Université Djillali Liabès De Sidi Bel Abbès
Année Universitaire 2019/20
Faculté Des Sciences Exactes
1er Année Master Mathématiques et Informatiques

Examen de Probabilités 1 (01h 30mn)

Responsable du Module : S.BENAISSA

Exercice 1 *:(06points)*
Soit α un nombre réel.
Soit X et Y deux v.a r. à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{\alpha}{2^{i+1}j!} \quad \text{por tout } (i, j) \in \mathbb{N}^2.$$

i) Déterminer α. 01
ii) X et Y sont-elles indépedantes ? 01
iii) Déterminer $Cov(X, Y)$. 02
iv) Calculer $\mathbb{P}(X > Y)$. 02

Exercice 2 *:(10points)*
Soit (X, Y) un couple de v.a.r. de densité :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{sinon} \\ \frac{1}{4}xe^{-y} & \text{si } 0 \leq x \leq 2y \end{cases}$$

On pose

$$Z = \frac{X}{Y}$$

i) Déterminer une densité de X puis une densité de Y. 02
ii) Est-ce que X et Y sont indépendantes ? 01
iii) Déterminer une densité de (Z, Y) 03
iv) Déterminer une densité de Z(on poura utiliser l'égalité : $\int_0^{+\infty} x^2e^{-x} = 2$) 02
v) Est-ce que Z et Y sont indépendantes ? 02

Exercice 3 *:(04points)*
Soit (X_n) une suite de v.a.r.d. suivant toutes la même loi définie par

$$\mathbb{P}(X_1 = -1) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$$

Soit (Y_n) une suite de v.a.r.d. suivant toutes la même loi définie

$$\forall n \geq 0 \ \mathbb{P}(Y = n) = (1 - a)a^n \ (0 < a < 1).$$

On suppose $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indépendantes.

On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i$.

i) Calculer l'espérance et la variance de S_n. (02)

ii) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|S_n| \leq c.n)$ et $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|S_n| \leq c.\sqrt{n})$. (02)

Scanné avec CamScanner

Montrer que $(x, y) = \left(\frac{u}{u+v}, u+v\right)$. 01

Montrer que le Jacobien associé à $(x, y) = (\frac{u}{u+v}, u+v)$ *est* $J(u, v) = \frac{1}{u+v}$. 01

Déterminer une densité de (U, V). 02

Déterminer une densité de U, *puis une densité de* V*(on poura utiliser l'égalité* $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx =$ 01

Est-ce que U *et* V *sont indépendantes ?* 01

Calculer $\mathbb{E}(U), Var(U), \mathbb{E}(V)$ *et* $Var(V)$ *(on poura utiliser l'égalité :* $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx = n!,\ n \in$ 02

.

Calculer $Cov(U, V)$ *et* $Var(U - 2V)$. 02

ercice 3 *:(04points)*

t $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de v.a.r. i.i.d. discrètes. La loi de* X_1 *est donnée par*

$$\mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{8}, \mathbb{P}(X_1 = 0) = \frac{3}{8}, \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}.$$

Th LfGN 02

ur tout $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose*

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Calculer $\mathbb{E}(X_1)$ 02

udier la convergence en probabilité de $(\bar{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$