Corrigé Partiel 12 Novembre 2015

M1 - IM

Exercice 1

1) $\overline{X}_n = \lambda \Rightarrow \lambda^2 = (\overline{X}_n)^2$. Donc, un estimateur est $\hat{\theta}_n = (\overline{X}_n)^2$

2) $\mathbb{E}[(\overline{X}_n)^2] = Var(\overline{X}_n) + (\mathbb{E}[\overline{X}_n])^2 = \frac{Var(X)}{n} + (\mathbb{E}(X))^2$

$$= \frac{\lambda}{n} + \lambda^2 \neq \theta \Rightarrow \hat{\theta}_n \text{ biaisé}$$

Estimateur sans biais :

$$\tilde{\theta}_n = \hat{\theta}_n - \frac{\overline{X}_n}{n}, \quad \mathbb{E}[\tilde{\theta}_n] = \mathbb{E}[\hat{\theta}_n] - \mathbb{E}\left[\frac{\overline{X}_n}{n}\right]$$

$$= \frac{\lambda}{n} + \theta - \frac{\mathbb{E}[X]}{n} = \frac{\lambda}{n} + \theta - \frac{\lambda}{n}$$

$$= \theta \Rightarrow \tilde{\theta}_n \text{ sans biais}$$

3) $\hat{\theta}_n = (\overline{X}_n)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{P.S} (\mathbb{E}(X))^2$ par LFGN. Donc $\hat{\theta}_n \xrightarrow[n]{P.S} \lambda^2 = \theta$

$\Rightarrow \hat{\theta}_n$ fortement conv.

$\tilde{\theta}_n = \hat{\theta}_n - \frac{\overline{X}_n}{n}$, $\quad \overline{X}_n \xrightarrow{P.S} \mathbb{E}(X) = \lambda \Rightarrow \frac{\overline{X}_n}{n} \xrightarrow{P.S} 0$

Alors $\tilde{\theta}_n \xrightarrow{P.S} \theta - 0 = \theta \Rightarrow \tilde{\theta}_n$ fortement conv.

Exercice 2

Supposons, par absurd, qu'il existe un estimateur $T_n = T(X_1, \ldots, X_n)$ sans biais pour θ. Alors :

$\mathbb{E}[T_n] = \theta \quad \forall \theta$. Mais, par définition :

$$\mathbb{E}[T_n] = \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in\{0,1\}^n} T(x_1,\ldots,x_n) \cdot \mathbb{P}[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n]$$

X_i indép $\rightarrow$

$$= \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in\{0,1\}^n} T(x_1,\ldots,x_n)\, \mathbb{P}[X_1 = x_1] \cdots \mathbb{P}[X_n = x_n]$$

X_i de même loi $\rightarrow$

$$= \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in\{0,1\}^n} T(x_1,\ldots,x_n)\, p^{x_1}(1-p)^{1-x_1} \cdots p^{x_n}(1-p)^{1-x_n}$$

$$= \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in\{0,1\}^n} T(x_1,\ldots,x_n)\, p^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}$$

Puisqu'on a supposé T_n sans biais, on a $\forall p \in]0,1[$

$$\sum_{(x_1,\dots,x_n)\in\{0,1\}^n} T(x_1,\dots,x_n)\, p^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{1}{p^2(1-p)^3}$$

Dans cette égalité on fait $p \to 0$ et on obtient :

$0 = \infty$ absurd, donc il n'existe pas d'estimateur sans biais pour θ.

Exercice 3

1) $f_\theta(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{\theta} - \log\theta\right) 2x \cdot \mathbb{1}_{x>0}$

$$= \exp\big(c(\theta)\cdot T(x) + D(\theta)\big)\cdot \tilde{S}(x)$$

avec $c, T, D, \tilde{S}$ fonctions mesurables :

On prend : $c(\theta) = -\frac{1}{\theta}$, $T(x) = x^2$, $D(\theta) = -\log\theta$

$$\tilde{S}(x) = 2x\cdot\mathbb{1}_{x>0}.$$

2) La vraisemblence :

$$L_n(\theta) = L_n(\theta; x_1,\dots,x_n) = \prod_{i=1}^n f_\theta(x_i) = \frac{2^n}{\theta^n}\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)\cdot\exp\left(-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\mathbb{1}_{\min x_i}$$

$A = \{x \,/\, f_\theta(x) > 0\} =]0,\infty[$ ne dép pas de θ.

La fonction $f_\theta(x)$ est dérivable en θ sur A.

