Séries chronologiques

Merzougui Mouna
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences,
Université de Badji Mokhtar, Annaba
U. B. M. A.

Cours Master1 : PS, Actuariat

Table des matières

1 Introduction et généralités **1**

1.1 Introduction 1

1.2 Définitions 2

1.2.1 Définition de Processus Aléatoire à temps discret 3

1.2.2 Stationnarité et Fonction d'autocorrélation 4

1.2.3 Causalité et inversibilité 8

1.3 Théorème de décomposition de Wold 8

1.3.1 Prévision à partir de la représentation de Wold 9

1.3.2 Les opérateurs 12

1.4 Densité spectrale (DS) 12

1.4.1 Introduction 12

1.4.2 Calcul de la DS : 13

1.4.3 Périodogramme 15

Chapitre 1

Introduction et généralités

1.1 Introduction

Il y a deux approches pour l'analyse temporelle des séries chronologiques :

1- L'approche traditionnelle ou classique, qui est descriptive, consiste à décomposer la série X_t en 4 composantes :

a- La tendance, notée T_t, c'est un mouvement persistant de long terme qui traduit l'allure globale du phénomène qu'il soit la baisse ou la hausse.

b- Le cycle, noté C_t, c'est un effet périodique extra annuel.

c- La saisonnalité, notée S_t, c'est un effet périodique intra annuel de période p , il suffit de connaitre ses p premières valeurs S_1, S_2,. . . ,S_p (par périodicité on aura :$S_t = S_{t+p}$)

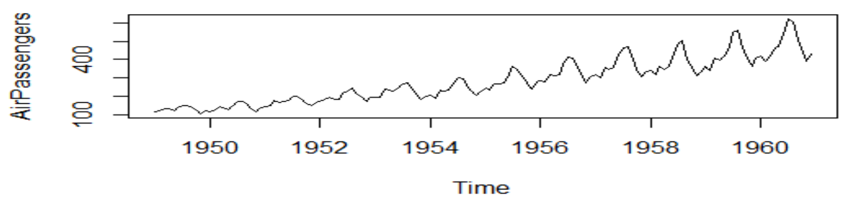
d- Perturbation aléatoire ou Résidu, noté ε_t, ce sont des fluctuations irrégulières, en générale, de faible intensité mais de nature aléatoire.

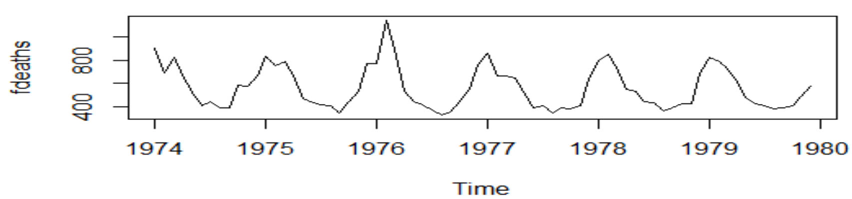
Dans cette approche on suppose que les 3 premières composantes ne sont pas aléatoires, on peut les représenter par des fonctions déterministes du temps, l'impact stochastique est restreint aux résidus qui sont modélisé par des variables aléatoires indépendantes ou non corrélé de moyenne 0 et de variance constante : $E(\varepsilon_t) = 0; V(\varepsilon_t) = \sigma^2$.

On a 2 modèles de décompositions : -Le modèle Additif :$X_t = T_t + C_t + S_t + \varepsilon_t$ ou le modèle Multiplicatif : $X_t = T_t C_t S_t \varepsilon_t$: (Un cours détaillé sur comment trouver ces composantes a été fait pour LP3).

2-L'analyse moderne est plutôt explicative elle est basée sur les processus aléatoires. En fait, La valeur de la quantité étudiée X_t est une variable aléatoire et l'ensemble des valeurs X_t quand t varie est appelé processus aléatoire. (Il y a impact stochastique sur toutes les composantes de la série). Dans cette approche on suppose qu'il y a un modèle stochastique qui a généré les données ou la série temporelle. La spécification du modèle est basée sur la méthodologie de Box et Jenkins (1970) avec le modèle $ARMA$, qui commence par identifié le modèle sur la base de certain graphes statistiques : corrélogrammes simple et partiel, ensuite l'estimation des paramètres enfin le modèle est validé par des tests statistiques, la procédure est itérée jusqu'à ce que le modèle satisfait les critères. Le modèle sélectionné est utilisé pour la prévision.

