Faculté des Mathématiques USTHB | **Semestre 2 année 2019/2020**
Master 1 SPA | Module: **Calcul Stochastique**

Série 3
Calcul Stochastique

Exercice 1
Soit $W(t)$ un mouvement Brownien. Montrer que
1) $W(t)^2 - t$ est une martingale relativement à la filtration $\mathcal{F}_t$.
2) $e^{W(t)-\frac{t}{2}}$ est une martingale relativement à la filtration $\mathcal{F}_t$.
3) $e^{\lambda W(t)-\lambda^2 \frac{t}{2}}$ est une martingale relativement à la filtration $\mathcal{F}_t$.
Exercice 2
1/ Montrer la continuité du processus de Wiener $W(t)$ en utilisant le théorème de continuité de Kolmogorov.
2/ Soit $V(t) = \frac{1}{c}W(c^2 t)$, $c > 0$. Montrer que le processus $\{V(t)\}_{t\geq 0}$ est continue.
3/Montrer que $\{V(t)\}_{t\geq 0}$ est un processus de Wiener.
Exercice 3
Supposer que vous êtes un manager en risques pour un portefeuille d'actions, et que vous modéliser la valeur du portefeuille comme un mouvement Brownien geometrique

$$S_t = S_0 \exp(\mu t + \sigma W_t).$$

Votre patron vous demande de trouver la "Value-at-Risk" (VaR) de ce portefeuille au temps t avec seuil de risque $\alpha \in]0,1[$. Value-at-Risk (VaR) au temps t avec seuil de risque α est définie comme étant le nombre $VaR_\alpha(t)$ tel que $\mathrm{P}\left(S_t \leq VaR_\alpha(t)\right) = 1-\alpha$. Ainsi, il y a seulement une probabilité $1-\alpha$ que la valeur du portefeuille soit inférieure à $VaR_\alpha(t)$ au temps t. Montrer que

$$VaR_\alpha(t) = S_0 \exp(\mu t + \sigma\sqrt{t} q_\alpha),$$

où q_α est le quantile d'ordre $1-\alpha$ de la loi normale centrée réduite.
Exercice 4
Soit $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ un mouvement brownien réel et $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ sa filtration canonique. Pour $a > 0$, nous définissons les variables aléatoires:

$$T_a = \inf\{t > 0, W(t) \geq a\}, \quad \overline{T}_a = \inf\{t > 0, |W(t)| \geq a\}.$$

1/ Montrer que T_a et $\overline{T}_a$ sont des $\mathcal{F}_t$-temps d'arrêt.
2/ Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons l'égalité:

$$\mathrm{E}\left[\exp\left(\lambda W(T_a \wedge n) - \frac{\lambda^2}{2}(T_a \wedge n)\right)\right] = 1.$$

3/ Montrer que la transformée de Laplace de T_a vaut $\forall s > 0$:

$$\mathrm{E}\left[\exp(-sT_a)\right] = e^{-a\sqrt{2s}},$$

et prouver que $\mathrm{P}[T_a < \infty] = 1$.
4/ Démontrer les égalités p.s. suivantes:

$$\limsup_{t\to\infty} W(t) = +\infty, \quad \liminf_{t\to\infty} W(t) = -\infty.$$

En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{t > 0,\, W(t) = x\}$ est non borné.
5/ Montrer que la transformée de Laplace de $\overline{T}_a$ vaut $\forall s > 0$:

$$\mathrm{E}\left[\exp(-s\overline{T}_a)\right] = \frac{1}{\cosh(a\sqrt{2s})}.$$

Exercice 5
Soit $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$, avec $t_j = \frac{jT}{n}$ une partition de l'intervalle $[0, T]$.
1/ Soit $X_n = \sum_{i=0}^n t_i 1_{[t_i,t_{i+1}[}$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left(\int_0^\infty \left|t1_{[0,T]}(t) - X_n(t)\right|^2 dt\right) = 0.$$

2/ Montrer que $\int_0^T X_n dW(t)$ converge vers $TW(T) - \int_0^T W(t)dt$ dans L^2. Déduire $\int_0^T t dW(t)$.
Exercice 6
Soit $W(t)$ un mouvement Brownien. Montrer que

$$\int_0^t W(s)^2 dW(s) = \frac{1}{3}W(t)^3 - \int_0^t W(s)ds.$$

Ind: vous pouvez utiliser les identités $a^2(b-a) = \frac{1}{3}(b^3 - a^3) - a(b-a)^2 - \frac{1}{3}(b-a)^3$ et $(a^2 - b^2)^2 = (a-b)^4 + 4(a-b)^3 b + 4(a-b)^2 b^2$.
Exercice 7
Soit $W(t)$ un mouvement brownien.
1/ Appliquer la formule d'Itô pour la fonction $F(x,t) = tx$. En déduire une équation pour $\int_0^t s dW(s)$.
2/ Appliquer la formule d'Itô pour la fonction $F(x,t) = x^2$. En déduire une équation pour $\int_0^t W(s)dW(s)$.
3/ Appliquer la formule d'Itô pour trouver une équation pour $\int_0^t \cos(W(s))dW(s)$.
Exercice 8
Soit $Y(t) = \exp(W_1(t) + W_2(t))$ pour deux processus de Wiener indépendants $W_1(t)$ et $W_2(t)$. Utiliser la formule d'Itô multi-dimensionnelle pour trouver $dY(t)$.
Exercice 9
Le prix d'une action en bourse est modélisé par l'équation différentielle stochastique

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

avec condition initiale $S(0) \in \mathbb{R}$.
1/ Quelle est l'équation intégrale de $S(t)$ dont l'équation différentielle stochastique précédente en est l'abréviation.
2/ Résoudre l'équation différentielle stochastique $dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$ en utilisant la

formule d'Itô pour le logarithme du prix de l'action. Déduire que le logarithme de la solution est un mouvement Brownien dont on déterminera la dérive et le coefficient de diffusion.
3/ Donner la distribution de probabilité de $S(t)$.
4/ Donner la moyenne et la variance de $S(t)$.
5/ Calculer, sachant que $\mu = 25\%$ et $\sigma = 20\%$ sur une base d'une année, la probabilité que le prix de l'action excédera 45 en un temps de 4 mois sachant que son prix actuel est de 38.

