2.3. Exemples standards: Exemple (1): [La marche aleatoire] (Sommes des v.a. centrées indépendantes) Soite X1, X2, ... une soite de va indép. avec IEIXe/ < 00, Hb, et: $E(X_k) = 0, \forall k$ Définissons: (So= 0 et) Sn = X1+ X2+ ... + Xn, Jn:= 5(X1, X2, ..., Xn), Jo:= 19, 523. Question: 17-9. 6(X1, X2, ..., Xn) = 6(S1, S2, ..., Sn). Lles 2 svites fournissent le m. informat minimale]. Montrons que: (Sn) nzo est (Fn) mart. Supposous opre n>0. 1 Adaptation: Il est clair que Sn est Fnmesurable pour ton. 2 Intégrabilité : El Sn = ZEXBI < 00, 40

3) Propriété de: $E(S_{n+1}|F_n) = E(S_{n+1}|F_n) + E(X_{n+1}|F_n)$ $S_n + E(X_{n+1})$ Sn p.s. Justifications: (i): La linéarité de l'esp. cond. (1,5, (6)). W: Sn est Fi-mesurable = E(Sn/Fin)=Sn p.s. d'après la pté (1.5, (3)). et: Xn+1 est indép. de fn = E(Xn+1)=EX d'après la pté (1.5, (10)). [Y 1/1 G +GE CES] (iii): Xn+1 contrée =p 1/E Xn+1 = 0 par hypothès Exemple(2): [Martingale produit] (Produits des v.a. indép. positives de moyennes) Soient X1, X2, ... une soite de v-a. indép, positives avec; E(Xk)=1, Vk. Définissons (Mo:=1, 50:=10, si=10, si)

Scanned by CamScanner

Mn:= X1 X2 ... Xn, In:= 5 (X2, X2, ..., Xn). Question: o(X2, X2, ..., Xn) = o(M2, M2, ..., Mn). Montrons que (Mn) est une (Fn) - mart.

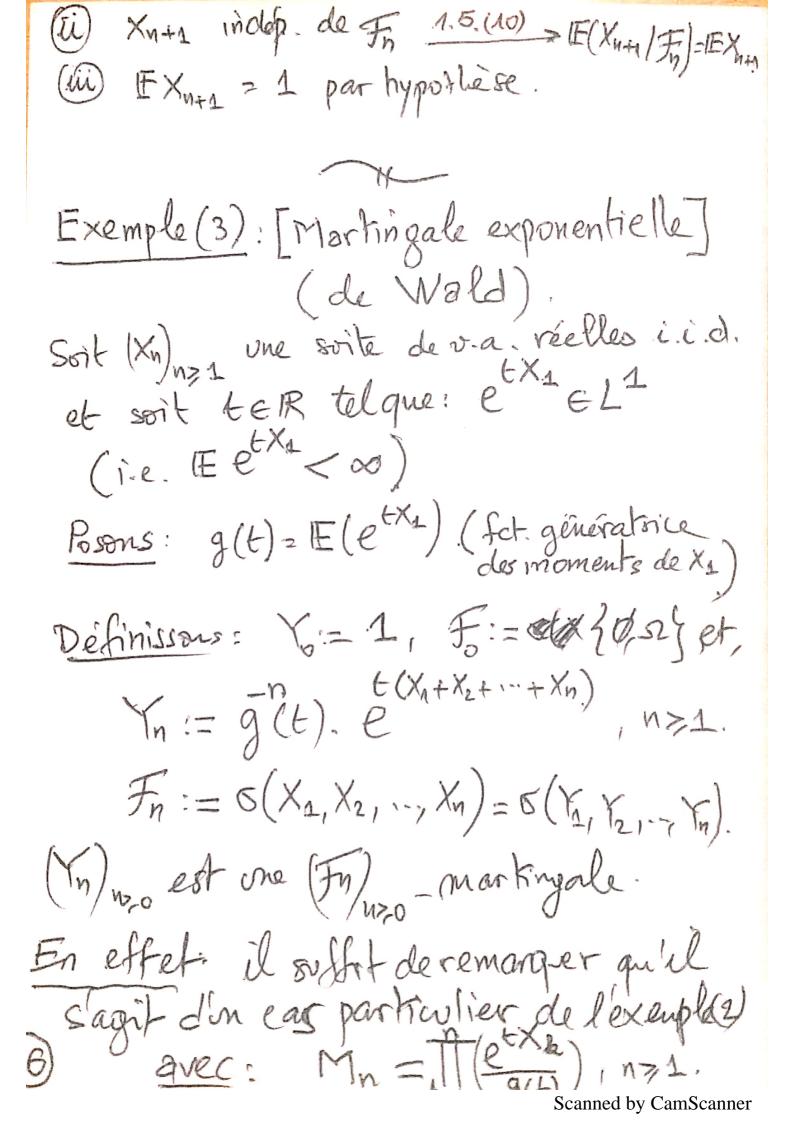
Per 11 0 cest frival. Supposous: N>0. 1) (Mn) nz, est (Fin/uz, -2 daptée. 2 E/Mn = EMn = EX1. EX2... EX =1<00 cor XA, X2, -, Xn Sort indep. 3 E(Mn+1/Fn) = E(Xn+1:Mn/Fn) @Mn E(Xn+1/Fn) WMn E(Xn+1) (iii) Mn Justifica le de étapes: (1) Mn est Fn-mesurable d'après la pté « Faire sortir le qui est connu » (1.5, (4)).

