REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

Belhannache Farida

Mesure et intégration

TABLE DES MATIÈRES

Notations

Dans tout ce cours on utilisera les notaions suivantes

$\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

$\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs.

$\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

$\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres naturels.

$\mathbb{N}^*$ l'ensemble des nombres naturels non nuls.

$\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs.

$\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationels.

$\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

$\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles d'un ensemble E.

$\emptyset$ l'ensemble vide.

CHAPITRE 1

Tribus et Mesures

1.1 Rappel sur la théorie des ensembles

Définition 1.1.1 *On appelle ensemble toute collection bien définie d'objets et les objets de cet ensemble sont appelés les éléments de l'ensemble.*

Remarque 1.1.1 **1)** *L'ensemble noté $\emptyset$ où $\{\}$ est l'ensemble vide c'est à dire l'ensemble qui ne cotient aucun élément.*

2) $E = \{\emptyset\}$ *n'est pas vide.*

3) *On écrit* $E = \{x, y, z\}$ *si* x, y, z *sont les éléments de* E.

4) *On écrit* $x \in E$ *si* x *est un élément de l'ensemble* E, *sinon on écrit* $x \notin E$.

Exemple 1.1.1 **1)** *L'intervalle* $]-3, 8]$ *est l'ensemble* $\{x \in \mathbb{R}, -3 < x \leq 8\}$.

2) *Soit l'ensemble* $E = \{x \in \mathbb{R}, x^2 = -5\}$, *alors* $E = \emptyset$.

Définition 1.1.2 *Soient E et F deux ensembles. On dit que F est un sous-ensemble de E et on écrit $F \subset E$ si tout élément de F est un élément de E, c'est à dire*

$$F \subset E \Leftrightarrow \forall x \in F, x \in E.$$

Exemple 1.1.2

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}.$$

Définition 1.1.3 *Soit E un ensemble. On appelle ensemble des parties de E l'ensemble de tous les sous-ensembles de E et on le note $\mathcal{P}(E)$.*

Remarque 1.1.2 *Soit E un ensemble, alors on a toujours $\emptyset, E \in \mathcal{P}(E)$.*

Définition 1.1.4 *Soient E et F deux ensembles. On dit que E et F sont égaux et on écrit $E = F$ si on a $E \subset F$ et $F \subset E$.*

Proposition 1.1.1 *Soient E, F et G trois ensembles. Si $E \subset F$ et $F \subset G$, alors $E \subset G$.*

Preuve. Supposons que $E \subset F$ et $F \subset G$. Soit $x \in E$, alors $x \in F$ car $E \subset F$, donc $x \in G$ car $F \subset G$, d'où $E \subset G$. ■

Définition 1.1.5 *Soient E et F deux ensembles.*

1) *On appelle réunion de E et F et on le note $E \cup F$, l'ensemble des éléments qui appartiennent à E ou à F. C'est à dire $E \cup F = \{x,\ x \in E \text{ ou } x \in F\}$*

2) *On appelle intersection de E et F et on le note $E \cap F$, l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à E et à F. C'est à dire $E \cap F = \{x,\ x \in E \text{ et } x \in F\}$.*

3) *On dit que E et F sont disjoints si $E \cap F = \emptyset$.*

Définition 1.1.6 *Soient E un ensemble et $\{F_i\}_{1 \le i \le n}$, $n \in \mathbb{N}^\star$ une famille de parties de E. On dit que cette famille forme une partition de E si on a*

a) $F_i \neq \emptyset$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

b) $F_i \cap F_j = \emptyset$, $\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}, i \neq j$.

c) $E = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$.

Exemple 1.1.3 *Soient* $E = \mathbb{R}$, $F_1 = \mathbb{R}_+^\star$, $F_2 = \mathbb{R}_-^\star$ *et* $F_3 = \{0\}$, *alors la famille* $\{F_1, F_2, F_3\}$ *forme une partition de* E.

Proposition 1.1.2 *Soient E, F et G trois ensembles. Alors*

a) $E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$.

b) $E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$.

Définition 1.1.7 *Soient E un ensemble et F un sous-ensemble de E. On appelle complémentaire de F, l'ensemble des éléments qui n'appartiennent pas à F et on le note* F^c.

Proposition 1.1.3 *Soient E un ensemble et F et G deux sous-ensembles de E. Alors*

1) $(F^c)^c = F$.

2) $(F \cup G)^c = F^c \cap G^c$.

3) $(F \cap G)^c = F^c \cup G^c$.

Définition 1.1.8 *Soient E, F deux ensembles et* $A, B \in \mathcal{P}(E)$.
On appelle différence de E et F, l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à F et on le note $E \setminus F$, *c'est à dire* $E \setminus F = \{x,\ x \in E \text{ et } x \notin F\}$.
On appelle différence symétrique de A et B et on la note $A \triangle B$, *l'ensemble des éléments appartenant soit à A, soit à B, mais pas aux deux ensembles à la fois, c'est à dire*

$$A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) = \{x \in E,\ x \in A \text{ et } x \notin B\} \cup \{x \in E,\ x \in B \text{ et } x \notin A\}.$$

Proposition 1.1.4 *Soient E un ensembles et* $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. *Alors*

1) $A \triangle B = B \triangle A$, *c'est à dire la différence symétrique est commutative.*

2) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$, *c'est à dire la différence symétrique est associative.*

3) $A \triangle B = A \triangle C \Leftrightarrow B = C$.

4) $A \triangle B = \emptyset \Leftrightarrow B = A$.

5) $A \triangle B = A \Leftrightarrow B = \emptyset$.

6) $A \triangle B = E \Leftrightarrow B = A^c$.

7) $A \triangle B = A^c \Leftrightarrow B = E$.

8) $A \triangle B = A \cap B \Leftrightarrow A = B = \emptyset$.

9) $A \triangle B = A \cup B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.

10) $(A \triangle B)^c = A \triangle B^c$.

11) $(A \triangle B) \cup (A \cap B) = A \cup B$.

Exemple 1.1.4 *Soient* $E = \{0, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $F = \{2, 4, 6, 8\}$ *et* $G = \{4, 5, 6, 7\}$. *Alors*

* $F \subset E$ *et* $G \subset E$.

* $F \cap G = \{4, 6\}$ *et* $F \cup G = \{2, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

* $F^c = \{0, 5, 7, 9, 10\}$ *et* $G^c = \{0, 2, 8, 9, 10\}$.

* $F \setminus G = \{2, 8\}$ *et* $G \setminus F = \{5, 7\}$.

* $F \triangle G = \{2, 5, 7, 8\}$.

Lemme 1.1.1 *Soient E un ensemble et F et G deux sous-ensembles de E. Alors*

1) $F \setminus G = F \cap G^c$.

2) *Si $F \subset G$, alors $G^c \subset F^c$.*

Preuve. Soient E un ensemble et F et G deux sous-ensembles de E. On a

1)

$$\begin{aligned} F \setminus G &= \{x,\ x \in F \text{ et } x \notin G\} \\ &= \{x,\ x \in F \text{ et } x \in E \text{ et } x \notin G\},\ \text{car } F \subset E \\ &= \{x,\ x \in F\} \cap \{x,\ x \in E \text{ et } x \notin G\} \\ &= F \cap G^c. \end{aligned}$$

2) Supposons que $F \subset G$. Soit $x \in G^c$, alors $x \in E$ et $x \notin G$, donc $x \in E$ et $x \notin F$, car $F \subset G$, alors $x \in F^c$, d'où $G^c \subset F^c$.

■

Définition 1.1.9 *soit E un ensemble. On dit que E est fini s'il est vide ou s'il contient n éléments où $n \in \mathbb{N}^*$ et dans ce cas n est appelé cardinal de E et on écrit $Card(E) = n$.*
Sinon E est infini.

Exemple 1.1.5 **1)** $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ *sont des ensembles infinis.*

2) $E = \{0, 2, 4, 6\}$ *est un ensemble fini et* $Card(E) = 4$.

3) *L'intervalle* $[-5, 6]$ *est un ensemble infini.*

Remarque 1.1.3 *Soient E un ensemble fini tel que $Card(E) = n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Alors $Card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.*

Remarque 1.1.4 *Soient E et F deux ensembles finis, alors*

(i) $Card(E \cup F) = Card(E) + Card(F) - Card(E \cap F)$.

(ii) *Si E et F sont disjoints, alors* $Card(E \cup F) = Card(E) + Card(F)$.

Définition 1.1.10 *Soit E un ensemble.*
On dit que E est dénombrable s'il existe une bijection de E dans l'ensemble $\mathbb{N}$.
On dit que E est au plus dénombrable si E est fini ou dénombrable.

Exemple 1.1.6 **1)** *Tout ensemble fini est dénombrable.*

2) $\mathbb{N}$ *et* $\mathbb{Z}$ *sont dénombrables.*

3) *L'intervalle* $I = [-5, 6]$ *est infini et non dénombrable.*

Définition 1.1.11 *Soient E et F deux ensembles. On appelle produit cartésien de E et F et on le note $E \times F$ l'ensemble $\{(x, y),\ x \in E \text{ et } y \in F\}$.*

Remarque 1.1.5 *Soit E un ensemble. On note par E^2 le produit cartésien $E \times E$.*

Exemple 1.1.7 *Soient $E = \{3,4,5,6\}$ et $F = \{0,2\}$. Alors*

$$E \times F = \{(3,0),(3,2),(4,0),(4,2),(5,0),(5,2),(6,0),(6,2)\},$$

$$E^2 = \{(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),$$
$$(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}.$$

et

$$F^2 = \{(0,0),(0,2),(2,0),(2,2)\}.$$

Remarque 1.1.6 *Soient E, F deux ensembles et $E \times F$ le produit cartésien de E et F. Alors*

1) *$E \times F \neq F \times E$, c'est à dire le produit cartésien n'est pas commutatif.*

2) *Si $E = \emptyset$ ou $F = \emptyset$, alors $E \times F = \emptyset$.*

3) *Soit (x,y), $(x',y') \in E \times F$, alors $(x,y) = (x',y') \Leftrightarrow x = x'$ et $y = y'$.*

Proposition 1.1.5 *Soient E, F deux ensembles finis et $E \times F$ le produit cartésien de E et F. Alors*

$$Card(E \times F) = Card(E) \times Card(F).$$

Définition 1.1.12 *Soient E, F deux ensembles et $E \times F$ le produit cartésien de E et F. On appelle relation binaire de E vers F toute parties de $E \times F$.*
Si $\mathcal{R}$ est une relation binaire de E vers F et $(x,y) \in \mathcal{R}$ on écrit $x\mathcal{R}y$.

Remarque 1.1.7 *Soient E, F deux ensembles et $\mathcal{R}$ une relation binaire de E vers F. Alors*

1) *Si $E = F$, on dit que $\mathcal{R}$ est une relation binaire sur E.*

2) *Si $(x,y) \in \mathcal{R}$, on dit que x est en relation avec y.*

3) *Si $(x,y) \notin \mathcal{R}$, on dit que x n'est pas en relation avec y.*

Exemple 1.1.8 *$\mathcal{R}$ est une relation binaire sur E dans chacun des cas suivants*

1) $E = \mathbb{R}$, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = y$.

2) $E = \mathbb{R}$, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x < y$.

3) $E = \mathbb{R}$, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \leq y$.

4) $E = \mathcal{P}(F)$, $G\mathcal{R}H \Leftrightarrow G \subset H$, *où* F *est un ensemble et* $G, H \in \mathcal{P}(F)$.

5) E *est l'ensemble des fonctions définies de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *et*

$$f\mathcal{R}g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x),\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall f, g \in E.$$

Définition 1.1.13 *Soient* E *un ensembles et* $\mathcal{R}$ *une relation binaire sur* E. *On dit que* $\mathcal{R}$ *est*

1) *réflexive si* $\forall x \in E$, $x\mathcal{R}x$.

2) *symétrique si* $\forall x, y \in E$, $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.

3) *antisymétrique si* $\forall x, y \in E$, $(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$.

4) *transitive si* $\forall x, y, z \in E$, $(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

Exemple 1.1.9 **1)** *La relation* $'' = ''$ *sur* $\mathbb{R}$ *est réflexive, symétrique, antisymétrique et transitive.*

2) *La relation* $'' \leq ''$ *sur* $\mathbb{R}$ *est réflexive, antisymétrique, transitive et elle n'est pas symétrique.*

3) *La relation* $'' < ''$ *sur* $\mathbb{R}$ *est transitive, elle n'est pas réflexive et elle n'est pas symétrique.*

4) *La relation* $'' \subset ''$ *sur* $\mathcal{P}(E)$ *est réflexive, antisymétrique et transitive.*

Définition 1.1.14 *Soient* E *un ensembles et* $\mathcal{R}$ *une relation binaire sur* E. *On dit que* $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.*

Remarque 1.1.8 *Si* $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence sur l'ensemble* E *et si* $x\mathcal{R}y$ *on dit, dans ce cas, que* x *et* y *sont équivalents.*

Exemple 1.1.10 **1)** *La relation* $'' = ''$ *sur* $\mathbb{R}$ *est une relation d'équivalence.*

2) *Soit* E *l'ensemble des personnes. La relation binaire* $\mathcal{R}$ *définie sur* E *par* $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x$ *a le même âge que* y, *est une relation d'équivalence.*

3) *Sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, la relation binaire $\mathcal{R}$ définie par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xy > 0$, est une relation d'équivalence.*

Définition 1.1.15 *Soient E un ensembles et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E.*
1) On appelle classe d'équivalence de $x \in E$ modulo $\mathcal{R}$, l'ensemble défini par

$$\dot{x} = \{y \in E,\ x\mathcal{R}y\}.$$

2) On appelle ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$, l'ensemble des classes d'équivalence des éléments de E modulo "$\mathcal{R}$" et on le note $E/\mathcal{R}$, c'est à dire

$$E/\mathcal{R} = \{\dot{x},\ x \in E\}$$

Proposition 1.1.6 *Soient E un ensembles, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E et $x, y \in E$. Alors x et y sont équivalents si et seulement si $\dot{x} = \dot{y}$.*

Preuve. $\Longrightarrow$? Supposons que x et y sont équivalents, c'est à dire $x\mathcal{R}y$ et montrons que $\dot{x} = \dot{y}$.
Soit $z \in \dot{x}$, alors $x\mathcal{R}z$. Mais $\mathcal{R}$ est symétrique et transitive, donc $z\mathcal{R}y$, alors $z \in \dot{y}$, d'où $\dot{x} \subset \dot{y}$.
De la même manière on peut montrer que $\dot{y} \subset \dot{x}$.
$\Longleftarrow$? Supposons que $\dot{x} = \dot{y}$ et montrons que $x\mathcal{R}y$.
On a $x \in \dot{x} = \dot{y}$, donc $y\mathcal{R}x$, mais $\mathcal{R}$ est symétrique, donc $x\mathcal{R}y$. ■

Proposition 1.1.7 *Soient E un ensembles, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E et $x, y \in E$. Si x et y ne sont pas équivalents, alors les classes d'équivalence $\dot{x}$ et $\dot{y}$ sont disjoints.*

Preuve. Supposons que x et y ne sont pas équivalents et montrons que $\dot{x} \cap \dot{y} = \emptyset$. Supposons que $\dot{x} \cap \dot{y} \neq \emptyset$. Alors il existe un élément z de E tel que $z \in \dot{x}$ et $z \in \dot{y}$, donc $x\mathcal{R}z$ et $y\mathcal{R}z$, mais $\mathcal{R}$ est symétrique et transitive donc $x\mathcal{R}y$ ce qui est contraire à l'hypothèse, d'où $\dot{x} \cap \dot{y} = \emptyset$. ■

Corollaire 1.1.1 *Soient E un ensembles, $x, y \in E$ et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. Alors on a $\dot{x} = \dot{y}$ ou $\dot{x} \cap \dot{y} = \emptyset$. De plus l'ensemble des classes d'équivalence associées à $\mathcal{R}$ forme une partition de E, c'est à dire $E = \bigcup_{x \in E} \dot{x}$.*

Définition 1.1.16 *Soient E un ensemble et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de parties de E. On appelle*

1. *limite supérieur de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et on la note $\limsup_n F_n$ la partie de E définie par* $\limsup_n F_n = \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} F_k$.
2. *limite inférieur de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et on la note $\liminf_n F_n$ la partie de E définie par* $\liminf_n F_n = \bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} F_k$.

