Le mouvement brownien
Exercices

Geneviève Gauthier

Dernière mise à jour : 14 juillet 2004

Exercice 9.1. Soit Z une variable aléatoire de loi normale centrée et réduite. Pour tout $t \geq 0$, nous posons $X_t = \sqrt{t}Z$. Le processus stochastique $X = \{X_t : t \geq 0\}$ a des trajectoires continues et $\forall t \geq 0$, X_t est de loi $N(0,t)$. Est-ce que X est un mouvement brownien ? Justifiez votre réponse. (réf. Baxter et Rennie, p. 49)

Exercice 9.2. Soit W et $\widetilde{W}$, deux mouvements browniens standard indépendants l'un de l'autre, et ρ, une constante comprise entre 0 et 1. Pour tout $t \geq 0$, nous posons $X_t = \rho W_t + \sqrt{1-\rho^2}\widetilde{W}_t$. Le processus stochastique $X = \{X_t : t \geq 0\}$ a des trajectoires continues et $\forall t \geq 0$, X_t est de loi $N(0,t)$. Est-ce que X est un mouvement brownien ? Justifiez votre réponse. (réf. Baxter et Rennie, p. 49)

Exercice 9.3. Soit W un mouvement brownien standard construit sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}, P)$. Posons $X_t = \exp\left[\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right]$. Montrez que $X = \{X_t : t \geq 0\}$ est une martingale.

Exercice 9.4. Soit W un mouvement brownien standard construit sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}, P)$. Montrez que $\{W_t^2 - t : t \geq 0\}$ est une martingale.

Exercice 9.5. Soit W un mouvement brownien standard. Montrez que

$$Cov\left[W_t, W_s\right] = \min(s,t).$$

Exercice 9.6. Soit $\{W_t : t \geq 0\}$, un mouvement brownien standard. Montrez que

$$\begin{array}{ll} (i) & \text{Pour tout } s>0,\ \{W_{t+s} - W_s : t \geq 0\} \\ (ii) & \{-W_t : t \geq 0\} \\ (iii) & \left\{cW_{\frac{t}{c^2}} : t \geq 0\right\} \\ (iv) & \left\{V_0 = 0 \text{ et } V_t = tW_{\frac{1}{t}} \text{si } t>0\ : t \geq 0\right\} \end{array}$$

sont aussi des mouvements browniens standard.

Exercice 9.7. Soit W un mouvement brownien standard à quatre dimensions, c'est-à-dire que les quatre composantes de ce mouvement brownien sont des mouvements browniens standard unidimensionnels indépendants.

a) Simulez 10 000 trajectoires de ce mouvement brownien sur l'intervalle $[0, 1]$ à l'aide de votre logiciel préféré. Utilisez des intervalles d'une longueur de $\frac{1}{365}$ pour la dicrétisation du temps. Pour chaque instant $\frac{k}{365}$ $k \in \{10, 100, 300\}$, calculez la moyenne échantillonnale, l'écart-type échantillonnal et les corrélations échantillonales et comparez-les avec leur valeur théorique respective.

b) Utilisez la décomposition de Choleski afin de transformer le mouvement brownien multidimensionnel de l'exercice a) en un mouvement brownien dont les composantes sont corrélées. La matrice de corrélations est

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0.8 & 0.5 \\ 0.2 & 1 & 0.3 & 0.2 \\ 0.8 & 0.3 & 1 & 0.9 \\ 0.5 & 0.2 & 0.9 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pour chaque instant $\frac{k}{365}$ $k \in \{10, 100, 300\}$, calculez la moyenne échantillonnale, l'écart-type échantillonnal et les corrélations échantillonales et comparez-les avec leur valeur théorique respective.

Exercice 9.8. Décrivez chacune des étapes permettant de transformer un mouvement brownien $\mathbf{B}$ de dimension 4 dont les composantes sont corrélées (les corrélations entre la première composante et les 3 suivantes sont respectivement 0,5; 0,8 et 0,1, les corrélations entre la deuxième composante et les deux suivantes sont respectivement 0,3 et 0,4 et la corrélation entre la troisième et la quatrième composante est 0,1) comme le produit $\mathbf{AW}$ ou $\mathbf{W}$ représente un mouvement brownien standard de dimension 4 dont les composantes sont indépendantes. Donnez explicitement la matrice $\mathbf{A}$.

