Intégrales stochastiques

Présenté par : M. HAMMAD

1.1 Intégrales stochastiques

Le but de l'intégrale stochastique est de donner un sens à des équations de la forme :

$$\frac{dX_t}{dt} = f(X) + g(X)\frac{dB_t}{dt} \tag{1.1}$$

Par exemple, si $f \equiv 0$ et $g \equiv 1$, on devrait retrouver, $X_t = X_0 + B_t$, décrivant le mouvement d'une particule Brownienne.

Le problème est que, les trajectoires du mouvement Brownien sont presque sûrement nulles par différentiabilité, c.à.d, si B_t est un mouvement Brownien, $\nexists t \in \mathbb{R}^+$ telque $\frac{dB_t}{dt}$ ait un sens.

Comme dans le cas des équations différentielles ordinaires, on interprête une solution de l'équation différentielle (1.1) comme une solution de l'équation intégrale

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(X_s)ds + \int_0^t g(X_s)dB_s. \tag{1.2}$$

C'est à la seconde intégrale qu'il s'agit de donner un sens mathématique. Si $s \mapsto g(X_s)$ était différentiable, on pourrait le faire à l'aide d'une intégration par parties, mais ce n'est en général pas le cas. Itô a donné une autre définition de l'intégrale stochastique, qui s'applique à une classe beaucoup plus vaste d'intégrants (et donne le même résultat que l'intégration par parties dans le cas différentiable).

1.2 Construction de l'intégrale stochastique

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t-$mouvement Brownien standard sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$. Nous allons donner un sens à l'intégrale $\displaystyle\int_0^t g(s,\omega)dB_s$ pour une classe de processus $g(s,\omega)$ adaptés à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

1.2.1 Première étape : Construction de l'intégrale stochastique sur un ensemble de processus dits élémentaires

Définition 1.2.1.

Soit $T \in \mathbb{R}^+$. On appelle processus élémentaire $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus de la forme :

$$H_t(\omega) = \sum_{i=1}^{p} \phi_i(\omega) \cdot \mathbb{1}_{]t_{i-1},t_i]}(t) \tag{1.3}$$

où $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = T$ est une partition de $[0, T]$ et ϕ_i est $\mathcal{F}_{t_{i-1}}-$mesurable et bornée.

Définition 1.2.2.

L'intégrale stochastique d'un processus élémentaire H est le processus continu noté $(I(H)_t)_{0\leq t\leq T}$ défini par :

$$\text{Si } t \in]t_k, t_{k+1}] : I(H)_t = \sum_{i=1}^{k} \phi_i(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + \phi_{k+1}(B_t - B_{t_k}). \tag{1.4}$$

On notera $I(H)_t \triangleq \int_0^t H_s dB_s$.

Il est aisé de vérifier les propriétés de linéarité suivantes :

Proposition 1.2.1.

1. *Pour deux processus élémentaires H^1 et H^2,*
$$\int_0^t \left(H_s^1 + H_s^2\right) dB_s = \int_0^t H_s^1 dB_s + \int_0^t H_s^2 dB_s. \tag{1.5}$$
2. *Pour toute constante c,*
$$\int_0^t (cH_s)\, dB_s = c \int_0^t H_s dB_s. \tag{1.6}$$
3. *L'intégrale (1.4) est une fonction continue de t.*

On a le résultat essentiel suivant :

Proposition 1.2.2.

Si $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ est un processus élémentaire :

1. $\left(\int_0^t H_s dB_s\right)_{0\leq t\leq T}$ *est $\mathcal{F}_t-$martingale.*
2. $\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t H_s dB_s\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t H_s^2 ds\right)$.
3. $\mathbb{E}\left(\sup_{t\leq T} |\int_0^t H_s dB_s|^2\right) \leq 4\mathbb{E}\left(\int_0^T H_s^2 ds\right)$.

Démonstration 1.2.1.

Exercice.

1.2.2 Deuxième étape : Construction de l'intégrale stochastique sur une classe de processus adaptés

Soit $\mathcal{H} = \{(H_t)_{0 \leq t \leq T}$, un processus adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, $\mathbb{E}(\int_0^T H_s^2 ds) < +\infty\}$.

