Appunti di FLUIDODINAMICA (9 CFU)

Filippo Corvaro
GitHub — LinkedIn

Dipartimento di Ingegneria Industriale, Elettronica e Meccanica
Università degli Studi ROMA TRE
Anno Accademico 2021/2022

Figura 1: Immagine generata con Image Creator di Bing, basata sulla tecnologia DALL·E 3.

© 2025 | Filippo Corvaro. Tutti i diritti riservati. Documento scaricabile e consultabile, ma non vendibile né riproducibile a nome di terzi.

Preambolo

Sono consapevole che l'aspetto estetico di questi appunti non sia dei migliori, in quanto redatti su un vecchio tablet. Tuttavia, spero possano rappresentare un valido supporto per lo studio e la comprensione di alcuni concetti fondamentali della materia.

Fonti

Questi appunti sono stati elaborati sulla base delle lezioni online tenute dal Professore Camussi durante la pandemia da COVID-19, integrando anche il materiale fornito dal docente. Per approfondimenti, consiglio di fare riferimento ai testi e alle risorse suggerite dal Professore.

Modalità d'esame

L'esame consisteva in un colloquio orale riguardante l'intero programma. Non erano previsti esoneri o prove scritte.

Programma del Corso

Si consiglia di fare riferimento al programma dell'anno accademico corrente per assicurarsi di coprire tutti gli argomenti previsti e non tralasciare eventuali aggiornamenti o integrazioni.

Indice

1 Appunti del Corso

Questi appunti risalgono a un periodo in cui avevo un metodo di scrittura meno organizzato, e al momento non ho la possibilità di rivederli e ristrutturarli. Di conseguenza, non fornirò una suddivisione dettagliata degli argomenti né un indice strutturato. L'onere di esplorarli e organizzarli spetta quindi al lettore.

Prefazione

Il documento rappresenta la rielaborazione personale dei concetti espressi durante le lezioni del corso di fluidodinamica tenuto dal docete Camussi, integrato con la documentazione fornita dal Professore. In quanto rielaborazione di uno studente essa potrebbe essere soggetta ad errori. Si precisa che tutte le immagini utilizzate appartengono ai rispettivi proprietari. Questi appunti **NON** intendono sostituire il corso in questione, ma offrono un supporto; Si consiglia di seguire le lezioni del corso. Nessuna parte di questa opera può essere riprodotta o trasmessa in qualsiasi forma, sia essa cartacea o elettronica, senza il consenso scritto dell'autore.

FLUIDODINAMICA → DISCIPLINA CHE STUDIA IL COMPORTAMENTO CINEMATICO, DINAMICO E TERMODINAMICO DEI FLUIDI (LIQUIDI E GAS)

MECCANICA DEI FLUIDI
- **FLUIDO STATICA** (FLUIDO IN QUIETE)
  - IDROSTATICA
  - ATMOSFERA STANDARD
- **FLUIDODINAMICA** (FLUIDO IN MOTO)
  - IDRODINAMICA (MOTO FLUIDI INCOMPRESSIBILI)
  - AERODINAMICA (INTERAZIONE TRA UN FLUIDO ED UN CORPO SOLIDO)
  - GASDINAMICA (MOTO DEI FLUIDI COMPRESSIBILI)

IPOTESI DI MEZZO CONTINUO → IL SUO SCOPO È DI CONSENTIRCI DI DEFINIRE PROPRIETÀ E COMPORTAMENTI MACROSCOPICI A PRESCINDERE DELLA NATURA DELLA STRUTTURA MOLECOLARE. CON QUESTA Hp ⇒ TRATTO LIQUIDI E GAS ALLO STESSO MODO ANCHE SE DIVERSI A LIVELLO MOLECOLARE.

MKS → m, Kg, sec → **GRANDEZZE FONDAMENTALI DELLA FLUIDODINAMICA**

FORZA: $N = 1\,Kg\,\frac{m}{sec^2}$ | LAVORO: $J = 1\,N \cdot m$ | POTENZA: $W = \frac{1\,J}{sec}$ | PRESSIONE: $Pa = 1\,\frac{N}{m^2} = 10^{-5}\,atm$

LEGGI FONDAMENTALI DELLA FLUIDODINAMICA: LEGGE DI NEWTON, PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA MASSA, 1° E 2° P. TRMD.

SENSIBILITÀ = DERIVATA PARZIALE DELLA PRIMA QUANTITÀ RISPETTO L'ALTRA

PROPRIETÀ DEL FLUIDO DIPENDENTI ALLA CARATTERIZZAZIONE DEL COMPORTAMENTO: ① DENSITÀ; ② COEFF. DI VISCOSITÀ

① $\rho = \frac{m}{V}$ $\quad [\rho] = \frac{[Kg]}{[m^3]}$ DIPENDE SIA DA T CHE DA P ⇒ $\rho = \rho(P,T)$

LIQUIDI MENO COMPRIMIBILI RISPETTO AI GAS ⇐

SENSIBILITÀ DI ρ A P

$$\frac{\partial \rho}{\partial P} = \alpha \rho$$

α → COEFF. DI COMPRIMIBILITÀ

PER $T = 15°C$
- H_2O → $\alpha = 0{,}5 \cdot 10^{-10}\,Pa^{-1}$
- ARIA → $\alpha = 1 \cdot 10^{-5}\,Pa^{-1}$

SENSIBILITÀ DI ρ A T

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} = -\beta \rho$$

β → COEFF. ESPANSIONE TERMICA

$T = 15°C$
- H_2O → $\beta = 1{,}5 \cdot 10^{-4}\,K^{-1}$
- ARIA $\beta = 0{,}3 \cdot 10^{-2}\,K^{-1}$

ρ DEI GAS È PIÙ SENSIBILE ALLE ΔT RISPETTO A QUELLA DEI LIQUIDI

PER I GAS PERFETTI $\rho = \frac{P}{RT}$ (EQ. DI STATO + SENSIBILITÀ)

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial \rho}{\partial T}\right|_P = -\frac{P}{RT^2} = -\frac{\rho}{T} = -\rho\beta$$

$$\left.\frac{\partial \rho}{\partial P}\right|_T = \frac{1}{RT} = \frac{\gamma}{\gamma RT} = \frac{\gamma}{c^2} = \alpha\rho \Rightarrow \alpha = \frac{\gamma}{\rho c^2} = \frac{1}{\rho RT}$$

$1{,}4 = \gamma = \frac{c_p}{c_v}$ > CALORI SPECIFICI

$R = 287\,\frac{J}{Kg\,K}$ → PER ARIA

② **COEFFICIENTE DI VISCOSITÀ** (VARIA CON T) (DIPENDENZA DA P TRASCURATA)
- **DINAMICA**, μ $[N \cdot sec/m^2]$: PROPRIETÀ CHE QUANTIFICA LA RESISTENZA DEI FLUIDI ALLO SCORRIMENTO
- **CINEMATICA**, ν: $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ $\left[\frac{m^2}{sec}\right]$

SFORZO $\tau = \frac{F}{A} = \mu \frac{du}{dy}$ → SE VALE, SI HA UN FLUIDO NEWTONIANO, ALTRIMENTI: NON NEWTONIANO (SANGUE, VERNICI)

RELAZIONI PER TROVARE μ:

LIQUIDI → VISCOSITÀ DIMINUISCE ALL'AUMENTARE DELLA TEMPERATURA → DIPENDENZA APPROSSIMATA RELAZIONE ANDRADE $\mu = D \cdot e^{\frac{B}{T}}$

GAS → AUMENTO DI TEMPERATURA, AUMENTO DELLA VISCOSITÀ → DIPENDENZA APPROSSIMATA DA EQ. DI SUTHERLAND $\mu = \frac{C\,T^{\frac{3}{2}}}{T+S}$

C, S, D, B → COSTANTI EMPIRICHE

Pag.1

RICHIAMI DI TERMODINAMICA E PROCESSI ISENTROPICI DI GAS PERFETTI

1° P. DELLA TRMD. $dU = \delta Q - PdV$ U = ENERGIA INTERNA
δQ = CALORE CEDUTO AL SISTEMA (FLUIDO)
PdV = LAVORO COMPIUTO SUL SISTEMA

ENTALPIA $h = U + PV$

2° P. DELLA TRMD. (ENTROPIA) $dS = \frac{\delta Q}{T}$ PER UNA TRASFORMAZIONE REVERSIBILE DA UNO STATO DI EQUILIBRIO AD UN ALTRO.
$\frac{1}{T}$ COSTANTE DI PROPORZIONALITÀ

SO CHE IN CONDIZIONI ADIABATICHE NON C'È SCAMBIO DI CALORE $\delta Q = 0 \Rightarrow$ IL 2° P. DELLA TRMD. DIVENTA $TdS = 0$;

IL PRIMO DIVENTA: $dU + PdV = 0$; UNENDOLI, HO: $Tds = dU + PdV \Rightarrow ds = \frac{dU}{T} + \frac{P}{T}dV$; ORA CONSIDERO L'EQ. DEI GAS PERFETTI

$PV = RT \Rightarrow \frac{P}{T} = \frac{R}{V}$ DOVE $V = \frac{1}{\rho}$ = VOLUME SPECIFICO $\Rightarrow ds = \frac{du}{T} + R\frac{dv}{V} \Rightarrow$ RICORDO CHE PER I GAS PERFETTI, SO CHE:
$C_P = cost$
$C_V = cost$, RICAVABILI DA $\left(\frac{\delta Q}{\delta T}\right)_V = \frac{du}{dT} = C_V \Rightarrow du = C_V\,dT$ E $\left(\frac{\delta Q}{\delta T}\right)_P = \frac{dh}{dT} = C_P \Rightarrow ds = C_V\frac{dT}{T} + R\frac{dV}{V} \Rightarrow$ INTEGRO

TRA STATO INIZIALE E FINALE, HO: $S_f - S_i = C_V \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + R\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$; MA RICORDANDO CHE $R = C_V(\gamma - 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow S_f - S_i = 0 = C_V \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right)\left(\frac{\rho_i}{\rho_f}\right)^{\gamma-1}$ DOVE HO APPLICATO LA REGOLA DEL LOGARITMO E SOSTITUITO $V_f = \frac{1}{\rho_f}$ E V_i

ORA DIVIDO PER C_V E FACCIO ESPONENZIALE: $\frac{T_f}{\rho_f^{\gamma-1}} = \frac{T_i}{\rho_i^{\gamma-1}} \Rightarrow \frac{T}{\rho^{\gamma-1}} = cost.$

DALL'EQ. DI STATO HO: $P = \frac{T}{R\rho} \Rightarrow$ SOSTITUISCO $\frac{P_f}{R\rho_f}\left(\frac{1}{\rho_f^{\gamma-1}}\right) = \frac{P_i}{R\rho_i}\left(\frac{1}{\rho_i^{\gamma-1}}\right) \Rightarrow$ MOLTIPLICO PER R E MOLTIPLICO

ρ CON REGOLA DELL'ESPONENZIALE $\Rightarrow \frac{P_f}{\rho_f^\gamma} = \frac{P_i}{\rho_i^\gamma} \Rightarrow \frac{P}{\rho^\gamma} = cost.$ IMPORTANTE PERCHÉ LEGA PRESSIONE E DENSITÀ (PER PROCESSI ADIABATICI REVERSIBILI)

SEMPRE DALL'EQ. DI STATO, HO: $\rho = \frac{P}{RT} \Rightarrow$ SOSTITUISCO ρ CON ρ DELLA 1° EQ $\Rightarrow$
$\frac{T_f}{P_f^{\gamma-1}}T_f^{\gamma-1}R = \frac{T_i}{P_i^{\gamma-1}}T_i^{\gamma-1}R \Rightarrow$ DIVIDO PER R E HO: $\frac{T_f^\gamma}{P_f^{\gamma-1}} = \frac{T_i^\gamma}{P_i^{\gamma-1}} \Rightarrow \frac{T^\gamma}{P^{\gamma-1}} = cost.$

QUESTE SONO EQUAZIONI ISENTROPICHE.

VELOCITÀ DEL SUONO $c^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S = \gamma RT$ σ $(T = 20°C = 293°K)$ $c = 343\,m/s = \sqrt{\gamma RT}$
↳ VELOCITÀ CON CUI SI PROPAGANO LE PERTURBAZIONI DI PRESSIONE

VARIABILI E PARAMETRI DELLA FLUIDODINAMICA NELLO STUDIO DEI FLUSSI SONO PRESENTI:
- 4 VRB INDIPENDENTI (x, y, z, t)
- 6 VRB DIPENDENTI (u, v, w, ρ, P, T) → PRIME 3 COMPONENTI VELOCITÀ, ULTIME 3 COMPONENTI TRMD.
- m PARAMETRI CARATTERIZZANTI IL FLUIDO: COEFF. DI VISCOSITÀ, μ; FORZE DI MASSA, $\vec{g}$;

FLUIDOSTATICA

IDROSTATICA L'EQ. DI RIFERIMENTO È LUNGO L'ASSE VERTICALE z (ORIENTATO VERSO L'ALTO).

$\frac{dP}{dz} = -\rho g$ INTEGRO: $\Delta P = -\rho g h$ CON $h = z_2 - z_1$ [$\rho g = cost$ PER L'ACQUA]

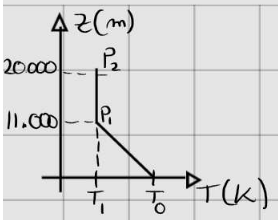
ATMOSFERA STANDARD: A DIFFERENZA DELL'IDROSTATICA, ρg NON È COSTANTE PER L'ARIA (ρ VARIA IN BASE ALLA QUOTA). SI INTRODUCE L'EQ. DEI GAS PERFETTI: $\frac{P}{\rho} = RT$ PER TROVARE L'INCOGNITA (P); COSÌ FACENDO SI AGGIUNGE ANCHE L'INCOGNITA T, CHE PERÒ PUÒ ESSERE CALCOLATA IN BASE ALLA QUOTA DA RELAZIONI EMPIRICHE. L'ATMOSFERA STANDARD SI DIVIDE IN:

TROPOSFERA: $0 \le z \le 11.000\,m$ $T(z) = T(0) - \alpha z$ DOVE $\alpha = 0{,}0065\,K/m$ = ANDAMENTO

STRATOSFERA: $11.000 < z \le 20.000\,m$ $T(z) = T(11.000) = cost.$ RIPORTO IL TUTTO SUL GRAFICO

LIVELLO DEL MARE, CONVENZIONE: $\rho_0 = 1{,}22\,kg/m^3$
$T_0 = 288\,K = 15°C$
$P_0 = 1\,atm$

Pag.2



STUDIO ANDAMENTO DI P NELLA TROPOSFERA: USO LA DEF. DI PRESSIONE IDROSTATICA: $\frac{dP}{dz} = -\rho g$

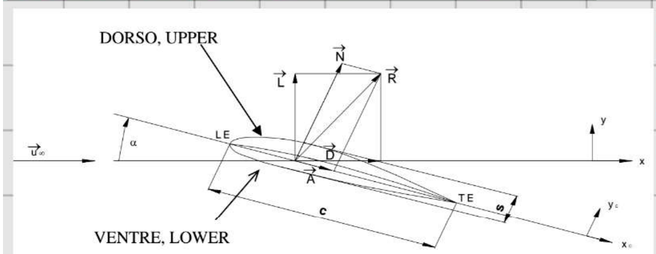
SOSTITUISCO ρ CON L'EQ. DEI GAS PERFETTI, $\frac{dP}{dz} = -\rho g = -\frac{P}{RT} g \Rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{g}{R}\frac{dz}{T} \Rightarrow$ DIFFERENZIO $T = T_0 - \alpha z \Rightarrow dT = -\alpha dz \Rightarrow dz = -\frac{dT}{\alpha}$; SOSTITUISCO $\frac{dP}{P} = \frac{g}{R\alpha}\frac{dT}{T} \Rightarrow$ INTEGRO TRA 0 E 1

$\Rightarrow \ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right) = \frac{g}{R\alpha}\ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) \Rightarrow \frac{P_1}{P_0} = \left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{\frac{g}{R\alpha}}$; PER UNA QUOTA GENERICA: $\frac{P(z)}{P_0} = \left(\frac{T(z)}{T_0}\right)^{g/R\alpha} = \left(\frac{T_0 - \alpha z}{T_0}\right)^{\frac{g}{R\alpha}} = \left(1 - \frac{\alpha z}{T_0}\right)^{\frac{g}{R\alpha}}$

STUDIO ANDAMENTO DI P, STRATOSFERA: RIPARTO DA $\frac{dP}{P} = -\frac{g}{RT_1}dz \Rightarrow$ INTEGRO TRA 2 E 1 $\Rightarrow$

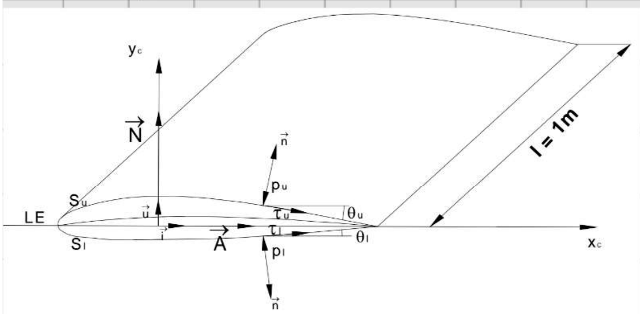
$\ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = -\frac{g}{RT_1}(z_2 - z_1) \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = e^{-\frac{g}{RT_1}(z_2 - z_1)}$ PER z GENERICA: $\frac{P(z)}{P_1} = e^{-\frac{g}{RT_1}(z - z_1)}$

FORZE E MOMENTI SU CORPI E PROFILI AERODINAMICI



C = CORDA
TE = TRAILING EGE = BORDO D'USCITA
LE = LEADING EDGE = BORDO D'ATTACCO
$\vec{U}_\infty$ = VELOCITÀ INDISTURBATA INCIDENTE SUL PROFILO
$\vec{L}$ e $\vec{D}$ (ASSI VENTO) $\rightarrow \vec{R}$
$\vec{N}$ e $\vec{A}$ (ASSI CORPO)

CONSIDERO UN PROFILO ALARE IN 2D, SEZIONATO E POSTO AD UN ANGOLO α. LE FORZE AGENTI SU UN PROFILO ALARE SONO APPLICATE NEL CENTRO DI PRESSIONE



$\tau \rightarrow$ TENSIONE TANGENZIALE ALLA PARETE O SFORZO DI TAGLIO
$P \rightarrow$ PRESSIONI AGENTI ALLA PARETE
$S_L, S_u \rightarrow$ SUPERFICIE UPPER E LOWER
$\hat{n} \rightarrow$ VERSORE NORMALE USCENTE DAL PROFILO

$\theta \rightarrow$ ANGOLO TRA LA TANG. LOCALE ALLA SUPERFICIE DEL PROFILO E L'ASSE X_{C_n} POSITIVITÀ SE PRESO IN SENSO ORARIO

$d\vec{N}_u = \left[-P_u\, dS_u \cos\theta_u - \tau_u\, dS_u \sin\theta_u\right]\hat{j}$
$d\vec{N}_L = \left[P_L\, dS_L \cos\theta_L - \tau_L\, dS_L \sin\theta_L\right]\hat{j}$
$d\vec{A}_u = \left[-P_u\, dS_u \sin\theta_u + \tau_u\, dS_u \cos\theta_u\right]\hat{i}$
$d\vec{A}_L = \left[P_L\, dS_L \sin\theta_L + \tau_L\, dS_L \cos\theta_L\right]\hat{i}$

ESPLICITO GLI ELEMENTI DI FORZA IN TERMINI DI P E τ

$d\vec{N}_{TOT} = d\vec{N}_u + d\vec{N}_L \qquad d\vec{A}_{TOT} = d\vec{A}_u + d\vec{A}_L$

$\bar{N} = \int_{LE}^{TE} dN_{TOT} = \int_L^T -P_u \cos\theta_u\, dS_u + \int_L^T P_L \cos\theta_L\, dS_L - \int_L^T \tau_u \sin\theta_u\, dS_u - \int_L^T \tau_L \sin\theta_L\, dS_L = \int_L^T (P_L(x) - P_u(x))dx - \int_L^T \tau_u \sin\theta_u\, dS_u - \int_L^T \tau_L \sin\theta_L\, dS_L$

$\Rightarrow$ VISTO CHE L'ORDINE DI GRANDEZZA DELLA PRESSIONE È SIMILE ALL'ORDINE DI GRANDEZZA DELLA PRESSIONE DINAMICA, HO CHE: $P = O(q_\infty)$ DOVE $q_\infty = \frac{1}{2}\rho u_\infty^2$ = PRESSIONE DINAMICA E $\tau = o(\varepsilon q_\infty)$ CHE VUOL DIRE CHE È TRASCURABILE E QUINDI HO: $O(q_\infty) >>> o(\varepsilon q_\infty)$ E VISTO CHE L'ORDINE DI GRANDEZZA DEL $\cos(\theta) = o(1)$ E $\sin(\theta) = o(\varepsilon)$

