Université de Tlemcen
Département de Mathématique le 26-05-2016

Introduction aux Processus Aléatoires L3.S6.

Examen final Durée 2h

Exercice .1. *Soit X une v.a.r.d. de support $D_X = \{1, 0, -1\}$ et telle que*

$$P_{X_1}(1) = \frac{\theta}{3}\ ,\ P_{X_1}(0) = \frac{\theta}{2}\ ,\ P_{X_1}(-1) = \frac{\theta}{6}$$

où θ est un paramètre réel positif inconnu.

1. Calculer l'espérance et la variance de X_1.

2. Nous disposons d'un échantillon de taille n d'observations $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ de la loi P_{X_1} définie plus haut. Calculer un estimateur $\widetilde{\theta}_n$ par la méthode des moments pour le paramètre θ.

3. $\widetilde{\theta}_n$ est il sans biais ? Calculer $Var(\widetilde{\theta}_n)$.

4. a. L'estimateur $\widetilde{\theta}_n$ est-il convergent en probabilité (vers θ) ?

b. Est il convergent presque sûrement ?(On pourra utiliser la L.F.G.N.).

5. Par application du T.C.L. déterminer la loi limite de l'estimateur $\widetilde{\theta}_n$.

Exercice .2. *Soit X_1 la v.a.r. de loi $\Gamma(a, \frac{1}{\theta})$ définie pour $x > 0$ par*

$$f_{X_1}(x) = \frac{1}{\theta^a \Gamma(a)} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right) x^{a-1}\ ,\quad a > 0\ ,\quad \theta > 0.$$

1. a. Calculer $E(X_1)$ et $\sigma^2_{X_1}$.

b. Soit $Y = \ln X_1$, calculer la fonction génératrice de Y. En déduire EY et σ^2_Y.

2. Dans cette question a est supposé connu et θ est inconnu.

a. Estimer θ par la méthode du maximum de vraisemblance sur la base d'un échantillon $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ de la loi $\Gamma(a, \frac{1}{\theta})$; soit $\widehat{\theta}_n$ cet estimateur.

b. Calculer le biais et le risque quadratique de $\widehat{\theta}_n$.

3. Dans cette question θ est supposé connu et a est inconnu.

a. Etudier le biais et le risque quadratique de l'estimateur $\widehat{a}_n = \frac{\overline{X}_n}{\theta}$.

b. Calculer l'Information de Fisher associée à l'échantion.

c. L'estimateur $\widehat{a}_n$ est-il efficace (i.e : atteint-il la borne de Cramer-Rao) ?

4. Comment pourrait-on estimer a quand les deux paramètres (θ, a) sont inconnus ? *Bon courage.*

8 EX1 Une Solution proposée pour l'examen final de "Introduction aux Processus Aléatoires" (?)

Exercice 1: $D_{X_1} = \{1, 0, -1\}$.

1) $E(X_1) = 1 \cdot \frac{\theta}{3} + 0 \cdot \frac{\theta}{2} + (-1)\frac{\theta}{6} = \frac{\theta}{6}$ $\quad E X_1 = \frac{\theta}{6}$

$E(X_1^2) = 1^2 \cdot \frac{\theta}{3} + 0^2 \frac{\theta}{2} + (-1)^2 \frac{\theta}{6} = \frac{\theta}{2}$

$Var(X_1) = E X_1^2 - (E X_1)^2 = \frac{\theta}{2} - \left(\frac{\theta}{6}\right)^2 = \frac{\theta}{2} - \frac{\theta^2}{36}$ $\quad V(X_1) = \frac{\theta}{2} - \frac{\theta^2}{36}$

2) $\tilde{\theta}_n$ estimateur de θ de la méthode des moments.

Par la LFGN $\quad \overline{X}_n \xrightarrow{P.s} E X_1$

c'est à dire que pour n suffisamment grand

On peut poser $\quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{\tilde{\theta}_n}{6}$ ou encore

$\boxed{\tilde{\theta}_n = 6\,\overline{X}_n}$ est un estimateur de θ par la méthode des moments.

3) * $E(\tilde{\theta}_n) = E(6\overline{X}_n) = 6E(\overline{X}_n) = 6E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) =$

$= \frac{6}{n} \cdot n E X_1 = 6 E X_1 = 6\frac{\theta}{6} = \theta$.

alors $b(\tilde{\theta}_n) = E(\tilde{\theta}_n) - \theta = 0$ $\quad b(\tilde{\theta}_n) = 0$

$\tilde{\theta}_n$ est sans biais.

