

Chapitre 1

Vecteurs aléatoires

Définition 1.1 Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace probabilisé et $X = (X_1, \dots, X_n)$ une application de Ω dans \mathbb{R}^n , qui à tout élément w de Ω fait correspondre une suite $X(w) = (X_1(w), \dots, X_n(w))$.

On dit que X est un vecteur aléatoire si pour tout $i = \overline{1, n}$, l'application X_i est une v.a.

Si $n = 1$, on dit variable aléatoire.

Si $n = 2$, on dit couple de variables aléatoires où v.a à deux dimensions.

1.1 Couple de variables aléatoires

Le couple de variables aléatoires (X, Y) est défini comme une application $(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ à valeurs dans le plan \mathbb{R}^2 .

Exemple 1.1 On place au hasard deux boules rouge et vert dans deux boîtes A et B . On note X , la variable aléatoire « nombre de boules dans la boîte A » et Y , la variable aléatoire « nombre de boîtes vides ».

Définition 1.2 On appelle fonction de répartition du couple (X, Y) la fonction

$$F_{(X,Y)}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y).$$

1.1.1 Cas discrèt

Définition 1.3 On dit que (X, Y) est un couple discèt si X et Y sont deux v.a discrètes.

Loi jointe d'un couple de v.a finies

On suppose que la v.a X prend l'une quelconque de m valeurs : x_1, \dots, x_m et que la v.a Y prend l'une quelconque de n valeurs : y_1, \dots, y_n . La loi de répartition d'une v.a à deux dimension (X, Y) est définie par

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n$$

avec : $p_{ij} \geq 0$ et $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$. Cette loi peut être donnée par

$Y(\Omega)$ $X(\Omega)$		y	
x		$P(X = x \cap Y = y)$	

Définition 1.4 La probabilité que $X = x_i, i = 1, \dots, m$ est donnée par

$$P(X = x_i) = \sum_{j=1}^n p_{ij} = p_{i\bullet}$$

La probabilité que $Y = y_j, j = 1, \dots, n$ est donnée par

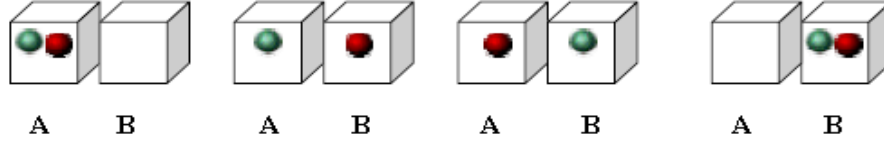
$$P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^m p_{ij} = p_{\bullet j}$$

Les $p_{i\bullet}$ et $p_{\bullet j}$, ($i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n$) constituent les lois de probabilité pour les v.a X et Y . Elles sont dites lois marginales de v.a X et Y respectivement.

Remarque 1.1 Il est clair que l'on a

$$\sum_{i=1}^m p_{i\bullet} = \sum_{j=1}^n p_{\bullet j} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1.$$

Exemple 1.2 Dans l'exemple précédant, on a $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$, $Y(\Omega) = \{0, 1\}$ et



en effet, p_{11} correspond à $X = 0$ et $Y = 0$, c'est à dire que le nombre de boules dans la boîte A est nulle et le nombre de boites vides est nulle ; impossible, alors $p_{11} = 0$.

p_{12} correspond à $X = 0$ et $Y = 1$, alors $p_{12} = \frac{1}{4}$...de la même façon

$X \setminus Y$	0	1	Σ
0	$\frac{0}{4}$	$\frac{1}{4}$	$p_{1\bullet} = \frac{1}{4}$
1	$\frac{2}{4}$	$\frac{0}{4}$	$p_{2\bullet} = \frac{1}{2}$
2	$\frac{0}{4}$	$\frac{1}{4}$	$p_{3\bullet} = \frac{1}{4}$
Σ	$p_{\bullet 1} = \frac{1}{2}$	$p_{\bullet 2} = \frac{1}{2}$	$p_{ij} = 1$

donc

X	0	1	2
$p_{i\bullet}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

et

Y	0	1
$p_{1\bullet}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

et $E(X) = 1$, $E(Y) = \frac{1}{2}$.