$\Rightarrow N = \int_L^T (P_L(x) - P_u(x))dx = O(F)$ PERCHÉ $\left(q_\infty S = \frac{N}{m^2}\cdot m^2\right)$ DATA DAL TERMINE DELLA PRESSIONE $\left[dS_L \cos\theta_L = dx \text{ E } dS_u \cos\theta_u = dx\right]$

$\bar{A} = \int_L^T dA_{TOT} = \int_L^T P_L \sin\theta_L\, dS_L - \int_L^T P_u \sin\theta_u\, dS_u + \int_L^T \tau_u \cos\theta_u\, dS_u + \int_L^T \tau_L \cos\theta_L\, dS_L = q_\infty \varepsilon + \varepsilon q_\infty$

NEL CALCOLO DELLA FORZA ASSIALE INTERVENGONO SIA LA PRESSIONE CHE LA FORZA DI TAGLIO;

Pag.3

P → RESISTENZA DI FORMA; τ → RESISTENZA DI ATTRITO; STESSI ORDINI DI GRANDEZZA

LA PORTANZA SI CALCOLA CON $|\vec{L}^0| = |\vec{N}| \cos\alpha - |\vec{A}| \operatorname{sen}\alpha$ E HA $L = O(F)$

LA RESISTENZA: $|\vec{D}| = |\vec{N}| \operatorname{sen}\alpha + |\vec{A}| \cos\alpha$ E HA $\bar{D} = O(\varepsilon F)$

LIFT EQUILIBRA $\frac{\text{WEIGHT}}{\text{APERTURA ALARE}}$; DRAG DEVE ESSERE EQUILIBRATA DALLA THRUST; THRUST $= (0{,}01 \div 0{,}1)\,\bar{W}$

NON VALIDO PER AEROPLANI A DECOLLO VERTICALE

MOMENTI

POSITIVI → SE PICCHIANTI

$$\bar{M}_{LE} = -\int_{LE}^{TE} \Big(\big(\underbrace{P_u \cos\theta_u + \tau_u \operatorname{sen}\theta_u}_{-d\bar{N}_u}\big) x - \big(\underbrace{P_u \operatorname{sen}\theta_u - \tau_u \cos\theta_u}_{-d\bar{A}_u}\big) y \Big) dS_u - \int_{LE}^{TE} \Big(\big(\underbrace{-P_L \cos\theta_L + \tau_L \operatorname{sen}\theta_L}_{-d\bar{N}_L}\big) x - \big(\underbrace{P_L \operatorname{sen}\theta_L + \tau_L \cos\theta_L}_{-d\bar{A}_L}\big) y \Big) dS_L$$

PRENDENDO COME RIFERIMENTO LA PRESSIONE DINAMICA $q_\infty = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2$, SUPERFICIE UNITARIA E MOMENTO ⇒

⇒ COEFFICIENTI

$C_L = \dfrac{\bar{L}}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 S}$	$C_D = \dfrac{\bar{D}}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 S}$	$C_M = \dfrac{\bar{M}}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 S C}$	$C_P(s) = \dfrac{P(s) - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2}$	$C_\tau(s) = \dfrac{\tau(s)}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2}$
COEFF. DI PORTANZA	COEFF. DI RESISTENZA	COEFF. DI MOMENTO	COEFF. PRESSIONE LOCALE	COEFF. ATTRITO LOCALE

CENTRO DI PRESSIONE $= X_{CP}$ → PUNTO IN CUI $C_M = 0$

CENTRO AERODINAMICO $= X_{CA}$ → PUNTO IN CUI $C_M = \text{COST}$ (NON VARIA AL VARIARE DI α O C_L)

SE PROFILI SOTTILI E α PICCOLI ⇒ $X_{CA} = \frac{C}{4}$

SE PROFILO SIMMETRICO E α PICCOLI ⇒ $X_{CA} = X_{CP} = \frac{C}{4}$

CALCOLANDO I MOMENTI RISPETTO A LE:

$M_{LE} = X_{CP} L$ e $M_{LE} = M_{C/4} + L\frac{C}{4}$ ⇒ $X_{CP} = \frac{M_{C/4}}{L} + \frac{C}{4}$

PER $\alpha \ll 1$ ⇒ $C_{M_{C/4}} \approx 0$ ⇒ $\frac{X_{CP}}{C} \approx \frac{1}{4}$

TEO DI BUCKINGHAM (π)

LUNGHEZZA, MASSA E TEMPO → AGGIUNGO TEMPERATURA SE PRESENTI SCAMBI DI CALORE

SI USA QUESTO TEO PER ESPRIMERE RISULTATI IN TERMINI ADIMENSIONALI, AVENDO I SEGUENTI VANTAGGI

- ESTENDERE VALIDITÀ A CLASSI DI PROBLEMI (ANZICHÉ DI UNO SINGOLO);
- POSSIBILITÀ DI TROVARE SOLUZIONI ANALITICHE DI TIPO ASINTOTICO;
- POSSIBILITÀ DI CONDURRE ESPERIMENTI SU MODELLI IN SCALA RIDOTTA;
- ELIMINAZIONE UNITÀ DI MISURA E MAGGIOR COMPRENSIONE.

SE IN UN FENOMENO INTERVENGONO m GRANDEZZE, L'EQ. CHE LE GOVERNA PUÒ ESSERE SOSTITUITA DA UN'ALTRA EQ. FRA GLI $(m-3)$ O 4 PRODOTTI π ADIMENSIONALI CHE CON ESSE SI POSSONO FORMARE (SUPPONENDO CHE I 3 O 4 PRODOTTI ADIMENSIONALI DIANO UNA BASE).

ESEMPIO

SI CONSIDERI UN PROFILO AERODINAMICO E SIANO DATE

$C_L = C_N \cos\alpha - C_A \operatorname{sen}\alpha$

$C_D = C_N \operatorname{sen}\alpha + C_A \cos\alpha$

$C_R = \sqrt{C_L^2 + C_D^2} = \sqrt{C_N^2 + C_A^2}$

QUESITO: C_L, C_D, C_R → DA QUANTI PARAMETRI DIPENDONO?

→ SAPPIAMO CHE LA RISULTANTE $\vec{R}$ E LE SUE COMPONENTI $\vec{L}^0$ E $\vec{D}^0$ DIPENDERANNO DA:

- u_∞ → VELOCITÀ DI AVANZAMENTO
- σ_∞ → VELOCITÀ DEL SUONO
- ρ_∞ → DENSITÀ
- μ → COEFF. DI VISCOSITÀ

C = CORDA DEL PROFILO

S = SPESSORE

Δh = INNALZAMENTO BORDO D'ATTACCO

$R = R(u_\infty, \sigma_\infty, \rho_\infty, \mu, C, S, \Delta h)$ → FORMA ESPLICITA | FORMA IMPLICITA → $F_a(R, u_\infty, \rho_\infty, \sigma_\infty, \mu, \Delta h, S, c) = 0$

$m = 8$ INDIPENDENTI $= 3$ ⇒ $m - 3 = 5$ ⇒ $F_a(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5) = 0$

m = massa, l = lunghezza, t = tempo

$R = [m\,l\,t^{-2}]$, $u_\infty = [l\,t^{-1}]$, $\sigma_\infty = [l\,t^{-1}]$ | $\rho_\infty = [m\,l^{-3}]$, $C = [l]$, $S = [l]$ | $\Delta h = [l]$, $\mu = [m\,l^{-1}\,t^{-1}]$

SI RICAVANO LE QUANTITÀ FONDAMENTALI DALLE VARIABILI DIMENSIONALI CHE COMPAIONO NELL'EQ. DI GOVERNO

$l = [C]$ $t = [C\,u_\infty^{-1}]$ IL TUTTO CON ARBITRARIETÀ

$m = [\rho_\infty C^3]$

Pag.4

$\Pi_1 = \frac{R}{\rho_\infty c^3 c\, u_\infty^2 c^{-2}} = \frac{R}{\rho_\infty c^2 u_\infty^2} = C_R$ → COEFF. DI FORZA

$\Pi_3 = \frac{\mu}{[m\,\ell^{-1} t^{-1}]} = \frac{\mu}{c\, \rho_\infty u_\infty} = Re$ → Reynolds Number

$\Pi_2 = \frac{a_\infty}{[\ell t^{-1}]} = \frac{a_\infty}{u_\infty} = Ma^{-1}$ → Mach Number

$\Pi_4 = \frac{s}{[\ell]} = \frac{s}{c} = s'$ → SPESSORE RELATIVO

$\Pi_5 = \frac{\Delta h}{[\ell]} = \frac{\Delta h}{c} = \sin\alpha \cong \alpha$ → ANGOLO INCIDENZA

$f_R(C_R, \alpha, Ma, Re, s') = 0$

NACA → METODO CLASSIFICAZIONE PROFILI ALARI

SIMMETRICO SE 00 NELLE PRIME 2 CIFRE

↳ 4 DIGITS → 1° CIFRA: FRECCIA
2° CIFRA: POSIZIONE DEL MASSIMO DELLA FRECCIA RISPETTO ALLA CORDA
3° E 4° CIFRA: SPESSORE MASSIMO DEL PROFILO RISPETTO ALLA CORDA

ES. → NACA 2412 ⇒ $0{,}02 \cdot c$; $0{,}4 \cdot c$; $0{,}12 \cdot c$

RICHIAMI DI CALCOLO VETTORIALE

NOTAZIONE NEWTONIANA → $x_i y_i = \sum_i x_i y_i$

PRODOTTO VETTORIALE → $\bar{A} \times \bar{B} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 \\ \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \bar{b}_3 \end{vmatrix}$ → RISULTATO VETTORE

PRODOTTO DIADICO → $\bar{R} = \bar{u} \otimes \bar{v}$ $\quad R_{ij} = u_i v_j$ → RISULTATO MATRICE

OPERATORE NABLA → $\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{e}_i$

GRADIENTE → AUMENTA GRADO
GRADIENTE DI UNO SCALARE → $\bar{\nabla} P = \frac{\partial P}{\partial x_i} \hat{e}_i = \text{grad}\, P$ con $i = 1,2,3$
GRADIENTE DI UN VETTORE → $\bar{\nabla} \bar{u} = \bar{\nabla} \otimes \bar{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_K}$ con $K = 1,2,3$, $i = 1,2,3$

DIVERGENZA → DIMINUISCE GRADO
DIVERGENZA DI UN VETTORE → $\bar{\nabla} \cdot \bar{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \text{div}\, \bar{u}$
DIVERGENZA DI UN TENSORE DEL 2° ORDINE → $\bar{\nabla} \cdot \bar{\bar{T}} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} = \frac{\partial T_{1j}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{2j}}{\partial x_2} + \dots$ $\quad J = 1,2,3$

ROTORE DI UN CAMPO VETTORIALE → $\bar{\nabla} \times \bar{u} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = \text{rot}\, \bar{u}$ → SE $\bar{u}$ = VELOCITÀ ⇒ $\text{rot}\, \bar{u} = \bar{\omega}$ = VORTICITÀ

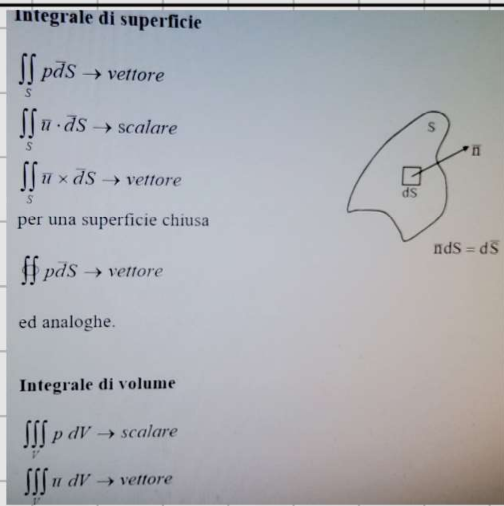
LAPLACIANO → ∇^2
→ DI UNO SCALARE → $\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} P = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial P}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}$ $\quad i = 1,2,3$
→ DI UN VETTORE → $\nabla^2 \bar{u} = \frac{\partial^2 u_K}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_K}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_K}{\partial x_3^2}$ $\quad K = 1,2,3$

RICHIAMI DI ANALISI

TEO DI STOKES → $\oint_C \bar{u}\, d\bar{\ell} = \iint_S (\bar{\nabla} \times \bar{u}) \cdot d\bar{S} = \iint_S (\bar{\nabla} \times \bar{u}) \cdot \bar{n}\, dS$

TEO DI GREEN GAUSS (DIVERGENZA) → $\oiint_S \bar{u} \cdot d\bar{S} = \iiint_V (\bar{\nabla} \cdot \bar{u})\, dV$

TEO DEL GRADIENTE → $\oiint_S P \bar{n}\, dS = \iiint_V \bar{\nabla} P\, dV$



Integrale di superficie

$\iint_S p\, d\bar{S} \rightarrow$ vettore

$\iint_S \bar{u} \cdot d\bar{S} \rightarrow$ scalare

$\iint_S \bar{u} \times d\bar{S} \rightarrow$ vettore

per una superficie chiusa

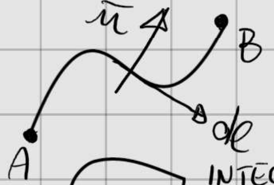
$\oiint p\, d\bar{S} \rightarrow$ vettore

ed analoghe.

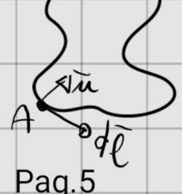
Integrale di volume

$\iiint_V p\, dV \rightarrow$ scalare

$\iiint_V \bar{u}\, dV \rightarrow$ vettore



INTEGRALE DI LINEA APERTA
$\int_A^B \bar{u} \cdot d\bar{\ell}$



INTEGRALE DI LINEA CHIUSA
$\oint_C \bar{u} \cdot d\bar{\ell}$

Pag.5

SOLINOIDALITÀ E IRROTAZIONALITÀ

CONDIZIONI DI SOLENOIDALITÀ → INDICA CHE OVUNQUE NEL CAMPO LE VELOCITÀ D'ESPANSIONE $\Delta = \bar{\nabla} \cdot \bar{u} = 0$ → SE IL CAMPO È SOLENOIDALE, SI PUÒ INTRODURRE UNA FUNZIONE VETTORIALE DI CAMPO $\bar{\Psi}(\bar{x},t)$

$\bar{u} = \bar{\nabla} \times \bar{\Psi}$ ← DEFINITO DA — $\bar{\Psi}$, POTENZIALE VETTORE

$\bar{\nabla} \cdot (\bar{\nabla} \times \bar{\Psi}) \doteq 0$ ⇒ CAMPO DI $\bar{u}$ COSÌ DEFINITO SODDISFA LE CONDIZIONI DI SOLENOIDALITÀ

CASO 2D → POTENZIALE VETTORE HA UNA COMPONENTE → FUNZIONE DI CORRENTE ψ, DEFINITA IN TERMINI DELLE COMPONENTI DI VELOCITÀ $\bar{u} = (u, v)$; RISPETTA LE SEGUENTI PROPRIETÀ

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v; \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u;$$

IN UN CAMPO 2D, LE LINEE DI CORRENTE SONO TANGENTI PUNTO PER PUNTO AL VETTORE VELOCITÀ ⇒ L'EQ. DI UNA LINEA DI CORRENTE PUÒ ESSERE DETERMINATA DALLA CONDIZIONE DI TANGENZA

$$\boxed{2.2} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\psi = cost} = \frac{v}{u}$$

LA FUNZIONE $\psi(x,y)$ SODDISFA LA (CONDIZIONE DI TANGENZA) $\boxed{2.2}$

CONDIZIONE DI IRROTAZIONALITÀ → RICHIEDE CHE NEL CAMPO: VORTICITÀ $= \bar{w} = \bar{\nabla} \times \bar{u} = 0$ ⇒ SE CAMPO IRROTAZIONALE → INTRODUCO → FUNZIONE SCALARE DI CAMPO → POTENZIALE SCALARE $\varphi(\bar{x},t)$

→ $\bar{u} = \bar{\nabla}\varphi \qquad \bar{\nabla} \times \bar{\nabla}\varphi \doteq 0$ ⇒ CAMPO COSÌ DEFINITO SODDISFA IDENTICAMENTE LE CONDIZIONI DI IRROTAZIONALITÀ

LINEA DI GRADIENTE → QUELLA CHE HA IL grad tang IN OGNI PUNTO (LINEA DI MASSIMA VARIAZIONE → MAX PENDENZA)

LINEE ISOBARE → LINEE CHE UNISCONO PUNTI DI EGUAL QUOTA

LINEE ISOPSIE → LINEE DI EGUAL QUOTA (ORTOGONALI LOCALMENTE A LINEE DI LIVELLO)

LINEE DI CORRENTE → QUELLE CHE HANNO COME TANGENTE IN OGNI PUNTO IL VETTORE VELOCITÀ $\bar{u}$; ATTRAVERSO LE LINEE DI CORRENTE NON SI HA PASSAGGIO DI FLUIDO

TRAIETTORIE → PERCORSO SEGUITO DALLE PARTICELLE AL VARIARE DI t; LA DIREZIONE CHE ASSUME LA TRAIETTORIA È LEGATA ALLA DIREZIONE DEL VETTORE VELOCITÀ ISTANTE PER ISTANTE

LINEE DI FUMO → LINEE CHE IN UN DATO ISTANTE $t = t_0$ OCCUPANO LE PARTICELLE EMESSE NEI TEMPI PRECEDENTI DALLO STESSO PUNTO

QUESTE TRE LINEE COINCIDONO SOLO IN CONDIZIONI STAZIONARIE

DESCRIZIONE EULERIANA E LAGRANGIANA DEL MOTO

VOGLIAMO STUDIARE L'EVOLUZIONE DI UNA PROPRIETÀ SCALARE O VETTORIALE DI UNA PARTICELLA DI FLUIDO → ES. $T(x_i, t)$

PUNTI DI VISTA:

1.- EULERIANA → SI PONE L'OSSERVATORE NEL PUNTO FISSO P DELLO SPAZIO $P(x_i^0)$ E L'EVOLUZIONE È DATA DA $T(x_i^0, t)$

2.- LAGRANGIANA → OSSERVATORE SULLA PARTICELLA FLUIDA E L'EVOLUZIONE È DATA DA $T(x_i(t))$

L'OTTICA EULERIANA È LA PIÙ COMODA IN QUANTO CONSENTE DI MANTENERE I SENSORI FISSI

DERIVATA SOSTANZIALE

$dT = \frac{\partial T}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial T}{\partial t} dt$ → SE CONSIDERIAMO OTTICA EULERIANA (ALL'INTERNO DI UN VOLUME DI FLUIDO)

DEFINENDO $dx_i = u_i dt$ ⇒ $\frac{dT}{dt} = \underbrace{\frac{\partial T}{\partial x_i} u_i}_{\text{TERMINE CONVETTIVO}} + \underbrace{\frac{\partial T}{\partial t}}_{\text{DERIVATA LOCALE RISPETTO AL TEMPO}} = \frac{DT}{Dt}$ = DERIVATA SOSTANZIALE

SE $\frac{\partial}{\partial x_i} = 0$ ⇒ MOTO UNIFORME

SE $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = 0$ ⇒ MOTO STAZIONARIO O PERMANENTE

OTTICA LAGRANGIANA → SISTEMA → INSIEME DI MATERIA COMPOSTO SEMPRE DALLE STESSE PARTICELLE, IL QUALE SI PUÒ MUOVERE, INTERAGIRE CON L'AMBIENTE ESTERNO E VARIARE FORMA

OTTICA EULERIANA → VOLUME DI CONTROLLO → VOLUME DELLO SPAZIO (ENTITÀ GEOMETRICA INDIPENDENTE DALLE MASSE) ATTRAVERSO IL QUALE PUÒ SCORRERE IL FLUIDO

TEO TRASPORTO DI REYNOLDS → DA SISTEMA A VOL. DI CONTROLLO

LE LEGGI DI CONSERVAZIONE DELLA FLUIDODINAMICA SI SCRIVONO IN TERMINI DI SISTEMI, PER LE APPLICAZIONI INGEGNERISTICHE È NECESSARIO SCRIVERLE IN TERMINI DI VOLUMI DI CONTROLLO

PROPRIETÀ DIPENDENTI DALLA MASSA → ESTENSIVE → B

PROPRIETÀ INDIPENDENTI DALLA MASSA → INTENSIVE → b → (P, T...)

