Résumé du cours. (Estimation ponctuelle.

* Un paramètre = quantité inconnue

exemple:

si la v.a X

1. $X \sim B(p) \longrightarrow$ le paramètre est p
2. $X \sim \mathcal{P}(\lambda) \longrightarrow$ le paramètre est λ
3. $X \sim \mathcal{E}(\theta) \longrightarrow$ le paramètre est θ
4. $X \sim N(\mu, \sigma^2) \longrightarrow$ deux paramètres μ et σ^2

* Un estimateur est une statistique dont son observation est une estimation du paramètre quel θ

exemple: $\bar{X}$ estimateur pour le paramètre μ si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

S'^2 estimateur pour le paramètre σ^2 si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

c.à.d un estimateur noté T par exemple est une fonction en $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ dont sa formule ne dépend d'aucun paramètre (aucune constante inconnue).

$\Rightarrow$ l'estimateur T est une v.a $\Rightarrow T$ suit une certaine loi de probabilité (car T en fonction des v.a X_i $\forall i = \overline{1,n}$)

Remarque:

1. pour estimer un paramètre (des paramètres) de la v.a X il faut avoir un échantillon pour cette v.a X
2. l'estimateur T du paramètre θ la loi de la v.a T (la distribution de T) dépend de θ

par exemple: $\bar{X}$ estimateur de μ si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

estimateur sans biais (E.S.B)

- T est un estimateur pour le paramètre $\underline{\theta}$.

on dit que T est un estimateur sans biais pour $\underline{\theta}$ (T E.S.B pour θ) si : $\boxed{E(T)=\theta}$

- $\underbrace{b_T = E(T)-\theta}$ = le biais $\Rightarrow T$ E.S.B pour θ ssi $\boxed{b_T = 0}$

- T st un estimateur asymptotiquement sans biais pour $\underline{\theta}$ si $\lim\limits_{n\to\infty} E(T) = \theta$ = le paramètre à estimer.

<u>exemple:</u> $\overline{X}$ estimateur de μ 　　{ toujours on suppose que la v.a $X \sim N(\mu,\sigma^2)$

$$E(\overline{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum X_i\right) = \frac{1}{n}\sum E(X_i)$$

$$= \frac{1}{n}\sum \mu = \frac{\cancel{n}\mu}{\cancel{n}} = \mu$$

$\Rightarrow E(\overline{X}) = \mu$ donc $\overline{X}$ st un E.S.B pour μ.

S^2 estimateur pour σ^2.

$E(S^2) = ??$ 　　on sait que $\frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$

c.à.d si $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ alors $\frac{nS^2}{\sigma^2}$ suit une loi de khi-deux a $(n-1)$ degré de liberté.

<u>Remarque</u>

une loi de khi-deux a n d.d.l (degré de liberté) alors son espérance $= n$

sa variance $= 2n$.

d'où $\frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)} \Rightarrow E\left(\frac{nS^2}{\sigma^2}\right) = n-1$

$$\Rightarrow \frac{n}{\sigma^2} E(S^2) = n-1$$

$$\Rightarrow E(S^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2$$

comme $E(S^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$ différent de σ^2

$\Rightarrow S^2$ est un estimateur biaisé pour σ^2

mais $\lim_{n \to \infty} E(S^2) = \lim_{n \to \infty} \frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2$

c.à.d $\lim_{n \to \infty} E(S^2) = \sigma^2 \Rightarrow S^2$ est un estimateur asymptotiquement sans biais

Remarque:

- si $E(T) = \theta + a \Rightarrow T$ est un E.B (estimateur biaisé) pour θ
  mais $T' = T - a$ est un E.S.B (estimateur sans biais) pour θ
- si $E(T) = a\theta$, $\forall a \neq 0 \Rightarrow T$ est un E.B mais
  $T' = \frac{T}{a}$ est un E.S.B pour θ
- si $E(T) = \frac{\theta}{a}$, $\forall a \neq 0 \Rightarrow T$ est un E.B pour θ
  mais $T' = aT$ est un E.S.B pour θ.

estimateur convergent:

un estimateur T pour θ est dit convergent si:

1)- T est un estimateur sans biais pour le paramètre θ

2)- T est de Variance ~ 0 c.a.d $\mathrm{Var}_{n \to \infty}(T) = 0 = \lim_{n \to \infty} \mathrm{Var}(T) = 0$

Risque quadratique moyen = erreur quadratique moyenne

notée $R(T, \theta) = E\left[(T - \theta)^2\right]$

si T est un E.S.B pour $\theta \Leftrightarrow E(T) = \theta$

$\Rightarrow R(T, \theta) = E\left[(T - E(T))^2\right] = V(T)$

$\Rightarrow R(T, \theta) = V(T)$ si T est un E.S.B pour θ

$$\boxed{\text{si } X \text{ est une v.a: } V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E\left[(X - E(X))^2\right]}$$

Soient T_1 et T_2 deux estimateurs pour le paramètre θ

- T_1 est meilleur que T_2 si : $R(T_1,\theta) < R(T_2,\theta)$
- si T_1 et T_2 les deux E.S.B pour θ

  T_1 meilleur que T_2 si $V(T_1) < V(T_2)$
- Un estimateur sans biais est toujours meilleur qu'un estimateur biaisé

- **La fonction de vraisemblance :**

$L(\underset{\sim}{x},\theta)$ = la fonction de vraisemblance (la densité de l'echantillon).

$$L(\underset{\sim}{x},\theta) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i) \text{ si } X \text{ est une v.a discrète}$$

$$= \prod f_{X_i}(x_i) \text{ si } X \text{ est une v.a continue.}$$

- **Les méthodes d'estimation paramétriques**

① **la méthode des moments :**

elle consiste à égaler les moments empiriques d'un échantillon avec les moments théorique du même ordre. (si on a k paramètres à estimer, on obtient un système de k équation).

exemple :

$X \sim B(p)$, p à estimer, $E(X) = p$

$E(X) = \overline{X} \Rightarrow p = \overline{X} \Rightarrow \overline{X}$ est un estimateur de p.

