Chapitre 2
Équation de la chaleur
Approximation par différences finies

1 Introduction

On considère le problème parabolique de l'équation de la chaleur en une dimension d'espace avec conditions aux limites de type Dirichelet homogène.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \forall x \in]0,1[,\ t \in]0,T[\\ u(0,t) = u(1,t) = 0\ , \qquad \forall t \in]0,T[, \\ u(x,0) = u_0(x), \qquad \forall x \in]0,1[, \end{cases} \tag{1}$$

Où $u(x,t)$ représente la température au point x au temps t et u_0 une fonction régulière donnée.
Si $u_0 \in C^1(]0,1[,\mathbb{R})$ alors il existe une fonction $u \in C^2(]0,1[\times]0,T[,\mathbb{R})$ qui vérifie (1).

2 Quelques schémas d'approximation

Nous nous proposons de décrire une approximation du problème (1) par la méthode des différences finies. Plusieurs choix de discrétisation sont possibles mais les schémas qui en résultent ne sont pas nécessairement tous de bons schémas au sens où la solution discrète calculées à l'aide de ce schéma n'est pas nécessairement une bonne approximation de la solution exacte u du problème continu.

Pour calculer une solution approchée de (1), on se donne une discrétisation en temps et en espace.

- On se donne un ensemble de points $x_i, i = 0,1,\dots N$ de $[0,1]$ et $t_j, j = 0,1,\dots M$ de $[0,T]$.
- On considère un pas constant $h = \frac{1}{N}$ et $k = \frac{T}{M}$.
- On pose $x_i = ih$ pour $i = 0,\dots N$ et $t_j = jk$ pour $j = 0,\dots M$. On a en particulier $x_0 = 0, x_N = 1$ et $t_0 = 0$.

On cherche en chacun des points (x_i,t_j) un nombre, noté u_i^j, qui soit une bonne approximation de $u(x_i,t_j)$. Tout d'abord il est clair que :

$$u_0^j = u_N^j = 0, \qquad \text{pour } j \in \{0,\dots M\}.$$

De même, à l'instant initial $t_0 = 0$, il suffit de prendre

$$u_i^0 = u_0(x_i), \qquad \text{pour } i \in \{0,\dots N\}.$$

Il reste donc à décrire un procédé de calcul des u_i^j, $i = 1, \ldots, N-1$ et $j = 1, \ldots M-1$. La méthode consiste à approcher alors l'équation (1) en chacun des points (x_i, t_j), $i = 1, \ldots, N-1$ et $j = 1, \ldots M-1$.

Plusieurs choix d'approximation des opérateurs de dérivation $\dfrac{\partial}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ sont possibles.

3 Étude d'un schéma explicite

On se propose d'approcher $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j)$ par le quotient différentiel

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) \simeq \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{k}$$

et pour la variable d'espace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) \simeq \frac{u(x_{i+1}, t_j) + u(x_{i-1}, t_j) - 2u(x_i, t_j)}{h^2}$$

On obtient le schéma suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} - \dfrac{u_{i+1}^j + u_{i-1}^j - 2u_i^j}{h^2} = f(x_i, t_j) \\ \qquad \forall i = 1, \ldots, N-1 \quad et \quad j = 1, \ldots, M-1 \\ u_0^j = u_N^j = 0 \;, \qquad \forall j = 0, \ldots, M \\ u_i^0 = u_0(x_i), \qquad \forall i = 0, \ldots, N \end{cases} \tag{1.1}$$

On pose $\lambda = \dfrac{k}{h^2}$. Pour tout $i = 1, \ldots, N-1$ et $j = 0, \ldots, M-1$, on écrit le schéma aux différences finies suivant :

$$u_i^{j+1} = u_i^j - \lambda(2u_i^j - u_{i-1}^j - u_{i+1}^j)$$

ou encore

$$u_i^{j+1} = \lambda u_{i-1}^j + (1 - 2\lambda)u_i^j + \lambda u_{i+1}^j$$

Si on pose $U^{(j)}$ un vecteur de $\mathbb{R}^{N-1}$ formé par les $N-1$ inconnues u_i^j, pour $i \in \{1, \ldots, N-1\}$:

$$U^{(j)} = \begin{bmatrix} u_1^j \\ u_2^j \\ . \\ . \\ u_{N-1}^j \end{bmatrix}$$

