Université Blida1
Faculté des Sciences
Département de Maths

le 14.06.2021
$3^{ème}$ année Licence de Maths

Statistique

Examen final de

(durée 1h30)

Exercice1: (8 points)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Bernouilli de paramètre $p \in]0,1[$

Pour n$\in IN^*$,on considère la variable aléatoire $Y_n = X_n + X_{n+1}$

1) Determiner la loi de Y_n et calculer $E(Y_n)$ et $Var(Y_n)$ en fonction de p.

2) On note $T_n = \frac{Y_1+Y_2+...+Y_{n-1}+Y_n}{n}$. Calculer $E(T_n)$ et $Var(T_n)$.

3) Montrer que la suite des v.a $(T_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers la v.a constante égale à 2p, c'est à dire que

$\forall\epsilon \succ 0$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|T_n - 2p| \geq \epsilon) = 0$

Exercice2 :(8 points)

Des paquets d'une lessive contiennent un certain produit faisant l'objet d'une réglementation spéciale (car corrosif donc dangereux).

Un laboratoire indépendant choisit au hasard 10 paquets et mesure la quantité de ce produit dans chacun d'entre eux.

Les résultats en milligrammes, sont:

59.3;57.7;57.2;55.9;55.5;54.1;53.4;50.8;48.2;47.4

On suppose que la quantité en milligrammes de ce produit dans un paquet est une v.a X suivant une loi normale.

Determiner un intervalle de confiance pour la quantité moyenne du produit

dans un paquet au niveau **95%**.

Exercice3:Question de cours(4 points)

Théorème Central Limite

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a indépendantes et de même loi telles que $E(X_1) = 0$ et $Var(X_1) = 1$

Soit $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$

Montrer que $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \to N(0,1)$ en distribution

cad $F_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} \dashrightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

Indication à toute fin utile

Inégalité de Bienaymé-Tchébychef

$P(|X - E(X)| \geq a\sigma) \leq \frac{1}{a^2}$ avec $a \succ 0$

Il sera tenu compte de la clarté des résultats et de la présentation.

Tami

juin 2021

Correction Examen de Statistique
L3 Math

Exo 1

1°) Loi de Y_n

Comme $X_n(\Omega) = \{0,1\}$ donc les valeurs que peut prendre Y_n sont 0, 1 et 2. (0,5 pt)

Avec X_n et X_{n+1} indépendantes on a

$P(Y_n=0) = P((X_n=0)\cap(X_{n+1}=0)) = P(X_n=0)P(X_{n+1}=0) = (1-p)^2$. (0,5)

$P(Y_n=1) = P((X_n=1)\cap(X_{n+1}=0)) + P((X_n=0)\cap(X_{n+1}=1)) = 2p(1-p)$ (0,5)

$P(Y_n=2) = P((X_n=1)\cap(X_{n+1}=1)) = P(X_n=1)P(X_{n+1}=1) = p^2$. (0,5)

Calcul de $E(Y_n)$ et $\operatorname{Var} Y_n$.

$E(Y_n) = E(X_n) + E(X_{n+1}) = 2p$. (0,5)

$\operatorname{Var} Y_n = \operatorname{Var} X_n + \operatorname{Var} X_{n+1}$ car X_n et X_{n+1} sont indépendantes (0,5)

$= 2p(1-p)$.

2°) $T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$

- On a $E(T_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(Y_i) = 2p$ (0,5)

- Pour calculer $\operatorname{Var} T_n$, écrivons T_n autrement (1)

$$T_n = \frac{1}{n}\left(X_1 + \sum_{i=2}^{n} 2X_i + X_{n+1}\right)$$

En utilisant l'indépendance des X_i on a

$$\operatorname{Var} T_n = \frac{1}{n^2}\left[\operatorname{Var} X_1 + 4\sum_{i=2}^{n} \operatorname{Var} X_i + \operatorname{Var} X_{n+1}\right]$$

(1,0)

$$= \frac{4n-2}{n^2}\, p(1-p)$$

3_ Comme les X_i ne sont pas indépendantes, on ne peut pas appliquer la loi faible des grands nombres.
On applique donc l'inégalité de Bienaymé-Tchebichef à la va T_n on a

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(|T_n - E(T_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\operatorname{Var} T_n}{\varepsilon^2}$$

(2,5)

$$\text{cad} \quad P(|T_n - 2p| \geq \varepsilon) \leq \frac{4n-2}{n^2 \varepsilon^2}\, p(1-p) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Donc (T_n) converge en proba vers la variable constante $2p$.

