Chapitre 3

Professeur ZEROUKI Ibtissem

January 31, 2021

Contents

1. Fonctions intégrables.

On commence dans ce chapitre à construire l'intégrale de fonctions par rapport à une mesure abstraite μ. Cette nouvelle intégarle est dite **intégrale de Lebesgue**. Pour cela, on étudie d'abord les intégrales de fonctions mesurables positives. La construction ce cette nouvelle intégration suit un chemin classique, analogue à celle de l'intégrale de Riemann, où on a commencé par la définir pour les fonctions en escaliers puis on a généralisé pour une classe de fonctions plus grande.

1.1. Intégrale d'une fonction positive.

Définition 1.1.1. *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *et* $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *une fonction étagée positive telle que,* $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.\mathbb{I}_{A_i}(x)$ *où* $\alpha_i \geq 0$, *on définit l'intégrale de* f *par rapport à la mesure* μ *par*

$$\int f d\mu = \int_X f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ \mu(A_i).$$

Comme $f.\mathbb{I}_E = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.\mathbb{I}_{A_i \cap E}$, est aussi une fonction étagée, on définir pour $E \in \mathcal{A}$ l'intégrale de f sur E par

Remarque 1.1.2. ♦

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i.\mathbb{I}_{A_i}\right).\mathbb{I}_E = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i.\mathbb{I}_{A_i}).\mathbb{I}_E = \alpha_i.\mathbb{I}_{A_i \cap E}.$$

♦ *L'intégrale de* f *étagée ne dépend pas de sa représentation sous la forme* $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.\mathbb{I}_{A_i}$, *une autre écriture pour cette fonction nous donne la même valeur pour l'intégrale.*

♦ *En particulier, on a pour tout* $A \in \mathcal{A}$

$$\int_X \mathbb{I}_A d\mu = \mu(A) \quad et \quad \int_X \mathbb{I}_{A_i \cap E}\, d\mu = \mu(A \cap E).$$

Ce résultat est élémentaire et important, car il fait le lien entre la mesure d'une partie mesurable A *de* X *et l'intégrale de sa fonction caractéristique.*

Définition 1.1.3. *Soit* $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \overline{\mathbb{R}}_+$. *On définit son intégrale comme la borne supérieure des intégrales des fonctions étagées majorée par* f.

$$\int f d\mu = \int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X s\ d\mu \text{ telle que } s \text{ est une fonction étagée et } s \leq f \right\}.$$

De même, pour $A \in \mathcal{A}$*, on définit l'intégrale de* f *sur* A *par*

$$\int_E f d\mu = \int_X f.\mathbb{I}_A\ d\mu = \sup \left\{ \int_E s\ d\mu \text{ telle que } s \text{ est une fonction étagée et } s \leq f \right\}.$$

Définition 1.1.4. *Une fonction* $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *est dite* "$\boldsymbol{\mu}$**−intégrable**" *si* $\int_X f d\mu < +\infty$.

Exemple 1.1.5. ★ *On considère que l'espace mesurable* $(X, \mathcal{A})$ *est muni de la* **mesure (masse) de Dirac** *notée* δ_a*,où* $a \in X$*, qui est définie pour tout* $A \in \mathcal{A}$ *par*

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & : a \in A \\ 0 & : \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans ce cas, on a pour toute fonction positive définie sur l'espace $(X, \mathcal{A}, \delta_a)$

$$\int_X f d\delta_a = f(a).$$

En effet, si f *est une fonction étagée donnée par* $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.\mathbb{I}_{A_i}$*, où* $\{A_i\}_{i=1}^n$ *est une partition de* X*, alors il existe un seul,indice* $i_0 \in \{1, 2, \cdots, n\}$ *tel que* $a \in A_{i_0}$

Dans ce cas on peut écrire

$$\int_X f d\delta_a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ \delta_a (A_i) = \alpha_{i_0} = f(a),$$

car $f(a) = \alpha_{i_0}.\mathbb{I}_{A_{i_0}}(x) = \alpha_{i_0}.$ *Si* f *est une fonction positive quelconque on a*

$$\begin{aligned}\int_X f d\mu &= \sup \left\{ \int_X s d\mu, \text{ telle que } s \text{ est une fonction étagée et } s \leq f \right\} \\ &= \sup \left\{ s(a), \text{ telle que } s \text{ est une fonction étagée et } s \leq f \right\} \\ &= f(a).\end{aligned}$$

★ *On prend* $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$ *où* m *est la mesure du dénombrement définie pour toute partie* A *de* $\mathbb{N}$ *par*

$$m(A) = \begin{cases} CardA & : A \text{ est un ensemble fini} \\ +\infty & : \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $\displaystyle\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n \geq 0} f(n)$, *pour toute fonction positive* f *définie sur cet espace.*

En effet, la fonction $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *est définie par* $f(n) = \alpha_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i.\mathbb{I}_{\{i\}}(n)$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Si on considère la suite $\{f_n\}_{n \geq 0}$ *telle que* $f_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \alpha_i.\mathbb{I}_{\{i\}} \ \{A_i\}_{i=1}^{n}$. *C'est une suite croissante de fonctions mesurables positives, qui converge vers* f, *alors*

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{N}} f_n d\mu = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n} \alpha_i m(\{i\}) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n = \sum_{n \geq 0} f(n).$$

1.2. Propriétés de l'intégrale

On considère deux fonctions positivers et mesurables f et g et deux ensembles mesurables E et F.

Proposition 1.2.1. *L'intégrale jouit des propriétés suivantes*

(i) $\int\limits_X (f+g)\,d\mu = \int\limits_X f d\mu + \int\limits_X g d\mu$ (additivité linéaire 1).

(ii) *Pour tout réel* $c \geq 0$ *on a* $\int\limits_X (cf)\,d\mu = c\int\limits_X f d\mu$ (additivité linéaire 2).

(iii) *Si* $f \leq g$ *sur* X*, alors* $\int\limits_X f d\mu \leq \int\limits_X g d\mu$ (croissance de type 1).

(iv) *Si* $E \subset F$*, alors* $\int\limits_E f d\mu \leq \int\limits_F f d\mu$ (croissance de type 2).

(v) *Si* $f(x) = 0$ *pour tout* $x \in E$ *on a* $\int\limits_E f d\mu = 0$.

