Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Badji Mokhtar-Annaba

Master 1: -Probabilités et Statistique
-Actuariat

Série N°1

Pour résoudre l'exercice 1, on a besoin des rappels suivants:

Rappel 1.

Soit (X_i) une suite de *v.a.* définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *i.i.d.* de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On sait que si $X = \sum_i \lambda_i X_i$ telle que $\sum_i \lambda_i^2 < \infty$, alors

$$X \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(0, \sum_i \lambda_i^2\right).$$

Soient $l^2(\mathbb{N}) := \left\{(x_k) : \sum_{k=0}^{\infty} x_k^2 < \infty\right\}$ et soit $\mathcal{H}$ le sous espace vectoriel fermé engendré par la famille (X_i) *i.e.*

$$\mathcal{H} = \left\{X = \sum_i \lambda_i X_i : (\lambda_i) \in l^2(\mathbb{N})\right\}$$

$\mathcal{H}$ s'appelle espace gaussien.

Rappel 2.

Rappelons que $L^2(\mathbb{R}_+, dt)$ muni de la forme bilinéaire

$$\langle f, f \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+, dt)} = \int_0^{\infty} f(s)\, g(s)\, ds$$

est un espece de Hilbert. Soit $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une base orthonormée $L^2(\mathbb{R}_+, dt)$ et soit $\varphi \in L^2(\mathbb{R}_+, dt)$. Alors on a

$-\varphi = \sum_i \lambda_i e_i$ où $\lambda_i = \langle \varphi, e_i \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+, dt)}$

$-\|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+, dt)} = \sum_i \lambda_i^2$ (égalité de Parceval).

Exercice 1:

Soit $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble de toutes les applications $\omega : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. On désigne par X_k $(k \in \mathbb{N})$ la $k^{ième}$ application coordonnée sur Ω (*i.e.* $X_k(\omega) = \omega(k)$). On muni de la Ω de la tribu $\mathcal{F} = \sigma(X_k; k \in \mathbb{N})$ et de la mesure de probabilité $P = \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_i^2}{2}} dx_i$ défini par l'espérance d'une *v.a.* $X = f(X_0, X_1, ..., X_k)$:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}^{k+1}} f(x_0, x_1, ..., x_k) \prod_{i=0}^{k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_i^2}{2}} dx_i$$

1.Montrer que les *v.a.* X_k $(k \in \mathbb{N})$ sont *i.i.d.* de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

2.Montrer que $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormée de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

3.Soit $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une base orthonormée $L^2(\mathbb{R}_+, dt)$ et soit $(c_{k,t})_{k\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ par

$$c_{k,t} = \left\langle \mathbf{1}_{[0,t]}, e_k \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+,dt)} = \int_0^t e_k(s)\,ds.$$

On pose pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$B_t = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k,t} X_k \text{ dans } L^2(\Omega, \mathcal{F}, P).$$

Montrer que $(c_{k,t})_{k\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$ et que $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien.

Exercice 2:

Soit $(B_t)_{t\geq 0} = \left(B_t^1, B_t^2, ..., B_t^d\right)_{t\geq 0}$ un processus de dimension $d \geq 1$.

Montrer que $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien standard de dimension d si et seulement si les $\left(B_t^i\right)_{t\geq 0}$ sont des mouvements browniens réels standards indépendants $i = 1, 2, ..., d$.

Exercice 3:

Soit $(B_t)_{t\geq 0} = \left(B_t^1, B_t^2, ..., B_t^d\right)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien de dimension $d \geq 1$. Montrer que le processus $\left(M_t^{ij}\right)_{t\geq 0}$ défini par

$$M_t^{ij} = B_t^i B_t^j - \delta_{ij} t \quad \delta_{ij} \text{ étant le symbole de Kronecker}$$

est une martingale.

Solutions

Exercice 1:

1.On a pour tout réel x_k

$$P\left(X_k \leq x_k\right)=\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{]-\infty,x_k]}\left(X_k\right)\right)=\int_{-\infty}^{x_k}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$$

qui signifie que $X_k \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$ pour tout $k\in\mathbb{N}$. De plus, pour tous entiers $k\neq l$ et pour toutes fonctions mesurables f et g, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(f\left(X_k\right)g\left(X_l\right)\right) &= \int_{\mathbb{R}^2} f\left(x_k\right)g\left(x_l\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x_k^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x_l^2}{2}}dx_k dx_l \\
&\overset{Thm.Fubini}{=} \int_{\mathbb{R}} f\left(x_k\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x_k^2}{2}}dx_k \int_{\mathbb{R}} g\left(x_l\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x_l^2}{2}}dx_l \\
&= \mathbb{E}\left(f\left(X_k\right)\right)\mathbb{E}\left(g\left(X_l\right)\right),
\end{aligned}$$

qui signifie que les $v.a.$ X_k et X_l sont indépendantes. Ainsi les $v.a.$ X_k sont $i.i.d$ de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

