Exercice 1:

On sait que X admet comme densité, la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in \mathbb{R}$, d'où

$$\mathbb{E}\left(X^{2n+1}\right) = \int_{\mathbb{R}} x^{2n+1} f(x)\, dx = 0,$$

car la fonction $x^{2n+1} f(x)$ est impaire. On a

$$\mathbb{E}\left(X^{2n}\right) = \int_{\mathbb{R}} x^{2n} f(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^{2n} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

On pose

$$u(x) = x^{2n-1} \text{ et } v'(x) = x e^{-\frac{x^2}{2}},$$

d'où

$$u'(x) = (2n-1)\, x^{2n-2} \text{ et } v(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Par une intégration par parties, on obtient

$$\mathbb{E}\left(X^{2n}\right) = -\frac{x^{2n-1} e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{(2n-1)}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^{2n-2} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = (2n-1)\, \mathbb{E}\left(X^{2n-2}\right).$$

De même

$$\mathbb{E}\left(X^{2n-2}\right) = (2n-3)\, \mathbb{E}\left(X^{2n-4}\right) \text{ etc....}$$

et de proche en proche, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(X^{2n}\right) &= (2n-1)(2n-3)\ldots.3.1\mathbb{E}\left(X^0\right) \\ &= (2n-1)(2n-3)\ldots.3.1 \\ &= \frac{(2n)!}{2n(2n-4)\ldots.4.2} = \frac{(2n)!}{2^n n!} \end{aligned}$$

Exercice 2:

On a

$$X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1) \text{ et } P(Z=1) = P(Z=-1) = \frac{1}{2}.$$

1.Soit φ (resp. F) la fonction de répartition de X (resp. ZX). On a, en utilisant le fait que $\Omega = \{Z=1\} \cup \{Z=-1\}$ (réunion disjointe) et en posant $Y = ZX$,

$$\begin{aligned} F(y) &= P(Y \leq y) = P(\{Y \leq y\} \cap \{Z=1\} \cup \{Z=-1\}) \\ &= P(\{Y \leq y; Z=1\} \cup \{Y \leq y; Z=-1\}) \text{ d'après la distributivité} \\ &= P(Y \leq y; Z=1) + P(Y \leq y; Z=-1) \\ &= P(X \leq y; Z=1) + P(-X \leq y; Z=-1) \\ &= P(X \leq y)\, P(Z=1) + P(-X \leq y)\, P(Z=-1) \text{ car } X \text{ et } Z \text{ sont indépendantes} \\ &= \frac{1}{2}\varphi(y) + \frac{1}{2}(1 - P(X \leq -y)) \\ &= \frac{1}{2}(\varphi(y) + 1 - \varphi(-y)) \\ &= \varphi(y) \text{ car } 1 - \varphi(-y) = \varphi(y). \end{aligned}$$

Ainsi X et ZX ont mêmes fonctions de répartition, d'où $ZX \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$.

2. Il suffit de montrer qu'une combinaison linéaire des marginales (X et ZX) n'est pas gaussienne. Par exemple, on montre que la *v.a.r.* $X + ZX$ n'est pas gaussienne. En fait, il suffit de montrer que $X + ZX$ n'est pas continue.

D'autre part, on sait que la particularité des *v.a.c.* est le fait que la probabilité que cette variable aléatoire soit égale à un point est nulle. Pour cela, calculons $P(X + ZX = 0)$ par exemple. On a, en utilisant le même raisonnement que dans 1.,

$$\begin{aligned}
P(X+ZX=0) &= P(X+ZX=0; Z=1) + P(X+ZX=0; Z=-1) \\
&= P(X=0; Z=1) + P(Z=-1) \\
&= P(X=0)\,P(Z=1) + \frac{1}{2} \neq 0.
\end{aligned}$$

On conclut que $X + ZX$ n'est pas continue, donc ne peut pas être gaussienne. Le couple (X, ZX) n'est pas gaussien.

3.On a

$$\begin{aligned}
cov(X, ZX) &= \mathbb{E}\left(ZX^2\right) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(ZX) \\
&= \mathbb{E}\left(ZX^2\right) \text{ car } \mathbb{E}(X) = 0 \\
&= \mathbb{E}(Z)\,\mathbb{E}\left(X^2\right) \text{ car } X \text{ et } Z \text{ sont indépendantes} \\
&= 1.P(Z=1) + (-1).P(Z=-1) = 0,
\end{aligned}$$

mais X et ZX ne sont pas indépendantes. En effet, si elles étaient indépendantes, alors toute combinaison linéaire de ce deux variables aléatoires serait gausssienne (car ces variables aléatoires sont gaussiennes et indépendantes), ce qui signifie que le couple (X, ZX) est gaussien, ce qui est absurde.

