Processus Stochastiques

Présenté par : M. HAMMAD

0.1 Généralités sur les processus

Définition 0.1.1. ***(Processus stochastique à temps continu)***
On appelle processus stochastique à temps continu et à valeurs dans l'espace $(E, \mathcal{E})$, *une famille* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *de variables aléatoires sur l'espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *à valeurs dans* $(E, \mathcal{E})$.

Remarque 0.1.1.
Le processus $X_t(\omega)$ *dépend de deux paramètres : dépend de* t *(en géneral le temps) et de l'aléatoire* $\omega \in \Omega$:

- *Pour* $t \in \mathbb{R}_+$ *fixé,* $\omega \in \Omega \mapsto X_t(\omega)$ *est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ($X_t(\omega)$ *: est l'état du processus à l'instant* t).
- *Pour* $\omega \in \Omega$ *fixé,* $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto X_t(\omega)$ *est une fonction aléatoire à valeurs réelles, appelée trajectoire du processus.*

0.1.1 Filtrations et Notion de temps d'arrêt

Définition 0.1.2.
On appelle filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, *une famille croissante de sous-tribus de* $\mathcal{F}$, *i.e.*

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F},$$

pour tout $s, t \in \mathbb{R}_+$ *et tels que* $s \leq t$.

La filtration naturelle du processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est la plus petite tribu engendrée par le processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$

$$\mathcal{F}_t^X := \sigma(X_s,\, s \leq t), t \geq 0.$$

Remarque 0.1.2.
Pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$, *la tribu* $\mathcal{F}_t$ *représente l'information disponible à la date* t *et la croissance de la famille* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *traduit l'idée que l'information ne peut que s'accumuler au fil du temps, et qu'il n'y a pas de possibilté de séparer les informations passées du présent.*

Définition 0.1.3.

Sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$. *Une variable aléatoire* τ, *à valeurs dans* $[0, +\infty]$ *est un temps d'arrêt (de la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*) si, pour tout* $t \geq 0$:

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Remarque 0.1.3.

On pourra vérifier, que τ *est encore un temps d'arrêt si et seulement si, pour tout* $t \geq 0$:

$$\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Proposition 0.1.1.

Si τ *et* ν *sont deux temps d'arrêt, alors* $\tau \wedge \nu$, $\tau \vee \nu$, $\tau + \nu$ *le sont aussi.*

Définition 0.1.4.

On appelle tribu des événements antérieurs à τ, *qu'on note* $\mathcal{F}_\tau$, *la tribu*

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty; \text{ pour tout } t \geq 0, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

0.1.2 Notions de Martingales

Cas discret $\mathrm{T} = \mathbb{N}$

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré (muni d'une filtration $(\mathcal{F}_n)_n$) et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus $\mathcal{F}_n-$adapté.

Définition 0.1.5.

Le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dit :*

- ***Martingale*** *si seulement si* $\mathbb{E}(|X_n|) < +\infty$ *et* $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$ $\mathbb{P}.p.s, \forall n \in \mathbb{N}$.
- ***Sous-martingale*** *si seulement si* $\mathbb{E}(X_n^+) < +\infty$ *et* $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq X_n$ $\mathbb{P}.p.s, \forall n \in \mathbb{N}$.
- ***Sur-martingale*** *si seulement si* $\mathbb{E}(X_n^-) + \infty$ *et* $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq X_n$ $\mathbb{P}.p.s, \forall n \in \mathbb{N}$.

Propriétés 0.1.1.

- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une martingale si et seulement si* $\mathbb{E}(X_{n+j}|\mathcal{F}_n) = X_n$ $\forall j \geq 0$.
- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une martingale, alors* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0)$.
- *La somme de deux martingales est une martingale.*
- *On a des propriétés analogues pour les sous-martingales et les sur-martingales.*

Propriété supplémentaire *(Inégalité de Jensen pour les martingales)*

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une martingale (resp. sous-martingale),* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction convexe (resp. convexe* $\nearrow$*) tel que* $(\varphi(X_n))^+$ *est intégrable, alors* $(\varphi(X_n))_n$ *est une sous-martingale.*

Une autre formulation de la propriété de martingale

Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une filtration et* (X_n) *un processus tel que* X_n *est* $\mathcal{F}_n-$*mesurable. Alors*

$$X_n \textit{ est une martingale si et seulement si } \mathbb{E}(\Delta X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = 0,$$

où $\Delta X_n = X_n - X_{n-1}$. *On laisse la vérification aux étudiants, pour s'entraîner.*

0.1.3 Transformé de Martingale

Proposition 0.1.2.

