Corrigé Mod-Reg

1/ $\hat{\beta}$ est ~~sol~~ de $\min_{\beta} \sum \varepsilon_t^2 = \min_{\beta} \varepsilon'\varepsilon =$

$$\min_{\beta} (y-X\beta)'(y-X\beta) = y'y - \beta'X'y - y'X\beta + \beta'X'X\beta$$

$\beta'X'y = (\beta'X'y)' = y'X\beta$ car c'est un scalaire

donc $\hat{\beta}$ sol de $\min_{\beta} S(\beta) = y'y - 2\beta'X'y + \beta'X'X\beta$

il faut que $\left.\dfrac{\partial S(\beta)}{\partial \beta}\right|_{\hat{\beta}} = 0$ et $\left.\dfrac{\partial^2 S(\beta)}{\partial \beta' \partial \beta}\right|_{\hat{\beta}} \overset{d.p.}{>} 0$

$$\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} = -2X'y + 2X'X\beta = 0 \Longrightarrow \hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$$

$\dfrac{\partial^2 S(\beta)}{\partial \beta' \partial \beta} = 2X'X$ $\quad rg(X) = k \quad X'X$ est $k \times k$

si $X'X \not> 0 \Longrightarrow \exists\, a \in \mathbb{R}^k$ et $a \neq 0$ t.q $a'X'Xa = 0$

soit $Xa = z \Longrightarrow \begin{cases} z'z = 0 \Longrightarrow Xa = 0 \\ \Longrightarrow z = 0 \end{cases}$ possède une

solution non nulle $\Longrightarrow rg(X) < k$

2/ Soit $\hat{y} = X\hat{\beta}$ et $e = y - \hat{y} = y - X(X'X)^{-1}X'y$

et $X\beta + \varepsilon - X\hat{\beta} = X\beta + \varepsilon - X(X'X)^{-1}X'y$

$$= X\beta + \varepsilon - X(X'X)^{-1}X'(X\beta + \varepsilon)$$

$$= \varepsilon - X(X'X)^{-1}X'\varepsilon$$

Soit $M = I_n - X(X'X)^{-1}X'$ (2)

Donc $e = My = M\varepsilon$

$MM = M \Longrightarrow M$ est idempotente et symetrique

Soit $C'\Lambda C = M$ la decomposition canonique

Avec $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ses valeurs propres

$MM = M \Longrightarrow C'\Lambda CC'\Lambda C$ C étant orthogonale

$C'\Lambda C = C'\Lambda\Lambda C \Longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$\lambda_i = \lambda_i^2 \Longrightarrow \lambda_i = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$

$\operatorname{trace} M = \operatorname{trace}(C'\Lambda C) = \operatorname{tr}(\Lambda CC') = \operatorname{tr}(\Lambda)$

$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad \operatorname{tr}(M) = \operatorname{tr}(I_n - X(X'X)X')$

$= \operatorname{tr}(I_n) - \operatorname{tr}(X(X'X)^{-1}X') = \operatorname{tr}(I_n) - \operatorname{tr}((X'X)^{-1}X'X)$

$= \operatorname{tr}(I_n) - \operatorname{tr}(I_k) = n - k$

$\sum_{t=1}^{n} e_t^2 = e'e = \varepsilon' MM\varepsilon = \varepsilon' M\varepsilon = \varepsilon' C'\Lambda C\varepsilon$

$E(\varepsilon) = 0$ soit $C\varepsilon = z \qquad Var(z) = Var(C\varepsilon)$

$E(z) = 0$

$C\,Var(\varepsilon)\,C' = \sigma^2 I \Longrightarrow Var(z_i) = \sigma^2$

$E(\varepsilon' C'\Lambda C\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i^2 = \sigma^2 \operatorname{tr} M = \sigma^2(n-k)$

Donc l'estimateur sans biais de σ^2 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-k} \sum e^t$

3 - $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y = (X'X)^{-1}X'(X\beta + \varepsilon)$

$= \beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon \Rightarrow \hat{\beta} - \beta = (X'X)^{-1}X'\varepsilon$

$E(\hat{\beta}) = \beta + (X'X)^{-1}X'E(\varepsilon) = \beta$ sans biais

$Var(\hat{\beta}) = Var(\hat{\beta} - \beta) = Var((X'X)^{-1}X'\varepsilon)$

$= (X'X)^{-1}X' Var(\varepsilon) X(X'X)^{-1} = \sigma^2 I_n (X'X)^{-1}$

$Var(\hat{\beta}) = \sigma^2 (X'X)^{-1}$

4 - Tester $H_0 : \beta = b$ contre $\beta \neq b$

Soit SSE_0 la somme de $\sum e_i^2$ sous b

Soit SSE la " " sous $\hat{\beta}$

alors $f = \dfrac{(SSE_0 - SSE)/k}{SSE/n-k} \sim F(k, n-k)$

on accepte H_0 si $\frac{(n-k)}{k}\frac{SSE_0 - SSE}{SSE}$ n'est pas significative (ou est significativement égale à 0) la valeur limite à ne pas dépasser et t_α / $P(F(k, n-k) > t_\alpha) = \alpha$

suite ...

~~Sont~~ qui ont utilisé la méthode de tester tous les βi $H_0^i : \beta i = b_i$
$H_1^i : \beta i \neq i$

et rejeter H_0 $\exists$ un test H^i où H_0^i est refusé

leur méthode a été acceptée même si le test est de faible puissance

B / ici ce ne sont que des calcul arithmetique à faire

on trouve pour les $\beta_0, \beta_1, \beta_2$

un $\overline{R}^2 = 0.9987$

et pour les θ_0, θ_1 $\overline{R}^2 = 0.9883$

Donc le premier model est le meilleur