Chapitre 3

Formulation variationnelle aux problèmes aux limites

1 Inroduction

Nous allons voir comment transformer un problème aux limites elliptique en un problème variationnel puis nous énonçons un théorème qui permette d'assurer l'existence et l'unicité d'une solution au problème variationnel ainsi obtenu.

2 Quelques rappels

1. Soit f une fonction scalaire : $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Soit $\alpha = (\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice de dérivation, notons $D^\alpha f$ la dérivée d'ordre $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ définie par

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{|\alpha_1|} \ldots \partial x_1^{|\alpha_n|}}$$

.

2. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Nous notons $\mathcal{C}^0(\Omega)$ l'ensemble des fonctions définies et continues sur Ω et $\mathcal{C}^k(\Omega)$ $(k \in \mathbb{N})$ l'ensemble suivant

$$\mathcal{C}^k(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}, \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq k, D^\alpha f \in \mathcal{C}^0(\Omega)\}$$

3. On appelle le *support d'une fonction* f le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel f est nulle. On note $\mathcal{C}_0^k(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}^k(\Omega)$ à support compact inclus dans Ω et $\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{C}_0^\infty$ l'ensemble des fonctions infiniment dérivables sur Ω à support compact inclus dans Ω.

4. On note $L^p(\Omega)$ $(1 \leq p < \infty)$ l'ensemble des fonctions f mesurables sur Ω telles que $|f|^p$ soit intégrable sur Ω. Cet espace est un espace de Banach, i.e. un espace vectoriel normé complet, muni de la norme

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = (\int_\Omega |f(x)|^p dx)^{1/p}$$

Pour le cas $p = 2$, l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire défini par :

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)g(x)dx.$$

On note par $L^\infty(\Omega)$ l'ensemble des fonctions f mesurables sur Ω pour lesquelles il existe une constante C telle que $|f(x)| \leq C$ presque partout sur Ω.

5. On note $H^1(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables de carré intégrable dons chacunes des dérivées partielles premières est de carré intégrable, i.e. :

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \ / \ \forall i \in \{1, \dots n\}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\}$$

On muni $H^1(\Omega)$ du produit scalaire suivant :

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i})_{L^2(\Omega)}$$

La norme correspondante est

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{(u, v)_{H^1(\Omega)}}$$

L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

6. On peut généraliser la définition précédente, soit m un entier positif L'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$

$$H^m(\Omega) = \{v \ / \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m, D^\alpha v \in L^2(\Omega)\}$$

7. On appelle $H_0^1(\Omega)$ la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans l'espace $H^1(\Omega)$, en d'autre terme :

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), \exists (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega) \text{ telle que } \|v_n - v\|_{H^1(\Omega)} \to 0 \text{ quand } n \to \infty\}$$

3 Un problème modèle

On se propose de résoudre le problème suivant (avec condition de Dirichlet homogène) : Trouver $u : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + c(x)u(x) = f(x), & \forall x \in \Omega \\ u(x) = 0 \ , \quad x \in \Gamma & \end{cases} \quad (1)$$

Nous supposerons que l'ouvert Ω est bornée de frontière lipchitzienne et que $c \in L^\infty(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega)$.

Nous allons répondre aux questions théoriques suivantes :

1. Ce problème admet-il une solution ? Si oui, dans quel espace ?
2. Si une telle solution existe, est-elle unique ?
3. Si oui, dépend-elle continûment de la fonction f ?

Si les réponses sont toutes positives, on dit que le problème est " bien posé au sens de d'Hadamard"

Formulation variationnelle

Supposons que u soit une solution du problème (1) telle que $u \in H^2(\Omega)$. Soit $v \in H^2(\Omega)$ quelconque. Multiplions l'équation de (1) par $v(x)$ et intégrant sur Ω. On vérifie que cette intégration est possible, compte tenu des hypothèses qui entraînent que les produits $\Delta uv, cuv$ et fv sont intégrables sur Ω. On obtient alors

$$\int_\Omega -\Delta u(x)v(x)dx + \int_\Omega c(x)u(x)v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx$$

Supposons maintenant que $v \in H_0^1(\Omega)$. Par la formule de Green, on aura

$$\int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx + \int_\Omega c(x)u(x)v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx$$

