Umbb/FS/ Dépt de Maths/Stat

Filière Master MSS S3.Module: Econométrie.

Fev 2022.

E M D Avec Corrigé

Exercice1(6 points)

Pour Expliquer la variable économique $Y = y_i$

On propose le Modèle de Régression Linéaire simple

$y_i = a_0 + a_1 x_i + \epsilon_i$

$Y = y_i$	$X_1 = x_i$
1	3
2	4
4	5
3	1
6	6
10	7
8	10

(i) Donner $\hat{a}_0, \hat{a}_1$ Méthode MCO

(ii) Calculer $cov(Y, X_1)$ et déduireρ et R^2 .Conclure sur la qualité de l'ajustement.

(iii) Appliquer le test de nullité de a_1(Test de Student unilatérale avec $\alpha = 5\%$).

Exercice 2(14 points)

Soit Le Modèle de Régression linéaire Multiple : $y_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_{i1} + \alpha_2 x_{i2} + \epsilon_i$

i	x_{i1}	x_{i2}	y_i
1	1	2	0
2	-2	1	-1
3	4	-1	1
4	3	2	1
5	-2	1	2
6	-1	-3	3
7	-3	1	-2

(i) Donner l'écriture Matricielle du Modèle (Utiliser les notations $X, Y, \hat{Y}, A, \hat{A}, \epsilon$)

Indication: On vous donne: $(X\prime X)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{46} & 0 & -\frac{1}{46} \\ 0 & \frac{1}{44} & 0 \\ -\frac{1}{46} & 0 & \frac{7}{138} \end{bmatrix}$.

(ii)Donner le vecteur $\hat{A} = (\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2)')$.On commence par présenter la formule de $\hat{A}$ sans démonstration.

iii) Compléter la table d'ANOVA et vérifier la formule 'Décomposition de la variance'On vous donne $SCExpl = 7.277$

Source de variation	Somme des carrés	Degrés de liberté	Carrée Moyenne
Modèle **Expliquée** par la Régression)	$SCExpl = 7.277$	?	$CME = \frac{SCExp}{p}$ =?
Résiduel (**Non** Expliquée par la régression)	$SCRes$ =?	?	$CMR = \frac{SCREs}{n-p-1}$ =?
Totale	$SCTot$ =?	?	–

iv)Déduire le coefficient de Détermination R^2, Evaluer la qualité de cet ajustement.

v) Tester la significativité **globale** (Le test de Fisher) avec un test unilatérale et $\alpha = 5\%$ .Conclure sur la qualité du Modèle.

vi)Tester la non corrélation des erreurs (Test de Durbin et Waston) .Conclure sur la qualité du Modèle

Indication

On vous donne $d_1 = d_{Low} = 0.47$ et $d_2 = d_{Upper} = 1.90$

Solution

Exercice1(6 points)

(i) Donner $\hat{a}_0, \hat{a}_1$ Méthode MCO

L'ecriture Matricielle: $Y = XA + \epsilon$: $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 6 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 1 \\ 1 & 6 \\ 1 & 7 \\ 1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \\ \epsilon_7 \end{bmatrix}$

Ainsi:

$$X\prime X=\begin{bmatrix}1&3\\1&4\\1&5\\1&1\\1&6\\1&7\\1&10\end{bmatrix}^{T}\begin{bmatrix}1&3\\1&4\\1&5\\1&1\\1&6\\1&7\\1&10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&36\\36&236\end{bmatrix}$$

$$(X\prime X)^{-1}=\begin{bmatrix}7&36\\36&236\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{59}{89}&-\frac{9}{89}\\-\frac{9}{89}&\frac{7}{356}\end{bmatrix}$$

d'autre part

$$X\prime Y=\begin{bmatrix}1&3\\1&4\\1&5\\1&1\\1&6\\1&7\\1&10\end{bmatrix}^{T}\begin{bmatrix}1\\2\\4\\3\\6\\10\\8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}34\\220\end{bmatrix}$$

les paramètres du modèle

$$\hat{A}=\begin{bmatrix}\hat{a}_0\\\hat{a}_1\end{bmatrix}=(X\prime X)^{-1}X'Y=\begin{bmatrix}\frac{59}{89}&-\frac{9}{89}\\-\frac{9}{89}&\frac{7}{356}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}34\\220\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{26}{89}\\\frac{79}{89}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.292\,13\\0.887\,64\end{bmatrix}$$

