Chapitre 3

Intégrales stochastiques - Formule d'Itô

Dans ce chapitre on cherche à définir des variables aléatoires du type :

$$\omega \longmapsto Y_1(\omega) = \left(\int_0^1 X_s dB_s \right)(\omega)$$

où $\{X_t, t \geq 0\}$ est un certain processus et $\{B_t, t \geq 0\}$ est un mouvement Brownien.

le problème est de donner un sens à l'élément différentiel dB_s puisque la fonction $s \longmapsto B_s$ n'est pas dérivable.

Un objet adéquat, introduit par K. Itô en 1945 est l'intégrale stochastique laquelle permet de construire $Y_1(\omega)$ comme une limite de v.a. sous l'hypoyhèse cruciale d'adaptation du processus X à la filtration du mouvement Brownien.

Dans la pratique, on s'intéresse souvent à des quantités du type $F(Y_1(\omega))$ où F est une fonction réelle.

Quand F est suffisamment régulière, le lemme d'Itô permet alors d'exprimer $F(Y_1(\omega))$ au moyen d'intégrales stochastiques.

Cette méthodologie s'applique aux intégrales

$$Y_t = \int_0^t X_s dB_s.$$

Le processus $\left(\int_0^t X_s dB_s \right)$ est alors, sous certaines contions d'intégrabilité de X, une martingale.

Le processus $F(X_t)$ est alors décomposé en une martingale et un processu à varations finies.

3.1 L'intégrale de Wiener

3.1.1 L'espace $L^2([0,T],\mathbb{R})$

Dans cette section, les fonctions et processus sont à valeurs réelles (les définitions et résultats se généralisent sans difficulté au cas de $\mathbb{R}^d$).

- l'intégrale de Wiener est simplement une intégrale du type

$$\int_0^T X_s dB_s$$

  avec X fonction déterministe (i.e. : ne dépend pas de ω).
- On fixe un horizon $T > 0$ déterministe (éventuellement $T = +\infty$) et on note $L^2([0,T],\mathbb{R}) = \left\{ f : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R} \mid \int_0^T |f(s)|^2 ds < +\infty \right\}$
- Si $T < +\infty$, les fonctions continues et les fonctions bornées sont dans $L^2([0,T],\mathbb{R})$.

  muni du produit scalaire $\langle f,g \rangle = \int_0^T f(s)g(s)ds$, $L^2([0,T],\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert, au sens où toute suite de $L^2([0,T],\mathbb{R})$ qui soit de Cauchy pour la norme

$$\|f\|_{2,T} = \sqrt{\langle f,f \rangle} = \left| \int_0^T f(s)^2 ds \right|^{1/2}$$

  converge vers un unique élément de $L^2([0,T],\mathbb{R})$.
- La propriété fondamentale des espaces de Hilbert est l'eixstence d'une base orthonormée dénombrable :

  Il existe un système de fonctions $\{f_n, n \geq 0\}$ de $L^2([0,T],\mathbb{R})$ tel que

$$\langle f_n, f_p \rangle = 0 \text{ si } n \neq p \text{ et } \langle f_n, f_p \rangle = 1 \text{ si } n = p.$$

  et tel que tout élément f de $L^2([0,T],\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$f = \sum_{n \geq 0} a_n f_n$$

  où les coefficeints a_n sont les coordonées de f dans la base $\{f_n, n \geq 0\}$.
- dans le cas précis de $L^2([0,T],\mathbb{R})$, la base $\{f_n, n \geq 0\}$ peut être constituée de fonctions en escalier

$$f_n(t) = \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i \mathbf{1}_{\left]t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)}\right[}(t)$$

où $p_n \in \mathbb{N}$, les $\alpha_i \in \mathbb{R}$ et $\left\{t_i^{(n)}\right\}$ uens uite croissante dans $[0,T]$.

Lemme 3.1 *Soit $f \in L^2([0,T],\mathbb{R})$. Il existe une suite de fonctions en escalier $\{f_n\}$ telle que*

$$\|f - f_n\|_{2,T} \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0.$$

3.1.2 Le cas de fonctions en escalier

Si f_n est la fonction donnée par la décomposition précédente, que l'on note

$$f_n(t) = \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i \mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}[}(t)$$

il est facile de définir son intégrale de Wiener

$$\begin{aligned} I_T(f_n) &= \int_0^T f_n(s)dB_s = \int_0^T \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i \mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}[}(s)dB_s \\ &= \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i \underbrace{\int_{t_i}^{t_{i+1}} dB_s}_{B_{t_{i+1}}-B_{t_i}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)}_{\text{somme d'accroissements du Brownien}} \end{aligned}$$

remarquons que par le caractère gaussien du Brownien et l'idépendance des accroissements, la variable aléatoire $I_T(f_n)$ est une variable aléatoire gaussienne d'espérance nulle et de variance

$$\begin{aligned} Var(I_T(f_n)) &= \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i^2 Var\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i^2 \left(t_{i+1} - t_i\right) = \int_0^T f_n(s)^2 ds \end{aligned}$$

(car $f_n(s)^2 = \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i^2 \mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}[}(s)$)

De plus, on remarque que $f \longmapsto I_T(f)$ est fonction linéaire au sens où

$$I_T(af + bg) = aI_T(f) - bI_T(g)$$

pour toutes fonctions f, g en escalier et tous $a, b \in \mathbb{R}$.

Enfin, si f et g sont deux fonctions en escalier, on a :

$$
\begin{aligned}
E\left(I_T(f)I_T(g)\right) &= 1/2\left[Var\left(I_T(f)+I_T(g)\right)-Var\left(I_T(f)-I_T(g)\right)\right] \\
&= 1/2\left[\int_0^T (f+g)^2(s)ds-\int_0^T f^2(s)ds-\int_0^T g^2(s)ds\right] \\
&= \int_0^T f(s)g(s)ds
\end{aligned}
$$

Cette dernière égalité est trés importante et signifie que l'application

$$
f \longmapsto I_T(f)
$$

est une isométrie de $L^2([0,T],\mathbb{R})$ dans $L^2(\Omega,\mathbb{P})$.

On parle de la propriété d'isométrie de l'intégrale de Wiener, qui signifie que

$$
\langle I_T(f), I_T(g)\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f,g\rangle_{L^2(\mathbb{R})}.
$$

3.1.3 Le cas général

Pour construire $I_T(f)$ quand f est un élément quelconque de $L^2([0,T],\mathbb{R})$, On utlise l'isométrie et le lemme suivant :

Lemme 3.2 (gaussien) *Soit $\{X_n, n\geq 0\}$ une suite de variables léatoires gaussiennes suivant la loi $\mathcal{N}(\mu_n,\sigma_n)$ convergenat dans L^2 vers une variable aléatoire X (i.e. : $E\left(|X-X_n|^2\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$). Alors $\mu_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu$ et $\sigma_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sigma$ et $X\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma)$.*

Soit maintenant $f\in L^2([0,T],\mathbb{R})$ et soit d'après le lemme hilbertien, $\{f_n\}_{n\geq 0}$ une suite de fonctions en escalier telle que

$$
\|f-f_n\|_{2,T} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
$$

D'après le pragraphe précédent on peut construire les intégrales de Wiener $I_T(f_n)$ qui sont des gaussiennes centrées qui par isométrie forment une suite de Cauchy.

