CHAPITRE 3

Processus $ARMA$

Dans ce chapitre, une famille importante de processus aléatoires est introduite, les processus $ARMA$ ou processus autorégressifs moyenne mobile. Cette famille joue un rôle clé dans la modélisation de séries chronologiques qui ne présentent pas de non linéarités dans leur structure.

1 Processus $ARMA(p, q)$

Dans le chapitre 2, le processus $ARMA(1, 1)$ a été introduit. Des propriétés clés ont été présentées comme l'existence et l'unicité de la solution stationnaire au second ordre des équations, ainsi que les concepts de causalité et d'inversibilité du processus. Ces notions vont être étendues à un processus $ARMA(p, q)$.

Définition 1 *Un processus $ARMA(p, q)$ est un processus $\{X_t\}$ qui est solution de l'équation aux différences stochastiques*

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \epsilon_{t-q} \qquad (1)$$

L'équation (1) s'écrit de façon compacte

$$\Phi(B) X_t = \Theta(B) \epsilon_t \qquad (2)$$

$\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p$ *est appelé : le polynôme autorégressif d'ordre p.*

$\Theta(B) = 1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q$ *est appelé : le polynôme moyenne mobile d'ordre q.*

$\Phi(z) = 1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p$ *et* $\Theta(z) = 1 + \theta_1 z + \cdots + \theta_q z^q$ *n'ont pas de facteurs communs.*

$\{\epsilon_t\} \sim WN(0, \sigma_\epsilon^2)$. $\{X_t\}$ *est un processus $ARMA$ d'ordres (p, q).*

- Si $\Theta(z) \equiv 1$, i.e., si $q = 0$, le processus est un $AR(p)$, i.e., un processus autorégressif d'ordre p. Il est solution de l'équation

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \epsilon_t$$

- Si $\Phi(z) \equiv 1$, i.e., si $p = 0$, le processus est un $MA(q)$, i.e., un processus moyenne mobile d'ordre q. Il est solution de l'équation

$$X_t = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \epsilon_{t-q}$$

Proposition 2 *Un processus $ARMA(p, q)$ est* ***stationnaire*** *au second ordre si les racines de $\Phi(z)$ sont telles que $|z| \neq 1$. Ou encore $\Phi(z) = 1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p \neq 0$ pour tout $|z| = 1$.*

Proposition 3 *Un processus $ARMA(p,q)$ est* ***inversible*** *si les racines de $\Theta(z)$ sont à l'extérieur du disque unité*

i.e., $\Theta(z) = 0 \Rightarrow |z| > 1.$

Causalité

Un processus $\{X_t\}$ est un processus $ARMA(p,q)$ causal ou est une fonction causale de $\{\epsilon_t\}$ s'il existe des constantes $\{\psi_j\}$ telles que $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$ et $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j}, \forall t.$

Remarque 4 *On dira que $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j}$* ***est la représentation*** **MA**(∞) *du processus $ARMA(p,q)$.*

La causalité est équivalente à la condition

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= 1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p = 0 \Rightarrow |z| > 1 \\ & \quad \text{ce qui est équivalent à} \\ \Phi(z) &= 1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p \neq 0 \text{ pour tout } |z| \leq 1 \end{aligned}$$

Un processus $ARMA(p,q)$ est donc causal si les racines du polynôme autorégressif sont à l'extérieur du disque unité.

La suite des constantes $\{\psi_j\}$ est déterminée par la relation $\Psi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j = \frac{\Theta(z)}{\Phi(z)}$ ou de façon équivalente par l'identité $(1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p)(\psi_0 + \psi_1 z + \psi_2 z^2 + \cdots) = (1 + \theta_1 z + \theta_2 z^2 + \cdots + \theta_q z^q)$.

