Université de Jijel
Département de Mathématiques

DISTRIBUTIONS

MASTER ANALYSE - MASTER PROBABILITÉS ET STATISTIQUE

(2016-2017)

CHAPITRE 1 - FONCTIONS INDÉFINIMENT DIFFÉRENTIABLES À SUPPORT COMPACT

Les distributions sont des objets qui généralisent les fonctions localement intégrables et les mesures de Radon. Elles permettent de construire un calcul différentiel qui prolonge le calcul différentiel classique et sont devenues un outil essentiel dans l'étude des équations aux dérivées partielles.

L'idée de base est de définir les distributions par leur action sur un espace de fonctions appelées fonctions test.

Avant d'aborder cette nouvelle théorie, nous commencerons par rappeler des définitions, propriétés et résultats associés à certains espaces fonctionnels qui y sont directement liés.

Fonctions de classe C^m

Dans toute la suite, Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

Définition 1.1. Nous noterons:

(i) $C(\Omega) \equiv C^0(\Omega)$ l'espace des fonctions continues dans Ω.

(ii) $C^m(\Omega)$ l'espace des fonctions dans $C^{m-1}(\Omega)$ dont les dérivées partielles appartiennent à $C^{m-1}(\Omega)$.

(iii)
$$C^\infty(\Omega) = \cap_{m\in\mathbb{N}} C^m(\Omega)$$
l'espace des fonctions indéfiniment différentiables dans Ω.

Convergence dans $C^m(\Omega)$

Définition 1.2. i) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la fonction f dans $C^m(\Omega)$ si, et seulement si,

Pour tout compact $K \subset \Omega$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}_0$ tel que $|\alpha| \leq m$, on a

$$D^\alpha f_n \longrightarrow D^\alpha f \text{ uniformément sur K.}$$

ii) De même, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $C^\infty(\Omega)$ si, et seulement si,

Pour tout compact $K \subset \Omega$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}_0$, on a

$$D^\alpha f_n \longrightarrow D^\alpha f \text{ uniformément sur K.}$$

Support d'une fonction

Définition 1.3. Soit $f \in C(\Omega)$. Le support de f est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^N$ défini par

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}}.$$

Propriétés immédiates.

- $f = 0$ si, et seulement si, $\operatorname{supp} f = \emptyset$
- $\operatorname{supp} f$ est fermé
- $\operatorname{supp}(fg) \subset (\operatorname{supp} f) \cap (\operatorname{supp} g)$
- $\operatorname{supp} f$ est le complément du plus grand ouvert où f est nulle.

FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES À SUPPORT COMPACT

Définition 1.4. Pour $m \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $C_0^m(\Omega)$ désigne l'ensemble des $f \in C^m(\Omega)$ dont le support $\operatorname{supp} f$ est compact.

Remarque 1.5. L'espace $C_0^\infty(\Omega)$ est généralement noté $\mathcal{D}(\Omega)$ et est appelé l'espace des fonctions test.

Les fonctions appartenant à $\mathcal{D}(\Omega)$ jouent plusieurs rôles distincts et également importants. Comme nous le verrons un peu plus loin, cette importance est plus particulièrement liée au fait que:

- L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ contient "suffisamment de fonctions" pour qu'il soit dense dans de nombreux espaces fonctionnels.
- C'est en utilisant les fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ et un procédé de dualité que l'on va étendre le calcul différentiel aux distributions, qui sont des objets plus généraux que les fonctions.

EXEMPLE DE FONCTIONS DANS $\mathcal{D}(\mathbb{R})$

Considérons la fonction

$$h(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Il est clair que supp $h = \mathbb{R}_-$ et que $h \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. D'autre part, nous pouvons montrer que

$$h^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}},$$

où P_n est une suite de polynômes. On déduit que

$$\lim_{x \to 0^-} h^{(n)}(x) = 0 \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

et donc $h \in C^\infty(\mathbb{R})$.

À partir de h et pour n'importe quels nombres réels $a < b$, nous pouvons construire une fonction $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ à support dans $[a, b]$ en posant

$$g(x) = h(a - x)h(x - b) \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

i.e.

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{b-a}{(b-x)(x-a)}} & \text{si } x \in]a, b[\\ 0 & \text{si } x \in]-\infty, a] \cup [b, +\infty[. \end{cases}$$

Il est clair que

$$g \in C^\infty(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \text{supp}\, g = [a, b].$$

EXEMPLE DE FONCTIONS DANS $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$

De la même manière, il est possible de construire des fonctions indéfiniment différentiables et à support compact dans $\mathbb{R}^N$ en considérant par exemple

$$G(x) = \prod_{i=1}^{N} h(a_i - x_i)h(x_i - b_i) \qquad \text{pour tout } x = (x_1, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^N.$$

On peut facilement vérifier que

$$G \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \quad \text{et} \quad \operatorname{supp} G = \prod_{i=1}^{N} [a_i, b_i].$$

AUTRE EXEMPLE IMPORTANT DE FONCTIONS DANS $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$

Nous pouvons obtenir une autre exemple de fonctions indéfiniment différentiables et à support compact dans $\mathbb{R}^N$ en posant

$$\rho(x) = h\left(|x|^2 - 1\right) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Il est clair que:

- la fonction $\rho \geq 0$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^N$ (comme composée de h et de $x \mapsto |x|^2 - 1$, fonctions toutes deux de classe C^∞)
- supp $\rho = \overline{B(0,1)} = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| \leq 1\}$

NORMALISATION

Considérons maintenant la fonction ζ définie par

$$\zeta(x) = \frac{\rho(x)}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \rho(z)\, dz} \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^N.$$

Nous pouvons facilement voir que

- $\zeta \geq 0$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^N$
- $\operatorname{supp} \zeta = \overline{B(0,1)}$
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \zeta(x)\, dx = 1.$

LOCALISATION ET CHANGEMENT D'ÉCHELLE

Posons pour tout $\varepsilon > 0$

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N}\zeta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^N.$$

Il est clair que

- $\rho_\varepsilon \geq 0$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^N$
- supp $\rho_\varepsilon = \overline{B(0,\varepsilon)}$
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x)\, dx = 1.$

$(\rho_\varepsilon)_\varepsilon$, satisfaisant les trois propriétés, est une suite régularisante.

Densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ dans $C_0(\mathbb{R}^N)$

Théorème 1.6. Soit $f \in C_0(\mathbb{R}^N)$. Alors

$$\rho_\varepsilon \star f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \to 0^+} \|\rho_\varepsilon \star f - f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = 0.$$

Démonstration. Une propriété classique du produit de convolution implique que si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ et si $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, alors $f \star g \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Par conséquent, on a

$$\rho_\varepsilon \star f \in C^\infty(\mathbb{R}^N).$$

De l'autre côté, supposons que $\operatorname{supp} f \subset B(0,R)$. Il vient alors que

$$\operatorname{supp}(\rho_\varepsilon \star f) \subset \overline{\operatorname{supp} \rho_\varepsilon + \operatorname{supp} f} \subset \overline{B(0,\varepsilon) + B(0,R)} \subset \overline{B(0,\varepsilon + R)}$$

et la première assertion est ainsi prouvée.

Pour montrer la seconde assertion, observons

$$\begin{aligned}\rho_\varepsilon \star f(x) - f(x) &= f \star \rho_\varepsilon(x) - f(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} f(x-y)\rho_\varepsilon(y)\,dy - f(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \left(f(x-y) - f(x)\right)\rho_\varepsilon(y)\,dy\end{aligned}$$

où nous avons utilisé la commutativité du produit de convolution et le fait que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(y)\,dy = 1$. Comme $\rho_\varepsilon \geq 0$ est à support dans $\overline{B(0,\varepsilon)}$, on obtient

$$\begin{aligned}\left|\rho_\varepsilon \star f(x) - f(x)\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left|f(x-y) - f(x)\right| \rho_\varepsilon(y)\,dy \\ &\leq \sup_{|y|\leq\varepsilon} \left|f(x-y) - f(x)\right| \int_{B(0,\varepsilon)} \rho_\varepsilon(y)\,dy \\ &= \sup_{|y|\leq\varepsilon} \left|f(x-y) - f(x)\right|.\end{aligned}$$

f étant continue à support compact est uniformément continue sur $\mathbb{R}^N$ et donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ |y|\leq\varepsilon}} |f(x-y)-f(x)| = 0.$$

Par conséquent

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\rho_\varepsilon \star f(x) - f(x)| = 0.$$

Ceci termine la preuve. $\square$

Densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$

Théorème 1.7. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ avec $1 \leq p < \infty$. Alors

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \|\rho_\varepsilon \star f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 0.$$

Démonstration. La densité de $C_0(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ implique qu'étant donné $\delta > 0$, il existe $\phi \in C_0(\Omega)$ tel que

$$\|f - \phi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{\delta}{2}.$$

Soit R tel que supp $\phi \subset B(0, R)$. Il vient alors que

$$\text{supp}\,(\rho_\varepsilon \star \phi) \subset \overline{B(0,R) + B(0,\varepsilon)} \subset \overline{B(0, R+\varepsilon)}.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder et le Théorème 1.6, nous obtenons

$$\begin{aligned}\|\phi - \rho_\varepsilon \star \phi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} &\leq \|\phi - \rho_\varepsilon \star \phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|1\|_{L^p(B(0,R+\varepsilon))} \\ &\longrightarrow 0 \qquad \text{quand } \varepsilon \to 0.\end{aligned}$$

Combinant ces résultats, nous déduisons que

$$\begin{aligned}&\|f - f \star \rho_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \|f - \phi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|\phi - \rho_\varepsilon \star \phi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|\rho_\varepsilon \star \phi - \rho_\varepsilon \star f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \left(1 + \|\rho_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}\right) \|f - \phi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|\phi - \rho_\varepsilon \star \phi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \delta + \|\phi - \rho_\varepsilon \star \phi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} .\end{aligned}$$

Prenant la limite supérieure de chaque membre de cette inégalité, il vient que

$$\limsup_{\varepsilon \to 0+} \|f - f \star \rho_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \delta$$

et comme δ est arbitraire, il s'ensuit que le premier membre de cette inégalité est nul. $\square$

Densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$

Théorème 1.8. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $p \in [1, +\infty[$ et $f \in L^p(\Omega)$. Alors pour tout $\delta > 0$, il existe $f_\delta \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que

$$\|f - f_\delta\|_{L^p(\Omega)} < \delta.$$

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin du résultat auxilliaire suivant:

Lemme 1.9. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $K \subset \Omega$ un compact. Il existe une fonction $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ vérifiant:

- $0 \leq \phi \leq 1, \quad \phi = 1$ sur un voisinage de K
- $\operatorname{supp} \phi$ est compact $\subset \Omega$

Démonstration du Théorème 1.8. On commence par prolonger f par 0 en dehors de Ω en définissant $F \in L^p(\mathbb{R}^N)$ comme suit

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \Omega, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'après le Théorème 1.7, il existe $G \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$\|F - G\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} < \frac{\delta}{2}.$$

En général, la fonction G ainsi obtenue n'est pas à support compact dans Ω. L'idée consiste à tronquer G en la multipliant par une fonction ayant des propriétés adéquates.

