1 Formule d'Itô

La formule d'Itô est l'essentiel de ce cours. Nous en donnons une démonstration basée sur la formule d'intégration par parties, qui sera démontrée en T.D..

Théorème: (*Formule d'Itô*)

Soit X une semi-martingale bornée et soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Alors $F(X_t)$ est une semi-martingale et on a

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F^{'}(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t F^{''}(X_s)dX_sdX_s$$

Remarque:

La formule d'Itô sous forme différentielle s'écrit:

$$dF(X_t) = F^{'}(X_t)dX_t + \frac{1}{2}F^{''}(X_t)dX_tdX_t.$$

Compte tenu de la dernière remarque, la formule d'Itô s'écrit aussi

$$dF(X_t) = F'(X_t)\,dX_t + \frac{1}{2}F''(X_t)\,d\langle X\rangle_t\,.$$

Cette formule signifie aussi que

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F^{'}(X_s)\alpha_s dB_s + \int_0^t \left[F^{'}(X_s)\beta_s + \frac{1}{2}F^{''}(X_s)\alpha_s^2\right] ds$$

$\int_0^t F^{'}(X_s)\alpha_s dB_s$ *étant la partie martingale de* $F(X_t)$ *et* $\int_0^t \left[F^{'}(X_s)\beta_s + \frac{1}{2}F^{''}(X_s)\alpha_s^2\right] ds$ *sa partie à variations finies. En fait, on peut montrer que cette formule reste valable même si X n'est pas bornée, pourvu que tous les termes aient un sens.*

Exemple :

Si $Y_t = e^{B_t}$, la formule d'Itô avec $X_t = B_t$ et $F(x) = e^x$ ($F'(x) = F''(x) = e^x$), donne

$$dY_t = e^{B_t}dB_t + \frac{1}{2}e^{B_t}dt,$$

d'où

$$e^{B_t} = 1 + \int_0^t e^{B_s}dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t e^{B_s}ds$$

et

$$\langle Y_t\rangle = e^{2B_t}.$$

On notera que Y_t est solution de l'EDS

$$dY_t = Y_tdB_t + \frac{1}{2}Y_tdt.$$

Le cas vectoriel :(sans démonstration)

Si $\vec{X}_t = (X_t^1, ..., X_t^n)$ est un vecteur de semi-martingales et $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2, alors la formule d'Itô vectorielle prend la forme suivante:

$$F(\vec{X}_t) = F(\vec{X}_0) + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial F}{\partial X_i}(\vec{X}_s) dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial X_i \partial X_j}(\vec{X}_s) dX_s^i dX_s^j,$$

qui s'écrit sous forme différentielle

$$dF\left(\overrightarrow{X}_t\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial X_i}(\vec{X}_t) dX_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial X_i \partial X_j}(\vec{X}_t) dX_t^i dX_t^j,$$

ou encore

$$dF\left(\overrightarrow{X}_t\right) = \left\langle \overrightarrow{\mathrm{grad}} F\left(\overrightarrow{X}_t\right), \overrightarrow{dX_t} \right\rangle + \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{dX_t}\right)^T . \mathcal{H}F\left(\overrightarrow{X}_t\right) . \overrightarrow{dX_t},$$

où $\mathcal{H}F(x)$ est la matrice hessienne de F en x et $\left(\overrightarrow{dX_t}\right)^T$ est le vecteur ligne transposé du vecteur colonne $\overrightarrow{dX_t} = \begin{pmatrix} dX_t^1 \\ dX_t^2 \\ . \\ . \\ . \\ dX_t^n \end{pmatrix}$.

Démonstration:

La démonstration se fait en trois étapes.

1) *Cas où $F(x) = x^n$ est un monôme :*

Comme $F'(x) = nx^{n-1}$ et $F''(x) = n(n-1)x^{n-2}$, on doit montrer (par récurrence) que

$$dX_t^n = nX_t^{n-1} dX_t + \frac{1}{2} n(n-1) X_t^{n-2} dX_t dX_t \qquad (\mathcal{P}_n)$$

Pour $n = 2$:

On a, d'après la formule d'intégration par parties (voir T.D.):

$$dX_t^2 = 2X_t dX_t + dX_t dX_t$$

donc $(\mathcal{P}_2)$ est vraie . Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie et montrons qu'elle reste vraie au rang $(n+1)$.

