Définition 2.5. *$(A_n)_n$ est dite uniformément convergente vers A si :*

$$\lim_{n \to +\infty} \|A_n - A\| = 0$$

La norme étant définie au sens de celle de $\mathcal{L}(X, Y)$.

Proposition 2.2. *Si $(A_n)_n$ converge uniformément vers A dans $\mathcal{L}(X, Y)$, alors $(A_n)_n$ converge simplement vers A.*

Preuve. Pour tout $x, x \in X$:

$$\|A_n x - Ax\| = \|(A_n - A)x\| \leq \|A_n - A\| \|x\| \to 0, (n \to +\infty)$$

◀

Proposition 2.3. *Soient $(X, \|.\|_1)$ et $(Y, \|.\|_2)$ des espaces vectoriels normés. Si Y est de Banach, alors $\mathcal{L}(X, Y)$ l'est également.*

Preuve. Soit $(A_n)_n$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(X, Y)$. Alors,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} / \forall n, m \in \mathbb{N} : n > N_0 \wedge m > N_0 \Rightarrow \|A_n - A_m\| \leq \varepsilon$$

Soit $x \in X$ fixé. On a pour tous $n, m \in \mathbb{N}, n > N_0 \wedge m > N_0$:

$$\|A_n(x) - A_m(x)\| \leq \|A_n - A_m\| \|x\| \to 0, (n \to +\infty)$$

Ce qui montre que la suite $A_n(x)$ est de Cauchy dans Y pour tout x dans X. Comme Y est complet, $A_n(x)$ converge dans Y pour tout $x \in X$. Soit donc

$$Ax = \lim_{n \to +\infty} A_n(x), x \in X$$

Soient maintenant $x, y \in X$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

$$\begin{aligned} A(\lambda x + y) = \lim_{n \to +\infty} A_n(\lambda x + y) &= \lim_{n \to +\infty} (\lambda A_n x + A_n y) \\ &= \lambda \lim_{n \to +\infty} A_n x + \lim_{n \to +\infty} A_n y \\ &= \lambda A x + A y \end{aligned}$$

et A est donc linéaire. De plus, par le critère de Cauchy, il existe N_0 tel que :

$$n > N_0 \wedge m > N_0 \Rightarrow \|A_n - A_m\| \leq \varepsilon$$

D'où, pour tous $n, m \in \mathbb{N}/n > N_0 \wedge m > N_0$

$$\|A_n(x) - A_m(x)\| \leq \varepsilon \|x\| \tag{2.6}$$

et donc pour tout $x \in X$:

$$\|A_m(x)\| \leq \|A_n(x)\| + \varepsilon\|x\| \quad \leq \quad (\|A_n\| + \varepsilon)\|x\| \tag{2.7}$$

Fixons n et faisons tendre m vers $+\infty$ dans (2.7), on obtiendra

$$\|Ax\| \leq (\|A_n x + \varepsilon)\|x\|$$

et A est donc continue car A_n est bornée, $n \geq 1$. Par conséquent, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Montrons maintenant que $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n = A$. Soit $n \geq N_0$ fixé, et soit $x \in X$ fixé. On fait tendre m vers $+\infty$ dans (2.6), on aura

$$\|Ax - A_n x\| \leq \varepsilon \|x$$

Donc,

$$\|A - A_n\| \leq \varepsilon$$

(c.q.f.d) ◄

2.2 Suite bornée d'applications linéaires continues

Rappel. Soit X un espace vectoriel normé. Une partie A de X est dite bornée si A est contenue dans une boule, i.e., l'ensemble

$$\{\|x\|, x \in X\}$$

est majoré. On a donc le résultat suivant