Examen Final

EXERCICE N° 1:

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon que l'on modélise par une loi uniforme $\mathcal{U}[0, \theta]$ où $\theta > 0$ est un paramètre inconnu. On note $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $Y_n = n(1 - M_n)$.

1. Quelle est la fonction de répartition de Y_n ?
2. Étudier la convergence en loi de la suite (Y_n)
3. Montrer que $M_n = \theta + o_p(1)$.

Fixons $t \in (0, \theta)$. Considérons deux estimateurs de $\mathbb{P}(X \leq t)$:

$$\mathbb{F}_n(t) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i \leq t\}} \text{ et } T_n(t) = \frac{t}{2\overline{X}_n}$$

4. Donner la loi asymptotique de $\mathbb{F}_n(t)$. Calculer la variance de $\mathbb{F}_n(t)$ en fonction de θ.
5. Déterminer la loi limite de $T_n(t)$.
6. Pour quelles valeurs de t, la variance de $\mathbb{F}_n(t)$ est plus petite que celle de $T_n(t)$.

EXERCICE N° 2:

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. de densité f :

$$f(x) = \frac{1}{2} \exp(-|x|)$$

Soit la fonction $\psi_\theta(x) = \phi(x - \theta)$, avec $\phi(x) = x^5$ et $\hat{\theta}_n$ le Z-estimateur définit comme le zéro de la fonction

$$\mathbb{P}_n \psi_\theta := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \psi_\theta(X_i)$$

1. Déterminer la limite en probabilité de $\mathbb{P}_n\psi_\theta$, $\mathbb{P}_{\theta_0}\psi_\theta$.
2. Quelle est la valeur θ_0 qui vérifie $\mathbb{P}_{\theta_0}\psi_{\theta_0} = 0$?
3. Montrer que $\hat{\theta}_n$ est un estimateur consistant de θ_0.
4. Montrer que $\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta_0\right)$ est asymptotiquement normale, et déterminer les paramètres de la loi.

Corrigé de l'examen final

EXERCICE N° 1:

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon que l'on modélise par une loi uniforme $\mathcal{U}[0, \theta]$ où $\theta > 0$ est un paramètre inconnu. On note $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $Y_n = n(1 - M_n)$.

1. Pour calculer la fonction de répartition de Y_n, on calcule d'abord

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M_n \leq u) &= \mathbb{P}(X_1 \leq u; \ldots; X_n \leq u) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq u) \times \ldots \times \mathbb{P}(X_n \leq u) \\ &= \left(\frac{u}{\theta}\right)^n\end{aligned}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_n \leq y) &= \mathbb{P}\left(n(1 - M_n) \leq y\right) = \mathbb{P}\left(M_n \geq \left(1 - \frac{y}{n}\right)\right) = 1 - \mathbb{P}\left(M_n \leq \left(1 - \frac{y}{n}\right)\right) \\ &= 1 - \left[\frac{1}{\theta}\left(1 - \frac{y}{n}\right)\right]^n\end{aligned}$$

2. La convergence en loi de la suite (Y_n)

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(Y_n \leq y) = \lim_{n \to +\infty} 1 - \left[\frac{1}{\theta}\left(1 - \frac{y}{n}\right)\right]^n = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta}y}$$

On en déduit que (Y_n) converge en loi vers la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\theta}$.

3. Pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}(|M_n - \theta| \leq \epsilon) = \mathbb{P}(\theta - \epsilon \leq M_n \leq \theta + \epsilon) = 1 - \left(\frac{\theta - \epsilon}{\theta}\right)^n \xrightarrow{n \to +\infty} 1$$

D'où $M_n = \theta + o_p(1)$.

Fixons $t \in (0, \theta)$. Considérons deux estimateurs de $\mathbb{P}(X \leq t)$:

$$\mathbb{F}_n(t) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i \leq t\}} \text{ et } T_n(t) = \frac{t}{2\overline{X}_n}$$

4. On a

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{F}_n(t)\right] := \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i \leq t\}}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X \leq t\}}\right] = \mathbb{F}(t)$$

avec $\mathbb{F}(t) := \mathbb{P}(X \leq t) = \frac{t}{\theta}$.

De plus

$$\mathbb{V}\left[\mathbb{F}_n(t)\right] := \mathbb{V}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{\{X_i\leq t\}}\right] = \frac{1}{n}\mathbb{V}\left[\mathbb{1}_{\{X\leq t\}}\right] = \frac{1}{n}\mathbb{F}(t)\left(1-\mathbb{F}(t)\right)$$

Par le théorème centrale limite $\sqrt{n}\left(\mathbb{F}_n(t)-\mathbb{F}(t)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{t(\theta-t)}{\theta^2}\right)$.

La variance de $\mathbb{F}_n(t)$ est égale à $\mathbb{F}(t)\left(1-\mathbb{F}(t)\right) = \frac{t(\theta-t)}{\theta^2}$.

5. Par le théorème centrale limite $\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \frac{\theta}{2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\theta^2}{12}\right)$.

   En appliquant la méthode delta avec $\phi(x) = \frac{t}{2x}$, $\phi'(x) = -\frac{t}{2x^2}$ et $\phi'\left(\frac{\theta}{2}\right) = -\frac{2t}{\theta^2}$, on obtient $\sqrt{n}\left(T_n(t) - \frac{t}{\theta}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{t^2}{3\theta^2}\right)$.

6. On résout l'inégalité $3t(\theta-t)-t^2<0$ on trouve que pour $t > \frac{3\theta}{4}$, la variance de $\mathbb{F}_n(t)$ est plus petite que celle de $T_n(t)$.

