Chapitre 5
Théorie des test
Tests usuels sur les variables qualitatives

1. Théorie des tests

1.1) Les hypothèses statistiques

Chapitres précédents: souvent impossible d’ observer l’ ensemble d’ une population.
On doit donc tirer des conclusions à partir d’ échantillons.
On va maintenant tester les hypothèses émises à partir de ces échantillons.

Notion d’ hypothèse statistique:

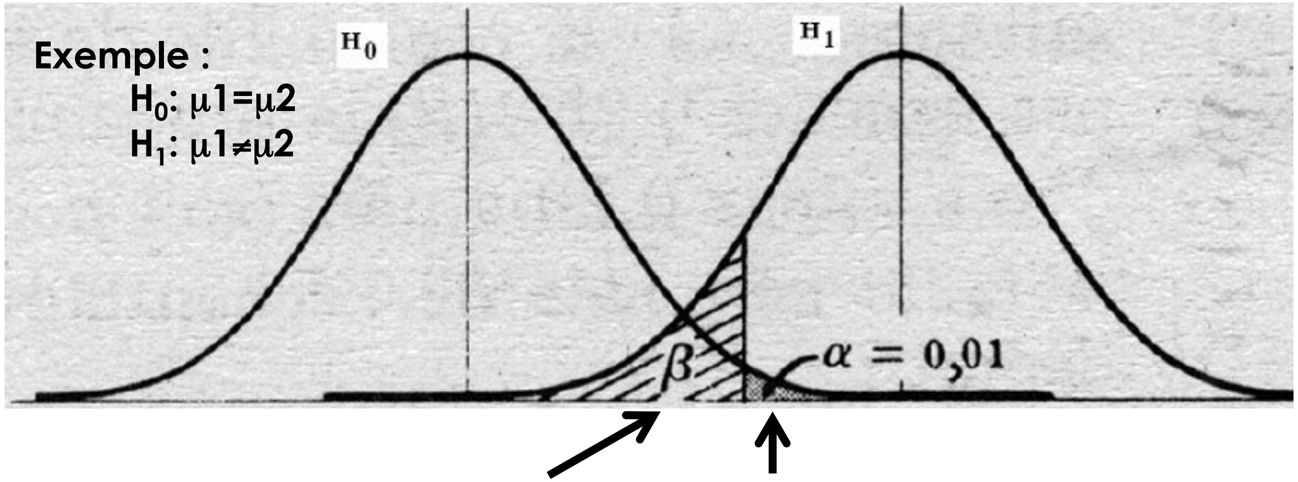
- **H_0: hypothèse nulle**: aucune différence entre les résultats testés
  (e.g. traitement n’ a aucun effet sur les patients)
- **H_1: hypothèses alternatives**: différence significative entre les résultats testés

Travail d’ analyse statistique: estimer si les différences sont imputables à des fluctuations d’ échantillonnage (== variabilité naturelle) ou si ces différences sont **significatives** à un certain risque de décision près.
On va pouvoir par exemple tester si les moyennes de deux distributions sont significativement différentes ou non:

$$\begin{cases} H_0: \mu 1=\mu 2 \\ H_1: \mu 1\neq\mu 2 \end{cases}$$

1.2) Les risques d'erreur de la 1ere et 2nde espèce

2 risques associés au test statistique:
- **erreur de la 1ere espèce: hypothèse rejetée mais devrait être acceptée == type α**
- **erreur de la 2nde espèce: hypothèse acceptée mais devrait être rejetée == type β**



