Exo1 / 03,25 Exo2 / 10,45 I.D / 07,50

Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Université Hassiba Benbouali de Chlef
Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة حسيبة بن بوعلي بالشلف
كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي

قسم الرياضيات

U.H.B.C. Chlef
Faculté des Sciences Exactes
Département des maths

A.U. 2018/2019
Niveau: $1^{ère}$ Master/ Option: M.A.S.
Module: Processus Stochastiques 2

EXAMEN FINAL (3 HEURES) DOCUMENTS AUTORISÉS

On travaille sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$.

1. Soit τ un $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ – *temps d'arrêt*. Montrer les résultats suivants: ((b) et (c) sont des conséquences de (a))

   1,85 (a) Pour qu'une fonction $\mathcal{F}_\infty - mesurable$ $X : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ soit $\mathcal{F}_\tau$-mesurable **il faut et il suffit** que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la restriction de X sur $\{\tau = n\}$ soit $\mathcal{F}_n - mesurable$.($Indication$: commencer par une fonction indicatrice $\mathcal{F}_\infty - mesurable$ puis généraliser).

   1,25 (b) Pour toute variable aléatoire Y à valeurs réelles, *positive* **ou** *intégrable* définie sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(Y/\mathcal{F}_\tau)$ est donnée par la formule:

$$\mathbb{E}(Y/\mathcal{F}_\tau) = \mathbb{E}(Y/\mathcal{F}_n) \ sur \ \{\tau = n\} \ \ (n \in \bar{\mathbb{N}})$$

   0,75 (c) Pour tout processus stochastique $(X_n)_{n\geq 0}$ $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ – *adapté*, la variable aléatoire X_τ définie sur $\{\tau < \infty\}$ par:

$$X_\tau = X_n \ sur \ \{\tau = n\} \ \ (n \in \mathbb{N}),$$

   est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable.

2. **(Inégalité Maximale)** Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux surmartingales positives et τ un temps d'arrêt tel que:

$$X_\tau \leq Y_\tau \ p.s. \ sur \ \{\tau < +\infty\}$$

   Soit:

$$Z_n = \begin{cases} X_n & si \ \tau \leq n \\ Y_n & si \ \tau > n \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

   (a) 0,5 i. Montrer que $X_{n+1}1_{\{\tau=n+1\}} \leq Y_{n+1}1_{\{\tau=n+1\}}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
   1,5 ii. Montrer que $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également une *surmartingale* positive.

   (b) Soit τ_a la variable aléatoire définie par:

$$\tau_a = \begin{cases} \inf\{n : Z_n > a\}, & si \ \sup_{\mathbb{N}} Z_n > a \\ \infty & si \ \sup_{\mathbb{N}} Z_n \leq a \end{cases} \quad (a > 0)$$

   0,25 i. Montrer que τ_a est un temps d'arrêt.
   0,5 ii. Montrer que $Z_{\tau_a} > a \ sur \ \{\tau_a < +\infty\}$.

1 (c) En déduire de (2.a) et (2.$b.ii$) que le processus stochastique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par:

$$U_n = \begin{cases} Z_n \ si \ n < \tau_a \\ a \ \ si \ n \geq \tau_a \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

définit une nouvelle *surmartingale*.

0,75 (d) Montrer que (vous pouvez utiliser des trajectoires convenables):

$$U_0 = \begin{cases} Z_0 \ si \ Z_0 \leq a \\ a \ \ si \ Z_0 > a \end{cases}$$

0,25 0,5 (e) Montrer que $U_0 \geq E(U_n/\mathcal{F}_0)$ et que $U_n \geq a 1_{\{\tau_a \leq n\}}$.