Exemples : Commenter les graphes : tendance, saisonnalité et type de modèle. (Les séries sont dans la base de données R 'datasets')





1.2 Définitions

Une série chronologique (ou série temporelle ou chronique) est une succession d'observations obtenue séquentiellement au cours du temps, noté par $(X_t)_{t\in T}$: Si T est un intervalle de nombres réels alors X_t est une série continue et si T est un ensemble discret alors X_t est une série à temps discret. Dans ce cours, on se basera sur les séries temporelles discrètes. Par rapport aux autres types de données statistique la particularité des séries chronologique tient à la présence d'une relation d'antériorité qui ordonne l'ensemble des informations. Les dates d'observation sont souvent équidistantes les unes des autre : on a des séries trimestrielles, mensuelles,...., etc. C'est en astronomie qu'apparaissent les premières séries temporelles mais les domaines d'applications sont très larges : biologie, théorie du signal, météorologie, économie. Les objectifs des ST : la description, l'explication et la prévision.

1.2.1 Définition de Processus Aléatoire à temps discret

Un processus stochastique est un modèle qui décrit la structure de probabilité d'une suite d'observation. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, T un ensemble d'indices et $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable. On appelle processus aléatoire une famille $\{X_t, t \in T\}$ de variables aléatoires à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$ indexés par $t \in T$.

t : le temps, $T \subset \mathbb{Z}$:processus aléatoire à temps discret et quand $T \subset \mathbb{R}$:processus aléatoire à temps continu.

On s'intéresse aux processus aléatoire à temps discret et $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est appelé espace d'état.

$$\begin{aligned} X_t :\ (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) &\to (E, \mathcal{E}) \\ \omega &\to X_t(\omega) \end{aligned}$$

Pour ω fixé, $X_t(\omega)$ est une variable aléatoire. on notera par la suite $X_t = X_t(\omega)$.

X_t peut être le prix de stock ou le niveau d'eau dans un lac,...etc, une série temporelle de n observations : $(X_1, ..., X_n)$ est regardé comme une réalisation d'un échantillon parmi une population infini d'échantillons qui aurait pu être généré par ce processus. L'objectif de l'examen statistique est d'inférer les propriétés de la population à partir de l'échantillon.

Pour une description complète du processus stochastique on doit spécifier toute les distributions de probabilités jointes d'ordre n des échantillons : $P(X_{t_1} \leq x_1, \ldots, X_{t_n} \leq x_n), \forall t_1, \ldots, t_n$ mais pour la plupart des cas c'est difficile, une description partielle est plus pratique est consiste à spécifier la moyenne, la variance et la fonction de covariance.

1.2.2 Stationnarité et Fonction d'autocorrélation

Une classe importante des modèles stochastiques est les modèles stationnaires qui suppose que la processus reste en équilibre par rapport à un niveau moyen constant. La stationnarité joue un rôle central dans la théorie des processus, car elle remplace l'hypothèse d'observation i.i.d en statistique. Deux notions sont considérées.

Stationnarité forte (au sens stricte) :

Le processus X_t est stationnaire strict si pour toute famille finie d'instants $(t_1, \ldots, t_n) \in T$ et tout entier s , les lois de probabilités de $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ et de $(X_{t_{1+s}}, \ldots, X_{t_{n+s}})$ sont les même c-à-d :

$$\mathcal{L}\left(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}\right) = \mathcal{L}(X_{t_{1+s}}, \ldots, X_{t_{n+s}}), \forall t \in T, \forall s \in \mathbb{N}.$$

Les propriétés statistiques ne changent pas au cours du temps.(On considère les processus dont les distributions ne changent pas si le temps est translaté ou décalé).

Exemple :

Il est difficile de montrer la stationnarité forte puisqu'elle exige la caractérisation complète, mais l'exemple le plus simple est le processus i.i.d : pour $\{X_t\} \overset{i.i.d}{\backsim} F_X$,

$$\begin{aligned} P\left(X_{t_1} \leq x_1, \ldots, X_{t_n} \leq x_n\right) &= \prod_{i=1}^{n} F_X\left(x_i\right) \\ &= P(X_{t_{1+s}} \leq x_1, \ldots, X_{t_{n+s}} \leq x_n) \end{aligned}$$

Avant de donner la 2ème notion de stationnarité on introduit les définitions suivantes.

