算法设计与分析

主讲人：曹自强

Email: ***zqcao@suda.edu.cn***

苏州大学 计算机学院







第三讲 分治策略

内容提要：

- 分治法基本思想
- 最大子数组问题
- 矩阵乘法的Strassen算法
- 递归式求解方法







第三讲 分治策略

内容提要：

- 分治法基本思想
- 最大子数组问题
- 矩阵乘法的Strassen算法
- 递归式求解方法

分治法的基本思想

- **基本思想：** 当问题规模比较大而无法直接求解时，将原始问题分解为几个规模较小、但类似于原始问题的子问题，然后递归地求解这些子问题，最后合并子问题的解以得到原始问题的解。

- **分治策略遵循三个步骤：**

1）分解（Divide）：将原问题分为若干个规模较小、相互独立，形式与原问题一样的子问题。

2）解决（Conquer）：递归地解各个子问题。若子问题足够小，则直接求解；否则“递归”地求解各个子问题，即继续将较大子问题分解为更小的子问题，然后重复上述计算过程。

3）合并（Combine）：将子问题的结果合并成原问题的解。

当子问题的规模足够大，需要进一步分解并递归求解时，这种情况称为递归情况（recursive case)；若子问题的规模变得足够小，不再需要再进一步分解了，这种情况称为基本情况（base case)（基本情况的子问题可以直接求解）

分治算法的实例：归并排序







归并排序的基本思路：

① **分解**：把 n 个元素分成各含 $n/2$ 个元素的子序列；

② **解决**：用归并排序算法对两个子序列递归地排序；

③ **合并**：合并两个已排序的子序列以得到排序结果。

归并排序的过程描述：

```
MERGE-SORT(A, p, r)
    if p < r
        Then q ←⌊p+r/2⌋
            MERGE-SORT(A, p, q)
            MERGE-SORT(A, q+1, r)
            MERGE(A, p, q, r)
```

归并排序的时间分析：

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{if } n = 1 \\ 2T(n/2) + \Theta(n) & \text{if } n > 1 \end{cases}$$

- **递归式**
  - 使用递归式可以很自然地刻画分治算法的运行时间
  - 等式或不等式，通过更小的输入上的函数值来描述一个函数

$$T(n)=\begin{cases}\Theta(1) & if\ n=1;\\ 2T\left(\frac{n}{2}\right)+\Theta(n) & if\ n>1\end{cases}$$

$$T(n)=T\left(\frac{2n}{3}\right)+T\left(\frac{n}{3}\right)+\Theta(n)$$

- **三种求解递归式的方法**
  - 代入法： 我们猜测一个界，然后用数学归纳法证明这个界是正确的。
  - 递归树法：将递归式转换为一棵树，其结点表示不同层次的递归调用产生的代价。然后采用边界和技术来求解递归式。
  - 主方法： 可求解形如下面公式的递归式的界：
  - $T(n)=aT\left(\frac{n}{b}\right)+f(n)$
  - 其中$a\geq 1, b>1, f(n)$是一个给定的函数。

第三讲 分治策略

内容提要：

- 分治法基本思想
- 最大子数组问题
- 矩阵乘法的Strassen算法
- 递归式求解方法

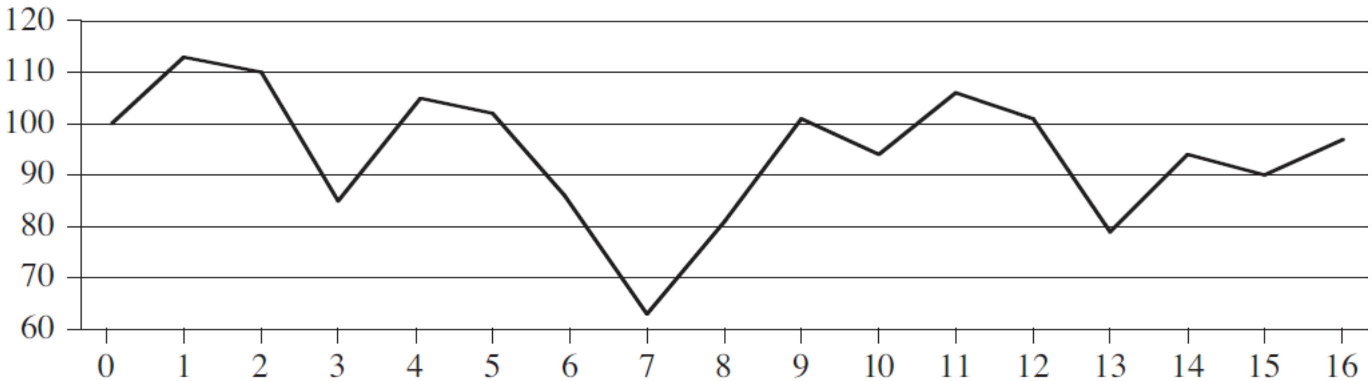






最大子数组问题

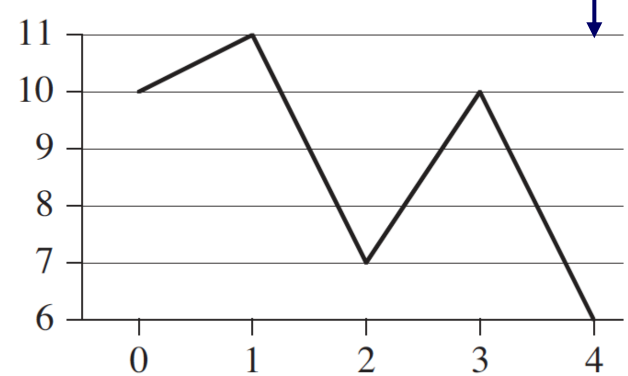
- 一个关于炒股的 story：



Day	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Price	100	113	110	85	105	102	86	63	81	101	94	106	101	79	94	90	97
Change		13	−3	−25	20	−3	−16	−23	18	20	−7	12	−5	−22	15	−4	7

- 问：哪段时间最赚钱？
  即股市有起落，从哪天到
  哪天的收益最大呢？

反例



最大子数组问题

- **从问题定义到建模求解：**
  - ✓ 求解炒股问题的算法模型：最大子数组问题
  - ✓ 已知数组 A，在 A 中寻找“和”最大的非空连续子数组

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	13	−3	−25	20	−3	−16	−23	18	20	−7	12	−5	−22	15	−4	7

maximum subarray

称这样的连续子数组为最大子数组 (maximum subarray)

