Université de Sidi bel Abbès
Faculté des Sciences Exactes
Département de Proba-Stat

Année 2022-2023
Modélisation et Simulation
1ère Année Master PA & SA

Examen : Corrigé

Exercice **1** (2+2+2+2). *Soit la densité de probabilité f définie par*

$$f(x) = K \sin(\pi x)\ \mathbf{1}_{[0,1]}(x).$$

1. *Donner la constante de normalisation K.*

Réponse. $K = \frac{\pi}{2}$.

2. *Expliquer comment simuler f par la méthode d'inversion en précisant l'expression de F^{-1}.*

Réponse.

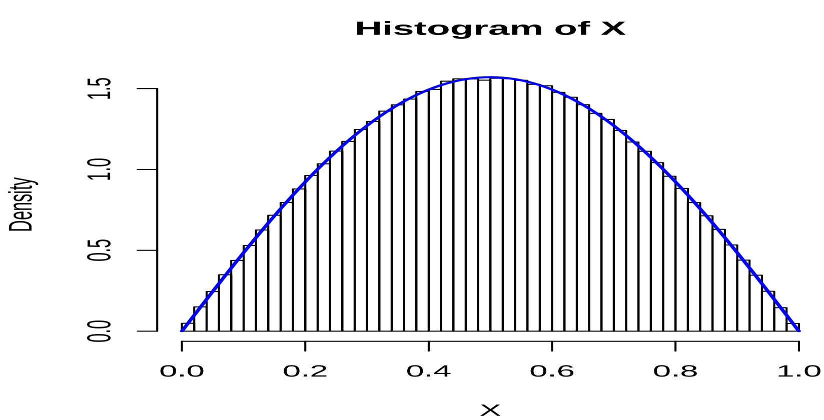
- $F(x) = \frac{1}{2}(1 - cos(\pi x)$ *pour* $0 \leq x \leq 1$.

- $F^{-1}(y) = \frac{1}{\pi}(\arccos(1-2y))$ *pour* $0 < y < 1$
- *Simuler* $U \sim \mathcal{U}[0,1]$
- *Poser* $X = \frac{1}{\pi}(\arccos(1-2U))$.

3. *Ecrire deux fonctions R , `rf1=function(n) { ... }` et `rf2=function(n) { ... }` qui permettent de simuler un echantillon aléatoire de taille n suivant la densité f, l'une avec boucles explicites et l'autre sans boucle.*

```
n=1e6
f=function(x) (pi/2)*sin(pi*x)
rf1=function(n) acos(1-2*runif(n))/pi
Y=rf1(n)
hist(Y,nclass=45,freq=FALSE)
curve(f,add=TRUE,col="blue",lwd=2)

rf2=function(n) {
X=numeric(n)
for(i in 1:n) {U=runif(1); X[i]=acos(1-2*U)}
return(X)
}
```



4. *Déduire comment simuler la densité de paramètre $m \in \mathbb{N}^*$ suivante :* $\mathbf{f_m(x) \propto |\sin(\pi x)| 1_{[0,m]}(x)}$.

Indication. *On l'écrit comme mélange de translations de f.*

Exercice **2** (1+1+2+1+2). *Soit la densité de probabilité f donnée par*

$$f(x) = M(1 - x^4)\mathbf{1}_{[-1,1]}(x).$$

On veut simuler f par la méthode de rejet en utilisant une loi uniforme $\mathcal{U}[a, b]$.

1. *Quel est le meilleur choix pour a et b ?*

   Réponse. $a = -1; b = 1$.

2. *Donner le c optimal.* ***Réponse.*** $g(x) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$

   $$c_{opt} = \sup_{[-1,1]} \frac{f(x)}{g(x)} = \sup_{[-1,1]} 2M(1 - x^4) = 2M.$$

   .

3. *Écrire une fonction R qui génére un n-échantillon aléatoire suivant la loi de densité f.*

```
n=1e6;M=5/8
f=function(x) M*(1-x^4)
g=function(x) (1/2)
copt=2*M
X=runif(n,-1,1)
U=runif(n)
Acc=f(X)>(c*g(X)*U)
Xacc=X[Acc]
hist(Xacc,freq=FALSE,col="gray",nclass=104)
curve(f,add=TRUE,col="blue",lwd=2)
```

4. *Soit $f_a(x) \propto (a^4 - x^4)\mathbf{1}_{|x|\leq a}$. Déduire une fonction R qui simule la densité f_a où a est un paramètre strictement positif.*

   On peut écrire $f_a(x) \propto (1 - (\frac{x}{a})^4)\mathbf{1}_{|x/a|\leq 1} \propto f(\frac{x}{a})$

   Donc a est un paramètre d'échelle. Il suffit de simuler X suivant la densité f et poser $Y = aX$.

5. *Soit $g_2(x) \propto (1-x)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$. Peut-on simuler f par rejet en utilisant g_2? Expliquer comment et dire si c'est meilleur que d'utiliser la loi uniforme comme loi instrumentale.*

   Indication. *On ne peut pas directement parce que le support de g_2 ne couvre pas le support de f. Mais comme f est une densité symétrique, on peut faire comme nous avons fait en TP pour la simulation de la loi normale avec la loi exponentielle comme loi instrumentale. En introduisant une variable de Rad(1/2) ...*

Exercice **3** (4+3).

Estimer en utilisant Monte-Carlo par deux méthodes chacune des intégrales suivantes, en donnant le programme pour un intervalle de confiance à 95%:

$$I = \int_0^3 \sin(x^4+3)e^{-\frac{x}{2}}\,dx.$$

$$J = \int_{\mathbb{R}^p} \frac{\cos(\|x\|)}{p} e^{-\frac{\|x\|^2}{2}} dx.$$

• • • • *L'intégrale I.*

Méthode 1.

- $f(x) = \frac{1}{3}\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$
- $g(x) = 3\sin(x^4+3)e^{-\frac{x}{2}}$

```
f=function(x) dunif(x,0,3)
g=function(x) 3*sin(x^4+3)*exp(-x/2)
n=1e6
X=runif(n,0,3)
Z=g(X)
binf=mean(Z)-1.96*sd(Z)/sqrt(n)
bsup=mean(Z)+1.96*sd(Z)/sqrt(n)
```

Méthode 2.

- $f(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\mathbf{1}_{]0,\infty[}(x)$
- $g(x) = 2\sin(x^4+3)\mathbf{1}_{]0,3[}(x)$

```
f=function(x) dexpf(x,0,1/2)
g=function(x) 2*sin(x^4+3)*(x<3)
n=1e6
X=rexp(n,1/2)
Z=g(X)
binf=mean(Z)-1.96*sd(Z)/sqrt(n)
bsup=mean(Z)+1.96*sd(Z)/sqrt(n)
```

• • • • *L'intégrale J.*

- $f(x) = (2\pi)^{-p/2}e^{-\frac{\|x\|^2}{2}}$
- $g(x) = (2\pi)^{p/2}\frac{\cos(\|x\|)}{p}$

```
p=5;n=1e4
g=function(x) (2*pi)^(p/2)*(cos(sqrt(sum(x*x)))/p)
M=matrix(rnorm(n*p),ncol=p)
Z=apply(M,1,g)
mean(Z);sd(Z)
binf=mean(Z)-1.96*sd(Z)/sqrt(n)
bsup=mean(Z)+1.96*sd(Z)/sqrt(n)
```