

Correction de la série d'exercices n°1

EXERCICE N° 1:

1. Représenter graphiquement cette série temporelle :

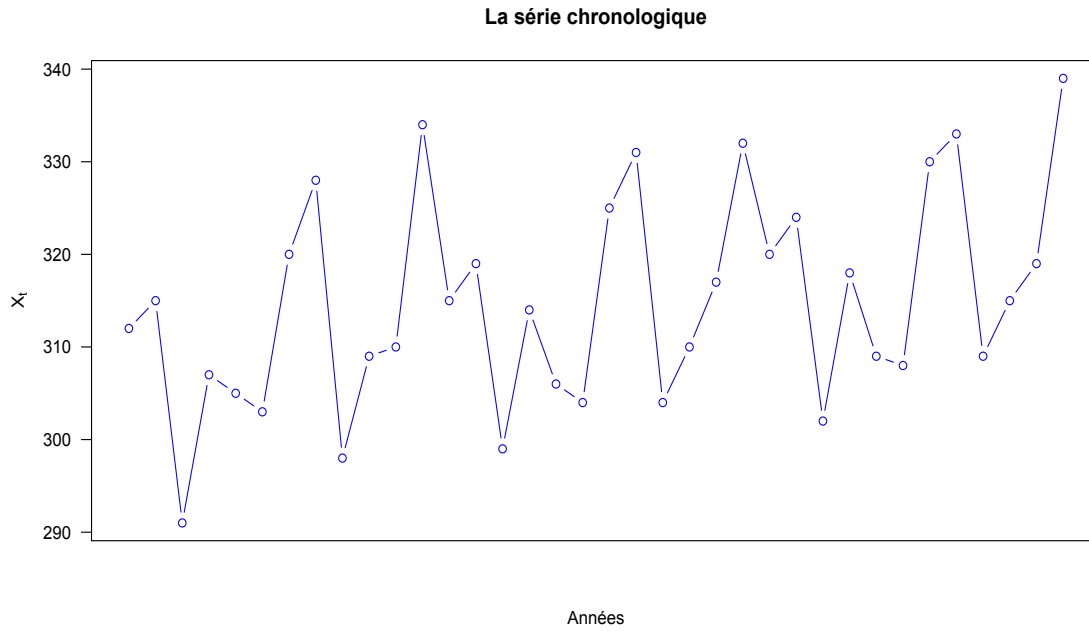


FIGURE 1 – Série chronologique.

2. Dans ce modèle, le nuage de points a une enveloppe d'épaisseur plus ou moins constante. Le nuage de points est limité par deux droites qui sont parallèles, c'est le **modèle additif**.
3. Estimer la tendance de cette série par la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO).

On a

$$\bar{t} = 18.5, \quad \bar{x} = 314.83$$

et

$$\sigma_t^2 = 107.92, \quad \sigma_X^2 = 128.14.$$

De plus,

$$Cov(t, X) = 44.67.$$

L'équation de la droite de la régression de X sur t , $X = at + b$, avec :

$$a := \frac{Cov(t, X)}{\sigma_t^2} = 0.41 \quad \text{et} \quad b := \bar{x} - a\bar{t} = 307.18$$

