(*) Trouver des fonctions pivotales pour :

① n-éch de $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

② 1 observation de $X \sim \mathcal{B}(n,p)$

③ n-éch de $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Solution:

① $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, on traite tous les cas possibles

① fonction pivotale pour m

• si σ connu

on sait que $\bar{X}$ estimateur de m. où $\bar{X} \sim \mathcal{N}(m, \frac{\sigma^2}{n})$

d'après le (T.C.L) = (le Théorème Central Limite)

$$\frac{\bar{X} - m}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} = \frac{(\bar{X} - m)}{\sigma}\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$\Rightarrow Q(x_1, \dots, x_n, m) = \frac{(\bar{X} - m)}{\sigma}\sqrt{n}$ est une pivotale pour le paramètre m de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

• si σ inconnu:

la fonction précédente $Q(x_1, \dots, x_n, m) = \frac{(\bar{X} - m)}{\sigma}\sqrt{n}$ n'est pas une fonction pivotale pour m car elle dépend aussi du paramètre σ.

$\Rightarrow$ on estimera σ:

de même on a montré que $S'^2 = \frac{1}{n-1}\sum(X_i - \bar{X})$ est un E.S.B pour σ^2

et $\begin{cases} \frac{n-1}{\sigma^2} S'^2 \sim \chi^2_{(n-1)} \\ \frac{\bar{X} - m}{\sigma}\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0,1) \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\frac{\bar{X} - m}{\cancel{\sigma}}\sqrt{n}}{\sqrt{\dfrac{\frac{\cancel{n-1}}{\cancel{\sigma^2}} S'^2}{\cancel{n-1}}}} = \frac{(\bar{X} - m)}{S'}\sqrt{n} \sim St_{n-1}$

d'où $Q(x_1, \dots, x_n, m) = \frac{(\bar{X} - m)}{S'}\sqrt{n}$ est une pivotale pour m de loi de student à $(n-1)$ d.d.l.

② fonction pivotale pour σ^2

• Si m connu :

S'^2 E.S.B pour σ^2 et $\frac{n-1}{\sigma^2}S'^2 = \frac{n}{\sigma^2}S^2 = \frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2_{(n-1)}$

et comme m connu on remplace $\bar{X}$ par m on trouve

$\frac{\sum(X_i-m)^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2_n = Q(x_1, \dots x_n, \sigma^2)$ est une pivotale pour σ^2 qui suit la loi de Khi-deux a n degré de liberté: d.d.l

• Si m inconnu :

la fonction précédente $\frac{\sum(X_i-m)}{\sigma^2}$ n'est plus une pivotale pour σ^2 car elle dépend de paramètre m

mais $\frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S'^2}{\sigma^2} = \frac{\sum(X_i-\bar{X})}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2_{(n-1)}$

est une pivotale pour σ^2 qui suit la loi libre (loi tabulée) la Khi-deux $(n-1)$ d.d.l.

② $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$, $E(X)=np$, $V(X)=npq$

il n'existe pas une fonction pivotale pour $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$.

mais d'après le T.C.L $\frac{X-E(X)}{\sqrt{V(X)}} \xrightarrow[n\to\infty]{loi} N(0,1)$.

$\Rightarrow \frac{X-np}{\sqrt{npq}} \xrightarrow{L} N(0,1)$

$\Rightarrow \frac{X-np}{\sqrt{npq}} = Q(x, p)$ est une pivotale asymptotique pour le paramètre p

c.à.d pour $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$ si $n \to \infty$ $\frac{X-np}{\sqrt{npq}}$ suit une loi libre (loi tabulée) $= N(0,1)$.

③ n- éch de $X \leadsto \mathcal{P}(\lambda)$. $E(X) = V(X) = \lambda$.

de même d'après le T.C.L.

