Esercitazioni MAO

2024/2025

Reparti:

- serie: unica variabile x_j indicizzata per ogni prodotto

$$\forall i \ : \ \sum_{j \in J} TL_{i,j} x_j$$

- parallelo: $y_{i,j}$ indicizzate per prodotto e linea

$$\sum_{j \in J} TLji, jy_{i,j}$$

Oggi: pianificazione multi-periodo (abbiamo un magazzino di cui tenere conto nella pianificazione).

Esercizio 2

Testo:

Un'azienda produttrice di finestre deve pianificare la produzione su un orizzonte temporale di 6 mesi. A causa delle variazioni mensili nel costo delle materie prime e del lavoro, il costo di produzione varierà nei prossimi mesi, come mostrato nella successiva tabella, che fornisce anche i valori della domanda da soddisfare.

Mese	1	2	3	4	5	6
Domanda (unità)	100	250	190	140	220	110
Costo di produzione ($/unità)	50	45	55	48	52	50

Per sfruttare le fluttuazioni del costo di produzione, l'azienda in considerazione potrebbe decidere di produrre in un determinato mese unità in eccesso, da conservare in magazzino per consegne nei mesi successivi. In particolare, il magazzino ha una capienza di 100 unità. Ad oggi, sono presenti 50 unità a magazzino, mentre alla fine dell'orizzonte di pianificazione è richiesta la presenza di almeno 60 unità. Ad ogni unità in magazzino è associato un costo mensile di stoccaggio pari a 8$. Sulla base dei dati a disposizione, fornire una risposta ai seguenti quesiti:

1. Definire i piani ottimali di produzione e stoccaggio nell'ottica di minimizzazione dei costi totali.
2. Indicare le quantità complessivamente prodotte e stoccate nell'arco dei sei mesi nella soluzione ottima.

Insiemi: - $T = \{T_1, \ T_2, \ldots, T_6\}$

Dati:

Scalari	Vettori	Matrici
CS: costo unitario di stoccaggioI_0: livello iniziale di scorteIF: livello finale di scorte (minimo)IM: capacità di stoccaggio	D_t: domanda al mese tCP_t: costo di produzione al mese t	$\emptyset$

Variabili decisionali: - x_t: produzione al mese t - I_t: livello del magazzino alla fine del mese t - z: variabile obiettivo (costi totali)

Equazioni (funzione obiettivo + vincoli):

- *Obiettivo* (costi di produzione + costi di stoccaggio):

$$\min z = \sum_{t\in T} CP_t \cdot x_t + CS \cdot \sum_{t\in T} I_t$$

- *Gestione del magazzino*:

$$I_T \leq IM, \quad \forall t \in T$$

$$I_{t6} \geq IF$$

- *Bilancio* (fonti = impieghi):
  - mese 1: $x_1 + I_0 = D_1 + I_1$
  - mese 2: $x_2 + I_1 = D_2 + I_2$
  - ...
  - mese 6: $x_6 + I_5 = D_6 + I_7$
    ricaviamo il totale:

$$x_t + I_{t-1|t>1} + I_{0|t=1} = D_t + I_t, \quad \forall t \in T$$

    (in GAMS: operatore condizionale $)

Quando si hanno più variabili decisionali, è necessario stabilire una regola che le unisca tra loro. Nel caso dei problemi di produzione come questo, stabiliamo un vincolo di bilancio (uguaglianza tra fonti e impieghi) che unisca domanda, vincoli di produzione e vincoli di magazzino.

$$\underbrace{I_t - (I_{t-1|t>1} + I_{0|t=1})}_{\Delta \text{ scorte}} = \underbrace{x_t - D_t}_{\text{saldo produzione - domanda}}, \quad \forall t \in T$$

Dobbiamo imporre vincoli di integralità:

- $x_t \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in T$
- $I_t \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in T$ Entriamo dunque nella classe MIP (mixed-integer programming). Diventa perciò necessario controllare il *gap di ottimalità*.