Lemme 1.1.2 *Soient E un ensemble et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de parties de E. Alors*

1) $\liminf_n F_n \subset \limsup_n F_n$.

2) $\left(\limsup_n F_n\right)^c = \liminf_n F_n^c$ *et* $\left(\liminf_n F_n\right)^c = \limsup_n F_n^c$.

Preuve.

1) On a $\bigcap_{k\geq n} F_k \subset F_k$, $\forall k \geq n$, donc $\bigcap_{k\geq n} F_k \subset \bigcup_{k\geq n} F_k$, $\forall n \geq 1$, alors

$$\bigcap_{k\geq n} F_k \subset \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} F_k = \limsup_n F_n,\ \forall n \geq 1,$$

d'où

$$\liminf_n F_n = \bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} F_k \subset \limsup_n F_n.$$

2) Soit $F = \limsup_n F_n$, alors

$$F^c = \left(\limsup_n F_n\right)^c = \left(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} F_k\right)^c,$$

donc

$$F^c = \bigcup_{n\geq 1}\left(\bigcup_{k\geq n} F_k\right)^c = \bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} F_k^c = \liminf_n F_n^c.$$

De la même manière on peut montrer que $\left(\liminf_n F_n\right)^c = \limsup_n F_n^c$.

■

Définition 1.1.17 *Soient E un ensemble et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de parties de E. On dit que la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a une limite $F \in \mathcal{P}(E)$ si on a*

$$F = \lim_n F_n = \limsup_n F_n = \liminf_n F_n$$

Proposition 1.1.8 *Soient E un ensemble et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite monotone de parties de E. Alors*

$$\lim_n F_n = \limsup_n F_n = \liminf_n F_n.$$

Preuve. Soient E un ensemble et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite monotone de parties de E. Alors

1) Si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, alors $F_n \subset F_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, donc

$$\bigcap_{k\geq n} F_k = F_n \text{ et } \bigcup_{k\geq n} F_k = \bigcup_{k\geq 1} F_k.$$

Donc

$$\liminf_n F_n = \bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} F_k = \bigcup_{n\geq 1} F_n$$

et

$$\limsup_n F_n = \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} F_k = \bigcup_{n\geq 1} F_n.$$

D'où

$$\lim_n F_n = \limsup_n F_n = \liminf_n F_n.$$

2) Si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, alors $F_{n+1} \subset F_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, donc $F_n^c \subset F_{n+1}^c$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, donc $(F_n^c)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, alors d'après 1) on a $\limsup_n F_n^c = \liminf_n F_n^c$. En utilisant le Lemme 1.1.2 on trouve

$$\left(\liminf_n F_n\right)^c = \limsup_n F_n^c = \liminf_n F_n^c = \left(\limsup_n F_n\right)^c,$$

d'où

$$\liminf_n F_n = \limsup_n F_n.$$

■

Définition 1.1.18 *Soient E, F deux ensembles, G un sous-ensemble de E et H un sous-ensemble de F. Soit l'application $f : E \longrightarrow F$.*

- *On appelle image directe de G par f l'ensemble $f(G) = \{y \in F,\ \exists x \in G,\ f(x) = y\}$.*
- *On appelle image réciproque de H par f l'ensemble $f^{-1}(H) = \{x \in E,\ f(x) \in H\}$.*

Exemple 1.1.11 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$ et soient $G = [0,3]$ et $H = [3,9]$, alors $f(G) = f([0,3]) = [0,9]$ et $f^{-1}(H) = f^{-1}([3,9]) = \left[-\sqrt{3}, -3\right] \cup \left[\sqrt{3}, 3\right]$.*

Proposition 1.1.9 *Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Alors*

1) $f(G) \subset f(H),\ \forall G \subset H \subset E.$

2) $f^{-1}(I \cap J) = f^{-1}(I) \cap f^{-1}(J)$ *et* $f^{-1}(I \cup J) = f^{-1}(I) \cup f^{-1}(J),\ \forall I, J \subset F.$

3) $f(G \cap H) \subset f(G) \cap f(H)$ *et* $f(G \cup H) = f(G) \cup f(H),\ \forall G, H \subset E.$

4) $f\left(f^{-1}(I)\right) \subset I,\ \forall I \subset F.$

5) $G \subset f^{-1}\left(f(G)\right),\ \forall G \subset E.$

6) $f^{-1}\left(I^c_F\right) = \left(f^{-1}(I)\right)^c_E,\ \forall I \subset F.$

Preuve.

1) Supposons que $G \subset H \subset E$. Soit $y \in f(G)$, alors $y = f(x)$, $x \in G \subset H$, donc $y = f(x)$, $x \in H$, alors $y \in f(H)$, d'où $f(G) \subset f(H)$.

2) Soit $I, J \subset F$. Alors

$$\begin{aligned} f^{-1}(I \cap J) &= \{x \in E,\ f(x) \in I \cap J\} \\ &= \{x \in E,\ f(x) \in I\} \cap \{x \in E,\ f(x) \in J\} \\ &= f^{-1}(I) \cap f^{-1}(J) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f^{-1}(I \cup J) &= \{x \in E,\ f(x) \in I \cup J\} \\ &= \{x \in E,\ f(x) \in I\} \cup \{x \in E,\ f(x) \in J\} \\ &= f^{-1}(I) \cup f^{-1}(J). \end{aligned}$$

3) Supposons que $G, H \subset E$. Soit $y \in f(G \cap H)$, alors $y = f(x)$, $x \in G \cap H$, donc $y = f(x)$, $x \in G$ et $y = f(x)$, $x \in H$, d'où $y \in f(G) \cap f(H)$.
Et

$$\begin{aligned} f(G \cup H) &= \{y \in F,\ y = f(x),\ x \in G \cup H\} \\ &= \{y \in F,\ y = f(x),\ x \in G \text{ ou } x \in H\} \\ &= \{y \in F,\ y = f(x),\ x \in G\} \cup \{y \in F,\ y = f(x),\ x \in H\} \\ &= f(G) \cup f(H). \end{aligned}$$

4) Supposons que $I \subset F$. Soit $y \in f\left(f^{-1}(I)\right)$, alors $y = f(x)$, $x \in f^{-1}(I)$, donc $y = f(x)$, $x \in E$, $f(x) \in I$, d'où $y = f(x) \in I$.

5) Supposons que $G \subset E$. Soit $x \in G$, alors $f(x) \in f(G)$, donc $x \in f^{-1}(f(G))$.

6) Soit $I \subset F$. Alors

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(I_F^c\right) &= \left\{x \in E,\ f(x) \in I_F^c\right\} \\ &= \{x \in E,\ f(x) \in F \text{ et } f(x) \notin I\} \\ &= \left\{x \in E,\ x \notin f^{-1}(I)\right\} \\ &= \left(f^{-1}(I)\right)_E^c . \end{aligned}$$

■

Proposition 1.1.10 *Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

1) *f est injective.*

2) $f^{-1}(f(G)) = G$, $\forall G \subset E$.

3) $f(G \cap H) = f(G) \cap f(H)$, $\forall G, H \subset E$.

4) $f(G) \cap f(H) = \emptyset$, $\forall G, H \subset E$, *avec* $G \cap H = \emptyset$.

5) $f(H \setminus G) = f(H) \setminus f(G)$, $\forall G \subset H \subset E$.

Preuve.

1)$\Longrightarrow$2) ? Supposons que f est injective. D'après la Proposition 1.1.9 on a toujours $G \subset f^{-1}(f(G))$, donc il suffit de montrer que $f^{-1}(f(G)) \subset G$. Soit $x \in f^{-1}(f(G))$, alors $f(x) \in f(G)$, donc $\exists x' \in G$, $f(x) = f(x')$, mais f est injective, donc $x = x' \in G$. D'où 2).

2)$\Longrightarrow$1) ? Soit $x_1, x_2 \in E$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$, alors d'après 2) on a $f^{-1}(f(\{x_1\})) = f^{-1}(\{f(x_1)\}) = \{x_1\}$ et $f^{-1}(f(\{x_2\})) = f^{-1}(\{f(x_2)\}) = \{x_2\}$. Mais $f(x_1) = f(x_2)$, donc $x_1 = x_2$ et f est injective.

1)$\Longrightarrow$3) ? Supposons que f est injective. D'après la Proposition 1.1.9, il suffit de montrer que $f(G) \cap f(H) \subset f(G \cap H)$. Soit $y \in f(G) \cap f(H)$, alors $y \in f(G)$ et $y \in f(H)$, donc

$\exists x \in G$, $y = f(x)$ et $\exists x' \in H$, $y = f(x')$. Mais f est injective, donc $x = x' \in G \cap H$ et $y = f(x)$, d'où $y \in f(G \cap H)$.

3)$\Longrightarrow$4) ? Supposons que $G \cap H = \emptyset$. D'après 3) on a $f(G \cap H) = f(G) \cap f(H) = f(\emptyset) = \emptyset$.

4)$\Longrightarrow$5) ? Soit $G \subset H$, alors $H \setminus G \subset H$. En appliquant 1) de la Proposition 1.1.9 on trouve $f(H \setminus G) \subset f(H)$. D'autre part on a $G \cap (H \setminus G) = \emptyset$, alors d'après 4) on obtient $f(H \setminus G) \cap f(G) = \emptyset$, donc $f(H \setminus G) \subset f(H) \setminus f(G)$.

Réciproquement, supposons que $f(H) \setminus f(G) \neq \emptyset$. Soit $y \in f(H) \setminus f(G)$, alors $y \in f(H)$ et $y \notin f(G)$, donc $\exists x \in H$, $y = f(x)$ et $x \notin G$. Alors $x \in H \setminus G$ et $y = f(x)$, d'où $f(H) \setminus f(G) \subset f(H \setminus G)$.

5)$\Longrightarrow$1) ? Montrons que si $x_1, x_2 \in E$ tel que $x_1 \neq x_2$, alors $f(x_1) \neq f(x_2)$ c'est à dire f est injective. Soit $x_1 \neq x_2$. En appliquant 5) avec $H = \{x_1, x_2\}$ et $G = \{x_2\}$ on trouve $G \subset H$ et $f(H \setminus G) = f(H) \setminus f(G)$, donc $f(\{x_1\}) = f(\{x_1, x_2\}) \setminus f(\{x_2\})$, alors $\{f(x_1)\} = \{f(x_1), f(x_2)\} \setminus \{f(x_2)\}$, d'où $f(x_1) \neq f(x_2)$, car $\{f(x_1)\} \neq \emptyset$.

■

Définition 1.1.19 *Soient E un ensemble et $A \subset E$. La fonction $1_A : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$1_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A, \\ 0, & \text{si } x \in A^c. \end{cases}$$

est appelée fonction caractéristique de A.

Proposition 1.1.11 *Soient E un ensemble et $A, B \subset E$. La fonction caractéristique a les propriétés suivantes*

1) $1_{A^c} = 1 - 1_A$.

2) $1_{A \cap B} = 1_A 1_B$.

3) $1_{A \cup B} = 1_A + 1_B$ *si A et B sont disjoints.*

4) $1_{A \times B}(x, y) = 1_A(x) 1_B(y)$, $\forall (x, y) \in E^2$.

Preuve.

1) Si $x \in A$, alors $x \notin A^c$, donc $1_{A^c}(x) = 0 = 1 - 1 = 1 - 1_A(x)$.

Si $x \notin A$, alors $x \in A^c$, donc $1_{A^c}(x) = 1 = 1 - 0 = 1 - 1_A(x)$.

2) Si $x \in A \cap B$, alors $x \in A$ et $x \in B$, donc $1_{A\cap B}(x) = 1 = 1 \times 1 = 1_A(x)1_B(x)$.

Si $x \notin A \cap B$, alors $x \notin A$ ou $x \notin B$, donc $1_{A\cap B}(x) = 0 = 1_A(x)1_B(x)$.

De la même manière que 2) on peut montrer 3) et 4).

■

1.2 Algèbres et tribus

Définition 1.2.1 *Soient E un ensemble et T une famille de sous-ensembles de E. On dit que T est une tribu sur E si on a*

1) $\emptyset \in T$.

2) *Pour toute famille dénombrable* $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de T on a* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \in T$, *c'est à dire T est stable par union dénombrable.*

3) *Si* $F \in T$, *alors* $F^c \in T$, *c'est à dire T est stable par passage au complémentaire.*

Exemple 1.2.1 *Soit E un ensemble, alors* $\{\emptyset, E\}$ *et* $\mathcal{P}(E)$ *sont des tribus sur E.*

Remarque 1.2.1 *Si E est un ensemble et T est une tribu sur E, alors les éléments de T sont appelés ensembles mesurables et l'espace* (E, T) *est dit espace mesurable.*
Si E est l'univers des possibles et T est une tribu sur E, alors les éléments de T sont appelés evenements et l'espace (E, T) *est dit espace probabilisable.*

Proposition 1.2.1 *Soient E un ensemble et T une tribu sur E. Alors*

1) $E \in T$.

2) *Pour toute famille dénombrable* $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de T on a* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \in T$, *c'est à dire T est stable par intersection dénombrable.*

3) *Si* $F, G \in T$, *alors* $F \setminus G \in T$ *et* $F \triangle G \in T$.

Preuve. Soient E un ensemble et T une tribu sur E.

1) On a $E = \emptyset^c$ et $\emptyset \in T$, donc $E \in T$ car T est stable par passage au complémentaire.

2) Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$. On a $F_n^c \in T$, $\forall n \in \mathbb{N}$ car T est stable par passage au complémentaire, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n^c\right)^c \in T$ car T est stable par union dénombrable.

3) On a $F \setminus G = F \cap G^c$ et $F \triangle G = (F \cap G^c) \cup (G \cap F^c)$. En utilisant 2) et la stabilité de T par passage au complémentaire on trouve que $F \setminus G \in T$ et $F \triangle G \in T$.

■

Proposition 1.2.2 *Soient E un ensemble et $\{T_i\}_{i\in I}$ une famille de tribus sur E. Alors $T = \bigcap_{i\in I} T_i$ est une tribu sur E.*

Preuve. D'après la définition de T on a

$$T = \{F \subset E,\ F \in T_i,\ \forall i \in I\}.$$

Alors

1) Pour tout $i \in I$, T_i est une tribu sur E, alors $\emptyset \in T_i$, $\forall i \in I$, donc $\emptyset \in T$.

