Cours de probabilité Avancée

Diffalah LAISSAOUI

Université de Médéa
Faculté des sciences
Département de mathématiques et Informatique

L3 Maths

Mars 2022

Definition

Etant donné un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on appelle variable aléatoire sur cet espace, toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} X : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R} \\ \omega \rightarrow X(\omega) \end{cases}$$

A chaque évènement élémentaire ω de Ω correspond un nombre réel x associé à la variable aléatoire X.

Remarque

Les variables aléatoires sont notées avec des lettres majuscules et les quantités déterministes avec des lettres minuscules. Nous notons $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. $X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\}$ se note $\{X = x\}$. $X^{-1}(]-\infty, a]) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq a\}$ se note

Example

Si l'on considère la constitution d'une fratrie de deux enfants, l'espace fondamental est constitué des évènements élémentaires suivant :

$$\Omega = \{GG, GF, FG, FF\}$$

Les valeurs possibles prises par la variable aléatoire X, « nombres de fille dans la famille » sont : $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

Definition

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé, une variable aléatoire X est une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dans $(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$.

Remarque

X est une application mesurable $\Longleftrightarrow X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$;

$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in A\}$

Definition

Une variable aléatoire est dite discrète si elle ne prend que des valeurs discontinues dans un intervalle donné (borné ou non borné). L'ensemble des nombres entiers est discret. En règle générale, si $X(\Omega)$ est un ensemble fini ou denombrable.

Example

On jette une pièce de monnaie, on a deux évènements $\{pile\}$, $\{face\}$. Soit X une variable aléatoire tel que $X\{pile\} = 1$ et $X\{face\} = 0$.

Example

on jette un dé à 6 faces, soit X une variable aléatoire tel que $X\{face\ i\} = i$.

Une variable aléatoire est caractérisée par l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre et par l'expression mathématique de la probabilité de ces valeurs. Cette expression s'appelle la loi de probabilité (ou distribution de probabilité) de la variable aléatoire.

Definition

La loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète est entièrement déterminée par les probabilités p_i des évènements $\{X = x_i\}$, x_i parcourant l'univers image $X(\Omega)$. La loi de probabilité de la variable aléatoire X (on dit aussi la fonction de masse de la variable aléatoire X) est donnée par $P(\{X = x_i\}) = p_i$.

Remarque

Afin de simplifier l'écriture, nous noterons pour la suite du cours : $P(\{X = x_i\})$ *équivalent à* $P(X = x_i) = f_X(x_i)$

Example

Dans le cas de la constitution d'une fratrie de deux enfants, si l'on fait l'hypothèse que la probabilité d'avoir un garçon est égale à celle d'avoir une fille $\frac{1}{2}$, alors la distribution de probabilité ou loi de probabilité du nombre de filles dans une fratrie de deux enfants est :

Ω	$X = x$	$P(X = x)$
GG	0	$\frac{1}{4}$
GF ou FG	1	$\frac{2}{4}$
FF	2	$\frac{1}{4}$

Propriétes

1. $f_X(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$
2. $\{x / f_X(x) > 0\}$ fini ou denombrable.
3. $\sum_x f_X(x) = 1$ en effet $\sum_{x \in \mathbb{R}} f_X(x) = \sum_{\{x/f_X(x)>0\}} f_X(x) + \sum_{\{\ x/f_X(x)=0\}} \ f_X(x) \nearrow^0 = \sum_{x \in X(\Omega)} f_X(x) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(w \in \Omega / X(w) = x) = P(\Omega) = 1$

reciproque

Soit $g(x)$ une fonction tel que :

1. $g(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.
2. $\{x / g(x) > 0\}$ = fini ou denombrable.
3. $\sum_{x \in \mathbb{R}} g(x) = 1$

alors il existe une variable aléatoire réelle Y tel que $g(x)$ est la fonction de masse de Y , $f_Y(x) = g(x)$.

Fonction de répartition (distribution)

Definition

On appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire X, la fonction F_X telle que :

$$\begin{cases} F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \to F_X(t) = P(X < t). \end{cases}$$

Concrètement la fonction de répartition correspond à la distribution des probabilités cumulées. Le plateau atteint par la fonction de répartition correspond à la valeur de probabilité 1 car $\sum_i p_i = 1$. L'importance pratique de la fonction de répartition est qu'elle permet de calculer la probabilité de tout intervalle dans $\mathbb{R}$.

