U.A.B.C Chlef
Fac. Sciences.
Dép^t. Maths.

A.U. 2015/2016
Master 1
M.A.S.

Processus Stochastique II

Série d'exos #2

* Martingales à temps discret.

Exo1 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$- martingale de carré intégrable t.q. :

$$X_{n+1} - X_n \perp \mathcal{F}_n \text{ pour tout } n \geq 0.$$

- Montrer que : $Z_n := [X_n - \mathbb{E}(X_n)]^2 - \operatorname{Var} X_n$; $n \geq 0$ est une martingale.

Exo2 : (a) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$- ss-martingale et $K \in \mathbb{R}$.

- Montrer que : $(X_n \vee K)_{n\geq 0}$ l'est aussi.

(b) Montrer qu'un processus prévisible intégrable est une martingale si et seulement s'il est p.s. constant.

Exo3 : Supposons que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale dans L^2.

- Montrer que les accroissements de X sont 2 à 2 orthogonaux, i.e. $\forall n \neq m$ $\mathbb{E}\left[(X_{n+1} - X_n)(X_{m+1} - X_m)\right] = 0$.

Exo4 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. sur $[0,1]$ définie par :

$X_0 = a$ p.s. (a : c^{te} fixé dans $[0,1]$).

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1} = \frac{X_n}{2} \,/\, \mathcal{F}_n\right) = 1 - X_n = 1 - \mathbb{P}\left(X_{n+1} = \frac{X_n + 1}{2} \,/\, \mathcal{F}_n\right)$$

où $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - la filtration canonique de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$- martingale.

EXO5 : Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une ss-martingale à temps discret p.r.p. à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) Montrer que $\mathbb{E}(M_{n+1}) \geq \mathbb{E}(M_n)$, $n \geq 0$

(b) Montrer que les processus à accroissements indépendants, dont les moyennes des accroissements sont positives, sont des ss-martingales.

EXO6 : Soient $Y_1, Y_2, \ldots$ des v.a. i.i.d.

et soit $X_n = \prod_{m=1}^{n} Y_m$

- Sous quelle(s) condition(s) la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle :

a. une martingale ? b. une surmartingale ? c. une sous-martingale ?

EXO7 : Soit $(\Omega, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré,

et $X_n = \sum_{m=1}^{n} \mathbb{1}_{B_m}$, avec $B_n \in \mathcal{F}_n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - ss martingale.
2. Donner la décomposition de Doob de X_n.
3. Particulariser au cas : $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.

EXO8 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale de carré intégrable et $X_0 = 0$ p.s.

(1) M.q. $(X_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$: ss-mart. (2) Donner la décomposition de Doob de X_n^2.

(3) M.q. pour $\forall n \geq 1$: la v.a. $\Delta\langle X\rangle_n$ est (une version de) la variance conditionnelle de X_n sachant $\mathcal{F}_{n-1}$.

- Cas particulier : Si on prend : $X_0 = 0$ et $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ où $\{Y_i\}_i$ i.i.d. de loi : $\mathbb{P}(Y_1 = 1) = \mathbb{P}(Y_1 = -1) = 1/2$ (marche aléatoire symétrique ds $\mathbb{R}$).

- Montrer que $(X_n^2 - n)$ est une martingale.

[Indication : Montrer d'abord : $\langle X\rangle_n = n$].

Scanned with CamScanner

Nom & Prénom : Processus Stoch 2	اللقب و الاسم:
Niveau :	المستوى:
Groupe : MAS 2	الفوج:
N d'inscription :	رقم التسجيل:
Examen de : Solution de la série n° 2	إمتحان في مادة:

1. (a) $A \in \mathcal{F}_{11}$; (b) n'existe pas ; (c) $C \in \mathcal{F}_{100}$; (d) $D = \emptyset \in \mathcal{F}_n \ \forall n$

2. Soit $(\mathcal{G}_n)_{n \geq 1}$ une autre filtration à laquelle $(X_n)_{n \geq 1}$ est adapté.

On va montrer que : $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{G}_n \ \forall n \geq 1$?

On a : X_n est $\mathcal{G}_n$ - mesurable $\forall n \geq 1$ par hypothèse.

Or :

$$\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \dots,$$

D'où $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont $\mathcal{G}_n$ - mesurable $\forall n \geq 1$

et on sait que :

$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ est la plus petite ss tribu rendant $X_1, \dots, X_n$ mesurables,

Par conséquent : $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{F}_n \ \forall n \geq 1$.

3. $(X_n)_{n \geq 1}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ - martingale, alors :

$$X_n = \mathbb{E}(X_{n+1} / \mathcal{F}_n) \quad \forall n$$

$$\xrightarrow[\text{itérée}]{\text{Esp}} \mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X_{n+1} \quad \forall n$$

i.e. $\mathbb{E}X_1 = \mathbb{E}X_2 = \dots$

$(\mathbb{E}X_n)_n$ suite constante.

UH.B.C. Chef.
Fac. des Sciences
Dept. des Maths.

Processus Stoch. II
Corrigé des exos "Série n° 2"
Mart. à temps discret

Master 1
M.A.S.
15/16.

