Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Badji Mokhtar-Annaba

Masters: -Probabilités et Statistique
-Actuariat

Probabilités1(Série N°3)

Exercice 1:
1.Soient X, Y deux *v.a.c.* de densités respectives:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{2}e^{-|x|},\ x \in \mathbb{R} \text{ (loi exponentielle double)} \\ f_2(y) &= \frac{1}{\pi(1+y^2)},\ y \in \mathbb{R} \text{ (loi de Cauchy)} \end{aligned}$$

Donner les fonctions caractéristiques de ces deux *v.a.*.
2.Même question si

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \begin{cases} 1-|x|, & x \in [-1,1] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \text{ (loi triangulaire)} \\ f_2(y) &= \frac{1-\cos y}{\pi y^2},\ y \in \mathbb{R} \text{ (loi de Anon)} \end{aligned}$$

Exercice 2:
Montrer qu'il est impossible d'avoir deux *v.a.* X et Y indépendanteset identiquement distribuées telles que:

$$X - Y \rightsquigarrow \mathcal{U}(-1,1).$$

Exercice 3:
Soit φ la fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire X de dimension n. Montrer que φ est définie non négative, au sens que pour $c_1, c_2, ..., c_m \in \mathbb{C}$ et pour tout $u_1, u_2, ..., u_m \in \mathbb{R}^n$,

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} c_j \overline{c_k} \varphi(u_j - u_k) \geq 0.$$

Exercice 4:
Soit $\lambda > 0$. On considère pour tout entier $n > \lambda$, la fonction caractéristique φ_n d'une *v.a.d.* $X_n \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$.
Montrer que φ_n converge ponctuellement vers une fonction caractéristique φ d'une certaine *v.a.r.* X que l'on déterminera.