Loi conditionnelle d'un couple de v.a

Définition 1.5 La conditionnelle de Y si $Y = y_j$ est définie par

$$P_{Y=y_j}(X = x_i) = P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}$$

avec $p_{\bullet j} \neq 0, \forall j = 1, \dots, n$.

De même

$$P_{X=x_i}(Y = y_j) = P(Y = y_j | X = x_i) = \frac{P(Y = y_j, X = x_i)}{P(X = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}$$

avec $p_{i\bullet} \neq 0, \forall i = 1, \dots, m$.

Variables aléatoires indépendantes

Définition 1.6 1. Les deux v.a X et Y sont dites indépendantes si seulement si pour tout couple (i, j) , on a

$$p_{ij} = p_{i\bullet} \times p_{\bullet j}, \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n.$$

2. Si l'espérance mathématique de la v.a XY existe, alors

$$E(XY) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i y_j p_{ij}.$$

Remarque 1.2 Si X et Y sont indépendantes, alors

$$E(XY) = \sum_{i=1}^m x_i p_{i\bullet} \sum_{j=1}^n y_j p_{\bullet j} = E(X) E(Y).$$

La réciproque n'est pas toujours vraie.

Exemple 1.3 Dans l'exemple précédant, on pose $Z(\Omega) = XY(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et soient l'évènement $U = \{XY = 0\} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (2, 0)\}$, alors $P(U) = \frac{3}{4}$, l'évènement

$V = \{XY = 1\} = \{(1, 1)\}$, alors $P(V) = \frac{0}{4}$, l'évènement $W = \{XY = 2\} = \{(2, 1)\}$, alors $P(W) = \frac{1}{4}$, donc

z_i	0	1	2	Σ
p_{z_i}	$\frac{3}{4}$	$\frac{0}{4}$	$\frac{1}{4}$	1
$z_i p_{z_i}$	0	0	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{2}$

alors $E(XY) = E(X)E(Y) = \frac{1}{2}$, mais X et Y ne sont pas indépendantes, puisque par exemple on a : $p_{11} = 0$, $p_{1\bullet} = \frac{1}{4}$ et $p_{\bullet 1} = \frac{1}{2}$ alors $p_{11} \neq p_{1\bullet} \times p_{\bullet 1}$.

1.1.2 Cas continu

Définition 1.7 Un couple de v.a $Z = (X, Y)$ est dit absolument continu s'il existe une application $f(x, y)$ vérifiant les propriétés

- i) $f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$.

Remarque 1.3 1. La probabilité que le point (X, Y) se trouve dans le domaine Δ est

$$P[(X, Y) \in \Delta] = \iint_{\Delta} f(x, y) dx dy.$$

2. En particulier, si $\Delta = [a, b] \times [c, d]$

$$P[(X, Y) \in \Delta] = P[(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d)] = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx.$$

Fonction de répartition

Définition 1.8 La fonction de répartition du couple de v.a $Z = (X, Y)$ est définie par

$$F_Z(x, y) = P[(X \leq x, Y \leq y)] = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_Z(u, v) dv du.$$

Remarque 1.4 1. On a : $f_Z(x, y) = \frac{\partial^2 F_Z(x, y)}{\partial x \partial y}$.

2. Les fonctions

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(u, v) dv du = \lim_{y \rightarrow +\infty} F_Z(x, y)$$

$$\text{et } F_Y(y) = P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(u, v) du dv = \lim_{x \rightarrow +\infty} F_Z(x, y)$$

sont les fonctions de répartition marginales des v.a X et Y .

3. Les fonctions

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, v) dv \quad \text{et} \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, y) du$$

sont les fonctions de densités marginales des v.a X et Y , avec $f_X(x) = F'_X(x)$ et $f_Y(y) = F'_Y(y)$.

Exemple 1.4 Soient $c \in \mathbb{R}$, f la fonction définie par

$$f(x, y) = cxye^{-x^2-y^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}_+$$

1. Déterminer c pour que f soit la fonction de densité d'un couple aléatoire (X, Y) .
2. Calculer $F_{(X,Y)}$ la fonction de répartition du couple (X, Y) .
3. En déduire les fonctions de répartition marginales.
4. Calculer les fonctions de densité marginale.

