Solution d'Exercice 1

Comme K est d'intégrale qui vaut 1, on a :

$$\begin{aligned}
(f * K_{h_n})(x) - f(x) &= \int f(x-y)K_{h_n}(y)dy - f(x)\int K_{h_n}(y)dy \\
&= \int (f(x-y) - f(x))\, K_{h_n}(y)dy \\
&= \int_{|y|\leq\delta} (f(x-y) - f(x))\, K_{h_n}(y)dy \\
&\quad - \int_{|y|>\delta} (f(x-y) - f(x))\, K_{h_n}(y)dy
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\delta > 0$:

$$\begin{aligned}
|(f * K_{h_n})(x) - f(x)| &\leq \sup_{|y|\leq\delta} |f(x-y) - f(x)| \int_{|y|\leq\delta} K_{h_n}(y)dy \\
&\quad + \int_{|y|>\delta} (f(x-y) - f(x))\, K_{h_n}(y)dy \\
&\leq \sup_{|y|\leq\delta} |f(x-y) - f(x)| \int_{|t|\leq\delta|h_n|^{-1}} K(t)dt \\
&\quad + \int_{|y|>\delta} \frac{|f(x-y)|}{|y|} \left|\frac{y}{h_n}\right| K\left(\frac{y}{h_n}\right) dy + |f(x)| \int_{|t|>\delta|h_n|^{-1}} K(t)dt
\end{aligned}$$

On obtient donc pour h_n fixé et $\delta \longrightarrow 0$ le premier terme du membre droite de cette inégalité tend vers 0 à cause de la continuité de f, le second terme est majoré par $\delta^{-1}\int_{\mathbb{R}} |f| \sup_{|t|>\delta|h_n|^{-1}} |t||K(t)|dt$ qui tend vers 0 quand $h_n \longrightarrow 0$ et le troisième terme $|f(x)|\int_{|t|>\delta|h_n|^{-1}} K(t)dt \longrightarrow 0$ quand $h_n \longrightarrow 0$.

Ainsi, on a si f est continue en x

$$|(f * K_{h_n})(x) - f(x)| \underset{h_n \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0 \implies \lim_{h_n \longrightarrow 0} (f * K_{h_n})(x) = f(x).$$

Solution d'Exercice 2

(1) (a) Soit t un réel quelconque. Pour tout $|x| \geq 1$, on a

$$\frac{1-x}{2} \in [0,1], \quad \frac{1+x}{2} \in [0,1], \text{ et } \quad \frac{1-x}{2} + \frac{1-x}{2} = 1.$$

Puisque on a l'égalité $tx = \frac{1-x}{2}(-t) + \frac{1+x}{2}(t)$, la fonction, $x \mapsto e^{tx}$ étant convexe, on a pour tout $t \in [0,1]$,

$$e^{tx} \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^{t}.$$

(b) La v.a. X étant bornée par 1, la v.a. $\exp(tX)$ est bornée et admet donc une espérance. On a donc

$$\exp(tX) \leq \frac{1-X}{2}e^{-t} + \frac{1+X}{2}e^{t}.$$

On a donc

$$\mathbb{E}\exp(tX) \leq \frac{\mathbb{E}(1-X)}{2}e^{-t} + \frac{\mathbb{E}(1+X)}{2}e^{t} \leq \frac{e^{-t}+e^{t}}{2} = \mathrm{ch} t.$$

Or, on a

$$\mathrm{ch} t = \sum_{n\geq 0} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{t^{2n}}{n!2^n}$$

et comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $n!2^n \leq (2n)!$, on a $\mathrm{ch}(t) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$. On a donc

$$\mathbb{E}\exp(tX) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

(2)

(a) Soit t quelconque. On applique l'inégalité précédente à l a v.a. $\frac{X_n}{c_n}$, on a alors

$$\forall t' \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}\exp\left(t'\frac{X_n}{c_n}\right) \leq \exp\left(\frac{t'^2}{2}\right),$$

puis en particulier pour $t' = tc_n$, on a

$$\mathbb{E}\exp(tX_n) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}c_n^2\right).$$

Or les v.a.r. $\exp(tX_n)$ sont indépendantes donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E}\exp(tS_n) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{j=1}^{n} c_j^2\right).$$

(b) Soient $t > 0$ et $\varepsilon > 0$. La fonction $x \mapsto e^{tx}$ est croissante, on a donc $(S_n > \varepsilon) \subset (\exp(tS_n) > \exp(t\varepsilon))$ et donc d'après l'inégalité de Markov,

$$\mathbb{P}\left(S_n > \varepsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(\exp(tS_n) > \exp(t\varepsilon)\right) \leq \frac{\mathbb{E}\exp(tS_n)}{\exp(t\varepsilon)}.$$

D'où

$$\mathbb{P}\left(S_n > \varepsilon\right) \leq \exp\left(-t\varepsilon + \frac{t^2}{2}\sum_{j=1}^{n} c_j^2\right).$$

En appliquant ceci à $-X_n$, on a

$$\mathbb{P}\left(-S_n > \varepsilon\right) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j^2}\right).$$

(c) Soit $\varepsilon > 0$ et soit $a = \sum_{j=1}^{n} c_j^2$. La fonction $t \mapsto a\frac{t^2}{2} - t\varepsilon$ atteint son minimum pour $t = \frac{\varepsilon}{a} > 0$ et ce minimum vaut $-\frac{\varepsilon^2}{2a}$. D'où

$$\mathbb{P}\left(S_n > \varepsilon\right) \leq \exp\left(\min_{t>0}(-t\varepsilon + \frac{t^2}{2}\sum_{j=1}^{n} c_j^2)\right) = \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{j=1}^{n} c_j^2}\right).$$

(d) Soit $\varepsilon > 0$. On a $(|S_n| > \varepsilon) = (S_n > \varepsilon) \cup (-S_n > \varepsilon)$ et ainsi

$$\mathbb{P}\left(|S_n| > \varepsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(S_n > \varepsilon\right) + \mathbb{P}\left(-S_n > \varepsilon\right).$$

D'où

$$\mathbb{P}\left(|S_n| > \varepsilon\right) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{j=1}^{n} c_j^2}\right)$$