4. Représenter la droite d'ajustement sur le graphique précédent :

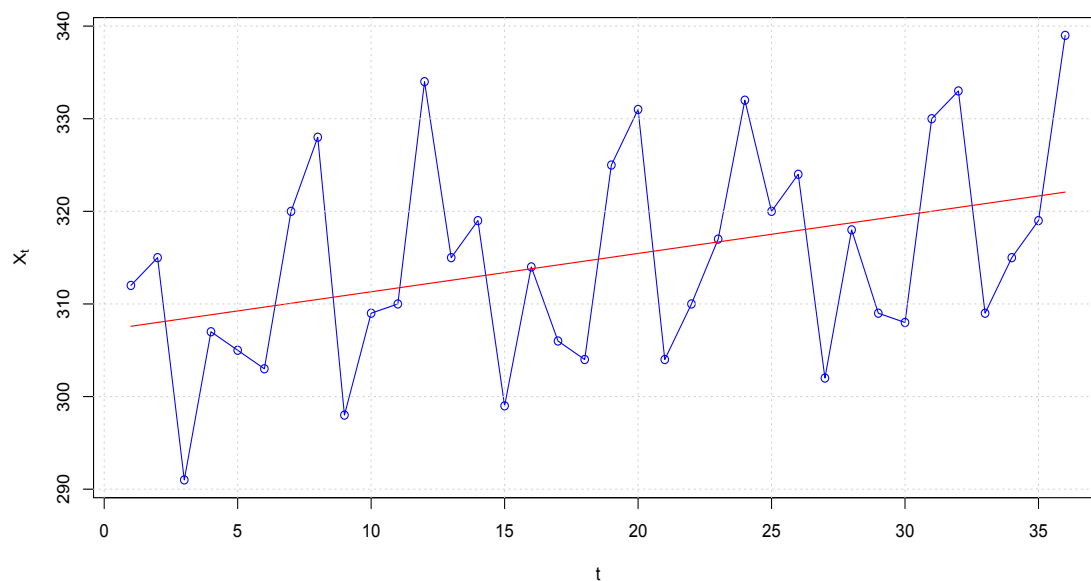


FIGURE 2 – Ajustement Linéaire.

5. Estimer les coefficients saisonniers :

Différence = Série brute – Tendence

Années	janv.	fév.	mars	avr.	mai	juin	juil.	août	sept.	oct.	nov.	déc.
2007	4.41	7.00	-17.42	-1.83	-4.25	-6.66	9.93	17.51	-12.90	-2.32	-1.73	21.86
2008	2.44	6.03	-14.38	0.20	-8.21	-10.63	9.96	15.55	-11.87	-6.28	0.30	14.89
2009	2.48	6.06	-16.35	-0.77	-10.18	-11.59	9.99	12.58	-11.83	-6.25	-2.66	16.92
S_j	3.11	6.36	-16.05	-0.80	-7.55	-9.63	9.96	15.21	-12.20	-4.95	-1.36	17.89

Par exemple :

$$S_1 = \frac{4.41 + 2.44 + 2.48}{3} = 3.11$$

On a $\bar{S} = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p S_j = 0$, se sont les coefficients finaux.

6. Établir la série désaisonnalisée ou corrigée des variations saisonnières :

La série corrigée des variations saisonnières = Série brute - Coefficient saisonnier additif

Années	janv.	fév.	mars	avr.	mai	juin	juil.	août	sept.	oct.	nov.	déc.
2007	308.89	308.64	307.05	307.80	312.55	312.63	310.04	312.79	310.20	313.95	311.36	316.11
2008	311.89	312.64	315.05	314.80	313.55	313.63	315.04	315.79	316.20	314.95	318.36	314.11
2009	316.89	317.64	318.05	318.80	316.55	317.63	320.04	317.79	321.20	319.95	320.36	321.11

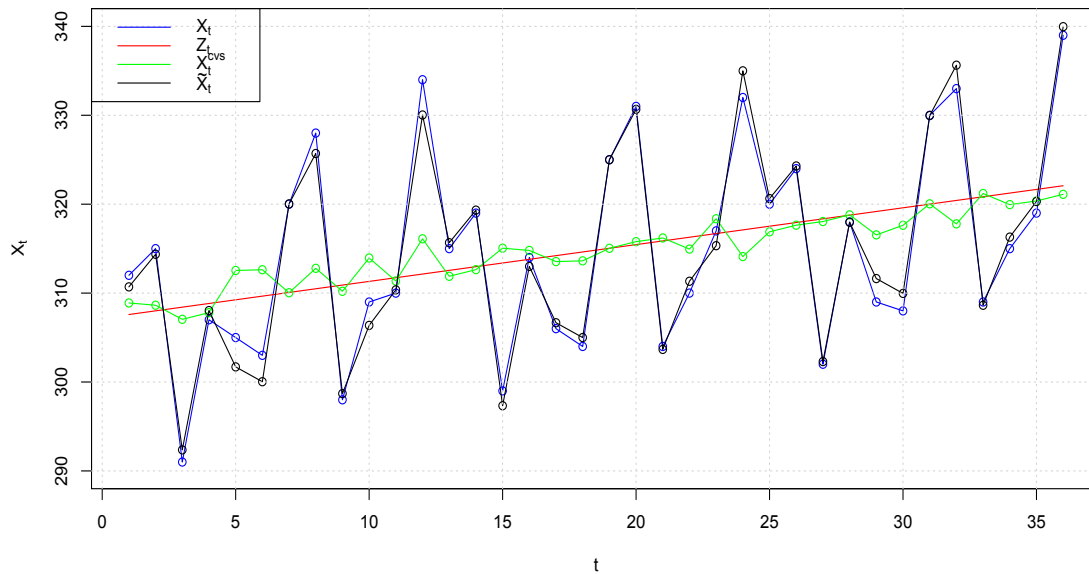


FIGURE 3 – Série corrigée des variations saisonnières.

