SERIE 3

Exercice 1
Soit X une $v.a.$ discrète,de loi donnée par

$$P(X = k) = p_k,\ \ k = 0, 1, ...$$

et on donne

$$P(X > k) = q_k, k \geq 0$$

On considère

$$Q(s) = \sum_{k \geq 0} q_k s^k$$

en tenant compte que la série de somme $Q(s)$ converge pour $|s| < 1$.
1) Montrer que

$$Q(s) = \frac{1 - G(s)}{1 - s} \qquad pour \quad |s| < 1$$

et où $G(s)$ est la fonction génératrice de X.

2) Trouver $E(X), V(X)$ en fonction de Q et de ses dérivées.

Exercice 2
Trouver la fonction génératrice des moments sachant que les moments de la distribution d'une $v.a.X$ sont donnés par $m_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Exercice 3
Montrer que la variable aléatoire X qui a pour fonction caractéristique $\varphi_X(t) = e^{-|t|}, \forall t \in \mathbb{R}$,suit une loi de Cauchy.

Exercice 4
Montrer que la loi d'une $v.a.X$ est symétrique (X et $-X$ ont même loi) si et seulement si φ_X est réelle.

Exercice 5
Déterminer la fonction caractéristique d'une $v.a.X$ telle que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$,et en déduire ses moments.

Exercice 6

1) Soient X et Y deux v.a. de densités respectives

$$f_1(x) = (1 - |x|)\, I_{[-1,1]}(x) \qquad et \qquad f_2(x) = \frac{1 - \cos y}{\pi y^2}, \quad y \in \mathbb{R}$$

Déterminer les fonctions caractéristiques des v.a. X et Y.
2) Trouver la loi correspondante à la fonction caractéristique suivante :

$$\varphi_1(t) = \left(\frac{1}{2} e^{it} + \frac{1}{2}\right)^4$$