Chapitre 1 : Processus stochastique en temps continu.

Généralité

Soit un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Rappelons qu'une application $Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée une variable aléatoire si Z une application de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$: $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ — tribu (σ-algèbre) de Borel sur $\mathbb{R}$ est mesurable.

Q (1) : c'est qu'un processus stochastique ?
c'est une famille de v.a

Def (1) : Soit $I = [0, T]$ ou $I = [0, +\infty[$ pour $T \in \mathbb{R}_+$, une famille de v.a avec
$X_t : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$
$X = (X_t(w))_{t \in I}$ est un processus stochastique

Rq (1) : Dans la définition d'une processus stochastique on peut remplacer I par un ensemble Ω donné et $\mathbb{R}$ par un autre espace (espace d'état)
$(i_0, i_1, \dots, i_k \in S)$

Dans (1) ce cas on a deux aspects

1) La famille $X = (X_t)_{t \in I}$ décrets des fonction aléatoires $w \longrightarrow f(w) = (X_t(w))_{t \in I}$

2) La famille $X = (X_t)_{t \in I}$ décrit un processus qui est par rapport un temps t une famille de variable aléatoires ordonnées $t \longrightarrow X_t$
$(X_t)_{t \in I}$ fct de ... w fixé la trajection de processus X

Def (2) : Soit $X = (X_t)_{t \in I}$ et $Y = (Y_t)_{t \in I}$ des processus stochastique dans $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sont dit indistinguables si et seulement si
تتطلب
$P(X_t = Y_t, t \in I) = 1$ la déf exige que l'ensemble $\{w \in \Omega : X_t(w) = Y_t(w), t \in I\}$ est mesurable $(\in \mathcal{F})$.

Exemple (1) : Soit $I = [0, +\infty[$

$\Omega = [0, 2[$, $Y_t = 0$, $X_t = \begin{cases} 0 & w \in [0, 1] \\ 0 & w \in [1, 2[\quad t \neq w \\ 1 & w \in [1, 2[\quad t = w \end{cases}$

et $\mathcal{F} = \sigma(X_t : t \geq 0) = \sigma(\{\{t\} : t \in]1, 2[\})$

$\{w \in \Omega, X_t(w) = Y_t(w), t \geq 0\} = [0, 1] \notin \mathcal{F}$

(3) définition:

Soient $X=(X_t)_{t\in I}$ et $Y=(Y_t)_{t\in I}$ des processuses stochastique dans $(\omega, \mathcal{F}, P)$ les ~~prossu~~ processuses X et Y soient modification l'un de l'autre si $P(X_t=Y_t)=1$, $\forall t\in I$

(4) définition: Soient $X=(X_t)_{t\in I}$ et $Y=(Y_t)_{t\in I}$ des processus stochastique dans $(\omega,\mathcal{F},P)$ $(\omega',\mathcal{F}',P')$ respectivement. Alors X et Y ont la même distribution (loi) fini démensiennelle si: $P((X_{t_1},\dots X_{t_n})\in B)=P'((Y_{t_1},\dots Y_{t_n})\in B)$, $t_1 \dots t_n$

$\forall 0\leq t_1 < t_2 \dots < t_n \in I$, $n\in\mathbb{N}$. $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Vecteur aléatoires. $(X_1, X_2, \dots, X_n)\in\mathbb{R}^n$

(1) proposition: ① Si X et Y soit indistinguables alors ils sont modefication l'un de l'autre

la réciproque en général n'est pas vraie

② Si X et Y sont modefication l'eun de l'autre, alors ils sont la même loi fini dimensionnelle, la r.a propre est faux

indistinguable ⟹ modefication

modification ⟹ même loi fini-dime.

(2) dém:

① $t\in I$ $P(X_t=Y_t)\geq P(X_s=Y_s, s\in I)=1$

② Soit $N_t=\{X_t\neq Y_t\}\Rightarrow P(N_t)=0$

alors pour $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$

$P((X_{t_1},\dots X_{t_n})\in B)=P(\{(X_{t_1},\dots X_{t_n})\in B\}\setminus(N_{t_1}\cup\dots\cup N_{t_n}))$

$=P(\{(Y_{t_1},\dots Y_{t_n})\in B\}/(N_{t_1}\cup\dots\cup N_{t_n})\})$

$=P(\{(Y_{t_1},\dots,Y_{t_n})\in B\})$ #

(2) proposition:

Supposons que X et Y soit modification l'un de l'autre et que les trajectoires de X et Y soit continues à gauche (ou continues à droit) Alors les processus X et Y ~~soit~~ sont indistinguables.

(3) dém:

$A=\{X_t=Y_t, t\in I\}=\{X_t=Y_t \; t\in I\cap\mathbb{Q}\}$

donc $A\in\mathcal{F}$, $P(A)=P(X_t=Y_t, t\in I\cap\mathbb{Q}\}$

$=1-P(X_t\neq Y_t, t\in I\cap\mathbb{Q}\}$

$\geq 1-\sum_{t\in I\cap\mathbb{Q}} P(X_t\neq Y_t)=1$

$P(X_t=Y_t, t\in I\cap\mathbb{Q})\geq\sum_{t\in I\cap\mathbb{Q}} P(X_t\neq Y_t)$

$P(A)\leq 1$

المحاضرة الثانية: 2021/10/20 الأربعاء

(5)

Définition :

Soit $(X_t)_{t\in I}$, $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ un processus stochastique dans $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ on dit que X

1) est continu (resp. continu à gauche, continue à droite) si toutes les trajectoires de X sont continues (resp. continu à gauche continues à droit

2) est continu en probabilité (ou stochastiquement continu) si $\forall t\in I$ on a :
$X_s \longrightarrow X_t$ en probabilité qd $s \to t$
i.e : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tq $P(|X_t - X_s| \geq \varepsilon) < \varepsilon$ qd $|t-s| < \delta$ $\quad \lim\limits_{s\to t} P(|X_t - X_s| > \varepsilon) = 0$

3) est càdlàg : si X est continu à droit et toutes le trajectoires sont limitées à gauche

4) est intégrable si $E|X_t| < \infty$ (fini) $\forall t \in I$

5) est de carrée intégrable si $E|X_t|^2 < \infty$, $\forall t\in I$

6) est p-fait intégrable si $E|X_t|^p < \infty$ $p \in \mathbb{N}$, $\forall t \in I$

(6)

(6)

Définition :

Soit $X = (X_t)_{t\in I}$ un processus stochastique dans $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ on dit que X