(vi) *Si* $\mu(x) = 0$*, alors on a* $\int\limits_E f d\mu = 0$.

Démonstration (i) • *On la démontre d'abord pour les fonctions étagées. Soient* $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{I}_{A_i}$ *et* $g = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mathbb{I}_{B_j}$*, où* $\alpha_i, \beta_j \geq 0$ *et les* A_i*, pour* $i = 1, 2, \cdots, n$*, sont deux à deux disjoints et les* β_j*, pour* $j = 1, 2, \cdots, m$*, le sont aussi.*

On suppose (sans restriction) que $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{j=1}^{m} B_j$*, alors pour tout* $i = 1, 2, \cdots, n$*, on a* $A_i = A_i \cap X = A_i \cap \bigcup_{j=1}^{m} B_j = \bigcup_{j=1}^{m} (A_i \cap B_j)$ *et pour tout* $j = 1, 2, \cdots, m$*, on a* $B_j = B_j \cap X = B_j \cap \sum_{j=1}^{m} \beta_j = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B_j)$*. Par conséquent on peut écrire*

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{m} \mathbb{I}_{(A_i \cap B_j)} \right) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq jm}} \alpha_i \mathbb{I}_{(A_i \cap B_j)}$$

et

$$g = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(A_i \cap B_j)} \right) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq jm}} \beta_i \mathbb{I}_{(A_i \cap B_j)}.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\int\limits_X (f+g)\,d\mu &= \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le jm}} (\alpha_i+\beta_i)\quad \mu(A_i\cap B_j)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(\sum_{j=1}^{m}\mu(A_i\cap B_j)\right)+\sum_{j=1}^{m}\beta_j\left(\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i\cap B_j)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\quad \mu\left(A_i\cap\left(\bigcup_{j=1}^{m}B_j\right)\right)+\sum_{j=1}^{m}\beta_j\quad \mu\left(B_j\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\quad \mu(A_i)+\sum_{j=1}^{m}\beta_j\quad \mu(B_j)=\int\limits_X f d\mu+\int\limits_X g d\mu.
\end{aligned}$$

• *Si f et g sont des fonctions mesurables positives quelconque, ils existent deux suites croissantes $\{f_n\}_n$ et $\{g_n\}_n$ de fonctions étagées positives qui convergent respectivement vers f et g. Donc $\{f_n+g_n\}_n$ est une suite croissante de fonctions étagées positives, qui converge vers $f+g$. D'aprés le* ***Théorème de la Convergence Monotone****, qu'on va voir ultérieurement,* $\int\limits_X f_n d\mu$, $\int\limits_X g_n d\mu$ *et* $\int\limits_X (f_n+g_n)\,d\mu$ *convergent respectivement vers* $\int\limits_X f d\mu$, $\int\limits_X g d\mu$ *et* $\int\limits_X (f+g)\,d\mu$.
Par conséquent la linéarité se conserve par passage à la limite dans la relation

$$\int\limits_X (f_n+g_n)\,d\mu=\int\limits_X f_n d\mu+\int\limits_X g_n d\mu.$$

(ii) • *Il est claire que pour $c\ge 0$ et f une fonction étagée positive on a*

$$\int\limits_X (cf)\,d\mu=\sum_{i=1}^{n}(c\ \alpha_i)\quad \mu(A_i)=c\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\quad \mu(A_i)=c\int\limits_X f d\mu.$$

• *Soit f une fonction mesurable positive quelconque. Une fonction étagée positive* *s est majorée par f si est seulement si la fonction (cs) est majorée par (cf). Donc*

$$\begin{aligned}
\int_X (cf)\, d\mu &= \sup\left\{\int_X s' d\mu,\ \textit{telle que } s' \textit{ est étagée} \leq cf\right\} \\
&= \sup\left\{\int_X s' d\mu,\ \textit{telle que } s' = c\ s,\ \textit{où } s \textit{ est étagée} \leq f\right\} \\
&= c\sup\left\{\int_X s d\mu,\ \textit{telle que } s \textit{ est étagée } \leq f\right\} = c\int_X f d\mu.
\end{aligned}$$

(iii) Si $f \leq g$, toute fonction étagée positive majorée par f, est aussi majorée par g, alors

$$\begin{aligned}
\int_X f d\mu &= \sup\left\{\int_X s d\mu,\ \textit{telle que } s \textit{ est étagée positive} \leq f\right\} \\
&\leq \sup\left\{\int_X s d\mu,\ \textit{telle que } s \textit{ est étagée positive} \leq g\right\} = \int_X g d\mu,
\end{aligned}$$

car $\left\{\int_X s d\mu,\ \textit{telle que } s \textit{ est étagée } \leq f\right\} \subset \left\{\int_X s d\mu, \textit{telle que } s \textit{ est étagée} \leq g\right\}$.

(iv) Si $E \subset F$, alors $\mathbb{I}_E \leq \mathbb{I}_F$, ce qui nous permet de dire que $f.\mathbb{I}_E \leq f.\mathbb{I}_F$ sur X, pour toute fonction mesurable positive. D'aprés (iii) on a

$$\int_E f d\mu = \int_X f.\mathbb{I}_E d\mu \leq \int_X f.\mathbb{I}_F d\mu = \int_F f d\mu.$$

(v) On sait que

$$\int_E f d\mu = \sup\left\{\int_E s d\mu,\ \textit{telle que } s \textit{ est étagée positive} \leq f\right\},$$

comme $f(x)=0$*, pour tout* $x\in E$*, alors toute fonction étagée positive majorée par* f *sur* E *est nulle, alors* $\int\limits_E f d\mu = 0.$

(vi) *Soit* E *une partie mesurable telle que* $\mu(E)=0.$

$$\int\limits_E f d\mu = \sup\left\{\int\limits_X s.\mathbb{I}_E d\mu,\ \text{telle que } s \text{ est étagée positive} \leq f\right\},$$

mais pour tout fonction étagée s *on a*

$$\int\limits_X s.\mathbb{I}_E d\mu = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i.\mu(A_i\cap E) = 0,$$

car $A_i\cap E\subset E$ *et* $\mu(E)=0$*. Donc* $\int\limits_E f d\mu = 0.$ ■

Proposition 1.2.2. (***Inégalité de Markov***) *Soit* $f:(X,\mathcal{A},\mu)\to\overline{\mathbb{R}}_+$ *une fonction mesurable et* $\alpha>0$*, alors on a*

$$\mu(\{x\in X : f(x)\geq\alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha}\int\limits_E f d\mu.$$