2.Montrons d'abord que $\left(X_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $L^2\left(\Omega,\mathcal{F},P\right)$. Comme $\dim L^2\left(\Omega,\mathcal{F},P\right)=+\infty=card\left(X_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$, il suffit de montrer que la famille $\left(X_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ forme un système libre, ce qui revient à démontrer que tout sous système fini $\{X_0,X_1,...,X_n\}$ est libre. A cet effet, on consdère des scalaires $\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_n$ tels que

$$\lambda_0X_0+\lambda_1X_1,...+\lambda_nX_n=0.$$

En multipliant cette égalité par X_k, $k\in\{0,1,...,n\}$ arbitraire et en tenant compte du fait que

$$\mathbb{E}\left(X_kX_l\right)=\delta_{ij}\ (\mathbb{E}\left(X_kX_l\right)=\mathbb{E}\left(X_k\right)\mathbb{E}\left(X_l\right)=0 \text{ si } k\neq l \text{ et } \mathbb{E}\left(X_k^2\right)=var\left(X_k\right)=1,$$

on obtient $\lambda_k=0$, d'où $\lambda_0=\lambda_1=...=\lambda_n=0$ puisque k est arbitraire. Il résulte que $\left(X_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormée de $L^2\left(\Omega,\mathcal{F},P\right)$.

3.On a d'aprés l'égalité de Parceval et la définition des $c_{k,t}$,

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}c_{k,t}^2=\left\|\mathbf{1}_{[0,t]}\right\|_{L^2(\mathbb{R}_+,dt)}^2=\int_0^{+\infty}\left(\mathbf{1}_{[0,t]}\right)^2(s)\,ds=t<+\infty,$$

d'où $\left(c_{k,t}\right)_{k\in\mathbb{N}}\in l^2(\mathbb{N})$.

-On a pour tout $t,h\in\mathbb{R}_+$

$$B_{t+h}-B_t=\sum_{k=0}^{\infty}\left(c_{k,t+h}-c_{k,t}\right)X_k$$

Comme

$$c_{k,t+h}-c_{k,t}=\int\limits_{t}^{t+h}e_k\left(s\right)ds=\left\langle \mathbf{1}_{[t,t+h]},e_k\right\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+,dt)},$$

alors on a, d'aprés l'égalité de Parceval,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(c_{k,t+h}-c_{k,t}\right)^2=\left\|\mathbf{1}_{[t,t+h]}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+,dt)}=\int\limits_{0}^{+\infty}\left(\mathbf{1}_{[t,t+h]}\right)^2\left(s\right)ds=h<+\infty,$$

c'est-à-dire que $\left(c_{k,t+h}-c_{k,t}\right)_{k\in\mathbb{N}}\in l^2\left(\mathbb{N}\right)$, qui signifie que la variable aléatoire $B_{t+h}-B_t$ est gaussienne. De plus,

$$\mathbb{E}\left(B_{t+h}-B_t\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(c_{k,t+h}-c_{k,t}\right)\mathbb{E}\left(X_k\right)=0$$

et

$$var\left(B_{t+h}-B_t\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(c_{k,t+h}-c_{k,t}\right)^2 var\left(X_k\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(c_{k,t+h}-c_{k,t}\right)^2=h,$$

d'où $B_{t+h}-B_t\rightsquigarrow\mathcal{N}\left(0,h\right).$

Il reste à démontrer que $B_{t+h}-B_t$ est indépendante de $\mathcal{F}_t$. Comme $\mathcal{F}_t$ est engendrée par les variables aléatoires B_s, $s\leq t$, il suffit de montrer que les variables aléatoires $B_{t+h}-B_t$ et B_s sont indépendantes pour tout $s\leq t$. Pour cela, on considère le vecteur $\left(B_{t+h}-B_t,B_s\right)$ est gaussien. Comme

$$\alpha\left(B_{t+h}-B_t\right)+\beta B_s=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\alpha\left(c_{k,t+h}-c_{k,t}\right)+\beta c_{k,s}\right)X_k \text{ pour tout } \alpha,\beta \text{ réels}$$

avec

$$\alpha\left(c_{k,t+h}\right)+\beta\left(c_{k,s}\right)\in l^2\left(\mathbb{N}\right),$$

alors la variable $\alpha\left(B_{t+h}-B_t\right)+\beta B_s$ est gaussienne, qui signifie que le vecteur $\left(B_{t+h}-B_t,B_s\right)$ est gaussien. Il suffit alors de montrer que $cov\left(B_{t+h}-B_t,B_s\right)=$

