Chapitre 4 : Produit d'espaces mesurés.

Prof. ZEROUKI Ibtissem

February 13, 2021

Contents

1 Produit d'espaces mesurés **2**
- 1.1 Tribu produit. 2
- 1.2 Mesure produit. 5
- 1.3 Théorèmes de Fubini. 6

1. Produit d'espaces mesurés

Dans ce chapitre on considère des intégrales sur des **espaces produits**, définissant ainsi des **intégrales multiples**. Pour intégrer sur un espace produit, il est nécessaire de définir une tribu sur cet espace, la plus naturelle est la **tribu produit**. Sur cette tribu on introduit la **mesure produit**. Les intégrales sur des espaces produit se ramènent à des intégrales simples grâce aux **Théorèmes de Fubini**.

1.1. Tribu produit.

Définition 1.1.1. *Le produit cartésiens de deux ensembles A et B, noté $A \times B$, est l'ensemble des couples (a, b) avec $a \in A$ et $b \in B$, i.e.*

$$A \times B = \{(a, b) \quad : \quad a \in A \text{ et } b \in B\}.$$

Définition 1.1.2. (***Tribu produit***) *. Soient $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables. La $\sigma-$**algèbre produit** $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ sur $X \times Y$ est la tribu engendrée par l'ensemble des pavés, c'est-à-dire*

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{P}) = \sigma(\{A \times B \;:\; A \in \mathcal{A} \text{ et } B \in \mathcal{B}\}).$$

Remarque 1.1.3. ♦ *Le produit de la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ par elle même donne la tribu borélienne sur $\mathbb{R}^2$. En effet $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ est engendrée par les produits d'intervalles ouverts $]a, b[\times]c, d[$, qui engendrent aussi le produit $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ On a donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

♦ *Plus généralement on a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \underbrace{\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})}_{n \text{ fois}}$.*

♦ *Les ensembles mesurables de* **bases** *de $X \times Y$ sont donc les pavés $A \times B$ de mesurables de X et Y. Cependant, il y a des parties mesurables dans $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, qui ne peuvent se voir comme des produit de mesurables de X et Y, par exemple le disque unité*

$$D(0, 1) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad x^2 + y^2 \leq 1\right\},$$

il est un élément de $\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})$, puisqu'on peut l'écrire comme image réciproque de l'intervalle $[0,1]$, par la fonction mesurable $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ telle que $f(x,y)=x^2+y^2$, ce qui nous permet d'écrire que $D(0,1)=f^{-1}([0,1])$.

Définition 1.1.4. (***Sections***) *Soient $G\subset X\times Y$, $f:X\times Y\longrightarrow Z$ une applications, $x\in X$ et $y\in Y$. On définit les* **sections** *de G par*

$$G_x=\{y\in Y \text{ tel que } (x,y)\in G\} \text{ et } G^y=\{x\in X \text{ tel que } (x,y)\in G\}.$$

Les sections de f sont définie par

$$\begin{array}{rcl} f_x:(Y,\mathcal{B}) & \longrightarrow & Z \\ y & \longmapsto & f(x,y) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} f^y:(X,\mathcal{A}) & \longrightarrow & Z \\ x & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

Exemple 1.1.5. *Pour $X=Y=\mathbb{R}$ on a $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ et*

$$([1,3]\times[-4,-2])_{x=2}=[-4,-2] \text{ et } ([1,3]\times[-4,-2])_{x=5}=\varnothing.$$

$$([1,3]\times[-4,-2])^{y=-3}=[1,3]\, et\, ([1,3]\times[-4,-2])^{y=0}=\varnothing.$$

Plus généralement, on a pour tout $A\in\mathcal{A}$ et $B\in\mathcal{B}$

$$(A\times B)_x=\begin{cases} B & :\text{si } x\in A \\ \varnothing & :\text{sinon} \end{cases} \text{ et } (A\times B)^y=\begin{cases} A & :\text{si } y\in B \\ \varnothing & :\text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 1.1.6. *Soient $G\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ et $f:(X\times Y,\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})\longrightarrow(Z,\mathcal{C})$ une fonction mesurable, alors*
1) Les sections de G, vérifient $G_x\in\mathcal{B}$ et $G^y\in\mathcal{A}$, pour tout $x\in X$ et $y\in Y$.
2) Les sections de f, $f_x:(Y,\mathcal{B})\longrightarrow(Z,\mathcal{C})$ et $f^y:(X,\mathcal{A})\longrightarrow(Z,\mathcal{C})$ sont mesurables.

