

Universit Hassiba Benbouali Chlef
Faculté des sciences exactes et informatique
Département de mathématiques

Systèmes dynamiques

Par : **Dr BOUDJEMA DJEFFAL KHALED**

22 décembre 2020

Préambule

Dans la pratique, la plus grande majorité des systèmes mécaniques des fluides, chimiques et biologiques,... étudiés conduit à des équations différentielles ordinaires non linéaires dont le comportement qualitatif constitue l'objet principal du présent cours. L'objet de ce cours est de proposer une introduction à l'étude des comportements qualitatifs des équations différentielles ordinaires (EDO). Beaucoup de résultats existent dans ce domaine : il est possible de trouver des solutions explicites à ces équations, mais elles ne sont pas nombreuses. La résolution explicite de la plupart des EDO reste encore un problème ouvert. Les mathématiciens se sont alors tournés vers une étude plus théorique (système dynamique ou bien méthode Géométrique) qui permettait de trouver des résultats sur les solutions (existence, unicité, concavité par exemple) sans les connaître explicitement.

Ce cours sera un mélange des deux parce qu'il semble nécessaire de savoir non seulement prouver que des solutions existent et que le cas échéant elles peuvent être unique mais également être capable de résoudre "à la main" certaines EDO classiques. Ce cours sera destiné aux étudiants ayant fait dans leur cursus le module : équations différentielles 2. Ce cours est structuré en quatre chapitres, où vous allez trouver des rappels des théorèmes essentiels sur lesquels se basent la théorie des équations différentielles ordinaires : Le théorème de l'existence et de l'unicité d'une solution d'une EDO, le théorème de dépendance, d'une solution d'une EDO, des conditions initiales et du paramètre lorsqu'elle en dépend, et le théorème du prolongement d'une solution d'une EDO. On rappelle aussi quelques notions de bases : champ de vecteur, point stationnaire, portrait de phase,... On présente ainsi la classification de Poincaré des points stationnaires des systèmes différentiels linéaires homogènes de \mathbb{R}^2 , et on complète par une version du théorème de Poincaré-Bendixson. On donne dans le quatrième chapitre une application sur un système de la famille des problèmes de Blasius.

Table des matières

1	Rappel sur les équations différentielles et le problème de Cauchy.	3
1.1	Différents types d'équations	3
1.1.1	EQUATION DIFFERENTIELLE AUTONOME	3
1.1.2	EQUATION DIFFERENTIELLE LINEAIRE	4
1.1.3	Solutions	4
1.2	Théorèmes d'existence et d'unicité	5
1.3	Stabilité et instabilité	7
2	Étude qualitative des systèmes linéaires.	10
2.1	Représentation graphique (portrait de phase)	10
2.1.1	Trajectoires et courbes intégrales	10
2.1.2	Champ de vecteurs	11
2.1.3	Isoclines	11
2.1.4	points d'équilibres	12
3	Étude qualitative des systèmes non-linéaires.	16
3.1	Théorèmes Poincaré-Bendixson.	18
4	Application : système de Blasius.	20
4.1	Résultats préliminaires.	20
4.2	L'étude du problème $(\mathcal{C}_{0(a,m)})$	25
4.2.1	les points singuliers.	26
4.2.2	Pour la variété centrale W_0	28
4.2.3	Le problème aux limites $(\mathcal{C}_{0(a,m)})$	31
4.3	Exercices corrigés.	50

Chapitre 1

Rappel sur les équations différentielles et le problème de Cauchy.

Qu'est-ce que c'est une équation différentielle ordinaire ?

Définition 1.0.1 Une équation différentielle ordinaire, également notée EDO, d'ordre n est une relation entre la variable réelle t , une fonction inconnue $t \mapsto x(t)$ et ses dérivées x', x'', \dots, x^n au point t définie par

$$F(t, x', x'', \dots, x^{(n-1)}, x^{(n)}) = 0 \quad (1.1)$$

où F n'est pas indépendante de sa dernière variable $x^{(n)}$. On prendra t dans un intervalle I de \mathbb{R} (I peut être \mathbb{R} tout entier).

La solution x en général sera à valeurs dans \mathbb{R}^N , $N \in \mathbb{N}^*$ où N sera le plus souvent égal à 1, 2 ou 3. On dit que cette équation est scalaire si F est à valeurs dans \mathbb{R} .

1.1 Différents types d'équations

1.1.1 EQUATION DIFFERENTIELLE AUTONOME

Définition 1.1.1 On appelle équation différentielle autonome d'ordre n toute équation de la forme

$$x^{(n)} = f(t, x', x'', \dots, x^{(n-1)}) \quad (1.2)$$

Autrement dit, f ne dépend pas explicitement de t .

Remarque 1.1.1 Les équations autonomes sont très importantes quand on cherchera des solutions stationnaires ainsi que leur stabilité.

Exemple 1.1.1 *Equation du premier ordre sous la forme normale :*

$$x' = f(t; x).$$

Equation du premier ordre autonome :

$$x' = f(x).$$

1.1.2 EQUATION DIFFÉRENTIELLE LINEAIRE

Définition 1.1.2 *Une EDO de type (1.1) d'ordre n est linéaire si elle est de la forme*

$$a_n(t)x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = g(t); \quad (1.3)$$

avec tous les $x^{(i)}$ de degré 1 et tous les coefficients dépendant au plus de t .

Exemple 1.1.2 *Dire si les équations différentielles suivantes sont linéaires, ou non linéaires, et donner leur ordre (on justifiera la réponse) :*

1. $(x - t)dt + 4tdx = 0$
2. $x'' - 2x' + x = 0$
3. $(1 - x)x' + 2x = \exp(t)$
4. $\frac{d^3x}{dt^3} + \sin x = 0$
5. $\frac{d^4x}{dt^4} + t\frac{d^2x}{dt^2} - 5x = 0$

1.1.3 Solutions

Définition

Définition 1.1.3 (*SOLUTION*)

On appelle solution (ou intégrale) d'une équation différentielle d'ordre n sur un certain intervalle I de \mathbb{R} , toute fonction x définie sur cet intervalle I , n fois dérivable en tout point de I et qui vérifie cette équation différentielle sur I .

On notera en général cette solution $(x; I)$.

Si I contient sa borne inférieure notée a (respectivement sa borne supérieure b), ce sont des dérivées à droite (respectivement à gauche) qui interviennent au point $t = a$ (respectivement $t = b$).

Intégrer une équation différentielle consiste à déterminer l'ensemble de ses solutions.

Définition 1.1.4 (*COURBE INTEGRALE-ORBITE*)

On appelle courbe intégrale l'ensemble des points $(t; x(t))$ où t parcourt I . Autrement dit, si x est à valeurs dans \mathbb{R}^N , $N \in \mathbb{N}^*$, la courbe intégrale est un ensemble de points de \mathbb{R}^{N+1} .

On appelle orbite, l'ensemble des points $x(t)$ où t parcourt I : c'est un ensemble de points de \mathbb{R}^N .

L'espace \mathbb{R}^N où les solutions prennent leurs valeurs s'appelle espace de phases.

Interprétation géométrique : Dans \mathbb{R}^3 ($N = 2$) par exemple, une courbe intégrale notée Γ et M un point de cette courbe de coordonnées $x = x_1(t)$, $y = x_2(t)$, et $z = t$. On note $X(t) = (x_1(t); x_2(t))_t$. Le vecteur tangent à Γ en M a pour composante $x'_1(t); x'_2(t)$, et 1. C'est à dire $f_1(t; X(t)), f_2(t; X(t))$ et 1 (en notant f_1 et f_2 les composantes de f ici). Pour une telle équation l'espace des phases est \mathbb{R}^2 , une orbite a pour équation $x = x_1(t), y = x_2(t)$ et le vecteur tangent en un point a pour composantes $f_1(t; X(t))$ et $f_2(t; X(t))$.

Remarque 1.1.2 *Il arrive fréquemment qu'on puisse déterminer les orbites sans pouvoir préciser les courbes intégrales. Dans de nombreuses situations (mais ce n'est pas exclusif), t peut apparaître comme le temps et les orbites comme des trajectoires (que l'on appelle également chroniques).*

Solutions maximales et globales

Définition 1.1.5 (*PROLONGEMENT*) Soient $(x; I)$ et $(x^\sim; I^\sim)$ deux solutions d'une même équation différentielle. On dira que $(x^\sim; I^\sim)$ est un prolongement de $(x; I)$ si $I \subset I^\sim$ et $x^\sim|_I = x$.

Définition 1.1.6 (*SOLUTION MAXIMALE*) Soient I_1 et I_2 , deux intervalles sur \mathbb{R} , tels que $I_1 \subset I_2$. On dit qu'une solution $(x; I_1)$ est maximale dans I_2 si et seulement si x n'admet pas de prolongement $(x^\sim; I^\sim)$ solution de l'équation différentielle telle que $I_1 \subsetneq I^\sim \subset I_2$ (on verra même plus tard que I_1 est nécessairement ouvert).

Définition 1.1.7 (*SOLUTION GLOBALE*) Soit I un intervalle inclus dans \mathbb{R} . Une solution $(x; I)$ est dite globale dans I si elle est définie sur l'intervalle I tout entier.

1.2 Théorèmes d'existence et d'unicité

U désigne toujours un ouvert non vide de \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}^*$ contenant 0 et I un intervalle non vide de \mathbb{R} , non borné à droite. Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue, on lui associe le système :

$$x' = f(x). \quad (1.4)$$

Soit $f : I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue, on lui associe le système :

$$x' = f(t; x). \quad (1.5)$$

$x(t, t_0, x_0)$ désigne une solution $x(t)$ du système (1.4), ou du système (4.1) telle que $x(t_0) = x_0$.

Soient $A \subset U$, $\epsilon > 0$, on définit la boule

$$B(x, \epsilon) = \{y \in U; \|y - x\| < \epsilon\}$$

et

$$B_\epsilon(A) = \cup_{x \in A} B(x, \epsilon)$$

l'enveloppe de A .

Théorème 1.2.1 (d'Arzela Péano) *On considère le système (4.1). Alors, par tout point $(t_0, x_0) \in I \times U$ passe au moins une solution maximale $x(t, t_0, x_0)$ définie sur $J \subset I$.*

Exemple 1.2.1 *L'équation $\frac{dx}{dt} = 3x^{2/3}$ où le second membre est continu, avec la condition $x(0) = 0$, admet les solutions $x = t^3$ et $x = 0$ qui s'annulent toutes les deux en $t = 0$ ainsi que les fonctions qui sont nulles dans l'intervalle $[0, a]$ et qui prennent la valeur $(t - a)^3$ pour $t > a$.*

Définition 1.2.1 (lipschitzienne) *Soit $f : I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, on dit que*

1. *f est localement lipschitzienne en la première variable, si pour tout (t_0, x_0) dans $I \times U$, il existe un voisinage V de (t_0, x_0) dans $I \times U$ et une constante $c > 0$ telle que :*

$$\forall ((t, y), (t', y)) \in V^2, \|f(t, y) - f(t', y)\| \leq c\|t - t'\|.$$

On note $Lip_t(I \times U)$ l'ensemble des fonctions localement lipschitziennes en la première variable.

2. *f est localement lipschitzienne en la deuxième variable, si pour tout (t_0, x_0) dans $I \times U$, il existe un voisinage V de (t_0, x_0) dans $I \times U$ et une constante $c > 0$ telle que :*

$$\forall ((t, y), (t', y)) \in V^2, \|f(t, y) - f(t', y)\| \leq c\|y - y'\|.$$

On note $Lip_y(I \times U)$ l'ensemble des fonctions localement lipschitziennes en la deuxième variable.

3. *On note $Lip_{t,y}(I \times U)$ l'ensemble des fonctions localement lipschitziennes en la première et la deuxième variable.*

Théorème 1.2.2 (de Cauchy-Lipschitz) *Soit $f : I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continue, $f \in Lip_y(I \times U)$, on considère le système (4.1). Alors, pour tout point $(t_0, x_0) \in I \times U$ passe une seule solution maximale $x(t, t_0, x_0)$ définie sur $J \subset I$.*

Exemple 1.2.2 Pour chacun des problèmes de Cauchy suivants, justifier l'existence d'une unique solution locale et calculer la solution :

1. $y'(t) = 4 + y(t), y(0) = 1$

2. $y'(t) = y(t)^{\frac{8}{3}}, y(0) = 1$

Solution.

1. Il suffit de vérifier les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz. La fonction $y \mapsto f(y) = 4 + y$ est de classe C^1 pour tout $y \in \mathbb{R}$ et ainsi elle est localement lipschitzienne. Calculons l'unique solution du problème de Cauchy. Car $4 + y(t) \neq 0$ au voisinage de $y_0 = 1$, par séparation des variables l'on trouve : $y(t) = 5e^t - 4$.
2. Il suffit de vérifier les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz. La fonction $y \mapsto f(y) = y^{\frac{8}{3}}$ est de classe C^1 pour tout $y \neq 0$ et ainsi elle est localement lipschitzienne au voisinage de $y_0 = 1$. Calculons l'unique solution du problème de Cauchy. Car $y \neq 0$ au voisinage de $y_0 = 1$, par séparation des variables l'on trouve la seule solution du problème de Cauchy est la fonction :

$$y(t) = \left[-\frac{5}{3}t + 1 \right]^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{(-\frac{5}{3}t + 1)^{\frac{3}{5}}}$$

avec $t > \frac{3}{5}$. Observer que la fonction elle même existe pour tout $t \neq \frac{3}{5}$ mais elle est solution du problème uniquement dans l'intervalle $\{t \in \mathbb{R} \text{ t.q. } t > \frac{3}{5}\}$ (intervalle contenant la condition initiale t_0).

1.3 Stabilité et instabilité

Définition 1.3.1 (-pratiquement stable)

Soit $D_0 \subset D \subset U$ non vides, $(T_s, T_f) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+$ tels que $T_s < T_f$, K un compact non vide de U , on dit que K est (I, T_s, T_f, D_0, D) -pratiquement stable pour le système (4.1), si pour tout $x_0 \in D_0$ et $t_0 \in I$, on a :

1. $x(t, t_0, x_0)$ est définie sur $[t_0, t_0 + T_f]$,
2. $\forall t \in [t_0, t_0 + T_f], x(t, t_0, x_0) \in D$,
3. $\forall t \in [t_0 + T_s, t_0 + T_f], x(t, t_0, x_0) \in K$.

De plus, K est (I, T_s, T_f, D_0, D) -pratiquement stable en temps fini si K est $(I, T_s, +\infty, D_0, D)$ -pratiquement stable.

Définition 1.3.2 (*relativement stable*)

Soit K un compact non vide de U , on dit que K est stable pour le système (4.1) si pour tout $\epsilon > 0$, et $t_0 \in I$, il existe $\delta(\epsilon, t_0) > 0$ tel que :

$$x_0 \in B_{\delta(\epsilon, t_0)} \Rightarrow \begin{cases} x(t, t_0, x_0) \text{ est définie pour } t \geq t_0 \\ x(t, t_0, x_0) \in B_\epsilon(K) \end{cases}$$

Exemple 1.3.1 On considère le système :

$$x' = (6t \sin(t) - 2t)dt x, t \in \mathbb{R}$$

Il admet des solutions de la forme :

$$\begin{aligned} x(t, t_0, x_0) &= x_0 \exp \left[\int_{t_0}^t (6s \sin(s) - 2s) ds \right] \\ &= x_0 \exp [6 \sin(t) - 6t \cos(t) - t^2 - 6 \sin(t_0) + 6t_0 \cos(t_0) + t_0^2]. \end{aligned}$$

On voit que le terme en exponentielle est borné pour tout $t \geq t_0$ par une constante $c(t_0)$ qui dépend seulement de t_0 . Ainsi, on a :

$$|x(t, t_0, x_0)| \leq |x_0| c(t_0), \quad \forall t \geq t_0$$

Pour tout $\epsilon \geq 0$, si l'on choisit $\delta = \frac{\epsilon}{c(t_0)}$, on voit que 0 est stable.

Définition 1.3.3 Soit K un compact non vide de U , on considère le système (4.1) si K n'est pas stable pour le système (4.1), on dit que K est instable pour le système (4.1).

Définition 1.3.4 (*attractif*)

Soit K un compact non vide de U , on dit que K est attractif pour le système (4.1) si pour tout $t_0 \in I$, il existe $\delta(t_0) > 0$ tel que :

$$x_0 \in B_{\delta(t_0)} \Rightarrow \begin{cases} x(t, t_0, x_0) \text{ est définie pour } t \geq t_0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} x(t, t_0, x_0) = 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty \end{cases}$$

Définition 1.3.5 (*asymptotiquement stable*)

Soit K un compact non vide de U , on considère le système (4.1). On dit que K est asymptotiquement stable pour le système (4.1) si :

1. K est stable pour le système (4.1),
2. K est attractif pour le système (4.1).

Définition 1.3.6 (globalement asymptotiquement stable)

Soit K un compact non vide de U , on considère le système (4.1). On dit que K est globalement asymptotiquement stable pour le système (4.1) si :

1. K est stable pour le système (4.1),
2. pour tout $t_0 \in I$, et $x_0 \in I$, $x(t, t_0, x_0)$ est définie pour $t \geq t_0$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, t_0, x_0) = 0$ quand $t \rightarrow \infty$.

Exemple 1.3.2 On considère le système :

$$x' = \frac{x}{1+t}, t \geq 0$$

Il admet des solutions de la forme :

$$x(t, t_0, x_0) = x_0 \exp \left[\int_{t_0}^t \left(\frac{-1}{1+s} \right) ds \right] = x_0 \frac{1+t_0}{1+t}$$

On voit ainsi que 0 est globalement asymptotiquement stable.

Chapitre 2

Étude qualitative des systèmes linéaires.

2.1 Représentation graphique (portrait de phase) .

Soit le problème $x' = f(t, x)$, $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

2.1.1 Trajectoires et courbes intégrales

Les courbes intégrales du problème sont les images des arcs paramétrés

$$t \in I \rightarrow (t, x(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Ce sont les courbes représentatives des solutions de l'équation différentielle (représentées dans l'espace \mathbb{R}^{n+1}).

1. Si le théorème de Cauchy-Lipschitz est vérifié, alors les courbes intégrales ne se coupent pas.
2. Les trajectoires dans le champ de phase sont les courbes $x(I)$ pour x solution de l'équation différentielle. Dans le cas des systèmes autonomes, les trajectoires s'appellent des orbites.
3. Pour le système autonome les trajectoires ne se coupent pas.

Lorsque le système est dans \mathbb{R}^2 , il est possible de tracer les trajectoires des courbes intégrales des solutions. On peut avoir une vision du comportement des trajectoires des solutions sans résoudre le système, lorsqu'il est possible de tracer le champ de vecteurs correspondant. En dimension 2, on change habituellement de notation pour revenir à la notion standard (x, y) .

Donc on considère le système explicite autonome :

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \quad (2.1)$$

avec : $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Dans ce cas les courbes intégrales sont des courbes en dimension 3 qui sont difficiles de les interpréter. En revanche les trajectoires dans le plan de phase sont des courbes dans le plan (x, y) (l'ensemble des points du plan $\{(x(t), y(t)); t \in R\}$). et pour un système autonome avec l'unicité de la solution, elles ne se coupent pas. Dans le cas contraire les trajectoires sont difficiles à interpréter.

2.1.2 Champ de vecteurs

Définition 2.1.1 . *L'application*

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (f(x, y), g(x, y))$$

définit un champ de vecteurs.