Exercice 3:

On pose

$$f(\lambda) = \mathbb{E}\left(\exp\left(\lambda X_1 + 2X_2 + 3X_3\right)\right).$$

Comme X est gaussien, alors la combinaison linéaire de X_1, X_2 et X_3

$$U := \lambda X_1 + 2X_2 + 3X_3 = \left\langle {}^T(\lambda, 2, 3), X \right\rangle$$

est gaussienne de moyenne

$$\mu = \lambda\mathbb{E}(X_1) + 2\mathbb{E}(X_2) + 3\mathbb{E}(X_3) = \lambda + 6 + 15 = \lambda + 21$$

et de variance

$$\sigma^2 = var\left\langle {}^T(\lambda, 2, 2), X \right\rangle = {}^T(\lambda, 2, 3)\,C\,(\lambda, 2, 3) = 7\lambda^2 + 20\lambda + 69,$$

d'où la densité de U:

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}.$$

Il résilte que

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \mathbb{E}\left(e^{U}\right) = \int_{\mathbb{R}} e^{x} g(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\left[(x-\mu)^2 - 2\sigma^2 x\right]}{2\sigma^2}} dx \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\left[(x-\mu)^2 - 2\sigma^2 x\right]}{2\sigma^2}} dx. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} (x-\mu)^2 - 2\sigma^2 x &= x^2 - 2\left(\mu + \sigma^2\right) x + \mu^2 \\ &= \left(x - \left(\mu + \sigma^2\right)\right)^2 + \mu^2 - \left(\mu + \sigma^2\right)^2 \\ &= \left(x - \left(\mu + \sigma^2\right)\right)^2 - \sigma^2 \left(2\mu + \sigma^2\right), \end{aligned}$$

d'où

$$f(\lambda) = e^{\frac{\left(2\mu + \sigma^2\right)}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(x - \left(\mu + \sigma^2\right)\right)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Comme la fonction $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(x-\left(\mu+\sigma^2\right)\right)^2}{2}}$ est la densité de la loi $\mathcal{N}\left(\mu + \sigma^2, \sigma^2\right)$, alors son intégrale vaut 1, d'où

$$f(\lambda) = e^{\frac{\left(2\mu + \sigma^2\right)}{2}} = e^{\frac{7\lambda^2 + 22\lambda + 111}{2}}.$$

Il résulte que

$$\mathbb{E}\left(X_1 \exp\left(X_1 + 2X_2 + 3X_3\right)\right) = f'(1).$$

Comme

$$f'(\lambda) = (7\lambda + 11)\, e^{\frac{7\lambda^2 + 22\lambda + 111}{2}},$$

alors

$$\mathbb{E}\left(X_1 \exp\left(X_1 + 2X_2 + 3X_3\right)\right) = 18e^{70}.$$

Exercice 4:

1. Comme les *v.a.* X_k sont indépendantes et $var(X_k) = 1$, alors

$$var(B_i) = \sum_{k=1}^{i} var(X_k) = i \text{ et } \mathbb{E}(B_i) = \sum_{k=1}^{i} \mathbb{E}(X_k) = 0$$

On a, pour tout $i < j$,

$$B_j = \sum_{k=1}^{i} X_k + \sum_{k=i+1}^{j} X_k = B_i + \sum_{k=i+1}^{j} X_k,$$

d'où

$$\begin{aligned}
cov\left(B_i,B_j\right) &= \mathbb{E}\left(B_iB_j\right)-\mathbb{E}\left(B_i\right)\mathbb{E}\left(B_j\right)=\mathbb{E}\left(B_iB_j\right)\\
&= \mathbb{E}\left(B_i\left(B_i+\sum_{k=i+1}^{j}X_k\right)\right)\\
&= \mathbb{E}\left(B_i^2\right)+\mathbb{E}\left(B_i\sum_{k=i+1}^{j}X_k\right)\\
&= i+\mathbb{E}\left(\sum_{l=1}^{i}X_l\sum_{k=i+1}^{j}X_k\right)\\
&= i+\sum_{l=1}^{i}\sum_{k=i+1}^{j}\mathbb{E}\left(X_l\right)\mathbb{E}\left(X_k\right)\ \text{ car } X_l \text{ et } X_k \text{ sont ind.}\\
&= i \text{ car } \mathbb{E}\left(X_l\right)=\mathbb{E}\left(X_k\right)=0.
\end{aligned}$$

