Université Badji Mokhtar Annaba
3^{me} année licence Académique
Module : Mesure et intégration

Département de Mathématiques
2020/2021
Groupes : 1, 2 et 3

Micro-intérogation
(variante A)

Exercice 1. $\mathbf{6,5}$

I- *Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant chaque réponse.*

a) 1,25 pt *soit* $E = \{a, b, c, d\}$, *la famille* $\mathcal{A} = \{\emptyset, E, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ *est une* σ-*algèbre sur* E.

b) 1,25 pt *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré, alors* $\forall A, B \in \mathcal{A}$ *on a* $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

c) 1 pt *Toute partie négligeable n'est pas forcément mesurable.*

II- a) 1,5 pt *Donner la définition d'une mesure.*

b) 1,5 pt *Citer le théorème de la convergence dominé.*

Exercice 2. $\mathbf{5,5}$

I- *On définit* f_n, *pour tout* $n \geq 1$ *par* $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \exp(-2x)\mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x)$

a) 0,75 pt *Montrer que cette suite converge puis calculer* $\lim_n f_n(x)$.

b) 2 pt *Montrer que cette suite est monotone. En déduire la valeur de* $\lim_n \int_{[0,+\infty[} f_n d\lambda$.

II- *Calculer* $\lim_n \int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x + x^n}$.

$(*)$ $\mathbf{0,5 + 0,5}$

$(**)$ $\mathbf{0,75 + 0,75 + 0,25 + 0,25}$

La micro-intérogation est notée sur 12 points.

Corrigé de la Micro-interrogation

Variante A.

Exercice 1 : (6,5 pts)

I) a- Faux (0,5), car $\{a\}^c = \{b, c, d\} \notin \mathcal{A}$ (0,75)

b- Faux (0,5), car : $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ (0,75)

ou $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ si $A \cap B = \phi$

c- Vraie (0,5), Car : A négligeable $\overset{déf}{\Longleftrightarrow} \exists B \in \mathcal{A}$ tq $A \subset B$ et $\mu(B) = 0$ (0,5)

II) (a) Définition d'une mesure :

Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesuré. Une mesure μ sur X est une application définie de $\mathcal{A}$ vers $\overline{\mathbb{R}}_+$ vérifiant (1,5)

(1) $\mu(\phi) = 0$

2) $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ tq $A_n \cap A_m = \phi$ pour $m \neq n$, alors

$$\mu\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i \geq 0} \mu(A_i)$$

b) Le théorème de la convergence dominée :

Soit $f_n : (X, \mathcal{A}, \mu) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $n \geq 0$ mesurables, si (1,5)

⊙ $\{f_n(x)\}_n$ converge vers $f(x)$, on a :

⊙ $|f_n(x)| \leq g(x)$ tq $g \in \mathcal{L}^1$: $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$

$= \displaystyle\int_X \lim_{n \to +\infty} f_n \, d\mu$

Exercice 2 : (5,5 pts)

(I) $f_n(x) = (1+\frac{x}{n})^n e^{-2x} \cdot 1\!\!1_{\mathbb{R}_+}(x)$

a) $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \left[(1+\frac{x}{n})^n e^{-2x}\right] \cdot 1\!\!1_{\mathbb{R}_+}(x)$

(0,5) $= \lim_{n\to+\infty} \left[(1+\frac{x}{n})^{\frac{n}{x}\cdot x} e^{-2x}\right] \cdot 1\!\!1_{\mathbb{R}_+}(x)$

(0,25) $= e^{x} \cdot e^{-2x} \cdot 1\!\!1_{\mathbb{R}_+}(x) = e^{-x} \cdot 1\!\!1_{\mathbb{R}_+}(x)$

b) Montrons que $\{f_n\}_{n\geq 1}$ est une suite croissante. (0,75)

$f_{n+1}(x) = (1+\frac{x}{n+1})^{n+1} \cdot e^{-2x} \cdot 1\!\!1_{[0,+\infty[}$

$$(1+\frac{x}{n+1})^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k \cdot \left(\frac{x}{n+1}\right)^k$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k \left(\frac{x}{n+1}\right)^k + \left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\geq 1 + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k \frac{x^k}{(n+1)^k} \cdot (x \geq 0) \quad (*)$$

$$C_{n+1}^k \left(\frac{x}{n+1}\right)^k = \frac{(n+1)n!}{k!(n+1-k)(n-k)!} \left(\frac{x}{n}\right)^k \cdot \frac{n^k}{(n+1)^k} \quad (k \geq 1)$$

$$= \frac{n^k}{(n+1-k)(n+1)^{k-1}} \cdot C_n^k \left(\frac{x}{n}\right)^k$$

Montrons que :

$$\frac{n^k}{(n+1-k)(n+1)^{k-1}} \geq 1 \iff (n+1)^k - n^k \leq k(n+1)^{k-1}.$$

On a : $(n+1)^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i n^i = n^k + \sum_{k=0}^{k-1} C_k^i n^i$

$$\iff (n+1)^k - n^k = k \sum_{k=0}^{k-1} \frac{(k-1)!}{i!(k-i)!} n^i$$

$$= k \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(k-1)!}{i!\,(k-1-i)!} \cdot \frac{1}{(k-i)} \cdot n^i$$

$$\leq k \cdot \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^{i}\, n^i = k\cdot(n+1)^{k-1}$$

Par conséquent : $C_{n+1}^{k}\left(\frac{x}{n+1}\right)^k \geq C_n^k\left(\frac{x}{n}\right)^k$, $\forall 1\leq k\leq n$

et dans ce cas $(*) \Rightarrow \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

D'où $\{f_n\}$ est croissante $\Rightarrow$

En utilisant le T.C.M. on obtient.

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n\, d\lambda \overset{0{,}75}{=} \int_{[0,+\infty[} \lim_{n\to+\infty} f_n\, d\lambda(x) = \int_{[0,+\infty[} e^{-x}\, d\lambda(x)$$

(la fct expo est continue) $\doteq \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1$ 0,25 0,25

II) Posons : $g_n(x) = \frac{1}{e^x + x^n} \cdot \mathbb{1}_{[0,+\infty[}$

$\odot$ $|g_n(x)| \leq \frac{1}{e^x} = e^{-x} = g(x)$ où $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_+)$ 0,5 0,5

$$\odot \lim_{n\to+\infty} g_n(x) = \begin{cases} e^{-x} & : x<1 \\ \frac{1}{e+1} & : x=1 \\ 0 & : x>1 \end{cases}$$ 0,75

Donc d'après le T.C.D on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,+\infty[} g_n\, d\lambda(x) \overset{0{,}75}{=} \int_{\mathbb{R}_+} \lim_{n\to+\infty} g_n\, d\lambda \iff$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(x)\, dx \overset{0{,}25}{=} \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} g_n(x)\, dx$$ ($g_n \geq 0$ et cont. sur $\mathbb{R}_+^*$)

$$= \int_0^1 e^{-x}\, dx = -e^{-x}\Big|_0^1 = 1-\frac{1}{e} = \frac{e-1}{e}.$$ 0,25

③