Examens

Remarques : Sauf erreur, les questions des TP et doublons n'ont pas été repris. Tous les rappels théoriques n'ont pas été repris ici...à vous de les chercher dans votre cours. Vous recevrez un formulaire complet un peu plus tard. Le jour de l'examen, vous disposerez d'un formulaire reprenant les informations à utiliser.

Janvier 2001

Exercice 1

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon aléatoire simple de loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$). Pour rappel, la variable aléatoire X est de loi exponentielle de paramètre λ si et seulement si sa fonction de densité est donnée par

$$f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{I}_{\{x>0\}}.$$

1. Déterminer une statistique exhaustive pour λ.
2. Calculer l'estimateur $\hat{\lambda}^{(n)}$ de maximum de vraisemblance pour λ.
3. Etudier les propriétés de biais, de convergence faible et d'efficacité de $\hat{\lambda}^{(n)}$.

Exercice 2

Considérons de nouveau n v.a. $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$). Supposons que l'on observe les v.a. Y_i, $i = 1 \ldots, n$, définies par

$$Y_i = k\delta \text{ où } k \in \mathbb{N} \text{ est tel que } \mathrm{k}\delta \leq \mathrm{X_i} < (\mathrm{k}+1)\delta,$$

et où $\delta > 0$ est une constante connue.

1. Verifier que $\sum_{i=1}^n Y_i$ est une statistique exhaustive pour λ
2. Calculer l'estimateur $\hat{\lambda}_\delta^{(n)}$ de maximum de vraisemblance pour λ.
3. Vérifier que $\hat{\lambda}_\delta^{(n)} \to \hat{\lambda}^{(n)}$ p.s. si $\delta \overset{>}{\to} 0$.

Exercice 3

Lors d'une étude sur le stress associé à différentes activités professionnelles, 100 avocats, 100 ingénieurs et 100 médecins ont été invités à qualifier leur profession de peu (P), moyennement (M) ou très stressante (T). Voici les résultats de cette étude :

	Avocats	Ingénieurs	Médecins
P	10	25	5
M	30	25	25
T	60	50	70

Tester sur base de ces résultats au niveau de probabilité 1%, l'hypothèse selon laquelle les différentes professions "engendrent un stress identique" ? Résumer en une phrase ce que l'on peut déduire de ce test d'hypothèse.

Exercice 4

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon aléatoire simple de loi uniforme sur $[0, \theta]$ ($\theta > 0$). Notons $X_{(r)}$ la $r$ème statistique d'ordre de cet échantillon.

1. Prouver que, pour tout $r = 1, \ldots, n$, $X_{(r)}/\theta$ est une fonction pivotale pour θ.
2. En déduire un intervalle de confiance pour θ basé sur $X_{(r)}$ au niveau de confiance $1 - \alpha$.

Août 2001

Exercice 5

Les éléments d'une population possèdent un caractère X qui suit une loi de densité

$$f_{\theta,\alpha}(x) = \theta\alpha x^{\alpha-1}e^{-\theta x^{\alpha}}\mathbb{I}_{\{x>0\}},$$

où θ, $\alpha > 0$ et où α est connu. Pour étudier le paramètre θ, on a effectué une suite de n expériences indépendantes qui ont donné les réalisations $x_1, x_2, \ldots, x_n denv.a.$ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d. de même loi que X.

1. Déterminer une statistiqe exhaustive pour θ.
2. Calculer l'estimateur $\hat{\theta}^{(n)}$ de maximum de vraisemblance pour θ.
3. Identifier la loi de $Y = X^{\alpha}$. En déduire celle de $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i^{\alpha}$.
4. Etudier les propriétés de biais et de convergence de $\hat{\theta}^{(n)}$.
5. $\hat{\theta}^{(n)}$ est-il efficace ? Asymptotiquement efficace ?

Exercice 6

Soit (X_1) un échantillon de taille 1 de loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$). Considérons le problème de test

$$\begin{cases} H_0 : & \lambda = 1 \\ H_1 : & \lambda > 1, \end{cases}$$

et la famille de tests $\{\phi_b \,|b > 0\}$, où

$$\phi_b(x) = 1\mathbb{I}_{[x>b]}.$$

1. Calculer le niveau du test ϕ_b.
2. Déterminer b_0 tel que le niveau de ϕ_{b_0} est 5%.
3. Déterminer la fonction de puissance de ϕ_{b_0}.

Exercice 7

Dans le but de comparer la longévité d'ampoules de deux marques différentes, on a mesuré la durée de vie de 9 ampoules de la première marque et de 16 ampoules de la seconde. La moyenne et l'écart-type des durées de vie pour le premier échantillon sont de 1309 heures et de 420 heures respectivement. Ces quantités sont respectivement de 1205 heures et de 390 heures pour l'échantillon provenant de la second marque. Ces donnéees permettent-elles (au niveau 1%) de conclure à une différence de longévité entre les deux marques ? (Remarque : on suppose que les variances-population des durées de vie des ampoules sont égales pour les deux marques).

Exercice 8

Un algorithme a été écrit dans le but d'engendrer des nombres aléatoires uniformément distribués sur l'intervalle $[0, 100]$. Le tableau des fréquences suivant a été dressé à partir des 250 premiers nombres aléatoires fournis par l'algorithme.

Valeurs	$[0, 20[$	$[20, 40[$	$[40, 60[$	$[60, 80[$	$[80, 100]$
Fréquences	38	55	54	41	62

Prononcez-vous sur la qualité de cet algorithme (formulez précisément le problème de test, et résumez de manière concise la conclusion du test effectué).

Janvier 2002

Exercice 9

Les intermédiaires financiers sont friands d'indices de toutes sortes, qu'ils emploient pour résumer les tendance sur les marchés. Parmis l'ensemble des sociétés cotées à New-York, nous avons sélectionné au hasard un échantillon de 23 d'entre elles, dont on suppose (de façon évidemment abusive) que les cours sont mutuellement indépendants, et entrent pour le même volume dans l'indice Russel3000 (les 3000 plus grosses capitalisations du NYSE). Les cours de cloture des actions de ces différentes sociétés ont été relevés les 1er et 2 mars 1983. Votre directeur financier vous demande si, au niveau de risuqe 5%, il peut annoncer que le 2 mars a été une bonne journée en moyenne pour Wall Street. Proposez une méthode statistique pour lui répondre, et concluez.