On a, d'après la formule d'intégration par parties:

$$dX_t^{n+1} = d(X_t^n X_t) = X_t dX_t^n + X_t^n dX_t + dX_t dX_t^n$$

d'où d'après l'hypothèse de récurrence et le fait que $dX_t dX_t dX_t = 0$,

$$
\begin{aligned}
dX_t^{n+1} &= X_t(nX_t^{n-1}dX_t + \frac{1}{2}n(n-1)X_t^{n-2}dX_tdX_t) \\
&\quad + X_t^n dX_t + (nX_t^{n-1}dX_t + \frac{1}{2}n(n-1)X_t^{n-2}dX_tdX_t)dX_t \\
&= nX_t^n dX_t + \frac{1}{2}n(n-1)X_t^{n-1}dX_tdX_t + X_t^n dX_t + nX_t^{n-1}dX_tdX_t \\
&= (n+1)X_t^n dX_t + \frac{1}{2}n(n+1)X_t^{n-1}dX_tdX_t
\end{aligned}
$$

d'où $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie. Ainsi la formule d'Itô est vraie pour F un monôme.

2) *Cas où* $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{N} a_n x^n$ *est un polynôme* :

Observons d'abord que la formule $(\mathcal{P}_n)$ s'écrit sous forme d'intégrale

$$X_t^n = X_0^n + \int_0^t nX_s^{n-1}dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t n(n-1)X_s^{n-2}dX_sdX_s \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

En multipliant cette égalité par a_n et en sommant par rapport à n, on obtient par linéarité

$$\sum_{n=0}^{N} a_n X_t^n = \sum_{n=0}^{N} a_n X_0^n + \int_0^t \left(\sum_{n=0}^{N} nX_s^{n-1}\right) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \left(\sum_{n=0}^{N} n(n-1)X_s^{n-2}\right) dX_sdX_s,$$

d'où

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(X_s)\, dX_sdX_s,$$

qui signifie que la formule d'Itô est vraie pour les polynômes.

3) *Le Cas général* $(F \in C^2)$:

Soit K un compact qui contient toutes les valeurs de X_t. D'après le théorème de Stones-Wiestrass, il existe trois suites de polynômes $(P_n), (Q_n)$ et (R_n) telles que (P_n) (resp.$(Q_n), (R_n)$) converge uniformément vers F (resp. F', F'') sur K. De plus

$$P_n' = Q_n \text{ et } P_n'' = Q_n' = R_n,$$

d'où d'après la formule d'Itô pour chaque polynôme P_n :

$$P_n(X_t) = P_n(X_0) + \int_0^t Q_n(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t R_n(X_s)dX_sdX_s.$$

Comme X prend ses valeurs dans K et comme

$$|P_n(X_t) - F(X_t)| \le \sup_{x \in K} |P_n(x) - F(x)|,$$

alors

$$0 \leq \mathbb{E}\left(\left|P_n(X_t) - F(X_t)\right|^2\right) \leq \left(\sup_{x \in K} \left|P_n(x) - F(x)\right|\right)^2$$

et on a

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}\left(\left|P_n(X_t) - F(X_t)\right|^2\right) = 0,$$

qui signifie que $(P_n(X_t))$ (resp.$(P_n(X_0))$) converge vers $F(X_t)$ (resp. $F(X_0)$) dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On conclut, d'après l'unicité de la limite, qu'il suffit de montrer que la suite $\left(\int\limits_0^t Q_n(X_s)dX_s\right)$ (resp.$\left(\int\limits_0^t R_n(X_s)dX_s\right)$) converge vers $\int\limits_0^t F'(X_s)dX_s$ (resp.$\int\limits_0^t F''(X_s)dX_s$) dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Montrons par exemple la convergence de $\left(\int\limits_0^t Q_n(X_s)dX_s\right)$ vers $\int\limits_0^t F'(X_s)dX_s$ (la démonstration de l'autre convergence se conduit exactement de la même manière).

On a :

$$\int_0^t Q_n(X_s)dX_s - \int_0^t F'(X_s)dX_s = \int_0^t \left(Q_n(X_s) - F'(X_s)\right)\alpha_s dB_s + \int_0^t \left(Q_n(X_s) - F'(X_s)\right)\beta_s ds,$$

d'où, en utilisant l'inégalité $(a+b)^2 \leq 2\left(a^2 + b^2\right)$ pour tous réels a, b,

$$\begin{aligned}\left(\int_0^t Q_n(X_s)dX_s - \int_0^t F'(X_s)dX_s\right)^2 \quad \leq \quad & 2\left\{\left(\int_0^t \left(Q_n(X_s) - F'(X_s)\right)\alpha_s dB_s\right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(\int_0^t \left(Q_n(X_s) - F'(X_s)\right)\beta_s ds\right)^2\right\}.\end{aligned}$$

