الجـمهوريــة الجزائريــة الديـمقراطيـة الشـعبيـة

وزارة التـعليم العــالي و البـحـث العـلـمي

جامعة محمد الصديق بن يحيي- جيجل

كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي

قسـم الريـاضيـات

مدخل إلى الإحتمالات و الإحصاءالوصفي

إعـداد الدكتـورة: جـريـدي زهــرة

السنة أولى جذع مشترك رياضيات و إعلام آلي

جـوان 2020

الفهرس

الفصل الثالث

التحليل التوفيقي

الفصل الرابع

حساب الاحتمالات

مـقـدمـــة

هذه المطبوعة مخصصة لطلبة جذع مشترك رياضيات و إعلام آلي، و إلى كل من يريد الإلمام بالمبادئ الأولية في الإحصاء الوصفي و الاحتمالات من مختلف المستويات و الأطوار في التعليم الجامعي. و قد تم إعداد هذه المطبوعة وفق البرنامج الوزاري.

تطرقت في الفصل الأول إلى المصطلحات الأساسية المستخدمة في علم الإحصاء الوصفي، ثم توضيح طرق عرض التوزيعات التكرارية بتنظيم البيانات جدوليا وبيانيا. بينما ننتقل إلى قراءة معمقة في هذه البيانات في الفصل الثاني؛ من خلال حساب مؤشرات خاصة بالنزعة المركزية و التشتت، مع أمثلة وتمارين توضيحية، مركزة على تطوير "الحس النقدي" الضروري في قراءة النتائج خلال الدراسة الإحصائية. وقبل الانتقال إلى التعريف بعلم الاحتمالات كان لابد من التطرق إلى المبادئ الأساسية في التحليل التوفيقي؛ لما لها من أهمية في حساب القيم الاحتمالية عند اعتماد المدخل الرياضي. في الفصل الأخير، و الذي هو مدخل إلى حساب الاحتمالات، نوضح ماهية علم الاحتمال ومبادئه و مصطلحاته الأساسية مع تعريف الاحتمال الشرطي و استقلال الأحداث.

لتوضيح النقاط الأساسية لهذا المقرر راعيت السهولة و البساطة في عرض المواضيع باعتماد التسلسل المنهجي، انطلاقا من التجربة البيداغوجية المكتسبة من خلال عملي بالجامعة؛ كمطبق ثم مكلف بالدروس و أخيرا محاضرا. فعملت على إيجاز المواضيع دون الإخلال بلبها و محاولة نفع سائر الاختصاصات و المستويات.

قبل التطرق في هذا الموضوع، فكرت في إعطاء لمحة قصيرة عن مفهوم الإحصاء عبر التاريخ.

❖ لمحة مختصرة عن مفهوم الإحصاء عبر التاريخ

يؤكد بعض العلماء و كثير من مؤرخي علم الرياضيات أن مصطلح الإحصاء قد ظهر منذ ألفي سنة قبل الميلاد لدى المصريين، و ذلك عند قيامهم بإحصاء السكان و الشعوب في ذلك الوقت. و حينما بدأ الصينيون بدراسة الأرقام الخاصة بمنتو جهم الزراعي.

استخدم أيضا علم الإحصاء في العصور الوسطى لاهتمام الدول بتعداد أفراد المجتمع حتى تتمكن كل دولة من تكوين جيش قوي للدفاع عن حدودها أو مهاجمة دولة طمعا في التوسع و الثروة. وكذلك اهتمت الدول بحصر ثروات الأفراد حتى تتمكن من فرض الضرائب و تجميع الأموال اللازمة لتمويل الجيش و إدارة شؤون البلاد. فتطور مفهوم الإحصاء إلى كتابة وتسجيل المعلومات في دفاتر؛ فمثلا في سنة 1086 أصدر Guillaume le conquérant أول إحصاء شامل وذلك بكتابة و حساب عدد الأراضي البريطانية وسجلت تحت عنوان "Domesday book". ثم توسعت عمليات التعداد والحصر لتشمل بيانات عن المواليد والوفيات و الإنتاج والاستهلاك. وبذلك نشأت الحاجة إلى تنظيم هذه البيانات و تلخيصها و وضعها في جداول أو رسم بياني أو تصويري حتى يسهل الرجوع إليها و الاستفادة منها بأسرع وقت ممكن. قد أطلق على هذه الطرق " علم الدولة" أو "علم الملوك" ثم "علم الإحصاء".

كلمة « statistics » مشتقة من كلمة « Status » و تعني الدولة باللغة اللاتينية أو كلمة « statista » بالإيطالية و تعني الدولة أيضا. وقد تعددت استخدامات التحليل الإحصائي لاسيما بعد تطور علم الاحتمالات في القرنين السابع عشر و الثامن عشر الميلاديين بفضل جهود العلماء: باسكال (Pascal)، برنولي (Bernoulli)، دي موافر (De Moivre)، لابلاس (Laplace) و جوس (Gauss).

ظل الاعتقاد في ذلك الوقت أن علم الإحصاء هو العلم الذي يختص بالطرق العلمية لجمع وتنظيم و عرض البيانات، إما في صورة بيانية أو جدولية. حتى إن بعض الأشخاص قليلي الإطلاع و محدودي التعليم في الوقت الحاضر يعتقدون أن الإحصاء ما هو إلا هذه الطرق. إلا أنه بعد التطور أصبحت الحاجة ملحة إلى تحليل البيانات التي جمعت كالتنبؤ بعدد السكان بعد فترة زمنية بناءا على التعدادات الموجودة، أو التنبؤ بالإنتاج والاستهلاك، أو طرق أخذ العينات و تصميم التجارب. وقد ساعد على ذلك تطور علم الاحتمالات الذي كان له دور كبير في تحليل البيانات واتخاذ القرارات المناسبة بناءا على هذا التحليل.

الفصل الأول: تحليل السلاسل الإحصائية

Analyse des séries statistiques

❖ مقدمة للتعريف بعلم الإحصاء

هو علمٌ يقوم بِجمع البيانات ومن ثمّ تَلخيصها وتمثيلها؛ للتوصل إلى الاستنتاجات وإيجادها، وذلك من خلال توّفر كمٍّ كبيرٍ من البيانات، ويُمكن تصنيف الإحصاء كأحدِ فروعِ علمِ الرّياضيات، ويتّخذُ أهميةً تطبيقيةً بالغة، ويدخل في مجالاتِ العلومِ المُختلفة، والفيزياء، والعلوم الاجتماعية، والسياسة، والأعمال.

يُمكنُ وصفُ الإحصاء بأنَّه علمٌ من علوم الرّياضيات، ويسعى إلى استقطاب المعلومات وجمعها؛ ليُصار إلى وصفها، وتفسيرها، وتحريرها.

❖ أنواع الإحصاء

- **الإحصاء الوصفي :(Statistique Descriptive)** ويتمُّ الاعتماد على هذا النّوع لِوصفِ مجموعةٍ من البيانات على شكلِ عينة، وذلك عن طريق حساب قيمٍ خاصة، كالمتوسط، والوسيط، والانحراف المعياري، وإيجاد هذه المَعلومات والتوصل إليها يُتيح استيعاب بيئةِ العينة التي تمَّ إجراء الدّراسة عليها .
- **الإحصاء الاستدلالي :(Statistique Inférentielle)** يُحفّز هذا النّوع من الإحصاء ، الباحث للوصول إلى المعلومات الإحصائية، وذلك عن طريق الاستدلال، والاستفسار عن خصائصَ العَينة، حيث يهدف إلى الوصول إلى تعميمات عن مجتمع الدراسة من خلال العينة المسحوبة من هذا المجتمع. و يشمل هذا النوع من الأساليب الإحصائية: الاحتمالات، توزيع المعاينة، مجالات الثقة، اختبار الفرضيات.

I – مفاهيم ومصطلحات إحصائية

- **المجتمع الإحصائي (Population)**: مجموع الوحدات أو الأفراد محل البحث. ونميز نوعين من المجتمع الإحصائي:

1- المجتمع الإحصائي المحدود. (عدد طلاب في فوج ،...)

2- المجتمع الإحصائي الغير محدود. (عدد النجوم في سماء صافية، عدد طلا ب الجامعة في 10 سنوات ماضية،...)

- **الوحدة الإحصائية (unité statistique)**: كل فرد أو كل عنصر من المجتمع الإحصائي. نرمز لها عادة ب ω .
- **العينة الإحصائية (Echantillon)**: كل مجموعة جزئية من المجتمع الإحصائي تمثله أحسن تمثيل ويمكن أن تحتوي على عدد صغير أو كبير من أفراد المجتمع الإحصائي.
- **الصفة الإحصائية أو الطبع الإحصائي (Caractère statistique)**: هي الخاصية أو الصفة المدروسة على الوحدات الإحصائية ويشترط أن تتوفر هاته الصفة في جميع أفراد المجتمع الإحصائي.

وتنقسم إلى نوعين:

1 **- الصفة الإحصائية الكيفية (Qualitatif)**: وهي صفة لا يمكن قياسها (اللون، الجنسية،...). ونميز فيها نوعين كيفية اسمية (qualitative nominale) مثل اللون و كيفية مرتبة (qualitative ordinale) مثل المستوى الدراسي.

2- **الصفة الإحصائية الكمية (Quantitatif)**:يمكن قياسها (الوزن، القامة،...)

- **الوضع الإحصائي modalité** : تحتل كل وحدة إحصائية موقعا خاصا بين المجتمع الإحصائي نسبة إلى الصفة نحو الدراسة و يوجد من أجل كل صفة عدة مواقع يتوزع عليها أفراد المجتمع الإحصائي تسمى المواقع التي يمكن أن يأخذها أي فرد في الصفة الإحصائية بالأوضاع .

مثال01:

نقوم بدراسة إحصائية لتحديد القامة المتوسطة للفرد الجزائري

المجتمع الإحصائي: ممثل في المجتمع الجزائري

الوحدة الإحصائية: الفرد الجزائري

العينة الإحصائية: بعض أفراد المجتمع الجزائري

الطبع أو الصفة الإحصائية: القامة

نوع الصفة: كمية

مثال02:

نقوم بدراسة على طلاب السنة الأولى جامعي فنهتم فيها بالمستوى العلمي لكل طالب فيكون

المجتمع الإحصائي: طلبة سنة الأولى جامعي- الوحدة الإحصائية: طالب بالسنة أولى جامعي

الطبع الإحصائي: المستوى العلمي

نوع الطبع الإحصائي: كيفي مرتب

أوضاع الطبع الإحصائي: ضعيف – وسط – حسن – جيد – ممتاز

مثال03:

قمنا بأحد عينة مكونة من 20 أسرة و أحصينا عدد الأبناء في كل أسرة و تحصلنا على النتائج التالية

5	4	2	3	7	5	1	3	1	0
5	7	6	4	2	5	2	9	7	1

المجتمع الإحصائي: هي مجموع ال20 أسرة

الوحدة الإحصائية: الأسرة الواحدة

الطبع الإحصائي: عدد الأبناء

نوع الطبع الإحصائي: كمي

أوضاع الطبع الإحصائي: 0-1-2-3-4-5-6-7-9

ملاحظات عامة

1- قبل كل دراسة إحصائية يجب تحديد أولا المجتمع الإحصائي بكل دقة و ذلك بضبط نوعه و عدد أفراده إن أمكن.

2- يجب أن نوضح بدقة الصفة المدروسة لنؤكد انتماء كل فرد من المجتمع الإحصائي .

3- كل فرد من المجتمع الإحصائي ينتمي إلى وضع واحد فقط من الأوضاع المدروسة أي أن مجموع كل الأفراد في كل الأوضاع يعطينا عدد أفراد المجتمع.

II- السلاسل الإحصائية ذات متغير واحد

نهتم أولا بدراسة إحصائية لصفة إحصائية واحدة و ذلك بوصفها باستعمال جدول إحصائي و تمثيلها بيانيا ثم بتلخيصها بأحد مقاييس النزعة المركزية و أخيرا رؤية تشتت و تجانس أوضاعها باستعمال مقاييس التشتت.

2-1- المتغير الإحصائي

تعريف: الصفة المعنية بالدراسة تسمى متغيرا إحصائيا (لأنه يأخذ عدة قيم) يمكن تعريف المتغير الإحصائي رياضيا كما يلي:

إذا رمزنا للمجتمع الإحصائي Ω وللطبع الإحصائي X فإن X هو التطبيق

$$X: \begin{array}{c} \Omega \to \mathbb{R} \\ \omega \mapsto X(\omega) \end{array}$$

حيث $X(\omega)$ يمثل أوضاع الصفة الإحصائية من أجل $\omega \in \Omega$ و تسمى هذه الأوضاع قيم المتغير الإحصائي و التي نرمز لها $x_1, x_2, x_3, \ldots.$

ملاحظة :

- في حالة المتغير الإحصائي الكمي فإن $X(\omega)$ فهو عبارة عن عدد حقيقي.
- أما في حالة متغير إحصائي كيفي فإن $X(\omega)$ هو أحد أوضاع الصفة الإحصائية و التي يمكن أن يمثلها رمزا أعداد على أساسها يمكن أن نعرف المتغير الإحصائي X .
- يرمز عادة للمتغيرات الإحصائية بالرمز $X, Y, Z, \ldots$ بينما يرمز لقيم أوضاع المتغيرات الإحصائية ب $x_1, x_2, x_3, \ldots$ أو $y_1, y_2, y_3, \ldots$

مثال 04 :

في المثال الذي يدرس المستوي أولى جامعي، Ω هي مجموعة طلاب سنة أولى جامعي حيث نرمز لكل طالب بω أي $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$ نعرف المتغير الإحصائي X كما يلي :

1 يرمز للوضع ممتاز 2 يرمز للوضع جيد 3 يرمز للوضع حسن

4 يرمز للوضع ضعيف 5 يرمز للوضع وسط

فنجد مثلا الطالب الأول ω_1 مستواه وسط فإن $X(\omega_1) = 5$

الطالب الثاني ω_2 مستواه ممتاز فإن $X(\omega_2) = 1$

الطالب الثالث ω_3 مستواه جيد فإن $X(\omega_3) = 2$

أي أن قيم المتغير الإحصائي x: 1،2،3،4،5

مثال05 : في المثال الذي يدرس عدد أبناء 20 أسرة، لدينا Ω هي 20 أسرة كل أسرة نرمز لها ω أي $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \quad \dots, \omega_{20}\}$ ، X يمثل عدد الأبناء

$X(\omega_1)= 0, X(\omega_2)=1, X(\omega_3)= 3,\dots, X(\omega_{20})= 5$

أي أن قيم المتغير الإحصائي $x \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,9\}$

المتغير الإحصائي قسمان: المتقطع والمستمر.

- **تعريف المتغير الإحصائي المتقطع:**

نسمي متغيرا إحصائيا متقطع كل متغير إحصائي يأخذ قيم معزولة، مثال: عدد الأبناء – العمر بالسنوات...

- **تعريف المتغير الإحصائي المستمر:**

نقول عن متغير إحصائي أنه مستمر إذا كان يأخذ قيمه على مجال منته أو غير منته من $\mathbb{R}$ ، قيم المتغير الإحصائي المستمر تعطي غالبا محصورة في مجالات تدعى بالفئات و التي يمكن أن تأخذ الشكل $[\mathrm{e_i}, \mathrm{e_{i+1}}[$ حيث $i = 1, \dots k$ و k هو عدد الفئات .

- **تعريف السلسلة الإحصائية**

نسمي سلسلة إحصائية مجموعة كل القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير الإحصائي X .

تنبيه: في حالة المتغير الإحصائي المتقطع يجب ترتيب قيم السلسلة الإحصائية قبل البدء بأي دراسة (نرتبها يا تصاعديا أو تنازليا)

2-2- وصف سلسلة إحصائية لمتغير إحصائي كمي متقطع:

ليكن X متغير إحصائي متقطع معرف على المجتمع الإحصائي Ω حيث $\mathrm{card}\Omega = \mathrm{N}$ ولتكن $x_1, x_2 \dots, x_k$ قيم المتغير الإحصائي X .

2-2-1- التكرار (التواتر المطلق) Fréquence absolue:

عندما يتوزع أفراد المجتمع الإحصائي على أوضاع مختلفة للطبع الإحصائي فإن كل وضع يضم عددا من أفراد المجتمع. يسمى هذا العدد التكرار ونرمز له ب n_i للوضع ذو الرتبة i أي أن n_i هو عدد مرات تكرار القيمة x_i للمتغير X.

وبما أن كل فرد لا يأخذ إلا وصفا واحدا فإن مجموعة التكرارات المطلقة يكون مساوية للعدد الإجمالي N لأفراد المجتمع $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = \sum_{i=1}^{k} n_i = N$

حيث k عدد قيم المتغير الإحصائي X .

2-2-2- التواتر النسبي Fréquence relative:

التواتر النسبي الخاص للقيمة x_i للمتغير الإحصائي X والذي نرمز له بالرمز f_i هو

$$f_i = \frac{n_i}{N} \quad , \forall i = \overline{1,k}$$

فإن كانت لدينا عدد قيم المتغير X فإن $f_1 + f_2 + \cdots + f_k = \sum_{i=1}^{k} f_i = 1$

وذلك لأن:..............

مثال 06: نأخذ مثال أبناء 20 أسرة

Ω : هو مجموعة الـ 20 أسرة. X : عدد الأبناء. نوعه: كمي متقطع.

- نسمي الجدول الذي نضع فيه قيم المتغير الإحصائي بالإضافة إلى تكراراتها المطلقة و تكراراتها النسبية ونسبها المئوية ***جدولا إحصائيا.***

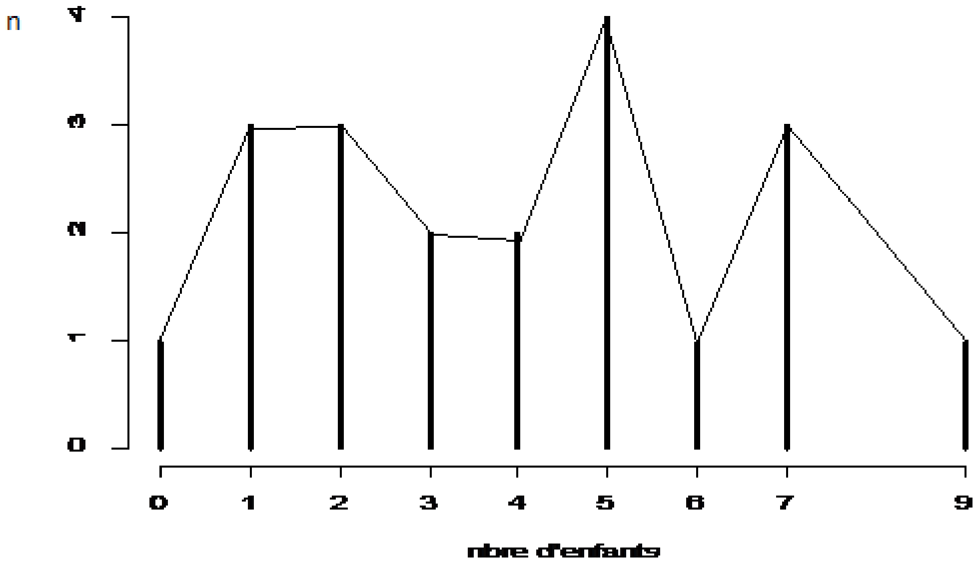
x_i	n_i	f_i	$p_i(\%)$
0	1	0.05	5
1	3	0.15	15
2	3	0.15	15
3	2	0.10	10
4	2	0.10	10
5	4	0.20	20
6	1	0.05	5
7	3	0.15	15
9	1	0.05	5
$\sum$	20	1	100%

2-2-3- التمثيل البياني لمتغير إحصائي متقطع

نلاحظ عموما أن استنباط المعلومات بالنظر إلى تمثيل بياني أيسر منه بقراءة جدول إحصائي، لذلك إذا كان متغير إحصائي كمي متقطع فإنه يمكن تمثيله بيانيا بواسطة مخطط الأعمدة (Diagramme en Bâtons).

تعريف: للحصول على مخطط الأعمدة نضع قيم المتغير الإحصائي $(x_i)_{i=\overline{1,k}}$ على محور الفواصل وعلى محور التراتيب نضع التكرارات المطلقة $(n_i)_{i=\overline{1,k}}$ فنتحصل على مخطط بالأعمدة للتكرارات المطلقة. أو نضع التواترات النسبية $(f_i)_{i=\overline{1,k}}$ فنتحصل على مخطط بالأعمدة للتواترات النسبية لـ X .

مثال: توزيع 20 أسرة حسب عدد الأبناء



الشكل 1: مخطط بالأعمدة للتكرارات المطلقة لتوزيع عدد أبناء 20 أسرة.

تعريف المضلع التكراري Polygone des effectifs:

يمكننا الحصول على مضلع تكراري بربط قمم الأعمدة ببعضها البعض بقطع مستقيمة.

2-2-4- المنحنيات التكرارية Courbes des effectifs

يريد الإحصائي في بعض الأحيان (خاصة إذا كانت لديه سلسلة إحصائية) معرفة ماهو عدد قيم المتغير X الواقعة دون قيمة معينة ل X أو ماهو عدد القيم الأكبر من قيمة معينة أو ماهي النسبة المئوية للقيم الواقعة بين قيمتين معينتين؟

للإجابة على هذا السؤال نستخدم التوزيع المتجمع الصاعد والنازل .

تعريف1: التكرار المتجمع الصاعد (Effectif cumulé croissant) $N_i^{\nearrow}$ الموافق للقيمة x_i للقيم X هو عدد الأفراد الذين تكون لديهم قيمة المتغير X أصغر من x_i أو مساوية لها.

