# Teoria dell’Informazione e della Trasmissione

2024-2025

## Informazioni sul corso

Esame: scritto (1 esercizio, 30 min) + orale (1h)

3 esiti dallo scritto:

- non ammesso all’orale
- ammesso all’orale con voto limitato a 26
- ammesso all’orale senza limitazioni

Prerequisiti:

- analisi
- calcolo probabilità

Teoria dell’informazione:

- più astratta, occupa la maggior parte del corso
- testo fornito nel materiale (prof. Bellini)

Teoria della trasmissione:

- parte minore, fisica
- testo prof. Prati (molto esteso)
- slide aggiuntive

---

## Introduzione alla teoria dell’informazione

La teoria dell’informazione nasce con la pubblicazione di Mathematical Theory of Communication (Claude Shannon, 1940). L’obiettivo del testo è formalizzare le risposte alle domande fondamentali della teoria dell’informazione:

- Cos’è l’informazione? Come misurarla?
- Qual è il modo più economico per rappresentare l’informazione (da trasmettere o da memorizzare)? → *codifica di sorgente*
  - equivalenza: memorizzazione = trasmissione nel tempo
- Quanta informazione è trasmissibile in modo affidabile su un canale rumoroso? In che modo? → *codifica di canale*

### Codifica di sorgente

Per poter trattare e misurare le sorgenti di informazione è necessario astrarle ed ottenere un modello che ne rappresenti le caratteristiche essenziali.

Un esempio è il testo: sequenza di caratteri appartenenti ad un alfabeto. Un altro esempio è un segnale audio, ovvero un’onda di pressione nell’aria, variabile nel tempo. Il terzo tipo sono le immagini, luminanza osservabile in tre diverse bande (colori primari) variabile nel tempo e nello spazio. L’esempio più complesso sono i video, sequenze di immagini.

Tutte sono contraddistinte da una grandezza osservabile (carattere, livello di pressione, luminanza) che varia in funzione di una o più variabili indipendenti (tempo, spazio), non nota a priori. L’informazione è data proprio dal non essere nota a priori, altrimenti non avrebbe nessun contenuto informativo.

Volendo arrivare ad una definizione formale:

> *Sorgente di informazione* = grandezza osservabile che varia in funzione di una variabile indipendente (tempo) in modo non noto a priori.

Sono possibili classificazioni ulteriori:

- discretezza o continuità nel tempo
  - audio: continuo (secondo il tempo), testo: discreto (un carattere per volta)
- discretezza o continuità nell'ampiezza (la grandezza osservabile)
  - audio: continuo (valore reale della pressione), testo: discreto (caratteri distinti)

Nell'era digitale anche i segnali continui vengono discretizzati per campionamento, sia nel tempo (teorema del campionamento) che nelle ampiezze (ad esempio colori a 8 bit).

Possiamo di conseguenza vedere tutti i segnali come una *sequenza di messaggi.*

> Una sorgente discreta nel tempo e nelle ampiezze si può modellizzare come una sequenza di messaggi $X_1, X_2, ..., X_k, ...$ presi da un alfabeto $X = \{x_1, x_2, ..., x_M\}$ in modo casuale (non noto a priori.

I pedici dei messaggi rappresentano il campione di tempo. I pedici nei simboli dell'alfabeto rappresentano l'ordinamento all'interno dell'alfabeto. L'alfabeto ha dimensione $M$, ovvero ogni messaggio può avere $M$ possibili valori. I messaggi sono variabili casuali e l'alfabeto rappresenta l'insieme delle possibili realizzazioni.

*Osservazione*: per descrivere una sorgente dobbiamo assegnare la sua distribuzione di probabilità (pmf, *probability mass function*):

$$P_{X_k}(x_i) = \text{Prob}[X_k = x_i]$$

- $0 \leq P_{X_k}(x_i) \leq 1$
- $\sum_{i=1}^{M} P_{X_k}(x_i) = \sum_x P_{X_k}(x) = 1$

Una sorgente può essere *con memoria* o *senza memoria.* In una sorgente con memoria il messaggio $k+1$-esimo è dipendente dal messaggio $k$-esimo.