Solution 1 1. La fonction f doit être positive, ainsi $c \geq 0$, de plus $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$,
alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} cxye^{-x^2-y^2} dx dy = \frac{c}{4} = 1 \iff c = 4.$$

2. Fonction de répartition du couple (X, Y) .

$$F_{(X,Y)}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) dv du.$$

- Si x ou $y \in]-\infty, 0[$ alors $F_{(X,Y)}(x, y) = 0$.
- Si x et $y \in [0, +\infty[$ alors

$$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(x, y) &= \int_0^x \int_0^y 4uve^{-u^2-v^2} dv du = 4 \int_0^x ue^{-u^2} du \int_0^y ve^{-v^2} dv \\ &= \left(1 - e^{-x^2}\right) \left(1 - e^{-y^2}\right). \end{aligned}$$

3. Fonctions de répartition marginales : si x et $y \in [0, +\infty[$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \lim_{y \rightarrow +\infty} F_{(X,Y)}(x, y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 - e^{-x^2}\right) \left(1 - e^{-y^2}\right) = \left(1 - e^{-x^2}\right) \\ \text{et } F_Y(y) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} F_{(X,Y)}(x, y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - e^{-x^2}\right) \left(1 - e^{-y^2}\right) = \left(1 - e^{-y^2}\right). \end{aligned}$$

4. Fonctions de densité marginale si x et $y \in [0, +\infty[$

$$\begin{aligned} f_X(x) &= F'_X(x) = 2xe^{-x^2} 1_{\mathbb{R}_+}(x) \\ \text{et } f_Y(y) &= F'_Y(y) = 2ye^{-y^2} 1_{\mathbb{R}_+}(y). \end{aligned}$$

Loi conditionnelle

Définition 1.9 Soit $Z = (X, Y)$ un couple aléatoire absolument continu, f_Z sa fonction de densité.

1. La loi conditionnelle de X sachant Y est donnée par

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_Z(x, y)}{f_Y(y)}, \quad \text{avec } f_Y(y) \neq 0.$$

2. La loi conditionnelle de Y sachant X est donnée par

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_Z(x, y)}{f_X(x)}, \quad \text{avec } f_X(x) \neq 0.$$

Définition 1.10 Soit (X, Y) un couple aléatoire absolument continu.

1. L'espérance conditionnelle de X sachant Y est donnée par

$$E(X | Y = y) = \int_{\mathbb{R}} x f_{X|Y=y}(x) dx.$$

2. L'espérance conditionnelle de Y sachant X est donnée par

$$E(Y | X = x) = \int_{\mathbb{R}} y f_{Y|X=x}(y) dy.$$

Variables aléatoires indépendantes

Définition 1.11 Les deux v.a X, Y sont dites indépendantes si seulement si

$$P[(X \leq x, Y \leq y)] = P(X \leq x) P(Y \leq y), \quad \text{ou}$$

$$F_{(X,Y)}(x, y) = F_X(x) F_Y(y), \quad \text{ou}$$

$$f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x) f_Y(y).$$

Remarque 1.5 1. Si l'espérance de la v.a XY existe, alors

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} uv f_{(X,Y)}(u, v) dv du.$$

2. Si X et Y sont indépendants, alors

$$E(XY) = E(X) E(Y),$$

mais la réciproque est fausse comme dans le cas discret.

1.2 Vecteurs aléatoires

1.2.1 Loi d'un vecteur aléatoire

Nous avons défini les vecteurs aléatoires à n dimensions comme un n -uplet variables réelles $X = (X_1, \dots, X_n)$.

Définition 1.12 *La loi du vecteur X est une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^n muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Elle est notée P_X et se définit par*

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n); \quad P_X(B) = P(X \in B).$$

Remarque 1.6 1. Si le vecteur X admet une densité notée f , la loi jointe s'écrit

$$P(X \in B) = \int_B f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

f est une fonction positive définie sur \mathbb{R}^n et d'intégrale égale à 1.

