République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université frères Mentouri Constantine 1
Faculté des Sciences Exactes - Département de Mathématiques

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الإخوة منتوري قسنطينة 1
كلية العلوم الدقيقة - قسم الرياضيات

Concours d'accès à la Formation de Doctorat 3ème Cycle pour l'année universitaire 2022/2023

Filière : **Mathématiques**

Épreuve commune : Analyse et Topologie

Durée : 01 heure 30

Exercice 1. (10 pts)

1. Démontrer les inégalités suivantes :

$$0 \leq -1 - x + \exp(x) \leq 2x^2, \; x \in [0,1].$$

2. Soit $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ une série de fonctions, telle que

$$f_n(x) = -1 + \exp(a^{-nx}), \; n \geq 1, \; a \in]1, +\infty[\text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

2. 1. Trouver l'ensemble de réels D pour lesquels la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ soit convergente.

2. 2. Soit δ un nombre réel strictement positif. Justifier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ sur l'intervalle $[\delta, +\infty[$.

2. 3. Soit $S(x) = \sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$. Justifier la continuité de S sur D. .

2. 4. Donner un équivalent pour $S(x)$, quand $x \to +\infty$.

2. 5. Calculer de deux méthodes différentes $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x)$.

Exercice 2. (10 pts)

On désigne par $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, et par F le sous-espace de E constitué des polynômes nuls en 0. T est l'application linéaire définie de E dans E par :

$$P \longmapsto T(P) \; / \; T(P)(x) = xP'(x).$$

1. Montrer que T n'est pas continue quelque soit la norme N choisie sur E.

2. Montrer que T est une bijection de F dans F.

3. Montrer que T^{-1} est continue sur (F, N_1), N_1 est la norme donnée pour tout $P \in E$ par :

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{n} |a_k|, \text{où } P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

4. Calculer $\|T^{-1}\|$ dans $L((F, N_1), (F, N_1))$ l'espace des applications linéaires continues de F dans F.

5. On note N_2 la norme définie sur E par :

$$N_2(P) = \sup_{x\in[0;1]} |P(x)|, \; \forall P \in E.$$

6 Montrer que pour tout $P \in E$ on a $N_2(P) \leq N_1(P)$; et qu' il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que $N_1(P) \leq CN_2(P)$.

7. Soit A_α, $\alpha \in \mathbb{R}$, l'application linéaire définie de E dans $\mathbb{R}$ par

$$A_\alpha : P \longmapsto A_\alpha(P) = P(\alpha).$$

Montrer que A_α est continue sur (E, N_2), si et seulement si, $\alpha \in [0,1]$.

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université frères Mentouri Constantine 1
Faculté des Sciences Exactes - Département de Mathématiques

الجمهورية الجزائرية الدمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الإخوة منتوري قسنطينة 1
كلية العلوم الدقيقة - قسم الرياضيات

Concours d'accès à la Formation de Doctorat 3ème Cycle pour l'année universitaire 2022/2023

Filière : **Mathématiques**

Corrigé Type de l'épreuve commune :

Analyse et Topologie

Exercice 1. (10 pts)

1. Posons $f(x) = -1 - x + \exp(x)$ et $g(x) = -1 - x + \exp(x) - 2x^2$.
On a : $f(0) = g(0) = 0$, f est croissante sur $[0,1]$ et g est décroissante sur $[0,1]$, ce qui implique bien que $f(x) \geq 0$... **(1pt)** et $g(x) \leq 0$...**(1pt)**.
2. 1.* Si $x \leq 0$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) \neq 0$, donc $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ diverge...**(0.5pt)**.
*Si $x > 0$, $f_n(x) \sim a^{-nx}$, quand $n \to +\infty$. La série géométrique de terme général a^{-nx} étant convergente car $|a^{-x}| < 1$...**(0.5pt)**, il résulte du théorème de comparaison que $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge.
En conclusion $D =]0, +\infty[$...**(0.5pt)**
2. 2. On a $f_n'(x) = -n\ln(a)a^{-nx}\exp(a^{-nx}) \leq 0$, pour tout $x \in [\delta, +\infty[$.
Donc $\sup_{x\in[\delta,+\infty[} |f_n(x)| = f_n(\delta)$....**(0.5pt)** Puisque la série numérique $\sum_{n\geq 1} f_n(\delta)$ converge, la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge normalement donc uniformément sur $[\delta, +\infty[$ ...**(0.5pt)**
2. 3. Soit $S(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$. Pour tout $n \geq 1, \delta > 0$ (δ quelconque) et $a > 1$, f_n est une fonction continue sur $[\delta, +\infty[$...**(0.50pt)** De plus $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge uniformément sur $[\delta, +\infty[$ ...**(0.25pt)** D'après le théorème de la continuité pour les séries de fonctions uniformément convergentes, la fonction S est continue sur $[\delta, +\infty[$...**(0.50pt)**, pour tout $\delta > 0$. Le point $\delta > 0$ étant quelconque,on en déduit alors que S est continue sur $D =]0, +\infty[$...**(0.25pt)** .
2. 4. Puisque $0 \leq -1 - x + \exp(x) \leq 2x^2$, pour tout $x \in [0,1]$, on a alors

$$a^{-nx} \leq f_n(x) \leq a^{-nx} + 2a^{-2nx}, \text{ pour tout } n \geq 1,\ a > 1 \text{ et } x \in D....\textbf{(0.50pt)}$$