> Una sorgente è con memoria se il valore assunto da un messaggio condiziona la pmf dei successivi. *(es. testo)*
>
> Una sorgente è senza memoria se i messaggi sono indipendenti tra di loro. *(es. roulette)*

Una sorgente senza memoria è univocamente caratterizzata dall'alfabeto $\mathcal{X}$ e dalla pmf $P_X(x)$.

Per descrivere una sorgente con memoria bisogna assegnare la distribuzione congiunta di probabilità o quella condizionata.

Probabilità congiunta:

$$P_{X_1X_2}(x', x'') = \text{Prob}[X_1 = x' \wedge X_2 = x'']$$

Probabilità condizionata:

$$P_{X_1|X_2}(x'|x'') = \frac{P_{X_1X_2}(x', x'')}{P_{X_2}(x'')}$$

Osservazioni:

- da una distribuzione congiunta posso ricavare una marginale (distribuzione di probabilità di una singola variabile):

$$\sum_{x'} P_{X_1X_2}(x', x'') = P_{X_1}(x')$$

- la sommatoria di tutti i possibili valori di una condizionata deve essere a 1:

$$\sum_{x'} P_{X_1|X_2}(x'|x'') = 1$$

- $X_1$ e $X_2$ sono indipendenti se e solo se la distribuzione di probabilità congiunta è il prodotto delle singole probabilità:

$$X_1, X_2 \text{ indipendenti} \Leftrightarrow P_{X_1,X_2}(x', x'') = P_{X_1}(x')P_{X_2}(x'')$$

- $X_1$ e $X_2$ sono indipendenti se e solo se la distribuzione di probabilità condizionata è uguale alla distribuzione della prima variabile:

$$X_1, X_2 \text{ indipendenti} \Leftrightarrow P_{X_1|X_2}(x', x'') = P_{X_1}(x')$$

Si assumono sorgenti *stazionarie*: le loro statistiche non cambiano nel tempo, ovvero la distribuzione di probabilità dei valori dell'alfabeto si considera costante per ogni messaggio. Il concetto è diverso rispetto alla correlazione tra i messaggi.

$$P_{X_k}(x) = P_X(x) \quad \forall k$$

## Sorgenti senza memoria

Sia $X$ una sorgente senza memoria con alfabeto $\mathcal{X} = \{x_1, ..., x_M\}$ e pmf $P_X(x)$.

L'informazione portata da un messaggio dipende dalla sua improbabilità.

Assumendo che:

1. l'informazione di un messaggio $X_i$ è tanto più grande quanto più $P_X(x_i)$ è piccola
2. l'informazione portata da due messaggi indipendenti è la somma delle informazioni che portano singolarmente

si definisce l'informazione portata da un messaggio $X_i$ come logaritmo dell'inverso della sua probabilità:

$$\mathcal{I}(x_i) = \log \frac{1}{P_X(x_i)}$$

L'informazione media per messaggio emessa da $X$ è dunque

$$H(X) \triangleq \mathbb{E}[\mathcal{I}(x_i)] = \sum_{i=1}^{M} P_X(x_i) \cdot \log \frac{1}{P_X(x_i)}$$

e si definisce *entropia* della sorgente.

Osservazioni:

- Se il logaritmo è naturale, $H$ e $\mathcal{I}$ si misurano in [nat]; se il logaritmo è in base 2 $H$ e $\mathcal{I}$ si misurano in [bit]. Da qui in avanti per log si intende sempre $\log_2$.
- Dato che $P_X(x_i) \geq 0$, allora $\mathcal{I} \geq 1$ e dunque il suo logaritmo è sempre positivo.
- Se $P_X(x) = 0$, la sua informazione sarebbe teoricamente infinita, ma se la probabilità è nulla quel messaggio non esiste. In ogni caso nel calcolo dell'entropia la forma d'indecisione $\lim_{x \to 0} x \log x = 0$.

#### Esempio 1: lancio di una moneta

$\mathcal{X} = \{T, C\}$, $P_X(x) = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$

$$H(x) = \frac{1}{2} \log_2 2 + \frac{1}{2} \log_2 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ [bit]}$$

Per memorizzare il risultato di una serie di esperimenti di lancio di moneta, servirebbero $n$ bit, uno per ogni esperimento.

#### Esempio 2: seme di una carta da gioco

Le carte sono estratte casualmente con reimmissione.

