Fiabilité

Dahmane Zineb

2020-05-6

Contents

1 Caracteristiques de fiabilité **5**

2 Fiabilité des systèmes non réparables **7**

3 Théorie de renouvellement **9**

3.1 Processus ordinaire de renouvellement 9
3.2 Fonction de renouvellement 10
3.3 Quelques approximations 12

Chapter 1

Caracteristiques de fiabilité

deja vu.

Chapter 2

Fiabilité des systèmes non réparables

deja vu.

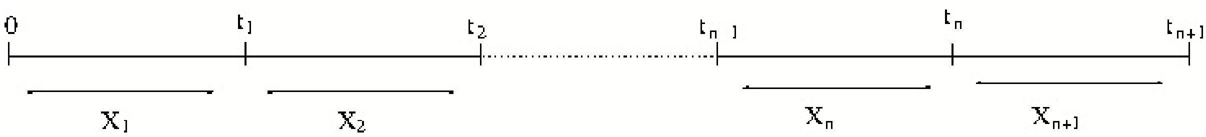
Suite aux deux premiers chapitres : "Caractéristiques de Fiabilité" et "Fiabilité des systèmes non réparables", dans le chapitre suivant, nous allons introduire "La théorie de renouvellement" avec exercice résolu.

Chapter 3

Théorie de renouvellement

Dans ce chapitre, nous allons décrire le modèle mathématique d'un élément qui fonctionne pendant une période, dés qu'il tombe en panne, l'élément est renouvelé par un élément neuf identique au précédent. Dans un premier temps, nous supposons que la durée de remplacement est négligeable.

3.1 Processus ordinaire de renouvellement



Le modèle de fonctionnement de l'élément est représenté par la figure ci-dessus.

L'élément commence à fonctionner à l'instant $t_0 = 0$, à l'instant t_1 se produit une première panne, l'élément est alors remplacé par un neuf (c'est ce que nous appelons 1^{ier} *renouvellement*). A l'instant t_2 survient une deuxième panne et encore une fois, l'élément est remplacé par un neuf (deuxième *renouvellement*); ainsi de suite.

t_n : date de la n^{eme} panne,
$X_n = t_n - t_{n-1}$: durée de vie du n^{eme} élément (intervalle de temps entre la $(n-1)^{eme}$ et la n^{eme} panne).

hypothèses

- Les variables aléatoires X_1, X_2,......,X_n sont indépendantes et identiquement distribuées de loi F définie par :
  $\forall i \geq 1$, $F_i(t) = p(X_i \leq t) = F(t)$; $t \geq 0$
- En théorie de renouvellement, les variables aléatoires X_1, X_2,......,X_n sont appelées *inter-arrivées.*

Définition 1. *La suite $\{X_n,\ n \geq 1\}$ s'appelle Processus ordinaire renouvellement.*

Remarque 1. •

- *En général, X_1 représente une durée de vie résiduelle, du moment qu'à $t = 0$ l'âge du système (ou l'élément) n'est pas connu; dans ce cas $F_1(t) \neq F(t)$ et le processus de renouvellement est dit* attardé.
- *Notons que dans notre interprétation, le temps de renouvellement est supposé négligeable. Dans le cas contraire, on est en présence d'un* processus de renouvellement alterné.
- *La variable $t_k = X_1 + X_2 + ... + X_k$ représente la date d'occurrence du k^{eme} renouvellement (panne).*

Définition 2. *Pour une date t fixée, soit $N(t)$ le nombre de renouvellements (ou pannes) entre 0 et t,*

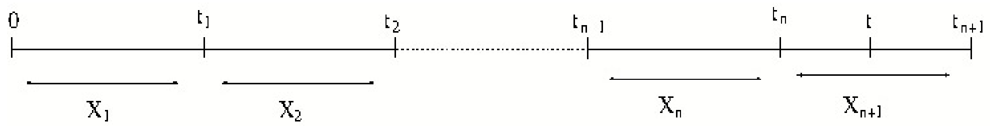
$$\mathbf{N(t)} = \begin{cases} \max\{k; \quad t_k \leq t\} & si \quad t \geq t_1 \\ 0 & si \quad t < t_1 \end{cases}$$

Le processus $N(t)$ s'appelle processus de comptage de renouvellement ou processus de dénombrement.

