Niveau : 1 Master 2 MAS 2017/2018 المستوى
Groupe : الفوج
N d'inscription : رقم التسجيل
Examen de : امتحان في مادة

Corrigé type

exo1

01 (a) • $X_t \in L^1$ (le même espace de proba)
• X_t – F_t mes (canonique).

s<t . $\mathbb{E}(X_t / F_s^X) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X_t/\mathcal{G}_s)/F_s^X\right]$

(pt de tour) $= \mathbb{E}(X_s / F_s^X) = X_s$.

0,50 (b) $\mathbb{E}(X_t / F_s^X) = X_s$ s<t
s=0 $\mathbb{E}(X_t / F_0^X) = X_0$
$\Rightarrow$ $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0)$ (espérance itérée)

01 (c) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$\mathbb{E}(B_t^3/F_s) = \mathbb{E}\left[(B_t - B_s)^3 + 3B_tB_s^2 - 3B_tB_s^2 + B_s^3/F_s\right]$

$= B_s^3 + 3B_s(t-s)$

01 (d) $\mathbb{E}(B_t^3) = \mathbb{E}(B_0^3) = 0$
D'après (c) $\mathbb{E}(B_t^3/F_s^X) \neq B_s^3$

$(B_t^3)_{t\geq 0}$ n'est pas une mart.

Exo2 (a) $\mathbb{E}(B_t + 4t / F_s) = B_s + 4t \neq B_s + 4s$
n'est pas une mart.

0,50

Scanned by CamScanner

Examen de

0,50 (b) $\mathbb{E}(B_t^2/\mathcal{F}_s) = B_s^2 - s + t \neq B_s^2$ n'est pas mart.

0,50 (c) $X_t = t^2 B_t - 2\int_0^t u B_u du$

$dX_t = t^2 dB_t$, $X_t = X_0 + \underbrace{\int_0^s s^2 dB_s}_{\text{Int. de Wiener}}$

donc $(X_t)_{t\geq 0}$ est une mart.

(d) $\mathbb{E}(B_t^3/\mathcal{F}_s) = B_s^3 - 3B_s(t-s)$ d'après 1.(c).

0,75 D'où, $\mathbb{E}(B_t^3 - 3tB_t/\mathcal{F}_s) = B_s^3 - 3sB_s$

i.e $(B_t^3 - A\,tB_t)_{t\geq 0}$ est une mart

s.s.si $\boxed{A = -3}$.

exo3 (a) $\mathbb{E}\Big[C + \underbrace{\int f\,dB}_{\text{centrée}}\Big] = \mathbb{E}\Big[D + \underbrace{\int g\,dB}_{\text{centrée}}\Big]$

0,50

$\mathbb{E}(C) = \mathbb{E}(D) \Rightarrow \boxed{C = D}$.

(b) d'après (a) : $I(f-g) = \int_a^b (f-g)\,dB = 0$

0,25 $\Rightarrow \| I(f-g) \|_{L^2(\Omega)} = 0$ d'une part.

D'autre part :

$$\| I(f-g)\|^2 \underset{d'Itô}{\overset{Isom}{=}} \int_0^b \mathbb{E}[f-g]^2 \, dt$$

$$= \| f-g \|^2_{L^2_{ad}}$$

D'où : $\| f-g \| = 0$ i.e $f(t,\omega) = g(t,\omega)$ p-s.

Exo 4

(a) $d\left(e^{1/2 t} \sin B_t\right) = e^{\frac{1}{2}t} \cos B_t \, dB_t$

1,50

$\Rightarrow e^{\frac{1}{2}t} \sin B_t = \int_0^t e^{\frac{1}{2}s} \cos B_s \, dB_s$

On a : $t \longmapsto e^{\frac{1}{2}t} \cos B_t \in L^2_{ad}([0,t] \times \Omega)$

D'où : $\int_0^t e^{\frac{1}{2}s} \cos B_s \, dB_s$ est d'Itô.

donc : $\left(e^{\frac{1}{2}t} \sin B_t\right)_{t,0}$ est une mart.

(b) Bonus : de même que (a)

01,50

$$d\left[(B_t + t)\, e^{-B_t - \frac{1}{2}t}\right] = \underbrace{e^{-B_t - \frac{1}{2}t}\left[1 - t - B_t\right]}_{f(t)} dB_t$$

$f \in L^2_{ad}([0,t] \times \Omega)$

Exo 5.