Exercice 10

On considère

$$\begin{cases} dX(t) = \alpha X(t)dt + bdW(t) \\ X(0) = x \end{cases}$$

1/ Montrer que la solution s'écrit

$$X(t) = e^{\alpha t}\left(x + b\int_0^t e^{-\alpha s}dW(s)\right)$$

2/ Montrer que $X(t)$ est un processus gaussien, calculer son espérance et sa variance.

Exercice 11

Soit $\mathbf{r}(t)$ le taux d'intérêt instantané. On suppose qu'il peut y avoir un changement, dans un intervalle de temps infinitésimal $\triangle t$, positif d'une unité ou négatif d'une unité, ou bien aucun changement.

Changement $\triangle\mathbf{r}$	Probabilité
-1	$[\sigma^2/2 - \alpha(r_e - \mathbf{r})/2]\triangle t$
$+1$	$[\sigma^2/2 + \alpha(r_e - \mathbf{r})/2]\triangle t$
0	$1 - \sigma^2\triangle t$

Le terme $\sigma^2/2$ représente le changement aléatoire du taux de plus ou moins l'unité. Le terme $\mp\alpha(r_e - \mathbf{r})/2$ modélise la tendance du taux d'intérêt vers un taux d'équilibre r_e. En mathématique financière on parle de *retour à la moyenne* (mean reversion).
1/ Calculer $\mathrm{E}[\triangle\mathbf{r}(t) \mid \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}]$ et $\mathrm{E}[(\triangle\mathbf{r}(t))^2 \mid \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}]$.
2/ Déduire l'EDS de $\mathbf{r}(t)$ (modèle de Vasicek).
3/ Calculer la moyenne $\mathrm{E}[\mathbf{r}(t)]$ et la variance $\mathrm{V}[\mathbf{r}(t)]$ en utilisant la formule d'Itô.
4/ Résoudre cette équation différentielle stochastique. Considérer en premier que $\sigma = 0$, puis généraliser.
5/ Quelle est la loi de probabilité de la solution $\mathbf{r}(t)$? Quelle est la limite de cette distribution quand $t \to \infty$?
6/ Pour les paramètres $\alpha = 150\%$, $r_e = 3\%$ et $\sigma = 6\%$ sur une base d'une année, quelle est la probabilité que le taux d'intérêt soit inférieur à 4% en six mois sachant que sa valeur actuel est de 2.5%?
7/ Le modèle de Cox-Ingersoll-Ross (CIR) suppose les probabilités de changement suivant

Changement $\triangle\mathbf{r}$	Probabilité
-1	$[\sigma^2\mathbf{r}/2 - \alpha(r_e - \mathbf{r})/2]\triangle t$
$+1$	$[\sigma^2\mathbf{r}/2 + \alpha(r_e - \mathbf{r})/2]\triangle t$
0	$1 - \sigma^2\mathbf{r}\triangle t$

Dans ce modèle, si $\mathbf{r}(t)$ décroît le comportement aléatoire décroît aussi.
Trouver l'EDS du modèle de Cox-Ingersoll-Ross (CIR) ainsi que la moyenne $\mathrm{E}[\mathbf{r}(t)]$ et la variance $\mathrm{V}[\mathbf{r}(t)]$.

Exercice 12

Soit a, α, b et β quatre constantes réelles. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $W(t)$ un mouvement brownien standard. On considère l'équation différentielle stochastique:

$$\begin{cases} dX(t) = (a + \alpha X(t))\, dt + (b + \beta X(t))\, dW(t) \\ X(0) = x \end{cases} \tag{1}$$

1/ Montrer que l'équation différentielle stochastique précédente admet une unique solution.
2/ Donner l'équation intégrale de $X(t)$ dont l'équation différentielle stochastique (1) précédente en est l'abréviation.
3/ On note $m(t) = \mathrm{E}(X(t))$. Montrer que $m(t)$ est l'unique solution de l'équation différentielle ordinaire:

$$\begin{cases} y' - \alpha y = a \\ y(0) = x \end{cases} \tag{2}$$

4/ Écrire la formule d'Itô pour X^2 où X est solution de (1).
5/ On note $M(t) = \mathrm{E}(X(t)^2)$. En déduire de 4/ que $M(t)$ est l'unique solution de l'équation différentielle ordinaire:

$$\begin{cases} y' - (2\alpha + \beta^2)\, y = 2\,(a + b\beta)\, m + b^2 \\ y(0) = x^2. \end{cases} \tag{3}$$

où m est la solution de (2).
6/ Résoudre (2) puis (3).

Exercice 13

Le pont brownien (Brownian bridge) est un processus qui commence à $X(0) = a$ et au temps $t = 1$ atteint la valeur $X(1) = b$. Soit l'équation différentielle stochastique pour $0 \leq t < 1$:

$$\begin{cases} dX(t) = \dfrac{b - X(t)}{1 - t} dt + dW(t) \\ X(0) = a \end{cases}$$

1/ Vérifier que la solution est

$$X(t) = a(1 - t) + bt + (1 - t) \int_0^t \frac{1}{1 - s} dW(s).$$

2/ Écrire un algorithme de simulation de trajectoires de cette EDS.