

**Exercice 1 :**

Soit  $\alpha, \sigma$  deux constantes réelles,  $(B_t)_{t \geq 0}$  un  $\mathcal{F}_t$ -mouvement Brownien et

$$dX_t = -\frac{1}{2}\alpha X_t dt + \frac{1}{2}\sigma dB_t.$$

Soit  $Y_t = X_t \cdot e^{\frac{\alpha t}{2}}$ .

- Vérifier que  $X_t$  est un processus d'Itô.
- Écrire  $dY_t$ .
- Dédire la forme de la solution  $X_t$ .

**Exercice 2 :**

Résoudre l'EDS :

$$dS_t = S_t (\mu dt + \sigma dB_t), \quad S_0 = x_0.$$

**Exercice 3 :**

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  une base stochastique,  $B$  un mouvement brownien standard et  $\lambda$  une constante réelle. Soit :

$$\begin{cases} dX_t = -\lambda^2 X_t^2 (1 - X_t) dt + \lambda X_t (1 - X_t) dB_t, \\ X_0 = x \in ]0, 1[. \end{cases}$$

On admet que  $X$  prend ses valeurs dans l'intervalle  $]0, 1[$ . On pose  $Y_t = \frac{X_t}{1 - X_t}$ .

1. Vérifier que  $X_t$  est un processus d'Itô.
2. Quelle est l'E.D.S (Équation Différentielle Stochastique) vérifiée par  $Y$ ?
3. Résoudre cette E.D.S et donner une formule explicite de  $Y$ .
4. Dédire que  $X_t = \frac{x \exp[\lambda B_t - \lambda^2 t/2]}{x \exp[\lambda B_t - \lambda^2 t/2] + 1 - x}$ .

**Exercice 4 :**

Soit l'EDS :

$$dX_t = bX_t dt + dB_t, \quad X_0 = x.$$

1. On pose  $Y_t = e^{-t} \cdot X_t$ .
  - Quelle est l'EDS vérifiée par  $Y_t$ ?
  - Exprimer  $Y_t$  sous la forme :  $Y_t = y + \int_0^t f(s) dB_s$ , où l'on explicitera la fonction  $f$ .
2. Calculer  $\mathbb{E}(Y_t)$  et  $\mathbb{E}(Y_t^2)$ .

**Exercice 5 :**

On considère l'équation :

$$dX_t = a(t)X_t dt + b(t)dt + c(t)dB_t$$

$a(t)$ ,  $b(t)$  et  $c(t)$  sont des processus adaptés.

1. Résoudre cette équation par la méthode de la variation de la constante.
2. Résoudre l'EDS  $dX_t = -\frac{1}{1+t}X_t dt + \frac{1}{1+t}dB_t$ ,  $X_0 = 0$ .

**Exercice 6 :**

Soit  $B$  un mouvement Brownien dont la filtration est notée  $(\mathcal{F}_t)$ . Soit  $\sigma$  un processus adapté continu de  $L^2(\Omega \times \mathbb{R})$  et

$$X_t = \int_0^t \sigma_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 ds.$$

On pose  $Y_t = \exp(X_t)$  et  $Z_t = Y_t^{-1}$ .

1. Expliciter la dynamique de  $Y$ , c'est-à-dire exprimer  $dY_t$ .
2. Donner une condition sur  $\sigma$  pour que  $Y$  soit une martingale
3. Calculer  $\mathbb{E}(Y_t)$  dans ce cas. Expliciter les calculs quand  $\sigma = 1$ .
4. Calculer  $dZ_t$ .

**Exercice 7 :**

I Soit le processus  $\{C_t = C_0 e^{\alpha B_t}; t \geq 0\}$ ,  $C_0 \geq 0$  et  $C_t$  : est le processus du taux de change de dollars canadiens par un dollars américains au temps  $t$  (le nombre de dollar canadien que l'on peut obtenir par dollar américains),  $B_t$  est un mouvement Brownien standard.

a) Déterminer l'EDS satisfaite par le processus  $\{C_t, t \geq 0\}$ .

II Soit le processus  $\{X_t, t \geq 0\}$  qui modélise l'évolution d'un actif risqué en dollars américains satisfaisant l'EDS

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma X_t dB_t^*$$

où  $\{B_t^*, t \geq 0\}$  est un mouvement Brownien standard indépendant de  $\{B_t, t \geq 0\}$ .

b) Déterminer l'EDS satisfaite par l'évolution  $\{Y_t, t \geq 0\}$  du titre risqué en dollars canadiens.