Corrigé type : Modèles autoregressifs.

Exercice 1 :

1

• c'est quoi la trend ?

La trend shématise la tendance générale au phénomène, elle traduit aussi le comportement moyen de la serie.

• C'est quoi la composante saisonnière ?

Elle correspond à phénomene qui se répète à un intervalle de temps régulier (périodique), d'ou le terme de "variation saisonnières" avec les saison $S_1, S_2, S_3 \dots S_p, S_{t+p}$ $\forall t \in \mathbb{N}$

• Le but de l'analyse des series temporelles ?

- Corriger
- Modéliser
- prévoir.

• Quelle est le but de la désaisonalisation ?

La désaisonnalisation est une technique statistique qui permet de retirer des données économiques, les fluctuation qui ont lieu tous les ans au même moment et de manière semblable.

2

$$\hat{F}_t^{CSV} = 0{,}33\,t + 0{,}80 + [+1{,}47 , -1{,}39 , 1{,}30 , -1{,}25]$$

• La prévison pour le premier trismestre 2010

$$\hat{F}_{13}^{CSV} = (0{,}33 \times 13) + 0{,}80 + 1{,}47 = 6{,}56$$

• La prévision pour le 4ème trimestre 2010

$$\hat{F}_{16}^{CSV} = (0{,}33 \times 16) + 0{,}8 + (-1{,}25) = 4{,}83$$

3 La méthode de moindre carrés

Exercice 2 :

$$x_t = \varepsilon_t - 0{,}5 \, L\varepsilon_t - 0{,}3 \, L\varepsilon_{t-1} + 10,$$

$$x_t = \varepsilon_t - 0{,}5\,\varepsilon_{t-1} - 0{,}3\,\varepsilon_{t-2} + 10.$$

• 1. Les processus (MA) sont toujours stationnaires (Tous les modèles d'ordre fini de MA sont stationnaires)

• 2. Le processus est inversible lorsque :

Méthode 1 :

$$\theta_1 + \theta_2 < 1,$$
$$\theta_2 - \theta_1 < 2,$$
$$-1 < \theta_1 < 1.$$

On a $\theta_1 = -0{,}5$, $\theta_2 = -0{,}3$.

donc $\theta_1 + \theta_2 = -0{,}8 < 1$.

$\theta_2 - \theta_1 = 0{,}2 < 2$.

et $-1 < 0{,}5 < 1$.

Donc le processus est inversible.

Méthode 2 :

$$\lambda^2 - 0{,}5\lambda - 0{,}3 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac.$$
$$= 1{,}45 \text{ ; alors } \sqrt{\Delta} = 1{,}2$$

$$\lambda_1 = \frac{0{,}5 + 1{,}2}{2} = |0{,}85| < 1$$

$$\text{et } \lambda_2 = \frac{0{,}5 - 1{,}2}{2} = |-0{,}35| < 1.$$

Donc le processus est inversible puisque les deux racines sont à l'intérieur du cycle unité.

Méthode 3 :

$$1 - 0{,}5L - 0{,}3L^2 \Rightarrow \Delta = 1{,}45 \text{ alors } \sqrt{\Delta} = 1{,}2.$$

$$L_1 = |1{,}16| > 1 \quad \text{et} \quad L_2 = |-2{,}83| > 1.$$

Les deux racines sont en dehors du cycle unité.

Donc le processus est inversible.

3- Déterminons la ACF et la PACF

$$E(X_t) = E(\varepsilon_t - 0{,}5\,\varepsilon_{t-1} - 0{,}3\,\varepsilon_{t-2} + 10)$$

avec $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$ et $V(\varepsilon_t) = 1$.