1

Exo2 (a) Image d'une ss-mart. par la fct convexe $\varphi(x) = x \vee K$.

(b) $\Rightarrow$/ Tout processus prévisible intégrable, p.s. constant est une martingale.

En effet : $X_n = c$ p.s. $\forall n$. donc X_n est $\mathcal{F}_0$-mesurable alors : X_n : $\mathcal{F}_n$-mesurable.

$$E|X_n| = |c| < \infty \quad \text{et} \quad E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = c = X_n \ \forall n.$$

$\Leftarrow$/ Réciproquement : si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $(\mathcal{F}_n)$-prévisible et $(\mathcal{F}_n)$-mart,

On a pour tt $n \in \mathbb{N}$: $X_n = \mathbb{E}(\underbrace{X_{n+1}}_{\substack{\mathcal{F}_n\text{-mesurable} \\ \text{(prévisible)}}}/\mathcal{F}_n) = X_{n+1}$ p.s. $\therefore X_n = c^{te}$ p.s.

Exo3 Supposons que $n > m \geq 0$

On a : $\mathbb{E}(X_{n+1}-X_n)(X_{m+1}-X_m) \underset{\text{Itérées}}{\overset{\text{Espérances}}{=}} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[(X_{n+1}-X_n)\underbrace{(X_{m+1}-X_m)}_{\substack{\mathcal{F}_n\text{-mesurable} \\ (m<n)}}/\mathcal{F}_n\right]\right]$

$$= \mathbb{E}\left[(X_{m+1}-X_m)\underbrace{\mathbb{E}(X_{n+1}-X_n/\mathcal{F}_n)}_{\substack{= \\ 0 \\ ((X_n):(\mathcal{F}_n)\_\text{mart})}}\right].$$

$$= 0.$$

Exo4 $X_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{X_n}{2} & \text{si } X_{n+1} = \dfrac{X_n}{2} \\ \text{ou} & \\ \dfrac{X_n+1}{2} & \text{si } X_{n+1} = \dfrac{X_n+1}{2} \end{cases} \Rightarrow X_{n+1} = X_{n+1}\mathbb{1}_{\underbrace{\left\{X_{n+1}=\frac{X_n}{2}\right\}}_{A_1}} + X_{n+1}\mathbb{1}_{\underbrace{\left\{X_{n+1}=\frac{X_n+1}{2}\right\}}_{A_2}}.$

$$X_{n+1} = \frac{X_n}{2} \mathbb{1}_{A_1} + \frac{X_n+1}{2} \mathbb{1}_{A_2}$$

Calculons $\mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n)$:

$$\mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = \frac{X_n}{2} \mathbb{P}(A_1/\mathcal{F}_n) + \frac{X_n+1}{2} \mathbb{P}(A_2/\mathcal{F}_n).$$ car : X_n : $\mathcal{F}_n$-mesurable.

Par hypothèse : $\mathbb{P}(A_1/\mathcal{F}_n) = 1 - X_n$, $\mathbb{P}(A_2/\mathcal{F}_n) = X_n$

Ce qui entraîne : $\mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = X_n$.

- $X_n \in L^1$ car elle est bornée.

//

Exo5 (a) Utiliser la propriété de l'espérance itérée,

(b)
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(X_n + X_{n+1} - X_n / \mathcal{F}_n) \\
&= \mathbb{E}(X_n/\mathcal{F}_n) + \underbrace{\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n / \mathcal{F}_n)}_{\text{indépendante à } \mathcal{F}_n} \\
&= \mathbb{E}(X_n/\mathcal{F}_n) + \underbrace{\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n)}_{\text{positive}} \\
&\geq \mathbb{E}(X_n/\mathcal{F}_n) = X_n.
\end{aligned}$$

//

Exo6 Martingale si $\mathbb{E}(Y_m) = 1$, sous-mart. si $\mathbb{E}(Y_m) \geq 1$, surmart. sinon (Voir Cours).

//

Exo7 1. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $(\mathcal{F}_n)$-ss mart.

(i) X_n : $\mathcal{F}_n$-mesurable car somme de v.a. $\mathcal{F}_n$-mesurables.

(ii) $\mathbb{E}|X_n| = \mathbb{E}(X_n) = \sum \mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_m}) = \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}(B_m) \leq n < \infty$ (car : $\mathbb{P}(B_m) \leq 1$).

(iii)
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_{n+1}} + X_n / \mathcal{F}_n) \\
&= \mathbb{E}(B_{n+1}/\mathcal{F}_n) + X_n \\
&= \mathbb{P}(B_{n+1}/\mathcal{F}_n) + X_n \\
&\geq X_n \quad \text{car : } \mathbb{P}(B_{n+1}/\mathcal{F}_n) \geq 0.
\end{aligned}$$

2) La décomposition de Doob :

- $X_n = Y_n + Z_n$; $X_n = \sum_{m=1}^{n} \mathbb{1}_{B_m}$; (Y_n) mart, (Z_n) : prévisible $\nearrow$.