Démonstration Posons $A=\{x\in X : f(x)\geq\alpha\}$, on a dans ce cas

$$\alpha.\mathbb{I}_A(x) = \begin{cases} \alpha & : x\in A \\ 0 & x\notin A \end{cases}$$

,alors

$$\alpha.\mathbb{I}_A(x) \leq f(x),\ \text{pour tout } x\in X. \tag{1}$$

En intégrant on obtient

$$\int\limits_X f d\mu \geq \int\limits_X (\alpha.\mathbb{I}_A)\, d\mu = \alpha\int\limits_X \mathbb{I}_A d\mu = \alpha\mu(A).$$

D'où le résultat voulu. ■

Proposition 1.2.3. (***Relation de Chasles***) *Soient E et F deux parties mesurables disjointes, alors pour toute fonction mesurable positive f on a*

$$\int_{E\cup F} f d\mu = \int_E f d\mu + \int_F f d\mu.$$

Démonstration Comme $E \cap F = \varnothing$, on a $\mathbb{I}_{E\cap F} = \mathbb{I}_E + \mathbb{I}_F$, alors

$$\begin{aligned}\int_{E\cup F} f d\mu &= \int_X f.\mathbb{I}_{E\cap F}\ d\mu = \int_X f.\left(\mathbb{I}_E + \mathbb{I}_F\right)\ d\mu \\ &= \int_X f.\mathbb{I}_E\ d\mu + \int_X f.\mathbb{I}_F\ d\mu \\ &= \int_E f d\mu + \int_F f d\mu.\end{aligned}$$

■

Remarque 1.2.4. *On notera $\int f d\mu = \int f(x) d\mu(x)$. En particulier si $\mu = \lambda$, on écrit $\int_E f d\mu = \int_E f(x)\lambda(dx) = \int_E f(x) dx$.*

1.3. Convergence monotone.

Théorème 1.3.1. *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $\{f_n\}_{n\geq 1}$ une suite croissante de fonctions mesurables définie de $(X, \mathcal{A}, \mu)$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. On pose $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ la limite de $\{f_n\}_{n\geq 1}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Alors*

$$\int f d\mu = \int \lim_{n\to+\infty} f_n d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu.$$

Remarque 1.3.2. *La limite simple f de $\{f_n\}_{n\geq 1}$ peut prendre la valeur $+\infty$.*

Pour démontrer ce théorème on a besoin d'un résultat préliminaire.

Lemme 1.3.3. *Soit $s : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction étagée, alors la fonction $\varphi : E \longmapsto \int\limits_E s d\mu$ définie une mesure sur $\mathcal{A}$.*

Démonstration On vérifie les axiômes d'une mesure.

- $\varphi(\varnothing) = \int\limits_{\varnothing} s d\mu$ et $\mu(\varnothing) = 0$, alors $\varphi(\varnothing) = \int\limits_{\varnothing} s d\mu = 0.\mathbb{N}$
- Soit $\{E_k\}_{k\geq 0} \subset \mathcal{A}$ une suite de parties mesurables de X deux à deux disjointes

de réunion E. On suppose que s s'écrit sous la forme $s = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{I}_{A_i}$. Alors

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} E_k\right) &= \varphi(E) = \int\limits_E s d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.\mu(A_i \cap E) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.\mu\left(A_i \cap \left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} E_k\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.\mu\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} (A_i \cap E_k)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.\left[\sum_{k=0}^{+\infty} \mu(A_i \cap E_k)\right] = \sum_{k=0}^{+\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i.\mu(A_i \cap E_k)\right] \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \int\limits_{E_k} s d\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(E_k).
\end{aligned}$$

Donc φ est une mesure sur X. ■

Démonstration du théorème 3.3.1.

On a pour tout $x \in X$: $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, et en passant à la limite on obtient : $f_n(x) \leq f(x); \quad \forall x \in X$, ce qui donne en intégrant

$$\int\limits_X f_n d\mu \leq \int\limits_X f d\mu; \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \qquad (*)$$

D'autre part, on a aussi $\int\limits_X f_n d\mu \leq \int\limits_X f_{n+1} d\mu$; pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\left\{\int\limits_X f_n d\mu\right\}_{n\geq 0}$ est une suite numérique croissante. Ce qui nous permet de dire qu'elle possède une limite $\alpha \in [0,+\infty]$, i.e. $\alpha = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu$. En passant à la limite dans $(*)$ en obtient $\alpha \leq \int_X f d\mu$. (1)

Soient maintenant, s une fonction étagée majorée par f (i.e. $s \leq f$) et $0 < c < 1$. On introduit les ensembles

$$E_n = \{x \in X : f_n(x) \geq c.s(x)\} = (f_n - c.s)^{-1}([0,+\infty]),$$

alors E_n est mesurable ,pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite $\{f_n\}_{n\geq 0}$ est croissante, alors si $x \in E_n$, on a :

$$c.s(x) \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x),$$

alors $x \in E_{n+1}$. D'où $E_n \subset E_{n+1}$; pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus comme

$$f\ (x) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = \sup\{f_n(x); n \in \mathbb{N}\}, \text{ pour tout } x \in X,$$

on a

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \text{ on a } f_n(x) \geq cf(x) \geq cs(x).$$

Autrement dit, on a $X = \bigcup_{n\geq 0} E_n$.

