

4. Martingales à temps discret

4.1. Généralités. On fixe un espace de probabilités filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_n)_n, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que \mathcal{F} contient ses ensembles négligeables mais les tribus \mathcal{F}_n ne sont pas nécessairement supposées complètes. On sait que la famille d'ensembles $\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n$ n'est pas une tribu. On définit donc $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n)$. \mathcal{F}_∞ est une tribu, en général plus petite que \mathcal{F} , laquelle jouera un rôle important dans la suite.

DÉFINITION 4.1. Un processus réel adapté $(X_n)_{n \geq 0}$ est appelé une martingale (resp. une surmartingale, une sous-martingale) s'il est intégrable et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_n \quad \text{p.s. (resp. } \leq, \geq \text{)}.$$

Donc $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale (resp. une surmartingale, une sous-martingale) si et seulement si pour tout $A \in \mathcal{F}_n$ on a

$$\int_A X_{n+1} d\mathbb{P} = \int_A X_n d\mathbb{P} \quad (\text{resp. } \leq, \geq)$$

Notons que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une surmartingale si et seulement si $(-X_n)_{n \geq 0}$ est une sous-martingale (et réciproquement) et que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale si et seulement si $(X_n)_{n \geq 0}$ est à la fois une surmartingale et une sous-martingale.

Les définitions ci-dessus sont encore valables si on remplace “ X_n intégrable” par “ X_n positif”. On parlera alors de martingale (resp. surmartingale, sous-martingale) positive. Il reste entendu qu'une martingale (resp. surmartingale, sous-martingale) sans adjectif est nécessairement intégrable.

EXEMPLE 4.2. Soit $X \in L^1$ ou ≥ 0 . $X_n = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n)$ est une martingale.

Enfin un processus $X = (\Omega, \mathcal{F}, (X_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P})$ sera dit une martingale (resp. une surmartingale, une sous-martingale) si c'est une martingale (resp. une surmartingale, une sous-martingale) par rapport à la filtration $\mathcal{F}_n^0 = \sigma(X_0, \dots, X_n)$.

Il est clair que le processus $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale (resp. une surmartingale, une sous-martingale) si et seulement si $\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n \mid \mathcal{F}_n) = 0$, (resp. \leq, \geq). Donc si $(Y_n)_{n \geq 0}$ est un processus adapté (intégrable ou positif), alors $X_n = Y_0 + Y_1 + \dots + Y_n$ définit une martingale (resp. une surmartingale, une sous-martingale) si et seulement si $\mathbb{E}(Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = 0$, (resp. $\leq 0, \geq 0$). En particulier si $(Y_n)_{n \geq 0}$ est une suite de v.a. indépendantes intégrables ou positives et si on pose $S_0 = 0$, $S_n = Y_0 + Y_1 + \dots + Y_n$ pour $n \geq 1$, alors $(S_n)_{n \geq 0}$ est une martingale (resp. une surmartingale, une sous-martingale) pour la filtration $\sigma(Y_0, Y_1, \dots, Y_n)$ si, pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{E}(Y_n) = 0$, (resp. $\leq 0, \geq 0$).

4.2. Premières propriétés.

PROPOSITION 4.3. (i) Si $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale (resp. une surmartingale, une sous-martingale), la suite $(\mathbb{E}(X_n))_{n \geq 0}$ est constante (resp. décroissante, croissante).

(ii) Si $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale (resp. une surmartingale, une sous-martingale), on a, pour $m < n$, $\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m) = X_m$ p.s. (resp. \leq, \geq).

(iii) Si $(X_n)_{n \geq 0}$ et $(Y_n)_{n \geq 0}$ sont des surmartingales, il en est de même de $X_n + Y_n$ et de $X_n \wedge Y_n$.

(iv) Si $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale (resp. une surmartingale) et f est une fonction concave (resp. concave croissante) telle que $f(X_n)$ est intégrable ou positive pour tout $n \geq 0$, alors $Y_n = f(X_n)$ est une surmartingale. En particulier si $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale, $|X_n|$ et X_n^2 sont des sous-martingales.

(v) Si $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale (resp. une surmartingale, une sous-martingale), il en est de même du processus stoppé $X_n^\nu = X_{n \wedge \nu}$, où ν est un temps d'arrêt de la filtration $\{\mathcal{F}_n\}_n$.

Preuve: (i), (ii) et (iii) résultent directement des propriétés de l'espérance conditionnelle. (iv) résulte de l'inégalité de Jensen. Pour (v), on note que d'après la définition d'un temps d'arrêt, on a $\{\nu \geq n+1\} = \{\nu \leq n\}^c \in \mathcal{F}_n$ et donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{n+1}^\nu - X_n^\nu \mid \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}((X_{n+1} - X_n)1_{\{\nu \geq n+1\}} \mid \mathcal{F}_n) = \\ &= 1_{\{\nu \geq n+1\}} \mathbb{E}(X_{n+1} - X_n \mid \mathcal{F}_n). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Introduisons une notion importante.

DÉFINITION 4.4. On dit qu'un processus adapté $(A_n)_{n \geq 0}$ est un processus croissant prévisible si $A_0 = 0$, $A_n \leq A_{n+1}$ et si A_{n+1} est \mathcal{F}_n mesurable.

On a alors l'important résultat suivant.

PROPOSITION 4.5. (Décomposition de Doob). Toute sous-martingale intégrable X_n s'écrit, de façon unique, sous la forme $X_n = M_n + A_n$ avec $(M_n)_{n \geq 0}$ martingale intégrable et $(A_n)_{n \geq 0}$ processus croissant prévisible intégrable. Le processus croissant $(A_n)_{n \geq 0}$ s'appelle le compensateur de la sous-martingale $(X_n)_{n \geq 0}$.

Preuve:

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une sous-martingale intégrable. On définit

$$A_0 = 0, \quad A_{n+1} = A_n + \mathbb{E}(X_{n+1} - X_n \mid \mathcal{F}_n).$$

Par construction, $(A_n)_n$ est un processus croissant prévisible intégrable et $M_n = X_n - A_n$ vérifie $\mathbb{E}(M_{n+1} - M_n \mid \mathcal{F}_n) = 0$ (puisque A_{n+1} est \mathcal{F}_n mesurable!). La décomposition est de plus unique car si $X_n = M_n + A_n = M'_n + A'_n$, on a $A_0 = A'_0 = 0$ et

$$A'_{n+1} - A'_n = X_{n+1} - X_n - (M_{n+1} - M_n)$$

d'où, en conditionnant par \mathcal{F}_n , $A'_{n+1} - A'_n = \mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) - X_n = A_{n+1} - A_n$ d'où $A'_n = A_n$ puis $M_{n+1} = M_n$. \square

4.3. Théorème d'arrêt. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une surmartingale. On a donc, pour $m < n$, $\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m) \leq X_m$ p.s. On va s'intéresser à cette propriété si l'on remplace m et n par des temps d'arrêt.

THÉORÈME 4.6. Soient $(X_n)_{n \geq 0}$ une martingale (resp. une surmartingale, une sous-martingale) intégrable ou positive et ν_1 et ν_2 deux temps d'arrêt bornés avec $\nu_1 \leq \nu_2$; alors on a $\mathbb{E}(X_{\nu_2} \mid \mathcal{F}_{\nu_1}) = X_{\nu_1}$, (resp. \leq, \geq).

Preuve: Supposons d'abord que $\nu_1 \leq \nu_2 = k \in \mathbb{N}$. Soit $A \in \mathcal{F}_{\nu_1}$. Vu que $A \cap \{\nu_1 = j\} \in \mathcal{F}_j$, on a, pour $j \leq k$, $\int_{A \cap \{\nu_1 = j\}} X_j d\mathbb{P} = \int_{A \cap \{\nu = j\}} X_k d\mathbb{P}$. Sommant en j , on obtient,

$$\int_A X_{\nu_1} d\mathbb{P} = \sum_{j=0}^k \int_{A \cap \{\nu_1 = j\}} X_j d\mathbb{P} = \sum_{j=0}^k \int_{A \cap \{\nu_1 = j\}} X_k d\mathbb{P} = \int_A X_{\nu_2} d\mathbb{P}$$

Supposons maintenant que $\nu_1 \leq \nu_2 \leq k \in \mathbb{N}$. Alors, pour $A \in \mathcal{F}_{\nu_1}$, comme X^{ν_2} est une martingale,

$$\int_A X_{\nu_1} d\mathbb{P} = \int_A X_{\nu_1}^{\nu_2} d\mathbb{P} = \int_A X_k^{\nu_2} d\mathbb{P} = \int_A X_{\nu_2} d\mathbb{P}. \quad \square$$

Prenant l'espérance, on obtient le résultat suivant.

COROLLAIRE 4.7. Soient $(X_n)_{n \geq 0}$ une martingale (resp. une surmartingale, une sous-martingale) intégrable ou positive et ν un temps d'arrêt borné, alors $\mathbb{E}(X_\nu) = \mathbb{E}(X_0)$, (resp. \leq, \geq).

Dans ces énoncés, la condition ν borné est essentielle et ne peut être levée sans hypothèses supplémentaires.

