Corrigé type examen de probabilités L2-2022

Exercice 1:

1) En multipliant l'égalité $(*)$(pour x réel)

$$\frac{1}{x\,(x+1)\,(x+2)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x+2}\qquad\qquad(*)$$

par x et en prenant $x=0$, on obtient $a=\dfrac{1}{2}$. En multipliant l'égalité $(*)$ par $(x+1)$ et en prenant $x=-1$, on obtient $b=-1$.De même, si on multiplie $(*)$ par $(x+2)$ et on prend $x=-2$, on obtient $c=\dfrac{1}{2}$. Ainsi

$$\frac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)}=\frac{1}{2n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2\,(n+2)}$$

2) a) Comme

$$\sum_{n=1}^{+\infty}P\,(X=n)=1$$

alors

$$\frac{\beta}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{(n+2)}\right]=1$$

Or

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{(n+2)}\right]&=\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right]-\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+2)}\right]=\\&=1-\sum_{k=2}^{+\infty}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right]=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

d'où $\dfrac{\beta}{4}=1$, par suite

$$\beta=4$$

b)

$$E\,(X)=\sum_{n=1}^{+\infty}nP\,(X=n)=4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)\,(n+2)}\leq 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}<\infty$$

donc $E\,(X)$ existe, en outre

$$E(X) = 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 4\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n+2)}\right] = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

Exercice 2:

1) On rappelle les définitions de la fonction de répartition et de la densité d'une v.a. X qui suit une loi uniforme sur un **intervalle** $[a, b]$ et notées respectivement par F_X et f

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \begin{cases} 0 & si \;\; x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & si \; a \leq x < b \\ 1 & si \; x \geq b \end{cases} \\ f(x) &= \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si \; x \in [a, b] \\ 0 & si \; x \notin [a, b] \end{cases} \end{aligned}$$

En particulier, pour $a = 0$ et $b = 1$,on aura

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \; x \in [0, 1] \\ 0 & si \; x \notin [0, 1] \end{cases}$$

2) $Y = -\alpha \ln(X), \alpha > 0$

a) Le support de X étant $X(\Omega) = [0, 1]$, on a donc $Y(\Omega) = [0, +\infty[$ puisque la fonction $x \mapsto -\alpha \ln x$ est strictement **décroissante** sur l'intervalle $]0, 1]$.

On aura, en notant respectivement F_Y et g la fonction de répartition et la densité de probabilité de la v.a. Y

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = \\ &= P(-\alpha \ln(X) \leq y) = \\ &= P\left(\ln(X) \geq -\frac{y}{\alpha}\right) = \\ &= P\left(X \geq e^{-\frac{y}{\alpha}}\right) = \\ &= 1 - F_X\left(e^{-\frac{y}{\alpha}}\right) \end{aligned}$$

Donc, pour $y \in [0, +\infty[$, il vient

$$\begin{aligned} g(y) &= F_Y'(y) = \\ &= 0 - \left(e^{-\frac{y}{\alpha}}\right)' f\left(e^{-\frac{y}{\alpha}}\right) = \\ &= \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{y}{\alpha}} \end{aligned}$$

Ainsi

$$g(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha} e^{-\dfrac{y}{\alpha}} & si \;\; y \geq 0 \\ 0 & si \;\; y < 0 \end{cases}$$

Par identification, on en déduit que la v.a. Y suit une loi exponentielle $Y \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$.

b) Puisque $Y \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$, on a alors

$$\begin{aligned} E(Y) &= \frac{1}{\frac{1}{\alpha}} = \alpha \\ Var(Y) &= \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2} = \alpha^2 \end{aligned}$$

3) Puisque $Y \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$, alors

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\dfrac{y}{\alpha}} & si \;\; y \geq 0 \\ 0 & si \;\; y < 0 \end{cases}$$

4)

$$\begin{aligned} P(Y > 2\alpha) &= 1 - P(Y \leq 2\alpha) = \\ &= 1 - F_Y(2\alpha) = \\ &= 1 - \left(1 - e^{-\dfrac{2\alpha}{\alpha}}\right) = \\ &= e^{-2} \approx 0,135 \end{aligned}$$