Corrigé micro groupe 1

Exercice 1

X étant une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson d'espérance $\lambda > 0$, le paramètre de la loi est aussi donné par λ, ainsi que la variance, ainsi

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, k = 0, 1, 2, ... \tag{1}$$

On a

$$P(X = 1 \mid X \leq 2) = 0,4 = \frac{P(X = 1, X \leq 2)}{P(X \leq 2)} = \frac{P(X = 1)}{P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)}$$

puisque les évènements $\{X = 0\}$, $\{X = 1\}$ et $\{X = 2\}$ sont disjoints, d'où en remplaçant successivement dans (1) k par $0, 1, 2$, on aura

$$0,4 = \frac{\lambda e^{-\lambda}}{e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} + e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2!}} = \frac{\lambda}{1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2}}$$

donc

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

qui a pour solutions $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$.

Exercice 2

On note par F_X la fonction de répartition de la variable aléatoire X, $F_X(x) = P(X \leq x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int\limits_{0}^{x} f_X(t)\,dt$ puissque la densité est nulle pour les valeurs négatives.

1) Si $x < 0$, $\quad F_X(x) = 0$

Si $0 \leq x < 1 \quad F_X(x) = 6\int\limits_0^x t(1-t)\,dt = 6\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) = 6x^2\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{3}\right)$

Si $x \geq 1 \quad F_X(x) = 1$

2)

$$\begin{aligned}
P\left(\left|X - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{4}\right) &= P\left(-\frac{1}{4} < X - \frac{1}{2} < \frac{1}{4}\right) = \\
&= P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{3}{4}\right) = \\
&= F_X\left(\frac{3}{4}\right) - F_X\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{11}{16}
\end{aligned}$$

On pourrait trouver le même résultat en calculant

$$P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{3}{4}\right) = \int\limits_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} f_X(x)\,dx = 6\int\limits_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} x(1-x)\,dx$$

Corrigé micro groupe 2

Exercice 1

X étant une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, alors son espérance est aussi égale à λ.

La loi de X est donnée par

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, k = 0, 1, 2, ... \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ P(X \leq 1) &= P(X = 0) + P(X = 1) \end{aligned}$$

d'où, après avoir remplaçé successivement dans (1) k par $0, 1, 2$, on aura

$$\begin{aligned} \frac{P(X \leq 2)}{P(X \leq 1)} &= 2,6 = \frac{P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)}{P(X = 0) + P(X = 1)} = \\ &= \frac{e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} + e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2!}}{e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda}} = \frac{1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2}}{1 + \lambda} = 2,6 \end{aligned}$$

d'où

$$1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2} = 2,6 + 2,6\lambda$$

ainsi

$$5\lambda^2 - 16\lambda - 16 = 0$$

qui a pour solutions

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = -0,8$$

Seule $\lambda_1$est acceptée car $\lambda_2 < 0$. Par conséquent $E(X) = 4$.

Exercice 2

On note par F_X la fonction de répartition de la variable aléatoire X, $F_X(x) = P(X \leq x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt = \int\limits_{0}^{x} f_X(t)\, dt$ puisque la densité est nulle pour les valeurs négatives.

1) Si $x < 0$, $\quad F_X(x) = 0$

Si $0 \leq x < 1 \quad F_X(x) = 3\int\limits_0^x t^2 dt = 3 \times \frac{x^3}{3} = x^3$

Si $x \geq 1 \quad F_X(x) = 1$

2)

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{2} < X \leq \frac{3}{4}\right) &= F_X\left(\frac{3}{4}\right) - F_X\left(\frac{1}{2}\right) = \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{19}{64} \end{aligned}$$

On pourrait trouver le même résultat en calculant

$$P\left(\frac{1}{2} < X \leq \frac{3}{4}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} f_X\left(x\right) dx = 3 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} x^2 dx$$

Corrigé micro n°2 groupe 1

1) La densité de probabilité de la variable aléatoire X doit vérifier

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$$

ainsi

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{+a} (x+1)\,dx &= 1 = \frac{x^2}{2} + x \,|_{-a}^{+a} = \frac{a^2}{2} + a - \left(\frac{a^2}{2} - a\right) = \\ &= 2a = 1\end{aligned}$$

d'où

$$a = \frac{1}{2}$$

et donc

$$f_X(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } \quad x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2)

$$\begin{aligned}E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} x(x+1)\,dx = \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \,|_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{12}\end{aligned}$$

3) On note par F_X la fonction de répartition de la variable aléatoire X, $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{x} f_X(t)\,dt$

Si $x < -\frac{1}{2}$ $\quad F_X(x) = 0$

Si $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$ $\quad F_X(x) = \int_{-a}^{x} (t+1)\,dt = \left(\frac{t^2}{2} + t\right)_{-\frac{1}{2}}^{x} = \frac{x^2}{2} + x - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\right) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{3}{8}$

Si $x \geq 1 \quad F_X(x) = 1$

4) Soit $Y = X^2$, puisque le support de X est $X(\Omega) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, le support de $Y = X^2$ soit $Y(\Omega)$ est donc $\left[0, \frac{1}{4}\right]$

$\{Y \leq y\}$ s'écrit $\left\{X^2 \leq y\right\} = \varnothing$ si $y < 0$ et $\varnothing$ est l'évènement impossible

Si $y \geq 0, \{Y \leq y\} = \left\{X^2 \leq y\right\} = \left\{|X| \leq \sqrt{y}\right\} = \left\{X \leq \sqrt{y}\right\} \cap \overline{\left\{X < -\sqrt{y}\right\}}$ qui est l'intersection de deux évènements. Par conséquent, Y est une variable aléatoire.

La fonction de répartition de Y est définie par $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(X^2 \leq Y\right) = 0 \;\; si \; y < 0$

Soit $y \geq 0, F_Y(y) = P\left(|X| \leq \sqrt{y}\right) = P\left(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\right) = F_X\left(\sqrt{y}\right) - F_X\left(-\sqrt{y}\right)$, par dérivation par rapport à y, on a que

la densité f_Y de Y est donnée par

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= F'_Y(y) = F'_X(\sqrt{y}) - F'_X(-\sqrt{y}) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(-\sqrt{y}) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}} (\sqrt{y} + 1 - \sqrt{y} + 1) = \frac{1}{\sqrt{y}} \qquad y \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \end{aligned}$$