Chapitre 5

Variables aléatoires discrètes

5.1 Définitions et propriétés

Définition 5.1.1 *Soit* $(\Omega,\ \mathcal{F}, P)$ *un espace probabilisé, une variable aléatoire discrète* X *associée à cet espace probabilisé est une application de* Ω *dans* $\mathbb{R}$ *qui prend un nombre de valeurs fini ou dénombrable satisfaisant* $\sum_{x\in X} P(X=x)=1$*. On note les éléments de la variable aléatoire discrète* X *par* $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_i, ...,\ x_n$ *où* $n\in\mathbb{N}$*. Pour tout* $i\in\mathbb{N}$*, on pose*

$$P_X\left(X=x_i\right)=P_i=P\left(X^{-1}\left(x_i\right)\right),$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} P_i=1.$$

Exemple 5.1.1 *On lance 3 pièces de monnaie et on observe le nombre de faces obtenues. Il est clair que* X *prend les valeurs : 0, 1, 2, 3. Alors l'application*

$$X:\ \Omega\ \to\ \mathbb{R}$$

est une variable aléatoire telle que

$$\Omega=\{(ppp),\ (ppf),\ (pfp),\ (fpp),\ (pff),\ (fpf),\ (ffp),\ (fff)\}$$

et

$$X(\Omega)=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$$

en plus, on a

$$P(X=0)=P\left[(ppp)\right]=\left(\frac{1}{2}\right)^3,$$
$$P(X=1)=P\left[(ppf)\,,\ (pfp)\,,\ (fpp)\right]=3\left(\frac{1}{2}\right)^3,$$
$$P(X=2)=P\left[(pff)\,,\ (fpf)\,,\ (ffp)\right]=3\left(\frac{1}{2}\right)^3,$$
$$P(X=3)=P\left[(fff)\right]=\left(\frac{1}{2}\right)^3.$$

Ces résultats sont résumés dans le tableau suivant :

X	0	1	2	3	$\sum_{x=0}^{3} P(X=x)$
P_X	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$3\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$3\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	1

Remarque 5.1.1 *Si X et$Y$ sont deux variables alétoires discrètes définies sur le même espace preobabilisé, alors $X+Y$ est aussi une variable aléatoire discrète définie sur le même espace.*

Dans tous ce qui suit, on considère la variable alétoire discrète $X=(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)\,,\, n\in\mathbb{N}$.

Définition 5.1.2 ***L'espérance mathématique*** *de la variable aléatoire discrète X est le nombre*

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} P_i x_i.$$

Remarque 5.1.2 *L'espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète X est la version probabiliste de la moyenne arithmétique.*

Proposition 5.1.1 *Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé. Alors :*

1/ $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.

2/ $E(aX+b)=aE(X)+b, \forall(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

Preuve. Soient $X=(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ et $Y=(y_1,\ y_2,\ ...,\ y_n)\,,\ n\in\mathbb{N}$ deux variables alétoires, on a :

1/

$$\begin{aligned} E(X+Y) &= \sum_{i=1}^{n} P_i \left(x_i + y_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P_i x_i + \sum_{i=1}^{n} P_i y_i \\ &= E(X) + E(Y). \end{aligned}$$

2/ Soient $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} E(aX+b) &= \sum_{i=1}^{n} P_i \left(a x_i + b\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P_i a x_i + \sum_{i=1}^{n} P_i b \\ &= a\sum_{i=1}^{n} P_i x_i + b\sum_{i=1}^{n} P_i \\ &= aE(X) + b \end{aligned}$$

$\square$

Remarque 5.1.3 *De la proposition (5.1.1), on peut déduire la propriété suivante :*

$$E(aX+bY) = aE(X) + bY, \ \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Définition 5.1.3 ***La variance*** *de la variable aléatoire discrète X est le nombre positif $Var(X)$, donné par :*

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} P_i \left[x_i - E(X)\right]^2$$

s'il existe.