ES. $B = m\frac{u^2}{2} \quad b = \frac{u^2}{2}$ (ENERGIA CINETICA)

DEF. MATEMATICA:

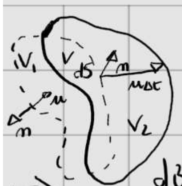
$B_{SISTEMA} = \iiint_{V_{SISTEMA}} b \rho \, dV$ → SI VUOLE DIMOSTRARE → $\frac{DB_{SISTEMA}}{Dt} = \iiint_{V_0} \frac{\partial(\rho b)}{\partial t} dV + \iint_{S_0} \rho b \bar{n} \cdot \bar{u} \, dS = \iiint_{V_0} \left(\frac{\partial(\rho b)}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\rho b \bar{u})\right) dV$

V_0 → VOLUME DI CONTROLLO

DIM. PER DEFINIZIONE $\frac{DB_s}{Dt} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{B_s(t + \delta t) - B_s}{\delta t}$

CONSIDERO UN VOLUME DI CONTROLLO V_0 FISSO CHE AL TEMPO t VIENE PRESO COINCIDENTE CON IL VOLUME MATERIALE $V(t)$.

DOPO UN Δt AVREMO CHE $V(t)$ SI SARÀ MOSSO:



$$\frac{dB}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho b\, dV = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\int_{V(t+\Delta t)} \rho b\, dV - \int_{V(t)} \rho b\, dV}{\Delta t}$$

$V(t) = V_1 + V = V_0$, $V(t+\Delta t) = V_2 + V$ → DEFINITE DALLA FIGURA, DA CUI ⇒

$$\Rightarrow \frac{dB}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\int_V (\rho b)_{t+\Delta t} dV + \int_{V_2} (\rho b)_{t+\Delta t} dV - \int_V (\rho b)_t\, dV - \int_{V_1} (\rho b)_t\, dV}{\Delta t}$$

DOVE TUTTE LE FUNZIONI INTEGRANDE SONO CALCOLATE AL TEMPO RELATIVO AL VOLUME DI APPARTENENZA

VISTO CHE 1° E 3° ELEMENTO → $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\int_V (\rho b)_{t+\Delta t} dV - \int_V (\rho b)_t\, dV}{\Delta t} = \int_{V_0} \frac{\partial \rho b}{\partial t} dV$ CON $V(t) \to V_0$ QUANDO $t \to 0$

PER GLI ALTRI 2 → DETTO dS (ELEMENTO SUPERFICIE DI V_0), $\bar{n}$ (LA SUA NORMALE) ED $\bar{u}$ (VELOCITÀ DI TRASLAZIONE)

$dV = \bar{u}\cdot\bar{n}\,\Delta t\, dS$ PER V_2

$dV = -\bar{u}\cdot\bar{n}\,\Delta t\, dS$ PER V_1

$$\Rightarrow \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\int_{V_2} (\rho b)_{t+\Delta t} dV - \int_{V_1} (\rho b)_t\, dV}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\int_{S_2} (\rho b)_{t+\Delta t}\, \bar{u}\cdot\bar{n}\, dS + \int_{S_1} (\rho b)_t\, \bar{u}\cdot\bar{n}\, dS\right) = \int_{S_0} \rho b\, \bar{u}\cdot\bar{n}\, dS$$

S_i = PARTE DI SUPERFICIE DI V IN COMUNE CON IL VOLUME V_i

SI È UTILIZZATO CHE PER $t \to 0$, $S_1 + S_2 \to S_0$

$$\Rightarrow \frac{dB}{dt} = \int_{V_0} \frac{\partial \rho b}{\partial t} dV + \int_{S_0} \rho b\, \bar{u}\cdot\bar{n}\, dS$$

CI DICE CHE LE VARIAZIONI DI B SONO:
1. INTERNA AL SISTEMA E DOVUTA A VARIAZIONI DI b ALL'INTERNO DEL VOLUME V
2. SCAMBI DEL SISTEMA ATTRAVERSO LA SUA SUPERFICIE, OSSIA IL FLUSSO DI b ATTRAVERSO S

SE $\rho b \bar{u}$ È CONTINUA E DIFFERENZIABILE ⇒ $\frac{dB}{dt} = \int_{V_0} \frac{\partial \rho b}{\partial t} dV + \int_{V_0} \bar{\nabla}\cdot(\rho b \bar{u})\, dV$
(CON TEO DELLA DIVERGENZA)

SE V_0 È FISSO ⇒ $\bar{u}$ VELOCITÀ FLUIDO NEL PUNTO CONSIDERATO → NULLA VELOCITÀ DI S_0 E dS

SE V_0 È IN MOVIMENTO ⇒ $\bar{u}$ VELOCITÀ RELATIVA TRA FLUIDO E SUPERFICIE S_0

PER QUALSIASI EQ. DI CONSERVAZIONE DELLA GENERICA PROPRIETÀ FISICA B_S, VALE $\frac{dB_S}{dt} = 0$ ⇒

$$\Rightarrow \iiint_{V_0} \left(\frac{\partial \rho b}{\partial t} + \bar{\nabla}\cdot(\rho b \bar{u})\right) dV = 0$$ ⇒ DATA L'ARBITRARIETÀ DEL VOL. DI CONTROLLO ⇒

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho b}{\partial t} + \bar{\nabla}\cdot(\rho b \bar{u}) = 0$$ ⇒ SE VOL. DI CONTROLLO NON VARIA NEL TEMPO ⇒

$$\Rightarrow \frac{DB_S}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{V_0} \rho b\, dV + \iint_{S_0} \rho b\, \bar{u}\cdot\bar{n}\, dS$$ → DERIVATA SOSTANZIALE

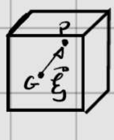
FLUSSO POSITIVO PER FLUIDO USCENTE ($\bar{n}$ e $\bar{u}$ CONCORDI)
FLUSSO NEGATIVO PER FLUIDO ENTRANTE ($\bar{n}$ e $\bar{u}$ DISCORDI)

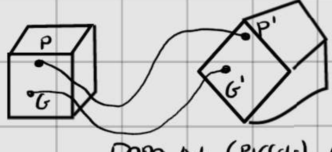
ANALISI MOTO DI UNA PARTICELLA

CONSIDERO UNA PARTICELLA DI FLUIDO CON BARICENTRO IN $G(0,0,0)$ ALL'ISTANTE $t = t_0$

CONSIDERO UN ELEMENTO DI FLUIDO GENERICO A CHE SI TROVA NEL PUNTO P DI COORDINATE ξ_i, CIOÈ DISTANTE $\sqrt{\xi_x^2}$ DA G LOKSI

A $t = t_0$ SI HA
$G = (0,0,0)$
$P(\xi_i)$





DOPO Δt (PICCOLO), LA PARTICELLA SI È SPOSTATA E SI È DEFORMATA

$\overline{PP'} = \bar{u}\Delta t$

IN GENERALE LA VELOCITÀ DI UN GENERICO ELEMENTO DI FLUIDO A SARÀ: $\bar{u} \neq \bar{u}_G \Rightarrow \bar{u}(x_k) \neq \bar{u}_G(x_{Gk})$

$\bar{u}(x_k) = \bar{u}_G(x_{Gk} + \xi_k)$

SI PUÒ ESPRIMERE CON SVILUPPO IN SERIE DI TAYLOR TRONCATA AL PRIMO ORDINE INTORNO A G

$\bar{u} = \bar{u}_G + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_k}\xi_k$ → IN COMPONENTI CARTESIANE $u_i = u_{Gi} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\xi_k$

↳ MATRICE DI VELOCITÀ DI DEFORMAZIONE (TENSORE DEL SECONDO ORDINE) → SCOMPOSTA IN → $\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)}_{\text{MATRICE EMISIMMETRICA } \to\, \Omega_{ik}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)}_{\text{MATRICE SIMMETRICA } \to\, E_{ik}}$

Pag.7

$$[u_i] = [u_{G_i}] + \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}$$

PRODOTTO SCALARE

$$u_i = u_{G_i} + u_{R_i} + u_{d_i} = u_{G_i} + \Omega_{ik}\xi_k + \varepsilon_{ik}\xi_k$$

u_{G_i} = VELOCITÀ DI TRASLAZIONE DEL BARICENTRO

u_{R_i} = VELOCITÀ DI ROTAZIONE INTORNO AL BARICENTRO $= \Omega_{ik}\xi_k = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial x_3}{\partial u_2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}$

$\boxed{\text{RICORDANDO CHE } \bar{\nabla} \times \bar{u} = \bar{\omega}}$

$$\Omega_{ik}\xi_k = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{u}_R = \frac{1}{2}\left((\omega_2\xi_3 - \omega_3\xi_2)\hat{e}_1 + (\omega_3\xi_1 - \omega_1\xi_3)\hat{e}_2 + (\omega_1\xi_2 - \omega_2\xi_1)\hat{e}_3\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{u}_R = \frac{1}{2}\bar{\omega} \times \bar{\xi} = \frac{1}{2}\bar{\nabla} \times \bar{u} \times \bar{\xi} \quad \text{PERCHÉ} \quad \frac{1}{2}\bar{\omega} \times \bar{\xi} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{bmatrix}$$

VELOCITÀ ANGOLARE MEDIA DELLE PARTICELLE $= \underbrace{\bar{\zeta}}_{\text{ZETA}} = \frac{1}{2}\bar{\omega} = \frac{1}{2}\bar{\nabla} \times \bar{u}$

QUINDI $\bar{u} = \bar{u}_R + \bar{u}_G + \bar{u}_d$ SI PUÒ SCRIVERE COME

$$\bar{u} = \bar{u}_G + \bar{\zeta} \times \bar{\xi} + \bar{\bar{\varepsilon}} \cdot \bar{\xi}$$

LA PARTE EMISIMMETRICA Ω_{ik} DÀ L'EFFETTO DELLE ROTAZIONI DI PARTICELLE

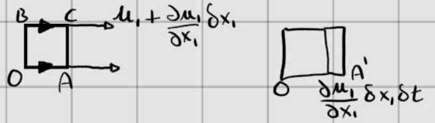
LA PARTE SIMMETRICA ε_{ik} TIENE CONTO DELL'EFFETTO DELLA DEFORMAZIONE

$u_{d_i} = \varepsilon_{ik}\xi_k$ = VELOCITÀ DI DEFORMAZIONE = SOVRAPPOSIZIONE DI UNA DILATAZIONE PURA E DI UNO SCORRIMENTO

VEDIAMO L'EFFETTO DELLA DEFORMAZIONE = DILATAZIONE PURA + SCORRIMENTO

DILATAZIONE PURA

Hp → $\varepsilon_{11} \neq 0$ e ε_{ij} PER $i \neq 1$ e $j \neq 1$ SIANO NULLI



LA DIFFERENZA DI VELOCITÀ PRODUCE NELL'INTERVALLO Δt UNA DEFORMAZIONE (ALLUNGAMENTO) DELL'ELEMENTO PARI A $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\delta x \Delta t$

LA VARIAZIONE DEL VOLUME $\delta V = \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3$ È:

$$\Delta V = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 \Delta t$$

LA VARIAZIONE NEL TEMPO PER UNITÀ DI VOLUME DEL VOLUME δV (VARIAZIONE RELATIVA DI VOLUME) PER EFFETTO DEL GRADIENTE DI VELOCITÀ $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$ È:

$$\frac{1}{\delta V}\frac{\Delta V}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\Delta t\right)}{\Delta t} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

ESTENDO LE Hp A x_2 E x_3, TENENDO CONTO CHE ORA $\varepsilon_{22} \neq 0$ E $\varepsilon_{33} \neq 0$

QUINDI LA VARIAZIONE RELATIVA DI VOLUME PER UNITÀ DI TEMPO (VELOCITÀ DI DILATAZIONE Δ) È: (TRASCURANDO I TERMINI DI ORDINE SUPERIORE)

$$\Delta \frac{1}{\delta V}\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \bar{\nabla} \cdot \bar{u}$$

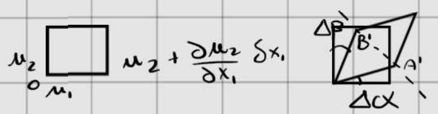
⇒ LA DIVERGENZA DI $\bar{u}$ È LA VELOCITÀ DI DILATAZIONE VOLUMETRICA

SE $\bar{\nabla} \cdot \bar{u} = 0$ ⇒ FLUSSO INCOMPRIMIBILE, CIOÈ LA PARTICELLA DI FLUIDO NON CAMBIA DI VOLUME NEL MOTO

→ CORRISPONDE MATEMATICAMENTE ALLA CONDIZIONE DI SOLENOIDALITÀ DEL CAMPO DI VELOCITÀ

SCORRIMENTO

Hp $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} \neq 0$ E LE ALTRE COMPONENTI SIANO NULLE



L'ANGOLO $\Delta\gamma$:

$$\Delta\gamma = \Delta\alpha - \Delta\beta = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\Delta t + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\Delta t$$

ESSENDO PER CONVENZIONE POSITIVO $\Delta\gamma$, SE L'ANGOLO SI RIDUCE. LA DEFORMAZIONE PER TAGLIO, SARÀ:

$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\gamma}{\Delta t}$ VELOCITÀ DI DEFORMAZIONE DI TAGLIO O DI SCORRIMENTO ESSENDO:

$$\Delta\alpha \approx tg(\Delta\alpha) = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\delta x_1}{\delta x_1}\Delta t$$

$$\Delta\beta \approx tg(\Delta\beta) = -\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\delta x_2}{\delta x_2}\Delta t$$

Pag.8

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \gamma}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)\Delta t = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 2\varepsilon_{12}$$

É EVIDENTE CHE I TERMINI NELLA DIAGONALE SONO I RESPONSABILI DELLE DEFORMAZIONI ASSIALI (DILATAZIONE VOLUMETRICA DEL SISTEMA) MENTRE QUELLI FUORI DIAGONALE DELLE DEFORMAZIONI DI TAGLIO

ε_{ik} SI SCOMPONE IN 9 MATRICI DEL TIPO: $\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \dots$

- PUÒ DECOMPOSTA IN $D_{ik} + W_{ik}$ → ELEMENTI AL DI FUORI DELLA DIAGONALE / → ELEMENTI SOLO SULLA DIAGONALE
- IN 3+3 MATRICI CORRISPONDENTI OGNUNA A UNA DEFORMAZIONE ELEMENTARE
- É SIMMETRICA ED ESISTONO 3 ASSI PRINCIPALI RISPETTO AI QUALI PUÒ ESSERE DIAGONALIZZATA

$$\begin{bmatrix} \varepsilon'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon'_{33} \end{bmatrix}$$

QUADRICA DELLA DEFORMAZIONE → MI PONGO NEL RIFERIMENTO PRINCIPALE, PER DEFORMAZIONI PURE $\vec{\omega}_d = 0$, CIOÈ IL CAMPO DI DEFORMAZIONE PURA È IRROTAZIONALE ED AMMETTE UN POTENZIALE SCALARE φ.

INFATTI: $\varepsilon_{ik} = 0 \quad i \neq k$
$\varepsilon_{ii} \neq 0 = b_i$
$\varepsilon_{ik} = b_k \delta_{ki}$

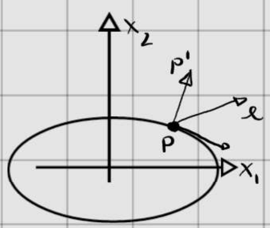
$\vec{u} = \vec{\nabla}\varphi$ OVVERO PER COMPONENTI $u_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ CON IL POTENZIALE $\varphi = \frac{1}{2} b_k x_k^2 = \frac{1}{2}(b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + b_3 x_3^2)$

CHE HA LA FORMA DI UNA QUADRICA, POICHÉ $u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = b_1 x_1$; $u_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = b_2 x_2$; $u_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = b_3 x_3$

SI HA CHE $\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_1 x_1}{\partial x_2} + \frac{\partial b_2 x_2}{\partial x_1}\right) = 0$ ED ANCHE $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$

AL CONTRARIO: $\varepsilon_{11} = \frac{2}{2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} = b_1$
$\varepsilon_{22} = b_2$
$\varepsilon_{33} = b_3$

PONENDO $\varphi = \frac{1}{2} b_k x_k^2 = \varphi_p$ (VALORE NEL PUNTO P) SI OTTIENE L'EQUAZIONE DI UNA QUADRICA A CENTRO (ELISSOIDE O IPERBOLOIDE) PASSANTE PER P



PER VALUTARE LO SPOSTAMENTO $\overline{PP'}$ SECONDO $\vec{\ell} \Rightarrow (PP')_\ell = \overline{PP'} \cdot \hat{\ell} = \vec{u} \cdot \hat{\ell}\,\Delta t$

$$u_\ell = u_k \cos(x_k \theta_\ell) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial \ell} = \frac{\partial \varphi}{\partial \ell}$$

Se $\vec{\ell}$ è tangente alla superficie $\frac{\partial \varphi}{\partial \ell} = 0$

ESSENDO $\varphi = \varphi_p = \text{cost}$

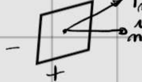
LO SPOSTAMENTO VETTORIALE DEL PUNTO P È SEMPRE NORMALE ALLA GIACITURA LOCALE DELLA QUADRICA ED IL MODULO DELLA VELOCITÀ È CALCOLABILE COME $|\vec{u}|^2 = u_i^2 = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)^2$

TENSORE DELLE TENSIONI

FORZE AGENTI SU UN CORPO FLUIDO
- FORZE DI CORPO → SONO IN GRADO DI PENETRARE TUTTE LE PARTI DEL CORPO FLUIDO E DI AGIRE SU DI ESSE (FORZE DI GRAVITÀ, FORZE DI NATURA ELETTROMAGNETICA, FORZE APPARENTI)
- FORZE DI CONTATTO → SI CONSIDERI UN CORPO FLUIDO DI VOLUME V, IN EQUILIBRIO SOTTO L'AZIONE DI UNA DISTRIBUZIONE DI FORZE DI CORPO. SI DIVIDA IL CORPO FLUIDO IN DUE PORZIONI, LIMITATE DA UNA SUPERFICIE A. PER AVERE UN'EQUILIBRIO È NECESSARIO ESERCITARE SU DI ESSE, ATTRAVERSO A, UN SISTEMA DI FORZE (COSTITUITO DA DUE FORZE F UGUALI IN MODULO, DIREZIONE E VERSO OPPOSTO) SI IPOTIZZA UNA PARTIZIONE DELLA SUPERFICIE DI SEPARAZIONE IN AREE ELEMENTARI dA SULLE QUALI AGISCONO FORZE DI CONTATTO ELEMENTARI dF

$$\frac{dF}{dA} = \underbrace{\tau}_{\text{SFORZO} \to [N \cdot m^{-2}]}$$

SI VUOLE DIMOSTRARE CHE GLI SFORZI INTERNI AD UN FLUIDO, CHE CARATTERIZZANO TOTALMENTE LO STATO TENSIONALE IN UN PUNTO, SONO 9. QUESTI SONO RACCOLTI IN UNA MATRICE 3X3 → $\overline{\overline{T}}$ = TENSORE DELLE TENSIONI



SUPERFICIE δS, INDIVIDUATA DALLA NORMALE m. SU QUESTA SARÀ APPLICATA UNA FORZA δF_m

$\overline{T}_m = \frac{\delta \overline{F}_m}{\delta S}$

PER FLUIDI FERMI → $\overline{T}_m = -p\overline{m}$ CON $\overline{m}$ CHE CARATTERIZZA LE GIACITURE DELLA S

PER FLUIDI IN MOTO → $\overline{T}_m$ RELATIVA ALLA GIACITURA $\hat{m}$ È DATA DALLA COMBINAZIONE DEGLI SFORZI $\overline{T}_1, \overline{T}_2, \overline{T}_3$ RELATIVI ALLE 3 DIREZIONI PRINCIPALI DELLA TERNA DI RIFERIMENTO PRESCELTA

$\overline{T}_m = T_{mk}\hat{e}_k \qquad$ ES. → $\overline{T}_1 = T_{11}\hat{e}_1 + T_{12}\hat{e}_2 + T_{13}\hat{e}_3$

GENERALIZZAZIONE DI QUESTI CONCETTI

PRENDO TETRAEDRO DI FLUIDO, IN EQUILIBRIO SOTTO L'EFFETTO DELLE FORZE DI VOLUME E SUPERFICIE

RISULTANTE FORZE DI SUPERFICIE

$\overline{F}_S = \overline{T}S - \overline{T}_i S_i$ ✱
- → SOMMATORIA
- → DOVUTO AL VERSO DEL VERSORE

Pag.9

PER LA LEGGE DI CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO (I° PRINCIPIO DELLA DINAMICA)

$\overline{F}_{tot} = m\overline{a} \Rightarrow \overline{F}_s + m\overline{g} = m\overline{a}$ DOVE $m = \rho \frac{h}{3} S$ h = ALTEZZA DEL TETRAEDRO

