$\forall B \in \mathcal{F} : \int_B X \, dP = \int_B Y \, dP \Rightarrow X = Y$.

$\int_\Omega X \, dP = \int_\Omega Y \, dP \not\Leftrightarrow$ sauf si X et Y positif ou négatif

Série N°: 1.

Exo 1.

1) $E(XY/G) = X E(Y/G)$?

* Pour $X = \mathbb{1}_A$, $A \in G$.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de proba $G \subset \mathcal{F}$, $E(\cdot/G) = f$

① f est G-mesu.

② $\forall B \in G$, $\int_B X \, dP = \int_B f \, dP$ (**)

1/ si $X \perp\!\!\!\perp_{ind} G$, $E(X/G) = E(X)$.

2/ Si X est G-mes $E(X/G) = X$.

Soit $B \in G$

$$\int_B E(XY/G) \, dP = \int_B E(\mathbb{1}_A Y/G) \, dP$$
$$= \int_B \mathbb{1}_A Y \, dP \quad (**)$$
$$= \int_\Omega \mathbb{1}_{A \cap B} Y \, dP.$$

comme $A \cap B \in G$ alors :

$$= \int_\Omega \mathbb{1}_{A \cap B} E(Y/G) \, dP$$
$$= \int_B \mathbb{1}_A E(Y/G) \, dP$$

* Si $X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$, (A_i) une partition de Ω, $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$

Soit $B \in G$.

$$\int_B E(XY/G) \, dP = \int_B E\left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} Y / G\right] dP.$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_B E[\mathbb{1}_{A_i} Y/G] \, dP$$

من السابق

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_B \mathbb{1}_{A_i} E[Y/G] \, dP$$

$$= \int_B \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} E[Y/G] \, dP.$$

$$= \int_B X \, E[Y/G] \, dP.$$

* Si X une v.a ≥ 0 alors: $\exists (X_n)$ une suite de v.a étagée qui c.v vers X.

Soit $B \in G$.

$$\int_B E[XY/G] \, dP = \int_B E[\lim_{n \to +\infty} X_n Y/G] \, dP$$

convergence monotone (Beppo. Levy)

$$= \int_B \lim_{n \to +\infty} X_n \, E(Y/G) \, dP$$

$$= \int_B X \, E(Y/G) \, dP.$$

2] $E(X/G)$ est la v.a qui minimise $E((X-Y)^2)$.

Soit Z une v.a G-mes

d'après 1, $E(ZX/G) = Z\,E(X/G)$

$E(E(ZX/G)) = E(Z\,E(X/G))$

$E(ZX) = E(Z\,E(X/G))$.

alors $E(Z(X - E(X/G))) = 0$

posons $Y = Z + E(X/G)$

$$E((X-Y)^2) = E((X - E(X/G) - Z)^2)$$

$$= E((X - E(X/G))^2) + E(Z^2) - 2E\left[\cancel{Z(X - E(X/G))}\right]$$

$$= E((X - E(X/G))^2) + E(Z^2)$$

qui minimise si $Z = 0$.

$$\min_{y} E\left((X-y)^2\right) = E\left((X - E(X/G))^2\right).$$

Exo2 :

$X - Y$ ind de G

$E(X-Y) = m$, $var(X-Y) = \delta^2$.

Y G-mes.

$E[(X-Y)/G] = E(X-Y)$ car $X-Y$ ind de G.

$= m$.

$E(X/G) - E(Y/G) = m$

$E(X/G) = m + E(Y/G) = m + Y$ (car Y G-mes)

$E((X-Y)^2/G) = E((X-Y)^2)$.

$(X-Y) \perp\!\!\!\perp G \Longrightarrow (X-Y)^2 \perp\!\!\!\perp G$

$= var(X-Y) + (E(X-Y))^2$

$= \delta^2 + m^2$.

$E[(X-Y)^2/G] = E(X^2/G) + E(Y^2/G) - 2E(XY/G)$

- $E[Y^2/G] = Y^2$. (car Y^2 est G-mes).
- $E[XY/G] = Y E(X/G) = Y(m+Y)$.
- $E(X^2/G) = \delta^2 + m^2 - Y^2 + 2Ym + 2Y^2$

$= \delta^2 + (Y+m)^2$.

Exo 3 :

1) $E[X^2/G] = Y^2$, $E[X/G] = Y$ P_P sur

$$E[(X-Y)^2] = E[E[(X-Y)^2]/G]$$
$$= E[E[X^2/G] - 2E[XY/G] + E[Y^2/G]]$$
$$= E[Y^2 - 2Y E[X/G] + Y^2]$$

$E[XY/G] = Y E[X/G]$

$Y = E(X/G)$ Y est G_mesurable

$Y^2 = E[Y^2/G]$ Y est G_mes.