(a) $Y_t = e^{\alpha B_t}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

01

$$dY_t \underset{d'Itô}{\overset{d'\text{ple}}{=}} Y_t\left(\frac{\alpha^2}{2}dt + \alpha\, dB_t\right)$$

$$\mathbb{E}(dY_t) = \mathbb{E}(Y_{t+dt} - Y_t) = \mathbb{E}(Y_{t+dt}) - \mathbb{E}(Y_t)$$
$$= d\,\mathbb{E}Y_t$$

1,25

(b) d'après (a) :

$$\mathbb{E}(dY_t) = \mathbb{E}\left[Y_t\left(\frac{\alpha^2}{2}dt + \alpha\, dB_t\right)\right]$$
$$\parallel$$
$$d\,\mathbb{E}Y_t = \frac{\alpha^2}{2}(\mathbb{E}Y_t)dt + \mathbb{E}\left[\alpha \underset{e^{\alpha B_t}}{\underbrace{Y_t}} dB_t\right]$$

Or a : $dB_t = B_{t+dt} - B_t \underset{\text{indep}}{\parallel} e^{\alpha B_t} = Y_t$

(M.B.S).

D'où : $\mathbb{E}(\alpha Y_t dB_t) = \alpha\,\mathbb{E}Y_t \underbrace{\mathbb{E}(dB_t)}_{=0} = 0$.

Ou a

$$\begin{cases} d\,\mathbb{E}(Y_t) = \dfrac{\alpha^2}{2}\mathbb{E}Y_t \\ \mathbb{E}Y_0 = 1 \quad (\text{car } Y_0 = 1). \end{cases}$$

Groupe :	الفوج:
N d'inscription :	رقم التسجيل:
Examen de :	إمتحان في مادة:

La solution est $\mathbb{E}Y_t = e^{\frac{a^2}{2}t}$, $t \geq 0$

Exo6

02

X_t M.B. Géométrique

$$X_t = X_0\, e^{(\alpha - \frac{\beta^2}{2})t + \beta B_t}$$

$$\mathbb{E}(X_t) = X_0\, e^{\alpha t} \quad (\text{d'après exo5}).$$

Exo7 01 (a) $X_t^2 = B_t^2$ i.e. $f \equiv 1$ p.s.

01,75

(b) $dM_t = d(X_t^2) - f(t)dt$, $M_0 = X_0^2$.

fle d'Itô $\Rightarrow M_t = X_0^2 + 2\underbrace{\int_0^t X_s f(s)\, dB_s}_{I}$

Il suffit de m.q. I est d'Itô.

$$\mathbb{E}\int_0^t X_s^2 f^2(s)\,ds \leq c^2\, \mathbb{E}\int_0^t X_s^2\, ds \quad \left[|f(t)| \leq c \text{ bornée} \right.$$

$$\leq c^2\, \mathbb{E}\int_0^t \left(\int_0^s f(u)\, dB_u\right)^2 ds$$

$$\leq c^2 \int_0^t \underbrace{\mathbb{E}\left(\int_0^s f(u)\, dB_u\right)^2}_{\|f\|} ds$$

$$\mathbb{E}\int X_s^2 f^2(s)\,ds \leq c^2 \int_0^t \mathbb{E}\int_0^s f^2(u)\,du$$

$$\leq \frac{c^4}{2} t^2$$

Ex 2 (a) $dY_t = d(\ln X_t)$

01

$$\overset{\text{f}^{\text{le}}\ \text{Itô}}{=} \left[\lambda(\theta - Y_t) - \frac{1}{2}\sigma^2\right]dt + \sigma\, dB_t$$

02 (b) Résolution de l'E.D.S linéaire

$$Y_t = U_t\left[Y_0 + \int_0^t \frac{\lambda\theta - \frac{\sigma^2}{2}}{U_s}\,ds + \int_0^t \frac{\sigma}{U_s}\,dB_s\right]$$

avec : $Y_0 = \ln X_0$

et $U_t \; e^{\int_0^t -\lambda\, ds} = e^{-\lambda t}$

D'où : $Y_t = e^{-\lambda t}\left[Y_0 + \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2\lambda}\right)e^{\lambda t} + \int_0^t \sigma e^{\lambda s}\, dB_s\right]$

$$\therefore e^{\lambda t} Y_t = Y_0 + \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2\lambda}\right)e^{\lambda t} + \int_0^t \sigma e^{\lambda s}\, dB_s$$

$$\Rightarrow d\left(e^{\lambda t} Y_t\right) = \lambda\left(\theta - \frac{\sigma^2}{2\lambda}\right) e^{\lambda t} dt + \sigma e^{\lambda t} dB_t$$

Par intégration de 2 membre de t à T :

$$Y_T = Y_t e^{-\lambda(T-t)} + \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2\lambda}\right)\left(1 - e^{-\lambda(T-t)}\right) + \int_t^T \sigma e^{-\lambda(T-s)} dB_s$$

01 (c) $\mathbb{E}\left(\ln X_T / X_t = x\right) = \ln x \, e^{-\lambda(T-t)} + \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2\lambda}\right) \times \left(1 - e^{-\lambda(T-t)}\right)$

$$\mathbb{V}\left(\ln X_T / X_t = x\right) \underset{d'Ito}{\overset{Isom.}{=}} \int_t^T \sigma^2 e^{-2\lambda(T-s)} ds$$

0,50 (d) $\ln X_T / X_{t=x} \rightsquigarrow$ Normale

D'où : $X_T / X_{t=x} \rightsquigarrow$ Log-normale