3.2 Fonction de renouvellement

Définition 3. *On appelle fonction de renouvellement, l'espérance mathématique du processus de comptage notée par :*

$$H(t) = E[N(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} n.p\{N(t) = n\}$$



$\{N(t) = n\} \Longleftrightarrow (t_n \leq t) \cap (t_{n+1} > t) \Longleftrightarrow (t_n \leq t) \cap (t_n + X_{n+1} > t)$
Autrement

$$\{N(t) = n\} \Longleftrightarrow (t_n \leq t < t_{n+1})$$

d'où la probabilité de n renouvellements dans l'intervalle (0,t) s'écrit

$$\begin{aligned} p\{N(t) = n\} &= p(t_n \leq t < t_{n+1}) = p(t_n \leq t) - p(t_{n+1} \leq t) = p(N(t) \geq n) - p(N(t) \geq n+1) \\ &= p(X_1 + X_2 + ... + X_n \leq t) - p(X_1 + X_2 + ... + X_n + X_{n+1} \leq t) \\ &= F^{(n)}(t) - F^{(n+1)}(t) \end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned} F^{(n)}(t) = &\ p(t_n \leq t) = p(X_1 + X_2 + ... + X_n \leq t) = p(N(t) \geq n) \\ = &\ F \otimes F \otimes .... \otimes F \text{ (n fois) est le produit de convolution d'ordre n pour la fonction F} \end{aligned}$$

Remarque 2. *Pour plus de détails sur le produit de convolution voir Aissani [1] ou Bayna [2].*

$F^{(n)}(t)$ désigne la fonction de répartition de t_n, date du néme renouvellement. $F^{(n)}(t)$ est également la probabilité d'avoir au moins n pannes (n renouvellements) entre (0,t).

On obtient ainsi

$$H(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n.\{F^{(n)}(t) - F^{(n+1)}(t)\} = \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(t)$$

Or, $F^{(n)}(t) = \int_0^t F^{(n-1)}(t-x)\, dF(x)$
d'où

$$\begin{aligned} H(t) = &\ \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t F^{(n-1)}(t-x)\, dF(x) = \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n-1)}(t-x)\, dF(x) \\ = &\ \textstyle\int_0^t F^{(0)}(t-x)\, dF(x) + \int_0^t \sum_{n=2}^{\infty} F^{(n-1)}(t-x)\, dF(x) \end{aligned}$$

Aprés un calcul élémentaire et du fait que $F^{(0)} = 1$, on trouve

$$H(t) = \textstyle\int_0^t dF(x) + \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(t-x)\, dF(x)$$

et comme $H(t-x) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(t-x)$ du fait que $H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(t)$
alors, on trouve

$$H(t) = F(t) + \int_0^t H(t-x)\, dF(x) \tag{3.1}$$

Remarque 3. *H est également définie par*

$$H(t) = F(t) + \int_0^t F(t-x)\, dH(x)$$

Si H a pour dérivée h, alors

$$h(t) = \frac{dH(t)}{dt} = f(t) + \int_0^t h(t-x).f(x)\, dx$$

représente le taux de renouvellement du processus,
h(t) est également appelé *densité de renouvellement.*

Résolution de l'équation de renouvellement

Il est plus commode de résoudre l'équation (3.1) en terme de transformé de Laplace

$$\widehat{H}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\, dH(t)$$

En appliquant la transformée de Laplace à l'équation générale de renouvellement et en utilisant les propriétés du produit de convolution (voir p. 142 A. Aissani), l'equation (3.1) s'écrit :

$$\widehat{H}(s) = \widehat{F}(s) + \widehat{H}(s)\widehat{F}(s)$$

d'où

$$\widehat{H}(s) = \frac{\widehat{F}(s)}{1 - \widehat{F}(s)} \tag{3.2}$$

Remarque 4. *La fonction de renouvellement ne peut être obtenue sous une forme explicite, à l'exception de certains cas particuliers.*