$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ λ à estimer, $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

$E(X) = \overline{X} \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \overline{X} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\overline{X}} \Rightarrow \frac{1}{\overline{X}}$ est un estimateur pour λ

$\cdot X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, μ et σ^2 a estimer $\begin{cases} E(X) = \mu \\ V(X) = \sigma^2 \end{cases}$

$$E(X) = \bar{X}$$
$$V(X) = S^2 \quad \begin{matrix} \Rightarrow \mu = \bar{X} \\ \Rightarrow \sigma^2 = S^2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \bar{X} \\ S^2 \end{pmatrix} \text{ est un estimateur pour } \begin{pmatrix} \mu \\ \sigma^2 \end{pmatrix}.$$

② la méthode de maximum de vraisemblance :

· Si la v.a dépend de un seul paramètre θ pour trouver l'estimateur de maximum de vraisemblance de θ (e.m.v pour θ) il faut :

$$\begin{cases} ① \ \dfrac{\partial \log L(\underset{\sim}{x}, \theta)}{\partial \theta} = 0 \\ ② \ \dfrac{\partial^2 \log L(\underset{\sim}{x}, \theta)}{\partial \theta^2} < 0 \end{cases}$$

· Si la v.a dépend de plusieurs paramètres $(\theta_1, \theta_2, \dots \theta_k)$ alors l'estimateur de maximum de vraisemblance de $(\theta_1, \dots \theta_k)$ (e.m.v de $(\theta_1, \dots, \theta_k)$) est donné par :

$$\frac{\partial \log L(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{\theta})}{\partial \theta_1} = 0$$

$$\frac{\partial \log L(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{\theta})}{\partial \theta_2} = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial \log L(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{\theta})}{\partial \theta_k} = 0$$

exemple

$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $P(X = x) = \dfrac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$ $\quad x \in \mathbb{N}$

on cherche l'e.m.v pour λ.

$$① \ L(\underset{\sim}{x}, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^{\sum x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} e^{-n\lambda}$$

- $\log L(\underset{\sim}{x}, \lambda) = \sum x_i \log \lambda + \log \frac{1}{\prod x_i!} - n\lambda$

- $\frac{\partial \log L(\underset{\sim}{x}, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow \frac{\sum x_i}{\lambda} - n = 0$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\sum x_i}{n} = \overline{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\lambda} = \overline{x}}$$

- $\frac{\partial^2 \log L(\underset{\sim}{x}, \lambda)}{\partial \lambda^2} \overset{??}{<} 0 \Rightarrow -\frac{\sum x_i}{\lambda^2}\Big|_{\lambda = \overline{x}}$

$$\Rightarrow -\frac{\sum x_i}{\overline{x}^2} < 0$$

$\Rightarrow \hat{\lambda} = \overline{x}$ est l'e.m.v pour λ

* $X \rightsquigarrow N(\mu, \sigma^2)$. $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $x \in \mathbb{R}$

on a deux paramètres à estimer. μ et σ^2

- $L(\underset{\sim}{x}, \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \times e^{\frac{-\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

- $\log L(\underset{\sim}{x}, \mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\log\sigma^2 + \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n - \frac{\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$

$$\begin{cases} \frac{\partial \log L(\underset{\sim}{x}, \mu, \sigma^2)}{\partial \mu} = 0 \\ \frac{\partial \log L(\underset{\sim}{x}, \mu, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sum(x_i-\mu)}{\sigma^2} = 0 \quad \ldots (1) \\ -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4} = 0 \quad \ldots (2) \end{cases}$$

(1) $\Rightarrow \sum(x_i - \mu) = 0$ car $\sigma^2 \neq 0 \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{\sum x_i}{n} \Rightarrow \boxed{\hat{\mu} = \overline{x}}$

(2) $\Rightarrow -n\sigma^2 + \sum(x_i-\mu)^2 = 0 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum(x_i-\mu)^2}{n}$ n'est pas un estimateur car dépend de paramètre μ

mais si on remplace μ par son estimateur $\hat{\mu} = \bar{x}$

on trouve $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$ est l'e.m.v pour σ^2

Remarque:

① si le domaine de définition de la v.a X (le support de la v.a $X = \mathcal{X}$) dépend de paramètre θ $\Rightarrow$ pour trouver l'e.m.v (estimateur de maximum de vraisemblance) on fait une étude directe c.à.d: on calcul la fonction de vraisemblance $L(\mathcal{X}, \theta)$ après on cherche le maximum de la fonction $L(\mathcal{X}, \theta)$ par rapport à θ (la valeur de θ qui donne le max de $L(\mathcal{X}, \theta)$).

② l'e.m.v pour $g(\theta)$ (une fonction de θ)

$\widehat{g(\theta)} = g(\hat{\theta})$

exemple:

$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ on cherche l'e.m.v de $\lambda e^{-\lambda} = g(\lambda)$

$\widehat{g(\lambda)} = g(\hat{\lambda})$

① on cherche l'e.m.v pour λ.

on a trouvé que $\hat{\lambda} = \bar{x}$ est e.m.v pour λ.

② e.m.v pour $g(\lambda) = \widehat{g(\lambda)} = g(\hat{\lambda})$

$\widehat{g(\lambda)} = g(\bar{x}) = \bar{x} e^{-\bar{x}}$.