Chapitre 2 : Mouvement brownien (M.B.)

Plan

1. Un peu d'histoire
2. ~~Principe d'invariance de Donsker~~
   "Limite d'echelle d'une marche aléatoire"
3. Définitions du Mouvement brownien.
4. Transformations du M.B. standard.
5. Mouvement brownien comme martingale.
6. Variation quadratique du M.B.

1. Un peu d'histoire :

- Introduit pour la 1ère fois en 1827 par le botaniste britanique (écossais) Robert Brown en observant des mouvements très irréguliers des grains de pollen suspendus dans l'eau mais l'origine de ces mouvements restait inexpliqué.

• En 1900, la première approche mathématique du mouvement brownien est due au Français Louis Bachelier (dans sa thèse "Théorie de la spéculation"). Il l'introduit pour modéliser la dynamique des prix des actions à la bourse. Cependant la thèse de Bachelier fut méconnue.

المحاكاة

الأسهم

• En 1905, Albert Einstein détermina la densité de transition du M.B. $\mathbb{P}(B_t \in B / B_s \in A)$, $s \leq t$, à partir de la théorie de la chaleur et expliqua la cause microscopique (moléculaire) convinquant les physiciens de la nature moléculaire de la matière.

la collision avec les molécules de l'eau.

• En 1923, première étude mathématique rigoureuse par Norbert Wiener qui prouva l'existence du M.B.

• Le M.B. est un processus :
1. Gaussien ;
2. Markovien continu ;
3. Martingale ;
4. de diffusion

2. Limite d'échelle d'une marche aléatoire :

Construisons une marche aléatoire symétrique

Rappel : $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ v.a. i.i.d.

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2.$$

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i \quad ; \quad S_0 = 0.$$

$(S_n)_{n \geq 0}$ est dite "marche aléatoire symétrique".

ptés : 1) $\mathbb{E}(S_n) = 0$, $\forall n$.

2) $Var(S_n) = n$.

3) S_n prend les valeurs dans $\{-n, -n+2, \dots, n-2, n\}$

4) Accroissements indépendants :

$\forall n > m \geq 0$; $S_n - S_m \perp\!\!\!\perp \sigma(S_k, k \leq m)$

5) Accroissement stationnaires :

$\forall n > m \geq 0$: $S_n - S_m \overset{Loi}{=} S_{n-m}$.

6) T.C.L. $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0,1)$

On répète le ~~jette~~ d'une pce de monnaie équilibrée indép.

La probability du Pile (P) = La proba. de Face (F) $= 1/2$.

Chaque ~~est~~ résultat des jets successifs ω est

de la forme : $\omega = \omega_1 \omega_2 \dots \omega_n \dots$ (ω_n : le résultat du $n^{ième}$ jet).
exple : FPFPPPPFFP...

$$\Omega = \{ \omega : \omega = \omega_1 \omega_2 \dots , \ \omega_i = P \text{ ou } F \} = \{P, F\}^{\mathbb{N}^*}$$

Soit :

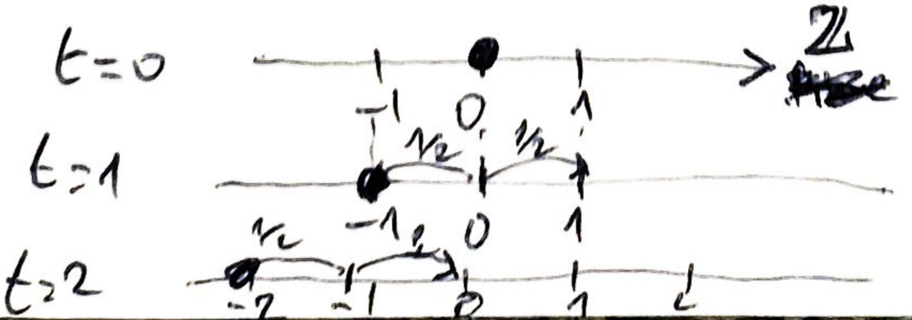
$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega_n = P \\ -1 & \text{si } \omega_n = F \end{cases}$$