$\mathcal{X} = \{C, S, B, D\}$, $P_X(x) = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\}$

$$H(x) = \frac{1}{4} \log 4 + \frac{1}{4} \log 4 + \frac{1}{4} \log 4 + \frac{1}{4} \log 4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

Per memorizzare la sequenza dei semi usciti servono 2 bit per ciascuna estrazione.

#### Esempio 3: roulette truccata

$\mathcal{X} = \{R, N\}$, $P_X(x) = \{p, 1-p\}$

$$H(x) = p \log \frac{1}{p} + (1-p) \log \frac{1}{1-p}$$

$H(x)$ è parametrizzata in $P$. Si tratta di una forma ricorrente, entropia di una variabile binaria parametrizzata:

$$H_2(P) \triangleq p \log \frac{1}{p} + (1-p) \log \frac{1}{1-p}$$

- se $p = 0$ esce sempre nero, gli esperimenti non portano alcuna informazione
- se $p = 1$ esce sempre rosso, gli esperimenti non portano alcuna informazione
- se $p = \frac{1}{2}$ i due eventi sono equiprobabili, $H(p) = 1$ (come nel caso della moneta)

Eseguendo uno studio di funzione:

$$\frac{\mathrm{d}H_2(p)}{\mathrm{d}p} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(-\frac{1}{\ln 2}\left(p\ln p + (1-p)\ln(1-p)\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{\ln 2}(\ln p + \cancel{1} - \ln(1-p) - \cancel{(1-p)}\frac{1}{\cancel{1-p}}) = \log_2 \frac{1-p}{p}$$

(inserire grafico)

*Teorema*: sia $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, ..., x_M\}$ un alfabeto con $M$ possibili valori e $X$ una sorgente senza memoria con pmf $P_X(x)$, allora l'entropia è minore o uguale al logaritmo in base 2 di $M$:

$$H(x) \leq \log_2 M$$

con uguaglianza se e solo se la distribuzione è uniforme:

$$P_X(x) = \frac{1}{M} \quad \forall x$$

*Dimostrazione*:

$$X(x) - \log_2 M = \sum_{i=1}^{M} P_X(x_i)\log\frac{1}{P_X(x_i)} - \sum_{i=1}^{M} P_X(x_i)\log_2 M =$$

$$= \sum_{i=1}^{M} P_X(x_i)\log_2\frac{1}{MP_X(x_i)} =$$

(disuguaglianza fondamentale della teoria dell'informazione: $\ln x \leq x-1\ \forall x$, $\ln x = x$ per $x=1$, quindi

$$\frac{\log_2 x}{\log_2 e} \leq (x-1) \Rightarrow \log_2(x) \leq (x-1)log_2 e$$

). Tornando alla dimostrazione:

$$= \sum_{i=1}^{M} P_X(x_i)\log_2\frac{1}{MP_X(x_i)} \leq \log_2 e \sum_{i=1}^{M} P_X(x_i)\left(\frac{1}{MP_X(x_i)} - 1\right) =$$

$$= \log_2 e\left[\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{M} - \sum_{i=1}^{M} P_X(x_i)\right] = 0.$$

L'uguaglianza vale solo con $P_X(x_i) = \frac{1}{M}$ perché ogni $P_X(x_i)$ diverso da $\frac{1}{M}$ dà una perdita nel passaggio $\log\frac{1}{P_X} \to \frac{1}{P_X} - 1$.

## Codifica di sorgenti senza memoria

Codificare consiste nell'associare ad un messaggio $x_i$ una $n$-upla di bit $c_i$ o $c(x_i)$ lunga $n_i$ bit.

Un codice $\mathcal{C}$ è l'elenco di tutte le sequenze $c_1, c_2, ..., c_n$ di lunghezze $n_1, ..., n_m$.

Indichiamo con $\underline{x} = [x_{i_2}\ x_{i_2}\ ...\ x_{iL}]$ una sequenza di messaggi con codici $c(\underline{x}) = [c_{i_2}\ c_{i_2}\ ...\ c_{iL}]$.

Un codice $\mathcal{C}$ è detto *univocamente decodificabile* se

$$c(\underline{x}') \neq c(\underline{x}'') \quad \forall \underline{x}' \neq \underline{x}''.$$

e *istantaneamente decodificabile* se $c_i$ non coincide con l'inizio di nessun altro $c_j$ con $n_j > n_i$. L'istantanea decodificabilità implica l'univoca decodificabilità, ovvero ne è sottoinsieme.