$* \rightarrow \overline{T} S - \overline{T}_i S_i = \rho \frac{h}{3}(\overline{a} - \overline{g})$ → DIVIDENDO PER S E PASSANDO AL LIMITE PER $h \to 0$, ⇒

$\Rightarrow \overline{T} - \sum \overline{T}_i \frac{S_i}{S} = 0$ MA $\frac{S_i}{S} = \cos(\hat{m}\, x_i) = \hat{m} \cdot \hat{e}_i = C_{mi}$ → COSENI DIRETTORI DI $\hat{m}$ SU $\hat{e}_1$

SI OTTIENE $\overline{T} = \sum C_{mi} \overline{T}_i = T_{ik} \hat{e}_i \hat{e}_k \cdot \hat{m}$ (2.28) DOVE $\overline{T}$ = SFORZI RELATIVI ALLA GENERICA FACCIA DI NORMALE $\hat{m}$

$\overline{T}_i$ = SFORZO RELATIVO ALLA $\hat{e}_i$, CIOÈ ALLA FACCIA NORMALE $\hat{m}_i$

SE CONSIDERIAMO LA FACCIA DI NORMALE $\hat{m}_1$, LO SFORZO $\overline{T}_1$ PUÒ ESSERE SCOMPOSTO IN 3 COMPONENTI PER PROIEZIONE SU $\hat{e}_k$ $(k=1,2,3)$ E SI OTTENGONO LE 3 COMPONENTI DEL TENSORE DELLE TENSIONI T_{11}, T_{12}, T_{13}

$T_{ik} = \overline{T}_i \hat{e}_k$ CON $i = 1,2,3$; $k = 1,2,3$ O ESPRIMENDOLE ATTRAVERSO $\overline{T} = \overline{\overline{T}} \cdot \hat{m}$ $\quad \overline{T} = C_{mi} T_{ik} \hat{e}_k$ (2.31)

(2.28) → SI DIMOSTRA CHE LO STATO TENSIONALE RISPETTO AD UNA GENERICA GIACITURA, È DEFINITO DALLE TENSIONI AGENTI SULLE 3 GIACITURE $\hat{m}_1, \hat{m}_2, \hat{m}_3$

LE 9 QUANTITÀ T_{ik} DEFINISCONO COMPLETAMENTE LE TENSIONI INTORNO AD UN PUNTO (DIMOSTRATO IN (2.31) → LA TENSIONE IN QUALUNQUE ALTRA GIACITURA GENERICA $\hat{m}$ PUÒ ESSERE VALUTATA NOTI I COSENI DIR. DI $\hat{m}$ RISPETTO AD $\hat{e}_i$)

LA FORMA DELLE COMPONENTI DEL TENSORE DELLE TENSIONI AL VARIARE DELLA TERNA DI RIFERIMENTO, VIENE FORNITA COME NOTA

PROPRIETÀ → $T_{ik} = T_{ki}$ (È SIMMETRICO CON CONSIDERAZIONI SULL'EQUILIBRIO ALLA ROTAZIONE DI UN ELEMENTO FLUIDO)

RELAZIONE COSTITUTIVA PER FLUIDI NEWTONIANI

PER SCRIVERE EQ. DI EQUILIBRIO CHE GOVERNANO IL MOTO DI UN FLUIDO, AVREMO L'EQUILIBRIO TRA FORZE D'INERZIA (1.), DI SUPERFICIE (2.) E VOLUME

(1.) → ESPRESSE IN TERMINI DI ACCELERAZIONI ≃ VARIAZIONI DI VELOCITÀ

(2.) → ESPRESSE IN FUNZIONE DELLE TENSIONI SUPERFICIALI CHE UNA PARTICELLA APPLICA A QUELLA CONTIGUA

NECESSITÀ: ESPRIMERE UNA FORMA DI LEGAME (LINEARE, POSSIBILMENTE) TRA LE TENSIONI E LE VELOCITÀ DI DEFORMAZIONE IN SOLI TERMINI DI VELOCITÀ

RELAZIONE COSTITUTIVA TENSIONI-VELOCITÀ DI DEFORMAZIONE → TALI RELAZIONI SONO DI TIPO ASSIOMATICO (ASSIOMI DI NOLL)

1. PRINCIPIO DI NON INFLUENZA DAL FUTURO
2. PRINCIPIO D'EFFETTO LOCALE
3. PRINCIPIO D'INDIFFERENZA DAL SISTEMA DI RIFERIMENTO

→ IN PIÙ SI ASSUME CHE T_{ij} DIPENDA ESCLUSIVAMENTE DA: VELOCITÀ, TENSORE GRADIENTE VELOCITÀ, STATO TERMODINAMICO

$T_{ij} = H\left(u_i, \frac{\partial u_i}{\partial x_k}, \text{STATO TRMD.}\right)$ →

→ MA, SUPPONENDO CHE $\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \{\Omega_{ik} + \varepsilon_{ik}\}$, DALL'ASSIOMA 3, T_{ij} NON PUÒ DIPENDERE DA Ω_{ij} IN QUANTO EMISIMMETRICO. T_{ij} È SIMMETRICO E NON PUÒ DIPENDERE DA u_i, IN QUANTO È UN VETTORE ⇒

$\Rightarrow T_{ij} = H(\varepsilon_{ij}, \text{STATO TRMD})$ (2.32)

PER UN FLUIDO A RIPOSO, DALL'ANALISI SPERIMENTALE E FLUIDOSTATICA, SI HA: $\overline{T} = -p\overline{m}$. IN FLUIDOSTATICA IL TENSORE È SFERICO E LA SUA TRACCIA È $-3p$

Hp DI FLUIDO STOKESIANO:

1. T_{ij} È UNA FUNZIONE CONTINUA DI ε_{ij} E DELLO STATO TRMD
2. A RIPOSO $T_{ij} + p\delta_{ij} = 0$
3. IL FLUIDO È ISOTROPO
4. IL FLUIDO È OMOGENEO

→ LA RELAZIONE COSTITUTIVA SI OTTIENE SVILUPPANDO IN SERIE DI TAYLOR LA (2.32) $T_{ij} = A^1_{ij} + A^2_{ijkl}\varepsilon_{kl} + A^3_{ijklmm}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{mm}$

$A^1, A^2, \ldots$ DEVONO ESSERE ISOTROPI, ED A^1_{ij} È UN TENSORE DEL SECONDO ORDINE, A^2_{ijkl} È UN TENSORE DEL QUARTO ORDINE, ETC.

FLUIDO SI DICE NEWTONIANO, SE SI TRASCURANO NELLO SVILUPPO IN SERIE I TERMINI DEL SECONDO ORDINE $\varepsilon_{kl}\varepsilon_{mm}$.

IN CONDIZIONI DI MOTO (2 CASI SEMPLIFICATI)

→ $\varepsilon_{ii} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$ CAMPO SOLENOIDALE INCOMPRESSIBILE

→ $\lambda + \frac{2}{3}\mu = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{3}\mu$ Hp DI STOKES (VERIFICATA PER GAS MONOATOMICI A BASSA DENSITÀ E ANCHE PER L'ARIA)

EQ. DELLA FLUIDODINAMICA

EQ DI CONSERVAZIONE O BILANCIO POSSONO ESSERE ESPRESSE IN FORMA DIFFERENZIALE O INTEGRALE.

FORMA DIFFERENZIALE → PER I DETTAGLI LOCALI DEL FLUSSO E VOGLIAMO CONOSCERE I CAMPI DELLE VARIE PROPRIETÀ DEL FLUSSO.

FORMA INTEGRALE → QUANDO SIAMO INTERESSATI A FENOMENI FLUIDODINAMICI GLOBALI IN UN CERTO VOLUME FINITO E NON AI DETTAGLI LOCALI DEL FLUSSO

LO STUDIO DIFFERENZIALE È NECESSARIO DALLA CONTINGENZA DEI FENOMENI LOCALI, QUALI: DISTACCHI DELLA VENA FLUIDA, INSTABILITÀ TRANSIZIONE POSSONO DETERMINARE COMPORTAMENTI DIVERSI A LIVELLO GLOBALE

SCALETTA

RELAZIONI COSTITUTIVE $\rightarrow$ (PER CHIUDERE IL SISTEMA) PRINCIPIO 1° OTTICA LAGRANGIANA $\rightarrow$ TEO TRASPORTO REYNOLDS $\rightarrow$ OTTICA EULERIANA $\rightarrow$ FORMA INTEGRALE $\rightarrow$ TEO GREEN GAUSS DA dS A dV $\rightarrow$ EQ. DIFF.

EQ. DI CONSERVAZIONE DELLA MASSA

CASO DI FLUIDO IN MOTO, PRINCIPIO 1° $\Rightarrow \frac{dM}{dt}=0$ (MASSA DI UN SISTEMA ARBITRARIO RIMANE INVARIATA NEL TEMPO)

VARIABILE ESTENSIVA MASSA $\rightarrow B_s=\iiint_{V(t)}\rho\, dV = M$ | VARIABILE INTENSIVA $b=1$

APPLICO TEO. TRASPORTO REYNOLDS

$$\frac{DM}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{V_0}\rho\, dV+\oiint_{S_0}\rho\,\bar{u}\cdot\bar{n}\, dS=0$$ FORMA INTEGRALE $\Rightarrow$ APPLICANDO G. GAUSS $\Rightarrow \iiint_{V_0}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\bar{\nabla}\cdot(\rho\bar{u})\right)dV$

DATA L'ARBITRARIETÀ DEL VOLUME DI CONTROLLO $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\bar{\nabla}\cdot(\rho\bar{u})=0 \Rightarrow$ SI PUÒ SCRIVERE COME $\frac{\partial\rho}{\partial t}+(\bar{u}\cdot\bar{\nabla})\rho+\rho\,\bar{\nabla}\cdot\bar{u}=0\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{D\rho}{Dt}+\rho\,\bar{\nabla}\cdot\bar{u}=0$ FORMA DIFFERENZIALE PER LIQUIDI E FLUSSI INCOMPRIMIBILI $\rightarrow \bar{\nabla}\cdot\bar{u}=0$ ESPRIME CHE IL CAMPO DI VELOCITÀ $\rightarrow$ PER FLUSSI INCOMPRESSIBILI È A DIVERGENZA NULLA (O SOLENOIDALE)

$\rightarrow$ DERIVATA SOSTANZIALE

EQUAZIONE DI BILANCIO DELLA Q.D.M.

FLUIDO IN MOTO, PRINCIPIO 1° - LEGGE DI CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO PER UN SISTEMA

VARIAZIONE NEL TEMPO DELLA Q.D.M. = SOMMA DELLE FORZE DI MASSA + SOMMA DELLE FORZE DI SUPERFICIE

VARIABILE ESTENSIVA: $\bar{B}_s=\iiint_{V_s}\rho\,\bar{u}\, dV$ | VARIABILE INTENSIVA: $\bar{b}=\bar{u}$

QUINDI $\frac{d\bar{B}_s}{dt}=\frac{d\bar{q}}{dt}=\bar{F}_m+\bar{F}_s$ DOVE $\bar{F}_m=\iiint_{V_0}\rho\,\bar{g}\, dV=\iiint_{V_0}\rho\,\bar{g}\, dV$ (ASSUMENDO CHE IL PESO SIA L'UNICA FORZA DI VOLUME)

$$\bar{F}_s=\oiint_{S_0}\bar{\bar{T}}\cdot n\, dS=\iiint_{V_0}\bar{\nabla}\cdot\bar{\bar{T}}\, dV$$

APPLICO TEO DI TRASPORTO DI REYNOLDS

$$\frac{DB_s}{Dt}=\iiint_{V_0}\frac{\partial\rho\bar{u}}{\partial t}dV+\oiint_{S_0}\rho\bar{u}(\bar{u}\cdot\bar{n})dS=\bar{F}_m+\bar{F}_s \Rightarrow \iiint_{V_0}\left(\frac{\partial\rho\bar{u}}{\partial t}+\rho\bar{u}(\bar{\nabla}\cdot\bar{u})\right)dV=\iiint_{V_0}\rho\bar{g}\, dV+\oiint_{S_0}\bar{\bar{T}}\cdot\bar{n}\, dS$$ FORMA INTEGRALE

FORMA SEMPLIFICATA CON 3 Hp $\rightarrow$ • FORZE GRAVITAZIONALI NULLE; • CONDIZIONI STAZIONARIE $\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{V_0}\rho\bar{u}\, dV=0$
• FORZE VISCOSE NULLE ($\sigma_{ij}=0$);

$$\iiint_{V_0}\left(\bar{u}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}+\rho\bar{u}\,\bar{\nabla}\cdot\bar{u}+\bar{u}\,\bar{u}\cdot\bar{\nabla}\rho+\rho\,\bar{u}\cdot\bar{\nabla}\bar{u}\right)=\iiint_{V_0}\rho\bar{g}\, dV+\iiint_{V_0}\bar{\nabla}\cdot\bar{\bar{T}}\, dV$$

$$\iiint_{V_0}\left(\rho\frac{D\bar{u}}{Dt}+\underbrace{\cancel{\bar{u}\frac{D\rho}{Dt}+\rho\bar{u}\,\bar{\nabla}\cdot\bar{u}}}_{=0\text{ PER CONSERVAZIONE MASSA}}-\rho\bar{g}-\bar{\nabla}\cdot\bar{\bar{T}}\right)dV=0$$

$\rho\frac{D\bar{u}}{Dt}=\rho\bar{g}+\bar{\nabla}\cdot\bar{\bar{T}}$ FORMA DIFFERENZIALE

RICORDANDO LE RELAZIONI COSTITUTIVE PER FLUIDI NEWTONIANI, VADO A SOSTITUIRE IL TERMINE DEL TENSORE DELLE TENSIONI

$\Rightarrow \rho\frac{D\bar{u}}{Dt}=\rho\bar{g}-\bar{\nabla}p+(\mu+\lambda)\bar{\nabla}(\bar{\nabla}\cdot\bar{u})+\mu\nabla^2\bar{u}$ SE λ E μ = COSTANTI $\Rightarrow$ FLUIDO NEWTONIANO

EQ. DI NAVIER STOKES PER FLUIDI NEWTONIANI | PER GAS MONOATOMICI, ANCHE ARIA SI HA $\lambda=-\frac{2}{3}\mu\Rightarrow$

$\Rightarrow \rho\frac{D\bar{u}}{Dt}=\rho\bar{g}-\bar{\nabla}p+\frac{\mu}{3}\bar{\nabla}(\bar{\nabla}\cdot\bar{u})+\mu\nabla^2\bar{u}$ PER FLUSSI INCOMPRESSIBILI $\Rightarrow \bar{\nabla}\cdot\bar{u}=0\Rightarrow \rho\frac{D\bar{u}}{Dt}=\rho\bar{g}-\bar{\nabla}p+\mu\nabla^2\bar{u}$

EQ. DEL BILANCIO DELL'ENERGIA

PRINCIPIO 1°: 1° PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA, PER UN SISTEMA IN MOTO AFFERMA:

VARIAZIONE NEL TEMPO DI ENERGIA TOTALE = AUMENTO D'ENERGIA PER EFFETTO DEL CALORE + AUMENTO DELL'ENERGIA PER EFFETTO DEL LAVORO $\Rightarrow$ CIOÈ FORNISCE L'EQUIVALENZA TRA LE VARIAZIONI DI ENERGIA, CALORE E LAVORO

ESPRIME CHE ENERGIA CAMBIA FORMA MA NON PUÒ CREARSI NÉ DISTRUGGERSI

PROPRIETÀ ESTENSIVA $\rightarrow B_s=E_s=\iiint_{V_s(t)}\rho\, e\, dV$

$\rightarrow$ ENERGIA TOTALE DEL SISTEMA PER UNITÀ DI MASSA = P. INTENSIVA $\rightarrow e=U+\frac{1}{2}u_i^2$

$\rightarrow$ ENERGIA INTERNA PER UNITÀ DI MASSA; $\rightarrow$ ENERGIA CINETICA //

= TERMICA + CINETICA

PRINCIPIO 1° $\frac{DE_s}{Dt}=L+Q$ (E_s: ENERGIA TOTALE TERMOCINETICA DEL SISTEMA)

$\rightarrow Q$: CALORE CEDUTO DALL'ESTERNO NELL'UNITÀ DI TEMPO (POTENZA TERMICA)

$\rightarrow L$: LAVORO COMPIUTO DALL'ESTERNO NELL'UNITÀ DI TEMPO (POTENZA MECCANICA)

TEO. TRASPORTO REYNOLDS

$$\frac{DE_s}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{V_0}\rho\, e\, dV+\oiint_{S_0}\rho\, e\,\bar{u}\cdot\bar{n}\, dS$$

Pag.11

ESPRIMO $L = L_m + L_s$ $\quad L_m = \iiint_{V_0} \rho \bar{g} \cdot \bar{u}\, dV$ → LAVORO FORZE DI MASSA

$L_s = \iint_{S_0} \bar{u} \cdot (\bar{\bar{T}} \cdot \bar{n})\, dS$ → LAVORO FORZE DI SUPERFICIE

↳ TENSORE DELLE TENSIONI

$Q = Q_m + Q_s$ $\quad Q_m = \iiint_{V_0} \rho q\, dV$ → CALORE PRODOTTO PER UNITÀ DI MASSA

$Q_s = -\iint_{S_0} \bar{k} \cdot \bar{n}\, dS$ → SEGNO MENO RAPPRESENTA EFFETTO NORMALE ESTERNA

SCRIVO $\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_0} \rho e\, dV + \iint_{S_0} \rho e \bar{u} \cdot \bar{n}\, dS = \iiint_{V_0} \rho \bar{g} \cdot \bar{u}\, dV + \iint_{S_0} \bar{u} \cdot (\bar{\bar{T}} \cdot \bar{n})\, dS + \iiint_{V_0} \rho q\, dV - \iint_{S_0} \bar{k} \cdot \bar{n}\, dS$ FORMA INTEGRALE

$$\iiint_{V_0} \left(e \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho e\, \bar{\nabla} \cdot \bar{u} + e \bar{u} \cdot \bar{\nabla} \rho + \rho \bar{u} \cdot \bar{\nabla} e \right) dV = \iiint_{V_0} \left(\rho \bar{g} \cdot \bar{u} + \bar{\nabla} \cdot (\bar{\bar{T}} \cdot \bar{u}) + \rho q - \bar{\nabla} \cdot \bar{k} \right) dV$$

$$\iiint_{V_0} \left(\rho \frac{De}{Dt} + \cancel{e \frac{D\rho}{Dt} + \rho e\, \bar{\nabla} \cdot \bar{u}} \right) dV = \iiint_{V_0} \left(\rho \bar{g} \cdot \bar{u} + \rho q - \bar{\nabla} \cdot \bar{k} + \bar{\nabla} \cdot (\bar{\bar{T}} \cdot \bar{u}) \right) dV$$

↳ $= 0$ PER CONS. MASSA

$\rho \frac{De}{Dt} = \rho \bar{g} \cdot \bar{u} + \bar{\nabla} \cdot (\bar{u} \cdot \bar{\bar{T}}) + \rho q - \bar{\nabla} \cdot \bar{k}$ FORMA DIFFERENZIALE

SE SCOMPONGO IL TENSORE IN COORDINATE CARTESIANE, OTTENGO: $\rho \frac{De}{Dt} = \rho g_i u_i + \frac{\partial}{\partial x_i}(u_k T_{ik}) + \rho q - \frac{\partial k_i}{\partial x_i}$

$T_{ik} = -P\delta_{ik} + \sigma_{ik}$ (→ FORZE VISCOSE) ; $\frac{\partial}{\partial x_i}(u_k T_{ik}) = T_{ik} \frac{\partial}{\partial x_i} u_k + u_k \frac{\partial}{\partial x_i} T_{ik} = -P \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \varepsilon_{ki}\sigma_{ki} - u_k \frac{\partial P}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_i}$ =>

=> SI HA $\rho \frac{De}{Dt} = \rho \frac{DU}{Dt} + \rho \frac{D}{Dt} \frac{u_k^2}{2} = \rho g_i u_i - P \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \cdot \sigma_{ki} + u_k \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_i} - u_k \frac{\partial P}{\partial x_k} + \rho q - \frac{\partial k_i}{\partial x_i}$

EQ. DI BERNOULLI PER FLUSSI STAZIONARI COMPRESSIBILI (FORMA DEBOLE EQ. BERNOULLI)

PRENDO EQ. B.E. E APPLICO LE SEGUENTI Hp:

1. f_i = CONSERVATIVA: $f_i = -\partial G / \partial x_i$
2. FORZE VISCOSE NON COMPIONO LAVORO: $T_{ik} = -P\delta_{ik}$
3. ASSENZA DI PRODUZIONE DI CALORE: $q = 0$
4. ASSENZA DI CONDUZIONE DI CALORE: $\bar{k} = 0$
5. FLUSSO STAZIONARIO

$\rho \frac{De}{Dt} = \rho \bar{g} \cdot \bar{u} + \bar{\nabla} \cdot (\bar{u} \cdot \bar{\bar{T}}) + \cancel{\rho q} - \cancel{\bar{\nabla} \cdot \bar{k}}$ → RICORDANDO LA DERIVATA SOSTANZIALE =>

(1) (2) (3) (4)

=> $\rho \frac{\partial e}{\partial x_i} u_i + \cancel{\rho \frac{\partial e}{\partial t}} = -\rho \frac{\partial G}{\partial x_i} u_i + \frac{\partial}{\partial x_i}(u_k(-P\delta_{ik}))$ (5) → RICORDANDO CHE => $-\frac{\partial}{\partial x_i}(u_i P)$ =>

=> $\rho \frac{\partial e}{\partial x_i} u_i = -\rho \frac{\partial G}{\partial x_i} u_i - u_i \frac{\partial P}{\partial x_i} - P \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ => DIVIDO PER ρ E PORTO A SINISTRA

=> $u_i \frac{\partial e}{\partial x_i} + \frac{\partial G}{\partial x_i} u_i + \frac{u_i}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{P}{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$ => GLI ULTIMI DUE TERMINI DANNO: $u_i \frac{\partial P/\rho}{\partial x_i}$ =>

=> RACCOLGO $u_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(e + G + \frac{P}{\rho}\right) = 0$ => H = ENERGIA TOTALE = $U + \frac{1}{2} u_i^2 + \frac{P}{\rho} + G$ = COSTANTE

H ANCHE DETTA ENTALPIA TOTALE IN QUANTO $U + \frac{P}{\rho} = U + PV = h$ = ENTALPIA

H SI CONSERVA LUNGO UNA LINEA DI CORRENTE CHE HA PER TANGENTE u_i. LA QUANTITÀ SCALARE H NON SI MODIFICA (RIMANE COST) LUNGO IL MOTO IN QUANTO $\bar{u}$ E GRAD(H) DEVONO ESSERE ORTOGONALI.