D'aprés le lemme précédent, on sait que pour toute fonction étagée s, l'application $\varphi(E) = \int_E s d\mu$ est une mesure, alors

$$\int_X f_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq \int_{E_n} cs d\mu = c\int_{E_n} s d\mu = c\varphi(E_n). \qquad (**)$$

Comme $\{E_n\}_{n\geq 0}$ est suite croissante d'ensembles, on a

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \varphi(E_n) = \varphi\left(\lim_{n\longrightarrow+\infty} E_n\right) = \varphi(X) = \int_X s d\mu.$$

Alors en passant à la limite dans $(**)$, on peut écrire que

$$\alpha = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu \geq c \lim_{n \longrightarrow +\infty} \varphi(E_n) = c \int_X s d\mu.$$

Cette dernière inégalite est vraie pour tout $c \in]0, 1[$, donc en faisant tendre c vers 1, on obtient

$$\alpha \geq \int_X s d\mu, \text{ pour toute fonction étagée } s \text{ majorée par } f.$$

Par conséquent on a$\alpha \geq \sup \left\{ \int_X s d\mu : s \text{ est une fonction étagée} \leq f \right\} = \int_X f d\mu$

(1) et (2) donnent le résultat voulu. ■

Corollaire 1.3.4. *Soit* $\{f_n\}_{n \geq 0}$ *une suite de fonctions mesurables de* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$, *alors*

$$\int_X \left(\sum_{n \geq 0} f_n \right) d\mu = \sum_{n \geq 0} \left(\int_X f_n d\mu \right).$$

Démonstration On applique le Théorème de la convergence monotone (noté T.C.M.) pour la suite de fonctions $\{g_n\}_{n \geq 0}$ définie par

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_n(x), \text{ alors } \lim_{n \longrightarrow +\infty} g_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_n(x).$$

$\{g_n\}_{n \geq 0}$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives, alors

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_X g_n d\mu = \int_X \lim_{n \longrightarrow +\infty} g_n d\mu \Longleftrightarrow \sum_{n \geq 0} \left(\int_X f_n d\mu \right) = \int_X \left(\sum_{n \geq 0} f_n \right) d\mu.$$

■

Corollaire 1.3.5. *Soit $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable, alors la fonction $\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ définie par $\phi(E) = \int_E f d\mu$ est une mesure.*

ϕ est finie si et seulement si f est intégrable sur X. Donc pour toute fonction mesurable g positive on a $\int_X g d\phi = \int_E g f d\mu$.

Remarque 1.3.6. ♦ *On a, en quelque sorte, $d\phi = f d\mu$.*

♦ *Le **T.C.M.** est la clef de nombreux raisonnements typiques. Pour justifier une propriété, souvent on la montre d'abord pour les fonctions indicatrrices, on la généralise ensuite par linéarité aux fonctions étagées, puis enfin aux fonctions mesurables quelconques par convergence monotone.*

Démonstration du corollaire 3.3.5.

- On a $\phi(\varnothing) = \int_\varnothing f d\mu$ avec $\mu(\varnothing) = 0$, alors $\phi(\varnothing) = 0$.
- Soit $\{E_k\}_{k \geq 1} \subset \mathcal{A}$ de parties deux à deux disjointes de réunion E. Alors on a $\mathbb{I}_E = \sum_{k \geq 1} \mathbb{I}_{E_k}$. Définissons la suite de fonctions mesurables positives $\{f_k\}_{k \geq 0}$ par $f_k = f.\mathbb{I}_{E_k}$; $\forall k \geq 1$. Dans ce cas on peut écrire

$$\begin{aligned}
\phi(E) &= \int_X f.\mathbb{I}_E \; d\mu = \int_X \left(\sum_{k \geq 1} \mathbb{I}_{E_k} \right) .f \; d\mu = \int_X \sum_{k \geq 1} \left(\mathbb{I}_{E_k} .f \right) \; d\mu \\
&= \int_X \sum_{k \geq 1} f_k \; d\mu = \sum_{k \geq 1} \int_X f_k \; d\mu = \sum_{k \geq 1} \int_X f.\mathbb{I}_{E_k} \; d\mu \\
&= \sum_{k \geq 1} \phi(E_k).
\end{aligned}$$

Par conséquent ϕ est une mesure.

Pour la seconde partie, si la fonction $g = \mathbb{I}_A$, où A est une partie mesurable de X, on a

$$\int_X g \; d\phi = \int_X \mathbb{I}_A \; d\phi = \phi(A) = \int_E f d\mu = \int_X f.\mathbb{I}_A \; d\mu = \int_X f.g \; d\mu.$$

Par linéarité, la relation $\int_X f.g \ d\mu = \int_X g \ d\phi$ reste valable pour toute fonction étagée g, car si $g = \sum_{i\hat{}=1}^{n} \alpha_i \mathbb{I}_{A_k}$, où les A_i sont des parties mesurables, car nous avons

$$\begin{aligned}\int_X g \ d\phi &= \int_X \left(\sum_{i\hat{}=1}^{n} \alpha_i \mathbb{I}_{A_k}\right) \ d\phi = \sum_{i\hat{}=1}^{n} \alpha_i \int_X \mathbb{I}_{A_k} \ d\phi \\ &= \sum_{i\hat{}=1}^{n} \alpha_i \int_X \mathbb{I}_{A_k} f \ d\mu = \int_X \left(\sum_{i\hat{}=1}^{n} \alpha_i \mathbb{I}_{A_k}\right) .f \ d\mu \\ &= \int_X f.g d\mu.\end{aligned}$$

Pour g mesurable positive, alors il exsiste une suite croissante de fonctions étagées, mesurables et positives telle que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} g_n(x) = g(x)$ pour tout $x \in X$. En utilisant le **T.C.M.** nous obtenons

$$\int_X g \ d\phi = \int_X \lim_{n \longrightarrow +\infty} g_n \ d\phi = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_X g_n \ d\phi = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_X g_n.f \ d\mu = \int_X g.f \ d\mu.$$

■

1.4. Lemme de Fatou.

Théorème 1.4.1. (***Lemme de Fatou***) *Soit $\{f_n\}_{n \geq 0}$ une suite de fonctions mesurables de $(X, \mathcal{A}, \mu)$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, alors*

$$\int_X \liminf_{n \longrightarrow +\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \longrightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Démonstration On sait que

$$\liminf_{n \longrightarrow +\infty} f_n = \sup_{n \geq 0} \left(\inf_{k \geq n} f_k\right) = \sup_{n \geq 0} g_n,$$

où $g_n = \inf\limits_{k \geq n} f_k$. Les g_n sont des fonctions mesurables positives vérifiant $g_n \leq g_{n+1}$. Donc, en utilisant le **T.C.M.** on obtient

$$\int\limits_X \lim_{n \longrightarrow +\infty} g_n d\mu = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int\limits_X g_n d\mu.$$

Or, $\{g_n\}_{n \geq 0}$ est croissante, alors sa limite est égale à son sup, i. e.

