0.0.1 Probabilité d'absorption dans une classe récurrente

Soit $(X_n)_n$ une chaîne de markov homogène finie et C une classe récurrente.
Le système séjournera un certain nombre de fois dans les états transitoires avant d'être absorbé par C.On s'intéresse au calcul de la probabilité d'absorption.

A)**Probabilité d'absorption en n étapes**
Soient $\mathbf{T}$ l'ensemble des états transitoires et C une classe récurrente. Soit $i \in \mathbf{T}$ et notons $W_i^{(n)}(C)$ la probabilité d'absorption dans C en n étapes sachant qu'ona démarré de i.

$$W_i^{(n)}(C) = P(X_n \in C, X_{n-1} \in \mathbf{T}, X_{n-2} \in \mathbf{T}, \dots, X_1 \in \mathbf{T}/X_0 = i)$$

Du fait que $X_1 \in \mathbf{T} = \bigcup_{j\in\mathbf{T}}$, on a

$$W_i^{(n)}(C) = P(X_n \in C, X_{n-1} \in \mathbf{T}, X_{n-2} \in \mathbf{T}, \dots, X_2 \in \mathbf{T}, X_1 = j/X_0 = i)$$
$$= \sum_{j\in\mathbf{T}} P(X_1 = j/X_0 = i)P(X_n \in C, X_{n-1} \in \mathbf{T}, X_{n-2} \in \mathbf{T}, \dots, X_2 \in \mathbf{T}/X_1 = j)$$
$$= \textstyle\sum_{j\in\mathbf{T}} P_{ij}W_j^{(n-1)}$$

On a donc

$$\boxed{\forall i \in \mathbf{T} \quad W_i^{(n)}(C) = \textstyle\sum_{j\in\mathbf{T}} P_{ij}W_j^{(n-1)}}$$

Remarque 9

$$W_i^{(1)}(C) = P(X_1 \in C/X_0 = i) = \sum_{j\in C} P(X_1 = j/X_0 = i) = \sum_{j\in C} P_{ij}$$

B)**Probabilité d'absorption dans C**
Soit
$$W_i(C) = P(\text{absorption dans C démarrant de i}) = \sum_{n\geq 1} W_i^{(n)}(C)$$
$$= P(\bigcup_{n\geq 1}(X_n \in C, X_{n-1} \in \mathbf{T}, X_{n-2} \in \mathbf{T}, \dots, X_2 \in \mathbf{T}, , X_1 \in \mathbf{T})/X_0 = i)$$
$$= \sum_{n\geq 1}\sum_{j\in\mathbf{T}} P_{ij}W_j^{(n-1)}$$
$$W_i(C) = W_i^{(1)}(C) + \sum_{n\geq 2} W_j^{(n)}(C) = \sum_{j\in C} P_{ij} + \sum_{n\geq 2} W_j^{(n)}(C)$$
$$= \sum_{j\in C} P_{ij} + \sum_{n\geq 2}\sum_{j\in\mathbf{T}} P_{ij}W_j^{(n-1)}$$

$$= \sum_{j\in C} P_{ij} + \sum_{j\in \mathbf{T}} P_{ij} \sum_{n\geq 2} W_j^{(n-1)} = \sum_{j\in C} P_{ij} + \sum_{j\in \mathbf{T}} W_j(C)$$

Ce qui donne

$$\boxed{W_i(C) = \textstyle\sum_{j\in C} P_{ij} + \sum_{j\in \mathbf{T}} W_j(C) \ \ \forall i \in \mathbf{T} \quad (3)}$$

Remarque 10
Notons

$$W(C) = (W_i(C), i \in \mathbf{T}),\ Y_C = (\sum_{j\in C} P_{ij}, i \in \mathbf{T}),\ P_{\mathbf{T}} = {}^t(P_{ij})_{i,j\in\mathbf{T}}$$

où ${}^tP$ désigne la matrice transposée. L'équation (3) peut s'écrire sous forme matricielle comme suit

$$\boxed{W(C) = (I - P_{\mathbf{T}})^{-1}\, {}^tY_C}$$

ou bien

$$\boxed{{}^tY_C = (I - P_{\mathbf{T}})W(C)}$$

Exemple
Soit P la matrice de transition suivante

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 & 7/8 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

En dessinan le graphe de transitions, on en déduit que les classes (3,5), (1,2) sont récurrentes et 4, 6 sont des états transitoires.
Déterminons la probabilité d'absorption dans la classe C=(1,2).

$$W(C) = (W_4(C), W_5(C)),\ Y_C = {}^t(\textstyle\sum_{j\in C} P_{4j}, \sum_{j\in C} P_{6j} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/5 \end{pmatrix}$$

$$P_{\mathbb{T}} = (P_{ij})_{i,j\in\mathbb{T}} = \begin{pmatrix} P_{44} & P_{46} \\ P_{64} & P_{66} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

$$(I - P_{\mathbb{T}})^{-1} = \begin{pmatrix} 12/11 & 5/11 \\ 4/11 & 20/11 \end{pmatrix} \text{ et } W_C = (\frac{7}{11}, \frac{6}{11}).$$

0.0.2 Temps moyen de séjour dans les états transitoires

Partant d'un état transitoire i, le système évolue à l'intérieur des états transitoires avant d'être absorbé par une classe écurrente. Il séjournera un certain temps dans l'ensemble des états transitoires. On s'intéresse au temps moyen de séjour dans $\mathbb{T}$ (nombre de fois).