L'espace L^2 étant complet, cette suite converge vers une gaussienne notée $I_T(f)$.

D'après le lemme gaussien, $I_T(f)\sim\mathcal{N}\left(0,\|f\|_{2,T}^2\right)$.

Il reste à vérifier que la limite Y ne dépend pas que f et non pas de la suite $\{f_n\}_{n\geq 0}$ choisie.

Remarque 3.3 *$I_T(f)$ n'est jamais une variable p.s positive même si f est elle même toujours positive.*

l'application $f \longmapsto I_T(f)$ est linéaire et isométrique de $L^2([0,T],\mathbb{R})$ dans $L^2(\Omega,\mathbb{P})$ au sens où

$$I_T(af+bg) = aI_T(f) - bI_T(g)$$

et

$$E(I_T(f)I_T(g)) = \int_0^T f(s)g(s)ds$$

pour tout $a,b \in \mathbb{R}$ et $f,g \in L^2([0,T],\mathbb{R})$.

$I_T(f)$ est une variable gaussienne mesurable par rapport à $\sigma(B_t, 0 \leq t \leq T)$ qui vérifie pour tout $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} E(I_T(f)B_t) &= E\left[\left(\int_0^T f(s)dB_s\right)\left(\int_0^T \mathbf{1}_{[0,t]}(s)\,dB_s\right)\right] \\ &= \int_0^T f(s)\mathbf{1}_{[0,t]}(s)\,ds = \int_0^t f(s)ds \end{aligned}$$

où la deuxième égalité provient de la formule d'isométrie.

Par la propriété d'espace gaussien, cette formule caractérise l'intégrale stochastique.

$I_T(f)$ est l'unique v.a. Z gaussienne mesurable par rapport à $\sigma(B_t, 0 \leq t \leq T)$ telle que

$$E[ZB_t] = \int_0^t f(s)ds, \quad \forall t \in [0,T].$$

3.1.4 L'intégrale de Wiener vue comme processus gaussien

On note $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ la reunion des $L^2([\not\vdash,\mathbb{T}],\mathbb{R})$ pour $T>0$ et on considère $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$. Par le pragraphe précédnt, le processus

$$M_t = \int_0^t f(s)dB_s$$

a donc bien un sens pour tout $t \geq 0$.

On a alors le théorème suivant :

Théorème 3.4 *Le processus* $\{M_t, t \geq 0\}$ *est un processus gaussien* $\left(\mathcal{F}_t^B\right)$*-adapté, centré, de fonction de covariance*

$$\Gamma(s,t) = \int_0^{t \wedge s} f^2(u)du.$$

De plus, M *est un P.A.I au sens où* $\{M_{t+s} - M_s, t \geq 0\} \perp \sigma(B_u, u \leq s)$ *pour tout* $s \geq 0$.

Preuve. Si on note M_t^n la suite d'intégrales de Wiener associée à la suite $\{f_n\}$ approchant f dans L^2, on voit que

$$t \longmapsto M_t^n$$

est un processus gaussien comme le Brownien.

Par stabilité dans L^2 des espaces gaussiens on en déduit que

$$t \longmapsto M_t$$

est un processus gaussien.

L'expression de son espérance et de sa fonction de covariance découlent des calculs précédents.

Par construction M est $\left(\mathcal{F}_t^B\right)$-adapté.

Pour démontrer l'indépendance des accroissements on écrit $\forall s,t \geq 0$

$$M_{t+s} - M_s = \int_s^{t+s} f(u)dB_u = \int_s^{t+s} f(u)d_u(B_u - B_s) \in \sigma(B_u - B_s, u \in [s, t+s])$$

et on utlise l'indépendance des accroissemnts du processus B, Qui entraine $\sigma(B_u - B_s, u \in [s, t+s]) \perp \sigma(B_u, u \leq s)$. ■

Corollaire 3.5 *Les processus* $\{M_t, t \geq 0\}$ *et* $\left\{\widetilde{M}_t, t \geq 0\right\}$ *où*

$$\widetilde{M}_t = M_t^2 - \int_0^t f^2(s)ds$$

sont des $\left(\mathcal{F}_t^B\right)$*-martingales.*

Preuve. C'est une conséquence de l'exercice suivant : ■

Exercice 3.6 *Si X est P.A.I et $E(|X_t|) < +\infty$ (resp. $E\left(|X_t|^2\right)$) alors $X_t^1 = X_t - E(X_t)$ (resp. $X_t^2 = X_t^2 - E(X_t^2)$ est une $\left(\mathcal{F}_t^X\right)$-martingale.*

Remarque 3.7
- *sauf lorsque f est constante, le processus M est un P.A.I, mais pas un P.A.I.S au sens où l'égalité $M_{t+s} - M_s \overset{d}{=} M_t$ n'est pas vérifiée pour tout t.*
- *Si $f, g \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$*
$$E\left[\left(\int_0^t f(u)dB_u\right)\left(\int_0^s g(u)dB_u\right)\right] = \int_0^{t\wedge s} f(u)g(u)du.$$
(conséquence de la formule d'isométrie)

Enfin on a si f est dérivable :

Théorème 3.8 (Formule d'intégration par parties) *Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, alors*
$$I_t(f) = f(t)B_t - \int_0^t f'(s)B_s ds, \quad \forall t \geq 0$$

Preuve. Fixons $t \geq 0$. Par des propriétés des espaces gaussiens, il suffit de vérifier que
$$E(B_u I_t(f)) = E\left(B_u\left(f(t)B_t - \int_0^t f'(s)B_s ds\right)\right), \quad \forall u \leq t$$

En utlisant la formule d'IPP classique
$$\begin{aligned} E\left(B_u\left(f(t)B_t - \int_0^t f'(s)B_s ds\right)\right) &= uf(t) - \int_0^t f'(s)(s\wedge u)ds \\ &= uf(t) - \left(u\int_u^t f'(s)ds + \int_0^u f'(s)sds\right) \\ &= uf(u) - \int_0^u f'(s)sds = \int_0^u f(s)ds \\ &= E(B_u I_t(f)). \end{aligned}$$
■

3.2 L'intégrale stochastique en générale

On cerche maitenent à définir la variable aléatoire

$$\int_0^t \theta_s dB_s$$

quand $\{\theta_s, s \geq 0\}$ est un processus stochastique. le caractère aléatoire de θ va exiger des conditions supplémentaires par rapport au cas de l'intégrale de Wiener.

On note $\left\{\mathcal{F}_t^B\right\}_{t\geq 0}$, la filtration naturelle du mouvement Brownien B.

Définition 3.9 *On dit que $\{\theta_t, t \geq 0\}$ est un bon processus s'il est $\left(\mathcal{F}_t^B\right)$-adapté, càglàd et si*

$$E\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right] < +\infty, \qquad \textit{pour tout } t > 0.$$

Comme dans le cas de l'intégrale de Wiener, la construction se fait par discrétisation.

