Chapitre 3

Martingales

3.1 Introduction

L'origine du concept de *Martingale* viens des jeux de hasard [1] (gambling). Comme processus stochastiques, elles ont été introduites par Joseph Doob de l'université Illinois aux USA dans les années 50. Les Martingales jouent un rôle crucial en mathématique financière, la théorie probabiliste du potentiel et le calcul stochastique.

3.1.1 Exemple introductif

Soit Z_n, $n \in \mathbb{N}^*$ une suite de v.a. indépendantes de même loi

$$Z_i = \begin{cases} +1, \text{ avec probabilité } p, \\ -1, \text{ avec probabilité } 1-p. \end{cases}$$

On suppose qu'un joueur possède une fortune initiale X_0 et au n*ème* jeu il parie la somme b_n. Si $Z_n = 1$ il gagne cette somme, si $Z_n = -1$ il la perd. Soit X_n sa fortune après n jeux. Alors

$$X_n = X_0 + \sum_{i=1}^{n} Z_i b_i. \tag{3.1}$$

On pose $\mathcal{A}_n = \sigma\{Z_1, \ldots, Z_n\}$, pour $n \geq 1$, (*Filtration*), et b_{n+1} est $\mathcal{A}_n$-mesurable (on dit que $\{b_n\}$ est *prévisible*). On a la relation suivante

$$X_{n+1} = X_n + Z_{n+1} b_{n+1}. \tag{3.2}$$

On applique l'espérance conditionnelle $E(\cdot \mid \mathcal{A}_n)$ à (3.2) en utilisant les propriétés (1), (3) et (6) de l'espérance conditionnelle

$$\begin{aligned} E(X_{n+1} \mid \mathcal{A}_n) &= E(X_n \mid \mathcal{A}_n) + E(Z_{n+1} b_{n+1} \mid \mathcal{A}_n) \quad \text{(Linéarité)} \\ &= X_n + b_{n+1} E(Z_{n+1} \mid \mathcal{A}_n) \quad (X_n \text{ et } b_{n+1} \text{ sont } \mathcal{A}_n\text{-mesurables}) \\ &= X_n + b_{n+1} E(Z_{n+1}) \quad (Z_{n+1} \text{ indépendante de } \mathcal{A}_n) \\ &= X_n + b_{n+1}(2p-1). \end{aligned}$$

1. Par exemple, la martingale de Hawks : si le noir vient de sortir, il faut jouer sur le rouge jusqu'à ce que le rouge sorte. Si vous doublez votre dernière mise à chaque fois que vous perdez vous finirez forcement par gagner et effacez vos pertes.

Si $p = \frac{1}{2}$ alors $E(X_{n+1} \mid \mathcal{A}_n) = X_n$ (p.s). On dit que le jeu est *équitable* (Martingale)
Si $p < \frac{1}{2}$ alors $E(X_{n+1} \mid \mathcal{A}_n) < X_n$ (p.s). Le jeu est *défavorable* (Sur-martingale)
Si $p > \frac{1}{2}$ alors $E(X_{n+1} \mid \mathcal{A}_n) > X_n$ (p.s). Le jeu est *favorable.* (Sous-martingale)

3.2 Filtration et martingales

A chaque fois que le temps $t \in \mathbb{T}$ augmente, notre information sur le passé d'un processus augmente. Cela peut être modélisé par une filtration.

Définition 3.1 (Filtration)**.** Une *filtration* est une suite croissante de sous-tribus $\{\mathcal{A}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ de $\mathcal{F}$, i.e. $\mathcal{A}_s \subset \mathcal{A}_t$ si $s \leq t$.

L'ensemble d'indice des temps $\mathbb{T}$ est ici $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^+$. La tribu $\mathcal{A}_t$ représente l'information accumulée jusqu'au temps t.

Définition 3.2 (Processus adapté)**.** On dit qu'un processus $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{T}}$ est *adapté* à la filtration $\{\mathcal{A}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ si $X(t)$ est $\mathcal{A}_t$-mesurable pour tout $t \in \mathbb{T}$.

La filtration *naturelle* (ou *propre*) d'un processus $\mathbf{X} = \{X(t)\}_{t\in\mathbb{T}}$ est définie par $\mathcal{A}_t = \sigma\{X(s); s \leq t\}$; elle représente l'information contenue dans l'observation de $\mathbf{X}$ entre les instants 0 et t. On la note $\mathcal{A}^X$. Ainsi, tout processus $\mathbf{X}$ est adapté à sa propre filtration $\mathcal{A}^X$.

Définition 3.3 (Martingale)**.** Un processus $\mathbf{M} = \{M(t)\}_{t\in\mathbb{T}}$ est une martingale par rapport à la filtration $\{\mathcal{A}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$, s'il est adapté et intégrable et pour $s < t$

$$E[M(t) \mid \mathcal{A}_s] = M(s). \text{ (p.s.)} \tag{3.3}$$

C'est une fonction aléatoire qui reste constante en moyenne conditionnelle, elle n'a tendance ni à croître ni à décroître. En particulier,

$$E[M(t)] = E[M(0)]. \tag{3.4}$$

En effet, d'après la propriété de conditionnement successifs de l'espérance conditionnelle (Propriété 2) appliquée à la relation (3.3)

$$E\{E[M(t) \mid \mathcal{A}_s]\} = E[M(t)] = E[M(s)].$$

La moyenne d'une martingale est donc constante.

Exemple 3.1 (Martingale de Doob)**.** *Soit X une v.a. réelle intégrable sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, muni d'une filtration $\{\mathcal{A}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$. Alors*

$$X(t) = E[X \mid \mathcal{A}_t], \ \ t \in \mathbb{R}_+,$$

est une martingale. Elle peut être considérée comme modèle de phénomènes d'apprentissage.
$X(t)$ est adapté et intégrable par définition. En utilisant la propriété (7) : si $s \leq t$,

$$E[X(t) \mid \mathcal{A}_s] = E\{E[X \mid \mathcal{A}_t] \mid \mathcal{A}_s\} = E[X \mid \mathcal{A}_s]$$

car $\mathcal{A}_s \subset \mathcal{A}_t$.

Exemple 3.2 (Marche aléatoire)**.** ***a)*** *$\mathbb{T} = \mathbb{N}$. Soit ξ_i, $i \geq 1$ une suite de v.a. réelles i.i.d., intégrable et de moyenne nulle. La marche aléatoire associée $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ est une martingale pour sa filtration naturelle, $\mathcal{A}_n^S = \sigma\{\xi_i, 1 \leq i \geq n\}$. En effet, $S_n \in L^1(\mathcal{A}_n^S)$, et*

$$E[S_{n+1} \mid \mathcal{A}_n^S] = E[S_n + \xi_{n+1} \mid \mathcal{A}_n^S] = S_n + E[\xi_{n+1}] = S_n$$

par linéarité et indépendance de ξ_{n+1} par rapport à $\mathcal{A}_n^S$.
b) *On suppose de plus que $Var(\xi_i) = \sigma^2 < \infty$. Alors*

$$M_n = S_n^2 - n\sigma^2$$

est une $\mathcal{A}^S$-martingale. (Exercice)

Exemple 3.3 (Processus de Poisson)**.** *Soit $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ un processus de Poisson de taux λ. Alors $\{N(t) - \lambda t\}_{t\geq 0}$ est une martingale.*
$N(t)$ est intégrable pour tout t et adaptée à sa filtration naturelle $\mathcal{A}^N$. Pour $s < t$

$$\begin{aligned} E[N_t - \lambda t \mid \mathcal{A}_s] &= E[N_t - N_s + N_s \mid \mathcal{A}_s] - \lambda t \\ &= E[N_t - N_s \mid \mathcal{A}_s] + E[N_s \mid \mathcal{A}_s] - \lambda t \\ &= E[N_t - N_s] + N_s - \lambda t \;\; (N_t - N_s \textit{ indépendante de } \mathcal{A}_s) \\ &= \lambda(t - s) + N_s - \lambda t \\ &= N_s - \lambda s. \end{aligned}$$

Définition 3.4 (Sous-martingale ; Sur-martingale)**.** Un processus $\mathbf{M} = \{M(t)\}_{t\in\mathbb{T}}$ est une sous-martingale [resp. sur-martingale] par rapport à la filtration $\{\mathcal{A}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$, s'il est adapté et intégrable et pour $s < t$

$$E[M(t) \mid \mathcal{A}_s] \geq M(s). \text{ (p.s.)} \tag{3.5}$$

[resp. $E[M(t) \mid \mathcal{A}_s] \leq M(s)$. (p.s.)]

