Chapitre 1

Fonctions génératrices et fonctions caractéristiques

1.1 Fonctions génératrices des v.a dans $\mathbb{N}$

Définition 1.1 *On appelle fonction génératrice d'une v.a à valeurs dans $\mathbb{N}$ la fonction*

$$G_X(z) = E\left[z^X\right].$$

Remarque 1.1 *1. Puis que X est à valeurs dans $\mathbb{N}$*

$$G_X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k P(X = k).$$

2. La série $\sum_{k=0}^{+\infty} z^k P(X = k)$ est C.V pour $|z| < 1$.

Théorème 1.1 *Si deux v.a X et Y sont indépendantes, on*

$$G_{X+Y} = G_X G_Y.$$

Proof. Soit $z \in B(0,1)$. On a X et Y sont indépendantes, alors z^X et z^Y le sont aussi, d'où

$$G_{X+Y}(z) = E\left[z^{X+Y}\right] = E\left[z^X\right]E\left[z^Y\right] = G_X(z)\,G_Y(z)\,.$$

∎

Exemple 1.1 *Calculer la fonction génératrice de la*

1. *Loi de Bernoulli :*

   La fonction génératrice d'une loi de Bernoulli de paramètre p est

$$G_X(z) = E\left[z^X\right] = (1-p) + zp.$$

2. *Loi binomiale :*

   Si $X_1, ..., X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre p, alors $S_n = X_1 + ... + X_n$ suit la loi binomiale de paramètres n et p. Ainsi, on a la fonction génératrice d'une loi binomiale de paramètres n et p est

$$G_{S_n}(z) = G_{X_1}(z)\ldots G_{X_n}(z) = \prod_{i=1}^{n} G_{X_1}(z) = \left[(1-p)+zp\right]^n.$$

1.1.1 Fonction génératrice et loi

Théorème 1.2 *Soit X une v.a de loi ν sur $\mathbb{N}$. La fonction génératrice est infiniment dérivable avec*

$$G_X^{(n)}(s) = E\left[X(X-1)\ldots(X-n+1)\,s^{X-n}\right].$$

En particulier

$$P(X=n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}.$$

Ce qui montre que la fonction génératrice caractérise la loi.

Proof. La fonction génératrice est la somme d'une série entière de rayon de convergence au moins égal à 1. Ainsi $z \to G_X(z)$ est infiniment dérivable, avec pour tout z

$$G_X^{(n)}(z) = \sum_{k\geq n} k(k-1)\dots(k-n+1)\,P(X=k)\,z^{X-n}$$

il suffit maintenant d'appliquer le théorème de transfert

$$G_X^{(n)}(z) = E\left[X(X-1)\dots(X-n+1)\,z^{X-n}\right].$$

En prenant $z = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} G_X^{(n)}(0) &= E\left[X(X-1)\dots(X-n+1)\,\mathbf{1}_{\{X-n=0\}}\right] \\ &= n(n-1)\dots(n-n+1)\,P(X=n) = n!P(X=n). \end{aligned}$$

■

1.2 Fonction génératrice des moments (v.a. continue ou discrète)

Définition 1.2 *On appelle fonction génératrice des moments d'une v.a X la fonction M_X définie par*

$$M_X(t) = E\left[e^{tX}\right].$$

Remarque 1.2

1. *Pour une v.a discrète :* $M_X(t) = \sum_i e^{tx_i} P(X = x_i)$.
2. *Pour une v.a continue*

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_E e^{tx}dP(X=x) \\ &\left(= \int_{\mathbb{R}} e^{tx}f(x)dx,\ \text{si } X \text{ est une v.a absolument continue}\right). \end{aligned}$$

Exemple 1.2 *Soit une v.a $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ calculer sa fonction génératrice des moments.*

On a $M_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{\lambda}{\lambda - t}$.

Remarque 1.3 *1. Si on pose* $z = e^t$ *dans la fonction génératrice, on trouve*

$$G_X(z) = E\left[z^X\right] = E\left[e^{tX}\right] = M_X(t).$$

2. Le développement en série entiére de l'exponentille, nous donne

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{k\geq 0}\frac{(tx)^k}{k!}\right)f(x)dx \\ &= \sum_{k\geq 0}\frac{t^k}{k!}\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx = \sum_{k\geq 0}\frac{t^k}{k!}E\left[X^k\right]. \end{aligned}$$

Propriétés :

* $M_X(-t)$ *est la transformé de Laplace de la densité* f.

* *Si la fonction génératrice des moments existe dans un intervalle ouvert autour de* $t = 0$, *le* n^{ieme} *moment de la v.a* X *est donnée par la* n^{ieme} *dérivée de la fonction génératrice des moments évaluée en* $t = 0$

$$E[X^n] = M_X^{(n)}(0) = \left.\frac{d^n M_X(t)}{dt^n}\right|_{t=0}.$$

Cette relation permet de calculer les moments d'une loi on connait la fonction génératrice des moments. Par exemple

$$E[X] = M'_X(0); \qquad V(X) = M''_X(0) - \left(M'_X(0)\right)^2.$$

Exemple 1.3 *1. On veut calculer l'espérance de la loi exponentielle par la fonction génératrice des moments. Ona*

$$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \qquad E[X] = M'_X(0) = \left.\frac{\lambda}{(\lambda - t)^2}\right|_{t=0} = \frac{1}{\lambda}.$$