On a $X_1, X_2, \dots$ sont indép. (les jets sont le sont)

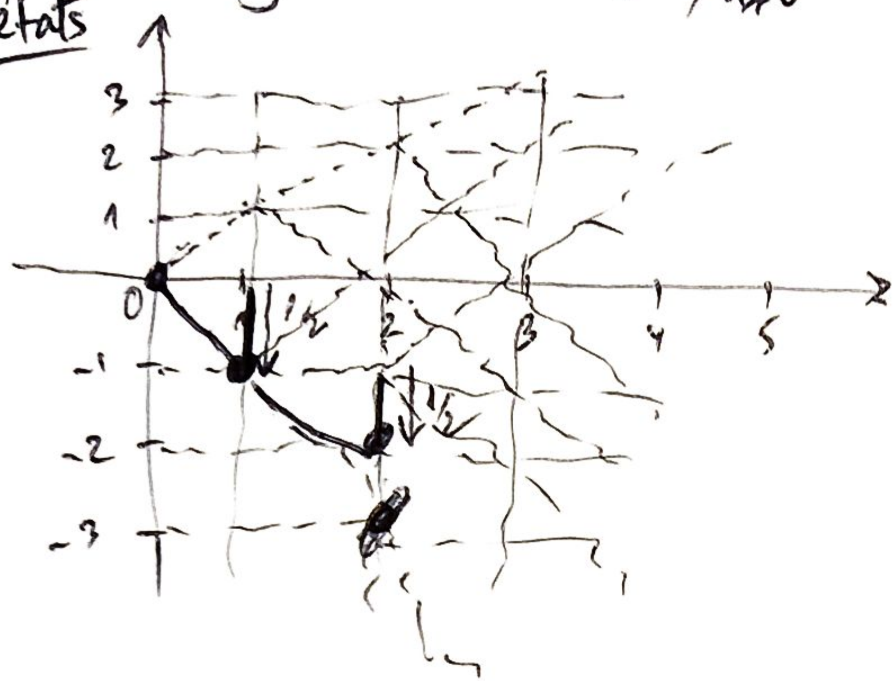
Définition : Définissons :

$$S_0 = 0,$$
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i , \ n = 1, 2, \dots$$

Le processus $(S_n)_{n \geq 0}$ est une marche aléatoire symétrique.



ex Une trajectoire de $(S_n)_{n \geq 0}$.



Proposition : Une M.A. a des accroissements indépendants

i.e. $\forall\ 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ $(t_i \in \mathbb{N})$.

Les accroissements de la M.A.

$S_{t_1}, S_{t_2} - S_{t_1}, \dots, S_{t_n} - S_{t_{n-1}}$ sont indép.

<u>Remarques</u>:

$$S_{t_k} - S_{t_{k-1}} = \sum_{i=t_{k-1}+1}^{t_k} X_i = X_{t_{k-1}+1} + \cdots + X_{t_k}$$

a une moyenne nulle et une variance = le temps écoulé, c.à.d: $t_k - t_{k-1}$.

<u>Preuve</u>: exercice.

<u>Th^{m}</u> $(S_n)_{n\geq 0}$ est une martingale p.r.p. à $(\mathcal{F}_n^X)_{n\geq 0}$.

