Département de mathématiques
Faculté des Sciences
université Badji-Mokhtar, Annaba

Série de TD N°1

Exercice 1: Soit la matrice par blocs:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix}$$

avec $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $D \in \mathbb{C}^{m\times m}, B \in \mathbb{C}^{n\times m}$ et $O \in \mathbb{C}^{m\times n}$.

Montrer que M est inversible si et seulement si A et D sont inversibles. Calculer alors l'inverse de M à l'aide de A,

B et D. Donner l'inverse de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} I_n & B \\ O & I_m \end{pmatrix}$$

Exercice 2: Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

avec $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $D \in \mathbb{C}^{m\times m}, B \in \mathbb{C}^{n\times m}$ et $C \in \mathbb{C}^{m\times n}$.

1. On suppose que A est inversible. Démontrer l'égalité

$$M = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ CA^{-1} & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & O \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & A^{-1}B \\ CA^{-1} & I_m \end{pmatrix}$$

En déduire que

$$\det(M) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$$

Montrer que si de plus $n = m$ et $AC = CA$, alors $\det(M) = \det(AD - CB)$.

2- On suppose que D est inversible. Démontrer de la même façon l'égalité

$$M = \begin{pmatrix} I_n & BD^{-1} \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & O \\ O & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & A^{-1}B \\ D^{-1}C & I_m \end{pmatrix}$$

En déduire que

$$\det(M) = \det(D)\det(A - BD^{-1}C)$$

Montrer que si de plus $n = m$ et $BD = DB$, alors $\det(M) = \det(A - BD^{-1}C)$.

3- On suppose que A et $D - CA^{-1}B$ sont inversibles. À l'aide de la question 1 donner une expression de M^{-1} utilisant A^{-1} et $(D - CA^{-1}B)^{-1}$.

4- On suppose que D et $A-BD^{-1}C$ sont inversibles. À l'aide de la question 1 donner une expression de M^{-1} utilisant D^{-1} et $(A-BD^{-1}C)^{-1}$.

5- Sous l'hypothèse que A et $D-CA^{-1}B$ sont inversibles, montrer grâce aux questions 3 et 4 que $A-BD^{-1}C$ est inversible et que

$$\left(A-BD^{-1}C\right)^{-1}=A^{-1}+A^{-1}B\left(D-CA^{-1}B\right)^{-1}CA^{-1}$$

Exercice 3: Soient A et $B\in\mathbb{C}^{n\times n}$. Montrer que

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}=\det(A-B)\det(A+B)$$

Exercice 4: Soit la matrice par blocs

$$M=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} I_n & iI_n \\ iI_n & I_n \end{pmatrix}$$

1- Montrer que

$$M^{-1}=\begin{pmatrix} I_n & -iI_n \\ -iI_n & I_n \end{pmatrix}$$

2- Soient A et B dans $\mathbb{R}^{n\times n}$. Montrer que

$$M^{-1}\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}M=\begin{pmatrix} A+iB & 0 \\ 0 & A-iB \end{pmatrix}$$

En déduire que

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}=\det(A+iB)\det(A-iB)=\left|\det(A+iB)\right|^2$$

si de plus $AB=BA$ on a

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}=\det(A^2+B^2)$$

Exercice 5: Effectuer les produits matriciels suivants en utilisant la multiplication par blocs

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 10 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Prof. Bouras Med Chérif