Cours 7

Martingale et temps d'arrêt

Une martingale et caractérisée par l'égalité $\mathbb{E}\left(X_m \mid \mathcal{F}_n\right) = X_{m\wedge n}$. Il est naturel de se demander si cette égalité est encore valable pour deux temps d'arrêt T et S au lieu de deux constantes m et n. Le théorème d'arrêt de Doob répond à cette question sous certaines conditions.

On se donne un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ où $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 1 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus $\mathbb{F}-$adapté et T un $\mathbb{F}-$temps d'arrêt. On note X_T l'application définie pour chaque $\omega \in \Omega$ par $X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega)$.*

Lemme 2 *L'application X_T et $\mathcal{F}_T-$mesurable.*

Preuve. Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et n un entier naturel

$$\{X_T \in B\} \cap \{T = n\} = \{X_n \in B\} \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$$

qui entraîne $\{X_T \in B\} \in \mathcal{F}_T$ et donc X_T est $\mathcal{F}_T-$mesurable. ■

Proposition 3 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une $\mathbb{F}-$martingale et T un $\mathbb{F}-$temps d'arrêt borné par $m \in \mathbb{N}$. Alors X_T est intégrable et $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$.*

Preuve. Vu que $T \leq m$, alors $\{T \leq m\} = \Omega$ et donc $X_T = \sum\limits_{k=0}^{m} X_k \mathbb{1}_{\{T=k\}}$ et donc

$$\mathbb{E}(|X_T|) \leq \sum_{k=0}^{m} \mathbb{E}(|X_k|)\, \mathbb{1}_{\{T=k\}} \leq \sum_{k=0}^{m} \mathbb{E}(|X_k|) < +\infty,$$

ce qui achève l'intégrabilité de X_T. Montrons que $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_T) &= \sum_{k=0}^{m} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{T=k\}} X_k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{m} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{T=k\}} \mathbb{E}(X_m \mid \mathcal{F}_k)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{m} \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{T=k\}} X_m \mid \mathcal{F}_k\right)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{m} \mathbb{E}\left(X_m \mathbb{1}_{\{T=k\}}\right) \\
&= \mathbb{E}(X_m) \\
&= \mathbb{E}(X_0).
\end{aligned}$$

■

Théor■me 4 ***(d'arrêt de Doob :cas fini)*** *Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une $\mathbb{F}-$martingale, S et T un $\mathbb{F}-$temps d'arrêt bornés par une constante $m \in \mathbb{N}$ et tels que $S \leq T$. Alors $\mathbb{E}(X_T \mid \mathcal{F}_S) = X_S$ p.s.*

Preuve. Soit A un élément de $\mathcal{F}_S$. On définit la variable aléatoire R comme suit

$$R = S\mathbb{1}_A + T\mathbb{1}_{A^c}.$$

Cette variable aléatoire est un $\mathbb{F}-$temps d'arrêt borné par m. En effet,

$$\begin{aligned}
\{R = n\} &= \{S\mathbb{1}_A = n\} \cup \{T\mathbb{1}_{A^c} = n\} \\
&= (A \cap \{S = n\}) \cup (A^c \cap \{T = n\}) \in \mathcal{F}_n
\end{aligned}$$

Car : $A \cap \{S = n\} \in \mathcal{F}_n$ par la définition de $\mathcal{F}_S$ et $A^c \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ puisque $A^c \in \mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.

Montrons maintenant que $\mathbb{E}(X_T \mid \mathcal{F}_S) = X_S$ p.s.

Grace à la proposition précidente on a

$$\mathbb{E}(X_R) = \mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(X_T).$$

et on a aussi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_T) &= \mathbb{E}(X_T\mathbb{1}_A + X_T\mathbb{1}_{A^c}) = \mathbb{E}(X_T\mathbb{1}_A) + \mathbb{E}(X_T\mathbb{1}_{A^c}) \\
\mathbb{E}(X_R) &= \mathbb{E}(X_S\mathbb{1}_A + X_T\mathbb{1}_{A^c}) = \mathbb{E}(X_S\mathbb{1}_A) + \mathbb{E}(X_T\mathbb{1}_{A^c})
\end{aligned}$$

D'où $\mathbb{E}(X_S\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(X_T\mathbb{1}_A)$ ce qui signifie que $\mathbb{E}(X_T \mid \mathcal{F}_S) = X_S$ p.s. ■

Définition 5 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus stochastique et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de temps d'arrêt finis. La suite $(X_{T_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée un échantillonnagede $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Le théorème suivant (admis) montre que si la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croisssante, alors l'échantillonnage $(X_{T_n})_{n\in\mathbb{N}}$ de la mrtingale $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est encore une martingale sous certaines conditions.