Les solutions

1 Exercice 9.1

Non, puisque pour $0 \leq s \leq t < \infty$,

$$\begin{aligned} Var\left[X_t - X_s\right] &= Var\left[\sqrt{t}Z - \sqrt{s}Z\right] \\ &= \left(\sqrt{t} - \sqrt{s}\right)^2 Var\left[Z\right] \\ &= t - 2\sqrt{t}\sqrt{s} + s \\ &\neq t - s. \end{aligned}$$

2 Exercice 9.2

Oui. Il nous reste à montrer que (i) les incréments sont indépendants entre eux et que (ii) pour tout $0 \leq s \leq t < \infty$, $X_t - X_s$ est de loi $N(0, t-s)$.
(ii)

$$X_t - X_s = \underbrace{\rho\underbrace{(W_t - W_s)}_{N(0,t-s)}}_{N(0,\rho^2(t-s))} + \underbrace{\sqrt{1-\rho^2}\underbrace{\left(\widetilde{W}_t - \widetilde{W}_s\right)}_{N(0,t-s)}}_{N(0,(1-\rho^2)(t-s))}$$

Comme les deux termes du membre de droite de l'égalité sont deux variables aléatoires gaussiennes indépendantes d'espérance nulle, leur somme est aussi de loi normale d'espérance nulle. Maintenant,

$$Var\left[X_t - X_s\right] = \rho^2\left(t-s\right) + \left(1-\rho^2\right)\left(t-s\right) = t - s$$

ce qui complète cette première partie.

(i) Soit $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4 < \infty$. Comme $X_{t_2} - X_{t_1}$ et $X_{t_4} - X_{t_3}$ sont toutes deux de loi normale, il suffit de montrer que leur covariance est nulle :

$$\begin{aligned} & Cov\left[X_{t_2} - X_{t_1}; X_{t_4} - X_{t_3}\right] \\ = \; & Cov\left[\rho\left(W_{t_2} - W_{t_1}\right) + \sqrt{1-\rho^2}\left(\widetilde{W}_{t_2} - \widetilde{W}_{t_1}\right); \rho\left(W_{t_4} - W_{t_3}\right) + \sqrt{1-\rho^2}\left(\widetilde{W}_{t_4} - \widetilde{W}_{t_3}\right)\right] \\ = \; & \rho^2 Cov\left[W_{t_2} - W_{t_1}; W_{t_4} - W_{t_3}\right] + \rho\sqrt{1-\rho^2} Cov\left[W_{t_2} - W_{t_1}; \widetilde{W}_{t_4} - \widetilde{W}_{t_3}\right] \\ & + \rho\sqrt{1-\rho^2} Cov\left[\widetilde{W}_{t_2} - \widetilde{W}_{t_1}; W_{t_4} - W_{t_3}\right] + \left(1-\rho^2\right) Cov\left[\widetilde{W}_{t_2} - \widetilde{W}_{t_1}; \widetilde{W}_{t_4} - \widetilde{W}_{t_3}\right] \\ = \; & 0 \end{aligned}$$

puisque l'indépendance entre les incréments d'un mouvement brownien implique que

$$Cov\left[W_{t_2} - W_{t_1}; W_{t_4} - W_{t_3}\right] = 0$$

et

$$Cov\left[\widetilde{W}_{t_2} - \widetilde{W}_{t_1}; \widetilde{W}_{t_4} - \widetilde{W}_{t_3}\right] = 0$$

tandis que l'indépendance entre les deux mouvements browniens entraîne que

$$Cov\left[W_{t_2} - W_{t_1}; \widetilde{W}_{t_4} - \widetilde{W}_{t_3}\right] = 0$$

et

$$Cov\left[\widetilde{W}_{t_2} - \widetilde{W}_{t_1}; W_{t_4} - W_{t_3}\right] = 0.$$

3 Exercice 9.3

(i) L'intégrabilité :

$$\begin{aligned}
E\left[|X_t|\right] &= E\left[\left|\exp\left[\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right]\right|\right] = E\left[\exp\left[\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right]\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\sigma w - \frac{\sigma^2}{2}t\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{w^2}{2t}\right] dw \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{w^2 - 2t\sigma w + \sigma^2 t^2}{2t}\right] dw \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{(w - t\sigma)^2}{2t}\right]}_{\text{fct. de densité d'une } N(t\sigma,t)} dw = 1 < \infty
\end{aligned}$$

(ii) Puisque X_t est une fonction continue de variables aléatoires $\mathcal{F}_t-$mesurables, X_t est elle-même $\mathcal{F}_t-$mesurable.

