
MATHEMATIQUES APPLIQUEES

Equations aux dérivées partielles

Cours et exercices corrigés

Département GPI
1ère année

Xuân MEYER
Avril 2005

Table des matières

I	Différentielles totales - Facteurs intégrants	5
I.1	Rappel sur les dérivées partielles	5
I.1.1	Définition	5
I.1.2	dérivées successives	5
I.1.3	Dérivées d'une fonction composée	6
I.1.4	Dérivées d'une fonction composée de deux variables	6
I.2	Différentielles totales	7
I.2.1	Définition	7
I.2.2	Formes différentielles totales exactes	7
I.2.3	Application à l'intégration d'équation différentielles du premier ordre	8
I.3	Facteurs Intégrants	8
I.3.1	Introduction	8
I.3.2	Définition	9
I.3.3	Détermination de facteurs intégrants monovariabiles	9
I.4	Généralisation aux fonctions de plus de deux variables	11
I.5	Différentielles totales et fonctions d'Etat	13
II	Equations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre	15
II.1	Généralités	15
II.2	Intégrales premières d'un système différentiel	17
II.2.1	Généralités sur les éq. lin. et homo. aux dérivées partielles du 1 ^{er} ordre	18
II.3	Eq. lin. et homo. aux dérivées partielles du 1 ^{er} ordre : cas d'une fonction de 2 var.	19
II.4	Facteur intégrant d'une forme différentielle du premier ordre à deux variables	20
II.4.1	Détermination d'un facteur intégrant de la forme $\mu(x, y)$	20
III	Eq. aux dérivées partielles d'ordre n à 2 variables, linéaires, homogènes, à coeff. csts	23
III.1	Définition	23
III.2	Intégration	24
III.3	Généralisation	27
III.4	Eq. aux dérivées partielles à 3 variables, linéaires et homogènes, à coeff. csts	27
IV	Equations non linéaires aux dérivées partielles du premier ordre	31
IV.1	Méthode d'intégration	31

Chapitre I

Différentielles totales - Facteurs intégrants

I.1 Rappel sur les dérivées partielles

I.1.1 Définition

Soit une fonction $f(x, y)$ de deux variables réelles définie dans un voisinage de $A = [a, b]$; si la fonction $f(x, b)$ fonction de x seulement a une dérivée pour la valeur a de x , on la note $f'_x(a, b)$ et on l'appelle *dérivée partielle de $f(x, y)$ par rapport à x au point (a, b)* .

Si en tout point d'un voisinage de A , $f'_x(x, y)$ existe, on définit ainsi une nouvelle fonction, *la dérivée partielle de $f(x, y)$ par rapport à x* . On définit de même la dérivée partielle par rapport à y . On note :

$$f'_x = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$$

et

$$f'_y = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

I.1.2 dérivées successives

De la même façon que précédemment, on peut étudier l'existence de la dérivée par rapport à x de $f'_x(x, y)$ et de $f'_y(x, y)$; on définit ainsi les dérivées secondes que l'on note $f''_{x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. On peut de même définir les dérivées secondes par rapport à y : $f''_{y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Théorème 1 (Théorème de Schwarz) Si en un point de $A = [a, b]$, les dérivées successives f''_{xy} et f''_{yx} existent et sont continues, en ce point ces dérivées sont égales :

$f''_{xy} = f''_{yx}$ soit $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$
--

Exercice I.1 Déterminer $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ de la fonction $z(x, y)$, :

$$z = x^3 - 5xy + y^2$$

solution :

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 5y & \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x & ; & \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -5 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -5x + 2y & \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 & ; & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -5 \end{aligned}$$

I.1.3 Dérivées d'une fonction composée

Si $u = f(x, y)$ est définie dans un voisinage de $A = [a, b]$ et $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ définies dans un intervalle I , voisinage du point t_0 , si la fonction $f(x, y)$ admet des dérivées partielles sur un voisinage de A et si ces dérivées sont continues en A , alors la fonction composée $F(t) = f[\varphi(t), \psi(t)]$ est dérivable en t_0 et l'on a le résultat :

$$F'(t) = f'_x(x, y)\varphi'(t) + f'_y(x, y)\psi'(t)$$

Si les hypothèses d'existence et de continuité de ces dérivées sont vraies sur un intervalle, la formule précédente est vraie sur tout l'intervalle.

I.1.4 Dérivées d'une fonction composée de deux variables

Soit la fonction $F(x, y) = f(u, v)$, u et v étant des fonctions de x et y :

$$u = u(x, y) \quad \text{et} \quad v = v(x, y)$$

avec

$$u_0 = u(x_0, y_0) \quad \text{et} \quad v_0 = v(x_0, y_0)$$

Si les fonctions u et v admettent des dérivées partielles en (x_0, y_0) et si $f(u, v)$ admet des dérivées partielles continues au voisinage de (u_0, v_0) , alors $F(x, y)$ admet des dérivées partielles au point (x_0, y_0) données par :

$$\begin{aligned} F'_x(x_0, y_0) &= f'_u(u_0, v_0)u'_x(x_0, y_0) + f'_v(u_0, v_0)v'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \\ F'_y(x_0, y_0) &= f'_u(u_0, v_0)u'_y(x_0, y_0) + f'_v(u_0, v_0)v'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Exercice I.2 Soit $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ et

$$\begin{cases} x = 2u + v \\ y = u - 2v \end{cases}$$

Déterminer : $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$

solution :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x + y \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x + 2y \\ \frac{\partial x}{\partial u} &= 2 \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= 1 \\ \frac{\partial y}{\partial u} &= 1 \\ \frac{\partial y}{\partial v} &= -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = (2x + y)(2) + (x + 2y)(1) = 5x + 4y \\ \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = (2x + y)(1) + (x + 2y)(-2) = -3y \end{cases}$$

I.2 Différentielles totales

I.2.1 Définition

Soit une fonction de deux variables $U(x, y)$ possédant des dérivées partielles continues. La différentielle *totale* ou *exacte* de $U(x, y)$ s'écrit :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy \quad (\text{I.1})$$

Si $U(x, y) = Cte$, alors $dU = 0$.

Exemple : Soit $U(x, y)$ la fonction de deux variables définie par :

$$U(x, y) = x + x^2 y^3$$

$$dU(x, y) = (1 + 2xy^3)dx + (3x^2 y^2)dy$$

I.2.2 Formes différentielles totales exactes

Soit une équation différentielle donnée sous la forme :

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (\text{I.2})$$

Si on peut trouver une fonction $U(x, y)$ qui vérifie :

$$M(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}$$

et

$$N(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}$$

alors, on peut poser l'équation (I.2) sous la forme d'une différentielle *totale* ou *exacte* :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy$$

Alors $U(x, y)$ est la solution cherchée sous forme implicite :

$$U(x, y) = Cte$$

Pour cela, il faut prouver que les dérivées $\frac{\partial M}{\partial y}$ et $\frac{\partial N}{\partial x}$ sont égales. En effet, conformément au théorème de Schwarz :

soit $U(x, y)$ une fonction de classe C^2 dérivable, si $\frac{\partial U}{\partial x}$ et $\frac{\partial U}{\partial y}$ sont continues, alors $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (I.2) soit une équation exacte est donc :

$$\boxed{\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}}$$

Dès lors, la fonction $U(x, y)$ peut être trouvée de façon systématique par :

$$U(x, y) = \int M(x, y)dx + k(y)$$

Dans cette intégration par rapport à x , $k(y)$ joue le rôle d'une constante. Il suffit de dériver la fonction $U(x, y)$ par rapport à y pour déterminer la fonction $k(y)$:

$$N(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y} \Rightarrow k'(y) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\int M(x, y)dx \right) = N(x, y)$$

On obtiendrait le même résultat en intégrant d'abord $N(x, y)$ par rapport à y et en dérivant ensuite par rapport à x .

