Série 3

Exercice 1. *Les fonctions suivantes sont-elles boréliennes (mesurables pour la tribu borélienne) ou non ?*

- $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que* $f_1(x) = \begin{cases} 0 & : si\ x \leq 0 \\ 1/x & : si\ x > 0. \end{cases}$
- $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que* $f_2(x) = x \exp(\cos x)$.
- $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que* $f_3(x) = \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}$.

Exercice 2. *Soit* $f : E \to \mathbb{R}$ *une fonction. Montrer que* f *est mesurable si et seulement si les ensembles* $\{x \in E \ / \ f(x) > r\}$ *le sont pour tout* $r \in \mathbb{Q}$.

Exercice 3. *Soient* $(E, \mathcal{A}), (F, \mathcal{B})$ *et* $(G, \mathcal{C})$ *trois espaces mesurables. Soient* $f : E \to F$ *mesurable et* $g : F \to G$ *mesurable, alors la fonction* $g \circ f$ *est aussi mesurable.*

Exercice 4. *Soit* $f : (X, \mathcal{F}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *une fonction mesurable.*
1) Montrer que si $\mu(X) \neq 0$, *alors il existe* $A \in \mathcal{F}$ *avec* $\mu(A) \neq 0$, *tel que* f *soit bornée sur* A.
2) Montrer que si $\mu(\{f \neq 0\}) \neq 0$, *alors il existe* $B \in \mathcal{F}$ *avec* $\mu(B) \neq 0$ *et* $m > 0$ *tel que* $|f(x)| \geq m$ *sur* B.

Exercice 5. *Soient* f *et* g $:(E, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$ *deux fonction mesurables.*
1- Montrer que la fonction $h : (E, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}^2$ *définie par* $h(x) = (f(x), g(x))$ *est mesurable.*
2- En déduire que les fonctions $(f+g)$, αf, $f.g$, $\sup\{f, g\}$, $\inf\{f, g\}$ *sont mesurables.*

Exercice 6. (∗) *Soit* f $:(E, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *mesurable. Montrer que* f *est une limite d'une suite* $\{f_n\}_{n \geq 1}$ *croissante de fonctions mesurables étagées et positives.*
Indication *: on pose*

$$f_n(x) = \begin{cases} k2^{-n} & : \dfrac{k}{2^n} \leq f(x) < \dfrac{k}{2^{n+1}} \quad et\ k = 0, 1, \cdots, n2^n - 1 \\ n & : f(x) \geq n. \end{cases}$$

Exercice 7. (∗) *Montrer que toute fonction croissante de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *est borélienne. (**Indication** : Montrer dans ce cas qu'en tout point de discontinuité les limites à gauche et à droite sont finies.)*

N.B. *Les exercices comprenant le signe* (*) *sont supplmentaires.*

Résolution

Rappels. *(voir le chapitre 2 du cours)*

- $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (Y, \mathcal{B})$ *mesurable* $\overset{déf}{\Leftrightarrow} \forall B \in \mathcal{B}, \ \ f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.
- f *est une fonction borélienne* $\overset{déf}{\Leftrightarrow} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est mesurable par rapport à la tribu borélienne* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
- *Si f est continue alors f est mesurable.*
- *La fonction indicatrice qu'on note par $\mathbb{I}_A$ est mesurable $\Leftrightarrow$ A est mesurable.*

Exercice 1. – *On peut écrire* $f_1(x) = \dfrac{1}{x}.\mathbb{I}_{]0,+\infty[}(x) + 0.\mathbb{I}_{]-\infty,0]}(x)$. *Comme* $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^*$, *donc mesurable sur* $\mathbb{R}$ *et comme* $]0, +\infty[$ *et* $]-\infty, 0] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *alors leurs fonctions indicatrices sont mesurables. Par conséquent* f_1 *est mesurable sur* $\mathbb{R}$.
– $f_2 = x \exp(\cos(x))$ *est continue sur* $\mathbb{R} \Rightarrow f_2$ *est mesurable (borélienne).*
– *Comme* $\mathbb{Q}$ *est dénombrable alors* $\mathbb{Q} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, *ainsi* $f_3 = \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}$ *est borélienne.*

Exercice 2.

$\Rightarrow)$ *Supposons* $f : (E, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *mesurable, alors* $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *on a* $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. *Comme* $\{x \in E : \ f(x) > r\} = f^{-1}\left(]r, +\infty[\right)$ *et* $]r, +\infty[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$; $\ \forall r \in \mathbb{Q}$, *alors* $f^{-1}(]r, +\infty[)$ *est mesurable* $\forall r \in \mathbb{Q}$.

