Université Blida 1
Faculté des Sciences/Département de Maths
Rattrapage de Statistique de L3 Maths
Durée:1h30

Exercice 1: La taille des étudiants du département de Maths est une v.a gaussienne de moyenne $m = 171cm$ et d'écart-type $\sigma = 6.2cm$.
1) Un étudiant étant choisi au hasard dans la population et X étant sa taille en cm, determiner les probabilités suivantes:
$P(X = 175); P(X \prec 160); P(X \succ 195)$ et $P(|X - 171| \succ 15)$.
2) On choisit au hasard 10 étudiants dans la population et l'on désigne par Y la moyenne des tailles des étudiants choisis.
Calculer $E(Y)$ et $Var(Y)$
En admettant que Y suit une loi gaussienne, determiner le nombre α tel que $P(|X - 171| \succ \alpha) = 0.10$.
3) On choisit au hasard n étudiants et l'on par Y_n la moyenne des tailles des étudiants choisis. En admettant que Y_n suit une loi gaussienne trouver n pour que $P(|Y_n - 171| \succ 1) \prec 0.05$

Exercice 2:Soit la suite $(X_k, k \in IN)$ de vaiid selon la loi $N(m,\sigma)$.
1) Si $S_n = \frac{1}{n}\sum(X_k - m)^2$. Calculer $E(S_n)$ et $Var(S_n)$
2) Trouver $limVar(S_n)$ pour $n \to +\infty$
3) Si $n = 20$ et $\sigma = 2$
Trouver a et b tels que $P(S_n \leq a) = 0.10$ et $P(S_n \prec b) = 0.90$.
4) Si $n = 100$ et $\sigma = 1$ trouver α tel que $\mathrm{P}(\mathrm{S}_n \prec \alpha) = 0.90$.

Exercice 3: Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ n variables aléatoires indépendantes suivant la même loi N(0,1). On définit

$$\overline{X}_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X_i \quad \text{et} \quad X_{n-k} = \frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n} X_i$$

trouver la loi de:
(a) $Y = \frac{1}{2}(X_k - X_{n-k})$; (b) $T = kX_k^2 + (n-k)X_{n-k}^2$
(c) $Z = \frac{X_1^2}{X_4^2}$; (d) $\mathrm{U}=\frac{X_1}{|X_2|}$

Exercice 4: On considère une va uniformément distribuée entre 0 et a $(a \succ 0)$ sa borne supérieure. On veut estimer ce paramètre inconnu à partir de n observations $X_1, X_2, ..., X_n$ indépendantes.
a) Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance est $Y_n = SupX_i$ et en déduire alors un estimateur sans biais de a.

b) Vérifier que l'inégalité de Cramer-Rao est inutilisable
(cad caduque).
c) Quel est l'estimateur obtenu par la méthode des moments.
Barême: Exo1:**5 points**; Exo2:**5 points**; Exo3:**5 points**;
Exo4: **7 points**