3.2.1 Cas des processus étagés

On appelle processus étagé (ou processus simple) les processus du type :

$$\theta_t^n = \sum_{i=0}^{p_n} \theta_i \mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}[}(t)$$

où $p_n \in \mathbb{N}$,$0 = t_0 \leq t_1 \ldots \leq t_{p_n}$ et $\theta_i \in L^2\left(\Omega, \mathcal{F}_{t_i}, P\right) \qquad \forall i = 0, \ldots, p_n$.
On voit immédiatement que θ^n est un "bon processus".
On définit alors

$$I_t\left(\theta^n\right) = \int_0^t \theta_s^n dB_s = \sum_{i=0}^{p_n} \theta_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right).$$

On vérifie que $\forall i \neq j, E\left(\theta_i\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)\theta_j\left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right)\right) = 0$
et que
$E\left(I_t\left(\theta^n\right)\right) = 0$ et $Var\left(I_t\left(\theta^n\right)\right) = E\left(\int_0^t \left(\theta_s^n\right)^2 ds\right)$

Remarque 3.10 *a cause du caractère aléatoire de θ^n la variable aléatoire $I_t\left(\theta^n\right)$ n'est pas une variable aléatoire gaussienne en général.*

3.2.2 Cas général

le principe est le même que pour l'intéfrale de Wiener, mais les outls mathématiques ous-jacentes plus compliqués que les lemmes hilbertiens et gaussiens de la partie précédente.

Si θ est un "bon processus", on montre d'abord qu'il existe

$$\{\theta^n, n \geq 0\}$$

suite de processus étagés telle que

$$E\left[\int_0^t (\theta_s - \theta_s^n)^2 \, ds\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

puis pour tout $t > 0$ il existe une v.a. $I_t(\theta)$ de carré intégrable telle que

$$E\left[|I_t(\theta) - I_t(\theta^n)|^2\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

avec $I_t(\theta^n)$ défini comme au paragraphe précédent.
On pose naturellement

$$I_t(\theta) = \int_0^t \theta_s dB_s, \qquad \forall t \geq 0$$

par indépendance, on remarque que

$$E\left[I_t(\theta^n)\right] = \sum_{i=0}^{p_n} E\left(\theta_i\right) E\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right) = 0$$

de sorte que en passant à la limite que

$$E\left(I_t(\theta)\right) = 0$$

De même on obtient

$$\begin{aligned} Var\left(I_t(\theta)\right) &= \lim_{n\to\infty} Var\left(I_t(\theta^n)\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} E\left(I_t(\theta^n)\right)^2 \\ &= \lim_{n\to\infty} E\left[\sum_{i=0}^{p_n} \theta_i^2 E\left(t_{i+1} - t_i\right)\right] \\ &= E\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right] \end{aligned}$$

Remarque 3.11 *insistons à nouveau sur le point que $I_t(\theta)$ n'est pas gaussienne en général sauf lorsque θ est déterministe.*

Propriétés

Linéarité : pour $t \geq 0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ et θ^1, θ^2 "bons processus" on a

$$I_t\left(a_1\theta^1 + a_2\theta^2\right) = a_1 I_t(\theta^1) + a_2 I_t(\theta^2)$$

Propriétés de martingale : pour tout "bon processus" θ, les processus

$$t \longmapsto I_t(\theta) \quad \text{et} \quad t \longmapsto I_t(\theta)^2 - \int_0^t \theta_s^2 ds$$

sont des $\left(\mathcal{F}_t^B\right)$-martingales continues.
On a donc, $\forall s \leq t$

$$E\left[I_t(\theta) \mid \mathcal{F}_s^B\right] = I_s(\theta)$$

(Soit $E\left(I_t(\theta) - I_s(\theta) \mid \mathcal{F}_s^B\right) = 0$).
On montre également que

$$E\left(\left(I_t(\theta) - I_s(\theta)\right)^2 \mid \mathcal{F}_s^B\right) = E\left[\left(I_t(\theta)\right)^2 - \left(I_s(\theta)\right)^2 \mid \mathcal{F}_s^B\right] = E\left[\int_0^t \theta_u^2 du \mid \mathcal{F}_s^B\right].$$

Rappellons les théorèmes suivants :
Théorème de Doob (théorème inégalité maximale) :
Soit X une surmartingale réelle continue. Alors pour tout $t, \lambda > 0$

$$P\left(\sup_{s\leq t} |X_s| \geq \lambda\right) \leq \frac{3}{\lambda} \sup_{s\leq t} E\left(|X_s|\right)$$

Théorème (inégalités dans L^p) :
Soit $p \geq 1$ et X une martingale réelle continue telle que $X_t \in L^p, \forall t \geq 0$. Alors $\forall t \geq 0$

$$E\left(\sup_{s\leq t} |X_s|^p\right) \leq q^p E\left[|X_t|^p\right]$$

où q est le conjugué de p ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$)

En conséquence du théorème de doob, on voit que pour tout $\left(\mathcal{F}_t^B\right)$-temps d'arrêt τ et tout "bon processus" θ tel que

$$E\left[\int_0^\tau \theta_s^2 ds\right] < +\infty,$$

On a

$$E\left(I_\tau\left(\theta\right)\right)=0$$

et

$$E\left(I_\tau^2\left(\theta\right)\right)=E\left[\int_0^\tau \theta_s^2 ds\right].$$

Par les théorèmes précédents ($p=q=2$)

$$E\left[\left(\sup_{s\leq t} I_s\left(\theta\right)\right)^2\right]\leq 4E\left[\left(I_t\left(\theta\right)\right)^2\right]=4\int_0^t E\left(\theta_u^2\right)du.$$

propriété d'isométrie
pour tous "bons processus" φ,θ et tout $s,t\geq 0$ on a :

$$E\left[I_s\left(\varphi\right)I_t\left(\theta\right)\right]=E\left[\int_0^{s\wedge t}\theta_u\varphi_u du\right]$$

De plus le processus

$$I_t\left(\theta\right)I_t\left(\varphi\right)-\int_0^t \theta_u\varphi_u du$$

est une $\left(\mathcal{F}_t^B\right)$-martingale.

Application : Calcul de $\int_0^t B_s dB_s$

Il s'agit en utilisant la définition/construction de l'intégrale stochastique de calculer

$$\int_0^t B_s dB_s$$

En prenant $\{t_i, k=0,\ldots,n\}$ la subdivision régulière de $[0,t]$ (on a $t_k=\frac{kt}{n}$).

Un processus étagé approchant B_s sur la discretisation donnée est

$$H_n(s) = \sum_{k=0}^{n-1} B_k \mathbf{1}_{[t_k,t_{k+1}[}(s)$$

où $\forall k, B_k = B_{t_k}$.

1) Montrons que $s \in [0,t]$ pour $s \in [0,t]$ converge $(B_s)_{s\in[0,t]}$ dans $L^2([0,t])$ quand $n \longrightarrow \infty$ $\left(H_n(s) \underset{n\to\infty}{\overset{L^2([0,t])}{\longrightarrow}} (B_s)_{s\in[0,t]} \right)$.

Il faut montrer donc que

$$\|H_n - B\|_{L^2([0,t])} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Longleftrightarrow E\left[\int_0^t (H_n(s) - B_s)^2 \, ds\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\begin{aligned}
E\left[\int_0^t (H_n(s) - B_s)^2 \, ds\right] &= E\left[\int_0^t \left(\sum_{k=0}^{n-1} B_k \mathbf{1}_{[t_k,t_{k+1}[}(s) - B_s\right)^2 ds\right] \\
&= E\left[\int_0^t \sum_{k=0}^{n-1} \left(B_k \mathbf{1}_{[t_k,t_{k+1}[}(s) - B_s\right)^2 \mathbf{1}_{[t_k,t_{k+1}[}(s) ds\right] \\
&= E\left[\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^t (B_k - B_s)^2 \mathbf{1}_{[t_k,t_{k+1}[}(s) ds\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} E\left((B_k - B_s)^2\right) ds \\
&\qquad \text{par le thm de Fubini} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (s - t_k) \, ds \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left[(s - t_k)^2\right]_{t_k}^{t_{k+1}} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k)^2 \\
&= \frac{1}{2} \times n \times \left(\frac{t}{n}\right)^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Donc $H_n \underset{n\to\infty}{\overset{L^2([0,t])}{\longrightarrow}} B_s$ donc $\int_0^t B_s dB_s = \lim_{n\to\infty} \int_0^t H_n dB_s$ dans $L^2(\Omega)$.

