Chapitre 3

Théorèmes fondamentaux de l'anaylse fonctionnelle

3.1 Théorème de Riesz

[1]

Théorème 3.1. *Soit X un espace vectoriel normé. La boule unité fermée de X est compacte si et seulement si X est de dimension finie.*

Exemple Dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([0, 2\pi], \mathbb{C})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ où

$$\|f\|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq 2\pi} |f(t)|, f \in E$$

on considère la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$f_n(t) = e^{int}, n \geq 0, t \in [0, 2\pi]$$

Montrons que E est dimension infinie.

1. Frigyes Riesz, mathématicien hongrois, 1880-1956, l'un des fondateurs de l'analyse fonctionnelle.

Solution. La suite $(f_n)_{n\geq 0}$ ainsi est un élément de la boule unité fermée $\overline{B}(O,1)$, et vérifie

$$|f_n(t)-f_m(t)|^2 = |e^{int}-e^{imt}|^2 = 2-2\cos(n-m)t$$

D'où,

$$\|f_n-f_m\|_\infty = \sup_{0\leq t\leq 2\pi}|f_n(t)-f_m(t)| = \sup_{0\leq t\leq 2\pi}\sqrt{(2-2\cos(n-m)t} = 2$$

Ce qui montre que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ n'admet donc aucune une suite extraire convergente. Par conséquent, la boule $\overline{B}(O,1)$ n'est pas compacte dans $E.$ Par le Théorème de Riesz, l'espace E est de dimension infinie.

3.2 Théorème de Hahn-Banach

Le Théorème de Hahn-Banach [4, 5] [2] est l'un des grands résultats fondamentaux de l'analyse mathématique.

Théorème 3.2. *[5] Soit X un espace vectoriel normé, et soit M un sous-espace vectoriel de X. Si f est une forme linéaire continue sur M, alors, il existe un prolongement de f en une forme linéaire $\widehat{f}$ continue sur tout X et telle que $\|f\| = \|\widehat{f}\|$.*

3.2.1 Applications du Théorème de Hahn-Banach

Théorème 3.3. *Soit M un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé X et soit $x_0 \in X$ tel que $d(x_0, M) > 0$. Alors, il existe $f \in X'$ telle que*

i. $\|f\| = 1$

ii. $f(M) = 0$

iii. $f(x) = d(x, M), x \in X$

Si $M = 0$, on aura le résultat suivant

Corollaire 3.1. *Soit X un espace vectoriel normé, et soit $x_0 \in X$. Il existe $f \in X'$ telle que $\|f\| = 1$ et $f(x_0) = \|x_0\|$.*

Corollaire 3.2. *Soit X un espace vectoriel normé, et soit $x \in X$. Alors,*

$$\|x\| = \max_{f \in X', \|f\|=1} |f(x)|$$

2. Hans Hahn, 1879-1934, est un mathématicien et philosophe autrichien qui a apporté de nombreuses contributions à l'analyse fonctionnelle, la topologie, la théorie des ensembles et le calcul des variations.

Corollaire 3.3. *Soit $\{x_i\}_{i=1}^n$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, un ensemble de vecteurs linéairement indépendants dans X. Il existe alors un ensemble de formes linéaires $\{f_i\}_{i=1}^n$ dans X' vérifiant $f_j(x_i) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$. Dans ce cas, on aura pour tout $x \in \overline{\{x_i\}_{i=1}^n}$,*

$$x = \sum_{j=1}^{n} f_j(x) x_j$$

Remarques 1. Le Corollaire précédent donne un procédé de définir la base duale de l'espace dual d'un espace vectoriel normé de dimension finie.