Pour tout $n \geq 1$, considérons alors

$$K_n = \left\{ x \in \Omega \mid \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) \geq \tfrac{1}{n} \text{ et } |x| \leq n \right\},$$

qui est un compact de $\mathbb{R}^N$. D'après le lemme 1.9, pour tout n, il existe $\phi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que

$$\mathrm{supp}\, \phi_n \subset \Omega, \quad \phi_{n|K_n} = 1, \quad 0 \leq \phi_n \leq 1.$$

Il est facile de vérifier que $\chi_{K_n} \leq \phi_n \leq \chi_\Omega$ et que

$$\lim_{n\to+\infty} \chi_{K_n}(x) = \chi_\Omega(x) \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^N.$$

Il en résulte que

$$\lim_{n\to+\infty} \phi_n(x) = \chi_\Omega(x) \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^N.$$

Pour $n \geq 1$, définissons $G_n = \phi_n G$. Comme $G \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et que

$$|G_n(x) - G(x)|^p \leq |G(x)|^p \qquad \text{pour tout } x \in \Omega,$$

on déduit de la convergence dominée que

$$\lim_{n \to +\infty} \|G_n - G\|_{L^p(\Omega)} = 0.$$

Il existe donc $n_0 > 1$ tel que

$$\|G_{n_0} - G\|_{L^p(\Omega)} < \frac{\delta}{2}.$$

Posons $f_\delta = G_{n_0}{}_{|\Omega}$. Par définition $G_{n_0} \in \mathcal{D}(\Omega)$, de sorte que $f_\delta \in \mathcal{D}(\Omega)$. De plus, nous avons

$$\begin{aligned}
\|f - f_\eta\|_{L^p(\Omega)} &= \|F - G_{n_0}\|_{L^p(\Omega)} \\
&\leq \|F - G\|_{L^p(\Omega)} + \|G - G_{n_0}\|_{L^p(\Omega)} \\
&\leq \|F - G\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|G - G_{n_0}\|_{L^p(\Omega)} \\
&< \delta,
\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

La convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$

Définition 1.10. Soient ϕ_n $(n \in \mathbb{N})$ et ϕ des fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$. Alors $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ϕ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ si

i) Il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que

$$\operatorname{supp}\phi \subset K \quad \text{et} \quad \operatorname{supp}\phi_n \subset K \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ii) Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$, la suite $(D^\alpha \phi_n)_n$ converge vers $D^\alpha \phi$, uniformément dans K

Exemples. i). La suite $\phi_n(x) = \frac{1}{n}\,\rho(x)$ appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ et converge vers zero dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

ii). La suite $\phi_n(x) = \rho\left(\frac{x}{n}\right)$ ne converge pas dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, lorsque n tend vers l'infini, car il ne peut exister de compact K en dehors duquel toutes les ϕ_n s'annulent.

Remarque 1.11. La convergence dans $\mathcal{D}$ diffère de la convergence dans C^∞. En effet, considérons la suite de fonction $\phi_n(x) = \phi\left(\frac{x}{n}\right)$. Commençons par étudier la convegence dans C^∞. Soit K un compact de $\mathbb{R}^N$ tel que $K \subset B(0,R)$. Il vient que si $x \in K$ alors $\frac{x}{n} \in B(0,R)$.

- Si $\alpha = 0$, alors

$$\begin{aligned} |\phi_n(x) - \phi(0)| &= \left|\phi\left(\frac{x}{n}\right) - \phi(0)\right| \\ &\longrightarrow 0 \quad \text{uniformément sur } K \text{ quand } n \to +\infty. \end{aligned}$$

- Si $|\alpha| \geq 1$, alors $D^\alpha\left(\phi(0)\right) = 0$ et

$$D^\alpha\left(\phi_n(x)\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^{|\alpha|} D^\alpha \phi\left(\frac{x}{n}\right).$$

Il vient alors que

$$\begin{aligned} \left|D^\alpha\left(\phi_n(x)\right) - D^\alpha\left(\phi_n(0)\right)\right| &= \left(\tfrac{1}{n}\right)^{|\alpha|}\left|D^\alpha \phi\left(\tfrac{x}{n}\right)\right| \\ &\leq \left(\tfrac{1}{n}\right)^{|\alpha|}\|D^\alpha \phi\|_{C(\overline{B}(0,R))} \end{aligned}$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty}\|D^\alpha \phi_n - D^\alpha\left(\phi_n(0)\right)\|_{C(K)} = 0.$$

Des résultats ultérieurs, nous déduisons que la suite $(\phi_n)_n$ converge vers $\phi(0)$ dans $C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Cependant $\phi(0) \notin \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Ceci prouve notre assertion initiale.

CHAPITRE 2 - DISTRIBUTIONS

Définition 2.1. Une distribution T sur Ω est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$ à valeurs complexes, continue, i.e.

> *Pour toute suite de fonctions-test* $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui converge vers* ϕ *dans* $\mathcal{D}(\Omega)$*, la suite numérique* $(\langle T, \phi_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $\langle T, \phi\rangle$ *dans* $\mathbb{C}$*.*

L'espace de toutes les distributions définies sur Ω est noté $\mathcal{D}'(\Omega)$. Cet espace est l'espace dual de $\mathcal{D}(\Omega)$.

La définition précédente fait intervenir la notion de *continuité sequentielle*. En général, cette notion est plus faible que celle de continuité (la continuité implique la continuité sequentielle, mais l'inverse n'est pas toujours vrai). Cependant, il est possible de montrer que ces deux notions sont équivalentes dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Théorème 2.2 (Critère de continuité) Soit $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ linéaire. On a alors

$$T \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

$$\Updownarrow$$

$$(CC) \quad \left\{ \begin{array}{l} \textbf{Pour tout compact } K \subset \Omega, \textbf{ il existe } C > 0 \textbf{ et } m \in \mathbb{N}_0 \textbf{ tel que} \\ |\langle T, \phi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha \phi\|_{C(K)} \qquad \forall\, \phi \in \mathcal{D}(K). \end{array} \right.$$

Démonstration. Première implication ($\Longleftarrow$)

Soit $\phi_n \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ avec $\operatorname{supp} \phi_n \subset K$ pour tout n. Si le critère de continuité (CC) est satisfait, alors

$$|\langle T, \phi_n \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha \phi_n\|_{C(K)} \longrightarrow 0 \qquad \text{quand } n \to +\infty.$$

et donc $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Deuxième implication ($\Longrightarrow$)

Nous allons raisonner par l'absurde et supposer que pour $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que pour tout $m \in \mathbb{N}_0$

$$|\langle T, \phi_m \rangle| > m \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha \phi_m\|_{C(K)} \tag{1}$$

pour un certain $\phi_m \in \mathcal{D}(K)$. Soit

$$\psi_m = \frac{\phi_m}{m \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha \phi_m\|_{C(K)}}.$$

Il est clair que $\psi_m \in \mathcal{D}(K)$ et que pour tout $\beta \in \mathbb{N}_0$ et tout m tel que $|\beta| \leq m$, on a

$$\left\|D^\beta \psi_m\right\|_{C(K)} \leq \sum_{|\gamma|\leq m} \|D^\gamma \psi_m\|_{C(K)} = \frac{1}{m}$$

ce qui montre que $(\psi_m)_m$ converge vers zéro dans $\mathcal{D}(\Omega)$. De l'autre côté, en prenant en compte (1), nous obtenons

$$|\langle T, \psi_m\rangle| > 1$$

et donc $(\langle T, \psi_m\rangle)_m$ ne tend pas vers zéro. Ceci est contradiction avec le fait que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. $\square$

EXEMPLE DE DISTRIBUTION: DISTRIBUTION RÉGULIÈRE

Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ (i.e. f est absolument intégrable sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$). Soit T_f la forme définie par

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)\,dx \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Montrons que $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Il est clair que T_f est linéaire. Montrons la continuité de T_f. Pour $\phi \in \mathcal{D}(K)$, on a

$$\begin{aligned} |\langle T_f, \phi \rangle| &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,|\phi(x)|\,dx = \int_K |f(x)|\,|\phi(x)|\,dx \\ &\leq \|f\|_{L^1(K)}\,\|\phi\|_{C([K])}, \end{aligned} \tag{2}$$

ce qui implique que le critère de continuité (CC) est vérifié avec $C = \|f\|_{L^1(K)}$ et $m = 0$.

Définition 2.3. Les distributions définies par des fonctions localement intégrables sont appelées distributions régulières.

EXEMPLE DE DISTRIBUTION: DISTRIBUTION DELTA DIRAC

Considérons le delta Dirac relatif au point x_0, noté δ_{x_0} et défini par

$$\langle \delta_{x_0}, \phi \rangle = \phi(x_0) \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

δ_{x_0} est une distribution. En effet, elle est linéaire

$$\langle \delta_{x_0}, \alpha\phi + \beta\psi \rangle = \alpha\phi(x_0) + \beta\psi(x_0) = \alpha \langle \delta_{x_0}, \phi \rangle + \beta \langle \delta_{x_0}, \psi \rangle$$

pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et tout ϕ, $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$. De plus, pour $\phi \in \mathcal{D}(K)$, on a

$$|\langle \delta_{x_0}, \phi \rangle| = |\phi(x_0)| \leq \|\phi\|_{C(K)}, \tag{3}$$

ce qui implique que le critère de continuité (CC) est vérifié avec $C = 1$ et $m = 0$.

Remarque 2.4. La distribution delta Dirac n'est pas régulière. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tel que $\delta_{x_0} = T_f$.

Soit alors $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ avec supp $\rho \subset \overline{B(0,1)}$, $\rho(0) = 1$ et considérons $\rho_n(x) = \rho(n(x - x_0))$. On alors que supp $\rho_n \subset \overline{B\left(0, \frac{1}{n}\right)}$, $\rho_n(x_0) = 1$ et

$$
\begin{aligned}
1 &= |\langle \delta_{x_0}, \rho_n \rangle| \\
&\leq \int_{B\left(0, \frac{1}{n}\right)} |f(x)|\, |\rho(n(x - x_0))|\, dx \\
&\leq \|\rho\|_{L^\infty} \int_{B\left(0, \frac{1}{n}\right)} |f(x)|\, dx \longrightarrow 0 \qquad \text{quand } n \to +\infty
\end{aligned}
$$

ce qui nous amène à une contradiction.

