Modélisation de la partie aléatoire

Université Hassiba Benbouali de Chlef

Plan du Cours

Dans ce chapitre, nous étudions la partie aléatoire d'une série chronologique.

- Généralités et rappels sur les processus stochastiques
- Les processus linéaires, AR et MA
- Les processus mixtes ARMA

Processus stochastique et séries temporelles

Définition 1.1

Une série temporelle est un processus stochastique dont l'espace d'incide T est soit $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$.

Définition 1.2

Une série temporelle $\{X_t : \ t \in \mathbb{Z}\}$ est dite strictement stationnaire si les lois fini-dimensionnelles de $\{X_{t+h} : \ t \in \mathbb{Z}\}$, $h \in \mathbb{Z}$, et de $\{X_t : \ t \in \mathbb{Z}\}$ sont identiques.

Définition 1.3

Une série temporelle $\{X_t : \ t \in \mathbb{Z}\}$ est dite d'ordre 2 si, pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{V}[X_t] < \infty$.

Processus stochastique et séries temporelles (suite)

Définition 1.4

Soit $\{X_t : \ t \in \mathbb{Z}\}$ d'ordre 2. On appelle tendance de cette série temporelle, la fonction

$$\begin{aligned} \mu \ : \ \ & \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \\ & t \mapsto \mu(t) := \mathbb{E}[X_t] \end{aligned}$$

On appelle également fonction d'autocovariance la fonction

$$\begin{aligned} \gamma \ : \ \ & \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R} \\ & (s,t) \mapsto \gamma(s,t) := \mathrm{Cov}(X_s, X_t) = \mathbb{E}\left[(X_s - \mu(s))(X_t - \mu(t)\right] \end{aligned}$$

Définition 1.5

Processus stochastique et séries temporelles (suite)

Soit $\{X_t : \ t \in \mathbb{Z}\}$ d'ordre 2. On appelle fonction d'autocorrélation la fonction

$$\begin{aligned} \rho \ : \quad & \mathbb{Z}^2 \to [-1, 1] \\ & (s,t) \mapsto \rho(s,t) := \frac{\gamma(s,t)}{\sqrt{\gamma(s,s)\gamma(t,t)}} \end{aligned}$$

Stationnarité faible

Définition 1.6

Une série temporelle $\{X_t : \ t \in \mathbb{Z}\}$ est dite faiblement stationnaire si

1. sa tendance $\mu(t)$ est constante, i.e., ne dépend pas de t ;
2. $\gamma(t, t+h)$ ne dépend pas de t pour tout $h \in \mathbb{Z}$.

Exemple

La marche aléatoire sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$X_t = X_{t-1} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \overset{i.i.d}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$$

n'est pas stationnaire.

Stationnarité faible (suite)

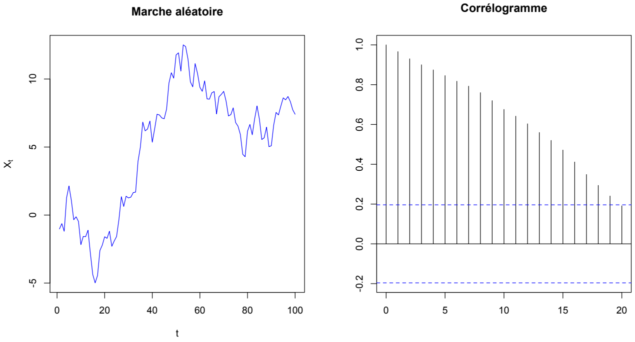

FIGURE 1 – Graphe de trajectoire et corrélogramme d'une marche aléatoire.

Stationnarité faible (suite)

Remarque

Par abus de langage on dira souvent "stationnaire" en parlant de "stationnarité faible".

Proposition 1.7

Si $\{X_t : \ t \in \mathbb{Z}\}$ *est stationnaire alors*

$$\gamma(t, t+h) = \gamma(0, h) = \gamma(0, -h) \quad \textit{et } \rho(t, t+h) := \rho(h).$$

i.e., on pourra traiter la fonction d'autocovariance/autocorrélation comme des fonctions d'une seule variable symétriques en 0*.*

Propriétés

Stationnarité faible (suite)

- $\gamma(0) = \mathbb{V}[X_t]$,
- $|\gamma(h)| \leq \gamma(0)$, pour tout h,
- $\gamma(-h) = \gamma(h)$, pour tout h.