تعريف2: التواتر النسبي المتجمع الصاعد $F_i^{\nearrow}$ (Fréquence relative cumulée croissante)
الموافق للقيمة x_i للقيم X هو نسبة الأفراد الذين تكون لديهم قيمة المتغير X أصغر من x_i أو مساوية لها.

ملاحظات

1- في حالة طرح التكرارات (التواترات النسبية) نتحصل على التكرارات المتجمعة النازلة (التواترات المتجمعة النازلة.

2- يستحسن كتابة قيم التكرارات المتجمعة وكذلك التواترات المتجمعة بعمودين إضافيين في الجدول الإحصائي .

- **المنحنى البياني التراكمي (المتجمع التراكمي)**

يتطلب رسم المنحنى البياني التراكمي تعريف دالة تسمى بالدالة التراكمية (Fonction cumulative) F

حيث $$F: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to [0,1] \\ x \mapsto F(x) \end{array}$$

بحيث $$F(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ F_i^{\nearrow} & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 1 & x \geq x_n \end{cases}.$$

يسمى المنحنى البياني للدالة F بالمنحنى التراكمي ففي حالة المتغير الإحصائي الكمي المتقطع يكون هذا المنحنى على هيئة درج أو سلم كما في المثال التالي

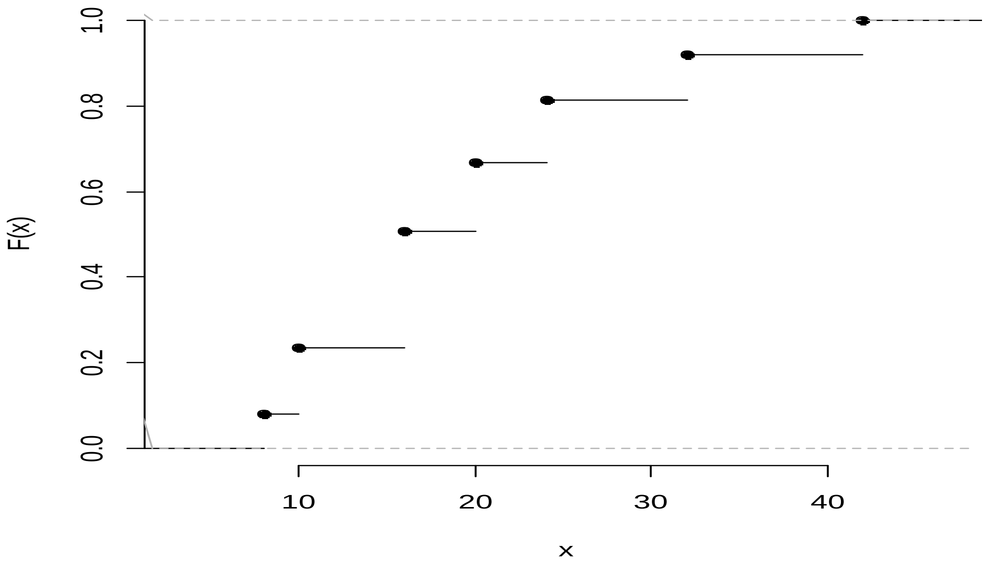
مثال 06: لدراسة كمية منتوج الثمار لأحد أنواع الفاكهة، انتقينا 150 شجيرة ثم حسبنا عدد الثمار التي تحملها كل شجيرة فتحصلنا على الجدول التالي

عدد الثمارx_i	عدد الشجيراتn_i	f_i	$N_i^{\nearrow}$	$F_i^{\nearrow}$	$N_i^{\searrow}$	$F_i^{\searrow}$
8	12	0.08	12	0.080	150	1
10	23	0.153	35	0.233	138	0.920
16	41	0.273	76	0.506	115	0.767
20	24	0.160	100	0.666	74	0.493
24	22	0.147	122	0.813	50	0.333
32	16	0.107	138	0.920	28	0.187
42	12	0.080	150	1	12	0.080
$\sum$	150	1				

وبالتالي الدالة التراكمية تكون كالتالي:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & : x<8 \\ 0.08 & : 8\leq x<10 \\ 0.233 & : 10\leq x<16 \\ 0.506 & : 16\leq x<20 \\ 0.666 & : 20\leq x<24 \\ 0.813 & : 24\leq x<32 \\ 0.92 & : 32\leq x<42 \\ 1 & : x\geq 42 \end{cases}$$

تمثيلها البياني هو دالة سلمية (Fonction en escaliers) كالتالي:



الشكل 2: الدالة التراكمية لتوزيع عدد الثمار في الأشجار.

ملاحظات:

1/ الدالة F هي دالة موجبة $\forall x\in\mathbb{R},\ \ F(x)\geq 0$.

2/ الدالة F متزايدة .

3/ $\lim_{x\to+\infty}F(x)=1$ ، $\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$.

2-3- وصف سلسلة إحصائية لمتغير إحصائي كمي مستمر

تعطي قيم المتغير الإحصائي المستمر X على شكل فئات أو مجالات من الشكل $([e_{\mathrm{i}},e_{\mathrm{i}+1}[)_{\mathrm{i}=\overline{1,k}}$.

- **التكرار المطلق n_i للفئة** $[e_{\mathrm{i}},e_{\mathrm{i}+1}[$: هو عدد الوحدات الإحصائية لقيم المتغير الإحصائي X التي تنحصر داخل المجال $[e_{\mathrm{i}},e_{\mathrm{i}+1}[$، $\mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{k}}$ بحيث $\sum_{i=1}^{k}n_i=N$.

- **التكرار النسبي f_i للفئة** $[e_{\mathrm{i}}, e_{\mathrm{i+1}}[$: هو نسبة الوحدات الإحصائية لقيم المتغير الإحصائي X التي تنحصر داخل المجال $[e_{\mathrm{i}}, e_{\mathrm{i+1}}[$، $\mathrm{i} = \overline{1,\mathrm{k}}$ بحيث $\sum_{i=1}^{k} f_i = 1$.
- **مركز الفئة (Le centre)**: مركز الفئة $[e_{\mathrm{i}}, e_{\mathrm{i+1}}[$ يرمز له C_i حيث $c_i = \frac{e_{\mathrm{i}}+e_{\mathrm{i+1}}}{2}$، $\mathrm{i} = \overline{1,\mathrm{k}}$.
- **سعة الفئة (Amplitude)**: يرمز له ب a_i حيث $a_i = e_{\mathrm{i+1}} - e_{\mathrm{i}}$، $\mathrm{i} = \overline{1,\mathrm{k}}$.

مثال 07:

الجدول المقابل يمثل نتائج دراسة إحصائية حول أوزان 100 طالب .

الفئات $[e_{\mathrm{i}}, e_{\mathrm{i+1}}[$	عددالطلبة n_i	f_i	a_i	c_i	$N_i^{\nearrow}$	$F_i^{\nearrow}$
[60,63[	5	0.05	3	61.5	5	0.05
[63,66[	18	0.18	3	64.5	23	0.23
[66,69[	42	0.42	3	67.5	65	0.65
[69,72[	27	0.27	3	70.5	92	0.92
[72,75[	8	0.08	3	73.5	100	1
المجموع	100	1				

2-3-1- التمثيل البياني لمتغير إحصائي مستمر

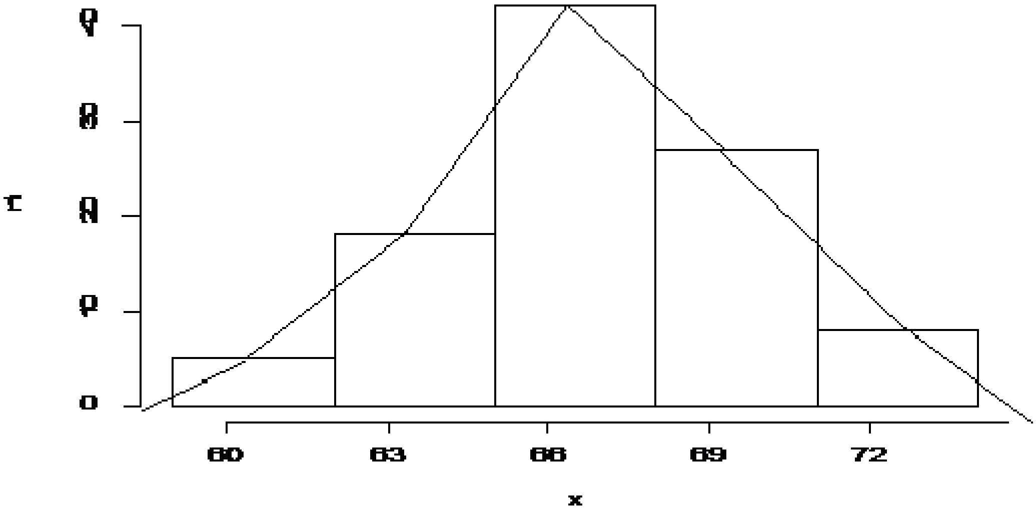
نستطيع تمثيل معطيات متغير إحصائي مستمر باستعمال المدرج التكراري (Histogramme) و ذلك في معلم متعامد حيث نختار على محور الفواصل قيم X أو فئات X (حدود الفئات) و على محور التراتيب نضع إما $\frac{n_i}{a_i}$ أو $\frac{f_i}{a_i}$؛ $i = \overline{1,k}$ ثم ننشأ مستطيلات طولها ($\frac{n_i}{a_i}$ أو $\frac{f_i}{a_i}$)و عرضها a_i.

ملاحظة 01: إذا أردنا الحصول على مضلع تكراري يكفي أن نصل بين مراكز الفئات بقطع مستقيمة.

ملاحظة 02: في حالة الفئات التي لها نفس الطول يكفي أن نختار على محور التراتيب إما n_i أو f_i من أجل $i = \overline{1,k}$.

مثال 08: التمثيل البياني لتوزيع 100 طالب حسب أوزانهم

نلاحظ أن السعات متساوية وبالتالي يمكن استخدام n_i أو f_i لرسم المدرج التكراري.



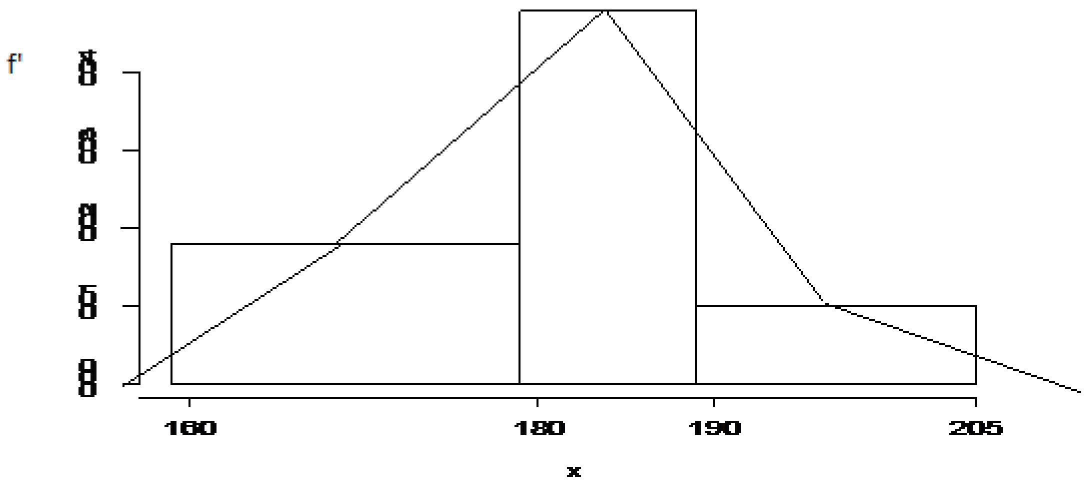
الشكل 3 : المدرج التكراري لتوزيع 100 طالب حسب أوزانهم.

مثال 09:

توزيع الأجور في مؤسسة ما يعطى بالشكل الآتي ($\times 10^3$ D):

الفئات	c_i	n_i	a_i	n'_i
$[160; 180[$	170	36	20	1.8
$[180; 190[$	185	48	10	4.8
$[190; 205[$	197.5	16	15	1.07

نلاحظ أن الفئات مختلفة السعات فنستخدم التكرار المعدل $n'_i = \frac{n_i}{a_i}$ أو $f'_i = \frac{f_i}{a_i}$ لرسم المدرج التكراري



الشكل 4 : مدرج تكراري لتوزيع أجور عمال في مؤسسة ما.

ملاحظة: في الكثير من الحالات يكون عدد البيانات N كبير جدا بحيث يصعب استخدام متغير إحصائي متقطع وبالتالي يتعين علينا جمعها في فئات، بحيث لا يجب أن يكون عدد الفئات صغير جدا (ضياع للمعلومات) ولا كبير جدا (وبالتالي التجميع في فئات بدون فائدة). لإيجاد العدد المناسب للفئات يمكن استخدام

- علاقة Sturges: $k = \left[1 + \frac{10}{3} log_{10} N\right]$؛
- علاقة يول Yule: $k = 2.5\sqrt[4]{N}$.

2-3-2- المنحنيات المتجمعة Courbes cumulatives

تبقى تعاريف التكرارات و التوترات النسبية المتجمعة الصاعدة أو النازلة هي نفسها سواءا في حالة المتغير الإحصائي المتقطع أو المستمر إذن التكرار المتجمع الصاعد للفئة $[e_{\mathrm{i}}, e_{\mathrm{i}+1}[$ هو عدد الأفراد الذين تكون لديهم قيمة المتغير X أصغر من $e_{\mathrm{i}+1}$ أو تساويها $i = \overline{1, k}$.

أما التواتر النسبي المتجمع الصاعد للفئة $[e_{\mathrm{i}}, e_{\mathrm{i}+1}[$ هو نفس الأفراد الذين تكون لديهم قيم المتغير X أصغر من $e_{\mathrm{i}+1}$ أو تساويها.

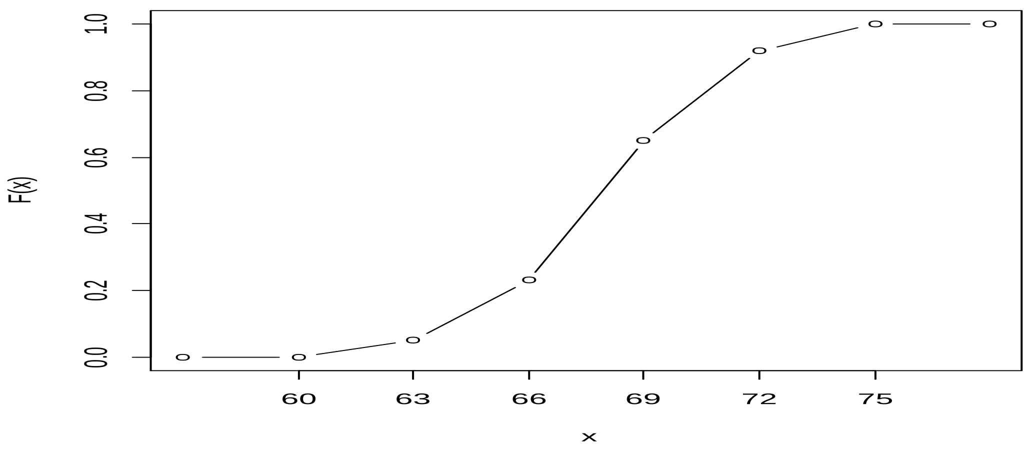
المخطط التراكمي

سبق لنا أن عرفنا المنحنى التراكمي في حالة المتغير الإحصائي الكمي المتقطع بأنه المنحنى البياني للدالة التراكمية F ، والذي يأخذ شكلا سلميا. و سبب تزايد هذا المنحنى بقفزات ناتج عن عدم حدوث أي تراكم بين قيمتين متتاليتين في المتغير الإحصائي، لأن كل تراكم مضاف لا يحدث إلا بتجاوز قيمة للمتغير. أما في حالة المتغير الإحصائي المستمر فنجد أنه يحدث تراكم بين قيمتي المتغير، التي تمثل حدا الفئة، و بفرض أن الأفراد أو الوحدات الإحصائية يتوزعون توزيعا منتظما داخل كل فئة، ما يعني أن التراكم أو التزايد يكون ثابتا بين حدي الفئة، أي أن التزايد يكون وفق خط مستقيم. و بذلك يكون المنحنى التراكمي لحالة المتغير الإحصائي المستمر على شكل خط منكسر تشكله قطع مستقيمة تربط بين نقاط إحداثياتها هي حدود الفئات كفواصل و التواترات النسبية المتجمعة الموافقة. الدالة التراكمية هي الدالة $F: \begin{matrix} \mathbb{R} \to [0,1] \\ x \mapsto F(x) \end{matrix}$

بحيث
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < e_1 \\ F_{i-1}^{\nearrow} + \frac{f_i}{e_{\mathrm{i}+1} - e_{\mathrm{i}}}(x - e_{\mathrm{i}}) & e_{\mathrm{i}} \leq x \leq e_{\mathrm{i}+1} \\ 1 & x \geq e_{\mathrm{k}} \end{cases}.$$

مثال 10:

توزيع 100 طالب حسب أوزانهم.



الشكل 5: منحنى تراكمي لتوزيع أوزان 100 طالب.

4-2 - وصف سلسلة إحصائية لمتغير إحصائي كيفي

يمكن وصف متغير إحصائي X كيفي بنفس الطريقة التي نص بها المتغير الإحصائي الكمي، كما يمكن تمثيل الجدول الإحصائي بيانيا باستعمال أنابيب أرغن أو دائرة النسب المئوية.

مثال 11:

نهتم بالمتغير الإحصائي "الحالة المدنية" لـ 20 شخصن والذي نرمز له بـ X. بحيث يكون الترميز كالتالي: C: أعزب ، M: متزوج (ة)، V: أرمل (ة) ، مطلق (ة).

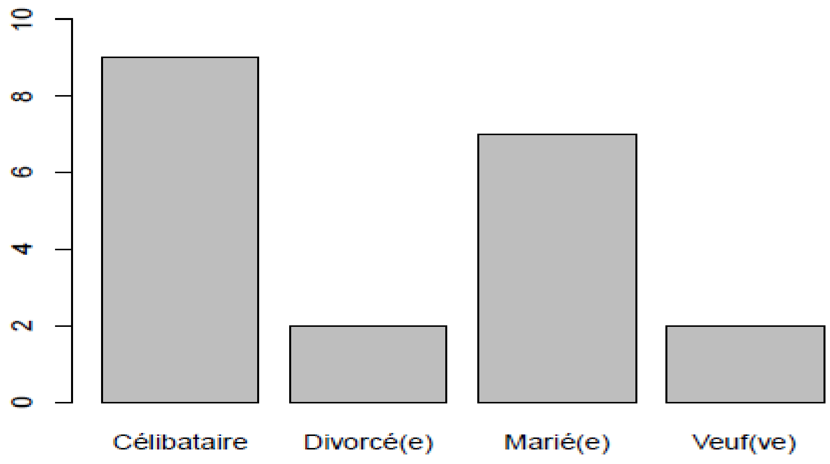
لتكن السلسلة الإحصائية كالتالي:

$$M\,M\,D\,C\,C\,M\,C\,C\,C\,M\quad C\,M\,V\,M\,V\,D\,C\,C\,C\,M$$

لترتيب المعطيات نتحصل على الجدول الإحصائي:

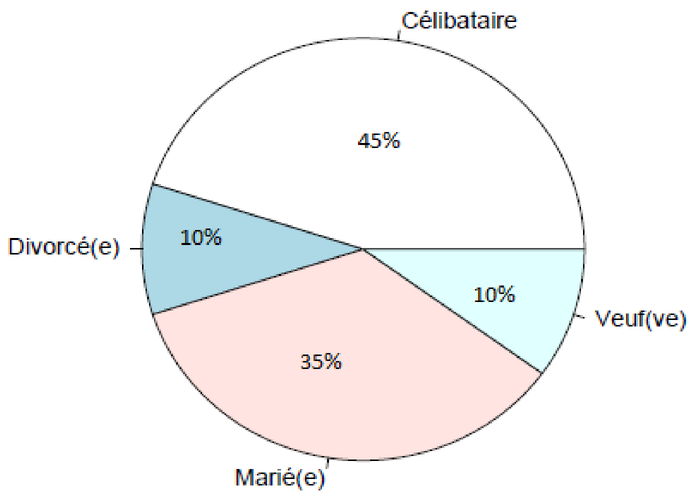
$\boldsymbol{x_i}$	$\boldsymbol{n_i}$	$\boldsymbol{f_i}$	$\boldsymbol{p_i(\%)}$	$\boldsymbol{\theta_i}$
C	9	0.45	45	.
V	7	0.35	35	.
M	2	0.10	10	.
D	2	0.10	10	.
somme	20	1	100%	**°360**

- التكرارات المطلقة يمكن تمثيلها بمخطط بالأعمدة كما يلي:



الشكل 6: مخطط بالأعمدة لتوزيع 20 شخص حسب الحالة المدنية

- بينما يمكن تمثيل التكرارات النسبية بالدائرة النسبية: $\theta_i = 360 \times f_i$



الشكل 7: دائرة نسبية لتوزيع 20 شخص حسب الحالة المدنية

مثال 12: تهتم إحدى الدراسات الإحصائية بالألوان الممكن الحصول عليها عند زراعة نوع معين من الورد فأخذت عينة من 180 وردة فوجدنا فيها 39 بيضاء 73 حمراء و 68 صفراء.

- ما هو المجتمع الإحصائي ؟ و ما هي الصفة المدروسة؟
- أعط التمثيل البياني المناسب.