Ainsi si $i<j$ alors $cov\left(B_i,B_j\right)=i$. On conclut que

$$cov\left(B_i,B_j\right)=\min\left\{i,j\right\}.$$

Par suite, la matrice des covariance du vecteur B est:

$$C=\begin{pmatrix}
1 & 1 & . & . & . & . & . & 1\\
1 & 2 & 2 & . & . & . & . & 2\\
1 & 2 & 3 & 3 & . & . & . & 3\\
1 & 2 & 3 & 4 & . & . & . & .\\
. & . & . & . & . & . & . & .\\
. & . & . & . & . & . & . & .\\
. & . & . & . & . & . & . & n-1\\
1 & 2 & 3 & . & . & . & n-1 & n
\end{pmatrix}$$

2.Dans le cas où $n=3$,

$$B={}^T\left(X_1,X_1+X_2,X_1+X_2+X_3\right)=AX,$$

où

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\text{ et }X=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{pmatrix}.$$

Comme X est gaussien (voir le cours), alors B l'est aussi. D'autre part, d'après 1., la matrice des covariance de B est:

$$C=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix},$$

qui est inversible, puisque $\det(C) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$
Ainsi B est gaussien de matrice des covariances inversibles, il admet donc une densité

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{1}{2}{}^T(x-m)C^{-1}(x-m)}, x \in \mathbb{R}^3$$

avec $m = \mathbb{E}(B) =^T (0,0,0)$ et C^{-1} est la matrice inverse de C (à calculer).

Exercice 5:

1.On a

$$Y =^T AX -^T Am$$

de la forme $Y = BX + b$, d'où Y est gaussien d'après le cours. On pose ${}^TA = (a_{ij})$, d'où

$$\mathbb{E}(Y_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbb{E}(X_j - m_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\mathbb{E}(X_j) - m_j) = 0$$

L'espérance de Y est donc

$$\mathbb{E}(Y) =^T (0,0,...,0).$$

La matrice des covariances de Y est

$$C(Y) =^T A.C(X-m).^T\left({}^TA\right) =^T A.C.A =^T A.A.D.^TA.A = D.$$

On conclut que

$$Y \rightsquigarrow \mathcal{N}_n\left({}^T(0,0,...,0), D\right).$$

2.La densité de Y est

$$f_Y(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det D}} e^{-\frac{1}{2}{}^Ty.D^{-1}.y}, y \in \mathbb{R}^n.$$

Comme $D^{-1} = \left(\frac{1}{\lambda_i}\delta_{ij}\right)$, alors

$${}^Ty.D^{-1}.y = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{\lambda_i}$$

et comme $\det D = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$, alors

$$f_Y(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i^2}{\lambda_i}} = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\lambda_i}} e^{-\frac{y_i^2}{2\lambda_i}}\right), y \in \mathbb{R}^n.$$

Par suite, la densité marginale de Y_k est

$$\begin{aligned}
f_{Y_k}(y_k) &= \int\limits_{\{(y_1,\ldots,y_{k-1},y_{k+1},\ldots,y_n)\}} \!\!\!\cdots\!\!\int f_Y(y_1,...,y_n)\,dy_1...dy_{k-1}dy_{k+1}...dy_n \\
&\overset{Thm.Fubini}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\lambda_k}} e^{-\frac{y_k^2}{2\lambda_k}} \prod_{i=1,i\neq k}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\lambda_i}} e^{-\frac{y_i^2}{2\lambda_i}}\,dy_i \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\lambda_k}} e^{-\frac{y_k^2}{2\lambda_k}}.
\end{aligned}$$

Il résulte que

$$Y_k \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,\lambda_k).$$

de plus

$$\prod_{i=1}^{n} f_{Y_k}(y_k) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\lambda_k}} e^{-\frac{y_k^2}{2\lambda_k}} = f_Y(y_1,...,y_n),$$

qui signifie que les $v.a.$ Y_k sont indépendantes.

3.Comme D est inversible et A est orthogonale ($i.e.$ $(detA)^2 = 1$), alors Y admet une densité et on a

$$\det C = (\det A)^2 \det D = \det D \neq 0,$$

X admet donc une densité puisque sa matrice des covariances est inversible.