- **怎么求解?**
  - ✓ **方法一：暴力求解法（brute-force solution）**

搜索 A 的每一对起止下标区间的和，和最大的子区间就是最大子数组，时间复杂度： $\binom{n}{2} = \theta(n^2)$

最大子数组问题







- **怎么求解?**

✓ **方法二：使用分治策略求解**

设当前要寻找子数组 $A[low..high]$ 的最大子数组

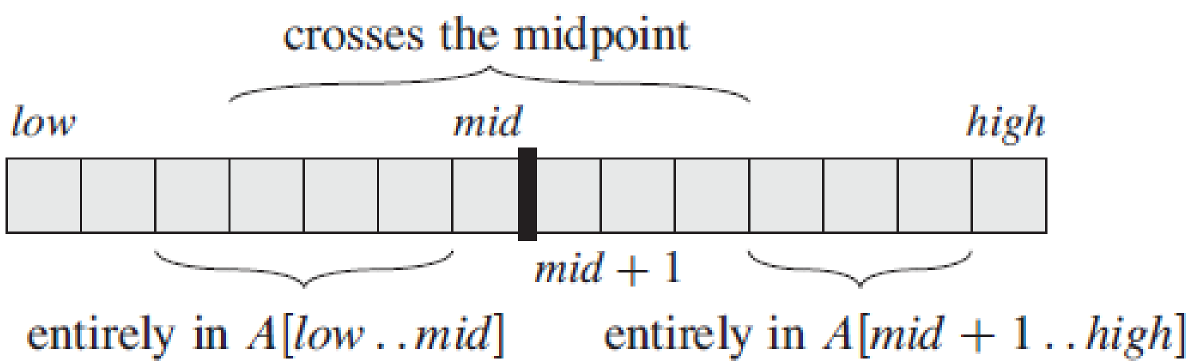
分治的基本思想是：

- 首先将子数组 $A[low..high]$ 划分为两个规模尽量相等的子数组，分割点：$mid=(low+high)/2$。
- 然后分别求解 $A[low..mid]$ 和 $A[mid+1..high]$ 的最大子数组

。

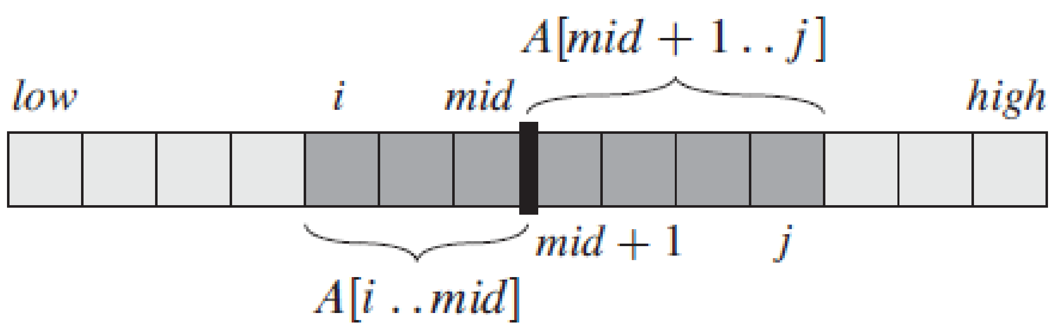
最大子数组问题

- **基于上述划分，$A[low..high]$ 的连续子数组 $A[i..j]$ 所处的位置必是下面三种情况之一：**
  - 完全位于左子数组 $A[low..mid]$ 中，因此 $low \le i \le j \le mid$
  - 完全位于右子数组 $A[mid+1..high]$ 中，因此 $mid \le i \le j \le high$
  - 跨越了中点，因此 $low \le i \le mid < j \le high$



最大子数组问题

- $A[low..high]$的**最大子数组**也是 $A[low..high]$ 的连续子数组，所以 $A[low..high]$ 的一个**最大子数组**所处的位置也必然是这三种情况之一。
- 即：$A[low..high]$ 的这个“最大子数组”必然是：或者**完全位于$A[low..mid]$ 中**、或者**完全位于 $A[mid+1..high]$ 中**、或者是**跨越中点的所有子数组中和最大的那个**。



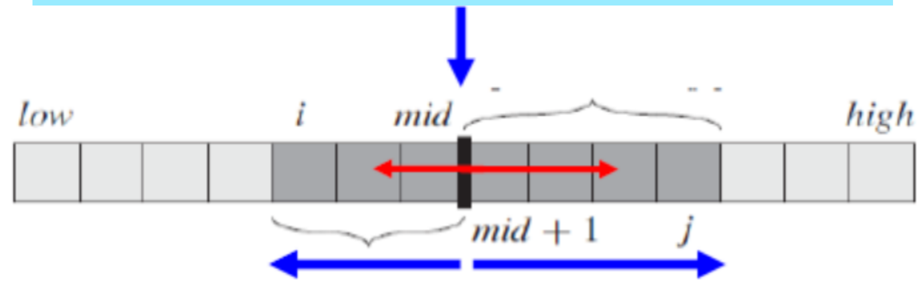
最大子数组问题

- **求解过程分析：**

  1）对于完全位于*A*[*low*..*mid*] 和 *A*[*mid*+1..*high*] 中的最大子数组，可以在这两个较小的子数组上用递归的方法进行求解。

  2）怎么寻找跨越中点的最大子数组呢?

