Université Djillali liabes de Sidi Bel Abbès
Faculté des sciences exactes
Département de Proabilités et Statistique
2023-2024

Corrigé d'examen fonctionelle

Toute méthode juste est acceptée

Solution 1. (**8 points**)

1. (L'inégalité de Cauchy Schwartz) Si $x, y \in E$ où E est espace hilbertien, alors

$$| < x, y > | \leq \|x\|\|y\|, \ldots \textbf{ 2 points} \tag{1}$$

ou la norme $\| \cdot \|$ est définie dans (1).

Proof Le produit scalaire positif, on a

$$< \lambda x - \beta y, \lambda x - \beta > \geq 0$$

pour tout $x, y \in E$ et $\lambda, \beta \in \mathbb{C}$.

Par la décomposition du produit scalaire et on utilisant 1, implique que

$$\overline{\lambda}\beta < x, y > + \lambda\overline{\beta} < y, x > \leq |\lambda|^2\|x\|^2 + |\beta|^2\|y\|^2.$$

Si $< x, y >= re^{i\theta}$, où $r = | < x, y > |$ et $\theta = arg < x, y >$, alors on pose

$$\lambda = \|y\|e^{i\theta}, \quad \beta = \|x\|.$$

implique

$$2\|x\|\|y\|| < x, y > | \leq 2\|x\|^2\|y\|^2,$$
$$| < x, y > | \leq \|x\|\|y\| \ldots \textbf{ 2 points}$$

2. Soit $T \in \mathcal{L}((E, \| \cdot \|_E), (F, \| \cdot \|_F))$ tel que E, F deux espaces vectoriels normés.

(a) T continue $\Rightarrow T$ est bornée

On a

$$T \text{ continue } \Leftrightarrow \forall x, y \in E \ \forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \|x - y\|_E \leq \eta \Rightarrow \|T(x) - T(y)\|_F \leq \varepsilon$$

prenant $y = 0$ ET $\varepsilon = 1$ on obtient

$$\forall x, \in E \ \forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \|x\|_E \leq \eta \Rightarrow \|T(x)\|_F \leq 1 \tag{2}$$

Soit $y = \dfrac{\delta}{2\|x\|}x \Rightarrow \|y\| \leq \dfrac{\delta}{2} \leq \delta$.

D'autre part $x = \dfrac{2\|x\|}{\delta}y$

$$\begin{aligned}
\|T(x)\|_F &= \left\| T\left(\frac{2\|x\|}{\delta}y\right) \right\|_F \\
&= \frac{2\|x\|}{\delta}\|T(y)\|_F \ldots (T \text{ une application linéaire}) \\
&\leq \frac{2\|x\|}{\delta} \ldots (\text{ on utilisant l'inégalité 2})
\end{aligned}$$

alors

$$\frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq \frac{2}{\delta} = M \Rightarrow T\text{est bornée....}\textbf{2 points} \tag{3}$$

(B) T continue $\Rightarrow T$ est Lipschitzienne.

Soit $x \in E$, tel que $x = y - z$ avec $y, z \in E$ alors

$$\begin{aligned} M \geq \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E} &= \frac{\|T(y-z)\|_F}{\|y-z\|_E} \\ &\leq \frac{\|T(y)-T(z)\|_F}{\|y-z\|_E}...(T \text{ est linéaire et } (3)) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\|T(y)-T(z)\|_F}{\|y-z\|_E} &\leq M \Rightarrow \exists M > 0 \text{ tel que} \|T(y)-T(z)\|_F \leq M\|y-z\|_E \\ &\Rightarrow T \text{ est lipschitzienne....} textbf2points \end{aligned}$$

Solution 2. (**4 point**)

On a

$$\|x+y\|^2 = (\|x\|^2 + 2Re < x, y > + \|y\|^2, ...\textbf{0.5 point} \tag{4}$$

$$\|x-y\|^2 = (\|x\|^2 - 2Re < x, y > + \|y\|^2....\textbf{0.5 point} \tag{5}$$

d'où

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, ..\textbf{0.5 point} \tag{6}$$

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4Re < x, y > ..\textbf{0.5 point} \tag{7}$$

Nous avons donc démontré l'identité du parallélogramme. Nous en déduisons également

$$Re < x, y >= \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2); ..\textbf{0.5 point} \tag{8}$$

$$Im < x, y >= Re(-i < x, y >) = Re(< x, iy >) = \frac{1}{4}(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)..\textbf{0.5 point} \tag{9}$$

On obtient le resultat.

$$\Rightarrow 2\langle u, v\rangle = 2(Re\langle u, v\rangle + i\ Im\langle u, v\rangle)$$

$$= \left[\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - i\|u+iv\|^2)\right] ....\textbf{0.5 point}$$

d'où

$$2\langle u, v\rangle == \left[\|u+v\|^2 + i\|u+iv\|^2 + (1+i)(\|u\|^2 + i\|v\|^2)\right] ..\textbf{0.5 point}$$

Solution 3. (**8 points**)

Soit $E = C^1 = ([0,1])$ l'espace vectoriel (réel) des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fois continument dérivables.

