Université Hassiba Benbouali de Chlef **Année Universitaire : 2019-2020**
Faculté des Sciences Exactes et Informatique **Module : Théorie des Opérateurs**
Département de Mathématiques **Niveau : Master 1**

Feuille de TD 1

Exercice 1.

i. Soit $E = \mathbb{R}[X]$, l'espace vectoriel des polynômes de la variable réelle X et à coefficients réels. Les appilcations suivantes définissent-elles des produits scalaires sur E ?

$$\begin{aligned}\langle P, Q\rangle &= \int_0^1 P(x)Q(x)dx, \quad P, Q \in \mathbb{R}[X] \\ \langle P, Q\rangle &= P(1)Q'(0) + P'(0)Q(1), \quad P, Q \in \mathbb{R}[X]\end{aligned}$$

Exercice 2.

Soit $(\mathcal{H}, \langle ., .\rangle)$ un espace de Hilbert réel.
a. Montrer l'identité de polarisation

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2), \quad x, y \in \mathcal{H}$$

b. Une application linéaire $u\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est dite une isométrie si u conserve la norme, i.e.

$$\forall x \in \mathcal{H} : \|u(x)\| = \|x\|$$

où $\|.\|$ est la norme issue du produit scalaire $\langle ., .\rangle$. Montrer que u est une isométrie si et seulement si u conserve le produit scalaire, c-à-d

$$\forall x, y \in \mathcal{H} : \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$$

N.B. Pour $(\Rightarrow)$, utiliser l'identité de polarisation ,et pour $(\Leftarrow)$, le développement de $\|u(x+\lambda y) - u(x) - \lambda u(y)\|^2$

pour tous $x, y \in \mathcal{H}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.

Dans l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n, $(n \geq 1)$ et à coefficients réels, on définit la trace d'une matrice $\mathcal{A} = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ par $tr(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.
1. Montrer que

$$\langle \mathcal{A}, \mathcal{B}\rangle = tr(\mathcal{A}^t\mathcal{B}), \quad \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où $\mathcal{A}^t$ est la matrice transposée de la matrice A.
2. Montrer que la norme associée à ce produit scalaire vérifie

$$\|\mathcal{AB}\| \leq \|\mathcal{A}\| \, \|\mathcal{B}\|, \ \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

3. En déduire que $\|\mathcal{A}^p\| \leq \|\mathcal{A}\|^p$, $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$.

Exercice 4.

(Produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{R}_n[X]$)
a. Montrer que la relation

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx, \quad P, Q \in \mathbb{R}[X]$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ et sur $\mathbb{R}_n[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
b. Montrer que $(\mathbb{R}_n[X], \langle .,.\rangle)$ est un espace de Hilbert.
c. 1. Soit $P_n(x) = \sum\limits_{k=o}^{n} \frac{x^k}{k!}, x \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $(P_n)_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction $x \mapsto \exp(x)$.
2. En déduire que P_n converge vers la fonction $x \mapsto \exp(x)$ pour la norme associée au produit scalaire.
3. En déduire que $(\mathbb{R}[X], \langle .,.\rangle)$ n'est pas un espace de Hilbert.

Exercice 5.

(**) Montrer que l'espace vectoriel $\mathcal{E} = \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur $[-1,1]$, muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt, \quad f, g \in \mathcal{E}$$

n'est pas de Hilbert. Utiliser la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ où

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & -1 \leq t \leq \frac{-1}{n} \\ nt+1, & \frac{-1}{n} \leq t \leq 0 \\ 1 & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}, \quad (n \geq 1)$$