这样的子数组必然跨越中点 ***mid***



从 *mid* 出发，分别向左和向右找出和最大的子区间，然后合并这两个区间即可得到跨越中点时的 *A*[*low*..*high*] 的最大子数组。

最大子数组问题

- 以下2个过程用于求解最大子数组问题：
- ✓ **过程1**：FIND-MAX-CROSSING-SUBARRAY，求跨越中点的最大子数组

```
FIND-MAX-CROSSING-SUBARRAY(A, low, mid, high)
left-sum = -∞
sum = 0
for i = mid downto low
    sum = sum + A[i]
    if sum > left-sum
        left-sum = sum
        max-left = i
right-sum = -∞
sum = 0
for j = mid + 1 to high
    sum = sum + A[j]
    if sum > right-sum
        right-sum = sum
        max-right = j
return (max-left, max-right, left-sum + right-sum)
```

搜索从 *mid* 开始向左的半个区间，找出左边最大的连续子数组的和

同理，搜索从 mid+1 开始向右的半个区间，找出右边最大的连续子数组的和

返回搜索的结果

- ✓ **时间复杂度**：$(mid\text{-}low+1)+(high\text{-}mid)=high\text{-}low+1=n$

最大子数组问题

- ✓ **过程2：** FIND-MAXIMUM-SUBARRAY, 求最大子数组问题的分治算法

```
FIND-MAXIMUM-SUBARRAY(A, low, high)

if high == low
    return (low, high, A[low])          // base case: only one element
else mid = ⌊(low + high)/2⌋
    (left-low, left-high, left-sum) =
        FIND-MAXIMUM-SUBARRAY(A, low, mid)
    (right-low, right-high, right-sum) =
        FIND-MAXIMUM-SUBARRAY(A, mid + 1, high)
    (cross-low, cross-high, cross-sum) =
        FIND-MAX-CROSSING-SUBARRAY(A, low, mid, high)
    if left-sum ≥ right-sum and left-sum ≥ cross-sum
        return (left-low, left-high, left-sum)
    elseif right-sum ≥ left-sum and right-sum ≥ cross-sum
        return (right-low, right-high, right-sum)
    else return (cross-low, cross-high, cross-sum)
```

求 *A*[*low*..*mid*] 的最大子数组

求 *A*[*mid*+1..*high*] 的最大子数组

求跨越中点的最大子数组

返回三个最大子子数组中的大者作为问题的解

最大子数组问题

- FIND-MAXIMUM-SUBARRAY的时间分析证明

令 T(n) 表示求解 n 个元素的最大子数组问题的执行时间

1）当 $n = 1$ 时，T(1) = Θ(1)；

2）当 $n > 1$ 时，对 $A[low..mid]$和 $A[mid+1..high]$两个子问题递归求解，每个子问题的规模是 $n/2$，所以每个子问题的时间为T(n/2)，两个子问题递归求解的总时间是 2T(n/2)。

3）FIND-MAX-CROSSING-SUBARRAY的时间是 Θ(n)。

最大子数组问题

- 算法FIND-MAXIMUM-SUBARRAY执行时间 T(*n*) 的递归式为：

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{if } n = 1 \\ 2T(n/2) + \Theta(n) & \text{if } n > 1 \end{cases} \Rightarrow T(n) = \Theta(n \lg n)$$

是否有更优算法？

第三讲 分治策略

内容提要：

- 分治法基本思想
- 最大子数组问题
- 矩阵乘法的Strassen算法
- 递归式求解方法

Strassen矩阵乘法

回顾一下矩阵运算

已知两个n阶方阵：　$A=(a_{ij})_{nxn}$，　$B=(b_{ij})_{nxn}$

1）**矩阵加法**

$C=A+B=(c_{ij})_{nxn}$，其中，$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$，$i,j=1,2,\ldots,n$

时间复杂度：$\Theta(n^2)$

2）**矩阵乘法**

$C=AB=(c_{ij})_{nxn}$，其中，$c_{ij}=\sum_{1\le k\le n} a_{ik}b_{kj}$，$i,j=1,2,\ldots,n$

时间复杂度：$\Theta(n^3)$。

共有n^2个c_{ij}需要计算，每个c_{ij}需要n次乘运算,n-1次加法

Strassen矩阵乘法

□ 朴素的矩阵乘法:

已知两个 n 阶方阵：A=(a_{ij})$_{n\times n}$, B=(b_{ij})$_{n\times n}$, 定义乘积 C=A•B 中的元素：

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

实现两个 $n\times n$ 矩阵乘的过程：

```
SQUARE-MATRIX-MULTIPLY(A, B)
n = A.rows
let C be a new n × n matrix
for i = 1 to n
    for j = 1 to n
        c_ij = 0
        for k = 1 to n
            c_ij = c_ij + a_ik · b_kj
return C
```

朴素的矩阵乘的计算时间是$\Theta(n^3)$

Strassen矩阵乘法

- **基于分治策略的矩阵乘算法：**

设 $n=2^k$，两个 n 阶方阵为 $A=(a_{ij})_{n\times n}$， $B=(b_{ij})_{n\times n}$

N: 若 $n\neq 2^k$，可通过在 A 和 B 中补0使之变成阶是2的幂的方阵

✓ 首先，将 A、B 和 C 分成4个 $n/2\times n/2$ 的子矩阵：

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

✓ 可以将公式 C=AB 改写为：

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{aligned} C_{11} &= A_{11}\cdot B_{11}+A_{12}\cdot B_{21}, \\ C_{12} &= A_{11}\cdot B_{12}+A_{12}\cdot B_{22}, \\ C_{21} &= A_{21}\cdot B_{11}+A_{22}\cdot B_{21}, \\ C_{22} &= A_{21}\cdot B_{12}+A_{22}\cdot B_{22}. \end{aligned}$$

共有：8次$(n/2)\times(n/2)$ 矩阵乘
4次$(n/2)\times(n/2)$ 矩阵加

Strassen矩阵乘法

- SQUARE-MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE，求矩阵乘的分治算法

```
SQUARE-MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE(A, B)
n = A.rows
let C be a new n × n matrix
if n == 1
    c11 = a11 · b11
else partition A, B, and C as in equations (4.9)
    C11 = SQUARE-MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE(A11, B11)
        + SQUARE-MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE(A12, B21)
    C12 = SQUARE-MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE(A11, B12)
        + SQUARE-MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE(A12, B22)
    C21 = SQUARE-MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE(A21, B11)
        + SQUARE-MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE(A22, B21)
    C22 = SQUARE-MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE(A21, B12)
        + SQUARE-MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE(A22, B22)
return C
```

复制矩阵，花费$\Theta(n^2)$

使用下标，花费$\Theta(1)$

$\Theta(n^2)$

$T(n/2)$

N: 任意两个子矩阵块的乘可以沿用同样的规则：如果子矩阵的阶大于2，则将子矩阵分成更小的子矩阵，直到每个子矩阵只含一个元素为止。从而构造出一个递归计算过程。

*

*

Strassen矩阵乘法

- SQUARE-MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE的时间分析证明

  令 T(n) 表示两个 $n\times n$ 矩阵相乘的计算时间

  1）当 $n=1$ 时，$\mathrm{T}(1)=\Theta(1)$；

  2）当 $n>1$ 时，8次 $n/2\times n/2$ 矩阵乘，花费时间为8T(n/2)，4次 $n/2\times n/2$ 矩阵加，花费 $\Theta(n^2)$ 时间。