تـــمـاريـــن الـفصـل الأول:

تمرين 01:

I- صنف كل من المتغيرات التالية حسب ما إذا كانت كيفية أو كمية (متقطعة أو مستمرة)

1) المهنة 2) حجم الحذاء .3) الدخل السنوي 4) لون العين.5) مكان الإقامة 6) إحداثيات GPS (7 الجنسية 8) عدد اللغات المحكية. 9) العمر 10) اللغات المنطوقة 11) سرعة الرياح.

تمرين 02:

تعطي القائمة التالية أسماء مجموعة من الطلاب متبوعة بين قوسين بإشارة إلى كمية الكتب المقروءة في السنة.

قليلاً = A، وسط = B ، كثير = C، استثنائية= D

Rabah (B), Adèle (A), Samira (B), Houda (C), Bochra (B), Farida (B), Lamia (C), Khalil (D), Camélia(B), Mariam (A), Jamal (C), Janine (C), Emir (C), Céline(C), Ania (D), Moussa (C), Amine(C)

1. حدد توزيع هؤلاء الطلاب حسب الرغبة في القراءة (المجتمع، الصفة المدروسة، طبيعتها).
2. اعد كتابة المعطيات في الجدول الإحصائي المناسب لهذا التوزيع.
3. مثل المعطيات باستخدام أنابيب أرغن و الدائرة النسبية.

تمرين 03:

في مكتبة الجامعة، أجريت دراسة على عدد المستخدمين للمحطات التي تسمح للوصول إلى قاعدة البيانات (أجهزة كمبيوتر) . لقد أجرينا دراسة استقصائية على مدار يومين (يُعتبران أيام الذروة) لعدد الوافدين من مستخدمي هذه المحطات في فاصل زمني مدته دقيقتان وكذلك وقت شغل خدمة الكمبيوتر المخصصة لمجتمع الجامعة. ثلاث محطات متاحة للمستخدمين. الجدول التالي يحتوي على البيانات المتعلقة بعدد الواصلين لكل فاصل دقيقتين:

عدد الوافدين لكل فاصل 2 min

0	0	2	1	1	1	4	2	0	0
1	1	1	2	2	3	0	4	3	0
0	2	2	2	3	0	1	1	1	1
2	2	1	3	2	2	5	4	3	2
1	4	4	3	3	2	3	1	2	2
3	3	0	1	4	3	2	1	2	2

1 - في هذه الدراسة ما هي الوحدة الإحصائية؟

2 - ما هي الصفة الإحصائية المدروسة وما هي طبيعتها؟

3 - رتب هذه البيانات في جدول إحصائي تام، ثم مثلها بيانيا.

4 - أوجد الدالة التراكمية ومثلها بيانيا.

5 - تم تلخيص الملاحظات المتعلقة بمدة شغل الخدمة (بالثانية) في التوزيع التكراري التالي:

عدد المستخدمين	مدة شغل خدمة الكمبيوتر
25	$0 \leq X < 300$
10	$300 \leq X < 600$
9	$600 \leq X < 900$
3	$900 \leq X < 1200$
2	$1200 \leq X < 1500$
1	$1500 \leq X < 1800$

1. أعط تمثيلا بيانيا مناسبا لهذه البيانات
2. أرسم المنحنى التراكمي الصاعد
3. نعتبر أن الوحدات الإحصائية موزعة توزيعا منتظما داخل فئات المتغير الإحصائي، أوجد نسبة المستخدمين الذين تقل مدة استخدامهم للكمبيوتر عن 600 sec؟ عن 1300 sec؟ بين 800و 900 sec ؟ التي تزيد عن 1200 sec؟

التمرين 4:

أربع قطع معدنية رميت 100 مرة و في كل مرة سجل عدد الصور فكانت كالتالي:

4	3	2	1	0	عدد الصور
9	25	32	23	11	عدد الرميات

1 - ارسم هذه البيانات بتمثيل بياني مناسب.

2 - كون جدولا تظهر فيه النسب المئوية للرميات التي تظهر بها عدد الصور أقل من 0،1،2،3،4.

3 - ارسم بيانات الجدول الذي حصلت عليه في السؤال 2.

تمرين 05:

خضعت 50 امرأة إلى استفسار حول عدد أبنائهن المولودين أحياء للحد من كمية التعويضات العائلية. فكانت الإجابات كالتالي:

4 2 1 0 2 3 2 3 1 2 3 2 2 1 1 3 0 2 1 2 0 1 1 2 3 2 1 2 2 3 0 3 1
3 2 1 0 2 0 1 1 2 0 4 2 4 0 2 1 1

1- ما هو الطبع الإحصائي المدروس وما هي طبيعته؟

2- أعط التوزيع التكراري و التواترات النسبية.

3- أرسم مخطط الأعمدة و المخطط المجمع الصاعد لهاته السلسلة.

4- ما هي النسبة المئوية للنساء اللواتي لديهن طفلين على الأكثر مولودين أحياء ؟.

5-. ما هو عدد النساء اللواتي لديهن مابين طفل وثلاثة أطفال مولودين أحياء ؟

تمرين 06:

الجدول التالي يمثل توزيع الأطفال ذوي الأعمار أقل من 8 سنوات حسب قاماتهم ب dm:

القامة (dm)	[5,6[	[6,7[	[7,8[	[8,9[	[9,10[
عدد الأطفال	5	10	10	9	20

1- حدد المجتمع الإحصائي، الوحدة الإحصائية، المتغير الإحصائي المدروس و أوضاعه.

2- مثل هذه المعطيات بجدول إحصائي يحتوي على التواترات النسبية و التواترات النسبية المتجمعة الصاعدة و النازلة. ثم مثلها بيانيا.

3- ما هي النسبة المئوية للأطفال ذوي القامات الأصغر من 8dm ؟

4- نعتبر أن الوحدات الإحصائية موزعة توزيعا منتظما داخل فئات المتغير الإحصائي، أوجد عدد الأطفال ذوي قامات محصورة بين 6.2 و 8.5 dm.

التمرين 7:

فيما يلي درجات عدد من الطلبة:

44	98	40	60	66	71	82	64	72	68
55	69	77	78	88	60	65	68	79	69
62	64	71	66	61	75	83	70	55	62
57	72	61	62	74	62	67	66	60	50

I -

1 - أوجد جدول التوزيع التكراري لهذه الدرجات مستخدما قاعدة Sturges لإيجاد عدد الفئات.

2 - ارسم المدرج التكراري و المضلع التكراري ثم أوجد مساحة المدرج التكراري و المساحة المحصورة بين المضلع التكراري و محور السينات و قارن بينهما

3 - ارسم المنحنى التراكمي الصاعد و المنحنى التراكمي النازل. ماذا تلاحظ؟

II - أعد توزيع هذه المعطيات في ثلاث فئات: $]75;100]$;$[60;75[$;$[40,60[$. أعد كتابة الجدول ومثل المدرج التكراري و المنحنى التراكمي فوق الرسومات السابقة. علـــق

III -إذا علم أن:

الدرجات	التقدير
0-59	E
60-69	D
70-79	C
80-89	B
90-99	A

1 أوجد جدول توزيع التقديرات لدرجات الطلاب.

2 مثل هذه المعطيات بيانيا.

التمرين 8:

فيما يلي أوزان 80 فأرا من فئران التجارب بالجرام (gr) و ذلك عند دراسة نقص الفيتامين.

129	96	127	110	112	108	124	117	125	132
100	114	125	106	119	103	114	118	122	130
143	117	114	119	123	116	111	106	128	125
125	104	120	139	137	121	118	115	92	136
126	135	133	110	108	87	129	101	115	119
95	120	137	104	82	118	126	110	103	127
113	100	118	126	132	105	119	119	126	146
148	95	113	124	129	146	102	117	125	106

1 - كون جدول التوزيع التكراري مستخدما أطوال الفئات الآتية:

80-89; 90-99; 100-109;…; 140-149

2 - ارسم المدرج التكراري و المضلع التكراري.

3 - ارسم المدرج التكراري النسبي و المضلع التكراري النسبي .

4 - أرسم المنحنى المتجمع الصاعد و المنحنى المتجمع النازل لهذه البيانات.

5 - أوجد عدد الفئران التي تقل أوزانها عن gr125.

الفصل الثاني القيم العددية لسلسلة إحصائية

Valeurs numériques d'une série statistique

❖ مقـــدمـــة

عرض البيانات الإحصائية و الجداول لا يكفي لدراسة إحصائية معمقة ، لذلك يجب تلخيص أهم الصفات العددية سواء من خلال النزعة المركزية حيث يتمركز أفراد المجتمع أو كيف تتشتت هاته الوحدات حول القيمة المركزية التي تمثل أفراد المجتمع.

I- مقاييس النزعة المركزية Caractéristiques de tendance centrale :

كلمة النزعة المركزية تعني الرغبة في التمركز و التكثف نحو رقم معين يمثل باقي القيم تمثيلا سليما. ومن بينها:

1-1- الوسيط Médiane

نرمز له بالرمز Me ويعرف الوسيط بأنه القيمة التي تقسم قيم السلسلة الإحصائية إلى جزأين بحيث يكون عدد القيم أقل من Me مساويا لعدد القيم الأكبر منه وهذه الخاصية التي على أساسها نعتبر الوسيط Me قيمة ممثلة لقيم السلسلة الإحصائية فالوسيط هو القيمة التي تساوي بين القيم الصغيرة و القيم الكبيرة من حيث عددها .

مثال 01: إذا كان وسيط أجور عمال مؤسسة يساوي 10000 دج معنى ذلك أن 50% من العمال يتقاضون أجر أقل من 10000 دج و 50% الآخرون لهم أجر أكبر من 10000 دج.

1-1-1- حساب Me في حالة متغير إحصائي متقطع

ليكن X متغير إحصائي متقطع، لإيجاد Me نتبع الخطوات التالية:

1- نرتب قيم السلسلة الإحصائية تصاعديا أو تنازليا.

2- نحدد رتبة الوسيط Me . و هنا لابد أن نشير إلى حالتين:

أ/ إذا كان عدد قيم السلسلة الإحصائية N فرديا في هذه الحالة رتبة الوسيط Me هي: $\frac{N+1}{2}$

3- الوسيط Me هو القيمة الموافقة لهذا الترتيب . أي $Me = x_{\left(\frac{N+1}{2}\right)}$

ب/ إذا كان عدد قيم السلسلة الإحصائية N زوجيا فلا توجد قيمة وسيطية و في هذه الحالة فإن قيمة الوسيط هي الوسيط الحسابي بين القيمتين اللتين رتبتهما $\frac{N}{2}$ و $\frac{N}{2}+1$.. أي

مثال02:

تبين السلسلة التالية علامات 9 طلاب في مادة الإحصاء 13 – 14 – 7 – 17 – 15 – 9 – 8 – 11 – 10

المطلوب حساب Me :

نرتب أولا 7-8-9-10-11-13-14-15-17

لدينا : N=9 إذن $\frac{N+1}{2}=5$ و منه رتبة الوسيط هي 5 أي $\mathrm{Me}=x_{(5)}=11$.

مثال03:

أوجد وسيط السلسلة التالية 6-7-9-10-11-12-12-13-15 -16

إذن $\frac{N}{2}=5$ لا توجد قيمة وسيطية و $\frac{11+12}{2}=\frac{x(6)+x(5)}{2}=Me=11.5$

- **حساب Me بيانيا:**

نقوم أولا بإنشاء المنحني التراكمي للمتغير الإحصائي المتقطع X و بما أن Me يقسم السلسلة الإحصائية إلى جزأين متساويين فإن F(Me)=0.5 إذن يحدد 0.5 على محور التراتيب ثم تعين النقطة A و ذلك بالبحث عن قيمة X بحيث $F_i<F(Me)<F_{i+1}$ و بالتالي $Me=x_{i+1}$

1-1-2- حساب Me في حالة متغير إحصائي مستمر

لإيجاد قيمة الوسيط Me للتوزيعات التكرارية لمتغير إحصائي مستمر نتبع الخطوات التالية:

1- نكون الجدول التكراري المجمع .

2- نحسب $\frac{N}{2}$ ثم نحدد الفئة الوسيطية أي الفئة التي ينتمي إليها الوسيط Me و هي الفئة التي لها تكرار مجمع أكبر أو مساوي لترتيب الوسيط المباشرة $\frac{N}{2}$ ثم نحسب الوسيط باستعمال قانون الاستقطاب الخطي التالي (Interpolation linéaire)

إذا كان $Me\in\left[\mathrm{e_j},e_{\mathrm{j}+1}\right[$ بحيث $\mathrm{j}\in\{1,2,\dots,\mathrm{k}\}$ فإن

$$\frac{Me-e_{\mathrm{j}}}{e_{\mathrm{j}+1}-e_{\mathrm{j}}}=\frac{F(Me)-F(e_{\mathrm{j}})}{F(e_{\mathrm{j}+1})-F(e_{\mathrm{j}})}\Longrightarrow Me=e_{\mathrm{j}}+\frac{0.5-F(e_{\mathrm{j}})}{F(e_{\mathrm{j}+1})-F(e_{\mathrm{j}})}\times a_j$$

أو أيضا :

$$Me=e_{\mathrm{j}}+\frac{\frac{N}{2}-\mathrm{N}_{\mathrm{j}-1}^{\nearrow}}{\mathrm{n_j}}\times a_j$$

a_j طول الفئة الوسيطية $N_{j-1}^{\nearrow}$ التكرار المجمع للفئة ما قبل الفئة الوسيطية

n_j تكرار الفئة الوسيطية

ملاحظة

يمكن استعمال التواترات النسبية لحساب Me : $Me = e_j + \frac{0.5 - F_{j-1}^{\nearrow}}{f_j} \times a_j$

مثال 04:

الجدول التالي يمثل توزيع عينة لتلاميذ مدرسة ابتدائية حسب أعمارهم

المطلوب حساب Me :

فئات الأعمار	عدد التلاميذ n_i	f_i	$N_i^{\nearrow}$	$F_i^{\nearrow}$
$[6;7[$	12	0.136	12	0.136
$[7;8[$	25	0.284	37	0.420
$[8;10[$	18	0.204	55	0.625
$[10;11[$	20	0.227	75	0.827
$[11;12[$	13	0.148	88	1
المجموع	88	1		

الفئة الوسيطة $[8.10[\;<=\; \frac{N}{2} = \frac{88}{2} = 44$

$$Me = 8 + \frac{44-37}{18} \times 2$$

$$Me = 8.778ans \simeq 9ans \in [8.10[$$

➢ **إيجاد Me بيانيا :**

نطبق تقريبا نفس الطريقة التي عرضناها في الحساب البياني ل Me في حالة المتغير الإحصائي المتقطع فننشأ أولا بيان دالة تراكمية F ثم نحدد F(Me)=0.5 ثم نسقطها على محور الفواصل عموديا فتتحصل على الفئة الوسيطية التي تحتوي على Me . ثم نطبق نظرية طالس لحساب Me .

تمرين: أوجد قيمة Me بيانيا في المثال السابق.

❖ بعض المميزات الوسيط Me :

1- لا يتأثر بالقيم المتطرفة.

2- لا يأخذ جميع القيم بعين الاعتبار.

1-2- المنوال Le Mode

يعرف المنوال بأنه القيمة الأكثر شيوعا من بين القيم السلسلة الإحصائية و هذا هو الأساس الذي بناءا عليه يعتبر المنوال ممثلا لقيم السلسلة الإحصائية.

1-2-1- حساب المنوال في حالة المتغير الإحصائي المتقطع :

إذا كانت لدينا سلسلة إحصائية لمتغير إحصائي متقطع فالمنوال يمثل القيمة التي لها أكبر تكرار مطلق (أكبر تواتر نسبي) أي $Mo = x_j$ بحيث $n_j = \max_{i=\overline{1,k}} n_i$ و $j \in \{1,2,\dots,k\}$.

أما بيانيا فالمنوال يوافق القيمة التي لها أطول عمود في المخطط بالأعمدة .

ملاحظة:

المنوال ليس وحيدا أي توجد سلاسل إحصائية متعددة المنوال إما توجد سلاسل إحصائية ليس فيها منوال (و ذلك في حالة تساوي التكرارات المطلقة لجميع قيم السلسلة الإحصائية).

1-2-2- حساب المنوال في حالة متغير إحصائي مستمر

في هذه الحالة لا يمكن القول بأن قيمة معينة يكون لها أكبر تكرار لأن القيم تذوب داخل الفئات المختلفة. لذلك يمكن القول أنه توجد فئة منوالية و هي التي يقابلها أكبر كثافة أي $Mo \in [e_j, e_{j+1}[$ بحيث $\frac{n_j}{a_j} = \max_{i=\overline{1,k}} \frac{n_i}{a_i}$ و $j \in \{1,2,\dots,k\}$.

ولحساب المنوال في الحالة المستمرة نتبع الخطوات التالية :

1- نحدد الفئة التي لها أكبركثافة لتكن $[e_j, e_{j+1}[$ بحيث $\frac{n_j}{a_j} = \max_{i=\overline{1,k}} \frac{n_i}{a_i}$ أي أن Mo ينتمي إلى الفئة ذات الرتبة j : $Mo = e_j + \frac{d_1}{d_1+d_2} \times a_j$

حيث $d_1 = \frac{n_j}{a_j} - \frac{n_{j-1}}{a_{j-1}}$ و $d_1 = \frac{n_j}{a_j} - \frac{n_{j+1}}{a_{j+1}}$

a_j سعة الفئة $[e_j, e_{j+1}[$ n_j تكرار الفئة.

مثال 05: حساب المنوال لأوزان 100 طالب.

الفئات ذات سعات متساوية و بالتالي المنوالية $[66.69[$ $M_0 \in$ وقيمة المنوال هي :

$$M_0 = 66 + \frac{42-18}{(42-18)+(42-27)} \times 3$$

$$= 66 + \frac{24}{24+15} \times 3 = 67.85 \in [66.69[kg$$

تمرين: أوجد منوال المعطيات السابقة لتوزيع فئات أعمار لتلاميذ الابتدائي.

ملاحظة:

في حالة ما تكون الفئات متساوية السعة نأخذ $\frac{n_j}{a_j}$ بدلا من n_j.

❖ **بعض مميزات المنوال**

1- سهل الحساب.

2- لا يتأثر بالقيم المتطرفة .

3- لا يأخذ جميع القيم بعين الإعتبار .

4- لا يمكن تحديد قيمة وحيدة للمنوال و أحيانا غير موجود.

1-3- المتوسط الحسابي Moyenne arithmétique

هو المقياس الأكثر استعمالا و يعرف بأنه مجموع قيم السلسلة الإحصائية مقسوم على عددها نرمز له ب $\bar{x}$.

1-3-1- المتوسط الحسابي لمتغير إحصائي متقطع

ليكن X متغير احصائي متقطع يأخذ القيم $x_1, x_2, \dots, x_k$ ، ذات التكرارات المطلقة $n_1, n_2, \dots, n_k$ و التوترات النسبية $f_1, f_2, \dots, f_k$.

الوسط الحسابي $\bar{x}$ للقيم $x_1, x_2, \dots, x_k$ هو $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i$ أو $\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i$.

بحيث $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$.

مثال 06: 2-3-4-4-6-8.

$$\bar{x} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{5} n_i x_i = \frac{1 \times 2 + 1 \times 3 + 2 \times 4 + 1 \times 6 + 1 \times 8}{6} = 4.5$$

1-3-2- المتوسط الحسابي لمتغير إحصائي مستمر

ليكن X متغير إحصائي مستمر قيمه محصورة في فئات من الشكل $[e_i, e_{i+1}[$ ، $i = \overline{1, k}$. حيث $n_1, n_2, \dots, n_k$ تمثل التكرارات المطلقة للفئات، $f_1, f_2, \dots, f_k$ تمثل التواترات النسبية للفئات ، $c_1, c_2, \dots, c_k$ هي مراكز الفئات إذن الوسط الحسابي لقيم $[e_i, e_{i+1}[$ ، $i = \overline{1, k}$ هو:

$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i c_i$ أو $\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} f_i c_i$

مثال 07: يمثل الجدول التالي نتائج دراسة إحصائية حول توزيع النفقات الاستهلاكية الشهرية بآلاف الدينارات لعينة من الأسر في مجتمع ما

الفئات	عدد الأسر n_i	المراكز c_i	$n_i c_i$
$[8;10[$	4	9	36
$[10;12[$	7	11	77
$[12;15[$	12	13.5	162
$[15;18[$	15	16.5	207.5
$[18;20[$	8	19	152
$[20;24[$	9	22	198
$\sum$	55		872.5

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6} n_i x_i = \frac{1}{55}(872.5)$$

$$= \bar{x} = 15.84 \times 10^3 DA$$

❖ بعض مميزات المتوسط الحسابي

1- سهل الحساب.

2- يأخذ بعين الاعتبار جميع قيم السلسلة الإحصائية .

3- يتأثر بالقيم المتطرفة (و هي القيم الكبرى جدا و الصغرى جدا).

4- $\sum_{i=1}^{N} n_i(x_i - \bar{x}) = 0$.

5- إذا كانت $N_1, N_2, \dots, N_k$ هي أحجام مجتمعات بمتوسطات حسابية$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k$ على التوالي فإن:

$$\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} N_i \bar{x}_i$$

حيث $N = \sum_{i=1}^{k} N_i$.

6- تغيير المتغير : ليكن التغيير التالي $X:(x_i, n_i) \to Y:(y_i = ax_i + b, n_i)$ فإن

$$\bar{x} \to \bar{y} = a\bar{x} + b$$

- **مثال 08: (إيجاد المتوسط الحسابي باستخدام تغيير المتغير)**

لتكن المعطيات التالية:

classes	n_i	c_i	y_i	$n_i y_i$
[33 ; 43[	1	38	-3	-3
[43 ; 53[	4	48	-2	-8
[53 ; 63[	7	58	-1	-7
[63 ; 73[	16	68	0	0
[73 ; 83[	13	78	1	13
[83 ; 93[	7	88	2	14
[93 ; 103[	2	98	3	6

نعرف المتغير الجديد كما يلي $Y = \frac{X-x_0}{a}$ حيث x_0 هي مركز الفئة المنوالية و a هي سعة الفئات في حالة الفئات المتساوية السعة بينما في حالة السعات المختلفة $a = pgcd(a_i)$.

