Chapitre 4

Opérateurs compacts

0.1 Définitions et propriétés

Définition 0.1. *Un opérateur $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ est dit compact (ou complètement continu), si pour toute suite bornée $(x_n)_n$ de $\mathcal{H}$, la suite $(Ax_n)_n$ admet une sous-suite convergente dans $\mathcal{H}_2$.*

Exemples 1. Si $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ est de rang fini ($\dim ImA < +\infty$), alors A est compact.

En effet, soit $(x_n)_n \subset \mathcal{H}_1$, $\|x_n\| = 1$. Alors, la suite $(Ax_n)_n$ est bornée dans l'espace ImA de dimension finie $\dim ImA = rg(A)$. Comme ImA est isomorphe à $\mathbb{C}^{rg(A)}$, la suite $(Ax_n)_n$ admet donc une sous-suite convergente dans $\mathcal{H}_2$.

2. Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ avec $\dim \mathcal{H}_1 < +\infty$. Alors A est borné. Comme

$$\forall x \in \mathcal{H} : x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$$

on a

$$Ax = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle Ae_k$$

où $(e_k)_{k=1}^n$ est une base orthonormale de $\mathcal{H}_1$ (dim $\mathcal{H}_1 = n$, $n \geq 1$). Alors, ImA est de dimension finie. A est donc compact d'après (1).

3. L'opérateur identité $I_{\mathcal{H}}$ sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimension infinie n'est pas compact. En effet, si $(x_n)_n$ est une suite orthonormale dans $\mathcal{H}$, alors

$$\|Ix_n - Ix_m\| = \|x_n - x_m\| = \sqrt{2}$$

D'où, la suite $(Ix_n)_n$ n'admet aucune sous-suite convergente.

0.1.1 Théorème de Bolzano-Weierstrass

[1] [2]

Théorème 0.1. *[?] Un espace métrique $(\mathcal{X}, d)$ est compact si et seulement si de toute suite d'éléments de $\mathcal{X}$, on peut extraire une sous-suite convergente dans $\mathcal{X}$.*

Remarque Compte-tenu de la linéarité de A, il est équivalent de dire que A est compact si pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de la boule unité fermée $\overline{B}(0,1)$, la suite $(Ax_n)_n$ admet une sous-suite convergente.

Soit encore

Définition 0.2. *$A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ est compact si l'image par A, de la boule unité fermée est relativement compacte dans $\mathcal{H}_2$, i.e., $\overline{A(\overline{B}(0,1))}$ est compacte dans $\mathcal{H}_2$.*

Exemples 1. Dans l'exemple 3 précédent, où $\dim \mathcal{H} = +\infty$, on a

$$I_{\mathcal{H}}(\overline{B}(0,1)) = \overline{B}(0,1)$$

n'est pas compacte dans $\mathcal{H}$ d'après le Théorème de Riesz relatif à la compacité de la boule unité fermée. Par conséquent, $I_{\mathcal{H}}$ n'est pas compact.

On a donc les propriétés suivantes

Théorème 0.2. *Soient $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ deux opérateurs compacts. Alors :*

i. *$A + B$ est compact.*

ii. *λA est compact, ($\lambda \in \mathbb{C}$)*

1. Bernard Bolzano, 1781-1848, est un mathématicien bohémien germanophone.
2. Karl Weierstrass, 1815-1897, est un grand mathématicien allemand, nommé " Père de l'analyse".

Théorème 0.3. *Tout opérateur compact est borné.*

Ce résultat montre que $K(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \subset \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ où

$$\mathcal{K}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) = \{A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2),\ A \text{ compact}\}$$

De plus, on a

Corollaire 0.1. *L'ensemble $\mathcal{K}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$.*

Théorème 0.4. *Soient $A, B\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ deux opérateurs linéaires tels que A est compact et B est borné. Alors les opérateurs AB et BA sont compacts.*

De même, comme A est compact, la suite $(Ax_n)_n$ admet une sous-suite convergente $(Ax'_n)_n$. Comme B est continu car borné, la suite $(BAx'_n)_n$ converge également, et BA est compact. ■

Corollaire 0.2. *L'espace $\mathcal{K}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ est un idéal bilatère de $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$.*

Théorème 0.5. *$A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ est compact si et seulement si A^* est compact.*

0.2 Convergence d'une suite d'opérateurs compacts

0.2.1 Types de convergence et propriétés

Soit (x_n) une suite dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, et soit $x \in \mathcal{H}$.

