**Université A. Mira de Béjaia**
**Faculté des Sciences Exactes**
**Département de Mathématiques**

**Concours national d'entrée en Doctorat LMD**
**Spécialité :** Mathématiques
**Options :** Analyse, Probabilités et Statistiques

*08/10/2016*

*Epreuve commune : Mathématiques de base*
*Durée : 02 heures*

**Problème 1 (10 points) :**

**Partie I :**

On munit $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ de la loi $\star$ définie par :

$$\forall (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in E : \qquad (a_1, b_1) \star (a_2, b_2) = (a_1 a_2, a_1 b_2 + b_1).$$

1. Montrer que $(E, \star)$ est un groupe.
   — Ce groupe est-il abélien ? Justifier.
2. Soit $H = \{(1, b)\ ,\ b \in \mathbb{R}\}$.
   (a) Montrer que $H$ est un sous-groupe de $(E, \star)$.
   (b) Montrer que $(H, \star)$ est isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.

**Partie II :**

Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$ et tout $b \in \mathbb{R}$, on considère l'endomorphisme $f_{a,b}$ de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\begin{array}{rccc} f_{a,b} : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} ax + by \\ y \end{pmatrix} \end{array}.$$

1. Etant donné $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, déterminer la matrice $A_{a,b}$ associée à l'endomorphisme $f_{a,b}$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. On note par $G$ l'ensemble de toutes les matrices $A_{a,b}$ $(a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R})$.
   — Montrer que $(G, \cdot)$ (où $\cdot$ est la loi de multiplication des matrices) est un groupe et qu'il est isomorphe au groupe $(E, \star)$.
3. Soient $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ et $b \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $\mathscr{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b \\ a-1 \end{pmatrix} \right\}$ constitue une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ puis écrire la matrice $D_{a,b}$ associée à l'endomorphisme $f_{a,b}$ de $\mathbb{R}^2$ relativement à cette nouvelle base $\mathscr{B}$.
   (b) Justifier sans calcul la formule matricielle : $A_{a,b} = P D_{a,b} P^{-1}$, où $P := \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & a-1 \end{pmatrix}$.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$A_{a,b}^n = P D_{a,b}^n P^{-1}.$$
   (d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $A_{a,b}^n$ en fonction de $n$ puis en déduire une expression simple pour l'élément de $E$ suivant :
   $$\underbrace{(2, 1) \star (2, 1) \star \cdots \star (2, 1)}_{n \text{ fois}}.$$

**Problème 2 (10 points) :**

On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$x = \frac{1}{2}\cos x \qquad (\star)$$

1. Montrer que (**??**) possède une unique solution dans $\mathbb{R}$.
   **Pour toute la suite, on notera $\boldsymbol{\alpha}$ cette solution**.
2. Montrer que $\alpha \in ]0, \frac{1}{2}[$.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\cos u_n \qquad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|u_{n+1} - u_n|.$$

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{2^n}|u_1 - u_0|.$$

   (c) En déduire que $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy et qu'elle converge vers $\alpha$.

4.

   (a) Montrer les deux estimations suivantes :

$$\int_0^1 \sin(\alpha x)\,dx \leq \frac{\alpha}{2} \qquad (1)$$

$$\int_0^1 \sin(\alpha x)\,dx = \frac{1}{\alpha} - 2 \qquad (2)$$

   (b) En déduire l'encadrement plus précis pour $\alpha$ suivant :

$$\frac{4}{9} < \alpha < \frac{1}{2}.$$

Bon travail