Université de Sidi bel Abbès
Faculté des Sciences Exactes
Département de Proba-Stat

Année 2021-2022
Modélisation et Simulation
1ère Année Master PA & SA

Examen final : Correction

Exercice **1** (2+2+1). *Soit la densité de probabilité f définie sur $\mathbb{R}$, par*

$$f(x) = \begin{cases} e^{Mx} & si\ x \leq 0 \\ Mxe^{-2x^2} & si\ x > 0 \end{cases}$$

1. *Trouver la constante M.*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} e^{Mx}dx + \int_{0}^{\infty} Mxe^{-2x^2}dx = \frac{1}{M} + \frac{M}{4} = 1 \Leftrightarrow M^2 - 4M + 4 = 0 \Leftrightarrow M = 2.$$

2. *Expliquer comment peut-on simuler cette densité par la méthode d'inversion en précisant l'expression de F^{-1}.*

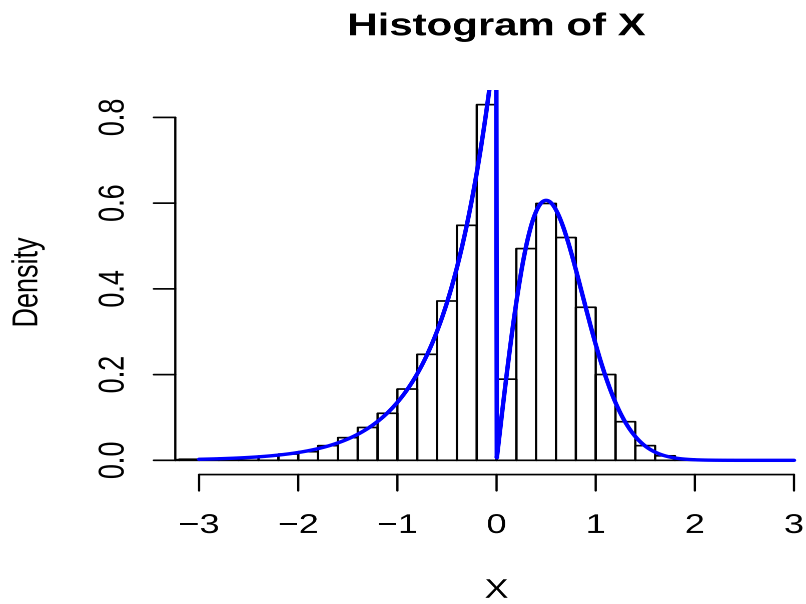
$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{2x} & si\ x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-2x^2} & si\ x > 0 \end{cases}$$

$$F^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln(2y) & si\ y \leq \frac{1}{2} \\ \sqrt{-\frac{1}{2}\ln(2-2y)} & si\ y > \frac{1}{2} \end{cases}$$

3. *Ecrire une fonction R , `rf=function(n) { ... }` , qui permet de simuler un échantillon aléatoire de taille n suivant la densité f.*

```
## Reponse demandee a lexamen
Finv=function(y) {
if(y<1/2) return(log(2*y)/2)
return(sqrt(-log(2-2*y)/2))
}
rf=function(n) {
U=runif(n)
return(sapply(U,Finv))
}
```

```
#validation graphique
X=rf(1e5)
hist(X,nclass=50,freq=FALSE,xlim=c(-3,3))
f=function(x) {
if(x<0) return(exp(2*x))else
return(2*x*exp(-2*x*x))
}
x=seq(-3,3,len=1000)
y=sapply(x,f)
points(x,y,type="l",col="blue",lwd=2)
```



Exercice 2 (2+2+1+1). *Soit la densité de probabilité donnée par*

$$f(x) = M\sqrt{x}\, e^{-x}\, \mathbf{1}_{]0,\infty[}(x).$$

On veut simuler f par la méthode de rejet en utilisant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. *Que vaut le c optimal en fonction de λ. Quel est le meilleur choix de λ?*

   La densité instrumentale est donnée par :$g(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{]0,\infty[}(x)$, où $\lambda < 1$.

   $$c_{opt} = \sup_{x>0} \frac{f(x)}{g(x)} = \sup_{x>0} \frac{M}{\lambda}\sqrt{x}e^{-(1-\lambda)x}$$

   Soit $h(x) = \sqrt{x}e^{-(1-\lambda)x}$.

   $$h'(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - (1-\lambda)\sqrt{x}\right)e^{-(1-\lambda)x}$$

   Après calcul on trouve $x^* = \frac{1}{2(1-\lambda)}$

   On remplace et on a

   $$c_{opt} = \frac{M}{\lambda}\sqrt{\frac{1}{2(1-\lambda)}}e^{-(1-\lambda)\frac{1}{2(1-\lambda)}} = \frac{1}{\lambda\sqrt{1-\lambda}}\frac{M}{\sqrt{2e}}$$

   et le meilleur choix de λ est $\lambda^* = \frac{2}{3}$.

