1

Corrigé ~~rappel~~ de la série d'exos n°4

Exo 1 : $C_1 = 0 = c^{te} \Rightarrow C_1$ est $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$-mesurable

Raisonnons par récurrence que C_n est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable

Supposons, alors que C_n est $\mathcal{F}_{n-1}$-meserable pour un certain $n = 1, 2, \ldots$ Dm :

$$\{\underbrace{C_n = 0}_{\mathcal{F}_{n-1}\text{-mes}}, \underbrace{X_n < a}_{\mathcal{F}_n\text{-mes}}\} \cup \{\underbrace{C_n = 1}_{\mathcal{F}_{n-1}\text{-mes}}, \underbrace{X_n \leq b}_{\mathcal{F}_n\text{-mes}}\} \in \mathcal{F}_n$$

Car $\mathcal{F}_{n-1} \cap \mathcal{F}_n$ $\quad \mathcal{F}_{n-1} \cap \mathcal{F}_n$

et ~~par~~ ceci signifie que :

$$C_{n+1} = \mathbb{1}_{\{C_n = 0, X_n < a\} \cup \{C_n = 1, X_n \leq b\}}$$

est $\mathcal{F}_n$-mesurable.

Conclusion : (C_n) est une stratégie de jeu.

Exo2 :

Pour une surmartingale positive :

$$\sup_n \mathbb{E}|X_n| = \sup_n \mathbb{E}X_n \leq \mathbb{E}X_1 = \mathbb{E}|X_1| < \infty$$

Car : $(\mathbb{E}X_n)_n \searrow$.

Donc par le Th^{me} de la cvgce des mart. de Doob entraîne que X_n cvge p.s vers une limite intégrable.

Exo3 : On a : $\cancel{\left[\mathbb{E}(X_n^+)\right]^p} \leq \left[\mathbb{E}|X_n|\right]^p \leq \mathbb{E}|X_n|^p$ Inégalité de Jensen.

et d'après le Th^{m} de la cvgce des mart. de Doob. $X_n \longrightarrow X \in L^1$ p.s.

et D'après l'inégalité maximale de Doob ds L^p :

$$\mathbb{E}\Bigg(\underbrace{\Big[\sup_{0\leq m\leq n}|X_m|\Big]^p}_{Y_n}\Bigg) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}(|X_n|^p) < \infty$$

$\mathbb{E}|Y_n|^p < \infty$ et $Y_n \nearrow \sup_n |X_n|$

$$\Rightarrow \lim \mathbb{E}|Y_n|^p = \mathbb{E}(\lim|Y_n|)^p = \mathbb{E}\Big(\underbrace{\sup_n|X_n|}_{L^1}\Big)^p < \infty$$

i.e. $\sup_n |X_n| \in L^p$

3

Nils, Berglund.

Exo3

Théorème 6.3.1 (Convergence d'une martingale dans L^p). *Soit X_n une martingale telle que $\sup_n \mathbb{E}(|X_n|^p) < \infty$ pour un $p > 1$. Alors X_n converge vers une variable aléatoire X presque sûrement et dans L^p.*

Démonstration. On a $(\mathbb{E}(X_n^+))^p \leqslant (\mathbb{E}(|X_n|))^p \leqslant \mathbb{E}(|X_n|^p)$. Donc par le Théorème 6.2.2, X_n converge presque sûrement vers une variable X. Par le corollaire (5.2.7), Inégalité de L^p

$$\mathbb{E}\biggl(\Bigl[\sup_{0\leqslant m\leqslant n} |X_m|\Bigr]^p\biggr) \leqslant \Bigl(\frac{p}{p-1}\Bigr)^p \mathbb{E}(|X_n|^p) . \tag{6.3.1}$$

Faisant tendre n vers l'infini, le théorème de la convergence monotone montre que $\sup_n |X_n|$ est dans L^p. Comme $|X_n - X|^p \leqslant (2\sup_n |X_n|)^p$, le théorème de la convergence dominée montre que $\mathbb{E}(|X_n - X|^p) \to 0$. □

Dans la suite, nous considérons plus particulièrement le cas $p = 2$. Rappelons que si une martingale X_n est dans L^2, on peut définir son processus croissant

$$\langle X\rangle_n = \sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}((X_m - X_{m-1})^2 | \mathcal{F}_{m-1}) . \tag{6.3.2}$$

La croissance implique que

$$\lim_{n\to\infty} \langle X\rangle_n =: \langle X\rangle_\infty \tag{6.3.3}$$

existe dans $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$. Cette quantité s'interprète comme la variance totale de la trajectoire $X_n(\omega)$.

Exercice supplémentaire

Proposition 6.3.2. *Soit X_n une martingale dans L^2 telle que $X_0 = 0$. Alors*

$$\mathbb{E}\Bigl(\sup_n X_n^2\Bigr) \leqslant 4\mathbb{E}(\langle X\rangle_\infty) . \tag{6.3.4}$$

Démonstration. L'inégalité du maximum L^2 donne

$$\mathbb{E}\Bigl(\sup_{0\leqslant m\leqslant n} X_m^2\Bigr) \leqslant 4\mathbb{E}(X_n^2) = 4\mathbb{E}(\langle X\rangle_n) , \tag{6.3.5}$$

puisque $\mathbb{E}(X_n^2) = \mathbb{E}(M_n) + \mathbb{E}(\langle X\rangle_n)$ et $\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}(M_0) = \mathbb{E}(X_0^2) = 0$. Le résultat suit alors du théorème de convergence monotone. □

Théorème 6.3.3. *La limite* $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$ *existe et est finie presque sûrement sur l'ensemble* $\{\omega\colon \langle X\rangle_\infty(\omega) < \infty\}$.

Démonstration. Soit $a > 0$. Comme $\langle X\rangle_{n+1} \subseteq \mathcal{F}_n$, $N = \inf\{n\colon \langle X\rangle_{n+1} > a^2\}$ est un temps d'arrêt. Comme $\langle X\rangle_{N\wedge n} < a^2$, la proposition ci-dessus appliquée à $X_{N\wedge n}$ donne

$$\mathbb{E}\Bigl(\sup_n |X_{N\wedge n}|^2\Bigr) \leqslant 4a^2 . \tag{6.3.6}$$

Par conséquent, le théorème 6.3.1 avec $p = 2$ implique que la limite de $X_{N\wedge n}$ existe et est finie presque sûrement. Le résultat suit alors du fait que a est arbitraire. □

Exo3 (suite) :

et comme $\underbrace{|X_n - X|^p}_{\substack{\shortparallel \\ Z_n \longrightarrow 0 \text{ p.s}}} \leq \left[2 \sup_n |X_n|\right]^p \in L^1$

D'après le Thm Cvge dominée :

$\mathbb{E} Z_n \longrightarrow 0$ i.e $\mathbb{E}|X_n - X|^p \longrightarrow 0$

c.à.d, $X_n \xrightarrow{L^p} X$.

4