Vérification

$$\hat{a}_0=\bar{y}-\hat{a}_1\bar{X}=\tfrac{34}{7}-\frac{6.449}{7.265\,3}\times\tfrac{36}{7}=\mathbf{0.292\,13}$$

$$\hat{a}_1=\frac{cov(X,Y)}{var(X)}=\frac{6.449}{7.265\,3}=\mathbf{0.887\,64}$$

(ii) Calculer $cov(Y,X_1)$ et déduireρ et R^2 .Conclure sur la qualité de l'ajustement.

On a $cov(Y,X_1)=\frac{1}{n}\sum_i(x_i-\bar{X}_1)(y_i-\bar{Y})$

$cov(Y,X_1)=\frac{1}{7}[(3-\frac{36}{7})(1-\frac{34}{7})+(4-\frac{36}{7})(2-\frac{34}{7})+(5-\frac{36}{7})(4-\frac{34}{7})+(1-\frac{36}{7})(3-\frac{34}{7})+(6-\frac{36}{7})(6-\frac{34}{7})+(7-\frac{36}{7})(10-\frac{34}{7})+(10-\frac{36}{7})(8-\frac{34}{7})]=\frac{45.143}{7}=\mathbf{6.449}$

var(X)=$\frac{1}{n}\sum_i(x_i-\bar{X})^2$

var(X)=$\frac{1}{7}[(3-\frac{36}{7})^2+(4-\frac{36}{7})^2+(5-\frac{36}{7})^2+(1-\frac{36}{7})^2+(6-\frac{36}{7})^2+(7-\frac{36}{7})^2+(10-\frac{36}{7})^2] = \frac{50.857}{7} = \mathbf{7.2653}$

Var(Y)=$\frac{1}{7}[(1-\frac{34}{7})^2+(2-\frac{34}{7})^2+(4-\frac{34}{7})^2+(3-\frac{34}{7})^2+(6-\frac{34}{7})^2+(10-\frac{34}{7})^2+(8-\frac{34}{7})^2] = \frac{64.857}{7} = 9.2653$

$$\rho = \frac{cov(Y, X_1)}{\sigma(X_1)\sigma(Y)} = \frac{\mathbf{6.449}}{\sqrt{\mathbf{7.2653}} \times \sqrt{\mathbf{9.2653}}} = \mathbf{0.78602}$$

Explication:

une forte corrélation positive entre la variable explicative X_1 et la variable expliquée Y (elle varient dans le même sens)

$R^2 = \rho^2 = (0.78602)^2 = \mathbf{0.61783}$

Explication

61,783% des variations de Y sont expliquées par X (par le modèle de régression)

i-e La part de la variation de Y expliquée par Xest61, 783%

par contre 38, 2 18 %non expliquées, elles sont dû à l'erreur(Résidus)

Qualité de l'ajustement : c'est un ajustement acceptable.

$$Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 6 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix}, \text{Mean(s): } \frac{34}{7}, \qquad X = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \\ 6 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}, \text{Mean(s): } \frac{36}{7}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 4 \\ 1 & 3 \\ 6 & 6 \\ 7 & 10 \\ 10 & 8 \end{bmatrix} \text{Covariance matrix: } \begin{bmatrix} 7.2653 & 6.449 \\ 6.449 & 9.2653 \end{bmatrix}$$

Calcul de R^2 par sa définition

$$R^2 = \frac{SCExpl}{SCTot} = \frac{40.071}{64.857} = 0.61784$$

$\mathrm{R}^2 = 1 - \frac{SC\,\mathrm{Re}\,si}{SCTot} = 1 - \frac{24.787}{64.857} = 0.61782$