EXEMPLE 4.8. Considérons par exemple la marche aléatoire $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ où les $(X_n)_{n \geq 0}$ sont des v.a. indépendantes telles que $\mathbb{P}(X_k = 1) = \mathbb{P}(X_k = -1) = \frac{1}{2}$. On montrera plus loin (voir Exercice 4.30) que $\nu = \inf(n; S_n = 1)$ vérifie $\mathbb{P}(\nu < +\infty) = 1$. Par ailleurs $(S_n)_{n \geq 0}$ est une martingale. On a d'une part $\mathbb{E}(S_0) = \mathbb{E}(S_n) = 0$ et d'autre part $S_\nu = 1$ p.s. et donc $\mathbb{E}(S_\nu) = 1$. La conclusion du Corollaire 4.7 n'est donc pas satisfaite; ν n'est pas borné car $\mathbb{P}(\nu > n) \geq (\frac{1}{2})^n > 0$.

4.4. Inégalités maximales. Ce sont des inégalités concernant les v.a.

$$\max_{0 \leq k \leq n} X_k, \quad \max_{0 \leq k \leq n} |X_k|, \quad \sup_n X_n, \quad \sup_n |X_n|.$$

THÉORÈME 4.9. On a, pour $a > 0$,

(i) si $(X_n)_{n \geq 0}$ est une surmartingale positive, $\mathbb{P}(\sup_k X_k > a) \leq \frac{1}{a} \mathbb{E}(X_0)$;

(ii) si $(X_n)_{n \geq 0}$ est une sous-martingale positive,

$$\mathbb{P}(\max_{0 \leq k \leq n} X_k > a) \leq \frac{1}{a} \int_{\{\max_{0 \leq k \leq n} X_k > a\}} X_n d\mathbb{P} \leq \frac{1}{a} \mathbb{E}(X_n).$$

Preuve: (i) Posons, pour $a > 0$, $\nu = \inf(X_n > a)$. Rappelons que $\nu = +\infty$ si $() = \emptyset$. On a alors $\{\sup_k X_k > a\} = \{\nu < +\infty\}$ et $X_\nu > a$ sur $\{\nu < +\infty\}$ et donc $X_{n \wedge \nu} \geq a \mathbf{1}_{\{\nu \leq n\}}$. On en déduit $\mathbb{E}(X_0) \geq \mathbb{E}(X_{n \wedge \nu}) \geq a \mathbb{P}(\nu \leq n)$ et, faisant tendre n vers $+\infty$, $a \mathbb{P}(\nu < +\infty) \leq \mathbb{E}(X_0)$.

(ii) Si $(X_n)_{n \geq 0}$ est une sous-martingale positive, on a (avec le même ν), $\{\max_{0 \leq k \leq n} X_k > a\} = \{\nu \leq n\}$. Pour $k \leq n$,

$$\int_{\{\nu=k\}} X_k d\mathbb{P} \leq \int_{\{\nu=k\}} X_n d\mathbb{P},$$

d'où

$$\begin{aligned} a \mathbb{P}(\nu \leq n) &\leq \int_{\{\nu \leq n\}} X_\nu d\mathbb{P} = \sum_{k=0}^n \int_{\{\nu=k\}} X_k d\mathbb{P} \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^n \int_{\{\nu=k\}} X_n d\mathbb{P} = \int_{\{\nu \leq n\}} X_n d\mathbb{P} \leq \mathbb{E}(X_n). \end{aligned} \quad \square \quad (4.2)$$

On a alors,

COROLLAIRE 4.10. (Inégalité de Doob) Soient $p > 1$ et X_n une martingale telle que $\sup_n \mathbb{E}|X_n|^p < +\infty$. Alors $\sup_n |X_n|^p$ est intégrable et,

$$\|\sup_n |X_n|\|_p \leq \frac{p}{p-1} \sup_n \|X_n\|_p.$$

Preuve: Supposons que X_n soit une sous-martingale positive (cas auquel on se ramène en prenant $|X_n|$ si X_n est une martingale). Posons $Y_n = \max_{k \leq n} X_k$. D'après la proposition précédente, $\mathbb{P}(Y_n > a) \leq \frac{1}{a} \mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_{Y_n > a})$ d'où l'on déduit $pa^{p-1} \mathbb{P}(Y_n > a) \leq pa^{p-2} \mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_{Y_n > a})$ et en intégrant et utilisant Fubini (tout est positif)

$$E\left(\int_0^{+\infty} pa^{p-1} \mathbf{1}_{Y_n > a} da\right) \leq E\left(X_n \int_0^{+\infty} pa^{p-2} \mathbf{1}_{Y_n > a} da\right)$$

i.e.

$$E(Y_n^p) \leq \frac{p}{p-1} E(X_n Y_n^{p-1}) \leq \frac{p}{p-1} E(X_n^p)^{\frac{1}{p}} E(Y_n^p)^{\frac{p-1}{p}}$$

en appliquant l'inégalité de Hölder. De ce fait,

$$E(Y_n^p)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{p-1} E(X_n^p)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{p-1} \sup_{k \geq 0} E(X_k^p)^{\frac{1}{p}}$$

d'où le résultat en faisant tendre n vers l'infini. \square

Le cas le plus important est $p = 2$ pour lequel on a $E[\sup_n X_n^2] \leq 4 \sup_n \mathbb{E}(X_n^2)$.

4.5. Martingales de carré intégrable. L'importance de la notion de martingale se justifie par un certain nombre de résultats de convergence. Dans ce paragraphe, nous commençons par regarder le cas le plus fort.

THÉORÈME 4.11. *Soit M_n une martingale telle que $\sup_n \mathbb{E}(M_n^2) < +\infty$. Alors M_n converge p.s. et dans L^2 .*

Preuve: Remarquons que $(M_n^2)_{n \geq 0}$ est une sous-martingale et donc $\mathbb{E}(M_n^2)$ est croissante. Puisque $\mathbb{E}(M_{n+p}M_n) = \mathbb{E}(M_n \mathbb{E}(M_{n+p} | \mathcal{F}_n)) = \mathbb{E}(M_n^2)$, on a

$$\mathbb{E}((M_{n+p} - M_n)^2) = \mathbb{E}(M_{n+p}^2) - \mathbb{E}(M_n^2) \quad (4.3)$$

Supposons que la martingale $(M_n)_n$ soit bornée dans L^2 i.e. que $\sup_n \mathbb{E}(M_n^2) < +\infty$. En fait, vu que $\mathbb{E}(M_n^2)$ est croissante, $\mathbb{E}(M_n^2) \nearrow m^*$. On a alors, d'après (4.3), $\mathbb{E}(M_{n+p} - M_n)^2 \leq m^* - \mathbb{E}(M_n^2)$ d'où $\sup_p \mathbb{E}(M_{n+p} - M_n)^2 \rightarrow_n 0$, ce qui montre que $(M_n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy dans L^2 et donc converge dans L^2 . Montrons que $(M_n)_{n \geq 0}$ converge p.s.. Soit $V_n = \sup_{i,j \geq n} |M_i - M_j|$. Evidemment $V_n \searrow V$ et il suffit de montrer que $V = 0$ p.s. car, alors, M_n est p.s. une suite de Cauchy et donc converge p.s.. Utilisant le Théorème 4.9, on a, pour tout $\rho > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V > \rho) &\leq \mathbb{P}(V_n > \rho) = \mathbb{P}\left(\sup_{i,j \geq n} |M_i - M_j| > \rho\right) \leq \mathbb{P}\left(\sup_{i \geq n} |M_i - M_n| > \frac{\rho}{2}\right) \leq \\ &\mathbb{P}\left(\sup_{i \geq n} |M_i - M_n|^2 > \frac{\rho^2}{4}\right) \leq \frac{4}{\rho^2} \mathbb{E}(\sup_{i \geq n} (M_i - M_n)^2) \leq \frac{16}{\rho^2} \sup_{i \geq n} \mathbb{E}(M_i - M_n)^2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Ceci implique $\mathbb{P}(V > 0) = 0$. \square

4.6. Théorèmes de convergence. Le Théorème 4.11 fournit un premier résultat de convergence. En particulier, il implique la convergence p.s. de toute martingale bornée. Le lemme suivant étend ce résultat aux sous-martingales bornées.

LEMME 4.12. *Soit (X_n) une sous-martingale bornée par un réel K . Alors (X_n) converge p.s.*

Preuve: Ecrivons $X_n = M_n + A_n$ la décomposition de Doob de la sous-martingale X_n . On a alors $E(A_n) = E(X_n) - E(M_n) = E(X_n) - E(M_0) \leq 2K$ puisque $A_0 = 0$ et donc (limite monotone) $E(A_\infty) \leq 2K$ d'où $A_\infty < +\infty$ p.s. Posons $\tau_p = \inf\{n > 0, A_{n+1} > p\}$. τ_p est un temps d'arrêt et $|M_{\tau_p \wedge n}| = |X_{\tau_p \wedge n} - A_{\tau_p \wedge n}| \leq K + p$. De ce fait, $(M_{\tau_p \wedge n})_{n \geq 0}$ est une martingale bornée qui converge donc p.s. Comme $A_{\tau_p \wedge n}$ converge naturellement p.s., on en déduit la convergence p.s. de $X_{\tau_p \wedge n}$, et donc celle de (X_n) sur l'événement $(\tau_p = +\infty)$. Comme $(A_\infty < +\infty)$ p.s., on a $P(\bigcup_{p \geq 1} (\tau_p = +\infty)) = 1$ d'où le résultat cherché. \square

On a alors un premier théorème très agréable à utiliser car ses hypothèses sont très simples à vérifier. Avant de l'énoncer, rappelons qu'on s'autorise un abus de langage en cela qu'une v.a positive peut prendre pour valeur $+\infty$ avec une probabilité non nulle.