7. Calculer les moyennes mobiles d'ordre 4 de cette série :

$$MM(4)_t = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} X_{t-2} + X_{t-1} + X_t + X_{t+1} + \frac{1}{2} X_{t+2} \right)$$

Années	janv.	fév.	mars	avr.	mai	juin	juil.	août	sept.	oct.	nov.	déc.
2007			305.38	303.00	305.12	311.38	313.12	313.00	312.50	312.00	314.88	318.25
2008	318.12	314.25	310.62	307.62	309.00	314.38	316.25	316.75	316.50	315.62	317.75	321.50
2009	321.38	317.75	314.62	311.25	312.75	318.12	320.00	320.88	320.38	319.75		

8. Estimer les coefficients saisonniers :

Différence = Série brute – $MM(4)_t$

Années	janv.	fév.	mars	avr.	mai	juin	juil.	août	sept.	oct.	nov.	déc.
2007			-14.38	4.00	-0.12	-8.38	6.88	15.00	-14.50	-3.00	-4.88	15.75
2008	-3.12	4.75	-11.62	6.38	-3.00	-10.38	8.75	14.25	-12.50	-5.62	-0.75	10.50
2009	-1.38	6.25	-12.62	6.75	-3.75	-10.12	10.00	12.12	-11.38	-4.75		
S_j	-2.25	5.50	-12.88	5.71	-2.29	-9.62	8.54	13.79	-12.79	-4.46	-2.81	13.12

On a $\bar{S} = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p S_j = -0.036$, les coefficients finaux sont :

	janv.	fév.	mars	avr.	mai	juin	juil.	août	sept.	oct.	nov.	déc.
\tilde{S}_j	-2.21	5.54	-12.84	5.74	-2.26	-9.59	8.58	13.83	-12.76	-4.42	-2.78	13.16

9. Établir la série désaisonnalisée ou corrigée des variations saisonnières :

Années	janv.	fév.	mars	avr.	mai	juin	juil.	août	sept.	oct.	nov.	déc.
2007	314.25	309.50	303.88	301.29	307.29	312.62	311.46	314.21	310.79	313.46	312.81	320.88
2008	317.25	313.50	311.88	308.29	308.29	313.62	316.46	317.21	316.79	314.46	319.81	318.88
2009	322.25	318.50	314.88	312.29	311.29	317.62	321.46	319.21	321.79	319.46	321.81	325.88

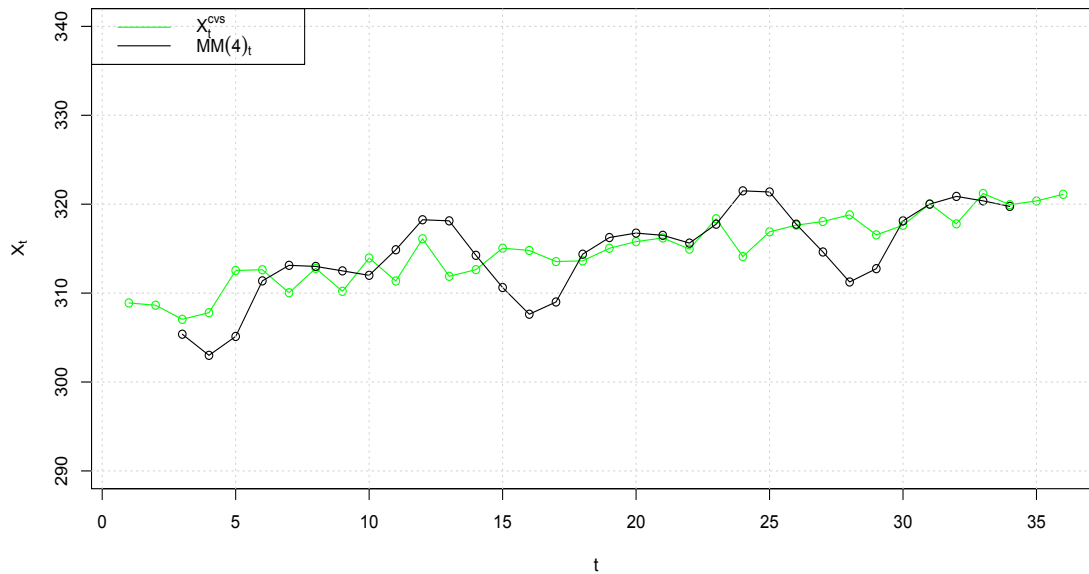


FIGURE 4 – Série corrigée des variations saisonnières.