Pratiquement, on peut tracer le champ de vecteurs dans le plan de phases qui détermine le vecteur vitesse d'un point sur la trajectoire, on trace en chaque point d'une grille du plan (x, y) un petit segment correspondant à la vitesse en ce point, soit le vecteur défini par $\begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}$. A noter qu'il est inutile de résoudre le système pour réaliser ce tracé. Ensuite, on pourra tracer par dessus des trajectoires $x(t), y(t)$.

2.1.3 Isoclines

On définit les ensembles de \mathbb{R}^2 sur lesquels s'annulent les composantes x' et y' du système (2.1).

Définition 2.1.2 .(Isoclines horizontale) *On appelle isocline horizontale l'ensemble I des points (x, y) tels que $g(x, y) = 0$. Soit $M = (x, y)$ un point de I . Si $f(x, y) \neq 0$, alors la trajectoire passant par M a une tangente horizontale. Elle est parcourue de gauche à droite si $f(x, y) > 0$, de la droite vers la gauche si $f(x, y) < 0$. L'ensemble I est constitué en général d'une ou de plusieurs courbes, qui partagent le plan en régions dans lesquelles le signe de $g(x, y)$ reste constant.*

Définition 2.1.3 .(Isocline verticale) *On appelle isocline horizontale l'ensemble J des points (x, y) tels que $f(x, y) = 0$. Soit $M = (x, y)$ un point de J . Si $g(x, y) \neq 0$, alors la trajectoire passant par M a une tangente verticale. Elle est parcourue de bas en haut si $g(x, y) > 0$, de de haut en bas si $g(x, y) < 0$. L'ensemble J est constitué en général d'une ou de plusieurs courbes, qui partagent le plan en régions dans lesquelles le signe de $f(x, y)$ reste constant.*

2.1.4 points d'équilibres

Définition 2.1.4 . Soit l'équation $X' = F(X)$ où F est une application de $U \subset \mathbb{R}^n$ vers \mathbb{R}^n

Un point X_0 est appelé point d'équilibre « de repos ou stationnaire » si $F(X_0) = 0$. $X(t) = X_0$ est donc une solution de l'équation $X' = F(X)$. Pour un système physique cela correspond à un point d'équilibre. X_0 est appelé aussi zéro ou point singulier du champ de vecteurs F .

Exemple 2.1.1 Les points stationnaires du système

$$\begin{cases} x' = \sin x \\ y' = \sin y \end{cases} \quad (2.2)$$

sont les points de coordonnées $x = k\pi$ et $y = m\pi$, où k et m sont des entiers relatifs.

Pour mieux comprendre les Points stationnaires on s'occupe par un système différentiel de dimension deux sous la forme (2.1). Considérons le système différentiel non linéaire en dimension deux (2.1), vérifiant les hypothèses du théorème d'existence et d'unicité des solutions.

Remarque 2.1.1 . Le point singulier du système (2.1) (La fonction constante) $S(t) = (x_0, y_0)$ dont la dérivée est identiquement nulle, est une solution du système (2.1). Autrement dit, le point $M = (x_0, y_0)$ est une trajectoire du système (2.1). Puisque par chaque point du plan passe une trajectoire de (2.1) et une seule, les autres trajectoires ne passent pas par le point M . D'où l'appellation du point stationnaire du système (2.1), puisque la solution qui passe par ce point y reste, y stationne.

le cas du Systèmes linéaires homogènes.

Portrait de phase.

Nous allons étudier la façon dont les trajectoires du système () s'organisent dans le plan et notamment comment elles se comportent près des points où $x'(t)$ et $y'(t)$ s'annulent simultanément, c'est-à-dire près des points stationnaires.

Définition 2.1.5 . On appelle portrait de phase d'un système différentiel l'ensemble de ses trajectoires.

Dans la pratique, tracer le portrait de phase d'un système de dimension deux, c'est tracer dans le plan (x, y) , suffisamment de trajectoires pour que l'on puisse les imaginer toutes.

Soit un système d'équations différentielles linéaire dans \mathbb{R}^2 :

$$\dot{x} = Ax = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} x \quad (2.3)$$

où A est une matrice carrée d'ordre deux, à coefficients constants dans \mathbb{R} .

L'équation (2.3) s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad (2.4)$$

Le point $(0,0)$ est toujours un point stationnaire des systèmes différentiels linéaires homogène du plan. Nous allons étudier, selon une classification due à Henri Poincaré, le type des portraits de phase du système linéaire (2.4) en fonction du type des valeurs propres de la matrice A correspondantes.

On a :

$$P_A(\mu) = \det(A - \mu I) = \mu^2 - \text{tr}(A)\mu + \det(A)$$

donc :

$$\Delta = \text{tr}^2(A) - 4\det(A)$$

$1^{er} cas$: $\Delta < 0$ la matrice A admet deux valeurs propres complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$.

La nature du point singulier est :

1. Si $\text{tr}(A) > 0$ ou $\alpha > 0$ le point singulier est un foyer instable Fig (1).
2. Si $\text{tr}(A) < 0$ ou $\alpha < 0$ le point singulier est un foyer stable Fig (2).
3. Si $\text{tr}(A) = 0$ ou $\alpha = 0$ le point singulier est un centre Fig (3).

$2^{eme} cas$: $\Delta > 0$, A admet deux valeurs propres réelles distinctes μ_1 et μ_2 , donc A est diagonalisable :

admet deux valeurs propres réelles distinctes μ_1 et μ_2 , donc A est diagonalisable : $A = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$

($\text{tr}(A) = \mu_1 + \mu_2$ et $\det A = \mu_1\mu_2$) : La nature du point singulier est :

1. $\det A < 0$: les valeurs propres sont de signes différents et le point singulier est un point selle Fig (4).
2. $\det A > 0$ et $\text{tr}(A) > 0$ les valeurs propres sont positives et le point singulier est un nœud instable Fig (5).
3. $\det A > 0$ et $\text{tr}(A) < 0$ les valeurs propres sont négatives et le point singulier est un nœud stable Fig (6).
4. $\det A = 0$ une des valeurs propres par exemple μ_1 est nulle (cela est un cas dégénéré) selon le signe de μ_2 on a les portraits de phases.

3^{eme}cas : $\Delta = 0$, A possède une valeur propre double $\mu \in \mathbb{R}$, si A est diagonalisable on est ramené à la situation, A est semblable à la matrice μI_2 ; en écartant le cas trivial $\mu = 0$ on obtient deux cas :

1. $\mu < 0$ le point singulier est un nœud stable .
2. $\mu > 0$ le point singulier est un nœud instable Fig (7).

Si A est non diagonalisable alors dans ce cas on a : si

- a) $\mu > 0$ le point singulier est un nœud dégénéré instable.
- b) $\mu < 0$ le point singulier est un nœud dégénéré stable Fig (8).

Exemple 2.1.2 Soit le système

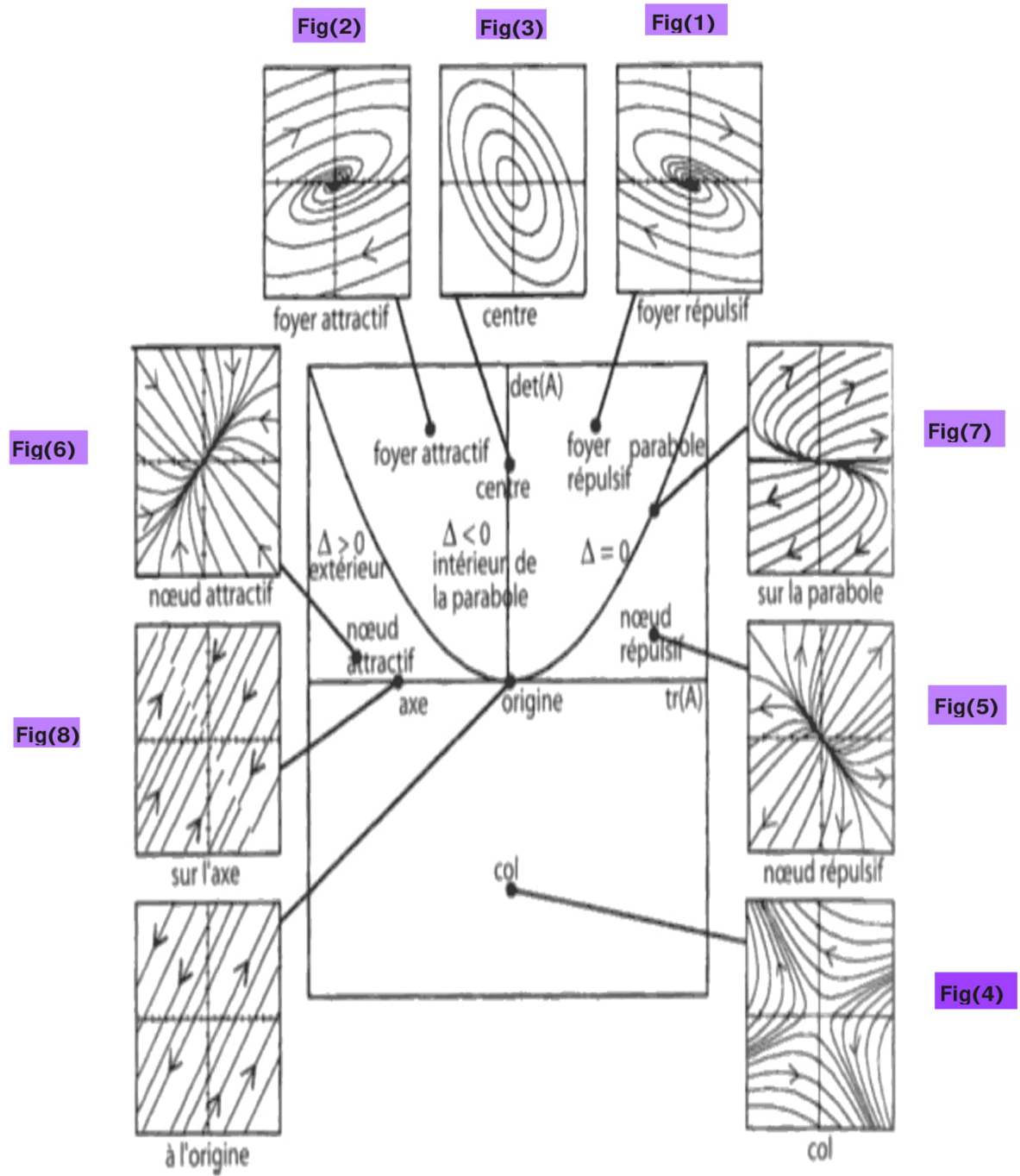
$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = \frac{1}{2}y \end{cases}$$

L'origine est un point singulier du système. Les valeurs propres de la matrice associée sont 2 et (1/2). L'origine est donc un noeud instable.

Exemple 2.1.3 Soit le système

$$\begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = x - y \end{cases}$$

L'origine est un point singulier du système. Les valeurs propres de la matrice associée sont $(-1 + i\sqrt{2})$ et $(-1 - i\sqrt{2})$. L'origine est donc un foyer attractif.



Chapitre 3

Étude qualitative des systèmes non-linéaires.

F étant de classe C^1 , on note F_X la matrice Jacobienne $n \times n$ de F et son élément (i, j) par $\frac{\partial F_i}{\partial X_j}$, le développement de Taylor de F autour du point d'équilibre X_0 donne :

$$F(X) = F(X_0) + F_X(X_0)(X - X_0) + \|X - X_0\| \varepsilon(X - X_0)$$

avec $\lim_{X \rightarrow X_0} \varepsilon(X - X_0) = 0$.

Le fait que $F(X_0) = 0$, on obtient :

$$X' = F_X(X_0)(X - X_0) + \|X - X_0\| \varepsilon(X - X_0)$$

Si on note $\zeta = X - X_0$, on peut ainsi écrire le système linéarisé autour de X_0 sous la forme :

$$\zeta' = F_X(X_0)\zeta$$

On aurait pu linéariser autour d'un autre point autre que X_0 , mais c'est la linéarisation autour de ce dernier point qui va nous servir pour l'étude de la stabilité.

Théorème 3.0.1 . (Grobman ; Hartman ; 1967)

Soit $\dot{X} = F(X)$; $F \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ un système d'équations différentielles sur \mathbb{R}^d supposons que $F(0) = 0$ et $A = F_X(0)$ (la matrice jacobienne de F au point 0) n'admettant pas de valeurs propres de partie réelle nulle.

Alors il existe U et V deux voisinages de 0 dans \mathbb{R}^d et un homéomorphisme $h : U \rightarrow V$ qui envoie les trajectoires de $\dot{X} = F(X)$ sur celles de $\dot{X} = AX$ en préservant le sens du parcours des trajectoires, c'est-à-dire :

Si $X(t, a) \in U$, alors $e^{tA}h(a) \in V$ où $x(t, a) = (h^{-1} \circ e^{tA} \circ h)(a)$

Le théorème affirme sous certaines conditions qu'au voisinage d'un point X_0 tel que $F(X_0) = 0$ le système d'équations différentielles $\dot{X} = F(X)$ est équivalent au système linéarisé $\dot{X} = F_X(X_0)(X - X_0)$.

Définition 3.0.1 . On appelle séparatrice toute solution qui est adhérente à un ou plusieurs points d'équilibre et qui sépare des régions où les trajectoires ont des comportements différents.

Définition 3.0.2 . Variétés invariantes.

La variété stable W^s d'un point d'équilibre a du système $x' = f(x)$ est une variété différentiable qui est tangente au sous espace stable E^s (sous espaces vectoriels caractéristiques associés E_λ , λ les valeurs propres de la matrice A du système linéaire $x' = Ax$ dans \mathbb{R}^n , $E^s = \bigoplus_{\text{Re}\lambda < 0} E_\lambda$) du linéarisé en a et telle que toutes les solutions issues de W^s tendent vers a quand $t \rightarrow +\infty$. De même la variété instable W^u du point d'équilibre a est une variété différentiable qui est tangente au sous espace instable E^u du linéarisé en a avec $E^u = \bigoplus_{\text{Re}\lambda > 0} E_\lambda$ et telle que toutes les solutions issues de W^s tendent vers a quand $t \rightarrow -\infty$.

Définition 3.0.3 Variété centrale.

la Variété centrale W^c est une variété tangente au sous espace central E^c avec ($E^c = \bigoplus_{\text{Re}\lambda=0} E_\lambda$). Le comportement asymptotique des orbites contenues dans la variété centrale n'est pas déterminé par le linéarisé du système en a . Il y a unicité de la variétés stable W^s et W^u instable, par contre il y a une infinité de variétés centrales. Pour plus de détails voir [2].

Théorème 3.0.2 (Théorème de la variété centrale).

Soit un système admettant l'origine comme point d'équilibre. Soient E^s , E^u et E^c les sous-espaces stable, instable et central du linéarisé du système en 0. Alors le système admet des variétés invariantes W^s, W^u et W^c passant par le point 0 et tangentes respectivement aux sous-espaces E^s , E^u et E^c . Les solutions issues de W^s (resp W^u) tendent exponentiellement vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$ (resp. $t \rightarrow -\infty$). Le comportement des solutions dans la variété W^c est déterminé par les termes non linéaires.

Définition 3.0.4 . Ensemble invariant : un ensemble $S \subset X$ est dit invariant par le flot φ_t sur X (ou bien par le système $x' = f(x)$ correspondant) si pour tout $x \in S$ et $t \in \mathbb{R}$ on a $\varphi_t(x) \in S$. Si S vérifie la propriété $\varphi_t(x) \subseteq S$ pour tout $x \in S$ et tout $t > 0$ alors on dit que S est positivement invariant. Si S est invariant et $x \in S$ alors l'orbite $\gamma(x)$ est inclus dans S . Par conséquent un ensemble invariant est une réunion d'orbites. On obtient des ensembles invariants de la manière suivante. Soit $Z : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On note

$$Z'(x) = \frac{\partial Z}{\partial x}(x) \cdot f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\partial Z}{\partial x_i} f_i(x)$$

La dérivée de la fonction Z dans la direction du champ de vecteurs f cette dérivée s'appelle aussi la dérivée de Lie de Z et se note $L_f Z$.

Proposition 3.0.1 . S'il existe une fonction $Z : X \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $Z'(x) = \alpha(x)Z(x)$ où $\alpha : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue alors les sous-ensembles de X définis par $Z > 0$, $Z < 0$, $Z = 0$ sont invariants par le système $x' = f(x)$

3.1 Théorèmes Poincaré-Bendixson.

Définition 3.1.1 . Soit l'équation $y' = f(y)$.

$C^+ = \{y = y_+(t) : y_+ \text{ la solution définie sur le demi intervalle } t \geq t_0\}$

$\Omega(C^+)$ l'ensemble des ω -limites « les points y_0 tel qu'il existe une suite : $t_0 < t_1 < \dots$ avec $t_n \longrightarrow +\infty$ et $y(t_n) \longrightarrow y_0, n \longrightarrow +\infty$.

$C^- = \{y = y_-(t) : y_- \text{ la solution définie sur le demi intervalle } t \leq t_0\}$.

$A(C^-)$ L'ensemble des α -limites « les points y_0 tel qu'il existe une suite : $t_0 > t_1 > \dots$ avec $t_n \longrightarrow -\infty$ et $y(t_n) \longrightarrow y_0, n \longrightarrow +\infty$.

Définition 3.1.2 . Une courbe de Jordan J est défini comme une image topologique d'un cercle, en d'autres termes J est un ensemble de points $y = y(t)$ avec $a \leq t \leq b$ où $y = y(t)$ est continue, $y(a) = y(b)$, et $y(s) \neq y(t)$ pour $a \leq s < t < b$.

Théorème 3.1.1 . Soit $f(y) = f(y_1, y_2)$ continue sur un ensemble ouvert du plan E et $C^+ : y = y_+(t)$ solution de :

$$y' = f(y) \text{ pour } t \geq 0 \quad (i)$$

définies dans un compact dans E , telle que $y_+(t_1) \neq y_+(t_2)$ pour $0 \leq t_1 < t_2 < \infty$ et si de plus $\Omega(C^+)$ contient un nombre fini n de points stationnaires de l'équation (i) alors on a :

Si $n = 0$ alors $\Omega(C^+)$ est un cycle..

Si $n = 1$ c'est le cas du corollaire 1.1(voir [10] p146)

Si $n > 1$ et $\Omega(C^+)$ n'est pas réduit à un point, alors $\Omega(C^+)$ est constitué des points stationnaires $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ et un nombre fini ou infini d'orbites :

$C_0 : y = y_0(t) ; -\infty \leq \alpha_- < t < \alpha_+ \leq +\infty$ qui ne traverse pas les points stationnaires mais $y_0(\alpha_{+,-}) = \lim_{t \rightarrow \alpha_{+,-}} y(t)$, existe et différent de l'ensemble $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$.

Il est possible que $y_0(\alpha_+) = y_0(\alpha_-)$.

Il n'est pas affirmative que (α_-, α_+) sont les intervalles maximaux d'existence de $y = y_0(t)$, mais quand les conditions initiales d'unicité déterminent la solution de (i) donc la seule solution de (i) qui traverse le point stationnaire y_k c'est $y_k = y(t)$ alors $-\infty = \alpha_-$ et $+\infty = \alpha_+$ (voir (lemme II 3.1 [10])).

preuve . voir [10].

Théorème 3.1.2 . Soit $f(y) = f(y^1, y^2)$ une fonction continue sur un ouvert plan E et $C^+ : y = y_+(t)$ solution de (i) pour $t \geq 0$ dans une fermeture compact dans E .

