Lois discrètes

1) Loi discrète uniforme

C'est la loi d'une variable aléatoire X équiprobable sur l'ensemble $\Omega = \{1, 2, ..., n\}$

$$\begin{cases} X(\Omega) = [1, ..., n] \\ P(X = k) = \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

Un calcul direct donne

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \qquad V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$$

2) Loi de Bernoulli

C'est la loi d'une variable aléatoire X ne pouvant prendre que les deux valeurs 1 ou 0 avec les

probabilités p et $1 - p$.

$$\begin{cases} X(\Omega) = \{0, 1\} \\ P(X = 1) = p \\ P(X = 0) = 1 - p = q \end{cases}$$

De même, un calcul direct donne

$$E(X) = p \qquad V(X) = pq$$

3) Loi Binomiale

Soient n un entier non nul et p un réel tel que $0 \leq p \leq 1$. On dit que X suit la loi binomiale de paramètres n et p notée $\mathcal{B}(n, p)$ si

$$\begin{cases} X(\Omega) = [0, n] \\ P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} \end{cases}$$

On modélise ainsi le cas où une même expérience aléatoire est répétée plusieurs fois. Chaque expérience peut réaliser ou ne pas réaliser un événement. Les expériences sont indépendantes, c'est à dire que le résultat obtenu au cours de chacune d'elles, A ou $\overline{A}$, ne dépend pas des résultats des autres.

On envisage donc n expériences aléatoires identiques et indépendantes appelées épreuves répétées et pouvant chacune soit réaliser l'événement avec la probabilité p, soit ne pas le réaliser avec la probabilité $q = 1 - p$. La probabilité pour que l'événement A se réalise k fois au cours de n expériences aléatoires indépendantes, est donnée par

$$p_{n,k} = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad (1)$$

En effet, désignons par B_k l'événement correspondant à la réalisation de A exactement k fois au cours de n épreuves répétées et par A_i (resp. $\overline{A_i}$) la réalisation (resp. la non réalisation) de l'événement au cours de la $i-$ème épreuve. Il vient

$$B_k = \bigcup_{i_1<i_2<...<i_k} \left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k} \bigcap_{j \neq i_1, i_2, ..., i_k} \left(\overline{A_j}\right) \right)$$

Dans chaque terme, la réalisation de A doit figurer k fois et sa non-réalisation $(n-k)$ fois, le nombre de combinaison de ce genre est C_n^k. C'est le nombre de manières de choisir les k épreuves parmi n expériences répétées. Or par indépendance

$$P\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}\right) = P\left(A_{i_1}\right) ... P\left(A_{i_k}\right) = p^k$$

et

$$P\left(\bigcap_{j \neq i_1, i_2, ..., i_k} \left(\overline{A_j}\right) \right) = q^{n-k}$$

d'où la formule (1).

Remarques:

a) La loi de Bernoulli est la loi binomiale $\mathcal{B}(1, p)$

b) La loi est appelée loi binomiale dans la mesure où les probabilités correspondent aux termes du développement du binôme de Newton. On a

$$E(X) = np \qquad V(X) = npq$$

4) Loi de Poisson

Soit λ un réel positif. On dit que X suit la loi de Poisson de paramètre λ,notée $\mathcal{P}(\lambda)$ si

$$\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N} \\ P(X=k) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!} \end{cases}$$

Rappelons le développement en série de l'exponentielle

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad e^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$$

ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} P(X=n) &= \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = \\ &= e^{-\lambda} \sum_{n \geq 0} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1 \end{aligned}$$

L'espérance mathématique de X est donnée par

$$\begin{aligned} E\left(X\right) &= \sum_{n\geq 0} n\times e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{n\geq 0}\frac{\lambda^n}{n!} = \\ &= \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda \end{aligned}$$

pour la variance, on calcule d'abord $E\left(X\left(X-1\right)\right)$, on trouve $E\left(X\left(X-1\right)\right) = \lambda^2$, or $E\left(X\left(X-1\right)\right) = E\left(X^2\right) - E\left(X\right)$, d'où $E\left(X^2\right) = \lambda^2 + \lambda$, et donc $V\left(X\right) = E\left(X^2\right) - \left(E\left(X\right)\right)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

La loi de Poisson modélise des comptages qui suivent un processus de Poisson. Par exemple, le nombre d'appels à un central téléphonique pendant une période donnée, le nombre de voitures qui passent à un carrefour en un temps donné... On parle "d'événements rares". De plus, l'utilisation la plus fréquente de la loi de Poisson est comme approximation de la loi binomiale.

Exemple

Un central téléphonique reçoit en moyenne 100 appels par heure. En supposant que le nombre d'appels X durant un intervalle de temps quelconque suit une loi de Poisson,

1. quelle est la probabilité que le central reçoive 3 appels en 2 minutes?
2. quelle est la probabilité pour qu'en 2 minutes, il reçoive au moins 1 appel?

En 1 minute, on aura en moyenne (puisque 1 heure = 60 minutes) $\dfrac{100}{60}$, donc en 2 minutes, on peut s'attendre à ce que le nombre d'appel soit $\lambda = E\left(X\right) = 2\times\dfrac{100}{60} = \dfrac{10}{3}$

Ainsi, la probabilité d'obtenir 3 appels en 2 minutes est

$$P\left(X=3\right) = \exp\left(-\frac{10}{3}\right)\frac{\left(\frac{10}{3}\right)^3}{3!} \simeq 0,220$$

et la probabilité d'obtenir au moins 1 appel en 2 minutes est

$$P\left(X\geq 1\right) = 1 - \exp\left(-\frac{10}{3}\right) \simeq 0,964$$

5) Loi Géométrique

Pour $p\in\left[0,1\right]$, on définit la loi géométrique par

$$\left\{ \begin{array}{c} X\left(\Omega\right) = \mathbb{N}^* \\ P\left(X=k\right) = \left(1-p\right)^{k-1}p = q^{k-1}p \end{array} \right.$$

On montre que

$$E\left(X\right) = \frac{1}{p} \qquad V\left(X\right) = \frac{q}{p^2}$$

Par exemple, la probabilité $q^{k-1}p$ correspond à la probabilité d'obtenir dans une succession de k épreuves de Bernoulli indépendantes, $k-1$ échecs suivis d'un succès. De plus, la loi géométrique est le premier modèle discret de la mort d'une particule radioactive. En effet, la durée de vie de la particule radioactive, notée T, suit la loi de probabilité pour $k \in \mathbb{N}$

$$P(T=k) = q^{k-1}p$$

6) Loi Hypergéométrique

On définit aussi pour $N \in \mathbb{N}$ et $n \leq N$, la loi hypergéométrique, notée $\mathcal{H}(n,p,N)$ par

$$\left\{ \begin{array}{c} X(\Omega) \subset [0,N] \\ P(X=k) = \dfrac{C_{Np}^{k} C_{Nq}^{n-k}}{C_{N}^{n}} \end{array} \right.$$

On montre que

$$E(X) = np \qquad V(X) = npq\frac{(N-n)}{(N-1)}$$

Exemple:

On tire n boules (sans remise) dans une urne contenant Np boules blanches et Nq boules noires, soit un nombre total de $N = Np+Nq$ boules, alors la variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches suit une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(n,p,N)$.