Université M'Hamed Bougara- Boumerdes
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année universitaire : 2021-2022
Matière : Processus stochastique 1
Master / MSS / S1

Série 2

Exercice 1

Dans un pays, il ne fait jamais beau deux jours de suite. Si un jour il fait beau, le lendemain il peut neiger ou pleuvoir avec autant de chances. Si un jour il pleut ou il neige, il y a une chance sur deux qu'il y ait changement de temps le lendemain, et s'il y a changement, il ya une chance sur deux que ce soit pour un beau temps.

1- Peut-on modéliser cette situation avec une chaine de Markov ? Si oui donner sa matrice de transition.
2- Si un jour il neige, quel est le temps le plus probable pour le lendemain ?

Exercice 2

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaine de Markov à valeurs dans $E = \{1,2\}$, de matrice de transition P donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 3/10 & 7/10 \end{pmatrix}$$

1- Calculer les probabilités de premier retour à l'état 1 en n transitions
2- Calculer le temps moyen de premier retour à l'état 1 de deux manières différentes
3- L'état 1 est-il récurrent positif ?

Exercice 3

Soit une chaine de Markov à valeurs dans $E = \{1,2,3\}$ et de matrice de transition :

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

1- Calculer la probabilité que la chaine quitte l'état 1 après n transitions
2- La chaine est elle ergodique ?
3- Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} P^n$

Exercice 4

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaine de Markov d'espace d'état $E = \{1,2,3,4\}$ et de matrice de transition P telle que

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 & 0 \\ 4/5 & 0 & 1/5 & 0 \\ 1/5 & 3/10 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

1- Calculer la probabilité $P(X_5 = 3, X_6 = 1, X_7 = 3, X_8 = 3 \ / X_4 = 2)$
2- Quelle est la probabilité que partant de l'état 4, la chaine le quitte pour la première fois après 5 transitions ?
3- Soit la loi initiale (1/4,1/4,1/4,1/4) quelle est la probabilité qu'après 2 transitions la chaine soit à l'état 4 ?

Exercice 5

On considère une chaine de Markov à valeurs dans $E = \{0,1,2\}$ caractérisée par une distribution initiale $\pi(0) = (0.5, 0.5, 0)$ et par la matrice transition suivante :

$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$$

1- Trouver la loi de X_2
2- Calculer $P(X_1 = 2, X_2 = 1 / X_0 = 1)$

Exercice 6

On considère une chaine de Markov à 3 états dont la matrice de transition est donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

1- Donner le graphe de transition et calculer la distribution stationnaire
2- Trouver les valeurs et vecteurs propres de P
3- Ecrire P sous la forme SDS^{-1} et calculer $\lim_{n\to\infty} P^n$
4- Donner la distribution limite

Exercice 7

Considérons une chaine de Markov d'espace d'états $E = \{1,2,3,4\}$ et de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer

1- Les classes transitoires et récurrentes de la chaine.
2- La probabilité d'absorption en {4} partant de l'état 2.

3- Les temps d’absorption .