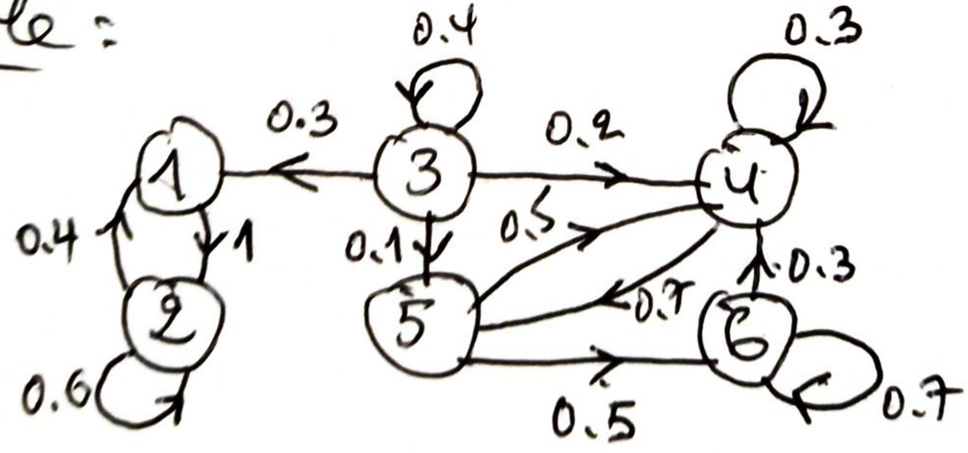
Remarque : Si $C \subset E$ est fermée, alors la matrice stochastique restreinte à C ; $P_C = (P_{ij})_{i,j \in C}$ est aussi une matrice stochastique.

C.à.d. : $\forall i \in C : \sum_{j \in C} P_{ij} = 1$

Preuves exercice

- Donc on peut traiter "C" comme étant une C.M. autonome

Exple :



- Donner la matrice stochastique.
- Déterminer les classe de communication.
- La C.M. est-elle irréductible ?
- Donner les classes fermées.

- Ecrire la mat. stoch. pour chaque classe fermée.

Solution :

1. La matrice stochastique :

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0.3 & 0 & 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0.7 \end{array}\right] \end{array}$$

2. Les classes de communication :

D'après le graphe des transitions :

$1 \longleftrightarrow 2 \ ; \ 3 \longleftrightarrow 3 \ ; \ 4 \longleftrightarrow 5 \longleftrightarrow 6$

Donc $\exists$ 3 classes de communication.

$E_1 = \{1, 2\} \ ; \ E_2 = \{3\}, \ E_3 = \{4, 5, 6\}$.

3. Irréductibilité :

La C.M. n'est pas irréductible.

4. Les classes fermées : $E_1 = \{1, 2\}, \ E_2 = \{4, 5, 6\}$

5. La matrice stoch. pour chaque classe fermée :

Pour $E_1 = \{1, 2\}$.

$$P_{E_1} = \begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0.4 & 0.6 \end{array}$$

Remarque : P_{E_1} est stochastique

Pour $E_2 = \{4, 5, 6\}$.

$$P_{E_2} = \begin{array}{c|ccc} & 4 & 5 & 6 \\ \hline 4 & 0.3 & 0.7 & 0 \\ 5 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 6 & 0.3 & 0 & 0.7 \end{array}$$

Périodicité – Apériodicité

Déf^{t} : La période d'1 état (i) dans E

est :

$$d(i) := \underbrace{P.G.C.D}_{\text{القاسم المشترك الأكبر}} \cdot \{n \geq 1 : P_{ii}^{(n)} > 0\}$$

avec la convention : $P.G.C.D(\emptyset) = 1$.

* L'état (i) est dit périodique de période $d(i)$ si $d(i) \neq 1$.
* L'état (i) est dit apériodique si : $d(i) = 1$.
* Une C.M. est dite apériodique si $\forall i \in E$: $d(i) = 1$

(9)

Exples :

1 

Prenons $i=0$

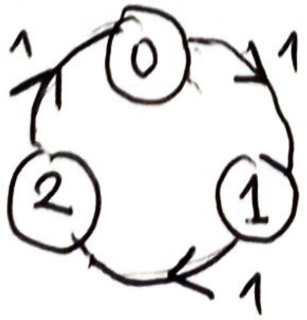
On a : $P_{00}^{(2)} > 0$, $P_{00}^{(4)} > 0$, $P_{00}^{(6)} > 0$, ...

et $P_{00}^{(1)} = P_{00}^{(3)} = P_{00}^{(5)} = \dots = 0$

Seules les proba. de transitions non nulles sont d'ordre pair, c-à-d. si on démarre de 0, on retournera à 0 ~~après~~ toujours après un nbre pair de transitions.

$$d(0) = \text{P.G.C.D.} \{ n>0 ;\ P_{00}^{(n)} > 0 \}$$
$$= \text{P.G.C.D.} \{ 2, 4, 6, 8, \dots \}$$

$\boxed{d(0) = 2}$; L'état 0 est périodique, de période = "2".

2 Ex 

Prenons par exple l'état $i = 1$.

On a : $P_{11}^{(3)} > 0, \quad P_{11}^{(6)} > 0, \quad P_{11}^{(9)} > 0, \dots$

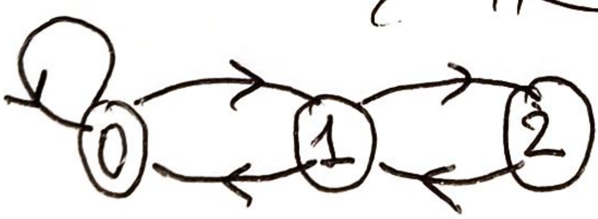
Or : $P_{11}^{(1)} = P_{11}^{(2)} = P_{11}^{(4)} = P_{11}^{(5)} = \dots = 0$

C.à.d. On retournera toujours à l'état $i = 1$ après un nbre multiple de 3 de transitions.

$d(1) = PGCD\{3, 6, 9, \dots\} = 3$

▸ L'état 1 est périodique, de période 3.

3)



Cherchons $d(0)$.

On a : $P_{00}^{(1)} > 0, \quad P_{00}^{(2)} > 0, \dots$

$\forall n \geq 1 : P_{00}^{(n)} > 0$.

D'où $d(0) = P.G.C.D\{1, 2, 3, \dots\}$

$= 1$

∴ L'état 0 est apériodique.

P^{b} : Il est difficile (perte de temps) de voir la périodicité de chaque état ~~pas~~ en utilisant la définition d'1 C.M.

Le Th^{m} ci-dessous allège un peu l'étude de la périodicité.

<u>Th^{m}</u> :

La périodicité est une propriété de classe. i.e.
si $i \longleftrightarrow j$ alors $d(i) = d(j)$.

<u>Exples</u> (précédents)

$\boxed{1}$ D'après le Th^{m}, $d(0) = d(1) = \cdots = d(N) = 2$

$\boxed{2}$ " " $d(0) = d(1) = d(2) = 3$.

$\boxed{3}$ " " $d(0) = d(1) = d(2) = 1$

Dans l'exple $\boxed{3}$, la C.M. est apériodique.