1) est stationnaire : si pour tout $h \in \mathbb{R}$, $(t+h \in I)$, les processus $(X_t)_{t\in I}$ et $(X_{t+h})_{t\in I}$ ont la même loi fini dimensionnelle

2) est faiblement stationnaire : si pour $h \in \mathbb{R}$ $(t+h\in I)$ les processus $(X_t)_{t\in I}$ et $(X_{t+h})_{t\in I}$ sont les mêmes premier et second (الثاني) moments (لحظة) (finies)
- ① $E(X_t) = \mu$
- ② $Var(X_t \cdot X_{t+h}) = \delta^2 < \infty$, $Cov(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h)$ (indépendante de t)

3) a des accroisements indépendants : si pour un ensemble fini de point $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, $n\in\mathbb{N}$, $t_i \in I$, $i = \overline{1,n}$ la v.a (accroissement)
$X_{t_2} - X_{t_1}$, $X_{t_3} - X_{t_2}$, ..., $X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$
sont indépendante. De plus si la loi de l'accroisement $X_t - X_s$ dépend (يتعلق) de $t-s$, alors on dit que X est un pro-stoch. à accroisement indépendant et stationnaire.

(7) **définition :** Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un e.p Soit $I = [0,T] \subset \mathbb{R}$ (ou $I = [0, +\infty)$) une famille

(7)

de sous-tribus (sous σ-algèbres) de $\mathcal{F}$
$(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ est une **filtration** الترشيح

si c'est une famille croissante, c'est-à-dire $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$, $\forall\, 0 \le s \le t$, $t\in I$

le quadruplet $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\in I})$ est appelé une base stochastique (un e.p filtré) فضاء احتمالي مرشح

(2) Rq :

Il faut comprendre $\mathcal{F}_t$ " comme l'information à l'instant t " plus le temps croît $(s\le t)$ plus on a d'information $(\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t)$ تتزايد

- une filtration $(G_t, t\in I)$ est dite plus grande que $(\mathcal{F}_t, t\in I)$ si $\mathcal{F}_t \subset G_t$, $\forall t\in I$

- une filtration est dit **normale** si elle vérifie les condition supplémentaires:

* les négligeables au sens large sont dans tout les $\mathcal{F}_t$, $t\in I$, $P(A)=0 \Rightarrow A\in\mathcal{F}$

- la filtration est continu à droite :

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+} = : \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$$

définition (8):

Soit $X=(X_t)_{t\in I}$, $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ un proc-stoch dans $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et soit $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ une filtration

① le processus X est dit **mesurable** si la fonction $(\omega, t) \longmapsto X(t,\omega) = X_t(\omega) : I\times\Omega \to \mathbb{R}$ est mesurable par rapport à $\mathcal{B}(I)\otimes\mathcal{F}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$?

$(I\otimes\Omega, \mathcal{B}(I)\otimes\mathcal{F})$, $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

② le processus X est **progressivement mesurable** par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ si $\forall s\in I$ la fonction ?

$$(\omega, t) \longrightarrow X_t(\omega)$$
$$\Omega\times I \longrightarrow \mathbb{R}$$

considérée comme une fonction définie de $\Omega\times[0,s]$ dans $\mathbb{R}$ est mesurable par rapport à $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}[0,s]$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

③ On dit que le processus X est dit **adapté** à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ ($\mathcal{F}_t$-adapté) si $\forall t\in I$ on a que X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable

Définition (9): A un processus stochastique X dans $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ on peut associer sa **filtration naturelle** $\sigma(X_s, s\le t, t\in I)$ qui est la plus petite filtration telle que le processus soit adapté

(9)

A un proce_stocha X on peut associe plus généralement sa filtration naturelle complée $\{F_t^*, t \in I\}$ définie par

$$F_t^X = \delta(\delta(X_s, s \leq t, t \in I), N) ?$$

N désigne les négligeables pour P

(3) **Rq:** X est adapté à la filtration F_t^X (F_t^X – adapté)

(3) **proposition:** Un processus progressivement mesurable est mesurable adapté.

"3" ح، 2021 / 11 / 01

(10) **Def**

X ... $(F_t)_{t \in I}$

e.p fil...

1) X m... $\to IR$ ... $\to X_t(\omega)$

1) X mesurable

$X : \omega \times I \longrightarrow IR$?

$(\omega, t) \longrightarrow X_t(\omega)$

mesurable $F \otimes B(I), B(IR)$.

2) X – mesurable ... $t \in I$

si $\forall s \in I$, $(\omega, t) \longrightarrow X_t(\omega)$

? $\omega \times [0, s] \longrightarrow IR$ mesurable.

$F_s \otimes B([0,s]), B(R))$

(3) X – adapté % $(F_t)_{t \in I}$ si pour $t \in I$ on a X_t, F_t mesurable

(4) **Prop:** Un processus stochastique progressif mesurable est mesurable adapté

(5) **Prop:** Un processus stochastique adapté tel que toutes les trajectoires sont continues à gauche (ou à droite) est un processus prog mesurable

(11) **Def:** Soit P_I la δ-algèbre sur $I \times \omega$ qui est engendrée par des processus stochastique cont à droite et adapté ie: la plus petite δ-algèbre que contient les sous-ensembles $A \times (s, t]$, $s, t \in I$, $s < t$, $A \in F_s\}$.

Alors

- P_I est appelée la δ-algèbre prévisible
- un processus X est dit prévisible s'il est P_I-mesurable.

(12) **Def:** Soit O_I la δ-algèbre sur $I \times \omega$ qui est engendrée par les processus stochastiques cont à gauche et adapté, on appelle.

A un proce stocha X on peut associe plus généralement sa filtration naturale complée $\{\mathcal{F}^*_t, t\in I\}$ définie par

$\mathcal{F}^*_t = \sigma(\sigma(X_s, s\leq t, t\in I), \mathcal{N})$?

$\mathcal{N}$ désigne les négligeables pour P

(3) Rq: X est adapté à la filtration $\mathcal{F}^X$

$(\mathcal{F}^X$ ...

... ment

mesura...

(10) Def

$X=(X_t)_{t\in I} : X_t : \omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $(\omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in I}, P)$

$(\omega, t) \longrightarrow X_t(\omega)$.

e.p filtré.

1) X mesurable $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}(I), \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\begin{cases} X : \omega\times I \to \mathbb{R} \\ (\omega,t) \to X_t(\omega)\end{cases}$

2) X - progre ssi f mesurable % $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$

si $\forall s\in I$, $(\omega, t) \longrightarrow X_t(\omega)$

? $\pi\times[0,s] \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable.