Si può osservare che il costo di $\mathcal{C}$ è la sua lunghezza media:

$$\bar{n}_e = \sum_{i=1}^{M} n_i P_X(x_i).$$

Un codice è dunque tanto migliore quanto riesce a minimizzare la lunghezza media.

*Definizione*: $\mathcal{C}$ rispetta la disuguaglianza di Kraft se

$$\sum_{i=1}^{M} 2^{-n_i} \leq 1$$

Da questa definizione è possibile ricavare due teoremi:

- se le lunghezze del codice rispettano la disuguaglianza di Kraft, è possibile costruire un codice istantaneamente decodificabile
- se un codice è istantaneamente decodificabile, le sue lunghezze rispettano necessariamente la disuguaglianza di Kraft

*Teorema 1*: se $n_i$, $i = 1, ..., M$ rispetta la disuguaglianza di Kraft, allora $\exists\, \mathcal{C}$ istantaneamente decodificabile di lunghezze $n_i$

*Dimostrazione (per costruzione)*

- Siano $n_1 \leq n_2 \leq n_3 ... \leq n_M$. Scegliere a caso $c_1$ lungo $n_1$.
- Scegliere $c_2$ a caso escludendo le $2^{n_2 - n_1}$ sequenze che iniziano come $c_1$.
- Scegliere $c_3$ a caso escludendo le $2^{n_3 - n_2}$ che iniziano come $c_2$ e le $2^{n_3 - n_1}$ che iniziano come $c_1$.
- Procedere in ugual modo fino a $c_M$.

È possibile completare la costruzione se all'ultimo passo il numero di sequenze vietate è minore o uguale del numero di sequenze possibili per $c_M$:

$$2^{n_M - n_1} + 2^{n_M - n_2} + ... + 2^{n_M - n_{M-1}} \leq 2^{n_M} - 1,$$

cioè se

$$2^{-n_1} + 2^{-n_2} + ... + 2^{-n_{M-1}} \leq 1 - 2^{n_M} \Rightarrow \text{Kraft}.$$

*Teorema 2*: sia $\mathcal{C}$ univocamente decodificabile. Allora $\mathcal{C}$ rispetta la disuguaglianza di Kraft.

*Dimostrazione:* considero una $n$-upla di messaggi $x_{i1}\ x_{i2}\ \dots\ x_{iN}$ che si può presentare in $M^N$ valori distinti e calcolo

$$\left(\sum_{i=1}^{N} 2^{-n_i}\right)^N = \sum_{i_1=1}^{M} \sum_{i_2=1}^{M} ... \sum_{i_N=1}^{M} 2^{\underbrace{-(n_{i1} + n_{i2} + ... + n_{iN})}_{\text{lunghezza di } c(\underline{x}) = n}} = \sum_{n=1}^{M \cdot N_{\max}} A_n 2^{-n}$$

dove $A_n$ è il numero di $\underline{x}$ distinte tali che $C(\underline{x}) = n$.

$$= \sum_{n=1}^{M \cdot N_{\max}} A_n 2^{-n} \leq N \cdot n_{\max}$$

Estraiamo la radice $n$-esima, che essendo monotona crescente non cambia l'ordinamento:

$$\sum_{n=1}^{M \cdot N_{\max}} A_n 2^{-n} \leq N \cdot n_{\max} \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} 2^{-n_i} \leq (N \cdot n_{\max})^{\frac{1}{n}} \rightarrow_{N \to \infty} 1$$

perché riconducibile al limite noto

$$\lim_{N \to \infty} e^{\frac{1}{N} \log N}.$$

*Teorema sulla codifica di sorgente*: sia $X$ una sorgente senza memoria di entropia $H(x)$ e $\mathcal{C}$ un codice univocamente decodificabile per $X$. Segue che

$$\bar{n}_e \geq H(x) \text{ [bit]}.$$

*Dimostrazione:*

$$H(x) - \bar{n}_e = \sum_{i=1}^{N} P_X(x_i) \log \frac{1}{P_X(x_i)} - \sum_{i=1}^{M} P_X(x_i) n_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{M} P_X(x_i) \log \frac{2^{-n_i}}{P_X(x_i)} \leq \log e \sum_{i=1}^{M} P_X(x_i) \left( \frac{2^{-n_i}}{P_X(x_i)} - 1 \right) =$$

$$= \log e \left[ \underbrace{\sum_{i=1}^{M} 2^{-n_i}}_{\leq 1} - \underbrace{\sum_{i=1}^{M} P_X(x_i)}_{=1} \right] \leq 0.$$

*Osservazione*: se $P_X(x) = 2^{-n_i}$ $\forall i$ allora $\bar{n} = H(x)$.

