算法设计与分析

主讲人：曹自强

Email: *zqcao@suda.edu.cn*

苏州大学 计算机学院

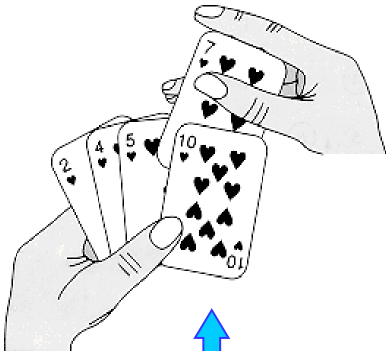
第四讲 概率分析和随机算法

内容提要：

- □ 雇用问题
- □ 指示器随机变量
- □ 随机算法
- □**概率分析和随机算法的应用：**在线雇用问题，生日悖论，球与盒子

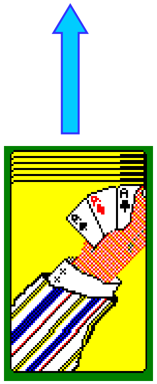
算法分析与输入分布

- 算法运行时间与输入规模和输入分布有关，如插入排序：



$$T(n) = c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) + c_5\sum_{j=2}^{n} t_j + c_6\sum_{j=2}^{n}(t_j - 1) + c_7\sum_{j=2}^{n}(t_j - 1) + c_8(n-1)$$

INSERTION-SORT(A)	cost	times
for(j = 2; j <=$length$[A]; j++)	c_1	n
key = A[j]	c_2	n-1
// Insert A[j] into the sorted sequence A[1 .. j-1]	0	n-1
i = j-1	c_4	n-1
while(i > 0 && A[i] > key)	c_5	
A[i+1] = A[i]	c_6	
i = i-1	c_7	
A[i+1] = key	c_8	n-1



分治法的基本思想

- 对于运算时间与输入数据分布有关的算法，时间复杂度分析一般有三种：最坏运行时间、最佳运行时间、平均运行时间。
- 平均运行时间是算法对所有可能情况的期望运行时间，与输入数据的概率分布有关。
- 分析算法的平均运行时间通常需要对输入分布做某种假定

第四讲 概率分析和随机算法

内容提要：

- □ 雇用问题
- □ 指示器随机变量
- □ 随机算法
- □ 概率分析和随机算法的应用：在线雇用问题，生日悖论，球与盒子

雇用问题

假如你要通过**雇佣代理**来寻找并雇佣一名新的办公助理。雇佣代理每天给你推荐一名应聘者。你面试这个人，然后决定是否雇佣他。

1）雇佣代理每推荐你一名应聘者，你就要支付一小笔推荐费，记为c_i；

2）如果你雇佣了其中一名应聘者，则需要花费更多的钱，记为c_h，包括辞掉目前办公助理的费用，并另付给雇佣代理一笔中介费。

你承诺在任何时候，只要当前应聘者比目前的办公助理更适合，就立刻辞掉目前的办公助理而雇佣新的办公助理，你愿意为此花费一笔钱。

现在你希望能够估算一下这笔费用会是多少。

雇用问题

雇用策略的伪代码如下:

- 设应聘者的编号为1到n
- 假设在面试完应聘者i 后，可以决定应聘者i 是否是你见过的最适当人选
- 为了初始化，建立一个虚拟的应聘者，编号为0，他比所有其他的应聘者都差。

	cost	times
HIRE-ASSISTANT(n)		
best **← 0 // candidate 0 is a least-qualified dummy candidate**		
for ***i*** **← 1 to** ***n***		
do interview candidate ***i***	c_i	n
if candidate ***i*** **is better than candidate** ***best***		
then ***best*** **←** ***i***		
hire candidate ***i***	c_h	m

- 费用: n 个应聘者中雇用了m个,则该算法的总费用是 $O(nc_i+mc_h)$

雇用问题

分析：

设面试推荐费用为c_i，雇用费用为c_h

- 假设总共面试n个人，其中雇用了m人，则该算法的总费用是$O(c_i n+c_h m)$.
- 进一步观察，会发现面试费用$c_i n$是恒定的，因为不管雇用多少人，总会面试n个应聘者。所以我们只关注于雇用费用$c_h m$即可。
- 那么整个过程会产生多少雇用费用呢?

