Universié Dr. Yahia Farès de Médéa	Date : 02/10/2017
Faculté des Sciences	$3^{ème}$ Année Mathématiques
Département de mathématiques et Informatique	Module : Mesure et intégration

Série $N^o 1$: Rappels et Tribus

Exercice 1 *Soit $f : E \to F$ une application.*

1) Montrer que pour toute famille $(B_j)_{j\in J}$ de parties de F

$$f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j),\ f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j) \text{ et } f^{-1}\left(\complement_F B_j\right) = \complement_E f^{-1}(B_j).$$

2) Montrer que pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de E

$$f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i) \text{ et } f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i).$$

3) Montrer que si f est injective, alors $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$.

Exercice 2 *Soit E un ensemble et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensemble de $\mathcal{P}(E)$. On pose*

$$B_n = A_n \cap \left(\bigcup_{k=0}^{n-1} A_k\right)^C \quad \text{avec } B_0 = A_0.$$

Montrer que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

et que les B_n sont deux à deux disjoints. (Cela signifie que toute réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{P}(E)$ peut s'écrire comme réunion dénombrable de parties deux à deux disjointes).

Exercice 3 *Soit E un ensemble. Lorsque A est une partie de E, on définit $\mathbb{1}_A : E \to \mathbb{R}$ par*

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A \\ 0 & si \quad x \notin A \end{cases}$$

1) Montrer que si A et B sont deux sous-ensembles disjoints de E, alors $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$.

2) En déduire que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de sous-ensembles de E deux à deux disjoints, on a $\mathbb{1}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n}$ (On précisera aussi le sens donné à $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n}$).

3) Montrer que si $B \subset A \subset E$, on a $\mathbb{1}_{A\setminus B} = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B$.

4) Montrer que, pour A et B sous-ensembles de E, on a $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.

5) Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction ne prenant qu'un nombre fini de valeurs. Montrer que f s'écrit comme combinaison linéaire de fonctions caractéristiques.

Exercice 4 *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties d'un ensemble E. On note*

$$\liminf_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{p\geq n} A_p \text{ et } \limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\geq n} A_p.$$

1) *On suppose la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, c'est-à-dire que $A_n \subseteq A_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, ou que $A_{n+1} \subseteq A_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $\liminf_{n\to+\infty} A_n$ et $\limsup_{n\to+\infty} A_n$ en fonction de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.*

2) *Même question que précédemment si la suite est définie par : $A_{2p} = A$ et $A_{2p+1} = B$, $p \in \mathbb{N}$, A et B étant deux parties données de E.*

3) *Montrer que*

$$\mathbb{1}_{\limsup_{n\to+\infty} A_n} = \limsup_{n\to+\infty} \mathbb{1}_{A_n}, \quad \mathbb{1}_{\liminf_{n\to+\infty} A_n} = \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{1}_{A_n} \text{ et } \liminf_{n\to+\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to+\infty} A_n.$$

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to+\infty} A_n &= \left\{x \in E;\ \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{A_n^c}(x) < \infty\right\} \\
&= \{x \in E;\ x \text{ appartient à } A_n \text{ pour tout } n \text{ sauf au plus un nombre fini}\} \\
\limsup_{n\to+\infty} A_n &= \left\{x \in E;\ \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x) = +\infty\right\} \\
&= \{x \in E;\ x \text{ appartient à } A_n \text{ pour une infinité d'indices } n\}
\end{aligned}$$

Exercice 5 *Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application*

1) *Soit $\mathcal{B}$ une tribu sur F. On note :*

$$\mathcal{T} = f^{-1}(\mathcal{B}) = \left\{f^{-1}(B),\ B \in \mathcal{B}\right\}.$$

Montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu sur E (appelée image réciproque de la tribu $\mathcal{B}$).