BILANCIO ENERGIA MECCANICA

SI OTTIENE MOLTIPLICANDO L'EQ. DELLA CONSERVAZIONE DELLA Q.D.M. PER $\bar{u}$

$\rho u_k \frac{Du_k}{Dt} = \rho u_k g_k + u_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i}$

BILANCIO ENERGIA TERMICA IN TERMINI DI ENERGIA INTERNA

SI OTTIENE SOTTRAENDO L'ENERGIA MECCANICA DA QUELLA TOTALE $e = U + \frac{1}{2}\bar{u}^2$

DIFFERENZIO L'ENERGIA TOTALE $\rho \frac{De}{Dt} = \rho \frac{DU}{Dt} + \rho \frac{D}{Dt} \frac{\bar{u}^2}{2}$

CONSIDERO L'E.B.E. CON $\bar{\bar{T}}$ SCOMPOSTO: $\quad \rho \frac{DU}{Dt} + \cancel{\rho \frac{D}{Dt} \frac{u_k^2}{2}} = \cancel{\rho g_i u_i} - P \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \cdot \sigma_{ki} + \cancel{u_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i}} + \rho q - \frac{\partial k_i}{\partial x_i}$

GLI SOTTRAGGO L'ENERGIA MECCANICA: $\quad \cancel{-\rho \frac{D}{Dt} \frac{u_k^2}{2}} = \cancel{-\rho g_k u_k} \cancel{- u_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i}}$

QUELLO CHE TROVO È L'EQ. DI BILANCIO DELL'ENERGIA TERMICA IN TERMINI DI U:

$$\rho \frac{DU}{Dt} = -P \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \cdot \sigma_{ki} + \rho q - \frac{\partial k_i}{\partial x_i} = -P \bar{\nabla} \cdot \bar{u} + (\bar{\nabla} \bar{u}) \cdot \bar{\sigma} + \rho q - \bar{\nabla} \cdot \bar{k} = -P \bar{\nabla} \cdot \bar{u} + \mu \varphi^2 + \rho q - \bar{\nabla} \cdot \bar{k} \quad (10)$$

↳ È IL LAVORO REVERSIBILE COMPIUTO DALLA PRESSIONE

↳ VELOCITÀ DI DISSIPAZIONE DELL'ENERGIA CINETICA E LA SUA TRASFORMAZIONE IRREVERSIBILE IN ENERGIA INTERNA

EQUAZIONE DI BILANCIO DELL'ENERGIA TERMICA IN TERMINI DI TEMPERATURA

RICORDANDO LE RELAZIONI COSTITUTIVE E LE DEF. DI CALORE SPECIFICO A V = COST (→ VOLUME)

$dU = c_V dT$; $c_V = \left(\frac{\delta Q}{\partial T}\right)_T$; $k_i = -K \frac{\partial T}{\partial x_i}$ => SOSTITUENDO IN (10) => $\rho c_V \frac{DT}{Dt} = -P \bar{\nabla} \cdot \bar{u} + \mu \varphi^2 + \rho q + K \nabla^2 T$

Pag.12

EQUAZIONE DI BILANCIO DELL'ENERGIA TERMICA IN TERMINI DI ENTALPIA

$h = U + PV$ = ENTALPIA, CHE È L'ENERGIA ASSOCIATA AL MOTO MOLECOLARE INTORNO AL BARICENTRO DELLA PARTICELLA DI FLUIDO

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{DP}{Dt} + \mu\varphi^2 + \rho q + K\nabla^2 T \Rightarrow dH = c_p dT \Rightarrow \rho c_p \frac{DT}{Dt} = \frac{DP}{Dt} + \mu\varphi^2 + \rho q + K\nabla^2 T$$

FORMA DI EQ. DI BILANCIO DELL'ENERGIA TERMICA PIÙ UTILIZZATA NELLE APPLICAZIONI

EQUAZIONE DI BILANCIO DELL'ENERGIA TERMICA IN TERMINI DI ENTROPIA

$$ds = \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{REV} \quad \delta Q = dU + PdV \quad dU = Tds - PdV = Tds + \frac{P}{\rho^2} d\rho \quad \rho T \frac{Ds}{Dt} = \mu\varphi^2 + \rho q - \bar{\nabla}\cdot\bar{k}$$

QUESTA RELAZIONE MOSTRA QUALI EFFETTI FISICI PORTANO A UNA VARIAZIONE DI ENTROPIA: DISSIPAZIONE (FLUSSO IN MOTO CHE SI TROVA VICINO AD UNA SUPERFICIE SOLIDA FERMA), PRODUZIONE DI CALORE (IN UN PROCESSO DI COMBUSTIONE) E SCAMBIO DI CALORE (FLUSSO IN MOTO IN UN CONDOTTO NON ADIABATICO).

ACCELERAZIONE DI LAGRANGE → ALTRA FORMA DI DERIVATA SOSTANZIALE DELLA VELOCITÀ

$$\frac{D\bar{u}}{Dt} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{\nabla}\frac{u_k^2}{2} + \bar{\omega}\times\bar{u}$$

PER LA COMPONENTE 1 $\frac{Du_1}{Dt} = \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{u_k^2}{2} - u_2\omega_3 + u_3\omega_2$

EQ. DI TRASPORTO DELLA VORTICITÀ PER FLUSSI INCOMPRESSIBILI / EQ. CONSERVAZIONE DEL MOMENTO DELLA Q.D.M. (FLUSSI INCOMPRESSIBILI)

DEFINENDO LA VORTICITÀ $\bar{\omega} = \bar{\nabla}\times\bar{u}$, L'EQ. DEL TRASPORTO DELLA VORTICITÀ, SI OTTIENE DA QUELLA DELLA Q.D.M. APPLICANDO IL ROTORE

$\rho\frac{D\bar{u}}{Dt} = \rho\bar{g} - \bar{\nabla}P + \mu\nabla^2\bar{u}$ DOVE CONSIDERO $\bar{\nabla}\cdot\bar{u} = 0$ (FLUSSO INCOMPRESSIBILE) ⇒ SVOLGO DERIVATA SOSTANZIALE E CONSIDERO FORZE DI MASSA CONSERVATIVE $\bar{g} = -\bar{\nabla}G$

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t} + \underbrace{\rho\frac{\partial u_i}{\partial x_k}u_k}_{\rho\bar{u}\cdot\bar{\nabla}\bar{u}} = -\rho\cancel{\bar{\nabla}}G - \cancel{\bar{\nabla}}P + \mu\nabla^2\bar{u} \Rightarrow \bar{\nabla}\times(\ldots\ldots) \Rightarrow \boxed{\text{PROPRIETÀ } \bar{\nabla}\times\bar{\nabla}P = 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial t} + \rho\bar{u}\cdot\bar{\nabla}\bar{\omega} \overset{*}{-} \rho\bar{\omega}\cdot\bar{\nabla}\bar{u} = \mu\nabla^2\bar{\omega} \qquad * \text{ POICHÉ } \bar{\nabla}\times(\bar{u}\cdot\bar{\nabla}\bar{u}) = \bar{u}\cdot\bar{\nabla}\bar{\omega} - \bar{\omega}\cdot\bar{\nabla}\bar{u}$$

$$\rho\frac{D\bar{\omega}}{Dt} = \mu\nabla^2\bar{\omega} + \rho\bar{\omega}\cdot\bar{\nabla}\bar{u}$$ TEO. TRASPORTO VORTICITÀ

→ TIENE CONTO DELL'ALLUNGAMENTO ED ACCORCIAMENTO DEI VORTICI E DANDO UN EFFETTO ANALOGO A QUELLO DI UNA BALLERINA CHE ALLARGA E STRINGE LE BRACCIA AL CORPO. VORTEX STRETCHING

VORTICE SI ALLUNGA → ω CRESCE
VORTICE SI ACCORCIA → ω DIMINUISCE

MODO ALTERNATIVO: APPLICO ROTORE A ACCELERAZIONE DI LAGRANGE

$$\frac{D\bar{u}}{Dt} = \frac{\partial\bar{u}}{\partial t} + \bar{\nabla}\frac{u_k^2}{2} + \bar{\omega}\times\bar{u} \Rightarrow \bar{\nabla}\times\frac{D\bar{u}}{Dt} = \frac{\partial\bar{\omega}}{\partial t} + \bar{\nabla}\times(\bar{\omega}\times\bar{u}) \Rightarrow \text{FORMA COMPATTA } \rho\left(\frac{\partial\omega}{\partial t} + \bar{\nabla}\times(\bar{\omega}\times\bar{u})\right) = \mu\nabla^2\bar{\omega}$$

EQ. DI BERNOULLI PER FLUSSI INCOMPRESSIBILI E ROTAZIONALI E U = COST.

SI CONSIDERA L'EQ. DELLA Q.D.M. DI N.S. $\rho\frac{D\bar{u}}{Dt} = \rho\bar{g} - \bar{\nabla}P + (\lambda+\mu)\bar{\nabla}(\bar{\nabla}\cdot\bar{u}) + \mu\nabla^2\bar{u} = \rho\bar{g} - \bar{\nabla}P + \bar{F}(\lambda,\mu)$

FORZA CONSERVATIVA, $\bar{f} = -\bar{\nabla}G$ → FORZE NON CONSERVATIVE, TERMINI VISCOSI

LE FORZE DI PRESSIONE SONO CONSERVATIVE IN QUANTO, PER LA COSTANZA DI ρ, $\frac{\bar{\nabla}P}{\rho} = \bar{\nabla}\left(\frac{P}{\rho}\right)$. SI SOSTITUISCE $\frac{D\bar{u}}{Dt}$ ESPRESSA SECONDO LAGRANGE: $\frac{D\bar{u}}{Dt} = \frac{\partial\bar{u}}{\partial t} + \nabla\frac{u^2}{2} + \bar{\omega}\times\bar{u}$

$$\rho\left\{\frac{\partial\bar{u}}{\partial t} + \bar{\nabla}\frac{u^2}{2} + \bar{\omega}\times\bar{u}\right\} = -\rho\bar{\nabla}G - \bar{\nabla}P + F(\lambda,\mu)$$ PER FLUSSI INCOMPRESSIBILI

$$\bar{\nabla}\left(\frac{u^2}{2} + G + \frac{P}{\rho}\right) = -\bar{\omega}\times\bar{u} - \cancel{\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}} + \cancel{\frac{F(\mu,\lambda)}{\rho}}$$

→ HO DIVISO ANCHE PER ρ
⇒ SE FLUSSO STAZIONARIO (1)
SE CONSIDERO FORZE DI ATTRITO TRASCURABILI

$$H_m = \frac{u^2}{2} + G + \frac{P}{\rho}$$

; H_m SI CONSERVA LUNGO LE LINEE TAN AD $\bar{\omega}$; AD $\bar{u}$ NEL CASO ROTAZIONALE E FLUSSO STAZIONARIO, INCOMPRESSIBILE E CON EFFETTI DI VISCOSITÀ TRASCURABILI

H_m ⇒ SI CONSERVA LUNGO LINEE DI VORTICITÀ E CORRENTE; ANCHE LUNGO IL MOTO

→ CARICO IDRAULICO → NELLE APPLICAZIONI IDRAULICHE

ES. APPLICAZIONE: ACQUA CHE SI SOLLEVA DALLA SUPERFICIE PER EFFETTO DELLA DEPRESSIONE PRODOTTA DAI GETTI DEI PROPULSORI.

TEOREMI SUI VORTICI

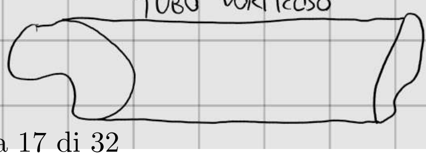
REGIONE VORTICOSA = CAMPO DI FLUSSO NEL QUALE LA VORTICITÀ $\neq 0$, $\bar{\omega} = \bar{\nabla}\times\bar{u}$; LE PARTICELLE SONO ANIMATE DA UNA VELOCITÀ ANGOLARE (IN TALE REGIONE)

$\underbrace{\zeta = \frac{\bar{\omega}}{2}}_{\text{ZETA}}$ = VELOCITÀ ANGOLARE

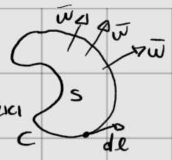
ALLE LINEE DI CORRENTE (CHE HANNO PER TANGENTE IN OGNI PUNTO IL VETTORE VELOCITÀ) POSSIAMO DEFINIRE LE LINEE VORTICOSE COME QUELLE CHE HANNO PER TANGENTE IN OGNI PUNTO IL VETTORE VORTICITÀ.

VORTICE O TUBO VORTICOSO LO SPAZIO DELIMITATO DALLE LINEE VORTICOSE PASSANTI PER UNA LINEA MATERIALE CHIUSA; SE LA DIMENSIONE DELLA LINEA È INFINITESIMA IL VORTICE È DEFINITO FILETTO VORTICOSO

TUBO VORTICOSO



SI DEFINISCE INTENSITÀ DI UN VORTICE DI DATA SEZIONE S, IL FLUSSO DI $\bar{\omega}$ ATTRAVERSO DI ESSA:



$$\Gamma = \iint_S \bar{\omega}\cdot\bar{n}\,ds = \iint_S \bar{\nabla}\times\bar{u}\cdot\bar{n}\,ds = \oint_C \bar{u}\cdot d\bar{l}$$

→ PER TEO STOKES, PER DOM SEMPLICI È UGUALE ALLA CIRCOLAZIONE DI $\bar{u}$

CASO DI FILETTO VORTICOSO, Γ ASSUME UN SIGNIFICATO VETTORIALE

TEO DI KELVIN-THOMPSON LA CIRCOLAZIONE LUNGO UN CIRCUITO CHIUSO, COSTITUITO SEMPRE DALLE STESSE PARTICELLE È INVARIABILE NEL TEMPO SE: IL FLUIDO È A VISCOSITÀ TRASCURABILE, LE FORZE DI MASSA SONO CONSERVATIVE E IL FLUSSO È BAROTROPICO.

$$\Gamma = \oint \bar{u}\cdot d\bar{l} \Rightarrow \frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt}\oint \bar{u}\cdot d\bar{l} = \oint \frac{D\bar{u}}{Dt}\cdot d\bar{l} + \oint \bar{u}\cdot\frac{Dd\bar{l}}{Dt} \Rightarrow$$ SCRIVO EQ. DI N.S. $$\Rightarrow \frac{D\bar{u}}{Dt} = \frac{\rho\bar{g}}{\rho} - \frac{\bar{\nabla}P}{\rho} + \cancel{\frac{(\mu+\lambda)}{\rho}\bar{\nabla}(\bar{\nabla}\cdot\bar{u})} + \cancel{\frac{\mu\nabla^2\bar{u}}{\rho}}$$

I TERMINI DELLA VISCOSITÀ SONO TRASCURABILI, INOLTRE POSSO SCRIVERE: $\bar{g} = -\bar{\nabla}G;\ -\frac{\bar{\nabla}P}{\rho} = -\bar{\nabla}\int\frac{dP}{\rho} \Rightarrow \frac{D\bar{u}}{Dt} = -\nabla\left(\int\frac{dP}{\rho}+G\right)$

INVECE PER IL 2° MEMBRO, CONSIDERO $\frac{Dd\bar{l}}{Dt}$ DALLA FIGURA E VEDO LA DIFFERENZA TRA DUE SEZIONI, CONSIDERO LA DEF. DI DERIVATA E TROVO CHE: $\oint \bar{u}\cdot\frac{Dd\bar{l}}{Dt} = \bar{\nabla}\int\frac{u^2}{2}dl \Rightarrow \frac{D\Gamma}{Dt} = \oint \nabla\left(\frac{u^2}{2} - G - \int\frac{dP}{\rho}\right)\cdot dl$ CHE,

COME VISTO PER BERNOULLI È $\Rightarrow \frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_C \bar{\nabla}\tilde{H}\cdot d\bar{l} = 0$ POICHÉ $\frac{D\Gamma}{Dt} = \tilde{H}(A) - \tilde{H}(B)$ MA SE $A\equiv B \Rightarrow \frac{D\Gamma}{Dt} = 0$

LA CIRCUITAZIONE DI UN GRADIENTE È UGUALE A 0 IN QUANTO LA H SE AMMETTE UN GRADIENTE HA IL SIGNIFICATO DI UNA FUNZIONE POTENZIALE CHE È FUNZIONE DI PUNTO.

CHE INDICA CHE

LA CIRCOLAZIONE SI CONSERVA NEL MOTO PER FLUSSI INCOMPRESSIBILI (O BAROTROPICI) A VISCOSITÀ TRASCURABILE

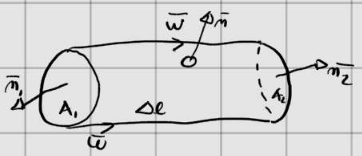
CONSEGUENZE:

SE $\bar{\omega}=0$ ALL'INFINITO A MONTE ANCHE $\Gamma=0$ ALL'INFINITO A MONTE (PER $t=0$). $\bar{\omega}=0$ A VALLE IN TUTTI PUNTI TRANNE:

- FLUSSI PER I QUALI $\bar{f} \neq -\bar{\nabla}G$ (FORZE DI MASSA NON CONSERVATIVE, CONVENZIONE NATURALE, FLUSSI TERMOTROPICI)
- PER μ e λ ELEVATI (ONDE D'URTO, STRATI LIMITE, SCIE LAMINARI O TURBOLENTE)
- $\rho = \rho(P,T)$ FLUSSI ALTAMENTE COMPRESSIBILI
- DOVE NON VALE $\Gamma = \oint_C \bar{u}\cdot d\bar{l}$

1° TEO DI HELMHOLTZ SUI VORTICI

L'INTENSITÀ DI UN VORTICE (TUBO VORTICOSO) È INVARIABILE LUNGO DI ESSO



SI NOTI CHE $\oiint_{A_{TOT}} \bar{\omega}\cdot\bar{n}\,ds = \iiint_V \bar{\nabla}\cdot\bar{\omega}\,dV = 0$; IN QUANTO $\bar{\nabla}\cdot\bar{\nabla}\times\bar{u} = 0$

PERTANTO: $\iint_{A_1}\bar{\omega}_1\cdot\bar{n}_1\,ds + \iint_{A_2}\bar{\omega}_2\cdot\bar{n}_2\,ds + \iint_{A_l}\bar{\omega}_l\cdot\bar{n}_l\,ds = 0$; MA $\iint_{A_l}\bar{\omega}_l\cdot\bar{n}_l\,ds = 0$ (PER DEF. DI TUBO VORTICOSO $\bar{\omega}_l \perp \bar{n}_l$) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \Gamma_1 = \iint_{A_1}\bar{\omega}_1\cdot\bar{n}_1\,ds = -\iint_{A_2}\bar{\omega}_2\cdot\bar{n}_2\,ds = \iint_{A_2}\bar{\omega}_2\cdot(-\bar{n}_2)\,ds = \Gamma_2$$

CONSEGUENZE PRATICHE:

UN VORTICE NON PUÒ AVERE INIZIO O FINE NEL FLUIDO, PUÒ:
1. INIZIARE O TERMINARE AI CONFINI DEL FLUIDO
2. ESSERE INFINITO (VINGLET AEREI)
3. ESSERE CHIUSO SU SE STESSO A FORMA DI TORO

2° TEO DI HELMHOLTZ

LE PARTICELLE DI FLUIDO CHE AD UN DATO ISTANTE APPARTENGONO AD UN VORTICE RESTANO SEMPRE ALL'INTERNO DI ESSO.