Définition1

Soit X_t une série temporelle avec $E(X_t^2) < \infty$:

- La fonction moyenne de X_t est $\mu_t = E(X_t)$.

- La fonction covariance de X_t est $Cov(X_t, X_s) = E((X_t - \mu_t)(X_s - \mu_s)) = \gamma(t, s)$. (Mesure le degré de variation conjointe)

Exemple : Soit $\{X_t\}$ un processus strictement stationnaire, alors : $F_{X_t} = F_{X_{t+s}} =$

$$F_{X_0} \Longrightarrow \begin{cases} \mu_t = \mu_0 = \mu. \\ \sigma_t^2 = \sigma_0^2 = \sigma^2. \end{cases}$$

En plus, $F_{X_{t_1},X_{t_2}} = F_{X_{t_{1+s}},X_{t_{2+s}}} = F_{X_{t_1-t2},X_0} \Longrightarrow \gamma(t_1,t_2) = \gamma(t_1-t_2,0) = \gamma(t_1-t_2)$. La fonction de covariance dépend seulement de $t_1 - t_2$.

De manière générale si $X_t$un processus strictement stationnaire, alors :

-Les moments d'ordre k sont constant : $E(X_t^k) = E(X_s^k)$.

-Stabilité de toutes les lois jointes, en particulier : $Cov(X_t, X_{t+h}) = Cov(X_s, X_{s+h})$.

Stationnarité faible (de second ordre) :

Le processus X_t est stationnaire d'ordre deux si la moyenne et la covariance sont invariantes par translation dans le temps, c-à-d :

- $E(X_t) = \mu$. (indépendante de t)

-$Var\left(X_t\right) = \sigma^2$.

-$Cov(X_t, X_{t-h}) = \gamma_h$. (indépendante de $t, \forall h$)

Remarque : La stationnarité stricte implique la stationnarité faible à condition que $Var\left(X_t\right)$ existe. Dans le cas gaussien on a l'équivalence.

Exercice : Soit X_t des v.a.i tel que $X_t \backsim Exp\left(1\right)$ (la loi exponentielle) si t est pair et $X_t \backsim N\left(1,1\right)$ si t est impair. Calculer l'espérance, la variance et la covariance de ce processus. En déduire que la stationnarité faible n'implique pas la stationnarité forte.

Définition2

Soit X_t une série temporelle stationnaire :

-La fonction d'**autocovariance** (ACV) de X_t au retard h est : $\gamma_h = Cov(X_t, X_{t-h})$.

-On étude "la mémoire" d'un processus en calculant sa fonction d'**autocorrélation** (ACF) de retard h noté ρ_h : $\rho_h = \frac{Cov(X_t,X_{t-h})}{\sqrt{Var(X_t)Var(X_{t-h})}} = \frac{\gamma_h}{\gamma_0}$.

Propriétés

1. $\gamma_0 = Var\left(X_t\right)$.

2-$\gamma_h = \gamma_{-h}, \forall h$

3-$|\gamma_h| \leq \gamma_0, \forall h$

Par conséquent : La fonction d'autocorrélation vérifie :

1-$\rho_0 = 1$.

2-$\rho_{-h} = \rho_h, \forall h$

3-$|\rho_h| \leq 1$.

On utilisera souvent les relations suivantes :

-$Cov\left(\sum_{i=1}^{m} a_i X_i, \sum_{j=1}^{n} b_j Y_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j Cov\left(X_i, Y_j\right).$

-$Var\left(X_t\right) = Cov\left(X_t, X_t\right).$

-$Var\left(\sum_{t=1}^{n} X_t\right) = Cov\left(\sum_{t=1}^{n} X_t, \sum_{s=1}^{n} X_s\right) = \sum_{h=-(n-1)}^{n-1} \left(n - |h|\right)\gamma_h.$

Rappel de l'inégalité de Jensen : Si f est une fonction convexe et X une variable aléatoire tel que $E\left(X\right) < \infty$, alors

$$f\left(E\left(X\right)\right) \leq E\left(f\left(X\right)\right)$$

l'inégalité est stricte si f est strictement convexe. (sera utile dans les exercices).

Exemples

1) Bruit blanc : Ces modèles sont très importants car ils sont simples à analyser, facile à simuler et utiliser comme bloc de construction de modèles plus compliqués.

Soit $(\varepsilon_t)_{t\in T}$ un processus stochastique, on dit que $(\varepsilon_t)_{t\in T}$ est un bruit blanc faible (resp. fort) si les trois propriétés suivantes sont vérifier :

1-$E(\varepsilon_t) = 0, \forall t \in T$.