SCT=$\sum_i (y_i - \bar{Y})^2 = 64.857$

SCExpl=$\sum_i (\hat{y}_i - \bar{Y})^2 = 40.071$

vérification ANOVA: SCT-SCResi=SCExpli

$64.857 - 24.787 = 40.07$

En effet

On a:

$$\hat{Y} = X\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 1 \\ 1 & 6 \\ 1 & 7 \\ 1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{26}{89} \\ \frac{79}{89} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{263}{89} \\ \frac{342}{89} \\ \frac{421}{89} \\ \frac{105}{89} \\ \frac{500}{89} \\ \frac{579}{89} \\ \frac{816}{89} \end{bmatrix}$$

$$(\hat{Y} - \bar{Y}) = \begin{bmatrix} \frac{263}{89} \\ \frac{342}{89} \\ \frac{421}{89} \\ \frac{105}{89} \\ \frac{500}{89} \\ \frac{579}{89} \\ \frac{816}{89} \end{bmatrix} - \frac{34}{7} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.9021 \\ -1.0144 \\ -0.12681 \\ -3.6774 \\ 0.76083 \\ 1.6485 \\ 4.3114 \end{bmatrix}$$

$$(\hat{Y} - \bar{Y})'(\hat{Y} - \bar{Y}) = \begin{bmatrix} -1.9021 \\ -1.0144 \\ -0.12681 \\ -3.6774 \\ 0.76083 \\ 1.6485 \\ 4.3114 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1.9021 \\ -1.0144 \\ -0.12681 \\ -3.6774 \\ 0.76083 \\ 1.6485 \\ 4.3114 \end{bmatrix} := 40.071$$

Ainsi SCExpl=40.071

$$\rho = \frac{cov(Y,X_1)}{\sigma(X_1)\sigma(Y)} = \frac{\mathbf{6.449}}{\sqrt{\mathbf{7.2653}} \times \sqrt{\mathbf{9.2653}}} = \mathbf{0.78602}$$

(iii) Appliquer le test de nullité de a_1(Test de Student unilatérale avec $\alpha = 5\%$

$\mathrm{H}_0 : a_1 = 0$

contre

$\mathrm{H}_1 : a_1 \neq 0$

la statistique du test est $\mathrm{t}_c = \dfrac{\hat{a}_1}{\hat{\sigma}(\hat{a}_1)} = \dfrac{\mathbf{0.88764}}{\sqrt{9.7477 \times 10^{-2}}} = 2.8431$

La distribution sous H_0

$\mathrm{T}_\alpha(\nu = n - p - 1) = T_\alpha(\nu = 5) = q_{0.95}(\nu = 5)$

voir table $\mathrm{q}_{0.95}(\nu = 5) = \mathbf{2.015}$

La region critique au risque $\alpha = 5\%$ (au seuil de signification $1 - \alpha$) est $T_c > T_\alpha$(Domaine de rejet de H_0)

conclusion: comme $\mathrm{t}_c > T_\alpha$ On se trouve dans le domaine de H_0

Ainsi on rejette H_0au risque $\alpha = 5\%$

Explication:

$$\hat{V}(\hat{A}) = \begin{matrix} var(\hat{a}_0) & cov(\hat{a}_0, \hat{a}_1) \\ cov(\hat{a}_0, \hat{a}_1) & var(\hat{a}_1) \end{matrix}$$

$$\hat{V}(\hat{A}) = \hat{\sigma}^2_\epsilon (X'X)^{-1} = \tfrac{SC\,\mathrm{Re}\,s}{n-p-1}(X'X)^{-1} = \frac{24.787}{5}\begin{bmatrix} \frac{59}{89} & -\frac{9}{89} \\ -\frac{9}{89} & \frac{7}{356} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.2864 & -0.50131 \\ -0.50131 & 9.7477 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

et

SCResidus= $(Y - \hat{Y})\prime(Y - \hat{Y}) = 24.787$

calcul de SCResidus

$$\hat{Y} = X\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 1 \\ 1 & 6 \\ 1 & 7 \\ 1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{26}{89} \\ \frac{79}{89} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{263}{89} \\ \frac{342}{89} \\ \frac{421}{89} \\ \frac{105}{89} \\ \frac{500}{89} \\ \frac{579}{89} \\ \frac{816}{89} \end{bmatrix} = \frac{1}{89} \begin{bmatrix} 263 \\ 342 \\ 421 \\ 105 \\ 500 \\ 579 \\ 816 \end{bmatrix}$$