En identifiant les coefficients des $z^j, j = 0, 1, 2, ...$, on déduit que

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = \psi_0 \\ \theta_1 = \psi_1 - \psi_0 \phi_1 \\ \theta_2 = \psi_2 - \psi_1 \phi_1 - \psi_0 \phi_2 \\ \qquad \vdots \end{array} \right. \text{ ou, de façon équivalente } \left\{ \begin{array}{l} \psi_j - \sum_{k=1}^{p} \phi_k \psi_{j-k} = \theta_j, j = 0, 1, 2, ... \\ \theta_0 = 1, \\ \psi_l =: 0 \text{ si } l < 0, \ \theta_l := 0 \text{ si } l > q. \end{array} \right.$$

On retiendra plus facilement les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_j = \phi_1 \psi_{j-1} + \phi_2 \psi_{j-2} + \cdots + \phi_p \psi_{j-p} + \theta_j, \ j = 0, 1, 2, .., q, \ \theta_0 = 1, \psi_l = 0 \text{ si } l < 0 \\ \psi_j = \phi_1 \psi_{j-1} + \phi_2 \psi_{j-2} + \cdots + \phi_p \psi_{j-p}, \ j = q+1, q+2, ... \ \theta_l = 0 \text{ si } l > q \end{array} \right.$$

Inversibilité

L'inversibilité, qui permet d'exprimer ϵ_t en fonction de $X_s, s \leq t$, possède une caractérisation similaire en termes du polynôme moyenne mobile.

Un processus $ARMA(p,q)$ est inversible s'il existe des constantes $\{\pi_j\}$ telles que $\sum_{j=0}^{\infty} |\pi_j| < \infty$ et $\epsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j}, \forall t.$

Remarque 5 *On dira que* $\epsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j}$ *ou encore* $X_t = -\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j X_{t-j} + \epsilon_t$ ***est la représentation* AR**(∞) *du processus* $ARMA(p,q)$.

L'inversibilité est équivalente à la condition

$$\begin{aligned} \Theta(z) &= 1 + \theta_1 z + \cdots + \theta_p z^p = 0 \Rightarrow |z| > 1 \\ & \quad \text{ce qui est équivalent à} \\ \Theta(z) &= 1 + \theta_1 z + \cdots + \theta_p z^p \neq 0 \text{ pour tout } |z| \leq 1 \end{aligned}$$

Un processus $ARMA(p,q)$ est donc inversible si les racines du polynôme moyenne mobile sont à l'extérieur du disque unité.

La suite des constantes $\{\pi_j\}$ est déterminée par la relation $\Pi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j = \frac{\Phi(z)}{\Theta(z)}$ ou de façon équivalente par l'identité $(1 + \theta_1 z + \cdots + \theta_p z^p)(\pi_0 + \pi_1 z + \pi_2 z^2 + \cdots) = (1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p)$.

En identifiant les coefficients des $z^j, j = 0, 1, 2, ...$, on déduit que

$$\begin{cases} \pi_j - \sum_{k=1}^{p} \theta_k \pi_{j-k} = -\phi_j, j = 0, 1, 2, ... \\ \phi_0 = 1, \\ \pi_l := 0 \text{ si } l < 0, \ \phi_l := 0 \text{ si } l > p. \end{cases}$$

Remarque 6 *Notons que la causalité et l'inversibilité ne sont pas des propriétés du processus* $\{X_t\}$ *seul, mais plutôt de la relations entre les deux processus* $\{X_t\}$ *et* $\{\epsilon_t\}$ *qui apparaissent dans les équations définissant le processus* $ARMA$.

Remarque 7 *Un processus* $AR(p)$ *est toujours inversible.*

Remarque 8 *Un processus* $MA(q)$ *est toujours stationnaire et causal.*

2 Fonction d'autocorrélation (ACF) et fonction d'autocorrélation partielle $(PACF)$ d'un processus $ARMA(p,q)$

2.1 Calcul de la fonction d'autocovariance $FACV$ ou $ACVF$ (en anglais)

Soit un processus $\{X_t\}$ solution des équations $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \epsilon_{t-q}$, $\{\epsilon_t\} \sim WN(0, \sigma_\epsilon^2)$. L'hypothèse de causalité implique que $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j}, \forall t$, avec $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j = \frac{\Theta(z)}{\Phi(z)}, |z| \leq 1$.

