CORRIGE TYPE

EMD Modèle de Regression

1/ Avec les données de l'Exo 1 le modèle s'ecrit $y = X\beta + \varepsilon$ $y \in \mathbb{R}^n$ $\in \mathbb{R}^n$ X est $n \times k$ et $\beta \in \mathbb{R}^k$ avec $E(X'\varepsilon) = 0$ et $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_n)$

$\hat{\beta}$ l'estimateur des moindres carrés sera solution de $\min \sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2$:

$\boxed{2pt}$

$$\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2 = \varepsilon'\varepsilon = (y - X\beta)'(y - X\beta) = S(\beta)$$

$$= y'y - \beta'X'y - y'X\beta + \beta'X'X\beta$$

$\beta'X'y$ étant un scalaire il egale sa transp

donc $\beta'X'y = y'X\beta \Rightarrow \sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2 = y'y - 2\beta'Xy + \beta'X'X\beta$

$\hat{\beta}$ sera donc solution des equations normales

$$\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} = 0$$ et la matrice des derivées seconde calculée en $\hat{\beta}$ doit être d.p.

$$\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} = \frac{\partial (y'y)}{\partial \beta} - 2\frac{\partial}{\partial \beta}(\beta'X'y) + \frac{\partial}{\partial \beta}(\beta'X'X\beta)$$

$$= 0 - 2X'y - 2X'X\beta = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$$

$$\frac{\partial^2 S(\beta)}{\partial \beta \partial \beta'} = 2X'X \quad \text{qui est } k \times k$$

(2)

Soit $a \in \mathbb{R}^k / a \neq 0$

$a'X'Xa$

$= z'z$ avec $z = Xa$

$= \sum_{t=1}^{n} z_t^2 \geq 0$

si $X'X$ est d.p alors $\forall a \in \mathbb{R}^k / a \neq 0$

$a'X'Xa > 0$

Montrons alors que si $rg(X) = k \Rightarrow \sum_{t=1}^{n} z_t^2 > 0$

<u>par l'absurde</u> si $\exists a \in \mathbb{R}^k / a \neq 0$ tel que

$\sum_{t=1}^{k} z_t^2 = 0 \Longrightarrow Xa = 0$ avec X $n \times k$

$\Longrightarrow \exists a \neq 0$ solution du système de n equation ave k inconnues $(a_1 .. , a_k)$

$\Longrightarrow rg(X) < k$

2/ $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y = (X'X)^{-1}X'(X\beta + \varepsilon)$

$= (X'X)^{-1}(X'X)\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon$

$\boxed{1pt}$

$= \beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon \Longrightarrow$

$E(\hat{\beta}) = \beta + E[(X'X)^{-1}X'\varepsilon) = \beta$ car $E(X'\varepsilon) = 0$

Scanné avec CamScanner

3/ avec $e = y - \hat{y}$ ③

on obtient une réalisation de ε $\hat{y} = X\hat{\beta}$

$$e = y - X((X'X)^{-1}X'y = \underbrace{(I_n - X(X'X)^{-1}X')}_{M}y$$

$$y = X\beta + \varepsilon$$

$$e = M(X\beta+\varepsilon) = MX\beta + M\varepsilon \quad \boxed{2pt}$$

on vérifie que $MX = 0 \Rightarrow e = M\varepsilon$

on vérifie que M (symétrique) est idempotente

$$\Rightarrow rg(M) = tr(M) = tr(I_n) - tr(X(X'X)^{-1}X'$$

$$tr(AB) = tr\,BA \Rightarrow tr(X(X'X)^{-1}X' = \underbrace{tr(X'X(X'X)^{-1}}_{k}$$

$$(X'X)(X'X)^{-1} = I_k \Rightarrow tr(M) = n-k$$

M se décompose avec $M = C'\Lambda C$

Λ. sa matrice des valeurs propres $\{\lambda_i\}_{i \leq}$

M idempotente $\Rightarrow \lambda_i = \begin{cases} 1 \\ \text{ou} \\ 0 \end{cases}$

