Umbb/FS/Maths.
Master MSS1 Semestre 2. Mars 2021
drahmoune.umbb@gmail.com

Statistique des Processus

Feuille de travaux Dirigés n° 1

Objet: Calcul et propriétes de l'espérance conditionnelle.

Exercice 1

(i) Rappeler la définition de: $E(X/B)$ où B est un évènement tel que $P(B) > 0$ et $X(\Omega) = \{x_1, .., x_m\}$ (cas discret fini)

(ii) Application: On lance un dé à 6 faces équilibrés. $\{X = i\}$est la valeur prise (apparue) par le dé.

Calculer $E(X/B)$ dans les cas:

c1) B est l'évènement$\{X > 2$et X impair$\}$

c2) B est l'évènement$\{X$ multiple de 3 et X pair$\}$

Exercice 2

(i) Rappeler la définition de $E(X/\sigma(A))$ où $\sigma(A)$est la tribu engendrée par l'évènement A et X est une variable aléatoire réelle(v.a.r)

(ii) On considère X, Y et Z trois v.a.r.

où X suit une loi uniforme discrète sur l'ensemble $\{1, 2, ..., 6\}$

$$Y = \begin{cases} 1 \text{ si } & x = 1, 3, 5 \text{ (valeurs impaires)} \\ 0 \text{ si } & x = 2, 4, 6 \text{ (valeurs paires)} \end{cases} \quad ; \quad Z = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1, 3 \\ 2 & \text{si } x=5 \\ 3 & \text{si } x=2,4 \\ 4 & \text{si } x=6 \end{cases}$$

a) Donner les lois de X, Yet Z et calculer leurs espérances : $E(X), E(Y)$ et $E(Z)$

b) Calculer $E(X/Y)$ et $E(X/Z)$

c) Comparer E(X) avec E(E(X/Y))

d) Comparer E(X/Y) avec E(E(X/Y)/Z)

e) les résultat de comparaison sont ils prévisibles? oui ou non et pourquoi.

Exercice 3

(i) Rappeler la définition de $E(X/Z)$ avec X:$\Omega \to \mathbb{R}$ v.a.r intégrable. (X, Z) un couple de v.a r de densité conjointe $f_{(X,Z)}$.

(ii) Application: Soit $f_{(X,Z)}(x, z) = \begin{cases} 2 & \text{pour} \quad 0 < z < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Donner la loi de X/Z et déduire $E(X/Z)$

(iii) Citer les **propriétés fondamentales** de $E(X/\mathcal{F}_n)$ où $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, ..., Z_n) = (Z_1, ..., Z_n)$ avec $Z_i : \Omega \to \mathbb{R}$ pour $i = 1, .., n$

(iv) Application: On lance 3 dés équilibrés.

Soit $X_i = x$ la valeur donnée par le dé n°i ($i = 1, 2, 3$).

On suppose X_1, X_2, X_3 indépendantes.

c1) Calculer: $E(X_3 + 2X_1X_3 - X_3X_2/\mathcal{F}_2)$ où $\mathcal{F}_2 = \sigma(X_1, X_2) = (X_1, X_2)$ et évaluer lorsque: $X_1 = 1$ et $X_2 = 1$

c2) Calculer: $E(X_3 + 2X_1X_3 - X_3X_2/\mathcal{F}_1)$ où $\mathcal{F}_1 = \sigma(X_1) = X_1$ et évaluer lorsque: $X_1 = \frac{5}{4}$

c3) Que peut on dire de $E(E(X_3 + 2X_1X_3 - X_3X_2/\mathcal{F}_1)/\mathcal{F}_2)$?

Indication: Indiquer la **propriété** utilisée à chaque étape de calcul

Exercice 4

Soient X, Y deux variables aléatoires, on suppose l'existence de leurs espérances.

(i) Démontrer cette formule:

$$E(X) = E(E(X/Y)) \quad (1)$$

dans le cas (X, Y) a densité conjointe $f_{(X,Y)}$ quelconque.

où chaque opérateur espérance a un sens.

(ii) Application:

Vérifier cette formule pour le cas où $f_{(X,Y)}$ est donnée:

$$f_{(X,Y)} = 2.1_T(x, y)$$

où T est le triangle de sommets $(0,0); (0,1) et (1,0)$

(iii) Démontrer cette formule:

$$var(X) = E[var(X/Y)] + var[E(X/Y)] \qquad (2)$$

dans le cas(X, Y) a densité conjointe $f_{(X,Y)}$quelconque.

Indication: Utiliser (i)

Remarques: L'égalité (1) s'appelle Formule des Espérances **itérées** ou Espérance **Totale**(Théorème de BLACKWELL)

L'égalité (2) s'appelle Formule de la Variance totale.

Théorème de la variance Totale:

La variance de X est égale à la somme de **l'espérance** de la variance condititionnelle **et** de **la variance** de l'espérance conditionnelle

Exercice 5

A partir de la formule des espérances itérés $E(X) = E(E(X/Y)) \quad (1)$

Calculer l'espérance marginale$E(X)$ pour la loi du couple(X, Y) de densité conjointe $f_{(X,Y)}(x, y)$

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\exp(-y)}{y} & \text{si} \quad 0 < x < y < \infty \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 6

A)**Somme Aléatoire**

Soit $(X_i)_{i=1,..,n}$ un échantillon et Soit N$\in \mathbb{N}$ une v.a discréte indépendante de l'échantillon (X_i)

On considére la v.a $S_N = \sum_{i=1}^{i=N} X_i$ somme aléatoire des éléments de la suite (X_i)

(i) Calculer $E(S_N)$

(ii) Application: Prendre N suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda = 2)$ et $(X_i)_{i=1,..,n}$ un échantillon de même que X_1 loi uniforme sur [0,1].

B) Produit Aléatoire

Soit $(X_i)_{i=1,..,n}$ un échantillon et Soit N$\in \mathbb{N}$ une v.a discréte indépendante de l'échantillon (X_i)

On considére la v.a $P_N = \prod_{i=1}^{i=N} X_i$ produit aléatoire des éléments de la suite (X_i)

(i) Montrer que: $E(P_N) = G_N(t = E(X_1)$ où $G_N(t)$ est la fonction génératrice de la v.a N au point t ($G_N(t) = E(t^N)$)

(ii) Application:

Discuter selon $E(X_1) > 1$ et $E(X_1) \leq 1$ et donner des exemples selon les deux cas pour :

(a)N suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$

(b) N suit la loi Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ avec $0 < p < 1$