$\mathcal{F}_s \otimes \mathcal{B}([0,s]), \mathcal{B}(\mathbb{R})$

③ X - dapté % $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ si pour $t\in I$ on a

X_t, $\mathcal{F}_t$ mesurable

(10)

2021/11/01 الثلاثاء

المحاضرة رقم "3"

Props (4) Un processus stochastique progressif mesurable est mesurable adapté

Props (5) Un processus stochastique adapté telque toutes les trajectoires sont continues à gauche (ou à droite) est un processus prog mesurable

(11) Def Soit $\mathcal{P}_I$ la σ-algèbre sur $I\times\omega$ qui est engendrée par des processus stochastique cont à droite et adapté ie: la plus petite σ-algèbre que contient les sous-ensembles $\{A\times(s,t), s,t\in I, s<t, A\in\mathcal{F}_s\}$.

Alors

* $\mathcal{P}_I$ est appelée la σ-algèbre prévisible.
* un processus X est dit prévisible s'il est $\mathcal{P}_I$ - mesurable.

(12) Def Soit $\mathcal{O}_I$ la σ-algèbre sur $I\times\omega$ qui est engendrée par les processus stochastique cont à gauche et adapté, on appelle.

(11)

$\mathcal{O}_I$ la σ-algebre optionnelle un processus X mesurable par rapport à $\mathcal{O}_I$ est dit un processus optimal.

Modification cont et théoremes de Kolmogrov

(2)

Prop :

Soit X un processus stochastique pour le quel, il existe modification contin Alors X est cont en probabilité.

(3)

Dém

Fixons $t \in I = [0,T]$ et $\varepsilon > 0$

$A_n = \{ w \in \Omega :$ il existe $s \in [0,T]$ tq $|t-s| \leq \frac{1}{n}$ et $|\tilde{X}_t(w) - \tilde{X}_s(w)| \geq \varepsilon \}$

de la continuité de $\tilde{X}$, A_n est mesurable et donc on peut écrire A_n comme :

$A_n = \{ w \in \Omega :$ il existe $s \in [0,T] \cap \mathbb{Q}$, tq $|t-s| \leq \frac{1}{n}$ et $|\tilde{X}_t(w) - \tilde{X}_s(w)| \geq \varepsilon \}$

$\Rightarrow (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suit décroisant et telle $P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 0$

(12)

$\Rightarrow$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $P(A_{n_0}) \leq \varepsilon$ puisque $\tilde{X}$ est une modification de X

$\tilde{X}_t - \tilde{X}_s = (\tilde{X}_t - X_t) + (X_t - X_s) + (X_s - \tilde{X}_s) \Rightarrow$

$P[|\tilde{X}_t - \tilde{X}_s| \geq \varepsilon] = P[|X_t - X_s| \geq \varepsilon]$

en combinant $(*)$ et $(*)(*)$ on a :

$\forall s \leq \frac{1}{n_0}$, $\forall A \in [0,T]$, tq $|t-s| \leq \varepsilon$

$P[|X_t - X_s| \geq \varepsilon] = P[|\tilde{X}_t - \tilde{X}_s| \geq \varepsilon] \leq P(A_{n_0}) \leq \varepsilon$.

(13)

Déf

On dit qu'une fct $f, I \longrightarrow \mathbb{R}$ est cont - Holderienne d'exposant $\alpha \in]0,1]$ s'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ tq : $x, y \in I$ on a : $|f(x) - f(y)| \leq c|x-y|^\alpha$

(4)

Rq :

f cont Holderienne $\Rightarrow$ f cont ; f Holderienne d'exposant $\alpha \in]0,1] \Rightarrow$ Holderien d'exposant $\gamma < \alpha$, $\gamma \in]0,1]$

(1)

*** Théorème :** (thé de continuité de Kolmogorov)

Soit $I = [a,b]$ et soit X un processus stochastique, s'il existe des const $p, K, \varepsilon >$

(13)

tq $\forall t,s \in I$, on a : $E|X_t - X_s|^p \leq K|t-s|^{1+q}$

Alors X admet une modification qui est continu Hölderienne $\forall$ qui est continu Hölderienne $\forall \alpha \in (0, \frac{q}{p})$?

(2) Théo : (Théo de continuité de Kolmogorov)

Soit $I = \mathbb{R}_+$ et soit X un processus stochastique. Supposons que $\forall T \in I = \mathbb{R}_+$ il existe des constantes $p, k, q > 0$, tq $E|X_t - X_s|^p \leq k|t-s|^{1+q}$ pour $s,t \in [0,T]$

Alors il existe une modification cont de X تمديد ?

(3) Théo d'extension de Kolmogorov

Notation (1) :

$\Delta := \{(t_1, \ldots, t_n), n \geq 1, t_1, \ldots t_n \in I\}$ (l'ensemble des indices) la famille $(\mu_{t_1, \ldots, t_n})_{(t_1, \ldots t_n) \in \Delta}$

avec : (14) $\mu_{t_1, \ldots, t_n}(B) := P((X_{t_1}, \ldots X_{t_n}) \in B)$ définit une famille de mesures.

tq :

(14)

$(*)$ $\mu_{t_1, \ldots t_n}(B_1 \times \ldots B_n) = \mu_{\pi(t_1), \ldots, \pi(t_n)}(B_{\pi(1)} \times \ldots \times B_{\pi(n)})$

tq :

$\mu_{t_1, \ldots, t_n}(B_1 \times \ldots B_n) = \mu_{\pi(t_1), \ldots \pi(t_n)}(B_{\pi(1)} \times \ldots \times B_{\pi(n)})$

$(*)$ $\mu_{t_1, \ldots t_{n-1}, t_n}(B_1 \times B_2 \times \ldots B_{n-1} \times \mathbb{R})$

$= \mu_{t_1, \ldots, t_{n-1}}(B_1 \times \ldots B_{n-1})$?

