# Théorie des Files d'Attente.

La théorie des files d'attente est une théorie mathématique relevant du domaine des probabilités, qui étudie les solutions optimales de gestion des files d'attente. Elle peut s'appliquer à différentes situations tel que : gestion des avions au décollage ou à l'atterrissage, stockage des programmes informatiques, attente des clients aux guichets, etc….

Le modèle d'un phénomène d'une file d'attente peut être résumé comme suit :

Des clients arrivent à un certain endroit et réclame un certain service. Les instants d'arriver et les durées de services sont généralement des variables aléatoires.

Un système d'attente comprend donc un espace de service avec une ou plusieurs stations de services et un espace d'attente.

<u>Caractéristiques d'un système d'attente :</u>

Pour identifier un système d'attente, on a besoin des caractéristiques suivantes :

1) La nature stochastique du processus d'arriver.
2) La distribution du temps aléatoire de service.
3) Le nombre $s$ de stations de services qui sont monté en parallèle.
4) La capacité $N$ du système.

On suppose que toutes les variables aléatoires introduites pour décrire un phénomène d'attente sont indépendantes.

Pour la classification des systèmes d'attente, on utilise la notation suivante : $A \setminus B \setminus s \setminus N$

Tel que :

$A$:  Distribution des temps entre deux arrivées successives.

$B$: Distribution des durées de services.

$s$: Le nombre de postes de services monté en parallèle.

$N$: Capacité du système.

Pour spécifier les distributions $A \ et \ B$ , on introduit les symboles suivants :

$M$: Distribution exponentielle.

$E_k$: Distribution d'Erlang d'ordre $k$ .

$G$: Distribution générale.

$D$: Un cas déterministe (la variable ne prend qu'une seul valeur).

<u>Exemple :</u> La notation $M \setminus D \setminus 1 \setminus 4$ , définit un système d'attente comprenant une station de service de capacité d'espace d'attente qui vaut 4-1=3. Le processus d'arriver est poissonnien et la durée de service est constante.

De plus des notations introduites ci-dessus, on utilisera les grandeurs suivantes :

<u>Classification d'un système d'attente :</u>

Pour complètement spécifier un système d'attente, on doit caractériser le processus d'arriver des clients, le temps de service ainsi que la structure et la discipline de service de la file d'attente.

- <u>Processus d'arrivées</u> : La nature stochastique du processus des arrivées (ou flux d'entrée) est défini par la distribution des intervalles séparant deux arrivées successives. La plupart du temps l'arrivée des clients à un système d'attente est supposée décrite par un processus de poisson. On note :
  $\lambda$: Taux d'arriver. Et,
  $\frac{1}{\lambda}$: L'intervalle moyen séparant deux arrivées consécutives.

- <u>Temps de service</u> : Le temps de service est le temps séparant le début et la fin du service. Un instant de départ correspond toujours à une fin de service, mais ne correspond pas forcément à un début de service. Il se peut qu'un client qui quitte le système laisse celle-ci vide. Le serveur est alors inoccupé jusqu'à l'arriver du prochain client. On note :

$\mu$ : Taux de service. Et,

$\frac{1}{\mu}$: La durée moyenne de service.

- Nombres de Serveurs : Un système d'attente peut disposer d'un ou plusieurs serveurs $s$ . La plupart du temps, les serveurs sont supposés identiques (ont la même distribution) et indépendantes les unes des autres.
- Capacité du système : La capacité su système $N$ peut être finie ou infinie. Si, la capacité est limitée, la file ne peut dépasser une longueur de $N - s$ unitées. Dans cas, certains clients qui arrivent vers le système n'ont pas la possibilité d'y entrer.

Discipline du système : La discipline de service détermine l'ordre dans lequel les clients sont rangés dans la file et y sont retirés pour recevoir un service. Les disciplines les plus courantes sont :

- FIFO (first in first out), premier arrivé premier servi.
- LIFO (last in first out), dernier arrive premier servi.
- RANDOM (aléatoire), le client est choisi aléatoirement.

Analyse Mathématique :

Il est nécessaire d'introduire un processus stochastique définit de façon approprié.

On s'intéresse ici au nombre $X(t)$ de clients se trouvant dans le système à l'instant $t$ $(t \geq 0)$ . C.à.d, on cherche à calculer les probabilités des temps : $P_n(t) = P(X(t) = n)$ qui définissent le régime transitoire du processus stochastique $\{X(t); t \geq 0\}$ .

Le régime stationnaire du processus stochastique est définit par :

$P_n = \lim_{t \to +\infty} P_n(t) = P(X(+\infty) = n)$ .