$E[(X-Y)^2] = E[2Y^2 - 2Y^2] = 0$.

2)

$E[Z \cdot E(Y/G)] \overset{?}{=} E[E(Z/G) E(Y/G)]$

$$E[Z \cdot E(Y/G)] = E[E(Z \cdot E(Y/G)/G)]$$
$$= E[E(Y/G) E(Z/G)]$$

Exo 4 :

1) $E(S_n / N=n) \overset{?}{=} E(S_n)$

$$\boxed{E(X/B) = \frac{1}{P(B)} \int_B X \, dP} \quad B \in \mathcal{F}$$

$$E(S_N / N=n) = \frac{1}{P(N=n)} \int_{\{N=n\}} S_N \, dP$$
$$= \frac{1}{P(N=n)} \int_\Omega S_N \mathbb{1}_{\{N=n\}} \, dP$$
$$= \frac{1}{P(N=n)} \int_\Omega S_n \mathbb{1}_{\{N=n\}} \, dP$$

$$= \frac{1}{P(N=n)} E\left[S_n \mathbb{1}_{\{N=n\}} \right]$$

$N \perp\!\!\!\perp X_i \ , \ \forall \ i = 1, \dots \quad N \perp\!\!\!\perp S_n$

$$= \frac{1}{P(N=n)} E[S_n] \cdot E[\mathbb{1}_{\{N=n\}}]$$

$$= \frac{1}{\cancel{P(N=n)}} E[S_n] \ P(\cancel{N=n}) = E(S_n)$$

② $E(S_N) = ?$ $E(S_n) = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = n E[X_i] = n\mu$

mais N dépend de ω donc on peut pas faire $E(S_N) \neq n E[X_i]$

$A_i = \{N = n\}$, $n \geq 1$ est une partition de Ω.

i.e. $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{\omega : N(\omega) = n\}$

$1 = \mathbb{1}_{\Omega} = \mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^{\infty}\{N=n\}}$

* $E(S_N) = E(S_N \mathbb{1}_{\Omega}) = E(S_N \mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^{\infty}\{N=n\}}) = \sum_{n=1}^{\infty} E(S_N \mathbb{1}_{\{N=n\}})$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E(S_n \mathbb{1}_{\{N=n\}})$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E(S_n) \ E(\mathbb{1}_{\{N=n\}})$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n\mu \ P(N=n)$$

$$= \mu \sum_{n=1}^{\infty} n \ P(N=n)$$

$$= \mu \ E(N) = m\mu$$

* $Var(S_N) = E(S_N^2) - (E(S_N))^2$

$E(S_N^2) = E\left[S_N^2 \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{N=n\}}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} E\left[S_N^2 \mathbb{1}_{\{N=n\}}\right]$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E\left[S_n^2 \mathbb{1}_{\{N=n\}}\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E[S_n^2] \cdot E[\mathbb{1}_{\{N=n\}}]$$

$$E[S_N^2] = \sum_{n=1}^{\infty} E(S_n^2) \cdot P(N=n) \quad *$$

$$E(S_n^2) = var(S_n) + (E(S_n))^2 = n\delta^2 + (n\mu)^2$$

$$* = \delta^2 \sum_{n=1}^{\infty} n P(N=n) + \mu^2 \sum n^2 P(N=n)$$

$$= \delta^2 E(N) + \mu^2 \boxed{E(N^2) = Var(N) + E(N)^2}$$

$$= \delta^2 m + \mu^2 (S^2 + m^2)$$

$$Var(S_N) = \delta^2 m + \mu^2(S^2 + m^2) - (m\mu)^2$$

$$= \delta^2 m + \mu^2 S^2.$$

Exo5 :

$$\boxed{\forall B \in \mathcal{F} : \int_B X \, dP = \int_B Y \, dP \implies X = Y \text{ P.P sur}}$$

$T : \Omega \longrightarrow \Omega$ $\mathcal{F}$ mes

$G \subseteq \mathcal{F}$

$E[Y \circ T / T^{-1}(G)] \overset{?}{=} E[Y/G] \circ T$ P.P sur

$G \subseteq \mathcal{F} \implies T^{-1}(G) \subseteq \mathcal{F}$ $(T : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\Omega, \mathcal{F}))$

Soit $C \in T^{-1}(G) \subseteq \mathcal{F}$

alors $\exists B \in G$ tq : $C = T^{-1}(B)$

$$\int_C E(Y \circ T / T^{-1}(G)) \, dP = \int_C Y \circ T \, dP$$

$$= \int_{T^{-1}(B)} Y(T(\omega)) \, dP(\omega) \quad *$$

on pose : $\omega' = T(\omega) \rightarrow \omega = T^{-1}(\omega')$

$\omega \in T^{-1}(B) \longrightarrow \omega' \in B$

$\circledast = \int_B Y(\omega')\, dP(T^{-1}(\omega'))$

$= \int_B Y(\omega')\, dP_T(\omega')$

$= \int_B E(Y/G)(\omega')\, dP_T(\omega')$

$\omega' = T(\omega)$, $\omega \in B \longrightarrow \omega \in T^{-1}(B)$.