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ *une martingale et soit* $(H_n)_{n\geq 0}$ *un processus prévisible par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. *On pose* $\Delta X_n = X_n - X_{n-1}$. *La suite* $(X_n)_{n\geq 0}$ *définie par :*

$$\begin{aligned} Y_0 &= H_0X_0 \\ Y_n &= H_0X_0 + H_1\Delta X_1 + \cdots + H_n\Delta X_n \, pour \, n \geq 1 \end{aligned}$$

est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, *appelée transformée de la martingale* (X_n) *par la suite* (H_n).

Proposition 0.1.3.

Une suite adapté de variable aléatoire réelles (X_n) *est une martingale si et seulement si pour toute suite prévisible* (H_n), *on a :*

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{N} H_n\Delta X_n\right) = 0.$$

Décomposition des surmartingales

La décomposition suivante connue classiquement sous le nom " Décomposition de Doob" permet, dans les modèles de marchés viables et complets, d'associer à toute surmartingale une stratégie de gestion dans laquelle la consommation est autorisée.

Proposition 0.1.4.

Toute surmartingale $(Y_n)_{0\leq n\leq N}$ *peut s'écrire de façon unique de la forme :*

$$Y_n = X_n - A_n$$

où (X_n) *est une martingale et* (A_n) *un processus croissant, prévisible, nul en 0.*

Martingales à temps continu

La définition suivante est une extension de celle en temps discret.

Définition 0.1.6.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité et* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *une filtration de cet espace. Une famille* $(X_t)_{t\geq 0}$ $\mathcal{F}_t-$*adaptée de variables aléatoires intégrables, (i.e. vérifiant* $\mathbb{E}(|X_t|) < +\infty$ *pour tout* t*) est :*

- *une martingale si, pour tout* $s \leq t$, $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$ $\mathbb{P}$*.p.s.*
- *une sous-martingale si, pour tout* $s \leq t$, $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \geq X_s$ $\mathbb{P}$*.p.s.*
- *une sur-martingale si, pour tout* $s \leq t$, $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \leq X_s$ $\mathbb{P}$*.p.s.*

Remarque 0.1.4.

La plupart des résultats du temps discret restent valables en temps continu.

Théorème 0.1.1. ***Théorème d'arrêt***

Si $(X_t)_{t\geq 0}$ *est une martingale continue par rapport à une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, *et si* τ_1, τ_2 *sont deux temps d'arrêt tels que* $\tau_1 \leq \tau_2 \leq K$, *où* K *est une constante réelle finie, alors* X_{τ_2} *est intégrable et* $\mathbb{E}(X_{\tau_2}|\mathcal{F}_{\tau_1}) = X_{\tau_1}$ $\mathbb{P}$ *p.s.*

0.1.4 Mouvement Brownien

On se donne $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité filtré (muni d'une filtration naturelle* $(\mathcal{F}_t)_t$*) du processus* $(B_t)_t$.

Définition 0.1.7.

Le processus B *est* ***un mouvement brownien*** *si*

a) $\forall s \leq t$, $B_t - B_s$ *est une variable réelle de loi* ***gaussienne, centrée de variance*** $(t-s)$.

b) $\forall n, \forall t_i$, $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$, *les variables* $(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \ldots, B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_0})$ *sont indépendantes.*

b') Pour tout (t, s) *la variable* $B_{t+s} - B_t$ *est indépendante de la tribu du passé avant* t, *soit* $\mathcal{F}_t = \sigma(B_u,\ u \leq t)$.

Remarque 0.1.5.