Risque de déclarer les moy identiques alors qu'elles sont différentes

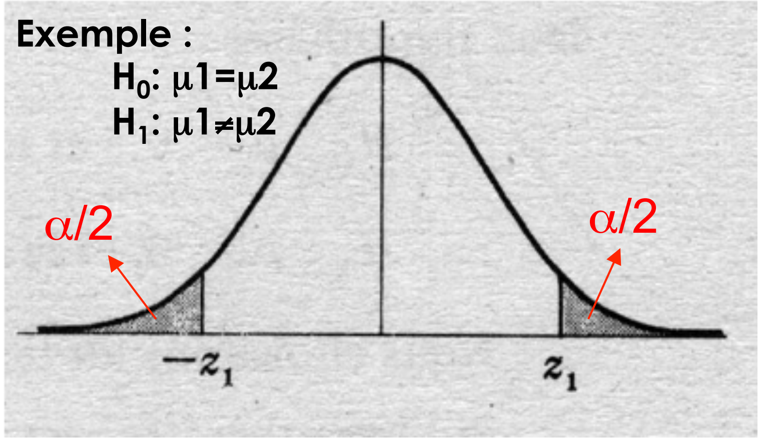
Région critique.
Risque de déclarer les moy différentes alors qu'elles sont identiques
(=> hypothèse H0 rejetée mais devrait être acceptée)

On peut résumer les risques en termes de probabilités conditionnelles:

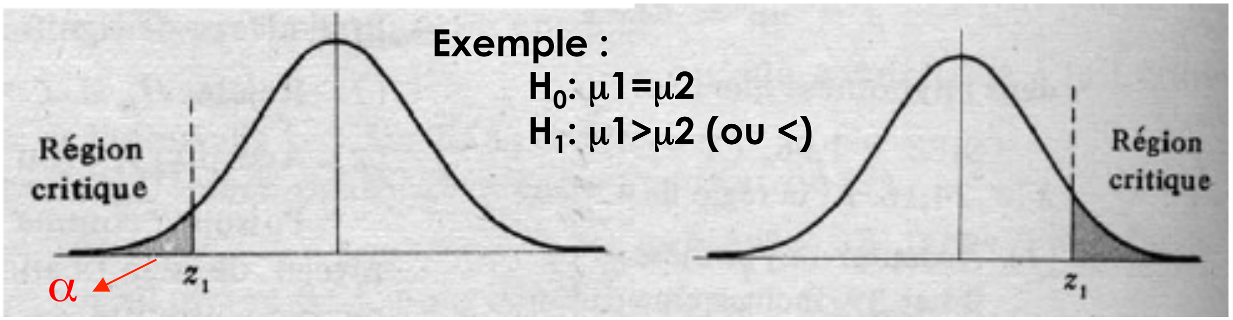
	H0	H1
H0	$1-\alpha$	β
H1	α	$1-\beta$

En pratique: risque α fixé (e.g. 5%, 1% ou 0.1%) == seuil de signification du test,
Niveau de risque considéré comme acceptable.

Test bilatéral: on recherche une différence entre 2 distributions sans se préoccuper du sens ce celle-ci. (e.g. nombre d'éruptions volcaniques similaire à une loi de Poisson ou non)



Test bilatéral: on recherche une différence entre 2 distributions ET le sens ce celle-ci est important. (e.g. augmentation significative ou non du nombre de cyclones en Atlantique)



Zone de non-rejet de H0: ne veut pas dire qu'on peut accepter H0 car on ne peut pas estimer le risque de 2nde espèce β !

On préférera donc dire « on ne rejette pas H0 » plutôt que « on accepte H0 »!!

Construction d'un test:

1. Formuler H_0 et H_1
2. Déterminer la variable de décision
3. Définir la statistique du test
4. Définir le niveau de confiance du test (c'est-à-dire le risque α)
5. Calculer la valeur expérimentale de la variable de décision
6. Ne pas rejeter ou rejeter H_0

2) Tests usuels sur les variables qualitatives
Le test de Chi2

Variables qualitatives caractérisées par leur proportion ou leur fréquence.

Test d'hypothèse le plus utilisé pour ces variables = test de Chi2.
Cependant, le choix du test dépendra du cas d'étude et de la question que l'on se pose.

Principe du test de Chi2: ***mesurer l'écart*** *entre des fréquences observées et des fréquences attendues (obs. ou th.) et* ***tester*** *si cet écart est* ***significatif*** *ou suffisamment faible pour être imputable à des* ***fluctuations d'échantillonnage****.*

Afin de présenter le test de Chi2, on allons développer 2 types de comparaisons:
- Plusieurs échantillons indépendants caractérisés par au moins 2 modalités
- Comparaison d'une distribution observée à une distribution théorique

Dans tous les cas: **test élaboré à partir des fréquences absolues** (effectif) et non pas des fréquences relatives ou des pourcentages.
(ainsi, la taille des échantillons sera prise en compte).