1ère méthode

$E(X_t) = 0, \forall t$ (voir chapitre 2). et $\gamma_h = E(X_t X_{t-h}) = E(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j} \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \epsilon_{t-h-k})$

$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \psi_j \psi_k E(\epsilon_{t-j}\epsilon_{t-h-k})$ les seuls termes non nuls sont ceux pour lesquels $t-j = t-h-k \Leftrightarrow j = h+k$. Il y a une relation entre les indices. La somme double se réduit donc à une somme simple. $\gamma_h = E(X_t X_{t-h}) = \sigma_\epsilon^2 \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \psi_{k+h}$. Si on considère $\gamma_{-h} = E(X_t X_{t+h}) = E(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j} \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \epsilon_{t+h-k}) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \psi_j \psi_k E(\epsilon_{t-j}\epsilon_{t+h-k})$ les seuls termes non nuls sont ceux pour lesquels $t-j = t+h-k \Leftrightarrow j = k-h$.

Et donc $\gamma_{-h} = E(X_t X_{t+h}) = \sigma_\epsilon^2 \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \psi_{k-h}$. $\gamma_h = \gamma_{-h} = \sigma_\epsilon^2 \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \psi_{k+|h|}$.

2ème méthode

Soit le modèle $X_t - \phi_1 X_{t-1} - \cdots - \phi_p X_{t-p} = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \epsilon_{t-q}$, $\{\epsilon_t\} \sim WN(0, \sigma_\epsilon^2)$. Multiplions les deux membres par X_{t-h} puis appliquons l'opérateur E. Il vient :

$$\begin{aligned}\gamma_h - \phi_1 \gamma_{h-1} - \cdots - \phi_p \gamma_{h-p} &= \sigma_\epsilon^2 \sum_{j=0}^{\infty} \theta_{h+j} \psi_j \text{ si } 0 \leq h < m = \max(p, q+1).\\ \gamma_h - \phi_1 \gamma_{h-1} - \cdots - \phi_p \gamma_{h-p} &= 0 \text{ si } h \geq m.\end{aligned}$$

Preuve $E(X_t X_{t-h}) - \phi_1 E(X_{t-1} X_{t-h}) - \cdots - \phi_p E(X_{t-p} X_{t-h}) = E(\epsilon_t X_{t-h}) + \theta_1 E(\epsilon_{t-1} X_{t-h}) + \cdots + \theta_q E(\epsilon_{t-q} X_{t-h})$

$\Leftrightarrow \gamma_h - \phi_1 \gamma_{h-1} - \cdots - \phi_p \gamma_{h-p} = E(\epsilon_t \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-h-j}) + \theta_1 E(\epsilon_{t-1} \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-h-j}) + \cdots + \theta_q E(\epsilon_{t-q} \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-h-j})$

$\Leftrightarrow \gamma_h - \phi_1 \gamma_{h-1} - \cdots - \phi_p \gamma_{h-p} = \sigma_\epsilon^2 (\theta_h \psi_0 + \theta_{h+1} \psi_1 + \cdots + \theta_{h+q-h} \psi_{q-h})$ ce qui suppose que $p - h \geq 0$ et que $q - h > 0$, ce qui équivaut à $0 \leq h \leq p$ et $0 \leq h < q$.

D'où $\gamma_h - \phi_1 \gamma_{h-1} - \cdots - \phi_p \gamma_{h-p} = \sigma_\epsilon^2 (\theta_h \psi_0 + \theta_{h+1} \psi_1 + \cdots + \theta_{h+q-h} \psi_{q-h})$ pour $0 \leq h < m = \max(p, q+1)$. $\psi_j = 0$ si $j < 0$ et $\theta_j = 0$ si $j > q$.