I.2.3 Application à l'intégration d'équation différentielles du premier ordre

Soit à résoudre l'équation différentielle du premier ordre :

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0 \quad (\text{I.3})$$

où $M(x, y)$ et $N(x, y)$ sont deux fonctions quelconques de x et de y . On peut résoudre cette équation en posant :

$$dU = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

Résoudre l'équation (I.3) revient à résoudre $dU = 0$ soit $U(x, y) = C^{te}$. Après avoir vérifié que dU est une différentielle totale, il suffit donc de déterminer $U(x, y)$ selon la méthodologie présentée précédemment. Nous verrons plus tard comment résoudre l'équation (I.3) dans le cas où dU n'est pas une différentielle totale exacte.

Exercice I.3 On cherche à résoudre l'équation différentielle :

$$y' = -\frac{1 + 2xy^3}{3x^2y^2} \quad (\text{I.4})$$

solution :

Cette équation peut se mettre sous la forme :

$$(1 + 2xy^3)dx + 3x^2y^2dy = 0$$

Posons :

$$dU = (1 + 2xy^3)dx + 3x^2y^2dy$$

Résoudre l'équation (I.4) revient à déterminer la solution de $dU = 0$. Ceci est aisé si l'on peut montrer que dU est une différentielle totale. Soit :

$$M = 1 + 2xy^3 \text{ et } N = 3x^2y^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 6xy^2$$

d'où, en intégrant la différentielle totale exacte dU , :

$$U(x, y) = x + x^2y^3$$

$$dU = 0 \Rightarrow U = C^{te}$$

d'où :

$$x + x^2y^3 = C^{te}$$

est solution de (I.4).

I.3 Facteurs Intégrants

I.3.1 Introduction

Soit la différentielle dU :

$$dU = 2xydx + (4y + 3x^2)ydy = 0 \quad (\text{I.5})$$

Cette différentielle n'est pas totale. En effet :

Soit $M(x, y) = 2xy$ et $N(x, y) = (4y + 3x^2)y$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial M}{\partial y} = 2x \\ \frac{\partial N}{\partial x} = 6xy \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

On ne peut donc pas résoudre l'équation (I.5) par la procédure présentée dans la partie précédente. On a alors recours au facteur intégrant.

I.3.2 Définition

Soit une différentielle de la forme :

$$\delta V = P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad (\text{I.6})$$

telle que :

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Cette différentielle n'est pas exacte. On cherche alors une fonction auxiliaire $F(x, y)$ telle que :

$$dU = F(x, y)P(x, y)dx + F(x, y)Q(x, y)dy \quad (\text{I.7})$$

soit une différentielle totale.

Cette fonction $F(x, y)$ est appelée *facteur intégrant* de la différentielle δV .

I.3.3 Détermination de facteurs intégrants monovariabiles

Il s'agit de trouver une fonction $F(x, y)$ qui vérifie la relation :

$$\frac{\partial(FP)}{\partial y} = \frac{\partial(FQ)}{\partial x} \quad (\text{I.8})$$

Soit :

$$P \frac{\partial F}{\partial y} + F \frac{\partial P}{\partial y} = Q \frac{\partial F}{\partial x} + F \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (\text{I.9})$$

Restreignons nous ici à rechercher des fonctions monovariabiles $F(x)$ ou $F(y)$. Le cas général de fonctions multivariabiles sera traité dans le paragraphe II.4.1

I.3.3.1 Facteur intégrant de la forme $F(x)$

Si on recherche un facteur facteur intégrant de la forme $F(x)$, il doit vérifier :

$$F \frac{\partial P}{\partial y} = Q \frac{dF}{dx} + F \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Soit en réarrangeant et en divisant par FQ :

$$\frac{1}{Q} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{F} \frac{dF}{dx} + \frac{1}{Q} \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Soit :

$$\frac{1}{F} \frac{dF}{dx} = \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right)$$

Le facteur intégrant est obtenu par :

$$F(x) = e^{\int \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx}$$

I.3.3.2 Facteur intégrant de la forme $F(y)$

Si on recherche un facteur facteur intégrant de la forme $F(y)$, il doit vérifier :

$$F \frac{\partial Q}{\partial x} = P \frac{dF}{dy} + F \frac{\partial P}{\partial y}$$

Soit en réarrangeant et en divisant par FP :

$$\frac{1}{P} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{F} \frac{dF}{dy} + \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial y}$$

Soit :

$$\frac{1}{F} \frac{dF}{dy} = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

Le facteur intégrant est obtenu par :

$$F(y) = e^{\int \frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy}$$

D'une manière générale, on cherchera un facteur intégrant du type $F(x)$ quand :

$$\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = f(x)$$

et un facteur intégrant du type $F(y)$ quand :

$$\frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = g(y)$$

Exercice I.4 Résoudre :

$$y - xy' = 0 \quad (\text{I.10})$$

solution :

Soit $dV = ydx - xdy$
 Cette différentielle n'est pas exacte. On cherche $F(x,y)$ telle que :

$$dU = F(x,y)dV$$

soit une différentielle exacte. Si on recherche $F(x)$ alors il faut :

$$\frac{1}{F} \frac{dF}{dx} = \frac{1}{-x} \left(\frac{\partial y}{\partial y} - \frac{\partial(-x)}{\partial x} \right)$$

Soit :

$$\frac{1}{F} \frac{dF}{dx} = -\frac{1}{x}(1+1)$$

$$F(x) = e^{\int -\frac{2}{x} dx} = e^{\int -2\ln(x)} = e^{\int \ln(x^{-2})}$$

d'où

$$F(x) = \frac{1}{x^2}$$

La différentielle :

$$dU = FdV = \frac{1}{x^2}(ydx - xdy)$$

est une différentielle totale. Résoudre l'équation $dV = 0$ revient à résoudre l'équation $dU = 0$. Soit :

$$U(x,y) = \int y \frac{1}{x^2} dx + k(y) = -\frac{y}{x} + k(y)$$

et

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{x} + k'(y) \\ N(x,y) = -\frac{1}{x} \end{array} \right\} \Rightarrow k'(y) = 0 \Rightarrow k(y) = Cte$$

D'où la solution :

$$U(x,y) = -\frac{y}{x} + Cte = C \Rightarrow \frac{y}{x} = C_1$$

où C_1 est une constante réelle soit :

$$y = C_1 x$$

La solution de l'équation (I.10) est donc une famille de ligne passant par l'origine.

