Chapitre 1- Rappels et compléments de probabilités Convergences et théorèmes limites

Rabah Messaci

Département de Probabilités-Statistique
USTHB

octobre 2011

Introduction

Différents types de convergence existent pour les suites de fonctions (CV simple, CV uniforme), certaines étant plus fortes que d'autres. De la même manière on va définir différents types de convergence pour des suites de v.a.

En général , toute notion de convergence est associée à une notion de distance,.

Des distances différentes définissent des notions de convergence différentes.

$X_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} X$ dans un certain sens si pour une certaine distance d,

$\lim\limits_{n \to +\infty} d(X_n, X) = 0.$

En probabilité, pour certains types de convergence, cette notion de distance n'apparait pas de manière explicite, bien qu'elle soit sous-jacente.

Convergence en loi

Définition :Convergence en loi

Soit $(X_n)_{n\in N}$ une suite de v.a. La suite $(X_n)_{n\in N}$ est dite converger en loi vers la v.a X si

$$F_{X_n}(x) \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} F_X(x)$$

en tout x point de continuité de F_X.

Notation : $X_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\overset{Loi}{\longrightarrow}} X$

CV en loi : illustration

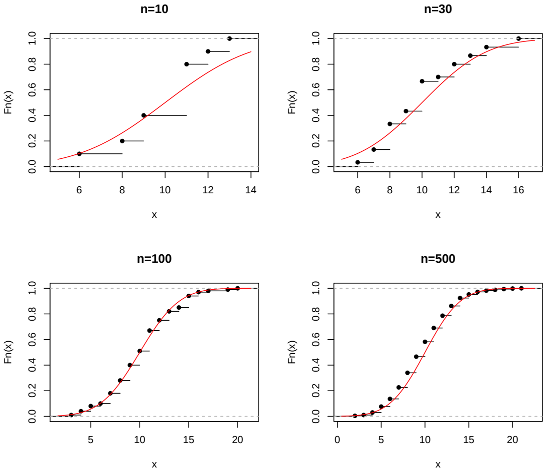

FIGURE: Evolution des f.r dans la CV en loi

CV en loi : illustration

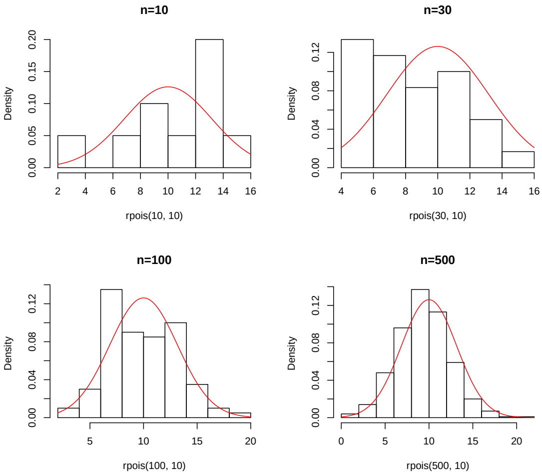

FIGURE: Evolution des histogrammes dans la CV en loi

Définition équivalente

$X_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\xrightarrow{Loi}} X$ si et seulement xi $\Psi_{X_n}(u) \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \Psi_X(u)$ en tout u point du domaine de définition de Ψ_X.

Si $X_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\xrightarrow{Loi}} X$ on a $P(X_n < x) = F_{X_n}(x) \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} P(X < x) = F_X(x)$ (en tout x point de continuité de F_X) et donc

$P(a < X_n < b) = F_{X_n}(b) - F_{X_n}(a) \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a)$

Conclusion : si n est grand

$P(X_n < x) \approx P(X < x)$

$P(a < X_n < b) \approx P(a < X < b)$

Convergence en probabilité

Définition :Convergence en probabilité

Soit $(X_n)_{n\in N}$ une suite de v.a. La suite $(X_n)_{n\in N}$ est dite converger en probabilité vers la v.a X si

$$\forall \epsilon > 0 \quad P(|X_n - X| > \epsilon) \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Exemples

