Université: Mohamed Khieder
Faculté des Sciences exactes, des Sciences de la nature et de la vie
Département: de Mathématiques
Module: Introd. Proc. Stoch. 2013/2014

RH

Serie N°01

On travaille sur un espace (Ω, F, P) muni d'une sous-tribu de F notée G.

Exercice 01

Soient X, Y deux v. a., X est $G-$mesurable, et $E|Y|, E|XY| < \infty$,
1) montrer que $E[XY/G] = XE[Y/G]$.
2) Si $E[X^2] < \infty$, montrer que $E(X/G)$ est la v.a. qui minimise $E[(X-Y)^2]$.

Exercice 02

Soit X, Y deux v.a. telles que la v.a. $X - Y$ est indépendante de G, d'espérance m et de variance σ^2. On suppose que Y est G-mesurable. Calculer $E[X - Y/G]$. En déduire $E(X/G)$. Calculer $E[(X-Y)^2/G]$. En déduire $E[X^2/G]$.

Exercice 03

1. Soient X et Y deux variables aléatoires de carré intégrables définie sur un espace de probabilité (Ω, F, P) et G une sous tribu de F. On suppose que $E(X^2/G) = Y^2$ et $E(X/G) = Y$ P-p.s. Montrer que $X = Y$ P-p.s.
2. Montrer que si Y est une variable aléatoire intégrable et Z une variable aléatoire bornée alors

$$\int_\Omega Z.E(Y/G)\,dP = \int_\Omega Y.E(Z/G)\,dP = \int_\Omega E(Z/G).E(Y/G)\,dP.$$

Exercice 04

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et iquidistribuées telle que $E(X_i) = \mu$ et $var(X_i) = \sigma^2$. Soit N une variable aléatoire entière, indépendante des X_i avec $E(N) = m$ et $var(N) = s^2$. naturel
On pose $S_N = \sum_{n=1}^{N} X_n$.
1. Montrer que $E(S_N/N = n) = E(S_n)$.
2. En déduire $E(S_N)$ et $var(S_N)$.

Exercice 05

Soit (Ω, F, P) un espace de probabilité et T une application de Ω dans Ω, F-mesurable. Montrer que si Y est une variable aléatoire intégrable et G une sous-tribu de F, alors

$$E(Y \circ T/T^{-1}(G)) = E(Y/G) \circ T.$$ P.Psur

Exercice 06

Soit X une variable aléatoire réelle et Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.
1) Montrer que si X a pour loi conditionnelle sachant Y un noyau $N(y, dx)$ qui ne dépend pas de y (i.e. $N(y, dx) = \mu(dx)$ probabilité sur $\mathbb{R}^d$) alors X et Y sont indépendantes, et $\mu(dx)$ est la loi de X.
2) Réciproqement si X et Y sont indépendantes et si $N(y, dx)$ est une version régulière de la loi conditionnelle de X sachant Y, montrer que pour P_Y-presque tout y, $N(y, dx) = P_x(dx)$.

Exercice 07

Soit (X, Y) une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{R}^2$ telle que Y^2 soit intégrable, et soit $N(y, dx)$ une version régulière de la loi conditionnelle de Y sachant X. On pose par définition

$$m(x) = E[Y/X = x] = \int yN(x, dy),$$
$$s^2 = E\left[(Y - m(x))^2/X = x\right] = \int (y - m(x))^2 N(x, dy).$$

1) Montrer que $E(m(X)) = E(Y)$.
2) Montrer que $var(Y) = E(s^2(X)) + var(m(X))$.

Exercice 08

Un couple de variables aléatoires X, Y est tel que: la loi de X est normale réduite $N(0,1)$. La loi de Y sachant X est donnée par

$$P[Y \in dy/X = x] = \exp\left(\left[-\frac{(1+x^2)|y|}{2}\right]\right)\left[\frac{1+x^2}{4}\right] dy.$$

1) Donner la loi du couple (X, Y).
2) Donner la loi de Y. Montrer que

$$P[Y \leq y] = \frac{1}{2}e^{\frac{y}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-y}}1_{\{y\leq 0\}} + \left[1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}\frac{1}{\sqrt{1+y}}\right]1_{\{y\geq 0\}}.$$

3) Calculer $E[Y/X = x]$ et $E[Y^2/X = x] = s^2(x)$. En déduire la variance de Y.

Exercice 09

Soit $\varphi : (E, \xi) \to (\Omega, \mathcal{F})$ une application mesurable. Montrer qu'il existe une probabilité de transition de (E, ξ) vers (Ω, F) qu'on notera $\pi_\varphi(x, A)$ telle que

$$\pi_\varphi(x, A) = \begin{cases} 1 & \text{si } \varphi(x) \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 10

Soit (Ω, F, P) un espace de probabilité et $T : L^1(\Omega, \xi, P) \to L^1(\Omega, \xi, P)$ une transformation linéaire telle que $T(1) = 1$ et $T(f) \geq 0$ si $f \geq 0$. On pose pour $x \in \Omega, A \in \xi, P(x, A) = (T1_A)(x)$.