0, or

$$\begin{aligned}
cov\left(B_{t+h}-B_t,B_s\right) &= \mathbb{E}\left(\left(B_{t+h}-B_t\right)B_s\right)-\mathbb{E}\left(B_{t+h}-B_t\right)\mathbb{E}\left(B_s\right)=\mathbb{E}\left(\left(B_{t+h}-B_t\right)B_s\right)\\
&= \left\langle B_{t+h}-B_t,B_s\right\rangle_{L^2(\Omega,\mathcal{F},P)}\\
&= \left\langle \sum_{k=0}^{\infty}\left(c_{k,t+h}-c_{k,t}\right)X_k,\sum_{l=0}^{\infty}c_{l,s}X_l\right\rangle_{L^2(\Omega,\mathcal{F},P)}\\
&= \sum_{k,l=0}^{\infty}\left(c_{k,t+h}-c_{k,t}\right)c_{l,s}\left\langle X_k,X_l\right\rangle_{L^2(\Omega,\mathcal{F},P)}\\
&= \sum_{k,l=0}^{\infty}\left(c_{k,t+h}-c_{k,t}\right)c_{l,s}\delta_{kl}\\
&= \sum_{k,l=0}^{\infty}\left(c_{k,t+h}-c_{k,t}\right)c_{l,s}\left\langle e_k,e_l\right\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+,dt)}\\
&= \left\langle \sum_{k=0}^{\infty}\left(c_{k,t+h}-c_{k,t}\right)e_k,\sum_{l=0}^{\infty}c_{l,s}e_l\right\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+,dt)}\\
&= \left\langle \sum_{k=0}^{\infty}\left(c_{k,t+h}-c_{k,t}\right)e_k,\sum_{l=0}^{\infty}c_{l,s}e_l\right\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+,dt)}\\
&= \left\langle \mathbf{1}_{[t,t+h]},\mathbf{1}_{[0,s]}\right\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+,dt)}\\
&= \int_0^{+\infty}\mathbf{1}_{[t,t+h]}\left(u\right)\mathbf{1}_{[0,s]}\left(u\right)du=\int_0^{+\infty}\mathbf{1}_{[t,t+h]\cap[0,s]}\left(u\right)du=0,
\end{aligned}$$

Ainsi $\left(B_t\right)_{t\geq 0}$ est à accroissements indépendants par rapport au passé. Il résulte que $\left(B_t\right)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien.

Exercice 2:

1.On suppose que $\left(B_t\right)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien de dimension d.

$*$Comme $B_t^i=\pi_i\left(B_t\right)$, où $\pi_i:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ est l'application projection définie par $\pi_i\left(x\right)=x_i$, qui est mesurable, alors B_t^i est $\mathcal{F}_t-$mesurable comme composition de deux fonctions mesurables, d'où $\left(B_t^i\right)_{t\geq 0}$ est adapté.

$*$Comme $B_{t+h}-B_t\rightsquigarrow\mathcal{N}\left(0,hI\right)$, alors les marginales $B_{t+h}^i-B_t^i$ sont également gaussiennes et on a $\mathbb{E}\left(B_{t+h}^i-B_t^i\right)=\pi_i\left(\mathbb{E}\left(B_{t+h}-B_t\right)\right)=0$. La matrice des covariances du vecteur $B_{t+h}-B_t$ étant $C\left(B_{t+h}-B_t\right)=hI=\left(h\delta_{ij}\right)$, alors $var\left(B_{t+h}^i-B_t^i\right)=h$ pour tout $i=1,2,...,d$. Il résulte que

$$B_{t+h}^i-B_t^i\rightsquigarrow\mathcal{N}\left(0,h\right).$$

$*$Comme $B_{t+h}-B_t$ est indépendante de $\mathcal{F}_t$, alors il en est de même pour $B_{t+h}^i-B_t^i=\pi_i\left(B_{t+h}-B_t\right)$, qui signifie que $\left(B_t^i\right)_{t\geq 0}$ est à accroissements indépendants du passé. Il résulte que les processus $\left(B_t^i\right)_{t\geq 0}$ sont des mouvements browniens réels standards.