Valeurs	1er mars \$	2 mars \$	Valeurs	1er mars \$	2 mars \$
Alcoa	$34,7$	$35,1$	IBM	$101,7$	$102,1$
ATT	$67,5$	$66,8$	ITT	$33,4$	$33,7$
Boeing	37	$36,7$	Mobil Oil	$27,2$	$28,5$
Chase Manhat.	$47,2$	$48,8$	Pfizer	$72,7$	$74,2$
Du Pont	$40,6$	41	Schlumberger	$40,5$	$41,8$
Kodak	$89,2$	89	Texaco	$32,2$	33
Exxon	30	$30,7$	U.A.L.	34	$34,4$
Ford	$40,5$	$41,4$	Union Carbide	$61,5$	$61,2$
Gen. Electric	111	108	U.S. Steel	$22,7$	$22,8$
Gen. Foods	$39,4$	$39,5$	Westinghouse	$45,6$	$49,2$
Gen. Motors	$63,5$	63	Xerox Corp.	$38,6$	$39,6$
Goodyear	$31,7$	$31,5$			

Remarque : réfléchissez bien aux hypothèses que vous faites (indépendance, échantillon simple), et n'hésitez pas à transformer les données pour que ces hypothèses soient respectées.

Exercice 10

On s'intéresse dans cet exercice au test chi-carré d'ajustement. Celui-ci peut être considéré comme un test simultané pour un nombre fini de proportions. On rappelle que, lors d'un test d'hypothèse portant sur une proportion ($H_0 : p = p_0$ vs $H_1 : p \neq p_0$), on utilise le théorème de de Moivre pour obtenir la distribution approchée de la statistique de test lorsque le nombre d'observation est suffisant. Sous H_0

$$\frac{F - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \approx \mathcal{N}(0,1) \qquad (0.1)$$

où n est la taille de l'échantillon et F est la fréquence absolue observée.

1. On rappelle que la statistique de test pour le test d'ajustement est de la forme

$$\sum_{i=1}^{K} \frac{(n_i - n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i}$$

où n_i et $\hat{p}_i$ sont respectivmeent le nombre d'observations et la probabilité sous l'hypothèse pour la classe i, K étant le nombre de classe et $n = \sum_{i=1}^{K} n_i$ le nombre total d'observations. Sa loi sous l'hypothèse est asymptotiquement χ^2_{K-1-s}, où s est le nombre de paramètres estimés par maximum de vraisemblance pour spécifier entièrement la loi sous l'hypothèse nulle.

On se place dans le cas très simple où le test d'ajustement est effectué en répartissant les valeurs observées selon deux classe, l'hypothèse nulle spécifiant entièrement la distribution à ajuster ($K = 2$, $s = 0$). Montrer que ce test d'ajustement est équivalent à un test pour une proportion basé sur la statistique (0.1)

2. Application : à la sortie d'une chaîne de fabrication d'une pièce mécanique, on prélève toutes les trente minutes 20 pièces. On compte, pour chaque groupe de 20 pièces, le nombre de pièces défectueuses. Après observation de 100 échantillons indépendants, on obtient le tableau suivant

Nombre de déchets x par échantillon de 20 pièces	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de fois où l'on a rencontré x déchets	14	25	28	23	7	2	1	0	1

Testez au niveau 5% l'ajustement de la loi observée à une loi de Poisson (vous pouvez effectuer les changements qui vous semblent judicieux parmi les classes proposées, en les justifiant).

Exercice 11

Considérons un échantillon simple $(X_1, \ldots, X_n)$ issu d'une population $\mathcal{N}(\theta, \theta)$ $(\theta > 0)$. Pour rappel, sa densité est donnée par

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} \exp\left(-\frac{1}{2\theta}(x-\theta)^2\right)$$

Le but de ce problème est d'obtenir un bon estimateur du paramètre θ.

1. Calculer $\mathbb{P}\left[\bar{X} < 0\right]$. En déduire qu'en général, on peut supposer sans grand risque que $\bar{X} > 0$, ce que nous ferons.
2. Ecrire la vraisemblance du modèle. En déduire une statistique exhaustive.
3. Quelle(s) fonction(s) de θ peut-on estimer efficacement ? Calculer l'information de Fisher du modème et l'estimateur maximum de vraisemblance pour θ. Est-il efficace ?
4. Les calculs de l'espérance et de la variance de cet estimateur sont peu engageants. Nous cherchons donc des estimateurs plus intuitifs. θ représentant à la fois l'espérance et la variance de la distribution, il est naturel de considérer $\bar{X}$ et S^2 comme estimateurs (ce sont les estimateurs par la méthode des moments en choisissant respectivement le premier et le second moment centré comme référence). Ils sont bien sûr sans biais. L'un d'eux est-il uniformément meilleur que l'autre (au sens de la variance) ?
5. On considère la classe d'estimateurs formée des combinaisons convexes de $\bar{X}$ et S^2

$$\mathcal{K} = \left\{T(\lambda) = \lambda\bar{X} + (1-\lambda)S^2, \lambda \in [0,1]\right\}.$$

   Montrer que $\mathcal{K} \subset U(\theta)$, la classe des estimateurs sans biais pour θ. Quelle valeur λ^* faut-il choisir pour minimiser dans la classe $\mathcal{K}$ la variance de T ? $T(\lambda^*)$ est-il un bon estimateur ?
6. Proposer une méthode numérique pour approcher les performances de $T(\lambda^*)$ avec un "vrai" estimateur.
7. Si θ est petit, l'événement $\bar{X} < 0$ n'est pas toujours négligeable. L'estimateur proposé est-il encore acceptable ? Si non, est-il possible d'adapter la procédure ?

Exercice 12

Considérons un échantillon simple $(X_1, \ldots, X_n)$ de fonction de répartition F donnée.