2) Soit $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable de T, alors $F_n \in T_i$, $\forall i \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}$, donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \in T_i$, $\forall i \in I$, car T_i est une tribu sur E pour tout $i \in I$, d'où $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \in T$ et T est stable par union dénombrable.

3) Soit $F \in T$, alors $F \in T_i$, $\forall i \in I$, mais pour tout $i \in I$, T_i est une tribu sur E donc elle est stable par passage au complémentair, alors $F^c \in T_i$, $\forall i \in I$, d'où $F^c \in T$ et T est stable par passage au complémentaire.

De 1)-3) on trouve que l'intersection des tribus sur E est une tribu sur E.

■

Définition 1.2.2 *Soient E un ensemble et $C \subset \mathcal{P}(E)$. On appelle tribu engendrée par C l'intersection de toutes les tribus sur E contenant C et on la note $\sigma(C)$.*

Remarque 1.2.2 **1)** *La tribu engendrée par $C \subset \mathcal{P}(E)$ est la plus petite tribu contenant C.*

2) *Si* $C_1 \subset C_2 \subset \mathcal{P}(E)$, *alors* $\sigma(C_1) \subset \sigma(C_2)$.

Définition 1.2.3 *Soient E un ensemble et* $\mathcal{A}$ *une famille de sous-ensembles de E. On dit que* $\mathcal{A}$ *est une algèbre sur E si on a*

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$.

2) *Pour tout* $F, G \in \mathcal{A}$ *on a* $F \cup G \in \mathcal{A}$, *c'est à dire* $\mathcal{A}$ *est stable par union finis.*

3) *Si* $F \in \mathcal{A}$, *alors* $F^c \in \mathcal{A}$, *c'est à dire* $\mathcal{A}$ *est stable par passage au complémentaire.*

Remarque 1.2.3 *Toute tribu est une algèbre, la réciproque est fausse.*

Proposition 1.2.3 *Soient E un ensemble et* $\mathcal{A}$ *une algèbre sur E tels que si* $(G_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \subset \mathcal{A}$ *est une suite croissante, alors* $\bigcup\limits_{n\geq 1} G_n \subset \mathcal{A}$, *donc* $\mathcal{A}$ *est une tribu sur E.*

Preuve. D'après la définition d'une algèbre, pour montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu sur E il suffit de montrer que $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \subset \mathcal{A}$, donc si on pose $G_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k$ on obtient que $(G_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \subset \mathcal{A}$ est une suite croissante, donc $\bigcup\limits_{n\geq 1} G_n \subset \mathcal{A}$, mais $\bigcup\limits_{n\geq 1} F_n = \bigcup\limits_{n\geq 1} G_n \subset \mathcal{A}$, d'où $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable et donc elle est une tribu sur E. ■

Définition 1.2.4 *Soient E un ensemble et* $\tau \subset \mathcal{P}(E)$. *On dit que* τ *est une topologie sur E si elle vérifie les conditions suivantes*

1) $E, \emptyset \in \tau$.

2) *Toute union quelconque des éléments de* τ *est un élément de* τ.

3) *Toute intersection finie des éléments de* τ *est un élément de* τ.

Remarque 1.2.4 *Si E est un ensemble et* τ *est une topologie sur E, alors les éléments de* τ *sont appelés ouverts et l'espace* (E, τ) *est appelé espace topologique.*

Définition 1.2.5 *Soit* (E, τ) *un espace topologique. On appelle tribu borélienne la tribu engendrée par* τ *et on la note* $\mathcal{B}(E)$ *et les éléments de* $\mathcal{B}(E)$ *sont appelés ensembles boréliens.*

Lemme 1.2.1 *Soit $\mathcal{I}$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Alors $\mathcal{I}$ est l'union dénombrable d'intervalles ouvert de $\mathbb{R}$.*

Preuve. Il suffit de considérer l'ensemble $F = \{(p,q) \in \mathbb{Q}^2,\ p < q,\ ]p,q[\subset \mathcal{I}\}$ et utiliser la densité de l'ensemble $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ pour obtenir que $\mathcal{I} = \bigcup\limits_{p,q\in F}]p,q[$. ∎

Proposition 1.2.4 *La famille $\{]a,+\infty[\}_{a\in\mathbb{R}}$ engendre la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

Preuve. Soit $\mathcal{O}$ l'ensemble de tous les ouverts de $\mathbb{R}$, alors $\{]a,+\infty[,\ a \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{O}$, donc $\sigma(\{]a,+\infty[,\ a \in \mathbb{R}\}) \subset \sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
Pour montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma(\{]a,+\infty[,\ a \in \mathbb{R}\})$, il suffit de montrer que $\mathcal{O} \subset \sigma(\{]a,+\infty[,\ a \in \mathbb{R}\})$ car $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la plus petite tribu contenant $\mathcal{O}$. Soit $I \in \mathcal{O}$, alors d'après le Lemme 1.2.1 on a $I = \bigcup\limits_{n\geq 1}]a_n,b_n[$. D'autre part, pour tout $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ on a

$$]a,b[=]-\infty,b[\cap]a,+\infty[\text{ et } [b,+\infty[=\bigcap_{n\geq 1}\left]b-\frac{1}{n},+\infty\right[$$

avec

$$\left]b-\frac{1}{n},+\infty\right[\in \{]a,+\infty[,\ a \in \mathbb{R}\} \subset \sigma(\{]a,+\infty[,\ a \in \mathbb{R}\}),$$

donc

$$]b,+\infty[\subset \sigma(\{]a,+\infty[,\ a \in \mathbb{R}\}),$$

car $\sigma(\{]a,+\infty[,\ a \in \mathbb{R}\})$ est stable par intersection dénombrable. Donc

$$]-\infty,b[=(]b,+\infty[)^c \in \sigma(\{]a,+\infty[,\ a \in \mathbb{R}\}) \text{ et }]a,+\infty[\in \sigma(\{]a,+\infty[,\ a \in \mathbb{R}\}),$$

alors

$$]a,b[\in \sigma(\{]a,+\infty[,\ a \in \mathbb{R}\}) \text{ et } I \in \sigma(\{]a,+\infty[,\ a \in \mathbb{R}\}),$$

d'où $\mathcal{O} \subset \sigma(\{]a,+\infty[,\ a \in \mathbb{R}\})$ et la démonstration est complète. ∎

1.3 Mesure positive

Définition 1.3.1 *Soit (E,T) un espace mesurable. On appelle mesure positive, ou seulement mesure, sur E toute application $\mu : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ vérifiant*

1) $\mu(\emptyset) = 0$.

2) *Pour toute famille dénombrable* $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ *disjointes deux à deux on a* $\mu(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(F_n)$, *c'est à dire* μ *est additive.*

Définition 1.3.2 *Soient* (E, T) *un espace mesurable et* $\mu : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *une mesure.*

- *On dit que* μ *est une mesure finie si* $\mu(E) < +\infty$.
- *On dit que* μ *est une probabilité si* $\mu(E) = 1$.

Remarque 1.3.1 *Soient* (E, T) *un espace mesurable (respectivement espace probabilisable) et* μ *une mesure (respectivement une probabilité), alors le triplet* (E, T, μ) *est appelé espace mesuré (respectivement espace probabilisé).*

Définition 1.3.3 *Soit* (E, T, μ) *un espace mesuré. On dit que* μ *est* $\sigma-$*finie s'il existe une suite* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ *telle que* $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ *et* $\mu(F_n) < +\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exemple 1.3.1 **1)** *Soient E un ensemble,* $T = \mathcal{P}(E)$ *et* $\mu : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *une application avec pour tout* $F \in T$,

$$\mu(F) = \begin{cases} Card(F), & si\ F est fini, \\ +\infty, & sinon. \end{cases}$$

Alors μ *est une mesure sur E et il dite mesure de comptage, de plus cette mesure est finie si E est fini et il est* $\sigma-$*fini si E est dénombrable.*

2) *Soient* (E, T) *un espace mesurable et* $a \in E$. *Alors l'application* $\delta_a : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *définie par*

$$\delta_a(F) = \begin{cases} 1, & si\ a \in F, \\ 0, & si\ a \notin F. \end{cases}$$

est une mesure sur E et elle s'appelle mesure de Dirac, de plus cette mesure est une probabilité.

3) *Soient* $E = \mathbb{N}$, $T = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ *et* $\mu : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *une application telle que pour tout* $F \in T$,

$$\mu(F) = \begin{cases} \sum\limits_{n\in F} \frac{1}{n^2}, & si\ F est fini, \\ +\infty, & sinon. \end{cases}$$

Alors μ *n'est pas une mesure car elle n'est pas additive.*

1.4 Propriétés des mesures, mesure extérieur, mesure complète

Proposition 1.4.1 *Soient (E, T, μ) un espace mesuré. Alors la mesure μ a les propriétés suivantes*

1) *Si $F, G \in T$ avec $F \subset G$, alors $\mu(F) \leq \mu(G)$. (C'est la monotonie).*

2) *Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, alors $\mu(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n) \leq \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(F_n)$. (C'est la sous additivité).*

3) *Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ telle que $F_n \subset F_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors $\mu(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mu(F_n) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(F_n)$.*

4) *Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ telle que $F_{n+1} \subset F_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, et telle que $\exists n_0$, $\mu(F_{n_0}) < +\infty$, alors $\mu(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mu(F_n) = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(F_n)$.*

Preuve.

1) Soit $F, G \in T$ tel que $F \subset G$. On a

$$G = F \cup (G \setminus F) \text{ avec } F \cap (G \setminus F) = \emptyset$$

et

$$G \setminus F = G \cap F^c \in T, \text{ car } T \text{ est une tribu sur } E,$$

donc

$$\mu(G) = \mu(F) + \mu(G \setminus F) \geq \mu(F).$$

2) Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$. On considère la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où

$$G_0 = F_0 \text{ et } G_n = F_n \setminus \left(\bigcup_{i=0}^{n-1} G_i\right), \ \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

Donc $G_n \in T$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, car $G_n = F_n \bigcap \bigcap\limits_{i=0}^{n-1} G_i^c$ et T est stable par passage au complémentaire et par intersection dénombrable, de plus

$$G_i \cap G_j = \emptyset \text{ si } i \neq j \text{ et } \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n.$$

En utilisant l'additivité de μ on trouve

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(G_n).$$

Mais $G_n \subset F_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, donc la monotonie de μ nous donne

$$\mu(G_n) \leq \mu(F_n) \text{ et } \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(F_n).$$

3) Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ telle que $F_n \subset F_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. En utilisant la monotonie de μ on trouve

$$\mu(F_n) \leq \mu(F_{n+1}),\ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{1.1}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(F_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(F_n) \in \overline{\mathbb{R}}_+. \tag{1.2}$$

Soient $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ et $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $G_0 = F_0$ et $G_n = F_n \cap F_{n-1}^c$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. Donc $G_n \in T$, car T est stable par passage au complémentaire et par intersection dénombrable, de plus $G_i \cap G_j = \emptyset$ si $i \neq j$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$.
En utilisant l'additivité de μ on obtient

$$\mu(F) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(G_n) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \sum_{p=0}^{n} \mu(G_p).$$

Mais $F_n = \bigcup_{p=0}^{n} G_p$, alors $\sum_{p=0}^{n} \mu(G_p) = \mu(F_n)$, d'où $\mu(F) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \mu(F_n)$.

4) De la même manière que 3) on peut montrer 4).

■

Définition 1.4.1 *Soient (E, T, μ) un espace mesuré et $F \subset E$. On dit que F est négligeable s'il existe un ensemble mesurable G tel que $F \subset G$ et $\mu(G) = 0$.*

Proposition 1.4.2 *Soient (E, T, μ) un espace mesuré et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \subset E$ une suite des ensembles négligeables, alors $\bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n$ est négligeable.*

Preuve. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \subset E$ une suite des ensembles négligeables, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, F_n est négligeable, c'est à dire

$$\exists G_n \in T,\ F_n \subset G_n \text{ et } \mu(G_n) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

Alors
$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n.$$

En utilisant la monotonie et la sous additivité de μ on obtient
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n\right) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(G_n) = 0.$$

D'où $\bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n$ est négligeable. ■

Définition 1.4.2 *Soient (E, T, μ) un espace mesuré. On dit que μ est complète si toutes les ensembles négligeables sont mesurables et dans ce cas l'espace (E, T, μ) est dit complet.*

Définition 1.4.3 *Soient E un ensemble et $\mu^\star : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une application. On dit que $\mu^\star$ est une mesure extérieur sur E si on a*

1) $\mu^\star(\emptyset) = 0$.

2) *Si $F, G \in \mathcal{P}(E)$ tel que $F \subseteq G$, alors $\mu^\star(F) \leq \mu^\star(G)$. (C'est la monotonie).*

3) *Pour toute suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \subset \mathcal{P}(E)$ on a $\mu^\star\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \mu^\star(F_n)$. (C'est la sous additivité.)*

Remarque 1.4.1 **1)** *Toute mesure positive sur un espace mesurable $(E, \mathcal{P}(E))$ est une mesure extérieur sur E, mais la réciproque est fausse.*

2) *Si $\mu^\star$ est une mesure extérieur sur E et si elle est additive, alors $\mu^\star$ est une mesure positive sur $\mathcal{P}(E)$.*

Proposition 1.4.3 *Soit $\mu^\star$ une mesure extérieur sur l'ensemble non vide E. Alors pour toutes parties A et F de E on a*
$$\mu^\star(A) \leq \mu^\star(A \cap F) + \mu^\star(A \cap F^c). \tag{1.3}$$

Preuve. Soient E un ensemble non vide et $\mu^\star$ une mesure extérieur sur E. Alors pour toutes parties A et F de E on a
$$A = (A \cap F) \cup (A \cap F^c).$$

En utilisant la sous additivité de $\mu^\star$ on trouve

$$\mu^\star(A) \leq \mu^\star(A \cap F) + \mu^\star(A \cap F^c).$$

■

Définition 1.4.4 *Soit $\mu^\star$ une mesure extérieur sur l'ensemble non vide E. On dit que le sous-ensemble $F \subset E$ est $\mu^\star$-mesurable ou mesurable au sens de Carathéodory si on a*

$$\mu^\star(A) = \mu^\star(A \cap F) + \mu^\star(A \cap F^c),\ \forall A \subset E.$$

Remarque 1.4.2 *Soient E un ensemble non vide, $\mu^\star$ une mesure extérieur sur E et $F \subset E$. Pour montrer que F soit $\mu^\star$-mesurable il suffit de montrer que*

$$\mu^\star(A) \geq \mu^\star(A \cap F) + \mu^\star(A \cap F^c),\ \forall A \subset E. \tag{1.4}$$

Lemme 1.4.1 *Soient E un ensemble non vide, $\mu^\star$ une mesure extérieur sur E et $\mathcal{M}^\star$ l'ensemble des parties $\mu^\star-$mesurable. Supposons que $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \subset \mathcal{M}^\star$ est une suite telle que $F_n \cap F_m = \emptyset$, $\forall n,\ m \in \mathbb{N}^\star$ avec $n \neq m$ et soit $H_k = \bigcup_{n=1}^{k} F_n$. Alors*

$$\mu^\star(A \cap H_k) = \sum_{n=1}^{k} \mu^\star(A \cap F_n),\ \forall A \in \mathcal{P}(E). \tag{1.5}$$

Preuve. Par récurrence :
Pour $K = 2$. Soit $F_1,\ F_2 \in \mathcal{M}^\star$ tel que $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, alors pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$ on a

$$\begin{aligned} \mu^\star(A \cap (F_1 \cup F_2)) &= \mu^\star(A \cap (F_1 \cup F_2) \cap F_1) + \mu^\star(A \cap (F_1 \cup F_2) \cap F_1^c),\ \text{car } F_1 \in \mathcal{M}^\star \\ &= \mu^\star(A \cap F_1) + \mu^\star(A \cap F_2),\ \text{car } F_1 \cap F_2 = \emptyset. \end{aligned}$$

Donc (1.5) est vérifiée pour $k = 2$.
Supposons maintenant que (1.5) est vraie pour $k - 1$ et montrons qu'elle est vraie pour

k. Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$ on a

$$\begin{aligned}
\mu^\star(A \cap H_k) &= \mu^\star\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{k-1} F_n \cup F_k\right)\right) \\
&= \mu^\star\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{k-1} F_n\right)\right) + \mu^\star\left(A \cap F_k\right), \text{ car } \left(\bigcup_{n=1}^{k-1} F_n\right) \cap F_k = \emptyset \\
&= \mu^\star\left(A \cap H_{k-1}\right) + \mu^\star(A \cap F_k) \\
&= \sum_{n=1}^{k-1} \mu^\star(A \cap F_n) + \mu^\star(A \cap F_k)) \\
&= \sum_{n=1}^{k} \mu^\star(A \cap F_n).
\end{aligned}$$

D'où (1.5). ■

Théorème 1.4.1 *Soient E un ensemble non vide, $\mu^\star$ une mesure extérieur sur E et $\mathcal{M}^\star$ l'ensemble des parties $\mu^\star-$mesurable. Alors*

1) *$\mathcal{M}^\star$ est une tribu sur E.*

2) *La restriction de $\mu^\star$ sur $\mathcal{M}^\star$ est une mesure positive.*

Preuve.

