Année Universitaire 2023/2024

Université de Jijel

Département de Mathématiques

Module : Mesure et Intégration

TD N°4

Exercice 1 : Pour $A \subset \mathbb{R}^2$, on note $t(A)$ l'ensemble des $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $(x_1, 0) \in A$. On pose $T = \{A \subset \mathbb{R}^2,\ t(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. Soit $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose $g(x) = (x_1\cos(\theta) - x_2\sin(\theta), x_1\sin(\theta) + x_2\cos(\theta))^t$.

1) Montrer que T est une tribu contenant $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

2) Soit $D \subset \mathbb{R}$ tel que $D \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On suppose $A = C \times \{0\}$.

- **a)** Montrer que $A \notin \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.
- **b)** On pose $f = 1_A \circ g$. Montrer que la fonction f n'est pas une fonction borélienne de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ mais que les fonctions $f(x_1, .)$ et $f(., x_2)$ sont boréliennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 : Calculer de deux façons différentes l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^1 e^{-x}\sin(2xy)dy\right)dx.$$

Déterminer la valeur de

$$J = \int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{\sin^2(x)}{x}dx.$$

Exercice 3 : Calculer de deux façons différentes l'intégrale

$$I = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dydx.$$

Déterminer la valeur de

$$J = \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2}du.$$

Exercice 4 : Soit $f(x, y) = 2e^{-2xy} - e^{-xy}$. Montrer que

$$\int_0^1\int_{\mathbb{R}_+} f(x,y)dxdy \neq \int_{\mathbb{R}_+}\int_0^1 f(x,y)dydx.$$

Pourquoi le théorème de Fubini ne s'applique-t-il pas ici ?