Théor■me 6 ***(d'échantillonnage)*** *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une $\mathbb{F}-$martingale (resp. sous-martingale, sur-martingale). Si $(X_{T_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est un échantillonnage de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que :*
i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(|X_{T_n}|) < \infty$,
ii) $\limsup_N \mathbb{E}\left(|X_n| \mathbb{1}_{\{T_n > N\}}\right) = 0$, $n \in \mathbb{N}$,
alors $(X_{T_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une $\mathbb{F}-$martingale (resp. sous-martingale, sur-martingale).

Proposition 7 *Sous chacune des conditions suivantes :*
1) $\exists k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|X_n| \le k$ p.s., $n \in \mathbb{N}$.
2) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k_n \in \mathbb{N}$ tel que $T_n \le k_n$ p.s.,
les hypothèses du théorème d'échantillonnage sont vérifiées.

Preuve. 1) Supposons que la condition 1) de la proposition précidente est vérifiée. On a

$$\{|X_{T_n}| > k\} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (\{T_n = i\} \cap \{|X_i| > k\}) \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \{|X_i| > k\},$$

donc $0 \le P(\{|X_{T_n}| > k\}) \le \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} P(\{|X_i| > k\}) = 0$, ceci implique que $|X_{T_n}| \le k$ $p.s.$, d'où la prmière conditions du théorème d'échantillonnage $\mathbb{E}(|X_{T_n}|) \le k < \infty$. On va maintenant prouver la deuxième condition. Or la suite d'évenements $(\{T_n > N\})_{N\in\mathbb{N}}$ converge en décroissant vers $\{T_n = +\infty\}$ donc

$$\lim_{N\to+\infty} P\{T_n > N\} = P\left(\bigcap_{N\in\mathbb{N}} \{T_n > N\}\right) = P(\{T_n = +\infty\}) = 0,$$

puisque T_n est fini $p.s.$, et $0 \le \lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}\left(|X_n| \mathbb{1}_{\{T_n>N\}}\right) \le k \lim_{N\to+\infty} P\{T_n > N\} = 0$, d'où $\limsup_N \mathbb{E}\left(|X_n| \mathbb{1}_{\{T_n>N\}}\right) = 0$, qui est la deuxième conditions du théorème d'échantillonnage.

2) Supposons maintenant que la condition 2) est vérifiée. D'abord, il suffit de remarquer que $X_{T_n} \le \sum\limits_{i=0}^{k_n} X_i \mathbb{1}_{\{T_n=i\}}$ et donc $|X_{T_n}| \le \sum\limits_{i=0}^{k_n} |X_i|$ et $\mathbb{E}(|X_{T_n}|) \le \sum\limits_{i=0}^{k_n} \mathbb{E}(|X_i|) < +\infty$. Et enfin, pour $N \ge k_n$ on a bien $\mathbb{E}\left(|X_n| \mathbb{1}_{\{T_n>N\}}\right) = 0$, ce qui termine la preuve de la proposition. ■

Corollaire 8 *Soit T un $\mathbb{F}-$temps d'arrêt. Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $\mathbb{F}-$martingale (resp. sous-martingale, sur-martingale), alors le processus arrêté au temps T, soit $(X_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une $\mathbb{F}-$martingale (resp. sous-martingale, sur-martingale).*

Preuve. On a déjà vu que chaque variable aléatoire $T \wedge n$ est un temps d'arrêt borné par n, et comme la condition 2) de la proposition précidente est vérifiée avec $k_n = n$, le théorème d'échantillonnage donne la conclusion.

■

Cours 8.

Convergence des martingales Inégalités remarquables

Différentes inégalités remarquables sont utilisées dans l'étude des resultats de convergence de martingales. En voici quelques-unes.