1 (f) En déduire de (2.d) et (2.e) que:

$$a\mathbb{P}(\tau_a \leq n/\mathcal{F}_0) \leq Z_0 \wedge a$$

1 (g) En faisant tendre n *vers* $+\infty$, déduire de (2.f) que:

$$\mathbb{P}(\sup_{\mathbb{N}} Z_n > a/\mathcal{F}_0) \leq \frac{Z_0}{a} \wedge 1$$

1,5 (h) Vérifier que: $\{Z_0 < \infty\} \in \mathcal{F}_0$ puis utiliser (2.g) pour établir l'inégalité:

$$\mathbb{P}(Z_0 < \infty, \sup_{\mathbb{N}} Z_n > a) \leq \int_{\{Z_0<\infty\}} \left(\frac{Z_0}{a} \wedge 1\right) d\mathbb{P} \ pour\ tout\ a\ strictement\ positif.$$

0,75 (i) Par le **Théorème de la convergence dominée**, montrer que:

$$\int_{\{Z_0<\infty\}} \left(\frac{Z_0}{a} \wedge 1\right) d\mathbb{P} \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

0,75 (j) En déduire que $\sup_{\mathbb{N}} Z_n < \infty$ *p.s. sur* $\{Z_0 < \infty\}$.

On donne:

- $\mathbb{P}(A/\mathcal{G}) = \mathbb{E}(1_A/\mathcal{G})$.
- $\int_B \mathbb{P}(A/\mathcal{G}) d\mathbb{P} = \mathbb{P}(A \cap B)$, $B \in \mathcal{G}$.
- $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A)$, $A = \lim_{n\to\infty} \nearrow A_n$.
- $A = b_n$ *sur* B_n *signifie que* $A = \sum_n b_n 1_{B_n}$

Partie TD "Application du théorème d'arrêt de Doob".

Théorème d'arrêt: Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une martingales et τ un temps d'arrêt tels que: $(Condition1)$ $\tau < \infty$ $p.s.$, $(Condition2)$ $Y_\tau \in L^1$ *et* $(Condition3)$ $\mathbb{E}(|Y_n|\, 1_{\{\tau>n\}} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
Alors $\mathbb{E}(Y_\tau) = \mathbb{E}(Y_1)$.

Exercice:
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une *marche aléatoire symétrique* dans $\mathbb{Z}$, c.à.d.

$$X_n = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n,$$

où $Z_1, Z_2, \dots$ est une suite de $v.a.$ $i.i.d.$ avec $\mathbb{P}(Z_n = -1) = \mathbb{P}(Z_n = 1) = \frac{1}{2}$.
Soit τ le plus petit n tel que $|X_n| = K \in \mathbb{N}^*$. $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \dots, Z_n)$

0,5
1. Vérifier que τ est un $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}-$ temps d'arrêt.

2
2. vérifier que
$$Y_n = (-1)^n \cos\left[\pi(X_n + K)\right], n \in \mathbb{N}^*$$
est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}-$ martingale.

0,5 0,5
3. Vérifier que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et τ satisfont $(Condition1)$ et $(Condition2)$ du théorème d'arrêt.
4. Vérification de la $(Condition3)$ du théorème d'arrêt.
   1
   (a) Montrer que $\mathbb{E}(|Y_n|\, 1_{\{\tau>n\}}) \le \mathbb{P}(\tau > n)$.
   2,5
   (b) En déduire de $(4.a)$ et de la $(Condition1)$ que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(|Y_n|\, 1_{\{\tau>n\}}) = 0$.

0,5 1
5. vérifier que $Y_\tau = (-1)^\tau$ puis appliquer le théorème d'arrêt pour calculer $\mathbb{E}\left[(-1)^\tau\right]$ en fonction de K.

On donne:

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.
- Pour calculer $\mathbb{E}\left[\cos(\pi Z_{n+1})\right]$ et $\mathbb{E}\left[\sin(\pi Z_{n+1})\right]$, utiliser:
  - ★ $Z_{n+1}(\Omega) = \{-1, 1\}$
  - ★ $\cos(\pi) = \cos(-\pi) = -1$
  - ★ $\sin(\pi) = \sin(-\pi) = 0$
- $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A)$, $A = \lim_{n\to\infty} \nearrow A_n$.

Corrigé-type.

Nom & Prénom :	الاسم و اللقب:
Niveau : Examen Final	MAS 1 المستوى:
Groupe :	الفوج:
N d'inscription : S2	Processus Stoch 2 رقم التسجيل:
Examen de :	إمتحان في مادة:

$\boxed{1.}$

(a) Montrons que : X est $\mathcal{F}_\tau$-mes $\overset{?}{\Longleftrightarrow}$ $\forall n \geq 0 : X 1\!\!1_{\{\tau = n\}}$ est $\mathcal{F}_n$-mes.