2. Le système $(\overline{\{x_i\}_{i=1}^n}, \{f_i\}_{i=1}^n)$ est dit système biorthogonal.

Définition 3.1. *Un sous-espace vectoriel M d'un espace vectoriel normé X admet un supplément dans X s'il existe un sous-espace fermé N de X tel que $X = M \oplus N$.*

Si X est un espace de Hilbert, le supplément d'un sous-espace vectoriel M de X est le sous-espace vectoriel fermé $M^{\perp}$ dit complémentaire orthogonal. Toutefois, pour X un espace de Banach, M admet un supplément si M est de dimension finie. On a donc

Théorème 3.4. *Tout sous-espace vectoriel de dimension finie M d'un espace de Banach X admet un supplément dans X.*

Corollaire 3.4. *Soit X un espace vectoriel normé tel que $X \neq \{0\}$. Alors, $X' \neq \{0\}$.*

Corollaire 3.5. *Soit X un espace vectoriel normé, et soit $x_0 \in X$ tel que*

$$\forall f \in X' : f(x_0) = 0$$

Alors, $x_0 = 0$.

3.2.2 Une autre application

Le résultat suivant est très important. Il est conséquence du Théorème de Hahn-Banach. On l'a utilsé précédemment pour montrer que le Théorème 2.3 ne demeure pas vrai pour $p = \infty$, i.e., $\ell'_\infty \neq \ell_1$.

Théorème 3.5. *Soit $\mathcal{X}$ un espace de Banach. Si $\mathcal{X}'$ est séparable, alors $\mathcal{X}$ l'est aussi.*

Preuve. Soit $\{f_i\}_{i\geq 1}$ un ensemble partout dense dans $\mathcal{X}'$. Par la définition de la borne supérieure, et pour chaque f_k, on choisit un élément $x_k \in \mathcal{X}$ tel que

$$\|x_k\| = 1 \text{ et } \ |f_k(x_k)| \geq \frac{\|f_k\|}{2}, \ \ k \geq 1$$

Posons

$$K = \left\{ \sum_{k\geq 1} \lambda_k x_k, \ \lambda_k \in \mathbb{Q} \right\}$$

K est dénombrable dans $\mathcal{X}$.

De plus, si $\overline{K} \neq \mathcal{X}$, alors par le Théorème 4.3, il existe $f \in \mathcal{X}'$, $f \neq 0$ telle que

$$f(x) = 0, \ x \in \overline{K}$$

En particulier,

$$f(x_k) = 0, \ k \geq 1$$

D'où,

$$\exists m \in \mathbb{N} / \ \|f_m - f\| < \epsilon, \forall \epsilon > 0$$

Par suite,

$$|(f - f_m)(x_m)| = |f_m(x_m)| \geq \frac{\|f_m\|}{2} = \frac{\|f_m\|}{2} \|x_m\|$$

Donc

$$\|f - f_m\| \geq \frac{\|f_m\|}{2} \Rightarrow \|f_m\| < 2\epsilon$$

Soit finalement

$$\|f\| \leq \|f - f_m\| + \|f_m\| < 3\epsilon$$

Par conséquent, $f \equiv 0$. Contradiction. ◀

Exercice Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Montrer que F est complet si et seulement si $\mathcal{L}(E, F)$ est complet.

Solution ($\Rightarrow$) Démontrée dans le chapitre 2.
($\Leftarrow$) Soit $(y_n)_n$ une suite de Cauchy dans F. Soit $x_0 \in E, \|x_0\| = 1$. D'après le Corollaire 4.1 du Théorème de Hahn-Banach, il existe $f \in X'$,$|f\| = 1$ et $f(x_0) = \|x_0\|$. Soit $T_n : E \to F, (n \geq 1)$ définies par

$$T_n(x) = f(x)y_n, \quad x \in E, n \geq 1$$

On a donc :

$$T_n \in \mathcal{L}(E, F), n \geq 1$$

et de plus, pour tous $n, m \in \mathbb{N}, n \neq m$:

$$\|T_n - T_m\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)(y_n - y_m)\| = \|y_n - y_m\| \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| = \|y_n - y_m\|$$

La suite $(T_n)_n$ est donc de Cauchy dans $\mathcal{L}(E, F)$. Elle est donc convergente vers certain $T \in \mathcal{L}(E, F)$ car $\mathcal{L}(E, F)$ est complet. Posons $Tx_0 = y$. Alors,

$$\|y_n - y\| = \|T_n(x_0) - Tx_0\| = \|(T_n - T)x_0\| \leq \|T_n - T\|\|x_0\| \to 0, \quad (n \to +\infty)$$

La suite $(y_n)_n$ est donc convergente vers $y, y \in F$. Par conséquent, l'espace F est complet.

