Série 2

Exercice 1. *Soit* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace mesuré, montrer que pour tout* $A, B \in \mathcal{F}$ *on a*

1. $\mu(A) = \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B)$.
2. *Si* $A \subset B$ *alors* $\mu(A) \leq \mu(B)$.
3. $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$.
4. $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.
5. *Pour toute suite* $\{A_n\}_{n\geq 0} \subset \mathcal{F}$ *on a*

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n).$$

Exercice 2. *Montrer que la mesure de Lebesgue* λ *sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *est invariante par translation.*

Exercice 3. (a)(*) *Soit* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace mesuré. Soit* $\mathcal{F}^*$ *l'ensemble de toutes les parties* E *de* X *telles qu'il existe* $A, B \in \mathcal{F}$ *avec* $A \subset E \subset B$ *et* $\mu(B \setminus A) = 0$. *Montrer que* $\mathcal{F}^*$ *est une tribu sur* X.

(b) *On note* $\mathcal{N}$ *l'ensemble de toutes les parties négligeables. Montrer que*

$$\mathcal{F}^* = \{A \cup N \ / \ (A, N) \in \mathcal{F} \times \mathcal{N}\}.$$

Exercice 4(*). *Dans* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, *construire une suite* $\{A_n\}_{n\geq 0}$ *emboitée* ($A_{n+1} \subset A_n$), *tels que* $\lambda\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} \lambda(A_n)$.

Exercice 5. *Soit* $(E, \mathcal{A})$ *un espace mesurable,* $\{\mu_i\}_{1\leq i\leq n}$, n *mesures sur* $(E, \mathcal{A})$ *et* $\{a_i\}_{1\leq i\leq n}$, n *réels positifs. On définit l'application* $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, *par* $\mu(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i(A)$, *pour tout* $A \in \mathcal{A}$.

Montrer que μ *est une mesure sur* $(E, \mathcal{A})$, *notée* $\mu = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i$.

Exercice 6. *Soit* μ *une mesure finie sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. *On lui associe la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = \mu(]x, +\infty[)$.

1) *Montrer que la mesure* μ *est uniquement déterminée par la donnée de* f.

2)(*) *Montrer que* f *est décroissante et continue à droite sur* $\mathbb{R}$, *et calculer les limites en* $\pm\infty$ *de* f.

N.B. Les exercices comprenant le signe **(*)** sont supplémentaires.

Résolution

Exercice 1. *μ est une mesure sur $(X, \mathcal{F})$,*

1. *Comme $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ et $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset \Rightarrow \mu(A) = \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B)$.*
2. *Comme $A \subset B \Rightarrow B = A \cup (B \setminus A)$ et $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$*
   $\Rightarrow \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.
3. *Comme $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ et $A \cap (B \setminus A) = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$. En plus $B \setminus A \subset B \Rightarrow \mu(B \setminus A) \leq \mu(B) \Rightarrow \mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$.*
4. *Comme $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ et les trois ensembles sont disjoints deux à deux, alors : $\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$ (d'aprés 1.), d'autre part, on a d'aprés 1. $\mu(B \setminus A) + \mu(B \cap A) = \mu(B)$, alors*

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

5. *Posons :* $\begin{cases} B_0 = A_0 \\ B_1 = A_1 \setminus A_0 = A_1 \backslash B_0 \\ ... \\ B_n = A_n \setminus B_{n-1} \\ ... \end{cases}$

   Ainsi $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$ avec $B_i \cap B_j = \emptyset$ pour $i \neq j$, donc

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(B_n).$$

   Comme $B_n \subset A_n$ $\forall n \geq 0$, alors (d'aprés 1.) $\mu(B_n) \leq \mu(A_n)$ $\forall n \geq 0$. Par conséquent

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n).$$

Exercice 2. *λ est invariante par translation $\overset{déf}{\Leftrightarrow}$*

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ et } \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \text{ on a } \lambda(x + B) = \lambda(B). \tag{1}$$