- 算法SQUARE-MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE执行时间 T(n) 的递归式为：

$$\mathrm{T}(n)=\begin{cases}\Theta(1) & \text{if } n=1\\ 8\mathrm{T}(n/2)+\Theta(n^2) & \text{if } n>1\end{cases} \Rightarrow \mathrm{T}(n)=\Theta(n^3)$$

Strassen矩阵乘法

- **Strassen方法核心思想:**

· 令递归树稍微不那么茂盛，即只递归进行 7 次而不是 8个 $n/2\times n/2$ 矩阵乘

- **Strassen方法具体步骤:**

1）按上述方法将输入矩阵 A、B 和输出矩阵 C 分解为 $n/2\times n/2$ 的子矩阵。采用下标计算方法，此步骤花费$\Theta(1)$时间。

2）创建10个 $n/2\times n/2$ 的矩阵 S_1，S_1，…，S_{10}，每个矩阵保存步骤1）中创建的两个矩阵的和或差。花费时间为$\Theta(n^2)$。

3）用步骤1）中创建的子矩阵和步骤2）中创建的10个矩阵，递归地计算7个矩阵积P_1，P_2，…，P_7。每个矩阵P_i都是$n/2\times n/2$。

4）通过P_i矩阵的不同组合进行加减运算，计算出结果矩阵C的子矩阵C_{11}，C_{12}，C_{21}，C_{22}。花费时间为$\Theta(n^2)$。

Strassen矩阵乘法







▫ Strassen方法细节：

$$
\begin{aligned}
S_1 &= B_{12} - B_{22}\,, \\
S_2 &= A_{11} + A_{12}\,, \\
S_3 &= A_{21} + A_{22}\,, \\
S_4 &= B_{21} - B_{11}\,, \\
S_5 &= A_{11} + A_{22}\,, \\
S_6 &= B_{11} + B_{22}\,, \\
S_7 &= A_{12} - A_{22}\,, \\
S_8 &= B_{21} + B_{22}\,, \\
S_9 &= A_{11} - A_{21}\,, \\
S_{10} &= B_{11} + B_{12}\,.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_1 &= A_{11} \cdot S_1 &&= A_{11} \cdot B_{12} - A_{11} \cdot B_{22}\,, \\
P_2 &= S_2 \cdot B_{22} &&= A_{11} \cdot B_{22} + A_{12} \cdot B_{22}\,, \\
P_3 &= S_3 \cdot B_{11} &&= A_{21} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{11}\,, \\
P_4 &= A_{22} \cdot S_4 &&= A_{22} \cdot B_{21} - A_{22} \cdot B_{11}\,, \\
P_5 &= S_5 \cdot S_6 &&= A_{11} \cdot B_{11} + A_{11} \cdot B_{22} + A_{22} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{22}\,, \\
P_6 &= S_7 \cdot S_8 &&= A_{12} \cdot B_{21} + A_{12} \cdot B_{22} - A_{22} \cdot B_{21} - A_{22} \cdot B_{22}\,, \\
P_7 &= S_9 \cdot S_{10} &&= A_{11} \cdot B_{11} + A_{11} \cdot B_{12} - A_{21} \cdot B_{11} - A_{21} \cdot B_{12}\,.
\end{aligned}
$$

7次(*n*/2)×(*n*/2) 矩阵相乘

10次(*n*/2)×(*n*/2) 矩阵加减法

$$
\begin{aligned}
C_{11} &= P5 + P4 - P2 + P6 \\
C_{12} &= P1 + P2 \\
C_{21} &= P3 + P4 \\
C_{22} &= P5 + P1 - P3 - P7
\end{aligned}
$$

8次(*n*/2)×(*n*/2) 矩阵加减法

Strassen矩阵乘法

- **Strassen方法的时间分析证明**

令 T(n) 表示两个 $n\times n$ 矩阵的Strassen矩阵乘所需的计算

1）当 $n = 1$ 时，$T(1) = \Theta(1)$；

2）当 $n > 1$ 时，7次 $(n/2)\times(n/2)$ 矩阵乘，花费时间为 $7T(n/2)$，18次$(n/2)\times(n/2)$ 矩阵加减，花费 $\Theta(n^2)$ 时间。

- **Strassen方法执行时间 T(n) 的递归式为：**

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{if } n = 1 \\ 7T(n/2) + \Theta(n^2) & \text{if } n > 1 \end{cases} \Longrightarrow T(n) = \Theta(n^{\lg 7}) \approx \Theta(n^{2.81})$$







第三讲 分治策略

内容提要：

- □ 分治法基本思想
- □ 最大子数组问题
- □ 矩阵乘法的Strassen算法
- □ 递归式求解方法
  - ✓代入法
  - ✓递归树法
  - ✓主方法

递归式求解方法

- **分治算法的计算时间表达式往往是递归式**
- ✓ 如归并排序、最大子数组的分治算法运行时间T(*n*)的递归式为：

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{if } n = 1 \\ 2T(n/2) + \Theta(n) & \text{if } n > 1 \end{cases}$$

边界条件

递归方程

- ✓ Strassen矩阵乘法的运行时间T(*n*)的递归式为：

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{if } n = 1 \\ 7T(n/2) + \Theta(n^2) & \text{if } n > 1 \end{cases}$$

- **那么如何化简递归式，以得到形式简单的限界函数?**
- ✓ 代换法
- ✓ 递归树法
- ✓ 主方法

N： 递归式求解的结果是得到形式简单的渐近限界函数表示（即用O、Ω、Θ表示的函数式）

递归式求解方法

- **预处理——对表达式细节的简化**

为便于处理，通常做如下假设和简化处理：

（1）运行时间函数T(n)的定义中，一般假定自变量为正整数；因为这样的 n 通常表示数据的个数。

（2）忽略递归式的边界条件，即 n 较小时函数值的表示；原因在于虽然递归式的解会随着 T(1) 值的改变而改变，但此改变不会超过常数因子，对函数的阶没有根本影响。

