

Série N°1 Analyse combinatoire

Exo 1 :

Soit A l'ensemble des nombres de quatre chiffres, le premier étant non nul.

1. Calculer le nombre d'éléments de A.
2. Dénombrer les éléments de A :
 - a. composés de quatre chiffres distincts
 - b. composés d'au moins deux chiffres identiques
 - c. composés de quatre chiffres distincts autres que 5 et 7

Exo 2 :

Un enfant colorie cinq cases numérotées de 1 à 5 et dispose de 8 couleurs qu'il utilise au hasard.

1. Combien de dessins peut-il réaliser ?
2. Combien de dessins peut-il réaliser s'il n'utilise pas deux fois la même couleur ?
3. Combien de dessins peut-il réaliser, s'il décide de n'utiliser que 2 couleurs, l'une trois fois et l'autre 2 fois ?

Exo 3 :

1. On souhaite ranger sur une étagère 3 livres de mathématique (distincts), 5 livres de physiques (distincts), et 2 livres de chimie (distincts). De combien de façons peut-on effectuer ce rangement ?
 - a. Si l'on n'impose aucune condition.
 - b. Si les livres doivent être rangés ensemble par matières.
 - c. Si seuls les livres de mathématiques doivent être rangés ensemble.
2. Un étudiant doit répondre à 5 questions sur 8 d'un examen donné.
 - a. Combien a-t-il de choix possibles ?
 - b. Combien de choix possibles, s'il doit répondre exactement à 2 des 4 premières questions ?
 - c. Combien de choix possibles, s'il doit répondre à au moins une question parmi les 3 premières ?
3. Lorsqu'on jette 10 fois de suite une pièce de monnaie, combien de séquences différentes sont possibles ? Parmi celles-ci, combien contiennent exactement 1 fois pile ? 2 fois pile ? 4 fois pile ?

Exo 4 :

Une urne contient $2N$ boules dont N sont rouges et N blanches ($N \geq 3$). On effectue un tirage de 3 boules de cette urne. Quel est le nombre de tirage comportant strictement plus de boules rouge que de blanches, dans les trois cas suivant :

1. Le tirage des 3 boules est simultané.
2. Les boules sont tirées successivement et avec remise.
3. Les boules sont tirées successivement et sans remise.

Exo 5 :

Dans une urne se trouvent six boules blanches numérotées de 1 à 6 et cinq boules rouges numérotées de 1 à 5. On extrait simultanément quatre boules de l'urne.

1. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. Quel est le nombre de tirages de 4 boules qui correspondent aux situations suivantes :
 - a. les quatre boules sont blanches.
 - b. Il y a, parmi les quatre boules, au moins une boule rouge.
 - c. Parmi les quatre boules, il y a exactement une boule blanche et exactement une boule numérotée 3.

Série 1.

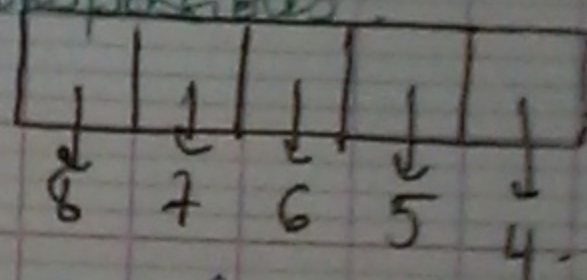
EX02:

- 1) la 1^{ère} case peut être coloriée par 8 couleurs
la 2^{ème} case " " " " 8 aussi
ainsi que la 3^{ème}, 4^{ème} et 5^{ème} case.

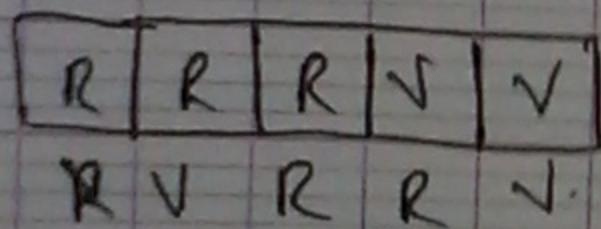
$$N = 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^5 \text{ (5-listes) Dessins possibles}$$

- 2) Les couleurs sont différentes

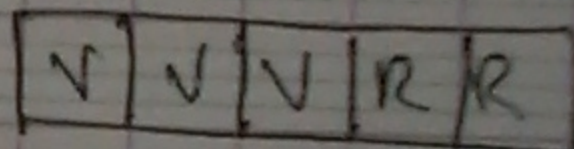
$$N = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = A_8^5 = \frac{8!}{3!} \text{ possibles}$$



