Université de $\mathcal{S}$idi-$\mathcal{B}$eℓ-$\mathcal{A}$bbès. 2017/18

Faculté des Sciences Exactes

Première année Master PA-SA

Examen : Chaînes de Markov

(0.6) **Exercice 1.** *Soit X une chaine de Markov de transition* P. *On pose $Y_n = X_{4n+3}$ pour tout $n \geq 0$. Y est-elle une chaîne de Markov ? si oui quelle est sa matrice de transition ?*

(08) **Exercice 2.** *Soit X une chaîne de Markov à espace d'états $E = \{1, 2, 3\}$ et de matrice de transition*

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 1. *Dessiner le graphe de la chaîne.*

(2) 2. *L'état initial de la chaîne est 1. Quelle est la loi de X_1 ? de X_2 ?*

(03) 3. *Montrer que X est irréductible, récurrente positive réversible.*

(1) 4. *Calculer sa probabilité invariante π.*

(1) 5. *Que peut-on dire sur le comportement de $S_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.*

(06) **Exercice 3.** *Soit Y_n une suite i.i.d avec $\mathbb{P}(Y_1 = 1) = 1 - \mathbb{P}(Y_1 = 0) = p \in]0, 1[$. Posons $X_{n+1} = (X_n + 1)1_{\{Y_{n+1}=1\}}$ avec $X_0 = 1_{\{Y_1=1\}}$.*

(03) 1. *Montrer que X_n est une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition.*

(03) 2. *Montrer que X_n est irréductible et calculer sa probabilité stationnaire. Y-a-t-'il d'autres probabilités stationnaires pour cette chaîne ?*

1ère année Master

Chaînes de Markov

(6 pts)

Exo 1 on a : $Y_n = X_{4n+3}$ $\forall n \geq 0$.

Soient $y_0, \ldots, y_n, y \in E$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{Y_{n+1} = y}{Y_0 = y_0, \ldots, Y_n = y_n}\right) \underset{1pt}{=} \mathbb{P}\left(\frac{X_{4n+7} = y}{X_3 = y_0, \ldots, X_{4n+3} = y_n}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{X_{4n+7} = y}{X_{4n+3} = y_n}\right) \quad (\text{Car } X \text{ est une C.M.H}) \underset{1pt}{=} \mathbb{P}\left(\frac{Y_{n+1} = y}{Y_n = y_n}\right)$$

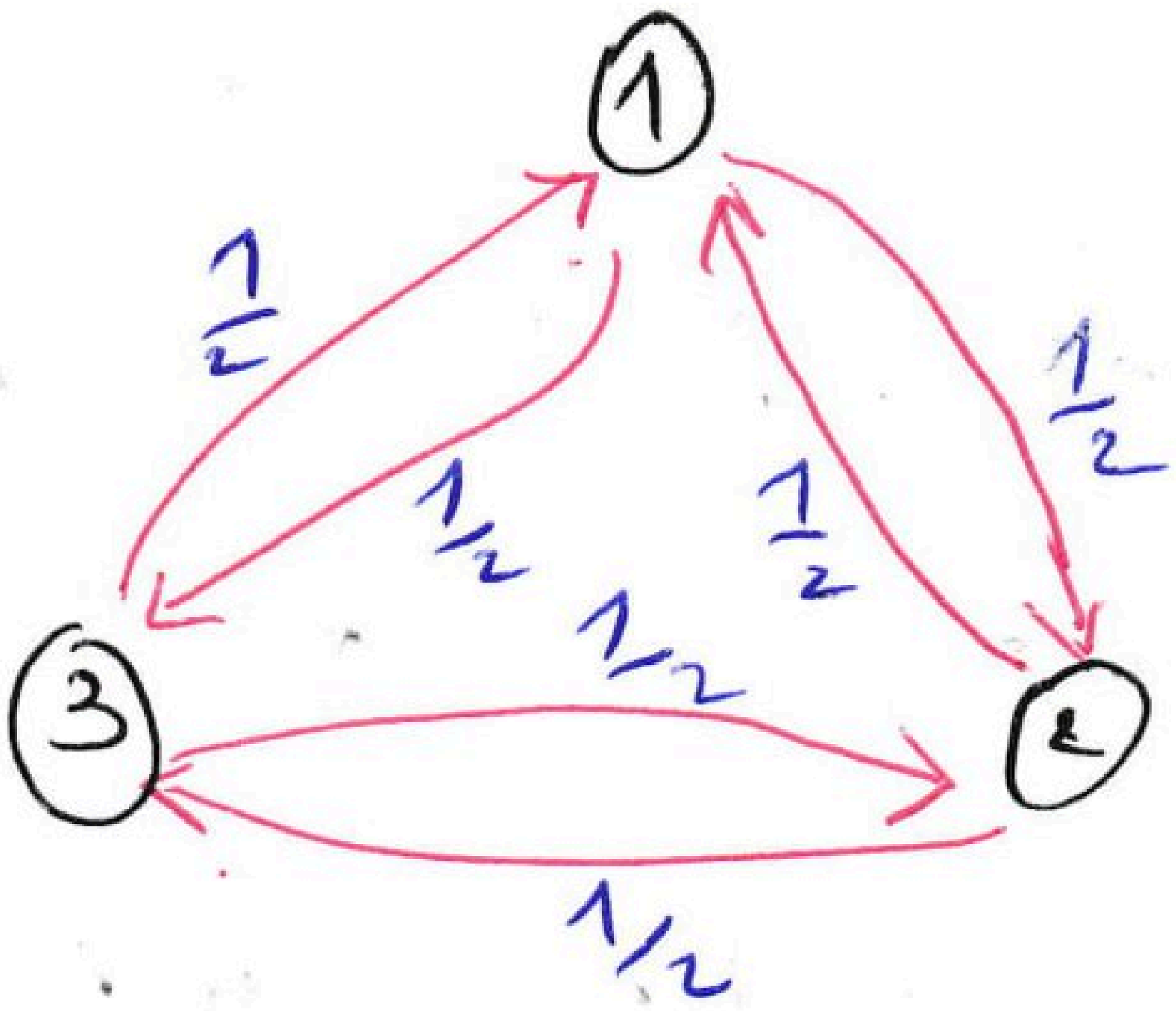
$$= \mathbb{P}\left(\frac{X_4 = y}{X_0 = y_n}\right) = P_4(y_n, y) \quad 1pt$$

