Processus aléatoires avec application en finance
Prof Olivier Scaillet
TA Alexandre Engulatov

TP 4 – Correction

Exercice 1

1. Le nombre d'éclats dans un gâteau est donné par un processus de Poisson N de paramètre $\mu = 3 \times 4 \times 0.08$. la probabilité de ne trouver aucun éclat dans le biscuit correspond à
$$P\left(N = 0\right) = e^{-\mu}.$$
2. On cherche λ tel que $P\left(N = 0\right) = e^{-\lambda \times 4 \times 3} \leq 1\%$.

Exercice 2

1. Le nombre de bombes dans un disque de rayon r est donné par le processus de poisson N_r de paramètre $\mu_r = \lambda \times r^2 \times \pi$. La probabilité de ne pas trouver de bombes dans un rayon de 350m est $P(N_{0.35} = 0)$.
2. Soit R est une variable aléatoire représentant la distance pour trouver une bombe. Notez que $P(r < R) = P(N_r = 0)$.

   Ici on cherche la distance moyenne, c'est-à-dire $\mathrm{E}[R]$.
$$\mathrm{E}\left[R\right] = \int_0^\infty P(r < R)\, dr = \int_0^\infty P(N_r = 0)\, dr = \ldots = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{10}} \text{ (cf. cours)}$$
3. On cherche λ tel que $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\lambda}} = 0.1$.

Exercice 3

Tout d'abord, M_t est un processus à l'espérance finie puisque l'espérance d'une v.a. de Poisson est finie. On note $\mathcal{F}_t = \sigma(N_u,\, u \leq t) = \sigma(M_u,\, u \leq t)$. Soit $t > s$. Alors, en décomposant N_t en une partie $\mathcal{F}_s$-mesurable et une partie indépendante de $\mathcal{F}_s$, on a

$$\mathbb{E}(N_t \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(N_t - N_s \mid \mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(N_s \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(N_t - N_s) + N_s = \lambda(t - s) + N_s,$$

d'où le résultat.

On a $N_t = M_t + \lambda t$, où M_t est une martingale et λt est un processus déterministe croissant. La partie prévisible de N_t est donc λt.

Exercice 4

On remarque que M_t est intégrable.

- On note $\mathcal{F}_t^B = \sigma(N_s^B,\, s \le t)$, $\mathcal{F}_t^M = \sigma(N_s^M,\, s \le t)$. $N_t^B - N_s^B$ est indépendant de $\mathcal{F}_s^B$ (N^B étant un processus de Poisson) et de $\mathcal{F}_s^M$ (par hypothèse), et, par conséquent, est indépendant de $\mathcal{F}_s$, puisque $\mathcal{F}_s$ est engendrée par les éléments de $\mathcal{F}_s^B$ et $\mathcal{F}_s^M$. On a
$$\mathbb{E}(N_t^B - N_s^B \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(N_t^B - N_s^B) = \lambda(t-s).$$
De même façon, $\mathbb{E}(N_t^M - N_s^M \mid \mathcal{F}_s) = \lambda(t-s)$. Alors $\mathbb{E}(M_t - M_s \mid \mathcal{F}_s) = 0$.
- Considérons la distribution de M_{t+dt} conditionnnellement à M_t:
$$M_{t+dt} = \begin{cases} M_t + 1, & \text{avec la proba } \lambda dt + o(dt), \\ M_t - 1, & \text{avec la proba } \lambda dt + o(dt), \\ M_t, & \text{avec la proba } 1 - 2\lambda dt + o(dt), \\ \text{autre}, & \text{avec la proba } o(dt). \end{cases}$$
Alors on peut voir M_t comme un processus de Poisson composé, $M_t = \sum_{i=1}^{\tilde{N}_t} U_i$, associé à un processus de Poisson $\tilde{N}_t$ d'intensité 2λ, dont les sauts $U_i = \pm 1$ avec la proba $1/2$. Par la propriété de Markov,
$$\mathbb{E}(M_t - M_s \mid \mathcal{G}_s) = \mathbb{E}(M_t - M_s \mid M_s) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=\tilde{N}_s+1}^{\tilde{N}_t} U_i \mid M_s\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=\tilde{N}_s+1}^{\tilde{N}_t} U_i\right) = 0,$$
car chaque U_i est de moyenne 0.

Exercice 5

On remarque que S_t^2 est intégrable. On a $S_t^2 = (S_t - S_s)^2 + 2(S_t - S_s)S_s + S_s^2$. Conditionnellement à $\mathcal{F}_s = \sigma(S_u,\, u \le s)$, on a
$$\mathbb{E}(S_t^2 \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(S_t - S_s)^2 + 2S_s\mathbb{E}(S_t - S_s) + S_s^2 = \sigma^2(t-s) + S_s^2,$$
puisque $S_t - S_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$ et S_s est $\mathcal{F}_s$-mesurable. En prenant l'espérance par rapport à $\mathcal{G}_s = \sigma(S_u^2,\, u \le s) \subset \mathcal{F}_s$, on a
$$\mathbb{E}(S_t^2 \mid \mathcal{G}_s) = \sigma^2(t-s) + S_s^2.$$
Ceci montre que S_t^2 n'est pas une martingale, mais que $S_t^2 - \sigma^2 t$ l'est.

