Série d'exercices 1

Exercice 1

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un n-échantillon d'une variable aléatoire X de fonction de répartition F.

On définit la fonction de répartition empirique F_n par :

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i \leq x\}}, x \in \mathbb{R}.$$

1. Donner la loi de $nF_n(x)$. En déduire $E\big(F_n(x)\big)$ et $V\big(F_n(x)\big)$.
2. Montrer que
$$\sqrt{n}\,\frac{(F_n(x) - F(x))}{\sqrt{F(x)(1-F(x)}} \xrightarrow{loi} N(0,1).$$
3. Monter que
$$F_n(x) \xrightarrow{m.q} F(x).$$
4. En déduire, de 3, que $F_n(x) \xrightarrow{proba} F(x)$.
5. Montrer que
$$F_n(x) \xrightarrow{P.S} F(x).$$

Exercice 2 :

Montrer que

$$\sum_{j=k}^{n} C_n^j p^j (1-p)^{n-j} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\int_0^p t^{k-1}(1-t)^{n-k}dt.$$

Indication : intégrer par parties le second membre de l'égalité.

Exercice 3 :

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un n-échantillon d'une loi $U_{[0,1]}$ et soit $\big(X_{(1)}, \dots, X_{(n)}\big)$ l'échantillon ordonné associé.

1. Déterminer la loi de $X_{(k)}, k = \overline{1,n}$.
2. Déterminer la loi de l'étendue $W = X_{(n)} - X_{(1)}$ puis calculer $E(W)$ et $V(W)$.
3. Montrer que les $W_{i,i+1} = X_{(i+1)} - X_{(i)}$ sont de même loi que $X_{(1)}$.
4. Donner la loi de $W_{i,j} = X_{(j)} - X_{(i)}$ puis calculer $E\big(W_{i,j}\big)$, $j > i$.

Exercice 4 :

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un n-échantillon d'une loi $\xi(\lambda)$ et soit $\big(X_{(1)}, \dots, X_{(n)}\big)$ l'échantillon ordonné associé.

1. Donner la loi du vecteur $\big(X_{(1)}, \dots, X_{(n)}\big)$.
2. Montrer que les $W_{i,i+1} = X_{(i+1)} - X_{(i)}$ sont des variables aléatoires indépendantes et que
$$W_{i,i+1} \leadsto \xi(\lambda(n-i)).$$

3. Montrer que les variables aléatoires $X_{(i)}$ et $X_{(j)} - X_{(i)}, i < j$, sont indépendantes et que $X_{(j)} - X_{(i)}$ a la même loi que $X_{(j-i)}$ dans un $(n-i)$-échantillon de même loi exponentielle.

Exercice 5 :

Soient $X_{(1)}, \dots, X_{(2m+1)}$ les statistiques d'ordre d'un $(2m+1)$-échantillon issu de la loi $U_{]\theta_1,\theta_2[}$. On considère les statistiques :

- La médiane $T_1 = X_{(m+1)}$,
- La moyenne extrême $T_2 = \frac{X_{(1)}+X_{(2m+1)}}{2}$,
- La moyenne de l'échantillon $T_3 = \bar{X} = \frac{1}{2m+1}\sum_{i=1}^{2m+1} X_i$.

1. Donner la loi de $X_{(i)}$, $i = \overline{1,(2m+1)}$.
2. Montrer que T_1, T_2 et T_3 ont la même espérance.
3. Déterminer $V(T_i), i = \overline{1,3}$.
4. Examiner le comportement asymptotique des rapports de variance des trois estimateurs et commenter les résultats.

Exercice 6 :

Soient $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ les statistiques d'ordre d'un n-échantillon issu d'une loi continue de fonction de répartition F. On pose

$$V_k = \frac{Z_k}{Z_{k+1}}, \qquad U_{k+1} = Z_{k+1}, \qquad où \quad Z_k = F\big(X_{(k)}\big).$$

1. Que représente Z_k, $k = \overline{1,n}$.
2. Rappeler la loi de Z_k et la loi conjointe du couple (Z_k, Z_{k+1}).
3. Montrer que V_k et U_{k+1} sont des v.a. indépendantes et que ${V_k}^k$ est uniformément distribuée sur $]0,1[, k = \overline{1,n-1}$.

Exercice 7 :

Soit $(R_1, \dots, R_n)$ le vecteur des rangs associé à l'échantillon $(X_1, \dots, X_n)$.

1. Rappeler la loi de $(R_1, \dots, R_n)$, R_i et la loi conjointe du couple $\big(R_i, R_j\big)$, $1 \le i < j \le n$.
2. Déterminer $Cov\big(R_i, R_j\big), 1 \le i < j \le n$.
3. Calculer $\sum_{i=1}^{n} R_i$ et $V(\sum_{i=1}^{n} R_i)$.