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} g_n = \sup_{n \geq 0} g_n = \liminf_{n \longrightarrow +\infty} f_n.$$

Doù $\int\limits_X \liminf\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n d\mu = \int\limits_X \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} g_n d\mu = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \int\limits_X g_n d\mu$. En plus, on a

$$g_n \leq f_n, \text{ pour tout } n \geq 0, \text{ alors } \int\limits_X g_n d\mu \leq \int\limits_X f_n d\mu.$$

D'où

$$\int\limits_X \liminf_{n \longrightarrow +\infty} f_n d\mu = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int\limits_X g_n d\mu \underset{(*)}{=} \liminf_{n \longrightarrow +\infty} \int\limits_X g_n d\mu \leq \liminf_{n \longrightarrow +\infty} \int\limits_X f_n d\mu.$$

$(*)$ provient de l'existence de $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \int\limits_X g_n d\mu$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. ■

Corollaire 1.4.2. *Soit $\{f_n\}_{n \geq 0}$ une suite de fonctions mesurables positives, qui converge simplement vers f et telle que les $\int\limits_X f_n d\mu$ sont majorées par M, alors $\int\limits_X f d\mu \leq M$.*

Proposition 1.4.3. *Soient, sur $(X, \mathcal{A}, \mu)$, g une fonction mesurable et $\{f_n\}_{n \geq 0}$ une suite de fonctions mesurables. Si $f_n; \forall n \geq 0$ et g sont intégrables on a*

1) *si $g \leq f_n$, pour tout $n \geq 0$, alors $\int\limits_X \liminf\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n d\mu \leq \liminf\limits_{n \longrightarrow +\infty} \int\limits_X f_n d\mu$.*

2) *si $f_n \leq g$, pour tout $n \geq 0$, alors $\limsup\limits_{n \longrightarrow +\infty} \int\limits_X f_n d\mu \leq \int\limits_X \limsup\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n d\mu$.*

Démonstration 1) D'aprés le **Lemme de Fatou** on a si $g \leq f_n$

$$\int_X \liminf_{n\longrightarrow+\infty} (f_n - g)\, d\mu \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \int_X (f_n - g)\, d\mu,$$

alors

$$\int_X \liminf_{n\longrightarrow+\infty} f_n d\mu - \int_X g d\mu \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \int_X f_n d\mu - \int_X g d\mu.$$

En rajoutant $\int_X g d\mu < +\infty$ on obtient $\int_X \liminf_{n\longrightarrow+\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \int_X f_n d\mu$.

2) De la même manière on a si $f_n \leq g$

$$\int_X \liminf_{n\longrightarrow+\infty} (g - f_n)\, d\mu \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \int_X (g - f_n)\, d\mu.$$

Comme $\int_X g d\mu < +\infty$ et $\inf(-A) = -\sup A$, on obtient le résultat voulu. ■

1.5. Intégrales de fonctions mesurables.

Nous avons, jusqu'à présent, définit l'intégrale des fonctions mesurables positives. Il reste donc de généraliser cette notion pour les fonctions mesurables numériques de signe quelconque.

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mesurable. Posons $f^+ = \sup\{f, 0\}$ et $f^- = -\inf\{f, 0\}$. On a alors, par construction $f^+ \geq 0$ et $f^- \geq 0$. Nous savons donc construire les intégrales $\int_X f^+ d\mu$ et $\int_X f^- d\mu$, mais ces deux quantités peuvent être égle à $+\infty$.

Remarque 1.5.1. *Par construction on a*

$$f = f^+ - f^- \quad \text{et} \quad |f| = f^+ + f^-.$$

Par souci de cohérence des opérations dans $\overline{\mathbb{R}}$, on adopte la définition suivante

Définition 1.5.2. *Soit $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction mesurable. On définit l'intégrale de Lebesgue de f sur X par*

Si $\int\limits_X f^+ d\mu < +\infty$ *et* $\int\limits_X f^- d\mu < +\infty$ *on dit que f est* ***intégrable par rapport à $\boldsymbol{\mu}$***.

On pose alors

$$\int\limits_X f d\mu = \int\limits_X f^+ d\mu - \int\limits_X f^- d\mu = \int\limits_X f(x) d\mu(x).$$

Définition 1.5.3. *Une fonction mesurable $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est dite intégrable par rapport à μ, ou bien **$\boldsymbol{\mu}-$intégrable** si $\int\limits_X |f| \, d\mu < +\infty$.*

L'ensemble des fonctions intégrables par rapport à μ est noté par $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ ou bien $L^1(X)$.

Définition 1.5.4. *Soit $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable. f est dite $\mu-$intégrable si $\int\limits_X |f| \, d\mu < +\infty$.*

Dans ce cas in écrit si $f = u + iv$

$$\begin{aligned} \int\limits_X f d\mu &= \int\limits_X \operatorname{Re}(f) \, d\mu + i \int\limits_X \operatorname{Im}(f) \, d\mu \\ &= \left(\int\limits_X u^+ d\mu - \int\limits_X u^- d\mu \right) + i \left(\int\limits_X v^+ d\mu - \int\limits_X v^- d\mu \right), \end{aligned}$$

car les fonctions u^+, u^-, v^+ et v^- sont tous majorées par $|f|$, ce qui nous de dire que leurs intégrales sont tous finies.

Proposition 1.5.5. *Le sous ensemble $L^1\left(X, \overline{\mathbb{R}}\right)$ est un sous espace vectoril de $\mathcal{F}\left(\mathcal{A}, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$ $\left(ou\ \mathcal{M}\left(\mathcal{A}, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)\right)$.*

Démonstration Cette proposition découle immédiatement des propriétés obtenues sur $\mathcal{F}\left(\mathcal{A}, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}_+\right)\right)$ L'intégrale ainsi construite est linéaire. ∎

Proposition 1.5.6. • *Si* f *et* $g \in L^1\left(X, \overline{\mathbb{R}}\right)$ *telle que* $f \leq g$, *alors* $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$.

• *Si* $f(x) = 0$, *pour tout* $x \in X$, *alors* f *est intégrable et* $\int_X f d\mu = 0$.

