Les coefficients binomiaux forment un triangle dont les lignes correspondent à n constant, alors la somme de deux coefficients consécutifs d'une ligne est égale au terme de la ligne suivante en dessous du deuxième terme.

Exemple 3.1.9 *Triangle de Pascal en cas $n = 7$.*

$$\begin{array}{llllllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1
\end{array}$$

3.2 Exercices

Exercice 1 : Soit l'ensemble $E = \{2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9\ \}$. Avec les chiffres de cet ensemble

1/ Combien peut on avoir de nombres de 3 chiffres (avec et sans répétition) ?

2/ Parmi ceux-ci, combien sont inférieurs à 400 ?

3/ Parmiceux-ci, combien sont pairs ?

4/ Parmi ceux-ci, combien sont multiples de 5 ?

Exercice 2 : De combien de manières différentes peut-on mettre 3 personnes en rang.

Exercice 3 : Une urne contient 5 boules blanches et 3 boules rouges.

1/ Combien y-a-t-il de possibilités d'extraire de l'urne 3 boules dont 2 sont blanches et l'autre est rouge ?

2/ Combien y-a-t-il de possibilités d'extraire successivement de l'urne une boule blanche, une boule rouge et une autre boule blanche.

Exercice 4 : Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k$ en fonction de n, puis en déduire $\sum\limits_{k=0}^{10} C_{10}^k$.

Exercice 5 : Résoudre l'équation

$$C_{2x+2}^{11-x} = C_{2x+2}^{2x-1}.$$

Exercice 6 : Une commission de 5 membres comprenant 3 économistes et 2 juristes doit être constituée à partir de 13 condidats se divisant en 7 économistes et 6 juristes.

1/ De combien de façons différentes cette commission peut être constituée.

2/ Même question, un économiste nomément désigné parmi les 7 économistes condidats devant absolument faire parti de la commission.

3/ Même question, un de 6 juristes condidats devant être écarté de la commission.

4/ Même question, un économiste et un juriste ne pouvant pas faire partie ensemble de la commission.

3.3 Corrigés

Exercice 1 :

On considère l'ensemble $E = \{2, 3, 5, 6, 7, 9\}$. Il est clair que le cardinal de l'ensemble E est :
$Card\ E = 6$.

1. **Le nombre des nombres composés de 3 chiffres :**

   Un nombre composé de 3 chiffres est écrit sous la forme ABC.

   (a) **Avec répétition :**

   Soit N_1 le nombre des nombres composés de 3 chiffres avec répétition. Ainsi, chaque chiffre du nombre ABC possède 6 propositions :

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ 6 & 6 & 6 \end{array}$$

   Donc, c'est un arrangement A_n^p avec répétition où $p = 3$ et $n = 6$.

   D'où,

$$\begin{aligned} N_1 &= A_6^3 \\ &= 6^3 \\ &= 216. \end{aligned}$$

En dernier, on a 216 nombres composés de 3 chiffres avec répétition.

(b) **Sans répétition :**

Soit N_2 le nombre des nombres composés de 3 chiffres sans répétition. Ainsi, le premier chiffre A possède 6 propositions, le second B possède 5 propositions et le troisième C a 4 propositions :

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ 6 & 5 & 4 \end{array}$$

Donc, c'est un arrangement A_n^p sans répétition où $p = 3$ et $n = 6$.

D'où :

$$\begin{aligned} N_2 &= A_6^3 \\ &= \frac{6!}{3!} \\ &= 6 \times 5 \times 4 \\ &= 120. \end{aligned}$$

En dernier, on a 120 nombres composés de 3 chiffres sans répétition.

2. **Le nombre des nombres inférieurs à 400 :**

Un nombre composé de 3 chiffres inférieur à 400 est écrit sous la forme ABC avec $A = 2$ ou $A = 3$.

(a) **Avec répétition :**

Soit N_3 le nombre des nombres composés de 3 chiffres avec répétition inférieurs à 400. Ainsi, le premier chiffre A possède 2 propositions et les deux autres chiffres B et C possèdent 6 propositions :

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ 2 & 6 & 6 \end{array}$$

Donc, c'est un arrangement A_n^p avec répétition où $p = 2$ et $n = 6$ compté deux fois.