le nombre de v.p. égales à 1 est tr(

C est la matrice des vecteurs propres

elle est hortogonale $C' = C^{-1}$

Soit $\frac{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}{\sigma^2} = \frac{e'e}{\sigma^2} = \frac{\varepsilon' M' M \varepsilon}{\sigma^2} = \frac{\varepsilon' M \varepsilon}{\sigma^2}$ (4)

$$= \frac{\varepsilon' C' \Lambda C \varepsilon}{\sigma^2} = \frac{\varepsilon' C'}{\sigma} \Lambda \frac{C \varepsilon}{\sigma}$$

Soit $Z = \frac{C\varepsilon}{\sigma}$ $\quad \varepsilon \sim \mathcal{N}(\ ) \Rightarrow Z \sim \mathcal{N}$

$E(Z) = \frac{C}{\sigma} E(\varepsilon) = 0 \quad Var(Z) = \frac{C}{\sigma} Var(\varepsilon) \frac{C'}{\sigma}$

$Var(Z) = \frac{C}{\sigma} \sigma^2 I_n \frac{C'}{\sigma} = \sigma^2 \frac{CC'}{\sigma^2} = I_n$

$\Rightarrow Z \sim \mathcal{N}(0, I_n) \Rightarrow Z_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ $\forall i$

$\Rightarrow \frac{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}{\sigma^2} = \sum_{t=1}^{n} \lambda_i Z_i^2$ avec $n-k$

valeurs de $\lambda_i = 1$ les autres $= 0$

$\Rightarrow \sum_{t=1}^{n} \lambda_i Z_i^2$ est une somme de carrés

de $(n-k)$ variables normales centrées réduites

$$\frac{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}{\sigma^2} = \chi^2_{n-k} \Rightarrow E\left(\frac{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}{\sigma^2}\right) = n-k$$

Soit $\frac{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}{\sigma^2} = \frac{e'e}{\sigma^2} = \frac{\varepsilon' M' M \varepsilon}{\sigma^2} = \frac{\varepsilon' M \varepsilon}{\sigma^2}$ (4)

$= \frac{\varepsilon' C' \Lambda C \varepsilon}{\sigma^2} = \frac{\varepsilon' C'}{\sigma} \Lambda \frac{C \varepsilon}{\sigma}$

Soit $Z = \frac{C\varepsilon}{\sigma}$ $\quad \varepsilon \sim \mathcal{N}(\ ) \Rightarrow Z \sim \mathcal{N}$

$E(Z) = \frac{C}{\sigma} E(\varepsilon) = 0 \quad Var(Z) = \frac{C}{\sigma} Var(\varepsilon) \frac{C'}{\sigma}$

$Var(Z) = \frac{C}{\sigma} \sigma^2 I_n \frac{C'}{\sigma} = \sigma^2 \frac{CC'}{\sigma^2} = I_n$

$\Rightarrow Z \sim \mathcal{N}(0, I_n) \Rightarrow Z_i \sim \mathcal{N}(0,1)$
$\forall i$

$\Rightarrow \frac{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}{\sigma^2} = \sum_{t=1}^{n} \lambda_i Z_i^2$ avec $n-k$

valeurs de $\lambda_i = 1$ les autres $= 0$

$\Rightarrow \sum_{t=1}^{n} \lambda_i Z_i^2$ est une somme de carrés

de $(n-k)$ variables normales centrées rédui

$\Rightarrow \frac{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}{\sigma^2} = \chi^2_{n-k} \Rightarrow E\left(\frac{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}{\sigma^2}\right) = n-k$

$\Rightarrow E(\sum e_t^2) = \sigma^2 (n-k)$ (5)

Donc pour obtenir l'estimateur sans biais de σ^2 on prendra $\frac{1}{n-k} \sum_{t=1}^{n} e_t^2$