$\boxed{\text{Etape 1}}$: $X = 1\!\!1_A$, $\mathcal{F}_\infty$-mes $\Leftrightarrow$ $\underline{A \in \mathcal{F}_\infty}$.

On va montrer alors :

$A \in \mathcal{F}_\tau \Leftrightarrow \forall n \geq 0 \; 1\!\!1_A 1\!\!1_{\{\tau=n\}}$ $\mathcal{F}_n$-mes

0,75

Il suffit de voir que $1\!\!1_A 1\!\!1_{\{\tau=n\}} = 1\!\!1_{A \cap \{\tau=n\}}$

La preuve découle de la définition de $\mathcal{F}_\tau$.

0,50

$\boxed{\text{Etape 2}}$ La généralisation : la machine standard.
" Théorie de la mesure ".

~~(a) Il suffit de voir que $A \cap \{\tau \leq n\} = \bigcup_{k=0}^{n} [A \cap \{\tau = k\}]$~~

0,25 (b) Supposons que Y est positive (Y intégrable : $Y = Y^+ - Y^-$ positive)

Montrons que : $\mathbb{E}(Y/\mathcal{F}_\tau) = \sum_{n \in \overline{\mathbb{N}}} \mathbb{E}(Y/\mathcal{F}_n) 1\!\!1_{\{\tau=n\}}$

D'après la déf$^{\underline{e}}$ de Kolmogorov, on doit montrer que :

(i) $\sum \mathbb{E}(Y/\mathcal{F}_n) 1\!\!1_{\{\tau=n\}}$ est $\mathcal{F}_\tau$-mes.

(ii) $\forall A \in \mathcal{F}_\tau : \int_A Y \, dP = \int_A \sum_{\overline{\mathbb{N}}} \mathbb{E}(Y/\mathcal{F}_n) 1\!\!1_{\{\tau=n\}} \, dP$

0,50 (i) On sait que $\mathbb{E}(Y/\mathcal{F}_n)$ est $\mathcal{F}_n$-mes. de plus $1\!\!1_{\{\tau=n\}}$ est $\mathcal{F}_n$-mes, d'où : $\mathbb{E}(Y/\mathcal{F}_n)1\!\!1_{\{\tau=n\}}$ est $\mathcal{F}_n$-mes, $\forall n$ et par conséquent $\sum \mathbb{E}(Y/\mathcal{F}_n)1\!\!1_{\{\tau=n\}}$ l'est aussi.

D'après (1.a) : $\sum_{\mathbb{N}} \mathbb{E}(Y/\mathcal{F}_n)1\!\!1_{\{\tau=n\}}$ est $\mathcal{F}_\tau$-mes.

0,50 (ii) Si $A \in \mathcal{F}_\tau$:

Y: positive ⊕ Th^{me} cvgce monotone

$$\int_A \sum_{\mathbb{N}} \mathbb{E}(Y/\mathcal{F}_n)1\!\!1_{\{\tau=n\}}\, d\mathbb{P} = \sum_{\mathbb{N}} \int_{A\cap\{\tau=n\}} \mathbb{E}(Y/\mathcal{F}_n)\, d\mathbb{P}$$

$$= \sum_{\mathbb{N}} \int_{A\cap\{\tau=n\}} Y\, d\mathbb{P} \quad \text{car } A\cap\{\tau=n\}\in\mathcal{F}_n \ \forall n.$$

$$= \int_A Y\, d\mathbb{P}.$$

(c) Application directe de (1.a) :

On a : $X_\tau 1\!\!1_{\{\tau<\infty\}} = \sum_{n=0}^{+\infty} X_n 1\!\!1_{\{\tau=n\}}$

0,25 On sait que sur $\{\tau=n\}$: $X_\tau = X_n$: $\mathcal{F}_n$-mesurable (adapté) pour $\forall n$ d'où X_τ est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable.

