

EPREUVE de Moyenne Durée

Exercice 1

Un agronome veut étudier la relation et expliquer le rendement d'une variété d'un agrume importé de l'étranger noté Y à partir de la dose d'engrais azoté (X_1) et le taux d'arrosage en eau noté X_2

pour cela 5 champs ont été choisis au hasard.

Les résultats sont consignés ci dessous:

i	$Y=y_i$	$X_1=x_{i1}$	$X_2 = x_{i2}$
1	60	1	10
2	71	2	20
3	75	3	25
4	87	4	15
5	99	5	30

où $Y=y_i$ désigne le rendement de cette variété exprimée en (quintale/hectare) du champs numéro i.

X_1 est la variable : La dose d'engrais azoté à mettre dans le champ exprimée en (kg/hectare)

et X_2 désigne l'arrosage exprimé en (litre d'eau /M²)

Il propose le modèle de régression linéaire suivant: $y_i = a_0 + a_1x_{i1} + a_2x_{i2} + \epsilon_i$ pour $i = 1, \dots, 5$

(i) Ecrire le modèle sous forme matricielle $Y = X.A + \epsilon$ en indiquant les éléments aléatoires, déterministes et les éléments connus et inconnus.

(ii) Donner les valeurs estimées des paramètres par la méthode MCO, calculer $\hat{A}=[\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2]'$

Présenter en premier la formule.

$$\text{On vous donne } (X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{461}{255} & -\frac{2}{51} & -\frac{19}{255} \\ -\frac{2}{51} & \frac{10}{51} & -\frac{7}{255} \\ -\frac{19}{255} & -\frac{7}{255} & \frac{2}{255} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1.8078 & -3.9216 \times 10^{-2} & -7.4510 \times 10^{-2} \\ -3.9216 \times 10^{-2} & 0.19608 & -2.7451 \times 10^{-2} \\ -7.4510 \times 10^{-2} & -2.7451 \times 10^{-2} & 7.8431 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

(iii) Calculer le vecteur \hat{Y} puis le vecteur $\epsilon = Y - \hat{Y}$

(iv) Déduire le rendement prédit du champ i en **absence** de dose d'engrais et en **absence**

d'arrosage en eau. Comment appelle t'on cette valeur?

Que vaut le rendement prédit pour 6 doses d'engrais et 35 unités pour l'arrosage?

(v) A quoi sert le graphique en abscisse \hat{y}_i en ordonnées $\hat{\epsilon}_i$? on ne demande pas de tracer le graphe.

(vi) Compléter le tableau suivant en présentant les formules sous forme vectorielles.

Source de variation	Somme des carrés	DL	Carrée Moyenne
Expliquée (par le modèle de Régression)	SCExplicée=		CME=
Résiduel (Non Expliquée par le Modèle)	SCResi=	2	CMR=
Totale	SCTota=903.2		-

(vii) Déduire R^2 le coefficient de Détermination et interprétez sa valeur par une phrase complète. Quel est votre avis sur le modèle.

(viii) Compléter la matrice (l'estimateur de la matrice variance covariance des paramètres estimés) et déduire $\hat{\sigma}(\hat{a}_0)$, $\hat{\sigma}(\hat{a}_1)$, $\hat{\sigma}(\hat{a}_2)$

présenter la formule en premier, sans démonstration

$$\hat{V}(\hat{A}) = \begin{bmatrix} 17.71 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ -0.73 & \cdot & 0.08 \end{bmatrix} \quad (\text{On accepte comme précision à 2 chiffres après la}$$

virgule)

(ix) Compléter le tableau suivant. où q_α désigne le quantile d'ordre α de $\mathcal{N}(0,1)$

i	$\hat{\epsilon}_i = y_i - \hat{y}_i$	$q_{i/n+1}$
1	0.42	-1.97
2	•	•
3	•	0.00
4	•	•
5	1.77	•

Justifier la valeur en gras **0.00**

Comment appelle t'on ce graphe ($q_{i/n+1}$, $\hat{\epsilon}_i$)? A quoi sert? Ne tracer pas le graphe.

(x) Mettre \hat{Y} sous la forme $\hat{Y} = H.Y$.

Donner la matrice H (Présenter la formule puis l'application numérique), comment appelle t'on cette matrice?

(xi) Démontrer théoriquement que : $H \times H = H$ et $H.X = X$

A quoi sert ses éléments diagonaux de H notés h_{ii} ?

Remarque:

Prendre = 5%. pour tous les tests suivants

(xii) Effectuer le test T de Student ($H_0 : a_1 = 0$) contre ($H_1 : a_1 \neq 0$)
et ($H_0 : a_2 = 0$) contre ($H_1 : a_2 \neq 0$).

Déduire qu'elle est parmi les variables exogènes X_1 ou X_2 est la plus pertinente pour expliquer Y? justifier.

Indication: Utiliser les réponses des questions précédentes.

(xiii) Rappeler le test F de Fischer. Expliquer correctement par une phrase l'hypothèse nulle H_0 (On ne demande pas de l'effectuer)

Pourquoi le test de Student est équivalent au test de Fisher lorsque il y'a une seule variable explicative?

(xiv) Rappeler théoriquement a quoi sert le test de Durbin Watson (D.W)? On ne demande pas de l'effectuer.