2) Il faut donc calculer $\int_0^t H_n dB_s$

$\int_0^t H_n(s) dB_s = \sum_{k=0}^{n-1} B_{t_k} \left(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} B_k \Delta B_k$

où $B_k = B_{t_k}$ et $\Delta B_k = B_{k+1} - B_k$.

$$\begin{aligned}
\Delta\left(B_k^2\right) &= B_{k+1}^2 - B_k^2 \\
&= (B_{k+1} - B_k)^2 + 2B_k (B_{k+1} - B_k) \\
&= (\Delta B_k)^2 + 2B_k \Delta B_k
\end{aligned}$$

d'où

$$B_k \Delta B_k = \frac{1}{2}\left(\Delta\left(B_k^2\right) - \left(\Delta B_k\right)^2\right)$$

Donc

$$\int_0^t H_n(s) dB_s = \sum_{k=0}^{n-1} B_k \Delta B_k = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left[\Delta\left(B_k^2\right) - \left(\Delta B_k\right)^2\right]\right)$$

or $\sum\limits_{j=0}^{n-1} \Delta\left(B_j\right)^2 = \left(B_{\frac{t}{n}}^2 - B_0^2\right) + \cdots + \left(B_{\frac{nt}{n}}^2 - B_{\frac{(n-1)t}{n}}^2\right) = B_t^2 - B_0 = B_t^2$

d'où $\int\limits_0^t H_n(s) dB_s = \sum\limits_{k=0}^{n-1} B_k \Delta B_k = \frac{1}{2}\left(B_t^2 - \sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(\Delta B_k\right)^2\right)$

On va donc avoir

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}\left(B_t^2 - \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\Delta B_k\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left(B_t^2 - t\right).$$

à condition de montrer que $\sum\limits_{j=0}^{n-1}\left(\Delta B_j\right)^2 \underset{n\to\infty}{\overset{L^2([0,t])}{\longrightarrow}} t$

i.e. : en moyenne quadratique $E\left(\left[\sum\limits_{j=0}^{n-1}\left(\Delta B_j\right)^2 - t\right]^2\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$$\begin{aligned}
E\left(\left[\sum_{j=0}^{n-1}\left(\Delta B_j\right)^2 - t\right]^2\right) &= E\left(\left[\sum_{j=0}^{n-1}\left(\left(\Delta B_j\right)^2 - \Delta t_j\right)\right]^2\right) \\
&= E\left[\sum_{j=0}^{n-1}\left(\left(\Delta B_j\right)^2 - \Delta t_j\right)^2\right] + \sum_{\substack{i\neq j\\ i,j=0}}^{n-1} E\left(\left[\left(\left(\Delta B_j\right)^2 - \left(\Delta t_j\right)\right)\right]\left[\left(\Delta B_i\right.\right.\right. \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} E\left(\left(\Delta B_j\right)^2 - \Delta t_j\right)^2 \\
&= nE\left(\left(B_{\frac{t}{n}}^2 - \tfrac{t}{n}\right)^2\right) \text{ car vaiid} \\
&= nE\left(\left[\tfrac{t}{n}\left(B_1^2 - 1\right)\right]^2\right) \text{(car } cB_{t/c^2} \overset{loi}{=} B_t \text{ donc } B_{t/n} \overset{loi}{=} \sqrt{t/n}B_1 \\
&= n\tfrac{t^2}{n^2 E}E\left(\left(B_1^2 - 1\right)^2\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

$(*)$ ona $E\left[\left(\left(\Delta B_j\right)^2 - \left(\Delta t_j\right)\right)\right] = 0$ et $E\left[\left(\Delta B_i\right)^2 - \left(\Delta t_i\right)\right] = 0$ car $E\left(\left(\Delta B_j\right)^2\right) =$
$E\left(\left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right)^2\right) = t_{j+1} - t_j = \Delta t_j$

car PAI. les 2 intervalles sont disjoints.

3.2.3 Extensions au martingales locales

Dans la définition d'un "bon processus", la condition d'intégrabilté

$$E\left(\int_0^t \theta_s^2 ds\right) < +\infty$$

est parfois trop exigeante dans la pratique. Il est possible de définir $I_t(\theta)$ sous la seule condition

$$\int_0^t \theta_s^2 ds < +\infty \quad p.s.$$

Cependant dans ce cas, $t \longmapsto I_t(\theta)$ n'est plus nécéssairement une martingale, et en particulier $E(I_t(\theta))$ peut être non nulle.

On a besoin pour définir $I_t(\theta)$ de la notion de martingale locale.

Définition 3.12 *Soit $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ une filtration et $\{X_t, t \geq 0\}$ un processus $\mathcal{F}_t$-adapté. on dit que X est $\mathcal{F}_t$-martingale locale s'il existe une suite $\{\tau_n, n \geq 0\}$ de $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt telle que $P[\tau_n \longrightarrow \infty] = 1$ et telle que le processus $X^n : t \longmapsto X_{t\wedge\tau_n}$ est une martingale $\forall n \geq 0$.*

Remarque 3.13
- *par le lemme de fatou, on peut montrer qu'une martingale locale positive est une surmartingale*
- *Par le théorème de convergence dominée, une martingale locale uniformément intégrable est vraie martingale*

Définition 3.14 *On dit que $\{\theta_t, t \geq 0\}$ est "bon processus local" s'il est càglad $\left(\mathcal{F}_t^B\right)$-adapté et si*

$$\int_0^t \theta_s^2 ds < +\infty \quad p.s. \forall t \geq 0.$$

Soit θ un "bon processus local". On pose

$\tau_n = \inf\left\{t > 0, \int_0^t \theta_s^2 ds = n\right\}$

comme $\{\tau_n > t\} = \left\{\int_0^t \theta_s^2 ds < n\right\} \forall n \in \mathcal{N}, t \geq 0.$

on voit que τ_n est un $\left(\mathcal{F}_t^B\right)$- temps d'arrêt $\forall n \in \mathcal{N}$ car θ est adapté.

De plus l'hypothèse d'intégrabilité sur θ entraine facilement $\tau_n \longrightarrow \infty$ $p.s.$

Enfin, par construction on a :

$$E\left[\int_0^{t\wedge\tau_n} \theta_s^2 ds\right] \leq n < +\infty.$$

Ainsi, par le paragraphe précédent on définir $I_{t\wedge\tau_n}(\theta)$ qui est une martingale.

Comme $\tau_n \longrightarrow \infty$ $p.s.$ on peut définir $I_t(\theta)$ pou tout $t \geq 0$ qui est une martingale locale.

De mêm, en prenant la même suite de temps d'arrêt, on montre que

$$I_t(\theta)^2 - \int_0^t \theta_s^2 ds$$

est une martingale locale.