1) $\emptyset \in \mathcal{M}^\star$ car pour tout $A \subset E$ on a

$$\begin{aligned}
\mu^\star(A) &= \mu^\star(A \cap E) \\
&= \mu^\star(\emptyset) + \mu^\star(A \cap \emptyset^c) \\
&= \mu^\star(A \cap \emptyset) + \mu^\star(A \cap \emptyset^c).
\end{aligned}$$

Soit $F \in \mathcal{M}^\star$, alors pour tout $A \subset E$ on a

$$\begin{aligned}
\mu^\star(A) &= \mu^\star(A \cap F) + \mu^\star(A \cap F^c) \\
&= \mu^\star(A \cap (F^c)^c) + \mu^\star(A \cap F^c) \\
&= \mu^\star(A \cap F^c) + \mu^\star(A \cap (F^c)^c).
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{M}^\star$ est stable par passage au complémentaire.

Maintenant, montrons que $\mathcal{M}^\star$ est stable par union dénombrable. Tout d'abord, montrons que $\mathcal{M}^\star$ est stable par union finie. Soit $F_1, F_2 \in \mathcal{M}^\star$, alors pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, on a

$$\mu^\star(A) = \mu^\star(A \cap F_1) + \mu^\star(A \cap F_1^c).$$

On a aussi

$$\mu^\star(A \cap F_1^c) = \mu^\star(A \cap F_1^c \cap F_2) + \mu^\star(A \cap F_1^c \cap F_2^c), \text{ car } F_2 \in \mathcal{M}^\star,$$

donc

$$\mu^\star(A) = \mu^\star(A \cap F_1) + \mu^\star(A \cap F_1^c \cap F_2) + \mu^\star(A \cap F_1^c \cap F_2^c),$$

alors

$$\mu^\star(A) \geq \mu^\star((A \cap F_1) \cup (A \cap F_1^c \cap F_2)) + \mu^\star(A \cap F_1^c \cap F_2^c), \text{ car } \mu^\star \text{ est sous additive.}$$

D'où

$$\mu^\star(A) \geq \mu^\star(A \cap (F_1 \cup F_2)) + \mu^\star(A \cap (F_1 \cup F_2)^c),$$

donc d'après la Remarque 1.4.2 on trouve que $F_1 \cup F_2$ est $\mu^\star-$mesurable et $\mathcal{M}^\star$ est stable par union finie.

Soient $(F_n)_{n \subset \mathbb{N}^\star} \in \mathcal{M}^\star$ et $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^\star} F_n$. On définit la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ par

$$H_1 = F_1 \text{ et } H_n = F_n \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} H_k \right), \ \forall n \geq 2,$$

donc

$$F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^\star} H_n \ \text{ et } H_n = F_n \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} H_k \right)^c.$$

D'après la stabilité de $\mathcal{M}^\star$ par union finie et par passage au complémentaire on obtient $H_n \in \mathcal{M}^\star$ et comme $H_n \cap H_m = \emptyset$ si $n \neq m$ alors (1.5) nous donne

$$\begin{aligned}
\mu^\star(A) &= \mu^\star\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} H_k \right) \right) + \mu^\star\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} H_k \right)^c \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mu^\star(A \cap H_k) + \mu^\star\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} H_k \right)^c \right).
\end{aligned}$$

Mais $\bigcup\limits_{k=1}^{n} H_k \subset F$, donc $F^c \subset \left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} H_k\right)^c$, alors $A \cap F^c \subset A \cap \left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} H_k\right)^c$. En utilisant la monotonie de $\mu^\star$ on trouve $\mu^\star(A \cap F^c) \leq \mu^\star\left(A \cap \left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} H_k\right)^c\right)$. Donc

$$\mu^\star(A) \geq \sum_{k=1}^{n} \mu^\star(A \cap H_k) + \mu^\star(A \cap F^c).$$

En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ on trouve

$$\mu^\star(A) \geq \mu^\star(A \cap F) + \mu^\star(A \cap F^c).$$

Alors $F \in \mathcal{M}^\star$ et $\mathcal{M}^\star$ est stable par union dénombrable, donc $\mathcal{M}^\star$ est une tribu sur E.

2) D'après la Remarque 1.4.1 pour montrer que $\mu^\star$ est une mesure positive, il suffit de montrer que $\mu^\star$ est additive. Soit $F = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^\star} F_n$, alors par la sous additivité de $\mu^\star$ on a $\mu^\star(F) \leq \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mu^\star(F_n)$. D'autre part, si on prend $A = E$ dans (1.5) on trouve

$$\mu^\star\left(\bigcup_{n=1}^{k} F_n\right) = \sum_{n=1}^{k} \mu^\star(F_n) \leq \mu^\star(F),$$

d'où

$$\mu^\star\left(\bigcup_{n \geq 1} F_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mu^\star(F_n).$$

■

1.5 La mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens

Théorème 1.5.1 *[1] Soit $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$. Alors il existe une unique mesure, notée λ définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ on a $\lambda(]a, b]) = b - a$.*
Cette application est appelée mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Proposition 1.5.1 *[1] Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Alors*
1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda(\{x\}) = 0$.
2) Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ on a $\lambda([a, b]) = \lambda(]a, b]) = \lambda([a, b[) = \lambda(]a, b[) = b - a$.

Proposition 1.5.2 *[1] Soient λ la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et A un ensemble dénombrable. Alors $\lambda(A) = 0$.*

Proposition 1.5.3 *[1] Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Alors*

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \lambda(A + \alpha) = \lambda(A).$$

C'est à dire la mesure de Lebesgue est invariante par translation.

Proposition 1.5.4 *[1] Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Alors*

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \lambda(-A) = \lambda(A).$$

C'est à dire la mesure de Lebesgue est invariante par symétrie.

Proposition 1.5.5 *[1] Soient λ la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et f une application affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \alpha x + \beta$, où $\alpha \in \mathbb{R}^\star$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Alors*

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \lambda(f(A)) = |\alpha|\lambda(A).$$

1.6 Fonctions étagées

Définition 1.6.1 *Soient (E, T) un espace mesurable et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.*
1) On dit que f est étagée s'il existe une famille finie $(A_i)_{1 \le i \le n} \subset T$ et des nombres réels a_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tels que $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}(x)$, $\forall x \in E$.

Remarque 1.6.1 *Soient (E, T) un espace mesurable.*
1) Toute fonction étagée $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est appelée fonction étagée positive.
2) L'ensemble des fonctions étagées est noté $\mathcal{E}$ et l'ensemble des fonctions étagées positive est notés $\mathcal{E}_+$.

Proposition 1.6.1 *Soient (E, T) un espace mesurable et $f \in \mathcal{E}_+$. Supposons que f est non identiquement nulle, alors*

$$\exists (a_i, A_i) \subset \mathbb{R}_+^\star \times T,\ a_i < a_{i+1},\ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$$

$$\textit{et } A_i \neq \emptyset,\ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ A_i \cap A_j = \emptyset \textit{ si } i \neq j \textit{ et } f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}(x),\ \forall x \in E.$$

Preuve. Soient (E, T) un espace mesurable et $f \in \mathcal{E}_+$, donc il existe une famille finie $(B_i)_{1 \le i \le n} \subset T$ et des nombres réels b_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tels que $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i 1_{B_i}(x)$, $\forall x \in E$.
Alors $Imf \subset \mathbb{R}_+$ et $Imf \setminus \{0\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ avec $0 < a_1 < \cdots < a_n$.
Donc si on prend $A_i = \{x \in E,\ f(x) = a_i\}$, on trouve

$$A_i \in T, \text{ car } A_i = \bigcup_{K \in I_i} C_K,\ I_i = \left\{ K \subset \{1, 2, \ldots, p\},\ a_i = \sum_{j \in K} b_j \right\}$$

et

$$C_K = \bigcap_{j=1}^{p} D_j,\ D_j = B_j \text{ si } j \in K \text{ et } D_j = B_j^c \text{ si } j \notin K.$$

■

Lemme 1.6.1 *Soient (E, T) un espace mesurable et $f \in \mathcal{E}_+$. Supposons que f est non nulle et que $f = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i} = \sum\limits_{i=1}^{p} b_j 1_{B_j}$ avec $(a_i, A_i)_{1 \le i \le n}, \left(b_j, B_j\right)_{1 \le j \le p} \subset \mathbb{R}_+^\star \times T$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $B_i \cap B_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Alors*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{p} b_j \mu(B_j). \tag{1.6}$$

Preuve. On pose $C_{ij} = A_i \cap B_j$, donc

$$\{x \in E,\ f(x) > 0\} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{j=1}^{p} B_j.$$

Alors

$$A_i = \bigcup_{j=1}^{p} C_{ij} \text{ et } B_j = \bigcup_{i=1}^{n} C_{ij}.$$

D'où

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mu\left(A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_i \mu\left(C_{ij}\right)$$

et

$$\sum_{i=1}^{p} b_j \mu\left(B_j\right) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} b_j \mu\left(C_{ij}\right),$$

donc $a_i = b_j$, car $C_{ij} \neq \emptyset$ d'où (2.1). ■

Lemme 1.6.2 *[1] Soient (E, T) un espace mesurable et $f \in \mathcal{E}$. Alors il existe une unique famille*

$$(a_i, A_i) \subset \mathbb{R} \times T,\ a_i \neq a_j,\ \text{ si } i \neq j,\ \forall i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$$

$$\text{et } A_i \neq \emptyset,\ \forall i \in \{0, 1, \dots, n\},\ A_i \cap A_j = \emptyset \text{ si } i \neq j,\ E = \bigcup_{i=0}^{n} A_i \text{ et } f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}(x),\ \forall x \in E.$$

Proposition 1.6.2 *Soient (E, T) un espace mesurable et $f, g \in \mathcal{E}$. Alors $fg \in \mathcal{E}$ et pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a $\alpha f + \beta g \in \mathcal{E}$.*

Preuve. D'après le Lemme 1.6.2, on a $f = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i 1_{A_i}$ et $g = \sum\limits_{j=0}^{p} b_j 1_{B_j}$ où $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $\left(B_j\right)_{1 \leq j \leq p}$ forment des partitions de E, alors

$$f = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{p} a_i 1_{A_i \cap B_j} \text{ et } g = \sum_{j=0}^{p} \sum_{i=0}^{n} b_j 1_{A_i \cap B_j}.$$

Donc

$$\alpha f + \beta g = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{p} (\alpha a_i + \beta b_j) 1_{A_i \cap B_j},\ \text{ c'est à dire } \alpha f + \beta g \in \mathcal{E}.$$

De plus

$$fg = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{p} a_i b_j 1_{A_i \cap B_j},\ \text{ c'est à dire } fg \in \mathcal{E}$$

■

1.7 Fonctions mesurables

Définition 1.7.1 *Soient (E, T_1), (F, T_2) deux espaces mesurables et $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est mesurable ou $T_1 - T_2$ mesurable si on a*

$$\forall A \in T_2,\ f^{-1}(A) \in T_1.$$

Définition 1.7.2 *Soient (E, τ_1), (F, τ_2) deux espaces topologiques. On dit que $f : E \longrightarrow F$ est borélinne si elle est mesurable pour les tribus boréliennes $\mathcal{B}(E)$ et $\mathcal{B}(F)$.*

Remarque 1.7.1 **1)** *Soient (E, T_1) un espace mesurable, F un ensemble et $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors*

- **i)** *Si on prend $T_2 = \{\emptyset, F\}$ on trouve que f est $T_1 - T_2$ mesurable.*
- **ii)** *Si on prend la tribu image de T par f, $T_2 = \{B \subset F,\ f^{-1}(B) \in T_1\}$ on trouve que f est $T_1 - T_2$ mesurable.*

2) *Soient E un ensemble, (F, T_2) un espace mesurable et $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors*

- **i)** *Si on prend $T_1 = \mathcal{P}(E)$ on trouve que f est $T_1 - T_2$ mesurable.*
- **ii)** *Si on prend la tribu image réciproque, $T_1 = \{f^{-1}(B),\ B \in T_2\}$ on trouve que f est $T_1 - T_2$ mesurable.*

Proposition 1.7.1 *Soient (E, T) un espace mesurable et $f \in \mathcal{E}$, alors f est mesurable.*

Preuve. Soient (E, T) un espace mesurable et $f \in \mathcal{E}$, alors d'après le Lemme 1.6.2, il existe une partition $(A_i)_{0 \le i \le n}$ de E telle que $f = \sum_{i=0}^{n} a_i 1_{A_i}$ où $a_i \in \mathbb{R}$, $A_i \in T$, $\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Donc $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $f^{-1}(B) = \bigcup_{i,\, a_i \in B_i} A_i \in T$. ■

Lemme 1.7.1 *Soient (E, T_1) et (F, T_2) deux espaces mesurables avec T_2 est engendrée par $G \subset \mathcal{P}(F)$ et soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors f est mesurable si et seulement si $f^{-1}(B) \in T_1$, $\forall B \in G$.*

Preuve.

$\Longrightarrow$ Evident.

$\Longleftarrow$? Supposons que $f^{-1}(B) \in T_1$, $\forall B \in G$ et soit T_3 la tribu image de T_1 par f, donc $T_3 = \{B \subset F,\ f^{-1}(B) \in T_1\}$, alors $G \subset T_3$, mais T_2 est la plus petite tribu contenant G, alors $T_2 \subset T_3$, d'où $\forall B \in T_2$, $f^{-1}(B) \in T_1$, c'est à dire f est mesurable.

