II Lois des grands nombres

Nous aurons besoin, dans ce chapitre, de l'inégalité de Jensen. Rappelant qu'une application $\varphi : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ $(E \subset \mathbb{R})$ est dite convexe (resp. concave) si pour tous $x, y \in E$ et pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$\varphi\left(tx + (1-t)\,y\right) \leq t\varphi\left(x\right) + (1-t)\,\varphi\left(y\right) \ \ (\text{resp. } \varphi\left(tx + (1-t)\,y\right) \geq t\varphi\left(x\right) + (1-t)\,\varphi\left(y\right) \ \ .$$

Géométriquement, cela signifie que le segment joignant les points $(x, \varphi(x))$ et $(y, \varphi(y))$ se trouve au dessus (rep. dessous) de la partie du graphe de φ entre x et y.

Exemples:

-La fonction $\varphi(x) = e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$

-La fonction $\varphi(x) = |x|^r$ $(r \geq 1)$ est convexe sur $\mathbb{R}$

-La fonction $\varphi(x) = Logx$ est concave sur $\mathbb{R}_+$

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions affines sur E. On admetra que si φ est convexe sur E, alors

$$\varphi = \sup_{\psi \in \mathcal{A} : \psi \leq \varphi} \psi.$$

Lemme (Inégalité de Jensen)

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ et soit X une v.a.r. d'espérance finie telle que $\varphi \circ X$ soit intégrable. Alors on a

$$\varphi\left(\mathbb{E}\left(X\right)\right) \leq \mathbb{E}\left(\varphi \circ X\right).$$

Preuve:

Remarquons que si $\psi(x) = ax + b$ est uen fonction affine, alors

$$\psi\left(\mathbb{E}\left(X\right)\right) = a\mathbb{E}\left(X\right) + b = \psi\left(\mathbb{E}\left(X\right)\right),$$

d'où pour tout $\psi \in \mathcal{A}$ telle que $\psi \leq \varphi$,

$$\psi\left(\mathbb{E}\left(X\right)\right) \leq \varphi\left(\mathbb{E}\left(X\right)\right).$$

Il résulte que $\varphi(\mathbb{E}(X))$ est un majorant de l'ensemble $\{\psi(\mathbb{E}(X)) : \psi \in \mathcal{A} \text{ et } \psi \leq \varphi\}$, d'où

$$\varphi\left(\mathbb{E}\left(X\right)\right) = \sup\left\{\psi\left(\mathbb{E}\left(X\right)\right) : \psi \in \mathcal{A} \text{ et } \psi \leq \varphi\right\} \leq \varphi\left(\mathbb{E}\left(X\right)\right),$$

ce qu'il fallait démontrer.■

Si maintenant on pose, pour tout $\in [1, +\infty[$

$$\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p\left(\Omega, \mathcal{F}, P\right) := \left\{X \ \ v.a.r. : \left\|X\right\|_p := \left(\mathbb{E}\left(|X|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}}\right\}.$$

Notons que $\|.\|_p$ n'est pas une norme mais une semi-norme sur $\mathcal{L}^p$.

Corollaire

Soient $1 \leq p \leq r < \infty$ et $Y \in \mathcal{L}^r$ et on a

$$\left\|Y\right\|_p \leq \left\|Y\right\|_r.$$

En particulier $\mathcal{L}^r \subset \mathcal{L}^p$.

Preuve:
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$X_n = (|Y| \wedge n)^p \text{ où } a \wedge b = \inf(a, b).$$

Alors la suite de $v.a.r.$ (X_n) est bornée par n^p, d'où X_n et $X_n^{\frac{r}{p}} \in \mathcal{L}^p$. Cette suite est également croissante. En effet; pout $\omega \in \Omega$, on a
-ou bien $|Y(\omega)| \leq n$, d'où $X_n(\omega) = |Y(\omega)|^p = X_{n+1}(\omega)$
ou bien $n < |Y(\omega)| \leq n+1$, d'où $X_n(\omega) = n^p < |Y(\omega)|^p = X_{n+1}(\omega)$
-ou bien $|Y(\omega)| > n+1$, d'où $X_n(\omega) = n^p < (n+1)^p = X_{n+1}(\omega)$.

Ainsi, pour tout $\omega \in \Omega$, on a $X_n(\omega) \leq X_{n+1}(\omega)$ d'où la croissance de notre suite.

De plus, si on désigne par n_0 le plus entier naturel tel que $n > |Y(\omega)|$ ($i.e.$ $n_0 = [|Y(\omega)|] + 1$), alors on a pour tout $n \geq n_0$

$$|Y(\omega)| \leq n,$$

d'où $X_n(\omega) = |Y(\omega)|^p$, c'est à dire que la suite de nombre réels $X_n(\omega)$ est constantee à partir de n_0. Ainsi la suite (X_n) converge ponctuellement vers $|Y|^p$.

une application directe de l'inégalité de Jensen avec $\varphi(x) := x^{\frac{r}{p}}$, qui est une fonction convexe sur $]0, \infty[$, donne

$$(\mathbb{E}(X_n))^{\frac{r}{p}} \leq \mathbb{E}\left(X_n^{\frac{r}{p}}\right) = \mathbb{E}\left((|Y| \wedge n)^r\right) \leq \mathbb{E}\left(|Y|^r\right)$$

et en élévant à la puissance $\frac{1}{r}$, on obtient

$$(\mathbb{E}(X_n))^{\frac{1}{p}} \leq \left(\mathbb{E}\left(|Y|^r\right)\right)^{\frac{1}{r}},$$

d'où, d'aprés le théorème de la convergence monotone

$$\left(\mathbb{E}\left(|Y|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\mathbb{E}\left(|Y|^r\right)\right)^{\frac{1}{r}}$$

ce qui achève la démonstration.■

Le théorème suivant, qui couvre plusieurs cas importants, ne nécessite que les moments d'ordre 4 soient finis et n'exige pas que les avariables aléatoires soient identiquement distribuiées.

