Université de Jijel **Avril 2020**
Départememt de Mathématiques
Master 1: Probabilités et statistique

Série de TD n°4

Exercice 1:

Soient $\left(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}\right)$ un espace probabilisé filtré, et $(B_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t-$mouvement brownien défini sur cet espace.

a) Soit

$$Y_t = tB_{t.}.$$

1)- Peut-on appliquer la formule d'intégration par parties pour calculer dY_t?

2)- Calculer $\mathbb{E}(Y_t)$ et $\mathbb{E}(Y_t.Y_s)$.

b) Soit $X_t = 2.1_{[0,1]} + 3.1_{[1,3]} - 5.1_{[3,4]}$.

- Calculer $\int_0^4 X(t)dB(t)$.

c) On considère les deux processus stochastiques

$$X_t = \int_0^t (2t-u)\, dB(u,\omega) \text{ et } Y_t = \int_0^t (3t-4u)\, dB(u,\omega).$$

- Montrer que ces deux processus sont gaussiens de moyenne 0 et de fonction de covariance $3s^2t - \frac{2}{3}s^2$ pour $s \leq t$.

Exercice 2:

Soit $\left(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}\right)$ un espace probabilisé filtré, sur lequel est défini le processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$ comme suit:

$$X_t = \int_0^t \sin s dB(s,\omega).$$

1) Montrer que: pour tout $t \geq 0$,la variable aléatoire X_t est définie.

2) Montrer que $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus stochastique gaussien, puis calculer son espérance et sa covariance.

3) Calculer $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s)$.

4) Montrer que $X_t = \sin t.B(t,\omega) - \int_0^t \cos s B(s,\omega)\, ds$.

Exercice 3:

On considère les deux processus stochastiques:

$$X_t = \int_0^t e^s dB(s,\omega),\ Y_t = e^{-t}X_t.$$

1) Spécifier la loi de X_t et celle de Y_t, puis déterminer $\mathbb{E}(X_t), Var(X_t), \mathbb{E}(Y_t)$ et $Var(Y_t)$.

2) Montrer que $(Y_t)_{t\geq 0}$ converge en loi vers une v.a. Y_∞ lorsque t$\to\infty$ et spécifier sa loi.

4) Exprimer dY_t en fonction de Y_t et de dB.

Exercice 4:

1- Les intégrales suivantes sont-elles définies?

$\int_0^1 B(t)dB(t)$, $\int_0^1 \exp(B(t))dB(t)$, $\int_0^1 \exp(B(t)^2)dB(t)$.

2- Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique simple, défini pour tout $t \geq 0$ par

$$X_t = \zeta_0(\omega).1_{\left[0,\frac{1}{2}\right]} + \zeta_1(\omega).1_{\left[\frac{1}{2},1\right]}.$$

- Calculer $\int_0^1 X(t)dB(t)$.

3- Montrer qu si $(X_t)_{t\geq 0}$ est un proc.stoc. simple adapté, alors $\int_0^1 X(t)dB(t)$ est continu.

4- Ecrire les processus suivants comme processus d'Ito en précisant leur drift et le coefficient de diffusion:

- $X_t = B_t^2$.
- $X_t = B_t^3 - 3tB_t$.
- $X_t = \exp(\frac{t}{2})\sin(B_t)$.

5- Montrer que $X_t = \sin(B_t) + \frac{1}{2}\int_0^t \sin(B_t)ds, t \geq 0$ est une martingale, puis calculer sa moyenne et sa variance.

6- Soit $X_t = tX_1(t)X_2(t)$ avec

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= f(t)dt + \sigma_1(t)dB_t \\ dX_2(t) &= \sigma_2(t)dB_t \end{aligned}$$

- Calculer dX_t.

Exercice 5:

Soit σun processus adapté continu de $L^2(\Omega \times \mathbb{R}^2)$ et

$$X_t = \int_0^t \sigma_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds.$$

On pose $Y_t = \exp(X_t)$ et $Z_t = Y_t^{-1.}$

-1 Expliciter la dynamique de Y_t, c'est-à- dire expliciter dY_t.

-2 Montrer que Y_t est une martingale locale, donner une condition sur σ pour que ce soit une martingale.

-3 Calculer $\mathbb{E}(Y_t)$ dans ce cas.expliciter les calculs quand $\sigma = 1$.

-4 Calculer $dZ_{t.}$