Chapitre 5

Introduction à la probabilité

5.1 Introduction

Les probabilités vont nous servir à modéliser une **expérience aléatoire**, c'est-`a-dire un phénomène dont on ne peut pas prédire l'issue avec certitude, et pour lequel on décide que le dénouement sera le fait du hasard.

La première tâche qui vous attend est de d´écrire les différentes issues possibles de cette expérience aléatoire. Puis on cherche à associer à chacune de ces ´**éventualités** un nombre compris entre 0 et 1 qui mesure la chance qu'elles ont de se réaliser. Comment interpréter/fixer ce nombre, appelé probabilité ? Il existe plusieurs manières de voir.

- Proportion :

On lance un d´e. Quelle est la probabilité de A="obtenir un chiffre pair"? Chaque face du d´e a la même chance, et il y en a 6. Quant aux chiffres pairs, ils sont 3. D'ou, intuitivement,

$P(A) = \frac{3}{6} = 1/2$.

- Frequence:

Un enfant est attendu. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ? On a observé un grand nombre de naissances. Notons k_n le nombre de filles nées en observant n naissances. Alors

$$P(\text{fille}) = \lim_{n \to +\infty} \frac{k_n}{n}$$

mais cette limite a-t-elle un sens?

- Opinion:

Quelle est la probabilité pour que l´´équipe de Tunisie gagne la coupe d'Afrique des nations ? pour que l'OL soit championne de France ? Dans ce cas, on ne peut pas rejouer le même match dans les mêmes conditions plusieurs fois. On peut considérer les qualités des joueurs, des entraineurs, les résultats de la saison... Mais le choix de la probabilité est forcément subjectif.

5.2 Espace des possibles, évènements

On étudie une expérience aléatoire. L'**espace des possibles** ou **univers** d´écrit tous les résultats possibles de l'expérience. Chacun de ces résultats est appelé **´évènement élémentaire**. On note souvent l'espace des possibles Ω et un résultat élémentaire ω. Un **évènement** est un sous-ensemble de Ω, ou une réunion d'évènements élémentaires. On dit qu'un évènement est réalisé si un des évènements élémentaires qui le constitue est réalisé. Les évènements sont des ensembles, représentés souvent par des lettres capitales.

Exemples :

- On lance un d´e : $\Omega = \{1,2,...,6\}$. On peut s'intéresser à l'évènement A="on obtient un chiffre pair", ie $A = \{2,4,6\}$.
- On lance deux d´es : $\Omega = \{1,...,6\} \times \{1,...,6\} = \{(i,j) : 1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq 6\}$. Ici, un

Évènement élémentaire ω est un couple (i,j), ou` i représente le résultat du premier d´e et j celui du second.

- On lance trois fois une pièce de monnaie. Les ´évènements ´élémentaires vont d´écrire le plus précisément possible le résultat de cette expérience. Donc un ´évènement ´élémentaire ω est un triplet (r_1,r_2,r_3) qui donne les résultats des trois lancers (dans l'ordre). L' évènement B : "on obtient pile au deuxième lancer" est

$$B = \{(f,p,f),(f,p,p),(p,p,f),(p,p,p)\}$$

L'´évènement B est réalisé si on obtient l'un des évènements ´élémentaires listées ci-avant. Il n'est parfois pas n´nécessaire de connaître tous ces d´détails. On pourra choisir : ω représente le nombre de "face" obtenus. Alors, $\Omega = \{0,1,2,3\}$. Le modèle est beaucoup plus simple, mais ne permet pas de décrire des ´évènements tels que B.

Il existe un vocabulaire propre aux évènements, différent du vocabulaire ensembliste.

notations	vocabulaire ensembliste	vocabulaire probabiliste
Ω	ensemble plein	Evènement certain
$\emptyset$	ensemble vide	Evènement impossible
ω	´element de Ω	évènement ´elementaire
A	sous-ensemble de Ω	évènement
$\omega \in A$	ω appartient `a A	ω realise A
$A \subset B$	A inclus dans B	A implique B
$A \cup B$	r´eunion de A et B	A ou B
$A \cap B$	intersection de A et B	A et B
A^c ou A	complementaire de A	évènement contraire de A
$A \cap B = \emptyset$	A et B disjoints	A et B incompatibles

