Université Badji Mokhtar Annaba
3^{me} année licence Académique
Module : Mesure et intégration

Département de Mathématiques
2020/2021
Groupes : 1, 2 et 3

Micro-intérogation
(variante B)

Exercice 1. $\mathbf{6,5}$

I- *Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant chaque réponse.*

a) **1,25 pt** *soit* $E = \{a, b, c, d\}$, *la famille* $\mathcal{A} = \{\emptyset, E, \{a\}, \{c\}, \{b, a\}\}$ *est une* σ-*algèbre sur* E.

b) **1,25 pt** *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré, alors* $\forall A \in \mathcal{A}$ *on a* $\mu(A) = \mu(A \cup A^c) - \mu(A)$.

c) **1 pt** *Dans* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, *si* A *est un ensemble dénombrable, alors* $\lambda(A) = 0$.

II- **a)** **1,5 pt** *Donner la définition d'une* σ-*algèbre.*

b) **1,5 pt** *Citer le théorème de la convergence dominé.*

Exercice 2. $\mathbf{5,5}$

I- *On définit* f_n, *pour tout* $n \geq 1$ *par* $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \exp(-2x)\mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x)$

a) **0,75 pt** *Montrer que cette suite converge puis calculer* $\lim_n f_n(x)$.

b) **2 pt** *Montrer que cette suite est monotone. En déduire la valeur de* $\lim_n \int_{[0,+\infty[} f_n d\lambda$.

II- *Calculer* $\lim_n \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1 + x^n} dx$.

$(*)$ $\mathbf{0,5 + 0,5}$

$(**)$ $\mathbf{0,75 + 0,75 + 0,25 + 0,25}$

La micro-intérogation est notée sur 12 points.

Corrigé de la micro-interrogation

Variante B

Exercice 1

(I) (a) Faux, car $\{c\}^c \notin \mathcal{A}$ ($\{a\}^c \notin \mathcal{A}$ ou $\{a\} \cup \{c\} \notin \mathcal{A}$) 0,75 — 0,5

(b) faux, car si $\mu(A) = +\infty$ on aura une forme indéterminée 0,75 — 0,5

(c) Vrai, car $A = \bigcup_{i \geq 0} \{a_i\}$ et $\lambda(\{a_i\}) = 0$ 0,5 — 0,5

(II) (a) Soit E un ensemble non vide et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$.

$\mathcal{A}$ est dite σ-algèbre (ou tribu) sur E si on a : 1,5

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$, (iii) si $(A, B) \in \mathcal{A}^2 \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

(ii) si $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

(iii) si $\{A_i\}_{i \geq 0} \subset \mathcal{A}$ $(i \in \mathbb{N})$ alors $\bigcup_{i \geq 0} A_i \in \mathcal{A}$

(b) Le théorème de la convergence monotone (T.C.M)

Soit $f_n : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \overline{\mathbb{R}}_+$; $n \geq 0$, mesurables, si $\{f_n\}_{n \geq 0}$ est une suite croissante, alors : 1,5

$$\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \lim_{n \to +\infty} f_n \, d\mu .$$

Exercice 2 : (I)

(a) $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} \cdot \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x).$

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\right] \cdot \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x} \cdot x} e^{-2x}\right] \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$$

0,5

$$= e^{x} \cdot e^{-2x} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x) = e^{-x} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$$ 0,25

b) Montrons que $\{f_n\}_{n\geq 1}$ est une suite croissante. 0,75

On a :

$$\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^{k} \frac{x^k}{(n+1)^k}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^{k}\left(\frac{x}{n+1}\right)^k + \left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\geq 1 + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^{k}\left(\frac{x}{n+1}\right)^k \quad (x\geq 0) \quad (*)$$

$$C_{n+1}^{k}\left(\frac{x}{n+1}\right)^k = \frac{(n+1)\cdot n!}{k!\,(n+1-k)!} \cdot \frac{x^k}{(n+1)^k}$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot \frac{1}{(n+1-k)} \cdot \frac{x^k}{n^k} \cdot \frac{n^k}{(n+1)^{k-1}} \quad (k\geq 1)$$

Pour $k\geq 1$, montrons maintenant que :

$$\frac{n^k}{(n+1)^{k-1}} \cdot \frac{1}{(n+1-k)} \geq 1 \iff (n+1)^k - n^k \leq k(n+1)^{k-1}$$

On sait que

$$(n+1)^k = \sum_{k=0}^{k} C_k^{i} n^{i} = n^k + \sum_{i=0}^{k-1} C_k^{i} n^{i}$$

$$\Rightarrow (n+1)^k - n^k = \sum_{i=0}^{k-1} C_k^{i} n^{i} = k \sum_{k=0}^{k-1} \frac{(k-1)!}{i\,(k-i)!} n^{i}$$

$$= k \cdot \sum_{k=0}^{k-1} \frac{(k-1)!}{i!\,(k-1-i)!} \cdot \frac{1}{(k-i)} \cdot n^{i}$$

$$\leq k \cdot \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^{i}\, n^{i} = k(n+1)^{k-1}$$

D'où : $C_{n+1}^{k}\left(\frac{x}{n+1}\right)^{k} \geq C_{n}^{k}\left(\frac{x}{n}\right)^{k}$, $\forall 1 \leq k \leq n$ alors (*) devient :

$$\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} \; ; \forall n\geq 1.$$ Par conséquent

$$f_{n+1}(x) \geq f_n(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Alors, en utilisant le T.C.M, on peut écrire 0,75

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}_+} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\, d\lambda(x) = \int_{[0,+\infty[} e^{-x} d\lambda(x)$$

0,25 $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ (la fct exp est continue sur $]0,+\infty[$

$$= -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1 \quad 0{,}25$$

II - Posons $g_n(x) = \frac{\sin(\pi x)}{1+x^n} \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$

0,5 0,5

⊙ $|g_n(x)| \leq \frac{1}{1+x^n} \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \leq \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ et $\mathbb{1}_{[0,1]} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ (m̂ pour : $\frac{1}{1+x^n}\mathbb{1}_{[0,1]}$

⊙ $\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = \sin(\pi x) \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$. 0,75

Donc d'après le T.C.D. on a : 0,75

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1+x^n} dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} g_n(x)\, d\lambda(x)$$

$$= \int_{[0,1]} \lim_{n\to+\infty} g_n(x)\, d\lambda(x) = \int_0^1 \sin \pi x \, dx \quad 0{,}25$$

$$= \frac{1}{\pi}(-\cos \pi x)\Big|_0^1 = \frac{2}{\pi} \quad 0{,}25$$