3.3 Théorème de catégorie de Baire

[3]

Définition 3.2. *(**Rappel**) Soit X un espace métrique, et soit A un sous-ensemble de X. Un vecteur x_0 de X est dit point intérieur de A s'il existe une boule $B(x_0, r)$ de centre x_0 et de rayon $r, (r > 0)$ incluse dans A.*

Définition 3.3. *L'ensemble des points intérieurs de A est dit intérieur de A et est noté $\overset{\circ}{A}$.*

On a donc
$$\overset{\circ}{A} = \{x \in X / \exists r > 0 : B(x, r) \subset A\}$$

Le résultat suivant est utile pour démontrer les théorèmes de ce chapitre.

Théorème 3.6. *Soit X un espace de Banach, et soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de fermés dans X tels que $X = \underset{i\geq 1}{\cup} X_i$. Alors, il existe $j \in \mathbb{N}, j \geq 1$ tel que $\overset{\circ}{X}_j \neq \emptyset$.*

Autrement dit, un espace de Banach ne peut être une réunion dénombrable de fermés, tous d'intérieur vide.

Exemple Montrer que $(\mathbb{R}, |.|)$ muni de sa topologie usuelle n'est pas dénombrable.

Solution Par l'absurde, on suppose que $\mathbb{R} = \underset{n\geq 1}{\cup} \{x_n\}$, où $x_n \in \mathbb{R}, n \geq 1$. On a donc :

1. $(\mathbb{R}, |.|)$ est un espace de Banach.
2. Les singletons $\{x_n\}$ sont des fermés dans $\mathbb{R}$ pour tout $n, n \geq 1$ car

$$\{x_n\}^C =]-\infty, x_n[\cup]x_n, +\infty[$$

3. René-Louis Baire, 1874-1932, est un mathématicien français.

est un ouvert dans $\mathbb{R}$.

Par le Théorème de Baire, il existe $j \in \mathbb{N}, j \geq 1$ tel que $\{\overset{\circ}{x_j}\} \neq \emptyset$. i.e., il existe un vecteur $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset \{x_j\}$. Contradiction. ◀

3.3.1 Quelques applications du Théorème de Baire

Proposition 3.1. *Soit (X,d) un espace métrique complet, et soit $\{X_n\}_{n\geq 1}$ une famille dénombrable de fermés de X d'intérieur vide. Alors, $\underset{n\geq 1}{\cup} X_n$ est aussi d'intérieur vide.*

De même, on a le résultat suivant

Proposition 3.2. *Soit (X,d) un espace métrique complet, et soit $\{X_n\}_{n\geq 1}$ une famille dénombrable d'ouverts denses dans X. Alors, $\underset{n\geq 1}{\cap} X_n$ est aussi un ouvert dense dans X.*

Théorème 3.7. *Soit (X,d) un espace métrique complet. On suppose que $X = \underset{n\geq 1}{\cup} X_n$ avec X_n des fermés de X. Alors, $\Omega = \underset{n\geq 1}{\cup} \overset{\circ}{X_n}$ est un ouvert dense dans X.*