<u>EXERCICE N° 2</u>:

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. de densité f :

$$f(x) = \frac{1}{2}\exp(-|x|)$$

Soit la fonction $\psi_\theta(x) = \phi(x-\theta)$, avec $\phi(x) = x^5$ et $\hat{\theta}_n$ le Z-estimateur définit comme le zéro de la fonction

$$\mathbb{P}_n\psi_\theta := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\psi_\theta(X_i)$$

On peut montrer que $\mathbb{E}X^k = k!$ Pour k pair, et 0 sinon. En effet :

$$\mathbb{E}X^k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k\frac{1}{2}\exp(-|x|)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair} \\ \int_0^{+\infty} x^k\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \Gamma(k+1) = k! & \text{si } k \text{ est pair}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X-\theta)^5 &= \mathbb{E}[X^5] - 5\theta\mathbb{E}[X^4] + 10\theta^2\mathbb{E}[X^3] - 10\theta^3\mathbb{E}[X^2] + 5\theta^4\mathbb{E}[X] - \theta^5 \\ &= 0 - 120\theta + 0 - 20\theta^3 + 0 - \theta^5 = -\theta(\theta^4 + 20\theta^2 + 120) \qquad (1)\end{aligned}$$

1. Notons que $\mathbb{E}(X-\theta)^5 < \infty$ pour tout $\theta\in\mathbb{R}$. Donc par la loi des grands nombres $\mathbb{P}_n\psi_\theta$ converge en probabilité vers $\mathbb{P}_{\theta_0}\psi_\theta = \mathbb{E}(X-\theta)^5$.
2. De l'équation (1), $\mathbb{P}_{\theta_0}\psi_{\theta_0} = 0$ pour $\theta_0 = 0$.
3. Évidemment chaque application $\theta\mapsto\mathbb{P}_n\psi_\theta$ est non-croissante. Comme Ψ est strictement monotone et $\Psi(0)=0$, nous avons $\Psi(-\epsilon) > 0 > \Psi(\epsilon)$, pour tout $\epsilon > 0$. Alors $\hat{\theta}_n$ est un estimateur consistant de θ_0, en utilisant le Lemme du cours.
4. Par le théorème de normalité asymptotique des Z-estimateurs $\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta_0\right)$ est asymptotiquement normale, de moyenne 0 et de variance

$$\frac{\mathbb{P}_{\theta_0}\psi_{\theta_0}^2}{(\mathbb{P}_{\theta_0}\dot{\psi}_{\theta_0})^2} = \frac{\mathbb{E}[X^{10}]}{(5\mathbb{E}[X^4])^2} = \frac{10!}{(5!)^2} = 252.$$

Université Hassiba Benbouali–Chlef
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

Examen Final

EXERCICE N° 1:
Soit $X_1, \dots, X_n$ un échantillon que l'on modélise par une loi de Poisson $\mathcal{P}(\theta)$ où $\theta > 0$ est un paramètre inconnu.

1. Quelle est la loi asymptotique de $\overline{X}_n$
2. Déterminer la transformation ϕ qui permet de stabiliser la variance telle que :
$$\sqrt{n}\left(\phi(\overline{X}_n) - \phi(\theta)\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$
3. En déduire un intervalle de confiance pour θ de niveau asymptotique α.

On pose
$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i > 0 \\ 0 & \text{si } X_i = 0 \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n$$

4. Quelle est la loi des $Y_i,\ i = 1, \dots, n$.
5. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ basé sur $(Y_1, \dots, Y_n)$.
6. Quelle est la loi limite de l'EMV $\hat{\theta}_n$.

EXERCICE N° 2:
Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon de v.a. i.i.d de même loi que X, où X admet pour densité de probabilité :
$$f_X(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \mathbb{1}_{\{x>0\}},$$
avec $\sigma \in]0, +\infty[$.

1. Calculer l'espérance et la variance de X.

Soit $\hat{\theta}_n$ l'estimateur définit comme le minimum de la fonction
$$\theta \mapsto \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \theta)^2$$

2. Vérifier que $\hat{\theta}_n$ est un Z-estimateur et déterminer la fonction $\psi_\theta(x)$.
3. Quelle est la valeur θ_0 qui vérifie $\mathbb{P}_{\theta_0}\psi_{\theta_0} = 0$?
4. Montrer que $\hat{\theta}_n$ est un estimateur consistant de θ_0.
5. Montrer que $\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta_0\right)$ est asymptotiquement normale, et déterminer les paramètres de la loi.

Corrigé de l'examen final

EXERCICE N° 1:

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon que l'on modélise par une loi de Poisson $\mathcal{P}(\theta)$ où $\theta > 0$ est un paramètre inconnu.

1. Par le théorème centrale limite $\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \theta\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \theta)$.
2. On cherche la trnasformation qui permet de stabiliser la variance telle que :

$$\phi(\theta) = \int \frac{1}{\sigma(\theta)} \, \mathrm{d}\theta$$

Il faut trouver une primitive de $\sqrt{\theta}$ car $\sigma^2(\theta) = \theta$. On a $\sigma(\theta) = \sqrt{\theta}$, alors

$$\phi(\theta) = \int \frac{1}{\sqrt{\theta}} \, \mathrm{d}\theta = 2\sqrt{\theta}.$$

La transformation qui permet de stabiliser la variance est $\phi(x) = 2\sqrt{x}$. On obtient

$$\sqrt{n}\left(2\sqrt{\overline{X}_n} - 2\sqrt{\theta}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

3. L'intervalle de confiance asymptotique pour $2\sqrt{\theta}$ est :

$$\mathrm{IC}\left(2\sqrt{\theta}\right) = \left[2\sqrt{\overline{\mathrm{X}}_\mathrm{n}} - \frac{\mathrm{z}_{1-\alpha/2}}{\sqrt{\mathrm{n}}}; 2\sqrt{\overline{\mathrm{X}}_\mathrm{n}} + \frac{\mathrm{z}_{1-\alpha/2}}{\sqrt{\mathrm{n}}}\right]$$

On en déduit un intervalle de confiance pour θ de niveau asymptotique α :

$$\mathrm{IC}(\theta) = \left[\left(\sqrt{\overline{\mathrm{X}}_\mathrm{n}} - \frac{\mathrm{z}_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{\mathrm{n}}}\right)^2; \left(\sqrt{\overline{\mathrm{X}}_\mathrm{n}} + \frac{\mathrm{z}_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{\mathrm{n}}}\right)^2\right]$$

On pose

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i > 0 \\ 0 & \text{si } X_i = 0 \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n$$

