0.1 Semi-martingales et convergence

Les trois propositions suivantes sont cruciales pour montrer la formule d'intégration par parties. Dans toute la suite on adopte la notation suivante pour une semi martingale:

$$X_t = X_0 + M_t + V_t \text{ où } M_t = \int_0^t \alpha_s dB_s \text{ et } V_t = \int_0^t \beta_s ds.$$

Proposition:
Soient X une semi-martingale et γ un processus adapté continu et borné par $a > 0$. Alors on a la convergence dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ suivante:

$$\sum_{p=0}^{n-1} \gamma_{\frac{p}{n}t} \left(X_{\frac{p+1}{n}t} - X_{\frac{p}{n}t} \right) \underset{n\to\infty}{\to} \int_0^t \gamma_s \alpha_s dB_s + \int_0^t \gamma_s \beta_s ds,$$

d'où la définition:
Définition:
L'intégrale stochastique

$$\int_0^t \gamma_s dX_s := \int_0^t \gamma_s \alpha_s dB_s + \int_0^t \gamma_s \beta_s ds$$

s'appelle l'intégrale stochastique du processus γ par rapport à la semi-martingale X.

Preuve:
On a

$$\sum_{p=0}^{n-1} \gamma_{\frac{p}{n}t} \left(X_{\frac{p+1}{n}t} - X_{\frac{p}{n}t} \right) = U_t^n + W_t^n, \text{ où}$$

$$U_t^n = \sum_{p=0}^{n-1} \gamma_{\frac{p}{n}t} \left(M_{\frac{p+1}{n}t} - M_{\frac{p}{n}t} \right) \text{ et } W_t^n = \sum_{p=0}^{n-1} \gamma_{\frac{p}{n}t} \left(V_{\frac{p+1}{n}t} - V_{\frac{p}{n}t} \right).$$

Comme $V_t = \int_0^t \beta_s ds$ est dérivable $\left(\frac{dV_t}{dt} = \beta_t\right)$, alors on a la convergence dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ suivante

$$W_t^n \underset{n\to\infty}{\to} \int_0^t \gamma_s dV_s = \int_0^t \gamma_s \beta_s ds.$$

Il suffit alors de montrer que $U_t^n \underset{n\to\infty}{\to} \int_0^t \gamma_s \alpha_S dB_s$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Soit (γ^n) (resp.(α^n)) la suite des processus tassés de γ (resp.α) sur la subdivision:

$$0<\frac{t}{n}<\frac{2t}{n}<\frac{3t}{n}<.....<t<...$$

On a:

$$M_{\frac{p+1}{n}t}-M_{\frac{p}{n}t}=\sum_{k=0}^{p}\alpha_{\frac{k}{n}t}(B_{\frac{k+1}{n}t}-B_{\frac{k}{n}t})-\sum_{k=0}^{p-1}\alpha_{\frac{k}{n}t}(B_{\frac{k+1}{n}t}-B_{\frac{k}{n}t})=\alpha_{\frac{p}{n}t}(B_{\frac{p+1}{n}t}-B_{\frac{p}{n}t}),$$

d'où

$$U_t^n=\sum_{p=0}^{n-1}\gamma_{\frac{p}{n}t}\alpha_{\frac{k}{n}t}(B_{\frac{k+1}{n}t}-B_{\frac{k}{n}t})=\int_0^t\gamma_s^n\alpha_s^n dB_s$$

Il suffit donc de montrer que $\int_0^t\gamma_s^n\alpha_s^n dB_s$ converge vers $\int_0^t\gamma_s\alpha_s dB_s$ dans $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$. On a, d'une part

