Faculté des Sciences كلية العلوم

Nom : .... اللقب Prénom : .... الإسم Groupe : .... الفوج

Date : .... Module : Correction du Examen stat-Inf المقياس

M.SS 2020/2021

Exercice N°=1

n-ech de X tq : $f_X(x) = \theta x^{-(\theta+1)}$

où $0 < x_i < 1$ et $\theta > 0$

1. stat exhaustive pour θ

d'après le critère de factorisation :

$$L(\underline{x}, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) = \theta^n \prod x_i^{-(\theta+1)}$$

0,8

$$= \underbrace{\theta^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{-\theta}}_{g(T(x),\theta)} \underbrace{\prod_{i=1}^{n} x_i^{-1}}_{h(x)}$$

$\Rightarrow T(x) = \prod x_i$ 0,8

ou bien : $L(\underline{x}, \theta) = \underbrace{\theta^n \prod x_i^{-(\theta+1)}}_{g(T(x),\theta)} \underbrace{\times 1}_{h(x)}$

$\Rightarrow T(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i$

on peut utiliser la famille exponentielle car on a $\mathcal{X} =]0, 1[$ est independant de paramètre θ

$$f_X(x) = \theta x^{\theta-1} = \theta \exp[\log x^{\theta-1}]$$

$$= \underbrace{\theta}_{c(\theta)} \exp[\underbrace{-(\theta+1)}_{q(\theta)} \underbrace{\log x}_{a(x)}] \underbrace{\times 1}_{h(x)}$$

$$\Rightarrow T(x) = \sum_{i=1}^{n} a(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \log x_i$$

1

Scanné avec CamScanner

2,5

2. la loi de probabilité de la v.a $Y = -2\theta \ln X$

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(-2\theta \ln X \leq y)$ 0,5

$= P\left(\ln X \geq -\frac{y}{2\theta}\right)$ 0,5

$= P\left(X \geq e^{-\frac{y}{2\theta}}\right) = 1 - F_X\left(e^{-\frac{y}{2\theta}}\right)$

$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} = \frac{\partial\left[1 - F_X\left(e^{-\frac{y}{2\theta}}\right)\right]}{\partial y}$ 0,5

$= \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{y}{2\theta}} f_X\left(e^{-\frac{y}{2\theta}}\right)$ où $0 < e^{-\frac{y}{2\theta}} < 1$

$= \frac{1}{2\cancel{\theta}} e^{-\frac{y}{2\theta}} \cancel{\theta} \left(e^{-\frac{y}{2\theta}}\right)^{(\theta - 1)}$ où $0 < y < +\infty$

0,25

$= \frac{1}{2} \cancel{e^{-\frac{y}{2\theta}}} e^{-\frac{y}{2}} \cancel{e^{+\frac{y}{2\theta}}}$

0,5

$= \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}}$

$\Rightarrow Y \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)$.

0,25

3.

3] E.M.V pour θ, noté T.

$\cdot\ L(x, \theta) = \prod f_{X_i}(x_i) = \theta^n \prod x_i^{-(\theta+1)}$ 0,5

$\cdot\ \log L(x, \theta) = n \log \theta + (\theta \cancel{+1}) \sum \log x_i$ 0,5

$\cdot\ \frac{\partial}{\partial \theta} \log L(x, \theta) = \frac{n}{\theta} + \sum \log x_i = 0$ 0,5

Faculté des Sciences كلية العلوم

Nom : .... :اللقب Prénom : .... :الإسم Groupe : .... :الفوج

Date : .... :التاريخ Module : .... :المقياس

$\Rightarrow \frac{n + \theta \sum \log x_i}{\theta} = 0 \Rightarrow n + \theta \sum \log x_i = 0$

$\Rightarrow \boxed{\hat{\theta} = \frac{-n}{\sum \log x_i}}$ 0,8

$\cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log L(x_i, \theta) < 0$?! 0,8

$\Rightarrow \frac{-n}{\theta^2} < 0$

$\Rightarrow \boxed{T = \frac{-n}{\sum \log x_i}}$ est l'e.m.V pour θ 0,8

3 4- la loi de $\frac{n}{T}$.

$\frac{n}{T} = \frac{n}{\frac{-n}{\sum \log x_i}} = \boxed{-\sum \log x_i}$ 0,25

on cherche la loi de $-\sum \log X_i$

d'après 2] on a $Y = -2\theta \log X_i$

la loi de $\frac{n}{T} \Leftrightarrow$ la loi de $\frac{2\theta n}{2\theta T}$

$\Leftrightarrow$ la loi de $\frac{-2\theta \sum \log X_i}{2\theta}$

$\Leftrightarrow$ la loi de $\frac{\sum -2\theta \log X_i}{2\theta}$

les X_i ⫫. $\forall i = \overline{1,n}$

et comme la loi de $-2\theta \log X_i = Y \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} -2\theta \log X_i \sim \gamma\left(n, \frac{1}{2}\right)$ 1 3

Scanné avec CamScanner

0,8

car la somme des exponentielle indépendants de même paramètre = la gamma.

si $X \sim \gamma(a,b)$ et $c>0$ $\Rightarrow cX \sim \gamma(a, \frac{b}{c})$

0,25

$\Rightarrow -2\theta \sum \log X_i = \sum -2\theta \log X_i \sim \gamma(n, \frac{1}{2})$

d'où $\frac{n}{T} = \frac{\sum -2\theta \log X_i}{2\theta} = \frac{1}{2\theta}\gamma(n, \frac{1}{2}) = \gamma(n, \theta)$

$\Rightarrow \boxed{\frac{n}{T} \sim \gamma(n, \theta)}$ 1

3,8

5. On déduit que $\frac{1}{T}$ est un e.m.v pour $\frac{1}{\theta}$.

On a : T est un e.m.v pour θ.