Le processus $\mathbf{M}$ est une sous-martingale si $-\mathbf{M}$ est une sur-martingale.

Exercice 3.1. *Montrer que $E[M(t)]$ est croissante pour une sous-martingale et décroissante pour une sur-martingale.*

Proposition 3.1. *Si $\mathbf{M} = \{M(t)\}_{t\in\mathbb{T}}$ est une martingale, et φ une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ telle que $N(t) = \varphi[M(t)]$ soit intégrable, alors $\mathbf{N} = \{N(t)\}_{t\in\mathbb{T}}$ est une sous-martingale.*

Démonstration. Utilisez l'inégalité de Jensen. □

3.3 Temps d'arrêt

Dans un jeu au hasard, (la roulette par exemple) on peut quitter le jeu à n'importe quel moment. On peut quitter la bourse après une chute des cours. On note le temps d'arrêt par τ (ou T). Il peut être fixé en avance si on décide d'arrêter par exemple après 10 parties, mais en général τ dépend du déroulement passé. τ est une v.a. prenant ses valeurs dans $\mathbb{T} \cup \{\infty\}$.

Définition 3.5. Un variable aléatoire τ à valeurs dans $\mathbb{T} \cup \{\infty\}$ est un temps d'arrêt relativement à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ si

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \tag{3.6}$$

pour tout $t \in \mathbb{T}$.

On dit qu'une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ est continue à droite (càd) si, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+}$ où $\mathcal{F}_{t^+} = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$.
Une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ est dite complète si $\mathcal{F}_0$ contient les ensembles négligeables de $\mathcal{F}$.
Soient $(G, \mathcal{B})$ un espace mesurable où G est un espace métrique complet séparable [2] (par exemple $G = \mathbb{R}$) et $\mathcal{B}$ sa tribu borélienne.
Un processus stochastique $\mathbf{X} = \{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ à valeurs dans $(G, \mathcal{B})$ est mesurable si l'application

$$(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \to X(t, \omega) \in G \tag{3.7}$$

est $\mathcal{B}_{\mathbb{R}_+} \otimes \mathcal{F}/\mathcal{B}$ mesurable.
Soit $\mathcal{P}$ la tribu sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ engendrée par les processus $\mathbf{X} = \{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ adaptés et continus à gauche et soit $\mathcal{O}$ la tribu sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ engendrée par les processus $\mathbf{X} = \{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ adaptés et continus à droite.

Définition 3.6 (Processus Prévisible, Optionnel)**.** Un processus $\mathbf{X} = \{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ est dit prévisible si l'application

$$(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \to X(t, \omega)$$

est $\mathcal{P}$-mesurable.
Il est dit optionnel si l'application précédente est $\mathcal{O}$-mesurable.

Proposition 3.2.
1/ Tout processus prévisible est optionnel.
2/ Soit $\mathbf{X} = \{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ un processus optionnel. Alors, pour tout $T > 0$, l'application

$$(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega \to X(t, \omega) \tag{3.8}$$

est $\mathcal{B}_{[0,T]} \otimes \mathcal{F}_T$ mesurable.
On dit alors que $\mathbf{X}$ est progressivement mesurable.
3/ Les processus optionnels sont mesurables et adaptés.

Démonstration. 1/ Soit $\mathbf{X} = \{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ un processus adapté et continu à gauche (prévisible). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$X_n(t) = X\left(\frac{k}{2^n}\right) \text{ si } t \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[\quad (k \in \mathbb{N}).$$

Alors $\mathbf{X}_n = \{X_n(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ est continu à droite et adapté ; de plus $\lim \mathbf{X}_n = \mathbf{X}$ donc $\mathbf{X}$ est optionnel.
2/ Soit $\mathbf{X} = \{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ un processus adapté et continu à droite (optionnel). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose, $T > 0$ étant fixé :

$$X_n(t) = X\left(\frac{k+1}{2^n} \wedge T\right) \text{ si } t \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[\cap [0, T] \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Alors $\mathbf{X}_n$ vérifie la propriété (3.8) et $\lim \mathbf{X}_n = \mathbf{X}$, donc $\mathbf{X}$ vérifie aussi la propriété (3.8).
3/ évident. □

Remarque 3.1. Toute fonction aléatoire (processus stochastique) continue adaptée est progressivement mesurable.
[Hint. Utilisez la suite $X_n(t, \omega) = X\left(\frac{kT}{n}, \omega\right)$ pour $\frac{kT}{n} < t \leq \frac{(k+1)T}{n}$.]

2. Un espace séparable est un espace topologique contenant un sous-ensemble dense et au plus dénombrable i.e. dont l'adhérence est égale à l'espace topologique tout entier.

3.3.1 Temps d'atteinte

Le temps d'entrée dans un fermé F d'un processus $\mathbf{X}$ adapté et continu

$$T_F = \inf\{t \geqslant 0;\ X(t) \in F\}$$

est un temps d'arrêt (relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_t$ de $\mathbf{X}$). En effet, par continuité des trajectoires

$$\begin{aligned}\{T_F \leqslant t\} &= \bigcup_{s\in[0,t]} \{X(s) \in F\} \\ &= \left[\bigcap_{k\geqslant 1} \bigcup_{s\in\mathbb{Q}\cap[0,t]} \{\mathrm{dist}(X(s), F) \leqslant 1/k\}\right] \bigcup \{X(t) \in F\}\end{aligned}$$

qui est élément de $\mathcal{F}_t$ (union et intersection dénombrables dans la tribu).
Plus généralement, si la filtration est continue à droite et complète, alors pour tout processus optionnel et tout borélien B, le temps d'atteinte T_B est un temps d'arrêt. Si le temps est discret ($\mathbb{T} = \mathbb{N}$), alors pour un processus $\mathbf{X} = \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, le temps d'atteinte dans B

$$T_B = \inf\{n \geqslant 0;\ X_n \in B\}$$

est un temps d'arrêt. En effet

$$\{T_B = n\} = \left[\bigcap_{k=0}^{n-1} \{X_k \notin B\}\right] \cap \{X_n \in B\}$$

et $\{X_k \notin B\} = \{X_k \in B^c\} = X_k^{-1}(B^c) \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$. Donc $\{T_B = n\} \in \mathcal{F}_n$.

Exemple 3.4. *Un actionnaire peut décider de vendre ses parts si le prix de l'action (à la fermeture ou ouverture) $\{S_n\}$ descend de 75% de sa valeur actuelle (temps 0) x_0. Donc il vend au temps aléatoire*

$$\tau = \inf\{n \geqslant 0;\ S_n < \frac{3}{4}x_0\}.$$

τ est le temps d'atteinte de l'ensemble $[0, \frac{3}{4}x_0[$ qui est un borélien, donc τ est un temps d'arrêt.

3.4 Inégalités maximales

3.4.1 Inégalités maximales pour martingales discrètes

L'inégalité de Markov implique que pour un processus à temps discret $\{M_n\}_{n\geq 0}$, on a

$$P\left\{M_n \geq \alpha\right\} \leq \frac{1}{\alpha} E\left[|M_n|\right]$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$. L'inégalité de Doob suivante établit un résultat plus fort pour une sous martingale.