$$\hat{Y} - Y = \begin{bmatrix} \frac{263}{89} \\ \frac{342}{89} \\ \frac{421}{89} \\ \frac{105}{89} \\ \frac{500}{89} \\ \frac{579}{89} \\ \frac{816}{89} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 6 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{174}{89} \\ \frac{164}{89} \\ \frac{65}{89} \\ -\frac{162}{89} \\ -\frac{34}{89} \\ -\frac{311}{89} \\ \frac{104}{89} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.9551 \\ 1.8427 \\ 0.73034 \\ -1.8202 \\ -0.38202 \\ -3.4944 \\ 1.1685 \end{bmatrix}$$

$$\text{SC Residus} = (Y - \hat{Y})\prime(Y - \hat{Y}) = \begin{bmatrix} \frac{174}{89} \\ \frac{164}{89} \\ \frac{65}{89} \\ -\frac{162}{89} \\ -\frac{34}{89} \\ -\frac{311}{89} \\ \frac{104}{89} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{174}{89} \\ \frac{164}{89} \\ \frac{65}{89} \\ -\frac{162}{89} \\ -\frac{34}{89} \\ -\frac{311}{89} \\ \frac{104}{89} \end{bmatrix} = \frac{2206}{89} = 24.787$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 36 \\ 36 & 236 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{59}{89} & -\frac{9}{89} \\ -\frac{9}{89} & \frac{7}{356} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.66292 & -0.10112 \\ -0.10112 & 1.9663 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

Exercice 2

(i) Donner l'écriture Matricielle du Modèle (Utiliser les notations $X, Y, \hat{Y}, A, \hat{A}, \epsilon$)

$Y = XA + \epsilon$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ y_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} \\ 1 & x_{21} & x_{22} \\ 1 & x_{31} & x_{32} \\ 1 & x_{41} & x_{42} \\ 1 & x_{51} & x_{52} \\ 1 & x_{61} & x_{62} \\ 1 & x_{71} & x_{72} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \epsilon_7 \end{bmatrix} \quad \text{où}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \epsilon_7 \end{bmatrix}$$

(ii)Donner le vecteur $\hat{A} = (\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2)')$.On commence par présenter la formule de $\hat{A}$ sans démonstration.

Indication: On vous donne: $(X\prime X)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{46} & 0 & -\frac{1}{46} \\ 0 & \frac{1}{44} & 0 \\ -\frac{1}{46} & 0 & \frac{7}{138} \end{bmatrix}$.

Donner La matrice $X\prime X$ en fonction de x_{i1}et x_{i2}

$$X\prime X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} \\ 1 & x_{21} & x_{22} \\ 1 & x_{31} & x_{32} \\ 1 & x_{41} & x_{42} \\ 1 & x_{51} & x_{52} \\ 1 & x_{61} & x_{62} \\ 1 & x_{71} & x_{72} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} \\ 1 & x_{21} & x_{22} \\ 1 & x_{31} & x_{32} \\ 1 & x_{41} & x_{42} \\ 1 & x_{51} & x_{52} \\ 1 & x_{61} & x_{62} \\ 1 & x_{71} & x_{72} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & \sum_i x_{i1} & \sum_i x_{i2} \\ \sum_i x_{i1} & \sum_i x_{i1}^2 & \sum_i x_{i1}x_{i2} \\ \sum_i x_{i2} & \sum_i x_{i1}x_{i2} & \sum_i x_{i2}^2 \end{bmatrix}$$

$$X\prime X=\begin{bmatrix}7 & 0 & 3\\ 0 & 44 & 0\\ 3 & 0 & 21\end{bmatrix} \qquad =$$

on vous donne $(X\prime X)^{-1}$

$$\begin{bmatrix}\frac{7}{46} & 0 & -\frac{1}{46}\\ 0 & \frac{1}{44} & 0\\ -\frac{1}{46} & 0 & \frac{7}{138}\end{bmatrix}$$

Déduirer les paramètres du Modèle(Donner le vecteur $\hat{A}=(\hat{a}_0,\hat{a}_1,\hat{a}_2)'$)

On commence par présenter la formule de $\hat{A}$ sans démonstration.

