Université Hassiba Benbouali de Chlef **Année Universitaire : 2020-2021**
Faculté des Sciences Exactes et Informatique **Module : Analyse fonctionnelle**
Département de Mathématiques **Niveau : Master 1**

Feuille de TD 4

Exercice 1.

Soit $\mathcal{X}$ un espace de Banach. Montrer que si $\mathcal{X}'$ est séparable, alors $\mathcal{X}$ l'est aussi.

Corrigé

Soit $\{f_i\}_{i\geq 1}$ un ensemble partout dense dans $\mathcal{X}'$. Par la définition de la borne supérieure, et pour chaque f_k, on choisit un élément $x_k \in \mathcal{X}$ tel que

$$\|x_k\| = 1 \text{ et } \quad |f_k(x_k)| \geq \frac{\|f_k\|}{2}, \quad k \geq 1$$

Posons

$$K = \left\{ \sum_{k\geq 1} \lambda_k x_k, \ \lambda_k \in \mathbb{Q} \right\}$$

K est dénombrable dans $\mathcal{X}$.
De plus, si $\overline{K} \neq \mathcal{X}$, alors par le Corollaire 1 du Théorème de Hahn-Banach, il existe $f \in \mathcal{X}'$, $f \neq 0$ telle que

$$f(x) = 0, \ x \in \overline{K}$$

En particulier,

$$f(x_k) = 0, \ k \geq 1$$

D'où,

$$\exists m \in \mathbb{N} / \ \|f_m - f\| < \epsilon, \forall \epsilon > 0$$

D'où

$$|(f - f_m)(x_m)| = |f_m(x_m)| \geq \frac{\|f_m\|}{2} = \frac{\|f_m\|}{2} \|x_m\|$$

Donc

$$\|f - f_m\| \geq \frac{\|f_m\|}{2} \Rightarrow \|f_m\| < 2\epsilon$$

et donc

$$\|f\| \leq \|f - f_m\| + \|f_m\| < 3\epsilon$$

Par conséquent, $f = 0$. Contradiction.

Exercice 2.

Soient E et F deux espaces de Banach, et soit $T : E \to F$ un opérateur linéaire. En utilisant le Théorème du graphe fermé, montrer que si

$$\forall f \in F', \ \forall (x_n)_n \in E : \lim_{n\to+\infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(Tx_n) = 0$$

alors T est continu.

Corrigé

Les espaces E et F sont complets. Soit donc $(x_n, Tx_n)_n$ une suite dans le graphe $G(T)$ de T convergeant vers un élément (x, y) dans $E \times F$. Il suffit de montrer que $x \in E$ et que $y = Tx$. On a donc,

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x \ et \lim_{n\to+\infty} Tx_n = y$$

Comme E est complet, $x \in E$. De plus,

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n - x) = 0 \ et \lim_{n\to+\infty} Tx_n = y$$

Par hypothèse, on aura pour tout $f \in F'$,

$$\lim_{n\to+\infty} f(T(x_n - x)) = 0 \ et \lim_{n\to+\infty} Tx_n = y$$

Comme f est continue car $f \in F'$,

$$\forall f \in F' : f(\lim_{n\to+\infty}(T(x_n - x)) = 0 \ et \lim_{n\to+\infty} Tx_n = y$$

Par le Corollaire 4.5,

$$\lim_{n\to+\infty} T(x_n - x) = 0, \ et \lim_{n\to+\infty} Tx_n = y$$

Donc, $\lim_{n\to+\infty} Tx_n = Tx = y$.

Exercice 3.

(L'inverse de l'inégalité de Hölder dans ℓ_p)
Soit $y = (y_n)_n$ une suite complexe, et soient $1 \leq p, q \leq \infty$, avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. On suppose que

$$\forall x = (x_n)_n \in \ell_p : \text{ la série } \sum_{n\geq 1} x_n y_n \text{ est convergente}$$

Montrer que $y = (y_n)_n \in \ell_q$.

Corrigé

1. Si $1 \leq p < +\infty$: On définit $f : \ell_p \to \mathbb{C}$ par

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k y_k \tag{0.1}$$

Par (0.1), l'application f est bien définie.

Pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, on pose $f_n : \ell_p \to \mathbb{C}$ avec

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

pour tous $x \in \ell_p$ et $n \geq 1$.
Alors, $f_n \in \ell'_p, n \geq 1$. En effet, f_n est linéaire, et de plus, pour tout $x, x \in \ell_p$:

$$\begin{aligned}
|f_n(x)| = |\sum_{k=1}^{n} x_k y_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| &\leq (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq (\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q)^{\frac{1}{q}} (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq (\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q)^{\frac{1}{q}} \|x\|_p
\end{aligned}$$

par l'inégalité de Hölder (Corollaire 2.1, chap. 2). Ce qui montre que f_n est continue, et que $\|f_n\| \leq (\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q)^{\frac{1}{q}},\ n \geq 1$.
De plus,

$$\forall x \in \ell_p : \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$$

Du Corollaire 4.10 du Théorème de Banach-Steinhaus, découle que $f \in \ell'_p$.
Finalement, par le Théorème 2.3, $\quad y \in \ell_q$ et $\quad \|y\|_q = \|f\|_{\ell'_p}$.

2. Pour $p = +\infty$: On prend la suite $x_n = sign(y_n),\ (n \geq 1)$ où

$$sign(x) = \frac{|x|}{x} \text{ si } x \neq 0 \quad \text{ et } sign(0) = 0$$

Donc, $x \in \ell_\infty$. De plus, par (0.1), la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n = \sum_{n=0}^{+\infty} |y_n|$$

est convergente. Par conséquent, $y \in \ell_1$.

Exercice 4.

$(\star\star)$ Soit $\mathcal{X}$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé, muni de deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$. Montrer que ces deux normes sont équivalentes si seulement si les applications d'identité

$$\mathcal{I}_{d_1} : (\mathcal{X}, \|.\|_1) \to (\mathcal{X}, \|.\|_2) \quad \text{et} \quad \mathcal{I}_{d_2} : (\mathcal{X}, \|.\|_2) \to (\mathcal{X}, \|.\|_1)$$

sont continues.