$\forall B_1, B_{n-1}, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\forall \pi = \{1, 2, \ldots n\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots n\}$ permutation تبديل

(15) déf : une famille de mesure de proba $(\mu_{t_1 \ldots t_n})_{(t_1, \ldots t_n) \in \Delta}$ où $\mu_{t_1, \ldots t_n}$ est une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ ثابتة est appellée consistante si $(*)$ $(*)$

(16) Déf : Soit $\mathcal{B}(\mathbb{R}^I)$ la plus petit σ-algèbre que contien les cylindres. أسطوانات

$A = \{(\xi_t)_{t \in I} : (\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \xi_{t_n}) \in B\}$

$\forall (t_1, \ldots t_n) \in \Delta$ et $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

(17) proposition : Supposons qu'on a une famille de mesures de probabilité consistant $(\mu_{t_1, \ldots t_n})_{(t_1, \ldots t_n) \in \Delta}$

(15)

Alors il existe une mesure de probabilité sur $B(\mathbb{R}^I)$ tq $= \mu\left((\xi_t)_{t\in I}, \{\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}\} \in B\right) = \mu_{t_1, \dots, t_n}(B)$, $\forall (t_1, \dots, t_n) \in D$ et $B \in B(\mathbb{R}^n)$

temps d'arrêt

(17) déf = Soit $(\Omega, F, (F_t)_{t\in I}, P)$ un e.p filtré

une V.a τ avec valeur dans l'ensemble temps $I \cup \{+\infty\}$

$\tau : \Omega \longrightarrow I \cup \{+\infty\}$ est appelle un temp aléatoire on appelle τ un temps d'arrêt (F_t - temps d'arrêt) si

$\{\tau \leq t\} \in F_t$, $\forall t \in I$

Exemple (2) (premier temps d'entrée)

soit $I = \mathbb{N}$ et soit X un processus stochastique F_t adapté alors $\forall B \in B(\mathbb{R})$

la V.a $T_B = \inf\{t \in \mathbb{N} : X_t(B)\}$

τ_B est un temps d'arrêt (le premier temps d'entrée de X dans X)

DEM (4)

$\forall t \in \mathbb{N}$ on a $\{T \leq t\} = \bigcup_{s\in\mathbb{N},\, s\leq t} \{X_s \in B\}$

puisque X est F_t - adapté on a que

$\{X_s \in B\} \in F_s$ et par conséquent $\{X_s \in B\}$

comme la réunion est dénombrable $\in F_t$

le résultant s'ensuit

Lemme (1) : Soit $(F_t)_{t\in I}$ une filtration et soit T un temps d'arrêt les évènements

$\{T > t\}$, $\{T < t\}$ et $\{T = t\}$

appartiennent à F_t DEM (EXO)

Rq (5) dans le cas du temps continue on peut pas remplacer la condition $\{\tau \leq t\} \in F_t$

par $\{T < t\} \in F_t$

ou par $\{\tau \geq t\} \in F_t$

Lemme (6) : tout $I = \mathbb{R}_+$ et (F_t) une filtration continue à droite.

Un temps aléatoire τ est un temps d'arrêt si et seulement si

$\forall t \in I$, on a $\{\tau < t\} \in F_t$

Dem (EXO).

2021/11/3

المحاضرة الرابعة

الأربعاء

18

Def (Olav Kallenberg "Foundations of Modern probability" Springer 2021 3rd éd)

(8) **Lemme:** Soit $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{F}_t$ temps d'arrêt. Alors $\sup \tau_n$ est un temps d'arrêt. En plus, si $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ est continue à droit, alors $\inf \tau_n$, $\limsup \tau_n$, $\liminf \tau_n$ sont des temps d'arrêts.

Dém (EXO)

(8) **proposition:** Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\in J}$ une filtration un temps discret. Alors τ est un temps d'arrêt si et seulement si $\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$, $\forall t\in I$

Dém (EXO).

(9) **proposition:** Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ une filtration et Soient τ, ρ deux $\mathcal{F}_t$-temps d'arrêt Alors

① Si τ et ρ sont positifs alors $\tau+\rho$ est un temps d'arrêt (à cs que $\tau+\rho \in I$)

(18)

2) $\tau \wedge \rho = \min\{\tau,\rho\}$ est un temps d'arrêt

3) $\tau \vee \rho = \max\{\tau,\rho\}$ est un temps d'arrêt

(19) Dém (EXO)

Définition. Soit τ un $\mathcal{F}_t$-temps d'arrêt (fini) et X est un processus stochastique $\mathcal{F}_t$-progressivement mesurable

① Un temps aléatoire (Suple) de processus X arrêté à τ est désigné par X_τ est donné $X_{\tau(\omega)}(\omega) = X_\tau(\omega)$

2) Un processus stoppé à τ est désigné par $X^\tau = (X^\tau_t)_{t\in I}$, $X^\tau_t = X_{t\wedge\tau}$

③ la σ-algèbre du temps aléatoire τ, désigné par $\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}: A\cap\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t\in I\}$.

(6) **Rq:** En général la fonction X_τ peut ne pas être mesurable (et par conséquent n'est pas $\mathcal{F}_t$-mesurable) mais sous la condition de mesurablité progressive. C'est le cas (X_τ-mesurable)

(19)

(10)

Proposition :

Soit τ un $\mathcal{F}_t$-temps d'arrêt (fini). Alors la famille des ensemble $\mathcal{F}_\tau$ est une σ-algèbre et τ est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable. De plus, si le processus stochastique X est $\mathcal{F}_t$-progressivement mesurable alors X_τ est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable et $X_{t\wedge\tau}$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

20

Martingale :

Déf

مارتنغال، مجهول، في أو خواص

Soit X un proc-stoch $\mathcal{F}_t$-adapté et intégrable

On dit que

1. X est une martingale par rapport à $\mathcal{F}_t$ ($\mathcal{F}_t$-martingale) si $\forall s,t \in I$ tel que $s \le t$, On a :

توقفنا هنا بسبب سؤال أتيون مستمر

$$E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$$

t fixé

2. X est une Sur-martingale par à $\mathcal{F}_t$ ($\mathcal{F}_t$-Sur-martingal) si $\forall s,t \in I$ tel que $s \le t$ On a : $E(X_t | \mathcal{F}_s] \le X_s$

3. X est une Sous-martingale par rapport à $\mathcal{F}_t$ ($(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$) ($\mathcal{F}_t$-Sous-martingal) si $\forall s,t \in I$ tel que $s \le t$, On a : $E[X_t | \mathcal{F}_s] \ge X_s$

(11)

Proposition

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in I}, P)$ un espace de probabilité filtré et soit X une processus stoch. $\mathcal{F}_t$-adapté est intégrable. Alors

1. Si X est une martingale alors, $E[X_t]$
$E[X_t] = E[X_s] \quad \forall s,t \in I$

2. Si X est une Sous martingale. Alors
$$E(X_t) \ge E(X_s) \quad \forall t,s \in I, \ s \le t$$

3. Si X est un Sur martingal. Alors
$$E(X_t) \le E(X_s) \quad \forall t,s \in I, \ s \le t$$

(21) martingal = Mar

définition : Soit X une martingale. On dit que X est une Mar regulière s'il exist une variable aléatoire η telle que.

