U.H.B.C. Chlef (03.09.1442≡15.04.2021)
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département des Mathématiques

Année Universitaire: 2020/2021
Niveau: $2^{ème}$ Master/ Option: M.A.S.
Module: Processus Stochastiques 3.

Examen Final (2h30')

$(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$.

1. Le mouvement brownien est un fractal aléatoire. Expliquer!
2. En 2 lignes, explique comment est définie (construite) l'intégrale de Wiener.
3. Montrer que l'intégrale de Wiener n'est pas monotone.
4. Montrer que si f dans $L^2([0,T])$ alors

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\int_0^t f(s)dB_s\right)\right] = \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t f^2(s)ds\right);\ \textit{pour tout } t \in [0,T].$$

5. Montrer que:
   (a) $E(B_t^3) = 0$
   (b) $E(B_t/\mathcal{F}_s) = B_{s\wedge t}$.
   (c) $E(\int_0^t B_u du/\mathcal{F}_s) = tB_s - \int_0^s u dB_u;\ s \leq t.$
6. Supposons que $f,\ g \in L^2([a,b])$ et qu'il existe deux constantes C, D telles que:

$$C + \int_a^b f(t)dB_t(\omega) = D + \int_a^b g(t)dB_t(\omega)\ \ \textit{pour presque tout } \omega \in \Omega.$$

   (a) Montrer que $C = D$.
   (b) En déduire (*par l'isométrie d'Itô*) que

$$f(t) = g(t)\ \ \textit{pour tout } t \in [a,b]\,.$$

Partie TD

1. Montrer que le Mouvement brownien est invariant par changement d'echelles temporelles et spatiales.
2. Soit $(\tau_n)_{n\geq 1}$ une suite de temps d'arrêt sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$,
   (a) Montrer que $\sup_n \tau_n$ n'est pas toujours un temps d'arrêt sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$.
   (b) Sous quelle(s) condition(s) $\sup_n \tau_n$ est toujours un temps d'arrêt sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$?
3. Montrer que $X_t = B_t^3 - 3tB_t$ est une martingale.

On donne:
- ■ $\mathbb{E}(B_t^4) = 3t$
- ■ $\mathbb{E}(\,|XY|\,) \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}$
- ■ $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$