Université Hassiba Benbouali–Chlef
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

$1^{\text{ère}}$ **année Master MAS**
Méthode de Monte-Carlo et Simulation
Année : 2018/2019

Examen Final

EXERCICE N° 1:

1. On considère la variable aléatoire X de fonction de répartition $\mathbb{F}$. Montrer que la variable aléatoire définie par $U = \mathbb{F}(X)$, suit la loi uniforme $\mathcal{U}[0,1]$.
2. On considère la variable aléatoire U qui suit la loi uniforme $\mathcal{U}[0,1]$ et une fonction de répartition $\mathbb{F}$. Montrer que la variable aléatoire définie par $X = \mathbb{F}^{-1}(U)$, a pour fonction de répartition $\mathbb{F}$.

Une variable aléatoire est de loi uniforme sur $[a,b]$, si sa densité est définie comme $f(x) = \dfrac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$.

3. Montrer que si U suit la loi uniforme $\mathcal{U}[0,1]$, alors $(b-a)U + a$ suit la loi uniforme $\mathcal{U}[a,b]$.
4. Quelle est la loi de $a(2U-1)$?
5. Déterminer la loi de la variable aléatoire X en sortie du code suivant :

```
X<-2+runif(1)-1
```

EXERCICE N° 2:
On considère la variable aléatoire X de densité

$$f(x) = Cx\mathrm{e}^{-\frac{4}{15}x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}_+.$$

1. Calculer C pour que f soit bien une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition $\mathbb{F}_X$ de X.
3. Écrire une fonction qui permet de simuler n variables aléatoires de X.

Soit g une densité de probabilité définie par :

$$g(x) = K\mathrm{e}^{-\frac{2}{15}x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}_+.$$

4. Déterminer K de sorte que g soit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}_+$.
5. Trouver la plus petite constante M telle que $f(x) \leq Mg(x)$ sur $[0, +\infty[$.
6. Donner une représentation graphique des courbes de f et Mg.
7. Utiliser la méthode de rejet pour simuler à partir de f avec l'enveloppe g.