niversitaire :

الفوج

السنة

التاريخ

Date de Naissance :............................ : تاريخ الميلاد

Module :.. : المقياس

العلامة

Observations : ملاحظة

Correction examen stat-Inférentielle LM3 2021/2022

10/10

Exercice N°1

X est une v.a $\sim N(175, 10^2)$

$N = 2000$, $m = \mu_p = 175$, $\sigma_p^2 = 100$

I] 10 échantillons de taille $n = 50$

a] la distribution d'échantillonnage des moyennes

* Le cas d'un tirage exhaustif :

$\mu_{\bar{X}} = \mu_p = 175$ 0,5

$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_p}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{10}{\sqrt{50}} \sqrt{\frac{2000-50}{2000-1}} \simeq 1,40$ 0,5

* Le cas d'un tirage non exhaustif :

$\mu_{\bar{X}} = \mu_p = 175$ 0,5

$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_p}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{50}} \simeq 1,41$ 0,5

On remarque que le cas exhaustif ~~et~~ non exhaustif pratiquement égeaux $\rightarrow \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \simeq 1$. 0,5

$\Rightarrow$ la distribution d'échantillonnage de moyenne est la même pour le tirage avec et sans remise.

b) • le nombre de échantillons si :

0,25

$P(174 < \bar{X} < 176) = P\left(\frac{174-175}{\sqrt{2}} < \frac{\bar{X}-175}{\sqrt{2}} < \frac{176-175}{\sqrt{2}}\right)$ 0,25

On a : les v.a $X_i \sim N(175, 100)$ $\forall i = \overline{1,50}$

$\Rightarrow$ la v.a $\bar{X} \sim N\left(175, \frac{100}{50}\right) = N(175, 2)$

$\Rightarrow \frac{\bar{X}-175}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$

d'où : $P\left(\frac{\bar{X}-175}{\sqrt{2}} < \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - P\left(\frac{\bar{X}-175}{\sqrt{2}} < \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

$= F_{N(0,1)}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - F_{N(0,1)}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ 0,25

$= F_{N(0,1)}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left[1 - F_{N(0,1)}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$ 0,25

$= 2F_{N(0,1)}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1 \simeq 2F_{N(0,1)}(0,71) - 1$

lue sur la table de la loi $N(0,1)$ on trouve

$2 \times 0,7611 - 1 = \boxed{0,522}$ 0,25

donc le nombre d'échantillon $= 10 \times 0,522$
$= 5,22 \sim 5$ échantillons. 0,25

• Le nombre d'échantillons si :

$P(\bar{X} < 174) = P\left(\frac{\bar{X}-175}{\sqrt{2}} < \frac{174-175}{\sqrt{2}}\right)$ 0,25

0,25

-2-

$= F_{N(0,1)}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - F_{N(0,1)}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - F_{N(0,1)}(0,71)$ 0,25

à partir de la table de la loi $N(0,1)$ on trouve.

$1 - 0,7611 \simeq 0,239$ 0,25

Donc le nombre est $10 \times 0,239 = 2,39$ 0,25
$\simeq 2$ échantillons dont la taille des étudiants est inférieure 174

II] $X \sim N(175, \sigma^2)$ Nous avons qu'un seule paramètre σ^2.

$n = 50$ $\quad \bar{x} = 170$, $T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{50}(x_i - \mu)^2 = 90$

Comme la vraie moyenne de la population (de la v.a X) est connue $= 175$ alors l'utilité de $\bar{x}$ n'a pas de sens

a) $IC_{95\%}(\sigma^2) = \left[\frac{nT}{\chi^2_{0,025,(50)}}, \frac{nT}{\chi^2_{0,975,(50)}}\right]$ 0,5

$1 - \alpha = 95\% = 0,9500 \Rightarrow \alpha = 5\% = 0,05$

$\chi^2_{0,975,(50)} = 32,36$ } lues sur la table de la loi de Khi-deux pour

$\chi^2_{0,025,(50)} = 71,42$ } 50 d.d.l (car la moyenne est connue)

$IC_{0,950}(\sigma^2) = \left[\frac{50 \times 90}{32,36}, \frac{50 \times 90}{71,42}\right]$

$= [63,01 \quad , 139,06]$ 0,5

b) $H_0: \sigma^2 = 91$ vs $H_1: \sigma^2 = 95$

Nous avons $H_1: \sigma^2 = 95 \Rightarrow$ le test est simple 0,25
et $\sigma_0^2 = 91$, $\sigma_1^2 = 95$

$\sigma_1^2 > \sigma_0^2$

⟹ la région critique est de la forme

0,25 $]c, +\infty[$

$\xrightarrow[H_0 \text{ vraie} \quad c \quad H_0 \text{ fausse}]{}$

pour $\alpha = 5\%$

$\alpha = P(H_0 \text{ fausse} / H_0 \text{ vraie})$
$= P(T > c / \sigma^2 = 91)$

la statistique de test $\frac{nT}{\sigma^2} \leadsto \chi^2_{(n)}$

$= P\left(\frac{nT}{\sigma_0^2} > \frac{nc}{\sigma_0^2}\right) = P\left(\frac{nT}{91} > \frac{nc}{91}\right)$

