Université de Jijel
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

MASTER ANALYSE FONCTIONNELLE
MASTER PROBABILITÉS ET STATISTIQUE

Distributions

Corrigé de l'examen du 13 avril 2021

Exercice 1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } 0 < x < \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Il est facile de voir que

$$\|f_n\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_0^{\frac{1}{n}} n\, dx = 1,$$

et donc $f \in L^1(\mathbb{R}) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R})$ définit une distribution régulière.

2) Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Utilisant le développement de Taylor, on a que pour tout $x > 0$

$$\phi(x) = \phi(0) + x\phi'(c_x) \qquad \text{avec } c_x \in [0, x].$$

Il vient alors que

$$\begin{aligned} |\langle f_n, \phi\rangle - \phi(0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\phi(x)\, dx - \phi(0) \right| = \left| \int_0^{\frac{1}{n}} n\phi(x)\, dx - \phi(0) \right| \\ &= \left| \int_0^{\frac{1}{n}} n\left(\phi(x) - \phi(0)\right)\, dx \right| \\ &\leq \int_0^{\frac{1}{n}} n\, |\phi(x) - \phi(0)|\, dx = \int_0^{\frac{1}{n}} n\, |x|\, |\phi'(c_x)|\, dx \\ &\leq M \int_0^{\frac{1}{n}} n\, |x|\, dx = \tfrac{M}{2n}, \end{aligned}$$

où $M = \|\phi'\|_{C(\mathbb{R})}$. Par conséquent, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \langle f_n, \phi \rangle = \phi(0) = \langle \delta_0, \phi \rangle \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Autrement dit

$$\lim_{n \to +\infty} f_n = \delta_0 \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Exercice 2. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Utilisant la première indication, on obtient

$$\sum_{j=1}^{k} \phi\left(\tfrac{1}{j}\right) - k\phi(0) = \sum_{j=1}^{k} \left(\phi\left(\tfrac{1}{j}\right) - \phi(0)\right) = \sum_{j=1}^{k} \left(\phi'(0)\tfrac{1}{j} + \tfrac{1}{j^2}\psi\left(\tfrac{1}{j}\right)\right),$$

et donc

$$\sum_{j=1}^{k} \phi\left(\tfrac{1}{j}\right) - k\phi(0) - \ln(k)\,\phi'(0) = \sum_{j=1}^{k} \left(\tfrac{1}{j} - \ln(k)\right)\phi'(0) + \sum_{j=1}^{k} \tfrac{1}{j^2}\psi\left(\tfrac{1}{j}\right).$$

Prenant en compte la deuxième indication, nous déduisons que

$$\begin{aligned}
\langle T, \phi \rangle &= \lim_{k \to +\infty} \left(\sum_{j=1}^{k} \phi\left(\tfrac{1}{j}\right) - k\phi(0) - \ln(k)\,\phi'(0) \right) \\
&= \lim_{k \to +\infty} \sum_{j=1}^{k} \left(\tfrac{1}{j} - \ln(k)\right)\phi'(0) + \lim_{k \to +\infty} \sum_{j=1}^{k} \tfrac{1}{j^2}\psi\left(\tfrac{1}{j}\right) \\
&= C_0\phi'(0) + \sum_{j=1}^{+\infty} \tfrac{1}{j^2}\psi\left(\tfrac{1}{j}\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent, si K est un compact de $\mathbb{R}$ et $\phi \in \mathcal{D}(K)$, alors

$$\begin{aligned}
|\langle T, \phi \rangle| &\leq C_0 |\phi'(0)| + \sum_{j=1}^{+\infty} \tfrac{1}{j^2} \left|\psi\left(\tfrac{1}{j}\right)\right| \\
&\leq C_0 \|\phi'\|_{C(K)} + \|\psi\|_{C(K)} \sum_{j=1}^{+\infty} \tfrac{1}{j^2} \\
&\leq C_0 \|\phi'\|_{C(K)} + C\|\phi''\|_{C(K)} \sum_{j=1}^{+\infty} \tfrac{1}{j^2} \\
&\leq \left(C_0 + C\sum_{j=1}^{+\infty} \tfrac{1}{j^2}\right)\left(\|\phi'\|_{C(K)} + \|\phi''\|_{C(K)}\right).
\end{aligned}$$

Remarquant que la série numérique $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \tfrac{1}{j^2}$ est convergente, grâce au critère de continuité, nous concluons que T est une distribution d'ordre inférieur ou égal à 2.

Exercice 3. Soient $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$ et soit F la fonction définie par

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Pour simplifier la notation, posons $h(x) = \displaystyle\int_0^x e^{F(t)} g(t)\,dt$.

1) Une fois que $F'(x) = f(x)$ et que $h'(x) = e^{F(x)}\,g(x)$, il vient que F et h (et donc u) appartiennent aussi à $C^\infty(\mathbb{R})$. De plus,

$$\begin{aligned}
u'(x) + f(x)u(x) \; &= \left(e^{-F(x)}\right)'\, h(x) + e^{-F(x)}\, h'(x) + f(x)e^{-F(x)}\, h(x) \\
&= -F'(x)e^{-F(x)}\, h(x) + e^{-F(x)}\, e^{F(x)}\, g(x) + f(x)e^{-F(x)}\, h(x) \\
&= -f(x)e^{-F(x)}\, h(x) + g(x) + f(x)e^{-F(x)}\, h(x) \\
&= g(x).
\end{aligned}$$

2) Soit $T = u + e^{-F}S$ où $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Si T satisfait

$$T' + fT = g \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}),$$

alors en prenant en compte 1), on obtient

$$\begin{aligned}
g = \left(u + e^{-F}S\right)' + f\left(u + e^{-F}S\right) \; &= u' + fu + \left(e^{-F}S\right)' + fe^{-F}S \\
&= g + \left(e^{-F}S\right)' + fe^{-F}S \\
&= g + \left(e^{-F}\right)' S + e^{-F}S' + fe^{-F}S \\
&= g - F'e^{-F}S + e^{-F}S' + fe^{-F}S \\
&= g - fe^{-F}S + e^{-F}S' + fe^{-F}S \\
&= g + e^{-F}S' \\
&= g + e^{-F(0)}S' \\
&= g + e^{0}S' \\
&= g + S' \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$S' = 0 \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

et en utilisant l'indication, nous déduisons que $S = C$ et donc

$$T = u + Ce^{-F} \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

Barème.

<u>Exercice 1</u>. 5 points

1) 2 pt

2) 3 pt

<u>Exercice 2</u>. 9 points

- Somme partielle après utilisation du développement de Taylor: 2 pt
- Expression de T après passage à la limite: 3 pt
- Continuité de T: 3 pt
- Ordre de T: 1 pt

<u>Exercice 3</u>. 6 points

1) Régularité de u: 1 pt

Vérification de l'équation différentielle ordinaire : 1 pt

2) S est une constante: 3 pt

Régularité de T: 1 pt