U.D.L Sidi Bel Abbès
Faculté des Sciences Exactes
Département de Probabilités-Statistique
1ère année Master Statistique/Probabilités et Applications

Mardi 23/05/2023
Responsable M.HAMMAD
Durée 1h30mn

Examen de moyenne durée

Probabilité 2

Exercice: 1 (06 points)

On considère une suite de v.a.r. indépendantes équidistribuées $(X_n)_{n\geq 1}$. On suppose que $\mathbb{E}(X_1) = 0$ et $Var(X_1) = \sigma^2$ et on note $\phi(t)$ la fonction caractéristique de X_1. On considère la nouvelle v.a.r :

$$Y_n := \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \cdots + X_n).$$

01,50 pts
1. Écrire la fonction caractéristique de Y_n, $\Phi_n(t)$, en fonction de ϕ, t et n.

02 pts
2. Montrer que, lorsque $x \to 0$, on a $\phi(x) = 1 - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 + o(x^2)$.

(01,50+01) pts
3. En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\log \Phi_n(t) \to -\frac{1}{2}\sigma^2 t^2$, et donc que Y_n converge en loi vers une v.a.r Y que l'on précisera.

Exercice: 2 (14 points)

On concidère la matrice

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

01,50 pts
– Vérifier que cette matrice est une matrice de dispersion.

Soit $X = (X_1, X_2, X_3)$ un vecteur gaussien centré de matrice de dispersion Γ.

(02,50+1,50) pts
– Calculer $\mathbb{E}(X_3|X_1, X_2)$, quelle est la loi de $X_3|(X_1, X_2)$?.

On considère le vecteur $Y = (Y_1, Y_2)'$ tel que : $\begin{cases} Y_1 = 2X_1 + 2X_2 \\ Y_2 = X_1 - 2X_3. \end{cases}$

(01,5+01) pts
1. Le vecteur Y est-il Gaussien ?, est-il centré ?.

02,50 pts
2. Calculer sa matrice de covariance Σ.

01 pts
3. Ses composantes sont-elles indépendantes ?.

02,50 pts
4. Calculer sa fonction caractéristique.

Dr M. HAMMAD
Maître de Conférences
UDL-SBA

EMD : Probabilité 2 – Corrigé type

Exercice 1

$(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. ⫫ équidistribuée, $\mathbb{E}(X_1)=0$, $Var(X_1)=\sigma^2$ et $\phi(t)$: fct caract de X_1

1) $Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1+\cdots+X_n) \rightarrow \Phi_n(t) = \mathbb{E}(e^{iY_n t})$

$(X_n)_n$ ⫫ équidi $\longrightarrow = \mathbb{E}(e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}(X_1+\cdots+X_n)}) \overset{⫫}{\underset{équid}{=}} \left[\mathbb{E}\left(e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}X_1}\right)\right]^n$

$$\boxed{=\left(\phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n.}$$

2) Un Développement de Taylor donne

$\phi(x) = \phi(0) + \phi'(0).x + \phi''(0).x^2 + o(x^2)$ qd $x\to 0$

Les propriétés de la fct caract : $\phi(0)=1$, $\phi'(0)=i\mathbb{E}(X_1)$

$\phi''(0) = -\mathbb{E}(X^2) = -\sigma^2$ donc :

$$\boxed{\phi(x) = 1-\frac{\sigma^2}{2}x^2+o(x^2)}.$$

Dr. M. HAMMAD
Maître de Conférences
UDL - SBA

3) D'après les questions 1 et 2

$\log \Phi_n(t) \overset{1}{=} n\log\phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$, $\forall t\in\mathbb{R}$, $x=\frac{t}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

donc $\log\phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \overset{D.L}{=} -\frac{1}{2}\sigma^2 t^2/n + o\left(\frac{1}{n}\right)$ et

$\lim\limits_{n\to+\infty} \log\Phi_n(t) = -\frac{1}{2}\sigma^2t^2$ i.e $\Phi_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$

$$\boxed{\Phi_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Phi(t) = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}}$$ (convergence simple)

Donc Y_n cvg en loi vers une v.a. $Y \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ loi gaussienne centrée de variance σ^2

ⓘ

Exercice : 2

① $\Gamma = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, la matrice Γ est une matrice d'ordre 3 d'éléments réelles, symétrique, en plus tous les mineurs sont strictement positifs.