Alors $\Omega(C^+)$ contient une orbite fermée (périodique) $C_p : y = y_p(t)$ solution de (i) qui peut être réduite à un point stationnaire $y_0 \equiv y_p(t)$.

preuve . voir [10].

Théorème 3.1.3 . Soit f une fonction continue sur un ouvert plan E simplement connexe où $f(y) \neq 0$ et $y = y(t)$ la solution de (i) sur l'intervalle maximal d'existence $]w_-, w_+[$. Alors $y = y(t)$ ne reste dans aucun ensemble compact E_0 de E quand $t \rightarrow w_-$ ou $t \rightarrow w_+$.

preuve . Si $C^+ : y = y(t) ; t_0 \leq t < w_+$ est dans un ensemble compact E_0 de E pour un certain t_0 , alors $w_+ = \infty$ (voir le théorème II 3.1 dans [10]) et $\Omega(C^+)$ contient une solution périodique $y = y_p(t)$ (voir théorème 3.1.1).

Comme $f \neq 0$ sur E , $y_p(t)$ ne peut se réduire à une constante sur aucun t -intervalle.

Soit t_1 le premier $t > t_0$ où $y_p(t_1) = y_p(t_0)$, alors $y = y_p(t)$ pour $t_0 \leq t < t_1$ est une courbe de Jordan J .

Donc l'équation (i) a une solution périodique $y = y_0(t)$ de période $t_1 - t_0$ tel que :

$y_0(t) \equiv y_p(t)$ pour $t_0 \leq t < t_1$ et comme E est simplement connexe l'intérieur de $J : y = y_0(t)$ pour $t_0 \leq t < t_1$ est contenu dans E et du théorème 3.1 (voir [10] p150) cet intérieur contient des points stationnaires, donc contradiction avec $f(y) \neq 0$. d'où le résultat.

Chapitre 4

Application : système de Blasius.

Dans ce chapitre on va appliquer la méthode du Système dynamique (géométrique) sur un problème de type convection libre (Blasius).

4.1 Résultats préliminaires.

Dans cette section, on rappelle les théorèmes, lemmes et propositions utilisés pour la résolution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{ll} f''' + \frac{m+1}{2} f f'' - m f'^2 = 0 & t \in \mathbb{R}^+ \quad (1') \\ f(0) = a; a \in \mathbb{R} & (2') \\ f'(0) = 1 & (3') \\ f'(\infty) = 0 & (4') \end{array} \right. \quad (\mathcal{C}_{0(a,m)})$$

Proposition 4.1.1 . Si f vérifie l'équation (1') alors on a :

$$\left(f'' e^{\frac{m+1}{2} F} \right)' = m e^{\frac{m+1}{2} F} f'^2 \quad (4.1)$$

Où F est une primitive de f . les fonctions f' et f'' ne peuvent pas s'annuler au même point sans être identiquement nulles.

preuve .

$$\left(f'' e^{\frac{m+1}{2} F} \right)' = f''' e^{\frac{m+1}{2} F} + \frac{m+1}{2} f f'' e^{\frac{m+1}{2} F}$$

et de (1') on a :

$$\begin{aligned} f''' + \frac{m+1}{2} f f'' - m f'^2 = 0 & \implies f''' + \frac{m+1}{2} f f'' = m f'^2 \\ & \implies e^{\frac{m+1}{2} F} (f''' + \frac{m+1}{2} f f'') = m e^{\frac{m+1}{2} F} f'^2 \end{aligned}$$

Lemme 4.1.1 . Soit f une solution de (1') sur un intervalle I de \mathbb{R} .

Si $m < 0$ et s'il existe $t_0 \in I$ tel que : $f''(t_0) \leq 0$, alors $\forall t > t_0 : f''(t) < 0$.

Si $m > 0$ et s'il existe $t_0 \in I$ tel que : $f''(t_0) \geq 0$, alors $\forall t > t_0 : f''(t) > 0$.

preuve . L'intégration de (4.1) entre t et t_0 donne :

$$f'' e^{\frac{m+1}{2}F} = f''(t_0) e^{\frac{m+1}{2}F(t_0)} + m \int_{t_0}^t e^{\frac{m+1}{2}F(s)} f'^2(s) ds$$

d'où le résultat du lemme.

Lemme 4.1.2 . Si f est une solution de l'équation (1') définie sur un intervalle borné $[0, T[$ alors :

$$\lim_{t \rightarrow T} |f(t)| = \lim_{t \rightarrow T} |f'(t)| = \lim_{t \rightarrow T} |f''(t)| = +\infty.$$

preuve . De la continuité des solutions de l'équation (1') et puisque la solution f n'est pas globale car $T < +\infty$ alors : du (Théorème 3.1.3) on a $\lim_{t \rightarrow T} \{|f(t)| + |f'(t)| + |f''(t)|\} = +\infty$. (voir [10] et [8])

Exploitant une idée qui se trouve dans [8] pour démontrer que f'' est non bornée.

Si f'' serait bornée quand t tend vers T , alors f' et f seraient aussi bornées.

Supposons que $f''(t)$ est bornée donc :

$$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 : a \leq f''(t) \leq b \implies a(t - t_0) \leq \int_{t_0}^t f''(t) dt \leq b(t - t_0) \quad (***)$$

$$\begin{aligned} (**) & \implies a(t - t_0) \leq f'(t) - f'(t_0) \leq b(t - t_0) \\ & \implies \lim_{t \rightarrow T} a(t - t_0) \leq \lim_{t \rightarrow T} (f'(t) - f'(t_0)) \leq \lim_{t \rightarrow T} b(t - t_0) . \end{aligned}$$

donc f' est bornée même chose pour f c'est-à-dire :

$$\lim_{t \rightarrow T} \{|f(t)| + |f'(t)| + |f''(t)|\} \text{ est bornée (contradiction), donc } f'' \text{ est non bornée.}$$

Intégrant l'équation (1') entre 0 et $s < T$ on obtient :

$$f''(s) - f''(0) + \frac{m+1}{2}(f(s)f'(s) - f(0)f'(0)) = \frac{3m+1}{2} \int_0^s f'^2(t) dt. \quad (4.2)$$

On voit que f' est non bornée car si f' est bornée alors f est bornée, on déduit que $\lim_{t \rightarrow T} |f'(t)| = +\infty$.

Finalement on suppose que f est bornée pour $t \rightarrow T$ et après l'intégration de (4.2) entre 0 et t on obtient :

$$f'(t) - f'(0) - f''(0)t + \frac{m+1}{4}f^2(t) - \frac{m+1}{4}f^2(0) - \frac{m+1}{2}f(0)f'(0)t = \frac{3m+1}{2} \int_0^t \left(\int_0^s f'^2(i) di \right) ds.$$

alors :

$$f'(t) + \frac{m+1}{4}f^2(t) + \lambda t + \mu = \frac{3m+1}{2} \int_0^t \left(\int_0^s f'^2(\iota) d\iota \right) ds \quad (4.3)$$

Où $\lambda = -f''(0) - \frac{m+1}{2}f(0)f'(0)$ et $\mu = -1 - \frac{m+1}{4}a^2$.

Puisque $\lim_{t \rightarrow T} |f'(t)| = +\infty$, alors :

Si $m = \frac{-1}{3}$, le résultat en découle.

Si $m \neq \frac{-1}{3}$; posons $w(t) = \int_0^t \left(\int_0^s f'^2(\iota) d\iota \right) ds$ donc : $w'(t) = \int_0^t f'^2(\iota) d\iota$ et $w''(t) = f'^2(t)$ d'après (4.3)

on a $f'(t) \sim \frac{3m+1}{2}w(t)$ donc $w''(t) \sim (\frac{3m+1}{2})^2 w^2(t)$ quand $t \rightarrow T$.

D'où $w'(t) w''(t) \sim (\frac{3m+1}{2})^2 w'(t) w^2(t)$ au voisinage de T .

En intégrant et en utilisant le fait que $w(t) \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow T$ on obtient :

$$\frac{1}{2}w'^2(t) \sim \frac{1}{3}(\frac{3m+1}{2})^2 w^3(t) \text{ pour } t \rightarrow T$$

$$w'(t) \sim \frac{|3m+1|}{\sqrt{6}} w^{\frac{3}{2}}(t) \text{ pour } t \rightarrow T$$

$$w^{-\frac{1}{2}}(t) \sim C_1(T-t) \text{ pour } t \rightarrow T$$

avec : $C_1 = -\frac{1}{2} \frac{|3m+1|}{\sqrt{6}}$ d'où $f'(t) \sim \frac{C_2}{(T-t)^2}$; quand $t \rightarrow T$ et $f(t) \sim \frac{C_2}{(T-t)}$ quand $t \rightarrow T$, c'est une contradiction avec le fait qu'on a supposé que f est bornée quand $t \rightarrow T$. Par conséquent f est non bornée et on a nécessairement $\lim_{t \rightarrow T} |f(t)| = +\infty$.

Il nous reste à prouver que $\lim_{t \rightarrow T} |f''(t)| = +\infty$.

En dérivant l'équation (1') et en utilisant l'égalité $(f''' e^{\frac{m+1}{2}F})' = \frac{3m-1}{2} e^{\frac{m+1}{2}F} f' f''$ du (Lemme 4.1.1)

on déduit que f' et f'' ne change pas de signe si on est suffisamment assez proche de T ; il s'en suit que f''' ne l'est pas aussi ce qui implique $\lim_{t \rightarrow T} |f''(t)| = +\infty$.

Clairement, le résultat du (Lemme 4.1.2) est valable pour une solution de l'équation (1') définie seulement sur un intervalle borné.

Proposition 4.1.2 . Soit f une solution du problème $\mathcal{C}_{0(a,m)}$. Si $m < 0$ alors f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ de plus :

Si $f''(0) \leq 0$ alors f est strictement concave sur $[0, +\infty[$.

Si $f''(0) > 0$ il existe $t_0 \in [0, +\infty[$ telle que f est strictement convexe sur $[0, t_0[$ et strictement concave sur $[t_0, +\infty[$ et si $m > -1$ et $a < 0$ alors f devient positive pour t assez grand.

preuve . On suppose que $f''(0) \leq 0$ d'après le (Lemme 4.1.1) $f'' < 0$ sur $[0, +\infty[$ donc f est strictement concave sur $[0, +\infty[$ et f' est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$, mais $f'(\infty) = 0$ donc $f' > 0$ sur $[0, +\infty[$ alors f est strictement croissante et concave sur $[0, +\infty[$ et comme $f(0) = a$ on obtient : $f \geq a$

sur $[0, +\infty[$. Maintenant on suppose que $f''(0) > 0 \exists t_0 \in [0, +\infty[: f''(t_0) = 0$ si non f' est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, (contradiction avec $f'(0) = 1$ et $f'(\infty) = 0$) et d'après le (Lemme 4.1.1) $f'' < 0$ sur $[t_0, +\infty[$. Donc f est strictement convexe et croissante sur $[0, t_0[$ et f est strictement concave et strictement croissante sur $[t_0, +\infty[$.

Si $-1 < m < 0$ et si $f < 0$ sur $[0, +\infty[$ donc : $f''' = -\frac{m+1}{2}ff'' + mf'^2 < 0$ et f' est concave à l'infini, c'est une contradiction avec $f' > 0$ et (4').

Proposition 4.1.3 . Si f une solution du problème $\mathcal{C}_{0(a,m)}$ et $m > 0$, alors $f''(0) < 0$ et soit f est strictement croissante, strictement concave sur $[0, +\infty[$. Ou bien il existe $t_0 \in [0, +\infty[$ tel que f est strictement concave sur $[0, t_0[$ et strictement convexe, strictement décroissante et positive sur $[t_0, +\infty[$.

preuve . Pour $m > 0$ si $f''(0) > 0$ d'après le (Lemme 4.1.1) on déduit que $f'' > 0$ donc f' est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ (contradiction car $f'(0) = 1$ et $f'(\infty) = 0$) d'où $f''(0) < 0$.

Si f'' ne s'annule pas sur $[0, +\infty[$ donc f' sera strictement décroissante et par suite $f \geq a$ et elle est strictement concave sur $[0, +\infty[$. S'il existe $t_0 \in]0, +\infty[$ tel que $f''(t_0) = 0$ donc f est strictement concave sur $[0, t_0[$ et d'après le (Lemme 4.1.1) on obtient $f'' > 0$ sur $]t_0, +\infty[$ et donc $f'(t) < 0$ sur $[t_0, +\infty[$ (car $f'(\infty) = 0$), d'où f est strictement décroissante et strictement convexe sur $[t_0, +\infty[$.

Il nous reste à démontrer que f est strictement positive sur $[t_0, +\infty[$.

Supposant qu'il existe $t_1 \in]t_0, +\infty[$ $f(t_1) < 0$ donc $\forall t \in [t_1, +\infty[$, $f(t) < 0$ car f est strictement décroissante et de (1') on a :

$$\forall t > t_1 : f''' = -\frac{m+1}{2}ff'' + mf'^2 > 0$$

Donc f' est convexe sur $[t_1, +\infty[$ contradiction avec (4') et $f'(t_1) < 0$, d'où $f > 0$ sur $[t_0, +\infty[$.

Proposition 4.1.4 . Soit f une solution du problème $\mathcal{C}_{0(a,m)}$. Pour tout $m \in \mathbb{R}$ on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f''(t) = 0$$

Et il existe une suite croissante (t_n) tend vers $+\infty$ telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f'''(t_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(t_n)f''(t_n).$$

preuve . On a $f'(t) \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty$ donc $\forall (t_n)$ une suite croissante tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f'(t_n) = 0$.

Si on prend $t_n = n$ on aura : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f'''(t_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (f'(t_{n+1}) - f'(t_n)) = 0$.

En multipliant l'équation (1') par f'' puis en l'intégrant entre 0 et t on trouve :

$$\frac{1}{2}f''^2(t) - \frac{1}{2}f''^2(0) - \frac{m}{3} = -\frac{m+1}{2} \int_0^t f(s)f''^2(s)ds \quad (4.4)$$

Et comme f conserve un signe constant pour t assez grand alors la fonction $t \mapsto \int_0^t f(s)f''^2(s)ds$ a une limite quand t tend vers $+\infty$ d'après (4.4) $\lim_{t \rightarrow +\infty} f''^2(t)$ existe et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} f''(t_n) = 0$ alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} f''(t) = 0$.

D'après la limite séquentielle pour toute une suite (t_n) croissante tendant vers $+\infty$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} f''(t_n) = 0$.

En prenant $t_n = n, \forall n \in \mathbb{N}$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f'''(t_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f''(t_{n+1}) - f''(t_n) = 0$. De (1'), $\forall t \in [0, +\infty[:$
 $f'''(t) = -\frac{m+1}{2}f(t)f''(t) + mf'^2(t)$ et de (4') on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f'''(t_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(t_n)f''(t_n).$$

Proposition 4.1.5 . Soit f une solution du problème $\mathcal{C}_{0(a,m)}$. Pour tout $m \in \mathbb{R}$ et si f est bornée alors :

$$\forall t \geq 0, f''(t) + \frac{m+1}{2}f'(t)f(t) = -\frac{3m+1}{2} \int_0^{+\infty} f'^2(t)dt. \quad (4.5)$$

preuve . Intégrant entre t et $+\infty$, (1') on trouve pour $t \in [0, +\infty[:$

$$f''(+\infty) - f''(t) + \frac{m+1}{2}f'(+\infty)f(+\infty) - \frac{m+1}{2}f'(t)f(t) - \frac{m+1}{2} \int_t^{+\infty} f'^2(s)ds - m \int_t^{+\infty} f'^2(s)ds = 0 \quad (4.6)$$

Et comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} f''(t) = 0$, $f'(\infty) = 0$ et f bornée donc (4.6) devient :

$$f''(t) + \frac{m+1}{2}f'(t)f(t) = -\frac{3m+1}{2} \int_0^{+\infty} f'^2(t)dt.$$

Remarque 4.1.1 . Si $m > 0$ alors f est bornée sur $[0, +\infty[$.

En effet :

Si f est concave-convexe d'après la (proposition 4.1.3) on obtient le résultat.

Si f est concave et non bornée (strictement croissante) $f(+\infty) = +\infty$ alors $\forall A > 0$ il existe $t_1 > 0$ tel que $\forall t \geq t_1, f(t) > A$. Pour $A = \frac{2}{m+1}$ il existe $t_2 > 0$ tel que $\forall t \geq t_2 : f(t) > \frac{2}{m+1}$ et de (1.1) on obtient $\forall t \geq 0 f'''(t) \geq -\frac{m+1}{2}f(t)f''(t)$ alors :

$$\forall t \geq t_2 : f'''(t) \geq -f''(t). \quad (4.7)$$

Donc f'' est croissante sur $[t_2, +\infty[$ et on déduit de (4'), $f''(\infty) = 0$ et par intégration de (4.7) entre $s \geq t_2$ et ∞ on obtient : $\forall s \geq t_2 : -f''(s) \geq f'(s)$ on intègre une deuxième fois on trouve :

$$\forall t \geq t_2 : -f'(t) + f'(t_2) \geq f(t) - f(t_2)$$

Par passage à la limite on obtient une contradiction avec (4').

4.2 L'étude du problème $(\mathcal{C}_{0(a,m)})$.

On introduit des changement de variables pour ramener l'équation (1') à un système dynamique plan pour étudier le problème $(\mathcal{C}_{0(a,m)})$.

On introduit les coordonnées dites Blowing-up.

$$U = \frac{f'}{f^2}, \quad V = \frac{f''}{f^3}$$

Si on considère l'intervalle maximal droit $I = [\tau, \tau + t[$ sur lequel une solution f de l'équation (1') qui ne s'annule pas sur cet intervalle et si on pose :

$$\forall t \in I, s = \int_{\tau}^t f(\zeta) d\zeta \quad u(s) = \frac{f'(t)}{f^2(t)} \text{ et } v(s) = \frac{f''(t)}{f^3(t)} \quad (4.8)$$

On trouve :

$$\dot{u} = \frac{du}{ds} = \frac{du}{dt} \times \frac{dt}{ds} = \frac{du}{dt} \times \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{f''f^2 - 2f'^2f}{f^4} \times \frac{1}{f} = \frac{f''}{f^3} - 2\frac{f'^2}{f^4}$$

Où le point $(.)$ indique la dérivation par rapport à s .

Alors :

$$\dot{u} = v - 2u^2 = p(u, v).$$

Et :

$$\dot{v} = \frac{dv}{ds} = \frac{dv}{dt} \times \frac{dt}{ds} = \frac{dv}{dt} \times \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{f'''f^3 - 3f'f''f}{f^6} \times \frac{1}{f} = \frac{f'''f^2 - 3ff'f''}{f^6}$$

De (1') on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \frac{(mf'^2 - \frac{m+1}{2}ff'')f^2 - 3ff'f''}{f^6} \\ &= -\frac{m+1}{2}\frac{f''}{f^3} + m\frac{f'^2}{f^4} - 3\frac{f'}{f^2} \times \frac{f''}{f^3} \\ &= -\frac{m+1}{2}v + mu^2 - 3uv = Q_m(u, v) \end{aligned}$$

Finalement on a le système :

$$\begin{cases} \dot{u} = p(u, v) = v - 2u^2 \\ \dot{v} = Q_m(u, v) = -\frac{m+1}{2}v + mu^2 - 3uv \end{cases} \quad (4.9)$$

On note que si f est strictement négative sur I alors s décroît quand t augmente.

Dans ce qui suit on va donner des résultats sur le système dynamique autonome plan (\mathcal{P}) .

