Définition:

Soit X une variable aléatoire discréte (v.a.d) de support $D_X = \{x_1, x_2, ...\}$. On dira que X

admet une espérance mathématique si la série

$$\sum_i x_i P(X = x_i)$$

est absolument convergente. Le nombre

$$\mathbb{E}(X) := \sum_i x_i P(X = x_i)$$

est dans ce cas appelé espérance mathématique de X.

On notera que $X = \sum_i x_i \mathbf{1}_{\{X=x_i\}}$.

Définition:

Soit X variable aléatoire à valeurs dans $[0, \infty]$. On appelle espérance mathémétique de X

le nombre

$$\mathbb{E}(X) = \sup\{\mathbb{E}(U) : U \text{ v.a.d, } U \leq X\}$$

X est dite intégrable si $\mathbb{E}(X) < \infty$.

Remarque:

Si X et Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans $[0, \infty]$ et $\alpha \geq 0$, alors

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) \text{ et } \mathbb{E}(\alpha X) = \alpha\, \mathbb{E}(X).$$

De plus, si $X \leq Y$, alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$

Définition:

Soit X variable aléatoire à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. On dira que X est intégrable si les variables

aléaoires positives $X^+ := \max(X, 0)$ et $X^- := \max(-X, 0)$ sont intégrables. Dans ce cas le

nombre

$$\mathbb{E}(X) := \mathbb{E}\left(X^+\right) - \mathbb{E}\left(X^-\right)$$

s'appelle espérance mathématique de X.

On notera que $X = X^+ - X^-$, $|X| = X^+ + X^-$ et que X est intégrable$\Leftrightarrow |X|$ est intégrable. On pose

$$l^1(\Omega, \digamma, P) = \left\{X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}} \text{ } v.a \text{ intégrable}\right\}$$

Définition:

Soit X variable aléatoire à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ et soit *$A \in \digamma$ un événement. L'espérance définie*

par

$$\int_A X dP := \mathbb{E}(X\mathbf{1}_A)$$

s'appelle intégrale au sens de Lebesgue de X par apport à la mesure de probabilité P, sur

A.

Ainsi $\int\limits_{\Omega} X dP = \mathbb{E}(X)$.

Proposition:

Si X et Y sont deux variables aléatoires intégrables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $X + Y$

et αX sont intégrables (i.e. $l^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace vectoriel) *et on a*

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) \text{ et } \mathbb{E}(\alpha X) = \alpha\, \mathbb{E}(X).$$

Preuve:

-On a

$$|X+Y| \leq |X| + |Y| \text{ et } |\alpha X| = |\alpha|\,|X|,$$

d'où

$$\mathbb{E}(|X+Y|) \leq \mathbb{E}(|X|) + \mathbb{E}(|Y|) < \infty \text{ et } \mathbb{E}(|\alpha X|) = |\alpha|\,\mathbb{E}(|X|) < \infty,$$

$X + Y$ et αX sont donc intégrables.

-On a

$$\begin{aligned}(X+Y)^+ + X^- + Y^- &= (X+Y)^+ + X^+ - X + Y^+ - Y \\ &= (X+Y)^+ - (X+Y) + X^+ + Y^+ \\ &= (X+Y)^- + X^+ + Y^+\end{aligned}$$

d'où, puisque les membres du premier et du dernier terme de ces inégalités sont positifs,

$$\mathbb{E}(X+Y)^+ + \mathbb{E}\left(X^-\right) + \mathbb{E}\left(Y^-\right) = \mathbb{E}(X+Y)^- + \mathbb{E}\left(X^+\right) + \mathbb{E}\left(Y^+\right).$$

Il s'en suit que

$$\mathbb{E}(X+Y)^+ - \mathbb{E}(X+Y)^- = \mathbb{E}\left(X^+\right) - \mathbb{E}\left(X^-\right) + \mathbb{E}\left(Y^+\right) - \mathbb{E}\left(Y^-\right),$$

soit

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$

-Si $\alpha > 0$, alors on a

$$(\alpha X)^+ = \max(\alpha X, 0) = \alpha \max(X, 0) = \alpha X^+$$

et

$$(\alpha X)^- = \max(-\alpha X, 0) = \alpha \max(-X, 0) = \alpha X^-$$

d'où

$$\mathbb{E}(\alpha X) = \mathbb{E}\left((\alpha X)^+\right) - \mathbb{E}\left((\alpha X)^-\right) = \alpha \mathbb{E}(X)$$

