Chapitre 2

Espaces des applications linéaires continues

2.1 Définitions et propriétés

Définition 2.1. *Une application linéaire $T : X \to Y$ est continue en un point $x_0 \in X$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in X : (\|x - x_0\|_X < \delta) \Rightarrow (\|Tx - Tx_0\|_Y < \varepsilon)$$

. $T : X \to Y$ est dite continue si elle est continue en tout point $x_0 \in X$.

Définition 2.2. *Une application linéaire $T : X \to Y$ est dite bornée si*

$$\sup_{x \in X} \|Tx\| < +\infty$$

Proposition 2.1. *[2] Soit $T : X \to Y$ une application linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *T est continu.*
2. *T est continu en un point quelconque de X.*
3. *T est borné.*

4. $\exists c > 0 / \forall x \in X : \|Tx\| \leq c\,\|x\|$

Définition 2.3. *Soient X et Y des espace vectoriels normés. On note $\mathcal{L}(X,Y)$ à l'espace des applications linéaires continues de X dans Y.*

Théorème 2.1. *L'ensemble $\mathcal{L}(X,Y)$ est un espace vectoriel normé, avec la norme*

$$\|u\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1}\|u(x)\| \tag{2.1}$$

pour tout $u \in \mathcal{L}(X,Y)$, et l'on a dans ce cas

$$\|u(x)\| \ \leq \|u\|\|x\| \tag{2.2}$$

Soit $(A_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}(X,Y)$, et soit $A \in \mathcal{L}(X,Y)$.

Définition 2.4. *La suite $(A_n)_n$ est dite simplement convergente vers A, si*

$$\forall x \in X : \lim_{n\to+\infty} A_n x = Ax$$

Définition 2.5. *$(A_n)_n$ est dite uniformément convergente vers A si :*

$$\lim_{n\to+\infty}\|A_n - A\| = 0$$

La norme étant définie au sens de celle de $\mathcal{L}(X,Y)$.

Proposition 2.2. *Si $(A_n)_n$ converge uniformément vers A dans $\mathcal{L}(X,Y)$, alors $(A_n)_n$ converge simplement vers A.*

Proposition 2.3. *Soient $(X,\|.\|_1)$ et $(Y,\|.\|_2)$ des espaces vectoriels normés. Si Y est de Banach, alors $\mathcal{L}(X,Y)$ l'est également.*

2.2 Suite bornée d'applications linéaires continues

Rappel. Soit X un espace vectoriel normé. Une partie A de X est dite bornée si A est contenue dans une boule, i.e., l'ensemble

$$\{\|x\|\ , x \in X\}$$

est majoré. On a donc le résultat suivant

Théorème 2.2. *Soit $(X, \|.\|_1)$ un espace vectoriel normé, et soit E une partie dense dans X. Soit $(Y, \|.\|_2)$ un espace de Banach. Si $(A_n)_n$ est une suite bornée dans $\mathcal{L}(X, Y)$, convergeant simplement sur E, alors $(A_n)_n$ converge simplement sur X vers un unique opérateur $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.*

2.3 Dual topologique

Définition 2.6. *Soit X un espace vectoriel normé. On appelle dual de X, et on le note X', l'espace des formes linéaires continues sur X, i.e., l'espace des applications linéaires continues de X dans $\mathbb{C}$.*

On a donc

$$X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{C}) = \{f : X \to \mathbb{C},\ f \text{ linéaire et continue }\}$$

D'après les résultats précédents, X' est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{C}$, avec la norme

$$\|u\| = \sup_{x\neq 0} \frac{|u(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} |u(x)|$$

De plus, et par la Proposition (2.3), X' est un espace de Banach.