Soit $(X_n)_{n\in N}$ une suite de v.a telles que $X_n \backsim B(\frac{1}{n})$. Montrons que $X_n \overset{Pr\,oba}{\underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow}} 0$

On a : $P(|X_n - 0| > \epsilon) = \begin{cases} 0 \text{ si } & \epsilon \geq 1 \\ \frac{1}{n} \text{ si } & \epsilon < 1 \end{cases}$

$\Longrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} P(|X_n - 0| > \epsilon) = 0 \quad \forall \epsilon > 0$

Convergence en probabilité

Exemples

Soit $(X_n)_{n\in N}$ une suite de v.a telles que $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$ et $P(X_n = n) = \frac{1}{n^2}$

On a $P(|X_n - 0| > \epsilon) = \frac{1}{n^2}$

$\lim_{n\to+\infty} P(|X_n - 0| > \epsilon) = 0 \quad \forall \epsilon > 0 \implies X_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\overset{Proba}{\longrightarrow}} 0$

Convergence presque sûre

Définition : Convergence presque sûre

Soit $(X_n)_{n\in N}$ une suite de v.a. La suite $(X_n)_{n\in N}$ est dite converger presque sûrement vers la v.a X s'il existe un ensemble $A \subset \Omega$, avec P(A)=1, telle que :

$$\forall \omega \in A \quad \lim_{n\rightarrow+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$$

Proposition

Soit $(X_n)_{n\in N}$ telle que : $X_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\xrightarrow{P.S}} X$ alors $X_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\xrightarrow{\Pr oba}} X$

Théorème à admettre

Convergence en moyenne quadratique

Les convergences en probabilité et presque sûre ne sont pas généralement faciles à établir. On a donc besoin de critères suffisants. La notion de convergence en moyenne quadratique est plus simple, car c'est la convergence de moments d'ordre 2. Elle implique la C.V en probabilité et donc est une condition suffisante de cette dernière.

Définition :Convergence en moyenne quadratique

Soit $(X_n)_{n\in N}$ une suite de v.a amettant des moments d'ordre 2. La suite $(X_n)_{n\in N}$ est dite converger en moyenne quadratique vers la v.a X si

$$\lim_{n\to+\infty} E((X_n - X)^2) = 0$$

Convergence en moyenne quadratique

Exemples

Soit $(X_n)_{n\in N}$ une suite de v.a telles que $X_n \sim B(\frac{1}{n})$. Montrons que $X_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{m.q} 0$

On a $E(|X_n - 0|^2) = E({X_n}^2) = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$

Exemples

Soit $(X_n)_{n\in N}$ une suite de v.a telles que $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$ et $P(X_n = n) = \frac{1}{n^2}$

$X_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{m.q} 0?$

On a $E(|X_n - 0|^2) = E({X_n}^2) = \frac{n^2}{n^2} = 1 \underset{n\longrightarrow+\infty}{\not\rightarrow} 0$

Donc $X_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\overset{m.q}{\not\rightarrow}} 0$

Convergence en moyenne quadratique

Proposition

$$X_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{m.q} X \iff \lim_{n \to +\infty} E(X_n) = E(X) \text{ et } \lim_{n \to +\infty} Var(X_n - X) = 0$$

Démonstration

$$E((X_n - X)^2) = Var(X_n - X) + (E(X_n - X))^2$$

Corollaire

Soit a une constante réelle, on a : $X_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{m.q} a \iff \lim_{n \to +\infty} E(X_n) = a$ et $\lim_{n \to +\infty} Var(X_n) = 0$

Démonstration conséquence directe duthéorème précédent
$E((X_n - X)^2) = Var(X_n - X) + (E(X_n - X))^2$

Convergence en moyenne quadratique

Proposition

Soit $(X_n)_{n \in N}$ telle que : $X_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\overset{m.q}{\longrightarrow}} X$ alors $X_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\overset{\Pr oba}{\longrightarrow}} X$

Démonstration
Rappel : inégalité de Bienaymé-Tcebychev
si X est une v.a avec une espérance m et une variance σ^2 finies, on a

$$\forall \epsilon > 0 \qquad P(|X - m| > \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

