Chapitre 4

Approximation par la méthode des éléments finis

1 Introduction

Nous avons déjà vu comment transformer un problème aux limites concret en un problème variationnel. Nous avons ensuite énoncer un théorème (Théorème de Lax-Milgram) qui assure l'existence et l'unicité de la solution de ce problème variationnel. Dans ce chapitre, nous allons voir comment déterminer explicitement une solution approchée à partir du problème variationnel ainsi qu'avoir une idée assez précise de l'erreur commise par rapport à la solution exacte.

2 Stratégie de la méthode

Considérons le problème variationnel général suivant :

$$\text{trouver } u \in V \text{ tel que pour tout } v \in V, \text{ on ait : } \mathcal{A}(u, v) = L(v) \qquad (1)$$

où V est un sous espace de Hilbert, L une forme linéaire continue sur V et $\mathcal{A}$ une forme bilinéaire et coercive sur V. Nous savons que ce problème admet une unique solution, noté u, dans l'espace V.

L'idéé : résoudre ce problème variationnel non dans V tout entier mais dans un sous espace de dimension finie, noté V_h, de V. V_h est de dimension finie pour n'avoir qu'un nombre fini d'inconnues à évaluer et qu'on pourra les calculer facilement en résolvant un système linéaire.

Définition : On dit que les espaces V_h, $h > 0$, forment une approximation *interne* ou *conforme* de V si :

1. pour tout $h > 0$, $V_h \subset V$,
2. pour tout $v \in V$, il existe $v_h \in V_h$ tel que

$$\|v - v_h\|_V \to 0, \text{quand } h \to 0$$

2.1 Résolution du problème variationnel approché

On se propose de résoudre le problème variationnel approché suivant

$$\text{trouver } u_h \in V_h \text{ tel que pour tout } v_h \in V_h, \text{ on ait : } \mathcal{A}(u_h, v_h) = L(v_h) \qquad (2)$$

Nous avons d'abord le résultat suivant :

Proposition 1. Soit V un espace de Hilbert et V_h un sous espace de dimension finie de V. On suppose que le problème variationnel (1) vérifie les hypothèses du Théorème de Lax-Milgram, de sorte que le problème (1) admette une unique solution $u \in V$. Le problème variationnel (2) admet aussi une unique solution u_h dans V_h et on a par ailleurs l'estimation de l'erreur entre u et u_h sous la forme :

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$$

2.2 Calcul effectif de la solution approchée

L'espace V_h étant de dimension finie N_h, il admet une base, notée $(\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots, \varphi^{(N_h)})$. On cherche alors $u_h \in V_h$ sous forme d'une combinaisons linéaire des éléments de cette base :

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_h} u_i \varphi^{(i)}$$

On a alors le résultat suivant :

Proposition 2. La fonction $u_h = \sum_{i=1}^{N_h} u_i \varphi^{(i)}$ de V_h est solution du problème variationnel approchée (2) si et seulement si le vecteur $X \in \mathbb{R}^{N_h}$ de composantes $(u_i)_{1 \leq i \leq N_h}$ est solution du système linéaire suivant :

$$AX = B \qquad (3)$$

où A est la matrice de taille $N_h \times N_h$, d'éléments

$$A_{i,j} = \mathcal{A}(\varphi^{(j)}, \varphi^{(i)}), \quad (i,j) \in \{1, \ldots, N_h\}^2,$$

et B est le vecteur de dimension N_h de composantes,

$$B_i = L(\varphi^{(i)}).$$

Par ailleurs, la matrice A est définie positive et le système linéaire (3) admet une unique solution.

3 La méthode des éléments finis en dimension un

Soit $\Omega =]0,1[$. Considérons le problème aux limites suivant : Trouver u solution de $(f \in L^2(\Omega))$

$$\begin{cases} -u'' = f(x), \quad \forall x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \ , \end{cases} \qquad (4)$$

1) Le problème variationnel est de la forme

$$\begin{cases} V = \{v \in H^1(\Omega),\ v(0) = v(1) = 0\}, \\ \\ \mathcal{A}(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx \\ \\ L(v) = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx \end{cases} \qquad (5)$$

2) On se donne un ensemble de points et $x_i, i = 0, 1, \ldots N$ de $]0,1[$ tels que .

$$0 = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_N = 1$$

On considère un pas constant

$$x_i = ih, \quad \forall = 0, \ldots, N \quad avec \ \ h = \frac{1}{N}$$

Les points x_i sont aussi appelés les sommets (ou nœuds) du maillage.