THÉORÈME 4.13. *Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une surmartingale positive. Alors elle converge p.s. vers une v.a. X_∞ et l'on a $X_n \geq \mathbb{E}(X_\infty | \mathcal{F}_n)$. De plus, si $\mathbb{P}(X_0 < +\infty) = 1$, $\mathbb{P}(X_\infty < +\infty) = 1$.*

Preuve: Remarquons que puisque $x \mapsto e^{-x}$ est une fonction convexe décroissante, $Y_n = e^{-X_n}$ est une sous-martingale telle que $0 \leq Y_n \leq 1$. De ce fait, d'après le Lemme 4.12, Y_n converge p.s. vers une variable positive Y_∞ . On pose $X_\infty = -\ln Y_\infty$.

Par ailleurs, pour $p \geq n$, on a $E(X_p | \mathcal{F}_n) \leq X_n$, et donc, appliquant le lemme de Fatou, $E(X_\infty | \mathcal{F}_n) \leq X_n$. En particulier, $E(X_\infty | \mathcal{F}_0) \leq X_0$. Prenant $M > 0$, on obtient $E(X_\infty \mathbf{1}_{X_0 \leq M} | \mathcal{F}_0) \leq X_0 \mathbf{1}_{X_0 \leq M} \leq M$ d'où $X_\infty < +\infty$ p.s. sur l'événement $(X_0 < M)$. D'où le résultat cherché puisque $\bigcup_{M > 0} (X_0 < M) = \Omega$. \square

Bien entendu, une martingale positive est une surmartingale positive et le théorème précédent donne également la convergence dans ce cas.

Le théorème suivant traite le cas des sous-martingales bornées dans L^1 .

THÉORÈME 4.14. *Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une sous-martingale telle que $\sup_n \mathbb{E}|X_n| < +\infty$. Alors $(X_n)_{n \geq 0}$ converge p.s.*

Preuve: Notons que $(X_n^+)_{n \geq 0}$ est une sous-martingale. Considérons $X_n^+ = M_n + A_n$ sa décomposition de Doob. Alors $E(A_\infty) = \sup_{n \geq 0} E(A_n) \leq E(|M_0|) + \sup_{n \geq 0} E(|X_n|) < +\infty$. Posons $Y_n = M_n + E(A_\infty/\mathcal{F}_n)$. On a $Y_n \geq X_n^+ \geq X_n$ et donc Y_n est une martingale positive et $Z_n = Y_n - X_n$ est une surmartingale positive, qui de ce fait convergent p.s. toutes les deux. Comme Y_0 et Z_0 sont clairement finies p.s., le Théorème 4.13 donne $X_\infty < +\infty$ et $Z_\infty < +\infty$ p.s. et donc la convergence p.s. de $X_n = Y_n - Z_n$. \square

Il faut noter que, contrairement au cas L^2 , la condition $\sup_n \mathbb{E}|X_n| < +\infty$ n'implique pas la convergence dans L^1 comme le montre l'exemple suivant. Ceci est naturellement à rapprocher de l'équité-intégrabilité (voir Exercice 2.5).

EXEMPLE 4.15. *On choisit $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $P =$ mesure de Lebesgue, $\mathcal{F}_n = \sigma([k2^{-n}, (k+1)2^{-n}[, k = 0, \dots, 2^n - 1])$, $X_n = 2^n 1_{[0, 2^{-n}[}$. On vérifie facilement que X_n est une \mathcal{F}_n martingale, que X_n converge vers 0, que $\mathbb{E}|X_n| = \mathbb{E}(X_n) = 1$ et donc que X_n ne converge pas vers 0 dans L^1 .*

4.7. Martingales régulières. Notre premier exemple de martingale mérite d'être étudié spécifiquement.

DÉFINITION 4.16. *Une martingale de la forme $X_n = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$, $X \in L^1$, est dite régulière.*

On a le résultat de convergence suivant.

THÉORÈME 4.17. *Soit $X \in L^1$. La martingale régulière $X_n = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$ converge p.s. et dans L^1 vers $\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_\infty)$.*

Preuve:

$$\mathbb{E}|X_n| = \mathbb{E}|\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)| \leq \mathbb{E}(\mathbb{E}(|X| | \mathcal{F}_n)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(|X|)) = \mathbb{E}|X|.$$

Donc (Th. 4.14) $X_n \rightarrow X_\infty$ p.s. Etudions la convergence dans L^1 . Écrivant $X = X^+ - X^-$, on peut supposer $X \geq 0$. Soit $a > 0$. D'après le théorème de convergence dominée $\|X - X \wedge a\|_1 \rightarrow 0$ lorsque $a \rightarrow +\infty$. On vient de voir que $\mathbb{E}(X \wedge a | \mathcal{F}_n)$ converge p.s. mais, étant borné, $\mathbb{E}(X \wedge a | \mathcal{F}_n)$ converge aussi dans L^1 . Il suffit alors d'écrire que

$$\begin{aligned} & \|\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_m)\|_1 \leq \\ & \leq \|\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(X \wedge a | \mathcal{F}_n)\|_1 + \|\mathbb{E}(X \wedge a | \mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(X \wedge a | \mathcal{F}_m)\|_1 + \\ & \quad + \|\mathbb{E}(X \wedge a | \mathcal{F}_m) - \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_m)\|_1 \leq \\ & \leq 2\|X - X \wedge a\|_1 + \|\mathbb{E}(X \wedge a | \mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(X \wedge a | \mathcal{F}_m)\|_1 \end{aligned}$$

pour en déduire que $\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$ est une suite de Cauchy dans L^1 et donc converge dans L^1 . Par définition de X_n ,

$$\text{pour tout } A \in \mathcal{F}_n, \quad \int_A X_n d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P},$$

d'où, puisque X_n converge dans L^1 ,

$$\text{pour tout } A \in \mathcal{F}_n, \quad \int_A X_\infty d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}. \quad (4.4)$$

Il est facile de voir par un argument classique que (4.3) est valable pour tout $A \in \mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n)$. Ce qui montre que $X_\infty = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_\infty)$. \square

En fait, la réciproque du Théorème 4.17 est aussi valable, et on a donc:

THÉORÈME 4.18. *Une martingale est régulière si et seulement si elle converge dans L^1 .*

Preuve: Soit X_n une martingale convergeant dans L^1 vers une v.a. X . Puisque $|X_n| \leq |X| + |X - X_n|$, on a $\sup_n \mathbb{E}|X_n| < +\infty$. Donc (Th. 4.14), X_n converge p.s. vers X . On a alors, pour tout p , pour tout $A \in \mathcal{F}_n$,

$$\int_A X_{n+p} d\mathbb{P} = \int_A X_n d\mathbb{P},$$

et, faisant tendre p vers $+\infty$, vu que X_{n+p} converge dans L^1 ,

$$\text{pour tout } A \in \mathcal{F}_n, \quad \int_A X d\mathbb{P} = \int_A X_n d\mathbb{P},$$

ce qui signifie que $X_n = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$. \square

Un intérêt majeur des martingales régulières est que pour elles le théorème d'arrêt prend une forme particulièrement agréable. Notons d'abord que si X_n est une martingale régulière de limite X_∞ , la martingale est fermée en ce sens que $(X_n, n \in \bar{\mathbb{N}})$ est une martingale i.e. vérifie la définition pour tout $m \leq n \leq +\infty$. Alors, si ν est un temps d'arrêt à valeurs $\bar{\mathbb{N}}$, X_ν est parfaitement définie par $X_\nu = X_\infty$ sur $\{\nu = +\infty\}$.

PROPOSITION 4.19. Soit $X_n = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$, $X \in L^1$, une martingale régulière. Alors,

- (i) si ν est un temps d'arrêt, X_ν est intégrable et $X_\nu = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_\nu)$,
- (ii) si $\nu_1 \leq \nu_2$ sont deux temps d'arrêt, $\mathbb{E}(X_{\nu_2} | \mathcal{F}_{\nu_1}) = X_{\nu_1}$.

Preuve: On sait que $\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_\nu) = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n) = X_n$ sur $\{\nu = n\}$, $n \in \bar{\mathbb{N}}$ et donc $X_\nu = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_\nu) \in L^1$. Quant à (ii), vu que $\mathcal{F}_{\nu_1} \subset \mathcal{F}_{\nu_2}$, on a $\mathbb{E}(X_{\nu_2} | \mathcal{F}_{\nu_1}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_{\nu_2}) | \mathcal{F}_{\nu_1}) = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_{\nu_1}) = X_{\nu_1}$. \square

Ci-après sont reproduits les exercices et problèmes concernant les martingales à temps discret dont la correction peut être trouvée dans le livre "Martingales et Chaines de Markov" de P.Baldi, L.Mazliak et P.Priouret, Editions Hermann, *vademecum* indispensable et économique de l'étudiant de DEA (!).

EXERCICE 4.20. a) Soit $X = (X_n)_{n \geq 0}$ une surmartingale telle que $\mathbb{E}(X_n)$ soit constante. Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale.

b) Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ un processus intégrable adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$. Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ -martingale si et seulement si, pour tout temps d'arrêt borné τ de $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$, on a $\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0)$.

EXERCICE 4.21. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré sur lequel on considère deux martingales $(X_n)_{n \geq 0}$ et $(Y_n)_{n \geq 0}$ de carré intégrable.

- a) Montrer que, pour $m \leq n$, on a $\mathbb{E}(X_m Y_n | \mathcal{F}_m) = X_m Y_m$ p.s.
- b) Montrer que $\mathbb{E}(X_n Y_n) - \mathbb{E}(X_0 Y_0) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}((X_k - X_{k-1})(Y_k - Y_{k-1}))$.