雇用问题

- **最坏情形分析：**
  - **最坏情形：**实际雇用了每个面试的应聘者：
  - 当应聘者的质量按出现的次序严格递增时，就会出现这种情况。
  - 此时面试了n次，雇用了n次，则雇用总费用是$O(c_h n)$。
- **一般情况分析：**
  - **一般情形：**应聘者不会总以质量递增的次序出现。
  - 事实上，我们既不知道他们出现的次序，也不能控制这个次序

那么，**在一般情形下，会发生什么呢?**

概率分析

过程HIRE-ASSISTANT中，检查序列中的每个成员，维护一个当前“ 获胜者”（即best)，最后找出序列中的最好者。

这里对当前获胜成员的**更新频率**建立模型，并引入“ **概率分析**”对上述现象进行分析

概率分析：就是在问题分析中应用**概率的方法**。

- 概率分析可用于时间分析，也可用于其他量的分析。
- 这里用概率分析技术分析雇用费用。

概率分析

HIRE-ASSISTANT(n)	cost	times
best ← 0 // candidate 0 is a least-qualified dummy candidate		
for *i* ← 1 to *n*		
do interview candidate *i*	c_i	n
if candidate *i* is better than candidate *best*		
then *best* ← *i*		
hire candidate *i*	c_h	m

假设应聘者的资质序列是任意的:

- 用1到n将应聘者排列名次，用*rank(i)*表示应聘者i的名次，约定较高的名次对应较有资格的应聘者。
- 有序序列 <*rank*(1), …, *rank*(*n*)> 是 <1, …, *n*>的一个排列, 例如 <5, 2, 16, 28, 9, … , 11>
- 所有应聘者存在全序关系，即任意两个应聘者可以比较rank值

概率分析

为了进行概率分析，对输入分布做如下假设：

假设雇佣问题中应聘者以随机顺序出现，并且这种随机性由输入自身决定。

- **应聘者以随机顺序出现等价于称排名列表<rank(1), rank(2),...,rank(n)>是数字1到n的n!种排列表中的任一个。**
- **称这样的排列构成一个均匀随机排列，即在n!种可能的排列中，每种情况以“等概率”情形出现。**

概率分析

- 概率分析：在问题的分析中应用概率技术。
- 使用概率分析来分析一个算法的运行时间，或其它的量。

概率分析的本质：需已知或假定输入的概率分布

- **依据概率分布来求期望，期望值即是平均雇用的人数**

概率分析

- 概率分析：使用关于**输入分布**的知识或者对其做的假设，然后**分析算法**，计算出一个**期望的运行时间**。
- 实际上是将所有可能输入的运行时间做平均。
- 确定输入的分布时必须非常小心：
  - 有些问题，对所有可能的输入集合可以做某种假定，可以将概率分析作为一种手段来设计高效算法，并加深对问题的认识。
  - 有些问题可能无法描述一个合理的输入分布，则不能用概率分析方法。

随机算法

目的：为了利用概率分析，就要了解关于输入分布的一些信息。 但在许多情况下，我们对输入分布了解很少。而且即使知道输入分布的某些信息，也无法从计算上对这种认知建立模型——输入不可控。

如何让输入变得可控?

对算法中的某部分的行为随机化，利用概率和随机性作为算法设计与分析的工具进行相关处理。

分析：在雇佣问题中，看起来，应聘者好像以随机顺序出现，但我们无法知道是否确实如此。我们必须对应聘者的出现次序进行更大的**控制**，使其达到一种“ 随机” 出现的样子。

方法：

假设雇用代理有n个应聘者，他们可以事先给我们一份名单，我们每天随机选择某个应聘者来面试。

——尽管除了应聘者名字外，对其他信息一无所知，但不再像以前依赖于“ 猜测” 应聘者以随机次序出现。取而代之， 我们获得了对流程的控制并加强了随机次序。

随机算法

- **随机算法**：如果一个算法的行为不只是由输入决定，同时也由随机数生成器所产生的数值决定，则称这个算法是随机的。
- 随机数生成器RANDOM
  - RANDOM(a, b)返回一个介于 a与b 的整数，而每个整数出现的机会均等。
  - RANDOM实际上由一个确定的算法〔伪随机产生器〕产生，其结果表面上看上去像是随机数

随机算法

随机算法的输入次序最终由随机数发生器决定，我们将随机算法的运行时间称为**期望运行时间**。

一般而言，

- 当**概率分布是在算法的输入上**时，我们讨论算法的“**平均情况运行时间**”；
- 当**算法本身做出随机选择**时，我们讨论算法的“**期望运行时间**”。