D'où :

$$\begin{aligned} N_3 &= 2 \times A_6^2 \\ &= 2 \times 6^2 \\ &= 72. \end{aligned}$$

En dernier, on a 72 nombres composés de 3 chiffres inférieurs à 400 avec répétition.

(b) **Sans répétition :**

Soit N_4 le nombre des nombres composés de 3 chiffres sans répétition inférieurs à 400. Ainsi, le premier chiffre A possède 2 propositions, le second B possède 5 propositions et le troisième C a 4 propositions :

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ 2 & 5 & 4 \end{array}$$

Donc, c'est un arrangement A_n^p sans répétition où $p = 2$ et $n = 5$ compté deux fois.

D'où :

$$\begin{aligned} N_4 &= 2 \times A_5^2 \\ &= 2 \times \frac{5!}{3!} \\ &= 2 \times 5 \times 4 \\ &= 40. \end{aligned}$$

En dernier, on a 40 nombres composés de 3 chiffres sans répétition inférieurs à 400.

3. **Le nombre des nombres pairs :**

Un nombre composé de 3 chiffres est pair s'il est écrit sous la forme ABC avec $C = 2$ ou $C = 6$.

(a) **Avec répétition :**

Soit N_5 le nombre des nombres composés de 3 chiffres avec répétition pairs. Ainsi, les deux premiers chiffres A et B possèdent 6 propositions et le dernier chiffre C possède 2 propositions.

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ 6 & 6 & 2 \end{array}$$

Donc, c'est un arrangement A_n^p avec répétition où $p = 2$ et $n = 6$ compté deux fois.

D'où,

$$\begin{aligned} N_5 &= 2 \times A_6^2 \\ &= 2 \times 6^2 \\ &= 72. \end{aligned}$$

En dernier, on a 72 nombres composés de 3 chiffres inférieurs pairs.

(b) **Sans répétition :**

Soit N_6 le nombre des nombres composés de 3 chiffres sans répétition pairs. Ainsi, le dernier chiffre C possède 2 propositions, le premier chiffre A possède 5 propositions et le deuxième chiffre B a 4 propositions (ici, on a commencé par le dernier chiffre vu que les nombres doivent être pairs) :

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ 5 & 4 & 2 \end{array}$$

Donc, c'est un arrangement A_n^p sans répétition où $p = 2$ et $n = 5$ compté deux fois.

D'où :

$$\begin{aligned} N_6 &= 2 \times A_5^2 \\ &= 2 \times \frac{5!}{3!} \\ &= 2 \times 5 \times 4 \\ &= 40. \end{aligned}$$

En dernier, on a 40 nombres composés de 3 chiffres sans répétition pairs.

4. **Le nombre des nombres multiples de 5 :**

Un nombre composé de 3 chiffres est multiple de 5 s'il est écrit sous la forme ABC avec $C = 5$.

(a) **Avec répétition :**

Soit N_7 le nombre des nombres composés de 3 chiffres avec répétition multiple de 5. Ainsi, les premiers chiffres A et B possèdent 6 propositions et le dernier chiffre C possède une seule proposition :

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ 6 & 6 & 1 \end{array}$$

Donc, c'est un arrangement A_n^p avec répétition où $p = 2$ et $n = 6$.

D'oÃ¹ :

$$\begin{aligned} N_7 &= A_6^2, \\ &= 6^2, \\ &= 36. \end{aligned}$$

En dernier, nous avons 36 nombres composés de 3 chiffres multiples de 5.

(b) **Sans répétition :**

Soit N_8 le nombre des nombres composés de 3 chiffres sans répétition multiples de 5. Ainsi, le dernier chiffre C possède une proposition, le premier chiffre A possède 5 propositions et le deuxième chiffre B a 4 propositions (ici, on a commencé par le dernier chiffre vu que les nombres doivent être multiples de 5).

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ 5 & 4 & 1 \end{array}$$

Donc, c'est un arrangement A_n^p sans répétition où $p = 2$ et $n = 5$.

D'où :

$$\begin{aligned} N_8 &= A_5^2 \\ &= \frac{5!}{3!} \\ &= 5 \times 4 \\ &= 20. \end{aligned}$$

En dernier, on a 20 nombres composés de 3 chiffres sans répétition multiples de 5.

