Departement de Mathematiques
Universite de Biskra
Module

$2^{ième}$ Année Master Maths
Premier semestre, année 2021/2022
Mouvement Brownien et calcul stochastique

Feuille 3 : Exercices sur l'intégrale de Wiener

Exercice 1. 1. justifier que la variable aléatoire $X_t = \int_0^t (\sin s) dB_s$ est bien définie comme intégrale de Wiener.

2. Justifier que X est un processus gaussien. Calculer son espérance et sa variance $E(X_s X_t)$.

3. Montrer que le processus X est une martingale.

4. Quelle est la variation quadratique de X ?

5. Montrer que $X_t = (\sin t) B_t - \int_0^t (\cos s)\, B_s ds$.

Exercice 2. Donner la loi de la variable aléatoire

$$Y = \int_0^{+\infty} \exp(-s) dB_s.$$

On commencera par vérifier que Y est bien définie.

Exercice 3. Etant donné un mouvement brownien réel $(B_t)_{t\geq 0}$, on définit le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ par :

$$\forall t \geq 0, X_t = \int_0^{t^{1/2}} (2s)^{1/2}\, dB_s.$$

Montrer que ce procesus est gaussien. Calculer son espérance et sa covariance. En déduire que X est un mouvement brownien.

Exercice 4. Etant données deux fonctions f et g dans $L^2(\mathbb{R}_+)$, on suppose que

$$\int_0^{+\infty} f(s) dB_s = \int_0^{+\infty} g(s) dB_s.$$

Que peut-on dire de f et g ?

Exercice 5. Soit $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+)$. Donner la loi de $\left(\int_0^t f(s) dB_s\right)_{t\geq 0}$.