第四讲 概率分析和随机算法

内容提要：

- □ 雇用问题
- □ 指示器随机变量
- □ 随机算法

□**概率分析和随机算法的应用**：在线雇用问题，生日悖论，球与盒子

指示器随机变量

为了建立概率(probabilities)和期望(expectations)之间的 联系，这里引进**指示器随机变量**(indicator random variables)，用 于实现概率与期望之间的转换。

指示器随机变量：给定一个样本空间**S**（sample space）和一个事件**A**（event），那么事件A对应的指示器随机变量 **I{A}** 定义为：

$$\mathrm{I}\{A\} = \begin{cases} 1 & \text{if } A \text{ occurs}, \\ 0 & \text{if } A \text{ does not occur}. \end{cases}$$

指示器随机变量

例：抛掷一枚硬币，求正面朝上的期望次数

这里，

- 样本空间S={H，T}，其中Pr(H)=Pr(T)=1/2.
- 定义一个指示器随机变量X_H，对应于硬币正面朝上的事件H。

X_H记录一次抛硬币时正面朝上的次数：

$$X_H = \mathrm{I}\{H\} = \begin{cases} 1 & \text{如果 } H \text{ 发生} \\ 0 & \text{如果 } T \text{ 发生} \end{cases}$$

指示器随机变量

一次抛掷硬币正面朝上的期望次数，即**指示器变量X_H的 期望值**是：

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X_H] &= \mathrm{E}[\mathrm{I}\{H\}] \\ &= 1 \cdot \Pr\{H\} + 0 \cdot \Pr\{T\} \\ &= 1 \cdot (1/2) + 0 \cdot (1/2) \\ &= 1/2 . \end{aligned}$$

注：一个事件对应的指示器随机变量的期望值等于该事件发生的概率。

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x} x \cdot \Pr\{X = x\}$$

指示器随机变量

引理5.1 给定一个样本空间S和S中的一个事件A，设$X_A = I\{A\}$，那么$E[X_A] = Pr\{A\}$。

证明： 由指示器随机变量的定义以及期望值的定义，有：

$$E[X_A] = E[I\{A\}]$$

$$= 1 * Pr\{A\} + 0 * Pr\{\sim A\}$$

$$= Pr\{A\}$$

其中，~A表示S-A，即A的补。

复杂一点的例子

- **投 n 次硬币，正面向上的期望〔平均数〕**
  - **令随机变量 X 表示投 n 次硬币正面向上的数**
  - **我们有**

$$\mathrm{E}[X]=\sum_{k=0}^{n} k\cdot \Pr\{X=k\}$$

    计算比较麻烦
  - **我们可以利用指示随机变量简化计算**

复杂一点的例子

- 设随机变量X表示n次抛硬币中出现正面朝上的总次数。
- 设指示器随机变量X_i对应第i次抛硬币时正面朝上的事件，即：X_i=I{第i次抛掷时出现事件H}。

则显然有：$X=\sum_{i=1}^{n} X_i$.

则，两边取期望，计算正面朝上次数的期望，有：

$$\mathrm{E}[X]=\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right].$$

即：总和的期望值等于n个指示器随机变量值和的期望，也等于n个指示器随机变量值期望的和。

复杂一点的例子

- *引理*

  对事件A, 设 X_A = I{A}. 则 E[X_A]=Pr{A}.

- 投 n 次硬币，正面向上的期望〔平均数〕
  - 以上引理得到E[X_i] = Pr{H} = ½, i=1, 2, …, n

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[X_i] \\
&= \sum_{i=1}^{n} 1/2 \\
&= n/2 .
\end{aligned}
$$

雇用问题分析

- 假设应聘者以随机次序出现.
- 令随机变量 X 表示我们雇用新助手的人数，由期望定义：

$$E[X]=\sum_{x=1}^{n} x\Pr\{X=x\}$$

计算繁琐。

- 定义新的指示随机变量：

$$X_i=\mathrm{I}\{\text{应聘者 } i \text{ 被雇用}\}=\begin{cases}1 & \text{如果应聘者 } i \text{ 被雇用}\\ 0 & \text{如果应聘者 } i \text{ 不被雇用}\end{cases}$$

- 以及 $X=X_1+X_2+\cdots+X_n$
- 由定理5.1：

需计算该概率

$$E[X_i]=\Pr\{\text{应聘者 } i \text{ 被雇用}\}$$

HIRE-ASSISTANT(n)	cost	times
best ← 0 // candidate 0 is a least-qualified dummy candidate		
for *i* ← 1 to *n*		
do interview candidate *i*	c_i	n
if candidate *i* is better than candidate *best*		
then *best* ← *i*		
hire candidate *i*	c_h	m

计算Pr{应聘者*i* 被雇佣}?

