N'hesitez pas à me contacter si vous avez des questions ou des remarques :
rouane09@yahoo.fr

Chapitre1 Espérance conditionnelle

Dans tout ce chapitre, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, où Ω est un ensemble (quelconque), $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω et $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

1 Définition de l'espérance conditionnelle

Définition 1.1. *On suppose que $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ est intégrable, i.e. $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, on suppose que $\mathcal{G}$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$.*
On définit l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{G}$ et on note $\mathbb{E}(X/\mathcal{G})$ toute variable aléatoire Y qui vérifie :

1. *Y est $\mathcal{G}$-mesurable.*
2. *$\forall A \in \mathcal{G},\ \mathbb{E}(\mathbb{1}_A X) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A Y)$.*

1.1 Existence et unicité de l'espérance conditionnelle

Proposition 1.1. *L'espérance conditionnelle de $X \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ existe et est unique.*

Remarque 1.1. *On parle ici toujours, bien entendu, d'unicité à indistinguabilité près.*

Commençons, pour prouver la proposition, par établir l'unicité.

Preuve de l'unicité : Supposons que Y, $\acute{Y}$ vérifient (1), (2) Rappelons que Y, $\acute{Y}$ sont intégrables.
Fixons $\varepsilon > 0$ et posons $A_\varepsilon = \{Y - \acute{Y} \geq \varepsilon\}$. D'après le fait que Y et $\acute{Y}$ vérifient (1), $A_\varepsilon \in \mathcal{G}$ et donc d'après (2) et la linéarité de l'espérance :

$$0 = \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{A_\varepsilon}) - \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{A_\varepsilon}) = \mathbb{E}((Y - \acute{Y})\mathbb{1}_{A_\varepsilon}) \geq \varepsilon\mathbb{P}(A_\varepsilon),$$

ce qui entraîne que $\mathbb{P}(A_\varepsilon)$=0.
Comme ce raisonnement est valable $\forall \varepsilon > 0$, on d'eduit que :
$0 = \mathbb{P}(\bigcap_{\varepsilon>0} A_\varepsilon) = \mathbb{P}(Y - \acute{Y} > 0)$ i.e. $Y < \acute{Y}$ p.s.
Par symétrie des rôles de $Y, \acute{Y}$ on obtient de même $\acute{Y} < Y$ p.s. et on conclut que : $\mathbb{P}(Y = \acute{Y}) = 1$.
Ceci achève la preuve de l'unicité.

Preuve de l'existence (via Radon-Nykodym) :

Supposons tout d'abord $X \in \mathbb{L}^1, X \geq 0$. On définit alors la mesure (finie) $\mathbb{Q}$ sur $(\Omega, \mathcal{G})$ telle que :

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}(X\mathbb{1}_A), \forall A \in \mathcal{G}$$

Lemme 1.1. *On a $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$, et on peut donc définir sur $(\Omega, \mathcal{G})$ la variable $Y = \dfrac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$.*

En effet, si $A \in \mathcal{G}$ vérifie $\mathbb{P}(A) = 0$, alors pour tout $M > 0$ On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X\mathbb{1}_A) &= \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{0\leq X\leq M}\mathbb{1}_A) + \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{X>M}\mathbb{1}_A) \\ &\leq M\mathbb{P}(A) + \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{X>M}) \end{aligned}$$

Pour tout $M > 0$ le premier terme de la somme ci-dessus est nul car $\mathbb{P}(A) = 0$. Par le théorème de convergence dominée (on domine par la variable X qui est intégrable), le deuxième tend vers 0 lorsque $M \to \infty$, ce qui implique finalement $\mathbb{Q}(A) = 0$. On a donc démontré que $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$, le théorème de Radon-Nykodym permet de conclure la preuve du lemme.
La variable Yainsi introduite est (par construction) $\mathcal{G}$-mesurable, et de plus elle vérifie :

$$\forall A \in \mathcal{G},\ \mathbb{E}(Y\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(A) = E(X\mathbb{1}_A).$$

