Table des matières

Chapitre 1

La méthode du simplexe

Pour déterminer la (ou les) solution(s) optimalt(s) d'un problème de programmation linéaire, il suffit, aprés avoire mis le problème sous forme standard, de s'intéresser aux solutions de base admissibles, c'est-à-dire aux sommets du polyèdre P (s'il est non vide).

Toutefois, il n'est pas pensable de simplement énumérer toutes les solutions de base admissibles. Le nombre maximum de bases [1] du problème sous forme standarad (*en supposant* $rang(A) = m < n$) est

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

et donc, pour un problème de grand dimensions, une telle énumération est exclue car le temps de calcule deviendrait prohibitif.

Une procédure " intlligence " est donc nécessaire : *l'algorithme simplexe* [2]

1.1 La méthode du simplexe sur des exemples

1.1.1 Exemple 1

$$\begin{cases} \widetilde{z} = \max\ z & = & 4x_1 + 5x_2 \\ s.c. & 2x_1 + x_2 & \leq 8 \\ & x_1 + 2x_2 & \leq 7 \\ & x_2 & \leq 3 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{cases}$$

Passage à la forme standard

1. Cette borne supérieure est atteinte si toutes les sous-matrices $(m \times n)$ de A sont régulières.
2. Le terme " simplexe " - qui donné son nom à la méthode - désigne un polyèdre convexe de $\mathbb{R}^n$ possédant $(n+1)$ sommets.

$$\left\{\begin{array}{lcccccc} \widetilde{z} = \max \;\; z = & 4x_1 & +5x_2 & +0.x_3 & +0.x_4 & +0.x_5 & \\ \quad s.c. & 2x_1 & +\,x_2 & +\,\mathbf{x}_3 & & & = 8 \\ & x_1 & +2x_2 & & +\,\mathbf{x}_4 & & = 7 \\ & & +\,x_2 & & & +\,\mathbf{x}_5 & = 3 \\ & x_1, & x_2 & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \end{array}\right.$$

il y a 9 points intéressants (intersection de contraintes), 5 points admissibles.

Enumération de ces 9 points comme solution de la forme standard (solutions de base).

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	*sol de base*	*admissible*	*pt extreme*
0	**0**	8	7	3	$\surd$	$\surd$	$(0,0)$
0	8	**0**	-9	-5	$\surd$	$\ltimes$	
0	3.5	4.5	**0**	-0.5	$\surd$	$\ltimes$	
0	3	5	1	**0**	$\surd$	$\surd$	$(0,3)$
4	**0**	**0**	3	3	$\surd$	$\surd$	$(4,0)$
7	**0**	-6	**0**	3	$\surd$	$\ltimes$	
	0			**0**	$\ltimes$	$\ltimes$	
3	2	**0**	**0**	1	$\surd$	$\surd$	$(3,2)$
2.5	3	**0**	-1.5	**0**	$\surd$	$\ltimes$	
1	3	3	**0**	**0**	$\surd$	$\surd$	$(1,3)$

Remarque 1 *Points extrêmes* $\Longleftrightarrow$ *Solutions de base admissibles*

Base et solution de base

Base initiale ? $\{x_3, x_4, x_5\}$ par exemple :

$$\left\{\begin{array}{cccccc} 2x_1 & +\,x_2 & +\,\mathbf{x}_3 & & & = 8 \\ x_1 & +2x_2 & & +\,\mathbf{x}_4 & & = 7 \\ & +\,x_2 & & & +\,\mathbf{x}_5 & = 3 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_3 = 8 - 2x_1 - x_2 \\ x_4 = 7 - x_1 - 2x_2 \\ x_5 = 3 - x_2 \end{array}\right.$$

$x_3, x_4, x_5 =$ variables de base, $x_1, x_2 =$ variables hors base.

On met les variables hors base à 0, on en déduit les valeur des variables de base

$$x_1 = x_2 = 0 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_3 = 8 - 2x_1 - x_2 = 8 \\ x_4 = 7 - x_1 - 2x_2 = 7 \\ x_5 = 3 - x_2 \qquad = 3 \end{array}\right.$$

Base voisine et pivotage

Deux sommets voisins correspondent a deux bases B et $B\prime$ telles qu'on remplace une variable de B pour obtenir B'.

