## 2.3. Exemples standards :

**Exemple (1) : [La marche aléatoire]**

(Sommes des v.a. centrées indépendantes)

Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de v.a. indép. avec $\mathbb{E}|X_k| < \infty$, $\forall k$, et :

$$\mathbb{E}(X_k) = 0, \quad \forall k.$$

Définissons : ($S_0 := 0$ et)

$$S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

$$\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n), \quad \mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}.$$

Question : M.q. $\sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sigma(S_1, S_2, \ldots, S_n)$.

[Les 2 suites fournissent la m. informat° minimale].

Montrons que : $(S_n)_{n\geq 0}$ est $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$-mart.

~~Pour $n=0$, c'est trivial~~.

Supposons que $n \geq 0$.

① Adaptation : Il est clair que $S_n$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable pour tt $n$.

② Intégrabilité : $\mathbb{E}|S_n| \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}|X_k| < \infty, \forall n$

③ Propriété clé :

$$\mathbb{E}(S_{n+1}/\mathcal{F}_n) \overset{(i)}{=} \mathbb{E}(S_n/\mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n)$$
$$\overset{(ii)}{=} S_n + \mathbb{E}(X_{n+1})$$
$$\overset{(iii)}{=} S_n \quad p.s.$$

Justifications :

(i) : La linéarité de l'esp. cond. (1.5, (6)).

(ii) : $S_n$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable $\Rightarrow \mathbb{E}(S_n/\mathcal{F}_n) = S_n$ p.s. d'après la pté (1.5, (3)).

et : $X_{n+1}$ est indép. de $\mathcal{F}_n \Rightarrow \mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}X_{n+1}$ d'après la pté (1.5, (10)).

$\left[ \triangle\ Y \perp \mathcal{G} \Leftrightarrow Y \perp \mathbb{1}_G\ \forall G \in \mathcal{G} \right]$

(iii) : $X_{n+1}$ centrée $\Rightarrow \mathbb{E}X_{n+1} = 0$, par hypothèse

Exemple (2) : [Martingale produit]

(Produits des v.a. indép. positives de moyenne 1)

Soient $X_1, X_2, \ldots$ une suite de v.a. indép., positives avec :

$$\mathbb{E}(X_k) = 1, \forall k.$$

Définissons ($M_0 := 1$, $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$ et)

$M_n := X_1 X_2 \cdots X_n$, $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, \cdots, X_n)$.

Question : $\sigma(X_1, X_2, \cdots, X_n) = \sigma(M_1, M_2, \cdots, M_n)$.

Montrons que $(M_n)_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ - mart.

~~Pour n = 0 c'est trivial~~

Supposons : $n \geq 1$.

① $(M_n)_{n\geq 1}$ est $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ -adaptée.

② $\mathbb{E}|M_n| = \mathbb{E} M_n = \mathbb{E}X_1 \cdot \mathbb{E}X_2 \cdots \mathbb{E}X_n = 1 < \infty$ $\forall n \geq 1$.

car $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sont indép.

③ $\mathbb{E}(M_{n+1}/\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X_{n+1} \cdot M_n/\mathcal{F}_n)$

$$\overset{(i)}{=} M_n \, \mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n)$$

$$\overset{(ii)}{=} M_n \, \mathbb{E}(X_{n+1})$$

$$\overset{(iii)}{=} M_n$$

Justifications des étapes :

(i) $M_n$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable, d'après la pté « Faire sortir ce qui est connu » (1.5, (4)) :

$$\mathbb{E}(X_{n+1} \underbrace{M_n}_{\mathcal{F}_n\text{-mesurable}} / \mathcal{F}_n) = M_n \, \mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n)$$

(ii) $X_{n+1}$ indép. de $\mathcal{F}_n$ $\xrightarrow{1.5.(10)}$ $\mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}X_{n+1}$

(iii) $\mathbb{E}X_{n+1} = 1$ par hypothèse.