$\forall t \in I$, On a $X_t = [\eta | \mathcal{F}_t]$

$I = [0,T]$, $M_t = E[M_T | \mathcal{F}_t]$.

prop (12) : Si $I = [0,T]$, $T \in \mathbb{R}^+$ et X Mar Alors
$$X_t = E[X_T | \mathcal{F}_t]$$

(21)

(9)

Rq: Si le temps est fini, toute Mar est régulière

proposition (13)

Soit X une Mar et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors le proce $(f(X_t))$ est Mar_{sus} (à condition que $f(X_t)$ est integrable)

them (4)

Soit $I = \mathbb{R}_+$ et soit X une martingal (Sur Mar, Sous Mar) continue en proba. Alors il existe modification càdlàg de X

them (5)

Soit $I = \mathbb{R}_+$ et soit X une Mar (resp - Sur Mar, Sus Mar) càdlàg. Alors le processus stoppé X^{τ} est une Mar (resp = Sur Mar, Sus Mar)

théorème (6)

Soi $I = \mathbb{R}_+$ et soit X une Mar (respectivement Sous Mar, Sur Mar) càdlàg. Soit $\tau_1 \leq \tau_2$ deux temps d'arrêts bornés. Alors $E[X_{\tau_2} \mid \mathcal{F}_{\tau_1}] = X_{\tau_1}$ (resp $\leq, \geq$)

Décomposition Doob - Meyer.

théorème (7) : (Décomposition de Doob)

Soit $I = \mathbb{N}$ et soit X une Sous Mar (resp. Sur-martingal) Alor on a une (Unique) décomposition $X_t = M_t + A_t$, $t \geq 0$ ou $M = (M_t)_{t \in \mathbb{N}}$ est une Mar et $A = (A_t)_{t \in \mathbb{N}}$ est un processus stoch prévisible croissant (resp. décroissant) commençant de 0

Rq: (8)

Dans le cas du temps discret la notion de prévisible.

Correspond à X_t est $\mathcal{F}_{t-1}$ mesurable

Déf: une proc X et dit croissant si $t \xrightarrow[p.s]{} X_t$ et une fonction croissant

Déf (22)

Soit $X = \{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ une famille v.a indéxées par I on dit la famille X est uniformément integrable si

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0 \ \sup_{\alpha \in I} E[\mathbb{1}_{\{|X_\alpha| > M\}} |X_\alpha|] < \varepsilon$

(2)
Notations
$\forall s \in I \cup \{+\infty\}$
Soit Σ_s la famille des temps d'arrêt (% à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$) à valeur $\leq s$ i.e: $\Sigma_s = \{\tau : \tau \leq s\}$

(23)
Déf
Soit X une Sous Mar on dit que
* X est de classe (D) si la famille $\{X_\tau, \tau \in \Sigma_\infty\}$ est uniformément intégrable
* X est de classe (DL) si $\forall t \in I$ la famille $\{X_\tau, \tau \in \Sigma_t\}$

proposition
Soit X est une Mar càdlàg
Alors X est de classe (DL)

théorème (8) (thm de Doob_Meyer)
Soit X est une Sous_Mar de classe (DL) Alors on a un décomposition unique $X_t = M_t + A_t$, $\forall t \in I$
ou $(M_t)_{t\in I}$ est une Mar. et A_t est une proc_prévisible croissant commençant par 0.

(24)

المحاضرة رقم "05"
2021/11/15
الإثنين

→ Cette décomposition est utilisée pour définir la Variation quadratique de X
On sait que si X est une martingal Càdlàg de carrée intégrable alors X^2 est une Sous_Mar de classe (DL) (Ex_ intégral Jensen)
Par conséquent, on décomposer X^2 en utilisant le décomposition de Doob Meyer et la partiee prévisible, c'est la variable Variation quadratique de X
X Mar càdlàg \ 2 fois intégrabl $E(|X|^2)<\infty$
$X^2 = M_t = A_t$

2021/11/15

(24)
Déf :
Soit X une martingale càdlàg de carré intégrable la Variation quadratique de X est le processur stochastique
$\langle X, X\rangle = (\langle X, X\rangle)_{t\in I}$
$\langle X\rangle$
définit par $\langle X,X\rangle_t = X_t^2 - M_t$
ou $(M_t)_{t\in I}$ est la martingale.

(25)

du thm de Doob_Meyer.

Exemples de processus stochastique.

① Mouvement Brownien.

(24) **proposition** : Il exist un espace de proba $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et un proc_stoch $W = (W_t)_{t\geq 0}$ avec $W_0 = 0$ tel que :

① $(W_t)_{t\geq 0}$ est continu

ii) $\forall\, 0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n \leq s < t < \infty$

les v.a. $W_t - W_s$ est indépendante de $(W_{s_1}, W_{s_2}, \dots W_{s_N})$ (Accroisement indépendants)

iii) $\forall\, 0 \leq s < t < \infty$ on a : $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$ (Accroisements stationnaires)

(25) **Def** Le processus qui satisfait les propriétés de la proposition précédente est appelé mouvement Bownien standard. (processus de Wiener.)

(26)

② processus de poisson

③

③ processus de Lévy

Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$, $X_0 = 0$ est appelé processus de lévy

ⓘ X est càdlàg.

ii) $\forall\, 0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n < s < t < \infty$

la v.a $X_t - X_s$ est indépendente de $(X_{s_1}, X_{s_2}, \dots X_{s_n})$.

(Accroisement independants)

iii) $\forall\, 0 \leq s < t < \infty$ on a $X_t - X_s$ ont la même loi que X_{t-s}

(Accroisement stationnaire).

Processus gaussiens.

(26) **Def** ① Une v.a $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée variable aléatoire gaussienne, s'ils existent $m \in \mathbb{R}$

(27)

et $\delta > 0$ telles que $P(f \in B) = \int_B e^{-\frac{(x-m)^2}{2\delta^2}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{2\pi}\delta}$

$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

m : espérance

δ : Variance.

2) Un Vecteur $f = (f_1, \dots f_n) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est appelé un Vecteur gaussien si

$\forall a = (a_1, a_2, \dots a_n) \in \mathbb{R}^n$.

On a : $\langle f(\omega), a \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(\omega)$.

est gaussien.

Les paramètres

$m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ avec $\underbrace{m_i = E f_i}_{\text{espérance}}$

$\Gamma = (\delta_{ij})_{i,j=1}^{n}$ avec $\delta_{ij} = E(f_i - m_i)(f_j - m_j)$

Covariance (matrice) :

(13)

proposition

Supposons qu'on a deux Vecteur gaussiens $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ avec les mêmes paramètres (m, δ) Alors f et g sont la mêmes loi

lois (27)

Définition : un processus stocastiques

$X = (X_t)_{t \in I}$, $X_t : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

est appelé processus gaussien si $\forall n = 1, 2, \dots$ et $0 \leq t_1 \leq t_2 < \dots < t_n \in I$ on a :

$(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots X_{t_n}) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$

est un Vecteur gaussien.