2) *Dans le cas où $E \subseteq F$ et f définie par $f(x) = x$ pour tout x, montrer que $\mathcal{T} = \{E \cap B,\ B \in \mathcal{B}\}$ et on dit que $\mathcal{T}$ est la tribu trace de $\mathcal{B}$ sur E.*

3) *Déterminer $f^{-1}(\mathcal{B})$ si $E = \{-1, 0, 1, 2\}$, $F = \{0, 1, 4\}$, $\mathcal{B} = \mathcal{P}(F)$ et $f(x) = x^2$.*

4) *Montrer avec un exemple que si $\mathcal{A}$ une tribu sur E, alors $f(\mathcal{A}) = \{f(A),\ A \in \mathcal{A}\}$ en général n'est pas une tribu sur F.*

Exercice 6 *Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application et $\mathcal{C}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$. On veut montrer que l'image réciproque de la tribu engendrée par $\mathcal{C}$ est la tribu $\mathcal{T}$ engendrée par l'image réciproque de $\mathcal{C}$.*

1) *Montrer que*

$$f^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \text{ et } \mathcal{T} = \sigma\left(f^{-1}(\mathcal{C})\right) \subseteq f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})).$$

2) *On note $\mathcal{T}' = \left\{B \subseteq F,\ f^{-1}(B) \in \mathcal{T}\right\}$. Montrer que $\mathcal{T}'$ est une tribu sur F contenant $\mathcal{C}$.*

3) *En déduire que $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$ est inclus dans $f^{-1}(\mathcal{T}')$ et conclure.*

4) *Vérifier que $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) = \sigma\left(f^{-1}(\mathcal{C})\right)$ si $E = \{-1, 0, 1\}$, $F = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{C} = \{\{1\}, \{0, 1\}\}$ et $f(x) = x^2$.*

Universié Dr. Yahia Farès de Médéa	Date : 22/10/2016
Faculté des Sciences	$3^{ème}$ Année Mathématiques
Département de mathématiques et Informatique	Module : Mesure et intégration

Série $N°2$: Tribus et Mesures

Exercice 1 *On définit sur $P(\mathbb{R})$ l'application*

$$\delta(A) = \begin{cases} 1, & 0 \in A \\ 0, & 0 \notin A \end{cases}$$

Montrer que δ est une mesure positive sur $(\mathbb{R}, P(\mathbb{R}))$.

Exercice 2 *On définit l'application $\mu : P(\mathbb{N}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ par*

$$\begin{cases} \mu(\emptyset) = 0, \quad \mu(E) = +\infty \quad si\ card(E) = +\infty \\ \mu(E) = \sum\limits_{n\in E} \frac{1}{n^2} \quad si\ card(E) < +\infty \end{cases}$$

Montrer que μ n'est une mesure positive sur $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}))$.

Exercice 3 *Soit X un ensemble, et $a \in X$. Soit l'application*

$$\begin{cases} \mu : P(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+ \\ \mu(A) = \mathbb{1}_A(a) \end{cases}$$

1) *Vérifier que μ est une mesure positive sur $(X, P(X))$.*

2) *Déterminer les parties négligeables pour μ.*

3) *Soit f et g deux fonctions définies sur X telles que :*

$$f(a) = g(a) \quad et\ \forall x \in X\backslash\{a\} : f(x) \neq g(x).$$

quelle est la proprétie vraie P :$f = g$ μ p.p ou Q :$f \neq g$ μ p.p. Justifier !

Exercice 4 *Soit $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espace probabilisé, on définit*

$$\mathscr{T} = \{A \in \mathscr{M},\ \mu(A) = 1 \ ou\ \mu(A) = 0\}.$$

Montrer que $\mathscr{T}$ est une tribu sur X.

Exercice 5 *Soit X une ensemble non vide et soit $\mathscr{M}$ une tribu engendrée par les singletons $\{x\}$ de X.*

1) *Montrer que $A \in \mathscr{M}$ si seulement A ou A^c est dénombrable.*

2) *On suppose que X est non dénombable et on définit pour $A \in \mathscr{M}$*

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{si } A \text{ est dénombrable} \\ 1, & \text{si } A \text{ est non dénombrable} \end{cases}$$

Montrer que μ est une mesure positive sur $\mathscr{M}$.

