Chapître 1
VARIABLES ALEATOIRES

En théorie moderne des probabilités, on préfère adopter un point de vue fonctionnel plutôt qu'ensembliste, et utiliser les variables aléatoires plutôt que les évènements.

II-1 Rappels

II-1-1 Soient E et F deux ensembles, soit f une application de E dans F, et soit B une partie de F.On définit l'image

réciproque de B par

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \,|\, f(x) \in B\}$$

Remarque: L'image réciproque existe (c'est un ensemble) et est définie quelle que soit l'application f,contrairement à

l'application réciproque.

II-1-2: Propriétés de l'image réciproque

Si f est une application de E dans F, alors

$$a)\ f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$$

$$b)\ f^{-1}(F) = E$$

$$c)\ f^{-1}\left(\overline{B}\right) = \overline{f^{-1}(B)} \quad \forall B \subset F$$

$$d)\ f^{-1}\left(\bigcup_n B_n\right) = \bigcup_n f^{-1}(B_n) \quad et\ f^{-1}\left(\bigcap_n B_n\right) = \bigcap_n f^{-1}(B_n) \quad \forall B_n \subset F$$

Une variable aléatoire est une grandeur qui dépend du résultat de l'expérience. Par exemple: le nombre de '3' obtenus dans un lancer de deux dés, le nombre d'appels dans un central téléphonique pendant une heure, la valeur maximale d'un prix d'actifs sur un intervalle de temps donné,... sont des variables aléatoires.

II-2 Variables aléatoires réelles

Définition II-2-1

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace probabilisé. On appelle variable aléatoire réelle(v.a.r.) toute application mesurable* X *de* $(\Omega, \mathcal{F})$

dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$*(mesurable au sens* $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$*).*

Autrement dit, X est une *v.a.r.si et seulement si* $X^{-1}(]-\infty, a]) \in \mathcal{F}$. ($X^{-1}]-\infty, a]$ est donc un évènement).

Notations: si X est une *v.a.r. et* $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, alors

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in B\}$$

Remarque: - La tribu engendrée par X est définie par

$$\sigma(X) := X^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}) = \left\{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\right\} \subset \mathcal{F}$$

Comme $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}, X^{-1}(B)$ est donc un évènement, on peut ainsi déterminer sa probabilité. On note alors

$$P\left(X^{-1}(B)\right) = P\left(X(\omega) \in B\right) = P\left(X \in B\right)$$

où B peut se présenter sous plusieurs formes

$$B = \{a\}, \quad P\left(X^{-1}(B)\right) = P\left(X = a\right)$$

$$B = \left]-\infty, a\right], \quad P\left(X^{-1}(B)\right) = P\left(X \leq a\right)$$

$$B = \left]a, b\right], \quad P\left(X^{-1}(B)\right) = P\left(a < X \leq b\right)$$

$$B = \left]a, +\infty\right[, \quad P\left(X^{-1}(B)\right) = P\left(X > a\right)$$

II-2-2 Propriétés d'une variable aléatoire réelle

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et X une v.a.r. sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Théorème II-2-2

Soit P_X l'application de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ dans $[0,1]$ définie par

$$P_X(B) = P\left(X^{-1}(B)\right) = P\left(X \in B\right)$$

alors P_X est une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

Définition II-2-3

On appelle P_X la loi de probabilité de la v.a.r. X,c'est la probabilité image de P par X, définie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ *par*

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \ P_X(B) = P\left(X^{-1}(B)\right)$$

On note $X \hookrightarrow P_X$

II-2-3 Support d'une v.a.r. X

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et X une v.a.r. sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Définition:

L'ensemble image (l'ensemble des valeurs de X) de Ω par X, noté $X(\Omega)$ est appelé support de X.Il y a deux types de supports.

a) Si $X(\Omega)$ est fini ou infini dénombrable, on dit alors que X est une variable aléatoire discrète.

b) Si $X(\Omega)$ est infini non dénombrable, on dit que X est une variable aléatoire continue.

II-2-4 Fonction borélienne

Définition: Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite borélienne si

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \quad f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} : f(x \in B)\} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

par exemple les fonctions continues, les fonctions différentiables,....

