Université Mohammed Seddik Benyahia de Jijel
Faculté des sciences exactes et informatique

Département de mathématiques
Master 1 Analyse fonctionnelle

Le 18 Janvier 2024
Master 1 Probabilités et statistique

Examen De Distributions

Durée : 2h :00

Il est impératif de fournir une justification à chacune des réponses.

Exercice 1.

1. Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions localement intégrables convergenant simplement vers une fonction f localement intégrable. Montrer en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue que s'il existe g une fonction localement intégrable telle que

$$|f_k(x)| \leq g(x), \ \ \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

alors la suite de distributions $(T_{f_k})_k$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers la distribution T_f.

2. On considère la suite de fonction $(f_k)_k, \ \ k \geq 1$ définie par

$$f_k(x) = \begin{cases} 0 \quad si \quad x < -\frac{1}{2k} \\ kx + \frac{1}{2} \quad si \quad -\frac{1}{2k} \leq x \leq \frac{1}{2k} \\ 1 \quad si \quad x > \frac{1}{2k}. \end{cases}$$

   (a) Vérifier que $\forall k \geq 0$, f_k est localement intégrable.

   (b) Calculer $f_k(0)$ et montrer que la suite $(f_k)_k$ converge simplement vers la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad si \ x < 0 \\ \frac{1}{2} \quad si \ x = 0 \\ 1 \quad si \ x > 0. \end{cases}$$

   (c) Montrer en utilisant la question 1) que $T_{f_k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} T_f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et vérifier que T_f coincide avec la distribution de Heaviside.

   (d) Montrer que si une suite de distributions $(T_n)_n$ converge vers T, la suite des distributions dérivées $(T'_n)_n$ converge vers la dérivée T' de T. En déduire que $T'_{f_k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \delta$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice 2.

1. Soit $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ (distribution à support compact), et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a
$$e^{ax}(S * T) = (e^{ax}S) * (e^{ax}T).$$
2. Soit l'opérateur différentiel
$$D = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} + a, \quad a \in \mathbb{R}.$$
Calculer $D(e^{ax}T)$ et $e^{ax}DT$. Montrer qu'il existe un autre opérateur différentiel
$$D_a = \frac{d^2}{dx^2} + (1-2a)\frac{d}{dx} + a^2$$
tel que
$$D_a(e^{ax}T) = e^{ax}DT, \quad \text{pour tout } T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$
3. Soit T_0 une solution élémentaire de D. Donner une solution élémentaire de D_a en fonction de T_0.

Exercice 3.

Montrer que la distribution $T \in \mathcal{D}'(-1,1)$ définie par
$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{-1}^{1} |x|\varphi'(x)dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(-1,1),$$
est d'ordre 0.

Bon Travail

F. Aliouane

<u>Correction</u>

<u>Exercice 18</u> 10pts

1) Puisque $f_k \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Alors, T_{f_k} définie une distribution régulière qui est donnée par :

$$\langle T_{f_k}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f_k(x)\varphi(x)\,dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \forall k \in \mathbb{N}.$$ 0,5

Nous avons, $\exists\, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tq.

$$|f_k(x)| \leqslant g(x), \ \forall x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}.$$

Donc $|f_k(x)\varphi(x)| \leqslant g(x)\varphi(x)$. 0,25

De plus, $\lim_{k\to\infty} f_k(x)\varphi(x) = f(x)\varphi(x)$. 0,25 Par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on déduit que

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx = \langle T_f, \varphi \rangle$$ 0,5 car $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Ce qui signifie que $T_{f_k} \longrightarrow T_f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2) Soit $f_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\frac{1}{2k} \\ kx + \frac{1}{2} & \text{si } \frac{-1}{2k} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2k} \\ 1 & \text{si } x > \frac{1}{2k} \end{cases}$

a) $f_k \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $\forall k \geqslant 1$?

Pour celà, il suffit de montrer que f_k sont continues, $\forall k \geqslant 1$. 0,5

Observons que, $f_k\left(-\frac{1}{2k}\right) = k\left(-\frac{1}{2k}\right) + \frac{1}{2} = 0$ 0,25 et $f_k\left(\frac{1}{2k}\right) = 1$. 0,25