On applique cet inégalité à $Y = X_n - X$ qui est une variable centrée (de moyenne nulle)

$$P(|X_n - X| > \epsilon) \leq \frac{E((X_n - X)^2)}{\epsilon^2} \implies$$

$$\lim_{n \to +\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) \leq \lim_{n \to +\infty} \frac{E((X_n - X)^2)}{\epsilon^2} = 0$$

Diagramme des convergences

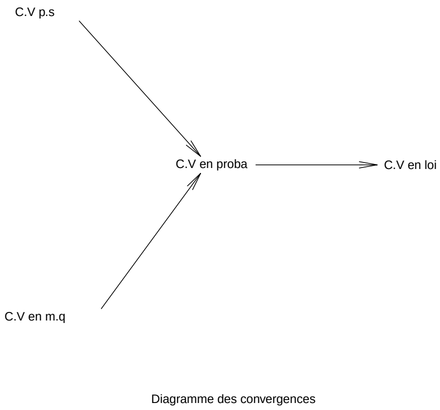

FIGURE: Diagramme des CV

Théorèmes limites

Ce qu'on appelle théorèmes limites, est constitué de deux familles de théorèmes (lois des grands nombres et théorèmes central limite ou de la limite centrale) absolument fondamentaux en probabilités et statistique.

Lois des grands nombres

Théorème : loi faible des grands nombres

Soit $(X_n)_{n\in N}$ une suite de v.a i.i.d admettant une espérance m et une variance σ^2 finies. Alors

$$\overline{X_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\overset{\Pr oba}{\longrightarrow}} m$$

Démonstration :
rappel : inégalité de Bienaymé-Tcebychev
si X est une v.a avec une espérance m et une variance σ^2 finies, on a :

$$\forall\epsilon > 0 \qquad P(|X - m| > \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

On applique cet inégalité à $\overline{X_n}$

$$\forall\epsilon > 0, \quad P(\left|\overline{X_n} - m\right| > \epsilon) \leq \frac{Var(\overline{X_n})}{\epsilon^2} = \frac{Var(X)}{n\epsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Lois des grands nombres

Théorème : loi forte des grands nombres

Soit $(X_n)_{n\in N}$ une suite de v.a i.i.d admettant une espérance m et une variance σ^2 finies. Alors

$$\overline{X_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{P.S} m$$

exemples

1. Soit $(X_n)_{n\in N}$ une suite de v.a i.i.d de loi de Bernoulli $B(p)$. On a
$$\overline{X_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{nombre\ de\ piles\ obtenus}{n} = F_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{P.S} p$$
2. $X_i \sim N(m,\sigma^2),\ 1\leq i\leq n$ i.i.d $\Longrightarrow \overline{X_n} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{P.S} m$
3. $X_i \sim P(\lambda),\ 1\leq i\leq n$ i.i.d $\Longrightarrow \overline{X_n} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{P.S} \lambda$

LGN :illustration

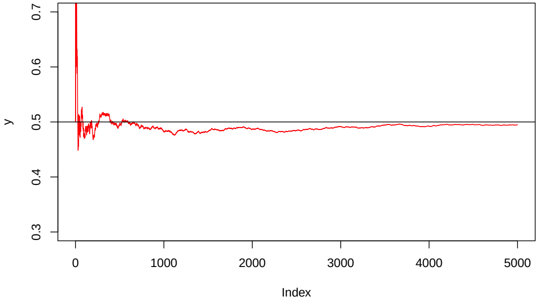

FIGURE: Evolution de la moyenne : n=5000

LGN :illustration

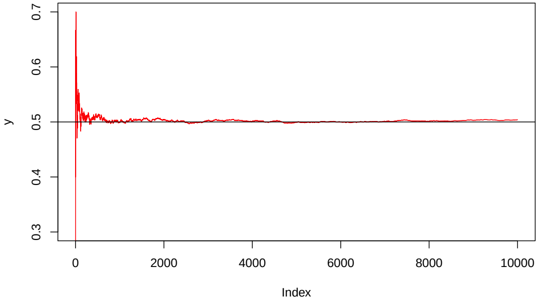

FIGURE: Evolution de la moyenne : n=10000

Théorème central limite : TCL

Théorème : TCL

Soit $(X_n)_{n\in N}$ une suite de v.a i.i.d admettant une espérance m et une variance σ^2 finies. Alors