ليكن المتغير $Y = \frac{X-68}{10}$ ونحسب $y_i = \frac{x_i-68}{10}; i = \overline{1,7}$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{7} n_i y_i = \frac{1}{50}(15) = 0.3$$

ومنه :

$$x_i = 10y_i + 68 => \bar{x} = 10\bar{y} + 68 = 10(0.3) + 68 = 71$$

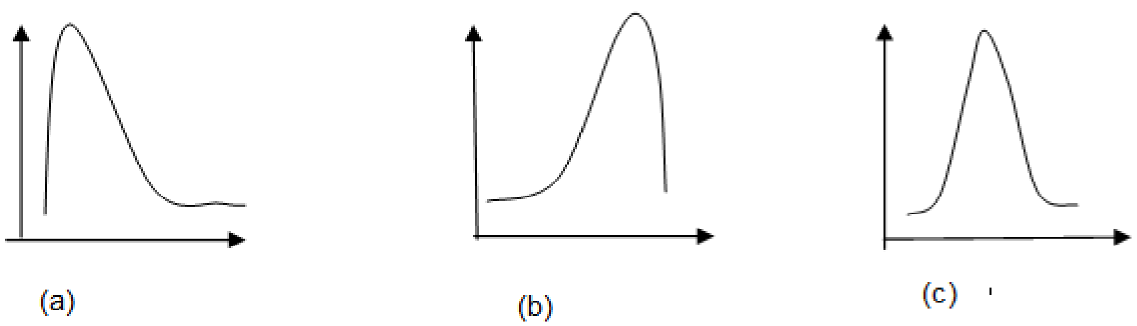
1-4- العلاقة بين المتوسط الحسابي و الوسيط والمنوال

1/ إذا كان التوزيع غير متماثل و أحادي المنوال ؛ فإن $\frac{\bar{x}-\mathrm{Me}}{3} = \bar{x} - \mathrm{M}o$

2/ إذا كان لدينا $\mathrm{Mo} < Me < \bar{x}$ ؛ نقول أن التوزيع التكراري وحيد المنوال ذو التواء موجب أو ممتد نحو اليمين (الشكل 01(a)).

3/ إذا كان لدينا $\bar{x} < Me < \mathrm{Mo}$ ؛ نقول أن التوزيع التكراري وحيد المنوال ذو التواء سالب أو ممتد نحو اليسار (الشكل 01(b)).

4/ إذا كان التوزيع متماثلا فإن $\mathrm{Mo} \cong Me \cong \bar{x}$ نقول أن التوزيع متناظر (الشكل 01(c)).



الشكل 01: أشكال التوزيعات الإحصائية.

1 -5- مشتقات المتوسط الحسابي

بالإضافة إلى المتوسط الحسابي $\bar{x}$ ، الذي يحسب بطريقة معينة، هناك متوسطات أخرى من نفس درجة

الدقة للمتوسط الحسابي، إلا أنها تحسب بطرق متميزة لأن سلسلة البيانات ليس لها نفس الطبيعة في حالة

المتوسط الحسابي$\bar{x}$.

$\bar{x}$ سمي متوسطا حسابيا لأن سلسلة البيانات $x_1, x_2, \dots, x_k$ تحمل من الناحية الرياضية شكل المتتالية الحسابية، وأما إذا كانت السلسلة الإحصائية لا تتزايد بطريقة حسابية فلا يمكن أن نحسب عليها متوسط حسابي بل نستعمل متوسط آخر، فإذا كانت مثلا تتزايد بطريقة هندسية نطبق عليها المتوسط الهندسي.

1-5 -1 المتوسط الهندسي La moyenne géométrique

لمتغير إحصائي هو $x_1, x_2, \dots, x_n$ لمجموعة القيم M_G ، الوسط الهندسي M_G أو G نمز له ب

$$M_G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \dots\dots\dots\dots\dots\dots. (1).$$

إذا كان المتغير الإحصائي X يأخذ القيم $x_1, x_2, \dots, x_k$ ذات التكرارات $n_1, n_2, \dots, n_k$ بحيث $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$ فإن

$$M_G = \sqrt[N]{x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}} = \left(\prod_{i=1}^{k} \mathrm{x}_\mathrm{i}^{\mathrm{n}_\mathrm{i}}\right)^{\frac{1}{\mathrm{N}}} \dots\dots\dots\dots\dots\dots. (2)$$

- يمتاز الوسط الهندسي عن الوسط الحسابي بأنه اقل تأثرا بالقيم المتطرفة للسلسلة الإحصائية.

ملاحظة 01: نلاحظ من الصيغتين (1) و (2)أنه إذا كانت البيانات في السلسلة أو الجدول تحمل قيم كبيرة تصبح الحسابات ضخمة أو حتى مستحيلة وعليه لا نستعمل الصيغتين (1) و(2)، وإ نما نلجأ إلى تبسيط البيانات بإدخال الحساب اللوغاريتمي.

لحساب M_G:

$$M_G = \left(\prod_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} \mathrm{x}_\mathrm{i}^{\mathrm{n}_\mathrm{i}}\right)^{\frac{1}{\mathrm{N}}} \Leftrightarrow lnM_G = ln\left(\prod_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} \mathrm{x}_\mathrm{i}^{\mathrm{n}_\mathrm{i}}\right)^{\frac{1}{\mathrm{N}}} = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} \mathrm{n}_\mathrm{i} ln(\mathrm{x}_\mathrm{i})$$

بوضع $y_i = ln(\mathrm{x}_\mathrm{i})$ متغير جديد فيكون

$$lnM_G = \bar{y} => M_G = e^{\bar{y}}$$

ملاحظة 02: في حالة المتغير الإحصائي المستمر لحساب M_G نأخذ بدلا من القيم x_i مراكز الفئات c_i,

$\forall i = \overline{1,k}$ أي $M_G = \left(\prod_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} \mathrm{c}_\mathrm{i}^{\mathrm{n}_\mathrm{i}}\right)^{\frac{1}{\mathrm{N}}}$ حيث n_i هي تكرار الفئات.

ملاحظة 03: نستعمل المتوسط الهندسي في المجال الاقتصادي لحساب المعدلات (معدل الفائدة، معدل نمو السكان...إلخ)، متوسط نسبة النمو الاقتصادي لعدة سنوات، الأرقام القياسية....

1-5-2- المتوسط التوافقي La moyenne Harmonique:

المتوسط التوافقي هو متوسط نادر الاستعمال نوظفه في بعض الحالات لحساب القدرة الشرائية المتوسطة لسلعة ما بدلالة سلعة أخرى، وعادة ما تكون هذه الوحدة هي الوحدة النقدية لبلد معين، وكذلك لحساب السرعة المتوسطة لمركبة على مسالك مختلفة. والذي نرمز له بالرمز H أو $\mathrm{M_H}$.

الوسط التوافقي لمجموعة N من القيم $x_1, x_2, \dots, x_n$ هو

$$\mathrm{H} = \frac{1}{\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\frac{1}{\mathrm{x_i}}} = \frac{N}{\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\frac{1}{\mathrm{x_i}}}$$

إذا كان المتغير الإحصائي المتقطع X يأخذ القيم $x_1, x_2, \dots, x_k$ ذات التكرارات $n_1, n_2, \dots, n_k$ بحيث $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$ فإن

$$\mathrm{H} = \frac{N}{\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\frac{\mathrm{n_i}}{\mathrm{x_i}}}$$

ملاحظة 01: ولحساب H نحسب

$$\frac{1}{\mathrm{H}} = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\frac{\mathrm{n_i}}{\mathrm{x_i}}$$

ملاحظة 02: في حالة المتغير الإحصائي المستمر نأخذ بدلا من القيم $\mathrm{x_i}$ مراكز الفئات $c_{\mathrm{i}}, \quad \forall i = \overline{1,k}$ أي

$$\mathrm{H} = \frac{N}{\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\frac{\mathrm{n_i}}{\mathrm{c_i}}}$$

حيث $\mathrm{n_i}$ هي تكرار الفئات.

ملاحظة 03: يستخدم المتوسط التوافقي في حالات نادرة، خاصة في حساب السرعة المتوسطة لمركبة على مسالك مختلفة أو لحساب القدرة الشرائية المتوسطة لسلعة ما بدلالة سلع أخرى.

1-5-3- المتوسط التربيعي La moyenne Quadratique

لتكن السلسلة الإحصائية $x_1, x_2, \dots, x_n$. نحسب المتوسط التربيعي M_Q على هذه السلسلة بالطريقة التالية:

$$M_Q=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}}$$

في حالة التوزيع التكراري $x_1,\dots,x_k$ ؛ ذات التكرارات $n_1,n_2,\dots,n_k$ ، بحيث $N=\sum_{i=1}^{k}n_i$
فإن المتوسط التربيعي يحسب بالعلاقة التالية:

$$M_Q=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{n_i}x_i^2}{N}}$$

مثال 09: لتكن البيانات التالية :**6-4-2-3**

المطلوب :أحسب :المتوسط الحسابي، المتوسط الهندسي، المتوسط التوافقي، المتوسط التربيعي؟

1-المتوسط الحسابي:

$$\bar{x}=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}n_{\mathrm{i}}x_i=\frac{6+4+2+3}{4}=3.75$$

2 -المتوسط الهندسي:

$$M_G=\sqrt[4]{x_1x_2\dots x_4}=\sqrt[4]{6\times4\times2\times3}=3.46$$

3 -المتوسط التوافقي:

$$\mathrm{M_H}=\frac{N}{\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}}\frac{1}{\mathrm{x_i}}}=\frac{4}{\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=3.21$$

4 -المتوسط التربيعي:

$$M_Q=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}}=\sqrt{\frac{6^2+4^2+2^2+3^2}{4}}=4.03$$

نتيجة: نلاحظ أنه مهما كانت البيانات فإن $\mathrm{M_H}<M_G<\bar{x}<M_Q$

II – مقاييس التشتت Caractères de dispersion:

لقد سبق لنا دراسة طرق عرض البيانات و دراسة مقاييس النزعة المركزية ولكن هذا غير كافي إذا أردنا مقارنة سلاسل إحصائية فيما بينها. ولتوضيح ذلك نأخذ مثالا بثلاث معطيات إحصائية:

A : 24 24 24 24 24

B : 29 26 24 21 20

C : 52 33 24 8 3

نلاحظ أن السلاسل الثلاثة لديها نفس الوسيط Me=24 ونفس المتوسط الحسابي $\bar{x} = 24$ و مع ذلك نلاحظ أنه لا يوجد تشتت في قيم السلسلة A بينما في السلسلة B القيم متقاربة و أما في السلسلة C فالقيم متباعدة و خصوصا وجود قيمتين شاذتين 3 و 52 أي أن السلاسل الثلاث مختلفة التجانس و بذلك تكون مقاييس النزعة المركزية غير كافية للمقارنة بين طبيعة البيانات الإحصائية و لذلك يجب التطرق إلى مقاييس تقيس درجة التجانس l'homogénéité(التقارب) أو التشتت l'hétérogénéité (التباعد) لقيم سلسلة إحصائية ما .

تعريف التشتت:

التشتت هو عبارة عن اختلاف القيم عن بعضها البعض فإذا كانت القيم متباعدة و تختلف كثيرا تكون ظاهرة التشتت كبيرة أما إذا كانت القيم متقاربة لبعضها يكون التشتت قليل.

1-2- المدى L'étendue:

هو أبسط مقاييس التشتت و يعبر عن مدى تغير الظاهرة محل الدراسة. نرمز له بالرمز E، و يعرف بأنه الفرق بين أكبر قيمة في السلسلة الإحصائية و أصغر قيمة فيها أي

$$E = x_{max} - x_{min} .$$

مثال10:

أوجد مدى السلسلة الإحصائية التالية:

6-98-94- 82-85-87-92-80-96

$$E = x_{max} - x_{min} = 99 - 6 = 92$$

مثال11: اوجد مدى الأوزان لمجموعة من الأشخاص معطاة في الجدول التالي:

الفئات	$[40;49[$	$[49;59[$	$[59;69[$	$[69;79[$	$[79;99[$
التكرارات	2	15	11	2	1

$$E = x_{max} - x_{min} = 99 - 40 = 59\ kg$$

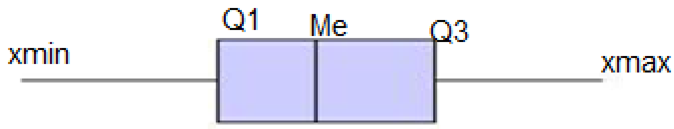
ملاحظة: كلما كانت قيمة المدى صغيرة كلما كانت قيم السلسلة الإحصائية متقاربة في ما بينها و بذلك يقل تشتتها.

2-2- المدى الربيعي L'intervalle interquartile

هو المجال الذي يحتوي على النصف المركزي للمتغير الإحصائي . يعبر المدى الربيعي عن تشتت القيم بين الربيعين الثالث و الأول و نرمز له بالرمز IQ أي IQ=$Q_3 - Q_1$

حيث Q_1 الربيع الأول و هو القيمة التي تقسم قيم السلسلة الإحصائية إلى جزئين بحيث 25% من القيم أقل من Q_1 و 75% من القيم أكبر منه .

و Q_3 هو الربيع الثالث: و هو القيمة التي تقسم قيم السلسلة الإحصائية إلى جزئين بحيث يكون 75% من القيم أقل من Q_3 و 25% من القيم أكبر منه.



(لحساب Q_1 و Q_3 نستعمل نفس طريقة حساب الوسيط).

مثال 12: أحسب المدى الربيعي لمعطيات السلسلة الإحصائية المذكورة سابقا في المثال 10:

أ/ ترتيب قيم السلسلة الإحصائية:94-92-87-85-82-80-6-98-96

1- حساب Q_1: رتبة Q_1 توافق الرتبة الأكبر أو تساوي $\frac{N}{4}=2.5$ أي رتبة Q_1 هي 3

$$Q_1 = x_3 = 82$$

2- حساب Q_3 : بما أن $\frac{3N}{4}=6.75$ رتبة Q_3 هي 7. ومنه

$$Q_3 = x_7 = 94$$

نحسب الآن IQ

$$\text{IQ}=Q_3 - Q_1 = 94 - 82 = 12.$$

مثال13: نحاول إيجاد المدى الربيعي في حالة متغير إحصائي مستمر (مثال12)

لحساب Q_1 و Q_3 نتبع نفس الطريقة لحساب الوسيط و ذلك بتعيين فئة الربيع ثم نستعمل العلاقة التالية:

إذا كان $Q_i \in [e_j, e_{j+1}[$ ، فإن $F(Q_i) = i(0.25)$

$$\frac{Q_i - e_j}{e_{j+1} - e_j} = \frac{F(Q_i) - F(e_j)}{F(e_{j+1}) - F(e_j)}$$

أو

$$Q_i = e_j + \frac{i\frac{N}{4} - N_{j-1}^{\nearrow}}{n_j} \times a_j \quad (i=1,3)$$

الفئات	[40; 49[	[49; 59[	[59; 69[	[69; 79[	[79; 99[
التكرارات	2	15	11	2	1
$N_i^{\nearrow}$	2	17	28	30	31

1 / حساب Q_1 : تعيين الفئة $Q_1 \in [49; 59[$

$$=> Q_1 = 49 + \frac{7.75 - 2}{15} \times 10 = 23.25$$

2 / حساب Q_3 : تعيين الفئة $Q_3 \in [59;69[$

$$=> Q_3 = 59 + \frac{23.25 - 17}{11} \times 10 = 64.68$$

ومنه IQ: $\mathrm{IQ} = Q_3 - Q_1 = 11.847kg.$

نلاحظ أن $\mathrm{E} \gg \mathrm{IQ}$ وبالتالي فهناك قيم متطرفة، نقول أن قيم السلسلة غير متجانسة.

3-2- التباين (التغاير) La variance- الانحراف المعياري Ecart-type

المقياس الحقيقي للتشتت هو الانحراف المعياري وليس التباين لأن هذا الأخير هو عبارة عن قيمة إحصائية ليس لها وحدة قياس، بينما الانحراف المعياري فهو قيمة إحصائية تعبر عن التشتت ولها وحدة قياس (نفس وحدة قياس X).

تعريف التباين: هو متوسط مربعات الإنحراف عن الوسيط الحسابي نرمز له بأحد الرمزين $\mathrm{V(X)}$ أو S_X^2 حيث

- إذا كان متغير إحصائي متقطع $\mathrm{V(X)} = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{k}} \mathrm{n_i}(\mathrm{x_i} - \bar{\mathrm{x}})^2$
- إذا كان متغير إحصائي مستمر $\mathrm{V(X)} = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{k}} \mathrm{n_i}(\mathrm{c_i} - \bar{\mathrm{x}})^2$

ملاحظة:

لدينا العلاقة $\mathrm{V(X)} = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{k}} \mathrm{n_i}(\mathrm{x_i} - \bar{\mathrm{x}})^2 = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{k}} \mathrm{n_i}(\mathrm{x_i})^2 - \bar{x}^2$ علاقة كونيغ Koening

تمرين: برهن صحة علاقة كونيغ.

تعريف الانحراف المعياري: نرمز له بالرمز s_X و يعرف كما يلي $s_X = \sqrt{\mathrm{V(X)}}$ يستخدم للعودة إلى وحدة قياس المتغير الإحصائي.

❖ **مميزات التباين:**

1- $\mathrm{V(X)} = \mathrm{s_X^2} \geq 0$

2- إذا كانت $N_1, N_2, \dots, N_k$ هي أحجام مجتمعات بمتوسطات حسابية$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k$ و تغايرات $V_1, V_2, \dots, V_k$ على التوالي فإن:

Variance globale= variance des moyenne +moyenne des variances

$$V = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} N_i(\bar{x}_i - \bar{X})^2 \ + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} N_i V_i$$

حيث $N = \sum_{i=1}^{k} N_i$

3- تغيير المتغير: ليكن التغيير التالي

$$X:(x_i,n_i) \rightarrow Y:(y_i = ax_i + b, n_i)$$

فإن

$$V(X) \rightarrow V(X) = a^2V(X)$$

البرهان: (تمرين)

2- 4 - معامل الاختلاف Coefficient de variation

إن جميع مقاييس التشتت، التي درسناها سابقا، هي مقاييس مقيدة بوحدة معينة من وحدات القياس؛ أي أنها للتمييز وليست مقاييس نسبية ولذلك لا نستطيع استعمالها لمقارنة تشتت توزيعين مختلفين في وحدات القياس. فمثلا لا نستطيع مقارنة تشتت الأطوال بتشتت الأوزان؛ وذلك لأن تشتت الأول يقاس بالسنتيمترات بينما التشتت الثاني يقاس بالغرامات. لذلك نعرف معامل الاختلاف، الذي يسمح لنا بهذه المقارنة و المعرف كما يلي:

$$Cv = \frac{s_X}{\bar{x}} \times 100$$

حيث كلما كانت قيمة Cv صغيرة كان التشتت أقل.

مثال14: نأخذ مثال توزيع 31 شخص حسب أوزانهم .

فئات	n_i	c_i	$n_i c_i$	$n_i {c_i}^2$
$[40;49[$	2	44.5	9	3960.5
$[49;59[$	15	54	810	43740
$[59;69[$	11	64	704	45056
$[69;79[$	2	74	148	10952
$[79;99[$	1	89	89	7921
المجموع	31		1840	111629.5

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{5} n_i c_i = \frac{1840}{31} = 59.35\ kg$$

$$V(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i (c_i)^2 - \bar{x}^2 = \frac{111629.5}{31} - 3522.42 = 78.53$$

$$s_X = \sqrt{V(X)} = 8.86\ kg$$

$$Cv = \frac{8.86}{59.35} \times 100 = 14.93\%$$

التعليق: نلاحظ أن التشتت ضعيف نسبيا حول المتوسط الحسابي وبالتالي فإن السلسلة الإحصائية متجانسة.

تـــــمـاريـــن الفصل الثاني

تمرين 01:

توزيع الأجر الساعي لعمال مؤسسة ما يعطى كما يلي:

الأجر الساعي $(\times 10^2 DA)$	[10, 20[	[20, 30[	[30, 40[	[40, 50[	[50, 60[	[60, 70[
n_i	15	20	30	15	12	8

1. أعط التمثيل البياني المناسب لهذه المعطيات.
2. برهن صيغة المنوال باستخدام طريقة (l'approximation parabolique).
3. أوجد المنوال حسابيا و هندسيا.
4. أحسب الوسيط و المتوسط الحسابي. علق على شكل التوزيع .
5. أحسب الانحراف المعياري ثم اوجد معامل الاختلاف. ماذا تلاحظ؟

تمرين 02:

لنعد لاستخدام المعطيات الموجودة في التمرين 7 في الفصل الأول حول درجات عدد من الطلبة.

1 - أحسب المنوال، الوسيط ، المتوسط الحسابي، الانحراف المعياري و معامل الاختلاف في التقسيمات الثلاث .

2 - - أحسب الربيعيات ثم استنتج المدى الربيعي في التقسيمات الثلاث.

3 - علـــق على النتائج المحصل عليها.

تمرين 03:

تتألف مؤسسة من 3 فروع E_1، E_2 و E_3 . للمقارنة بين مستوى الغياب في الفروع الثلاث جمعت النتائج التالية

عدد الغيابات x_i	(E_1) n_{i1}	(E_2) n_{i2}	(E_3) n_{i3}
1	60	2	8
2	20	5	10
3	10	10	20
4	30	20	30
5	10	30	40
6	15	40	15
7	5	15	10
8	6	10	9

يمثل الجدول توزيع الموظفين لكل فرع حسب عدد الغياب خلال العام.