* $Var(\tilde{\theta}_n) = Var(6\overline{X}_n) = 6^2 Var(\overline{X}_n) = 6^2 Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

$= \frac{6^2}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \underset{(*)}{=} \frac{6^2}{n^2} n\, Var(X_1) = \frac{6^2}{n}\left[\frac{\theta}{2} - \frac{\theta^2}{36}\right]$

les X_i étant indépendantes et identiquement distribuées.

$\boxed{Var(\tilde{\theta}_n) = \frac{1}{n}\left[18\theta - \theta^2\right]}$

4) a) $\tilde{\theta}_n$ est convergent vers θ en probabilité car $\tilde{\theta}_n$ converge p.s vers θ par construction de l'estimateur de la méthode des moments qui est basée sur la LFGN. (à énoncer)

b) Déjà établi par construction, nous avons la cvgence p.s. de $\tilde{\theta}_n$ vers θ car $\bar{X}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} EX_1$ ②

5) Par le TCL nous avons (énoncer le TCL)

$\tilde{\theta}_n = 6\bar{X}_n = \frac{6}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ si $S_1 = \sum_{i=1}^n X_i$, le TCL donne

$$\frac{S_1 - ES_1}{\sigma_{S_1}} \xrightarrow{\text{en loi}} \xi \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

$ES_1 = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = n(EX_1) = n \cdot \frac{\theta}{6}$

$\sigma(S_1) = \sqrt{Var(S_1)}$

et $Var\, S_1 = Var\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n Var(X_i) = n\, Var(X_1) = n\left[\frac{\theta}{2} - \frac{\theta^2}{36}\right]$.

$$\Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\frac{\theta}{6}}{\sqrt{n\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\theta^2}{36}\right)}} \xrightarrow{\text{en loi}} \xi \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\frac{\theta}{6}}{\sqrt{n\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\theta^2}{36}\right)}} \to \xi \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\sqrt{n}}{6}\,\frac{\tilde{\theta}_n - \theta}{\sqrt{\frac{\theta}{2} - \frac{\theta^2}{36}}} \longrightarrow \xi \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)}$$

$\sqrt{n}\,\frac{\tilde{\theta}_n - \theta}{\sqrt{18\theta - \theta^2}} \xrightarrow{\text{en loi}} \xi$

$$\tilde{\theta}_n - \theta \underset{\text{en loi}}{\sim} \xi_1 \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{n}(18\theta - \theta^2)\right)$$

$$\boxed{\tilde{\theta}_n \underset{\text{en loi}}{\sim} \xi_2 \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\theta, \frac{1}{n}(18\theta - \theta^2)\right)}$$

12 EX2

Exercice 2

1) a) $EX_1 = \frac{1}{\theta^a\Gamma(a)}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{\theta}} x^a\, dx = \frac{1}{\theta^a\Gamma(a)}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{\theta}}\left(\frac{x}{\theta}\theta\right)^{a+1-1} dx$

$\left\langle \begin{array}{l} u = \frac{x}{\theta} \quad \text{avec les mêmes bornes} \\ du = \frac{dx}{\theta} \Leftrightarrow dx = \theta\, du \end{array} \right\rangle$

$EX_1 = \frac{\theta^a}{\theta^a\Gamma(a)}\int_0^{+\infty} e^{-u} u^{a+1-1}\theta\, du = \frac{\theta}{\Gamma(a)}\Gamma(a+1) = \frac{\theta a\Gamma(a)}{\Gamma(a)} = \theta a$

$EX_1^2 = \frac{1}{\theta^a\Gamma(a)}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{\theta}} x^{a+1}\, dx = \frac{1}{\theta^a\Gamma(a)}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{\theta}}\left(\frac{x}{\theta}\theta\right)^{a+2-1} dx =$

$= \frac{\theta^{a+1}}{\theta^a\Gamma(a)}\int_0^{+\infty} e^{-u} u^{a+2-1}\theta\, du = \frac{\theta^2}{\Gamma(a)}\Gamma(a+2) = \frac{\theta^2}{\Gamma(a)}(a+1)a\Gamma(a)$

$EX_1^2 = \theta^2 a(a+1)$.