-Si $\alpha < 0$, alors on a

$$(\alpha X)^+ = \max(-\alpha(-X), 0) = -\alpha \max(-X, 0) = -\alpha X^-$$

et

$$(\alpha X)^- = \max(-\alpha X, 0) = -\alpha \max(X, 0) = -\alpha X^+,$$

d'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\alpha X) &= \mathbb{E}\left((\alpha X)^+\right) - \mathbb{E}\left((\alpha X)^-\right) = \mathbb{E}\left(-\alpha X^-\right) - \mathbb{E}\left(-\alpha X^+\right) \\
&= -\alpha\left(\mathbb{E}\left(X^-\right) - \mathbb{E}\left(X^+\right)\right) = \alpha \mathbb{E}(X).
\end{aligned}$$

Il est clair que si $\alpha = 0$, alors on a $\mathbb{E}(\alpha X) = \alpha \mathbb{E}(X) = 0$, ce qu'il fallait démontrer.■

Lemme:

Toute variable aléatoire X à valeurs dans $[0, \infty]$ est limite d'une suite de v.a.d. croissante

$(X_n)_{n \geq 0}$.

La démonstration de ce lemme est très simple. Soit X *variable aléatoire à valeurs dans* $[0, \infty]$, il suffit de poser

$$\begin{aligned}
X_n(\omega) &= \begin{cases} \frac{k}{2^n} \text{ si } \frac{k}{2^n} \leq X(\omega) < \frac{k+1}{2^n} \text{ et } k = 0, 1, 2, ..., n2^n - 1 \\ n \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{si} \qquad\qquad X(\omega) \geq n \end{cases} \\
&= \sum_{k=0}^{n2^n - 1} \frac{k}{2^n} \mathbf{1}_{\left\{\frac{k}{2^n} \leq X < \frac{k+1}{2^n}\right\}}(\omega) + n \mathbf{1}_{\{X \geq n\}}(\omega).
\end{aligned}$$

Théorème de la convergence monotone (TCM):

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r. positives, intégrables, croissante et convergente vers une

v.a.r. intégrable X. Alors on a

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X)$$

Démonstration:

Pour tout $n, X_n \leq X_{n+1} \leq X$ d'où $\mathbb{E}(X_n) \leq \mathbb{E}(X_{n+1}) \leq \mathbb{E}(X)$. Ainsi, la suite $(\mathbb{E}(X_n))_{n \geq 1}$ est croissante et donc converge et on a $\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}(X_n) \leq \mathbb{E}(X)$.

Il reste à voir l'inégalité inverse.

Soit U une $v.a.r.$ discréte telle que $0 \leq U \leq X$ et soit $1 > \varepsilon > 0$. Pour tout $\omega \in \Omega$, si $U(\omega) > 0$ on a

$$\lim_{n \to \infty} X_n(\omega) = X(\omega) \geq U(\omega) > (1 - \varepsilon) U(\omega)$$

donc il existe n (grand) tel que $X_n(\omega) \geq (1 - \varepsilon) U(\omega)$; et si $U(\omega) = 0$ alors on a pour tout entier $n, X_n(\omega) \geq (1 - \varepsilon) U(\omega)$. Cela signifie que

$$\Omega = \underset{n}{\cup} \Omega_n \text{ où } \Omega_n = \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \geq (1 - \varepsilon) U(\omega)\}.$$

De plus (Ω_n) est une suite croissante.