$|4| = 4 > 0$, $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$, $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$

Donc Γ est semi-définie positive, donc c'est une matrice de covariance.

X est un vecteur gaussien centré de matrice de dispersion Γ :

La forme de l'espérance conditionnel gaussien est $\mathbb{E}(X_3 / X_1, X_2) = \Gamma_{X_3,(X_1,X_2)} \cdot \Gamma^{-1}_{X_1,X_2} \cdot (X_1, X_2)'$

ici $M = 0_{\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(X_1) \\ \mathbb{E}(X_2) \\ \mathbb{E}(X_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a :

$$\left(\begin{array}{cc|c} \underbrace{\overbrace{\begin{matrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{matrix}}^{\Gamma_{X_1,X_2}}} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \\ \underbrace{\begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix}}_{\Gamma_{X_3,(X_1,X_2)}} & \underbrace{\boxed{2}}_{\Gamma_{X_3}} \end{array}\right) \leftarrow \Gamma_{(X_1,X_2),X_3}$$

Il suffit de calculer

$$\Gamma^{-1}_{X_1,X_2} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \boxed{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}}$$

avec $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4$

(ii)

Alors $\mathbb{E}(X_3 / X_1, X_2) = \frac{1}{4}(0,1)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{4}(2,4)\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}(2X_1 + 4X_2)$

$= \boxed{\frac{1}{2}X_1 + X_2}$.

D'après le théorème de cours $X_3 /_{(X_1, X_2)} \sim \mathcal{N}\left(\mathbb{E}(X_3/X_1, X_2), \sigma^2\right)$

avec $\sigma^2 = \Gamma_{X_3} - \Gamma_{X_3,(X_1,X_2)} \cdot \Gamma^{-1}_{(X_1,X_2)} \cdot \Gamma_{(X_1,X_2),X_3}$

$= 2 - \frac{1}{4}(0,1)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 - \frac{1}{4}(2,4)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= 1$

i.e $\boxed{X_3 / (X_1, X_2) \sim \mathcal{N}\left(\frac{1}{2}X_1 + X_2, 1\right)}$

(3) $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \to \boxed{Y = AX}$, $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$

(1) * Y est un vecteur gaussien si et seulement si toute combinaison linéaire de ses composantes est une v.a. gaussienne, soit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 = \alpha_1(2X_1 + 2X_2) + \alpha_2(X_1 - 2X_3)$

$= (2\alpha_1 + \alpha_2)X_1 + 2\alpha_1 X_2 - 2\alpha_2 X_3$

Toute combinaison linéaire de Y est une combinaison linéaire d'éléments de X, comme X est un V. gaussien $\to$ toute combinaison linéaire de ses composantes est gaussienne i.e Y est un vecteur gaussien.

• Le vecteur X est centré donc le vecteur Y est centré par construction car $Y = AX \to \mathbb{E}(Y) = A \cdot \mathbb{E}(X) = 0_{\mathbb{R}^2}$

(iii)

2) D'après la Prop de cours "transformation linéaire affine" : $X \sim \mathcal{N}_3(0_{\mathbb{R}^3}, \Gamma)$.

$A \in M_{2,3}(\mathbb{R}) \Rightarrow Y = AX$ est gaussien

avec $Y \sim \mathcal{N}_2(0_{\mathbb{R}^3}, \Sigma = A.\Gamma.A')$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

3) D'après une Prop de cours : Comme Y est un vecteur gaussien de matrice de covariance diagonale ($cov(Y_i, Y_j) = 0$, $\overline{i, j = 1, 2}$) ses composants sont indépendants

4) Soit $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, d'après une prop de cours

$$\varphi_Y(u) = e^{i.u'.M - \frac{1}{2} u' \Sigma u} \qquad M = 0_{\mathbb{R}^2}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}(u_1, u_2)\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}}$$

$$(u_1, u_2)\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 8u_1^2 + 12u_2^2$$

donc $\boxed{\varphi_Y(u) = e^{-4u_1^2 - 6u_2^2}}$.