5.3 Probabilité

On se limite dans ce cours `a étudier les univers dénombrables. La **probabilité** d'un évènement est une valeur numérique qui représente la proportion de fois ou` l'évènement va se réaliser, quand on répète l'expérience dans des conditions identiques. On peut déduire de cette définition qu'une probabilité doit être entre 0 et 1 et que la probabilité d'un évènement est la somme des probabilités de chacun des évènements élémentaires qui le constituent. Enfin, la somme des probabilités de tous les ´éléments de Ω est 1. Important : rappelons qu'un ´évènement n'est rien d'autre qu'une partie de Ω. Une probabilité associe à chaque ´évènement un nombre entre 0 et 1. Il s'agit donc d'une application de l'ensemble des parties de Ω, noté P(Ω), dans [0,1]. Exemple : soit Ω = {0,1,2}. Construisons P(Ω).

$$P(\Omega) = \{\emptyset,\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\Omega\}$$

Définition 1 *Une probabilité est une application sur* P(Ω)*, l'ensemble des parties de* Ω*, telle que :*

- $0 \leq P(A) \leq 1$, *pour tout évènement* $A \subset \Omega$

- $P(A) = \sum_{\omega\in A} P(\omega)$, *pour tout évènement* A

- r $$P(\Omega) = \sum^{\omega\in A}_{\omega\in\Omega} P(\omega) = 1$$

Que signifie "un ´évènement A a pour probabilité..."?

0.95 : A va très probablement se produire.

0.03 : A a très peu de chance d'ˆêtre réalisé.

4.0 : incorrect.

-2 : incorrect.

0.4 : A va se produire dans un peu moins de la moitié des essais.

0.5 : une chance sur deux.

0 : aucune chance que A soit réalisé.

De la d´définition, on peut facilement d´déduire la proposition suivante, fort utile pour faire quelques calculs :

Proposition 2 *Soient A et B deux évènements.*

1) Si A et B sont incompatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$*.*

2) $P(A^c) = 1 - P(A)$*.*

3) $P(\emptyset) = 0$*.*

5) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$*.*

preuve : 1) immédiat d'après le second point de la d´définition d'une probabilité.

2) Comme A et A^c sont incompatibles, $1 = P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$.

3) $P(\emptyset) = 1 - P(\emptyset^c) = 1 - P(\Omega) = 0$.

4) La technique est très souvent la même pour calculer la probabilité d'une réunion d'ensembles : on écrit cette réunion comme une union d'ensembles incompatibles, puis on utilise le 1). Ici, on écrit $A \cup B = A \cup (B \cap A^c)$ et on obtient : $P(A \cup B) = P(A) + P(A \cup (B \cap A^c))$. Puis on écrit $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$ pour d´déduire $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^c)$. En rassemblant ces deux ´égalités, on obtient la proposition.

Signalons une d´définition plus générale de probabilité, valable pour des espaces des possibles non d´dénombrables.

définition 3 *Soit une expérience aléatoire et* Ω *l'espace des possibles associe. Une probabilité sur* Ω *est une application, d´définie sur l'ensemble des ´évènements, qui vérifie :*

- *axiome 1 :* $0 \le P(A) \le 1$*, pour tout ´évènement A*
- *axiome 2 : pour toute suite d'´évènements* $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$*, deux `a deux incompatibles,*

$$P\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big) = \sum_{i\in\mathbb{N}} P(A_i)$$

- *axiome 3 :* $P(\Omega) = 1$

NB : les ´évènements $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sont deux `a deux incompatibles, si pour tous i 6= j, $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Un rappel des techniques de d´dénombrement est disponible à l'annexe A.

On est maintenant en mesure de **modéliser** des expériences aléatoires simples, c'est à dire :

- choisir Ω,
- choisir une probabilité sur Ω en justifiant ce choix.

Attention, pour décrire une probabilité, il faut donner $P(A)$ pour tout $A \subset \Omega$. Ou alors, on peut plus simplement donner $P(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$. Le lecteur déduira $P(A)$ pour tout A d'après la définition d'une probabilité.

1.4 Indépendance et conditionnement

Exemple 4 *Quelle est la probabilité d'avoir un cancer du poumon?*

Information supplémentaire : vous fumez une vingtaine de cigarettes par jour. Cette information va changer la probabilité.

L'outil qui permet cette mise `a jour est la probabilité conditionnelle.

Définition 5 : *Etant donnés deux évènements A et B, avec $P(A) > 0$, on appelle probabilité de B conditionnellement `a A, ou sachant A, la probabilité notée $P(B|A)$ d´définie par*

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

On peut écrire aussi $P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$.

Utilisation 1 : quand $P(A)$ et $P(A \cap B)$ sont faciles à calculer, on peut en déduire $P(B|A)$.

Utilisation 2 : Quand $P(B|A)$ et $P(A)$ sont faciles à trouver, on peut obtenir $P(A \cap B)$.