Exemples Le résultat suivant discutera les duals des espaces ℓ_p, $(1 \leq p \leq \infty)$ définis dans le paragraphe précédent. On a donc

Théorème 2.3. *Soit* $f \in \ell'_p$, $(1 \leq p < \infty)$. *Alors, il existe un vecteur unique* $\eta = (\eta_1, \eta_2, .., \eta_k, ..)$ *dans* ℓ_q *avec* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *(* $q = \infty$ *quand* $p = 1$*) tel que pour tout* $x = (x_1, x_2, .., x_k, ..) \in \ell_p$, *on a :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k \eta_k \tag{2.3}$$

De plus, $\|f\| = \|\eta\|$ *et* $\eta = (f(e_k))_{k=1}^{+\infty}$ *où* $(e_k)_{k=1}^{+\infty}$ *est la base standard de* ℓ_p.
Inversement, pour tout $\eta = (\eta_k)_{k=1}^{+\infty} \in \ell_q$, *la relation (2.3) définit une fonctionnelle linéaire* $f \in \ell'_p$.
Autrement dit, $\ell'_p = \ell_q$ *pour* $1 \leq p < \infty$ *et* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Preuve. D'abord, on fait la preuve pour $p = 1$.
Soit donc $f \in \ell'_1$, et soit $\eta_k = f(e_k), k \geq 1$. Donc, $\eta_k \in \mathbb{C}, k \geq 1$. Pour $x = (x_1, x_2, .., x_k, ..) \in \ell_1$, on obtient :

$$f(x) = f(\sum_{k=0}^{+\infty} x_k e_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k f(e_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k \eta_k$$

et $\eta = (\eta_k)_{k=1}^{+\infty} \in \ell_\infty$ car

$$\|\eta\|_\infty = \sup_{k \geq 1} |x_k \eta_k| \leq \|f\| \tag{2.4}$$

De même, on a

$$|f(x)| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |x_k \eta_k| \leq \|\eta\|_\infty \sum_{k=0}^{+\infty} |x_k| = \|\eta\|_\infty \|x\|_1 \tag{2.5}$$

D'où,

$$\|f\| \leq \|\eta\|_\infty \tag{2.6}$$

De (2.4)et (2.6), on obtient que $\|f\| = \|\eta\|_\infty$

L'unicité. S'il existe $\beta = (\beta_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_\infty$ tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} |x_k \beta_k|$$

pour tout $x = (x_k)_{k=1}^{+\infty} \in \ell_1$, alors $f(e_j) = \beta_j, j \geq 1$. D'où, $\eta = \beta$.
L'inverse. L'inégalité (2.5) implique que la forme linéaire f définie par (2.3) est un élément de ℓ_1'. ◀

Remarque Le Théorème 2.3 montre que l'espace ℓ_p' est identifié à l'espace ℓ_q dans le sens qu'il existe un isomorphisme isométrique $I : \ell_p' \to \ell_q$ défini par $I(f) = (f(e_k))_{k=1}^{+\infty}$ pour tout $f \in \ell_p'$.
Pour $\eta = (\eta_k)_{k=1}^{+\infty} \in \ell_q : I^{-1}\eta = g \in \ell_p'$ où $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} x_k \eta_k$.

Pour $p > 1$, on a besoin aux Lemmes suivants :

Lemme 2.1. ***(Inégalité de Young)*** *Soient $p, q \in [1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et soient $a, b \geq 0$. Alors :*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

On adopte les règles de calcul dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ où

$$x \times (+\infty) = (+\infty) \times x = (+\infty), (0 < x \leq +\infty) \tag{2.7}$$

et

$$0 \times (+\infty) = (+\infty) \times 0 = 0 \tag{2.8}$$

on a alors :

Corollaire 2.1. ***(Inégalité de Hölder)*** *Soient $(a_i)_{i=1}^n$ et $(b_i)_{i=1}^n$ des familles de nombres réels positifs. Alors, pour tous p, q avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $1 \leq p \leq +\infty$:*

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq (\sum_{k=1}^n a_k^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{k=1}^n b_k^q)^{\frac{1}{q}}$$

