U.H.B.C. Chlef
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département des Mathématiques

Année Universitaire: 2018/2019
Niveau: 1ère Master/ Option: M.A.S.
Module: Processus Stochastiques 1.

Examen Final

1. **Questions de Cours.** (03/03)

   1 (a) Montrer que la récurrence est une propriété de classe.

   1 (b) Montrer par absurde que toute classe récurrente est fermée.

   1 (c) "Toute loi invariante est stationnaire", discuter!

2. **Chaîne de Markov à Temps discret.**

   (a) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ un processus de Bernoulli avec probabilité de succès p.
   N_n : le nombre de succès à l'instant n, $n \geq 0$
   T_n : l'instant du $n^{ième}$ succès, $n \geq 1$.

   0,25 (b) Exprimer X_n en fonction d'une indicatrice.

   0,5 (c) Donner la loi de l'état initial N_0.

   1 (d) Montrer que la probabilité

   $$\mathbb{P}(T_{k+1} = n / T_1 = t_1, T_2 = t_2, ..., T_{k-1} = t_{k-1}, T_k = a)$$

   est indépendante de $T_1, T_2, ..., T_{k-1}$ en distinguant les deux cas $n \leq a$ et $n > a$.

   0,5 (e) En déduire que $(T_n)_{n\geq 1}$ est une Chaîne de Markov Homogène.

   0,5 (f) Déterminer la matrice stochastique de $(T_n)_{n\geq 1}$ et tracer le diagramme des transitions.

   1 (g) Classifier les états de la Chaîne.

   1,5 (h) Donner la loi du temps de séjour dans l'état "i" et en déduire le temps moyen de séjour dans l'état "1".

   0,5 (i) Quel est le temps moyen du retour à l'état "2"?

   1 (j) Donner le nombre moyen de visites de l'état "2".

   0,5 (k) Déterminer la loi limite si elle existe.

3. **Chaîne de Markov à Temps Continu.** (11/11)

   Un Modèle de Croissance Linéaire avec Immigration (A Linear Growth Model with Immigration)

   C'est un processus de Naissance et de Mort dont les taux de naissance (λ_n) et de mort (μ_n) sont donnés par:

   $$\begin{cases} \lambda_n = n\lambda + \theta, & n \geq 0 \\ \mu_n = n\mu, & n \geq 1 \end{cases} \tag{1}$$

   Un tel processus est naturellement utilisé dans l'étude de la reproduction biologique et de la croissance des populations. Chaque individu de la population donne naissance avec un taux exponentiel λ; de plus, il existe un taux exponentiel de croissance θ de la population du à une source externe comme l'immigration. La durée de vie de chaque individu de la population est exponentiellement distribuée de paramètre μ.

   1 (a) Justifier les valeurs de λ_n et μ_n données dans (1).
   Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ la taille de la population à l'instant t. Supposons que $X(0) = i$ et soit

   $$M(t) = \mathbb{E}[X(t)]$$

   le nombre moyen des individus à l'instant t. On cherche une équation différentielle satisfaite par $M(t)$.

1,5 (b) Pour h suffisemment petit, calculer les probabilités: $\mathbb{P}[X(t+h) - X(t) = k]$ en fonction de θ, λ, μ, h, $X(t)$ et $o(h)$ selon les valeurs de $k \in \{-1, 0, 1\}$.

1 (c) Montrer que (utiliser (b))

$$\mathbb{E}[X(t+h)/X(t) = x] = x + [\theta + \lambda x - \mu x]h + o(h).$$

1 (d) En déduire $\mathbb{E}[X(t+h)/X(t)]$.

0,5 (e) Sachant que $\mathbb{E}[\mathbb{E}(Y/Z)] = \mathbb{E}(Y)$, montrer que

$$M(t+h) = M(t) + (\lambda - \mu)M(t)h + \theta h + o(h).$$

0,5 (f) En déduire l'équation différentielle satisfaite par $M(t)$.

2 (g) Déterminer l'expression de $M(t)$ dans les cas: $\lambda \neq \mu$ et $\lambda = \mu$.

1 (h) Ecrire l'expression de la loi invariante de la chaîne $(X(t))_{t \geq 0}$.

1,5 (i) Montrer que la condition nécessaire pour l'existence de la loi limite est $\boxed{\lambda < \mu.}$ (Utiliser le critère de D'Alembert pour les séries numériques).

1 (j) Que peut-on dire concernant l'existence de la loi limite si $\lambda \geq \mu$.

MAS 1 - Processus Stoch. 1.

