Université Hassiba Benbouali de Chlef **Année Universitaire : 2020 -2021**
Faculté des Sciences Exactes et Informatique **Module : Analyse fonctionnelle**
Département de Mathématiques **Niveau : Master 1**

Feuille de TD 1

Exercice 1.

a. Montrer que les applications suivantes de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{R}_+$ sont des normes sur $\mathbb{C}^n$:

$$\|x\|_p := (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty); \quad \|x\|_\infty := \sup_{1\leq k\leq n} |x_k| \quad \text{où } x = (x_k)_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n$$

N.B. Utiliser l'inégalité de Minkowski

$$(\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{k=1}^{n} a_k^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{k=1}^{n} b_k^p)^{\frac{1}{p}}; \quad a_k, b_k \geq 0, \quad p \in [1, +\infty[$$

b. Montrer qu'il existe des constantes c_1, c_2 strictement positives telles que

$$\|x\|_\infty \leq c_1\|x\|_p \leq c_2\|x\|_\infty, \; x \in \mathbb{C}^n$$

Exercice 2.

Soit $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur un intervalle compact $[a, b]$, $(a < b)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit sur E les applications suivantes

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(t)|\, dt; \quad \|f\|_2 := (\int_a^b [f(t)]^2\, dt)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty := \max_{a\leq t\leq b} |f(t)|, \quad (f \in E)$$

- Montrer que ces applications définissent des normes sur E.
- Montrer qu'il existe des constantes $c, c' > 0$ telles que pour tout $f \in E$:

$$\|f\|_1 \leq c\, \|f\|_2 \leq c'\, \|f\|_\infty$$

- Montrer que ces normes ne sont pas équivalentes sur E. (Utiliser la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ où $f_n(t) = t^n$, $t \in [0, 1]$).

Exercice 3.

Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On le munit de la norme $\|.\|_\infty$ définie pour tout $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$$

- Montrer que $(\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Soit $\mathcal{F}$ le sous-espace de $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ formé des fonctions continues f telles que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Montrer que $\mathcal{F}$ est fermé de l'espace $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- Que peut-on déduire ?

Exercice 4.

1. Soient $(\mathcal{E}, \|.\|_{\mathcal{E}})$, $(\mathcal{F}, \|.\|_{\mathcal{F}})$ deux espaces vectoriels normés avec $\dim \mathcal{E} < +\infty$, et soit $T : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une application linéaire.

- Montrer que T est continue.

2. Soit K une fonction continue sur $[0,1] \times [0,1]$. Considérons l'application

$$A : \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) \to \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$$

définie par

$$Au(x) = \int_0^1 K(x,y)u(y)dy, \ u \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), \ x \in [0,1]$$

Montrer que A définit une application linéaire continue sur $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_{\infty}$, et que $\|A\| \leq \|K\|_{\infty}$.