$\Leftarrow)$ *Supposons maintenant que*

$$f^{-1}\left(]r, +\infty[\right) \in \mathcal{A}, \text{ pour tout } r \in \mathbb{Q} \tag{1}$$

et montrons que f est mesurable, i. e.

$$f^{-1}\left[\mathcal{B}(\mathbb{R})\right] \overset{?}{\subset} \mathcal{A}. \tag{2}$$

On pose $\Sigma = \{]r, +\infty[: \ \ r \in \mathbb{Q}\}$. *Sachant que (voir l'exercice 8 de la Série 1)*

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \{]r, +\infty[: \ \ r \in \mathbb{Q}\} = \sigma(\Sigma). \tag{3}$$

Alors d'après la série 1 exercice 7 on a

$$\sigma\left(f^{-1}[\Sigma]\right) = f^{-1}[\sigma(\Sigma)] = f^{-1}\left[\mathcal{B}(\mathbb{R})\right]. \tag{4}$$

Mais $\sigma\left(f^{-1}[\Sigma]\right)$ *est la plus petite tribu contenant* $f^{-1}[\Sigma]$ *alors d'après (1) et (4)* $f^{-1}\left(\mathcal{B}(\mathbb{R})\right) \subset \mathcal{A}$ *c'est-à-dire f est mesurable.*

Exercice 3. *Supposons que* $f : (E, \mathcal{A}) \longrightarrow (F, \mathcal{B})$ *et* $g : (F, \mathcal{B}) \longrightarrow (G, \mathcal{C})$ *mesurables et montrons que* $g \circ f : (E, \mathcal{A}) \longrightarrow (G, \mathcal{C})$ *est mesurable.*
Soit $C \in \mathcal{C}$, *comme g est une fonction mesurable on a* $g^{-1}(C) \in \mathcal{B}$, *de même, en utilisant la mesurabilité de f on obtient* $f^{-1}\left(g^{-1}(C)\right) \in \mathcal{A}$.
Mais $f^{-1}\left(g^{-1}(C)\right) = (g \circ f)^{-1}(C)$, *par conséquent* $(g \circ f)^{-1}(C) \in \mathcal{A}$. *c'est-à-dire $g \circ f$ est mesurable.*

Exercice 4. *Soit* $f : (X, \mathcal{F}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *une fonction mesurable.*

1) *On suppose* $\mu(X) > 0$. *Posons* $E_n = \{x \in X \ : \ |f(x)| \le n\} = f^{-1}([-n, n]) \in \mathcal{F}$ *car* f *est mesurable. On a* $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$.
Comme $n < n+1 \Rightarrow E_n \subset E_{n+1} \Rightarrow f^{-1}([-n,n]) \subset f^{-1}([-(n+1), n+1]) \Rightarrow \{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite croissante et majorée par* X. *Donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} E_n := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = X$. *Alors d'après la continuité monotone croissante de* μ *on obtient :* $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu(E_n) = \mu\left(\lim\limits_{n\to+\infty} E_n\right) = \mu(X) \Leftrightarrow$

$$(\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \ \textit{tel que : } \forall n \ge n_0 \ \ \textit{on a } |\mu(E_n) - \mu(X)| < \epsilon) \Longleftrightarrow$$

$$(\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \ \textit{tel que : } \forall n \ge n_0 \ \ \textit{on a } \mu(X) - \epsilon < \mu(E_n) < \mu(X) + \epsilon)$$

Choisissons ε *tel que* $\mu(X) > \epsilon$, *(cela est possible car* $\mu(X) \neq 0$*), alors pour*

$$n = n_0 \ \textit{et } A = E_{n_0} \in \mathcal{F} \ \textit{on, a } 0 < \mu(A) < \mu(X) + \epsilon.$$

Donc $\mu(A) \neq 0$ *et* f *est bornée par* n_0 *sur* A, *car par définition on a* $A = E_{n_0} = \{x \in X \ : \ |f(x)| \le n_0\}$. *D'où le résultat voulu.*

