Zdzislaw, Zastawniak - Basic Stoch processes, A course through exercises, Springer 1999.

Nom & Prénom :	اللقب و الإسم:
Niveau :	المستوى:
Groupe :	الفوج:
N d'inscription :	رقم التسجيل:
Examen de :	إمتحان في مادة:

Cycle Mat 1

Convergence des martingales

Inégalité du nombre des montées (Upcrossing inequality)

- ~~Déf~~ Déf^{t} (Stratégie des montées)

Soit $(X_n)_n$ un processus adapté et soit 2 nbre réels $a<b$.

On définit la stratégie du jeu $(C_n)_{n\geq 1}$ par :

$$C_1 = 0$$

et pour $n\geq 2$: $C_{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } C_n = 0 \text{ et } X_n < a \\ 1 & \text{si } C_n = 1 \text{ et } X_n \leq b \\ 0 & \text{si } X_n > b \end{cases}$

(C_n) est dite : « stratégie des montées »

Pour tt $k = 1, 2, \ldots$ tel que $C_k = 1$ et $C_{k+1} = 0$ sera dit « une montée (du processus X) de l'intervalle $[a,b]$ » (leurs instants d'occurence)

▶ Les montées forment une suite croissante (finie ou infinie) :

$$u_1 < u_2 < \ldots$$

Le nbre des montées faites jusqu'à n, càd le plus grand k tq $u_k \leq n$, est noté par $U_n[a,b]$

(on pose $U_n[a,b] = 0$ si un tel $k \not\exists$)

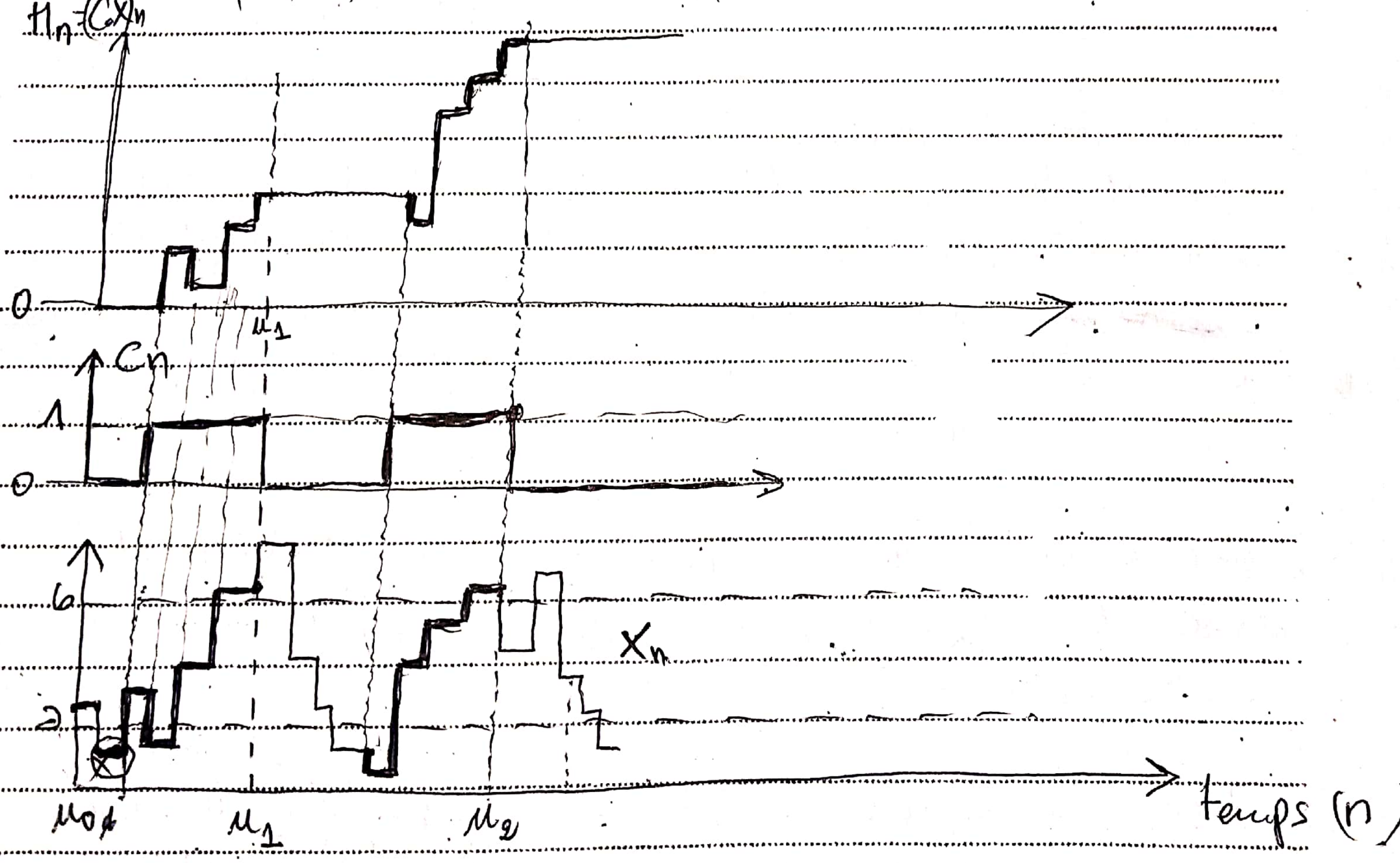
Intuition : On s'arrête ne joue que lorsque X_n devienne inférieure à a en misant 1 unité / tour et on continue jusqu'à ce que X_n deviene plus grande que b à cet instant, on s'arrête de jouer jusqu'à ce que X_n devienne $<a$ et ainsi de suite

