$\mathcal{F}$aculté $\mathcal{D}$es $\mathcal{S}$ciences

$\mathcal{D}$épartement $\mathcal{D}$e $\mathcal{M}$athématiques

$\mathcal{P}$remière $\mathcal{A}$nnée $\mathcal{M}$aster

$\mathcal{M}$odule : $\mathcal{S}$imulation

Série de TD N°1

Exercice 1

La loi de Pareto de paramètre (α, β), $(\alpha > 0,\ \beta > 0)$ est la loi dont la densité est:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta+1} & \text{si } x \geq \alpha \\ 0, & \text{si } x < \alpha \end{cases}$$

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Pareto de paramètres $(\alpha,\ \beta)$, $(\alpha > 0,\ \beta > 0)$. Ecrire un algorithme générant X.

Exercice 2

Ecrire une fonction qui délivre une valeur aléatoire associée à la variable aléatoire X régie par la loi de Weibull de densité :

$$f(x) = \frac{\beta}{\theta-\gamma}\left(\frac{x-\gamma}{\theta-\gamma}\right)^{\beta-1} \exp\left(-\left(\frac{x-\gamma}{\theta-\gamma}\right)^{\beta}\right) \quad \text{avec } x \geq \gamma > \theta$$

Exercice 3

On désire générer un échantillon de n réalisations d'une variable aléatoire X qui suit une distribution Géométrique ayant les caractéristiques suivantes:
- Le paramètre $p =$ probabilité d'avoir un succés, avec $0 < p < 1$;
- Une distribution de probabilité $P[X = x] = p(1-p)^{x-1}$ avec $x \in \{1, 2, \ldots, \infty\}$.

1. Déterminer la fonction de répartition $F(x) = P[X \leq x]$ de X?

2. Utiliser la méthode de l'inverse de la fonction de répartition pour établir un algorithme qui génére une suite de n réalisations de la variable aléatoire X?

3. La distribution Géométrique est une distribution équivalente à la loi Exponentielle. Etablir un algorithme qui génére une suite de n réalisations de la variable aléatoire X?

4. Si $(U_k)_{k>1}$ est une suite indépendantes de nombres aléatoires uniformément distribués sur $[0, 1]$ alors la variable aléatoire $X = min\{k \in \mathbb{N}^* \,/\, u_k \leq p\}$ suit une distribution Géométrique de paramètre p. Etablir un algorithme qui génére une suite de n réalisations de la variable aléatoire X?

5. Dérouler les trois algorithmes établis pour $N = 5$, $p = 0.20$ et $\lambda = 1.60$?

Exercice 4

Soient U, V, W trois variables aléatoires indépendantes. On suppose que U suit une loi uniforme sur $[0, 1]$, V la loi de Pareto de densité

$$f(v) = \frac{1}{v^2}\mathbb{1}_{\{v\geq 1\}}, \quad (v \in \mathbb{R})$$

et W la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. On suppose que $Z = WU + (1 - W)V$. générer un n échantillon de la variable Z.

Exercice 5

Ecrire un programme qui permet de générer uniformément des points de coordonnées (x, y) dans le disque défini par $D = \{(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq R^2\}$.

Exercice 6

Soit la variable aléatoire X de densité de probabilité f suivante:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq f(x) \leq \frac{2}{\pi}$?
2. Etablir un algorithme qui génére n réalisations de la variable aléatoire X, ensuite, dérouler cet algorithme établi pour $n = 5$?
3. Estimer la valeur $\widehat{\theta}$ de $E[X]$?

Exercice 7

Soit la variable aléatoire X de densité de probabilité f suivante:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} \times \frac{e^{-x}}{2-e^{-x}} & \text{si } x \geq 0; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $f(x) \leq \frac{3}{2}e^{-x}$?
2. Etablir un algorithme qui génère n réalisations de la variable aléatoire X, ensuite, dérouler cet algorithme établi pour $n = 3$?

