Solution : La famille exponentielle.

1- $X \sim \mathcal{B}(p)$, $\mathcal{X} = \{0,1\}$, $P(X=x) = p^x q^{1-x}$ où $q = 1-p$

Comme le support de la v.a $X \sim \mathcal{B}(p)$ $\mathcal{X} = \{0,1\}$ est indépendant de paramètre p alors on peut appliquer le cas de la famille exponentielle.

$$P(X=x) = p^x (1-p)^{1-x} = \left(\frac{p}{1-p}\right)^x (1-p) = (1-p)\left(\frac{p}{1-p}\right)^x$$

$$= \underbrace{(1-p)}_{C(p)} \exp\left\{ \underbrace{x}_{a(x)} \times \underbrace{\log\left(\frac{p}{1-p}\right)}_{\alpha(p)} \right\} \times \underbrace{1}_{h(x)}$$

D'où $\boxed{T(x) = \sum_{i=1}^n a(x_i) = \sum_{i=1}^n x_i}$ est une stat exh pour p

2- $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $\mathcal{X} = \mathbb{R}$, $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2}$.

Si par exemple m = inconnu mais σ^2 = connu

dans ce cas nous avons que un seul paramètre m.

$\mathcal{X} = \mathbb{R}$ est indépendant de m (le support ne dépend pas de paramètre m)

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2+m^2-2mx)}$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{m^2}{2\sigma^2}} e^{\frac{mx}{\sigma^2}}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{m^2}{2\sigma^2}}}_{C(m)} \underbrace{e^{\frac{mx}{\sigma^2}}}_{\exp\{\underbrace{m}_{\alpha(m)} \underbrace{\frac{x}{\sigma^2}}_{a(x)}\}} \underbrace{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}_{h(x)}$$

$\Rightarrow T(x) = \sum a(x_i) = \sum x_i$ ou bien $T(x) = \sum a(x_i) = \sum \frac{x_i}{\sigma^2}$

est une stat exh pour m.

• Si Nous avons m = connu et σ^2 = inconnu ⇒ le seul paramètre σ^2

$\mathcal{X} = \mathbb{R}$ ⫫ σ^2

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2} = \underbrace{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}}_{C(\sigma^2)} \exp\left\{\underbrace{-\frac{1}{2\sigma^2}}_{\alpha(\sigma^2)} \times \underbrace{(x-m)^2}_{a(x)}\right\} \times \underbrace{1}_{h(x)}$$

$$\Rightarrow T(x) = \sum a(x_i) = \boxed{\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2}$$ st une stat exh pour σ^2

• Si m = inconnu et σ^2 = inconnu ⇒ Nous avons 2 paramètre m et σ^2

$\mathcal{X} = \mathbb{R}$ ⫫ m et ⫫ σ^2

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{m^2}{2\sigma^2}} e^{\frac{mx}{\sigma^2} - \frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \underbrace{\frac{e^{-\frac{m^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}}_{C(m,\sigma^2)} \exp\left\{\underbrace{\frac{mx}{\sigma^2}}_{\alpha(m,\sigma^2)a_1(x)} - \underbrace{\frac{x^2}{2\sigma^2}}_{\alpha(m,\sigma^2)a_2(x)}\right\} \times \underbrace{1}_{h(x)}$$

$$\Rightarrow T = (T_1, T_2) = \left(\sum a_1(x_i), \sum a_2(x_i)\right) = \left(\sum x_i, \sum x_i^2\right)$$

st une stat exh pour (m, σ^2) c.à.d. $\sum x_i$ stat exh pour m et $\sum x_i^2$ stat exh pour σ^2.

Remarque:

dans le cas où σ^2 connu on a trouvé $\sum x_i$ stat exh pour m et dans le cas où m connu on a trouvé $\sum(x_i-m)^2$ stat exh pour σ^2 mais dans le cas où σ^2 et m inconnus on peut pas poser que $\left(\sum x_i, \sum(x_i-m)^2\right)$ stat exh pour (m, σ^2) car $\sum(x_i-m)^2$ on peut pas la considérer comme une stat puisque elle depend de paramètre m pour cela on st obligé de chercher une stat exh dans le cas ~~des~~ 2 paramètre en même temps où la stat exh st $\left(\sum x_i, \sum x_i^2\right)$

⊛ Donner l'information au sens de fisher apportée par :

1 - n-échantillon de $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

2 - une réalisation de $X \sim \mathcal{U}_{[0,\theta]}$.