I.4 Généralisation aux fonctions de plus de deux variables

Soient $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ trois fonctions continues des trois variables x, y, z et δg la forme différentielle :

$$\delta g = X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz$$

δg est une forme différentielle totale exacte si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \\ \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x} \\ \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y} \end{array} \right.$$

Plus généralement : Soient $X_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $X_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n fonctions continues des n variables x_1, x_2, \dots, x_n et δg la forme différentielle :

$$\delta g = X_1(x_1, x_2, \dots, x_n)dx_1 + X_2(x_1, x_2, \dots, x_n)dx_2 + \dots + X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)dx_n$$

δg est une forme différentielle totale exacte si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X_1}{\partial x_{i,i \neq 1}} = \frac{\partial X_{i,i \neq 1}}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial X_j}{\partial x_{i,i \neq j}} = \frac{\partial X_{i,i \neq j}}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial X_n}{\partial x_{i,i \neq n}} = \frac{\partial X_{i,i \neq n}}{\partial x_n} \end{array} \right.$$

Exercice I.5 Estimation d'une erreur

Soit un bloc rectangulaire de longueur x , largeur y et hauteur z . les mesure d'un tel bloc conduit aux valeurs suivantes : $x=10\text{cm}$, $y=12\text{cm}$, $z=20\text{cm}$ avec une marge d'erreur de $0,05\text{ cm}$. A partir de l'expression de la différentielle totale exacte de l'aire de ce bloc, évaluer approximativement l'erreur maximale concernant l'aire du bloc ainsi que le pourcentage d'erreur dû aux erreurs de mesures.

solution :

l'aire d'un bloc rectangulaire s'écrit : $S = 2(xy + xz + yz)$

$$dS = \frac{\partial S}{\partial x}dx + \frac{\partial S}{\partial y}dy + \frac{\partial S}{\partial z}dz$$

$$dS = 2(y + z)dx + 2(x + z)dy + 2(x + y)dz$$

La plus grande erreur que l'on peut commettre sur S si dx , dy et dz sont de même signe (positifs par exemple), d'où :

$$dS_{max} = 2(12 + 20) * 0,05 + 2(10 + 20) * 0,05 + 2(12 + 10) * 0,05 = 8,4\text{cm}^2$$

Soit un pourcentage d'erreur de :

$$err = \frac{100 * dS_{max}}{S} = \frac{100 * 8,4}{1120} = 0,75\%$$

Exercice I.6 Soient trois variables indépendantes x, y et z . Montrer que l'expression :

$$dU = (3x^2yz)dx + z(x^3 + 2y)dy + y(x^3 + y)dz$$

est une différentielle totale. En déduire l'expression de $U(x, y, z)$.

solution :

soit : $p = 3x^2yz$; $q = z(x^3 + 2y)$; $r = y(x^3 + y)$ dU est une différentielle totale si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial x} \\ \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial y} \end{array} \right. \quad (\text{I.11})$$

Calculons ces dérivées partielles :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial y} = 3x^2z \\ \frac{\partial q}{\partial x} = 3x^2z \\ \frac{\partial p}{\partial z} = 3x^2y \\ \frac{\partial r}{\partial x} = 3x^2y \\ \frac{\partial q}{\partial z} = x^3 + 2y \\ \frac{\partial r}{\partial y} = x^3 + y \end{array} \right. \quad (\text{I.12})$$

dU est bien une différentielle totale. On a :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2yz$$

d'où :

$$U = x^3yz + g(y, z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^3z + \frac{\partial g}{\partial y} = q = x^3z + 2yz$$

d'où :

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 2yz$$

soit :

$$g(y, z) = y^2z + f(z)$$

d'où :

$$U = x^3yz + y^2z + f(z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = x^3y + y^2 + \frac{df}{dz} = r = x^3y + y^2$$

d'où :

$$\frac{df}{dz} = 0$$

On obtient alors :

$$U(x, y, z) = x^3yz + y^2z + C$$

où C est une constante réelle.

I.5 Différentielles totales et fonctions d'Etat

Soit dZ une différentielle totale. Alors :

$$\int_{Z_1}^{Z_2} dZ = Z_2 - Z_1 = \Delta Z$$

En physique, la fonction Z est dite *équation d'état*, et la valeur de ΔZ ne dépend pas du chemin suivi. Soit dV une différentielle qui n'est pas totale. En physique, on la notera δV . Dans ce cas :

$$\int_{Z_1}^{Z_2} dZ \neq Z_2 - Z_1$$

La valeur de ΔV dépend du chemin suivi.

Chapitre II

Equations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre

II.1 Généralités

On donne le nom de *système différentiel* à tout système d'équations entre plusieurs fonctions inconnues d'une même variable et leurs dérivées jusqu'à un certain ordre.

Observons qu'il est toujours possible, en introduisant des fonctions inconnues auxiliaires, de ramener un système différentiel quelconque à un système dans lequel ne figurent que *les dérivées du premier ordre* des fonctions connues ; c'est ainsi que le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2x}{dt^2} + 5x - y = \cos 2t \\ \frac{d^2y}{dx^2} - x + 3y = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.1})$$

qui est du second ordre avec deux fonctions inconnues, peut se ramener en introduisant les deux fonctions auxiliaires inconnues $u = \frac{dx}{dt}$, $v = \frac{dy}{dt}$, à la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} + 5x - y = \cos 2t \\ \frac{dv}{dt} - x + 3y = 0 \\ \frac{dx}{dt} = u \\ \frac{dy}{dt} = v \end{array} \right. \quad (\text{II.2})$$

qui fait intervenir quatre équations du premier ordre entre quatre fonctions inconnues.

Nous nous limiterons ici à l'étude des systèmes du premier ordre de n équations à n inconnues. Nous supposerons, de plus, ces équations résolues par rapport aux dérivées des fonctions inconnues. Un tel système est dit sous forme *canonique* :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x_1}{\partial t} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{array} \right. \quad (\text{II.3})$$

où x_1, x_2, \dots, x_n désignent n fonctions inconnues de la variable t . Ce système peut s'écrire ;

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t), i = 1, n$$

Toute solution du système (II.3) vérifie nécessairement le système (II.4) ci-dessous, obtenu en dérivant $(n-1)$ fois la première équation et en tenant compte chaque fois des équations qui la suivent dans ce système et donnent $\frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}$ en fonction de x_1, x_2, \dots, x_n et t :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \frac{dx_1^2}{dt} = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \vdots \\ \frac{dx_1^n}{dt} = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

Toute fonction $x_1(t)$ vérifiant le système est donc solution de l'équation différentielle d'ordre n :

$$R\left(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{d^n x_1}{dt^n} = 0\right) \quad (\text{II.5})$$

obtenue en éliminant x_2, x_3, \dots, x_n entre les équations (II.4).

Il résulte du théorème d'existence des solutions du système (II.3), et nous admettrons sans démonstration que, *reciproquement*, si :

$$x_1 = F_1(t, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad (\text{II.6})$$

désigne l'intégrale générale de l'équation (II.5), l'intégrale générale du système (II.3) s'obtient en portant dans les $n-1$ premières équations de (II.4) les valeurs de $x_1, \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}$, et en résolvant ces équations en x_2, x_3, \dots, x_n , sans par conséquent effectuer aucune intégration nouvelle.

Exercice II.1 Déterminer les fonctions $z(x)$ et $y(x)$ telles que :

$$\begin{cases} x \frac{dy}{dx} + y + 2z = 0 \\ x \frac{dz}{dx} - 3y - 4z = 0 \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

où x , une variable indépendante.

solution :

Cherchons à former une équation résolvante du second ordre en y ; nous avons en dérivant la première équation du système (II.7) :

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + 2 \frac{dz}{dx} = 0 \quad (\text{II.8})$$

d'où en multipliant par x :

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} + 2x \frac{dz}{dx} = 0 \quad (\text{II.9})$$

En remplaçant $x \frac{dz}{dx}$ par sa valeur tirée de la seconde équation du système (II.7), puis z par sa valeur tirée de la première, nous obtenons l'équation résolvante :

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2y = 0 \quad (\text{II.10})$$

Les solutions de cette équation (équation d'Euler) sont de la forme $y = x^r$.

