Nom & Prénom :	اللقب و الإسم:
Niveau : Master 2 M.A.S	2016/2017 المستوى:
Groupe :	الفوج:
N d'inscription :	رقم التسجيل:
Examen de : Processus Stoch. 3	إمتحان في مادة:

Corrigé type

Exercice 1 (06/06)

1) $f_n \xrightarrow{L^2} f$, $g_n \xrightarrow{L^2} f$ Mq $\|I(f_n) - I(g_n)\|_{L^2} \longrightarrow 0$

(0,5) $\mathbb{E}[I(f_n) - I(g_n)]^2 = \mathbb{E}[I^2(f_n - g_n)]$

$= \int \mathbb{E}(f_n - g_n)^2(t)\,dt$ Isométrie d'Itô.

(0,5) $= \int \mathbb{E}[(f_n - f) - (g_n - f)]^2(t)\,dt$

(0,5) $\leq 2\left[\int \{\underbrace{\mathbb{E}(f_n - f)^2}_{\to 0} + \underbrace{\mathbb{E}(g_n - g)^2}_{\to 0}\}\,dt\right]$

(0,5) 2) $\mathbb{E}\int_0^T \underbrace{(B_t - t)}_{f(t)}\,dB_t = 0$ car : Intégrale d'Itô.

(01) $Var\, I(f) = \mathbb{E}\, I^2(f) = \int_0^T \mathbb{E}(B_t - t)^2\,dt = \frac{T^2}{2} + \frac{T^3}{3}$

3) Construction de l'intégrale d'Itô.

(0,5) $I(f) = \int_0^t f\,dB_t$, $f \in L^2_{ad}[[0,t],\Omega]$, $\exists (f_n)$ tq $\underline{f_n = \sum X_{i-1} 1\!\!1_{[t_{i-1}, t_i[}} \in L^2$

(0,5) (0,5) et $f_n \xrightarrow{L^2} f$, on définit : $\underline{I(f_n) = \sum X_{i-1}(B_{t_{i-1}} - B_{t_i})}$ et $\underline{I(f) = \lim I(f_n)}$ ds $L^2(\Omega)$.

(01) 4) $K(s,t) = t \wedge s - st$.

Nom & Prénom :	اللقب و الإسم:
Niveau :	المستوى: 2016/2017
Groupe :	الفوج:
N°d'inscription :	رقم التسجيل:
Examen de :	إمتحان في مادة:

$\boxed{\text{Exercice 2}}$ $(06{,}50/06{,}50)$

1) $dM_t = \frac{-B_t}{1-t} M_t \, dB_t$ car si $f(t,x) = \frac{1}{\sqrt{1-t}} e^{-\frac{x^2}{2(1-t)}}$;

(0,5)×3 $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \left[\frac{1}{2(1-t)} - \frac{x^2}{2(1-t)^2}\right] f$; $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = \frac{-x}{1-t} f$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) = -2\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$.

(01) 2) $M_t = M_0 + \underbrace{\int_0^t \frac{-B_s}{1-s} M_s \, dB_s}_{I_t}$, $M_0 = 1$.

I_t est une intégrale d'Itô car :

(0,5) $\mathbb{E}\left[\int_0^t \frac{B_s^2}{(1-s)^2} \underset{\underset{1/(1-s)}{\wedge}}{M_s^2} ds\right] \leq \mathbb{E}\int_0^t \frac{B_s^2}{(1-s)^3} ds = \int_0^t \frac{s\,ds}{(1-s)^3} < \infty$

d'où (M_t) est une martingale.

3) $B_t^2 \xrightarrow[t \to 1^-]{p.s} B_1^2 > 0$ (car B_t est continue p.s).

(01) $\frac{e^{-\frac{B_t^2}{2(1-t)}}}{(1-t)^{1/2}} \underset{t \to 1}{\overset{x = \frac{1}{1-t}}{\sim}} \frac{x^{1/2}}{e^{B_1^2/2 \cdot x}} \xrightarrow{x \to +\infty} 0^+$

4) D'après 2) $\mathbb{E}M_t = 1 + \underbrace{\mathbb{E}\int_0^t \frac{-B_s}{1-s} M_s \, dB_s}_{0}$ Gaussienne centrée

(01) $\mathbb{E}M_t = 1$

Nom & Prénom :	اللقب و الإسم:
Niveau :	2016/2017 المستوى:
Groupe :	الفوج:
N d'inscription :	رقم التسجيل:
Examen de :	إمتحان في مادة:

4) (suite) ou bien :

(M_t) mart. donc $EM_t = EM_0 = 1$.

Exercice 3 (07,50/07,50)

01 I) • Méthode :

0,5 • $R_t = e^{-\beta t} R(0) + \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta t}) + \sigma e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s} dB_s$ Int. de Wiener. $N\left(0, \frac{1}{2\beta}(e^{2\beta t} - 1)\right)$.

0,5 • R_t : Gaussienne

0,5 • de moyenne : $e^{-\beta t} R(0) + \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta t})$

0,5 • et de variance : $\frac{\sigma^2}{2\beta}(1 - e^{-2\beta t})$

II)

01 1) $dR_t = -\beta R(t) dt + e^{-\beta t} dV_t$ ...... (*)

2) (*) $\Rightarrow e^{-\beta t} dV_t = \alpha dt + \sigma \sqrt{R(t)}\, dB(t)$

01 $\Rightarrow V_t = V(0) + \alpha \int_0^t e^{\beta s} ds + \sigma \int_0^t e^{\beta s} \sqrt{R(s)}\, dB(s)$

$V(t) = R(0) + \frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta t} - 1) + \sigma \int_0^t e^{\beta s} \sqrt{R(s)}\, dB(s)$

Niveau :	اللقب و الإسم:
Groupe :	المستوى: 2017/2018
N d'inscription :	الفوج:
Examen de :	رقم التسجيل:
	إمتحان في مادة:

3) $R(t) = e^{-\beta t} R(0) + \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta t}) + \sigma e^{-\beta t} \underbrace{\int_0^t e^{\beta s} \sqrt{R(s)}\, dB(s)}_{\text{Int. d'Itô.}}$

0,5 $\mathbb{E}R(t) = e^{-\beta t} R(0) + \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta t})$

$\mathrm{Var}\, R(t) = \sigma^2 e^{-2\beta t}\, \mathrm{Var}\left[\int_0^t e^{\beta s} \sqrt{R(s)}\, dB(s)\right]$

0,5 $= \sigma^2 e^{-2\beta t} \int_0^t e^{2\beta s}\, \mathbb{E}[R(s)]\, ds$

$= \sigma^2 e^{-2\beta t} \int_0^t e^{2\beta s} \left[e^{-\beta s} R(0) + \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta s})\right] ds$

0,5 $\mathrm{Var}\, R(t) = \frac{\sigma^2}{\beta} R(0) \left(e^{-\beta t} - e^{-2\beta t}\right) + \frac{\alpha \sigma^2}{2\beta^2}\left(1 - 2e^{-\beta t} + e^{-2\beta t}\right)$

0,5 4) • $\lim \mathbb{E}R(t) = \frac{\alpha}{\beta}$

0,5 $\lim \mathrm{Var}\, R(t) = \frac{\alpha \sigma^2}{2\beta^2}$

Bonus (02,00/02,00)

01 1) $\mathcal{E}(X)(t) = e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B(t)}$

01 2) $dX_t = X_t(\mu\, dt + \sigma\, dB_t)$; X_t : M.B.G.