Rappels d'algèbre linéaire

Prof. BOURAS MOHAMMED CHERIF
bourascdz@yahoo.fr

Table des matières

1 Rappels d'algèbre linéaire **1**

1.1 NOTATIONS 1
1.2 DÉTERMINANT 2
1.3 VALEURS PROPRES ET VECTEURS PROPRES 3
1.4 SOUS-ESPACES CARACTÉRISTIQUES ET THÉORÈME DE CAYLEY-HAMILTON 3
1.5 TRACE 4
1.6 PRODUIT SCALAIRE 4
1.7 MATRICES PAR BLOCS 5
1.8 Produit par blocs 6
1.9 Matrices triangulaires par blocs 6
1.10 Le complément de Schur 7
1.11 La formule de Sherman-Morrison-Woodbury 7

2 Normes sur les espaces de matrices **7**
2.1 RAYON SPECTRAL 8

1 Rappels d'algèbre linéaire

1.1 NOTATIONS

Le but de ce chapitre est de fixer les notations qui sont utilisées tout au long de ce cours.

- L'espace des matrices complexes (resp. réelles) à m lignes et n colonnes est noté $\mathbb{C}^{mxn}$ (resp. $\mathbb{R}^{mxn}$). Pour une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{mxn}$, i est l'indice de la ligne et j celui de la colonne.

- $\mathcal{O}_{mn} \in \mathbb{C}^{\ mxn}$ (aussi notée 0) est la matrice nulle et $\mathbb{I}_n \in \mathbb{C}^{\ mxn}$ est la matrice identité.

- Les vecteurs $x \in \mathbb{C}^{\ n}$ (resp. $x \in \mathbb{R}^{\ n}$) sont identifiés à des matrices $n \times 1$ donc à des vecteurs-colonne. Avec cette convention, $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{\ mxn}$ s'identifie à l'application linéaire

$$\begin{array}{ccc} A & : & \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m \\ x & \to & Ax \in \mathbb{C}m \end{array}$$

- Lorsqu'une matrice A a pour colonnes a_i, $1 \leq i \leq n$, on la note $A = (a_1...a_n)$.

- Une matrice (pas nécessairement carrée) est triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$, triangulaire inférieure si $a_{ij} = 0$ pour $i < j$ et diagonale si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.

- Une matrice diagonale D est notée $D = diag(d_i)$ où les d_i sont les entrées diagonales.

- Soit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{\ mxn}$. On note $A^T \in \mathbb{C}^{\ mxn}$ la transposée de A et $A^* = \bar{A}^{T} \in \mathbb{C}^{\ mxn}$ son adjointe : $A^T = (a_{ji})$ et $A^* = \left(\bar{a_{ji}}\right)$ (conjuguée et transposée).

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (resp. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{\ mxn}$(resp. $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{\ mxn}$) qui sont inversibles. C'est un groupe pour la multiplication des matrices appelé groupe linéaire. Les notations A^{-T} et A^{-*}(inverse de la transposée et inverse de l'adjointe) ne sont pas ambigües parce que $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ et $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

1.2 DÉTERMINANT

- Le déterminant d'une matrice $A \in \mathbb{C}^{\ nxn}$ est une forme multilinéaire alternée des colonnes de A, on le note $\det A$.

- $\det(I_n) = 1$.

- Le déterminant d'un produit de matrices est le produit de ses déterminants :

$$\det(AB) = \det A \det B$$

- A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$, dans ce cas $\det\left(A^{-1}\right) = 1/\det A$.

- Si deux matrices sont semblables elles ont même déterminant.

1.3 VALEURS PROPRES ET VECTEURS PROPRES

- On appelle valeur propre d'une matrice $A \in \mathbb{C}^{\ nxn}$ toute racine du polynôme caractéristique

$$D_\lambda (A) = \det (A - \lambda \mathbb{I}_n)$$

- La multiplicité algébrique d'une valeur propre est sa multiplicité en tant que racine de l'équation caractéristique.

- L'ensemble des valeurs propres de A est appelé le spectre de A et se note $specA$.

- On appelle vecteur propre de A associé à la valeur propre λ tout vecteur non nul $\in \mathbb{C}^{\ n}$ vérifiant $Ax = \lambda x$.

- Deux matrices $A, B \in \mathbb{C}^{\ nxn}$ sont semblables lorsqu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n (\mathbb{C})$ telles que $A = PBP^{-1}$.