2. La loi marginale de X_i , ($i = \overline{1, n}$) est alors la loi de densité

$$f_{X_i}(x_i) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n.$$

3. La fonction de répartition

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \quad F_X(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(y_1, \dots, y_n) dy_n \dots dy_1.$$

Définition 1.13 1. L'espérance du vecteur X sur \mathbb{R}^n est donnée par

$$E(X) = (E(X_1), \dots, E(X_n)).$$

2. Pour une fonction $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mesurable telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, \dots, x_n) f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n < \infty$$

on déduit

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, \dots, x_n) f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

1.2.2 Matrice de covariance

Définition 1.14 On appelle matrice de covariance du vecteur X , la matrice carré K_X de taille n dont les coefficients sont donnée par (s'ils existent)

$$\forall i, j = 1, \dots, n; \quad k_{ij} = Cov(X_i, X_j)$$

où

$$Cov(X_i, X_j) = E[(X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))] = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j).$$

$Cov(X_i, X_j)$ s'appelle covariance des variables X_i, X_j . K_X est une matrice symétrique semi-définie positive.

Remarque 1.7 1. Pour un couple de variables aléatoires réelles (X, Y) , nous avons

$$K_{(X,Y)} = \begin{pmatrix} Var(X) & Cov(X, Y) \\ Cov(X, Y) & Var(Y) \end{pmatrix}.$$

2. Le nombre réel r défini par

$$r = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}, \quad \text{où } \sigma_X^2 = Var(X) \text{ et } \sigma_Y^2 = Var(Y)$$

est dit coefficient de corrélation de X et Y .

Propriétés :

1. *Symétrique : $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$.*

En effet

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(YX) - E(Y)E(X).$$

2. *Pour tout $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, la Cov est bilinéaire*

$$\begin{aligned} Cov(aX_1 + bX_2, cY_1 + dY_2) &= aCov(X_1, cY_1 + dY_2) + bCov(X_2, cY_1 + dY_2) \\ &= acCov(X_1, Y_1) + adCov(X_1, Y_2) \\ &\quad + bcCov(X_2, Y_1) + bdCov(X_2, Y_2). \end{aligned}$$

3. *Si X et Y sont indépendantes, alors $Cov(X, Y) = 0$.*

4. *$Var(aX + bY) = a^2Var(X) + 2abCov(X, Y) + b^2Var(Y)$.*

5. *D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons*

$$|Cov(X, Y)| \leq \sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)} = \sigma_X\sigma_Y,$$

alors $-1 \leq r \leq 1$.

En effet : $\forall \lambda \in \mathbb{R}; Var(\lambda X + Y) \geq 0$, alors

$$\mathcal{P}(\lambda) = \lambda^2Var(X) + 2\lambda Cov(X, Y) + Var(Y) \geq 0$$

où $\mathcal{P}(\lambda)$ est un polynôme de degré 2 par rapport à λ , donc

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\lambda) \geq 0 &\Leftrightarrow (Cov(X, Y))^2 - Var(X)Var(Y) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (Cov(X, Y))^2 \leq Var(X)Var(Y). \end{aligned}$$

Exemple 1.5 Soit U et V deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{U}(0, 1)$. Notons

$$\begin{cases} X = U + V \\ Y = U - V \end{cases}.$$

On cherche à calculer la matrice de covariance du couple (X, Y) .

Solution 2 On a

$$K_{(X,Y)} = \begin{pmatrix} \text{Var}(X) & \text{Cov}(X, Y) \\ \text{Cov}(X, Y) & \text{Var}(Y) \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(U + V) = \text{Var}(U) + 2\text{Cov}(U, V) + \text{Var}(V) = \frac{1}{12} + 0 + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(U - V) = \text{Var}(U) - 2\text{Cov}(U, V) + \text{Var}(V) = \frac{1}{12} - 0 + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(U + V, U - V) = \text{Var}(U) - \text{Var}(V) + \text{Cov}(U, V) - \text{Cov}(U, V) = 0$$

donc la matrice de covariance du couple (X, Y)

$$K_{(X,Y)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \neq 0$$

les v.a X et Y sont indépendantes.