1. Déterminer, en fontion de F, la fonction de répartition de la k-ième statistique d'ordre $X_{(k;n)}$, $1 \leq k \leq n$.

2. Supposons que la distribution appartienne à la famille des distributions uniformes à un paramètre suivante
$$\mathcal{P} = \left\{ U\left[\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2}\right], \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$
Déterminer une fonction pivotale pour θ à partir de $X_{(k;n)}$.
3. En déduire un intervalle de confiance pour θ basé sur $X_{(k;n)}$ au niveau de confiance $1-\alpha$.

Août 2002

Exercice 13

Sur un échantillon de 6800 individus, on relève la couleur des cheveux et la couleur des yeux. Les résultats sont repris dans le tableau croisé suivant.

	Cheveux	Blond	Brun	Noir	Roux	Total
Yeux	Bleu	1768	807	189	47	2811
	Gris/Vert	946	1387	746	53	3132
	Brun	115	438	288	16	857
	Total	2829	2632	1223	116	6800

On s'intéresse à une éventuelle dépendance entre ces deux caractères. Proposer un test permettant de trancher. Que concluez-vous au niveau $\alpha = 0,05$?

Exercice 14

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon indépendant extrait de la loi de densité
$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{A}{x^{1+(1/\theta)}} & x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}, \theta > 0$$

1. Déterminer A en fonction de θ.
2. Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ ? Cet estimateur est-il exhaustif ? Sans biais ?
3. Calculer la borne de Cramer-Rao. L'estimateur du maximum de vraisemblance est-il efficace ?

Exercice 15

On considère un échantillon indépendant $X_1, \ldots, X_n$ de taille n extrait de la loi uniforme sur l'intervalle $[\theta, \theta+1]$, où θ est un paramètre positif. On propose d'estimer θ.

1. Ecrire la vraisemblance de l'échantillon. En déduire une statistique exhaustive pour le modèe.
2. On utilise la méthode du maximum de vraisemblance
   (a) Montrer qu'il existe, sauf cas particulier que l'on précisera, une infinité d'estimateur du maximum de vraisemblance de θ, de la forme
   $$\hat{\theta}(\lambda) = \lambda(S-1) + (1-\lambda)I,$$
   où $S = \sup_i X_i$ et $I = \inf_i X_i$, $0 \leq \lambda \leq 1$.
   (b) Déterminer la loi de S et la loi de I. en déduire l'unique valeur λ^* de λ pour laquelle $\hat{\theta}(\lambda)$ est sans biais. On notera simplement dans la suite $\hat{\theta}$ cet estimateur $\hat{\theta}(\lambda^*)$.
   (c) On donne la densité du couple (S, I)
   $$F_{S,I}(x,y) = n(n-1)(x-y)^{n-2}\mathbb{I}_{[y \leq x]}.$$
   Calculer la variance $V(\hat{\theta})$ de $\hat{\theta}$.

(d) Quelles sont les propriétés asymptotiques de $\hat{\theta}$?

3. On note $\bar{X}$ la variable aléatoire "moyenne empirique". Calculer son espérance. En déduire un autre estimateur sans biais $\tilde{\theta}$ de θ. Quelles sont ses propriétés asymptotiques ? Peut-on comparer $\hat{\theta}$ et $\tilde{\theta}$? Commenter.

Exercice 16

1. Lors d'une série de 10 lancers d'un dé à six faces, on s'intéresse à l'apparition du "six". On note O si un "six" est apparu, et N si une autre face est apparue. On obtient le résultat suivant : N N O N O N N N N O. Traiter au niveau $\alpha = 0,05$ le problème de test suivant

$$\begin{cases} H_0: & p = 1/6 \\ H_1: & p > 1/6 \end{cases}$$

où p est la probabilité qu'un "six" apparaisse.

2. Déterminer la fonction de puissance de votre test.

Janvier 2003

Exercice 17

Les éléments d'une population possèdent un caractère X qui suit une loi de densité

$$f_\theta(x) = Kx^2 e^{-x^2/\theta},$$

où $\theta > 0$. Une suite d'expériences indépendantes a donné les valeurs $x_1, \ldots, x_n$.

1. Déterminez la constante K.
2. Déterminez un estimateur $\hat{\theta}$ du paramètre θ par la méthode du maximum de vraisemblance.
3. Examinez les qualités suivantes de $\hat{\theta}$: est-il exhaustif, non biaisé, efficace, convergent ?

Exercice 18

Considérons $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon simple de taille n de densité commune

$$f_\theta(x) = e^{-(x-\theta)} \mathbb{I}_{[x \geq \theta]},$$

où θ est un paramètre inconnu dans $\mathbb{R}$.

1. Déterminer une fonction pivotale pour θ basée sur $X_{(1)} = \min_i X_i$.
2. En déduire l'expression génerale d'un intervalle de confiance au niveau $1 - \alpha$ pour le paramètre θ.

Exercice 19

Soit (X_1) un échantillon aléatoire de taille 1 de loi triangulaire de paramètre β ($\beta > 0$). Le variable aléatoire X est de loi triangulaire de paramètre β si et seulement si sa fonction de densité est donnée par

$$f_\beta(x) = \frac{2}{\beta}\left(1 - \frac{x}{\beta}\right) \mathbb{I}_{[0 \leq x \leq \beta]}.$$

Considérons le problème de test

$$\begin{cases} H_0: & \beta = 1 \\ H_1: & \beta > 1 \end{cases}$$

et la famille de tests $\{\phi_b \,|b > 0/\}$, où

$$\phi_b(x) = 1\mathbb{I}_{[x > b]}.$$

1. (a) Calculer le niveau du test ϕ_b.
   (b) Déterminer b_0 tel que le niveau de ϕ_{b_0} est 5%.
   (c) Déterminer la fonction de puissance de ϕ_{b_0}.
2. (a) Que devient le test construit précédemment si l'hypothèse nulle est remplacée par H_0^* : $\beta \leq 1$?
   (b) Que pouvez-vous dire sur l'optimalité de ce dernier test ?