2-$Var\left(\varepsilon_t\right) = \sigma^2, \forall t \in T$.

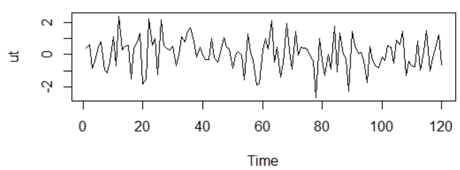
3-$cov\left(\varepsilon_t, \varepsilon_s\right) = E\left(\varepsilon_t \varepsilon_s\right) = 0, \forall t \neq s$.

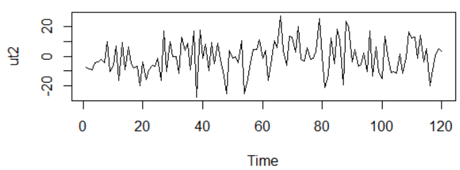
La propriété 3 implique que les ε_t sont non corrélées entre eux (resp. les ε_t sont iid). Ce processus est stationnaire, il est sans mémoire.

Notation

-si $\{\varepsilon_t\}$ est un bruit blanc faible, on notera : $\{\varepsilon_t\} \backsim WN\left(0, \sigma^2\right)$ ou $\{\varepsilon_t\} \backsim BB\left(0, \sigma^2\right)$.

-si $\{\varepsilon_t\}$ est un bruit blanc fort, on notera : $\{\varepsilon_t\} \backsim iid\left(0, \sigma^2\right)$.





Simulations de 2 bruits blancs avec les lois : $N\left(0, 1\right)$ et $N\left(0, 10^2\right)$.

2) Marche aléatoire

Soit le processus $\{X_t\}$ défini par : $X_t = \left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon_t & \text{si} \;\; t = 1 \\ X_{t-1} + \varepsilon_t & \text{si} \;\; t = 2, 3, \ldots \end{array} \right.$

Où ε_t est un bruit blanc, ce processus est appelé marche aléatoire et peut s'écrire sous la forme : $X_t = \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$. On peut montrer que $E(X_t) = 0$ et $Cov(X_t, X_s) = \min\left(t, s\right) \sigma^2$.

Donc une marche aléatoire n'est pas stationnaire car la suite des covariances dépend de t.

Définition : Fonction d'autocorrélation empirique

Soit $x_1, ..., x_n$ des observations d'une série temporelle :

-La moyenne empirique est $\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} x_t$.

-La fonction d'autocovariance empirique est $\widehat{\gamma}_h = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-h} \left(x_t - \overline{x}\right)\left(x_{t+h} - \overline{x}\right), \;\; 0 \leq h < n$.

-La fonction d'autocorrélation empirique est $\widehat{\rho}_h = \frac{\widehat{\gamma}_h}{\widehat{\gamma}_0}$, $0 \leq h < n$.

Le graphe de ρ est appelé corrélogramme.

1.2.3 Causalité et inversibilité

Définition : un processus X_t s'appelle causal s'il peut être représenté sous la forme :

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i},$$

où ε_t est un bruit blanc et $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 < \infty$.

Définition : une représentation causale $X_t = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}$ d'un processus stationnaire est inversible si :

$$\varepsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i X_{t-i} \quad \text{où} \quad \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i^2 < \infty.$$

1.3 Théorème de décomposition de Wold

Le théorème de Wold (1938) est considéré comme théorème fondamentale dans le domaine des séries temporelles. En vertu de ce théorème, tout processus stochastique X_t stationnaire au sens faible peut être écrit comme une combinaison linéaire.

Théorème : Tout processus stationnaire d'ordre deux $(X_t, t \in Z)$ peut être représenté sous la forme :

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i} + k_t$$

où les paramètres ψ_i satisfont $\psi_0 = 1, \psi_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{N}^*, \sum\limits_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 < \infty$ et où $\{\varepsilon_t\} \backsim iid\,(0, \sigma^2)$.

On dit que la somme des chocs passés correspond à la composante linéaire stochastique de X_t. Le terme k_t désigne la composante linéaire déterministe telle que $Cov(k_t; \varepsilon_{t-i}) = 0, \forall i \in \mathbb{Z}$.

