Chapitre 3

Représentation des champs

1 Champ de direction

Pour toute équation différentielle de la forme

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Il est possible d'obtenir une information graphique ou qualitative sur le comportement général des courbes de solution (appelées trajectoires ou lignes de courant) à partir de l'équation différentielle elle-même sans formule de solution réelle.

Un **champ de direction** ou un **champ de pentes** pour une équation différentielle du premier ordre $dy/dx = f(x, y)$, est un champ de courts segments de droite ou de flèches de pente $f(x, y)$ passant par chaque point (x, y) dans une grille de points choisie dans le plan (x,y). Les champs de direction peuvent être visualisés en traçant une liste de vecteurs tangents aux courbes de solution

2 Exemples

1. Considérons l'équation différentielle suivante

$$\frac{dy}{dx} = y$$

Toute solution à cette équation différentielle a la propriété que la pente en tout point est égale à y coordonner à ce point. Les solutions de l'équation sont de la forme $y = Ce^x$ (Fig 1).

Si on dessine plusieurs segments de ligne, mais en omettant les courbes ; cela donne le champ de pentes pour l'équation $dy/dx = y$ dans la Figure 2. Sur cette figure, on remarque qu'au-dessus de l'axe des abscisses x, les pentes sont toutes positifs (parce que y est positif), et ils augmentent à mesure qu'on avance vers le haut. Sous l'axe des abscisses, les pentes sont toutes négatives. Sur toute ligne horizontale (où y est constante) les pentes sont constantes.

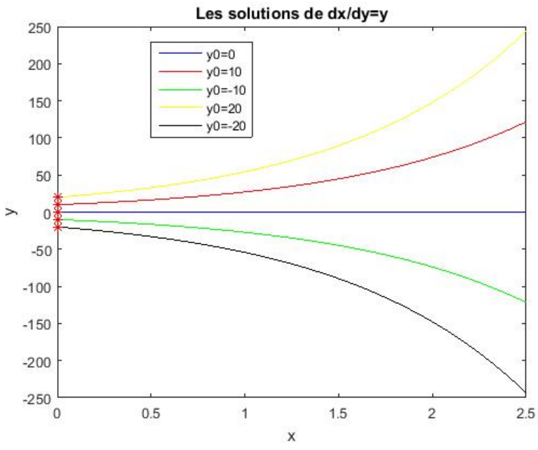

FIGURE 1 –

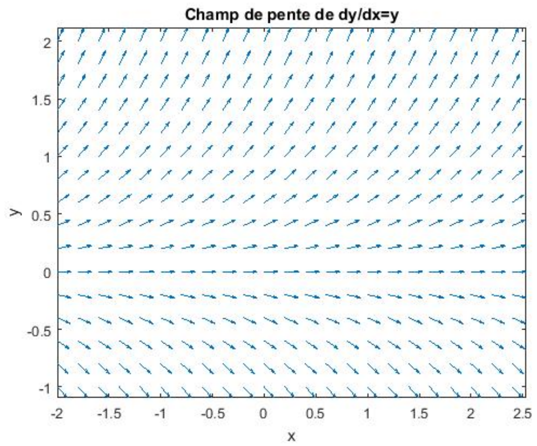

FIGURE 2 –

2. La Figure 3 montre le champ de pentes de l'équation différentielle $dy/dx = 2x$. On remarque que sur une droite verticale, où x est constant, les pentes sont constant. En effet, dans cette équation différentielle, dy/dx ne dépend que de x. (Dans le exemple précédent, $dy/dx = y$, les pentes ne dépendaient que de y.). Les courbes de solution de la figure 5 ressemblent à des paraboles. On voit que la solution de l'équation différentielle $dy/dx = 2x$ est $y = x^2 + C$

3 La commande quiver

La commande "quiver" est la principale commande matlab pour tracer les champs de pentes , utilisée conjointement avec meshgrid. Pour tracer le champ de pentes d'une équation différentielle $y' = f(x, y)$ sur le rectangle $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$, tapez la séquence de commandes suivante :