$\alpha = 1 - P\left(\frac{nT}{91} < \frac{nc}{91}\right) = 1 - F_{\chi^2_{(n)}}\left(\frac{nc}{91}\right)$

$\Rightarrow F_{\chi^2_{50}}\left(\frac{50c}{91}\right) = 1 - 0,05 = 0,950$ 0,25

$\Rightarrow \frac{50c}{91} =$ le quantile d'ordre 0,950 de la loi de Khi-deux à 50 d.d.l

$\Rightarrow \frac{50c}{91} = \chi^2_{0,05;50} = 34,76$ à partir de la table de la Khi-deux 0,25

$\Rightarrow c = \frac{91 \times 34,76}{50} = \boxed{63,26}$ 0,25

d'où la région critique $=]63,26, +\infty[$ 0,25

On a : $T = 90 \in]63,26, +\infty[$

0,5 $\Rightarrow H_0$ est fausse.
$\Rightarrow \sigma^2 = \sigma_1^2 = 95$ (c.à.d) H_1 qui est vraie

c) la puissance de test $= 1 - \beta(\sigma^2)$ où $\beta(\sigma^2)$ est l'erreur de 2ème espèce

$\beta(\sigma^2) = P(H_1 \text{ fausse} / H_1 \text{ vraie})$

$\xrightarrow[H_1 \text{ fausse} \quad c \quad H_1 \text{ vraie}]{H_0 \text{ vraie} \qquad H_0 \text{ fausse}}$

0,5 $= P(T < c / \sigma^2 = \sigma_1^2)$

$= P\left(\frac{nT}{\sigma_1^2} < \frac{nc}{\sigma_1^2}\right) = F_{\chi^2_{(n)}}\left(\frac{nc}{95}\right)$

بومرداس

Faculté des Sciences كلية العلوم

Groupe : الفوج

Année Universitaire : السنة

Date : التاريخ

Nom : .... : اللقب

Prénom : .... : الإسم

Date de Naissance : .... : تاريخ الميلاد

Module : .... : المقياس

Note : العلامة	Observations : ملاحظة

$\Rightarrow \frac{nc}{95} = \frac{50 \times 63,26}{95} = 33,29$ = le quantile d'ordre $\beta(\sigma^2)$ d'une khi-deux à 50 d.d.l

0,25

$33,29 < 34,75 \Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} 32,36 \longrightarrow 0,975 \\ 34,75 \longrightarrow 0,950 \end{array}\right\} \Rightarrow \beta(\sigma^2) = \frac{0,975 + 0,950}{2}$

$\Rightarrow \beta(\sigma^2) = 0,9625$ 0,25

d'où la puissance de test $1 - \beta(\sigma^2) \simeq 0,04 \simeq 4\%$ 0,5

$\frac{10}{10}$

Exercice N°2 :

X v.a $f_X(x) = 2 e^{-2(x-\theta)} \mathbb{1}_{]\theta, +\infty[}(x)$

n él de la v.a X, $Y = X - \theta$

1] la loi de la v.a Y

0,25 $F_Y(y) = P(Y < y) = P(X - \theta < y) = P(X < y + \theta) = F_X(y+\theta)$ 0,25

$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} = \frac{\partial F_X(y+\theta)}{\partial y} = 1 \times f_X(y+\theta)$ 0,25

$= 1 \times 2 e^{-2(y + \cancel{\theta} - \cancel{\theta})} \mathbb{1}_{]\theta, +\infty[}(y+\theta)$

$\Rightarrow f_Y(y) = 2 e^{-2y} \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(y)$ 0,5

$\Rightarrow Y \rightsquigarrow \mathcal{E}_1(2)$

On sait que la fonction de répartition d'une v.a de loi $\mathcal{E}_1(\lambda) = 1 - e^{-\lambda x}$

donc $F_Y(y) = 1 - e^{-2y}$ et $y = x - \theta \Rightarrow \boxed{x = y + \theta}$

$\Rightarrow \boxed{F_X(x) = 1 - e^{-2(x-\theta)}}$ 0,25

* $Y \rightsquigarrow \mathcal{E}_1(2) \Rightarrow E(Y) = \frac{1}{2}$, $V(Y) = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \boxed{E(X) = E(Y+\theta) = E(Y) + \theta = \frac{1}{2} + \theta}$ 0,25

* $V(X) = V(Y+\theta) = V(Y) = \frac{1}{4}$ 0,25

2) L'estimateur T par la méthode de moments :

0,5 $E(X) = \overline{X} \Rightarrow \frac{1}{2} + \theta = \overline{X} \Rightarrow \boxed{\hat{\theta} = T = \overline{X} - \frac{1}{2}}$ 0,25

$E(\overline{X}) = E(X)$

T E.S.B

$E(T) = E\left(\overline{X} - \frac{1}{2}\right) = E(\overline{X}) - \frac{1}{2} = E(X) - \frac{1}{2} = \cancel{\frac{1}{2}} + \theta - \cancel{\frac{1}{2}}$ 0,25

$\boxed{= \theta}$ 0,25

$\Rightarrow$ T est un E.S.B pour θ 0,25

T estimateur convergent :

0,25 • T est un E.S.B.

