1 Semi-martingales

Dans la suite, on aura besoin du rappel suivant:

1.1 *Rappel*

Définition:

Une fonction $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est dite à variations finies (ou bornées) si*

$$||F||_{a,b} := sup \sum_i |F(a_{i+1}) - F(a_i)| < \infty$$

où le suprémum est pris sur l'ensemble des subdivisions

$$d = \{a = a_0 < a_1 < a_2 < ..... < a_n = b\}$$

de $[a,b]$.

Note que l'ensemble des fonctions à variations finies muni de $||.||_{a,b}$ est un espace vectoriel normé

Exemple 1 :

Si F croissante alors elle est à variations finies. En effet, pour toute subdivision $d = \{a = a_0 < a_1 < a_2 < ..... < a_n = b\}$ de $[a,b]$ on a

$$\sum_i |F(a_{i+1}) - F(a_i)| = F(b) - F(a),$$

d'où

$$||F||_{a,b} \leq F(b) - F(a) < \infty.$$

Il en est de même pour F est décroissante et on a par le même raisonnement

$$||F||_{a,b} \leq F(a) - F(b) < \infty.$$

Exemple 2 :

Si F est de la forme

$$F(t) = \int_a^t f(s)\, ds$$

où f est une fonction positive, alors elle est à variations finies car elle croissante. De plus on peut montrer que $||F||_{a,b} = \int_a^b f(s)\, ds$.

Exemple 3 :

Si maintenant on suppose que f est de signe quelconque, alors elle est également à variations finies. En effet $f = f^+ - f^-$, où $f^+(x) = \max(f(x), 0) \geq 0$ et $f^-(x) = \max(-f(x), 0) \geq 0$ et donc

$$||F||_{a,b} = \int_a^b |f(s)|\, ds.$$

est à variations finies comme étant la différence de deux fonctions à variations finies. On peut montrer dans ce cas que

$$F(t)=\int_a^t f^+(s)\,ds-\int_a^t f^-(s)\,ds$$

1.2 Motivation

Supposons qu'on a à résoudre l'équation suivante:

$$\Delta X_t=\sigma(X_t)\,\Delta B_t+V(X_t)\,\Delta t,$$

où X_t représente la position d'une particule (par exemple un gaz), $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien de dimension n, $\sigma(x)$ une matrice carré $n\times n$ (appelé champ des covariances) et $V(x)$ un champ de vecteur (appelé champ des vitesses). Ici, on entend par ΔX_t (resp. ΔB_t) l'accroissement $X_{t+h}-X_t$ (resp. $B_{t+h}-B_t$) et par Δt un temps infiniment petit h. Comme pour les équations différentielles ordinaires, X_t doit nécessairement satisfaire l'égalité suivante:

$$X_t=X_0+\int_0^t\sigma(X_s)\,dB_s+\int_0^t V(X_s)\,ds \qquad (*)$$

d'où la définition suivante.

1.3 Processus d'Itô

Définition:

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien réel standard défini sur un espace probabilisé filtré $\left(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},P\right)$. On appelle semi-martingale (ou processus d'Itô) tout processus de la forme:

$$X_t=X_0+\int_0^t\alpha_s dB_s+\int_0^t\beta_s ds,$$

satisfaisant les propriétés suivantes:

1) *X_0 est $\mathcal{F}_0-$mesurable,*

2) *$\alpha\in\overline{S}$,*

3) *β est un processus adapté tel que $\mathbb{E}\left(\int_0^t|\beta_s|\,ds\right)<\infty$ (on dira que le processus $\beta\in L^1_{loc}$).*

Remarque:

On notera que le processus (X_t) est nécessairement adapté et que le processus β est *p.s.* à variations finies.

Définition:

Le processus $M_t := \int_0^t \alpha_s dB_s$ *s'appelle la partie martingale de* X_t *et* $V_t := \int_0^t \beta_s ds$ *sa partie à variations finies.*

On notera que l'ensemble des semi-martingales est un espace vectoriel et que la représentation $(*)$ est unique à une égalité $p.s.$ prés (voir T.D.).