$\boxed{2}$, (2) (ii) On peut écrire Z_n sous la forme :

$$Z_n = Y_n \mathbb{1}_{\{\tau > n\}} + X_n \mathbb{1}_{\{\tau \leq n\}}.$$

0,25 (*) Comme, X_n, Y_n, $\mathbb{1}_{\{\tau > n\}}$ et $\mathbb{1}_{\{\tau \leq n\}}$ sont $\mathcal{F}_n$-mes.
Alors : $(Z_n)_{n \geq 0}$ est $(\mathcal{F}_n)_n$-adapté

0,25 (*) $\mathbb{E}|Z_n| = \mathbb{E}Z_n \leq \mathbb{E}Y_n + \mathbb{E}X_n < \infty \quad \forall n.$

(*) La propriété clé de surmart. de $(X_n)_n$ et $(Y_n)_n$ permet d'écrire :

$$Z_n = Y_n \mathbb{1}_{\{\tau > n\}} + X_n \mathbb{1}_{\{\tau \leq n\}}$$

01
$$\geq \underbrace{\mathbb{1}_{\{\tau > n\}}}_{\mathcal{F}_n\text{-mes}} \mathbb{E}(Y_{n+1}/\mathcal{F}_n) + \underbrace{\mathbb{1}_{\{\tau \leq n\}}}_{\mathcal{F}_n\text{-mes}} \mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n)$$

$$= \mathbb{E}\left[Y_{n+1} \mathbb{1}_{\{\tau > n\}} + X_{n+1} \mathbb{1}_{\{\tau \leq n\}}\right]$$

(i) Mais l'hypothèse : $Y_\tau \geq X_\tau$ sur $\{\tau < \infty\}$ entraîne que :
0,5
$$Y_{n+1} \geq X_{n+1} \text{ sur } \{\tau = n+1\}, \quad \text{D'où :}$$
fini

$$Y_{n+1} \mathbb{1}_{\{\tau > n\}} + X_{n+1} \mathbb{1}_{\{\tau \leq n\}} \geq Y_{n+1} \mathbb{1}_{\{\tau > n+1\}} + X_{n+1} \mathbb{1}_{\{\tau \leq n+1\}}$$
$$= Z_{n+1}$$

ce qui prouve que : $Z_n \geq \mathbb{E}(Z_{n+1}/\mathcal{F}_n)$.

(b)

0,25 (i) τ_a : t.a.

τ_a est le temps de la 1ère entrée à l'ensemble $]a, +\infty[\in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ par le processus adapté $(Z_n)_n \Rightarrow \tau_a$: t.a.

0,50 (ii) Comme $\tau_a < \infty$ ps. ds ce cas :

$$\tau_a = \inf\{n : Z_n > a\} \Rightarrow Z_{\tau_a} > a$$

(c)

01 Comme $Z_{\tau_a} > a$ sur $\{\tau < \infty\}$ et comme la cte "a" peut être considérée comme étant une surmartingale, alors d'après (2.a) et (2.b.ii) $[Y \leftarrow Z, \tau \leftarrow \tau_a, X \leftarrow a]$ et $Z \leftarrow U$.

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définit une nouvelle surmartingale.

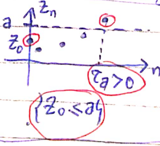
(d)

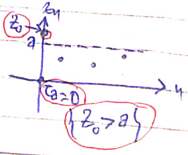
D'après (c) : $U_0 = \begin{cases} Z_0 & \text{si } \tau_a > 0 \\ a & \text{si } \tau_a = 0 \end{cases}$

01 Or d'après (b) : $\{\tau_a = 0\}$ 0,25 $= \{Z_0 > a\}$ 0,25 : l'inf est atteint pour $n = 0$.

et $\{\tau_a > a\}$ 0,25 $= \{Z_0 \leq a\}$ 0,25 : l'inf. n'est pas atteint pour $n = 0$.

Ou par illustration graphique





0,25

(e)

0,25

$*\ U_0 \geq \mathbb{E}(U_n/\mathcal{F}_0)$ car $(U_n)_{n\geq 0}$: surmart. $\mathbb{E}(U_n/\mathcal{F}_m) \leq U_m$ $m \leq n$.