4/ La région d'acceptation, sous H_0, sera avec le seuil α

$$A_\alpha = \{ e_1, e_2, \dots, e_n / \hat{\sigma}^2 \leq d \}$$ $\boxed{2 pt}$

avec $P(\hat{\sigma} \leq d / H_0) = 1 - \alpha$

$$P(\hat{\sigma}^2 \leq d / \sigma^2 = \sigma_0^2) = P\left(\frac{n-k}{\sigma_0^2} \hat{\sigma}^2 \leq \frac{n-k}{\sigma_0^2} d \right)$$

$$= P\left(\frac{n-k}{\sigma_0^2} \hat{\sigma}^2 \leq t_\alpha \right)$$

$$\frac{n-k}{\sigma_0^2} \hat{\sigma}^2 \sim \chi^2_{n-k}$$

Soit t_α la ~~sol~~ de $P(\chi^2_{n-k} \leq t_\alpha)$

$$\Rightarrow d = \frac{\sigma_0^2}{n-k} t_\alpha$$

Scanné avec CamScanner

5/ $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y = (X'X)^{-1}X'(X\beta+\varepsilon)$ $\boxed{3\text{ pt}}$

$\hat{\beta} = \beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon$

$\varepsilon \sim \mathcal{N}(\;,\;) \Rightarrow \hat{\beta} \sim \mathcal{N}(\;,\;)$

$E(\hat{\beta}) = \beta$ $\quad Var(\hat{\beta}) = Var(\hat{\beta}-\beta) =$

$Var((X'X)^{-1}X'\varepsilon) = (X'X)^{-1}X' Var(\varepsilon) \times (X'X)^{-1}$

$= (X'X)^{-1}X'\sigma^2 I_n X(X'X)^{-1} = \sigma^2 (X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1}$

$= \sigma^2 (X'X)^{-1} \Rightarrow \hat{\beta} = \mathcal{N}(\beta, \sigma^2 (X'X)^{-1})$

6/ Soit $(X'X)^{-1} = D \Rightarrow \hat{\beta}_i \; \mathcal{N}(\beta_i, \sigma^2 D_{ii})$ $\boxed{2\text{ pt}}$

$\Rightarrow Var(\hat{\beta}_i) = \sigma^2 D D_{ii}$ $\quad \hat{\beta}_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 D_{ii})$

Sous l'hypothèse H_0 $\beta_i = 0$

On rappelle que $\hat{\beta}$ et $\hat{\sigma}^2$ sont indépendants

$\frac{n-k}{\sigma^2}\hat{\sigma}^2 \sim \chi^2_{n-k} \Rightarrow \dfrac{\frac{\hat{\beta}_i}{\sqrt{\sigma^2 D D_i}}}{\sqrt{\frac{1}{n-k}\frac{(n-k)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}}} \sim$ student à $n-k$ d.l

6

5/ $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y = (X'X)^{-1}X'(X\beta+\varepsilon)$

$\hat{\beta} = \beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon$ $\boxed{3 pt}$

$\varepsilon \sim \mathcal{N}(\ ,\ ) \Rightarrow \hat{\beta} \sim \mathcal{N}(\ ,\ )$

$E(\hat{\beta}) = \beta$ $Var(\hat{\beta}) = Var(\hat{\beta}-\beta) =$

$Var((X'X)^{-1}X'\varepsilon) = (X'X)^{-1}X' Var(\varepsilon) X (X'X)^{-1}$

$= (X'X)^{-1}X'\sigma^2 I_n X(X'X)^{-1} = \sigma^2 (X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1}$

$= \sigma^2 (X'X)^{-1} \Rightarrow \hat{\beta} = \mathcal{N}(\beta, \sigma^2 (X'X)^{-1})$

/ Soit $(X'X)^{-1} = D \Rightarrow \hat{\beta}_i\ \mathcal{N}(\beta_i, \sigma^2 D_{ii})$

$\Rightarrow Var(\hat{\beta}_i) = \sigma^2 DD_{ii}$ $\boxed{2 pt}$

Sous l'hypothèse H_0 $\beta_i = 0$ $\hat{\beta} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 D_{ii})$