Proposition 1.2.3.

Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un $\mathcal{F}_t-$mouvement Brownien. Alors il existe une unique application linéaire J de $\mathcal{H}$ dans l'espace des $\mathcal{F}_t-$martingales continues définies sur $[0, T]$ telle que :

1. *Si $(H_t)_{t \leq T}$ est un processus élémentaire, $\mathbb{P}.p.s$ pour tout $0 \leq t \leq T$ $J(H)_t = I(H)_t$.*
2. *Si $t \leq T$ $\mathbb{E}(J(H)_t^2) = \mathbb{E}(\int_0^t H_s^2 ds)$.*

Cette application linéaire est unique au sens suivant, si J et $J^{'}$ sont deux prolongements linéaires vérifiants les propriétés précédentes alors :

$$\mathbb{P}.p.s\ \forall\, 0 \leq t \leq T,\ J(H)_t = J^{'}(H)_t. \tag{1.7}$$

On note, si $H \in \mathcal{H}$ $\int_0^t H_s dB_s = J(H)_t$,

cette intégrale stochastique vérifie la propriété suivante :

Proposition 1.2.4.

Si $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processus de $\mathcal{H}$ alors :

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t \leq T} |\int_0^t H_s dB_s|^2\right) \leq 4\mathbb{E}\left(\int_0^T H_s^2 ds\right). \tag{1.8}$$

Nous aurons besoin d'un résultat permettant de relaxer l'hypothèse d'intégrabilité portant sur (H_s).

Posons :

$\widetilde{\mathcal{H}} = \{(H_s)_{0 \leq s \leq T}$, un processus adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, $\int_0^T H_s^2 ds < +\infty$ $\mathbb{P}.p.s\}$.

La proposition suivante permet de prolonger l'intégrale stochastique de $\mathcal{H}$ à $\widetilde{\mathcal{H}}$.

Proposition 1.2.5.
Il existe une unique application linéaire $\widetilde{J}$ de l'espace $\widetilde{H}$ dans l'espace vectoriel des processus continus définis sur $[0,T]$ telle que :

1. *Propriété de prolongement :*
   Si $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ est un processus élémentaire alors :

$$\mathbb{P}.p.s\ \forall\, 0 \leq t \leq T,\ \widetilde{J}(H)_t = I(H)_t. \tag{1.9}$$

2. *Propriété de continuité :*
   Si $(H^n)_{n\geq 0}$ est une suite de processus de $\widetilde{H}$ telle que $\int_0^T H_s^{n2} ds \to 0$ en probabilité, alors :

$$\sup_{t\leq T} |\widetilde{J}(H^n)_t| \to 0 \text{ en probabilité.} \tag{1.10}$$

On note toujours $\int_0^t H_s dB_s = \widetilde{J}(H)_t$.

Remarque 1.2.1.
Dans ce cas $\left(\int_0^t H_s dB_s\right)_{0\leq t\leq T}$ n'est pas nécessairement une martingale.

Résumé
Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t-$mouvement Brownien et $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus $\mathcal{F}_t-$adapté. On peut définir l'intégrale stochastique $\left(\int_0^t H_s dB_s\right)_{0\leq t\leq T}$ dès que $\int_0^T H_s^2 ds < +\infty$ $\mathbb{P}.p.s.$

Le processus $\left(\int_0^t H_s dB_s\right)_{0\leq t\leq T}$ est une martingale si $\mathbb{E}\left(\int_0^T H_s^2 ds\right) < +\infty$. cette condition n'est cependant pas nécessaire car la condition

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T H_s^2 ds\right) < +\infty \Longleftrightarrow \mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} \left(\int_0^t H_s dB_s\right)^2\right) < +\infty.$$

et que dans ce cas on a l'égalité :

$$\mathbb{E}[\left(\int_0^T H_s dB_s\right)^2] = \mathbb{E}\left(\int_0^T H_s^2 ds\right).$$