Exercice 20

Un échantillon (1) de 20 personnes est constitué. On demande à chacun d'estimer la hauteur d'un arbre en fermant un oeil. On obtient une estimation moyenne de $\bar{x}_1 = 5,2$ m, avec un écart-type empirique $s_1 = 1,4$ m. Indépendamment, à un second échantillon (2) de 25 personnes, on demande la même estimation, avec cette fois les deux yeux ouverts. L'estimation moyenne est alors $\bar{x}_2 = 4$ m avec un écart-type empirique $s_2 = 1,3$ m. On se demande si le fait de fermer un oeil augment significativement l'estimation de la hauteur. En supposant que les distributions sont normales, proposez une procédure statistique permettant de traiter ce problème à un niveau de risque 1%. Vous veillerez à justifier rigoureusement les hypothèses que vous serez éventuellement amenés à faire.

Août 2003

Exercice 21

Les éléments d'une population possèdent un caractère X qui suit une loi de densité

$$f_\theta(x) = Kx^{\frac{2\theta-1}{1-\theta}} \mathbb{I}_{[0<x<1]},$$

où $1/2 < \theta < 1$. Une suite d'expériences indépendantes a donné les valeurs $x_1, \ldots, x_n$.

1. Déterminez la constante K.
2. Déterminez un estimateur $\hat{\theta}$ du paramètre θ par la méthode du maximum de vraisemblance.
3. L'estimateur précédent est-il efficace ? Quelles sont les fonctions de θ que l'on peut estimer efficacement ?
4. Calculer l'espérance de X_1. En déduire un estimateur de θ par la méthode des moments. Est-il convergent ?

Exercice 22

Considérons $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon simple de taille n de densité commune

$$f_\theta(x) = \frac{4x^3}{\theta^4} \mathbb{I}_{[0\leq x\leq\theta]},$$

où θ est un paramètre inconnu dans $\mathbb{R}$.

1. Déterminer une fonction pivotale pour θ basée sur $X_{(1)} = \max_i X_i$.
2. En déduire l'expression génerale d'un intervalle de confiance au niveau $1-\alpha$ pour le paramètre θ.

Exercice 23

Soit (X_1) un échantillon aléatoire de taille 1 de loi F_β de paramètre β ($\beta > 0$). Le variable aléatoire X est de loi F_β si et seulement si sa fonction de densité est donnée par

$$f_\beta(x) = \frac{3}{\beta^3}\,((x-\beta)^2\,\mathbb{I}_{[0\leq x\leq \beta]}.$$

Considérons le problème de test

$$\begin{cases} H_0: & \beta = 1 \\ H_1: & \beta > 1 \end{cases}$$

et la famille de tests $\{\phi_b\,|b > 0/\}$, où

$$\phi_b(x) = 1\mathbb{I}_{[x>b]}.$$

1. (a) Calculer le niveau du test ϕ_b.
   (b) Déterminer b_0 tel que le niveau de ϕ_{b_0} est 5%.
   (c) Déterminer la fonction de puissance de ϕ_{b_0}.
2. (a) Que devient le test construit précédemment si l'hypothèse nulle est remplacée par H_0^* : $\beta \leq 1$?
   (b) Que pouvez-vous dire sur l'optimalité de ce dernier test ?

Exercice 24

Capable d'avaler un boeuf entier, le Varan de Komodo est un reptile sujet aux problèmes de digestion, dont on peut mesurer la qualité en observant le taux de glucose dans le sang trois heures après le repas, qualité d'autant meilleure que ce taux est élevé. Soucieuse du bien-être des varans apprivoisés, la SPA a testé un produit a base de bicarbonate de soude destiné à favoriser leur digestion. On donne pour 12 varans domestiqués le taux moyen de glucose dans le sang durant la sieste (les prélèvements sont déconseillés sur les varans éveillés), avant puis après traitement. Testez au niveau $\alpha = 0,05$ si le traitement SPA a un effet significatif. (Note : on fait l'hypothèse de normalité des populations.)

Varan	avant	après	Varan	avant	après
1	4,5	4,7	7	5,9	5,7
2	6,2	8,1	8	5,1	5,5
3	5,3	5,9	9	7,0	6,9
4	4,7	5,6	10	4,3	5,7
5	5,1	5,5	11	4,7	4,9
6	4,2	5,1	12	5,5	5,4

Janvier 2006

Exercice 25

Considérons une population normale de moyenne μ et de variance σ^2. On en extrait un échantillon simple $X_1, \ldots, X_n$. Supposons que l'on veuille effectuer un test bilatéral au niveau α de l'hypothèse nulle $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$. On suppose la vraie valeur de μ inconnue.

1. Obtenir le test de rapport de vraisemblance de niveau α.
2. Obtenir une fonction pivotale pour σ^2 et en déduire un intervalle de confiance au niveau $1-\alpha$. Construire le test qui en découle.

Exercice 26

Les éléments d'une population possèdent un caractère X qui suit une loi de densité

$$f_\theta(x) = \frac{\theta+1}{2}(1-|x|)^\theta, \ x \ \in \ (-1,1),$$

où on suppose le paramètre $\theta > -1$. On en extrait un échantillon simple $X_1, \ldots, X_n$.

1. Ecrire la vraisemblance du modèle. En déduire une statistique exhaustive.
2. Calculer l'information de Fisher du modèle.
3. Déterminer l'estimateur maximum de vraisemblance $\hat{\theta}$ de θ.
4. Montrer que la variable aléatoire $Y = -\ln(1-|X|)$ suit une loi $\Gamma(\theta+1, 1)$.
5. Etudier les propriétés de biais et de convergence de $\hat{\theta}$. Comparer la variance de $\hat{\theta}$ à la borne de Cramer-Rao. Commentez.