$= \int_{T^{-1}(B)} E(Y/G) \circ T(\omega)\, dP(\omega) = P_T(T(\omega)) = P \circ X^{-1}(X(\omega))$

alors,

$E[Y \circ T / T^{-1}(G)] = E[Y/G] \circ T$ p.p sur

Exo 6 :

1] $N(y, dx) = \mu(dx) \Longrightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$?

Soit f, g deux fcts mes ≥ 0.

$E[f(X)g(Y)] = E[f(X)]\, E[g(Y)]$. ?

$*$ $E(f(X)g(Y)) = E[E(f(X)g(Y)/Y)]$

$\circledast$ $= E[g(Y)\, E(f(X)/Y)]$ car $g(Y)$ est $\sigma(Y)$-mes

$= E[g(Y) \int_{\mathbb{R}} f(x)\, N(y, dx)]$

$= \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \int_{\mathbb{R}} f(x)\, N(y, dx)\, P_Y(dy)$ $(**)$

comme $N(y, dx) = \mu(dx)$ alors.

$(**) = \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mu(dx)\, P_Y(dy)$

$= \int_{\mathbb{R}^d} g(y)\, P_Y(dy) \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mu(dx)$.

on pose $g \equiv 1$ dans $\circledast$

$\circledast = E[f(X)] = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mu(dx)$, et comme,

$E[f(X)] = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, P_X(dx)$.

Par comparaison, on obtient que :

$$\mu(dx) = P_X(dx)$$

De plus :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mu(dx) = E[f(X)].$$

alors :

$$E[f(X)g(Y)] = E[f(X)]\,E[g(Y)]$$

2] Si $X \perp\!\!\!\perp Y \overset{?}{\Longrightarrow} N(y, dx) = P_X(dx) \quad P_Y - P$ sur

Soit f, g deux fcts mes ≥ 0.

$$E[f(X)g(Y)] = E[f(X)]\;E[g(Y)]$$

- D'une part :

$$\begin{aligned} E[f(X)g(Y)] &= E[E(f(X)g(Y)/Y)] \\ &= E[g(Y)\,E[f(X)/Y)] \\ &= E[g(Y)\int_{\mathbb{R}} f(x)\,N(Y, dx)] \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} g(y)\int_{\mathbb{R}} f(x)\,N(y, dx)\;P_Y(dy) \quad \text{--- } ① \end{aligned}$$

- D'autre part :

$$\begin{aligned} E[f(X)]\,E[g(Y)] &= \Big[\int_{\mathbb{R}} f(x)\,P_X(dx)\Big]\Big[\int_{\mathbb{R}^d} g(y)\,P_Y(dy)\Big] \\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} g(y)\Big[\int_{\mathbb{R}} f(x)\,P_X(dx)\Big]\;P_Y(dy) \quad \text{--- } ② \end{aligned}$$

- Par comparaison entre ① et ②, il vient :

$$P_X(dx) = N(y, dx) \qquad P_Y - P \text{ sur}$$

Exo 7.

$m(x) = E(Y / X = x) = \int y \, N(x, dy)$.

$S^2 = E((Y - m(x))^2 / X = x) = \int (y - m(x))^2 N(x, dy)$

1] Montrons que : $E(m(X)) = E(Y)$. ?

$E(m(X)) = E(E(Y/X)) = E(Y)$.

* $E(m(X)) = E\left(\int_{\mathbb{R}} y \, N(X, dy)\right)$

$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} y \, \underbrace{N(X, dy) \, P_X(dx)}_{P_{X,Y}(dx, dy)}$.

$= E(Y)$.

2] Montrons que : $var(Y) = E(S^2(X)) + var(m(X))$?

$S^2(X) = E((Y - m(X))^2 / X)$.

* $E(S^2(X)) = E[E((Y - m(X))^2 / X)]$

$= E[E((Y^2 - 2m(X)Y + m^2(X)) / X)]$

$= E(Y^2) - 2E[m(X) \underbrace{E(Y/X)}_{m(X)}] + E(m^2(X))$

$= E(Y^2) - E(m^2(X))$.

* $var(m(X)) = E(m^2(X)) - [E(m(X))]^2$

* $E(S^2(X)) + var(m(X)) = E(Y^2) - (\underbrace{E(m(X))}_{E(Y)})^2$

$= var(Y)$.

