Université Blida1
Faculté des Sciences
Département de Maths

le 14.07.2019
$3^{ème}$ année Maths
Examen de Statistique Inférentielle
(Durée:1h30)0

Exercice 1:a) Soit $X_1; X_2; X_3; X_4$ des variables aléatoires indépendantes telles que:
$X_1, X_2 \curvearrowright N(m, \sigma^2)$ et $X_3; X_4 \curvearrowright N(0, \sigma^2)$.
trouver les lois de :1)$Z = \frac{(X_1-X_2)^2+(X_3+X_4)^2}{2\sigma^2}$; 2) $T = \frac{(X_1-X_2)^2}{X_3^2+X_4^2}$
3) $S = X_1 + X_2$; 4) $U =(\frac{X_1-m}{\sigma})^2$
b) Soit $Y_i \curvearrowright N(i; (3i)^2)$ pour i=1,2,3,4. Les Y_i sont indépendantes.
En utilisant les Y_i construire une v.a qui suit la loi de
1) χ^2_2 ; (2)t_2 ;(3)$F_{1,2}$

Exercice 2: Soit X une va continue de densité $g(x) = e^{-2|x|}$, $x \in IR$.
Trouver :(1) $P(-2 \leq X \leq 2)$,(2) $P(X \succ -1/X \succeq 3)$; (3) $VarX$;
(4) La fonction de répartition de X; (5) La loi de $Y = |X|$
(6) $M_X(t)$ la fonction génératrice de X et en déduire $E(X^n)$

Exercice3:Etant donné $\lambda \succ 0$, on considère une variable aléatoire X de densité

$$f(x) = \begin{cases} e^{\lambda - x} \; si x \succeq \lambda \\ 0 \; sinon \end{cases}$$

Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ un échantillon de n observations indépendantes de la variable X.
On considère les v.a S et T définies par
$S = \frac{1}{n}{}^{n}_{i=1} X_i$ et $T = Inf X_i$
1) Calculer $E(X)$ et $VarX$
2) Calculer $E(S)$ et $VarS$
3) Trouver la densité de T et en déduire $E(T)$ et $VarT$
4) Determiner, en fonction respectivement de S et de T, des estimateurs sans biais S_1 et T_1 de λ.
5) Les estimateurs S_1 et T_1 sont ils convergents ?
Quel est entre S_1 et T_1 le meilleur estimateur de λ

Barême approximatif: 6+6+8

Corrigé Examen Stat L3 Math Juillet 201

Exercice 1 : a) $X_1, X_2 \rightsquigarrow N(m, \sigma^2)$ et $X_3, X_4 \rightsquigarrow N(0, \sigma^2)$.

3/ $S = X_1 + X_2 \rightsquigarrow N(2\mu, 2\sigma^2)$ (utiliser ft caractéristique). 0.5
(ou bien toute combinaison linéaire de va normales est normale).

4/ $\frac{X_1 - m}{\sigma} \rightsquigarrow N(0,1) \Rightarrow U = \left(\frac{X_1 - m}{\sigma}\right)^2 \rightsquigarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \chi^2_1$ 0,5

1°) On a $\frac{X_1 - X_2}{\sigma\sqrt{2}} \rightsquigarrow N(0,1) \Rightarrow \frac{(X_1 - X_2)^2}{2\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2_1$

$\frac{X_3 + X_4}{\sigma\sqrt{2}} \rightsquigarrow N(0,1) \Rightarrow \frac{(X_3 + X_4)^2}{2\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2_1$

$\Rightarrow Z \rightsquigarrow \chi^2_2$. 1

2/ $Y = \frac{(X_1 - X_2)^2}{X_3^2 + X_4^2} = \frac{\frac{(X_1 - X_2)^2}{2\sigma^2}}{\left(\frac{X_3^2}{\sigma^2} + \frac{X_4^2}{\sigma^2}\right)\frac{1}{2}} \rightsquigarrow F_{1,2}$ 1

Car $\left(\frac{X_1 - X_2}{\sigma\sqrt{2}}\right)^2 \rightsquigarrow \chi^2_1$

et $\frac{X_3^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2_1$, $\frac{X_4^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2_2$ $\Rightarrow \frac{X_3^2 + X_4^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2_2$

b) $Y_i \rightsquigarrow N(i, (3i)^2)$ $i = \overline{1,4}$.

1/ $\frac{Y_i - i}{3i} \rightsquigarrow N(0,1)$ $\forall i = \overline{1,4} \Rightarrow \left(\frac{Y_i - i}{3i}\right)^2 \rightsquigarrow \chi^2_1$ 1

1/5

2/ Posons $T = \sum_{i=2}^{3} \left(\frac{Y_i - i}{3i}\right)^2 \rightsquigarrow \chi^2_2$ (1) (2,5)

On a $X = \frac{Y_1 - 1}{3} \rightsquigarrow N(0,1)$.

donc $U = \frac{X}{\sqrt{\frac{T}{2}}} \rightsquigarrow t_2$. Student à 2 ddl.