4.2.1 les points singuliers.

les points singuliers du système (\mathcal{P}) sont :

$O(0,0)$ et $A(-\frac{1}{6}, \frac{1}{18})$, les courbes $p(u, v) = 0$ et $Q_m(u, v) = 0$ sont données par les équations respectives, la parabole $v = 2u^2$ et la courbe $v = \psi_m(u)$ avec $\psi_m(u) = \frac{mu^2}{3u + \frac{m+1}{2}}$.

Pour le point singulier A .

La matrice Jacobienne associée au système (\mathcal{P}) au point A est donnée par :

$$J_A = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial u}(-\frac{1}{6}, \frac{1}{18}) & \frac{\partial p}{\partial v}(-\frac{1}{6}, \frac{1}{18}) \\ \frac{\partial Q}{\partial u}(-\frac{1}{6}, \frac{1}{18}) & \frac{\partial Q}{\partial v}(-\frac{1}{6}, \frac{1}{18}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ -\frac{2m+1}{6} & -\frac{m}{2} \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de J_A sont les solutions de l'équation :

$$\det(J_A - \lambda I) = 0.$$

$$\det(J_A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} - \lambda & 1 \\ -\frac{2m+1}{6} & -\frac{m}{2} - \lambda \end{vmatrix} = (\frac{2}{3} - \lambda) (-\frac{m}{2} - \lambda) + (\frac{2m+1}{6}) = 0.$$

$$\Delta = \text{tr}^2(J_A) - 4\det(J_A) = 9m^2 - 24m - 8 \text{ et :}$$

$$\lambda_1 = \frac{4 - 3m - \sqrt{9m^2 - 24m - 8}}{12}, \lambda_2 = \frac{4 - 3m + \sqrt{9m^2 - 24m - 8}}{12}$$

1^{er} Cas : Si $\Delta < 0$ pour $\frac{4-2\sqrt{6}}{3} < m < \frac{4+2\sqrt{6}}{3}$ et si :

- a- $\text{tr}(J_A) < 0 \implies \frac{2}{3} - \frac{m}{2} < 0 \implies m > \frac{4}{3}$ alors pour $\frac{4}{3} < m < \frac{4+2\sqrt{6}}{3}$, A est un foyer stable.
- b- $\text{tr}(J_A) > 0 \implies \frac{2}{3} - \frac{m}{2} > 0 \implies m < \frac{4}{3}$ alors pour $\frac{4-2\sqrt{6}}{3} < m < \frac{4}{3}$, A est un foyer instable.
- c- $\text{tr}(J_A) = 0 \implies m = \frac{4}{3}$ alors A est un centre.

2^{eme} Cas : si $\Delta > 0$, $m \in]-\infty, \frac{4-2\sqrt{6}}{3} \cup \frac{4+2\sqrt{6}}{3}, +\infty[$ et si :

- a- $\lambda_1 \times \lambda_2 < 0 \implies (4 - 3m)^2 - (9m^2 - 24m - 8) < 0$ alors A point selle.
- b- $\lambda_1 \times \lambda_2 > 0$ et $\lambda_1 + \lambda_2 > 0 \implies m \leq \frac{4-2\sqrt{6}}{3}$ alors A est un nœud instable.
- c- $\lambda_1 \times \lambda_2 > 0$ et $\lambda_1 + \lambda_2 < 0 \implies m \geq \frac{4+2\sqrt{6}}{3}$ alors A est un nœud stable.

Pour le point singulier O .

La matrice jacobienne associée au point singulier O est :

$$J_O = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{m+1}{2} \end{pmatrix}$$

les valeurs propres de J_O sont : $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\frac{m+1}{2}$ et les sous espaces invariants associés sont respectivement :

$$L_0 = S_p \{(1, 0)\} \text{ et } L_1 = S_p \left\{ \left(1, -\frac{m+1}{2}\right) \right\}.$$

En regardant le champ de vecteurs (\mathcal{P}) au voisinage du point singulier O alors pour $m \neq -1$, le point singulier O est un point nœud selle (nœud-col (ou pli)) de multiplicité 2. Donc le champ de vecteurs admet une variété centrale W_0 tangente à L_0 et une variété W stable (respectivement instable) si $m > -1$ (respectivement si $m < -1$) tangente au sous-espace L (voir [11] et [1]).

Proposition 4.2.1 . *Dans le voisinage de O , la variété W se situe au dessous de L quand $m < -1$ ou $m > -\frac{1}{3}$ et au dessus de L quand $-1 < m < -\frac{1}{3}$.*

preuve . *Puisque W est au moins de classe C^2 au voisinage de O et elle est tangente à L , on peut la définir dans ce voisinage par $v = V_m(u)$ où V_m est une solution de l'équation :*

$$(v - 2u^2) v' = -\frac{m+1}{2}v + mu^2 - 3uv \quad (*), \quad (v' = \frac{dv}{du} = \frac{Q}{P}). \text{ Et en écrivant :}$$

$$V_m(u) = -\frac{m+1}{2}u + \beta u^2 + o(u^2)$$

et en utilisant (*) on obtient :

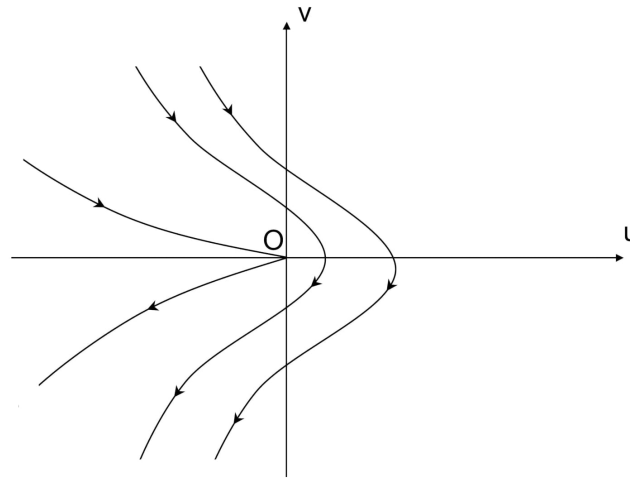
$$\beta = -\frac{3m+1}{2(m+1)}$$

Etudiant le signe de $L - V_m(u) = \frac{3m+1}{2(m+1)}u^2$

- Si $m < -1$ ou $m > -\frac{1}{3}$ alors $L - V_m(u) > 0$ donc W est au dessous de L .
- Si $-1 < m < -\frac{1}{3}$ donc W est au dessus de L .

Remarque 4.2.1 . *Si $m = -\frac{1}{3}$ alors la variété W est donnée par : $W = \left\{ \left(u, -\frac{u}{3}\right) \in \mathbb{R}^2 : u > -\frac{1}{6} \right\}$.*

On ne considère pas le cas $m = -1$ parce qu'on sait d'après ([4]) que le problème $\mathcal{C}_{0(a,m)}$ n'admet pas de solution. Cependant dans ce cas la variété centrale est de dimension 2 et le portrait du phase du champ de vecteurs au voisinage de O est de la forme donnée dans la figure (12).



M = -1
FIG(12)

4.2.2 Pour la variété centrale W_0 .

Proposition 4.2.2 . Dans le voisinage de O la variété centrale W_0 se situe au-dessus de L_0 pour $m < -1$ ou $m > 0$ et elle est au dessous de L_0 quand $-1 < m < 0$.

preuve . En utilisant la régularité de W_0 au voisinage de O et comme dans la proposition 4.2.1 on définit W_0 par $v = V_m(u)$. Pour $|u|$ suffisamment petit on obtient : $v \approx \frac{2m}{m+1}u^2$ quand $u \rightarrow 0$ ce qui achève la démonstration.

Remarque 4.2.2 . Pour $m = 0$, W_0 coïncide avec l'axe des u .

On va préciser le portrait de phases du champ de vecteurs au voisinage du point nœud selle O .

On note que le secteur parabolique est limité par les séparatrices S_0 et S_1 qui sont tangentes à L au point O .

Le secteur hyperbolique est limité un par S_0 et la séparatrice S_2 qui est tangente à L_0 au point O , et le second secteur hyperbolique est limité par S_1 et S_2 .

- La variété W est l'union des séparatrices S_0 , S_1 et le point singulier O .

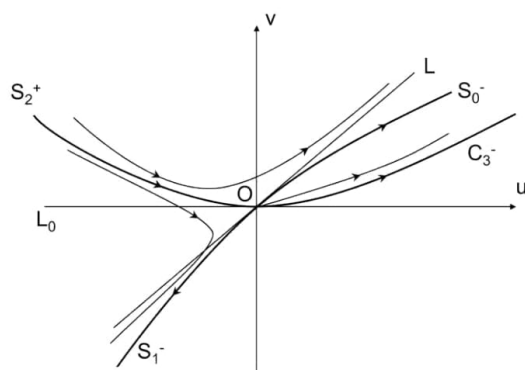
$$W = \{S_0\} \cup \{S_1\} \cup \{O\}$$

La variété W_0 est l'union des séparatrices S_2 , C_3 et le point singulier O .

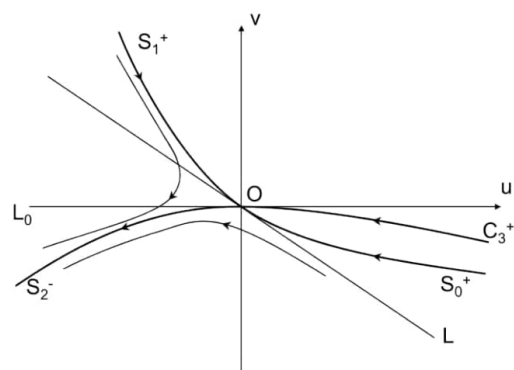
$$W_0 = \{S_2\} \cup \{C_3\} \cup \{O\}$$

On note par S_i^+ quand S_i est une w -séparatrice et S_i^- pour une α -séparatrice.

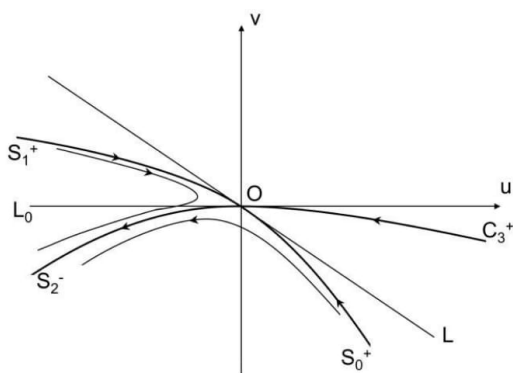
Le comportement du champ de vecteurs dans le voisinage du point nœud selle O est donné par les schémas de la figure (13) qui découlent des propositions précédentes.



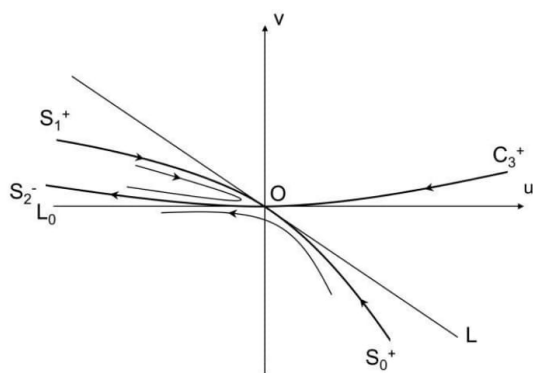
$M < -1$



$-1 < M < -1/3$



$-1/3 < M < 0$



$M > 0$

Fig(13)

Pour étudier le comportement des séparatrices on utilise les notions suivantes :

On considère un morceau connexe de la courbe de phase C du système dynamique (\mathcal{P}) appartenant à la région $p(u, v) < 0$ (respectivement $p(u, v) > 0$). Alors C peut être caractérisée par $v = V_m(u)$ (respectivement $v = W_m(u)$), avec u appartenant à un certain intervalle et V_m (respectivement W_m) une solution de l'équation différentielle

$$v' = \frac{Q_m(u, v)}{p(u, v)}$$

4.2.3 Le problème aux limites $(\mathcal{C}_{0(a,m)})$.

Dans ce qui suit on décrit les différentes étapes de résolution du problème $(\mathcal{C}_{0(a,m)})$ pour cela considérons le problème aux valeurs initiales :

$$(\mathcal{C}_{(a,m,\mu)}) \left\{ \begin{array}{l} f''' + \frac{m+1}{2} f f'' - m f'^2 = 0 \\ f(0) = a \\ f'(0) = 1 \\ f''(0) = \mu \end{array} \right. \quad \text{avec } a \neq 0$$

Notons par $C_{a,\mu}$ la trajectoire correspondante à une solution du système dynamique plan (\mathcal{P}) .

Si on choisit comme cas particulier $\tau = 0$, les conditions initiales associées au système (\mathcal{P}) sont :

$$u(0) = \frac{1}{a^2}, \quad v(0) = \frac{\mu}{a^3}$$

Si $C_{a,\mu}$ est une semi trajectoire alors $T = +\infty$ et f ne s'annule pas sur $[\tau, +\infty[$.

Mais si f est une solution de $(\mathcal{C}_{(a,m,\mu)})$, définie sur $[0, +\infty[$ et ne s'annule pas sur $[\tau, +\infty[$ alors $C_{a,\mu}$ n'est pas nécessairement une semi trajectoire, car si l'intégrale de f sur $[\tau, +\infty[$ converge la variation s serait constante quand $T = +\infty$.

le cas $m \leq -1$.

Remarque 4.2.3 . *Le cas $m \leq -1$ le problème $(\mathcal{C}_{0(a,m)})$ n'a pas d'interprétation physique (voir [4]) mais dans l'article [?] on trouve une simple démonstration où le problème $(\mathcal{C}_{0(a,m)})$ avec $a = 0$ n'admet pas de solution. Mais si $a \neq 0$ B.Brighi dans son article[4] n'a pas trouver de résultat. Mais en utilisant les Blowing-up ont résolu ce cas.*

Lemme 4.2.1 . *Soit $m \leq -1$, si $a \geq -\frac{2}{\sqrt{-m-1}}$ le problème $(\mathcal{C}_{0(a,m)})$ n'admet pas de solution, de plus si $a < -\frac{2}{\sqrt{-m-1}}$ et si f est une solution du problème $(\mathcal{C}_{0(a,m)})$ alors : f est négative ($f < 0$) et la courbe de*

phase $s \longrightarrow (u(s), v(s))$ définie par (4.33) avec $\tau = 0$ est une semi trajectoire négative qui se trouve pour $-s$ assez large dans le domaine borné :

$$D_+ = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2, 0 < u < -\frac{m+1}{2} \text{ et } 0 \leq v \leq -\frac{m+1}{2}u \right\}. \quad (4.10)$$

preuve . Soit f une solution de $(\mathcal{C}_{0(a,m)})$. D'après la (Proposition 4.1.2), on a $f' > 0$ et il existe $t_0 \geq 0$ tel que $f''(t) < 0$ pour tout $t > t_0$ et si on suppose qu'il existe t_1 tel que $f(t_1) \geq 0$ et comme f est croissante alors $f(t) > 0 \quad \forall t \in]t_1, +\infty[$ et de (1') on trouve que :

$$f''' + \frac{m+1}{2} f f'' - m f'^2 = 0 \implies f''' = -\frac{m+1}{2} f f'' + m f'^2 < 0$$

pour tout $t > \max(t_0, t_1)$. Donc f'' est strictement décroissante pour $t > \max(t_0, t_1)$ et par suite f'' serait strictement négative à l'infini (contradiction avec (Proposition 4.1.4)) et par conséquence $f < 0$ et $a < 0$.

Comme $f'(t) > 0$ et $f''(t) \leq 0$ pour tout $t > t_0$ on trouve :

$$\forall t \geq 0 : \frac{f'(t)}{f^2(t)} > 0$$

et :

$$\forall t \geq t_0 : \frac{f''(t)}{f^3(t)} \geq 0$$

Or $\forall t \in]0, +\infty[, a \leq f(t) \leq 0$ donc f est bornée et de (4.5) on trouve

$$\forall t \geq 0 : f''(t) + \frac{m+1}{2} f'(t) f(t) = -\frac{3m+1}{2} \int_t^{+\infty} f'^2(s) ds$$

Donc

$$\forall t \geq 0 : f''(t) + \frac{m+1}{2} f'(t) f(t) > 0 \quad (4.11)$$

On suppose que $f(t) \longrightarrow \lambda, t \longrightarrow \infty$ et on intègre (4.11) entre t et $+\infty$ on trouve :

$$f'(t) + \frac{m+1}{4} f^2(t) < \frac{m+1}{4} \lambda^2 < 0 \quad (4.12)$$

Pour $t = 0$ on a $1 + \frac{m+1}{4} a^2 < 0$ donc : $a < -\frac{2}{\sqrt{-m-1}}$. Si on dérive (4.12) par $f^2(t)$ et (4.11) par $f^3(t)$ on obtient :

$$\forall t \geq 0 : \frac{f'(t)}{f^2(t)} + \frac{m+1}{4} < 0 \quad (4.13)$$

et

$$\frac{f''(t)}{f^3(t)} + \frac{m+1}{2} \frac{f'(t)}{f^2(t)} < 0$$

On trouve après l'intégration de (4.13) sur $[0, t]$:

$$\forall t \geq 0 \quad f(t) \leq \frac{1}{\frac{m+1}{4}t + \frac{1}{a}}$$

donc $\int_0^{+\infty} f(s)ds = -\infty$. Donc la trajectoire $s \rightarrow (u(s), v(s))$ est définie sur l'intervalle tout entier $]-\infty, 0[$ avec $0 < u < -\frac{m+1}{2}$ et $0 \leq v \leq -\frac{m+1}{2}u$ pour $-s$ assez grand.

Dans la suite on a souvent besoin du système (P) pour obtenir des résultats du problème $(C_{0(a,m)})$ lorsque l'approche directe ne marche pas.

A la fin on donnera le comportement des séparatrices.

Remarque 4.2.4 . On remarque que pour $m = -1$ et pour tout $a \in \mathbb{R}$, il n'y a pas de solution.

Lemme 4.2.2 . Soit $m < -1$, s croît à partir de $-\infty$, la α -séparatrice S_0^- part du point singulier O à droite et tangentielllement à L_1 en coupant l'isocline $Q_m(u, v) = 0$, l'isocline $p(u, v) = 0$, l'axe des u et l'axe des v (voir fig (14)).

preuve . De la Proposition 4.2.1 on sait qu'au voisinage du point singulier O la α -séparatrice S_0^- est au dessous de la ligne droite L et au-dessus des deux isoclines $Q_m(u, v) = 0$ et $p(u, v) = 0$, (fig(13))

Mais sur la surface bornée $\{2u^2 < v < -\frac{m+1}{2}u\} \cap \{0 < u < -\frac{m+1}{2}\}$ on définit S_0^- par $v = W_m(u)$ ($\dot{u} = p(u, v) > 0$), avec W_m la solution de l'équation différentielle $v' = F_m(u, v)$ où

$$F_m(u, v) = \frac{-\frac{m+1}{2}v + mu^2 - 3uv}{v - 2u^2} = -\frac{m+1}{2} - \frac{u(3v+u)}{v-2u^2}. \quad (4.14)$$

On a $0 < W'_m < -\frac{m+1}{2}$ dès que $W_m(u) > \psi_m(u)$ (car si $W_m(u) > \psi_m(u)$ alors $\dot{v} > 0$, donc $v > 0$) à partir d'un certain moment W'_m s'annule et devient négative d'après le champ de vecteurs.

