Université Saâd Dahlab-Blida1 le 21 Mai 2017
Fac des Sciences-Dpt de Maths
$3^{ème}$année Maths

Examen de Statistique
(Durée 1h30)

Exercice 1:(4 points)
(Cours) Soient $(X_n)_{n\in<in}$ une suite de vaiid tq
$E(X_1) = 0$ et $Var(X_1) = 1$

Soit $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Montrer que $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{Loi} N(0,1)$ pour n$\rightarrow +\infty$

c'est à dire $F_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}(x)} \longrightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-x^{-\frac{x^2}{2}}} dx$

(C'est le TCL)

Exercice 2: (4 points)
Soit X une va normale tq $P(X \prec 2) = 0,0668$ et
$P(X \succ 12) = 0,1587$
Calculer la valeur de a tq $P(|X - E(X)|^2 \prec a) = 0,95$

Exercice 3:(8 points)
Pour $\lambda \in IR_+^*$, on considère une va X ayant pour densité
$f(x) = e^{\lambda}e^{-x}$ si x$\succeq 0$ et 0 sinon
Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ un n-échantillon de n observations
indépendantes de X.
On considère les va S et T définies par:

$S = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ et $T = Inf X_i$

1) Calculer $E(X)$ et $VarX$
2) Calculer $E(S)$ et $VarS$
3)a) Trouver la densité de T
b) En déduire $E(T)$et $VarT$
4)Determiner, en fonction respectivement de S et T, des
estimateurs sans biais S_1 et T_1 du paramètre λ.
5) Les estimateurs S_1 et T_1 sont ils convergents?
Quel est entre S_1 et T_1,le meilleur estimateur du paramètre λ?

Exercice 4: (4 points)
La taille moyenne d'un échantillon aléatoire de 40 personnes,
extrait d'une population de 780 individus est de 1,70 m et
l'écart type pour toute la population est de 24 cm.
Trouver l'intervalle de confiance pour la taille moyenne de la
population à 95% pour un tirage avec remise.(non exhaustif)

Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté des résultats

Exo 1 : Soit $\varphi(t) = E(e^{itX_1})$ avec $E(X_1^2) = 1 < +\infty$

alors $\varphi(t) = 1 + itE(X_1) - \frac{t^2}{2}E(X_1^2) + o(t^2) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$. 1

$\phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = E\left(e^{itS_n/\sqrt{n}}\right) = E\left(\exp\left\{\frac{it}{\sqrt{n}}\sum_i^n X_i\right\}\right) = \left(\varphi_{X_1}(t/\sqrt{n})\right)^n$ 1

$= \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o(t^2/n)\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-t^2/2}$ ft caractéristique d'une $N(0,1)$. 1

donc $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers $N(0,1)$ 1

(On a utilisé le thm de Lévy).

Exo 2 : Comme $X \rightsquigarrow N(m, \sigma) \iff \frac{X-m}{\sigma} \rightsquigarrow N(0,1)$

Cherchons m et σ.

On a $P(X < 2) = 0,0668$

$P\left(\frac{X-m}{\sigma} < \frac{2-m}{\sigma}\right) = 0,0668 < 0,5 \Rightarrow \frac{2-m}{\sigma} < 0$

$\phi\left(\frac{2-m}{\sigma}\right) = 0,0668 \Rightarrow \phi\left(\frac{m-2}{\sigma}\right) = 1 - 0,0668 = 0,9339$

$\xrightarrow{\text{Table}}$ $\boxed{\frac{m-2}{\sigma} = 1,5}$ (1) 0,5

$P(X > 12) = 0,1587 \Rightarrow P\left(\frac{X-m}{\sigma} > \frac{12-m}{\sigma}\right) = 0,1587$

et $P\left(\frac{X-m}{\sigma} < \frac{12-m}{\sigma}\right) = 0,8413 \xrightarrow{\text{Table}}$ $\boxed{\frac{12-m}{\sigma} = 1}$ (2) 0,5

(1) et (2) $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} m = 8 \\ \sigma = 4 \end{array}}$ 1

$\frac{X-m}{\sigma} \rightsquigarrow N(0,1) \Rightarrow \left(\frac{X-m}{\sigma}\right)^2 \rightsquigarrow \chi^2_1$ 0,5

b) $E(T) = \int_{\lambda}^{+\infty} t\, n e^{\lambda n} . e^{-nt} dt = n e^{\lambda n}\left[\frac{\lambda e^{-n\lambda}}{n} + \frac{e^{-n\lambda}}{n^2}\right]$

$$\boxed{E(T) = \lambda + \frac{1}{n}}$$ (0,5)