■

Corollaire 1.7.1 *soient E et F deux espaces topologiques et soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors*

1) *$f : E \longrightarrow F$ est borélienne si et seulement si $f^{-1}(O) \in \mathcal{B}(E)$, pour tout ouvert O de F.*

2) *Si f est continue, alors elle est borélienne.*

3) *Si $F = \mathbb{R}$, alors f est borélienne si et seulement si $f^{-1}(]a, +\infty[) \in \mathcal{B}(E)$, $\forall a \in \mathbb{R}$.*

Exemple 1.7.1 *Soient (E, T) un espace mesurable et $A \subset E$, alors $1_A : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est mesurable si et seulement si A est mesurable, car* $\forall a \in \mathbb{R}$, $(1_A)^{-1}(]a, +\infty[) = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } a \geq 1, \\ A, & \text{si } 0 \leq a < 1, \\ E, & \text{si } a < 0. \end{cases}$

Proposition 1.7.2 *Soient (E, T_1), (F, T_2), (G, T_3), trois espaces mesurables et $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ deux applications mesurables. Alors $g \circ f : E \longrightarrow G$ est mesurable.*

Preuve. Soit $A \in T_3$, alors $g^{-1}(A) \in T_2$, car g est mesurable, donc $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}\left(g^{-1}(A)\right) \in T_1$, car f est mesurable. ■

Proposition 1.7.3 *Soient (E, T_1) un espace mesurable, (F, T_2) un espace topologique, $f, g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications mesurables et $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow F$ une application continue. Si on définit l'application $h : E \longrightarrow F$ par $h(x) = \varphi(f(x), g(x))$, $\forall x \in E$, alors h est mesurable.*

Preuve. On définit l'application $l : E \longrightarrow \mathbb{R}^2$ par $l(x) = (f(x), g(x))$, $\forall x \in E$, donc $h = \varphi \circ l$. Comme φ est continue, alors elle est mesurable et donc pour montrer que h soit mesurable il suffit de montrer que l est mesurable. Soient $O = I_1 \times I_2 \subset \mathbb{R}$ où I_1 et I_1 sont deux intervalles de $\mathbb{R}$. Alors $l^{-1}(O) = f^{-1}(I_1) \cap g^{-1}(I_2) \in T_1$. Mais la tribu borélienne sur $\mathbb{R}^2$ est engendrée par $I_1 \times I_2$, alors d'après le Lemme 1.7.1 l est mesurable. ■

Corollaire 1.7.2 *Soient (E,T) un espace mesurable et $f,g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications mesurables. Alors*

1) $f+g$, fg, $\min(f,g)$ *et* $\max(f,g)$ *sont des applications mesurables.*

2) $f^+ = \max(f,0)$, $f^- = \max(-f,0)$ *et* $|f| = f^+ + f^-$ *sont mesurables positives.*

3) *Si* $f(x) \neq 0$, $\forall x \in E$, *alors l'application* $x \longmapsto \frac{1}{f(x)}$ *est mesurable.*

Remarque 1.7.2 *Soient (E,T) un espace mesurable. L'ensemble des applications mesurables à valeurs réelles est noté $\mathcal{M} = \mathcal{M}(E,\mathbb{R})$ et L'ensemble des applications mesurables et à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ est noté $\mathcal{M}_+ = \mathcal{M}_+(E,\overline{\mathbb{R}}_+)$.*

Proposition 1.7.4 *Soient (E,T) un espace mesurable et $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite d'applications mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. Alors les applications $x \longmapsto \sup_{n\geq 1} f_n(x)$, $x \longmapsto \inf_{n\geq 1} f_n(x)$, $x \longmapsto \limsup_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x)$ et $x \longmapsto \liminf_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x)$ sont mesurables. De plus, si cette suite converge simplement vers une fonction f, alors cette dernière est mesurable.*

Preuve. Soient (E,T) un espace mesurable et $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite d'applications mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. On considère l'application $g : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ définie par $\forall x \in E$, $g(x) = \sup_{n\geq 1} f_n(x)$, alors pour montrer que g soit mesurable il suffit de montrer que $g^{-1}\left([-\infty,a[\right) \in T$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, car la tribu borélienne $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ est engendrée par les intervalles de la forme $[-\infty,a[$, $a \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
g^{-1}\left([-\infty,a[\right) &= \{x \in E,\ g(x) < a\} \\
&= \left\{x \in E,\ \sup_{n\geq 1} f_n(x) < a\right\} \\
&= \{x \in E,\ \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ f_n(x) < a\} \\
&= \{x \in E,\ \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ f_n(x) \in [-\infty,a[\} \\
&= \bigcap_{n\in\mathbb{N}^\star} f_n^{-1}\left([-\infty,a[\right) \in T,
\end{aligned}$$

car f_n est mesurable et T est stable par intersection dénombrable, donc g est mesurable. En utilisant le résultat obtenu pour l'application $x \longmapsto \sup_{n\geq 1} f_n(x)$, on peut montrer les autres résultats car

$$\inf_{n\geq 1} f_n = -\sup_{n\geq 1}(-f_n),\ \limsup_{n\longrightarrow+\infty} f_n = \inf_{n\geq 1}\sup_{k\geq n} f_k,\ \liminf_{n\longrightarrow+\infty} f_n = \sup_{n\geq 1}\inf_{k\geq n} f_k$$

et si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers la fonction f, alors

$$\liminf_{n\longrightarrow+\infty} f_n = \limsup_{n\longrightarrow+\infty} f_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n = f.$$

■

Remarque 1.7.3 *On a la même proposition précédente si on prend une suite d'applications à valeurs dans* $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$ *ou* $\overline{\mathbb{R}}_+$

Proposition 1.7.5 *Soient* (E, T) *un espace mesurable et* $f \in \mathcal{M}_+$. *Alors il existe une suite croissante* $(f_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{E}_+$ *telle que* $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge simplement vers* f.

Preuve. Soient (E, T) un espace mesurable et $f \in \mathcal{M}_+$. On définit, sur E, la suite d'applications $(f_n)_{n\geq 1}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{k}{2^n}, & \text{si } f(x) \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[, \ 0 \leq k \leq n2^n - 1, \\ n, & \text{si } f(x) \geq n. \end{cases}$$

Alors cette suite est croissante et on a

$$f_n = n1_{A_n} + \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} 1_{An,k},$$

où

$$A_n = f^{-1}([n, +\infty]), \ A_{n,k} = f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[\right),$$

donc A_n et $A_{n,k}$ sont mesurables car f est mesurable, d'où f_n est étagée positive, de plus Si $f(x) < +\infty$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 > f(x)$, donc

$$\forall n \geq n_0, \ 0 \leq f(x) < n.$$

d'où

$$\left|f(x)_n - f(x)\right| < \frac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

■

Proposition 1.7.6 *Soient* (E, T) *un espace mesurable et* $f \in \mathcal{M}$. *Alors il existe une suite* $(f_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{E}$ *telle que* $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge simplement vers* f.

Preuve. Soient (E, T) un espace mesurable et $f \in \mathcal{M}$. Alors $f^+, f^- \in \mathcal{M}_+$, en appliquant la Proposition 1.7.5 on trouve l'existence de deux suites croissantes de fonctions étagées positives $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ telles que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge simplement vers f^+ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge simplement vers f^-. On pose $f_n = h_n - g_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \subset \mathcal{E}$ et cette suite converge simplement vers f. ■

Corollaire 1.7.3 *Soient (E, T) un espace mesurable. Alors $f \in \mathcal{M}$ si et seulement s'il existe une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{E}$ telle que cette suite converge simplement vers f.*

1.8 Convergence presque partout et convergence en mesure

Définition 1.8.1 *Soient F un ensemble et (E, T, μ) un espace mesuré. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies de E dans F et la fonction $f : E \longrightarrow F$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque partout vers f et on écrit $f_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} f$ p.p s'il existe un ensemble négligeable $A \subset E$ telle que*

$$\forall x \in A^c, \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x).$$

Définition 1.8.2 *Soit (E, T, μ) un espace mesuré. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge presque uniformément vers $f \in \mathcal{M}$ et on écrit $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ p.unif si on a*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in T,\ \mu(A) \leq \varepsilon \text{ et } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } A^c.$$

Définition 1.8.3 *Soit (E, T, μ) un espace mesuré. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$ si on a*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mu\left(\left\{x \in E,\ \left|f_n(x) - f(x)\right| \geq \varepsilon\right\}\right) = 0.$$

Remarque 1.8.1 **1)** *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, alors elle converge simplement vers f, donc elle converge presque partout vers f.*

2) *Si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f, *alors elle converge presque uniformément vers* f, *donc elle converge presque partout vers* f.

Exemple 1.8.1 *Soit* $E = F = \mathbb{R}$, $T = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *et* $\mu = \lambda$ *la mesure de Lebesgue. On considère la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $f_n(x) = 1_{[n,n+1]}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. *Alors* $\exists n_0 = [x] + 1$ *tel que* $\forall n \geq n_0$, $f_n(x) = 0$. *Donc* $f_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$ *p.p car elle converge vers simplement vers* 0, *mais elle ne converge pas en mesure vers* 0 *car si on prend* $\varepsilon = 1$ *on trouve*

$$\lambda\left(\left\{x \in \mathbb{R},\ \left|f_n(x)\right| \geq \varepsilon\right\}\right) = \lambda\left([n, n+1]\right) = 1 \neq 0.$$

Exemple 1.8.2 *Soit* $E = [0,1]$, $F = \mathbb{R}$, $T = \mathcal{B}([0,1])$ *et* $\mu = \lambda$ *la mesure de Lebesgue. On considère la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $f_n(x) = 1_{[\frac{1}{n},\frac{2}{n}]}(x)$, $\forall x \in [0,1]$. *Cette suite converge en mesure vers* 0 *car*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \{x \in E,\ |f_n| \geq \varepsilon\} \subset \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right],$$

donc

$$\lambda\left(\left\{x \in [0,1],\ \left|f_n(x)\right| \geq \varepsilon\right\}\right) \leq \lambda\left(\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]\right) = \frac{1}{n},$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda\left(\left\{x \in [0,1],\ \left|f_n(x)\right| \geq \varepsilon\right\}\right) = 0.$$

Mais $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne converge pas presque partout vers* 0 *car* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x)$ *n'existe pas.*

CHAPITRE 2

Fonctions intégrables

Dans ce chapitre on s'inéresse à donner des notions fondamentales concernant les fonctions intégrables ainsi les théorèmes essentiels dans les espaces $\mathcal{L}^1$ et L^1.

2.1 Intégrale d'une fonction étagée positive

Définition 2.1.1 *Soient (E, T, μ) un espace mesuré et $f \in \mathcal{E}_+$. On définit l'intégrale de f par*

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i)$$

où $(A_i)_{1 \leq i \leq n} \subset T$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$ tels que $f = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}$, $a_i \in \mathbb{R}_+^{\star}$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
De plus, si $f = 0$, alors $\int f d\mu = 0$.

Proposition 2.1.1 *Soient (E, T, μ) un espace mesuré $f, g \in \mathcal{E}_+$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^{\star}$. Alors*

1) $\int (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu.$

2) *Si $f \geq g$, alors $\int f d\mu \geq \int g d\mu$.*

Preuve. Soient (E, T, μ) un espace mesuré $f, g \in \mathcal{E}_+$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^\star$. Alors

1) D'après la Proposition 1.6.1 on a

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i 1_{A_i} \text{ et } g = \sum_{j=0}^{p} b_j 1_{B_j}$$

avec $(A_i)_{0 \leq i \leq n}, \left(B_j\right)_{0 \leq j \leq p} \subset T$ tel que $A_i \cap A_j = \emptyset$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$ et $a_i, b_j \in \mathbb{R}_+^\star$, $\forall (i, j) \in \{1, 2, \ldots, n\} \times \{1, 2, \ldots, p\}$ et $a_0 = b_0 = 0$, $A_0 = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$, $B_0 = \bigcap_{j=1}^{p} B_j^c$. Donc

$$\alpha f + \beta g = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{p} \left(\alpha a_i + \beta b_j\right) 1_{A_i \cap B_j} = \sum_{(i,j) \in I \times J \setminus \{(0,0)\}} \left(\alpha a_i + \beta b_j\right) 1_{A_i \cap B_j}$$

où $I = \{0, 1, \ldots, n\}$ et $J = \{0, 1, \ldots, p\}$, alors

$$\begin{aligned}
\int (\alpha f + \beta g) d\mu &= \sum_{(i,j) \in I \times J \setminus \{(0,0)\}} \left(\alpha a_i + \beta b_j\right) \mu\left(A_i \cap B_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{p} \alpha a_i \mu\left(A_i \cap B_j\right) + \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=0}^{n} \beta b_j \mu\left(A_i \cap B_j\right) \\
&= \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i \mu\left(A_i\right) + \beta \sum_{j=1}^{p} b_j \mu\left(B_j\right),
\end{aligned}$$

car $(A_i)_{0 \leq i \leq n}$ et $(B_j)_{0 \leq j \leq p}$ sont des partitions de E. Donc

$$\int (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu.$$

2) Supposons que $f \geq g$ alors $f - g \geq 0$, donc $f - g \in \mathcal{E}_+$ et d'après la Définition 2.1.1 on a $\int (f - g) d\mu \geq 0$. Donc en appliquant le résultat précédent on trouve

$$\int f d\mu = \int (f - g) d\mu + \int g d\mu \geq \int g d\mu.$$

■

2.2 Intégrale d'une fonction mesurable positive

Lemme 2.2.1 *Soient (E, T, μ) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions étagées positives et g une fonction étagée positive. Supposons que*

1) $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in E$.

2) $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) \geq g(x)$, $\forall x \in E$. *Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu \geq \int g d\mu.$$

Preuve. Soient (E, T, μ) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions étagées positives et g une fonction étagée positive. D'après les hypothèses on a $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle positive et croissante, donc $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ existe et $f(x) \in \overline{\mathbb{R}}_+$, $\forall x \in E$, de plus $f \in \mathcal{M}_+$. Soit

$$A_n = \{x \in E,\ \alpha g(x) \leq f_n(x)\} \subset E \text{ avec } \alpha \in]0, 1[,\ n \in \mathbb{N}.$$

Montrons que $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Soit $x \in E$, alors

$$x \in A_n,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \text{si } g(x) = 0,\ \text{donc } x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

et si $g(x) > 0$ on a

$$\alpha g(x) \leq g(x),\ \text{car } \alpha \in]0, 1[,$$

alors

$$\alpha g(x) \leq g(x) \leq f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x),$$

donc

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ x \in A_n.$$

D'où

$$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \text{ et } E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

D'autre part, on a $A_n \subset A_{n+1}$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha g 1_{A_n}(x) = \alpha g(x),$$

mais $g \in \mathcal{E}_+$, donc d'après la Propositon 1.6.1 on a

$$g = \sum_{i=1}^{p} \alpha b_i 1_{B_i} \text{ avec } b_i \in \mathbb{R}_+^\star,\ B_i \cap B_j = \emptyset \text{ si } i \neq j \text{ et } B_i \neq \emptyset,\ \forall i \in \{1, 2, \dots, p\}.$$

Alors

$$\alpha g 1_{A_n} = \sum_{i=1}^{p} \alpha b_i 1_{B_i \cap A_n},$$

d'où

$$\int \alpha g 1_{A_n} d\mu = \sum_{i=1}^{p} \alpha b_i \mu \left(B_i \cap A_n\right). \tag{2.1}$$

En utilisant 3) de la Proposition 1.4.1 on trouve

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(B_i \cap A_n) = \mu(B_i) \text{ car } \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (B_i \cap A_n) = B_i \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = B_i \text{ et } B_i \cap A_n \subset B_i \cap A_{n+1}.$$

En passant à la limite dans (2.1) quand n tend vers $+\infty$ on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \int \alpha g 1_{A_n} d\mu = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{p} \alpha b_i \mu \left(B_i \cap A_n\right) = \sum_{i=1}^{p} \alpha b_i \mu \left(B_i\right) = \int \alpha g d\mu.$$

Mais

$$\int \alpha g 1_{A_n} d\mu \leq \int f_n d\mu,$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int \alpha g 1_{A_n} d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu.$$

Alors

$$\alpha \int g d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu, \text{ pour tout } \alpha \in]0, 1[$$

d'où

$$\int g d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu.$$

■

Corollaire 2.2.1 *Soient (E, T, μ) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}_+$. Supposons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ sont deux suites convergent simplement vers f, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int g_n d\mu.$$

Définition 2.2.1 *Soient (E, T, μ) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}_+$. On définit l'intégrale de f par*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu$$

où $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ telle que

1) $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in E$.