• *Si* $\mu(E) = 0$ *alors* $\int_E f d\mu = \int_X f.\mathbb{I}_E d\mu = 0$, *pour toute fonction mesurable* f.

• *Si* $E \cap F = \varnothing$, *alors* $\int_{E \cup F} f d\mu = \int_E f d\mu + \int_F f d\mu$, *pour toute fonction intégrable* f.

Proposition 1.5.7. *Soit* $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *une fonction intégrable, alors*

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| \, d\mu.$$

Démonstration Si $\int_X f d\mu = 0$, l'inégalité est vérifiée, sinon on a

$$\begin{aligned} \left| \int_X f d\mu \right| &= \left| \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \right| \\ &\leq \left| \int_X f^+ d\mu \right| + \left| \int_X f^- d\mu \right| \\ &= \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu = \int_X |f| \, d\mu. \end{aligned}$$

■

Remarque 1.5.8. *Ce résultat reste valable pour* $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \longrightarrow \mathbb{C}$.

Théorème 1.5.9. $1-$ *Soit* $f \in \mathcal{F}\left(\mathcal{A}, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$ *et* $g \in \mathcal{F}\left(\mathcal{A}, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}_+\right)\right)$ *intégrable, alors si* $|f| \leq g$, f *est intégrable*

$2-$ f *est intégrable si seulement si* $|f|$ *est intégrable.*

Démonstration 1− Si $0 \leq |f| \leq g$, on a $\int\limits_X |f|\, d\mu \leq \int\limits_X g d\mu < +\infty$. Alors

$$\int\limits_X |f|\, d\mu < +\infty \Longleftrightarrow \int\limits_X f^+ d\mu + \int\limits_X f^- d\mu < +\infty,$$

d'où l'intégrabilité de f.

2 − Ce résultat découle de la définition de l'intégrabilité, car on a $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$. ■

Remarque 1.5.10. *Le point* (2) *la dernière remarquen, est une différence fondamentale entre l'intégrale de Lebesgue et l'intégrale de Riemann.*

1.6. Comparaison avec l'intégrale de Riemann.

Soit $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ l'espace des réels muni de la mesure de Lebesgue λ.

Théorème 1.6.1. (1) *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction continue. Alors*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f d\lambda = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \quad \left(\text{dans } \overline{\mathbb{R}}\right).$$

(2) *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction continue. Alors f est **absolument intégrable** au sens de Riemann, si et seulement si f est intégrable au sens de Lebesgue, ou $\lambda-$intégrable, sur $\mathbb{R}$. Dans ce cas on a*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f d\lambda = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \ .$$

(3) *Soit $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue de limite ∞ en a et b. Si $\int\limits_a^b f(x)dx$ est **absolument** convergente au sens de Riemann, alors f est Lebesgue intégrable et on a*

$$\int\limits_{]a,b[} f d\lambda = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Démonstration (1) Posons $f_n = f.\mathbb{I}_{[-n,n]}; \forall n \geq 0$, alors $\{f_n\}_{n\geq 0}$ est une suite croissante de fonctions mesurables et positives, qui converge vers f . En utilisant le **T.C.M. on obtient**

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} f_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f d\lambda.$$

En plus, f_n est continue sur l'intervalle borné $[-n, n]$, alors elle est une limite uniforme d'une suite croissante de fonctions en escaliers.

On sait que toute fonction en escalier E est un cas particulier de fonctions étagées avec

$$\int_a^b E(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i.\mathbb{I}_{[a_i,a_{i+1}]}(x)dx,$$

ou $a = a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n = b$ est une subdivision de $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b E(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i (a_{i+1} - a_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \lambda ([a_i, a_{i+1}]) = \int_{[a,b]} E(x)d\lambda.$$

Par conséquent si $\{E_k^n\}_{k\geq 0}$ une suite coissante de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers f_n on a pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\int_{-n}^{n} f_n(x)dx &= \lim_{k\to+\infty} \int_{-n}^{n} E_k^n(x)dx = \lim_{k\to+\infty} \int_{[-n,n]} E_k^n(x)d\lambda \\
&= \int_{[-n,n]} \lim_{k\to+\infty} E_k^n(x)d\lambda = \int_{[-n,n]} f_n d\lambda \\
&= \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda,
\end{aligned}$$

D'où

$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = \lim_{n\to+\infty} \int_{-n}^{n} f_n(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

(2) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction continue. On sait que f est $\lambda-$intégrable si et seulement si $|f|$. Dans ce cas comme f^+ et f^- sont cotinues, on a d'aprés (1)

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f^+ d\lambda = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^+(x)dx \text{ et } \int\limits_{\mathbb{R}} f^- d\lambda = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^-(x)dx.$$

D'où

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |f| \, d\lambda = \int\limits_{\mathbb{R}} f^+ d\lambda + \int\limits_{\mathbb{R}} f^- d\lambda = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \, dx < +\infty,$$

ce qui nous permet de dire que f est absolument intégrable au sens de Riemann sur $\mathbb{R}$.

Inversement, supposons que f est absolument intégrable au sens de Riemann sur $\mathbb{R}$, alors d'aprés (1) on a

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)| \, d\lambda = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \, dx < +\infty.$$

Or $f^+ \leq |f|$ et $f^- \leq |f|$, par suite f^+ et f^- sont intégrables au sens de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f^+(x) d\lambda = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^+(x)dx \text{ et } \int\limits_{\mathbb{R}} f^-(x) d\lambda = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^-(x)dx,$$

d'où l'égalité souhaitée entre les deux intégrales.

(3) Posons $f_n = f.\mathbb{I}_{[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}]}; \forall n \geq 1$, alors $\{|f_n|\}_{n \geq 1}$ est une croissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} |f_n(x)| = |f(x)|$.