Définition 0.3. *Convergence faible :* $(x_n)_n$ *est dite faiblement convergente vers* x, *et l'on écrit* $x_n \overset{w}{\rightharpoonup} x$, *si*

$$\forall y \in \mathcal{H} : \lim_{n\to+\infty} \langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle$$

Définition 0.4. *Convergence forte :* $(x_n)_n$ *est dite fortement convergente vers* x, *et l'on écrit* $x_n \overset{s}{\rightarrow} x$, *si*

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0$$

Définition 0.5. *Convergence en norme :* $(x_n)_n$ *est dite convergente en norme vers* x *si*

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n\| = \|x\|$$

Exercice Soit (x_n) une suite dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, et soit $x \in \mathcal{H}$. Alors,

1. $(x_n \overset{s}{\rightarrow} x) \Rightarrow (x_n \overset{w}{\rightharpoonup} x)$
2. Si $x_n \overset{w}{\rightharpoonup} x$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n\| = \|x\|$, alors $x_n \overset{s}{\rightarrow} x$

Proposition 0.1. *Toute suite faiblement convergente dans un espace de Hilbert est bornée.*

Autrement dit, la suite $(f_n)_n$ est simplement bornée. Comme $\mathcal{H}$ et $\mathbb{C}$ sont complets, le Théorème de Banach-Steinhaus nous confirme que la suite $(f_n)_n$ est uniformément bornée. i.e., il existe $M > 0$ tel que

$$\sup_{n\geq 1} \|f_n\| \leq M \tag{1}$$

Or,

$$f_n(x_n) = \|x_n\|^2, n \geq 1$$

D'où,

$$\|f_n\| \geq \|x_n\|, \quad (n \geq 1) \tag{2}$$

Le résultat s'atteint donc par (**??**)et (**??**) ■

0.2.2 Autre définition d'un opérateur compact

On a donc le résultat important suivant

Théorème 0.6. *Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Alors, A est compact si et seulement si A transforme toute suite faiblement convergente dans $\mathcal{H}_1$ en une suite fortement convergente dans $\mathcal{H}_2$. Autrement dit, si $(x_n)_n$ est une suite faiblement convergente dans $\mathcal{H}_1$, alors $(Ax_n)_n$ est une suite fortement convergente dans $\mathcal{H}_2$.*

Remarque Ce résultat montre que la propriété de compacité d'un opérateur linéaire est plus forte que la propriété de continuité, et donc donne raison à l'appellation d'opérateur complètement continu pour un opérateur compact dans certaines littératures.

Exemples 1. Le shift right S_r sur ℓ_2 n'est pas compact. En effet, soit $(e_n)_{n\geq 1}$ la suite de la base standard orthonormale de ℓ_2. Comme

$$\forall x \in \ell_2 : x = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle x, e_k\rangle\, e_k$$

et par l'égalité de Parseval

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2$$

La série numérique réelle $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2$ est donc convergente. Par conséquent

$$\forall x \in \ell_2 : \lim_{n\to+\infty} |\langle x, e_k\rangle| = \lim_{n\to+\infty} \langle x, e_k\rangle = 0 = \langle x, 0\rangle$$

ce qui montre que $e_n \overset{w}{\rightharpoonup} 0$. Or,

$$\lim_{n\to+\infty} \|S_r(e_n)\| = \lim_{n\to+\infty} \|e_{n+1}\| = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1 \neq 0$$

i.e., la suite $(S_r(e_n))_n$ ne converge pas fortement vers 0. Par le Théorème précédent, S_r n'est pas compact.

2. L'opérateur identité $I_{\mathcal{H}}$ sur $\mathcal{H}$ avec $\dim \mathcal{H} = +\infty$ n'est pas compact.

0.2.3 Convergence d'une suite d'opérateurs compacts

Théorème 0.7. *Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'opérateurs compacts dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ convergeant vers un opérateur $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, i.e.,*

$$\lim_{n\to+\infty} \|A_n - A\| = 0 \quad (*)$$

Alors, A est compact.

Exemple Soit $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite complexe convergente vers 0. On considère l'opérateur diagonal

$$\begin{aligned} K\colon \ell_2 &\to \ell_2 \\ x &= (x_i)_{i\geq 1} \mapsto Kx = (\lambda_k x_k)_{k\geq 1} \end{aligned}$$

Pour tout $n, n \geq 1$, on définit l'opérateur

$$\begin{aligned} K_n\colon \ell_2 &\to \ell_2 \\ x &= (x_i)_{i\geq 1} \mapsto K_n x = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, ..., \lambda_n x_n, 0, 0, ...) \end{aligned}$$

Les opérateurs K_n, $(n \geq 1)$ sont de rang fini. Ils sont donc compacts sur ℓ_2. De plus, on a

$$\|K_n - K\| \leq c \sup_{k\geq n} |\lambda_k| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

car $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$. D'où, K est compact par le Théorème précédent.