2.1) Comparaison de la distribution de fréquence observée de k échantillons ($k \geq 2$) à une fréquence théorique

Exemple:
On considère 3 échantillons de proportions P1, P2 et P3.
On désire tester:

H_0 : P1=P2=P3=P
H_1 : Les proportions ne sont pas toutes égales.

On va définir des variables aléatoires associées: a1, a2, a3=nb d'éléments du caractère étudié dans chacun des 3 échantillons.
Ces variables suivent une loi binomiale: B(n1,P1), B(n2,P2), B(n3,P3)

Si H_0 est vraie alors:

B(n1,P1) = B(n1,P) => seule différence = effectif
B(n2,P2) = B(n2,P)
B(n3,P3) = B(n3,P)

Si les effectifs n_j sont suffisamment grands ($n_j \geq 5$ en pratique) et si $P \neq 0$ ou 1
Alors $B(n_j,P) \rightarrow N(\mu_j = n_jP,\ \sigma_j^2 = n_jP(1-P))$
Par commodité, on définit une nouvelle variable aléatoire centrée réduite:

Effectif observé

Effectif théorique

$$\boxed{Z_j = \frac{x_j - \mu_j}{\sigma_j} == \frac{a_j - n_jP}{\sqrt{n_jP(1-P)}}}$$

Variance théorique

Une variable de Chi2 est par définition:

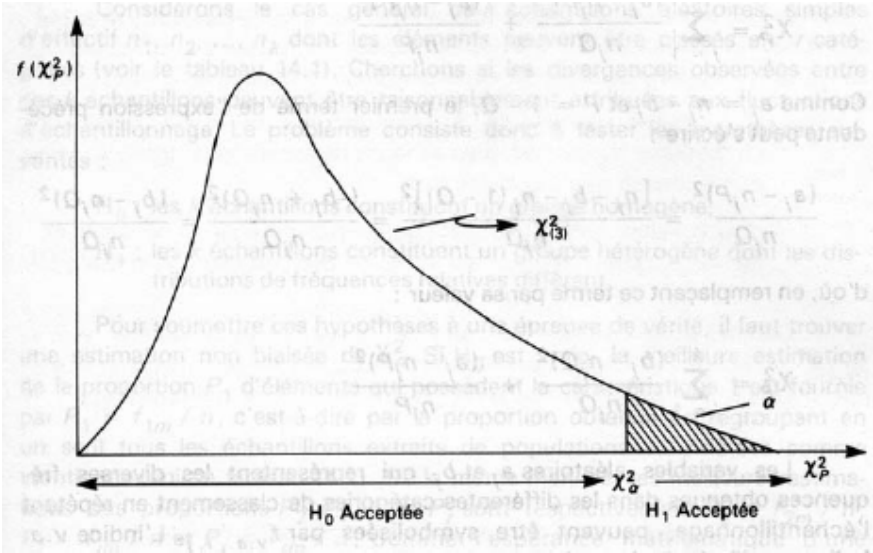
$$\chi^2 = \sum Z_j^{\,2}$$

Ici, on a

$$\chi^2_{P,3} = \left(\frac{a_1 - n_1 P}{\sqrt{n_1 P(1-P)}}\right)^2 + \left(\frac{a_2 - n_2 P}{\sqrt{n_2 P(1-P)}}\right)^2 + \left(\frac{a_3 - n_3 P}{\sqrt{n_3 P(1-P)}}\right)^2$$

Si H_0 vraie, alors $\chi^2_{Pj,3}$ calculée == $\chi^2_{P,3}$ théorique.
Sinon, la différence est d'autant plus grande entre théorie et calculé que $P_j \neq P$…

Ou:
- Si la valeur calculée < valeur critique $\chi^2_{\alpha,3}$
  alors H0 non rejetée
- Si la valeur calculée > valeur critique
  alors H0 est rejetée,
  H1 acceptée avec le risque α fixé.