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\int_0^t\gamma_s^n\alpha_s^n dB_s-\int_0^t\gamma_s\alpha_s dB_s\right)^2 &= E\left(\int_0^t(\gamma_s^n\alpha_s^n-\gamma_s\alpha_s)dB_s\right)^2\\ &= \mathbb{E}\left(\int_0^t(\gamma_s^n\alpha_s^n-\gamma_s\alpha_s)^2 ds\right)\end{aligned}$$

et d'autre part, en utilisant l'inégalité $(a+b)^2\leq 2\left(a^2+b^2\right)$ pour tous réels a et b,

$$\begin{aligned}(\gamma_s^n\alpha_s^n-\gamma_s\alpha_s)^2 &= \left(\gamma_s^n\left(\alpha_s^n-\alpha_s\right)+\alpha_s\left(\gamma_s^n-\gamma_s\right)\right)^2\\ &\leq 2\left(\left(\gamma_s^n\right)^2\left(\alpha_s^n-\alpha_s\right)^2+\left(\alpha_s\right)^2\left(\gamma_s^n-\gamma_s\right)^2\right)\\ &\leq 2\left(a^2\left(\alpha_s^n-\alpha_s\right)^2+\left(\alpha_s\right)^2\left(\gamma_s^n-\gamma_s\right)^2\right),\end{aligned}$$

d'où

$$0\leq\mathbb{E}\left(\int_0^t(\gamma_s^n\alpha_s^n-\gamma_s\alpha_s)^2 ds\right)\leq 2\left(a^2\mathbb{E}\left(\int_0^t\left(\alpha_s^n-\alpha_s\right)^2 ds\right)+\mathbb{E}\left(\int_0^t\left(\alpha_s\right)^2\left(\gamma_s^n-\gamma_s\right)^2 ds\right)\right)$$

On conclut, du théorème de la convergence dominée, que les deux espérances du second membre convergent vers 0, d'où

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left(\int_0^t(\gamma_s^n\alpha_s^n-\gamma_s\alpha_s)^2 ds\right)=0,$$

ce qui achève la démonstration.■

Remarque:

Avec la même démonstration avec (γ^n) (resp.(α^n)) la suite des processus tassés de γ (resp.α) sur la subdivision:

$$0 < \frac{1}{n} \wedge t < \frac{2}{n} \wedge t < \frac{3}{n} \wedge t < ..... < \frac{n+1}{n} \wedge t < ...,$$

on montre que la convergence suivante:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \gamma_{\frac{p}{n} \wedge t} \left(X_{\frac{p+1}{n} \wedge t} - X_{\frac{p}{n} \wedge t} \right) \underset{n \to \infty}{\to} \int_0^t \gamma_s \alpha_s dB_s + \int_0^t \gamma_s \beta_s ds$$

a lieu dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Proposition:

Soit (X_t) un semi-martingale bornée a partie à variations finies nulle (i.e. $X_t = X_0 + M_t$), Alors on a :

1) $\sum_{p=0}^{n-1} (M_{\frac{p+1}{n}t} - M_{\frac{p}{n}t})^2 \underset{n \to \infty}{\to} \int_0^t \alpha_s^2 ds$ *dans* $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$

2) $M_t^2 = 2 \int_0^t M_s dM_s + \int_0^t \alpha_s^2 ds.$

Remarque:

Si $X_t = B_t$, ce qui correspond au cas $\alpha \equiv 1$, alors l'inégalité 2) entraîne que

$$B_t^2 = 2 \int_0^t B_s dB_s + t.$$

Démonstration:

On a:

$$\sum_{p=0}^{n-1} (M^2_{\frac{p+1}{n}t} - M^2_{\frac{p}{n}t}) = M_t^2 - M_0^2 = M_t^2.$$

D'après la proposition précédente, on peut écrire :

$$2 \sum_{p=0}^{n-1} M_{\frac{p}{n}t} (M_{\frac{p+1}{n}t} - M_{\frac{p}{n}t}) \text{ converge vers } 2 \int_0^t M_s dM_s \text{ dans } L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$$

et par la différence, on obtient:

$$\sum_{p=0}^{n-1} (M_{\frac{p+1}{n}t} - M_{\frac{p}{n}t})^2 \text{ converge vers } M_t^2 - 2 \int_0^t M_s dM_s \text{ dans } L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$$

Il suffit de démontrer alors que $M_t^2 - 2\int\limits_0^t M_s dM_s = \int\limits_0^t \alpha_s^2 ds$.

