Examen final MAS 1 2019/2020

Nom & Prénom :	:اللقب و الإسم
Niveau :	:المستوى
Groupe :	:الفوج
N°d'inscription :	:رقم التسجيل
Examen de :	:إمتحان في مادة

Corrigé-type Processus Stoch. 1

(02,50/02,50)

1) Questions de cours

(01)

(a) $\forall i \sum_{j \in E} P_{ij}^{(n)} = \sum_{j \in E} \mathbb{P}(X_n = j / X_0 = i) = \sum_{j \in E} \mathbb{P}_i(X_n = j) = 1$

Car: $\mathbb{P}_i$ est une mesure de proba

D'où le résultat.

Rq: On pourra raisonner par récurrence.

(01,50)

(b) Supposons qu'$\exists$ π t.q. ${}^t\pi P = {}^t\pi$ et donc ${}^t\pi . P^n = {}^t\pi$. Alors pour $\forall n \geq 0$ et tout état j, on a : $\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij}^{(n)}$

Comme tous les états sont "transients", tous les termes $P_{ij}^{(n)}$ tendent vers 0. De plus les termes $\pi_i P_{ij}^{(n)} \leq 1 \Rightarrow \pi_j = \lim_n \sum \pi_i P_{ij}^{(n)} = \sum \lim_n \pi_i P_{ij}^{(n)} = \boxed{0}$. Tous les π_j seraient nuls, ce qui contredirait $\sum_i \pi_i = 1$.

Nom & Prénom :	اللقب و الإسم:
Niveau :	المستوى:
Groupe :	الفوج:
N d'inscription :	رقم التسجيل:
Examen de :	إمتحان في مادة:

2) Chaînes de Markov à temps discret

(a) $E = \{0, 1, 2\}$

(b) $P = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \\ p_2 & p_0 & p_1 \\ p_1 & p_2 & p_0 \end{bmatrix}$

double-stoch.

(c) Classificat°

La C.M est irréductible, apériodique et ~~trans~~ récurrente

$\forall i \; d(i) = 1$

(d) • $P_i(\tau_i = n) = P_i(X_1 = i, \ldots, X_n = i, X_{n+1} \neq i) = (1-p_0)\, p_0^{n}, \; n \geq 1$

$\tau_i \rightsquigarrow \mathcal{G}eo(1-p_0), \; 0 < p_0 < 1$

• Le temps moyen de séjour ds i, $E_i(\tau_i) = \dfrac{1}{1-p_0}$

(e) Temps moyen du retour à (i) : $m_i = \dfrac{1}{\pi_i}$

La mat. étant double stoch $\Rightarrow \pi_0 = \pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{3}$

D'où, $\boxed{m_i = 3}$

(f) Le nbre moyen de visites de (i) : $E_i R_i = \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)}$

$= \dfrac{1}{1-f_i}$

f) ~~La suite:~~ Calculons d'abord f_i :

$$1 - f_i = \mathbb{P}(T_i = \infty / X_0 = i) = P_2 \prod_{1}^{\infty} P_0^n + P_1 \prod_{1}^{\infty} P_0^n + P_1^2 \prod_{1}^{\infty} P_0^n + P_2^2 \prod_{1}^{\infty} P_0^n$$

$$= 0$$

$$f_i = 1 \Rightarrow \boxed{\mathbb{E}_i R_i = +\infty}$$

Méthode directe : L'état (i) est réc $\Rightarrow \boxed{\mathbb{E}_i R_i = +\infty}$

01 g) $\lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} (X_n)^r$ = La moyenne de X_n^r à long terme.

si $n \gg$ la loi de X_n est $\pi = (1/3 \; 1/3 \; 1/3)$

$$\Rightarrow \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum_{m=1}^{m} (X_n)^r = \mathbb{E} X^r = \sum_{i=0}^{2} i^r \pi_i$$

$$\lim_{m \to +\infty} \frac{1}{m} \sum_{m=1}^{m} (X_n)^r = 0^r \cdot 1/3 + 1^r \cdot 1/3 + 2^r \cdot 1/3 = \boxed{\frac{2^r + 1}{3}}$$

