**Université Blida1** **7 Juin 2022**
**Faculté des Sciences**
**Département de Maths**
**3ème année** **Examen de Statistique**
**(Durée 1h30)**

**Exercice 1:(7 points)**
On considère quatre variables aléatoires réelles indépendantes $X_1, X_2, X_3, X_4$ suivant la même loi $N(m, \sigma^2)$.

Soit $S = \sum_{k=1}^{4}(X_k - m)^2$

1)Determiner la densité de probabilité et la fonction de répartition de $S$.
2) Calculer $E(S)$ et $Var(S)$
3) Determiner $P(S \prec 4\sigma^2)$
4) Determiner le nombre a pour que $P(S \succ a) = 0.95$

**Exercice 2:(9.5 points)**
Soit $X_i \rightsquigarrow N(m, \sigma_i^2)$ $i = 1, 2, ...., n$ n va iid
1) Donner l'estimation $T$ de $m$ obtenue par la méthode du maximum de vraisemblance. Quelle est la loi de $T$?
Est-il sans biais?
2) Application numérique:On suppose n=10
$\sigma_1 = \sigma_2 = .... = \sigma_8 = 0.04$ et $\sigma_9 = \sigma_{10} = 0.02$
On trouve $X_1 = 3.252; X_2 = 3.224; X_3 = 3.286; X_4 = 3.262$
$X_5 = 3.217; X_6 = 3.243; X_7 = 3.191; X_8 = 3.205; X_9 = 3.232$
et $X_{10} = 3.215$
Quelle est la valeur prise par T?
Donner un intervalle de confiance au seuil $\alpha = 5\%$

**Exercice 3:(3.5 points)**
Montrer que si X=$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ est un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^2$
de vecteur espérance m=$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$ et de matrice de covariance $\sum$ alors
$X_1$ et $X_2$ indépendantes $\iff cov(X_1, X_2) = 0$

**Bonus:(2 points)** Soit $X_i \rightsquigarrow P(\lambda)$ n va indépendantes
Posons $S = \sum X_i$.Calculer $M_S(t)$ et en déduire $E(S)$

Exercice 1 : $\forall i \in \{1,2,3,4\}$ $X_i \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et les $X_i$ sont iid

$$S = \sum_{k=1}^{4} (X_k - m)^2$$

1_ On a $S = \sum_{k=1}^{4} \frac{\sigma^2}{\sigma^2} (X_k - m)^2 = \sigma^2 \sum_{k=1}^{4} \left( \frac{X_k - m}{\sigma} \right)^2$

on pose $U = \sum_{k=1}^{4} \left( \frac{X_k - m}{\sigma} \right)^2$ comme $\forall k \in \{1,2,3,4\}$ $\frac{X_k - m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$

alors $U \sim \chi^2_4 = \Gamma\left(\frac{4}{2}, \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(2, \frac{1}{2}\right)$

ainsi $S = \sigma^2 U$ et $f_U(x) = \begin{cases} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\Gamma(2)} x^{2-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

ie $f_U(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} x e^{-\frac{1}{2}x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

- la densité de $S$ :

on a $F_S(t) = P(S \leq t) = P(\sigma^2 U \leq t) = P\left(U \leq \frac{t}{\sigma^2}\right) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ F_U\left(\frac{t}{\sigma^2}\right) & t>0 \end{cases}$

donc $f_S(t) = F_S'(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \frac{1}{\sigma^2} f_U\left(\frac{t}{\sigma^2}\right) & t>0 \end{cases}$

$$f_S(x) = \begin{cases} \frac{1}{4\sigma^2} \cdot \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}} & x \geq 0 \\ 0 & x<0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{4\sigma^4} x e^{-\frac{x}{2\sigma^2}} & x \geq 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

- fonction de répartition de $S$

$$F_S(t) = \int_{-\infty}^{t} f_S(t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ \int_0^t \frac{1}{4\sigma^4} x e^{-\frac{x}{2\sigma^2}} dx & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

pour $t \geq 0$, on a : $\frac{1}{4\sigma^4}\int_0^t x e^{-\frac{x}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{4\sigma^4}\left[x\left(-2\sigma^2 e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}\right) - (1)\left(4\sigma^4 e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}\right)\right]_0^t$

$$= \frac{1}{4\sigma^4}\left(\left(-2\sigma^2 x - 4\sigma^4\right) e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}\right)_0^t = \left(\left(-\frac{x}{2\sigma^2} - 1\right) e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}\right)_0^t = \left(\frac{t}{2\sigma^2} - 1\right) e^{-\frac{t}{2\sigma^2}} + 1$$

2- $E(S) = E(\sigma^2 U) = \sigma^2 E(U)$ et $U \sim \Gamma\left(2, \frac{1}{2}\right)$

$$= \sigma^2 \cdot \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4\sigma^2$$

$$Var(S) = Var(\sigma^2 U) = \sigma^4 . Var(U) = \sigma^4 \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 8\sigma^4$$

3- $P(S \leq 4\sigma^2) = F_u(4\sigma^2) = -\left(\frac{4\sigma^2}{2\sigma^2} + 1\right) e^{-\frac{4\sigma^3}{2\sigma^2}} + 1 = -3e^{-2} + 1$

4- déterminons a tel que $P(S > a) = 0{,}95$

or a $P(S > a) = 0{,}95 \iff 1 - P(S \leq a) = 0{,}95 \iff P(S \leq a) = 0{,}05$

$$F_S(a) = 0{,}05 \iff a = F_S^{-1}(0{,}05)$$

**Exercice 3: (10 points)**

On considère des v.a gaussiennes $X_1, X_2, ..., X_n$ de même espérance $m$ inconnue dont on connait les variances $\delta_1^2, \delta_2^2, ...., \delta_n^2$.

