Université Pierre et Marie Curie
Master de Mathématiques, M1

Analyse réelle, MM003
Année universitaire 2013-2014
Ayman Moussa

Rappels de Cours – Espaces de Hilbert. Opérateurs.

Une excellente réference pour tous les rappels mentionnés ici est le livre « Analyse Fonctionnelle »de Francis Hirsch et Gilles Lacombes. Je l'ai d'ailleurs recopié sans vergogne pour la plupart des résultats qui suivent.

Dans toute la suite H désignera un $\mathbb{K}$-espace ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de Hilbert muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\| \cdot \|$. $\mathscr{L}(H)$ désignera l'ensemble des opérateurs linéaires continus de H dans lui-même, muni de la norme subordonnée $||| \cdot |||$. Si cela ne prête pas à confusion, on notera parfois $\| \cdot \|$ la norme des opérateurs. Enfin, le dual topologique de H (les formes linéaires continues, ou encore $\mathscr{L}(H, \mathbb{K})$) sera noté H'.

1 Espaces de Hilbert

Théorème :
*Soit C une partie convexe fermée et non vide de H. Alors, pour tout point $x \in E$, il existe un unique point $y \in C$ tel que $\|x - y\| = \mathrm{d}(x, C)$. Ce point, appelé **projection de x sur C** et noté $p_C(x)$, est caractérisé par la propriété suivante : pour tout $y \in C$ et pour tout élément $z \in C$, $\mathrm{Re}(\langle x - y, z - y \rangle) \leqslant 0$. L'application p_C ainsi définie sur H tout entier est de plus 1-lipschitzienne.*

Le cas où C est un sous-espace de H implique aisément le résultat suivant :

Proposition : *Pour tout sous-espace vectoriel F de H, on a la décomposition $H = \overline{F} \oplus F^{\perp}$. En particulier, F est dense dans H si et seulement si $F^{\perp} = \{0\}$.*

Théorème : (Riesz)
L'application de H sur H' définie par $u \mapsto \Phi_u := \langle \cdot, u \rangle$ est une isométrie linéaire surjective. En d'autres termes, pour toute forme linéaire continue $\Phi \in H'$, il existe un unique $u \in H$ vérifiant

$$\forall x \in H, \quad \Phi(x) = \langle x, u \rangle,$$

et de plus $|||\Phi||| = \|u\|$.

Proposition :
Pour tout $T \in \mathscr{L}(H)$, il existe un unique opérateur $T^* \in \mathscr{L}(H)$ vérifiant

$$\forall x, y \in H, \quad \langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle.$$

*T^* est appelé l'**adjoint** de T et vérifie de plus $\|T^*\| = \|T\|$.*

Définition : Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de H est dite faiblement convergente vers $x \in H$ ($x_n \rightharpoonup x$) si

$$\forall y \in H, \quad \langle x_n, y \rangle \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \langle x, y \rangle.$$

Théorème : *De toute suite bornée de H on peut extraire une sous-suite faiblement convergente.*

Proposition-Définition :
On dit qu'une famille $(e_i)_{i\in I}$ *d'éléments de* H *est une base hilbertienne de* H *si elle est orthonormale et si de plus* $\overline{\mathrm{Vect}\{e_i\ :\ i \in I\}} = H$. *Une telle base hilbertienne vérifie alors, pour tout* $x, y \in H$

$$\sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 = \|x\|^2, \quad \langle x, y\rangle = \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle\langle e_i, y\rangle, \quad \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle e_i = x,$$

la dernière somme étant à comprendre au sens des familles sommables dans H.

Remarque : *Dans la proposition précédente la famille* $(e_i)_{i\in I}$ *peut être* a priori *indénombrable.*

Proposition : *H est séparable si et seulement si il possède une base hilbertienne dénombrable.*

Corollaire : *À isomorphisme isométrique près, il n'existe qu'un seule espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie :* $\ell^2(\mathbb{C})$ *(idem dans le cas réel).*

2 Opérateurs

2.1 Spectre et valeurs propres

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach sur un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). $\mathscr{L}(E)$ désigne l'ensemble des opérateurs continus de E dans E muni de la norme subordonnée $|||\cdot|||$. Comme précédemment, si cela ne prête pas à confusion, on notera parfois $\|\cdot\|$ la norme des opérateurs.

Proposition : *L'ensemble* $\mathcal{I}$ *des éléments inversibles (opérateurs bijectifs) de* $\mathscr{L}(E)$ *est un ouvert.*

Définition :
Soit $T \in \mathscr{L}(E)$. On appelle **valeur spectrale** de T tout élément $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $T - \lambda\mathrm{Id}_E \notin \mathcal{I}$. L'ensemble des valeurs spectrales (le spectre) est noté $\sigma(T)$. On appelle valeur propre tout élément $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $T - \lambda\mathrm{Id}_E$ ne soit pas injectif, *i.e.* $E_\lambda := \mathrm{Ker}(T - \lambda\mathrm{Id}_E) \neq \{0\}$ et on note $\mathrm{vp}(T)$ l'ensemble de ces valeurs propres. E_λ est appelé espace propre associé à λ.

Remarque : *On a clairement* $\mathrm{vp}(T) \subset \sigma(T)$ *mais l'égalité est* ***fausse en général***.