（3）对上取整、下取整运算做合理简化，如：

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + f(n)$$

通常忽略上、下取整函数，就可写作以下简单形式：

$$T(n) = 2T(n/2) + f(n)$$

代入法

- **代换法求解递归式要点：**

1. 猜测解的形式。
2. 用数学归纳法找出使解真正有效的常数，并证明解是正确的。

例：$T(n)=2T(\lfloor n/2 \rfloor)+n$

解：（1）猜测其解为 $T(n)=O(n\lg n)$

（2）证明选择常数 $c>0$，可有$T(n) \le cn\lg n$。

假定此上界对所有正数 $m<n$ 都成立的，对于 $m=\lfloor n/2 \rfloor$，有 $T(\lfloor n/2 \rfloor) \le c\lfloor n/2 \rfloor \lg(\lfloor n/2 \rfloor)$。将其带入递归式，得到

$$T(n) \le 2(c\lfloor n/2 \rfloor \lg(\lfloor n/2 \rfloor))+n \le cn\lg(n/2)+n$$

$$=cn\lg n-cn\lg 2+n$$

$$=cn\lg n-cn+n \le cn\lg n$$

其中，只要 $c \ge 1$，最后一步都会成立。

- 上面的过程证明了当n足够大时猜测的正确性，但对边界值 是否成立呢?

即： $T(n) \le cn\log n$ 的结论对于较小的n成立吗?

- 分析：事实上，对n=1，上述结论存在问题：

（1）作为边界条件，我们有理由假设$T(1)=1$；

（2）但对n=1，带入表达式有：$T(1) \le c \cdot 1 \cdot \log 1 = 0$，与$T(1)=1$不相符。

- 归纳证明的基础不成立，怎么处理?

- 从n_0的性质出发：只需要存在常数n_0，使得$n \ge n_0$时结论成立即可，所以n_0不一定取1。

所以，这里不取$n_0=1$，而取$n_0=2$，用T(2)、T(3)代替T(1) 作为归纳证明中的边界条件：

（1）依然合理地假设T(1) =1。

（2）研究什么样的c使得T(2)、T(3)可以满足T(n)≤cnlogn。

(即使得 T(2)≤2clog2 且 T(3)≤3clog3 成立)

- 将T(1)=1带入递归式，有：T(2) = 4，T(3)=5
- 要使 T(2)≤2clog2 和T(3)≤3clog3 成立，只要c≥2即可。
- 综上所述，取常数c≥2，结论T(n)≤cnlogn成立。

命题得证。

代入法

- **应用数学归纳法要求解对边界条件成立：**
  - ✓ 一般通过证明边界条件符合归纳证明的基本情况。但可能出现归纳证明基本情况不能满足的问题。
  - ✓ 解决办法：扩展边界条件。渐近界只要求 $n \geq n_0$ 即可，故可以选择适当的 n_0，让 $\mathrm{T}(n_0)$ 代替作为归纳证明中的边界条件，使递归假设对很小的 n 也成立。

如何猜测递归式的解呢？

- 遗憾的是，并不存在通用的方法来猜测递归式的正确解。

- **1）主要靠经验**

- 尝试1：**看有没有形式上类似的表达式，以此推测新递归式解的形式。**
- 尝试2：**先猜测一个较宽的界，然后再缩小不确定范围，逐步收缩到紧确的渐近界。**
- 避免盲目推测：$\mathrm{T}(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + 1$，猜测$\mathrm{T}(n) = O(n)$

$$T(n) \le c\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + c\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + 1 = cn + 1$$

原因：并未证出一般形式T(n)≤cn成立。（cn+1≰cn）

➢ 必要的时候要做一些技术处理

- 1）去掉一个低阶项
  - 新的猜测是$\mathrm{T}(\boldsymbol{n}) \leq \mathrm{cn} - \boldsymbol{d}$，**d是一个大于0的一个常数**
  - $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n}) \leq \boldsymbol{c}\left(\left\lfloor\frac{\boldsymbol{n}}{2}\right\rfloor - \mathrm{d}\right) + \boldsymbol{c}\left(\left\lceil\frac{\boldsymbol{n}}{2}\right\rceil - \boldsymbol{d}\right) + \mathbf{1} = \boldsymbol{cn} - \mathbf{2}\boldsymbol{d} + \mathbf{1} \leq \mathrm{cn} - \boldsymbol{d}$
  - 只要$\mathrm{d} \geq 1$,**此事就成立**
- 2）变量代换：对陌生的递归式做些简单的代数变换，使之变成较熟悉的形式。

例：设有递归式 $T(n) \le 2T(\lfloor \sqrt{n} \rfloor) + \log n$

分析：原始形态比较复杂

(1) **做代数代换**：令 $m = \log n$，则n=2^m, $\sqrt{n} = 2^{m/2}$

(2) **忽略下取整**，直接使用$\sqrt{n}$代替$\lfloor \sqrt{n} \rfloor$

得：

$$T(2^m) \le 2T(2^{m/2}) + m$$

再设 **S(m) = T(2^m)**，得以下形式递归式：

$$S(m) \le 2S(m/2) + m$$

从而获得**形式上熟悉**的递归式。

根据前面的一些讨论，可得新的递归式的上界是：

$$O(m \log m)$$

再**将S(m)、m=log*n* 带回T(n)**，有，

$$\begin{aligned} T(n) &= T(2^m) \\ &= S(m) = O(m \log m) \\ &= O(\log n \log \log n) \end{aligned}$$

这里，$m = \log n$

代入法

- **代换法求解步骤小结：**
  - ✓ 猜测递归式没有通用的方法
  - ✓ 需要经验、创新性
  - ✓ 试探法
  - ✓ 递归树
  - ✓ 证明较宽松的上下界，然后再缩小不确定性区间
- **注意事项：**
  - ✓ 对更小的值做更强的假设
  - ✓ 避免陷阱
  - ✓ 适当时进行变量替换

递归树法

- 画递归树有助于猜想递归式的解
- 当用递归式表示分治算法的运行时间时，递归树的方法尤其有用
- 递归树中，每一个节点都代表着递归函数调用集合中一个子问题的代价。将树中每一层内的代价相加得到一个每层代价的集合，再将每层的代价相加得到递归式所有层次的总代价
- 但递归树法不够严谨，使用递归树产生好的猜测时，通常需要容忍小量的“不良量”
  - ✓ floor, ceiling忽略
  - ✓ n 经常假设为某个整数的幂次方
- 通常作法：用递归树法生成好的猜测，然后可用代入法验证猜测是否正确

