Serie N°2

Exercice N°1 :

n- éch de $X \sim \gamma(a,b)$, $a>0$, $b>0$

$$f_X(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx} \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}$$

$$E(X) = \frac{a}{b} \qquad V(X) = \frac{a}{b^2}$$

1]- l'estimation de paramètre a et b par la méthode des moments :

$$\begin{cases} E(X) = \overline{X} \\ V(X) = S^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = \overline{X} \\ \frac{a}{b^2} = S^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{a} = b\overline{x} \\ \hat{a} = S^2 b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b\overline{x} = b^2 S^2 \\ \hat{a} = b\overline{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{a} = b\overline{x} \\ \hat{b} = \frac{\overline{x}}{S^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{a} = \frac{\overline{x}^2}{S^2}} \text{ et } \boxed{\hat{b} = \frac{\overline{x}}{S^2}}$$

2] les équations du maximum de vraisemblance :

$$\cdot\ L(\underset{\sim}{x}, a, b) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)$$

$$= \left(\frac{b^a}{\Gamma(a)}\right)^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{a-1} \; e^{-b\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\cdot\ \log L(\underset{\sim}{x}, a, b) = na\log b - n\log\Gamma(a) + (a-1)\sum_{i=1}^{n}\log x_i - b\sum_{i=1}^{n} x_i$$

les équations sont les suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\delta \log L(\underset{\sim}{x}, a, b)}{\delta a} = 0 \quad \dots \quad (1) \\ \frac{\delta \log L(\underset{\sim}{x}, a, b)}{\delta b} = 0 \quad \dots \quad (2) \end{cases}$$

où $\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x}\, dx$

• on peut pas résoudre les équations (1) et (2) explicitement

car

$$\frac{\delta \log L(\underset{\sim}{x}, a, b)}{\delta a} = 0 \quad \dots (1)$$

$$\Rightarrow n\log b - n\frac{\delta \log\Gamma(a)}{\delta a} + \sum \log x_i = 0$$

on remarque que $\frac{\delta \log \Gamma(a)}{a}$

$$= \frac{\frac{\delta \Gamma(a)}{\delta a}}{\Gamma(a)} = \frac{\frac{\delta \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx}{\delta a}}{\Gamma(a)}$$

cette integral pas

Exercice N°2

$$f_X(x) = \frac{x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{2\theta}} \mathbb{1}_{\{x>0\}}, \quad \theta > 0$$

l'estimation de θ par la méthode des moments

moment d'ordre 1 :

$$E(X) = \overline{X}$$

où

$$E(X)=\int_0^{\infty} x f_X(x)\,dx$$

$$=\int_0^{\infty} x\,\frac{x}{\theta}\,e^{-\frac{x^2}{2\theta}}\,dx$$

$$=\frac{1}{\theta}\int_0^{\infty} x^2\,e^{-\frac{x^2}{2\theta}}\,dx \quad \cdots (*)$$

changement de variable

$$y=\frac{x^2}{2\theta} \Rightarrow x^2=2\theta y \Rightarrow x\sqrt{2\theta y}$$

$$\text{et } dx=\sqrt{2\theta}\,\frac{dy}{2\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{\theta}\,dy}{\sqrt{2}\sqrt{y}}$$

$$(*)=\frac{1}{\theta}\int_0^{\infty} 2\theta y\,e^{-y}\,\frac{\sqrt{\theta}\,dy}{\sqrt{2}\sqrt{y}}$$

$$=\frac{2\theta\sqrt{\theta}}{\theta\sqrt{2}}\int_0^{\infty}\frac{y}{\sqrt{y}}\,e^{-y}\,dy$$

$$=\sqrt{2\theta}\,\underbrace{\int_0^{\infty} y^{\frac{1}{2}}\,e^{-y}\,dy}_{\Gamma(a)} \qquad \begin{array}{l} a-1=\frac{1}{2} \\ \Rightarrow a=\frac{3}{2}\end{array}$$

$$=\sqrt{2\theta}\;\Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right) \text{ où } \Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right)=\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+1\right)$$

$$=\frac{1}{2}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\Rightarrow =\frac{\sqrt{2\theta}}{2}\sqrt{\pi}=\boxed{\sqrt{\frac{\pi\theta}{2}}}$$