- *Cette définition permet de caractériser la loi de la v.a* B_t, *qui est un résultat délicat à établir.*
- *Le mouvement brownien* B *est dit* ***standard*** *si* $B_0 = 0$ *(le mouvement brownien est issue de l'origine).*
- *La propriété a) est la stationnarité des accroissements du mouvement brownien.*
- *La propriété b) traduit que le mouvement brownien est à accroissements indépendants.*

Proposition 0.1.5.

Un mouvement brownien standard est une v.a gaussienne centrée $(\mathbb{E}(B_t) = 0)$ *et de variance* $Var(B_t) = \mathbb{E}(B_t^2) = t$. *Dans ce cas la loi de* B_t *prend la forme :* $\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx$,

dx *: étant la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}$.

Définition 0.1.8.

On appelle $\mathcal{F}_t-$mouvement brownien, un processus stochastique à valeurs rélles et à trajectoires continues qui vérifie :

- $\forall t \geq 0$, B_t *est* $\mathcal{F}_t-$*mesurable.*
- *Si* $s \leq t$: $B_t - B_s$ *est indépendant de la tribu* $\mathcal{F}_s$.
- *Si* $s \leq t$ *la loi* $B_t - B_s$ *est identique à celle de* $B_{t-s} - B_0$.

Remarque 0.1.6.

Un $\mathcal{F}_t-$mouvement brownien est un mouvement brownien par rapport à sa filtration naturelle.

Donnons des exemples de martingales que l'on peut construires à partir d'un mouvement brownien.

Proposition 0.1.6.

Si $(B_t)_{t\geq 0}$ *est un* $\mathcal{F}_t-$*mouvement brownien standard, alors :*

- B_t *est une* $\mathcal{F}_t-$*martingale.*
- $B_t^2 - t$ *est une* $\mathcal{F}_t-$*martingale.*
- $\exp(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t)$ *est une* $\mathcal{F}_t-$*martingale.*

Généralisation

Si B est un mouvement brownien standard, le processus Z défini par $Z_t = x + B_t$ est un mouvement brownien issue de x.
On dit qu'un processus X est un mouvement brownien de ***drift*** *μ et de* ***coefficient de diffusion*** *σ si :*

$$X_t = x + \mu t + \sigma B_t$$

où B est un mouvement brownien. La v.a. X_t est une v.a. gaussienne d'espérance $x + \mu t$ et de variance $\sigma^2 t$.

Proposition 0.1.7.

Si $(B_t)_{t\geq 0}$ *est un* $\mathcal{F}_t-$*mouvement brownien, alors*

- *Le processus* $\widehat{B}$ *défini par* $\widehat{B}_t = -B_t$ *est un mouvement brownien.*
- *Le processus* $\widetilde{B}$ *défini par* $\widetilde{B}_t = \frac{1}{c}B_{c^2t}$ *est un mouvement brownien.*
- *Le processus* $\overline{B}$ *défini par* $\overline{B}_t = tB_{\frac{1}{t}}$, $\forall t \geq 0$, $\overline{B}_0 = 0$ *est un mouvement brownien.*

Théorème 0.1.2.

Un processus B est un mouvement brownien si est seulement si c'est un processus gaussien continu centré de fonction de covariance donnée par

$$Cov(B_s, B_t) = s \wedge t, pour\ s, t \in [0, T].$$

0.2 Changement de probabilité. Théorème de représentation des martingales

0.2.1 Probabilités équivalentes

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité. Une probabilité* $\mathbb{Q}$ *sur* $(\Omega, \mathcal{F})$ *est dite absolument continue par rapport à* $\mathbb{P}$ *si :*

$$\forall A \in \mathcal{F}\, \mathbb{P}(A) = 0 \Longrightarrow \mathbb{Q}(A) = 0.$$

Théorème 0.2.1.