0.3 Opérateurs de Hilbert-Schmidt

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable, et soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Soit $(e_k)_{k\geq 1}$ une base orthonormale de $\mathcal{H}$. On considère la quantité

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|Ae_k\|^2$$

Proposition 0.2. *On a*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|Ae_k\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \|A^*e_k\|^2$$

Proposition 0.3. *Si $(e'_k)_{k\geq 1}$ est une autre base orthonormale de $\mathcal{H}$, alors*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|Ae_k\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \|Ae'_k\|^2$$

Définition 0.6. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable muni d'une base orthonormale $(e_n)_{n\geq 1}$, et soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Posons*

$$N(A) = (\sum_{k=1}^{+\infty} \|Ae_k\|^2)^{\frac{1}{2}}$$

Si $N(A)$ est finie, on dit que A est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

Définition 0.7. *Si la quantité$N(A)$ est finie, elle est dite norme de Hilbert-Schmidt de A.*

Propriétés (TD) Soient $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Alors

1. $\|A\| \leq N(A)$
2. $N(A) \geq \|Ae_k\|$, $(e_n)_{n\geq 1}$ est une base orthonormale de $\mathcal{H}$.
3. $N(AB) \leq \|B\| N(A)$
4. $N(A+B) \leq N(A) + N(B)$

Théorème 0.8. *Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur de Hilbert-Schmidt. Alors A est compact.*

0.3.1 Application sur l'opérateur intégral

Exercice (L'opérateur intégral est compact) Soit l'opérateur

$$\begin{aligned} K\colon L_2([a,b]) &\to L_2([a,b]) \\ f &\mapsto Kf \end{aligned}$$

défini par

$$(Kf)(t) = \int_a^b k(x,t)f(x)dx$$

avec

$$\int_a^b \int_a^b k(x,t)dxdt < +\infty$$

K est appelé l'opérateur intégral, et la fonction k est dite noyau de l'opérateur K.

1. Montrer que K est bien défini, i.e., $Kf \in L_2([a,b])$ pour tout $f \in L_2([a,b])$.
2. En déduire que K est borné, et donner une estimation de sa norme.
3. Montrer que K est un opérateur de Hilbert-Schmidt.
4. Que peut-on déduire ?
5. Montrer que l'opérateur de Volterra $\mathcal{V}\colon L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$, $f \mapsto \mathcal{V}f$ où

$$(\mathcal{V}f)(t) = \int_t^1 f(s)ds,\ t \in [0,1]$$

est compact.

Solution 1. Soit $f \in L^2([0,1])$. Par l'inégalité de Cauchy-Scwartz, on aura

$$\|Kf\|_2^2 = \int_0^1 |(Kf)(t)|^2 dt = \int_0^1 \left|\int_0^1 f(s)k(t,s)ds\right|^2 dt \leq \int_0^1 (\left|\int_0^1 f(s)\right|^2 ds)(\int_0^1 |k(t,s)|^2 ds)dt$$

$$= \left|\int_0^1 f(s)\right|^2 ds \int_0^1 \int_0^1 |k(t,s)|^2 ds = \int_0^1 \int_0^1 |k(t,s)|^2 ds \, \|f\|_2^2$$

Comme $\int_0^1\int_0^1 |k(t,s)|^2\,dsdt < +\infty$, $Kf \in L^2([0,1])$, et donc K est bien défini.

2. De (1) découle que K est borné, et que $\|K\| \leq \sqrt{\int_0^1\int_0^1 |k(t,s)|^2\,dsdt}$.

3. On a pour tout $n, n \geq 1$:

$$Ke_n(t) = \int_0^1 e_n(s)k(t,s)ds = \left\langle e_n, \overline{k_t}\right\rangle$$

où $k_t(s) = k(t,s)$, $t, s \in [0,1]$. D'où,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|Ke_n\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 |Ke_n(t)|^2\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 \left|\left\langle e_n, \overline{k_t}\right\rangle\right|^2 dt = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} \left|\left\langle e_n, \overline{k_t}\right\rangle\right|^2 dt$$

car la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\left\langle e_n, \overline{k_t}\right\rangle\right|^2$ est convergente par l'égalité de Parseval et le système $(e_n)_n$ est une base orthonormale de $L^2([0,1])$. On aura donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|Ke_n\|^2 = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} \left|\left\langle e_n, \overline{k_t}\right\rangle\right|^2 dt = \int_0^1 \left\|\overline{k_t}\right\|_2^2 dt = \left\|\overline{k_t}\right\|_2^2 = \int_0^1\int_0^1 |k(t,s)|^2\,dsdt < +\infty$$

Par conséquent, K est de Hilbert-Schmidt.

4. On déduit de (3) que K est compact.

5. On a pour tout $f \in L^2([0,1])$:

$$(\mathcal{V}f)(t) = \int_t^1 f(s)ds = \int_0^1 f(s)k(t,s)ds,\ t \in [0,1]$$

où

$$k(t,s) = \begin{cases} 1, & s \in [t,1] \\ 0, & s \in [0,t] \end{cases}$$

Comme

$$\int_0^1\int_0^1 |k(t,s)|^2\,dsdt = \int_0^1\int_t^1 dsdt = \int_0^1 [s]_t^1\,dt = \int_0^1 [1-t]\,dt = \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} < +\infty$$

Alors, $\mathcal{V}$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt. $\mathcal{V}$ est donc compact.