$Var(X_1) = EX_1^2 - (EX_1)^2 = \boxed{\theta^2 a(a+1) - (\theta a)^2} = a\theta^2$

b) $Y = \ln X_1$ soit $t \in \mathbb{R}$,

$M_Y(t) = E(e^{tY}) = \int_0^{+\infty} e^{t\ln x} f_{X_1}(x)\, dx =$

$= \int_0^{+\infty} x^t \frac{1}{\theta^a\Gamma(a)} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right) x^{a-1}\, dx = E(X^t)$

$= \frac{1}{\theta^a\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)} \left(\frac{x}{\theta}\theta\right)^{t+a-1} dx = \frac{\theta^{t+a-1}}{\theta^a\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{t+a-1}\theta\, du$

$= \frac{\theta^t}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{t+a-1}\, du = \boxed{\theta^t \frac{\Gamma(t+a)}{\Gamma(a)} = M_Y(t)}$

$EY = M_Y'(0)$

$M_Y(t) = \theta^t \frac{\Gamma(t+a)}{\Gamma(a)}$

$M_Y'(t) = \left(e^{t\ln\theta} \frac{\Gamma(t+a)}{\Gamma(a)}\right)' = \ln\theta \cdot \theta^t \frac{\Gamma(t+a)}{\Gamma(a)} + \theta^t \frac{\Gamma'(t+a)}{\Gamma(a)}$

Calcul de $\Gamma'(t+a)$

$\Gamma(t+a) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t+a-1}\, dx$

$\Gamma'(t+a) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \left(e^{(t+a-1)\ln x}\right)' dx$

$= \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x \cdot x^{t+a-1}\, dx$

et pour $t = 0$

$\Gamma'(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x\; x^{a-1}\, dx$

Donc $EY = \ln\theta \dfrac{\Gamma(a)}{\Gamma(a)} + \dfrac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}.$

$$\boxed{EY = \ln\theta + \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}}$$

$EY^2 = M''_Y(0)$

$$M''_Y(t) = \left[\ln\theta\ \theta^t \frac{\Gamma(t+a)}{\Gamma(a)} + \frac{\theta^t\,\Gamma'(t+a)}{\Gamma(a)}\right]'$$

$$= (\ln\theta)^2\theta^t \frac{\Gamma(t+a)}{\Gamma(a)} + \ln\theta.\theta^t \frac{\Gamma'(t+a)}{\Gamma(a)} +$$

$$+ \ln\theta.\theta^t \frac{\Gamma'(t+a)}{\Gamma(a)} + \theta^t \frac{\Gamma''(t+a)}{\Gamma(a)}$$

et pour $t=0$.

$$EY^2 = M''_Y(0) = (\ln\theta)^2 + 2\ln\theta \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + \frac{\Gamma''(a)}{\Gamma(a)}$$

$$= (\ln\theta)^2 + 2\ln\theta \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + \frac{\Gamma''(a)}{\Gamma(a)}.$$

$$\operatorname{Var} Y = EY^2 - (EY)^2 = (\ln\theta)^2 + 2\ln\theta \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + \frac{\Gamma''(a)}{\Gamma(a)}$$

$$- \left[(\ln\theta)^2 + \left(\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}\right)^2 + 2\ln\theta \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}\right]$$

$$\boxed{\operatorname{Var} Y = \frac{\Gamma''(a)}{\Gamma(a)} - \left(\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}\right)^2}$$

2) a) $\hat{\theta}_n$ EMV Soit $X_1, \dots, X_n$ n observations de la loi de X_1.

* loi du vecteur $X = (X_1, \dots, X_n)$

$$f_X(x) = f_X(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) =$$

$$\boxed{= \frac{1}{\theta^{na}\Gamma^n(a)} \exp\left(-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i\right) \prod_{i=1}^n x_i^{a-1}}$$

La vraisemblance

$$V(\theta, X) = \frac{1}{\theta^{na}\Gamma^n(a)} \exp\left(-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n X_i\right) \prod_{i=1}^n X_i^{a-1}$$

La log-vraisemblance

$$L_n(\theta, X) = \ln\left\{\frac{1}{\theta^{na}\Gamma^n(a)} \exp\left(-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n X_i\right) \prod_{i=1}^n X_i^{a-1}\right\}.$$

$$\boxed{= -na\ln\theta - n\ln\Gamma(a) - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n X_i + \sum_{i=1}^n \ln X_i^{a-1}}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} L_n(\theta, X) = -\frac{na}{\theta} + \frac{S_1}{\theta^2} \quad \text{avec } S_1 = \sum_{i=1}^n X_i$$

Points critiques : $-\frac{na}{\theta} + \frac{S_1}{\theta^2} = 0.$

$$\Leftrightarrow -na\theta + S_1 = 0 \Leftrightarrow \hat{\theta}_n = \frac{S_1}{na} = \frac{\overline{X}_n}{a}$$

