Donner le modèle statistique associé à :

1- une <u>observation</u> d'une v.a $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

2- un <u>échantillon</u>, $(X_1, \dots, X_n)$, généré à partir d'une v.a entière X.

solution:

1- $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, le domaine de déf de la v.a X

= le support de la v.a X

= l'ensemble de toutes les réalisations possibles de la v.a X

$= \mathbb{N}$

le modèle statistique associé à une <u>observation</u> d'une v.a $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ est :

$$\Big(\underbrace{\mathbb{N}}_{\mathcal{X}}, \underbrace{\mathcal{P}(\mathbb{N})}_{\mathcal{B}}, \underbrace{\{\mathcal{P}(\lambda) / \lambda > 0\}}_{\mathcal{P}}\Big).$$

2- n-éch de X, où X est une v.a <u>entière</u>

$\Rightarrow \mathcal{X} = \mathbb{N}$

le modèle statistique associé à <u>un échantillon</u> généré à partir d'une v.a entière :

$$\left(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), f_\lambda\right)^n$$ où : f_λ = famille des lois discrètes sur $\mathbb{N}$

<u>Remarque:</u> le modèle d'un n-éch (détaillé) = (le modèle d'1 observation)^n

④ X suit une loi de Bernoulli $\beta(p)$. Montrer que
$T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ st une statistique exhaustive.

Solution:

$$X \sim \beta(p) \Rightarrow \begin{array}{l} \mathcal{X} = \{0,1\}. \\ P(X=x) = p^x q^{1-x} \end{array} \quad \text{où} \left| \begin{array}{l} q = 1-p \\ \text{et} \\ p = \text{le paramètre} \end{array} \right.$$

$$\cdot T = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{où } X_i \sim \beta(p) \quad i = \overline{1,n}$$

$$\Rightarrow T \sim \beta(n,p) \text{ et } \mathcal{X} = \{0,1,\dots,n\}$$

$$P(T=t) = C_n^t \, p^t q^{n-t}.$$

pour que la statistique $T = \sum X_i$ soit exhaustive il faut que: $P(X_1 = x_1 \dots, X_n = x_n / T = t)$ ne dépend pas de paramètre p

$$P(X = x_1 \dots, X_n = x_n / T = t) = P(X_1 = x_1, \dots X_n = x_n / \sum X_i = t)$$

$$= \frac{P(X_1 = x_1, \dots X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n, \sum_{i=1}^{n} X_i = t)}{P(\sum_{i=1}^{n} X_i = t)}$$

$$= \frac{P(X_1 = x_1 \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, \overbrace{X_n = x_n}, \overbrace{X_1 + X_2 + \dots + X_n = t})}{P(\sum_{i=1}^{n} X_i = t)}$$

$$= \frac{P(X_1 = x_1, \dots X_{n-1} = x_{n-1}, \overbrace{X_n = x_n}, \overbrace{X_n} = t - (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}))}{P(\sum_{i=1}^{n} X_i = t)}$$

$$= \frac{P(X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = t - \sum_{i=1}^{n-1} x_i)}{P(\sum_{i=1}^{n} X_i = t)}$$

toutes les v.a $X_1, \dots X_n$ sont ⫫ $\Rightarrow$

$$= \frac{P(X_1 = x_1) P(X_2 = x_2) \dots P(X_{n-1} = x_{n-1}) P(X_n = t - \sum_{i=1}^{n-1} x_i)}{P(\sum_{i=1}^{n} X_i = t)}$$

$$= \frac{p^{x_1} q^{1-x_1} \, p^{x_2} q^{1-x_2} \cdots p^{x_{n-1}} q^{1-x_{n-1}} \, p^{t-\sum_{i=1}^{n-1} x_i} \, q^{1-(t-\sum_{i=1}^{n-1} x_i)}}{C_n^t \, p^t \, q^{n-t}}$$

$$= \frac{\cancel{p^{\sum_{i=1}^{n-1} x_i}} \, q^{(n-1)-\sum_{i=1}^{n-1} x_i} \, \cancel{p^{t-\sum_{i=1}^{n-1} x_i}} \, \cancel{q^{1-t+\sum_{i=1}^{n-1} x_i}}}{C_n^t \, \cancel{p^t} \, \cancel{q^{n-t}}} = \boxed{\frac{1}{C_n^t}}$$

