Chapitre 1:Rappels et compléments de probabilités
Lois et espérances conditionnelles

Rabah Messaci

Département de Probabilités-Statistique
USTHB

Octobre 2011

Lois conditionnelles

Définition : Loi conditionnelle

Soit X et Y deux v.a discrètes à valeurs respectivement dans $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ et dans $\mathcal{Y} = \{y_1, y_2, ..., y_p, ...\}$.
On appelle loi conditionnelle de X sachant que $Y = y_p$ la loi définie par :

$$P(X = x_n / Y = y_p) = \frac{P(X = x_n, Y = y_p)}{P(Y = y_p)}$$

pour tout $n \in N$.

Lois conditionnelles

Exemple 1

$X_1 \sim B(p)$, $X_2 \sim B(p)$ indépendantes. Loi de $X_1/X_1 + X_2 = 1$?
Il faut déterminer $P(X_1 = 0/X_1 + X_2 = 1)$ et $P(X_1 = 1/X_1 + X_2 = 1)$
On a : $X_1 + X_2 \backsim B(2, p)$

$$P(X_1 = 0/X_1 + X_2 = 1) = \frac{P(X_1 = 0, X_1 + X_2 = 1)}{P(X_1 + X_2 = 1)} = \frac{P(X_1 = 0, X_2 = 1)}{P(X_1 + X_2 = 1)} = \frac{P(X_1 = 0)P(X_2 = 1)}{P(X_1 + X_2 = 1)} = \frac{pq}{2pq} = \frac{1}{2}$$

$P(X_1 = 1/X_1 + X_2 = 1) = \frac{1}{2}$ Donc $X_1/X_1 + X_2 = 1 \sim B(\frac{1}{2})$

Lois conditionnelles

Lois conditionnelles

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire absolument continu de densité $f_{(X,Y)}$.
On appelle loi conditionnelle de X sachant que $Y = y$ la loi définie par :la densité :

$$f_X(x/Y = y) = \frac{f_{(X,Y)}(x, y)}{f_Y(y)}$$

pour tout $x \in R$.

Lois conditionnelles

Exemple 2

Soit un vecteur aléatoire (X, Y) de densité $f(x, y) = xe^{-xy}\ 1_{\{x>0\ ,\ y>1\}}$. Loi de $X/X+Y=y$?

On a après calculs : $f_Y(y) = \dfrac{1}{y^2}\ 1_{\{\ y>1\}} \implies$

$f_X(x/Y=y) = \dfrac{xe^{-xy}1_{\{x>0\ ,\ y>1\}}}{\dfrac{1}{y^2}1_{\{\ y>1\}}} = xy^2e^{-xy}1_{\{x>0\ \}}$ Par exemple :

$f_X(x/Y=1) = xe^{-x}1_{\{x>0\ \}}$, donc $X/Y=1 \sim \gamma(2,1)$

$f_X(x/Y=2) = 4xe^{-2x}1_{\{x>0\ \}}$,donc $X/Y=2 \sim \gamma(2,2)$

D'une manière générale on remarque que : $X/Y=y \sim \gamma(2,y)$

Espérances conditionnelles

Définition : espérance conditionnelle

On appelle espérance conditionnelle de X sachant que $Y = y$ l'espérance de la loi conditionnelle de X sachant que $Y = y$, i.e

- Dans le cas discret :$E(X/Y = y_p) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i P(X = x_i/Y = y_p)$
- Dans le cas continu : :$E(X/Y = y) = \int_R x \; f_X(x/Y = y)dx$

Exemples

- Exemple 1 :$E(X_1/X_1 + X_2 = 1) = \frac{1}{2}$ (puisque $X_1/X_1 + X_2 = 1 \sim B(\frac{1}{2})$)
- Exemple 2 : $E(X/Y = 1) = 2$, $E(X/Y = 2) = 1$. D'une manière générale $E(X/Y = y) = \frac{2}{y}$

