Université Mohammed Seddik Benyahia de Jijel
Faculté des sciences exactes et informatiques
Département de mathématiques
Master 1 Analyse fonctionnelle

Le 18 Décembre 2023
Master 1 Probabilités et statistique

Examen partiel

Distributions

Durée : 1h :30

Il est impératif de fournir une justification à chacune des réponses.

Exercice 1. *Pour* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, *on pose*

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2)\varphi(\sin x)dx.$$

Montrer que T *est une distribution et déduire son ordre.*

Exercice 2. *Soit* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *et soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite de fonctions définies par*

$$f_n(x) = nf(nx) \quad n \in \mathbb{N}.$$

1. *Montrer que* $f_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
2. *Montrer que*

$$\langle f_n, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi\left(\frac{x}{n}\right) dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

3. *En utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, montrer que* $(f_n)_n$ *converge vers* $c\delta_0$ *où* c *est un nombre réel à déterminer.*

Exercice 3. *Soit* $\alpha \in]-1, 0[$ *et la fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = |x|^\alpha$.

1. *Rappeler pourquoi* f *définit une distributions sur* $\mathbb{R}$ *?*
2. *Déterminer* f' *(dérivée de* f*) au sens classique sur* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. *Est-ce que* $f' \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ *?*
3. *Montrer que la dérivée de* f *au sens des distributions est donnée par*

$$\langle (T_f)', \varphi \rangle = \alpha \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} (\varphi(x) - \varphi(-x))\, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Bon Travail
F. Aliouane

Correction

Exercice n°1 : 02,50pts

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2)\, \varphi(\sin x)\, dx$$

Il est clair que T est bien définie et linéaire. 0,5

Montrons que T est continue. Soit $(\varphi_n) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tq. 0,25

$\varphi_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, on a

$$|\langle T, \varphi_n \rangle| \leq \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} |\varphi_n(\sin x)|\, dx$$

$$\leq \sqrt{\pi}\, \|\varphi_n\|_{C(K)} \quad / \; K \text{ cpt de } \mathbb{R} \text{ tq. } \operatorname{Supp} \varphi_n \subset K$$

1

$$\xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$$\Rightarrow T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

- On utilisant le critère de continuité, on trouve

$m = 0$ et $C = \sqrt{\pi}$ 0,75

Donc T est une distribution d'ordre 0

Exercice n°2 : 05,5pts Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.

$f_n(x) = n f(nx)$, $n \in \mathbb{N}$

1) $f_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ car

$$\|f_n\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|\, dx = \int_{\mathbb{R}} n |f(nx)|\, dx \quad 0{,}75 \quad / \; nx = y,\; x = \frac{y}{n}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |f(y)|\, dy = \|f\|_{L^1} < \infty.$$

Scanned with CamScanner

Nous avons, $f_n \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, donc elle définit une distribution régulière sur $\mathbb{R}$. 0,5

2/ Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle f_n, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} n f(nx)\,\varphi(x)\,dx.$$ 1

$$= \int_{\mathbb{R}} f(y)\,\varphi\left(\frac{y}{n}\right) dy.$$

3) Observons d'abord que,

$$f(y)\,\varphi\left(\frac{y}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(y)\,\varphi(0) \quad \text{p.p } y \in \mathbb{R}.$$ 0,75

et que $\left|f(y)\,\varphi\left(\frac{y}{n}\right)\right| \leq M\,|f(y)| \in L^1(\mathbb{R})$, où $M = \max\limits_{y \in \operatorname{supp}\varphi} |\varphi(y)|$.

0,5 0,25

Par le T.C.D de Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n, \varphi\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(y)\,\varphi\left(\frac{y}{n}\right) dy$$ 0,75

$$= \int_{\mathbb{R}} f(y)\,\varphi(0)\,dy = \varphi(0)\underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(y)\,dy}_{C}$$

$$= C\,\langle \delta_0, \varphi\rangle = \langle C\delta_0, \varphi\rangle$$ 0,75

i.e., $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = C\,\delta_0$ ds. $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. 0,25

<u>Exercice n°3:</u> 06pts

Soit $\alpha \in]-1,0[$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = |x|^\alpha$.

1) La fct. $x \longmapsto |x|^\alpha$ est localement intégrable sur $\mathbb{R}$ pour $\alpha \in]-1,0[$, donc elle définit une distribution régulière comme suit, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ 1

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

Scanned with CamScanner

2) La fct. f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et sa dérivée au sens classique est donnée par :

$$f'(x) = \alpha \, \mathrm{sgn}(x) |x|^{\alpha-1}.$$ 0,5

Nous avons, $\alpha \in]-1,0[$ donc $\alpha - 1 < 1$

d'où $f' \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$ 0,75

3) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\langle (T_f)', \varphi \rangle = - \langle T_f, \varphi' \rangle$$

$$= - \int_{\mathbb{R}} |x|^\alpha \varphi'(x)\, dx.$$ 0,5

$$= - \int_{-\infty}^{0} (-x)^\alpha \varphi'(x)\, dx - \int_0^{+\infty} x^\alpha \varphi'(x)\, dx$$

$$= - \int_0^{+\infty} x^\alpha \left(\varphi'(x) + \varphi'(-x) \right) dx$$ 0,75

On souhaite intégrer par partie, mais la singularité de f' en 0 pose problème. Donc, on choisit $\varepsilon > 0$ et on calcule

$$\int_\varepsilon^{+\infty} x^\alpha \left(\varphi'(x) + \varphi'(-x) \right) dx = x^\alpha \left(\varphi(x) - \varphi(-x) \right) \Big|_\varepsilon^{+\infty} - \alpha \int_\varepsilon^{+\infty} x^{\alpha-1} \left(\varphi(x) - \varphi(-x) \right) dx$$ 0,75

puisque φ est à support cpt, donc $\varphi(x) = 0$ pour $|x|$ suffisamment grand. Par le thm. des accroissement finis, pour tout $x > 0$, $\exists\, 0 < c < x$ tq :

$$\varphi(x) - \varphi(-x) = x \left(\varphi'(c) + \varphi'(-c) \right).$$ 0,5

On en déduit que pour tout $x > 0$;

$$|\varphi(x) - \varphi(-x)| \leq 2x \, \|\varphi'\|_\infty$$

Cela implique que lorsque $\varepsilon \to 0$, on a $|\varepsilon|^\alpha \left(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon) \right) \longrightarrow 0.$ 0,25

Scanned with CamScanner

On a également,

$$\left| |x|^{\alpha-1} (\varphi(x) - \varphi(-x)) \right| \leq 2|x|^{\alpha} \|\varphi'\|_{\infty},$$

et la fct. est donc intégrable en 0. Par conséquent, en prenant la limite $\varepsilon \to 0$ on obtient

0,75

$$\int_0^{+\infty} |x|^{\alpha} (\varphi'(x) + \varphi'(-x)) dx = -\alpha \int_0^{+\infty} (x)^{\alpha-1} (\varphi(x) - \varphi(-x)) dx.$$

donc,

$$\langle (T_f)', \varphi \rangle = \alpha \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} (\varphi(x) - \varphi(-x)) dx.$$

0,25