Si $h \geq m$, le membre de droite est nul, i.e.,

$$\gamma_h = \phi_1 \gamma_{h-1} + \cdots + \phi_p \gamma_{h-p} \text{ si } h \geq m \tag{3}$$

. (3) consiste en un ensemble d'équations aux différences à coefficients constants. Pour trouver la solution, on pose $\gamma_h = r^h$. Ceci conduit à l'équation :

$$r^h - \phi_1 r^{h-1} - \phi_2 r^{h-2} - \cdots - \phi_p r^{h-p} = 0 \Leftrightarrow r^p - \phi_1 r^{p-1} - \phi_2 r^{p-2} - \cdots - \phi_p = 0 \tag{4}$$

Si on suppose que ce polynôme a p racines distinctes $r_1, r_2, \cdots, r_p$ alors il existe des constantes $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ telles que

$$\gamma_h = \alpha_1 r_1^h + \cdots + \alpha_p r_p^h$$

Remarque 9 $r^p - \phi_1 r^{p-1} - \phi_2 r^{p-2} - \cdots - \phi_p = 0 \Leftrightarrow r^p(1 - \phi_1 r^{-1} - \phi_2 r^{-2} - \cdots - \phi_p r^{-p}) = 0 \Rightarrow (1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \cdots - \phi_p z^p) = 0$.

Donc les racines de (4) *sont les inverses des racines du polynôme autorégressif.*

Exemple 10 *1) Soit le processus* $ARMA(1,1)$ *supposé causal :*

$$X_t = \phi X_{t-1} + \epsilon_t + \theta \epsilon_{t-1}, \ \{\epsilon_t\} \sim WN(0, \sigma_\epsilon^2)$$

Calculer γ_0 *en utilisant la* <u>*1ère méthode*</u>*, puis calculer* γ_1 *et* $\gamma_h, h \geq 2$. *Utiliser la* <u>*2ème méthode*</u>*.*

2) Soit le processus $MA(q)$

$$X_t = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \epsilon_{t-q}, \ \{\epsilon_t\} \sim WN(0, \sigma_\epsilon^2)$$

Montrer que $\gamma_h = \begin{cases} \sigma_\epsilon^2 \sum\limits_{j=0}^{q-|h|} \theta_j \theta_{j+|h|} \ si \ |h| \leq q, \ \theta_0 = 1 \\ 0 \ si \ |h| > q \end{cases}$

Remarque 11 *On voit que le modèle* $MA(q)$ *se distingue par le fait que les autocovariances s'annulent après le retard* q*. On dit qu'elles présentent un cut-off ou une rupture apès le retard* q*. Donc les données de séries chronologiques pour lesquelles la fonction d'autocovariance empirique a de petites valeurs au delà du retard* q *suggèrent qu'un modèle approprié pour ces données pourrait être un* $MA(q)$ *ou un* $MA(q-1), \cdots$.

On retiendra que tout processus stationnaire de moyenne nulle, dont les autocorrélations s'annulent pour des retards $h \geq q$ *peut être représenté comme un processus moyenne mobile d'ordre* $\leq q$.

Exemple 12 *Soit le processus* $AR(2)$: $X_t = 0.7 X_{t-1} - 0.1 X_{t-2} + \epsilon_t, \{\epsilon_t\} \sim WN(0, \sigma_\epsilon^2)$. *Calculer la fonction d'autocovariance.*

Solution 13 *Ce processus est-il stationnaire et causal ?*

$\Phi(z) = 0 \Leftrightarrow 1 - 0.7z + 0.1z^2 = 0 \Rightarrow \Delta = (-0.7)^2 - 4 \times 1 \times 0.1 = 0.09 = (0.3)^2$.

$z_1 = \frac{0.7+0.3}{2\times 0.1} = 5$ *et* $z_2 = \frac{0.7-0.3}{2\times 0.1} = 2$. *Ce processus est bien causal car* $|z_i| > 1, i = 1, 2$.

Posons $E(X_t) = \mu$. *Il vient* $\mu = 0.7\mu - 0.1\mu \Leftrightarrow 0.4\mu = 0 \Rightarrow \mu = 0$. *Donc* $\gamma_h = Cov(X_t, X_{t-h}) = E(X_t X_{t-h})$

$= E(0.7X_{t-1} - 0.1X_{t-2} + \epsilon_t)(X_{t-h})$. *On obtient* $\gamma_h = 0.7\gamma_{h-1} - 0.1\gamma_{h-2} + E(\epsilon_t X_{t-h})$.

Pour $h = 0$, $\gamma_0 = 0.7\gamma_1 - 0.1\gamma_2 + \sigma_\epsilon^2$.