Corollaire 2.2. ***(Inégalité de Minkowski)*** *Pour toutes familles $(a_i)_{i=1}^n$ et $(b_i)_{i=1}^n$ dans $\mathbb{R}_+$, et tout $p \geq 1$, on a :*

$$(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{k=1}^n a_k^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{k=1}^n b_k^p)^{\frac{1}{p}}$$

Remarques 1. Pour $p = q = 2$, l'inégalité de Hölder coïncide avec l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq (\sum_{k=1}^{n} a_k^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=1}^{n} b_k^2)^{\frac{1}{2}}$$

2. Vu les règles de calcul(2.7) et (2.8), et par le principe de prolongement des identités, les résultats précédents demeurent vraies pour $k \in I$ avec I un ensemble dénombrable et infini.

3. Si $x = (x_k)_{k\in I}$ et $y = (y_k)_{k\in I}$ sont deux vecteurs dans ℓ_p, alors l'inégalité de Minkowski s'écrit :

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

et comme $\|\lambda x\|_p = |\lambda| \|x\|_p$, $\lambda \in \mathbb{C}$, alors, les espaces ℓ_p sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{F}(I, \mathbb{C})$, et que $\|.\|$ définit une norme sur ℓ_p, $1 \leq p < +\infty$.

4. De même, l'inégalité de Hölder s'écrit pour p, q avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\|xy\|_1 \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

Corollaire 2.3. *Les espaces ℓ_p, $(1 \leq p \leq +\infty)$ sont complets.*

Remarque (Très importante) Le Théorème 2.3 n'est pas valable pour $p = \infty$, sinon ça va contredire le résultat suivant que l'on démontrera ultérieurement

Théorème 2.4. *Soit X un espace vectoriel normé. Si X' est séparable, alors X est aussi séparable.*

En effet, l'espace ℓ_∞ n'est pas séparable, (Paragraphe 1.3, Exemple 2). Autrement dit, $\ell_1' = \ell_\infty$ et $\ell_\infty' \neq \ell_1$.

2.4 Espaces $L_p(\Omega)$

Définition 2.7. *Soit Ω un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$, et soit $1 \leq p < +\infty$. On pose*

$$L_p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable telle que } \int_\Omega |f(x)|^p dx < +\infty\}$$

De même,

$$L_\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable telle que } \sup_{x\in\Omega} |f(x)|^p < +\infty\}$$

On munit ces espaces des normes $\|.\|_p$ et $\|.\|_\infty$ où

$$\|f\|_p = (\int_\Omega |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}, f \in \ell_p \tag{2.9}$$

et

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|, f \in \ell_\infty \tag{2.10}$$

Proposition 2.4. *$L_p(\Omega)$ est espace vectoriel pour tout p, $1 \leq p \leq +\infty$.*

Proposition 2.5. *L'espace $L_p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ est normé avec les normes (2.9) et (2.10) citées ci-dessus.*

Pour la preuve, on utilise directement les inégalités de Hölder et de Minkowski dans $L_p(\Omega)$ comme suit

Lemme 2.2. *Soient $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et soient $f \in L_p(\Omega)$, $g \in L_q(\Omega)$. Alors, $fg \in L_1(\Omega)$, et l'on a*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Lemme 2.3. *Soient $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et soient $f, g \in L_p(\Omega)$. Alors, $f + g \in L_p(\Omega)$, et l'on a*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

On a donc le résultat suivant

Théorème 2.5. *Pour tout* $F \in (L_p(\Omega))'$, $1 \leq p < +\infty$, *il correspond* $g \in L_q(\Omega)$ *unique avec* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *et* $q = +\infty$ *si* $p = 1$, *tel que*

$$F(f) = F_g(f) = \int_\Omega f(t)g(t)dt \tag{2.11}$$

pour tout $f \in L_p(\Omega)$. *De plus,* $\|F\| = \|g\|_q$.
Inversement, si $g \in L_q(\Omega)$, *la forme linéaire* F *définie par (2.11) est un élément de* $(L_p(\Omega))'$.