$\underbrace{m_t}_{\text{espérance}} = E X_t$, $\underbrace{\Gamma(s,t)}_{\text{Covariance}} = E(X_s - m_s)(X_t - m_t)$

$\Gamma(s,t)$ est de type positif ie :

$\forall n, t_1, t_2, \dots t_n, a_1, a_2, \dots a_n$

$\sum_{i,j=1} a_i a_j \Gamma(t_i, t_j) \geq 0$.

Q : Est ce qu'un processus gaussien exist

(15)

proposition : (thm de Kolmogorov)

soit $(\Gamma(s,t))_{s,t \in I}$ Semi-défini positive

et Symétrique c'est-à-dire

$$\sum_{i,j=1}^{n} \Gamma(t_i, t_j)\, a_i a_j \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\forall t_1, \dots, t_n \in I$$

$$\forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$$

est $\Gamma(s,t) = \Gamma(t,s)$, $\forall t, s \in I$

Alors il exist un espace de probabilité (Ω, F, P) et un processus gaussien.

$X = (X_t)_{t \in I}$ défini sur (Ω, F, P)

avec : ① $EX_t = 0$

(9) ② $EX_s X_t = X(s,t)$

R_q :

si $X = (X_t)_{t \in I} \subseteq L^2$ avec $EX_t = 0$ et $\Gamma(s,t) = EX_s \cdot X_t$ Ona toujours Γ est Semi-défine positive et symétrique.

Chapitre 2 : Mouvement Brownien

Historique :

Avant d'être un objet matimatique rigoureux le mouvement Brownier à été étudié en Batarique en Finance et en physique.

1828 : le bai

1900 : L Bachelier, un vec d'étidi dia les cours de Bourse de pains dans, met en evidence le caractère markovien du mouvement Brownier.

La position d'enne particule à l'instant t+s dépend que de la position ent et ne dépend pas de la position avant t

1905 : _ A Einstein détermine la densité de transition du Mvt Brownien par l'intermédiaire de l'équation de la chaleur
_ Smoluchowski décrit le mouvement Brownien comme une limite de promenades

1923

Définition

Déf (1)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité et $B = (B_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastique le processus B est appelé Mouvement Brownien (standard) (ou processus de Wiener) si B satisfait les propriétés suivantes :

① $B(0) = B_0 = 0$ (position zéro)

② B est a des accroissements indépendants
i.e : $\forall 0 < t_1 < t_2 \cdots < t_n < \infty$ les variables aléatoires

$B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$

sont indépendants

③ B à des accroissements stationnaires
$\forall 0 \leq s < t < \infty$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$P(B_t - B_s \in A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_A e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}} dx$$

$B_t - B_s$ suit la loi normale d'espérance 0 et de variance $t-s$

$$B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s), \quad 0 \leq s < t < \infty$$

④ Les trajectoires $t \longrightarrow B_t(\omega)$ sont continues (P - P_s)

Rq: De cette définition, $B_t \sim \mathcal{N}(0,t)$

Proposition (1):

Soit $(B_t)_{t\in I}$ un mouvement Brownien.

① $(B)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien.

② $E[B_t] = 0$, $\forall t \in I$

③ $Cov(B_s, B_t) = \min(s,t) = s \wedge t$ $\quad \forall s,t \in I$

Dém

③ Rappel: pour des v.a X et Y

$Cov[X,Y] = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$

$= E[XY] - E[X]E(Y)$

Soit $s < t$: puisque $E(B_s) = E(B_t) = 0$

Alors:

$$Cov(B_s, B_t) = E(B_t . B_s) - \overbrace{E(B_s)E(B_t)}^{0}$$

$$= E(B_t . B_s) = E(B_s(B_s + B_t - B_s))$$

$$= E(B_s^2) + E(B_s(B_t - B_s)) = E(B_s^2) + E(B_s) E(B_t - B_s)$$

(B_s et $B_t - B_s$ sont indépendants)

$= s = \min(s,t)$

On peut définir le mouvement Brownien en utilisant les propriétés de la proposition précédente.

Proposition (2):

Soit $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique tel que toutes les trajectoires sont continues et que $B_0 = 0$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) B est un mouvement Brownien

ii) Le processus B est un processus gaussien avec espérance $m(t) = 0$ et fonction de covariance $\Gamma(s,t) = \min(s,t)$

المحاضرة رقم " 6 " 2021/11/16

الثلاثاء

(1) **Theoreme:**

Soit $I = \mathbb{R}_+$ et soit $(\omega, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}^I, \mathcal{B}(\mathbb{R}^I))$ Alors il existe une mesure de proba P définie sur $(\omega, \mathcal{F}_e)$ et un processus stochastique B tq que B et un mouvement Brownien.

(3) **Proposition:** (transfonction du Brownien)

Soit B un Mvt Brownien Alors les transformation suivantes present le mouvement Brownien

1) homogeniets : $\forall s \geq 0$ le proc $\tilde{B}^{(s)}_s = B_{t+s} - B_s$ un mouvement Br

2) scaling : ie $\forall c > 0$ le proc $\hat{B}_t = c B_{t/c^2}$ est un MVB

3) Inversion de temps : le proc $\hat{B}_0 = 0$, $\hat{B}_t = t B_{1/t}$ $(t > 0)$ est un MVB.

4) Inversion des trajectoir : le proc $\tilde{B}_t = -B_t$ est un MVB . Dem (TD).

(2) **Def** Soit $(\omega, F, P, (F_t)_{t \geq 0})$ un e.p. filtré : un proce. stoch adapté $B = (B_t)_{t \geq 0}$ $B_t : \omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelé $(F_t)_{t \in I}$ MVB

1) $B_0 = 0$ 2) Accroissement indépendant

3) Accroisement stationnaire $B_t - B_s \rightsquigarrow N(0, t-s)$

4) les trajectoir Continue

(36)

(4) **proposition:** Soit $B = (B_t)_{t \geq 0}$ un MVB standard (Selon les 1ere défin) et soit $(F^B_t)_{t \geq 0}$ sa filtration naturelle $F^B_t = \delta(B_s, s \in [0, t])$ Alors $(B_t)_{t \geq 0}$ est un $(F^B_t)_{t \geq 0}$ - MVB

(5) **proposition** soit $B = (B_t)_{t \geq 0}$ un MVB Alors

1) B est Cont_Holderien d'exposant $\alpha < \frac{1}{2}$

2) B n'est pas cont_Holderien avec exposant $\alpha = \frac{1}{2}$ dans tout intervalle de temps borné

3) presque tout les trajectoires de B sont nulle part différentiable.