- Une matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est diagonalisable lorsqu'elle est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire s'il existe des matrices $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diagonale et $P \in \mathcal{M}_n (\mathbb{C})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

Dans ce cas, écrivons $D = diag(\lambda_i)$ où les λ_i sont les valeurs propres de A ; on peut prendre pour P une matrice dont les colonnes $p_1, ..., p_n \in \mathbb{C}^n$ sont indépendantes et où p_i est un vecteur propre associé à λ_i.

Proposition 1 *Pour toute matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, on a les propriétés suivantes :*

1. Les valeurs propres de $A - \mu I_n$ sont les scalaires $\lambda - \mu$, $\lambda \in specA$.

2. Les valeurs propres de A_k, $k \geq 0$,sont les $\lambda^k, \lambda \in specA$, et plus généralement, pour tout polynôme $p(x)$, les scalaires $p(\lambda)$, $\lambda \in specA$, sont les valeurs propres de $p(A)$.

3. Lorsque A est inversible, les valeurs propres de A^{-1} sont les scalaires λ^{-1}, $\lambda \in specA$.

4. Le déterminant de A est le produit des valeurs propres de A. chacune comptée autant de fois que sa multiplicité algébrique :

$$\det A = \prod_{\lambda_i \in specA} \lambda_i^{m_i}$$

où m_i est la multiplicité algébrique de λ_i.

1.4 SOUS-ESPACES CARACTÉRISTIQUES ET THÉORÈME DE CAYLEY-HAMILTON

À tout polynôme complexe $P(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_d z^d$ et à toute matrice $A \in \mathbb{C}^n$ on associe le polynôme matriciel

$$P(A) = a_0 + a_1 A + ... + a_d A^d$$

On dit qu'un polynôme $P(z)$ est un polynôme annulateur de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, lorsque $P(A) = 0$.

Théorème 2 *(Cayley-Hamilton) Le polynôme caractéristique de A est un polynôme annulateur de A, c'est à dire*

$$P_A(A) = O.$$

Définition 3 *(Sous-espaces caractéristiques) Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Écrivons son polynôme caractéristique*

$$D_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \prod_{i=1}^{q} (\lambda_i - \lambda)^{m_i}$$

où les valeurs propres $\lambda_i, 1 \leq i \leq q$, sont deux à deux distinctes, de multiplicité algébrique m_i avec $m_1 + ... + m_q = n$. Les sous-espaces caractéristiques de A sont les ensembles

$$E_i = Ker\,(\lambda_i I_n - A)^{m_i}$$

1.5 TRACE

- La trace d'une matrice carrée $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est la somme de ses entrées diagonales :

$$traceA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

- Pour deux matrices $M \in \mathbb{C}^{m\times n}$et $N \in \mathbb{C}^{n\times m}$ on a

$$trace(MN) = trace(NM)$$

de sorte que, pour toute matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ et $P \in \mathcal{M}_n$

$$trace(P^{-1}AP) = traceA$$

- La trace de A est égale à la somme des valeurs propres de A comptées avec leur multiplicité.

1.6 PRODUIT SCALAIRE

- Un produit scalaire sur un espace vectoriel réel E est une application

$$\langle .,. \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$$

qui vétifie les propriétés suivantes :

1. Pour tout $y \in E$, l'application $x \in E \to \langle x, y \rangle \in <\mathbb{R}$ est linéaire,
2. Pour tout x,$y \in E$, $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
3. Pour tout $x \in E$, $\langle x, x \rangle \geq 0$,
4. Pour tout $x \in E$, $\langle x, x \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Un espace vectoriel réel E muni d'un produit scalaire est appelé espace préhilbertien ; si de plus E est de dimension finie, on dit que c'est un espace euclidien.

- Le produit scalaire canonique sur $E = \mathbb{R}^n$ est donné par

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

avec les notation matricielles, x et y sont des vecteurs-colonne et $\langle x, y \rangle = y^T x$, en identifiant la matlice $y^T x \in \mathbb{R}^{1\times 1}$au scalaire correspondant.

- Lorsque $\langle x, y \rangle$ est un produit scalaire sur E, $\|x\| = \langle x, y \rangle^{1/2}$ est une norme sur E et

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires (inégalité de Cauchy-Schwarz).

1.7 MATRICES PAR BLOCS

Définition 4 *Une matrice par blocs* $M = (M_{ij})$, $1 \leq i; j \leq m$, *est une matrice dont les entrées* M_{ij} *sont des matrices au lieu d'être des scalaires. On doit toutefois respecter les deux règles suivantes :*

. Toutes les matrices d'une même ligne (M_{ij} *avec* $1 \leq j \leq n$) *ont le même nombre de lignes.*

. Toutes les matrices d'une même colonne (M_{ij} *avec* $1 \leq j \leq m$) *ont le même nombre de colonnes.*

Ainsi, il existe des nombres entiers m_i *et* n_j *tels que* $M_{ij} \in \mathbb{C}^{m_i n_j}$.