La forme matricielle du schéma (1.1) sera donnée comme suit :

$$\frac{U^{(j+1)} - U^{(j)}}{k} + A_h U^{(j)} = C^{(j)}, \quad \textit{pour} \quad j \in \{0, \dots, M-1\} \tag{1.2}$$

avec la donnée initiale :

$$U^{(0)} = \begin{bmatrix} u_0(x_1) \\ u_0(x_2) \\ . \\ . \\ u_0(x_{N-1}), \end{bmatrix}$$

où

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0... & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0... & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0.. & 0 & ..0 & -1 & 2 & -1 \\ 0.. & 0 & .. & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, C^{(j)} = \begin{bmatrix} f(x_1, t_j) \\ f(x_2, t_j) \\ . \\ . \\ f(x_{N-1}, t_j) \end{bmatrix}$$

Le schéma est dite **explicite** car on peut facilement calculer $U^{(j+1)}$ à partir de $U^{(j)}$ sans avoir à inverser de système linéaire. Nous allons préciser maintenant pourquoi le schéma numérique (1.2) approche bien l'équation de la chaleur.

Définition (erreur de consistance). L'erreur de consistance d'un schéma est définie à chaque instant t_j comme étant le vecteur de $\mathbb{R}^{N-1}$, noté $\varepsilon(u)^{(j)}$, définie par :

$$\varepsilon(u)^{(j)} = \frac{\pi_h u(t_{j+1}) - \pi_h u(t_j)}{k} + A_h \pi_h u(t_j) - C^j$$

où, pour tout t, $\pi_h u(t_j)$ est le vecteur de $\mathbb{R}^{N-1}$ de composantes :

$$\pi_h u(t) = \begin{bmatrix} u(x_1, t) \\ u(x_2, t) \\ . \\ . \\ u(x_{N-1}, t) \end{bmatrix}$$

Pour estimer cette erreur, nous avons la proposition suivante :

Proposition. Supposons que la solution u du problème (1) est de classe C^2 relativement à la variable t et de classe C^4 par rapport à x ; alors il existe une constante

$C > 0$, indépendante de h et k, telle que qu'on ait :

$$\sup_{j\in\{0,\ldots,N-1\}} \|\varepsilon(u)^{(j)}\|_\infty \le C(k+h^2).$$

Le schéma (1.1) est consistant pour la norme $\|.\|_\infty$, et il est d'ordre deux en espace et un en temps.

Démonstration. Nous allons utiliser des développements de Taylor. Notons $\varepsilon(u)_i^{(j)}$ la composante d'indice i du vecteur $\varepsilon(u)^{(j)}$:

$$\varepsilon(u)_i^{(j)} = A_i - B_i$$

où

$$A_i = \frac{u(x_i,t_{j+1}) - u(x_i,t_j)}{k} - \frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t_j),$$

et

$$B_i = \frac{u(x_{i+1},t_j) - 2u(x_i,t_j) + u(x_{i-1},t_j)}{h^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_j).$$

Par développement de Taylor relativement à la variable du temps (x_i étant fixé) :

$$u(x_i,t_{j+1}) = u(x_i,t_j) + k\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t_j) + \frac{k^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,\tau), \qquad \tau \in]t_j,t_{j+1}[$$

D'où

$$A_i = \frac{k}{2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,\tau)$$

et par développement de Taylor relativement à la variable d'espace (t_j étant fixé) :

$$u(x_{i+1},t_j) = u(x_i,t_j) + h\frac{\partial u}{\partial x}(x_i,t_j) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_j) + \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i,t_j) + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_1,t_j)$$

et

$$u(x_{i-1},t_j) = u(x_i,t_j) - h\frac{\partial u}{\partial x}(x_i,t_j) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_j) - \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i,t_j) + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_2,t_j)$$

avec $\xi_1 \in]x_i,x_{i+1}[$ et $\xi_2 \in]x_{i-1},x_i[$

D'où

$$B_i = \frac{h^2}{12}(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_1,t_j) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_2,t_j))$$

On a le résultat annoncé en posant

$$C = \frac{1}{2}\max(\max_{[0,1]\times[0,T]}|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}|, \frac{1}{6}\max_{[0,1]\times[0,T]}|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}|)$$

4 Autres exemples de schémas

4.1 Schéma implicite

Par l'approximation décentrée à gauche

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) \simeq \frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_{j-1})}{k}$$