3 - n-échantillon de $X \sim \mathcal{U}_{[0,\theta]}$.

Solution :

1] un n-éch de $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$., $x = \mathbb{N}$, $P(X=x) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^x}{x!}$

$E(X) = \lambda$, $V(X) = \lambda$.

1ère méthode : Déf 6

$$I_n(\lambda) = E\left(\left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \log L(x, \lambda)\right]^2\right)$$

on a utilisé $L(x, \lambda)$ (la fonction de vraisemblance car on cherche l'information au sens de fisher apportée par un n-éch = éch de taille n

$$\cdot L(x, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i) = \prod e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}$$

$$= e^{-n\lambda} \frac{\lambda^{\sum x_i}}{\prod x_i!}$$

$$\cdot \log L(x, \lambda) = -n\lambda + \sum x_i \log \lambda + \log \frac{1}{\prod x_i!}$$

$$\cdot \frac{\partial}{\partial \lambda} \log L(x, \lambda) = -n + \frac{\sum x_i}{\lambda} = \left(\frac{\sum x_i}{\lambda} - n\right)$$

$$\cdot \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \log L(x, \lambda)\right]^2 = \left(\frac{\sum x_i}{\lambda} - n\right)^2 = \frac{(\sum x_i)^2}{\lambda^2} + n^2 - \frac{2n \sum x_i}{\lambda}$$

$$\underbrace{E\left[\left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \log L(x, \lambda)\right]^2\right]}_{I_n(\lambda)} = E\left[\frac{(\sum X_i)^2}{\lambda^2} + n^2 - \frac{2n \sum X_i}{\lambda}\right]$$

$$= \frac{1}{\lambda^2} E\left[(\sum X_i)^2\right] + n^2 - \frac{2n}{\lambda} E\left(\sum X_i\right)$$

Remarque : $E\left(\left[\frac{(\sum x_i)^2}{\lambda^2} + n^2 - \frac{2n \sum x_i}{\lambda}\right]^2\right)$ incorrecte il faut toujours remplacer x_i par la v.a X_i

$\cdot \hookrightarrow X_i \sim \mathcal{P}(\lambda)$ $\forall i = \overline{1,n}$ $\Rightarrow \sum X_i \sim \mathcal{P}(n\lambda)$ car les X_i sont i.i.d

(i.i.d = des v.a indépendantes de même loi $\forall i = 1, \dots, n$)

d'où, $E(\sum X_i) = n\lambda$ ou bien $E(\sum X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda = n\lambda$

$\cdot\ E\left(\left(\sum X_i\right)^2\right) = E(Z^2)$ où Z v.a $= \sum X_i \sim \mathcal{P}(n\lambda)$

$E(Z) = n\lambda\ ,\ V(Z) = n\lambda.$

$$\boxed{Var(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 \Rightarrow E(Z^2) = V(Z) + [E(Z)]^2}$$

d'où $E\left[\left(\sum X_i\right)^2\right] = E(Z^2) = V(Z) + (E(Z))^2 = n\lambda + (n\lambda)^2$

$$\Rightarrow I_n(\lambda) = \frac{n\lambda + n^2\lambda^2}{\lambda^2} + n^2 - \frac{2n}{\lambda}n\lambda = \frac{n}{\lambda} \cancel{+n^2} \cancel{+n^2} \cancel{-2n^2}$$

$$\boxed{\Rightarrow I_n(\lambda) = \frac{n}{\lambda}}$$

2ème méthode : Théorème 1.