2. *Écrire le programme sans boucle qui génére un n-échantillon aléatoire suivant la loi f.*

```
M=1;lambda=2/3;
c=(M)/(sqrt(2*exp(1))*lambda*sqrt(1-lambda))
g=function(x) lambda*exp(-lambda*x)
f=function(x) M*sqrt(x)*exp(-x)
n=1e5
U=runif(n); Y=rexp(n,lambda)
Y=Y[f(Y)/(c*g(Y))>U]
```

3. *Déduire une estimation par Monte Carlo de l'intégrale suivante :* $\int_0^\infty Mxe^{-2x}dx$.

   $I = E(\sqrt{X}e^{-X})$ où $X \sim f$. Donc il suffit de simuler un échantillon $X_1, \ldots, X_n$ suivant la densité f par la question précedente et faire
   $$\hat{I} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sqrt{X_i}\, e^{-X_i}.$$

4. *Donner une méthode pour simuler la densité, définie sur $\mathbb{R}$, proprtionelle à* $\sqrt{|x|}e^{-|x|}$.

   Il suffit de :

   a *simuler $X_1, \ldots, X_n \sim f$ et*
   b *Simuler indépendament $T_1, \ldots, T_n \sim Rad(1/2)$.*
   c *Ensuite, on pose $Y_i = X_i T_i$.*

   PS. *$T \sim Rad(1/2)$ c'est à dire $\mathbb{P}(T = 1) = \mathbb{P}(T = -1) = \frac{1}{2}$.*

Exercice 3 (2+2+1).

Estimer avec intervalle de confiance, en utilisant Monte-Carlo, par deux méthodes, l'intégrale suivante
$$I = \int_{-2}^{2}\int_{0}^{4} \sin(2x+y)e^{-3x}e^{-y^2}\, dxdy,$$
en donnant le programme.

Méthode 1

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{16}\mathbf{1}_{[0,4]}(x)\mathbf{1}_{[-2,2]}(y).$$
$$g(x,y) = 16\sin(2x+y)e^{-3x}e^{-y^2}$$

Méthode 2

$$f_{(X,Y)}(x,y) = 3e^{-3x}\mathbf{1}_{]0,\infty[}(x)\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-y^2}.$$
$$g(x,y) = \frac{\sqrt{\pi}}{3}\sin(2x+y)\mathbf{1}_{[0,4]}(x)\mathbf{1}_{[-2,2]}(y)$$

```
## Method 1
n=1e6 ;g=function(x,y) 16*sin(2*x+y)*exp(-3*x)*exp(-y*y)
X=runif(n,0,4) ; Y=runif(n,-2,2) ;  Z1=g(X,Y)
(binf=mean(Z1)-sd(Z1)*1.96/sqrt(n)) ; (bsup=mean(Z1)+sd(Z1)*1.96/sqrt(n))
## Method 2
n=1e5 ; g=function(x,y) (sqrt(pi)/3)*sin(2*x+y)*(x<4)*(y>-2)*(y<2)
X=rexp(n,3) ;  Y=rnorm(n,0,sd=1/sqrt(2))  ; Z2=g(X,Y)
(binf=mean(Z2)-sd(Z2)*1.96/sqrt(n)) ;  (bsup=mean(Z2)+sd(Z2)*1.96/sqrt(n))
```

Exercice **4** (2+2+2+2+2).

1. *Quelle est la loi que simule cette fonction ? Justifier soigneusement.*

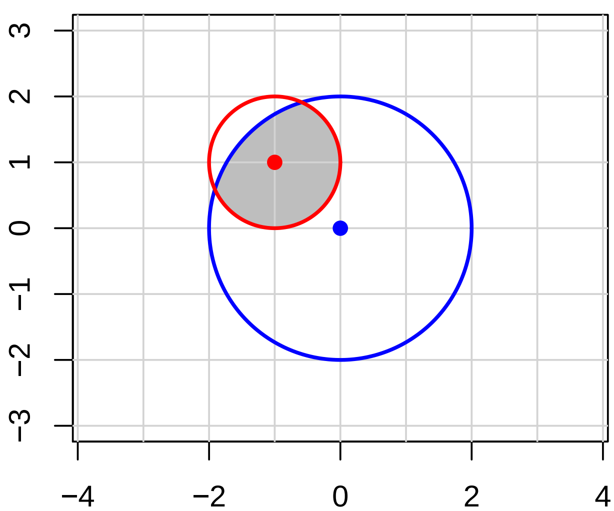
```
rd=function(n){
U=runif(n)
R=sqrt(U)
Theta=runif(n,0,2*pi)
X=R*cos(Theta)
Y=R*sin(Theta)
return(cbind(X,Y))
}
```

