Université Hassiba Benbouali de Chlef **Année Universitaire : 2019/2020**
Faculté des Sciences Exactes et Informatique **Master 1. Durée 1h30**
Département de Mathématiques **Matière : Théorie des Opérateurs**

Corrigé de l'EMD

(08pts) **Exercice 1** 1. i.a Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. $P = 0 \Rightarrow \langle P, P\rangle = 0$. 0.25pt

i.b. Comme la fonction P^2 est continue et positive, 0.25pt

$$\langle P, P\rangle = 0 \Rightarrow \int_0^1 P^2(x)dx = 0 \Rightarrow P^2(x) = 0,\ x \in [0,1] \Rightarrow P(x) = 0,\ x \in [0,1] \quad 0.5\text{pt}$$

D'où, $P(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}$, 0.25pt car le polynôme P admet un ensemble non dénombrable de racines dans l'intervalle $[0,1]$. 0.25pt Par suite, $P = 0$. 0.25pt

ii. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. $\langle P, P\rangle = \int_0^1 P^2(x)dx \geq 0$ 0.25pt

iii. Soient $P, Q \in E$. $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx = \int_0^1 Q(x)P(x)dx = \langle Q, P\rangle$ 0.25pt

vi. Soient $P, Q \in E$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\langle \lambda P, Q\rangle = \int_0^1 (\lambda P)(x)Q(x)dx = \lambda \int_0^1 P(x)Q(x)dx = \lambda \langle P, Q\rangle \quad 0.25\text{pt}$$

v. Soient $P, Q, S \in E$.

$$\begin{aligned} \langle P+Q, S\rangle = \int_0^1 (P+Q)(x)S(x)dx &= \int_0^1 (P(x)+Q(x))S(x)dx \\ &= \int_0^1 P(x)S(x)dx + \int_0^1 Q(x)S(x)dx \\ &= \langle P, S\rangle + \langle Q, S\rangle \quad 0.5\text{pt} \end{aligned}$$

L'application $\langle .,. \rangle$ définit donc un produit scalaire sur E.

2. L'espace $E = \mathbb{R}_3[X]$ est de Hilbert 0.25pt car de dimension finie 0.25pt. De plus, l'espace $\mathbb{R}_2[X]$ est un sous-espace vectoriel fermé de E car c'est un espace de dimension finie, il est donc complet 0.75pt. Par le Théorème de la progjection orthogonale, 0.25pt P admet un projeté orthogonal unique P_0 sur $\mathbb{R}_2[X]$ 0.25pt. De plus, $d = d(P, \mathbb{R}_2[X]) = d(P, P_0)$. 0.25pt La distance d existe et est finie.

3. $d = d(P, P_0) = \|P - P_0\|$. Cherchons P_0.

Comme $P_0 \in \mathbb{R}_2[X]$, 0.25pt $P_0 = aX^2 + bX + c,\ a, b, c \in \mathbb{R}$. 0.25pt De plus, le vecteur $(P - P_0) \in \mathbb{R}_2[X]^{\perp}$. 0.5pt D'où,

$$\langle P - P_0, 1\rangle = \langle P - P_0, X\rangle = \left\langle P - P_0, X^2\right\rangle = 0 \quad 0.75\text{pt}$$

i.e.,

$$\begin{cases} \int_0^1 (X^3 + (a+1)X^2 + bX + c)dx = 0 \\ \int_0^1 (X^3 + (a+1)X^2 + bX + c)Xdx = 0 \qquad 0.75\text{pt} \\ \int_0^1 (X^3 + (a+1)X^2 + bX + c)X^2dx = 0 \end{cases}$$

On obtiendra après calcul que $P_0 = \frac{1}{4}X^2 - \frac{6}{5}X + \frac{17}{120}$

4. On a

$$d^2 = \|P - P_0\|^2 = \quad 0.25\text{pt} \int_0^1 ((P - P_0)(x))^2 dx \ \ 0.25\text{pt} = \frac{162485}{100800}$$

Donc, $d = \frac{\sqrt{162485}}{120\sqrt{7}}$

(07.5pts) **Exercice 2.**

1. Soit $f \in Ł_2([0,1], \mathbb{R})$. 0.25pt Par l'inégalité de Cauchy-Bunyakowski-Schwartz, 0.25pt

$$\begin{aligned} \|Tf\|_2^2 = \int_0^1 |Tf(x)|^2 dx = \int_0^1 |\int_x^1 e^{-t} f(t)dt|^2 dx &\leq \int_0^1 \int_x^1 |e^{-t}|^2 dt \int_x^1 |f(t)|^2 dt dx \\ &\leq \frac{1}{2}\left[-e^{-2t}\right]_0^1 \int_0^1 |f(t)|^2 dt dx \\ &\leq \frac{1 - e^{-2}}{2}\|f\|_2^2 < +\infty \quad 6 \times 0.25\text{pt} \end{aligned}$$

car $x \geq 0$, 0.25pt et $f \in Ł_2([0,1], \mathbb{R})$. 0.25pt Donc, $Tf \in Ł_2([0,1], \mathbb{R})$. 0.25pt L'opérateur T est donc bien défini.

