U.H.B.C. Chlef | A.U. 2016/2017
Faculté des Sciences Exactes | Niveau: $2^{ème}$ Master/ Option: M.A.S.
Département des maths | Module: Processus Stochastiques 3

EXAMEN DE MOYENNE DUREE

Exercice 1

1. Montrer que l'intégrale stochastique d'Itô $\int_a^b f(t)dB(t)$ est bien définie, c.à.d. elle ne dépend pas du choix de la suite (f_n) approximant f. (Utiliser l'inégalité $(x-y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$).
2. Calculer la variance de $\int_0^T [B(t)-t]dB(t)$.
3. En 2 lignes, explique comment est définie (construite) l'intégrale d'Itô.
4. Calculer $K(s,t) = Cov[(B_t - tB_1), (B_s - sB_1)]$; $s, t \in [0,1[$

Exercice 2

Soit (B) un mouvement Brownien standard. On définit, pour tout $t \in [0,1[$:

$$M_t = \frac{1}{\sqrt{1-t}} \exp[-\frac{B_t^2}{2(1-t)}].$$

1. Montrer que $dM_t = \dfrac{-B_t}{1-t} M_t dB_t$.
2. Montrer que $(M_t)_{t\in[0,1[}$ est une martingale (par rapport à la filtration Browniènne).
3. Par la croissance comparée, calculer la limite $p.s.$de M_t quand t tend vers 1^-.
4. Calculer $E(M_t)$.

Exercice 3

I. Modèle de Vasicek

$$dR_t = (\alpha - \beta R_t)dt + \sigma dB_t \ ...(1)$$

α, β et σ sont des constantes positives.

- En résolvant l'E.D.S. (1), déterminer la loi de R_t.(en précisant la moyenne et la variance).

II. Modèle de Cox − Ingesoll − Ross (C.I.R.)

$$dR_t = (\alpha - \beta R_t)dt + \sigma\sqrt{R_t}dB_t \ ...(2)$$

α, β et σ sont des constantes positives.

Le but est l'étude de $\mathbf{E}(\mathbf{R}_t)$ et $\mathbf{Var}(\mathbf{R}_t)$ à long terme.

Posons $R_t = e^{-\beta t}V_t$, avec $V(0) = R(0)$.

1. Calculer dR_t en fonction de dV_t.
2. En déduire que $V_t = R(0) + \dfrac{\alpha}{\beta}(e^{\beta t}-1) + \sigma \int_0^t e^{\beta s}\sqrt{R_s}dB_s$.
3. Calculer $E(R_t)$ et $Var(R_t)$.
4. En déduire $\lim\limits_{t\to\infty} E(R_t)$ et $\lim\limits_{t\to\infty} Var(R_t)$.

Bonus : $a)$ Calculer l'exponentielle stochastique de X_t avec $dX_t = \mu dt + \sigma dB_t$.
$b)$ Donner l'E.D.S. satisfaite par un mouvement Brownien géométrique (M.B.G.).