1.4 Quelques lois usuelles

1.4.1 Cas discret

Loi de Bernoulli

Définition : $X \to \beta(p) \Leftrightarrow P(X=k) = p^k q^{1-k} 1_{[0,1]}(k)$

Propriétés :

* Si $X_1 \to \beta(p)$

$X_2 \to \beta(p) \Rightarrow X_1 + X_2 \to \beta(2,p)$

Exercice : Calculer les moments d'ordre un et deux de la loi de Bernoulli à partir de sa fonction génératrice des moments.

Loi Binomiale

Définition : $X \to \beta(n,p) \Leftrightarrow P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k} 1_{\{0,\ldots,n\}}(k)$

Propriétés :

* $E(X) = np$; $V(X) = npq$.
* $M_X(t) = E(e^{tX}) = (q+pe^t)^n$.
* Si $X_1 \to \beta(n_1,p)$

$X_2 \to \beta(n_2,p) \Rightarrow X_1 + X_2 \to \beta(n_1+n_2,p)$

Lois liées à la loi de Bernoulli

On répète une épreuve de Bernoulli de manière indépendante

Jusqu'à l'obtention du premier Succès

- **X : le nombre d'épreuves nécessaires Pour obtenir le premier succès**

$\Longleftrightarrow X \longrightarrow G(p)$

- **X : le nombre d'épreuves nécessaires Pour obtenir le $r^{\text{ème}}$ succès**

$\Longleftrightarrow X \longrightarrow BN(n, p)$

n fois

X : le nombre de succès obtenues au cours des n épreuves

$\Longleftrightarrow X \longrightarrow B(n, p)$

Loi de Poisson

Définition : $X \to \mathcal{P}(\lambda) \Leftrightarrow P(X = k) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!};\ k \in \mathbb{N}$

Propriété :

* $E(X) = V(X) = \lambda.$

* $M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = e^{\lambda\left(e^t - 1\right)}$

* Si $X_1 \to \mathcal{P}(\lambda_1)$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ X_2 \to \mathcal{P}(\lambda_2) \\ \text{et} \\ \bullet\ X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \end{array}\right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \to \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Loi géométrique

Définition : $X \to \mathcal{G}(p) \Leftrightarrow P(X = x) = pq^{x-1};\ x \in \mathbb{N}^*$

Propriété :

* $E(X) = \frac{1}{p}$; $V(X) = \frac{q}{p^2}$.

* $M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \frac{pe^t}{1-qe^t}$

Binomiale négative
$X \sim BN(r, p)$ r = le nombre de succès
$P(X=x) = C_{x-1}^{r-1} \, p^r q^{x-r}$, $x = \{r, r+1, \ldots\ldots\}$
$\frac{r}{p}$, $\frac{rq}{p^2}$

Exercice : Calculer la fonction génératrice des moments de :

La loi Binimiale,

la loi de Poisson,

la loi Géométrique.

1.4.2 Cas continu

Loi Gamma

Définition : $X \to \gamma(a, b)$, $a, b > 0$ ssi

$$f_X(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx} 1_{\{x>0\}} \text{ où}$$

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$$

Propriété :

$\cdot X \to \gamma(a, b) \Leftrightarrow E(X) = \frac{a}{b}, V(X) = \frac{a}{b^2}, E(X^r) = \frac{\Gamma(a+r)}{\Gamma(a) b^r}$

$\cdot M_X(t) = \left(\frac{b}{b-t}\right)^a$, $t < b$.

$\cdot \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$

$\cdot \Gamma(n) = (n-1)!$

$\cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

$\cdot \Gamma(1) = 1$

Cas particuliers

• $\gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) = \mathcal{X}_n^2 \Leftrightarrow E(X) = n, V(X) = 2n.$

• $\gamma(1, b) = \mathcal{E}(b) \Leftrightarrow E(X) = \frac{1}{b}, V(X) = \frac{1}{b^2}$

A noter que la loi exponentielle est sans mémoire :

$P(X > s + t \,/\, X > s) = P(X > t)$

Propositions

$$1°/.\ \left.\begin{array}{l} X \rightarrow \gamma(a,b) \\ \cdot Y = cX \\ \cdot c > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow Y \rightarrow \gamma\left(a, \frac{b}{c}\right)$$

$$2°/.\ \left.\begin{array}{l} \cdot X \rightarrow \gamma(a,b) \\ \cdot Y \rightarrow \gamma(a',b) \\ \cdot X \perp\!\!\!\perp Y \end{array}\right\} \Rightarrow X + Y \rightarrow \gamma(a+a',b)$$

$$3°/.\ \left.\begin{array}{l} \cdot X \rightarrow \mathcal{E}(1,b) \\ \cdot Y \rightarrow \mathcal{E}(1,b') \\ \cdot X \perp\!\!\!\perp Y \end{array}\right\} \Rightarrow X + Y \rightarrow \gamma(2,b)$$

Loi normale

$$\cdot X \rightarrow N(m,\sigma^2) \Leftrightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(x-m)^2} 1_{\mathbb{R}}(x)$$

$\cdot E(X) = m,\ V(X) = \sigma^2.$

Propriétés :

$$M_X(t) = e^{mt + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

$$*\text{Si } X \rightarrow N(m,\sigma^2) \Rightarrow T = \frac{X-m}{\sigma} \rightarrow N(0,1)\ \text{"}\textit{tabulée}\text{"}$$

$$**\text{Si } \left.\begin{array}{l} X \rightarrow N(m,\sigma^2) \\ Y \rightarrow N(m',\sigma'^2) \\ X \perp\!\!\!\perp Y \end{array}\right\} \Rightarrow X + Y \rightarrow N(m+m', \sigma^2 + \sigma'^2)$$

$$***\text{Si } X \rightarrow N(m,\sigma^2) \Rightarrow aX \rightarrow N(am, a^2\sigma^2),\ \forall a \in \mathbb{R}$$

Loi du $\mathcal{X}^2$

$\cdot$Si $X \rightarrow N(0,1) \Rightarrow X^2 \rightarrow \mathcal{X}_1^2$

$$\cdot\ \text{Si } \left.\begin{array}{l} X \rightarrow \mathcal{X}_n^2 \\ Y \rightarrow \mathcal{X}_m^2 \\ X \perp\!\!\!\perp Y \end{array}\right\} \Rightarrow X + Y \rightarrow \mathcal{X}_{n+m}^2$$

Loi de Ficher

Définition : $X \to F_{n,m}$, ssi

$$f_X(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{\left(1+\frac{n}{m}x\right)^{\frac{n+m}{2}}} 1_{\{x>0\}}$$

Propriétés :

$$\left.\begin{array}{l} \cdot X \to \mathcal{X}_n^2 \\ * \cdot Y \to \mathcal{X}_m^2 \\ \cdot X \perp\!\!\!\perp Y \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{X/n}{Y/m} \to F_{n,m} \\ \frac{X}{Y} \to B_{\mathbb{R}^{+*}}\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}\right) \end{array}\right.$$

* N.B : $X \to \mathcal{B}(a,b) \Leftrightarrow f_X(x) = \frac{1}{\mathcal{B}(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} 1_{]0,1[}$

où $\mathcal{B}(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$; $a > 0$ et $b > 0$.

Loi de student

Définition : $X \to st_n$, ssi

$$f_X(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}, \; x \in \mathbb{R}$$

Propriété :

$$\left.\begin{array}{l} X \to \mathcal{N}(0,1) \\ Y \to \mathcal{X}_n^2 \\ X \perp\!\!\!\perp Y \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \to stn.$$