1.3. Cond. sur une v.a. arbitraire :

Déf^t 1.3 : Soit X une v.a. $\in L^1$ et soit Y une v.a. arbitraire (كيفي). Alors :
(Une version de) l'esp. cond. de X sachant Y **est** une variable aléatoire $\mathbb{E}(X/Y)$ telle que :

(1) $\mathbb{E}(X/Y)$ est $\sigma(Y)$-mesurable

(2) $\forall A \in \sigma(Y)$:

$$\int_A \mathbb{E}(X/Y)\, d\mathbb{P} = \int_A X\, d\mathbb{P}$$

ou bien : $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X/Y)\mathbb{1}_A\right] = \mathbb{E}(X\mathbb{1}_A)$

Remarque 1.1 : La proba. conditionnelle
Soit $A \in \mathcal{F}$ (un événement).
La proba. conditionnelle de A sachant Y est définie par : $\underbrace{\mathbb{P}(A/Y)}_{v.a.} := \mathbb{E}(\mathbb{1}_A/Y)$

Exple 1.3 : Soit l'esp. de proba. $([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \mathbb{P}: Leb)$

~~Déterminer l'esp. cond. $\mathbb{E}(X/Y)$ avec:~~

$$X(x) = 2x^2, \quad Y(x) = 2\,\mathbb{1}_{[0,1/2[}(x) + x\,\mathbb{1}_{[1/2,1]}(x)$$

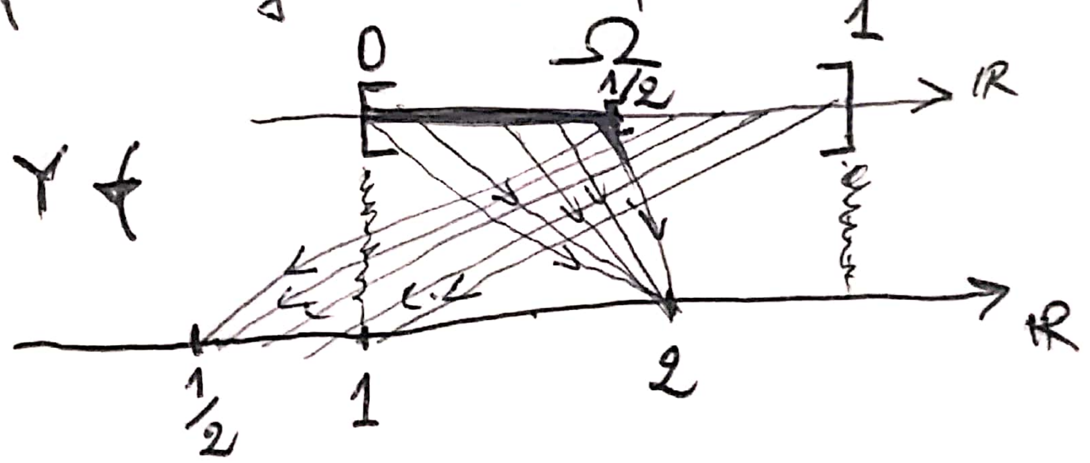
Montrer que : $\mathbb{E}(X/Y)(x) = \frac{1}{6}\mathbb{1}_{[0,1/2[}(x) + 2x^2\mathbb{1}_{[1/2,1]}$.

Solution :

la v.a. Y n'est pas discrète, on doit utiliser la déf^{t} générale.

Premièrement : Il faut décrire la ss-tribu $\sigma(Y)$.

D'après la déf^{t} de Y, on peut tracer le schéma :



On sait que : $\sigma(Y) = \{ Y^{-1}(B),\ B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \}$

[La plus petite ss-tribu rendant Y mes.]

Donc décrire $\sigma(Y)$ revient à déterminer :

$$Y^{-1}(C),\ C \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}.$$

Avant de déterminer $Y^{-1}(C)$, <u>remarquons que</u> :

- si $B \subset [1/2, 1]$; $Y^{-1}(B) = B \in \sigma(Y)$

<u>i.e</u> que $\sigma(Y)$ contient tous les ss-ensbles de $[1/2, 1]$.

- Pour $Y^{-1}(C)$, on distingue 2 cas :

(a) $2 \notin C$: $Y^{-1}(C) = [1/2, 1] \cap C = B \subset [1/2, 1]$

(b) $2 \in C$: $Y^{-1}(C) = [0, 1/2[\cup \underbrace{([1/2, 1] \cap C)}_{= B \subset [1/2, 1]}$.

<u>Conclusion</u> : $\sigma(Y) = \{B,\ B \cup [0, 1/2[,\ B \subset [1/2, 1]\}$

<u>Deuxièmement</u> : Vérifier que, $\forall A \in \sigma(Y)$:

$$\int_A \mathbb{E}(X/Y)\, d\mathbb{P} = \int_A X\, d\mathbb{P}.$$

Il <u>suffit</u> de vérifier pour $A = B \subset [1/2, 1]$
(Pourquoi ?) et $A = [0, 1/2[$

- Pour $A = B \subset [1/2, 1]$.

$$\int_B \mathbb{E}(X/Y)(x)\, d\mathbb{P}(x) = \int_B 2x^2\, dx \,, \quad \text{car } \mathbb{P}(dx) = dx \text{ (Leb.)}$$

$$= \int_B X(x)\, d\mathbb{P}(x)$$

- De m̂. pour $A = [0, 1/2[$.