<u>Preuve</u> exercice

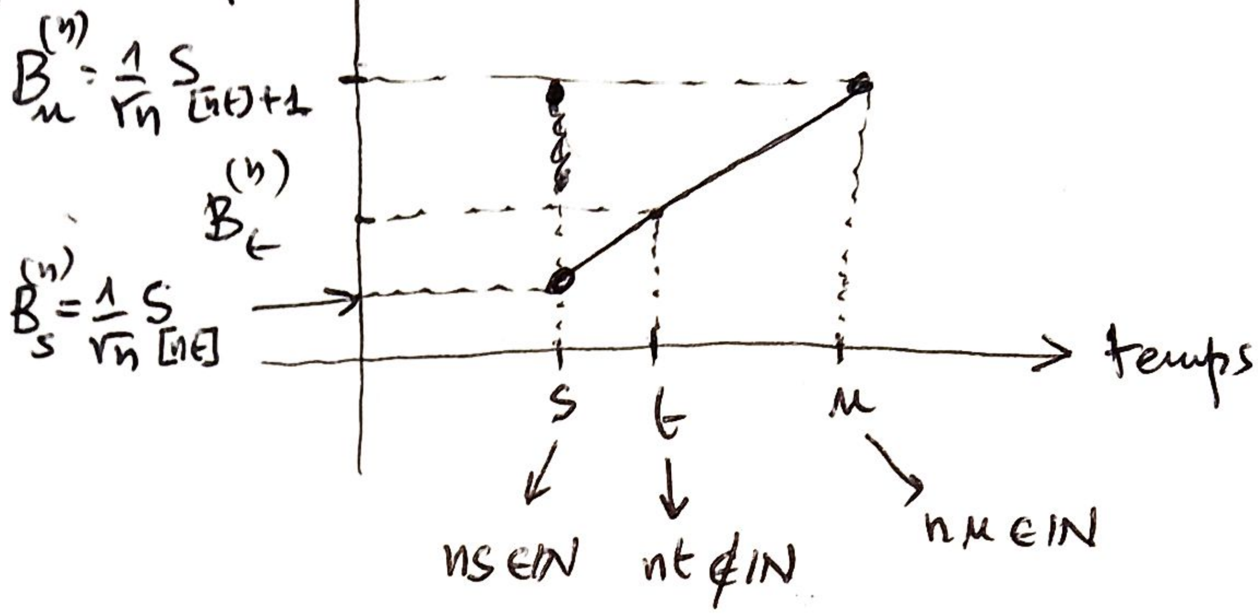
<u>Définition</u> Fixons un nbre entier positive n. Définissons La M.A. symétrique rééchelonné

$$B_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{nt}$$

à condition que nt soit un entier.

Si nt n'est pas entier, on définit $B_t^{(n)}$ par interpolation linéaire entre ~~[...]~~ ~~par~~ ses valeurs aux points s et u les plus proches à gauche et à droite de t

pour lesquelles ns et nt sont des entiers.



avec : $\quad ns = [nt] \quad , \quad nu = [nt] + 1$

i.e $\quad s = \dfrac{[nt]}{n} \quad ; \quad u = \dfrac{[nt]+1}{n}$

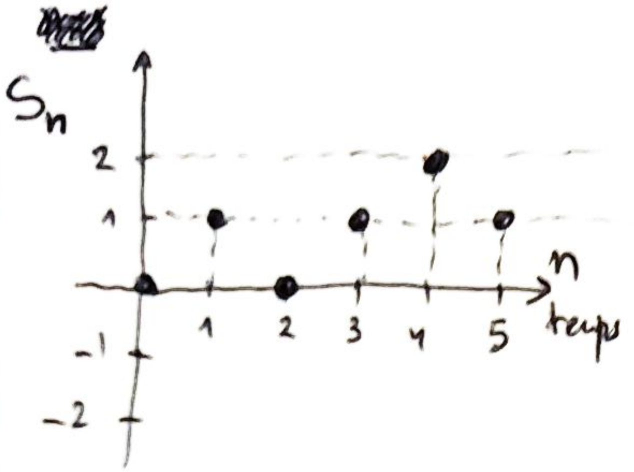
Remarques : La construction de $B_t^{(n)}$ signifie que :