Ceci implique que

$$\sum_{k=1}^{n} a^{-kx} \leq \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leq \sum_{k=1}^{n} \left(a^{-kx} + 2a^{-2kx}\right), \text{ pour tout } k \geq 1,\ a > 1 \text{ et } x \in D...\textbf{(0.25pt)}$$

En passant à la limite , quand $n \to +\infty$, on trouve

$$\frac{a^{-x}}{1 - a^{-x}} \leq S(x) \leq \frac{a^{-x}}{1 - a^{-x}} + 2\frac{a^{-2x}}{1 - a^{-2x}}....\textbf{(0.50pt)}$$

Puisque $\frac{a^{-2x}}{1 - a^{-2x}} = O(a^{-x})$ ...**(0.25pt)**et $\frac{a^{-x}}{1 - a^{-x}} \sim a^{-x}$...**(0.25pt)**, quand $x \to +\infty$, on a alors

$$S(x) \sim \frac{a^{-x}}{1 - a^{-x}} \sim a^{-x}, \text{ quand } x \to +\infty.$$

En conclusion $S(x) \sim a^{-x}$,...**(0.25pt)** quand $x \to +\infty$.

2. 5. 1ère méthode, $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge uniformément, on peut alors écrire

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} S(x) &= \lim_{x\to+\infty} \sum_{n\geq 1} f_n(x) = \sum_{n\geq 1} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) \\ &= \sum_{n\geq 1} \lim_{x\to+\infty} \left(-1 + \exp(a^{-nx})\right) = 0....\textbf{(01pt)}\end{aligned}$$

2ème méthode. Puisque $S(x) \sim a^{-x}$, quand $x \to +\infty$, on a alors

$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = \lim_{x\to+\infty} a^{-x} = 0....\textbf{(01pt)}$$

Exercice 2. (10 pts)

$$\|T^{-1}\| = \sup_{Q\in E\setminus\{0\}} \frac{N_1(T^{-1}(Q))}{N_1(Q)}, \ldots \textbf{(0.50pt)}$$

on déduit de (*) l'estimation $\|T^{-1}\| \leq 1$....**(0.50pt)**

D'autre part pour $P_1 \in F$ donné par $P_1(x) = x$, on a $T^{-1}(P_1) = P_1$ et $N_1(T^{-1}(P_1)) = N_1(P_1) = 1$, donc

$$\frac{N_1(T^{-1}(P_1))}{N_1(P_1)} = 1, \ldots \textbf{(0.50pt)}$$

qui assure que $\|T^{-1}\| = 1$....**(0.50pt)**

6-

Pour tout $P \in E$ et tout $x \in [0;1]$ on a :

$$|P(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k|\,|x|^k \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| = N_1(P).$$

En prenant le sup en x, il vient

$$\|P\| \leq N_1(P) \ldots \textbf{(0.50pt)}$$

- Considérons maintenant la suite de polynômes $(P_M)_{M\geq 1}$:

$$P_M(x) = \sum_{k=0}^{M} (-x)^k \ , \quad \forall M \geq 1.$$

Tout d'abord nous avons aisément

$$N_1(P_M) = \sum_{k=0}^{M} \left|(-1)^k\right| = M + 1 \ldots \textbf{(0.25pt)}$$

Ensuite, pour tout $x \in [0;1]$, on a

$$P_M(x) = \sum_{k=0}^{M} (-x)^k = \frac{1-(-x)^{M+1}}{1+x} \ldots \textbf{(0.25pt)}$$

Ceci donne

$$|P_M(x)| \leq 2 \ldots \textbf{(0.50pt)}$$

Ainsi, on a

$$N_2(P_M) = \sup_{x\in[0;1]} |P_M(x)| \leq 2.$$

et par coséquent :

$$\frac{N_1(P_M)}{N_2(P_M)} \geq \frac{M+1}{2} \underset{M\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \ldots \textbf{(0.50pt)}$$

Ce qui montre bien le résultat souhaité.

