U.H.B.C. Chlef
Fac. des Sces Exactes et Info
Dep^t des Maths

2ème Année Master
A.U. 2016/2017
Durée 2 heures

Processus Stochastiques III
Examen de Rattrapage.

Exercice 1:

Soit $B_t^0 = \{B_t,\ 0 \leq t \leq 1 / B_1 = 0\}$ un pont Brownien.

Définissons :

$$dX_t = -\frac{X_t}{1-t}\,dt + dB_t \text{, avec } X_0 = 0.$$

(a) Montrer par la formule d'Itô que: $X_t = (1-t)\int_0^t \frac{dB_s}{1-s}$.
(ou en résolvant l'E.D.S.)

(b) Montrer que: $(B_t)_{t\in[0,1]}$ et $(X_t)_{t\in[0,1]}$ ont la même loi.

(c) Montrer que: $Y_t = (1+t)\,B^0_{\frac{t}{1+t}}$ est un Mouvement Brownien S.

Exercice 2: $(B_t)_{t\geq 0}$ est un Mouvement Brownien Standard.

(a) Utiliser la formule d'Itô pour montrer que:

$$\int_0^t B_s^2\,dB_s = \frac{1}{3}B_t^3 - \int_0^t B_s\,ds.$$

(b) Soit $X_t = \frac{1}{t+B_t}$.

Etablir l'E.D.S. : $dX_t = \mu(t,X_t)\,dt + \sigma(t,X_t)\,dB_t$

satisfaite par X_t.

Exercice 3:

Montrer que le Mouvement Brownien Standard est invariant par changement d'echelles temporelle et spatiale

c.à.d. si $a>0$ fixé ; $\frac{1}{\sqrt{a}}B_{at}$, $t\geq 0$ l'est aussi.
et (B): M.B.S

$\boxed{\text{Exercice 1}}$

a) En résolvant l'E.D.S. $X_t = (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s}\,dB_s$.

b) (1) On sait que $B_t^0 \overset{loi}{=} B_t - tB_1$, (sinon on utilise les lois gauss. conditionnelles)

Or :

$$B_t \leadsto N(0,t), \quad B_1 \leadsto N(0,1), \quad tB_1 \leadsto N(0,t^2)$$

combinaison linéaire des variables gaussiennes est gaussienne

Calculons la moyenne et la variance.

$$\mathbb{E}(B_t^0) = 0, \quad \mathbb{E}(B_s^0 B_t^0) = s(1-t) \text{ si } s<t \Rightarrow \mathrm{Var}\, B_t^0 = t(1-t)$$

$$B_t^0 \leadsto N\big(0, t(1-t)\big) \ \forall t,\ 0\le t\le 1.$$

(2) $X_t = (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s}\,dB_s$

On sait que : $\int_0^t \frac{1}{1-s}\,dB_s$ est une intégrale de Wiener

car $\int_0^t \frac{1}{(1-s)^2}\,ds < \infty$, donc gaussienne centrée.

Calculons la moyenne et la variance :

$$\mathbb{E}X_t = 0, \quad \mathrm{Var}\,X_t = (1-t)\int_0^t \frac{1}{(1-s)^2}\,ds = t(1-t)$$

$$X_t \leadsto N\big(0, t(1-t)\big), \ \forall t : 0\le t\le 1.$$

c) $Y_t = (1+t)\, B^0_{\frac{t}{1+t}}$.

D'après b) Y_t est gaussienne centrée.

Calculons la moyenne et la variance.

$\mathbb{E}Y_t = 0$, $\quad Var Y_t = (1+t)^2\left[\frac{t}{1+t}\left(1-\frac{t}{1+t}\right)\right] = t$

$Y_t \sim N(0,t)$, $\quad Cov(Y_t, Y_s) = s$ si $s \leq t$.

Vérifions les conditions de la déf^t du M.B.S.

(1) $Y_0 = 0$.

(2) Accroissements indép.

$Cov(Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}}, Y_{t_j} - Y_{t_{j-1}}) = 0$ $\forall$ $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$.

(3) Accroissements stationnaires et gaussiennes :

$\mathbb{E}(Y_t - Y_s) = 0$.

$$Var(Y_t - Y_s) = Var Y_t + Var Y_s - 2Cov(Y_t, Y_s)$$
$$= t + s - 2s$$
$$= t - s$$

$Y_t - Y_s \sim N(0, t-s)$.

(4) B_t est cont en $t \Rightarrow Y_t$ l'est aussi.

De (1) ~ (4), $(Y_t)_t$ est M.B.S.

$\boxed{\text{Exercice 2}}$

a) Appliquons la f^{le} d'Itô pour $f(t,x) = x^3$

$$dB_t^3 = 3B_t^2 dB_t + 3B_t dt$$

Passage à l'$\int$: $\displaystyle\int_0^t B_s^2 dB_s = \frac{1}{3}B_t^3 - \int_0^t B_s ds$

(b) $X_t = \frac{1}{t+B_t} = f(t, B_t)$

On trouve: $\frac{\partial f}{\partial t}(t,B_t) = -X_t^2$; $\frac{\partial f}{\partial B_t}(t,B_t) = -X_t^2$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial B_t^2}(t,B_t) = 2X_t^3$

donc: $dX_t = \left(-X_t^2 + \frac{1}{2} 2X_t^3\right)dt - X_t^2 \, dB_t$

$= (X_t^3 - X_t^2)\, dt - X_t^2 \, dB_t$

i.e. $\begin{cases} \mu(t, X_t) = X_t^3 - X_t^2 \\ \sigma(t, X_t) = -X_t^2 \end{cases}$

$\boxed{\text{Exercice 3}}$: Il suffit de m.q

(1) Les traj. sont p.p.s continues

(2) $B^{(a)} = \frac{1}{\sqrt{a}} B_{at}$ est gaussien

(3) $\mathbb{E} B_t^{(a)} = 0$, $\mathbb{E} B_t^{(a)} B_s^{(a)} = t \wedge s$.