Solution de la série d'exos n° 3
"Intégrale de Wiener"

<u>Exercice 1</u> : $Y_t := \int_0^t B_u \, du$.

(1) Mq. la v.a. Y_t est gaussienne pour tout $t \geq 0$.

On a $u \longmapsto B_u$ est continue pour presque tout $\omega \in \Omega$, Par conséquent l'intégrale Y_t est de Riemann, et existe.

<u>i.e.</u> $$Y_t = \lim_{\|\Delta_n\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} B_{u_i} (u_i - u_{i-1})$$

Δ_n est une subdivision de $[0,t]$.

$\|\Delta_n\| = \max_{i=1..n} (u_i - u_{i-1})$

- Comme $(B_t)_{t \geq 0}$ est un M.B, <u>alors</u>,

$$\sum_{i=1}^{n} B_{u_i}(u_i - u_{i-1}) \text{ est gaussienne pour } \forall n.$$

- et on sait que la limite d'une suite de v.a. gaussienne est gaussienne.

N.B. Si $X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n^2)$ et $X_n \xrightarrow{n \to \infty} X$ <u>alors</u> $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
<u>avec</u> $\mu = \lim \mu_n$ et $\sigma^2 = \lim \sigma_n^2$

(b) Mq. $(Y_t)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien.

Soient $\{\lambda_j\}_{j=1..m} \in \mathbb{R}$ et $\{t_j\}_{j=1..m} \in \mathbb{R}_+$.

Mq. $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j Y_{t_j}$ est gaussienne ?

de (2) que : $Y_{t_j} = \lim_{n_j\to\infty} \sum_{i=1}^{n_j} B_{u_{i_j}}(u_{i_j} - u_{i_j-1})$ ~~...~~ (u_{i_j}) subdivision de $[0, t_j]$.

Dmc, $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j Y_{t_j} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \lim_{n_j\to\infty} \sum_{i_j=1}^{n_j} B_{u_{i_j}}(u_{i_j} - u_{i_j-1})$

On peut facilement faire une permutation entre les 2 sommes et la limite, sous la forme :

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j Y_{t_j} = \underbrace{\lim_{n_j\to\infty} \underbrace{\sum_{i} \Big(\sum_{j} \lambda_j\Big)(\alpha_{i_j}) B_{u_{i_j}}}_{\text{Gaussienne car (B) M.B}}}$$

Gaussienne car :
limite de v.a. gaussiène

(2)

Calculons maintenant I, II, III et IV :

(i) $\boxed{\mathrm{I} = \mathbb{E}(B_s B_t) = s \wedge t}$ (Car $(B_t)_{t\geq 0}$ est un M.B.S).

(ii) $\mathrm{II} = \mathbb{E}(B_s Z_t)$

On peut écrire : $B_s = \int_0^s \underset{\in L^2([0,s])}{1} \cdot dB_u$. Int. de Wiener

$$\mathrm{II} = \mathbb{E}\left[\underbrace{\left(\int_0^s 1\, dB_u\right)}_{B_s}\underbrace{\left(\int_0^t u\, dB_u\right)}_{Z_t}\right] \underset{\text{Cours}}{\overset{\text{Voir}}{=}} \int_0^{s\wedge t} (1 \cdot u)\, du$$

$$\boxed{\mathrm{II} = \frac{1}{2}(s\wedge t)^2}$$

(iii) $\mathrm{III} = \mathbb{E}(B_t Z_s) = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t 1 \cdot dB_u\right)\left(\int_0^s u\, dB_u\right)\right] = \int_0^{s\wedge t} (1 \cdot u)\, du$

$$\boxed{\mathrm{III} = \frac{1}{2}(s\wedge t)^2}$$

(iv) $\mathrm{IV} = \mathbb{E}\, Z_s Z_t = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^s u\, dB_u\right)\left(\int_0^t u\, dB_u\right)\right] = \int_0^{s\wedge t} u^2\, du$

$$\boxed{\mathrm{IV} = \frac{1}{3}(s\wedge t)^3}.$$

(c) Ecrivons Y_t sous forme d'1 I.W.

Par intégration par parties :

$$Y_t = \int_0^t B_u\,du = tB_t - \underbrace{\int_0^t u\,dB_u}_{Z_t}.$$

$Z_t = \int_0^t \underbrace{u}_{f(u)}\,dB_u$ est une intégrale de Wiener

<u>Car</u> : La fct : $f : u \longmapsto f(u) = u \in L^2([0,t])$

pour tout $t \geq 0$ $\left[\|f\|^2 = \int_0^t u^2\,du < \infty\right]$

$$Z_t \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{t^3}{3}\right)$$

(d) Déduisons :

⊛ $\mathbb{E}(Y_t) = \mathbb{E}(tB_t) - \underbrace{\mathbb{E}Z_t}_{=0}$ . . . . . (*)

$= t\,\underbrace{\mathbb{E}B_t}_{=0}$.

