Feuille 6

Exercice 1. Vérifier si le processus stochastique suivant est une martingale

$$X_t = B_1(t)B_2(t)$$

où B_1 et B_2 sont deux mouvements Browniens

Exercice 2. Ecrire la forme explicite du théorème de représentation martingale pour le processus $(M_t)_{t\geq 0}$ définit par

1) $M_t = \int\limits_0^t B_s ds$

2) $M_t = B_t^2$

Exercice 3. Soit $\mathbf{X}_t = (X_t, Y_t)$ solution de l'EDS

$$\begin{aligned} dX_t &= -\frac{1}{2}X_t dt - Y_t dB_t \\ dY_t &= -\frac{1}{2}Y_t dt + X_t dB_t \\ X(0) &= 0, \quad Y(0) = 0 \end{aligned}$$

Posons $Z_t = X_t^2 + Y_t^2$.

Trouver l'EDS satisfaite par Z_t. Quelle est la loi de Z_1.

Exercice 4. Supposons qu'une particule se promène de façon aléatoire sur un plan de façon telle que sa position au temps t est donée par le couple $\left(W_t^{(1)}, W_t^{(2)}\right)$ où $W_t^{(1)}$ et $W_t^{(2)}$ sont deux mouvements browniens indépendants. La distance de cette particule à l'origine à l'instant t est donée par

$$B_t = \sqrt{\left(W_t^{(1)}\right)^2 + \left(W_t^{(2)}\right)^2}$$

Saachant que le processus de covariance quadratique de deux martingales indépendants est nulle.

Utiliser le lemme d'Itô afin de démontrer que le processus B satisfait l'équation différentielle stochastique

$$dB_t = \frac{1}{2}\frac{1}{B_t}dt + \frac{W_t^{(1)}}{B_t}dW_t^{(1)} + \frac{W_t^{(2)}}{B_t}dW_t^{(2)}$$

Exercice 5. Soit b une fonction mesurable bornée. Utiliser le théorème de Girsanov pour construire une solution faible de l'EDS

$$dX_t = b(X_t)dt + dB_t$$

sur l'intervalle $[0, T]$.

Exercice 6. On considère la diffusion définie par l'équation

$$dX_t = -X_t dt + dB_t$$

(Processus d'UO).

Donner le générateur L associé.

Exercice 7. On considère la diffusion définie par l'équation

$$dX_t = rX_t dt + X_t dB_t$$

(Mouvement brownien géométrique).

Donner le générateur L associé.