2) $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$, $\forall x \in E$.

Proposition 2.2.1 *Soient (E, T, μ) un espace mesuré $f \in \mathcal{M}_+$. Alors*

$$\int f d\mu = \sup\left\{\int g d\mu,\ g \in \mathcal{E}_+,\ g \leq f\right\}. \tag{2.2}$$

Preuve. Soient (E, T, μ) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}_+$. Soit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ telle que

1) $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in E$.

2) $f(x) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x)$, $\forall x \in E$.

Alors d'après 2) de la Proposition 2.1.1 on a

$$\int f_n d\mu = \sup\left\{\int g d\mu,\ g \in \mathcal{E}_+,\ g \leq f_n\right\}.$$

Donc

$$\int f_n d\mu = \sup\left\{\int g d\mu,\ g \in \mathcal{E}_+,\ g \leq f_n\right\} \leq \sup\left\{\int g d\mu,\ g \in \mathcal{E}_+,\ g \leq f\right\},$$

car $f_n \leq f$, $\forall n \in \mathbb{N}$. En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ on trouve

$$\int f d\mu \leq \sup\left\{\int g d\mu,\ g \in \mathcal{E}_+,\ g \leq f\right\}. \tag{2.3}$$

Maintenant, soit $g \in \mathcal{E}_+$ telle que $g \leq f$. Alors d'après le Lemme 2.2.1 on trouve

$$\int g d\mu \leq \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu,$$

donc

$$\sup\left\{\int g d\mu,\ g \in \mathcal{E}_+,\ g \leq f\right\} \leq \int f d\mu. \tag{2.4}$$

De (2.3) et (2.4) on obtient (2.2). ■

Remarque 2.2.1 *On a les mêmes propriétés données dans la Proposition 2.1.1 si on prend $f, g \in \mathcal{M}_+$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^\star$.*

Proposition 2.2.2 *Soient (E, T, μ) un espace mesuré, $f \in \mathcal{M}_+$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^\star$, alors*

$$\mu(\{x \in E,\ f(x) \geq \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha} \int f d\mu.$$

Preuve. Soit $A_\alpha = \{x \in E,\ f(x) \geq \alpha\}$, alors

$$A_\alpha = f^{-1}([\alpha, +\infty]) \in T,\ \text{car } f \in \mathcal{M}_+.$$

De plus $f \geq \alpha 1_{A_\alpha}$, donc d'après la monotonie de l'intégrale on trouve

$$\int f d\mu \geq \int \alpha 1_{A_\alpha} d\mu = \alpha \mu(A_\alpha).$$

■

2.3 Mesure et densité de probabilité

Définition 2.3.1 *Soient (E, T, μ) un espace mesuré, $A \in T$ et $f \in \mathcal{M}_+$. On définit la fonction $f1_A : E \longrightarrow \overline{R}_+$ par*

$$f1_A(x) = \begin{cases} f(x), & si\ x \in A, \\ 0, & si\ x \in A^c. \end{cases} \tag{2.5}$$

Remarque 2.3.1 *La fonction $f1_A$ définie par (2.5) est mesurable positive.*

Définition 2.3.2 *Soient (E, T, μ) un espace mesuré, $A \in T$ et $f \in \mathcal{M}_+$. On appelle mesure de densité f par rapport à μ l'application $m : T \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ définie par*

$$m(A) = \int f 1_A d\mu = \int_A f d\mu$$

.

Lemme 2.3.1 *Soient (E, T, μ) un espace mesuré, $A \in T$, $\mu(A) = 0$, $f \in \mathcal{M}_+$ et m la mesure de densité f par rapport à μ. Alors $m(A) = 0$.*

Preuve. Soit $A \in T$ tel que $\mu(A) = 0$ et soit I_A la fonction définie par

$$I_A(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } x \in A, \\ 0, & \text{si } x \in A^c. \end{cases}$$

Alors $I_A \in \mathcal{M}_+$ et I_A est la limite de la suite croissante $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ tel que $f_n = n1_A$. Donc d'après la définition de l'intégrale d'une fonction étagée positive on a $\int I_A d\mu = 0$. D'autre part on a $\forall f \in \mathcal{M}_+,\ f1_A \leq I_A$, donc d'après la monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ on trouve $\int_A f d\mu = 0$. ■

Définition 2.3.3 *Soient (E, T, μ) un espace mesuré, F un ensemble et $f, g : E \longrightarrow F$.*
On dit que $f = g$ presque partout (ou μ presque partout) et on écrit $f = g\, p.p$ si

$$\exists A \in T,\ \mu(A) = 0 \ et \ f(x) = g(x),\ \forall x \in A^c.$$

Proposition 2.3.1 *Soient (E, T, μ) un espace mesuré et $f, g \in \mathcal{M}_+$. Alors*

1) *Si $f = g\, p.p$, alors $\int f d\mu = \int g d\mu$.*

2) *Si $f = 0\, p.p$, alors $\int f d\mu = 0$.*

Preuve.

1) Supposons que $f, g \in \mathcal{M}_+$ tel que $f = g\, p.p$, alors

$$\exists A \in T,\ \mu(A) = 0 \text{ et } f(x) = g(x),\ \forall x \in A^c.$$

Donc

$$f1_{A^c} = g1_{A^c} \text{ avec } f1_{A^c},\ g1_{A^c} \in \mathcal{M}_+,$$

alors

$$\int f1_{A^c} d\mu = \int g1_{A^c} d\mu.$$

D'autre part, d'après le Lemme 2.3.1, on a

$$\int f1_A d\mu = \int g1_A d\mu = 0.$$

En utilisant la Proposition 1.1.11 on trouve

$$\int f d\mu = \int f1_{A^c} d\mu + \int f1_A d\mu = \int f1_{A^c} d\mu$$

et

$$\int g d\mu = \int g 1_{A^c} d\mu + \int g 1_A d\mu = \int g 1_{A^c} d\mu.$$

2) C'est un cas particulier de la question précédente.

■

Définition 2.3.4 *Soient λ la mesure de Lebesgue et P une probabilité sur la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On dit que P est une probabilité de densité par rapport à λ s'il existe $f \in \mathcal{M}_+$ tel que*

$$\int f d\lambda = 1 et P(A) = \int f 1_A d\lambda = \int_A f d\lambda, \ \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

2.4 Convergence monotone et lemme de Fatou

Théorème 2.4.1 (de convergence monotone) *Soient (E, T, μ) un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$ telle que pour tout $x \in E$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f. Alors*

$$f \in \mathcal{M}_+ \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Preuve. En utilisant la monotonie de l'intégrale et la croissance de la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ on trouve

$$\int f_n d\mu \leq \int f_{n+1} d\mu, \ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.6}$$

donc $\left(\int f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et comme $\int f_n d\mu \leq \int f d\mu$, $\forall n \in \mathbb{N}$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu \leq \int f d\mu. \tag{2.7}$$

Maintenant, montrons que $\int f d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu$. Soit $g \in \mathcal{E}_+$ telle que $g \leq f$. Alors

$$\forall x \in E, \ \forall \alpha \in]0,1[, \ f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \geq g(x) > (1-\alpha) g(x),$$

donc

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq n_0, \ \forall x \in E, \ f_n(x) \geq (1-\alpha) g(x).$$

Considérons l'ensemble

$$A_n = \{x \in E,\ f_n(x) \geq (1-\alpha)g(x)\},$$

alors

$$A_n = (f_n - (1-\alpha)\,g)^{-1}([0,+\infty]) \in T \text{ et } E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

D'autre part, on a

$$f_n \geq (1-\alpha)g1_{A_n} \text{ avec } g = \sum_{i=1}^{p} b_i 1_{B_i} \text{ et } g1_{A_n} = \sum_{i=1}^{p} b_i 1_{B_i \cap A_n},$$

donc

$$\int f_n d\mu \geq \int (1-\alpha)g1_{A_n} d\mu = (1-\alpha)\sum_{i=1}^{p} b_i \mu(B_i \cap A_n). \tag{2.8}$$

On a aussi

$$B_i \cap A_n \subset B_i \cap A_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ car } A_n \subset A_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

et

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (B_i \cap A_n) = B_i,\ \forall i \in \{1,2,\ldots,p\},$$

donc d'après la Proposition 1.4.1 on trouve

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(B_i \cap A_n) = \mu(B_i),\ \forall i \in \{1,2,\ldots,p\}.$$

En passant à la limite, dans (2.8), quand n tend vers $+\infty$ on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu \geq (1-\alpha)\sum_{i=1}^{p} b_i \mu(B_i) = (1-\alpha)\int g d\mu.$$

Comme $\alpha \in]0,1[$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu \geq \int g d\mu,$$

d'après la Proposition 2.2.1 on obtient

$$\int f d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu.$$

■

Corollaire 2.4.1 *Soient (E, T, μ) un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$. Supposons que*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x), \ \forall x \in E.$$

Alors

$$f \in \mathcal{M}_+ \ et \ \int f d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int f_n d\mu.$$

Preuve. On définit la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x), \ \forall x \in E,$$

alors

$$g_n \in \mathcal{M}_+ \text{ et } \lim_{n\to+\infty} g_n(x) = f(x), \ \forall x \in E.$$

De plus,

$$g_{n+1}(x) = g_n(x) + f_{n+1}(x) \geq g_n(x),$$

donc d'après le Théorème 2.4.1 on trouve

$$f \in \mathcal{M}_+ \text{ et } \int f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int g_n d\mu,$$

d'où

$$\begin{aligned}
\int f d\mu &= \lim_{n\to+\infty} \int \sum_{k=0}^{n} f_k d\mu \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \int f_k d\mu \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \int f_k d\mu.
\end{aligned}$$

■

Lemme 2.4.1 **(de Fatou)** *Soient (E, T, μ) un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$. Si on pose*

$$\forall x \in E, \ f(x) = \liminf_n f_n(x) = \lim_n \left(\inf_{p\geq n} f_p(x) \right).$$

Alors

$$f \in \mathcal{M}_+ \ et \ \int f d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu.$$

Preuve. Soit la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall x \in E,\ g_n(x) = \inf_{p\geq n} f_p(x),$$

donc

$$g_n \in \mathcal{M}_+,\ g_{n+1}(x) \geq g_n(x) \text{ et } \lim_{n\to+\infty} g_n(x) = f(x),\ \forall x \in E.$$

Donc d'après le Théorème 2.4.1 on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int g_n d\mu = \int f d\mu.$$

Mais

$$g_n \leq f_p,\ \forall p \geq n,$$

donc d'après la monotonie de l'intégrale on a

$$\int g_n d\mu \leq \int f_p d\mu,\ \forall p \geq n,$$

d'où

$$\int g_n d\mu \leq \inf_{p\geq n} \int f_p d\mu.$$

D'où

$$\int f d\mu = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int g_n d\mu \leq \lim_n \left(\inf_{p\geq n} \int f_p d\mu\right) = \liminf_n \int f_n d\mu.$$

■

2.5 L'espace $\mathcal{L}^1$ des fonctions intégrables

Définition 2.5.1 *Soient (E, T, μ) un espace mesuré et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On dit que f est intégrable par rapport à μ (ou Lebesgue intégrable) si $\int |f| d\mu < +\infty$ et dans ce cas on a*

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

L'ensemble des fonctions intégrables par rapport à μ est noté $\mathcal{L}^1(E, T, \mu)$.

Proposition 2.5.1 *Soit (E, T, μ) un espace mesuré. Alors*

1) $\mathcal{L}^1(E, T, \mu)$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$.

2) *L'application* $I : \mathcal{L}^1(E, T, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $I(f) = \int f d\mu$, $\forall f \in \mathcal{L}^1(E, T, \mu)$ *est linéaire.*

3) $\forall f \in \mathcal{L}^1(E, T, \mu)$, $\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f| d\mu$.

4) $\forall f, g \in \mathcal{L}^1(E, T, \mu)$, $f \leq g \Longrightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu$.

5) $\forall f, g \in \mathcal{L}^1(E, T, \mu)$, $f = g\, p.p \Longrightarrow \int f d\mu = \int g d\mu$.

Preuve. (Exercice) ■

Lemme 2.5.1 *[1] Soit* (E, T, μ) *un espace mesuré et* $f \in \mathcal{M}_+$, *alors*

$$\int f d\mu < +\infty \to f < +\infty\, p.p.$$

Proposition 2.5.2 *[1] Soient* (E, T, μ) *un espace mesuré,* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de fonctions intégrables* $f_n : E \to \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *et* $f : E \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable. Supposons qu'il existe* $g \in \mathcal{L}^1(E, T, \mu)$ *telle que*

1) $f_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(x)$ *pour presque tout* $x \in E$.

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g\, p.p$

Alors $f \in \mathcal{L}^1(E, T, \mu)$, $\int |f_n - f| d\mu \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ *et* $\int f_n d\mu \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int f d\mu$.

Proposition 2.5.3 *Soit* (E, T, μ) *un espace mesuré. Alors*

1) *Si* $f \in \mathcal{M}_+$, *alors* $\int f d\mu = 0$ *si et seulement si* $f = 0\, p.p.$

2) *Si* $f \in \mathcal{L}^1(E, T, \mu)$, *alors* $\int |f| d\mu = 0$ *si et seulement si* $f = 0\, p.p.$

Preuve.

1) Soit $f \in \mathcal{M}_+$.

- $\Longrightarrow$? supposons que $\int f d\mu = 0$, alors d'après la Proposition 2.2.2 on trouve

$$\int f d\mu \geq \frac{1}{n} \mu\left(\left\{x \in E,\ f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right),\ \forall n \in \mathbb{N}^\star,$$

donc

$$\mu\left(\left\{x \in E,\ f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = 0.$$

D'autre part, on a

$$\{x \in E,\ f(x) > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^\star} \left\{x \in E,\ f(x) \geq \frac{1}{n}\right\},$$

en utilisant les propriétés de μ on obtient

$$\mu\left(\{x \in E,\ f(x) > 0\}\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}^\star} \mu\left(\left\{x \in E,\ f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = 0,$$

donc

$$\mu\left(\{x \in E,\ f(x) > 0\}\right).$$

Comme

$$\{x \in E,\ f(x) = 0\}^c = \{x \in E,\ f(x) > 0\}, \text{ alors } f = 0\, p.p$$

- $\Longleftarrow$? voir la preuve de la Proposition 2.3.1.