D'après le cours :

$$Z_n = \sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_m} / \mathcal{F}_{m-1}) \quad : \text{croissant prévisible (cours)}$$

$$Y_n = X_n - Z_n = \sum_{m=1}^{n} \left[\mathbb{1}_{B_m} - \mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_m} / \mathcal{F}_{m-1})\right] \quad \text{martingale.}$$

Donc la décomposition dépend de $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_m} / \mathcal{F}_{m-1})$.

3) Calcul de $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_m} / \mathcal{F}_{m-1})$ ds le cas : $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$:

$\underline{n=1}$: $\mathcal{F}_1 = \sigma(\mathbb{1}_{B_1}) = \{\emptyset, \Omega, B_1, B_1^c\} = \sigma(B_1)$.

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_2} / \mathcal{F}_1) &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_2} / B_1)\mathbb{1}_{B_1} + \mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_2} / B_1^c)\mathbb{1}_{B_1^c} \\ &= \mathbb{P}(B_2 / B_1)\mathbb{1}_{B_1} + \mathbb{P}(B_2 / B_1^c)\mathbb{1}_{B_1^c}\end{aligned}} \quad \text{(voir T.D 1).}$$

$\underline{n=2}$ $\mathcal{F}_2 = \sigma(\mathbb{1}_{B_1}, \mathbb{1}_{B_2}) = \{\emptyset, \Omega, \underbrace{B_1B_2, B_1B_2^c, B_1^cB_2, B_1^cB_2}_{\text{partition de } \Omega}\}$

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_3} / \mathcal{F}_2) = \sum_{\substack{\{C_i^{(2)}\} \text{ partition de } \Omega \\ \text{engendrant } \mathcal{F}_2}} \mathbb{P}(B_3 / C_i^{(2)})\mathbb{1}_{C_i^{(2)}}$$

c.à.d : $C_1^{(2)} = B_1B_2$, $C_3^{(2)} = B_1^cB_2$

$C_2^{(2)} = B_1B_2^c$, $C_4^{(2)} = B_1^cB_2$

$[\, i \in \{1, 2, \dots, 2^{m-1}\}\,]$.

D'1 façon générale :

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_m} / \mathcal{F}_{m-1}) = \sum \mathbb{P}(B_m / C_i^{(m-1)})\mathbb{1}_{C_i^{(m-1)}}$$

avec : $\{C_i^{(m-1)}\}_{i=1}^{2^{m-1}}$ la partition de Ω engendrant $\mathcal{F}_{m-1}$.

C_i^{m-1} obtenu par intersection des B_i et B_i^c pour $i \leq m-1$.

Exo 8

1) (X_n^2) : $\mathcal{F}_n$ - ss.mart. (Inégalité de Jensen).

2) La décomposition de Doob de X_n^2 :

$$X_n^2 = Y_n + Z_n \quad \text{où } (Y_n) : \text{mart.}$$

$$Z_n = \sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}(X_m^2 - X_{m-1}^2 / \mathcal{F}_{m-1})$$

le crochet de X_n : $\langle X \rangle_n = Z_n = \sum_{m=1}^{n} [\mathbb{E}(X_m^2 / \mathcal{F}_{m-1}) - X_{m-1}^2]$

$$Y_n = X_n^2 - \sum_{m=1}^{n} [\mathbb{E}(X_m^2 / \mathcal{F}_{m-1}) - X_{m-1}^2]$$

3) $\Delta \langle X \rangle_n = \langle X \rangle_n - \langle X \rangle_{n-1}$

Montrons d'abord que : $\langle X \rangle_n = \sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}[(X_m - X_{m-1})^2 / \mathcal{F}_{m-1}]$

Il suffit de développer puis utiliser la propriété de martingale de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

D'où : $\Delta \langle X \rangle_n = \sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}[(X_m - X_{m-1})^2 / \mathcal{F}_{m-1}] - \sum_{m=1}^{n-1} \mathbb{E}[(X_m - X_{m-1})^2 / \mathcal{F}_{m-1}]$

$$= \mathbb{E}[(X_n - X_{n-1})^2 / \mathcal{F}_{n-1}]$$

mart.

$$= \mathbb{E}\left[[X_n - \mathbb{E}(X_n / \mathcal{F}_{n-1})]^2 / \mathcal{F}_{n-1}\right]$$

$$\boxed{\Delta \langle X \rangle_n = Var(X_n / \mathcal{F}_{n-1})}$$

4) Cas particulier : Montrons que $(X_n^2 - n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une mart.

Pour cela, calculons $\langle X \rangle_n$.

de la question 2) :

$$\langle X\rangle_n = \sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}\left[(X_m - X_{m-1})^2 / \mathcal{F}_{m-1}\right]$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}(Y_m^2 / \mathcal{F}_{m-1})$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \underbrace{\mathbb{E}(Y_m^2)}_{=1} \quad \underline{\text{car}},\ Y_m \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_{m-1}.$$

$$\boxed{\langle X\rangle_n = n}$$

Comme X_n^2 une ss-mart ((X_n) : mart.).

$$X_n^2 = M_n + \langle X\rangle_n$$ décomposition de Doob + (X_n) : mart.

$M_n = X_n^2 - n$ est une mart.