— passer a un sommet voisin = changer de base (base voisine)→principe du pivotage.

Qui faire entrer dans la base ?

Essayons avec x_2 : quelle est la valeur max que pourra avoir x_2 ?

$$
\begin{aligned}
x_3 = 8 - 2x_1 - x_2 &\geq 0 \Longrightarrow x_2 \leq 8 \\
x_4 = 7 - x_1 - 2x_2 &\geq 0 \Longrightarrow x_2 \leq 3.5 \\
x_5 = 3 - x_2 \qquad &\geq 0 \qquad \Longrightarrow x_2 \leq 3
\end{aligned}
$$

Bilan : $x_{2_{max}} = 3$, pour $x_2 = x_{2_{max}}$ on a :

$$
\begin{aligned}
x_3 &= 5 - 2x_1 \\
x_4 &= 1 - x_1 \\
x_5 &= 0
\end{aligned}
$$

La nouvelle base :$\{x_3, x_4, x_5\} \cup \{x_2\} / \{x_5\} = \{x_2, x_3, x_4\}$

La nouvelle solution :$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 3, 5, 1, 0)$

Vers un algorithme de résolution

Méthode de résolution "naïve" : énumérer tous les sommets, calculer f sur ces points, prendre le sommet pour lequel f est optimiseé :

— fonctionne : nombre fini de sommets ;

— limitation : ce nombre peut être très grand en général...

L'algorithme du simplexe (G. B. Dantzig 1947) Algorithme itératif permettant de résoudre un problème de programmation linéaire.

Principe d'amélioration locale

A partir d'un sommet, chercher un sommet voisin qui améliore l'objectif.

Principe d'amélioration locale (maximisation) :

Soit x_0 sommet non optimum. Alors il existe x, un **sommet voisin** de x_0, tel que $f(x) > f(x_0)$.

Méthode de résolution : on part d'un sommet x_0 quelconque, on passe a un sommet voisin pour lequel f augmente, et ainsi de suite.

Remarque 2 *on passe d'un problème continu (variables réelles) à un problème discret (nombre fini de sommets)...*

Illustration 2D :

$$
\begin{aligned}
x_0 = (0,0); z = 0 \quad &\longrightarrow \quad x = (0,3); z = 15 \\
x = (0,3); z = 15 \quad &\longrightarrow \quad x = (1,3); z = 19 \\
x = (1,3); z = 19 \quad &\longrightarrow \quad x = (3,2); z = 22
\end{aligned}
$$

plus d'amélioration locale possible $\Longrightarrow$ optimum

L'algorithme du simplexe :Illustration concréte

1- Standardisation :

$$\begin{cases} \max\ z & = & 4x + 5x_2 \\ s.c. & 2x_1 + x_2 & \leq 8 \\ & x_1 + 2x_2 & \leq 7 \\ & x_2 & \leq 3 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{cases}$$

Passage à la forme standard

$$\begin{cases} \max\ z = & 4x_1 & +5x_2 & +0.x_3 & +0.x_4 & +0.x_5 & \\ s.c. & 2x_1 & +\ x_2 & +\ \mathbf{x}_3 & & & = 8 \\ & x_1 & +2x_2 & & +\ \mathbf{x}_4 & & = 7 \\ & & +\ x_2 & & & +\ \mathbf{x}_5 & = 3 \\ & x_1, & x_2 & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \end{cases}$$

Forme tableau

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	*varaibles de base*
2	1	1	0	0	8	x_3
1	2	0	1	0	7	x_4
0	1	0	0	1	3	x_5
4	5	0	0	0	0	$-z$

Base initiale ? $\{x_3, x_4, x_5\}$ par exemple :

$$\begin{cases} 2x_1 & +\ x_2 & +\ \mathbf{x}_3 & & & = 8 \\ x_1 & +2x_2 & & +\ \mathbf{x}_4 & & = 7 \\ & +\ x_2 & & & +\ \mathbf{x}_5 & = 3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_3 = 8 - 2x_1 - x_2 \\ x_4 = 7 - x_1 - 2x_2 \\ x_5 = 3 - x_2 \end{cases}$$

$x_3, x_4, x_5 =$ variables de base, $x_1, x_2 =$ variables hors base.

