Comportement de la C.M. à long-terme

la loi limite : Une C.M admet une loi limite si les limites :

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = j / X_0 = i)$$

existent pour tt $i, j \in E$, et forment une loi de probabilité sur E

i.e.

$$\sum_{j\in E} \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = j / X_0 = i) = 1$$

pour tt i $(\forall i \in E)$.

Le Thm suivant donne les conditions sur l'existence et l'unicité des limits ci-dessus, en donnant leurs valeurs.

$\underline{\text{Th}^{m}}$ Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ un C.M. satisfaisant les 3 conditions :

(i) Récurrente, (ii) Apériodique et (iii) Irréductible.

<u>Alors</u> : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = j / X_0 = i) = \dfrac{1}{\mu_j}$; $i, j \in E$

$$\mu_j := \mathbb{E}(T_j / X_0 = j) \geq 1$$

<u>est</u> : $\boxed{\text{Le temps moyen du retour à } j}$

Notons que : μ_j est indépendante de i.

<u>Remarque</u> : $\dfrac{1}{\mu_j}$: la proportion du temps de séjour dans j

Dans le cas où E est fini, la proposition ci-dessous nous donne la méthode standard pour chercher les limites $(\mu_j)_{j \in E}$ sous l'hypothèse de leur existence.

<u>Proposition</u>: Supposons que ① $E = \{0, 1, \ldots, N\}$ fini; ② Les lois limites $\pi_j := \lim_{\infty} P_{ij}^{(n)}$ existent et indépendamment de ⓘ.

i.e. $$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{bmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \cdots & \pi_N \\ \pi_0 & \pi_1 & & \pi_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \pi_0 & \pi_1 & & \pi_N \end{bmatrix}$$

<u>Alors</u>: $\pi = (\pi_j)_{j\in\{1,\ldots,N\}}$ est une loi stationnaire (invariante par P), déterminée uniquement par:

$$\boxed{\pi = \pi P} \quad \ldots\ldots (*)$$

<u>Remarque</u>: Le système $(*)$ est résolu en lui ajoutant la condition implicite : $$\sum_{j=1}^{N} \pi_j = 1.$$

Remarque : Soit (X) une C.M. admettant une loi limite (π),

* **La proportion du temps de séjour dans l'état i** : $\boxed{\pi_i}$

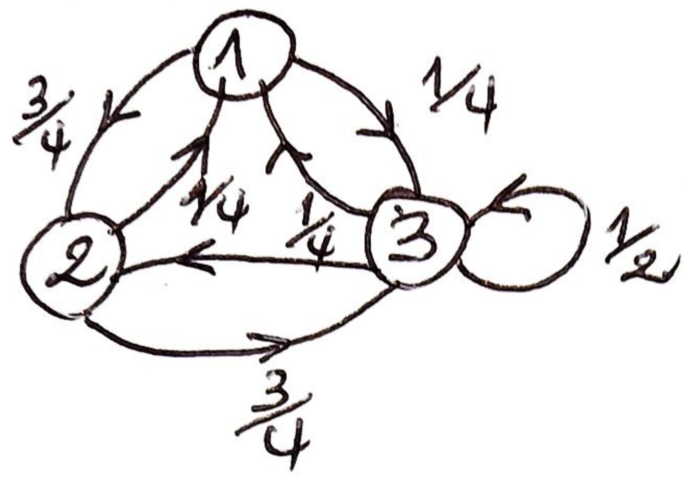
* **Le temps moyen du retour à l'état i**

$$\boxed{1/\pi_i = \mathbb{E}(T_i / X_0 = i)}$$

* **à long terme**, la proportion du temps que la C.M. est à l'état i sachant qu'elle était à l'état j à l'instant précédent :

$$\boxed{P_{ji} \cdot \pi_j}$$

Exemple : Soit la C.M. donnée par :



Calculer le temps moyen du retour à chaque état, i.e μ_1, μ_2 et μ_3 s'ils existent.

Solution :