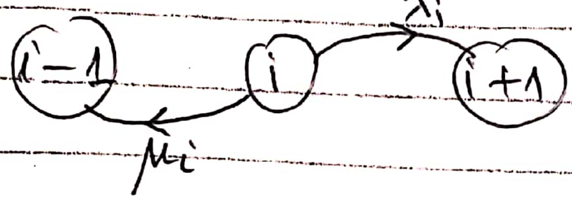
(11,50/11,50)

3. Chaîne de Markov à temps continu

01 (a) $\mathbb{P}$ [~~...~~ d'avoir une naissance avant une mort]

$$= \mathbb{P}(\tau_{i,i+1} < \tau_{i,i-1}) = \frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i}, \; i \geq 1$$

0,5



$$\mathbb{P}(\text{d'avoir un décès avant une naissance}) = \frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}, \; i \geq 1$$

0,5

02 (b) Classificat°.

L'état ⓪ est absorbant $\Rightarrow$ ⓪ est réc. 0,5

Tous les états ⓘ $\neq 0$ sont transitoires. 0,5

On a 2 classes $C_1 = \{0\}$, $C_2 = \mathbb{N}^*$. 0,5

La chaîne n'est pas irréductible. 0,5

02 (c) Les éq's de Kolmogorov Retrograde :

$$P'(t) = Q \cdot P(t) \qquad Q = (q_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}} \text{ tq } \begin{cases} q_{0j} = 0 & \forall j \\ q_{i,i+1} = \lambda_i, & i \geq 1 \\ q_{i,i-1} = \mu_i, & i \geq 1 \\ q_{ii} = -(\lambda_i+\mu_i) & i \geq 1 \end{cases}$$

Si $i,j \in \mathbb{N}$: $P'_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} q_{ik} P_{kj}(t)$

On a 2 cas :

$i = 0$: $P'_{0j}(t) = 0, \; \forall j \in \mathbb{N}$ 0,5

$i \neq 0 (\geq 1)$

$$P'_{ij}(t) = \underbrace{q_{i,i-1}}_{\mu_i} P_{i-1,j}(t) + \underbrace{q_{ii}}_{-(\lambda_i+\mu_i)} P_{ij}(t) + \underbrace{q_{i,i+1}}_{\lambda_i} P_{i+1,j}(t)$$

01

(c) La suite : $P_{00}(t) = ?$

$P'_{00}(t) = 0$ d'après les éq^ts de Kolmogorov.

$\Rightarrow P_{00}(t) = C = P_{00}(0) = 1.$

$\therefore \boxed{P_{00}(t) = 1}$ (Car "0" absorbant) 0,5

01 (d) $u_0 = \mathbb{P}(\text{absorption ds } 0 / X_0 = 0) = 1$ car 0 absorbant

$u_i = \mathbb{P}_i[\text{absorption par } 0]$

On conditionne sur la transition suivante qui est $i+1$ ou $i-1$.

$$u_i = \underbrace{\mathbb{P}_i[\text{absorption par } 0 / i \xrightarrow[\text{naissance}]{} i+1]}_{= u_{i+1}} \underbrace{\mathbb{P}_i[i \to i+1]}_{= \frac{\lambda_i}{\mu_i+\lambda_i}} + \underbrace{\mathbb{P}_i[\text{absorption par } 0 / i \xrightarrow[\text{mort}]{} i-1]}_{= u_{i-1}} \underbrace{\mathbb{P}_i[i \to i-1]}_{= \frac{\mu_i}{\mu_i+\lambda_i}}.$$

$$\Rightarrow u_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i+\lambda_i} u_{i+1} + \frac{\mu_i}{\mu_i+\lambda_i} u_{i-1} \quad i \geq 1.$$

0,50 (e) $\forall i \quad 0 \leq u_i \leq 1$ Car u_i est une proba.