- *i* 被雇佣 ⇔ *i* 比应聘者1, 2, … , *i*-1都优秀.
- 若候选人随机到来，则每一个候选人为最佳人选的概率相等
- 因此, E{X_i} = Pr{ i为前i个应聘者中最优秀} = 1/*i* ？

计算E[X]:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] && \text{（根据等式(5.2)）} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[X_i] && \text{（根据期望的线性性质）} \\
&= \sum_{i=1}^{n} 1/i && \text{（根据等式(5.3)）} \\
&= \ln n + O(1) && \text{（根据等式(A.7)）} \qquad \textbf{(式5.5)}
\end{aligned}
$$

亦即，尽管面试了n个人，但平均起来，实际上大约只雇 用了他们之中的 lnn 个人。

引理5.2 假设应聘者以随机次序出现，算法HIRE-ASSISTANT总的雇用费用平均情形下为$O(c_h \ln n)$.

证明：

根据雇用费用的定义和等式(5.5)，可以直接推出这个界，说明雇用的人数期望值大约为lnn。

可见，平均情形下的雇用费用$c_h \ln n$ 比最坏情况下的雇用 费用$O(c_h n)$有了很大的改进。







第四讲 概率分析和随机算法

内容提要：

- □ 雇用问题
- □ 指示器随机变量
- □ 随机算法

□**概率分析和随机算法的应用：**在线雇用问题，生日悖论, 球与盒子

随机算法

- 如前节所示，输入的分布有助于分析一个算法的平均情况行为。
- 但很多时候是无法得知输入分布的信息的。
- 采用随机算法，分析算法的期望值。
- 随机算法不是假设输入的分布，而是设定一个分布。

随机算法

雇用问题

上述关于雇用问题的算法，是确定性算法.

- 给定输入，则雇用的人数确定
- 雇用的人数〔资源消费〕依赖于输入
  - 某些排序的输入总是会产生很高的雇用费用，如: <1,2,3,4,5,6>, 所有人都会被雇用.
  - 某些排序的输入总是产生很低的雇用费用， 如: <6,*,*,*,*,*>。这时只有第一个应聘者会被雇用.
  - 大部分输入是中间情况.
- 假设公司人力部门有敌方公司的卧底，掌握了公司面试顺序，每次都给最差的排序，如何应对？

随机算法

先对应聘者进行排列，再确定最佳应聘者的随机算法。

- **随机化过程在算法中而不是在输入中体现**
- **Given a particular input, we can no longer say what its hiring cost will be. Each time we run the algorithm, we can get a different hiring cost. （算法的运行时间与输入无关）**
- **算法的最坏运算时间不取决于特定的输入**
- **只有当随机数产生器产生很不幸运的数时，算法的运算时间最差。**

雇用问题的随机算法

对于雇用问题，代码中唯一需要改变的是随机地变换应聘者序列。

```
RANDOMIZED-HIRE-ASSISTANT(n)
randomly permute the list of candidates
best = 0              // candidate 0 is a least-qualified dummy candidate
for i = 1 to n
    interview candidate i
    if candidate i is better than candidate best
        best = i
        hire candidate i
```

- 根据引理5.2，如果应聘者以随机顺序出现，则聘用一个新办公助理的平均情况下雇佣次数大约是lnn。
- 现在，修改了算法，使得随机发生在算法上，那么雇用一个新办公助理的期望次数仍是lnn 吗？

雇用问题的随机算法

引理5.3 过程**RANDOMIZED-HIRE-ASSISTANT**的雇用费用

期望是$\mathbf{O(c_h \ln n)}$.

