Scanned by VueScan - get a free trial at www.hamrick.com

Université Badji Mokhtar - Annaba
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

# CONCOURS D'ACCES EN PREMIERE ANNEE DOCTORAT (LMD) 2015

**Epreuve 1 :** Calcul Stochastiques
Durée 1h30

**Exercice 1.**

On considère un actif à risque, de prix $S_n$ à l'instant $n$, $0 \leq n \leq N$, et un actif sans risque de rendement certain $r$ sur une période, tel que $S_n^0 = (1+r)^n$.

On fait les hypothèses suivantes sur l'évolution du cours de l'actif risqué : entre deux périodes consécutives, la variation des cours est soit $a$, soit $b$ avec $-1 < a < b$ :

$$S_{n+1} = \begin{cases} S_n(1+a) \\ S_n(1+b) \end{cases}.$$

Le cours initial $S_0$ est donné. L'espace naturel des résultats possibles est donc $\Omega = \{1+a, 1+b\}^N$, chaque $N$-uple représentant les valeurs successives de $S_{n+1}/S_n, n = 0, 1, \cdots, N-1$. On prend naturellement : $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, et $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. La tribu $\mathcal{F}_n$ sera, pour $n = 0, 1, \cdots, N$, la tribu $\sigma(S_1, \cdots, S_n)$ engendrée par les variables aléatoires $S_1, \cdots, S_n$. L'hypothèse définissant $\mathbb{P}$ à une équivalence près est que tous les singletons de $\Omega$ ont une probabilité non nulle.

Posons les variables aléatoires $T_n = S_n/S_{n-1}$, pour $n = 0, 1, \cdots, N$. Si $(x_1, \cdots, x_N)$ est un élément de $\Omega$, on a $\mathbb{P}\{(x_1, \cdots, x_N)\} = \mathbb{P}(T_1 = x_1, \cdots, T_N = x_N)$. La connaissance de $\mathbb{P}$ équivaut donc à celle de la loi du $N$-uple $(T_1, T_2, \cdots, T_N)$. Notons aussi que, pour $n \geq 1, \mathcal{F}_n = \sigma(T_1, \cdots, T_n)$.

1. Montrer que le prix actualisé $\widetilde{S}_n = \frac{S_n}{(1+r)^n}$ est une martingale sous $\mathbb{P}$ si et seulement si $\mathbb{E}[T_{n+1}|\mathcal{F}_n] = 1 + r, \forall n \in \{0, 1, \cdots, N-1\}$.

2. On suppose que $r \in ]a, b[$ et on pose $p = (b-r)/(b-a)$. Montrer que $\left(\widetilde{S}_n\right)$ est une martingale sous $\mathbb{P}$ si et seulement si les variables aléatoires $T_1, T_2, \cdots, T_N$ sont inépendantes et équidistribuées, leur loi commune étant donnée par : $\mathbb{P}(T_1 = 1+a) = p = 1 - \mathbb{P}(T_1 = 1+b)$

**Exercice 2.**

On considère l'équation

$$dX_t = a(t)X_t dt + b(t)dt + c(t)dB_t,$$

où $a(t), b(t)$ et $c(t)$ sont des processus adaptés.
Résoudre cette équation par la méthode de la variation de la constante, c'est-à-dire :

1. Soit $\alpha(t) = \int_0^t a(s)\, ds$. Vérifier que $X_0 e^{\alpha(t)}$ est la solution de l'équation homogène, c'est-à-dire avec $b = c = 0$.

2. Poser $Y_t = e^{-\alpha(t)} X_t$ et calculer $dY_t$ à l'aide de la formule d'Itô.

3. En déduire $Y_t$ puis $X_t$ sous forme intégrale.

4. Résoudre l'équation différentiell stochastique

$$dX_t = \frac{-1}{1+t} X_t dt + \frac{1}{1+t} dB_t, X_0 = 0.$$