On met les variables hors base à 0, on en déduit les valeur des variables de base

$$x_1 = x_2 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x_3 = 8 - 2x_1 - x_2 = 8 \\ x_4 = 7 - x_1 - 2x_2 = 7 \\ x_5 = 3 - x_2 \quad\ \ = 3 \end{cases}$$

Solution de base associée

On met les variables hors base à 0, on en déduit :

— valeur des variables de base.

— valeur de z.

Ici :

$$x_1 = x_2 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x_3 = 8 - 2x_1 - x_2 = 8 \\ x_4 = 7 - x_1 - 2x_2 = 7 \\ x_5 = 3 - x_2 \qquad = 3 \end{cases}$$

et

$$z = 4x_1 + 5x_2 = 0$$

Changement de base

Observation essentielle : $z = 4x_1 + 5x_2 = 0 \Longrightarrow$ on peut augmenter z.

si x_1 ou x_2 rentre dans la base.

Essayons avec x_2 : quelle est la valeur *max* que pourra avoir x_2 ?

$$x_3 = 8 - 2x_1 - x_2 \geq 0 \Longrightarrow x_2 \leq 8$$
$$x_4 = 7 - x_1 - 2x_2 \geq 0 \Longrightarrow x_2 \leq 3.5$$
$$x_5 = 3 - x_2 \qquad \geq 0 \qquad \Longrightarrow x_2 \leq 3$$

Bilan : $x_{2_{max}} = \min(\frac{8}{1}, \frac{7}{2}, \frac{3}{1}) = 3$,

Forme tableau

↓

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	*variables de base*	
2	1	1	0	0	8	x_3	
1	2	0	1	0	7	x_4	
0	$\boxed{1}$	0	0	1	3	x_5	$\longrightarrow$
4	5	0	0	0	0	$-z$	

pour $x_2 = x_{2_{max}}$ on a :

$$x_3 = 5 - 2x_1$$
$$x_4 = 1 - x_1$$
$$x_5 = 0$$

La nouvelle base :$\{x_3, x_4, x_5\} \cup \{x_2\} \,/\, \{x_5\} = \{x_2, x_3, x_4\}$

La nouvelle solution :$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 3, 5, 1, 0)$

Nouvelle base : $\{x_2, x_3, x_4\}$

$$\begin{cases} x_3 = 8 - 2x_1 - x_2 \\ x_4 = 7 - x_1 - 2x_2 \\ x_5 = 3 - x_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_3 = 8 - 2x_1 - x_2 = 5 - 2x_1 + x_5 \\ x_4 = 7 - x_1 - 2x_2 = 1 - x_1 + 2x_5 \\ \qquad\qquad\qquad x_2 = 3 - x_5 \end{cases}$$

Exprimons z en fonction des variables hors base :

$$z = 4x_1 + 5x_2 = 15 + 4x_1 - 5x_5$$

Solution de base associée

$$x_1 = x_5 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x_3 = 5 - 2x_1 + x_5 = 5 \\ x_4 = 1 - x_1 + 2x_5 = 1 \\ x_2 = 3 - x_5 \quad = 3 \end{cases} \qquad \text{et} \quad z = 15$$

Forme tableau

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	*varaibles de base*
2	0	1	0	-1	5	x_3
1	0	0	1	-2	1	x_4
0	1	0	0	1	3	x_2
4	0	0	0	-5	-15	$-z$

2- Itération $z = 15 + 4x_1 - 5x_2$ peut encore augmenter si x_1 entre dans la base.

Si x_1 entre, qui sort ?

Valeur max de x_1 :

$$x_3 = 5 - 2x_1 + x_5 \geq 0 \Longrightarrow x_1 \leq 2.5$$
$$x_4 = 1 - x_1 + 2x_5 \geq 0 \Longrightarrow x_1 \leq 1$$
$$x_2 = 3 - x_5 \quad \geq 0 \Longrightarrow \textit{aucune contrainte sur } x_1$$

Bilan : $x_{1_{max}} = \min(\frac{5}{2}, \frac{1}{1}) = 1$, et x_4 sort.