Exercice 2.

On a $\bar{x} = 53.95 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i$ car (0,5)

(0,5) (0,5)

x_i	x_i^2
59.3	3516.49
57.7	3329.29
57.2	3271.84
55,9	3124.81
55.5	3080.25
54,1	2926.81
53,4	2851.56
50.8	2580.64
48.2	2323.24
47.4	2246.76
539,5	29251.63

et $s'^2 = \frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum x_i^2 - \bar{x}^2$

$= 14,5665$ (1)

donc $s^2 = \frac{n}{n-1} s'^2 = 16,185 \Rightarrow s = 4,023$ (0,5)

s^2 étant la variance empirique modifiée (c'est l'estimateur sb de σ^2).

(2,...)

Comme $x_i \leadsto N(m, \sigma)$

$$\Rightarrow \bar{X} \leadsto N(m, \sigma/\sqrt{n})$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{X}-m}{\sigma/\sqrt{n}} = \sqrt{n}\,\frac{\bar{X}-m}{\sigma} \leadsto N(0,1) \qquad 0,5$$

avec σ inconnu, on utilise la variance empirique

$$S'^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \leadsto \chi^2_{n-1} \quad \text{et} \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 = \frac{n}{n-1}S'^2.$$

$$(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} = \sum_{1}^{n}\left(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma}\right)^2 \leadsto \chi^2_{n-1} \qquad 0,5$$

donc $$T = \frac{\sqrt{n}\cdot\frac{\bar{X}-m}{\sigma}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{(n-1)\sigma^2}}} \leadsto t_{n-1} \qquad 0,5$$

$$T = \sqrt{n}\cdot\frac{\bar{X}-m}{S}$$

On cherche a et b tq $P(a < T < b) = 1-\alpha$.

Comme T est symétrique on choisit $a = -b$. 0,5

donc $$P(-b < T < b) = 1-\alpha$$

$$P(T<b) - P(T<-b) = 1-\alpha. \quad \text{Par Symétrie}$$

$$2P(T<b) - 1 = 1-\alpha \Rightarrow F_{t_{n-1}}(b) = \frac{2-\alpha}{2} \qquad 0,5$$

$$b = F^{-1}_{t_9}\left(\frac{2-0.05}{2}\right) = 2.262. \qquad 0,5$$

L'intervalle est donc $\quad -2.262 < T < 2.262$

3/4

$$-2{,}262 < \sqrt{n}\,\frac{\bar{X}-m}{\sigma} < 2{,}262$$

$$\boxed{51{,}0723 < m < 56{,}8276}$$ 2 pts

Exo 3 : TCL

$\{X_n, n \geq 1\}$ suite de va iid tq $E(X_1)=0$ et $Var X_1 = 1$

Soit $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Alors $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1)$.

Preuve : Soit $\varphi(t) = E(e^{itX})$ la ft caractéristique

Comme $E(X_1^2) < +\infty$ alors

$$\varphi(t) = 1 + itE(X_1) - \frac{t^2}{2}E(X_1^2) + o(t^2) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2).$$ 1

$$\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = E\left(e^{\frac{itS_n}{\sqrt{n}}}\right) = E\left(\exp\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\sum_{1}^{n} X_i\right)\right) = \left(\varphi_{X_1}(t/\sqrt{n})\right)^n$$ car les X_i sont indép 1,5

$$= \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o(t^2/n)\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-t^2/2}$$ ft caractéristique de $N(0,1)$ 1

Donc $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers une $N(0,1)$. 0,5

4/4