Chapitre 2 : Martingales à temps discret

Plan : 2.1 Filtration _ Adaptation.
2.2. Martingales, ss_mart, surmart.
2.3. Exples standards.
2.4. Transformées des martingales.

2.1. Filtration _ Adaptation :

- L'information s'accumule au fur et à mesure que le temps passe.
- On sait que l'information est modélisée par les sous-tribu.
- La 1ère phrase signifie que notre connaissance sur ce qu'il s'est passé croît avec le temps n.
- Ceci peut être modélisé par une suite de ss-tribus emboîtées croissante, ce que l'on appelle : Filtration, qui joue le rôle de formaliser

une chronologie des évènements de la tribu $\mathcal{F}$

<u>Définition 2.1</u> $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ esp. de proba.

$(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ une suite de tribus et $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$ pour $\forall n$ ($\mathcal{F}_n$: indexée par le temps).

<u>Si</u> $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n \subset \cdots \subset \mathcal{F}$, <u>alors</u> :

$(\mathcal{F}_n)_n$ est dite une « filtration ».

- On note : $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_n \mathcal{F}_n\right)$: la plus petite ss-tribu contenant toute l'information <u>i.e.</u> toutes les $\mathcal{F}_n$, cette ss-tribu sert à modéliser l'information à l'infini ($n \gg$).

- Un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une <u>filtration</u> $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelé :

« espace de proba. Filtré » et l'on note par :

$$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_n, \mathbb{P}).$$

<u>Commentaire</u> : Ici, $\mathcal{F}_n$ représente (modélise) notre connaissance à l'instant <u>n</u>, en fait elle contient tous les évènements A tq à l'instant <u>n</u>, il est possible de décider si A s'est <u>réalisé</u> ou <u>non</u>.

- Comme n croît, le nbre de tels évènements croît aussi, <u>i.e.</u> la famille $(\mathcal{F}_n)_n$ représentant notre <u>flux</u> d'information devient
تَدَفُّق
de plus en plus <u>large</u>.

On peut résumer tout ça par le proverbe :

« The longer you live the wiser you become! »

« كُلَّمَا عِشْتَ أَطْوَلَ كُلَّمَا اِزْدَدْتَ حِكْمَةً »

« الي فاتك بليلة ، فاتك بحيلة »

<u>Exple 2.1</u> : Considérons l'expérience : Répéter le jeu Pile ou Face.
P F

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v-a tq :

X_n dépend du résultat du $n^{ième}$ jet.

<u>par exemple</u> : $X_n = \begin{cases} 1 \text{ si Pile} \\ -1 \text{ si Face} \end{cases} = 1\!\!1_{\{Pile\}} - 1\!\!1_{\{Face\}}$

pour $\forall n$.

<u>Posons</u> : $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$

Il est clair que $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ est une filtration

$\mathcal{F}_n$: est la moindre information sur $X_1, X_2, \dots, X_n$.

<u>Soit</u> : $A = \{$Les 5 premiers lancers produisent au moins 2 Piles$\}$.

- <u>Le temps</u> étant discret : "n" le nbre des lancers (jets) عد الرّميات.

<u>Prenons</u> : $n=5$: La pce est jetée 5 fois, L'information à accumulée (disponible) en ce moment ($n=5$) est bien $\mathcal{F}_5$: elle contient toute l'information sur l'apparition de Pile ou bien Face ds le 5 premiers jets.

Donc, on peut dire qu'il est possible de décider si A s'est réalisé ou non.

ex. • A se réalise par ω_1 = PPFFF et {PPFFF} fait partie de $\mathcal{F}_5$.

• A ne se réalise pas pars ω_2 = PFFFF. et {PFFFF} $\in \mathcal{F}_5$.

Cela veut dire que sur $\mathcal{F}_5$, on peut toujours juger sur <u>la réalisation</u> ou <u>non</u> de A.

<u>Conclusion</u> : $A \in \mathcal{F}_5$.

<u>Question</u> : Est-ce que $\mathcal{F}_5$ est la moindre information <u>contenant</u> (mesurant) A ?

<u>Prenons des cas particulier</u> :

① <u>Si</u> les résultats des 4 premiers jets sont : FFPF, alors :

$A \notin \mathcal{F}_4$,

En effet : $\{FFPF\} \in \mathcal{F}_4$.

et nous ne pouvons pas décider si A s'est réalisé ou non, on a besoin de jeter la pce encore une fois pour pouvoir décider.

(2) Si les résultats des 4 premiers jets sont : FPFP.

Dans ce cas, il est possible de dire que A s'est réalisé à l'instant "$n=4$", et ce pour n'importe quel résultat au $5^{ème}$ jet.

Question : Ceci veut-il dire que $A \in \mathcal{F}_4$?

Réponse : Non ! Car

Pour que A soit dans $\mathcal{F}_4$, il doit être possible de décider (A réalisé ou non) après les 4 premiers jets pour n'importe quelle trajectoire (réalisation).

Par conséquent : $n=5$ est le temps minimal pour pouvoir mesurer A.

Définition 2.2. (Adaptation).

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus stoch. défini sur un espace de proba. ~~filtration~~ filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_n, \mathbb{P})$.

- On dit que le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_n$ s.s. si :

La v.a. X_n est $\mathcal{F}_n$ — mesurable pour tt n.

<u>Sens intuitif</u>: Un processus adapté $(X_n)_n$ est un processus qu'on découvre <u>progressivement</u> تدريجيا

<u>i.e.</u> à l'instant $n \geq 0$, on dispose de l'informat° contenue dans $\mathcal{F}_n$ et on peut déterminer la valeur de X_k pour tt $k \leq n$ [ce qui est arrivé au processus X dans le passé], mais <u>a priori</u> مسبقا on ne peut pas déterminer précisément la valeur de X_k pour $k > n$ (la valeur du processus X dans le futur)