Cas particulier (Filtration canonique)

Un choix minimal de la filtration adaptée est : « la filtration canonique (ou naturelle),

$$\mathcal{F}_n^X = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n).$$

Dans ce cas, $\mathcal{F}_n^X$ représente l'information disponible au temps n, si l'on observe le processus stochastique $(X_n)_n$.

Remarque 2.1 : Tout processus stochastique est adapté à sa filtration canonique.

Question : Montrer que $\mathcal{F}^X$ est la plus petite filtration à laquelle $(X_n)_n$ est adapté.

2.2. Martingales, ss_mart, surmart.

Le concept (مفهوم) de « Martingale » (عمليّة التّضعيف) trouve son origine dans les jeux de hasard (القمار) (الميسر) [Gambling].

À savoir :

لعبة عادلة

- Si le jeu de hasard est équitable (Fair game), on est devant une « martingale ».
- Si le jeu est favorable (رابح) ; (gagnant) il s'agit d'une « sous_martingale ».
- Si le jeu est défavorable (خاسر) (Perdant) on l'inrprète par une : « surmartingale ».

Pour plus de détails, à consulter : Probability with Martingales (D. Williams).

Définition 2.3 (Martingale, sous-mart, surmart) :

Une suite $(X_n)_n$ de v.a. est dite : martingale (resp. sous-martingale, surmartingale) p.r.p. à une filtration $(\mathcal{F}_n)_n$ si :

① [Adaptation] : $(X_n)_n$ est $(\mathcal{F}_n)_n$-adapté ;

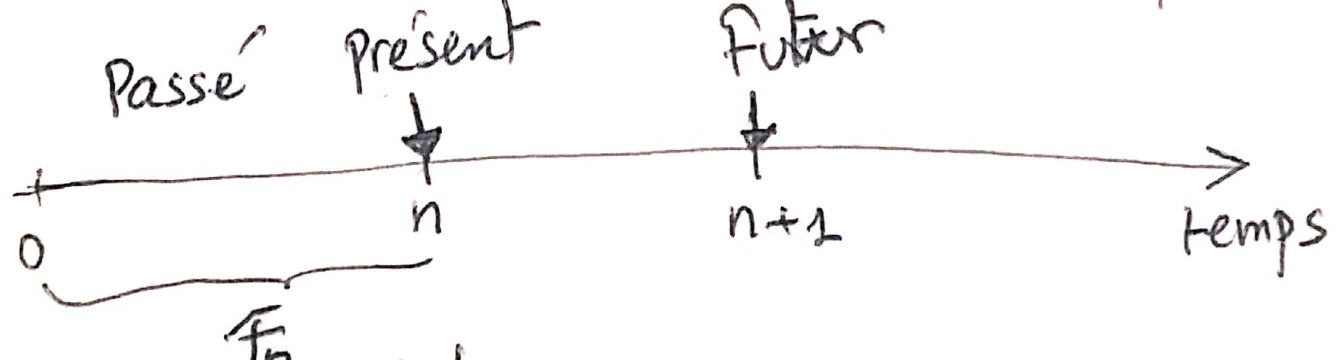
② [$\mathbb{P}$-intégrabilité] : Pour tout n : $\mathbb{E}|X_n| < \infty$;

③ [Propriété clé] : Pour tout n :

$$\mathbb{E}(X_{n+1} / \mathcal{F}_n) = X_n \text{, p.s. } \left(\text{resp, } \mathbb{E}(X_{n+1} / \mathcal{F}_n) \geq X_n, \ \mathbb{E}(X_{n+1} / \mathcal{F}_n) \leq X_n\right).$$

La valeur future espérée à l'instant "(n+1)" si l'information est disponible jusqu'à "n" = présent.

La valeur actuelle. (présent) temp = n



Tout ce que c'est passé avant "n" y compris "n".

Remarque 2.2 Martingales et jeux de hasard.

- Soit X_n : la fortune (الثروة) d'1 joueur après la $n^{ième}$ partie.
- DM : $X_{n+1} - X_n$: représente le gain (الربح) après la $(n+1)^{ième}$ partie.
- Supposons qu'on est maintenant à l'instant "n" (présent).
- $\mathcal{F}_n$: Tout ce que c'est passé avant "n" [L'historique du jeu jusqu'à n].
- On veut comparer entre la fortune actuelle et la fortune moyenne à l'instant $(n+1)$ [après la $(n+1)^{ième}$ partie] conditionnellement à $\mathcal{F}_n$.

en d'autres termes comparons entre :

$$X_n \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X_{n+1} / \mathcal{F}_n).$$

On a 3 cas :

(i) Le jeu est équitable : signifie le gain à l'instant $(n+1)$ conditionnellement à $\mathcal{F}_n$ est en moyenne nul : $\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n / \mathcal{F}_n) = 0$

ou bien $\mathbb{E}(X_{n+1} / \mathcal{F}_n) = X_n$

c'est la propriété clé de martingale.

« La valeur espérée (l'état) du processus au futur ~~est égale à~~ sachant tout le passé (y compris le présent) est égale à la valeur actuelle.

(ii) Le jeu est favorable (par rapport à toi) : Le gain est en moyenne positif (conditionnellement au passé)

$$\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n / \mathcal{F}_n) \geq 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}(X_{n+1} / \mathcal{F}_n) \geq X_n.$$

c'est la sous_martingale.

(iii) Le jeu est défavorable (par rapport à toi) : Le gain conditionnelle est négatif : $\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n / \mathcal{F}_n) \leq 0$

$\Leftrightarrow \mathbb{E}(X_{n+1} / \mathcal{F}_n) \leq X_n$: c'est la surmartingale.

12