• $\lim\limits_{n \to \infty} V(T) = 0$ où $V(T) = V\left(\overline{X} - \frac{1}{2}\right) = V(\overline{X})$ 0,25

0,25 $= \frac{V(X)}{n} = \frac{1}{4n}$, $\boxed{\lim\limits_{n \to \infty} V(T) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{4n} = 0}$ 0,25

finalement T est un Estimateur Convergent de θ.

0,25

3) $Z = \min(X_1, X_n)$

Z est un E.B pour $\theta \iff E(Z) \neq \theta$ 0,28

$E(Z) = ??$ la loi de la v.a Z n'est pas connue

$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(\min_{i=1}^{n} X_i \leq z) = 1 - P(\min_{i=1}^{n} X_i > z)$ 0,28

0,28 $= 1 - P(\bigcap_{i=1}^{n} X_i > z) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i > z)$ car les X_i sont ⫫ 0,28

$= 1 - (P(X > z))^n$ car les X_i sont de même loi que la v.a X. 0,28 0,28

$= 1 - (1 - P(X \leq z))^n = 1 - (1 - F_X(z))^n$ 0,28

$\Rightarrow f_Z(z) = \frac{\partial F_Z(z)}{\partial z} = \frac{\partial [1 - (1 - F_X(z))^n]}{\partial z} = n(1 - F_X(z))^{n-1} f_X(z)$ 0,28

$= n(\cancel{1} - (\cancel{1} - e^{-\ell(z-\theta)}))^{n-1} \ell e^{-\ell(z-\theta)} \mathbb{1}_{[\theta, +\infty[}(z)$

$\Rightarrow f_Z(z) = \ell n e^{-\ell(n-1)(z-\theta)} e^{-\ell(z-\theta)} \mathbb{1}_{[\theta, +\infty[}(z)$

$\Rightarrow \boxed{f_Z(z) = \ell n e^{-\ell n (z-\theta)} \mathbb{1}_{[\theta, +\infty[}(z)}$ 0,8

$E(Z) = \int_\theta^{+\infty} z f_Z(z)\, dz = \int_\theta^{+\infty} z \ell n e^{-\ell n (z-\theta)}\, dz$

$u = z \quad u' = 1$
$v = \frac{e^{-\ell n z}}{-\ell n} \quad v' = e^{-\ell n z}$

$= \ell n e^{\ell n \theta} \int_\theta^{+\infty} z e^{-\ell n z}\, dz$ Integration par partie

Ou bien : Nous avons $Z - \theta \sim \mathcal{E}(\ell n)$

donc $E(Z - \theta) = \frac{1}{\ell n} \Rightarrow E(Z) = \frac{1}{\ell n} + \theta$ 0,5

comme $E(Z) \neq \theta \Rightarrow Z = \min_{i=1}^{n} X_i$ est un E.B pour θ

b) mais $\boxed{T_1 = Z - \frac{1}{\ell n}}$ est un E.S.B pour θ 0,8

- T_1 est un estimateur convergent pour θ

(0,25) - T_1 est un E.S.B pour θ.

$\lim_{n \to +\infty} V(T_1)$ ... où $\boxed{V(T_1) = V\left(Z - \frac{1}{2n}\right) = V(Z)}$ (0,25)

$V(Z - \theta) = \frac{1}{(2n)^2} \Rightarrow V(Z) = \frac{1}{4n^2}$

$\lim_{n \to +\infty} V(T_1) = \lim_{n \to +\infty} V(Z) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{4n^2} = 0$ (0,25) (0,25)

donc T_1 est un estimateur convergent de θ (0,25)

4) - la comparaison entre l'estimateur T et T_1

$V(T) = \frac{1}{4n}$ $V(T_1) = \frac{1}{4n^2}$

$\frac{V(T)}{V(T_1)} = \frac{1}{\cancel{4n}} \times \frac{\cancel{4}n^2}{1} = n \geq 1$ car n est la taille de l'échantillon (0,5)

$\Rightarrow V(T) > V(T_1)$ (0,5)

$\Rightarrow T_1 = Z - \frac{1}{2n} = \min_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{2n}$ est le meilleur estimateur de θ. (0,25)