Proposition 5.1.2 *Soient X une variable aléatoire discrète et a, b deux nombre réels.*

1/ $Var(X) = E\left(X^2\right) - \left[E(X)\right]^2.$

2/ $Var\left(aX+b\right) = a^2 Var(X).$

Preuve. Soit la variable aléatoire discrète $X = \left(x_1, \ x_2, \ ..., \ x_n\right), n \in \mathbb{N}$. On a

1/

$$\begin{aligned}
Var\left(X\right) &= \sum_{i=1}^{n} P_i \left[x_i - E(X)\right]^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} P_i \left[x_i^2 - 2E(X)x_i + \left(E(X)\right)^2\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} P_i x_i^2 - 2E(X)\sum_{i=1}^{n} P_i x_i + \left(E(X)\right)^2 \sum_{i=1}^{n} P_i \\
&= E\left(X^2\right) - 2\left(E(X)\right)^2 + \left(E(X)\right)^2 \\
&= E\left(X^2\right) - \left[E(X)\right]^2 .
\end{aligned}$$

2/ En appliquant la première propriété, on obtient

$$\begin{aligned}
Var\left(aX+b\right) &= E\left((aX+b)^2\right) - \left[E(aX+b)\right]^2 \\
&= E\left(a^2X^2 + 2abX + b^2\right) - \left[E(aX+b)\right]^2
\end{aligned}$$

de la proposition (5.1.1), on a :

$$\begin{aligned}
Var\left(aX+b\right) &= a^2E(X^2) + 2abE\left(X\right) + b^2 - \left[aE(X)+b\right]^2 \\
&= a^2E(X^2) + 2abE\left(X\right) + b^2 - a^2\left(E(X)\right)^2 - 2abE(X) - b^2 \\
&= a^2\left[E(X^2) - \left(E(X)\right)^2\right] \\
&= a^2 Var\left(X\right).
\end{aligned}$$

□

Définition 5.1.4 ***L'ecart type*** *$\delta\left(X\right)$ de la variable aléatoire discrète X est la racine carrée de la variance de X*

$$\delta\left(X\right) = \sqrt{Var(X)}.$$

Définition 5.1.5 ***La covariance*** *des deux variables aléatoires discrètes X et Y est :*

$$Cov\left(X,Y\right) = E\left(XY\right) - E(X)E(Y).$$

5.2 Quelques lois de probabilités discrètes

Dans cette section, on présente les définitions et les propriétés de quelques lois de probabilité discrète les plus usuelles dans les sciences expérimentales.

5.2.1 Loi de Bernoulli

Définition 5.2.1 *Une epreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire dont le résultat peut être soit un succés noté par "1" de probabilité "p" ou un echec qu'on note par "0" de probabilité "q" mais pas les deux simultanément, tel que $p+q=1$. La loi de Bernoulli est résumé dans le tableau ci-dessous :*

X	0	1
P_X	q	p

En plus, On a

1/ l'espérance mathématique de la loi de Bernoulli est :

$$E(X) = p.$$

2/ Sa variance est :

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= p - p^2 \\ &= p(1-p) \\ &= pq. \end{aligned}$$

3/ Finalement, son écart type est :

$$\delta(X) = \sqrt{pq}.$$

Exemple 5.2.1 *On lance une pièce de monnaie, la variable alétoire X est le nombre de faces obtenues. Alors X prend que deux valeurs 0 et 1*

X	0	1
P_X	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

et on a

1/ $E(X) = \frac{1}{2}$.

2/ $Var(X) = \frac{1}{4}$.

3/ $\delta(X) = \frac{1}{2}$.

5.2.2 Loi binomiale

Définition 5.2.2 *On effectue n $(n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$ répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succés est p. On définit la variable aléatoire X par le nombre de succés parmi les n résultas obenus. Alors X suit une loi binomiale de paramètres $n,\ p,\ q$ tels que $q = 1 - p$ est la probabilité d'echec. on note $X \sim B(n,\ p,\ q)$ où*

$$X = \{0, 1, 2, ..., n\}$$

et

$$\underset{0 \leq k \leq n}{P(X = k)} = C_n^k p^k q^{n-k}$$

avec

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

On peut vérifier aisément que

$$\sum_{k=0}^{n} P(X = k) = 1.$$

Proposition 5.2.1 *Soit X une variable aléatoire discrète suit la loi binomilale $B(n,\ p,\ q)$.*

1/ L'espérance mathématique de X est :

$$E(X) = np.$$

2/ La variance de X est :

$$Var(x) = npq.$$

3/ L'ecart type de X est :

$$\delta(X) = \sqrt{npq}$$

Preuve. Soit la variable aléatoire discrète $X \sim B(n,\ p,\ q)$,

1/ L'espérance mathématique de X

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\
&= np\sum_{k=0}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} q^{n-k} \\
&= np\,(p+q)^{n-1} \\
&= np.
\end{aligned}$$

