Exo9

On retrouve les statistiques exhaustives en écrivant la vraisemblance du modèle et en appliquant le théorème de factorisation. Le paramètre du modèle est $\theta \in \Theta = \mathbb{R}$. On a pour $x \in \mathbb{R}^n$

$$L(x, \lambda) = e^{-n\lambda} \times \frac{\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$$

D'où une statistique exhaustive : $S(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

2) Le paramètre du modèle étant $(\alpha, \theta) \in \Theta = \mathbb{R}^2$, on a

$$L(x) = \left(\frac{\alpha-1}{\theta}\right)^n \frac{\theta^{n\alpha}}{\exp\left(\alpha \sum_{i=1}^{n} \log x_i\right)} 1_{[\theta,\infty[}(\min x_i)$$

D'où une statistique exhaustive : $S(x_1, ..., x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} \log x_i, \min x_i\right)$.

3) Le paramètre du modèle est $(\alpha, \theta) \in \Theta = \mathbb{R}^{+*2}$. On a

$$L(x) = \alpha^n \theta^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i^\alpha\right) 1_{[0,\infty[}(\min x_i)$$

Dans ce cas, on ne peut exhiber de statistique exhaustive autre que $T(X_1, ..., X_n)$. Par contre, si on estimait uniquement θ (α constante connue), alors $T(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^\alpha$ serait une statistique exhaustive.

Exo10

1) $n = 1$

$L(k, \lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \Rightarrow \log L(k, \lambda) = -\lambda + k \log \lambda - \log k!$

d'où $\frac{\partial \log L(k,\lambda)}{\partial \lambda} = -1 + \frac{k}{\lambda} \Rightarrow \frac{\partial^2 \log L(k,\lambda)}{\partial \lambda^2} = \frac{k}{\lambda^2}$ or $E(k) = \lambda \Rightarrow I_1(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ et

$$I_n(\lambda) = nI_1(\lambda) = \frac{n}{\lambda}.$$

2)

$$L = \frac{\alpha}{\theta} \left(\frac{\theta}{x}\right)^\alpha 1_{[\theta,+\infty[}(x)$$

La vraisemblance n'est pas dérivable en θ : l'information de Fisher n'est pas définie pour ce modèle. Si θ est une constante connue et non un paramètre à estimer, on peut calculer l'information de Fisher pour le modμele 'réduit' (paramètré par α) :

$$\frac{\partial \log L}{\partial \alpha} = \frac{1}{\alpha-1} + \log\theta - \log x \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \log L}{\partial \alpha^2} = -\frac{1}{(\alpha-1)^2}$$

D'où

$$I_1(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)^2}$$

3) On a

$$\log L = \log\alpha + \log\theta(\alpha-1)\log x - \theta x^\alpha$$

on écrit $x^\alpha = e^{\alpha \log x}$ on obtient

$\frac{\partial \log L}{\partial \alpha} = \frac{1}{\alpha} + \log x - \theta x^\alpha \log x$	$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \alpha^2} = -\frac{1}{\alpha^2} - \theta x^\alpha (\log x)^2$
$\frac{\partial \log L}{\partial \theta} = \frac{1}{\theta} - x^\alpha$	$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta^2} = -\frac{1}{\theta^2}$

et

$$\boxed{\frac{\partial^2 \log L}{\partial\theta\partial\alpha} = -x^\alpha \log x}$$

d'où

$$I_1(\alpha,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha^2} + \theta E\left(X^\alpha(\log X)^2\right) & E\left(X^\alpha \log X\right) \\ E\left(X^\alpha \log X\right) & \frac{1}{\theta^2} \end{pmatrix}$$

Il reste alors à calculer $E\left(X^\alpha \log X\right)$ et $E\left(X^\alpha(\log X)^2\right)$. On a

$$E\left(X^\alpha \log X\right) = \int_0^{+\infty} \theta x^\alpha \log(x)\, \alpha x^{\alpha-1} e^{-\theta x \alpha} dx \text{ et } E\left(X^\alpha(\log X)^2\right) = \int_0^{+\infty} \theta x^\alpha \log(x)^2\, \alpha x^{\alpha-1} e^{-\theta x \alpha} dx$$

En posant $u = \theta x^\alpha$, on obtient:

$$E\left(X^\alpha \log X\right) = \frac{1}{\alpha\theta}\int_0^{+\infty} \log\left(\frac{u}{\theta}\right) u e^{-u} du \quad \text{et} \quad E\left(X^\alpha(\log X)^2\right) = \frac{1}{\alpha^2\theta}\int_0^{+\infty} \left(\log\left(\frac{u}{\theta}\right)\right)^2 u e^{-u} du$$

On utilise des résultats connus des fonctions Γ à savoir:

$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ et

la dérivée d'ordre p de $\Gamma(p)$ est calculée par $\Gamma^{(p)}(x) = \int_0^{+\infty} (\log t)^p t^{x-1} e^{-t} dt$

$\forall p$

d'où

#

$$\begin{aligned} E\left(X^\alpha \log X\right) &= \frac{1}{\alpha\theta}\int_0^{+\infty} \log(u)\, u e^{-u} du - \frac{1}{\alpha\theta}\int_0^{+\infty} \log(\theta)\, u e^{-u} du \\ &= \frac{1}{\alpha\theta}\left(\Gamma'(2) - \log\theta \times \Gamma(2)\right) \end{aligned}$$

#

$$
\begin{aligned}
E\left(X^{\alpha}(\log X)^{2}\right) &= \frac{1}{\alpha^{2}\theta}\left[\int_{0}^{+\infty}(\log(u))^{2}\,ue^{-u}du+(\log\theta)^{2}\int_{0}^{+\infty}ue^{-u}du-2\log\theta\int_{0}^{+\infty}\log(u)\,ue^{-u}du\right] \\
&= \frac{1}{\alpha^{2}\theta}\left(\Gamma^{''}(2)+(\log\theta)^{2}\,\Gamma(2)-2\log\theta\times\Gamma(2)\right)
\end{aligned}
$$

d'où

$$
I_1(\alpha,\theta)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha^{2}\theta}\left(\Gamma^{''}(2)+(\log\theta)^{2}\,\Gamma(2)-2\log\theta\times\Gamma(2)\right) & \frac{1}{\alpha\theta}\left(\Gamma^{'}(2)-\log\theta\times\Gamma(2)\right) \\ \frac{1}{\alpha\theta}\left(\Gamma^{'}(2)-\log\theta\times\Gamma(2)\right) & \frac{1}{\theta^{2}} \end{pmatrix}
$$

4) $f(x,\theta)=\frac{1}{\theta^{n}}1_{\min_{xi}\geq 0}1_{\max x_i\leq\theta}$; si $x\in[0,\theta]^{n}\Rightarrow L(x,\theta)=-n\log\theta$ pas dérivable.

Theorem 1 *Soit* Φ *un rest de niveau* α *de* $\theta \in \Theta_0$ *vs.* $\theta \in \Theta_1$. ***<u>Alors</u>***

Φ *est* ***UPP*** *de niveau* α *de* $\theta \in \Theta_0$ *vs.* $\theta \in \Theta_1 \Longleftrightarrow \Phi$ *est* ***UPP*** *de niveau* α *de* $\theta \in \Theta_0$ *vs.* $\theta = \theta_1 \quad \forall \theta_1 \in \Theta_1$