Corrigé série 5

Exercice 1
On a
$$p_{ij} = \frac{\lambda^i}{i!\,(j-i)!} e^{-(1+\lambda)} \quad , i \leq j$$

1) a) Loi de proba. de X : $p_{i.}$, on a $p_{i.} = \sum_j p_{ij}$

$$\begin{aligned} p_{i.} &= \frac{\lambda^i}{i!} e^{-(1+\lambda)} \sum_{j \geq i} \frac{1}{(j-i)!}, \text{ posons } k = j-i \\ p_{i.} &= \frac{\lambda^i}{i!} e^{-(1+\lambda)} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \quad \text{donc } X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) \end{aligned}$$

Loi de proba. de Y : $p_{.j}$ on a $p_{.j} = \sum_i p_{ij}$

$$\begin{aligned} p_{.j} &= e^{-(1+\lambda)} \sum_{i=0}^{j} \frac{\lambda^i}{i!\,(j-i)!} = \\ &= \frac{e^{-(1+\lambda)} \lambda^i}{j!} \sum_{i=0}^{j} C_j^i \lambda^i = \\ &= e^{-(1+\lambda)} \frac{(\lambda+1)^j}{j!} \quad \text{donc } Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda+1) \end{aligned}$$

$$p_{ij} \neq p_{i.} \times p_{.j}$$

donc X et Y sont dépendants.
b) $E(X) = \lambda$ et $E(Y) = \lambda + 1$
2) a) Loi de $Y\,|_{X=i}$

$$\begin{aligned} P(Y\,|_{X=i} = j) &= p_j^i = P(Y = j \mid X = i) = \\ &= \frac{\lambda^i}{i!\,(j-i)!} e^{-(1+\lambda)} \frac{i!}{e^{-\lambda}\lambda^i} = \frac{e^{-1}}{(j-i)!}, \quad i \leq j \end{aligned}$$

b)
$$E(Y\,|_{X=i}) = \sum_j j p_j^i = \sum_{j=i}^{+\infty} j \frac{e^{-1}}{(j-i)!}$$

On pose $k = j - i$

$$E(Y\,|_{X=i}) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+i) \frac{e^{-1}}{k!} = 1 + i$$

On en déduit que $E(Y \mid X) = 1 + X$

c) $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$E(XY) = \sum_i \sum_j ijp_{ij}$ (trop long)

Alors

$$\begin{aligned} E(XY) &= E_X\left(E_{Y|X}(XY)\right) = E_X\left(XE_{Y|X}(Y)\right) = \\ &= E_X(XE(Y \mid X)) = E_X(X(1+X)) = E(X) + E\left(X^2\right) = \\ &= 2\lambda + \lambda^2 \end{aligned}$$

$$cov(X,Y) = 2\lambda + \lambda^2 - \lambda(1+\lambda) = \lambda > 0$$

On en déduit que X et Y sont deux variables dépendantes.

3) a) $Z = Y - X$

$$\begin{aligned} P(Z=k) &= P(Y-X=k) = \\ &= P\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty}\{X=i, Y=i+k\}\right) = \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} P(X=i, Y=i+k) \\ &\quad \text{car réunion d'évènements incompatibles} \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} p_{ii+k} \end{aligned}$$

$$P(Z=k) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!k!} e^{-(1+\lambda)} = \frac{e^{-(1+\lambda)}}{k!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = \frac{e^{-1}}{k!}$$

d'où $Z \hookrightarrow \mathcal{P}(1)$

b) $Z \hookrightarrow \mathcal{P}(1)$ donc $E(Z) = V(Z) = 1$

c) $T = \max(X,Y)$, on toujours $j \geq i$ donc $Y \geq X$, ainsi $T = Y$

Exercice 2

1) a) Déterminons k, on a

$$\begin{aligned} \iint_D f_{(X,Y)}(x,y)\,dxdy &= k\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x\,|y|\,dy\right) dx = k\int_0^1 x\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} 2ydy\right) dx = \\ &= k\int_0^1 x\left(1-x^2\right) dx = k\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \\ \frac{k}{4} &= 1 \quad \text{donc } k = 4 \end{aligned}$$

