fse.png



Université Djillali \mathcal{L} iabès \mathcal{D} e \mathcal{S} idi \mathcal{B} el \mathcal{A} bbès \mathcal{F} aculté \mathcal{D} es \mathcal{S} ciences \mathcal{E} xactes $2^{\text{ème}} \mathcal{A}$ nnée \mathcal{L} icence \mathcal{M} athématiques et \mathcal{I} nformatiques

Examen de Probabilités (01h 30mn)

Responsable du Module : S.BENAISSA

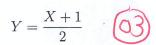


Exercice 1 :(08 points)

Soit X une v.a.r. suivant la loi de Rademacher $\mathcal{R}(a)$ avec a=1:

$$\mathbb{P}(X = -1) = 1/2, \mathbb{P}(X = 1) = 1/2.$$

- i) Calculer $\mathbb{P}(|X|=1)$ et $\mathbb{P}(X^2-3X+2=0)$.
- ii) Calculer $\mathbb{E}(X)$, Var(X) et σ_X .
- iii) Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{X}{X+2}\right)$
- iv) On pose

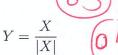


Déterminer la loi de Y.

Exercice 2 :(12 points) Soit X une v.a.r. de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}e^{-2x} & \text{si } x \ge 0\\ \frac{2}{3(1-x)^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

- i) Vérifier que f_X est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
- ii) Déterminer la fonction de répartition de X.
- iii) On pose



Déterminer la loi de Y. iv) Calculer $\mathbb{E}((-1)^{2})$ et $Var(3)^{2} + 3)$.



Solution (Exercice
$$x = 1$$
):

2) On a $X(A) = \{-1, 1\}$, donc $(|X|)(A) = \{1\}$. For consequent; $P(|X| = 1) = 1$. O1

On a $X^2 = 3X + 2 = (X - 1)(X - 2)$, donc

$$\{X^2 = 3X + 2 = 0\} = \{X = 1\} \cup \{X = 2\}$$

$$= \{X = 1\} \cup \emptyset = \{X = 1\}. \text{ If wient}$$

$$P(X = 3X + 2 = 0) = P(X = 1) = \frac{1}{2}.$$

II) On a

$$E(X) = \sum_{X \in X} P(X = X_1)$$

$$= (-1) P(X = -1) + 1 \cdot P(X = 1)$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$
On a $Van(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

Comme $Van(X) = \sum_{X \in X} P(X = X_1)$

$$= (-1)^2 P(X = -1) + 1^2 P(X = 1)$$

$$= (-1)^2 P(X = -1) + 1^2 P(X = 1)$$

$$= (-1)^2 P(X = -1) + 1^2 P(X = 1)$$

vi'ent Ven (x) = 1, &= V von(x) = 1 711) On 9 TE (X+2) = Z m/2 P (X=2) $=\frac{-1}{2-1}\mathbb{P}(x=-1)+\frac{1}{2+1}\mathbb{P}(x=1)$ =-1x1+1x1=-1 iv) On a Y(s) = (x+1)(s) = {0,1} are c $\{x=0\} = \{x=-1\} \text{ of } \{y=1\} = \{x=1\}. \text{ Domeons}$ $P(y=0) = P(x=-1) = \frac{1}{2}, P(y=1) = P(x=1) = \frac{1}{2}.$ Au final, la bri de Yert donnée par P(y=0)=1, P(y=1)=1. (C'est la bri de Bernoulli B(p) avec p=1).

Solution (Exercise nº 2)! a) On a, pour tout x & IR, f(n) >0, et $\int_{-\infty}^{\infty} f(n) dn = \int_{3(1-n)}^{\infty} 2 dx + \int_{3}^{\infty} \frac{2}{3} e^{2n} dn \left(\frac{3}{3} \right)$ $=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{1-n}\right] + \frac{2}{3}\left[-\frac{1}{2}e^{2n}\right] = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1.$ Donc fiert bien une denvité. "11) On a X(S) = R let Fx(n) = P(X<n) $= \int_{X} f(t) dt$ REIR. Vu l'expression de f, il faut distinguer le cas n <0 et le cas n 70. Your tout n < 0, on a or row n < 0, on a $F_X(x) = \mathbb{P}(X \in x) = \int_X f_X(t) dt$ $\int_{3}^{x} \frac{2}{3(1-t)^{2}} dt = \frac{2}{3} \left[\frac{1}{1-t} \right]^{2}$ $-3 - \frac{2}{3(1-x)}$

Lour tout nz 4 on 9 $F_X(n) = P(X \leq n) = \int_{X}^{N} f(x) dt = \int_{X}^{Q} f(x) dt$ + Sn f(t)dt $= \int_{3(1-t)}^{0} \frac{e}{3(1-t)} e^{-2t} dt + \int_{3}^{\infty} \frac{e^{-2t}}{e^{-2t}} dt$ $=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{1-t}\right]^{0}+\frac{2}{3}\left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]^{n}$ = 2+2(-1=ex(-1))=1-3ex Au Linal, la fonction de répartition de $F(n) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{3}e^{-2n} & n > 0, \\ \frac{\epsilon}{3(1-n)} & \text{whom}. \end{cases}$

III) On a $Y(\Omega) = \left(\frac{x}{|x|}\right)(\Omega) = \{-1,1\}$ selon le righe de la var X (om q P(X=0)=0). En utilisant le Késultat de la guestion ii), il vient $P(Y=-1) = P(X<0) = F_X(0) = \frac{2}{3}$ Cela entraîte P(Y=1) = I-P(Y=-1) = 3.0 Aimsi, la br' de Yest donnée par P(Y=-1)=2, P(Y=1)=3.

IV)
$$E(f_1)^{y} = \sum_{y_1} y_1 P(y_2)$$
 $y_1 \in Y(x_1)$
 $= 0 P(y_2 = 0) + 1 P(y_2 = 1)$
 $= \frac{1}{2}$

o $Van(3 y^2 + 3) = 9 Van(y^2)$
 $= 9(E(y^4) - (E(y^2))^2)$
 $E(y^2) = \sum_{y_1} y_2 P(y_2 - y_1)$
 $= \frac{1}{2} P(y_2 - y_1)$