PRENDO UN CIRCUITO MATERIALE l SULLA SUPERFICIE DI UN TUBO VORTICOSO, PER IL TEO DI LORD KELVIN: $\frac{D\Gamma}{Dt} = 0$
MA LA DEF. DI Γ DÀ: $\Gamma = \oint_l \bar{u}\cdot d\bar{l} = \iint_{A_l}\bar{\omega}\cdot\bar{n}\,dA$ PER TEO DI STOKES; $\Gamma = \iint_{A_l}\bar{\omega}\cdot\bar{n}\,dA = 0$ IN QUANTO $\bar{\omega}\perp\bar{n}$ SULLA SUPERFICIE DEL TUBO
$\Rightarrow \Gamma = cost = 0$ SU $A_l \Rightarrow$ SE LA PARTICELLA VORTICOSA USCISSE ATTRAVERSO A_l, CIÒ SAREBBE CONTRARIO A QUANTO SCRITTO, PERCHÉ NEL MOMENTO DELL'ATTRAVERSAMENTO SI AVREBBE $\frac{D\Gamma}{Dt} \neq 0$ IN QUANTO LA PARTICELLA USCENTE SAREBBE DOTATA DI VORTICITÀ $\neq 0$ CHE TRASPORTEREBBE CON SÉ

3° TEO DI HELMHOLTZ L'INTENSITÀ DI UN VORTICE È INVARIABILE NEL TEMPO $\frac{D\Gamma_i}{Dt} = 0$ LO DIMOSTRA

EQ. DI GOVERNO DELLA TERMOFLUIDODINAMICA IN FORMA ADIMENSIONALE

RIASSUMO EQ. CHE GOVERNANO IL FLUSSO DI UN FLUIDO NEWTONIANO (LIQUIDO/GAS MONOATOMICO A BASSA DENSITÀ) VISCOSO E IN ASSENZA DI REAZIONI CHIMICHE

C.d.m. $\frac{D\rho}{Dt} + \rho\bar{\nabla}\cdot\bar{u} = 0$

C.Q.d.M. $\rho\frac{D\bar{u}}{Dt} = \rho\bar{g} - \bar{\nabla}P + \frac{\mu}{3}\bar{\nabla}(\bar{\nabla}\cdot\bar{u}) + \mu\nabla^2\bar{u}$

BIL. EN. TERM. $\rho c_p\frac{DT}{Dt} = \frac{DP}{Dt} + \mu\Phi^2 + \rho\cdot q + K\nabla^2 T$ (↳ TRASCURABILE)

EQ. DI STATO $P = \rho RT$

SISTEMA COSTITUISCE INSIEME DI 6 EQ. IN 6 INCOGNITE $(u_1, u_2, u_3, \rho, P, T)$. EQ. DI GOVERNO SONO DIFFERENZIALI, NON LINEARI PER PRODOTTI $(\bar{u}\cdot\bar{\nabla})\bar{u}$. LE VARIABILI INDIPENDENTI SONO x_1, x_2, x_3 e t

VANTAGGI FORMA ADIMENSIONALE CON TEO DI BUCKINGHAM:
1. SEMPLIFICAZIONE E STUDIO SOL. ASINTOTICHE
2. CORRETTA SIMILITUDINE SPERIMENTALE, PER ESPERIMENTI SU SCALE RIDOTTE
3. INDIPENDENZA DALLE UNITÀ DI MISURA
4. ACCURATEZZA SOL. NUMERICHE

TEO BUCKINGHAM: VRB. INDIPENDENTI x_i, t
VRB. DIPENDENTI u_i, ρ, P, T
PARAMETRI μ, K, c_P, γ, R → GRANDEZZE FONDAMENTALI (T, t, m, L)
CASO FLUSSI CALDI (TERMOFLUIDODINAMICA) CI ASPETTIAMO $11-4=7$ GRUPPI ADIMENSIONALI INDIPENDENTI

$*$ GRANDEZZE ADIMENSIONALI ; 0 VALORI DI RIFERIMENTO

$P^* = \frac{P}{P_0}$; $\rho^* = \frac{\rho}{\rho_0}$; $u_i^* = \frac{u_i}{u_0}$; $t^* = \frac{t}{t_0}$; $x_i^* = \frac{x_i}{L_0}$; $T^* = \frac{T - T_R}{T_0 - T_R}$ se $T_R = 0 \Rightarrow T^* = \frac{T}{T_0}$

$$\nabla P = \frac{P_0}{L_0} \nabla^* P^*$$

C.d.m.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\rho \bar{u}) = 0 \quad \Big| \quad \frac{\rho_0}{t_0} \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{\rho_0 u_0}{L_0} \bar{\nabla} \cdot (\rho^* \bar{u}^*) \quad \Big| \text{ DIVIDO PER } \frac{\rho_0 u_0}{L_0} \Rightarrow \frac{L_0}{u_0 t_0} \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \bar{\nabla}^* \cdot (\rho^* \bar{u}^*) = 0 \qquad \frac{L_0}{u_0 t_0} = \frac{1}{St} \rightarrow \text{STROUHAL}$$

C.d.m. 2

SOSTITUISCO LE EQ. DI STATO NELLA C.d.m. PER VALUTARE L'INFLUENZA DI T E P SULLE VARIAZIONI DI VOLUME $(\bar{\nabla} \cdot \bar{u})$, USANDO LE CONSIDERAZIONI FATTE

CASO FLUIDO QUALUNQUE $\rho = \rho(T, P) \Rightarrow$ DERIVATA MATERIALE SI PUÒ ESPRIMERE COME DERIVATA COMPOSTA $\frac{D\rho}{Dt} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right) \frac{DT}{Dt} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right) \frac{DP}{Dt} \Rightarrow$

$\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right) = -\beta \rho$ (β COEFF. ESP. TERMICA), $\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right) = \alpha \rho$ (α COEFF. COMPRIMIBILITÀ)

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\beta \rho \frac{DT}{Dt} + \alpha \rho \frac{DP}{Dt} \Rightarrow \text{EQ. C.d.m.} \rightarrow -\beta \rho \frac{\partial T}{\partial t} - \beta \rho \bar{u} \cdot \bar{\nabla} T + \alpha \rho \frac{\partial P}{\partial t} + \alpha \rho \bar{u} \cdot \bar{\nabla} P + \rho \bar{\nabla} \cdot \bar{u} = 0$$

DIVIDO TUTTI I MEMBRI PER ρ ED INTRODUCO LE VARIABILI ADIMENSIONALI

$$-\beta \frac{\Delta T}{t_0} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} - \frac{\beta u_0 \Delta T}{L_0} \bar{u}^* \cdot \bar{\nabla}^* T^* + \frac{\alpha P_0}{t_0} \frac{\partial P^*}{\partial t^*} + \frac{\alpha u_0 P_0}{L_0} \bar{u}^* \cdot \bar{\nabla}^* P^* + \frac{u_0}{L_0} \bar{\nabla}^* \cdot \bar{u}^* = 0 \quad \Big| \text{ DIVIDO PER } \frac{u_0}{L_0}$$

$$-\beta \Delta T \underbrace{\left(\frac{L_0}{t_0 u_0}\right)}_{\frac{1}{St}} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} - \beta \Delta T \bar{u}^* \cdot \bar{\nabla}^* T^* + \alpha P_0 \underbrace{\left(\frac{L_0}{t_0 u_0}\right)}_{\frac{1}{St}} \frac{\partial P^*}{\partial t^*} + \alpha P_0 \bar{u}^* \cdot \bar{\nabla}^* P^* + \bar{\nabla}^* \cdot \bar{u}^* = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{St} \left[-\beta \Delta T \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \alpha P_0 \frac{\partial P^*}{\partial t^*} \right] - \beta \Delta T \bar{u}^* \cdot \bar{\nabla}^* T^* + \alpha P_0 \bar{u}^* \cdot \bar{\nabla}^* P^* + \bar{\nabla}^* \cdot \bar{u}^* = 0 \rightarrow \text{PER I GAS PERFETTI } \beta = \frac{1}{T_0},\ \alpha = \frac{\gamma}{\rho_0 c^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{St} \left[-\frac{\Delta T}{T_0} \left(\frac{\partial T^*}{\partial t^*}\right) + \gamma \frac{M_0^2}{R_u} \left(\frac{\partial P}{\partial t^*}\right) \right] + \left[-\frac{\Delta T}{T_0} \left(\bar{u}^* \cdot \bar{\nabla}^*\right) T^* + \gamma \frac{M_0^2}{R_u} \left(\bar{u}^* \cdot \bar{\nabla}^*\right) P^* \right] + \bar{\nabla}^* \cdot \bar{u}^* = 0$$

Se $\beta \Delta T \ll 1$ TRASCURO $\bar{u} \cdot \bar{\nabla} T$
Se $\alpha P_0 \ll 1$ TRASCURO $\bar{u} \cdot \bar{\nabla} P$
| Se $\frac{\alpha P_0}{St} \approx 1$ NON POSSO TRASCURARE GLI EFFETTI DI COMPRESSIBILITÀ IN FENOMENI NON STAZIONARI $(\alpha P_0 \ll 1; St \ll 1)$ [CASO DEL COLPO DI ARIETE NEI LIQUIDI]

PER I GAS PERFETTI
Se $\frac{\Delta T}{T_0} \ll 1$ TRASCURO $\bar{u} \cdot \bar{\nabla} T$
Se $\frac{\gamma \cdot M_0^2}{R_u} \ll 1$ TRASCURO $\bar{u} \cdot \bar{\nabla} P$
| Se $\frac{\gamma \cdot M_0^2}{St R_u} \simeq 1$ NON POSSO TRASCURARE GLI EFFETTI DI COMPRESSIBILITÀ IN FENOMENI NON STAZIONARI

NUMERI ADIMENSIONALI INTRODOTTI:

1. St = STROUHAL $= \frac{u_0 t_0}{L_0} = \frac{\text{TEMPO FENOMENO}}{\text{TEMPO FLUIDO}}$
2. $M_0^2 = \frac{u_0^2}{c^2}$ = Mach $= \frac{\text{FORZE INERZIA}}{\text{FORZE ELASTICHE}}$
3. R_u = RUARK $= \frac{\rho u_0^2}{P_0} = \frac{\text{FORZE D'INERZIA}}{\text{FORZE DI PRESSIONE}}$
4. $\gamma = \frac{c_P}{c_V} = \frac{\text{CALORE SPECIFICO A P=cost}}{\text{" " " V=cost}}$

q.d.m.

$$\rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = \rho \bar{g} - \bar{\nabla} P + \frac{\mu}{3} \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \cdot \bar{u}) + \mu \nabla^2 \bar{u}$$

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j = \text{"} \qquad \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

$$\frac{\rho_0 u_0}{t_0} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} \rho^* + \frac{\rho_0 u_0^2}{L_0} \nabla^* u^* \rho^* u^* = \rho_0 g \rho^* \frac{\bar{g}}{g} - \frac{P_0}{L_0} \nabla^* P^* + \frac{\mu}{3} \frac{u_0}{L_0^2} \nabla^* \nabla^* \cdot u^* + \frac{\mu}{L_0^2} u_0 \nabla^{2*} u^*$$

MOLTIPLICO PER $\frac{L_0}{u_0^2 \rho_0}$

$$\frac{L_0}{u_0 t_0} \text{"} + \text{"} = \frac{L_0}{u_0^2} g \text{"} - \frac{P_0}{u_0^2 \rho_0} \text{"} + \frac{\mu}{3 L_0 u_0 \rho_0} \text{"} + \frac{\mu}{L_0 u_0 \rho_0} \text{"} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{St} \left(\rho^* \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial t^*}\right) + \rho^* \left(\bar{u}^* \cdot \bar{\nabla}^*\right) \bar{u}^* = -\frac{1}{R_u} \bar{\nabla}^* P^* + \frac{1}{Fr} \rho^* \frac{\bar{g}}{g} + \frac{1}{Re} \bar{\nabla}^{2*} \bar{u}^* + \frac{1}{3Re} \bar{\nabla}^* (\bar{\nabla}^* \cdot \bar{u}^*)$$

EQ. GAS PERFETTI

MOLTIPLICO E DIVIDO γ E u_0^2

$$P = \rho R T \quad \text{PRENDO } T_r = 0 \quad T^* = \frac{T}{T_0} \Rightarrow P_0 P^* = \rho_0 \rho^* R\, T_0 T^* \Rightarrow P^* = \left(\frac{\rho_0 R T_0}{P_0}\right) \rho^* T^* = \left(\frac{\gamma R T_0}{\gamma P_0} \frac{\rho_0 u_0^2}{u_0^2}\right) \text{"} = \left(\frac{R_u}{\gamma M_0^2}\right) \rho^* T^*$$

EQ. B. E.TERMICA IN TERMINI DI ENTALPIA

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \mu \varphi^2 + \cancel{\rho q} + k\nabla^2 T$$ TRASCURABILE

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p \bar{u}\cdot\bar{\nabla}T = \frac{\partial p}{\partial t} + u\cdot\bar{\nabla}p + \mu\varphi^2 + k\nabla^2 T$$ DOVE $\varphi^2 \sim \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 \Rightarrow$

$$\rho_0 c_p \frac{T_0}{\Delta T \rho_0}\left(\frac{\partial T}{\partial t}\rho\right)^* + \frac{\rho_0 c_p u_0 T_0}{L_0 \Delta T}(\rho\bar{u}\cdot\bar{\nabla}T)^* = \frac{p_0}{t_0}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)^* + \frac{u_0 p_0}{L_0}(\bar{u}\cdot\bar{\nabla}p)^* + \mu\frac{u_0^2}{L_0^2}\varphi^* + k\frac{T_0}{L_0^2\Delta T}\nabla^{2*}T^* \Rightarrow$$ MOLTIPLICO TUTTO PER $\frac{L_0\Delta T}{u_0 c_p \rho_0 T_0} \Rightarrow$

$$\frac{L_0}{u_0 t_0}\,''+'' = \frac{p_0 L_0 \Delta T}{t_0 u_0 c_p \rho_0 T_0}\frac{u_0^2}{u_0^2}\,'' + \frac{\Delta T\, p_0}{c_p \rho_0 T_0}\frac{u_0^2}{u_0^2}\,'' + \frac{\mu\, u_0 \Delta T}{L_0 c_p \rho_0 T_0}\frac{u_0}{u_0}\,'' + \frac{k}{L_0 c_p \rho_0 u_0}\frac{\mu}{\mu}$$

$$\frac{1}{St}\rho^*\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \rho^*(\bar{u}^*\cdot\bar{\nabla}^*)T^* = \frac{Ec}{St\,Ru}\frac{\partial p^*}{\partial t^*} + \frac{Ec}{Ru}(\bar{u}^*\cdot\bar{\nabla}^*)p^* + \frac{Ec}{Re}\varphi^* + \frac{1}{Re\,Pr}\nabla^{2*}T^*$$

7 GRUPPI ADIMENSIONALI (INDIPENDENTI)

(5) $Fr = \frac{u_0^2}{g L_0} = \frac{\text{FORZE D'INERZIA}}{\text{FORZE DI MASSA}}$ FROUDE | (6) $Re = \frac{u_0 \rho_0 L_0}{\mu} = \frac{\text{FORZE D'INERZIA}}{\text{FORZE VISCOSE}}$ | (7) $Pr = \frac{c_p \mu}{k} = \frac{\text{DIFF. CINEMATICA}}{\text{DIFF. TERMICA}}$

$Ec = \frac{u_0^2}{c_p T_0}$ $\qquad Gr = \frac{g\beta\rho_0^2\Delta T_0 L_0^3}{\mu^2}$ $\qquad Nu = -\frac{\lambda L_0}{k}$ CONVEZIONE

SOLUZIONI ASINTOTICHE

FLUSSI STAZIONARI $\to \frac{1}{St} \ll 1$, $(St \to \infty)$ TUTTI TERMINI DI DERIVATE TEMPORALI POSSONO ESSERE TRASCURATI

FLUSSI BAROTROPICI $\to \beta\Delta T \ll 1$, PER GAS PERFETTI $\frac{\Delta T}{T_0} \ll 1 \Rightarrow \rho = \rho(p)$

FLUSSI TERMOTROPICI $\to \alpha p_0 \ll 1$, PER GAS PERFETTI $\frac{\gamma M_0^2}{Ru} \ll 1 \Rightarrow \rho = \rho(T)$

FLUSSI INCOMPRESSIBILI $\to \beta\Delta T \ll 1$, $\alpha p_0 \ll 1 \Rightarrow \bar{\nabla}\cdot\bar{u} = 0$

FLUSSI CON FORZE DI MASSA TRASCURABILI $\to \frac{1}{Fr} \ll 1$, $Fr \to \infty$

FLUSSI EULERIANI $\to \frac{1}{Re} \ll 1$, $Re \to \infty$; FENOMENO GOVERNATO DALLE FORZE D'INERZIA E PRESSIONE

FLUSSI STOKESIANI $\to \frac{1}{Re} \gg 1$, $Re \to 0$; FENOMENO GOVERNATO DALLE FORZE VISCOSE E DI PRESSIONE

DIPENDENZA M_0:

$M_0 < 0{,}3$ TRASCURABILE | $0{,}3 < M_0 < 0{,}8$ DIPENDENZA NON TRASCURABILE | $0{,}8 < M_0 < 1{,}2$ REGIME TRANSONICO, DIPENDENZA IMPORTANTE | $1{,}2 < M_0 < 4$ SUPERSONICO | $M_0 > 4$ FLUSSO IPERSONICO

DEF. STRATO LIMITE = STRATO VISCOSO VICINO ALLA PARETE DEL CORPO

FLUSSI EULERIANI ($Re \to \infty$)

DUE CASI:

1. FLUSSI ATTACCATI CON EFFETTI DELLA VISCOSITÀ RELEGATI IN SOTTOREGIONI PICCOLE (STRATI LIMITE, SCIE) IN CUI IL FLUSSO È VORTICOSO ED AMPI SPAZI DEL CAMPO DOVE NON SI RISENTONO GLI EFFETTI DELLA VISCOSITÀ E IN CUI IL FLUSSO È CONSIDERATO IRROTAZIONALE

2. FLUSSI CON PRESENZA DI DISTACCHI ED AMPIE RICIRCOLAZIONI (PROFILI STALLATI, FLUSSI A VALLE CORPI TOZZI), LE DIMENSIONI DELLE REGIONI ROTAZIONALI SONO CONFRONTABILI CON LE DIMENSIONI DELLE REGIONI IRROTAZIONALI. NON SI PUÒ USARE MODELLO IRROTAZIONALE

FLUSSI POTENZIALI, INCOMPRESSIBILI, NON VISCOSI, IRROTAZIONALI (CONSERVATIVITÀ DELLE F_{massa}) [LA SOTTOREGIONE ROTAZIONALE SI STUDIERÀ IN SEGUITO]

Eq. C.d.m.

$$\frac{1}{St}\left[-\frac{\Delta T}{T_0}\cancel{\left(\frac{\partial T^*}{\partial t^*}\right) + \gamma\frac{M_0^2}{Ru}\left(\frac{\partial p^*}{\partial t^*}\right)}\right] + \left[-\frac{\Delta T}{T_0}\cancel{(\bar{u}^*\cdot\bar{\nabla}^*)T^* + \gamma\frac{M_0^2}{Ru}(\bar{u}^*\cdot\bar{\nabla})p^*}\right] + \bar{\nabla}^*\cdot\bar{u}^* = 0$$

QUESTA È L'EQ. C.d.m. ADIMENSIONALIZZATA $\Rightarrow$ CONSIDERO FLUSSO TERMOTROPICO E BAROTROPICO CHE MI DÀ FLUSSO INCOMPRESSIBILE $\Rightarrow$

CONSIDERO $\gamma\frac{M_0^2}{Ru} \ll 1$ e $\frac{\Delta T}{T_0} \ll 1 \Rightarrow \boxed{\bar{\nabla}\cdot\bar{u} = 0}$ EQ. C.d.m.