1.

$$\|f\| = |f(0)| + \left(\int_0^1 (f'(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme $f \in C^1 = ([0,1]))$, alors f' et par conséquent $(f')^2$ est continue sur $[0,1]$, et donc $(f')^2$ est intégrable sur $[0,1]$.

a) Saparation. Soit $f \in C^1[0,1]$: on a :

$\|f\| = 0 \Rightarrow |f(0)| + \left(\int_0^1 (f'(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = 0$ ...**0.5 point**

$$\left\{ \begin{array}{ll} |f(0)| = 0, & \text{et} \\ \left(\int_0^1 (f'(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = 0, & \end{array} \right. ..\textbf{0.5 point} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} |f(0)| = 0, & \text{et} \\ \int_0^1 (f'(x))^2 dx = 0, & \end{array} \right. \textbf{0.5 point}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} |f(0)| = 0, & \text{et} \\ f'(x) = 0, & \forall x \in [0,1] \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} |f(0)| = 0, & \text{et} \\ f = cst, & \forall x \in [0,1], \end{array} \right. \Rightarrow f = 0 ...\textbf{1 point}$$

b) l'homogénéité. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in C^1[0,1]$, nous avons

$$\begin{aligned} \|\alpha f\| &= |\alpha f(0)| + \left(\int_0^1 (\alpha f'(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |\alpha||f(0)| + \left(\alpha^2 \int_0^1 (f'(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |\alpha| \left\{ |f(0)| + \left(\int_0^1 (f'(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \right\} \end{aligned}$$

$|\alpha|\|f\|$...**1 point**

c) Inégalité triangulaire. Soit , $f, g \in C([0,1])$. On a

$$\begin{aligned} \|f+g\| &= |(f+g)(0)| + \left(\int_0^1 ((f+g)'(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |f(0)+g(0)| + \left(\int_0^1 (f'(x)+g'(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |f(0)| + |g(0)| + \left(\int_0^1 (f'(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^1 (g'(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|f\| + \|g\| ...\textbf{1 point} \end{aligned}$$

Conclusion $\|\cdot\|$ est une norme

2. Montrer que

$$\exists \alpha \;\text{ tel que }\; \forall f \in E : \; \|f\|_\infty \leq \alpha \|f\|.$$

Soit $f \in C^1[0,1]$, on a :

$$f(x) = f(0) + \int_0^1 (f'(x))^2 dx, \; \forall x \in [0,1];$$

d'où

$$|f(x)| \leq |f(0)| + \left|\int_0^1 (f'(x))^2 dx\right| ...\textbf{0.5 point}$$

appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$|f(x)| \;\leq\; |f(0)| + \left(\int_0^1 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 (f'(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} ...\textbf{1 point}$$

$$
\begin{aligned}
&= |f(0)| + \sqrt{x}\left(\int_0^1 (f'(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \text{...}\textbf{0.5 point} \\
&\leq |f(0)| + \left(\int_0^1 (f'(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \forall x \in [0,1]; \text{...}\textbf{0.5 point}
\end{aligned}
$$

Ainsi $\forall x \in [0,1],\ |f(x)| \leq \|f\|$, d'où $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \leq \|f\|$

3. Considérons la suite de fonctions f_n définie par

$$f_n(x) = \frac{\sin(n\pi x)}{n}$$

Montrons que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|f_n\|}{\|f_n\|_\infty} = +\infty$$

Pour tout $n \geq 1, f_n \in E$; et

$$
\begin{aligned}
\|f_n\| &= |f_n(0)| + \left(\int_0^1 (f_n'(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 0 + \pi\left(\int_0^1 \cos^2(nx) dx\right)^{\frac{1}{2}} \text{...}\textbf{0.5 point} \\
&= \pi\left(\int_0^1 \frac{1+\cos(2nx)}{2} dx\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \text{...}\textbf{1 point}
\end{aligned}
$$

d'où

$$\frac{1}{\|f_n\|_\infty} \geq n,\ \forall n \geq 1$$

Par conséquent

$$\frac{\|f_n\|}{\|f_n\|_\infty} \geq n\frac{\pi}{\sqrt{2}},\ \forall n \geq 1\text{...}\textbf{1 point}$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|f_n\|}{\|f_n\|_\infty} = +\infty\text{...}\textbf{0.5 point}$$

Donc les deux normes ne sont pas équivalentes.