Exercice 6 *Montrer que les deux ensembles suivants sont boréliens et calculer leurs mesure de Lebesgue*

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \left] \frac{1}{k+1}; \frac{1}{k} \right[, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} \left] \frac{1}{2k}; \frac{1}{2k-1} \right[.$$

Exercice 7 *Soit $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espace mesuré et soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{M}$. Montrer que*

$$\mu\left(\liminf_{n\to+\infty}(A_n)\right) \leq \liminf_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

et lorsque μ est finie, on a aussi

$$\limsup_{n\to+\infty} \mu(A_n) \leq \mu\left(\limsup_{n\to+\infty}(A_n)\right).$$

et si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) < +\infty$ on a (Lemme Borel-cantelli)

$$\mu\left(\limsup_{n\to+\infty}(A_n)\right) = 0.$$

Exercice 8 *Soit $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ la tribu Borélienne, et soit μ une mesure positive sur $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ telle que $\mu(I) < \infty$ pourtout intervalle borné $I \subset \mathbb{R}$. Soits $a \in \mathbb{R}$, la fonction φ_a définie par :*

$$\varphi_a(x) = \begin{cases} \mu(]a, x], & x > a \\ 0, & x = a \\ -\mu(]x, a], & x < a \end{cases}$$

1) *Montrer que φ_a est croissante.*

2) *Montrer que φ_a est continue à droite en tout point.*

Exercice 9 *Soit* X *une ensemble et soit* μ^* *une mesure extérieure sur* $P(X)$ *et* A, B *deux parties de* X.

1) *Montrer que si* $\mu^*(B) = 0$ *on*

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) = \mu^*(A \cap B^c).$$

2) *Montrer que si* $\mu^*(A)$ *et* $\mu^*(B)$ *sont fini alors*

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A\Delta B).$$

3) *Calculer en utilisant la définition de la mesure de Lebesgue extérieure* $\lambda^*(\mathbb{N})$.

Exercice 10 *Soit* μ^* *une mesure extérieure sur* X *et soit* A *et* B *deux parties de* X. *Montrer que*

1) $\mu^*(A) = 0$ *alors* A *est mesurable* ($A \in \mathscr{M}_{\mu^*}$).

2) *Pour tout* $B \subset X$ *et* $A \in \mathscr{M}_{\mu^*}$ *on a*

$$\mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

3) *Si* $B \notin \mathscr{M}_{\mu^*}$ *et* $A \in \mathscr{M}_{\mu^*}$ *avec* $B \subsetneq A$, *alors* $\mu^*(A \setminus B) > 0$.

Exercice 11 *Soit* λ^* *la mesure extérieure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}^N$ *et soit* $a \in \mathbb{R}^n$.

1) *Que peut-on dire sur* $\lambda^*(\emptyset)$ *et* $\lambda^*(\{a\})$?

2) *Calculer* $\lambda^*(\mathbb{N}^N), \lambda^*(\mathbb{Z}^N), \lambda^*(\mathbb{Q}^N)$.

3) *Montrer que* $\emptyset, \{a\}, \mathbb{N}^N, \mathbb{Z}^N, \mathbb{Q}^N$ *sont mesurable.*

Exercice 12 *Soit* (X, T) *un espace mesurable,* $(\mu_i)_{1 \leq i \leq n}$, n *mesures sur* (Ω, T) *et* $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$, *des nombres réels positifs. Pour* A *dans* T *on pose :*

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i(A),$$

Montrer que μ *est une mesure sur* (X, T) *notée* $\mu = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \mu_i$.