EXERCICE 4.22. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré sur lequel on considère une martingale réelle $(M_n)_{n \geq 0}$ telle que, pour tout $n \geq 0$, $|M_n| \leq K$. On pose

$$X_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (M_k - M_{k-1}).$$

Montrer que $(X_n)_{n \geq 1}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ -martingale qui converge p.s. et dans L^2 .

EXERCICE 4.23. Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes de même loi normale $N(0, \sigma^2)$, où $\sigma > 0$. On pose $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$ et $X_n = Y_1 + \dots + Y_n$. On rappelle que

$$\mathbb{E}(e^{uY_1}) = e^{u^2 \sigma^2 / 2}. \quad (4.5)$$

1) Soit $Z_n^u = \exp(uX_n - nu^2 \sigma^2 / 2)$. Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $(Z_n^u)_{n \geq 1}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ -martingale.

2) Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $(Z_n^u)_{n \geq 1}$ converge p.s. vers une v.a. Z_∞^u finie. Que vaut cette limite? Pour quelles valeurs de $u \in \mathbb{R}$, $(Z_n^u)_{n \geq 1}$ est-elle une martingale régulière?

EXERCICE 4.24. On dit qu'un processus $(M_n)_{n \geq 0}$ est à accroissements indépendants si, pour tout n , la v.a. $M_{n+1} - M_n$ est indépendante de la tribu $\mathcal{F}_n = \sigma(M_0, \dots, M_n)$.

1) Soit $(M_n)_{n \geq 0}$ une martingale de carré intégrable et à accroissements indépendants. On pose $\sigma_0^2 = \text{Var}(M_0)$ et, pour $n \geq 1$, $\sigma_k = \text{Var}(M_k - M_{k-1})$.

1a) Montrer que $\text{Var}(M_n) = \sum_{k=0}^n \sigma_k^2$.

1b) Soit $(\langle M \rangle_n)_{n \geq 0}$ le processus croissant associé à $(M_n)_{n \geq 0}$. Calculer $\langle M \rangle_n$.

2) Soit $(M_n)_{n \geq 0}$ une martingale gaussienne (on rappelle que le processus $(M_n)_{n \geq 0}$ est gaussien si, pour tout n , le vecteur (M_0, \dots, M_n) est gaussien).

2a) Montrer que $(M_n)_{n \geq 0}$ est à accroissements indépendants.

2b) Montrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ fixé, le processus

$$Z_n^\theta = e^{\theta M_n - \frac{\theta^2}{2} \langle M \rangle_n} \quad (4.6)$$

est une martingale. Cette martingale converge-t-elle p.s. ?

EXERCICE 4.25. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de v.a. à valeurs $[0, 1]$. On pose $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$. On suppose que $X_0 = a \in [0, 1]$ et que

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1} = \frac{X_n}{2} \mid \mathcal{F}_n\right) = 1 - X_n, \quad \mathbb{P}\left(X_{n+1} = \frac{1 + X_n}{2} \mid \mathcal{F}_n\right) = X_n.$$

1) Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale qui converge p.s. et dans L^2 vers une v.a. Z .

2) Montrer que $\mathbb{E}((X_{n+1} - X_n)^2) = \frac{1}{4} \mathbb{E}(X_n(1 - X_n))$.

3) Calculer $\mathbb{E}(Z(1 - Z))$. Quelle est la loi de Z ?

EXERCICE 4.26. A l'instant 1 une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On tire une boule et on la remplace par deux boules de la même couleur que celle tirée, ce qui donne la nouvelle composition de l'urne à l'instant 2, et ainsi de suite suivant le même procédé.

On note Y_n et $X_n = Y_n/(n+1)$ le nombre et la proportion de boules blanches dans l'urne à l'instant n . On pose $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$.

1) Montrer que $(X_n)_{n \geq 1}$ est une martingale qui converge p.s. vers une v.a. U et que l'on a, pour tout $k \geq 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n^k) = \mathbb{E}(U^k)$.

2) On fixe $k \geq 1$. On pose, pour $n \geq 1$,

$$Z_n = \frac{Y_n(Y_n + 1) \dots (Y_n + k - 1)}{(n+1)(n+2) \dots (n+k)}.$$

Montrer que $(Z_n)_{n \geq 1}$ est une martingale. Quelle est sa limite ? En déduire la valeur de $\mathbb{E}(U^k)$.

3) Soit X une v.a. réelle telle que $|X| \leq M < +\infty$ p.s. Montrer que sa fonction caractéristique se développe en série entière

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi^{(k)}(0)}{k!} t^k \quad (4.7)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

4) Quelle est la loi de U ?

EXERCICE 4.27. (Une preuve de la loi 0-1 de Kolmogorov par les martingales) Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes. On définit

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n &= \sigma(Y_1, \dots, Y_n), & \mathcal{F}_\infty &= \sigma\left(\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{F}_n\right) \\ \mathcal{F}^n &= \sigma(Y_n, Y_{n+1}, \dots), & \mathcal{F}^\infty &= \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{F}^n. \end{aligned}$$

1) Soit $A \in \mathcal{F}^\infty$. Montrer que $\mathbb{P}(A) = 0$ ou 1.

(Suggestion: $Z_n = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}(1_A)$ est une martingale ...).

2) Montrer que, si X est une v.a.r. \mathcal{F}^∞ -mesurable, $X = a$ p.s.

EXERCICE 4.28. (Une preuve par les martingales inverses de la loi forte des grands nombres) Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. réelles, indépendantes, de même loi et intégrables. On pose $S_0 = 0$, $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$ et $\mathcal{G}_n = \sigma(Y_1 + \dots + Y_n, Y_{n+1}, Y_{n+2}, \dots)$.

1) Montrer que, pour $1 \leq m \leq n$, $\mathbb{E}^{\mathcal{G}_n}(Y_m) = \mathbb{E}^{\mathcal{G}_n}(Y_1)$ p.s. et en déduire que $\mathbb{E}^{\mathcal{G}_n}(Y_1) = S_n/n$ p.s.

2) Que peut-on dire de la convergence de $Z_n = \mathbb{E}^{\mathcal{G}_n}(Y_1)$?

3) Montrer que $X = \mathbb{E}(Y_1)$ p.s.

EXERCICE 4.29. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, (M_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P})$ une martingale de carré intégrable. On note $A_n = \langle M \rangle_n$ le processus croissant associé et $A_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow A_n$. On a vu que cette martingale converge p.s. sur l'événement $\{A_\infty < +\infty\}$. Dans cet exercice, on précise ce qui se passe sur $\{A_\infty = +\infty\}$. On pose

$$X_0 = 0, \quad X_n = \sum_{k=1}^n \frac{M_k - M_{k-1}}{1 + A_k}, \quad n \geq 1.$$

1) Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale de carré intégrable et que

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{n-1}}[(X_n - X_{n-1})^2] \leq \frac{1}{1 + A_{n-1}} - \frac{1}{1 + A_n}.$$

En déduire que $\langle X \rangle_n \leq 1$ pour tout n et que $(X_n)_{n \geq 0}$ converge p.s.

2a) Soient $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres strictement positifs telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \uparrow a_n = +\infty$ et $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels convergeant vers u . Montrer que

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) u_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} u.$$

2b) (Lemme de Kronecker). Soient $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres strictement positifs telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \uparrow a_n = +\infty$ et $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels. On pose $s_n = x_1 + \dots + x_n$. Montrer que si la série de terme général x_n/s_n converge, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_n}{a_n} = 0.$$

3) Montrer que, sur $\{A_\infty = \infty\}$, $M_n/A_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ p.s.

EXERCICE 4.30. Soit $(Z_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes telles que $\mathbb{P}(Z_i = 1) = \mathbb{P}(Z_i = -1) = \frac{1}{2}$ pour $i = 1, 2, \dots$. On pose $S_0 = 0$, $S_n = Z_1 + \dots + Z_n$, $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \dots, Z_n)$. Soient a un entier > 0 et $\tau = \inf\{n \geq 0, S_n = a\}$ le premier temps de passage par a .

a) Montrer que

$$X_n^\theta = \frac{e^{\theta S_n}}{(\cosh \theta)^n}$$

est une $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ -martingale. Montrer que, si $\theta \geq 0$, $(X_{n \wedge \tau}^\theta)_{n \geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ -martingale bornée.

b1) Montrer que, pour tout $\theta > 0$, $(X_{n \wedge \tau}^\theta)_{n \geq 0}$ converge p.s. et dans L^2 vers la v.a.

$$W^\theta = \frac{e^{\theta a}}{(\cosh \theta)^\tau} 1_{\{\tau < +\infty\}} \quad (4.8)$$

b2) Montrer que $\mathbb{P}\{\tau < +\infty\} = 1$ et que, pour tout $\theta \geq 0$,

$$\mathbb{E}[(\cosh \theta)^{-\tau}] = e^{-\theta a}.$$

EXERCICE 4.31. Soit, comme dans l'Exercice 4.30, $(Z_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes telles que $\mathbb{P}(Z_i = 1) = \mathbb{P}(Z_i = -1) = \frac{1}{2}$ pour $i = 1, 2, \dots$. On pose $S_0 = 0$, $S_n = Z_1 + \dots + Z_n$, $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \dots, Z_n)$. Soient a un entier > 0 et λ un réel tel que $0 < \lambda < \pi/(2a)$. Soit $\tau = \inf\{n \geq 0, |S_n| = a\}$ le temps de sortie de $] -a, a[$.

a) Montrer que $X_n = (\cos \lambda)^{-n} \cos(\lambda S_n)$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ -martingale.

b) Montrer que

$$1 = \mathbb{E}(X_{n \wedge \tau}) \geq \cos(\lambda a) \mathbb{E}((\cos \lambda)^{-n \wedge \tau}).$$

c) En déduire que $\mathbb{E}((\cos \lambda)^{-\tau}) \leq (\cos(\lambda a))^{-1}$ puis que τ est p.s. fini et que la martingale $(X_{n \wedge \tau})_{n \geq 0}$ est régulière.

d) Que vaut $\mathbb{E}((\cos \lambda)^{-\tau})$? A-t-on $\tau \in L^p, p \geq 1$?