Fasi MIP:

1. *rilassamento continuo*: in prima approssimazione i vincoli di integralità vengono sostituiti con vincoli di continuità (ad esempio $x_t \in \mathbb{N} \to x_t \geq 0$, $y_t \in \{0; 1\} \to 0 \leq y_t \leq 1$). Dopodiché si applica l'algoritmo del simplesso, che, avendo complessità polinomiale, arriva alla soluzione in tempi relativamente rapidi
2. *ripristino dei vincoli di integralità*: si utilizza un algoritmo chiamato *branch-and-bound*, molto più lento del simplesso. La seconda fase è dunque la più pesante a livello computazionale. Per questo, GAMS da impostazioni predefinite determina una soluzione ammissibile invece della soluzione ottima. Definiamo *gap di ottimalità* la distanza tra la soluzione ammissibile trovata e la soluzione ottima.

La distanza (SA; SO) può essere calcolata in due modi:

- *assoluto*: $|SO - SA|$
- relativo: $\frac{|SO-SA|}{|SO|}$

e si parla dunque di *gap assoluto di ottimalità* o *gap relativo di ottimalità*. La soluzione ottima ha ovviamente gap di ottimalità nullo. In GAMS possiamo imporre le variabili `.optca` o `.optcr` del modello uguali a zero per ottenere la vera soluzione ottima. GAMS calcola il gap di ottimalità in base alla migliore stima dell'ottimo, ed è dunque in grado di dare i valori del gap prima di aver determinato l'ottimo effettivo. Questa migliore stima dell'ottimo deriva dal fatto che abbiamo a disposizione un *lower bound* (la soluzione non ancora passata per il vincolo di integralità, che è superottimale) e un *upper bound* (la soluzione ammissibile iniziale).

L'algoritmo procede avvicinando iterativamente tra loro la stima (per difetto) della soluzione ottima e la soluzione ammissibile, finché non collassano sul vero punto di ottimo.

Attenzione: `Integer Variables` limita le variabili al sottoinsieme $[0, 100] \in \mathbb{N}$. Questo è abbastanza per la variabile I (il magazzino ha capacità massima 100) ma non per x. Dobbiamo aumentare manualmente il suo upper bound con l'estensione `.up()`. Allo stesso modo possiamo imporre anche il lower bound con `.lo()`.

SCALARI

- $x_{tot} = \sum_{t\in T} x_t^* \ (x, l(t))$
- $I_{tot} = \sum_{t\in T} I_t^* \ (x, l(t))$

Problema 3

Testo:

Un'azienda chimica produce 3 tipi di composti (A, B e C), ciascuno dei quali si ottiene miscelando 4 prodotti base (1, 2, 3 e 4). La disponibilità (in litri) e il costo unitario (in €/litro) dei prodotti sono espressi nella successiva tabella.

Prodotto	1	2	3	4
Disponibilità (litri)	3000	2000	4000	1000
Costo (€/litro)	3	6	4	5

I ricavi unitari (espressi in €/litro) dei vari composti sono invece indicati nella seguente tabella:

Composto	A	B	C
Ricavo (€/litro)	5.5	4.5	3.5

Ogni composto è ottenuto miscelando i quattro prodotti base (che sono gli unici componenti dei composti chimici) nel rispetto di alcuni vincoli tecnici, che riguardano un minimo ed un massimo contenuto di ciascun prodotto all'interno di ogni composto, come specificato nella successiva tabella.

	Prodotto 1	Prodotto 2	Prodotto 3	Prodotto 4
Composto A	0-30%	40-100%	0-50%	0-100%
Composto B	0-50%	10-100%	0-100%	0-100%
Composto C	70-100%	0-100%	0-100%	0-100%

Ad esempio, il composto di tipo A deve essere costituito per almeno il 40% dal prodotto base 2, per al più il 30% dal prodotto base 1 e per al più il 50% dal prodotto base 3. Sulla base dei dati a disposizione, determinare la miscela ottima dei prodotti al fine di massimizzare i profitti complessivi.

Insiemi:

$$I = \{1, 2, 3, 4\} : \text{ insieme dei prodotti base}$$

$$J = \{A, B, C\} : \text{ insieme dei prodotti finiti}$$

Dati:

Scalari	Vettori	Matrici
$\emptyset$	D_i: disponibilità del prodotto base $i c_i$: costo unitario utilizzo di $i r_j$: ricavo unitario di j	$LO_{i,j}$: percentuale minima del prodotto base i nel composto $j UP_{i,j}$: percentuale massima del prodotto base i nel composto j.