Exercice 27

Le groupe pharmaceutique Bixco affirme avoir découvert un produit miracle qui garantirait des performances intellectuelles améliorées à quiconque en prendrait pendant 10 jours. Il nomme ce produit "betterbrainz" et essaie de le lancer sur divers campus universitaires. Quelques sceptiques décident de vérifier si ce produit est réellement efficace. Ils contactent d'abord le meilleur statisticien du pays, en l'occurrence : vous. Ils vous expliquent qu'ils ont pris 120 étudiants (que l'on supposera de niveaux équivalents) et les ont répartis en deux groupes. Un premier groupe, (Population 1) de 75 étudiants a reçu le produit pendant 10 jours. Un second, de 45 étudiants (Population 2) a reçu un placebo pendant le même laps de temps (les étudiants ne savaient évidemment pas à quel groupe ils appartenaient). Après la session d'examens, on a fait la moyenne des cotes des étudiants des deux groupes et on a observé les résultats suivants :

$$\text{population 1} : \bar{x} = 9.55, \ s_x^2 = 1.1;$$
$$\text{population 2} : \bar{y} = 8.75, \ s_y^2 = 1.$$

Après vous avoir expliqué leur démarche, les sceptiques vous demandent de tirer des conclusions au niveau $\alpha = 1\%$ de leurs données. Vous devez donc rédiger ces conclusions, en n'oubliant pas d'inclure vos motivations, les éventuelles hypothèses supplémentaires que vous avez été amené à faire ainsi que la signification des différents résultats que vous aurez obtenus.

Exercice 28

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires i.i.d de loi uniforme sur $]\theta, 3\theta[$. Nous voulons tester l'hypothèse nulle $\theta = 3$ contre l'hypothèse $\theta = 5$. Définissons deux types de procédures de test.

(i) La collection C_1 des procédures de test qui consistent à rejeter H_0 si et seulement si $\max\{X_1, X_2\} > c$ pour un certain c fixé dans $]0, +\infty[$.

(ii) La collection C_2 des procédures de test qui consistent à rejeter H_0 si et seulement si $\min\{X_1, X_2\} < c$ pour un certain c fixé dans $]0, +\infty[$.

Déterminer dans chacun des cas le test dont l'erreur de première espèce vaut exactement 0.01 et en calculer la puissance. Comparer les deux procédures. Laquelle choisiriez vous ?

(question bonus) Considérons la collection C_3 des procédures de test qui consistent à rejeter H_0 si et seulement si $\frac{X_1+X_2}{2} > c$ pour un certain c fixé dans $]0, +\infty[$. Comparer le test de niveau 0.01 de C_3 aux tests obtenus ci-dessus.

Août 2006

Exercice 29

On considère un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de loi

$$f_\theta(x) = e^{-(x-\theta)} 1_{(\theta,\infty)}.$$

Donner une statistique exhaustive pour θ.

Considérons le problème de test

$$\begin{cases} H_0 : \theta = 1 \\ H_1 : \theta > 1 \end{cases}$$

et la famille de test $\{\phi_b \mid b > 0\}$ où

$$\phi_b(\underline{X}) = \begin{cases} 1 \text{ si } X_{(1)} > b \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

a) Calculer le niveau du test ϕ_b.

b) Déterminer b_0 tel que le niveau de ϕ_{b_0} est 5%.

c) Calculer la fonction de puissance de ce dernier test.

Exercice 30

On considère n observations indépendantes $(X_1, \ldots, X_n)$ de loi $pU[0, a] + (1-p)U[0, b]$, c'est à dire que X_i suit la loi uniforme sur $[0, a]$ avec probabilité p et la loi uniforme sur $[0, b]$ avec probabilité $1 - p$. On suppose que $a < b$ avec a et b connus et fixés.

a) Déterminez la fonction de répartition et la densité de X_1.

b) Considérons N_a la variable aléatoire égale au nombre d'individus X_i compris entre 0 et a. Quelle est la loi de N_a ? En déduire son espérance et sa variance.

c) Montrer que la vraisemblance du modèle peut s'écrire

$$L_p(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} \left(\frac{p}{a} + \frac{1-p}{b}\right)^{N_a} \left(\frac{1-p}{b}\right)^{n-N_a} & \text{si } X_1, \ldots, X_n \in (0, b) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

d) Déterminer l'estimateur maximum de vraisemblance $\hat{p}$ du paramètre p.

e) L'estimateur $\hat{p}$ est-il sans biais ? Est-il convergent ?

Exercice 31

Chaque année, durant la deuxième quinzaine du mois d'Octobre se tient le grand concours international des buveurs de bière. Cette année l'épreuve a lieu à la Roche en Ardennes, en Belgique. Lors de la grande finale, la Belgique (tenante du titre) s'est fait reprendre le trophée par l'Irlande au cours d'un combat palpitant qui a tenu en haleine une dizaine de spectateurs pendant 3 heures. Les deux équipes auraient pourtant mérité de gagner, tant leurs exploits ont été à la hauteur de nos attentes. Jugez plutôt : les 21 Irlandais ont bu, en trois heures, en moyenne 18 litres de bière chacun avec un écart-type de 0.99. Les 21 Belges, n'ont pu rivaliser avec une telle prouesse, mais ils ont pourtant réussi à boire en moyenne 17 litres chacun avec un écart-type de 0.88.

Une seule question reste encore ouverte : les Irlandais sont-ils vraiment de meilleurs buveurs de bière que les Belges ?

a) On vous demande de répondre à cette question au niveau $\alpha = 2\%$. Spécifiez très précisément toutes les hypothèses que vous faites. N'hésitez pas à faire plusieurs tests pour vérifier la précision de vos affirmations.

b) Jusqu'à quel niveau de certitude (α) pouvez-vous aller dans vos conclusions ?

10 janvier 2007

Exercice 32

Les concepteurs d'un nouveau système de freinage (répondant au nom de AX-238-bis) affirment que leur procédé révolutionnaire permet de diminuer considérablement la distance de freinage par tout temps et pour tous les véhicules. Par exemple, ils annoncent qu'une berline transportant 2 adultes et 2 enfants de taille moyenne roulant sur une route sèche passera de 110 KM/H à l'arrêt en moins de 100 mètres. La distance habituelle de freinage dans ces mêmes conditions est de 110 mètres.

Afin de vérifier l'efficacité du AX-238-bis on effectue les mesures des distances de freinage de 51 berlines différentes et on obtient

$$\bar{x} = 99.6, \quad s_x = 1.3.$$

1. Ces données indiquent-elles au niveau 5% que le AX-238-bis est aussi performant que ses concepteurs l'affirment ? Même question au niveau 1%. Expliquer la différence entre vos conclusions.
2. Quelle est la puissance du test que vous utilisez si la vraie valeur de la distance de freinage est 99.9 mètres (au niveau 5%) ?

Veillez à bien spécifier les hypothèses que vous faites et leur influence sur la fiabilité de vos conclusions.

Exercice 33

Lors d'une étude sur le stress associé à différents choix d'études à l'université, 80 étudiants de la faculté des Sciences, 90 étudiants de la faculté de Philosophie et Lettres et 100 étudiants de la faculté de Médecine ont été invités à qualifier leurs études de peu (P), moyennement (M) ou très (T) stressantes. Voici les résultats de cette étude :

	Sciences	Philo	Médecine
P	14	21	10
M	31	40	25
T	35	29	65

Testez sur base de ces résultats, au niveau de probabilité 1%, l'hypothèse selon laquelle les différentes études engendrent un stress identique.

Exercice 34

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon indépendant extrait de la loi de densité

$$f_\theta(x) = A(1+\theta)x^{-(1+1/\theta)}1_{[0,1]}(x)$$

où $\theta > 0$.

1. Déterminez A en fonction de θ.
2. Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ ? Cet estimateur est-il exhaustif, sans biais ?
3. Calculez la borne de Cramér-Rao. L'estimateur obtenu au point précédent est-il efficace ?

Exercice 35

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon indépendant extrait de la loi de densité

$$f_\theta(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(x-\theta)}1_{[\theta,\infty)}(x)$$

où $\theta \in \mathbb{R}^n$.

1. Déterminez la loi de la variable aléatoire $Z = aX_{(1)} + b$, où $X_{(1)} := \min_i X_i$.
2. En déduire une fonction pivotale pour θ basée sur $X_{(1)}$.
3. En déduire l'expression générale d'un intervalle de confiance au niveau $1 - \alpha$ pour le paramètre θ.

22 janvier 2007

Exercice 36

Dans le petit village de Raspontin, deux producteurs locaux distribuent une sauce Curry-Ketchup allégée en matière grasse. La sauce de Karel Miljoens, qui est le propriétaire de la friterie connaît un franc succès et est louée par tous les Raspontintois. Ceci suscite la jalousie de l'autre producteur de sauce Curry-Ketchup, qui n'est autre que Fil VandenHorengeld, le propriétaire de la boucherie. Ce dernier décide de prouver à son village que sa sauce contient moins de graisses que celle de Karel Miljoens. N'ayant pas de grandes connaissances en statistiques, il décide de faire appel à un expert, en l'occurrence : vous. Parviendrez-vous à résoudre l'épineux problème : des deux sauces, laquelle est la plus light ?

Vous décidez de prélever 16 échantillons de sauce de 100 ml auprès de chaque producteur et d'en extraire la quantité de graisse qui la compose. Vous obtenez les mesures suivantes :

Sauce Miljoens :	$\bar{x} = 83.1$ ml,	$s_x = 1.1$
Sauce VandenHorengeld :	$\bar{x} = 84.01$ ml,	$s_x = 1.3$

Obtenez des conclusions aussi fiables que possible avec les tables dont vous disposez (voir annexes). Précisez clairement à quel(s) niveau(x) de confiance vous travaillez.

Veillez à expliquer clairement quelle(s) statistique(s) de test vous utilisez en argumentant votre choix avec précision. Expliquez votre démarche en détail, en précisant toutes les hypothèses que vous faites. Faites attention à ne pas faire de calculs inutiles et à rédiger un rapport clair et intéressant afin de le rendre accessible et agréable à lire.

Exercice 37

Après vos brillantes conclusions lors de l'affaire dite "des sauces light", le collège échevinal a décidé de vous attribuer le poste convoité de statisticien en chef du village. Votre premier devoir d'enquête est d'étudier la distribution du nombre d'infractions au code de la route par habitant (il y a 72 Raspontintois).

Vous avez donc consulté les registres et relevé le nombre d'accidents par personne sur l'année écoulée et vous avez obtenu les résultats suivants :

Accidents	Villageois
0	16
1	28
2	19
3	4
4	3
5	1
6	0
7	1

Ajustez cette distribution à une loi de Poisson et testez cet ajustement au niveau de probabilité 5%.

Exercice 38

Considérons un échantillon simple $X_1, \ldots, X_n$ provenant d'une loi de densité

$$f_\theta(x) = Ax^2 1_{[0,\theta]}(x)$$

où $\theta > 0$.

(i) Déterminez A en fonction de θ.

(ii) Notons $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Calculez $E(\bar{X})$. Déduisez un estimateur sans biais de θ.

(iii) Notons $Z = X_{(n)} = \max_{i=1,\ldots,n} X_i$. Calculez $P(Z \leq z)$ ainsi que $E(Z)$. Déduisez un estimateur sans biais de θ.

(iv) Obtenez une fonction pivotale pour θ basée sur $X_{(n)}$ et déduisez-en l'expression générale d'un intervalle de confiance au niveau $1-\alpha$ pour le paramètre θ.

Aide : Calculez $P(aX_{(n)} + b \leq z)$ pour a et b des réels quelconques et $z \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 39

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon indépendant extrait de la loi de densité

$$f_\theta(x) = 2\lambda x e^{-\lambda x^2} 1_{(0,+\infty)}(x)$$

où $\lambda > 0$.

1. Déterminez une statistique exhaustive pour λ.
2. Déterminez l'estimateur $\hat{\lambda}^{(n)}$ du maximum de vraisemblance de λ ?
3. Etudiez les propriétés de biais, de convergence et d'efficacité de $\hat{\lambda}^{(n)}$

Bonus : Déterminez un estimateur $\tilde{\lambda}^{(n)}$ de λ par la méthode des moments.

Août 2007

Exercice 40

On suppose que les températures d'échantillons d'eau pris dans une usine sont des variable aléatoires indépendantes de distribution $\mathcal{N}(\theta, 100)$.

a) Obtenez une fonction pivotale pour θ et déduisez-en l'expression générale d'un intervalle de confiance au niveau $1-\alpha$ pour le paramètre θ.

b) On vous dit que 25 échantillons d'eau de cette usine ont une température moyenne de 79C. Confrontez l'hypothèse que l'eau de cette usine est à la température idéale de 75C à l'hypothèse qu'elle excède cette température idéale. Obtenez des conclusions aussi fiables que possible avec les tables dont vous disposez (voir annexes). Précisez clairement à quel(s) niveau(x) de confiance vous travaillez.

c) Combien d'échantillons d'eau doivent être recueillis si l'on souhaite que le test en b) ait, au niveau 5%, une puissance de 99% à une température de 80C ?

Veillez à expliquer clairement quelle(s) statistique(s) de test vous utilisez en argumentant votre choix avec précision. Expliquez votre démarche en détail, en précisant toutes les hypothèses que vous faites. Faites attention à ne pas faire de calculs inutiles et à rédiger un rapport clair et intéressant afin de le rendre accessible et agréable à lire.

Exercice 41

Une étude menée par une équipe de chercheurs hollandais cherche à déterminer l'indépendance de deux variables : la catégorie socioprofessionnelle et le style d'éducation familiale. Pour ce faire, 155 familles ont été interrogées. Elles ont été classées en trois catégories socioprofessionnelles (CSP1, CSP2, CSP3) et, pour chacune de ces catégories, le style d'éducation familiale associé a été qualifié de Faible, Souple ou Rigide. Voici les résultats que ces chercheurs ont obtenus :

	CSP1	CSP2	CSP3
Faible	9	8	6
Souple	40	21	8
Rigide	10	22	31

A partir de ces données, testez au niveau 5% l'indépendance des deux distributions.

Exercice 42

Considérons un échantillon simple $X_1, \ldots, X_n$ provenant d'une loi de densité

$$f_\theta(x) = A\frac{x^2}{\theta^3}1_{[0,\theta]}(x)$$

où $\theta > 0$.

(i) Déterminez la valeur du paramètre A.

(ii) Déterminez une statistique exhaustive pour θ.

(iii) Déterminez l'estimateur $\hat{\theta}$ du maximum de vraisemblance de θ.

(iv) Déduisez des résultat précédents un estimateur $\hat{\theta}_1$ sans biais de θ. Cet estimateur est il convergent ?

(v) Notons $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Calculez $E(\bar{X})$. Déduisez un estimateur $\hat{\theta}_2$ sans biais de θ. Cet estimateur est il convergent ?

(vi) Lequel des deux estimateurs $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$ choisiriez-vous ?

Exercice 43

Considérons un échantillon simple $X_1, \ldots, X_n$ provenant d'une loi de densité

$$f_\theta(x) = \theta^x(1-\theta)^{1-x}1_{[0,\infty]}(x)$$

où $\theta \in (0, 1)$.

a) Obtenez une statistique efficace $T(\underline{X})$ pour le paramètre θ.

b) Calculez la borne de Cramer-Rao associée à cette distribution.

c) Calculez l'espérance et la variance de $T(\underline{X})$.

Juin 2008

Exercice 44

On modélise la hauteur maximale annuelle d'un fleuve par une variable de Rayleigh de densité

$$f(x, a) = \frac{x}{a}e^{-\frac{x^2}{2a}}1_{\{x>0\}}$$

où $a > 0$ est un paramètre inconnu.

1. Supposons que l'on observe un échantillon simple de taille n extrait de cette population. Donnez l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{a}_n$ de a. Cet estimateur est-il exhaustif, sans biais, convergent ? Vérifiez qu'il est asymptotiquement normal, de variance asymptotique égale à l'inverse de l'information de Fisher.
2. Pendant une période de huit ans, on a observé les hauteurs maximales (en mètres) suivantes pour le fleuve : (2.5, 1.8, 2.9, 0.9, 2.1, 1.7, 2.2, 2.8). Une compagnie d'assurance estime qu'une crue catastrophique avec une hauteur de 6 mètres au moins n'arrive au plus qu'une fois tous les mille ans. Est-ce justifié ?

Exercice 45

Une équipe de recherche néo-zélandaise a entamé une vaste étude cherchant à évaluer la variation du taux d'agressivité des limaces (*Boettgerilla pallens*) en fonction de leur alimentation. Pour ce faire, ils utilisent l'indice *SLUGG2008* ; cet indice rend compte du taux d'agressivité d'une limace d'âge moyen sur une échelle de 1 à 8, les limaces ayant un indice de 1 étant les plus flegmatiques et celles ayant un indice de 8 étant les plus hargneuses. Un premier groupe de 200 limaces a été nourri exclusivement au fromage blanc (*caseus philadelphia*). Voici les mesures obtenues pour ce groupe :

$$n_1 = 200,\ \bar{x}_1 = 7.3,\ s_1^2 = 1.1.$$

Un second groupe de 400 limaces a quant à lui été exclusivement nourri à la moutarde de dijon (*sinapis amora*). Voici les mesures obtenues pour ce groupe :

$$n_2 = 400,\ \bar{x}_2 = 7.4,\ s_2^2 = 1.2.$$

a) Notons μ_1 le taux d'agressivité moyen des limaces du groupe 1.
   (i) Déterminez un intervalle de confiance pour μ_1 au niveau de confiance 95%.
   (ii) Supposons que l'on souhaite tester $H_0 : \mu_1 = 7.14$ contre $H_1 : \mu_1 \neq 7.14$. De quelles hypothèses avez-vous besoin ? Jusqu'à quel niveau de confiance pouvez-vous aller dans vos conclusions ?
   (iii) Quelle sera la puissance de ce test si la vraie valeur de μ_1 est 2.8 ? Même question lorsque $\mu_1 = 7.1$. Interprétez.

b) Peut-on affirmer que les limaces nourries à la moutarde sont plus agressives que celles nourries au fromage blanc, ou faut-il simplement conclure que la limace est un animal violent par nature et ce indépendamment de son alimentation ?
   Dans la mesure du possible, rédigez vos conclusions de façon claire et détaillée, en n'oubliant pas d'inclure les éventuelles hypothèses que vous avez été amené à faire.