EXEMPLE DE DISTRIBUTIONS: VALEUR PRINCIPALE DE $\frac{1}{x}$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas localement intégrable sur $\mathbb{R}$. Nous définissons la distribution "valeur principale" de $\frac{1}{x}$ en posant

$$\left\langle VP\left(\frac{1}{x}\right), \phi \right\rangle = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_{|x|>\epsilon} \frac{\phi(x)}{x}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{\phi(x)-\phi(-x)}{x}\, dx \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Il est facile de voir que $VP\left(\frac{1}{x}\right)$ est linéaire.

Pour voir la continuité, observons que pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$, il existe $a > 0$ tel que $K \subset [-a, a]$. Il vient que pour tout $\phi \in \mathcal{D}(K)$, on a

$$\left\langle VP\left(\frac{1}{x}\right), \phi \right\rangle = \int_0^{a} \frac{\phi(x)-\phi(-x)}{x}\, dx.$$

Nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que $a > 1$.

Il vient alors que

$$\left\langle VP\left(\frac{1}{x}\right), \phi\right\rangle = \int_0^1 \frac{\phi(x)-\phi(-x)}{x}\, dx + \int_1^a \frac{\phi(x)-\phi(-x)}{x}\, dx$$

En utilisant le développement de Taylor, on peut écrire que

$$\left|\int_0^1 \frac{\phi(x)-\phi(-x)}{x}\, dx\right| \leq 2 \sup_{|x|\leq 1} \left|\phi'(x)\right|.$$

De plus,

$$\left|\int_1^a \frac{\phi(x)-\phi(-x)}{x}\, dx\right| \leq 2\ln a \sup_{|x|\leq a} |\phi(x)|.$$

Par conséquent

$$\left|\left\langle VP\left(\frac{1}{x}\right), \phi\right\rangle\right| \leq 2\left(1+\ln a\right) \max\left(|\phi(x)|, |\phi'(x)|\right).$$

et la conclusion vient du critère de continuité.

ORDRE D'UNE DISTRIBUTION

Définition 2.5. Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est dite d'ordre fini, si dans l'estimation (CC), l'entier m peut-être choisi uniformément pour tous les compacts K.

Le plus petit $m \in \mathbb{N}_0$ pour lequel (CC) est satisfaite pour tous les compacts K est appelé ordre de la distribution. L'espace des distributions d'ordre inférieur ou égal à m est noté $\mathcal{D}'^m(\Omega)$. On note aussi $\mathcal{D}'^F(\Omega) = \cup_{m\in\mathbb{N}_0}\mathcal{D}'^m(\Omega)$, l'espace des distributions d'ordre fini.

Proposition 2.6. $\mathcal{D}'^m(\Omega)$ est l'espace dual de $C_0^m(\Omega)$.

Remarque 2.7. De la proposition 2.6, nous déduisons en particulier que les distributions d'ordre 0 (comme les distributions régulières ou la delta Dirac) définissent des formes linéaires et continues sur $C_0(\Omega)$ et peuvent être identifées à des mesures de Radon sur Ω.

Exemple de distribution d'ordre fini. i) En prenant en compte (2), nous déduisons qu'une distribution régulière est d'ordre 0.

ii) De même, en prenant en compte (3), il vient que la delta Dirac est aussi une distribution d'ordre 0.

Exemple de distribution d'ordre non fini. Il existe des distribution dont l'ordre n'est pas fini. Considérons T définie par

$$\langle T, \phi \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \phi^{(n)}(n) \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Commençons par montrer que T est une distribution. Remarquons en premier que si ϕ est à support compact K, il existe un entier naturel $m_K \in \mathbb{N}$ tel que

$$\phi(x) = 0 \qquad \text{pour tout } x \text{ tel que } |x| > m_K.$$

Il vient alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\phi^{(n)}(x) = 0 \qquad \text{pour tout } x \text{ tel que } |x| > m_K,$$

et donc

$$\phi^{(n)}(n) = 0 \qquad \text{pour tout } n \geq m_K + 1.$$

Par conséquent,

$$\langle T, \phi \rangle = \sum_{n=0}^{m_K} \phi^{(n)}(n) < +\infty.$$

Il est facile de vérifier que T est linéaire. De plus, vu que

$$|\langle T, \phi \rangle| \leq \sum_{n=0}^{m_K} \left| \phi^{(n)}(n) \right| \leq \sum_{n=0}^{m_K} \left\| \phi^{(n)} \right\|_{C(K)} \tag{4}$$

il vient de (CC) que T est continue et donc $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. De plus, vu qu'il n'existe aucun m tel que (4) soit satisfaite indépendemment du compact K, nous déduisons que T n'est pas une distribution d'ordre fini.

Chapitre 3 - Convergence des distributions

On peut introduire différentes notions de convergence pour les suites de fonctions: la convergence simple, la convergence uniforme, la convergence presque partout, la convergence dans L^1 ou dans L^2, etc. Il s'avère que, souvent, aucune de ces notions n'est satisfaisante.

Comme nous le verrons, la notion au sens des distributions permet de prendre en compte de manière satisfaisante la convergence de certaines suites de fonctions. C'est cette notion qui permettra de définir la convergence des distributions de probabilité et, entre autre, de passer des probabilités discrètes aux probabilités continues et réciproquement. Cette notion est aussi fondamentale dans l'analyse mathématique et numérique des équations aux dérivées partielles.

Commençons par introduire la notion de convergence au sens des distributions.

Définition 3.1. Une suite de distributions $(T_n)_n$ converge vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ si pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \langle T_n, \phi \rangle = \langle T, \phi \rangle .$$

Remarque 3.2. Cette convergence est souvent appelée *convergence faible*. Elle correspond en fait à la convergence faible-$*$ pour la paire duale $(\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega))$.

Exemple. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de distributions sur $\mathbb{R}$ définies par

$$\langle T_n, \phi\rangle = \int_{|x|>\frac{1}{n}} \frac{\phi(x)}{x}\, dx \qquad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

• Il est clair que $T_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, vu que $T_n = T_{f_n}$ où

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } |x| > \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } |x| \le \frac{1}{n} \end{cases}$$

est une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$.

• La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. En effet, soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ avec supp $\phi \subset [-R, R]$. Alors

$$\begin{aligned} \langle T_n, \phi\rangle &= \int_{\frac{1}{n}<|x|<R} \frac{\phi(x)}{x}\, dx = \int_{-R}^{-\frac{1}{n}} \frac{\phi(x)}{x}\, dx + \int_{\frac{1}{n}}^{R} \frac{\phi(x)}{x}\, dx \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^{R} \frac{\phi(x)-\phi(-x)}{x}\, dx \longrightarrow_{n\to+\infty} \left\langle VP\left(\frac{1}{x}\right), \phi\right\rangle. \end{aligned}$$

CONVERGENCE DES FONCTIONS AU SENS DES DISTRIBUTIONS

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions localement intégrables et $(T_{f_n})_n$ la suite des distributions régulières associées.

Définition 3.3. On dit que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge vers T au sens des distributions, si la suite $(T_{f_n})_n$ converge T. Nous écrirons alors

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = T \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Il faut bien faire la différence entre la convergence simple et la convergence au sens des distributions . Le théorème suivant caratérise les suites de fonctions pour lesquelles les limites simples coïncident avec les limites $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Théorème 3.4. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions dans $L^1_{loc}(\Omega)$ convergeant vers f presque partout dans Ω, et supposons que $|f_n| \leq g$ avec $g \in L^1_{loc}(\Omega)$. Alors

$$f_n \longrightarrow f \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Démonstration. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et posons $K = \operatorname{supp} \phi$. Il vient que $f_n\phi$ converge vers $f\phi$ presque partout et $|f_n\phi| \leq |g|\,|\phi|$ pour presque tout x dans K. Utilisant le théorème de convergence dominée, nous déduisons que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \langle T_{f_n}, \phi\rangle &= \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n\phi\, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_K f_n\phi\, dx \\ &= \int_K f\phi\, dx = \int_\Omega f\phi\, dx = \langle T_f, \phi\rangle \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. $\square$

• Pour voir que la convergence presque partout d'une suite de fonctions localement intégrables n'implique pas la convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, considérons la suite

$$h_n(x) = \begin{cases} n^2 & \text{si } |x| < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } |x| \geq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Cette suite converge vers 0 presque partout. Mais si on choisit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\phi = 1$ dans $(-1, 1)$, il vient que

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} \langle h_n, \phi \rangle &= \lim_{n \to +\infty} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} h_n(x)\phi(x)\, dx \\ &= \lim_{n \to +\infty} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} n^2\, dx = \lim_{n \to +\infty} 2n = +\infty. \end{aligned}$$

• Réciproquement, la convergence au sens des distributions n'implique pas la convergence ponctuelle, comme on peut le voir en considérant la suite de fonctions $g_n(x) = sin(nx)$. En effet,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \langle g_n, \phi \rangle &= \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(x)\phi(x)\,dx \\ &= \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} cos(nx)\,\phi'(x)\,dx = 0 \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Il est clair cependant que cette suite ne converge pas ponctuellement.

• Observons finalement que même quand une suite de fonctions converge presque partout et converge au sens des distributions, les deux limites peuvent être différentes. Considérons en effet

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } |x| < \frac{1}{2n} \\ 0 & \text{si } |x| \geq \frac{1}{2n}. \end{cases}$$

D'un côté, il est clair que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, dx = 1$ et que f_n converge vers zéro presque partout dans $\mathbb{R}$. De l'autre côté, pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\langle f_n, \phi \rangle = \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} n\phi(x)\, dx = \phi(0) + \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} n\left(\phi(x) - \phi(0)\right) dx.$$

Vu que

$$|\phi(x) - \phi(0)| = \left| \int_0^x \phi'(s)\, ds \right| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |\phi'(x)|\, |x| ,$$

il vient que

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} n\,(\phi(x) - \phi(0))\, dx \right| &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |\phi'(x)| \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} n|x|\, dx \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}} |\phi'(x)|\, \frac{1}{4n} \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \to +\infty \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\lim_{n \to \infty} \langle f_n, \phi \rangle = \phi(0) = \langle \delta_0, \phi \rangle .$$

Autrement dit δ_0 est la limite de f_n au sens des distributions.

Les suites de fonctions convergeant au sens des distributions vers une mesure de Dirac jouent un rôle très important dans les applications. Un moyen de construire de telles fonctions est donné par le théorème suivant.

