Université de Tlemcen   le 17-01-2019

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Epreuve finale : Equations Différentielles Stochastique et applications

Durée 1h30mn

Exercice 1 : Le but de l'exercice est de résoudre l'EDS

(*) $dY_t = r\,dt + \alpha Y_t\,dB_t$, $Y_0 = 1$, $0 \leq t \leq T$,

où $r, \alpha \in \mathbb{R}$ et $B = (B_t)$ est un mouvement brownien

1) Considérons le "facteur intégrant" : $F_t = \exp\{-\alpha B_t + \frac{1}{2}\alpha^2 t\}$ et le processus stochastique $X = FY$ défini par $X_t = F_t Y_t$ pour $t \in [0, T]$. Par application de la formule d'Itô à $F_t = g(t, B_t)$ où g est définie par $g(t,x) = e^{-\alpha x + \frac{\alpha^2}{2}t}$, établir la dynamique du processus $F = (F_t)_{0 \leq t \leq T}$.

2) Soit le processus produit : $X_t = F_t Y_t$ (défini plus haut), en appliquant la formule du produit de deux processus d'Itô par rapport au même mouvement brownien B établir que l'on a : $X_t = 1 + r\int_0^t F_s\,ds$.

3) Déduire de 2) la solution $Y = (Y_t)$ de l'EDS (*)

Exercice 2 : question de cours : Produit de processus d'Itô

Soient (Z_t) et (Y_t) deux processus d'Itô par rapport au même mouvement brownien B :

$Z_t = Z_0 + \int_0^t K_s\,ds + \int_0^t H_s\,dB_s$; $Y_t = Y_0 + \int_0^t L_s\,ds + \int_0^t G_s\,dB_s$

1) Exprimer U_t^2 en utilisant la formule de Itô avec $U_t = Z_t + Y_t$

2) En déduire que $d(Z_t Y_t) = Z_t\,dY_t + Y_t\,dZ_t + H_t G_t\,dt$

Exercice 3 : Soit l'EDS : $dS_t = S_t(\mu\,dt + \sigma\,dB_t)$, $S_0 = s$, les coefficients μ et σ étant constants. Montrer que

$$S_t = S_0 \exp(\mu t + \sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t).$$

Proposition de solution de l'épreuve finale
E.D.S. et applications le 17-01-2019

1 Exercice 1 : 1) Par la formule d'Itô et en posant $g(t,x) = e^{-\alpha x + \frac{\alpha^2}{2}t}$

1 nous avons $\begin{cases} dF_t = \alpha^2 F_t\,dt - \alpha F_t\,dB_t + \cancel{\frac{1}{2}\alpha^2 F_t\,dt} \\ F_0 = \exp\left(-\alpha B_0 + \frac{1}{2}\alpha^2 . 0\right) = 1 \end{cases}$

2) $X_t = F_t . Y_t$

On pose $h(x_1, x_2) = x_1 . x_2$ alors $X_t = h(F_t, Y_t)$

et
$$\begin{aligned} dX_t &= F_t\,dY_t + Y_t\,dF_t + dF_t\,dY_t \\ &= F_t(r\,dt + \alpha Y_t\,dB_t) + Y_t(\alpha^2 F_t\,dt - \alpha F_t\,dB_t) + (-\alpha F_t . \alpha Y_t)\,dt \end{aligned}$$

1 $= (rF_t - \alpha^2 Y_t F_t + \alpha^2 Y_t F_t)\,dt + (\alpha Y_t F_t - \alpha Y_t F_t)\,dB_t$

1 $= rF_t\,dt$

Comme $X_0 = F_0 Y_0$ alors $X_0 = 1$.

La dynamique du pr. stoch. $(X_t)_{0\le t\le T}$ est donc

$$\begin{cases} dX_t = r F_t\,dt \\ X_0 = 1 \end{cases}$$

ou encore : $X_t = 1 + \int_0^t r F_s\,ds$

3) Finalement $Y_t = \frac{X_t}{F_t} = e^{\alpha B_t - \frac{1}{2}\alpha^2 t} + r\int_0^t e^{\alpha(B_t - B_s) - \frac{1}{2}(t-s)}\,ds$.

Exercice 2 :

$f(t,x) = x^2$; $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = 2x$; $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = 0$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) = 2$

alors Itô nous donne : $f(t, X_t) = X_0^2 + \int_0^t 2X_s\,dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2\sigma_s^2\,dB_s$

avec $\begin{cases} dX_t = a_t\,dt + \sigma_t\,dB_t \\ X_0 \end{cases}$

Dans l'exercice nous avons la même fonction appliquée à trois processus différents.