On a : $E(X)=\overline{X} \Rightarrow \sqrt{\frac{\pi\theta}{2}}=\overline{X}$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\theta}=\frac{2\overline{x}^2}{\pi}}$$

moment d'ordre 2

$$E(X^2)=\frac{1}{n}\sum X_i^2$$

où $E(X^2)=\int_0^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx$

$$=\int_0^{\infty}\frac{x^3}{\theta}\,e^{-\frac{x^2}{2\theta}}\,dx \quad \cdots (*)$$

toujours par le même changement de variable $y=\frac{x^2}{2\theta}$

on trouve $(*)=\frac{1}{\theta}\int_0^{\infty}\sqrt{2\theta y}\,2\theta y\,e^{-y}\,\frac{\sqrt{2\theta}\,dy}{2\sqrt{y}}$

$$=2\theta\,\Gamma(2)=2\theta\,1\,\underbrace{\Gamma(1)}_{=1}$$

$$=2\theta$$

$$\Rightarrow E(X^2)=2\theta$$

d'où : $2\theta=\frac{1}{n}\sum x_i^2$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\theta}=\frac{1}{2n}\sum x_i^2}$$

Exercice N°3 :

Un n-éch de $X \sim N(m,1)$, $m\in\mathbb{R}$

1) B.C.R

la B.C.R pour un E.S.B de $g(m)$: $B.C.R=\frac{[g'(m)]^2}{I_n(m)}$

où $g(m)$ est une fonction

de paramètre m

et

$$I_n(m)=E\left(\left[\frac{\delta \log L(x,m)}{\delta m}\right]^2\right)$$

= la quantité d'information au sens de fisher pour le paramètre m

On a: $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-m)^2}{2}}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}}(x)$

$\mathcal{X}=\mathbb{R}$ ⫫ m.

$\Rightarrow I_n(m)=nI(m)$

où $I(m)=-E\left(\frac{\delta^2 \log f(x,m)}{\delta m^2}\right)$

• $\log f(x,m)=-\log\sqrt{2\pi}-\frac{(x-m)^2}{2}$

• $\frac{\delta \log f(x,m)}{\delta m}=x-m$

• $\frac{\delta^2 \log f(x,m)}{\delta m^2}=-1$

$I(m)=-E(-1)=\boxed{1}$

$\Rightarrow \boxed{I_n(m)=nI(m)=n}$

i) $g(m)=m \Rightarrow g'(m)=1$ $\boxed{g(m)'=\frac{\delta g(m)}{\delta m}}$

$B.C.R=\frac{(g'(m))^2}{I_n(m)}=\boxed{\frac{1}{n}}$

ii) $g(m)=m^2 \Rightarrow g'(m)=2m$

$B.C.R=\frac{(2m)^2}{I_n(m)}=\boxed{\frac{4m^2}{n}}$

2] e.m.v pour $g(m)=\widehat{g(m)}$

on sait que $\widehat{g(m)}=g(\hat{m})$

ou $\hat{m}$ est e.m.v pour m.

e.m.v pour le paramètre m:

$L(x,m)=\prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{\sum(x_i-m)^2}{2}}$

$\log L(x,m)=-n\log\sqrt{2\pi}-\frac{\sum(x_i-m)^2}{2}$

$\frac{\delta \log L(x,m)}{\delta m}=0$

$\Rightarrow \sum(x_i-m)=0$

$\Rightarrow \boxed{\hat{m}=\bar{x}}$

$\frac{\delta^2 \log L(x,m)}{\delta m^2}=-n<0$

$\Rightarrow$ $\bar{x}$ est l'e.m.v pour m

i) $g(m)=m$

$\widehat{g(m)}=g(\hat{m})=\hat{m}=\bar{x}$

ii) $g(m)=m^2$

$\widehat{g(m)}=g(\hat{m})=g(\bar{x})=\bar{x}^2$

3] E.S.B pour.

i) $g(m)=m$.

on a trouvé que $\bar{x}$ est un estimateur pour m donc il reste de vérifier si $\bar{x}$ est un estimateur sans biais pour m

$E(\overline{X}) \overset{??}{=} m$

$$E(\overline{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum X_i\right) = \frac{1}{n}\sum E(X_i)$$

les X_i sont de même loi $N(m,1)$ $\forall i = \overline{1,n}$

$\Rightarrow E(X_i) = E(X) = m$ $\forall i = \overline{1,n}$

$$\Rightarrow E(\overline{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m$$

$$\boxed{E(\overline{X}) = m}$$

$\Rightarrow \overline{X}$ est un E.S.B pour m.