Forme tableau

$\downarrow$ x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	*varaibles de base*	
2	0	1	0	-1	5	x_3	
$\boxed{1}$	0	0	1	-2	1	x_4	$\longrightarrow$
0	1	0	0	1	3	x_2	
4	0	0	0	-5	-15	$-z$	

$$x_3 = 5 - 2x_1$$
$$x_4 = 1 - x_1$$
$$x_5 = 0$$

La nouvelle base :$\{x_1, x_2, x_3\}$

$$\begin{cases} x_3 = 3 + 2x_4 - 3x_5 \\ x_1 = 1 - x_4 + 2x_5 \\ x_2 = 3 - x_5 \\ z = 19 - 4x_4 + 3x_5 \end{cases}$$

Forme tableau

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	*varaibles de base*
0	0	1	-2	3	3	x_3
1	0	0	1	-2	1	x_1
0	1	0	0	1	3	x_2
0	0	0	-4	-3	-19	$-z$

3- Itération (suite) $z = 19 - 4x_4 + 3x_5$ peut encore augmenter si x_5 entre dans la base.

Si x_5 entre, qui sort ?

Valeur max de x_5 :

$$x_3 = 3 + 2x_4 - 3x_5 \geq 0 \Longrightarrow x_5 \leq 1$$
$$x_1 = 1 - x_4 + 2x_5 \geq 0 \Longrightarrow \textit{aucune contrainte sur } x_5$$
$$x_2 = 3 - x_5 \geq 0 \Longrightarrow x_5 \leq 1$$

Bilan : $x_{5_{max}} = \min(\frac{1}{1}, \frac{1}{1}) = 1$, et x_3 sort.

La nouvelle base :$\{x_1, x_2, x_5\}$

$$\begin{cases} x_5 = 1 + \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_3 \\ x_1 = 3 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_3 \\ x_2 = 2 - \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_3 \\ z = 22 - 2x_4 - x_3 \end{cases}$$

Forme tableau

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	*variables de base*
0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	1	x_5
1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	3	x_1
0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	2	x_2
0	0	-1	-2	0	-22	$-z$

4- Terminaison On a : $z = 22 - 2x_3 - x_3$, donc $z^* \leq 22$

Or la solution de base $x_1 = 3; x_2 = 2; x_5 = 1$ donne $z \leq 22 \rightharpoonup$L'optimum

La condition de terminaison concerne les coefficients de z exprimée avec les variables hors base.

1.1.2 Exemple 2

1-Standardisation :

$$\begin{cases} \max\ z & = & 3x_1 + 4x_2 \\ s.c. & x_1 + 2x_2 & \leq 21 \\ & x_1 + x_2 & \leq 12 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{cases}$$

Passage à la forme standard

$$\begin{cases} \max\ z = & 3x_1 & +4x_2 & +0.x_3 & +0.x_4 & \\ s.c. & x_1 & +\ 2x_2 & +\ \mathbf{x}_3 & & = 21 \\ & x_1 & +x_2 & & +\ \mathbf{x}_4 & = 12 \\ & x_1, & x_2 & x_3, & x_4 & \geq 0 \end{cases}$$

Forme tableau

$\downarrow$

	x_1	x_2	x_3	x_4	b	*varaibles de base*
L_1	1	2	1	0	21	x_3 $\longrightarrow$
L_2	1	1	0	1	12	x_4
L_z	3	4	0	0	0	$-z$

$I = \{3, 4\}$, $J = \{1, 2\}$

Le choix de la variable entrante :

Le coefficient dans la fonction z de la variable entrante est le plus grand des coefficients (positifs) de z.

$$x_3 = 21 - 2x_2 \geq 0 \Longrightarrow x_2 \leq \frac{21}{2}$$
$$x_2 \leq 12$$

$\Longrightarrow x_{2_{max}} = \min(\frac{21}{2}, 12) = \frac{21}{2}$

Le choix de la variable sortante :

la variable sortante correspond au plus petit des rapports (positifs) entre le second membre et les coefficients associés de la variable entrante.