(iii) Pour tout $0 \leq s \leq t \leq \infty$,

$$\begin{aligned}
E\left[X_t \middle| \mathcal{F}_s\right] &= X_s E\left[\left.\frac{X_t}{X_s}\right| \mathcal{F}_s\right] \text{ car } X_s > 0 \\
&= X_s E\left[\left.\frac{\exp\left[\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right]}{\exp\left[\sigma W_s - \frac{\sigma^2}{2}s\right]}\right| \mathcal{F}_s\right] \\
&= X_s E\left[\left.\exp\left[\sigma\left(W_t - W_s\right) - \frac{\sigma^2}{2}\left(t-s\right)\right]\right| \mathcal{F}_s\right] \\
&= X_s E\left[\exp\left[\sigma\left(W_t - W_s\right) - \frac{\sigma^2}{2}\left(t-s\right)\right]\right] \text{ car } W_t - W_s \text{ est indépendant de } \mathcal{F}_s. \\
&= X_s \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\sigma w - \frac{\sigma^2}{2}\left(t-s\right)\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{t-s}} \exp\left[-\frac{w^2}{2\left(t-s\right)}\right] dw \\
&= X_s \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{t-s}} \exp\left[-\frac{w^2 - 2\left(t-s\right)\sigma w + \sigma^2\left(t-s\right)}{2\left(t-s\right)}\right] dw \\
&= X_s \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{t-s}} \exp\left[-\frac{\left(w - \left(t-s\right)\sigma\right)^2}{2\left(t-s\right)}\right]}_{\text{fct. de densité d'une } N((t-s)\sigma, t-s)} dw = X_s
\end{aligned}$$

4 Exercice 9.4

Premièrement, $W_t^2 - t$ est $\mathcal{F}_t-$mesurable car c'est une fonction continue de W_t qui est $\mathcal{F}_t-$mesurable.

Deuxièmement,

$$E\left[\left|W_t^2 - t\right|\right] \leq E\left[W_t^2\right] + t = t + t = 2t < \infty.$$

Troisièmement, $\forall 0 \leq s \leq t$,

$$\begin{aligned}
E\left[W_t^2 - t \left| \mathcal{F}_s\right.\right] &= E\left[\left(W_t - W_s + W_s\right)^2 - t \left| \mathcal{F}_s\right.\right] \\
&= E\left[\left(W_t - W_s\right)^2 + 2W_s\left(W_t - W_s\right) + W_s^2 - t \left| \mathcal{F}_s\right.\right] \\
&= \underbrace{E\left[\left(W_t - W_s\right)^2 \left| \mathcal{F}_s\right.\right]}_{\substack{=E\left[\left(W_t - W_s\right)^2\right] \\ =t-s}} + 2W_s \underbrace{E\left[W_t - W_s \left| \mathcal{F}_s\right.\right]}_{\substack{=E\left[W_t - W_s\right] \\ =0}} + W_s^2 - t \\
&= W_s^2 - s. \blacksquare
\end{aligned}$$

5 Exercice 9.5

Nous pouvons supposer sans perte de généralité que $0 < s < t$.

$$\begin{aligned} Cov\left[W_t, W_s\right] &= Cov\left[W_t - W_s + W_s, W_s\right] \\ &= Cov\left[W_t - W_s, W_s\right] + Cov\left[W_s, W_s\right] \\ &= Cov\left[W_t - W_s, W_s - W_0\right] + Var\left[W_s\right] \\ &= 0 + s \text{ car les incréments de } W \text{ sont indépendants} \\ &= \min(s,t) \text{ car } s < t. \ \blacksquare \end{aligned}$$

6 Exercice 9.6

Posons

$$Z_t = W_{t+s} - W_s.$$

$(MB1)$ $Z_0 = W_s - W_s = 0$.
$(MB2)$ Puisque $Z_{t_k} - Z_{t_{k-1}} = (W_{t_k+s} - W_s) - \left(W_{t_{k-1}+s} - W_s\right) = W_{t_k+s} - W_{t_{k-1}+s}$ et que $\forall 0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_k$, les variables aléatoires $W_{t_1+s} - W_{t_0+s}$, $W_{t_2+s} - W_{t_1+s}$, ..., $W_{t_k+s} - W_{t_{k-1}+s}$ sont indépendantes, alors $\forall 0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_k$, les variables aléatoires $Z_{t_1} - Z_{t_0}$, $Z_{t_2} - Z_{t_1}$, ..., $Z_{t_k} - Z_{t_{k-1}}$ sont indépendantes.
$(MB3)$ $\forall u, t \geq 0$ tel que $u < t$, $Z_t - Z_u = (W_{t+s} - W_s) - (W_{u+s} - W_s) = W_{t+s} - W_{u+s}$ est de distribution normale d'espérance 0 et de variance $(t+s) - (u+s) = t - u$.
$(MB4)$ $\forall \omega \in \Omega$, la trajectoire $t \to Z_t(\omega) = W_{t+s}(\omega) - W_s(\omega)$ est continue puisque $t \to W_t(\omega)$ est continue.

