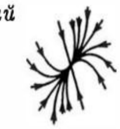
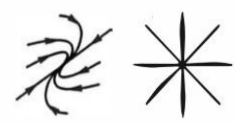
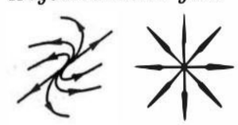
[Неустойчивый фокус (10.456)]

[Седло (10.451)]

[Устойчивый узел (10.459)]

Корни λ_1, λ_2		Характер точки покоя	Устойчивость точки покоя
Действительные: $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$	*Устойчивый узел* 	Асимптотически устойчива
	$\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$	*Неустойчивый узел* 	Неустойчива
	$\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$	*Седло* 	Неустойчива
Комплексные: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$	$\alpha < 0$, $\beta \neq 0$	*Устойчивый фокус* 	Асимптотически устойчива
	$\alpha > 0$, $\beta \neq 0$	*Неустойчивый фокус* 	Неустойчива
	$\alpha = 0$, $\beta \neq 0$	*Центр* 	Устойчива
Действительный, кратности 2: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	$\lambda < 0$	*Устойчивый узел* 	Асимптотически устойчива
	$\lambda > 0$	*Неустойчивый узел* 	Неустойчива

№10.456 (Неустойчивый фокус)

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = -3x + y \end{cases} \Rightarrow y = \frac{x' - x}{2}$$

Найдём x'':

$$x'' = x' + 2y' = (x+2y) + 2(-3x+y) = -5x + 4y$$

Подставим y:

$$x'' = -5x + 2x' - 2x$$

$$x'' - 2x' + 7x = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 7 = 0$$

$\lambda_1 = 1 - i\sqrt{6}$, $\lambda_2 = 1 + i\sqrt{6}$ ($\alpha > 0$, $\beta \neq 0 \Rightarrow$ неустойчивый фокус)

тогда общее решение для $x(t)$:

$$x = e^t(C_1 \cos(\sqrt{6}t) + C_2 \sin(\sqrt{6}t))$$

Найдём $y = \frac{x' - x}{2}$:

$$x' = e^t(C_1\cos(\sqrt{6}t) + C_2\sin(\sqrt{6}t)) + e^t[-C_1\sqrt{6}\sin(\sqrt{6}t) + C_2\sqrt{6}\cos(\sqrt{6}t)] =$$

$$= e^t[(C_1 + C_2\sqrt{6})\cos(\sqrt{6}t) + (C_2 - C_1\sqrt{6})\sin(\sqrt{6}t)]$$

$$y = \frac{\sqrt{6}}{2}e^t[C_2\cos(\sqrt{6}t) - C_1\sin(\sqrt{6}t)]$$

Решение:

$$\begin{cases} x = e^t(C_1\cos(\sqrt{6}t) + C_2\sin(\sqrt{6}t)) \\ y = \frac{\sqrt{6}}{2}e^t[C_2\cos(\sqrt{6}t) - C_1\sin(\sqrt{6}t)] \end{cases}$$

$\sqrt{10.451}$ (Седло)

$$\begin{cases} x' = x + y \Rightarrow y = x' - x \\ y' = x - y \end{cases}$$

Найдём x'':

$$x'' = x' + y' = x' + x - y = x' + x - x' + x = 2x$$

$$x'' - 2x = 0$$

$$\lambda^2 - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \sqrt{2}, \ \lambda_2 = -\sqrt{2}$$ (Седло)

$$x = C_1 \cdot e^{\sqrt{2}t} + C_2 e^{-\sqrt{2}t}$$

$$x' = \sqrt{2} C_1 e^{\sqrt{2}t} - C_2 \sqrt{2} \cdot e^{-\sqrt{2}t}$$

$$y = \sqrt{2} C_1 e^{\sqrt{2}t} - C_2 \sqrt{2} e^{-\sqrt{2}t} - C_1 e^{\sqrt{2}t} - C_2 e^{-\sqrt{2}t} =$$

$$= (\sqrt{2} - 1) C_1 e^{\sqrt{2}t} - (\sqrt{2} + 1) C_2 e^{-\sqrt{2}t}$$

Решение:

$$\begin{cases} x = C_1 \cdot e^{\sqrt{2}t} + C_2 e^{-\sqrt{2}t} \\ y = (\sqrt{2} - 1) C_1 e^{\sqrt{2}t} - (\sqrt{2} + 1) C_2 e^{-\sqrt{2}t} \end{cases}$$

№10.459 (Устойчивый узел)

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x - 2y \end{cases} \Rightarrow y = -x'$$

Найдём x'':

$$x'' = -y'$$

$$x'' = -x + 2y = -x - 2x'$$

$$x'' + 2x' + x = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1 \Rightarrow x(t) = e^{-t}(C_1 + C_2 t)$$

$$x' = (-C_1 + C_2 - C_2 t)e^{-t} \Rightarrow y(t) = (C_1 - C_2 + C_2 t)e^{-t}$$

Решение:

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t}(C_1 + C_2 t) \\ y(t) = (C_1 - C_2 + C_2 t)e^{-t} \end{cases}$$

№10.457 (седло)

$$\begin{cases} x' = -2x + \frac{1}{3}y \\ y' = -3x + \frac{1}{2}y \end{cases} \Rightarrow y = 3(x' + 2x)$$

Найдём x'':

$$x'' = -2x' + \frac{1}{3}y' = -2\left(-2x + \frac{1}{3}y\right) + \frac{1}{3}\left(-3x + \frac{1}{2}y\right) = 3x - \frac{1}{2}y$$

Подставим y:

$$x'' = 3x - \frac{3}{2}x' - 3x = -\frac{3}{2}x'$$

$$x'' + \frac{3}{2}x' = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{3}{2}\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -\frac{3}{2}$$

Тогда общее решение для $x(t)$:

$$x(t) = C_1 + C_2 e^{-\frac{3}{2}t}$$

Найдём $y(t)$:

$$x' = -\frac{3}{2}C_2 e^{-\frac{3}{2}t}$$

$$y = 3\left[-\frac{3}{2}C_2 e^{-\frac{3}{2}t} + 2\left(C_1 + C_2 e^{-\frac{3}{2}t}\right)\right] = 6C_1 + \frac{3}{2}C_2 e^{-\frac{3}{2}t}$$

Решение:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 + C_2 e^{-\frac{3}{2}t} \\ y(t) = 6C_1 + \frac{3}{2}C_2 e^{-\frac{3}{2}t} \end{cases}$$

Модель Лотки-Вольтерры

$$\begin{cases} x' = -x + 2xy \\ y' = y - 2xy \end{cases} \qquad (\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 1, \delta = 2)$$

Найдём точки покоя:

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2xy = 0 \\ y - 2xy = 0 \end{cases}$$

Из 1-го ур-я: $x(-1 + 2y) = 0$

$x = 0$ или $y = \frac{1}{2}$

Из 2-го ур-я: $y(1 - 2x) = 0$

$y = 0$ или $x = \frac{1}{2}$

Точки покоя: $(0,0)$, $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Определим их тип:

1) $(0,0)$

$$\begin{cases} x' = -x + 2xy \simeq -x \\ y' = y - 2xy \simeq y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1 \Rightarrow$ седло

2) $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

$x_1 = x - \frac{1}{2}$, $y_1 = y - \frac{1}{2}$

Подставляем и получаем

$$\begin{cases} x' = y_1 \\ y' = -x_1 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda_{1,2} = \pm i \Rightarrow$ центр