On rappelle que $\hat{\beta}$ et $\hat{\sigma}^2$ sont indépendants

$\frac{n-k}{\sigma^2}\hat{\sigma}^2 \sim \chi^2_{n-k} \Rightarrow \frac{\frac{\hat{\beta}_i}{\sqrt{\sigma^2 DD_i}}}{\sqrt{\frac{1}{n-k}\frac{n-k\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}}} \sim$ student à $n-k$ d.l

Donc $\dfrac{\hat{\beta}_i}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 DD_{ii}}} \sim$ Student à $n-k$ d.l

Donc la region d'acceptation du test $H_0 : \beta_i = 0$ contre

$H_1 : \beta_i \neq 0$ au seuil α

donne $A_\alpha = \{ y_1 \ldots y_n, x_1 \ldots x_i \ldots x_{k} / |\hat{\beta}_i| < d \}$

avec $P(\hat{\beta}_i \leq d / H_0) = 1 - \alpha$

$$P(\hat{\beta}_i \leq d / H_0) = P\left(\frac{\hat{\beta}_i}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 DD_i}} \leq \underbrace{\frac{d}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 DD_i}}}_{t_\alpha}\right)$$

soit, $P(\cancel{Z} \leq t_\alpha) = 1 - \alpha$, Z de Student à $n-k$ d.l

$\Rightarrow A_\alpha = \{ y_1 \ldots y_n, x_1 \ldots x_{ki} / \hat{\beta}_i \leq \sqrt{\hat{\sigma} DD_{ii}}\, t_\alpha$

8

1/ Pour cet exercice le seul calcul à faire était $(X'X)^{-1}$

avec $X = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_{10} & 1 \end{pmatrix}$ $X'X = \begin{pmatrix} \Sigma x_t^2 , & \Sigma x_t \\ \Sigma x_t & 10 \end{pmatrix}$

$\det(X'X) = 10 \Sigma x_t^2 - (\Sigma x_t)^2 = 10 \, Var(x)$

$(X'X)^{-1} = \frac{1}{\det(X'X)} \begin{pmatrix} 10 & -\Sigma x_t \\ -\Sigma x_t & \Sigma x_t^2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0.15 & -0.71 \\ -0.71 & 3.33 \end{pmatrix}$

$X'y = \begin{pmatrix} \Sigma x_t y_t \\ \Sigma y_t \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 763 \\ 165 \end{pmatrix}$ (*) $\boxed{2pt}$

on obtient $\hat{\beta}_1 \simeq 2.43$ $\hat{\beta}_2 \simeq 5.48$

$\boxed{3pt}$

/ $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{8} \sum_{t=1}^{10} e_t^2$

$\Sigma e_t^2 = y'My = y'\left[I - X(X'X)^{-1}X'\right]y$

$= \underbrace{y'y}_{\Sigma y_t^2} - \underbrace{y'X}_{(*)}\underbrace{(X'X)^{-1}}_{\text{calculé}}\underbrace{X'y}_{(*)} \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = 0.022$

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}) = 0.022 \begin{pmatrix} 0.15 & -0.71 \\ -0.71 & 3.3 \end{pmatrix}$$ 9

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1) = 0.022 \times 0.15$$ $\boxed{1pt}$

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2) = 0.022 \times 3.3$$

4/ Si La quantité d'engrais est non significatif $\Rightarrow \beta_1 = 0$ $\boxed{2pt}$

On teste alors $H_0 : \beta_1 = 0$ contre

$H_1 : \beta_1 \neq 0$

$$A_\alpha = \left\{ y_1 \ldots y_{10}, x_1 \ldots x_{10} \,/\, |\hat{\beta}_1| \leq d \right\}$$

avec $d = \sqrt{0.022 \times 0.15}\; t_\alpha$

t_α étant sol de $P(Z \leq t_\alpha) = 1 - \alpha$

Z de student à 8 d.l.

Scanné avec CamScanner