2) *Notons* $\forall n \ge 1, F_n = \left\{x \in X \ : \ |f(x)| > \dfrac{1}{n}\right\}$. *Il est clair que* $F_n \in \mathcal{F}$, $\forall n \ge 1$, *car* $F_n = f^{-1}\left(]-\infty, -\dfrac{1}{n}[\cup]\dfrac{1}{n}, +\infty[\right) \in \mathcal{F}$, *(*$f$ *est mesurable.)*
Donc pour $x \in F_n$ *on a :* $|f(x)| > \dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{n+1} > 0 \Rightarrow x \in F_{n+1} \Leftrightarrow F_n \subset F_{n+1} \Leftrightarrow \{F_n\}_{n\ge1}$ *est une suite croissante donc elle converge et nous avons :* $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n = \bigcup_{n\ge1} F_n = \{x \in X \ : \ |f(x)| \neq 0\} = F \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \mu(F_n) = \mu(F) > 0$ *(car* $\mu(F) \neq 0$ *par hypothèse)* $\Leftrightarrow$

$$(\forall \epsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \ \ \textit{tel que : } \forall n \ge n_1 \ \ \textit{on a } |\mu(F_n) - \mu(F)| < \epsilon).$$

Choisissons ε *tel que* $\mu(F) > \epsilon$, *donc* $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ *tel que :*

$$0 < \mu(F) - \epsilon < \mu(F_{n_1}) < \mu(F) + \epsilon.$$

Posons : $B = F_{n_1} \in \mathcal{F}$ *donc* $\mu(B) > 0 \Rightarrow |f(x)| > \dfrac{1}{n_1} = m, \forall x \in B$. *D'où le résultat voulu.*

Exercice 5.

1- *On montre que* $h : (E, \mathcal{A}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^2$ *définie par* $h(x) = (f(x), g(x))$ *est mesurable. Sachant que*

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^2) = \sigma\left(\{[a,b] \times [c,d], \ \ a < b \in \overline{\mathbb{R}} \ \ \textit{et } \ c < d \in \overline{\mathbb{R}}\}\right),$$

alors pour montrer que h *est mesurable, il suffit de montrer que* $h^{-1}([a,b] \times [c,d]) \in \mathcal{A}$ *pour tout* $a < b \in \overline{\mathbb{R}}$ *et* $\forall c < d \in \overline{\mathbb{R}}$.
Montrant d'abord que

$$h^{-1}([a,b] \times [c,d]) \stackrel{?}{=} f^{-1}([a,b]) \cap g^{-1}([c,d]) \in \mathcal{A}, \textit{ pour tout } a < b \in \overline{\mathbb{R}} \ \ \textit{et } \forall c < d \in \overline{\mathbb{R}}.$$

$$\textit{Soit } x \in h^{-1}([a,b]\times[c,d]) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists y_1 \in [a,b] \;\; \textit{tel que :} \;\; y_1 = f(x) \\ \wedge \\ \exists y_2 \in [c,d] \;\; \textit{tel que :} \;\; y_2 = g(x) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (x \in f^{-1}([a,b])$ *et* $x \in g^{-1}([c,d])) \Leftrightarrow h^{-1}([a,b]\times[c,d]) = f^{-1}([a,b]) \cap g^{-1}([c,d]) \in \mathcal{A}$ *car* f *et* g *sont mesurables. D'où le résultat voulu.*

2- (a) *On définit les fonctions* k_1, k_2, k_3 *par :*

$$\begin{array}{rcl} k_1 : \overline{\mathbb{R}}^2 & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}} \\ (x,y) & \longmapsto & k_1(x,y) = x+y, \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} k_2 : \overline{\mathbb{R}}^2 & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}} \\ (x,y) & \longmapsto & k_2(x,y) = xy \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} k_3 : \overline{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}} \\ x & \longmapsto & k_3(x) = \alpha x, \quad (\alpha \in \mathbb{R}). \end{array}$$

Alors on peut écrire que

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = k_1(f(x), g(x)) = (k_1 \circ h)(x),$$

$$(fg)(x) = k_2(f(x), g(x)) = (k_2 \circ h)(x)$$

et

$$(\alpha f)(x) = k_3(f(x)) = (k_3 \circ f)(x).$$

Les fonctions k_1, k_2, k_3 *sont continues donc boréliennes et comme* f, g, h *sont mesurables alors on a la mesurabilité des fonctions* $f+g$, $f.g$ *et* αf.