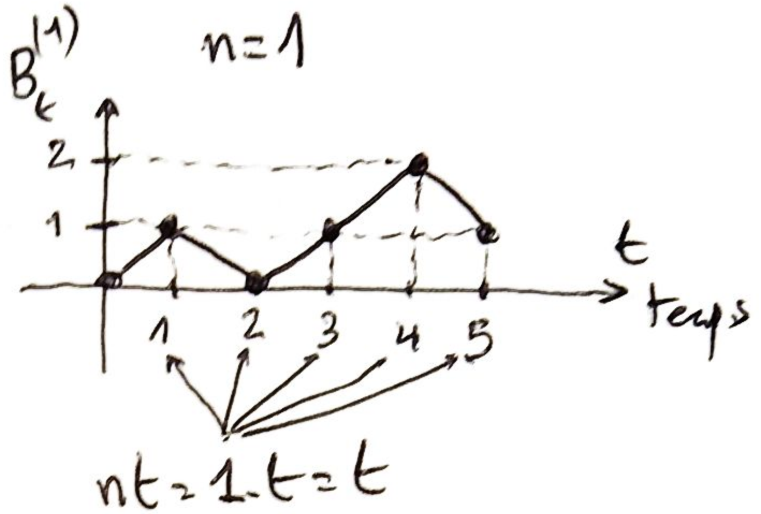
~~Cela~~ - on a fait un accélération du temps d'un facteur n : $t \longrightarrow nt$

- Compression de l'espace (les états) d'un facteur $\sqrt{n}$; $1 \longrightarrow 1/\sqrt{n}$.

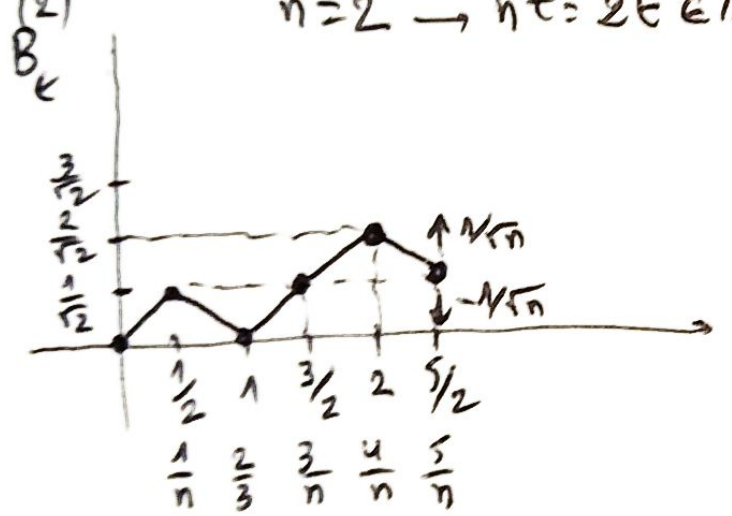
- $B_t^{(n)}$ effectue des pas de $\pm 1/\sqrt{n}$ sur des intervalles de temps de longueur $\frac{1}{n}$.

Exples des réalisations de $B_t^{(n)}$.





$n=2 \to nt = 2t \in \mathbb{N}$ pour $t = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots$



<u>Proposition</u>: $\left(B_t^{(n)}\right)_t$ à des accroissements indép.

<u>Thm</u> (C.L.T.).

Soit $t \geq 0$ fixé. alors :

$$B_t^{(n)} \xrightarrow[n \to \infty]{loi} B_t \sim \mathcal{N}(0,t).$$

3. Mouvement Brownien

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ esp. de proba.

Définition : Un processus stochastique $(B_t)_{t\geq 0}$ est dit : Mouvement Brownien Standard (M.B.S).

si :

(i) $B_0 = 0$ $\mathbb{P}$-p.s. ;

(ii) $(B_t)_{t\geq 0}$ a des accroissements indépendants, i.e.

Pour $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_m$

$B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_m} - B_{t_{m-1}}$ sont indép.

(iii) $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ (accroissements stationnaires).

(iv) $\mathbb{P}$-p.s la fct. $t \longmapsto B_t$ est continue.