4. Les v.a $Y_i,\ i = 1, \ldots, n$ sont i.i.d de loi de Bernoulli de paramètre

$$p = \mathbb{P}(X_i > 0) = 1 - \mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - e^{-\theta}.$$

5. Comme l'estimateur du maximum de vraisemblance de p est $\hat{p}_n = \overline{Y}_n$, on en déduit que l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ est :

$$\hat{\theta}_n = -\ln\left(1 - \overline{Y}_n\right).$$

6. On par le théorème centrale limite $\sqrt{n}\left(\overline{Y}_n - p\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, p(1-p)\right)$ c'est-à-dire

$$\sqrt{n}\left(\overline{Y}_n - (1-e^{-\theta})\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, (1-e^{-\theta})e^{-\theta}\right)$$

et comme $\hat{\theta}_n = -\ln\left(1-\overline{Y}_n\right)$, en utilisant la méthode Delta avec $\phi(x) = -\ln(1-x)$, $\phi'(x) = \dfrac{1}{1-x}$, on obtient :

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, e^{\theta}-1\right)$$

EXERCICE N° 2:

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon de v.a. i.i.d de même loi que X, où X admet pour densité de probabilité :

$$f_X(x) = \frac{x}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\mathbb{1}_{\{x>0\}},$$

avec $\sigma \in]0, +\infty[$.

1. L'espérance et la variance de X sont les suivantes :

$$\mathbb{E}[X] = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ et } \mathbb{V}[X] = \frac{4-\pi}{2}\sigma^2.$$

Soit $\hat{\theta}_n$ l'estimateur définit comme le minimum de la fonction

$$\theta \mapsto \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\theta)^2$$

2. $\hat{\theta}_n$ est un Z-estimateur, car il est solution de l'équation :

$$-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2(X_i-\theta) = 0.$$

   La fonction $\psi_\theta(x)$ est égale à $2(x-\theta)$.

3. Par la loi des grands nombres $\mathbb{P}_n\psi_\theta$ converge en probabilité vers $\mathbb{P}_{\theta_0}\psi_\theta = 2(\mathbb{E}[X]-\theta)$. La valeur de θ_0 qui vérifie $\mathbb{P}_{\theta_0}\psi_{\theta_0} = 0$ est $\theta_0 = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

4. Comme $\mathbb{P}_n\psi_\theta$ est une fonction décroissante de θ, alors $\hat{\theta}_n$ est un estimateur consistant de θ_0, en utilisant le Lemme du cours.

5. Par le théorème de normalité asymptotique des Z-estimateurs $\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta_0\right)$ est asymptotiquement normale, de moyenne 0 et de variance

$$\frac{\mathbb{P}_{\theta_0}\psi_{\theta_0}^2}{(\mathbb{P}_{\theta_0}\dot{\psi}_{\theta_0})^2} = \frac{4\mathbb{V}[X]}{(-2)^2} = \mathbb{V}[X] = \frac{4-\pi}{2}\sigma^2.$$

Examen Final

QUESTIONS DE COURS :

1. Dans quel cas la convergence en loi implique la convergence en probabilité ?
2. Donner un exemple de suites (X_n) et (Y_n) telles que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$, mais $X_n + Y_n$ ne converge pas en loi vers $X + Y$.
3. Dans quelle situation on fait le développement à un ordre supérieur de la méthode Delta ?
4. Expliquer pourquoi un Z-estimateur est aussi un M-estimateur ?
5. Sous quelle condition un M-estimateur est un Z-estimateur ?

PROBLÈME :

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon de v.a. i.i.d de même loi que X, où X admet pour densité de probabilité :

$$f(x) = \frac{1}{2\sigma} \exp\left(-\frac{1}{\sigma}|x - \mu|\right),$$

avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in]0, +\infty[$ sont des paramètres inconnus.

1. Trouver la fonction de répartition de X.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.

Dans un premier temps on suppose μ fixé et égal à 0.

3. Estimer σ par la méthode des moments, on note l'estimateur obtenu $\tilde{\sigma}_n$.
4. Déterminer la loi asymptotique de $\tilde{\sigma}_n$.
5. Trouver un estimateur $\hat{\sigma}_n$ de σ par la méthode du maximum de vraisemblance.
6. Calculer l'information de Fisher $I_n(\sigma)$.
7. Quelle est la loi asymptotique de $\hat{\sigma}_n$.

On suppose maintenant que μ est inconnu et σ fixé et égal à 1.

8. Donner l'estimateur $\tilde{\mu}_n$ de μ par la méthode des moments. Est-il asymptotiquement normal ?
9. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de μ.
10. Calculer l'information de Fisher $I_n(\mu)$.
11. Quelle est la loi limite de l'EMV $\hat{\mu}_n$.

Soit la fonction $\psi_\theta(x) = (\theta - x)^3$ et $\hat{\theta}_n$ le Z-estimateur définit comme le zéro de la fonction

$$\mathbb{P}_n \psi_\theta := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \psi_\theta(X_i)$$

12. Montrer que $\hat{\theta}_n$ est un estimateur consistant de μ.
13. Montrer que $\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \mu\right)$ est asymptotiquement normale, et déterminer les paramètres de la loi.

Corrigé de l'examen Final

QUESTIONS DE COURS :

1. La convergence en loi implique la convergence en probabilité quand la limite est constante.
2. Soit $X_n = X + 1/n$ pour tout n où X est une loi symétrique (X et $-X$ ont même loi, e.g. $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$). On pose $Y_n = -X_n$. Alors $X_n + Y_n = X_n - X_n = 0$ presque-sûrement. D'autre part, X_n converge en loi vers X tandis que $Y_n = -X_n$ converge en loi vers $-X$, et donc également vers X.
   Si la proposition était vraie, $X_n + Y_n$ convergerait en loi, à la fois vers 0 et vers $2X$, ce qui n'est pas possible dès que X prend des valeurs non nulles.
3. Lorsque $\varphi'(\theta_0)$ est nulle, la loi limite est dégénérée en 0. Il est alors intéressant de pousser le développement à un ordre supérieur.
4. Par définition un Z-estimateur maximise la fonction critère $M_n(\theta) = -\|\Psi_n(\theta)\|$, donc c'est aussi un M-estimateur.
5. Si la la fonction $\theta \mapsto m_\theta(x)$ est différentiable, un M-estimateur est aussi un Z-estimateur, solution des équations d'estimation
$$\nabla M_n(\theta) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \nabla m_\theta(X_i) = 0$$

PROBLÈME :

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon de v.a. i.i.d de même loi que X, où X admet pour densité de probabilité :
$$f(x) = \frac{1}{2\sigma} \exp\left(-\frac{1}{\sigma}|x-\mu|\right),$$
avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in]0, +\infty[$ sont des paramètres inconnus.