EXERCICE 4.32. Soit $(S_n)_{n \geq 0}$ une marche aléatoire simple sur \mathbb{Z} : $S_0 = 0$, $S_n = U_1 + \dots + U_n$, où les v.a. U_i sont indépendantes et de même loi et telles que $0 < \mathbb{P}\{U_i = 1\} = p < 1$, $\mathbb{P}\{U_i = -1\} = 1 - p := q$.

a) Soit $Z_n = (\frac{q}{p})^{S_n}$. Montrer que $(Z_n)_{n \geq 0}$ est une martingale positive.

b)

Déduire d'une inégalité maximale appliquée à la martingale $(Z_n)_{n \geq 0}$ que

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{n \geq 0} S_n \geq k\right\} \leq \left(\frac{p}{q}\right)^k$$

et que, lorsque $q > p$,

$$\mathbb{E}\left(\sup_{n \geq 0} S_n\right) \leq \frac{p}{q - p}$$

EXERCICE 4.33. On considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de v.a. réelles indépendantes de même loi normale $N(m, \sigma^2)$ avec $m < 0$ et on pose $S_0 = 0$,

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

et

$$\mathcal{B}_n = \sigma(S_0, \dots, S_n) \quad W = \sup_{n \geq 0} S_n.$$

Le but de cet exercice est de montrer certaines propriétés de la v.a. W .

1) Montrer que $\mathbb{P}(W < +\infty) = 1$.

2) On rappelle que, pour λ réel, $\mathbb{E}(e^{\lambda X_1}) = e^{\lambda^2 \sigma^2 / 2} e^{\lambda m}$. Que vaut $\mathbb{E}(e^{\lambda S_{n+1}} | \mathcal{B}_n)$?

3) Montrer qu'il existe un $\lambda_0 > 0$ unique tel que $(e^{\lambda_0 S_n})_{n \geq 0}$ soit une martingale.

4) Montrer que, pour tout $a > 1$, on a

$$\mathbb{P}(e^{\lambda_0 W} > a) \leq \frac{1}{a}$$

et que, pour $t > 0$, $\mathbb{P}(W > t) \leq e^{-\lambda_0 t}$.

5) Montrer que

$$\mathbb{E}(e^{\lambda W}) = 1 + \lambda \int_0^{+\infty} e^{\lambda t} \mathbb{P}(W > t) dt \quad (4.9)$$

et en déduire que, pour tout $\lambda < \lambda_0$, $\mathbb{E}(e^{\lambda W}) < +\infty$. En particulier la v.a. W a des moments de tous les ordres.

EXERCICE 4.34. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, (X_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P})$ une sous-martingale telle que $\sup_{n \geq 0} \mathbb{E}|X_n| < +\infty$.

1) Montrer que, n étant fixé, la suite $(\mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}(X_p^+))_{p \geq n}$ est croissante en p .

2) On pose $M_n = \lim_{p \rightarrow \infty} \uparrow \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}(X_p^+)$. Montrer que $(M_n)_{n \geq 0}$ est une martingale positive intégrable.

3) On pose $Y_n = M_n - X_n$. Montrer que $(Y_n)_{n \geq 0}$ est une surmartingale positive intégrable.

Remarque: On conclut donc que toute sous-martingale bornée dans L^1 s'écrit comme la différence d'une martingale et d'une surmartingale positives intégrables (décomposition de Krickeberg).

EXERCICE 4.35. Soit $(Y_n)_{n \geq 0}$ une suite de v.a. indépendantes et de même loi telles que $\mathbb{P}(Y_k = 1) = \mathbb{P}(Y_k = -1) = \frac{1}{2}$. On pose $\mathcal{B}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{B}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$ et $S_0 = 0, S_n = Y_1 + \dots + Y_n, n \geq 1$. On considère le processus défini par

$$M_0 = 0, \quad M_n = \sum_{k=1}^n \text{sign}(S_{k-1})Y_k, \quad n = 1, 2, \dots$$

- 1) Quel est le compensateur de la sous-martingale $(S_n^2)_{n \geq 0}$?
- 2) Montrer que $(M_n)_{n \geq 0}$ est une martingale et calculer le compensateur de $(M_n^2)_{n \geq 0}$.
- 3) Quelle est la décomposition de Doob de $(|S_n|)_{n \geq 0}$? En déduire que M_n est mesurable par rapport à la tribu $\sigma(|S_1|, \dots, |S_n|)$.

EXERCICE 4.36. Soient p et q deux probabilités sur un espace discret E telles que $p \neq q$ et $q(x) > 0$ pour tout $x \in E$. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes à valeurs E et de même loi q . Montrer que la suite

$$Y_n = \prod_{k=1}^n \frac{p(X_k)}{q(X_k)}$$

est une martingale positive dont la limite p.s. est 0. La martingale est-elle régulière? (Suggestion: calculer la moyenne de $\sqrt{Y_n}$.)

EXERCICE 4.37. Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. positives indépendantes d'espérance 1 et $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_k; k \leq n)$. On pose $X_0 = 1$ et $X_n = \prod_{k=1}^n Y_k$.

- 1) Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ et en déduire que $(\sqrt{X_n})_{n \geq 0}$ est une surmartingale.
- 2) On suppose que $\prod_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(\sqrt{Y_k}) = 0$. Étudier la convergence et la limite de $(\sqrt{X_n})_{n \geq 0}$ et puis de $(X_n)_{n \geq 0}$. La martingale $(X_n)_{n \geq 0}$ est-elle régulière?
- 3) On suppose que $\prod_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(\sqrt{Y_k}) > 0$. Montrer que $(\sqrt{X_n})_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy dans L^2 et en déduire que la martingale $(X_n)_{n \geq 0}$ est régulière.

EXERCICE 4.38. Le but de cet exercice est de fournir une version du Lemme de Borel-Cantelli pour une famille de v.a. non nécessairement indépendantes, ce qui est souvent utile. On rappelle que, pour une martingale $(M_n)_{n \geq 0}$, les trois conditions

$$\sup_{n \geq 0} \mathbb{E}(|M_n|) < +\infty, \quad \sup_{n \geq 0} \mathbb{E}(M_n^+) < +\infty, \quad \sup_{n \geq 0} \mathbb{E}(M_n^-) < +\infty$$

sont équivalentes.

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités filtré et $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. positives, intégrables, adaptées (pas nécessairement indépendantes).

- 1a) On pose $X_0 = 0, X_n = Y_1 + \dots + Y_n$. Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une sous-martingale et déterminer le processus croissant associé $(A_n)_{n \geq 1}$.
- 1b) Montrer que, pour tout $a > 0$, $\tau_a = \inf\{n, A_{n+1} > a\}$ est un temps d'arrêt.
- 1c) On pose $Z_n = X_n - A_n$. Montrer que, pour tout n , $Z_{n \wedge \tau_a}^- \leq a$. En déduire que $(Z_{n \wedge \tau_a})_{n \geq 0}$ converge p.s.
- 1d) Montrer que $\{\lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow A_n < +\infty\} \subset \{\lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow X_n < +\infty\}$ p.s. (suggestion: se placer sur $\{\tau_a = +\infty\}$).
- 2) On suppose, de plus, que $\sup_{n \geq 1} Y_n \in L^1$. Montrer que

$$\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow X_n < +\infty \right\} = \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow A_n < +\infty \right\} \quad \text{p.s.}$$

(on pourra introduire le temps d'arrêt $\sigma_a = \inf(n, X_n > a)$ et considérer $Z_{n \wedge \sigma_a}^+$).

3) Soit $(B_n)_{n \geq 1}$ une suite d'événements adaptés. Montrer que

$$\left\{ \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}^{\mathcal{F}_{n-1}}(B_n) < +\infty \right\} = \left\{ \sum_{n \geq 1} 1_{B_n} < +\infty \right\} \quad p.s..$$

EXERCICE 4.39. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. réelles, de carré intégrable, adaptées, définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P})$, et $(\sigma_n^2)_{n \geq 0}$ une suite de nombres positifs. On suppose que p.s., pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{n-1}}(X_n) = 0, \quad \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{n-1}}(X_n^2) = \sigma_n^2 \quad p.s.$$

(cette condition est satisfaite, par exemple, si les v.a. $(X_n)_{n \geq 1}$ sont indépendantes centrées et de variance finie). On pose $S_0 = 0$, $A_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $A_n = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2$, $V_n = S_n^2 - A_n$.

1) Montrer que $(S_n)_{n \geq 0}$ et $(V_n)_{n \geq 0}$ sont des martingales intégrables.

2) Montrer que, si $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 < +\infty$, $(S_n)_{n \geq 0}$ converge p.s. et dans L^2 .

3) On suppose que $(S_n)_{n \geq 0}$ converge p.s. et qu'il existe une constante M telle que, pour tout $n \geq 1$, $|X_n| \leq M$ p.s. Pour $a > 0$, on pose $\tau_a = \inf\{n \geq 0; |S_n| > a\}$.

3a) Montrer que, pour tout n , $\mathbb{E}(S_{n \wedge \tau_a}^2) = \mathbb{E}(A_{n \wedge \tau_a})$.