Propriétés

- $\rho(0) = 1$,
- $|\rho(h)| \leq 1$, pour tout h,
- $\rho(-h) = \rho(h)$, pour tout h.

Fonction d'autocovariance/autocorrélation empirique

On considère une série $\{X_t : \; t \in \mathbb{Z}\}$ stationnaire observée en $X_1, \ldots, X_n$

Définition 1.8

On appelle fonction d'autocovariance empirique la fonction

$$h \mapsto \widehat{\gamma}(h) := \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-h} \left(X_{t+h} - \overline{X} \right) \left(X_t - \overline{X} \right).$$

De même on appelle fonction d'autocorrélation empirique (ACF) la fonction

$$h \mapsto \widehat{\rho}(h) := \frac{\widehat{\gamma}(h)}{\widehat{\gamma}(0)}.$$

Fonction d'autocorrélation partielle (FAP)

Définition 1.9

L'autocorrélation partielle d'ordre k désigne la corrélation entre X_t et X_{t-k} obtenue lorsque l'influence des variables X_{t-k-i}, avec $i < k$, a été retirée.

Soit la matrice P_k symétrique formée des $(k-1)$ premières autocorrélations de X_t

$$P_k = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \cdots & \rho_{k-1} \\ \vdots & 1 & & & \vdots \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ \rho_{k-1} & & & & 1 \end{bmatrix} \qquad k \in \mathbb{N}$$

Fonction d'autocorrélation partielle (FAP) (suite)

La FAP est la succession des $\rho_{kk} = \dfrac{|P_k^*|}{|P_k|}$ avec $|P_k^*|$ déterminant de la matrice P_k dans laquelle on a remplacé la dernière colonne par le vecteur $(\rho_1, \ldots, \rho_k)$

$$P_k^* = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \cdots & \rho_1 \\ \vdots & 1 & & & \rho_2 \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ \rho_{k-1} & & & & \rho_k \end{bmatrix}$$

Exemple

Fonction d'autocorrélation partielle (FAP) (suite)

- $P_1 = [1]$ et $P_1^* = [\rho_1]$

$$\rho_{11} = \frac{|P_1^*|}{|P_1|} = \frac{\rho_1}{1} = \rho_1$$

On constate que la première valeur de l'autocorrélation partielle est égale à la première valeur de l'autocorrélation.

- $P_1 = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{bmatrix}$ et $P_2^* = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{bmatrix}$

$$\rho_{22} = \frac{|P_2^*|}{|P_2|} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$$

Représentation de Wold

Théorème 1.10

Toute série temporelle $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ *stationnaire peut être représentée sous la forme :*

$$X_t - \mu = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j} \tag{1}$$

où μ *est la moyenne de la série temporelle et les paramètres* ψ_j *satisfont :* $\psi_0 = 1$, $\psi_j \in \mathbb{R} \quad \forall j \in \mathbb{N}$ *avec* $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$ *et* $\epsilon_t \overset{i.i.d}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Représentation de Wold (suite)

Depuis l'équation (1), il s'en suit :

$$\begin{aligned}
\gamma(0) &= \mathbb{V}[X_t] = \mathbb{V}\left[\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j}\right] = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 \mathbb{V}\left[\epsilon_{t-j}\right] \\
&= \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma(k) &= \mathbb{E}\left[(X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(\epsilon_t + \psi_1 \epsilon_{t-1} + \cdots + \psi_k \epsilon_{t-k} + \cdots)(\epsilon_{t-k} + \psi_1 \epsilon_{t-k-1} + \cdots)\right] \\
&= \sigma^2 (\psi_k + \psi_1 \psi_{k+1} + \psi_2 \psi_{k+2} + \cdots) \\
&= \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k}.
\end{aligned}$$