1. La fonction de répartition de X est donnée par :
   Pour $x < \mu$, on a
$$\begin{aligned}
\mathbb{F}(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sigma}\int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{|t-\mu|}{\sigma}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\sigma}\int_{-\infty}^{x} \exp\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)\mathrm{d}t = \frac{\sigma}{2\sigma}\left[\exp\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)\right]_{-\infty}^{x} = \frac{1}{2}\left(\exp\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) - 0\right) \\
&= \frac{1}{2}\exp\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)
\end{aligned}$$
   D'autre part si $x \geq \mu$, on a
$$\begin{aligned}
\mathbb{F}(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sigma}\int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{|t-\mu|}{\sigma}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sigma}\int_{-\infty}^{\mu} \exp\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)\mathrm{d}t + \frac{1}{2\sigma}\int_{\mu}^{x} \exp\left(-\frac{t-\mu}{\sigma}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} - \frac{\sigma}{2\sigma}\left[\exp\left(-\frac{t-\mu}{\sigma}\right)\right]_{\mu}^{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right) - 1\right) \\
&= 1 - \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\mathbb{F}(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \frac{1}{2}\exp(\frac{x-\mu}{\sigma}) & \text{si } x < \mu \\ 1 - \frac{1}{2}\exp(-\frac{x-\mu}{\sigma}) & \text{si } x \geq \mu \end{cases}$$

2. Calculons l'espérance de X :
   Posons $u = x - \mu$, alors on a $x = u + \mu$ et $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$. On a $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[U+\mu] = \mathbb{E}[U] + \mu$, donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \frac{1}{2\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} u\,e^{-\frac{|u|}{\sigma}}\,\mathrm{d}u + \mu \\ &= \underbrace{\frac{1}{2\sigma}\int_{-\infty}^{0} u\,e^{\frac{u}{\sigma}}\,\mathrm{d}u}_{u=-u} + \frac{1}{2\sigma}\int_{0}^{\infty} u\,e^{-\frac{u}{\sigma}}\,\mathrm{d}u + \mu \\ &= -\frac{1}{2\sigma}\int_{0}^{\infty} u\,e^{-\frac{u}{\sigma}}\,\mathrm{d}u + \frac{1}{2\sigma}\int_{0}^{\infty} u\,e^{-\frac{u}{\sigma}}\,\mathrm{d}u + \mu \\ &= \mu\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X^2\right] &= \mathbb{E}\left[(U+\mu)^2\right] = \mathbb{E}\left[U^2\right] + 2\mu\mathbb{E}\left[U\right] + \mu^2 = \mathbb{E}\left[U^2\right] + 2\mu\mathbb{E}\left[X-\mu\right] + \mu^2 \\ &= \frac{1}{2\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} u^2 e^{-\frac{|u|}{\sigma}}\,\mathrm{d}u + \mu^2 = \underbrace{\frac{1}{2\sigma}\int_{-\infty}^{0} u^2 e^{\frac{u}{\sigma}}\,\mathrm{d}u}_{u=-u} + \frac{1}{2\sigma}\int_{0}^{\infty} u^2 e^{-\frac{u}{\sigma}}\,\mathrm{d}u + \mu^2 \\ &= \frac{1}{2\sigma}\int_{0}^{\infty} u^2 e^{-\frac{u}{\sigma}}\,\mathrm{d}u + \frac{1}{2\sigma}\int_{0}^{\infty} u^2 e^{-\frac{u}{\sigma}}\,\mathrm{d}u + \mu^2 = \underbrace{\frac{1}{\sigma}\int_{0}^{\infty} u^2 e^{-\frac{u}{\sigma}}\,\mathrm{d}u}_{v=\frac{u}{\sigma}} + \mu^2 \\ &= \sigma^2\int_{0}^{\infty} v^2 e^{-v}\,\mathrm{d}v + \mu^2 = 2\sigma^2 + \mu^2,\end{aligned}$$

   où

$$\Gamma(n+1) = \int_{0}^{\infty} v^n e^{-v}\,\mathrm{d}v = n!, \quad \text{pour } n \text{ entier.}$$

   Finalement

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - (\mathbb{E}[X])^2 = 2\sigma^2.$$

Dans un premier temps on suppose μ fixé et égal à 0.

3. On a

$$\mathbb{E}(X^2) = 2\sigma^2 \text{ donc } \sigma = \sqrt{\frac{\mathbb{E}(X^2)}{2}}$$

   L'estimateur des moments résultant de cette dernière égalité est

$$\tilde{\sigma}_n = \sqrt{\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{2}} := \sqrt{\frac{\overline{X^2}_n}{2}}$$

4. Par le théorème centrale limite $\sqrt{n}\left(\overline{X^2}_n - 2\sigma^2\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, 20\sigma^4\right)$.

   En appliquant la méthode delta avec $\varphi(x) = \sqrt{\frac{x}{2}}$, $\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x}}$ et $\varphi'\left(2\sigma^2\right) = \frac{1}{4\sigma}$, on obtient $\sqrt{n}\left(\tilde{\sigma}_n - \sigma\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{5\sigma^2}{4}\right)$.

