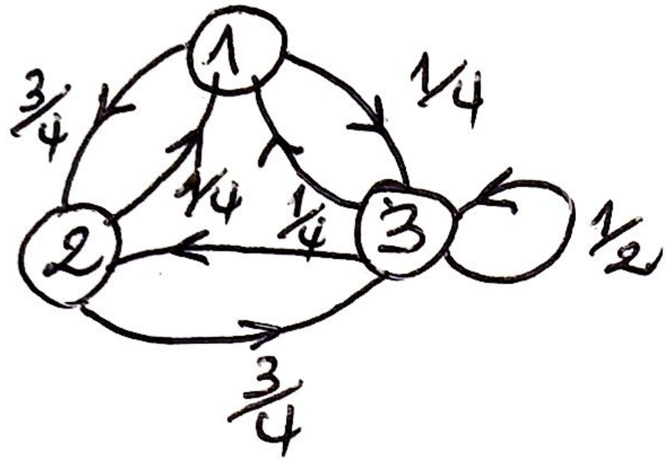
Exemple : Soit la C.M. donnée par :



Calculer le temps moyen du 1er retour à chaque état, i.e μ_1, μ_2 et μ_3 s'ils existent.

Solution :

Le temps moyen du 1er retour à l'état (i) : μ_i s'il existe $= \frac{1}{\pi_i}$.

Donc le pb sera la recherche de la loi limite ${}^t\pi = (\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3)$.

D'après le graphe :

La C.M. est apériodique et irréductible à espace d'états fini $\longrightarrow$ Récurrente.

D'où π existe et est unique.

* π est stationnaire (invariante p.r.p. à P)

c-à-d. ${}^t\pi P = {}^t\pi$; $\pi = \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix}$

avec $P = \begin{bmatrix} 0 & 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$

π est la solution unique du système :

$$(\pi_0 \quad \pi_1 \quad \pi_2) \begin{bmatrix} 0 & 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} = (\pi_0 \quad \pi_1 \quad \pi_2)$$

$\oplus$. $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$

On obtient alors le système :

$$\begin{cases} \frac{1}{4}(\pi_1 + \pi_2) = \pi_0 & (1) \\ \frac{1}{4}(3\pi_0 + \pi_2) = \pi_1 & (2) \quad \oplus \ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \\ \frac{1}{4}(\pi_0 + 3\pi_1 + 2\pi_2) = \pi_2 \end{cases}$$

de l'éq^t $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$,

On a $\boxed{\pi_2 = 1 - \pi_0 - \pi_1}$

Substituant π_3 par sa valeur ds (1) et (2)

Il s'en suit :

$$\begin{cases} \pi_1 + 1 - \pi_0 - \pi_1 = 4\pi_0 \\ 3\pi_0 + 1 + \pi_0 - \pi_1 = 4\pi_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi_0 = 1/5 \\ \pi_1 = 7/25 \end{cases}$$

$\therefore \ \pi_2 = 1 - \pi_0 - \pi_1 = 13/25$.

$\pi = (1/5 \quad 7/25 \quad 13/25)$

Les temps moyens des 1er retour à

l'état 0 : $\mu_0 = 1/\pi_0 = 5 \geq 1$

l'état 1 : $\mu_1 = 1/\pi_1 = 25/7 \geq 1$

l'état 2 : $\mu_2 = 1/\pi_2 = 25/13 \geq 1$.