Théorème 3.1 (**Inégalité de Doob**)**.** *Soit $\mathbf{M} = \{M_n\}_{n\geq 0}$ une sous-martingale. Alors, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$*

$$P\left\{\max_{0\leq k\leq N} M_k \geq \alpha\right\} \leq \frac{1}{\alpha} E\left[|M_N|\right] \tag{3.9}$$

Démonstration. Posons $A_0 = \{M_0 \geq \alpha\}$ et pour $k \in \mathbb{N}$

$$A_k = \{M_k \geq \alpha \text{ mais } \max_{0\leq i\leq k} M_i < \alpha\}.$$

Les ensembles A_k sont disjoints et $A_k \in \mathcal{F}_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi,

$$P\left\{\max_{0\leq k\leq N} M_k \geq \alpha\right\} = \sum_{k=0}^{N} P(A_k) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{\alpha}\int_{A_k} \alpha dP \tag{3.10}$$

$$\leq \frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^{N}\int_{A_k} M_k dP \quad (M_k \geq \alpha \,\text{sur}\, A_k) \tag{3.11}$$

$$\leq \frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^{N}\int_{A_k} M_N dP \quad (\text{sous-martingale (voir Exercice 1)}) \tag{3.12}$$

$$= \frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^{N} E[M_N 1_{A_k}] \tag{3.13}$$

$$= \frac{1}{\alpha} E[M_N 1_{\{\max_{0\leq k\leq N} M_k \geq \alpha\}}] \tag{3.14}$$

$$\leq \frac{1}{\alpha} E\left[|M_N|\right] \tag{3.15}$$

□

3.4.2 Inégalités maximales pour martingales continues

Théorème 3.2. *Soit* $\mathbf{M} = \{M_t\}_{t\geq 0}$ *une sous-martingale continue. Alors, pour tout* $T > 0$ *et* $\alpha > 0$

$$P\left\{\sup_{0\leq t\leq T} M_t \geq \alpha\right\} \leq \frac{1}{\alpha} E\left[|M_T|\right] \tag{3.16}$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, posons $t_k = kT/2^n$, $k = 0, 1, \ldots$. Notons $A_{2^n} = \{\max_{0\leq k\leq 2^n} M_{t_k} > \alpha\}$, remarquons que la suite d'événements A_{2^n} est croissante (En effet $\{t_k = kT/2^n; k = 0, 1, \ldots\} \subset \{t_k = kT/2^{n+1}; k = 0, 1, \ldots\}$ car $kT/2^n = 2kT/2^{n+1}$), et, par continuité de $\mathbf{M}$,

$$P\left\{\sup_{0\leq t\leq T} M_t \geq \alpha\right\} \leq P\left\{\bigcup_n A_{2^n}\right\} = \lim_n P\left\{A_{2^n}\right\} \leq \frac{1}{\alpha} E\left[|M_T|\right] \tag{3.17}$$

d'après la continuité monotone séquentielle et le Théorème 3.1. □

Théorème 3.3 (Inégalité L^p de Doob). *Soit* $\mathbf{M} = \{M_t\}_{t\geq 0}$ *une martingale continue ou une sous-martingale positive continue. Alors pour tout* $p > 1$ *et* $T \geq 0$

$$E\left\{\sup_{0\leq t\leq T} |M_t|^p\right\} \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E\left[|M_T|^p\right] \tag{3.18}$$

En particulier, pour $p = 2$ on a le résultat suivant qui sera utile pour le Chapitre 5 Intégrale Stochastique :

$$E\left\{\sup_{0\leq t\leq T} |M_t|^2\right\} \leq 4\, E\left[|M_T|^2\right]. \tag{3.19}$$

Montrons (3.19) pour une sous martingale discrete, positive de carré intégrable. La généralisation au cas continue se fait de la même manière que celle du Théorème 3.2

Preuve de (3.19). On pose $M_n^* = \sup_{0\le k\le n} |M_k|$. On a

$$\begin{aligned}
E\left\{M_n^{*2}\right\} &= 2\int_0^\infty tP\left(M_n^* > t\right) dt \ (\text{Voir Exercice 3 Série 1}) && (3.20)\\
&\le 2\int_0^\infty E\left(M_n 1_{\{M_n^*>t\}}\right) dt \ (\text{Voir (3.14) Preuve du Théorème 3.1 }) && (3.21)\\
&= 2\int_0^\infty \int_{\{M_n^*>t\}} M_n dP dt && (3.22)\\
&= 2\int_\Omega M_n \int_0^{M_n^*} dt\, dP && (3.23)\\
&= 2\int_\Omega M_n M_n^* dP = 2E\left[M_n M_n^*\right] && (3.24)\\
&\le 2\left(E|M_n|^2\right)^{1/2}\left(E|M_n^*|^2\right)^{1/2} \ (\text{Inégalité de Cauchy-Schwartz}) && (3.25)
\end{aligned}$$

□

3.4.3 Application : ruine d'une compagnie d'assurance

Les sinistres susceptibles de se produire et devant être couverts par une compagnie d'assurance ont un double aléa : d'abord, l'instant où ils se produisent, ensuite, le montant de dédommagement qu'il faudra débourser, autrement dit, le *coût* du sinistre. On désigne par Y une v.a. à valeurs strictement positives, repésentant ce coût. On pose $\mu = E(Y)$, $\sigma^2 = \mathrm{V}(Y) < +\infty$. Les arrivées des sinistres sont modélisées par un processus de Poisson $\{N(t), t \ge 0\}$ de taux λ représentant le nombre moyen de sinistres par unité de temps. On se donne une suite $(Y_n)_{n\ge1}$ de v.a. indépendantes, identiquement distribuées comme Y, représentant un échantillon d'observations de coûts de sinistres. La somme aléatoire

$$X_1 = \sum_{i=1}^{N(1)} Y_i$$

est alors le coût des sinistres par unité de temps. La moyenne et la variance de X_1 sont données par les formules de Wald (Exercice) :

$$\begin{aligned}
E(X_1) =& E(N(1))E(Y) = \lambda\mu\\
\mathrm{V}(X_1) =& E(N(1))\mathrm{V}(Y) + \mathrm{V}(N(1))E^2(Y) = \lambda(\sigma^2+\mu^2)
\end{aligned}$$

On considère alors une suite $(X_n)_{n\ge1}$ de variables aléatoires indépendantes, identiquements distribuées comme X_1. La somme $C(n) = \sum_{i=1}^n X_i$ est alors le coût total des sinistres enregistrés dans l'intervalle $[0, n]$, $n \ge 1$.
On introduit deux autres notions :
1/ La disponibilité à la date n : $D(n) = \mathbf{R} + n\mathbf{p}$ où $\mathbf{R}$ est la réserve et $\mathbf{p}$ le taux d'entrée des primes par unité de temps (jour).
2/ La trésorerie à la date n :

$$\begin{aligned}
D(n) - C(n) &= R + n\mathbf{p} - C(n)\\
&= R - \sum_{i=1}^n (\mathbf{p} - X_i).
\end{aligned}$$

Le temps d'arrêt : $T = \min\{n \ge 1 : D(n) - C(n) \le 0\}$ est le temps de ruine de la compagnie. La probabilité $P(T < +\infty)$ est la probabilité de ruine de la compagnie.

Supposons que $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ où μ_1 est petit par rapport à $\mathbf{p}$. Alors $C(n)$ peut s'écrire $C(n) = \mu_1 n + \sigma_1 U_n$ où $U_n \sim \mathcal{N}(0, n)$ et sa fonction génératrice est donnée par $G(t) = e^{u^2 n/2}$. On utilise la martingale suivante, appelée martingale de Wald

$$Z_n = \frac{e^{uU_n}}{e^{u^2 n/2}} = e^{u(U_n - un/2)};\ n \geq 1.$$

Exercice 3.2. *1/ Montrer que $(Z_n)_{n\geq 1}$ est une martingale.*
2/ Montrer que $E(Z_n) = 1$ (Utiliser l'Exercice 2 de la Série 1).