Exercice 8

On sait générer une variable pseudo-aléatoire uniforme entre 0 et 1. On désire générer une variable aléatoire X dont la fonction de distribution de probabilté est la suivante:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ (1+x)/2 & -1 \leq x < 0 \\ (3-x)/6 & 0 \leq x < 3 \\ 0 & 3 \leq x \end{cases}$$

1. Ecrire un algorithme générant X en utilisant la méthode de rejet.
2. Ecrire un algorithme générant X en utilisant la méthode de la fonction inverse.

Exercice 9

1. Montrer que, si U suit la loi uniforme sur [0,1], alors $1 + E\left(\frac{lnU}{ln(1-p)}\right)$ suit la loi géométrique de paramètre p. Ecrire un algorithme qui génère n variables aléatoires de loi géométrique en utilisant cette proposition.

2. Si $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ sont des variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de paramètre p. alors $N = \min\{i : X_i = 1\}$ suit une loi géométrique de paramètre p. En utilisant cette proposition générer n variables aléatoires de loi géométrique.

Exercice supplémentaire 1

Un dé est truqué de telle manière que les nombres pairs ont double chance d'apparaître que les nombres impairs. Ecrire un programme de simulation qui permet de recréer l'expérience aléatoire qui consiste à jetter ce dé.

Exercice supplémentaire 2

Ecrire des fonctions pour simuler un n-échantillon :

- La loi des **séries logarithmiques** a une fonction de probabilité égale à
$$P(X = x) = \frac{-(1-p)^x}{x \log p}, \qquad x = 1, 2, \dots, \quad 0 < p < 1.$$
- **Loi de Cauchy**. Cette loi admet pour densité sur $\mathbb{R}$
$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}.$$
- **Loi de Laplace**, de densité sur $\mathbb{R}$ donnée par $x \mapsto e^{-|x|}/2$.

Exercice supplémentaire 3

Soit la loi de probabilité sur $[0, +\infty[$ définie par la fonction de densité f.
$$f(x) = \frac{1}{2}\frac{e^{-x}}{(1-\frac{e^{-x}}{2})}1_{\{x\geq 0\}}(x)$$
Montrer que pour tout $x \geq 0$, $f(x) \leq 2e^{-x}$. En déduire une méthode de simulation de f.

Exercice supplémentaire 4

Soit $f(x) = \exp(-x^2/2)$ et $g(x) = 1/(1 + x^2)$, les densités des distributions normale et Cauchy, respectivement (en ignorant les constantes de normalisation).
(a) Montrer que le rapport
$$\frac{f(x)}{g(x)} = (1+x^2)e^{-x^2/2} \leq 2/\sqrt{e},$$
qui est atteint à $x = \pm 1$.
(b) Montrer que pour les densités normalisées, la borne sur f/g est $\sqrt{2\pi/e}$.
(c) Remplaçons g par la densité de Cauchy de paramètre d'échelle σ,
$$g_\sigma(x) = 1/\{\pi\sigma(1 + x^2/\sigma^2)\},$$
Montre que la borne sur f/g_σ est $2\sigma^{-1}\exp\{\sigma^2/2 - 1\}$, et est minimisée lorsque $\sigma^2 = 1$. (Cela montre que g_1 est le meilleur choix parmi les distributions de cauchy pour simuler une distribution $\mathcal{N}(0, 1)$).

Exercice supplémentaire 5

Considérons la variable aléatoire triangulaire X de fonction densité

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2a \text{ ou } x \geq 2b \\ \frac{(x-2a)}{(b-a)^2} & \text{si } 2a \leq x < a+b \\ \frac{(2b-x)}{(b-a)^2} & \text{si } a+b \leq x < 2b \end{cases}$$

(a) Calculer la fonction de répartition de X.
(b) Montrer que l'application de la méthode de transformation inverse *(indication. utilisez la deuxième variante)* donne

$$X = \begin{cases} 2a + (b-a)\sqrt{2U} & \text{si } 0 \leq U < \frac{1}{2} \\ 2b + (a-b)\sqrt{2(1-U)} & \text{si } \frac{1}{2} \leq U < 1. \end{cases}$$