Solution du Problème

(i) On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\max_{1\le i\le n} Z_i\right) &= \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left(\max_{1\le i\le n}\log\exp\left(\alpha Z_i\right)\right)\\
&= \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left[\log\max_{1\le i\le n}\exp\left(\alpha Z_i\right)\right]\\
&\le \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left[\log\sum_{i=1}^{n}\exp\left(\alpha Z_i\right)\right].
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Jensen on obtient

$$\mathbb{E}\left[\log\sum_{i=1}^{n}\exp\left(\alpha Z_i\right)\right] \le \log\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\exp\left(\alpha Z_i\right)\right] \le \log(nC).$$

(ii) Chaque fois qu'on étudie un risque quadratique, on fait la décomposition biais/variance :

$$\mathbb{E}\left[\left(\widehat{f}(x)-f(x)\right)^2\right] = \left[\mathbb{E}\left(\widehat{f}(x)\right)-f(x)\right]^2 + Var\left(\widehat{f}(x)\right).$$

On a pour tout x, $Var\left(\sum_{i=1}^{n} W_{n,i}(x)Y_i\right) = \sigma^2\sum_{i=1}^{n}W_{n,i}^2(x)$ car les Y_i sont indépendants de variance σ^2, et le terme de variance s'écrit :

$$Var\left(\widehat{f}(x)\right) = \sigma^2\sum_{i=1}^{n}W_{n,i}^2(x)$$

qui tend vers 0 d'après l'hypothèse (1).

Regardons maintenant le terme de biais. On a $\mathbb{E}(Y_i|X=x_i)=f(x_i)$, donc

$$\left[\mathbb{E}\left(\widehat{f}(x)\right)-f(x)\right]^2 = \left[\sum_{i=1}^{n}W_{n,i}(x)f(x_i)-f(x)\right]^2 = \left[\sum_{i=1}^{n}W_{n,i}(x)(f(x_i)-f(x))\right]^2,$$

en utilisant le fait que $\sum_{i=1}^{n}W_{n,i}(x)=1$, puis par Cauchy-Schwarz on arrive à

$$\begin{aligned}
\left[\sum_{i=1}^{n}W_{n,i}(x)(f(x_i)-f(x))\right]^2 &\le \left[\sum_{i=1}^{n}W_{n,i}(x)\right]\left[\sum_{i=1}^{n}W_{n,i}(x)(f(x_i)-f(x))^2\right]\\
&= \sum_{i=1}^{n}\mathbf{1}_{|x-x_i|>\delta}W_{n,i}(x)(f(x_i)-f(x))^2\\
&\quad+\sum_{i=1}^{n}\mathbf{1}_{|x-x_i|\le\delta}W_{n,i}(x)(f(x_i)-f(x))^2\\
&\le 4\|f\|_\infty^2 o(1) + \sup_{|u-v|\le\delta}|r(u)-r(v)|^2.
\end{aligned}$$

En utilisant (2) on a donc pour tout $\delta>0$,

$$\limsup_{n\to\infty}\left[\mathbb{E}\left(\widehat{f}(x)\right)-f(x)\right]^2 \le \sup_{|u-v|\le\delta}|f(u)-f(v)|^2,$$

qui tend vers 0 quand δ tend vers 0, car f est continue sur $[0,1]$ compact, donc uniformément continue.

(iii) D'après (ii) on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_0^1 \left(\widehat{f}(x)-f(x)\right)^2 dx\right] &= \int_0^1 \mathbb{E}\left[\left(\widehat{f}(x)-f(x)\right)^2 dx\right] \\ &= \int_0^1 \left[\mathbb{E}\left(\widehat{f}(x)\right)-f(x)\right]^2 dx + \int_0^1 Var\left(\widehat{f}(x)\right) dx.\end{aligned}$$

On a pour tout x, $Var\left(\sum_{i=1}^n W_{n,i}(x)Y_i\right) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n W_{n,i}^2(x)$ car les Y_i sont indépendants de variance σ^2, et le terme de variance s'écrit :

$$\int_0^1 Var\left(\widehat{f}(x)\right) dx = \sigma^2 \int_0^1 \sum_{i=1}^n W_{n,i}^2(x) dx$$

qui tend vers 0 d'après l'hypothèse (3).

Regardons maintenant le terme de biais. On a $\mathbb{E}(Y_i) = f(x_i)$, donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left[\mathbb{E}\left(\widehat{f}(x)\right)-f(x)\right]^2 dx &= \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^n W_{n,i}(x)f(x_i) - f(x)\right]^2 dx \\ &= \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^n W_{n,i}(x)(f(x_i)-f(x))\right]^2 dx,\end{aligned}$$

en utilisant le fait que $\sum_{i=1}^n W_{n,i}(x) = 1$, puis par Cauchy-Schwarz on arrive à

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left[\sum_{i=1}^n W_{n,i}(x)(f(x_i)-f(x))\right]^2 dx &\leq \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^n W_{n,i}(x)\right]\left[\sum_{i=1}^n W_{n,i}(x)(f(x_i)-f(x))^2\right] dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{|x-x_i|>\delta} W_{n,i}(x)(f(x_i)-f(x))^2 dx \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \int_{|x-x_i|\leq\delta} W_{n,i}(x)(f(x_i)-f(x))^2 dx \\ &\leq 4\|f\|_\infty^2 o(1) + \sup_{|u-v|\leq\delta} |f(u)-f(v)|^2.\end{aligned}$$

En utilisant (4) on a donc pour tout $\delta > 0$,

$$\limsup_{n\to\infty} \int_0^1 \left[\mathbb{E}\left(\widehat{f}(x)\right)-f(x)\right]^2 dx \leq \sup_{|u-v|\leq\delta} |f(u)-f(v)|^2,$$

qui tend vers 0 quand δ tend vers 0, car f est continue sur $[0,1]$ compact, donc uniformément continue.