ANALYSE COMBINATOIRE

1 Introduction

Dans ce chapitre, on développe quelques-techniques permettant de déterminer sans dénombrement direct, le nombre de résultats possibles d'une expériences particulière, ou encore le nombre d'éléments d'un ensemble particulier.
De telles techniques reçoivent souvent le nom d'analyse combinatoire.

2 Principe fondamental de l'analyse combinatoire

L'exemple suivant, nous aidera à comprendre ce principe.

2.1 Exemple

Soient $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4\}$, $C = \{3, 4, 5\}$.
L'ensemble de $A \times B \times C$ est constitué de tous les triplets $(a, b, c)/a \in A, b \in B, c \in C$.
Quel serait alors le nombre d'éléments de $A \times B \times C$.
Un moyen commode de calculer $A \times B \times C$ est de considérer le diagramme ci-dessous qu'on appelle "diagramme arborescent".

Il est facile alors de voir que le nombre de triplets formés à partir des éléments de A, B, C est de $3 \times 2 \times 3$. D'où le principe fondamental de l'analyse combinatoire :
Si une procédure quelconque peut être représentée de n_1 façons différentes, après cette procédure, une seconde procédure peut être représentée de n_2 façons différentes et si ensuite une troisième procédure peut être représentée de n_3 façons différentes et ainsi de suite, alors le nombre de façons différentes permettant d'exécuter les procédures dans l'ordre indiqué est égal au produit : $n_1 \times n_2 \times n_3$.

Exemple 1. *Un système d'immatriculation comprend 4 chiffres dont le premier est non nul, suivis de 2 lettres distinctes, différentes de I et O. Quel est le nombre de plaques d'immatriculation ?*
Il y a donc $9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 24 \times 23 = 4968000$ *plaques différentes.*

3 Arrangements

Soit E un ensemble de n éléments discernables (différents). $E = \{a, b, c, ...s\}$.

3.1 Arrangements avec répétition

On appelle arrangement avec répétition de p éléments choisis parmi n, une disposition ordonnée avec répétition de p parmi les n éléments.
On note L_n^p le nombre d'arrangements avec répétition de p éléments parmi n.

Théorème 1. *Le nombre d'arrangements avec répétition, notée L_n^p, de p éléments choisis parmi les n éléments est* $L_n^p = \underbrace{n \times n \times ... \times n}_{p\ fois} = n^p$.

La démonstration de ce théorème découle simplement du principe multiplicatif.

Exemple 2. *On jette quatre dés discernables et on appelle résultat, une suite ordonnée des quatre points amenés. Combien y a-t-il de résultats possibles ?*
Chaque dé comporte six faces, donc le nombre de résultats possibles est : $L_6^4 = 6^4 = 1296$.

Exemple 3. *De combien de manières différentes peut-on tirer successivement et avec remise, trois boules dans une urne qui contient quatre boules numérotées de 1 à 4 ?*
Le nombre de tirages possibles est : $L_4^3 = 4^3 = 64$.

3.2 Arrangements sans répétition

On appelle arrangement sans répétition ou seulement arrangement de p éléments choisis parmi n, une disposition ordonnée sans répétition de p parmi les n éléments de E.
Dans un arrangement sans répétition, aucun élément n'est répété plus d'une fois donc $1 \leq p \leq n$.
On note A_n^p le nombre d'arrangements sans répétition de p éléments parmi n.

Théorème 2. *Le nombre d'arrangements de p objets parmi un ensemble de n objets distincts est :*
$A_n^p = n(n-1)(n-2)...(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$

Démonstration. Soit $(a_1, a_2, ..., a_p)$ un arrangement sans répétition de p éléments parmi n, donc $a_1 \neq a_2 \neq ... \neq a_p$.
a_1 est choisi de n façons différentes,
a_2 est choisi de $n-1$ façons différentes,puisque $a_1 \neq a_2$,
a_3 est choisi de $n-2$ façons différentes,puisque $a_1 \neq a_2 \neq a_3$,
$\vdots \;\vdots$
a_p est choisi de $n-(p-1)$ façons différentes,puisque $a_1 \neq a_2 \neq ... \neq a_{p-1} \neq a_p$.
Donc d'après le P.F.A.C, il y a $n(n-1)(n-2)...(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$. □

Exemple 4. *Un enfant colorie cinq cases numérotés de* 1 *à* 5 *et dispose de* 8 *couleurs qu'il utilise au hasard.*
Combien de dessins peut-il réaliser s'il n'utilise pas deux fois la même couleur ?
Le nombre de dessins est : $A_8^5 = \frac{8!}{(8-5)!} = 6720$.

Exemple 5. *De combien de manières différentes peut-on tirer successivement et sans remise, trois boules dans une urne qui contient quatre boules numérotées de 1 à 4 ?*
Le nombre de tirages possibles est : $A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} == 24$.

3.3 Permutations sans répétition

On appelle permutations sans répétitions ou seulement Permutations de ces n éléments, une disposition ordonnée de l'ensemble des n éléments ; chaque élément figure dans un ordre bien déterminé une fois et une seule.

Théorème 3. *Le nombre de permutations de ces* n *éléments est* $p_n = n!$.

