Personal (For me)

U.H.B.C. Chlef
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département des Mathématiques

Année Universitaire: 2019/2020
Niveau: 1ère Master/ Option: M.A.S.
Module: Processus Stochastiques 1.

EXAMEN DE RATTARPAGE (2 HEURES)

Documents Non Autorisés

1. **Questions de cours** (06/06)

Soit $X_1, X_2, X_3, \ldots$ une chaîne de Markov à espace d'état fini $E = \{1, 2, \ldots, N\}$ avec la matrice de transition $\mathbf{P}$. Parmi les affirmations suivantes, dites lesquelles impliquent lesquelles.

(a) Il existe une loi de probabilité $\bar{\pi}$ telleque $\lim_{n\to\infty} \pi\mathbf{P}^n = \bar{\pi}$ pour toute loi de probabilité π.

(b) $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \begin{bmatrix} \bar{\pi} \\ \vdots \\ \bar{\pi} \end{bmatrix}$, pour une certaine loi de probabilité $\bar{\pi}$.

(c) Il existe une loi de probabilité $\bar{\pi}$ telleque $\bar{\pi}\mathbf{P} = \bar{\pi}$.

e (d) $P_{ij} > 0$ pour tout $i, j \in E$

f (e) Il existe $n > 0$ telque $P_{ij}^{(n)} > 0$ pour tout $i, j \in E$

g (f) $P_{ij}^{(n)} > 0$ pour tout $i, j \in E$ et $n > 0$.

h (g) Pour tout $i, j \in E$. Il existe $n > 0$ telque $P_{ij}^{(n)} > 0$.

i (h) $X_1, X_2, X_3, \ldots$une chaine de Markov irréductible.

j (i) $X_1, X_2, X_3, \ldots$une chaine de Markov irréductible apériodique.

2. **Chaîne de Markov à temps discret**

Soit $X_1, X_2, X_3, \ldots$une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $E = \{1, 2, 3\}$ de loi de probabilité $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1/2$, $\mathbb{P}(X_1 = 2) = 1/3$, $\mathbb{P}(X_1 = 3) = 1/6$

(a) Expliquer pourquoi cette suite définit une Chaîne de Markov homogène.

(b) Calculer la matrice de transition et la loi limite $\bar{\pi}$.

(c) Donner la loi du temps de séjour et le temps moyen de séjour dans l'état 1.

(d) Quel est le temps moyen du retour à l'état 2?

(e) Donner le nombre moyen de visites de l'état 3.

(f) Calculer la limite: $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum\limits_{n=1}^{m} (X_n)^r$; $r > 0$.

3. **Chaîne de Markov à temps continu.**

Trois (3) satellites de communication sont placés sur une orbite. La durée de vie d'un satellite est exponentiellement distribuée de moyenne $1/\mu$, $\mu > 0$. Si l'un tombe en panne, son remplaçant sera envoyé. Le temps nécessaire pour préparer et envoyer un remplaçant est exponentiellement distribuée de moyenne $1/\lambda$, $\lambda > 0$. Soit $X(t)$ le nombre des satellites sur l'orbite à l'instant t. Supposons que $[X(t)]_{t\geq 0}$ est un processus de Markov à temps continu.

(a) Tracer le diagramme des transitions.

(b) Donner le générateur infinitésimal.

(c) Ecrire les équations de Kolmogorov directes (forward) et rétrogrades (backword) du processus.

(d) $[X(t)]_{t\geq 0}$ est-il un processus de Naissance et de Mort? Justifier!

(e) Montrer que la limite $\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(X_t = i)$; $i \geq 0$ **existe**. Que représente cette limite?

(f) Calculer la probabilité qu'à long-terme aucun satellite n'est sur l'orbite.

P.S. 1 Examen de Rattrapage 2019/2020.
MAS 1

Corrigé-type.

Exercice 1 : (06/06) $\boxed{\text{Question de Cours}}$

$$(d) \Leftrightarrow (f) \Rightarrow (e) \Leftrightarrow (i) \Rightarrow \begin{bmatrix} (a) \Leftrightarrow (b) \\ (g) \Leftrightarrow (h) \end{bmatrix} \Rightarrow (c)$$

0,50 pour chaque implication.

Exercice 2 : (08/08) C.M.T.D.

(a) $\mathbb{P}(X_{n+1}=j / X_n=i, X_{n-2}, X_{n-2}, \dots, X_1) =$

0,50 $\mathbb{P}(X_{n+1}=j / X_n=i)$ car $X_{n+1} \perp\!\!\!\perp X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$ indép.

Donc : $(X_n)_n$ est une C.M.T.D.
De plus : $\mathbb{P}(X_{n+1}=j / X_n=i) = \mathbb{P}(X_{n+1}=j) = P_{ij}$
à cause de l'indépendance.
D'où : La C.M. est homogène.

0,50 (b) $\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \end{bmatrix}$

La C.M étant apériodique irréductible

1,50 $\Rightarrow$ $\overline{\pi}$ existe et unique : $\overline{\pi} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 1/2 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{array}\right] \end{array}\begin{array}{l} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{array}$

Exercice 2 (suite).