$\sum X_i \leadsto \mathcal{P}(n\lambda)$ et $\frac{1}{n}\sum X_i = \bar{X} \leadsto \mathcal{P}(\lambda)$

$E(\sum X_i) = n\lambda$ $\quad$ $E(\bar{X}) = \lambda$

$V(\sum X_i) = n\lambda$ $\quad$ $V(\bar{X}) = \frac{\lambda}{n}$

il n'existe pas une fonction pivotale d'une loi de poisson donc on cherche une pivotale asymptotique (si $n \to \infty$) pour avoir le n (pour l'asymptotique) on utilise soit $\sum_{i=1}^{n} X_i$ soit $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

(pour une observation c'est pas possible pour cela on cherche une pivotale d'une poisson pour un n- éch)

donc soit : $\frac{\sum X_i - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \underset{n\to\infty}{\leadsto} \mathcal{N}(0,1)$ ou bien $\frac{\bar{X} - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\leadsto} \mathcal{N}(0,1)$

est une pivotale asymptotique pour λ.

⊛ Comment construire un Intervalle de confiance ?

Exemple : n- éch de $X \leadsto \mathcal{E}(\lambda)$ $\quad IC_\alpha(\lambda) = ?$

On cherche un intervalle de confiance pour le paramètre λ au niveau $1-\alpha$. ou bien pour le risque α.

① on détermine une fonction pivotale pour λ :

$X \leadsto \mathcal{E}(\lambda) \Rightarrow \sum X_i \leadsto \gamma(n, \lambda)$

$\Rightarrow \lambda \sum X_i \leadsto \gamma(n, 1)$

d'où $\lambda \sum X_i = \varphi(X_1, \dots X_n, \lambda)$ est une fonction pivotale pour λ de loi $\gamma(n,1)$ mais la loi gamma n'est pas tabulée

$\Rightarrow$ toujours on préfère que la pivotale suit l'une des lois tabulées

on sait que $\gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}) = \chi^2_n$

$\lambda \sum X_i \leadsto \gamma(n, 1)$

donc $2\lambda \sum X_i \rightsquigarrow \gamma(n, \frac{1}{2}) = \gamma(\frac{2n}{2}, \frac{1}{2}) \sim \chi^2_{(2n)}$

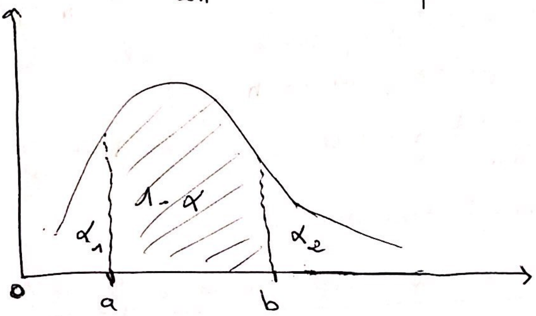
alors on choisit $Q(X_1, \dots, X_n, \lambda) = 2\lambda \sum X_i$ pivotale pour λ de loi $\chi^2_{(2n)}$

② $\underline{a = ?}$, $\underline{b = ?}$

$$P(a \leqslant Q(X_1, \dots, X_n, \lambda) \leqslant b) = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow P(a \leqslant 2\lambda \sum X_i \leqslant b) = 1 - \alpha$$

$2\lambda \sum X_i \rightsquigarrow \chi^2_{2n}$ est une loi positive



$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ tq:

$\alpha_1 = P(Q(X_1, \dots X_n, \lambda) \leqslant a) = F_{\chi^2_{2n}}(a)$ = fonction de répartition d'une $\chi^2_{(2n)}$ $= \alpha_1$

$\Rightarrow a = F^{-1}_{\chi^2_{2n}}(\alpha_1) = \chi^2_{2n}(\alpha_1)$ = fractile d'ordre α_1 de $\chi^2_{(2n)}$

et $\alpha_2 = P(Q \geqslant b) \Rightarrow 1 - \alpha_2 = P(Q \leqslant b) = F_{\chi^2_{2n}}(b)$

$\Rightarrow b = \chi^2_{(2n)}(1 - \alpha_2)$ = fractile d'ordre $(1 - \alpha_2)$ d'une $\chi^2_{(2n)}$

alors $P\Big[\underbrace{\chi_{2n}(\alpha_1)}_{a} \leqslant 2\lambda \sum X_i \leqslant \underbrace{\chi^2_{2n}(1 - \alpha_2)}_{b} \Big] = 1 - \alpha$