La variable Y vérifie donc les propriétés (1) et (2) de la définition de l'espérance conditionnelle, ce qui achève la preuve de l'existence dans le cas d'une

variable positive.
Lorsque $X \in \mathbb{L}^1$ est quelconque, on pose $X = X^+ - X^-$, ou bien sûr, $X^+ = max(X, 0)$ et $X^- = max(-X, 0)$ sont des variables intégrables et positives. On voit alors facilement qu'en posant :

$$Y = \mathbb{E}(X^+/\mathcal{G}) - \mathbb{E}(X^-/\mathcal{G})$$

On obtient une variable aléatoire qui vérifie les deux propriétés requises, et on conclut que : $Y = \mathbb{E}(X/\mathcal{G})$.

1.2 Espérance conditionnelle par rapport un événement

Soit $B \in \mathcal{F}$ un événement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. On peut définir une nouvelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$, appelée probabilité conditionnelle sachant B, en posant pour tout $A \in \mathcal{F}$,

$$\mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Proposition 1.2. *Soit X une variable aléatoire $\mathbb{P}$-intégrable i.e. $\mathbb{E}(|X|) = \int |X| d\mathbb{P} < \infty$, alors X est aussi $\mathbb{P}(./B)$-intégrable. De plus,*

$$\mathbb{E}(X/B) = \int X \, d\mathbb{P}(./B) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_B X \, d\mathbb{P} = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \mathbb{E}(X \mathbb{1}_B). \tag{1}$$

$\mathbb{E}(X/B)$ est l'espérance de X sachant (ou conditionnelle à) l'événement B.

Preuve : Ce résultat se démontre par étapes, en commençant par une fonction indicatrice, ce qui permet de passer aux fonctions étagées puis aux fonctions mesurables positives, pour conclure sur les fonctions intégrables.
Étape 1 : $X = \mathbb{1}_A$

$$\int \mathbb{1}_A d\mathbb{P}(./B) = \mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int \mathbb{1}_{B \cap A} d\mathbb{P} = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_B \mathbb{1}_A d\mathbb{P}$$

Étape 2 : $X = \sum_{j \in J} \lambda_j \mathbb{1}_{A_j}$ où J est un ensemble fini et les (A_j) sont des événements disjoints.
On obtient la relation (1.1) grâce à la linéarité de l'intégrale et l'étape précédente.
Étape 3 : X est mesurable positive. Il existe une suite croissante de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étagées positives qui converge vers X. D'après l'étape 2, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int X_n \, d\mathbb{P}(./B) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_B X_n \, d\mathbb{P}$$

On applique ensuite le théorème de Beppo Levi aux deux intégrales.
Étape 4 : X intégrable. La variable aléatoire X se décompose sous la forme $X = X^+ - X^-$ avec :

$$\begin{cases} X^+ &= \max(X, 0) \\ X^- &= \max(-X, 0) \end{cases}$$

Les variables aléatoires X^+ et X^- sont positives et $\mathbb{P}$-intégrable. L'étape 3 assure que :

$$\int X^+ \, d\mathbb{P}(./B) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_B X^+ \, d\mathbb{P} < +\infty,$$

$$et \int X^- \, d\mathbb{P}(./B) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_B X^- \, d\mathbb{P} < +\infty$$

donc $|X| = X^+ + X^-$ est $\mathbb{P}(./B)$..intégrable et on obtient (1.1).

1.3 Espérance conditionnelle par rapport une variable aléatoire

On définit l'espérance conditionnelle d'une variable X (intégrable) par rapport à Y comme étant l'espérance conditionnelle de X par rapport à la tribu $\sigma(Y)$. On la note $\mathbb{E}(X/Y)$. C'est une variable mesurable par rapport à la tribu engendrée par Y, donc c'est une fonction de Y : il existe $\psi(Y)$ de $\mathbb{R}$

dans $\mathbb{R}$ borélienne telle que $\mathbb{E}(X/Y) = \psi(Y)$.
L'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X/Y)$ est caractérisée par :

$a)$ c'est une variable $\sigma(Y)$ mesurable.

