Solution série3 de S.C: Estimation et Prevision

Ex1:

I) En cours, nous avons appris que la signature des modèles AR c'est la $FACP$ et pour les modèles MA c'est la FAC donc d'après les données notre modèle est un MA, il reste à spécifier l'ordre q. D'un autre coté, l'intervalle de confiance de nullité de ρ est

$$IC(\rho_h) = \left[\pm 1.96\sqrt{\frac{1}{n}}\right],$$

où n est la taille de l'échantillon. Donc puisque $n = 100$, on a

$$IC(\rho_h) = [-0.19, 0.19].$$

On remarque que pour $h = 1, 2$:$\rho_h \notin IC(\rho_h)$ donc $\rho_h \neq 0$ et pour $h > 2, \rho_h \in IC(\rho_h)$ d'où $\rho_h = 0$. Alors le modèle approprié est $MA(2)$.

II) Même raisonnement que (I): $n = 60, IC(\rho_h) = [-0.25, 0.25]$, on remarque que pour $h = 1, ..., 8, \rho_h \neq 0$ donc la décroissance est très lente vers zéro qui est la signature des processus non stationnaires. On passe à la série de différence d'ordre 1:ΔX_t, on a $\forall h, \rho_h = 0$ et $\widehat{\varphi}_{hh} = 0$. Finalement, on identifie le modèle: $ARIMA(0, 1, 0)$

Ex2:

I) $X_t \backsim AR(1)$: Nous savons que $\varphi_{11} = \rho_1 \Longrightarrow \widehat{\varphi}_{11} = \widehat{\rho}_1$

$$\widehat{\rho}_1 = \frac{\sum_{t=2}^{8}(X_t - \widehat{\mu})(X_{t-1} - \widehat{\mu})}{\sum_{t=1}^{8}(X_t - \widehat{\mu})^2}$$

avec

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{8}\sum_{t=1}^{8} X_t = 2.5, \sum_{t=1}^{8}(X_t - \widehat{\mu})^2 = 93.27$$

et

$$\sum_{t=2}^{8}(X_t - \widehat{\mu})(X_{t-1} - \widehat{\mu}) = -25.09$$

donc $\widehat{\varphi}_{11} = \frac{-25.09}{93.27} = -0.269$.

II) $X_t \backsim MA(1) \Longrightarrow X_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$ avec $\varepsilon_t \backsim BB(0, \sigma^2)$. On voudrait estimer les paramètres θ et σ^2 par la méthode des moments en supposant que $|\rho_1| < \frac{1}{2}$. La première chose à faire est d'utiliser l'information qui est donné c.à.d chercher la formule théorique de ρ_1. Nous avons

$$\begin{cases} \gamma_0 = (1 + \theta^2)\sigma^2 \\ \gamma_1 = -\theta\sigma^2 \end{cases}$$

d'où

$$\rho_1 = \frac{-\theta}{1 + \theta^2} \Longrightarrow \rho_1\theta^2 + \theta + \rho_1 = 0, \Delta = 1 - 4\rho_1^2$$

avec l'hypothèse qui est faites on a $\Delta > 0$, d'où les solutions

$$\widehat{\theta} = \frac{-1+\sqrt{1-4\rho_1^2}}{2\rho_1} \text{ et } \widehat{\theta}^* = \frac{-1-\sqrt{1-4\rho_1^2}}{2\rho_1}$$

on choisit la solution qui rend le modèle inversible c.à.d $|\theta| < 1$, pour estimer σ^2, il suffit de remplacer $\widehat{\theta}$ dans la formule de $\widehat{\gamma}_0$ ou $\widehat{\gamma}_1$.

<u>Ex3</u>:

I) a) $X_t \backsim AR(2) \Longrightarrow X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$. On va estimer les paramètres par la methode des moments. On a

$$\begin{pmatrix}\rho_1\\ \rho_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \rho_1\\ \rho_1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{pmatrix}\widehat{\varphi}_1\\ \widehat{\varphi}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \rho_1\\ \rho_1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\rho_1\\ \rho_2\end{pmatrix}$$

b) On a $\widehat{\gamma}_0 = 6.06, \widehat{\rho}_1 = 0.687, \widehat{\rho}_2 = 0.610$. En appliquant a):

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\widehat{\varphi}_1\\ \widehat{\varphi}_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & 0.687\\ 0.687 & 1\end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix}0.687\\ 0.610\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0.50\\ 0.26\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Pour σ^2, on rappelle que $\gamma_0 = \varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2 + \sigma^2 \Longrightarrow \widehat{\sigma}^2 = \widehat{\gamma}_0\left(1 - \widehat{\varphi}_1\widehat{\rho}_1 - \widehat{\varphi}_2\widehat{\rho}_2\right)$ d'où $\widehat{\sigma}^2 = 4.43$.

II) De la meme manière, on trouve $\begin{pmatrix}\widehat{\varphi}_1\\ \widehat{\varphi}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1.46\\ -0.72\end{pmatrix}$ et $\widehat{\sigma}^2 = 1.19$.

-L'intervalle de confiance de φ_2 au niveau $\alpha = 0.05$ est $IC(\varphi_2) = \left[\widehat{\varphi}_2 \pm 1.96\sqrt{Var(\widehat{\varphi}_2)}\right]$, on doit calculer la variance:

La distribution asymptotique des coefficients est

$$\sqrt{n}\left(\begin{pmatrix}\widehat{\varphi}_1\\ \widehat{\varphi}_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}\right) \xrightarrow{d} N\left(0, \sigma^2\Gamma^{-1}\right)$$

où Γ est la matrice de covariance: $\Gamma = \begin{pmatrix}\gamma_0 & \gamma_1\\ \gamma_1 & \gamma_0\end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned}Var\left(\begin{pmatrix}\widehat{\varphi}_1\\ \widehat{\varphi}_2\end{pmatrix}\right) &= \frac{\widehat{\sigma}^2}{n\widehat{\gamma}_0}\begin{pmatrix}1 & \widehat{\rho}_1\\ \widehat{\rho}_1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\\ &= \frac{1.19}{144 \times 8.903} \times \begin{pmatrix}1 & 0.849\\ 0.849 & 1\end{pmatrix}^{-1}\\ &= \begin{pmatrix}0.003 & -0.002\\ -0.002 & 0.003\end{pmatrix}\end{aligned}$$

donc $IC(\varphi_2) = \left[-0.72 \pm 1.96\sqrt{0.003}\right]$