EXERCICE N° 2:

1. Représenter graphiquement cette série temporelle.

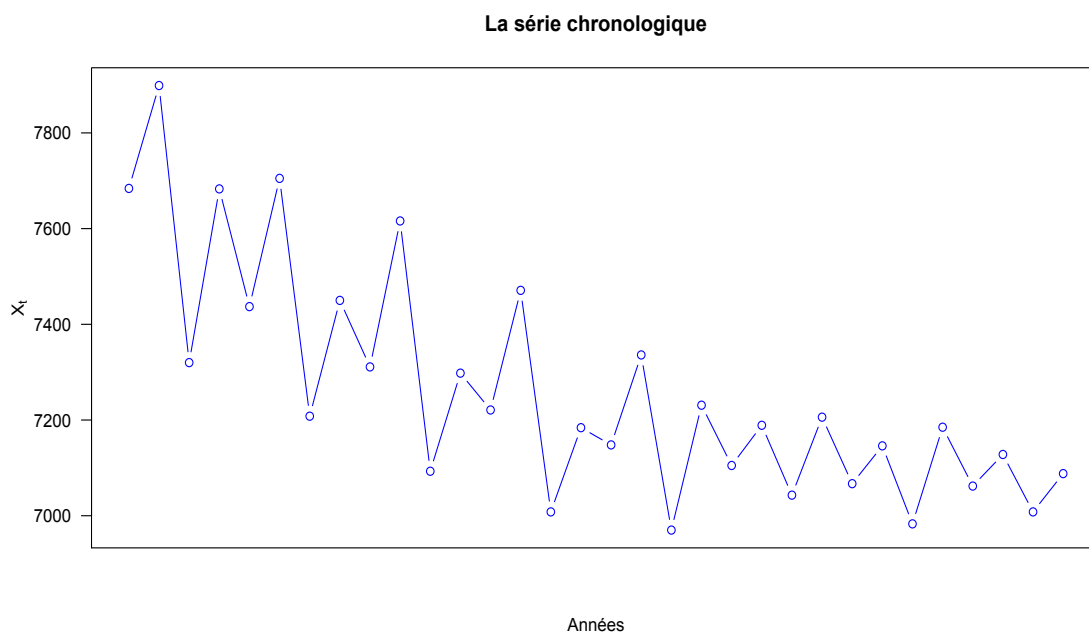


FIGURE 5 – Série chronologique.

2. Au vu du nuage de points, la tendance est manifestement décroissante et l'enveloppe du nuage de points est de moins en moins épaisse à mesure que le temps augmente. Le modèle multiplicatif est ici tout à fait approprié.

3. Appliquer la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO) à la série $(\ln t, X_t)$: On a

$$\overline{\ln t} = 2.55, \quad \bar{x} = 7265.09$$

et

$$\sigma_{\ln t}^2 = 0.71, \quad \sigma_X^2 = 55518.52.$$

De plus,

$$\text{Cov}(\ln t, X) = -158.41.$$

L'équation de la droite de la régression de X sur $\ln t$, $X = a \ln t + b$, avec :

$$a := \frac{\text{Cov}(\ln t, X)}{\sigma_{\ln t}^2} = -223.24 \quad \text{et} \quad b := \bar{x} - a \overline{\ln t} = 7834.07$$

4. Compte tenu de la forme du nuage (décroissance de plus en plus lente), un ajustement logarithmique peut être envisagé. On applique la méthode des moindres carrés à la série $(\ln t, X_t)$. Le nuage de points de coordonnées (t, X_t) est réparti le long de la courbe d'équation $Z_t = -223.24 \ln t + 7834.07$. C'est cette courbe qui nous donne la tendance générale de la série, voir Figure 6.

