Université Hassiba Benbouali de Chlef **Année Universitaire : 2019-2020**
Faculté des Sciences Exactes et Informatique **Module : Théorie des Opérateurs**
Département de Mathématiques **Niveau : Master 1**

Feuille de TD 4

Exercice 1.

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, et soit $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

i. Montrer que si $\mathcal{T}^*\mathcal{T}$ est compact, alors $\mathcal{T}$ est compact.
(N.B. Vous pouvez montrer que l'image par $\mathcal{T}$ de toute suite faiblement convergente est fortement convergente)
ii. En déduire que si $\mathcal{T}^*$ est compact, alors $\mathcal{T}$ est compact.

Exercice 2.

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, et soit $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.
i. Montrer que si $\mathcal{A}$ est compact, alors l'image par $\mathcal{A}$ de toute suite orthonormale dans $\mathcal{H}$, est une suite fortement convergente vers 0.

ii. Montrer que $\mathcal{A}$ est de rang fini si et seulement si $\mathcal{A}^*$ l'est aussi. Dans ce cas, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^*$ ont le même rang.

Exercice 3.

L'espace ℓ_2 est muni de sa base standard $(e_i)_{i=1}^{+\infty}$. On définit l'opérateur $\mathcal{A}\colon \ell_2 \to \ell_2$ par

$$\mathcal{A}x = (\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2^2}, \frac{x_3}{2^3}, ..., \frac{x_n}{2^n}, ...), \quad x = (x_i)_{i=1}^{+\infty} \in \ell_2$$

Soit P_n l'opérateur de projection de ℓ_2 sur $F_n = Vect\{(e_i)\}_{i=1}^{n}$.
1. Montrer que $P_n\mathcal{A}$ est un opérateur de rang fini.
2. En déduire que $\mathcal{A}$ est compact.

Exercice 4.

L'espace de Hilbert ℓ_2 est muni de sa base standard $(e_k)_{k=1}^{+\infty}$. On définit l'opérateur shift right $\mathcal{S}_r\colon \ell_2 \to \ell_2$ par

$$\mathcal{S}_r x = (0, x_1, x_2, .., x_n, ..), \ x = (x_i)_{i\geq 1} \in \ell_2$$

1. Déterminer l'opérateur $\mathcal{S}_r^*\mathcal{S}_r$.
2. Montrer que $\mathcal{S}_r$ n'est pas compact.

Exercice 5.

Considérons l'opérateur de multiplication M sur $L_2([a, b])$ défini comme suit

$$(Mf)(t) = \mu(t)f(t), f \in L_2([a, b])$$

où μ est une fonction complexe continue et Lebesgue mesurable sur $[a, b]$. On suppose qu'il existe $t_0 \in [a, b]$ tel que $\mu(t_0) \neq 0$.
- Montrer que M n'est pas compact.