(c) **La loi du temps de séjour dans l'état 1 : τ_1**

On suppose que $X_1 = 1$.

$$\mathbb{P}(\tau_1 = n / X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = X_3 = \dots = X_{n-1} = 1, X_n \neq 1 / X_1 = 1)$$

$$= \mathbb{P}[X_2 = 1 / X_1 = 1]\, \mathbb{P}[X_3 = 1 / X_1 = 1] \dots \mathbb{P}(X_{n-1} = 1 / X_1 = 1) *$$

$$\mathbb{P}(X_n \neq 1 / X_1 = 1)$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6}\right)$$

01 $\mathbb{P}(\tau_1 = n / X_1 = 1) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \quad n \geq 1.$

i.e. $\boxed{\tau_1 \rightsquigarrow \mathcal{G}\left(\tfrac{1}{2}\right)}$ loi géométrique

- **Le temps moyen de séjour dans l'état 1**

01 $\mathbb{E}(\tau_1) = \dfrac{1}{1/2} = 2$

~~(d) Le temps moyen du retour à l'état 2 : μ_2~~

~~R_2 : temps du retour à l'état 2 (voir cours).~~

~~$R_2 \rightsquigarrow \mathcal{G}(1 - f_{22})$~~

~~$f_{22} = \mathbb{P}($~~

Exercice 2 (suite)

(d) Le temps moyen du retour à l'état 2 :

01 $\mu_2 = \frac{1}{\pi_2} = \frac{1}{1/3} = 3.$

(e) Le nombre moyen de visite de l'état 3 :

$E_3 R_3 = \frac{1}{1-f_3}$, $f_3 = 1$ car 3 est réc.

01 D'où : $\boxed{E_3 R_3 = \infty}$

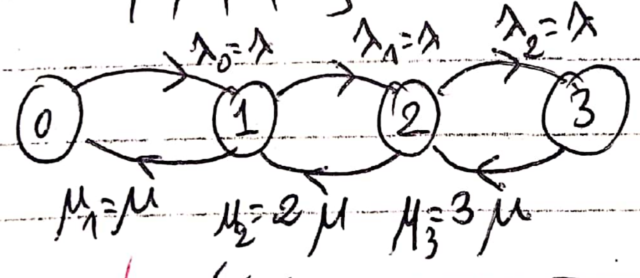
01,50 (f) $\lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} \cancel{1} X_n^r = \lim_{n \to \infty} \mathbb{E} X_n^r$

à l'infini, X_n suit la loi $\bar{\pi}$.

D'où : $\lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} X_n^r = 1^r \, 1/2 + 2^r \, 1/3 + 3^r \, 1/6.$

Exercice 3 (07/07) C.M.T.C.

(a) $\mathbb{E} = \{0, 1, 2, 3\}$.

01,50


02 (b) $Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & 3\mu & -3\mu \end{bmatrix}$

03/05

Exercice 3 (suite)

(c) Les équations de Kolmogorov directes :

$$P'(t) = P(t).Q \quad \text{i.e.} \quad P'_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{3} P_{ik}(t)\, Q_{kj} \quad i,j \in E.$$

Ecrivons les équations suivant les colonnes de Q :

$\boxed{j=0}$

$$P'_{i0}(t) = \sum_{k=0}^{3} P_{ik}(t)\, Q_{k0}$$

$$\boxed{P'_{i0}(t) = -\lambda P_{i0}(t) + \mu P_{i1}(t)} \; ; \quad i \in E.$$

02

$\boxed{j=1}$ $\boxed{P'_{i1}(t) = \lambda P_{i0}(t) - (\lambda+\mu) P_{i1}(t) + 2\mu P_{i2}(t), \; i \in E}$

$\boxed{j=2}$ $\boxed{P'_{i2}(t) = \lambda P_{i1}(t) - (\lambda+2\mu) P_{i2}(t) + 3\mu P_{i3}(t), \; i \in E}$

$\boxed{j=3}$ $\boxed{P'_{i3}(t) = \lambda P_{i2}(t) - 3\mu P_{i3}(t) \; ; \; i \in E}$

(d) Oui, $(X_t)_{t \geq 0}$ est un P.N.M., car d'après le diagramme des transitions seules les transitions possibles sont celles entre les états adjacents.

0,50

01

(e) La limite $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbb{P}(X_t = i)$ existe si $\pi_0 = \lim\limits_{t\to\infty} \mathbb{P}(X_t = 0)$ existe, d'après le cours : $\pi_0 = \dfrac{1}{1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2} + \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2\mu_3}}$

04/05

Exercice 3 (suite)

Or : $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$; ~~μ~~ $\mu_i = i\mu$, $i \in [1,3]$

D'où :

$$\boxed{\pi_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} + \frac{\lambda^3}{6\mu^3}}}$$

Cette limite représente la proba. que la C.M. soit de l'état (i) à long-terme. pour i (0), on obtient alors la loi limite $\bar{\pi}$

(f) $\mathbb{P}$(à long-terme, aucun satellite n'est sur l'orbite)

(01) $= \lim_{t \to \infty} \mathbb{P}(X_t = 0)$

$$= \pi_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} + \frac{\lambda^3}{6\mu^3}}$$