T. D. n° 3
Séries temporelles

Exercice 1. D'après l'énoncé de l'exercice 1 du T.D.2 de Ségolen Geffray

1. Montrer que le filtre $P(B) = \frac{1}{3}(2 + B + B^2 - B^3)$ enlève les composantes saisonnières d'ordre 3.
2. Trouver l'ordre maximal de la tendance polynomiale conservée par le filtre $P(B) = \frac{1}{3}(2 + B + B^2 - B^3)$.
3. Trouver a, b et c tels que le filtre $P(B) = 1 + aB + bB^2 + cB^3$ laisse passer une tendance affine sans distorsion et élimine les périodicités d'ordre 2.
4. Trouver un filtre $P(B)$ qui conserve les polynômes de degré inférieur ou égal à 1 et qui enlève les composantes saisonnières d'ordre 4.
5. Montrer que le filtre $P(B) = \frac{1}{9}(-B^2 + 4B + 3 + 4B^{-1} - B^{-2})$ laisse invariants les polynômes de degré 3 et enlève les composantes saisonnières d'ordre 3.

Exercice 2. D'après l'énoncé de l'exercice 2 du T.D.2 de Ségolen Geffray

En cours, vous avez traité l'exemple de « moyenne mobile arithmétique symétrique » . Ici nous allons traiter le cas de la « moyenne mobile arithmétique non symétrique » .

1. Déterminer la droite obtenue en lissant $2q+2$ observations réparties autour de t et $t+1$ avec une moyenne mobile du type $\theta(B) = \sum_{i=0}^{2q} \theta_i B^i$ où $\theta_i = \frac{1}{2q+1}$, pour tout $i = 0, ..., 2q$. Puis effectuer une prévision au temps s.
2. Recommencer en lissant $2q + 2$ observations précédant un instant t avec une moyenne mobile du type $\theta(B) = \sum_{i=-2q}^{0} \theta_i B^i$ où $\theta_i = \frac{1}{2q+1}$, pour tout $i = -2q, ..., 0$.

Exercice 3. D'après l'énoncé de l'exercice 3 du T.D.2 de Ségolen Geffray

1. Soient X_1, X_2, X_4 et X_5 des observations issues d'une série moyenne mobile d'ordre 1, c'est-à-dire définie par :

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad X_t = \theta + \varepsilon_t$$

   où (ε_t) est un bruit blanc centré de variance σ^2.

   (i) Trouver le meilleur estimateur linéaire, au sens des moindres carrés (c'est-à-dire pour la norme L^2), de la valeur manquante X_3 en fonction de X_1 et X_2.

(ii) Trouver le meilleur estimateur linéaire, au sens des moindres carrés (c'est-à-dire pour la norme L^2), de la valeur manquante X_3 en fonction de X_4 et X_5.

(iii) Calculer l'erreur quadratique moyenne pour les deux cas précédents.

(iv) Trouver le meilleur estimateur linéaire, au sens des moindres carrés (c'est-à-dire pour la norme L^2), de la valeur manquante X_3 en fonction de X_1, X_2, X_4 et X_5.

2. Soient X_1, X_2, X_4 et X_5 des observations issues d'un processus autorégressif d'ordre 1, c'est-à-dire défini par :

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad X_t = \rho X_{t-1} + \varepsilon_t$$

où (ε_t) est un bruit blanc centré de variance σ^2 et $|\rho| < 1$.

(i) Trouver le meilleur estimateur linéaire de la valeur manquante X_3 en fonction de X_1 et X_2.

(ii) Trouver le meilleur estimateur linéaire de la valeur manquante X_3 en fonction de X_4 et X_5.

(iii) Trouver le meilleur estimateur linéaire de la valeur manquante X_3 en fonction de X_1, X_2, X_4 et X_5.