Soit $n \geq 1$, l'évènement la compagnie est ruinée durant l'intervalle $[0, n]$, i.e. $1 \leq T \leq n$, est équivalent à $\{\min_{0\leq k\leq n}(D(k) - C(k)) \leq 0\}$.

$$\begin{aligned}
P(\min_{0\leq k\leq n}(D(k) - C(k)) \leq 0) &= P(\min_{0\leq k\leq n}(\mathbf{R} + \mathbf{p}k - \mu_1 k - \sigma_1 U_k) \leq 0) \\
&= P(\min_{0\leq k\leq n}(\mathbf{R} + (\mathbf{p} - \mu_1)k - \sigma_1 U_k) \leq 0) \\
&= P([\mathbf{R} - \max_{0\leq k\leq n}(\sigma_1 U_k - (\mathbf{p} - \mu_1)k] \leq 0) \\
&= P\left[\max_{0\leq k\leq n}\left(U_k - \frac{(\mathbf{p} - \mu_1)}{\sigma_1}k\right) \geq \frac{\mathbf{R}}{\sigma_1}\right].
\end{aligned}$$

Posons $u = 2\frac{(\mathbf{p}-\mu_1)}{\sigma_1}$, alors

$$P(\min_{0\leq k\leq n}(D(k) - C(k)) \leq 0) = P\left[\max_{0\leq k\leq n} Z_k \geq e^{u\mathbf{R}/\sigma_1}\right].$$

Appliquons l'inégalité maximale à la martingale $(Z_n)_{n\geq 0}$, avec $E(Z_n) = 1$, on obtient

$$P\left[\max_{0\leq k\leq n} Z_k \geq e^{u\mathbf{R}/\sigma_1}\right] \leq e^{-u\mathbf{R}/\sigma_1} \tag{3.26}$$

Puisque l'inégalité (3.26) est uniforme en n, alors en faisant $n \to \infty$:

$$\begin{aligned}
P(T < +\infty) &= P(\inf_{n\geq 0}(D(n) - C(n)) \leq 0) \\
&\leq e^{-u\mathbf{R}/\sigma_1} = \exp\left(-\frac{2(\mathbf{p} - \mu_1)}{\sigma_1^2}\mathbf{R}\right).
\end{aligned}$$

3.5 Théorème de convergence des Martingales

3.5.1 Uniforme intégrabilité

Définition 3.7 (Uniforme intégrabilité)**.** Une suite de v.a. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ est dite uniformément intégrable si

$$\lim_{K\to+\infty} \sup_{t\in\mathbb{T}} \int_{|X_t|>K} |X_t| dP = 0. \tag{3.27}$$

Si $\{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ est uniformément intégrable alors elle est bornée dans L^1.

3.5.2 Convergence des Martingales à temps discret

Théorème 3.4. *Soit $\{X_n\}_{n\geq 0}$ une sous martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_n$. Si*

$$\sup_{n\geq 0} E\left[X_n^+\right] < +\infty, \tag{3.28}$$

alors il existe une v.a. X_∞ intégrable telle que $\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty$ p.s.

Remarque 3.2. Si $\{X_n\}_{n\geq 0}$ est uniformément intégrable alors la condition (3.28) est vérifiée et le Théorème 3.4 est valide.

Remarque 3.3. La v.a. X_∞ est $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{n\geq 0} \mathcal{F}_n\right)$ mesurable.

La démonstration de ce théorème utilise un lemme dû à Doob sur la majoration de la moyenne des traversées (sauts) d'une bande horizontale par la suite $\{X_n\}_{n\geq 0}$.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, tels que $a < b$. On introduit la suite des temps d'arrêt : $S_1 < T_1 < S_2 < T_2 < \ldots$

$$\begin{gathered} S_1 = \inf\{n \geq 0 : X_n \leq a\}\,;\; T_1 = \inf\{n > S_1 : X_n \geq b\}\,; \\ S_2 = \inf\{n > T_1 : X_n \leq a\}\,;\; T_2 = \inf\{n > S_2 : X_n \geq b\}\,; \\ \vdots \end{gathered}$$

et ainsi de suite. Si l'une des bornes inférieures n'existe pas, on donne la valeur $+\infty$ au temps d'arrêt correspondant, ainsi qu'aux suivants. La variable aléatoire $U_{ab}^n = \sum_{i=1}^n I_{\{T_i < +\infty\}}$ est le nombre de traversées de $[a, b]$ (sauts), en montant, effectuées par la suite $X_1, \ldots, X_n$.

Lemme 3.1 (Lemme de Doob). *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une sous martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_n$. Alors*

$$E\left[U_{ab}^n\right] \leq \frac{1}{b-a} E\left[(X_n - a)^+\right]. \tag{3.29}$$

Démonstration. 1/ On suppose en premier que $a = 0$ et $X_n \geq 0$, $\forall n \geq 0$. Soit

$$\begin{aligned} d_j &= 0, \text{ si } j < S_1 \\ d_j &= 1, \text{ si } S_1 \leq j < T_1 \\ d_j &= 0, \text{ si } T_1 \leq j < S_2 \\ d_j &= 1, \text{ si } S_2 \leq j < T_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

ainsi de suite. On définit le processus

$$Y_n = X_1 + d_1(X_2 - X_1) + d_2(X_3 - X_2) + \cdots + d_{n-1}(X_n - X_{n-1}).$$

Si (X_n) est une sous martingale alors (Y_n) est une sous martingale. D'après la définition de la suite d_n on obtient

$$Y_n = X_1 + (X_{T_1} - X_{S_1}) + (X_{T_2} - X_{S_2}) + \cdots + (X_{T_k} - X_{S_k})$$

avec $k = U_{ab}^n$, et on sait d'après la définition des temps d'arrêt S_n et T_n, que : $X_{T_n} - X_{S_n} \geq (b-a) = b$ (ici $a = 0$). Donc $Y_n \geq kb = U_{ab}^n b$, ainsi $E(U_{ab}^n) \leq \frac{1}{b} E(Y_n)$. Aussi on peut montrer par récurrence que $E(Y_n) \leq E(X_n)$,et ainsi

$$E(U_{ab}^n) \leq \frac{1}{b} E(X_n). \tag{3.30}$$

En effet, $Y_1 = X_1$ donc $E(Y_1) \leq E(X_1)$. Supposons que $E(Y_n) \leq E(X_n)$. On a

$$X_{n+1} - Y_{n+1} = X_{n+1} - (Y_n + d_n (X_{n+1} - X_n)) = (X_n - Y_n) + (1 - d_n)(X_{n+1} - X_n)$$

et donc

$$\begin{array}{rcl} E(X_{n+1} - Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) & = & E(X_n - Y_n \mid \mathcal{F}_n) + (1 - d_n) E(X_{n+1} - X_n \mid \mathcal{F}_n) \geq E(X_n - Y_n \mid \mathcal{F}_n) \\ E[E(X_{n+1} - Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)] & = & E(X_{n+1} - Y_{n+1}) \geq E[E(X_n - Y_n \mid \mathcal{F}_n)] = E(X_n - Y_n) \geq 0 \end{array}$$

Revenons à la conclusion du lemme. Puisque $a = 0$, $X_n \geq 0$ alors $(X_n - a)^+ = (X_n - 0)^+ = X_n^+ = X_n \geq 0$. Donc

$$E(U_{ab}^n) \leq \frac{1}{b} E\left(X_n^+\right).$$

2/ Pour le cas $a \neq 0$ et X_n non nécessairement positive on a que si (X_n) est une sous martingale alors $(X_n - a)^+$ est une sous martingale. En effet, la fonction définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est une fonction convexe croissante et en utilisant l'inégalité de Jensen on a le résultat.
Aussi le nombre de traversées de $[a, b]$ par la suite $X_1, \ldots, X_n$ est le même que celui du nombre de traversées de $[0, b - a]$ par la suite $(X_1 - a)^+, (X_2 - a)^+, \ldots, (X_n - a)^+$. D'où d'après 1/ $E(U_{ab}^n) \leq \frac{1}{b-a} E\left[(X_n - a)^+\right]$. □