5. La vraisemblance de $(X_1, \ldots, X_n)$ est définie par

$$\begin{aligned} L(X_1, \ldots, X_n; \sigma) &:= \prod_{i=1}^n f(X_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{2\sigma} \exp\left(-\frac{1}{\sigma}|X_i|\right) \\ &= \left(\frac{1}{2\sigma}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^n |X_i|\right) \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \ln L(X_1, \ldots, X_n; \sigma) &= -n\ln 2 - n\ln\sigma - \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^n |X_i| \\ \frac{\partial}{\partial\sigma}\ln L(X_1, \ldots, X_n; \sigma) &= -n\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n |X_i| \end{aligned}$$

On obtient :

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\ln L(X_1, \ldots, X_n; \sigma) = 0 \iff \hat{\sigma}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |X_i|$$

6. L'information de Fisher $I_n(\sigma)$:

$$\begin{aligned} I_n(\sigma) &= -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}\ln L(X_1, \ldots, X_n; \sigma)\right] = \mathbb{E}\left[-\frac{n}{\sigma^2} + \frac{2}{\sigma^3}\sum_{i=1}^n |X_i|\right] \\ &= -\frac{n}{\sigma^2} + \frac{2}{\sigma^3}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[|X_i|\right] = -\frac{n}{\sigma^2} + \frac{2n\sigma}{\sigma^3} = \frac{n}{\sigma^2} \end{aligned}$$

7. La loi asymptotique de $\hat{\sigma}_n$ est donnée par :

$$\sqrt{n}\left(\hat{\sigma}_n - \sigma\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right).$$

On suppose maintenant que μ est inconnu et σ fixé et égal à 1.

8. La moyenne de X est

$$\mathbb{E}(X) = \mu$$

Donc l'estimateur $\tilde{\mu}_n$ peut être choisi égal à la moyenne empirique $\overline{X}_n$.
Par le théorème centrale limite $\sqrt{n}\left(\tilde{\mu}_n - \mu\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, 2\right)$.

9. La vraisemblance de $(X_1, \ldots, X_n)$ est définie par

$$\begin{aligned} L(X_1, \ldots, X_n; \mu) &:= \prod_{i=1}^n f(X_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{2} \exp\left(-|X_i - \mu|\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \exp\left(-\sum_{i=1}^n |X_i - \mu|\right) \end{aligned}$$

On a alors

$$\ln L(X_1, \ldots, X_n; \mu) = -n\ln 2 - \sum_{i=1}^n |X_i - \mu|$$

Si n est impaire et si les X_i sont deux à deux distincts, le maximum est atteint de manière unique en $X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$, si n est paire, le maximum de vraisemblance est atteint entre $X_{\left(\frac{n}{2}\right)}$ et $X_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}$. La médiane minimise l'écart absolu moyen.

10. On a

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \ln L(X_1, \ldots, X_n; \mu) = \sum_{i=1}^{n} \text{Signe}(X_i - \mu) \text{ pour } X_i \neq \mu$$

L'information de Fisher $I_n(\mu)$ est égale à

$$\begin{aligned} I_n(\mu) &= n\mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial \mu} \ln L(X; \mu)\right)^2\right] = n\mathbb{E}\left[(\text{Signe}(X - \mu))^2\right] = n\mathbb{E}\left[1\right] \\ &= n \times 1 \end{aligned}$$

11. La loi asymptotique de $\hat{\sigma}_n$ est donnée par :

$$\sqrt{n}\left(\hat{\mu}_n - \mu\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Soit la fonction $\psi_\theta(x) = (\theta - x)^3$ et $\hat{\theta}_n$ le Z-estimateur définit comme le zéro de la fonction

$$\mathbb{P}_n \psi_\theta := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \psi_\theta(X_i)$$

On peut montrer que $\mathbb{E}U^k = k!$ Pour k pair, et 0 sinon. En effet :

$$\mathbb{E}U^k = \int_{-\infty}^{+\infty} u^k \frac{1}{2} \exp(-|u|) \, \mathrm{d}u = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair} \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} u^k \mathrm{e}^{-u} \, \mathrm{d}u = \Gamma(k+1) = k! & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases}$$

Notons que $\mathbb{E}(\theta - X)^3 < \infty$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. En effet,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\theta - X)^3 &= \theta^3 - 3\theta^2 \mathbb{E}[X] + 3\theta \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X^3] \\ &= \theta^3 - 3\theta^2 \mu + 3\theta(2 + \mu^2) - \mu^3 - 6\mu \\ &= \theta^3 - 3\mu\theta^2 + 3(2 + \mu^2)\theta - \mu^3 - 6\mu \\ &= (\theta - \mu)(\theta^2 - 2\mu\theta + \mu^2 + 6) \end{aligned} \tag{1}$$

Donc par la loi des grands nombres $\mathbb{P}_n \psi_\theta$ converge en probabilité vers $\mathbb{P}_{\theta_0} \psi_\theta = \mathbb{E}(\theta - X)^3$. De l'équation (1), $\mathbb{P}_{\theta_0} \psi_{\theta_0} = 0$ pour $\theta_0 = \mu$.

12. $\hat{\theta}_n$ est un estimateur consistant de μ, en utilisant le Lemme du cours.
13. Par le théorème de normalité asymptotique des Z-estimateurs $\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \mu\right)$ est asymptotiquement normale, de moyenne 0 et de variance

$$\frac{\mathbb{P}_{\theta_0} \psi_{\theta_0}^2}{(\mathbb{P}_{\theta_0} \dot{\psi}_{\theta_0})^2} = \frac{\mathbb{E}[(X - \mu)^6]}{(3\mathbb{E}[(X - \mu)^2])^2} = \frac{6!}{6^2} = 20.$$

Examen Final

EXERCICE N° 1:
Soit $X_1, X_2, \dots X_n$ une suite de variables aléatoires i.i.d, d'espérance commune $\mathbb{E}[X] = \theta$ et de variance commune $\mathbb{V}[X] = \sigma^2$. On considère la suite Y_n définie par

$$\begin{cases} Y_n = \bar{X}_n & \text{avec probabilité } 1 - \epsilon_n \\ Y_n = a_n & \text{avec probabilité } \epsilon_n, \end{cases}$$

telle que $\epsilon_n \to 0$ et $\epsilon_n a_n \to \infty$.
Étudier la convergence en probabilité et en moyenne de Y_n vers θ.