3) On introduit l'espace variationnel discret V_h définie par :

$$V_h = \{v_h \in C^0([0,1]), v_{h\ [x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{R},\ \ 0 \leq j \leq N-1,\ v_h(0) = v_h(1) = 0\}$$

Nous avons la proposition suivante

Proposition 3. L'espace V_h est un sous-espace de V de dimension $N-1$, et une base est formée des fonctions $\varphi^{(i)}, i \in \{1, \ldots, N-1\}$ suivantes :

$$\varphi^{(i)} \in V_h, \quad \varphi^{(i)}(x_j) = \delta_{i,j} (= 1 \ \ si \ i = j \ , 0 \ \ sinon)$$

Ces fonctions sont appelées **fonctions chapeaux**, et on a :

Pour tout $v_h \in V_h$,

$$v_h = \sum_{j=1}^{N-1} v_h(x_j)\varphi^{(j)}(x), \quad \forall x \in [0,1]$$

Introduisons la fonction $\varphi^{(j)}$ suivante

$$\varphi^{(j)}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}, & si \ \ x \in [x_{j-1}, x_j], \\ \\ \dfrac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j}, & si \ \ x \in [x_j, x_{j+1}], \\ \\ 0, \ sinon \end{cases}$$

4) Le problème variationnel discret (2) admet une solution unique et cette solution est de la forme

$$u_h = \sum_{j=1}^{N} u_h(x_j)\varphi^{(j)}(x), \quad \forall x \in [0,1]$$

où le vecteur de $\mathbb{R}^N$ de composantes u_j est solution du système linéaire $AU = B$, où :

$$U = (u_h(x_j))_{1 \le j \le N-1},$$

$$B = (\int_0^1 f(x)\varphi^{(i)}(x)\,dx)_{1 \le i \le N-1},$$

et

$$A = (\int_0^1 \varphi'^{(j)}(x)\varphi'^{(i)}(x)\,dx)_{1 \le i,j \le N-1}$$

La plupart des coefficients de A sont nuls. Les coefficients non nuls se calculent facilement :

$$A_{i,i-1} = \int_0^1 \varphi'^{(i)}(x)\varphi'^{(i-1)}(x)\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(-1)}{h}\frac{1}{h}\,dx = -\frac{1}{h}$$

$$A_{i,i} = \int_0^1 (\varphi'^{(i)}(x))^2\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h^2}\,dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{(-h)^2}\,dx = \frac{2}{h}$$

$$A_{i,i+1} = \int_0^1 \varphi'^{(i+1)}(x)\varphi'^{(i)}(x)\,dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h}\frac{(-1)}{h}\,dx = -\frac{1}{h}$$

Finalement

$$A = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0... & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0... & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0.. & 0 & ..0 & -1 & 2 & -1 \\ 0.. & 0 & .. & . & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Pour obtenir le vecteur b, il faut calculer l'intégrale :

$$b = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\varphi^{(i)}(x)\,dx \qquad \text{pour tout } 1 \le i \le N-1$$

En pratique, on a recours à des formules d'intégration numérique (formule du point milieu, formule des trapèzes, formule de Simpson)

(formule des trapèzes : $\int_{x_i}^{x_{i+1}} h(x)\,dx = \dfrac{x_{i+1}-x_i}{2}(h(x_{i+1})+h(x_i)))$

Par la formule du trapèze, on trouve :

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\varphi^{(i)}(x)\,dx = \frac{x_i - x_{i-1}}{2}(f(x_i)\varphi^{(i)}(x_i) + f(x_{i-1})\varphi^{(i-1)}(x_{i-1})) = \frac{h}{2}f(x_i)$$

De la même manière on trouve

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\varphi^{(i)}(x)\,dx = \frac{x_{i+1} - x_i}{2}(f(x_{i+1})\varphi^{(i)}(x_{i+1}) + f(x_i)\varphi^{(i)}(x_i)) = \frac{h}{2}f(x_i)$$

D'où

$$b = h(f(x_i))_{1\le i\le N}$$