Du calcul de k, on en déduit

$$f_X(x) = 4x\left(1 - x^2\right) 1_{[0,1]}(x)$$

La densité de Y est donnée par

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= 4|y| \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x dx = 4|y| \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-y^2}} = \\ f_Y(y) &= 2|y|\left(1 - y^2\right) 1_{[-1,1]}(y) \end{aligned}$$

b)

$$E(Y^n) = \int_{-1}^{1} 2y^n |y| \left(1 - y^2\right) dy$$

Si $n = 2k+1$ $\quad E(Y^n) = 0$ (intégrale d'une fonction impaire)
Si $n = 2k$

$$\begin{aligned} E(Y^n) &= 4\int_0^1 y^{n+1}\left(1 - y^2\right) dy = \\ &= 4\left[\frac{y^{n+2}}{n+2} - \frac{y^{n+4}}{n+4}\right]_0^1 = \\ &= \frac{8}{(n+2)(n+4)} \end{aligned}$$

2) a)

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{4x|y|}{4x(1-x^2)} = \frac{|y|}{(1-x^2)} 1_{\left[-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}\right]}(y) \qquad x \neq \pm 1$$

$$E(Y \mid X = x) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y f_{Y|X=x}(y)\, dy = 0 \quad \text{(fonction impaire)}$$

b) On a

$$\begin{aligned} cov(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) = E(XY), \text{ or} \\ E(XY) &= E_X\left(E_{Y|X}(XY)\right) = E_X(XE(Y \mid X)) = E_X(0) = 0 \end{aligned}$$

donc $cov(X,Y) = 0$.
On ne peut rien conclure sur la dépendance ou non de X et de Y.

c) Déterminons $W = E\left(Y^2 \mid X\right)$

$$\begin{aligned}
E\left(Y^2 \mid X = x\right) &= \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y^2 f_{Y|X=x}(y)\, dy = \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y^2 \frac{|y|}{(1-x^2)} dy = \\
&= 2\frac{1}{(1-x^2)} \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} y^3 dy = \frac{2}{4(1-x^2)} \left[y^4\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} = \\
&= \frac{\left(1-x^2\right)}{2}
\end{aligned}$$

On en déduit que $W = E\left(Y^2 \mid X\right) = \dfrac{\left(1-X^2\right)}{2}$

Remarquons que $0 \leq X \leq 1 \Longleftrightarrow 0 \leq 1 - X^2 \leq 1 \Longleftrightarrow 0 \leq W \leq \dfrac{1}{2}$

La fonction de répartition de W est donnée par

$$\begin{aligned}
F_W(w) &= P(W \leq w) = P\left(\frac{\left(1-X^2\right)}{2} \leq w\right) = \\
P\left[X^2 \geq 1 - 2w\right] &= P\left(X > \sqrt{1-2w}\right),\ (X \text{ étant positif}) \\
&= 1 - F_X\left(\sqrt{1-2w}\right)
\end{aligned}$$

on en déduit que

$$\begin{aligned}
f_W(w) &= F_W'(w) = \frac{1}{\sqrt{1-2w}} f_X\left(\sqrt{1-2w}\right) = \frac{4}{\sqrt{1-2w}} \sqrt{1-2w}\,(1-(1-2w)) = \\
&= 8w 1_{\left[0,\frac{1}{2}\right]}(w)
\end{aligned}$$

d) On a

$$E(W) = E\left(E\left(Y^2 \mid X\right)\right) = E_Y\left(Y^2\right) = \frac{8}{4 \times 6} = \frac{1}{3}$$

3) Si $B = \{X > |Y|\}$, alors

$$P(B) = \iint\limits_{D_1} f_{(X,Y)}(x, y)\, dxdy$$

où

$$D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left\{0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, y \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\right\} \cup \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq y \leq 0, -y \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\right\}\right\}$$

Comme on pourrait le voir, il est plus simple de passer par les coordonnées polaires(faire graphe).

$$
\begin{aligned}
P(B) &= 4\int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r \times r\cos\theta \left|\sin\theta\right| d\theta dr = \\
&= 4\int_0^1 r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin\theta\cos\theta d\theta = \\
&= -\frac{1}{2}\cos 2\theta \mid_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