Théorème 3.5. Soit f une fonction positive, intégrable sur $\mathbb{R}^N$ telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx = 1$ et soit $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $\varepsilon > 0$. Alors

$$f_\varepsilon \longrightarrow \delta_0 \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N), \quad \text{quand } \varepsilon \text{ tend vers } 0.$$

Démonstration. Remarquons en premier lieu que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_\varepsilon(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\varepsilon^N} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(s)\,ds = 1.$$

Il vient alors que

$$\langle f_\varepsilon, \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} f_\varepsilon(x)\phi(x)\,dx = \phi(0) + \int_{\mathbb{R}^N} f_\varepsilon(x)\left(\phi(x) - \phi(0)\right)dx. \tag{5}$$

De plus, pour tout $r > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^N} f_\varepsilon(x)\,(\phi(x)-\phi(0))\,dx\right| &\le \int_{\mathbb{R}^N} f_\varepsilon(x)\,|\phi(x)-\phi(0)|\,dx\\
&\le \int_{|x|\le r} f_\varepsilon(x)\,|\phi(x)-\phi(0)|\,dx + \int_{|x|\ge r} f_\varepsilon(x)\,|\phi(x)-\phi(0)|\,dx\\
&\le \sup_{|x|\le r}|\phi(x)-\phi(0)|\int_{|x|\le r} f_\varepsilon(x)\,dx + \sup_{|x|\ge r}|\phi(x)-\phi(0)|\int_{|x|\ge r} f_\varepsilon(x)\,dx\\
&\le \sup_{|x|\le r}|\phi(x)-\phi(0)| + M\int_{|x|\ge r} f_\varepsilon(x)\,dx
\end{aligned}$$

où $M = \max_{x\in\mathbb{R}^N}|\phi(x)-\phi(0)|$.

Soit $\lambda > 0$ arbitraire. Vu que ϕ est continue et f intégrable sur $\mathbb{R}^N$, on peut choisir r suffisamment petit de sorte que

$$\sup_{|x|\leq r} |\phi(x) - \phi(0)| \leq \frac{\lambda}{2}.$$

On choisit ensuite ε suffisamment petit afin de garantir que

$$\int_{|x|\geq r} f_\varepsilon(x)\,dx = \int_{|y|\geq \frac{r}{\varepsilon}} f(y)\,dy \leq \frac{\lambda}{2}.$$

Par conséquent, en passant à la limite dans (5) nous obtenons

$$\langle f_\varepsilon, \phi \rangle = \phi(0) = \langle \delta_0, \phi \rangle\,.$$

Ceci termine la preuve. $\square$

Remarque 3.6. i) Il est à souligner que le résultat précédent ne se réfère pas à la "forme" (ou expression) de la fonction f. Ce type d'approximation de la distribution de Dirac est très utile dans les applications.

ii) Une suite de fonction satisfaisant les conditions du théorème précédent est souvent appellée *suite de fonctions de Dirac*.

iii) Dans l'énoncé du théorème 3.5, nous pouvons remplacer $\mathbb{R}^N$ par n'importe quel ouvert Ω contenant l'origine.

Exemples classiques.

1. Une conséquence directe du théorème précédent, est que la suite régularisante ρ_ε définie au Chapitre 1 converge vers δ_0 au sens des distributions.

2. Prenant en compte l'égalité $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$, nous définissons $f(x) = \frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}$ et utilisons le théorème 2.12 pour construire la suite de fonctions

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2\right)} = \frac{\varepsilon}{\pi\left(x^2 + \varepsilon^2\right)}$$

qui converge vers δ_0 au sens des distributions.

3. De l'égalité $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$, nous obtenons que

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-|x|^2}\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \prod_{i=1}^{N} e^{-x_i^2}\, dx_i = \prod_{i=1}^{N} \sqrt{\pi} = \pi^{\frac{N}{2}}.$$

Définissons $f(x) = \pi^{-\frac{N}{2}} e^{-|x|^2}$ et utilisons le théorème 2.12 pour construire la suite de fonctions

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\left(\sqrt{\varepsilon}\right)^N} f\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = (\pi\varepsilon)^{-\frac{N}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{\varepsilon}\right)$$

qui converge vers δ_0 au sens des distributions.

Théorème 3.6. Soit $(T_n)_n \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ une suite de distributions. Si pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la suite $(\langle T_n, \phi\rangle)_n$ converge dans $\mathbb{C}$, alors il existe $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tel que $(T_n)_n$ converge vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Démonstration. La preuve, basée sur le théorème de Banach-Steinhaus et utilisant des arguments dépassant le cadre de ce cours, sera omise.

Remarque 3.7. Le résultat précédent est assez fort et inhabituel dans le cadre classique. Pour s'en convaincre, considérer par exemple une suite de fonctions continues $(f_n)_n$ telles que, pour tout x, $f_n(x)$ converge. Il est clair que la limite n'est pas nécessairement continue.

Convergence des séries de fonctions au sens des distributions

Définition 3.8. Soit $(T_n)_n$ une suite de distributions dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Alors, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} T_n$ converge dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ si la suite des sommes partielles $S_k = \sum_{n=1}^{k} T_n$ est convergente dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Exemple. Montrons que pour tout $a \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n \delta_n$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

En effet, soit $S_k = \sum_{n=0}^{k} a^n \delta_n$ la somme partielle d'ordre k et soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ avec $\operatorname{supp} \phi \subset [-M, M]$ où $M \in \mathbb{N}$. On a

$$\lim_{k \to +\infty} \langle S_k, \phi \rangle = \lim_{k \to +\infty} \sum_{n=0}^{k} a^n \phi(n) = \sum_{n=0}^{M} a^n \phi(n) < +\infty.$$

Du théorème 3.6, nous déduisons que $(S_n)_n$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et, donc, que la série converge.

Chapitre 4 - Opérations sur les distributions

OPÉRATIONS ARITHMÉTIQUES

L'espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$ étant le dual de $\mathcal{D}(\Omega)$ est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$:

1. La somme deux distributions T_1 et T_2 est la distribution définie par

$$\langle T_1 + T_2, \phi \rangle = \langle T_1, \phi \rangle + \langle T_2, \phi \rangle \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

2. Le produit d'une distribution T par un scalaire λ est la distribution définie par

$$\langle \lambda T, \phi \rangle = \langle T, \lambda \phi \rangle \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Translation

Si f est localemment intégrable dans $\mathbb{R}^N$ et $a \in \mathbb{R}^N$, alors la translation par a de f est la fonction $\tau_a f$ définie par $\tau_a f(x) = f(x-a)$. La distribution régulière associée à $\tau_a f$ vérifie donc

$$\langle \tau_a T_f, \phi \rangle = \langle T_{\tau_a f}, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-a)\phi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\phi(y+a)\, dy = \langle T_f, \tau_{-a}\phi \rangle$$

pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

Cette propriété justifie la définition suivante.

Définition 4.1. La translation d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ par $a \in \mathbb{R}^N$, est la distribution $\tau_a T$ définie par

$$\langle \tau_a T, \phi \rangle = \langle T, \tau_{-a}\phi \rangle \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N).$$

Exemple. $\tau_a \delta_{x_0} = \delta_{x_0+a}$. En effet, pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\langle \tau_a \delta_{x_0}, \phi \rangle = \langle \delta_{x_0}, \tau_{-a}\phi \rangle = (\tau_{-a}\phi)(x_0) = \phi(x_0+a) = \langle \delta_{x_0+a}, \phi \rangle .$$

Multiplication des distributions

Il ne faut pas conclure de ce qui précéde que toutes les opérations sur les fonctions s'étendent de manière naturelle aux distributions. Ainsi:

En général, on ne sait pas définir le produit de deux distributions.

Par exemple, si f et g sont deux fonctions localement intégrables, on ne peut pas définir le produit des deux distributions régulières correspondantes T_f, T_g comme étant T_{fg}. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer l'exemple classique des fonctions

$$f(x) = g(x) = |x|^{-\frac{1}{2}}$$

dont le produit n'est même pas localement intégrable.

Il est cependant possible de définir le produit d'une distribution régulière par une fonction indéfiniment dérivable. En effet, si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ et si $\psi \in C^\infty(\Omega)$, alors le produit de ψ par une fonction-test est encore une fonction test et on a

$$\langle T_{\psi f}, \phi\rangle = \int_\Omega \psi(x)f(x)\phi(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\left(\psi(x)\phi(x)\right)dx = \langle T_f, \psi\phi\rangle$$

pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

S'inspriant de cette propritété, on peut définir le produit d'une distribution quelconque T par une fonction indéfiniment dérivable de la manière suivante.

Définition 4.2. (Théorème) Soient $\psi \in C^\infty(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Le produit ψT est la distribution définie par

$$\langle \psi T, \phi\rangle = \langle T, \psi\phi\rangle \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Exemple. Si $\psi \in C^\infty(\Omega)$ et $x_0 \in \Omega$, alors $\psi\delta_{x_0} = \psi(x_0)\delta_{x_0}$. En particulier $x^n\delta_0 = 0$, $\sin x\,\delta_0 = 0$, $\cos x\,\delta_0 = \delta_0$.

Dérivation des distributions

Si $f \in C^1(\mathbb{R})$ et $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors il est facile de vérifier par une intégration par parties que

$$\begin{aligned}
\langle \tfrac{df}{dx}, \phi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} f'(x)\phi(x)\,dx = \int_{-a}^{a} f'(x)\phi(x)\,dx \\
&= [f(x)\phi(x)]_{-a}^{a} - \int_{-a}^{a} f(x)\phi'(x)\,dx = -\int_{-a}^{a} f(x)\phi'(x)\,dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi'(x)\,dx = -\langle f, \tfrac{d\phi}{dx} \rangle ,
\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $\operatorname{supp}\phi \subset [-a, a]$ pour un certain $a > 0$. De la même manière, nous pouvons montrer que pour $f \in C^1(\mathbb{R}^N)$ et $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \phi \right\rangle = -\left\langle f, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle \qquad \forall i = 1, \cdots, N.$$

Question. La formule précédente a-t-elle un sens si on remplace la fonction régulière f par une distribution?

Avant de répondre à cette question, commençons par le résultat suivant.

Proposition 4.3. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Pour tout $1 \leq i \leq N$, la forme linéaire définie par

$$\phi \mapsto -\left\langle T, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle, \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

est une distribution. De plus, si T est d'ordre m_K sur tout compact K, alors cette distribution est d'ordre $m_K + 1$.

Démonstration. Pour $\phi \in \mathcal{D}(K)$, on a

$$\left| \left\langle T, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle \right| \leq C_K \sup_{|\alpha| \leq m_K} \left\| D^\alpha \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) \right\|_{C(K)} \leq C_K \sup_{|\beta| \leq m_K + 1} \left\| D^\beta \phi \right\|_{C(K)},$$

ce qui termine la preuve. $\square$

Au vu de ce qui précède, il semble naturel de considérer la definition suivante.

Définition 4.4. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. La dérivée partielle de T par rapport à la variable x_i, $1 \leq i \leq N$, est la distribution $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ définie par

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \phi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle, \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Soient $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ un multi-indice et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Par récurrence, on définit la dérivée partielle de T d'ordre α

$$\langle D^\alpha T, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \phi \rangle, \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Il est alors clair que la dérivation des distributions vérifie les propriétés suivantes:

- Toute distribution est indéfiniment différentiable dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.
- Si T est une distribution, alors

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_i}, \qquad 1 \leq i,j \leq N$$

car la même propriété est vraie dans $\mathcal{D}(\Omega)$ (lemme de Schwarz).

