TP 2
Calcul des probabilités

1 Etude de peintres

Roger de Piles est un peintre et critique d'art français du 18ème siècle. Pour évaluer un peintre, de Piles a considéré quatre critères : composition, dessin, couleur, expression. Chacune de ces caractéristiques est notée sur 20. Plusieurs écoles artistiques ont été étudiés par de Piles : (A) renaissance, (B) maniériste, (C) italienne du 17ème siècle, (D) vénitienne, (E) lombarde, (F) 16ème siècle, (G) 17ème siècle, (H) française. Dans le logiciel R, on peut accéder aux notes de 54 peintres évalués par de Piles en chargeant tout d'abord la bibliothèque MASS :

```
> library(MASS)
```

Dans la bibliothèque MASS on trouve entre autre le *data.frame* painters

Q1 En utilisant des histogrammes, visualiser la distribution des notes pour chaque critère.

Q2 Calculer dans le vecteur *moyenne* La moyenne des quatre notes pour chaque peintre.

Q3 Calculer la moyenne, la variance et l'écart type empirique en utilisant uniquement la fonction *length()* et *sum()*. Puis retrouvez ces valeurs avec les fonctions *mean()*, *sd()* et *var()*.

Q4 Tracer l'histogramme des notes moyennes

2 Calcul de probabilités

Plusieurs lois de probabilités sont incluses par défaut dans R. Parmi les plus communes, on peut citer :

- la loi uniforme : unif
- la loi de Poisson : pois
- la loi exponentielle : exp
- la loi binomiale : binom
- la loi normale : norm
- la loi de Student : t

- la loi du χ^2 : chisq
- la loi de Fisher : f

Pour chacune de ces lois, il est possible d'accéder à la fonction de densité en ajoutant le préfixe *d*, à la fonction de répartition avec *p*, aux fractiles avec *q* et à un générateur de nombre aléatoire en utilisant le préfixe *r*. À titre d'exemple, étudions la loi uniforme sur l'intervalle [2 , 5] notée $U_{[2,5]}$. La valeur de sa fonction de densité f(x) en un point x peut être calculée à l'aide de la fonction *dunif()*.

> *dunif(1 , min = 2,max = 5)*	> *punif(0 , min = 2,max = 5)*	> *qunif(1/4, min = 2, max = 5)*
> *dunif(3 , min = 2,max = 5)*	> *punif(4 , min = 2,max = 5)*	> *runif(1 , min = 2 , max = 5)*
> *dunif(6 , min = 2,max = 5)*	> *punif(6, min = 2, max = 5)*	> *runif(10 , min = 2 , max = 5)*

Q5 Calculer les probabilités des évènements suivants :

1. une variable normale centrée réduite est supérieure à -2.
2. Une variable normale d'espérance 35 et d'écart type 3 est inférieure à 39.
3. Une variable normale d'espérance 35 et d'écart type 3 est entre 37 et 53.
4. Obtenir 9 piles sur 15 lancers d'une pièce de monnaie équilibrée.
5. Obtenir plus de 9 piles sur 15 lancers de la même pièce de monnaie.
6. Obtenir au moins 9 piles sur les 15 lancers.
7. Obtenir entre 9 et 13 piles sur 20 lancers d'une pièce telle que $P(pile) = 0.8$.

Q6 trouvez les fractiles d'ordre $\alpha = 0.05, 0.1, 0.9$ pour les lois suivantes :

1. Loi normale centrée réduite.
2. Loi du χ^2 à 10 degrés de liberté.
3. Loi de Student à 5 degrés de liberté.
4. Loi de Fisher à 2 et 5 degrés de liberté.

3 Implémentation d'une loi de probabilité

On souhaite maintenant ajouter à R la loi de probabilité de paramètre b définie par la densité de probabilité suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{b^2}x & si\ 0 \leq x \leq b \\ 0 & sinon \end{cases}$$

avec $b > 0$. On notera celle loi $\mathcal{L}(b)$.

Sous R il est possible de créer et de définir une fonction grâce à la commande *function*. Par exemple si on veut créer la fonction puissance qui prend deux paramètre a et b et qui retourne a^b si $a > 0$ et 1 sinon on utilise la syntaxe suivante :

```
Puissance <- function (a , b){
        y <- a^b
        y[a <= 0] <- 1
return(y)}
```

Q7 écrire la fonction *dloi(x , b)* qui donne pour tout $x \in \mathbb{R}$ son image par la densité $f(x)$ de loi $\mathcal{L}(b)$.

Q8 calculer la densité au point $x = -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ de la variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{L}(3)$.

Q9 écrire la fonction *ploi(x , b)* qui donne la fonction de répartition de loi $\mathcal{L}(b)$.

Q10 en fixant $b = 3$, tracer les graphe de *ploi(x , b)* et de *dloi(x , b)* entre -5 et 5. En utilisant la fonction *curve().*

Q11 écrire la fonction *qloi(alpha , b)* qui retourne le fractile d'ordre α de la loi $\mathcal{L}(b)$. On admettra que le fractile d'ordre 0 est égale à 0 et celui d'ordre 1 est égale à b.

Q12 démontrer que la variable $Y = F_X^{-1}(X) \hookrightarrow \mathcal{L}(b)$ avec $X \hookrightarrow U_{[0,1]}$. Puis écrire la fonction r*loi(n , b)* qui génère un échantillon aléatoire de taille n de la loi $\mathcal{L}(b)$.

Q13 Générer un échantillon de loi $\mathcal{L}(b)$ de taille n ($n = 10, 100, 1000, 10000$). Visualiser les 4 échantillons sous la forme d'histogrammes puis comparer avec la densité.