donc $E(X_t) = E(\varepsilon_t) + 10 - 0{,}5\,\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}) - 0{,}3\,\mathbb{E}(\varepsilon_{t-2})$

$$\boxed{E(X_t) : 10}$$

$$V(X_t) : E(X_t - 10)^2 : E(\varepsilon_t - 0{,}5\,\varepsilon_{t-1} - 0{,}3\,\varepsilon_{t-2})^2.$$

$$= \underbrace{E(\varepsilon_t^2)}_{\sigma^2} + 2\cdot(-0{,}5)\,\mathbb{E}(\varepsilon_t\,\varepsilon_{t-1}) - 2\,(-0{,}3)\,E(\varepsilon_t\,\varepsilon_{t-2})$$
$$(-0{,}5)^2\,\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1})^2 + 2\,(0{,}5)(0{,}3)\,E(\varepsilon_{t-1}\,\varepsilon_{t-2}) + (0{,}3)^2\,\mathbb{E}(\varepsilon_{t-2}^2)$$

$$V(X_t) = \sigma^2 + 0 + 0 + (-0{,}5)^2 \cdot 1 + 0 + (-0{,}3)^2 \cdot 1.$$

$$\boxed{V(X_t) = 1{,}34}$$

- $\gamma(0) : V(X_t) = 1{,}34$

$$\gamma(k) : E(X_t - \mu)\cdot(X_{t-k} - \mu)$$
$$= E(\varepsilon_t + \theta_1\,\varepsilon_{t-1} + \theta_2\,\varepsilon_{t-2})\cdot(\varepsilon_{t-k} + \theta_1\,\varepsilon_{t-k-1} + \theta_2\,\varepsilon_{t-k-2})$$

pour $k = 1$

$$\gamma(1) : \mathbb{E}(\varepsilon_t - 0{,}5\varepsilon_{t-1} - 0{,}3\varepsilon_{t-2})\cdot(\varepsilon_{t-1} - 0{,}5\,\varepsilon_{t-2} - 0{,}3\,\varepsilon_{t-3})$$

$$= \underbrace{E(\varepsilon_t\,\varepsilon_{t-1})}_{0} - 0{,}5\,\underbrace{\mathbb{E}(\varepsilon_t\,\varepsilon_{t-2})}_{0} - 0{,}3\,\underbrace{\mathbb{E}(\varepsilon_t\,\varepsilon_{t-3})}_{0} - 0{,}5\,\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}^2)$$
$$+ 0{,}25\,\underbrace{\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}\,\varepsilon_{t-2})}_{0} - 0{,}15\,\underbrace{\mathbb{E}(\varepsilon_t\,\varepsilon_{t-3})}_{0} - 0{,}3\,\underbrace{\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}\,\varepsilon_{t-2})}_{0}$$
$$+ 0{,}15\,\mathbb{E}(\varepsilon_{t-2}^2) + 0{,}09\,\underbrace{\mathbb{E}(\varepsilon_{t-2}\,\varepsilon_{t-3})}_{0}$$

$$\gamma(1) : -0{,}5\,\sigma^2 + (-0{,}5 \times -0{,}3)\,\sigma^2 \qquad \text{avec } \sigma^2 = 1.$$

$$\boxed{\gamma(1) : -0{,}35}$$

$$\gamma(2) = E\left(\varepsilon_t - 0{,}5\varepsilon_{t-1} - 0{,}3\,\varepsilon_{t-2}\right)\cdot\left(\varepsilon_{t-2} - 0{,}5\,\varepsilon_{t-3} - 0{,}3\,\varepsilon_{t-4}\right)$$

Alors $\gamma(2) = E(-0{,}3\,\varepsilon_{t-2}) = -0{,}3\,\sigma^2 = -0{,}3$

$$\boxed{\gamma(2) = -0{,}3}$$

$\gamma(3) = 0$, $\gamma(4) = 0$, $\boxed{\gamma(k) = 0 \quad \text{si } k > 2}$

- ACF

$\rho(k) = \dfrac{\gamma(k)}{\gamma(0)}$, $\rho(0) = \dfrac{\gamma(0)}{\gamma(0)} = 1.$

$$\rho(1) = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \frac{-0{,}35}{1{,}34} = -0{,}26$$