Ce qui montre que S_0^- intersecte l'isocline $Q_m(u, v) = 0$ puis l'isocline $p(u, v) = 0$ et passe dans le domaine où $Q_m(u, v) < 0$ et $p(u, v) < 0$, et on définit S_0^- par $v = V_m(u)$ où V_m est une solution de l'équation différentielle :

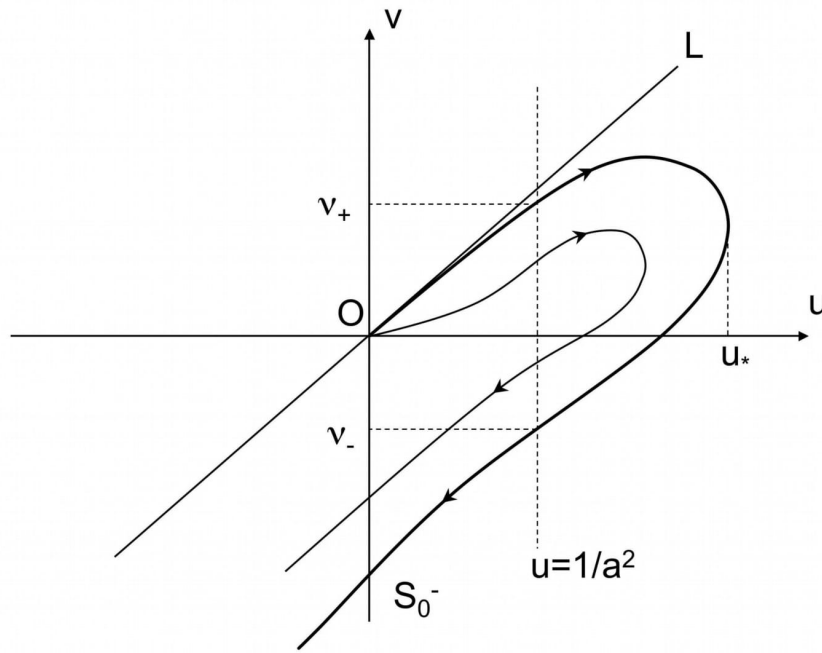
$$v' = F_m(u, v) = \frac{-\frac{m+1}{2}v + mu^2 - 3uv}{v - 2u^2} = \frac{Q_m(u, v)}{p(u, v)}$$

Donc

$$v' = F_m(u, v) = -\frac{m+1}{2} - \frac{u(3v+u)}{v-2u^2}.$$

Et $V'_m(u) > -\frac{m+1}{2} > 0$ si $V_m(u) > -\frac{u}{3}$.

Par conséquent S_0^- intersecte l'axe des u et la ligne $v = -\frac{u}{3}$ et si $V_m(u) < -\frac{u}{3}$ on a $0 < V'_m(u) < -\frac{m+1}{2}$ dès que u reste positif ce qui implique que S_0^- intersecte l'axe des v .



M < -1
Fig(14)

Théorème 4.2.1 . Soit $m < -1$ il existe $a_* < 0$ tel que le problème $(\mathcal{C}_{0(a,m)})$ admet une infinité de solutions si $a < a_*$, une et une seule solution si $a = a_*$ et aucune solution si $a > a_*$.

De plus si f est une solution de $(\mathcal{C}_{0(a,m)})$ alors $f < 0$.

preuve . D'après (Lemme 4.2.1) si a_* existe alors elle vérifie $a_* < -\frac{2}{\sqrt{-m-1}}$ donc pour $a \geq 0$ le problème $(\mathcal{C}_{0(a,m)})$ n'admet pas de solution.

On considère $(\mathcal{C}_{(a,m,\mu)})$ avec $a < 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$.

Notons par $C_{a,\mu}$ une trajectoire correspondante aux solutions du système plan (\mathcal{P}) .

Si $\tau = 0$ et si f une solution de $(\mathcal{C}_{(a,m,\mu)})$ on a $u(0) = \frac{1}{a^2} > 0$ et $v(0) = \frac{\mu}{a^3} \in \mathbb{R}$.

Soit (u_*, v_*) avec $[v_* = 2u_*^2]$ le point où la séparatrice S_0^- intersecte l'isocline $v = 2u^2$, alors on a :
 $u_* = \frac{1}{a_*^2}$ et par suite $a_* = -\frac{1}{\sqrt{u_*}}$.

Si $a > a_* = -\frac{1}{\sqrt{u_*}}$ alors la ligne droite $u = \frac{1}{a^2}$ n'intersecte pas la séparatrice S_0^- , et pour tout $\mu \in \mathbb{R}$ l'ensemble des α -limites de $C_{a,\mu}$ ne contient pas l'origine O et d'après Poincaré-Bendixson $C_{a,\mu}$ ne reste pas dans l'ensemble borné D_+ , d'après le (Lemme 4.2.1) f ne peut pas être une solution de $(\mathcal{C}_{0(a,m)})$.

Si $a = a_*$, avec $\mu \neq 2u_*^2 a^3$, f ne peut pas être une solution de $(\mathcal{C}_{0(a,m)})$ d'après Poincaré-Bendixson.

Pour que f soit une solution il faut que $v_* = \frac{\mu}{a^3}$ d'où $\frac{\mu}{a^3} = 2u_*^2 a^3 = 2u_*^2 a^3$

Si $\mu = 2u_*^2 a^3$ et $a = a_*$ la courbe de phase $C_{a,\mu}$ est une semi trajectoire négative qui coïncide avec une partie de la séparatrice S_0^- issue de O , alors f existe et ne peut s'annuler, car sinon l'une des coordonnées u ou v tend à l'infini, et alors f est négative sur $[0, +\infty[$. de plus d'après le champs de vecteurs on a $f' > 0$ et $f''(t) \leq 0$. Et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f'(t) = l \geq 0$.

Si on suppose que $l > 0$ nous mène à une contradiction car f est négative. Donc f est une solution du problème $(\mathcal{C}_{0(a,m)})$.

Si $a < a_*$ la ligne droite $u = \frac{1}{a^2}$ intersecte la séparatrice S_0^- en deux points $(\frac{1}{a^2}, v_-)$ et $(\frac{1}{a^2}, v_+)$, si $\mu \in [a^3 v_-, a^3 v_+]$ alors f est une solution du problème $(\mathcal{C}_{0(a,m)})$ et si $\mu \notin [a^3 v_-, a^3 v_+]$ alors f n'est pas une solution d'après le théorème Poincaré-Bendixson.

Remarque 4.2.5 . Du (Lemme 4.2.1) on sait que $a_* < -\frac{2}{\sqrt{-m-1}} < 0$ mais cette inégalité n'est pas certainement précise parce que pour $m = -3$ on a $a_* < -\frac{2}{\sqrt{-m-1}} < 0$ où numériquement on trouve que : $a_* < -2.5$.

Remarque 4.2.6 . Soit $m < -1$ et f une solution de problème $(\mathcal{C}_{0(a,m)})$, alors pour $a = a_*$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lambda < 0$ et pour $a < a_*$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$.

preuve .

1. Pour $a = a_*$

Si on suppose que $\lambda = 0$, on a $(u(s), v(s)) \rightarrow (0, 0)$ quand $s \rightarrow -\infty$ et :

$$\frac{v(s)}{u(s)} \rightarrow -\frac{m+1}{2}, s \rightarrow -\infty$$

Donc

$$\frac{f''(t)}{f(t)f'(t)} \rightarrow -\frac{m+1}{2}, t \rightarrow +\infty.$$

Ainsi il existe t_0 tel que pour tout $t \geq t_0$ $-f''(t) \geq \frac{m+1}{4}f(t)f'(t)$. En intégrant cette dernière inégalité entre $t \geq t_0$ et $+\infty$ on obtient $\frac{f'(t)}{f^2(t)} > -\frac{m+1}{8}$ ce qui contredit le fait que $\lim_{s \rightarrow -\infty} u(s) = 0$ d'où $\lambda \neq 0$.

2. Considérons maintenant que $a < a_*$ et f une solution de $(\mathcal{C}_{0(a,m)})$ correspondante à une courbe de phases qui n'est pas la séparatrice S_0^- alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$. En effet si on suppose que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lambda < 0$, puisque la courbe de phase qu'on a considéré tend tangentiellement vers 0 suivant l'axe des u on obtient :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f''(t)}{f(t)f'(t)} = 0 \quad (4.15)$$

Mais de (4.5) pour t assez grand en divisant par $f(t)f'(t)$ on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{f''(t)}{f(t)f'(t)} + \frac{m+1}{2} &= -\frac{3m+1}{2f(t)} \int_t^{+\infty} \frac{f'^2(\xi)}{f'(\xi)} d\xi \\ &\geq -\frac{3m+1}{2f(t)} \int_t^{+\infty} f'(\xi) d\xi = -\frac{3m+1}{2} \left(\frac{\lambda - f(t)}{f(t)} \right) \end{aligned}$$

En faisant tendre t vers $+\infty$, on obtient $\frac{m+1}{2} \geq 0$ contradiction avec $m < -1$.

Le cas $-1 < m < -\frac{1}{3}$.

Le cas où $m = -\frac{1}{2}$ joue un rôle central et il est étudié par Chaudary, Merkin, Pop (voir [?]) et par Magyari, Keller (voir [?]) avec des méthodes numériques, et ils ont prouvé que le problème $(\mathcal{C}_{0(a,m)})$ admet une infinité de solutions pour $a > 0$ et il n'admet pas de solution pour $a \leq 0$. Brighi B dans son article (voir [4]) a généralisé les résultats de Chaudary, Merkin et Pop, et il a montré que pour $m \in]-1, -\frac{1}{2}]$ avec $a \leq 0$ le problème $(\mathcal{C}_{0(a,m)})$ n'admet pas de solutions et qu'il admet une infinité de solutions pour $m \in]-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}]$ et $a > 0$.

Dans ce qui ce suit Brighi. B et Sari. T ont complété l'étude du problème $(\mathcal{C}_{0(a,m)})$ pour $m \in]-1, -\frac{1}{2}]$ avec $a \geq 0$, et pour $m \in]-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}]$ avec $a < 0$ en utilisant le système dynamique défini ci-dessus.

Lemme 4.2.3 .

Si $m = -\frac{1}{2}$, la séparatrice S_0^+ est définie par $S_0^+ = \left\{ (u, v) : v = V_{-\frac{1}{2}}(u) = \frac{u^2}{2} - \frac{u}{4}, u > 0 \right\}$

preuve . Comme $p(u, v) < 0$ et $u > 0$ (découlent de la fig (14)) alors la courbe de phases est définie par $v = V_{-\frac{1}{2}}(u)$, et on a :

$$v = V_m(u) = -\frac{m+1}{2}u - \frac{3m+1}{2(m+1)}u^2 + 0(u^2)$$

Pour $m = -\frac{1}{2}$ on obtient $v = \frac{u^2}{2} - \frac{u}{4}$ et $u > 0$

Lemme 4.2.4 . Si $-\frac{1}{2} < m < -\frac{1}{3}$ alors la séparatrice S_0^+ est définie par $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : v = V_m(u) u > 0\}$ avec $V_m \leq V_{-\frac{1}{2}}$ et $V_m(u) \rightarrow \infty$ quand $u \rightarrow \infty$.

preuve . En remarquant de la (fig (14)) que la courbe de phases est définie par $v = V_m(u)$, ($u > 0$), d'après la (Proposition 4.2.1) la séparatrice S_0^+ au voisinage de O vérifie $-\frac{m+1}{2}u < v$ car W est situé au dessus de L et $v < 2u^2$ parce que $p(u, v) < 0$, donc S_0^+ se trouve dans le domaine $\{-\frac{m+1}{2}u < v < 2u^2\} \cap \{u > 0\}$ et elle reste au dessous de l'isocline $v = 2u^2$.

Donc S_0^+ est définie par $v = V_m(u)$ où $V_m(u)$ est la solution de l'équation $v' = \frac{Q_m(u, v)}{p(u, v)}$, d'autre part on a :

$$V_m(u) - V_{-\frac{1}{2}}(u) = -\frac{2m+1}{2}u + o(u) \text{ quand } u \rightarrow 0^+. \quad (4.16)$$

d'où

$$V_m(u_0) < V_{-\frac{1}{2}}(u_0), u_0 \rightarrow 0^+$$

Et comme

$$V'_m(u) - V'_{-\frac{1}{2}}(u) = F_m(u, v) - F_{-\frac{1}{2}}(u, v) = -\frac{2m+1}{4} < 0 \text{ pour tout } u \text{ de }]0, +\infty[\quad (4.17)$$

D'après l'inégalité différentielle classique on déduit que V_m est définie sur tout l'intervalle $]0, +\infty[$ et $V_m < V_{-\frac{1}{2}}$ pour tout u de $]0, +\infty[$.

Montrons que $V_m(u) \rightarrow \infty$ quand $u \rightarrow \infty$, pour celà il suffit de voir le champ de vecteur dans la région $\{-\frac{m+1}{2}u < v < 2u^2\} \cap \{u > 0\}$, on remarque quand u est assez grand la courbe de phases $v = V_m(u)$ intersecte l'isocline $Q_m(u, v) = 0$ puis l'axe des u , alors V_m est croissante vers $+\infty$ car dans la région $\{0 < v < 2u^2\} \cap \{u > 0\}$ on a : $V'_m > -\frac{m}{2} > 0$ pour u assez grand et cette dernière inégalité découle de :

$$F_m(u, v) - \left(-\frac{m}{2}\right) = \frac{1}{v - 2u^2} \left(-\frac{v}{2} - 3uv\right) > 0 \quad (4.18)$$

Lemme 4.2.5 . Si $-1 < m < -\frac{1}{2}$ alors la séparatrice S_0^+ intersecte l'isocline $v = 2u^2$ au point (u_*, v_*) avec $[v_* = 2u_*^2]$ puis elle coupe l'axe des v . S_0^+ est définie par $v = V_m(u)$ où $V_m > V_{-\frac{1}{2}}$ dès qu'elle reste au-dessous de l'isocline pour $0 < u < u_*$ et après l'intersection avec l'isocline elle va être définie par $v = W_m(u)$ avec $W'_m(u) < 0$ pour $u > u_*$. Fig(15)

preuve . Si on utilise (4.16) et (4.17), on obtient pour $u \in]0, u_*[$, $V_m(u) \geq V_{-\frac{1}{2}}(u)$. Soit que $u_* = \infty$ si S_0^+ reste au-dessous de l'isocline, soit $u_* < \infty$ si S_0^+ intersecte l'isocline $v = 2u^2$ au point $(u_*, 2u_*^2)$.

Montrons que u_* est finie.

Supposant le contraire i.e $u_* = \infty$, alors on obtient :

$$\forall u > 0, \frac{u^2}{2} - \frac{u}{4} \leq V_m(u) < 2u^2 \quad (4.19)$$

Considérons le changement de variable :

$$\tilde{V}_m(u) = u^{-2}V_m(u) \text{ et } u > \frac{1}{2}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}\tilde{V}_m'(u) &= \frac{1}{u^3(V_m(u) - 2u^2)} \left(-\frac{m+1}{2}uV_m(u) + mu^3 - 2V_m^2(u) + u^2V_m(u) \right) \\ &= \frac{1}{u^3(V_m(u) - 2u^2)} \left(-\frac{m}{2}uV_m(u) + mu^3 - 2V_m(u) \left(V_m(u) - \frac{u^2}{2} + \frac{u}{4} \right) \right) \\ &\geq \frac{1}{u^3(V_m(u) - 2u^2)} \left(-\frac{m}{2}V_m(u) + mu^3 \right) = -\frac{m}{2u^2} > 0.\end{aligned}$$

En utilisant (4.19) on a $\forall u > 0, \frac{1}{2} - \frac{1}{4u} \leq \tilde{V}_m(u) < 2$ et donc $\tilde{V}_m(u) \rightarrow l$ quand $u \rightarrow \infty$ avec $l \in [\frac{1}{2}, 2]$ et $\tilde{V}_m(u) \leq l$ pour $l > \frac{1}{2}$.

D'autre part on a :

$$V_m(u) \approx lu^2 \text{ quand } u \rightarrow \infty \text{ et } V_m(u) \leq lu^2 \text{ pour } u > \frac{1}{2} \quad (4.20)$$

Pour calculer l on utilise (4.20) on obtient :

$$V_m'(u) = \frac{-\frac{m+1}{2}V_m(u) + mu^2 - 3uV_m(u)}{V_m(u) - 2u^2} \approx \frac{3l}{2-l}u, u \rightarrow \infty$$

Par intégration entre 0 et u de l'équivalence précédente on trouve $l = \frac{1}{2}$.

De (4.19) et (4.20) on obtient :

$$\forall u > \frac{1}{2}, \frac{u^2}{2} - \frac{u}{4} \leq V_m(u) < \frac{u^2}{2} \quad (4.21)$$

Considérons le changement de variable : $\tilde{W}_m(u) = \frac{V_m(u)}{u} - \frac{u}{2}$ pour $u > \frac{1}{2}$ on obtient :

$$\tilde{W}_m'(u) = \frac{V_m'(u)}{u} - \frac{V_m(u)}{u^2} - \frac{1}{2} \quad (4.22)$$

et si on suppose qu'il existe $u_0 > \frac{1}{2}$ tel que $\tilde{W}_m'(u_0) = 0$, alors :

$$\frac{V_m(u_0)}{u_0} + \frac{u_0}{2} = V_m'(u_0) = \frac{-\frac{m+1}{2}V_m(u_0) + mu_0^2 - 3u_0V_m(u_0)}{V_m(u_0) - 2u_0^2}$$

ce qui nous donne :

$$2V_m^2(u_0) + 3u_0^2V_m(u_0) - 2u_0^4 + (m+1)u_0V_m(u_0) - 2mu_0^3 = 0$$

Et en utilisant (4.21) on trouve :

$$2 \left(\frac{u_0^2}{2} - \frac{u_0}{4} \right)^2 + 3u_0^2 \left(\frac{u_0^2}{2} - \frac{u_0}{4} \right) - 2u_0^4 + (m+1)u_0 \left(\frac{u_0^2}{2} - \frac{u_0}{4} \right) - 2mu_0^3 \leq 0$$

Ce qui implique que $-\frac{2m+1}{8}u_0^2(6u_0+1) \leq 0$ contradiction car ce nombre est strictement positif d'où \tilde{W}'_m ne peut pas s'annuler sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$. Et de la double inégalité (4.21) on obtient $-\frac{1}{4} \leq \tilde{W}_m \leq 0$, et de là on déduit que : $\tilde{W}_m(u) \longrightarrow k$ quand $u \longrightarrow +\infty$ et $k \in [-\frac{1}{4}, 0]$.

