Processo de difusão com Saltos

Francis Araujo

June 13, 2021

impa
Instituto de Matemática
Pura e Aplicada

Empiricamente, os retornos de ativos arriscados apresentam caudas mais pesadas em relação à distribuição normal (excesso de curtose), hipótese adotada pelo modelo de Black & Scholes. Merton (1976) introduz o conceito de processo de difusão com saltos para explicar tais fenômenos.

Dinâmica do preço do ativo subjacente:

$$dX_t = (\mu - \delta)X_{t^-}dt + \sigma X_{t^-}dB_t + (J_t - 1)\,X_{t^-}dN_t \tag{1}$$

Sob a medida Q, a dinâmica de X_t é determinada por:

$$dX_t = [r - \delta - \lambda(\bar{J} - 1)]X_{t^-}dt + \sigma X_{t^-}d\tilde{B}_t + (J_t - 1)\,X_{t^-}dN_t \tag{2}$$

Onde:

(I) B_t é Browniano padrão

(II) $\bar{J} = E^P\left(J_t\right) = \exp\left(\mu_J + \frac{1}{2}\sigma_J^2\right)$

(III) $\tilde{B}_t = B_t + \theta t$ e $\theta = \frac{\mu - r + \lambda(\bar{J}-1)}{\sigma}$

(IV) $N_t \sim \text{Poi}(\lambda t)$

(V) $J_i \sim \log N\left(\mu_J, \sigma_J^2\right), \quad i = 1, 2, \ldots, N_{T-t}$

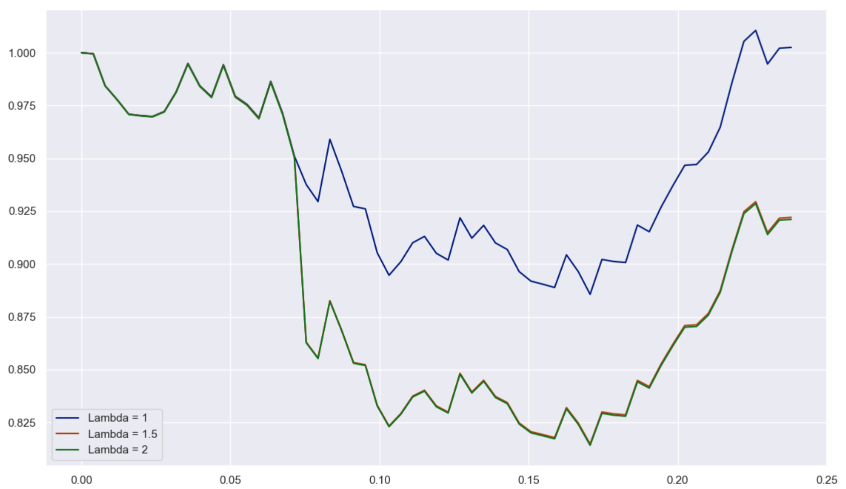
Defina $y_t = log(X_t)$; $Z_1 \sim N(0,1)$; $Z_2 \sim N(\mu_j, \sigma_j^2)$; $n_t = N_{(t+\Delta t)-t}$

$$
\begin{aligned}
dX_t &= [r - \delta - \lambda(\bar{J} - 1)]X_{t^-}dt + \sigma X_{t^-}d\tilde{B}_t + (J_t - 1)\,X_{t^-}dN_t \\
\frac{dX_t}{X_{t^-}} &= [r - \delta - \lambda(\bar{J} - 1)]dt + \sigma d\tilde{B}_t + (J_t - 1)\,dN_t \\
d(log(X_t)) &= [r - \delta - \lambda(\bar{J} - 1)]dt + \sigma d\tilde{B}_t + (J_t - 1)\,dN_t \\
&= [r - \delta - \lambda(\bar{J} - 1) - \frac{1}{2}\sigma^2]dt + \sigma d\tilde{B}_t + log(J_t) \cdot dN_t \text{ (Expansão de Taylor)} \\
&= [r - \delta - \lambda(\bar{J} - 1) - \frac{1}{2}\sigma^2]dt + \sigma d\tilde{B}_t + \sum_{i=1}^{n_t} log(J_t)
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
y_{t+\Delta t} = y_t + [r - \delta - \lambda(\bar{J} - 1) - \frac{1}{2}\sigma^2]\Delta t \; + \sigma\sqrt{\Delta t} \cdot Z_1 + \sum_{i=1}^{n_t} Z_2
$$

Fixando as variáveis aleatórias através da função seed. As variações no parâmetro lambda resultam:



Intuitivamente, quanto maior o lambda, maior será a frequência dos saltos.