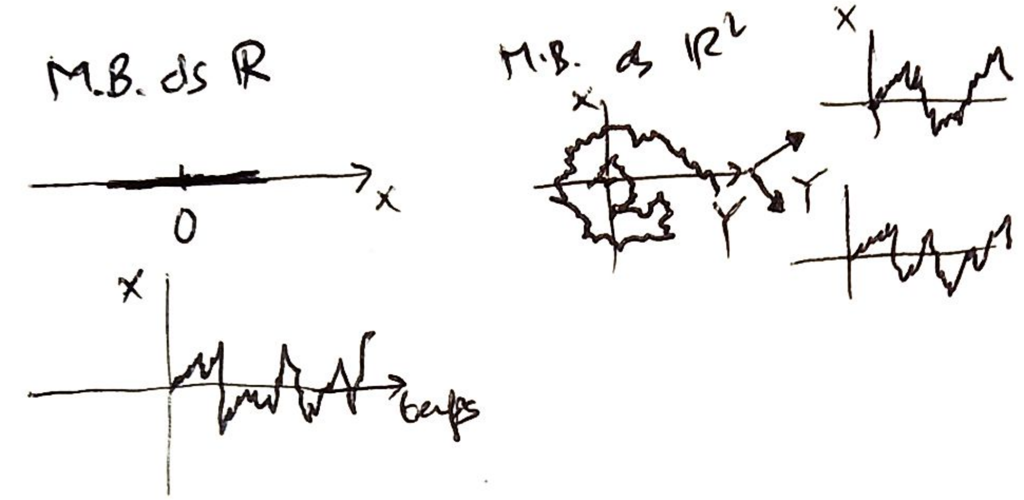
$(B_t)_{t\geq 0}$

Remarque La différence entre le M.B. et la M.A. rééchelonnée $(B_t^{(n)})_{t\geq 0}$:

(1) $(B_t^{(n)})_{t\geq 0}$ a un pas de temps $\frac{1}{n}$ et est linéaire ~~[illegible]~~ sur chaque pas, par contre le MB n'a pas des pas linéaires.

(2) $(B_t^{(n)})_{t\geq 0}$ est seulement approximativement normale pour chaque t.

Or le M.B. est exactement Normal.



<u>Lemme</u> : Pour $0\leq s\leq t$, la covariance de B_s et B_t est s. $\left(\mathbb{E}[B_sB_t] = s\wedge t\right)$.

<u>Proposition</u> La fct génératrice des moments du M.B. (pour un vecteur m-dimensionnel : $(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_m})$) est donnée par :

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\mu_1 B_{t_1} + \mu_2 B_{t_2} + \dots + \mu_m B_{t_m}\right)\right] = \exp\left[\frac{1}{2}(\mu_1+\dots+\mu_m)^2 t_1 + \frac{1}{2}(\mu_2+\dots+\mu_m)^2(t_2-t_1) + \dots + \frac{1}{2}(\mu_{m-1}+\mu_m)^2(t_{m-1}-t_{m-2}) + \frac{1}{2}\mu_m^2(t_m-t_{m-1})\right]$$

<u>Définition</u> : <u>Une filtration pour le M.B.</u> (ou <u>Filtration Brownienne</u>) est f^{lle} de sous-tribus $\mathcal{B}_t$, $t \geq 0$ satisfaisant :

(i) (Accumulation de l'informat°) $\mathcal{B}_s \subset \mathcal{B}_t$, $\forall s \leq t$;

(ii) (Adaptation) $\forall t \geq 0$: B_t est $\mathcal{B}_t$-mesurable ;

(iii) (Indépendance du futur accroissement) : $\forall$ $s \leq t$:

$$B_t - B_s \perp\!\!\!\perp \mathcal{B}_s .$$

Les accroissements du MB sont indep. du passé (sans mémoire).

<u>Exples</u> : $\mathbb{F}^B = (\mathcal{F}_t^B)_{t \geq 0}$ est une filtra^t Brownienne.

$$\mathcal{F}_t^B = \sigma(B_s, s \leq t).$$

<u>Th</u>^m : Le M.B. est une martingale.