Alors, la log-vraisemblance est.

$$\log L_n(\theta) = n\log 2 - n\log\theta - \sum_{i=1}^n \log x_i - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log L_n(\theta) = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^n x_i^2 \Rightarrow \hat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log L_n(\theta) = +\frac{n}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3}\sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log L_n(\hat{\theta}_n) = \frac{n}{\hat{\theta}_n^2} - \frac{2}{\hat{\theta}_n^3}\cdot n\hat{\theta}_n = -\frac{n}{\hat{\theta}_n^2} < 0$$

$\Rightarrow \hat{\theta}_n$ point de max pour $L_n(\theta)$. Alors, l'EMV est : $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$

3) Soit G la f. de répartition de Y :

$y>0$

$$G(y) = \mathbb{P}[Y \leq y] = \mathbb{P}[X^2 \leq y] = \mathbb{P}[X \leq \sqrt{y}] = F(\sqrt{y})$$

$$g(y) = G'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} f(\sqrt{y}) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{2}{\theta}\sqrt{y} \cdot e^{-\frac{y}{\theta}}$$

$$= \frac{1}{\theta} e^{-\frac{y}{\theta}}$$

Si $y \leq 0 \Rightarrow G(y) = \mathbb{P}[Y < 0] = 0 \Rightarrow g(y) = 0$

Donc : $$g(y) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{y}{\theta}} \mathbb{1}_{y>0}$$

4) $$\mathbb{E}[Y] = \int_{\mathbb{R}} y\, g(y)\, dy = \int_0^{\infty} y e^{-\frac{y}{\theta}} dy = \left[-y e^{-\frac{y}{\theta}}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\frac{y}{\theta}} dy$$

$$= \left[-\theta e^{-\frac{y}{\theta}}\right]_0^{\infty} = \theta$$

5) Puisque la loi de X est de type exponentiel, alors :

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \hat{\theta}_n$ est un estimateur sans biais et efficace pour $\mathbb{E}[T(X)] = \mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[Y] = \theta$. (la fonction $c(\theta) = -\frac{1}{\theta}$ est de classe C^2 sur $]0, \infty[$ et $c'(\theta) \neq 0$.)

$\sum_{i=1}^{n} T(X_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ est exhaustif pour θ. Donc $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ est exhaustif pour θ.

6) Par LFGN, on a : $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \xrightarrow[n\to\infty]{P.S} \mathbb{E}(X^2)$

Donc $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P.S} \theta \Rightarrow \hat{\theta}_n$ fortement convergent.

<u>Exercice 4</u> $A = \{x ; f_\theta(x) > 0\} = \mathbb{R}$

La fonction $f_\theta(x)$ est dérivable en θ sur A.

Alors, la log-vraisemblance est :

$$\log L_n(\theta) = -\frac{n}{2}\log\theta - \frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{n}{2}\log(2\pi)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log L_n(\theta) = -\frac{n}{2\theta} + \frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 0 \Rightarrow \hat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log L_n(\theta) = \frac{n}{2\theta^2} - \frac{1}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log L_n(\hat{\theta}_n) = \frac{n}{2\hat{\theta}_n^2} - \frac{n\,\hat{\theta}_n}{\hat{\theta}_n^3} = -\frac{n}{2\hat{\theta}_n^2} < 0$$

$\Rightarrow \hat{\theta}_n$ point de max $\Rightarrow \boxed{\hat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$ EMV

2) $\mathbb{E}[\hat{\theta}_n] = \mathbb{E}[X^2] = Var(X) + (\mathbb{E}(X))^2 = Var(X) = \theta$

$\Rightarrow \hat{\theta}_n$ sans biais

3) Par le Théorème de Cochran, on a :

$$\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$$

4) Un estim sans biais pour θ : $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$, mais par 3), sa loi dépend de θ.

Soit la v.a : $Y_n = \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \frac{n}{\theta}\hat{\theta}_n \sim \chi^2(n)$

Alors, on cherche les constantes, c_1 et c_2 telles que

$1-\alpha = \mathbb{P}[c_1 \leq Y_n \leq c_2] \Rightarrow \begin{cases} c_1 = u_{\frac{\alpha}{2}} \text{ fractile d'ordre } \frac{\alpha}{2} \text{ de la loi } \chi^2(n) \\ c_2 = u_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad \ldots \quad 1-\frac{\alpha}{2} \ldots \end{cases}$

$$1-\alpha = \mathbb{P}\left[u_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

$$= \mathbb{P}\left[\underbrace{\frac{1}{u_{1-\frac{\alpha}{2}}}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}_{A_n} \leq \theta \leq \underbrace{\frac{1}{u_{\frac{\alpha}{2}}}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}_{B_n}\right]$$

5

Exercice 5

X : taux de cholestérol $\sim N(m, \sigma^2)$

On doit trouver l'intervalle de confiance pour la moyenne d'une loi Normale, de variance incon[nue]

La forme de l'ic est :

$$\left[\bar{x}_n - \frac{s_n^*}{\sqrt{n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}} \; ; \; \bar{x}_n - \frac{s_n^*}{\sqrt{n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

avec
$$\begin{cases} u_{1-\frac{\alpha}{2}} \text{ fractile d'ordre } 1-\frac{\alpha}{2} \text{ de la loi Student } t(n-1) = t(15) \\ \bar{x}_n = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} x_i \\ s_n^{*2} = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_n)^2 \end{cases}$$

$1-\alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05 \Rightarrow u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0{,}975} = 2{,}131$