Exercice 2 : On veut mettre 3 personnes en rang

Le nombre de manières différentes pour mettre 3 personnes en rang :

Soit N le nombre de manières différentes pour mettre 3 personnes XYZ en rang. Ainsi, X possède 3 propositions, Y a 2 proposions et une proposition pour Z :

$$\begin{array}{ccc} X & Y & Z \\ 3 & 2 & 1 \end{array}$$

Donc, c'est une permutation P de $n = 3$ éléments sans répétition.

D'où :

$$\begin{aligned} N &= P_3 \\ &= 3! \\ &= 6. \end{aligned}$$

En dernier, on a 6 différentes manières pour mettre 3 personnes en rang.

Exercice 3 :

Une urne contient 5 boules blanches et 3 boules rouges.

1/ **Le nombre de possibilités d'extraire de l'urne 3 boules dont 2 blanches et une rouge :**

Soit N_1 le nombre de possibilités d'extraire de l'urne 3 boules dont 2 blanches et une rouge. Dans ce cas, c'est le produit de deux combinaisons l'une pour les boules blanches et l'autre pour la boule rouge.

- Boules blanches : C'est une combinaison C_n^p de $p = 2$ boules prise sans remise parmi les $n = 5$ boules blanches
- Boule rouge : C'est une combinaison C_n^p de $p = 1$ boule prise sans remise parmi les $n = 3$ boules rouges.

Ainsi,

$$\begin{aligned} N_1 &= C_5^2 \times C_3^1 \\ &= \frac{5!}{2!3!} \times \frac{3!}{1!2!} \\ &= 30. \end{aligned}$$

Donc, on a 30 possibilités d'extraire de l'urne 3 boules dont 2 blanches et une rouge.

2/ **Le nombre de possibilités d'extraire successivement de l'urne une boule blanche, une boule rouge et une boule blanche**

Soit N_2 le nombre de possibilités d'extraire successivement de l'urne une boule blanche, une boule rouge et une autre boule blanche. Dans ce cas, c'est le produit de trois combinaisons une pour la première boule blanche, la deuxième pour la boule rouge et la dernière pour la boule blanche.

- Boule blanche : C'est une combinaison C_n^p de $p = 1$ boule prise sans remise parmi les $n = 5$ boules blanches

- Boule rouge : C'est une combinaison C_n^p de $p = 1$ boule prise sans remise parmi les $n = 3$ boules rouges.
- Boule blanche : C'est une combinaison C_n^p de $p = 1$ boule prise sans remise parmi les $n = 4$ boules blanches (ici, le nombre de boules blanches devient 4).

  Ainsi,

$$\begin{aligned} N_2 &= C_5^1 \times C_3^1 \times C_4^1 \\ &= \frac{5!}{1!4!} \times \frac{3!}{1!2!} \times \frac{4!}{1!3!} \\ &= 60. \end{aligned}$$

Alors, on a 60 possibilités d'extraire successivement de l'urne une boule blanche, une boule rouge et une autre boule blanche.

Exercice 4 :

1/ **Calculer $\sum_{k=0}^{n} C_n^k$:**

On sait que le développement d'un binôme est donné par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \; : \; (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, a^{n-k} \, b^k.$$

Ainsi, pour $a = 1$ et $b = 1$, on aura

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \; : \; \sum_{k=0}^{n} C_n^k &= (1+1)^n \\ &= 2^n. \end{aligned}$$

2/ **Déduire $\sum_{k=0}^{10} C_{10}^k$:**

De la première question, on aura :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k &= 2^{10} \\ &= 1024. \end{aligned}$$

<u>**Exercice 5 :**</u> On a

$$C_{2x+2}^{11-x} = C_{2x+2}^{2x-1},$$

ce qui implique

$$11 - x = 2x - 1.$$

D'où $x = 4$.

<u>**Exercice 6 :**</u>

Une commission de 5 membres comprenant 3 économistes et 2 juristes doit être constituée à partir de 13 candidats se divisant en 7 économistes et 6 juristes.

1/ <u>**Le nombre des différentes façons possibles pour construite la commission**</u> **:**

Soit N_1 le nombre des différentes façons possibles pour construite la commission. Dans ce cas, c'est le produit de deux combinaisons l'une pour les économistes et l'autre pour les juristes.

