**Examen Final -Modèle type-**

---

**Exercice 1.** Soit $\alpha > 0$ un paramètre. On considère $X$ une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\mathbb{P}(X = k) = C_\alpha e^{-\alpha k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

avec $C_\alpha$ une constante positive.

1. Que vaut $C_\alpha$ ?
2. On suppose que l'on observe $x_1, \ldots, x_n$ les tirages de $n$ variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de même loi que $X$. Pour simplifier, on supposera que $x_1 + \ldots + x_n \neq 0$. Donner une estimation du maximum de vraisemblance de $\alpha$. En déduire un estimateur du maximum de vraisemblance de $\alpha$.

**Exercice 2.** Soit $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$ deux paramètres. On considère $X$ une variable aléatoire de densité

$$f_{\lambda,\alpha}(x) = C_{\lambda,\alpha} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\alpha]},$$

avec $C_{\lambda,\alpha}$ une constante positive. On observe $x_1, \ldots, x_n$ les tirages de $n$ variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de même loi que $X$.

1. Montrer que $C_{\lambda,\alpha} = \frac{\lambda}{1-e^{-\lambda\alpha}}$.
2. Dans cette question, on suppose que $\lambda$ est fixé et connu. Donner une estimation du maximum de vraisemblance de $\alpha$. En déduire un estimateur du maximum de vraisemblance de $\alpha$.
3. On suppose maintenant que $\alpha = 1/\lambda$. La densité de $X$ devient donc

$$g_\lambda(x) = \frac{\lambda}{1 - e^{-1}} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,1/\lambda]}.$$

   Donner une estimation du maximum de vraisemblance de $\lambda$. En déduire un estimateur du maximum de vraisemblance de $\lambda$.