PROBABILITES AVANCEES

Les probabilités sont une discipline des mathématiques qui se focalise sur l'étude systématique de l'aléatoire et de l'incertain. Dans toute situation où une ou plusieurs éventualités peuvent se réaliser, la théorie des probabilités fournit des outils quantitatifs associés aux différentes réalisations (ex: les jeux de hasard).

Chapître 0
RAPPELS

I-1 Langage probabiliste

I-1-1 *Expériences et évènements*

a) Expérience aléatoire

Définition I-1-1: On appelle **expérience aléatoire** une expérience $\mathcal{E}$ qui, reproduite dans des conditions identiques, peut conduire à plusieurs résultats possibles, et dont on ne peut prévoir le résultat à l'avance(par exemple le lancer d'une pièce ou d'un dé, le choix d'une carte dans un paquet, mesurer la durée du trajet du domicile au travail,...). L'espace de tous les résultats possibles, appelé **ensemble fondamental** (associé à l'expérience), sera noté Ω. Un résultat possible de l'expérience est noté ω; ainsi $\omega \in \Omega$.

Pour le lancer d'une pièce ou d'un dé, Ω est fini mais Ω peut être un ensemble beaucoup plus compliqué

Exemples:

1- Lancer d'un dé $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2- Lancer de deux dés $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$

3- Lancer de deux pièces à Pile ou Face $\Omega = \{PP, FF, FP, PF\}$

4- Nombre de journées d'utilisation d'une voiture avant de faire le plein(ou la vidange) $\Omega = \mathbb{N}^*$

5- Durée de vie d'une ampoule électrique $\Omega = [0, +\infty[$

6- Observation d'un prix d'actif financier sur un intervalle de temps $[t_1, t_2]$, $\Omega = ([t_1, t_2], \mathbb{R}_+)$: ensemble des fonctions continues sur $[t_1, t_2]$ à valeurs positives.

Remarque: Comme on le voit Ω peut être fini(ex 1,2,3), infini dénombrable(ex 4) ou infini non dénombrable (ex 5,6).

b) Evènements

Définition I-1-2: On appelle évènement A (associé à l'expérience $\mathcal{E}$) un sous-ensemble de Ω *dont on peut dire au vu de*

l'expérience s'il est réalisé ou non.

Lorsqu'une expérience est faite, un évènement A est dit réalisé si la réalisation ω (le résultat) obtenue dans

l'expérience est contenue dans A.

Exemple:

$\mathcal{E}$: Lancer d'un dé $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Les évènements A :"obtenir un deux",B :"obtenir un nombre impair", C :"obtenir un multiple de trois" se traduisent par

$A = \{2\}$(évènement élémentaire car A ne contient qu'un seul résultat), $B = \{1,3,5\}, C = \{3,6\}$.

Définition *I-1-3*

· *Si $A \cap B = \varnothing$, A et B sont dits incompatibles. Un résultat de l'expérience ne peut être à la fois dans A et dans B.*

· *Ω est appelé l'évènement certain(tous les résultats de l'expérience prennent leurs valeurs dans Ω).*

· *$\varnothing$ est l'évènement impossible.*

· *On a aussi les lois de Morgan, utiles en pratique*:

$$\begin{aligned} \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B} \\ \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B} \end{aligned}$$

On note par $\mathcal{F}$ l'ensemble de tous les évènements. Nous pourrons prendre $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, ensemble de toutes les parties

de Ω, mais pas toujours.

I-1-4 *Probabilité-axiomes et propriétés:*

Etant donné une expérience $\mathcal{E}$ et son espace fondamental Ω,l'objectif de la probabilité est d'assigner à chaque évènement A un nombre $P(A)$,appelé la probabilité de l'évènement A qui nous donne une mesure précise des chances de réalisation de l'évènement A.Pour avoir une certaine cohérence avec la notion intuitive de probabilité, cette dernière doit satisfaire à certains axiomes

Proposition I-1-5 (**Axiomes de Kolmogorov**)

$$\begin{aligned} 1) \quad \forall A &\subset \Omega \qquad 0 \leq P(A) \leq 1 \\ 2)\ P(\Omega) &= 1 \\ 3)\ \forall A, B &\subset \Omega \qquad P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad si \quad A \cap B = \varnothing \end{aligned}$$

Il en découle les propriétés suivantes

Propriétés I-1-6

$$P(\varnothing) = 0$$

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \quad \text{si } A_i \cap A_j = \varnothing \quad \forall i \neq j \in \{1, 2, ..., n\}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A) \leq P(B) \quad \text{si} \quad A \subset B$$

Ces propriétés se démontrent à l'aide de la proposition précédente(exercice).

