CHAPITRE 4
THEOREMES LIMITES

Dans ce chapitre, on considère des variables aléatoires réelles et on s'intéresse au comportement asymptotique de $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ où $(X_i)_{i \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi $(i.i.d)$.
Les principaux résultats sont la loi des grands nombres (LGN) qui donne le comportement de $\frac{S_n}{n}$ et le théorème central limite (TCL) qui précise ce résultat en montrant que la vitesse de convergence de $\frac{S_n}{n}$ vers $E(X_1)$ est en $\sqrt{n}$.

5-1 Loi faible des grands nombres

C'est une version de la LGN (dite faible) pour la convergence en probabilité.

Théorème

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi avec un moment d'ordre* 2.
Alors

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \overset{p}{=} E(X_1)$$

Démonstration

La variable aléatoire limite est la constante $E(X_1)$ $(= E(X_i)$ pour tout i) car les variables aléatoires X_i ont même loi, donc même espérance). Il s'agit de vérifier

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \lim_{n \longrightarrow +\infty} P\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - E(X_1) \right| \geq \varepsilon \right) = 0$$

Par linéarité, on a

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_1) = E(X_1) \end{aligned}$$

D'autre part, par indépendance des X_i

$$\begin{aligned} V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \\ &= \frac{1}{n^2} nV(X_1) = \frac{V(X_1)}{n} \end{aligned}$$

L'inégalité de Tchebychev appliquée à $Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ donne alors pour tout $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - E(X_1)\right| \geq \varepsilon\right) = P\left(|Y - E(Y)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V(Y)}{\varepsilon^2} \leq \frac{V(X_1)}{n\varepsilon^2}$$

D'où le résultat en faisant tendre n vers l'infini.

5-2 Loi forte des grands nombres

La loi des grands nombres s'énonce aussi pour la convergence presque sûre . On parle alors de LGN forte. Comme la convergence $p.s.$ implique la convergence en probabilité, la LGN forte implique la LGN faible déjà prouvée.

On propose une version (parmi d'autres) de la LGN forte.

Théorème (admis)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi* $(i.i.d.)$ telles que $\exists K > 0, E(X_1) = \mu$ et $E\left(X_n^4\right) \leq K$ pour tout $n \geq 1$.

Soit $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, alors

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{S_n}{n} \overset{p.s.}{=} \mu$$

5-3 Théorème Central Limite (T.C.L.)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi* $(i.i.d.)$d'espérance μ et de variance σ^2.

On note $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ et Z_n les variables associées réduites.

$$Z_n = \frac{\sqrt{n}\left(\overline{X_n} - \mu\right)}{\sigma}$$

Alors pour tout intervalle $[a, b]\,, a < b \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} P\left(Z_n \in [a, b]\right) = P\left(Y \in [a, b]\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\dfrac{t^2}{2}}\, dt$$

où $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

On dit que la v.a. $Z_n = \dfrac{\sqrt{n}\left(\overline{X_n} - \mu\right)}{\sigma}$ converge en loi vers la v.a. Y telle que Y suive la loi normale centrée réduite.