Média = 0.95; Variância = 0.9%. Gráfico com 5 trajetórias:

Conforme aumento do número de simulações, ocorre redução de variância e convergência da estimação. Características dos valores finais (X_T):

Sample Size	***Average***	***Variance***	***Lower Bound***	***Upper Bound***
5	0.95675	0.00958	0.92013	1.00337
500	1.00922	0.01113	1.00521	1.01485
5000	1.00914	0.01026	1.00792	1.01083
10000	1.00693	0.01061	1.00605	1.00815

Note que os valores finais seguem assintoticamente a distribuição lognormal. Esse fato foi utilizado para construção dos intervalos de confiança.

Seja $N_{T-t} = n_t$. Pela equação (3) do enunciado:

$$X_T = X_t \exp\left[\left(r - \delta - \lambda(\bar{J} - 1) - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t) + \sigma \tilde{B}_{T-t}\right] \prod_{i=1}^{N_{T-t}} J_i$$

Isto implica que,

$$log(X_T) = log(X_t) + \left(r - \delta - \lambda(\bar{J} - 1) - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t) + \sigma \tilde{B}_{T-t} + \sum_{i=1}^{N_{T-t}} log(J_i)$$

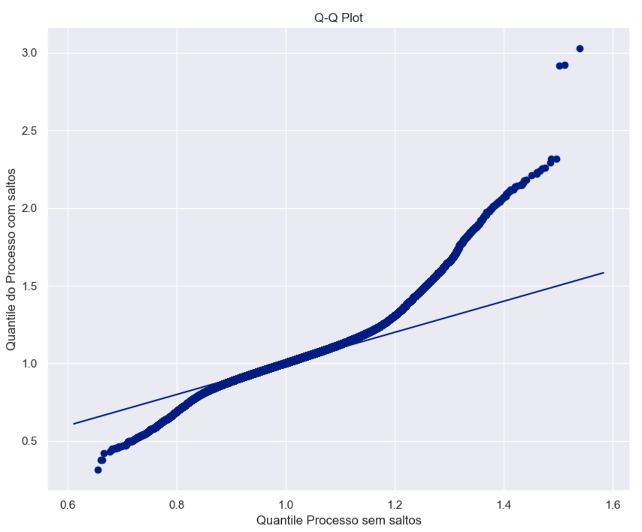
A variância condicional do processo:

$$Var[log(X_T)|X_t] = \sigma(T - t) + n_t \cdot \sigma_j^2$$

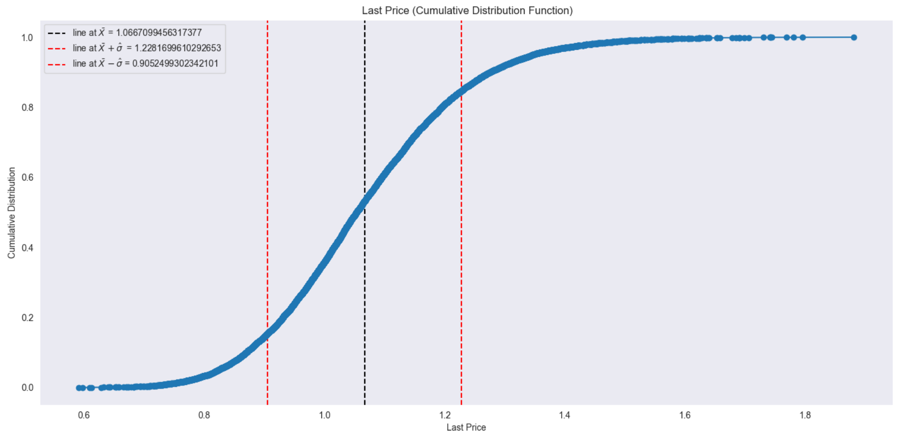
A variância do processo é amplificada ao adicionar o componente dos saltos.

Comparando Distribuições (Q-Q Plot)

A distribuição de processos com saltos possui ambas caudas mais pesadas. A dinâmica dos saltos aumenta a probabilidade de eventos extremos.



Calculando o valor de X_T (via Simulação de Monte Carlo) com base na equação (3) do enunciado, mantendo o mesmo número de simulações e assumindo $N_{T-t} = 5$:



Preço final obtido por MC considerando um timestep difere do resultado obtido pelo método de discretização anterior.

Presentation Outline

Conclusões

- Evidência Empírica: Observações extremas nas séries de preços
- Elevado custo computacional
- Método de Monte Carlo permite determinar os intervalos de confiança

Presentation Outline

- Aiube, F. (2013), Modelos Quantitativos em Finanças: Com Enfoque em Commodities.
- Merton (1976), Option pricing when underlying stock returns are discontinuous

FIM