UNIVERSITÉ HASSIBA BENBOUALI DE CHLEF

Faculté des Sciences Exactes et informatique
Déparetement de mathématiques
Année universitaire : 2020-2021

Examen Final : Corrigé

Module. **Programmation Linéaire 2**
Niveau : 1^{ere} Master mathématiques appliquées et statistique

Exercice 1 (07 pts)

Soit le programme linéaire (PL) suivant

$$(PL)\left\{\begin{array}{rc} \max\ z = & 200x_1 + 300x_2 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 600 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 400 \\ & x_1 + x_2 \leq 225 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right.$$

1. Le dual (D) de ce problème linéaire est le suivant :

$$(D)\left\{\begin{array}{rc} \min\ w = & 600u_1 + 400u_2 + 225u_3 \\ & 3u_1 + u_2 + u_3 \geq 200 \\ & 2u_1 + 2u_2 + u_3 \geq 300 \\ & u_1, u_2, u_3 \geq 0 \end{array}\right. \quad \textbf{(1.5pts)}$$

2. En utilisant la méthode simplex, on trouve $x_1^* = 50, x_2^* = 175, z^* = 62500$. **(1.5pts)**
3. En utilisant le théorème des écarts complémentaires, on obtient :

$$\begin{aligned} 3 \times 50 + 2 \times 175 &= 500 \\ 50 + 2 \times 175 &= 400 \\ 50 + 175 &= 225 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 600 - 500 = 100 > 0 &\Longrightarrow u_1 = 0 \\ 400 - 400 = 0,&\ \text{aucun conclusion} \\ 225 - 225 = 0,&\ \text{aucun conclusion.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1^* > 0 &\Longrightarrow \text{ la première contrainte est saturée.} \\ x_2^* > 0 &\Longrightarrow \text{ la deuxième contrainte est saturée.} \end{aligned}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_2 + u_3 &=& 200 \\ 2u_2 + u_3 &=& 300 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} u_2 &=& 100 \\ u_3 &=& 100 \end{array}\right.$$

$u_1^* = 0, u_2^* = 100, u_3^* = 100, w^* = 62500$. **(4pts)**

Exercice 2 (07 pts)

Trouver la solution du problème (P) en utilisant la méthode simplexe dual

$$(P)\begin{cases} \max\ z = & -2x_1 - x_2 \\ & -3x_1 - x_2 \leq -3 \\ & -4x_1 - 3x_2 \leq -6 \\ & -x_1 - 2x_2 \leq -3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	**s.m**	**V.b**
-3	-1	1	0	0	-3	$\mathbf{x_3}$
-4	-3	0	1	0	-6	$\mathbf{x_4}$
-1	-2	0	0	1	-3	$\mathbf{x_5}$
$\mathbf{-2}$	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{-z}$
$-\frac{5}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	-1	$\mathbf{x_3}$
$\frac{4}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	2	$\mathbf{x_2}$
$\frac{5}{3}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	1	1	$\mathbf{x_5}$
$-\frac{2}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	-2	$-z$
1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$\mathbf{x_1}$
0	1	$\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$	$\mathbf{x_2}$
0	0	1	-1	1	0	$\mathbf{x_5}$
0	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$-\frac{12}{5}$	$-z$

Comme $d_N^T = \left(0, 0, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 0, -\frac{12}{5}\right)$ et $x_B \geq 0$, donc la solution courante est la solution optimale. Par conséquent, la solution optimale est : $x_1 = \frac{3}{5}$ et $x_2 = \frac{6}{5}$, avec $z = -\frac{12}{5}$.

Exercice 3 (06 pts)

Soitle programme linéaire en Nombre Entier $(PLNE)$ suivant

$$(PLNE)\begin{cases} \max\ z = & 4x - y \\ & 7x - 2y \leq 14 \\ & y \leq 3 \\ & 2x - 2y \leq 3 \\ & x, y \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. La résolution du problème par la méthode graphique ?
   Pour commencer, nous traçons les contraintes, nous obtenons donc une solution continue en utilisant la relaxation linéaire, la solution trouvée par ce problème relaxé est : $x = \dfrac{20}{7}, y = 3, z^{Relaxation} = 8,42$. La valeur $z^{Relaxation} = 8,42$ représente la borne supérieure de la solution du problème linéaire en ajoutant les contraintes entière $(PLNE)$. Mais la solution dans un programme en PLNE doit être entière et non fractionnaire. Ici la solution continue donne une valeur fractionnaire. Pour trouver une solution entière, nous traçons la droite$z = 4x - y =$ partie entière inférieure de $z^{Relaxation} = 8$. On trouve qui'il n'existe aucune solution entière ayant cette valeur. Puis, on trace la droite $z = 4x - y = 8 - 1 = 7$, ce qui donne la solution entière . **(2pts)**

2. La résolution du problème par aa méthode Branch and Bound :**(4pts)**

1. Initialisation :
   - Calculer un LB par une heuristique qui donne des solutions entières
   - Calculer un UB par la méthode du simplex

2. choisir une variable xi et une constante xi* et ajouter la contrainte suivante xi ≥ xi*+1 (xi ≤ xi*)
3. diviser le problème selon ces deux contraintes (voir exemple)
2. Pour chaque nœud i calculer UBi de ce nœud par la méthode du simplexe
Si (UBi < LB)
Séparer ce nœud
Sinon (si UBi est fractionné)
Aller à 2
Sinon (si UBi est entier)
Mettre LB=UBi
Aller à 2

L'algorithme générait alors l'arbre suivant :

max z = 4x1 − x2
7x1 − 2x2 ≤ 14
x2 ≤ 3
2x1 − 2x2 ≤ 3

x1,x2 entiers
best-sol (2.86,3), z= 8.43=UB mais fractionnée
LB= 5

x1 ≤ 2

max z = 4x1 − x2
7x1 − 2x2 ≤ 14
x2 ≤ 3
2x1 − 2x2 ≤ 3
x1 ≤ 2

z=7.5 =$UB_{x1\leq 2}$ > LB

x1 = 2.0 ; x2 = 0.5 fractionné

x1 ≥ 3

max z = 4x1 − x2
7x1 − 2x2 ≤ 14
x2 ≤ 3
2x1 − 2x2 ≤ 3

x1 ≥ 3
Infaisable

pas de solution

X

x2 <= 1

max z = 4x1 − x2
7x1 − 2x2 ≤ 14
~~x2 ≤ 3~~
2x1 − 2x2 ≤ 3

x1 <= 2
x2 <= 1

z=7.5 =UB> LB

x1 = 1 ; x2 =0.5

Fractionnaire

x2 >= 2

max z = 4x1 − x2
7x1 − 2x2 ≤ 14
x2 ≤ 3
2x1 − 2x2 ≤ 3

x1 <= 1
x2 >=2

best sol Z=7
x1 = 2.0
x2 = 1.0
Prendre LB=7

x1 <= 1

max z = 4x1 − x2
7x1 − 2x2 ≤ 14
x2 ≤ 3
2x1 − 2x2 ≤ 3

x1 <= 1
x2 <= 1
UBi=4 <LB refusée

x1 >= 0

max z = 4x1 − x2
7x1 − 2x2 ≤ 14
2x1 − 2x2 ≤ 3

x2 <= 1
x1 >=0 ; x1 ≤ 2

Solution fractionnée non admissible.

X