Université Hassiba Benbouali de Chlef
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

Année Universitaire : 2020-2021
Module : Analyse fonctionnelle
Niveau : Master 1

Feuille de TD 2

Exercice 1.

a. Soit X un espace vectoriel normé sur $\mathbb{C}$, et soit f une forme linéaire sur X. Montrer que soit f est identiquement nulle, ou soit elle est surjective.
b. Montrer que si f et g sont deux formes linéaires non nulles sur X, alors

$$(\ker f = \ker g) \Longleftrightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0 : g = \lambda f)$$

Exercice 2.

Considérons les espaces vectoriels normés ℓ_1 et ℓ_∞ munis des normes $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ et $\|x\|_\infty = \sup\limits_{n\geq 1} |x_n|$, $x = (x_n)_n \subset \mathbb{C}$ respectivement. On note $\mathcal{C}_0$ le sous-espace de ℓ_∞ constitué des suites qui convergent vers 0, et $\mathcal{P}$ l'ensemble des suites complexes nulles à partir d'un certain rang, i.e.

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_0 &= \left\{ x = (x_n)_n \subset \ell_\infty : \lim_{n\to+\infty} x_n = 0 \right\} \\ \mathcal{P} &= \{ x = (x_n)_n \subset \mathbb{C} \ , \ \exists N_0 \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N_0 : x_n = 0 \} \end{aligned}$$

1. Vérifier les inclusions $\mathcal{P} \subset \ell_1 \subset \mathcal{C}_0 \subset \ell_\infty$.
2. Comparer sur ℓ_1 la norme $\|.\|_1$ avec la restriction de $\|x\|_\infty$ de ℓ_∞ à ℓ_1.
3. Montrer que $\mathcal{P}$ est une partie dense de $(\ell_1, \|.\|_1)$.
4. Montrer que $\mathcal{P}$ est une partie dense de $(\mathcal{C}_0, \|.\|_\infty)$.
5. Montrer que $\mathcal{P}$ n'est pas une partie dense de $(\ell_\infty, \|.\|_\infty)$. (Utiliser la suite constante $x_n = 1, n \geq 1$)
6. Montrer que l'application $\Phi \colon \mathcal{C}_0^{'} \to \ell_1$ définie par $f \mapsto \Phi(f) = (f(e_k))_{k\geq 1}$ où $e_n = (\delta_{nk})_{k\geq 1}$, $\delta_{nk} = \begin{cases} 1, & \text{si } n = k \\ 0, & \text{si } n \neq k \end{cases}$ est un isomprphisme isométrique. Que peut-on déduire pour l'espace ℓ_1?

Exercice 3.

a. Soit Ω un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ dont la mesure de Lebesgue est finie, i.e. $\mu(\Omega) < +\infty$, et soit pour tout $p, 1 \leq p < +\infty$, l'espace vectoriel normé

$$L_p(\Omega) = \left\{ f \colon \Omega \to \mathbb{R}, \int\limits_\Omega |f(x)|^p \, dx < +\infty \right\}$$

et $L_\infty(\Omega)$ se note à l'espace des fonctions essentiellement bornées sur Ω , i.e.

$$L_\infty(\Omega) = \left\{ f \colon \Omega \to \mathbb{R}, \sup_{x\in\Omega} |f(x)| < +\infty \right\}$$

munis des normes $\|f\|_p = (\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p \, dx)^{\frac{1}{p}}$, $(1 \leq p < +\infty)$ et $\|.\|_\infty = \sup\limits_{x\in\Omega} |f(x)|$ respectivement.
- Montrer que $L_p(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ si $q < p$. En particulier, on a pour $1 < p < 2 < q$:

$$L_\infty(\Omega) \subset L_q(\Omega) \subset L_2(\Omega) \subset L_p(\Omega) \subset L_1(\Omega)$$

(★★) b. Soit $E = L_p([0,1])$, $(1 \leq p < +\infty)$, et soit l'application $A\colon E \to E$, $u \mapsto Au$ où

$$Au(x) = xu(x), \quad x \in [0,1]$$

Montrer que $A \in \mathcal{L}(E)$, puis donner un majorant de sa norme.