(f) D'après (2) : $\lambda_i(\underbrace{u_{i+1} - u_i}_{= v_i}) = \mu_i(\underbrace{u_i - u_{i-1}}_{v_{i-1}})$

0,50

$$v_i = \frac{\mu_i}{\lambda_i} v_{i-1} = \frac{\mu_i}{\lambda_i}\frac{\mu_{i-1}}{\lambda_{i-1}} v_{i-2} = \dots = \prod_{j=1}^{i} \frac{\mu_j}{\lambda_j} v_0, \ i \geq 1$$

(g) Voir la fin.

(h) si $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\prod_{j=1}^{i}\frac{\mu_j}{\lambda_j}\right)=\infty$ alors: en passant à la limite ($m\to+\infty$) ds (4), on aura $\lim_{m\to+\infty} u_{m+1} - u_1 = \infty$ si $u_1 \neq 1$,

c à d : $\lim u_{m+1} = \infty \notin [0,1]$ impossible

Donc, il reste le cas où $u_1 = 1$ ce qui entraine que : $u_{m+1} = u_1 \; \forall m$. d'après (4).

<u>Commentaire</u> : Si $u_1 = 1$ alors on est sûr de l'absorption dans (0) en démarrant par (1). Mais on sait que tous les états (m) $\neq 0$ communiquent avec (1), i.e. qu'en partant de (m), on est sûr de visiter (1) $\xrightarrow{u_1 = 1} u_m = 1$.

(i) Si $0 < u_1 < 1$ on a $\sum_{i=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{i}\frac{\mu_j}{\lambda_j} < \infty$ car sinon, d'après (h), $u_1 = 1$ contradiction.

(j) • (u_m) est <u>décroissante</u>, car plus on est loin de (0), ça nécessite plus de temps de retourner à (0) (plus de transitions) qui diminuera la proba d'absorption u_m.

• Le chemin le plus court pour être absorbé dans (0) à partir de (m) est (0) ← (1) ← (2) ← ... ← (m) avec une proba $\prod_{j=1}^{m}\frac{\mu_j}{\mu_j+\lambda_j} \longrightarrow 0$ lorsque $m\to+\infty$ $\left(\frac{\mu_j}{\mu_j+\lambda_j}<1\right)$.

01 0,5 0,5 0,50 01 0,50 0,50

01 (k) $u_1 = ?$ en passant à la limite ds (4.)

$$\lim_{m} \overset{\to 0}{u_{m+1}} - u_1 = (u_1 - 1) \sum_{i=1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{\mu_j}{\lambda_j} \right)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{\sum_{i=1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{\mu_j}{\lambda_j} \right)}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{\mu_j}{\lambda_j} \right)} \\ u_{m+1} = \dfrac{\sum_{i=m+1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{i} \left(\frac{\mu_j}{\lambda_j} \right) \right)}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{\mu_j}{\lambda_j} \right)}, \quad m \geq 1 \end{cases}$$

0,50 (l) Pour $\mu_n = n\mu$ et $\lambda_n = n\lambda$, un calcul direct donne

$$u_m = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu \geq \lambda \text{ (partie (h))} \\ \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^m & \text{si } \mu < \lambda \text{ (partie (j))} \end{cases}, \quad m \geq 1$$

0,50 (g) En sommant les 2 membres dans (3) de $i=1$ à m on obtient le resultat.

U.H.B.C. Chlef
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département des Mathématiques

Année Universitaire: 2019/2020
Niveau: $1^{ère}$ Master/ Option: M.A.S.
Module: Processus Stochastiques 1.

EXAMEN FINAL (3 HEURES)

1. **Questions de cours**

   (a) Soit $\mathbf{P}$ une matrice stochastique. Montrer que pour tout $n \geq 0$, la matrice $\mathbf{P}^n$ l'est aussi.

   (b) Montrer que si une chaîne de Markov n'a que des états transients, alors il n'existe pas de loi de probabilité stationnaire.