Vérifions que $\hat{\theta}_n$ est bien un maximum pour la log-vraisemblance : signe de $-na\theta + S_1$:

$+$	$\frac{\overline{X}_n}{a}$	$-$

Alors $\boxed{\hat{\theta}_n = \frac{\overline{X}_n}{a}}$ est l'EMV pour le paramètre θ.

b) Le biais de $\hat{\theta}_n$

$$E(\hat{\theta}_n) = E\left(\frac{\overline{X}_n}{a}\right) = \frac{1}{a}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{n}{na} E X_1 = \frac{n}{na}\theta a = \theta$$

$b(\hat{\theta}_n) = E(\hat{\theta}_n) - \theta \boxed{= 0}$ ainsi $\hat{\theta}_n$ est sans biais

Risque quadratique de $\hat{\theta}_n$.

$b(\hat{\theta}_n) = 0$ alors $R(\hat{\theta}_n, \theta) = Var(\hat{\theta}_n) =$

$$= Var\left(\frac{\overline{X}_n}{a}\right) = \frac{1}{a^2} Var(\overline{X}_n) = \frac{1}{a^2} Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\right.$$

$$= \frac{1}{a^2}\frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{a^2 n^2} n\, Var X_1 =$$

$$= \frac{1}{na^2}\left[\theta^2 a\right. =$$

$$\boxed{R(\hat{\theta}_n, \theta) =} \boxed{\frac{\theta^2}{na}}$$

3) a inconnu et θ connu

a) $\hat{a}_n = \frac{\overline{X}_n}{\theta}$

* biais

$E(\hat{a}_n) = E\left(\frac{\overline{X}_n}{\theta}\right) = \frac{1}{\theta} E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{\theta} E X_1 = \frac{1}{\theta} \theta a = a$

alors $\boxed{b(\hat{a}_n) = E(\hat{a}_n) - a = 0}$

$\hat{a}_n$ est sans biais.

* risque quadratique

$R(\hat{a}_n, a) \underset{\substack{\uparrow \\ \hat{a}_n \text{ sans biais}}}{=} Var(\hat{a}_n) = Var\left(\frac{\overline{X}_n}{\theta}\right) = \frac{1}{\theta^2} Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) =$

$= \frac{1}{n^2\theta^2} Var \sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n\theta^2} Var X_1 = \frac{1}{n\theta^2}\left[a\theta^2\right]$

$R(\hat{a}_n, a) = \frac{a}{n}$

b) Information de Fisher associée à l'échantillon

$I_1 = -E\left([\ln f(x, a)]''\right)$. On dérive par rapport à "a" !

$\ln f(X_1, a) = -a \ln\theta - \ln\Gamma(a) - \left(\frac{x}{\theta}\right) + (a-1)\ln X_1$

$[\ln f(X_1, a)]' = -\ln\theta - \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + \ln X_1$

$[\ln f(X_1, a)]'' = -\frac{\Gamma''(a)\Gamma(a) - [\Gamma'(a)]^2}{\Gamma^2(a)} = \frac{\Gamma'^2(a) - \Gamma''(a)\Gamma(a)}{\Gamma^2(a)}$

$I_1(a) = -E[\ln'' f(X_1, a)] = \frac{\Gamma''(a)\Gamma(a) - \Gamma'^2(a)}{\Gamma^2(a)}$

et $I_n(a) = n\,\frac{\Gamma''(a)\Gamma(a) - \Gamma'^2(a)}{\Gamma^2(a)}$

la borne non atteinte

4) Pour estimer a quand les deux paramètres (θ, a) sont inconnus

a) On peut considérer la logvraisemblance comme une fonction aux deux variables θ et a et calculer le maximum d'une fonction à deux variables en utilisant $r = \frac{\partial^2 L_n}{\partial a^2}$ $t = \frac{\partial^2 L_n}{\partial \theta^2}$ et $s = \frac{\partial^2 L_n}{\partial \theta \partial a}$ et par le signe de $s^2 - rt$ on peut voir s'il existe un maximum.

b) On peut également considérer dans un premier temps a comme une constante. Calculer le EMM pour θ soit $\hat{\theta}_n$ cet EMV. Remplacer θ par $\hat{\theta}_n$ dans l'expression de la logvraisemblance. Enfin maximiser par rapport à a (ici a est considéré comme variable) de la nouvelle fonction obtenue à partir de la logvraisemblance avec $\hat{\theta}_n$ au lieu de θ.