Or, f_n est ccontinue sur le compact $\left[a + \dfrac{1}{n}, a - \dfrac{1}{n}\right]$, pour tout $n \geq 1$, alors $|f_n|$ est intégrable au sens de Riemann sur ce compact. Alors en ulilisant le **T.C.M.**

on a

$$\int\limits_{]a,b[} |f|\, d\lambda = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_{]a,b[} |f_n|\, d\lambda = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_{\left[a+\frac{1}{n},a-\frac{1}{n}\right]} |f|\, d\lambda$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \int\limits_{a+1/n}^{b-1/n} |f(x)|\, dx = \int\limits_a^b |f(x)|\, dx < +\infty.$$

Par conséquent f est $\lambda-$intégrable sur $]a,b[$. ■

Ce théorème montre le lien étroit entre l'intégrale de Riemann et l'intégrale de Lebesgue, même si ces deux notions ne Coïncident pas exactement.

Théorème 1.6.2. *Soient f et $g \in \mathcal{F}\left(\mathcal{A}, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$. Supposons que $f = g \;\; \mu-$p.p., alors f est intégrable si et seulement si g est aussi intégrable, et, dans ce cas on a $\int\limits_X f d\mu = \int\limits_X g d\mu$.*

Démonstration Nous pouvons, sans perdre la généralité, supposer que f et g sont positive, car nous pouvons appliquer le résultat à f^+ et g^+ puis f^- et g^-, enfin appliquer la linéaité
Nous pouvons écrire que

$$f = f.\mathbb{I}_{\{f=g\}} + f_{\{f\neq g\}},$$

alors

$$\int\limits_X f d\mu = \int\limits_X \left(f.\mathbb{I}_{\{f=g\}} + f.\mathbb{I}_{\{f\neq g\}}\right) d\mu = \int\limits_X f.\mathbb{I}_{\{f=g\}} d\mu + \int\limits_X f.\mathbb{I}_{\{f\neq g\}} d\mu.$$

Or $f = g \;\; \mu-$p.p., alors $\mu\left(\{f \neq g\}\right) = 0$, ce qui nous permet d'avoir

$$\int\limits_X f.\mathbb{I}_{\{f\neq g\}} d\mu = 0, \text{pour toute fonction } f.$$

Par conséquent on obtient

$$\begin{aligned}
\int_X f d\mu &= \int_X f.\mathbb{I}_{\{f=g\}} d\mu = \int_X g.\mathbb{I}_{\{f=g\}} d\mu \\
&= \int_X g.\mathbb{I}_{\{f=g\}} d\mu + \int_X g.\mathbb{I}_{\{f\neq g\}} \\
&= \int_X g d\mu.
\end{aligned}$$

■

En d'autre termes, l'intégrale au sens de Lebesgue ne dépend que de la classe d'équivalence de la fonction, par rapport à l'égalité p.p., et ne dépend pas des valeurs prisent sur un ensemble $\mu-$négligeable.

Théorème 1.6.3. *Soit f une fonction mesurable de X dans $\overline{\mathbb{R}}$. Si f est $\mu-$intégrable alors on a*

$$|f| < +\infty \quad \mu - p.p.$$

Démonstration Sans perdre la généralité, il suffit de montrer que f^+ et $f^- < +\infty$ $\mu-$p.p., donc on peut se restreindre à $f \geq 0$ et $\int_X f d\mu < +\infty$.

Posons $M = \{x \in X \;\; / \;\; f(x) = +\infty\}$. Nous avons:

$$\forall n \geq 1 \quad : \quad n.\mu(M) = n.\int_X \mathbb{I}_M \; d\mu \leq \int_X f(x) d\mu(x) < +\infty,$$

alors

$$\mu(M) \leq \frac{1}{n}\int_X f d\mu, \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Par conséquent $\mu(M) = 0$, d'où $f < +\infty$ $\mu-$p.p. sur X. ■

Théorème 1.6.4. (***Théorème de Lebesgue***) *Une fonction bornée f sur $[a, b]$ est Riemann intégrable si et seulement si l'ensemble des points de discontinuité est de mesure nulle. On dit alors que f est continue $\mu - p.p.$ sur $[a, b]$.*

Théorème 1.6.5. *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction Riemann intégrable. Alors elle est mesurable pour les tribus boréliennes de $[a,b]$ et de $\mathbb{R}$, en plus elle est intégrable au sens de Lebesgue et on a*

$$\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_a^b f(x)dx.$$

1.7. Théoème de la convergence dominée et applications.

Théorème 1.7.1. (***Thérème de la convergence dominée T.C.D.***) *Soit sur $(X, \mathcal{A}, \mu)$; $f_n : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{C}$; $\forall n \geq 0$, mesurables telles que $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ p.p. sur X. S'il existe une fonction $g : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ vérifiant*

$$(a) \quad |f_n| \leq g, \quad p.p. \qquad (b) \quad g \text{ est intégrale au sens de Lebesgue,}$$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$

Démonstration Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = f$ p.p. sur X et $-g \leq f_n \leq g$ p.p. sur X, la **Proposition 3.4.3** nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu &\leq \int_X \limsup_{n\to+\infty} f_n d\mu = \int_X \lim_{n\to+\infty} f_n d\mu \\ &= \int_X \liminf_{n\to+\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu. \end{aligned}$$

On sait en plus que $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$ pour toute suite réelle $\{u_n\}_n$, on obtient l'égalité voulue. ■

Corollaire 1.7.2. *Si la convergence et dominée on a en fait*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0.$$

Démonstration On considère, pour tout $n \geq 1$, la fonction $\cancel{h}_n = 2g - |f_n - f|$.
Comme $|f_n| \leq g \ \mu - p.p.$, alors $|f_n| \leq g \ \mu - p.p.$, ce qui nous permet d'avoir

$$|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2g \ \mu - p.p.,$$

c'est-à-dire que $h_n \geq 0 \ \mu - p.p.$

De plus $\lim\limits_{n \to +\infty} h_n = \lim\limits_{n \to +\infty} (2g - |f_n - f|) = 2g$.

D'aprés le **Lemme de Fatou** on a

$$\begin{aligned}
\int_X 2g d\mu &= \int_X \liminf_{n \to +\infty} (2g - |f_n - f|) \, d\mu \\
&\leq \liminf_{n \to +\infty} \int_X (2g - |f_n - f|) \, d\mu \\
&= \int_X 2g d\mu + .\liminf_{n \to +\infty} \int_X (- |f_n - f|) \, d\mu \\
&= \int_X 2g d\mu + .\limsup_{n \to +\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu.
\end{aligned}$$

D'où $\limsup\limits_{n \to +\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu \leq 0$.

