Université Mohamed khider Biskra

Faculté des sciences exactes et sciences de la nature et de vie
Département de mathématiques
Module: Martingale à temps discret.
Année: 2020/2021

TD. Temps d'arrêt

Exercice 1: Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité sur lequel on définit deux filtrations $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{F}_n$. Soit également T un $\mathbb{F}-$temps d'arrêt et S un $\mathbb{G}-$temps d'arrêt.
1) Est-ce que S un $\mathbb{F}-$temps d'arrêt? Justifier.
2) Est-ce que T un $\mathbb{G}-$temps d'arrêt? Justifier.
Exercice 2: Soient T_1, T_2 deux temps d'arrêt adaptés à une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que:
1) $T_1 + T_2$, $T_1 \wedge T_2$ et $T_1 \vee T_2$ sont des temps d'arrêt.
2) Si $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathbb{F}-$temps d'arrêt, alors $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} T_n$ est $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} T_n$ sont des temps d'arrêt.
Exercice 3:
Soient $X = (X_n)_{n\geq 1}$ un processus à temps discret, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ sa filtration naturelle et t un nombre réel constant. On pose,

$$N(t) = \max\{n \in \mathbb{N}, X_1 + ... + X_n \leq t\}.$$

1) Montrer que la variable aléatoire $N(t) + 1$ est un $\mathbb{F}-$temps d'arrêt.
2) La variable aléatoire $N(t)$ est-elle un $\mathbb{F}-$temps d'arrêt? Justifier
Exercice 4: Soient $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, P\right)$ un espace de probabilité filtré et T et S sont deux $\mathbb{F}-$temps d'arrêt.
a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F} : \forall n \in \mathbb{N}, A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n\}$ est une tribu.
b) Montrer que $\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F} : \forall n \in \mathbb{N}, A \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n\}$
c) Montrer que T est $\mathcal{F}_T$ -mesurable.
d) Si $A \in \mathcal{F}_S$, montrer que $A \cap \{S \leq T\} \in \mathcal{F}_T$.
e) Si $S \leq T$, montrer que $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.
Exercice 5: Temps de premier succès ou du premier échec.
Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite aléatoire i.i.d de loi de Bernoulli:

$$P(X_1 = 0) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé, la variable aléatoire $N_n = \inf\{k \in \mathbb{N} : X_{n+k} = 0\}$ est un temps d'arrêt adapté à la filtration $\{\sigma(\{X_0, ..., X_{n+m}\})\}_{m\in\mathbb{N}}$.
2) Calculer la probabilité que N_n soit égale à 0 infiniment souvent (ie: $P(\lim_n \sup (N_n = 0))$).
3) Même question pour la valeur 1 (on considérera la suite d'événements $(N_{2n} = 1)_{n\in\mathbb{N}}$).
Exercice 6 :(Identité de Wald)
Soient $(Y_n)_{n\geq 1}$une suite de v.a.r. indépendantes, intégrables, de même loi et T un temps d'arrêt intégrable. On pose $X_0 = 0$ et $X_n = Y_1 + Y_2 + ... + Y_n$ pour $n \geq 1$. Montrer que $E(X_T) = E(Y_1)E(T)$.