Pour Calculer k on utilise l'égalité suivante :

$$V_m(u) = \frac{u^2}{2} + ku + u\eta(u) \quad (4.23)$$

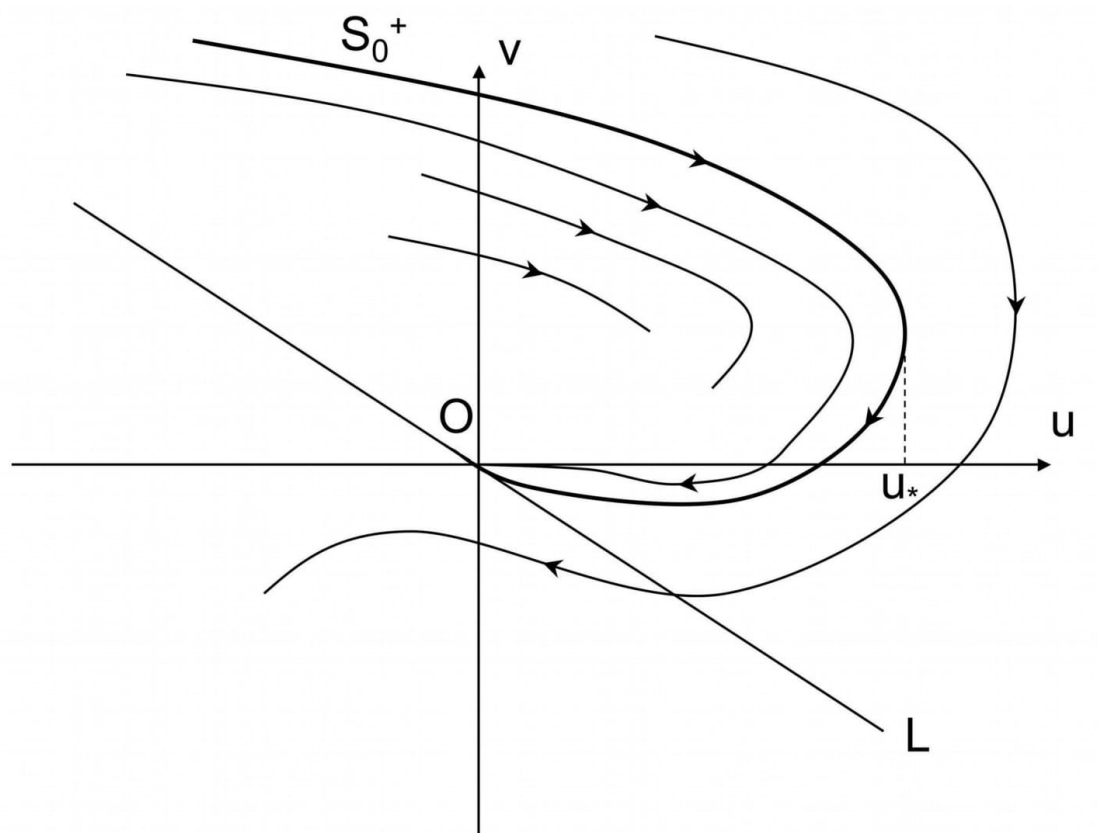
avec $\eta(u) \longrightarrow 0$, $u \longrightarrow +\infty$ donc on a :

$$\begin{aligned} V'_m(u) - u &= \frac{-\frac{m+1}{2}V_m(u) + mu^2 - 4uV_m(u) + 2u^3}{V_m(u) - 2u^2} \\ &= \frac{-\frac{m+1}{2}\left(\frac{u^2}{2} + ku + u\eta(u)\right) + mu^2 - 4u\left(\frac{u^2}{2} + ku + u\eta(u)\right) + 2u^3}{\left(\frac{u^2}{2} + ku + u\eta(u)\right) - 2u^2} \\ &= \frac{\left(\frac{3m-1}{4} - 4k\right)u^2 - \frac{m+1}{2}ku - 4u^2\eta(u) - \frac{m+1}{2}u\eta(u)}{-\frac{3u^2}{2} + ku + u\eta(u)} \rightarrow -\frac{2}{3}\left(\frac{3m-1}{4} - 4k\right), u \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Par intégration entre 0 et u et de (4.23) on trouve :

$$k = -\frac{2}{3}\left(\frac{3m-1}{4} - 4k\right) \implies k = \frac{3m-1}{10} \text{ mais } -\frac{1}{4} \leq k \leq 0 \text{ alors } m \geq -\frac{1}{2} \text{ contradiction, donc } u_* \text{ est finie.}$$

On remarque que dans la région $\{v > 2u^2\} \cap \{u > 0\}$ on a $Q_m(u, v) < 0$ donc S_0^+ est Caractérisée par $v = W_m(u)$ avec $W'_m(u) < 0$ et S_0^+ intersecte l'axe des v . En effet si on suppose le contraire on aura $W_m(u) \longrightarrow \infty, u \longrightarrow u_1$ pour $u_1 \in]0, u_*[$ ce qui donne : $W'_m(u) \approx -\frac{m+1}{2} - 3u_1 < 0, u \longrightarrow u_1^+$ contradiction avec $V_m > V_{-\frac{1}{2}}$.



$-1 < M < -1/2$
Fig(15)

Théorème 4.2.2 . Pour $m \in]-1, -\frac{1}{2}]$ et $a < 0$ le problème $(\mathcal{C}_{0(a,m)})$ n'admet pas des solutions.

preuve . On suppose que le problème $(\mathcal{C}_{0(a,m)})$ admet une solution f , de la proposition (4.1.2) $\exists s \geq 0$ tel que $f(s) = 0$ et $f(t) > 0$ pour $t > s$ et on définit la suite (t_n) qui vérifie, $\lim_{n \rightarrow \infty} f'''(t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n)f''(t_n)$ quand $n \rightarrow +\infty$. En multipliant l'équation (1') par f et en l'intégrant entre s et t_n on obtient :

$$\begin{aligned} f(t_n)f''(t_n) - \frac{1}{2}f'^2(t_n) + \frac{1}{2}f'^2(s) &\leq f(t_n)f''(t_n) - \frac{1}{2}f'^2(t_n) + \frac{1}{2}f'^2(s) + \frac{m+1}{2}f'(t_n)f^2(t_n) \\ &= (2m+1) \int_s^{t_n} f(\eta)f'^2(\eta) d\eta \leq 0 \end{aligned}$$

Par passage à la limite on aura : $\frac{1}{2}f'^2(s) \leq 0$, contradiction.

Théorème 4.2.3 . Si $-1 < m < -\frac{1}{2}$ alors il existe $a_* > 0$ tel que le problème $(\mathcal{C}_{0(a,m)})$ n'admet pas de solution pour $0 < a < a_*$, une et une seule solution bornée pour $a = a_*$, deux solutions bornées et une infinité de solutions non bornées pour $a > a_*$.

Si $-\frac{1}{2} \leq m < -\frac{1}{3}$ alors pour tout $a > 0$ le problème $(\mathcal{C}_{0(a,m)})$ admet une solution bornée et une infinité de solutions non bornées.

preuve . Commençant par le cas : $-\frac{1}{2} \leq m < -\frac{1}{3}$ avec $a > 0$ en utilisant le problème $(\mathcal{C}_{(a,m,\mu)})$.

Considérons la trajectoire $(C_{a,\mu})$ correspondante aux solutions du système dynamique plan (\mathcal{P}) avec $\tau = 0$.

Du (Lemme 4.2.3 et Lemme 4.2.4), on sait que la ligne droite $u = \frac{1}{a^2}$ intersecte la séparatrice S_0^+ au point $(\frac{1}{a^2}, v)$ et on obtient les cas suivants :

1^{ère} cas : Si $\mu = a^3v$ alors f_μ est une solution bornée du problème $(\mathcal{C}_{(a,m,\mu)})$ parce que dans ce cas $(C_{a,\mu})$ coïncide avec la partie de la séparatrice S_0^+ qui tend vers O tangentiellement avec la droite (L) quand $s \rightarrow -\infty$ et elle vérifie pour t assez grand, $f'(t) > 0$, $f''(t) < 0$ et ces deux dernières inégalités proviennent du fait que $u(s) = \frac{f'_\mu(t)}{f_\mu^2(t)} > 0$, $v(s) = \frac{f''_\mu(t)}{f_\mu^3(t)} < 0$ et de plus on a :

$$u = \frac{f'_\mu(t)}{f_\mu^2(t)} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \frac{v}{u} = \frac{f''_\mu(t)}{f_\mu(t)f'_\mu(t)} \rightarrow -\frac{m+1}{2} \text{ quand } t \rightarrow +\infty \quad (4.24)$$

Puisque $f'_\mu(t) \rightarrow l \geq 0$ quand $t \rightarrow +\infty$ et si on suppose que $l > 0$ alors $f_\mu(t) \approx lt$.

De (4.24) quand $t \rightarrow +\infty$ on obtient : $f''_\mu(t) \approx -\frac{m+1}{2}l^2t$ d'où $f''_\mu(t) \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow +\infty$ ceci contredit le fait que $f'_\mu(t) \rightarrow l > 0$ quand $t \rightarrow +\infty$.

Ainsi $l = 0$ et f_μ est une solution du problème $(\mathcal{C}_{0(a,m)})$. f_μ est-elle bornée ?

Supposant que f_μ est non bornée, c'est-à-dire $f_\mu(t) \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$: de (4.24) il existe $t_0 > 0$ tel que $\forall t \geq t_0$, $f''_\mu(t) \leq -\frac{m+1}{4}f_\mu(t)f'_\mu(t)$, en intégrant entre t_0 et t on obtient :

$$\forall t \geq t_0 : \frac{f'_\mu(t)}{f_\mu^2(t)} - \frac{f'_\mu(t_0)}{f_\mu^2(t_0)} \leq -\frac{m+1}{8} \left(1 - \frac{f_\mu^2(t_0)}{f_\mu^2(t)}\right)$$

En faisant tendre $t \rightarrow +\infty$ et en utilisant (4.24) on obtient :

$$0 \leq -\frac{m+1}{8} \left(1 - \frac{f_\mu^2(t_0)}{f_\mu^2(\infty)}\right) \text{ d'où } -\frac{m+1}{8} \geq 0 \text{ contradiction car } -\frac{m+1}{8} < 0.$$

Donc f_μ est bornée.

2^{me} cas : $\mu > a^3v$. Soit f_μ est une solution du problème $(\mathcal{C}_{(a,m,\mu)})$. En vertu du comportement du champ de vecteurs dans l'aire $\{u > 0\} \cap \{v > 0\}$ on sait que la courbe $(C_{a,\mu})$ intersecte l'axe des u et tend vers le point singulier O tangentiellement au-dessous de l'axe des u quand $s \rightarrow -\infty$. Ce qui veut dire que pour t assez grand on a $f'_\mu(t) > 0$ et $f''_\mu(t) < 0$.

De plus $u(s) = \frac{f'_\mu(t)}{f_\mu^2(t)} \rightarrow 0$ et $\frac{v}{u} = \frac{f''_\mu(t)}{f_\mu(t)f'_\mu(t)} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$. D'où $f'_\mu(t) \rightarrow l$, $t \rightarrow +\infty$.

Si on suppose que $l > 0$ de l'égalité suivante :

$$f''_\mu(t) + \frac{m+1}{2} f_\mu(t) f'_\mu(t) = \mu + \frac{m+1}{2} a + \frac{3m+1}{2} \int_0^t f_\mu^2(\xi) d\xi \text{ (identité)}$$

On obtient :

$$f''_\mu(t) \approx -\frac{m+1}{2} l^2 t + \frac{3m+1}{2} l^2 t = ml^2 t \text{ quand } t \rightarrow +\infty$$

Ce qui contredit le fait que $f'_\mu(t) \rightarrow l$ quand $t \rightarrow +\infty$ donc f_μ est une solution du problème $(\mathcal{C}_{0(a,m)})$.

Prouvons que f_μ est non bornée.

En effet si f_μ est bornée, c'est-à-dire $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_\mu(t) = \lambda$ (finie).

En multipliant l'équation (1.1) par f et en l'intégrant entre t et $+\infty$ on obtient :

$$-f_\mu(t) f''_\mu(t) + \frac{1}{2} f_\mu'^2(t) - \frac{m+1}{2} f'_\mu(t) f_\mu^2(t) = (2m+1) \int_t^{+\infty} f_\mu(s) f_\mu'^2(s) ds \geq 0 \quad (4.25)$$

En divisant cette dernière par $f'_\mu(t) f_\mu^2(t)$ et en utilisant (4.24) on trouve une contradiction.

On conclut que f_μ est une solution non bornée du problème $(\mathcal{C}_{0(a,m)})$.

3^{me} cas : $\mu < a^3v$. Soit f_μ est une solution du problème $(\mathcal{C}_{(a,m,\mu)})$, alors la courbe $(C_{a,\mu})$ est située au-dessous de la séparatrice S_0^+ et elle intersecte l'axe des v d'une manière où f'_μ s'annule (ie $u = 0$) au moins en un point t_1 . Alors f_μ n'est pas une solution du problème $(\mathcal{C}_{0(a,m)})$ car si f_μ est une solution alors f'_μ ne s'annule uniquement qu'à l'infini.

On considère maintenant le cas $-1 < m < -\frac{1}{2}$. Soit (u_*, v_*) avec $[v_* = 2u_*^2]$ le point d'intersection de la séparatrice S_0^+ et l'isocline $v = 2u^2$ et soit $a_* = \frac{1}{\sqrt{u_*}}$. La ligne verticale $u = \frac{1}{a^2}$ n'intersecte pas la séparatrice S_0^+ si $a < a_*$ (Lemme 4.2.5). Avec les mêmes arguments comme dans la première partie du (Théorème 4.2.1) le problème $(\mathcal{C}_{0(a,m)})$ n'admet pas de solution pour $0 < a < a_*$, une et une seule solution bornée pour $a = a_*$ et une infinité de solutions pour $a > a_*$ ($\mu \in [a^3v_-, a^3v_+]$), dans ce cas l'inégalité (4.25) n'est pas vérifiée pour $m < -\frac{1}{2}$.

On prouve que les solutions correspondantes aux semi trajectoires positives $(C_{a,\mu})$ avec $\mu \in]a^3v_-, a^3v_+[$ sont non bornées.

Supposons que f_μ est bornée $(\lim_{t \rightarrow +\infty} f_\mu(t) = \lambda)$.

On divise (4.24) par $f'_\mu(t)f_\mu^2(t)$ et on utilise (4.25) on obtient :

$$\int_t^{+\infty} f_\mu(s)f_\mu'^2(s)ds \approx -\frac{m+1}{2(2m+1)}f_\mu'(t)f_\mu^2(t), t \rightarrow +\infty$$

On trouve :

$$\int_t^{+\infty} f_\mu'^2(s)ds \approx -\frac{m+1}{2(2m+1)}\lambda f_\mu'(t), t \rightarrow +\infty. \quad (4.26)$$

Et on a de (4.10) :

$$\int_t^{+\infty} f_\mu'^2(s)ds = -\frac{2}{3m+1} \left(f_\mu''(t) + \frac{m+1}{2} f_\mu'(t)f_\mu(t) \right)$$

Par combinaison avec (4.26) on trouve : $\frac{v}{u} = \frac{f''(t)}{f(t)f'(t)} \rightarrow -\frac{(m+1)^2}{4(2m+1)} \neq 0$ c'est une contradiction avec (4.24).

Donc f_μ est non bornée.

Remarque 4.2.7 . Pour $-1 < m < -\frac{1}{2}$ la valeur de a dépend de m . a_* est décroissante de $+\infty$ à 0 quand m croît de -1 à $-\frac{1}{2}$.

le cas où $m \geq 0$.

D'après [4] on sait que le problème $(\mathcal{C}_{0(a,m)})$ admet une et une seule solution concave pour tout $a \in \mathbb{R}$. Notre but est de démontrer l'existence ou la non-existence des solutions concaves-convexes.

Lemme 4.2.6 . Soit $m \geq 0$ et f une solution concave-convexe de $(\mathcal{C}_{0(a,m)})$, on désigne par t_0 le point où $f''(t_0) = 0$.

Alors la courbe de phase $(u(s), v(s))$ définie par (4.33) avec $\tau = t_0$ est une semi trajectoire qui se trouve dans le domaine borné :

$$D_- = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{m+1}{4} < u < 0 \text{ et } 0 \leq v < -\frac{m+1}{2}u \right\} \quad (4.27)$$

preuve . De la (Proposition 4.1.3), f est positive décroissante et convexe sur $[t_0, +\infty[$ donc :

$$\forall t \geq t_0 : \frac{f'(t)}{f^2(t)} < 0 \text{ et } \frac{f''(t)}{f^3(t)} \geq 0 \quad (4.28)$$

alors $u < 0$ et $v \geq 0$, de (4.5) on a :

$$\forall t \geq 0 : f''(t) + \frac{m+1}{2} f(t)f'(t) < 0 \quad (4.29)$$

Par intégration entre t et $+\infty$ on obtient :

$$\forall t \geq 0, f'(t) + \frac{m+1}{4} f^2(t) > \frac{m+1}{4} \lambda^2 \geq 0 \quad (4.30)$$

On divise (4.29) sur $f^3(t)$ et (4.30) sur $f^2(t)$ on obtient :

$$\forall t \geq t_0, \frac{f'(t)}{f^2(t)} + \frac{m+1}{4} > 0 \text{ et } \frac{f''(t)}{f^3(t)} + \frac{m+1}{2} \frac{f'(t)}{f^2(t)} < 0 \quad (4.31)$$

Et de (4.31) et après intégration entre t_0 et t on obtient :

$$\forall t \geq t_0, f(t) \geq \frac{1}{\frac{m+1}{4}(t-t_0) + \frac{1}{f(t_0)}}$$

ce qui implique que $\int_{t_0}^{+\infty} f(\xi) d\xi = +\infty$ Donc la trajectoire $s \rightarrow (u(s), v(s))$ est définie sur l'intervalle tout entier $[0, +\infty[$ avec

$$-\frac{m+1}{4} < u < 0 \text{ et } 0 \leq v < -\frac{m+1}{2}u.$$

Lemme 4.2.7 . Si $m \geq 0$ alors la séparatrice S_0^+ définie par $v = V_m(u)$ pour $u > 0$ où V_m est la solution de l'équation :

$$v' = F_m(u, v) = \frac{-\frac{m+1}{2}v + mu^2 - 3uv}{v - 2u^2} = \frac{Q_m(u, v)}{p(u, v)} \text{ et } V_m(u) \text{ vérifie :}$$

$$\forall u > 0, -3u - \frac{m+1}{2} < V'_m(u) < -\frac{m+1}{2}$$

preuve . S_0^+ part du point singulier O tangentielllement et au-dessous de L (fig (13)), à partir de (4.14) et pour $m > 0$ on déduit :

$$\forall u > 0, V'_m(u) < -\frac{m+1}{2}. \text{ Et on a :}$$

$$\forall u > 0, V'_m(u) - \left(-3u - \frac{m+1}{2}\right) = \frac{-6u^3 - u^2}{V_m(u) - 2u^2} > 0$$

Lemme 4.2.8 . Si $m = 1$ les séparatrices S_1^+ et S_2^- coïncides ; et les fonctions, V_1 et W_1 qui les caractérisent pour $-\frac{1}{4} < u < 0$ sont définies par :

$$V_1(u) = \frac{-u + u\sqrt{1+4u}}{2} \text{ et } W_1(u) = \frac{-u - u\sqrt{1+4u}}{2}$$

preuve . Soit (u, v) les solutions de (\mathcal{P}) .

Si on suppose que $w = v^2 + uv - u^3$ on obtient $\dot{w} = -(1+6u)w$.

Donc l'ensemble $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : v^2 + uv - u^3 = 0\}$ est un ensemble invariant.

Alors cet ensemble est l'union des courbes de phases, et comme S_1^+ et S_2^- sont les seules courbes de phases tangentes à L_1 et L_0 respectivement alors :

il est simple de voir que V_1 correspond à S_2^- et W_1 à S_1^+ .

Lemme 4.2.9 . Soit $m \in [0, 1]$.

Quand s croît, la α -séparatrice S_2^- part vers la gauche du point singulier O tangentielllement à L_0 , et elle n'intersecte pas l'isocline $p(u, v) = 0$ ou bien elle l'intersecte au point $(u_*, 2u_*^2)$ tel que $u_* \leq -\frac{1}{4}$ et après elle intersecte la ligne droite L_1 .