Comme on a en plus $\liminf\limits_{n \to +\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu \geq 0$, alors

$$0 = \liminf_{n \to +\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = \limsup_{n \to +\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu.$$

■

1.7.1. Application aux intégrales à paramètres.

Théorème 1.7.3. (***Continuité sous l'intégrale***) *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *et* (T, d) *un espace métrique (en générale* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*). On considère la fonction mesurable* $f : T \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ *telle que*

$$\forall (t, x) \in T \times X \ \ \text{on a} \ \ |f(t, x)| \leq g(x)$$

où g est une fonction $\mu-$intégrable $\left(\int\limits_X g(x)d\mu(x) < +\infty\right)$.

On définie la fonction $F : T \longrightarrow \mathbb{C}$ par:

$$F(t) = \int\limits_X f(t,x)d\mu(x), \text{ pour tout } t \in T.$$

On suppose que pour (presque) tout $x \in X$ la fonction $f : t \longmapsto f(t,x)$ est continue en $t_0 \in T$, alors F est aussi continue en t_0.

Démonstration Comme $(\mathbb{R}, |. - .|)$ et $(\mathbb{C}, |. - .|)$ sont des espaces métriques, alors F est continue en $t_0 \Leftrightarrow$

$$\forall \{t_n\}_{n\geq 1} \subset T \text{ telle que } \lim_{n\to+\infty} t_n = t_0 \text{ on a } \lim_{n\to+\infty} F(t_n) = F(t_0).$$

Définissons la suite $\{f_n\}_{n\geq 1}$ par

$$\begin{aligned} f_n : \ & X \longrightarrow \mathbb{C} \\ & x \longmapsto f(t_n, x). \end{aligned}$$

La fonction $f : t \longmapsto f(t,x)$ est continue en t_0, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(t_0, x)$, en plus on a $|f_n(x)| = |f(t_n, x)| \leq g(x)$, qui est $\mu-$intégrable, alors d'aprés le **T.C.D.** on a

$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_X f_n(x)d\mu(x) = \lim_{n\to+\infty}\int\limits_X f(t_n,x)d\mu(x) = \int\limits_X \lim_{n\to+\infty} f(t_n,x)d\mu(x)$$

qui est équivalent à

$$\lim_{n\to+\infty} F(t_n) = F(t_0).$$

■

Théorème 1.7.4. (***Dérivation sous l'intégrale***) *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On définit la fonction $f : I \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que*

- ♣ *$\forall t \in I$ la fonction $x \longmapsto f(t,x)$ est mesurable.*
- ♣ *$\exists t_0 \in I$ tel que la fonction $x \longmapsto f(t_0,x)$ est $\mu-$intégrable.*

On suppose en plus, qu'in existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A^c) = 0$ et

- *$\forall x \in A;\ t \longmapsto f(t,x)$ est dérivable en tout $t \in I$.*

- *$\forall x \in A$ et $\forall t \in I$ on a $\left|\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq g(x)$, avec $\displaystyle\int\limits_X g d\mu(x) < +\infty$.*

Alors la fonction

$$\begin{aligned} F: \ & I \longrightarrow \mathbb{C} \\ & t \longmapsto \int\limits_X f(t,x) d\mu(x) \end{aligned}$$

est bien définie et dérivable sur I et sa dérivée est donnée par $F'(t) = \displaystyle\int\limits_X \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\, d\mu(x)$.

Démonstration Dans $\mathbb{R}$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \lim_{t_n \to t} \frac{f(t_n,x) - f(t,x)}{t_n - t}, \text{ pour tout } x \in A.$$

Alors la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial t} : X \longrightarrow \mathbb{C}$ est mesurable (limite d'une suite de fonctions mesurables).

Pour tout $x \in A$, la fonction $t \longmapsto f(t,x)$ est dérivable, alors elle est continue, alors pour tout $t_1 \in I$, le théorème des accroissements finis, nous permet de dire, qu'il existe $\tau \in]t_0, t_1[$ (on peut supposer que $t_1 > t_0$ sans perdre la généralité) tel que

$$\begin{aligned} |f(t_1,x) - f(t_0,x)| &= \left|\frac{\partial f}{\partial t}(\tau,x)\right| . |t_1 - t_0| \\ &\leq g(x) |t_1 - t_0| . \end{aligned}$$

Il suit que $|f(t_1,x)| \leq g(x)|t_1 - t_0| + |f(t_0,x)|$ qui est $\mu-$intégrable car g et $f(t_0,.)$ le sont.

Par conséquent $\displaystyle\int\limits_X f(t_1,x)\, d\mu(x)$ est finie pour tout $t_1 \in I$, ce qui nous permet de dire que la fonction F est bien définie sur I.

Soit maintenant $t \in I$ fixé et $t_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} t$, on a alors

$$\begin{aligned}
\frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} &= \int\limits_X \frac{f(t_n, x) - f(t, x)}{t_n - t} d\mu(x) \\
&= \int\limits_A \frac{f(t_n, x) - f(t, x)}{t_n - t} d\mu(x). \quad (\mu(A^c) = 0)
\end{aligned}$$

Comme la fonction $t \longmapsto f(t, x)$ est dérivable sur A, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(t_n, x) - f(t, x)}{t_n - t} = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$$

et en plus on a d'aprés le théorème des accroissements finis on a

$$f(t_n, x) - f(t_0, x) = \frac{\partial f}{\partial t}(\tau_n, x),$$

pour un certain τ_n compris enttre t et t_n. Donc, comme $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)\right| \leq g(x), \quad \forall x \in A$, on a

$$\begin{aligned}
F'(t) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_A \frac{f(t_n, x) - f(t, x)}{t_n - t} d\mu(x) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int\limits_A \frac{\partial f}{\partial t}(\tau_n, x)\, d\mu(x) = \int\limits_A \lim_{n\to+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(\tau_n, x)\, d\mu(x) \\
&= \int\limits_A \frac{\partial f}{\partial t}(t, x)\, d\mu(x) = \int\limits_X \frac{\partial f}{\partial t}(t, x)\, d\mu(x).
\end{aligned}$$

Par conséquent F est dérivable sur I et on a $F'(t) = \int\limits_X \frac{\partial f}{\partial t}(t, x)\, d\mu(x)$. ■