Preuve du Théorème 3.4. Soit A l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tel que $X_n(\omega)$ ne converge pas. Donc

$$A = \{\omega \in \Omega : \liminf X_n < \limsup X_n\}.$$

On a

$$A = \bigcup_{\substack{a,b \in \mathbb{Q} \\ a<b}} A_{ab}$$

où $A_{ab} = \{\omega \in \Omega : \liminf X_n \leq a < b \leq \limsup X_n\}$. On doit montrer que $P(A_{ab}) = 0$, $\forall a, b \in \mathbb{Q}$. Supposons $\exists\, a, b \in \mathbb{Q}$, $a < b$ et $P(A_{ab}) \geq \delta > 0$. Ainsi $\liminf X_n = \sup_{n \geq 1} \inf_{m \geq n} X_m \leq a$ avec probabilité > 0, cela implique que $\forall n \geq 1$ $\inf_{m \geq n} X_m \leq a$ donc il y a une infinité de $X_n \leq a$. De même on peut montrer qu'il y a une infinité de $X_n \geq b$. Donc si U_{ab} est le nombre de traversées de $[a, b]$ alors $U_{ab} = \infty$ avec probabilité $\geq \delta > 0$, aussi $U_{ab}^n \nearrow U_{ab} = \infty$. D'après théorème de convergence monotone $\lim E(U_{ab}^n) = \infty$. Mais d'après le lemme

$$E(U_{ab}^n) \leq \frac{1}{b-a} E\left[(X_n - a)^+\right] \leq \frac{1}{b-a}\left[\sup E(X_n^+) + |a|\right] < \infty$$

d'après l'hypothèse (1). Contradiction avec $\lim E(U_{ab}^n) = \infty$.
Pour montrer que X_∞ est intégrable, on remarque avant que $|X_n| = 2X_n^+ - X_n$ (cela vient de $|X_n| = X_n^+ + X_n^-$ et $X_n = X_n^+ - X_n^-$). D'après le lemme de Fatou

$$E(|X_\infty|) = E(\liminf |X_n|) \leq \liminf E(|X_n|)$$

mais $E(|X_n|) = 2E(X_n^+) - E(X_n) \leq 2\sup_n E(X_n^+) - E(X_n) \leq 2\sup_n E(X_n^+) - E(X_1) = M < \infty$ (car $E(X_n)$ est croissante puisque (X_n) est une sous martingale et donc $E(X_1) \leq E(X_n)$). D'où $\liminf E(|X_n|) \leq M < \infty$ et $E(|X_\infty|) < +\infty$ ce qui veut dire que X_∞ est intégrable. □

Remarque 3.4. Le Théorème 3.4 est valide pour une martingale car toute martingale est une sous-martingale.

3.5.3 Convergence des Martingales à temps continu

Théorème 3.5. *Soit $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ une sous martingale continue à droite. Si*

$$\sup_{t\geq 0} E\left[X(t)^+\right] < +\infty, \tag{3.31}$$

alors il existe une v.a. X_∞ intégrable telle que $\lim_{t\to\infty} X(t) = X_\infty$ p.s.

Démonstration. Soit $U_{ab}^{(n)}$ le nombre de traversées de la suite $\{X\left(\frac{k}{2^n}\right)\}_{k\in\mathbb{N}}$. On remarque que $U_{ab}^{(n)}$ est croissante en n, et on pose

$$U_{ab} = \lim_{n\to\infty} U_{ab}^{(n)}.$$

Si $U_{ab} < \infty$, alors (par continuité à droite), il existe un $s \in [0,\infty)$ tel que ou bien $X(t) \leq b$ pour tout $t \geq s$ ou $X(t) \geq a$ pour tout $t \geq s$. Ainsi, on saura que $X(t)$ converge dans $[-\infty,+\infty]$ (p.s.) si on montre que $E[U_{ab}] < \infty$ pour tout $a < b$. De plus, d'après (3.29) on a

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} E\left[U_{ab}^n\right] \leq \sup_{t\in[0,\infty)} \frac{E\left[(X_n - a)^+\right]}{b-a} < \infty \tag{3.32}$$

et $E[U_{ab}] < \infty$ vient du théorème de convergence monotone. □

3.6 Théorème d'arrêt

Soit τ un temps d'arrêt relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ $\forall t \geq 0$. La tribu des événement antérieurs à τ

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}, \forall t \geq 0, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

est une tribu. τ est $\mathcal{F}_\tau$ mesurable (Exercice).
Pour X une fonction aléatoire continue et τ un temps d'arrêt p.s. fini, on considère la v.a.

$$X(\tau) : \omega \longrightarrow X(\tau(\omega), \omega)$$

Dans le cas $\mathbb{T} = \mathbb{N}$, on voit facilement que $X(\tau)$ est une variable aléatoire, obtenue par composition de variable aléatoires.

Proposition 3.3. *Soit τ un temps d'arrêt fini (p.s.) et $\mathbf{X} = \{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ un processus optionnel. Alors la v.a. $X(\tau)$ est $\mathcal{F}_\tau$ mesurable.*

Démonstration. Soit $B \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ et $t \geqslant 0$, on a

$$\{X(\tau)1_{\{\tau<\infty\}} \in B\} \cap \{\tau \leq t\} = \{X(\tau \wedge t) \in B\} \cap \{\tau \leq t\}$$

Considérer la composition d'applications mesurables

$$\omega \in (\Omega, \mathcal{F}_t) \to (\tau(\omega) \wedge t, \omega) \in ([0,t] \times \Omega, \mathcal{B}_{[0,t]} \otimes \mathcal{F}_t) \to X(\tau(\omega) \wedge t, \omega) \in (\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$$

et utiliser le fait que $\mathbf{X}$ est progressivement mesurable. Ce qui donne $\{X(\tau \wedge t) \in B\} \in \mathcal{F}_t$ et puisque $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ on a le résultat. □

Pensons à une martingale $\mathbf{X}$ comme le gain du joueur à une jeu équitable, et à un temps d'arrêt τ comme à l'instant où le joueur décide de s'arrêter de jouer. Sauf clairvoyance dans le futur (ou déli d'initié), sa stratégie d'arrêt ne doit pas changer le jeu équitable en un jeu favorable (ni défavorable). C'est ce qu'affirme le théorème d'arrêt ou théorème d'échantillonnage (optional sampling theorem)

Théorème 3.6 (Théorème d'arrêt de Doob)**.** *Soit $\mathbf{M} = \{M(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ un processus stochastique continue adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$. Les propriétés suivantes sont équivalents :*

(1) $\{M(t)\}_{t\geq 0}$ est une martingale relativement à $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$;

(2) Pour tout temps d'arrêt borné τ relativement à $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ tel que $E(|M(\tau)|) < +\infty$, on a

$$E[M(\tau)] = E[M(0)] \tag{3.33}$$

Soit que le gain moyen reste inchangé par une stratégie licite, comme annoncé ci-dessus.

Démonstration. Supposons que $\{M(t)\}_{t\geq 0}$ est une martingale relativement à $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$. Soit τ un temps d'arrêt relativement à $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ et presque sûrement borné par $K > 0$. On suppose au début que τ prend ses valeurs dans un ensemble fini : $0 \leq t_1 < \cdots < t_n \leq K$. De la propriété martingale on obtient

$$\begin{aligned}
E[M(\tau)] &= E\left[\sum_{i=1}^{n} M(\tau)\mathbf{1}_{\{\tau=t_i\}}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} E\left[M(t_i)\mathbf{1}_{\{\tau=t_i\}}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} E\left[M(t_n)\mathbf{1}_{\{\tau=t_i\}}\right] \\
&= E\left[M(t_n)\right] \\
&= E\left[M(0)\right].
\end{aligned}$$

Si τ prend un ensemble infini de valeurs, on approxime τ par la suite des temps d'arrêt

$$\tau_n = \sum_{m=1}^{2^n} \frac{mK}{2^n}\mathbf{1}_{\{\frac{m-1}{2^n}\leq\tau<\frac{mK}{2^n}\}}.$$

Le temps d'arrêt τ_n, pour n fixé, prend ses valeurs dans un ensemble fini et quand $n \to +\infty$, $\tau_n \to \tau$.

Pour conclure la preuve de la première partie de la proposition, il faut donc montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} E(M_{\tau_n}) = E(M_\tau). \tag{3.34}$$

Pour cela, nous allons montrer que la famille $(M_{\tau_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément intégrable.