Opérateur de retard et série différenciée

Définition 1.11

Soit une série temporelle $\{X_t : \ t \in \mathbb{Z}\}$. On définit l'opérateur de retard (backshift operator) B par

$$BX_t = X_{t-1},$$

et on dira que l'on différenciera (à l'ordre un) la série $\{X_t : \ t \in \mathbb{Z}\}$ en s'intéressant à la série temporelle

$$Y_t = X_t - X_{t-1} = (1 - B)X_t := DX_t.$$

Exemple

Opérateur de retard et série différenciée (suite)

On pourra s'intéresser à des ordres supérieurs, i.e.,

- $B^2 X_t = B(BX_t) = X_{t-2}$,
- $D^2 X_t = D(DX_t) = D(X_t - X_{t-1}) = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$.
- Par récurrence, on définit

$$B^k X_t = X_{t-k}, \quad k \in \mathbb{N} \text{ avec } B^0 = I.$$

Remarque

Opérateur de retard et série différenciée (suite)

- B est linéaire et inversible d'inverse $B^{-1} = F$ défini par $\forall t \in \mathbb{Z}$,

$$FX_t = X_{t+1}$$

  F est appelé opérateur avance.
- L'opérateur D^k permet de supprimer une tendance polynomiale
- L'opération $(1 - B^p)$ "stationnarise" une série périodique de période p

⚠ Attention généralement différencier une série temporelle compliquera sa structure de dépendance : On essaiera donc autant que possible de travailler sur la série initiale quitte à devoir utiliser des modèles plus complexes.

Bruit blanc

Définition 1.12

- Une série temporelle $\{X_t : \ t \in \mathbb{Z}\}$ est un bruit blanc faible si elle est stationnaire et vérifie

$$\mu(t) = 0, \quad t \in \mathbb{Z}, \qquad \gamma(h) = \begin{cases} \sigma^2 & h = 0, \\ 0 & h \neq 0. \end{cases}$$

- Il est un bruit blanc fort et les variables aléatoires X_t sont indépendantes.
- On parlera de bruit blanc gaussien si de plus $X_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

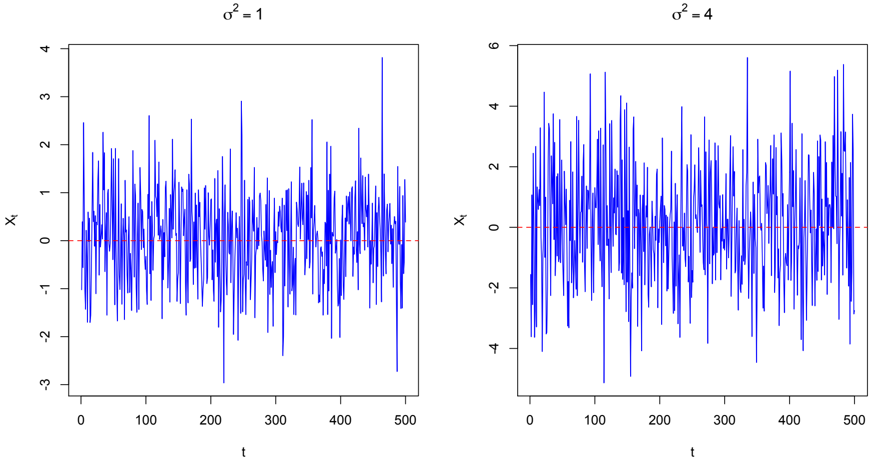

FIGURE 2 – Deux bruits blancs gaussiens avec $\sigma^2 = 1$ et 4.

ACF et PACF d'un bruit blanc

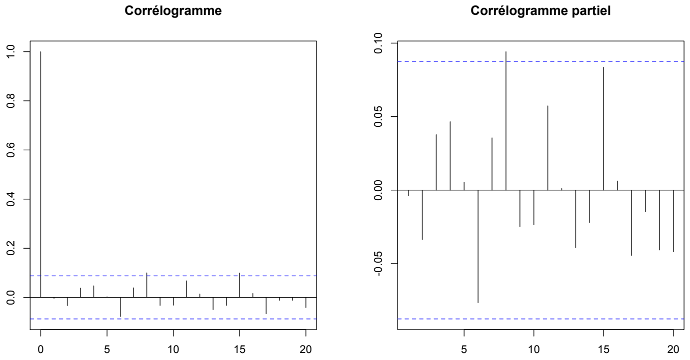

FIGURE 3 – ACF et PACF d'un bruit blanc $\sigma^2 = 1$.