Pour $h = 1$, $\gamma_1 = 0.7\gamma_0 - 0.1\gamma_1$

Pour $h = 2$, $\gamma_2 = 0.7\gamma_1 - 0.1\gamma_0$.

De la 2ème équation, on tire $\gamma_1 = \frac{0.7}{1.1}\gamma_0 = 0.636\,36\gamma_0$*. On substitue* γ_1 *par sa valeur dans la 1ère et la 3ème équations. On obtient :* $\gamma_0 = \frac{(0.7)^2}{1.1}\gamma_0 - 0.1\gamma_2 + \sigma_\epsilon^2$ *et*

$$\gamma_2 = (\frac{(0.7)^2}{1.1} - 0.1)\gamma_0.$$

D'où $\left[1 - \frac{(0.7)^2}{1.1} + 0.1(\frac{(0.7)^2}{1.1} - 0.1)\right]\gamma_0 = \sigma_\epsilon^2 \Leftrightarrow 0.589\,09\gamma_0 = \sigma_\epsilon^2 \Leftrightarrow \gamma_0 = 1.697\,5\sigma_\epsilon^2$

$\gamma_1 = \frac{0.7}{1.1} \times 1.697\,5\sigma_\epsilon^2 = 1.080\,2\sigma_\epsilon^2$ *et* $\gamma_2 = (\frac{(0.7)^2}{1.1} - 0.1) \times 1.697\,5\sigma_\epsilon^2 = 0.586\,41\sigma_\epsilon^2$*.*

Pour calculer les autres autocovariances qui vérifient la relation $\gamma_h = 0.7\gamma_{h-1} - 0.1\gamma_{h-2}$*, posons*

$$\gamma_h = r^h$$

On obtient $r^h - 0.7r^{h-1} + 0.1r^{h-2} = 0 \Rightarrow r^2 - 0.7r + 0.1 = 0$ *dont les racines sont* $r_1 = \frac{1}{z_1} = 0.2$ *et* $r_2 = \frac{1}{z_2} = 0.5$*. D'où*

$$\gamma_h = C_1(0.2)^h + C_2(0.5)^h$$

On détermine les constantes C_1 *et* C_2 *en faisant* $h = 1$ *puis* $h = 2$ *(Rappel* $\gamma_1 = 1.080\,2\sigma_\epsilon^2$ *et* $\gamma_2 = 0.586\,41\sigma_\epsilon^2$*).*

Exercice 14 *Calculer la fonction d'autocovariance du processus* $ARMA(2,1)$ *suivant*

$$X_t = X_{t-1} - 0.24X_{t-2} + \epsilon_t + 0.4\epsilon_{t-1}$$

2.2 La fonction d'autocorrélation

La fonction d'autocorrélation, pour un processus stationnaire au second ordre, est définie par

$$\rho_h = \frac{\gamma_h}{\gamma_0}, h \in \mathbb{Z} \text{ et } \rho_{-h} = \rho_h$$

On estime $\rho_h$par $\widehat{\rho}_h = \frac{\widehat{\gamma}_h}{\widehat{\gamma}_0}$ déjà définie dans le chapitre 1 et rappelée dans le chapitre 2 et appelée **fonction d'autocorrélation empirique**.

2.2.1 La fonction d'autocorrélation empirique d'un processus $MA(q)$

Soit une série chronologique $\{x_1, \cdots, x_n\}$. Une approche pour ajuster un modèle à cette série de données est de **comparer** la fonction d'autocorrélation empirique à la fonction d'autocorrélation (ACF) du modèle. En particulier, si l'ACF empirique est telle que $\widehat{\rho}_h \neq 0$ pour $0 \leq h \leq q$ et est négligeable pour $h > q$ alors un modèle $MA(q)$ pourrait fournir une bonne représentation des données. Dans le chapitre 2, la formule de **Bartlett** a été donnée. Elle implique que, pour n grand (asymptotiquement) l'ACF d'un processus $MA(q)$ est telle que

$$\sqrt{n}\widehat{\rho}_h \sim \mathcal{N}(0, w_{hh})$$

où $w_{hh} = 1 + 2\rho_1^2 + \cdots + 2\rho_q^2$ pour $h > q$. Cela signifie que, si le processus est réellement un $MA(q)$, alors

pour $h > q$, $\widehat{\rho}_h \in]-1.96\sqrt{\dfrac{w_{hh}}{n}}, +1.96\sqrt{\dfrac{w_{hh}}{n}}[$ avec un niveau de confiance $1-\alpha = 0.95$