On va maintenant étendre aux matrices par blocs les concepts de matrice diagonale, de matrice triangulaire supérieure ou de matrice triangulaire inférieure :

. $M = (M_{ij})$ est triangulaire supérieure par blocs si $M_{ij} = 0$ pour $i > j$,

. $M = (M_{ij})$ est triangulaire inférieure par blocs si $M_{ij} = 0$ pour $i < j$,

. $M = (M_{ij})$ est diagonale par blocs si $M_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.

1.8 Produit par blocs

Exemple : Soit

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}, \text{ où } A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

et où l'on note **0** le scalaire $0 \in \mathbb{R}$ dans M, la matrice $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ et la matrice $(0,0) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ dans la description de M par blocs.

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 \\ a \end{pmatrix}$$

où $I_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ est la matrice identité et $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2}$.

Le calcul du produit par blocs s'écrit :

$$\begin{aligned} MN &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 \\ a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} AI_2 + 0B \\ 0I_2 + 1.B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.9 Matrices triangulaires par blocs

Théorème 5 *Étant donné une matrice triangulaire par blocs*

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 & \dots & 0 \\ M_{21} & M_{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & M_{nn} \end{pmatrix}$$

on a

1- Le déterminant de M est le produit des déterminants des matrices M_{ii} :

$$\det M = \prod_{1\le i\le n} \det M_{ii}$$

2- Le polynôme caractéristique de M est le produit des polynômes caractéristiques des matrices M_{ii} :

$$D_\lambda(M) = \prod_{1\le i\le n} D_\lambda(M_{ii})$$

3- Le spectre de M est la réunion des spectres des matrices M_{ii} :

$$specM = \bigcup specM_{ii}$$

et la multiplicité algébrique d'une valeur propre de M est la somme de ses multiplicités en tant que valeur propre de matrices M_{ii} .

1.10 Le complément de Schur

Considérons la matrice par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

où les dimensions des blocs A, B, C et D sont $n \times n, n \times m, m \times n$ et $m \times m$. Supposons que A soit inversible. On a alors :

$$M = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ CA^{-1} & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & A^{-1}B \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$$

de plus

$$\det(M) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$$

Définition 6 *La matrice $D - CA^{-1}B$ s'appelle le complément de Schur de la matrice A dans M.*

1.11 La formule de Sherman-Morrison-Woodbury

Le complément de Schur est à la base de la formule de Sherman-Morrison-Woodbury de mise à jour de l'inverse d'une matrice.

Proposition 7 *Soient A, B, C, D des matrices de dimensions $n \times n, n \times m, m \times n$ et $m \times m$. Supposons que A et $D - CA^{-1}B$ soient inversibles. Alors $A - BD^{-1}C$ est inversible et*

$$(A - BD^{-1}C)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$$

2 Normes sur les espaces de matrices

Un espace de matrices tel que $\mathbb{R}^{m \times n}$ ou $\mathbb{C}^{m \times n}$ étant un espace vectoriel de dimension finie , donc on peut lui associer toutes sortes de normes qui, rappelons le, sont toutes équivalentes, c'est-à-dire définissent la même topologie. Mais toutes ces normes possibles n'ont pas forcément un bon comportement vis-à-vis de la multiplication des matrices ou des produits matrice-vecteur, à la différence des normes matricielles que nous introduisons ici.

2.1 RAYON SPECTRAL

Définition 8 *Le rayon spectral d'une matrice* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *est le nombre*

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in specA} |\lambda|$$

Le rayon spectral d'une matrice joue un rôle central dans l'analyse de nombreux phénomènes, son calcul est d'une grande importance dans tous les domaines. Ci-dessous deux résultats :

Proposition 9 $\rho(A) \leq \|A\|$ *pour toute norme consistante.*

Proof. Si x est un vecteur propre unitaire associé à la valeur propre λ de A on a

$$|\lambda| = |\lambda| \, \|x\| = \|\lambda x\| = \|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\| = \|A\|$$

■

Théorème 10 *(Théorème de Gelfand) Pour toute matrice* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *et pour toute norme sur* $\mathbb{C}^{n\times n}$

$$\rho(A) = \lim_{p\to\infty} \|A^p\|^{1/p}$$