1) Montrer que $P(x, A)$ est une probabilité de transition de (Ω, ξ) vers (Ω, ξ).
2) Montrer que pour toute fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable et bornée, on a: $(Tf)(x) = \int_\Omega f(y) P(x, dy)$.

RH.

Université: Mohamed Khieder
Faculté des Sciences exactes, des Sciences de la nature et de la vie
Département: de Mathématiques
Module: Intro. Process. 2011/2012

Serie d'exercice N02

Exercice 01. On suppose que la loi du couple (X, Y) prossède une densité $\psi(x, y) > 0$, par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$

$$P_{(X,Y)}(dx, dy) = \psi(x, y)\, dxdy.$$

Dans le cour

Montrer que la version régulière de la loi conditionnelle de X sachant Y est donnée par

$$N(y, A) = \frac{\int_A \psi(x, y)\, dx}{\int_{\mathbb{R}} \psi(x, y)\, dx}.$$

Exercice 02. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = e^{-y} 1_{\{x \geq 0\}} 1_{\{y \geq x\}}.$$

X a) Montrer que $f(x, y)\, dxdy$ est une probabilité.
b) Soit (X, Y) une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de loi $f(x, y)\, dxdy$, determiner les lois de X et Y.
c) Montrer qu'une version régulière de la loi conditionnelle de Y sachant X est donnée par

$$N(x, dy) = e^{x-y} 1_{\{y \geq x\}} dy.$$

On rappelle qu'il faut démontrer que pour toute fonction borelienne bornée φ

$$E[\varphi(Y) / X] = \int \varphi(y)\, N(X, dy), \quad P - p.s.$$

Exercice 03. Soit (X, Y) une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de loi

$$f(x, y)\, dxdy = 2\theta^2 e^{-\theta(x+y)} 1_{\{x \geq 0\}} 1_{\{y \geq x\}}.$$

a) Donner des expressions des lois conditionnelles $N_1(x, dy)$ de Y sachant X et $N_2(dx, y)$ de X sachant Y.

b) Le graphe de l'application $x \to E[Y / X = x] = \int y N_1(x, dy)$ est appelé ligne de regression de Y en X. Montrer que c'est une droite parallèle à la 1ère bissectrice.

Exercice 04 . Soit (Ω, A, P) un espace de probabilité et (B_n) une suite décroissante de sous-tribus de A. Posons $B = \underset{n}{\cap} B_n$,

Montrer que pour toute variable aléatoire $X \in L^2(\Omega, A, P)$ on a

$$E(X/B) = \lim_n E(X/B_n)$$

Indication: on montrera, grâce aux lients entre espérance conditionnelle et projection dans L^2. En déduire le résultat en montrant que

$$\underset{n}{\cap} L^2(\Omega, B_n, P) = L^2(\Omega, B, P).$$

RH

Université: Mohamed Khieder
Faculté des Sciences exactes, des Sciences de la nature et de la vie
Département: de Mathématiques
Module: Proc. Stocha. 2013/2014

Série N^{0}03

Exercice 01.

1. Soit τ un temps d'arrêt. Montrer que F_τ est une tribu.
2. Soit T un temps d'arrêt et X une variable aléatoire appartenant a F_T , vérifiant $X \geq T$. Montrer que X est un temps d'arrêt.
3. Soit S et T deux temps d'arrêt tels que $S \leq T$. Montrer que $F_S \subset F_T$.
4. Soit S et T deux temps d'arrêt. Montrer que $\{S \leq T\}$, $\{T \leq S\}$ appartiennent a F_S.
5. Soit S et T deux temps d'arrêt tels que $S < T$. Montrer que le processus $Z_t = 1(t)_{[S,T[}$ est un processus càdlàg.

Exercice 02.

Soit $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ un processus aléatoire vérifie les conditions suivantes

1. $E|X(t)| < \infty$, $\forall t \in \mathbb{R}$
2. $\forall \omega \in \Omega$ il existe

$$X'(t) = X'(t;\omega) = \frac{d}{dt}X(t,\omega).$$

3. $|X\prime(t,\omega)| \leq Y(\omega)$, $\omega \in \Omega$, où Y est une variable aléatoire telle que $E|Y| < \infty$.

Montrer que $E[X(t)]$ est différentiable par rapport à t et on a

$$\frac{d}{dt}EX(t) = EX'(t).$$

Exercice 03.