Exemple 3.15 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On veut savoir quand l'intégrale stochastique*

$$I_t(B^\alpha) = \int_0^t B_s^\alpha dB_s$$

a un sens, et quand le processus associé est une martingale.

Remarquons que :

$$\begin{aligned} E\left[\int_0^t (B_s^\alpha)^2 ds\right] &= \int_0^t E\left(B_s^{2\alpha}\right) ds = \int_0^t s^\alpha E\left(B_1^{2\alpha}\right) ds \\ &= E\left(B_1^{2\alpha}\right) \int_0^t s^\alpha ds \end{aligned}$$

dans le terme de droite, l'intégrale est finie si et seulement si $\alpha > -1$.

Donc pour tout $t \longmapsto I_t(B^\alpha)$ soit bien défini est une martingale, il faut que $\alpha > -1$ et $E\left(B_1^{2\alpha}\right) < +\infty$.

Or $E\left(B_1^{2\alpha}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} x^{2\alpha} e^{-x^2/2} dx$ et cette intégrale est finie si et seulement si $\alpha > \frac{-1}{2}$ (le seule problème d'intégrabilité est en 0)

finalement, on déduit que

$$t \longmapsto I_t(B^\alpha) = \int_0^t B_s^\alpha dB_s \text{ est une martingale } \Longleftrightarrow \alpha > \frac{-1}{2}.$$

Quand $-1 < s \leq -1/2$, on cerche à avoir quand $I_t(B^\alpha)$ est malgré tout défini comme une intégrale locale.

d'après les propriétés du mouvement Brownien (comporteent au voisinage de 0 et comparaison avec $t \longmapsto t^{1/2}$) on en déduit

$$\int_0^t (B_s^\alpha)^2 \, ds < +\infty p.s \Longleftrightarrow \alpha > -1$$

D'où d'près ce qui précède

$$t \longmapsto I_t(B^\alpha) = \int_0^t B_s^\alpha dB_s \text{ est une martingale locale} \Longleftrightarrow \alpha > -1.$$

3.3 Mouvement Brownien multi-dimensionnel

Soit $B_t = \{(B_t^1, B_t^2, \ldots, B_t^n), t \geq 0\}$ un processus n-dimensionnel. On dit que B est un mouvement Brownien multi- dimensionnel si les processus B^i $i = 1, \ldots, n$ sont des mouvements browniens réels indépendants.

B est un processus à accroissements indépendants et stationnaires et un processu gaussien de fonction de covariance

$$E(\langle B_{t,} B_s \rangle) = n(s \wedge t)$$

(où $\langle .,. \rangle$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$).

- On a également une caractérisation de trype Lèvy :
  Un processus n-dimensionnel B est un mouvement brownien si et seulemnt si les processus B^i et $(BB - \delta_{i,j}t, t \geq 0)$ sont des martingales.
  avec la notation de Kronecker : $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{i,i} = 1$.
- Pour tous $a_1, a_2, \ldots, a_n$ il est facile de vérifier en calculant son espérance et sa covariance que le processus défini par :

  $$W_t = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}} = \left(a_1 B_t^1 + a_2 B_t^2 + \cdots + a_n B_t^n\right)$$

  est un mouvement Brownien réel.
- on dira que deux mouvements Browniens réels B^1 et B^2 sont coérlés avec coéfficients de correlation ρ si le processus

  $$t \longmapsto B_t^1 B_t^2 - \rho t$$

est une martingale.
On "décorrele" alors B^1 et B^2 en introduisant

$$B_t^3 = \frac{1}{\sqrt{1-\rho}} \left(B_t^2 - \rho B_t^1 \right)$$

Ce processus est une martingale.
On peut montrer que $\left(B_t^3\right)^2 - t$ est aussi une martingale, de sorte que B^3 est un mouvement Brownien.
B^3 est indépendant de B^2, de sorte que $B^2 B^3$ est une martingale.

3.4 Crochet - variation quadratique : Rappels et compléments

Définition 3.16 *Soit* $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$ *un espace de probabilité filtré et* $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ *un processus* $\mathcal{F}_t$*-adapté. On dit que* X *est une* $\mathcal{F}_t$*-martingale si :*
- $E(|X_t|) < +\infty$ *(autrement dit* $X_t \in L^1(\Omega)$ *pour tout* $t \geq 0$*)*
- $E(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s \; \forall s \leq t$.

Proposition 3.17 *Pour tout* $T > 0$, *si* X *est une martingale, alors l'ensemble du processus* $\{X_t, t \leq T\}$ *est complètement déteminé par la valeur terminale* X_T *au sens où*

$$X_t = E(X_t \mid \mathcal{F}_T), \forall t \leq T$$

Définition 3.18 *Soit* $\{X_t, t \geq 0\}$ *une* $\mathcal{F}_t$*-martingale. On dit que c'est une martingale fermée s'il existe* $Z \in L^1(\Omega)$ *tel que*

$$X_t = E(Z \mid \mathcal{F}_t), \forall t \geq 0$$

Autrement dit, l'ensemble du processus est detrminé par une valeur terminale à l'horizon infini.

Théorème 3.19 *Soit* $\{X_t, t \geq 0\}$ *une* $\mathcal{F}_t$*-martingale. C'est une martingale fermée si et seulement si la famille de v.a.* $\{X_t, t \geq 0\}$ *est uniformément intégrable.*

Théorème 3.20 (Décomposition de Doob -Meyer) *Soit* X *une sous - martingale relativement à* $\mathcal{F}_t$ *telle que la famille*

$$X_\tau, \tau \text{ } \mathcal{F}_t\textit{-temps d'arrêt borné}$$

est uniformément intégrable.

il existe une $\mathcal{F}_t$-martingale M est un processus croissant $\mathcal{F}_t$-adapté A tel que

$$X_t = M_t + A_t$$

de plus M et A sont unique à une constante additive près.

3.4.1 Variation quadratique (ou crochet stochastique)

Par l'inégalité de Jensen, on voit immédiatement que si X est une $\mathcal{F}_t$-martingale alors $t \longmapsto X_t^2$ est une $\mathcal{F}_t$-sous-martingale (sous réserves d'uniforme intégrabilité)

(Si f est convexe, alors $E(f(X) \mid \mathcal{F}) \geq f(E(X \mid \mathcal{F}))$).

La décomposition de Doob-Meyer assure l'existence d'un processus croissant tel que

$$t \longmapsto X_t^2 - A_t$$

soit une $\mathcal{F}_t$-martingale.

On appelle A le crochet de la martingale X (ou variation quadratique de X) et on écrit

$$A_t = \langle X \rangle_t \quad \forall t \geq 0$$

Théorème 3.21 (convergence des martingales) *Soit X une martingale continue. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *X est une martingale fermée par X_∞*
2. *X converge p.s. et dans L^1 vers X_∞*
3. *X est uniformément intégrable.*

Proposition 3.22 *Soit X un processus $\mathcal{F}_t$-adapté et intégrable tel que $E[X_\tau] = E[X_0]$ pour tout temps d'arrêt borné τ. Alors le processus X est une martingale.*

Proposition 3.23 *Si une martingale M continue est un processus à variations finies, alors elle constante :*

$$M_t = M_0 \quad p.s. \quad \forall t \geq 0.$$

Sous réserve d'uniforme intégrabilité, la décompositionde Doob-Meyer assure l'existence pour Z $(\mathcal{F}_t)$-martingale continue de carré intégrable d'un processus croissant A_t tel que, $t \longmapsto Z_t^2 - A_t$ soit une $(\mathcal{F}_t)$-martingale.