Comme le processus $\sum\limits_{p=0}^{n-1}(M_{\frac{p+1}{n}t} - M_{\frac{p}{n}t})^2$ est une somme de nombres positifs, alors il est croissant par rapport à t donc de limite également croissante. Il résulte que sa limite est à variations finies, ce qui nous permet d'écrire que $M_t^2 - 2\int\limits_0^t M_s dM_s = \int\limits_0^t \beta_s ds$, d'où

$$M_t^2 - \int\limits_0^t \alpha_s^2 ds - 2\int\limits_0^t M_s dM_s = \int\limits_0^t \beta_s ds - \int\limits_0^t \alpha_s^2 ds$$

On sait que $M_t^2 - \int\limits_0^t \alpha_s^2 ds$ et $\int\limits_0^t M_s dM_s = \int\limits_0^t M_s \alpha_s dB_s$ sont des martingales. Par suite

$$M_t^2 - \int\limits_0^t \alpha_s^2 ds - 2\int\limits_0^t M_s dM_s$$

est également une martingale, qui est égale à un processus à variations finies donc nulle $p.s.$, d'où

$$\int\limits_0^t \beta_s ds - \int\limits_0^t \alpha_s^2 ds = 0 \ p.s.,$$

ce qui achève la démonstration.■

Proposition:

Soit X une semi martingale bornée, et soit γ un processus adapté, continu et borné. Alors on a la convergence suivante :

$$\sum_{p=0}^{n-1} \gamma_{\frac{p}{n}t}(X_{\frac{p+1}{n}t} - X_{\frac{p}{n}t})^2 \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \int\limits_0^t \gamma_s \alpha_s^2 ds$$

dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Remarque: *Sans perdre la généralité, on peut prendre $X = M$ (donc $X_0 =$* 0) une *martingale, car la partie à variations finies n'a aucune contribution dans la formule.*

Démonstration:

On considère la semi-martingale $N_t := M_t^2 = 2\int\limits_0^t M_t \alpha_s dB_s + \int\limits_0^t \alpha_s^2 ds$ d'après la proposition précédente. D'après l'avant dernière proposition, on a:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{n-1} \gamma_{\frac{p}{n}t}(N_{\frac{p+1}{n}t} - N_{\frac{p}{n}t}) = \int\limits_0^t \gamma_s dN_s = 2\int\limits_0^t \gamma_s M_s \alpha_s dB_s + \int\limits_0^t \gamma_s \alpha_s^2 ds$$

dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On a aussi

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{p=0}^{n-1} 2\gamma_{\frac{p}{n}t} M_{\frac{p}{n}t}(M_{\frac{p+1}{n}t} - M_{\frac{p}{n}t}) = \int_0^t 2\gamma_s M_s dM_s = 2\int_0^t \gamma_s M_s \alpha_s dB_s$$

dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et par différence on obtient

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{p=0}^{n-1} \gamma_{\frac{p}{n}t}(M_{\frac{p+1}{n}t} - M_{\frac{p}{n}t})^2 = \int_0^t \gamma_s \alpha_s^2 ds$$

dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$.■

Définition:

On appelle variation quadratique d'un processus X, le processus croissant défini par:

$$\langle X\rangle_t := \lim_{n\to\infty}\sum_{p=0}^{n-1}(X_{\frac{p+1}{n}t} - X_{\frac{p}{n}t})^2 \text{ en probabilitité.}$$

Remarque:

Comme la convergence $L^1(\Omega)$ entraîne la convergence en probabilité, alors la proposition précédante avec $\gamma \equiv 1$, signifie que la variation quadratique d'une semi-martingale X est

$$\langle X\rangle_t = \int_0^t \alpha_s^2 ds,$$

Ainsi $d\langle X\rangle_t = \alpha_t^2 dt = dX_t dX_t$.

Conséquence:

$$\langle B\rangle_t = t.$$