Par suite, en utilisant dabordla linérité de l'espérance ensuite l'isométrie de l'intégrale stochastique et puis l'inégalité de Holder, on obtient:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \mathbb{E}(\int_0^t Q_n(X_s)dX_s - \int_0^t F'(X_s)dX_s)^2 \\
&\leq 2\left(\mathbb{E}\left(\int_0^t (Q_n(X_s) - F'(X_s))\,\alpha_s dB_s\right)^2 + \mathbb{E}\left(\int_0^t (Q_n(X_s) - F'(X_s))\,\beta_s ds\right)^2\right) \\
&\leq 2\left(\mathbb{E}\left(\int_0^t (Q_n(X_s) - F'(X_s))^2\,\alpha_s^2 ds\right) + t\mathbb{E}\left(\int_0^t (Q_n(X_s) - F'(X_s))^2\,\beta_s^2 ds\right)\right) \\
&\leq 2\left(\sup_{x\in K}|Q_n(x) - F'(x)|\right)^2\left(\mathbb{E}\left(\int_0^t \alpha_s^2 ds\right) + t\mathbb{E}\left(\int_0^t \beta_s^2 ds\right)\right),
\end{aligned}$$

d'où d'après la convergence uniforme de (Q_n) vers F',

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(\int_0^t Q_n(X_s)dX_s - \int_0^t F'(X_s)dX_s)^2 = 0,$$

ce qui achève la démonstration.■

2 Intégrale d'Ito-Stratonovitch

Soient X et Y deux semi-martingales définies par

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha_s dB_s + \int_0^t \beta_s ds \text{ et } Y_t = Y_0 + \int_0^t \alpha'_s dB_s + \int_0^t \beta'_s ds$$

tels que

$$\mathbb{E}(\int_0^t \left(Y_s^2\alpha_s^2 + |Y_s\beta_s| + |\alpha_s\alpha'_s|\right) ds) < \infty,$$

de sorte que les intégrales $\int_0^t Y_s dX_s$ et $\int_0^t dY_s dX_s$ aient un sens.

On pose:

$$\int_0^t Y_s * dX_s := \int_0^t Y_s dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t dY_s dX_s.$$

Définition:

$\int_0^t Y_s * dX_s$ *est appelée intégrale d'Itô-Stratonovitch ou intégrale symétrique (on la note aussi* $\int_0^t Y_s \circ dX_s$ *).*

On notera que que si X ou Y est un processus à variations finies, alors $\int_0^t Y_s * dX_s = \int_0^t Y_s dX_s$.

Notation différentielle:

On note $Y_t * dX_t = Y_t dX_t + \frac{1}{2} dY_t dX_t$.

Théorème: (Formule d'Itô-Stratonovitch*)*

Soient X *une semi-martingale bornée et* F*:*$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de classe* C^3*. Alors on a la formule suivante:*

$$F(X_t) - F(X_0) = \int_0^t F^{'}(X_s) * dX_s$$

Remarque:

En notation différentielle, la formule d'Itô-Stratonovitch s'écrit:

$$dF(X_t) = F^{'}(X_t) * dX_t.$$

Le cas vectoriel :(sans démonstration)

Si $\vec{X}_t = (X_t^1, ..., X_t^n)$ est un vecteur de semi-martingales et $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^3, alors la formule d'Itô-Stratonovich vectorielle prend la forme suivante:

$$F(\vec{X}_t) = F(\vec{X}_0) + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial F}{\partial X_i}(\vec{X}_s) * dX_s^i,$$

qui s'écrit sous forme différentielle

$$dF\left(\overrightarrow{X}_t\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial X_i}(\vec{X}_t) * dX_t^i,$$

ou encore

$$dF\left(\overrightarrow{X}_t\right) = \left\langle \overrightarrow{\mathrm{grad}} F\left(\overrightarrow{X}_t\right) * \overrightarrow{dX_t} \right\rangle.$$

Démonstration:

