DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
UNIVERSITE DE BISKRA
MODULE

$2^{ième}$ Année Master Maths
Premier semestre, année 2021/2022
Mouvement Brownien et calcul stochastique

Feuille 2 : Exercices sur le mouvement Brownien.

Exercice 1. Soit Z une variable aléatoire de loi normale centrée et réduite. Pour tout $t \geq 0$, nous posons $X_t = \sqrt{t}Z$. Le processus stochastique $X = (X_t)_{t\geq 0}$ a des trajectoires continues et $\forall t \geq 0$, X_t est de loi $N(0,t)$. Est-ce que X est un mouvement Brownien? Justifiez votre réponse.

Exercice 2. Soit W et $\widetilde{W}$, deux mouvements Browniens standard indépendants l'un de l'autre, et ρ, une constante entre 0 et 1. Pour tout $t \geq 0$, nous posons $X_t = \rho W_t + \sqrt{1-\rho^2}\widetilde{W}$. Le processus stochastique $X = (X_t)_{t\geq 0}$ a des trajectoires continues et $\forall t \geq 0$, X_t est de loi $N(0,t)$. Est-ce que X est un mouvement Brownien? Justifiez votre réponse.

Exercice 3. Soit W un mouvement Brownien standard construit sur l'espace de probabilité filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$. Posons

$$X = \exp\left[\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right].$$

Montrer que $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est une martingale.

Exercice 4. Soit W un mouvement Brownien standard construit sur l'espace de probabilité filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$.

Montrer que $\{W_t^2 - t : t \geq 0\}$ est une martingale.

Exercice 5. Soit W un mouvement Brownien standard. Montrez que

$$Cov\left[W_t, W_s\right] = \min(s,t) = s \wedge t$$

Exercice 6. Soit W_t un mouvement Brownien standard. Montrez que

(1) Pour tout $s > 0$, $\{W_{t+s} - W_s : t \geq 0\}$
(2) $\{-W_t : t \geq 0\}$
(3) $\left\{cW_{\frac{t}{c^2}} : t \geq 0\right\}$
(4) $\left\{V_0 = 0 \text{ et } V_t = tW_{\frac{1}{t}} \text{ si } t > 0 : t \geq 0\right\}$

sont des mouvements Browniens standard.