$*$Comme $B_t \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, tI)$, qui signifie que le vecteur B_t est gaussien de matrice des covariance diagonale, alors les marginales B_t^i sont indépendantes.

2.On suppose que les $\left(B_t^i\right)_{t\geq 0}$ sont des mouvements browniens réels standards indépendants $i = 1, 2, ..., d$ et montrons que $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien standard de dimension d.

$*\,(B_t)_{t\geq 0}$ est adapté car toutes les composantes B_t^i de B_t sont $\mathcal{F}_t-$mesurables donc B_t aussi.

$*$De même, comme les $B_{t+h}^i - B_t^i$ sont indépendantes de $\mathcal{F}_t$, alors il en est de même pour $B_{t+h} - B_t$.

$*$Comme les variables aléatoires $B_{t+h}^i - B_t^i$ sont gaussiennes et indépendantes, alors toute combinaison linéaire de ces variables aléatoires est également gaussienne. Il résulte que le vecteur $B_{t+h} - B_t$ est gaussien. De plus $var\left(B_{t+h}^i - B_t^i\right) = h$ et $cov\left(B_{t+h}^i - B_t^i, B_{t+h}^j - B_t^j\right) = 0$ à cause de l'indépendance, c'est-à-dire que les éléments diagonaux de la matrice des covariance du vecteur$B_{t+h} - B_t$ sont tous égaux à h et les éléments non diagonaux sont tous nuls, d'où $C\left(B_{t+h}^i - B_t^i\right) = hI$ et on a $B_{t+h} - B_t \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, hI)$.

$(B_t)_{t\geq 0}$ est donc un mouvement brownien standard de dimension d.

Exercice 3:

On sait, d'aprés l'exercice précédant, que les $\left(B_t^i\right)$ sont des mouvements brownien réels indépendants. Ainsi,

-Si $i = j$, alors $M_t^{ij} = \left(B_t^i\right)^2 - t$, qui est une martingale, d'aprés le cours.

-Si $i = j$, alors $M_t^{ij} = B_t^i B_t^j$.

$*M_t^{ij}$ est $\mathcal{F}_t-$mesurable comme étant le produit de deux $v.a.$ $\mathcal{F}_t-$mesurables, d'où $\left(M_t^{ij}\right)$ est adapté.

$*$On a, d'aprés l'inégalité de Holder,

$$\mathbb{E}\left(\left|M_t^{ij}\right|\right) \leq \sqrt{\mathbb{E}\left(\left(B_t^i\right)^2\right)}\sqrt{\mathbb{E}\left(\left(B_t^j\right)^2\right)} = \sqrt{t}\sqrt{t} = t < \infty$$

$*$On a pour tout $t, h \geq 0$,

$$M_{t+h}^{ij} - M_t^{ij} = B_{t+h}^i B_{t+h}^j - B_t^i B_t^j = B_{t+h}^i\left(B_{t+h}^j - B_t^j\right) + B_t^j\left(B_{t+h}^i - B_t^i\right).$$

Comme $\left(B_t^i\right)$ et $\left(B_t^j\right)$ sont des martingales, alors

$$\mathbb{E}\left(B_{t+h}^j - B_t^j \mid \mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}\left(B_{t+h}^i - B_t^i \mid \mathcal{F}_t\right) = 0, \mathbb{E}\left(B_{t+h}^j \mid \mathcal{F}_t\right) = B_t^j$$

et comme les $v.a.$ B_{t+h}^i et $B_{t+h}^j - B_t^j$ son indépendates, alors on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(M_{t+h}^{ij} - M_t^{ij} \mid \mathcal{F}_t\right) &= \mathbb{E}\left(B_{t+h}^i\left(B_{t+h}^j - B_t^j\right) \mid \mathcal{F}_t\right) + \mathbb{E}\left(B_t^j\left(B_{t+h}^i - B_t^i\right) \mid \mathcal{F}_t\right) \\
&= \mathbb{E}\left(B_{t+h}^i \mid \mathcal{F}_t\right)\mathbb{E}\left(B_{t+h}^j - B_t^j \mid \mathcal{F}_t\right) + B_t^j\mathbb{E}\left(\left(B_{t+h}^i - B_t^i\right) \mid \mathcal{F}_t\right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

ce qui montre que $\left(M_t^{ij}\right)$ est une martingale pour tout $i, j = 1, 2, ..., d$.