Notation:

Au lieu d'écrire $(*)$ on écrit

$$dX_t = \alpha_t dB_t + \beta_t dt \qquad (**)$$

Définitions:

- *La forme* $(**)$ *s'appelle la différentielle (ou la dynamique) de* X.
- *Lorsque* α_t *et* β_t *dépendent de* X_t *(i.e.* $\alpha_t = \sigma(X_t)$ *et* $\beta_t = V(X_t)$*),* $(**)$ *prend la forme suivante:*

$$dX_t = \sigma(X_t)\, dB_t + V(X_t)\, dt \qquad (***)$$

-*La forme* $(***)$ *s'appelle équation différentielle stochastique (EDS en abrégé). On dira dans ce cas que* X_t *satisfait l'EDS* $(***)$, σ *est sa diffusion et* V *est sa vitesse (ou son drift).*

On notera que si $\sigma \equiv 0$, alors l'EDS $(***)$ devient une EDO.

Règle de multiplication (très importante):

Soient $(X_t), (Y_t)$ et (Z_t) trois semi-martingales définies par les différentielles suivantes:

$$\begin{aligned} dX_t &= \alpha_t dB_t + \beta_t dt, \\ dY_t &= \alpha'_t dB_t + \beta'_t dt \quad \text{et} \\ dZ_t &= \alpha''_t dB_t + \beta''_t dt \ . \end{aligned}$$

On pose par définition:

$$dX_t dY_t := \alpha_t \alpha'_t dt$$

Conséquences:

Puisque

$$dB_t = 1.dB_t + 0.dt \text{ et } dt = 0.dB_t + 1.dt,$$

alors on conclut que

$$dB_t dB_t = dt \text{ et que } dt dB_t = dt dt = 0.$$

Il résulte aussi de cette règle que

$$dX_t dY_t dZ_t = 0.$$

Dans tout ce qui suit, on convient que si $(B'_t)_{t\geq 0}$ est un autre mouvement brownien indépendant de $(B_t)_{t\geq 0}$, alors $dB_t dB'_t = 0$.

1.4 Temps d'arrêt

On aura besoin de la notion de temps d'arrêt relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ suivante:

Définition:

On appelle temps d'arrêt (t.d'a. en abrégé) toute variable aléatoire $T : \Omega \to \overline{\mathbb{R}_+} = [0, \infty]$ *telle que* $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ *pour tout* $t \geq 0$.

Ainsi les *v.a.* constantes sont des *t.d'a.*

Définition:

Soient S *et* T *deux t.d'a.. On défini les intervalles stochastiques de la manière suivante:*

$$
\begin{aligned}
[S,T] &= \{(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega : S(\omega) \leq t \leq T(\omega)\}, \\
[S,T[&= \{(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega : S(\omega) \leq t < T(\omega)\}, \\
]S,T] &= \{(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega : S(\omega) < t \leq T(\omega)\}, \\
]S,T[&= \{(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega : S(\omega) < t < T(\omega)\}, \\
]T,\infty[&= \{(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega : T(\omega) < t\}, \\
[T,\infty[&= \{(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega : T(\omega) \leq t\}.
\end{aligned}
$$

L'ensemble $|[T]| := \{(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega : T(\omega) = t\}$ *s'appelle le graphe de* T.

Remarque:

Soit T *une v.a. à valeurs dans* $\overline{\mathbb{R}_+}$. *Alors on a les équivalences suivantes:*

T *est un t.d'a.* $\Longleftrightarrow \{T > t\} \in \mathcal{F}_t$ *pour tout* $t \geq 0$

$\Longleftrightarrow$ *le processus* $X := 1_{[0,T[}$ *est adapté.*

Définition:

Soient X *processus et* T *un t.d'a.. Le processus* $X^{|T}$ *défini par* $X_t^{|T} = X_{t\wedge T}$ *pour tout* $t \geq 0$ *s'appelle le processus arrêté de* X *à* T.