Exo 9 :

Soit $\varphi : (E, \xi) \longrightarrow (\Omega, \mathcal{F})$

$$\Pi_\varphi(x, A) = \begin{cases} 1 & \text{si } \varphi(x) \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \varphi^{-1}(A) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \mathbb{1}_{\varphi^{-1}(A)}(x).$$

une probabilité de transition

① $\forall x \in E$, $\Pi_\varphi(x, \cdot)$ est une mesure de proba.

② $\forall A \in \mathcal{F}$.

$\varphi^{-1} : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (E, \xi)$

$\Pi_\varphi(\cdot, \cdot) : E \times \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1]$

$(x, A) \longrightarrow \Pi_\varphi(x, A)$.

Soit $x \in E$.

- $\Pi_\varphi(x, \phi) = \mathbb{1}_{\varphi^{-1}(\phi)}(x) = \mathbb{1}_\phi(x) = 0$
- $\Pi_\varphi(x, \Omega) = \mathbb{1}_{\varphi^{-1}(\Omega)}(x) = \mathbb{1}_E(x) = 1$.

$\Omega = \bigcup_{n\geq 1} A_n$ et $A_i \cap A_j = \phi \quad \forall i \neq j$.

- $\Pi_\varphi(x, \bigcup_{n\geq 1} A_n) = \mathbb{1}_{\varphi^{-1}(\bigcup_n A_n)}(x) = \mathbb{1}_{\bigcup_n \varphi^{-1}(A_n)} = \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{\varphi^{-1}(A_n)}(x)$

$= \sum_{n\geq 1} \Pi_\varphi(x, A_n)$.

- $A \in \mathcal{F}$. $\Pi_\varphi(x, A) \leq 1$?

$\mathbb{1}_{\varphi^{-1}(A)}(x) \leq \mathbb{1}_E(x) = \mathbb{1}_{\varphi^{-1}(\Omega)}(x) = 1$.

φ mes, $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \varphi^{-1}(A) \in \xi \qquad (\varphi^{-1}(A) \subset E)$

2] Soit $A \in \mathcal{F}$

$\Pi_{\varphi}(x, A) = \mathbb{1}_{\varphi^{-1}(A)}(x)$.

φ est mes : $\varphi^{-1}(A) \in \xi$ et $\mathbb{1}_{\varphi^{-1}(.)}$ est mes.

Exo 10

$T : L^1(\Omega, \xi, P) \longrightarrow L^1(\Omega, \xi, P)$

$P(x, A) = T \circ \mathbb{1}_A (x)$

$= T(\mathbb{1}_A)(x)$.

1) $P(x, A)$ est une Proba de transition ?

- $\forall x \in \Omega$, $P(x, .)$ est une mesure de Proba ?
- $P(x, \phi) = T(\mathbb{1}_\phi)(x) = T(0) = 0$.
- $P(x, \Omega) = T(\mathbb{1}_\Omega)(x) = T(1) = 1$

Soit $A \in \xi$, $\mathbb{1}_A(x) \leq \mathbb{1}_\Omega(x) = 1$ $\quad \forall x \in \Omega$.

alors $T(\mathbb{1}_A)(x) \leq 1$.

Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ une suite disjointe de Ω.

$P(\bigcup_n A_n, x) = T(\mathbb{1}_{\bigcup_n A_n})(x)$

$$= T\left(\sum_n \mathbb{1}_{A_n}\right)(x)$$

(T continue) $$= T\left(\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k}\right)(x)$$

$$= \lim_{n \to \infty} T\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k}\right)(x)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} T(\mathbb{1}_{A_k})(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} T(\mathbb{1}_{A_k})(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(x, A_k).$$

* T est mes (car elle est L^1)

$\mathbb{1}_A$ est mes $\forall A \in \xi$

$T \circ \mathbb{1}_A(\cdot)$ est mes.

2) $(Tf)(x) = \int_\Omega f(y)\, P(x, dy)$?

① Si $f = \mathbb{1}_A$ alors $A \in \xi$.

$$\int_\Omega f(y)\, P(x,dy) = \int_\Omega \mathbb{1}_A(y)\, P(x,dy)$$
$$= \int_A P(x,dy)$$
$$= P(x,A)$$
$$= T(\mathbb{1}_A)(x).$$

② Si f est une fct étagée

$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}^+$, $A_i \in \xi$, $\forall i$

$$\int_\Omega f(y)\, P(x,dy) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}(y)\, P(x,dy)$$
$$= \sum_i \alpha_i \int_{A_i} P(x,dy)$$
$$= \sum_i \alpha_i P(x, A_i)$$
$$= \sum_i \alpha_i T(\mathbb{1}_{A_i})(x)$$

T linéaire est continue

$$= T\left(\sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}\right)(x)$$
$$= T(f)(x)$$

③ Si f est mes ≥ 0 ou bornée, alors il existe une suite $(f_n)_n$ des fct étagée tq : $f_n \to f$.

$$T(f)(x) = T\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)(x) = \lim_{n\to\infty} T(f_n)(x)$$

par *

$$= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(y)\, P(x,dy)$$
$$= \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n(y)\, P(x,dy).$$

C.V. m. Beppo Lévy

$$= \int_\Omega f(y)\, P(x,dy)$$

Série N° 2.