3.4 Théorème du graphe fermé

3.4.1 Graphe d'un opérateur linéaire

Définition 3.4. *(**Rappel**) Soient X, Y des espaces vectoriels normés sur le même corps $\mathbb{K}$, et soit $T : X \to Y$ un opérateur linéaire. Le graphe de T est l'ensemble*

$$G(T) = \{(x, Tx), x \in X\}$$

Définition 3.5. *Un opérateur linéaire $T : X \to Y$ est dit fermé, si son graphe est fermé dans $X \times Y$.*

i.e., $T : X \to Y$ est fermé si et seulement si

$$\forall (x_n)_n \subset X : ((x_n \to x) \wedge (Tx_n \to y)) \Rightarrow (x \in D(T) \wedge y = Tx)$$

On a donc le résultat suivant

3.4.2 Théorème du graphe fermé

Théorème 3.8. *Soient X, Y des espaces de Banach, et soit $T : X \to Y$ un opérateur linéaire. Si le graphe de T est fermé, alors T est continu.*

Remarque La réciproque est évidemment vraie, car si f est une fonction continue, le graphe de f est fermé. (même si f n'est pas linéaire)

Pour la preuve du Théorème 4.11, on a besoin du Lemme suivant

Lemme 3.1. *Soit X un espace vectoriel normé, et soit C un ensemble convexe dans X tel que $C = (-1)C$. Si C admet un point intérieur, alors 0 est aussi un point intérieur de C.*

Exemple Soient X, Y des espaces de Banach, et soit $T : X \to Y$ un opérateur linéaire. On suppose que

$$\forall f \in X', \forall (x_n)_n \in X : \lim_{n\to+\infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(Tx_n) = 0 \tag{3.1}$$

Montrer, en utilisant le Théorème du graphe fermé, que T est continu.

Solution Soit $(x_n)_n)$ une suite dans X convergeant vers un élément $x, x \in X$ et telle que $(Tx_n)_n$ converge vers $y, y \in Y$. Montrons que $y = Tx.$
On a

$$\lim_{n\to+\infty} (x_n - x) = 0$$

D'où, pour tout $f, f \in Y'$:

$$\lim_{n\to+\infty} f(T(x_n - x)) = 0$$

par (3.1). Donc

$$\lim_{n\to+\infty} f(T(x_n)) = f(Tx), \quad f \in X'$$

Comme f est continue,

$$f(\lim_{n\to+\infty}(T(x_n)) = f(Tx), \quad f \in X'$$

C-à-d, pour tout $f, f \in Y'$:

$$f(y) = f(Tx)$$

D'où, $y = Tx$ par le Corollaire 4.5 du Théorème de Hahn-Banach. Le graphe de T est donc fermé. Comme X, Y sont de Banach, T est continu par le Théorème 4.10.

Corollaire 3.6. *Soient X, Y des espaces de Banach, et soit $T : X \to Y$ un opérateur linéaire borné et bijectif. Alors, T^{-1} est aussi borné.*

Remarque La condition que les espaces X et Y soient complets est nécessaire comme le montre l'exemple suivant

Exercice Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ et soit F le sous-espace de E formé des fonctions de classe $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que le graphe de l'application

$$S : F \ni f \mapsto f' \in E$$

est fermé, mais S n'est pas continue.

Corollaire 3.7. *Soient $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ deux normes sur un espace vectoriel normé X telles que $(X, \|.\|_1)$ et $(X, \|.\|_2)$ soient complets. S'il existe $c > 0$ tel que*

$$\forall x \in X : \|x\|_1 \leq c\|x\|_2 \tag{3.2}$$

alors, $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes sur X.

3.5 Théorème de Banach-Steinhaus

3.5.1 Théorème de Banach-Steinhaus

[4] **(ou Principe de la borne uniforme)**

Soient $(X, \|.\|_X)$ et $(Y, \|.\|_Y)$ deux espaces vectoriels normés, et soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{L}(X, Y)$.