证明：对输入数组进行变换后，我们已经达到了和引理5.2相同的情况。 ■

引理5.2和引理5.3的区别：

- 引理5.2中，假设输入是随机分布的，求的是平均情形下的雇用费用。
- 在引理5.3中，将随机化作用在算法上，求的是雇用费用的期望值。

随机排列数组

随机算法需要对给定的输入变换排列，以使输入随机化。

- **不失一般性，假设给定一个数组A，包含元素1到n。**
- **目标: 产生一个均匀随机排列，使得n!种排列中的每一种被取到的概率一致(=1/n!)**

那么**如何产生输入的随机排列呢?**

- 这里介绍两种随机化方法。
  - 方法一：为数组的每个元素A[i]赋一个随机的优先级P[i]，然后根据优先级对数组中的元素进行排序。
    - ✓ 例：设初始数组A=<1,2,3,4>，随机选择的优先级是 P=<36,3,62,19>，则将产生一个新数组：B=<2,4,1,3>

上述策略的过程描述

```
PERMUTE-BY-SORTING(A)
1  n = A.length
2  let P[1..n] be a new array
3  for i = 1 to n
4      P[i] = RANDOM(1, n^3)
5  sort A, using P as sort keys
```

- 第4行选取一个在1～n^3之间的随机数。使用范围1～n^3是为了 让P中所有优先级尽可能唯一。
- 第5步排序时间为O(nlogn)
- 排序后，如果P[i]是第j个最小的优先级，那么A[i]将出现在输出位置j上。最后得到一个"　随机 "　排列。

引理5.4 假设所有优先级都不同，则过程PERMUTE-BY-SORTING 产生输入的均匀随机排列 。

证明：

首先考虑**元素A[i]分配到第i个最小优先级**的特殊排列， 可以证明这个排列发生的概率是**1/n!**。

证明如下：

设E_i代表元素A[i]分配到第i个最小优先级的事件（i=1,2,…,n），则对所有的E_i，整个事件发生的概率是：

$$\Pr\{E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap \cdots \cap E_{n-1} \cap E_n\}$$

$$= \Pr\{E_1\} \cdot \Pr\{E_2 \mid E_1\} \cdot \Pr\{E_3 \mid E_2 \cap E_1\} \cdot \Pr\{E_4 \mid E_3 \cap E_2 \cap E_1\} \cdots \Pr\{E_i \mid E_{i-1} \cap E_{i-2} \cap \cdots \cap E_1\} \cdots \Pr\{E_n \mid E_{n-1} \cap \cdots \cap E_1\}$$

这里，

- $Pr\{E_1\}$是从一个n元素的集合中随机选取的最小优先级的概率，有$Pr\{E_1\}=1/n$;
- $Pr\{E_2|E_1\}=1/(n-1)$，因为假定了元素A[1]有最小的优先级，余下来的n-1个元素都有相等的可能成为第二小的优先级别
- 而一般对于i=2,3,..,n，有:

$$Pr\{E_i|E_{i-1}\cap E_{i-2}\cap \dots \cap E_1\}=1/(n-i+1).$$

含义：给定元素A[1]到A[i-1]的前i-1个小的优先级，在剩下的n-(i-1)个元素中，每个都有可能是第i小优先级

最终有:

$$\Pr\{E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap \cdots \cap E_{n-1} \cap E_n\}$$

$$= \Pr\{E_1\} \cdot \Pr\{E_2 \mid E_1\} \cdot \Pr\{E_3 \mid E_2 \cap E_1\} \cdot \Pr\{E_4 \mid E_3 \cap E_2 \cap E_1\}$$

$$\cdots \Pr\{E_i \mid E_{i-1} \cap E_{i-2} \cap \cdots \cap E_1\} \cdots \Pr\{E_n \mid E_{n-1} \cap \cdots \cap E_1\}$$

$$= \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n-1}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{1}{n!}$$

因此，**获得该排列的概率是1/n!**，是一个均匀随机排列。

扩展上述证明过程:

- 考虑集合{1,2,..,n}的任意一个确定排列

$$\sigma=<\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(n)>。$$

- 用r_i 表示元素A[i]优先级的排名，即$r_i = \sigma(i)$。
- 定义E_i为元素A[i]分配到优先级第σ(i)小的事件(即$r_i = \sigma(i)$)， 则同样的证明仍适用。
- 因此，如果要计算得到任何特定排列的概率，该计算与前面的计算完全相同，于是得到此排列的概率也是1/n!。

