16/17

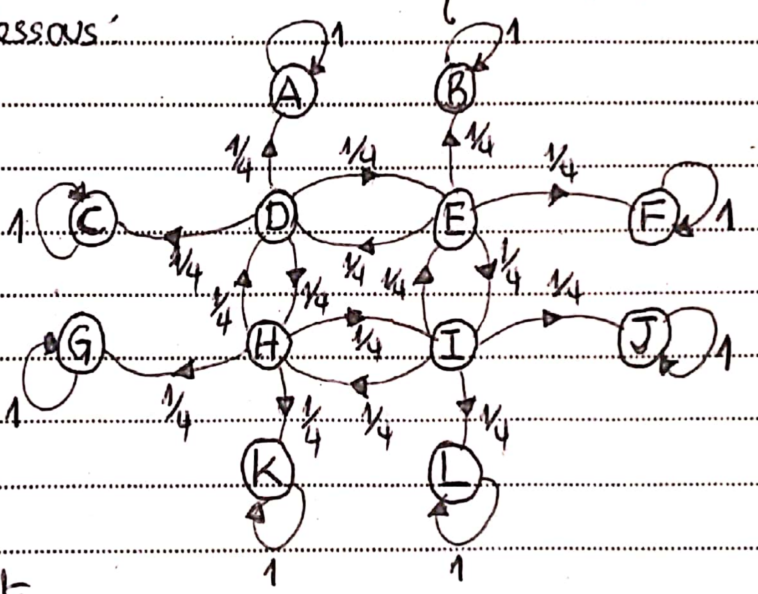
Examen de Rattrapage

Exercice 1: Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une C.M. d'espace d'états $E=\{1,2,3\}$ et de matrice de transition :

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/100 & 99/100 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

- Tracer le diagramme des transition.
- Classifier les états
- Quelle est la période de chaque classe ?
- Calculer $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n$

Exercice 2: Considérons la C.M. avec $E=\{A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L\}$ représentées ci-dessous :



1) Classifier les états.
2) Calculer la probabilité d'absorbtion par l'état "F" / $X_0=D$.
   Indication: Utiliser les symétries pour réduire les calculs.

Exercice 3:

3 lampes ayant les durées de vie exponentiellement distribuées de même paramètre $\lambda>0$.

- Quelle est le temps moyen pour que toutes les lampes soient brûlées ?

Indication : Utiliser la superposition des processus de Poisson.

Questions de cours :

1) Les éqts de Chapman - Kolmogorov

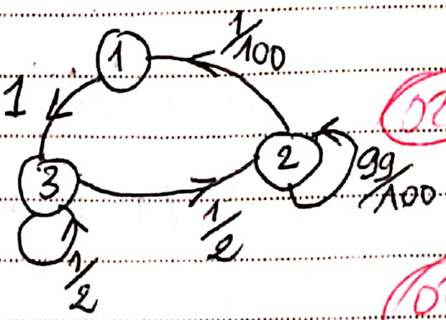
2) relation entre $P_{ij}^{(n)}$ et $\mathbb{P}$.

3) Sens intuitif de. $\mathbb{P}(T_n > s+t / T_n > s) = \mathbb{P}(T_n > t)$

16/17 Processus Stoch 1 Master 1

Rattrapage

Exercice 1



(1) _ Diagramme de transition: 02

(2) _ Classificat^{t} de états:
∃ une seule classe de Communicat^{t} ; 02
Tous les états sont récurrents.

(3) Période de chaque classe: 01

$d_2 = P.G.C.D\{n>0 : p_{22}^{(n)} > 0\} = P.G.C.D\{1,2,3, \dots\} = \cancel{2}$ 1

classe récurrente $\Rightarrow$ La classe est de période 1.

(4) La C.M. est irréductible et apériodique.

$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} X_n$ est la moyenne de la loi limite

i.e. $\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} X_n = \sum_{i \in E} i \, \pi_i$, 02

avec: $\pi = [\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3]$: loi stationnaire.

D'où: $\pi = \pi P \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = \frac{1}{100} \pi_2 \\ \pi_3 = \frac{2}{100} \pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \pi = \left[\frac{1}{103} \quad \frac{100}{103} \quad \frac{2}{103} \right]$ 02

Conclusion: $\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} X_n = 1\pi_1 + 2.\pi_2 + 3\pi_3 = \frac{207}{103}$.

Exercice 2

(1) Classificat° des états

01 Récurrents : $\{A\}, \{B\}, \{C\}, \{F\}, \{G\}, \{J\}, \{K\}, \{L\}$ absorbants.

01 Transitoires $\{D, E, H, I\}$

(2) On utilise la f^le de récurrence :

01
$$\begin{cases} \mu_{ij} = P_{ij} + \sum_{k \neq j} P_{ik}\,\mu_{kj} \\ j = F \\ i \in E \end{cases} \qquad (*)$$

Remarquons que : $\mu_{AF} = \mu_{BF} = \mu_{CF} = \mu_{GF} = \mu_{KF} = \mu_{LF} = \mu_{JF} = 0$

Car : A, B, C, G, K, L et J sont absorbants.

Donc le système $(*)$ se réduit à :

$$\begin{cases} \mu_{DF} = \frac{1}{4}\mu_{EF} + \frac{1}{4}\mu_{HF} \\ \mu_{EF} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\mu_{IF} + \frac{1}{4}\mu_{DF} \\ \mu_{HF} = \frac{1}{4}\mu_{DF} + \frac{1}{4}\mu_{IF} \\ \mu_{IF} = \mu_{DF} \text{ (par symétrie)} \end{cases}$$

On cherche μ_{DF}.

