Proposition 1.4.2. *Une suite de fonctions* (f_n) *définie sur un ensemble non vide* X *converge simplement vers une application* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *si et seulement*

$$\overline{\lim} f_n(x) = \underline{\lim}\, f_n(x) \quad \textit{pour tout } x \in X. \tag{1.4.6}$$

Remarque 1.4.4. *Les même propriétés du cas d'une suite numérique demeurent vraies dans le cas d'une suite de fonctions.*

1.4.3 Cas d'une suite d'ensembles

Définition 1.4.3. *Soit* $(A_n)_n$ *une suite de parties d'un ensemble non vide* X*. On appelle limite superieure et limite inferieure de la suite* $(A_n)_n$ *les parties de* X *notée respectivement* $\overline{\lim} A_n$ *et* $\underline{\lim} A_n$ *définies par*

$$\overline{\lim} A_n = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{p\geq n} A_p, \quad \textit{et} \quad \underline{\lim} A_n = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{p\geq n} A_p. \tag{1.4.7}$$

Example. Prenons $X = \mathbb{R}$ et soit la suite définie par

$$A_n = \left[(-1)^n,\ 1 + \frac{1}{n}\right].$$

On a alors,

$$\overline{\lim} A_n = [-1,\ 1], \quad \textit{et} \quad \underline{\lim} A_n = \{1\}.$$

Quelques propriétés. Soit $(A_n)_n$ une suite de parties d'un ensemble non vide X. Alors

1. $\underline{\lim} A_n \subset \overline{\lim} A_n$.
2. $\underline{\lim} A_n^c = (\overline{\lim} A_n)^c$, et $\overline{\lim} A_n^c = (\underline{\lim} A_n)^c$.
3. $\chi_{\underline{\lim} A_n} = \underline{\lim} \chi_{A_n}$ et $\chi_{\overline{\lim} A_n} = \overline{\lim} \chi_{A_n}$

1.5 Exercies

Exercice 1.5.1. *Soit* $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ *une famille de parties d'un ensemble non vide* E*. Posons pour tout* $n \in \mathbb{N}$

$$B_n = A_n - \bigcup_{p=0}^{n-1} A_p\,; \quad B_0 = A_0$$

1. *Montrer que*
   i) $\bigcup_{n\geq 0} B_n = \bigcup_{n\geq 0} A_n$
   ii) $\forall n \neq m : B_n \cap B_m = \phi$
2. *Que peut on en déduire ?*

Exercice 1.5.2. *Soit* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite disjointe de parties d'un ensemble non vide* X*. Montrer que*

$$\chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{A_n}$$

Exercice 1.5.3. *Calculer les limites supérieure et inférieure des suites définies par*

$$u_n = (-1)^n\,,\ v_n = (-1)^n + \frac{1}{n},\ w_n = \frac{(-1)^n}{n^2} + \frac{1}{n}$$

Exercice 1.5.4. *Soit* $(x_n)_n$ *une suite d'éléments de* $\overline{\mathbb{R}}$. *Montrer l'équivalence suivante*

$$(x_n)_n \text{ converge vers } l \text{ dans } \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n = l$$

Exercice 1.5.5. *Soit* $(f_n)_n$ *la suite de fonctions définie par*

$$f_n(x) = x^n, x \in \mathbb{R}, n \geq 1$$

Vérifier que

$$\overline{\lim} f_n(x) = \begin{cases} 1, & si \ |x| = 1 \\ 0, & si \ x \in \left]-1, 1\right[\\ +\infty, & si \ |x| > 1 \end{cases} \quad et \quad \underline{\lim} f_n(x) = \begin{cases} 1, & si \ x = 1 \\ -1, & si \ x = -1 \\ 0, & si \ x \in \left]-1, 1\right[\\ -\infty, & si \ x < -1 \\ +\infty, & si \ x > 1 \end{cases}$$

Exercice 1.5.6. *Calculer* $\overline{\lim} A_n$ *et* $\underline{\lim} A_n$ *dans les deux cas suivants*

$$A_n = \left[0, 1 + \frac{(-1)^n}{n}\right], \qquad A_n = \left[-1, 2 + \frac{1}{n}\right[$$

Exercice 1.5.7. *Soit* $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ *une famille de parties d'un ensemble non vide* E. *Montrer que*

$$(\underline{\lim} A_n)^c = \overline{\lim} A_n^c; \quad \chi_{\underline{\lim} A_n} = \underline{\lim} \chi_{A_n} \quad et \quad \chi_{\overline{\lim} A_n} = \overline{\lim} \chi_{A_n}.$$

Exercice 1.5.8. *Soit* $\{A_{n,p}, n, p \in \mathbb{N}\}$ *une famille de parties d'un ensemble* E. *Montrer (à l'aide d'un contre exemple) que l'égalité*

$$\bigcap_{i \in I} \left(\bigcup_{j \in J} A_{i,j} \right) = \bigcup_{j \in J} \left(\bigcap_{i \in I} A_{i,j} \right)$$

est en général fausse même si I *et* J *sont finis.*
Solution de l'exercice 1.5.8 *Prenez* $I = \{0, 1\}$, $J = \mathbb{N}$ *et* $A_{i,j} = \{i + j\}$.

Exercice 1.5.9. *Soit* $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ *une famille de parties d'un ensemble non vide* E.

1. *Calculer* $\overline{\lim} A_n$ *et* $\underline{\lim} A_n$ *dans les deux cas suivants*

   1.a La suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est croissante dans le sens* $A_n \subset A_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

   1.b La suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est décroissante dans le sens* $A_{n+1} \subset A_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. X *et* Y *etant deux parties de* E. *Calculer* $\overline{\lim} A_n$ *et* $\underline{\lim} A_n$ *dans le cas où* A_n *est défini par*

$$A_n = \begin{cases} X & si \ n = 2p, \ p \in \mathbb{N} \\ Y & si \ n = 2p + 1, \ p \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Application : *Calculer* $\limsup$ *et* $\liminf$ *des suites* $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *et* $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *telles que*

$$A_n = \left[\frac{1}{n}, 1\right] \quad et \quad B_n = \left]-\frac{1}{n}, 1\right]$$