Remarque 1.8 1. Si les v.a X_1, \dots, X_n sont indépendantes, la matrice K_X est diagonale.

2. En notation matricielle, la matrice de covariance d'un vecteur X est égal à

$$K_X = E[(X - E(X))^T (X - E(X))].$$

Proposition 1.1 Soit X un vecteur aléatoire de dimension n . Soit A une matrice de taille $m \times n$, alors

$$K_{AX} = AK_X^T A \quad (^T A \text{ transposé de } A).$$

Preuve. Nous avons

$$\begin{aligned} K_{AX} &= E \left[(AX - E(AX))^T (AX - E(AX)) \right] = E \left[A(X - E(X))^T (X - E(X))^T A \right] \\ &= AE \left[(X - E(X))^T (X - E(X)) \right]^T A. \end{aligned}$$

■

Exemple 1.6 *Il est possible de retrouver le résultat de l'exemple précédent de manière directe.*

En effet, nous avons

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} K_{(X,Y)} &= K_{A(U,V)} = AK_{(U,V)}^T A, \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ K_{(X,Y)} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1.2.3 Changement de variables

Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire de densité f_X . On appellera support de f_X le domaine D , supposé ouvert, défini par

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n, f_X(x) > 0\}.$$

Soient $Z = \varphi(X)$ avec φ est définie sur le domaine, bijective sur son image $\Delta = \varphi(D)$ et supposons que φ et φ^{-1} sont de classe C^1 sur D et Δ resp. Considérons le déterminant

$$Jac(\varphi)(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Proposition 1.2 *La densité du vecteur aléatoire Z est donnée par*

$$\forall z \in \varphi(D) : \quad f_Z(z) = |Jac(\varphi^{-1})(z)| f_X(\varphi^{-1}(z)).$$

Exemple 1.7 *Soient X_1, X_2, X_3 trois variables indépendantes de loi $\mathcal{U}(0, 1)$. On cherche à déterminer la loi du triplet (Z_1, Z_2, Z_3) défini par les relations*

$$Z_1 = -\ln X_1, \quad Z_2 = -X_2 \ln X_1, \quad Z_3 = -X_2 \ln X_3.$$

Solution 3 *L'image du domaine $D = (0, 1)^3$ est égale à*

$$\Delta = \{(z_1, z_2, z_3); 0 < z_2 < z_1, 0 < z_3\}$$

et nous avons

$$x_1 = \exp(-z_1), \quad x_2 = \frac{z_2}{z_1}, \quad x_3 = x_1 \exp\left(-\frac{z_3 z_1}{z_2}\right).$$

Le Jacobien du changement de variables est donné par

$$\begin{vmatrix} -\exp(-z_1) & 0 & 0 \\ -\frac{z_2}{z_1^2} & \frac{1}{z_1} & 0 \\ \cdots & \cdots & -\frac{z_1}{z_2} \exp\left(-\frac{z_3 z_1}{z_2}\right) \end{vmatrix} = \frac{\exp\left[-z_1\left(1 + \frac{z_3}{z_2}\right)\right]}{z_2}$$

finale^{ment}, nous obtenons

$$f(z_1, z_2, z_3) = \frac{\exp\left[-z_1\left(1 + \frac{z_3}{z_2}\right)\right]}{z_2} 1_{\Delta}(z_1, z_2, z_3).$$

1.2.4 Fonctions caractéristiques

Définition 1.15 On appelle fonction caractéristique du vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)$ la fonction à valeurs complexes définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}^n : \quad \varphi_X(t) = E\left[\exp\left(i \sum_{k=1}^n t_k X_k\right)\right].$$

Lorsque le vecteur X admet une densité

$$\forall t \in \mathbb{R}^n : \quad \varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(i \sum_{k=1}^n t_k X_k\right) f_X(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Proposition 1.3 Deux vecteurs X et Y ont même loi si et seulement si $\varphi_X = \varphi_Y$.