Lemme:

Soient $\alpha \in \overline{S}$ *et* T *un t.d'a.. Alors le processus* $\alpha 1_{[0,T[} \in \overline{S}$. *En particulier si* X *est une semi-martingale, alors il en est de même pour le processus arrêté* $X^{|T}$.

Preuve:

On considère le processus $u := \mathbf{1}_{[0,T[}$ et on pose $u^\varepsilon = u * \left(\frac{1}{\varepsilon}\mathbf{1}_{[0,\varepsilon]}\right)$ pour tout $\varepsilon > 0$. Alors les processus u^ε sont adaptés continus et convergent ponctuellement vers u. Ainsi, si α est adapté continu (donc $\alpha \in \overline{S}$), alors il en est de même pour le processus αu^ε, d'où $\alpha u^\varepsilon \in \overline{S}$. Il résulte que $\alpha u^\varepsilon \in \overline{S}$ pour tout $\alpha \in \overline{S}$. Comme αu^ε converge vers αu, alors $\alpha u \in \overline{S}$.

Si maintenant $X_t = X_0 + \int_0^t \alpha_s dB_s + \int_0^t \beta_s ds$ est une semi-martingale, alors

$$\begin{aligned} X_t^{|T} &= X_0 + \int_0^{t\wedge T} \alpha_s dB_s + \int_0^{t\wedge T} \beta_s ds \\ &= X_0 + \int_0^t \alpha_s \mathbf{1}_{[0,T[}(s,.)\, dB_s + \int_0^t \beta_s \mathbf{1}_{[0,T[}(s,.)\, ds \end{aligned}$$

Comme $\alpha \mathbf{1}_{[0,T[} \in \overline{S}$ et comme

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t \left|\beta_s \mathbf{1}_{[0,T[}(s,.)\right| ds\right) \leq \mathbb{E}\left(\int_0^t |\beta_s|\, ds\right) < \infty,$$

alors le processus $X^{|T}$ est également une semi-martingale.■

Remarque:

Il résulte de cette démonstration que l'arrêté d'une martingale (resp. d'un processus à variations finies) est également une martingale (resp. un processus à variations finies).

La proposition suivante nous permet de montrer que la représentation d'une semi-martingale $X_t = X_0 + M_t + V_t$ est unique à une égalité *p.s.*prés.

Proposition:

Soit X une martingale à variations finies. Alors $X_t = 0$ p.s. pour tout $t \geq 0$.

Preuve:

Comme $X_t^2 \geq 0$, il suffit de montrer que $\mathbb{E}\left(X_t^2\right) = 0$ pour tout $t \geq 0$. La démonstration se fait en deux étapes.

1) *Cas où X_t est bornée* : $|X_t| \leq a$ $(a > 0)$

Observons d'abord que le fait que X soit une martingale entraîne que pour tout $t \geq s \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left((X_t - X_s)^2\right) = \mathbb{E}\left({X_t}^2 - X_s^2\right).$$

En effet;

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left((X_t - X_s)^2\right) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left((X_t - X_s)^2 \mid \mathcal{F}_t\right)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X_t^2 - 2X_sX_t + X_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X_t^2 \mid \mathcal{F}_s\right) - 2\mathbb{E}\left(X_sX_t \mid \mathcal{F}_s\right) + \mathbb{E}\left(X_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X_t^2 \mid \mathcal{F}_s\right) - 2X_s\mathbb{E}\left(X_t \mid \mathcal{F}_s\right) + X_s^2\right) \text{ car } X_s\text{est } \mathcal{F}_s - \text{mes.} \\ &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X_t^2 \mid \mathcal{F}_s\right) - 2X_s^2 + X_s^2\right) \text{ car } X \text{ est une martingale} \\ &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X_t^2 - X_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right)\right) \text{ car } X_s \text{ est } \mathcal{F}_s - \text{mes.} \\ &= \mathbb{E}\left(X_t^2 - X_s^2\right). \end{aligned}$$