$I_1 = \{2,4\}\,, J_1 = \{1,3\}$

	$\downarrow$ x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	*varaibles de base*	
$L_1' = \frac{1}{2}L_1$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{21}{2}$	x_2	
$L_2' = L_2 - L_1'$	$\boxed{\frac{1}{2}}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{3}{2}$	x_4	$\longrightarrow$
$L_z' = L_z - 2L_1'$	1	0	-2	0	0	-42	$-z$	

pour $x_1 = x_{1_{max}}$ on a :

$x_{1_{max}} = \min(\frac{\frac{21}{2}}{\frac{1}{2}}, \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}) = 3$

Donc :$I_2 = \{2,1\}\,, J_2 = \{3,4\}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	b	*varaibles de base*
$L_1'' = L_1' - L_2'$	0	1	1	-1	9	x_2
$L_2'' = 2L_2'$	1	0	-1	2	3	x_1
$L_z'' = L_z' - L_1''$	0	0	-1	-2	-45	$-z$

Remarque 3 1. $L_z < 0$ *condition d'optimalité pour un probléme de* max.

2. $L_z > 0$ *condition d'optimalité pour un probléme de* min.

1.1.3 Exemple 3

Standardisation :

$$\begin{cases} \min\ z & = & 3x_1 - 6x_2 \\ s.c. & -x_1 - 2x_2 & \leq 1 \\ & -2x_1 - x_2 & \leq 0 \\ & -x_1 + x_2 & \leq 1 \\ & -2x_1 + 4x_2 & \leq 13 \\ & 4x_1 - x_2 & \leq 23 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{cases}$$

Passage à la forme standard

$$\begin{cases} \min\ z = & 3x_1 & -6x_2 & +0.x_3 & +0.x_4 & +0.x_5 & +0.x_6 & +0.x_7 & \\ s.c. & -x_1 & -\ 2x_2 & +\ \mathbf{x_3} & & & & & = 1 \\ & -2x_1 & -\ x_2 & & +\ \mathbf{x_4} & & & & = 0 \\ & -x_1 & +\ x_2 & & & +\ \mathbf{x_5} & & & = 1 \\ & -2x_1 & +4x_2 & & & & +\ \mathbf{x_6} & & = 13 \\ & 4x_1 & -\ x_2 & & & & & +\ \mathbf{x_7} & = 23 \\ & x_1, & x_2 & x_3, & x_4 & ,x_5 & ,x_6 & ,x_7 & \geq 0 \end{cases}$$

Forme tableau

	x_1	$\downarrow$ x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	*variables de base*	
L_1	-1	-2	1	0	0	0	0	1	x_3	
L_2	-2	-1	0	1	0	0	0	0	x_4	
L_3	-1	$\boxed{1}$	0	0	1	0	0	1	x_5	$\longrightarrow$
L_4	-2	4	0	0	0	1	0	13	x_6	
L_5	4	-1	0	0	0	0	1	23	x_7	
L_z	3	-6	0	0	0	0	0	0	$-z$	

$I = \{3, 4, 5, 6, 7\}, J = \{1, 2\}$

$\min(\frac{1}{1}, \frac{13}{4}) = 1$

$I_1 = \{3, 4, 2, 6, 7\}, J_1 = \{1, 5\}$

	$\downarrow$ x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	*varaibles de base*	
$L'_1 = 2L_3 - L_1$	-3	0	1	0	2	0	0	3	x_3	
$L'_2 = L_3 + L_2$	-3	1	0	1	1	0	0	1	x_4	
$L'_3 = L_3$	-1	0	0	0	0	0	0	1	x_2	
$L'_4 = 4L_3 - L_4$	$\boxed{3}$	0	0	0	-4	1	0	9	x_6	$\longrightarrow$
$L'_5 = L_3 + L_5$	3	0	0	0	1	0	1	24	x_7	
$L'_z = 6L_3 + L_z$	-3	0	0	0	6	0	0	6	$-z$	