2/ La variance de X

$$Var(x) = E(X^2) - (E(X))^2 .$$

Comme

$$\begin{aligned}
E\left(X^2\right) &= \sum_{k=0}^{n} k^2 P(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k q^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k^2 \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{kn!}{(k-1)!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(k-1+1)\,n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(k-1)\,n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k q^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} p^{k-2} q^{n-k} + np\sum_{k=0}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} q^{n-k} \\
&= n(n-1)p^2\,(p+q)^{n-2} + np\,(p+q)^{n-1} \\
&= n(n-1)p^2 + np
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} Var(x) &= n(n-1)p^2 + np - (np)^2 \\ &= -np^2 + np \\ &= np\,(1-q) \\ &= npq. \end{aligned}$$

3/ Il est clair que

$$\delta\,(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{npq}.$$

$\square$

Exemple 5.2.2 *Voir l'exemple (5.1.1),* $X \sim B\left(3, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ *donc*

1/ $E(X) = np = \frac{3}{2}$.

2/ $Var(X) = npq = \frac{3}{4}$.

3/ $\delta\,(X) = \sqrt{npq} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

5.2.3 Loi géométrique

Définition 5.2.3 *On répète continuellement et de façon indépendante une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succés est p (non nulle). On définit la variable alétoire discrète X par le nombre d'épreuves nécéssaires pour obtenir un premier succés. Alors X prend les valeurs*

$$X = \{1, 2, 3, ...\}$$

et suit une loi géométrique de paramètre p. On note $X \sim géo\,(p)$ *où*

$$P(\underset{k\geq 1}{X = k}) = q^{k-1}p.$$

tel que $q = 1 - p$ *est la probabilité d'échec. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on a*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} P(X = k) &= \sum_{k=1}^{n} q^{k-1}p \\ &= p\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} \\ &= p\frac{1-q^n}{1-q}. \end{aligned}$$

Comme $0 < q < 1$, *alors quand* n *tend vers* $+\infty$, *on obteient*

$$\sum_{k=1}^{n} P(X = k) = \frac{p}{1-q} = 1.$$

Proposition 5.2.2 *Soit* X *une variable aléatoire discrète suit la loi géométrique* $géo\,(\,p)$.

1/ L'espérance mathématique de X est :

$$E(X) = \frac{1}{p}.$$

2/ La variance de X est :

$$Var(x) = \frac{q}{p^2}.$$

3/ L'ecart type de X est :

$$\delta\,(X) = \frac{\sqrt{q}}{p}.$$

Preuve. Soit la variable alétoire discrète $X \sim géo\,(\,p)$.

1/ L'espérance mathématique de X

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{n} kP(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}p \\ &= p\sum_{k=1}^{n} \left(q^k\right)' \\ &= p\left(\sum_{k=1}^{n} q^k\right)' \\ &= p\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)' \end{aligned}$$

Comme $0 < q < 1$, alors quand $n \to +\infty$, on a

$$\begin{aligned} E(X) &= p\left(\frac{1}{1-q}\right)' \\ &= \frac{p}{(1-q)^2} \\ &= \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

2/ La variance de X

$$Var(x) = E(X^2) - [E(X)]^2 \tag{5.2.1}$$

où

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=1}^{n} k^2 P(X=k) \\ &= p\sum_{k=1}^{n} k^2 q^{k-1} \\ &= pq\sum_{k=1}^{n} k\,(k-1+1)\,q^{k-2} \\ &= pq\left[\sum_{k=2}^{n} k\,(k-1)\,q^{k-2} + \sum_{k=2}^{n} kq^{k-2}\right] \\ &= pq\left[\sum_{k=1}^{n} \left(q^k\right)'' + \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{n} \left(q^k\right)'\right] \\ &= pq\left[\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)'' + \frac{1}{q}\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)'\right] \end{aligned}$$

Comme $0 < q < 1$, alors quand $n \to +\infty$, on a

$$\begin{aligned} E(X^2) &= pq\left[\left(\frac{1}{1-q}\right)'' + \frac{1}{q}\left(\frac{1}{1-q}\right)'\right] \\ &= pq\left[\frac{2}{(1-q)^3} + \frac{1}{q}\frac{1}{(1-q)^2}\right] \\ &= \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