③ $\underline{\text{L'ecriture de l'} IC_\alpha(\lambda)}$: on a: $P(\chi^2_{2n}(\alpha_1) \leqslant 2\lambda \sum X_i \leqslant \chi^2_{2n}(1 - \alpha_2)) = 1 - \alpha$

$$\Rightarrow P\left[\frac{\chi^2_{2n}(\alpha_1)}{2\sum X_i} \leq \lambda \leq \frac{\chi^2_{2n}(1-\alpha_2)}{2\sum X_i}\right] = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow IC_\alpha(\lambda) = \left[\frac{\chi^2_{2n}(\alpha_1)}{2\sum X_i}, \frac{\chi^2_{2n}(1-\alpha_2)}{2\sum X_i}\right]$$

Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$

$$IC_\alpha(\lambda) = \left[\frac{\chi^2_{2n}(\frac{\alpha}{2})}{2\sum X_i}, \frac{\chi^2_{2n}(1-\frac{\alpha}{2})}{2\sum X_i}\right] = \left[\frac{\chi^2_{2n}(\frac{\alpha}{2})}{2n\overline{X}}, \frac{\chi^2_{2n}(1-\frac{\alpha}{2})}{2n\overline{X}}\right]$$

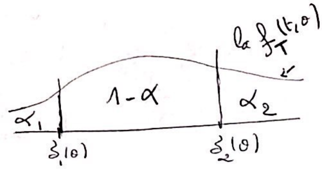
car $\sum X_i = n\overline{X}$

(*) trouver les intervalle de confiance pour :

1. θ de $X \sim U_{[0,\theta]}$
2. P de $X \sim B(P)$.

Solution:

1. $X \sim U_{[0,\theta]}$



pour le risque α et pour $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$.

d'après les exemples des chapitres précédents

$T = \max X_i$ est un e.m.v pour θ et $T = \max X_i$ est une stat exh et complete pour θ.

. trouver $\delta_1(\theta)$ et $\delta_2(\theta)$ tq : $P(\delta_1(\theta) \leq T \leq \delta_2(\theta)) = 1-\alpha$

et $\alpha_1 = P(T \leq \delta_1(\theta))$ et $1-\alpha_2 = P(T \leq \delta_2(\theta))$

$\delta_1(\theta) = ?$

$$\alpha_1 = P(T \leq \delta_1(\theta)) = \int_{-\infty}^{\delta_1(\theta)} f_T(t)\,dt \qquad \mathcal{X} = [0, \theta]$$

$T = \max X_i \qquad X_i \sim U_{[0,\theta]} \quad \forall\, i = \overline{1,n}$

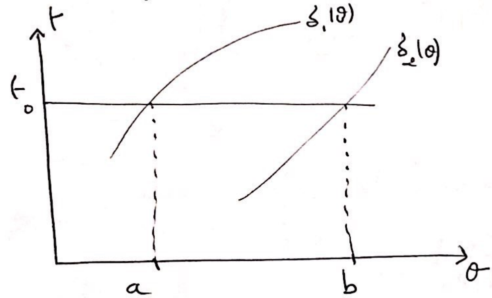
$$f_T(t) = \frac{n}{\theta^n} t^{n-1} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(t)$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \int_0^{\delta_1(\theta)} \frac{n}{\theta^n} t^{n-1}\, dt = \left(\frac{\delta_1(\theta)}{\theta}\right)^n \Rightarrow \boxed{\delta_1(\theta) = \theta\, \alpha_1^{\frac{1}{n}}}$$

