Пусть $f(x)$ является функцией плотности вероятностей с равномерным распределением. По определению

$$f(x) = \begin{cases} p, & \text{if } a \le x \le b, \\ 0, & \text{if } x < a \vee x > b \end{cases} \tag{1}$$

для некоторых неотрицательных $a$ и $b$ из $\mathbb{R}$, а также инвариантной вероятности $p$ такой, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} 0\,dx + \int_{a}^{b} pdx + \int_{a}^{+\infty} 0\,dx = \int_{a}^{b} pdx = p(b-a) = 1$$
$$\implies p = \frac{1}{b-a}.$$

Тогда функция распределения $F(x)$ оказывается равной

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0, & \text{если } x < a, \\ \int_{-\infty}^{a} 0\,dt + \int_{a}^{x} \frac{dt}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } a \le x \le b, \\ \int_{-\infty}^{a} 0\,dt + \int_{a}^{b} \frac{dt}{b-a} + \int_{b}^{x} 0\,dt = \frac{b-a}{b-a} = 1, & \text{если } x > b. \end{cases}$$

Тогда из (1) вытекает следующий результат преобразования Лапласа:

$$\mathcal{L}\big(f(x)\big)(s) = \frac{e^{-sa} - e^{-sb}}{s(b-a)},$$

первая производная которого равна

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}\big(f(x)\big)(s) = \frac{bse^{-sb} - ase^{-sa} + e^{-sb} - e^{-sa}}{s^2(b-a)}.$$

Поскольку и числитель, и знаменатель стремятся к нулю при $s \to 0$, для вычисления первого начального момента $\alpha_1$ применимо правило Лопиталя:

$$\alpha_1 = -\lim_{s\to 0} \frac{\frac{d}{ds}\left(bse^{-sb} - ase^{-sa} + e^{-sb} - e^{-sa}\right)}{\frac{d}{ds}s^2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$