Posons N_{ij}= la varible aléatoire comptant le nombre de séjours en j partant de i, $m_{ij} = E(N_{ij})$, $M = (m_{ij})_{i,j\in\mathbb{T}}$, et $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Notons R l'ensemble des états récurrents et $r_{ij}^{(k)} = P(N_{ij} = k)$.

Théorème 1. *On a la relation suivante*

$$m_{ij} = \delta_{ij} + \sum_{k\in\mathbb{T}} P_{ik}m_{kj}$$

ou bien sous forme matricielle

$$M = I + P_{\mathbb{T}}\ M \quad i.e.\ \ M = (I - P_{\mathbb{T}})^{-1}$$

Démonstration 1. *Notons* R *l'ensemble des états récurrents et* $\mathbb{T}$ *l'ensemble des états transitoires. On distinguera deux cas :*
1-si $i \neq j$

$m_{ij} = \sum_{k\geq 0} kP(N_{i,j} = k) = \sum_{s\in\mathbb{T}} P_{is}r_{sj}^{(k)}$ *du fait que* $r_{ij}^{(k)} = \sum_{s\in\mathbb{T}} P_{is}r_{sj}^{(k)}$.

$$m_{ij} = \sum_{k\geq 0} kr_{ij}^{(k)} = \sum_{k\geq 0} k \sum_{s\in\mathbb{T}} P_{is}r_{sj}^{(k)} = \sum_{s\in\mathbb{T}} P_{is} \sum_{k\geq 0} kr_{sj}^{(k)} = \sum_{s\in\mathbb{T}} P_{is}m_{sj}$$

2-si $i = j$

$r_{ii}^{(0)} = 0$
$r_{ii}^{(1)} = \sum_{s\in\mathcal{R}} P_{is} + \sum_{s\in\mathbb{T}} P_{is}r_{si}^{(0)}$
$\vdots$
$r_{ii}^{(k)} = \sum_{s\in\mathbb{T}} P_{is}r_{si}^{(k-1)}$

$$m_{ii} = \sum_{k\geq 0} kr_{ii}^{(k)} = \sum_{s\in\mathbb{R}} P_{is} + \sum_{s\in\mathbb{T}} P_{is}r_{si}^{(0)} + \sum_{k=2}^{+\infty} k \sum_{s\in\mathbb{T}} P_{is}r_{si}^{(k-1)}$$

$$= \sum_{s\in\mathbb{R}} P_{is} + \sum_{s\in\mathbb{T}} P_{is}r_{si}^{(0)} + \sum_{s\in\mathbb{T}} P_{is} \sum_{k=2}^{+\infty} kr_{si}^{(k-1)}$$

$$= \sum_{s\in\mathbb{R}} P_{is} + \sum_{s\in\mathbb{T}} P_{is} r_{si}^{(0)} + \sum_{s\in\mathbb{T}} P_{is} \sum_{l=1}^{+\infty} (l+1) r_{si}^{(l)}$$

$$= \sum_{s\in\mathbb{R}} P_{is} + \sum_{s\in\mathbb{T}} P_{is} r_{si}^{(0)} + \sum_{s\in\mathbb{T}} P_{is} \sum_{k=1}^{+\infty} r_{si}^{(k)} + \sum_{s\in\mathbb{T}} P_{is} \sum_{k=1}^{+\infty} k r_{si}^{(k)}$$

Or

$$\sum_{s\in\mathbb{T}} P_{is} r_{si}^{(0)} + \sum_{s\in\mathbb{T}} P_{is} \sum_{1=2}^{+\infty} r_{si}^{(k)} = \sum_{s\in\mathbb{T}} P_{is} \sum_{k=0}^{+\infty} r_{si}^{(k)} = \sum_{s\in\mathbb{T}} P_{is},\ car \sum_{k=0}^{+\infty} r_{si}^{(k)} = 1$$

De plus, $\sum_{k=1}^{+\infty} r_{si}^{(k)} = m_{si}$, *ce qui donne*

$$m_{ii} = \sum_{s\in\mathbb{R}} P_{is} + \sum_{s\in\mathbb{T}} P_{is} + \sum_{s\in\mathbb{T} P_{is}} m_{si} = 1 + \sum_{s\in\mathbb{T}} P_{is} m_{si}$$

Exemple

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Les états (5) et (1) sont récurrents ; (2),(3)et(4) sont transitoires.