3b) Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que $\mathbb{P}(\tau_a = +\infty) > 0$.

3c) En déduire que $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 < +\infty$.

Remarque: Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. réelles, centrées, indépendantes, de carré intégrable. Il est clair qu'une telle suite vérifie les hypothèses de cet exercice. On a donc retrouvé les résultats classiques:

(i) si $\sum_{k=1}^{\infty} \text{Var}(X_k) < +\infty$, alors $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ converge p.s.,

(ii) si les v.a. X_k sont uniformément bornées, alors $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ converge p.s. si et seulement si $\sum_{k=1}^{\infty} \text{Var}(X_k) < +\infty$.

EXERCICE 4.40. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, (M_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P})$ une martingale de carré intégrable et notons $A_n = \langle M \rangle_n$ le processus croissant associé. On pose $\tau_a = \inf\{n \geq 0; A_{n+1} > a^2\}$.

1) Montrer que τ_a est un temps d'arrêt.

2) Montrer que $\mathbb{P}(\sup_{n \geq 0} |M_{n \wedge \tau_a}| > a) \leq a^{-2} \mathbb{E}(A_{\infty} \wedge a^2)$.

3) Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n \geq 0} |M_n| > a\right) \leq \mathbb{P}(A_{\infty} > a^2) + \mathbb{P}\left(\sup_{n \geq 0} |M_{n \wedge \tau_a}| > a\right). \quad (4.10)$$

4) Soit X une v.a. positive. Montrer, en appliquant le théorème de Fubini, les deux relations

$$\int_0^\lambda \mathbb{P}(X > t) dt = \mathbb{E}(X \wedge \lambda) \quad \text{pour tout } \lambda \in [0, +\infty],$$

$$\int_0^\infty a^{-2} \mathbb{E}(X \wedge a^2) da = 2\mathbb{E}(\sqrt{X}).$$

5) Montrer que $\mathbb{E}(\sup_{n \geq 0} |M_n|) \leq 3\mathbb{E}(\sqrt{A_{\infty}})$, (on pourra intégrer (4.10) par rapport à a de 0 à $+\infty$...).

6) Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite v.a. centrées, indépendantes, de même loi et de carré intégrable. On pose $S_0 = 0$, $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$ et, pour $n \geq 1$, $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$, $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$. Montrer que si τ est un temps d'arrêt tel que $\mathbb{E}(\sqrt{\tau}) < +\infty$, alors $\mathbb{E}(S_\tau) = 0$.

Remarque: Il est intéressant de comparer le résultat de la question 6) avec celui de la partie A de l'Exercice 4.42 pour $m = 0$. On en déduit que le temps de passage τ de la partie A4) de l'Exercice 4.42 est de plus tel que $\mathbb{E}(\sqrt{\tau}) = +\infty$.

EXERCICE 4.41. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ on considère des v.a. $X_n^i, n = 1, 2, \dots, i = 1, 2$, indépendantes et de Bernoulli $B(1, \frac{1}{2})$. On pose $S_n^i = \sum_{k=1}^n X_k^i$, $\nu_i = \inf\{n; S_n^i = a\}$ où a est un entier ≥ 1 . On pose $\nu = \nu_1 \wedge \nu_2$.

1) Montrer que $\mathbb{P}(\nu_i < +\infty) = 1, i = 1, 2$.

2) On pose, pour $i = 1, 2$ et tout $n \geq 0$,

$$M_n^i = 2S_n^i - n, \quad M_n^{i,j} = (2S_n^i - n)(2S_n^j - n) - n\delta_{i,j}$$

où $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $= 0$ sinon. Montrer que $(M_n^i)_n$ et $(M_n^{i,j})_n$ sont des martingales par rapport à la filtration

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_k^i, i = 1, 2, k \leq n).$$

3) Montrer que $\mathbb{E}(\nu) \leq 2a$.

4) Montrer que $\mathbb{E}(M_\nu^{i,j}) = 0$.

5) Montrer que $\mathbb{E}(|S_\nu^1 - S_\nu^2|) \leq \sqrt{a}$ (suggestion: considérer la martingale $M_n^{1,1} - 2M_n^{1,2} + M_n^{2,2}$).

EXERCICE 4.42. (Identités de Wald) Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r. indépendantes, intégrables, de même loi. On pose $m = \mathbb{E}(Y_1)$, $S_0 = 0$, $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$ et, pour $n \geq 1$, $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$, $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$. Soit ν un temps d'arrêt intégrable.

A1) On pose $X_n = S_n - nm$. Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale.

A2) Montrer que, pour tout n , $\mathbb{E}(S_{n \wedge \nu}) = m\mathbb{E}(n \wedge \nu)$.

A3) Montrer que S_ν est intégrable et que $\mathbb{E}(S_\nu) = m\mathbb{E}(\nu)$ (considérer d'abord le cas $Y_n \geq 0$).

A4) Supposons $\mathbb{P}(Y_n = -1) = \mathbb{P}(Y_n = 1) = \frac{1}{2}$, pour tout n et $\tau = \inf\{n; S_n \geq a\}$, où a est un entier ≥ 1 . Dans l'Exercice 4.30, on a montré que $\tau < +\infty$ p.s. Montrer que τ n'est pas intégrable.

B) On suppose de plus que $\mathbb{E}(Y_1^2) < +\infty$ et on note $\sigma^2 = \text{Var}(Y_1)$. On suppose d'abord que $m = 0$ et on pose $Z_n = S_n^2 - n\sigma^2$.

B1) Montrer que $(Z_n)_{n \geq 0}$ est une \mathcal{F}_n -martingale.

B2) Montrer que, pour tout $j < k$, $\mathbb{E}[Y_j 1_{\{j \leq \nu\}} Y_k 1_{\{k \leq \nu\}}] = 0$ puis que $\mathbb{E}[\sum_{k=1}^\infty Y_k^2 1_{\{k \leq \nu\}}] < +\infty$ (suggestion: on utilise A).

B3) Montrer que $(S_{n \wedge \nu})_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy dans L^2 . En déduire que $S_{n \wedge \nu} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} S_\nu$ dans L^2 .

B4) Montrer que $\mathbb{E}(S_\nu^2) = \sigma^2 \mathbb{E}(\nu)$.

B5) On ne suppose plus $m = 0$. Montrer que $\mathbb{E}((S_\nu - m\nu)^2) = \sigma^2 \mathbb{E}(\nu)$.

EXERCICE 4.43. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré et ν une mesure finie sur $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty$. On suppose que, pour tout $n \geq 0$, \mathbb{P} domine ν sur \mathcal{F}_n et on note X_n la densité de Radon-Nikodym: X_n est donc \mathcal{F}_n -mesurable et

$$\nu(A) = \int_A X_n d\mathbb{P}$$

pour tout $A \in \mathcal{F}_n$ (en particulier $X_n \geq 0$).

a) Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale.

b) Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ converge p.s. vers une variable intégrable X .

c) Montrer que si \mathbb{P} domine ν sur \mathcal{F}_∞ , X est la densité de Radon-Nikodym correspondante.

d) On suppose que les deux mesures ν et \mathbb{P} sont étrangères sur \mathcal{F}_∞ , c'est à dire qu'il existe $S \in \mathcal{F}_\infty$ tel que $\mathbb{P}(S) = 1$ et $\nu(S) = 0$. Montrer qu'alors $X = 0$ p.s.

EXERCICE 4.44. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une martingale intégrable définie sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P})$ et soit ν un temps d'arrêt vérifiant

$$\mathbb{P}(\nu < +\infty) = 1, \quad \mathbb{E}(|X_\nu|) < +\infty, \quad \int_{\{\nu > n\}} |X_n| d\mathbb{P} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

1) Montrer que

$$\int_{\{\nu > n\}} |X_\nu| d\mathbb{P} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

2) Montrer que $\mathbb{E}(|X_{\nu \wedge n} - X_\nu|) \rightarrow 0$.

3) En déduire que $\mathbb{E}(X_\nu) = \mathbb{E}(X_0)$.

EXERCICE 4.45. (Un résultat d'arrêt pour un temps d'arrêt non borné) On considère une surmartingale intégrable $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, (X_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P})$. On suppose qu'il existe une constante M telle que, pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{n-1}}(|X_n - X_{n-1}|) \leq M \quad \text{p.s.}$$

1) Montrer que, si $(V_n)_{n \geq 1}$ est un processus positif tel que, pour tout $n \geq 0$, V_n soit \mathcal{F}_{n-1} -mesurable, on a

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} V_n |X_n - X_{n-1}|\right) \leq M \mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} V_n\right).$$

2) Soit ν un temps d'arrêt intégrable. On rappelle que $\mathbb{E}(\nu) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}\{\nu \geq n\}$.

2a) Déduire de 1) que $\mathbb{E}(\sum_{n \geq 1} 1_{\{\nu \geq n\}} |X_n - X_{n-1}|) < +\infty$.

2b) Que vaut $\sum_{n \geq 1} 1_{\{\nu \geq n\}} (X_n - X_{n-1})$? En déduire que X_ν est intégrable.

3) Montrer que $(X_{\nu \wedge p})_{p \geq 0}$ tend vers X_ν dans L^1 lorsque $p \rightarrow \infty$

4) En déduire que, si $\nu_1 \leq \nu_2$ sont deux temps d'arrêt avec ν_2 intégrable, on a

$$\mathbb{E}(X_{\nu_2} | \mathcal{F}_{\nu_1}) \leq X_{\nu_1}$$

(on peut se servir du fait suivant: si $A \in \mathcal{F}_{\nu_1}$, alors $A \cap \{\nu_1 \leq k\} \in \mathcal{F}_{\nu_1 \wedge k}$, après l'avoir prouvé ...).