Nom & Prénom :	اللقب و الإسم:
Niveau : Examen final	المستوى:
Groupe :	الفوج:
N°d'inscription : Corrigé type	رقم التسجيل:
Examen de :	إمتحان في مادة:

1. Questions de cours :

01,50 (a) La récurrence est une pté de classe :

Soit (i) réc. et (i) $\leftrightarrow$ (j), m.q (j) est réc ?

(i) $\leftrightarrow$ (j) $\Leftrightarrow \exists\, k, m \geq 0$:

$$P_{ij}^{(k)} > 0 \text{ et } P_{ji}^{(m)} > 0.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$: $P_{jj}^{(m+n+k)} \geq P_{ji}^{(m)} P_{ii}^{(n)} P_{ij}^{(k)}$ [Chapman Kolmogorov]

En sommant sur n :

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{(m+n+k)} \geq \underbrace{P_{ji}^{(m)} P_{ij}^{(k)}}_{>0} \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)}}_{=\infty}$$

$= \infty$ car (i) réc.

Donc : $\sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{(n)} = \infty \Rightarrow$ (j) est réc.

01,00 (b) Toute classe réc. est fermée.

Par absurde : Supposons que C est une classe réc. n'est pas fermée

i.e. $\exists\, i \in C$ et $\exists\, j \in \bar{C}$ tq $i \to j$ et $j \not\to i$

c.à.d on ne peut jamais retourner à (i)

$\Rightarrow$ (i) n'est pas réc $\boxed{\text{Contradiction}}$ avec la récurrence de (i)

Conclusion : la classe C est fermée.

Nom & Prénom :	اللقب و الإسم:
Niveau :	المستوى:
Groupe :	الفوج:
N° d'inscription :	رقم التسجيل:
Examen de :	إمتحان في مادة:

1. Questions de cours (suite)

01,00 (c) Toute loi invariante est stationnaire oui si il s'agit d'une loi de proba.
c.à.d. $\sum \pi_j = 1$.
dans le cas où E est fini aucun problème.

2. $\boxed{C.M.T.D}$

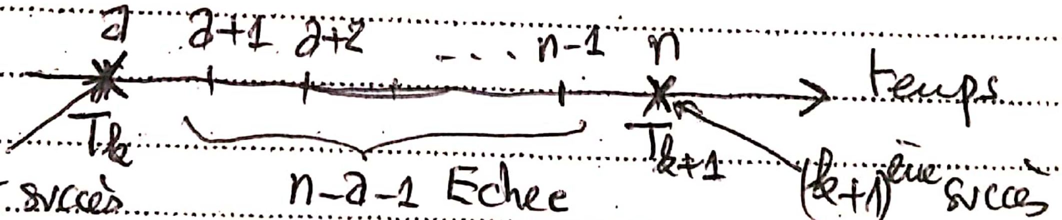
0,25 (b) $X_n = \mathbb{1}_{\{A_n\}}$; A_n : " Succès ds la $n^{ième}$ expérience ",

0,50 (c) $N_0 = 0$ p.s c.à.d $\mathbb{P}(N_0=0)=1$ et $\mathbb{P}(N_0\neq 0)=0$.

01,00 (d) $\mathbb{P}\left[T_{k+1}=n / T_1=t_1, T_2=t_2, \dots, T_{k-1}=t_{k-1}, T_k=a\right] =: A$

$\boxed{\text{Si } n\le a}$: Cette proba est $\boxed{\text{nulle}}$ car on ne peut pas avoir 2 succès au m. temps.

Sinon : $\boxed{n>a}$: On peut tracer ce diagramme pour répondre facilement à la question :



$A = \mathbb{P}\left[X_{a+1}=X_{a+2}=\dots=X_{n-1}=0,\ X_n=1\right]$

$X_n, X_{n-1}, \dots, X_{a+1} \perp\!\!\!\perp (X_i)_{i<a}$

Nom & Prénom :	.... :اللقب و الإسم
Niveau :	.... :المستوى
Groupe :	.... :الفوج
N d'inscription :	.... :رقم التسجيل
Examen de :	.... :إمتحان في مادة

(2. d) (suite)

$$A = p\, q^{n-a-1} = f(a)$$

elle ne dépend que de la valeur de T_k et indépendante de $T_1, T_2, \dots, T_{k-1}$.

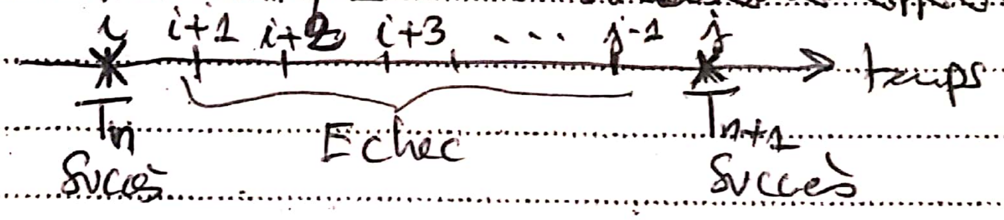
0,50 (e) D'après (d) $(T_n)_{n \geq 1}$ est sans mémoire donc il s'agit d'1 C.M, A indep de k.