<u>Preuve</u> $\mathbb{E}(B_t - B_s / \mathcal{B}_s) = \mathbb{E}(B_t - B_s) = 0.$

3. Définitions du Mouvement brownien

3.1. Processus gaussien :

Définition $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit "gaussien" si pour toute suite $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+$ et $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$: la variable aléatoire $\sum_{i=1}^{n} c_i X_{t_i}$ est gaussienne

Remarques

(i) Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est gaussien, alors :

$\forall t \geq 0$: X_t est gaussienne.

(ii) La réciproque de (i) est fausse.

Contre exemple : $X \rightsquigarrow N(0,1)$

$$Y = X \mathbb{1}_{\{|X| \leq a\}} - X \mathbb{1}_{\{|X| > a\}}, \quad a > 0$$

Il est facile de vérifier que $Y \rightsquigarrow N(0,1)$

Cependant, $X + Y = 2X \mathbb{1}_{\{|X| \leq a\}}$ n'est pas gaussienne.

Caractérisation d'1 processus gaussien

Tout processus gaussien $(X_t)_{t\geq 0}$ est déterminé par :

(a) sa moyenne : $m(t) := \mathbb{E}(X_t)$, $t\geq 0$;

(b) et sa matrice de covariance :

$$\Gamma(s,t) := \mathrm{Cov}(X_s, X_t). \quad s,t \in \mathbb{R}_+.$$

3.2. Définition du M.B.

On appelle M.B. un processus stochastique $(B_t)_{t\geq 0}$ à valeurs réelles, qui est un processus à accroissements indépendants et stationnaires dont les trajectoires sont p.s. continues.

⚠ Les traj. du M.B. sont nulle-part différentiables

Cette définition caractérise la loi de B_t pour tout $t\geq 0$ à travers le théorème suivant.

__Théorème__ si $(B_t)_{t\geq 0}$ est un M.B. Alors :

$B_t - B_0$ est une v.a. gaussienne de moyenne μt et de variance $\sigma^2 t$; avec μ et σ étant des constantes réelles.

__Preuve :__ Devoir

__Définition__ (du M.B. standard (M.B.S) :

Un M. B. est dit standard si :

$B_0 = 0$ p.s , $\mathbb{E}(B_t) = 0$ et $\mathbb{E}B_t^2 = t$, $\forall t \geq 0$

La proposition suivante sert à définir le M.B.S.

__Proposition__ ($2^{ème}$ définition du M.B.S.)

Un M.B.S. $(B_t)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien à trajectoires p.s continues, avec $\mathbb{E}(B_t) = 0$ et $Cov(B_s, B_t) = s \wedge t$, $s, t \geq 0$.

On peut même définir un M.B. p.r.p. à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ par :

- Trajectoires continues ps ;
- $\forall t\geq 0$: B_t est $\mathcal{F}_t$- mesurable ;
- Si $s\leq t$: $B_t - B_s \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s$
- Si $s\leq t$: $B_t - B_s \overset{\mathcal{L}}{=} B_{t-s} - B_0$

(on peut remplacer cette condition par :

$B_t - B_s \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, t-s)$, $s\leq t$, suivant le Théorème précédent).

<u>Définition</u> (M.B. généralisé)

① Le processus $X_t = a + B_t$ est un M.B. issu de a (c^{te}).

② On dit que X est un M.B. généralisé de dérive (drift) μ ($\in \mathbb{R}$) et de coefficient de diffusion σ ($\in \mathbb{R}_+^*$) si :

$X_t = x + \mu t + \sigma B_t$, où $(B_t)_{t\geq 0}$ M.B.S
x : c^{te}

• La v.a. $X_t \leadsto N(x+\mu t, \sigma^2 t)$, $\forall t \geq 0$.

~~3~~.4 Transformations du M.B.S.