随机排列数组

The method is better

(2) 方法二：RANDOMIZE-IN-PLACE（原地排列给定的数列）

1	2	3	…	n
$A(1)$	$A(2)$	$A(3)$	…	$A(n)$

1	2	3	…	i_1	…	n
$A(i_1)$	$A(2)$	$A(3)$	…	$A(1)$	…	$A(n)$

1	2	3	…	i_2	…	n
$A(i_1)$	$A(i_2)$	$A(3)$	…	$A(2)$	…	$A(n)$

```
RANDOMIZE-IN-PLACE(A, n)
for(i=1; i<=n; i++)
        swap(A[i], A[RANDOM(i, n)])
```

思路:

- 第i次迭代后, 从 $A[i..n]$ 中随机选取$A[i]$
- 第 i 次迭代后不再改变 $A[i]$

优势:

- 线性时间($O(n)$)，不用排序.
- 更少的随机比特数(n 个1 到 n 范围的随机数，对比n个 1 到 n^3 范围的随机数) (仅需更小范围的随机数产生器)
- 不需要额外的辅助空间

正确性:

- **给定一个包含 *n* 个元素的集合, 一个 *k*-排列是指一个包含其中k个元素的序列。**
- **K-排列的个数为 *n*!/(*n*-*k*)!**

$$P_n^k = C_n^k \cdot P_k^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!}$$

定理　RANDOMIZE-IN-PLACE 产生一个均匀随机排列.

证明　利用循环不变式:在第 i 次迭代之前，对每个可能的 (i-1)-排列， 子数组A[1 .. i-1]选取任意一个(i-1)-排列的概率为(n-i+1)!/n! ？

循环不变式: $A[1 .. i\text{-}1]$包含一个(i-1)-排列的概率为(n-i+1)!/n! ？

- 初始条件：对i=1，A[1…0]包含某个0-排列的概率为 $n!/n!=1$ ，其中A[1…0] 为空子列，0-排列则是不包含任何元素的序列
- 归纳步骤：假设第 i 次迭代前，设(i-1)-排列 A[1 .. i-1] 中，任一排列发生的概率为 (n-i+1)!/n! ，则需证明在第i 次迭代后，任一 i-排列 的概率为(n-i)!/n!
  - 考虑一个特殊的i-排列R=< $x_1, x_2, \ldots, x_i$>，其中包含一个(i-1)-排列< $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$>，算法在A[i]放置$x_i$
  - 令事件E1表示算法实际输出 (i-1)-排列R′ 为A[1 .. i-1] ，根据循环不变量， Pr{E1}=(n-i+1)!/n!
  - 令事件E2表示第 i 次迭代后输出 A[i] 为xi ，则当且仅当E1 和 E2同时发生时我们得到 i-排列 R 为A[1 .. i]，其概率为Pr{E2∩E1} = ?

循环不变式: $A[1\ ..\ i\text{-}1]$包含一个(i-1)-排列的概率为(n-i+1)!/n! ？

- **初始条件：**对i=1，A[1...0]包含某个0-排列的概率为 $n!/n!=1$，其中A[1...0] 为空子列，0-排列则是不包含任何元素的序列
- **归纳步骤：**假设第 i 次迭代前，设(i-1)-排列 A[1 .. i-1] 中，任一排列发生的概率为 (n-i+1)!/n!，则需证明在第i 次迭代后，任一 i-排列 的概率为(n-i)!/n!
  - 根据条件概率：Pr{E2∩E1} = Pr{E2|E1} Pr{E1} .
  - 给定E1的条件下，A[i]有n-i+1种取法，取到x的概率为1/(n-i+1)，即Pr{E2|E1} = 1/(n-i+1)
  - 因此

$$\Pr\{E_2 \cap E_1\} = \Pr\{E_2 \mid E_1\}\Pr\{E_1\}$$
$$= \frac{1}{n-i+1} \cdot \frac{(n-i+1)!}{n!} = \frac{(n-i)!}{n!}$$

循环不变式: *A*[1 .. *i*-1]包含一个(i-1)-排列的概率为(n-i+1)!/n! ？

- 初始条件：对*i*=1，A[1…0]包含某个0-排列的概率为 *n*!/*n*!=1 ，其中A[1…0] 为空子列，0-排列则是不包含任何元素的序列
- 归纳步骤：假设第 i 次迭代前，设(i-1)-排列 A[1 .. i-1] 中，任一排列发生的概率为 (n-i+1)!/n! ，则需证明在第i 次迭代后，任一 i-排列 的概率为(n-i)!/n!
- 终止：终止时，i=n+1, A[1…n]是一个给定n-排列的概率为(n-(n+1)+1)!/n! = 1/n!

