Université Kasdi Merbah, Ouargla — **Département de Mathématiques**
Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière — **Master-1**
Module: Calcul stochastique — **Probabilités et statistique**
Serie N°4 Mouvement Brownien — **2023/2024**

Exercice 1

Soit $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement Brownien. Trouver la loi de B_t^2.

Exercice 2

Soit $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement Brownien.

1. Montrer que $\phi_{B_t}(u) = \exp\left(-\frac{1}{2}u^2 t\right), \forall u \in \mathbb{R}$, avec ϕ la fonction caractéristique de la loi de la variable aléatoire B_t.
2. Deduire $\mathbb{E}\left(B_t^4\right) = 3t^2$ et
$$\mathbb{E}\left(B_t^{2k}\right) = \frac{2k!}{2^k k!}t^k;\ k \in \mathbb{N}.$$

Exercice 3

Soit $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement Brownien.

- Montrer que $\forall c > 0$, $\hat{B}_t = \frac{1}{c}B_{c^2t}$ est un mouvement Brownien par rapport à la filtration $\mathcal{F}_t = \sigma\left(B_{c^2s},\ s \leq t\right)$.

Exercice 4

On dit que un processus $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est autosimilaire si $\forall a > 0$, $\exists b > 0$ telque B_{at} et bB_t de méme loi.
Soit $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement Brownien.

- Montrer que $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est autosimilaire.

Exercice 5

Soit $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement Brownien et $f \in C_b^1$.

- Trouver la fonction $h(t,x)$ tel que
$$\mathbb{E}\left(\acute{f}(B_t)\right) = \mathbb{E}\left(f(B_t)\,h(t,B_t)\right).$$

Exercice 6

Soit $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_t$ de carré intégrable $\left(\mathbb{E}\left|M_t^2\right| < \infty,\ \forall t\right)$.

- Montrer que
$$\mathbb{E}\left(\left(M_t - M_s\right)^2\middle|\mathcal{F}_s\right) = \mathbb{E}\left(M_t^2 - M_s^2\middle|\mathcal{F}_s\right),$$
et déduire que $\left(M_t^2\right)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un sous martingale.

Exercice 7

Soit $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement Brownien, telque
$$X_t = \alpha t + \sigma B_t,\ \text{avec } \alpha, \sigma \text{ constants.}$$

- Montrer que $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un martingale si et seulement si $\alpha = 0$.