1 $Z_t^2 = Z_0^2 + 2\int_0^t Z_s\,dZ_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2H_s^2\,ds$

$Y_t^2 = Y_0^2 + 2\int_0^t Y_s\,dY_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2G_s^2\,ds$

1 $U_t = Z_t + Y_t = Z_0 + Y_0 + \int_0^t (K_s + L_s)\,ds + \int_0^t (H_s + G_s)\,dB_s$

2

$$\Rightarrow U_t^2 = (Z_0+Y_0)^2 + 2\int_0^t (Z_s+Y_s)\underbrace{\left[(K_s+L_s)\,ds + (H_s+G_s)\,dB_s\right]}_{dU_s} +$$

$$+ \int_0^t (H_s+G_s)^2\,ds$$

or $Z_t \cdot Y_t = \frac{1}{2}\left[U_t^2 - Z_t^2 - Y_t^2\right]$

$$= \frac{1}{2}\Big[(Z_0+Y_0)^2 + 2\int_0^t (Z_s+Y_s)\left[(K_s+L_s)\,ds + (H_s+G_s)\,dB_s\right] +$$

$$+ \int_0^t (H_s+G_s)^2\,ds - Z_0^2 - 2\int_0^t Z_s\,dZ_s - \int_0^t H_s^2\,ds$$

$$- Y_0^2 - 2\int_0^t Y_s\,dY_s - \int_0^t G_s^2\,ds\Big]$$

Ainsi $Z_t Y_t = \frac{1}{2}\Big[Z_0^2 + Y_0^2 + 2Z_0 Y_0 + 2\int_0^t Z_s\{(K_s+L_s)\,ds + (H_s+G_s)\,dB_s\} +$

$$+ 2\int_0^t Y_s\left[(K_s+L_s)\,ds + (H_s+G_s)\,dB_s\right] +$$

$$+ \int_0^t (H_s^2 + G_s^2 + 2H_s \cdot G_s)\,ds - Z_0^2 - 2Z_s\,dZ_s - \int_0^t H_s^2\,ds$$

$$- Y_0^2 - 2Y_s\,dY_s - \int_0^t G_s^2\,ds\Big]$$

$$\Rightarrow Z_t Y_t = Z_0 Y_0 + \int_0^t Z_s(dZ_s + dY_s) + \int_0^t Y_s(dZ_s + dY_s) +$$

$$+ \int_0^t H_s G_s\,ds - \int_0^t Z_s\,dZ_s - \int_0^t Y_s\,dY_s.$$

1 $\Rightarrow Z_t Y_t = Z_0 Y_0 + \int_0^t Z_s\,dY_s + \int_0^t Y_s\,dZ_s + \int_0^t H_s G_s\,ds$

ou sous forme différentielle.

1 $\begin{cases} d(Z_t Y_t) = Z_t \cdot dY_t + Y_t\,dZ_t + H_t \cdot G_t\,dt \\ Z_0 Y_0 \end{cases}$

Exercice 3 :

1+1 $\begin{cases} dS_t = S_t(\mu\,dt + \sigma\,dB_t) \\ S_0 \end{cases}$

Montrons que $S_t = S_0 \exp\left(\mu t - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma B_t\right)$ est solution de cette équation différentielle stochastique.

③ On considère la fonction $f(t,x) = S_0 \exp\left(\mu t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma x\right)$

alors $\frac{\partial f}{\partial t}(t, B_t) = S_0\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) S_t$

$\frac{\partial f}{\partial x}(t, B_t) = S_0 \, \sigma \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right) = \sigma S_t$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, B_t) = S_0 \, \sigma^2 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right) = \sigma^2 S_t$.

La formule de Itô donne dans ce cas :

$$f(t,B_t) = f(0,B_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s)\, dB_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, B_s)\, ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, B_s) . 1^2 ds$$

(en effet $dB_t = 0 . dt + 1 . dB_t$)

Pour $t = 0$ $\quad f(0, B_0) = S_0 \exp(\sigma B_0) = S_0$

$$f(t, B_t) = S_0 + \int_0^t \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) S_u \, du + \int_0^t \sigma S_u \, dB_u + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 S_u \, du$$

$$\parallel$$

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu S_u \, du + \int_0^t \sigma S_u \, dB_u$$

ou sous la forme différentielle

$$\begin{cases} dS_t = S_t(\mu \, dt + \sigma \, dB_t) \\ S_0 . \end{cases}$$