Les processus linéaires

- Soient $\{X_t : \; t \in \mathbb{Z}\}$ un processus stationnaire et $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ absolument sommable. Alors le processus

$$Y_t = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j X_{t-j}$$

  est stationnaire.
- Soient $\{\epsilon_t : \; t \in \mathbb{Z}\}$ un bruit blanc et $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ absolument sommable. Alors le processus

$$Y_t = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j \epsilon_{t-j}$$

  est stationnaire. Il est naturellement appelé moyenne mobile infinie.

Les processus linéaires (suite)

- Un processus $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ admet une représentation inversible s'il peut s'écrire comme combinaison linéaire des valeurs d'un autre processus, c'est-à-dire qu'il existe une suite $(\psi_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ et un processus $\{Y_t : t \in \mathbb{Z}\}$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{Z} \qquad X_t = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \psi_j Y_{t-j}$$

Les processus linéaires (suite)

- Un processus $\{X_t : \; t \in \mathbb{Z}\}$ admet une représentation causale s'il peut s'écrire comme combinaison linéaire des valeurs passées d'un autre processus, c'est-à-dire qu'il existe une suite $(\psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et un processus $\{Y_t : \; t \in \mathbb{Z}\}$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{Z} \qquad X_t = \sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j Y_{t-j}$$

- Soit $\{X_t : \; t \in \mathbb{Z}\}$ le processus stationnaire solution de l'équation suivante :

$$\forall t \in \mathbb{Z} \qquad \Pi(B) X_t = Y_t$$

Les processus linéaires (suite)

où $\{Y_t : \ t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus stationnaire et avec $p \in \mathbb{N}^*$

$$\Pi(B) = I - \pi_1 B - \cdots - \pi_p B^p$$

Alors

- Si Π n'a pas de racine de module égal à 1, alors il existe une représentation inversible du processus $\{X_t : \ t \in \mathbb{Z}\}$.
- Si de plus toutes les racines de Π sont de module supérieur à 1, alors il existe une représentation causale du processus $\{X_t : \ t \in \mathbb{Z}\}$.

Dans toute la suite nous allons présenter des modèles usuels en séries temporelles centrés.

Les processus moyenne mobile $\mathrm{MA}(q)$

Définition 2.1

Un processus est dit moyenne mobile d'ordre q, noté par $\mathrm{MA}(q)$, s'il admet l'écriture suivante :

$$X_t = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \epsilon_{t-q},$$

où $\{\epsilon_t : \ t \in T\}$ est un bruit blanc et $\theta_1, \cdots, \theta_q (\theta_q \neq 0)$, sont les paramètres du modèle.

Exemples de processus $\mathrm{MA}(1)$

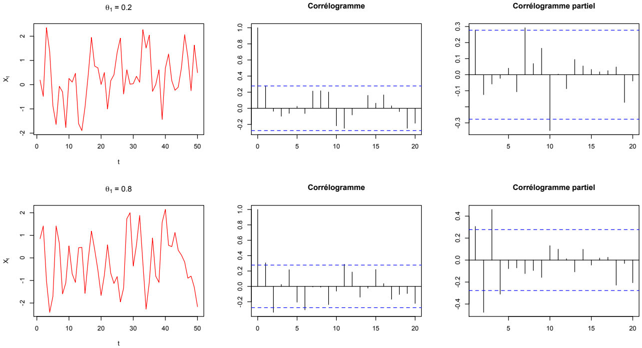

FIGURE 4 – Graphe de trajectoire, corrélogramme et corrélogramme partiel du processus $\mathrm{MA}(1)$: $X_t = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1}$.

