Université Hassiba Benbouali de Chlef **Année Universitaire : 2020-2021**
Faculté des Sciences Exactes et Informatique **Module : Analyse fonctionnelle**
Département de Mathématiques **Niveau : Master 1**

Feuille de TD 3

Exercice 1.

Soit X un espace vectoriel normé sur un corps $\mathbb{K}$, et soit M un sous-ensemble non vide de X. Soit x un point quelconque de X.
- Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ dans M telle que

$$d(x,M) = \lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\|$$

- En déduire que : $d(x,M) = 0 \Longleftrightarrow x \in \overline{M}$

Exercice 2.

Soient X et Y deux espaces vectoriels normés et soit $T\colon X \to Y$ une application linéaire continue. On définit l'application $T'\colon Y' \to X'$ par

$$T'(\varphi) = \varphi \circ T,\ \varphi \in Y'$$

L'opérateur T' ainsi défini est dit l'opérateur adjoint de T.
- Montrer que T' est linéaire et continue, et que $\|T'\| \leq \|T\|$.
- Déduire du Théorème de Hahn-Banach que $\|T'\| = \|T\|$.

Exercice 3.

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et soit $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F.

Le but de l'exercice est de montrer que si $\mathcal{L}(E,F)$ est complet, alors F est complet.

Et donc comme conséquence directe: $\mathcal{L}(E,F)$ est complet si et seulement si F est complet.

1. Soit $x_0 \in E$ un vecteur unitaire. Montrer qu'il existe $f \in E', \|f\| = 1$ tel que $f(x_0) = 1$.
2. On suppose maintenant que $\mathcal{L}(E,F)$ est complet. Considérons une suite de Cauchy $(z_n)_n$ dans F, et la suite d'applications $T_n : E \to F, (n \geq 1)$ définies par

$$T_n(x) = f(x)z_n, \quad x \in E, n \geq 1$$

i. Montrer que $T_n \in \mathcal{L}(E,F), n \geq 1$.
ii. Montrer que la suite $(T_n)_n$ est de Cauchy dans $\mathcal{L}(E,F)$.
iii. Déduire que la suite $(T_n)_n$ est convergente vers un opérateur $T \in \mathcal{L}(E,F)$.

3. Montrer que $(z_n)_n$ est convergente vers le vecteur $z = Tx_0$.
4. Conclure.

Exercice 4.

(Séparation des points) Soit $(\mathcal{X}, \|.\|)$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé, et soient $x, y \in \mathcal{X}$ tels que $x \neq y$. Montrer qu'il existe une forme linéaire f continue sur $\mathcal{X}$ telle que $f(x) \neq f(y)$.

Exercice 5.

(Théorème de Baire) L'espace $\mathbb{R}$ des nombres réels est muni de la distance de la valeur absolue. Montrer, en utilisant le Théorème de catégorie de Baire, que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Exercice 6.

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels normés, et soit $\mathcal{T}\colon \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une application linéaire de graphe fermé.
- Montrer que le noyau de $\mathcal{T}$ est aussi fermé.

Exercice 7.

Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$, et soit $A : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ un opérateur linéaire symétrique, i.e.,

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle, \quad x, y \in \mathscr{H} \tag{0.1}$$

Montrer, par le Théorème du graphe fermé, que A est continu.
(Utiliser la continuité du produit scalaire)

Corrigé du TD 3

Exercice 1 1. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Pour $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, il existe $(x_n) \in M$ tel que

$$d(x, M) \leq \|x - x_n\| \leq d(x, M) + \frac{1}{n}$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$, on aura le résultat.
2. $(\Rightarrow)$ Supposons que $d(x, M) = 0$. Par la question (1), $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0$. Donc, $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ avec $x_n \in M$. D'où, $x \in \overline{M}$.
$(\Leftarrow)$ Si $x \in \overline{M}$, alors il existe $(x_n) \in M$ telle que $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0$. Par suite, $d(x, M) = 0$.

Exercice 2 1. Soient $\varphi, \psi \in Y'$, et soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned} T'(\lambda\varphi + \psi) = (\lambda\varphi + \psi) \circ T = ((\lambda\varphi) \circ T) + (\psi \circ T) &= \lambda(\varphi \circ T) + (\psi \circ T) \\ &= \lambda T'(\varphi) + T'(\psi) \end{aligned}$$

L'opérateur T' est donc linéaire. De plus, pour tout $\varphi \in Y'$, on a

$$\|T'(\varphi)\| = \|\varphi \circ T\| \leq \|\varphi\|\|T\| = \|T\|\|\varphi\|$$

Ce qui montre que T' est continu, et que $\|T'\| \leq \|T\|$.
2. Soit $\varphi \in Y'$. On a

$$\begin{aligned} \|T'\| = \sup_{\varphi\in Y', \|\varphi\|=1} \|T'(\varphi)\| = \sup_{\varphi\in Y', \|\varphi\|=1} \|\varphi \circ T\| &= \sup_{\|\varphi\|=1} \sup_{\|x\|=1} |(\varphi \circ T)(x)| \\ &= \sup_{\|x\|=1} \sup_{\|\varphi\|=1} |\varphi(\circ Tx)| \\ &= \sup_{\|x\|=1} \sup_{\|\varphi\|=1} |\varphi(Tx)| \\ &= \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \\ &= \|T\| \end{aligned}$$

en vertu du théorème de Hahn-Banach.