De plus, la probabilité conditionnelle sachant A, $P(.|A)$, est une nouvelle probabilité et possédé donc toutes les propriétés d'une probabilité.

Exemple 6 *Une urne contient r boules rouges et v boules vertes. On en tire deux, l'une après l'autre (sans remise). Quelle est la probabilité d'avoir deux boules rouges ? Choisissons Ω qui décrit les résultats de l'expérience précisément.*

$$\Omega = \{rouge,verte\} \times \{rouge,verte\}$$

Un évènement élémentaire est un couple (x,y) ou` x est la couleur de la première boule tirée et y la couleur de la seconde.

Soit A l'évènement "la première boule est rouge" et B l'évènement "la seconde boule est rouge".

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = \frac{r-1}{r+v-1} \cdot \frac{r}{r+v}$$

Proposition 7 (Formule des probabilités totales) *Soit A un évènement tel que* $0 < P(A) < 1$. *Pour tout évènement B, on a*

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)$$

preuve: Comme $A \cup A^c = \Omega$, $P(B) = P(B \cap (A \cup A^c)) = P((B \cap A) \cup (B \cap A^c))$. Or $B \cap A$ et $B \cap A^c$ sont incompatibles. On en d´déduit

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^c)$$

La définition de la probabilité conditionnelle permet de conclure. ¤

Exemple 6 (suite) : quelle est la probabilité pour que la seconde boule tirée soit rouge? On garde le même formalisme.

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) \\ &= \frac{r-1}{r+v-1} \cdot \frac{r}{r+v} + \frac{r}{r+v-1} \cdot \frac{v}{r+v} \\ &= \frac{r}{r+v} \end{aligned}$$

Définition 8 *Soit* $(A_i)_{i\in I}$ *une famille d'évènements. On l'appelle partition de* Ω *si elle vérifie les deux conditions :*

(i) $\cup_{i\in I} A_i = \Omega$

(ii) les A_i *sont deux `a deux incompatibles : pour tous* $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Proposition 9 (Formule des probabilités totales généralisée) *Soit* $(A_i)_{i\in I}$ *une partition de* Ω*, telle que* $P(A_i) > 0$*, pour tout* $i \in I$*. Alors, pour tout évènement B,*

$$P(B) = \sum_{i\in I} P(B/A_i)P(A_i)$$

La formule des probabilités totales permet de suivre les étapes de l'expérience aléatoire dans l'ordre chronologique. Nous allons maintenant voir une formule à remonter le temps...

Proposition 10 (Formule de Bayes) *Soit A et B deux évènements tels que* $0 < P(A) <$
1 *et* $P(B) > 0$*. Alors,*

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)}$$

preuve :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

et on conclut en remplaçant $P(B)$ par son expression donnée par la formule des probabilités totales.
¤

Proposition 11 (Formule de Bayes généralisée) *Soit* $(A_i)_{i\in I}$ *une partition de* Ω*, telle que* $P(A_i) > 0$*, pour tout* $i \in I$*. Soit un évènement B, tel que* $P(B) > 0$*. Alors, pour tout* $i \in I$*,*

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j\in I} P(B|A_j)P(A_j)}$$

Exemple 12 *Deux opérateurs de saisie, A et B, entrent respectivement 100 et 200 tableaux sur informatique. Les tableaux de A comportent des fautes dans 5,2% des cas et ceux de B dans 6,7% des cas. On prend un tableau au hasard. Il comporte des fautes.*

Quelle est la probabilité pour que A se soit occupé de ce tableau?

Soient les évènements :

T_A =*“ le tableau est entré par A”,*

$T_B = (T_A)^c$*“ le tableau est entré par B”,*

F =*“ le tableau comporte des fautes”.*

D’après le théorème de Bayes,

$$\begin{aligned} P(T_A|F) &= \frac{P(F|T_A)P(T_A)}{P(F|T_A)P(T_A) + P(F|T_B)P(T_B)} \\ &= \frac{0.052 * 1/3}{0.052 * 1/3 + 0.067 * 2/3} = 0.279 \end{aligned}$$

Définition 13 : *Deux évènements A et B sont dits* **indépendants** *si*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

S’il sont de probabilité non nulle, alors

$$P(B|A) = P(B) \Longleftrightarrow P(A|B) = P(A) \Longleftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

remarque 1 : A et B sont donc indépendants si la connaissance de la réalisation de l’un n’influence pas la probabilité de l’autre.

remarque 2 : deux évènements incompatibles A et B, avec $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$, ne sont jamais indépendants. En effet, $A \cap B = \emptyset$ entraîne $P(A \cap B) = 0 \neq P(A)P(B)$.