ii) $g(m) = m^2$

on a trouvé $\overline{x}^2$ est un estimateur pour m^2

donc il suffit juste de déterminer un E.S.B pour m^2

$E(\overline{X}^2) \overset{?!}{=} m^2$

$$E(\overline{X}^2) = (E(\overline{X}))^2 + V(\overline{X})$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\cdot E(\overline{X}) = E(X) \text{ et } V(\overline{X}) = \frac{V(X)}{n} \\ &\cdot V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \\ &\Rightarrow E(X^2) = V(X) + (E(X))^2 \end{aligned}}$$

$$\hookrightarrow E(\overline{X}^2) = (E(X))^2 + \frac{V(X)}{n}$$

$$= m^2 + \frac{1}{n}$$

$$\boxed{X \sim N(\underset{E(X)}{m}, \underset{V(X)}{1})}$$

On a $E(\overline{X}^2) = m^2 + \frac{1}{n} \neq m^2$

$\Rightarrow \overline{X}^2$ est un estimateur biaisé pour m^2

mais $\boxed{\overline{X}^2 - \frac{1}{n}}$ est un E.S.B pour m^2

4) E.S.B.V.U.M :

un E.S.B.V.U.M pour $g(m)$ est $T' = E(T \mid S)$

où T est un E.S.B pour $g(m)$ et S est une stat exh et complète pour m

On cherche une stat exh et complète pour m

On a $\mathcal{X} = \mathbb{R} \perp\!\!\!\perp m$.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{m^2}{2}} e^{xm}$$

$$= \underbrace{\frac{e^{-\frac{m^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}}_{C(m)} \exp\{\underset{a(x)}{x}\ \underset{d(m)}{m}\} \underbrace{e^{-\frac{x^2}{2}}}_{h(x)}$$

$X \in \mathcal{F}(\mathcal{E}_1)$

et $\boxed{S = \sum a(x_i) = \sum x_i}$ est une stat exh et en plus complète pour m

complète car dim stat = dim de paramètre = 1

$g(m) = m$

- $T = \bar{x}$ est un E.S.B pour $g(m) = m$
- $S = \sum x_i$ est une stat exh et complète pour m

$\Rightarrow T' = E(T \mid S) = E\left(\frac{1}{n}\sum X_i \mid \sum X_i\right)$

$\Rightarrow \boxed{T' = \frac{1}{n}\sum X_i = \bar{x}}$

$\Rightarrow \bar{x}$ est l'unique E.S.B.V.U.M pour $g(m) = m$

Remarque

$$\boxed{E\left(f(S) / S\right) = f(S)}$$

ii) $g(m) = m^2$

- $T = \bar{x}^2 - \frac{1}{n}$ est un E.S.B pour $g(m) = m^2$
- $S = \sum x_i$ est une stat exh et complète pour m

$\Rightarrow T' = E(T \mid S) = E\left(\bar{X}^2 - \frac{1}{n} / \sum X_i\right)$

$\Rightarrow T' = \bar{X}^2 - \frac{1}{n}$ est l'unique E.S.B.V.U.M pour m^2

$E\left(\bar{X}^2 - \frac{1}{n} \mid \sum X_i\right) = E\left(\underbrace{\frac{1}{n}\sum X_i - \frac{1}{n}} \mid \sum X_i\right)$

$= E(f(S) \mid S) = f(S)$

Exercice N°4

un n-éch de X où

$f_X(x) = \theta x^{\theta-1} \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$, $\theta > 0$

1) e.m.v pour $g(\theta) = \frac{\theta}{\theta+1}$

$\widehat{g(\theta)} = g(\hat{\theta})$ où $\hat{\theta}$ est un e.m.v pour θ

- $L(\underset{\sim}{x}, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) = \theta^n \prod x_i^{\theta-1}$
- $\log L(\underset{\sim}{x}, \theta) = n\log\theta + (\theta-1)\sum \log x_i$
- $\frac{\delta \log L(x,\theta)}{\delta\theta} = 0$

$\Rightarrow \frac{n}{\theta} + \sum \log x_i = 0$

$\Rightarrow \boxed{\hat{\theta} = -\frac{n}{\sum \log x_i}}$

- $\frac{\delta^2 \log L(\underset{\sim}{x}, \theta)}{\delta\theta^2} = -\frac{n}{\theta^2} < 0$

D'où $\hat{\theta} = \frac{-n}{\sum \log x_i}$ est un e.m.v pour θ

$\widehat{g(\theta)} = g(\hat{\theta}) = g\left(\frac{-n}{\sum \log x_i}\right)$

$= \frac{\frac{-n}{\sum \log x_i}}{\frac{-n}{\sum \log x_i} + 1}$