Quand s décroît, la w -séparatrice part vers la gauche du point singulier O tangentielllement à L_1 et elle intersecte l'isocline $p(u, v) = 0$ au point $(u_*, 2u_*^2)$ tel que $-\frac{1}{4} \leq u_* < 0$ et après elle reste dans la région bornée D_- . (voir Fig(16))

preuve . Soit $m \in [0, 1]$, on sait qu'au voisinage de O la séparatrice S_2^- reste dans la région $\{0 \leq v < 2u^2\} \cap \{u < 0\}$ et elle est au-dessous de l'isocline $v = 2u^2$, alors elle est définie par $v = V_m(u)$ où V_m est la solution de $v' = \frac{Q_m(u, v)}{p(u, v)}$ et on $v \approx \frac{2m}{m+1}u^2, u \rightarrow 0$.

On a : Quand $u_0 \rightarrow 0$, $V_m(u_0) = \frac{2m}{m+1}u_0^2$ et $V_1(u_0) = \frac{-u_0 + u_0\sqrt{1+4u_0^2}}{2}$ donc :

$$V_m(u_0) - V_1(u_0) \leq 0 \implies V_m(u_0) \leq V_1(u_0)$$

Et finalement on a :

$$F_m(u, v) - F_1(u, v) = \frac{1-m}{2} \geq 0 \quad (4.32)$$

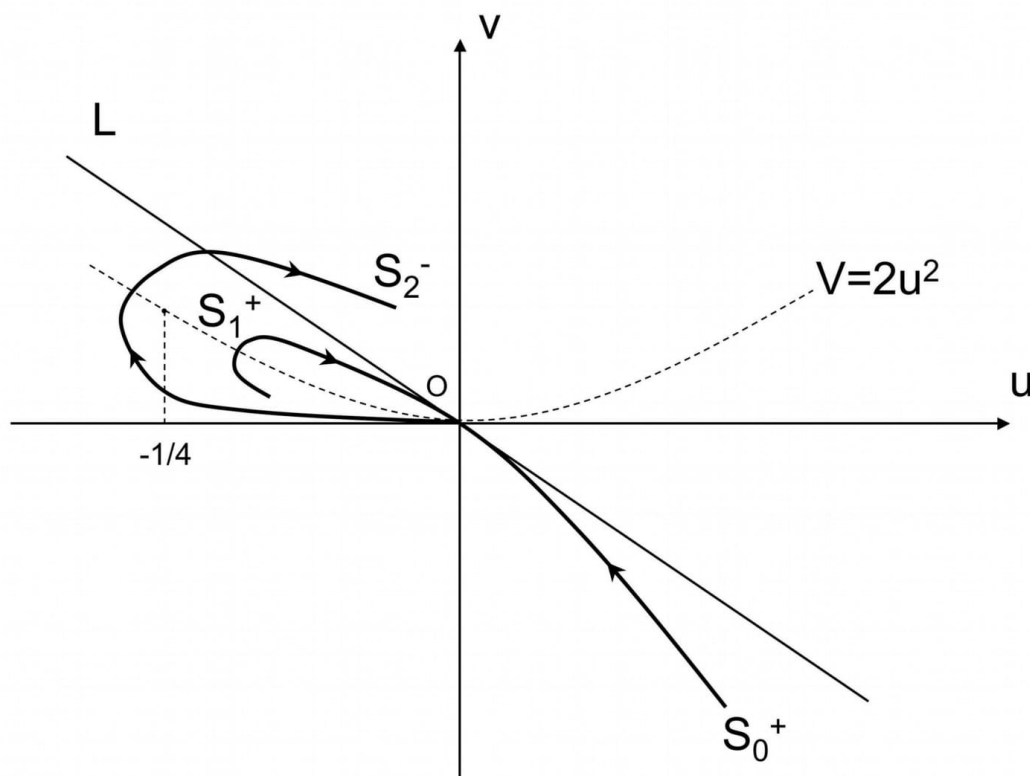
D'après la forme classique de l'inégalité différentielle voir [10] on obtient $V_m \leq V_1$ sur l'intervalle maximal gauche $]-\frac{1}{4}, u_0]$ où $V_1(u) = \frac{-u + u\sqrt{1+4u}}{2}$, ce qui implique que si la séparatrice S_2^- intersecte l'isocline $v = 2u^2$ au point $(u_*, 2u_*^2)$, alors on obtient $u_* \leq -\frac{1}{4}$.

Pour S_1^+ on a $v = W_m(u)$ et $W_m(u) - W_1(u) = -\frac{m+1}{2}u + u + 0(u) = \frac{1-m}{2}u + 0(u)$

Donc $W_m(u_0) \leq W_1(u_0)$ quand $u_0 \rightarrow 0^-$, alors de (4.32) $W_m < W_1$ sur tout l'intervalle de définition de W_m et W_1 donc sur $]-\frac{1}{4}, u_0]$.

On voit que S_1^+ intersecte l'isocline $p(u, v) = 0$ au point $(u_*, 2u_*^2)$ tel que, $u_* \geq -\frac{1}{4}$

Et on remarque que S_1^+ doit rester dans D_- d'après lemme (4.2.6), et si S_2^- ne reste pas au-dessous de la parabole $v = 2u^2$ alors elle intersecte L .



$0 < M < 1$
Fig(16)

Lemme 4.2.10 . Soit $m > 1$

Quand s devient grand, la α -séparatrice part de la gauche du point singulier O tangentiellement à L_0 et intersecte l'isocline $p(u, v) = 0$ au point $(u_*, 2u_*^2)$ tel que $-\frac{1}{4} \leq u_* < 0$ et elle reste après dans la région bornée D_- .

Quand s diminue, la w -séparatrice part de la gauche du point singulier O tangentiellement à L et intersecte l'isocline $p(u, v) = 0$ au point $(u_*, 2u_*^2)$ tel que $u_* \leq -\frac{1}{4}$ et après elle coupe respectivement l'axe des u et l'axe des v et après elle reste dans le quadrant $\{u > 0\} \cap \{v > 0\}$ puis elle part à l'infini avec une pente strictement inférieure à $-\frac{m+1}{2}$ et strictement supérieure à $-3u - \frac{m+1}{2}$. Fig(17)

preuve . La séparatrice S_2^- part de la gauche du point singulier O tangentiellement à L_0 et au-dessous de L_0 et $p(u, v) < 0$, donc on peut la caractériser par $v = V_m(u)$ avec $V_m \geq V_1$ car $V_m - V_1 \geq 0$, et $F_m(u, v) - F_1(u, v) = \frac{1-m}{2} \leq 0$.

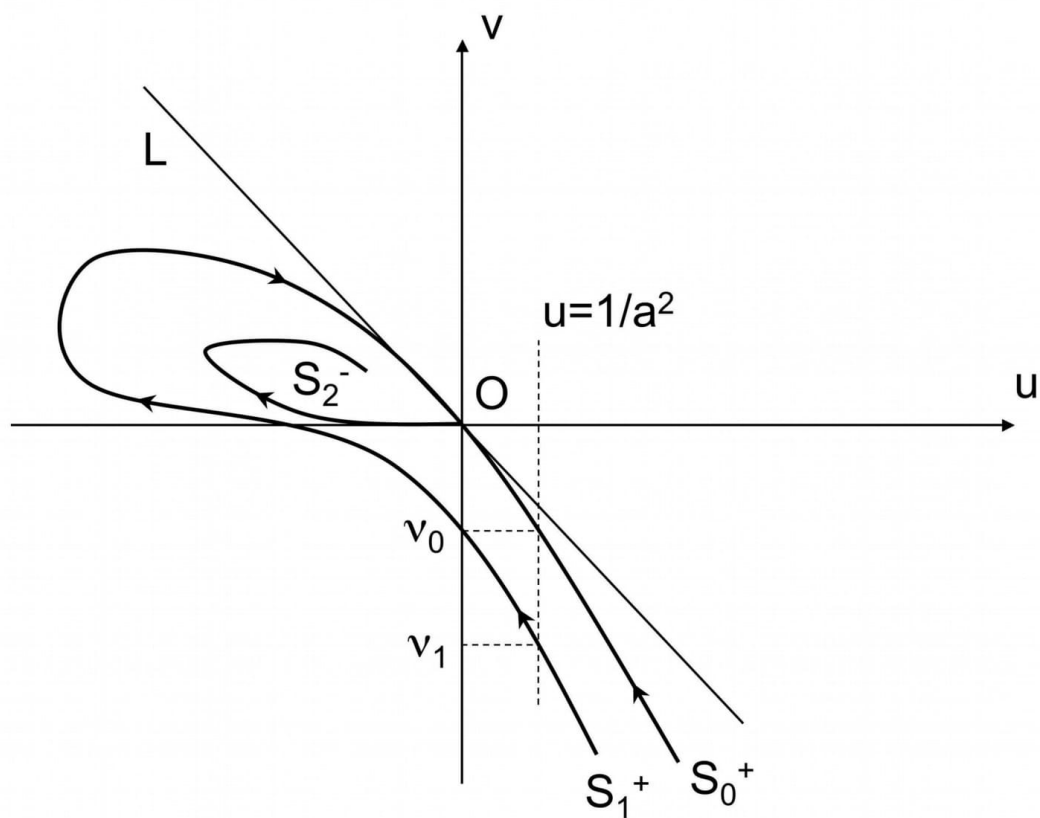
Donc d'après la forme classique de l'inégalité différentielle on a $V_m \geq V_1$, alors S_2^- intersecte l'isocline $p(u, v) = 0$ au point $(u_*, 2u_*^2)$ tel que $-\frac{1}{4} \leq u_* < 0$.

La séparatrice S_1^+ part à gauche du point singulier O tangentiellement à L , de plus S_1^+ est au-dessous de L et au-dessus de l'isocline $p(u, v) = 0$ dans la région bornée :

$\{2u^2 < v < -\frac{m+1}{2}u\} \cap \{u < 0\}$, on a $v = V_m(u)$ où V_m est la solution de $v' = \frac{Q_m(u, v)}{p(u, v)}$. Et comme $m > 1$ on déduit de (4.14) que $-\frac{m+1}{2} < V_m'(u) < 0$ dès que $V_m(u) > \psi_m(u)$, dans ce contexte S_1^+ intersecte l'isocline $Q_m(u, v) = 0$ au point $(\hat{u}, \psi_m(\hat{u}))$ avec $\hat{u} < -\frac{1}{6}$.

Pour $u < \hat{u}$ on a $V_m'(u) > 0$ et S_1^+ intersecte l'isocline $p(u, v) = 0$ au point $(u_*, 2u_*^2)$. En utilisant les mêmes arguments de la démonstration du (Lemme 4.2.9) montre que $u_* < -\frac{1}{4}$. On remarque que S_1^+ intersecte la parabole $v = 2u^2$ et S_2^- reste dans la région bornée D_- .

Après avoir intersecté la parabole, on définit S_1^+ par $v = W_m(u)$ et on déduit du comportement de S_2^- que S_1^+ intersecte l'axe des u et de (4.16) on voit que $-\frac{m+1}{2} < W_m'(u) < 0$ où $u < 0$ dès que $W_m(u) < 0$. Par conséquence S_1^+ intersecte l'axe des v .



$M > 1$
Fig(17)

Théorème 4.2.4 . Si $m \in [0, 1]$, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$ le problème $(\mathcal{C}_{0(a,m)})$ admet une et une seule solution concave.

preuve . l'existence de la solution concave et l'unicité ont été prouvées dans [4] pour tout $m \geq 0$. Ce qui reste à démontrer c'est, qu'il n'y a pas des solutions concaves-convexes pour $m \in [0, 1]$.

On suppose que f est une solutions concave-convexe du problème $(\mathcal{C}_{0(a,m)})$. Soit t_0 le point où $f''(t_0) = 0$, on considère la semi trajectoire définie dans le (Lemme 4.2.6), on a alors :

$u(0) = u\left(\int_{t_0}^{t_0} f(s)ds\right) = \frac{f'(t_0)}{f^2(t_0)}$ et $v(0) = 0$ et du (Lemme 4.2.9) on déduit que la semi-trajectoire est positive et ne reste pas dans le domaine borné D_- , donc on aboutit à une contradiction.

Théorème 4.2.5 . Si $m > 1$, alors pour $a > 0$ le problème $(\mathcal{C}_{0(a,m)})$ admet une et une seule solution concave et une infinité de solutions concaves-convexes.

preuve . soit $a > 0$, on considère le problème aux valeurs initiales $(C_{a,m,\mu})$ et $C_{a,\mu}$ la trajectoire correspondante au plan du système dynamique (\mathcal{P}) définie par (4.33) avec $\tau = 0$.

Du (Lemme 4.2.10) la ligne droite $u = \frac{1}{a^2}$ intersecte la séparatrice S_1^+ et S_0^+ aux points $(\frac{1}{a^2}, v_0)$ et $(\frac{1}{a^2}, v_1)$ respectivement avec $v_1 < v_0 < 0$.

Pour $\mu = a^3 v_0$ la fonction f est la solution bornée concave du problème $(\mathcal{C}_{0(a,m)})$. En effet si $C_{a,\mu}$ est la semi-trajectoire positive correspondante, alors $C_{a,\mu}$ et la séparatrice S_0^+ sont confondues, ce qui entraine que f est positive, définie sur $[0, +\infty[$ et de plus $f' > 0$ et $f'' < 0$, $\frac{f'(t_0)}{f^2(t_0)} \rightarrow 0$ et $\frac{f''(t)}{f(t)f'(t)} \rightarrow -\frac{m+1}{2}$, $t \rightarrow +\infty$.

Et on déduit le résultat à partir de la démonstration du (Théorème 4.2.3).

Pour $\mu \in [a^3 v_1, a^3 v_0[$ on voit que la trajectoire $C_{a,\mu}$ intersecte l'axe des u pour un certain s_0 et reste dans le domaine défini par S_1^+ pour $s > s_0$, et du théorème de Poincaré-Bendixon $C_{a,\mu}$ est une semi-trajectoire positive où l'ensemble w -limite est soit le point O si $\mu = a^3 v_1$, soit le point A , soit le cycle limite entourant le point A si $\mu \in]a^3 v_1, a^3 v_0[$.

Puisque $v' = F(u, 0) = -\frac{m}{2} < 0$, alors le cycle limite ne peut pas intersecter l'axe des u et donc f est positive définie sur $[0, +\infty[$ et il existe $t_0 > 0$ tel que $f'(t) < 0$ et $f''(t) > 0$ pour $t > t_0$, de plus $f'(t) \rightarrow l \leq 0$ pour $t \rightarrow +\infty$.

Si on suppose que $l < 0$ on obtient une contradiction avec f est positive.

Donc si $\mu \in [a^3 v_1, a^3 v_0[$ alors f est une solution concave-convexe du $(\mathcal{C}_{0(a,m)})$.

On remarque que pour $\mu \notin [a^3 v_1, a^3 v_0]$, f ne peut pas être une solution de $(\mathcal{C}_{0(a,m)})$ d'après le (Lemme 4.2.6).

Remarque 4.2.8 . La solution concave-convexe qui est construite dans le théorème peut être étendue dans l'intervalle maximal d'existence $]-T, +\infty[$ et il est facile de voir que $f(t) \rightarrow -\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$ voir

[4], alors pour tout $a \leq 0$ on peut choisir $k > 0$ et $t_0 \in]-T, 0[$ telle que la fonction $t \rightarrow f(kt + t_0)$ est une solution concave-convexe de $(\mathcal{C}_{0(a,m)})$, donc le problème a une infinité de solutions concaves-convexes pour $a \in \mathbb{R}$.

Remarque 4.2.9 . Pour $m = 1$ la solution unique du $(\mathcal{C}_{0(a,m)})$ est donnée par :

$$f(t) = a + (c - a)(1 - e^{-ct}) \text{ avec } c = \frac{1}{2} \left(a + \sqrt{a^2 + 4} \right), \text{ voir [4], [?] et [7].}$$

Remarque 4.2.10 . Soit $m > 1$ et f une solution concave-convexe du problème $(\mathcal{C}_{0(a,m)})$. Puisque f est positive et décroissante à l'infini alors :

$f(t) \rightarrow \lambda \geq 0$ quand $t \rightarrow +\infty$. Si f est la solution qui correspond à la séparatrice S_1^+ , alors on prouve d'après la (Remarque 4.2.2) que $\lambda > 0$ et si non Il existe $c > 0$ tel que $|f'(t)| > c|f^2(t)|$ pour t assez grand donc $\lambda = 0$.

Remarque 4.2.11 . Pour $1 < m < \frac{4}{3}$ le point singulier A est un foyer instable, ce qui implique qu'il existe au moins un cycle entourant A .

Si $m > \frac{4}{3}$ alors A est attractif et le cycle n'existe pas.

Dans le cas où f est une solution concave-convexe du problème $(\mathcal{C}_{0(a,m)})$ On a :

$$\frac{f'(t)}{f^2(t)} \approx -\frac{1}{6} \text{ et } \frac{f''(t)}{f^3(t)} \approx \frac{1}{18} \text{ quand } t \rightarrow +\infty, \text{ et } f(t) \text{ serait assez proche de } \frac{6}{t} \text{ pour } t \text{ assez grand.}$$

4.3 Exercices corrigés.

Exercice 4.3.1 Dire si les équations différentielles suivantes sont linéaires, ou non linéaires.

1. $xf'(x) - 3x = \sin x$
2. $t^2y'(t) - 3y(t) = \sin t$
3. $(1 - x)x' + 2x = \exp(t)$
4. $\frac{d^3x}{dt^3} + \sin x = 0$
5. $\frac{d^4x}{dt^4} + t\frac{d^2x}{dt^2} - 5x = 0$

Exercice 4.3.2 Résoudre sur \mathbb{R} les équations différentielles suivantes :

1. $y'(t) = -\frac{2t}{1+t^2}y(t) + t$
2. $y''(t) = y'(t) + 6y(t)$
3. $y''(t) = -4y'(t) + -4y(t)$
4. $y''(t) = -4y'(t) + -13y(t)$

5. $y''(t) = y'(t) + 6y(t) + t \exp(t)$
6. $y''(t) = y'(t) + 6y(t) + t \exp(-2t)$
7. $y''(t) = y'(t) - 13y(t) + t \exp(t)$
8. $y''(t) = -y(t) + \cos^3(t)$
9. $y'(t) = \frac{y(t)}{2t} + \frac{1}{2ty(t)}$
10. $t^2 y''(t) = aty'(t) + by(t) + h(t)$ où a et b sont deux constantes, h une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Solution.

1. Commençons par résoudre l'équation sans second membre.

$$\begin{aligned}
 y'(t) = -\frac{2t}{1+t^2}y(t) &\Rightarrow \frac{y'(t)}{y(t)} = -\frac{2t}{1+t^2} \\
 &\Rightarrow \ln |y(t)| = -\ln |1+t^2| + \ln(C). \\
 &\Rightarrow y(t) = \frac{C}{1+t^2}
 \end{aligned}$$

La solution générale de l'équation sans second membre est :

$$y(t) = \frac{C}{1+t^2},$$

où C est une constante réelle quelconque. Cherchons maintenant une solution de l'équation de départ, en remplaçant C par une fonction $C(t)$ dans la solution générale de l'équation sans second membre.

$$\begin{aligned}
 y(t) = \frac{C(t)}{1+t^2} &\Rightarrow y'(t) = -\frac{2tC(t)}{(1+t^2)^2} + \frac{C'(t)}{1+t^2} \\
 &\Rightarrow y'(t) + \frac{2t}{1+t^2}y(t) = \frac{C'(t)}{1+t^2} = t. \\
 &\Rightarrow C(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{4} + C(0).
 \end{aligned}$$

La solution générale de l'équation avec second membre est :

$$y(t) = \frac{\frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{4}}{1+t^2} + \frac{C}{1+t^2}.$$

2. L'équation caractéristique associée est :

$$r^2 = r + 6$$

l'équation caractéristique associée possède deux racines réelles distinctes $r_1 = -2$ et $r_2 = 3$, alors la solution générale est :

$$y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{3t},$$

avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.