- <u>Économistes</u> : C'est une combinaison C_n^p de $p = 3$ économistes prises sans remise parmi les $n = 7$ économistes.
- <u>Juristes</u> : C'est une combinaison C_n^p de $p = 2$ juristes prises sans remise parmi les $n = 6$ juristes.

Ainsi,

$$\begin{aligned} N_1 &= C_7^3 \times C_6^2 \\ &= \frac{7!}{3!4!} \times \frac{6!}{2!4!} \\ &= 525. \end{aligned}$$

Alors, on a 525 possibilités de construire cette commission.

2/ **Le nombre des différentes façons possibles pour construire la commission où un économiste nomément désigné parmi les 7 économistes condidats devant absolument faire parti de la commission :**

Soit N_2 le nombre des différentes façons possibles pour construite cette commission. Dans ce cas, c'est le produit de deux combinaisons l'une pour les économistes et l'autre pour les juristes.

- <u>Économistes</u> : C'est une combinaison C_n^p de $p = 2$ économistes prises sans remise parmi les $n = 6$ économistes vu qu'un économiste fait partie de la commission.
- <u>Juristes</u> : C'est une combinaison C_n^p de $p = 2$ juristes prises sans remise parmi les $n = 6$ juristes.

  Ainsi,

$$\begin{aligned} N_2 &= C_6^2 \times C_6^2 \\ &= \frac{6!}{2!4!} \times \frac{6!}{2!4!} \\ &= 225. \end{aligned}$$

Donc : on a 225 possibilités de construire cette commission.

3/ **Le nombre des différentes façons possibles pour construite la commission où l'un des 6 juristes candidats devait être écarté de la commission :**

Soit N_3 le nombre des différentes façons possibles pour construite cette commission. Dans ce cas, c'est le produit de deux combinaisons l'une pour les économistes et l'autre pour les juristes.

- <u>Économistes</u> : C'est une combinaison C_n^p de $p = 3$ économistes prises sans remise parmi les $n = 7$ économistes.
- <u>Juristes</u> : C'est une combinaison C_n^p de $p = 2$ juristes prises sans remise parmi les $n = 5$ juristes vu qu'un juriste a été écarté de la commission.

  Ainsi,

$$\begin{aligned} N_3 &= C_7^3 \times C_5^2 \\ &= \frac{7!}{3!4!} \times \frac{5!}{2!3!} \\ &= 350. \end{aligned}$$

Donc, on a 350 possibiliés de construire cette commission pour ce cas.

4/ **Le nombre des différentes façons possibles pour construite la commission où un économiste et un juriste ne peuvent pas faire partie ensemble de la commission :**

Soit N_4 le nombre des différentes façons possibles pour construite cette commission. On suppose que l'économiste écarté est X et le juriste écarté est Y.

Comme on a écarté un économiste et un juriste, alors, le nombre des économistes devient 6 et celui des juristes devient 5.

- <u>Première méthode</u> : N_4 est égale au nombre de toutes les commissions possible $-$ le nombre des commissions contenant X et Y.

  Le le nombre des commissions contenant X et Y est $C_6^2\,C_5^1$ (car, on a déjà pris l'éonomiste X et le juriste Y, donc le nombre des membres de la commission est 5). Ainsi,

$$\begin{aligned} N_4 &= 525 - C_6^2\,C_5^1 \\ &= 525 - 15 \times 5 \\ &= 450. \end{aligned}$$

  Alors, on a 450 possibilités de construire cette commission.

- <u>Deuxième méthode</u> : N_4 est égale à la somme du nombre de toutes les commissions contenant l'économiste X mais pas le juriste Y + le nombre de toutes les commissions contenant le juriste Y mais pas l'économiste X + le nombre de toutes les commissions qui ne contiennent ni l'économiste X ni le juriste Y, donc,

$$\begin{aligned} N_4 &= C_6^2\,C_5^2 + C_6^3\,C_5^1 + C_6^3\,C_5^2 \\ &= 15 \times 10 + 20 \times 5 + 20 \times 10 \\ &= 450. \end{aligned}$$

  Alors, on a 450 possibilités de construire cette commission.