Remarques

① Durant chaque déroulement conséqutive des jeux avec $C_n = 1$ le processus traverse (franchit) l'intervalle $[a,b]$; en commençant au dessous de a et finissant au dessus de b. Ceci veut dire qu'est ce qu'une montée.

② Chaque montée fait augmenter le gain total par au moins de $(b-a)$.

③ Il est commode d'identifier chaque montée par sa dernière étape, tq : $C_k = 1$ et $C_{k+1} = 0$.



Exercice : Vérifier que (C_n) est process prévisible.

Nom & Prénom :	اللقب و الإسم:
Niveau :	المستوى:
Groupe :	الفوج:
N° d'inscription :	رقم التسجيل:
Examen de :	إمتحان في مادة:

(cycle Marche 3)

Le ~~Thme~~ Lemme ci-dessous sert à démontrer le Thr Fondamental de la cvgce des martg de Doob.

Lemme (Inégalité des montées)
Soient $(X_n)_n$ sur martingale et $a<b$, alors :

$$(b-a)\,\mathbb{E}\left[U_n[a,b]\right] \leq \mathbb{E}\left(\left(X_n-a\right)^-\right)$$

$x^- = \max(0,-x)$ partie négative de x.
intuition : On ~~ne~~ ne peut pas ~~pas~~ ~~perdre~~ gagner si on ~~joue un~~ mise dans un jeu défavorable.

Preuve :
Soit $M_n = (C\cdot X)_n = \left(\sum_{m=1}^{n} C_m (X_m - X_{m-1}\right)$

le gain total à l'instant $n \geq 1$, si on suit la stratégie des montées de $[a,b]$. (Voir la figure ci dessus).
On a : $(C\cdot X)_0 = 0$ et $\left[(C\cdot X)_n\right]_n$: surmart.

Fixons n, et posons : $k = U_n[a,b]$, alors :

$$0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k \leq n.$$

Il est clair (voir remarque (2)) que chaque montée fait augmenter le gain total par au moins $(b-a)$,

$$M_{\mu_i} - M_{\mu_{i-1}} \geq b-a \quad \text{pour } \forall\, i \in \overline{1..k}$$

(on peut poser $\mu_0 = 0$ pour la simplicité), De plus :

$$0 = M_n - M_{u_k} \geq -(X_n - a)^-$$

Il s'en suit que :

$$M_n \geq M_{u_k} - (X_n - a)^-$$

or : $M_{u_k} \geq (b-a) U_n[a,b]$

Donc : $M_n \geq (b-a) U_n[a,b] - (X_n - a)^-$

Introduisons l'esp. ds les 2 côtés,

$$\mathbb{E}(M_n) \geq (b-a)\mathbb{E}\left(U_n[a,b]\right) - \mathbb{E}\left((X_n - a)^-\right)$$

mais comme $(M_n)_n$ est une surmart, alors :

$$0 = \mathbb{E}(M_0) \geq \mathbb{E}(M_n) \quad \text{cqfd.}$$

Rq : $\exists$ résultat pareil pr les ss mart.

$$(b-a)\mathbb{E}U_n \leq \mathbb{E}(X_n - a)^+.$$

Théorème de Convergence des mart. de Doob :

$\underline{Th^{me}}$ Soit $(X_n)_n$ une $(\mathcal{F}_n)$ - surmart bornée ds L^1

i.e $\sup_n \mathbb{E}|X_n| < \infty$

Alors il existe une v.a intégrable X telle que :

$$\lim_{n \to +\infty} X_n = X \quad (\text{noté par } X_\infty) \text{ p.s.}$$

Scanned with CamScanner