- 3) L'enfant va d'abord choisir 2 couleurs parmi 8: C_8^2



ou
+



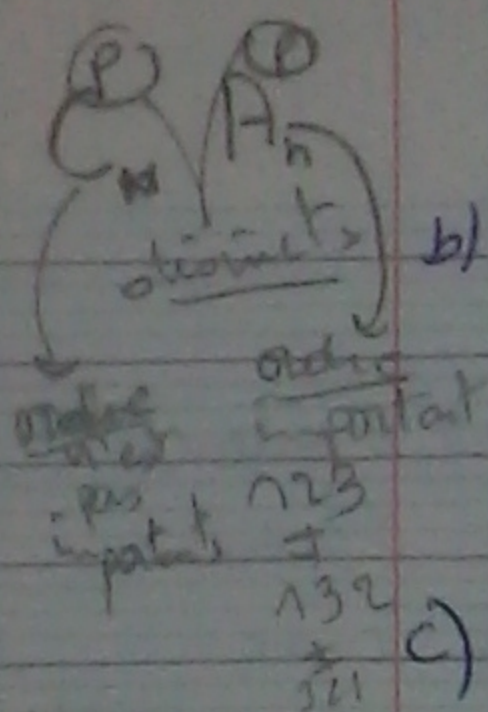
↓

permutation avec répétition = $\frac{5!}{3!2!}$

d'où:

$$N = C_8^2 \cdot \left(\frac{5!}{3!2!} + \frac{5!}{3!2!} \right) = C_8^2 \cdot \frac{5!}{3!2!} \cdot 2$$

EXO :

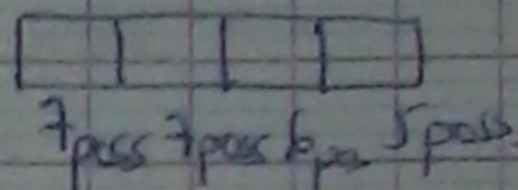


b) Au moins 2 chiffres identiques \equiv
total - toutes les chiffres sont diff.

$$N = 9 \cdot 10^3 - 9 \cdot A_9 \text{ nombres}$$

$$c) N = 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$$

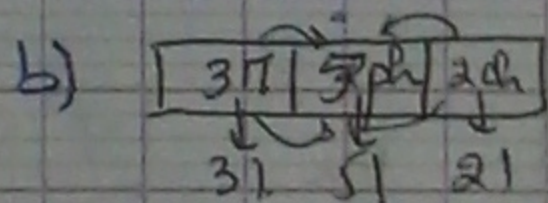
$$= 7 \cdot A_7^3 \text{ nombres possibles}$$



Exo 3:

① a) Il s'agit de permuer les 10 livres
entre eux par $10!$ façons.

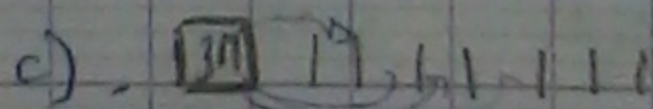
$$N = 10!$$



$$N = (3! \cdot 5! \cdot 2!) \times 3!$$

perm. des
livres de
chaque matière
entre eux

permutation des
3 matières.



$$N = 3! \times 8!$$

on va considérer les 3, 7
comme étant 1 seul livre
qui va se permuer
avec les 8 autres.

8!

$$2) a) N = C_8^5 = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 1} = 56 \text{ échantillons possibles.}$$

$$b) N = C_4^2 \times C_4^3 = \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{4!}{3!1!} = 24 \text{ échant. poss.}$$

$$c) N = C_3^1 \cdot C_5^4 + C_3^2 \cdot C_5^3 + C_3^3 \cdot C_5^2 = 55 \text{ possibilités}$$

ou bien

au moins 1 qst parmi 3 p?