On appelle ce processus crochet de la martingale Z, et on écrit

$$\langle Z \rangle_t : A_t$$

(ou variation quadratique).

Quite à utiliser les d'arrêt

$$\tau = \inf \left\{ t \geq 0, Z_t^2 = n \right\}$$

On peut maintenant étendre cette définition aux martingales locales.

Définition 3.24 *Si Z est une martingale locale $\langle Z \rangle$ est l'unique processus croissant continu $(\mathcal{F}_t)$-adapté tel que*

$$t \longmapsto Z_t^2 - \langle Z \rangle_t$$

soit $(\mathcal{F}_t)$-martingale locale.

On peut également définir le crochet de deux $(\mathcal{F}_t)$-martingales locales M et N en écrivant :

$$\langle M, N \rangle_t = \frac{1}{2} \left(\langle M + N \rangle_t - \langle M \rangle_t - \langle N \rangle_t \right).$$

(par polarité).

Proposition 3.25 *Le crochet $\langle M, N \rangle$ est aussi l'unique processus à variation finie tel que le processus $MN - \langle M, N \rangle$ soit une martingale locale.*

Proposition 3.26 *Soit M une martingale locale continue. Alors M est une martingale L^2 si et seulement si*

$$E \left(\langle M \rangle_t \right) < +\infty, \quad \forall t \geq 0.$$

3.4.2 Construction trajectorielle

Proposition 3.27 *Soit M et N deux martingales locales continues. Alors p.s pour tout $t \geq 0$:*

$$\langle M, N \rangle_t = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{2^n} \left(M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n} \right) \left(N_{t_i^n} - N_{t_{i-1}^n} \right)$$

où $\{t_i^n, \}, i = 0, \ldots, 2^n$ désigne la subdivision régulière sur $[0, t]$.

Remarque 3.28 – *Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, le terme de droite est bien défini pour deux processus à variation quadratique finie.*
- *On voit aussi que le crochet sera nul ds q'une variation quadratique est nulle en particulier dés qu'un des deux processus est à variation finie.*

Proposition 3.29 *une conséquence est que le crochet $\langle M, N\rangle$ reste inchangé si l'on effectue un changement de probabilité équivalente.*

Définition 3.30 *On dit que deux martingales continues sont orthogonales si leur crochet est nul, c'est-à-dire si leur produit est une martingale.*

Exemple 3.31 – *Deux Browniens indépendants sont des martingales orthogonales.*
- *Le crochet du brownien B est $\langle B\rangle_t = t$.*
- *On peut calculer le crochet de deux Browniens corrélés B_1 et B_2 avec coefficient ρ. Par définition $\langle B_1, B_2\rangle_t = \rho t$.*
- *On peut aussi entendre calculer le crochet d'intégrales stochastiques générales, et les propriétés de martingale entrainent immédiatement que :*

$$\langle I(\theta)\rangle_t = \int_0^t \theta_s^2 ds$$

et

$$\langle I(\theta), I(\varphi)\rangle_t = \int_0^t \theta_s \varphi_s ds$$

qu'on écrit

$$\left\langle \int_0^\cdot \theta_s dB_s, \int_0^\cdot \varphi_s dB_s \right\rangle = \int_0^\cdot \theta_s \varphi_s ds$$

3.5 Processus d'Itô

Rappel : Semi-martingale : processus de la forme

$$X_t = M_t + A_t$$

où M est une martingale et A est un processus à variation bornée.
Les processus d'Itô, ce sont des processus écrits sous la forme

$$X_t = x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s \qquad (*)$$

où b est un processus $\left(\mathcal{F}_t^B\right)$-adapté tel que $\int\limits_0^t |b_s|\, ds < +\infty, p.s.\forall t \geq 0$ et σ un "bon processus local" (càglàd, $\left(\mathcal{F}_t^B\right)$-adapté et $\int\limits_0^t \sigma_s^2 ds < +\infty, p.s.\forall t \geq 0$).

on utlise également la notation sous al forme d'EDS (Equation différentielle stochastique) :

$$\begin{cases} dX_t &= b_t dt + \sigma_t dB_t \\ X_0 &= x \longrightarrow \text{ condition initiale} \end{cases}$$

le coefficient b_t s'appelle la dérive (ou le drift) du processus, et σ_t son coefficient de diffusion (ou volatilité).

On appelle aussi le processus

$$t \longmapsto x + \int\limits_0^t b_s ds$$

la partie à variaton finie de X, et le processus

$$t \longmapsto \int\limits_0^t \sigma_s dB_s$$

la partie martingale de X.

(C'est à priori une martingale locale, d'après la construction de l'intégrale stochastique).

Comme une martingale locale à variation finie est un processus constant, on en déduit que la décomposition $(*)$ est unique au sens où si x admet une autre décomposition

$$X_t = x + \int\limits_0^t \widetilde{b}_s ds + \int\limits_0^t \widetilde{\sigma}_s dB_s$$

alors $b \equiv \widetilde{b}$ et $\sigma \equiv \widetilde{\sigma}$.

En particulier

X sous la forme $(*)$ est une martingale locale si et seulemnt si $b \equiv 0$.

Cette representation des martingales locales dans une filtrartion Brownienne est une caractéristiqiue indépendamment de ce que le processus soit " à priori" un processus d'Itô.

Théorème 3.32 (Théorème de representation des martingales locales) *Soit B un mouvement Brownien et M une $\left(\mathcal{F}_t^B\right)$-martingale locale continue.*

Alors il existe $x \in \mathbb{R}$ et θ un "bon processus" local tel que

$$M_t = x + \int_0^t \theta_s dB_s.$$

3.5.1 Crochet de deux processus d'Itô

Si X^1 et X^2 sont deux processus d'Itô de décompositions

$$X_t^i = x^i + \int_0^t b_s^i ds + \int_0^t \sigma_s^i dB_s$$

pour $i = 1, 2$.

Alors le crochet est par définition le crochet de leurs parties martingales. Autrement dit :

$$\begin{aligned} \langle X^1, X^2 \rangle &= \langle I(\sigma^1), I(\sigma^2) \rangle \\ &= \left\langle \int_0^{\cdot} \sigma_s^1 dB_s, \int_0^{\cdot} \sigma_s^2 dB_s \right\rangle \\ &= \int_0^{\cdot} \sigma_s^1 \sigma_s^2 ds \end{aligned}$$

Attentio, à cause de la partie à variation finie, le processus

$$t \longmapsto X_t^1 X_t^2 - \langle X^1, X^2 \rangle$$

n'est pas une martingale locale en général.

En revanche, comme $X^i - I(\sigma^i)$ est un processus à variation finie, on a toujours :

$$\langle X^1, X^2 \rangle_t = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{2^n} \left(X_{t_i}^1 - X_{t_{i-1}}^1 \right) \left(X_{t_i}^2 - X_{t_{i-1}}^2 \right)$$

3.6 Intégration par rapport à une martingale générale

Soit M une martingale continue par rapport à la filtration $\left(\mathcal{F}_t^B\right)$. D'après le théorème de representation il existe $x \in \mathbb{R}$ et θ un "bon processus local" tel que

$$M_t = x + \int_0^t \theta_s dB_s.$$

Ainsi on peut donner un sens à

$$dM_t = \theta_t dB_t$$

et donc à

$$\int_0^t X_s dM_s = \int_0^t X_s \theta_s dB_s$$

Pour tout X "bon processus local".