$\min(\frac{9}{3}, \frac{24}{3}) = 3$

Donc :$I_1 = \{3, 4, 2, 1, 7\}, J_1 = \{6, 5\}$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	*varaibles de base*
0	0	1	0	-2	1	0	12	x_3
0	1	0	1	-3	1	0	10	x_4
0	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	4	x_2
1	0	0	0	$-\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	3	x_1
0	0	0	0	5	-1	1	15	x_7
0	0	0	0	2	1	0	15	$-z$

La solution optimale est $x^* = (x_1, x_2) = (3, 4)$

La valeur optimale :$z^* = -15$

1.2 Le cas général

1.2.1 Cout réduits, La forme réduite

Soit le problème $(P.L)$ sous la forme standard

$$(P.L)\begin{cases} \widetilde{z} = \max\ z & = & c^\top x \\ & Ax = & b \\ & x \geq & 0 \end{cases}$$

A matrice $m \times n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

$B = \{i_1, i_2, ..., i_m\}$, $N = \{1, 2, ..., n\} - B$

$A = [A_B\ A_N]$, $A_B \in M_{m,m}$ *inversible*, $A_N \in M_{m,n-m}$

$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} Ax &= b \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} A_B & A_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = b \\ &\Longleftrightarrow A_B x_B + A_N x_N = b \\ &\Longleftrightarrow x_B + \underbrace{A_B^{-1} A_N}_{\widetilde{A}_N} x_N = \underbrace{A_B^{-1} b}_{\widetilde{b}}, \qquad \widetilde{A}_N = A_B^{-1} A_N,\ \widetilde{b} = A_B^{-1} b \\ &\Longleftrightarrow x_B + \widetilde{A}_N x_N = \widetilde{b} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
z &= c^\intercal x \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} c_B & c_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} \\
&\Longleftrightarrow z = c_B^\intercal x_B + c_N^\intercal x_N \\
&\Longleftrightarrow z = c_B^\intercal \left(\widetilde{b} - \widetilde{A}_N x_N\right) + c_N^\intercal x_N \\
&\Longleftrightarrow z = c_B^\intercal \widetilde{b} + \underbrace{\left(c_N^\intercal - c_B^\intercal \widetilde{A}_N\right)}_{d_N^\intercal} x_N \\
&\Longleftrightarrow z = z_B + d_N^\intercal x_N
\end{aligned}
$$

Donc,

$$
(PL) \Longleftrightarrow \begin{cases} \max\ z \quad = z_B + d_N^\intercal x_N \\ \qquad x_B + \widetilde{A}_N x_N = \widetilde{b} \end{cases} \longleftarrow \text{La forme réduite}
$$

à chaque itération on a

x_B	x_N	$S.m$	$V.b$
I_m	$\widetilde{A}_N$	$\widetilde{b}$	x_B
0	$d_N^\intercal$	$-z_B$	$-z$

			$\overset{\downarrow}{x_l}$			
$\widetilde{a}_{11}$	$\widetilde{a}_{12}$	$\widetilde{a}_{1j}$	$\widetilde{a}_{1l}$	$\widetilde{a}_{1n}$	$\widetilde{b}_1$	
		$\widetilde{a}_{ij}$	$\widetilde{a}_{il}$	$\widetilde{a}_{in}$	$\widetilde{b}_i$	
		$\widetilde{a}_{pj}$	$\boxed{\widetilde{a}_{pl}}$	$\widetilde{a}_{pn}$	$\widetilde{b}_p$	$\longleftarrow$
$\widetilde{a}_{m1}$	$\widetilde{a}_{m2}$	$\widetilde{a}_{mj}$	$\widetilde{a}_{ml}$	$\widetilde{a}_{mn}$	$\widetilde{b}_m$	
0		d_j	d_l	d_{n-m}	$-z_B$	

$\widetilde{a}'_{pj} = \frac{\widetilde{a}_{pj}}{\widetilde{a}_{pl}} \quad \forall j = 1, ..., n$

$\widetilde{b}'_p = \frac{\widetilde{b}_p}{\widetilde{a}_{pl}}$

$\widetilde{a}'_{ij} = \widetilde{a}_{ij} - \frac{\widetilde{a}_{il}\widetilde{a}_{pj}}{\widetilde{a}_{pl}} \ \forall i \neq p \ , \forall j = 1, ..., n$