Remarques

-la représentation de Wold du processus $(X_t, t \in Z)$ suppose que l'on ajoute à la somme pondéré des chocs passés, une composante déterministe k_t qui n'est autre que l'espérance du processus, car

$$E(X_t) = E\left(\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}\right) + k_t = k_t = \mu$$

-La condition $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 < \infty$ est dite condition de sommabilité des carrés. Elle assure l'existence des moments d'ordre deux du processus $(X_t, t \in Z)$, sous cette condition, on dit que X_t converge en moyenne quadratique.

1.3.1 Prévision à partir de la représentation de Wold

On peut prévoir les valeurs futurs de Y_t jusqu'en $t + h$, sachant l'ensemble d'information passés jusqu'a t, la prévision est notée $\widehat{Y}_t(h)$.

La meilleure prévision possible de la réalisation Y_{t+h} connaissant les valeurs Y_t, $Y_{t-1}, ...$ est donnée par l'espérance conditionnelle :

$$\begin{aligned}\widehat{Y}_t(h) &= E\left(Y_{t+h}/Y_t, Y_{t-1}, ...\right) \\ &= E\left(\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t+h-i} + \mu/\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, ...\right).\end{aligned}$$

L'erreur de prévision à un pas $(h = 1)$ est : $Y_{t+1} - \widehat{Y}_t(1) = \varepsilon_{t+1}$. Cet erreur de prévision est appelée innovation (l'innovation est la partie de Y_t non corrélé au passée de la série).

Lemme :

Soit $\{Z_j\}$ une suite de variable aléatoire définit sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Supposons que $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} E|Z_j| < \infty$, alors $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} Z_j = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{j=-n}^{n} Z_j$ p.s et $E\left(\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} Z_j\right) = \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} E\left(Z_j\right)$.

Preuve :

*On définit la suite $S_n = \sum_{j=-n}^{n} Z_j$. La suite $\sum_{j=-n}^{n} |Z_j|$ est croissante positive donc la limite existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$: $\lim \sum_{j=-n}^{n} Z_j = \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} Z_j$.

En utilisant le TCM :

$$E\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |Z_j|\right) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} E\,|Z_j| < \infty$$

d'où $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} |Z_j| < \infty$ p.s c'est à dire S_n converge absolument vers $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} Z_j$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} Z_j$.

*$|S_n| = \left|\sum_{j=-n}^{n} Z_j\right| \leq \sum_{j=-n}^{n} |Z_j| < \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} E\,|Z_j| < \infty$, en utilisant le TCD : $E\left(\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} Z_j\right) = \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} E\left(Z_j\right)$.

On donne un rappel sur la convergence en moyenne quadratique.

Rappel : Soit la classe des variable aléatoire appartenant à L^2, satisfaisant $E\left(X^2\right) < \infty$. On rappelle l'inégalité de Cauchy :

$$|E\left(XY\right)| \leq \sqrt{E\left(X^2\right) E\left(Y^2\right)}.$$

Définition : une suite de V.A $X_n \in L^2$ converge en moyenne quadratique vers la V.A $X \in L^2$, noté $X_n \overset{M.Q}{\to} X$ si et seulement si

$$E\left(|X_n - X|^2\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Pour établir la convergence en M.Q, il est plus facile de vérifier la condition du théorème suivant :

Théorème : Soit la suite $X_n \in L^2$, alors $\exists\ X \in L^2/\ X_n \overset{M.Q}{\to} X$ si et seulement si

$$E\left(X_n - X_m\right)^2 \to 0 \ \text{ pour } m, n \to \infty.$$

Les suites vérifiant cette condition sont dite les suites de Cauchy dans L^2 et la condition est appelé le critère de Cauchy pour L^2.

Maintenant, on peut montrer le théorème suivant.

Théorème : Soit la suite de nombres réelles $\{a_j\}$et la suite de variables aléatoires $\{Z_t\}$ vérifiant : $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| = M < \infty$ et $EZ_t^2 \leq K < \infty$. Alors, il existe une suite de variable aléatoire $\{X_t\} / X_t = \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} a_j Z_{t-j}$ p.s et $\lim\limits_{n\to+\infty} E\left(\left|X_t - \sum\limits_{j=-n}^{n} a_j Z_{t-j}\right|^2\right) = 0$.

Preuve :

*En prenant $S_n = \sum\limits_{j=-n}^{n} a_j Z_{t-j}$, utiliser la même démonstration du lemme précédent pour montrer que $X_t = \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} a_j Z_{t-j}$ p.s.

