

Hom work 01

Exercice 01:

On considère le tableau de données, noté X , qui est défini par : $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

ou la i^{eme} ligne désigne l'individu x_i et la j^{eme} colonne désigne la variable x^j . Chaque individu possède un poids égal à $1/3$. On considère les résultats de l'ACP du tableau X lorsque R^5 est muni de la métrique identité $M = I$.

1. Déterminer le tableau centré Y et le tableau centré réduit Z ?
2. Sans calculer la matrice variance V du tableau X , combien existe-t-il d'axes factoriels ?
3. Calculer V . En déduire l'inertie totale du nuage étudié.
4. soit $U^t = (1 \ -1 \ 0 \ 1 \ -1)^t$
 - (a) Vérifier que U est un vecteur propre de V associé à la valeur propre 2.
 - (b) En déduire les valeurs propres et vecteurs propres de V .
5. Calculer les deux premières composantes principales, notées Ψ_1 et Ψ_2 .
6. Représenter les trois individus dans le plan factoriel constitué des deux premiers axes.
7. Calculer la contribution relative de chaque individu à l'inertie du premier axe.
8. Représenter les 5 variables dans le plan factoriel constitué des deux premiers axes.

Exercice 02:

On considère le tableau de données, noté X , et défini par : $X = \begin{pmatrix} & j_1 & j_2 & j_3 & j_4 & j_5 & j_6 \\ i_1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ i_2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ i_3 & 1 & 2 & 4 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

ou la i^{eme} ligne désigne la variable x_i et la j^{eme} colonne désigne l'individu x^j . Par la suite, on considère les résultats de l'ACP sur matrice variance du tableau X .

1. Calculer les coordonnées du centre de gravité g du nuage \mathcal{M} constitué des vecteurs colonnes de X (munis du même poids $1/6$), et en déduire le tableau Y centre qui est associé à X . On présentera Y sous la forme $Y = 1/3 \cdot Y_1$ où Y_1 est une matrice à coefficients entiers.
2. Soit V la matrice variance du tableau X . Compléter les valeurs manquantes dans l'expression de la matrice V ci-dessous :

$$V = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 16 & 1 & 17 \\ 1 & 16 & ? \\ 17 & ? & ? \end{pmatrix}$$

3. Expliquer pourquoi le nombre d'axes factoriels non triviaux est égal à 2.
4. Calculer l'inertie totale du nuage étudié.
5. Montrer que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur d'un axe factoriel.
6. Calculer le pourcentage d'inertie expliquée par l'axe factoriel déterminé à la question 5. Cet axe est-il le premier ou le second axe factoriel ?
7. Déterminer les coordonnées du premier vecteur axial factoriel, (on choisira sa première coordonnée de façon à ce qu'elle soit positive).
8. Calculer la première composante principale de l'individu j^2 , notée $\Psi_1^{j^2}$.
9. Calculer la contribution de l'individu j^2 à l'inertie du premier axe, notée $CTR_1(j^2)$.
10. Calculer la qualité de représentation de l'individu j^2 sur le premier axe, notée $QLT_1(j^2)$.
11. Calculer la contribution de la variable i_1 à l'inertie du premier axe, notée $CTR_1(i_1)$.

Exercice 03:

On considère le tableau X de données suivant : $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

On rappelle que le terme général de X, noté x_i^j , indique la valeur prise par la i ème variable (avec $i \in 1, 2, 3$) pour le j ème individu (avec $j \in 1, 2, 3, 4$). Dans ce qui suit, on examine les résultats de l'ACP sur matrice variance-covariance du tableau X.

1. Déterminer la valeur de c telle que l'on ait $x_1^j + x_2^j + cx_3^j = 0$ pour tout $j \in 1, 2, 3, 4$.
2. Déterminer le tableau centré Y. et le tableau centré réduit Z ?
3. Calculer la matrice variance-covariance V du tableau X.
4. Calculer la matrice de corrélation R du tableau X.
5. Montrer que le vecteur $v = (1, 1, 1)^t$ dirige un axe factoriel non trivial du nuage des individus, associé à une valeur propre λ de matrice variance-covariance V dont on précisera la valeur. Expliquer pourquoi cet axe est le premier axe factoriel.
6. Calculer un vecteur directeur du second axe factoriel du nuage des individus et déterminer l'inertie projetée sur cet axe.
7. Soit Ψ_1 la première composante principale du nuage des individus. Calculer Ψ_j^1 pour tout $j \in 1, 2, 3, 4$.
8. Calculer les coordonnées des trois variables sur le premier axe factoriel de l'espace des variables.
9. Calculer la qualité de représentation de chaque individu sur le premier axe factoriel.