Université Hassiba Benbouali–Chlef
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

$1^{\text{ère}}$ **année Master MAS**
Méthode de Monte-Carlo et Simulation
Année : 2019/2020

TP N°1

EXERCICE N° 1:

1. Écrire une fonction qui permet de générer les n premiers termes de la suite de nombres pseudo-aléatoires issu de la définition
$$x_i = (a \times x_{i-1} + c) \bmod m.$$
2. Tester votre fonction pour $n = 100$,
   (i) $a = 5$, $c = 5$, $x_0 = 1$ et $m = 32$.
   (ii) $a = 13$, $c = 3$, $x_0 = 0$ et $m = 1024$.
   (iii) $a = 1664525$, $c = 1013904223$, $x_0 = 0$ et $m = 2^{32}$.
   (iv) $a = 65539$, $c = 0$, $x_0 = 1$ et $m = 2^{31}$.
3. Modifier la fonction précédente pour qu'elle donne comme sortie la suite $u_n = \dfrac{x_n}{m}$.
4. Après avoir généré un échantillon $u_1, \ldots, u_n$ de taille n, représenter leurs histogramme.
5. Comparer graphiquement la fonction de répartition empirique avec la fonction de répartition théorique de la loi uniforme sur $[0, 1]$.

EXERCICE N° 2:

1. Écrire une fonction qui simule un échantillon de taille k de la loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.
2. Écrire une fonction qui simule un échantillon de taille n de la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. On peut utiliser le fait que $p_{k+1} := \mathbb{P}(X = k+1) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{k+1}}{(k+1)!} = \dfrac{\lambda}{k+1} \times \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!} = \dfrac{\lambda}{k+1} p_k$.
3. Soit U suit la loi uniforme $\mathcal{U}[0, 1]$. Soit $p \in]0, 1[$, quelle est la loi de $Y := 1 + \left\lfloor \dfrac{\ln U}{\ln(1-p)} \right\rfloor$? Simuler n variables aléatoires indépendantes de même loi que Y.

EXERCICE N° 3: En utilisant la méthode d'inversion, simuler n variables aléatoires indépendantes de

1. la loi de Cauchy de densité $f(x) := \dfrac{\sigma}{x^2 + \sigma^2} \mathbb{1}_{x \in \mathbb{R}}, \ \sigma > 0.$
2. la loi de Weibull de densité $f(x) := \dfrac{a}{b^a} x^{a-1} e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^{a}} \mathbb{1}_{x \geq 0}, \ (a, b) \in]0, +\infty[^2.$
3. la densité f définie par $f(x) = x e^{-\frac{x^2}{2}} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$.
4. la densité f définie par $f(x) = \frac{k}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$.

EXERCICE N° 4: Soient U_1 et U_2 deux variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées dans $[0, 1]$. Soient R et Θ deux variables aléatoires indépendantes, avec R suit une loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{2}$: $R \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)$ et Θ suit une loi uniforme sur $[0; 2\pi]$: $\Theta \sim \mathcal{U}[0; 2\pi]$. Soient
$$\begin{aligned} Z_1 &= R\cos(\Theta) = \sqrt{-2\ln U_1}\cos(2\pi U_2) \\ Z_2 &= R\sin(\Theta) = \sqrt{-2\ln U_1}\sin(2\pi U_2) \end{aligned}$$
Alors Z_1 et Z_2 sont des variables aléatoires indépendantes suivant une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Écrire une fonction qui simule un échantillon de taille n de (Z_1, Z_2).
2. Représenter graphiquement la distribution des couples de points obtenus.