Université Ahmed Draia D'Adrar
Faculté des Sciences et de Technologie
Département de Mathématiques et Informatique

Concours d'accès à la formation 3e cycle
Filière : Mathématiques. Spécialité : Processus aléatoire et Statistique
Année universitaire 2022-2023

Épreuve : Processus stochastique et équations différentielles

Le 07 février 2023. Durée 02h00.

Exercice 1. (06 pts)
Soient $B = (B_t)_t$ un mouvement brownien sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ et N une variable aléatoire distribuée suivant une loi gaussienne $\mathcal{N}(m, \rho^2)$ indépendante de $(B_t)_t$. Soit

$$Y_t = \eta t + \tau B_t \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_t = \sigma(Y_s, s \leq t).$$

1. Calculer $Cov(\eta, Y_s)$ et $Cov(Y_s, Y_t)$.
2. Montrer que $(Y_t)_t$ est un processus gaussien.
3. Montrer que, $\forall t \geq 0$, il existe λ (dépend de t) tel que $\eta = \lambda Y_t + Z$, avec Z indépendant de $\mathcal{G}_t$.
4. Calculer $\mathbb{E}[\eta|\mathcal{G}_t]$ et la variance de $\eta - \mathbb{E}[\eta|\mathcal{G}_t]$, montrer que

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}[\eta|\mathcal{G}_t] = \eta \quad p.s.$$

Exercice 2. (07 pts)
Soient $I = [0, T]$ et $(\phi_n)_n$ une base hilbertienne orthonormale de l'espace de Hilbert $L^2(I)$ des fonctions $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue sur I.
On note $\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^T \varphi(t)\psi(t)dt$ le produit scalaire des fonctions φ, $\psi \in L^2(I)$.
Soit $(X_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d de loi $N(0, 1)$ définie sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
Pour tout $t \in I$, on pose

$$B_t = \sum_{n\in\mathbf{N}} \langle 1_{[0,t]}, \phi_n \rangle X_n$$

1. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} |\langle 1_{[0,t]}, \phi_n \rangle|^2$ est convergente.
2. Montrer que le processus $B = (B_t)_{t\in I}$ est bien défini.
3. Montrer que $B = (B_t)_{t\in I}$ est un mouvement brownien naturel sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
4. Montrer que $B = (B_t)_{t\in I}$ admet une modification dont les trajectoires sont localement α-höldériennes pour tout $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

Exercice 3. (07 pts)
Soient $b > 0$, $y_0 \in \mathbb{R}$ et $f : [0, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne de rapport $k > 0$. Soit l'équation

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s))ds \tag{1}$$

1. Soit l'application

$$\|\cdot\|_{k,b} : x \in C([0,b],\mathbb{R}) \longmapsto \|x\|_{k,b} := \sup_{t\in[0,b]} e^{-kt}|x(t)|.$$

a) Montrer que $\|\cdot\|_{k,b}$ est une norme sur $C([0,b],\mathbb{R})$.

b) Montrer que les normes $\|\cdot\|_{\infty,b}$ et $\|\cdot\|_{k,b}$ sont fortement équivalentes.

c) En déduire que l'espace vectoriel normé $C([0,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_{k,T})$ est complet.

2. Soit N l'application de $C([0,T],\mathbb{R})$ dans lui-même telle que

$$N(y) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s))ds$$

pour tout $y \in C([0,b],\mathbb{R})$

a) Montrer que l'application N est contractante pour la norme $\|\cdot\|_{k,b}$.

b) En déduire que l'équation (1) admet une unique solution dans $C([0,b],\mathbb{R})$.