Eq. DI STATO:

$\rho = \rho_0$ VISTA L'INCOMPRESSIBILITÀ

Eq. Q.D.M.

$$\rho\frac{D\bar{u}}{Dt} = \rho\bar{g} - \bar{\nabla}p + \frac{\mu}{3}\bar{\nabla}(\bar{\nabla}\cdot\bar{u}) + \mu\nabla^2\bar{u} \Rightarrow$$ IN FORMA ADIMENSIONALE $\Rightarrow$

$$\frac{1}{St}\left(\rho^*\frac{\partial\bar{u}^*}{\partial t^*}\right) + \rho^*(\bar{u}^*\cdot\bar{\nabla}^*)\bar{u}^* = -\frac{1}{Ru}\bar{\nabla}^*p^* + \frac{1}{Fr}\rho^*\frac{\bar{g}}{g} + \frac{1}{Re}\nabla^{2*}\bar{u}^* + \frac{1}{3Re}\bar{\nabla}^*(\bar{\nabla}^*\cdot\bar{u}^*) \to$$ PER $Re \to \infty$, $Fr \to \infty$ $\Rightarrow \rho\frac{D\bar{u}}{Dt} = -\bar{\nabla}p$

$\Rightarrow \frac{D\bar{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\bar{\nabla}p$ DOVE HO CONSIDERATO $Re \to \infty$ PER LA NON VISCOSITÀ E $Fr \to \infty$ PER LE FORZE DI MASSA CONSERVATIVE

LE 3 CONDIZIONI: INCOMPRIMIBILITÀ, NON VISCOSITÀ E CONSERVATIVITÀ DELLE FORZE DI MASSA PER LORD KELVIN DANNO:

SE $\bar{w}(\bar{x}, t=0) = 0 \Rightarrow \bar{w}(\bar{x}, t) = 0$ PER IL TEOREMA DI STOKES $\iint_S \bar{w}\cdot\bar{n}\,ds = \oint_C \bar{u}\cdot d\bar{l} \Rightarrow \Gamma(t=0) = \oint_C \bar{u}\cdot d\bar{l} = 0\ \forall C$

QUESTO VUOL DIRE CHE LA VORTICITÀ È NULLA.

Pag.16

SE $\bar{\omega} \neq 0 \Rightarrow$ SI AVREBBE $\Gamma \neq 0$, CHE È IMPOSSIBILE. DETTO CIÒ È EVIDENTE CHE $\bar{\nabla}\varphi = \bar{u}$ POICHÉ RISPETTA LA CONDIZIONE DI $\bar{\omega} = 0$, INFATTI $\bar{\nabla} \times \bar{\nabla}\varphi = 0$.

VISTO CIÒ, LA SOSTITUISCO NELL'EQ. DELLA C.d.m.: $\bar{\nabla}\cdot\bar{u} = 0 \Rightarrow \bar{\nabla}\cdot\bar{\nabla}\varphi = 0 \Rightarrow \nabla^2\varphi = 0$ EQ. LAPLACE PER POTENZIALE DI VELOCITÀ φ.

EQ. DI φ + C.C. SONO LINEARI È VALE IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE (POICHÉ È UN OPERATORE DIFFERENZIALE).

NELL'EQ. DI LAPLACE NON COMPARE ESPLICITAMENTE IL TEMPO, PERCIÒ VALE ANCHE PER IL CASO NON STAZIONARIO. CONVIENE SCRIVERE LE EQ. NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO SOLIDALE CON L'ARIA (SRA). HO: $\bar{u} = 0$ E $\varphi = 0$ ALL'INFINITO

COSÌ FACENDO IL POTENZIALE φ E LA VELOCITÀ $\bar{u}$, SARANNO SOLO QUELLI RELATIVI ALLA PERTURBAZIONE DOVUTA ALLA PRESENZA DEL CORPO (POTENZIALE DI PERTURBAZIONE).

POTENZIALE COMPLETO = SOVRAPPOSIZIONE DEL POTENZIALE DELLA CORRENTE UNIFORME φ_∞ + POTENZIALE DI PERTURBAZIONE φ DOVUTO AL CORPO.

DA NOTARE: IL SISTEMA DELLE EQ. C.d.m. E Q.D.M. AVEVANO 4 EQ. DIFFERENZIALI IN 4 INCOGNITE (ρ, u_i) NON LINEARI E NON STAZIONARIE ED IN 4 VARIABILI INDIPENDENTI (x_i, t). MENTRE L'EQ. DI LAPLACE È UN'EQ. DIFFERENZIALE LINEARE SOLO NELLO SPAZIO (x_i, VARIABILE INDIPENDENTE) CON L'INCOGNITA φ. PER VALUTARE LA VELOCITÀ NOTI φ E φ_∞ USERÒ $\bar{\nabla}\varphi = \bar{u}$, MENTRE PER LA PRESSIONE AVRÒ L'EQ. DI BERNOULLI.

C.C.

$\varphi = 0 \rightarrow$ POTENZIALE DI PERTURBAZIONE NULLO ALL'∞

VELOCITÀ ASSEGNATA AL CORPO

NELLE EVENTUALI APERTURE (GETTI, UGELLI), CONDIZIONI DI SALTO PIÙ COMPLESSE SULLA SCIA

NELLA SRA CONSIDERO PUNTO P, DISTANTE R DAL CORPO

ALL'∞

$R \to \infty \Rightarrow \lim_{R\to\infty} \varphi = 0$

$\bar{u}$ = VELOCITÀ FLUIDO (INCOGNITA)

CONDIZIONI A CONTORNO FISICHE SULLA SUPERFICIE DEL CORPO

IMPERMEABILITÀ, IN QUANTO SI NECESSITA DI UNA SOLA C.C. E SI PRENDE QUELLA RIGUARDANTE $\bar{u}\cdot\bar{n}$ E NON QUELLA SU COMPONENTE TANGENZIALE DELLA VELOCITÀ $\bar{u}\cdot\bar{\tau}$ $\quad$ PROP. $\bar{a}\cdot\bar{\nabla}b = \frac{\partial b}{\partial a}$

$(\bar{u}-\bar{u}_c)\cdot\bar{n} = 0 \Rightarrow \bar{u}\cdot\bar{n} = \bar{u}_c\cdot\bar{n} \Rightarrow \bar{n}\cdot\bar{\nabla}\varphi = \bar{u}_c\cdot\bar{n} \Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \bar{u}_c\cdot\bar{n}$

u_c = VELOCITÀ CORPO SOLIDO, NOTA

QUINDI DEVO RISOLVERE

$\nabla^2\varphi = 0$ CON C.C. $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \bar{u}_c\cdot\bar{n}$ SUL CORPO, $\varphi = 0$ ALL'∞

POTENZIALE DI CORRENTE UNIFORME $\rightarrow$ IMPORTANTE È IL POTENZIALE PRODOTTO DA UNA CORRENTE UNIFORME CON ANGOLO DI INCIDENZA α E VELOCITÀ $\bar{u}_\infty$

POTENZIALE $\underset{\text{ALL'INFINITO}}{\varphi_\infty} = u_\infty(x\cos\alpha + y\sin\alpha)$ CHE È UNA SOLUZIONE DI $\nabla^2\varphi = 0$; INFATTI:

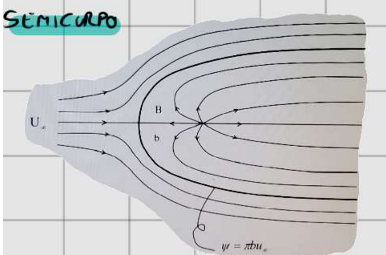
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\varphi_\infty}{\partial x} &= u_\infty\cos\alpha \quad \frac{\partial^2\varphi_\infty}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial\varphi_\infty}{\partial y} &= u_\infty\sin\alpha \quad \frac{\partial^2\varphi_\infty}{\partial y^2} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \nabla^2\varphi_\infty = 0$$

SOVRAPPOSIZIONE DI SOLUZIONI SINGOLARI IN 2D

I FLUSSI POTENZIALI SONO GOVERNATI DALL'EQ. DI LAPLACE CHE, ESSENDO LINEARE, PERMETTE LA SOVRAPPOSIZIONE DELLE VARIE SOLUZIONI PARTICOLARI/SINGOLARI. PRENDO IN CONSIDERAZIONE UN FLUSSO NON VISCOSO, OGNI LINEA DI CORRENTE PUÒ ESSERE CONSIDERATA COME UN CONTORNO SOLIDO IMPERMEABILE (IN QUANTO LA VELOCITÀ È TANG.). LA SOVRAPPOSIZIONE DELLE SOLUZIONI POTENZIALI PUÒ ESSERE USATA PER DETERMINARE LE LINEE DI CORRENTE INTORNO AI CORPI DI DIVERSA FORMA CON PARETI IMPERMEABILI.

ESEMPI CLASSICI

SEMICORPO



CONSIDERO LA SOVRAPPOSIZIONE TRA UN FLUSSO UNIFORME ORIZZONTALE $(\alpha = 0)$ ED UNA SORGENTE

ψ = FUNZIONE CORRENTE $= U_\infty r\sin\theta + \frac{m}{2\pi}\theta$; ESSENDO $U_\infty y = U_\infty r\sin\theta$

φ = POTENZIALE $= U_\infty r\cos\theta + \frac{m}{2\pi}\ln r$ e COMPONENTI DI VELOCITÀ $\begin{cases} v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = U_\infty\cos\theta + \frac{m}{2\pi r} \\ v_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -U_\infty\sin\theta \end{cases}$

DALLA CONDIZIONE DI RISTAGNO IN B, SI DETERMINA L'INTENSITÀ DELLA SORGENTE ED IL VALORE DELLA FUNZIONE DI CORRENTE CHE DELIMITA IL SEMI(CORPO) SOLIDO

LUNGO ASSE X

$u_r = \frac{m}{2\pi x} - U_\infty$; SI AVRÀ UN PUNTO DI RISTAGNO PER $x = \frac{m}{2\pi U_\infty} = b$ E $m = 2\pi b U_\infty$, $(u_r = 0)$. PER CUI $r = b$

Pag.17

E $\theta=\pi$ SI HA $\psi=\frac{m}{2}=\pi b u_\infty$. RICAVO UN'EQ. PARAMETRICA DEL TIPO $r=f(\theta)$ CHE DÀ L'EQ. DEL CORPO SOLIDO NEL RIFERIMENTO (r,θ)

$$U_\infty = r\,\mathrm{sen}\,\theta + bU_\infty\theta = \pi b U_\infty \Rightarrow r=\frac{b(\pi-\theta)}{\mathrm{sen}\,\theta} \quad \text{CON } \theta\in[0,2\pi]$$

QUESTO RAPPRESENTA L'EQ. DELLA LINEA DI CORRENTE PASSANTE PER IL PUNTO DI RISTAGNO E RAPPRESENTA IL CONTORNO DEL SEMICORPO. PONENDO $\psi=\cos t$, AL VARIARE DELLA COSTANTE, SI OTTENGONO LE ALTRE LINEE DI CORRENTE

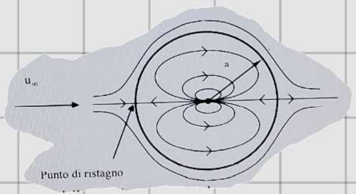
PER COMPLETARE LA DESCRIZIONE GEOMETRICA DEL SEMICORPO, DETERMINIAMO L'AMPIEZZA DEL CORPO PER $x\to\infty$ E $\theta\to 0$ O $\theta\to\infty$ => AMPIEZZA DEL SEMICORPO TENDE A $\pm b\pi$

ALL'ESTERNO DEL CORPO NON CI SONO SINGOLARITÀ, LA SORGENTE SINGOLARE È DENTRO IL CORPO

DA UN PUNTO DI VISTA INGEGNERISTICO È IMPORTANTE LA DETERMINAZIONE DELLE FORZE CHE AGISCONO SUL CORPO (EFFETTI AERODINAMICI) E NON IL CAMPO DI VELOCITÀ PRODOTTO DA LUI. DALLA FUNZIONE DI CORRENTE CHE DELIMITA IL CONTORNO DEL CORPO, SI POSSONO CALCOLARE LE COMPONENTI DI VELOCITÀ E QUINDI IL MODULO. NOTA LA VELOCITÀ SI PUÒ DETERMINARE LA PRESSIONE IN OGNI PUNTO APPLICANDO BERNOULLI TRA UN PUNTO ALL'INFINITO ED UNO D'INTERESSE: $P_\infty+\frac{1}{2}\rho U_\infty^2=P+\frac{1}{2}\rho U^2$.

NOTA LA PRESSIONE SULLA SUPERFICIE DEL CORPO, QUESTA PUÒ ESSERE INTEGRATA PER TROVARE LE FORZE AERODINAMICHE RISULTANTI, PORTANZA E RESISTENZA DI FORMA. PROCEDURA UTILE PER SIMULARE I FLUSSI ATTORNO AD OSTACOLI POSTI IN CORRENTI UNIFORMI RICORDANDO I LIMITI LEGATI ALLA VISCOSITÀ TRASCURATA. L'USO DEL POTENZIALE DÀ RISULTATI BUONI SU CORPI AFFUSOLATI (PROFILI, FUSOLIERE...) PERCHÉ L'EFFETTO DELLA VISCOSITÀ NELLA REALTÀ È IMPORTANTE SOLO NELLO STRATO LIMITE.

CILINDRO CIRCOLARE IN UNA CORRENTE UNIFORME



COMBINO UNA DOPPIETTA CON UN FLUSSO UNIFORME

$\psi=U_\infty r\,\mathrm{sen}\,\theta-\frac{K\,\mathrm{sen}\,\theta}{r}$ $\quad \varphi=U_\infty r\cos\theta+\frac{K\cos\theta}{r}$

PER DETERMINARE L'INTENSITÀ DELLE DOPPIETTE IMPONGO LE CONDIZIONI A CONTORNO PER $r=a$, $\theta=\pi$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=-\frac{\partial\varphi}{\partial r}=-\left(U_\infty\cos\theta-K\frac{\cos\theta}{r^2}\right)=0 \quad \text{DOVE } K=U_\infty r^2$$

PER $r=a$ (r RAGGIO CILINDRO), SI DEVE AVERE $\psi=\cos t$, ED ESSENDO UN CORPO CHIUSO $\psi=0$. CON $\psi=\left(U_\infty-\frac{K}{r^2}\right)r\,\mathrm{sen}\,\theta$, SI HA $\psi(a)=0$ PER $U_\infty-\frac{K}{a^2}=0$, DA CUI $K=U_\infty a^2$ (INTENSITÀ DELLA DOPPIETTA), CHE CONFERMA $\to \psi=U r\,\mathrm{sen}\,\theta\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)$

$$\varphi=U r\cos\theta\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)$$

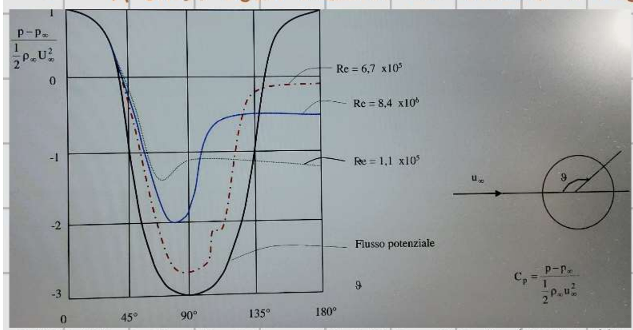
LE COMPONENTI DELLA VELOCITÀ SONO: $u_r=\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=U\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta$; $u_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=-\frac{\partial\psi}{\partial r}=-U\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\mathrm{sen}\,\theta$

SULLA SUPERFICIE DEL CILINDRO $(r=a)\Rightarrow u_r=0$

$u_\theta=-2U\,\mathrm{sen}\,\theta \Rightarrow \text{MAX } u \to \theta=\pm\frac{\pi}{2}$ PER CUI $|u_\theta|=2U_\infty$, CIOÈ LA VELOCITÀ MASSIMA È 2 VOLTE LA VELOCITÀ ALL'∞. LA PRESSIONE SULLA SUPERFICIE DEL CILINDRO (P_s) PUÒ ESSERE OTTENUTA CON EQ. DI BERNOULLI,

$P_\infty+\frac{1}{2}\rho U_\infty^2=P_s+\frac{1}{2}\rho u_s^2$, POICHÉ $u_\theta=-2U_\infty\,\mathrm{sen}\,\theta$ SI HA $P_s=P_0+\frac{1}{2}\rho U_\infty^2(1-4\,\mathrm{sen}^2\theta)\Rightarrow C_p=\frac{P_s-P_0}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2}=(1-4\,\mathrm{sen}^2\theta)$

QUESTA DISTRIBUZIONE È IN BUON ACCORDO CON I DATI SPERIMENTALI SOLO NELLA REGIONE A MONTE DEL CILINDRO MA NON A VALLE DEL PUNTO DI MASSIMO SPESSORE (EFFETTO STRATO LIMITE, SPESSORE DELLA SCIA) PERCHÉ NELLA REALTÀ IL FLUSSO SI COMPORTA IN MODO DIVERSO A CAUSA DELLA PRESENZA DEI OSTACOLI IN PRESENZA DI GRADIENTI DI PRESSIONE AVVERSA.



CONFRONTO TRA C_p DELLA SOLUZIONE POTENZIALE E QUELLO OTTENUTO A DIVERSI Re. NOTA LA PRESSIONE SULLA SUPERFICIE, DETERMINO LE FORZE AGENTI SUL CORPO:

$$F_x=-\int_0^{2\pi}P_s\cos\theta\, a\, d\theta$$
$$F_y=-\int_0^{2\pi}P_s\,\mathrm{sen}\,\theta\, a\, d\theta$$

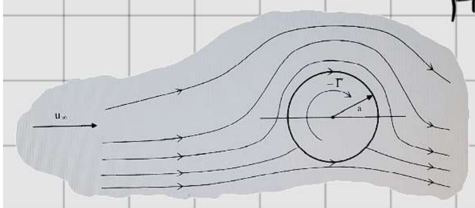
SI TROVA CHE

$F_x=F_y=0$ = PARADOSSO DI D'ALAMBERT, IL QUALE AFFERMA CHE UN CORPO INVESTITO DA UN FLUIDO INCOMPRESSIBILE, NON VISCOSO, IN MOTO STAZIONARIO, SUBISCE FORZE A RISULTANTE NULLA.

DIMOSTRAZIONE VISTA SOSTENIBILE PER UN CORPO DI FORMA QUALSIASI, SOSTITUENDO AL CORPO UNA DISTRIBUZIONE OPPORTUNA DI SORGENTI E POZZI.

