Exercices : Comportement asymptotique des chaines de Markov en temps discret

Exercice 1

Montrer que la récurrence est une propriété de classe, c'est-à-dire si $i \longleftrightarrow j$ et i récurrent alors j récurrent

Exercice 2

On donne la matrice de transition d'une chaine de Markov à valeurs dans {0,1,2}

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Montrer que l'état 1 est récurrent positif

Exercice 3

Soit un état i dans E, tel que i est transitoire. Montrer que conditionnellement à

$X_0 = i$, la variable aléatoire $N_i = \sum_{k=1}^{n} I_{\{X_k=i\}}$ est intégrable.

Exercice 4

Soit une chaine de Markov sur les états {0,1,2,3,4,5} dont les probabilités de transition sont données par la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Trouver $\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} P^n$

Exercice 5

On considère la chaine de Markov définie sur $\mathbb{N}$ par la matrice de transition P vérifiant : $p_{0k} = p_k > 0$ pour $k \in \mathbb{N}$, $p_{kk-1} = 1$ pour$k \in \mathbb{N}^*$, $p_{ij} = 0$ sinon.

1- Faire le graphe de cette chaine et donner les classes et périodes.
2- Montrer que si $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ pour $k \in \mathbb{N}$, la chaine est récurrente nulle.
3- On suppose que $p_k = \frac{1}{2^{k+1}}$ pour $k \in \mathbb{N}$. Déterminer f_{00}^n pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrer que $\mu_0 = 2$
4- Trouver les distributions stationnaires (on trouvera en particulier μ_0).

Exercice 6

Une sauterelle se déplace sur les sites 0,1 et 2 disposés sur un cercle en allant à chaque saut au site adjacent dans le sens des aiguilles d'une montre avec probabilité p et au site adjacent dans le sens contraire avec probabilité 1- p . Soit p_{ij}^n la probabilité de passer du site i au site j en n sauts.

1- Déterminer les valeurs de p pour lesquelles p_{ij}^n converge pour tout i, j et trouver les valeurs limites.
2- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} p_{ij}^k$

Exercice 7

Une chaine de Markov sur les états 0,1,2,3 et 4 a comme matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1- Déterminer, si elles existent, les limites des probabilité de transition en n pas suivantes : $\lim\limits_{n\to\infty} p_{00}^{(n)}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} p_{01}^{(n)}$

Exercice 8

On considère une chaine de Markov à espace d'états 0,1,2,3,4 et de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1- La chaine est-elle ergodique ?
2- Montrer que l'état 2 est récurrent positif
3- Trouver $\lim\limits_{n\to\infty} p_{02}^{dn}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} p_{23}^{dn}$

Exercice 9

Une chaine de Markov à temps discret sur les états 0,1,2,3,4 possède les probabilités de transition en un pas données par la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Déterminer :

1- Les classes d'états et leur type {transiente, récurrente positive ou nulle, périodique ou apériodique.

2- La limite lorsque n tend vers l'infini de la probabilité de transition de 0 à 4 en n pas , $p_{04}^{(n)}$, si la limite existe .

Exercice 10

Une particule se déplace sur $E = \{1,2,3,4,5\}$ en effectuant à chaque instant soit un pas à droite avec la probabilité 1/2 . Soit un pas à gauche avec la probabilité 1/2.

1- Déterminer la matrice de transition P

2- Ecrire la matrice P sous la forme canonique et calculer la matrice fondamentale.

4- Trouver $\lim_{n\to\infty} P^n$

3- Calculer la probabilité pour que la chaine partant de l'état 2 soit absorbée à l'état 1

Exercice 11

Soit X_n une chaine de Markov irréductible de matrice de transition P et de probabilité invariante π. On définit la chaine retournée Y_n par $Y_n = X_{N-n},\ n = 0,1..N \geq 1$.

1- Montrer que pour tout $(i,j) \in E^2$, on a $P(Y_1 = j | Y_0 = i) = \frac{\pi_j}{\pi_i} p_{ji}$

2- On pose $p_{ij}^* = \frac{\pi_j}{\pi_i} p_{ji}$. Montrer que P^* est une matrice stochastique de Y_n et que π sa distribution stationnaire .

3- Montrer que π est réversible si et seulement si $P^* = P$.

Exercice 12

On désigne par $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaine de Markov en temps discret à valeurs dans $E = \{0,1,2,3,4\}$, dont la matrice de transition est donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ p & 0 & (1-p)/2 & 0 & (1-p)/2 \\ p & (1-p)/2 & 0 & (1-p)/2 & 0 \\ p & 0 & (1-p)/2 & 0 & (1-p)/2 \\ p & (1-p)/2 & 0 & (1-p)/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec $0 < p < 1$, on pose $T = inf\{n \geq 1, X_n = 0\}$

1- Montrer que la chaine est ergodique
2- La chaine est- elle réversible ?
3- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1_{\{X_k=1\}}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1_{\{X_k\neq 1\}}$
4- Supposons que la loi de T est $P_0(T=k)=p(1-p)^{k-2}, k\geq 2$. Trouver $E_0(T)$.

Exercice 13 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaine de Markov homogène d'ordre 2.

1- Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}, i_0, i_1, \dots, i_n \in E$

$$P(X_0=i_0, X_1=i_1, \dots, X_n=i_n)=P(X_0=i_0)p_{i_0i_1}p_{i_0i_1i_2}\dots .p_{i_{n-2}i_{n-1}i_n}$$

2- On suppose que la chaine est ergodique de matrice de transition P. Donner un estimateur de la probabilité de transition $p_{i_0i_1i_2}$.