Remarque :

En commençant d'1 état quelconque, une chaîne de Markov visite un état récurrent une infinité de fois ou pas du tout.

* Nombre de visites d'un état (i) ; R_i

Supposons que $X_0 = i$.

$\boxed{R_i}$: est la variable aléatoire comptant le nbre de visites de la C.M. de l'état (i) (y compris à l'instant "0"). de $t=0$ à l'infini. ($n \in [0, \infty[$).

Théorème 2 : Sachant que $X_0 = (i)$,

$R_i \longrightarrow G(1-f_i)$. loi géométrique.

$1-f_i$: la proba. de ne jamais retourner à (i)

Preuve (exercice)

* Le nbre moyen de visites de l'état (i)

$$\mathbb{E}_i R_i = \mathbb{E}(R_i / X_0 = i)$$

Comme $R_i \rightsquigarrow G(1-f_i)$;

alors $\boxed{\mathbb{E}_i(R_i) = \dfrac{1}{1-f_i}}$

Retournons à la déf.t (1) ou/et (2) de l'état (R) et (T) ; Déf (1)

Un état (i) est (R) si: la C.M. revisite l'état (i) éventuellement

c.à.d le nbre moyen de visites n'est pas fini, il est infini ;

$$(i) \text{ Récurrent} \iff \mathbb{E}_i(R_i) = \infty$$

ou bien: (i) est Récurrent si :

21 Déf.t (2): $f_i = 1 \iff \mathbb{E}_i(R_i) = \infty$.

Si (i) est transitoire, c'est le contraire.

Il viendra un certain moment, la C.M. quittera (i) sans retour

ce qui prouve que : $\mathbb{E}_i(R_i) < \infty$

ou bien : $f_i < 1 \Longleftrightarrow \mathbb{E}_i(R_i) < \infty$.

Exercice :

(1) Montrer que $R_i = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n = i\}}$;

(2) En déduire de (1) et du Th^m précédent(2) que :

(a) (i) est récurrent $\Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty$

et

(b) (i) " transitoire $\Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} < \infty$

Comparaison entre un état (R) et un état (T)

Supposons que $X_0 = i$.

(i) Récurrent (R)	(i) Transitoire (T)
① La C.M. ~~[illegible]~~ retournera avec certitude à (i)	① La C.M. peut ne jamais retourner à (i)
② La C.M. visite (i) une infinité (∞) de fois	② La C.M. visite (i) un nbre fini de fois
③ $f_i = 1$, $(1 - f_i = 0)$ i.e la proba de ne jamais retourner à (i) est <u>nulle</u>.	③ $f_i < 1$, $(1 - f_i > 0)$ La proba. de ne jamais retourner à (i) est <u>strictement positive</u>.
④ Le nbre moyen de visites de l'état (i) $E_i(R_i) = \infty$	④ Le nbre moyen de visites de l'état (i) : $\mathbb{E}_i(R_i) < \infty$.

Une application très importante du Thm ②

Le Thm 2. dit qu'un état <u>transitoire</u> est visité un nbre fini de fois. ($E_i(R_i) < \infty$) à partir de ça, on peut dire que si E est fini :

$$\boxed{\text{Les états ne peuvent pas être } \underline{\text{tous}} \text{ } \underline{\text{transitoires}}}$$

<u>En effet</u> :

(Démontrons par absurde), supposons que <u>tous</u> les états d'1 C.M. à espace d'états <u>fini</u> sont <u>transitoires</u>

Supposons que $X_0 = ①$: transitoire, donc après un certain temps n_1 : la C.M. quitte ① vers ② de m. après n_2 la C.M. quitte ② vers ③ .....

...... après n_N : la C.M. quittera (N) parceque (N) est Transitoire, mais vers où ??!!! (le dernier état)

c'est une contradiction avec le fait que tous les états sont transitoires

Donc, il existe au moins un état récurrent si E est fini.

Proposition : La récurrence (la transience) est une propriété de classe.

i.e. si (i) est récurrent
et (i) $\longleftrightarrow$ (j)
alors (j) est récurrent.

⚠ de m. si (i) est transitoire.

c.à.d. La transience est aussi une pté de classe.

Exercice : M.q toute classe récurrente est fermée.

Def^t : Une C.M. est dite Récurrente si $\forall i \in E$ ⓘ Réc.

Résultat :

Comme les états d'une C.M. fini ne peuvent pas être tous transitoires, alors :

Une C.M. irréductible finie est Récurrente.

Car : C.M. irréductible $\Leftrightarrow$ tous les états se communiquent $\Rightarrow$ tous les états sont ou bien tous transitoires ou bien tous récurrents (pté de classe) ; mais E est fini donc tous les états sont récurrents