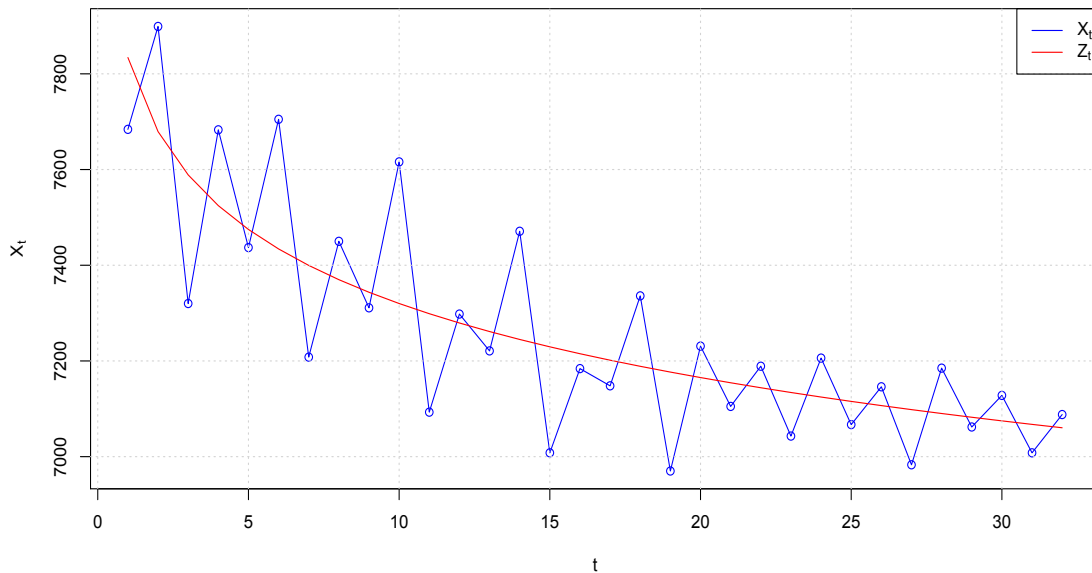


FIGURE 6 – Ajustement de la tendance.

5. Estimer les coefficients saisonniers :

Rapport = Série brute / Tendance

Années	trimestre 1	trimestre 2	trimestre 3	trimestre 4
2004	0.98	1.03	0.96	1.02
2005	0.99	1.04	0.97	1.01
2006	1.00	1.04	0.97	1.00
2007	0.99	1.03	0.97	1.00
2008	0.99	1.02	0.97	1.01
2009	0.99	1.01	0.99	1.01
2010	0.99	1.01	0.98	1.01
2011	1.00	1.01	0.99	1.00
Coefficients saisonniers S_j	0.99	1.02	0.98	1.01

On a $\bar{S} = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p S_j = 1$, se sont les coefficients finaux.

6. Établir la série désaisonnalisée ou corrigée des variations saisonnières :

La série corrigée des variations saisonnières = Série brute / Coefficient saisonnier multiplicatif

Années	trimestre 1	trimestre 2	trimestre 3	trimestre 4
2004	7740.35	7728.48	7494.61	7618.18
2005	7491.54	7538.67	7379.94	7387.15
2006	7364.62	7451.59	7262.20	7236.43
2007	7273.96	7309.72	7175.17	7123.39
2008	7200.42	7177.64	7136.26	7170.00
2009	7157.11	7033.81	7211.00	7145.21
2010	7118.83	6991.74	7149.57	7124.39
2011	7113.79	6974.13	7175.17	7028.20

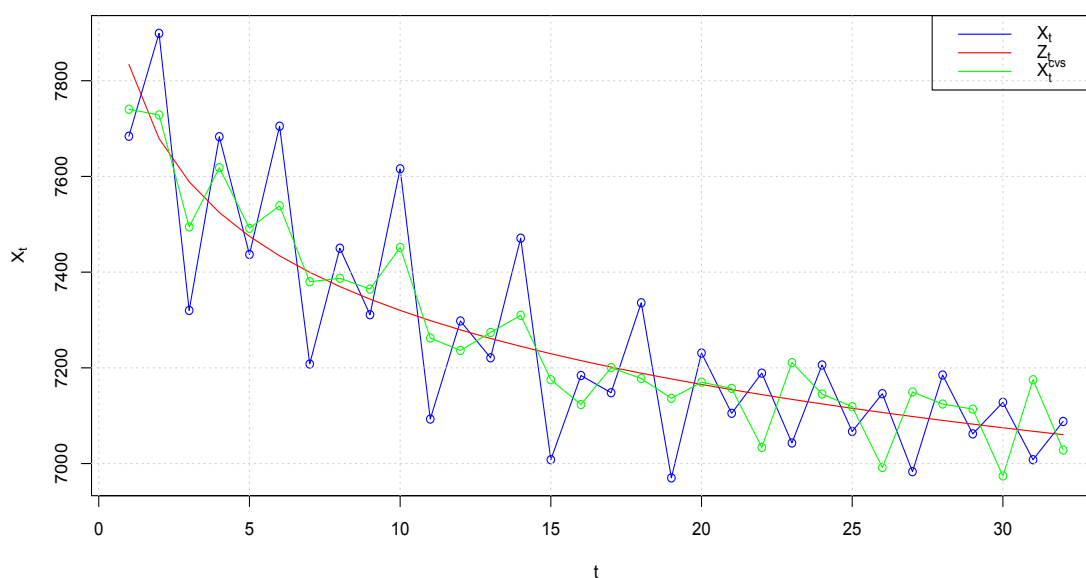


FIGURE 7 – Série corrigée des variations saisonnières.