Soit : $y' = rx^{r-1}$ et $y'' = r(r-1)x^{r-2}$

D'où l'équation caractéristique :

$$r(r-1) - 2r + 2 = 0$$

qui a pour racine $r = 1$ et $r = 2$. L'intégrale générale est :

$$y = Ax + Bx^2$$

En portant ce résultat dans la première équation du système (II.7), nous obtenons sans intégration nouvelle :

$$z = -\frac{1}{2} \left(y + x \frac{dy}{dx} \right) = -Ax - \frac{3}{2}Bx^2 \quad (\text{II.11})$$

où A et B sont des constantes réelles. On peut facilement vérifier que quelque soient les valeurs des constantes A et B , les fonctions $y(x)$ et $z(x)$ ainsi trouvées vérifient bien le système d'équations différentielles (II.7).

II.2 Intégrales premières d'un système différentiel

On cherche à résoudre des systèmes différentiels du premier ordre donnés sous forme canonique :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

On suppose que ce système admet une solution unique répondant aux conditions initiales : $x_i = x_i^0$ pour $t = t_0$.

L'ensemble des solutions dépend de n constantes arbitraires C_1, C_2, \dots, C_n .

L'ensemble :

$$\begin{cases} x_1 = F_1(C_1, C_2, \dots, C_n, t) \\ \vdots \\ x_n = F_n(C_1, C_2, \dots, C_n, t) \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

constitue l'intégrale générale du système. Si l'on résout le système (II.13) par rapport à C_i , on peut exprimer l'intégrale générale du système sous la forme

$$\begin{cases} \Phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = C_1 \\ \vdots \\ \Phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = C_n \end{cases} \quad (\text{II.14})$$

Les fonctions Φ_i qui sont des constantes sont dites *intégrales premières* du système (II.12).

D'une manière générale, on appelle intégrale première d'un système différentiel, toute fonction de x_1, x_2, \dots, x_n et qui se réduit à une constante si l'on y remplace x_1, x_2, \dots, x_n par des fonctions de t constituant une solution quelconque de ce système.

On démontre que, réciproquement, toute intégrale première de ce système peut s'exprimer en fonction des Φ_i seules. Les intégrales premières ainsi mises en causes (ou tout autre système de n intégrales premières indépendantes) constituent un *système fondamental* d'intégrales premières.

Exercice II.2 Soit x , une variable indépendante. Déterminer les fonctions $y(x)$ et $z(x)$ solutions du système :

$$\begin{cases} x \frac{dy}{dx} + y + 2z = 0 \\ x \frac{dz}{dx} - 3y - 4z = 0 \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

[solution](#) :

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y+2z} = \frac{dz}{3y+4z} \quad (\text{II.16})$$

Les égalités exprimées dans l'équation (II.16) peuvent s'écrire :

$$\frac{dx}{x} = -\frac{(-3)dy}{(-3)(y+2z)} = \frac{(-2)dz}{(-2)(3y+4z)} = \frac{3dy+2dz}{3y+2z} = \frac{d(3y+2z)}{3y+2z} \quad (\text{II.17})$$

D'après l'équation (II.15), les fonctions $u_1(x) = 3y(x) + 2z(x)$ et $v(x) = x$ ayant la même différentielle logarithmique, elles ont un rapport constant.

$$\Phi_1 = \frac{3y+2z}{x} = C_1 \quad (\text{II.18})$$

est une intégrale première du système (II.15). L'équation (II.15) conduit également à :

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y+2z} = \frac{dz}{3y+4z} = \frac{dy+dz}{2(y+z)} \quad (\text{II.19})$$

D'après l'équation (II.19), les fonctions $u_2(x) = y(x) + z(x)$ et $v(x) = x$ ont des différentielles logarithmiques proportionnelles, on a donc :

$$\Phi_2 = \frac{y+z}{x^2} = C_2 \quad (\text{II.20})$$

où Φ_2 est une intégrale première du système (II.15).

II.2.1 Généralités sur les équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles du 1^{er} ordre

Soit x_n une variable indépendante.

Considérons $n-1$ fonctions : $x_1(x_n), x_2(x_n), \dots, x_{n-1}(x_n)$ vérifiant :

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)} \quad (\text{II.21})$$

Ce système possède $(n-1)$ intégrales premières. Soit $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une intégrale première du système. Si les fonctions de x_1, x_2, \dots, x_{n-1} de x_n vérifient le système, f se réduit à une constante et sa différentielle est donc nulle.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = 0 \quad (\text{II.22})$$

D'après la relation (II.21), on a :

$$dx_i = \frac{X_i}{X_n} dx_n \quad (\text{II.23})$$

Il en résulte que la fonction f vérifie la relation :

$$X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \quad (\text{II.24})$$

qui est linéaire, homogène par rapport aux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ et qui constitue donc une équation linéaire et homogène aux dérivées partielles du 1^{er} ordre.

Réciproquement, si f est solution de l'équation (II.25) et si l'on y remplace par des fonctions x_1, x_2, \dots, x_{n-1} de x_n vérifiant l'équation (II.21), la relation (II.22) est vérifiée. Donc, $f = C$ est une intégrale première de l'équation (II.21).

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation (II.25) est identique à l'ensemble des intégrales premières du système différentiel (II.21) que l'on appelle *système adjoint* ou *caractéristique* de l'équation (II.25).

Si on connaît $n-1$ intégrales premières distinctes f_1, f_2, \dots, f_{n-1} du système adjoint, toute intégrale première f est fonction de f_1, f_2, \dots, f_{n-1} . L'ensemble des solutions de l'équation linéaire et homogène (II.21) est représentée par une fonction de $n-1$ intégrales premières du système adjoint :

$$f = \Omega(f_1, f_2, \dots, f_{n-1}) \quad (\text{II.25})$$

II.3 Equation linéaire et homogène aux dérivées partielles du 1^{er} ordre dans le cas d'une fonction de 2 variables

Soit $Z = \varphi(x, y)$ la fonction inconnue.

Soient $p = \frac{\partial Z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial Z}{\partial y}$ ses dérivées partielles. Soit l'équation :

$$P(x, y, Z) \frac{\partial Z}{\partial x} + Q(x, y, Z) \frac{\partial Z}{\partial y} = R(x, y, Z) \quad (\text{II.26})$$

et

$$f(x, y, Z) = f(x, y, \varphi(x, y)) = 0 \quad (\text{II.27})$$

une équation implicite contenant Z .

D'après la théorie des fonctions implicites,

$$\begin{cases} f'_x + f'_Z \frac{\partial Z}{\partial x} = 0 \\ f'_y + f'_Z \frac{\partial Z}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.28})$$

avec : $f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f'_y = \frac{\partial f}{\partial y}$, $f'_Z = \frac{\partial f}{\partial Z}$ d'où :

$$\begin{cases} p = \frac{\partial Z}{\partial x} = -\frac{f'_x}{f'_Z} \\ q = \frac{\partial Z}{\partial y} = -\frac{f'_y}{f'_Z} \end{cases} \quad (\text{II.29})$$

L'équation (II.26) s'écrit :

$$P(x, y, Z) \frac{f'_x}{f'_Z} + Q(x, y, Z) \frac{f'_y}{f'_Z} + R(x, y, Z) = 0 \quad (\text{II.30})$$

soit :

$$P(x, y, Z) \frac{\partial f}{\partial x} + Q(x, y, Z) \frac{\partial f}{\partial y} + R(x, y, Z) \frac{\partial f}{\partial Z} = 0 \quad (\text{II.31})$$

On ramène ainsi l'intégration de (II.26) à celle d'un équation homogène. Si $\phi_1 = C_1$ et $\phi_2 = C_2$ sont deux intégrales premières du système adjoint :

$$\frac{dx}{P(x, y, Z)} = \frac{dy}{Q(x, y, Z)} = \frac{dZ}{R(x, y, Z)} \quad (\text{II.32})$$

l'intégrale générale est une fonction arbitraire :

$$\phi = \Omega(\phi_1, \phi_2)$$

et l'équation générale des surfaces intégrales de l'équation (II.26) peut s'écrire :

$$\Omega(\phi_1, \phi_2) = 0$$

Exercice II.3 Résoudre l'équation :

$$x \frac{\partial Z}{\partial x} + 2(y - a) \frac{\partial Z}{\partial y} = Z(x, y) \quad (\text{II.33})$$

[solution](#) :

Le système adjoint est :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2(y-a)} = \frac{dZ}{Z} \quad (\text{II.34})$$

De ce système, on obtient deux intégrales premières :

$$\begin{cases} Z = C_1 x \\ x^2 = C_2 (y - a) \end{cases} \quad (\text{II.35})$$

On a $C_1 = \Omega(C_2)$, soit :

$$Z(x, y) = x\Omega\left(\frac{x^2}{y-a}\right)$$

où Ω désigne une fonction arbitraire.