Théorème 4.5. La dérivation dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ est une opération

i) Linéaire, i.e.

$$D^\alpha (aT + bS) = aD^\alpha T + bD^\alpha S$$

pour tout $T, S \in \mathcal{D}'(\Omega)$, tout $a, b \in \mathbb{C}$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$.

ii) Continue, i.e. si $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, alors $(D^\alpha T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $D^\alpha T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$.

Démonstration. i) Soient $T, S \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $a, b \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{N}^N$ et $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Alors

$$\begin{aligned}
\langle D^\alpha (aT + bS), \phi\rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle aT + bS, D^\alpha \phi\rangle \\
&= (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha (a\phi)\rangle + (-1)^{|\alpha|} \langle S, D^\alpha (b\phi)\rangle \\
&= \langle D^\alpha T, a\phi\rangle + \langle D^\alpha S, b\phi\rangle \\
&= \langle aD^\alpha T + bD^\alpha S, \phi\rangle .
\end{aligned}$$

ii) Par définition de la convergence de $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} \langle T_n, \phi\rangle = \langle T, \phi\rangle \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Observons alors que si $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ alors $D^\alpha\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$. Par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} \langle T_n, D^\alpha\phi\rangle = \langle T, D^\alpha\phi\rangle \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

ou de manière équivalente

$$\lim_{n\to+\infty} \langle D^\alpha T_n, \phi\rangle = \langle D^\alpha T, \phi\rangle \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Ceci termine la preuve. $\square$

Exemples.

1. Soit H la fonction de *Heaviside* sur $\mathbb{R}$, définie par

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ x \geq 0, \\ 0 & \text{si } \ x < 0. \end{cases}$$

Cette fonction n'est pas dérivable au point $x = 0$. Étant cependant localement intégrable sur $\mathbb{R}$, elle définit une distribution régulière et est dérivable au sens des distributions. Pour déterminer cette dérivée, considérons une fonction-test $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ avec $\operatorname{supp} \phi \subset [-R, R]$. On a alors

$$\begin{aligned} \left\langle \tfrac{dH}{dx}, \phi \right\rangle &= -\left\langle H, \tfrac{d\phi}{dx} \right\rangle = -\int_{\mathbb{R}} H(x)\phi'(x)\,dx = -\int_0^R \phi'(x)\,dx \\ &= \phi(0) = \langle \delta_0, \phi \rangle \,. \end{aligned}$$

Par conséquent, δ_0 est la dérivée de H au sens des distributions.

2. Considérons la fonction signe définie par

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Il est facile de voir que $sgn(x) = H(x) - H(-x)$ et que la dérivée de sgn au sens des distributions est égale à $2\delta_0$.

3. Considérons la fonction

$$x^+ = \max(0, x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Cette fonction, localement intégrable sur $\mathbb{R}$, définit une distribution régulière. De plus,

$$\left\langle \frac{dx^+}{dx}, \phi \right\rangle = -\left\langle x^+, \frac{d\phi}{dx} \right\rangle = -\int_0^{+\infty} x\phi'(x)\,dx, \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Une simple intégration par parties donne alors

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dx^+}{dx}, \phi \right\rangle &= -\int_0^R x\phi'(x)\,dx = [x\phi(x)]_0^R + \int_0^R \phi(x)\,dx \\ &= \int_0^{+\infty} \phi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} H(x)\phi(x)\,dx = \langle H, \phi \rangle \end{aligned}$$

prouvant ainsi que la fonction de Heaviside est la dérivée de $\max(0, \cdot)$ au sens des distributions.

4. Considérons la fonction caractéristique sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$ définie par

$$\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ x \in [a,b], \\ 0 & \text{si } \ x \notin [a,b]. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d\chi_{[a,b]}}{dx}, \phi \right\rangle &= -\left\langle \chi_{[a,b]}, \frac{d\phi}{dx} \right\rangle = -\int_a^b \phi'(x)\,dx \\ &= \phi(a) - \phi(b) = \langle \delta_a - \delta_b, \phi \rangle, \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

et donc la dérivée, au sens des distributions, de $\chi_{[a,b]}$ est $\delta_a - \delta_b$.

5. Considérons la fonction f définie par $f(x) = \ln |x|$. Pour tout $0 < \alpha < 1$, on a

$$\lim_{x \to 0} |x|^{\alpha} f(x) = 0.$$

Il vient alors que pour $x \neq 0$ appartenant à un voisinage de zéro, $|f(x)| \leq \frac{1}{|x|^{\alpha}}$. f est par conséquent localement intégrable sur $\mathbb{R}$ et elle définit une distribution régulière dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

De l'autre côté, la dérivée classique de f est donnée par

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \qquad x \neq 0.$$

Cette dérivée ne définit pas une distribution régulière sur $\mathbb{R}$ car elle n'est pas intégrable au voisinage de 0. La dérivée de f au sens des distributions existe et est donnée par

$$\left\langle \frac{df}{dx}, \phi \right\rangle = -\left\langle f, \frac{d\phi}{dx} \right\rangle, \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\left\langle \tfrac{df}{dx}, \phi \right\rangle &= -\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi'(x)\,dx = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon} f(x)\phi'(x)\,dx \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left([f(x)\phi(x)]_{-\infty}^{-\varepsilon} + [f(x)\phi(x)]_{\varepsilon}^{+\infty} - \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x}\,dx \right) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(f(\varepsilon)\left(\phi(\varepsilon)-\phi(-\varepsilon)\right) + \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x}\,dx \right)
\end{aligned}$$

Remarquant que

$$|\phi(\varepsilon)-\phi(-\varepsilon)| \leq 2\varepsilon \sup \left|\phi'(x)\right|$$

nous déduisons que

$$\left\langle \tfrac{df}{dx}, \phi \right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x}\,dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(x)-\phi(-x)}{x}\,dx = \left\langle VP\left(\tfrac{1}{x}\right), \phi \right\rangle.$$

DÉRIVÉE USUELLE ET DÉRIVÉE AU SENS DES DISTRIBUTIONS

Soit f une fonction absolument continue sur tout intervalle compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. La dérivée au sens des distributions de la distribution régulière associée, satisfait

$$\langle T_f', \phi \rangle = -\langle T_f, \phi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} f\phi' \, dx = \int_{\mathbb{R}} f' \phi \, dx = \langle T_{f'}, \phi \rangle \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Nous avons alors montré le résultat suivant.

Proposition 4.6. Pour une fonction absolument continue sur tout intervalle compact $[a, b]$, la dérivée de f au sens des distributions coincide p.p. avec la dérivée usuelle.

Exemple. La dérivée au sens des distributions de la fonction $x \to |x|$ coincide avec sgn presque partout.

FORMULE DES SAUTS

Proposition 4.7. Soit f une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que $\frac{df}{dx}$ existe au sens classique sauf en un nombre fini de points $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ tel que $f(a_i^-)$ et $f(a_i^+)$ existent. Alors, la dérivée au sens des distributions est donnée par

$$T_f' = T_{f'} + \sum_{i=1}^{n} \left(f(a_i^+) - f(a_i^-)\right) \delta_{a_i}.$$

Démonstration. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned}
\langle T_f', \phi \rangle &= -\langle T_f, \phi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi'(x)\,dx \\
&= -\int_{-\infty}^{a_1} f(x)\phi'(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\phi'(x)\,dx - \int_{a_n}^{+\infty} f(x)\phi'(x)\,dx.
\end{aligned}$$

En utilisant des intégrations par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\langle T_f', \phi\rangle &= \sum_{i=1}^{n} \left(f(a_i^+) - f(a_i^-)\right) \phi(a_i) + \int_{\mathbb{R}} f'(x)\phi(x)\, dx \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \left(f(a_i^+) - f(a_i^-)\right) \delta_{a_i} + T_{f'}, \phi \right\rangle\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

Remarque 4.8. Le résultat est encore valable dans le cas d'un nombre dénombrable de points de discontinuité $(a_i)_{i\geq 1}$. Dans ce cas, on a

$$T_f' = T_{f'} + \sum_{i=1}^{+\infty} \left(f(a_i^+) - f(a_i^-)\right) \delta_{a_i}.$$

Exemple. Soit f la fonction périodique de période a définie sur $(0, a)$ par $f(x) = \frac{x}{a}$. La dérivée au sens des distributions est donnée par,

$$f' = \frac{1}{a} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{na}.$$

Dérivation d'un produit ψT

La dérivée, au sens des distributions, du produit d'une distribution par une fonction indéfiniment différentiable obeit à la règle du produit de deux fonctions différentiables au sens classique.

Proposition 4.9. Soient $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\psi \in C^\infty(\Omega)$. Alors

$$D(\psi T) = D\psi\, T + \psi\, DT \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Démonstration. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Il est facile de voir que

$$\begin{aligned} \langle D(\psi T), \phi \rangle &= -\langle \psi T, D\phi \rangle = -\langle T, \psi\, D\phi \rangle \\ &= -\langle T, D(\psi\phi) - D\psi\, \phi \rangle \\ &= \langle DT, \psi\, \phi \rangle + \langle T, D\psi\, \phi \rangle \\ &= \langle \psi\, DT, \phi \rangle + \langle D\psi\, T, \phi \rangle \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. $\square$

Plus généralement, nous pouvons démontrer la formule de Leibniz pour le produit d'une distribution par une fonction indéfiniment différentiable. En effet, pour $\alpha \in \mathbb{N}^N$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\psi \in C^\infty(\Omega)$ on a

$$D^\alpha(\psi T) = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} D^\beta \psi \, D^{\alpha-\beta} T \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega),$$

avec $\beta! = \beta_1! \cdots \beta_N!$.

Exemple. Montrons que

$$\psi\delta' = \psi(0)\delta_0' - \psi'(0)\delta_0 \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

En effet, il est facile de vérifier que pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} \langle \psi\delta_0', \phi\rangle &= -\langle \delta_0', \psi\phi\rangle = -\left\langle \delta_0, (\psi\phi)'\right\rangle \\ &= -\left(\psi\phi\right)'(0) = -\psi(0)\phi'(0) - \psi'(0)\phi(0) \\ &= \psi(0)\langle \delta_0', \phi\rangle - \psi'(0)\langle \delta_0, \phi\rangle \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat. Comme cas particulier, il vient que

$$x\delta_0' + \delta_0 = 0, \qquad x^p\,\delta_0' = 0 \quad \text{pour tout } p > 1.$$

CHAPITRE 5 - CONVOLUTION DES DISTRIBUTIONS

SUPPORT D'UNE DISTRIBUTION

Définition 5.1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On dit qu'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est nulle dans un ouvert $U \subset \Omega$ si

$$\langle T, \phi \rangle = 0 \qquad \text{pour tout } \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ tel que } \operatorname{supp} \phi \subset U.$$

Définition 5.2. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et soit U un ouvert dans Ω. La restriction de T à U, notée $T_{|U}$, est la distribution définie par

$$\langle T_{|U}, \phi \rangle = \left\langle T, \widetilde{\phi} \right\rangle \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(U),$$

où $\widetilde{\phi} \in \mathcal{D}(\Omega)$ est le prolongement défini par

$$\widetilde{\phi}(x) = \begin{cases} \phi(x) & \text{si } x \in U, \\ 0 & \text{si } x \in \Omega \setminus U. \end{cases}$$

Proposition 5.3. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Il existe un plus grand ouvert $U \subset \Omega$ tel que la restriction $T_{|U}$ soit nulle.

