T. D. n° 1
Séries temporelles

Rappels : Définitions

a) Une suite de variables aléatoires réelles (ou processus) $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est dite du second ordre si chacune d'elles est de carré intégrable.

b) Un processus X est fortement stationnaire ssi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{N}^n, \quad \forall h \in \mathbb{Z}, \quad \mathcal{L}_{X_{t_1},\ldots,X_{t_n}} = \mathcal{L}_{X_{t_{1+h}},\ldots,X_{t_{n+h}}}$$

où $\mathcal{L}_Y$ désigne la loi de Y.

c) Un processus X est (faiblement) stationnaire ssi

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{Z}, & \mathbb{E}(X_t) & = & \mathbb{E}(X_0) \\ \exists \gamma : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^+ / \forall t \in \mathbb{Z}, \forall h \in \mathbb{Z}, & \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_t, X_{t+h}) & = & \gamma(h). \end{cases}$$

d) Le processus X est un bruit blanc fort de variance $\sigma^2 \geqslant 0$ ssi

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{Z}, & \mathbb{E}(X_t) & = & 0 \\ \forall t \in \mathbb{Z}, & \mathrm{Var}(X_t) & = & \sigma^2 \\ (X_t)_t & \text{est i.i.d.} & & \end{cases}$$

e) Le processus X est un bruit blanc (faible) de variance $\sigma^2 \geqslant 0$ ssi

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{Z}, & & \mathbb{E}(X_t) & = & 0 \\ \forall t \in \mathbb{Z}, & & \mathrm{Var}(X_t) & = & \sigma^2 \\ \forall t \in \mathbb{Z}, & \forall h \in Z^*, & \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_t, X_{t+h}) & = & 0 \end{cases}$$

Exercice 1. D'après l'énoncé de l'exercice 1 des T.D. de Guillaume Lacôte

Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc (supposé dans $\mathcal{L}^2$) de variance $\sigma^2 > 0$.
Discuter dans chacun des cas suivants de la stationnarité de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

1. Lorsque $\forall t \in \mathbb{Z}$, $X_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$?
2. Le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ par
$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad X_t = a + b\varepsilon_t + c\varepsilon_{t-1}$$
est-il (faiblement) stationnaire ?
3. Lorsque $\forall t \in \mathbb{Z}$, $X_t = \varepsilon_t\varepsilon_{t-1}$, si ε est un bruit blanc fort ? Faible ?
4. Lorsque X est tel que $\forall t \in \mathbb{Z}$, $X_t - X_{t-1} = \varepsilon_t$ (on supposera en outre que $\forall t > 0, \varepsilon_t \perp\!\!\!\perp X_0$) ?
5. Lorsque $\forall t \in \mathbb{Z}$, $X_t = \varepsilon_t \cos(ct) + \varepsilon_{t-1} \sin(ct)$ pour $c \in \mathbb{R}$ donné ?
6. Lorsque $\forall t \in \mathbb{Z}$, $X_t = \sum_{i=0}^{t} \lambda^i(\varepsilon_{t-i} - \varepsilon_{t-i-1})$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ (discuter selon λ) ? Lorsque $\lambda \in]-1, 1[$, montrer qu'il existe un processus stationnaire Y tel que $(X_t - Y_t) \to (0)$ pour la convergence $\mathcal{L}^2$, lorsque $t \to +\infty$.
7. La somme de deux processus stationnaires est-elle stationnaire ?

Exercice 2. D'après l'énoncé de l'exercice 2 des T.D. de Guillaume Lacôte

On considère le processus défini par

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad X_t = a + bt + S_t + \varepsilon_t$$

où $a, b \in \mathbb{R}$, $(S_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus saisonnier (périodique) de période 4 et $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance σ^2, indépendant de S_t.

1. Proposer une contrainte naturelle (que l'on supposera vérifiée par la suite) portant sur $(S_t)_t$.
   On définit l'opérateur
   $$M_4 : \left((Z_t)_t \to \left(\frac{Z_t + Z_{t-1} + Z_{t-2} + Z_{t-3}}{4} \right)_t \right)$$
   et on considère le processus $Y = M_4 X$.
2. Donner l'expression de Y_t pour $t \in \mathbb{Z}$, et justifier l'intérêt de la transformation.
3. On définit alors $Z = \Delta Y$.
   Montrer que Z est stationnaire et calculer sa fonction d'auto-corrélation.

