Solution Examen remplacement Stat paramétrique

Exercice n°1 (6pts)

$X \sim N(0, 1/\theta)$.

$f_X(x;\theta) = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\theta}{2}x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $\theta > 0$.

$\begin{cases} H_0 : \theta = 1 = \theta_0 \\ H_1 : \theta > 1 = \theta_1 \end{cases}$

1\ Déterminer la région critique d'un test UPP de risque $\alpha = 0.05$

f est de type exponentiel car:

$f_X(x;\theta) = e^{-\frac{\theta}{2}x^2 + \frac{1}{2}(\ln\theta - \ln(2\pi))}$. 1pts.

le rapport de x ne dépend pas le paramètre θ et $a(x) = x^2$, $b(\theta) = -\frac{\theta}{2}$, $c(x) = 0$

et $\beta(\theta) = \frac{1}{2}(\ln\theta - \ln 2\pi)$, c'l'ga

La région critique est donnée par:

$W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum a(x_i) > k_\alpha\}$ si $\alpha(\theta_1) > \alpha(\theta_0)$. 1pts.

$W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum a(x_i) < k_\alpha\}$ si $\alpha(\theta_1) < \alpha(\theta_0)$.

On a $\alpha(\theta) = -\frac{\theta}{2}$ et $\theta_1 > \theta_0$. $\Rightarrow$ $\alpha(\theta_0) > \alpha(\theta_1)$.

D'où $W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum x_i^2 < k_\alpha\}$.

et puisque W ne dépend pas θ, le test UPP existe et la région critique $W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum x_i^2 < k_\alpha\}$.

2pts

$\alpha = P_{H_0}(W) = P_{H_0}(\sum x_i^2 < k_\alpha)$.

Sous H_0 : $\theta_0 \sum x_i \sim \chi^2_n$

$\alpha = P(\theta_0 \sum x_i^2 < \theta_0 k_\alpha) = P(\chi^2_{15} < k_\alpha) \Rightarrow \alpha = \Phi_{\chi^2_{15}}(k_\alpha)$

$k_\alpha = \Phi^{-1}_{\chi^2_{15}}(0.05) = 7.26$.

2) La fonction de puissance :

$\Pi(\theta_1) = 1 - \beta(\theta_1) = P_{H_1}(W)$.

Sous H_1 : $\theta_1 \sum x_i^2 \sim \chi^2_{n}$.

$\Pi(\theta_1) = P_{H_1}(\theta_1 \sum x_i^2 < \theta_1 k_\alpha)$. 1pts

$= P_{H_1}(\chi^2_{n} < \theta_1 k_\alpha)$.

$= \Phi_{\chi^2_{n}}(\theta_1 k_\alpha)$.

pour $n = 20$, $\theta = 2$ et $\alpha = 0.05$; on trouve :

$\Pi(2) = \Phi_{\chi^2_{20}}(2k_\alpha)$; pour $n = 20 \Rightarrow k_\alpha = 10.85$. 1pts.

~~d'où~~ $\cancel{\Pi(2) = \Phi_{\chi^2_{20}}(2 \times 7.26) = \Phi_{\chi^2_{20}}(14.52)}$ $\cancel{\Pi(2) = \Phi_{\chi^2_{20}}(14.52)}$

$\Pi(2) = \Phi_{\chi^2_{20}}(21.64)$.

Exercice n°=2 : (4pts).

On a : $X \sim N(\mu, \sigma^2)$; avec μ et σ^2 sont inconnues ; $n = 20$ et.

$\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x}_{20}) = 250$.

1) Déterminer I.C pour σ^2 de niveau 0.95 :

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} \Rightarrow S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{250}{19} = 13.157$

IC pour σ^2 : $1 - \alpha = P\left(k_{\alpha/2} \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq k_{1-\alpha/2}\right)$.

$= P\left(\frac{(n-1)S^2}{k_{1-\alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{k_{\alpha/2}}\right)$ 4pts.

avec $k_{\alpha/2} = \Phi^{-1}_{\chi^2_{n-1}}(\alpha/2)$ et $k_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}_{\chi^2_{n-1}}(1 - \alpha/2)$

$IC_{1-\alpha}(\sigma^2) = \left[\frac{(n-1)S^2}{k_{1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)S^2}{k_{\alpha/2}}\right]$.

