U.H.B.C. Chlef
Faculté des Sciences
Département des maths

A.U. 2015/2016
Niveau: $1^{ère}$ Master/ Option: M.A.S.
Module: Processus Stochastiques 1

EXAMEN DE RATTRAPAGE (2HEURES)

I) *Questions de cours :*

1. Soit une chaîne de Markov irréductible récurrente à espace d'états finis. $N_n(i)$: le nombre de visites de l'état i dans l'intervalle du temps de 0 à n.
   - Ecrire $\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(i)}{n}$ en fonction de la loi stationnaire.
2. Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson de paramètre λ, et S_n l'instant du $n^{ième}$ arrivée.
   - Donner la loi des variables aléatoires suivantes et leurs moyennes (espérances) respectives:

$$N_t,\ N_t - N_s\ (s \leq t),\ S_n - S_{n-1},\ S_n$$

II) *Chaînes de Markov :*

Considérons une chaîne de Markov $\{X_n; n = 0, 1, 2, ...\}$ d'espace d'état $E = \{1, 2, 3\}$, donnée par la matrice de transition:

$$P = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$$

1. Tracer le diagramme des transition de cette chaîne.
2. Sachant que la chaîne démarre de $X_0 = 1$, trouver la probabilité que $X_2 = 2$.
3. Déterminer les différentes classes de communication. En déduire l'existence et l'unicité de la loi stationnaire.
4. Trouver la loi stationnaire.
5. Soit $Y_n = X_n - X_{n-1}$, donc on a trois (3) cas:
   $Y_n = 1$ indique que la $n^{ième}$ transition était à droite, (1→2 , 2→3)
   $Y_n = 0$ indique qu'il s'agissait d'une auto-transition, (1→1 2→2 3→3)
   $Y_n = -1$ indique qu'elle était à gauche. (2→1 , 3→2)
   - trouver $\lim_{n\to\infty} P(Y_n = 1)$
   (**Indication:** utiliser la loi de probabilité totale et la loi stationnaire).
6. La suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ est-elle une chaîne de Markov? Justifier la réponse.
   (**Indication:** calculer $P(Y_n = 1/Y_{n-1} = 1, Y_{n-2} = 1)$ et $P(Y_n = 1/Y_{n-1} = 1)$ pour n suffisemment grand).
7. Sachant que la $n^{ième}$ transition était à droite ($Y_n = 1$), trouver la probabilité que l'état précédent était "1".
   (**Indication:** utiliser la règle de Bayes pour n suffisemment grand).

III) *Processus de Poisson :*

Des clients arrivent à un service suivant un processus de Poisson $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ de paramètre $\lambda = 3/heure$.

1. Quelle est la probabilité pour qu'aucun client arrive entre 8 : 00 et 10 : 00 *du matin*?. $P(2\lambda)$
2. Quel est le nombre moyen des arrivées entre 8 : 00 et 10 : 00 *du matin*? 2λ
3. Quelle est l'heure espérée (à quelle heure) du $5^{ième}$ arrivée après 8 : 00? $E(S_5) = \frac{5}{\lambda}$
4. Supposons que 4 clients arrivent entre 8 : 00 et 10 : 00 *du matin*. $1 - P(N_{8-9} = 0 / N_{8-10} = 4)$
   - Déterminer la probabilité pour qu'au moins un client arrive dans la première heure (8 : 00 et 9 : 00 *du matin*)?

Processus Stochastiques 1 — Master 1 15/16

Corrigé-type de l'examen de Rattrapage

I. Questions de cours :

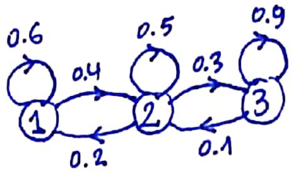
(1) 1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{N_n(i)}{n} = \pi_i = \lim_{n\to\infty} P(X_n=i)$. car la loi stationnaire existe et est unique.

(4) 2. $N_t \sim P(\lambda t)$ (0,5), $N_t - N_s \sim P(\lambda(t-s))$ (0,5), $S_{n+1}-S_n \sim Exp(\lambda)$ (0,5), $S_n \sim \Gamma(n,\lambda)$ (0,5)

$E(N_t)=\lambda t$ (0,5), $E(N_t-N_s)=\lambda(t-s)$ (0,5), $E(S_{n+1}-S_n)=\frac{1}{\lambda}$ (0,5) ; $E(S_n)=\frac{n}{\lambda}$ (0,5).