Exercice 13 *On considère l'espace mesuré* $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, *($\lambda$ mesure de Lebasgue) ; pour* $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ *et* $a \in \mathbb{R}$ *on note :*$A + a = \{x + a, \ x \in A\}$. *Soit* $a \in \mathbb{R}$ *fixé.*

1) *Montrer que :*

$$\mathscr{T}_a = \{A \in \mathscr{P}(\mathbb{R}) \backslash A + a \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\}$$

est une tribu sur $\mathbb{R}$.

2) *Montrer que* $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{T}_a$ *puis que* $\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \mathscr{T}_a$

3) *Pour* $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ *on pose* $\mu(A) = \lambda(A + a)$. *Montrer que* μ *est une mesure sur* $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

4) *En déduire que pour tout* $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, *on a* $\lambda(A + a) = \lambda(A)$ *(invariance de la mesure de Lebesgue par translation).*

Exercice 14 *On suppose que* $A \subseteq \mathbb{R}$ *est un un ensemble Lebesgue-mesurable et* $\lambda(A) < +\infty$. *Soit* λ *la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}$.

Montrer que la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ *definie par* $\varphi(x) = \varphi(A \cap (-\infty, x])$ *est continue.*

Exercice 15 *On suppose que* μ *est une mesure de Borel sur* $\mathbb{R}$ *telque*

- $\mu([0, 1]) = 1$ *; et*
- $\mu(A) = \mu(A + x)$ *pour tout* $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ *et pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

Montrer que $\mu = \lambda$ *(λ est la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}$*).*

Universié Dr. Yahia Farès de Médéa	Date : 14/11/2017
Faculté des Sciences	$3^{ème}$ Année Mathématiques
Département de mathématiques et Informatique	Module : Mesure et intégration

Série $N°3$: Mesures Positives

Exercice 1 *On définit sur* $P(\mathbb{R})$ *l'application*

$$\delta(A) = \begin{cases} 1, & 0 \in A \\ 0, & 0 \notin A \end{cases}$$

Montrer que δ *est une mesure positive sur* $(\mathbb{R}, P(\mathbb{R}))$.

Exercice 2 *On définit l'application* $\mu : P(\mathbb{N}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *par*

$$\begin{cases} \mu(\emptyset) = 0, \quad \mu(E) = +\infty \quad si\ card(E) = +\infty \\ \mu(E) = \sum_{n\in E} \frac{1}{n^2} \quad si\ card(E) < +\infty \end{cases}$$

Montrer que μ *n'est une mesure positive sur* $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}))$.

Exercice 3 *Soit* X *une partie non vide* $\mathbb{R}$ *et soit* $a \in X$. *On considère l'application*

$$\mu : \mathcal{B}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$$
$$\mu(A) = \mathbb{1}_A(a)$$

1) *Vérifier que* μ *est une mesure positive sur* $(X, \mathcal{B}(X))$.

2) *Déterminer les parties négligeables pour* μ.

3) *Soit* f *et* g *deux fonctions définies sur* X *telles que :*

$$f(a) = g(a) \quad et\ \forall x \in X\backslash\{a\} : f(x) \neq g(x).$$

quelle est la proprétie vraie $P : f = g\ \mu\ p.p$ *ou* $Q : f \neq g\ \mu\ p.p.$ *Justifier !*

4) *Reprendre la question (3) en remplaçant* μ *par la mesure de Lebesgue* λ.

Exercice 4 *Soit* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *un espace probabilisé, on définit*

$$\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{M},\ \mu(A) = 1 \ ou\ \mu(A) = 0\}.$$

Montrer que $\mathcal{T}$ *est une tribu sur* X.

Exercice 5 *Soit* X *une ensemble non vide et soit* $\mathcal{M}$ *une tribu engendrée par les singletons* $\{x\}$ *de* X.

1) *Montrer que* $A \in \mathcal{M}$ *si seulement* A *ou* A^c *est dénombrable.*

2) On suppose que X est non dénombable et on définit pour $A \in \mathcal{M}$

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \textit{si } A \textit{ est dénombrable} \\ 1, & \textit{si } A \textit{ est non dénombrable} \end{cases}$$

Montrer que μ est une mesure positive sur $(X, \mathcal{M})$.