donc $Y = (Y_n)_{n \geq 0}$ est une C.M.H de

transition P^4 et d'état initial $Y_0 = X_3$ 1pt

Exo 2 (08 pt) $E = \{1, 2, 3\}$

1. graphe de la chaîne



(1 pt)

(2) On a : La loi de X_0, $\mu_0 = (1, 0, 0)$.

donc $\mu_1 = \mu_0 P = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (01 pt)

et $\mu_2 = \mu_1 P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ (01 pt).

(3) d'après le graphe on a.

$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 1$

donc X est irréductible. (1 pt)

Comme l'espace des états est fini, alors X est récurrente positive. (1 pt) elle admet donc 1 proba invariante unique π

$$\pi P = \pi \iff \begin{cases} \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3 = \pi_1 \\ \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_3 = \pi_2 \\ \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 = \pi_3 \end{cases} \Rightarrow \pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \frac{1}{3}$$

(1pt)

- P est une matrice symétrique donc $p(i,j) = p(j,i)$ et on a $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3$

donc $\forall i,j$, on a $\boxed{\pi(i)\, p(i,j) = \pi(j)\, p(j,i)}$

et par suite X est réversible. (1pt)

5 X est récurrente positive donc

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}(\pi) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{3}$$

$$= \boxed{6/3} \quad \text{(1pt)}$$

$$= \boxed{2}$$

Ex 03 (04 pts)
$$\begin{cases} X_0 = 1\!\!1_{\{Y_1 = 1\}} \\ X_{n+1} = (X_n + 1) 1\!\!1_{\{Y_{n+1} = 1\}} \end{cases} \qquad E = \mathbb{N}$$