(b) *La fonction* $\sup\{f,g\} : (E, \mathcal{A}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. *est définie par*

$$\sup\{f(x), g(x)\} = \begin{cases} f(x) & \textit{si} \;\; f(x) \geq g(x) \\ g(x) & \textit{si} \;\; f(x) < g(x) \end{cases} = f(x).\mathbb{I}_{f \geq g}(x) + g(x).\mathbb{I}_{f<g}(x).$$

Comme $\{f \geq g\} = \{x \in E \;:\; f(x) - g(x) \geq 0\} = (f-g)^{-1}([0, +\infty]) \in \mathcal{A}$ *(car* $f-g$ *est mesurable et* $[0,+\infty] \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$*)* $\Rightarrow \mathbb{I}_{f\geq g}$ *est mesurable.*

$\{f < g\} = \{x \in E \;:\; (f-g)(x) < 0\} = (f-g)^{-1}([-\infty, 0[) \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathbb{I}_{f<g}$ *est mesurable.*

Par conséquent la fonction $\sup\{f,g\}$ *est une fonction mesurable.*

De même pour $\inf\{f,g\} = f.\mathbb{I}_{f\leq g} + g.\mathbb{I}_{f>g}$ *est mesurable pour les mêmes raisons.*

<u>Exercice</u> 6. *Soit* $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ *une fonction mesurable. On pose*

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{2^n} & \textit{si} \;\; \dfrac{k}{2^n} \leq f(x) < \dfrac{k+1}{2^n}; \;\; k \in \{0, 1, ...\} \\ n & \textit{si} \;\; f(x) \geq n \end{cases}$$

1) *Montrons que* f_n *est une fonction étagée positive ;* $\forall n \in \mathbb{N}$. *Posons*

$$A_{nk} = \left\{ x \in X \text{ telle que } \frac{k}{2^n} < f(x) < \frac{k+1}{2^n} \right\}; k = \{0, 1, ..., n2^n - 1\}$$

et

$$B_n = \{x \in X \;\; \text{telel que} \;\; f(x) \geq n\}.$$

Alors on peut écrire que :

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{I}_{A_{nk}}(x) + n\mathbb{I}_{B_n}(x) \geq 0.$$

En plus, comme $A_{nk} = f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[\right) \in \mathcal{A}$ *et* $B_n = f^{-1}([n, +\infty[) \in \mathcal{A}$ *(car* f *est mesurable),* *on a la mesurabilité de la fonction* f_n *,pour tout* $n \geq 0$.

2) *Montrons maintenant que* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite croissante* $\Leftrightarrow$

$$\forall x \in X \;:\; f_n(x) \leq f_{n+1}(x); \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

– *S'il existe un entier* n *tel que* $f(x) < n$, *alors*

$$\exists k > 0 : \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \text{ et dans ce cas on a } f_n(x) = \frac{k}{2^n}.$$

Ce qui nous permet d'écrire que

$$\begin{aligned} \frac{k}{2^n} &\leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \Longleftrightarrow \frac{2k}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2(k+1)}{2^{n+1}} \Longleftrightarrow \\ \frac{2k}{2^{n+1}} &\leq f(x) < \frac{2k+1}{2^{n+1}} \text{ ou bien } \frac{2k1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k+2}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Donc $f_{n+1}(x) = \frac{2k}{2^{n+1}} = \frac{k}{2^n} = f_n(x)$ *ou bien* $f_{n+1}(x) = \frac{2k+1}{2^{n+1}} = \frac{k}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} > f_n(x)$.
En conclusion si $f(x) < n :\; f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$.

– *Si* $f(x) \geq n$ *on a* $n \leq f(x) < n+1$ *ou bien* $f(x) \geq n+1$

- *Dans le cas ou :* $f(x) \geq n+1 \Rightarrow f_{n+1}(x) = n+1 = f_n(x) + 1 \Leftrightarrow f_{n+1}(x) > f_n(x)$
- *Dans le cas ou* $n \leq f(x) < n+1$, *,alors* $\exists k \in \{0, 1, ..., (n+1)2^{n+1} - 1\}$ *tel que :*

$$f_n(x) = n < \frac{k}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^{n+1}} \Longrightarrow f_{n+1}(x) = \frac{k}{2^{n+1}} \geq f_n(x).$$

En conclusion si $f(x) \geq n :\; f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$.

3) *Montrons que* $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x);\; \forall x \in X$.

– *Supposons* $\forall n \in \mathbb{N} :\; f(x) \geq n \Rightarrow f(x) = +\infty$. *D'autre part, on a* $f(x) \geq n \Rightarrow f_n(x) = n$ *c'est-à-dire* $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty = f(x)$

– *Dans le cas où* $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que :* $f(x) < n_0$, *alors pour tout* $n \geq n_0$ *on a* $f(x) < n_0 \leq n$, *donc*

$$\forall n \geq n_0; \exists k \in \mathbb{N} \;\; \text{tel que} \;: \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n},$$

dans ce cas $f_n(x) = \dfrac{k}{2^n}$, *d'où* $\forall n \geq n_0 :\ f_n(x) \leq f(x) = \dfrac{k}{2^n} < f_n(x) + \dfrac{1}{2^n}$. *En passant à la limite on obtient*

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) \leq f(x) \leq \lim_{n\to+\infty}\left(f_n(x) + \frac{1}{2^n}\right) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.