2) On a

$$|f| = 0\, p.p \Longleftrightarrow f = 0\, p.p \text{ et } \left|\int f d\mu\right| \leq \int |f| d\mu,$$

donc en appliquant 1) à $|f|$ on trouve le résultat.

■

2.6 L'espace L^1

Proposition 2.6.1 *Soient (E, T, μ) un espace mesuré et $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur $\mathcal{L}^1(E, T, \mu)$ par*

$$f \mathcal{R} g \Longleftrightarrow f = g\, p.p,\ \forall f, g \in \mathcal{L}^1(E, T, \mu).$$

Alors $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{L}^1(E, T, \mu)$.

Preuve. (Exercice) ■

Remarque 2.6.1 *Soient (E, T, μ) un espace mesuré, $\mathcal{R}$ la relation binaire définie dans la Proposition précédente et $f \in \mathcal{L}^1(E, T, \mu)$, alors la classe d'équivalence de f modulo $\mathcal{R}$ est*

$$\dot{f} = \left\{g \in \mathcal{L}^1(E, T, \mu),\ g = f\, p.p\right\}.$$

Définition 2.6.1 *Soient (E, T, μ) un espace mesuré, $\mathcal{R}$ la relation binaire définie dans la Proposition 2.6.1. L'espace $L^1 = L^1(E, T, \mu)$ est l'ensemble des classes d'équivalence de la relation $\mathcal{R}$, c'est à dire $L^1(E, T, \mu) = \mathcal{L}^1(E, T, \mu)/\mathcal{R}$.*

Remarque 2.6.2 **1)** *Un élément de L^1 est un ensemble de fonctions de $\mathcal{L}^1(E, T, \mu)$ qui sont égales presque partout.*

2) *On dit qu'une fonction f est dans L^1 pour dire que la classe d'équivalence de f modulo $\mathcal{R}$ est dans L^1.*

Proposition 2.6.2 *Soient (E, T, μ) un espace mesuré et $\|.\| : L^1(E, T, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par*

$$\|F\| = \|f\|_1 = \int |f| d\mu, \ \forall F \in L^1(E, T, \mu)$$

avec f est un représentant de F, c'est à dire $F = \dot{f}$. Alors $\|.\|$ est une norme sur $L^1(E, T, \mu)$.

Preuve. Tout d'abord, $\|.\|$ est bien définie car si $F, G \in L^1(E, T, \mu)$ tel que $F = G$, $F = \dot{f}$ et $G = \dot{g}$, alors $f = g \, p.p$, donc $|f| - |g| = 0 \, p.p$ et $\int (|f| - |g|) \, d\mu = 0$, c'est à dire $\|F\| = \|G\|$. De plus, on a

1) Pour tout $F = \dot{f} \in L^1(E, T, \mu)$, $\|F\| = \int |f| d\mu \geq 0$.

2)

$$\begin{aligned} \forall F = \dot{f} \in L^1(E, T, \mu), \ \|F\| = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \int |f| d\mu = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad |f| = 0 \, p.p \\ &\Longleftrightarrow \quad f = 0 \, p.p \\ &\Longleftrightarrow \quad F = \dot{f} = \dot{0}. \end{aligned}$$

3) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall F \in L^1(E, T, \mu)$, $F = \dot{f}$,

$$\|F\| = \|\lambda f\|_1 = \int |\lambda f| d\mu = |\lambda| \int |f| d\mu = |\lambda| \times \|f\|_1 = |\lambda| \times \|F\|.$$

4) $\forall F, G \in L^1(E, T, \mu)$, $F = \dot{f}$, $G = \dot{g}$,

$$\|F + G\| = \|f + g\|_1 = \int |f + g| d\mu \leq \int (|f| + |g|) d\mu = \|f\|_1 + \|g\|_1 = \|F\| + \|G\|.$$

$\blacksquare$

Proposition 2.6.3 *Soient* (E, T, μ) *un espace mesuré, alors* $(L^1(E, T, \mu), \|.\|)$ *est un espace de Banach.*

2.7 Théorèmes de convergence dans L^1

Théorème 2.7.1 *[1]***(de Beppo-Levi)** *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(E, T, \mu)$. *Supposons qu'on a*

$$f_{n+1} \geq f_n \ p.p, \ \forall n \in \mathbb{N} \ et \ f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f \ p.p.$$

Alors

a) $f \in L^1(E, T, \mu)$ *si et seulement si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \int f_n d\mu \in \mathbb{R}$.

b) *Si* $f \in L^1(E, T, \mu)$, *alors* $\int \left|f_n - f\right| d\mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, *c'est à dire* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* f *quand* n *tend vers* $+\infty$ *pour la norme* $\|.\|$.

Théorème 2.7.2 *(***de convergence dominée)** *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* $L^1(E, T, \mu)$. *Supposons que* $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ *p.p et qu'il existe* $F \in L^1(E, T, \mu)$ *tel que* $|f_n| \leq F$ *p.p,* $\forall n \in \mathbb{N}$. *Alors*

$$f \in L^1(E, T, \mu) \ et \ \int \left|f_n - f\right| d\mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Preuve. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $L^1(E, T, \mu)$ et soit f_n un représentant de f_n, alors il existe un ensemble mesurable A de mesure nulle avec $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x) \ \forall x \in A^c$. D'autre part, on a $f_n 1_{A^c} \in \mathcal{M}$ est un représentant de la même classe que f_n, alors on peut remplacer f_n par $f_n 1_{A^c}$ et on la note f_n. Maintenant, on définit g sur E par

$$g(x) = f(x) \text{ si } x \in A^c \text{ et } g(x) = 0 \text{ si } x \in A$$

et on choisit un représentant de F noté aussi F, donc

1) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1(E, T, \mu)$,

2) $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(x)$, $\forall x \in E$.

3) $F \subset \mathcal{L}^1(E,T,\mu)$ et $f_n \le F\, p.p$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

En appliquant la Proposition 2.5.2 on obtient

$$g \in \mathcal{L}^1(E,T,\mu) \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu = \int g d\mu,$$

mais $g = f\, p.p$, donc

$$f \in L^1(E,T,\mu) \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

■

Corollaire 2.7.1 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de L^1. Supposons que $\sum\limits_{n\ge0} \|f_n\| < +\infty$. Alors il existe $F \in L^1$ tel que $\left|\sum\limits_{k=0}^{n} f_k\right| \le F\, p.p$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et pour presque tout $x \in E$, la série $\sum\limits_{n\ge0} f_n(x)$ converge dans $\mathbb{R}$ et sa somme f est définie presque partout dans E par $f(x) = \sum\limits_{n\ge0} f_n(x)$. De plus, $f \in L^1$ avec $\sum\limits_{k=0}^{n} f_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ dans L^1 et presque partout.*

Preuve. Soient $F(x) = \sum\limits_{k\ge0} \left|f_k(x)\right| \in \overline{\mathbb{R}}_+$ où f_n est un représentant de f_n, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors $F \in \mathcal{M}_+$. En appliquant le Corollaire 2.4.1 on trouve

$$\int F d\mu = \sum_{n\ge0} \int |f_n| d\mu = \sum_{n\ge0} \|f_n\| < +\infty.$$

D'après le Lemme 2.5.1 on obtient $F < +\infty\, p.p$, donc il existe un ensemble mesurable $A \in T$ tel que $\mu(A) = 0$ et pour tout $x \in A^c$ on a $F(x) < +\infty$. On remplaçant F par G tel que $G(x) = F(x)$ si $x \in A^c$ et $G(x) = 0$ si $x \in A$, alors

a) $G \in \mathcal{L}^1(E,T,\mu)$ et $G = F\, p.p$ avec $\sum\limits_{k=0}^{n} f_k \le G\, p.p$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) La série $\sum\limits_{n\ge0} f_n$ est absolument convergente sur A^c, donc elle est convergente presque partout et sa somme f est définie presque partout sur E.

c) Soit la suite $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$, donc $|S_n| \le F\, p.p$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $F \in L^1$ et $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f\, p.p$.
En appliquant le Théorème 2.7.2 on trouve le résultat.

■

2.8 Continuité et dérivabilité sous le signe $\int$

Soient (E, T, μ) un espace mesuré, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et $f : E \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On définit la fonction $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ par $F(t) = \int_E f(x,t)d\mu(x)$.

Théorème 2.8.1 *Soient $t_0 \in \bar{I}$ et $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable tels que*

1) *$f(.,t)$ est mesurable pour tout $t \in I$.*

2) *$f(x,t) \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} g(x)$ pour presque tout $x \in E$.*

3) *Il existe une fonction intégrable $h : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $|f(x,t)| \leq h(x)$ pour tout $t \in I$ et pour presque tout $x \in E$. Alors*

$$\lim_{t\to t_0} F(t) = \lim_{t\to t_0} \int_E f(x,t)d\mu(x) = \int_E g(x)d\mu(x).$$

Preuve. De 1) et 2) on a $x \longmapsto f(x,t)$ est intégrable sur E pour tout $t \in I$, donc F est bien définie. De 3) on trouve que $|g(x)| \leq h(x)\, p.p$, donc g est intégrable. D'autre part, si on prend une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \subset I$ telle que $t_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} t_0$, on obtient

$$\left|f(x,t_n)\right| \leq h(x)\, p.p \text{ et } f(x,t_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(x)\, p.p.$$

En appliquant le théorème de convergence dominée on trouve

$$\lim_{n\to+\infty} F(t_n) = \lim_{n\to+\infty} \int_E f(x,t_n)d\mu(x) = \int_E g(x)d\mu(x).$$

■

Théorème 2.8.2 *Supposons que*

1) *$f(.,t)$ est mesurable pour tout $t \in I$.*

2) *$f(x,.)$ est continue pour presque tout $x \in E$.*

3) *Il existe une fonction intégrable $g : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $|f(x,t)| \leq g(x)$ pour tout $t \in I$ et pour presque tout $x \in E$.*

Alors F est continue sur I.

Preuve. Soit $t_0 \in I$, en appliquant le théorème de convergence dominée à la fonction $x \longmapsto f(x, t_0)$, on trouve que F est continue en t_0. Comme t_0 est arbitraire, alors F est continue sur I. ■

Théorème 2.8.3 *Supposons que*

1) *$f(., t)$ est intégrable pour tout $t \in I$.*

2) *$f(x, .)$ est de classe $\mathbf{C}^1$ pour presque tout $x \in E$.*

3) *Il existe une fonction intégrable $g : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)| \leq g(x)$ pour tout $t \in I$ et pour presque tout $x \in E$.*

Alors F est bien définie et elle est de classe $\mathbf{C}^1$ sur I. De plus,

$$F'(t) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x).$$

Preuve. D'après 2) on trouve qu'il existe un ensemble mesurable $A \in T$ tel que $\mu(A^c) = 0$ et $f(x, .)$ est dérivable pour tout $x \in A$. Donc si on prend une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^\star} \subset I$ avec $t_n \neq t_0$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $t_0 \in I$ et $t_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} t_0$, on trouve

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t_n - t_0} = \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0).$$

Soit $h : E \longrightarrow \mathbb{R}$ avec

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0), & \text{si } x \in A, \\ 0, & \text{si } x \notin A, \end{cases}$$

alors pour presque tout $x \in E$ on a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t_n - t_0} = h(x).$$

D'autre part, d'après 3), on a

$$\exists B \subset A,\ \mu(B^c) = 0 \text{ et } \forall x \in B,\ \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\right| \leq g(x),\ \forall t \in I.$$

En utilisant le théorème des accroissements finis on trouve

$$\left|\frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t_n - t_0}\right| \leq \sup_{t \in I} \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\right| \leq g(x),\ \forall x \in B,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

En appliquant le théorème de convergence dominée on obtient que h est intégrable sur E et

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{F(t_n)-F(t_0)}{t_n-t_0}=\lim_{n\to+\infty}\int_E\frac{f(x,t_n)-f(x,t_0)}{t_n-t_0}d\mu(x)=\int_E h(x)d\mu(x),$$

c'est à dire F est dérivable en t_0 et

$$F'(t_0)=\int_E\frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)d\mu(x).$$

De plus, d'après le Théorème 2.8.2 on trouve que F est de classe $\mathbf{C}^1$ sur I. ■

2.9 Comparaison de l'intégrale de Lebesgue avec l'intégrale de Riemann

Théorème 2.9.1 *[3] soient $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction et λ la mesure de Lebesgue définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, alors*

1) *f est Riemann intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si elle est bornée et presque partout continue sur $[a,b]$.*

2) *Si f est Riemann intégrable sur $[a,b]$, alors elle est Lebesgue intégrable sur $[a,b]$ et*

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{[a,b]} f d\lambda.$$

Exemple 2.9.1 *Soit $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$f(x)=\begin{cases}1, & si\ x\in[0,1]\cap\mathbb{Q},\\ -1, & si\ x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

Montrons que cette fonction n'est pas Riemann intégrable mais elle est Lebesgue intégrable. On a f est bornée et pour tout $x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}$, il existe une suite (x_n) d'éléments de $[0,1]\cap\mathbb{Q}$ telle que $x=\lim_{n\to+\infty}x_n$, car $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$. Mais $f(x_n)=1\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1\neq f(x)$, donc f n'est pas continue en x et par consequant elle n'est pas continue sur $[0,1]\setminus\mathbb{Q}$. Comme $\lambda([0,1]\setminus\mathbb{Q})=\lambda([0,1])=1$, alors d'après le Théorème 2.9.1 f n'est pas intégrable au sens de Riemann. D'autre part on a $|f|=1$, donc $f\in\mathcal{L}^1([0,1])$ avec $\int|f|d\lambda=\int_{[0,1]}d\lambda=\lambda([0,1])=1$.

Exemple 2.9.2 *On considère la fonction* $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & si\ x \in]0,1], \\ 0, & si\ x = 0. \end{cases}$$

On a $|\sin x| \leq |x|$, $\forall x \in [0,1]$, *donc* $|f(x)| \leq 1$, $\forall x \in [0,1]$, *alors* f *est bornée. D'autre part,* f *est continue sur* $]0,1]$ *mais elle n'est pas continue en* $x = 0$, *donc* f *est presque partout continue sur* $[0,1]$. *D'où, d'après le Théorème 2.9.1,* f *est intégrable au sens de Riemann et elle est intégrable au sens de Lebesgue, de plus* $\int_0^1 f(x)dx = \int\limits_{[0,1]} f d\lambda$.

Proposition 2.9.1 *[3] Soient* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b \leq +\infty$ *et* $f : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue par morceaux sur* $[a,b[$. *Alors* f *est Lebesgue intégrable sur* $[a,b[$ *si et seulement si l'intégrale généralisée* $\int_a^b f(t)dt$ *(au sens de Riemann) est absolument convergente. De plus* $\int_a^b f(t)dt = \int\limits_{[a,b[} f d\lambda$

Exemple 2.9.3 *On a* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ *n'est pas absolument convergente, donc d'après la Proposition 2.9.1 la fonction* $t \longmapsto \frac{\sin t}{t}$ *n'est pas Lebesgue intégrable sur* $]0,+\infty[$.