*Osservazione*: si potrebbero codificare coppie di messaggi consecutivi come messaggi presi da un alfabeto con $M^2$ simboli e pmf $P_{X_1}(x_1) \cdot P_{X_2}(x_2)$. Per il teorema di Shannon la lunghezza media del codice $\mathcal{C}$ univocamente decodificabile sarebbe

$$\bar{l} \geq H(X_1) + H(X_2) = 2H(X)$$

e la lunghezza per messaggio sarebbe

$$\bar{n} = \frac{\bar{l}}{2} \geq \frac{\cancel{2}H(X)}{\cancel{2}}$$

Ma la pmf $P_{X_1}(x_1) \cdot P_{X_2}(x_2)$ magari può dare un vantaggio.

**Codifica di Gilbert-Moore**

Assegnare ad ogni codice la lunghezza

$$n_i = \left\lceil \log \frac{1}{P_X(x_i)} \right\rceil$$

da cui segue la scelta delle sequenze. Vale

$$\log \frac{1}{P_X(x_i)} \leq n_i < \log \frac{1}{P_X(x_i)} + 1$$

da cui

$$\sum_{i=1}^{M} P_X(x_i) \log \frac{1}{P_X(x_i)} \leq \sum_{i=1}^{M} P_X(x_i) n_i < \sum_{i=1}^{M} P_X(x_i) \left[ \log \frac{1}{P_X(x_i)} + 1 \right]$$

quindi

$$H(x) \leq \bar{n} < H(X) + 1.$$

Segue che la codifica di Gilbert-Moore sprechi al massimo 1 bit. Per ridurre l'effetto relativo di tale spreco, applichiamo la codifica a $L$-uple di messaggi:

$$LH(X) \leq \bar{l} < LH(X) + 1$$

ovvero

$$H(X) \leq \bar{n} < H(X) + \frac{1}{L},$$

che significa che è possibile ridurre lo spreco aumentando la lunghezza dei raggruppamenti di messaggi.

**Esercizio**

Sia $X$ una sorgente binaria $\mathcal{X} = \{0, 1\}$, $P_X(2) = \{\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\}$

1. Calcolare $H(X)$
2. Codificare con Gilbert-Moore e Huffmann dato $L = 2$
3. Codificare con Gilbert-Moore e Huffmann dato $L = 3$

$$H(X) = \frac{1}{5}\log 5 + \frac{4}{5}\log\frac{5}{4} = \log 5 - \frac{8}{5} \approx 0.722 \text{ bit}.$$

Il numero è plausibile (compreso tra 0 e 1, a occhio sembra corrispondere alla curva a campana dell'entropia).

Codifica di Gilbert-Moore con $L = 2$:

| $x_k x_{k+1}$ | $P(x_k x_{k+1})$ | $l_i$ | $c_i$ |
|---|---|---|---|
| 00 | $\frac{1}{25}$ | 5 | 11111 |
| 01 | $\frac{4}{25}$ | 3 | 101 |
| 10 | $\frac{4}{25}$ | 3 | 100 |
| 11 | $\frac{16}{25}$ | 1 | 0 |

La somma delle probabilità è (correttamente) 1.

Le $l_i$ rappresentano l'intero superiore di $\log\frac{1}{P}$.

Il modo più immediato per ottenere i $c_i$ è scriverli come immediatamente decodificabili.

