Faculté des Sciences Exactes et informatique
Déparetement de mathématiques

Année universitaire :2021-2022
Niveau :2^{eme} Master mathématique appliquée et statistique

Fiche de TD N 1

Module. **Programmation linéaire 2**

Exercice 1

Donner le dual de chacun du primal suivant :

$$(P_1)\begin{cases} \max\ z = & 2x_1+4x_2+3x_3 \\ & 3x_1+4x_2+2x_3\leq 60 \\ & 2x_1+x_2+2x_3\leq 40 \\ & x_1+3x_2+2x_3\leq 80 \\ & x_1,x_2,x_3\geq 0 \end{cases},\quad (P_2)\begin{cases} \min\ z = & 20x_1+24x_2 \\ & x_1+x_2\geq 30 \\ & x_1+2x_2\geq 40 \\ & x_1,x_2\geq 0 \end{cases}\ \text{et}$$

$$(P_3)\begin{cases} \max\ z = & 10x_1+6x_2 \\ & x_1+4x_2\leq 40 \\ & 3x_1+2x_2=60 \\ & 2x_1+x_2\geq 25 \\ & x_1,x_2\geq 0 \end{cases}.$$

Exercice 2

Écrire et résoudre le programme dual du problème linéaire suivant

$$\begin{cases} \max\ = & x_1-x_2 \\ & 2x_1-x_2\leq 3 \\ & x_1\leq 1 \\ & -x_1+x_2\leq 3 \\ & -3x_1+7x_2\leq 1 \\ & x_1,x_2\geq 0 \end{cases}$$

Exercice 3

Utiliser le théorème des écatrs complémentaires vue en cours, pour vérifier que la solution $x^*=(3,0,1,3)^\top$ est une solution optimale de $(P1)$

$$(P1)\begin{cases} z\,(\max)=-2x_1-x_2+x_3+x_4 \\ 2x_1+x_2-3x_3+x_4=6 \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=2 \\ x_1-3x_2-2x_3-x_4=-2 \\ x_i\geq 0,\ i=1,2,3,4 \end{cases}$$

Exercice 4

Soit le programme linéaire (PL) suivant

$$(PL)\begin{cases} \max\ z = & 200x_1 + 300x_2 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 600 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 400 \\ & x_1 + x_2 \leq 225 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Écrire le dual (D) de ce problème linéaire.
2. Résoudre le primal (PL).
3. Déduire la solution optimale du dual (D), en utilisant le théorème des écarts complémentaires.

Exercice 5

Soit le programme linéaire (PL) suivant

$$(PL)\begin{cases} \max\ z = & 40x_1 + 50x_2 \\ & 5x_1 + 4x_2 \leq 80 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 24 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 36 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Donner le dual (D) de ce primal (PL).
2. Résoudre le primal (PL) par le simplexe ou graphiquement.
3. Déduire la solution du dual (D).

Exercice 6

On considère le programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} \min\ z = & -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 \\ & -2x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 \geq -8 \\ & -3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 \geq -7 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

1. Donner le dual (D) de ce primal (1).
2. Résoudre le programme dual (D) graphiquement.
3. Résoudre le programme (1) par la méthode du simplexe.
4. Vérifiez que la solution de (D) obtenue à la question (2) est optimale.

Exercice 7

Soit le programme linéaire suivant :

$$(P)\begin{cases} z(\max) = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 90 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 40 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 80 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

1. Résoudre (P) par l'algorithme du simplexe.
2. A partir du dernier tableau du simplexe, déduire l'inverse de la matrice A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Ecrire le dual (D) de (P).
4. Vérifier que $\lambda^* = \left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5}, \frac{1}{5}\right)$ est une solution admissible de (D).
5. Que peut-on dire de λ^* ? Justifier.

Exercice 8

1. On considère le programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} \max\ z = x_1 - 3x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 4 \\ -4x_1 + 3x_2 \leq 2 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 \leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \tag{2}$$

   La solution $x_1^* = 0, x_2^* = 0, x_3^* = 4$ est-elle optimale ?

2. On considère le programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} \max\ z = 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 2x_5 \leq 4 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 \leq 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 \leq 5 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 \leq 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \tag{3}$$

   La solution $x_1 = 0, x_2 = \dfrac{4}{3}, x_3 = \dfrac{2}{3}, x_4 = \dfrac{5}{3}, x_1 = 0$, est-elle optimale ?

Exercice 9

En utilisant l'algorithme dual du simplexe, trouver la solution de chacun du problème suivant :

$$
(P_1)\left\{\begin{array}{rl}
z\,(\max) = & -2x_1 - x_2 \\
 & -3x_1 - x_2 \leq -3 \\
 & -4x_1 - 3x_2 \leq -6 \\
 & -x_1 - 2x_2 \leq -3 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}\right.
$$

$$
(P_2)\left\{\begin{array}{rl}
z\,(\max) = & -5x_1 + 35x_2 - 20x_3 \\
 & x_1 - x_2 - x_3 \quad \leq -2 \\
 & -x_1 - 3x_2 \qquad \leq -3 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}\right.
$$

$$
(P_3)\left\{\begin{array}{l}
z\,(\min) = x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\
x_1 - 5x_2 + 7x_3 \geq 8 \\
-2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \geq -2 \\
x_1 - 3x_2 + 2x_3 \geq 2 \\
x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3
\end{array}\right.
$$

$$
(P_4)\left\{\begin{array}{l}
z\,(\min) = x_1 + 2x_2 \\
4x_1 + 3x_2 \geq 12 \\
6x_1 + x_2 \geq 6 \\
2x_1 + 5x_2 \geq 9 \\
x_i \geq 0,\ i = 1, 2
\end{array}\right.
$$