Corrigé du TD 3

Exercice 1.

1. Soit $x \in \ell_2$. On a

$$\|\mathcal{A}x\|_2^2 = \sum_{p=0}^{+\infty} \left|\frac{x_p}{p}\right|^2 \leq \sum_{p=0}^{+\infty} |x_p|^2 = \|x\|_2^2 < +\infty$$

D'où $\mathcal{A}x \in \ell_2$.
2. De la question (1), on conclut que $\mathcal{A}$ est borné, et que $\|\mathcal{A}\| \leq 1 \quad (1)$.
3. On a pour $e_1 = (1, 0, 0, ...0, ..) \in \ell_2$:

$$\|\mathcal{A}e_1\|_2^2 = \|e_1\|_2^2 = 1$$

D'où

$$\|\mathcal{A}\| = \sup_{\|x\|=1} \|\mathcal{A}x\|_2^2 \geq \|\mathcal{A}e_1\|_2^2 = 1 \qquad (2)$$

De (1) et (2), on aura que $\|\mathcal{A}\| = 1$.
4. Soient $x = (x_i)_{i=1}^{+\infty}, y = (y_i)_{i=1}^{+\infty} \in \ell_2$:

$$\langle \mathcal{A}x, y\rangle = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x_p}{p}\overline{y_p} = \sum_{p=0}^{+\infty} x_p \overline{\frac{y_p}{p}} = \sum_{p=0}^{+\infty} x_p (\overline{\frac{y_p}{p}}) = \langle x, \mathcal{A}^* y\rangle$$

D'où $\mathcal{A}^* y = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \frac{y_p}{p} = \mathcal{A}y$.
5. On déduit de (4) que $\mathcal{A}$ est auto-adjoint.

Exercice 2.

Soient $\varphi, \psi \in L^2([-\pi, \pi])$. 1. On a

$$\begin{aligned}
\langle K_1\psi, \varphi\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} (K_1\psi)(t)\overline{\varphi(t)}dt = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t-s)}\psi(s)ds\overline{\varphi(t)}dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \psi(s)e^{-is} \int_{-\pi}^{\pi} e^{it}\overline{\varphi(t)}dtds \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \psi(s) \int_{-\pi}^{\pi} \overline{e^{is}e^{-it}\varphi(t)}dtds \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \psi(s) \int_{-\pi}^{\pi} \overline{e^{i(s-t)}\varphi(t)}dtds \\
&= \langle \psi, K_1^\star \varphi\rangle
\end{aligned}$$

D'où, $(K_1^\star\psi)(s) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i(s-t)}\psi(t)dt,\ t \in [-\pi, \pi]$.

2. De la même façon, on trouvera que

$$(K_2^\star\psi)(s) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(s-t)\psi(t)dt = (K_2\psi)(s),\ t \in [-\pi, \pi]$$

i.e., K_2 est auto-adjoint.

3. Veuillez SVP corriger dans l'opérateur K comme suit :

$$K : L^2([0,1]) \to L^2([0,1]), (K\psi)(t) = \int\limits_0^{t} \psi(s)ds, \psi \in L^2([0,1])$$

Par le Théorème de Fubini, ou par une intégration par parties,

$$\langle K\psi, \varphi\rangle = \int\limits_0^1 K\psi(t)\overline{\varphi(t)}dt = \int\limits_0^1 \int\limits_0^t \psi(s)ds\overline{\varphi(t)}dt = \int\limits_0^1 \psi(s) \int\limits_s^1 \overline{\varphi(t)}dtds = \langle \psi, K^\star\varphi\rangle$$

D'où,

$$(K^\star\varphi)(s) = \int\limits_s^1 \varphi(t)dt,\ s \in [0,1]$$

Exercice 3.

i. Vérification directe.

ii. Soit $x \in \mathcal{H}$. Comme la suite $(\lambda_n)_n$ est bornée,

$$\begin{aligned}
\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle &= \langle \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \langle x, \varphi_n\rangle \psi_n, \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \langle x, \varphi_k\rangle \psi_k\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \langle x, \varphi_n\rangle \ \sum_{k=1}^{+\infty} \overline{\lambda_k \langle x, \varphi_k\rangle}\langle \psi_n, \psi_k\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n|^2 |\langle x, \varphi_n\rangle|^2 \\
&\leq (\sup_{n\geq 1}|\lambda_n|)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle x, \varphi_n\rangle|^2 \\
&\leq (\sup_{n\geq 1}|\lambda_n|)^2 \|x\|^2
\end{aligned}$$