(*) $\Rightarrow \boxed{\mathbb{E}(Y_t) = 0}$

⊛ $Cov(Y_s, Y_t) = \mathbb{E}(Y_s Y_t)$ <u>Car</u> $(Y_t)_{t\geq 0}$ est centré.

$$= \mathbb{E}\left[(sB_s - Z_s)(tB_t - Z_t)\right]$$

$$= st\,\underbrace{\mathbb{E}(B_sB_t)}_{\mathrm{I}} - s\,\underbrace{\mathbb{E}(B_sZ_t)}_{\mathrm{II}} - t\,\underbrace{\mathbb{E}(B_tZ_s)}_{\mathrm{III}} + \underbrace{\mathbb{E}(Z_sZ_t)}_{\mathrm{IV}}$$

Exercice 2 : Calculons la probabilité :

$$\mathbb{P}\left[\int_0^2 B_t\,dt > \int_0^1 B_t\,dt\right] = \mathbb{P}\left[\underbrace{\int_1^2 B_t\,dt}_{\substack{\text{Gaussienne} \\ \text{d'après l'exo (1) / (c)} \\ \text{et centrée d'après (d)}}} > 0\right]$$

i.e. $X = \int_1^2 B_t\,dt \rightsquigarrow N(0, \mu)$.

$$\Rightarrow \mathbb{P}[X>0] = \mathbb{P}[X<0] = 1/2.$$

Exercice 3 : $Y_t = t B_t\ ;\ t \geq 0$.

* $dY_t = ?$

⚠ On ne peut pas utiliser : $d(uv) = u\,dv + v\,du$

Car $(B_t)_{t\geq 0}$ est à variat$^{\text{t}}$ infinie . .

On sait que :

$$\underbrace{\int_0^t u\,dB_u}_{\text{I. Wiener}} = tB_t - \underbrace{\int_0^t B_u\,du}_{\text{I. Riemann}}$$

existe car $u \mapsto u \in L^2([0,t])$

existe. car $u \mapsto B_u$ continue.

D'où (Introduisons la différentielle ds les 2 côtés).

$$d\left(\int_0^t u\,dB_u\right) = d(tB_t) - d\left(\int_0^t B_u\,du\right)$$

$$t\,dB_t = d(tB_t) - B_t\,dt$$

$$\Rightarrow \boxed{d(tB_t) = t\,dB_t + B_t\,dt}$$

Exercice 4 :

(a) Mq. la v.a. $X_t := \int_0^t \underbrace{\sin(s)}_{f(s)}\,dB_s$ est définie.

On a : $X_t = \int_0^t f(s)\,dB_s$

avec : $\|f\|^2_{L^2[0,t]} = \int_0^t \sin^2 u\,du$

$$= \int_0^t \frac{1 - \cos 2u}{2}\,du < \infty.$$

$$= \ldots\ldots$$ (Très facile à calculer).

(b) Pour montrer que $(X_t)_{t\geq 0}$ est gaussien, utiliser la définition de l'I.W.

C.à.d. $I(f) = \int_0^t f(s)dB_s$, $f \in L^2([0,t])$.

$= \lim I(f_n)$ ds $L^2(\Omega)$

<u>avec</u> : $f = \lim(f_n)$ ds $L^2([0,t])$,

f_n : étagée ds $L^2([0,t])$

[$(I(f_n))_n$ snt gaussiennes]

<u>et</u> $I(f_n) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$.

Puis utiliser la déf^{t} du process. gaussien.

* $\mathbb{E}(X_t) = 0$ (I.W.).
* $Cov(X_s X_t) = \mathbb{E} X_s X_t = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^s \sin u \, dB_u\right)\left(\int_0^t \sin u \, dB_u\right)\right]$

$= \int_0^{s \wedge t} \sin^2 u \, du.$

$= \ldots\ldots$ (facile à calculer)

(c) $\mathbb{E}(X_t / \mathcal{F}_s) = X_s$, $s<t$,

<u>Car</u> $(X_t)_{t \geq 0}$ est une I.W. donc <u>martingale</u>

p.r.p. à la filtra$^{\underline{t}}$ brownienne.

(d) L'intégration par parties donne le résultat;

seulement, il faut justifier l'existence de l'intégrale : $\int_0^t \cos(s) \cdot B_s \, ds$

Comme : $s \longmapsto \cos(s) \cdot B_s$ continue.

L'intégrale précédente est de Riemann.

Exercice 5 : $f \in L^2([0,t])$.

$$\mathbb{E}\left[B_t \int_0^t f(s)\, dB_s\right] = \mathbb{E}\left[\underbrace{\left(\int_0^t 1 \, dB_s\right)}_{I.W.} \underbrace{\left(\int_0^t f(s)\, dB_s\right)}_{I.W}\right]$$

$$= \int_0^t 1 \cdot f(s) \, ds.$$