On a: $\hat{A}=(X'X)^{-1}X'Y$

$$\text{Avec } X=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 4 & -1\\ 1 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & -1 & -3\\ 1 & -3 & 1\end{bmatrix} \text{ et } Y=\begin{bmatrix}0\\ -1\\ 1\\ 1\\ 2\\ 3\\ -2\end{bmatrix}$$

On a $\quad \bar{y}=\frac{1}{7}\sum_i y_i=\frac{4}{7}=0.57143$

$$\text{on a} \quad Y-\bar{Y}=\begin{bmatrix}0\\ -1\\ 1\\ 1\\ 2\\ 3\\ -2\end{bmatrix}-\frac{4}{7}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\\ 1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{4}{7}\\ -\frac{11}{7}\\ \frac{3}{7}\\ \frac{3}{7}\\ \frac{10}{7}\\ \frac{17}{7}\\ -\frac{18}{7}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.57143\\ -1.5714\\ 0.42857\\ 0.42857\\ 1.4286\\ 2.4286\\ -2.5714\end{bmatrix}$$

$$X\prime Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ -9 \end{bmatrix}$$

d'où $\hat{A} = (X'X)^{-1}X'Y = \begin{bmatrix} \frac{7}{46} & 0 & -\frac{1}{46} \\ 0 & \frac{1}{44} & 0 \\ -\frac{1}{46} & 0 & \frac{7}{138} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{37}{46} \\ \frac{2}{11} \\ -\frac{25}{46} \end{bmatrix} = \begin{matrix} 0.804\,35 \\ 0.181\,82 \\ -0.543\,48 \end{matrix}$

iii) On a l'expression du vecteur $\hat{Y}$ ainsi le vecteur des erreurs: $\epsilon = Y - \hat{Y}$

$$\hat{Y} = X\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{37}{46} \\ \frac{2}{11} \\ -\frac{25}{46} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{51}{506} \\ -\frac{26}{253} \\ \frac{525}{253} \\ \frac{133}{506} \\ -\frac{26}{253} \\ \frac{570}{253} \\ -\frac{72}{253} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.100\,79 \\ -0.102\,77 \\ 2.\,075\,1 \\ 0.262\,85 \\ -0.102\,77 \\ 2.\,253\,0 \\ -0.284\,58 \end{bmatrix}$$

$$\epsilon = Y - \hat{Y} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.100\,79 \\ -0.102\,77 \\ 2.\,075\,1 \\ 0.262\,85 \\ -0.102\,77 \\ 2.\,253\,0 \\ -0.284\,58 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.100\,79 \\ -0.897\,23 \\ -1.\,075\,1 \\ 0.737\,15 \\ 2.\,102\,8 \\ 0.747 \\ -1.\,715\,4 \end{bmatrix}$$

$$SCRes=\epsilon'\epsilon=\begin{bmatrix}0.10079\\-0.89723\\-1.0751\\0.73715\\2.1028\\0.747\\-1.7154\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}0.10079\\-0.89723\\-1.0751\\0.73715\\2.1028\\0.747\\-1.7154\end{bmatrix}=10.437$$

$$\hat{Y}-\bar{Y}=\begin{bmatrix}-\frac{51}{506}\\-\frac{26}{253}\\\frac{525}{253}\\\frac{133}{506}\\-\frac{26}{253}\\\frac{570}{253}\\-\frac{72}{253}\end{bmatrix}-\frac{4}{7}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{2381}{3542}\\-\frac{1194}{1771}\\\frac{2663}{1771}\\-\frac{1093}{3542}\\-\frac{1194}{1771}\\\frac{2978}{1771}\\-\frac{1516}{1771}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.67222\\-0.67420\\1.5037\\-0.30858\\-0.67420\\1.6815\\-0.85601\end{bmatrix}$$