Posons

$$Y_t = -W_t.$$

$(MB1)$ $Y_0 = -W_0 = 0$.
$(MB2)$ Puisque $Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}} = W_{t_{k-1}} - W_{t_k}$ et que $\forall 0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_k$, les variables aléatoires $W_{t_1} - W_{t_0}$, $W_{t_2} - W_{t_1}$, ..., $W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$ sont indépendantes, alors $\forall 0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_k$, les variables aléatoires $W_{t_0} - W_{t_1}$, $W_{t_1} - W_{t_2}$, ..., $W_{t_{k-1}} - W_{t_k}$ sont indépendantes,ce qui implique que $Y_{t_1} - Y_{t_0}$, $Y_{t_2} - Y_{t_1}$, ..., $Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}}$ sont indépendantes.
$(MB3)$ $\forall s, t \geq 0$ tel que $s < t$, $Y_t - Y_s = W_s - W_t$ est de distribution normale d'espérance 0 et de variance $t - s$.
$(MB4)$ $\forall \omega \in \Omega$, la trajectoire $t \to Y_t(\omega) = -W_t(\omega)$ est continue puisque $t \to W_t(\omega)$ est continue.

Posons

$$X_t = cW_{\frac{t}{c^2}}.$$

$(MB1)$ $\quad X_0 = cW_0 = 0.$

$(MB2)$ $\quad$ Puisque $X_{t_k} - X_{t_{k-1}} = cW_{\frac{t_k}{c^2}} - cW_{\frac{t_{k-1}}{c^2}} -$ et que $\forall 0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_k$, les variables aléatoires $W_{\frac{t_1}{c^2}} - W_{\frac{t_0}{c^2}}$, $W_{\frac{t_2}{c^2}} - W_{\frac{t_1}{c^2}}$, ..., $W_{\frac{t_k}{c^2}} - W_{\frac{t_{k-1}}{c^2}}$ sont indépendantes, alors $\forall 0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_k$, les variables aléatoires $cW_{\frac{t_1}{c^2}} - cW_{\frac{t_0}{c^2}}$, $cW_{\frac{t_2}{c^2}} - cW_{\frac{t_1}{c^2}}$, ..., $cW_{\frac{t_k}{c^2}} - cW_{\frac{t_{k-1}}{c^2}}$ sont indépendantes,ce qui implique que $X_{t_1} - X_{t_0}$, $X_{t_2} - X_{t_1}$, ..., $X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$ sont indépendantes.

$(MB3)$ $\quad$ Puisque cW est de loi normale si W est de loi normale, $\forall s, t \geq 0$ tel que $s < t$, $X_t - X_s = c\left(W_{\frac{t}{c^2}} - W_{\frac{c}{c^2}}\right)$ est de distribution normale d'espérance $E\left[X_t - X_s\right] = cE\left[W_{\frac{t}{c^2}} - W_{\frac{c}{c^2}}\right] = 0$ et de variance $Var\left[X_t - X_s\right] = c^2 Var\left[W_{\frac{t}{c^2}} - W_{\frac{c}{c^2}}\right] = c^2\left(\frac{t}{c^2} - \frac{s}{c^2}\right) = t - s.$

$(MB4)$ $\quad \forall \omega \in \Omega$, la trajectoire $t \rightarrow X_t(\omega) = cW_{\frac{t}{c^2}}(\omega)$ est continue puisque $t \rightarrow W_t(\omega)$ est continue.

Posons

$$V_t = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ tW_{\frac{1}{t}} & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

$(MB1)$ $\quad V_0 = 0$ par définition de V.

