# Corrigé série 2

**Exercice 1**

1) Comme densité de probabilité, $f_X$ doit être positive, donc $c\left(1-x^k\right)>0$
$\left(1-x^k\right)\geq 0$ car $x\in[0,1]$ et $k\in\mathbb{N}^*$,on a donc nécessairement $c>0$.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx &= 1 \text{ donc } c\int_0^1 \left(1-x^k\right)dx = \\
&= c\left[x-\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = c\left(1-\frac{1}{k+1}\right) = \\
&= c\frac{k}{k+1} = 1
\end{aligned}$$

d'où

$$c=\frac{k+1}{k}$$

2) $k=2$, alors

$$f_X(x)=\begin{cases} \frac{3}{2}\left(1-x^2\right) & \text{si } 0\leq x<1 \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned}
P\left(X>\frac{1}{2}\right) &= \frac{3}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(1-x^2\right)dx = \frac{3}{2}\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^1 = \\
&= \frac{3}{2}\left(\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{24}\right)\right)=\frac{5}{16}
\end{aligned}$$

**Exercice 2**

1) $f_X\geq 0\ \forall x\in[0,1[$ donc $k$ doit être strictement positif ($k>0$)
De plus

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx &= k\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \\
&= k\left[Arc\sin x\right]_0^1 = k\frac{\pi}{2} = 1
\end{aligned}$$

Donc

$$k=\frac{2}{\pi}$$

2)

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \\ &= \frac{2}{\pi} Arc\sin x \end{aligned}$$

Ainsi

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; x < 0 \\ \frac{2}{\pi} Arc\sin x & si \;\; 0 \leq x < 1 \\ 1 & si \;\; x \geq 1 \end{cases}$$

**Exercice 3**

1)Soit $Y = -2X + 1$, on a vu que si $X$ est une v.a. alors $Y = aX + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ est auissi une v.a.

Ici, on a $a = -2, b = 1, \{Y \leq x\} = \{-2X + 1 \leq x\} = \left\{X \geq \frac{1-x}{2}\right\} = \left\{X < \frac{1-x}{2}\right\}^c \in$ tribu considérée car $X$ est une v.a.

Déterminons $f_Y$ sa densité de probabilités, on a $Y = g(X)$ avec $g(x) = -2x + 1$ qui est bijective. D'où

$$f_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|g^{-1}(y)'\right|$$

$$g^{-1}(y) = \frac{1-y}{2}, \text{ alors } g^{-1}(y)' = -\frac{1}{2} \text{ et } f_X\left(g^{-1}(y)\right) = \frac{1}{2} \text{ si } -1 \leq y \leq 3$$

donc

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } -1 \leq y \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2) Déterminons $f_Z$ la densité de $Z = X^2$,d'abord $Z$ est bien une densité car

$$\left\{X^2 \leq x\right\} = \left\{-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}\right\} \in \text{ à la tribu considérée}$$

la transformation $Z = X^2$ n'est pas bijective, donc on ne peut pas utiliser la formule de la question précédente; alors on détermine d'abord la fonction de répartition $F_Z$ que l'on dérive par la suite pour obtenir la densité $f_Z$.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{x+1}{2} & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P\left(X^2 \le z\right)$$

$$\begin{array}{llll} \circ\text{Si } z & \le & 0 & F_Z(z)\, F_X\left(\sqrt{z}\right) = 0 \\ \circ\text{Si } z & > & 0 & F_Z(z) = P\left(-\sqrt{z} \le X \le \sqrt{z}\right) = F_X\left(\sqrt{z}\right) - F_X\left(-\sqrt{z}\right) \\ \text{Si } z & \le & 1 & F_X(z) = \dfrac{\sqrt{z}+1}{2} - \dfrac{-\sqrt{z}+1}{2} = \sqrt{z} \\ \text{Si } z & > & 1 & F_X(z) = 1 - 0 = 1 \end{array}$$

D'où

$$f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{z}} & si \quad z \in [0,1] \\ 0 & si \quad z \notin [0,1] \end{cases}$$

**Exercice 4**

La densité de $X$ nous permet de déterminer sa fonction de répartition

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt = \begin{cases} 0 & si \;\; x < 0 \\ \dfrac{x}{a} & si \;\; 0 \le x < a \\ 1 & si \;\; x \ge a \end{cases}$$

1) $Y = X^2, F_Y(y) = P(Y \le y)$
Si $y < 0, P(Y \le y) = 0$
Soit $y \ge 0$,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \le y) = P\left(X^2 \le y\right) = \\ &= P\left(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}\right) = \\ &= F_X\left(\sqrt{y}\right) - F_X\left(-\sqrt{y}\right) = F_X\left(\sqrt{y}\right) \end{aligned}$$

car $F_X$ n'est définie que pour les arguments positifs, d'où

$$F_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{y}}{a} & si \;\; 0 \le y < a^2 \\ 1 & si \;\; y \ge a^2 \end{cases}$$

de là, on obtient la densité

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a\sqrt{y}} & si \;\; 0 \le y < a^2 \\ 0 & si \;\; y \ge a^2 \end{cases}$$

2) $Z = \sqrt{X}$, soit $z \ge 0$

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \le z) = P\left(\sqrt{X} \le z\right) \\ &= P\left(X \le z^2\right) = \\ &= F_X\left(z^2\right) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= F_Z'(z) = F_X'\left(z^2\right) = \\ &= 2zf_X\left(z^2\right) \end{aligned}$$

d'où

$$f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{2z}{a} & si \;\; 0 \leq z < \sqrt{a} \\ 0 & si \;\; z \geq a \end{cases}$$

**Exercice 5**

$g(x) = ax + b$ est dérivable et sa dérivée garde un signe constant pour tout $x$, on peut donc appliquer la formule

$$h(y) = f\left(g^{-1}(y)\right)\left|g^{-1}(y)'\right|$$

où $h$ est la densité de probabilité de $Y = aX + b$. La fonction inverse s'obtient en résolvant l'équation $y = ax + b$, on a

$$g^{-1}(y) = \frac{y-b}{a} \Longrightarrow \left(g^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{a} \Longrightarrow \left|\left(g^{-1}(y)\right)'\right| = \frac{1}{|a|}$$

et

$$h(y) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{y-b}{a}\right)$$