$$SCExp=(\hat{Y}-\bar{Y})'(\hat{Y}-\bar{Y})=\begin{bmatrix}-\frac{2381}{3542}\\-\frac{1194}{1771}\\\frac{2663}{1771}\\-\frac{1093}{3542}\\-\frac{1194}{1771}\\\frac{2978}{1771}\\-\frac{1516}{1771}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}-\frac{2381}{3542}\\-\frac{1194}{1771}\\\frac{2663}{1771}\\-\frac{1093}{3542}\\-\frac{1194}{1771}\\\frac{2978}{1771}\\-\frac{1516}{1771}\end{bmatrix}=\frac{25777}{3542}=7.277$$

$$SCT=(Y-\bar{Y})'(Y-\bar{Y})=\begin{bmatrix}-\frac{4}{7}\\-\frac{11}{7}\\\frac{3}{7}\\\frac{3}{7}\\\frac{10}{7}\\\frac{17}{7}\\-\frac{18}{7}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}-\frac{4}{7}\\-\frac{11}{7}\\\frac{3}{7}\\\frac{3}{7}\\\frac{10}{7}\\\frac{17}{7}\\-\frac{18}{7}\end{bmatrix}=\frac{124}{7}=17.714$$

3) Présenter la table d'ANOVA et vérifier la formule 'Décomposition de la variance'

4) Calculer le coefficient de Détermination R^2, Evaluer la qualité de cet ajustement.

Source de variation	Somme des carrés	D° liberté	Carrée Moyenne
Modèle Expliquée	$SCExpl = \sum_i (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = 7.277$	$p = 2$	$CME = \frac{SCExp}{2} = \mathbf{3.6385}$
Résiduel (Non Expliqué)	$SCRes = \sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2 = \mathbf{10.437}$	$n - p - 1 = 4$	$CMR = \frac{SCREs}{4} = \mathbf{2.6093}$
Totale	$SCTot = \sum_i (y_i - \bar{y})^2 = \mathbf{17.714}$	$n - 1 = 6$	$-$

Vérification: $7.277 + 10.437 = 17.714$

iv)Déduire le coefficient de Détermination R^2, Evaluer la qualité de cet ajustement.

$$R^2 = \frac{SCExpl}{SCTot} = 1 - \frac{SCRes}{SCTot} = \frac{7.277}{17.714} = \mathbf{0.41081}$$

v) Tester la significativité **globale** (Le test de Fisher) avec un test unilatérale et $\alpha = 5\%$ .Conclure sur la qualité du Modèle.

Calcul de la matrice variance covariance de A

Calculer V(Â)=$\sigma_\epsilon^2 (X'X)^{-1}$

On a: V(Â)=$\sigma_\epsilon^2 \times (X'X)^{-1} =$

et déduire $\hat{\text{V}}$(Â) en remplaçant σ_ϵ^2 par son estimateur $\hat{\sigma}_\epsilon^2 = \frac{SC\,\mathrm{Re}\,s}{n-p-1}$

$\hat{\text{V}}$(Â)=$\hat{\sigma}_\epsilon^2 (X'X)^{-1} = \frac{SC\,\mathrm{Re}\,s}{n-p-1}(X'X)^{-1}$

On a: $\hat{\text{V}}$(Â)=$\hat{\sigma}_\epsilon^2 \times (X'X)^{-1} = \frac{SC\,\mathrm{Re}\,s}{n-p-1}(X'X)^{-1}$

$$= \frac{10.437}{4} \begin{bmatrix} \frac{7}{46} & 0 & -\frac{1}{46} \\ 0 & \frac{1}{44} & 0 \\ -\frac{1}{46} & 0 & \frac{7}{138} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.39706 & 0 & -5.6723 \times 10^{-2} \\ 0 & 5.9301 \times 10^{-2} & 0 \\ -5.6723 \times 10^{-2} & 0 & 0.13235 \end{bmatrix}$$

Déduire $\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}^2$ et $\hat{\sigma}_{\hat{a}_2}^2$

$\boldsymbol{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}^2 = 5.9301 \times 10^{-2} = 5.9301 \times 10^{-2} = 0.05930}$

$\boldsymbol{\hat{\sigma}_{\hat{a}_2}^2 = 0.13235}$

où

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.80435 \\ 0.18182 \\ -0.54348 \end{bmatrix}$$

Test de Fisher:

Tester la significativitéet **globale** (Le test de Fisher) avec un test unilatérale avec $\alpha = 5\%$.