递归树法

基于递归树的时间分析

➢**节点代价**：在递归树中，每个节点有求解相应（子）问题 的**代价**(**cost**，这里指除递归以外的其它代价)。

➢**层代价**：每一层各节点代价的和。

➢**总代价**：整棵树的各层代价之和

➢**目　标**：利用树的性质，获取对递归式解的猜测，然后用代换法或其它方法加以验证。

□例：求解 $T(n) = 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + \theta(n^2)$

准备性工作：为简单起见，对一些细节做必要、合理的简化和假设，这里为：

（1）**去掉底函数的表示**

- 理由：底函数和顶函数对递归式求解并不 “重 要” 。

（2）**假设n是4的幂**，即$n=4^k$，$k=\log_4 n$。

- 一般，当证明$n=4^k$成立后，再加以适当推广，就可以把结论推广到n不是4的幂的一般情况了。

（3）**展开**$\theta(n^2)$，代表递归式中非重要项。

- 假设其常系数为c，c>0，从而去掉θ符号，转变成cn^2的形式，便于后续的公式化简。

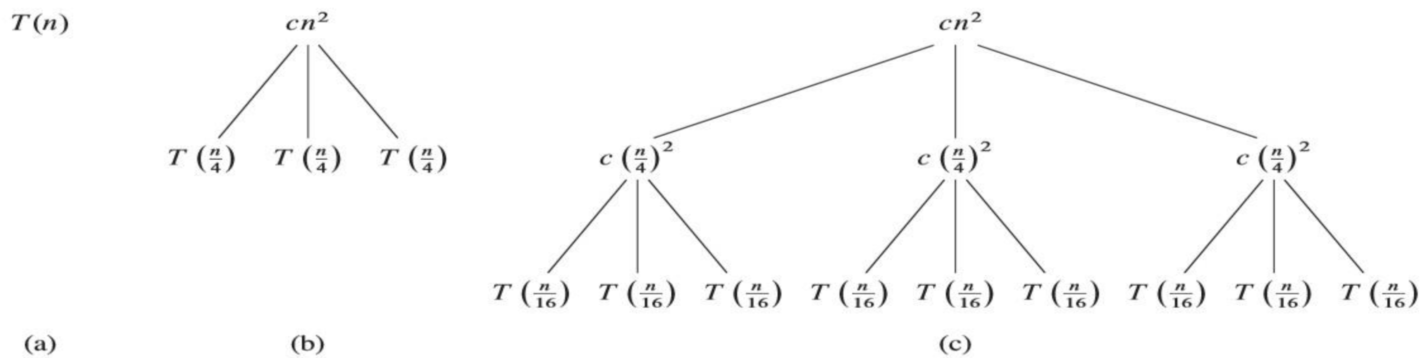
最终得以下形式的递归式：　$T(n) = 3T(n/4) + cn^2$

递归树法

- 例：求解 $T(n) = 3T(n/4) + cn^2$

  关键： 1）树的深度如何确定?

  2）每个节点的代价—>每层的代价—>总代价



a） 对原始问题T(n)的描述。

b） 第一层递归调用的分解情况，cn^2是顶层计算除递归以外的代价，T(n/4)是分解出来的规模为n/4的子问题的代价，总代价$T(n)=3T(n/4)+cn^2$。

- 第二层递归调用的分解情况。$c(n/4)^2$是三棵二级子树除递归以外的代价。

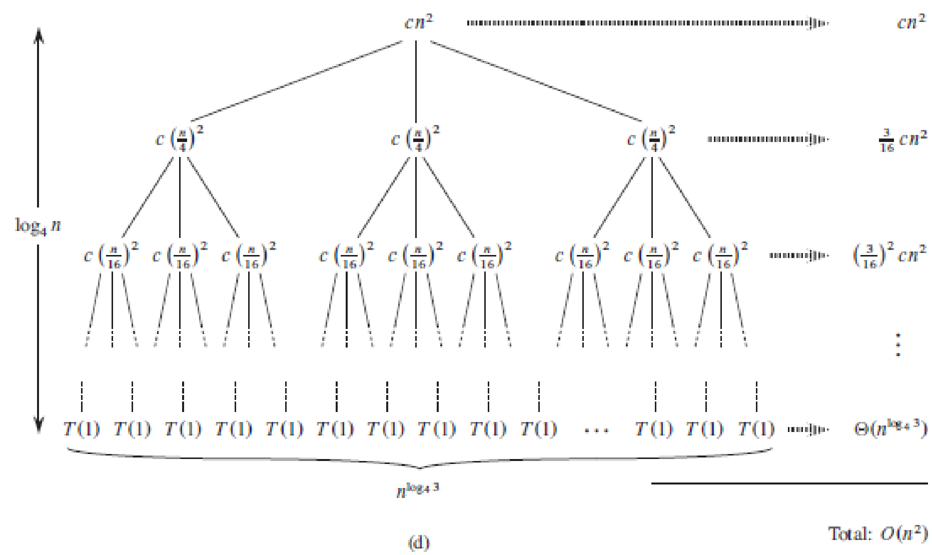
递归树法

- **例：求解 $T(n) = 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + cn^2$**

1）树的深度：子问题的规模按1/4的方式减小，在递归树中深度为i的节点子问题的大小为$n/4^i$

。

- 当$n/4^i=1$时，子问题规模仅为1，达到边界值。
- 所以，
- 节点分布层：$0\sim\log_4 n$
- 树共有$\log_4 n+1$层
- 从第2层起，每一层上的节点数为上层节点数的3倍
- 深度为i的层节点数为3^i。



2）代价计算

- ✓ 深度为 i 的每个结点的代价为：$c(n/4^i)^2$
- ✓ 对 $i=0, 1, 2, \ldots, \log_4 n-1$, 深度为 i 的所有结点的总代价为：$3^i c(n/4^i)^2=(3/16)^i cn^2$
- ✓ 最底层结点为$n^{\log_4 3}$，每个结点代价为 T(1)，总代价为$n^{\log_4 3}T(1)$，即$\Theta(n^{\log_4 3})$