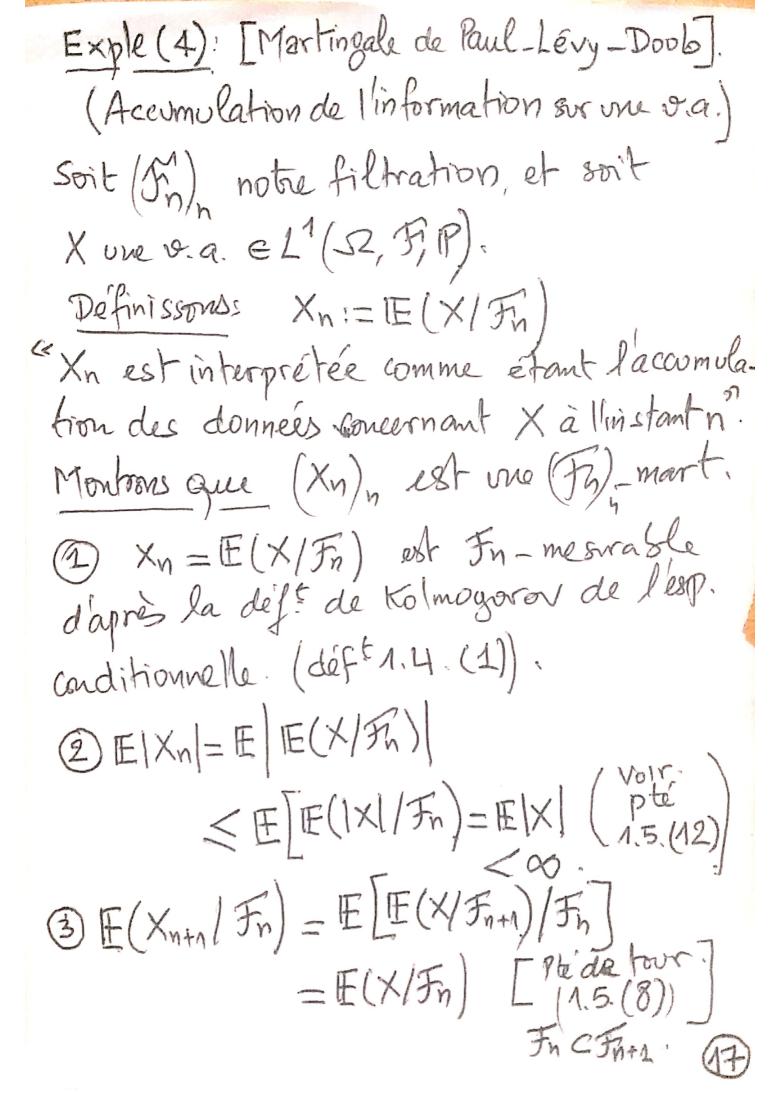
« Faire sortir le qui est connu » (1.5, (4)).