$\delta_2(\theta) = ?$

$$1 - \alpha_2 = P(T \leqslant \delta_2(\theta)) = \int_0^{\delta_2(\theta)} f_T(t)\, dt = \int_0^{\delta_2(\theta)} \frac{n}{\theta^n} t^{n-1}\, dt$$

$$\Rightarrow 1 - \alpha_2 = \frac{\delta_2(\theta)^n}{\theta^n} \Rightarrow \boxed{\delta_2(\theta) = \theta(1-\alpha_2)^{\frac{1}{n}}}$$



pour un n-éch fixé

$t(x) = \max x_i$

$\delta_1(a) = t_0$ et $\delta_2(b) = t_0$

$\boxed{t_0 \text{ pour un éch donné.}}$

$\Rightarrow a\alpha_1^{\frac{1}{n}} = t_0$ et $b(1-\alpha_2)^{\frac{1}{n}} = t_0$

$\Rightarrow a = t_0\, \alpha_1^{-\frac{1}{n}}$ et $\boxed{b = t_0\, (1-\alpha_2)^{-\frac{1}{n}}}$

Nous avons

$$P[\delta_1(\theta) \leqslant T \leqslant \delta_2(\theta)] = P[a(T) \leqslant g(\theta) \leqslant b(T)] = 1-\alpha$$

pour cette exemple on cherche IC pour θ c.à.d $g(\theta) = \theta$

et $T = \max_{i=\overline{1,n}} x_i$

$$\Rightarrow IC_\alpha(\theta) = [a(T), b(T)] = \left[t_0 \alpha_1^{-\frac{1}{n}},\ t_0 (1-\alpha_2)^{-\frac{1}{n}}\right]$$

où t_0 la valeur de la v.a $T = \max x_i$ pour un n-éch fixé.

② $X \sim B(p)$.

il n'existe pas de fonction pivotale simple pour p alors on va déterminer l'intervalle de confiance pour p en se basant sur l'E.S.B.V.U.M pour p à savoir $\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n}$ ou bien sur $S = \sum X_i$ qui est la stat exh et complète pour p

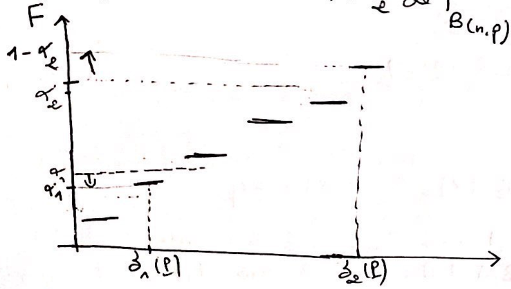
• <u>déterminer</u> $\delta_1(p)$ et $\delta_2(p)$ tq:

$$P(\delta_1(p) < S < \delta_2(p)) = 1-\alpha = P(\delta_1(p) < \sum X_i < \delta_2(p))$$

$$X_i \sim B(p) \Rightarrow \sum X_i \sim B(n,p).$$

$\Rightarrow \delta_1(p)$ = quantile d'ordre α_1 de $F_{B(n,p)}$

$\delta_2(p)$ = quantile d'ordre $1-\alpha_2$ de $F_{B(n,p)}$. où $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$

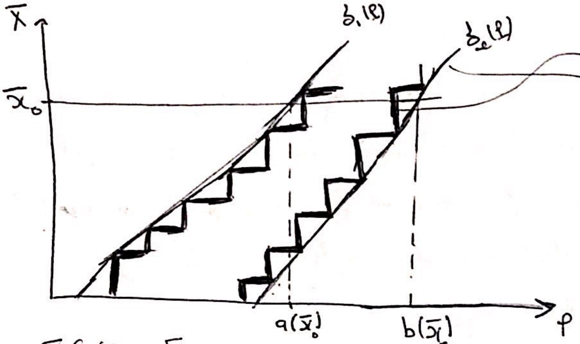


$P(\sum X_i < \delta_1(p)) = \alpha_1 \Rightarrow F_{B(n,p)}(\delta_1(p)) \leq \alpha_1$

$P(\sum X_i < \delta_2(p)) = 1-\alpha_2 \Rightarrow F_{B(n,p)}(\delta_2(p)) \leq 1-\alpha_2$

Ces deux égalités ne peut pas être toujours réalisées alors on déterminera $\delta_1(p)$ et $\delta_2(p)$ par les inégalités ce qui donnera un intervalle de confiance de niveau au moins égal à $1-\alpha$