Démonstration. 1) Montrant que $\mathcal{F}=\{C\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}:\ G_x\in\mathcal{B}\}$ est une tribu sur $E\times F$, pour tout $x\in E$.
En effet, on a
• $(X\times Y)_x=Y\in\mathcal{B}$, alors $X\times Y\in\mathcal{F}$.

• Soit $C\in\mathcal{F}$, alors $C_x\in\mathcal{B}$. Donc

$$\begin{aligned} (C^c)_x &= \{y\in Y \ :\ (x,y)\in C^c\}=F\diagdown\{y\in Y \ :\ (x,y)\in C\} \\ &= Y\diagdown C_x=(C_x)^c\in\mathcal{B}. \end{aligned}$$

D'où $C^c \in \mathcal{F}$.

• Soit $\{C_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{F}$, où I est un ensemble d'indice au plus dénombrable, alors $(C_i)_x \in \mathcal{B}$, pour tout $i \in I$.

$$\begin{aligned}\left(\bigcup_{i\in I} C_i\right)_x &= \left\{y \in Y \quad : \quad (x,y) \in \bigcup_{i\in I} C_i\right\} = \{y \in Y \quad : \exists i \in I \text{ où } \ (x,y) \in C_i\} \\ &= \bigcup_{i\in I} \{y \in Y \quad : \quad (x,y) \in C_i\} = \bigcup_{i\in I} (C_i)_x \in \mathcal{B}.\end{aligned}$$

Par conséquent $\bigcup\limits_{i\in I} C_i \in \mathcal{F}$.

Pour tout $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$, on a

$$\begin{aligned}(A \times B)_x &= \{y \in Y \quad : \quad (x,y) \in A \times B\} \\ &= \begin{cases} B \in \mathcal{B} & : \text{si } x \in A \\ \varnothing \in \mathcal{B} & : \text{sinon,} \end{cases}\end{aligned}$$

alors $A \times B \in \mathcal{F}$. D'où $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \subset \mathcal{F} \Longrightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \subset \mathcal{F}$.

Par conséquent, on a pour tout $x \in X$, $G \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \Longrightarrow G_x \in \mathcal{B}$.

En montrant que l'ensemble $\{C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} : \ G^y \in \mathcal{A}\}$ est une tribu sur $X \times Y$ contenant $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \forall y \in Y$, nous pouvons avoir le résultat suivant: si $G \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \Longrightarrow G^y \in \mathcal{A}$.

2) Soit $C \in \mathcal{C}$, on a

$$\begin{aligned}(f_x)^{-1}(C) &= \{y \in Y \quad : \ f(x,y) \in C\} \\ &= \left\{y \in Y \quad : \ (x,y) \in f^{-1}(C)\right\} = \left(f^{-1}(C)\right)_x.\end{aligned}$$

Comme f est une fontion mesurable, on a

$$f^{-1}(C) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \Longrightarrow \left(f^{-1}(C)\right)_x \in \mathcal{B} \Longrightarrow (f_x)^{-1}(C) \in \mathcal{B}.$$

Par conséquent la fonction f_x est mesurable.

De même pour f^y, pour $y \in F$, en écrivant $(f^y)^{-1}(C) = \left(f^{-1}(C)\right)^y \in \mathcal{A}$ ■

1.2. Mesure produit.

Rappel : La notion de la mesure $\boldsymbol{\sigma}-$**finie** est essentielle dans ce chapitre. On rappelle qu'une mesure μ sur un espace mesuré $(X, \mathcal{A})$ est $\sigma-$finie, s'il existe une suite $\{X_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{A}$ tel que $X = \bigcup\limits_{n\geq 0} X_n$ et $\mu(X_n) < +\infty$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On considère dans la suite $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés, avec μ et ν des mesures $\sigma-$finies.

Proposition 1.2.1. *Soit $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, alors les applications*

$$\begin{array}{rcl} (X, \mathcal{A}) & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ x & \longmapsto & \nu(E_x) \end{array} \quad \textit{et} \quad \begin{array}{rcl} (Y, \mathcal{B}) & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ y & \longmapsto & \mu(E^y) \end{array}$$

sont mesurables.