On simule la loi uniforme sur le disque unité: de centre (0,0) et de rayon 1.
$R = \sqrt{U}$ *où* $U \sim \mathcal{U}[0,1]$. *Le support de* R *est* $[0,1]$. $R = F^{-1}(U)$ *ou* $F^{-1}(y) = \sqrt{y}$. *On déduit alors que* $F(r) = r^2$ *et* $f(r) = 2r\mathbf{1}_{[0,1]}(r)$.

$$f(R,\theta) = \frac{2r}{2\pi}\mathbf{1}_{[0,1]}(r)\mathbf{1}_{[0,2\pi]}(\theta)$$

Avec $X = rcos(\theta)$ *et* $Y = r\sin(\theta)$ *, le jacobian vaut* r. *Le support est le disque unité et*

$$f(X,Y) = \frac{1}{\pi}\mathbf{1}_{x^2+y^2<1}(x,y).$$



2. *En utilisant seulement* `rd` *comme générateur aléatoire, Estimer par Monte Carlo la surface en gris (intersection des deux disques) ?*

```
### Method 1
n=1e6
Mat=rd(n);X=Mat[,1]-1; Y=Mat[,2]+1
cond=(X^2+Y^2)<4
(surface1=(pi*sum(cond))/n)
#####
### Method 2
n=1e6
Mat=rd(n);X=2*Mat[,1]; Y=2*Mat[,2]
cond=((X+1)^2+(Y-1)^2)<1
(surface2=(4*pi*sum(cond))/n)
```

3. *Soient X et Y deux v-a dans $\mathbb{R}^2$ indépendantes de loi uniforme respectivement sur les ensembles disjoints A et B. Soit $T \sim B(\alpha)$ indépendant de X et Y, où $\alpha = \frac{\lambda(A)}{\lambda(A)+\lambda(B)}$.*
Montrer que $Z = TX + (1-T)Y$ suit la loi uniforme sur l'ensemble $A \cup B$.

Soit Γ un ensemble (borélien) dans $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z \in \Gamma) &= \mathbb{P}(Z \in \Gamma, T = 1) + \mathbb{P}(Z \in \Gamma, T = 0) \\
&= \mathbb{P}(X \in \Gamma, T = 1) + \mathbb{P}(Y \in \Gamma, T = 0) \\
&= \mathbb{P}(X \in \Gamma)\mathbb{P}(T = 1) + \mathbb{P}(Y \in \Gamma)\mathbb{P}(T = 0) \\
&= \frac{\lambda(\Gamma \cap A)}{\lambda(A)} \frac{\lambda(A)}{\lambda(A) + \lambda(B)} + \frac{\lambda(\Gamma \cap B)}{\lambda(B)} \frac{\lambda(B)}{\lambda(A) + \lambda(B)} \\
&= \frac{\lambda(\Gamma \cap A) + \lambda(\Gamma \cap B)}{\lambda(A) + \lambda(B)} = \frac{\lambda(\Gamma \cap (A \cup B))}{\lambda(A \cup B)}
\end{aligned}$$

4. *Déduire un programme sans boucle qui permet de simuler un n-échantillon de points suivant la loi uniforme sur la réunion des deux disques.*

```
n=1e4
X=2*rd(n);
cond=((X[,1]+1)^2+(X[,2]-1)^2)>=1
####
center=matrix(c(-1,1),n,2,byrow=TRUE)
Y=rd(n)+center;
####
alpha=(4*pi-surface1)/(5*pi-surface1)
T=(runif(n)<alpha)
Z=T*X+(1-T)*Y
plot(Z,pch=19,col="blue")
```

5. *Ecrire un autre programme en se basant sur la méthode de Rejet et sans utiliser la fonction `rd`, qui répond à la question précedente.*

```
n=1e6
X=runif(n,-2,2) ;        Y=runif(n,-2,2)
cond1=(X^2+Y^2)<4 ;      cond2=((X+1)^2+(Y-1)^2)<1
16*(sum(cond1|cond2)/n)
```