On cherche l'e.m.v pour $g(\theta) = \frac{1}{\theta}$ 1.

$\Rightarrow \widehat{g(\theta)} = g(\hat{\theta}) = g(T) = \frac{1}{T}$

$\hat{\theta}$ est l'e.m.v pour θ $= T$

$\Rightarrow \frac{1}{T}$ est un e.m.v pour $g(\theta) = \frac{1}{\theta}$.

Est-ce que $\frac{1}{T}$ est un E.S.B pour $\frac{1}{\theta}$.

0,8

$E(\frac{1}{T}) = \frac{1}{\theta}$ pour dire que $\frac{1}{T}$ est un E.S.B pour $\frac{1}{\theta}$.

$E(\frac{1}{T}) = ??$ la question $\frac{1}{T} \sim$ quelle loi pour puisse calculer son espérance

On a: $\frac{n}{T} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{T} = n\frac{1}{T} \sim \gamma(n, \theta)$ 1

$\Rightarrow \frac{1}{T} \sim \mathcal{E}(\theta)$. (car la somme des exponentielle $\perp$ de même paramètre = la loi gamma)

0,8

si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ $\Rightarrow E(X) = \frac{1}{\lambda}$

$\Rightarrow E(\frac{1}{T}) = \frac{1}{\theta}$ d'où $\frac{1}{T}$ est un E.S.B pour $\frac{1}{\theta}$.

0,8

Nom : .... :اللقب Prénom: .... الإسم Groupe: .... :الفوج

Date : .... :التاريخ Module : .... :المقياس

3

6- la variance de $\frac{1}{T}$

$V(\frac{1}{T}) = \frac{1}{\theta^2}$ car $\frac{1}{T} \sim \mathcal{E}(\theta)$. 1

la B.c.R $= \frac{(g(\theta)')^2}{I_n(\theta)}$ 0,5 pour $g(\theta) = \frac{1}{\theta}$.

$g(\theta)' = -\frac{1}{\theta^2} \Rightarrow \left(-\frac{1}{\theta^2}\right)^2 = (g'(\theta))^2 = \frac{1}{\theta^4}$ 0,25

$I_n(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \log h(x_n,\theta)\right)$ car $\mathcal{X} =]0,1[$ est $\perp \theta$. 0,5

$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \log h(x_n,\theta) = -\frac{n}{\theta^2}$

$I_n(\theta) = -E\left(-\frac{n}{\theta^2}\right) = \frac{n}{\theta^2}$

d'où la B.c.R pour $\frac{1}{\theta}$ est $\boxed{\frac{\left(\frac{1}{\theta^2}\right)^2}{\frac{n}{\theta^2}} = \frac{1}{n\theta^2}}$ 0,25

$V(\frac{1}{T}) = \frac{1}{\theta^2} > B.c.R = \frac{1}{n\theta^2}$ 0,5

$\Rightarrow \frac{1}{T}$ est un Estimateur non efficace pour $\frac{1}{\theta}$

5

2,5

(2) Comme T est un estimateur efficace $\Rightarrow$ T est un E.S.B (0,25)

- $\Rightarrow E(T) = g(\theta) = -\frac{1}{\theta+1}$ (0,5)
- $V(T) = E(T^2) - (E(T))^2 = \frac{g'(\theta)}{k(\theta)} = \frac{\frac{1}{(\theta+1)^2}}{n} = \frac{1}{n(\theta+1)^2}$ (0,5) (0,25)
- $I_n(\theta) = (g'(\theta))^2 / V(T)$ car $V(T) = BCR = \frac{(g'(\theta))^2}{I_n(\theta)} \Rightarrow I_n(\theta) = (g'(\theta))^2 / BCR = \frac{n}{(\theta+1)^2}$ (0,25) car T est un estimateur efficace

4/4

Exercice N° 2

$$f_X(x) = \frac{\theta+1}{2}(1-|x|)^{\theta}$$ (0,5)

où $x \in [-1, 1]$ et $\theta > 0$

d'après le théorème de l'efficacité

Remarque :

On a deux théorèmes (on peut utiliser l'un des deux)

soit $L(\underset{\sim}{x}, \theta) =$

soit la famille exponentielle.