$b)$ $\displaystyle\int_A \mathbb{E}(X/Y)\ d\mathbb{P} = \int_A X\ d\mathbb{P}, \quad \forall A \in \sigma(Y).$

La propriété **b)** est équivalente à $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X/Y)\phi(Y)] = \mathbb{E}(X\phi(Y))$ pour toute fonction ϕ borélienne bornée, ou à $\displaystyle\int_{Y\in B} \mathbb{E}(X/Y)\ d\mathbb{P} = \int_{Y\in B} X\ d\mathbb{P}$ pour tout $B \in \mathcal{B}$.

1.4 Propriétés de l'espérance conditionnelle : énoncés

Ce qu'il faut retenir du paragraphe précédent sur la construction de l'espérance conditionnelle sont les deux choses suivantes. Comme l'espérance, l'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire est définie dés lors qu'elle est positive ou intégrable. En outre, si cette variable est de carré intégrable, l'espérance conditionnelle s'interprète comme la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel des v.a.r. de carré intégrable mesurables par rapport à la filtration à laquelle on effectue le conditionnement. D'un point de vue pratique et calculatoire, ce seront ensuite les propriétés énoncées dans ce paragraphe qui seront utiles.

Toutes les propriétés qui suivent sont vraies p.s, puisque l'espérance conditionnelle est définie de façon unique à indistinguabilité près. Pour éviter d'alourdir les énoncés on ne rappellera pas cette "restriction".

1. **Linéarité :** Soient a, b des réels, X intégrable,

$$\mathbb{E}[aX + b/\mathcal{G}] = aE[X/\mathcal{G}] + b.$$

2. **Positivité :** Si $X \geq 0$, intégrable, $\mathbb{E}[X/\mathcal{G}] \geq 0$.
3. Si X est $\mathcal{G}$-mesurable, alors : $\mathbb{E}[X/\mathcal{G}] = X$.
4. Si X est indépendant de $\mathcal{G}$, alors : $\mathbb{E}[X/\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$.

5. **Propriété de tour** : Si X intégrable,
   a. $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X/\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$.
   b. Si $\mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}_1$, $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X/\mathcal{G}_1]/\mathcal{G}_2] = \mathbb{E}[X/\mathcal{G}_2]$ et $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X/\mathcal{G}_2]/\mathcal{G}_1] = \mathbb{E}[X/\mathcal{G}_2]$.
6. Si X est $\mathcal{G}$-mesurable et si $\mathbb{E}[|XY|] < \infty$ alors :
$$\mathbb{E}[XY/\mathcal{G}] = X\mathbb{E}[Y/\mathcal{G}].$$

Preuves des propriétés :

1. Le membre de droit est clairement $\mathcal{G}$-mesurable, et il vérifie (2) grâce à la linéarité de l'espérance. On conclut par unicité.
2. Cette propriété est considérée comme évidente.
3. Par hypothèse, X vérifie (1), et il est immédiat de s'assurer que X vérifie (2).
4. La variable $\mathbb{E}[X]$ est constante, elle est donc $\mathcal{H}$-mesurable pour toute tribu $\mathcal{H}$, en particulier elle est donc $\mathcal{G}$-mesurable et (1) est vérifiée. Soit $A \in \mathcal{G}$, X et $\mathbb{1}_A$ sont deux variables indépendantes et donc :
$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A X] = \mathbb{P}(A)\mathbb{E}[X].$$
D'autre part, puisque la variable $\mathbb{E}[X]$ est constante, on a bien sûr :
$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mathbb{E}[X]] = \mathbb{E}[X]\mathbb{P}[A].$$
Comme le raisonnement est valable quelque soit $A \in \mathcal{G}$, on conclut que $\mathbb{E}[X]$ vérifie (2).
5. **a.** est simplement (2) appliqué à $A = \Omega$, qui est bien un élément de $\mathcal{G}$. La deuxième égalité de **b.** est une simple application de Propriété 3. Quant à la première égalité, elle nous fournit un candidat $\mathcal{G}_2$ mesurable ($Y = \mathbb{E}[X/\mathcal{G}_2]$) pour $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X/\mathcal{G}_1]/\mathcal{G}_2]]$. Or si $A \in \mathcal{G}_2$ (d'après l'hypothèse $\mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}_1$, A appartient à $\mathcal{G}_1$ également), on peut utiliser (2) à deux