1.3 Vecteurs gaussiens

1.3.1 Caractérisation des vecteurs gaussiens

Définition 1.16 On dit que $X = (X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur aléatoire gaussien si toute combinaison linéaire à coefficients réels des X_i suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Remarque 1.9 Un vecteur dont toutes les coordonnées sont gaussiennes n'est pas nécessairement gaussien.

Proposition 1.4 Soit X_1, \dots, X_n des variables indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Alors le vecteur $X = (X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur gaussien.

Preuve. Soit a_1, \dots, a_n des scalaires et $Y = \sum_{k=1}^n a_k X_k$. La fonction caractéristique de Y est

$$\begin{aligned}\varphi_Y(t) &= E[\exp(itY)] = E\left[\exp\left(it \sum_{k=1}^n a_k X_k\right)\right] = \prod_{k=1}^n E[\exp(it a_k X_k)] \\ &= \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(a_k t) = \prod_{k=1}^n \exp\left(-\frac{a_k^2 t^2}{2}\right) = \exp\left(-\frac{t^2}{2} \sum_{k=1}^n a_k^2\right).\end{aligned}$$

La variable Y suit donc la loi $\mathcal{N}(0, \sum_{k=1}^n a_k^2)$. ■

Proposition 1.5 Soit X un vecteur gaussien, d'espérance $m \in \mathbb{R}^n$ et de matrice de covariance K_X . La fonction caractéristique de X est définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}^n : \quad \varphi_X(t) = \exp\left(i {}^T t m - \frac{1}{2} {}^T t K t\right).$$

1.3.2 Propriétés des vecteurs gaussiens

1. Soit $X \in \mathbb{R}^n$ un vecteur gaussien et K sa matrice de covariance. Les variables X_k sont indépendantes si et seulement si la matrice K est diagonale.
2. Soit $m \in \mathbb{R}^n$ et K une matrice symétrique d'ordre n , définie positive ($\det K \neq 0$). La loi normale $\mathcal{N}(m, K)$ admet pour densité

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \quad f_X(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \frac{1}{\sqrt{\det K}} \exp\left(-\frac{1}{2} {}^T (x - m) K^{-1} (x - m)\right).$$

1.4 Convergence dans le cas vectoriel

Théorème 1.1 Soit une suite de vecteurs aléatoires $X_n : (\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n) \rightarrow (\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$ et un autre vecteur aléatoire $X : (\Omega_\infty, \mathcal{F}_\infty, P_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$. Alors les propriétés (a) et (b) suivantes sont équivalentes

- (a) Pour tout $t \in \mathbb{R}^k$, $\varphi_{X_n}(t) \rightarrow \varphi_X(t)$, quand $n \rightarrow \infty$.
- (b) Pour tout point de continuité $x \in \mathbb{R}^k$, $F_{X_n}(x) \rightarrow F_X(x)$, quand $n \rightarrow \infty$.

Définition 1.17 Si l'un de deux points (a) ou (b) dans le théorème précédent a lieu, alors nous disons que X_n converge vaguement vers X , ou X_n converge en distribution vers X , ou X_n converge en loi vers X , notée :

$$X_n \rightsquigarrow X \quad \text{ou} \quad X_n \xrightarrow{d} X \quad \text{ou} \quad X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X.$$

1.5 Théorème central limite vectoriel

Théorème 1.2 Soient X_1, \dots, X_d des vecteurs aléatoires de \mathbb{R}^n i.i.d admettant un moment d'ordre 2. On note m leur espérance et K leur matrice de covariance. Alors

$$\sqrt{d} (\bar{X}_d - m) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, K).$$

Preuve. On calcule, pour tout d la fonction caractéristique de $Z_d = \sqrt{d} (\bar{X}_d - m)$

$$\forall t \in \mathbb{R}^n : \quad \varphi_{Z_d}(t) = E [\exp(i {}^t Z_d)]$$

on a par le théorème central limite que ${}^t Z_d \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, {}^t K t)$

$$\forall t \in \mathbb{R}^n : \quad \varphi_{Z_d}(t) \xrightarrow{d \rightarrow \infty} \exp\left(-\frac{1}{2} {}^t K t\right).$$

■