$P_{\mathbb{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$ et $(I - P_{\mathbb{T}})^{-1} = 1/5 \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 6 & 9 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

Ce qui donne par exemple $E(N_{12}) = 3/5$.

Master I Probablité et statistiques, UMMTO
Youcef Berkoun
Exercices sur les chaînes de Markov
Série N°1

Exercice 1 : Un individu vit dans un milieu où il est susceptible d'attraper une maladie par piqûre d'insectes. Il peut être dans l'un des trois états suivants : ni malade ni immunisé (R), malade (M) ou Immunisé (I). D'un mois sur l'autre, son état peut changer selon les règles suivantes :
- étant immunisé, il a une probabilité de 0,8 de le rester et de 0,2 de passer à l'état R,
- étant malade, il a une probabilité de 0,75 de le rester et de 0,25 de devenir immunisé,
- enfin, étant dans l'état R, il a une probabilité de 0,6 de le rester et de 0,4 de devenir malade.
1. On modélise la dynamique des individus de ce milieu par une chaîne de Markov $(X_t)_t$ à trois états R, M et I. Ecrire la matrice de transition P de cette chaîne de Markov.
2 - Si l'on commence avec une population de 1000 individus comportant 100 individus malades et 900 Individus ni malades ni immunisés, combien aura-t-on d'individus malades après une étape, après deux étapes?
3- Quelle sera la proportion d'individus malades dans cette population à long terme? Expliquer.

Exercice 2 : On considère une chaîne de Markov $(X_n)_n$ sur (1,...,7) de matrice de transition P donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/40 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 & 7/8 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 1/9 & 7/9 & 0 & 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Dessiner le graphe de la chaîne de Markov associée en précisant les probabilités de transitions entre les différents états.
b) Déterminer les classes d'états récurrents et transitoires.
c) La chaîne est-elle irréductible?. Calculer $P_3(X_2 = 6)$ et $P_1(X_2 = 7)$

Exercice 3 (Suites récurrentes aléatoires). Une suite récurrente aléatoire $(X_n)_n$ est une suite de variables aléatoires définies par récurrence : X_0 est une variable aléatoire de loi P sur une espace E et $X_{n+1} = f(X_n,Z_{n+1})$ Où $(Z_n)_n$ est une suite de variables aléatoires i.i.d sur une espace F, indépendante de X_0, et $f : ExF \longmapsto E$est une application mesurable. 1. Montrer que toute suite récurrente aléatoire est une chaîne de Markov homogène.

Exercice 4
Montrer que si deux état communiquent, ils ont forcément la meme période.

Exercice 5
Un système est formé de quatre (4) dispositifs. Pour chaque dispositif, la fiabilité au cours d'une journée est p, $0 < p < 1$. Le système ne fonctionne que si au moins deux dispositifs fonctionnent. Les réparations sont efféctuées dans la nuit; un seul dispositif pooit X_n le nombre de dispositifs en état de marche au début de la n-ième journée $n = 1,2,\ldots$.
Montrer que $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov ; préciser sa matrice de transition.

Exercice 6
Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov homogène sur $E = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ de matrice de transition P donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 & 5/6 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

1- Effectuer la classification des états (déterminer les classes récurrentes et les classes transitoires) ; Préciser la nature des états récurrents (positifs ou nuls).
2- Calculer les probabilités d'absorption dans les classes récurrentes.

Exercice 7
Trois produits sont en concurrence sur le marché. Une enquête réalisée (sur un échantillon représentatif) a donné les résultats suivants: 30%ont déclaré consommer P1, 50% ont annoncé consommer P2 et 20% ont affirmé consommer P3.
On a constaté qu'en général après une campagne de publicité :
i. Parmi les consommateurs de P1, 50% continuent à acheter P1, 40% passent à P2,10% passent à P3
ii. Parmi les consommateurs de P2, 70% continuent à acheter P2, 30iii. Parmi les consommateurs de P3, 80% continuent à acheter P3, 20% passent à P1
a. Déterminer l'état du marché à l'issue d'une campagne de publicité.
b. Quel serait l'état du marché après une seconde campagne de publicité?
c. Quel sera l'état du marché après un grand nombre de campagnes de publicité ?

Exercice 8
Soit la chaîne de Markov de matrice de transition :

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On se propose d'étudier le comportement asymptotique de cette chaîne.
1. Décrire la chaîne (graphe, classes, nature et périodicité)
2. La chaîne admet-elle une loi stationnaire ?
3. Calculer les $\lim_{n\to+\infty} P_{ij}^{(n)}$ pour tous les couples (i,j).
4. Déterminer les probabilités d'absorption dans la classe récurrente.

5. Déterminer le nombre moyen de transition dans les états transitoires.

Répondre aux mêmes questions pour la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$