Par définition de Ω_n , on a pour tout $\omega \in \Omega_n, X_n(\omega) \geq (1 - \varepsilon) U(\omega)$. Par conséquent, comme $X_n(\omega) \geq 0$, on a

$$X_n(\omega) \geq (1 - \varepsilon) U(\omega) \mathbf{1}_{\Omega_n}.$$

D'autre part, comme U est discréte, alors s'écrit

$$U = \sum_i c_i \mathbf{1}_{A_i} \text{ où } A_i = \{\omega \in \Omega : U(\omega) = c_i\}$$

d'où $U\mathbf{1}_{\Omega_n} = \sum\limits_i c_i \mathbf{1}_{A_i \cap \Omega_n}$ est discréte et on a

$$\mathbb{E}(X_n) \geq (1-\varepsilon)\,\mathbb{E}(U\mathbf{1}_{\Omega_n}) = (1-\varepsilon)\sum_i c_i \mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_i\cap\Omega_n}) = (1-\varepsilon)\sum_i c_i P(A_i \cap \Omega_n).$$

Remarquons que pour tout i, la suite $(A_i \cap \Omega_n)_{n\geq 0}$ est également croissante, d'où en passant à la limite, $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_i \cap \Omega_n) = P(A_i)$ et on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) \geq (1-\varepsilon)\sum_i c_i P(A_i) = (1-\varepsilon)\,\mathbb{E}(U)$$

et lorsque ε tend vers 0, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) \geq \mathbb{E}(U),$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) \geq \mathbb{E}(X),$$

ce qu'il fallait démontrer.■

Corollaire 1:

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. positives et intégrables, décroissante et convergente vers une v.a.r. intégrable X. Alors on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X)$$

Preuve:

En effet la suite croissante de *v.a.* intégrables $(Y_n)_{n\geq 1}$ définie par $Y_n = X_1 - X_n$ est convergente vers $Y := X_1 - X$, d'où d'aprés le **TCM**

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(Y)$$

soit

$$\mathbb{E}(X_1) - \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_1) - \mathbb{E}(X),$$

ce qui achève la démonstration.■

Corollaire 2:

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r.de signe quelconque, intégrables, croissante et

convergente vers une v.a.r. intégrable X. Alors on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X)$$

Preuve:

Même preuve, en considérant la suite croissante de $v.a.$ positives intégrables $(Z_n)_{n\geq 1}$ définie par $Z_n = X_n - X_1$.■

Corollaire 3:

Soit X une v.a. intégrable à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, de densité f . Alors on a

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx.$$

Preuve:

On considère , pour tout $n \geq 1$, la fonction

$$\begin{aligned} h_n(x) &= \begin{cases} -n & \text{si } -n \geq x \\ \frac{k}{2^n} \text{ si } \frac{k}{2^n} \leq x < \frac{k+1}{2^n} & \text{pour } k = -n2^n+1, ..., n2^n - 1 \\ n & \text{si } n \leq x \end{cases} \\ &= -n\mathbf{1}_{]-\infty,-n]}(x) + \sum_{k=-n2^n+1}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbf{1}_{\left[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right[}(x) + n\mathbf{1}_{[n,\infty[}(x) \end{aligned}$$

et on pose $X_n = h_n(X)$. Alors la suite réelle $(h_n(x))_{n\geq 1}$ est croissante, convergente vers x et la suite de $v.a.$ $(X_n)_{n\geq 1}$ est également croissante et convergente vers X. Il résulte du **corollaire 2** que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n2^n+1}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} P\left(\frac{k}{2^n} \leq X < \frac{k+1}{2^n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n2^n+1}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \int_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} f(x)\, dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n2^n+1}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{\left[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right[}(x) f(x)\, dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(x) f(x)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n\to\infty} h_n(x) f(x)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx. \end{aligned}$$

■

Rappelons que pour une suite de $v.a.r.$ $(X_n)_{n\geq 1}$, on défini les $v.a.r.$ $\underline{\lim}X_n$ (ou $\text{liminf}X_n$) et $\overline{\lim}X_n$ (ou $\text{limsup}X_n$) par:

$$\underline{\lim}X_n(\omega)=\lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n}X_k(\omega)\right)\text{ et }\overline{\lim}X_n(\omega)=\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n}X_k(\omega)\right).$$

