TP 4
Intervalle de confiance

1 Fonctions pivotales

Dans cette section, nous allons vérifier expérimentalement les lois suivies par les 2 principales fonctions pivotales utilisées pour la construction d'intervalles de confiance.
Commençons par le théorème de Fisher qui stipule que si nous avons un échantillon *i.i.d* de loi normale de moyenne et de variance inconnue alors :

$$\frac{n-1}{\sigma^2} {S^*}^2 \sim \chi^2_{n-1}$$

avec ${S^*}^2$ est la variance empirique corrigée.

Q1 Définir une fonction *chisq1* qui a comme paramètres d'entrée $n, \mu\ et\ \sigma$ et qui renvoie une réalisation de la variable aléatoire $\frac{n-1}{\sigma^2} {S^*}^2$.

Q2 À l'aide de la fonction *replicate()* générer un échantillon de taille 1000 issu de la variable $\frac{n-1}{\sigma^2} {S^*}^2$, puis tracer son histogramme. On rajoute l'argument *freq=FALSE* dans le but de faire figurer en ordonnées les proportions plutôt que les effectifs.

Q3 Vérifiez graphiquement que la variable aléatoire $\frac{n-1}{\sigma^2} {S^*}^2$ suit bien une loi χ^2 à $n-1$ degrés de liberté.

Le théorème de Student stipule quant à lui que si nous avons un échantillon *i.i.d* de loi normale de moyenne et de variance inconnue alors :

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S^* / \sqrt{n}} \sim St_{n-1}$$

avec S^* est l'écart type empirique corrigée et $\bar{X}$ est la moyenne empirique.

Q4 Réaliser le même travail pour vérifier le théorème de Student.

2 Intervalle de confiance

L'expression de l'intervalle de confiance bilatéral au niveau $1-\alpha$ sur l'espérance μ d'un échantillon issu d'une loi normale de variance connue σ^2 est :

$$\left[\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

Q5 Générer un échantillon de taille 1000 issu d'une loi normale de moyenne 15 et de variance 3, puis construire un intervalle de confiance pour la moyenne. Vérifier la cohérence du résultat avec la moyenne réelle.

On suppose à présent que le paramètre σ n'est plus connu. On ne peut donc pas s'en servir dans l'expression de l'intervalle de confiance. Dans ce cas, l'intervalle est construit à partir du théorème de Student :

$$\left[\bar{X} - \frac{S^*}{\sqrt{n}} t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{X} + \frac{S^*}{\sqrt{n}} t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

Q6 Construire un intervalle de confiance pour la moyenne si on suppose que la variance est inconnue.

Q7 Créer une fonction *gen_IC* qui prend comme paramètres d'entrée un échantillon quelconque et un niveau de signification α et qui renvoie un intervalle de confiance sur l'espérance.

Q8 À l'aide de la fonction *replicate()* créer plusieurs intervalles de confiance pour l'espérance au même niveau de signification α et stocker les dans la variable ICs.

Q9 Charger la fonction *plot_ICs* disponible dans le fichier utils.R. Puis, testez l'instruction suivante :

```
> plot_ICs(ICs , 15)
```

Quelle est la relation entre α et le nombre d'intervalle rouge ?

Q10 À partir du théorème de Fisher construire un intervalle de confiance unilatérale de la variance dans le cas où l'espérance est inconnue.