En remplaçant dans (5.2.1), on trouve

$$\begin{aligned} Var(x) &= \frac{2q+p-1}{p^2} \\ &= \frac{q}{p^2}. \end{aligned}$$

3/ L'écart type de X

$$\delta\,(X) = \sqrt{Var(X)} = \frac{\sqrt{q}}{p}.$$

□

Exemple 5.2.3 *On lance un dé continuellement jusqu'a l'obtention d'un* 6. *Soit* X *le nombre de lancers nécéssaires.* X *suit la loi géométrique géo*(p) *où* $p = \frac{1}{6}$ *est la probabilité d'obtention* *d'un* 6. X *prend toutes les valeurs entières positives* $1, 2, 3, \ldots\ldots.$*telles que pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$, *on a*

$$P(X = k) = q^{k-1}p = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}.$$

En plus

1/ $E(X) = \frac{1}{p} = 6.$

2/ $Var(X) = \frac{q}{p^2} = 30.$

3/ $\delta\left(X\right) = \frac{\sqrt{q}}{p} = \sqrt{30}.$

5.2.4 Loi Hypergéométrique

Définition 5.2.4 *On tire sans remise* n *objets d'un ensemble de* N *objets dont* D *possèdent une caractéristique particulière et les autres* $(N - D)$ *ne la possèdent pas. Soit* X *le nombre d'objets de l'échantillon qui possèdent la caractéristique. Alors,* X *suit la loi hypergéométique de paramètre* $n,\ N,\ D$ *et on écrit* $X \sim H\left(N,\ D,\ n\right)$ *tel que*

$$\underset{k\in R_X}{P\left(X = K\right)} = \frac{C_D^k\ C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$$

où

$$R_X = \left\{\max\left(0, n - N + D\right), \ldots, \min\left(n, D\right)\right\}.$$

Proposition 5.2.3 *Soit* X *une variable aléatoire discrète suit la loi hypergéométrique* $H\left(N,\ D,\ n\right).$

1/ L'espérance mathématique de X est :

$$E(X) = n\frac{D}{N}.$$

2/ La variance de X est :

$$Var(x) = n\frac{D}{N}\left(1 - \frac{D}{N}\right)\left(\frac{N - n}{N - 1}\right).$$

3/ L'ecart type de X est :

$$\delta\left(X\right) = \sqrt{n\frac{D}{N}\left(1 - \frac{D}{N}\right)\left(\frac{N - n}{N - 1}\right)}.$$

Preuve. On distingue deux cas différents : i/ Si $\min(n, D) = n$, alors $R_X = \{0, ..., n\}$. ii/Si $\min(n, D) = D$, alors $R_X = \{0, ..., D\}$. On montre les propriétés 1/ et 2/ de la proposition (5.2.3) dans les deux cas de la même façon. On a

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} kP(X = k)$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{n} k \frac{C_D^k \; C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n} \\ &= \sum_{k=0}^{n} k \frac{\frac{D!}{k!(D-k)!} \frac{(N-D)!}{(n-k)!(N-D-n+k)!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{D\,(D-1)!}{(k-1)!\,(D-k)!} \frac{(N-D)!}{(n-k)!\,(N-D-n+k)!} \frac{n\,(n-1)!\,(N-n)!}{N\,(N-1)\,...\,(N-n)!} \\ &= n\frac{D}{N}. \end{aligned}$$

de manière similaire, on montre que

$$Var(x) = n\frac{D}{N}\left(1 - \frac{D}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right).$$

Finalement

$$\delta\,(X) = \sqrt{n\frac{D}{N}\left(1 - \frac{D}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}.$$

□

Exemple 5.2.4 *Une boite contient 8 Composants parmi les quels 2 sont défectueux. Trois composants sont pris au hasard et sans remise de la boite. Soit X le nombre de composants défectueux dans l'échantillon. En effet $X = \{0,\ 1,\ 2\}$ définit une loi de probabilité hypergéométrique H de paramètres $N = 8,\ D = 2$ et $n = 3,$ tel que :*

$$P(X = 0) = \frac{C_2^0 C_6^3}{C_8^3} = \frac{20}{56},$$

$$P(X = 1) = \frac{C_2^1 C_6^2}{C_8^3} = \frac{30}{56},$$

$$P(X = 2) = \frac{C_2^2 C_6^1}{C_8^3} = \frac{6}{56}.$$

Il est clair que

$$\sum_{k=0}^{2} P(X = k) = 1.$$

5.2.5 Loi de Poisson

La loi de Poisson est une variable aléatoire discrète utilisée souvent dans l'étudie des phénomène rares dans certaines conditions. On cite par exemple, X : le nombre des personnes agés plus de 100 ans dans une population.

