وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة أمحمد بوقرة
بومرداس
كلية العلوم
FACULTÉ DES SCIENCES

Groupe : .... : الفوج
Année Universitaire : .... : السنة الجامعية
Date : .... : التاريخ

Matricule : .... : رقم التسجيل
Nom : .... : اللقب
Prénom : .... : الاسم
Date de naissance : .... : تاريخ الميلاد
Module : .... : المقياس

Note : : العلامة
Observation : Correction Rattrapage Stat - Inf MSS1 2020/2021 : ملاحظة

17/17

Exercice N° 1

$$f_X(x) = \theta e^{-\theta(x-a)} 1\!\!1_{\{x \geq a\}} \qquad a>0,\ \theta>0$$

un n-éch de la v.a X
- le modèl statistique :

$$\left([a, +\infty[, \mathcal{B}([a,+\infty[), \{f_X(x,\theta,a), \theta>0, a>0\}\right)$$ 1

le modèle statistique st dominé car la v.a X définie à partir de sa densité $f_X(x,\theta,a)$.

- $F_X(x) = ??$ $\quad \mathcal{X} = [a, +\infty[$

$$F_X(x) = \int_a^x f_X(t)\,dt = \int_a^x \theta e^{-\theta(t-a)}\,dt$$

$$= \theta \int_a^x e^{-\theta(t-a)}\,dt = \theta\left[-\frac{e^{-\theta(t-a)}}{\theta}\right]_a^x$$ 1

$$= -e^{-\theta(x-a)} + 1 = \boxed{1 - e^{-\theta(x-a)}}$$

Partie 1 $a>0$ et θ connu

$\frac{7}{7}$

① la loi de la v.a $Y = \min X_i$

0,5

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\min X_i \leq y) = 1 - P(\min X_i \geq y)$

$= 1 - P(\bigcap_{i=1}^{n} X_i \geq y) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i \geq y)$

comme les X_i sont i.i.d que la v.a X

$= 1 - [P(X \geq y)]^n$

$= 1 - [1 - P(X \leq y)]^n$

$= 1 - [1 - F_X(y)]^n$

$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} = \frac{\partial [1 - (1 - F_X(y))^n]}{\partial y}$

0,5

$= n(1 - F_X(y))^{n-1} f_X(y)$ 0,5

$= n(1 - (1 - e^{-\theta(y-a)}))^{n-1} \theta e^{-\theta(y-a)} \mathbb{1}_{\{y \geq a\}}$

$\Rightarrow \boxed{f_Y(y) = n\theta e^{-n\theta(y-a)}} \mathbb{1}_{\{y \geq a\}}$ 0,5

2) e.m.v pour a noté T.

$$L(\underset{\sim}{x}, a) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x) = n\theta \; e^{-\theta \sum (x_i - a)} \mathbb{1}_{\{\min x_i \geq a\}}$$

$$L(\underset{\sim}{x}, a) = n\theta \; e^{-\theta \sum (x_i - a)} \mathbb{1}_{\{\min x_i \geq a\}}$$

0,5

on a $\mathcal{X} = [a, +\infty[$ on remarque que le support de la v.a X st dépend de paramètre a

0,5

$\Rightarrow$ on fait une étude directe pour trouver l'e.m.v de a.

on a $a \in]0, \min x_i]$ car $a > 0$ et $x_i \geq a$ $\forall i = \overline{1,n}$

on cherche la valeur maximale de la fonction $L(\underset{\sim}{x}, a)$ par rapport au paramètre $\underline{\underline{a}}$

1

on a $L(\underset{\sim}{x}, a) = \underbrace{n\theta}\; \underbrace{e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)}}$

On remarque que à chaque fois on augmente la valeur de paramètre $\underline{\underline{a}}$ à chaque fois la quantité de $L(\underset{\sim}{x}, a)$ augmente

$\Rightarrow L(\underset{\sim}{x}, a)$ atteint son maximum si a prend sa valeur maximale $= \min x_i$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{e.m.v} = T = \min x_i}$

pour le paramètre $\underline{\underline{a}}$

T est-il biaisé

$E(T) = E(\min X_i) = E(y)$ 0,5

$= \int_a^{+\infty} y f_Y(y)\, dy = \int_a^{+\infty} y\, n\theta\, e^{-n\theta(y-a)}\, dy$

$= n\theta \int_a^{+\infty} y\, e^{-n\theta(y-a)}\, dy$

$= n\theta \left[\frac{a}{n\theta} \Gamma(1) + \frac{\Gamma(2)}{n^2\theta^2}\right]$ 0,5 | $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(2) = 1$.