Solutions :

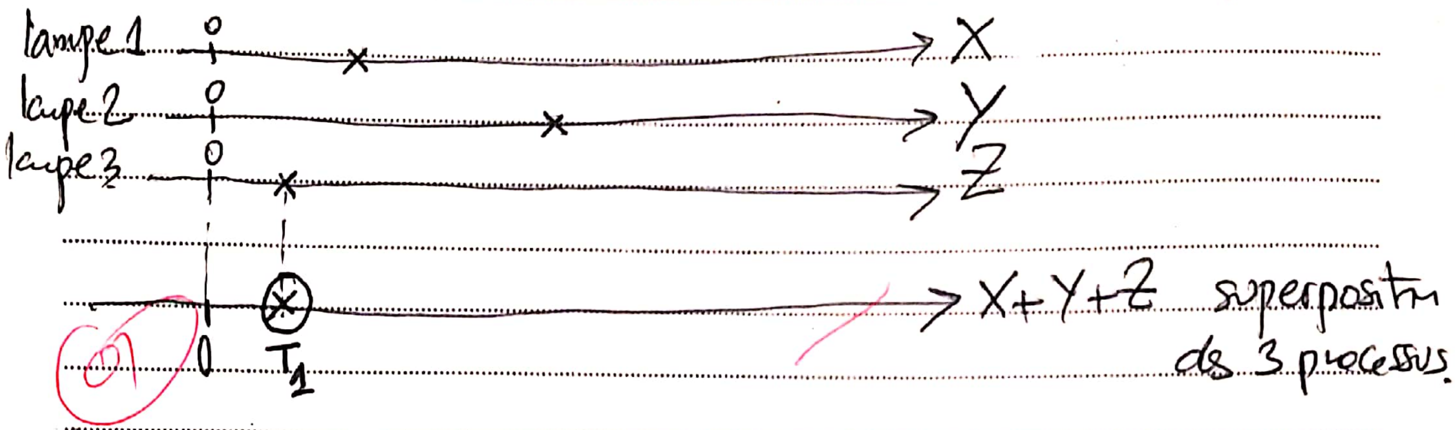
$\mu_{EF} = 7/24$

$\mu_{DF} = \mu_{IF} = 1/12$ 02

$\mu_{HF} = 1/24$

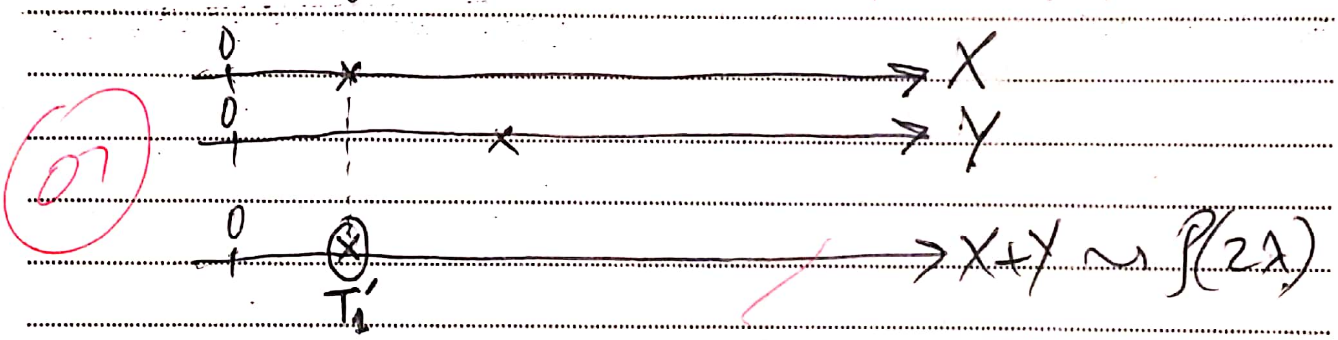
Exercice 3

Chaque lampe peut être modélisée par un processus de poisson $\mathcal{P}(\lambda)$,

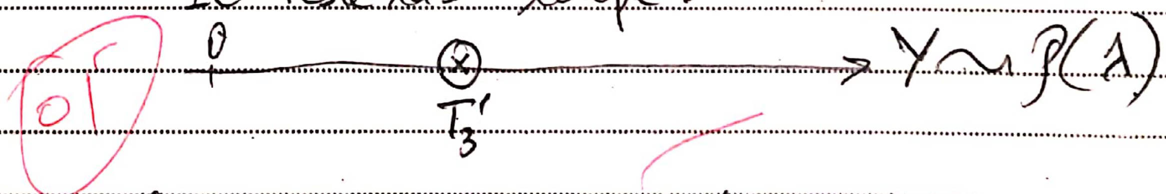


$$X+Y+Z \sim \mathcal{P}(3\lambda)$$

Une fois ~~la~~ une lampe est brûlée, il reste 2 lampe



Il reste la 3ème lampe :



le temps moyen ~~jusqu'à la brûlure de~~ pour que toutes les lampes soient brûlées est :

$$E(T_1)+E(T_1')+E(T_1'') = \frac{1}{3\lambda}+\frac{1}{2\lambda}+\frac{1}{\lambda}$$

الجامعية : .... | ....
ب : .... | القسم : ....
م : .... | الشعبة : ....
سجيل : .... | إمتحان : ....
وى : .... | المقياس : ....

Question de cours :

1) $P_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in E} P_{ik}^{(n)} P_{kj}^{(m)}$ 01

2) $P_{ij}^{(n)} = P^{n}(i,j)$ 01

3) Sens intuitif : $\mathbb{P}(T_n > s+t / T_n > s) = \mathbb{P}(T_n > t)$

Perte de mémoire