On obtient le schéma suivant

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^j - u_i^{j-1}}{k} - \dfrac{u_{i+1}^j + u_{i-1}^j - 2u_i^j}{h^2} = f(x_i, t_j) \quad , \forall i = 1, \ldots, N-1 \ et \ j = 1, \ldots, M \\ \\ u_0^j = u_N^j = 0 \ , \qquad \forall j = 0, \ldots, M \\ \\ u_i^0 = u_0(x_i) \qquad \forall i = 0, \ldots, N \end{cases}$$

Vectoriellement, ce schéma peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{U^{(j)} - U^{(j-1)}}{k} + A_h U^{(j)} = C^{(j)}, \quad pour \quad j \in \{0, \ldots, M\} \tag{1.3}$$

avec :

$$U^{(0)} = \begin{bmatrix} u_0(x_1) \\ u_0(x_2) \\ . \\ . \\ u_0(x_{N-1}), \end{bmatrix}$$

Par développement de Taylor, on montre de manière analogue que ce schéma est consistant d'ordre deux en espace et un en temps.
Il est clair que pour calculer $U^{(j)}$ à partir de $U^{(j-1)}$, $j \geq 1$, il est nécessairement d'inverser un système linéaire non diagonal et donc cette inversion n'est pas immédiate , et on dit alors qu'il s'agit d'un **schéma implicite**.

4.2 Schéma saute-mouton

On peut améliorer la précision en temps en centrant par exemple le schéma de discrétisation en temps, en écrivant

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) \simeq \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_{j-1})}{2k}.$$

Le schéma s'écrit alors

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{j+1} - u_i^{j-1}}{2k} - \dfrac{u_{i+1}^j + u_{i-1}^j - 2u_i^j}{h^2} = f(x_i, t_j) \quad , \forall i = 1, \ldots, N-1 \ et \ j = 2, \ldots, M-1 \\ \\ u_0^j = u_N^j = 0 \ , \qquad \forall j = 0, \ldots, M \\ \\ u_i^0 = u_0(x_i) \qquad \forall i = 0, \ldots, N \end{cases}$$

De manière général, il est nécessaire de connaitre $U^{(j)}$ et $U^{(j-1)}$ pour pouvoir calculer $U^{(j+1)}$ par ce schéma.

Vectoriellement, le schéma s'écrit

$$\begin{cases} \dfrac{U^{(j+1)} - U^{(j-1)}}{2k} + A_h U^{(j)} = C^{(j)}, \quad \textit{pour} \quad j \in \{1, \ldots, M-1\} & (1.4), \\ \\ U^{(0)} \text{ et } U^{(1)} \text{ donnés;} \end{cases}$$

il est explicite et du seconde ordre en temps et en espace (en supposant que la solution u suffisamment régulière).

Pour calculer $U^{(1)}$ on utilise un autre schéma, par exemple le schéma explicite (1.2) pour $j = 0$.

Le schéma (1.4) est appelé **saute-mouton** ou **schéma de Richardson**.

4.3 Écriture général d'un schéma numérique

On remarque que de manière générale, les schémas précédents peuvent s'écrire sous la forme vectorielle suivant ($U^{(j)} \in \mathbb{R}^{N-1}, B_k \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}^{N-1}$)

$$\begin{cases} B_l U^{(j+l)} + B_{l-1} U^{(j+l-1)} + \ldots + B_0 U^{(j)} + \ldots B_{-m} U^{(j-m)} = C^{(j)}, & (1.5) \\ \\ \text{pour } j \geq m, \text{ avec } l \geq 0, \ m \geq 0, \ m + l \geq 1, \ B_l \text{ inversible,} \\ \\ U^{(0)}, \ldots, U^{(l+m-1)} \text{ donnés.} \end{cases}$$

- Le schéma (1.5) est dit explicite si la matrice B_l est diagonale et implicite sinon.
- Le schéma explicite (1.2) rentre dans cette catégorie avec $l = 1$ et $m = 0$.
- Le schéma saute-mouton (1.4) correspond à $l = m = 1$.
- Le schéma implicite (1.3) correspond à $l = 0$ et $m = 1$ (pour cela, on devrai montrer que la matrice $B_0 = \dfrac{1}{k} Id + A_h$ est inversible).

5 Convergence et stabilité d'un schéma numérique

On considère le schéma général (1.5) permettant de calculer à chaque instant t_j une solution discrète $U^{(j)}$ destinée à approcher, en un sens que nous allons maintenant préciser le vecteur $\pi_h u(t_j)$.