$\mathbb{Q}$ *est absolument continue par rapport à* $\mathbb{P}$ *si, et seulement si, il existe une variable aléatoire* Z *à valeurs positives ou nulles sur* $(\Omega, \mathcal{F})$ *telle que :*

$$\forall A \in \mathcal{F} : \ \mathbb{Q}(A) = \int_A Z(\omega) d\mathbb{P}(\omega).$$

Z *est appelée densité de* $\mathbb{Q}$ *par rapport à* $\mathbb{P}$ *notée parfois* $\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}$.

L'équivalence à démontrer est évidente dans un sens, la réciproque est une version du théorème de Radon-Nikodyn.

Les probabilités $\mathbb{P}$ *et* $\mathbb{Q}$ *sont dites équivalentes si chacune d'elles est absolument continue par rapport à l'autre. Noter que si* $\mathbb{Q}$ *est absolument continue par rapport à* $\mathbb{P}$, *de densité* Z, *alors* $\mathbb{P}$ *et* $\mathbb{Q}$ *sont équivalentes si et seulement si* $\mathbb{P}(Z > 0) = 1$.

0.2.2 Théorème de Girsanov

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{0\leq t\leq T}, \mathbb{P})$ *une base stochastique de filtration la filtration naturelle du mouvement brownien standard* $(B_t)_{0\leq t\leq T}$, *indexé par l'intervalle de temps* $[0, T]$. *Le théorème suivant, que nous admettrons, est connu sous le nom de théorème de Girsanov.*

Théorème 0.2.2.

Soit $(\theta_t)_{0\leq t\leq T}$ *un processus adapté vérifiant* $\int_0^T \theta_s^2 ds < \infty$ *p.s. et tel que le processus* $(L_t)_{0\leq t\leq T}$ *défini par :*

$$L_t = \exp\left(-\int_0^T \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds\right)$$

soit une $\mathcal{F}_t-$*martingale. Alors il existe une probabilité* $\mathbb{P}^{(L)}$ *de densité* L_T *équivalente à* $\mathbb{P}$ *sous laquelle le processus* $(W_t)_{0\leq t\leq T}$ *définit par :* $W_t = B_t + \int_0^T \theta_s ds$ *est un* $\mathcal{F}_t-$*mouvement brownien standard.*

Remarque 0.2.1.

Une condition suffisante pour que le processus $(L_t)_{0\leq t\leq T}$ *soit une martingale est que l'on ait :* $\mathbb{E}(\exp(\frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds)) < \infty.$

0.2.3 Théorème de représentation des martingales browniennes

Soit $(B_t)_{0\leq t\leq T}$ *un mouvement brownien standard construit sur l'espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *et soit* $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ *sa filtration naturelle. D'après la proposition (**??**) du chapitre 4, si* $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ *est un processus adapté tel que* $\mathbb{E}(\int_0^T H_t^2 dt) < \infty$*, le processus* $(\int_0^t H_s dB_s)$ *est une martingale de carré intégrable, nulle en 0. Le théorème suivant montre que toutes martingales browbienne peuvent se représenter à l'aide d'une intégrale stochastique.*

Théorème 0.2.3.

Soit $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ *une martingale de carré intégrable, par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$. *Il existe un processus adapté* $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ *tel que* $\mathbb{E}(\int_0^T H_s^2 ds) < \infty$ *et*

$$\forall t \in [0, T]\ \ X_t = X_0 + \int_0^t H_s dB_s\, p.s. \tag{1}$$

Remarque 0.2.2.

Noter que cette représentation n'est possible que pour les martingales browniennes (de la filtration naturelle du mouvement brownien).

Il résulte du théorème que si Y *est une variable aléatoire* $\mathcal{F}_T-$*mesurable de carré intégrable, on peut l'écrire sous la forme :*

$$Y = \mathbb{E}(Y) + \int_0^T H_s dB_s\, p.s.$$

où (H_t) *est un processus adapté tel que* $\mathbb{E}(\int_0^T H_s^2 ds) < \infty$*. Il suffit pour cela de considérer la martingale* $X_t = \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_t)$*. On démontre que si* $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ *est une martingale (non nécessairement de carré intégrable) il existe une représentation de type (1) mais avec un processus vérifiant seulement* $\int_0^T H_s^2 ds < \infty$ *p.s.*