- Si on utilise le 1er théorème :

$L(\underset{\sim}{x}, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) = \left(\frac{\theta+1}{2}\right)^n \prod_{i=1}^{n}(1-|x_i|)^{\theta}$

(0,5) $\log L(\underset{\sim}{x}, \theta) = n \log\left(\frac{\theta+1}{2}\right) + \theta \sum \log(1-|x_i|)$

1,5

$$\frac{\partial \log L(\underset{\sim}{x}, \theta)}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta+1} + \sum \log(1-|x_i|)$$

$$= n\left(\frac{\sum \log(1-|x_i|)}{n} + \frac{1}{\theta+1}\right)$$ (0,5)

$$= \underbrace{n}_{k(\theta)}\Big(\underbrace{\frac{1}{n}\sum \log(1-|x_i|)}_{T(x)} - \underbrace{\left(-\frac{1}{\theta+1}\right)}_{g(\theta)}\Big)$$

$\Rightarrow T(x) = \frac{1}{n}\sum \log(1-|x_i|)$ est le seul estimateur efficace et $g(\theta) = -\frac{1}{\theta+1}$ est la seule fonction qui est estimée efficacement. (0,25)

Date : .... التاريخ: Module : .... المقياس: ....

si on utilise le 2eme Théorème :

(1,8)

$$f_X(x) = \frac{\theta+1}{2}(1-|x|)^\theta$$

$$= \underbrace{\frac{\theta+1}{2}}_{c(\theta)} \exp\Big[\underbrace{\theta}_{\alpha(\theta)} \underbrace{\log(1-|x|)}_{a(x)}\Big] \times \overset{h(x)}{1} \quad (0,8)$$

$$\log f_X(x) = \underbrace{\log\frac{(\theta+1)}{2}}_{B(\theta)} + \underbrace{\theta}_{\alpha(\theta)} \underbrace{\log(1-|x|)}_{a(x)} \quad (0,8)$$

d'après ce théorème la seule fonction estimée efficacement est $g(\theta) = -\frac{B'(\theta)}{\alpha'(\theta)}$ (0,8)

et le seul estimateur efficace est $T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a(x_i)$

d'où $\cdot\ g(\theta) = -\frac{B'(\theta)}{\alpha'(\theta)} = -\frac{\frac{1}{\theta+1}}{1} = -\frac{1}{\theta+1}$

$$\cdot\ T(x) = \frac{1}{n}\sum a(x_i) = \frac{1}{n}\sum \log(1-|x_i|)$$

(2,8)

2) $\boxed{E(T) = g(\theta) = -\frac{1}{\theta+1}}$ (0,8) car T est un estimateur efficace pour $-\frac{1}{\theta+1}$ $\Rightarrow T$ est un E.S.B pour $-\frac{1}{\theta+1}$ (0,2.8)

$$\cdot\ V(T) = \frac{g'(\theta)}{n\alpha'(\theta)} \ (0,28) = \frac{\frac{1}{(\theta+1)^2}}{n\times 1} = \frac{1}{n(\theta+1)^2} \quad (0,8)$$

$\cdot\ I_n(\theta) = B.C.R\,(g'(\theta))^2 = V(T)\cdot(g'(\theta))^2$

car $B.C.R = V(T)$ (T est un estimateur efficace pour $g(\theta) = -\frac{1}{\theta+1}$)

$$\Rightarrow I_n(\theta) = \frac{(g'(\theta))^2}{V(T)} \ (0,28) = \frac{\left(\frac{1}{(1+\theta)^2}\right)^2}{1/n(\theta+1)^2} = \frac{n}{(\theta+1)^2} \quad (0,8)$$

(7)

3/3

Exercice N°3

$X \sim N(m, \sigma^2)$

fonction pivotale pour m pour un n-éch de la v.a X

• si σ^2 = connue

$\bar{X} \sim N(m, \frac{\sigma^2}{n})$ 0,25

$\Rightarrow \frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \left(\frac{\bar{X} - m}{\sigma}\right)\sqrt{n} \sim N(0,1)$ 0,5

1,25 $\Rightarrow Q(x_1, \dots, x_n, m) = \left(\frac{\bar{X} - m}{\sigma}\right)\sqrt{n}$ est une pivotale pour m car elle suit une loi libre (la $N(0,1)$) et ne dépend que de paramètre m. 0,5

• si σ^2 = inconnue :

$Q(x_1, \dots, x_n, m)$ ce n'est plus une fonction pivotale pour m car elle dépend d'un autre paramètre (σ^2).

1,5 si on remplace σ^2 par son E.S.B 0,25

(S'^2 E.S.B pour σ^2) tq : $\frac{(n-1)S'^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$

d'où 0,25

$$\frac{\frac{(\bar{X} - m)\sqrt{n}}{\cancel{\sigma}}}{\sqrt{\frac{\frac{\cancel{(n-1)}S'^2}{\cancel{\sigma^2}}}{\cancel{(n-1)}}}} \sim St_{(n-1)}$$ 0,5

$\Rightarrow \frac{(\bar{X} - m)\sqrt{n}}{S'} \sim St_{(n-1)}$ est une pivotale pour m (suit une loi libre = loi qui ne dépendante d'aucun paramètre) 0,5

8