2. Soient $f, g \in Ł_2([0,1], \mathbb{R})$, 0.25pt et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in [0,1]$, 0.25pt on a

$$\begin{aligned} (T(\alpha f + g))(x) = \int_x^1 e^{-t}(\alpha f + g)(t)dt &= \int_x^1 e^{-t}(\alpha f)(t)dt + \int_x^1 e^{-t} g(t)dt \\ &= \alpha \int_x^1 e^{-t} f(t)dt + \int_x^1 e^{-t} g(t)dt \\ &= \alpha(Tf)(x) + (Tg)(x) \\ &= (\alpha Tf + Tg)(x) \quad 6\times 0.25\text{pt} \end{aligned}$$

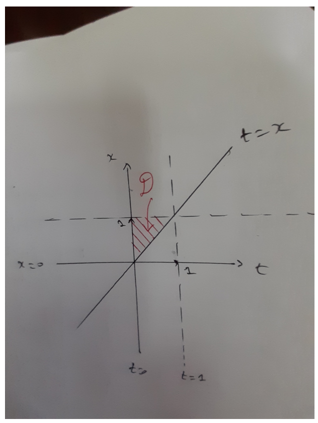
D'où, $T(\alpha f + g) = \alpha Tf + Tg$. 0.25pt L'opérateur T est donc linéaire.

De plus, et par la question (1), T est borné 0.25pt et $\|T\| \leq \sqrt{\frac{1-e^{-2}}{2}}$. 0.25pt

3. Soient $f, g \in \mathrm{Ł}_2([0,1], \mathbb{R})$. Par le Théorème de Fubini 0.25pt, on aura

$$\begin{aligned}
\langle Tf, g \rangle = \int_0^1 (Tf)(x) g(x) dx &= \int_0^1 \int_x^1 e^{-t} f(t) dt \; g(x) dx \\
&= \int_0^1 f(t) \left(e^{-t} \int_0^t g(x) dx \right) dt \\
&= \langle f, T^\star g \rangle \quad 4\times\ 0.25\text{pt}
\end{aligned}$$

Par conséquent, $(T^\star g)(t) = e^{-t} \int_0^t g(x) dx, \; t \in [0,1]$. 0.25pt

$\mathcal{D} : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq t \leq 1 \end{cases}$ 0.25pt  0.25pt

Méthode 2: Intégrale par parties : On pose $F(x) = \int_x^1 e^{-t} f(t) dt$ et $h'(x) = g(x)$. Donc,

$$\begin{aligned}
\langle Tf, g \rangle = \int_0^1 (Tf)(x) g(x) dx &= \int_0^1 \int_x^1 e^{-t} f(t) dt \; g(x) dx \\
&= \left[\int_x^1 e^{-t} f(t) dt \times \int_0^x g(t) dt \right]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x} f(x) \int_0^x g(t) dt \\
&= \int_0^1 f(x) \; e^{-x} \int_0^x g(t) dt = \langle f, T^\star g \rangle
\end{aligned}$$

D'où,

$$(T^\star g)(x) = e^{-x} \int_0^x g(t) dt, \; t \in [0,1] \quad (2\text{pts})$$

(04.5pts) **Exercice 3** 1. On a $(\mathcal{V}\varphi)(t) = \int\limits_0^t \varphi(s)ds = \int\limits_0^1 k(t,s)\varphi(s)ds$ où

$$k(t,s) = \begin{cases} 1, & s \in [0,t] \\ 0, & s \in]t,1] \end{cases} \quad 0.5\text{pt}$$

2. On a

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^1\int\limits_0^1 |k(t,s)|^2 dsdt = \int\limits_0^1\int\limits_0^t |k(t,s)|^2 dsdt + \int\limits_0^1\int\limits_t^1 |k(t,s)|^2 dsdt \quad 0.5\text{pt} &= \int\limits_0^1\int\limits_0^t 1^2 dsdt \quad 0.25\text{pt} \\
&= \int\limits_0^1 [s]_0^t dt = \int\limits_0^1 tdt \quad 0.5\text{pt} \\
&= \frac{1}{2}[t^2]_0^1 \quad 0.5\text{pt} = \frac{1}{2} \quad 0.5\text{pt}
\end{aligned}$$

3. Comme $\int\limits_0^1\int\limits_0^1 |k(t,s)|^2 dsdt < +\infty$, 0.5pt l'opérateur $\mathcal{V}$ est bien défini 0.5pt, et est borné. 0.5pt De plus, $\|\mathcal{V}\| \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ 0.25pt