Donc toutes les f_k sont continues et définissent par conséquence des distributions T_{f_k}. 0,25

b) Nous avons, $f_k(0) = \frac{1}{2}$ 0,25

. Si $x<0$, il existe n tq $x < -\frac{1}{2n}$, et alors $f_n(x) = 0$ 0,5

$f_k(x) = 0$ pour tout $n \leq k$. Donc $f_k(x) \to 0$ pour de tels x. 0,5

. Si $x > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tq $x > \frac{1}{2n}$ et alors $f_n(x) = 1$ 0,5

et $f_k(x) = 1$ pour tout $k \geq n$. Donc $f_k(x) \to 1$ pour de tels x 0,5

En conclusion, $(f_k)_k$ converge simplement vers la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

c) On a $|f_k(x)| \leq 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$. 0,5
Comme la fonction constante est localement 0,5 intégrable, par la question 1), on en déduit que

$$T_{f_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} T_f \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$ 0,25

De plus, $T_f = H$ car $f(x) = H(x)$ sauf sur l'ensemble $\{0\}$ qui est de mesure nulle. 0,75

d) Supposons que $T_n \xrightarrow[n\to\infty]{} T$.
Par définition, $\langle T_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ — $(*)$ 0,5

On a, $\langle T_n', \varphi \rangle = -\langle T_n, \varphi' \rangle$ 0,5

Puisque si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a $\varphi' \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ 0,5 Par $(*)$, on aura

$\langle T_n, \varphi' \rangle \xrightarrow{0,5} \langle T, \varphi' \rangle$, autrement dit,

$$T_n' \xrightarrow[n\to\infty]{} T' \text{ ds } \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$ 0,25

En utilisant c), on a $T'_{f_k} \longrightarrow T'_f = H'$. (0,25)

Or, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\,dx = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle.$$

(0,75)

D'où, $T'_{f_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

<u>Exercice 2:</u> (06pts)

1) Soit $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, soit $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\langle e^{ax}(S * T), \varphi \rangle = \langle S * T, e^{ax}\varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \quad (0{,}25)$$

$$= \langle S_x, \langle T_t, e^{a(x+t)} \varphi(x+t) \rangle \rangle \quad (0{,}5)$$

$$= \langle S_x, e^{ax} \langle T_t, e^{at} \varphi(x+t) \rangle \rangle \quad (0{,}25)$$

$$= \langle e^{ax} S_x, \langle T_t, e^{at} \varphi(x+t) \rangle \rangle$$

$$= \langle (e^{ax} S) * (e^{ax} T), \varphi \rangle \quad (0{,}25)$$

D'où $e^{ax}(S * T) = (e^{ax} S) * (e^{ax} T)$.

2) $D = \dfrac{d^2}{dx^2} + \dfrac{d}{dx} + a$, $a \in \mathbb{R}$.

$$D(e^{ax}T) = \frac{d^2}{dx^2}(e^{ax}T) + \frac{d}{dx}(e^{ax}T) + a e^{ax} T, \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \quad (0{,}25) \quad -(**)$$

On a, $\dfrac{d}{dx}(e^{ax}T) = e^{ax} \cdot T' + a e^{ax} T = (T' + aT)e^{ax}$ (0,25)

et $\dfrac{d^2}{dx^2}(e^{ax}T) = \dfrac{d}{dx}(T' + aT)e^{ax}$

$$= (T'' + 2aT' + a^2 T)e^{ax} \quad (0{,}5)$$

Donc $D(e^{ax}T) = e^{ax}(T'' + T' + aT) + 2a e^{ax} T' + (a^2 + a) e^{ax} T$. (0,25)

Par intégration par partie, on trouve

$$\langle T, \varphi\rangle = x(\varphi(x)-\varphi(-x))\Big|_0^1 - \int_0^1 (\varphi(x)-\varphi(-x))\,dx \quad 0{,}5$$

$$= \int_0^1 (\varphi(x)-\varphi(-x))\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} \varphi(x)\,dx - \int_0^1 \varphi(x)\,dx. \quad 0{,}25$$

Par conséquent, on obtient

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq \left|\int_{-1}^{0} \varphi(x)\,dx\right| + \left|\int_0^1 \varphi(x)\,dx\right| \quad 0{,}25$$

$$\leq \int_{-1}^{1} |\varphi(x)|\,dx \leq 2\|\varphi\|_{C(K)}. \quad 0{,}5$$

Par le critère de continuité (cc):

$$\big(T \in \mathcal{D}'(\Omega)\big) \Leftrightarrow \left(\forall K \text{ cpt de } \Omega,\ \exists c>0, \exists m \in \mathbb{N}_0 \text{ tq. } |\langle T,\varphi\rangle| \leq c \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha \varphi\|_{C(K)},\ \forall \varphi \in C(K)\right) \quad 1$$

On déduit que, 0,25 (cc) est vérifiée pour $c=2$ 0,25 et $m=0$ 0,25.

Donc T est une distribution d'ordre 0.