4) a) Soit φ l'application telle que $\varphi(X,Y) = (Z,T)$
Etudions la bijectivité de φ

$$
\left\{ \begin{array}{c} Z = X^2 + Y^2 \\ T = X^2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} X = \sqrt{T} \quad (X \geq 0) \\ Y = \pm\sqrt{Z-T} \end{array} \right.
$$

φ n'est pas bijective, car il y a deux images réciproques ψ_1 et ψ_2 avec

$$
\psi_1(Z,T) = \left\{ \begin{array}{c} \sqrt{T} \\ \sqrt{Z-T} \end{array} \right. \quad et \quad \psi_2(Z,T) = \left\{ \begin{array}{c} \sqrt{T} \\ -\sqrt{Z-T} \end{array} \right.
$$

de plus le Jacobien de φ s'écrit

$$
J_\varphi = \left| \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial X} & \frac{\partial T}{\partial Y} \\ \frac{\partial Z}{\partial X} & \frac{\partial Z}{\partial Y} \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} 2X & 0 \\ 2X & 2Y \end{bmatrix} \right| = 4XY
$$

d'où les Jacobiens des ψ_i

$$
\left|J_{\psi_i}\right| = \frac{1}{4\sqrt{T}\sqrt{Z-T}}
$$

et ainsi

$$
f_{(Z,T)}(z,t) = \sum_{i=1}^{2} \left|J_{\psi_i}\right| f_{(X,Y)}(\psi_i(z,t)) = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{4\sqrt{t}\sqrt{z-t}} \times 4\sqrt{t}\sqrt{z-t} = 2
$$

on en déduit que

$$
f_{(Z,T)}(z,t) = 2\ 1_D(z,t)
$$

où

$$
D = \left\{ (z,t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq t \leq z \leq 1 \right\}
$$

b) la densité de Z est

$$
f_Z(z) = \int_0^z f_{(Z,T)}(z,t)\, dt = 2z, \qquad z \in [0,1]
$$

c) Comme $U = Z + T = X^2 + Y^2 + X^2 = 2X^2 + Y^2$, on choisit une autre variable pour compléter le couple (U, V) où

$V = T = X^2$

On aura donc l'application γ telle que $\gamma(X, Y) = (U, V)$

$$\left\{ \begin{array}{c} U = 2X^2 + Y^2 \\ V = X^2 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} X = \sqrt{V} \\ Y = \pm\sqrt{U - 2V} \end{array} \right.$$

on a ici deux 'inverses', notées θ_1 et θ_2

De manière identique au raisonnement précédent, γ n'est donc pas bijective et $J_\gamma = 4XY$

$$J_{\theta_i} = \frac{1}{4\sqrt{V}\sqrt{U - 2V}}$$

ainsi

$$f_{(U,V)}(u, v) = \sum_{i=1}^{2} |J_{\theta_i}| f_{(X,Y)}(\theta_i(u, v)) = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{4\sqrt{V}\sqrt{U - 2V}} \times 4\sqrt{V}\sqrt{U - 2V} = 2$$

$$f_{(U,V)}(u, v) = 2 \; 1_A(u, v)$$

où

$$A = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq 2v \leq u \leq u + 1\right\}$$

Si l'on considère le graphe du domaine A, on pourra déterminer les bornes d'intégration, $U = Z + T$ étant une

marginale du couple (U, V) ,il vient, en distinguant deux cas à la lumière du graphe

- Si $u \in [0, 1]$

$$f_U(u) = \int_0^{\frac{u}{2}} f_{(U,V)}(u, v)\, dv = \int_0^{\frac{u}{2}} 2dv = u$$

- Si $u \in [1, 2]$

$$f_U(u) = \int_{u-1}^{\frac{u}{2}} f_{(U,V)}(u, v)\, dv = \int_{u-1}^{\frac{u}{2}} 2dv = 2\,[v]_{u-1}^{\frac{u}{2}} = 2\left(\frac{u}{2} - u + 1\right) = 2 - u$$

enfin

$$f_U(u) = \left\{ \begin{array}{ll} u & si \;\; 0 \leq u \leq 1 \\ 2 - u & si \;\; 1 \leq u \leq 2 \end{array} \right.$$