$E(T) = a + \frac{1}{n\theta} \neq a \Rightarrow T = \min X_i$ est un E.B pour a

③ statistique exhaustive pour a

d'après le critère de factorisation :

$L(x, a) = n\theta\, e^{-\theta \sum (x_i - a)} \mathbb{1}_{\{\min x_i \geq a\}}$ 0,5

$= n\theta\, e^{-\theta \sum x_i}\, e^{n\theta a}\, \mathbb{1}_{\{\min x_i \geq a\}}$

$= \underbrace{e^{n\theta a} \mathbb{1}_{\{\min x_i \geq a\}}}_{g(S(x),\, a)} \cdot \underbrace{n\theta\, e^{-\theta \sum x_i}}_{h(x)}$

0,5

$\Rightarrow$ la stat exhaustive pour a = $\boxed{S(x) = \min x_i}$

Scanné avec CamScanner

Groupe : .... : الفوج

Année Universitaire : .... : السنة الجامعية

Date : .... : التاريخ

Prénom : .... : الاسم

Date de naissance : .... : تاريخ الميلاد

Module : .... : المقياس

Note : العلامة :	Observation : ملاحظة :

(4) $I_x(a) = E\left(\left[\frac{\partial}{\partial a}\log f_X(x,a)\right]^2\right)$ 0,5

= la quantité d'information de fisher apportée par une réalisation de X.

$f_X(x,a) = \theta\, e^{-\theta(x-a)}\, 1\!\!1_{\{x \geq a\}}$

$\log f_X(x,a) = \log\theta - \theta(x-a)$

$\frac{\partial \log f(x,a)}{\partial a} = \theta$

$\boxed{I_x(a) = E(\theta^2) = \theta^2}$ 0,5

8/8

partie 2 : $\theta > 0$ et a connu

① $Z = \theta(X-a)$

0,5 $F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(\theta(X-a) \leq z) = P(X \leq \frac{z}{\theta} + a)$

$= F_X\left(\frac{z}{\theta} + a\right)$

$f_Z(z) = \frac{\partial F_Z(z)}{\partial z} = \frac{\partial F_X\left(\frac{z}{\theta}+a\right)}{\partial z} = \frac{1}{\theta} f_X\left(\frac{z}{\theta}+a\right)$ 0,1

$$= \frac{1}{\theta}\,\theta\, e^{-\theta\left[\left(\frac{z}{\theta}+a\right)-a\right]}\,\mathbb{1}_{\left\{\frac{z}{\theta}+a\geq a\right\}}$$

$$f_Z(z) = e^{-z}\,\mathbb{1}_{\{z\geq 0\}}$$ car $\frac{z}{\theta}\geq 0$ comme $\theta>0 \Rightarrow z\geq 0$

$$\Rightarrow \boxed{Z \sim \mathcal{E}(1)}.$$ 0,5

2) e.m.v pour θ noté T

$$L(\underline{x},\theta) = n\theta\, e^{-\theta\sum(x_i-a)}\,\mathbb{1}_{\{\min x_i\geq a\}}$$

$\mathcal{X} = [a,+\infty[$ $\perp\!\!\!\perp$ de θ

$$\log L(\underline{x},\theta) = \log n\theta - \theta\sum(x_i-a)$$ 0,5

$$\frac{\partial \log L(\underline{x},\theta)}{\partial\theta}=0 \Rightarrow \frac{n}{\theta}-\sum(x_i-a)=0$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat\theta = \frac{n}{\sum(x_i-a)}}$$

$$\frac{\partial^2 \log L(\underline{x},\theta)}{\partial\theta^2} = \frac{-n}{\theta^2}<0$$ 0,5

$$\Rightarrow \boxed{T=\frac{n}{\sum(x_i-a)}}$$ est l'e.m.v pour θ

T E.S.B ??

$$E(T)=E\left(\frac{n}{\sum(X_i-a)}\right) = E\left(\frac{n\theta}{\theta\sum(X_i-a)}\right) = E\left(\frac{n\theta}{\sum\theta(X_i-a)}\right)$$

$$= E\left(\frac{n\theta}{\sum Z_i}\right)$$

$= n\theta E\left(\frac{1}{\sum Z_i}\right)$ les $Z_i \sim \mathcal{E}(1)$ $\forall i = \overline{1,n}$
et Z_i sont $\perp\!\!\!\perp$ $\forall i = \overline{1,n}$
car sont fonction en X_i qui sont indépendants

$\Rightarrow \sum Z_i \sim \gamma(n,1)$.