3/ Posons $X_1 = \left(\frac{Y_1 - 1}{3}\right)^2 \rightsquigarrow \chi^2_1$

$X_2 = \left(\frac{Y_2 - 2}{6}\right)^2 + \left(\frac{Y_3 - 3}{9}\right)^2 \rightsquigarrow \chi^2_2$

donc $F = \frac{X_1/1}{X_2/2} = 2\frac{X_1}{X_2} \rightsquigarrow F_{1,2}$. (1)

Exercice 2 : On a $g(x) = e^{-2|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

① $P(-2 \leq X \leq 2) = \int_{-2}^{2} e^{-2|x|} dx = 2\int_0^2 e^{-2x} dx = 2\left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right)\Big|_0^2 = 1 - e^{-4}$ (0,5)

② $P(X > -1 \mid X \leq 3) = \frac{P(-1 < X \leq 3)}{P(X \leq 3)} = \frac{\int_{-1}^{3} e^{-2|x|} dx}{\int_{-\infty}^{3} e^{-2|x|} dx}$

$= \frac{\int_{-1}^{0} e^{2x} dx + \int_0^3 e^{-2x} dx}{\int_{-\infty}^{0} + \int_0^3 e^{-2x} dx} = \frac{2 - e^{-6} - e^{-2}}{2 - e^{-6}}$ (1)

③ $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-2|x|} dx = 0$ (0,5)

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-2|x|} dx = 2\int_0^{+\infty} x^2 e^{-2x} dx$ posons $2x = t$

$x = t/2$ et $dx = \frac{dt}{2}$

donc $E(X^2) = 2\int_0^{\infty} \frac{t^2}{4} e^{-t} \frac{dt}{2} = \frac{1}{4}\Gamma(3) = \frac{2}{4} = 1/2$. (3/5)

donc $\operatorname{Var} X = 1/2$. (1/2)

(4) $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-2|t|} dt = \begin{cases} \frac{e^{2x}}{2} & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{e^{-2x}}{2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ (1.)

(5) $F_Y(y) = P(Y < y) = P(|X| < y) = P(-y < X < y)$ si $y > 0$

$= F_X(y) - F_X(-y)$

On dérive $f_Y(y) = f_X(y) + f_X(-y) = 2 f_X(y)$ car f paire (1.)

$= \begin{cases} 2e^{-2|y|} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

(6) $M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot e^{-2|x|} dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x(t+2)} dx + \int_{0}^{+\infty} e^{x(t-2)} dx$

$= \frac{1}{t+2} - \frac{1}{t-2}$ pour $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. (0.5)

On a aussi $M_X(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{E(X^n)}{n!} t^n = \frac{1}{t+2} - \frac{1}{t-2} = \frac{-4}{t^2-4} = \frac{1}{1-\left(\frac{t}{2}\right)^2}$

$= \sum_{n \geq 0} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n} = \sum \frac{1}{2^{2n}} t^{2n}$.

Donc si $n = 2p+1$ $E(X^{2p+1}) = 0$

et si $n = 2p$ $\frac{E(X^{2p})}{(2p)!} = \frac{1}{2^{2p}} \Rightarrow E(X^{2p}) = \frac{(2p)!}{2^{2p}}$ (1)

Exercice 3 :

4/5

1°) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{\lambda}^{+\infty} x f(x) dx = \lambda + 1.$ 0,5

$$E(X^2) = \int_{\lambda}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_{\lambda}^{+\infty} e^{\lambda} x^2 e^{-x} dx = \lambda^2 + 2\lambda + 2.$$

donc $Var X = E(X^2) - E^2(X) = \lambda^2 + 2\lambda + 2 - \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 1$ 0,5

2) $E(S) = \frac{1}{n} \sum E(X_i) = \frac{n E(X)}{n} = E(X) = \lambda + 1$ 0,5

$Var S = \frac{Var X}{n} = \frac{1}{n}.$ 0,5

3°) $F_T(t) = P(T < t) = P(\inf X_i < t) = 1 - P(\inf X_i \geq t)$

$= 1 - P(X_i \geq t, \forall i = \overline{1,n}) = 1 - (P(X \geq t))^n$ 0,5

$= 1 - (1 - F_X(t))^n$

On dérive, on a $f_T(t) = n(1 - F_X(t))^{n-1} f_X(t).$

Calculons $F_X(x) = \int^{x} e^{\lambda - t} dt = \int_{\lambda}^{x} e^{\lambda - t} dt = \begin{cases} 1 - e^{\lambda - x} & \text{si } x \geq \lambda \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ 1

Donc $f_T(t) = n e^{(n-1)(\lambda - t)} \cdot e^{\lambda - x} = \begin{cases} n e^{n(\lambda - t)} & \text{si } x \geq \lambda \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ 0,5

$E(T) = \int_{\lambda}^{+\infty} n t e^{n(\lambda - t)} dt = \lambda + \frac{1}{n},$ 0,5

$E(T^2) = \int_{\lambda}^{+\infty} n t^2 e^{n(\lambda - t)} dt = \lambda^2 + \frac{2\lambda}{n} + \frac{2}{n^2}$

$\Rightarrow Var T = \frac{1}{n^2}.$ 0,5

4°) Comme $E(S) = \lambda + 1$ Posons $S_1 = S - 1 = \overline{X} - 1$ 0,5 5/5

On a $E(S_1) = E(S) - 1 = \lambda$

S_1 est un estimateur sans biais de λ.

Et comme $E(T) = \lambda + \frac{1}{n}$ en posant $T_1 = T - \frac{1}{n}$ 0,5

On a $E(T_1) = \lambda$ donc T_1 est un e.s.b de λ.

5°) $Var(S_1) = Var S = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$ par $n \to +\infty$ 0,5

$Var(T_1) = Var T = \frac{1}{n^2} \longrightarrow 0$ par $n \to +\infty$ 0,5

Les estimateurs S_1 et T_1 sont donc convergents.

Comme $Var T_1 \leq Var S_1$ $\forall n \geq 1$ 1

on a T_1 est un meilleur estimateur que S_1.