**Exemple (3)**: [Martingale exponentielle] (de Wald).

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. réelles i.i.d. et soit $t \in \mathbb{R}$ tel que: $e^{tX_1} \in L^1$ (i.e. $\mathbb{E}\, e^{tX_1} < \infty$)

Posons: $g(t) = \mathbb{E}(e^{tX_1})$ (fct. génératrice des moments de $X_1$)

Définissons: $Y_0 := 1$, $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$ et,

$$Y_n := g^{-n}(t) \cdot e^{t(X_1+X_2+\cdots+X_n)}, \quad n \geq 1.$$

$$\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sigma(Y_1, Y_2, \dots, Y_n).$$

$(Y_n)_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$-martingale.

**En effet**: il suffit de remarquer qu'il s'agit d'un cas particulier de l'exemple(2)

6 avec: $M_n = \prod \left(\frac{e^{tX_k}}{g(t)}\right)$, $n \geq 1$.

Exple (4) : [Martingale de Paul-Lévy-Doob].
(Accumulation de l'information sur une v.a.)

Soit $(\mathcal{F}_n)_n$ notre filtration, et soit
$X$ une v.a. $\in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Définissons : $X_n := \mathbb{E}(X/\mathcal{F}_n)$

« $X_n$ est interprétée comme étant l'accumulation des données concernant $X$ à l'instant $n$ ».

Montrons que $(X_n)_n$ est une $(\mathcal{F}_n)_n$-mart.

1. $X_n = \mathbb{E}(X/\mathcal{F}_n)$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable d'après la déf$^t$ de Kolmogorov de l'esp. conditionnelle (déf$^t$ 1.4.(1)).

2. $$\mathbb{E}|X_n| = \mathbb{E}\left|\mathbb{E}(X/\mathcal{F}_n)\right| \leq \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(|X|/\mathcal{F}_n)\right] = \mathbb{E}|X| < \infty.$$ (Voir pté 1.5.(12))

3. $$\mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X/\mathcal{F}_{n+1})/\mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}(X/\mathcal{F}_n)$$ [Pté de tour (1.5.(8)) $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$.]

Remarques :

(1) Reprenons les 2 premiers exemples :

- Exple (1) : si $\mathbb{E}X_k \geq 0$, alors : $(S_n)_n$ est une $(\mathcal{F}_n)$ - sous-martingale.

  et si $\mathbb{E}X_k \leq 0$, alors $(S_n)$ est une $(\mathcal{F}_n)$ - surmartingale.

- Exple (2) : si $\mathbb{E}(X_k) \geq 1$ (resp. $\leq 1$) alors $(M_n)_n$ est une sous-mart. (resp. surmartingale).

(2) Une martingale est une sous-mart. et ~~sous~~ surmart. au m̂. temps.

⚠ La réciproque est vraie : c.à.d : Un processus stoch. qui est une sous-mart. et surmart, est une martingale.

(3) La définition d'une martingale dépend du choix de $\mathbb{P}$ (la mesure de proba). et de la filtration $(\mathcal{F}_n)$.

<u>c.à.d.</u> En changeant $\mathbb{P}$ <u>ou</u> $(\mathcal{F}_n)$, une martingale risque de perdre cette propriété.

Ex. <u>Question</u> : Donner un (1) exple.

(4) Une martingale est constante en moyenne

Si $(X_n)$ est une $(\mathcal{F}_n)$-mart.

<u>alors</u> : $\mathbb{E}X_0 = \mathbb{E}X_1 = \mathbb{E}X_2 = \cdots = c^{te}$.

⚠ La réciproque est en général fausse.

<u>Question</u> : Donner un contre exple.

(5) Une sous-mart. (resp. surmart.) est croissante (resp. décroissante) en moyenne.

c.à.d. $\mathbb{E}X_0 \leq \mathbb{E}X_1 \leq \mathbb{E}X_2 \leq \cdots$ (resp. $\mathbb{E}X_0 \geq \mathbb{E}X_1 \geq \cdots$)

(6) Pour prouver (4) et (5), utiliser la pté des espérances itérées. [1.5.(2)].
⊕ La monotonie pour (5)

(7) Il est important de noter qu'un processus $(X_n)_n$ pour lequel $X_0 \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P})$ est une martingale (resp. sous_mart, surmart) s.s. si le processus $(X_n - X_0)_n$ est une mart. (resp. sous_mart, surmart.).

(8) La somme de 2 mart. (resp. sous_mart, surmart) est une mart. (resp. sous_mart, surmart.).