Université de Sidi Bel Abbes.
Faculté des Sciences Exactes
Département de Proba-Stat

2020/2021
Master SA
Stat-Nonparam

Examen Final

Problème. *On va s'intéresser au modèle de régression, où*

$$Y_i = f(x_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

où $x_i \in [0,1]$ *sont connus et les* ε_i *sont i.i.d centrés de même variances* σ^2, *et on cherche à estimer* f, *fonction de* $[0,1]$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$. *Supposant à présant* $\widehat{f}$ *un estimateur linéaire de* f *tel que:*

$$\forall x \in [0,1],\ \widehat{f}(x) = \sum_{i=1}^{n} W_{n,i}(x) Y_i, \qquad \text{où} \qquad W_{n,i}(x) = \frac{K\left(\dfrac{x_i - x}{h_n}\right)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} K\left(\dfrac{x_i - x}{h_n}\right)}$$

.

(i) *Soient* $Z_i, \ldots, Z_n$ *des v.a.r telles que* $\exists \alpha > 0$ *et* $C > 0$ *tels que pour tout* $i = 1, \ldots, n$ *on a:* $\mathbb{E}\left(\exp(\alpha Z_i)\right) \leq C$. *Montrer que*

$$\mathbb{E}\left(\max_{1 \leq i \leq n} Z_i\right) \leq \frac{1}{\alpha} \ln(Cn).$$

(ii) *Soit* $x \in [0,1]$, f *continue, et qu'il esxiste* $(h_n)_{n \geq 1}$ *où* $h_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ *telle que les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

(1) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} W_{n,i}^2(x) = 0.$

(2) *Pour tout* $\delta > 0$, $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{|x - x_i| > \delta} W_{n,i}(x) = 0.$

Montrez que $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}\left[\left(\widehat{f}(x) - f(x)\right)^2\right] = 0.$

(iii) *Supposons* f *continue, et que les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

(3) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} W_{n,i}^2(x) dx = 0.$

(4) *Pour tout* $\delta > 0$, $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \int_{|x - x_i| > \delta} W_{n,i}(x) dx = 0.$

Vérifie qu'on a: $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}\left[\int_0^1 \left(\widehat{f}(x) - f(x)\right)^2 dx\right] = 0.$