Cet ouvert s'appelle le plus grand ouvert d'annulation de T.

Avant de démontrer cette proposition, nous énonçons le résultat auxiliaire suivant.

Lemme. (Partition de l'unité) Soit K un compact de $\mathbb{R}^N$ et soit $(U_i)_{1\leq i\leq k}$ un recouvrement ouvert de K, i.e. que les ouverts U_i sont tels que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i.$$

Il existe une famille de fonctions $(\chi_i)_{1\leq i\leq k} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telles que

1. $0 \leq \chi_i \leq 1$ et $\operatorname{supp} \chi_i \subset U_i$ pour $i = 1, \cdots, k$.
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \chi_i = 1$ sur un voisinage de K.

Démonstration de la proposition 5.3. Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de Ω tel que $T_{|U_i} = 0$ et soit $U = \bigcup_i U_i$. Soit $\phi \in \mathcal{D}(U)$. On peut trouver un nombre fini d'ouverts $U_1, \cdots, U_k$ tels que

$$\operatorname{supp} \phi \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i \quad \text{et} \quad T_{|U_i} = 0 \quad \forall i = 1, \cdots, k.$$

Soit $(\chi_i)_{1\leq i\leq k}$ une partition de l'unité associée au recouvrement de supp ϕ par les ouverts $(U_i)_{1\leq i\leq k}$. On a

$$\phi = \sum_{i=1}^{k} \chi_i \phi \quad \text{et} \quad \chi_i \phi \in \mathcal{D}(U_i)$$

et par conséquent

$$\langle T, \phi \rangle = \sum_{i=1}^{k} \langle T, \chi_i \phi \rangle = \sum_{i=1}^{k} \left\langle T_{|U_i}, \chi_i \phi \right\rangle = 0.$$

Ceci prouve que $T_{|U} = 0$ et complète la preuve. $\square$

Définition 5.4. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Le support de T, noté supp T, est le plus petit fermé tel que $T_{|\Omega\setminus U} = 0$.

Proposition 5.5. (Support et opérations.) Soient $T, S \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Alors

1. $T_{|\Omega\setminus \operatorname{supp} T} = 0$.
2. Pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$,
$$\operatorname{supp} \phi \cap \operatorname{supp} T = \emptyset \ \text{ implique que } \ \langle T, \phi\rangle = 0.$$
3. $\operatorname{supp}\,(S+T) \subset \operatorname{supp} S + \operatorname{supp} T$.
4. Pour toute fonction $\psi \in C^\infty(\Omega)$, on a
$$\operatorname{supp}\,(\psi T) \subset \operatorname{supp} \psi \cap \operatorname{supp} T.$$
5. Pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^N$, on a
$$\operatorname{supp}\,(D^\alpha T) \subset \operatorname{supp} T.$$

Exemples.

1. Soit f une fonction continue sur Ω. Montrons que

$$\operatorname{supp} T_f = \operatorname{supp} f.$$

i) Une fois que $f = 0$ sur $\Omega \setminus \operatorname{supp} f$, il vient que

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int_\Omega f \phi \, dx = 0 \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ tel que } \operatorname{supp} \phi \subset \Omega \setminus \operatorname{supp} f.$$

Donc $\Omega \setminus \operatorname{supp} f$ est un ouvert d'annulation de T_f et est inclus dans U, plus grand ouvert d'annulation de T_f. Ceci implique que

$$\operatorname{supp} T_f = \Omega \setminus U \subset \operatorname{supp} f.$$

ii) Réciproquement, d'après la définition de U, on a

$$\langle T_f, \phi \rangle = 0 \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ tel que } \operatorname{supp} \phi \subset U. \tag{6}$$

Montrons alors que pour $x_0 \in U$, on a $f(x_0) = 0$. Raisonnons par l'absurde et supposons le contraire, i.e. $f(x_0) \neq 0$. Quitte à diviser par $f(x_0)$, on peut toujours admettre que $f(x_0) = 1$. Vu que f est continue, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_\varepsilon(x_0) \subset U$ et $f(x) > \frac{1}{2}$ pour $x \in B_\varepsilon(x_0)$. Considérons la fonction régularisante $\rho_\varepsilon(x) = \rho\left(\frac{x-x_0}{\varepsilon}\right)$ (voir le chapitre 1). Cette fonction appartient à $\mathcal{D}(\Omega)$ et satisfait $\operatorname{supp} \rho_\varepsilon \subset B_\varepsilon(x_0) \subset U$. D'après (6), on a alors

$$\langle T_f, \rho_\varepsilon \rangle = 0.$$

De l'autre côté,

$$\langle T_f, \rho_\varepsilon \rangle = \int_{B_\varepsilon(x_0)} f\rho_\varepsilon \, dx \geq \int_{B_\varepsilon(x_0)} \frac{1}{2}\rho_\varepsilon \, dx = \frac{1}{2}\varepsilon^N > 0.$$

Ceci est absurde et montre que $U \subset \Omega \setminus \operatorname{supp} f$, i.e.

$$\operatorname{supp} f \subset \operatorname{supp} T_f.$$

Remarque 5.6. Ce résultat peut être généralisé au cas d'une fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. En particulier, le support de la distribution T_H associée à la fonction de Heaviside est $\mathbb{R}^+$.

2. Montrons que

$$\text{supp}\, VP\left(\frac{1}{x}\right) = \mathbb{R}.$$

Il suffit de montrer que tout ouvert d'annulation de $T = VP\left(\frac{1}{x}\right)$ est vide. Supposons qu'il existe un ouvert d'annulation U non vide. U ne peut se réduire au singleton $\{0\}$, car ce dernier n'est pas ouvert. Il existe donc $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que $a \in U$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $a > 0$. Vu que U est un ouvert, il existe $\alpha > 0$ tel que $]a - \alpha, a + \alpha[\subset U$. De plus, on peut supposer que $\alpha < a$ de sorte que $]a - \alpha, a + \alpha[\subset]0, +\infty[$. Soit alors $\phi \in \mathcal{D}(]a - \alpha, a + \alpha[)$, positive et telle que $\phi = 1$ sur $]a - \frac{\alpha}{2}, a + \frac{\alpha}{2}[$. On a

$$\left\langle VP\left(\frac{1}{x}\right), \phi \right\rangle \geq \int_{a-\frac{\alpha}{2}}^{a+\frac{a}{2}} \frac{dx}{x} > 0.$$

Donc $\left\langle VP\left(\frac{1}{x}\right), \phi \right\rangle \neq 0$, ce qui contredit le fait que U est un ouvert d'annulation de $VP\left(\frac{1}{x}\right)$.

3. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et soit $a \in \Omega$. Montrons que

$$\operatorname{supp} \delta_a = \{a\}\,.$$

En d'autres termes, montrons que le plus grand ouvert d'annulation de δ_a est égal à $\Omega \setminus \{a\}$.

Remarquons en premier lieu que $\Omega \setminus \{a\}$ est un ouvert d'annulation de δ_a. En effet, si $\phi \in \mathcal{D}(\Omega \setminus \{a\})$, alors $\phi(a) = 0$ et donc $\langle \delta_a, \phi \rangle = 0$. Supposons alors que $\Omega \setminus \{a\}$ n'est pas le plus grand ouvert d'annulation de δ_a. Il vient que Ω est le plus grand ouvert d'annulation de δ_a et, par conséquent, $\delta_a = 0$. Ce qui est absurde.

Remarque 5.7. Ce résultat peut-être facilement généralisé au cas des dérivées de la distribution de Dirac. Plus précisémment, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$, on a

$$\operatorname{supp} D^\alpha \delta_a = \{a\}\,.$$

Dans l'exemple précédent, nous avons vu que la masse de Dirac δ_a et ses dérivées au sens des distributions sont toutes à support dans le singleton $\{a\}$. Réciproquement, les distributions à support dans un singleton admettent une caractérisation simple.

Théorème 5.8. (Distributions à support dans un singleton.) Soit $a \in \Omega$ et soit T une distribution telle que supp $T = \{a\}$. Alors il existe $m \in \mathbb{N}_0$ et $c_\alpha \in \mathbb{C}$ ($|\alpha| \leq m$) tel que

$$T = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha D^\alpha \delta_a.$$

DISTRIBUTIONS À SUPPORT COMPACT

À présent, nous nous intéressons à un des sous-espaces les plus importants de $\mathcal{D}'(\Omega)$, en l'occurrence l'espace des distributions à support compact. Nous verrons que cet espace s'identifie avec le dual de l'espace $\mathcal{E}(\Omega) = C^\infty(\Omega)$.

Définition 5.9. Nous notons $\mathcal{E}'(\Omega)$ l'espace des applications linéaires et continues sur $\mathcal{E}(\Omega)$, i.e. les applications linéaires T telles que si $(\phi_n)_n$ converge vers ϕ dans $\mathcal{E}(\Omega)$, alors $(\langle T, \phi_n\rangle)_n$ converge vers $\langle T, \phi\rangle$ dans $\mathbb{C}$.

Comme dans le cas des éléments de $\mathcal{D}'(\Omega)$, nous avons un critère de continuité associée aux éléments de $\mathcal{E}'(\Omega)$. Plus précisément, nous avons le résultat suivant.

Théorème 5.10 (Critère de continuité) Soit $T : \mathcal{E}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ linéaire. On a alors

$$T \in \mathcal{E}'(\Omega)$$
$$\Updownarrow$$
$$(CC') \quad \begin{cases} \textbf{Il existe un compact } K \subset \Omega,\ C > 0 \textbf{ et } m \in \mathbb{N}_0 \textbf{ tel que} \\ |\langle T, \phi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha \phi\|_{C(K)} \qquad \forall\, \phi \in \mathcal{E}(\Omega). \end{cases}$$

Démonstration. La preuve est très similaire à celle du théorème 2.2.

Première implication ($\Longleftarrow$) Soit $\phi_n \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{E}(\Omega)$. Si le critère de continuité (CC') est satisfait, alors il existe K, C et m tel que

$$|\langle T, \phi_n \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha \phi_n\|_{C(K)} \longrightarrow 0 \qquad \text{quand } n \to +\infty$$

et donc $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$.