Exo 2.

$$f(x,y) = e^{-y}\,\mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}\,\mathbb{1}_{\{y\geq x\}}$$

- $$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-y}\,\mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}\,\mathbb{1}_{\{y\geq x\}}\,dy$$
$$= \int_x^{+\infty} e^{-y}\,\mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}\,dy$$
$$= -e^{-y}\Big|_x^{+\infty}\,\mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}$$

$$f_X(x) = e^{-x}\,\mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}$$

- $$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-y}\,\mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}\,\mathbb{1}_{\{y\geq x\}}\,dx$$
$$= e^{-y}\int_0^y dx\,\mathbb{1}_{\{y\geq 0\}}$$

$$f_Y(y) = y\,e^{-y}\,\mathbb{1}_{\{y\geq 0\}}$$

$$N(x,dy) = \frac{f(x,y)}{\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy}\,dy$$

$$= \frac{f(x,y)}{f_X(x)}\,dy$$

$$= \frac{e^{-y}\,\mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}\,\mathbb{1}_{\{y\geq x\}}}{e^{-x}\,\mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}}\,dy$$

$$= e^{x-y}\,\mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}\,\mathbb{1}_{\{y\geq x\}}\,dy$$

$$N(y, dx) = \frac{f(x,y)}{\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx}\,dx$$

$$= \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\,dx.$$

$$= \frac{e^{-y}\,\mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}\,\mathbb{1}_{\{y\geq 0\}}}{y e^{-y}\,\mathbb{1}_{\{y\geq 0\}}}\,dx$$

$$= \frac{1}{y}\,\mathbb{1}_{\{y\geq x\geq 0\}}\,dx.$$

Exo 3 :

$$f(x,y) = 2\,\theta^2\,e^{-\theta(x+y)}\,\mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}\,\mathbb{1}_{\{y\geq x\}}$$

$$N(x, dy) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}\,dy.$$

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} 2\theta^2 e^{-\theta(x+y)}\,\mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}\,\mathbb{1}_{\{y\geq x\}}\,dy.$$

$$= 2\theta^2 e^{-\theta x}\int_x^{+\infty} e^{-\theta y}\,dy\,\mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}$$

$$= 2\theta^{\cancel{2}} e^{-\theta x}\left(-\frac{1}{\cancel{\theta}}\right) e^{-\theta y}\Big|_x^{+\infty}\,\mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}.$$

$$= 2\theta\,e^{-2\theta x}\,\mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}.$$

$$\Rightarrow N(x, dy) = \frac{2\theta^2 e^{-\theta(x+y)}\,\mathbb{1}_{\{y\geq x\geq 0\}}}{2\theta\,e^{-2\theta x}\,\mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}}\,dy = \theta\,e^{\theta(x-y)}\,\mathbb{1}_{\{y\geq x\geq 0\}}\,dy.$$

Série N° 3.

Un temps d'arrêt τ est une v.a à valeur dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tq : $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, $\forall t \in \mathbb{R}$

$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty \,/\, A \cap \{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \in \mathbb{R}\}$.

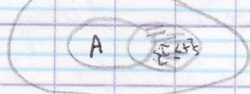
Si $A \in \mathcal{F}_t \Rightarrow A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Exo 1 :

1] $\mathcal{F}_\tau$ est une tribu ?

- $\phi \in \mathcal{F}_\tau$? $\quad \underbrace{\phi \cap \{\tau \leq t\}}_{= \phi} \in \mathcal{F}_t$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
- $\Omega \in \mathcal{F}_\tau$? $\quad \underbrace{\Omega \cap \{\tau \leq t\}}_{\{\tau \leq t\}} \in \mathcal{F}_t$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
- Si $A \in \mathcal{F}_\tau \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}_\tau$?

$A^c \cap \{\tau \leq t\} = \underbrace{\{\tau \leq t\}}_{\in \mathcal{F}_t} - \underbrace{A \cap \{\tau \leq t\}}_{\in \mathcal{F}_t}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.



$\{\tau \leq t\} - A \cap \{\tau \leq t\}$

2] $X \in \mathcal{F}_T \Rightarrow \{X \leq a\} \in \mathcal{F}_T$ $\quad \forall a \in \mathbb{R}$.

T un temps d'arrêt

Si $A \in \mathcal{F}_T \Rightarrow A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ $\quad \forall t \in \mathbb{R}$

Pour $A = \{X \leq a\}$:

alors $\{X \leq a\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, $\forall a, t \in \mathbb{R}$.

