Université Hassiba Benbouali - Chlef
Année universitaire :2019-2020
Niveau :1me Master M A S

Facult e de SEI
Département de Mathématiques
Module : Programmation Linéaire

Série d'exercices N 2

Exercice 1 *Soit le programme linéaire sous forme standard :*

$$(P2)\begin{cases} z\,(\max) = 4x_1 + x_2 \\ x_1 - 8x_2 \leq 2 \\ x_1 - 4x_2 \leq 4 \\ x_1 - 2x_2 \leq 8 \\ x_1 - x_2 \leq 11 \\ 7x_1 - 2x_2 \leq 107 \\ 2x_2 \leq 19 \\ -3x_1 + 4x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. *Déterminez graphiquement la solution optimale.*
2. *Ecrivez le système d'équations permettant d'obtenir cet optimum.*
3. *Quelle est la valeur de la fonction objectif a cet optimum ?*

Exercice 2 *En utilisant le théorème des écatrs complémentaires, vérifier si* $x^* = (3, 0, 1, 3)^\top$ *est une solution optimale de* $(P1)$

$$(P1)\begin{cases} z\,(\max) = -2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 = -2 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

Exercice 3 *Soit le programme linéaire suivant :*

$$(P)\begin{cases} z(\max) = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 90 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 40 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 80 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

1. *Résoudre* (P) *par l'algorithme du simplexe.*
2. *A partir du dernier tableau du simplexe, déduire l'inverse de la matrice* A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

3. *Ecrire le dual* (D) *de* (P).
4. *Vérifier que* $\lambda^* = \left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5}, \frac{1}{5}\right)$ *est une solution admissible de* (D).
5. *Que peut-on dire de* λ^**? Justifier.*
6. *Supposons que la deuxième membre* b_1 *passe de* 90 *à* $90+\alpha$. *Pour quelles valeurs de* α, *la base* $\{1,2,3\}$ *reste-t-elle optimale ?*

Exercice 4 *Résoudre par l'algorithme dual simplexe le programme linéaire (PL)*

$$(PL)\begin{cases} z\,(\min) = x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ x_1 - 5x_2 + 7x_3 \geq 8 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \geq -2 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 \geq 2 \\ x_i \geq 0,\ i = 1,2,3 \end{cases}$$

Exercice 5 ***(06)*** *Soit le problème d'optimisation suivante :*

$$\begin{cases} \max z = \ 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 2x_5 \leq 4 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 \leq 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 \leq 5 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

1. *Formuler le problème dual.*
2. *Rappeler le théoréme des écarts complémentaires.*
3. *Appliquer le théoréme des écarts complémentaires pour vérifier l'optimalité de la solution proposée. La solution proposée :* $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0\right)$.

Exercice 6 ***(10)*** *Soit le programme linéaire suivant :*

$$\begin{cases} \max z = \ 5x_2 + 4x_3 + 3x_6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_6 = 5 \\ 4x_2 + x_3 + x_5 + 2x_6 = 11 \\ 3x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_6 = 8 \\ x_i \geq 0, i = 1, ..., 6 \end{cases}$$

.

1. *Résoudre ce programme linéaire en utilisant l'algorithme du simplexe.*
2. *Donner l'ensemble des indices de base* B *associé à la solution optimale.*
3. *Quelle est la solution de base duale* λ *associé à* B *?*
4. *Prouver l'optimalité des solutions* x *et* λ.
5. *Calculer les couts réduits des varaibles primales hors base.*

Exercice 7 *(04)* *Considérons le programme linéaire suivante :*

$$(P)\begin{cases} cx = z\,(\max) \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Où A est une matrice ayant m lignes et n colonnes.

- *Montrons que $x_1, x_2, ..., x_k$ sont solutions de (P) ($x_i \in \mathbb{R}^n$) alors*

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_k x_k \quad \text{où} \quad \alpha_i \in [0,1] \quad et \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$$

est solution de (P).