2. *La fonction génératrice des moments d'une v.a uniforme discrète :* $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}\,]0...1]_{\frac{1}{n}}$ *et si* $X_n = \frac{1}{n} Y_n$ *alors* $Y_n \hookrightarrow \mathcal{U}\,]0...n]$*. On a*

$$P_{X_n}\left(\frac{1}{n}\right) = P\left(X_n = \frac{1}{n}\right) = P\left(Y_n = i\right) = \frac{1}{n}, \qquad i = 1, ..., n$$

d'où

$$M_{X_n}(t) = E\left[e^{tX_n}\right] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} e^{t\frac{i}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(e^{\frac{t}{n}}\right)^i = \frac{e^t - 1}{n\left(1 - e^{-\frac{t}{n}}\right)}.$$

Proposition 1.1 *Si* X *et* Y *sont deux v.a indépendantes, alors* $M_{X+Y}(t) = M_X(t)\, M_Y(t)\,.$

1.3 Fonction caractéristique

Définition 1.3 *Soit* X *une variable aléatoire (discrète ou continue). On appelle fonction caractéristique de* X *l'application définier par*

$$\varphi_X(t) = E\left[e^{itX}\right] = E\left[\cos tX + i \sin tX\right].$$

Les variables aléatoires $\cos tX$ *et* $\sin tX$ *sont mesurables, bornées par* 1*, donc intégrables alors* $\varphi_X(t)$ *est bien définie.*

Remarque 1.4 1. *Si* X *est une Variable aléatoire absolument continue :* $\varphi_X(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx.$

2. *Si* X *est une Variable aléatoire discrète :* $\varphi_X(t) = \displaystyle\sum_k p_k \; e^{itx_k}.$

Théorème 1.3 *La fonction caractéristique est une fonction continue de* t *égale à* 1 *pour* $t = 0$ *. La continuité de cette fonction est une propriété essentielle. Comme elle est valable aussi bien pour les lois discrètes que pour les lois continues, elle permet de traiter des problèmes où il y a passage progressif d'une loi discrète à une loi continue ayant une densité.*

Exemple 1.4 *Une variable aléatoire peut prendre les valeurs* $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ *avec les probabilités respectives* $\{p_1, p_2, \ldots, p_5\}$*. On connaît l'expression de sa fonction caractéristique*

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \cos t + \frac{1}{8} \cos 2t.$$

On veut en déduire la valeur des p_i.

On s'assure tout de suite que $\varphi_X(t)$ est continue, $|\varphi_X(t)| \leq 1$ et que $\varphi_X(0) = 1$ en posant

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \cos 2t = \frac{e^{i2t} + e^{-i2t}}{2},$$

on obtient directement

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{16}e^{-2it} + \frac{3}{16}e^{-it} + \frac{1}{2}e^{i0} + \frac{3}{16}e^{it} + \frac{1}{16}e^{2it};$$

on a donc

$$p_1 = p_5 = \frac{1}{16}, p_2 = p_4 = \frac{3}{16}, p_3 = \frac{1}{2}.$$

Développement de la fonction caractéristique

Proposition 1.2 *Les coefficients du développement de la fonction caractéristique correspondent aux moments de tous ordres de la variable aléatoire*

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} m_k$$

Nous allons le démontrer dans les deux cas (continu et discret).

Continu Partons de la définition

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx.$$

En développant la partie exponentielle

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} x^k \right) f(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx$$

on reconnaît dans l'intégrale l'expression du moment d'ordre k.

Discret On effectue un calcul similaire dans le cas de la variable discrète

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \sum_{j=1}^{n} p_j e^{itx_j} = \sum_{j=1}^{n} p_j \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} x_j^k \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \left(\sum_{j=1}^{n} p_j x_j^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} m_k.\end{aligned}$$

Deux applications simple

1. La v.a $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$. La fonction caractéristique de X est

$$\Phi_X(t) = E\left[e^{itX}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx = \int_0^1 e^{itx} dx = \frac{e^{it} - 1}{it},$$

en développant l'exponentielle

$$\begin{aligned}\Phi_X(t) &= \frac{1}{it} \left[\left(1 + it + \frac{(it)^2}{2!} + \frac{(it)^3}{3!} + ... \right) - 1 \right] \\ &= 1 + \frac{(it)^1}{1} \frac{1}{2} + \frac{(it)^2}{2!} \frac{1}{3} + \frac{(it)^3}{3!} \frac{1}{4} + ...\end{aligned}$$

Donc : $m_k = \frac{1}{k+1}$.

2. Soit la v.a X de densité $f(x) = e^{-x}$, si $x \geq 0$. La fonction caractéristique de X est (si $it < 1$)

$$\Phi_X(t) = \int_0^{+\infty} e^{itx} e^{-x} dx = \frac{1}{1 - it} = \sum_{j \geq 0} (it)^j .$$

Donc : $m_k = k!$.

Dérivées de la fonction caractéristique

Revenons à l'expression de base de la fonction

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx$$

effectuons une dérivation par rapport à t sous le signe somme, opération très simple du fait que les bornes sont indépendantes de t.

Dérivée première

$$\varphi'_X(t) = i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} x f(x) dx, \qquad \varphi'_X(0) = i \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = iE(X)$$

Dérivée seconde

$$\varphi''_X(t) = i^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} x^2 f(x) dx, \qquad \varphi_X''(0) = -\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = -E\left(X^2\right)$$

On retiendra les résultats fondamentaux suivants

$$\varphi_X(0) = 1, \qquad \varphi'_X(0) = iE(X), \qquad \varphi_X''(0) = -E\left(X^2\right).$$