Posons $t = a$.

alors : $\{X \leq a\} \cap \{T \leq a\} \in \mathcal{F}_a \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

comme $X \geq T$:

alors $\{X \leq a\} \in \mathcal{F}_a \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

4] $\{S \leq T\} \in \mathcal{F}_T$?

$\{S \leq T\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t \in \mathbb{R}$?

$$\{S \leq T\} \cap \{T \leq t\} = \underbrace{\{S \wedge t \leq T \wedge t\}}_{\in \mathcal{F}_{T\wedge t} \subset \mathcal{F}_t} \cap \underbrace{\{T \leq t\}}_{\in \mathcal{F}_t} \cap \underbrace{\{S \leq t\}}_{\in \mathcal{F}_t}$$

5] $Z(t) = \mathbb{1}_{[S,T[}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [S,T[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

f continue à droite de x_0.

$\lim\limits_{x \underset{>}{\to} x_0} f(x) = f(x_0) \neq \lim\limits_{x \underset{<}{\to} x_0} f(x)$.

lim à gauche : $\lim\limits_{t \underset{<}{\to} T} Z(t) = 1$ $\leftarrow$

$\neq$

lim à droite : $\lim\limits_{t \underset{>}{\to} T} Z(t) = 0 = Z(T)$.

Exo 2 :

$[E(X(t))]'$ existe ?

$E[X(t)]' = E[X'(t)]$?

On considère le processus $Z(h)$, $h>0$ par :

$$Z(h) = \frac{1}{h}\left(X(t+h) - X(t)\right).$$

comme $X'(t)$ existe par (2) alors :

$$\lim_{h\to 0} Z(h) = X'(t).$$

On note que : $E(Z(h)) = \frac{1}{h}\left(E(X(t+h)) - E(X(t))\right)$

alors : $\lim_{h\to 0} E[Z(h)] = \frac{d}{dt} E(X(t))$. (*)

alors $(E(X(t)))'$ existe.

- d'autre part :

comme $X'(t)$ existe : $X(t+h) - X(t) = X'(t+\theta h).h$

alors : $Z(h) = X'(t+\theta h)$, $\theta \in (0,1)$.

comme $E(|X'(t)|) < E(|Y|)$

alors : $E|Z(h)| \leqslant \sup_{\theta\in(0,1)} |X'(t+\theta h)|$.

$$\leq |Y| \in L^1.$$

on a : $Z(h) \xrightarrow[h\to 0]{} X'(t)$.

alors par le théo de c.v dominer

$$E[Z(h)] \xrightarrow[h \to 0]{} E[X'(t)] \quad (**)$$

par $(*)$ et $(**)$ on obtient :

$$E(X'(t)) = \frac{d}{dt} E(X(t)).$$

Exo3 :

On considère le processus :

$$S_n = h \sum_{k=1}^{n} X(a + kh) \quad , \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

série de Rieman.

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \int_a^b X(t)\, dt.$$

On remarque que $E(S_n) = h \sum_{k=1}^{n} E(X(a+kh))$

alors : $E(S_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_a^b E(X(t))\, dt. \quad (*)$

d'autre part :

$|X(t)| \leq |Y| \in L^1.$

$$|S_n| \leq h \sum_{k=1}^{n} |X(a+kh)|$$

$$\leq \frac{(b-a)}{\cancel{n}} \cancel{n} |Y| = (b-a)|Y| \in L^1.$$

On a : $\lim_{n \to \infty} S_n = \int_a^b X(t)\, dt = S$

alors par le théo de Lebesgue :

$$E(S_n) \longrightarrow E(S) = E\left[\int_a^b X(t)\, dt\right] \quad **$$

par * et ** il vient,

$$E\left(\int_a^b X(t)\, dt\right) = \int_a^b E(X(t))\, dt.$$

Exo II.

1

$X_t = mt + b + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}$

$$E(X_t) = E(mt + b + \varepsilon_t) = mt + b + \cancel{E(\varepsilon_t)}^{0}$$
$$= mt + b \quad \text{dépend de } t.$$

donc X_t n'est pas stationnaire

2 $\quad Y_t = X_t - X_{t-1}.$

- $E(Y_t) = E(X_t - X_{t-1}) = E[mt + b + \varepsilon_t - m(t-1) - b - \varepsilon_{t-1}]$
$$= E[\cancel{mt} + \cancel{b} + \varepsilon_t - \cancel{mt} + m - \cancel{b} - \varepsilon_{t-1}]$$
$$= E(m + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})$$
$$= m.$$