EXERCICE 4.46. 1) Montrer qu'une martingale est régulière si et seulement si elle est équi-intégrable (Voir Exercice 2.5).

2) Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une martingale vérifiant

$$\sup_{n \geq 0} \mathbb{E}[|X_n| \log^+ |X_n|] < +\infty. \quad (4.11)$$

Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale régulière.

Remarque: Le résultat le plus important de cet exercice est le suivant: une martingale est régulière si et seulement si elle est équi-intégrable, c'est-à-dire vérifie la condition

$$\sup_{n \geq 0} \int_{\{|X_n| > a\}} |X_n| d\mathbb{P} \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} 0.$$

EXERCICE 4.47. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. On suppose que la tribu \mathcal{F} est séparable i.e. qu'il existe une famille dénombrable $(F_n)_{n \geq 1}$ d'événements tels que $\mathcal{F} = \sigma(F_n, n \geq 1)$. Soit \mathbb{Q} une probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) absolument continue par rapport à \mathbb{P} , i.e. vérifiant $\mathbb{Q}(A) = 0$ si $\mathbb{P}(A) = 0$.

1a) Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'événements tels que $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$ et vérifiant, pour tout n , $\mathbb{Q}(A_n) \geq \alpha > 0$. Soit $A = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$. Montrer que $\mathbb{P}(A) = 0$ et $\mathbb{Q}(A) \geq \alpha$.

1b) En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\mathbb{P}(A) < \eta$ implique $\mathbb{Q}(A) < \varepsilon$.

2) Montrer qu'il existe une famille dénombrable $\mathcal{P}_n = (G_{n,k})_{1 \leq k \leq r(n)}$ de partitions finies de Ω telle que

$$\mathcal{F}_n = \sigma(F_1, \dots, F_n) = \sigma(\mathcal{P}_n).$$

3) Soit $I_n = \{k \in \{1, \dots, r(n)\}, \mathbb{P}(G_{n,k}) > 0\}$. On pose

$$X_n = \sum_{k \in I_n} \frac{\mathbb{Q}(G_{n,k})}{\mathbb{P}(G_{n,k})} 1_{G_{n,k}}.$$

Montrer que $(X_n)_{n \geq 1}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ -martingale qui converge p.s.

4) Montrer que la martingale $(X_n)_{n \geq 1}$ est équi-intégrable (utiliser 1b)) et en conclure qu'elle converge dans L^1 .

5) Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{Q}(A) = \int_A X d\mathbb{P}$, où $X = \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n$.

Remarque: Cet exercice présente une démonstration du théorème de Radon-Nikodym pour une tribu séparable. On peut, mais c'est assez technique, étendre cette démonstration aux tribus quelconques.

EXERCICE 4.48. Sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P})$ on considère une sous-martingale $(X_n)_{n \geq 0}$ telle que $X_0 = 0$. Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ son compensateur. On a déjà vu comment déduire des informations sur la convergence d'une martingale, à partir du comportement du processus croissant associé. Dans ce problème on va plus à fond sur cette question.

1) On suppose que $X_n \geq 0$ pour tout n et on pose, pour $a > 0$, $\sigma_a = \inf(n \geq 1, A_{n+1} > a)$.

1a) Montrer que σ_a est un temps d'arrêt.

1b) Montrer que $\mathbb{E}[X_{n \wedge \sigma_a}] \leq a$.

1c) En déduire que $(X_n)_{n \geq 0}$ converge p.s. sur $\{\sigma_a = +\infty\}$.

1d) Montrer que, p.s.,

$$\{A_\infty < +\infty\} \subset \{X_n \text{ converge}\} \subset \left\{ \sup_{n \geq 0} X_n < +\infty \right\}.$$

On pose, pour $a > 0$, $\tau_a = \inf(n \geq 1, X_n > a)$. On dit que $(X_n)_{n \geq 0}$ est de classe \mathcal{C}^+ si, pour tout $a > 0$,

$$\mathbb{E}[(\Delta_{\tau_a})^+ 1_{\{\tau_a < +\infty\}}] = C_a < +\infty$$

où $\Delta_n = X_n - X_{n-1}$, $n \geq 1$ (en particulier $(X_n)_{n \geq 0}$ est de classe \mathcal{C}^+ si $\mathbb{E}(\sup_{n \geq 0} |X_n - X_{n-1}|) \leq M < +\infty$ pour tout $n \geq 0$).

2) On suppose que $(X_n)_{n \geq 0}$ est de classe \mathcal{C}^+ (on ne suppose plus $X_n \geq 0$).

2a) Montrer que $\mathbb{E}[X_{\tau_a}^+ 1_{\{\tau_a < +\infty\}}] \leq a + C_a$, puis que $\mathbb{E}[X_{n \wedge \tau_a}^+] \leq 2a + C_a$.

2b) En déduire que $\sup_{n \geq 0} \mathbb{E}|X_{n \wedge \tau_a}| < +\infty$, puis que $(X_n)_{n \geq 0}$ converge p.s. sur $\{\tau_a = +\infty\}$ (utiliser l'égalité $|x| = 2x^+ - x$).

2c) En déduire que p.s. $\{X_n \text{ converge}\} = \{\sup_{n \geq 0} X_n < +\infty\}$.

2d) Montrer que $\mathbb{E}[A_{n \wedge \tau_a}] = \mathbb{E}[X_{n \wedge \tau_a}] \leq 2a + C_a$. En déduire que $\mathbb{E}[A_{\tau_a}] < +\infty$ et que, p.s., $\{\tau_a = +\infty\} \subset \{A_\infty < +\infty\}$.

2e) Montrer que p.s. $\{\sup_{n \geq 0} X_n < +\infty\} \subset \{A_\infty < +\infty\}$.

2f) On suppose de plus que $X_n \geq 0$ pour tout n ; montrer que

$$\{X_n \text{ converge}\} = \left\{ \sup_{n \geq 0} X_n < +\infty \right\} = \{A_\infty < +\infty\} \quad \text{p.s.}$$

3) On suppose que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale satisfaisant à la relation $\mathbb{E}(\sup_{n \geq 0} |\Delta_n|) < +\infty$. Montrer que p.s.

$$\Omega = \{X_n \text{ converge}\} \cup \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n = +\infty, \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n = -\infty \right\}.$$

4) Soit $(B_n)_{n \geq 1}$ une suite d'événements adaptés. Montrer que p.s.

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}^{\mathcal{F}_{n-1}}(B_n) < +\infty \right\} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} 1_{B_n} < +\infty \right\}.$$

5) Soit $(M_n)_{n \geq 0}$ une martingale de carré intégrable, nulle en 0, et $(\langle M \rangle_n)_{n \geq 0}$ le processus croissant associé. On pose $A_n = \langle M \rangle_n$.

5a) Montrer que la sous-martingale $X_n = (M_n + 1)^2$ a pour compensateur $(A_n)_{n \geq 0}$.

5b) En déduire (utiliser 1)) que p.s.

$$\{A_\infty < +\infty\} \subset \{M_n \text{ converge}\}.$$

5c) On suppose de plus que $\mathbb{E}(\sup_{n \geq 0} |M_{n+1} - M_n|^2) < +\infty$. Montrer que p.s.

$$\{A_\infty < +\infty\} = \{M_n \text{ converge}\}$$

$$\{A_\infty = +\infty\} = \{\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} M_n = +\infty, \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} M_n = -\infty\}.$$

(une inégalité utile: $|y^2 - x^2| \leq |y - x|^2 + 2|x||y - x|$).

EXERCICE 4.49. Dans ce problème on montre, avec une méthode probabiliste, que toute fonction Lipschitzienne est primitive d'une fonction mesurable bornée.

Soient $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction Lipschitzienne de constante de Lipschitz $L > 0$ et X une v.a. à valeurs $[0, 1]$, de loi uniforme. On pose

$$X_n = \frac{[2^n X]}{2^n} \quad \text{et} \quad Z_n = 2^n (f(X_n + \frac{1}{2^n}) - f(X_n))$$

où $[x]$ désigne la partie entière du réel x .

a) Etudier la convergence de $(X_n)_{n \geq 0}$.

b) Montrer l'égalité de tribus

$$\bigcap_{n \geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots) = \sigma(X).$$

c) Déterminer la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $(X_k)_{k \leq n}$. En déduire que $(Z_n)_{n \geq 0}$ est une martingale bornée.

