Chapitre 3 : Temps d'arrêt – Théorème d'arrêt.

Référence : Nils Berglund. Martingales et calcul stochastique. DEA. Université d'Orléans, 2010, pp.91.

Temps d'arrêt

Dans un jeu de hasard, un temps d'arrêt est un temps lors duquel le joueur décide d'arrêter de jouer, selon un critère ne dépendant que du passé et du présent. Il peut par exemple décider d'arrêter de jouer dès qu'il a dépensé tout son capital, dès qu'il a gagné une certaine somme, dès qu'il a gagné un certain nombre de fois successives, ou selon toute combinaison de ces critères. Les temps d'arrêt ont donc deux propriétés importantes : ils sont aléatoires, puisqu'ils dépendent du déroulement antérieur du jeu, et ils ne peuvent pas dépendre du futur, puisque le joueur doit à tout moment pouvoir décider s'il arrête ou non.

5.1 Définition et exemples

Définition 5.1.1 (Temps d'arrêt). *Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un processus stochastique et soit $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0,\dots,X_n)$ la filtration canonique. Une variable aléatoire N à valeurs dans $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ est un* temps d'arrêt *si $\{N=n\}\in\mathcal{F}_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.*

La condition $\{N=n\}\in\mathcal{F}_n$ signifie qu'avec l'information disponible au temps n, on doit pouvoir décider si oui ou non l'événement $\{N=n\}$ est réalisé. En d'autres termes, un temps d'arrêt ne "peut pas voir dans le futur".

Exemple 5.1.2.

1. Si N est constante presque sûrement, alors c'est un temps d'arrêt.
2. Supposons que X_n soit réel, et soit $B\subset\mathbb{R}$ un borélien. Alors le *temps de première atteinte* de B
$$N_B = \inf\{n\in\mathbb{N} : X_n\in B\} \tag{5.1.1}$$
est un temps d'arrêt (par convention, on pose $N_B=\infty$ si le processus n'atteint jamais l'ensemble B). Pour le vérifier, il suffit d'observer qu'on a la décomposition
$$\{N_B=n\} = \bigcap^{n-1}\{X_k\in B^c\}\cap\{X_n\in B\}\in\mathcal{F}_n\,. \tag{5.1.2}$$
3. Le temps de dernier passage dans B avant un temps fixé m,
$$\sup\{n\leqslant m : X_n\in B\} \tag{5.1.3}$$
n'est pas un temps d'arrêt. En effet, si par exemple $X_n\in B$ pour un $n<m$, l'information disponible au temps n ne permet pas de dire si oui ou non le processus repassera dans l'ensemble B jusqu'au temps m. Un joueur ne peut pas décider qu'il jouera jusqu'au dernier tour avant le centième lors duquel il possédera au moins 100 Euros!

Proposition 5.1.3.

1. *Soient N et M des temps d'arrêt. Alors $N\wedge M$ et $N\vee M$ sont des temps d'arrêt.*
2. *Soit N_k, $k\in\mathbb{N}$, une suite de temps d'arrêt telle que $N_k\nearrow N$. Alors N est un temps d'arrêt.*

Nous laissons la preuve en exercice.

Définition 5.1.4 (Tribu des événements antérieurs). *Soit N un temps d'arrêt. Alors la tribu*
$$\mathcal{F}_N = \{A\in\mathcal{F} : A\cap\{N=n\}\in\mathcal{F}_n\ \forall n<\infty\} \tag{5.1.4}$$
est appelée la tribu des événements antérieurs à N.

Proposition 5.1.5. *Soient N et M deux temps d'arrêt tels que $M\leqslant N$. Alors $\mathcal{F}_M\subset\mathcal{F}_N$.*

DÉMONSTRATION. Soit $A \in \mathcal{F}_M$. Alors pour tout $n \geqslant 0$, $N = n$ implique $M \leqslant n$ d'où

$$A \cap \{N = n\} = A \cap \{M \leqslant n\} \cap \{N = n\} \in \mathcal{F}_n \;, \tag{5.1.5}$$

puisque $A \cap \{M \leqslant n\} = \bigcup_{k=0}^{n}(A \cap \{M = k\}) \in \mathcal{F}_n$ et $\{N = n\} \in \mathcal{F}_n$. □

5.2 Processus arrêté, inégalité de Doob

Définition 5.2.1 (Processus arrêté). *Soit $\{\mathcal{F}_n\}_n$ une filtration, $\{X_n\}_n$ un processus adapté à la filtration et N un temps d'arrêt. On appelle* processus arrêté en N *le processus X^N défini par*

$$X_n^N = X_{N\wedge n} \;. \tag{5.2.1}$$

Si par exemple N est le temps de première atteinte d'un ensemble B, alors X^N est le processus obtenu en "gelant" X à l'endroit où il atteint B pour la première fois.

