Université de Biskra
Faculté des SENV
Département de Mathématiques

$2^{eme}$ semestre, année 2020/2021
$3^{eme}$ année licence Maths
Module: Probabilités Avancées

# T.D. $N^0 3+4$

**Exercice n$^0$ 1:** La durée d'une communication téléphonique urbaine est présenté par une v.a $D$ uniformément distribuée sur $[0, t]$, où $t$ est un nombre réel positif donné. On souhaite étudier le comportement de la plus longue durée de $n$ communications, définie par $M_n = \max(D_1, ..., D_n)$, lorsque $n$ devient infini, les v.a $D_i$ étant supposées indépendantes et de même loi que $D$. Montrer que $M_n$ converge en probabilité vers $t$.

**Exercice n$^0$ 2 :** Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, F, \mathbb{P})$ convergeant en loi respectivement vers $X$ et $Y$. On suppose que pour tout $n$, $X_n$ , et $Y_n$ sont indépendantes et que $X$ et $Y$ sont indépendantes.

1. Démontrer que $X_n + Y_n$ converge en loi vers $X + Y$.
2. Donner un exemple montrant que l'hypothèse d'indépendance est indispensable.

**Exercice n$^0$ 3 :** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que $E[X_n] = m$ et $Var[X_n] = \sigma^2$. On considère deux variables aléatoires :

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \quad \text{et} \quad V_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - M_n)^2$$

1. Montrer que la suite $(M_n)$ converge presque sûrement vers $m$.
2. Calculer la moyenne de $V_n$.
3. Montrer que $V_n$ converge presque sûrement vers $\sigma^2$.

**Exercice n$^0$ 4 :** On considère $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes de même loi. On suppose que $E[X_1] = 0$ et $Var(X_1) = \sigma^2$ et on note $\varphi(t)$ la fonction caractéristique de $X$. On considère la variable aléatoire

$$Y_n := \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + ... + X_n)$$

1. Donner la fonction caractéristique de $Y_n$, $\Phi_n(t)$, en fonction de $\varphi, t$ et $n$.
2. Montrer que, lorsque $x \to 0$, on a $\varphi(x) = 1 - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 + \circ(x^2)$.
3. En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\log \Phi_n(t) \to -\frac{1}{2}\sigma^2 t^2$ et donc que $\Phi_n(t) \to \Phi(t)$, où

$\Phi(t)$ est la fonction caractéristique d'une loi que l'on précisera.

**Exercice n$^0$ 5 (Devoir):**

1. Montrer que la convergence presque-sûre implique la convergence en probabilité.
2. Soient $X$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ des v.a réelles définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, F, \mathbb{P})$ et vérifiant
$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(|X_n - X| \geq \varepsilon\right) < \infty$$
Montrer que $X_n$ converge presque sûrement vers $X$.

**Exercice n$^0$ 06:** Soit $Y_n$ une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda$.
Si $X_n = [\theta Y_n], \theta > 0$ , déterminer la valeur de $\theta$ pour que $X_n \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
$[x]$ désigne la partie entière supérieure de $x$ définie par $[x] = \min\{k \in \mathbb{Z}/k \geq x\}$ ,
si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ alors $P(X = k) = p(1-p)^{k-1}, k \in \mathbb{N}^*$.