*Pour montrer la convergence en M.Q, il suffit de montrer que

$$E\left|\sum_{j=-n}^{n} a_j Z_{t-j} - \sum_{j=-m}^{m} a_j Z_{t-j}\right|^2 \to 0 \ \text{ pour } m, n \to \infty.$$

Soit $0 < m < n$:

$$\begin{aligned}
E\left(\sum_{j=-n}^{n} a_j Z_{t-j} - \sum_{j=-m}^{m} a_j Z_{t-j}\right)^2 &= E\left(\sum_{m<|j|\leq n} a_j Z_{t-j}\right)^2 \\
&= \sum_{m<|j|\leq n} \sum_{m<|j|\leq n} a_j a_k E\left(Z_{t-j} Z_{t-k}\right) \\
&\leq \sum_{m<|j|\leq n} \sum_{m<|j|\leq n} |a_j| \, |a_k| \, |E\left(Z_{t-j} Z_{t-k}\right)| \\
&\leq \sum_{m<|j|\leq n} \sum_{m<|j|\leq n} |a_j| \, |a_k| \sqrt{E\left(Z_{t-j}^2\right) E\left(Z_{t-k}^2\right)} \\
&= \left(\gamma_0(Z) + \mu_Z^2\right) \left(\sum_{m<|j|\leq n} |a_j|\right)^2 \underset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

parce que $\{a_j\}$ est absolument sommable.

1.3.2 Les opérateurs

-**L'opérateur retard L** : Soit X_t une série temporelle, $LX_t = X_{t-1}$.

-$L^h X_t = X_{t-h}$, en particulier on a $L^0 X_t = X_t$.

-Si $X_t = c, \forall t \in \mathbb{Z}$ avec $c \in \mathbb{R}$: $L^i X_t = L^i c = c, \forall i \in \mathbb{Z}$.

-**L'opérateur de différence** Δ : $\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = X_t - LX_t \Longleftrightarrow \Delta = 1 - L$.

-**Le polynôme retard d'ordre p** est représenté par : $\varphi_p(L) = \left(1 - \varphi_1 L - \cdots - \varphi_p L^p\right) X_t$.

1.4 Densité spectrale (DS)

1.4.1 Introduction

La densité spectrale contient la même information que la fonction d'autocovariance, mais elle est définie dans le domaine des fréquences. Elle permet d'identifier les principales composantes d'une série : tendance, saison, cycle, etc (effet calendrier). L'idée est que les différentes composantes peuvent être vues comme des oscillations de fréquences plus ou moins élevée.

-Si la fréquence des oscillations est faible →cycle de période très longue = composante tendancielle

-Si la fréquence est élevée →cycle de période faible (par exemple : une saisonnalité).

On interprète la densité spectrale en étudiant les pics les plus importants. S'il n'y a pas de pics, il n'y a pas de composantes cycliques dominantes, donc il s'agit d'un BB. S'il y a des pics, on peut alors réinterpréter les fréquences en termes de temps pour déterminer la durée du cycle.

Les fréquences sont mesurées en fréquence angulaire notée ω. On a les relations suivantes entre la fréquence angulaire ω et la période de temps T :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Longleftrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

* Pour des données mensuelles, $T = 12 \Longrightarrow \omega = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$. Ainsi, si l'on observe un pic à la fréquence $\omega = \frac{\pi}{6}$, on pourra conclure que la série a une composante périodique de période 12, c'est-à-dire un effet saisonnier mensuel.

*Données trimestrielles, la période est $T = 4 \Longrightarrow \omega = \frac{\pi}{2}$. Si on observe un pic dans la densité spectrale à cette fréquence, c'est qu'il y a un effet trimestriel.

*S'il y a un pic pour des basses fréquences, cela signifie qu'il y a un cycle de long-terme.

*Si la densité spectrale est élevée voir infinie à l'origine, cela signale qu'il y a un problème de non stationnarité.

1.4.2 Calcul de la DS :

Soit Y_t un processus stationnaire de moyenne $E(Y_t) = \mu$ et de fonction d'ACV $\gamma_h = E((Y_t - \mu)(Y_{t-h} - \mu))$. La densité spectrale de Y_t est

$$f_Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \gamma_h e^{-i\omega h}, \omega \in \mathbb{R}.$$

où $e^{-i\omega h} = \cos(\omega h) - i \sin(\omega h)$.