On utilise ce résultat pour effectuer des tests de H_0 : "$\rho_h = 0$" vs H_1 : "$\rho_h \neq 0$" pour $h > q$, i.e., la série chronologique provient-elle d'un processus $MA(q)$? La statistique de test est

$$\frac{\widehat{\rho}_h}{\sqrt{\frac{1}{n}(1 + \widehat{\rho}_1^2 + \cdots + \widehat{\rho}_q^2)}} \text{ pour } h > q$$

TP à rendre
1) Simuler un processus $MA(2)$.
2) Calculer les autocorrélations $\widehat{\rho}_h, h = 1, 2, \cdots$
3) Tester la significativité de $\widehat{\rho}_h, h = 1, 2, \cdots$

2.3 La fonction d'autocorrélation partielle

La fonction d'autocorrélation est un outil important dans **l'identification de l'ordre d'un modèle autorégressif** susceptible de représenter l'évolution empirique de la série chronologique.

Pour cela, considérons une suite de modèles autorégressifs telle que

$$\begin{aligned} X_t &= \varphi_{h1}X_{t-1} + \varphi_{h2}X_{t-2} + \cdots \varphi_{hh}X_{t-h} + \epsilon_t, t \in \mathbb{Z} \quad (5) \\ \epsilon_t &\sim \mathcal{N}(0, \sigma_h^2),\ \varphi_{hj} \text{ est le } j-\text{ème coefficient de ce modèle, } j = 1, \cdots, h \text{ et } h = 1, 2, \cdots \end{aligned}$$

et notons $\widehat{X}_{t-1}(1) = \mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_{t-1})$ la prévision de X_t où $\mathcal{F}_{t-1}$ désigne l'information disponible jusqu'à l'instant $t-1$. Ainsi $\widehat{X}_{t-1}(1) = \varphi_{h1}X_{t-1} + \varphi_{h2}X_{t-2} + \cdots \varphi_{hh}X_{t-h}$.

Remarque 15 *On retiendra que* $\mathbb{E}(X_{t+h} \mid \mathcal{F}_t) = \begin{cases} \widehat{X}_t(h) & si\ h > 0 \\ X_{t+h} & si\ h \leq 0 \end{cases}$ *et*
$\mathbb{E}(\epsilon_{t+h} \mid \mathcal{F}_t) = \begin{cases} 0 & si\ h > 0 \text{ la prévision d'un bruit blanc est nulle} \\ \epsilon_{t+h} & si\ h \leq 0 \end{cases}$

Définition 16 *On appelle* ***fonction d'autocorrélation partielle*** *($PACF$ en anglais) la fonction définie par*

$$\varphi_{hh}, h = 0, 1, 2, \cdots$$

$\varphi_{00} = 1$ *et* φ_{hh} *est la dernière composante de* $\underline{\varphi}_h$ *où* $\underline{\varphi}_h$ *vérifie*

$$\begin{cases} \gamma_1 = \varphi_{h1}\gamma_0 + \varphi_{h2}\gamma_1 + \cdots + \varphi_{hh}\gamma_{h-1} \\ \gamma_2 = \varphi_{h1}\gamma_1 + \varphi_{h2}\gamma_0 + \cdots + \varphi_{hh}\gamma_{h-2} \\ \gamma_3 = \varphi_{h1}\gamma_2 + \varphi_{h2}\gamma_1 + \cdots + \varphi_{hh}\gamma_{h-3} \\ \vdots \\ \gamma_h = \varphi_{h1}\gamma_{h-1} + \varphi_{h2}\gamma_{h-2} + \cdots + \varphi_{hh}\gamma_0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \Gamma_h \underline{\varphi}_h = \gamma_h(1).$$

$\Gamma_h = (\gamma_{i-j})_{\substack{1\leq i\leq h \\ 1\leq j\leq h}}$, $\underline{\varphi}_h = (\varphi_{h1}, \varphi_{h2} \cdots, \varphi_{hh})'$ et $\gamma_h(1) = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_h)'$. Voir équation (13) chapitre 2.