I-2 Probabilité sur un espace fini

Dans ce paragraphe, on suppose que l'ensemble fondamental Ω est **fini**. Dans ce cas, on aura toujours $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

I-2-1 Définition Une probabilité sur un ensemble Ω fini est une application $P : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ qui vérifie 2) et 3) de la proposition I-1-5 e*t donc également les propriétés* I-1-6.

Nous pouvons énoncer la proposition suivante.

Proposition I-2-2

Supposons que $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$, alors

i) Une probabilité P est entièrement déterminée par la famille $\{p_{\omega_i} = P(\{\omega_i\}), \omega_i \in \Omega\}$

ii) Etant donné une famille $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$ de nombres réels, il lui correspond une uniqu*e probabilité P telle que pour tout $\omega_i \in \Omega, p_i = P(\{\omega_i\})$, si et seulement si*

$$0 \leq p_i \leq 1, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

On a alors

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \; P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) \; = \sum_{i:\; \omega_i \in A}^{n} p_i$$

I-2-2 *Probabilité uniforme- équiprobabilité*

Un exemple important de probabilité sur Ω est celui de la probabilité uniforme, pour laquelle chaque singleton ω de Ω a la même chance de réalisation. On dit alors que l'on est dans une situation d'**équiprobabilité.** C'est le cas de tout ce qui se fait au hasard: lancer d'une pièce non truquée, d'un dé équilibré, tirage d'une boule dans une urne, tirage d'une carte dans un paquet,...Dans ce cas, on définit la probabilité de réalisation d'un évènement A, notée $P(A)$ comme étant le rapport du nombre d'éventualités favorables à la réalisation de l'évènement A ($Card\ (A)$)au nombre de toutes les éventualités (réalisations) possibles ($Card\ (\Omega)$), ainsi

$$P(A) = \frac{Card\ (A)}{Card\ (\Omega)}$$

De sorte que le calcul des probabilités se ramène, dans ce cas, à des dénombrements. Nous sommes dans le cadre du calcul combinatoire.

Remarque: Si $\omega_0 \in \Omega$, alors $P(\{\omega_0\}) = \dfrac{1}{Card\ (\Omega)}$ d'après la probabilité uniforme

En effet, comme $\Omega = \cup_{\omega \in \Omega} \{\omega\}, P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = 1$. L'équiprobabilité nous donne $P(\{\omega\}) = P(\{\omega_0\}) \forall \omega \in \Omega$. Alors $P(\Omega) = 1 = P(\{\omega\}) \sum_{\omega \in \Omega} 1 =$

$P(\{\omega\})\ Card\ (\Omega)$, ainsi

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{Card\ (\Omega)}$$

Exemple: Pour le lancer d'un dé équilibré, on a $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ et $p_i = \frac{1}{6} \forall i \in \{1,...,6\}$. Si l'évènement $A =$'obtenir un nombre pair strictement supérieur à 3', alors $A = \{4,6\}$ et donc $Card\ (A) = 2$ et par suite $P(A) = \frac{Card\ (A)}{Card\ (\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

I-3 Probabilité sur un espace Ω quelconque

Lorsque l'ensemble fondamental Ω n'est pas fini, par exemple si Ω est infini dénombrable(c'est à dire en bijection

avec $\mathbb{N}$), il ne peut y avoir d'équiprobabilité car la série $\sum_{i=0}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} p_0$ serait divergente si $p_0 > 0$ et nulle si $p_0 = 0$ et

donc différente de 1.La définition I-2-1 est donc insuffisante.

A cet effet, nous devons d'abord caractériser les propriétés que doit satisfaire la classe $\mathcal{F}$ des évènements. Sur un

ensemble fini, il est naturel de prendre $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, il n'en est plus de même lorsque Ω est infini pour des raisons que

l'on ne verra pas dans ce cours. La classe $\mathcal{F}$ doit toutefois satisfaire un certain nombre d'axiomes.