Exercice 3. 1. Soit $x_0 \in E, \|x_0\| = 1$. D'après le Corollaire 4.1 du Théorème de Hahn-Banach, il existe $f \in E'$ telle que $\|f\| = 1$ et $f(x_0) = \|x_0\|$.
2. i1. Pour tous $x, y \in E$, et tout $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$T_n(\lambda x + y) = f(\lambda x + y)z_n = (\lambda f(x) + f(y))z_n = \lambda f(x)z_n + f(y)z_n = \lambda T_n(x) + T_n(y)$$

car f est linéaire. Par conséquent, T_n est linéaire.

i2. Pour tout x dans E et tout $n \geq 1$:

$$\|T_n(x)\| = \|f(x)z_n\| = |f(x)|\|z_n\| \leq \|f\|\|x\|\|z_n\| \leq \|z_n\|\|x\|$$

car f est continue et $\|f\| = 1$. Ce qui montre que T_n est continue, et $\|T_n\| \leq \|z_n\|$.
De (i1) et (i2), on aura que $T_n \in \mathcal{L}(E, F), n \geq 1$.

ii. Pour tous $n, m \in \mathbb{N}, n \neq m$:

$$\|T_n - T_m\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)(z_n - z_m)\| = \|z_n - z_m\| \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| = \|z_n - z_m\|$$

Comme $(z_n)_n$ est de Cauchy dans F, la suite $(T_n)_n$ l'est également dans $\mathcal{L}(E, F)$.

iii. On en déduit que la suite $(T_n)_n$ est convergente vers certain $T \in \mathcal{L}(E, F)$ car $\mathcal{L}(E, F)$ est complet.

3. Posons $Tx_0 = z$. Alors,

$$\|z_n - z\| = \|T_n(x_0) - Tx_0\| = \|(T_n - T)x_0\| \leq \|T_n - T\|\|x_0\| \to 0, \quad (n \to +\infty)$$

4. La suite $(z_n)_n$ est donc convergente vers $z, z \in F$. Par conséquent, l'espace F est complet.

Exercice 4 Comme $x \neq y$, $x - y \neq 0$. Par le Corollaire 4.1 du Théorème de Hahn-Banach, il existe $f \in E'$ telle que $\|f\| = 1$, et $f(x - y) = \|x - y\| \neq 0$. Par conséquent, $f(x) - f(y) \neq 0$ car f est linéaire.

Exercice 5 Par l'absurde, on suppose que $\mathbb{R}$ est pas dénombrable. Donc $\mathbb{R} = \{x_0, x_1, x_2, ...\}$ où $x_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}$, i.e., $\mathbb{R} = \underset{i \in \mathbb{N}}{\cup} \{x_i\}$. Le singleton $\{x_i\}$ étant fermé dans $\mathbb{R}$ car

$$\{x_i\}^C =]-\infty, x_i[\cup]x_i, +\infty[$$

est un ouvert dans $\mathbb{R}$. De plus, $\mathbb{R}$ est complet. Par le théorème de Baire, il existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\{x_{i_0}\}$ est d'intérieur non vide. Il existe donc un intervalle ouvert dans $\mathbb{R}$ inclus dans $\{x_{i_0}\}$. Contradiction. Par conséquent, $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Exercice 6 Soit $(x_n)_n)$ une suite dans $\ker \mathcal{T}$ qui converge vers un vecteur $x \in E$. A-t-on $x \in \ker \mathcal{T}$? Comme le graphe de $\mathcal{T}$ est fermé, la suite $(x_n, \mathcal{T}x_n)$ converge vers $(x, \mathcal{T}x)$. C-à-d, $\lim_{n \to +\infty} \mathcal{T}x_n = \mathcal{T}x = \mathcal{T}(\lim_{n \to +\infty} x_n) = 0$ car $x_n \in \ker \mathcal{T}$. Donc, $x \in \ker \mathcal{T}$.

Exercice 7 Comme $\mathscr{H}$ est de Hilbert, il suffit de montrer que le graphe $G(A)$ de A est fermé de $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$. Soit donc $(x_n, Ax_n)_n$ une suite dans $G(A)$ qui converge vers (x, y). Donc,

$\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} Ax_n = y$. Soit $z \in \mathscr{H}$. Par la continuité du produit scalaire et l'hypothèse (0.1), on obtiendra

$$\begin{aligned}
\langle Ax, z \rangle = \langle A(\lim_{n \to +\infty} x_n), z \rangle = \langle x, Az \rangle = \langle \lim_{n \to +\infty} x_n, Az \rangle &= \lim_{n \to +\infty} \langle x_n, Az \rangle \\
&= \lim_{n \to +\infty} \langle Ax_n, z \rangle \\
&= \langle \lim_{n \to +\infty} Ax_n, z \rangle \\
&= \langle y, z \rangle
\end{aligned}$$

Par conséquent, $y = Az$. Donc, le graphe $G(A)$ est fermé. Par le Théorème du graphe fermé, A est continu.