Corrigé examen L3- 2022

Exercice 1: (07 pts)
1)

$$\begin{aligned}
& f_X \text{ est continue sur } \mathbb{R}^+ \\
f_X(x) &\geq 0 \; \forall x>0, \quad \text{de plus} \\
\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx &= \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = -e^{-\frac{x^2}{2}} \big|_0^{+\infty} = 1 \qquad \boxed{1 \text{ pt}}
\end{aligned}$$

f_X est donc bien une densité de probabilité

2) a) $Y = X^2$ est une variable aléatoire positive; on écrit la fonction de répartition F_Y de Y.

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P\left(X^2 \leq y\right) = 0 \text{ si } y<0 \\
&= P\left(|X| \leq \sqrt{y}\right) \text{ si } y \geq 0
\end{aligned}$$

donc

$$P(|X| \leq y) = P\left(X \leq \sqrt{y}\right) = F_X\left(\sqrt{y}\right) \text{ car } X \text{ prend ses valeurs dans } \mathbb{R}^+$$

d'où, par dérivation par rapport à y

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X\left(\sqrt{y}\right) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \sqrt{y} e^{-\frac{y}{2}} = \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}}$$

D'où

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}} & \text{si } y \geq 0 \\ 0 & \text{si } y<0 \end{cases} \qquad \boxed{3 \text{ pts}}$$

b) On reconnait là la densité d'une variable aléatoire Y qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{2}$. $\boxed{1 \text{ pt}}$

3) On a donc immédiatement

$$\begin{aligned}
E(X) &= \frac{1}{\lambda} = 2 \text{ et} \\
Var(X) &= \frac{1}{\lambda^2} = 4 \qquad \boxed{2 \text{ pts}}
\end{aligned}$$

Exercice 2: (09 pts)
1)

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{a}\left(1 - \frac{x}{a}\right) & \text{si } x \in [0,a], \quad a>0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a donc, si on note par F_X la fonction de répartition de X.

$$\begin{aligned}
\text{Si } x &< 0 \quad F_X(x) = 0 \\
\text{Si } 0 &\leq x < a \quad F_X(x) = \frac{2}{a}\int_0^x \left(1-\frac{t}{a}\right)dt = \frac{2x}{a}\left(1-\frac{x}{2a}\right) \\
\text{Si } x &\geq a \quad F_X(x) = 1
\end{aligned}$$ $\boxed{2 \text{ pts}}$

2)

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{a}{2} < X \leq a\right) &= F_X(a) - F_X\left(\frac{a}{2}\right) = \\
&= \frac{2\times a}{a}\left(1-\frac{a}{2a}\right) - \frac{2}{a}\times\frac{a}{2}\left(1-\frac{1}{2a}\times\frac{a}{2}\right) = \\
&= 1-\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$ $\boxed{1 \text{ pt}}$

3)

$$\begin{aligned}
E\left(X^k\right) &= \int_{\mathbb{R}} x^k f_X(x)\,dx = \\
&= \frac{2}{a}\int_0^a x^k\left(1-\frac{x}{a}\right)dx = \\
&= \frac{2}{a}\int_0^a \left(x^k - \frac{x^{k+1}}{a}\right)dx \\
&= \frac{2}{a}\left(\frac{x^{k+1}}{k+1} - \frac{1}{a}\frac{x^{k+2}}{k+2}\right)\Big|_0^a = \\
&= \frac{2}{a}\left(\frac{a^{k+1}}{k+1} - \frac{x^{k+1}}{k+2}\right) = \\
&= 2a^k\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{2a^k}{(k+1)(k+2)}
\end{aligned}$$

d'où

$$E\left(X^k\right) = \frac{2a^k}{(k+1)(k+2)} \qquad k = 0, 1, 2, ...$$ $\boxed{2 \text{ pts}}$

On a, pour $k = 1$

$$E(X) = \frac{a}{3}$$

Pour $k = 2$

$$E\left(X^2\right) = \frac{a^2}{6}$$

et donc

$$\begin{aligned} Var\left(X\right) &= E\left(X^2\right) - \left(E\left(X\right)\right)^2 = \\ &= \frac{a^2}{6} - \left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{18} \qquad \boxed{1\text{ pt}} \end{aligned}$$

4) Connaissant l'expression de F_X, on doit résoudre l'équation $F_X\left(\theta\right) = \frac{1}{2}$, il vient

$$\begin{aligned} \frac{2\theta}{a}\left(1 - \frac{\theta}{2a}\right) &= \frac{1}{2}, \text{ soit} \\ \frac{\theta^2}{a^2} - \frac{2\theta}{a} + \frac{1}{2} &= 0 \end{aligned}$$

Le discriminant Δ de l'équation du second degré en θ est positif, donc cette équation admet deux racines distinctes

$$\begin{aligned} \theta_1 &= a\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \theta_2 &= a\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

θ_1 est exclue car $\theta_1 > a$, donc l'unique solution de l'équation $F_X\left(\theta\right) = \frac{1}{2}$est $\theta = a\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 0,293a$ $\boxed{3\text{ pts}}$

Exercice 3: (04 pts)

La variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre λ, on a donc

$$P\left(X = k\right) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0.1, 2, ... \qquad \boxed{1\text{ pt}}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} P\left(X = 2\right) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2!} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2} \\ P\left(X = 4\right) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^4}{4!} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^4}{24} \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{P\left(X = 2\right)}{P\left(X = 4\right)} = \frac{e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2}}{e^{-\lambda}\frac{\lambda^4}{24}} = \frac{12}{\lambda^2} = 3 \qquad \boxed{1\text{ pt}}$$

il s'ensuit

$$\lambda^2 = 4$$

par conséquent

$\lambda = 2$ puisque le paramètre est un nombre réel positif $\boxed{1\text{ pt}}$

enfin

$$Var\left(X\right) = 2 \qquad \boxed{1\text{ pt}}$$