EXERCICE N° 2:
Soit $X_1, \dots, X_n$ un échantillon que l'on modélise par une loi Gamma(α, β) où les paramètres $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ sont inconnus.

$$f_{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}.$$

1. Calculer l'espérance et la variance de X.
2. Donner des estimateurs de α et β par la méthode des moments.
3. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}_n = (\widehat{\alpha}_n, \widehat{\beta}_n)$ de $\theta = (\alpha, \beta)$.
4. Calculer la matrice d'information de Fisher $I_n(\theta)$.
5. Quelle est la loi limite de l'EMV $\widehat{\theta}_n$.

EXERCICE N° 3:
Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. de densité f :

$$f(x) = \frac{1}{2} \exp(-|x|)$$

Soit la fonction $\psi_\theta(x) = (x - \theta)^3$ et $\hat{\theta}_n$ le Z-estimateur définit comme le zéro de la fonction

$$\mathbb{P}_n \psi_\theta := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \psi_\theta(X_i)$$

1. Déterminer la limite en probabilité de $\mathbb{P}_n \psi_\theta$, $\mathbb{P}_{\theta_0} \psi_\theta$.
2. Quelle est la valeur θ_0 qui vérifie $\mathbb{P}_{\theta_0} \psi_{\theta_0} = 0$?
3. Montrer que $\hat{\theta}_n$ est un estimateur consistant de θ_0.
4. Montrer que $\sqrt{n} \left(\hat{\theta}_n - \theta_0 \right)$ est asymptotiquement normale, et déterminer les paramètres de la loi.

Correction de l'examen final

EXERCICE N° 1:

Pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}(|Y_n - \theta| > \epsilon) = (1 - \epsilon_n)\mathbb{P}(|\bar{X}_n - \theta| > \epsilon) + \epsilon_n \mathbb{1}_{\{|a_n - \theta| > \epsilon\}}$$

D'où

$$(1 - \epsilon_n)\mathbb{P}(|\bar{X}_n - \theta| > \epsilon) \leq \mathbb{P}(|Y_n - \theta| > \epsilon) \leq (1 - \epsilon_n)\mathbb{P}(|\bar{X}_n - \theta| > \epsilon) + \epsilon_n.$$

Comme $\mathbb{P}(|\bar{X}_n - \theta| > \epsilon)$ et ϵ_n tendent vers zéro quand $n \to +\infty$, il vient que

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|Y_n - \theta| > \epsilon) = 0.$$

Maintenant,

$$\mathbb{E}\left[(Y_n - \theta)^2\right] = (1 - \epsilon_n)\mathbb{E}\left[(\bar{X}_n - \theta)^2\right] + \epsilon_n(a_n - \theta)^2 = (1 - \epsilon_n)\frac{\sigma^2}{n} + \epsilon_n(a_n - \theta)^2.$$

On a $(1 - \epsilon_n)\dfrac{\sigma^2}{n} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$ et comme $\epsilon_n a_n \xrightarrow{n \to +\infty} \infty$ alors $\epsilon_n(a_n - \theta)^2 \xrightarrow{n \to +\infty} \infty$.
Donc

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}\left[(Y_n - \theta)^2\right] = \infty$$

EXERCICE N° 2:

1. On a

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\alpha}{\beta} \text{ et } \mathbb{V}[X] = \frac{\alpha}{\beta^2}.$$

2. On résout le système d'équation :

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha}{\beta} &= \bar{X}_n \\ \dfrac{\alpha}{\beta^2} &= S_n^2 \end{cases}$$

L'estimateur des moments est

$$\widetilde{\alpha}_n = \frac{\bar{X}_n^2}{S_n^2} \text{ et } \widetilde{\beta}_n = \frac{\bar{X}_n}{S_n^2}$$

3. La vraisemblance de $(X_1, \ldots, X_n)$ est définie par

$$\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; \alpha, \beta) \quad := \quad \prod_{i=1}^{n} f_{(\alpha,\beta)}(X_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} X_i^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\beta X_i} \mathbb{1}_{\{X_i \geq 0\}}$$

On a alors

$$
\begin{aligned}
\ln \mathcal{L}\left(X_1, \ldots, X_n ; \alpha, \beta\right) &= \sum_{i=1}^n \ln f_{(\alpha, \beta)}\left(X_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} X_i^{\alpha-1} e^{-\beta X_i}\right) \\
&= n \ln(\beta) \alpha - n \ln \Gamma(\alpha) + (\alpha-1) \sum_{i=1}^n \ln \left(X_i\right) - \beta \sum_{i=1}^n X_i
\end{aligned}
$$

On obtient :

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial \alpha} \ln \mathcal{L}\left(X_1, \ldots, X_n ; \alpha, \beta\right) = n \ln(\beta) - n \dfrac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + \displaystyle\sum_{i=1}^n \ln \left(X_i\right) = 0 \\
\dfrac{\partial}{\partial \beta} \ln \mathcal{L}\left(X_1, \ldots, X_n ; \alpha, \beta\right) = n \dfrac{\alpha}{\beta} - \displaystyle\sum_{i=1}^n X_i = 0
\end{cases}
$$

4. La matrice d'information de Fisher $I(\theta)$.

$$
\begin{aligned}
I(\theta) &= -\mathbb{E}\begin{pmatrix} -\frac{\Gamma''(\alpha)\Gamma(\alpha)-\Gamma'(\alpha)^2}{\Gamma(\alpha)^2} & \frac{1}{\beta} \\ \frac{1}{\beta} & -\frac{n}{\beta^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\Gamma''(\alpha)\Gamma(\alpha)-\Gamma'(\alpha)^2}{1(\alpha)^2} & -\frac{1}{\beta} \\ -\frac{1}{\beta} & \frac{\alpha}{\beta^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \eta(\alpha) & -\frac{1}{\beta} \\ -\frac{1}{\beta} & \frac{\alpha}{\beta^2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