Démonstration. Il est clair qu'une permutation de n éléments est un arrangement sans répétition de n éléments parmi n donc, le nombre de permutations de n éléments est $A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$. □

Exemple 6. *De combien de manières différentes peut-on placer librement 10 hommes, 8 femmes et 7 enfants, sur une ligne ?*
Le nombre de placements possibles est : $(10+8+7)! = 25!$.

3.4 Permutations avec répétition

Soit $E = \{ \underbrace{(a, a, ..., a)}_{\alpha_1}, \underbrace{(b, b, ..., b)}_{\alpha_2}, ... \underbrace{(s, s, ..., s)}_{\alpha_k}\}$ avec $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k = n = Card(E)$.

l'ensemble E contenant des éléments discernables et des éléments indiscernables, toute permutation de ses éléments sera forcément une permutation avec répétition

Théorème 4. *Le nombre de permutations avec répétition des éléments de l'ensemble de E s'écrit :* $\mathcal{P} = \frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!...\alpha_k!}$.

Exemple 7. *Combien de mots (sans tenir compte du sens) peut-on former avec les lettres du mot PAPA.*
les lettres du mot PAPA constituent un ensemble de 4 éléments qu'on peut diviser en 2 groupes identiques. Ainsi le nombre de mots possibles est :
$\mathcal{P} = \frac{4!}{2!2!} = 6$.

4 Combinaisons

4.1 Combinaisons sans répétition

On appelle combinaison de p objets pris parmi n objets distincts, tout groupe que l'on peut former en prenant p de ces objets sans tenir compte de leur ordre.
Notons par C_n^p le nombre de combinaisons de p éléments choisis parmi n.

Théorème 5. *le nombre de combinaisons de p éléments choisis parmi n est*

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Les coefficients C_n^p sont aussi appelés coefficients binomiaux. Ils sont parfois notés $\binom{n}{p}$.

Propriétés 1) Pour tout n et $p \in \mathbb{N}$, tels que $p \leq n$, on a $C_n^{n-p} = C_n^p$.
2) Pour tout n et $p \in \mathbb{N}$, tels que $p \leq n-1$, on a $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$.
3) Pour tout a, $b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a la formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}.$$

En posant dans cette formule :
- $a = b = 1$, on obtient $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$.
- $a = b = -1$, on obtient $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0$.

Exemple 8. *Dans une urne se trouvent six boules blanches numérotées de* 1 *à* 6 *et quatre boules rouges numérotées de* 1 *à* 4*. On extrait simultanément quatre boules de l'urne. Quel est le nombre de tirages possibles ?*
Il y a $C_{10}^4 = \frac{10!}{4!6!} = 210$ *tirages possibles.*

4.2 Combinaisons avec répétition

On appelle combinaison avec répétition de p éléments choisis parmi n, une disposition non ordonnée avec répétition de p éléments choisis parmi n, autrement dit, une combinaison avec répétition est un choix quelconque de p éléments parmi n, certains de ces éléments pouvant y figurer plusieurs fois.

Théorème 6. *Le nombre de combinaisons avec répétition de p éléments parmi n est* $K_n^p = C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$

Exemple 9. *Quel est le nombre de pièces dans un jeu de dominos ?*
Une pièce de domino est une disposition non ordonnée avec répétition de 2 éléments choisis parmi 7 c.à.d $\{blanc, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. *Donc, il y a* $K_7^2 = C_8^2 =$ 28 *pièces.*

4.3 Exercices

Exercice 1. *Dans un meeting d'athlétisme, 8 couloirs sont numérotés de* 1 *à* 8. *Trouver le nombre de possibilités de placer les coureurs si :*
1. On a 8 *coureurs.*
2. On a seulement 5 *coureurs qu'on peut placer dans* 5 *couloirs différents quelconques.*
3. On a 10 *coureurs, de telle manière que* 2 *coureurs doivent être placés ensembles sur le couloir* 3 *et sur le couloir* 8.
4. On a 2 *équipes, chacune de* 4 *coureurs, les membres d'une même équipe ne doivent pas être côte à côte.*

Exercice 2. *Un étudiant doit répondre à* 5 *questions sur* 8 *d'un examen donné.*
1. Combien a-t-il de choix possibles ?
2. Combien de choix possibles, s'il doit répondre exactement à 2 *des* 4 *premières questions ?*
3. Combien de choix possibles, s'il doit répondre à au moins une question parmi les 3 *premières ?*

Exercice 3. *Une classe a reçu* 4 *billets pour le cirque. Sachant que cette classe est composée de* 20 *élèves, calculer le nombre de façons de distribuer ces* 4 *billets dans chacun des cas suivants : 1. les billets sont numérotés et chaque élève ne peut recevoir qu'un seul billet ;*
2. les billets sont numérotés et chaque élève peut recevoir plusieurs billets ;
d) les billets ne sont pas numérotés et chaque élève ne peut recevoir qu'un seul billet.

Exercice 4. *On forme des nombres de* 7 *chiffres différents avec les chiffres* 2, 3, 4, 5, 6, 7 *et* 8.

1. Combien y en a-t-il ?

2. Combien de ces nombres ont les chiffres $4, 5$ *et* 6 *ensemble ?*

3. Combien de ces nombres ont les chiffres $4, 5$ *et* 6 *ensemble et dans cet ordre ?*