__Exercice__ **6** *Montrer que les deux ensembles suivants sont boréliens et calculer leurs mesure de Lebesgue*

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \left] \frac{1}{k+1}; \frac{1}{k} \right[, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} \left] \frac{1}{2k}; \frac{1}{2k-1} \right[.$$

__Exercice__ **7** *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$. Montrer que*

$$\mu\left(\liminf_{n\to+\infty}(A_n)\right) \leq \liminf_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

et lorsque μ est finie, on a aussi

$$\limsup_{n\to+\infty} \mu(A_n) \leq \mu\left(\limsup_{n\to+\infty}(A_n)\right).$$

et si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) < +\infty$ on a (Lemme Borel-cantelli)

$$\mu\left(\limsup_{n\to+\infty}(A_n)\right) = 0.$$

__Exercice__ **8** *Soit $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu Borélienne, et soit μ une mesure positive sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que $\mu(I) < \infty$ pourtout intervalle borné $I \subset \mathbb{R}$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit la fonction φ_a par :*

$$\varphi_a(x) = \begin{cases} \mu(]a,x]), & x > a \\ 0, & x = a \\ -\mu(]x,a]), & x < a \end{cases}$$

1) Montrer que φ_a est croissante.

2) Montrer que φ_a est continue à droite en tout point.

__Exercice__ **9** *Soit X un ensemble non vide. Sur $\mathcal{P}(X)$, on définit l'application*

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset \\ 1, & A \neq \emptyset \end{cases}$$

1) Montrer que μ^* est une mesure extérieure mais n'est pas une mesure positive si X contient plus d'un élément.

2) On suppose que X contient plus d'un élément. Déterminer la tribu $\mathcal{M}_{\mu^*}$ et la mesure positive $\mu = \mu^*_{|\mathcal{M}_{\mu^*}}$.

__Exercice__ **10** *Soit X une ensemble et soit μ^* une mesure extérieure sur $P(X)$ et A, B deux parties de X.*

1) *Montrer que si* $\mu^*(B) = 0$ *on*

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) = \mu^*(A \cap B^c).$$

2) *Montrer que si* $\mu^*(A)$ *et* $\mu^*(B)$ *sont fini alors*

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A \Delta B).$$

3) *Calculer en utilisant la définition de la mesure de Lebesgue extérieure* $\lambda^*(\mathbb{N})$.

Exercice 11 *Soit* μ^* *une mesure extérieure sur* X *et soit* A *et* B *deux parties de* X. *Montrer que*

1) $\mu^*(A) = 0$ *alors* A *est mesurable* ($A \in \mathcal{M}_{\mu^*}$).

2) *Pour tout* $B \subset X$ *et* $A \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ *on a*

$$\mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

3) *Si* $B \notin \mathcal{M}_{\mu^*}$ *et* $A \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ *avec* $B \subseteq A$, *alors* $\mu^*(A \setminus B) > 0$.

Exercice 12 *Soit* $(X, \mathcal{T})$ *un espace mesurable,* $(\mu_i)_{1 \leq i \leq p}$, p *mesures positives sur* $(X, \mathcal{T})$ *et* $(a_i)_{1 \leq i \leq p}$, *des nombres réels positifs. Pour* A *dans* $\mathcal{T}$ *on pose :*

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{p} a_i \mu_i(A),$$

Montrer que μ *est une mesure sur* $(X, \mathcal{T})$ *notée* $\mu = \sum_{i=1}^{p} a_i \mu_i$.

Exercice 13 *On considère l'espace mesuré* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, ($\lambda$ *mesure de Lebasgue*)*; pour* $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *et* $a \in \mathbb{R}$ *on note :*$A + a = \{x + a,\ x \in A\}$. *Soit* $a \in \mathbb{R}$ *fixé.*

1) *Montrer que :*

$$\mathcal{T}_a = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \backslash A + a \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

est une tribu sur $\mathbb{R}$.