5. La loi asymptotique de $\widehat{\theta}_n$ est donnée par :

$$
\sqrt{n}\left(\begin{pmatrix} \widehat{\alpha}_n \\ \widehat{\beta}_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, I^{-1}(\theta)\right)
$$

avec

$$
I^{-1}(\theta) = \frac{\beta^2}{\eta(\alpha)\alpha - 1}\begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\beta^2} & \frac{1}{\beta} \\ \frac{1}{\beta} & \eta(\alpha) \end{pmatrix}
$$

EXERCICE N° 3:

1. Notons que $\mathbb{E}(X-\theta)^3 < \infty$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Donc par la loi des grands nombres $\mathbb{P}_n\psi_\theta$ converge en probabilité vers $\mathbb{P}_{\theta_0}\psi_\theta = \mathbb{E}(X-\theta)^3$.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X-\theta)^3 &= \mathbb{E}[X^3] - 3\theta\mathbb{E}[X^2] + 3\theta^2\mathbb{E}[X] - \theta^3 \\
&= 0 - 6\theta + 0 - \theta^3 = -\theta(\theta^2+6) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

2. De l'équation (1), $\mathbb{P}_{\theta_0}\psi_{\theta_0} = 0$ pour $\theta_0 = 0$.
3. Évidemment chaque application $\theta \mapsto \mathbb{P}_n\psi_\theta$ est non-croissante. Comme Ψ est strictement monotone et $\Psi(0) = 0$, nous avons $\Psi(-\epsilon) > 0 > \Psi(\epsilon)$, pour tout $\epsilon > 0$. Alors $\hat{\theta}_n$ est un estimateur consistant de θ_0, en utilisant la Proposition du cours.
4. Par le théorème de normalité asymptotique des Z-estimateurs $\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta_0\right)$ est asymptotiquement normale, de moyenne 0 et de variance

$$
\frac{\mathbb{P}_{\theta_0}\psi_{\theta_0}^2}{(\mathbb{P}_{\theta_0}\dot{\psi}_{\theta_0})^2} = \frac{\mathbb{E}[X^6]}{(3\mathbb{E}[X^2])^2} = \frac{6!}{(3!)^2} = 20.
$$

Rattrapage

QUESTIONS DE COURS :

1. Énoncer le théorème de consistance des Z-estimateurs.
2. Donner le théorème de normalité asymptotique des Z-estimateurs.

EXERCICE N° 1:

Soit $\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix}_{1\leq i\leq n}$ un échantillon de vecteurs aléatoires i.i.d de moyenne $\boldsymbol{m} = \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix}$ et de matrice de variance-covariance $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma\tau \\ \rho\sigma\tau & \tau^2 \end{pmatrix}$.

On note $\theta = \dfrac{\mu}{\nu}$.

1. Proposer un estimateur de θ, on note l'estimateur obtenu $\widehat{\theta}_n$.
2. Déterminer la loi asymptotique de $\widehat{\theta}_n$.

EXERCICE N° 2:

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon de v.a. i.i.d de même loi que X, où X admet pour densité de probabilité :

$$f_X(x) = \frac{x}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x),$$

avec $\sigma \in]0, +\infty[$ un paramètre inconnu.

1. Trouver la fonction de répartition de X.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. On pose $Y = X^2$, quelle est la loi de Y.
4. On note $\widehat{\sigma^2}_{n1}$ l'estimateur de σ^2 par la méthode des moments en utilisant le moment d'ordre 1. Quelle est la loi asymptotique de $\widehat{\sigma^2}_{n1}$.
5. On note $\widehat{\sigma^2}_{n2}$ l'estimateur de σ^2 par la méthode des moments en utilisant le moment d'ordre 2. Quelle est la loi asymptotique de $\widehat{\sigma^2}_{n2}$.
6. On note $\widehat{\sigma^2}_{n3}$ l'estimateur de σ^2 par la méthode du maximum de vraisemblance. Quelle est la loi asymptotique de $\widehat{\sigma^2}_{n3}$.

Correction du rattrapage

QUESTIONS DE COURS :

1. Pour montrer la consistance de $\hat{\theta}_n$.

   Proposition. *Supposons que :*

   (a) $\forall \theta \in \Theta, \Psi_n(\theta) \xrightarrow{\mathrm{P}} \Psi(\theta)$,

   (b) $\forall \theta \in \Theta, \theta \longmapsto \Psi_n(\theta)$ *est continue et s'annule seulement en* $\hat{\theta}_n$, *ou :*
   (b′) $\theta \longmapsto \Psi_n(\theta)$ *est croissante, telle que* $\Psi_n\left(\hat{\theta}_n\right) = o_P(1)$,

   (c) *il existe* θ_0 *tel que :* $\forall \epsilon > 0, \Psi\left(\theta_0 - \epsilon\right) < 0 < \Psi\left(\theta_0 + \epsilon\right)$.

   Alors $\hat{\theta}_n$ *converge en probabilité vers* θ_0.

2. Pour la normalité asymptotique

   Théoreme. *Supposons que* $\theta \mapsto \psi_\theta(x)$ *est* C^2 *pour tout* x, *et que, pour tout* θ *dans un voisinage de* θ_0, $\left|\ddot{\psi}_\theta(x)\right| \leq h(x)$, *avec* $\mathbb{E}[h(X)] < \infty$. *Supposons que* $\Psi(\theta_0) = 0$, *que* $\mathbb{E}\left[\left|\psi_{\theta_0}(X)\right|^2\right] < \infty$ *et que* $\mathbb{E}\left[\dot{\psi}_{\theta_0}(X)\right]$ *est inversible. Soit une suite* $\hat{\theta}_n$ *telle que* $\forall n, \Psi_n\left(\hat{\theta}_n\right) = o_P\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, *et* $\hat{\theta}_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \theta_0$. *Alors*

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta_0\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\mathbb{E}\left[\psi^2_{\theta_0}(X)\right]}{\left(\mathbb{E}\left[\dot{\psi}_{\theta_0}(X)\right]\right)^2}\right)$$

EXERCICE N° 1:

Soit $\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix}_{1 \leq i \leq n}$ un échantillon de vecteurs aléatoires i.i.d de moyenne $\boldsymbol{m} = \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix}$ et de matrice de variance-covariance $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma\tau \\ \rho\sigma\tau & \tau^2 \end{pmatrix}$.