Courbe de distribution d'un chi-2 à 3 degrés de liberté

2.2) Comparaison simultanée de plusieurs proportions entre elles

Même exemple:
On considère 3 échantillons de proportions P1, P2 et P3.
On désire tester:

H_0 : P1=P2=P3=P, mais P inconnue
H_1 : Les proportions ne sont pas toutes égales.

On va devoir ici estimer P.
La meilleure estimation sera celle du maximum de vraisemblance dans les 3 échantillons.
⇒ Les valeurs de Z_j ne sont ici pas indépendantes! $\sum Z_j^2 \neq \chi^2$

On posera un nouveau test, basé sur la comparaison de plusieurs modalités simultanément:

H0 : les k échantillons sont homogènes
(≠ces peuvent être considérées comme des fluctuations d'échantillonnage)
H1 : les k échantillons constituent un groupe hétérogène (≠ces significatives)

Si H0 est vraie, la meilleure estimation est obtenue en regroupant les observations des k échantillons afin de calculer la valeur théorique.
Ce calcul est réalisé en dressant un tableau de contingence.

		Échantillons						Σ
		1	2	...	j	...	k	
Catégories ou classes	1	f_{11}	f_{12}	...	f_{1j}	...	f_{1k}	f_{1m}
	2	f_{21}	f_{22}	...	f_{2j}	...	f_{2k}	f_{2m}
	3	f_{31}	f_{32}	...	f_{3j}	...	f_{3k}	f_{3m}
	...	...	...	...	...	...	...	...
	i	f_{i1}	f_{i2}	...	f_{ij}	...	f_{ik}	f_{im}
	...	...	...	...	...	...	...	...
	r	f_{r1}	f_{r2}	...	f_{rj}	...	f_{rk}	f_{rm}
Σ		n_1	n_2	...	n_j	...	n_k	$n = \sum^{k} n_j$

Structure d'un tableau de contingence

Effectif théorique:

$$f_{th,ij} = \frac{\sum_{j=1}^{k} f_{ij}}{\sum_{i=1}^{r} f_{ij}}$$

Variable de Chi2:

(k-1)(r-1) degrés de liberté (i.e. variables indépendantes)

$$\chi^2_{(k-1)(r-1)} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k} \frac{\left(f_{obs,ij} - f_{th,ij}\right)^2}{f_{th,ij}}$$

Conditions d'application du test: $f_{th,ij} > 5, \forall i, j$

Si cette condition n'est pas vérifiée, on doit regrouper des modalités (si cela paraît pertinent) … ou chercher un test plus pertinent…

2.2) Test de conformité d' une distribution observée à une distribution théorique

Il est fréquent de devoir vérifier si une variable observée suit un loi connue.
On utilise le même principe que précédemment, un test de Chi2 avec les hypothèses suivantes:

H_0 : distribution théorique conforme à la distribution observée
H_1 : distribution théorique ne s' ajuste pas à la distribution observée

Nombre de degrés de liberté ν (nombre de variables indépendantes):
= nombre de modalités (r) – 1 (effectif n commun aux 2 distributions)
r – c nb de paramètres de la distribution th. estimés à partir de l' échant.

E.g. : loi binomiale ou loi de Poisson => c=1 => ν = r-2
loi normale => c=2 => ν = r-3

Déroulement général d'un test de Chi2:

1. Calcul de l'effectif théorique nP_j. Lorsque le tableau de contingence est monté, on vérifie si $nP_j>5$, sinon on regroupe les classes.
2. Calcul de la valeur observée de la variable de test:

observée

$$\chi^2_{P,k} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(n_j - nP_j\right)^2}{nP_j}$$

théorique

3. On fixe le risque α
4. On cherche la valeur critique dans la table de Chi2
5. Si la valeur calculée est < à la valeur critique: H0 n'est pas rejetée, sinon on la rejette
6. Vérification a posteriori: c

Note: la table de Chi2 donne $P(\chi^2 \geq \chi^2_c)=\alpha$

$\Rightarrow$ Donne la valeur de l'écart chi2 qui possède la probabilité α d'être dépassée.

Pour α=0,05, ordre 2 => χ^2_c=5,99 == seuil de confiance à 5%...