2) *Montrer que* $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{T}_a$ *puis que* $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{T}_a$

3) *Pour* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *on pose* $\mu(A) = \lambda(A + a)$. *Montrer que* μ *est une mesure sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

4) *En déduire que pour tout* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, *on a* $\lambda(A + a) = \lambda(A)$ *(invariance de la mesure de Lebesgue par translation).*

Universié Dr. Yahia Farès de Médéa	Date : 26/11/2016
Faculté des Sciences	$3^{ème}$ Année Mathématiques
Département de mathématiques et Informatique	Module : Mesure et intégration

Série $N^{\circ}4$: Convergence presque partout et en mesure

Dans la suite $\mathbb{R}$ nuni de la tribu borélien et $(X;\mathscr{B};\mu)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ et $f : X \to \mathbb{R}$.

Définition(Convergence presque partout)

On dit que (f_n) converge μ-presque partout vers f ($f_n \to f$ μ-p.p.) si

$$\exists A \in \mathscr{N}_\mu,\ \forall x \in A^c : \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x).$$

Autrement dit $\exists A \in \mathscr{N}_\mu$, $f_n \xrightarrow{c.s} f$ sur A^c. On note $f_n \overset{\mu-p.p}{\longrightarrow} f$.

Remarquant que la convergence simple imlique la convergence μ-presque partout.

Exercice 1 *1) Soit l'espace mesuré* $([0,1],\mathscr{B}([0,1]),\lambda)$. *Montrer que* $f_n = x^n$ *et* $g_n(x) = n\mathbb{1}_{[\frac{1}{n};\frac{2}{n}]}$ *convergent* λ*-p.p vers la fonction nulle.*

2) Soit l'espace mesuré $(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. *Montrer que* $f_n(x) = \mathbb{1}_{[n,n+1]}$, $g_n = (\cos x)^n$ *et* $h_n(x) = \frac{1}{n}\mathbb{1}_{[0,n]}$ *convergent* λ*-p.p vers la fonction nulle.*

3) Prouver que si une suite (f_n) *converge* μ*-p.p. vers* f *et si* (f_n) *converge* μ*-p.p. vers* g*, alors* $f = g$ μ*-p.p.*

Définition(Convergence en mesure)

Soit (f_n) une suite des fonction mesurables, f une fonction mesureable. On dit que (f_n) converge en mesure vers f si

$$\forall \epsilon > 0 : \lim_{n\to+\infty} \mu\left(\{x \in X, |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}\right) = 0.$$

On écrit $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Exercice 2 *1) Soit l'espace mesuré* $([0,1],\mathscr{B}([0,1]),\lambda)$*et soit* $f_n(x) = n\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}$. *Montrer que* $f_n \xrightarrow{\lambda} 0$.

2) Soit l'espace mesuré $(\mathbb{R}_+,\mathscr{B}(\mathbb{R}_+),\lambda)$ *et soit* $f_n(x) = e^{-x}\mathbb{1}_{[n,+\infty[}$. *Montrer que* $f_n \xrightarrow{\lambda} 0$.

3) Prouver que si une suite (f_n) converge en mesure vers f et si (f_n) converge en mesure vers g, alors $f = g$ μ-p.p.

Exercice 3 *1) Démontrer le théorème de Lebesgue suivant. Si $\mu(X) < +\infty$ et (f_n) converge vers f μ-p.p. alors (f_n) converge en mesure vers f.*

2) Montrer sur un exemple que l'hypothèse $\mu(X) < +\infty$ est essentielle dans le théorème de Lebesgue énoncé precédemment.

3) Donner un exemple d'une suite de fonctions mesurables sur l'intervalle $[0,1]$ convergente en mesure sur $[0,1]$ mais qui ne converge en aucun point de cet intervalle.