Lemme 9 ***(première inégalité maximale de Doob)*** *Si X est une sous-martingale et $\lambda > 0$, on a*

$$\lambda P\left(\sup_{k\leq n} X_k \geq \lambda\right) \leq \mathbb{E}\left(X_n \mathbb{1}_{\left\{\sup_{k\leq n} X_k \geq \lambda\right\}}\right).$$

Preuve. On pose $A = \left\{\sup_{k\leq n} X_k \geq \lambda\right\}$, $A_0 = \{X_0 \geq \lambda\}$ et pour chaque $0 < k \leq n$, $A_k = \{X_0 < \lambda, ..., X_{k-1} < \lambda, X_k \geq \lambda\}$. Il est facile de voir que $A_k \in \mathcal{F}_k$ et donc $\forall\ 0 < k \leq n$,

$$\mathbb{E}\left(X_n \mathbb{1}_{A_k}\right) \geq \mathbb{E}\left(X_k \mathbb{1}_{A_k}\right) \geq \lambda P\left(A_k\right).$$

et comme $A = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$, on a finalement

$$\mathbb{E}\left(X_n \mathbb{1}_{A}\right) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}\left(X_n \mathbb{1}_{A_k}\right) \geq \lambda \sum_{k=0}^{n} P\left(A_k\right) = \lambda P\left(A\right)$$

c'est-à-dire

$$\lambda P\left(\sup_{k\leq n} X_k \geq \lambda\right) \leq \mathbb{E}\left(X_n \mathbb{1}_{\left\{\sup_{k\leq n} X_k \geq \lambda\right\}}\right).$$

La preuve du lemme est terminée. ■

Lemme 10 ***(technique)*** *Si X et Y sont deux variables aléatoires positives telles que $\forall \lambda > 0$, $\lambda P\left(X \geq \lambda\right) \leq \mathbb{E}\left(Y \mathbb{1}_{\{X\geq\lambda\}}\right)$. Alors $\forall p > 1$ et $q = \frac{p}{p-1}$, on a $\|X\|_p \leq q \|Y\|_p$(i.e $\left[\mathbb{E}\left(X^p\right)\right]^{\frac{1}{p}} \leq q \left[\mathbb{E}\left(Y^p\right)\right]^{\frac{1}{p}}$).*

Preuve. *Posons $G = \int_0^{+\infty} p\lambda^{p-1} P\left(X \geq \lambda\right) d\lambda$ et $D = \int_0^{+\infty} p\lambda^{p-2} \mathbb{E}\left(X \mathbb{1}_{\{X\geq\lambda\}}\right) d\lambda$. L'hypothèse $\lambda P\left(X \geq \lambda\right) \leq \mathbb{E}\left(Y \mathbb{1}_{\{X\geq\lambda\}}\right)$ implique que $G \leq D$. Comme*

$$G = \int_0^{+\infty} p\lambda^{p-1} \left(\int_\Omega \mathbb{1}_{\{X\geq\lambda\}} dP\right) d\lambda = \int_\Omega dP \int_0^{X} p\lambda^{p-1} d\lambda = \int_\Omega X^p dP$$

et

$$D=\int_0^{+\infty} p\lambda^{p-2}\left(\int_\Omega Y\mathbb{1}_{\{X\geq\lambda\}}dP\right)d\lambda=\int_\Omega YdP\int_0^X p\lambda^{p-2}d\lambda=\int_\Omega YqX^{p-1}dP$$

L'inégalité $G\leq D$ s'écrit donc $\int_\Omega X^p dP\leq\int_\Omega YqX^{p-1}dP$. D'où

$$\mathbb{E}\left(X^p\right)\leq q\mathbb{E}\left(YX^{p-1}\right)\leq q\left\|Y\right\|_p\left\|X^{p-1}\right\|_q=q\left\|Y\right\|_p\left(\mathbb{E}\left(X^{p-1}\right)\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Donc $\left(\mathbb{E}\left(X^p\right)\right)^{1-\frac{1}{q}}\leq q\left\|Y\right\|_p$. Finalement, $\left\|X\right\|_p=\left(\mathbb{E}\left(X^p\right)\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\mathbb{E}\left(X^p\right)\right)^{1-\frac{1}{q}}\leq q\left\|Y\right\|_p$. ■

Proposition 11 ***(Inégalité maximale de Doob dans L^p).*** *Si X est une sous-martingale positive, pour $p>1$, et $q=\frac{p}{p-1}$, soit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, on a : $\left\|\sup_{k\leq n}X_k\right\|_p\leq q\left\|X_n\right\|_p$.*

Preuve. Si X est une sous-martingale et $\lambda>0$, on a d'après la première inégalité maximale de Doob

$$\lambda P\left(\sup_{k\leq n}X_k\geq\lambda\right)\leq\mathbb{E}\left(X_n\mathbb{1}_{\left\{\sup_{k\leq n}X_k\geq\lambda\right\}}\right).$$