7. Calculer les moyennes mobiles d'ordre 4 de cette série :

Années	trimestre 1	trimestre 2	trimestre 3	trimestre 4
2004			7615.62	7560.50
2005	7522.25	7479.12	7434.25	7407.38
2006	7381.88	7348.50	7318.25	7288.88
2007	7260.12	7235.25	7211.88	7185.88
2008	7164.25	7165.38	7165.88	7142.12
2009	7132.88	7138.88	7131.00	7120.88
2010	7108.00	7097.88	7094.62	7091.75
2011	7092.62	7083.62		

8. Estimer les coefficients saisonniers :

Années	trimestre 1	trimestre 2	trimestre 3	trimestre 4
2004			0.96	1.02
2005	0.99	1.03	0.97	1.01
2006	0.99	1.04	0.97	1.00
2007	0.99	1.03	0.97	1.00
2008	1.00	1.02	0.97	1.01
2009	1.00	1.01	0.99	1.01
2010	0.99	1.01	0.98	1.01
2011	1.00	1.01		
Coefficients saisonniers S_j	0.99	1.02	0.97	1.01

9. Établir la série désaisonnalisée ou corrigée des variations saisonnières :

La série corrigée des variations saisonnières = Série brute / Coefficient saisonnier multiplicatif

Années	trimestre 1	trimestre 2	trimestre 3	trimestre 4
2004	7731.03	7740.80	7517.28	7617.17
2005	7482.52	7550.68	7402.27	7386.17
2006	7355.75	7463.46	7284.17	7235.47
2007	7265.20	7321.37	7196.88	7122.45
2008	7191.75	7189.07	7157.85	7169.04
2009	7148.49	7045.02	7232.82	7144.26
2010	7110.26	7002.88	7171.20	7123.44
2011	7105.23	6985.24	7196.88	7027.27

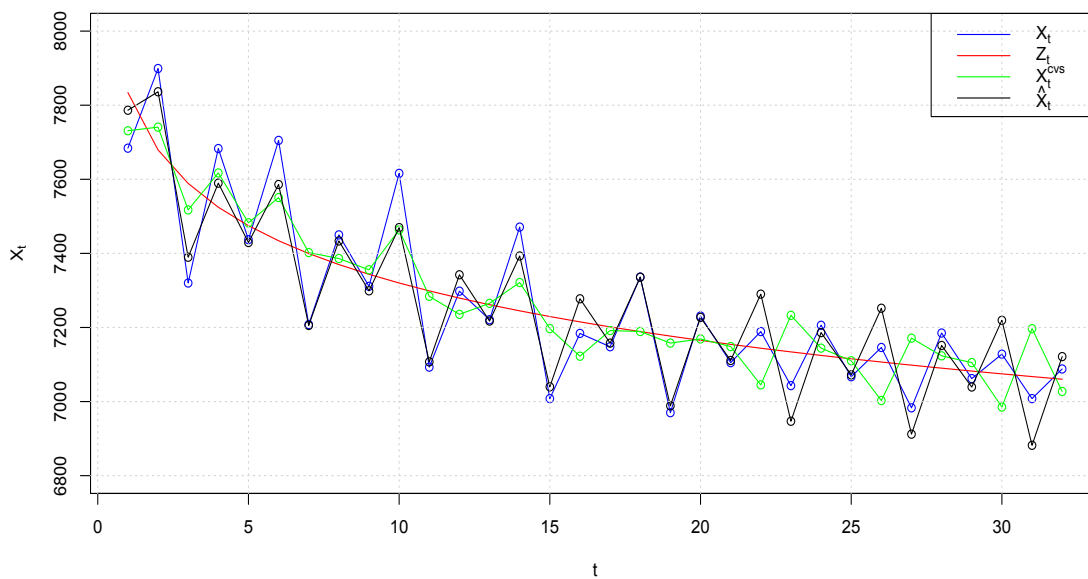


FIGURE 8 – Série corrigée des variations saisonnières et la série lissée des prédictions.