On note Z_∞ sa limite p.s. et dans L^1 .

d) Montrer qu'il existe une fonction g borélienne telle que $Z_\infty = g(X)$.

e) Calculer la loi conditionnelle de X sachant X_n et montrer que p.s.,

$$Z_n = 2^n \int_{X_n}^{X_n + \frac{1}{2^n}} g(u) du.$$

f) Déduire que pour tout $k, n, 0 \leq k \leq 2^n - 1$,

$$f(\frac{k}{2^n} + \frac{1}{2^n}) - f(\frac{k}{2^n}) = \int_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} g(u) du$$

et conclure que pour tout $x \in [0, 1]$,

$$f(x) - f(0) = \int_0^x g(u) du. \quad (4.12)$$

EXERCICE 4.50. Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. à valeurs dans \mathbb{Z} , indépendantes et de même loi μ . On suppose que $\mathbb{E}(Y_i) = m < 0$ et $\mathbb{P}(Y_i = 1) > 0, \mathbb{P}(Y_i \geq 2) = 0$. On pose $X_0 = 0, X_n = Y_1 + \dots + Y_n$ et

$$W = \sup_{n \geq 0} X_n.$$

Le but de ce problème est de trouver la loi de W .

a) Montrer que $W < +\infty$ p.s.

b1) Soit X une v.a. réelle. On note $M(\lambda) = \mathbb{E}(e^{\lambda X})$ sa transformée de Laplace (éventuellement $M(\lambda) = +\infty$) et $\psi(\lambda) = \log M(\lambda)$. Montrer que ψ est une fonction convexe (suggestion: on utilise l'inégalité de Hölder).

b2) On pose $M(\lambda) = \mathbb{E}(e^{\lambda Y_1})$ et $\psi(\lambda) = \log M(\lambda)$. Montrer que $\psi(\lambda) < +\infty$ pour tout $\lambda \geq 0$. Que vaut $\psi'(0+)$? Montrer que $\psi(\lambda) \rightarrow +\infty$ pour $\lambda \rightarrow +\infty$ et qu'il existe un $\lambda_0 > 0$ unique tel que $\psi(\lambda_0) = 0$ et que de plus $\psi'(\lambda_0) > 0$.

c) On considère la mesure sur \mathbb{Z}

$$\nu(k) = e^{\lambda_0 k} \mu(k).$$

Montrer que ν est une probabilité. Soit $(\tilde{Y}_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes et de même loi ν et $\tilde{X}_0 = 0, \tilde{X}_n = \tilde{Y}_1 + \dots + \tilde{Y}_n$. Montrer que $\mathbb{E}(\tilde{Y}_n) > 0$. Montrer que, si $\mathcal{Y}_n = (Y_1, \dots, Y_n)$ et $\tilde{\mathcal{Y}}_n = (\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n)$, on a, pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}^n$,

$$\mathbb{P}(\mathcal{Y}_n \in A) = \mathbb{E}(1_{\{\tilde{\mathcal{Y}} \in A\}} e^{-\lambda_0 \tilde{X}_n}). \quad (4.13)$$

d) Montrer que $(e^{\lambda_0 X_n})_{n \geq 0}$ (resp. $(e^{-\lambda_0 \tilde{X}_n})_{n \geq 0}$) sont des martingales par rapport à la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$ (resp. $\tilde{\mathcal{F}}_n = \sigma(\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n)$).

e) On pose $\tau_k = \inf\{n; X_n \geq k\}, \tilde{\tau}_k = \inf\{n; \tilde{X}_n \geq k\}$. Montrer que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_k \leq n) &= \mathbb{E}(1_{\{\tilde{\tau}_k \leq n\}} e^{-\lambda_0 \tilde{X}_n}) = \mathbb{E}(1_{\{\tilde{\tau}_k \leq n\}} e^{-\lambda_0 \tilde{X}_{\tilde{\tau}_k}}) = \\ &= e^{-\lambda_0 k} \mathbb{P}(\tilde{\tau}_k \leq n). \end{aligned} \quad (4.14)$$

f) Montrer que $\mathbb{P}(\tilde{\tau}_k < +\infty) = 1$ et que W a une loi géométrique de paramètre $1 - e^{-\lambda_0}$. Déterminer λ_0 dans le cas $\mathbb{P}(Y_i = -1) = q, \mathbb{P}(Y_i = 1) = p$, avec $0 < p < q < 1$.

EXERCICE 4.51. Sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P})$, on considère une probabilité \mathbb{Q} dominée localement par \mathbb{P} : pour tout $n \geq 0$, il existe une variable aléatoire $\xi_n \geq 0$, \mathcal{F}_n -mesurable telle que pour tout $A \in \mathcal{F}_n$,

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}(\xi_n 1_A).$$

On a vu dans l'Exercice 4.43 que $(\xi_n)_{n \geq 0}$ est une martingale, d'espérance 1. Le but de cet exercice est de déterminer certaines transformations qui changent les martingales par rapport à \mathbb{P} en des martingales par rapport à \mathbb{Q} . On notera $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}$ et $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$ les espérances par rapport à \mathbb{P} et \mathbb{Q} respectivement.

On pose $\alpha_n = \xi_n \xi_{n-1}^{-1} 1_{\{\xi_{n-1} > 0\}}$. On suppose que pour tout n , les variables ξ_n et α_n sont bornées \mathbb{P} -p.s. Ceci implique en particulier que toute variable aléatoire Y \mathcal{F}_n -mesurable et \mathbb{P} -intégrable est également \mathbb{Q} -intégrable.

Soit $(M_n)_{n \geq 0}$ une \mathbb{P} -martingale. On pose

$$M'_n = M_n - \sum_{p=1}^n \mathbb{E}_{\mathbb{P}}^{\mathcal{F}_{p-1}}(\alpha_p (M_p - M_{p-1}))$$

(cette expression a un sens en vertu des hypothèses précédentes).

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{\xi_n = 0\} \subset \{\xi_{n+1} = 0\}$ \mathbb{P} -p.s.

b) Soit Y une v.a. positive \mathcal{F}_n -mesurable. Calculer $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^{\mathcal{F}_{n-1}}(Y)$. En déduire $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^{\mathcal{F}_{n-1}}(Y)$ si Y est \mathbb{P} -intégrable et \mathcal{F}_n -mesurable.

c) Montrer que $(M'_n)_{n \geq 0}$ est une \mathbb{Q} -martingale.

d) On reprend la martingale de l'Exercice 4.30,

$$\xi_n^\theta = \frac{e^{\theta S_n}}{(\cosh \theta)^n},$$

où $(S_n)_{n \geq 0}$ est la marche aléatoire symétrique simple ($S_n = \sum_{i=1}^n U_i$, où les $(U_i)_{i \geq 1}$ forment une suite de variables indépendantes à valeurs $+1$ ou -1 avec probabilité $\frac{1}{2}$). Soit \mathbb{Q} une probabilité sur Ω telle que sa restriction à \mathcal{F}_n , notée $\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_n}$, satisfait à

$$\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_n} = \xi_n^\theta \cdot \mathbb{P}|_{\mathcal{F}_n}.$$

Expliciter la \mathbb{Q} -martingale $(S'_n)_{n \geq 0}$ associée à $(S_n)_{n \geq 0}$.

EXERCICE 4.52. Dans ce problème on applique un résultat de convergence de surmartingales positives à l'étude d'un algorithme stochastique.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré.

A) (lemme de Robbins-Siegmund) On considère $(Z_n, \beta_n, \xi_n, \eta_n)_{n \geq 0}$, des v.a. positives, adaptées, finies p.s. On suppose que, pour tout $n \geq 0$,

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}(Z_{n+1}) \leq (1 + \beta_n)Z_n + \xi_n - \eta_n \quad \text{p.s.}$$

On va établir un critère de convergence p.s. pour la suite $(Z_n)_{n \geq 0}$.

A1) On pose

$$\alpha_{-1} = 1, \quad \alpha_n = \prod_{k=0}^n (1 + \beta_k)^{-1},$$

$$Z'_n = \alpha_{n-1}Z_n, \quad \xi'_n = \alpha_n \xi_n, \quad \eta'_n = \alpha_n \eta_n.$$

Montrer que

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}(Z'_{n+1}) \leq Z'_n + \xi'_n - \eta'_n$$

et que $U_n = Z'_n - \sum_{k=1}^{n-1} (\xi'_k - \eta'_k)$ est une surmartingale.

A2) Soit $a > 0$. On considère le temps d'arrêt

$$\tau_a = \inf\{n \geq 1, \sum_{k=0}^{n-1} (\xi'_k - \eta'_k) > a\}.$$

Montrer que, sur $\{\tau_a = +\infty\}$, $(U_n)_{n \geq 0}$ converge p.s. vers une v.a. finie.

A3) Soit $\Gamma = \{\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n < +\infty, \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n < +\infty, \}$.

i) Montrer que, sur Γ , α_n converge vers $\alpha_{\infty} > 0$ et que $\sum_{n=1}^{\infty} \xi'_n < +\infty$.

ii) Montrer que, sur Γ , $(Z_n)_{n \geq 0}$ converge p.s. vers une v.a. Z_{∞} finie et que $\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n < +\infty$ p.s.

B) (Algorithmes de Robbins-Monro) On considère maintenant une suite adaptée de vecteurs aléatoires $(X_n, Y_n)_{n \geq 0}$ à valeurs $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ et une suite $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ de v.a. positives, adaptées telles que

$$X_{n+1} = X_n + \gamma_n Y_{n+1}.$$

On suppose qu'il existent une fonction borélienne $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, une constante $K < +\infty$ et $x_0 \in \mathbb{R}^d$ tels que

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}(Y_{n+1}) = f(X_n), \quad \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}(|Y_{n+1}|^2) \leq K(1 + |X_n|^2),$$

et que,

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 < +\infty$.

(ii) f est continue, $f(x_0) = 0$ et $\langle x - x_0, f(x) \rangle < 0$ pour $x \neq x_0$.

B1) On pose $Z_n = |X_n - x_0|^2$. Montrer qu'il existe une constante \bar{K} telle que

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}(Z_{n+1}) \leq (1 + \bar{K}\gamma_n^2)Z_n + \bar{K}\gamma_n^2 + 2\gamma_n \langle X_n - x_0, f(X_n) \rangle.$$

B2) Dédurre de A) que $(Z_n)_{n \geq 0}$ converge p.s. vers une v.a. Z et que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \langle X_n - x_0, f(X_n) \rangle$ converge p.s.

B3) Montrer que $Z = 0$ p.s. i.e. que $X_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} x_0$ p.s.