Posons $X=\sup_{k\leq n}X_k$ et $Y=X_n$, l'inégalité précidente s'écrit $\lambda P\left(X\geq\lambda\right)\leq\mathbb{E}\left(Y\mathbb{1}_{\{X\geq\lambda\}}\right)$. Le lemme technique implique alors que $\left\|X\right\|_p\leq q\left\|Y\right\|_p$, c'est-à-dire $\left\|\sup_{k\leq n}X_k\right\|_p\leq q\left\|X_n\right\|_p$ ce qui termine la preuve. ■

Théor■me 12 ***(Inégalité de Kolmogorov)*** *Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une $\mathbb{F}-$martingale de carré intégrable et $\lambda>0$, on a pour tout $n\geq1$:*

$$P\left(\sup_{1\leq k\leq n}\left|X_k\right|\geq\lambda\right)\leq\frac{1}{\lambda}\mathbb{E}\left(X_n^2\right).$$

Preuve. Il suffit de remarque que $(X_n^2)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une sous-martingale positive et que

$$P\left(\sup_{1\leq k\leq n}X_k^2\geq\lambda^2\right)=P\left(\sup_{1\leq k\leq n}\left|X_k\right|\geq\lambda\right)$$

on obtient donc compte tenu la première inégalité maximale de Doob

$$\begin{aligned}P\left(\sup_{1\leq k\leq n}\left|X_k\right|\geq\lambda\right)&=P\left(\sup_{1\leq k\leq n}X_k^2\geq\lambda^2\right)\\&\leq\frac{1}{\lambda^2}\mathbb{E}\left(X_n^2\mathbb{1}_{\left\{\sup_{k\leq n}X_k^2\geq\lambda\right\}}\right)\\&\leq\frac{1}{\lambda^2}\mathbb{E}\left(X_n^2\right).\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. ■

Convergence des martingales L²

On va exposer dans la suite différents résultats de convergence de martingales

Théor■me 13 *Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est une* $\mathbb{F}-$*martingale de carré intégrable (i.e.* $X_n \in L^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$*). Si* $\sup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{E}(X_n^2) < +\infty$, *alors* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge dans* L^2 *et p.s. vers une variable aléatoire* X *de carré intégrable. De plus pour tout* $n \geq 1$, *on a* $X_n = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n)$.

Preuve. Remarquons d'abord que $(X_n^2)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une sous-martingale et donc la suite des réels $(\mathbb{E}(X_n^2))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par $x^* = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{E}(X_n^2)$ et donc elle converge dans $\mathbb{R}$ vers x^*. Puisque

$$\mathbb{E}[X_{n+k}X_n] = \mathbb{E}(\mathbb{E}[X_{n+k}X_n \mid \mathcal{F}_n]) = \mathbb{E}(X_n\mathbb{E}[X_{n+k} \mid \mathcal{F}_n]) = \mathbb{E}\left(X_n^2\right)$$

on a $\mathbb{E}\left[(X_{n+k}-X_n)^2\right] = \mathbb{E}\left[X_{n+k}^2\right] - \mathbb{E}[X_n^2]$, ainsi $\mathbb{E}\left[(X_{n+k}-X_n)^2\right] \leq x^* - \mathbb{E}[X_n^2]$, d'où $\sup_k \mathbb{E}\left[(X_{n+k}-X_n)^2\right]$ converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Ce qui montre que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy dans L^2 et donc X_n converge dans L^2. Soit X sa limite.

Montrons que X_n converge presque sûrement vers X. On applique l'inégalité de Kolmogorov à la martingale $(X_{m+k}-X_m)_{k\in\mathbb{N}^*}$, on obtient

$$\begin{aligned} P\left(\sup_{1\leq k\leq n} |X_{m+k}-X_m| \geq \lambda\right) &\leq \frac{1}{\lambda^2}\mathbb{E}\left[(X_{m+k}-X_m)^2\right] \\ &= \frac{1}{\lambda^2}\left[\mathbb{E}\left(X_{m+k}^2\right) + \mathbb{E}\left(X_m^2\right)\right] \end{aligned}$$

et comme $\mathbb{E}(X_n^2)$ converge vers $\mathbb{E}(X^2)$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $m \geq n_0$, on a

$$P\left(\sup_{1\leq k\leq n} |X_{m+k}-X_m| \geq \lambda\right) \leq \frac{\varepsilon}{\lambda^2},$$

et par suite,

$$P\left(\sup_{k\geq 1} |X_{m+k}-X_m| \geq \lambda\right) \leq \frac{\varepsilon}{\lambda^2}.$$

Ce qui nous assure que $P(\{\omega \in \Omega : X_n \text{ diverge}\}) = 0$, et par conséquent la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement et sa limite ne peut être que X.

