reghi

Université de Sidi bel Abbès
Faculté des Sciences Exactes
Département de Proba-Stat

Année 2017-2018
Modélisation et Simulation
1ère Année Master PA & SA

Examen final: Corrigé

☆ **Exercice** **1**. ⟦ **10 pts** ⟧ *Soit la densité* g_λ: $g_\lambda(x) = Cxe^{-\lambda x^2}\mathbf{1}_{]0,\infty[}(x)$, *où* $\lambda > 0$.

1. *Expliquer comment peut-on simuler* g_λ *par inversion en donnant l'algorithme !* .
   $C = 2\lambda$. *Soit* $x > 0$, $G\lambda(x) = (1 - e^{-\lambda x^2})$. *Soit* $y \in]0,1[$, $G_\lambda^{-1}(y) = \sqrt{\frac{\ln(1-y)}{\lambda}}$.
   Algorithme: • *Générer* $U \sim \mathcal{U}[0,1]$. • *Poser* $X = \sqrt{\frac{\ln(1-y)}{\lambda}}$. **2 pt**

2. *Soit* $f(x) = Mx^2e^{-x^2}$. *Peut-on simuler* f *par acceptation rejet en se basant sur* g_λ? *comment ? quel est le* λ *optimal ? Quelle est le taux d'acceptation optimal ?*
   Attention. On ne peut se baser directement sur g_λ *car son support est* $]0,\infty[$ *et le support de* f *est* $]-\infty,\infty[$. *Mais comme* f *est symétrique, on peut simuler* Y *par rejet acceptation suivant la densité*

$$f_+(x) = 2Mx^2e^{-x^2}\mathbf{1}_{]0,\infty[}(x).$$

   Puis générer $\mathcal{E} \sim Rad(1/2)$ *alors* $Z = \mathcal{E}Y$ *aura* f *comme densité.*

   Une condition nécessaire est l'existence de

$$c_{opt} = \sup_{x>0} \frac{f_+(x)}{g_\lambda(x)} = \sup_{x>0} \frac{M}{\lambda} xe^{-(1-\lambda)x^2}.$$

   Donc on doit avoir $\lambda \in]0,1[$. *Soit* $h(x) = xe^{-(1-\lambda)x^2}$. $h'(x) = (1 - 2(1-\lambda)x^2)e^{-(1-\lambda)x^2} = 0$ *donne* $x^* = \sqrt{\frac{1}{2(1-\lambda)}}$. *En remplaçant, on trouve:*

$$c_{opt} = \frac{M}{\sqrt{2e}} \frac{1}{\lambda\sqrt{1-\lambda}}.$$

   Le λ *optimal est celui qui minimise* c_{opt} *sur* $]0,1[$. *Après calcul on trouve* $\lambda_{opt} = 2/3$.

   Le taux d'acceptation optimal qu'on peut avoir est

$$1/c_{opt} = \lambda_{opt}\sqrt{1-\lambda_{opt}}\frac{\sqrt{2e}}{M},$$

   avec $M = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$. *Donc le taux d'acceptation optimal est approximativemnt* 0.7953445. **4 pt**

3. *Soit* ϕ *une fonction continue sur* $[1,3]$. *Soit la densité* s *à support* $]0,\infty[$ *définie à une constante près par :*

$$s(x) \propto \int_1^3 \phi(\lambda)xe^{-\lambda x^2}d\lambda.$$

   Donner le programme R de la fonction `random(n,phi)` *qui permet de simuler un échantillon de taille* n *suivant la densité* s.

Réponse on a

$$s(x) \propto \int_1^3 \psi(\lambda)g_\lambda(x)d\lambda$$

Programme. **4pt**

```
### Question 3 ####
lambda=2/3
g=function(x) 2*lambda*x*exp(-lambda*x*x)*(x>0)
M=2/sqrt(pi)
f=function(x) 2*M*x*x*exp(-x*x)
### un exemple de phi ####
phi=function(lambda) sqrt(lambda+4)
ksi=function(lambda) phi(lambda)/(lambda)
s=function(x) {
gx=function(lambda){
ksi(lambda)*2*lambda*x*exp(-lambda*x*x)
}
res=integrate(gx,1,3)£value
return(res)
}
n=1e6
hh=function(x) 2*ksi(x)
copt=optimize(hh,c(1,3),maximum=TRUE)£objective
v=runif(n)
x=runif(n,1,3)
rapp=ksi(x)/(copt/2)
cond=(v<rapp)
l=x[cond]
hist(l,freq=FALSE,nclass=70)
curve(ksi,add=TRUE,col="blue")
n=length(l)
u=runif(n)
x=sqrt(-log(u)/l)
hist(x,freq=F,nclass=56)
MM=integrate(ksi,1,3)£value
xx=seq(0,5,len=10000)
yy=sapply(xx,s)/MM
points(xx,yy,type="l",col="blue")
%##############################################################
```

☆ Exercice 2. ⟦ *6 pts* ⟧

1. *Expliquer comment calculer l'intégrale multiple suivante en utilisant la méthode de Monte-Carlo,*
   Réponse.

$$I = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 20\ln\left(1 + sin(\frac{xy}{4})\right)dxdy.$$

$$f(x,y)\frac{1}{4}\mathbf{1}_{[-1,1]}(x)\mathbf{1}_{[-1,1]}(y)$$

$$g(x,y) = 80\ln\left(1 + sin(\frac{xy}{4})\right).$$

$$I = E(g(X,Y)),\ \text{où } X, Y i.i.d \sim \mathcal{U}[-1,1]$$

Générer $X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_n$ i.i.d uniformes sur $[-1, 1]$.

$$\hat{I} = \frac{1}{n} \sum g(X_i, Y_i).$$

2. *Proposer une amélioration en utilisant la méthode de variable de contrôle, en donnant l'algorithme.*
Réponse *Il suffit de considérer la variable de contrôle : $C = 80XY$.*

3. *En utilisant un échantillonnage préférentiel, proposer une autre méthode qui pourrait améliorer la précision de l'estimation.* ***Réponse*** *On introduit la densité d'échantillonage*

$$f(x, y) = |x||y|\mathbf{1}_{[-1,1]}(x)\mathbf{1}_{[-1,1]}(y) = f^*(x)f^*(y).$$

$f^*(x) = |x|\mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$ est facilement simulable par inversion. La suite voir cours...

☆ Exercice 3. ⟦ *6 pts* ⟧

1. *Donner le programme R pour estimer par Monte Carlo la proportion des suites $\{0, 1\}^{21}$ qui contiennent quatre uns consécutifs.*

```
%##########################################################
existe.four.ones=function(x) {
for(k in 4:length(x)) if(prod(x[(k-3):k])==1) return(1)
return(0)
}
nb=1e4
s=0
for(k in 1:nb){
x=rbinom(21,1,0.5)
s=s+existe.four.ones(x)
}
s/nb
%##########################################################
```

2. *Quelle est la loi cible qu'on simule par ce programme ? Montrer le ! Soit le programme suivant en langage R.*

```
%##########################################################
rf=function(n,x,prob){ m=length(x) ;
c=max(prob)
y=floor(m*runif(n))+1    ;
u=runif(n)
y=y[u<prob[y]/c] ;
return(x[y]) }
%##########################################################
```

Réponse. *La loi cible est la loi discrète de support $\{x_1, ..., x_m\}$ avec les $p_k = prob[k]$ donnés dans le vecteur prob.*

Justification: C'est une application de la méthde de rejet, en utilisant la loi uniforme discrète comme densité instrumentale.