Chapitre 2

Mouvement Brownien

2.1 Définitions

Définition 2.1 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ *un espace de probabilité et* $B = (B_t)_{t\geq 0}$ *un processus stochastique. le processus* B *est appelé mouveemnt Brownien standard à condition que*

i) $B_0 = 0$

ii) $\forall 0 \leq s < t < \infty$ *la variable aléatoire* $B_t - B_s$ *est indépendante de* $(B_u)_{u\in[0,s]}$ *, ceci signifie que* $\forall 0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_n \leq s$ *et* $A, A_1, \ldots A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *on a*

$$P(B_{s_1} \in A_1, \ldots B_{s_n} \in A_n, B_t - B_s \in A) = P(B_{s_1} \in A_1, \ldots B_{s_n} \in A_n) P(B_t - B_s \in A)$$

iii) $\forall 0 \leq s < t < \infty$ *et* $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *on a*

$$P(B_t - B_s \in A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_A e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}} dx.$$

iv) *Les trajectoires* $t \longmapsto B_t(\omega)$ *sont continues.*

Proposition 2.2 *Le mouvement Brownien standard existe.*

Proposition 2.3 *Soit* $B = (B_t)_{t\geq 0}$ *un processus stochastique tel que toutes les trajectoires sont continues et tel que* $B_0 = 0$*. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *Le processus* B *est mouvement Brownien standard.*

ii) *Le processus* B *est un processus gaussien avec espérance* $m(t) \equiv 0$ *et covariance* $\Gamma(s,t) = \min\{s,t\}$*.*

Proposition 2.4 *Les trajectoires du mouvement Brownien standard sont continues Hölderiennes avec exposant $\alpha \in (0,1/2)$ i.e. : l'ensemble*

$$A_{\alpha,T} := \left\{ \omega \in \Omega : \sup_{0 \leq s < t \leq T} \frac{|B_t(\omega) - B_s(\omega)|}{|t-s|^{\alpha}} < \infty \right\}$$

est mesurable et de mesure 1 $\forall \alpha \in (0,1/2)$ et $T > 0$.

Définition 2.5 *Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\in I}\right)$ une base stochastique (espace de probabilité filtré). Un processus stochastique adapté $B = (B_t)_{t\in I}$ $B_t : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelé $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-mouvement Brownien standard si :*

i) $B_0 = 0.$

ii) $\forall 0 \leq s < t \in I$ *la variable aléatoire $B_t - B_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$, ceci signifie que*

$$P\left(C \cap \{B_t - B_s \in A\}\right) = P(C)\, P(B_t - B_s \in A)$$

pour $C \in \mathcal{F}_s$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

iii) $\forall 0 \leq s < t \in I$ *on a :*

$$B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$$

iv) $\forall \omega \in \Omega$ *les trajectoires $t \longrightarrow B_t(\omega)$ sont continues.*

Proposition 2.6 *Soit $B = (B_t)_{t\in I}$ un mouvement Brownien standard (selon la 1ère définition) et soit $(B_t)_{t\in I}$ sa filtration naturelle i.e. :*

$$\mathcal{F}_t^B := \sigma\left(B_s, s \in [0,t]\right).$$

Alors $(B_t)_{t\in I}$ est $(B_t)_{t\in I}$-mouvement Brownien.

2.2 Complétion d'un espace de probabilité

Lemme 2.7 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un espace de probabilité et*

$$\mathcal{N} := \{A \subseteq \Omega : \text{ il existe un } B \in \mathcal{F} \text{ avec } A \subseteq B \text{ et } P(B) = 0\} \cup \{\varnothing\}.$$

i) *Soit $\mathcal{G}$ sous σ-algèbre de $\mathcal{F}$. Alors $B \in \mathcal{G} \vee \mathcal{N}$ si et seulement si à $A \in \mathcal{G}$ / $A \Delta B \in \mathcal{N}$.*

($A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$)

ii) *La mesure* P *peut être prolonger à une mesure* $\widetilde{P}$ *sur* $\widetilde{\mathcal{F}} := \mathcal{F} \vee \mathcal{N}$ *par* $\widetilde{P}(B) := P(A)$ $\forall A \in \mathcal{F}$ *tel que* $A \Delta B \in \mathcal{N}$.

Définition 2.8 *L'espace de probabilité* $\left(\Omega, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathcal{P}}\right)$ *est appelé le completé de* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$.

Définition 2.9 *Soit* $X = (X_t)_{t \in I}$, $X_t : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *un processus stochastique,*
$\mathcal{F}_\infty^X := \sigma(X_s : s \in I)$
$\mathcal{F}_t^X := \sigma(X_s : s \in [0,t])$ $\forall t \in I$.
Définissons

$$\mathcal{N} := \left\{A \subseteq \Omega : \text{ il existe un } B \in \mathcal{F}_\infty^X \text{ avec } A \subseteq B \text{ et } P(B) = 0\right\}$$

Alors $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ *avec* $\mathcal{F}_t := \mathcal{F}_t^X \vee \mathcal{N}$ *est appelée augmentation de* $\left(\mathcal{F}_t^X\right)_{t \in I}$.

Proposition 2.10 *Soit* $B = (B_t)_{t \in I}$ *un mouvement Brownien standard,* $\left(\mathcal{F}_t^B\right)_{t \in I}$ *sa filtration naturelle et* $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ *l'augmentation de* $\left(\mathcal{F}_t^B\right)_{t \in I}$. *Alors*

i) *Le processus* $(B_t)_{t \in I}$ *est un* $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$*- mouvement Brownien.*

ii) *La filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ *est continue à droite, ceci signifie que*

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{s \in (t,S)} \mathcal{F}_s$$

avec $0 \leq t < S := \infty$ *si* $I = [0, \infty)$ *et* $0 \leq t < S := T$ *si* $I = [0, T)$.

Définition 2.11 *La base stochastique* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \in I}\right)$ *satisfait les conditions usuelles si :*

i) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ *est complété.*

ii) $A \in \mathcal{F}_t$ $\forall A \in \mathcal{F}$ *avec* $P(A) = 0$ *et* $t \in I$.

iii) *La filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ *est continue à droite i.e. :*

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{s \in (t,S)} \mathcal{F}_s$$

Proposition 2.12
avec $0 \leq t < S := \infty$ *si* $I = [0, \infty)$ *et* $0 \leq t < S := T$ *si* $I = [0, T)$.

2.3 Temps d'arrêt et temps optionnel

Motivation : Temps d'arrêts et optionnels sont des temps aléatoires qui forment un outil puissant dans la théorie des processus stochastiques.