II-2-5 Théorème

Soit f une fonction borélienne, et X une variable aléatoire réelle, alors Y défini par $Y = f(X)$ est une variable aléatoire

réelle

Démonstration

Soit $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, considérons

$$Y^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \in B\}$$

Par construction, on a $Y(\omega) = f(X(\omega))$ et donc

$$Y^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : f(X(\omega)) \in B\} = \left\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in f^{-1}(B)\right\}$$

Comme f est borélienne, on a par définition que $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ car $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Mais alors

$$\left\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in f^{-1}(B)\right\} \in \mathcal{F}$$

puisque X est une variable aléatoire réelle, on a établi que $Y^{-1}(B) \in \mathcal{F}\, \forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, ce qui prouve d'après la définition que

Y est une variable aléatoire.

II-2-6 Indépendance de variables aléatoires

Définition: *Deux variables aléatoires* $X, Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *sont indépendantes entre elles si pour tous les boréliens*

$A, B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$,*les évènements* $(X \in A)$ *et* $(Y \in B)$*sont indépendants entre eux i.e.*

$$P((X \in A) \cap (Y \in B)) = P(X \in A)\, P(Y \in B)$$

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de variables aléatoires. Elles sont dites indépendantes entre elles si pour tout ensemble $S \subset I$,

fini et $(A_i)_{i \in S}$ des boréliens de $\mathbb{R}$, les si évènements $(X_i \in A_i), i \in S$ sont indépendants dans leur ensemble.

$$P\left(\bigcap_{i \in S} (X_i \in A_i)\right) = \prod_{i \in S} P(X_i \in A_i)$$

II-3 Fonction de répartition d'une variable aléatoire

Définition: Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace probabilisé et* X *une v.a.r. sur* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *On appelle fonction de répartition de* X,

notée F_X la *fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *et à valeurs dans* $[0, 1]$,*par*

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

II-3-1 Propriétés de la fonction de répartition

$$a)\ 0 \leq F_X(x) \ \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$b)\ F_X \text{ est croissante sur } \mathbb{R}$$

$$c)\ F_X \text{ est continue à droite; i.e.} \lim_{y \searrow x} F_X(y) = F_X(x)$$

$$d)\ \lim_{x \longrightarrow\ -\infty} F_X(x) = 0, \quad \lim_{x \longrightarrow\ +\infty} F_X(x) = 1$$

Démonstration

$a)$ évident car F_X est une probabilité.

$b)$ Soit $x \leq y$, nous avons l'inclusion

$$\{X \leq x\} = \{\omega \in \Omega \,| X(\omega) \leq x\} \subset \{X \leq y\} = \{\omega \in \Omega \,| X(\omega) \leq y\}$$

Par monotonie de la probabilité P, nous aurons donc

$$F_X(x) = P(X \leq x) \leq P(X \leq y) = F_X(y)$$

ce qui montre que F_X est croissante. En particulier elle admet une limite en $+\infty$ et $-\infty$

Exercice

1) Montrer les propriétés $c)$ et $d)$.

2) Soient $a < b$ deux nombres réels, montrer les propriétés suivantes

$$i)\ P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

$$ii)\ P(X > a) = 1 - P(X \leq a)$$
$$iii)\ P(X < x) = F_X\left(x^-\right)$$

En déduire que si F_X est continue en x,alors $P(X = x) = 0$

II-4 Variables aléatoires discrètes

II-4-1 Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire à support $X(\Omega) = \{x_k\}_{k \in I}$ où $I \subset \mathbb{N}$ est un ensemble

d'indices fini ou infini dénombrable, dans ce cas X est dite discrète(**v.a.d.**), la donnée des probabilités

$P(X = x_k), \forall k \in I$, est appelée loi de probabilités de X (ou distribution de X), et on a

$$\begin{aligned} P(X = x_k) &\geq 0 \quad \forall x_k \in X(\Omega) \\ \sum_{x_k \in X(\Omega)} P(X = x_k) &= 1 \end{aligned}$$

II-4-2 Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète

Définition

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_k \in X(\Omega) / x_k \leq x} P(X = x_k)$$

II-5 Caractéristiques d'une variable aléatoire discrète

II-5-1 Espérance mathématique-Cas général

Soit X une variable aléatoire réelle $P-$intégrable au sens que l'intégrale $\int_\Omega X dP(\omega)$ existe,c'est le cas si