Soit $C \geq 0$. Puisque τ_n prend ses valeurs dans un ensemble fini, en utilisant la propriété martingale et l'inégalité de Jensen, il est facile de vérifier que

$$E(|M_K|\mathbf{1}_{\{M_{\tau_n}\geq C\}}) \geq E(|M_{\tau_n}|\mathbf{1}_{\{M_{\tau_n}\geq C\}}).$$

Par conséquent,

$$\lim_{n\to+\infty} E(|M_{\tau_n}|\mathbf{1}_{\{M_{\tau_n}\geq C\}}) \leq \lim_{n\to+\infty} E(|M_K|\mathbf{1}_{\{M_{\tau_n}\geq C\}}) = 0$$

Par uniforme intégrabilité, on déduit la limite (3.34), par laquelle on obtient

$$E(M_\tau) = E(M_0).$$

Inversement, supposons maintenant que pour tout temps d'arrêt τ de la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ presque sûrement borné tel que $E(|M_\tau|) < +\infty$, on a $E(M_\tau) = E(M_0)$. Soit $0 \leq s \leq t$ et $A \in \mathcal{F}_s$. En utilisant le temps d'arrêt $\tau = s\mathbf{1}_A + t\mathbf{1}_{A^c}$, on a

$$E((M_t - M_s)\mathbf{1}_A) = 0, \tag{3.35}$$

qui implique la propriété martingale pour $(M_t)_{t\geq 0}$. □

Théorème 3.7 (Théorème d'arrêt en temps discret)**.** *Soit $\{M_n\}_{n\geq 0}$ une martingale et σ, τ deux temps d'arrêt bornés, avec $\sigma \leq \tau$. Alors*

$$E\left[M_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma\right] = M_\sigma. \tag{3.36}$$

Démonstration. Soit $K \in \mathbb{N}$ la borne supérieure de τ, et $A \in \mathcal{F}_\sigma$

$$\begin{aligned}
\int_A M_K dP &= \sum_{n=0}^{K} \int_{A\cap\{\sigma=n\}} M_K dP \\
&= \sum_{n=0}^{K} \int_{A\cap\{\sigma=n\}} M_n dP \ (\text{martingale et } A\cap\{\sigma=n\}\in\mathcal{F}_n) \\
&= \int_A M_\sigma dP;
\end{aligned}$$

de même (puisque $A \in \mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_\tau$),

$$\int_A M_K dP = \int_A M_\tau dP.$$

□

Remarque 3.5. Pour une sous martingale (resp. surmartingale), le théorème d'arrêt donne

$$E\left[M_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma\right] \geq M_\sigma.$$

(resp. $E\left[M_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma\right] \leq M_\sigma$.)

Théorème 3.8. *Soit $\mathbf{M} = \{M_t\}_{t\geq 0}$ une martingale continue à droite et $\sigma \leq \tau$ deux temps d'arrêt bornés, alors on a*

$$E\left[M_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma\right] = M_\sigma. \ \ p.s. \tag{3.37}$$

Si de plus la martingale $\mathbf{M}$ est uniformément intégrable, l'égalité (3.37) *reste vraie sans supposer que σ et τ soient bornés.*

Démonstration. Montrons la deuxième assertion ($\mathbf{M}$ est uniformément intégrable). Pour un temps d'arrêt τ, il existe une suite de temps d'arrêt τ_n prenants un nombre fini de valeurs, décroissante qui converge vers τ (de même pour σ). Prenons par exemple

$$\tau_n = \sum_{m=1}^{n2^n} \frac{m}{2^n}\mathbf{1}_{\{\frac{m-1}{2^n}\leq\tau<\frac{m}{2^n}\}} + \infty\mathbf{1}_{\{\tau\geq n\}}.$$

D'après le Théorème 3.7 appliqué à la martingale discrète $\{M_{\frac{k}{2^n}}\}_{k\in\mathbb{N}}$ (aussi uniformément intégrable), on a p.s.

$$E\left[M_{\tau_n} \mid \mathcal{F}_{\sigma_n}\right] = M_{\sigma_n}.$$

Puisque $\sigma_n \geq \sigma$ alors $\mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_{\sigma_n}$. Il suit que

$$E\left[M_{\tau_n} \mid \mathcal{F}_\sigma\right] = E\left[E\left(M_{\tau_n} \mid \mathcal{F}_{\sigma_n}\right) \mid \mathcal{F}_\sigma\right] = E\left[M_{\sigma_n} \mid \mathcal{F}_\sigma\right] \text{ (p.s.)} \tag{3.38}$$

De même

$$E\left[M_{\tau_n} \mid \mathcal{F}_{\tau_{n+1}}\right] = M_{\tau_{n+1}}. \text{ (p.s.)}$$

Ainsi $sup_n E\left(M_{\tau_n}\right) = E\left(M_0\right) < \infty$, ce qui implique que $\{M_{\tau_n}\}_n$ est uniformément intégrable et converge p.s. et dans L^1. Par la continuité à droite $M_{\tau_n} \to M_\tau$ p.s. Ainsi $M_{\tau_n} \to M_\tau$ dans L^1. Prenons $A \in \mathcal{F}_\sigma$. D'après (3.38) on a

$$\int_A M_{\tau_n} dP = \int_A M_{\sigma_n} dP.$$

Par la convergence dans L^1, cela implique

$$\int_A M_\tau dP = \int_A M_\sigma dP.$$

$\square$

3.6.1 Version utile du théorème d'arrêt

Pour toute martingale $\mathbf{M}$ et tout temps d'arrêt τ (fini ou non),la fonction aléatoire $\mathbf{X}$

$$X(t) = M(\tau \wedge t)$$

est une martingale. Le processus $\mathbf{X}$ est appelé processus arrêté.

Proposition 3.4. *Soit* $\mathbf{M}$ *une martingale continue et* τ *un temps d'arrêt p.s. fini, tel que* $\forall n$

$$|M(\tau \wedge n)| \leq K$$

pour une constante $K < \infty$. *Alors*

$$E[M_\tau] = E[M_0].$$

3.7 Exercices

Exercice 3.3. *Montrer qu'un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$, muni de sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$, est une martingale si et seulement si pour tout $s,t \in \mathbb{T}$, $s \leq t$ et tout $A \in \mathcal{F}_s$,*

$$\int_A X_s dP = \int_A X_t dP.$$

Exercice 3.4. *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une martingale à temps continu relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Démontrer que si $s \leq t$:*

$$E\left[(X_t - X_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] = E\left[(X_t^2 - X_s^2) \mid \mathcal{F}_s\right]$$

Exercice 3.5. *Soit $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ un processus de Poisson de taux λ et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration naturelle associée. Montrer que le processus $Y(t) = \exp\{\alpha N(t) - \lambda t(e^{\alpha} - 1)\}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et α un paramètre réel, est une martingale.*

Exercice 3.6. *Soit τ_1 et τ_2 deux temps d'arrêt relativement à la filtration $\mathcal{F}_n$. Montrer que $\tau_1 + \tau_2$, $\tau_1 \vee \tau_2 = \sup\{\tau_1, \tau_2\}$ et $\tau_1 \wedge \tau_2$ sont des temps d'arrêt.*

Exercice 3.7. *Montrer que pour $s < t$ et $A \in \mathcal{F}_s$, $\tau = s\mathbf{1}_A + t\mathbf{1}_{A^c}$ est un temps d'arrêt.*

Exercice 3.8. *Soit τ un temps d'arrêt relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ $\forall t \geq 0$.*
1/ Montrer que $\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}, \forall t \geq 0, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$ est une tribu.
2/ Démontrer que τ est $\mathcal{F}_\tau$ mesurable.
3/ Soit τ_1 et τ_2 deux temps d'arrêt, tels que $\tau_1 \leq \tau_2$ (p.s). Montrer que $\mathcal{F}_{\tau_1} \subset \mathcal{F}_{\tau_2}$.
4/ Soit $\{X(t), t \geq 0\}$ une martingale continue relativement à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$. On suppose que τ est borné p.s. Montrer que $\{X(t \wedge \tau), t \geq 0\}$ est une martingale.

Exercice 3.9. *Soit $(M_t, t \geq 0)$ une $(\mathcal{F}_t)$-martingale et τ un temps d'arrêt borné prenant ses valeurs dans un ensemble dénombrable. Soit Y une variable aléatoire bornée $\mathcal{F}_\tau$ mesurable. Soit $N_t = Y(M_t - M_{t\wedge\tau})$. Montrer que $(N_t)_{t\geq 0}$ est une martingale.*

Exercice 3.10. *Considérons l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sur lequel sont construites deux filtrations $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ satisfaisant $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{G}_t$.*
1) Soit $\mathbf{M} = (M_t)_{t\geq 0}$ une $\mathcal{F}_t$-martingale (martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$) et soit $\mathbf{N} = (N_t)_{t\geq 0}$ une $\mathcal{G}_t$-martingale . Est-ce que $\mathbf{M}$ est une $\mathcal{G}_t$-martingale ? Est-ce que $\mathbf{N}$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale ? Justifiez vos réponses.
2) Soit T un $\mathcal{F}_t$-temps d'arrêt (temps d'arrêt par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$) et S un $\mathcal{G}_t$-temps d'arrêt. Est-ce que S est un $\mathcal{F}_t$-temps d'arrêt ? Est-ce que T est un $\mathcal{G}_t$-temps d'arrêt ? Justifiez vos réponses.