On aura alors

$$\text{Pour tout } v \in V,\ \mathcal{A}(u,v) = L(v)$$

où

$$\left\{\begin{array}{l} V = H_0^1(\Omega) \\ \mathcal{A}(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx + \int_\Omega c(x)u(x)v(x)dx \\ L(v) = \int_\Omega f(x)v(x)dx \end{array}\right. \qquad (2)$$

Le problème : trouver $u \in V$ tel que (2) ait lieu est appelé **formulation variationnelle** du problème aux limites (1). Dans cette formulation, on remarque que : V est un Hilbert qu'on l'appela souvent l'espace variationnelle. La forme $\mathcal{A}$ est bilinéaire, i.e. linéaire par rapport à chacun de ses deux arguments et que la forme L est linéaire.

Nous avons le résultat d'équivalence suivant entre les deux problèmes :

Proposition 1. Soit $u \in H^2$. Alors u est solution du problème aux limites (1) si et seulement si elle est solution du problème variationnelle (2).

4 Autres exemples classiques

Les hypothèses sur Ω, c et f étant inchangées, on se propose de résoudre le problème suivant Trouver $u : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\left\{\begin{array}{ll} -\Delta u(x) + c(x)u(x) = f(x), & \forall x \in \Omega \\ \\ u(x) = g(x)\ , & x \in \Gamma \end{array}\right. \qquad (3)$$

où g est une fonction donnée, a priori non nulle, définie sur Γ.

Pour simplifier, nous supposerons qu'il existe une fonction G de $H^2(\Omega)$ telle que g est la restriction de G sur Γ, puis on peut se ramener à l'étude d'un problème de

Dirichlet homogène. En effet, on posons $U = u - G$ avec la condition à la limite $U = 0$ sur Γ ; le problème (3) est équivalent au problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta U(x) + c(x)U(x) = F(x), & \forall x \in \Omega \\ U(x) = 0 \ , & x \in \Gamma \end{cases} \tag{3}$$

avec $F = f + \Delta G - cG \in L^2(\Omega)$, problème que nous avons déjà rencontré dans la section 2.

5 Théorème de Lax-Milgram

Soit V un espace de Hilbert (réel) de produit scalaire noté $(.,.)_V$ et de norme associée $\|.\|_V$. On se propose de résoudre le problème suivant :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que pour tout } v \in V \text{ on ait : } \mathcal{A}(u,v) = L(v) \tag{4}$$

On impose les conditions suivantes :

1. L est une application définie sur V, à valeur dans $\mathbb{R}$ qui est linéaire et continue (i.e. il existe une constante $C > 0$ telle que : pour tout $v \in V, |L(v)| \leq C\|v\|_V$).
2. $\mathcal{A}$ est une application définie sur $V \times V$, à valeur dans $\mathbb{R}$ vérifiant : $\mathcal{A}(v)$ est bilinéaire, continue (i.e. il existe une constante $M > 0$ telle que : pour tout $(u,v) \in V^2, |\mathcal{A}| \leq M\|u\|_V\|v\|_V$) et coercive (i.e. il existe une constante $\alpha > 0$ telle que : pour tout $v \in V, |\mathcal{A}(v,v)| \geq \alpha\|v\|_V^2$)

Théorème 2. (Théorème de Lax-Milgram) Soit V un espace de Hilbert réel. $\mathcal{A}$ est une forme bilinéaire, continue et coercive sur V et L une forme linéaire continue sur V. Alors, il existe un unique élément u de V solution du problème variationnelle (4).

6 Le problème de la continuité par rapport aux données

Nous avons déjà dit qu'un problème aux limites soit bien posé, il faut également que la solution soit continue par rapport aux données. On est en mesure de montrer cette propriétés pour des problèmes entrant dans le cadre variationnel du Théorème de Lax-Milgram, on utilise l'inégalité suivante résultant des hypothèse 1 et 2 :

$$\alpha\|u\|_V^2 \leq \mathcal{A}(u,u) = L(u) \leq C\|u\|_V,$$

inégalité qui montre

$$\|u\|_V \leq \frac{C}{\alpha}.$$