Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Université Hassiba Benbouali de Chlef
Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة حسيبة بن بوعلي بالشلف
كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي

قسم الرياضيات

U.H.B.C. Chlef
Faculté des Sciences Exactes
Département des maths

A.U. 2019/2020
Niveau: $1^{ère}$ Master/ Option: M.A.S.
Module: Processus Stochastiques 2

Serie d'exercices n°1 (Esperance Conditionnelle)

1. Une variable aléatoire X est dite intégrable (*respectivement* de carré intégrable) *si et seulement si* $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ (*respectivement* $\mathbb{E}(X^2) < \infty$). Montrer que si X est de carré intégrable alors elle est intégrable.

2. Soit X une *v.a.discrète* avec $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

   (a) Partitionner Ω en fonction des atomes $\{X = x_i\} .i \in \{1, 2, ..., n\}$.

   (b) Caractériser les éléments de $\sigma(X)$.

   (c) Montrer que pour qu'une *v.a.* Y soit $\sigma(X) - mesurable$, il faut et il suffit qu'elle soit constante sur chaque atome $\{X = x_i\} .i \in \{1, 2, ..., n\}$.

3. Montrer que: $\mathbb{E}(X/\Omega) = \mathbb{E}(X)$

4. Montrer que si X est une *v.a.* positive de carrée intégrable, alors $E(X^2) = 2\int_0^{+\infty} tP(x > t)dt$.

5. Montrer que si: $1_A(\omega) = \begin{cases} 1 si\ \omega \in A; \\ 0\ si\ \omega \notin A \end{cases}$, Alors: $\mathbb{E}(1_A/B) = \mathbb{P}(A/B)$, avec $\mathbb{P}(A/B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

6. Montrer que si Y est une *v.a.* constante, alors $\mathbb{E}(X/Y)$ est constante est égale à $\mathbb{E}(X)$.

7. Montrer que: $\mathbb{E}(1_A/1_B)(\omega) = \begin{cases} \mathbb{P}(A/B)\ si\ \omega \in B; \\ \mathbb{P}(A/\bar{B})\ si\ \omega \notin B. \end{cases}$

8. Soit Y une *v.a.discrète* , montrer que: $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X/Y)) = \mathbb{E}(X)$.

9. Soit $X(x) = 2x^2$ et $Y(x) = 1 - |2x - 1|$ deux *v.a.* sur l'espace de probabilité $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \mathbb{P})$ où $\mathbb{P}$ est la mesure de *Lebesgue* sur $[0, 1]$.

   (a) Montrer que: $A \in \sigma(Y) \Longleftrightarrow A = 1 - A$.

   (b) Montrer que: $\forall A \in \sigma(Y) : \int_A 2x^2 dx = \int_A (x^2 + (1 - x)^2)dx$.

   (c) En déduire l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X/Y)$.

10. Montrer que si $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$, alors $\mathbb{E}(X/\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)\ p.s.$

11. Montrer que si X est $\mathcal{G} - mesurable$, alors $\mathbb{E}(X/\mathcal{G}) = X\ p.s.$

12. Montrer que si $B \in \mathcal{G}$, alors:
$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X/\mathcal{G})/B) = \mathbb{E}(X/B).$$