Exemples de processus $\mathrm{MA}(1)$ (suite)

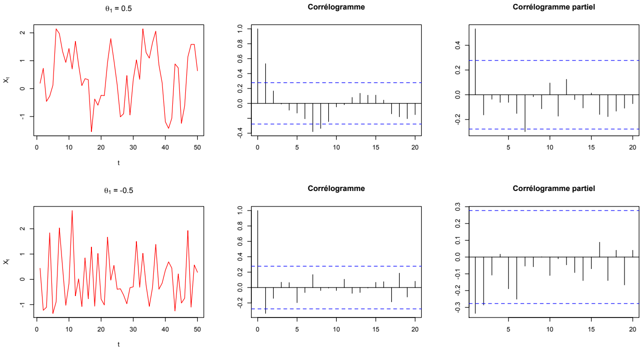

FIGURE 5 – Graphe de trajectoire, corrélogramme et corrélogramme partiel du processus $\mathrm{MA}(1)$: $X_t = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1}$.

Identification

L'analyse des corrélogrammes constitue un des outils privilégiés dans l'identification du modèle.

- Si la fonction d'auto-corrélation empirique des données $X_1, \ldots, X_T$ n'est pas significativement différente de zéro au-delà d'un certain nombre q_0, on sera alors guidé pour choisir d'ajuster un modèle $\mathrm{MA}(q_0)$ aux données.

Le modèle auto-régressif d'ordre p

Définition 3.1

Le modèle auto-régressif d'ordre p est défini par

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \epsilon_t,$$

où $\{\epsilon_t : \ t \in T\}$ est un bruit blanc et $\phi_1, \cdots, \phi_p (\phi_p \neq 0)$, sont les paramètres du modèle.

Définition 3.2

L'opérateur auto-régressif d'un $\mathrm{AR}(p)$ est donné par

$$\Phi(B) = I - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p.$$

Le modèle auto-régressif d'ordre p (suite)

Remarque

On pourra donc écrire un $\mathrm{AR}(p)$ de manière compacte sous la forme :

$$\Phi(B)X_t = \epsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Exemples de processus $\mathrm{AR}(1)$

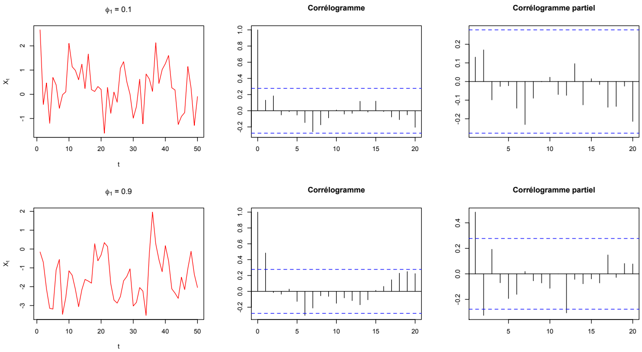

FIGURE 6 – Graphe de trajectoire, corrélogramme et corrélogramme partiel du processus $\mathrm{AR}(1)$: $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \epsilon_t$.

Exemples de processus $\mathrm{AR}(1)$ (suite)

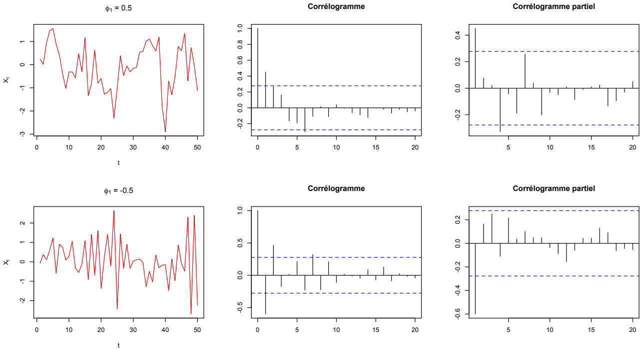

FIGURE 7 – Graphe de trajectoire, corrélogramme et corrélogramme partiel du processus $\mathrm{AR}(1)$: $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \epsilon_t$.

