

**Test**

**Exercice 1 (3 points)** Soit  $Y$  une v.a. réelle sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  telle que  $E(|Y|) < +\infty$ .

1. Soit  $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ . Déterminer  $E(Y/\mathcal{F})$ .
2. Soit  $X$  une v.a constante (p.s). Déterminer  $E(Y/X)$ .

**Exercice 2 (6 pts)** Soit  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$  des variables aléatoires indépendantes d'espérance nulle et de variance  $\text{Var}[\varepsilon_i] = \sigma_i^2$ . Posons

$$S_n = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i, \quad \text{et} \quad T_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$$

Montrez que  $S_n^2 - T_n^2$  est une martingale.

**Exercice 3 (6 points)**

A/ Lequel de ces temps représente un temps d'arrêt:

- 1/ Un joueur décide de s'arrêter au temps  $T_1$  où sa fortune est maximale.
- 2/ Un joueur décide de s'arrêter au temps  $T_2$  lorsque sa fortune dépasse le double de sa mise initiale.
- 3/ Un actionnaire demande à son banquier de vendre ses actions au temps  $T_3$  où le cours de l'action atteint son maximum.
- 4/ Un actionnaire demande à son banquier de vendre au temps  $T_4$  où le cours de l'action a réalisé pour la première fois une progression de 15% sur les 100 derniers jours

B/ Considérons l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  sur lequel sont construites deux filtrations  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  et  $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$  satisfaisant  $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{G}_t$ .

- 1) Soit  $M = (M_t)_{t \geq 0}$  une  $\mathcal{F}_t$ -martingale (martingale par rapport à la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ) et soit  $N = (N_t)_{t \geq 0}$  une  $\mathcal{G}_t$ -martingale. Est-ce que  $M$  est une  $\mathcal{G}_t$ -martingale? Est-ce que  $N$  est une  $\mathcal{F}_t$ -martingale? Justifiez vos réponses.
- 2) Soit  $T$  un  $\mathcal{F}_t$ -temps d'arrêt (temps d'arrêt par rapport à la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ) et  $S$  un  $\mathcal{G}_t$ -temps d'arrêt. Est-ce que  $S$  est un  $\mathcal{F}_t$ -temps d'arrêt? Est-ce que  $T$  est un  $\mathcal{G}_t$ -temps d'arrêt? Justifiez vos réponses.