Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Université Hassiba Benbouali de Chlef
Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة حسيبة بن بوعلي بالشلف
كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي

قسم الرياضيات

U.H.B.C. Chlef
Faculté des Sciences Exactes
Département des maths

A.U. 2019/2020
Niveau: $1^{ère}$ Master/ Option: M.A.S.
Module: Processus Stochastiques 2

Serie d'exercices n°4 (Inégalités maximales et Convergence des Martingales)

1. Montrer que la stratégie des montées est une stratégie de jeu.

2. Montrer que toute surmartingale positive (ou minorée) converge presque sûrement vers une v.a. intégrable.

3. (**Convergence d'une martingale dans** L^p).

   Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale telle que $\sup\limits_n \mathbb{E}(|X_n|^p) < \infty$ *pour un* $p > 1$. Alors X_n converge vers une variable aléatoire X presque sûrement et dans L^p.

4. (**Preuve du théorème fondamental de la convergence des martingales**)(**Réf.**(Springer Undergraduate Mathematics Series) Zdzisław Brzeźniak, Tomasz Zastawniak-Basic Stochastic Processes_ A Course Through Exercises-Springer (1999) pp. 72-73)

   (a) Montrer que:
   $$\mathbb{E}(U_n[a,b]) \leq \frac{\sup\limits_n \mathbb{E}(|X_n|) + |a|}{b-a}$$

   (b) Montrer, par le théorème de la convergence monotone, que:
   $$\mathbb{E}(\lim_{n\to\infty} U_n[a,b]) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(U_n[a,b])$$

   (c) En déduire que:
   $$\mathbb{P}\left\{\lim_{n\to\infty} U_n[a,b] < \infty\right\} = 1$$

   (d) Montrer que:
   $$\mathbb{P}\left[\bigcap_{a<b\in\mathbb{Q}} \left\{\lim_{n\to\infty} U_n[a,b] < \infty\right\}\right] = 1$$

   (e) On veut établir maintenant que X_n converge $p.s.$ vers une limite X.

   Considérons l'ensemble: $B = \left\{\liminf\limits_n X_n < \limsup\limits_n X_n\right\}$

   - Remarquer que sur B : X_n ne converge pas $p.s.$ et par conséquent:
   $$\forall \omega \in B \; \exists \; a,b \in \mathbb{Q} \; \liminf_n X_n(\omega) < a < b < \limsup_n X_n(\omega)$$

   (f) En déduire que $\forall \omega \in B \; \lim\limits_{n\to\infty} U_n[a,b](\omega) = \infty$ *et* $\mathbb{P}(B) = 0$ (i.e. X_n converge $p.s.$)

(g) Par le lemme de *Fatou*, montrer que: $\lim_n X_n$ est intégrable.

5. (**Contre exemple:** Convergence $p.s. \not\Rightarrow$ Convergence dans L^1)

   Soit $X_1, X_2, ...$ une suite de $v.a.$ $i.i.d.$ où chaque X_i peut prendre seulement les valeurs équiprobables: $3/2$ et $1/2$.

   Montrer que le processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défnit par:

$$\begin{cases} M_0 = 1 \\ M_n = X_1X_2...X_n \; pour \; n > 0 \end{cases}$$

   converge $p.s.$ mais pas dans L^1.

6. **(Exercice supplémentaire) Réf.** Nils Berglund, Martingales et calcul stochastique, Master 2 Recherche de Mathématiques. Université d'Orléans, (polycopié :Version de Janvier 2014), pp. 36-37.

   Exercice 5.2. Soient $\xi_1, \xi_2, \dots$ des variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbb{E}(\xi_m) = 0$, et soit la martingale $X_n = \sum_{m=1}^n \xi_m$. On se donne $\lambda > 0$, et soit

$$P_n(\lambda) = \mathbb{P}\Big\{ \max_{1\leqslant m\leqslant n} |X_m| \geqslant \lambda \Big\} .$$

   1. On suppose les ξ_m de variance finie. Donner une majoration de $P_n(\lambda)$ en appliquant l'inégalité de Doob à X_n^2.
   2. Améliorer la borne précédente en appliquant l'inégalité de Doob à $(X_n + c)^2$ et en optimisant sur c.
   3. On suppose que les ξ_m suivent une loi normale centrée réduite. Majorer $P_n(\lambda)$ en appliquant l'inégalité de Doob à $\mathrm{e}^{cX_n^2}$ et en optimisant sur c.
   4. Pour des ξ_m normales centrées réduites, majorer $\mathbb{P}\{\max_{1\leqslant m\leqslant n} X_m \geqslant \lambda\}$ en appliquant l'inégalité de Doob à e^{cX_n} et en optimisant sur c.

7. On donne:

   (a) Convergence monotone: *Si* $X_n \geq 0$ *une suite croissante telle que* $X_n \nearrow X$ *avec* $\mathbb{E}(X) < \infty$ *alors* $E(X_n) \nearrow E(X)$.

   (b) Lemme de Fatou:

      i. Si $X_n \leq X \in L^1$ alors $\limsup_n \mathbb{E}(X_n) \leq \mathbb{E}(\limsup_n X_n)$

      ii. et si $X_n \geq X \in L^1$ alors $\liminf_n \mathbb{E}(X_n) \geq \mathbb{E}(\liminf_n X_n)$