Proposition :
Soit $T \in \mathscr{L}(E)$. *La suite* $(|||T^n|||^{1/n})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers un nombre que l'on note* $\mathrm{r}(T)$, *le* ***rayon spectral***. *Par ailleurs, le spectre de* T *est un compact de* $\mathbb{K}$ *(éventuellement vide) et inclus dans le disque (ou le segment)* $\{\lambda \in \mathbb{K}\ :\ |\lambda| \leqslant \mathrm{r}(T)\}$.

Proposition : *Supposons* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. *Alors tout élément* $T \in \mathscr{L}(E)$ *possède un spectre non vide. De plus* $\mathrm{r}(T) = \max\{|\lambda|\ :\ \lambda \in \sigma(T)\}$.

2.2 Le cas hilbertien

On reprend les notations de la section 1 concernant l'espace de hilbert H.

Proposition :
Soit $T \in \mathscr{L}(H)$, *alors*

(i) $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}(T^*)^\perp$,

(ii) $\overline{\mathrm{Im}(T)} = \mathrm{Ker}(T^*)^\perp$,

(iii) T *est inversible si et seulement si* T^* *est l'est et l'inversion commute alors avec l'adjonction.*

Corollaire : $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}$ *(conjugaison complexe).*

Remarque : *Dans le cas réel les spectres sont donc égaux. Par contre il n'y a en général pas de rapport entre les valeurs propres de* T *et celles de* T^*.

Définition : On dit qu'un opérateur $T \in \mathscr{L}(H)$ est **auto-adjoint** lorsque $T = T^*$. De manière plus générale, T est dit normal lorsqu'il commute avec son adjoint : $T \circ T^* = T^* \circ T$.

Théorème :
Soit $T \in \mathscr{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. Alors

(i) le spectre de T est réel : $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$,

(ii) les espaces propres de T associés à des valeurs propres différentes sont orthogonaux.

2.3 Opérateurs compacts

Soient E, F des espaces de Banach et H un espace de Hilbert.

Définition : On appelle opérateur compact de E dans F tout élément $T \in \mathscr{L}(E, F)$ pour lequel l'image de toute partie bornée de E est relativement compacte dans F. On note $\mathrm{K}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F ou simplement $\mathrm{K}(E)$ si $E = F$.

Proposition : $\mathrm{K}(E, F)$ *est un idéal* ***bilatère*** *pour le produit de composition $\circ$ et également un sous-espace* ***fermé*** *de $\mathscr{L}(E, F)$ contenant tous les opérateurs de rang fini. Dans le cas particulier où F est un espace de Hilbert, on a précisément* $\mathrm{K}(E, F) = \overline{\{u : E \to F \ : \ \dim(u(E)) < \infty\}}$.

Proposition :
Soit $T \in \mathrm{K}(E)$. Alors

(i) le sous-espace $\mathrm{Ker}(T - \mathrm{Id}_E)$ est de dimension finie,

(ii) le sous-espace $\mathrm{Im}(T - \mathrm{Id}_E)$ est fermé,

(iii) l'opérateur $T - \mathrm{Id}_E$ est inversible si et seulement si il est injectif.

Remarque : *On sait qu'en dimension finie l'injectivité d'un opérateur linéaire est équivalente à sa surjectivité. Cette propriété tombe bien sûr en défaut en dimension infinie. Le point (iii) de la proposition précédente précise le cadre de validité de ce critère : si T est la somme d'un opérateur inversible et d'un opérateur compact alors injectivité et surjectivité de T se valent.*

Théorème :
Soit $T \in \mathrm{K}(E)$. On a que

(i) si E est de dimension infinie, 0 est une valeur spectrale de T, i.e. *T ne peut pas être inversible,*

(ii) toute valeure spectrale ***non nulle de T*** *est une valeur propre et le sous-espace propre associé est de dimension finie,*

(iii) le spectre de T est au plus dénombrable. Si il est infini, on peut ranger ses éléments non nuls en une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante en module et tendant vers 0.

On termine par un résultat de « diagonalisation » valable pour les opérateurs normaux compacts sur un espace de Hilbert :

Théorème : (dit « spectral »)
*Soit H un espace de Hilbert **complexe** de dimension infinie et T un opérateur normal et compact de $\mathscr{L}(H)$. Alors*

(i) *l'ensemble* $\mathrm{vp}(T)\backslash\{0\}$ *des valeurs propres de T non nulles est une partie au plus dénombrable de $\mathbb{C}$ (et même de $\mathbb{R}$ si T est auto-adjoint) admettant éventuellement* 0 *comme unique point d'accumulation. On peut l'indexer comme dans le théorème précédent en une suite* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui est donc soit stationnaire* ($\mathrm{vp}(T)$ *fini) soit convergente vers* 0,

(ii) *les sous-espaces propres de T sont orthogonaux deux à deux,*

(iii) *si on note, pour $\lambda \in \mathrm{vp}(T)$, P_λ le projecteur orthogonal sur l'espace propre E_λ, on a*

$$T = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n P_{\lambda_n},$$

au sens de la convergence dans $\mathscr{L}(H)$,

(iv) *on a la décomposition*

$$H = \overline{\bigoplus_{\lambda\in\mathrm{vp}(T)} E_\lambda} = \overline{\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} E_{\lambda_n} \oplus \mathrm{Ker}(T)},$$

toutes les sommes directes étant orthogonales,

(v) *si H est séparable, H admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de T.*