Intégrale de Wienner (La suite)

Définition de l'intégrale de Wienner : (I.W.).

$$I(f) := \int_a^b f(t)\, dB(t), \quad f \in L^2([a,b]).$$

On a vu que $\exists (f_n)_n \in \mathcal{E}^2([a,b])$ (étagées de $L^2([a,b])$).

tq

$$\boxed{f_n \xrightarrow[n \to \infty]{} f \text{ ds } L^2([a,b])}$$

et on a définit l'I.W. de f_n par :

$$I(f_n) = \sum_{i\geq 1}^{m} a_i \,(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$$

et de plus, on a donné les propriétés de $I(f_n)$ par "l'isométrie d'Itô" qui dit que :

$$I(f_n) \rightsquigarrow N\left(0, \|f_n\|^2_{L^2([a,b])}\right).$$

avec :

$$\underbrace{\mathbb{E}\, I^2(f_n)}_{\|I(f_n)\|^2_{L^2(\Omega)}} = \|f_n\|^2 = \underbrace{\int_a^b f_n^2(s)\, ds}_{\|f_n\|^2_{L^2([a,b])}} \left(= \sum_{i\geq 1}^{m} a_i^2\right).$$

Déf^{t} de $I(f)$:

On sait que $L^2([a,b])$ est complet et $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ ds L^2

D'où : on peut montrer facilement que :

$$\left(I(f_n)\right)_n \text{ est une suite de Cauchy}$$

ds $L^2(\Omega)$ qui est un espace de Hilbert complet ce qui entraine que :

La suite $\boxed{[I(f_n)]_n}$ converge dans $L^2(\Omega)$.

Déf^{t} : $I(f)$ est définie par :

$$I(f) = \lim_{n\to\infty} I(f_n) \text{ ds } L^2(\Omega).$$

i.e $\quad \mathbb{E}\left[I(f) - I(f_n)\right]^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

et l'on écrit :

$$I(f)(\omega) = \underbrace{\left[\int_a^b f(t)\,dB_t\right]}_{v.a.}(\omega),\ \omega\in\Omega,\ p.s.$$

Pour la simplicité, on écrit : $I(f) = \int_a^b f(t)\,dB_t$.

Remarque : $I(f)$ est linéaire sur $L^2([a,b])$.

Le théorème suivant caractérise la loi de $I(f)$.

Th^{me} (Isométrie d'Itô):

Pour tout $f \in L^2([a,b])$, l'intégrale de Wiener $I(f) = \int_a^b f(t)\,dB_t$ est une v.a. gaussienne de moyenne "0" et de variance $\|f\|^2 = \int_a^b f^2(t)\,dt$

i.e. $$\boxed{I(f) \rightsquigarrow N(0, \|f\|^2).}$$

Preuve : (Kuo. p. 11-12).

~~Proposition~~ : Corollaire : (L'I.W. preserve le produit scalaire).

Si $f, g \in L^2([a,b])$ alors :

$$\underbrace{E[I(f)I(g)]}_{\parallel} = \int_a^b f(t)g(t)\,\underline{dt}$$

$$E\left[\left(\int_a^b f(t)\,dt\right)\left(\int_a^b g(t)\,dt\right)\right]$$

c-à-d. $$\langle I(f), I(g)\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, g\rangle_{L^2([a,b])}$$

produit scalaire ds $L^2(\Omega)$ — Produit scalaire ds $L^2([a,b])$

Remarques :

- Si $I_f(t) = \int_0^t f(u)\,dB_u$ et $I_g(s) = \int_0^s g(u)\,dB_u$; $f, g \in L^2$

alors
$$\boxed{\mathbb{E}\left[I_f(t) \cdot I_g(s)\right] = \int_0^{s \wedge t} f(u)\,g(u)\,du}$$

- Si $I_{[a,b]}(f) = \int_a^b f(t)\,dB_t$ et $I_{[c,d]}(g) = \int_c^d g(t)\,dB_t$ avec $f, g \in L^2$.

Alors :
$$\boxed{\mathbb{E}\left[I_{[a,b]}(f) \cdot I_{[c,d]}(g)\right] = \int_{[a,b]\cap[c,d]} f(t)\,g(t)\,dt}$$

pté de Martingale de l'I.W. :

Th^m : Soit $f \in L^2([a,b])$, alors le processus stochastique :

$$M_t := \int_a^t f(s)\,dB_s \quad , \quad a \leq t \leq b$$

est une martingale p.r.p. à la filtration Brownienne.

Preuve : (Kuo p.19) exercice.

Application :

Si $f \in L^2([a,b])$. $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ la filtration Brownienne.

Alors, par la propriété dé de martingale :

$$\mathbb{E}\Big[\underbrace{\int_a^t f(u)\,dB_u}_{M_t} \Big/ \mathcal{F}_s\Big] = M_s = \int_0^s f(u)\,dB_u \,, \; a \leq s \leq t \leq b$$