Dans la colonne l :

$\widetilde{a}'_{pl} = \frac{\widetilde{a}_{pl}}{\widetilde{a}_{pl}} = 1$

$\widetilde{a}'_{il} = \widetilde{a}_{il} - \frac{\widetilde{a}_{il} \times \widetilde{a}_{pl}}{\widetilde{a}_{pl}} = 0$

$i \neq p$, $\widetilde{b}'_i = \widetilde{b}_i - \frac{\widetilde{a}_{il} \times \widetilde{b}_l}{\widetilde{a}_{pl}}$
$\widetilde{d}'_j = \widetilde{d}_j - \frac{\widetilde{a}_{pj} \times \widetilde{d}_l}{\widetilde{a}_{pl}}$

1.2.2 Critère d'optimalité

Théorème 1 *Si $d_N^\top \preceq 0$. Alors la solution de base associée $x = (x_B, x_N)$ est optimale*

Preuve. $\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ admissible, et soit, $x^* = (x_B^*, 0) = (\widetilde{b}, 0)$.
Montrons que $z(x^*) \geq z(x), \forall x$ admissible.
$\forall i, x_i \geq 0$, $\forall x, z(x) = z_B + \underbrace{d_N^\top x_N} \leq z_B = z(x^*)$, puisque $d_N^\top x_N \leq 0 \Longrightarrow \mathrm{z}_B = x^*$, d'où x^* solution optimale. ■

Remarque 4 *1-Pour un PL de minimisation, le critère d'optimalité $d_N^\top \geq 0$.*
2- si $d_N^\top \nleq 0$ on va soit procéder à une itération ou remarquer le polyèdre et non borné et $supz = +\infty$

Remarque 5 *Si le critère d'optimalité n'est pas vérifié on va procéder soit à une itération ou remarquer le polyèdre est non borné et* $\sup(z) = +\infty$.

Supposons que $d_N^\top \nleq 0$. Cela sinifie il existe donc des $d_j \succ 0$.

Le choix de la varaible entrante

Notons par $d_l = \max\limits_{j \in N} \{d_j \succ 0\}$

On a deux cas :

***1**^{er}cas* : $\forall i = 1, ..., m,\ \widetilde{a}_{il} \leq 0$

Alors, montrons que le polyèdre n'est pas borné et $\sup(z) = +\infty$.

En effet

Construisons la solution admissible.

$\forall i \in N - \{l\}, x_i = 0$ *et* $x_l = t$.

$x_N = (0, ..., l, ..., 0)$ *solution n'est pas de base*

$$x_B = \widetilde{b} - t\widetilde{A}_l \geq 0, \quad \text{où } \widetilde{A}_l = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{1l} \\ \widetilde{a}_{2l} \\ \vdots \\ \widetilde{a}_{ml} \end{pmatrix}$$

$$x_B + \widetilde{A}_N x_N \stackrel{?}{=} \widetilde{b}$$

$$\widetilde{b} - t\widetilde{A}_l + \widetilde{A}_N \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \widetilde{b} - t\widetilde{A}_l + \widetilde{A}_N t = \widetilde{b}$$

$$x = \left(\widetilde{b} - t\widetilde{A}_l, \underbrace{t, ..., 0}_{x_N} \right)$$

On a x admissible $\forall t$, donc le polyèdre non borné.

Calculons $z(x)$:

$$\begin{aligned} z(x) &= z_B + d_N^\top x_N \\ &= z_B + t d_l \end{aligned}$$

$t \to +\infty, z(x) \to +\infty \Longrightarrow \sup(z) = +\infty$

2^eme^cas : $\exists l \in \{1, ..., m\}, \; \widetilde{a}_{il} > 0$

Dans ce cas on va procéder à une itération, ***la varaible entrante étant*** x_l*. On va supposer maintenant que : l'ensemble de base B est non dégénéré.*

Le choix de la varaible sortante $\mathbf{x}_p$ *est déterminé d'après la règle suivante :*

Pour la ligne p

$$p \text{ vérifie } \frac{\widetilde{b}_p}{\widetilde{a}_{pl}} = \min \left\{ \frac{\widetilde{b}_i}{\widetilde{a}_{il}} : \widetilde{a}_{il} > 0 \right\}$$

On aura une nouvelle base :

$B' = \{B - \{p\}\} \cup \{l\}, N' = \{N - \{l\}\} \cup \{p\}$

Montrons qu'en utilisant cette règle et la méthode du pivot, la nouvelle base sera aussi admissible.