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - nm}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{Loi} X$$

avec $X \sim N(0,1)$

Corollaire : Autre écriture du TCL

Sous les mêmes hypothèses, si on pose

$\overline{X_n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ on a

$$\frac{\overline{X_n} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{Loi} X$$

avec $X \sim N(0,1)$

TCL :illustration

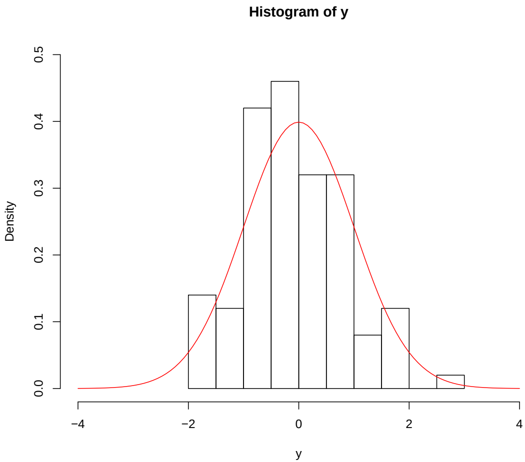

FIGURE: Distribution de la moyenne : n=10

TCL :illustration

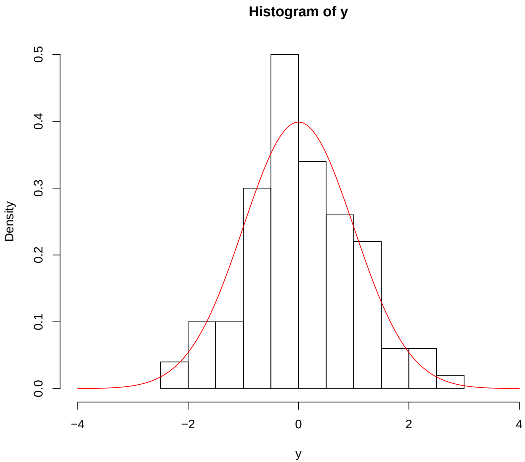

FIGURE: Distribution de la moyenne : n=20

TCL :illustration

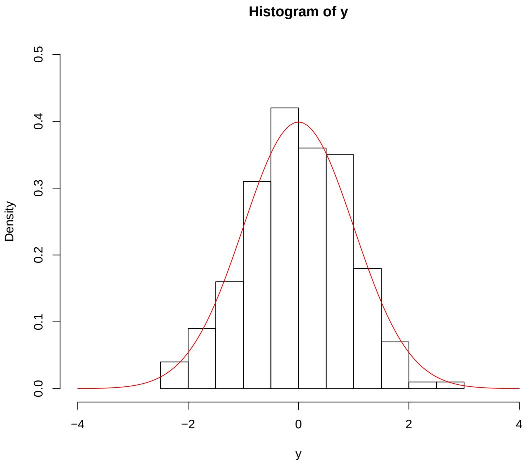

FIGURE: Distribution de la moyenne : n=50

Théorème central limite

exemples

approximation normale de la loi binomiale

Soit $(X_n)_{n\in N}$ une suite de v.a i.i.d de loi de Bernoulli $B(p)$. On a $\sum_{i=1}^{n} X_i \backsim B(n,p)$

et si n grand

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \approx N(np,npq) \implies B(n,p) \approx N(np,npq)$$

exemples (suite)

Approximation normale de la loi de Poisson Soit $(X_n)_{n\in N}$ une suite de v.a i.i.d de loi de Bernoulli $P(n\lambda)$.

On a $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim P(n\lambda)$

et si n grand

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \approx N(\lambda,\lambda) \implies P(n\lambda) \approx N(\lambda,\lambda)$$