On notera que $\lim\limits_{n\to\infty}X_n$ existe si et seulement si $\underline{\lim}X_n=\overline{\lim}X_n$ et dans ce cas

$$\lim_{n\to\infty}X_n=\underline{\lim}X_n=\overline{\lim}X_n.$$

Corollaire 4:(Lemme de Fatou)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. positives et intégrables. Alors on a

$$\mathbb{E}\left(\underline{\lim}X_n\right)\leq\underline{\lim}\mathbb{E}\left(X_n\right)$$

et

$$\mathbb{E}\left(\overline{\lim}X_n\right)\geq\overline{\lim}\mathbb{E}\left(X_n\right)$$

Preuve:

La suite de $v.a.r.$ positives et intégrables $(Y_n)_{n>1}$ définie par $Y_n:=\inf\limits_{k\geq n}X_k(\omega)$ est croissante et $\underline{\lim}X_n=\lim\limits_{n\to\infty}Y_n$. De plus $Y_n\leq X_k$, d'où $\mathbb{E}(Y_n)\leq\mathbb{E}(X_k)$ pour tout $k\geq n$ et on a

$$\mathbb{E}(Y_n)\leq\inf_{k\geq n}\mathbb{E}(X_k).$$

Il résulte du **TCM** que

$$\mathbb{E}\left(\underline{\lim}X_n\right)=\mathbb{E}\left(\lim_{n\to\infty}Y_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(Y_n)\leq\lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n}\mathbb{E}(X_k)\right)=\underline{\lim}\mathbb{E}(X_n).$$

L'autre inégalité se démontre de la même manière. Il suffit de remarquer que la suite de $v.a.r.$ positives et intégrables $(Y_n)_{n>1}$ définie par $Z_n:=\sup\limits_{k\geq n}X_k(\omega)$ est décroissante et $\overline{\lim}X_n=\lim\limits_{n\to\infty}Z_n$ et que $Z_n\geq X_k$, d'où $\mathbb{E}(Z_n)\geq\mathbb{E}(X_k)$ pour tout $k\geq n$. Par suite

$$\mathbb{E}(Z_n)\geq\sup_{k\geq n}\mathbb{E}(X_k),$$

et en utilisant le **corollaire 1**, on obtient

$$\mathbb{E}\left(\overline{\lim}X_n\right)=\mathbb{E}\left(\lim_{n\to\infty}Z_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(Z_n)\geq\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n}\mathbb{E}(X_k)\right)=\overline{\lim}\mathbb{E}(X_n).$$

■

Théorème de la convergence dominée (TCD):

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r.de signe quelconque, intégrables et convergente vers une

v.a.r. intégrable X. On suppose en outre que $|X_n|\leq Y$, où Y est une v.a.r.positive et *intégrable. Alors on a*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X)$$

Preuve:

Soit $(V_n)_{n\geq 1}$ la suite de suite de *v.a.r.* positives et intégrables définie par $V_n := Y - X_n$, convergente vers la *v.a.r.* $V := Y - X$. Remarquant que

$$\underline{\lim} V_n = Y - \overline{\lim} X_n \text{ et que } \overline{\lim} V_n = Y - \underline{\lim} X_n,$$

d'où d'aprés le lemme de Fatou appliqué à la suite $(V_n)_{n\geq 1}$,

$$\mathbb{E}(\underline{\lim} V_n) \leq \underline{\lim} \mathbb{E}(V_n)$$

et

$$\mathbb{E}\left(\overline{\lim} V_n\right) \geq \overline{\lim} \mathbb{E}(V_n)$$

Il résulte du fait que $\overline{\lim} X_n = \underline{\lim} X_n = X$, que

$$\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y) - \overline{\lim} \mathbb{E}(X_n)$$

et

$$\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(Y) - \underline{\lim} \mathbb{E}(X_n)$$

d'où en éliminant $\mathbb{E}(Y)$ et en combinant les deux inégalités,

$$\overline{\lim} \mathbb{E}(X_n) \leq \mathbb{E}(X) \leq \underline{\lim} \mathbb{E}(X_n),$$

et comme $\underline{\lim} \mathbb{E}(X_n) \leq \overline{\lim} \mathbb{E}(X_n)$, alors

$$\overline{\lim} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X) = \underline{\lim} \mathbb{E}(X_n).$$

Il s'en suit que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X).$$

■