Il nous reste à montrer que $X_n = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n)$ *p.s.*.

On a pour toute variable aléatoire Z de carrée intégrable

$$\int_\Omega ZX_n dP \to \int_\Omega ZX dP \text{ quand } n \text{ tend vers } +\infty.$$

En effet

$$\|ZX_n - ZX\| \leq \|Z\|^2 \|X_n - X\| \to 0 \text{ lorsque } n \ \to +\infty.$$

En particulier, si on prend $Z = \mathbb{I}_A$ où $A \in \mathcal{F}_n$, on arrive à

$$\int_A X_n dP \to \int_A X dP \text{ quand } n \ \to \ +\infty.$$

et pour tout $k \geq 1$, on a

$$\int_A X_{n+k} dP = \int_A \mathbb{E}\left(X_{n+k} \mid \mathcal{F}_n\right) dP = \int_A X_n dP$$

d'où, on fait tendre k vers $+\infty$

$$\int_A X_n dP = \int_A X dP = \int_A \mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{F}_n\right) dP$$

Cette dernière inégalité étant vraie pour tout $A \in \mathcal{F}_n$, on en déduit $X_n = \mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{F}_n\right) \ P - p.s.$ ■

Cours 9.

Convergence des martingales L^1 Nombre de traversées ascendantes d'un processus stochatique à travers le segments $[a, b]$.

Soient a et b deux nombres réels avec $a < b$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un processus stochastique. Pour chaque réalisation ω ($\omega \in \Omega$), on pose $T_0(\omega) = \inf\{n \in \mathbb{N}^* : \ X_n(\omega) \leq a\}$ et on définit alors,

$$\begin{aligned}
T_1(\omega) &= \inf\{n \in \mathbb{N}^* : \ X_n(\omega) \leq a\}, \\
T_2(\omega) &= \inf\{n \in \mathbb{N}^* : n > T_1(\omega) \text{ et } X_n(\omega) \geq b\}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
T_{2k-1}(\omega) &= \inf\{n \in \mathbb{N}^* : n > T_{2k-2}(\omega) \text{ et } X_n(\omega) \leq a\}, \\
T_{2k}(\omega) &= \inf\{n \in \mathbb{N}^* : n > T_{2k-1}(\omega) \text{ et } X_n(\omega) \geq b\}, \text{ etc....}
\end{aligned}$$

Notons que la suite des temps d'arrêt $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est la suite des temps successifs où la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ croise l'intervalle $[a, b]$, appelées passage au niveau (a, b). Le temps d'arrêt T_k peut être infini, $T_k = +\infty$ s'il n'existe pas de $n > T_{k-1}$ et tel que $X_n \leq a$ où $X_n(\omega) \geq b$. Il est claire que la suite $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante et satisfait $T_k \geq k$ pour chaque $k \in \mathbb{N}$.

Définissons pour $m \geq 1$, la suite des nombres de passage au niveau (a, b) de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, soit

$$U_m(a, b) = card(\{n \in \mathbb{N}^* : n \text{ et impair et } T_n \leq m\}).$$

c'est-à-dire que $2U_m(a, b)$ variable de la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans $[0, m]$, précisément les variables $T_0, T_1, ..., T_{2U_m(a,b)-1.}$

Notons que la variable aléatoire $U_m(a, b)$ représente alors le nombre de traversée ascendantes de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et la suite $(U_m(a, b))_{m\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante.

Théor■me 14 *(de passage à niveau de Doob) Soient a et b deux nombres réels avec $a < b$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un processus stochastique. Pour tout entier m non nul :*

1) Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une sous-martingale, alors

$$(b - a)\,\mathbb{E}(U_m(a, b)) \leq \mathbb{E}(X_m - a)^+.$$

2) Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une sur-martingale, alors

$$(b - a)\,\mathbb{E}(U_m(a, b)) \leq \mathbb{E}(X_m - a)^-.$$

Preuve. Dans la suite, on va démontrer seulement l'assersation (1). L'assersation (2) se démontre de manière similaire. Fixons $m \in \mathbb{N}^*$ et posons $Y_n = X_{T_n \wedge m}$ pour $n \geq 0$. ■