1 Intégrale stochastique

Définition:

On appelle processus simple tout processus α de la forme:

$$\alpha_t(\omega) = \sum_k \alpha_{t_k}(\omega)\, 1_{[t_k, t_{k+1}[}(t) \qquad \text{où} \;\; 0 = t_0 < t_1 < .... < t_k < ....$$

est une subdivision de $\mathbb{R}_+$, satisfaisant les propriétés suivantes:

$1 - \alpha$ *est adapté*

$2 - \alpha \in L^2(\Omega \times [0,t], P \otimes dt)$ (*i.e.* $\mathbb{E}\left(\int_0^t \alpha_s^2 ds\right) < \infty$) pour tout $t \geq 0$

Soit S l'ensemble des processus simples. Il est facile d'établir que S est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Définition:

Soit $\alpha \in S$. On appelle intégrale stochastique de α par rapport à $(B_t)_{t \geq 0}$, la variable aléatoire:

$$\int_0^t \alpha_s dB_s := \sum_k \alpha_{t_k}(B_{t_{k+1} \wedge t} - B_{t_k \wedge t}).$$

Il découle de la linéarité de la somme que l'application $\alpha \to \int_0^t \alpha_s dB_s$ est linéaire sur S. On peut aussi démontrer que cette définition ne dépend pas du choix de la subdivision de $\mathbb{R}_+$.

Exemple :

Si $\alpha \equiv 1$, alors $\alpha = \sum_k \mathbf{1}_{[t_k, t_{k+1}[}$ sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, alors

$$\int_0^t dB_s := \sum_k (B_{t_{k+1} \wedge t} - B_{t_k \wedge t}) = B_t.$$

Proposition:

Pour tout $\alpha \in S$, le processus M défini par $M_t = \int_0^t \alpha_s dB_s$ est une martingale et on a :

$$\mathbb{E}(M_t^2) = \mathbb{E}\left(\int_0^t \alpha_s^2 ds\right)$$

Démonstartion:

Le fait que M soit une martingale sera démontré en T.D. Pour démontrer que

$$\mathbb{E}(M_t^2) = \mathbb{E}\left(\int_0^t \alpha_s^2 ds\right),$$

observons d'abord que

$$M_t = \sum_k \alpha_{t'_k}(B_{t'_{k+1}} - B_{t'_k}),$$

où (t'_k) est la subdivision de l'intervalle $[0,t]$ définie par $t'_k = t_k \wedge t$. On a alors, en posant $A_k = \alpha_{t'_k}(B_{t'_{k+1}} - B_{t'_k})$,

$$\mathbb{E}(M_t^2) = \mathbb{E}\left(\sum_k A_k\right)^2 = \mathbb{E}(\sum_{k,l} A_k A_{k+l}) = \sum_{k,l} \mathbb{E}(A_k A_{k+l}).$$

Montrons que pour tout $l > 0$, $\mathbb{E}(A_k A_{k+l}) = 0$. En effet, comme $\mathcal{F}_{t'_k} \subset \mathcal{F}_{t'_{k+1}} \subset \mathcal{F}_{t'_{k+l}}$ et comme α et B sont adaptés, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(A_k A_{k+l}) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(A_k A_{k+l} \mid \mathcal{F}_{t'_{k+l}})\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(\alpha_{t'_k}(B_{t'_{k+1}} - B_{t'_k})\alpha_{t'_{k+l}}(B_{t'_{k+l+1}} - B_{t'_{k+l}}) \mid \mathcal{F}_{t'_{k+l}})\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\alpha_{t'_k}(B_{t'_{k+1}} - B_{t'_k})\alpha_{t'_{k+l}}\mathbb{E}(B_{t'_{k+l+1}} - B_{t'_{k+l}} \mid \mathcal{F}_{t'_{k+l}})\right) = 0
\end{aligned}$$

car $\mathbb{E}(B_{t'_{k+l+1}} - B_{t'_{k+l}} \mid \mathcal{F}_{t'_{k+l}}) = 0$, puisque B est une martingale. Il résulte alors que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_t^2) &= \sum_k \mathbb{E}(A_k^2) = \sum_k \mathbb{E}(\alpha_{t'_k}^2(B_{t'_{k+1}} - B_{t'_k})^2) \\
&= \sum_k \mathbb{E}(\alpha_{t'_k}^2)\mathbb{E}\left((B_{t'_{k+1}} - B_{t'_k})^2\right) \text{ car } \alpha_{t'_k} \text{ et } B_{t'_{k+1}} - B_{t'_k} \text{ sont indépendantes} \\
&= \sum_k \mathbb{E}(\alpha_{t'_k}^2)\left(t'_{k+1} - t'_k\right) \text{ car } B_{t'_{k+1}} - B_{t'_k} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(0, t'_{k+1} - t'_k\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_k (\alpha_{t'_k}^2)\left(t'_{k+1} - t'_k\right)\right) \\
&= \mathbb{E}(\int_0^t \alpha_s^2 ds).
\end{aligned}$$