递归树法

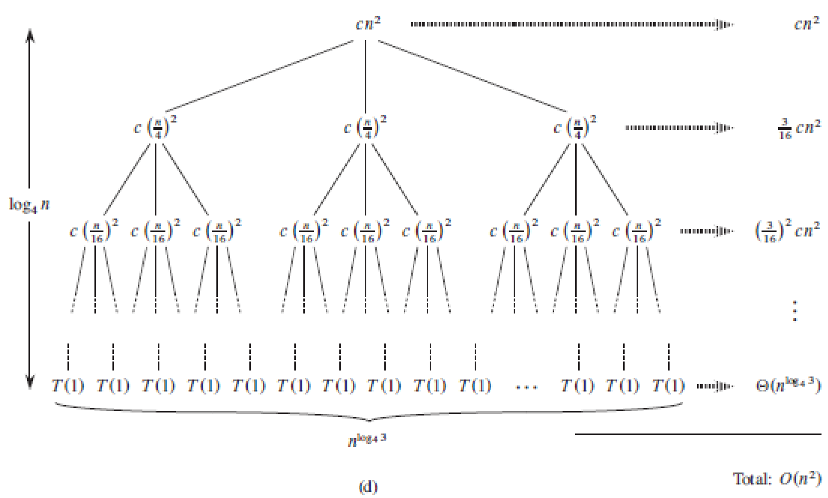
- **例：求解 $T(n) = 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + cn^2$**

所有层次的代价之和，即整棵树的代价:

$$T(n) = cn^2 + \frac{3}{16}cn^2 + \cdots + \left(\frac{3}{16}\right)^{\log_4 n - 1} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3})$$

$$= \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} \left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2 + \Theta(\log_4 3)$$

$$= \frac{(3/16)^{\log_4 n} - 1}{(3/16) - 1} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3})$$



无限递减几何级数

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} \left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) < \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3})$$

$$= \frac{1}{1 - (3/16)} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3})$$

$$= \frac{16}{13} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3})$$

$$= O(n^2)$$

- 对于实数x≠1，和式$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$是一个几何级数（等比数列），其值为$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$
- 当和是无穷的且|x|<1时，得到无穷递减几何级数，此时 $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1 - x}$

*　　　　　　　　*　　　　　　　　Soochow University

至此，获得T(n)解的一个猜测：T(n)=O(n²)，成立吗？

用代换法证明猜测的正确：

- 将$T(n) \le dn^2$作为归纳假设，**d是待确定的常数**，带入推论证明 过程，有

$$\begin{aligned} T(n) &= 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + \Theta(n^2) \\ &\le 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + cn^2 \le 3d\lfloor n/4 \rfloor^2 + cn^2 \\ &\le 3d(n/4)^2 + cn^2 \\ &= \frac{3}{16}dn^2 + cn^2 \end{aligned}$$

c是引入的另一个常量

显然，要使得$T(n) \le dn^2$成立，只要$d \ge (16/13)c$即可。所以，$T(n) \le dn^2$的猜测成立

定理得证（边界条件的讨论略）。

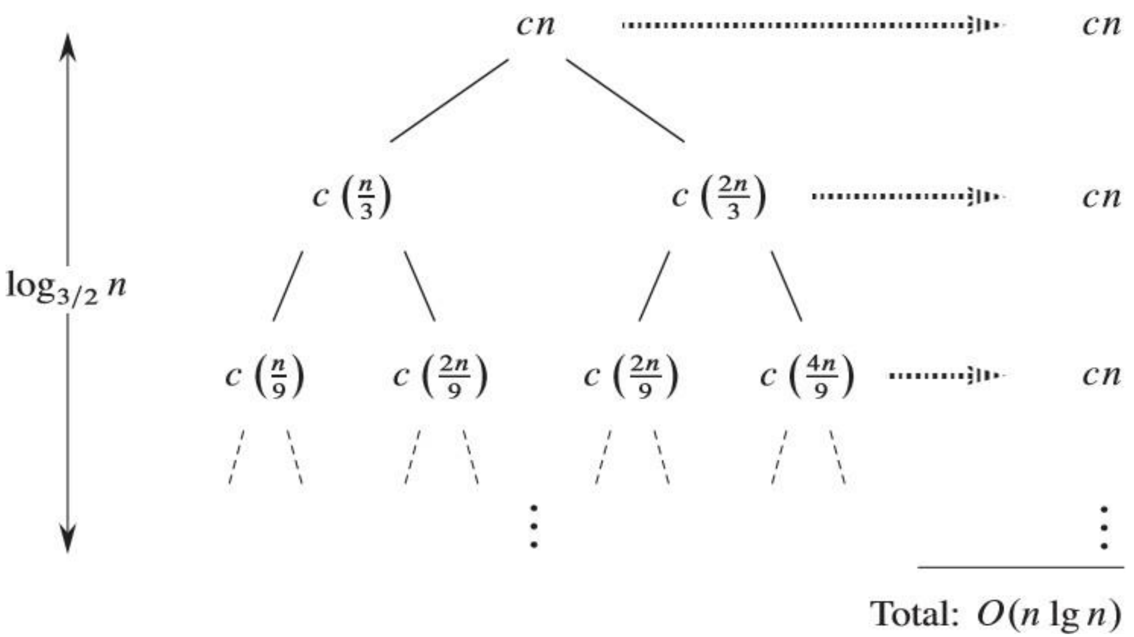
另： $O(n^2)$是T(n)的一个紧确界，为什么？

例 求表达式$T(n)=T\left(\frac{n}{3}\right)+T\left(\frac{2n}{3}\right)+O(n)$，（这里，表达式中直接省略了下取整和上取整函数）：

进一步地，**引入常数c,**展开O(n)，得

$$T(n) \le T\left(\frac{n}{3}\right)+T\left(\frac{2n}{3}\right)+cn$$

递归树为：



分析：

■该树并不是一个完全的二叉树。

- 从根往下，越来越多的内节点在左侧消失(1/3分叉上)，因 此每层的代价并不都是cn，而是≤cn的某个值。

■树的深度：

- 在上述形态中，最长的路径是最右侧路径，由

$n \to (2/3)n \to (2/3)^2 n \to \dots \to 1$组成。

- 当$k=\log_{3/2}n$时，$(3/2)^k/n=1$，所以树的深度为$\log_{3/2}n$。

■ 递归式解的猜测：

- 至此，我们可以合理地猜测该树的总代价至多是层数乘以 每层的代价，并鉴于上面关于层代价的讨论，我们可以假 设递归式的上界为：

$O(cn\log_{3/2}n)=O(n\log n)$

注：这里，我们假设每层的代价为cn。事实上，cn为每层代价的上 界，这一假设是合理的细节简化处理。

猜测的证明：证明O(nlogn)是递归式的上界

即证明：T(n)≤dnlogn，d是待确定的合适正常数。

$$
\begin{aligned}
T(n) &\le T(n/3) + T(2n/3) + cn \\
&\le d(n/3)\log(n/3) + d(2n/3)\log(2n/3) + cn \\
&= (d(n/3)\log n - d(n/3)\log 3) + (d(2n/3)\log n - d(2n/3)\log 3/2)) + cn \\
&= dn\log n - d((n/3)\log 3 + (2n/3)\log(3/2)) + cn \\
&= dn\log n - d((n/3)\log 3 + (2n/3)\log 3 - (2n/3)\log 2) + cn \\
&= \underline{dn\log n - dn(\log 3 - 2/3) + cn \le dn\log n}
\end{aligned}
$$