Propriétés

1- $f_Y(\omega)$ existe car la série de terme général $\gamma_h e^{-i\omega h}$ est absolument convergente puisque $\sum_{h=-\infty}^{+\infty} |\gamma_h| < \infty$ (car Y_t est stationnaire).

2- $f_Y(\omega)$ est réelle : on a

$$\begin{aligned} f_Y(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\left[\gamma_0 + \sum_{h=1}^{+\infty} \gamma_h \left(e^{-i\omega h} + e^{i\omega h}\right)\right] \\ &= \frac{\gamma_0}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{h=1}^{+\infty} \gamma_h \cos(\omega h) \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \gamma_h \cos(\omega h). \end{aligned}$$

(Dans les exercices il est préférable d'utiliser cette 2ème définition).

3- $f_Y(\omega)$ est une fonction paire : $f_Y(-\omega) = f_Y(\omega)$, continue, périodique de période 2π : $\cos((\omega + 2k\pi) h) = \cos(\omega h) \to f_Y(\omega + 2k\pi) = f_Y(\omega)$. (On représente la DS sur $[0, \pi]$).

4-Il est équivalent de connaitre $\gamma_h, h \in \mathbb{Z}$ ou $f_Y(\omega), \omega \in \mathbb{R}$, où

$$\gamma_h = \int_{-\pi}^{\pi} f_Y(\omega) e^{i\omega h} d\omega.$$

Démontrer ce résultat. **Indication :** Remplacer f et calculer l'intégrale, vous trouverez γ_h.

Exemple : DS d'un bruit blanc

Soit $\{\varepsilon_t\} \backsim BB(0, \sigma^2) \Longrightarrow \gamma_0 = \sigma^2$ et $\gamma_h = 0$ pour $h \neq 0$. Sa DS est

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(\omega) &= \frac{\gamma_0}{2\pi} \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi}, \quad \forall\omega \end{aligned}$$

donc la DS est constante.

Inversement si Y_t est un processus stationnaire dont la DS est constante $f_Y(\omega) = c$, alors ce processus est un BB :

$$\begin{aligned} \gamma_h &= \int_{-\pi}^{\pi} c\cos(\omega h) \\ &= 0 \text{ si } h \neq 0 \end{aligned}$$

Le fait que la fonction $f(\omega)$ est constante veut dire que la puissance totale est uniformément distribuée sur toutes les fréquences, cette propriété est la même pour la lumière blanche où toutes les fréquences (couleurs) sont présente en même quantité et c'est pour cette raison que ce processus est appelé bruit blanc.

Propriété

Soit Y_t est un processus stationnaire vérifiant : $Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}$, (la décomposition de Wold), avec le polynôme retard $\Psi(L) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j L^j$, on a $Y_t = \Psi(L)\varepsilon_t$, où $\sum_{i=0}^{\infty} |\psi_i| < \infty$ et $\{\varepsilon_t\} \backsim BB(0, \sigma^2)$.

Alors la DS de Y_t est donnée par :

$$\begin{aligned} f_Y(\omega) &= \left|\Psi\left(e^{-i\omega}\right)\right|^2 f_\varepsilon(\omega) \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi}\Psi\left(e^{-i\omega}\right)\Psi\left(e^{i\omega}\right). \end{aligned}$$

Cette formule nous donne une manière alternative pour calculer la DS.

1.4.3 Périodogramme

C'est un estimateur non paramétrique de la DS. Soit la série chronologique de taille T : $y_1, y_2, ..., y_T$, on peut calculer les $T-1$ ACV empiriques d'après la formule :

$$\widehat{\gamma}_h = \begin{cases} \frac{1}{T}\sum\limits_{t=h+1}^{T}(y_t-\overline{y})(y_{t-h}-\overline{y}), & \text{pour } h = 0,1,...,T-1 \\ \widehat{\gamma}_{-h} & \text{pour } h=-1,-2,...,-T+1 \end{cases}$$

où $\overline{y}$ est la moyenne de l'échantillon : $\overline{y} = \frac{1}{T}\sum\limits_{t=1}^{T} y_t$. Pour ω donné le périodogramme est donné par

$$\widehat{f}_Y(\omega) = \frac{1}{2\pi}\sum_{h=-T+1}^{T-1}\widehat{\gamma}_h e^{-i\omega h}.$$

Le calcul se fait pour $\omega_j = \frac{2\pi j}{T}$, pour $j = 1,2,...,M = \left[\frac{T}{2}\right]$.