$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ $\mathcal{X} = \mathbb{N}$ ⫫ de paramètre λ.

$$I_n(\lambda) = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\log L(\underset{\sim}{x},\lambda)\right]$$

$\cdot\ L(\underset{\sim}{x},\lambda) = e^{-n\lambda}\dfrac{\lambda^{\sum x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$

$\cdot\ \log L(\underset{\sim}{x},\lambda) = -n\lambda + \sum x_i \log\lambda + \log\dfrac{1}{\prod x_i!}$

$\cdot\ \dfrac{\partial \log L(\underset{\sim}{x},\lambda)}{\partial\lambda} = \dfrac{\sum x_i}{\lambda} - n$

$\cdot\ \dfrac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\log L(\underset{\sim}{x},\lambda) = \dfrac{-\sum x_i}{\lambda^2}$

$$\Rightarrow I_n(\lambda) = -E\left[-\frac{\sum X_i}{\lambda^2}\right] = \frac{\sum E(X_i)}{\lambda^2} = \frac{\sum\lambda}{\lambda^2} = \frac{n\lambda}{\lambda^2} = \boxed{\frac{n}{\lambda}}$$

On voit que la 2ème méthode plus rapide et simple que la première méthode.

donc si le support d'une v.a ⫫ de paramètre il est préférable d'utilise la 2ème méthode.

(2) $X \sim U_{[0,\theta]}$, $\mathcal{X} = [0,\theta]$. $f_X(x) = \frac{1}{\theta}\mathbb{1}_{[0,\theta]}(x)$, $E(X) = \frac{\theta}{2}$, $V(X) = \frac{\theta^2}{12}$

l'information au sens de fisher pour une réalisation :

$I(\theta) = \left[\left(\frac{\partial \log}{\partial\theta} f(x,\theta)\right)^2\right]$ on peut pas calcule $I(\theta)$ à partir de Théorème 1 car $\mathcal{X} = [0,\theta]$ depend de paramètre θ [on a qu'une seule méthode]

$\cdot\, f(x,\theta) = \frac{1}{\theta} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x)$ $\quad \cdot\, \log f(x,\theta) = -\log\theta$ $\quad \cdot\, \frac{\partial}{\partial\theta} \log f(x,\theta) = -\frac{1}{\theta}$.

$\Rightarrow I(\theta) = E\left[\left(-\frac{1}{\theta}\right)^2\right] = \frac{1}{\theta^2}$

<u>Remarque</u>: l'information au sens de fisher st toujours positive ou nulle.

$$\boxed{I(\theta) = \frac{1}{\theta^2}}$$

③ $X \sim U_{[0,\theta]}$, $\mathcal{X} = [0,\theta]$, $f_X(x) = \frac{1}{\theta} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x)$

on cherche $I_n(\theta)$ = la quantité d'information de fisher pour un n-éch.

$$I_n(\theta) = E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \log L(\underset{\sim}{x},\theta)\right)^2\right]$$

$\cdot\, L(\underset{\sim}{x},\theta) = \prod_{x_i} f(x_i,\theta) = \frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}_{\{\min x_i \geq 0\}} \mathbb{1}_{\{\max x_i \leq \theta\}}$.

$\cdot\, \log L(\underset{\sim}{x},\theta) = \log\left(\frac{1}{\theta^n}\right) = -n\log\theta$

$\cdot\, \frac{\partial \log L(\underset{\sim}{x},\theta)}{\partial\theta} = -\frac{n}{\theta}$

$$I_n(\theta) = E\left[\left(-\frac{n}{\theta}\right)^2\right] = \boxed{\frac{n^2}{\theta^2}}$$

<u>noté bien:</u> <u>Théorème 2</u>:

on remarque que $I_n(\theta) \neq n\, I(\theta)$ (la quantité de fisher apportée par un n-éch et $\neq$ a n fois la quantité par une réalisation)

car le support de la v.a $X = [0,\theta]$ st dépend de paramètre θ.