5.1 Définitions

1. On appelle **erreur de consistance** à l'instant t_j, associé au schéma (1.5) le vecteur de $\mathbb{R}^{N-1}$, noté $\varepsilon(u)^{(j)}$ définie par :

$$\varepsilon(u)^{(j)} = B_l(\pi_h u)(t_{j+l}) + B_{l-1}(\pi_h u)(t_{j+l-1}) + \ldots + B_0(\pi_h u)(t_j) + \ldots B_{-m}(\pi_h u)(t_{j-m}) - C^{(j)}$$

On dit que ce schéma est consistant pour la norme $\|.\|$ de $\mathbb{R}^N$ si

$$\sup_{j,jk\leq T} \|\varepsilon(u)^{(j)}\| \longrightarrow 0, \quad \text{quand} \quad k,h \to 0.$$

et s'i existe une constante $C>0$ et deux nombres $p>0$ et $q>0$ indépendants de h et k, tels qu'on ait

$$\sup_{j,jk\leq T} \|\varepsilon(u)^{(j)}\| \leq C(k^p + h^q),$$

on dit que le schéma est consistant d'ordre p en temps et q en espace.

2. On suppose que les donnés initiales du schéma (1.5) vérifient

$$\max_{j_0\in\{0,\ldots,l+m-1\}} \|U^{(j_0)} - (\pi_h u)(t_{j_0})\| \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad k,h \to 0.$$

On dit alors que ce schéma est **convergent** (pour la norme $\|.|$ en espace) si :

$$\max_{j,jk\leq T} \|U^{(j)} - (\pi_h u)(t_j)\| \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad k,h \to 0.$$

3. On dit que le schéma (1.5) est **stable** pour la norme $\|.\|$ dans $\mathbb{R}^N$ s'il existe deux constantes positives $C_1(T)$ et $C_2(T)$ indépendantes de h et k , telle qu'on ait :

$$\max_{j,jk\leq T} \|U^{(j)}\| \leq C_1(T) \max_{j_0,\in\{0,\ldots,l+m-1\}} \|U^{(0)}\| + C_2(T) \max_{j,jk\leq T} \|C^{(j)}\|,$$

et ceci quelles que soient les données initiales $U^{(j_0)}$ et les termes sources $C^{(j)}$.

Théorème (de Lax) Le schéma (1.5) est convergent si et seulement s'il est consistant et stable.

6 Convergence et stabilité des schémas explicite, implicite et saute-mouton

Rappelons que pour $V=(v_i)_{1\leq i\leq N}$, on a $\|V\|_h = \sqrt{h\sum_{i=1}^N v_i^2}$.

On note que le schéma explicite (1.2) peut s'écrire aussi

$$U^{(j+1)} = BU^{(j)} + kC^{(j)},\ U^{(0)} \text{ donné} \qquad (1.6)$$

où $B=(Id-kA_h)$est une matrice symétrique (donc normale) dépendante de h et k.

1. Sous la condition $\dfrac{k}{h^2} \leq \dfrac{1}{2}$, le schéma explicite (1.6) est convergent en norme $\|.\|_\infty$.

2. Supposons que la matrice B normale de sorte que ; $\|B\|_h = \rho(B)$, rayon spectrale de B . Alors le schéma (1.6) est stable pour la norme $\|.\|_h$ si et seulement si il existe une constante C_0 indépendante de h et k telle qu'on ait

$$\rho(B) \leq 1 + C_0 k$$

3. Le schéma explicite (1.6) est convergent en $\|.\|_h$ si et seulement si la condition $\dfrac{k}{h^2} \leq \dfrac{1}{2}$ est satisfaite. Supposons que la solution u du problème (1) est de classe C^2 relativement à la variable t et de classe C^4 par rapport à x ; alors il existe une constante positive $C = C(T)$, indépendante de h et k, telle que qu'on ait :

$$\max_{j,jk \leq T} \|U^{(j)} - (\pi_h u)t_j)\|_h \leq C(T)(h^2 + t)$$

où, à chaque instant t_j, $U^{(j)} - (\pi_h u)t_j)$ représente l'erreur entre la solution approché obtenue par ce schéma est la solution exacte u.

4. Supposant que u est suffisamment régulière, le schéma implicite (1.3) est convergent en norme $\|.\|_h$, on a plus précisément

$$\max_{j,jk \leq T} \|U^{(j)} - (\pi_h u)t_j)\|_h \leq C(T)(h^2 + t)$$

où $C(T)$ est une constante positive donnée, indépendante de h et k.

5. Le schéma saute-mouton (1.4) est instable pour la norme $\|.\|_h$.