Faculté des Mathématiques **USTHB** | **Année 2013/2014**
Master 1 ISMTID | 01/06/2013
Module: **Processus Stochastiques 2** | **Durée: 1h 30m**

Epreuve Finale

Exercice 1 ***(6 pts)*** ***A/*** *Soit* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ...$*des variables aléatoires indépendantes d'espérance nulle et de variance* $Var[\varepsilon_i] = \sigma_i^2$*. Posons*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i, \quad \text{et } T_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$$

Montrez que $S_n^2 - T_n^2$ *est une martingalepar rapport à* $\mathcal{F}_n = \sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$
B/ *Soit* $W(t)$ *un mouvement Brownien avec la filtration* $\mathcal{F}_t = \sigma(W(s), s \leq t)$ *et* $(\phi_k)_{k\geq 0}$ *une suite de variables aléatoire de carrés intégrables et* $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n$ *tels que* ϕ_k *est* $\mathcal{F}_{t_k}$ *mesurable. Soit*

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \phi_k \ 1_{[t_k, t_{k+1}[}(t).$$

Déterminer l'integrale de Itô $I(f)$ *de* f*.*

Exercice 2 ***(8 pts)*** *On considère une suite* $(X_n)_{n\geq 1}$ *de v.a. réelles indépendantes de même loi normale* $N(m, \sigma^2)$ *avec* $m < 0$ *et on pose* $S_0 = X_0 = 0$, $S_n = X_1 + ... + X_n$ *et* $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, ..., X_n)$.
1/ *Soit* $Z = \sup_{n\geq 0} S_n$*. Montrer en utilisant la loi forte des grand nombres que* $P(Z < +\infty) = 1$.
2/ *Utilisez* $E(e^{\alpha X_1}) = \exp\left(\alpha^2 \frac{\sigma^2}{2} + \alpha m\right)$, α *réel, pour avoir une expression pour* $E\left(e^{\alpha S_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n\right)$.
3/ *Montrer qu'il existe un* $\alpha_0 > 0$ *unique tel que* $\left(e^{\alpha_0 S_n}\right)_{n\geq 0}$ *soit une martingale.*
4/ *Montrer que, pour tout* $a > 1$*, on a* $P\left(e^{\alpha_0 Z} > a\right) \leq \frac{1}{a}$.
5/ *Montrer que pour tout* $t > 0$, $P(Z > t) \leq e^{-\alpha_0 t}$.

Exercice 3 ***(6 pts)*** *Soit* $W(t)$ *un mouvement Brownien et* $c > 0$.
1/ *Montrer que* $V(t) = \frac{1}{c} W(c^2 t)$ *est un mouvement Brownien.*
2/ *Soit* S_t *le prix d'une action en bourse au temps* t*. On suppose que le prix d'une action est modélisé par un mouvement Brownien geometrique* $S(t) = S(0) \exp(\mu t + \sigma W(t))$*. Supposons que les valeurs des paramètres sont* $\mu = 0.055$ *et* $\sigma = 0.07$*. Sachant que* $S(5) = 100$*, trouver la probabilité que le prix* $S(10)$ *soit supérieur à* 150.