De plus A dépend de $(n-a)$ seulement ~~de la longueur de l'intervalle de temps~~

donc : $(T_n)_{n \geq 1}$ est Homogène.

0,50 (f) $P_{ij} = \mathbb{P}(T_{n+1} = j / T_n = i)$

~~$= \mathbb{P}[$1 seul succès entre T_n~~



Donc :

$$P_{ij} = \mathbb{P}[X_{i+1} = X_{i+2} = \dots = X_{j-1} = 0,\ X_j = 1]$$

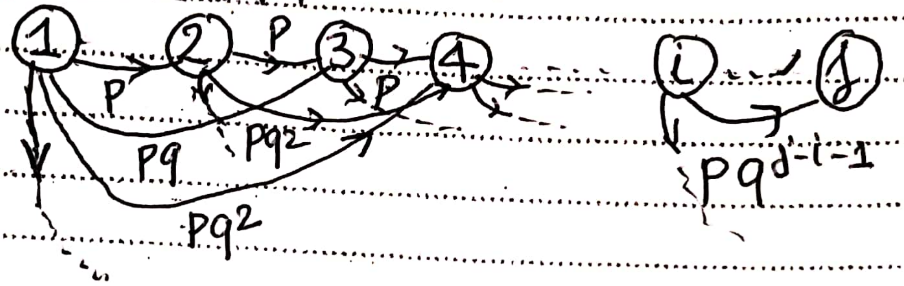
$$P_{ij} = \begin{cases} p\, q^{j-i-1} & \text{si } j \geq i+1 \ (\text{ou } j > i) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & p & pq & pq^2 & \dots \\ 0 & 0 & p & pq^2 & pq^3 \\ & & \ddots & p & \\ & & & \ddots & \end{bmatrix}$$

Nom & Prénom :	اللقب و الإسم:
Niveau :	المستوى:
Groupe :	الفوج:
N°d'inscription :	رقم التسجيل:
Examen de :	إمتحان في مادة:

(2.f) Diagramme des transitions

$E = \mathbb{N}^*$

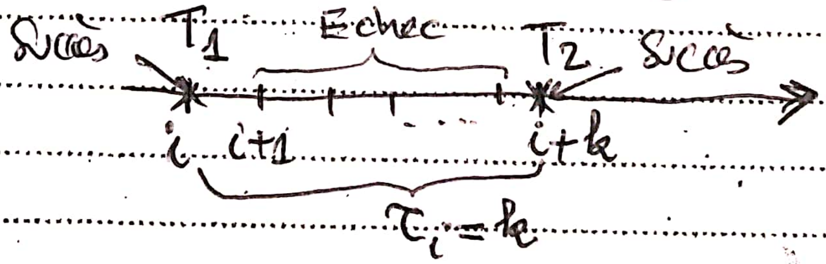


01,00 (g) Classification des états

On voit clairement que $\boxed{\text{Tous}}$ les états

- sont $\boxed{\text{transitoires}}$ car les (T_n) sont strictement croissants.
- Apériodiques car $d(i) = 1 \quad \forall i \in \mathbb{N}^*$
  $[PGCD(\phi) = 1]$
- n'est pas Irréductible.

01,50 (h) La loi du temps de séjour dans l'état (i) : τ_i



$$\mathbb{P}(\tau_i = k) = \mathbb{P}(X_{i+1} = X_{i+2} = \dots = X_{i+k-1} = 0,\ X_{i+k} = 1)$$

$$= pq^{k-1},\ k \in \mathbb{N}^* ;\ \tau_i \sim \mathcal{G}(p)$$

2.h) suite : Temps moyen de séjour ds l'état ①.

$\tau_1 \longrightarrow G(p) \Longrightarrow \mathbb{E}(\tau_1) = 1/p$

0,50 (i) Temps moyen de retour à l'état 2 = $\boxed{\mu_2 = \infty}$
car ② transitoire.

0,1,00 (j) $\boxed{E_2 R_2 = 1}$ car la C.M visite l'état ②
une seule fois.

0,50 (k) n'existe pas car la C.M. n'est pas ERGODIQUE.