3. L'équation caractéristique associée est :

$$r^2 = -4r - 4$$

l'équation caractéristique associée possède deux racines réelles distinctes $r_1 = -2$ et $r_2 = -2$, alors la solution générale est :

$$y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t},$$

avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.

4. L'équation caractéristique associée est :

$$r^2 = -4r - 13$$

l'équation caractéristique associée possède deux racines complexes distinctes $r_1 = -2 + 3i$ et $r_2 = -2 - 3i$, alors la solution générale est :

$$y(t) = e^{-2t}(C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t)),$$

avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.

5. L'équation caractéristique associée à l'équation sans second membre est :

$$r^2 = 4r + 6$$

l'équation caractéristique associée possède deux racines réelles distinctes $r_1 = -2$ et $r_2 = 3$, alors la solution générale de l'équation sans second membre est :

$$y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{3t},$$

avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$. Et solution particulière de l'équation (5) est :

$$y_p(t) = e^t(\alpha t + \beta).$$

6. L'équation caractéristique associée à l'équation sans second membre est :

$$r^2 = 4r + 6$$

l'équation caractéristique associée possède deux racines réelles distinctes $r_1 = -2$ et $r_2 = 3$, alors la solution générale de l'équation sans second membre est :

$$y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{3t},$$

avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$. Et solution particulière de l'équation (6) est :

$$y_p(t) = e^{-2t}(\alpha t^2 + \beta t + \gamma).$$

7. L'équation caractéristique associée à l'équation sans second membre est :

$$r^2 = -4r - 13$$

l'équation caractéristique associée possède deux racines réelles distinctes $r_1 = -2+3i$ et $r_2 = -2-3i$, alors la solution générale est :

$$y(t) = e^{-2t}(C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t)),$$

avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$. Et la solution particulière de l'équation (7) est :

$$y_p(t) = e^t(\alpha t + \beta).$$

8. Le second membre ne ressemble pas à ceux que nous avons déjà traités. Mais en linéarisant :

$$\cos^3(t) = \frac{3}{4} \cos(t) + \frac{1}{4} \cos(3t) = \frac{3}{8} e^{it} + \frac{3}{8} e^{-it} + \frac{1}{8} e^{3it} + \frac{1}{8} e^{-3it}.$$

Le principe de superposition des solutions permet de traiter séparément les équations pour chacun des seconds membres. Considérons d'abord $y''(t) = -y(t) + \cos^3(t)$. Comme i et $-i$ sont racines de l'équation caractéristique, il faut chercher des solutions sous la forme :

$$\alpha t e^{it} + \beta t e^{-it}.$$

A priori, α et β sont des complexes, mais comme nous cherchons des solutions réelles, celles-ci seront nécessairement de la forme :

$$\gamma t \cos(t) + \delta t \sin(t).$$

Le calcul direct par indentification des coefficients donne $\gamma = 0$ et $\delta = \frac{3}{8}$.

Traitons maintenant l'équation $y''(t) = -y(t) + \cos(3t)$. Puisque $-3i$ et $3i$ ne sont pas racines de l'équation caractéristique, on doit chercher des solutions sous la forme :

$$\alpha t e^{3it} + \beta t e^{-3it}.$$

Comme elles doivent être réelles, on cherchera par identification des coefficients deux réels γ et δ tels que :

$$\gamma \cos(3t) + \delta \sin(3t).$$

soit solution. On trouve $\gamma = -\frac{1}{32}$ et $\delta = 0$. Voici la solution générale de l'équation de départ $y''(t) = -y(t) + \cos^2(t)$.

$$y(t) = \frac{3}{8} t \sin(t) - \frac{1}{32} \cos(3t) + C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t),$$

avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.

9. Le changement de fonction $z(t) = y^2(t)$ conduit à :

$$z'(t) = \frac{z(t)}{t} + \frac{1}{t}.$$

La solution générale de cette équation linéaire est :

$$z(t) = Ct - 1,$$

sur $] -\infty, 0[$, ou bien $] 0, +\infty[$. On en déduit les solutions de l'équation de Bernoulli initiale, sous la forme $y(t) = (Ct - 1)^{\frac{1}{2}}$, définie seulement si $Ct - 1 \geq 0$.

10. Pour $t \in \mathbb{R}_*^+$, on pose $t = e^x$, et $z(x) = y(e^x)$. On a alors :

$$z'(x) = e^x y'(e^x) = t y'(t).$$

En dérivant une fois de plus,

$$z''(x) = e^x y'(e^x) + e^{2x} y''(e^x) = t y'(t) + t^2 y''(t).$$

Pour $t \in \mathbb{R}_*^-$, le changement de variable $t = -e^x$ conduit aux mêmes expressions de z' et z'' en fonction de t et y . On se ramène ainsi, pour $t \in \mathbb{R}_*^+$, à l'équation linéaire du second ordre en z :

$$z''(x) = (a + 1)z'(x) + bz(x) + h(e^x).$$

Par exemple, l'équation $t^2 y''(t) = -t y'(t) - y(t)$, se ramène à $z''(x) = -z(x)$, dont la solution générale est $\{C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)\}$ avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$. La solution générale sur \mathbb{R}_*^+ (respectivement : \mathbb{R}_*^-) s'obtient en remplaçant x par $\ln(t)$ (respectivement : $\ln(-t)$).

existence, unicité

Exercice 4.3.3 *Montrer que le problème de Cauchy :*

$$y'(t) = 3y(t)^{\frac{2}{3}}, y(0) = 0$$

admet une infinité de solutions. Pourquoi il n'y a pas unicité de la solution ? Et si l'on choisit une condition initiale $y_0 \neq 0$?

Solution. Une solution triviale est la fonction $y(t) = 0$. En supposant $y_t \neq 0$, on intègre l'EDO :

$$\frac{1}{3} \int_{t_0}^t y'(t) y(t)^{-\frac{2}{3}} dt = \int_{t_0}^t dt$$

on obtient : $y(t) = t^3$. Cette fonction est aussi solution du problème de Cauchy. A partir de $y(t) = t^3$ on peut construire une infinité de solutions du problème de Cauchy. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < 0 < b$ la fonction :

$$\begin{cases} (t-a)^3 & \text{si } t < a \\ (t-b)^3 & \text{si } t > b \\ 0 & \text{si } a \leq t \leq b \end{cases}$$

est solution du problème de Cauchy. Pourquoi il n'y a pas unicité de la solution ? Parce que la fonction $y \mapsto f(y) = 3y^{\frac{2}{3}}$ n'est pas lipschitzienne au voisinage de $y = 0$. Sa dérivée $y \mapsto f'(y) = \frac{2}{y^{\frac{1}{3}}}$ tend vers ∞ lorsque $y \mapsto 0$. Ainsi on ne peut pas évoquer le théorème de Cauchy-Lipschitz. Si $y \neq 0$ la fonction f est de classe C^1 et le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'une unique solution locale.

Exercice 4.3.4 Résoudre le problème de Cauchy :

$$y'(t) = e^{-y(t)} \cos t, y(t_0) = y_0$$

avec condition initiale :

a $y(0) = 0$

b $y(2\pi) = 0$

c $y(0) = 2\pi$

Solution. Une La fonction $(t, y) \mapsto f(t, y) = e^{-y} \cos t$ est continue et de classe C^1 par rapport à y pour tout y parce que c'est une composition de fonctions de classe C^1 . Ceci implique qu'elle est localement lipschitzienne et à l'aide du théorème de Cauchy-Lipschitz il existe une unique solution locale du problème de Cauchy pour toute condition initiale. On intègre par séparation des variables et on trouve :

$$\int_{t_0}^t y'(t) e^{y(t)} dt = \int_{t_0}^t \cos t dt,$$

ce qui nous donne :

$$e^{y(t)} = \sin t + k$$

Alors les solutions de l'EDO (il y en a une infinité) sont de la forme :

$$y(t) = \ln(\sin t + k)$$

avec la condition de compatibilité $\sin t + k > 0$.

a) Si l'on impose $y(0) = 0$ alors :

$$y(t) = \ln(\sin t + 1)$$

avec $t \neq \frac{-\pi}{2}$ et $t \neq \frac{3\pi}{2}$.

b) Si l'on impose $y(2\pi) = 0$ alors :

$$y(t) = \ln(\sin t + 1)$$

avec $t \neq \frac{3\pi}{2}$ et $t \neq \frac{7\pi}{2}$.

c) Si l'on impose $y(0) = 2\pi$ alors :

$$y(t) = \ln(\sin t + e^{2\pi})$$

avec $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.3.5 Résoudre le problème de Cauchy :

$$y'(t) = \sqrt{|y(t)|}, y(t_0) = y_0$$

avec $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$

Solution.

Si $y_0 \neq 0$ la fonction $f = \sqrt{|y(t)|}$ est de classe C^1 au voisinage de y_0 et le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'une unique solution locale. Cette solution se calcule par séparation des variables. On intègre l'équation différentielle :

$$\int_{t_0}^t \frac{y'(t)}{\sqrt{|y(t)|}} dt = \int_{t_0}^t dt.$$

Si $y_0 > 0$ on trouve :

$$2\sqrt{y(t)} - 2\sqrt{y_0} = t - t_0.$$

Donc l'unique solution du problème de Cauchy est donnée par :

$$y(t) = \frac{1}{4}(t - t_0 + 2\sqrt{y_0})^2.$$

Noter que $y(t)$ est définie pour $t > t_0 - 2\sqrt{y_0}$.

Si $y_0 < 0$ on trouve :

$$2\sqrt{-y(t)} - 2\sqrt{-y_0} = t - t_0.$$

Donc l'unique solution du problème de Cauchy est donnée par :

$$y(t) = -\frac{1}{4}(t - t_0 + 2\sqrt{-y_0})^2.$$

Noter que $y(t)$ est définie pour $t < t_0 + 2\sqrt{y_0}$.

La fonction $f = \sqrt{|y(t)|}$ n'est pas lipschitzienne au voisinage de $y = 0$. Sa dérivée tend vers ∞ lorsque $y \rightarrow 0$. Ainsi on ne peut pas évoquer le théorème de Cauchy-Lipschitz. En fait si $y = 0$ il y a une infinité

de solutions. Par exemple la fonction constante $y(t) = 0$ est une solution du problème de Cauchy et pour

tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < 0 < b$ la fonction :
$$\begin{cases} -\frac{1}{4}(t+a)^2 & t < a \\ \frac{1}{4}(t-b)^2 & t > b \\ 0 & a \leq t \leq b \end{cases}$$
 est une solution du problème de Cauchy.

Exercice 4.3.6 Résoudre le problème de Cauchy :

$$y'(t) = \frac{5}{4}y(t)^{\frac{1}{5}}, y(0) = 0.$$

Solution. La fonction $y \mapsto f(y) = \frac{5}{4}y(t)^{\frac{1}{5}}$ n'est pas lipschitzienne au voisinage de $y = 0$. Sa dérivée tend vers ∞ lorsque $y \rightarrow 0$. Ainsi on ne peut pas évoquer le théorème de Cauchy-Lipschitz. En fait le problème de Cauchy admet une infinité de solutions. La fonction constante $y(t) = 0$ est une solution. En supposant $y(t) \neq 0$, on intègre l'EDO :

$$\int_{t_0}^t y'(t)y(t)^{-\frac{1}{5}} dt = \int_{t_0}^t \frac{5}{4} dt,$$

on obtient :

$$\frac{5}{4}y(t)^{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}t + k,$$

avec $k \in \mathbb{R}$ à déterminer à l'aide de la condition initiale. On trouve $k = 0$. Donc :

$$y(t) = t^{\frac{5}{4}}.$$

Cette fonction est aussi solution du problème de Cauchy. Autres solutions sont :

$$y(t) = -t^{\frac{5}{4}}.$$

$$\begin{cases} 0, & t < a \\ (t-a)^{\frac{5}{4}}, & t \geq a \end{cases} \quad . \text{ avec } a \in \mathbb{R}_+.$$

Exercice 4.3.7 Considérons l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$f(t, x) = \begin{cases} \frac{4t^3x}{t^4+x^2}, & si(t, x) \neq (0, 0) \\ 0, & si(t, x) = (0, 0) \end{cases}$$

. et l'équation différentielle

$$x' = f(t, x).$$

1. L'application f est-elle continue ? est-elle localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable ? Que peut-on en déduire pour l'équation $x' = f(t; x)$?
2. Soit ϕ une solution de l'équation $x' = f(t; x)$ qui est définie sur un intervalle I ne contenant pas 0. On définit une nouvelle application ψ par $\phi(t) = t^2\psi(t)$, $t \in I$. Déterminer une équation différentielle satisfaite par ψ , puis résoudre cette nouvelle équation.
3. Que peut-on en déduire pour l'existence et l'unicité de la solution de l'équation différentielle $x' = f(t; x)$ vérifiant la condition initiale $(t_0, x_0) = (0, 0)$.

Solution.

1. Pour $(t, x) \neq (0, 0)$, la fonction $\frac{4t^3x}{t^4+x^2}$ est de classe C^∞ . D'autre part,

$$|f(t; x)| = |2t| \frac{2t^2|x|}{(t^2)^2 + x^2} \leq |2t|.$$

Par passage à la limite, on obtient

$$\lim f(t; x) = 0 = f(0; 0), \text{ quand } (t, x) \longrightarrow (0, 0).$$

D'où, f est continue en $(0, 0)$. Supposons que la fonction f est localement lipschitzienne au voisinage de $(0, 0)$. Alors

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall t \in]-\alpha, \alpha[, \forall x \in]-\beta, \beta[, |f(t; x) - f(t; 0)| \leq k|x - 0|.$$

Ceci signifie que

$$\left| \frac{4t^3x}{t^4+x^2} \right| \leq k|x|.$$

C'est-à-dire, $\left| \frac{4t^3}{t^4+x^2} \right| \leq k$. En particulier, pour un certain $k_1 > k$

$$\frac{4}{t} \leq k, \forall t \in]0, \alpha[.$$

Ceci est une contradiction. Le théorème de l'unicité des solutions des équations différentielles n'est donc pas applicable pour l'équation différentielle $x' = f(t; x)$.

2. On a $\psi(t) = \frac{1}{t^2}\phi(t)$. En dérivant les deux membres et en remplaçant $\phi'(t)$ par sa valeur (puisque ϕ est une solution de l'équation différentielle $x' = f(t; x)$), et on exprimant le tout en fonction de ψ , on obtient la nouvelle équation différentielle

$$\frac{\psi'(t)(1 + \psi^2(t))}{\psi(t)(1 - \psi^2(t))} = \frac{2}{t}.$$

Après des simples calculs on obtient :

$$\psi(t) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4c^2t^4}}{2ct^2}.$$

et

$$\psi(t) = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4c^2 t^4}}{2ct^2}.$$

Exercice 4.3.8 Trouver les points singuliers et la nature de chaque point pour les systèmes :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{3}x + 4y \\ y' = -y \end{cases}, \begin{cases} x' = -\frac{1}{3}x + 4y \\ y' = y \end{cases}, \begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}.$$

Solution. Les valeurs propres de la matrice associée au système $\begin{cases} x' = -\frac{1}{3}x + 4y \\ y' = -y \end{cases}$ sont (-1) et $(-1/3)$.

L'origine est donc un noeud attractif.

Les valeurs propres de la matrice associée au système $\begin{cases} x' = -\frac{1}{3}x + 4y \\ y' = y \end{cases}$ sont (1) et $(-1/3)$. L'origine est donc un col.

Les valeurs propres de la matrice associée au système $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$ sont imaginaires pures. L'origine est donc un centre.

Exercice 4.3.9 Trouver les points singuliers et la nature de chaque point pour les systèmes :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -y - \sin x \end{cases}, \begin{cases} x' = -x(x^2 + y^2) - y \\ y' = x - y(x^2 + y^2) \end{cases}.$$

Exercice 4.3.10 Soit l'équation suivante :

$$f''' + (m+2)ff'' - (2m+1)f'^2 = 0. \quad (\infty)$$

1. En utilisant les changements de variable suivants :

$$\forall t \in I, s = \int_{\tau}^t f(\zeta) d\zeta \quad u(s) = \frac{f'(t)}{f^2(t)} \text{ et } v(s) = \frac{f''(t)}{f^3(t)} \quad (4.33)$$

réécrire l'équation (∞) sous la forme d'un système de dimension 2, (\mathcal{P}) .

2. Trouvez les points singuliers du système (\mathcal{P}) et définie leur natures.

3. Tracer les trajectoires représentant le système (\mathcal{P}) au voisinage du point singulier $O(0,0)$.

Exercice 4.3.11 Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{u} = v - 2u^2 \\ \dot{v} = -(3-m)v + (m-1)u^2 - 3uv \end{cases} \quad (\mathcal{P})$$

1. Démontrer que si $m = 2$ l'ensemble $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : v^2 + uv - u^3 = 0\}$ est un ensemble invariant par le système (\mathcal{P}) ?

2. Déterminer les éléments de cet ensemble.

Bibliographie

- [1] Andronov A.A., Leontovich E.A., Gordon I.I, Maier A.G., "Qualitative theory of second-order dynamic systems," John Wiley & Sons.Inc., New-York,1973.
- [2] Anosov D.V., Arnold V.I., "Dynamical systems I. Encyclopaedia of Mathematical Sciences," Vol. 1, Springer-Verlag, 1988.
- [3] K. Boudjema Djeflal., Mémoire de Magister (2011) Les coordonnées Blowing-up.
- [4] Brighi B., On a similarity boundary layer equation. Zeitschrift fur Analysis und ihre wendungen, Vol.21 (2002) 4, 931-948.
- [5] Brighi B., Sari T., Blowing-up coordinates For a similarity boundary layer equation. Zeitschrift fur Analysis und ihre wendungen,,(2000).
- [6] Charles-Michel M., Ph.Pilibossian., "Géométrie Différentielle avec 80 figures" ellipses.
- [7] Chaudary M.A., Merkin J. H, Pop I., Similarity solutions in free convection boundary layer flows adjacent to vertical permeable surfaces in porous media. I : Prescribed surface temperature. Eur. J. Mech. B-Fluids, 14 (1995) 217-237
- [8] Coppel W.A., On a Differential Equations of boundary layer theory. Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A 253 (1960) 101-136.
- [9] F. Dumortier, J. Llibre, J. C. Artés, Qualitative theory of planar differential systems, Springer, 2006. Wiley-Intersciences, 1969.
- [10] Hartmann P., "Ordinary Differential Equations," Wiley, New York, 1964.
- [11] J.H.Hubbard., B.H. West., "Differential Equations : A Dynamical Systems Approach Higher-Dimensional systems", Springer-Verlag, 1995.
- [12] D.B. Ingham, I. Pop, Transport Phenomena in Porous Media, Pergamon, Oxford, 1998.
- [13] Jean-Pierre François Oscillations en biologie Analyse qualitative et modèles ISBN-10 3-540-25152-9 Springer Berlin Heidelberg New York ISBN-13 978-3-540-25152-1 Springer Berlin Heidelberg New York