Proposition 1.2.2. *Ils existe une seule mesure, dite* ***mesure produit,*** *notée $\mu \otimes \nu$ sur $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, telle que*

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A) . \nu(B), \quad \textit{pour tout } A \in \mathcal{A} \textit{ et } B \in \mathcal{B}.$$

De plus, pour tout $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, on a

$$(\mu \otimes \nu)(E) = \int_X \nu(E_x)\, d\mu = \int_Y \mu(E^y)\, d\nu.$$

Exemple 1.2.3. (***Mesure de Lebesgue sur*** $\mathbb{R}^n$) *Comme*

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \underbrace{\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})}_{n \text{ fois}} := \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes n},$$

on peut munir $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ par la mesure produit $\underbrace{\lambda \otimes \cdots \otimes \lambda}_{n \text{ fois}} := \lambda^{\otimes n}$. Il s'agit de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, notée λ_n. Elle est invariante par translation et on a $\lambda_n \left(\prod\limits_{i=1}^{n} [a_i, b_i] \right) = \prod\limits_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$.

1.3. Théorèmes de Fubini.

Sous de bonnes conditions, le **Théoème de Fubini** permet de permuter les intégrations dans les intégrales multiples. Ainsi les intégrales multiples se ramènet à des intégrales simples **emboitées**.

Théorème 1.3.1. (**Théorème de Fubini – Tonelli**)
Soit $f : (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ *une fonction mesurable, avec* μ *et* ν *sont des mesures* $\sigma-$*fnies sur* $(X, \mathcal{A})$ *et* $(Y, \mathcal{B})$ *respectivement, alors on a*

(i) *La fonction* $x \longmapsto \int\limits_Y f_x d\nu$ *est* $\mathcal{A}-$*mesurable et la fonction* $y \longmapsto \int\limits_X f^y d\mu$ *est* $\mathcal{B}-$*mesurable.*

(ii) *On a*

$$\int\limits_{X\times Y} fd(\mu \otimes \nu) = \int\limits_X \left[\int\limits_Y f_x d\nu \right] d\mu = \int\limits_Y \left[\int\limits_X f^y d\mu \right] d\nu.$$

Démonstration. • Pour $f = \mathbb{I}_E$ pour $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, on a lim

$$\int\limits_Y f_x d\nu = \int\limits_Y (\mathbb{I}_E)_x \, d\nu = \int\limits_Y \mathbb{I}_{E_x} d\nu = \nu(E_x) \qquad (*)$$

et

$$\int\limits_X f^y d\mu = \int\limits_X (\mathbb{I}_E)^y \, d\mu = \int\limits_X \mathbb{I}_{E^y} \, d\mu = \mu(E^y). \qquad (**)$$

D'après la **Proposition 4.2.1**, ces deux fonctions sont mesurables, d'où (i).

$$\begin{aligned}
\int\limits_{X\times Y} fd(\mu \otimes \nu) \quad &= \int\limits_{X\times Y} \mathbb{I}_E \; d(\mu \otimes \nu) = (\mu \otimes \nu)(E) \\
\text{(Proposition 4.2.2)} \quad &= \int\limits_X \nu(E_x) \, d\mu = \int\limits_Y \mu(E^y) \, d\nu \\
&\underset{(*)}{=} \int\limits_X \left[\int\limits_Y f_x d\nu \right] d\mu \underset{(**)}{=} \int\limits_Y \left[\int\limits_X f^y d\mu \right] d\nu.
\end{aligned}$$

D'où (ii).

• Pour f étagée, on obtient (i) et (ii) par linéarité grâce au cas procédent.

• Pour f mesurable quelconque, il existe une suite croissante de fonctions mesurables étagées positives $\{f_n\}_n$ qui converge vers f, alors la suite $\{(f_n)_x\}_n$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives, qui converge vers f_x. Donc d'après le T.C.M. on a

$$\int\limits_Y f_x d\nu = \lim_{n\to+\infty}\int\limits_Y (f_n)_x \, d\nu,$$

alors la fonction $x \longmapsto \int\limits_Y f_x d\nu$ est mesurable.

En utilisant le même raisonnement on a

$$\int\limits_X f^y d\mu = \lim_{n\to+\infty}\int\limits_X (f_n)^y \, d\mu,$$

d'où la mesurabilité de la fonction $y \longmapsto \int\limits_X f^y d\mu$.