De même on peut donner un sens à l'intégrale par rapport à une semi-martingale continue :

$$X_t = M_t + A_t$$

où M_t est une martingale et A_t un processus adapté à variations bornées.
Ainsi

$$\int_0^t H_s dX_s = \int_0^t H_s dM_s + \int_0^t H_s dA_s$$

TRM : $dM_s = f(B_s)dB_s$
mais aussi $dA_s = g(B_s)ds$
d'où

$$dX_s = f(B_s)dB_s + g(B_s)ds \quad (= EDS)$$

et donc

$$\int_0^t H_s dX_s = \int_0^t H_s f(B_s)dB_s + \int_0^t H_s g(B_s)ds$$

3.7 Formule d'Itô

Dans ce paragraphe, onse donne un processus d'Itô réel X de décomposition :

$$X_t = x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

et une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ suffisamment regulière.

La formule d'Itô vise à donner une formule de changement de variable pour le processus $f(X_t)$ qui sera un processus d'Itô.

Imaginos X est un processus $\mathcal{C}^1$ et $(f \circ X)' = (f' \circ X)\, X'$ d'où par la formule de changement de variables classique :

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t (f \circ X)'(s)\, ds \\ &= f(x) + \int_0^t f'(X_s)\, X'(s)\, ds \\ &= f(x) + \int_0^t f'(X_s)\, dX_s \end{aligned}$$

Cette formule garderait encore un sens qaund $\sigma \neq 0$ en posant $dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t$ mais cette formule de premier ordre n'est pas vraie quand $\sigma \neq 0$, à cause de caractère quadratique de la partie martingale de X.

On a en fait une formule de 2nd ordre.

Théorème 3.33 (1ère formule d'Itô) *Supposons f de classe $\mathcal{C}^2$. Alors*

$$f(X_t) = f(x) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) \sigma_s^2 ds$$

Si f est à dérivées bornées, le processus

$$f(X_t) - \int_0^t f'(X_s) b_s ds - \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) \sigma_s^2 ds$$

est une martingale.

Cette formule s'écrit :

$$df(X_t) = f'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t) d\langle X \rangle_t \qquad (1)$$

On peut également écrire

$$\begin{aligned} df(X_t) &= f'(X_t) b_t dt + \frac{1}{2} f''(X_t) d\langle X \rangle_t + f'(X_t)\sigma_t dB_t \\ &= \underbrace{\left(f'(X_t) b_t + \frac{1}{2} f''(X_t) \sigma_t^2 \right)}_{\textit{dérive}} dt + \underbrace{f'(X_t)\sigma_t}_{\textit{volatilité}} dB_t \end{aligned}$$

En particulier $t \longmapsto f(X_t)$ est un processus d'Itô de dérive

$$\int_0^t \left(f'((X_s)b_s + \frac{1}{2} f''(X_s)\sigma_s^2 \right) ds$$

et de partie martingale

$$\int_0^t f'(X_s)\sigma_s dB_s$$

quand les dérivées sont bornées, l'intégrale stochastique apparaissant dans la formule est une vraie martingale et on déduit :

$$\begin{aligned} E\left(f(X_t)\right) &= E\left(f(X_0)\right) + E\left[\int_0^t \left(f'((X_s)b_s + \frac{1}{2} f''(X_s)\sigma_s^2 \right) ds\right] \\ &= E\left(f(X_0)\right) + \int_0^t E\left(f'((X_s)b_s + \frac{1}{2} f''(X_s)\sigma_s^2 \right) ds. \end{aligned}$$

On utilise souvent une notation (variante de (1))

$$df(X_t) = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t)dX_t.dX_t$$

avec la de multiplication

	dt	dB_t
dt	0	0
dB_t	0	dt

Remarque 3.34 *on peut également calculer de la même façon des espérances conditionnelles*

$$\begin{aligned} E\left[f(X_t) \mid \mathcal{F}_s^B\right] &= f(X_s) + E\left[\int_s^t \left(f'((X_u)b_s + \frac{1}{2} f''(X_u)\sigma_u^2 \right) du \mid \mathcal{F}_s^B\right] \\ &= f(X_s) + E\left[\int_s^t E\left(\left(f'((X_u)b_s + \frac{1}{2} f''(X_u)\sigma_u^2 \right) \mid \mathcal{F}_s^B\right) du\right] \end{aligned}$$

La deuxième formule d'Itô fait intervenir le temps en première variable.

Théorème 3.35 (2^e formule d'Itô) *soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à t, de classe $\mathcal{C}^2$ par rapport à x. On a*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s)\, ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s)\, d\langle X\rangle_s$$

On peut écrire la formule sous la forme différentielle

$$df(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t)\, dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)\, dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t)\, d\langle X\rangle$$

Exemple 3.36 *le mouvement brownien géométrique ou processus log-normal est défini par l'équation*

$$X_t = x + \mu \int_0^t X_s ds + \sigma \int_0^t X_s dB_s$$

avec $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$.
Cela équivaut à l'EDS de Black-Scholes

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t$$

Si on pose $Y_t = e^{-\mu t} X_t, \forall t \geq 0$, la formule d'Itô donne :
$f(t, X_t) = e^{-\mu t} X_t$; $\quad \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) = -\mu X_t e^{-\mu t}$; $\quad \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) = e^{-\mu t}$; $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t) = 0$

$dY_t = -\mu X_t e^{-\mu t} dt + e^{-\mu t} dX_t = \sigma Y_t dB_t$

$\Longrightarrow Y_t = x + \int_0^t \sigma Y_s dB_s$

Appliquons maintenant la formule d'Itô à $g(Y_t) = \ln(Y_t)$.
$g(Y_t) = \ln(Y_t)$; $\quad g'(Y_t) = \frac{1}{Y_t}$; $\quad g''(Y_t) = -\frac{1}{Y_t^2}$ *et* $\langle Y\rangle_t = \sigma^2 Y_t^2 dt$.
d'aprés Itô,

$$\begin{aligned} dg(Y_t) &= g'(Y_t) dY_t + \frac{1}{2} g''(Y_t)\langle Y\rangle_t \\ &= \frac{1}{Y_t} dY_t + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{Y_t^2}\right)\sigma^2 Y_t^2 dt \\ &= \sigma dB_t - \frac{1}{2}\sigma^2 dt. \end{aligned}$$

Ainsi cela montre que

$$\begin{aligned} \ln(Y_t) &= \ln x + \int_0^t \sigma dB_s - \int_0^t \sigma^2 ds \\ &= \ln x + \sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t. \end{aligned}$$

Donc on obtient une expression de Y_t :

$$Y_t = x \exp\left[\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right]$$

et donc de X_t :

$$X_t = x \exp\left[\mu t + \sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right].$$

On peut considérer le cas où μ et σ sont des fonctions déterministes :

$$X_t = x + \int_0^t \mu(s) X_s ds + \int_0^t \sigma(s) X_s dB_s$$

on dit que X est un mouvement Brownien géométrique à coefficients détérministes.

par la deuxième formule d'Itô on montre que le processus

$$t \longrightarrow X_t \exp\left[-\int_0^t \mu(s)\, ds\right]$$

est une martingale locale.