$\int\limits_{\Omega} |X| \, dP(\omega) < \infty$, alors on définit l'espérance mathématique de X,par

$$E(X) = \int\limits_{\Omega} X dP(\omega) = \int\limits_{\mathbb{R}} x dP_X(x)$$

Propriétés de l'espérance mathématique

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$on a

1) Si $0 \leq X \leq Y$ alors $0 \leq E(X) \leq E(Y)$
2) Si $A \subset B$ et $X \geq 0$ alors $E(X1_A) \leq E(X1_B)$
3) $|E(X)| \leq E(|X|)$
4) $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$ (linéarité)

Remarque: Si A est un évènement, alors $E(1_A) = P(A)$ où 1_A désigne la fonction indicatrice de A.

Définition de l'espérance mathématique- cas discret

C'est le nombre réel (s'il existe), noté $E(X)$ *et défini par*

$$E(X) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} x_k P(X = x_k)$$

Remarque: On peut s'assurer de l'existence de $E(X)$ en montrant que la série numérique $E(|X|) = \sum\limits_{x_k \in X(\Omega)} |x_k| \, P(X = x_k)$

est convergente, ainsi la série $\sum\limits_{x_k \in X(\Omega)} x_k P(X = x_k)$ sera dite absolument convergente et donc convergente, d'où

l'existence de $E(X)$.

II-5-2 Variance

Définition

C'est le nombre positif(s'il existe), noté $V(X)$ *et défini par*

$$V(X) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} (x_k - E(X))^2 \, P(X = x_k)$$

Remarque: on utilise souvent l'écart-type de X, noté $\sigma(X)$ et défini par $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Si X est une grandeur physique, l'écart-type de X a la même grandeur physique que X, ce qui est plus intéressant

dans la pratique.

On peut définir de la même manière les moments d'ordre k d'une variable aléatoire discrète X.

II-5-3 Moments d'ordre k

Définition

C'est le nombre(s'il existe) $E(X^n) = m_n$, $n \in \mathbb{N}^*$ *défini par*

$$E(X^n) = m_n = \sum_{x_k \in X(\Omega)} x_k^n P(X = x_k)$$

Remarque: $m_1 = E(X)$ et $m_2 = E(X^2)$

II-5-4 Propriétés de $E(X)$ *et* $V(X)$

Définition

Une variable aléatoire est dite centrée, réduite si et seulement si, respectivement

$$E(X) = 0, V(X) = 1$$

Lemme II-5-4

Soit X *une variable aléatoire telle que* $E(X) = \mu$ *et* $V(X) = \sigma^2$*,alors* $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ *est une variable aléatoire centrée,*

réduite.

Lemme II-5-5

$$V(X) = m_2 - m_1^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

Lemme II-5-6

$$\text{Si } Y = aX + b, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

alors

$$\begin{aligned} E(Y) &= aE(X) + b \\ V(Y) &= a^2 V(X) \end{aligned}$$

Lemme II-5-7

Si X *et* Y *sont deux variables aléatoires indépendantes intégrables, alors*

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Plus généralement,si $h_1$et $h_2$sont deux fonctions telles que $h_1(X)$et $h_2(Y)$ soient intégrables,alors

$$E(h_1(X)h_2(Y)) = E(h_1(X))E(h_2(Y))$$

II-6 Variables aléatoires continues

Soit X une variable aléatoire continue définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et de fonction de répartition F_X, X est dite absolument

continue(ou simplement continue) s'il existe une fonction **positive** f_X telle que:

$$\forall x \in \mathbb{R};\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

La fonction f_X est appelée densité de probabilité de X.

II-6-1 Propriétés

$$a)\ P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(t)\,dt$$

$$b)\ \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt = 1$$

c) Si f_X est continue en x_0, alors F_X est dérivable en x_0 avec $F'_X(x_0) = f_X(x_0)$

Lemme II-6-2
Si X est une variable aléatoire continue, alors $P(X = x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$
En effet, car F_X est continue en x, alors $P(X = x) = F_X(x) - F_X(x^-) = 0$
II-6-3 Moments d'ordre k
Définition 1
C'est le nombre(sous réserve que l'intégrale existe) défini par

$$E\left(X^k\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x)\,dx$$

Si $k = 1$ on a l'espérance mathématique de X, soit $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx$