En effet, l'ancienne solution de base $x = \left(x_B = \widetilde{b}, x_N = 0 \right)$

Soit $x' = (x'_1, x'_2, ..., x'_n)$

$\forall i \in N - \{l\}, \; x'_i = 0, \; x'_l = \widetilde{b}'_p \geq 0$

$\forall i \neq p$, *calculons le nouveau* $\widetilde{b}'_p$ *on a,*

$$\frac{\widetilde{b}_p}{\widetilde{a}_{pl}} \leq \frac{\widetilde{b}_i}{\widetilde{a}_{il}}, \quad \widetilde{a}_{il} > 0$$

ce qui entraine à que

$$\frac{\widetilde{b}_i}{\widetilde{a}_{il}} - \frac{\widetilde{b}_p}{\widetilde{a}_{pl}} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\widetilde{a}_{il}} \underbrace{\left(\widetilde{b}_i - \frac{\widetilde{b}_p \widetilde{a}_{il}}{\widetilde{a}_{pl}} \right)}_{\widetilde{b}'_i \geq 0} \geq 0$$

et pour $i = p$

$$\widetilde{b}'_p = \frac{\widetilde{b}_p}{\widetilde{a}_{pl}}$$

Montrons que $z'_B \geq z_B$ *i.e* z *augmente.*

La nouvelle solution $x' = \left(x_{B'} = \widetilde{b}', x_{N'} = 0 \right)$

$$\begin{aligned} z(x') &= z_B + d_N^\top x'_N \\ &= z_B + d_l \widetilde{b}'_l \geq z_B \end{aligned}$$

Si B est non dégénérée et si le choix de la varaible sortante est unique, alors la nouvelle base B' est aussi non dégénérée et z augmente strictement ($z'_B > z_B$)

En effet

$$\frac{\widetilde{b}_i}{\widetilde{a}_{il}} - \frac{\widetilde{b}_p}{\widetilde{a}_{pl}} > 0, \quad \widetilde{a}_{il} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\widetilde{a}_{il}} \underbrace{\left(\widetilde{b}_i - \frac{\widetilde{b}_p \widetilde{a}_{il}}{\widetilde{a}_{pl}} \right)}_{\widetilde{b}'_i > 0} > 0 \ , i \neq p$$

Donc, le nouveau $\widetilde{b}'_i > 0$.

On a, $z_{B'} = z_B + d_l \widetilde{b}'_l \geq z_B$

Exercice 1 *Montrer que si B est non dégénérée et si le choix de la varaible sortante n'est pas unique. Alors la nouvelle B' est dégénérée.*

Solution 1 *Si le choix de la varaible sortante n'est pas unique,*

$$\exists p, q : \frac{\widetilde{b}_p}{\widetilde{a}_{pl}} = \frac{\widetilde{b}_q}{\widetilde{a}_{ql}} = \min \left\{ \frac{\widetilde{b}_i}{\widetilde{a}_{il}} : \widetilde{a}_{il} > 0 \right\}$$

$$\widetilde{b}'_q = \widetilde{b}_q - \frac{\widetilde{b}_p \widetilde{a}_{ql}}{\widetilde{a}_{pl}} = 0$$

On a montré le théorème suivante :

Théorème 2 *Supposons que le programme linéaire est non dégénérée et qu'il admette au moins une solution optimale (avec $z_{\max}$ fini). Alors à chaque itération du simplexe le choix de la ligne du pivot (i.e de la varaible sortante) est unique et l'objectif croit strictement. Comme le nombre d'ensemble de base est fini (il est inférieur ou égale à C_n^m), il résulte qu'après un nombre fini d'itérations l'algorithme va trouver une solution de base optimale. Cela montre aussi que, si le programme admet une solution optimale, alors il existe toujours de base optimale.*