- 该算法又称为Fisher–Yates shuffle或者Knuth Shuffle







第四讲 概率分析和随机算法

内容提要：

- □ 雇用问题
- □ 指示器随机变量
- □ 随机算法
- □概率分析和随机算法的应用：在线雇用问题，生日悖论，球与盒子

在线雇用问题

- **情景描述：**

　　假设现在我们不希望面试所有的应聘者来找到最好的一个，也不希望因为不断有更好的申请者出现而不停地雇用信任解雇旧人。我们愿意雇用接近最好的应聘者，只雇用一次。但是，我们必须遵守猎头公司的一个规定：在每次面试之后，必须给出面试结果，要么雇用候选人，要么拒绝。

- **Goal：** 最小化面试次数和最大化雇用应聘者的质量取得平衡。

解决思路：

- 1）面试一个应聘者之后，给他一个分数，令*score(i)*表示给第i个应聘者的分数，并且假设所有应聘者得分都不相同；
- 2）面试前面k个（k<n）应聘者然后拒绝他们，再雇用其后比前面的应聘者更高分数的第一个应聘者。

```
ON-LINE-MAXIMUM (k, n)
   bestscore ← -∞
   for i ← 1 to k
       do if score(i) > bestscore
            then bestscore ← score(i)
   for i ← k+1 to n
       do if score(i) > bestscore
            then return i
   return n
```


Soochow University

- 对每个可能k值，希望能确定雇用到最好应聘者的概率
- 概率最高的k值可以用来最好的实现这个策略
- K太小太大雇用到最好应聘者的概率都不高

- 设S是我们成功选择的是最好应聘者的事件，Si表示最好的应聘者是第i个面试者时成功的事件，则

$$\Pr\{S\} = \sum_{i=k+1}^{n} \Pr\{S_i\} .$$

互斥事件！

- Si发生表示两件事必须发生：1.最好的应聘者在第i个位置；2.i前面没有应聘者被雇用

- 设Bi表示最好的应聘者在第i个位置上的事件，Pr{Bi}=1/n
- 设Oi表示k+1到i-1中没有应聘者被选取的事件，即当k+1≤j≤i-1时，score(j)<bestscore，此事件仅取决于1到i-1的排列情况，与Bi是独立事件。

- 前i-1个应聘者分数最高的可以是前K个中的任意一个位置，所以Pr{Oi}=k/(i-1)
- 要想雇用到第i个应聘者(Si)且为最佳应聘者，必须同时有发生Bi和Oi：

$$\Pr\{S_i\} = \Pr\{B_i \cap O_i\} = \Pr\{B_i\}\Pr\{O_i\} = \frac{k}{n(i-1)}$$

- 于是 $\Pr\{S\} = \sum_{k+1}^{n} \Pr\{S_i\} = \sum_{k+1}^{n} \frac{k}{n(i-1)} = \frac{k}{n}\sum_{k+1}^{n}\frac{1}{i-1} = \frac{k}{n}\sum_{k}^{n-1}\frac{1}{i}$
- 利用积分性质进行缩放

$$\text{而}: \int_{k}^{n}\frac{1}{x}dx \le \sum_{k}^{n-1}\frac{1}{i} \le \int_{k-1}^{n-1}\frac{1}{x}dx$$

$$\text{所以}: \frac{k}{n}(\ln n - \ln k) \le \Pr\{S\} \le \frac{k}{n}(\ln(n-1) - \ln(k-1))$$

- 我们希望最大化成功概率，因而主要关注如何选取**k**的值，使其能最大化**Pr{S}**的下界：上式左侧当**k = n/e**时取最大值**1/e**，即如果用**k=n/e**来实现我们的策略，则可以以至少**1/e**的概率成功雇用到最有资格的应聘者