Si $k = 2$,on a $E\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx$, d'où $V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2$

On peut généraliser la définition précédente à des fonctions autres que la fonction puissance, d'où

Définition 2
Si X est une variable aléatoire continue et Y la variable aléatoire définie par $Y = \varphi(X)$ où φ est une fonction borélienne,
alors on définit l'espérance mathématique de Y par

$$E(Y) = E(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f_X(x)\,dx$$

Remarque: Les propriétés de $E(X)$ et $V(X)$ sont identiques au cas discret
$Y = \varphi(X)$ correspond à une transformation de la variable aléatoire X par une fonction borélienne, on obtient alors une
autre variable aléatoire Y dont on va déterminer sa densité

II-6-4 Densité de probabilité de $Y = \varphi(X)$

Proposition (changement de variables)

Soit X une variable aléatoire continue de densité f_X et soit $Y = \varphi(X)$ où φ comme définie précédemment est de plus

strictement monotone et dérivable. Alors $Y = \varphi(X)$ est une variable aléatoire continue dont la densité f_Y est

donnée par

$$f_Y\ (y) = \begin{cases} f_X\left(\varphi^{-1}(y)\right)\left|\varphi^{-1}(y)'\right| & si\ \ c < y < d \\ 0 & sinon \end{cases}$$

avec $c = \min\{\varphi(-\infty), \varphi(+\infty)\}, \quad d = \max\{\varphi(-\infty), \varphi(+\infty)\}$

Remarque

La stricte monotonie impliquant la bijectivité, alors si φ n'est pas bijective ou n'est pas strictement monotone, alors on

trouve la densité de $Y = \varphi(X)$ par dérivation de la fonction de répartition de Y, notée F_Y, soit

$$F_Y'(y) = P(Y \leq y)' = P(\varphi(X) \leq y)'$$

Contre-exemple

Soit X une variable aléatoire continue de densité f_X, cherchons la densité f_Y de $Y = X^2$. On a $Y = \varphi(X)$ avec $\varphi(x) = x^2$.

Dans ce cas, $\varphi'(x) = 2x$ positive pour $x > 0$ et négative pour $x < 0$, d'où φ n'est pas strictement monotone. Mais pour

$y > 0$, on a

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P\left(X^2 \leq y\right) = \\ &= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \end{aligned}$$

En dérivant, on obtient

$$F_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left(f_X\left(\sqrt{y}\right) + f_X\left(-\sqrt{y}\right)\right) & si\ \ y > 0 \\ 0 & si\ \ \ y < 0 \end{cases}$$

II-7 Principales lois de probabilité discrètes

II-7-1 Loi de Dirac(variable aléatoire certaine)

Soit a un nombre réel fixé, et soit X une variable aléatoire telle que $P(X = a) = 1$, donc $X(\Omega) = \{a\}$. On appelle loi de

Dirac au point a la probabilité δ_a avec

$$\delta_a(x) = \begin{cases} 1 & si\ \ x = a \\ 0 & si\ \ x \neq a \end{cases}$$

On a $E(X) = a$ et $V(X) = 0$

Les trois lois suivantes sont liées à la même expérience $\mathcal{E}$ à savoir: une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ est tentée avec laquelle

deux résultats seulement sont possibles: un succès obtenu avec une probabilité p et un échec obtenu avec une

probabilité $1-p$

II-7-2 Loi de Bernoulli: suivant l'expérience aléatoire $\mathcal{E}$

Une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p $(0<p<1)$ si

$$X(\Omega)=\{0,1\} \text{ avec } P(X=1)=p,\ P(X=0)=1-p$$

On écrit $X\hookrightarrow\mathcal{B}(p)$, de plus $E(X)=p$ et $V(X)=p(1-p)$.

II-7-3 Loi Binomiale: suivant l'expérience aléatoire $\mathcal{E}$ répétée n fois

La variable aléatoire X qui représente le nombre de succès au cours de ces n tentatives suit une loi binomiale de

paramètres n et p, on écrit $X\hookrightarrow\mathcal{B}(n,p)$ avec

$$\begin{aligned}X(\Omega)&=\{0,1,2,...,n\}\\P(X=k)&=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\qquad k\in\{0,1,2,...,n\}\end{aligned}$$

$$E(X)=np\qquad V(X)=np(1-p)$$

Remarque: X représente la somme de n variables aléatoires qui chacune suit une loi de Bernoulli et de façon

indépendante.