II. Chaînes de Markov :

(1) 1. Diagramme de transition :



(1) 2. $P(X_2=2/X_0=1) = P_{11}P_{12}+P_{12}P_{22}$

$= 0.6\cdot 0.4+0.4\cdot 0.5$

$= \boxed{0.44}$

(1) 3. Une seule classe de communication $\boxed{C=E=\{1,2,3\}}$

- La chaîne est irréductible et apériodique donc la loi stationnaire existe et est unique.

(1,5) 4. La loi stationnaire : $\pi P=\pi$ et $\sum \pi_j = 1$.

On trouve : $\boxed{\pi_1=1/9}$ (0,5), $\boxed{\pi_2=2/9}$ (0,5), $\boxed{\pi_3=6/9}$ (0,5)

(1,5) 5. $\lim_{\infty} P(Y_n=1) = \sum_{i=1}^{3} \pi_i P(\underbrace{Y_n=1}_{X_n=i+1}/X_{n-1}=i) = \pi_1P_{12}+\pi_2P_{23}$

$= \boxed{1/9}$

(2) 6. Non. Supposons que la chaîne est à l'état stationnaire ($n\to\infty$)

On a : $P(Y_n=1/Y_{n-1}=1, Y_{n-2}=1)=0$ impossible de se déplacer à droite 3 fois. ($\exists$ 3 états). D'une part.

D'autre part, $P(Y_n=1/Y_{n-1}=1) = \frac{P(Y_n=1, Y_{n-1}=1)}{P(Y_{n-1}=1)} = \frac{\pi_1P_{12}P_{23}}{\pi_1P_{12}+\pi_2P_{23}} \neq 0$

Par conséquent $(Y_n)_{n\geq 0}$ n'est pas une C.M.

(1) 7. Par la règle de Bayes : $P(X_{n-1}=1/Y_n=1) = \frac{P(X_{n-1}=1)P(Y_n=1/X_{n-1}=1)}{\sum_{i=1}^{3} P(X_{n-1}=i)P(Y_n=1/X_{n-1}=i)}$

$= \frac{\pi_1P_{12}}{\pi_1P_{12}+\pi_2P_{23}} = \boxed{2/5}$

III. Processus de ~~Markov~~ ; Poisson

(1) 1. $N_{[8-10]} \sim \mathcal{P}(2\lambda)$ donc $\mathbb{P}[N_{[8-10]} = 0] = \frac{(2.3)^0}{0!} \cdot e^{-6} = \boxed{e^{-6}}$

$\uparrow \lambda = 3$

(1) 2. $\mathbb{E}(N_{[8-10]}) = 2\lambda = \boxed{6}$

(2) 3. Temps inter-arrivée depuis 8:00 : $T_i \sim Exp(\lambda)$ $i=1,2,3,4,5$, i.i.d.

$$\mathbb{E}(T_1+T_2+T_3+T_4+T_5) = 5 \cdot \mathbb{E}(T_1) = 5 \cdot \frac{1}{\lambda} = \boxed{\frac{5}{3} \text{ heure}}$$

$\Rightarrow$ l'heure espérée : $8{:}00 + \frac{5}{3} h = \boxed{9{:}40}$ du matin

(2) 4.
$$\mathbb{P}[N_{[8-9]} \geq 1 / N_{8-10} = 4] = 1 - \mathbb{P}[N_{8-9} = 0 / N_{8-10} = 4]$$

$$= 1 - \frac{\mathbb{P}(N_{8-9} = 0, N_{8-10} = 4)}{\mathbb{P}[N_{8-10} = 4]}$$

$$= 1 - \frac{\mathbb{P}(\overbrace{N_{8-9} = 0, N_{9-10} = 4}^{\text{indépendantes}})}{\mathbb{P}(N_{8-10} = 4)}$$

$$= 1 - \frac{\mathbb{P}(N_{8-9} = 0) \cdot \mathbb{P}(N_{9-10} = 4)}{\mathbb{P}(N_{8-10} = 4)}$$

$$= 1 - \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} \frac{\lambda^4}{4!} e^{-\lambda} \cdot \frac{4!}{(2\lambda)^4} e^{2\lambda}$$

$$= 1 - \frac{1}{16}$$

$$= \boxed{\frac{15}{16}}$$