.I

1 - مثل المعطيات بيانيا.
2 - أحسب المتوسطات الحسابية للسلاسل الثلاث. علق على العيب الأساسي للمتوسط الحسابي
3 - أحسب كلا من المتوسط الهندسي، المتوسط التربيعي و المتوسط التوافقي للسلسلة الإحصائية الثالثة.
4 - قارن بين القيم الأربعة للمتوسطات.

.II

1- أحسب المنوال، الوسيط ، الانحراف المعياري و معامل الاختلاف لكل فرع.
2- أحسب الربيعيات في كل الفروع.
3 – قارن بين النتائج.

تمرين 04:

طور مدير الموارد البشرية في الشركة Electrotek ، بمساعدة أخصائي صناعي ، اختبارًا لقياس البراعة اليدوية للموظفين المعينين لتجميع الترانزستور. قبل تعميم استخدام هذا الاختبار على جميع موظفي الشركة ، نريد إجراء اختبار مسبق لتعديل أداة التقييم هذه إذا لزم الأمر. لذلك قمنا باختيار 20 من موظفي الشركة بشكل عشوائي لتعيينهم للتجميع وإجراء الاختبار عليهم. النتائج التي تم الحصول عليها موضحة في الجدول التالي:

نتائج اختبار المهارة اليدوية				
72	79	70	88	76
83	77	73	74	72
82	79	84	73	81
80	75	79	82	81

1 - أحسب المتوسط الحسابي لهذه النتائج.
2 - نريد حساب التباين و الانحراف المعياري
i - تأكد أن $\sum n_i(x_i-\bar{x})=0$.
ii - أحسب التباين والانحراف المعياري.
3 - ما هو معامل الاختلاف؟ علـــق.
4 - باستعمال تغيير المتغير من الشكل $y_i=\frac{x_i-x_0}{a}$ ، أحسب المتوسط الحسابي والتباين و الانحراف المعياري للمتغير Y.
5 - عبر عن x_i بدلالة y_i ثم استنتج العلاقة الموجودة بين $\bar{x}$ و $\bar{y}$، بين V(X) و V(Y)، بين s_X و s_Y .

التمرين5 :

ثلاث فرق مختلفة توالت على رئاسة مؤسسة :

- الأولى عملت لمدة ثلاث سنوات. خلال هذه الفترة تزايدت الأرباح بنسبة 5.8% في السنة.
- الثانية عملت لمدة سنة واحدة، ارتفعت خلالها الأرباح بنسبة 4.6 % في السنة.

- الثالثة عملت لمدة عامين، ارتفعت خلالها الأرباح بنسبة 11.2 % في السنة.

أحسب المعدل السنوي المتوسط لتزايد الأرباح المحققة خلال المدة الكلية التي عملت فيها الفرق الثلاث.

التمرين 6:

قامت أحدى الشركات الصناعية بتجربة على إحدى شاحناتها الجديدة بقطع مسافة 50 كلم على 4 مسالك مختلفة

بغرض اختبار سرعتها فقطعت هذه الشاحنة:

- المسلك الأول بسرعة 50 كلم/سا
- المسلك الثاني بسرعة 150 كلم/سا
- المسلك الثالث بسرعة 75 كلم/سا
- المسلك الرابع بسرعة 100 كلم/سا

المطلوب :ما هو متوسط السرعة لهذه الشاحنة على العموم؟

الفصل الثالث **التحليل التوافقي**

Analyse combinatoire

❖ مــقـدمـــــة

يهتم التحليل التوفيقي بإعطاء عدد الطرق الممكنة لترتيب مجموعات معينة ضمن شروط و قواعد رياضية محددة .

في كل ما سيأتي، لتكن Ω المجموعة الكلية التي تحتوي على n من العناصر المختلفة، و نريد أن نختار من Ω مجموعات جزئية مكونة من k عنصر بحيث $k \leq n$.

I- المبدأ الأساسي للعد (قاعدة الضرب) Principe de dénombrement

يعتمد هذا المبدأ على أنه إذا كان بإمكاننا القيام بعمل ما بـ n_1 طريقة مختلفة، ثم نجد بعد القيام بهذا العمل أن عملا آخر يمكن القيام به بـ n_2 طريقة مختلفة و......و بعد القيام بهذا العمل نقوم بعمل آخرب n_k هكذا على التوالي، عندئذ يكون عدد الطرق المختلفة التي تسمح بالقيام بالأعمال السابقة بإتباع الترتيب المذكور هو الجداء

$$n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$$

مثال 1:

في إحدى الشركات توجد وظيفتان مختلفتان شاغرتان إحداها لرئيس مصلحة و الأخرى لمحاسب. تقدم للوظيفة الأولى 7 أشخاص و للوظيفة الثانية 2 شخص .

فيكون عدد الطرق للتعيين في الوظيفتين الشاغرتين هو

$$2\times7=14$$

مثال 2 :

قررت وزارة الداخلية تمييز سيارتها من خلال وضع ترقيم خاص بها و يتمثل هذا الأخير في حرفين لاتينيين مختلفين تتبعهما ثلاث أرقام بحيث لا يكون الرقم الأول 0 .

فكم عدد اللوحات التي يمكن طبعها للسيارات؟

ح1	ح2	ر1	ر2	ر3
26حرف	25حرف	أرقام 9	أرقام 10	ارقام 10

باستخدام قاعدة الضرب يكون عدد اللوحات التي يمكن طبعها هو:

$$10 \times 10 \times 9 \times 25 \times 26$$

II- التباديل Permutations

تعريف: التبديلة هي وضعية ترتيب لـ n عنصر فيما بينها، و طبعا كلما غيرنا الترتيب تحصلنا على تبديلة جديدة،

مثال3:

- كل عدد مكون من 3 أرقام من المجموعة $\{1,2,3\}$ هو تبديلة ل 3 ارقام.

- الكلمات المكونة من 4 أحرف مختلفة مختارة من بين الأحرف $\{a,b,c,d\}$ هي تبديلات ل 4 عناصر.

و لحساب عدد التبديلات لـ n عنصر التي يمكن الحصول عليها فإننا نستعمل قانون التبديلات كما يلي:

نظرية 01:

إذا كانت التبديلة بدون تكرار, فإن عدد التباديل بدون تكرار لـ n من العناصر المختلفة هو $P_n = n!$

البرهان: لدينا (n) طريقة لترتيب العنصر الأول

لدينا $(n-1)$ طريقة لترتيب العنصر الثاني

.

.

.

لدينا طريقة واحدة لترتيب العنصر الأخير= > باستخدام قاعدة الضرب عدد الطرق لترتيب العناصر معا هو

$$n(n-1)\ldots.\times 1 = n! = P_6$$

نظرية 02: إذا كانت التبديلة بتكرار, أي أن الـ n عنصر يمكن أن تضم n_1 عنصرا متماثلا من الصنف 01 و n_2 عنصرا من الصنف 02......و n_kعنصرا من الصنف k ., بحيث

$$n = n_1 + \cdots + n_k$$

إذن عدد التبديلات هو $P_n^{(n_1,\ldots,n_k)} = \frac{n!}{n_1!\ldots.n_k!}$

البرهان: (تمرين)

مثال 4 :

- ما هو عدد التبديلات التي يمكن أن نشكلها بأحرف كل من الكلمتين commission, ballon ؟

$P_6^{1,1,2,1,1} = \frac{6!}{2!} = 6\times 4\times 3 = 72$ $\qquad$ $P_{10}^{1,2,2,2,2,1,1} = \frac{10!}{(2!)^4}$

- بكم طريقة يمكن ان نرتب على رف 6 كتب رياضيات ,4 كتب لغة فرنسية , 3 كتب لغة انجليزية و 5 كتب فيزياء؟

<u>الحالة 1:</u> كتب عشوائية لا يشترط وضع كتب نفس المادة معا:

$$P_{(6+4+3+5)} = 18!$$

<u>الحالة 2:</u> يشرط أن تكون كتب المادة موضوعة معا: $(P_6 \times \mathrm{P}_4 \times \mathrm{P}_3 \times \mathrm{P}_5) \times 4!$

حالة خاصة: التباديل الدائرية (تبديلة دائرية لـ n عنصر):

عدد التبديلات لـ n عنصر بوضعية دائرية هو $(\mathrm{n}-1)!$

مثال5: بكم طريقة مختلفة يمكن أن يجلس 07 أشخاص حول طاولة مستديرة ؟

$$P_{(7-1)} = (7-1)! = 6!$$

III- التراتيب Arrangements

تعريف: الترتيبة هي وضعية مرتبة لـ k عنصر مختار من n من العناصر المختلفة .

نظرية 03:

إذا كانت الترتيبة بدون تكرار، عدد الترتيبات بدون تكرار لـ k عنصر مأخوذة من n من العناصر المختلفة هو $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

البرهان: هناك n طريقة لإختبار العنصر الأول و $(n-1)$ طريقة لإختبار للثاني أي $n-1 = n-2+1$ (لأنه يمنع التكرار) و...و $n-r+1$ للعنصر r و حسب قاعدة الضرب يكون عدد التبديلات n عناصر مميزة مأخوذة r في كل مرة أي عدد الترتيبات r عنصر من بين أن n هو

$$n(n-1)\dots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} = A_n^r$$

نظرية 04:

إذا كانت الترتيبة بتكرار، عدد الترتيبات بتكرار لـ k عنصر مأخوذة من n من العناصر المختلفة هو $\tilde{A}_n^k = n^k$.

مثال 6 : لتكن المجموعة $E = \{a, b, c, d\}$

ما هو عدد الثلاثيات المرتبة التي يمكن تشكيلها من عناصر E ؟

بما أنه يوجد ترتيب في اختيار ال 3 عناصر فإن عدد الثلاثيات هو

$$A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = 4$$

مثال7: قام 3 لاعبين برمي 3 أحجار نرد. فما هو عدد النتائج الممكنة لهذه التجربة العشوائية ؟

عدد النتائج الممكنة في زهرة نرد واحدة هو 6 وعند رمي 3 أزهار نتحصل على ثلاثيات مرتبة لكن يمكن أن تحتوي على أرقام معادة وبالتالي فان عدد الثلاثيات مع التكرار هي:

$$\tilde{A}_6^3 = 6^3$$

مثال8: لتكن المجموعة $\{1.2.3.4.5\}$ كم عددا مكون من رقمين مع التكرار يمكن تكوينه من عناصر هده المجموعة؟

IV- التوفيقات Combinaisons

تعريف: التوفيقة هي وضعية غير مرتبة لـ k عنصر مأخوذة من n عنصر مختلف. تختلف التوفيقة عن الأخرى إذا غيرنا عناصرها .

مثال9: لتكن المجموعة $E = \{a, b, c, d\}$

- ما هو عدد التوفيقات المشكلة من 03 عناصر من E؟

نظرية 05:

إذا كانت التوفيقة بدون تكرار فإن عدد التوفيقات لـ k عنصر مأخوذة من n عنصر مختلف هو

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

البرهان: نحسب عدد الترتيبات r عنصر من بين n عنصر بعدد من الطرق يساوي

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

و الطريقة الثانية نقسم العناصر n إلى مجموعتين تحتوي إحداهما على r و الأخرى على $(n-r)$ عنصر ثم نرتب عناصر المجموعة الأولى ليكن X عدد طرق التقسيم العناصر n إلى مجموعتين عدد الترتيبات هو: $X.r!$.و منه:

$$X.r! = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$=> X = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

نظرية 06:

إذا كانت التوفيقة بتكرار فإن عدد التوفيقات لـ k عنصر مأخوذة من n عنصر مختلف هو

$$\tilde{C}_{n+k-1}^{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-k)!}$$

مثال10 :

بكم طريقة يمكن اختيار لجنة تتكون من 3 رجال و 2 سيدات من بين 7 رجال و 5 نساء ؟

$$C_7^3 \times C_5^2 = \frac{7!}{3!\,4!} \times \frac{5!}{2!\,3!} = 350$$

مثال11 :

يختار في كل عام في إحدى الكليات وفد مكون من 4 طلبة لتمثيل الكلية في الاجتماع السنوي للاتحاد الطلابي.

1- بكم طريقة يمكن اختيار الوفد إذا كان عدد الطلبة الدين تتوفر فيهم الشروط هو 12؟

$$C_{12}^4 = \frac{12!}{4!\,8!} = 495$$

2- - بكم طريقة يمكن اختيار الوفد إذا كان 2 من الطلبة الملائمين لن يستطيعا الحضور معا؟

$$C_{10}^3 . C_2^1 + C_{10}^4 . C_2^0$$

3- بكم طريقة يمكن اختيار الوفد إذا كان طالب و طالبة متزوجين و لا يمكن لأحدهما الحضور منفردا؟

$$C_{10}^4 . C_2^0 + C_2^2 . C_{10}^2$$

ملاحظات:

انطلاقا من أن $0! = 1$ بالاتفاق، فإنه :

1 / من أجل $0 \le k \le n$ ، $C_n^k = C_n^{n-k}$ /2 $C_n^0 = C_n^n = 1$

/3 $C_n^1 = C_n^{n-1} = n-1$ /4 $C_n^2 = C_n^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$ لما $n \ge 2$

/5 من أجل $0 \le k \le n$ ، $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$

من هاته العلاقة يمكننا استخراج جدول باسكال كما يلي:

k / n	0	1	2	3			
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		

6/ صيغة ثنائي نيوتن: من أجل كل عدد تام $n \geq 1$ وكل عددين حقيقيين a, b :

$$(a+b)^{\mathrm{n}} = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

مثال12: لنحسب $(a+b)^2$)

$$(a+b)^2 = \sum_{i=0}^{2} c_2^i a^i b^{n-i} = C_2^0 b^2 + C_2^1 ab + C_2^2 a^2 = b^2 + 2ab + a^2$$

تمرين: أحسب 2^n باستخدام ثنائي الحد لنيوتن.

<u>تـــــمـاريـــن الفصل الثالث</u>

<u>التمرين الأول:</u>

نفرض أنه لا يوجد تكرار في كامل التمرين.

1/ كم عدد مكون من 4 أرقام نستطيع أن نشكله بواسطة 7 أرقام التالية1، 2، 4، 5، 6، 8، 9.

2/ كم عدد الأرقام الأقل من 5000؟

3/ كم عدد زوجي؟

4/ كم عدد فردي؟

5/ كم عدد من مضاعفات 5؟

<u>التمرين الثـــاني:</u>

اشترى علي أربعة كتب في الرياضيات (رياضيات عامة، التكامل، الجبر الخطي،و المجموعات)، و ثلاثة كتب في الإحصاء (إحصاء وصفي، احتمالات، إحصاء تطبيقي) و كتابان في الاقتصاد(اقتصاد كلي و اقتصاد جزئي). و عندما دخل بيته ترتيبها على رف شاغر في مكتبته. ما هو عدد الطرق الممكنة لتحقيق ذلك في الحالات التالية:

أ - توضع الكتب المتعلقة بنفس الموضوع متجاورة.

ب - كتب الرياضيات فقط توضع متجاورة

<u>التمرين الثالث:</u>

قررت إدارة إحدى الشركات إيفاد اثنى عشرة شخصا للحضور إلى اجتماع تنسيقي جهوي و وضعت تحت تصرفهم ثلاث سيارات بـ 6 مقاعد، و4 مقاعد، و مقعدين. بكم طريقة مختلفة يمكن توجيه هؤلاء الأشخاص إلى السيارات الثلاث بفرض أن:

- أي شخص من هؤلاء يمكنه السياقة (أي لهم كلهم شهادة السياقة).

- فقط هناك أربعة أشخاص من بين الـ 12 شخصا لهم شهادة السياقة.

<u>التمرين الرابـــع:</u>

1. نسحب بشكل عشوائي وعلى التوالي ، دون الارجاع ، 4 كرات من علبة تحتوي على 6 كرات حمراء ، 4 كرات سوداء و 5 كرات بيضاء. احسب عدد طرق سحب:

أ. 4 كرات

ب. 4 كرات من نفس اللون؟

ج. واحدة حمراء و واحدة بيضاء واثنان سوداء؟ i/ على الترتيب ii/ عشوائيا

د. 3 حمراء و واحدة بيضاء ؟ i/ على الترتيب ii/ عشوائيا

2. أجب على الأسئلة السابقة إذا تم إجراء السحب على التوالي مع الإرجاع.
3. أجب على الأسئلة السابقة إذا تم السحب في وقت واحد.

<u>التمرين الخامس:</u>

يريد معهد علمي توظيف مجموعة من 4 سكرتيرات بأربع لغات: العربية والفرنسية والإنجليزية والإسبانية. يتقدم 11 شخصًا للوظيفة، بما في ذلك 5 رجال .كم عدد الطرق التي يمكن بها اختيار هذه المجموعة في كل من الحالات التالية:

1 - جميع المرشحين ه م متعددو الكفاءة للغات الأربع.

2- يجب أن تظم المجموعة كلا الجنسين.

3- عدد متساو من الرجال والنساء.

4- عدد متساو من الرجال والنساء ، ولكن لا ينبغي أن يشارك رجل محدد في نفس الوقت مع امرأة معينة.

5 - مرشح واحد فقط هو متعدد الكفاءة للغات الأربع ، و الآخرين يجيدون فقط ثلاث لغات ، و ه ي نفسها لجميع المتوشحين الآخرين.

<u>التمرين السادس:</u>

خزانـة تحتوي على n زوج من الأحذيـة (أي 2n حذاء). نستخـرج 2p حذاء، $2p<2n$.

1/- ما هو عدد الطرق لعدم استخــراج أي زوج مــن الأحذيــة؟

2/- بكم طريقة يمكننا استخـــراج زوج واحــد مــن الأحذيــة؟

الفصل الرابع حساب الاحتمالات

Calcul de probabilités

❖ مقـــدمـــــة:

علم الاحتمالات فرع أساسي من فروع الرياضيات، هو العلم الذي يهتم بدراسة الظواهر العشوائية و تحليلها، فيحاول تكميم الأمور الكيفية التي ترتبط بالتجارب و الاختبارات التي لا يمكن التنبؤ بنتيجتها بشكل حتمي قبل إجرائها . إذن **علم الاحتمالات** هو علم التنبؤ بالنتيجة.

I. مصطلحات

نظرية الإحتمال: (Théorie de probabilité) هي النظرية التي تدرس إحتمال وقوع أو عدم وقوع الحوادث العشوائية .

الإحتمال: (Probabilité) يعرف الإحتمال لغة بأنه أحد الخيارات المتاحة أمام تجربة أو حادثة غير محسومة النتيجة .

أما رياضيا فهو قيمة عددية تدل على مدى تكرارية هذا الخيار عند تطبيق التجربة لمرات عديدة.

من الأمثلة التي يمكن أن نصادفها، عن الاحتمال، في حياتنا اليومية نذكر:

- ما هو عدد حوادث السير التي ستقع غدا في مدينة معينة ؟
- كم سنة سيعيش المولود الجديد ؟
- ما كمية الأمطار التي ستهطل هذا الموسم في منطقة معينة ؟

نلاحظ أننا في كل حالة من الحالات الثلاث السابقة، لا يمكن أن نجيب عن السؤال إجابة محددة، لأن مثلا :

حوادث السير تخضع للعديد من العوامل المؤثرة و التي لا يمكن التنبؤ بها و منها :

الحالة التقنية للسيارة، حالة الطرق، الأحوال الجوية، الحالة النفسية للسائق... كل هذه العوامل و غيرها تجعل هذه الظاهرة عشوائية و تحتمل عدة خيارات.

من المصطلحات التي يمكن أن نصادفها في نظرية الإحتمال ما يلي:

1-1- التجربة العشوائية Expérience aléatoire

هي تجربة جميع نتائجها معروفة مسبقا لكن لا يمكن التنبؤ بهذه النتائج عند القيام بالتجربة، لكونها تعتمد على الصدفة و العشوائية، رغم أننا نقوم بالتجربة و نكررها تحت نفس الظروف و انطلاقا من نفس جملة الشروط.

مثال1:

رمي قطعة النقود هي تجربة عشوائية، لأننا على الرغم من معرفة نتائجها: النقش P و الوجه F ، لكن لحظة الرمي لا يمكننا أن نتنبأ إن كنا سنحصل على النقش أو على الوجه .

2-1- فضاء الأحداث Espace d'événements

تعريف1: نسمي فضاء الأحداث أو فضاء العينة مجموعة كل النتائج الممكنة لأي تجربة معطاة، نرمز له بـ Ω.

هذه المجموعة Ω ممكن أن تكون منتهية أو قابلة للعد، أو لها قدرة المستمر.

تعريف2:

أ - نقول عن مجموعة قابلة للعد dénombrable إذا وجد تقابل بينها و بين مجموعة الأعداد الطبيعية .

ب - نقول عن مجموعة أنها لها قوة المستمر إذا وجد تقابل بينها و بين مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

مثال 2:

- $\mathbb{Q}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ هي مجموعات قابلة للعد.
- $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^n$ هي مجموعات لها قدرة المستمر.