Otteniamo un $\bar{l}$ pari a:

$$\bar{l} = \sum_{i=1}^{4} l_i \cdot P_{\underline{x}}(\underline{x}_i) = \frac{16}{25} + 2 \cdot 3 \cdot \frac{4}{25} + 5 \cdot \frac{1}{25} = \frac{45}{25} = \frac{9}{5}$$

$$\bar{n} = \frac{\bar{l}}{L} = \frac{\bar{l}}{2} = 0.9 \text{ bit}$$

Consideriamo la codifica di Huffmann. Essa assegna iterativamente il bit iniziale 0 e 1 ai due messaggi meno probabili dell'iterazione.

| $x_k x_{k+1}$ | $P(x_k x_{k+1})$ | $c_i$ |
|---|---|---|
| 00 | $\frac{1}{25}$ | 010 |
| 01 | $\frac{4}{25}$ | 011 |
| 10 | $\frac{4}{25}$ | 00 |
| 11 | $\frac{16}{25}$ | 1 |

$$\bar{l} = \frac{16}{25} + 2 \cdot \frac{4}{25} + 3 \cdot \frac{5}{25} = \frac{39}{25} \rightarrow \bar{n} = \frac{39}{50} = 0.78 \text{ bit} > 0.722 = H(x)$$

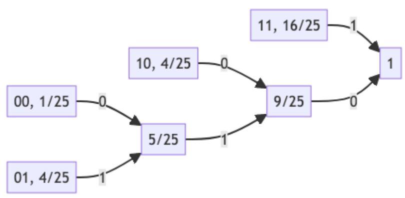


Figura 1: diagram

**Esame 17/6/2010**

Sia $X$ una sorgente discreta, che emette 5 messaggi, A, B, C, D, E con probabilità (0.1, 0.1, 0.5, 0.15, 0.15). Scegliere 5 codici da associare ai 5 messaggi tra i 10 codici binari proposti qui sotto in modo da ottenere un codice immediatamente decodificabile.

$$c_1 = 0110 \quad c_2 = 0 \quad c_3 = 100 \quad c_4 = 111 \quad c_5 = 110110$$
$$c_6 = 1001 \quad c_7 = 1101 \quad c_8 = 1100 \quad c_9 = 010 \quad c_{10} = 00$$

Il codice scelto rispetta la disuguaglianza di Kraft? Confrontare la lunghezza media ottenuta con l'entropia $H(X)$. Potendo scegliere liberamente i codici, ma sempre codificando messaggi singoli, si poteva ottenere una lunghezza media inferiore?

| $x_k$ | $P(x_k)$ | $l_i$ | $c_i$ |
|---|---|---|---|
| A | 0.1 | 4 | $c_8 = 1100$ |
| B | 0.1 | 4 | $c_7 = 1101$ |
| C | 0.5 | 1 | $c_2 = 0$ |
| D | 0.15 | 3 | $c_3 = 100$ |
| E | 0.15 | 3 | $c_4 = 111$ |

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{5} 2^{-n_i} = 2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-4} = \frac{7}{8}$$

$$\bar{n} = 0.5 + 0.3 \cdot 3 + 0.2 \cdot 4 = 2.2 \text{ bit} > H(x) = 1.93 \text{ bit}$$

**Tema del 18/2/2016**

Due giocatori si sfidano a chi pesca la carta più bassa da un mazzo di 40 carte da gioco (con reimmissione). In caso di pareggio la prova si ripete. Si consideri come risultato $X$ il valore della carta vincente.

- Quante sono le coppie estratte possibili? Sono equiprobabili?
- Quanti valori può assumere $X$? Con che probabilità?
- Quanti bit occorrono, approssimativamente, per memorizzare i risultati di $N$ prove, con $N$ grande, senza prevedere una codifica di sorgente?
- Quanti con una codifica di sorgente ideale?
- Quanti con codifica di Shannon e quanti con codifica di Huffmann per risultati $X$ codificati singolarmente?

| | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | $\nexists$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ |
| **2** | $\frac{1}{90}$ | $\nexists$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ |
| **3** | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\nexists$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ |
| **4** | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\nexists$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ |
| **5** | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\nexists$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ |
| **6** | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\nexists$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ |
| **7** | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\nexists$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ |
| **8** | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\nexists$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ |
| **9** | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\nexists$ | $\frac{1}{90}$ |
| **10** | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\frac{1}{90}$ | $\nexists$ |

- la probabilità che un asso sia la carta più bassa è $\frac{18}{90}$
- la probabilità che un 2 sia la carta più bassa è $\frac{16}{90}$
- la probabilità che un 3 sia la carta più bassa è $\frac{14}{90}$
- stesso vale per tutte le altre carte tranne il re, che non può uscire come carta più bassa

Altri temi d'esame fattibili:

- 29/10/2014
- 8/11/2018
- 4/7/2008
- 10/11/2022