

Université de Jijel

Département de Mathématiques

Module : Mesure et Intégration

TD N°2

Exercice 1 : Soient (E, T) un espace mesurable et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

- 1) Montrer que $T_f = \{B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), f^{-1}(B) \in T\}$ est une tribu.
- 2) Soit C un ensemble qui engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes.
 - (i) f est mesurable.
 - (ii) $f^{-1}(C) \in T, \forall C \in C$.

Exercice 2 : Soient (E, T) et (F, S) deux espaces mesurables. Soient $f : E \rightarrow F$ et $\varphi : F \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications mesurables. Montrer que $\varphi \circ f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable.

Exercice 3 : Soient (E, T) , (F, S) et (G, O) trois espaces mesurables. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications mesurables. Montrer que $g \circ f : E \rightarrow G$ est mesurable.

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que f est mesurable.

Exercice 5 : Soit \mathbb{R} muni de sa tribu borélienne. Montrer que 1_Q est mesurable.

Exercice 6 : Soit T une tribu sur un ensemble E et soit $A \in T$ tel que

$$B \in T \text{ et } B \subset A \Rightarrow B = \emptyset \text{ ou } B = A.$$

Montrer que toute fonction mesurable de E dans \mathbb{R} est constante sur A .

Exercice 7 : 1) Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues et λ la mesure de Lebesgue. Montrer que $f = g$ λ p.p si et seulement si $f = g$.

2) Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et δ_0 la mesure de Dirac en 0. Montrer que $f = g$ δ_0 p.p si et seulement si $f(0) = g(0)$.

Exercice 8 : Soient (E, T, μ) un espace mesuré et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans \mathbb{R} , (i.e, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$). Montrer que si $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f$ presque uniformément, alors $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f$ μ p.p.

Exercice 9 : Soient (E, T, μ) un espace mesuré et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$.

a) Montrer que s'il existe deux fonctions mesurables $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en mesure vers f et g , alors $f = g$ p.p.

b) Montrer que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $g \in \mathcal{M}$, alors $(f_n + g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f + g \in \mathcal{M}$.