I-3-1 *Définition* : **tribu ou $\sigma-$algèbre**

*Un ensemble $\mathcal{F}$ est appelé tribu si et seulement s*i

1) $\Omega \in \mathcal{F}$

2) $\forall A \in \mathcal{F}$ *alors* $\overline{A} \in \mathcal{F}$

3) *Toute réunion dénombrable d'éléments d*e $\mathcal{F}$ *est un élément de* $\mathcal{F}$, *autrement dit*:

$$\forall A_i \in \mathcal{F}, i \in \mathbb{N},\ alors \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$$

Remarque: - $\mathcal{F} = \{\varnothing, \Omega\}$ est la tribu triviale ou grossière: c'est la plus petite tribu de Ω.

- si Ω est fini ou dénombrable, $\mathcal{P}(\Omega)$ forme une tribu

- Soit J une partie de $\mathbb{N}$ et $(\mathcal{F}_j)_{j \in J}$ une famille de tribu sur le même espace Ω, alors

$\mathcal{G} = \bigcap_{j \in J} \mathcal{F}_j$ est une tribu sur Ω.

- Soit $\mathcal{F}$ une famille de parties de Ω.Il existe une plus petite tribu sur Ω qui contient $\mathcal{F}$.

On l'appelle tribu engendrée par $\mathcal{F}$,et on la note $\sigma(\mathcal{F})$. C'est l'intersection de toutes les tribus qui contient $\mathcal{F}$

Exemples:

1) Lancer d'une pièce $\Omega = \{P, F\}$, alors $\mathcal{P}(\Omega) = \{\{P\}, \{F\}, \Omega, \varnothing\}$est une tribu.

2) $\Omega = \{1, 2, 3\}$, on peut voir que $\mathcal{F} = \{\{2, 3\}, \{1\}, \Omega, \varnothing\}$ est une tribu.

3) $\Omega = \{1, 2, 3\}, \mathcal{F} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \Omega, \varnothing\}$ n'est pas une tribu car par exemple $\{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\} \notin \mathcal{F}$

4) $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$est la tribu borélienne engendrée par les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.On admet aussi que la tribu borélienne

est la tribu engendrée par les intervalles $]-\infty, a]$.

Le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ est appelé **espace probabilisable**.

I-3-2 Définition générale d'une probabilité :

Une probabilité sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F})$ *est une application de* F *dans* $[0, 1]$ *notée* P,*telle que*

$$i) \quad P(\Omega) = 1$$

ii) Pour toute suite (dénombrable) $(A_n)_n$ *d'éléments de* $\mathcal{F}$, *deux à deux disjoints*

$$(\text{c-à-d:}\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \varnothing) \text{ , alors}$$

$$P\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n P(A_n)$$

La propriété *ii)* est appelée propriété de $\sigma-$**additivité**

La probabilité définie ci-dessus satisfait également aux propriétés I-1-6. Le résultat suivant est très utile en pratique. Pour ce résultat, on utilise les notations suivantes. Si $(A_n)_n$ est une suite décroissante de parties de Ω, *i.e.*$A_{n+1} \subset A_n$ pour tout n et si $A = \bigcap_n A_n$, nous écrivons $A_n \downarrow A$. De même, si la suite $(A_n)_n$ est croissante *i.e.*$A_n \subset A_{n+1}$pour tout n et si $A = \bigcup_n A_n$, on écrit $A_n \uparrow A$.

Proposition I-3-3: *Supposons* $P : F \longrightarrow [0, 1]$ *comme définie en I-3-2 et vérifiant les propriétés I-1-6, alors les trois*

propriétés suivantes sont équivalentes.

a) propriété de $\sigma-$*additivité*

b) Pour toute suite $(A_n)_n$ *croissante*

$$P\left(\bigcup_n A_n\right) = \lim_n \uparrow P(A_n)$$

c) Pour toute suite $(A_n)_n$ *décroissante*

$$P\left(\bigcap_n A_n\right) = \lim_n \downarrow P(A_n)$$

Ce résultat entraîne en particulier que si $(A_n)_n$ est une suite croissante ou décroissante d'évènements, la suite $(P(A_n))_n$ admet une limite quand n tend vers l'infini.

remarque: Si $(A_n)_n$ est une suite quelconque d'événements de $\mathcal{F}$, alors on a toujours

$$P\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n P(A_n)$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ s'appelle espace probabilisé.

La définition suivante est fondamentale en théorie des probabilités. Elle introduit la notion de "vrai ou faux" qui dépend de la probabilité choisie sur Ω.