مثال3:

في تجربة رمي قطعة النقد النتائج الممكنة هي النقش P و الوجه F . اذن $\Omega=\{P, F\}$

مثال 4:

لنعطي بعض الأمثلة توضح مفاهيم التجربة، النتيجة و فضاء الأحداث

التجربة	النتيجة	فضاء الأحداث Ω
نرمي قطعة النقود	F, P	$\Omega = \{P, F\}$
نرمي حجر نرد	عدد يتغير من 1إلى 6	$\Omega = \{1,2, \dots 6\}$
نسحب كرة من صندوق يحتوي على كرات سوداء أو بيضاء أو حمراء	معرفة لون الكرة	$\Omega = \{B, N, R\}$
استعمال آلة لقياس ارتفاع الماء في سد ارتفاعه 15م	معرفة الارتفاع	$\Omega = [0,15]$
نرمي قطعتي نقود	ثنائية $(,j)$ حيث (i, j)=(F, P)	$\Omega = \{(i, j)\backslash i, j = P, F\}$ $= \{(P, P), (F, P), (F, P), (F, F)\}$
نرمي حجري نرد في الهواء	ثنائية (i, j) حيث $i, j = \overline{1,6}$	$\Omega = \{\dots \dots \dots \dots \dots \dots . .\}$

1 -3- عشيرة الأحداث Tribu des événements

في بعض التجارب لا يهتم الإحصائي بكل عناصر Ω أي بكل الأحداث الأولية لذلك كان من الضروري تعريف مفهوم الحدث.

تعريف 03 : نقول عن مجموعة $\mathcal{A}$ مؤلفة من مجموعات جزئية من Ω أنها عشيرة (قبيلة) إذا تحققت الشرط التالية:

1- المجموعة الكلية Ω تنتمى إلى $\mathcal{A}$ <=> $\Omega \in \mathcal{A}$.

2- الاستقرار بالانتقال إلى المتممة <=> $\forall A \in \mathcal{A} \Longrightarrow C_{\Omega}A = \bar{A} \in \mathcal{A}$.

3-الاستقرار من اجل الاتحاد المنتهي <=> $\forall A, B \in \mathcal{A} \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

4-الاستقرار من اجل الاتحاد غير المنته <=> $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A} \Longrightarrow \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

مثال5:

نرمي حجر نرد في الهواء، عندئذ $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

- العائلتان التاليتان هما قبيلتان على Ω: $\mathcal{A}_1 = \{\phi, \Omega\}$ القبيلة التافهة

$$\mathcal{A}_2 = \{\phi, \Omega, \{1,3,5\}, \{2,4,6\}\}.$$

- العائلة $\mathcal{A}_3 = \{\phi, \Omega, \{1\}, \{2,3\}, \{5,4,6\}\}$ هي ليست قبيلة على Ω. لماذا؟

خواص 1:

1 - كل قبيلة $\mathcal{A}$ على Ω مستقرة بالنسبة للتقاطع المنتهي و للتقاطع اللانهائي و القابل للعد .

2 - $\mathcal{P}(\Omega)$ مجموعة أجزاء Ω هي قبيلة على Ω.

البرهان:

- لتكن I مجموعة منتهية أو قابلة للعد $(A_i)_{i\in I}$، عائلة من عناصر $\mathcal{A}$ نريد أن نبرهن أن $\cap_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$

$$\forall i \in I, A_i \in \mathcal{A} \overset{2)}{\Rightarrow} \bar{A}_i \in \mathcal{A} \xRightarrow{3)\wedge 4)} \bigcup_{i\in I} \bar{A}_i \overset{2)}{\Rightarrow} \overline{\bigcup_{i\in I} \bar{A}_i} = \bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$$

و منه $\mathcal{A}$ مستقرة بالنسبة للتقاطع المنتهي أو القابل للعد.

- $\mathcal{P}(\Omega)$ يحتوي على Ω و يحقق المسلمات الأخرى للتعريف.

تعريف 04 :

1 - نسمي الثنائية $(\Omega,\mathcal{A})$ فضاء قابل للقياس أو قابل للاحتمال.

2 - كل عنصر من $\mathcal{A}$ يسمى حدث. نحكم على وقوع الحدث أو تحققه إذا كانت نتيجة التجربة العشوائية تنتمي إلى الحدث.

خواص 2

1- المجموعة $\mathcal{P}(\Omega)$ هي عشيرة على Ω .

2- تقاطع عشيرتين هو عشيرة لكن اتحاد عشيرتين ليس دوما عشيرة.

3- $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \Longrightarrow \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

1 -4- الحادث و أنواعه

تعريف 05:

أ - نسمي حدثا أوليا élémentaire كل عنصر من فضاء الأحداث Ω .

ب - نسمي حدثا بسيطا simple كل مجموعة جزئية من Ω لا تحتوي على مجموعات جزئية أخرى.

ج- نسمي حدثا مركبا composé كل مجموعة جزئية من Ω تحتوي على مجموعات جزئية أخرى.

د- المجموعة الخالية $\emptyset$ تسمي الحدث المستحيل Impossible و هو حدث لا يتحقق أبدا.

ه- فضاء الأحداث Ω يسمي الحادث المؤكد certain.

مثال 06:

نرمي حجر النرد مرتين متتاليتين في الهواء عندئذ:

$$\Omega = \{(\mathrm{i},\mathrm{j})\backslash \mathrm{i},\mathrm{j} = \overline{1,6}\} = \{(1,1),(1,2)\ldots(6,6)\} \Rightarrow \mathrm{card}\,\Omega = 36$$

أ - الأحداث $(\mathrm{i},\mathrm{j})\ \mathrm{i},\mathrm{j} = \overline{1,6}$ هي أحداث أولية.

ب - $\Omega_k = \{(i,j)\backslash i,j = \overline{1,6}\}_{k=\overline{1,36}}$ هي أحداث بسيطة .

ت - $A = \{(1,2),(1,6)\}$ حدث مركب .

ث - $\mathrm{B} = \{(1,7)\}$ هو حدث مستحيل.

ج - $\Omega = \{(\mathrm{i},\mathrm{j})\backslash \mathrm{i},\mathrm{j} = \overline{1,6}\}$ حدث مؤكد.

1-4-1- عمليات المجموعات:

يمكن أن نربط بين الأحداث باستعمال العمليات المختلفة المعرفة على المجموعات لكي نكون أحداث جديدة:

1) وقوع حدثين على الأقل: A∪B هو الحدث الذي يقع بوقوع أحد الحدثين على الأقل.

2) وقوع حدثين معا: A∩B هو الحدث الذي يقع إذا وقع A و B معا أي في نفس الوقت.

3) نفي الحدث A: أو متممة A في Ω: هو الحدث الذي يقع إذا لم يقع A، يرمز له بـ $\overline{A}$.

4) الحدث A-B هو الحدث الذي يقع بوقوع A و عدم وقوع B وهي $A \cap \bar{B}$.

5)- $A \vartriangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B)(A \cap B)$: هو الحدث الذي يقع بوقوع أحد الحدثين A و B ولكن ليس في نفس الوقت

2-4-1- الحوادث المتنافية (المنفصلة) Evénements disjoints

تعريف 06: إذا كان كل من A و B حدثين فإننا نقول أنهما حدثان منفصلان أو متنافيان إذا و فقط إذا كان A∩B=∅. الحوادث المتنافية هي تلك الحوادث التي لا يمكن أن تتحقق معا (في آن واحد) .

مثال 7: نلقي حجر نرد في الهواء عندئذ $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ و ليكن B :<<ظهور عدد زوجي>> أي $B = \{2,4,6\}$ وليكن A: <<ظهور عدد فردي >> أي $A = \{1,3,5\}$.

لدينا $A \cap B = \emptyset$ أي A و B حدثان متنافيان.

الخلاصة: إن لغة الأحداث ترتبط بلغة أجزاء مجموعة بالكيفية التالية:

الحدث	الأجزاءΩ
الحدث الأولى	ω من Ω
الحدث البسيط	جزء وحيد العنصرSingleton $\{\omega\}$
الحدث المركب	هو جزء من Ω
الحدث المؤكد	Ω
الحدث المستحيل	ϕ
الحدث $A \Lambda B$	$A \cup B$
الحدث AVB	$A \cap B$
نفي الحدث A	$\bar{A}$
الحدث B⇐ A	$A \subset B$
A و B متنافيان	$A \cap B = \phi$

1-4-3- الحوادث المستقلة Evénements indépendants

نقول عن أحداث أنها مستقلة إذا كان وقوع أحدها لا يؤثر ولا يتأثر بوقوع الحادث الآخر.

مثال8:

نتائج رميات متعاقبة لقطعة النقد مستقلة عن بعضها البعض.

ملاحظة 2 :

- الأحداث المتنافية مستقلة و العكس غير صحيح (المستقلة ليست بالضرورة متنافية).
- الحوادث غير المتنافية قد تكون مستقلة و قد تكون غير مستقلة.

II- الفضاء القابل للاحتمال Espace probabilisable

تعريف 07 : نسمي الثنائية $(\Omega, \mathcal{A})$ بفضاء قابل للقياس .

ملاحظة: يمكن أن نختار في الحالات العامة العشيرة $\mathcal{P}(\Omega)$ على المجموعة Ω. بلعتبار أنها أكبر عشيرة ممكنة على Ω.

تعريف08: القبيلة المولدة بواسطة جزء من Ω **Tribu engendrée**

لتكن $\varphi \subset \mathcal{P}(\Omega)$. تسمي قبيلة مولدة بواسطة φ و نرمز لها ب$\sigma(\varphi)$ أصغر قبيلة تحتوي على φ.

مثال 9: نرمي حجر نرد في الهواء عندئذ

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$\varphi = \{\{1\}\} \subset \mathcal{P}(\Omega)$$

$$\sigma(\varphi) = \{\phi, \Omega, \{1\}, \{2,3,4,5,6\}\}$$

III- حساب الاحتمال Calcul de probabilité

إن الهدف من حساب الاحتمالات هو تعيين الاحتمالات المرتبطة بتجربة ما و هذا انطلاقا من معرفة احتمالات بعض الأحداث.

3-1- ظهور مفهوم الاحتمال

لقد رأينا في الفقرة 1 أنه عند إجراء تجارب معينة فإننا نرفق بكل تجربة فضاء أحداث Ω و نتحصل على نتيجة من Ω، أي على حدث أولي كلما أعدنا التجربة. فإذا كررنا نفس التجربة عدة مرات، نلاحظ أن النتيجة في بعض التجارب ترتبط بوسائط يمكن مراقبتها، مثل تجربة قياس درجة غليان الماء، بينما في البعض الآخر تتغير النتيجة بطريقة غير مرتقبة، مثل رمي حجر النرد. إن التجارب الأولى تسمى تجارب حتمية déterministe و تتم تحت شروط معينة. تمكن من اشتقاق قوانين تسمح بتنبؤ النتيجة. أما التجارب الثانية تسمى تجارب عشوائية aléatoire، و دراستها هو هدف دراسة نظرية الاحتمال.

إذا رمينا حجر نرد في الهواء فإنه بالتأكيد يسقط على الأرض، لكن ليس من المؤكد أن يظهر العدد 6. فإذا كررنا هذه التجربة n مرة، و افترضنا أن k هو عدد مرات ظهور العدد 6، فقد لوحظ تجريبيا أن النسبة $\frac{k}{n} \leq \frac{n}{n} = 1$ ، و التي تسمى التكرار النسبي fréquence relative ، تصبح مستقرة في المدى الطويل أي أنها تقترب من نهاية ما. هذا الاستقرار يعتبر أساس نظرية الاحتمال. و يعرف الاحتمال $\mathbb{P}$ لحدث A ، يمكن أن يقع k مرة من بين n مرة، $0 \leq \mathbb{P}(A) = \frac{k}{n} \leq 1$ تحت نفس الشروط .

3-2 - فضاء الإحتمال Espace de probabilisé

ليكن $(\Omega, \mathcal{A})$ فضاء قابل للاحتمال.

تعريف 9: نسمي احتمال على $(\Omega, \mathcal{A})$ كل تطبيق $\mathbb{P}$ من $\mathcal{A}$ في المجال [0,1] يحقق البديهيات التالية:

$(a1$ $$\mathbb{P}(\Omega) = 1$$

$(a2$ $$\forall (A,B) \in \mathcal{A}^2; A \cap B = \phi$$

$(a3$ $$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

$(a4$ من أجل كل متتالية $(A_i)_{i\in I}$ قابلة للعد من عناصر $\mathcal{A}$ و متنافة مثنى مثنى فإن :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)$$

تعريف 10: نسمي الثلاثية $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ فضاء احتمال أي فضاء مزود باحتمال $\mathbb{P}$.

ملاحظة : إذا كانت Ω مجموعة منتهية يكفي إثبات الشروط الثلاث الأولى لبرهان أن $\mathbb{P}$ احتمال.

نظرية01:

ليكن $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ف. احتمال. عندئذ من أجل كل متتالية $(A_i)_{i=\overline{1,n}}$ من عناصر $\mathcal{A}$ متنافية مثنى مثنى فإن:

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$

البرهان: البرهان بالتراجع

من أجل $\boldsymbol{n=2}$:

ليكن $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)$; $A_1 \cap A_2 = \phi$

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل $n-1$

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_i)$$

و نبرهن أنها صحيحة من أجل n

لدينا

$$\mathbb{P}\left((\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i) \cup A_n\right) = \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$$

و لكن

$$(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i) \cap A_n = \bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n) = \bigcup_{i=1}^{n-1} \phi = \phi$$

و منه

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \cup A_n\right) =^{a2} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) + \mathbb{P}(A_n) =^{ح} \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_i) + \mathbb{P}(A_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$

خواص:

ليكن $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ فضاء احتمال عندئذ لدينا الخواص التالية:

1) $\forall A \in \mathcal{A};\ \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
2) $\mathbb{P}(\phi) = 0$
3) $\forall (A, B) \in \mathcal{A}^2 : A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
4) $\forall (A, B) \in \mathcal{A}^2 : \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

5) من أجل كل متتالية $(A_n)_n$ من أجل عناصر $\mathcal{A}$ فإن:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

ملاحظات:

1) في حالة $I = \{i \in \mathbb{N}; i = \overline{1,n}\}$ تصبح الخاصية رقم 5 كما يلي :

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$

و تسمى هذه المتراجحة بمتراجحة بول.

2) $\forall (A_1, A_2, A_3) \in \mathcal{A}^3,$

$$\mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{3} A_i\right) = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(A_i) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

3) $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i=1, j=1}^{nn} \mathbb{P}\left(A_i \cap A_j\right) + \cdots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}(\cup_{i=1}^{n} A_i)$

و نفسر على أنها احتمال وقوع حدث على الأقل من بين n حدث.

مثال 10 :

ليكن A و B حدثين بحيث $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{8}, \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$

- احسب: $\mathbb{P}(\bar{A}), \mathbb{P}(\bar{B}), \mathbb{P}(A \cup B),\ \mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B})\ , \mathbb{P}(\bar{A} \cup \bar{B})$

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}, \quad \mathbb{P}(\bar{B}) = 1 - \mathbb{P}(B) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

$$\mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(\overline{A \cup B}) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = \frac{3}{8}$$

$$\mathbb{P}(\bar{A} \cup \bar{B}) = \mathbb{P}(\overline{A \cap B}) = 1 - \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{4}$$

تمرين :

ليكن A و B حدثين بحيث $\mathbb{P}(A) = \frac{5}{8}, \mathbb{P}(A \cup B) = \frac{7}{8}, \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$:

-احسب احتمال : تحقق A, تحقق B , تحقق A دون B.

3-3- تعريف احتمال على فضاء قابل للقياس

3-3-1- على فضاء منته قابل للعد

ليكن $(\Omega, \mathcal{A})$ فضاء قابل للقياس (فضاء قابل الاحتمال). نفرض ان Ω منته و ليكن $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$.

سؤال: كيف يمكن الحصول على فضاء الاحتمال المنتهي ؟

يمكن الحصول على فضاء احتمال منته $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ بتعريف الاحتمال $\mathbb{P}$ على الفضاء $(\Omega, \mathcal{A})$ و, ذلك بتعيين مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة $(p_i)_{i=\overline{1,n}}$ بحيث مهما يكن $i = \overline{1,n}$ فان $p_i = \mathbb{P}(\{\omega_i\})$. بشرط أن تحقق الأعداد $(p_i)_{i=\overline{1,n}}$ ما يلي :

$$1 - \forall i = \overline{1,n}, 0 \leq p_i \leq 1;$$

$$2 - \sum_{i=1}^{n} p_i = p_i + \cdots + p_i = 1$$

يكون الاحتمال الذي نرمز له بالرمز $\mathbb{P}(A)$ ، الذي يعني احتمال تحقق الحدث A ، تعريفا مجموع احتمالات العناصر ω_i التي تنتمي إلى A . أي إذا فرضنا مثلا أن $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ فان $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{\omega_1\}) + \mathbb{P}(\{\omega_2\}) + \mathbb{P}(\{\omega_3\})$.

مثال 11:

نلقي حجر نرد في الهواء مرتين متتاليتين، عين فضاء الاحتمال المرفق

أ - تعيين فضاء الأحداث : $\Omega = \{(i,j) \ / \ i,j = \overline{1,6}\} => card\, \Omega = 36$

إذن Ω منته.

ب - تعيين القبيلة: نأخذ $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ أي $card\, \mathcal{P}(\Omega) = 2^{card\ \Omega}$ و منه $\mathcal{P}(\Omega)$ منته

إذن $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ ف.قابل للاحتمال.

ح - إنشاء $\mathbb{P}$:

$$\Omega = \{w_k = (i,j) | i,j = \overline{1,6}, \qquad k = \overline{1,36}\}$$

لإنشاء $(p_k)_{k=\overline{1,36}}$ بحيث $\sum_{k=1}^{36} P_k = 1$

واضح أن:

$$\forall k = \overline{1,36}: P(\{w_k\}) = P(\{(i,j)\}) = \frac{1}{36}$$

عندئذ

$$\forall k = \overline{1,36}: P_k \geq 0\ et \sum_{k=1}^{36} P_k = 1$$

و منه $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ف.إ.

مثال 12 :

ليكن $\Omega = \{a,b,c,d\}$. أي من التطبيقات التالية تعرف احتمالا

i. $\mathbb{P}(\{a\}) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(\{b\}) = \frac{1}{8}, \mathbb{P}(\{c\}) = \frac{1}{4}, \mathbb{P}(\{d\}) = \frac{1}{5}.$

ii. $\mathbb{P}(\{a\}) = \frac{-1}{2}, \mathbb{P}(\{b\}) = \frac{1}{4}, \mathbb{P}(\{c\}) = \frac{1}{4}, \mathbb{P}(\{d\}) = \frac{1}{2}.$

iii. $\mathbb{P}(\{a\}) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(\{b\}) = \frac{1}{8}, \mathbb{P}(\{c\}) = \frac{1}{4}, \mathbb{P}(\{d\}) = \frac{1}{8}.$

مثال 13 :

صنع حجر نرد بحيث يكون احتمال ظهور العدد في الرمية الواحدة متناسبا مع العدد نفسه.

- عين احتمال ظهور أي وجه من الوجوه الستة. بماأن $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

$$\forall k \in \Omega;\ \mathbb{P}(\{k\}) = \alpha k \Rightarrow \sum_{k=1}^{6} \alpha k = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{21}$$

$$\Rightarrow \forall k \in \Omega;\ \mathbb{P}(\{k\}) = \frac{k}{21}$$

- احسب احتمال تحقق الأحداث التالية :

ا) ظهور عدد زوجي. $A = \{2,4,6\}$ <=

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{6\}) = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

ب) ظهور عدد أولي. $B = \{1,2,3,5\}$ <= $\mathbb{P}(\mathrm{B}) = \frac{11}{21}$

ج) ظهور عدد فردي.$C = \{1,3,5\}$ <= $\mathbb{P}(\mathrm{C}) = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$

د) ظهور عدد أولي أو عدد زوجي.$(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$ <= $\mathbb{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathbb{P}(\mathrm{A}) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$

$\mathbb{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \frac{12}{21} + \frac{11}{21} - \frac{2}{21} = \frac{21}{21}$=1

و) ظهور عدد فردي أولي. $\mathbb{P}(\mathrm{C}) = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$

ي) ظهور عدد زوجي وعدم ظهور عدد أولي.$D = \{4,6\}$ <= $\mathbb{P}(\mathrm{D}) = \frac{10}{21}$

3-3-2- على فضاء غير منته قابل للعد

يمكن أيضا الحصول على فضاء احتمال غير منته $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ بتعريف احتمال $\mathbb{P}$ على الفضاء القابل الاحتمال $(\Omega, \mathcal{A})$,حيث Ω غير منته قابل للعد أو غير قابل للعد , و ذلك بتعيين مجموعة الأعداد الحقيقية $(p_i)_{i \in I}$ بحيث I هي مجموعة كيفية قابلة للعد أو غير قابلة للعد حسب طبيعة المجموعة Ω. الأعداد $(p_i)_{i \in I}$ تحقق :

$$1 - \forall i = I, 0 \leq p_i \leq 1;$$

$$2 - \sum_{\mathrm{i}=1}^{\infty} p_i = p_i + p_2 + \cdots = 1$$

مثال 14: نلقي قطعة نقود حتى ظهور الوجه F لأول مرة.

أ - تعيين Ω:

هنا النتيجة الملاحظة هو عدد مرات إلقاء قطعة نقود ظهور الوجه F

$$\Omega = \{1,2, \ldots \quad \ldots\} = \mathbb{N}^*$$

حيث:

$$\{n\} = \underbrace{P \wedge P \wedge P \ldots}_{\text{مرة}(n-1)} \wedge F$$

هو فضاء احداث لا نهائي:

ب - تعيين فضاء قابل للاحتمال:

نأخذ $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

و منه $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ فضاء قابل للاحتمال

ج- انشاء الاحتمال $\mathbb{P}$:

ننشئ $\mathbb{P}$ بحساب إحتمال كل حدث أولي:

$$P_n = \mathbb{P}(\{n\}) = \mathbb{P}\left(\underbrace{P \wedge P \dots \wedge}_{(n-1)fois} P \wedge F\right) = P(P) \times P(P) \dots P(P) \times$$
$$P(F) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \dots \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = {}^{1}\!/_{2^n} > 0, \forall n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}$$

و منه $\mathbb{P}$ احتمال

و بالتالي $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ فضاء الاحداث.