Définition 3.6. $(T_i)_{i\in I}$ *est dite simplement bornée si*

$$\forall x \in X : \sup_{i\in I} \|T_i x\| < +\infty$$

Définition 3.7. $(T_i)_{i\in I}$ *est dite uniformément bornée si*

$$\sup_{i\in I} \|T_i\| < +\infty$$

Il est clair que si $(T_i)_{i\in I}$ est uniformément bornée, alors $(T_i)_{i\in I}$ est simplement bornée. La réciproque n'est pas vraie en général. Toutefois, le résultat suivant affirme que ces définitions sont équivalentes dans le cas où X est de Banach. On a donc

Théorème 3.9. *Soient* $(X, \|.\|_X)$ *et* $(Y, \|.\|_Y)$ *deux espaces vectoriels normés. On suppose que* X *est de Banach. Si* $\{T_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ *est une famille simplement bornée, alors* $\{T_i\}_{i\in I}$ *est uniformément bornée.*

Remarque Le nom du Théorème exprime bien le contenu du résultat :
" On déduit une borne uniforme à partir de bornes ponctuelles. "

4. Władysław Hugo Dionizy Steinhaus, 1887-1972, est un mathématicien et professeur polonais.

3.5.2 Quelques applications

Corollaire 3.8. *Soit S un sous-ensemble d'un espace de Banach X tel que*

$$\forall f \in X' : \sup_{x \in S} |f(x)| < +\infty$$

Alors, S est borné.

Corollaire 3.9. *Soient X et Y deux espaces de Banach, et soit $(A_n)_n$ une suite dans $\mathcal{L}(X, Y)$ convergeant simplement sur X vers un opérateur A.*
Alors, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. De plus, la suite $(\|A_n\|)_n$ est bornée.

3.5.3 L'inverse de la propriété de Hölder dans ℓ_p

Corollaire 3.10. *Soient $1 \leq p, q \leq +\infty$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On suppose que*

$$\forall x = (x_n)_n \in \ell_p : \text{ la série } \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n \text{ est convergente} \tag{3.3}$$

Alors, $y \in \ell_q$.

Preuve. 1. Si $1 \leq p < +\infty$: On définit $f : \ell_p \to \mathbb{C}$ par

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k y_k$$

Par (3.3), l'application f est bien définie.

Pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, on pose $f_n : \ell_p \to \mathbb{C}$ avec

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

pour tous $x \in \ell_p$ et $n \geq 1$.

Alors, $f_n \in \ell'_p, n \geq 1$. En effet, f_n est linéaire, et de plus, pour tout $x, x \in \ell_p$:

$$\begin{aligned}
|f_n(x)| = |\sum_{k=1}^{n} x_k y_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| &\leq (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq (\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q)^{\frac{1}{q}} (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq (\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q)^{\frac{1}{q}} \|x\|_p
\end{aligned}$$

par l'inégalité de Hölder (Corollaire 2.1, chapitre 2). Ce qui montre que f_n est continue, et que $|f_n\| \leq (\sum\limits_{k=1}^{n} |y_k|^q)^{\frac{1}{q}},\ n \geq 1$.

De plus,

$$\forall x \in \ell_p : \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$$

Du Corollaire 4.10 du Théorème de Banach-Steinhaus, découle que $f \in \ell'_p$.
Finalement, par le Théorème 2.3, $y \in \ell_q$ et $\|y\|_q = \|f\|_{\ell'_p}$.

2. Pour $p = +\infty$: On prend la suite $x_n = sign(y_n)$ où

$$sign(x) = \frac{|x|}{x} \text{ si } x \neq 0 \quad \text{et } sign(0) = 0$$

Donc, $x \in \ell_\infty$. De plus, par (3.3), la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n = \sum_{n=0}^{+\infty} |y_n|$$

est convergente. Par conséquent, $y \in \ell_1$. ◄

3.6 Théorème de l'application ouverte

Définition 3.8. *Soient E et F deux espaces topologiques. Une application $f : X \to Y$ est dite ouverte si l'image par f, de tout ouvert de E est un ouvert de F.*

Exemple L'application

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$

n'est pas ouverte en $x = 0$.
En effet, $f(]-1, 1[) = [0, 1[$ n'est pas un voisinage de 0. Cependant, f est ouverte en tout point $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$.