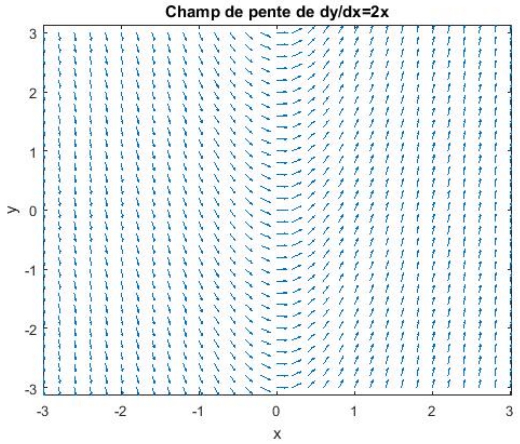

FIGURE 3 –

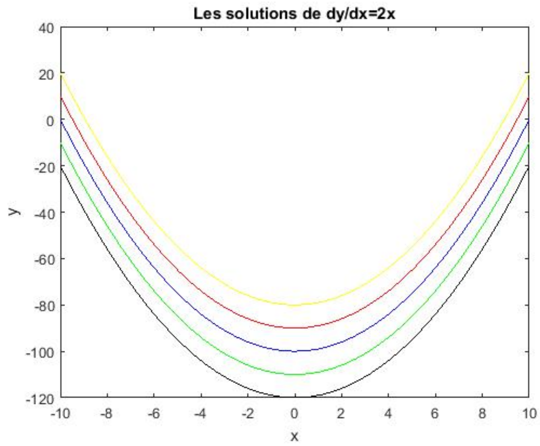

FIGURE 4 –

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
[x, y] = meshgrid(-2:0.2:3, -1:0.2:2);
s = 1 - x.*y.^2; %pour l'équation f(x,y) = 1 - x y^2
quiver(x,y, ones(size(s)),s), axis tight
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

La commande quiver, utilisée pour tracer des champs vectoriels, nécessite quatre entrées : le tableau x de valeurs x, le tableau y de valeurs y et les tableaux constitués des deux composants des vecteurs de champ directionnel. Étant donné que tous ces tableaux doivent avoir la même taille, ceux du code (taille(s)) créent commodément un tableau de ceux de la même taille que s. Dans la dernière commande, l'axe serré élimine l'espace blanc sur les bords du champ de direction. Le résultat est donné dans la Figure 5 .

Mais l'image est un peu difficile à lire en raison du fait que la plupart des vecteurs sont assez petits. Nous pouvons obtenir une meilleure image en redimensionnant les

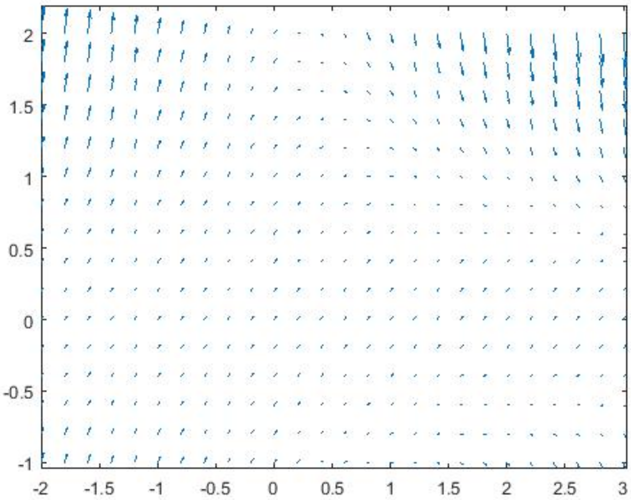

FIGURE 5 –

flèches afin qu'elles ne varient pas en amplitude — par exemple, en divisant chaque vecteur (1,s) par sa longueur $\|(1, s)\| = \sqrt{1+s^2}$. Afin d'y parvenir dans matlab, nous modifions la séquence de commandes précédente pour :

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
[x, y] = meshgrid(0:0.2:3, 0:0.2:3);
s = 1 - x.*y.^2; % pour une fonction f = 1 - x y^2
L = sqrt(1 + s.^2);
quiver(x,y, 1./L,s./L, 0.5), axis tight
xlabel 'x', ylabel 'y'
title ('La direction de champs de vecteurs pour dy/dx =1-xy^2')
%soltions numérique de l'équation
f=@(u,v) 1-u*v^2;
[u,v]=ode45(f,[0,3],0)
[u1,v1]=ode45(f,[0,3],1.5)
hold on
plot(u,v,'b-')
plot(u1,v1,'r-')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

L' entrée 0,5, dans la commande quiver réduit de moitié la longueur des vecteurs et empêche les pointes de flèches d'avaler les queues des vecteurs proches. Nous trouvons aussi la commande ode45 pour la résolution numérique de l'EDO pour deux solutions particulières 0 et 1 . Le résultat est

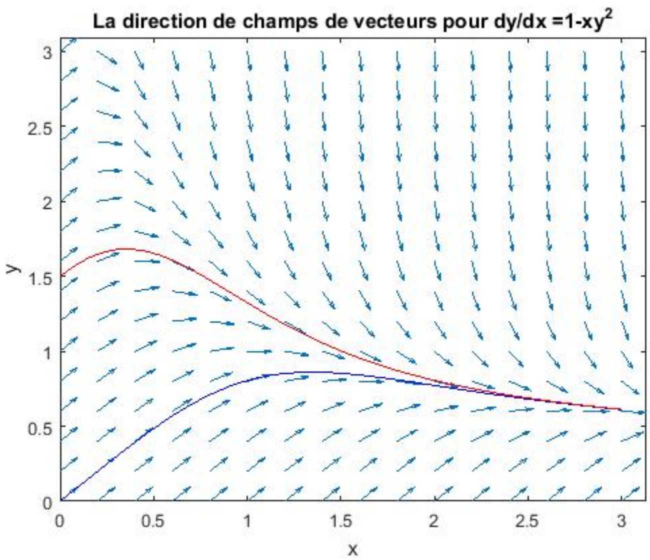
La direction de champs de vecteurs pour dy/dx =1-xy²
y
x
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

FIGURE 6 –