Application numerique:

1- $\alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow k_{\alpha/2} = \Phi^{-1}_{\chi^2_{19}}(0.025) = \cancel{10.12}\ 8.91.$

$k_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}_{\chi^2_{19}}(0.975) = 32.85, \quad S^2 = 13.157.$

d'où $IC_{0.95}(\sigma^2) = \cancel{[7.60, 28.95]}.\ [7.60, 28.05]$

Exercice n° 3 (10pts)

$$f(x;\theta) = \frac{3x^2}{\theta} e^{-\frac{x^3}{\theta}} \quad ; x > 0 \quad ; \theta > 0.$$

1) Montrer que f est de type exponentiel:

Puisque le support de x ne dépend pas θ et

$$f_x(x;\theta) = \frac{3x^2}{\theta} e^{-\frac{x^3}{\theta}} = e^{-\frac{x^3}{\theta} + \ln(3x^2) - \ln(\theta)} = e^{\alpha(\theta)a(x) + b(x) + b(\theta)}$$

avec $\alpha(\theta) = -\frac{1}{\theta}$, $a(x) = x^3$, $b(x) = \ln(3x^2)$ et $b(\theta) = -\ln(\theta)$, alors

1pts.

f est de type exponentielle.

2) Trouver EMV T_n de θ.

$$L(x_1 \ldots x_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{3x_i^2}{\theta} e^{-\frac{x_i^3}{\theta}}.$$

$$\log L(x_1 \ldots x_n;\theta) = 3\sum \log(x_i^2) - n\ln(\theta) - \frac{1}{\theta}\sum x_i^3.$$

$$\frac{\partial \log L(x_1 \ldots x_n;\theta)}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum x_i^3 = 0 \Rightarrow \frac{\sum x_i^3}{\theta} = n$$

2pts

$$\Rightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum x_i^3.$$

$$\frac{\partial^2 \log L(x_1 \ldots x_n;\theta)}{\partial \theta^2} = \frac{n}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3}\sum x_i^3 = \frac{n}{\theta^2} - \frac{2n}{n\theta^3}\sum x_i^3 = \frac{n}{\theta^2} - \frac{2n}{\theta^2} = -\frac{n}{\theta^2} < 0$$ 1pts

d'où $T_n = \frac{1}{n}\sum x_i^3$ est un EMV de θ.

3) Déterminer la densité de $Y = \frac{X^3}{\theta}$.

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(\frac{X^3}{\theta} \leq y\right) = P(X^3 \leq \theta y) = P(X \leq (\theta y)^{1/3}) = F_X((\theta y)^{1/3})$

$$f_Y(y) = \frac{\theta^{1/3}}{3} y^{-2/3} f_X((\theta y)^{1/3})$$

$$= \frac{\theta^{1/3}}{3} y^{-2/3} \cdot \frac{3}{\theta} (\theta y)^{2/3} e^{-\frac{1}{\theta}\theta y} \quad \text{2pts}$$

$$= e^{-y} \quad ; y > 0.$$

d'où $Y \sim \mathcal{E}(1)$ et $E(Y) = 1$, $V(Y) = 1$. 1pt

4) Etudier le biais, la convergence et l'efficacité de T_n :

$E(T_n) = E\left(\frac{1}{n}\sum x_i^3\right) = E(x_i^3) = E(\theta Y) = \theta E(Y) = \theta$. 1pt

d'où T_n est un estimateur sans biais.

$V(T_n) = V\left(\frac{1}{n}\sum x_i^3\right) = \frac{1}{n} V(x_i^3) = \frac{1}{n} V(\theta Y) = \frac{\theta^2}{n} V(Y) = \frac{\theta^2}{n}$.

1pt.

$$\begin{cases} E(T_n) = \theta \\ V(T_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \end{cases} \Rightarrow T_n \xrightarrow{P} \theta.$$

d'où T_n est convergent et converge vers θ.

$$I_n(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2 \ln L(x_1 \dots x_n; \theta)}{\partial \theta^2}\right) = -E\left(\frac{n}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3}\sum x_i^3\right) = -\frac{n}{\theta^2} + \frac{2n}{\theta^3}E(x_i^3) =$$

$$= -\frac{n}{\theta^2} + \frac{2n\theta}{\theta^3} = -\frac{n}{\theta^2} + \frac{2n}{\theta^2} = \frac{n}{\theta^2} \text{ 1pt.}$$

d'où $BCR = \frac{1}{I_n(\theta)} = \frac{\theta^2}{n} = V(T_n)$.

alors T_n est un estimateur efficace.