第四讲 概率分析和随机算法

内容提要：

- 口 雇用问题
- 口 指示器随机变量
- 口 随机算法
- 口概率分析和随机算法的应用：在线雇用问题，**生日悖论**，球与盒子

生日悖论

一个屋子里的人数必须达到多少人，才能使其中两人生日相同的机会达到50%？

- 问题描述: 用整数1,2,…,k 对屋子里的人编号, k 是总人数, n=365, 对于 i=1,2,…, k, 设bi 表示编号为i 的人的生日, 其中 1≤bi≤n, 假设生日均匀独立分布在一年n 天中, 对于 i=1,2,…,k 和 r= 1,2,…, n, Pr{ bi=r} =1/n
- 假设i和j 的生日都落在同一日 r 上的概率是:

$$\Pr\{b_i = r \text{ 且 } b_j = r\} = \Pr\{b_i = r\}\Pr\{b_j = r\} = 1/n^2$$

生日悖论







这样他们的生日落在同一日的概率是:

$$\Pr\{b_i = b_j\} = \sum_{r=1}^{n} \Pr\{b_i = r \text{ 且 } b_j = r\} = \sum_{r=1}^{n} (1/n^2) = 1/n$$

- 通过考察一个事件补的方法，来分析k个人中至少有两人生日相同的概率
  - 至少两个人生日相同的概率等于 1 减去所有人的生日都互不相同的概率.
  - K个人的生日互不相同的概率: $B_k = \cap_{i=1}^{k} \ Ai$， 其中Ai是指对所有j<i, i与j生日不同的概率.
    - $\mathrm{B}_k = A_k \cap B_{k-1}$
    - $\Pr\{B_k\}=\Pr\{B_{k-1}\}\Pr\{A_k|B_{k-1}\}$

生日悖论

- 如果$b_1, \ldots, b_{k-1}$两两不同，则 $\Pr\{A_k|B_{k-1}\} = \frac{\mathrm{n-k+1}}{\mathrm{n}}$
- 我们有 $$\begin{aligned}\Pr(B_k) &= \Pr\{B_{k-1}\}\Pr\{A_k \mid B_{k-1}\} \\ &= \Pr\{B_{k-2}\}\Pr\{A_{k-1} \mid B_{k-2}\}\Pr\{A_k \mid B_{k-1}\} \\ &\vdots \\ &= \Pr\{B_1\}\Pr\{A_2 \mid B_1\}\Pr\{A_3 \mid B_2\}\cdots\Pr\{A_k \mid B_{k-1}\} \\ &= 1 \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n-2}{n}\right)\cdots\left(\frac{n-k+1}{n}\right) \\ &= 1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \le \mathbf{1/2}\end{aligned}$$
- 由$1 + x \le e^x$得到： $k \ge (1+\sqrt{1+(8\ln 2)n})/2$
- 当n=365, k≥23可以保证以1/2的概率，有两个人生日相同

生日悖论

解法二： 利用指示器随机变量来分析

- 定义指示器随机变量

$$X_{ij} = \mathrm{I}\{i\text{和}j\text{生日相同}\} = \begin{cases} 1 & \text{如果}i\text{和}j\text{生日相同} \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

- **两个人生日相同的概率为n*(1/n)*(1/n)=1/n**
- **所以E(Xij) = 1/n**







生日悖论

- 令X表示具有相同生日的两人对数目，则

$$E[X]=E[\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=i+1}^{k}X_{ij}]=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=i+1}^{k}E[X_{ij}]=\binom{k}{2}\frac{1}{n}=\frac{k(k-1)}{2n}$$

- 对n = 365，k = 28时，X期望值为1
- 注： 与前一种准确数目不等，但渐近意义上是相等的，都是$\Theta(\sqrt{n})$，渐进分析对n很大时才有意义。





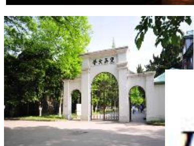


第四讲 概率分析和随机算法

内容提要：

- □ 雇用问题
- □ 指示器随机变量
- □ 随机算法
- □概率分析和随机算法的应用：在线雇用问题，生日悖论，球与盒子

球与盒子



- 问题：把相同的球随机投到b个盒子里，在每个盒子都有球之前，要投多少个球
- 解答：
    1. 定义“击中”为球落在空盒子里面，
    2. 定义第 i 阶段为从第 (i-1) 次击中到i次击中之间的投球。
    3. 第 i 阶段，投球击中的概率为 (b-i+1)/b， 因此投球数 ni 的期望为E[ni] = b/(b-i+1)，
    4. 所以，总的投球数期望为

$$E[n] = E[\sum_{i=1}^{b} n_i] = \sum_{i=1}^{b} E[n_i] = \sum_{i=1}^{b} \frac{b}{b-i+1} = b\sum_{i=1}^{b} \frac{1}{i} = b(\ln b + O(1))$$