Exemples de processus $\mathrm{AR}(2)$

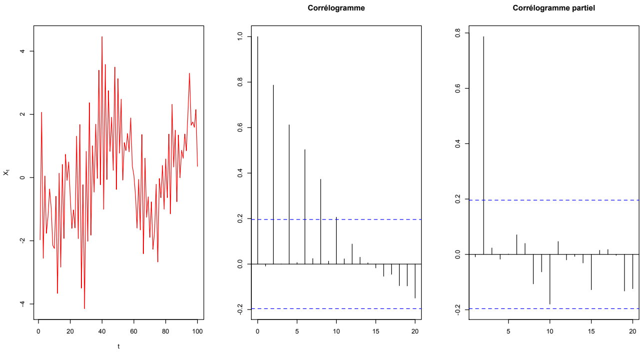

FIGURE 8 – Graphe de trajectoire, corrélogramme et corrélogramme partiel du processus $\mathrm{AR}(2)$: $X_t = 0.9X_{t-2} + \epsilon_t$.

Exemples de processus $\mathrm{AR}(2)$ (suite)

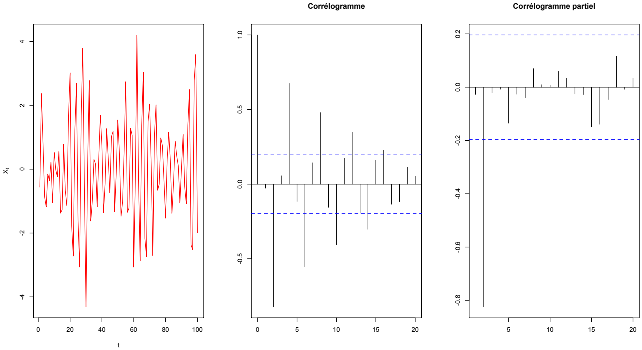

FIGURE 9 – Graphe de trajectoire, corrélogramme et corrélogramme partiel du processus $\mathrm{AR}(2)$: $X_t = -0.9X_{t-2} + \epsilon_t$.

Exemples de processus $\mathrm{AR}(2)$ (suite)

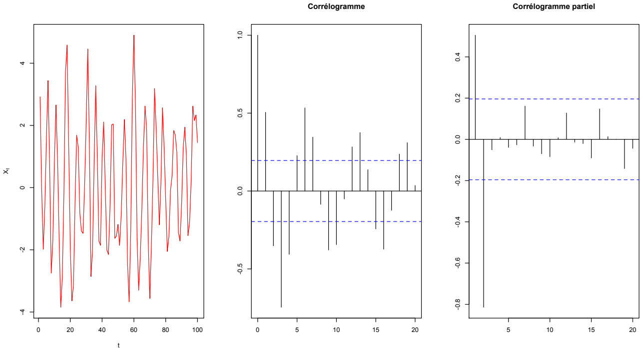

FIGURE 10 – Graphe de trajectoire, corrélogramme et corrélogramme partiel du processus $\mathrm{AR}(2)$: $X_t = 0.9X_{t-1} - 0.8X_{t-2} + \epsilon_t$.

Identification

- Si la fonction d'auto-corrélation partielle empirique des données $X_1, \ldots, X_T$ n'est pas significativement différente de zéro au-delà d'un certain nombre p_0, on sera alors guidé pour choisir d'ajuster un modèle $\mathrm{AR}(p_0)$ aux données.

Processus $\mathrm{ARMA}(p,q)$

Définition 4.1

On appelle processus $\mathrm{ARMA}(p,q)$ un processus stationnaire $Y_t, t \in \mathbb{Z}$ vérifiant une relation de récurrence :

$$X_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t-i} + \sum_{i=0}^{q} \theta_i \epsilon_{t-i}, \forall t \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

où les ϕ_i, θ_i sont des réels et ϵ_t est un bruit blanc de variance σ^2.

Le traitement d'un tel processus est plus complexe que celui des 2 précédents. On peut cependant montrer que ses auto-corrélations et ses auto-corrélations partielles sont des fonctions amorties tendant vers 0 en valeur absolue à vitesses exponentielles.