Exemple de martingales

Présenté par : M. HAMMAD

Exemple :

Un joueur joue à un jeu (pile ou face, roulette,...). A chaque coup, il peut perdre avec une probabilité $p > 0$ ou gagner avec $q > 0$ $(p + q = 1)$. Pour une mise de 1 DA, le gain reçu est de α DA. Soit X_n la v.a :

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{s'il gagne le n-ième coup} \\ 0 & \text{s'il le perdre.} \end{cases}$$

Les (X_n) sont indépendantes. Supposons que le joueur mis à tous les coups
Si Y_n : est le gain que lui apporte le n-ième coup,

$$Y_n = \begin{cases} \alpha & \text{avec une probabilité } q \\ \text{-1} & \text{avec une probabilité } p. \end{cases}$$

Donc, $Y_n = \alpha \cdot \mathbb{1}_{(X_n=1)} - \mathbb{1}_{(X_n=0)}$, si $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n)$ est l'historique du jeu jusqu'au n-ième coup, alors $Y_{n+1} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_n$; $Y_n \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_{n-1}$.

$$\mathbb{E}(Y_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(Y_n) = \alpha \cdot \mathbb{P}(X_n = 1) - 1 \cdot \mathbb{P}(X_n = 0) = \alpha \cdot p - q.$$

Soit G_n : le gain total de joueur au n-ième coup,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(G_n|\mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}(G_{n-1} + Y_n|\mathcal{F}_{n-1}) \\ &= \mathbb{E}(G_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}) + \mathbb{E}(Y_n|\mathcal{F}_{n-1}) \\ &= G_{n-1} + \mathbb{E}(Y_n). \end{aligned}$$

(G_{n-1} est $\mathcal{F}_{n-1}$ – mesurable $\Rightarrow \mathbb{E}(G_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}) = G_{n-1}$).

1. Si $\mathbb{E}(Y_n) = 0 \Rightarrow \mathbb{E}(G_n|\mathcal{F}_{n-1}) = G_{n-1}$ (Jeu équitable : martingale).
2. Si $\mathbb{E}(Y_n) > 0 \Rightarrow \mathbb{E}(G_n|\mathcal{F}_{n-1}) \geq G_{n-1}$ (Jeu favorable : sous-martingale).
3. Si $\mathbb{E}(Y_n) < 0 \Rightarrow \mathbb{E}(G_n|\mathcal{F}_{n-1}) \leq G_{n-1}$ (Jeu défavorable : sur-martingale)