On note $\theta = \dfrac{\mu}{\nu}$.

1. L'estimateur de θ par la méthode des moments est $\widehat{\theta}_n = \dfrac{\bar{X}_n}{\bar{Y}_n}$.

2. On a $\widehat{\theta}_n = \phi(\bar{X}_n, \bar{Y}_n)$ avec $\phi(u, v) = \dfrac{u}{v}$. On a $\nabla \boldsymbol{\phi} = \begin{pmatrix} \frac{1}{v} \\ -\frac{u}{v^2} \end{pmatrix}$. Donc

$$[\nabla \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{m})]^\top \boldsymbol{\Sigma} \nabla \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{m}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\nu} & -\frac{\mu}{\nu^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma\tau \\ \rho\sigma\tau & \tau^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\nu} \\ -\frac{\mu}{\nu^2} \end{pmatrix} = \frac{\sigma^2}{\nu^2} + \frac{\tau^2\mu^2}{\nu^4} - 2\frac{\rho\sigma\tau\mu}{\nu^3}$$

   En appliquant la méthode delta multivarié, on obtient

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\theta}_n - \theta\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{\nu^2} + \frac{\tau^2\mu^2}{\nu^4} - 2\frac{\rho\sigma\tau\mu}{\nu^3}\right)$$

EXERCICE N° 2:

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon de v.a. i.i.d de même loi que X, où X admet pour densité de probabilité :

$$f_X(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x),$$

avec $\sigma \in]0, +\infty[$ un paramètre inconnu.

1. Soit $\mathbb{F}_X(x)$ la fonction de répartition de X. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\int_0^{\frac{x^2}{2\sigma^2}} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u}_{u=\frac{t^2}{2\sigma^2}} \\ &= 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\end{aligned}$$

2. Calculons l'espérance de X :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_0^{+\infty} \sqrt{2}\sigma\sqrt{u}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u}_{u=\frac{x^2}{2\sigma^2}} \\ &= \sqrt{2}\sigma\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\underbrace{\int_0^{+\infty}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\sqrt{u}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u}_{=1} = \sqrt{2}\sigma\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_0^{+\infty} 2\sigma^2 u\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u}_{u=\frac{x^2}{2\sigma^2}} \\ &= 2\sigma^2\Gamma(2)\underbrace{\int_0^{+\infty}\frac{1}{\Gamma(2)}u\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u}_{=1} = 2\sigma^2\end{aligned}$$

Finalement

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X] = 2\sigma^2 - \sigma^2\frac{\pi}{2} = \frac{4-\pi}{2}\sigma^2$$

3. On pose $Y = X^2$, soit $\mathbb{F}_Y(y)$ la fonction de répartition de Y. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}\left(X^2 \leq y\right) \\ &= \mathbb{P}(X \leq \sqrt{y}) = \mathbb{F}_X(\sqrt{y}) = 1 - \exp\left(-\frac{y}{2\sigma^2}\right)\end{aligned}$$

Alors Y suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2\sigma^2}$.

4. On résout l'équation :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] = \overline{X}_n &\implies \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \overline{X}_n \\ &\implies \sigma^2 = \frac{2}{\pi}\overline{X}_n^2\end{aligned}$$

L'estimateur des moments résultant de cette dernière égalité est $\widehat{\sigma^2}_{n1} = \frac{2}{\pi}\overline{X}_n^2$.

Par le théorème centrale limite $\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{4-\pi}{2}\sigma^2\right)$.

En appliquant la méthode delta avec $\varphi(x) = \frac{2}{\pi}x^2$, $\varphi'(x) = \frac{4}{\pi}x$ et $\varphi'\left(\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = 2\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, on obtient $\sqrt{n}\left(\widehat{\sigma^2}_{n1} - \sigma^2\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{4}{\pi}(4-\pi)\sigma^4\right)$.

5. On résout l'équation :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 = \overline{X^2}_n \quad &\Longrightarrow \quad 2\sigma^2 = \overline{X^2}_n \\ &\Longrightarrow \quad \sigma^2 = \frac{1}{2}\overline{X^2}_n\end{aligned}$$

L'estimateur des moments résultant de cette dernière égalité est $\widehat{\sigma^2}_{n2} = \frac{1}{2}\overline{X^2}_n$.

Comme $Y = X^2$ suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2\sigma^2}$. Par le théorème centrale limite $\sqrt{n}\left(\overline{X^2}_n - 2\sigma^2\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 4\sigma^4)$. Alors $\sqrt{n}\left(\widehat{\sigma^2}_{n2} - \sigma^2\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^4)$.

6. La vraisemblance est définie par

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n; \sigma^2) \quad &:= \quad \prod_{i=1}^n f_X(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= \quad \frac{1}{(\sigma^2)^n}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\prod_{i=1}^n x_i\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\ln\mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n; \sigma^2) \quad &= \quad -n\ln\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n \ln x_i \\ \frac{\partial}{\partial\sigma^2}\ln\mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n; \sigma^2) \quad &= \quad -\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^n x_i^2\end{aligned}$$

On obtient :

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\ln\mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n; \sigma^2) = 0 \iff \widehat{\sigma^2}_{n3} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n X_i^2$$

L'information de Fisher $I_n(\sigma^2)$:

$$\begin{aligned}I_n(\sigma^2) \quad &= \quad -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial(\sigma^2)^2}\ln\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; \sigma^2)\right] = -\mathbb{E}\left[\frac{n}{\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6}\sum_{i=1}^n X_i^2\right] \\ &= \quad -\frac{n}{\sigma^4} + \frac{1}{\sigma^6}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[X_i^2\right] = -\frac{n}{\sigma^4} + \frac{n2\sigma^2}{\sigma^6} = \frac{n}{\sigma^4}\end{aligned}$$

La loi asymptotique de $\widehat{\sigma^2}_{n3}$ est donnée par :

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\sigma^2}_{n3} - \sigma^2\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \sigma^4\right).$$