<u>Remarque 1.2.</u> Dans cet exemple, j'ai donné l'expression de l'espérance conditionnelle.
Le résultat suivant vous aide à déterminer l'expression de l'esp. cond. ~~dans~~ pour un cas particulier.

<u>Th$\underline{\underline{m}}$</u> (Théorie de la mesure)

X : $\mathcal{G}$-mesurable et $\mathcal{G} = \sigma(\{D_1, D_2, \dots D_n\})$
tq Les D_i forment une partition de Ω

<u>Alors</u> : $X = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{D_i}$, c_i : <u>ctes</u>

c.à.d. X est <u>cste</u> sur chaque D_i.

1.4 Conditionnement sur une ss-tribu de $\mathcal{F}$.

Déf$^{\underline{t}}$ 1.4 (de Kolmogorov, 1933)

هذا التعريف مهمٌّ جدًّا يجب أن يُحفظ عن ظهر قلب

Soit X une v.a. $\in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
et $\mathcal{G}$: une sous tribu de $\mathcal{F}$.

Alors : il existe une v.a. Y t.q. :

(1) Y est $\mathcal{G}$-mesurable

(2) Pour tout $G \in \mathcal{G}$, on a :

$$\mathbb{E}(Y \mathbb{1}_G) = \mathbb{E}(X \mathbb{1}_G)$$

$$\left(\text{ou bien} \quad \int_G Y \, d\mathbb{P} = \int_G X \, d\mathbb{P} \right)$$

- Si $\tilde{Y}$ (Y tilde) est une autre v.a. satisfaisant ces propriétés, alors :

$$\tilde{Y} = Y \quad \mathbb{P}.\text{p.s}.$$

- La v.a. Y est dite (une version de) l'esp. cond. de X sachant $\mathcal{G}$, notée par :

$$\mathbb{E}(X / \mathcal{G})$$

Question : Discuter l'idée suivante !

« L'esp. cond. peut être définie comme étant le meilleur estimateur (en termes des carrées des erreurs) $\mathcal{G}$-mesurable de la v.a. X. »

Remarque 1.3 : Si $\mathcal{G}$ est la tribu engendrée par une v.a. Y [i.e. $\mathcal{G} = \sigma(Y)$], alors :

$\mathbb{E}(X/\mathcal{G})$ coïncide avec la définition 1.3.

$$\underbrace{\mathbb{E}(X/\sigma(Y))}_{\text{كتابة حقيقية}} \overset{\text{Notée}}{\underset{\text{par}}{=}} \underbrace{\mathbb{E}(X/Y)}_{\text{كتابة رمزية}} .$$

Exple 1.4 : X : v.a. uniformément distribuée sur $\left([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, P = Leb\right)$

$$\mathcal{G} = \sigma\left(\{0 \leq X \leq 1/2\}, \{1/2 < X \leq 1\}\right)$$

Alors : $\mathbb{E}(X/\mathcal{G}) = c_1 \mathbb{1}_{\{0 \leq X < 1/2\}} + c_2 \mathbb{1}_{\{1/2 \leq X \leq 1\}}$

c_1 et c_2 2 ctes à déterminer.

Solution : Avant de déterminer c_1 et c_2 je pose la question : Pourquoi cette expression ?

Scanned by CamScanner

D'après la déf^{c} de Kolmogorov de l'esp cond.
$\mathbb{E}(X/\mathcal{G})$ doit satisfaire les 2 ptés.

* La 1ère propriété est satisfaite par hypothèse. (Pourquoi ?)

* La 2ème pté est satisfaite i.e. :

$$\forall A \in \mathcal{G} : \quad \int_A \mathbb{E}(X/\mathcal{G})\, d\mathbb{P} = \int_A X\, d\mathbb{P}$$

Prenons un cas particulier : $A = \{0 \leq X < \frac{1}{2}\}$:

$$\int_{A=\{0\leq X<1/2\}} \mathbb{E}(X/\mathcal{G})\, d\mathbb{P} = \int_{\{0\leq X<1/2\}} [c_1 \mathbb{1}_{\{0\leq X<1/2\}} + c_2 \mathbb{1}_{\{1/2\leq X\leq 1\}}]\, d\mathbb{P}$$

$$= c_1 \mathbb{P}(A).$$

$$= \frac{1}{2} \cdot c_1 \quad (1)$$

[car : $X \sim \mathcal{U}([0,1])$
Loi uniforme
$\mathbb{P}([a,b]) = \frac{b-a}{1-0}$]

ceci : D'une part.

D'autre part : $\int_A X\, d\mathbb{P} = \int_0^{1/2} x\, dx = \frac{1}{8} \quad (2)$

de (1) et (2) : $\boxed{c_1 = \frac{1}{4}}$

Faites la m̂. chose pour $A = \{1/2 \leq X \leq 1\}$.

Vous trouverez, $\boxed{c_2 = 3/4}$

<u>Dmⁱ</u> :

$$\mathbb{E}(X/\mathcal{G}) = \frac{1}{4}\mathbb{1}_{\{0 \leq X < 1/2\}} + \frac{3}{4}\mathbb{1}_{\{1/2 \leq X \leq 1\}}.$$