$\Rightarrow$ on peut pas appliquer le théorème 2

⊛ Donner l'information au sens de fisher apportée par une réalisation de $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

solution:

$I(m,\sigma^2) = ??$ pour $X \sim N(m,\sigma^2)$, $\mathcal{X} = \mathbb{R}$, $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2}$

$E(X) = m$, $V(X) = \sigma^2$.

$$I(m,\sigma^2) = \begin{array}{c|cc} & m & \sigma^2 \\ m & -E\left[\frac{\partial^2}{\partial m^2}\log f(x,m,\sigma^2)\right] & -E\left[\frac{\partial^2}{\partial m\,\partial \sigma^2}\log f_X(x)\right] \\ & \overset{\shortparallel}{I(m)} & \\ \sigma^2 & -E\left[\frac{\partial^2}{\partial m\,\partial\sigma^2}\log f_X(x)\right] & -E\left[\frac{\partial^2}{\partial \sigma^{2\,2}}\log f_X(x)\right] \\ & & \overset{\shortparallel}{I(\sigma^2)} \end{array}$$

on a appliqué le Théorème 5

N.B

Si par exemple le support de la v.a dépend de paramètre θ_1 et θ_2 mais $\not\exists$ de θ_3 alors $I(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ la quantité d'information de fisher apportée par une réalisation de cette v-a donnée par :

$$I(\theta_1,\theta_2,\theta_3) = \begin{array}{c|ccc} & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ \theta_1 & E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1}\log f_X(x)\right)^2\right] & E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1}\log f_X(x)\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta_2}\log f_X(x)\right)\right] & E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1}\log f_X(x)\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta_3}\log f_X(x)\right)\right] \\ \theta_2 & E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1}\log f_X(x)\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta_2}\log f_X(x)\right)\right] & E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta_2}\log f_X(x)\right)^2\right] & E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta_2}\log f_X(x)\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta_3}\log f_X(x)\right)\right] \\ \theta_3 & E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1}\log f_X(x)\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta_3}\log f_X(x)\right)\right] & E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta_2}\log f_X(x)\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta_3}\log f_X(x)\right)\right] & -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta_3^2}\log f_X(x)\right] \end{array}$$

$$\shortparallel$$

$$\begin{pmatrix} I(\theta_1) & - & - \\ - & I(\theta_2) & - \\ - & - & I(\theta_3) \end{pmatrix}$$

- $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2}$
- $\log f_X(x) = \log\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right] - \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}$, • $\frac{\partial}{\partial m}\log f_X(x) = \frac{x-m}{\sigma^2}$
- $\frac{\partial^2}{\partial m^2}\log f_X(x) = -\frac{1}{\sigma^2}$

$I(m) = -E\left(-\frac{1}{\sigma^2}\right) = \boxed{\frac{1}{\sigma^2}}$

- $\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\log f_X(x) = \frac{\partial}{\partial\sigma^2}\left(-\frac{1}{2}\log\sigma^2 - \log\sqrt{2\pi} - \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$ $\longrightarrow$ le paramètre est σ^2 c'est pas σ

$= -\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{(x-m)^2}{2\sigma^4}$

$\cdot \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \log f_X(x) = \frac{1}{2\sigma^4} - \frac{\cancel{4}\sigma^2 (x-m)^2}{\cancel{4}\sigma^8} = \frac{1}{2\sigma^4} - \frac{(x-m)^2}{\sigma^6}$

$I(\sigma^2) = -E\left[\frac{1}{2\sigma^4} - \frac{(X-m)^2}{\sigma^6}\right] = \frac{-1}{2\sigma^4} + E\left[\frac{(X-m)^2}{\sigma^6}\right]$

$= \frac{-1}{2\sigma^4} + \frac{1}{\sigma^4} E\left[\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)^2\right] = \frac{-1}{2\sigma^4} + \frac{1}{\sigma^4}$ car $\begin{cases} \frac{X-m}{\sigma} \sim N(0,1) \\ \Rightarrow \left(\frac{X-m}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2_{(1)} \\ \text{et } E(Y) = n \\ \text{si } Y \sim \chi^2_{(n)} \end{cases}$

$\boxed{= \frac{1}{2\sigma^4}}$

$\cdot \frac{\partial}{\partial m} \log f_X(x) = \frac{x-m}{\sigma^2}$

$\cdot \frac{\partial^2}{\partial m \partial \sigma^2} \log f_X(x) = -\frac{x-m}{\sigma^4}$