Comme $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\left(\left\{[a, b]\hat{A}\ ; a < b \in \mathbb{R}\right\}\right)$, il suffit de montrer que (1) pour $B = [a, b]$. On sait que $x + [a, b] = [a + x, b + x] \Rightarrow \lambda(x + [a, b]) = \lambda([a + x, b + x]) = (b + x) - (a + x) = b - a = \lambda([a, b])$

Exercice 3. (a) *Montrons que $\mathcal{F}^* = \{E \subset X\ /\ \exists(A, B) \in \mathcal{F}$ avec $A \subset E \subset B$ et $\mu(B \setminus A) = 0\}$.*
Montrons que $\mathcal{F}^*$ est une tribu sur X.

1. *$X \subset X \subset X$, $X \in \mathcal{F}$ et $\mu(X \setminus X) = 0 \Rightarrow X \in \mathcal{F}^*$.*
2. *Soit $E \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \exists(A, B) \in \mathcal{F}^2$ tel que : $A \subset E \subset B$ et $\mu(B \backslash A) = 0 \Longrightarrow B^c \subset E^c \subset A^c$ et on a $\mu(A^c \setminus B^c) = \mu(B \setminus A) = 0$ c'est-à-dire $E^c \in \mathcal{F}^*$.*
3. *Soient $E_1, E_2 \in \mathcal{F}^*$. Pour $i = 1, 2$ on a : $\exists(A_i, B_i) \in \mathcal{F}^2$ tel que : $A_i \subset E_i \subset B_i$ et $\mu(B_i \setminus A_i) = 0$.*
   Comme $(B_1 \cup B_2) \setminus (A_1 \cup A_2) = (B_1 \setminus A_1) \cup (B_2 \setminus A_2)$, alors

$$0 \leq \mu\left((B_1 \cup B_2) \setminus (A_1 \cup A_2)\right) = \mu\left((B_1 \setminus A_1) \cup (B_2 \setminus A_2)\right) \leq \mu\left(B_1 \setminus A_1\right) + \mu\left(B_2 \setminus A_2\right) = 0$$

Par conséquent $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{F}^*$.

4. *Soit* $\{E_n\} \subset \mathcal{F}^* \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists (A_n, B_n) \in \mathcal{F}^2$ *tels que :* $\mu(B_n \setminus A_n) = 0$ *et* $A_n \subset E_n \subset B_n \Rightarrow$
$\bigcup_{n\geq 0} A_n \subset \bigcup_{n\geq 0} E_n \subset \bigcup_{n\geq 0} B_n$ *avec :* $\bigcup_{n\geq 0} A_n \in \mathcal{F}$ *et* $\bigcup_{n\geq 0} B_n \in \mathcal{F}$. *De plus,*

$$0 \leq \mu\left(\bigcup_{n\geq 0} B_n \setminus \bigcup_{n\geq 0} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\geq 0} (B_n \setminus A_n)\right) \leq \sum_{n\geq 0} \mu\left(B_n \setminus A_n\right) = 0$$

D'où $\bigcup_{n\geq 0} E_n \in \mathcal{F}^*$.

(b) *Rappel : Une partie* N *de* X *est dite négligeable par rapport à* μ*, s'il existe* $A \in \mathcal{F}$ *tel que :* $N \subset A$ *et* $\mu(A) = 0$. *On note* $\mathcal{N}$ *l'ensemble de toutes les parties négligeables. On pose* $\mathcal{F}' = \{A \cup N \;/\; (A, N) \in \mathcal{F} \times \mathcal{N}\}$. *On montre que* $\mathcal{F}' = \mathcal{F}^*$.

(i) *Montrons que* $\mathcal{F}^* \subset \mathcal{F}'$.

Soit $E \in \mathcal{F}^* \Leftrightarrow \exists (A, B) \in \mathcal{F}^2$ *tel que :* $A \subset E \subset B$ *et* $\mu(B \setminus A) = 0$.