Comme la proba conditionnelle de $(X_1=x_1, \ldots, X_n=x_n / T=t)$ $= \frac{1}{C_n^t}$ est indépendant de p

alors la statistique $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ est une stat exhaustive pour le paramètre p

* Trouver une statistique exhaustive pour :

1- n-échantillon de $X \sim \mathcal{B}(p)$

2- n-echantillon de $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

3- n-échantillon de $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

4- n-échantillon de $X \sim \mathcal{U}_{[0,\theta]}$

Solution:

Critère de factorisation

① $X \sim \mathcal{B}(p)$, $\mathcal{X} = \{0,1\}$, $P(X=x) = p^x q^{1-x}$ où $q = 1-p$

$$L(\underline{x}, p) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i} q^{1-x_i} = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} q^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{p}{q}\right)^{\sum x_i} q^n}_{g(T(x),\, p)} \times \underbrace{1}_{h(x)}$$

$\Rightarrow T(x) = \sum x_i$ est une stat exh pour p.

② $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\mathcal{X} = \mathbb{N}$, $P(X=x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$

$$L(\underset{\sim}{x}, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} = e^{-n\lambda} \frac{\lambda^{\sum x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$$

$$= \underbrace{e^{-n\lambda} \lambda^{\sum x_i}}_{g(T(x), \lambda)} \times \underbrace{\frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}}_{h(x)}$$

$\Rightarrow T = \sum x_i$ est une stat exh pour le paramètre λ.

<u>Remarque:</u> il n'y a aucune raison pour avoir une stat exh

<u>En effet:</u>

$$L(\underset{\sim}{x}, \lambda) = e^{-n\lambda} \lambda^{\sum x_i} \frac{1}{\prod x_i!} = \underbrace{e^{-n\lambda} \lambda^{n\bar{x}}}_{g(T(x), \lambda)} \times \underbrace{\frac{1}{\prod x_i!}}_{h(x)}$$

$\Rightarrow T(x) = \bar{x}$ est une stat exh pour λ

$$\boxed{\text{où : } \frac{1}{n}\sum x_i = \bar{x} \Rightarrow \sum x_i = n\bar{x}}$$

③ $X \sim N(m, \sigma^2)$ $\quad \mathcal{X} = \mathbb{R}$, $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2}$

on a deux paramètres m et σ^2 : (m = inconnu, σ^2 = inconnu).

$$L(\underset{\sim}{x}, m, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i - m)^2}$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2}$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum x_i^2 + n m^2 - 2m\sum x_i\right)}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\sum x_i^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{n m^2}{2\sigma^2}} e^{\frac{m\sum x_i}{\sigma^2}}}_{g(T_1(x), T_2(x), m, \sigma^2)} \times \underbrace{1}_{h(x)}$$

d'où : $T_1(x) = \sum x_i$ stat exh pour m

$T_2(x) = \sum x_i^2$ stat exh pour σ^2

$T(x) = (T_1(x), T_2(x)) = \left(\sum x_i, \sum x_i^2\right)$ stat exh pour (m, σ^2)

④ $X \sim \mathcal{U}_{[0,\theta]}$, $\mathcal{X} = [0, \theta]$, $f_X(x) = \frac{1}{\theta} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x)$

$$L(x, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x_i) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n \mathbb{1}_{\{\min x_i \geq 0\}} \mathbb{1}_{\{\max x_i \leq \theta\}}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}_{\{\max x_i \leq \theta\}}}_{g(T(x), \theta)} \underbrace{\mathbb{1}_{\{\min x_i \geq 0\}}}_{h(x)}$$

d'où $T(x) = \max x_i$ est une stat exh pour le paramètre θ

<u>Remarque</u>: $\prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x_i) \Rightarrow \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x_1)$ et $\mathbb{1}_{[0,\theta]}(x_2)$ et ... et $\mathbb{1}_{[0,\theta]}(x_n)$

$\Rightarrow 0 \leq x_1 \leq \theta$ et $0 \leq x_2 \leq \theta$ et ... et $0 \leq x_n \leq \theta$

$\Rightarrow$ tout $x_i \geq 0$ et tout $x_i \leq \theta$ $\forall i = \overline{1,n}$

$\Rightarrow$ le plus petit des $x_i \geq 0$ et le plus grand des $x_i \leq \theta$

$\Rightarrow \min x_i \geq 0$ et $\max x_i \leq \theta$.

⑦ Trouver une stat exhaustive pour :

1- un n-échantillon de $X \sim \mathcal{B}(p)$

2- un n-échantillon de $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$