$$N = C_8^5 - C_5^5 = 56 - 1 = 55$$

d) s'il doit répondre au 3 premières qsts

$$N = C_3^3 \times C_5^2 = C_5^2$$

$$3) N = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{10 \text{ fois}} = 2^{10} \text{ séquences poss (10-uplet)}$$

$$\{P, F\} \times \{P, F\} \dots \times \{P, F\}$$

$$\{PPP \dots P, PF \dots FP\} \dots$$

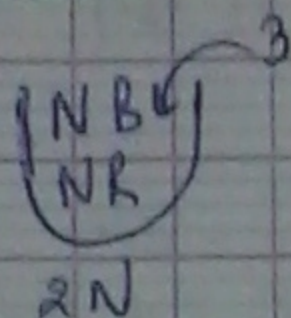
$$\begin{matrix} PF & F \\ FP & F \end{matrix}$$

10 elt à permutation

$$N = \frac{10!}{9!} = 10 \text{ séquences poss.}$$

il s'agit d'une perm avec répétition

Exo 4 =



$$N^0 \geq R > N^0 \geq B \quad \left. \begin{array}{l} 3R \text{ et } 0B \\ \text{ou} \\ 2R \text{ et } 1B \end{array} \right\}$$

Simultanément

$$N = \overset{R}{C_N^3} \cdot \overset{R}{C_N^0} + \overset{R}{C_N^2} \cdot \overset{B}{C_N^1}$$

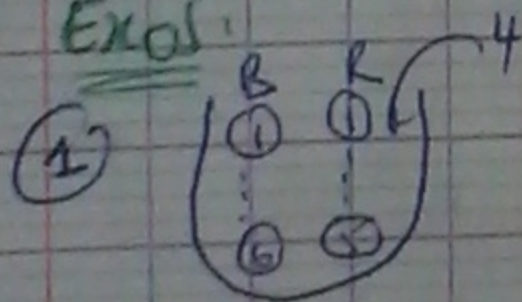
Successivement avec Remise
(Non - exhaustive)

$$N = A_N^1 \cdot A_N^1 \cdot A_N^1 \cdot A_N^0 + A_N^1 \cdot A_N^1 \cdot A_N^1 = 2N^3$$

Success dans remise:

$$N = A_N^1 \cdot A_{N-1}^1 \cdot A_{N-2}^1 \cdot A_N^0 + A_N^1 \cdot A_{N-1}^1 \cdot A_N^1 = A_N^3 + A_N^2 \cdot A_N^1$$

Exo 5:

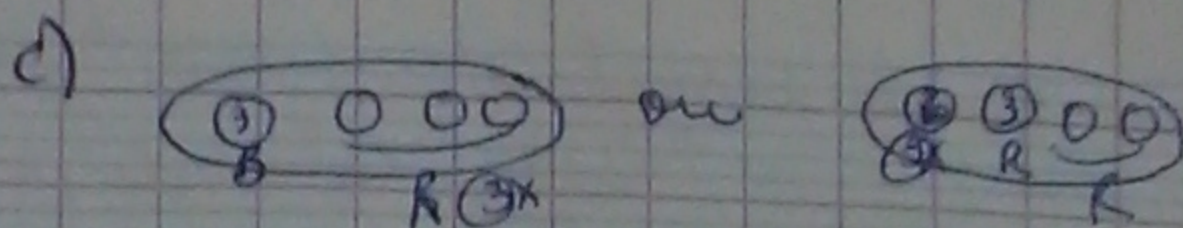


$$N = C_{11}^4 = 330 \text{ échantillons possi}$$

$$a) \quad C_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2!4!} = 15 \text{ échantillons possi}$$

$$b) \quad N = C_5^1 \cdot C_5^3 + C_5^2 \cdot C_6^2 + C_5^3 \cdot C_6^1 + C_5^4$$

$$\text{ou bien: } N = C_{11}^4 - C_6^4$$



si la boule blanche est $N^0 = 03$ ou sinon :

$$N = \underbrace{C_1^1}_{BN=3} \cdot \underbrace{C_4^3}_{KR=3} + \underbrace{C_5^1}_{BN=3} \cdot \underbrace{C_1^1}_{RN=3} \cdot \underbrace{C_4^2}_{KR=3}$$

Exos:

4 Personnes sont dans un ascenseur à 6 étages.
Quelle est le nombre de passages :

- 1) les 4 p s'arrêtent au ~~un~~ ^{des} étages diffé.
- 2) 2 p et 2 seulement s'arrêtent au m étage.

solution :

1) $N = A_6^4 = 6 \times 5 \times 4 \times 3$

2) $N = C_4^2 \cdot A_6^1 \cdot C_2^2 \cdot 5 \times 4$
 $= C_4^2 \cdot A_6^1 \cdot A_5^2$