» [E(Xn+n/Fn)-Mn [E(Xn+n/Fn)]

— Tn-mesurable

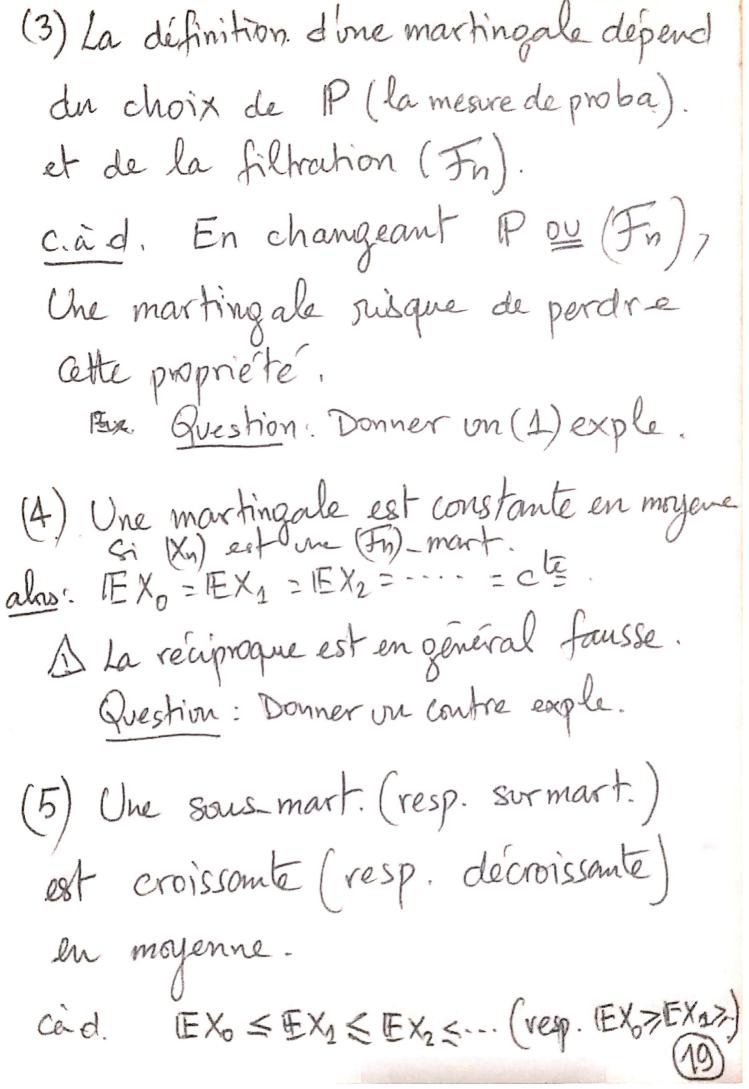
Scanned by CamScanner





Remarques: (1) Reprenons les 2 premiers exemples: = Exple(1): Si IEXe > 0, alors: (Sn) est une (Fh) - sous-martingale. et Si EXXX O, alos (Sn) est me (Fh) - svrmartingale. .Exple(2): Si E(X4) ≥ 1 (resp. ≤ 1) alos (Mn), est une sous_mart. (resp. sur martingale). (2) Une martingale est one sous-mart. et sooner an sormart. au m. temps. La réciproque est vraie: c.à.d: Un processus stock qui est une sous-mart, et surmart, est une martingale.

8 Scanned by CamScanner



(6) Pour prouver (4) et (5), utiliser la pté des espérances itérées. [1.5.(2)].

De La monotonie pour (5) (7) Il est important de noter qu'un prosessus (Xn), pour lequel $X_0 \in L^1(\Omega, F_0, P)$ est one martingale (resp. sous_mart, sormart) S.S. Si le processis (Xn-Xo) estore mart. (resp. 80US_mart, surmart.). (8) La somme de 2 mart. (resp. sous-mart, Surmant) est une mart. (resp. sous-mart, surmant).