Proposition 5.2.2. *Si N est un temps d'arrêt et X_n est une surmartingale (par rapport à la même filtration $\mathcal{F}_n$), alors le processus arrêté $X_{N\wedge n}$ est une surmartingale.*

DÉMONSTRATION. Considérons le processus $H_n = 1_{\{N \geqslant n\}}$. Puisque l'on a $\{N \geqslant n\} = \{N \leqslant n-1\}^c \in \mathcal{F}_{n-1}$, le processus H_n est prévisible. De plus, il est évidemment borné et non-négatif. Par la proposition 4.3.2, $(H \cdot X)_n$ est une surmartingale. Or nous avons

$$(H \cdot X)_n = \sum_{m=1}^{n} 1_{\{N \geqslant m\}}(X_m - X_{m-1}) = \sum_{m=1}^{N\wedge n}(X_m - X_{m-1}) = X_{N\wedge n} - X_0 \;, \tag{5.2.2}$$

donc $X_{N\wedge n} = X_0 + (H \cdot X)_n$ est une surmartingale. □

Il suit directement de ce résultat que si X_n est une sous-martingale (respectivement une martingale), alors $X_{N\wedge n}$ est une sous-martingale (respectivement une martingale).

Corollaire 5.2.3. *Soit X_n une sous-martingale et soit N un temps d'arrêt satisfaisant $\mathbb{P}\{N \leqslant k\} = 1$ pour un $k \in \mathbb{N}$. Alors*

$$\mathbb{E}(X_0) \leqslant \mathbb{E}(X_N) \leqslant \mathbb{E}(X_k) \;. \tag{5.2.3}$$

DÉMONSTRATION. Comme $X_{N\wedge n}$ est une sous-martingale, on a

$$\mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(X_{N\wedge 0}) \leqslant \mathbb{E}(X_{N\wedge k}) = \mathbb{E}(X_N) \;. \tag{5.2.4}$$

Pour prouver la seconde inégalité, nous imitons la preuve de la proposition en utilisant $K_n = 1 - H_n$, c'est-à-dire $K_n = 1_{\{N<n\}} = 1_{\{N\leqslant n-1\}}$. C'est également un processus prévisible, donc $(K \cdot X)_n$ est une sous-martingale (car $-X_n$ est une surmartingale). Or

$$(K \cdot X)_n = \sum_{m=1}^{n} 1_{\{N\leqslant m-1\}}(X_m - X_{m-1}) = \sum_{m=N+1}^{n}(X_m - X_{m-1}) = X_n - X_{N\wedge n} \;, \tag{5.2.5}$$

donc, comme $N \wedge k = N$ presque sûrement,

$$\mathbb{E}(X_k) - \mathbb{E}(X_N) = \mathbb{E}((K \cdot X)_k) \geqslant \mathbb{E}((K \cdot X)_0) = 0 \;, \tag{5.2.6}$$

d'où la seconde inégalité. □

Nous sommes maintenant en mesure de prouver l'inégalité de Doob, qui est très utile, notamment pour estimer le supremum d'un processus stochastique. Dans la suite, nous posons

$$\overline{X}_n = \max_{0\leqslant m\leqslant n} X_m^+ = \max_{0\leqslant m\leqslant n} X_m \vee 0 \;. \tag{5.2.7}$$

Théorème 5.2.4 (Inégalité de Doob). *Soit X_n une sous-martingale. Alors pour tout $\lambda > 0$, on a*

$$\mathbb{P}\{\overline{X}_n \geqslant \lambda\} \leqslant \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}(X_n 1_{\{\overline{X}_n \geqslant \lambda\}}) \leqslant \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}(X_n^+) \;. \tag{5.2.8}$$

DÉMONSTRATION. Soit $A = \{\overline{X}_n \geqslant \lambda\}$ et $N = \inf\{m \colon X_m \geqslant \lambda\} \wedge n$. Alors

$$\lambda\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}(\lambda 1_A) \leqslant \mathbb{E}(X_N 1_A) \leqslant \mathbb{E}(X_n 1_A) \leqslant \mathbb{E}(X_n^+) \,. \tag{5.2.9}$$

La première inégalité suit du fait que $X_N \geqslant \lambda$ dans A. La seconde vient du fait que $X_N = X_n$ sur A^c et que $\mathbb{E}(X_N) \leqslant \mathbb{E}(X_n)$ par le corollaire 5.2.3. La dernière inégalité est triviale. □

L'intérêt de cette inégalité est qu'elle permet de majorer une quantité faisant intervenir tout le processus jusqu'au temps n par une quantité ne dépendant que de X_n, qui est souvent beaucoup plus simple à estimer.

