# Correction de l'Examen
# Calcul stochastique

**Questions de cours :** Voir le Cours

## Exercice 1 :

*Soit*

$$X_t = \int_0^t s \, \mathrm{d}B_s \ .$$

1. *Calculer* $\mathbb{E}(X_t)$ *et* $\mathrm{Var}(X_t)$.

   $X_t$ étant l'intégrale d'un processus adapté, on a $\mathbb{E}(X_t) = 0$.
   Par conséquent, l'isométrie d'Itô donne $\mathrm{Var}(X_t) = \mathbb{E}(X_t^2) = \int_0^t s^2 \, \mathrm{d}s = \frac{1}{3}t^3$.

2. *Quelle est la loi de* $X_t$ *?*

   $X_t$ suit une loi normale centrée de variance $\frac{1}{3}t^3$.

3. *Calculer* $\mathrm{d}(tB_t)$ *à l'aide de la formule d'Itô.*

   La formule d'Itô avec $u(t,x) = tx$ donne $\mathrm{d}(tB_t) = B_t \, \mathrm{d}t + t \, \mathrm{d}B_t$.

4. *En déduire une relation entre* $X_t$ *et*

$$Y_t = \int_0^t B_s \, \mathrm{d}s \ .$$

Comme $B_s \, \mathrm{d}s = \mathrm{d}(sB_s) - s \, \mathrm{d}B_s$, on a la formule d'intégration par parties

$$Y_t = \int_0^t \mathrm{d}(sB_s) - \int_0^t s \, \mathrm{d}B_s = tB_t - X_t \ .$$

$Y_t$ suit donc une loi normale de moyenne nulle.

5. *Calculer la variance de* $Y_t$,

   (a) *directement à partir de sa définition;*

   Comme $\mathbb{E}(B_s B_u) = s \wedge u$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_t^2) &= \mathbb{E} \int_0^t \int_0^t B_s B_u \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}u = \int_0^t \int_0^t (s \wedge u) \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}u \\ &= \int_0^t \left[ \int_0^u s \, \mathrm{d}s + \int_u^t u \, \mathrm{d}s \right] \mathrm{d}u = \int_0^t \left[ \frac{1}{2}u^2 + ut - u^2 \right] \mathrm{d}u = \frac{1}{3}t^3 \ .\end{aligned}$$

(b) *en calculant d'abord la covariance de $B_t$ et $X_t$, à l'aide d'une partition de $[0, t]$.*

Pour calculer la covariance, on introduit une partition $\{t_k\}$ de $[0, t]$, d'espacement $1/n$. Alors

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(B_t, X_t) &= \mathbb{E}\,(B_t X_t) \\
&= \mathbb{E} \int_0^t s B_t \, \mathrm{d}B_s \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_k t_{k-1} \mathbb{E}\,(B_t(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_k t_{k-1}(t_k - t_{k-1}) \\
&= \int_0^t s \, \mathrm{d}s = \frac{1}{2} t^2 \; .
\end{aligned}$$

Il suit que

$$\operatorname{Var}(Y_t) = \operatorname{Var}(tB_t) + \operatorname{Var}(X_t) - 2\operatorname{cov}(tB_t, X_t) = t^3 + \frac{1}{3}t^3 - 2t\operatorname{cov}(B_t, X_t) = \frac{1}{3}t^3 \; .$$

*En déduire la loi de $Y_t$.*

$Y_t = tB_t - X_t$ étant une combinaison linéaire de variables normales centrés, elle suit également une loi normale centrée, en l'occurrence de variance $t^3/3$. Remarquons que $Y_t$ représente l'aire (signée) entre la trajectoire Brownienne et l'axe des abscisses.