Exercice 6

Par la propriété de Markov,
$$\mathbb{E}(\lambda^{-(n+1)}\psi(X_{n+1}) \mid X_0, X_1, \ldots, X_n) = \mathbb{E}(\lambda^{-(n+1)}\psi(X_{n+1}) \mid X_n).$$
La dernière expression vaut $\lambda^{-(n+1)} \sum_j p_{X_n j}\psi(j) = \lambda^{-n}\psi(X_n)$.

Exercice 7

$$\mathbb{E}(Z_t) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Z_t \mid \mathcal{F}_0)) = \mathbb{E}(Z_0),$$
i.e. ne dépend pas de t.

Exercice 8

1. Il suffit de vérifier que la connaissance des Z_i pour $i = 1, \ldots, n$ permet de connaître les X_i pour $i = 1, \ldots, n$, et vice versa. Cela provient simplement du fait que $X_n = \sum_{i=1}^n Z_i$ et que $Z_n = X_n - X_{n-1}$. Donc les ensembles d'information $\mathcal{F}_n$ et $\mathcal{G}_n$ sont les mêmes.

2. Il est évident que l'espérance de $|X_n|$ est finie ($|X_n| \leq n$). On a
$$\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_n + \mathbb{E}(Z_{n+1}) = X_n,$$
puisque X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable et Z_{n+1} est indépendante de $\mathcal{F}_n$ et d'espérance nulle.

3. Il est évident que $\mathbb{E}|X_n^2| < \infty$ (car $|X_n^2| \leq n^2$). On a
$$\mathbb{E}(X_{n+1}^2 \mid \mathcal{G}_n) = X_n^2 + 2X_n\mathbb{E}(Z_{n+1} \mid \mathcal{G}_n) + \mathbb{E}(Z_{n+1}^2 \mid \mathcal{G}_n) = X_n^2 + 1,$$
puisque X_n est $\mathcal{G}_n$-mesurable et Z_{n+1} est indépendante de $\mathcal{G}_n$ et d'espérance nulle. Par conséquent, $\mathbb{E}(X_{n+1}^2 - n - 1 \mid \mathcal{G}_n) = X_n^2 - n$.

Exercice 9

Cet exercice se résout de la même manière que l'exercice 5.

1. W_t est une martingale.
2. $W_t - \mu t$ n'est pas une martingale.
3. $W_t^2 - t$ est une martingale.
4. $W_t^3 - 3tW_t$ est une martingale.

Exercice 10

L'incrément $Z_t - Z_s$ pour $s < t$ est la somme de deux lois normales, et suit donc lui aussi une loi normale (voir TP 1). Sa moyenne est 0 et sa variance est égale à $t + s$ comme les variables X_t sont toutes indépendantes. Par conséquent Z_t ne vérifie pas la deuxième propriété d'un mouvement brownien.

Exercice 11

Il est évident que les propriétés d'indépendance des incréments, de normalité à moyenne nulle des incréments, et de continuité des trajectoires ne sont pas affectées par le signe négatif.

Exercice 12

A t fixé, W_t et $\widetilde{W_t}$ suivent des lois normales indépendantes de paramètre $(0, t)$ et nous savons que toute combinaison linéaire de ces deux variables suit aussi une loi normale. Puisque $\mathrm{E}\left[Z_t\right] = 0$ et $\mathrm{Var}\left(Z_t\right) = \rho^2 \mathrm{Var}\left(W_t\right) + \left(1 - \rho^2\right) \mathrm{Var}\left(\widetilde{W_t}\right) = t$, Z_t est une variable aléatoire de loi normale de paramètres $(0, t)$.
Nous allons montrer que Z_t est un mouvement brownien. Pour cela on vérifie les trois points de la définition:

a. Pour $s < t$, $W_t - W_s$ est indépendant de W_s car W est un mouvement brownien, et indépendant de $\widetilde{W}_s$ car les deux mouvements brownien sont indépendants. Ainsi, $W_t - W_s$ est indépendant de Z_s. Il en est de même pour $\widetilde{W}_t - \widetilde{W}_s$, ce qui montre que $Z_t - Z_s$ est indépendant de Z_s.

b. D'après ce que nous venons de remarquer sur la distribution de Z_t , un incrément $Z_t - Z_s$ pour $s < t$ suit une loi normale centrée. Il reste à trouver la variance de cet incrément:

$$\mathrm{Var}\left(Z_t - Z_s\right) = \mathrm{Var}\left(\rho\left(W_t - W_s\right) + \sqrt{1-\rho^2}\left(\widetilde{W}_t - \widetilde{W}_s\right)\right)$$

et par indépendance des deux mouvements browniens,

$$\mathrm{Var}\left(Z_t - Z_s\right) = \rho^2 \mathrm{Var}\left(W_t - W_s\right) + \left(1-\rho^2\right)\mathrm{Var}\left(\widetilde{W}_t - \widetilde{W}_s\right)$$

et finalement par la deuxième propriété des mouvements browniens W_t et $\widetilde{W}_t$,

$$\mathrm{Var}\left(Z_t - Z_s\right) = \rho^2\left(t-s\right) + \left(1-\rho^2\right)\left(t-s\right) = \left(t-s\right)$$

Ce qui démontre le deuxième point de la définition.

c. Z_t étant une combinaison linéaire de processus à trajectoires continues, les trajectoires de Z_t sont continues.