Ce qui montre que T est borné, et que $\|T\| \leq M = \sup_{n\geq 1}|\lambda_n|$.

iii. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|\lambda_N| > M - \varepsilon$????? D'où,

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \geq \|T\varphi_N\| = \|\lambda_N \langle \varphi_N, \varphi_N\rangle \psi_N\| = |\lambda_N| > M - \varepsilon$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, $\|T\| \geq M$. Par conséquent, $\|T\| = M$.

vi. Soient $x \in \mathcal{H},\ y \in \mathcal{K}$.

$$\langle Tx, y\rangle = \langle \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \langle x, \varphi_n\rangle \psi_n, y\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \langle x, \varphi_n\rangle \langle \psi_n, y\rangle = \left\langle x, \sum_{n=1}^{+\infty} \overline{\lambda_n \langle \psi_n, y\rangle} \varphi_n \right\rangle = \langle x, T^\star y\rangle$$

D'où, $T^\star : \mathcal{K} \to \mathcal{H},\ T^\star y = \sum_{n=1}^{+\infty} \overline{\lambda_n \langle \psi_n, y\rangle} \varphi_n,\ y \in \mathcal{K}$

Exercice 4.

L'opérateur K est dit l'opérateur intégral, et la fonction k est dite noyau de l'opérateur intégral.

a. Soit $f \in L^2([a, b])$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

$$\begin{aligned}
\|Kf\|^2 = \int_a^b |(Kf)(t)|^2 dt = \int_a^b |\int_a^b k(t, s) f(s) ds|^2 dt &\leq \int_a^b \int_a^b |k(t, s)|^2 ds \int_a^b |f(s)|^2 ds\ dt \\
&\leq \int_a^b \int_a^b |k(t, s)|^2 ds\ dt \int_a^b |f(s)|^2 ds \\
&\leq \int_a^b \int_a^b |k(t, s)|^2 ds dt\ \|f\|^2 < +\infty
\end{aligned}$$

b. K est linéaire (Calcul direct). De plus, par la question (a), K est borné, et

$$\|K\| \leq (\int_a^b \int_a^b |k(t,s)|^2 ds dt)^{\frac{1}{2}}$$

c.

$$(K^\star f)(t) = \int_a^b \overline{k(t,s)} f(s) ds, \;\; f \in L^2([a,b]) \text{ ?????}$$

Exercice 5.

a. Soit $x \in \ell_2$.

$$\|\mathcal{U}(x)\|^2 = x_n \overline{x_n} + x_{n-1}\overline{x_{n-1}} + .. + x_1 \overline{x_1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} x_k \overline{x_k} = \sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^2 = \|x\|^2$$

b. Pour tous $x = (x_k)_{k\geq 1}, \; y = (y_k)_{k \geq 1} \in \ell_2$, on a

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{U}x, y \rangle &= x_n \overline{y_1} + x_{n-1}\overline{y_2} + .. + x_1 \overline{y_n} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} x_k \overline{y_k} \\ &= x_1 \overline{y_n} + .. + x_{n-1} \overline{y_2} + x_n \overline{y_1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} x_k \overline{y_k} \\ &= \langle x, \mathcal{U}^\star y \rangle \end{aligned}$$

D'où,

$$\mathcal{U}^\star y = (y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, ..., y_1, y_{n+1}, y_{n+2}, y_{n+3}, ...) = \mathcal{U}y, \;\; y \in \ell_2$$

De plus, pour tout $x \in \ell_2$,

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^\star \mathcal{U} x &= \mathcal{U}^\star((x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_1, x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, ...)) \\ &= (x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-2}, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, ...) \\ &= x \\ &= \mathcal{U}\mathcal{U}^\star x \text{ ?????} \end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{U}$ est inversible, et $\mathcal{U}^{-1} = \mathcal{U}^\star$, et donc $\mathcal{U}^2 = \mathcal{I}$ (évident).

c. Vous pouvez montrer facilement que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}, \alpha \neq \pm 1$,

$$\frac{1}{1-\alpha^2} (\mathcal{I} - \alpha \mathcal{U}) (\mathcal{I} + \alpha \mathcal{U}) = \mathcal{I}$$