Définition I-3-4 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace probabilisé*

- *Un évènement* A *tel que* $P(A) = 0$ *est dit négligeable.*

- *Une propriété est vraie* P- *presque sûrement* $(P - p.s.)$ *si l'ensemble des* $\omega \in \Omega$ *pour lesquels elle est vraie est de probabilité égale à* 1.*Dans ce cas, l'ensemble des* $\omega \in \Omega$ *pour lesquels la propriété est fausse est négligeable.*

I-4 Probabilité conditionnelle et indépendance

I-4-1 *Probabilité conditionnelle*:

Il arrive souvent que la probabilité de réalisation d'un évènement varie suivant que l'on dispose ou non de certaines informations. Par exemple, une personne possède certains symptomes d'une maladie dont il peut en souffrir, on effecue alors un test sanguin et le résultat s'avère négatif, alors la probabilité que l'individu soit porteur de la maladie change (elle peut diminuer mais pas s'annuler, car les tests sanguins ne sont pas fiables à 100%). D'où l'intérêt du calcul des probabilités soumis à certaines conditions.

Définition I-4-1 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace probabilisé. On appelle probabilité conditionnelle de réalisation de l'évènement* A, *sachant la réalisation de l'évènement* B, *l'application de* $\mathcal{F}$ *dans* $[0, 1]$ *définie par*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad \textit{avec } P(B) > 0$$

Remarque: $P(.|B)$ est une probabilité sur $\mathcal{F}$.

Cette définition se généralise à un nombre fini quelconque d'évènements $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1) P(A_2|A_1) P(A_3|A_1 \cap A_2) ... P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap ... A_{n-1})$$

Démonstration: par récurrence sur n (exercice).

I-4-2 *Probabilités totales- formule de Bayes*

Les probabilités conditionnelles permettent aussi de calculer la probabilité d'un évènement en conditionnant sur tous

les cas possibles. Ces cas possibles correspondent à une partition de Ω ou en ce qu'on appelle un 'système complet

d'évènements'

Définition I-4-2 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace probabilisé, la famille* $(A_i)_{i \geq 1}$*forme un système complet d'évènements si et* *seulement si*

$$a)\quad \bigcup_{i\geq 1} A_i = \Omega$$

$$b)\quad A_i \cap A_j = \varnothing,\ \forall i \neq j$$

I-4-3 *Formule des Probabilités totales*

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un* espace probabilisé, une famille $(A_i)_{i\geq 1}$(finie ou dénombrable) qui forme un système complet

d'évènements et E un évènement quelconque, alors on a

$$E = E \cap \Omega = E \cap \left(\bigcup_{i\geq 1} A_i \right) = \bigcup_{i\geq 1} (E \cap A_i)$$

Comme les A_i sont deux à deux incompatibles, il en est de même pour les $(E \cap A_i)$ et ainsi

$$\begin{aligned} P(E) &= P\left(\bigcup_{i\geq 1} (E \cap A_i) \right) \\ &= \sum_{i\geq 1} P(E \cap A_i) \end{aligned}$$

Soit

$$P(E) = \sum_{i\geq 1} P(A_i) P(E|A_i)$$

Lorsqu'on a une partition de Ω en n hypothèses ou cas possibles $A_i, i = 1, ..., n$, et que l'on sait calculer les $P(A_i)$ ainsi

que les $P(E|A_i)$, on peut se poser le problème inverse: calculer les $P(A_i|E)$ à l'aide des quantités . La réponse est

donnée par la formule suivante (quelquefois appelée formule des probabilités des causes).

I-4-4 *Formule de Bayes*

Comme

$$P(A_i|E) = \frac{P(A_i \cap E)}{P(E)} = \frac{P(A_i) P(E|A_i)}{P(E)}$$

La formule nous permet d'écrire

$$P(A_i|E) = \frac{P(A_i) P(E|A_i)}{\sum_{i\geq 1} P(A_i) P(E|A_i)}$$

I-4-5 *Indépendance de deux évènements*

Définition I-4-5 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace probabilisé. Deux évènements* A *et* B *sont dits indépendants si et seulement si*

$$P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

Remarques: 1) Si A et B sont indépendants, il est évident que $P\left(A\,|B\,\right)=P\left(A\right)$

2) La notion d'indépendance dépend de la probabilité P.Deux évènements peuvent être indépendants pour une

probabilité P_1mais pas pour une probabilité P_2.

3) Un évènement B de probabilité nulle($P\left(B\right)=0$) est indépendant de n'importe quel évènement de probabilité non

nulle.

4) Si A et B sont indépendants, il en est de même de $\overline{A}$ et B, A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et $\overline{B}$.