$\cdot -E\left[\frac{\partial^2}{\partial m \partial \sigma^2} \log f_X(x)\right] = -E\left(-\frac{X-m}{\sigma^4}\right) = E\left(\frac{X-m}{\sigma^4}\right) = \frac{1}{\sigma^3} E\left[\frac{X-m}{\sigma}\right]$

$\frac{X-m}{\sigma} \sim N(0,1) \Rightarrow E\left(\frac{X-m}{\sigma}\right) = 0$

$\Rightarrow \boxed{-E\left[\frac{\partial^2}{\partial m \partial \sigma^2} \log f_X(x)\right] = 0}$

d'où

$I(m, \sigma^2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sigma^4} \end{pmatrix}$ il faut toujours la quantité de fisher ≥ 0.

(V) ① montrer que la famille de loi $B(n, p)$ est complète.

② Montrer que $\sum X_i$ est complète où $X_i \sim B(p)$

③ Montrer que $T = \sum x_i$ est une stat exh complète où $x_i \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

solution:

① $X \sim B(n, p)$, $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, \dots, n\}$, $P(X=x) = C_n^x p^x q^{n-x}$

la famille de loi $B(n,p)$ est complète si:

$\forall h ; \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto h(x)$ tq: $E(h(X)) = 0$

$\Rightarrow P(h(X)=0) = 1 \equiv h = 0$

$\Rightarrow B(n,p)$ complète

on a: $E(h(X)) = 0 \Leftrightarrow \sum_{x=0}^{n} h(x) \, p(X=x) = 0$

$\Leftrightarrow \sum_{x=0}^{n} h(x) \, C_n^x p^x q^{n-x} = 0$

$\Leftrightarrow q^n \sum_{x=0}^{n} h(x) \, C_n^x \left(\frac{p}{q}\right)^x = 0$

on a: $\begin{cases} \left(\frac{p}{q}\right)^x \neq 0 \ \forall \, 0 < p < 1 \text{ et } 0 \leq x \leq n \\ C_n^x \neq 0 \\ \Rightarrow h(x) = 0 \end{cases}$

d'où la famille de loi $B(n,p)$ est complète.

② $\sum_{i=1}^{n} X_i = T$ est une statistique.

pour montrer que $T = \sum X_i$ est complète, il suffit de montrer que la famille de loi de la stat T est une famille de loi complète.

On a: $T = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n, p)$ car $X_i \sim B(p)$.

et comme la loi $B(n,p)$ est complète d'après ① alors la stat T est une stat complète pour p.

③ On montre que la stat $T = \sum X_i$ est une stat complète

On a : $X_i \sim \mathcal{E}(\lambda) \Rightarrow \sum X_i \sim \gamma(n, \lambda)$

$\Rightarrow$ T est une stat complète ssi la loi $\gamma(n, \lambda)$ est une famille de loi complète.

$\gamma(n, \lambda)$, $\mathcal{X} = \mathbb{R}^+$, $f_T(t) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-\lambda t}$

Alors on montre que,

$\forall h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad t \longmapsto h(t)$ tq : $E(h(T)) = 0 \Rightarrow P(h(T) = 0) = 1$

$= h = 0$, $\gamma(n, \lambda)$ est complète.
$\Rightarrow$ T est une stat complète.

On a : $E(h(T)) = \int_0^\infty h(t) f_T(t)\, dt = 0$

$= \int_0^\infty h(t) \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-\lambda t} dt = 0$

On a : $\begin{cases} \cdot\, e^{-\lambda t} \neq 0 \;\; \forall \lambda > 0 \text{ et } \forall t \geq 0 \\ \cdot\, \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \neq 0 \;\; \forall n \geq 1 \\ \cdot\, t^{n-1} \neq 0 \;\; \forall n \geq 1 \\ \Rightarrow \underline{\underline{h(t)}} = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \gamma(n, \lambda)$ est une famille de loi complète

$\Rightarrow$ la stat $T = \sum X_i \sim \gamma(n, \lambda)$ est une statistique complète pour λ.