II.4 Facteur intégrant d'une forme différentielle du premier ordre à deux variables

II.4.1 Détermination d'un facteur intégrant de la forme $\mu(x, y)$

Nous avons vu dans le paragraphe I.3.3, comment déterminer les facteurs intégrants d'une forme différentielle non exacte de la forme $F(x)$ ou $F(y)$. Nous recherchons ici les facteurs intégrants de la forme $\mu(x, y)$

Soit

$$\delta V = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

une forme différentielle à 2 variables, telle que :

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$\mu(x, y)$ est un facteur intégrant, si

$$dU = \mu P(x, y)dx + \mu Q(x, y)dy$$

est une différentielle totale, c'est à dire si :

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$$

Soit :

$$Q \frac{\partial \mu}{\partial x} - P \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \quad (\text{II.36})$$

L'équation (II.36) est une équation linéaire aux dérivées partielles du 1^{er} ordre. le système adjoint s'écrit :

$$\boxed{\frac{dx}{Q} = -\frac{dy}{P} = \frac{d\mu}{\mu \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right)}}$$

En intégrant l'équation différentielle $Pdx + Qdy = 0$, on trouve une intégrale première. Soit $\phi(x, y) = C_1$ l'expression de cette intégrale première. On peut calculer y en fonction de x et C_1 . $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ deviennent alors des fonctions de x et C_1 de sorte que :

$$\frac{\partial \mu}{\mu} = \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx \quad (\text{II.37})$$

est une équation différentielle à variables séparées. En intégrant on trouve :

$$\mu = C_2 F(x, C_1)$$

soit :

$$F(x, \phi(x, y)) = G(x, y)$$

et

$$\frac{\mu}{G(x, y)}$$

est la seconde intégrale première du système adjoint. On trouve tous les facteurs intégrants en écrivant que $\frac{\mu}{G(x, y)}$ est une fonction de $\phi(x, y)$, soit :

$$\mu = G(x, y)H[\phi(x, y)]$$

H étant une fonction arbitraire d'une variable.

Exercice II.4 Trouver tous les facteurs intégrants de la forme différentielle :

$$\delta V = -ydx + xdy$$

.

solution :

Soit $M(x, y) = -y$ et $N(x, y) = x$.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial M}{\partial y} = -1 \\ \frac{\partial N}{\partial x} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \text{la différentielle } \delta V \text{ n'est pas exacte}$$

$\mu(x, y)$ est un facteur intégrant de δV si la forme différentielle

$$dU = -\mu ydx + \mu xdy$$

est exacte. μ doit donc vérifier :

$$\frac{\partial(\mu(-y))}{\partial y} = \frac{\partial(\mu x)}{\partial x}$$

soit :

$$-\mu - y \frac{\partial(\mu)}{\partial y} = \mu + \frac{\partial(\mu)}{\partial x}$$

soit :

$$2\mu + y \frac{\partial(\mu)}{\partial y} + \frac{\partial(\mu)}{\partial x} = 0$$

Le système adjoint à cette équation aux dérivées partielles est :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = -\frac{d\mu}{2\mu} \quad (\text{II.38})$$

Les intégrales premières de ce système adjoint sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} y = C_1 x \\ x^2 = \frac{C_2}{\mu} \end{array} \right. \quad (\text{II.39})$$

d'où :

$$\mu(x, y) = \frac{1}{x^2} \Omega\left(\frac{y}{x}\right)$$

Chapitre III

Equations aux dérivées partielles d'ordre n à 2 variables, linéaires et homogène, à coefficients constants

III.1 Définition

Soit :

$$\Omega(Z) = A_0 \frac{\partial^n Z}{\partial x^n} + A_1 \frac{\partial^n Z}{\partial x^{n-1} \partial y} + \dots + A_k \frac{\partial^n Z}{\partial x^{n-k} \partial y^k} + \dots + A_n \frac{\partial^n Z}{\partial y^n} = 0 \quad (\text{III.1})$$

où les A_i sont des coefficients constants. Considérons l'équation :

$$\varphi(r) = A_0 r^n + A_1 r^{n-1} + \dots + A_k r^{n-k} + \dots + A_n = 0 \quad (\text{III.2})$$

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ les racines réelles de cette équation. Si $\Omega(Z)$ désigne l'opérateur constituant l'équation (III.1), l'identité algébrique :

$$\varphi(r) = A_0 (Z - \alpha_1)(Z - \alpha_2) \dots (Z - \alpha_n) \quad (\text{III.3})$$

a pour conséquence l'identité symbolique :

$$\Omega(Z) = A_0 \left(\frac{\partial}{\partial x} - \alpha_1 \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y} \right) \dots \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \alpha_n \frac{\partial Z}{\partial y} \right) \quad (\text{III.4})$$

Si on introduit les inconnues auxiliaires Z_i , le système (III.10) est équivalent à l'équation (III.4) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Z}{\partial x} - \alpha_n \frac{\partial Z}{\partial y} = Z_{n-1} \\ \frac{\partial Z_{n-1}}{\partial x} - \alpha_{n-1} \frac{\partial Z_{n-1}}{\partial y} = Z_{n-2} \\ \vdots \\ \frac{\partial Z_{n-k}}{\partial x} - \alpha_{n-k} \frac{\partial Z_{n-k}}{\partial y} = Z_{n-k-1} \\ \vdots \\ \frac{\partial Z_1}{\partial x} - \alpha_1 \frac{\partial Z_1}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.5})$$

Ces diverses équations sont des équations linéaires aux dérivées partielles en Z_1 puis en Z_2, \dots, Z_{n-1} et Z .

exemple Pour $n = 2$, l'équation (III.1) s'écrit :

$$\Omega(Z) = A_0 \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + A_1 \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} + \dots + A_2 \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{III.6})$$

L'équation (III.4) devient :

$$\Omega(Z) = A_0 \left(\frac{\partial}{\partial x} - \alpha_1 \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \alpha_n \frac{\partial Z}{\partial y} \right) \quad (\text{III.7})$$

Si on développe l'équation (III.7), on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \alpha_1 \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \alpha_n \frac{\partial Z}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} - \alpha_2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} - \alpha_1 \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} + \alpha_1 \alpha_2 \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = 0 \\ &= \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} - (\alpha_1 + \alpha_2) \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} + \alpha_1 \alpha_2 \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = 0 \end{aligned}$$

D'où : $A_0 = 1$, $A_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2)$, $A_2 = \alpha_1 \alpha_2$ et

$$(r - \alpha_1)(r - \alpha_2) = r^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)r + \alpha_1 \alpha_2$$

III.2 Intégration

1^{re} étape Considérons tout d'abord :

$$\frac{\partial Z_1}{\partial x} - \alpha_1 \frac{\partial Z_1}{\partial y} = 0$$

Le système adjoint à cette équations aux différentielles partielles est :

$$\frac{dx}{1} = -\frac{dy}{\alpha_1} = \frac{dZ_1}{0} \quad (\text{III.8})$$

Les intégrales premières sont donc :

$$\begin{cases} C_1 = y + \alpha_1 x \\ C_2 = Z \end{cases} \quad (\text{III.9})$$

L'intégrale générale est alors :

$$Z_1 = \varphi_1(y + \alpha_1 x)$$

où φ_1 est une fonction arbitraire.