On a

$$X_t = \int_0^t \alpha_s dB_s = \int_0^t \beta_s ds,$$

où $\alpha \in \overline{S}$ et $\beta \in L^1_{loc}$. Soit $(d_n) = (\{0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_N^n = t\})$ une suite de subdivision de $[0,t]$ dont le pas $\delta_n := \max\limits_{1\leq k\leq N} \left| t_k^n - t_{k-1}^n \right|$ tends vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Comme

$$X_t^2 = \sum_{k=1}^N \left(X_{t_k^n}^2 - X_{t_{k-1}^n}^2 \right)$$

et comme X est une martingale, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X_t^2\right) &= \sum_{k=1}^N \mathbb{E}\left(X_{t_k^n}^2 - X_{t_{k-1}^n}^2 \right) = \sum_{k=1}^N \mathbb{E}\left(\left(X_{t_k^n} - X_{t_{k-1}^n} \right)^2 \right) \\
&\leq \sum_{k=1}^N \mathbb{E}\left(\left| X_{t_k^n} - X_{t_{k-1}^n} \right| \max_{1\leq l\leq N} \left| X_{t_l^n} - X_{t_{l-1}^n} \right| \right) \\
&\leq \mathbb{E}\left(\max_{1\leq l\leq N} \left| X_{t_l^n} - X_{t_{l-1}^n} \right| \sum_{k=1}^N \left| X_{t_k^n} - X_{t_{k-1}^n} \right| \right).
\end{aligned}$$

D'autre part, comme $X_t = \int_0^t \beta_s ds$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^N \left| X_{t_k^n} - X_{t_{k-1}^n} \right| &= \sum_{k=1}^N \left| \int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \beta_s ds \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \left| \beta_s \right| ds = \int_0^t \left| \beta_s \right| ds,
\end{aligned}$$

et comme

$$\max_{1\leq l\leq N} \left| X_{t_l^n} - X_{t_{l-1}^n} \right| \leq 2a,$$

alors

$$\max_{1\leq l\leq N} \left| X_{t_l^n} - X_{t_{l-1}^n} \right| \sum_{k=1}^N \left| X_{t_k^n} - X_{t_{k-1}^n} \right| \leq 2a \int_0^t \left| \beta_s \right| ds,$$

qui et intégrable. Il résulte du théorème de la convergence dominée, puisque

$$\lim_{n\to\infty} \left(\max_{1\leq l\leq N} \left| X_{t_l^n} - X_{t_{l-1}^n} \right| \right) = 0 \text{ grâce à la continuité de } X,$$

que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\max_{1\le l\le N} \left| X_{t_l^n} - X_{t_{l-1}^n} \right| \sum_{k=1}^{N} \left| X_{t_k^n} - X_{t_{k-1}^n} \right| \right) = 0.$$

Par suite $\mathbb{E}\left(X_t^2\right) = 0$.

2) *Le cas général* :

On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire

$$T_n := \inf \left\{ t \ge 0 : |X_t| > n \right\}.$$

Comme $\{T_n > t\} = \{|X_t| \le n\} = X_t^{-1}([-n,n]) \in \mathcal{F}_t$ pour tout $t \ge 0$, alors (T_n) est une suite de $t.d'a.$. Comme $\{t \ge 0 : |X_t| > n+1\} \subset \{t \ge 0 : |X_t| > n\}$ alors $T_n \le T_{n+1}$. De plus, pour tout $(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$ on a pour tout $n \ge N_0 := [|X_t(\omega)|]$, $|X_t(\omega)| < n$. Il résulte que $t \le T_n$, qui signifie que $\lim_{n\to+\infty} T_n = +\infty$. Ainsi (T_n) est une suite croissante de $t.d'a.$ divergente.

Soit maintenant le processus arrêté $X^{|T_n}$. D'aprés les deux propositions précédentes ce processus est une martingale à variations finies, d'où $X_{t\wedge T_n} = X_t^{|T_n} = 0$ $p.s.$ pour tout $t \ge 0$ et comme le processus X est continu alors $X_t = \lim_{n\to+\infty} X_{t\wedge T_n} = 0$ $p.s.$.$\blacksquare$