Exercice 3. D'après l'énoncé de l'exercice 1 du T.D.1 de Ségolen Geffray

Soit la série $X_t = at + b\cos(\pi t/3) + c\cos(\pi t/6) + \varepsilon_t$ où $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est un bruit blanc faible. Déterminer les fonctions moyenne, variance, autocovariance et autocorrélation des séries suivantes :

1. X_t
2. $Y_t = \nabla X_t = X_t - X_{t-1}$
3. $Z_t = \nabla_{12} X_t = X_t - X_{t-12}$
4. $W_t = \nabla_6 X_t = X_t - X_{t-6}$

Ces chroniques sont-elles faiblement stationnaires ?

Exercice 4. D'après l'énoncé de l'exercice 2 du T.D.1 de Ségolen Geffray

Considérons une fonction $(S_t)_{t\in\mathbb{N}}$ déterministe, de période 12 et satisfaisant $\sum_{t=1}^{12} S_t = 0$. Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{N}}$ un bruit blanc faible de variance σ^2. Les séries suivantes sont-elles stationnaires au second ordre ? Sinon, trouver un opérateur de différentiation qui les rendent stationnaires au second ordre.

1. $X_t = a + bt + S_t + \varepsilon_t$
2. $Y_t = (a + bt)(1 + S_t) + \varepsilon_t$

Exercice 5. D'après l'énoncé de l'exercice 4 du T.D.1 de Ségolen Geffray

1. Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de moyenne m et de variance σ^2. Les chroniques suivantes sont-elles stationnaires au second ordre ?

(i) $X_t = a + b\varepsilon_t + c\varepsilon_{t-1}$ pour $t = 1, 2, ...$

(ii) $X_t = a\varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1} + c\varepsilon_{t-2}$ pour $t = 2, 3, ...$

où a, b et c sont des paramètres non nuls.

2. Soit X_0 une variable aléatoire de moyenne $\mathbb{E}(X_0) = \dfrac{m}{1-a}$ et de variance $\mathrm{Var}(X_0) = \dfrac{\sigma^2}{1-a^2}$ pour $|a| < 1$. Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de moyenne m et de variance σ^2 que l'on suppose indépendante de X_0. Le processus défini pour $t \in \mathbb{N}^*$ par $X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t$ est-il stationnaire au second ordre ?

Exercice 6. D'après l'énoncé de l'exercice 5 du T.D.1 de Ségolen Geffray

Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. On pose

$$X_t = \varepsilon_t \quad \text{et} \quad Y_t = (-1)^t \varepsilon_t.$$

Les processus $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$, $(Y_t)_{t\in\mathbb{N}}$ et $(X_t + Y_t)_{t\in\mathbb{N}}$ sont-ils stationnaires au sens faible ?

Exercice 7. D'après l'énoncé de l'exercice 6 du T.D.1 de Ségolen Geffray

Soient A et B deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On pose :

$$X_t = A\cos\left(\frac{2\pi t}{p}\right) + B\sin\left(\frac{2\pi t}{p}\right), \text{ pour } t \in \mathbb{N}.$$

a) Calculer la moyenne $\mathbb{E}(X_t)$ et la fonction de covariance de ce processus. Ce processus est-il stationnaire au sens faible ?

b) Calculer la loi de X_t. Montrer que $(X_t)_t$ est un processus gaussien. Le processus est-il stationnaire au sens fort ?

Exercice 8. D'après l'énoncé de l'exercice 7 du T.D.1 de Ségolen Geffray

On considère le modèle

$$X_t = \mu t + \varepsilon_t, \quad \text{pour } t \in \mathbb{N}^*,$$

où $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

a) Ce processus est-il stationnaire au sens fort ou faible ?

b) On cherche à estimer μ par la méthode des moindres carrés ordinaires à partir d'observations $(x_1, ..., x_n)$. Pour cela, on se propose de minimiser par rapport à m la quantité

$$\sum_{t=1}^{n} (X_t - mt)^2.$$

Calculer $\hat{\mu}_n$ et $\hat{\mu}_n - \mu$. Donner la loi de $(\mathrm{Var}(\hat{\mu}_n))^{-1/2}(\hat{\mu}_n - \mu)$.

c) On cherche à estimer la variance σ^2. Pour cela, on se propose de maximiser par rapport à m et s^2 la vraisemblance de l'échantillon :

$$\sum_{t=1}^{n} \ln f(X_t, mt, s^2),$$

où $f(., mt, s^2)$ est la densité de la loi normale $\mathcal{N}(mt, s^2)$ à savoir

$$f(x, mt, s^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s^2}} \exp(-(x - mt)^2/(2s^2)).$$

Montrer que l'estimateur $\tilde{\mu}_n$ obtenu est le même que précédemment. Calculer l'estimateur $\tilde{\sigma}_n^2$. Cet estimateur est-il convergent ?