Exercice 46

1. Considérons une population distribuée selon une loi uniforme sur $[-\theta, \theta]$ avec $\theta > 0$. Que pouvez-vous dire de l'estimateur $\hat{\theta}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ (justifier) ? Pouvez-vous suggérer un meilleur estimateur (expliquer brièvement) ?
2. Considérons $X_1, \ldots, X_n$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Supposons $n \geq 100$ et définissons les estimateurs $\hat{\theta}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$, $\hat{\theta}_2 = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i$ et $\hat{\theta}_3 = \frac{1}{\lfloor n/2 \rfloor}\sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} X_{2i}$. Lequel choisiriez-vous et pourquoi ?
3. Deux statisticiens comparent leurs conclusions après un test d'hypothèse. Le premier a considéré $H_0 : \mu \geq 0$. L'autre $H_0 : \mu \leq 0$.
   (i) Supposons que l'un rejette et l'autre pas. Se contredisent-ils ?
   (ii) Même question si aucun des deux ne rejette.

Exercice 47

Considérons deux populations de lois normales de paramètres respectivement (μ_1, σ^2) et (μ_2, σ^2). On s'intéresse au schéma d'hypothèse suivant

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 \geq \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 < \mu_2. \end{cases}$$

On extrait deux échantillons simples de tailles respectivement n_1 et n_2 de chacune des populations.

1. Supposons que les deux populations sont indépendantes.
   a) Expliquez comment construire un intervalle de confiance pour la différence $\mu_1 - \mu_2$ au niveau $1 - \alpha$. Quelle est l'utilité d'un tel outil ?
   b) Une procédure de test adaptée à cette situation est décrite dans le formulaire joint à ce questionnaire. Donnez les étapes principales du raisonnement permettant d'obtenir ce test. En quoi cette procédure est-elle justifiée ?
2. Que devient le test si l'hypothèse d'indépendance des deux populations n'est pas supposée vérifiée ?

Exercice 48

Afin de mettre en place une campagne de prévention routière efficace et ciblée, l'IPRWTA (Intercommunale pour la Prévention Routière en Wallonie Terre d'Accueil) a commandé une étude statistique sur la distribution du nombre d'accidents à un carrefour excessivement dangereux. Deux statisticiens chevronnés se sont donc postés à ce carrefour 48 jours d'affilée entre 17h00 et 18h00 et ont noté leurs observations dans le tableau suivant.

Nombre d'accidents (x)	0	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de jours où il y a eu x accidents	20	15	7	3	0	2	0	1

Testez au niveau 5% l'hypothèse selon laquelle le nombre d'accidents est distribué selon une loi géométrique (cf. formulaire pour une description succincte de cette loi).

Août 2008

Exercice 49

On donne ci-dessous l'accroissement de poids (en kg) en un mois de deux groupes de porc soumis à des régimes d'engraissage différents :

Groupe 1 :	7	4	5	5	4
Groupe 2 :	2	4	4	2	3

On souhaite comparer les deux régimes, afin d'étudier si l'un est plus efficace que l'autre.

a) En supposant les accroissements de poids normaux, de variance égale à 2 pour le premier groupe et à 3 pour le deuxième groupe, peut-on conclure au niveau 10% que l'un des régimes est plus efficace que l'autre ? Même question aux niveaux 5% et 1%. (Pour chaque niveau, effectuer le test bilatéral et le test unilatéral correspondant).

b) Reprenez les mêmes tests qu'au point précédent en inversant les populations 1 et 2. Comment interprétez-vous vos conclusions ?

c) Esquissez sans faire de calculs la courbe de puissance du test bilatéral à 1%. Interprétez.

Exercice 50

Considérons une population distribuée selon une loi uniforme sur $[-\theta, \theta]$ avec $\theta > 0$. Soit X une variable aléatoire extraite de cette population, i.e. la densité de X est donnée par

$$f^X(x) = K1_{[-\theta,\theta]}(x).$$

a) Calculez K, et déduisez-en l'espérance et la variance de X.

b) Définissons $X^{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Calculez la fonction de répartition de $X^{(n)}$ et déduisez-en l'espérance de $X^{(n)}$. Montrez que

$$\mathrm{Var}(X^{(n)}) = \frac{4n}{(n+1)^2(n+2)}\theta^2.$$

Nous cherchons à estimer θ.

1. Considérons l'estimateur $\hat{\theta}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Est-il sans biais pour θ ? Est-il convergent ?
2. Mêmes questions pour l'estimateur $\hat{\theta}_2 = X^{(n)}$.
3. Comparez l'efficacité de ces deux estimateurs lorsque $n \to \infty$.
4. Lequel choisiriez vous et pourquoi ?

Exercice 51

Considérons deux populations de lois normales de paramètres respectivement (μ_1, σ^2) et (μ_2, σ^2). On s'intéresse au schéma d'hypothèse suivant

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 \geq \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 < \mu_2. \end{cases}$$

On extrait deux échantillons simples de tailles respectivement n_1 et n_2 de chacune des populations.

1. Supposons que les deux populations sont indépendantes. Comment construit-on un intervalle de confiance pour la différence $\mu_1 - \mu_2$ au niveau $1 - \alpha$?
2. Que peut-on faire si l'hypothèse d'indépendance des deux populations n'est pas supposée vérifiée ?
3. Quelle est la différence entre ces deux tests ?

Exercice 52

Un programme informatique a été conçu pour générer des nombres aléatoires de distribution $\mathcal{N}(0, 1)$. Après avoir lancé le programme 20 fois consécutivement, on obtient les valeurs suivantes :

0.464	0.137	2.455	−0.323	−0.068
0.906	−0.513	−0.525	0.595	0.881
−0.482	1.678	−0.057	−1.229	−0.486
−1.787	−0.261	1.237	1.046	−0.508

Tester au niveau 5% si le programme est bien écrit. Pour ce faire, répartir les observations en trois classes : $C_1 =]-\infty; -0.5]$, $C_2 =]-0.5; 0.5]$ et $C_3 =]0.5, \infty[$. Que feriez-vous si les paramètres de la loi normale n'étaient pas spécifiés ?