On a $A \subset E \Rightarrow E = A \cup (E \setminus A)$ *ici* $A \in \mathcal{F}$*, reste à avoir* $E \setminus A \in \mathcal{N}$.

On a $E \subset B \Rightarrow (E \setminus A) \subset (B \setminus A) \in \mathcal{F}$ *et comme* $\mu\left(B \setminus A\right) = 0 \Rightarrow E \setminus A \in \mathcal{N}$.

(ii) *Montrons l'inclusion inverse.*

Soit $E \in \mathcal{F}' \Rightarrow \exists A \in \mathcal{F}$ *et* $\exists N \in \mathcal{N}$ *tel que :* $E = A \cup N \Rightarrow A \subset E$.

Comme $N \in \mathcal{N}$*, il existe* $B \in \mathcal{F}$ *tel que :* $N \subset B$ *et* $\mu(B) = 0$. *Donc* $A \subset E = A \cup N \subset A \cup B \in \mathcal{F}$.

D'autre part, $(A \cup B) \setminus A \subset B \Rightarrow \mu\left((A \cup B) \setminus A\right) = 0$ *ainsi* $E \in \mathcal{F}^*$.

D'aprés ***(i)*** *et* ***(ii)*** *on obtient l'égalité voulue.*

Exercice 4. *Posons :* $A_n = [n, +\infty[, \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow A_{n+1} \subset A_n, \ \forall n \geq 0$. *Comme* $\bigcap_{n\geq 0} A_n = \emptyset \Rightarrow \lambda\left(\bigcap_{n\geq 0} A_n\right) = 0$. *Mais* $\lambda(A_n) = +\infty \ \forall n \in \mathbb{N}$. *Donc* $\lim_{n\to+\infty} \lambda(A_n) = +\infty \neq \lambda\left(\bigcap_{n\geq 0} A_n\right) = \lambda(\lim_{n\to+\infty} A_n)$. *On n'a pas la condition* $\mu(A_0) < +\infty$ *pour avoir* $\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \mu(\lim_{n\to+\infty} A_n)$.

Exercice 5. *Soient* $\{\mu_i\}_{i=1}^n$ n *mesures sur* $(E, \mathcal{A})$ *et* $\{a_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}_+$. *On définit* $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *par* $\mu(A) = \sum_{i=1}^n a_i \mu_i(A) \geq 0 \ \ \forall A \in \mathcal{A}$. *Montrons que* μ *est une mesure*

- *Comme* μ_i *sont des mesures* $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$. *Alors* $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$ $\mu_i(\emptyset) = 0$
$\Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i \mu_i(\emptyset) = 0$ *ainsi* $\mu(\emptyset) = 0$
- *Soient* $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ *tel que :* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *pour* $i \neq j$. *On montre que :*

$$\mu\left(\bigcup_{k\geq 0} A_k\right) = \sum_{k\geq 0} \mu(A_k). \tag{2}$$

On a par définition : $\mu(B) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i(B) \ \ \forall B \in \mathcal{A}$*. Donc*

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{k\geq 0} A_k\right) &= \sum_{i=1}^{n}\left(a_i\mu_i\left(\bigcup_{k\geq 0} A_k\right)\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(a_i\left(\sum_{k\geq 0}\mu_i\left(A_k\right)\right)\right)\\
&= a_1\left(\sum_{k\geq 0}\mu_1(A_k)\right) + a_2\left(\sum_{k\geq 0}\mu_2(A_k)\right) + \ldots + a_n\left(\sum_{k\geq 0}\mu_n(A_k)\right)\\
&= \sum_{k\geq 0}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i(A_k)\right) = \sum_{k\geq 0}\mu(A_k).
\end{aligned}$$

Par conséquent on obtient (2).