Exercice 3.11. *Soit $T > 0$ un nombre réel. Pour $0 = t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} < \ldots$ et $i = 1, \ldots, n, \ldots$ soit ϕ_i des fonctions bornées $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurables et ϕ_0 une fonction bornée $\mathcal{F}_0$-mesurable. On définit le processus élémentaire $X(t,\omega) = \phi_0(\omega)\mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(\omega)\mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(t)$. Montrer que $(X(t))_{t\geq 0}$ est progressivement mesurable.*

Exercice 3.12. *Deux joueurs jouent à un jeu équitable. On note Z_n le résultat de la $n^{\text{ième}}$ partie pour le premier joueur. Les Z_n sont indépendantes et : $P(Z_n = +1) = P(Z_n = -1) = 1/2$. On note $\mathcal{F}_n$ la filtration engendrée par les résultats des n premières parties, et X_n la fortune du premier joueur après la $n^{\text{ième}}$ partie. Sa fortune initiale est fixée : $X_0 = a$. pour tout $n \geq 1$, on a donc :*

$X_n = a + Z_1 + ... + Z_n$. Le second joueur a une fortune initiale fixée à b et la partie se termine par la ruine de l'un des deux joueurs. On définit donc : $T = \min\{n,\ X_n = 0 \text{ ou } X_n = a+b\}$.
1/ *Montrer que $(X_n)_n$ est une martingale et que T est un temps d'arrêt, relativement à $(\mathcal{F}_n)$.*
2/ *Montrer que : $P(T > n) \leq P(0 < X_n < a+b)$. Déduire du théorème de la limite centrale que $P(T > n)$ tend vers 0, puis que T est fini.*
3/ *Déduire du théorème d'arrêt que : $P(X_T = 0) = \dfrac{b}{a+b}$ et $P(X_T = a+b) = \dfrac{a}{a+b}$.*
4/ *Montrer que $E(X_T^2) - E(T) = a^2$. Conclure que $E(T) = ab$.*
5/ *Observons que pour tout réel λ : $E\left[e^{\lambda Z_n}\right] = \frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2} = \cosh(\lambda)$. Pour tout $n \geq 0$, on pose $Y_n(\lambda) = \exp(\lambda X_n)(\cosh(\lambda))^{-n}$. Montrer que $(Y_n(\lambda))_n$ est une martingale.*
6/ *Déduire du théorème d'arrêt que : $E\left[(\cosh(\lambda))^{-T}\left(I_0(X_T) + e^{\lambda(a+b)} I_{a+b}(X_T)\right)\right] = e^{\lambda a}$.*

Exercice 3.13. *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes et de même loi donnée par : $P(X_1 = +1) = p$, $P(X_1 = -1) = q = 1-p$. On pose $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ pour $n \geq 1$, et $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$*
1/ *Montrer que $Z_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$ est une martingale par rapport à $\mathcal{F}_n$.*
2/ *Déduire de l'inégalité maximale que : $P\left(\sup_{n\geq 0} S_n \geq k\right) \leq \left(\frac{p}{q}\right)^k$ et que, lorsque $q > p$*

$$E\left(\sup_{n\geq 0} S_n\right) \leq \frac{p}{q-p}.$$

Exercice 3.14. *Soit $(M(t))_{t\geq 0}$ une martingale positive continue issue de $a > 0$ ($M(0) = a$) et telle que : $\lim_{t\to\infty} M(t) = 0$ (p.s.). En introduisant le temps d'arrêt $T_x = \inf\{t \geq 0,\ M(t) \geq x\}$, montrer que $S = \sup\{M(t);\ t \geq 0\}$ suit la même loi que $\frac{a}{U}$ avec U une variable aléatoire uniforme sur $]0,1]$.*

Exercice 3.15. *A la date 0, une urne contient une boule blanche et une boule noire. A la date 1, on prélève une boule, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne avec une boule supplémentaire de même couleur. on itère cette opération aux dates $2, 3, \ldots$. Soit B_n , $n \geq 0$ le nombre de boules blanches dans l'urne après la $n^{\text{ème}}$ opération.*
1/ Montrer que la suite : $X_n = \dfrac{B_n}{n+2}$ est une martingale relativement à $\mathcal{F}_n = \sigma(B_1, \ldots, B_n)$.
2/ Montrer que le rapport du nombre de boules blanches au nombre de boules noires converge p.s. vers une limite.

3.8 Corrigés des Exercices

Corrigé 3.3

Pour une martingale on a pour tout $s \leq t$

$$E(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s \text{ p.s.} \tag{3.39}$$

et d'après la définition de l'espérance conditionnelle pour tout $A \in \mathcal{F}_s$

$$\int_A E(X_t \mid \mathcal{F}_s)dP = \int_A X_t dP. \tag{3.40}$$

Ainsi d'après (3.39)

$$\int_A E(X_t \mid \mathcal{F}_s)dP = \int_A X_s dP = \int_A X_t dP.$$

Maintenant si pour tout $s, t \in \mathbb{T}$, $s \leq t$ et tout $A \in \mathcal{F}_s$,

$$\int_A X_s dP = \int_A X_t dP.$$

et d'après (3.40) on a

$$\int_A E(X_t \mid \mathcal{F}_s)dP = \int_A X_s dP. \tag{3.41}$$

La conclusion vient du Lemme 2.1.

Corrigé 3.6

1/ Montrons que $\{\tau_1 + \tau_2 > t\} \in \mathcal{F}_t$. On a

$$\underbrace{\{\tau_1 + \tau_2 > t\}}_{CG} = \underbrace{\left(\bigcup_{\substack{r, s \in \mathbb{Q}^+, r+s>t \\ r \leq t, s \leq t}} \{\tau_1 > r\} \cap \{\tau_2 > s\} \right) \cup \{\tau_1 > t\} \cup \{\tau_2 > t\}}_{CD} \tag{3.42}$$

L'inclusion $CD \subset CG$ est triviale. Il reste à montrer que $CG \subset CD$ pour conclure que $\{\tau_1 + \tau_2 > t\} \in \mathcal{F}_t$. Pour $\omega \in CG$, si $\tau_1(\omega) = 0$ ou $\tau_2(\omega) = 0$, alors $\omega \in \{\tau_1 > t\} \cup \{\tau_2 > t\} \subset CD$. Autrement, on a $\tau_1(\omega) + \tau_2(\omega) > t$, $\tau_1(\omega) > 0$, $\tau_2(\omega) > 0$. Dans ce cas, on peut toujours trouver deux nombres rationnels r, s tels que $r + s > t$, $r \leq t$, $s \leq t$, $\tau_1(\omega) > r \geq 0$, $\tau_2(\omega) > s \geq 0$. Alors $\omega \in \{\tau_1 > r\} \cap \{\tau_2 > s\} \subset CD$. Cela complète la preuve que $CG = CD = \{\tau_1 + \tau_2 > t\} \in \mathcal{F}_t$ Il s'ensuit que $\{\tau_1 + \tau_2 \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, i.e. $\tau_1 + \tau_2$ est une temps d'arrêt relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

2/

$$\{\tau_1 \vee \tau_2 \leq t\} = \{\tau_1 \leq t\} \cap \{\tau_2 \leq t\} \in \mathcal{F}_t. \tag{3.43}$$

$$\{\tau_1 \wedge \tau_2 > t\} = \{\tau_1 > t\} \cap \{\tau_2 > t\} \in \mathcal{F}_t. \tag{3.44}$$