Les propriétés associées à la fonction de répartition sont les suivantes :

Propriétés

Soit F_X la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X alors :

1. $\forall t \in \mathbb{R}, 0 \leq F_X(t) \leq 1$.
2. F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.
3. $\lim F_X(t) = 0$ quand $t \to -\infty$ et $\lim F_X(t) = 1$ quand $t \to +\infty$.
4. si $a \leq b$ $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

Example

On considère l'évènement ω « lancer de 3 pièces de monnaie ». On introduit une variable aléatoire X définie par $X(\omega)$ « nombre de piles de l'évènement ω». La loi de probabilité de X est :

Nombre de piles	$P(X = x_i)$	F_X
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$
2	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{8}$
3	$\frac{1}{8}$	1

Remark

Dans le cas d'une variable aléatoire discrète, on utilise un diagramme en bâtons pour visualiser la distribution de probabilités et une fonction en escalier pour la fonction de répartition.

Example

On jette une pièce de monnaie, on définie la variable aléatoire X par $X = 0$ si on obtient pile et $X = 1$ si on obtient face. Trouver la fonction de masse et la fonction de répartition.

Solution

On a $P(X=0)=\frac{1}{2}$, $P(X=1)=\frac{1}{2}$ *et* $P(X=x)=0$ *si* $x\neq 0$ *et* $x\neq 1$ *donc* $f_X(x)=\{^{\frac{1}{2}\ si\ x=0,\ x=1}_{0\ sinon}$ *la fonction de répartition*

$$F_X(x)=\begin{cases} 0\ si\ x<0 \\ \frac{1}{2}\ si\ 0\leq x<1 \\ 1\ si\ x\geq 1 \end{cases}$$

Example

1. Soit $G(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x<0 \\ \frac{1}{4} \text{ si } 0\leq x<1 \\ \frac{3}{8} \text{ si } 1\leq x<4 \\ 1 \text{ si } x\geq 4 \end{cases}$ Montrer que G est une fonction de répartition d'une variable aléatoire X.

Solution

On a $P(X=0)=\frac{1}{2}$, $P(X=1)=\frac{1}{2}$ *et* $P(X=x)=0$ *si* $x\neq 0$ *et* $x\neq 1$ *donc* $f_X(x)=\left\{\begin{smallmatrix}\frac{1}{2} \text{ si } x=0,\ x=1\\ 0 \text{ sinon}\end{smallmatrix}\right.$ *la fonction de répartition*

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x<0 \\ \frac{1}{2} \text{ si } 0\leq x<1 \\ 1 \text{ si } x\geq 1 \end{cases}$$

Example

1. Soit $G(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x<0 \\ \frac{1}{4} \text{ si } 0\leq x<1 \\ \frac{3}{8} \text{ si } 1\leq x<4 \\ 1 \text{ si } x\geq 4 \end{cases}$ Montrer que G est une fonction de répartition d'une variable aléatoire X.
2. trouver la fonction de masse de X.

Solution

- *G est une fonction croissante ;*

Solution

- *G est une fonction croissante ;*
- *G continue à droite ;*

Solution

- *G est une fonction croissante ;*
- *G continue à droite ;*
- $\lim G(x) = 0$ *quand* $x \to -\infty$ *et* $\lim G(x) = 1$ *quand* $t \to +\infty$ *G vérifie les trois propriétes de la fonction de répartition alors il existe une variable aléatoire* X *tel que* $G(x) = F_X(x)$.

Solution

- *G est une fonction croissante ;*
- *G continue à droite ;*
- $\lim G(x) = 0$ *quand* $x \to -\infty$ *et* $\lim G(x) = 1$ *quand* $t \to +\infty$ *G vérifie les trois propriétes de la fonction de répartition alors il existe une variable aléatoire* X *tel que* $G(x) = F_X(x)$.
- $f_X(x) = F_X(x) - F_X(x^-)$ *; pour les points de continuité* x *on a* $F_X(x) = F_X(x^-)$, *c-a-d* $f_X(x) = 0$ *(*x *points de continuité) ; pour les points de discontinuité en* x; $F_X(x) \neq F_X(x^-)$ *; on a trois atome :*

$$\begin{array}{l} x = 0 \;\; f_X(0) = F_X(0) - F_X(0^-) = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4} \\ x = 1 \;\; f_X(1) = F_X(1) - F_X(1^-) = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \\ x = 4 \;\; f_X(4) = F_X(4) - F_X(4^-) = \frac{5}{8} \end{array} \text{.d'ou}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} \; si \; x = 0 \\ \frac{1}{8} si \; x = 1 \\ \frac{5}{8} \; si \; x = 4 \end{cases}$$