Conclure sur la qualité du Modèle bon ou mauvais ?

c-à d: Est ce que les choix de x_{i1} et x_{i2} pour expliquer y_i est bon ou mauvais?Est ce que Les x_{i1}, x_{i2} emmènent -elles de l'information sur y_i?pour $i = 1, .., 7$

L'hypothèse nulle $H_0 : a_1 = a_2 = 0$

L'hypothèse alternative $H_1 : \exists j = 1, 2$ tel que $a_j \neq 0$

c-à-d: $a_1 \neq 0$ ou $a_2 \neq 0$

La statistique du test $F_c = \frac{CME}{CMR} = \frac{\frac{SCExp}{p}}{\frac{SCREs}{n-p-1}} = \frac{3.6385}{2.6093} = \mathbf{1.3944}$

La distribution sous H_0 : $F_{th} = Fisher(p, n-p-1) = Fischer(2, 4)$

région critique au risque $\alpha = 5\%$ (Zone de rejet de H_0): $F_c \geq q_{0.95}(Fischer(2, 4))$

Voir Table: $q_{0.99}(Fischer(n_1 = 2, n_2 = 4)) = \mathbf{6.84}$

Conclusion: comme 1.3944<6.84 on se trouve dans le domaine **d'acceptation**

Ainsi On accepte H_0 au seuil de signification 95%

Le modèle est **mauvais**

Aucune variables exogènes(indépendantes) n'est pertinente pour expliquer

vi)Tester la non corrélation des erreurs (Test de Durbin et Waston) .

Conclure sur la qualité du Modèle

<u>Indication</u>

On vous donne $d_1 = d_{Low} = 0.47$ et $d_2 = d_{Upper} = 1.90$

On a le vecteur des erreurs

$$\hat{\epsilon} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.10079 \\ -0.10277 \\ 2.0751 \\ 0.26285 \\ -0.10277 \\ 2.2530 \\ -0.28458 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.10079 \\ -0.89723 \\ -1.0751 \\ 0.73715 \\ 2.1028 \\ 0.747 \\ -1.7154 \end{bmatrix}$$

la statistique du test

$DW = dw = \frac{\sum_{i=2}(\epsilon_i - \epsilon_{i-1})^2}{\sum_{i=1}\epsilon_i^2} = \frac{14.079}{10.437} = \mathbf{1.3489}$

Calcul

$\sum_{i=2}(\epsilon_i - \epsilon_{i-1})^2 = (-0.89723 - 0.10079)^2 + (-1.0751 + 0.89723)^2 + (0.73715 + 1.0751)^2 + (2.1028 - 0.73715)^2 + (0.747 - 2.1028)^2 + (-1.7154 - 0.747)^2 = 14.079$

$$\sum_i \epsilon_i^2 = \begin{bmatrix} 0.100\,79 \\ -0.897\,23 \\ -1.\,075\,1 \\ 0.737\,15 \\ 2.\,102\,8 \\ 0.747 \\ -1.\,715\,4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0.100\,79 \\ -0.897\,23 \\ -1.\,075\,1 \\ 0.737\,15 \\ 2.\,102\,8 \\ 0.747 \\ -1.\,715\,4 \end{bmatrix} = 10.\,437$$

On a toujours DW=dw$\in (0, 4)$

Le meilleur scénario est Absence des corrélation. Cas dw$\in$ (d_2 4-d_2) proche de 2

Pour les autres cas on va augmenter la taille de l'échantillon pour remédier.

0 $d_1 = 0.47$	0.47 $d_2 = 1.90$	1.90 2 4-$d_2 = 2.\,1$	2.1 4-d= $3.\,53$	3.53
$\rho > 0$	?	$\rho = 0$	?	$\rho <$
AC>0	**Doute**	Absence de corrélation AC=0	Doute	AC<

Notre cas dw= $\mathbf{1.\,348\,9} \in (\mathbf{d}_1\ \ \mathbf{d}_2) = (0.47,\ \ 1.90)$

Conclusion: Doute: On ne peut pas se prononcer