3-4- الاحتمال المنتظم Probabilité uniforme

في كثير من الأحيان توحي الخواص الطبيعية لتجربة ما بأن عناصر فضاء الاحداث Ω لها نفس الاحتمال و في هذه الحالة يسمى هذا الفضاء بالاحتمالات المتساوية أو الفضاء المنتظم.

3-4-1- على فضاء أحداث منته

ليكن Ω فضاء أحداث منته حيث $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ اي $card\Omega=n$.

تعريف 11 : نسمي احتمالا منتظما على $(\Omega, \mathcal{A})$ الاحتمال $\mathbb{P}$ المعرف كما يلي :

$$\mathbb{P}(\{w_i\}) = \frac{1}{card\ \Omega}, \forall i = 1, \dots, n$$

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)\ ; \mathbb{P}(A) = \frac{card\ A}{card\ \Omega}$$

أي أن احتمال تحقق الحدث A هو حاصل قسمة عدد الحالات الملائمة لانجاز أو تحقق الحدث A و عدد الحالات الممكنة.

مثال15:

اختيرت 3 مصابيح كهربائية بطريقة عشوائية من بين 15 مصباحا، 5 منها غير صالحة، أوجد احتمال أن يكون:

أ- جميعها صالحة. $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{C_{10}^{3} C_{5}^{0}}{C_{15}^{3}}$

ب- 1 فقط غير صالح. $\mathbb{P}(B) = \frac{C_{5}^{1} C_{10}^{2}}{C_{15}^{3}}$

ج- 1 على الأقل غير صالح. $\mathbb{P}(C) = \frac{C_{5}^{1} C_{10}^{1} + C_{5}^{2} C_{10}^{1} + C_{5}^{3} C_{10}^{0}}{C_{15}^{3}}$

د- 2 على الأكثر صالحين. $\mathbb{P}(D) = \frac{C_{10}^{2} C_{5}^{1} + C_{10}^{1} C_{10}^{2} + C_{10}^{0} C_{5}^{3}}{C_{15}^{3}}$

3-4-2- على فضاء غير منته غير قابل للعد

في هده الحالة نفرض أن Ω يملك مقياسا هندسيا محددا كالطول ,المساحة آو الحجم بشرط ان نختار النقط من Ω بطريقة عشوائية . فيكون احتمال وقوع حدث ما A أي احتمال أن تنتمي النقطة المختارة إلى A هو النسبة بين المقياس بالنسبة ل A و المقياس بالنسبة ل Ω أي

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{طول } A}{\text{طول}\Omega}, \quad \mathbb{P}(A) = \frac{\text{مساحة}A}{\text{مساحة}\Omega}, \quad \mathbb{P}(A) = \frac{\text{حجم}A}{\text{حجم}\Omega},$$

و بدلك نكون قد عرفنا احتمالا منتظما على Ω.

مثال 16:

نرمي إبرة على طاولة مربعة عرضها $50\ cm$. وضعت فوقها قطعة نقود نصف قطرها $3cm$. أحسب احتمال سقوط الإبرة على قطعة النقود إذا علمت أن نصف قطر الابرة هو $10^{-5}mm$.

ليكن الحدث A:"سقوط الإبرة على قطعة النقود" و Ω هو مجموعة نقاط الطاولة ومنه:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{s(A)}{s(\Omega)} = \frac{3.14 \times 0.03}{0.5^{2}} 0.01$$

تمرين:

نختار بطريقة عشوائية نقطتين A و B على المستقيم العددي $\mathbb{R}$ بحيث $0 \leq A \leq 3$ و $-2 \leq B \leq 0$. ما هو احتمال أن تكون المسافة d بين النقطتين A و B أكبر من 3.

IV- الاحتمالات الشرطية و استقلال الأحداث

ليكن $(\Omega,\mathcal{A},P)$ ف. احتمال، سنهتم في هذه الفقرة بالمسألة التالية: ما هو احتمال وقوع الحدث A علما أن الحدث B قد وقع.

مثال: نسحب علة التوالي كرتين من الصندوق الذي يحتوي على كرات سوداء و حمراء. ما هو احتمال سحب كرة سوداء في المرة الثانية علما أنه ثم سحب كرة حمراء في المرة الأولى؟

1-4 - الاحتمالات الشرطية Probabilités conditionnelles

ليكن $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ فضاء احتمال و B حدث بحيث $\mathbb{P}(B)>0$.

تعريف *12* : نسمي احتمالا شرطيا على $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ التطبيق الذي نرمز له بالرمز $\mathbb{P}(.|B)$ (الاحتمال الشرطي علما تحقق مسبق للحدث B) و الذي يرفق لكل $A\in\mathcal{A}$ العدد :

$$\mathbb{P}(A|B)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

عندها نسمي الفضاء $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}(.|B))$ *بفضاء الاحتمال الشرطي و* $\mathbb{P}(A|B)$ *يسمى احتمال حدوث* A *علما* أن B قد تحقق مسبقا.

مثال17:

ليكن A و B حدثين حيث $\mathbb{P}(A)=\frac{1}{2},\mathbb{P}(B)=\frac{1}{3},\mathbb{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}$

- احسب الاحتمالات التالية: $\mathbb{P}(A|B),\mathbb{P}(B|A),\mathbb{P}(\bar{A}|B),\mathbb{P}(\bar{B}|A),\mathbb{P}(\bar{A}|\bar{B})$.

$$\mathbb{P}(A|B)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}=\frac{3}{4}\ /\ \mathbb{P}(B|A)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}=\frac{1}{2}\ /\ \mathbb{P}(\bar{A}|B)=\frac{\mathbb{P}(\bar{A}\cap B)}{\mathbb{P}(B)}=\frac{\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}=\frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(\bar{B}|A)=\frac{\mathbb{P}(\bar{A}\cap B)}{\mathbb{P}(A)}=\frac{\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(\mathrm{A}\ )}=\frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(\bar{A}|\bar{B})=\frac{\mathbb{P}(\bar{A}\cap\bar{B})}{\mathbb{P}(\bar{B})}=\frac{\mathbb{P}(\overline{A\cup B})}{\mathbb{P}(\bar{B})}=\frac{1-\mathbb{P}(A\cup B)}{1-\mathbb{P}(B)}=\frac{1-\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(A\cap B)}{1-\mathbb{P}(B)}=\frac{5}{8}$$

خواص

1) $\mathbb{P}(\bar{A}|B)=1-\mathbb{P}(A|B)$

2) $\mathbb{P}(A|B\cap C)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B|C)}{\mathbb{P}(B|C)}$

مثال 18 :

نختار بطريقة عشوائية رقمين من بين الأرقام من 1 إلى 9. إذا كان مجموعهما زوجيا اوجد احتمال أن يكون الرقمان المختاران فرديين.

لكي يكون المجموع زوجيا يجب أن يكون الرقمان المختاران زوجيان أو فرديان.

ليكن الحدثان A:"الرقمان المختاران فرديان " <= $cardA = C_5^2$

B: "الرقمان المختاران زوجيان " <= $cardB = C_4^2$ مع $A \cap B = \emptyset$

ومنه

$$\mathbb{P}(A|A \cup B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap (A \cup B))}{\mathbb{P}(A \cup B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)} = \frac{C_5^2 / C_9^2}{C_5^2 / C_9^2 + C_4^2 / C_9^2} = \frac{5}{8}$$

تمرين:

لدينا ثلاثة صناديق مظهرها الخارجي متطابق، يحتوي الصندوق الأول a كرة بيضاء، b كرة سوداء. و يحتوي الصندوق الثاني على d كرة بيضاء،c كرة سوداء، أما الصندوق الثالث فيحتوي فقط على x كرة بيضاء

يتقدم شخص بطريقة عشوائية من أحد الصناديق و يسحب كرة . احسب ما يلي:

أ - احتمال سحب كرة بيضاء من كل صندوق .

ب - احتمال بأن تكون الكرة المسحوبة بيضاء.

2-4 - مبدأ الاحتمالات المركبة Principe de probabilités composées

ليكن $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ فضاء احتمال و $A, B \in \mathcal{A}$

لدينا

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A|B)}{\mathbb{P}(B)} => \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|B).\mathbb{P}(B)$$

يمكن تعميم هذا الجداء حسب النظرية التالية:

نظرية 02:

لتكن $(A_\mathrm{i})_{\mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{n}}}$ مجموعة أحداث بحيث $\mathbb{P}\left(\cap_{i=1}^{n} A_i\right) \neq 0$ إذن

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \dots \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

مثال 19 :

وعاء به 7 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء، نختار 3 كرات من الوعاء واحدة تلوى الأخرى دون إرجاع.

- أوجد احتمال أن تكون الكرتان الأولى و الثانية من اللون الأحمر و الثالثة بيضاء.

لتكن الأحداث التالية: R_{i}:"سحب كرة حمراء في المرة i"، B_{i}:"سحب كرة بيضاء في المرة i".

بما أن السحوبات غير مستقلة لنحسب:

$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap B_3) = \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}(R_2|R_1)\mathbb{P}(B_3|R_1 \cap R_2) = \frac{7}{10}\,\frac{6}{9}\,\frac{3}{8} = \frac{7}{40}$$

3-4- صيغة الاحتمالات الكلية Formule de probabilités totales

ليكن $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ فضاء احتمال و B حدث كيفي .

نظرية 03:

لتكن $\{A_1, \dots, A_n\}$ أحداثا تشكل تجزئة ل Ω بحيث $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$ و $A_i \in \mathcal{A}$; $\forall i = \overline{1, n}$ إذن

$$\forall B \in \mathcal{A}; \mathbb{P}(B) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathbb{P}(B|A_i)\,.\,\mathbb{P}(A_i)$$

مثال 20: 3 صناديق متماثلة، الأول يحتوي 5 كرات بيضاء و 5 سوداء، الثاني يحتوي 8 كرات بيضاء و 2 سوداء و الثالث يحتوي 4 كرات بيضاء و 6 سوداء. نختار عشوائيا صندوقا ثم نسحب منه كرة.

- ما هو احتمال أن تكون هذه الكرة بيضاء.

لتكن الأحداث التالية: U_{i}:"سحب كرة من الصندوق i" i=1,2,3 ، B:"سحب كرة بيضاء ".

بما أن$\{U_1, U_2, U_3\}$ أحداثا تشكل تجزئة منتهية لـ Ω فإن:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{3} \mathbb{P}(B|U_i)\,.\,\mathbb{P}(U_i) = \frac{5}{10}\,\frac{1}{3} + \frac{8}{10}\,\frac{1}{3} + \frac{4}{10}\,\frac{1}{3} = \frac{17}{30}$$

4-4- قاعدة بايز (قانون بايز) Formule de Bayes

ليكن$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ فضاء احتمال نفرض دائما أن $\{A_1, \dots, A_n\}$ هي مجموعة أحداث تشكل تجزئة ل Ω و ليكن B حدث كيفي احتمال وقوعه موجب تماما.

نهتم هنا بتحقق الحدث $\mathrm{A_i}$ من اجل i ثابت في المجموعة $\{1,2, \dots, \mathrm{n}\}$ علما أن الحدث B قد تحقق. بعبارة أخرى نريد حساب $\mathbb{P}(\mathrm{A}_i|B)$.

نظرية 04:

نفرض إن الأحداث $A_1, \dots, A_n$ تشكل تجزئة لـΩ و B حدث من $\mathcal{A}$. إذن من اجل كل $i = 1,2, \dots n$:

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(B)}$$

مثال21:

في أحد المصانع تنتج 3 آلات M_1، M_2 و M_3 على التوالي 50% ، 30 % و 20% من الإنتاج الكلي لهذا المصنع، نسبة الإنتاج الذي به عيوب لهذه الآلات هي على التوالي 3 % ، 4 % و 5 % . نختار عشوائيا قطعة من منتوج هذا المصنع .

1- فما هو احتمال أن يكون بهذه القطعة عيب؟

2- إذا كانت القطعة المسحوبة بها عيب، فما هو احتمال أن تكون من إنتاج الآلة M_1 ؟

الحل:

1- لتكن الأحداث التالية: M_i:"سحب قطعة من إنتاج الآلة i" i=1,2,3 ، D:"القطعة المسحوبة معيبة ".

بما أن$\{M_1, M_2, M_3\}$ أحداث تشكل تجزئة منتهية لـ Ω فإن:

$$\mathbb{P}(D) = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(D|M_i) \, . \, \mathbb{P}(M_i) = (0.03)\ 0.5 + (0.04)\ 0.3 + (0.05)\ 0.2 = 0.037$$

2- بما أن$\{M_1, M_2, M_3\}$ أحداث تشكل تجزئة منتهية لـ Ω وحسب نظرية بايزفإن:

$$\mathbb{P}(M_1|D) = \frac{\mathbb{P}(D|M_1)\mathbb{P}(M_1)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{(0.03)\ 0.5}{0.037} = 0.405$$

5-4- الأحداث المستقلة Événements Indépendants

نقول أن الحدث A مستقل عن الحدث B إذا كان حدوث احدهما لا يؤثر ولا يتأثر بحدوث أو عدم حدوث الآخر.

تعريف 13 (استقلال حدثين):

ليكن $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ فضاء احتمال و A و B حدثين من $\mathcal{A}$. نقول أن الحدثين A و Bمستقلان احتماليا أو بالاحتمال إذا كان

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

مثال 22:

نرمي قطعة نقود 3 مرات. عين فضاء الأحداث. $\Omega = \{(i,j,k)\backslash i,j,k = P,F\}$

لنعتبر الأحداث A :" الرمية الأولى تعطي الوجه". B :"لرمية الثانية تعطي الوجه".

C: "الحصول على الوجه مرتين متتاليتين".

- هل الأحداث A et B,B et C, A et C مستقلة.

1- لدينا , $\mathbb{P}(A) = \frac{4}{8}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{4}{8}$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{(FFF),(FFP)\}) = \frac{2}{8}$

وبالتالي الحدثين A و Bمستقلان.

بنفس الطريقة نجد أن B و C غير مستقلان وأيضا A و C غير مستقلان.

تعريف 14 (استقلال عدة أحداث)

ليكن $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ فضاء احتمال نفرض ان $A_1, A_2, \dots, A_n$ هي مجموعة من الأحداث. نقول عن الاحداث $A_1, A_2, \dots, A_n$ أنها مستقلة إجمالا إذا كان من اجل كل ترتيبة $(j_1,j_2,\dots,j_k)$ حيث $k=2,3,\dots n$

من المجموعة $\{1,2,\dots,n\}$ فان

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) = \mathbb{P}(A_{j_1})\mathbb{P}(A_{j_2})\mathbb{P}(A_{j_3})\dots\mathbb{P}(A_{j_k}), k = \overline{1,n}$$

ملاحظة: نقول أن الأحداث مستقلة مثنى مثني إذا كان

$$\forall i \neq j; i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n};\ \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$$

مثال23 :

ليكن $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ فضاء احتمال و لتكن A_1, A_2, A_3, A_4 أحداث تشكل تجزئة ل Ω بحيث

$$\forall \mathrm{i} = 1,2,3,4; \mathbb{P}(\mathrm{A_i}) = \frac{1}{4}$$

ولتكن الأحداث $A = A_1 \cup A_2, B = A_3 \cup A_2, C = A_4 \cup A_2$

- تحقق من أن الأحداث A,B ,C مستقلة مثنى مثنى ثم بين أنها ليست مستقلة إجمالا.

1- من أجل A و B :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

2- من أجل A و C :

$$\mathbb{P}(A\cap C)=\mathbb{P}(A_2)=\frac{1}{4}=\ \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$$

3- من أجل B و C :

$$\mathbb{P}(B\cap C)=\mathbb{P}(A_2)=\frac{1}{4}=\ \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

بالتالي الأحداث مستقلة مثنى مثنى. تبقى من أجل A و B و C

$$\mathbb{P}(A\cap B\cap C)=\mathbb{P}(A_2)=\frac{1}{4}\neq\ \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)=\frac{1}{8}$$

وبالتالي هي ليست مستقلة إجمالا.

خواص

إذا كان الحدثان A و B مستقلان فان

1- A و $\overline{\mathrm{B}}$مستقلان و كذلك ($\overline{\mathrm{A}}$ و B).

2- $\overline{\mathrm{B}}$ و $\overline{\mathrm{A}}$ مستقلان.

3- $\mathbb{P}(A\cup B)=1-\mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}(\bar{B})$

4- $\mathbb{P}(A|B)=\mathbb{P}(A),\qquad \mathbb{P}(B|A)=\mathbb{P}(B)$

5- إذا كانت الأحداث $\mathrm{A}_1,A_2,\dots,A_n$ مستقلة إجمالا إذن الأحداث $\bar{A}_1,\overline{A_2},\dots,\bar{A}_n$ مستقلة إجمالا و يكون لدينا

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=\ \mathbb{P}(\bar{A}_1)\mathbb{P}(\bar{A}_2)\dots\mathbb{P}(\bar{A}_n)$$

البرهان: (تمرين)

تـــــماريـــــن الفصل الرابـع

تمرين 01:

لتكن الأحداث الكيفية الثلاثة التالية A، B و C.

أ/ عبر عن الأحداث التالية:

1- A فقط وقع. 2- A وB وقعا ولكن نفى C. 3- A، B و C وقعت معا. 4- على الأقل حدث وقع.

5- على الأقل اثنين وقعا. 6- حدثان على الأكثر وقعا. 7- حدث فقط وقع. 8- حدثين أو أكثر وقعوا.

9- حدثين فقط وقعا. 10- لا أحد من الأحداث الثلاثة وقع.

ب/ برهن أن الحدث $A\Delta(B\Delta C)$ هو: وقوع حدث فقط أو الأحداث الثلاثة معا.

تمرين 02:

نرمي قطعة نقد و زهرة نرد.

1 - أوجد الفضاء القابل للاحتمال.

2 - عين الحوادث التالية: A :"يظهر الوجه و عدد زوجي"، B :" يظهر عدد أولي"، C :"تظهر الصورة و عدد فردي".

3 - عبر عن الأحداث التالية: A أو B يتحققان- B و C يتحققان – B يتحقق وحده.

تمرين 03:

ليكن $(\Omega , \mathcal{A} ,P)$ ف. إ و $(A_i)_{i=\overline{1,n}} \in \mathcal{A}$

1/أ) برهن أن : $P(A_1\cap A_2)\geq P(A_1)-P(\bar{A}_2)$.

ب)أستنتج أن $P(\bigcap_{i=1}^{3} A_i)\geq 1-\sum_{i=1}^{3} P(\bar{A}_i)$

2/ برهن أن: $P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)\geq 1-\sum_{i=1}^{n} P(\bar{A}_i)$

تمرين 04:

للحصـــــــول علـــى المعـــاملات c , b , a للمعــادلــة: $ax^2 + bx + c = 0$

نــرمـــي حجــر نــرد ثــلاث مــرات متتــاليــة:

1)- عـــين فضــاء الأحـداث Ω.

2)- عـــين الاحتمـــال حـــتى يـــكون للمعــادلــة :

أ)- جـــذور حقـــيقيــة . ب)- جـــذور صحيحة.

تمرين 05:

صندوق يحتوي على ثلاث كرات مرقمة 10، 30،20 و 40. نقوم بثلاث سحوبات متتالية مع الإرجاع.

1 - ما هو عدد النتائج الممكنة؟

2 - ما هو احتمال الحصول على الحالات التالية:

أ - الكرية الأولى المسحوبة تحمل الرقم 10، الثانية الرقم 40، الثالثة الرقم 20؟

ب - الكرية الأولى المسحوبة تحمل الرقم 30 و الثانية الرقم 20؟

ت - الكرية الثانية المسحوبة تحمل الرقم 20؟

تمرين 06:

يوجد في مدينة ثلاثة مراكز للاستعجالات، خمسة (5) مرضى يتصلون في نفس اليوم بمركز هاتفي بعد اختيارهم عشوائيا لمركز ما من بين هذه المراكز على الأنترنث.

1- ما هو فضاء الأحداث المرافق لهاته التجربة العشوائية؟ أحسب $card(\Omega)$.

2- ما هو احتمال أن 5 مرضى يتصلون بنفس المركز؟

3- ما هو احتمال أن الثلاث مراكز يتم الاتصال بهم؟

تمرين 07:

جهاز يحتوي على 6 ترانزيستور بحيث 2 منها غير صالحة.

نتعرف عليها عن طريق تجربة الواحد تلو الآخر. نتوقف عند إيجاد الترانزيستورات غير الصالحة.

احسب الاحتمالات التالية:

1- نتوقف بعد تجربتين.

2- نتوقف بعد أكثر من 3 تجارب.

تمرين 08:

تلقى مدير متجر للكمبيوتر طلبية من مفاتيح US Bبحيث وجد أن 5٪ من الصناديق تالفة .يعتقد المدير أن:

- 60٪ من الصناديق التالفة تحتوي على مفتاح فاسد واحد على الأقل.

- 98٪ من الصناديق الغير تالفة لا تحتوي على أي مفتاح فاسد.
يشتري عميل صندوقًا من هذه الكمية . نعرف الحدث A: "الصندوق تالف " وبالحدث D: "يحتوي الصندوق الذي تم شراؤه على مفتاح تالف واحد على الأقل."
1- احسب الاحتمالات التالية

$P(A), P(\bar{A})$ و $P(D \mid A)$ و $P(D \mid \bar{A})$ و $P(\bar{D} \mid A)$ و $P(\bar{D} \mid \bar{A})$

2 - استنتج احتمال حدوث D.