4) B admet un variation totale (1er variation) dans tout sur intervalle ($[0, T]$, $T > 0$) infini

(6) **proposition** soit B un MVB Alors.

1) le proc $(B_t)_{t \geq 0}$ est un MG : مارتينغال (par rapport à la filtration engendrée par B $((F^B_t)_{t \geq 0})$)

2) le proc $(B_t^2 - t)$ est une MG (par rapport à la filtration engendrée par $B = (F^B_t)_{t \geq 0}$

3) Soit $(F_t)_{t \geq 0}$ un filtration et soit Z un proc stoch tq : $* Z_0 = 0$

(37)

* Z est carré intégrable et cont
* Z est $(\mathcal{F}_t)_{t\geq}$ - MG
* $(Z_t^2 - t)$ et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ - MG

Alors Z est un MVB

Variation du mouvement B_r

Rappels :

Variation d'une fct considérons l'intervalle $[a,b]$ parti borné en N intervalle de longueur égals $\Delta_t = \frac{b-a}{N}$ avec les extrémités : $t_k = k\Delta t$, $K = 0, 1, 2 \ldots N$

1| première variation

1er variation de la fct g est donnée par.

$$[g]([a,b]) = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} |g(t_{k+1}) - g(t_k)|$$

2| 2e variation (variation quadratique)

La variation quadratique de la fct g est donnée par $[g,g]([a,b]) =$

$$= \lim_{\Delta_t \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} (g(t_{k+1}) - g(t_k))^2$$

The (2)

La variation quadratique d'un MVB sur l'intervalle $[0,T]$, $T>0$ est donnée par $[B,B](T) = [B,B]([0,T]) = T$

(2)

DEM

Soit l'intervalle $[0,T]$ parti borné en n intervalle de longueur égal $\Delta_t = \frac{T-0}{N}$ avec $t_k = k\Delta t$, $K = 0, 1, \ldots N$

Soit $B_n = \sum_{k=0}^{n-1} [B(t_{k+1}) - B(t_k)]^2$

L'espérance et la variance

* $E(B_n) = E\left(\sum_{k=0}^{n-1} (B(t_{k+1}) - B(t_k))^2\right)$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} E(B(t_{k+1}) - B(t_k))^2$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} Var(B(t_{k+1}) - B(t_k))$$

[Car $(E(B(t_{k+1}) - B(t_k)) = 0$]

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) = n\Delta t = T$$

* $Var(B_n) = Var\left(\sum_{k=0}^{n-1} [B(t_{k+1}) - B(t_k)]^2\right)$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} Cov\left((B(t_{k+1}) - B(t_k))^2 ; (B(t_{k+1}) - B(t_k))^2\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left(3(t_{k+1} - t_k)^2 - (t_{k+1} - t_k)^2\right)$$

(Rappl si $X \sim N(0,t)$.

$= E X^4 = 3t^2 = 2\sum_{i=0}^{n-2} (\Delta t)^2 \longrightarrow 0$ qd $\Delta t \to 0$

Rappel : Conv en moyenne quadratique

une suite de V.a $\{X_n\}$ CV en moyenne quadratique vers une V.a X ssi

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n - X^2) = 0 \quad (X_n \xrightarrow{L^2} X)$$

Comme cas particulier

• Si $\lim_{n\to\infty} Var(X_n) = \lim_{n\to+\infty} E(X_n - \mu)^2 = 0$

alors $X_n \xrightarrow{L^2} \mu$ Alors $\lim_{\Delta t\to 0} Var(B_n) = E(B_n - E(B_n))^2 = 0$

ie $\sum_{k=0}^{n-1} (B(t_{k+1}) - B(t_k))^2 = B_n \xrightarrow[\Delta t \to 0]{L^2} E(B_n)$

Si $[B,B](T) = \lim_{\Delta t\to 0} \left[\sum_{k=0}^{n-1} (B(t_{k+1}) - B(t_k))\right]^2 = T$

thé (3)

Le MVB admet une premiere Variable (totale) infini

DEM (3)

Soit $B_n = \sum_{k=0}^{n-1} (B(t_{k+1}) - B(t_k))^2$

$\Rightarrow B_n = \sum_{k=0}^{n-1} |B(t_{k+1}) - B(t_k)|\,|B(t_{k+1}) - B(t_k)|$

$\leq \underbrace{\max_{0\leq k\leq n-1} |B(t_{k+1}) - B(t_k)|}_{b} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} |B(t_{k+1}) - B(t_k)|$

(40)

$b = \max_{0\leq k \leq n-1} |B(t_{k+1}) - B(t_k)|$

$\leq b \sum_{k=0}^{n-1} |B(t_{k+1}) - B(t_k)| \Leftrightarrow$

$\frac{1}{b} \sum_{k=0}^{n-1} |B(t_{k+1}) - B(t_k)|^2 \leq \sum_{k=0}^{n-1} |B(t_{k+1}) - B(t_k)|$

On alors $\Delta t \to 0 \Rightarrow$

$b = \max_{0\leq k \leq n-1} |B(t_{k+1}) - B(t_k)| \longrightarrow 0$

donc qd $\Delta t \to 0$

$[B,B](T) = \sum_{k=0}^{n-1} (B(t_{k+1}) - B(t_k))^2 \longrightarrow T < +\infty$

$[B](T) = \sum_{k=0}^{n-1} |B(t_{k+1}) - B(t_k)| \longrightarrow +\infty$

Non derivabulite du MVB.

thé (4)

Le MVB est nulle part derivable.

(41)

(4)

DEM

Considérant un variable de temps de longure $\Delta t = \frac{1}{n}$ Commencant par t, $[t, \Delta t + t] = [t, t + \frac{1}{n}]$

Soit $X_n = \frac{\Delta B(t)}{\Delta t} = \frac{B(t+\Delta t) - B(t)}{\Delta t}$

$= \frac{B(t+\frac{1}{n}) - B(t)}{\Delta 1/n}$

$= \cancel{B(t+\Delta t} = n[B(t+\frac{1}{n}) - B(t)]$

X_n va gaussiene, avec paramètres :

* $E(X_n) = n E(B(t+\frac{1}{n}) - B(t)) = 0$

et * $Var(X_n) = n^2 Var(B(t+\frac{1}{n}) - B(t))$

$= n^2 \cdot \frac{1}{n} = n$.

