fse.png

udl.png

$\mathcal{U}$niversité $\mathcal{D}$jillali $\mathcal{L}$iabès $\mathcal{D}$e $\mathcal{S}$idi $\mathcal{B}$el $\mathcal{A}$bbès
$\mathcal{F}$aculté $\mathcal{D}$es $\mathcal{S}$ciences $\mathcal{E}$xactes
2ème $\mathcal{A}$nnée $\mathcal{L}$icence $\mathcal{M}$athématiques et $\mathcal{I}$nformatiques

---

$\mathcal{E}$*xamen* de $\mathcal{P}$robabilités (01h 30mn)

$\mathcal{R}$esponsable du $\mathcal{M}$odule : *S.BENAISSA*

Exercice 1 *:(08 points)*
Soit X une v.a.r. suivant la loi de Rademacher $\mathcal{R}(a)$ avec $a = 1$:

$$\mathbb{P}(X = -1) = 1/2, \mathbb{P}(X = 1) = 1/2.$$

i) Calculer $\mathbb{P}(|X| = 1)$ et $\mathbb{P}(X^2 - 3X + 2 = 0)$. 1 + 01
ii) Calculer $\mathbb{E}(X)$, $Var(X)$ et σ_X. 02
iii) Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{X}{X+2}\right)$. 01
iv) On pose

$$Y = \frac{X+1}{2}$$ 03

Déterminer la loi de Y.

Exercice 2 *:(12 points)*
Soit X une v.a.r. de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}e^{-2x} & si\ x \geq 0 \\ \dfrac{2}{3(1-x)^2} & sinon \end{cases}$$

i) Vérifier que f_X est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X. 03
ii) Déterminer la fonction de répartition de X. 03
iii) On pose

$$Y = \frac{X}{|X|}$$ 04

Déterminer la loi de Y.
iv) Calculer $\mathbb{E}((-1)^{\cancel{X}Y})$ et $Var(3\cancel{X}Y^2 + 3)$. 02

Solution (Exercice n° 1) :

i) On a $X(\Omega) = \{-1, 1\}$, donc $(|X|)(\Omega) = \{1\}$. Par conséquent, $\mathbb{P}(|X| = 1) = 1$. 01

On a $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$, donc

$$\{X^2 - 3X + 2 = 0\} = \{X = 1\} \cup \{X = 2\}$$
$$= \{X = 1\} \cup \phi = \{X = 1\}.$$ Il vient

$$\mathbb{P}(X^2 - 3X + 2 = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}.$$

ii) On a

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x_i \in X(\Omega) = \{-1,1\}} x_i \, \mathbb{P}(X = x_i)$$
$$= (-1)\,\mathbb{P}(X = -1) + 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1)$$
$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

On a $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$.

Comme $\mathbb{E}(X^2) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i^2 \, \mathbb{P}(X = x_i)$

$$= (-1)^2 \, \mathbb{P}(X = -1) + 1^2 \, \mathbb{P}(X = 1)$$
$$= 1$$

Il vient

$$\mathrm{Var}(X) = 1, \quad \sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = 1$$

iii) On a

$$\mathbb{E}\left(\frac{X}{X+2}\right) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} \frac{x_i}{x_i+2} \mathbb{P}(X = x_i)$$

$$= \frac{-1}{2-1} \mathbb{P}(X=-1) + \frac{1}{2+1} \mathbb{P}(X=1)$$

$$= -1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}.$$

iv) On a $Y(\Omega) = \left(\frac{X+1}{2}\right)(\Omega) = \{0, 1\}$ avec $\{Y=0\} = \{X=-1\}$ et $\{Y=1\} = \{X=1\}$. Donc

03

$$\mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(X=-1) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{2}.$$

Au final, la loi de Y est donnée par

$$\mathbb{P}(Y=0) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(Y=1) = \frac{1}{2}.$$

(C'est la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $p = \frac{1}{2}$).

Solution (Exercice n° 2) :

i) On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_X(x) \geq 0$, et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{2}{3(1-x)^2}\,dx + \int_0^{\infty} \frac{2}{3} e^{-2x}\,dx$$ 03

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{1}{1-x}\right]_{-\infty}^{0} + \frac{2}{3}\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{\infty} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

Donc f_X est bien une densité.

ii) On a $X(\Omega) = \mathbb{R}$ et $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$

$$= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt,$$

$x \in \mathbb{R}$. Vu l'expression de f_X, il faut distinguer le cas $x < 0$ et le cas $x \geq 0$.

Pour tout $x < 0$, on a

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$ 01,5

$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{2}{3(1-t)^2}\,dt = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{1-t}\right]_{-\infty}^{x}$$

$$= \frac{2}{3(1-x)}.$$

Pour tout $x \geqslant 0$, on a

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f_X(t)\,dt + \int_0^x f_X(t)\,dt$$

0,5

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{2}{3(1-t)^2}\,dt + \int_0^x \frac{2}{3} e^{-2t}\,dt$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{1}{1-t}\right]_{-\infty}^{0} + \frac{2}{3}\left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^x$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 1 - \frac{1}{3}e^{-2x}.$$

Au final, la fonction de répartition de X est

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{3}e^{-2x} & \text{si } x \geqslant 0, \\ \frac{2}{3(1-x)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

iii) On a $Y(\Omega) = \left(\frac{X}{|X|}\right)(\Omega) = \{-1, 1\}$ selon le signe de la var X (On a $\mathbb{P}(X=0) = 0$).

En utilisant le résultat de la question ii), il vient

04

$$\mathbb{P}(Y=-1) = \mathbb{P}(X<0) = F_X(0) = \frac{2}{3}$$

Cela entraîne $\mathbb{P}(Y=1) = 1 - \mathbb{P}(Y=-1)$

$= \frac{1}{3}$. Ainsi, la loi de Y est donnée par

$$\mathbb{P}(Y=-1) = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{P}(Y=1) = \frac{1}{3}.$$

iv) • $\mathbb{E}((-1)^Y) = \sum_{y_i \in Y(\Omega)} y_i \, \mathbb{P}(Y=y_i)$

01

$= 0 \, \mathbb{P}(Y=0) + 1 \, \mathbb{P}(Y=1)$

$= \frac{1}{2}$

•• $\mathrm{Var}(3Y^2+3) = 9 \, \mathrm{Var}(Y^2)$

$= 9\left(\mathbb{E}(Y^4) - (\mathbb{E}(Y^2))^2\right)$

$\mathbb{E}(Y^2) = \sum_{y_i \in Y(\Omega)} y_i^2 \, \mathbb{P}(Y=y_i)$

01

$= 0^2 \, \mathbb{P}(Y=0) + 1^2 \, \mathbb{P}(Y=1)$

$= \frac{1}{2}$

$\mathbb{E}(Y^4) = \sum_{y_i \in Y(\Omega)} y_i^4 \, \mathbb{P}(Y=y_i) = 0^4 \, \mathbb{P}(Y=1) + 1^4 \, \mathbb{P}(Y=1)$

$= \frac{1}{2}$

Finalement $\mathrm{Var}(3Y^2+3) = 9\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{9}{4}$.