ \Phi_{\mathcal{G}_1}(X) = \Phi_{\mathcal{G}_1}(X).$$

(8) Montrer que $\left(\Phi_{\mathcal{G}}(XY)\right)^2 \leq \Phi_{\mathcal{G}}(X^2)\Phi_{\mathcal{G}}(Y^2)$.
(9) Montrer que $\Phi_{\mathcal{G}}(X^2) \geq t^2 P\left\{|X| \geq t \mid \mathcal{G}\right\}$. où $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 2:

Soient X et Y deux variables aleatoires à valeur dans $\mathbb{N}$, telle que X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de parametre $\lambda > 0$ et la loi de Y sachant que $(X = n)$ suit la loi Binomial $\mathcal{B}(n, p)$.
(1) Déterminer l'esperance de Y.
(2) Déterminer la loi de Y

Exercice 3:

Soit (X, Y) un couple aléatoire de densité jointe:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{y} e^{-\frac{x}{y} - y} \mathbb{I}_{]0,+\infty[^2}(x, y),$$

(1) Vérifier que $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x, y) dx dy = 1$.
(2) Déterminer la densité marginale $f_Y(y)$ de Y. Déduire $\mathbb{E}\left(Y\right)$.
(3) En déduire la densité conditionnelle $f_{X|Y}(x, y)$.
(4) Déterminer la loi de X sachant que $(Y = y)$,
(5) Calculer $\mathbb{E}\left(X \mid Y = y\right)$ et déduire $\mathbb{E}\left(X \mid Y\right)$.