Soit la v.a $K = \sum Z_i \sim \gamma(n,1)$

118

$n\theta E\left(\frac{1}{\sum Z_i}\right) = n\theta E\left(\frac{1}{K}\right) = n\theta \int_0^{\infty} \frac{1}{k} f_K(k)\, dk$

$= n\theta \int_0^{\infty} \frac{1}{k} \frac{1^n}{\Gamma(n)} k^{n-1} e^{-k}\, dk$

$= \frac{n\theta}{\Gamma(n)} \int_0^{+\infty} k^{n-2} e^{-k}\, dk = \frac{n\theta}{\Gamma(n)} \Gamma(n-1) = \frac{n\theta}{(n-1)\cancel{\Gamma(n-1)}} \cancel{\Gamma(n-1)}$

$E(T) = \frac{n}{n-1}\theta \neq \theta \Rightarrow T$ est un E.B pour θ

0,8

mais $T' = \frac{n-1}{n} T$ est un E.S.B pour θ

0,8

3) On a $\mathcal{X} = [a, +\infty[$ $\forall \theta$

$f_X(x,\theta) = \theta e^{-\theta(x-a)} \mathbb{1}_{\{x \geq a\}}$

$= \theta e^{-\theta x} e^{\theta a} \mathbb{1}_{\{x \geq a\}} = \underbrace{\theta e^{\theta a}}_{c(\theta)} \underbrace{e^{-\theta x}}_{d(\theta)\, a(x)} \underbrace{\mathbb{1}_{\{x \geq a\}}}_{h(x)}$

1

$\Rightarrow S(x) = \sum x_i$ est une stat exhaustive pour θ et $\dim \theta = 1 = \dim S$
$\Rightarrow S$ est une stat exhaustive et minimale et complete.

4) E.S.B.V.U.M pour θ

On a : $S = \sum x_i$ est une stat exh et complete pour θ.

1

. $T' = \frac{n-1}{n} T$ est un E.S.B pour θ

$\Rightarrow T'' = E\left(\frac{n-1}{n} T \mid \sum x_i\right) = \frac{n-1}{n} T$ est le seul

E.S.B.V.U.M pour θ.

(5) $f_X(x) = \theta\, e^{-\theta(x-a)}\, \mathbb{1}_{\{x \geq a\}}$

- $L(x,\theta) = n\theta\, e^{-\theta \sum (x_i - a)}\, \mathbb{1}_{\{\min x_i \geq a\}}$

1

- $\log L(x,\theta) = \log n\theta - \theta \sum (x_i - a)$
- $\frac{\partial \log L(x,\theta)}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} - \sum (x_i - a) = -n\left[\frac{\sum (x_i - a)}{n} - \frac{1}{\theta}\right]$

$\Rightarrow \frac{1}{\theta}$ st la seule fonction estimée efficacement

$\frac{\sum (x_i - a)}{n}$ st l'estimateur efficace pour $\frac{1}{\theta}$.

3/3

Exercice N°2 :

$X \sim N(m, \sigma^2)$, on a un n-éch de la v.a X.

- on propose à estimer la variance théorique σ^2 par la variance empirique S^2

$\Rightarrow S^2$ estimateur pour σ^2.

1,5

- S^2 estimateur pour σ^2

$S^2 = \frac{1}{n} \sum (X_i - \bar{X})^2$ où $X_i \sim N(m, \sigma^2)$ $\forall i = \overline{1,n}$ et sont ⫫

$\Rightarrow \frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2}$ est une

fonction pivotale pour σ^2 de loi de

1,5

Khi-deux a $(n-1)$ degré de liberté.

$\Rightarrow Q(x_1, \ldots, x_n, \sigma^2) = \frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$