Pour montrer (ii), on applique le T.C.M. sur $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$, qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\int\limits_{X\times Y} f d(\mu\otimes\nu) &= \lim_{n\to+\infty}\int\limits_{X\times Y} f_n d(\mu\otimes\nu) = \lim_{n\to+\infty}\int\limits_X\left[\int\limits_Y (f_n)_x \, d\nu\right] d\mu \\
&= \lim_{n\to+\infty}\int\limits_Y\left[\int\limits_X (f_n)^y \, d\mu\right] d\nu.
\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\int\limits_X\left[\int\limits_Y (f_n)_x \, d\nu\right] d\mu &= \int\limits_X \lim_{n\to+\infty}\left[\int\limits_Y (f_n)_x \, d\nu\right] d\mu \ \text{(T.C.M. sur } (X,\mathcal{A},\mu))\\
&= \int\limits_X\left[\int\limits_Y \lim_{n\to+\infty}(f_n)_x \, d\nu\right] d\mu \,\text{(T.C.M. sur } (Y,\mathcal{B},\nu))\\
&= \int\limits_X\left[\int\limits_Y f_x d\nu\right] d\mu.
\end{aligned}$$

De même on a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\int\limits_{Y}\left[\int\limits_{X}(f_n)^y\,d\mu\right]d\nu &= \int\limits_{Y}\lim_{n\to+\infty}\left[\int\limits_{X}(f_n)^y\,d\mu\right]d\nu \;\; \text{(T.C.M. sur } (Y,\mathcal{B},\nu))\\
&= \int\limits_{Y}\left[\int\limits_{X}\lim_{n\to+\infty}(f_n)^y\,d\mu\right]d\nu \; \text{(T.C.M. sur } (X,\mathcal{A},\mu))\\
&= \int\limits_{Y}\left[\int\limits_{X}f^y d\mu\right]d\nu.
\end{aligned}$$

D'où le résultat voulu. ■

Théorème 1.3.2. (***Théorème de Fubini***) *Soient* $(X,\mathcal{A},\mu)$ *et* $(Y,\mathcal{B},\nu)$ *deux espaces mesurés* $\sigma-$*fnies et* $f:(X\times Y,\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$ *ou* $\mathbb{C}$ *une fonction intégrable. Alors*
1) *Pour* $\mu-$*presque chaque* $x\in X$, *la fonction* f_x *est* $\nu-$*intégrable et pour* $v-$*presque chaque* $y\in Y$, *la fonction* f^y *est* $\mu-$*intégrable.*
2) *Les fonctions* $I(x)=\int\limits_{Y}f_x d\nu$ *et* $J(y)=\int\limits_{X}f^y d\mu$ *sont intégrables sur* X *et* Y *respectivement.*
3) *On a la relation*

$$\int\limits_{X\times Y}f d(\mu\otimes\nu)=\int\limits_{X}I(x)\,d\mu=\int\limits_{Y}J(y)\,d\nu.$$

En écrivant les variables d'intégration, on obtient

$$\begin{aligned}
\int\limits_{X\times Y}f(x,y)\,d(\mu\otimes\nu)(x,y) &= \int\limits_{X}\left[\int\limits_{Y}f_x(x,y)\,d\nu(y)\right]d\mu(x)\\
&= \int\limits_{Y}\left[\int\limits_{X}f^y(x,y)\,d\mu(x)\right]d\nu(y).
\end{aligned}$$

Démonstration. 1) En appliquant le **Théorème de Fubini–Tonelli** à $|f|$, qui est une fonction mesurable et positive et intégrable, on peut écrire

$$\int_{X\times Y} |f|\, d(\mu\otimes\nu) = \int_X \left[\int_Y |f|_x\, d\nu\right] d\mu = \int_Y \left[\int_X |f|^y\, d\mu\right] d\nu < +\infty.$$

On en déduit que la fonction $x \longmapsto \int_Y |f|_x\, d\nu$ est finie $\mu-$p.p. et la fonction $y \longmapsto \int_X |f|^y\, d\mu$ est finie $\nu-$p.p., car ces fonctions sont positives et d'intégrales finies. Cela justifie le point (1).

2) En écrivant $f = (u^+ - u^-) + i\,(v^+ - v^-)$, où $u = \mathrm{Re}\,(f)$ et $v = \mathrm{Im}\,(f)$, on obtient

$$I(x) = \int_Y f_x d\nu = \int_Y u_x^+ d\nu - \int_Y u_x^- d\nu + i\left(\int_Y v_x^+ d\nu - \int_Y v_x^- d\nu\right).$$

D'après le **Théorème de Fubini–Tonelli**, les quatres intégrales sont des fonctions mesurables, donc l'est aussi et on a en plus $|I(x)| \leq \int_Y |f|_x\, d\nu$, ce qui nous permet de dire que I est intégrable sur X.

En utilisant le même raisonnement, on obtient le résultat similaire pour la fonction J.

3) Comme $f = (u^+ - u^-) + i\,(v^+ - v^-)$, alors d'après la linéarité et le **Théorème de Fubini–Tonelli** pour les intégrales de u^+, u^-, v^+ et v^-, on obtient la relation voulue. ■