Chaînes de Markov à temps discret

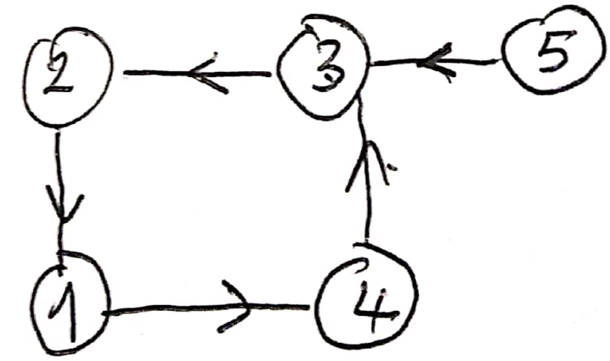
Réductibilité - Irréductibilité

Déf^t : Une C.M. est dite irréductible s'il existe <u>une</u> seule classe de communication

i.e. $\forall i, j \in E : i \longleftrightarrow j$.

Sinon : la C.M. est dite réductible.

Expls : $\boxed{1}$



On a : $1 \to 4 \to 3 \to 2 \to 1$

c.à.d. $1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4$

Par contre : $5 \to 3$ mais $3 \not\to 5$.

i.e $5 \not\leftrightarrow 3$

càd 5 et 3 ne sont pas dans la

m̂ classe.

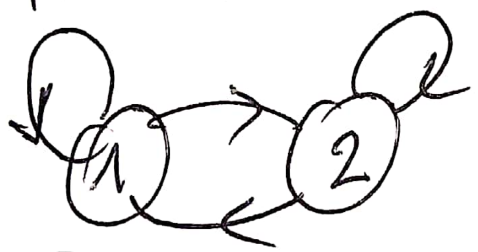
$\exists$ 2 classes de communica^{t} :

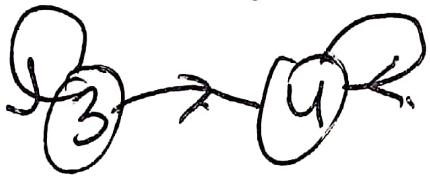
$E_1 = \{1, 2, 3, 4\}$

$E_2 = \{5\}$.

<u>Conclusion</u> : La C.M. n'est pas irréductible.

$\boxed{2}$





Il est clair : $1 \leftrightarrow 2$

$3 \not\leftrightarrow 1$

$3 \not\leftrightarrow 4$

② $\exists$ 3 classes :

$E_1 = \{1,2\}$, $E_2 = \{3\}$ et $E_4 = \{4\}$.

~~Donc~~ La C.M. n'est pas irréductible.

$\boxed{3}$

$1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4$ $\exists$ une seule classe

La C.M. est <u>irréductible</u>.

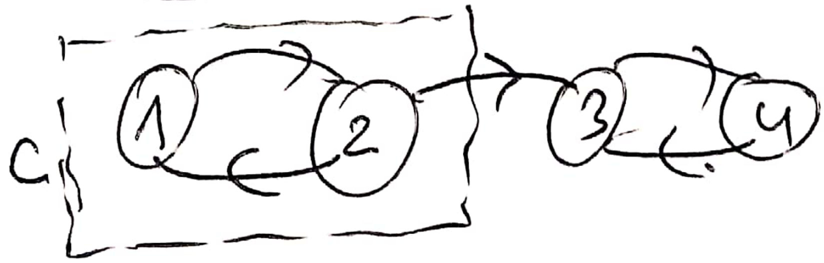
//

Classe fermées

Commençons par des exemples:

①

②



La classe $C = \{1,2\}$ n'a pas le m̂ comportement dans les explés (pour les 2 C.M.).

- Dans l'exple $\boxed{1}$:

En démarrant par n'importe quel élément de C (1 ou 2), on ne pourra jamais atteindre un élément de $\overline{C} = \{3,4\}$ en une transition (une étape).

i.e: $\forall i \in C : \forall j \in \overline{C} : i \not\to j$

c.à.d. $P_{ij} = 0$.

Dans ce cas, on dit que la classe C est fermée.

- Dans l'exple $\boxed{2}$, La classe $C = \{1,2\}$ n'est pas fermée car $\exists\, i \underset{\in C}{(=2)}, \exists\, j (=3) \in \overline{C}$

c.à.d. en se trouvant ds $C = \{1,2\}$, il est possible d'en sortir, ce qui prouve que la classe est <u>ouverte</u>

Def^t : Un ensble $C \subset E$ est dit "Fermé" s'il est impossible d'atteindre n'importe quel état de $\overline{C}$ à partir de n'importe quel état de C en <u>une</u> transition.

Formellement :

$$C \text{ fermé} \Leftrightarrow \forall i \in C, \forall j \in \overline{C} : P_{ij} = 0.$$

Remarque : Une fois <u>entrer</u> dans une classe <u>fermée</u> C, on y restera pour toujours.

Etat absorbant : (ⓞⓟⓣ)

Déf^{t} : Un état (i) est dit absorbant si $\{i\}$ est fermée.

Exple :

$C_2 \{3\}$ est fermée car :

$$P_{32} = P_{31} = 0 .$$

Donc, l'état (3) est absorbant.

en d'autres ~~d~~ termes, une fois atteindre l'état (3), on peut jamais y sortir.

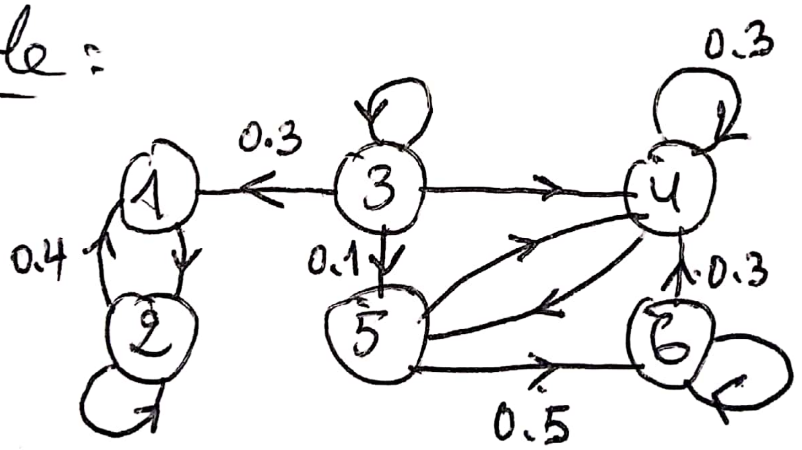
Remarque : Si $C \subset E$ est fermée, alors la matrice stochastique restreinte à C ; $P_C = (P_{ij})_{i,j \in C}$ est aussi une matrice stochastique.

C-à-d. : $\forall i \in C : \sum_{j \in C} P_{ij} = 1$

Preuves exercice

- Donc on peut traiter "C" comme étant une C.M. autonome

Exple :



- Donner la matrice stochastique.
- Déterminer les classe de communication.
- La C.M. est-elle irréductible ?
- Donner les classes fermées.

- Ecrire la mat. stoch. pour chaque classe fermée.