Soit $\{X(t), t \in [a,b]\}$ un processus aléatoire tel que

1. $|X(t,\omega)| \leq Y(\omega)$, $\omega \in \Omega$, $\forall t \in [a,b]$, où Y est une variable aléatoire intégrable.
2. pour tout $\omega \in \Omega$ les trajectoires $X(t,\omega)$ sont integrables sur $[a,b]$.
3. $EX(t)$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$.

Montrer que

$$\int_a^b E[X(t)]\,dt = E\left[\int_a^b X(t)\,dt\right].$$

Exercice 04.

Soit $X_t, t \in \mathbb{Z}$ un processus aléatoire, avec $X_t = mt + b + \xi_t$, où $\xi_t, t \in \mathbb{Z}$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribiées

$$E[\xi_t] = 0, \text{ et } Var[\xi_t] = \sigma^2, \forall t \in \mathbb{Z}.$$

1) Le processus X_t est stationnaire?

2) On considère un nouveau processus $Y_t, t \in \mathbb{Z}$, par $Y_t = X_t - X_{t-1}$. Montrer que Y_t est stationnaire.

Exercice 05.

Soit $X_t, t \in \Im$ un processus aléatoire, tel que

$$P(X_t = 1) = P(X_t = -1) = 0.5, \ \forall t \in \Im.$$

Ce processus est stationnaire?

Exercice 06.

Soit $X_t, t \in \Im$ un processus aléatoire, tel que

$$P(X_t = 0) = 1 - \frac{1}{t}$$
$$P\left(X_t = \sqrt{t}\right) = \frac{1}{2t},$$
$$P\left(X_t = -\sqrt{t}\right) = \frac{1}{2t}.$$

Ce processus est stationnaire?

Exercice 07.
Soit $Y_t, t \in \mathbb{N}$ un processus aléatoire,

$$Y_t = (-1)^t X_t, t \in \mathbb{N}.$$

où $X_t, t \in \mathbb{N}$ est un processus stationnaire

$$E[X_t] = 0, E[X_t X_s] = 0 \forall t \neq s, \text{ et } Var[X_t] = \sigma^2, \forall t \in \mathbb{N}.$$

Considérons le processus $Z_t = X_t + Y_t, t \in \mathbb{N}$. Ce processus est stationnaire?

Exercice 08.
Soit $X_n, n \in \mathbb{N}$ un processus aléatoire à temps discret tel que $E[X_n] = 0, \forall t \in \mathbb{N}$

$$Var[X_n] = \begin{cases} \dfrac{\sigma^2}{1-\mu^2}, & \text{si } n = 0, \\ \sigma^2, & \text{si } n \geq 1, \end{cases}$$

avec $0 < \mu^2 < 1$, et $E[X_i X_j] = 0, \forall i \neq j$. Maintenant on construit un nouveau processus à temps discrèt

$$Z_n = \begin{cases} X_0, & \text{si } n = 0, \\ \mu Z_{n-1} + X_n, & \text{si } n \geq 1, \end{cases}$$

connu comme le processus de autorégression du premier ordre. Montrer que Z_n est stationnaire.

Exercice 09.
On suppose que la durée de vie X d'un produit est une variable aléatoire continue de fonction de répartition F et de densité f. on suppose qu'aprés défaillance le produit est réparé et la durée de vie après la répartition a la même répartition. On observe donc une suite de variables aléatoires i.i.d $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ Désignons par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

le moment de la n-ème défaillance et par $N(t)$ le nombre de défaillances dans l'intervalle $[0, t]$; F_n et f_n sont respectivement la fonction de répatition et la densité de S_n.

Montrer que

(a)

$$P\{N(l) = n\} = F_n(l) - F_{n+1}(l), \quad (n = 0, 1, ...; F_0 \equiv 0)$$

(b)

$$H(t) = EN(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} F_n(t)$$

(c) notons $W_t = S_{N(t)+1} - t$ le temps entre le moment t et le moment de la première défaillance après t. Montrer que si les fonctions $f_n(l)$ et la somme $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(l)$ sont continues sur $[0, +\infty)$, alors la fonction de répartition de W_t est donnée par la formule

$$F_{W_t}(s) = F(t+s) - \int_0^t \{1 - F(t+s-x)\} h(x)\, dx, \quad s \geq 0,$$

où $h(x) = H'(x)$.

(d) Montrer que lorsque les X_i sont distribuées exponentiellement avec le paramètre $\lambda > 0$, alors

$$N(t) \sim P(\lambda t), h(t) = \lambda, W_t \sim 1 - e^{-\lambda t}, t \geq 0$$

Exercice 10.
Soit $X(t)$ un processus de Poisson. Trouver $cov(X(t), X(t+\tau)), t > 0, \tau > 0$.