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x = 0} = C(+\infty)$

la dérivé de $f(x)$

$f'(x_0) = \frac{d f(x)}{dx} = 0$

Par Conséquent $X_n \sim N(0, n)$

Soit $Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} X_n \sim N(0, 1)$

Prenons $K > 0$, Alors

$P(|X_n| > k) = P(|\frac{1}{\sqrt{n}} X_n| > \frac{k}{\sqrt{n}})$

$= P(|Z_n| > \frac{k}{\sqrt{n}})$ qd $n \to \infty$

$\Rightarrow \frac{k}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$.

donc $P(|X_n| > k)$

$= P\left(|Z_n| > \frac{k}{\sqrt{n}}\right)$

$\longrightarrow (P(|Z_n| > 0)) = 0$

$\Rightarrow P(|X_n| > k) \longrightarrow 1$

ie $|X_n| \longrightarrow +\infty$

$n \longrightarrow +\infty$

avec probabilite $= 1$

g defirentiable $dg = g' dx$

المحاضرة رقم 7 | 2021/11/17 الأربعاء

processus de Markov

Définition (3) : Soit $I = \mathbb{R}_+$ et soit $X = (X_t)_{t \in I}$ un processus stochastique ; $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ adapté : on dit que X a la propriété de Markov si :
$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $s, t \in I$ tq $t > s$
on a
$$P[X_t \in A \mid \mathcal{F}_s] = P[X_t \in A \mid X_s]$$

Définition (4) : Soit $I = \mathbb{R}_+$ et soit $X = (X_t)$ un processus stochastique on dit que X $t \in I$ est un processus de Markov s'il satisfait la propriété de Markov par rapport à sa filtration naturelle.

Définition (5) : Soient $t, s \in I$ tel que $t > s$
Un noyau de probabilité (de s à t) est l'application
$$P_{s,t} : \mathbb{R} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$
noyau
telle que :

(w)

(*) $\forall x \in \mathbb{R}$, l'application $A \longrightarrow P_{s,t}(x, A)$ est une mesure

(*) $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, l'application $x \longrightarrow P_{s,t}(x, A)$ est une mesure.

(*) $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, l'application $x \longrightarrow P_{s,t}(x, A)$ est mesurable.

(*) $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_{s,t}(x, \mathbb{R}) = 1$

pour $t \in I$ on définit le noyau $P_{t,t}$ par
$P_{t,t}(x, A) = \delta_x(A)$ Dirac

On va considérer le cas homogène ie : le noyau $P_{t,s}$ ne devait dépendre que pour le temps que par l'accroissement $(t-s)$ en d'autre termes :
$\forall t > 0$ et $h > 0$
on a : $P_{0,t} = P_{h,\, t+h}$.

Dans ce cas, on considère la famille des accroissements des noyaux $(P_t)_{t \in I}$ donnée par $P_t = P_{0,t}$ (noyau de transition.

Notation.

Soit $B(\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{C}(\mathbb{R})$) l'es des f^cts mesurable et bormé $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soit P_t le noyau de transition et $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ on définit l'intégral associée

$$P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\, P_t(x, dy)$$

(puisque $P_t(x, .)$ d'une mesure)

si on a : P_t, P_s deux noyaux

$\forall f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, on écrit

$$P_t P_s f(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(\xi)\, P_s(y, d\xi)\, P_t(x, dy)$$

On note $P_t P_s$ le noyau de probabilité ussie,

Noton que $P_t f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ (mesurable et bormée)

(6) Définition :

Une fonction de transition homogène P sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est une collection (famille) de noyaux de probabilité $(P)_{t \in I}$ telle que.

$\forall t, s \in I$, on a :

$$P_t P_s = P_{t+s} \quad (*)$$

$(*)$ est appelée l'équation de chapmon-Kolmogrv

(7) Définition : Soit X un processus stochastique $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ - adapté on dit que X est Markovien avec fonction de tramition P si pour tout $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ et $t, s \in I$ tel que $t > s$, on a :

$$E[f(X_t) | \mathcal{F}_s] = P_{t-s} f(X_s)$$

éq de chapmen-Kolmogrov.

$t, s, u \in I$ on a :

$$P_{t+s} f(X_u) = E[f(X_{t+s+u}) | \mathcal{F}_u]$$

$$= E[E[f(X_{t+s+u}) | \mathcal{F}_{t+u}] | \mathcal{F}_u]$$

$$= E[P_s f(X_{t+u}) | \mathcal{F}_u].$$

$$= P_t P_s f(X_u).$$

(1) Rq : On peut montrer que le movement Browrien est un processus markovien

si X est un processus de Lévy on peut définir sa fonction de transition P en posant

$P_t(x, A) = P[X_{t+s} \in A \mid X_s = x]$

$\forall t \in I$ $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $(s > 0)$

(Puisque X admet des accroissements (?) stationnaire)

Proposition : ... ...

Soit X un Markovien avec fonction de transition P alors.

X est un processus de Markov

Dém

soit $t, s \in I$ tq $t > s$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction indicatrice de A

$$f(x) = \mathbb{1}_{\{A\}}(x).$$

alors f est mesurable bornée / $f \in C(\mathbb{R})$

On a:

$$P[X_t \in A \mid \mathcal{F}_s] = E[\mathbb{1}_{\{X_t \in A\}} \mid \mathcal{F}_s]$$

$$= E[f(X_t) \mid \mathcal{F}_s] = P_{t-s} f(X_s) = P_{t-s}(X_s, A)$$

De même.

$$P[X_t \in A \mid X_s] = E[E[\mathbb{1}_{\{X_t \in A\}} \mid \mathcal{F}_s] \mid X_s]$$

راجع هنا.

$$E[P_{t-s}(X_s, A) \mid X_s] = P_{t-s}(X_s, A)$$

انتهى

Chapitre 3 : Intégrale stochastique.

$\left(\int_0^t X_s \, dP_s\right)(\omega)$, X processus.

Intégrale de Riemann-Stieltjes.

Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonction.

On veut définir l'intégral

$$\int_0^t f(s) \, dg(s).$$

Si $I^{(n)}$ est une suite de partitions de l'intervalle $[0, t]$ i.e : une suite de pts $0 = U_0^n < U_1^n < \cdots < U_n^n = t$ tq :

$$\lim_{n \to \infty} \max_{k = 1, \dots, n} (U_{k+1}^n - U_k^n) = 0$$

et soit $\xi_k^n \in [U_k^n, U_{k+1}^n[$

On définit :

$$\sum_{I^{(n)}} f \, dg = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k^n)\left(g(U_{k+1}^n) - g(U_k^n)\right)$$