0,50

$*$ de (c), on a : $U_n = \overbrace{Z_n \mathbb{1}_{\{\tau_a > n\}}}^{\geq 0} + a\mathbb{1}_{\{\tau_a \leq n\}} \geq a\mathbb{1}_{\{\tau_a \leq n\}}$

(f)

01

On a de (2.e) : $U_n \geq a\mathbb{1}_{\{\tau_a \leq n\}}$ introduisons l'esp. cond. ds les 2 cotés :

$$U_0 \geq \mathbb{E}(U_n/\mathcal{F}_0) \geq a\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\tau_a \leq n\}})$$
$$= a\,\mathbb{P}(\tau_a \leq n)$$

Or d'après (2.d), $U_0 = \begin{cases} Z_0 & \text{si } Z_0 \leq a \\ a & \text{si } a < Z_0 \end{cases}$

$$= Z_0 \wedge a.$$

(g)

de (f) et en divisant par a :

$$\mathbb{P}(\tau_a \leq n/\mathcal{F}_0) \leq \frac{Z_0}{a} \wedge 1$$

01

Faisons tendre $n \nearrow \infty$ ~~en~~ remarquant que $\{\tau_a < \infty\} \xleftarrow{n \to +\infty} \{\tau_a \leq n\}_{n\geq 0}$ ~~et~~ $\nearrow$, par la continuité de la mesure de proba :

$$\frac{Z_0}{a} \wedge 1 \geq \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(\tau_a \leq n/\mathcal{F}_0) = \mathbb{P}(\tau_a < \infty/\mathcal{F}_0)$$

$$\overset{\text{d'après (b)}}{=} \mathbb{P}(\sup_n Z_n > a/\mathcal{F}_0)$$

1,50

(h)

$\circledast$ $\{Z_0 < \infty\} = Z_0^{-1}([0,+\infty[) \in \mathcal{F}_0$ car Z_0 : $\mathcal{F}_0$-mes. $((Z_n)_n : (\mathcal{F}_n)_n$ - adapté$)$

0,50 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

$\circledast$ D'après (g) :

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{\sup_n Z_n > a\}} / \mathcal{F}_0\right) \leq \frac{Z_0}{a} \wedge 1$$

0,25

Par la déf^{n} de l'esp. cond. et la monotonie :

0,25 0,25

$$\underbrace{\int_{\{Z_0<\infty\}} \mathbb{1}_{\{\sup_n Z_n > a\}} \, d\mathbb{P}}_{\shortparallel} \leq \int_{\{Z_0<\infty\}} \left(\frac{Z_0}{a} \wedge 1\right) d\mathbb{P}$$

$$\mathbb{P}\left(Z_0 < \infty, \sup_n Z_n > a\right)$$

0,25

0,75

(i)

On a $\frac{Z_0}{a} \wedge 1 \xrightarrow{a \to +\infty} 0$ 0,25

et $\frac{Z_0}{a} \wedge 1 = \underset{1 \geq}{\frac{Z_0}{a}} \mathbb{1}_{\{Z_0 \leq a\}} + \mathbb{1}_{\{Z_0 > a\}}$

≤ 2 0,25

Par le th^{me} de la convergence dominée :

$$\mathbb{E}\left(\frac{Z_0}{a} \wedge 1\right) \mathbb{1}_{\{Z_0<\infty\}} \xrightarrow[a \nearrow \infty]{} 0$$ 0,25

i.e. $$\int_{\{Z_0<\infty\}} \left(\frac{Z_0}{a} \wedge 1\right) d\mathbb{P} \xrightarrow[a \nearrow +\infty]{} 0$$

0,75

(j)

de (h) et (i), on déduit que : $\mathbb{P}(Z_0 < \infty, \sup_n Z_n \geq \infty) = 0$ 0,25

ce qui prouve que sur $\{Z_0 < \infty\}$: $\sup_n Z_n < \infty$ p.s.

0,25 0,25

Partie T.D.

0,50 1. $\tau = \inf\{n, |X_n| = K\} = \inf\{n, X_n \in \underbrace{\{-K, K\}}_{B}\}$

Comme $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ et (X_n) : $(\mathcal{F}_n)$ - adapté alors

τ : t.a. car c'est le temps de la 1ère entrée de X_n ds B.