En divisant par γ_0, le système s'écrit :

$$\begin{cases} \rho_1 = \varphi_{h1}\rho_0 + \varphi_{h2}\rho_1 + \cdots + \varphi_{hh}\rho_{h-1} \\ \rho_2 = \varphi_{h1}\rho_1 + \varphi_{h2}\rho_0 + \cdots + \varphi_{hh}\rho_{h-2} \\ \rho_3 = \varphi_{h1}\rho_2 + \varphi_{h2}\rho_1 + \cdots + \varphi_{hh}\rho_{h-3} \\ \vdots \\ \rho_h = \varphi_{h1}\rho_{h-1} + \varphi_{h2}\rho_{h-2} + \cdots + \varphi_{hh}\rho_0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{R}_h \underline{\varphi}_h = \boldsymbol{\rho}_h(1) \tag{6}$$

. $\mathbf{R}_h = (\rho_{i-j})_{\substack{1\leq i\leq h \\ 1\leq j\leq h}}$, $\underline{\varphi}_h = (\varphi_{h1}, \varphi_{h2} \cdots, \varphi_{hh})'$ et $\rho_h(1) = (\rho_1, \rho_2, ..., \rho_h)'$.

Remarque 17 *Ces équations sont appelées **équations de Yule-Walker**.*

Remarque 18 *φ_{hh} est la corrélation entre les erreurs de prévisions $X_h - \mathbb{E}(X_h \mid X_{h-1}, \cdots, X_1)$ et $X_0 - \mathbb{E}(X_0 \mid X_{h-1}, \cdots, X_1)$.*

Remarque 19 *On sait que* $\varphi_{hh} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{h-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{h-3} & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \rho_{h-1} \\ \rho_{h-1} & \rho_{h-2} & \cdots & \rho_1 & \rho_h \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{h-2} & \rho_{h-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{h-3} & \rho_{h-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \rho_1 \\ \rho_{h-1} & \rho_{h-2} & \cdots & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$ *(ceci a déjà été rappelé)*

Pour $h = 1$, $\varphi_{11} = \rho_1$.

Pour $h = 2$, $\varphi_{22} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$, *Pour* $h=3$, $\varphi_{33}=\dfrac{\begin{vmatrix}1 & \rho_1 & \rho_1\\ \rho_1 & 1 & \rho_2\\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & \rho_1 & \rho_2\\ \rho_1 & 1 & \rho_1\\ \rho_2 & \rho_1 & 1\end{vmatrix}}$. *Lorsque* $h\geq 4$ *le calcul de* φ_{hh} *devient compliqué. L'algorithme de Durbin (1960) permet de parer à cette difficulté.*

Algorithme 20 (de Durbin 1960) *Les coefficients* $\varphi_{h1},\cdots,\varphi_{hh}$ *de la suite de modèles* $AR(h)$ *données par* (5) *et solution des équations de Yule-Walker* (6) *se calculent à l'aide des formules récursives suivantes :*

$$\begin{aligned}\varphi_{hj} &= \varphi_{h-1,j}-\varphi_{hh}\varphi_{h-1,h-j} && (7)\\ \varphi_{11} &= \rho_1 && (8)\\ \varphi_{hh} &= \frac{\rho_h-\sum\limits_{j=1}^{h-1}\varphi_{h-1,j}\rho_{h-j}}{1-\sum\limits_{j=1}^{h-1}\varphi_{h-1,j}\rho_j} && (9)\\ j &= 1,2,...,h-1,\ h=2,3,... && (10)\end{aligned}$$