Exercice 7. *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction croissante, montrons que* f *est borélienne.*

1) *Soit* x *un point de discontinuité de* f. *On doit montrer que :* $f(x+0)$ *et* $f(x-0)$ *existent et elles sont finies, où :*

$$f(x+0) = \lim_{\substack{h\to 0\\ >}} f(x+h) = \lim_{n\to+\infty} f\left(x + \frac{1}{n}\right)$$

$$f(x-0) = \lim_{\substack{h\to 0\\ <}} f(x+h) = \lim_{n\to+\infty} f\left(x - \frac{1}{n}\right).$$

Posons : $U_n = f\left(x + \dfrac{1}{n}\right)$ *et* $V_n = f\left(x - \dfrac{1}{n}\right)$ *;* $\forall n \geq 1$. *Comme* f *est croissante alors*

$$f\left(x - \frac{1}{n}\right) \leq f\left(x - \frac{1}{n+1}\right) \leq f(x) \leq f\left(x + \frac{1}{n+1}\right) \leq f\left(x + \frac{1}{n}\right).$$

Ainsi $(U_n)_{n\geq 1}$ *est croissante et minorée par* $f(x)$ *et* $(V_n)_{n\geq 1}$ *est décroissante et majorée par* $f(x) \Rightarrow (U_n)_{n\geq 1}$ *et* $(V_n)_{n\geq 1}$ *sont convergentes* $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ *existent et elles sont finies, par conséquent* $f(x+0)$ *et* $f(x-0)$ *existent et elles sont finies.*

2) *Posons* $A = \{x \in \mathbb{R} :\ f(x+0) - f(x-0) > 0\}$, *l'ensemble des points de discontinuité de* f. *Montrons que* A *est au plus dénombrable.*

Considérons l'ensemble $A_n = \left\{x \in \mathbb{R} /\ f(x+0) - f(x-0) > \dfrac{1}{n}\right\}$, *pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *alors on a* $A = \bigcup\limits_{n\geq 1} A_n$. *Montrons que* A_n *est au plus dénombrable* $\forall n \geq 1$. *Pour cela nous allons raisonner par l'absurde.*

Supposons qu'il existe $n_0 \geq 1$ *tel que :* A_{n_0} *est non dénombrable (infini). Alors* $\exists n_1 \in \mathbb{N}^*$ *tel que :* $B = A_{n_0} \cap [n_1, n_1 + 1]$ *soit non dénombrable, alors*

$$\forall x \in B \ :\ \ f(n_1) \leq f(x) \leq f(n_1 + 1).$$

Comme B *est non dénombrable on peut construire une suite* $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset B$ *strictement croissante telle que :*

$$\forall n \geq 1,\ f(x_1) + \frac{n}{n_0} \leq f(x_n - 0) < f(x_n + 0) \leq f(n_1 + 1).$$

On a en plus, $f(n_1) \leq f(x_1)$, *alors* $f(n_1+1) - f(n_1) \geq \dfrac{n}{n_0}$, *doù* $n_0\left(f(n_1+1) - f(n_1)\right) \geq n$, *pour tout* $n \geq 1$.

Contradiction avec le faite qu'il existe un entier n tel que $n_0\,(f(n_1+1)-f(n_1))<n$, car d'aprés la propriété d'Archimède on a

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}}_+, \exists N \in \mathbb{N}^* \ x < N.$$

Donc A est au plus dénombrable ce qui nous permet de dire que $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

3) *On peut écrire que $f = f.\mathbb{I}_A + f.\mathbb{I}_{A^c}$ Comme $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow A^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par conséquent $\mathbb{I}_A$ et $\mathbb{I}_{A^c}$ sont des fonctions boréliennes.*

On a $f.\mathbb{I}_A = \sum_{i\in\mathbb{N}} f_i \mathbb{I}_{A_i}$, où $A_i = \{x_i\}$ et $f_i = f(x_i)$, alors $f.\mathbb{I}_A$ est mesurable.

Comme f est continue sur $A^c \Rightarrow f.\mathbb{I}_{A^c}$ est aussi mesurable. Par conséquent f est borélienne.

$\boxed{\textbf{BONNE CHANCE}}$