Lois usuelles de probabilités

1 Lois usuelles discrètes

1.1 Loi de Bernoulli

C'est la loi d'une variable aléatoire X ne pouvant prendre que les deux valeurs 1 ou 0. Ainsi $X(\Omega) = \{0,1\}$ avec:

$$P(X = 1) = p, \qquad P(X = 0) = 1 - p$$

C'est à dire: $X : \Omega \to \{0,1\}$ avec

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si A est réalisé} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, ce qu'on écrit symboliquement $X \rightsquigarrow B(1,p) = B(p)$.

$$P(X = x) = p^x(1 - p)^{1-x}, \qquad x = 0,1$$

avec $E(X) = p$ et $V(X) = p.q = p(1 - p)$

1.2 Loi Binomiale

On répète l'experience de Bernoulli de façons indépendantes n fois et soit X: le nombre de fois que A est réalisé.

$$X : \Omega \to E = \{0,1,2,3,...,n\}$$

On dit que X suit une loi Binomiale de paramètres n et p et on écrit: $X \rightsquigarrow B(n,p)$.
$\forall x \in E$, la loi de X est donnée par:

$$P(X = x) = C_n^x p^x(1 - p)^{n-x}, \qquad x = 0,1,2,...,n$$

avec $E(X) = np$ et $V(X) = np.q = np(1 - p)$

Remarque 0.1. Si $X_1 \rightsquigarrow B(n_1,p)$ et $X_2 \rightsquigarrow B(n_2,p)$, les deux variables étant indépendantes alors $X_1 + X_2 \rightsquigarrow B(n_1 + n_2,p)$

Exemple 0.1. *On jette un dé 10 fois. Soit X le nombre de nombre premiers obtenus.*
On pose $X_i = \begin{cases} 1 & \textit{si on a un nombre premier} \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$
$i = 1,2,3,...,10$, $\forall i$, $\quad X_i \rightsquigarrow B(p) = B(\frac{1}{2})$
$X = \sum_{i=1}^{10} X_i \rightsquigarrow B(10,p) = B(10,\frac{1}{2})$

$$P(X = x) = C_{10}^{x} p^x (1-p)^{10-x} = C_{10}^{x} (\frac{1}{2})^x (1 - \frac{1}{2})^{10-x}$$

1.3 Loi de Poisson

Définition 0.1. Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre λ, $(\lambda > 0)$ si sa fonction de masse P est donnée par:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!}, \qquad x = 0,1,2,3.....$$

On note $X \rightsquigarrow P(\lambda)$, on a aussi $E(X) = V(X) = \lambda$.

Définition 0.2. Soit X_T la variable aléatoire qui compte le nombre d'apparitions d'un phénomène aléatoire pendant une période de temps T.
Soit θ le nombre moyen d'apparitions du phénomène pendant une unité de temps alors X_T suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = \theta.T$.

Exemple 0.2. *La variable aléatoire qui compte le nombre de clients qui arrivent à l'instant t à une fille d'attente devant un guichet suit une loi de Poisson de paramètre λ, $\lambda = \theta.t$.*
θ le nombre moyen de clients qui arrivent au guichet pendant l'unitéde temps.

1.3.1 Approximation de la loi binomiale par une loi de Poisson:

Soit $X \rightsquigarrow B(n,p)$. Losque n est grand et np tend vers une limite finie alors:

$$P(X = x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x} \simeq P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!}$$

avec $\lambda = n.p$.
En pratique cette approximation est possible si $n \geq 30$ et $n.p < 5$
Exemple 0.3. *Soit $X \rightsquigarrow B(100,0.01)$, $x = 0,1,2,3,4,5$ ainsi que leurs approximations à 10^{-3} avec une loi de Poisson de paramètre $\lambda = n.p = 1$ sont données dans le tableau suivant:*

k	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
$P(X = x)$	*0.336*	*0.370*	*0.185*	*0.061*	*0.015*	*0.000*
Approximation	*0.368*	*0.368*	*0.184*	*0.061*	*0.015*	*0.003*

2 Lois usuelles continues

2.1 Loi uniforme sur [a,b]

On dit qu'une v.a X suit une loi uniforrme sur l'intervalle [a,b] si sa fonction de densité est donnée par:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction de répartition est donnée par:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

Avec $E(X) = \frac{a+b}{2}$ et $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

2.2 Loi exponentielle de paramètre θ

On dit qu'une v.a X suit une loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$, si sa fonction de densité est positive donnée par:

$$f(x) = \begin{cases} \theta.e^{-\theta x}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On note $X \rightsquigarrow \exp(\theta)$.
Avec $E(X) = \frac{1}{\theta}$ et $V(X) = \frac{1}{\theta^2}$
La fonction de répartition est:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\theta x}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La variable X est souvent utilisé pour représenter une durée de vie (durée de chomage, durée d'hospitalisation).

2.3 loi normale ou de Laplace-Gauss

C'est la loi d'une v.a X à valeurs dans $\mathbb{R}$, de densité

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} exp(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2})$$

qui est définie par deux paramètres $E(X) = m$ et $V(X) = \sigma^2$.
On écrit $X \rightsquigarrow N(m,\sigma^2)$ ou bien $X \rightsquigarrow N(m,\sigma)$

2.3.1 Loi normale centée et réduite: (loi standard]

En faisant le changement de variable $U = \frac{X-m}{\sigma}$, alors U est une v.a de moyenne nulle ($E(U) = 0$) et de variance 1 ($V(U) = 1$)
Donc

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} exp(-\frac{x^2}{2})$$

La fonction de répartition est

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_{-\infty}^{x} exp(-\frac{u^2}{2}) du$$

Les valeurs de $\Phi(x)$ sont fournées dans une table statistique pour les valeurs $x \geq 0$.
Pour $x < 0$, on utilise le fait que Φ est une fonction paire $\Phi(u) = \Phi(-u)$
$P(U < -x) = P(u > x)$ donc $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, de cette symétrie découle la probabilité suivante:

$$\begin{aligned} P(\mid U \mid < a) = P(-a < U < a) &= \Phi(a) - \Phi(-a) \\ &= \Phi(a) - (1 - \Phi(a)) \\ &= 2\Phi(a) - 1 \end{aligned}$$

Remarque 0.2. pour déterminer les valeurs de la fonction de répartition d'une loi normale quelconque, on se ramène à la loi standard qui est tabulée à partir de:
$F(x) = P(X \leq x) = P(\frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{x-m}{\sigma}) = P(U \leq \frac{x-m}{\sigma}) = \Phi(\frac{x-m}{\sigma})$

2.3.2 Approximation de la loi binomiale par une loi normale:

Soit $X \rightsquigarrow B(n,p)$.
Losque n est grand et n.p tend vers une limite finie alors:

$$X \rightsquigarrow B(n,p) \simeq X \rightsquigarrow N(np,npq)$$

En pratique cette approximation est possible si $n \geq 30$ et $n.p \geq 5$.