Corrigé 3.8

2/ Montrons que τ est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable.
Il faut donc montrer que pour tout borélien B on a $\tau^{-1}(B) \in \mathcal{F}_\tau$. C'est à dire que $\tau^{-1}(B) \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Aussi on a $\tau^{-1}(B) \cap \{\tau \leq t\} = (\tau \mathbf{1}_{\{\tau \leq t\}})^{-1}(B)$. Il suffit donc de montrer que $\tau \mathbf{1}_{\{\tau \leq t\}}$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable. On peut écrire aussi $\tau \mathbf{1}_{\{\tau \leq t\}} = (\tau \wedge t)\mathbf{1}_{\{\tau \leq t\}}$. Comme τ est un temps d'arrêt, $\tau \wedge t$ et $\mathbf{1}_{\{\tau \leq t\}}$ sont $\mathcal{F}_t$-mesurable, alors il en est de même de $\tau \mathbf{1}_{\{\tau \leq t\}}$. Donc τ est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable.
3/ Montrons que si $\tau_1 \leq \tau_2$ p.s. alors $\mathcal{F}_{\tau_1} \subseteq \mathcal{F}_{\tau_2}$.
Soit $A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$, alors $A \cap \{\tau_1 \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Comme $\tau_1 \leq \tau_2$ p.s. alors $\{\tau_2 \leq t\} \subseteq \{\tau_1 \leq t\}$. En effet, si $\omega \in \{\tau_2 \leq t\}$ alors $\tau_1(\omega) \leq \tau_2(\omega) \leq t$, ainsi $\omega \in \{\tau_1 \leq t\}$. on peut alors écrire

$$A \cap \{\tau_2 \leq t\} = [A \cap \{\tau_1 \leq t\}] \cap \{\tau_2 \leq t\} \in \mathcal{F}_t. \tag{3.45}$$

4/ Montrons que $\{X(\tau \wedge t)\}_{\{t \geq 0\}}$ est une martingale relativement à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$.
Soit σ un temps d'arrêt borné relativement à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$. D'après le théorème d'arrêt (Théorème 3.6) de Doob, on a $E[X(\tau \wedge \sigma)] = E[X(0)]$. Puisque σ est arbitraire, on conclut aussi du Théorème 3.6 que $\{X(\tau \wedge t)\}_{\{t \geq 0\}}$ est une martingale relativement à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$.

Corrigé 3.10

1/ $\mathbf{M}$ n'est pas une $\mathcal{G}_t$-martingale car, pour $s < t$, $E(M_t \mid \mathcal{G}_s)$ peut ne pas être égale à M_s. Par exemple si $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_s$ alors $E(M_t \mid \mathcal{G}_s) = M_t$ et pas M_s puisque dans ce cas M_t, qui est $\mathcal{F}_t$-mesurable, serait $\mathcal{G}_s$-mesurable.
Pour un t fixé N_t n'est pas $\mathcal{F}_t$-mesurable, car pour $B \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$, on a $N_t^{-1}(B) \in \mathcal{G}_t$ mais $N_t^{-1}(B)$ peut ne pas appartenir à $\mathcal{F}_t$ car $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$. Donc $\mathbf{N}$ n'est pas une $\mathcal{F}_t$-martingale.
2/ $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$ donc T est un $\mathcal{G}_t$-temps d'arrêt. $\{S \leq t\} \in \mathcal{G}_t$ mais $\{S \leq t\}$ peut ne pas appartenir à $\mathcal{F}_t$ car $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$. Donc S n'est pas un $\mathcal{F}_t$-temps d'arrêt.

Corrigé 3.12

1/ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|X_n| \leq a + n < +\infty$, alors X_n est intégrable. $\{X_n\}_n$ est adaptée à la filtration $\{\mathcal{F}_n\}_n$ car pour n fixé X_n est fonction de $Z_1, \ldots, Z_n$ donc $\mathcal{F}_n$-mesurable.
Montrons maintenant la propriété martingale

$$\begin{aligned} E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) &= E(X_n + Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \\ &= X_n + E(Z_{n+1}) = X_n. \end{aligned}$$

$\{X_n\}_n$ est donc une martingale relativement à la filtration $\{\mathcal{F}_n\}_n$.
T est le temps d'entrée du processus $\{X_n\}_n$, adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_n\}_n$, dans le borélien $B = \{0, a+b\}$ et représente le temps de ruine de l'un des deux joueurs. Donc T est un temps d'arrêt relativement à la filtration $\{\mathcal{F}_n\}_n$.
2/ Si $\omega \in \{T > n\}$ cela veut dire qu'aucun des deux joueurs ne s'est ruiné avant le temps n alors $0 < X_n(\omega) < a + b$ donc $\{T > n\} \subset \{0 < X_n < a + b\}$. On déduit que $P\,(T > n) \leq P\,(0 < X_n < a + b)$.
On peut exprimer X_n par la somme $X_n = a + Z_1 + \cdots + Z_n$, la suite $\{Z_i\}_i$ étant i.i.d. on peut lui

appliquer le Théorème Central Limite (TCL)

$$\begin{aligned}
P(0 < X_n < a+b) &= P\left(0 < a + \sum_{i=1}^{n} Z_i < a+b\right) \\
&= P\left(-a < \sum_{i=1}^{n} Z_i < b\right) \\
&= P\left(\frac{-a}{\sqrt{n}} < \frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i - nE(Z_1)}{\sqrt{n}\sqrt{V(Z_1)}} < \frac{b}{\sqrt{n}}\right) \\
&= \phi\left(\frac{b}{\sqrt{n}}\right) - \phi\left(\frac{-a}{\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

où ϕ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.
On déduit la limite

$$\lim_{n\to\infty} P(T > n) \leq \lim_{n\to\infty} \left(\phi\left(\frac{b}{\sqrt{n}}\right) - \phi\left(\frac{-a}{\sqrt{n}}\right)\right) = 0.$$

On déduit que

$$P(T < +\infty) = 1 - P(T = \infty) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(T > n) = 1$$

donc T est fini presque sûrement.
3/ Puisque $|X_{T\wedge n}| \leq a+b$ et T est un temps d'arrêt presque sûrement fini alors d'après la Proposition 3.4 on a

$$E(X_T) = E(X_0) = a \tag{3.46}$$

et d'après la définition du temps d'arrêt T on a

$$E(X_T) = 0 \times P(X_T = 0) + (a+b) \times P(X_T = a+b) = a. \tag{3.47}$$

On obtient

$$P(X_T = a+b) = \frac{a}{a+b}$$

et $P(X_T = 0) = 1 - P(X_T = a+b) = b/(a+b)$.
3/ Appliquons le théorème d'arrêt à la martingale $\{X_n^2 - n\}_n$ (voir Exemple 3.2).
Nous allons, en premier, montrer le théorème d'arrêt à la martingale $\{X_n^2 - n\}_n$ au temps d'arrêt $T \wedge n$ borné pour n fixé, puis en faisant tendre n vers l'infini on obtient le résultat.

$$E(X_{T\wedge n}^2 - (T\wedge n)) = E(X_0^2 - 0) = a^2 \tag{3.48}$$

$$E(X_{T\wedge n}^2) - E(T\wedge n) = a^2. \tag{3.49}$$

On a la suite des temps $(T\wedge n)_n$ est croissante et $\lim_{n\to\infty}(T\wedge n) = T$ p.s. Le Théorème de Convergence Monotone (TCM) donne

$$\lim_{n\to\infty} E(T\wedge n) = E[\lim_{n\to\infty}(T\wedge n)] = E(T). \tag{3.50}$$

Aussi $\lim_{n\to\infty} X_{T\wedge n}^2 = X_T^2$ et $|X_{T\wedge n}^2| \leq (a+b)^2$. En utilisant le Théorème de Convergence Dominée (TDM) on obtient

$$\lim_{n\to\infty} E[X_{T\wedge n}^2] = E[\lim_{n\to\infty} X_{T\wedge n}^2] = E(X_T^2).$$

Ainsi

$$\lim_{n\to\infty}[E(X_{T\wedge n}^2) - E(T\wedge n)] = E(X_T^2) - E(T) = a^2. \tag{3.51}$$

On déduit

$$E(T) = E(X_T^2) - a^2 = (a+b)^2\frac{a}{a+b} - a^2 = ab.$$