Théorème: (Loi forte des grands nombres)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes, centrées, satisfaisant la condition suivante:

$$\exists K > 0 : \mathbb{E}\left(X_n^4\right) \leq K \text{ pour tout } n \geq 1.$$

et soit $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$. Alors

$$P\left(\frac{S_n}{n} \to 0\right) = 1$$

où encore $\frac{S_n}{n} \to 0$ *p.s.*

Preuve:

On a

$$S_n^4 = (X_1 + X_2 + ... + X_n)^4 = \sum_{k=1}^{n} X_k^4 + \alpha \sum_{1\leq k<l\leq n} X_k X_l^3 + 6 \sum_{1\leq k<l\leq n} X_k^2 X_l^2.$$

Comme $\mathbb{E}\left(X_k X_l^3\right) = \mathbb{E}(X_k)\,\mathbb{E}\left(X_l^3\right) = 0$ à cause de l'indépendance de X_k et X_l et comme

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(X_k^2 X_l^2\right) &= \mathbb{E}\left(X_k^2\right)\mathbb{E}\left(X_l^2\right) = \|X_k\|_2^2 \|X_l\|_2^2 = \left(\|X_k\|_2 \|X_l\|_2\right)^2 \leq \left(\|X_k\|_4 \|X_l\|_4\right)^2 \\ &\leq \left(\mathbb{E}\left(X_k^4\right)\mathbb{E}\left(X_l^4\right)\right)^{\frac{1}{2}} \leq (K.K)^{\frac{1}{2}} = K,\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(S_n^4\right) &= \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(X_k^4\right) + \alpha \sum_{1\leq k<l\leq n} \mathbb{E}\left(X_k X_l^3\right) + 6 \sum_{1\leq k<l\leq n} \mathbb{E}\left(X_k^2 X_l^2\right) \\ &\leq nK + 6K card\left\{(k,l) \in \left(\overline{1,n}\right)^2 : k < l\right\} \\ &\leq nK + 6K\frac{n(n-1)}{2} \\ &\leq 3Kn^2\end{aligned}$$

d'où

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{S_n}{n}\right)^4\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\mathbb{E}\left(S_n^4\right) \leq 3K\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty.$$

Il résulte que la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{S_n}{n}\right)^4$ est convergente *p.s.* et par suite le terme général tend vers 0 *p.s.*, ce achève la démonstration.$\blacksquare$

Corollaire

Si la condition du théorème précédant $\mathbb{E}(X_n) = 0$ *est remplacé par* $\mathbb{E}(X_n) = \mu$ *pour une certaine constante* μ, *alors on aura*

$$\frac{S_n}{n} \to \mu \ p.s.$$

Preuve;

Il suffit d'appliquer le théorème précédant à la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ où $Y_n = X_n - \mu$. Dans cee cas, les Y_n sont centrées, indépendantes et

$$\mathbb{E}\left(Y_n^4\right) = \|Y_n\|_4^4 \leq \left(\|X_n\|_4 + \mu\right)^4 = \left(\left(\mathbb{E}\left(X_n^4\right)\right)^{\frac{1}{4}} + \mu\right)^4 \leq \widetilde{K} := \left(K^{\frac{1}{4}} + \mu\right)^4.$$

Il résulte alors que $\frac{S_n}{n} - \mu = \frac{X_1+X_2+...+X_n}{n} - \mu = \frac{Y_1+Y_2+...+Y_n}{n} \to 0$ *p.s.*, d'où $\frac{S_n}{n} \to \mu$ *p.s.*.$\blacksquare$

On aura besoin des inégalités suivantes:

Inégalité de Markov: Soit X une $v.a.$ positive d'espérance finie. Alors on a

$$\forall \lambda > 0, P(X \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\lambda}.$$

En effet; on a

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\Omega} XdP = \int_{\{X \geq \lambda\}} XdP + \int_{\{X < \lambda\}} XdP \geq \int_{\{X \geq \lambda\}} XdP \geq \lambda P(X \geq \lambda).$$

Inégalité de Tchebychev: Soit Y une $v.a.$ de variance σ^2 finie. Alors on a

$$\forall \varepsilon > 0, P(|Y - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}, \text{ où } \mu = \mathbb{E}(Y).$$

En effet; comme $\{|Y - \mu| \geq \varepsilon\} = \left\{|Y - \mu|^2 \geq \varepsilon^2\right\}$, alors on a d'aprés l'inégalité de Tchebychev

$$P(|Y - \mu| \geq \varepsilon) = P\left(|Y - \mu|^2 \geq \varepsilon^2\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left(|Y - \mu|^2\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Théorème (Loi faible des grands nombres)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ *une suite de v.a.r. i.i.d. d'espérance* μ *et de variance* σ^2 *et soit* $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$. *Alors* $\frac{S_n}{n}$ *converge en probabilité vers* μ. *Plus précisèment*

$$\forall \varepsilon > 0, P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

Démonstration:

On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) &= \frac{1}{n}\mathbb{E}(S_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k) = \mu, \\
var\left(\frac{S_n}{n}\right) &= \frac{1}{n^2}var(S_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}var(X_k) = \frac{\sigma^2}{n^2} \text{ à cause de l'indépendance des } X_n
\end{aligned}$$

et d'aprés l'inégalité de Markov

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2},$$

ce qu'il fallait démontrer.■