Variabili decisionali:

- $x_{i,j}$: quantità di i in j
- (opzionale) y_j: quantità di j prodotto
- z: variabile obiettivo (profitti totali)

Equazioni:

- funzione obiettivo (ricavi p.f. - costi p.b.)

$$\max z = \sum_{j \in J} r_j \cdot y_j - \sum_{i \in I} c_i \cdot \sum_{j \in J} x_{i,j}$$

- vincolo di collegamento ($y_j \leftrightarrow x_{i,j}$)

$$y_j = \sum_{i \in I} x_{i,j}, \quad j \in J$$

- disponibilità (utilizzo p.b. $\leq$ disponibilità)

$$\sum_{j \in J} x_{i,j} \leq D_i, \quad \forall i \in I$$

- mix

$$LO_{i,j} \leq \underbrace{\frac{x_{i,j}}{y_j}}_{\text{frazione di } i \text{ in } j} \leq UP_{i,j}, \quad \forall i \in I, \ \forall j \in J$$

  In realtà imponendo questo limite usciamo dalla classe dei problemi lineari e finiamo in NLP. Semplicemente moltiplicando tutto per y_j torniamo in LP:

$$LO_{i,j} \cdot y_j \leq x_{i,j} \leq UP_{i,j} \cdot y_j, \quad \forall i \in I, \ \forall j \in J.$$

Variabili decisionali:

- $x_{i,j} \geq 0$, $\forall i \in I$, $\forall j \in J$
- $y_j \geq 0$, $\forall j \in J$ Lavorando con liquidi, è corretto che le variabili che ne rappresentano la quantità siano continue.

Indicazioni per GAMS:

- definire separatamente UP e LO
- mettere il dominio delle equazioni
- spezzare in due disequazioni il range per l'equazione di mix

Esercizio 4

Testo:

Un'azienda metallurgica desidera produrre 300 kg di una nuova lega composta dal 40% di stagno, dal 35% di zinco e dal 25% di piombo. La produzione della nuova lega avverrebbe tramite fusione di cinque rottami, ciascuno dei quali presenta un peso pari a 150 kg. I contenuti di stagno, zinco e piombo dei vari rottami sono riportati nella tabella successiva.

	Rottame 1	Rottame 2	Rottame 3	Rottame 4	Rottame 5
% stagno	60	25	45	20	50
% zinco	10	15	45	50	40
% piombo	30	60	10	30	10
costo ($/kg)	22	20	25	24	27

Sulla base dei dati a disposizione, fornire una risposta ai seguenti quesiti:

1. Determinare le quantità di ciascun rottame da utilizzare per produrre la nuova lega a costo minimo.
2. Indicare la percentuale di utilizzo di ciascun rottame.

Insiemi:A

- I : elementi $= \{Sn, Zn, Pb\}$
- J : rottami $= \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Dati:

Scalari	Vettori	Matrici
P: produzione richiesta$Q$: disponibilità di ogni rottame	C_j: costo di utilizzo del rottame $j L_i$: percentuale di elemento i-esimo all'interno della lega	$F_{i,j}$: frazione dell'elemento i-esimo all'interno del rottame j-esimo

Variabili decisionali: - x_j quantità di rottame j utilizzata - z variabile obiettivo (costi totali)

Equazioni:

- funzione obiettivo

$$\min z = \sum_{j \in J} c_j \cdot x_j$$

- vincolo di produzione

$$\sum_{j \in J} x_j = P$$

- vincolo di disponibilità

$$x_j \leq Q, \quad \forall j \in J$$

- vincolo di miscelazione

$$\frac{\overbrace{\sum_{j \in J} F_{i,j} \cdot x_j}^{\text{quantità di } i \text{ nella lega}}}{\underbrace{\sum_{j \in J} x_j}_{P}} = L_i, \quad \forall i \in I$$

che va linearizzato (2 possibili modi):

1. la quantità di rottame è assegnata e uguale a P, quindi sostituisco la sommatoria a denominatore con P e linearizzo:

$$\frac{\sum_{j \in J} F_{i,j} \cdot x_j}{P} = L_i, \quad \forall i \in I$$

2. moltiplico entrambi i termini per la sommatoria a denominatore:

$$\sum_{j \in J} F_{i,j} \cdot x_j = L_i \cdot \sum_{j \in J} x_j, \quad \forall i \in I$$

Vincoli:

$$x_j \geq 0, \quad \forall j \in J$$

(programmazione lineare).

Cose da ricordare:

1. linearità
2. collegamento variabili decisionali