Exercice : Soient A et B deux v.a. non correlées centrées et réduites.

Soit $X_t = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$.

Montrer que $\{X_t\}$ est un processus stationnaire.

Remarque : On peut noter $\{X_t\}$ un processus sans préciser le domaine des instants (des temps).

Exercice : Soit $\{X_t\}$ un processus solution de l'équation aux différences stochastiques :

$$X_t = \varepsilon_t + \theta\, \varepsilon_{t-1}$$

$\{\varepsilon_t\}$ est un bruit blanc faible (voir chapitre 1) de variance σ_ε^2. ($\{\varepsilon_t\} \sim BB(0, \sigma_\varepsilon^2) \equiv WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$).

Calculer la fonction d'autocovariance $\{\gamma_h, h \in \mathbb{Z}\}$.
Déduire la fonction d'autocorrélation $\{\rho_h, h \in \mathbb{Z}\}$.

1.2 Stationnarité stricte.

Définition : Un processus $\{X_t\}$ est dit strictement stationnaire si $(X_1, \dots, X_n)' \overset{d}{=} (X_{1+h}, \dots, X_{n+h})$

$\forall n, h$, $n \geq 1$, $h \in \mathbb{Z}$. ($\overset{d}{=}$ signifie que les vecteurs ont la même loi de probabilité conjointe.

Cela se traduit par : $\{X_t\}$ est strictement stationnaire si

$$F_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h}}(x_1, \dots, x_n), \forall n, \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$$

$\forall h \in \mathbb{Z}$, $\forall t_1, \dots, t_n$ $(n \geq 1)$