Université Hassiba Benbouali - Chlef
FACULTÉ DE SCIENCES
DÉPARETEMENT DE MATHÉMATIQUE

Année universitaire :2014-2015 *Niveau :*1^{me} *Master math appliqué et statistique*

Série d'exercices

Module. **Programmation mathématique**

1 Modélisation d'un programmation linéaire

Exercice 1 *Un atelier fabrique des tables et des bureaux.*

— Chaque table nécessite $2,5h$ *pour l'assemblage,* $3h$ *pour le polissage et* $1h$ *pour la mise en caisse.*

— Chaque bureau exige $1h$ *pour l'assemblage,* $3h$ *pour le polissage et* $2h$ *pour la mise en caisse.*

L'entreprise ne peut disposer, chaque semaine, de plus de $10h$ *pour l'assemblage, de* $15h$ *pour le polissage et de* $8h$ *pour la mise en caisse.*

Sa marge de profit est de 30 *euro par table et de* 40 *euro par bureau.*

Combien de tables et de bureaux doit-on produire afin d'obtenir un profit hebdomadaires maximal ?

Exercice 2 *Un agriculteur souhaite mélanger des engrais de façon à obtenir au minimum* 15 *unités de potasse,* 20 *unités de nitrates et* 24 *unités de phosphates. Il achète deux types d'engrais.*

— Le type 1 *procure* 3 *unités de potasse, 1 unité de nitrates et* 3 *unités de phosphates. Il coûte* 120 *euro. — Le type* 2 *procure* 1 *unités de potasse,* 5 *unité de nitrates et* 2 *unités de phosphates. Il coûte* 60*euro.*

Exprimer à l'aide d'un programme linéaire la combinaison d'engrais qui remplira les conditions exigées au moindre coût.

Exercice 3 *Une entreprise a la faculté de fabriquer, sur une machine donnée travaillant 45 heures par semaine, trois types de produits différents* $P1$, $P2$ *et* $P3$. *Une unité du produit* $P1$ *laisse un profit net de 4 euros, une de* $P2$ *un profit de 12 euros, et enfin, pour* $P3$ *de 3 euros. Les rendements de la machine sont, respectivement pour les trois produits : 50, 25 et 75 articles par heure. On sait, grâce à une étude de marché que les possibilités de vente ne dépassent pas 1000 unités de* $P1$, *500 unités de* $P2$ *et 1500 unités de* $P3$, *par semaine. On se pose le problème de répartir la capacité de production entre les trois produits, de manière à maximiser le profit hebdomadaire.*

Exercice 4 *Considérons une usine où, grâce à la présence de deux chaines, il est possible d'assembler simultanément deux modèles de voiture. On peut produire 100 voitures du premier type en 6 heures. On peut aussi produire 100 voitures du second type en 5 heures seulement. Le nombre d'heures de travail est au maximum de 60 heures par semaine. Les voitures produites sont enlevées une fois par semaine et doivent être stockées dans un dépôt de* $15000m^2$. *Une voiture du type 1 occupe* $10m^2$ *une voiture du type 2 occupe* $20m^2$.
La marge (différence entre le prix de vente et le coût de la production) sur le premier type de voiture est de 50 000 euros par véhicule tandis que, sur le second, elle est de 45 000 euros par véhicule. La demande pour le premier type de voiture est limitée à 800 unités par semaine ; la demande pour le deuxième type est tellement forte qu'on peut la considérer comme illimitée.
Combien de voitures de chaque type le constructeur doit-il produire par semaine pour maximiser son profitent ?

2 Résolution graphique d'un P.L, Forme canonique,forme standard ,base, base admissibles, base optimale

Exercice 5 *Reprendre les Exercices 1 et 2 , et trouver les solutions optimales à l'aide de la méthode graphique*

Exercice 6 *On considère une entreprise produisant deux biens en quantités x_1 et x_2 respectivement sous contraintes de capacités de production relatives à deux ateliers de production. Le programme linéaire correspondant à la maximisation de la marge est le suivant :*

$$\begin{cases} z(max) & = 3x_1 + 4x_2 \\ s.c. & 2x_1 \leq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & x_1 \; , \; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

(a) Déterminer graphiquement le sommet optimal et donner ses coordonnées.

(b) Mettre le problème sous la forme d'égalité par l'ajout de variables d'écart.

(c) A l'optimum, quelles sont les variables en base et les variables hors base ?

(d) Des progrès importants dans l'organisation du travail permettraient de réduire le temps d'usinage du second bien dans le premier atelier. La première contrainte devient donc $\alpha x_2 \leq 12$, où α ; le nouveau temps d'usinage, est un paramétrer inférieure à 2. Jusqu'à quelle valeur peut-on faire descendre α pour que la même base (c'est-à-dire les mêmes variables de base) reste optimale ?

(e) En dessous de cette valeur quel est le sommet optimal (donner ses coordonnées) et quelle est la nouvelle base (c'est-a-dire quelles sont les nouvelles variables de base) ?

Exercice 7 *On considère le P.L : .*

$$\begin{cases} z(max) & = 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 10x_4 + 3x_5 \\ s.c. & 7x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 8x_5 = 37 \\ & 5x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 6x_5 = 26 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

On pose $J = \{1, 3\}$

1)- J est- il une base ?

2)- Est- ce une base admissible ?

3)- Est- ce une base optimale ?

Exercice 8 *Formuler le problème dual à chaque probléme primal :*

$$\begin{cases} \max \ -x_1 - 2x_2 + x_3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 6 \\ x_1 + x_3 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0, \ x_3 \ \textit{de signe qcq} \end{cases} \qquad \begin{cases} \min \ x_1 + 3x_2 + x_3 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 12 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \geq' \\ x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \ \textit{de signe qcq}, \ x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 9 *Soit le problème de maximisaton écrit sous la forme canonique*

$$\begin{cases} \max \ c^\top x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Montrer que le dual de son dual est le problème primal lui meme.

Exercice 10 *Soit lr problème de minimisation suivante :*

$$\begin{cases} \min \ -3x_1 + 5x_2 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 - 4x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \ \geq 0 \end{cases}$$

1. *Formuler son dual*
2. *Montrer que son dual est impossible*

Exercice 11 *Soit à résoudre le programma linéaire suivant :*

$$\begin{cases} \max \ 2x_1 + 3x_2 \\ -2x_1 + 4x_2 \leq 8 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. *Résoudre le problème primal par l'algorithme du simplexe*

2. *Rappeler le théoréme des écarts complémentaires.*
3. *En déduire la solution du dual.*

Exercice 12

$$\begin{cases} \max\ x_1 + x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 11 \\ -x_1 + x_2 \leq 3 \\ 0 \leq x_1 \leq 4 \\ 0 \leq x_2 \leq 5 \end{cases}$$

1. *Formuler le problème dual.*
2. *Sachant que $x^* = (3, 5)$, en déduire la solution optimale dual.*
3. *Peut-on s'assurer de la réponse trouver en 2.*

Exercice 13 *Soit le problème d'optimisation suivante :*

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq -1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

1. *Ecrire le dual de ce programme linéaire.*
2. *Rechercher une solution optimale de ce dual en utilisant l'algorithme dual simplexe.*
3. *En déduire une solution optimale du primal.*

Exercice 14 *Résoudre avec le simplexe dual les programmes linéaires suivant :*

$$\begin{cases} \min\ x_1 + x_2 \\ 3x_1 + x_2 \geq 2 \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 5 \\ 4x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \min\ x_1 + x_3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 1 \\ -x_1 + x_2 \geq 2 \\ -x_1 \geq -6 \\ x_1\ x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$