Université Blida 1 le 27 Juin 2015
Faculté des Sciences
Département de Maths

Examen de Statistique de 3ème année Maths(1h30)

Exercice 1:

Soit X une variable aléatoire continue de densité
$f(x,\lambda) = \frac{1}{\sqrt[2]{\pi\lambda}} \exp(-\frac{(x-4)^2}{\lambda}), \forall x \in IR$

a) On pose $Y = \sqrt[2]{\frac{2}{\lambda}}(X-4)$.Montrer que la variable aléatoire Y suit une loi normale dont on determinera les paramètres.

b) Calculer les moments d'ordre 1, 2 et 4 de Y

c) Ecrire la fonction du maximum de vraisemblance du paramètre λ, associée à une réalisation du n-échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de X.Montrer l'existence de l'estimateur du maximum de vraisemblance de λ associé au n-échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de X.

d) L'estimateur précédent est il efficace ?

e) Application numérique:

$\bar{x} = 3,999..$ et $\sum_{i=1}^{60} x_i^2 = 975$

Calculer la meilleure estimation possible de λ que permet d'obtenir cet échantillon d'observations

Exercice 2:

Soit un n-échantillon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ gaussien de moyenne connue μ et de variance σ^2.
On considère:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} X_i$$

et $$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

1) Montrer que $\frac{nS^2}{\sigma^2}$ peut se mettre sous la forme d'une différence de deux χ^2(Khi deux)

2) Trouver les bornes a et b définissant un intervalle de confiance au risque α pour σ^2 dans les cas suivants:

1)μ connue

2)μ inconnue

Tami Omar

(1)

Corrigé EMD de Stat

STAT 3ème Année Math

Chen 21,S,S2

Exo1:

a) $F_Y(y) = P(Y<y) = P\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\cdot(X-4) < y\right) = P\left(X-4 < y\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\right)$

$= P\left(X < y\sqrt{\frac{\lambda}{2}}+4\right) = \boxed{F_X\left(y\sqrt{\frac{\lambda}{2}}+4\right)}$ (0,5)

On dérive, on a :

$f(x,\lambda)$

$f_Y(y) = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}\, f_X\left(y\sqrt{\frac{\lambda}{2}}+4\right) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\lambda}\cdot\sqrt{\pi}}\exp\left\{-\frac{\left(y\sqrt{\frac{\lambda}{2}}+4-4\right)^2}{\lambda}\right\},$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}$ donc $Y \hookrightarrow N(0,1)$ (0,5)

Les moments

b) $E(Y) = 0$ (0,5)

$E(Y^2) = \operatorname{Var} Y = 1$ (0,5)

Comme $Y \hookrightarrow N(0,1) \Rightarrow Y^2 \hookrightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ donc

$\operatorname{Var}(Y^2) = E(Y^4) - E^2(Y^2) = \frac{(1/2)}{(1/2)^2} = 2 \Rightarrow E(Y^4) = 2+1 = 3$ (1)

c) $L(x_1^n,\lambda) = (\pi\lambda)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{\lambda}\sum_1^n (x_i-4)^2\right\}$ (0,5)

$\log L(x_1^n,\lambda) = -\frac{n}{2}\log\pi - \frac{n}{2}\log\lambda - \frac{1}{\lambda}\sum_1^n (x_i-4)^2$ (0,5)

$\frac{\partial}{\partial\lambda}\log L(x_1^n,\lambda) = -\frac{n}{2\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\sum_1^n (x_i-4)^2 = 0 \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{2}{n}\sum_1^n (x_i-4)^2$ (0,5)

donc $\boxed{\hat{\lambda} = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^n (X_i-4)^2}$ (1) est l'estimateur du max de vraisemblance

car $\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\log L(x_1^n,\hat{\lambda}) = \frac{n}{2\lambda^2} - \frac{2}{\lambda^3}\sum(x_i-4)^2 = \frac{n}{\lambda^3}\left[\frac{\lambda}{2} - \underbrace{\frac{2}{n}\sum(x_i-4)^2}_{\lambda}\right]$

$= \frac{n}{\lambda^3}\left[-\frac{\lambda}{2}\right] < 0$ (0,5)

d) Calculons $E(\hat{\lambda})$

$$\hat{\lambda} = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-4)^2$$

Comme $Y_i = \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\cdot(X_i-4)$

$\iff X_i - 4 = Y_i\sqrt{\frac{\lambda}{2}}$.

$$E(\hat{\lambda}) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left((X_i-4)^2\right)$$

$$= \frac{2}{n}\cdot\frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^{n}E(Y_i^2) = \frac{n\lambda}{n} = \lambda \quad 1$$

$\Rightarrow \hat{\lambda}$ est un estimateur sans biais de λ

Cherchons $Var(\hat{\lambda})$.

$$Var(\hat{\lambda}) = Var\left(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-4)^2\right) = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}Var\left((X_i-4)^2\right)$$

$$= \frac{4}{n}Var\left(\frac{\lambda}{2}Y^2\right) = \frac{4}{n}\cdot\frac{\lambda^2}{4}\cdot Var\,Y^2$$

$$= \frac{\lambda^2}{n}\left[E(Y^4) - E^2(Y^2)\right] = \frac{\lambda^2}{n}(3-1) = \frac{2\lambda^2}{n} \quad 1$$