- $\mathrm{var}(Y_t) = E(Y_t^2) - (E(Y_t))^2.$

$$E(Y_t^2) = E(m^2 + \varepsilon_t^2 + 2m\,\varepsilon_t)$$
$$= m^2 + \delta^2.$$

$$\mathrm{var}(Y_t) = \cancel{m^2} + \delta^2 - \cancel{m^2} = \delta^2.$$

- $\mathrm{cov}(Y_t) = E[(Y_t - E(Y_t))(Y_{t+h} - E(Y_{t+h}))]$

$$= E[(X_t - X_{t-1} - m)(X_{t+h} - X_{t+h-1} - m)].$$

$$\mathrm{cov}(Y_t) = E\left[(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t+h} - \varepsilon_{t+h-1})\right].$$

$$= E\left[\varepsilon_t \varepsilon_{t+h} - \varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t+h} - \varepsilon_t \varepsilon_{t+h-1} + \varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t+h-1}\right]$$

$$= \begin{cases} 2\delta^2 & h=0. \\ \delta^2 & h=1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

alors Y_t est un processus stationnaire

Exo 5 :

X_t est stationnaire ?

$P(X_t = 1) = P(X_t = -1) = 0{,}5$

$E(X_t) = \sum x_t \, P(X_t = x_t)$

$= 1\,P(X_t = 1) - 1\,P(X_t = -1) = 0{,}5 - 0{,}5 = 0$.

$\mathrm{var}(X_t) = E(X_t^2) - \cancel{(E(X_t))^2}^{\,0} = E(X_t^2)$

$= \sum x_t^2 \, P(X_t = x_t)$

$= 1^2\,P(X_t = 1) + (-1)^2\,P(X_t = -1) = 0{,}5 + 0{,}5 = 1$.

$\mathrm{cov}(X_t, X_{t+h}) = E[X_t X_{t+h}] - \cancel{E[X_t]}^{\,0}\,\cancel{E[X_{t+h}]}^{\,0}$

X

$= E[X_t X_{t+h}]$

$$X_t X_{t+h} = \begin{cases} 1 & \text{si } X_t = 1 \text{ et } X_{t+h} = 1 \\ 1 & \text{ou } X_t = -1 \text{ et } X_{t+h} = -1 \\ -1 & \text{si } X_t = 1 \text{ et } X_{t+h} = -1 \\ -1 & \text{ou } X_t = -1 \text{ et } X_{t+h} = 1 \end{cases}$$

$$P(X_t = X_{t+h} = 1) = 1/4$$
$$P(X_t \cdot X_{t+h} = -1) = \frac{1}{4}$$
$\Big\}\ 1/4 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

on pose $Y_t = X_t \, X_{t+h}$

$P(Y_t) = \sum y_t \, P(Y_t = y_t) = 0 \qquad \forall t$

Donc X_t est stationnaire.

Exo7 :

$Z_t = X_t + Y_t \qquad t \in \mathbb{N} \quad , \quad Y_t = (-1)^t X_t$

$E(Z_t) = E(X_t + Y_t) = E(X_t) + (-1)^t E(X_t)$

$$\begin{aligned}
var(Z_t) &= var(X_t + Y_t) = var(X_t + (-1)^t X_t) \\
&= var((1 + (-1)^t) X_t) \\
&= (1 + (-1)^t)^2 \underbrace{var(X_t)}_{\delta^2} \\
&= \begin{cases} 4\delta^2 & \text{si } t \text{ paire} \\ 0 & \text{si } t \text{ impaire} \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc Z_t n'est pas stationnaire

Exo8 :

$$\begin{aligned}
Z_n &= \mu Z_{n-1} + X_n = \mu(\mu Z_{n-2} + X_{n-1}) + X_n \\
&= \mu^2 Z_{n-2} + \mu X_{n-1} + X_n \\
&= \mu^2(\mu Z_{n-3} + X_{n-2}) + \mu X_{n-1} + X_n \\
&= \mu^3 Z_{n-3} + \mu^2 X_{n-2} + \mu X_{n-1} + X_n \\
&\ \vdots \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mu^{n-k} X_k
\end{aligned}$$

$$E(Z_n) = \sum_{k=0}^{n} \mu^{n-k} E(X_k) = 0$$

$$\gamma(h) = cov(Z_n, Z_{n+h}) = E(Z_n Z_{n+h}) - \cancel{E(Z_n) E(Z_{n+h})}^{\,0}$$

$$= E(Z_n Z_{n+m})$$

$$= E\left[\sum_{k=0}^{n} \mu^{n-k} X_k \sum_{k=0}^{n+m} \mu^{(n+m)-k} X_k\right]$$

$$= E\left(\sum_{k=0}^{n} \mu^{n-k} X_k \sum_{k=0}^{n} \mu^{(n+m)-k} X_k\right)$$

$$+ E\left(\sum_{k=0}^{n} \mu^{n-k} X_k \sum_{k=n+1}^{n+m} \mu^{(n+m)-k} X_k\right)$$