7-

- Si $\alpha \in [0;1]$ on a pour tout $P \in E$

$$|A_\alpha(P)| = |P(\alpha)| \leq \sup_{x\in[0;1]} |P(x)| = N_2(P). \ldots \textbf{(1pt)}$$

ce qui prouve la continuité de A_α (car A_α est linéaire) .

- Si $\alpha > 1$, considérons $(P_M)_{M\geq 1}$: $P_M(x) = x^M$ nous avons

$$N_2(P_M) = 1 \ \text{ et } \ A_\alpha(P_M) = \alpha^M.$$

et donc

$$\frac{|A_\alpha(P_M)|}{N_2(P_M)} = \alpha^M \underset{M\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

A_α n'est pas continue dans ce cas....**(0.50pt)**

- Si $\alpha < 0$, considérons $(Q_M)_{M\geq 1}$: $Q_M(x) = (1-x)^M$, de sorte que :

$$N_2(Q_M) = 1 \ \text{ et } \ A_\alpha(Q_M) = (1-\alpha)^M,$$

et

$$\frac{|A_\alpha(Q_M)|}{N_2(Q_M)} = (1-\alpha)^M \underset{M\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

A_α n'est pas continue dans ce cas....**(0.50pt)**

En conclusion A_α est continue si et seulement si $\alpha \in [0;1]$.

Exercice 2. (10 pts)

1-Si E est muni d'une norme N, et comme T est supposée linéaire on a :

$$(T \text{ est continue sur } E) \iff (\exists C > 0 : N(T(P)) \leq CN(P), \quad \forall P \in E)\dots \textbf{(0.50pt)}$$

Soit $(P_n)_{n\geq 1}$ la suite des éléments de E donnée par $P_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$T(P_n)(x) = T(x^n) = x \times (x^n)' = nx^n \ , \ \forall n \geq 1\dots \textbf{(0.50pt)}$$

de sorte que :

$$N(T(P_n)) = nN(P_n) \ , \ \forall n \geq 1.$$

Et comme

$$\frac{N(T(P_n))}{N(P_n)} = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\dots \textbf{(0.50pt)}$$

il ne peut exister de constante $C > 0$ telle que

$$N(T(P) \leq CN(P), \quad \forall P \in E.$$

et donc T n'est pas continue.

2-Remarquons d'abord que pour tout $P \in E$, on a certainement $T(P) \in F$, car $T(P)(x) = x \times P'(x)$, et donc $T(P)(0) = 0$, et T définit une application de F dans lui-même.

- Montrons que T est injective i.e $\ker T = \{0\}$:

Si $P \in F$ est tel que $T(P) = 0$, alors nous avons $P' = 0$, et donc P est un polynôme constant. Comme P est nul en 0 (car $P \in F$), il ne peut être que le polynôme nul. Alors $\ker T = \{0\}$ et T est injective....**(0.50pt)**

- Montrons que T est surjective :

Pour $Q \in F$, Q peut s'écrire

$$Q(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k,$$

avec $a_0 = 0$ par hypothèse (Q est nul en 0). On voit immédiatement que pour $P \in F$ donné par $P(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} x^k$, on a $T(P) = Q$ qui assure la surjectivité de T....**(0.50pt)**

3-

L'existence de T^{-1} est assurée par la bijectivité de T. En plus pour tout $Q \in F$: $Q(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x^k$ il existe

$$P \in F: \ P(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} x^k\dots \textbf{(0.50pt)}$$

tel que :

$$T^{-1}(Q) = P\dots \textbf{(0.50pt)}$$

On a bien

$$N_1(T^{-1}(Q)) = N_1(P) = \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{k} \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| = N_1(Q), \dots\dots\dots\dots * \dots \textbf{(0.50pt)}$$

ce qui montre la continuité de T^{-1} .

4-

La norme de T^{-1} est donnée par :

$$\|T^{-1}\| = \sup_{Q\in E\setminus\{0\}} \frac{N_1(T^{-1}(Q))}{N_1(Q)}, \dots \textbf{(0.50pt)}$$

on déduit de (*) l'estimation $\|T^{-1}\| \leq 1$....**(0.50pt)**

D'autre part pour $P_1 \in F$ donné par $P_1(x) = x$, on a $T^{-1}(P_1) = P_1$ et $N_1(T^{-1}(P_1)) = N_1(P_1) = 1$, donc

$$\frac{N_1(T^{-1}(P_1)}{N_1(P_1)} = 1, \dots \textbf{(0.50pt)}$$

qui assure que $\|T^{-1}\| = 1$....**(0.50pt)**

6-

Pour tout $P \in E$ et tout $x \in [0;1]$ on a :

$$|P(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k|\,|x|^k \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| = N_1(P).$$

En prenant le sup en x, il vient

$$\|P\| \leq N_1(P)\dots \textbf{(0.50pt)}$$

- Considérons maintenant la suite de polynômes $(P_M)_{M\geq 1}$: