Corrigé série 3
Variables aléatoires continues

Exercice 1
1) a) On doit avoir

$$1=\int_0^2 c\,|x-1|\,dx = c\left[\int_0^1 (1-x)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx\right]=1$$

soit

$$\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^2=\frac{1}{c}\Longleftrightarrow \frac{1}{c}=\frac{1}{2}+2-2-\frac{1}{2}+1=1$$

donc

$$c=1$$

b)

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^2 x\,|x-1|\,dx=\int_0^1 x(1-x)\,dx+\int_1^2 x(x-1)\,dx= \\ &= \left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_1^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{8}{3}-2-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=1 \end{aligned}$$

D'où

$$E(X)=1$$

$$\begin{aligned} E\left(X^2\right) &= \int_0^2 x^2\,|x-1|\,dx=\int_0^1 x^2(1-x)\,dx+\int_1^2 x^2(x-1)\,dx= \\ &= \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1+\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+4-\frac{8}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Exercice 2:
1)
a)

$$\begin{aligned} P(X\le 1200) &= \int_{-\infty}^{1200} 0.001\exp(-0.001x)\,dx= \\ &= \int_0^{1200} 0.001\exp(-0.001x)\,dx=\left[-\exp(-0.001x)\right]_0^{1200}= \\ &= 1-e^{-1.2} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} P(1000 < X < 1500) &= \int_{1000}^{1500} 0.001 \exp(-0.001x)\, dx = \\ &= [-\exp(-0.001x)]_{1000}^{1500} = \\ &= e^{-1} - e^{-1.5} \end{aligned}$$

2) τ est solution de l'équation $P(X \leq \tau) = P(X \geq \tau)$.
Soit

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\tau} 0.001 \exp(-0.001x)\, dx &= 1 - \int_{-\infty}^{\tau} 0.001 \exp(-0.001x)\, dx \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow 2 \int_{-\infty}^{\tau} 0.001 \exp(-0.001x)\, dx = 1 \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow 2\,[-\exp(-0.001x)]_0^{\tau} \Longleftrightarrow 1 - e^{-0.001\tau} = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \tau = 1000 \ln 2 \approx 694 \text{ (heures)} \end{aligned}$$

3)

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = 1000$$

Exercice 3

Rappelons que si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$ alors $f_X(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} \quad x \in \mathbb{R}$

1) a) On a

$$-\frac{1}{8}\left(x^2 - 6x + 1\right) = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\left((x-3)^2 - 9 + 1\right)\right] = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 - 2\right]$$

donc

$$f_X(x) = ce^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-3}{2}\right)^2} e^1$$

On remarque que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(3, 2)$ on en déduit que

$$ce = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \qquad E(X) = 3 \qquad V(X) = 4$$

b)

$$P(X < 3,5 \mid X \leq 4,5) = \frac{P(X < 3,5)}{P(X \leq 4,5)} = \frac{P\left(Y = \dfrac{X-3}{2} < 0,25\right)}{P\left(Y = \dfrac{X-3}{2} \leq 0,75\right)} = \frac{\Phi(0,25)}{\Phi(0,75)}$$

or $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ ainsi

$$P(X < 3,5 \mid X \leq 4,5) = \frac{0,5987}{0,7734} \simeq 0,7741$$

2) a) déterminons la fonction de répartition de Y, notée F_Y, on a $Y \geq 0$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P\left((X-3)^2 \leq y\right) = P(|X-3| \leq \sqrt{y}) = P(3-\sqrt{y} \leq X \leq 3+\sqrt{y}) \\ &= F_X(3+\sqrt{y}) - F_X(3-\sqrt{y}) \end{aligned}$$

La densité de Y, notée f_Y est donc donnée par

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= F'_Y(y) = F'_X(3+\sqrt{y}) - F'_X(3-\sqrt{y}) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(3+\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(3-\sqrt{y}) \end{aligned}$$

soit

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{8}}$$

b) (voir rappel à la fin de l'exercice) on remarque que

$$Y \hookrightarrow \gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right) d\prime o\grave{u} \frac{\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}$$

soit

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{2\pi}\frac{1}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\pi}$$

or

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

c) On a $I = \int_0^{+\infty} x^{\frac{1}{2}} e^{-2x} dx$. On remarque que la fonction à intégrer est une $\gamma\left(\frac{3}{2}, 2\right)$, donc

$$I = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}}$$

Rappels: (voir chapître sur les lois continues)

i) X suit la loi Gamma de paramètres $(\alpha, \beta), \alpha > 0, \beta > 0$, et on note $X \hookrightarrow \gamma(\alpha, \beta)$ si

$$\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{R}^+ \\ f_{\alpha,\beta}(x) = \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \end{cases}$$

ii) On rappelle que la fonction Gamma est définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

C'est un prolongement de la factorielle. On a entre autres les relations

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$