$E(T^2) = \int_{\lambda}^{+\infty} t^2 n e^{\lambda n} . e^{-nt} dt = \lambda^2 + \frac{2\lambda}{n} + \frac{2}{n^2}$ (0,5)

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{Var} T = \frac{1}{n^2}}$$ (0,5)

4) Posons $S_1 = S - 1$ (0,5)
et $T_1 = T - \frac{1}{n}$

On a $E(S_1) = E(S) - 1 = \lambda$
$E(T_1) = E(T) - 1/n = \lambda$

S_1 et T_1 sont donc sans biais pr λ

5) $\operatorname{Var} S_1 = \operatorname{Var}(S-1) = \operatorname{Var} S = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\operatorname{Var} T_1 = \operatorname{Var}(T - \frac{1}{n}) = \operatorname{Var} T = \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

S_1 et T_1 sont des estimateurs convergents (1)

Comme $\operatorname{Var} S_1 = \frac{1}{n} \geq \operatorname{Var} T_1 = \frac{1}{n^2} \quad \forall n \geq 1$

$\Rightarrow$ T_1 est donc meilleur estimateur que S_1 (1)

Exo 4 : Comme $n = 40 > 30$ on peut considérer la distribution des tailles comme normale.

$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum X_i \rightsquigarrow N(m, \sigma/\sqrt{n})$

m taille moyenne de la population

σ écart-type de la population

Donc $P\left((X-m)^2 < a\right) = 0,95$

$\Leftrightarrow P\left(\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)^2 < a/\sigma^2\right) = 0,95$ 0,5

$F_{\chi^2_1}\left(a/\sigma^2\right) = 0,95 \Rightarrow \frac{a}{\sigma^2} = F^{-1}_{\chi^2_1}(0,95) = 3,841$ 0,5

donc $\boxed{a = 61,44}$ 0,5

Exo3 : $f(x) = \begin{cases} e^{\lambda} \cdot e^{-x} & \text{si } x \geq \lambda \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1) $E(X) = \int_{\lambda}^{+\infty} x e^{\lambda - x} dx = e^{\lambda} \int_{\lambda}^{+\infty} x e^{-x} dx$ avec $u = x$ $du = dx$, $dv = e^{-x} dx$ $v = -e^{-x}$

$= e^{\lambda}\left[\left. -xe^{-x}\right|_{\lambda}^{+\infty} + \int_{\lambda}^{+\infty} e^{-x} dx\right] = \lambda + 1$ donc $\boxed{E(X) = \lambda + 1}$ 0,5

0,5 $E(X^2) = \lambda^2 + 2(\lambda + 1) \Rightarrow \boxed{Var X = 1}$ 0,5

2/ Si $S = \frac{1}{n}\sum X_i$ et $T = \inf_i X_i$

0,5

$E(S) = \frac{1}{n}\sum E(X_i) = E(X) = \lambda + 1$

0,5

$Var S = \frac{1}{n^2}\sum Var X_i = \frac{n Var X}{n^2} = 1/n$

3/ a) Densité de T.

$F_T(t) = P(\inf X_i \leq t) = 1 - P(\inf X_i > t) = 1 - (P(X > t))^n$

$= 1 - (1 - F_X(t))^n$ 0,5

$\Rightarrow f_T(t) = n(1 - F_X(t))^{n-1} \cdot f_X(t)$ avec $F_X(t) = 1 - e^{\cancel{\lambda t}} = 1 - e^{\lambda - t}$ si $t \geq \lambda$.

0,5

$f_T(t) = n e^{(\lambda - t)n}$ si $t \geq \lambda$ 0,5 et $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ écart-type d'un tirage avec remise

donc $T = \frac{\bar{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}} \rightsquigarrow N(0,1)$

On cherche donc a et b tq $P(a \leq T \leq b) = 0,95$.

Puisque la loi normale est symétrique on choisit $a = -b$ ~~0,5~~ 0,5

On a donc $P(-b \leq T \leq b) = 0,95$

$$\phi(b) - \phi(-b) = 0,95.$$

$$2\phi(b) = 1,95 \Rightarrow \phi(b) = 0,975 \quad 0,5$$

$$\Rightarrow b = \phi^{-1}(0,975) = 1,96 \quad 1$$

L'intervalle est $-1,96 \leq \frac{\bar{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}} \leq 1,96$.

$$\boxed{1,6256 \leq m \leq 1,7743} \quad 1$$