Mathématiques financières (M2-SA)

TD Martinagles-Mouvement Brownien

Présenté par : M. HAMMAD

04 Janvier 2021

Exercice 1 :

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré, τ et ν deux temps d'arrêt de la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, $\mathcal{F}_\tau$ (resp. $\mathcal{F}_\nu$) la tribu des événements antérieurs à τ (resp. ν). Montrer les propriétés suivantes :

i) $\tau \wedge \nu$, $\tau \vee \nu$, $\tau + \nu$ sont des temps d'arrêts pour la même filtration.
ii) Si $\tau \leq \nu$, alors $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\nu$.
iii) $\mathcal{F}_{\tau\wedge\nu} = \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\nu$.
iv) $\{\tau < \nu\}$ et $\{\tau = \nu\}$ appartiennent à $\mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\nu$.

Exercice 2 :

- Soit $Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ (intégrable sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$). On définit la suite (X_n) par $X_n = \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_n)$.
- $X_1, \ldots, X_n$ une famille de v.a sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $X_n \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})\, \forall n \in \mathbb{N}$, centrée et indépendantes 2 à 2. On pose $S_i = X_1 + \cdots + X_i$.

Montrer que $(X_n)_n$ et $(S_n)_n$ sont des martingales.

Exercice 3 :

Soit $(X_n;\, n \in \mathbb{N})$ une suite de variables aléatoires i.i.d (indépendantes et de même loi). on note $m = \mathbb{E}(X_1) < +\infty$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ et $Y_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} iX_i - \frac{n(n+1)}{2}m$.

- Calculer $\mathbb{E}(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n)$.
- Que peut-on dire du processus $(Y_n)_{n\geq 1}$?.

Exercice 4 :

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a. à valeurs $[0, 1]$. On pose $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$. On suppose que $X_0 = a \in [0, 1]$ et que

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = \frac{X_n}{2}|\mathcal{F}_n) = 1 - X_n, \quad \mathbb{P}(X_{n+1} = \frac{1 + X_n}{2}|\mathcal{F}_n) = X_n.$$

1) Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale.
2) Montrer que

$$\mathbb{E}((X_{n+1} - X_n)^2) = \frac{1}{4}\mathbb{E}(X_n(1 - X_n)).$$

Exercice 5 :

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré sur lequel on considère une martingale réelle $(M_n)_{n\geq 0}$ telle que, pour tout $n \geq 0$, $|M_n| \leq K$. On pose

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}(M_k - M_{k-1})$$

Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}-$martingale.

Exercice 6 :

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré sur lequel on considère deux martingales $(X_n)_{n\geq 0}$ et $(Y_n)_{n\geq 0}$ de carré intégrable (éventuellement identiques).

1. Montrer que, pour $m \leq n$, on a $\mathbb{E}(X_m Y_n | \mathcal{F}_m) = X_m Y_m$ $p.s.$
2. Montrer que $\mathbb{E}(X_n Y_n) - \mathbb{E}(X_0 Y_0) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}((X_k - X_{k-1})(Y_k - Y_{k-1}))$.
3. Montrer que $Var(X_n) = Var(X_0) + \sum_{k=1}^{n} Var(X_k - X_{k-1})$.
4. Montrer que les v.a. $X_0, X_k - X_{k-1}$, $k \geq 1$ sont deux à deux orthogonales dans L^2.

Exercice 7 :

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ est un $\mathcal{F}_t-$mouvement brownien standard, montrer que :

- B_t est une $\mathcal{F}_t-$martingale.
- $B_t^2 - t$ est une $\mathcal{F}_t-$martingale.
- $\exp(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t)$ est une $\mathcal{F}_t-$martingale.

Exercice 8 :

Soit $(B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien réel issu de 0 et on note $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle.

1. Calculer pour tout couple (s, t) les quantitées $\mathbb{E}(B_s B_t^2)$, $\mathbb{E}(B_t|\mathcal{F}_s)$ et pour $t \geq s$ $\mathbb{E}(B_t|B_s)$.
2. Calculer $\mathbb{E}(B_t^2 B_s^2)$ sachant que pour une v.a. gaussienne centrée Z de variance σ^2, on a $\mathbb{E}(Z^4) = 3\sigma^4$.
3. Quelle est la loi de $B_t + B_s$?.
4. Soit θ_s une v.a. bornée $\mathcal{F}_s-$mesurable.
   Calculer pour tout $t \geq s$, $\mathbb{E}[\theta_s(B_t - B_s)]$ et $\mathbb{E}[\theta_s(B_t - B_s)^2]$.

Exercice 9 :

Montrer qu'un processus X est un mouvement Brownien si et seulement si

a) Pour tout $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, le vecteur $(X_{t_0}, X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ est un vecteur gaussien centré.

b) $\mathbb{E}(X_t X_s) = s \wedge t$.

c) $X_0 = 0$.

Exercice 10 :

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard réel et on note $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle. Parmi les processus suivants, quels sont ceux qui sont des martingales.

1. $M_t = B_t^3 - 3\displaystyle\int_0^t B_s ds$.
2. $Z_t = B_t^3 - 3tB_t$.
3. $X_t = tB_t - \displaystyle\int_0^t B_s ds$.
4. $U_t = \sin B_t - \displaystyle\int_0^t B_s(\cos s) ds$.
5. $V_t = \sin B_t + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t \sin(B_s) ds$.
6. $Y_t = t^2 B_t - 2\displaystyle\int_0^t B_s ds$.