Remarque 21 *Lorsqu'on dispose d'un ensemble d'observations, on estime et* $\gamma_h,\rho_h=\frac{\gamma_h}{\gamma_0}$ *et* $\varphi_{h1},\varphi_{h2}\cdots,\varphi_{hh}$, $h=1,2,...$ *respectivement par* $\widehat{\gamma}_h,\widehat{\rho}_h=\frac{\widehat{\gamma}_h}{\widehat{\gamma}_0}$ *et* $\widehat{\varphi}_{h1},\widehat{\varphi}_{h2}\cdots,\widehat{\varphi}_{hh}$, $h=1,2,...$

Pour tester $H_0:\varphi_{hh}=0$ *vs* $H_1:\varphi_{hh}\neq 0$ la statistique de test sous H_0 est $\sqrt{n}\widehat{\varphi}_{hh}\overset{\text{Asymptotiquement}}{\sim}\mathcal{N}(0,1)$. Ainsi, on accepte H_0 si $\widehat{\varphi}_{hh}\in]-\frac{1.96}{\sqrt{n}},+\frac{1.96}{\sqrt{n}}[$ au seuil $\alpha=0.05$.

Exercice 22 *Calculer les fonctions d'autocorrélation partielle des processus suivants :*

1) $X_t=0.8X_{t-1}+\epsilon_t$.
2) $X_t=1.1X_{t-1}+-0.18X_{t-2}+\epsilon_t$.
3) $X_t=\epsilon_t-0.8\epsilon_{t-1}$

Exercice 23 *Dans une série de données* $S_1,...,S_{100}$, *on a trouvé*

$$\widehat{\gamma}_0=1382.2,\ \widehat{\gamma}_1=1114.4,\ \widehat{\gamma}_2=591.73,\ \widehat{\gamma}_3=101.03$$

1) Calculer la fonction d'autocorrélation partielle.
2) Proposer un modèle censé refléter l'évolution empirique des données.
$\widehat{\rho}_1=1114.4/1382.2=0.806\,25$
$\widehat{\rho}_2=591.73/1382.2=0.428\,11$
$\widehat{\rho}_3=101.03/1382.2=0.07\,314$
$\widehat{\varphi}_{11}=0.80625$, $\widehat{\varphi}_{22}=\frac{0.42811-0.80625*0.80625}{1-0.80625*0.80625}=-0.634\,15$
$\varphi_{21}=\varphi_{1,1}-\varphi_{22}\varphi_{1,1}=0.806\,25+0.634\,15*0.806\,25=1.\,317\,5$

$\widehat{\varphi}_{33} = \frac{\rho_3 - \sum\limits_{j=1}^{2} \varphi_{2,j}\rho_{3-j}}{1-\sum\limits_{j=1}^{2} \varphi_{2,j}\rho_j} = \frac{0.07\,314 - 1.3175*0.42811 + 0.63415*0.80625}{1-1.3175*0.80625+0.63415*0.42811} = 9.743\,5 \times 10^{-2} = 0.097435$

$\sqrt{100}\widehat{\varphi}_{11} = 8.0625 \notin]-1.96, +1.96[$. *On rejette* H_0. *Donc* $\varphi_{11} \neq 0$

$\sqrt{100}\widehat{\varphi}_{22} = -6.3415 \notin]-1.96, +1.96[$. *On rejette* H_0. *Donc* $\varphi_{22} \neq 0$

$\sqrt{100}\widehat{\varphi}_{33} = 0.097435 \in]-1.96, +1.96[$. *On accepte* H_0. *Donc* $\varphi_{33} = 0$

On ajuste à la série de données le modèle $AR(2)$ *:* $X_t = 1.31175X_{t-1} - 0.63415X_{t-2} + \epsilon_t$

la variance du bruit figure dans l'équation

$$\gamma_0 = 1.3175\gamma_1 - 0.63415\gamma_2 + \sigma_\epsilon^2$$

D'où $\widehat{\sigma}_\epsilon^2 = 1382.2 - 1.3175 * 1114.4 + 0.63415 * 591.73 = 289.22$

Remarque 24 *Les estimations obtenues à l'aide de la méthode de Yule-Walker peuvent être considérées comme des valeurs de démarrage de la méthode des moindres carrés ou de la méthode du maximum de vraisemblance (Master 2).*