Deuxième partie

Probabilités

Chapitre 3

Analyse combinatoire

L'objectif de l'analyse combinatoire et de dénombrer les manières distinctes de grouper les éléments d'un ensemble E de n $(n \in \mathbb{N}^*)$ éléments suivant des lois déterminées.

Notations : Soit E un ensemble de n éléments,

1/ On appelle cardinal de l'ensemble E et on le note par $Card\ E$, le nombre d'éléments de E.

2/ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le factoriel de n noté $n!$ est défini par :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) ... 3 \times 2 \times 1$$

et on a : $0! = 1! = 1$.

3/ On appelle partition de E l'ensemble de tous les sous-ensembles de E, qu'on note par $\mathcal{P}(E)$.

3.1 Arrangements, permutations et combinaisons

On considère dans tout ce qui suit, E un ensemble de n $(n \in \mathbb{N}^*)$ éléments, et p un entier positif non nul vérifiant $1 \leq p \leq n$.

3.1.1 Arrangements

Définition 3.1.1 *On appelle un arrangement de p éléments de E, toute suite ordonnée de p éléments parmi les n éléments de E. Le nombre des arrangements est noté par : A_n^p.*

Remarque 3.1.1 *Deux arrangements sont dites distinctes, s'ils diffèrent par la nature des éléments $\Rightarrow$ ils sont formés des éléments différents qui les composent ou par leur ordre dans la suite.*

Exemple 3.1.1

1/ Le code d'une carte bancaire est composé de 4 chiffres choisis parmi les 10 chiffres de l'ensemble $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, alors les différentes manières de composer ce code sont dites les arrangements de $p = 4$ éléments d'un ensemble de $n = 10$ éléments, et on note A_{10}^{4}.

2/ Choisir une délégation formé de 2 étudiants d'une section de 150 étudiants constitu des arrangements A_{150}^{2}.

1/ Dans le premier cas de l'exemple (3.1.1), le même élément peut se retrouver plusieurs fois (code 9039 ou 4404...ect) $\Rightarrow$ chaque chiffre du code a 10 possiblités d'apparition $\underset{10}{X}\ \underset{10}{X}\,\underset{10}{X}\,\underset{10}{X}$ $\Rightarrow$ le nombre des arrangements $A_{10}^{4} = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$.

2/ Dans le deuxième cas, les deux étudiants sont forcéments différents, alors le premier est choisi par les 150 étudiants de la section or le deuxième sera choisi parmi les 149 qui restent $\underset{150}{X}\ \underset{149}{X}$ $\Rightarrow$ le nombre des arrangements $A_{150}^{2} = 150 \times 149 = 22350$.

On distingue alors, deux types d'arrangements : arrangements avec répétition et arrangements sans répétition.

Arrangement avec répétition

Définition 3.1.2 *Lorsqu'un élément peut être choisi ou observé plusieurs fois, le nombre d'arrangements avec répétition de p éléments d'un ensemble de n éléments est :*

$$A_n^p = n^p.$$

Exemple 3.1.2 *Voir le premier cas de l'exepmle (3.1.1).*

Arrangement sans répétition

Définition 3.1.3 *Lorsqu'un élément peut être choisi ou observé une seule fois, le nombre d'arrangements sans répétition de p éléments d'un ensemble de n éléments est :*

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Exemple 3.1.3 *Voir le deuxième cas de l'exepmle (3.1.1).*

3.1.2 Permutations

Définition 3.1.4 *On appelle une permutation toute suite ordonnée de n éléments de l'ensemble E ou tout arrangement de n éléments de E. Le nombre des permutations est noté par : P_n.*

Exemple 3.1.4

1/ On veut placer 5 étudiants autour d'une table ronde de 5 chaises.

2/ On cherche le nombre de mots possibles (avec ou signification) que l'on peut écrire en permutant les 9 lettres du mot pellicule.

Remarque 3.1.2 *Dans le premier cas de l'exemple (3.1.4) chaque étudiant est placé dans une chaise, donc les étudiants sont forcéments différents* $\underset{5}{X}\ \underset{4}{X}\,\underset{3}{X}\,\underset{2}{X}\,\underset{1}{X} \Rightarrow$ *le nombre de manières de placer les étudiants autour de la table est :* $P_5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$. *Par contre dans le deuxième cas la lettre "l" est répétée* 3 *fois et la lettre "e" est répétée* 2 *fois, alors on peut écrire des mots contenant la lettre "l" dans trois positions différentes et la lettre"e" dans deux positions différentes* $\Rightarrow$ *le nombre des mots qu'on peut écrire des* 9 *lettres du mot "pellicule" doit être raporté au nombre de permutations de* 3 *lettres identiques "l" et* 2 *lettres identiques "e". Par conséquent le nombre de mots dans ce cas est :*

$$\begin{aligned} P_9 &= \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(3 \times 2 \times 1)(2 \times 1)} \\ &= \frac{9!}{3! \times 2!} \end{aligned}$$

Cela conduire à distinguer deux types de permutations :

