Université Hassiba Benbouali Chlef
Faculté des Sciences Exactes & Informatique
Département de Mathématiques

Année universitaire 2021/2022
Master II : Math.Appli & Stat
Module : Stat Non Parametrique

Fiche TD $N =^\circ$ **03_(a)_** : estimation NP de la densité de probabilité

Exercice 01 : Soit $\theta > 0$ et soit X une variable aléatoire réelle de densité f_θ définie par

$$f_\theta(x) = 2\theta x \exp(-\theta x^2)\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x);$$

1. Montrer que f_θ est bien une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = \theta X^2$. **(a)** Calculer la fonction de répartition de Y . **(b)** En déduire la densité de Y ainsi que $\mathbb{E}[X^2]$.

Exercice 02 :

Soit $\theta > 0$ un nombre réel fixé et $Z = (X, Y)'$ un vecteur aléatoire dont la densité f est définie sur $\mathbf{R}^2$ par

$$f(x, y) = C \exp(-\theta y)\mathbb{I}_{0<x<y};$$

1. Montrer que $C = \theta^2$.
2. Déterminer les lois marginales de Z ainsi que $\mathbb{E}[X]$ et $V[X]$. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer la densité conditionnelle de $Y/X = x$.
4. Calculer $\mathbf{P}(Y > 2X/X = x)$.

Exercice 03 : Soit X une variable aléatoire réelle de densité f_θ définie par

$$f_\theta(x) = (1-\theta)\mathbb{I}_{[-1/2,0]}(x) + (1+\theta)\mathbb{I}_{[0,1/2]}(x);$$

où θ est un paramètre réel tel que $|\theta| \neq 1$.

1. Quelles conditions doit vérifier θ pour que f_θ soit bien une densité de probabilité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$?
2. Calculer l'espérance de X ?

Exercise 04 :

Soit $Z = (X, Y)'$ un couple aléatoire dont la densité est donnée par

$$f_Z(x, y) = \begin{cases} \dfrac{k}{\sqrt{xy}}, & \text{si } 0 < x \leq y < 1; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que $k = 1/2$.

2. Calculer les densités marginales. En déduire $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[Y]$. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ? Justifier.

3. Déterminer la densité conditionnelle de $Y/X = x$.

4. Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[Y/X]$. et retrouver la valeur de $\mathbb{E}[Y]$ en utilisant la question précédente.

Exercise 05 :

1. Decrivez la méthode d'estimation de densité par histogramme. A quoi correspond le paramètre h de cette méthode ?
2. Consider $f(x) = 2x_{I_{(x\in[0,1])}}$ and histograms using binwidths $h = \frac{1}{m}$ for $m = 1, 2, ...$ starting at $x_0 = 0$. Calculate

$$MISE(\widehat{f}_h) = \int_0^1 MSE\{\widehat{f}_h(x)\}dx$$

   and the optimal binwidth h_0.
3. Soit X une variable aléatoire réelle de densité f_X. La variable aléatoire $Y = 2X$ admet pour densité :

   (a) $\frac{1}{2}f_X(x)$ (b) $\frac{1}{2}f_X(\frac{x}{2})$ (c) $2f_X(x)$ (d) $2f_X(2x)$ (e) une autre

Exercise 06 : Compute $\|f'\|_2^2$ for $f(x) = \frac{2}{3}\left[\left(\frac{x}{2}+1\right)_{I_{x\in[-2,0)}} + (1-x)_{I_{x\in[0,1)}}\right]$ and derive the MISE and optimal binwidth.

Exercise 07 :

1. Soit X une variable aleatoire, à valeurs réelles, de densité de probabilité :

$$\begin{cases} xe^{x^2/2}, & \text{si } x \geq 0. \\ 0, & \text{sinon ;} \end{cases}$$

   a) Determiner le mode de X et tracer le graphe de f.

   b) Calculer l'esperance et la variance de X.

   c) Determiner la fonction de répartition de X et calculer la probabilite de l'événement $p(0 \leq X < 2)$

Exercise 08 : calculate $\hat{f}_H(x) = n_j/nh$ with Histogram Data (n=68) :

j	I_j	n_j	n_j/nh	j	I_j	nj	nj/nh
1	$[0.1, 0.2]$	1		5	$(0.5, 0.6]$	24	
2	$(0.2, 0.3]$	4		6	$(0.6, 0.7]$	9	
3	$(0.3, 0.4]$	9		7	$(0.7, 0.8]$	3	
4	$(0.4, 0.5]$	13		8	$(0.8, 0.9]$	5	