■

Remarque:

L'égalité $\mathbb{E}(M_t^2) = \mathbb{E}(\int_0^t \alpha_s^2 ds)$, *qui signifie que*

$$\left\|\int_0^t \alpha_s dB_s\right\|_{L^2(\Omega)} = ||\alpha||_{L^2(\Omega\times[0,t])}$$

Ainsi l'application linéaire $\alpha \to \int_0^t \alpha_s dB_s$ *de* S *dans* $L^2(\Omega \times [0,t])$ *est une isométrie.*

0n pose $L^2_{\mathcal{F}_t} := \{X \in L^2(\Omega)$ qui admet une version $\mathcal{F}_t-$mesurable$\}$.

1.1 Prolongement de l'intégrale stochastique :

Soit $\overline{S}_t$ l'adhérence de S dans $L^2(\Omega \times [0,t], P \otimes dt)$ et soit

$$\overline{S} = \{\alpha \text{ processus: } \alpha_t \in \overline{S}_t \quad \forall t \geq 0\}$$

L'intégrale stochastique se prolonge donc par continuité à $\overline{S}$, qui restera encore une isométrie ($i.e$: $\forall \alpha \in \overline{S}$;$\mathbb{E}((\int\limits_0^t \alpha_s dB_s)^2) = \mathbb{E}\left(\int\limits_0^t \alpha_s^2 ds\right))$. Ainsi, on a définie par $\alpha \in S$, la variable aléatoire $\int\limits_0^t \alpha_s dB_s$ dite integrale stochastique de α par rapport à $(B_t)_{t\geq 0}$ par sa valeur $\sum_k \alpha_{t_k}(B_{t_{k+1}\wedge t} - B_{t_k \wedge t})$ et par : Si $\alpha \in \overline{S}$, alors il existe une suite (α^n) de S qui converge vers α dans $L^2(\Omega \times [0,t])$. Dans ce cas

$$\int\limits_0^t \alpha_s dB_s \underset{L^2}{:=} \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^t \alpha_s^n dB_s,$$

Dans toute la suite on prendra systématiquement une version continue de l'intégrale stochastique ($i.e$ l'application $t \to \int\limits_0^t \alpha_s dB_s$ est continue) à valeurs dans $L^2_{\mathcal{F}_t}$.

Définition:

Pour tout $a < b$, on défini $\int\limits_a^b \alpha_s dB_s$ par:

$$\int\limits_a^b \alpha_s dB_s := \int\limits_0^b \alpha_s dB_s - \int\limits_0^a \alpha_s dB_s.$$

Remarque:

Si $\alpha, \alpha' \in \overline{S}$, alors on a:

$$\mathbb{E}(\int\limits_0^t \alpha_s dB_s \int\limits_0^t \alpha'_s dB_s) = \mathbb{E}(\int\limits_0^t \alpha_s \alpha'_s ds),$$

qui signifie que

$$\left\langle \int\limits_0^t \alpha_s dB_s, \int\limits_0^t \alpha'_s dB_s \right\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle \alpha, \alpha' \rangle_{L^2(\Omega \times [0,t])}.$$

En *effet, de l'identité* $xy = \frac{1}{4}\left\{(x+y)^2 - (x-y)^2\right\}$ *pour tout* $x, y \in \mathbb{R}$, on déduit que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\int_0^t \alpha_s dB_s \int_0^t \alpha'_s dB_s) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{4}\left\{(\int_0^t \alpha_s dB_s + \int_0^t \alpha'_s dB_s)^2 - (\int_0^t \alpha_s dB_s - \int_0^t \alpha'_s dB_s)^2\right\}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left\{\mathbb{E}((\int_0^t (\alpha_s + \alpha'_s) dB_s)^2) - \mathbb{E}((\int_0^t (\alpha_s - \alpha'_s) dB_s)^2))\right\} \\
&= \frac{1}{4}\left\{\mathbb{E}((\int_0^t (\alpha_s + \alpha'_s)^2 ds) - \mathbb{E}((\int_0^t (\alpha_s - \alpha'_s)^2 ds))\right\} \\
&= \mathbb{E}(\int_0^t \frac{1}{4}((\alpha_s + \alpha'_s)^2 - (\alpha_s - \alpha'_s)^2) ds) \\
&= \mathbb{E}(\int_0^t \alpha_s \alpha'_s ds)
\end{aligned}
$$