2^{me} étape Portons cette valeur de Z_1 dans l'équation :

$$\frac{\partial Z_2}{\partial x} - \alpha_2 \frac{\partial Z_2}{\partial y} = Z_1$$

Soit :

$$\frac{\partial Z_2}{\partial x} - \alpha_2 \frac{\partial Z_2}{\partial y} = \varphi_1(y + \alpha_1 x)$$

Le système adjoint à cette équation aux différentielles partielles est :

$$\frac{dx}{1} = -\frac{dy}{\alpha_2} = \frac{dZ_2}{\varphi_1(y + \alpha_1 x)} \quad (\text{III.10})$$

L'intégration dépend des valeurs respectives de α_1 et α_2 .

1. Premier cas : $\alpha_1 \neq \alpha_2$

$$\frac{dx}{1} = -\frac{dy}{\alpha_2} \Rightarrow y = \alpha_2 x = K$$

Il en résulte :

$$\varphi_1(y + \alpha_1 x) = \varphi_1[K + (\alpha_1 - \alpha_2)x]$$

Posons : $u = K + (\alpha_1 - \alpha_2)x$

$$du = (\alpha_1 - \alpha_2)dx$$

D'après le système adjoint (III.10), on a :

$$dZ_2 = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \varphi_1(u) du$$

Il apparaît comme nouvelle intégrale première :

$$Z_2 - \Phi_1(u) = K'$$

où $(\alpha_1 - \alpha_2)\Phi_1(u)$ est une primitive de $\varphi_1(u)$.

Soit :

$$Z_2 - \Phi_1(y + \alpha_1 x) = K'$$

L'intégrale générale s'obtient en écrivant que K' est une fonction arbitraire de K , $\Phi_2(K)$, soit :

$$Z_2 = K' + \Phi_1(y + \alpha_1 x) = \Phi_1(y + \alpha_1 x) + \Phi_2(y + \alpha_2 x)$$

2. Deuxième cas cas : $\alpha_1 = \alpha_2$ Le système adjoint s'écrit alors :

$$\frac{dx}{1} = -\frac{dy}{\alpha_1} = \frac{dZ_2}{\varphi_1(y + \alpha_1 x)} \quad (\text{III.11})$$

Il admet toujours comme intégrale première :

$$y + \alpha_1 x = K$$

d'où :

$$\frac{dx}{1} = \frac{dZ_2}{\varphi_1(K)}$$

soit :

$$Z_2 - x\varphi_1(K) = K'$$

$$Z_2 = x\varphi_1(K) + K'$$

L'intégrale générale s'obtient en écrivant que K' est une fonction arbitraire de K , soit :

$$Z_2 = x\varphi_1(y + \alpha_1 x) + \varphi_2(y + \alpha_2 x K)$$

3^{me} étape Résolution de :

$$\frac{\partial Z_3}{\partial x} - \alpha_3 \frac{\partial Z_3}{\partial y} = Z_2$$

Il faut distinguer suivant les valeurs de α_1 , α_2 et α_3 .

1. Premier cas : $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3$

Il faut résoudre :

$$\frac{\partial Z_3}{\partial x} - \alpha_3 \frac{\partial Z_3}{\partial y} = \Phi_1(y + \alpha_1 x) + \Phi_2(y + \alpha_2 x)$$

Le système adjoint associé à cette équation aux dérivées partielles est :

$$\frac{dx}{1} = -\frac{dy}{\alpha_3} = \frac{dZ_3}{\Phi_1(y + \alpha_1 x) + \Phi_2(y + \alpha_2 x)} \quad (\text{III.12})$$

Ce système admet comme intégrale première :

$$y + \alpha_3 x = C_1$$

Il en résulte que :

$$\Phi_1(y + \alpha_1 x) + \Phi_2(y + \alpha_2 x) = \Phi_1[(C_1 + (\alpha_1 - \alpha_3)x] + \Phi_2[(C_1 + (\alpha_2 - \alpha_3)x] \quad (\text{III.13})$$

$$= \Phi_1(u) + \Phi_2(v) \quad (\text{III.14})$$

en posant :

$$\begin{cases} u = C_1 + (\alpha_1 - \alpha_3)x = y + \alpha_1x \\ v = C_1 + (\alpha_2 - \alpha_3)x = y + \alpha_2x \end{cases} \quad (\text{III.15})$$

On a alors :

$$dZ_3 = [\Phi_1(u) + \Phi_2(v)] dx \quad (\text{III.16})$$

$$= \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_3} \Phi_1(u) du + \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_3} \Phi_2(v) dv \quad (\text{III.17})$$

D'où :

$$Z_3 = \Psi_1(u) + \Psi_1(v) + C_2 \quad (\text{III.18})$$

$$= \Psi_1(y + \alpha_1x) + \Psi_2(y + \alpha_2x) + C_2 \quad (\text{III.19})$$

$$Z_3 = \Psi_1(y + \alpha_1x) + \Psi_2(y + \alpha_2x) + \Psi_3(y + \alpha_3x)$$

2. Deuxième cas : $\alpha_2 = \alpha_3 \neq \alpha_1$ Il faut résoudre :

$$\frac{\partial Z_3}{\partial x} - \alpha_2 \frac{\partial Z_3}{\partial y} = \Phi_1(y + \alpha_1x) + \Phi_2(y + \alpha_2x)$$

Le système adjoint associé à cette équation aux dérivées partielles est :

$$\frac{dx}{1} = -\frac{dy}{\alpha_2} = \frac{dZ_3}{\Phi_1(y + \alpha_1x) + \Phi_2(y + \alpha_2x)} \quad (\text{III.20})$$

Ce système admet comme intégrale première :

$$y + \alpha_2x = C_1$$

Il en résulte que :

$$\Phi_1(y + \alpha_1x) + \Phi_2(y + \alpha_2x) = \Phi_1[(C_3 + (\alpha_1 - \alpha_2)x] + \Phi_2(C_3) \quad (\text{III.21})$$

$$= \Phi_1(w) + \Phi_2(C_3) \quad (\text{III.22})$$

En posant :

$$w = C_3 + (\alpha_1 - \alpha_2)x = y + \alpha_1x$$

On a alors :

$$dZ_3 = [\Phi_1(w) + \Phi_2(C_3)] dx \quad (\text{III.23})$$

$$= \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \Phi_1(w) dw + \Phi_2(C_3) dx \quad (\text{III.24})$$

d'où :

$$Z_3 = \Theta(w) + x\Phi_2(C_3) + C_4 \quad (\text{III.25})$$

$$= \Theta(y + \alpha_1x) + x\Phi_2(y + \alpha_2x) + C_4 \quad (\text{III.26})$$

L'intégrale générale sera donc :

$$Z_3 = \Theta(y + \alpha_1x) + x\Phi_2(y + \alpha_2x) + \Psi_3(y + \alpha_2x)$$

3. Troisième cas : $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ Il faut résoudre :

$$\frac{\partial Z_3}{\partial x} - \alpha_1 \frac{\partial Z_3}{\partial y} = x\Phi_1(y + \alpha_1x) + \Phi_2(y + \alpha_1x)$$