Deuxième implication ($\Longrightarrow$)

Nous allons raisonner par l'absurde et supposer que pour $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$, la condition (CC') n'est pas vérifiée pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ avec $C = m$ et $K = \overline{B_m(0)}$. Donc, nous avons

$$|\langle T, \phi_m \rangle| > m \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha \phi_m\|_{C\left(\overline{B_m(0)}\right)} \tag{7}$$

pour un certain $\phi_m \in \mathcal{E}(\Omega)$. Soit

$$\psi_m = \frac{\phi_m}{m \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha \phi_m\|_{C\left(\overline{B_m(0)}\right)}}.$$

Il est clair que $\psi_m \in \mathcal{E}(\Omega)$. Pour tout $K \subset \Omega$ compact et tout $\beta \in \mathbb{N}_0^N$, soit $m \in \mathbb{N}_0$ tel que $|\beta| \leq m$ et $K \subset \overline{B_m(0)}$. On a

$$\left\|D^\beta \psi_m\right\|_{C(K)} \leq \sum_{|\gamma| \leq m} \|D^\gamma \psi_m\|_{C\left(\overline{B_m(0)}\right)} = \frac{1}{m}$$

ce qui montre que $(\psi_m)_m$ converge vers zéro dans $\mathcal{E}(\Omega)$. De l'autre côté, en prenant en compte (7), nous obtenons

$$|\langle T, \psi_m \rangle| > 1$$

et donc $(\langle T, \psi_m \rangle)_m$ ne tend pas vers zéro. Ceci est contradiction avec le fait que $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$. $\square$

Pour clarifier la relation entre $\mathcal{E}'(\Omega)$ et $\mathcal{D}'(\Omega)$, nous considérons en premier lieu la relation entre $\mathcal{E}(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\Omega)$. Il est clair que $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{E}(\Omega)$. De plus, l'injection

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{E}(\Omega)$$

est continue (vu que la convergence d'une suite $(\phi_n)_n$ vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$ implique sa convergence dans $\mathcal{E}(\Omega)$) et nous pouvons montrer que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{E}(\Omega)$. Par conséquent, nous avons l'injection

$$\mathcal{E}'(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$$

et l'espace $\mathcal{E}'(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Théorème 5.11. Les éléments de l'espace $\mathcal{E}'(\Omega)$ sont des distributions à support compact.

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ et soit $K \subset \Omega$ le compact donné par le critère (CC'). Nous en déduisons que

$$\langle T, \phi \rangle = 0 \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ tel que } \operatorname{supp} \phi \in \Omega \setminus K.$$

En d'autres termes, $\Omega \setminus K$ est un ouvert d'annulation de T et donc

$$\operatorname{supp} T \subset \Omega \setminus (\Omega \setminus K) = K.$$

Ceci montre que le support de T est compact. $\square$

PRODUIT TENSORIEL DE DISTRIBUTIONS

Soient Ω_1 un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et Ω_2 un ouvert de $\mathbb{R}^m$, $m, n \in \mathbb{N}$. On a vu précédemment qu'il n'est pas possible de définir en toute généralité le produit de deux distributions. Néanmoins, et comme nous allons le voir, nous pouvons définir le produit de deux distributions dans des variables différentes, c'est à dire que nous pouvons étendre aux distributions le produit tensoriel de deux fonctions $f_1 : \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f_2 : \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$, défini par

$$(f_1 \otimes f_2)(x, y) = f_1(x) f_2(y), \qquad x \in \Omega_1, y \in \Omega_2.$$

Nous pouvons considérer $f_1 \otimes f_2$ comme une distribution régulière sur $\Omega_1 \times \Omega_2$ définie par

$$\begin{aligned}
\langle T_{f_1 \otimes f_2}, \phi \rangle &= \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f_1 \otimes f_2(x,y)\phi(x,y)\,dxdy \\
&= \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f_1(x) f_2(y)\phi(x,y)\,dxdy \\
&= \int_{\Omega_2} f_2(y)\left(\int_{\Omega_1} f_1(x)\phi(x,y)\,dx\right) dy \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2). \quad (8)
\end{aligned}$$

En particulier, si

$$\phi = \phi_1 \otimes \phi_2 \qquad \text{avec } \phi_j \in \mathcal{D}(\Omega_j)$$

alors il est facile de voir que

$$\langle T_{f_1 \otimes f_2}, \phi \rangle = \int_{\Omega_1} f_1(x)\phi_1(x)\,dx \int_{\Omega_2} f_1(y)\phi_2(y)\,dy = \langle T_{f_1}, \phi_1 \rangle \, \langle T_{f_2}, \phi_2 \rangle \,.$$

Notre objectif est d'étendre la notion de produit tensoriel aux distributions de sorte que l'identité précédente soit vérifiée et détermine le produit tensoriel de manière unique.

Nous commencerons par observer que l'espace $\mathcal{D}(\Omega_1) \otimes \mathcal{D}(\Omega_2)$ formé par les fonctions de la forme

$$\phi = \sum_{i=1}^{\ell} \phi_1^\ell \otimes \phi_2^\ell$$

est un sous-espace de $\mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$. De plus, nous avons le résultat suivant.

Thérorème 5.12. L'espace $\mathcal{D}(\Omega_1) \otimes \mathcal{D}(\Omega_2)$ est dense dans $\mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Démonstration. Toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ peut-être approchée par une suite de polynômes P_k, définis sur $\Omega_1 \times \Omega_2$ et formés par des monômes de la forme $x^r y^q$. Soient $\rho \in \mathcal{D}(\Omega_1)$ et $\sigma \in \mathcal{D}(\Omega_2)$ telles que $\rho \otimes \sigma = 1$ sur le support de ϕ. Il vient alors que $(\sigma \rho P_k)_k \subset \mathcal{D}(\Omega_1) \otimes \mathcal{D}(\Omega_2)$. De plus, cette suite converge vers ϕ dans $C^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2)$. □

Remarque 5.13. Une conséquence importante du résultat précédent est que toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$ est définie par ses valeurs sur $\mathcal{D}(\Omega_1) \otimes \mathcal{D}(\Omega_2)$. En particulier, si $\langle T, \phi_1 \otimes \phi_2 \rangle = 0$ pour tout $\phi_1 \in \mathcal{D}(\Omega_1)$ et tout $\phi_2 \in \mathcal{D}(\Omega_2)$, alors $T = 0$.

Proposition 5.14. Soient $S \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$ et $\phi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Alors la fonction $y \mapsto \langle S, \phi(\cdot, y) \rangle$ appartient à $\mathcal{D}(\Omega_2)$ et la fonction $x \mapsto \langle T, \phi(x, \cdot) \rangle$ appartient à $\mathcal{D}(\Omega_1)$.

Démonstration. Pout $y \in \Omega_2$, soit $h > 0$ tel que $B(y, 2h) \subset \Omega_2$ et soit $h_k = he_k$ où $e_k \in \mathbb{R}^m$ est le $k$ième vecteur de la base canonique. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Vu que ϕ est différentiable par rapport à y, il vient que

$$\phi(\cdot, y + h_k) = \phi(\cdot, y) + \frac{\partial \phi(\cdot, y)}{\partial y_k} h + R(\cdot, y, h), \qquad \text{avec } \lim_{h \to 0} \frac{R(\cdot, y, h)}{h} = 0.$$

Utilisant la linéarité et la continuité de S, on voit que la fonction $y \mapsto \langle S, \phi(\cdot, y) \rangle$ admet une dérivée partielle par rapport à y_k donnée par

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y_k}\left\langle S, \phi\left(\cdot, y\right)\right\rangle & = \lim_{h\to 0}\left\langle S, \frac{\phi(\cdot,y+h_k)-\phi(\cdot,y)}{h}\right\rangle = \lim_{h\to 0}\left\langle S, \frac{\partial\phi(\cdot,y)}{\partial y_k} + \frac{R(\cdot,y,h)}{h}\right\rangle \\ & = \left\langle S, \frac{\partial\phi(\cdot,y)}{\partial y_k}\right\rangle .\end{aligned}$$

Nous pouvons alors montrer par récurrence que pour tout multi-indice α

$$D_y^\alpha \left\langle S, \phi\left(\cdot, y\right)\right\rangle = \left\langle S, D_y^\alpha \phi(\cdot, y)\right\rangle .$$

Finalement, observons que comme ϕ est à support compact dans $\Omega_1 \times \Omega_2$, alors $y \mapsto \left\langle S, \phi\left(\cdot, y\right)\right\rangle$ est à support compact dans Ω_2. De la même manière, nous pouvons montrer que pour tout multi-indice α

$$D_x^\alpha \left\langle T, \phi\left(x, \cdot\right)\right\rangle = \left\langle T, D_x^\alpha \phi(x, \cdot)\right\rangle$$

et que $x \mapsto \left\langle T, \phi\left(x, \cdot\right)\right\rangle$ est à support compact dans Ω_1. □

Pour éviter toute confusion, nous adopterons les notations suivantes

$$\langle T_y, \phi(x,y)\rangle = \langle T, y \mapsto \phi(x,y)\rangle \quad \text{et} \quad \langle S_x, \phi(x,y)\rangle = \langle S, x \mapsto \phi(x,y)\rangle .$$

Proposition 5.15. Soient $S \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$. Alors

$$\Big\langle S_x, \langle T_y, \phi(x,y)\,\rangle\Big\rangle = \Big\langle T_y, \langle S_x, \phi(x,y)\,\rangle\Big\rangle \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2).$$

Démonstration. Considérons la forme linéaire

$$\begin{aligned} L : \quad \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2) &\to \mathbb{R} \\ \phi &\mapsto \Big\langle S_x, \langle T_y, \phi(x,y)\,\rangle\Big\rangle. \end{aligned}$$

Cette application est bien définie grâce à la proposition 5.14. Vérifions que c'est une distribution sur $\Omega_1 \times \Omega_2$. Soit alors ϕ une fonction-test dans $\mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ avec

$$\operatorname{supp}\phi \subset K_1 \times K_2, \qquad K_1 \text{ compact dans } \Omega_1 \text{ et } K_2 \text{ compact dans } \Omega_2.$$

En utilisant la continuité de S, on a

$$\begin{aligned}|\langle L,\phi\rangle| = \left|\left\langle S_x, \langle T_y, \phi(x,y)\rangle\right\rangle\right| \quad &\leq C_1 \max_{|\alpha|\leq m_1} \sup_{x\in K_1} \left|D_x^\alpha \langle T_y, \phi(x,y)\rangle\right| \\ &= C_1 \max_{|\alpha|\leq m_1} \sup_{x\in K_1} \left|\langle T_y, D_x^\alpha \phi(x,y)\rangle\right|.\end{aligned}$$

De l'autre côté, la continuité de T implique que

$$\left|\langle T_y, D_x^\alpha \phi(x,y)\rangle\right| \leq C_2 \max_{|\beta|\leq m_2} \sup_{y\in K_2} \left|D_y^\beta D_x^\alpha \phi(x,y)\right|$$

ce qui entraine que

$$|\langle L,\phi\rangle| \leq C_1 C_2 \max_{\substack{|\alpha|\leq m_1\\ |\beta|\leq m_2}} \sup_{\substack{x\in K_1\\ y\in K_2}} \left|D_y^\beta D_x^\alpha \phi(x,y)\right|$$

prouvant ainsi que L est continue et appartient à $\mathcal{D}'(\Omega_1\times\Omega_2)$.