2. **Chaîne de Markov à temps discret**
   Considérons la chaîne de Markov définie par récurrence comme suit:

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n + Y_{n+1}, & si\ X_n + Y_{n+1} \leq 2 \\ X_n + Y_{n+1} - 3, & si\ X_n + Y_{n+1} \geq 3 \end{cases}$$

où $Y_1, Y_2, \ldots$ sont $i.i.d.$,

$$\mathbb{P}(Y_i = 0) = p_0,\ \mathbb{P}(Y_i = 1) = p_1,\ \mathbb{P}(Y_i = 2) = p_2,$$

$p_0 > 0,\ p_1 > 0,\ p_2 > 0,\ p_0 + p_1 + p_2 = 1\ et\ X_0 = 0\ p.s.$

   (a) Quels sont les états de cette chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$?

   (b) Déterminer la matrice stochastique puis tracer le diagramme des transitions.

   (c) Classifier les états de la chaîne en donnant la période de chaque état.

   (d) Donner la loi du temps de séjour et le temps moyen de séjour dans l'état i.

   (e) Quel est le temps moyen du retour à l'état i?

   (f) Donner le nombre moyen de visites de l'état i.

   (g) Calculer la limite: $\lim\limits_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum\limits_{n=1}^{m} (X_n)^r;\ r > 0.$

3. **Chaîne de Markov à temps continu.**

Un Modèle de Croissance Linéaire sans Immigration (A Linear Growth Model without Immigration)

C'est un processus de Naissance et de Mort dont les taux de naissance (λ_n) et de mort (μ_n) sont donnés par:

$$\begin{cases} \lambda_n = n\lambda, & n \geq 1 \\ \mu_n = n\mu, & n \geq 1 \end{cases} \tag{1}$$

Un tel processus est naturellement utilisé dans l'étude de la reproduction biologique et de la croissance des populations. **Chaque** individu de la population donne naissance avec un taux exponentiel λ. La durée de vie de **chaque** individu de la population est exponentiellement distribuée de paramètre μ.

Le but de cet exercice est de calculer **la probabilité d'extinction** (d'absorption dans l'état 0) en démarrant par un état i $(i \geq 1)$.

- Soit u_i $(i = 1, 2, \ldots)$ la probabilité d'absorption dans l'état 0 à partir de l'état initial i.

   (a) Sachant que l'état actuel est $i \geq 1$, quelle est la probabilité que la transition suivante soit une naissance (respectivement un décès)?

   (b) Classifier les états.

   (c) Ecrire les équations de Kolmogorov rétrogrades de cette chaîne et calculer $\mathbf{P}_{00}(t)$.

(d) Montrer, en utilisant (a), que:

$$\begin{cases} u_i = \dfrac{\lambda_i}{\mu_i + \lambda_i} u_{i+1} + \dfrac{\mu_i}{\mu_i + \lambda_i} u_{i-1}, \ i \geq 1 \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

(e) Pourquoi: *pour tout* $i \geq 1: \ 0 \leq u_i \leq 1$?

(f) En posant $v_i = \dfrac{\mu_i}{\lambda_i} v_{i-1}, \ i \geq 1$, Vérifier que:

$$u_{i+1} - u_i = v_i = \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{\mu_j}{\lambda_j}\right) v_0, \ i \geq 1.$$

(g) Déduire de l'équation (3) que:

$$u_{m+1} - u_1 = (u_1 - 1) \sum_{i=1}^{m} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{\mu_j}{\lambda_j}\right), \ m \geq 1.$$

(h) Quelles sont les valeurs de u_m *et* u_1 si $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{\mu_j}{\lambda_j}\right) = \infty$? *Commenter*!

(i) Supposons maintenant que $0 < u_1 < 1$, montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{\mu_j}{\lambda_j}\right) < \infty$.

(j) Justifier intuitivement que $u_m \searrow 0$ quand $m \to \infty$.

(k) Calculer u_m *et* u_1 en utilisant (i), (j) et l'équation (4).

(l) Montrer que dans notre modèle où $\lambda_n = n\lambda$ *et* $\mu_n = n\mu$, *que* :

$$\begin{array}{lll} u_m = \left(\dfrac{\mu}{\lambda}\right)^m, & si \ \mu < \lambda & \\ & & (m \geq 1). \\ u_m = 1, & si \ \mu \geq \lambda & \end{array}$$