Espérances conditionnelles

Exemples

- Exemple 1 :$E(X_1/X_1+X_2=1)=\frac{1}{2}$ (puisque $X_1/X_1+X_2=1 \sim B(\frac{1}{2})$)
- Exemple 2 : $E(X/Y=1)=2$, $E(X/Y=2)=1$. D'une manière générale $E(X/Y=y)=\frac{2}{y}$

Espérances conditionnelles

Exemples

$X \sim N_2(m, \Sigma)$ avec $m = (m_1, m_2)^t$ et $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\ \sigma_1\sigma_2 \\ \rho\ \sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ on a alors :

$$f_X(x/Y = y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \exp(-\frac{1}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}(x - m_1 - \frac{\rho\sigma_1(y-m_2)}{\sigma_2})^2)$$

donc $X/Y = y \sim N_1(m_1 - \frac{\rho\sigma_1(y-m_2)}{\sigma_2}, \sigma_1^2(1-\rho^2))$

On déduit : $E(X/Y = y) = m_1 - \dfrac{\rho\sigma_1(y-m_2)}{\sigma_2}$

et $Var(X/Y = y) = \sigma_1^2(1-\rho^2)$

la courbe de $y \to E(X/Y = y)$ set dite courbe de régresion de X sur Y. Dans le cas gaussien, c'est donc une droite dite droite de régression.

Espérances conditionnelles

On peut définir de même les autres moments conditionnels

- $E(X^k/Y=y)=\int\limits_R x^k\ f_X(x/Y=y)dx$ moment d'ordre k de la loi conditionnelle
- notamment la variance conditionnelle $Var(X/Y=y)=E(X^2/Y=y)-(E(X/Y=y))^2$

Espérances conditionnelles

Définition

On appelle espérance conditionnelle de X sachant Y la variable aléatoire qui prend la valeur $E(X/Y = y)$ lorsque Y prend la valeur y.

Définition

On appelle moment conditionnel d'ordre k de X sachant Y la variable aléatoire, notée $E(X^k/Y)$ qui prend la valeur $E(X^k/Y = y)$ lorsque Y prend la valeur y. En particulier $Var(X/Y) = E(X^2/Y) - E(X/Y)^2$

Remarque :
Les variables aléatoires $E(X/Y)$, $E(X^k/Y)$, $Var(X/Y)$ sont des fonctions de la v.a Y. Elles admettent à leur tour des moments, et on a par exemple :

$$E(X/Y) = \int_R E(X/Y = y) f_Y(y) dy = \int_R \left(\int_R x f_X(x/Y = y) dx \right) f_Y(y) dy$$

Espérances conditionnelles

Exemples

Exemple 2 : $E(X/Y=y)=\dfrac{2}{y} \implies E(X/Y)=\dfrac{2}{Y}$

$Var(X/Y=y)=\dfrac{2}{y^2} \implies Var(X/Y)=\dfrac{2}{Y^2}$

Cas gaussien :

$E(X/Y=y)=m_1-\dfrac{\rho\sigma_1(y-m_2)}{\sigma_2} \implies E(X/Y)=m_1-\dfrac{\rho\sigma_1(Y-m_2)}{\sigma_2}$

$Var(X/Y=y)=\sigma 1^2(1-\rho^2) \implies Var(X/Y)=\sigma_1^2(1-\rho^2)$

Estimation

Théorème de l'espérance cconditionnelle

On a $E(E(X/Y)) = E(X)$

Démonstration (Dans le cas continu)

$$E(E(X/Y)) = \int_R (\int_R x f_X(x/Y = y)dx) f_Y(y)dy = \int_R \int_R x f_X(x/Y = y) f_Y(y)dxdy =$$

$$\int_R \int_R x \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)} f_Y(y)dxdy = \int_R \int_R x f_{(X,Y)}(x,y)dxdy = E(X)$$

Théorème de la variance cconditionnelle

On a $Var(X) = E(Var(X/Y)) + Var(E(X/Y))$