Comme $F' \in C^2$ alors $F'(X_t)$ est une semi-martingale on a d'après la formule d'Itô appliquée avec F':

$$dF'(X_t) = F''(X_t) dX_t + \frac{1}{2} F'''(X_t) dX_t dX_t.$$

D'autre part, on a d'après la définition de l'intégrale d'Itô-Stratonovich,

$$\int_0^t F'(X_s) * dX_s = \int_0^t F'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t dF'(X_s) dX_s,$$

or

$$dF'(X_s)dX_s = \left(F''(X_s)dX_s + \frac{1}{2} F'''(X_s) dX_s dX_s \right) dX_s = F''(X_s) dX_s dX_s$$

d'où, d'après la formule d'Itô appliquée avec F,

$$\int_0^t F'(X_s) * dX_s = \int_0^t F'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t F''(X_s) dX_s dX_s = F(X_t) - F(X_0),$$

ce qu'il fallait démontrer.■

Nous terminons cette section par noter que cette formule est dangereuse dans le sens où dans sa formulation la fonction F''' (ni F'' d'ailleurs) n'apparaissent pas mais pour l'appliquer, il faut bien s'assurer que F est de classe C^3.

3 Lien entre les EDS et les EDP

On voudrait associer à chaque EDS une EDP et étudier le lien entre ces deux types d'équations différentielles à travers trois exemples, de la manière suivante:

Soient $V, A_1, ..., A_d : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ des champs de vecteurs, satisfaisant les hypothèses suivantes: pour $H = V, A_1, ..., A_d$,

1−Condition de Lipchitz:

$|H(x) - H(y)| \leq C_1 |x - y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, où C_1 est une constante positive

2−Conditions de croissance linéaire:

$|H(x)| \leq C_2 (1 + |x|)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, où C_1 est une constante positive.

En fait ces hypothèses assurent l'existence et l'unicité, que nous admettrons dans ce cours, de l'EDS vectorielle suivante:

$$(E) \qquad \begin{cases} dX_t = \sum_{k=1}^{d} A_k(X_t) dB_t^k + V(X_t) dt \\ X_0 = x \in \mathbb{R}^n \end{cases},$$

où $B_t = (B_t^1, B_t^2, ..., B_t^d)$ est un mouvement brownien de dimension d. On note par X_t^x le solution de (E). Cette EDS signifie qu'on a n EDS réelles: pour tout $i = 1, 2, ..., n$,

$$\begin{cases} dX_t^i = \sum_{k=1}^{d} A_k^i(X_t) dB_t^k + V^i(X_t) dt \\ X_0^i = x_i \end{cases},$$

A l'EDS (E) on associe l'opérateur différentiel semi-elliptique du second ordre suivant:

$$\mathcal{L} =\sum_{i=1}^{n} V^i (x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{d} A_k^i (x) A_k^j (x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}.$$

On admettra que si f est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$ à support compact, alors $u (t, x) = \mathbb{E} (f (X_t^x))$ est l'unique solution de l'EDP suivante:

$$(\mathcal{P}) \quad \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial t} (t, x) = \mathcal{L} u (t, x) \\ u (0, x) = f (x) \end{array} \right.$$

Notation:

On note par $\sigma (x)$ la matrice dont les colonnes sont $A_1 (x) , A_2 (x) , ..., A_d (x)$. C'est une matrice à n lignes et d colonnes. Alors l'EDS (E) s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{c} dX_t = \sigma (X_t) dB_t + V (X_t) dt \\ X_0 = x \end{array} \right.$$

En notant par $(a_{i,j} (x))$ la matrice carré la matrice carré $\sigma (x) \sigma^* (x)$ (matrice d'ordre n), l'opérateur différentiel $\mathcal{L}$ s'écrit

$$\mathcal{L} =\sum_{i=1}^{n} V^i (x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} (x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

Exemple 1 :

On considère le cas où $a = I$ la matrice identité et $V = 0$, d'où $\mathcal{L} =\frac{1}{2}\Delta$; Δ étant le laplacien sur $\mathbb{R}^n$. Le problème $(\mathcal{P})$ devient alors:

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial t} (t, x) = \frac{1}{2}\Delta u (t, x) \\ u (0, x) = f (x) \end{array} \right. ,$$

qui n'est autre que l'équation de la chaleur. L'équation (E) devient

$$\left\{ \begin{array}{c} dX_t = dB_t \\ X_0 = x \end{array} \right. ,$$

qui admet comme solution évidente $X_t = x + B_t$. Comme $B_t \rightsquigarrow \mathcal{N} (0, tI)$ de densité

$$\frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|y|^2}{2t}},$$

alors la solution de $(\mathcal{P})$ est

$$u (t, x) = \mathbb{E} (f (X_t)) = \int_{\mathbb{R}^n} f (x + y) \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|y|^2}{2t}} dy = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f (z) e^{-\frac{|z-x|^2}{2t}} dz$$

qui est bien connu comme solution de l'équation de la chaleur.