Le système adjoint associé à cette équation aux dérivées partielles est :

$$\frac{dx}{1} = -\frac{dy}{\alpha_1} = \frac{dZ_3}{x\Phi_1(y + \alpha_1x) + \Phi_2(y + \alpha_1x)} \quad (\text{III.27})$$

Ce système admet comme intégrale première :

$$y + \alpha_1 x = C_5$$

Il en résulte que :

$$x\Phi_1(y + \alpha_1 x) + \Phi_2(y + \alpha_1 x) = x\Phi_1(C_5) + \Phi_2(C_5)$$

On a alors :

$$dZ_3 = x\Phi_1(C_5)dx + \Phi_2(C_5)dx$$

d'où :

$$Z_3 = x^2\Omega_1(C_5) + x\Omega_2(C_5) + C_6 \quad (\text{III.28})$$

$$= x^2\Omega_1(y + \alpha_1 x) + x\Omega_2(y + \alpha_1 x) + C_6 \quad (\text{III.29})$$

L'intégrale générale sera donc :

$$Z_3 = x^2\Omega_1(y + \alpha_1 x) + x\Omega_2(y + \alpha_1 x) + \Omega_3(y + \alpha_1 x)$$

III.3 Généralisation

1. Si l'équation caractéristique $\varphi(r) = 0$ n'admet que des racines simples $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, l'intégrale générale est donnée par :

$$Z = \Phi_1(y + \alpha_1 x) + \Phi_2(y + \alpha_2 x) + \dots + \Phi_n(y + \alpha_n x) \quad (\text{III.30})$$

où les (Φ_i) sont des fonctions arbitraires d'une variable.

2. Si l'équation caractéristique $\varphi(r) = 0$ admet des racines multiples α_k d'ordre p_k à chaque racine correspond un polynôme entier de degré $(p_i - 1)$ en x de la forme :

$$\Phi_1(y + \alpha_k x) + x\Phi_2(y + \alpha_k x) + x^2\Phi_3(y + \alpha_k x) + \dots + x^{(p_k-1)}\Phi_{p_k}(y + \alpha_k x)$$

où les (Φ_i) sont des fonctions arbitraires d'une variable.

Exercice III.1 Résoudre l'équation aux dérivées partielles d'ordre 3 suivante :

$$\frac{\partial^3 Z}{\partial x^3} - 2\frac{\partial^3 Z}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 Z}{\partial x \partial y^2} + 2\frac{\partial^3 Z}{\partial y^3} = 0 \quad (\text{III.31})$$

solution :

L'équation caractéristique est :

$$r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0 \quad (\text{III.32})$$

Soit

$$(r - 1)(r + 1)(r - 2) = 0$$

l'équation (III.32) n'admet que des racines simples, d'où :

$$Z(x, y) = Z = \Phi_1(y + x) + \Phi_2(y - x) + \dots + \Phi_3(y + 2x)$$

III.4 Equations aux dérivées partielles à 3 variables, linéaires et homogène, à coefficients constants

Soit la différentielle :

$$dZ = A(x, y, Z)dx + B(x, y, Z)dy \quad (\text{III.33})$$

où dx, dy , et dZ désignent les différentielles de 3 variables parmi les quelles 2 sont indépendantes, par exemple x et y . Si on considère $Z(x,y)$ comme une fonction inconnues des 2 variables indépendantes x et y , l'équation (III.33) est équivalente aux deux équations aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial x} = A(x, y, Z) \\ \frac{\partial Z}{\partial y} = B(x, y, Z) \end{cases} \quad (\text{III.34})$$

En calculant les dérivées d'ordre 2, successivement par rapport à y , puis par rapport à x , on établit :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial A}{\partial y} + B \frac{\partial A}{\partial Z} \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial x} + A \frac{\partial B}{\partial Z} \end{cases} \quad (\text{III.35})$$

D'après l'égalité des dérivées secondes :

$$\frac{\partial A}{\partial y} + B \frac{\partial A}{\partial Z} = \frac{\partial B}{\partial x} + A \frac{\partial B}{\partial Z} \quad (\text{III.36})$$

Si la relation (IV.2) est vérifiée, x et y étant des variables indépendantes, l'équation (III.33) est complètement intégrable.

démonstration Considérons l'équation :

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = A(x, y, Z) \quad (\text{III.37})$$

considérée comme une équation différentielle ordinaire du premier ordre entre la fonction Z et la variable indépendante x . Son intégrale générale dépend de x et y et de la constante d'intégration $\gamma(y)$. Soit $Z = \varphi[x, y, \gamma(y)]$ Ainsi l'équation :

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = B(x, y, Z) \quad (\text{III.38})$$

devient :

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = B(x, y, \varphi[x, y, \gamma(y)]) \quad (\text{III.39})$$

par ailleurs,

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \varphi[x, y, \gamma(y)] \quad (\text{III.40})$$

D'où :

$$B(x, y, \varphi[x, y, K(y)]) = \frac{\partial}{\partial y} \varphi[x, y, \gamma(y)] \quad (\text{III.41})$$

Soit :

$$B(x, y, \varphi[x, y, K(y)]) = \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial y}$$

En dérivant le second terme de l'équation (IV.10) par rapport à y , on trouve :

$$\frac{\partial \gamma}{\partial y} = \frac{B(x, y, \varphi[x, y, K(y)]) - \frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}} \quad (\text{III.42})$$

Montrons que cette dernière équation est une équation différentielle ordinaire en entre γ et y seuls, c'est à dire que le second membre ne dépend pas de x . Pour cela, il suffit de montrer que la dérivée du second membre par rapport à x est nul. Soit :

$$C = \frac{B(x, y, \varphi[x, y, K(y)]) - \frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}}$$

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} \left[\frac{B}{\partial x} + \frac{B}{\partial Z} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right] - \left[B - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \gamma \partial x} \quad (\text{III.43})$$

Nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = A(x, y, \varphi) \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial Z} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \gamma} = \frac{\partial A}{\partial Z} \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} \end{array} \right. \quad (\text{III.44})$$

En remplaçant ces équations dans l'équation (III.43), on obtient :

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} \left[\frac{B}{\partial x} + A \frac{B}{\partial Z} - \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial Z} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] - \left[B - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] \frac{\partial A}{\partial Z} \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} \quad (\text{III.45})$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} \left[\frac{B}{\partial x} + A \frac{B}{\partial Z} - \frac{\partial A}{\partial y} - B \frac{\partial A}{\partial Z} \right] \quad (\text{III.46})$$

Donc, Si la relation (IV.2) :

$$\frac{\partial A}{\partial y} + B \frac{\partial A}{\partial Z} = \frac{\partial B}{\partial x} + A \frac{\partial B}{\partial Z} \quad (\text{III.47})$$

est vérifiée, alors $\frac{\partial C}{\partial x} = 0$ et donc la différentielle est complètement intégrable.