Exercice Montrer qu'une application linéaire et continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est ouverte si et seulement si $f(1) \neq 0$.

On a donc le résultat suivant dit Théorème de l'application ouverte ou Théorème de Banach-Schauder [5]

Théorème 3.10. *Soient X et Y deux espaces de Banach, et soit $T : X \to Y$ un opérateur linéaire continu et surjectif. Alors, il existe $c > 0$ tel que*

$$T(B_X(O, 1)) \supset B_Y(O, c) \tag{3.4}$$

Autrement dit, T transforme tout ouvert de X en un ouvert de Y, i.e., T est une application ouverte. D'où vient le nom du résultat. En effet, soit U un ouvert de X. Soit $y_0 \in T(U)$. Il existe donc $x_0 \in U$ tel que $y_0 = Tx_0$. Soit $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset U$. i.e.,

$$x_0 + B(O, r) \subset U$$

5. Juliusz Paweł Schauder, 1899-1943, est un mathématicien polonais, connu pour ses travaux dans les domaines de l'analyse fonctionnelle, les EDP et la physique mathématique.

Il s'ensuit que

$$y_0 + T(B(O,r)) \subset T(U)$$

Par (3.4), on aura

$$T(B(O,r)) \supset B(O,rc)$$

Finalement

$$B(y_0,rc) \subset T(U)$$

3.6.1 Théorème d'homéomorphisme de Banach

Du résultat précédent, découle le Corollaire important suivant

Corollaire 3.11. *(Théorème d'homéomorphisme de Banach)*
Soient X et Y deux espaces de Banach, et soit $T : X \to Y$ un opérateur linéaire borné et bijectif. Alors, T^{-1} est aussi borné. (T est dit homéomorphisme)

Exemple Soit $X = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, et soit $I : (X, \|.\|_\infty) \to (X, \|.\|_1)$ l'opérateur d'identité.
1. Montrer que I est linéaire, bijectif et continu.
2. Calculer $\|I\|$.
3. Montrer que I^{-1} n'est pas un homéomorphisme (n'est pas continu). Utiliser la suite $(f_n)_n$ où $f_n(t) = t^n, n \geq 1$.
4. Que peut-on déduire par le Corollaire 4.10 ?

Solution 1. Il est clair que I est linéaire et bijectif, et son inverse est l'opérateur d'identité $I^{-1} : (X, \|.\|_1) \to (X, \|.\|_\infty)$. De plus, pour tout $f \in X$, on a

$$\|I(f)\|_1 = \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)dt| \leq \int_0^1 \sup_{t\in[0,1]} |f(t)dt| \leq \|f\|_\infty$$

D'où, I est continu, et

$$\|I\| \leq 1 \tag{3.5}$$

2. On a pour $f_0 = 1$ sur $[0,1]$:

$$\|I(f_0)\|_1 = \|1\|_1 = \int_0^1 dt = 1$$

et $\|f_0\|_\infty = 1$. Par conséquent,

$$\|I\| = \sup_{\|f\|_\infty = 1} \|I(f)\|_1 \geq \|I(f_0)\|_1 = 1 \tag{3.6}$$

De (3.5) et (3.6), $\|I\| = 1.$

3. On a :

$$\|I^{-1}f_n\|_\infty = \|f_n\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f_n(t)|dt = \sup_{t\in[0,1]} |t^n|dt = 1$$

De même,

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(t)|dt = \int_0^1 |t^n|dt = \frac{1}{n+1}$$

Par suite,

$$\frac{\|I^{-1}f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} = n + 1 \to +\infty, (n \to +\infty)$$

Ce qui montre que I^{-1} n'est pas continu.

4. De (3), l'opérateur I n'est pas un homéomorphisme. Comme $(X, \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach, par le Théorème d'homéomorphisme de Banach, l'espace $(X, \|.\|_1)$ n'est pas de Banach.