3. $\boxed{C.M.T.C}$

01,00 (a) λ_n est le paramètre du temps d'attente jusqu'à la naissance d'1 individu, sachant qu'il y a (n) individus

Cette loi étant ~~est~~ Exponentielle $\Rightarrow$ Pour que l'un ds (n) individus donne naissance d'un nouveau individu est le minimum des temps d'attente de chaque individu

$\Rightarrow$ le paramètre est $\sum_{i=1}^{n} \lambda = n\lambda$

on lui ajoute le taux d'immigration θ.

$\Rightarrow \boxed{\lambda_n = n\lambda + \theta}$

Nom & Prénom :	.... :اللقب و الإسم
Niveau :	.... :المستوى
Groupe :	.... :الفوج
N d'inscription :	.... :رقم التسجيل
Examen de :	.... :إمتحان في مادة

(3. a) suite.

μ_n : le minimum des durées de vies de n individus donc : $\mu_n = \sum_{i=1}^{n} \mu = n\mu \quad n \geq 1$

01,50

(b) $\mathbb{P}(X(t+h) - X(t) = k) = ? \quad k \in \{-1, 0, 1\}$,

- $\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = 1) = \mathbb{P}$[avoir une naissance dans l'intervalle $[t, t+h]$ sachant que le nbre actuel est $X(t)$].

$$\stackrel{T.D.}{=} \lambda_{X(t)} h + o(h)$$

$$= [\theta + \lambda X(t)] h + o(h) = P_1$$

- $\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = -1) = \mathbb{P}$[avoir une Mort dans $[t, t+h]$ sachant que la taille actuelle est $X(t)$].

$$\stackrel{T.D}{=} \mu_{X(t)} h + o(h)$$

$$= \mu X(t) . h + o(h) = P_2$$

- $\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = 0) = 1 - [\theta + \lambda X(t) + \mu X(t)] h + o(h) =$

[Complémentaire)

Nom & Prénom :	اللقب و الإسم:
Niveau :	المستوى:
Groupe :	الفوج:
N d'inscription :	رقم التسجيل:
Examen de :	إمتحان في مادة:

01,00 3.(c)

$$\mathbb{E}\left[X(t+h)/X(t)=x\right] = \sum_{k\in\{x-1,x,x+1\}} k\,\mathbb{P}\left(X_{t+h}=k/X_t=x\right)$$

$$\underset{X_t=x}{\overset{(b)}{=}} (x+1)p_1(x) + (x-1)p_2(x) + x\,p_3(x)$$

$$= x + \left[\theta + \lambda x - \mu x\right]h + o(h)$$

01,00 (d) $\mathbb{E}\left[X(t+h)/X(t)\right] = X(t) + \left[\theta + \lambda X(t) - \mu X(t)\right]h + o(h).$

0,50 e) $M(t+h) = \mathbb{E}\left[X(t+h)\right] = \mathbb{E}\left[\underbrace{\mathbb{E}\left(X(t+h)/X(t)\right)}_{\text{donné dans (d)}}\right]$

$$= M(t) + \left[\theta + \lambda M(t) - \mu M(t)\right]h + o(h)$$

$$= M(t) + (\lambda-\mu)M(t)h + \theta h + o(h).$$

0,50 (f) D'après (e) $\dfrac{M(t+h)-M(t)}{h} = (\lambda-\mu)M(t) + \theta + \dfrac{o(h)}{h}$

Faisant tendre $h \searrow 0$: On obtient,

$$\boxed{M'(t) = (\lambda-\mu)M(t) + \theta}$$

02,00 (g) Si $\lambda \neq \mu$: $(M(0)=i)$

$$M(t) = \frac{\theta}{\lambda-\mu}\left[e^{(\lambda-\mu)t} - 1\right] + i\,e^{(\lambda-\mu)t}$$

Nom & Prénom :	اللقب و الإسم:
Niveau :	المستوى:
Groupe :	الفوج:
N d'inscription :	رقم التسجيل:
Examen de :	إمتحان في مادة:

(3.g) Pour $\lambda = \mu$, $[X(0) = i]$

$$M'(t) = \theta \Rightarrow \boxed{M(t) = \theta t + i}$$

01,00 (h) $\pi_j = \pi_0 \prod_{k=0}^{j-1} \frac{k\lambda + \theta}{(k+1)\mu}$; $\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}}}$,

01,50 (i) La condition nécessaire pour l'existence des π_j est que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}} \quad \text{converge.}$$

Le terme général: $v_n = \frac{\theta(\theta+\lambda) \cdots [\theta + (n-1)\lambda]}{n!\,\mu^n}$

Critère de D'Alembert:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\theta + n\lambda}{(n+1)\mu} \xrightarrow{n \to +\infty} \frac{\lambda}{\mu}$$

Si $\boxed{\lambda < \mu}$ la série cvge

01,00 (j) Si $\lambda \geq \mu$ c'est un cas critique, on ne peut rien dire.