$$= \mu^{2n+m} E\left(\sum_{k=0}^{n} \mu^{-k} X_k \sum_{k=0}^{n} \mu^{-k} X_k\right)$$

$$= \mu^{2n+m} E\left(\sum_{k=0}^{n} \mu^{-2k} X_k^2\right) + 2\mu^{2n+m} \cancel{E\left(\sum_{i \neq j} \mu^{-i-j} X_i X_j\right)}^{\,0}$$

$$= \mu^{2n+m} \sum_{k=0}^{n} \mu^{2k} E(X_k^2)$$

$$= \mu^{2n+m} \left(\underbrace{Var(X_0)}_{= \frac{\delta}{1-\mu^2}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu^{2k}} \delta^2\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\mu^2}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{\mu^2}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{\mu^2}\right)} \cdot \frac{1}{\mu^2}$$

$$cov(Z_n, Z_{n+m}) = \frac{\delta^2 \mu^m}{1-\mu^2}$$

Exo 10 :

$$cov(X(t), X(t+\tau)) = E[X(t)X(t+\tau)] - E[X(t)]E[X(t+\tau)]$$
$$= E[X(t)(X(t+\tau) - X(t)) + X^2(t)] - \lambda t\, \lambda(t+\tau)$$
$$= E[X(t)]E[X(t+\tau) - X(t)] + E[X^2(t)] - (\lambda t)^2 - \lambda^2 t\tau$$

$$E[X^2(t)] = var(X(t)) + E(X(t))^2$$
$$= \lambda t + (\lambda t)^2.$$

$$= \cancel{\lambda t \cdot \lambda \tau} + \lambda t + \cancel{(\lambda t)^2} - \cancel{(\lambda t)^2} - \cancel{\lambda^2 t \tau}.$$
$$= \lambda t$$

$$cov(X(t), X(s)) = \lambda(t \wedge s)$$

Exo 9.

$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ le moment de la n-ème défaillance

$N(t)$ le nombre de défaillance dans $[0, t]$.

$\{N(t) \geq n\} = \{$le nombre des défaillance dans $[0, t] \geq 0\}$

$\{S_n \leq t\} = \{$le moment de la n-ème défaillance a lieu dans $[0, t]\}$.

On remarque que $\{N(t) \geq n\}$ et $\{S_n \leq t\}$ sont équivalentes.

a) $P(N(\ell) = n\} = F_n(\ell) - F_{n+1}(\ell)$?

$$P(N(t) = n) = P(N(t) \geq n) - P(N(t) \geq n+1)$$
$$= P(S_n \leq t) - P(S_{n+1} \leq t)$$
$$= F_n(t) - F_{n+1}(t).$$

b) $H(t) = E[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$?

$$E[N(t)] = \sum_{n \geq 0} n\, P(N(t) = n)$$

$$= \sum_{n \geq 1} n \left(F_n(t) - F_{n+1}(t)\right)$$

$$= \sum_{n \geq 1} n\, F_n(t) - \sum_{n \geq 1} n\, F_{n+1}(t)$$

$$= \sum_{n \geq 1} n\, F_n(t) - \sum_{n \geq 2} (n-1)\, F_n(t)$$

$$= \sum_{n \geq 1} F_n(t).$$

c) $F_{W_t}(s) = P(W_t \leq s) = 1 - P(W_t > s)$
$$= 1 - P(S_{N(t)+1} > s+t)$$
$$= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t) = n,\ S_{n+1} > s+t)$$

$$= 1 - P(N(t) = 0,\ S_1 > s+t) - \sum_{n \geq 1} P(N(t) = n, S_{n+1} > s+t)$$

$$= 1 - P(X_1 > t,\ X_1 > s+t) - \sum_{n \geq 1} P(S_n < t, S_{n+1} > t,\ S_{n+1} > s+t)$$

$$= 1 - P(X_1 > s+t) - \sum_{n\geq 1} P(S_n \leq t \ , \ S_{n+1} > s+t)$$

$$= F(s+t) - \sum_{n\geq 1} P(S_n \leq t \ , \ X_{n+1} > s+t-S_n)$$

Formule de Proba Totalle ?

$$= F(s+t) - \sum_{n\geq 1} \int_0^t P(X_{n+1} > s+t-x)\, dP_{S_n}(x)$$

$$= F(s+t) - \sum_{n\geq 1} \int_0^t (1 - F(s+t-x))\, f_n(x)\, dx.$$

$$= F(s+t) - \int_0^t (1 - F(s+t-x)) \underbrace{\sum_{n\geq 1} f_n(x)}_{h(x)}\, dx.$$

d) $X_i \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim$ gamma (n, λ).

$N(t) \sim \mathcal{P}(\lambda t)$.

$H(t) = E(N(t)) = \lambda t$.

$h(t) = H'(t) = \lambda$.