1. On a : $X_{n+1} = f(X_n, Y_{n+1})$ avec Y_n est i.i.d

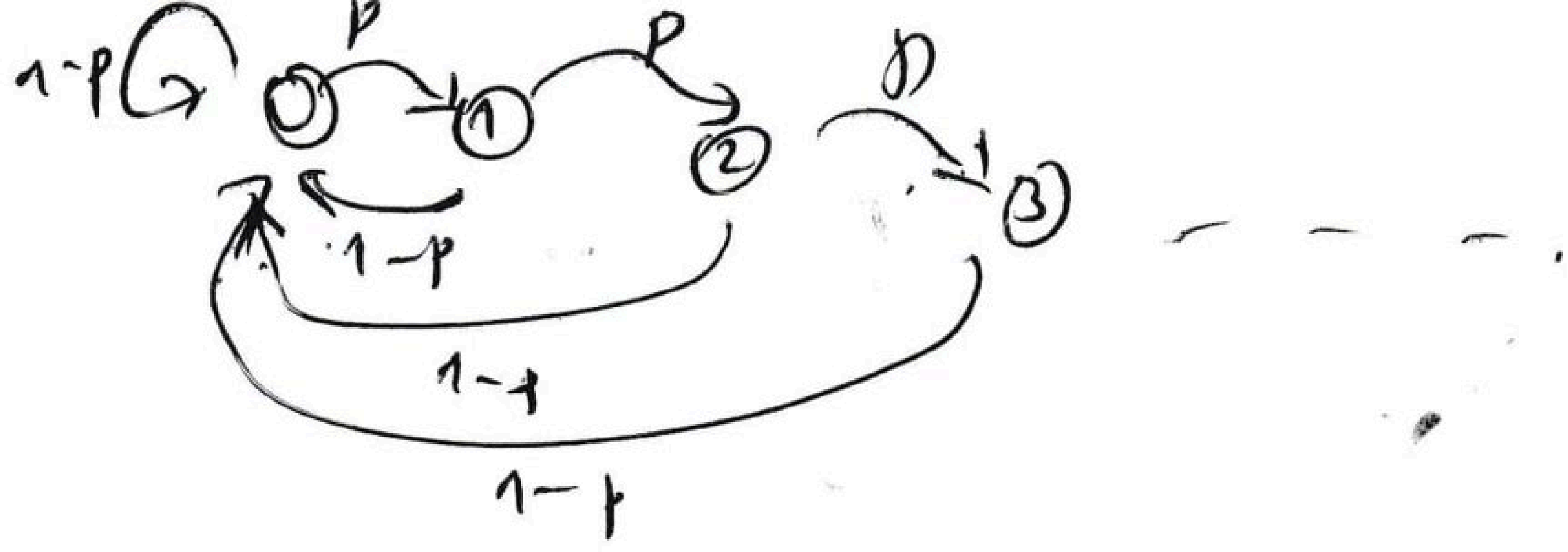
donc $X = (X_n)_n$ est une chaîne de Markov.

de transition : $p(i,j) = \mathbb{P}(j = f(i, Y_1))$ (0.2 pt)

$$= \mathbb{P}\left(j = (i+1) 1\!\!1_{\{Y_1 = 1\}} \right)$$

$$p(i,j) = \begin{cases} p & \text{si } j = i+1 \\ 0 & \text{si } j \neq i+1 \text{ et } j \neq 0 \\ 1-p & \text{si } j = 0 \end{cases}$$ (1 pt)

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p & & & \\ 1-p & & p & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1-p & & & & p \\ 1-p & & & & \ddots \\ 1-p & & & & \\ 1-p & & & & \\ \vdots & & & & \end{pmatrix}$$



(4) X est irréductible.

Soit $i, j \in \mathbb{N}$

si $i < j$

on a : $P_{j-i}(i,j) \geq p(i, i+1)\, p(i+1, i+2) \cdots p(j-1, j)$

$\geq \underbrace{p \cdot p \cdots p}_{j-i \text{ fois}} = p^{j-i} > 0$ (0,5 pt)

si $i \geq j$

$P_{j+1}(i,j) \geq \underbrace{p(i,0)}_{(1-p)}\, \underbrace{p(0,1)}_{p}\, p(1,2) \cdots \underbrace{p(j-1, j)}_{p}$

$= (1-p)\, p^{j} > 0$ (0,5) pt

~~si $i = j$ $p(i,j) \geq p(i,0)$~~

donc X est irréductible.

$\Pi = (\Pi_n)_{n \geq 0}$ Proba stationnaire vérifie

$$\Pi P = \Pi$$

Donc
$$\begin{cases} (1-p)\Pi_0 + (1-p)\Pi_1 + (1-p)\Pi_2 \; --- = \Pi_0 \\ (1-p)\underbrace{\sum_i \Pi_i}_{1} = \Pi_0 \Rightarrow \Pi_0 = (1-p) \\ p\Pi_0 = \Pi_1 \Rightarrow \Pi_1 = p(1-p) \\ \vdots \\ p\Pi_{n-1} = \Pi_n \Rightarrow \boxed{\Pi_n = (1-p)p^n.} \end{cases}$$

(1 pt)

Donc $\forall n \geq 0$ on a : $\Pi_n = (1-p)p^n$.

- Π est la seule Proba stationnaire car. X est irréductible. de plus X est (0,1 pt) récurrente positive.