Calculons $I_n(\lambda) = n I_1(\lambda)$.

$$f(x,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi\lambda}}\exp\left\{-\frac{(x-4)^2}{\lambda}\right\}.$$

$$\log f(x,\lambda) = -\frac{1}{2}\log(\pi\lambda) - \frac{(x-4)^2}{\lambda} \quad 0{,}5$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\log f(x,\lambda) = -\frac{1}{2\lambda} + \frac{(x-4)^2}{\lambda^2} = V_\lambda$$

$$V_\lambda^2 = \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{(x-4)^4}{\lambda^4} - \frac{(x-4)^2}{\lambda^3}$$

$$E(V_\lambda^2) = \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^4}E\left((X-4)^4\right) - \frac{1}{\lambda^3}E\left((X-4)^2\right)$$

$$+ \frac{1}{\lambda^4}\lambda^2 E(Y^4) - \frac{1}{\lambda^3}\frac{\lambda}{2}E(Y^2)$$

$$= \frac{1}{[illegible]} + \frac{1}{\lambda^4} \quad \ldots \quad \frac{1}{[illegible]} \quad I_1(\lambda) \quad 1$$

Donc $I_n(\lambda) = \frac{n}{2\lambda^2}$

On a donc $Var\,\lambda = \frac{1}{I_n(\lambda)} = \frac{1}{\frac{n}{2\lambda^2}} = \frac{2\lambda^2}{n}$

$\hat{\lambda}$ est donc efficace. (1)

c) On a trouvé que $\hat{\lambda} = \frac{2}{n}\sum_1^n (x_i-4)^2$

$\hat{\lambda} = \frac{2}{60}\left[\sum_1^{60} x_i^2 + \sum_1^{60} 16 - 8\sum_{i=1}^{60} x_i\right]$. On prend $\bar{x} = 4 = \frac{\sum x_i}{60}$ (0,5)

$\hat{\lambda} = \frac{2}{60}\left[975 + 16\times 60 - 8\times 60\times 4\right] = \frac{2\times 15}{60}$

$\boxed{\hat{\lambda} = \frac{1}{2} = 0,5}$ (0,5) la meilleure estimation possible de λ à partir de cet échantillon.

Exercice 2.

(1) On a $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum (x_i-\mu+\mu-\bar{x})^2$ (0,5)

$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left[(x_i-\mu)^2 + (\bar{x}-\mu)^2 - 2(\bar{x}-\mu)(x_i-\mu)\right]$

$nS^2 = \sum (x_i-\mu)^2 + n(\bar{x}-\mu)^2 - 2(\bar{x}-\mu)n\left[\frac{1}{n}\sum (x_i-\mu)\right]$

c.à.d $nS^2 = \sum (x_i-\mu)^2 - n(\bar{x}-\mu)^2$ (1)

Donc $\frac{nS^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2 - n\left(\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma}\right)^2$ (0,5)

(4)

On a $X_i \rightsquigarrow N(\mu, \sigma)$

$\Rightarrow \frac{X_i-\mu}{\sigma} \rightsquigarrow N(0,1)$

$\Rightarrow \left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \rightsquigarrow \Gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \chi^2_1$ (0,5)

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \rightsquigarrow \chi^2_n$ (0,5)

$\bar{X} \rightsquigarrow N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$

$\Rightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma} \rightsquigarrow N(0,1)$ (0,5)

$\Rightarrow n\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\right)^2 \rightsquigarrow \chi^2_1$ (0,5)

Donc $\frac{nS^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2_n - \chi^2_1 = \chi^2_{n-1}$ (0,5)

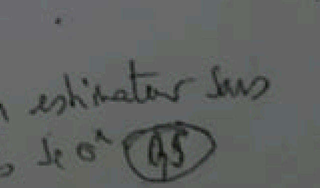
2) a) μ connue

D'après 1) on a $S'^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ est un estimateur sans biais de σ^2 (0,5)

et $T = \frac{nS'^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2_n$

On cherche a et b tq $P(a<T<b) = 1-\alpha$ et $P(T<a) = \frac{\alpha}{2}$

et $P(T>b) = \frac{\alpha}{2}$



$b = F^{-1}_{\chi^2_n}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$ (0,5) et on a

$$a < \frac{nS^2}{\sigma^2} < b$$

$$\frac{a}{nS^2} < \frac{1}{\sigma^2} < \frac{b}{nS^2}$$

$$\boxed{\frac{nS^2}{b} < \sigma^2 < \frac{nS^2}{a}}$$ 0,5

b) μ inconnue.

$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum(x_i - \bar{X})^2$ est un estimateur sans biais de σ^2. 0,5

$T = (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \bar{X}}{\sigma}\right)^2 \rightsquigarrow \chi^2_{n-1}$

On cherche a et b tq $P(a < T < b) = 1-\alpha$

de la même manière que a) on obtient 0,5

$$\frac{(n-1)S^2}{b} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{a}$$

avec $a = F^{-1}_{\chi^2_{n-1}}(\alpha/2)$ 0,5

$b = F^{-1}_{\chi^2_{n-1}}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$. 0,5

Consultation des copies le Mardi 02.06.15

Gp 1 9h30 – 10h ... que doit regarder ...