Théorème

Soit B un M.B.S., Alors les cinq (05) processus suivants le sont également :

(a) Symétrie : $B_t^{(1)} = -B_t$, $t \geq 0$;

(b) Invariance par translation (Propriété de Markov faible).

Pour tout $T \geq 0$ fixé ; $B_t^{(2)} = B_{T+t} - B_T$; $t \geq 0$

[Sens : Le M.B. redémarre à nouveau en tout instant comme étant un nouveau M.B. indépendant de $\underbrace{\sigma(B_u, u \leq T)}_{\text{Passé}}$.]

(c) Retournement du temps :

Pour tout $T \geq 0$ fixé : $B_t^{(3)} = B_T - B_{T-t}$; $t \in [0, T]$.

(d) Changement d'échelle : (Auto-similarité).

Soit $a > 0$ fixé : $B_t^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{a}} B_{at}$; $t \geq 0$.

<u>Sens</u>: • Si on accélère (décélère) le temps par a,
$a>1$ $a<1$

et on comprime (délate, déprime) l'espace
$a>1$ $a<1$
des états par $\sqrt{a}$, le processus résultant restera un M.B.S.

• À cause de cette propriété, on appelle le M.B.S. un « <u>Fractal aléatoire</u> »
<u>ou</u> « Processus auto-similaire »

<u>i.e.</u> le processus garde le même aspect à différentes <u>échelles</u>
spaciale <u>et</u> temporelle.

(e) <u>Inversion du temps</u>

$$B_t^{(5)} = \begin{cases} t B_{\frac{1}{t}} & \text{si } t>0 \\ 0 & \text{si } t=0. \end{cases}$$

<u>Preuve</u> (voir T.D.2)

5. Mouvement brownien comme martingale :

Soit $\mathcal{B}_t = \sigma(B_s ; s \leq t)$, $t \geq 0$ la filtration brownienne.

Théorème (Propriété de Martingale du MB)

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un M.B. p.r.p. à $(\mathcal{B}_t)_{t\geq 0}$.
Alors les processus suivants sont de $(\mathcal{B}_t)_{t\geq 0}$ martingales :

(a) $(B_t)_{t\geq 0}$; (b) $(B_t^2 - t)_{t\geq 0}$ et (c) $\left(e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t}\right)_{t\geq 0}$

Preuve (exercice).

Remarque :

① On peut remplacer $(\mathcal{B}_t)_{t\geq 0}$ par n'importe quelle filtration par rapport à laquelle $(B_t)_{t\geq 0}$ est un M.B.

② On peut écrire : $B_t^2 = M_t + t$; $(M_t)_{t\geq 0}$ martingale, c'est la décomposition de Doob dans le cas continu, dont le processus croissant associé au MB est : $\langle B \rangle_t = t \neq 0$.

6. Variation quadratique du M.B :

Théorème de décomposition de Doob :

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ - sous-martingale continue. Alors il existe un processus unique $(A_t)_{t\geq 0}$ croissant, continu et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adapté tel que : $A_0 = 0$ et $(X_t - A_t)_{t\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$- martingale.

Application : (Variation quadratique d'1 Mart)

Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale, continue et de carré intégrable. Alors $(M_t^2)_{t\geq 0}$ est une sous martingale, et donc d'après le théorème de Doob, il existe un processus unique $(A_t)_{t\geq 0}$ croissant, continu et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adapté, tel que : $A_0 = 0$ et $(M_t^2 - A_t)_{t\geq 0}$ est une martingale.

On note : $A_t = \langle M \rangle_t$, et on appelle ce processus « la variation quadratique » de $(M_t)_{t \geq 0}$.

* Le processus $(\langle M \rangle_t)_{t \geq 0}$ est croissant, donc il est à variation bornée.

Cas particulier :

Si $(B_t)_{t \geq 0}$ est un M.B.

On $\left(B_t^2 - t\right)_{t \geq 0}$ est une mart-

d'où : $\langle B \rangle_t = t \neq 0$.

Donc : Le M.B. est à variation quadratique ~~bornée~~ non nulle.