A) Donner l'estimation $Y$ de $m$ obtenue par la méthode du maximum de vraisemblance. Quelle est la loi de $Y$ ?Est-il sans biais?

B)Application numérique: On suppose $n = 10$

$\delta_1 = \delta_2 = .... = \delta_8 = 0.04$ et $\delta_9 = \delta_{10} = 0.02$.

On trouve $X_1 = 3.252; X_2 = 3.224; X_3 = 3.286; X_4 = 3.262; X_5 = 3.217$ $X_6 = 3.243; X_7 = 3.191; X_8 = 3.205; X_9 = 3.232; X_{10} = 3.215$.

Quelle est la valeur prise par $Y$? Donner pour $m$ un intervalle de confiance au seuil $\alpha = 0.05$

Exo 2 : 1) $f_{X_i}(x) = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma_i^2}(x-m)^2 \right\}$.

donc $\mathcal{L}(x_1^n, m) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_1^n \left(\frac{x_i - m}{\sigma_i}\right)^2 \right\}$. 0,5

$\max_m \mathcal{L}(x_1^n, m) \Leftrightarrow \max_m \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_1^n \left(\frac{x_i - m}{\sigma_i}\right)^2 \right\}$

$\Leftrightarrow \min_m \sum_1^n \left(\frac{x_i - m}{\sigma_i}\right)^2$ 0,5

2/4,

On dérive, on obtient $-2\sum \left(\frac{x_i - m}{\sigma_i^2}\right) = 0$

càd $\frac{x_1 - m}{\sigma_1^2} + \frac{x_2 - m}{\sigma_2^2} + \dots + \frac{x_n - m}{\sigma_n^2} = 0$ 0,5

$$\frac{x_1}{\sigma_1^2}+\frac{x_2}{\sigma_2^2}+\dots+\frac{x_n}{\sigma_n^2}=\hat{m}\left[\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}+\dots+\frac{1}{\sigma_n^2}\right].$$

Donc $Y=\hat{m}=a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n$ avec $a_i=\dfrac{1/\sigma_i^2}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}}$ 1

Rmq : $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ 0,5

$Y$ est une va Gaussienne car combinaison linéaire de va gaussiennes 1

$E(Y)=E\left(\sum_1^n a_iX_i\right)=\sum_{i=1}^{n} a_iE(X_i)=m\sum_1^n a_i=m$ 0,5

$Y$ est donc un estimateur sans biais de $m$. 0,5

$$\mathrm{Var}\,Y=\sum_{i=1}^{n} a_i^2\,\mathrm{Var}\,X_i=\sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2=\frac{1}{\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}+\dots+\frac{1}{\sigma_n^2}}.$$ 1

B) Si $n=10$.

$$\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}+\dots+\frac{1}{\sigma_{10}^2}=\frac{8}{(0{,}04)^2}+\frac{2}{(0{,}02)^2}=\frac{8}{16\times10^{-4}}+\frac{2}{4\times10^{-4}}=10^4$$ 0,5

3/4

donc $a_1 = \dots = a_8 = \frac{1/(0,04)^2}{10^4} = \frac{1}{16}$ 0,5 et $a_9 = a_{10} = 1/4$ 0,5

$$\Rightarrow Y = \frac{1}{16}(X_1 + \dots + X_8) + \frac{1}{4}(X_9 + X_{10}) = 3,229$$ 0,5

càd que $Y \leadsto N(m, 10^{-4} = \sigma^2) \Rightarrow T = \frac{Y-m}{10^{-2}} \leadsto N(0,1)$ 0,5

et $P(|T| > t_\alpha) = 0,05 \Rightarrow t = 1,96$ (Table) 0,5

On a donc
$$-1,96 \leq 100(Y-m) \leq 1,96$$
$$Y - \frac{1,96}{100} \leq m \leq Y + \frac{1,96}{100}$$
$$\boxed{3,209 \leq m \leq 3,249}$$ 1

# Exercice 3

Théorème

Soit $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ un vecteur Gaussien dans $\mathbb{R}^2$, de vecteur espérance $m = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$ et de matrice de covariance $\Sigma$.

Alors $X_1$ et $X_2$ Indépendants $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0$

Preuve :

($\Rightarrow$) $X_1$ et $X_2$ Indépendants $E(X_1 X_2) = E(X_1)E(X_2) \Rightarrow \mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0$

($\Leftarrow$) Réciproque : Supposons $\mathrm{cov}(X_1, X_2) = 0$

Alors la matrice $\Sigma$ est de la forme $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$

avec $\sigma_1^2 = \mathrm{Var}\, X_1$ et $\sigma_2^2 = \mathrm{Var}\, X_2$.

On écrit la ft caractéristique de $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ :

$$\Phi_X(u) = e^{iu'm} \cdot e^{-\frac{1}{2} u' \Sigma u} \qquad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_X(u) = e^{iu_1 m_1 + iu_2 m_2} \cdot e^{-\frac{1}{2}(u_1^2 \sigma_1^2 + u_2^2 \sigma_2^2)}$$

$$\Phi_X(u) = e^{iu_1 m_1} e^{-\frac{1}{2} u_1^2 \sigma_1^2} \cdot e^{iu_2 m_2} \cdot e^{-\frac{1}{2} u_2^2 \sigma_2^2} = \Phi_{X_1}(u_1)\, \Phi_{X_2}(u_2).$$

donc $X_1$ et $X_2$ Indépendants (D'après lemme 2).