成立吗？

上式成立的条件是： $d \ge c/(\log 3 - (2/3))$

所以猜测正确，递归式的解得证。

主方法

- 主方法是求解如下形式的递归式

$$T(n)=aT(n/b)+f(n)$$

其中 $a \geq 1$ 和 $b>1$是常数，$f(n)$ 是一个渐近正的函数。

- 主方法要求针对三种情况，但这样很容易确定许多递归式的解，甚至可以不需要计算。
- 在上面的递归式中，因为 n/b 可能不是整数，可以用 $\lceil n/b \rceil$ 和 $\lfloor n/b \rfloor$来代替 n/b。这种代替不会对递归式的渐近行为产生影响。
- 实际上，在分析分治算法的运行时间时，经常略去下取整和上取整函数，以方便对递归式的分析。

主方法

- **主方法的正确性依赖于如下的主定理**

定理 4.1 (主定理)

假设 $a \geq 1$ 和 $b>1$ 为常数，$f(n)$为一函数，$T(n)$ 是定义在非负整数上的递归式：$T(n)=aT(n/b)+f(n)$， 其中将 n/b 解释为 $\lceil n/b \rceil$ 和 $\lfloor n/b \rfloor$。那么 $T(n)$ 可能有如下的渐近界:

1. 若对某个常数 $\varepsilon>0$ 有 $f(n)=O(n^{\log_b a-\varepsilon})$，则 $T(n)=\Theta(n^{\log_b a})$ 。
2. 若 $f(n)=O(n^{\log_b a})$，则 $T(n)=\Theta(n^{\log_b a}\lg n)$ 。
3. 若对某个常数 $\varepsilon>0$ 有 $f(n)=\Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$ ，且对某个常数 $c<1$ 和所有足够大的 n 有 $af(n/b) \leq cf(n)$，则 $T(n)=\Theta(f(n))$ 。

主方法

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{if } f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon}) \\ \Theta(n^{\log_b a}\lg n) & \text{if } f(n) = \Theta(n^{\log_b a}) \\ \Theta(f(n)) & \text{if } f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon}) \text{ and } af(n/b) \leqslant cf(n) \end{cases} \quad \exists\varepsilon > 0,\ c < 1$$

- **将函数 $f(n)$ 与函数 $n^{\log_b a}$ 进行比较，两个函数较大者决定了递归式的解：**

✓若函数 $n^{\log_b a}$ 更大，如情况1，则 $T(n)=\Theta(n^{\log_b a})$；

✓若函数 $f(n)$ 更大，如情况3，则 $T(n)=\Theta(f(n))$；

✓若两个函数大小相当，如情况2，则 $T(n)=\Theta(n^{\log_b a}\lg n)$ 。

- **使用主方法技术细节：**

✓情况1，$f(n)$ 要多项式意义上小于 $n^{\log_b a}$

✓情况3，$f(n)$ 要多项式意义上大于 $n^{\log_b a}$ ，且满足 $af(n/b) \leq cf(n)$

□上面三种情况并未覆盖所有可能的f(n)，即case1&2和case2&3之间的缝隙。

□若递归式中的f(n)与 $n^{\log_b a}$ 的关系不满足上述性质：

- f(n)小于等于$n^{\log_b a}$，但不是多项式地小于。
- f(n)大于等于$n^{\log_b a}$，但不是多项式地大于。

□情况3中要求的正则条件不成立

则不能用主方法求解该递归式。

主方法







□ 使用主方法举例

例1：T(*n*)=9T(*n*/3)+*n*

解： $a=9,\ b=3,\ f(n)=n \Rightarrow n^{\log_b a}=n^{\log_3 9}=n^2=\Theta(n^2)$

$\Rightarrow f(n)=O(n^{\log_3 9-\varepsilon})$, where $\varepsilon=1 \Rightarrow \mathrm{T(n)}=\Theta(n^2)$

例2：T(*n*)=T(2*n*/3)+1

解： $a=1,\ b=3/2,\ f(n)=1 \Rightarrow n^{\log_b a}=n^{\log_{3/2} 1}=n^0=1$

$\Rightarrow f(n)=\Theta(n^{\log_{3/2} 1})=\Theta(1) \Rightarrow \mathrm{T(n)}=\Theta(\lg n)$

例3：T(*n*)=3T(*n*/4)+*n*lg*n*

$a=3,\ b=4,\ f(n)=n\lg n \Rightarrow n^{\log_b a}=n^{\log_4 3}=O(n^{0.793})$

解： $\Rightarrow f(n)=\Omega(n^{\log_4 3+\varepsilon})$, where $\varepsilon\approx 0.2$,

$af(n/b)=3(n/4)\lg(n/4)\leqslant(3/4)n\lg n=cf(n)$ for $c=3/4$

* $\Rightarrow \mathrm{T}(n)=\Theta(n\lg n)$ *







主方法

◻ 使用主方法举例

例4：T(n)=2T(n/2)+$n$lg$n$

解： $a=2$，$b=2$，$f(n)=n\lg n \;\Rightarrow\; n^{\log_b a}=n$

上述情况可能错误的应用情况3，因为 $f(n)=n\lg n$ 渐近大于 $n^{\log_b a}=n$。但是它并不是多项式意义上的大于，对任意正常数ε，比值 $f(n)/n^{\log_b a}=(n\lg n)/n$ 都渐近小于 n^{ε}。因此，递归式落入了情况2和情况3的间隙。







- 归并算法的其它经典应用
  - ✓ 快速排序
  - ✓ 中位数和顺序统计量
  - ✓ 寻找最近点对
  - ✓ 多项式与快速傅立叶变换