Tasdawit n'Bgayet
Université de Béjaïa
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques /M.I

30 – 01 – 2016

Concours National d'accès à la formation LMD 3ème cycle

Epreuve de Processus Stochastiques (durée 2 h)

Exercice 1. (05 points)

On considère deux variables aléatoires indépendantes X_1, X_2 exponentielles de paramètres respectifs λ_1, λ_2. Soit $Y = \min(X_1, X_2)$.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Montrer que $\mathbb{P}(Y = X_1) = \mathbb{P}(X_1 < X_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$.
3. Deux guichets sont ouverts à une banque: le temps de service du premier (respectivement second) guichet suit une loi exponentielle de moyenne 20 (respectivement 30) minutes. Deux clients A et B se présentent à la banque. Le client A choisit le guichet 1, le client B le 2. Quelle est la probabilité que A sorte le premier?
4. En moyenne combien de temps faut-il pour que les deux soient sortis?
   Indication: le max de deux nombres, c'est la somme moins le min.

Exercice 2. (07 points)

1. soit T une variable aléatoire géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ de loi de probabilité $\mathbb{P}(T = k) = p(1-p)^{k-1}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'espérance mathématique de T.
2. Un enfant collectionne des images. Son album comporte N images. Chaque jour, il achète une tablette de chocolat dans laquelle il ya une image. Soit X_n le nombre d'images distinctes dont dispose l'enfant au soir du jour n, avec la convention $X_0 = 0$. Donner la matrice et le graphe de transition de $(X_n)_{n\geq 1}$. Classifier les états de cette chaîne.
3. Pour $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$, soit T_i la variable aléatoire définie par

$$T_i = \min\{n \geq 1 | X_n = i\}$$

que signifie concrétement T_i? Et $(T_{i+1} - T_i)$? Donner la loi de probabilité de $(T_{i+1} - T_i)$ i.e déterminer $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(T_{i+1} - T_i = k)$.

4. En déduire $\mathbb{E}(T_{i+1} - T_i)$ puis $\mathbb{E}(T_N)$ et enfin un équivalent de $\mathbb{E}(T_N)$.
   (**Rappel**: $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{N} \sim \ln N$). Interpréter. Déterminer approximativement le nombre de tablettes de chocolats qu'il devra manger s'il veut compléter son album de 100 images?

5. Application: On lance un dé à 6 faces jusqu à ce qu'on ait vu les six chiffres sortir. Combien en moyenne va-t-il falloir lancer le dé?

Exercice 3. (03 points)

Un signal $X(t)$ ne peut prendre que les deux valeurs 0 et 1. Les instants auxquels il change de valeurs correspondent à un processus de Poisson de paramètre λ. Calculer $P(X(t) = 1)$ si la valeur initiale du signal est égale à 1.

Exercice 4. (05 points)

Une entreprise compte K machines. Chacune des machines tombe en panne à un taux exponentiel μ. Quand une machine tombe en panne, elle le demeure pendant un temps aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. De plus, les machines sont indépendantes les unes des autres. Soit $X(t)$ le nombre de machines qui fonctionnent à l'instant t. On peut montrer que le processus $\{X(t), t \geq 0\}$ est un processus de naissance et de mort.

1. Déterminer les taux de naissance et de mort du processus $\{X(t), t \geq 0\}$. Donner le graphe des transitions.

2. Déterminer la distribution stationnaire du processus $\{X(t), t \geq 0\}$.

Bon Courage!

Université A. Mira de Bejaia
Faculté des sciences exactes
Département de mathématiques

30/01/2016

Concours de Doctorat LMD
Epreuve : Méthodes de Monte Carlo

__Exercice1__ : (9pts)

Soit X une variable aléatoire ayant pour densité de probabilité f définie par

$$f(x) = \frac{2}{3}[x1[0, 1](x) + 1]1, 2](x)]$$

1. Simuler la variable X en utilisant la méthode d'inversion de la fonction de répartition.
2. Simuler la variable X en utilisant la méthode de décomposition.
3. Simuler la variable X en utilisant la méthode de rejet puisque f est borné sur [0, 2].

Application : Générer un échantillon de X avec chacune des méthodes en utilisant la suite de nombres aléatoires suivante : 0.6-0.3-0.5-0.9-0.2-0.7

4. Soit Y et Z des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme respectivement sur [0, 1] et sur [0, 2]. Quelle est la densité de S = max(Y, Z) ? En déduire un algorithme de simulation de X.

__Exercice 2__ : (8pts)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{k(x^2+y^2)}{2} & si \quad 0 \le x \le 1 \quad et \quad 0 \le y \le x \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

1. Calculer la constante k
2. En utilisant le principe du conditionnement, écrire un algorithme de génération du couple (X, Y)
3. Générer les observations du couple (X, Y) en utilisant la suite de nombre aléatoire suivante : 0.99-0.58-0.35-0.22

Soit une fonction de variable aléatoire Z = X + 4 exp(-Y),

4. Dîtes comment peut-on obtenir la distribution d'échantillonnage de Z pratiquement
5. Calculer deux observations zi en utilisant les résultats précédents.

__Exercice 3__ : (3pts)
En utilisant la méthode de Monte-Carlo à partir de variable aléatoire uniforme sur]-2,2[, estimer l'intégrale de la fonction

$$f(x) = \cos(\pi x)\sqrt{4-x^2}$$

sur]-2,+2[.
Application : Utiliser la suite de nombres aléatoires suivante 0.99-0.58-0.35
(Vérifier les conditions d'utilisation de la méthode de Monte Carlo)

Bon courage