C'est en fait une vraie martingale et

$$X_t = X_0 \exp\left[\int_0^t \mu(s)\, ds + \int_0^t \sigma(s)\, ds - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s)\, ds\right]$$

Finalement, une 3^e formule d'Itô permet de teraiter les fonctions de plusieurs variables

Théorème 3.37 (**3^e formule d'Itô**) *Soient X et Y deux processus d'Itô issus de x et y. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ à dérivées bornées. On a :*

$$\begin{aligned}
f(X_t, Y_t) &= f(x,y) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, Y_s)\, dX_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}(X_s, Y_s)\, dY_s \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_s, Y_s)\, d\langle X\rangle_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X_s, Y_s)\, d\langle Y\rangle_s \\
&\quad + \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X_s, Y_s)\, d\langle X, Y\rangle_s .
\end{aligned}$$

Remarque 3.38
- *Pour f indépendante de Y_t, on retrouve la $1^{\text{ère}}$ formule d'Itô.*
- *Pour $Y_t = t$, on retrouve la 2^e formule d'Itô.*

$\Longrightarrow$ Unique formule à retenir

Proposition 3.39 *Pour X_t et Y_t suivant les dynamiques*

$$\begin{aligned}
dX_t &= b_t^X dt + \sigma_t^X dB_t^X \\
dY_t &= b_t^Y dt + \sigma_t^Y dB_t^Y
\end{aligned}$$

où B^X et B^Y sont deux mouvements browniens corrélés de coefficient de corrélation ρ la formule devient :

$$\begin{aligned}
f(X_t, Y_t) &= f(x,y) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, Y_s)\, dX_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}(X_s, Y_s)\, dY_s \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_s, Y_s)\left(\sigma_s^X\right)^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X_s, Y_s)\left(\sigma_s^Y\right)^2 ds \\
&\quad + \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X_s, Y_s)\, \rho \sigma_s^X \sigma_s^Y ds
\end{aligned}$$

Exemple 3.40 $f(x,y) = xy$

$$\underbrace{d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + d\langle X, Y\rangle_t}_{\text{(Formule d'intégration par parties)}}$$

$$X_tY_t = xy + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \rho \int_0^t \sigma_s^X \sigma_s^Y ds$$

où le crochet de X *et* Y : $\langle X, Y \rangle_t = \rho \int_0^t \sigma_s^X \sigma_s^Y ds.$

3.8 intégrale d'Itô - cas multi-dimensionnel

Soit $(W_t, t \geq 0)$ un $\mathcal{F}_t$-mouvement Brownien de dimension r.
Soit ϕ un processu à valeurs matricielles :
$\forall t \leq T, \phi_t$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^r, \mathcal{R}^d\right)$.
On dit que $\phi \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}}^2(0,T)$ si
$\forall i = 1, ..., d, \quad j = 1, ..., r, \ \left(\phi_t^{i,j}\right)_{t \leq T} \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}}^2(0,T)$
On définit $\left(\int_0^t \phi_s dW_s\right)$ comme le vecteur de dimension d dont la $i^{ième}$ coordonée est $\left(\int_0^t \phi_s dW_s\right)^{(i)} = \sum_{j=1}^r \phi_s^{i,j} dW_s^j$.

Proposition 3.41 *1.* $E\left(\int_0^t \phi_\theta dW_\theta\right) = (0, 0, ..., 0)$

2. Si ψ *vérifie les mêmes hypothèses que* ϕ

$$\begin{aligned} E\left[\left(\int_s^t \phi_\theta dW_\theta . \int_s^t \psi_\theta dW_\theta\right) \mid \mathcal{F}_s\right] &= E\left[\int_s^t trace\left(\phi_\theta \psi_\theta^t\right) d\theta \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &= E\left[\int_s^t \left(\phi_\theta . \psi_\theta\right) d\theta\right] \end{aligned}$$

3.8.1 Formule d'Itô - cas multidemensionnel

Soit $(W_t, t \geq 0)$ un $\mathcal{F}_t$-mouvement Brownien standard de dimension r, sur un espace de probabilité filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P\right)$.

Définition 3.42 *Un processus d'Itô est un processus à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$, *continue et adapté de la forme*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_\theta d\theta + \int_0^t \sigma_\theta dW_\theta, \qquad P - p.s.$$

noté encore
$$\begin{cases} dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

1. *X_0 est une v.a $\mathcal{F}_0$-mesurable*
2. *$(b_t)_{0\leq t\leq T}$ est un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{F}_t$-adapté et tel que $\int\limits_0^T |b_s|\, ds < +\infty$*
3. *$(\sigma_t)_{0\leq t\leq T}$ est un processus à valeurs matricielles tel que $\forall t \in [0,T]$, $\sigma_t \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^r, \mathcal{R}^d\right)$ et $\forall i = 1,...,d, \quad j = 1,...,r,$ $\left(\sigma_t^{i,j}\right)_{0\leq t\leq T} \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T)$.*

   ($\sigma^{i,j}$ est $\mathcal{F}_t$-adapté et $\int\limits_0^T |\sigma_s^{i,j}|^2\, ds < \infty \qquad P-p.s.$)

Ainsi $\forall t \in [0,T]$, $X_t = \left(X_t^1, X_t^2, ..., X_t^d\right)$ avec pour chaque $i = 1,...,d$

$$X_t^i = X_0^i + \int\limits_0^t b_s^i ds + \sum_{j=1}^r \int\limits_0^t \sigma_s^{i,j} dW_s^j \qquad P-p.s.$$

Soit $u(t,x)$ une fonction de $[0,T]\times\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^{1,2}\left([0,T]\times\mathbb{R}^d\right)$.
On note :

Le gradient

$$\nabla u(t,x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(t,x), 1 \leq i \leq d\right) \in \mathbb{R}^d$$

La matrice hessienne

$$u_{xx}(t,x) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t,x), 1 \leq i,j \leq d\right) \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{R}^d\right)$$

Proposition 3.43 (Formule d'Itô - cas multidimensionnel) *Soit une fonction $u(t,x) \in \mathcal{C}^{1,2}\left([0,T]\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}\right)$.*

$\forall t \in [0,T] \qquad p.s.$

$$\begin{aligned} u(t,X_t) &= u(0,X_0) + \int\limits_0^t \frac{\partial u}{\partial t}(s,X_s)\, ds + \int\limits_0^t \nabla u(s,X_s).dX_s + \frac{1}{2}\int\limits_0^t trace\left(\sigma_s \sigma_s^t u_{xx}(s,X_s)\right) ds \\ &= u(0,X_0) + \int\limits_0^t \frac{\partial u}{\partial s}(s,X_s)\, ds + \int\limits_0^t \nabla u(s,X_s).dX_s \\ &\quad + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(s,X_s) \sum_{k=1}^r \sigma_s^{ik}\sigma_s^{jk}(s,X_s) ds \end{aligned}$$

sous forme différentielle

$$du(t,X_t) = \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,X_t) + \nabla u(t,X_t).b_t\right) dt + \frac{1}{2} trace\left(\sigma_t \sigma_t^t u_{xx}(t,X_t)\right) dt + \nabla u(t,X_t).\sigma_t dW_t$$