Le même raisonnement permet de montrer que l'application

$$\begin{aligned} R : \quad \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2) &\to \mathbb{R} \\ \phi &\mapsto \left\langle T_y, \langle S_x, \phi\,(x,y)\,\rangle \right\rangle \end{aligned}$$

appartient aussi à $\mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Finalement, remarquons que pour tout $\phi_1 \in \mathcal{D}(\Omega_1)$ et tout $\phi_2 \in \mathcal{D}(\Omega_2)$, on a

$$\begin{aligned} \langle L, \phi_1 \otimes \phi_2 \rangle &= \langle S_x, \langle T_y, \phi_1(x)\phi_2(y) \rangle \rangle \\ &= \langle S_x, \langle T_y, \phi_2(y) \rangle\, \phi_1(x) \rangle = \langle S, \phi_1 \rangle \langle T, \phi_2 \rangle \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \langle R, \phi_1 \otimes \phi_2 \rangle &= \langle T_y, \langle S_x, \phi_1(x)\phi_2(y) \rangle \rangle \\ &= \langle T_y, \langle S_x, \phi_1(x) \rangle\, \phi_2(y) \rangle = \langle S, \phi_1 \rangle \langle T, \phi_2 \rangle \,. \end{aligned}$$

Donc

$$\langle L - R, \phi_1 \otimes \phi_2 \rangle = 0$$

et la conclusion vient en prenant en compte la remarque 5.13. $\square$

Remarque 5.16. Le résultat précédent peut-être interprété comme étant une extension du théorème de Fubini. En effet, si f_1 et f_2 sont deux fonctions respectivement intégrables sur Ω_1 et Ω_2, alors

$$\left\langle (T_{f_1})_x , \left\langle (T_{f_2})_y , \phi(x,y) \right\rangle \right\rangle = \int_{\Omega_2} f_2(y) \left(\int_{\Omega_1} f_1(x)\phi(x,y)\, dx \right) dy$$

et

$$\left\langle (T_{f_1})_x , \left\langle (T_{f_2})_y , \phi(x,y) \right\rangle \right\rangle = \int_{\Omega_1} f_1(x) \left(\int_{\Omega_2} f_2(y)\phi(x,y)\, dy \right) dx.$$

Grâce à (8) et au théorème de Fubini, nous déduisons que

$$\langle T_{f_1 \otimes f_2}, \phi \rangle = \left\langle (T_{f_1})_x , \left\langle (T_{f_2})_y , \phi(x,y) \right\rangle \right\rangle = \left\langle (T_{f_1})_x , \left\langle (T_{f_2})_y , \phi(x,y) \right\rangle \right\rangle$$

pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

À ce stade, nous sommes en mesure de définir le produit tensoriel de deux distributions.

Définition 5.17. Soient $S \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$. Pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$, la distribution $S \otimes T$ est définie par

$$\langle S \otimes T, \phi \rangle = \Big\langle S_x, \langle T_y, \phi(x, y) \rangle \Big\rangle \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2).$$

Remarque 5.18. Prenant en compte la proposition 5.15, nous voyons que $S \otimes T$ est bien définie et pourait s'écrire de manière équivalente

$$\langle S \otimes T, \phi \rangle = \Big\langle T_y, \langle S_x, \phi(x, y) \rangle \Big\rangle \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2).$$

De plus,

$$\langle S \otimes T, \phi_1 \otimes \phi_2 \rangle = \langle S, \phi_1 \rangle \ \langle T, \phi_2 \rangle \qquad \forall (\phi_1, \phi_2) \in \mathcal{D}(\Omega_1) \times \mathcal{D}(\Omega_2).$$

Exemple. $\delta_a \otimes \delta_b = \delta_{(a,b)}$. En effet, on a

$$\begin{aligned} \langle \delta_a \otimes \delta_b, \phi \rangle &= \Big\langle (\delta_a)_x, \big\langle (\delta_b)_y, \phi(x, y) \big\rangle \Big\rangle = \Big\langle (\delta_a)_x, \phi(x, b) \Big\rangle \\ &= \phi(a, b) = \langle \delta_{(a,b)}, \phi \rangle \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2). \end{aligned}$$

Convolution de deux distributions

Soient f et g deux fonctions localement intégrables dans $\mathbb{R}^N$ dont l'une au moins est à support compact. Leur convolution est définie par

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} f(x-y)g(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} f(y)g(x-y)\,dy.$$

Considérons $f * g$ comme une distribution régulière et calculons son action sur une fonction-test $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. On a

$$\begin{aligned}
\langle T_{f*g}, \phi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} f * g(z)\phi(z)\,dz = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} f(z-y)g(y)\phi(z)\,dydz \\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} f(z-y)g(y)\phi(z)\,dzdy = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)g(y)\phi(x+y)\,dxdy \\
&= \left\langle (T_f)_x \otimes (T_g)_y\,, \phi(x+y)\right\rangle.
\end{aligned}$$

Cette identité suggère de généraliser le produit de convolution de deux fonctions à celui de deux distributions $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ via la formule

$$\langle S * T, \phi \rangle = \langle S_x \otimes T_y, \phi(x+y) \rangle \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N).$$

Il faut cependant clarifier le sens à donner à ce produit de dualité, vu que la fonction $(x, y) \mapsto \phi(x+y)$ n'est pas une fonction à support compact dans $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$.

Pour simplifier la rédaction, nous posons

$$\psi(x) = \langle T_y, \phi(x+y)\rangle \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

1) Cette quantité a un sens. En effet, la fonction $y \mapsto \phi(x+y)$ est de classe C^∞ et son support, inclus dans $\operatorname{supp}\phi - x$, est compact.

2) La fonction ψ est de classe C^∞. En effet, en utilisant des arguments similaires à ceux dans la preuve de la proposition 5.14, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi(x)}{\partial x_k} &= \lim_{h\to 0+} \frac{\psi(x+h_k)-\psi(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0+} \left\langle T_y, \frac{\phi(x+h_k+y)-\phi(x+y)}{h} \right\rangle = \left\langle T_y, \frac{\partial\phi(x+y)}{\partial x_k} \right\rangle. \end{aligned}$$

Plus généralement, nous obtenons

$$D_x^\alpha \psi(x) = \langle T_y, D_x^\alpha \phi(x+y)\rangle \qquad \forall \alpha \in \mathbb{N}^N.$$

3) On a aussi

$$\operatorname{supp}\psi \subset \operatorname{supp} T - \operatorname{supp}\phi.$$

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^N \setminus (\operatorname{supp} T - \operatorname{supp}\phi)$ et tout $y \in \operatorname{supp}\phi$ on a

$$x + y \notin \operatorname{supp} T.$$

Ainsi $x + y$ appartient au plus grand ouvert d'annulation de T et

$$\langle T_y, \phi(x+y)\rangle = \psi(x) = 0$$

impliquant que $x \in \mathbb{R}^N \setminus \operatorname{supp}\psi$.

En résumé, la fonction ψ est de classe C^∞ et $\operatorname{supp}\psi \subset \operatorname{supp} T - \operatorname{supp}\phi$

Premier cas. Si $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ et $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, alors la quantité

$$\langle S_x, \langle T_y, \phi(x+y)\rangle\rangle$$

est bien définie car la fonction $x \mapsto \langle T_y, \phi(x+y)\rangle$ appartient à $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$.

Deuxième cas. Si $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ et $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, alors supp $\psi \subset$ supp $T -$ supp ϕ est compact et $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. La quantité

$$\langle S_x, \langle T_y, \phi(x+y)\rangle\rangle$$

est aussi bien définie dans ce cas.

Nous sommes en mesure de définir le produit de convolution de deux distributions.

Définition 5.19. Soient $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ et supposons que l'une au moins est à support compact. La convolution $S * T$ est une distribution sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ définie par

$$\langle S * T, \phi \rangle = \langle S_x \otimes T_y, \phi(x+y) \rangle \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N).$$

De plus, nous avons le résultat suivant.

Théorème 5.20. Soient $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. Alors pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, on a

$$\langle S * T, \phi \rangle = \langle S_x, \langle T_y, \phi(x+y) \rangle \rangle = \langle T_y, \langle S_x, \phi(x+y) \rangle \rangle .$$

Démonstration. À admettre.

PROPRIÉTÉS DU PRODUIT DE CONVOLUTION DE DEUX DISTRIBUTIONS

Proposition 5.21. Soient $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ et supposons que l'une au moins est à support compact. Alors:

i) supp $(S * T) \subset$ supp $S +$ supp T.

ii) $\frac{\partial}{\partial x_j}(S * T) = \frac{\partial S}{\partial x_j} * T = S * \frac{\partial T}{\partial x_j}$ $(j = 1, \cdots, N)$.

iii) $\delta_a * T = T * \delta_a = \tau_a T$. En particulier $\delta_0 * T = T$.

Remarque 5.22. La dérivation dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ est donc une convolution:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} T = \frac{\partial \delta_0}{\partial x_j} * T.$$

SOLUTIONS DE CERTAINES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Soit $P = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha$, un opérateur différentiel à coefficients constants a_α. Une distribution E est dite *solution élémentaire* de P si elle satisfait

$$PE = \delta_0.$$

L'existence d'une solution élémentaire est assurée par le résultat suivant.

Théorème 5.23. (Malgrange-Ehrenpreis) Tout opérateur différentiel à coefficients constants dans $\mathbb{R}^N$ admet une solution élémentaire.

La notion de solution élémentaire est utilisée pour trouver la solution de certaines EDP.

Théorème 5.24. Soit P un opérateur différentiel à coefficients constants dans $\mathbb{R}^N$ et soit $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ une solution élémentaire de P. Alors pour tout $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, l'équation

$$Pu = f$$

admet au moins une solution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ de la forme $u = E * f$.

Démonstration. Comme f est à support compact, l'expression de u a un sens et il est facile de voir que

$$Pu = P(E * f) = PE * f = \delta_0 * f = f.$$

Exemples. 1) Il est facile de vérifier que H est une solution élémentaire de $Pu = u'$. Donc $u = H * f$ est une solution de $u' = f$.

2) Considérons l'équation $u" = f$ (i.e. $Pu = u"$). Une solution est donnée par $u = E * f$ où E vérifie $E" = \delta_0$, i.e. $E' = H + c$ et par conséquent $E = x^+ + cx + \tilde{c}$, $c, \tilde{c} \in \mathbb{R}$ et $x^+ = \max(x, 0)$.