Exemple 2.9.4 *Soit la fonction* f *définie sur* $[2,+\infty[$ *par* $f(t) = \frac{\sin t}{t^2}$, $\forall t \in [2,+\infty[$. *Alors pour tout* $t \in [2,+\infty[$ *on a* $|f(t)| \leq \frac{1}{t^2}$. *Comme* $t \longmapsto \frac{1}{t^2}$ *est intégrable au sens de Riemann sur* $[2,+\infty[$, *alors* $\int_2^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$ *est absolument convergente, donc d'après la Proposition 2.9.1 la fonction* $t \longmapsto \frac{\sin t}{t^2}$ *est Lebesgue intégrable sur* $[2,+\infty[$.

CHAPITRE 3

Produit d'espaces mesurés

L'objectif de ce chapitre est de présenter la mesure produit et le théorème de Fubini.

3.1 Mesure produit

Définition 3.1.1 *Soient* (E_1, T_1) *et* (E_2, T_2) *deux espaces mesurables. La tribu engendrée par la famille*

$$C = \{F_1 \times F_2,\ F_1 \in T_1,\ F_2 \in T_2\} \tag{3.1}$$

est appelée tribu produit de T_1 *par* T_2 *et elle est notée par* $T_1 \otimes T_2$.

Remarque 3.1.1 *En général, le produit de deux tribus n'est pas commutatif.*

Définition 3.1.2 *Soient* E_1, E_2 *deux ensembles et* $F \subset E_1 \times E_2$.
On appelle section de F *en* $x \in E_1$, *l'ensemble noté* F_x *tel que* $F_x = \{y \in E_2,\ (x, y) \in F\}$.
On appelle section de F *en* $y \in E_2$, *l'ensemble noté* F_y *tel que* $F_y = \{x \in E_1,\ (x, y) \in F\}$.

Lemme 3.1.1 *Soient E_1, E_2 deux ensembles, F, G, $(F_i)_{i\in I} \subset E_1 \times E_2$ et $x \in E_1$. Alors*

(1) $((E_1 \times E_2) \setminus F)_x = E_2 \setminus F_x$.

(2) $(G \setminus F)_x = G_x \setminus F_x$.

(3) $\left(\bigcup_{i\in I} F_i\right)_x = \bigcup_{i\in I} (F_i)_x$.

(4) $\left(\bigcap_{i\in I} F_i\right)_x = \bigcap_{i\in I} (F_i)_x$.

Preuve. On a

(1)

$$\begin{aligned} E_2 \setminus F_x &= E_2 \setminus \{y \in E_2,\ (x,y) \in F\} \\ &= \{y \in E_2,\ (x,y) \notin F\} \\ &= \{y \in E_2,\ (x,y) \in E_1 \times E_2 \setminus F\} \\ &= ((E_1 \times E_2) \setminus F)_x . \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} (G \setminus F)_x &= \{y \in E_2,\ (x,y) \in G \setminus F\} \\ &= \{y \in E_2,\ (x,y) \in G \text{ et } (x,y) \notin F\} \\ &= \{y \in E_2,\ (x,y) \in G\} \cap \{y \in E_2,\ (x,y) \notin F\} \\ &= G_x \setminus F_x. \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{i\in I} F_i\right)_x &= \left\{y \in E_2,\ (x,y) \in \bigcup_{i\in I} F_i\right\} \\ &= \{y \in E_2,\ \exists i \in I,\ (x,y) \in F_i\} \\ &= \bigcup_{i\in I} \{y \in E_2,\ (x,y) \in F_i\} \\ &= \bigcup_{i\in I} (F_i)_x . \end{aligned}$$

(4)

$$
\begin{aligned}
\left(\bigcap_{i\in I} F_i\right)_x &= \left(\left(\bigcup_{i\in I} F_i^c\right)^c\right)_x \\
&\overset{(1)}{=} E_2 \setminus \left(\bigcup_{i\in I} F_i^c\right)_x \\
&\overset{(2)}{=} E_2 \setminus \left(\bigcup_{i\in I} \left(F_i^c\right)_x\right) \\
&\overset{(1)}{=} E_2 \setminus \left(\bigcup_{i\in I} (E_2 \setminus (F_i)_x)\right) \\
&= E_2 \cap \left(\bigcup_{i\in I} (E_2 \setminus (F_i)_x)\right)^c \\
&= E_2 \cap \left(\bigcap_{i\in I} (F_i)_x\right) \\
&= \bigcap_{i\in I} (F_i)_x \,.
\end{aligned}
$$

■

Proposition 3.1.1 *Soient (E_1, T_1) et (E_2, T_2) deux espaces mesurables et $F \in T_1 \otimes T_2$. Alors pour tout $x \in E_1$, $y \in E_2$, on a $F_x \in T_2$ et $F_y \in T_1$.*

Preuve. Soit $x \in E_1$. On considère $\tau = \{F \subset E_1 \times E_2,\ F_x \in T_2\}$. Montrons que τ est une tribu sur $E_1 \times E_2$ contenant la famille C définie par (3.1).
On a pour tout $(F_1, F_2) \in T_1 \times T_2$,

$$
\begin{aligned}
(F_1 \times F_2)_x &= \{y \in E_2,\ (x, y) \in F_1 \times F_2\} \\
&= \{y \in E_2,\ x \in F_1 \text{ et } y \in F_2\} \\
&= \begin{cases} \emptyset, & \text{si } x \notin F_1\,; \\ F_2, & \text{si } x \in F_1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Alors $(F_1 \times F_2)_x \in T_2$, d'où $C \subset \tau$. De plus

1. $\emptyset_x = \emptyset \in E_1 \times E_2$.
2. Soit $F \in \tau$, donc $F \subset E_1 \times E_2$ avec $F_x \in T_2$. D'après le Lemme 3.1.1, on a $((E_1 \times E_2) \setminus F)_x = E_2 \setminus F_x \in T_2$, car T_2 est une tribu sur E_2, donc τ est stable par passage au complémentaire.

3. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \tau$, donc $F_n \subset E_1\times E_2$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $(F_n)_x \in T_2$. En utilisant le Lemme 3.1.1, on trouve $\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n\right)_x = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (F_n)_x \in T_2$, car T_2 est une tribu sur E_2, donc τ est stable par union dénombrable, alors τ est une tribu sur $E_1\times E_2$ contenant C, mais $T_1\otimes T_2$ est la plus petite tribu contenant C, donc $T_1\otimes T_2 \subset \tau$, d'où $\forall x \in E_1$, $\forall F \in T_1\otimes T_2$, $F_x \in T_2$. De la même manière on peut montrer que $\forall y \in E_2$, $\forall F \in T_1 \otimes T_2$, $F_y \in T_1$.

■

Proposition 3.1.2 *Soient (E,T) un espace mesurable, $E_1, E_2 \subset E$ et $f : E_1 \times E_2 \longrightarrow E$ une fonction mesurable. Alors pour chaque $x \in E_1$, fixé la fonction $f_x : E_2 \longrightarrow E$, où $f_x(y) = f(x,y)$, $\forall y \in E_2$ est mesurable et pour chaque $y \in E_2$, fixé la fonction $f_y : E_1 \longrightarrow E$, où $f_y(x) = f(x,y)$, $\forall x \in E_1$ est mesurable.*

Preuve. Montrons que $f_x : E_2 \longrightarrow E$ est mesurable et de la même manière on peut montrer que la fonction $f_y : E_1 \longrightarrow E$ est mesurable.
Soit $B \in T$, alors

$$\begin{aligned} f_x^{-1}(B) &= \{y \in E_2,\ f_x(y) \in B\} \\ &= \{y \in E_2,\ f(x,y) \in B\} \\ &= \{y \in E_2,\ (x,y) \in f^{-1}(B)\} \\ &= \left(f^{-1}(B)\right)_x. \end{aligned}$$

Mais f est mesurable donc $f^{-1}(B) \in T_1\otimes T_2$, alors, d'après la Proposition 3.1.1, on trouve que $\left(f^{-1}(B)\right)_x \in T_2$, d'où $f_x : E_2 \longrightarrow E$ est mesurable. ■

Proposition 3.1.3 *[1] Soient (E_1,T_1), (E_2,T_2) deux espaces mesurables et μ_i une mesure positive $\sigma-$finie sur T_i, $i = 1,2$. Alors il existe une unique mesure positive μ sur $T_1 \otimes T_2$ telle que pour tout $(F_1,F_2) \in T_1 \times T_2$, $\mu(F_i) < +\infty$, $i = 1,2$, de plus $\mu(F_1 \times F_2) = \mu_1(F_1) \times \mu_2(F_2)$. Cette mesure est appelée mesure produit de μ_1 par μ_2 et elle est notée $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$.*

Définition 3.1.3 *Soient (E_1,T_1,μ_1) et (E_2,T_2,μ_2) deux espaces mesurés. On appelle espace mesuré produit des espaces (E_1,T_1,μ_1) et (E_2,T_2,μ_2), l'espace $(E_1 \times E_2, T_1 \otimes T_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$.*

3.2 Théorème de Fubini et conséquences

Théorème 3.2.1 *[3]***(Fubini-Tonelli)** *Soient (E, T, μ) l'espace mesuré produit de deux espaces mesurés (E_1, T_1, μ_1) et (E_2, T_2, μ_2) et $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une application mesurable positive. Alors*

1) *Les applications g_1 et g_2 définies respectivement par*

$$g_1(x) = \int_{E_2} f(x, y) d\mu_2(y),\ \forall x \in E_1$$

et

$$g_2(y) = \int_{E_1} f(x, y) d\mu_1(x),\ \forall y \in E_2$$

sont mesurables positives.

2) $\displaystyle\int_{E_1 \times E_2} f(x, y) d\mu = \int_{E_2} \left(\int_{E_1} f(x, y) d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y) = \int_{E_1} \left(\int_{E_2} f(x, y) d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x).$

Corollaire 3.2.1 *Soient (E, T, μ) l'espace mesuré produit de deux espaces mesurés (E_1, T_1, μ_1) et (E_2, T_2, μ_2) et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application mesurable. Alors*

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, \mu) \quad &\Leftrightarrow \quad \int_{E_2} \left(\int_{E_1} |f(x, y)| d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y) < +\infty \\ &\Leftrightarrow \quad \int_{E_1} \left(\int_{E_2} |f(x, y)| d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) < +\infty. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Preuve. Il suffit d'appliquer le Théorème 3.2.1 à l'application $x \longmapsto |f(x)|$. ■

Théorème 3.2.2 (Fubini) *Soient (E, T, μ) l'espace mesuré produit de deux espaces mesurés (E_1, T_1, μ_1) et (E_2, T_2, μ_2) et $f \in \mathcal{M}(E, T) \cap \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, \mu)$. Alors*

1) *l'application $y \longmapsto f_x(y) = f(x, y)$ (respectivement $x \longmapsto f_y(x) = f(x, y)$) est μ_2 intégrable pour μ_1−presque tout $x \in E_1$ (respectivement est μ_1 intégrable pour μ_2−presque tout $y \in E_2$).*

Les applications $G_i : E_i \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ où

$$G_1(x) = \int_{E_2} f(x, y) d\mu_2(y) \text{ et } G_2(y) = \int_{E_1} f(x, y) d\mu_1(x)$$

sont définies presque partout sur E_1 et E_2 respectivement et elles sont intégrables.

2) $\int\limits_{E_1\times E_2} f(x,y)d\mu(x,y) = \int\limits_{E_1}\left(\int\limits_{E_2} f(x,y)d\mu_2(y)\right)d\mu_1(x) = \int\limits_{E_2}\left(\int\limits_{E_1} f(x,y)d\mu_1(x)\right)d\mu_2(y).$

Preuve.

1) On a f est intégrable donc d'après le Corollaire 3.2.1 on trouve que

$$\int\limits_{E_1}\left(\int\limits_{E_2}|f(x,y)|d\mu_2(y)\right)d\mu_1(x) < +\infty,$$

alors

$$\int\limits_{E_2}|f(x,y)|d\mu_2(y) < +\infty,\ \mu_1\, p.p,$$

donc

$$\exists A \in T_1,\ \mu_1(A) = 0,\ \forall x \in E_1 \setminus A,\ \int\limits_{E_2}|f(x,y)|d\mu_2(y) < +\infty.$$

Alors $y \longmapsto f_x(y) = f(x,y)$ est μ_2 intégrable pour μ_1-presque tout $x \in E_1$, d'où G_1 est définie presque partout sur E_1.

De la même manière on peut montrer que $x \longmapsto f_y(x) = f(x,y)$ est μ_1 intégrable pour μ_2-presque tout $y \in E_2$ et que G_2 est définie presque partout sur E_2.

Soit G_1^+ et G_1^- les applications définies par

$$G_1^+(x) = \int\limits_{E_2} f^+(x,y)d\mu_2(y) \text{ et } G_1^-(x) = \int\limits_{E_2} f^-(x,y)d\mu_2(y).$$

D'après le Théorème 3.2.1 on trouve que G_1^+ et G_1^- sont mesurables et pour tout $x \in E_1 \setminus A$ on a

$$0 \leq G_1^{\pm}(x) \leq \int\limits_{E_2}|f(x,y)|d\mu_2(y) < +\infty.$$

D'autre part on a

$$G_1(x) = \begin{cases} G_1^+(x) - G_1^-(x), & \text{si } x \in E_1 \setminus A, \\ 0, & \text{si } x \in A. \end{cases}$$

Alors $G_1 : E_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ est mesurable et

$$\begin{aligned}\int_{E_1} |G_1(x)| d\mu_1(x) &= \int_{E_1} \left| \int_{E_2} f(x,y) d\mu_2(y) \right| d\mu_1(x) \\ &\leq \int_{E_1} \left(\int_{E_2} |f(x,y)| d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) < +\infty.\end{aligned}$$

Alors G_1 est μ_1-intégrable. De la même manière on peut montrer que G_2 est μ_2-intégrable.

2) En appliquant le Théorème 3.2.1 à f^+ et à f^- on obtient

$$\begin{aligned}\int_{E_1} G_1(x) d\mu_1(x) &= \int_{E_1} G_1^+(x) d\mu_1(x) - \int_{E_1} G_1^-(x) d\mu_1(x) \\ &= \int_{E_1 \times E_2} f^+(x,y) d\mu(x,y) - \int_{E_1 \times E_2} f^-(x,y) d\mu(x,y) \\ &= \int_{E} f(x,y) d\mu(x,y).\end{aligned}$$

De la même manière on trouve que $\int_{E_2} G_2(x) d\mu_2(x) = \int_{E} f(x,y) d\mu(x,y)$. ■

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. Gallouët, R. Herbin Mesure, intégration, probabilités, Ellipses, 2013.

[2] D. REVUZ, Mesure et intégration, Paris : Hermann, 1997.

[3] S. Axler, Mesure, Intégration and Real Analysis , Graduate texts in Mathematics 282, https ://doi.org/10.1007/978-3-030-33143-6, 2020.

[4] E. Stein, R. Shakarchi, Real analysis, Measure theory, integration, and Hilbert spaces, Princeton Lectures in Analysis, III. Princeton University Press, Princeton, NJ.