Variables aléatoires continues

Example

Il existe des variables aléatoires dont les valeurs appartiennent à un intervalle de $\mathbb{R}$.

Example

1/ Durée de vie d'un transistor $\subset [0, +\infty[$. 2/ Le temps d'arrivée d'un train $\subset [0, 24h]$.

Definition

Une variable aléatoire continue X est une fonction qui associe à chaque résultat d'une expérience aléatoire un nombre réel. On note : $X : \Omega \to \mathbb{R}$

Definition

X est une variable aléatoire continue s'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tel que

$$P(X \in B) = \int_B f_X(x)dx, \ \forall B \subset \mathbb{R}.$$

f est appelée densité de X.

Propriétés :

1/ $f_X(x) \geq 0, \forall x$.

2/ $\{x / f_X(x) > 0\} = X(\Omega)$ c'est la réunion d'intervalle de $\mathbb{R}$.

3/ $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = 1$.

Démonstration.

1. $\forall B \subset \mathbb{R}$, On a $P(X \in B) = \int\limits_B f_X(x)dx \geq 0 \Rightarrow f_X(x) \geq 0$.

$\square$

Démonstration.

1. $\forall B \subset \mathbb{R}$, On a $P(X \in B) = \int\limits_{B} f_X(x)dx \geq 0 \Rightarrow f_X(x) \geq 0.$

2. $\int\limits_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = \int\limits_{X(\Omega)=\{x/f_X(x)>0\}} f_X(x)dx + \int\limits_{\overline{X(\Omega)}=\{x/f_X(x)=0\}} f_X(x)dx = \int\limits_{X(\Omega)=\{x/f_X(x)>0\}} f_X(x)dx = P(X \in X(\Omega)) = P(\omega/X(\omega) \in X(\Omega)) = 1.$

$\square$

Remarque

- $P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)dx.$

Definition

Pour tout x réel la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire continue X est donnée par

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) = P(X \in]-\infty, x]) \\ &= \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy. \end{aligned}$$

Remarque

- $P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)dx.$
- $P(X = x) = 0, \forall x.$

Definition

Pour tout x réel la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire continue X est donnée par

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) = P(X \in]-\infty, x]) \\ &= \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy. \end{aligned}$$

Remarque

- $P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)dx.$
- $P(X = x) = 0, \forall x.$
- $f_X(x) \neq P(X = x).$

Definition

Pour tout x réel la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire continue X est donnée par

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) = P(X \in]-\infty, x]) \\ &= \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy. \end{aligned}$$

Propriétés :

1. F_X est continue.

Remarque

Comme $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy$, *alors* $f_X(x) = F'_X(x)$.

Propriétés :

1. F_X est continue.
2. F_X est croissante.

Remarque

Comme $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy$, *alors* $f_X(x) = F'_X(x)$.

Propriétés :

1. F_X est continue.
2. F_X est croissante.
3. $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$; $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$.

Remarque

Comme $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy$, *alors* $f_X(x) = F_X'(x)$.

Example

On choisit au hasard un point du disque de rayon R. Soit X la distance de ce point à l'origine du disque, trouver la densité de X. Les valeurs possibles de $X \in [0, R]$.

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) = \frac{\text{nombre de cas favorable}}{\text{nombre de cas possible}} \\ &= \frac{\pi x^2}{\pi R^2} = \frac{x^2}{R^2}. \end{aligned}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \frac{x^2}{R^2} \text{ si } x \in [0, R[\\ 1 \text{ si } x \geq R. \end{cases} \quad \text{d'ou la densité } f_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin]0, R[\\ \frac{2x}{R^2} \text{ si } x \in]0, R[\end{cases}$$