Exercice III.2 Soit :

$$dZ = \frac{x}{Z} dx + \frac{y}{Z} dy \quad (\text{III.48})$$

solution :

posons : $A = \frac{x}{Z}$ et $B = \frac{y}{Z}$

dZ est complètement intégrable si la relation (IV.2) est vérifiée. Soit si :

$$\frac{\partial A}{\partial y} + B \frac{\partial A}{\partial Z} = \frac{\partial B}{\partial x} + A \frac{\partial B}{\partial Z} \quad (\text{III.49})$$

Or :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A}{\partial y} + B \frac{\partial A}{\partial Z} = \frac{y}{Z} \frac{-x}{Z^2} = \frac{-xy}{Z^3} \\ \frac{\partial B}{\partial x} + A \frac{\partial B}{\partial Z} = \frac{x}{Z} \frac{-y}{Z^2} = \frac{-xy}{Z^3} \end{array} \right. \quad (\text{III.50})$$

La relation (IV.2) est bien vérifiée, dZ est donc complètement intégrable. On a :

$$ZdZ = xdx + ydy \quad (\text{III.51})$$

d'où :

$$x^2 + y^2 + C = Z^2$$

Chapitre IV

Equations non linéaires aux dérivées partielles du premier ordre

IV.1 Méthode d'intégration

On cherche à résoudre des équations du type :

$$F(x, y, Z, \frac{\partial Z}{\partial x}, \frac{\partial Z}{\partial y}) = 0 \quad (\text{IV.1})$$

par exemple :

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2 = a^2$$

Soit $p = \frac{\partial Z}{\partial x}$ et $q = \frac{\partial Z}{\partial y}$.

A l'équation à résoudre $F(x, y, Z, p, q) = 0$, associons une seconde équation de la forme :

$$G(x, y, Z, p, q) = \lambda$$

où λ est un paramètre, et cherchons à déterminer G , fonction de 5 variables telle que ces deux équations soient compatibles. leurs solutions communes dépendent alors d'une constante d'intégration μ de sorte qu'elles constituent une solution de $F = 0$ dépendant alors de λ et de μ . Pour former la condition de compatibilité, on tire p et q des 2 équations. Ce sont des fonctions de x, y et Z et l'on écrit :

$$dZ = p dx + q dy$$

est complètement intégrable si :

$$\frac{\partial p}{\partial y} + q \frac{\partial p}{\partial Z} = \frac{\partial q}{\partial x} + p \frac{\partial q}{\partial Z} \quad (\text{IV.2})$$

On calcule des dérivées de p et q en dérivant les 2 équations par rapport à x, y et Z , considérées comme

variables indépendantes :

$$\left. \begin{aligned} F_x + \frac{\partial p}{\partial x} F_p + \frac{\partial q}{\partial x} F_q &= 0 \\ F_y + \frac{\partial p}{\partial y} F_p + \frac{\partial q}{\partial y} F_q &= 0 \\ F_Z + \frac{\partial p}{\partial Z} F_p + \frac{\partial q}{\partial Z} F_q &= 0 \\ G_x + \frac{\partial p}{\partial x} G_p + \frac{\partial q}{\partial x} G_q &= 0 \\ G_y + \frac{\partial p}{\partial y} G_p + \frac{\partial q}{\partial y} G_q &= 0 \\ G_Z + \frac{\partial p}{\partial Z} G_p + \frac{\partial q}{\partial Z} G_q &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (IV.3)$$

Remarque : On a ainsi considéré p et q comme des fonctions de x , y et Z variables indépendantes. C'est seulement en écrivant la condition d'intégrabilité que l'on considère que Z est une fonction de x et y . On a ainsi :

$$\left. \begin{aligned} (F_p G_q - F_q G_p) \frac{\partial p}{\partial x} &= F_q G_y - F_y G_q \\ (F_p G_q - F_q G_p) \frac{\partial q}{\partial x} &= F_x G_p - F_p G_x \\ (F_p G_q - F_q G_p) \frac{\partial p}{\partial Z} &= F_q G_Z - F_Z G_q \\ (F_p G_q - F_q G_p) \frac{\partial q}{\partial Z} &= F_Z G_p - F_p G_Z \end{aligned} \right\} \quad (IV.4)$$

Or, $F_p G_q - F_q G_p$ est le déterminant du jacobien de F et G par rapport aux variables p et q . Comme F et G ne sont pas liées, ce déterminant est non nul. Donc

$$F_p G_q - F_q G_p \neq 0$$

la condition d'intégrabilité s'écrit donc :

$$F_q G_y - F_y G_q + q(F_q G_Z - F_Z G_q) = F_x G_p - F_p G_x + p(F_Z G_p - F_p G_Z)$$

soit :

$$F_p G_x + F_q G_y + (pF_p - qF_q)G_Z - (F_x + pF_Z)G_p - (F_y + qF_Z)G_q = 0 \quad (IV.5)$$

L'équation (IV.10) est une équation aux dérivées partielles, linéaire, homogène de la fonction G de 5 variables. Le système adjoint associé est :

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dZ}{pF_p - qF_q} = \frac{dp}{F_x + pF_Z} = \frac{dq}{F_y + qF_Z} \quad (IV.6)$$

Toute intégrale première de ce système contenant effectivement p ou q fournit une fonction $G(x, y, Z, p, q)$. Il n'est pas nécessaire de connaître toutes les intégrales premières. Il suffit d'en connaître une, puis on intègre le système :

$$\begin{cases} F = 0 \\ G - \lambda = 0 \end{cases} \quad (IV.7)$$

qui est un système complètement intégrable d'après la condition d'intégrabilité. On tire alors p et q et on intègre la différentielle :

$$dZ = p dx + q dy$$

1. On intègre $G - \lambda = 0$ en la considérant comme une équation différentielle ordinaire en x et z s'il y a p dans G ou en y et Z s'il y a q dans G . l'intégration est alors fonction d'une constante $\Psi(y)$ ou $\Psi(x)$.
2. On intègre ensuite la deuxième équation qui est une équation différentielle relative à $\Psi(y)$ ou $\Psi(x)$.

Exercice IV.1 Résoudre :

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2 = a^2$$

solution :

Posons :

$$p = \frac{\partial Z}{\partial x}$$

et

$$q = \frac{\partial Z}{\partial y}$$

On doit résoudre :

$$p^2 + q^2 = a^2$$

on a :

$$F_x = 0; F_y = 0; f_Z = 0 F_p = 2p F_q = 2q$$

Le système adjoint s'écrit :

$$\frac{dx}{2p} = \frac{dy}{2q} = \frac{dZ}{2p^2 + 2q^2} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{0} \quad (\text{IV.8})$$

d'où :

$$p = C_1$$

et

$$q = C_2$$

d'où :

$$\frac{dx}{C_1} = \frac{dy}{C_2} \Rightarrow \frac{y}{C_2} - \frac{x}{C_1} = C_3 \quad (\text{IV.9})$$

et

$$\frac{dx}{C_1} = \frac{dZ}{p^2 + q^2} = \frac{dZ}{a^2} \Rightarrow \frac{Z}{a^2} - \frac{x}{C_1} = C_4 \quad (\text{IV.10})$$

Parmi ces quatre intégrales premières, il suffit d'en choisir une seule pour résoudre le problème. Prenons par exemple : $p = C_1$ on doit intégrer le système :

$$\begin{cases} p^2 + q^2 = a^2 \\ p = C_1 \end{cases} \quad (\text{IV.11})$$

si on pose $C_1 = a \cos \lambda$ alors

$$p = a \cos \lambda = \frac{\partial Z}{\partial x}$$

et

$$q = a \sin \lambda = \frac{\partial Z}{\partial y}$$

d'où :

$$dZ = a \cos \lambda dx + a \sin \lambda dy$$

d'où

$$Z = a x \cos \lambda + a y \sin \lambda + \mu$$