II-7-3 Loi Géométrique: suit l'expérience aléatoire $\mathcal{E}$ répétée de façon indépendante jusqu'à obtention d'un premier

succès

La variable aléatoire X qui représente le nombre d'essais requis pour l'obtention du premier succès suit une loi

géométrique de paramètre p,on écrit $X\hookrightarrow\mathcal{G}(p)$ avec

$$\begin{aligned}X(\Omega)&=\mathbb{N}^*\\P(X=k)&=p(1-p)^{k-1},k\in\mathbb{N}^*\end{aligned}$$

$$E(X)=\frac{1}{p}\qquad V(X)=\frac{1-p}{p^2}$$

II-7-4 Loi de Poisson

Cette loi s'applique souvent à la description du comportement du nombre X d'évènements qui se produisent dans un certain intervalle de temps.On a

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \mathbb{N} \\ P(X=k) &= e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

$$E(X) = \lambda \qquad V(X) = \lambda$$

$\lambda > 0$, est le paramètre de la loi, on écrit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$

II-8 Principales lois de probabilité continues

II-8-1 Loi uniforme

C'est une loi très utilisée lors des simulations numériques. Une variable aléatoire continue X suit une loi uniforme sur

un intervalle $[a,b]$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[a,b]}$ si sa densité de probabilité f_X est donnée par

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si \quad x \in [a,b] \\ 0 & si \quad x \notin [a,b] \end{cases}$$

Sa fonction de répartition est

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & si \quad x \in [a,b] \\ 1 & si \quad x > b \end{cases}$$

De plus

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

II-8-2 Loi exponentielle

C'est une loi utilisée lors de la modélisation de problèmes de temps d'attente(files d'attente). Une variable aléatoire

continue X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, et on note $X \hookrightarrow \exp(\lambda)$, si sa densité de probabilité f_X est

donnée par

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{[0,+\infty[}(x)$$

Sa fonction de répartition est

$$F_X(x) = \left(1 - e^{-\lambda x}\right) 1_{[0,+\infty[}(x)$$

et on a

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

II-8-3 Loi normale

C'est la plus célèbre des lois de probabilité. En particulier, elle sert d'approximation à beacoup de lois. Une variable

aléatoire continue X suit une loi normale de paramètres μ et σ^2,et on note $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ si sa densité de probabilité f_X

est donnée par

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad \mu \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$$

Sa fonction de répartition est

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\dfrac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

On a

$$E(X) = \mu \qquad V(X) = \sigma^2$$

Comme on le voit, on ne peut pas exprimer F_X à l'aide de fonctions classiques, mais l'intégration numérique nous

permet de pallier à cet inconvénient, à condition toutefois d'éviter la présence des paramètres μ et σ^2 car ces derniers

prennent une infinité de valeurs. Pour cela, il suffira de connaître la fonction de répartition d'une variable de loi

$\mathcal{N}(0,1)$.

Proposition: Soit X une variable aléatoire continue définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .On pose $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$, alors si

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right), \text{ on a } Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

II-8-9 Quelques inégalités utiles sur les variables aléatoires

1) Inégalité de Markov

Si X est une variable aléatoire P intégrable, alors on a pour tout $\alpha > 0$

$$P(|X| > \alpha) \leq \frac{E(|X|)}{\alpha}$$

Démonstration

$|X|$ peut s'écrire

$$|X| = |X| 1_{\{|X|>\alpha\}} + |X| 1_{\{|X|\leq\alpha\}}$$

Par positivité et linéarité de l'espérance

$$E|X| \geq E\left(|X| 1_{\{|X|>\alpha\}}\right)$$

or

$$|X|\, 1_{\{|X|>\alpha\}} > \alpha 1_{\{|X|>\alpha\}}$$

et par conséquent

$$E\,|X| \geq \alpha E\left(1_{\{|X|>\alpha\}}\right)$$

c'est à dire

$$E\,|X| \geq \alpha P\,(|X| > \alpha)$$

2) Inégalité de Tchebychev
Soit X une variable aléatoire admettant une variance, alors

$$\forall t > 0 \qquad P\,(|X - E\,(X)| > t) \leq \frac{V\,(X)}{t^2}$$