Loi exponentielle

$F(t) = 1 - e^{-\alpha t}$, $f(t) = \alpha.e^{-\alpha t}$
sa transformée de Laplace

$$\widehat{F}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\,dF(t) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\,d(1 - e^{-\alpha t}) = \frac{\alpha}{\alpha + s}$$

En remplaçant $\widehat{F}(s) = \frac{\alpha}{\alpha+s}$ dans l'équation (3.2), nous trouvons :

$$\widehat{H}(s) = \frac{\frac{\alpha}{\alpha+s}}{1 - \frac{\alpha}{\alpha+s}} = \frac{\alpha}{s}$$

$\widehat{H}(s) = \frac{\alpha}{s}$ est la transformée de Laplace de la fonction de renouvellement $H(t) = \alpha.t$.
Comme $H(t) = \alpha.t$ est l'espérance mathématique du processus de comptage $N(t)$, nous avons, donc
$N(t)$ suit la loi de Poisson de moyenne $H(t) = \alpha.t$

$$N(t) \longrightarrow \mathcal{P}(\alpha t)$$

3.3 Quelques approximations

Nous allons présenter quelques théorèmes limites, trés utilisés en pratique.

Théorème élémentaire de renouvellement

Si T_0 est la moyenne de la durée de vie d'un élément ($T_0 < +\infty$), alors quand t tend vers l'infini, que le processus soit retardé ou pas, nous avons la limite :

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{H(t)}{t} = \frac{1}{T_0}$$

interprétation Au cours d'une longue période de temps, le nombre moyen de panne par unité de temps est proche de $\frac{1}{T_0}$.
Pour t grand, on peut utililisé l'approximation :

$$H(t) \approx \frac{t}{T_0}$$

Exercice 1. *()*
Une machine comporte un élément fragile qu'il faut renouveler assez souvent. Cet élément a une durée de vie moyenne $T_0 = 100$ *heures et un écart-type* $\sigma = 60$ *heures (*$\sigma^2 = 3600$*). Son remplacement est considéré comme instantané.*
On exige un fonctionnement sans interruption au cours d'une période t=8000 heures.

- *Donner une approximation du nombre d'éléments que l'on doit prévoir en stock.*

On sait que $H(t) \approx \frac{t}{T_0}$, $\quad H(8000) \approx \frac{8000}{100} = 80$

Cela veut dire qu'il faut avoir 80 pièces (éléments) en moyenne, comme pièces de rechange, pour qu'il n y ai pas de repture de travail.

théorème 1. *Considérons un processus de renouvellement ordinaire* $\{X_i,\, i \geq 1\}$ *avec une espérance* $E[X_i] = T_0$ *et une variance* $Var(X_i) = \sigma^2$.
Soit H(t) sa fonction de renouvellement,

$$\lim_{t \to +\infty} [H(t) - \frac{t}{T_0}] = \frac{\sigma^2}{2T_0^2} - \frac{1}{2}$$

Autrement, si t est grand, on peut utiliser l'approximation

$$H(t) \approx \frac{t}{T_0} + \frac{\sigma^2}{2T_0^2} - \frac{1}{2}$$

Exercice 2. *(suite)*
Dans l'exercice précédent, on a trouvé que le nombre moyen de renouvellement au cours de 8000 heures est approximativement $H(8000) \approx 80$.
Donnons maintenant une approximation plus précise, en utilisant le théorème précédent,

$$H(8000) \approx \frac{8000}{100} + \frac{3600}{2.100^2} - \frac{1}{2} = 79,68$$

Bibliography

[1] A. Aissani, *Modèle Stochastique de la théorie de Fiabilité*, OPU,1992.

[2] B. Baynat. *Théorie des Files d'Attente* Hermes Science Europe, 2000.

[3] J.L. Bon, *Fiabilité des Systèmes, Méthodes Mathématiques*, Masson, Paris, 1995.