$$\rho(2) = \frac{\gamma(2)}{\gamma(0)} = \frac{-0{,}3}{1{,}34} = -0{,}22$$

$$\boxed{\rho(k) = 0 \quad \text{pour } k > 2}$$

- PACF

$\phi_{11} = \rho(1) = -0{,}26$

$$\phi_{22} = \frac{R^*(2)}{R(2)} = \frac{\begin{vmatrix} \rho(0) & \rho(1) \\ \rho(1) & \rho(2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \rho(0) & \rho(1) \\ \rho(1) & \rho(0) \end{vmatrix}} = \frac{\rho(0)\cdot\rho(2) - \rho(1)^2}{\rho^2(0) - \rho^2(1)} = -0{,}31134$$

$$\phi_{33} = \frac{R^*(3)}{R(3)} = \frac{\begin{vmatrix} \rho(0) & \rho(1) & \rho(1) \\ \rho(1) & \rho(0) & \rho(2) \\ \rho(2) & \rho(1) & \rho(3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \rho(0) & \rho(1) & \rho(2) \\ \rho(1) & \rho(0) & \rho(1) \\ \rho(2) & \rho(1) & \rho(0) \end{vmatrix}} = -0{,}188$$

$\phi_{44} = -0{,}165.$

• 4 • Les coefficients de corrélation sont nuls à partir de $k > 2$ car le processus est d'ordre (2).

• 5 • pour dire que le processus admet une écriture inverse il faut que le processus soit inversible.

• 6 • Comme x_t est inversible, il admet une représentation $AR(\infty)$,

on a : $x_t - 10 = \tilde{x}_t = \varepsilon_t - 0{,}5\,\varepsilon_{t-1} - 0{,}5\,\varepsilon_{t-2}$

$$= (1 - 0{,}5L - 0{,}3L^2)\,\varepsilon_t = \Theta(L)\,\varepsilon_t .$$

$$(\Theta(L))^{-1}\tilde{x}_t = \Pi(L)\,\tilde{x}_t = \varepsilon_t$$

tq : $\Pi(L) \cdot \Theta(L) = 1$ càd :

$$(1 + \Pi_1 L + \Pi_2 L^2 + \Pi_3 L^3 + \Pi_4 L^4) \cdot (1 + \Theta_1 L + \Theta_2 L^2 + \Theta_3 L^3) = 1$$

donc $1 + (\Pi_1 + \Theta_1)L + (\Pi_2 + \Pi_1\Theta_1 + \Theta_2)L^2 + (\Pi_3 + \Pi_2\Theta_1 + \Pi_1\Theta_2)L^3$
$+ (\Pi_4 + \Pi_3\Theta_1 + \Pi_2\Theta_2) = 1$

par identification

$\Pi_1 + \Theta_1 = 0 \Rightarrow \Pi_1 = -\Theta_1 = -(-0{,}5) = 0{,}5$ donc $\boxed{\Pi_1 = 0{,}5}$

$\Pi_2 + \Pi_1\Theta_1 + \Theta_2 \Leftrightarrow \Pi_2 = -\Pi_1\Theta_1 - \Theta_2$ alors $\boxed{\Pi_2 = -0{,}05}$

$\Pi_3 + \Pi_2\Theta_1 + \Pi_1\Theta_2 = 0 \Rightarrow \Pi_3 = -\Pi_2\Theta_1 - \Pi_1\Theta_2$ donc $\boxed{\Pi_3 = 0{,}175}$

$\Pi_4 + \Pi_3\Theta_1 + \Pi_2\Theta_2 = 0 \Rightarrow \Pi_4 = -\Pi_3\Theta_1 - \Pi_2\Theta_2$, donc $\boxed{\Pi_4 = 0{,}0725}$

donc la formule d'une manière générale des coefficients Π_j vérifient la relation suivante :

$\Pi_j + \Pi_{j-1}\Theta_1 + \Pi_{j-2}\Theta_2 = 0$ pour tous $j > 1$ avec $\Pi_0 = 1$.