Exercice 6. *Soit μ une mesure finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On lui associe la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \mu(]x, +\infty[).$$

1$-$*Montrons que la donnée de f nous suffit de déterminer une mesure μ et ceci de façon unique : On sait que $\mathcal{I}_0 = \{]a,b] \ : \ (a,b) \in \mathbb{R}^2, a < b\}$ est un semi-anneau Booléen engendrant $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Définissant l'application :*

$$\rho : \mathcal{I}_0 \longrightarrow \mathbb{R}_+, \rho(]a,b]) = f(a) - f(b),$$

*et montrons que ρ vérifie les conditions du **théorème d'extension de Carathéodory** :*
- $\rho(\emptyset) = \rho(]a,a]) = f(a) - f(a) = 0$
- $\mathbb{R} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]-n,n]$ *et* $]-n,n] \in \mathcal{I}_0$.
- *Soit $\{A_n\}_{n\in J} \subset \mathcal{I}_0$, où J est un ensemble au plus dénombrable, et $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$.*

Si $\bigcup_{n\in J} A_n =]a,b] \in \mathcal{I}_0$ il existe $\{a_j\}_{j\in J} \subset]a,b]$ tel que : $a_j \leq a_{j+1}$ avec $\min_{j\in J}\{a_j\} = a$ et $\max_{j\in J}\{a_j\} = b$. Ainsi

$$\rho\left(\bigcup_{n\in J} A_n\right) = \rho\left(]a,b]\right) = f(a) - f(b) = \sum_{j\in J}(f(a_j) - f(a_{j+1})). \tag{3}$$

*Alors d'aprés le **théorème d'extension de Carathéodory**, il existe une mesure $\tilde{\mu}$ σ-finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que : $\tilde{\mu}(]a,b]) = \rho(]a,b]) = f(a) - f(b)$. Comme $\tilde{\mu} = \mu$ sur $\mathcal{I}_0$, alors $\tilde{\mu} = \mu$ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

2$-$ *Montrons que f est décroissante, continue à droite, et calculons sa limite à ∞ :*
- *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, alors*

$$]b, +\infty[\subset]a, +\infty[\Rightarrow \mu(]b, +\infty[) \leq \mu(]a, +\infty[) \Rightarrow f(b) \leq f(a),$$

donc f est décroissante.
- *Montrons que f est continue à droite :*

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{h\to 0^+} f(x_0 + h) = f(x_0), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) = f(x_0), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

Posons $A_n = \left\{\left]x_0 + \frac{1}{n}, +\infty\right[\right\}_{n\geq 1}$ *qui est une suite croissante. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n\geq 1} A_n =]x_0, +\infty[.$$

Par conséquent

$$f(x_0) = \mu(]x_0, +\infty[) = \lim_{n \to +\infty} \mu\left(\left]x_0 + \frac{1}{n}, +\infty\right[\right) = \lim_{n \to +\infty} f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right). \tag{4}$$

• *Sachant que*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{n \to +\infty} f(n) = \lim_{n \to +\infty} \mu(]n, +\infty[). \tag{5}$$

Comme $\{]n, +\infty[\}_{n \geq 0} \downarrow$ *et* $\mu(]0, +\infty[) < +\infty,$ *alors on a*

$$\lim_{n \to +\infty}]n, +\infty[= \bigcap_{n \geq 0}]n, +\infty[. \tag{6}$$

Ainsi

$$\lim_{n \to +\infty} f(n) = \mu(\lim_{n \to +\infty}]n, +\infty[) = 0 \tag{7}$$

• *En effectuant le même raisonnement précédent, on obtient*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{n \to +\infty} f(-n) = \lim_{n \to +\infty} \mu(]-n, +\infty[). \tag{8}$$

Comme $\{]-n, +\infty[\}_{n \geq 0} \uparrow$*,on a*

$$\lim_{n \to +\infty} \mu\left(]-n, +\infty[\right) = \mu\left(\bigcup_{n \geq 0}]-n, +\infty[\right) = \mathbb{R}.$$

Alors

$$\lim_{n \to +\infty} f(-n) = \mu(\lim_{n \to +\infty}]-n, +\infty[) = \mu(\mathbb{R}) < +\infty. \tag{9}$$