Exemple 5.2.5. Soient $\xi_1, \xi_2, \dots$ des variables indépendantes d'espérance nulle et variance finie, et soit $X_n = \sum_{m=1}^n \xi_m$. Alors X_n est une martingale (la preuve est la même que pour la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$ dans l'exemple 4.1.2), donc X_n^2 est une sous-martingale. Une application de l'inégalité de Doob donne l'*inégalité de Kolmogorov*

$$\mathbb{P}\Bigl\{\max_{1\leqslant m\leqslant n} |X_m| \geqslant \lambda\Bigr\} = \mathbb{P}\Bigl\{\max_{1\leqslant m\leqslant n} X_m^2 \geqslant \lambda^2\Bigr\} \leqslant \frac{1}{\lambda^2}\mathbb{E}(X_n^2) = \frac{1}{\lambda^2}\operatorname{Var}(X_n) \,. \tag{5.2.10}$$

Une autre application de l'inégalité de Doob est l'*inégalité du maximum L^p* :

Théorème 5.2.6. *Si X_n est une sous-martingale, alors pour tout $p > 1$*

$$\mathbb{E}(\overline{X}_n^p) \leqslant \Bigl(\frac{p}{p-1}\Bigr)^p \mathbb{E}([X_n^+]^p) \,. \tag{5.2.11}$$

Démonstration. Soit $M > 0$ une constante, que nous allons faire tendre vers l'infini à la fin de la preuve. Alors, par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}([\overline{X}_n \wedge M]^p) &= \int_0^\infty p\lambda^{p-1}\mathbb{P}\{\overline{X}_n \wedge M \geqslant \lambda\} \,\mathrm{d}\lambda \\
&\leqslant \int_0^\infty p\lambda^{p-1}\frac{1}{\lambda}\mathbb{E}\bigl(X_n^+ 1_{\{\overline{X}_n\wedge M\geqslant\lambda\}}\bigr) \,\mathrm{d}\lambda \\
&= \int_0^\infty p\lambda^{p-2}\int X_n^+ 1_{\{\overline{X}_n\wedge M\geqslant\lambda\}} \,\mathrm{d}\mathbb{P}\,\mathrm{d}\lambda \\
&= \int X_n^+ \int_0^{\overline{X}_n\wedge M} p\lambda^{p-2} \,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \frac{p}{p-1}\int X_n^+[\overline{X}_n\wedge M]^{p-1} \,\mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \frac{p}{p-1}\mathbb{E}\bigl(X_n^+[\overline{X}_n\wedge M]^{p-1}\bigr) \\
&\leqslant \frac{p}{p-1}\bigl[\mathbb{E}(|X_n^+|^p)\bigr]^{1/p}\bigl[\mathbb{E}(|\overline{X}_n\wedge M|^p)\bigr]^{(p-1)/p} \,.
\end{aligned} \tag{5.2.12}$$

La dernière inégalité provient de l'inégalité de Hölder. Divisant les deux côtés de l'inégalité par $[\mathbb{E}(|\overline{X}_n \wedge M|^p)]^{(p-1)/p}$ et élevant à la puissance p, on trouve

$$\mathbb{E}(|\overline{X}_n \wedge M|^p) \leqslant \Bigl(\frac{p}{p-1}\Bigr)^p \mathbb{E}([X_n^+]^p) \,, \tag{5.2.13}$$

et le résultat suit du théorème de la convergence dominée, en faisant tendre M vers l'infini. □

Corollaire 5.2.7. *Si Y_n est une martingale, alors*

$$\mathbb{E}\biggl(\Bigl[\max_{0\leqslant m\leqslant n}|Y_m|\Bigr]^p\biggr) \leqslant \Bigl(\frac{p}{p-1}\Bigr)^p \mathbb{E}(|Y_n|^p) \,. \tag{5.2.14}$$