$(MB3)$ $\quad \forall s, t \geq 0$ tel que $s < t$,

$$\begin{aligned} V_t - V_u &= tW_{\frac{1}{t}} - sW_{\frac{1}{s}} \\ &= -s\left(W_{\frac{1}{s}} - W_{\frac{1}{t}}\right) + (t-s)\,W_{\frac{1}{t}} \end{aligned}$$

est composée d'une combinaison linéaire de deux variables aléatoires indépendantes de loi normale. $V_t - V_u$ est donc aussi de distribution normale.

$$E\left[V_t - V_s\right] = E\left[tW_{\frac{1}{t}} - sW_{\frac{1}{s}}\right] = tE\left[W_{\frac{1}{t}}\right] - sE\left[W_{\frac{1}{s}}\right] = 0$$

et

$$\begin{aligned} Var\left[V_t - V_s\right] &= Var\left[-s\left(W_{\frac{1}{s}} - W_{\frac{1}{t}}\right) + (t-s)\,W_{\frac{1}{t}}\right] \\ &= Var\left[-s\left(W_{\frac{1}{s}} - W_{\frac{1}{t}}\right)\right] + Var\left[(t-s)\,W_{\frac{1}{t}}\right] \\ &\quad \text{car } W_{\frac{1}{s}} - W_{\frac{1}{t}} \text{ est indépendante de } W_{\frac{1}{t}} \\ &= s^2 Var\left[W_{\frac{1}{s}} - W_{\frac{1}{t}}\right] + (t-s)^2\, Var\left[W_{\frac{1}{t}}\right] \\ &= s^2\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{t}\right) + (t-s)^2\,\frac{1}{t} \\ &= s - \frac{s^2}{t} + t - 2s + \frac{s^2}{t} \\ &= t - s. \end{aligned}$$

Si $s = 0$ alors $V_t = tW_{\frac{1}{t}}$ est de distribution normale d'espérance

$$E[V_t] = E\left[tW_{\frac{1}{t}}\right] = tE\left[W_{\frac{1}{t}}\right] = 0$$

et de variance

$$Var[V_t] = Var\left[tW_{\frac{1}{t}}\right] = t^2 Var\left[W_{\frac{1}{t}}\right] = t^2\frac{1}{t} = t.$$

$(MB2)$ Il suffit de montrer que, $\forall 0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ la covariance entre les deux variables aléatoires $V_{t_2} - V_{t_1}$ et $V_{t_4} - V_{t_3}$ est nulle puisque ces dernières sont de loi normale. Si $t_1 > 0$, alors, puisque $0 < \frac{1}{t_4} < \frac{1}{t_3} \leq \frac{1}{t_2} < \frac{1}{t_1}$,

$$\begin{aligned}
Cov[V_{t_2} - V_{t_1}; V_{t_4} - V_{t_3}] &= Cov\left[t_2W_{\frac{1}{t_2}} - t_1W_{\frac{1}{t_1}}; t_4W_{\frac{1}{t_4}} - t_3W_{\frac{1}{t_3}}\right] \\
&= t_2t_4Cov\left[W_{\frac{1}{t_2}}; W_{\frac{1}{t_4}}\right] - t_2t_3Cov\left[W_{\frac{1}{t_2}}; W_{\frac{1}{t_3}}\right] \\
&\quad -t_1t_4Cov\left[W_{\frac{1}{t_1}}; W_{\frac{1}{t_4}}\right] + t_1t_3Cov\left[W_{\frac{1}{t_1}}; W_{\frac{1}{t_3}}\right] \\
&\quad \text{puisque } Cov(W_t, W_s) = \min(s,t). \\
&= t_2t_4\frac{1}{t_4} - t_2t_3\frac{1}{t_3} - t_1t_4\frac{1}{t_4} + t_1t_3\frac{1}{t_3} \\
&= t_2 - t_2 - t_1 + t_1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Si $t_1 = 0$, alors

$$\begin{aligned}
Cov[V_{t_2} - V_{t_1}; V_{t_4} - V_{t_3}] &= Cov\left[t_2W_{\frac{1}{t_2}}; t_4W_{\frac{1}{t_4}} - t_3W_{\frac{1}{t_3}}\right] \\
&= t_2t_4Cov\left[W_{\frac{1}{t_2}}; W_{\frac{1}{t_4}}\right] - t_2t_3Cov\left[W_{\frac{1}{t_2}}; W_{\frac{1}{t_3}}\right] \\
&= t_2t_4\frac{1}{t_4} - t_2t_3\frac{1}{t_3} \\
&= t_2 - t_2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$(MB4)$ $\forall\omega \in \Omega$, la trajectoire $t \to V_t(\omega) = tW_{\frac{1}{t}}(\omega)$ est continue pour tout $t > 0$ puisque les fonctions $t \to W_t(\omega)$ et $t \to t$ sont continues donc leur produit l'est aussi. Comme $\lim_{t\to 0} tW_{\frac{1}{t}}(\omega) = 0$ presque sûrement, la trajectoire $t \to V_t(\omega) = tW_{\frac{1}{t}}(\omega)$ est continue pour tout t.