Permutation sans répétition

Définition 3.1.5 *On appelle une permutation sans répétition toute suite ordonnée de n éléments **distincts** de l'ensemble E, le nombre de permutations sans répétition de n éléments d'un ensemble de n éléments est :*

$$P_n = n!.$$

Exemple 3.1.5 *Voir le premier cas de l'exepmle (3.1.4).*

Arrangement avec répétition

Définition 3.1.6 *Lorsqu'un élément existe k fois, le nombre de permutations avec répétition de n éléments d'un ensemble de n éléments est :*

$$P_n = \frac{n!}{k!}.$$

En cas où chaque élément x_i de l'ensemble E existe k_i fois tel que $1 \leq i \leq m$ et $\sum_{i=1}^{m} k_i = k_1 + k_2 + ... + k_m = n$,

$$\boxed{E = \left\{ \underbrace{x_1...x_1}_{k_1 \ fois} \underbrace{x_2...x_2}_{k_2 \ fois} .... \underbrace{x_m...x_m}_{k_m \ fois} \right\}},$$

le nombre des permutations est donné par :

$$P_n = \frac{n!}{k_1! \times k_2! \times ... \times k_m!}.$$

Exemple 3.1.6 *Voir le deuxième cas de l'exepmle (3.1.4).*

3.1.3 Combinaisons

Définition 3.1.7 *Une combinaison est un arrangement de p éléments d'un ensemble E de n éléments dans lequel l'ordre ne compte pas. Il ya deux tupes de combinaisons : des combinaisons sans remises et des combinaisons avec remise.*

Combinaison sans remise

Définition 3.1.8 *On appelle combinaison sans remise tout ensemble de p éléments pris sans remise parmi les n éléments de E. Le nombre de combinaison sans remise est :*

$$C_n^p = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}.$$

Exemple 3.1.7 *Former une délégation de 3 employés au sein d'une entreprise de 50 employés $\rightarrow$ nombre de délégations est :*

$$C_{50}^3 = \frac{50!}{3! \times 47!} = \frac{50 \times 49 \times 48 \times 47!}{6 \times 47!} = 19600.$$

Combinaison avec remise

Définition 3.1.9 *On appelle combinaison avec remise tout ensemble de p éléments pris avec remise parmi les n éléments de E. Le nombre de combinaison avec remise est :*

$$C_{n+p-1}^{p} = \frac{(n+p-1)!}{p! * (n-1)!}.$$

Exemple 3.1.8 *Former des mots de 3 lettres (avec ou sans signification) à partir d'un ensemble de 5 lettres $\rightarrow$ nombre de mots est :*

$$C_{7}^{3} = \frac{7!}{3! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{6 \times 4!} = 35.$$

Proposition 3.1.1 ***"Propriétés de combinaisons"***

1/

$$C_n^0 = C_n^n = 1.$$

2/

$$C_n^1 = C_n^{n-1} = n.$$

3/

$$C_n^2 = C_n^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

4/

$$C_n^p = C_n^{n-p}.$$

5/

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = C_n^p.$$

Preuve. Pour démontrer les propriétés ci-dessus, on utilise la formule de la cobinaison donnée en définition (3.1.8).

1/

$$C_n^0 = \frac{n!}{0! * n!} = \frac{n!}{n! * 0!} = C_n^n = 1.$$

2/

$$C_n^1 = \frac{n!}{1! * (n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)! * 1!} = C_n^{n-1} = n.$$

3/

$$C_n^2 = \frac{n!}{2! * (n-2)!} = \frac{n!}{(n-2)! * 2!} = C_n^{n-2} = \frac{n * (n-1)}{2}.$$

4/

$$C_n^p = \frac{n!}{p! * (n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)! * p!} = C_n^{n-p}.$$

5/

$$\begin{aligned} C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} &= \frac{(n-1)!}{(p-1)! * (n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p! * (n-1-p)!} \\ &= \frac{(n-1)! * [p + (n-p)]}{p! * (n-p)!} \\ &= \frac{n!}{p! * (n-p)!} \\ &= C_n^p. \end{aligned}$$

□

Développement du binôme et triangle de Pascal

Le développement du polynôme

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b) \times (a+b) \times ... \times (a+b)}_{n\ fois}$$

nécessite calculer pour chaque terme a^k (ou b^k) avec $0 \leq k \leq n$, le nombre de façon distinctes de choisir k fois a (ou b) parmi n possibilités. Ce nombre est le coéfficient binomiale donné par :

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \times (n-k)!}$$

et on a

$$\begin{array}{lccccccccc} (a+b)^0 = & 1 & & & & & & & & \\ (a+b)^1 = & 1 \times a & + & 1 \times b & & & & & & \\ (a+b)^2 = & a^2 & + & 2 \times a \times b & + & b^2 & & & & \\ (a+b)^3 = & a^3 & + & 3 \times a^2 \times b & + & 3 \times a \times b^2 & + & b^3 & & \\ (a+b)^4 = & a^4 & + & 4 \times a^3 \times b & + & 6 \times a^2 \times b^2 & + & 4 \times a \times b^3 & + & b^4 \\ . & . & & . & . & . & & & & \\ . & . & & . & . & . & & & & \\ & . & & . & . & . & & & & \\ (a+b)^n = & a^n & + & C_n^1 \times a^{n-1} \times b & + & C_n^2 \times a^{n-2} \times b^2 & + & .... & .. \quad .. & + \quad C_n^n \times b^n \end{array}$$