reprises (dans la première égalité ci-dessous, pour l'espérance conditionnelle vis-à-vis de $\mathcal{G}_2$, et dans la deuxième égalité ci-dessous, pour l'espérance conditionnelle vis-à-vis de $\mathcal{G}_1$, puisque $A \in \mathcal{G}_1$ pour obtenir :

$$\mathbb{E}[Y\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[X\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X/\mathcal{G}_1]/\mathbb{1}_{_A}]$$

ce qui assure le résultat.

6. Remarquons que $Z = X\mathbb{E}[Y/\mathcal{G}]$ fournit un cadidat $\mathcal{G}$-mesurable pour $\mathbb{E}[XY/\mathcal{G}]$.

   Reste à vérifier (2). Commençons par le cas où $Y = \mathbb{1}_B$ pour un certain B indépendant de $\mathcal{G}$. On a alors pour $A \in \mathcal{G}$,

   $$\mathbb{E}[XY\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[X\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B] = \mathbb{E}[X\mathbb{1}_A]\mathbb{P}(B) = \mathbb{E}[X\mathbb{P}(B)\mathbb{1}_A]$$

   comme souhaité.
   Par linéarité, on étend le résultat aux variables Y étagées, indépendantes de $\mathcal{G}$.
   Lorsque Y est positive, indépendante de $\mathcal{G}$, on peut approcher Y par une suite de fonctions étagées positives, indépendantes de $\mathcal{G}$ et conclure grâce au théorème (1.1.1) de convergence monotone conditionnel.
   Enfin si Y est seulement supposée indépendante de $\mathcal{G}$, il suffit de la décomposer en $Y^+ - Y^-$ (qui sont toutes deux indépendantes de $\mathcal{G}$), utiliser le résultat précédent et à nouveau la linéarité.

Théorème 1.1. *(Convergence monotone conditionnelle) Soit* $(X_n, n \geq 0)$ *une suite croissante de v.a.r intégrables, qui converge vers une variable* X *que l'on suppose intégrable, alors :*

$$\mathbb{E}[X_{_n}/\mathcal{G}] \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}[X/\mathcal{G}].$$

Théorème 1.2. *(Convergence dominée conditionnelle) Soit* $(X_n, n \geq 0)$ *une suite de v.a.r. intégrables qui converge en probabilité vers* X*, et on suppose qu'il existe* U *intégrable telle que* $\forall n \geq 0;\ |X_n| \leq U$*, alors :*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_{_n}/\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X/\mathcal{G}].$$

Lemme 1.2. *(Fatou conditionnel) Soit* $(X_n, n \geq 0)$ *une suite de v.a.r. positives et intégrables, telle que* $\liminf_{n\to\infty}(X_n)$ *est une variable intégrable, alors :*

$$\mathbb{E}[\liminf_{n\to\infty}]X_n/\mathcal{G}] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n/\mathcal{G}]$$

Théorème 1.3. *(Jensen conditionnel) Soit* ϕ *est convexe et* $X, \phi(X)$ *sont intégrables alors :*

$$\phi(\mathbb{E}[X/\mathcal{G}]) \leq \mathbb{E}[\phi(X)/\mathcal{G}].$$