2. 0,25 (i) <u>Intégrabilité</u> $|Y_n| \le 1 \Rightarrow Y_n \in L^1 \ \forall n$

0,25 (ii) <u>Adaptation</u> : X_n : $\mathcal{F}_n$ - mes. et la composition des fcts mes est mes.

01 (iii) <u>Propriété de</u> :

$\mathbb{E}(Y_{n+1} / \mathcal{F}_n) = (-1)^{n+1} \mathbb{E}\{\cos[\pi(X_n + Z_{n+1})] / \mathcal{F}_n\}$

<u>On a</u> :

$\ast \ \cos[\pi(X_n + Z_{n+1})] = \underbrace{\cos[\pi(X_n + K)]}_{\mathcal{F}_n - \text{mes}} \cos(\pi Z_{n+1}) - \underbrace{\sin[\pi(X_n + K)]}_{\mathcal{F}_n - \text{mes}} \sin(\pi Z_{n+1})$.

$\ast \ \mathbb{E} \cos(\pi Z_{n+1}) = \frac{1}{2}[\cos\pi + \cos(-\pi)] = -1$

$\mathbb{E} \sin(\pi Z_{n+1}) = \frac{1}{2}[\sin\pi + \sin(-\pi)] = 0$.

<u>D'où</u> : $\mathbb{E}(Y_{n+1} / \mathcal{F}_n) = Y_n$.

3.

Vérificat^t de Condition 1 et Condition 2

* **Condition 1** : $\tau < \infty$ p.s ou $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$.

(0,80) $(X_n)_{n \geq 0}$: Chaîne de Markov récurrente (M.A. sym) D'où les état "K" et "−K" sont récurrent $\Rightarrow \mathbb{P}$[temps de la 1ère entrée de X_n ds $\{-K, K\} < \infty$] $= 1$

τ : t.a. fini p.s.

* **Condition 2** :

$$Y_\tau = (-1)^\tau \cos\left[\pi(X_\tau + K)\right] \Rightarrow |Y_\tau| \leq 1$$

(0,50) Comme $X_\tau = -K$ ou $+K$, $\Rightarrow Y_\tau \in L^1$

~~$Y_\tau = (-1)^\tau \cos[\pi(K \pm K)]$~~ 1

~~$\boxed{Y_\tau = (-1)^\tau}$~~

4. Vérificat^t de la Condition 3.

(01) (a) Comme $|Y_n| \leq 1$

Alors : $\mathbb{E}|Y_n| \mathbb{1}_{\{\tau > n\}} \leq \mathbb{E}\mathbb{1}_{\{\tau > n\}}$

$= \mathbb{P}(\tau > n)$

(b) On a : $A_n = \mathbb{P}(\tau > n) \searrow$

(01,50) $A = \lim_n A_n = \mathbb{P}(\tau = \infty) = 0$. (car $\tau < \infty$ p.s)

$\overset{(a)}{\Rightarrow} \lim_{\infty} \mathbb{E}|Y_n| \mathbb{1}_{\{\tau > n\}} \leq \lim_n \mathbb{P}(A_n) = 0$

(5)

$$* \; Y_\tau = (-1)^\tau \cos[\pi(X_\tau + K)]$$

$$= (-1)^\tau \underbrace{\cos[\pi(K \pm K)]}_{=1} \quad \text{Car } X_\tau \in \{-K, K\}.$$

0,50 $\boxed{Y_\tau = (-1)^\tau}$

$$* \; \mathbb{E}(-1)^\tau = \mathbb{E}Y_\tau = \mathbb{E}Y_1 . \quad (\text{Th}^{m} \text{ d'arrêt})$$

$$Y_1 = (-1)^1 \cos[\pi(Z_1 + K)].$$

$$\mathbb{E}Y_1 = - \mathbb{E}\{\cos[\pi(Z_1 + K)]\}$$

01 $$= -\left\{\frac{1}{2}\left[\underbrace{\cos[\pi(K+1)]}_{(-1)^{K+1}} + \underbrace{\cos[\pi(K-1)]}_{(-1)^{K-1}}\right]\right\} \quad \text{Car: } Z_1(\Omega) = \{-1, 1\}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_\tau) = (-1)^K}$$