Ces valeurs peuvent être déterminer directement à partir des tables de la fonction de répartition de la loi Binomiale mais il existe d'autres table déterminant directement les IC pour une proportion p



$IC_\alpha(p) = [a(\bar{x}_0) \; , \; b(\bar{x}_0)]$

⊛ Exemple I.C asymptotique

$X \sim B(p)$ $\quad IC_\alpha(p) = ?$

n-éch de X

Solution:

$X \sim B(p) \quad E(X) = p \quad V(X) = pq.$

n-éch de la v.a X. pour donner l'IC de p on se base soit sur E.S.B.V.U.M $= \bar{X}$ soit sur stat exh et complète ΣX_i

pour $n \geq 30$

T.C.L $\quad \bar{X} \longrightarrow N\left(E(X), \frac{V(X)}{n}\right) = N\left(p, \frac{pq}{n}\right).$

$$\Rightarrow \frac{\bar{X} - E(X)}{\sqrt{\frac{Var(X)}{n}}} = \left(\frac{\bar{X} - p}{\sqrt{pq}}\right)\sqrt{n} \underset{n \to \infty}{\leadsto} N(0,1) \Rightarrow \underbrace{\frac{\bar{X} - p}{\sqrt{pq}}\sqrt{n}}_{= Q(x_1, \dots, x_n, p)} \text{ est une}$$

pivotale asymptotique pour p

$$\Rightarrow P\left[-q_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq Q(x_1, \dots, x_n, p) \leq q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] = 1 - \alpha$$

ou $q_{1-\frac{\alpha}{2}}$: fractile d'ordre $1 - \frac{\alpha}{2}$ d'une $N(0,1)$.

et $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$ donc $P\left(-q_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{pq}}\sqrt{n} \leq q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$

Dans la pratique:

$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\overline{X} - q_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{pq}{n}} < p < \overline{X} + q_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{pq}{n}} \right) = 1-\alpha$

on remplace p pour la racine par son estimateur $\overline{x}$.

$\Rightarrow IC_{\alpha}(p) = \left[\overline{x} - q_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \; , \; \overline{x} + q_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}} \right]$.

<u>Exemple</u> <u>IC asymptotique basé sur l'e.m.V</u>

n-éch de $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

IC asymptotique pour λ au niveau $1-\alpha$.

on a :

e.m.V de λ est $\hat{\lambda} = \overline{x}$ et $I(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ = l'information au sens de fisher pour λ apportée par une réalisation de $\mathcal{P}(\lambda)$.

d'après le cours :

$\sqrt{n}(\hat{\lambda} - \lambda) \xrightarrow{Loi} N(0, I^{-1}(\lambda))$

$\Rightarrow \sqrt{I(\lambda)} \sqrt{n} (\hat{\lambda} - \lambda) \xrightarrow{Loi} N(0,1)$

$\Rightarrow Q(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = \sqrt{I(\lambda)} \sqrt{n} (\hat{\lambda} - \lambda)$ st une pivotale asymptotique pour λ

donc $Q(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = \sqrt{\frac{1}{\lambda}} \sqrt{n} (\overline{x} - \lambda) \sim N(0,1)$.

$\Rightarrow \mathbb{P}\left(-q_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq Q(x_1, \ldots, x_n, \lambda) \leq q_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) = 1-\alpha$

$\Rightarrow \mathbb{P}\left(-q_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \sqrt{\frac{1}{\lambda}} \sqrt{n} (\overline{x} - \lambda) \leq q_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) = 1-\alpha$

$\Rightarrow \mathbb{P}\left(-q_{1-\frac{\alpha}{2}} < \sqrt{\frac{n}{\overline{x}}} (\overline{x} - \lambda) < q_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) = 1-\alpha$ on remplace λ sous la racine par son e.m.V $= \overline{x}$

$\Rightarrow \mathbb{P}[\quad < \lambda < \quad] = 1-\alpha$ après on en déduit $IC_{\alpha}(\lambda)$