Exemple 2 :

On considère le cas où $n=1, a(x)=x^2$ et $V(x)\equiv 0$, d'où $\sigma(x)=x$ et $\mathcal{L}=x^2\frac{d^2}{dx^2}$. L'EDS (E) devient alors

$$(E)\qquad \left\{\begin{array}{c} dX_t = X_t dB_t \\ X_0 = x \end{array}\right. .$$

Montrons que $X_t = xe^{\left(B_t-\frac{t}{2}\right)}$ est la solution de (E). En effet, d'après la formule d'Itô avec $Y_t = B_t - \frac{t}{2}$ et $F(y) = xe^y$, on a

$$dX_t = F'(Y_t)\,dY_t + \frac{1}{2}F''(Y_t)\,dY_t dY_t,$$

or $F'(y) = F''(y) = F(y) = xe^y, dY_t = dB_t - \frac{1}{2}dt$ et $dY_t dY_t = dt$, d'où

$$dX_t = X_t\left(dB_t - \frac{1}{2}dt\right) + \frac{1}{2}X_t dt = X_t dB_t,$$

d'où l'affirmation.

Si $x=0$, alors $X_t\equiv 0$.

Si $x>0$.

Comme $B_t \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,t)$ de densité $\frac{1}{(2\pi t)^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{y^2}{2t}}$, alors la solution du problème $(\mathcal{P})$ est

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f\left(xe^{y-\frac{t}{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{y^2}{2t}}dy,$$

d'où en posant $z = xe^{y-\frac{t}{2}} > 0$, $y = \frac{t}{2} + Log\frac{z}{x}$ et

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int\limits_{\mathbb{R}_+} f(z)\,e^{-\frac{1}{2t}\left(\frac{t}{2}+Log\frac{z}{x}\right)^2}dz$$

Exemple 3 :

On considère le cas où $n=1, a(x)=x^2$ et $V(x)\equiv\lambda\in\mathbb{R}$. L'EDS correspondante est

$$(E)\qquad \left\{\begin{array}{c} dX_t = X_t dB_t + \lambda dt \\ X_0 = x \end{array}\right. ,$$

et

$$\mathcal{L}=x^2\frac{d^2}{dx^2}+\lambda\frac{d}{dx}.$$

La solution de l'équation homogène $dX_t = X_t dB_t$ étant, d'après l'exemple précédant, $X_t = Ce^{\left(B_t-\frac{t}{2}\right)}$ où C est une constante.

Méthode de la variation des constantes

La méthode la variation des constantes consiste à chercher la solution de (E) sous la forme

$$X_t = C_t e^{\left(B_t-\frac{t}{2}\right)},$$

où C_t est un processus à variations finies.

On a, d'après la formule d'intégration par parties,

$$dX_t = dC_t e^{\left(B_t - \frac{t}{2}\right)} + C_t d\left(e^{\left(B_t - \frac{t}{2}\right)}\right) + dC_t d\left(e^{\left(B_t - \frac{t}{2}\right)}\right),$$

or

$$d\left(e^{\left(B_t - \frac{t}{2}\right)}\right) = e^{\left(B_t - \frac{t}{2}\right)} dB_t \text{ et } dC_t d\left(e^{\left(B_t - \frac{t}{2}\right)}\right) = 0,$$

et puisque X_t est solution de (E),

$$dX_t = dC_t e^{\left(B_t - \frac{t}{2}\right)} + X_t dB_t = X_t dB_t + \lambda dt,$$

d'où

$$dC_t = \lambda e^{-\left(B_t - \frac{t}{2}\right)} dt$$

et par suite

$$C_t = \lambda \int_0^t e^{-\left(B_s - \frac{s}{2}\right)} ds + c, \text{ où } c \text{ est une constante.}$$

Ainsi

$$X_t = \lambda e^{\left(B_t - \frac{t}{2}\right)} \int_0^t e^{-\left(B_s - \frac{s}{2}\right)} ds + c e^{\left(B_t - \frac{t}{2}\right)},$$

et comme $X_0 = x$ alors $c = x$, d'où

$$X_t = \lambda e^{\left(B_t - \frac{t}{2}\right)} \int_0^t e^{-\left(B_s - \frac{s}{2}\right)} ds + x e^{\left(B_t - \frac{t}{2}\right)},$$

cependant on ne peut pas la forme explicite de $u(t, x)$. Bien entendu, lorsque $\lambda = 0$ on retrouve la solution de l'exemple 2.