VARIABLES AlÉATOIRES

1 Exemple introductif

Dans de nombreuses expériences aléatoires, on n'est pas intéressé directement par le résultat de l'expérience, mais par une certaine fonction de ce résultat.
Considérons par exemple l'expérience qui consiste à jeter 2 dés bien équilibrés (successivement) et à observer la somme des points marqués sur les deux dés.
L'ensemble fondamental est $\Omega = \{(1,1),(1,2),...,(6,6)\}$; $|\Omega| = L_6^2 = 36$
$\forall (i,j) \in \Omega, P(i,j) = \frac{1}{36}$
Supposons que l'on s'intéresse à la somme des points marqués sur les deux dés. On associé à chaque élément de Ω (événement élémentaires) un nombre (la somme des points). On définit ainsi une application de X de Ω dans un ensemble de nombres dans ce cas dans l'ensemble $E = \{2,3,4,...,12\}$.
Pour trouver la probabilité de chaque nombre, il suffit de dénombrer les événements élémentaires qui réalisent ce nombre, ainsi
$P(X = 5) = P\{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.
De la même manière on peut définir $P(X = x), \forall x \in E$.
On dit que l'application X : "somme des points marqués sur les deux dés" est une variable aléatoire (v.a) définie de Ω dans $E = \{2,3,...,12\}$.

2 Variables aléatoires réelles et loi de probabilité

Définition 1. Soit (Ω, Γ, P) un espace probabilisé. On appelle v.a réelle toute application

$$X : \Omega \to R$$
$$\omega \to X(\omega) \quad \text{telle que : } \forall x \in R \ : X^{-1}(]-\infty, x]) \in \Gamma$$

c.à.d $\forall x \in R \ : X^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x\} \in \Gamma$

Autrement dit : Pour $(R, \mathfrak{B}_{\mathfrak{R}})$ ou $\mathfrak{B}_{\mathfrak{R}}$ est la tribu borélienne de R (c.à.d la tribu engendrée par les intervalles de la forme $]-\infty, x]$, avec $x \in R$). X est dite v.a.r si $X : \Omega \to R$ et $\forall B \in \mathfrak{B}_{\mathfrak{R}} : X^{-1}(B) \in \Gamma$.

Définition 2. L'ensemble $\{X(\omega), \omega \in \Omega\}$ est appelé ensemble de définition de la v.a X, ou support de cette v.a.

Définition 3. On appelle loi de probabilité de X l'application

$$P_X : \mathfrak{B}_{\mathfrak{R}} \to R$$
$$B \to P_X(B) = P(\{\omega \in \Omega / X(\omega) \in B\}) = P(X^{-1}(B)).$$

Remarque 1. *P_X est bien une probabilité sur $(R, \mathfrak{B}_{\mathfrak{R}})$.*

2.1 Fonction de répartition

Soit (Ω, Γ, P) un espace probabilisé et X une v.a réelle.

Définition 4. Une fonction de répartition de X est une application

$$F : R \to [0, 1]$$
$$x \to F(x) = P(X \leq x) = P(X^{-1}(]-\infty, x])) = P_X(]-\infty, x]).$$

Propriétés de la fonction de répartition La fonction de répartition vérifié les propriétés suivantes :
1) $0 \leq F(x) \leq 1$;
2) $\lim_{n \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{n \to \infty} F(x) = 1$;
3) F est une fonction non décroissante ;
4) F est continue à droite.