Définition 5.2.5 *Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{*,+}$, On dit que la variable alétoire discrète X suit la loi de Poisson de paramètre λ , et on note $X \sim \boldsymbol{P}(\lambda)$, lorsque lensemble des valeurs prises par X est l'ensemble de tous les entiers positifs : $X(\Omega) = \mathbb{N}$. En plus, on a*

$$\forall k \in \mathbb{N} : P(X = k) = P_k = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},$$

vérifiant

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{N}} P_k &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Proposition 5.2.4 *Soit X une variable aléatoire discrète suit la loi de Poisson $\mathbf{P}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}^{*,+}$.*

1/ L'espérance mathématique de X est :

$$E(X) = \lambda.$$

2/ La variance de X est :

$$Var(x) = \lambda.$$

3/ L'ecart type de X est :

$$\delta(X) = \sqrt{\boldsymbol{\lambda}}.$$

Preuve. Soient $\lambda \in \mathbb{R}^{*,+}$ et X une variable aléatoire discrète suit la loi de Poisson $\mathbf{P}(\lambda)$.

1/ L'espérance mathématique de X

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{+\infty} kP_k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \lambda.
\end{aligned}$$

2/ La variance de X

$$\begin{aligned}
Var(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\
&= \left[\sum_{k=0}^{+\infty} k^2 P_k\right] - \lambda^2 \\
&= \left[e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty} k\frac{\lambda^k}{(k-1)!}\right] - \lambda^2 \\
&= e^{-\lambda}\left[\sum_{k=0}^{+\infty}(k-1)\frac{\lambda^k}{(k-1)!} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}\right] - \lambda^2 \\
&= e^{-\lambda}\left[\lambda^2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\right] - \lambda^2 \\
&= \lambda.
\end{aligned}$$

3/ L'écart type de X

$$\delta\left(X\right) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\boldsymbol{\lambda}}.$$

$\square$

Exemple 5.2.5 *On considère la variable alétoire X : nombre de fautes de frappe par page du cours de Mathématiques. $X \sim \mathbf{P}\left(\lambda\right)$ telle que $\lambda = 0.1$. La probabilité d'avoir une erreur par page est :*

$$\begin{aligned}
P_1 &= e^{-0.1}\frac{(0.1)}{1!} \\
&= 0,09.
\end{aligned}$$

5.2.6 Approximation d'une loi binomiale par une loi du Poisson

Soit X une variable alétoire discrète suit la loi binomiale $X \sim B(n,\ p,\ q)$ avec n grand $(n \geq 30)$ et p petit $(p \leq 0.1)$. On peut approximer cette loi par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$.

Exemple 5.2.6 *Dans une population une personne sur cent est un centenaire. On définit la variable alétoire discrète X : nombre des centenaires dans une population de 200 personnes. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 200,\ p = 0,01$ et $q = 1 - p = 0,99$. Comme $n > 30$ et $p < 0.1$, alors on peut approximer la loi de X par la loi de Poisson $\mathbf{P}(\lambda)$ telle que $\lambda = np = 2$.*

5.3 Exercices

Exercice 1 : Un candidat se présente à un concours sous forme de QCM de 100 questions, à chaque question, sont proposés 4 réponses, dont une seule est correcte, l'examinateur fait le compte des réponses exactes données par le candidat.
Certains candidats répondent au hasard à chaque question. Soit la variable aléatoire X : «nombre de réponses exactes données par un candidat».

1/ Donner la loi de probabilité de X.

2/ Calculer son espérance et son écart type.

Exercice 2 : Dans une population une personne sur cent est un centenaire.

1/ Quelle est la probabilité de trouver au moins un centenaire parmi 100 personnes choisies au hasard.

2/ Même question parmi 200 personnes.

Exercice 3 : Un chercheur a analysé un lot complet de roches volcaniques. Il a compté le nombre de pierres précieuses dans chacune des roches de poids constant 1kg et a obtenu le