

①

Corrigé ~~Kappa~~ de la série d'exos n° 4

Exon : $C_1 = 0 \stackrel{\text{cte}}{\Rightarrow} C_1$ est $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ -mesurable
 Raisonnons par récurrence que C_n est \mathcal{F}_{n-1} -mesurable
 Supposons, alors que C_n est \mathcal{F}_{n-1} -mesurable pour
 un certain $n = 1, 2, \dots$. Donn :

$$\underbrace{\{C_n = 0, \underbrace{X_n < a}_{\mathcal{F}_n\text{-mes}}\}}_{\substack{\mathcal{F}_{n-1}\text{-mes} \\ \cap \\ \mathcal{F}_n}} \cup \underbrace{\{C_n = 1, \underbrace{X_n \leq b}_{\mathcal{F}_n\text{-mes}}\}}_{\substack{\mathcal{F}_{n-1}\text{-mes} \\ \cap \\ \mathcal{F}_n}} \in \mathcal{F}_n$$

Car

et par ce qui signifie que :

$$C_{n+1} = \mathbb{1}_{\{C_n = 0, X_n < a\} \cup \{C_n = 1, X_n \leq b\}}$$

est \mathcal{F}_n -mesurable.

Conclusion : (C_n) est une stratégie de jeu.

Exo2:

Pour une surmartingale positive :

(9)

$$\sup_n \mathbb{E}|X_n| = \sup_n \mathbb{P} \mathbb{E} X_n \leq \mathbb{E} X_1 = \mathbb{E}|X_1| < \infty$$

Car : $(\mathbb{E} X_n)_n \searrow$.

Donc par le th^m de la cuge des mart. de Doob entraîne que X_n cuge p.s. vers une limite intégrable.

Exo3: On a: ~~$\mathbb{E}(|X_n|)^p$~~ $\mathbb{E}|X_n|^p \leq \mathbb{E}|X_n|^p$

Car ~~$X_n^+ \leq |X_n|$~~ et ~~$X_n^- \leq |X_n|$~~

Inégalité de Jensen.

et d'après le th^m de la cuge des mart. de Doob. $X_n \rightarrow X \in L^1$ p.s.

et d'après l'inégalité maximale de Doob de L^p :

$$\mathbb{E} \left(\left[\sup_{0 \leq m \leq n} |X_m| \right]^p \right) \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \mathbb{E}(|X_n|^p) < \infty$$

\downarrow
 Y_n

$\mathbb{E}|Y_n|^p < \infty$ et $Y_n \nearrow \sup_n |X_n|$

$\Rightarrow \lim \mathbb{E}|Y_n|^p = \mathbb{E}(\lim |Y_n|)^p = \mathbb{E}(\sup_n |X_n|)^p$

i.e. $\sup_n |X_n| \in L^p$

3

Nils, Berglund.

6.3. CONVERGENCE DANS L^p , $p > 1$

43

Exo 3

Théorème 6.3.1 (Convergence d'une martingale dans L^p). Soit X_n une martingale telle que $\sup_n \mathbb{E}(|X_n|^p) < \infty$ pour un $p > 1$. Alors X_n converge vers une variable aléatoire X presque sûrement et dans L^p .

DÉMONSTRATION. On a $(\mathbb{E}(X_n^+))^p \leq (\mathbb{E}(|X_n|))^p \leq \mathbb{E}(|X_n|^p)$. Donc par le Théorème 6.2.2, X_n converge presque sûrement vers une variable X . Par le corollaire (5.2.7), X_n converge dans L^1 .

$$\mathbb{E}\left(\left[\sup_{0 \leq m \leq n} |X_m|\right]^p\right) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}(|X_n|^p). \quad (6.3.1)$$

Faisant tendre n vers l'infini, le théorème de la convergence monotone montre que $\sup_n |X_n|$ est dans L^p . Comme $|X_n - X|^p \leq (2 \sup_n |X_n|)^p$, le théorème de la convergence dominée montre que $\mathbb{E}(|X_n - X|^p) \rightarrow 0$. \square

Dans la suite, nous considérons plus particulièrement le cas $p = 2$. Rappelons que si une martingale X_n est dans L^2 , on peut définir son processus croissant

$$\langle X \rangle_n = \sum_{m=1}^n \mathbb{E}((X_m - X_{m-1})^2 | \mathcal{F}_{m-1}). \quad (6.3.2)$$

La croissance implique que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle X \rangle_n =: \langle X \rangle_\infty \quad (6.3.3)$$

existe dans $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$. Cette quantité s'interprète comme la variance totale de la trajectoire $X_n(\omega)$.

Exercice supplémentaire

Proposition 6.3.2. Soit X_n une martingale dans L^2 telle que $X_0 = 0$. Alors

$$\mathbb{E}\left(\sup_n X_n^2\right) \leq 4\mathbb{E}(\langle X \rangle_\infty). \quad (6.3.4)$$

DÉMONSTRATION. L'inégalité du maximum L^2 donne

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq m \leq n} X_m^2\right) \leq 4\mathbb{E}(X_n^2) = 4\mathbb{E}(\langle X \rangle_n), \quad (6.3.5)$$

puisque $\mathbb{E}(X_n^2) = \mathbb{E}(M_n) + \mathbb{E}(\langle X \rangle_n)$ et $\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}(M_0) = \mathbb{E}(X_0^2) = 0$. Le résultat suit alors du théorème de convergence monotone. \square

Théorème 6.3.3. La limite $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega)$ existe et est finie presque sûrement sur l'ensemble $\{\omega : \langle X \rangle_\infty(\omega) < \infty\}$.

DÉMONSTRATION. Soit $a > 0$. Comme $\langle X \rangle_{n+1} \leq \mathcal{F}_n$, $N = \inf\{n : \langle X \rangle_{n+1} > a^2\}$ est un temps d'arrêt. Comme $\langle X \rangle_{N \wedge n} < a^2$, la proposition ci-dessus appliquée à $X_{N \wedge n}$ donne

$$\mathbb{E}\left(\sup_n |X_{N \wedge n}|^2\right) \leq 4a^2. \quad (6.3.6)$$

Par conséquent, le théorème 6.3.1 avec $p = 2$ implique que la limite de $X_{N \wedge n}$ existe et est finie presque sûrement. Le résultat suit alors du fait que a est arbitraire. \square

Exo3 (suite) :-

et comme: $\underbrace{|X_n - X|^p}_{\substack{\uparrow \\ Z_n \rightarrow 0 \text{ p.s}}} \leq [2 \sup_n |X_n|]^p \in L^1$

D'après le THM de convergence dominée:

$$\mathbb{E} Z_n \rightarrow 0 \quad \text{i.e.} \quad \mathbb{E} |X_n - X|^p \rightarrow 0$$

c.a.d., $X_n \xrightarrow{L^p} X$.

4