3- يلاحظ العميل أن أحد المفاتيح التي تم شراؤها هو معيب .ما هو احتمال أنه اشترى صندوق تالف؟

تمرين 09:

في مجتمع إحصائي يمكن أن يكون الفرد مصاب بالصم من جهة أو من جهتين. نفرض أن احتمال الإصابة من اليمنى يساوي احتمال الإصابة من الجهة اليسرى، و أن هذين الحدثين مستقلين، نرمز لهذا الاحتمال بالرمز a

1) نعتبر فرد مصاب بالصم، احسب احتمال:

أ - إصابته بالصم من جهة واحدة.

ب - إصابته بالصم من جهتين.

2) لتكن الأحداث التالية: S :"الفرد مصاب بالصم"،D :" الفرد مصاب من الأذن اليمنى"، G : "الفرد مصاب من الجهة اليسرى"

أ - احسب $P(D|S)$ و $P(G|S)$.

ب - استنتج أن D وG غير مستقلين بفرض S.

تمرين 10:

يجـــري طـــالب ثــلاثة امتحــانات متتــالية، احتمـــال نجــاحه في الامتحـــان الأول هــو P ، احتمـــال نجــاحه في الامتحــان الثــاني (في الامتحــان الثــالث علــى التوالــي) هو P مع العـلم أنه نجح في الامتحـــان الأول (فـي الامتحـــان الثـــاني على التوالي) وتســاوي P/2 إذا لـم ينجح فـــي الامتحـــان الأول (فـــي الامتحـــان الثـــاني علـــى التوالـــي).

1/ أحســب احتمـــال نجـــاح الطـــالب فـــي الامتحـــان الأول؟

2/ أحســب احتمـــال نجـــاح الطـــالب فـــي الامتحـــان الثـــالث؟

3/ أحســب احتمـــال نجـــاحه فـــي الامتحـــانات الثـــلاث؟

4/ لكـــي ينـــجح الطـــالب فـــي العـــام عليـــه أن ينـــجح فـــي امتحـــانين علـــى الأقل، مـا هـو احتمـــال نجاحـــه فـــي العـــام؟

تمرين 11:

جهاز كهرومنزلي يمكن أن يركب بواسطة قطع من النوع الرفيع أو بواسطة قطع من النوع العادي. في الحالة الأولى يكون احتمال اشتغاله بدون خلل خلال الزمن t هو 0,95 و في الحالة الثانية هو 0,70. إن حوالي 40% من الأجهزة تصنع بواسطة القطع من النوع الرفيع.

خضع الجهاز الكهرومنزلي لتجربة اشتغاله خلال الزمن t وتبين أنه بدون خلل.

- احسب الاحتمال بأنه مصنوع من قطع النوع الرفيع.

تمرين 12:

ليكن الصندوق A به 5 كرات حمراء و 3 سوداء و 8 خضراء، الصندوق B به 3 حمراء و 5 سوداء ثم نرمي زهرة نرد متوازنة، إذا ظهر الرقم 3 أو 6 نسحب كرة من B ، ما عدا ذلك نسحب من A.

1) ما هو احتمال سحب كرة حمراء، خضراء، سوداء.

2) إذا كانت الكرة حمراء، ما هو احتمال أن تكون من A؟

3) إذا كانت الكرة المسحوبة سوداء، ما احتمال أن يظهر الرقم 5 في زهرة النرد؟

امـتـحـانـات نـمـوذجـيـة:

امـتـحـان 01

تمرين1:

أجرينا اختبار الموثوقية (test de fiabilité) لـ100 جهاز متماثل . تم تسجيل مدة الحياة ، بالساعات (h) ، حتى الفشل (نهاية قدرة الجهاز على أداء الوظيفة المطلوبة).

توزيع مجموعة من 100 جهاز حسب مدة الحياة

مدة الحياة $(\times 100h)$	$[0;2[$	$[2;3[$	$[3;5[$	$[5;8[$	$[8;10[$	$[10;13[$
عدد الأجهزة	36	20	16	12	10	6

المطلوب:

1-حدد المجتمع الإحصائي، الوحدة الإحصائية، المتغير الإحصائي المدروس ونوعه لهذا التوزيع؟

2- مثل هذه المعطيات بيانيا مع الشرح.

3 - مثل المنحنى التراكمي الصاعد واستخرج الوسيط بيانيا.

4- احسب:

أ - نسبة الأجهزة التي مدة حياتها لا تتعدى 650 ساعة.

ب - نسبة الأجهزة التي مدة حياتها على الأقل 800 ساعة و لكن أقل من 1300 ساعة.

5- أحسب كلا من :المتوسط الحسابي، الوسيط والمنوال مع التعليق. ماذا يمكن القول حول هذا التوزيع؟

6- أحسب التباين والانحراف المعياري لهذا التوزيع ؟ ثم استنتج معامل التغاير. علـــــق.

7- نفرض أن مدة الحياة المتوسطة لنفس الجهاز لكن من علامة أخرى تقدر ب 400 ساعة وأن الانحراف المعياري يساوي 100 ساعة، قارن بين العلامتين من خلال مدة الحياة والتشتت معطيا القراءة الإحصائية لذلك؟

تمرين2:

I - علبة تحتوي على 7 قطع حيث 3 منها غير صالحة. نسحب عينة ذات 3 قطع.

1- بكم طريقة يمكننا سحب هذه العينة.

2- ما هو عدد العينات التي تحتوي على 3 قطع صالحة ؟

3- ما هو عدد العينات التي تحتوي على قطعة صالحة على الأقل؟

II - ليكن $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ فضاء احتمالي وليكن الحدثين A و $B \in \mathcal{A}$.

برهن أن:

i - $\mathbb{P}(A \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$

ii- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

III ـيحتوي صندوق U على 6 كرات متطابقة مرقمة من 1 إلى 6. نسحب كرتين على التوالي و بدون إرجاع من U:

1) عين فضاء الأحداث المرفق .
2) ليكن الحدثA :"أكبر رقم مسحوب هو 5". احسب احتمال حدوث A.
3) أحسب احتمال أن يكون أكبر رقم مسحوب مختلف عن 5.

امتحان 02

تمرين1:

فيما يلي جدول تكراري يبين توزيع 50 طالب حسب معدلاتهم .

فئات العلامات	]60,35]	]67,60]	]76,67]	]84,76]	]100,84]
عدد الطلبة	2	21	18	8	1

المطلوب:

1 - ما هي الصفة المدروسة ؟ و ما هي طبيعتها ؟
2 - رسم المدرج و المضلع التكراري.
3 - ما هي نسبة الطلبة الذين تتراوح معدلاتهم بين (65 و 75)؟
4 - اوجد المنوال و الوسيط حسابيا.
5 - احسب المتوسط الحسابي. علق على شكل التوزيع المعطى.
6 - احسب الانحراف المعياري ومعامل الاختلاف. علـــق على تشتت المعطيات.
7 - نفرض أن معدل النقاط المتوسط في قسم آخر يقدر ب 75 وأن الانحراف المعياري يساوي10 ، قارن مستوى وتشتت المعدلات في القسمين، ما هي القراءة الإحصائية لذلك؟

تمرين2:

I - ممثل تجاري يتنقل بين المدن في إطار عرض بضائعه على أصحاب المحلات، وخلال دورة قرر زيارة ست مدن.

1 - فإذا كانت هناك عشرة مدن في الحيز الجغرافي الذي يهمه، بكم طريقة يمكنه اختيار مجموعة من ست مدن للقيام بزيارتها.

2 - في ظل الفرضية السابقة، لكن الترتيب في الزيارات له أهمية، ما هو عدد الطرق (المسارات) المختلفة الممكنة.

3 - بفرض أنه تم تحديد المدن الست التي سيزورها الممثل التجاري، لكن المسار لم يحدد، بكم طريقة يمكن زيارة المدن الست.

II- إذا كان من المفروض أن يزور منطقتين بحيث تحتوي الأولى على 5 مدن والثانية على 6 مدن. - فبكم من طريقة يمكنه اختيار مدينتين من المنطقة الأولى و أربعة من المنطقة الثانية للقيام بجولته؟

تمرين3:

لتكن Ω مجموعة منتهية و $\mathcal{A}$ عائلة من أجزاء Ω .

أ) برهن أن الشرطين التاليين متكافئين

1) $\mathcal{A}$ قبيلة على Ω.

2) i) $\Omega \in \mathcal{A}$ ii) $\forall (A,B) \in \mathcal{A}^2 : A\setminus B \in \mathcal{A}$.

ب) ليكن $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ فضاء احتمالي. برهن أنه $\forall (A,B) \in \mathcal{A}^2$ لدينا ما يلي:

1) $\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A}) + \mathbb{P}(\bar{B}) \geq 1$

ت) يجري مخبر اختبارا للكشف عن مرض معين M نعتقد أن 2 % من المجتمع مصابون بهذا المرض. احتمال أن يعطي هذا الإختبار نتيجة موجبة، من أجل شخص مصاب بهذا المرض هو 0.90 و من أجل شخص غير مصاب به هو 0.05. نختار بطريقة عشوائية شخص من هذا المجتمع. فما هو إحتمال أن يكون هذا الشخص مصاب إذا كانت نتيجة الاختبار موجبة؟

امتحـــــان 03

تمرين1:

عند مراقبة الوصول إلى مقر العمل لمجموعة من العمال (100 عامل) في إحدى المؤسسات تم الحصول على المعلومات التالية :(الوحدة :الدقيقة)

توزيع مجموعة من 100 عامل حسب زمن تأخرهم عن العمل

زمن التأخر	]10- 5]	]15 − 10]	]20 − 15]	]30 − 20]	]40 − 30]	]45 − 40]
عدد العمال	10	18	40	20	8	4

المطلوب:

1-حدد المجتمع الإحصائي، الوحدة الإحصائية، المتغير الإحصائي المدروس ونوعه لهذا التوزيع؟

2- مثل هذه المعطيات بيانيا.

3- أحسب كلا من :المتوسط الحسابي، الوسيط والمنوال؟ مع التعليق؟

4- أحسب كلا من :المدى ، المدى الربيعي ؟ مع الشرح؟

5- أثبت أن $V(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i)^2 - \bar{x}^2$ واستنتج أن $S(X) = \sqrt{M_Q^2 - \bar{x}^2}$

حيث M_Q هو المتوسط التربيعي للمتغير X.

6- إذا علمت أن :المتوسط التربيعي لزمن التأخر يساوي 21,25 دقيقة، أحسب التباين والانحراف المعياري؟

7- نفرض أن زمن التأخر المتوسط في مؤسسة ثانية يقدر ب 17,75 دقيقة وأن الانحراف المعياري يساوي 4 دقائق، قارن مستوى التأخر والتشتت في المؤسستين، ما هي القراءة الإحصائية لذلك؟

تمرين2:

I - ليكن $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ فضاء احتمالي وليكن الحدثين A و $B \in \mathcal{A}$.

برهن أن: $\mathbb{P}(A \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$

$$\mathbb{P}(A \Delta B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B)$$

II - يتكون مجلس إدارة من 11 عضو من بينهم 5 رجال و 6 نساء.

- بكم طريقة يمكن اختيار 3 أشخاص لشغل المناصب التالية: الرئيس، النائب، الكاتب.

* نريد تشكيل لجنة من 4 أشخاص:

1- بكم طريقة يمكن تشكيلها؟

2- ما هو عدد اللجان التي يمكن تكوينها بحيث تحتوي على 2 نساء و 2 رجال؟

3- ما هو احتمال أن تحتوي اللجنة على امرأة على الأقل؟

4- ما هو احتمال أن تحتوي اللجنة على رجل على الأكثر؟

امتحـــــــان 04

تمرين1:

تقدم وكالة خدمات الأفراد SEDEC خدمة احترافية تتيح اختيار الوظيفة للسكرتارية، وخاصة على مستوى السكرتارية التنفيذية . تريد مديرة الوكالة تجميع الرواتب السنوية التي حصل عليها الأشخاص الذين اتصلوا بوكالة التوظيف الخاصة بها . وأشارت أيضًا إلى طول الوقت ، بالأيام ، الذي استغرقه الحصول على وظيفة من وقت وضع الطلب في الوكالة .يتم عرض قيم هذين المتغيرين في الجداول أدناه، بقيم غير متناقصة:

المدة الزمنية للحصول على العمل (بالأيام)							
3	4	4	5	6	6	7	7
7	7	8	8	8	8	9	9
9	9	9	10	10	10	10	10
10	10	10	10	10	11	11	11
12	12	13	13	13	13	13	14

الأجر السنوي (بالدولار)				
13944	13944	13944	13944	13944
14758	14758	14758	14758	14758
15256	15256	15256	15256	15256
15552	15552	15552	15552	15552
15673	15673	15673	15673	15673
16245	16245	16245	16245	16245
16898	16898	16898	16898	16898
19067	19067	19067	19067	19067

المطلوب:

I-

1-حدد المتغيرين الإحصائيين في هذه الدراسة وما هو نوع كل منهما ؟

2- أوجد التوزيع الإحصائي للمتغير "المدة الزمنية" ثم مثله بيانيا.

3 - نريد تجميع المتغير الإحصائي "المدة الزمنية" في فئات سعتها 2 والحد الأدنى للفئة الأولى هو 3. أوجد التكرارات النسبية و النسب (%) لهذا التوزيع .

4- مثل مدرج التكرارات النسبية لهذا التوزيع مع المضلع التكراري.

5- احسب نسبة السكرتيرات الذين تحصلوا على عمل في مدة أقل من 9 أيام.

6- أحسب كلا من :المتوسط الحسابي، الوسيط والمنوال لكلا التوزيعين (الأصلي و المجمع). ماذا يمكن القول حول التجميع في فئات؟

II-

1 - باستخدام المعطيات المتعلقة بالأجر السنوي، أوجد التوزيع الإحصائي باستخدام فئات سعتها 1000$ والحد الأدنى للفئة الأولى هو 12500$.

2 - أحسب التكرارات النسبية لكل فئة. ثم مثلها بيانيا .

3 - ما هي نسبة الحالات التي يكون الأجر فيها أكبر من أو يساوي 14500$ لكن أقل من 16500$؟

4 - مثل المنحنى التراكمي الصاعد لهذه المعطيات.

5 - أوجد الأجر السنوي المتوسط و الأجر الوسيط و المنوال لهذا التوزيع.

6 - أحسب التباين والانحراف المعياري لهذا التوزيع إذا علمت أن $\sum_{i=1}^{7} f_i c_i^2 = 24505 \times 10^4$؟ ثم استنتج معامل الاختلاف. علـــق.

7 - في النشرة الإعلانية التي أعدتها المديرة للتو ، ورد أن أكثر من 50% من الأشخاص الذين اتصلوا بخدمة الوكالة وجدوا وظيفة في 10 أيام أو أقل، و أيضًا أكثر من 50% حصلوا على راتب أكبر من أو يساوي 15500 $ في السنة .استنادًا إلى البيانات الموجودة ، هل يمكن اعتبار هذا الادعاء "إعلانًا مضللًا"؟ نــاقـــــش.

تمرين2:

توجـد 6 ثنـــائيات مـن الأزواج فـــي غـرفـــة

1)- نختـــار بطـريقـة عـشوائيـــة 2 شخـص. احســب الاحتمـــال بـأن:

أ)- هـذان الشخصـــان متزوجـــان.

ب)- شخــص هو رجـــل و الآخـر امـــرأة.

2)- نختـــار بطـريقـة عشـوائيـــة 4 أشخــاص. احســب الاحتمـال بـــأن:

أ)- نكـــون قـــد اختـــرنا 2 زوج مـــــن الأزواج.

ب)- لا يـــكون أي زوج مـن بـــين 4 أشخـــــــاص.

ج)- لدينـــا بالضـــبط زوج واحـــد مـن بـــين 4 أشــــخـاص.

3)- نوزع بــطريـــقة عشـــوائيـة الأشخـــاص 12 إلـى 6 أفواج متكـونـة مـن 2 شخـص. احســب:

أ)- الاحتمــــال بـــان كـل فـوج يشكــل زوج مـــن الأزواج.

ب)- كــــل فـــوج يتشـــكل مـــن رجـــل و امـــرأة.

امتحـــــان 05

تمرين1:

في مكتبة الجامعة ، أجريت دراسة على عدد المستخدمين للمحطات التي تسمح للوصول إلى قاعدة البيانات (أجهزة كمبيوتر). أجريت دراسة استقصائية على مدار يومين (يُعتبران أيام الذروة) لعدد الوافدين من مستخدمي هذه المحطات في فاصل زمني مدته دقيقتان وكذلك وقت شغل خدمة الكمبيوتر المخصصة لمجتمع الجامعة. ثلاث محطات متاحة للمستخدمين.

I. الجدول التالي يحتوي على البيانات المتعلقة بعدد الواصلين لكل فاصل دقيقتين:

عدد الوافدين لكل فاصل 2 min									
0	0	2	1	1	1	4	2	0	0
1	1	1	2	2	3	0	4	3	0
0	2	2	2	3	0	1	1	1	1
2	2	1	3	2	2	5	4	3	2
1	4	4	3	3	2	3	1	2	2
3	3	0	1	4	3	2	1	2	2

1 - ما هي الصفة الإحصائية المدروسة وما هي طبيعتها؟

2 - رتب هذه البيانات في جدول إحصائي تكراري، ثم مثلها بيانيا.

3 - أوجد الدالة التراكمية ومثلها بيانيا.

4 - أحسب كلا من :المتوسط الحسابي، الوسيط والمنوال؟ مع التعليق؟

II. تم تلخيص الملاحظات المتعلقة بمدة شغل الخدمة (بالثانية) في التوزيع التكراري التالي:

مدة شغل خدمة الكمبيوتر	عدد المستخدمين
$0 \leq X < 300$	25
$300 \leq X < 600$	10
$600 \leq X < 900$	9
$900 \leq X < 1200$	3
$1200 \leq X < 1500$	2
$1500 \leq X < 1800$	1

1. أعط تمثيلا بيانيا مناسبا لهذه البيانات. استنتج المنوال
2. أرسم المنحنى التراكمي الصاعد . استنتج الوسيط بيانيا.
3. نعتبر أن الوحدات الإحصائية موزعة توزيعا منتظما داخل فئات المتغير الإحصائي، أوجد نسبة المستخدمين الذين تقل مدة استخدامهم للكمبيوتر عن 600 sec؟ بين 800و 900 sec ؟
4. أحسب كلا من :المتوسط الحسابي، الوسيط والمنوال، مع التعليق.

5. أحسب كلا من :التباين و الانحراف المعياري . علق على تشتت المعطيات؟

تمرين2:

I- أثبت أن $V(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i)^2 - \bar{x}^2$ واستنتج أن $S(X) = \sqrt{M_Q^2 - \bar{x}^2}$

حيث M_Q هو المتوسط التربيعي للمتغير X.

II- في كل حالة من الحالات التالية أوجد المتوسط الملائم وبين لماذا؟

1. شركة تدفع أجراً قدره40 دينارا للساعة لعمالها غير المهرة وعددهم 25 و 60 دينار للعمال شبه المهرة وعددهم 15و 80 دينار للعمال المهرة وعددهم 10. ما هو متوسط الأجور التى تدفعها الشركة ؟

2. إذا كان معدل التضخم لشعب ما هو 2% للسنة الأولى، و 5 % للسنة الثانية و 12.5 % للسنة الثالثة. فماهو متوسط التضخم في السنوات الثلاث؟

3. تقطع مسافرة مسافة قدرها 40km على الطريق خارج المدينة بسرعة 60 km/h ومسافة قدرها 10km على طرق داخل المدينة بسرعة 15km/h ومسافة قدرها100 km على طرق ذات إلتواءات بسرعة 45km/h. فما هي سرعتها المتوسطة في المسارات الثلاثة؟

تمرين3:

ليكن U_1،U_2 وحدتان من مصنع تنتجان نفس النوع من الترنزيستورات، بحيث تنتج الوحدة U_1 ضعف إنتاج الوحدة U_2. نسبة الإنتاج الفاسدة في الوحدتين هي على التوالي: 20% و 5%.

- نسحب ترانزيستور بطريقة عشوائية من إنتاج هذا المصنع.

1) احسب احتمال أن يكون هذا الترانزيستور ليس فاسداً.
2) لنفرض أن الترانزيستور المسحوب ليس فاسداً، ما هو احتمال أن يكون من إنتاج الوحدة U_1؟
3) ادرس استقلالية الحدثين التاليين:

A " الترانزيستور المسحوب ليس فاسد"

B " الترانزيستور المسحوب من إنتاج الوحدة U_1"

المــراجـع:

المراجع العربية

1- مختار الهانسي، مبادئ الإحصاء، الدار الجامعية، بيروت 1993.

2- كامل فليفل، الإحصاء، دار المناهج، الأردن 2009.

3- دلال القاضي، سهيلة عبد الله و محمود البياتي، الإحصاء للإداريين و الاقتصاديين، دار الجامد، الأردن 2005.

4-عدنان بن ماجد، محمود محمد إبراهيم و أنور أحمد، مبادئ الإحصاء و الاحتمالات، النشر والطابع، الرياض 1997.

5-السعدي رجال، نظرية الاحتمالات، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر 1994.

المراجع الأجنبية

1- Murray R. Spiegel, Theory and problems of statistics, Mc Graw Hill, New York 1987.

2- Gérald Baillargeon, Probabilité, statistique et techniques de régression, Les édition SMG, Québec 1989.

3- Renée Veysseyre, Statistique et probabilité pour l'ingénieur, Dunod, France 2000.

4- Fabrice MAZEROLLE, Statistique descriptive, Galino éditeur, Paris 2006.

5- Mohamed Bentarzi, Introduction au calcul de probabilités Tome 1, MSTD-BEN Edition, Alger 2003.