OVVIAMENTE È NECESSARIO INTERVENIRE SIA A LIVELLO FISICO-GEOMETRICO SUL CORPO (CON INTRODUZIONE DI PUNTI ANGOLOSI/CUSPIDI AL BORDO DI USCITA DEI PROFILI), SIA SUL MODELLO MATEMATICO CORRISPONDENTE, PER OTTENERE LE INFORMAZIONI SULLE FORZE

CILINDRO ROTANTE (PRODUZIONE PORTANZA)



Γ = CIRCOLAZIONE DEL VORTICE

SI SOMMA UN VORTICE LIBERO AL CAMPO DEL CILINDRO

$$\psi = U_\infty r\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta - \Gamma\frac{\ln r}{2\pi} \quad ; \quad \varphi = U_\infty r\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta + \Gamma\frac{\theta}{2\pi}$$

QUANDO $r=a$ SI HA UNA LINEA DI CORRENTE CHE PUÒ ESSERE CONSIDERATA IL CONTORNO DEL CILINDRO SOLIDO. LA VELOCITÀ TANGENZIALE SULLA SUPERFICIE DEL CILINDRO $(r=a)$ È: $u_\theta = -2U_\infty \sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi a}$. IN QUESTO CASO IL FLUSSO RAPPRESENTA UN CILINDRO CHE RUOTA IN UN FLUIDO VISCOSO. APPLICO BERNOULLI

$$P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 = P_s + \frac{1}{2}\rho\left[-2U\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi a}\right]^2 \Rightarrow \text{RICAVO } P_s \text{ E CALCOLO FORZE } \quad F_x = 0, \quad F_y = -\rho U_\infty \Gamma$$

$\Rightarrow$ RESISTENZA NULLA E FORZA DI PORTANZA DIPENDENTE LINEARMENTE DA U_∞ E Γ

UN CORPO ROTANTE GENERA PORTANZA $\Rightarrow$ EFFETTO MAGNUS $\rightarrow$ IN QUANTO $\Gamma \propto \bar{\omega}$ E $\bar{\omega} = 2\xi$ $\rightarrow$ VELOCITÀ ANGOLARE

TEO KUTTA-JOUKOWSKY: $\bar{L} = -\rho \bar{U}_\infty \times \bar{\Gamma}$ ($\bar\Gamma \rightarrow$ CIRCOLAZIONE) HA VALIDITÀ GENERALE E VALE PER UN PROFILO ALARE QUALUNQUE

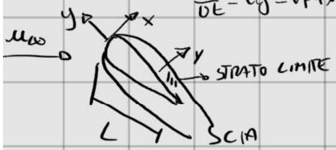
IN QUESTO CASO, LA PORTANZA SUL PROFILO È GENERATA DALLA NASCITA DI UNA CIRCOLAZIONE SULLO STESSO CHE BILANCIA (PER TEO LORD KELVIN) IL VORTICE FORMATO AL MOMENTO DELLA PARTENZA DEL PROFILO

STRATO LIMITE

A $Re \to \infty$, LE CONDIZIONI DEL FLUSSO SONO TALI CHE SEPARO LO STUDIO DEL CAMPO DI VELOCITÀ COMPLESSIVO IN: FLUSSO ESTERNO POTENZIALE E FLUSSO INTERNO VISCOSO (SEMPLIFICATO CON STRATO LIMITE NEL CASO IN CUI NON CI SIANO DISTACCHI O RICIRCOLAZIONI AD. ES. CORPI TOZZI O IN PRESENZA DI STALLO). IL FLUSSO INTERNO DIPENDE DALLE SOLUZIONI DEL FLUSSO ESTERNO, MA NON IL VICEVERSA (IN PRESENZA DI STRATO LIMITE)

PRENDO UN CILINDRO CIRCOLARE, LA CUI SOLUZIONE L'ABBIAMO TROVATA NEL FLUSSO ESTERNO. PER LA TEORIA DELLO STRATO LIMITE MI PONGO MOLTO VICINO ALLA PARETE $\Rightarrow$ EQ. SCRITTE IN COORDINATE CARTESIANE DI PARETE (LOCALI). CONSIDERO LE EQ. DI N.S. 2D PER FLUSSI INCOMPRESSIBILI E FORZE DI MASSA CONSERVATIVE E FLUSSO STAZIONARIO

$\rho\frac{D\bar{u}}{Dt} = \rho\bar{g} - \bar\nabla p + \mu\nabla^2\bar{u}$



$$\begin{cases} \rho(\bar{u}\cdot\bar\nabla)u_1 = -\frac{\partial P}{\partial x_1} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_i^2}\right) \\ \rho(\bar{u}\cdot\bar\nabla)u_2 = -\frac{\partial P}{\partial x_2} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_i^2}\right) \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 \Leftrightarrow \bar\nabla\cdot\bar{u} = 0 \end{cases}$$

$x_i = x$ E y

SCALE GEOMETRICHE: UNA LEGATA A L (CORDA DEL PROFILO), UNA LEGATA ALLO SPESSORE DELLO STRATO LIMITE δ $\Rightarrow$ MOLTO DIVERSE $\rightarrow$ PROBLEMA A DUE SCALE

Re ALTI $\rightarrow$ REGIONE ESTERNA = VISCOSITÀ TRASCURABILE $\Rightarrow$ FLUSSO POTENZIALE E IRROTAZIONALE.

$\rightarrow$ REGIONE INTERNA = DETTO STRATO LIMITE, SI RISENTE DELLA VISCOSITÀ POICHÉ CI SONO GRADIENTI ELEVATI VISTO CHE τ DEVE ESSERE FINITO E LA VELOCITÀ SI DEVE ANNULLARE ALLA PARETE

$\tau = \mu\frac{\partial u_\tau}{\partial n}$

LE Hp FATTE PER LE EQ. IN PRECEDENZA SONO:
- FLUSSO STAZIONARIO $\frac{1}{St} \ll 1 \Rightarrow St \to \infty$
- FLUSSO INCOMPRESSIBILE $\bar\nabla\cdot\bar{u} = 0$
- FORZE DI MASSA CONSERVATIVE $\frac{1}{Fr} \ll 1$ $Fr \to \infty$
- FLUSSI EULERIANI $Re \to \infty \Rightarrow \frac{1}{Re} \ll 1$

ADIMENSIONALIZZO LE EQ. DI PRIMA CON
$x' = \frac{x_1}{L}$; $y'' = \frac{x_2}{\delta}$; $v'' = \frac{u_2}{V}$; $u' = \frac{u_1}{U}$

ESSENDO δ = SPESSORE CONVENZIONALE STRATO LIMITE ALLA DISTANZA DAL BORDO D'ATTACCO PARI ALLA LUNGHEZZA L.

C.d.m.

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \frac{U}{L}\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{V}{\delta}\frac{\partial v''}{\partial y''} = 0 \Rightarrow \frac{U}{L}\frac{\delta}{V}\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v''}{\partial y''} = 0$$

E AFFINCHÉ I TERMINI SI BILANCINO $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{V}{U} = O\left(\frac{\delta}{L}\right) \Rightarrow \frac{U}{V}\frac{\delta}{L} = 1 \Rightarrow$ EQ. C.d.m. NEL NUOVO SISTEMA DI COORDINATE (x', y') DIVENTA: $\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v''}{\partial y''} = 0$

Q.D.M.

CONSIDERO L'EQ. SECONDO LA TANGENTE ALLA PARETE. $\rho(\bar{u}\cdot\bar\nabla)u_1 = -\frac{\partial P}{\partial x_1} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_i^2}\right) \Rightarrow$

$$\rho u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \rho u_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial P}{\partial x_1} + \mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \Rightarrow \text{ADIMENSIONALIZZO}$$

$$\rho\frac{U^2}{L}u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + \rho\frac{VU}{\delta}v''\frac{\partial u'}{\partial y''} = -\frac{P_0}{L}\frac{\partial P'}{\partial x'} + \frac{\mu U}{L^2}\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\mu U}{\delta^2}\frac{\partial^2 u'}{\partial y''^2}$$

CHE POSSO SCRIVERE COME $L(\bar{u}) = 0$ CON L OPERATORE DIFFERENZIALE.

FACCIO IL LIMITE $\lim_{Re\to\infty} L(\bar{u})$ BISOGNA IMPORRE CHE COMPAIA UN TERMINE VISCOSO DELL'ORDINE 1 PER BILANCIARE I TERMINI DI

INERZIA ($R_u = 1$ CIOÈ $P_0 = \rho U^2$ PERCHÉ DERIVA DAL FLUSSO POTENZIALE ESTERNO) E PORTARE LA VELOCITÀ A ZERO SULLA PARETE.

$$\lim_{Re\to\infty} L(\bar{u}) = u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v'' \frac{\partial u'}{\partial y''} + \frac{1}{R_u}\frac{\partial P'}{\partial x'} - \frac{1}{Re}\frac{L^2}{\delta^2}\frac{\partial^2 u'}{\partial y''^2} = 0$$ DOVE $Re = \frac{U\rho L}{\mu}$ $R_u = \frac{\rho u^2}{P_0}$ DOVE HO DIVISO TUTTO PER $\frac{L}{U^2\rho}$ E RACCOLTO GLI ULTIMI DUE MEMBRI PER $\frac{\mu U}{L^2}$ $\Rightarrow \lim_{Re\to\infty} \frac{L^2}{\delta^2}\frac{1}{Re} = O(1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\delta^2}{L^2} = \frac{1}{Re} \Rightarrow \delta = O\left(\frac{L}{\sqrt{Re}}\right) \Rightarrow V \propto \frac{U}{\sqrt{Re}}$ PROPORZIONALE $\Rightarrow y'' = x_2 \frac{\sqrt{Re}}{L}$ $\quad v'' = u_2 \frac{\sqrt{Re}}{U}$

CON L'ANALISI DIMENSIONALE DELLA 1° EQ. DI N.S. HO DETERMINATO LE SCALE D'INGRANDIMENTO DELLE y E VELOCITÀ NORMALI AFFINCHÉ I VALORI SIANO DELL'ORDINE DI 1: $u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + v''\frac{\partial u'}{\partial y''} = -\frac{\partial P'}{\partial x'} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y''^2}$

ORA CONSIDERO L'EQ. SECONDO LA NORMALE ALLA PARETE.

$$\rho(\bar{u}\cdot\bar{\nabla})u_2 = -\frac{\partial P}{\partial x_2} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_i^2}\right) \Rightarrow \rho u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \rho u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -\frac{\partial P}{\partial x_2} + \mu\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \mu\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \Rightarrow$$

$$\rho\frac{UV}{L} u' \frac{\partial v''}{\partial x'} + \rho\frac{V^2}{\delta} v''\frac{\partial v''}{\partial y''} = -\frac{P_0}{\delta}\frac{\partial P'}{\partial y''} + \mu\frac{V}{L^2}\frac{\partial^2 v''}{\partial x'^2} + \mu\frac{V}{\delta^2}\frac{\partial^2 v''}{\partial y''^2}$$ FACENDO IL LIM PER $Re\to\infty$ SI HA: $\frac{\partial P'}{\partial y''} = O\left(\frac{1}{Re}\right)$ CIOÈ

$$\frac{u'}{\sqrt{Re}}\frac{\partial v''}{\partial x'} + \frac{v''}{\sqrt{Re}}\frac{\partial v''}{\partial y''} = -\frac{\partial P}{\partial y''}\sqrt{Re} + \left(\frac{1}{Re^{3/2}}\frac{\partial^2 v''}{\partial x'^2} + \frac{1}{\sqrt{Re}}\frac{\partial^2 v''}{\partial y''^2}\right)$$

NELLO STRATO LIMITE IL SALTO DI PRESSIONE È DELL'ORDINE $\int_0^{\delta/L} \frac{\partial P'}{\partial y''}dy'' \Rightarrow$ IN TERMINI ADIMENSIONALI $P\left(\frac{\delta}{L}\right) - P(0) \cong \frac{1}{Re^{3/2}}$. SI OTTIENE

IL RISULTATO $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{dP}{dx} = \frac{dP_e}{dx} \Rightarrow$ PRESSIONE NON PIÙ INCOGNITA. NELLA SPERIMENTAZIONE LE PRESE DI PRESSIONE STATICA POSSONO ESSERE POSIZIONATE SULLA SUPERFICIE DEL CORPO, CIOÈ DENTRO LO STRATO LIMITE INVECE CHE ALL'ESTERNO. $\Rightarrow$

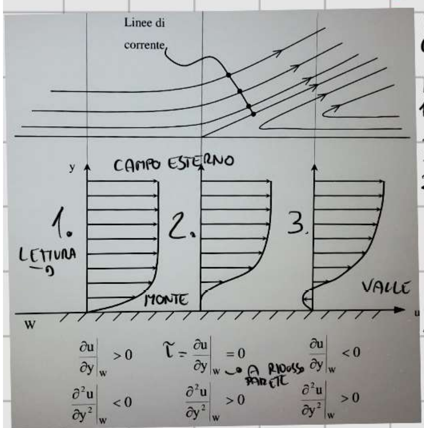
$\Rightarrow$ IL SISTEMA INIZIALE IN FORMA ADIMENSIONALE E CON LE SCALE ASSUNTE, SI RIDUCE A:

$$\begin{cases} u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + v''\frac{\partial u'}{\partial y''} = -\frac{dP_e'}{dx'} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y''^2} \\ \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v''}{\partial y''} = 0 \end{cases}$$ CHE È PARABOLICO IN QUANTO EVOLVE IN x'

CON LE C.C. + CONDIZIONI INIZIALI $\Rightarrow$ SI DIMENSIONALIZZA IL SISTEMA, CON L'EQ. DI BERNOULLI TROVO CHE:

$$\left.\frac{\partial^2 u'}{\partial y''^2}\right|_{WALL} = \frac{dP_e'}{dx'}$$

SEPARAZIONE STRATO LIMITE $\rightarrow$ QUANDO IL FLUSSO RALLENTATO NELLO STRATO LIMITE VIENE TRASPORTATO NELLA CORRENTE PRINCIPALE



NEL CASO DI CILINDRO POTENZIALE (VISTO PRIMA). NELLA REALTÀ LE LINEE DI CORRENTE NON SI COMPORTANO IN MODO SIMMETRICO E NON RIESCONO A RIUNIRSI A VALLE. ZONA DI RICIRCOLO. PERCHÉ SI SEPARA LÌ?

INGRANDISCO LA SITUAZIONE, TALMENTE TANTO DA CONSIDERARE LA PARETE DEL CILINDRO PIATTA.

1. FLUSSO ATTACCATO $\rightarrow$ TROVO DERIVATA PRIMA, INFORMAZIONE TANGENZA VELOCITÀ. INFORMAZIONE LOCALE, CAMPO INTERNO, $\tau = 0$ IN 2 (SFORZO DI TAGLIO)

3. FLUSSO DISTACCATO

2. FASE INTERMEDIA, LA SEPARAZIONE AVVIENE QUI, TANGENTE VERTICALE

$\bar{u}$ AL MURO SEMPRE 0. DERIVATA SECONDA INFORMAZIONE DAL GRAFICO, CONCAVITÀ. LETTURA DA $\bar{u}$ CRESCENTE. PER AVERE INFORMAZIONI GENERALI UTILI ALLA PRATICA, PRENDO LE EQ. DELLO STRATO LIMITE: $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \rho u\frac{\partial u}{\partial x} + \rho v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P_e}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases}$ $\rightarrow$ EQ. TANGENZA N.S. $\Rightarrow$ RAPPORTO ALLA PARETE E CONSIDERO $u = v = 0 \Rightarrow \frac{dP_e}{dx} = \mu\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_w$ DOVE P_e È FUNZIONE SOLO DI x (IN FORMA DIMENSIONALE).

RISULTATO CHE MI RAPPORTA FLUSSO ESTERNO CON INTERNO (δ).

$\bar{u}$ AUMENTA

P_{MAX} x = COORDINATA CURVILINEA (CORPI TOZZI GRADIENTI ELEVATI).

$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_w < 0 \Rightarrow$ CONDIZIONE SUFFICIENTE MA NON NECESSARIA

Pag.20

FLUSSI COMPRESSIBILI NON VISCOSI

$c=\sqrt{\gamma RT}$; $c^2=\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s$; $M_a=\frac{u_\infty}{c}$; $C_p=\frac{\gamma R}{(\gamma-1)}$; $C_v=\frac{R}{\gamma-1}$; PER TRASFORMAZIONI ISENTROPICHE $\frac{P}{\rho^\gamma}=\text{cost}$, $\frac{T}{\rho^{\gamma-1}}=\text{cost}$, $\frac{T^\gamma}{P^{\gamma-1}}=\text{cost}$

QUANDO $M_a<0{,}3$ => POSSO TRASCURARE GLI EFFETTI DELLA COMPRESSIBILITÀ

$M_a>0{,}3$ → LI DEVO CONSIDERARE GLI EFFETTI, CHE CORRISPONDE A $u=110$ m/sec => $Re\to\infty$ VISTO CHE $=10^6\div10^7$
→ FLUIDO DIVENTA VOLUMETRICAMENTE DEFORMABILE, QUINDI ELASTICO NEL SENSO CHE È IN GRADO DI PROPAGARE ONDE

PRENDO EQ. FORMA ADIMENS., APPLICO SOL. ASINTOTICHE E RIPORTO IN FORMA DIMENSIONALE

OMETTO GLI APICI

Cdm: $\cancel{\frac{1}{St}\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*}}+\bar\nabla^*\cdot(\rho^*\bar u^*)=0$

q.d.m: $\cancel{\frac{1}{St}\left(\rho\frac{\partial \bar u}{\partial t}\right)}+\rho(\bar u\cdot\bar\nabla)\bar u=-\frac{1}{R_u}\bar\nabla P+\cancel{\frac{1}{F_r}\rho\bar g}+\cancel{\frac{1}{Re}\nabla^2\bar u}+\cancel{\frac{1}{Re}\bar\nabla(\bar\nabla\cdot\bar u)}$

b.e.t: $\cancel{\frac{1}{St}\rho\frac{\partial T}{\partial t}}+\rho\bar u\cdot\bar\nabla T=\cancel{\frac{E_c}{St\,R_u}\frac{\partial P}{\partial t}}+\frac{E_c}{R_u}\bar u\cdot\bar\nabla P+\cancel{\frac{E_c}{Re}\phi}+\cancel{\frac{1}{Re\,P_r}\nabla^2 T}$

Es. $P=\rho T\frac{R_u}{\gamma M_a^2}$

$St\to\infty$; $Re\to\infty$; $Fr\to\infty$; $q=0$ → TRASCURATO GIÀ NELL'ADIMENSIONALIZZAZIONE.

C.d.m.: $\bar\nabla\cdot(\rho\bar u)=0$

q.d.m.: $\rho\bar u\cdot\bar\nabla\bar u=-\bar\nabla P$

E.S.: $P=\rho RT$

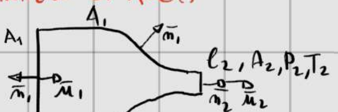
B.E.T.: $\rho C_p\bar u\cdot\bar\nabla T=\bar u\cdot\bar\nabla P$

MODELLI UNIDIMENSIONALI E QUASI-UNIDIMENSIONALI STAZIONARI

IL MODELLO (QU) TRASCURA LE COMPONENTI 2 E 3 DELLA VELOCITÀ $(u_2=u_3=0,\ u_1\neq0)$ E LE VARIAZIONI IN X_2 E X_3 DELLE VARIABILI INCOGNITE $\left(\frac{\partial}{\partial x_2}=\frac{\partial}{\partial x_3}=0\ ;\ \frac{\partial}{\partial x_1}=\frac{d}{dx_1}\neq0\right)$ E NON TRASCURA LE VARIAZIONI DI AREA SECONDO X, DELLE SEZIONI DEL CONDOTTO CONSIDERATO $\left(\frac{dA}{dx_1}\neq0\right)$

IL MODELLO (U) TRASCURA ANCHE LE VARIAZIONI DI AREA

AVENDO UN CONDOTTO: ρ_1,P_1,T_1,A_1



ρ_2,A_2,P_2,T_2 PER IL MODELLO QU, CON Hp DI FLUSSO STAZIONARIO,

SCRIVO IN FORMA INTEGRALE, **C.d.m.:** $Re\to\infty$, $Fr\to\infty$, $St\to\infty$, $q=0$

$\iiint_V\bar\nabla\cdot(\rho\bar u)\,dV=0$ => DA GREEN GAUSS HO: $\iint_S\rho\bar u\cdot\bar n\,dS=0$ => $A_1u_1\rho_1-A_2u_2\rho_2=0$ => $A_1u_1\rho_1=A_2u_2\rho_2$ => $\rho uA=\text{cost}$

Q.D.M. $\rho(\bar u\cdot\bar\nabla)\bar u=-\nabla P$ => PROIETTO SU X E TROVO: $\rho u\frac{du}{dx}=-\frac{dP}{dx}$

B.E.T. $\rho C_p(\bar u\cdot\bar\nabla)T=(\bar u\cdot\bar\nabla)P$ => PROIETTO SU X: $\rho C_p\bar u\frac{dT}{dx}=u\frac{dP}{dx}$ => SOSTITUISCO CON Q.D.M => $\rho C_p u\frac{dT}{dx}+\rho u^2\frac{du}{dx}=0$ =>

RACCOLGO $\rho u\left(C_p\frac{dT}{dx}+u\frac{du}{dx}\right)=0$ => PER $\rho u\neq0$ E $C_p=\text{cost}$ (FLUIDO CALORICAMENTE PERFETTO) DIVENTA: $C_p\frac{dT}{dx}+\frac{d\left(\frac{u^2}{2}\right)}{dx}=0$

=> $\frac{d}{dx}\left(C_pT+\frac{u^2}{2}\right)=0$ => GENERALIZZANDO E NON SCRIVENDO TRA DUE SEZIONI: $C_pT+\frac{u^2}{2}=\text{COST}$

MODELLO UNIDIMENSIONALE: SI TRASCURANO ANCHE LE VARIAZIONI DI AREA, IN QUANTO AREE ≃ UGUALI.

C.d.m.

$\bar\nabla\cdot(\rho\bar u)=0$ => $\frac{d(\rho u)}{dx}=0$ => $\rho u=\text{COST}$.

Q.D.M.

$\frac{dP}{dx}+\frac{d(\rho u^2)}{dx}=0$ => RACCOLGO $\frac{d}{dx}$ E TROVO $\rho u^2+P=\text{COST}$

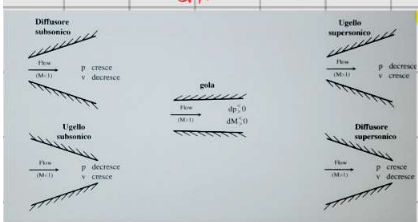
EFFETTO DI M_a SUL FLUSSO COMPRESSIBILE NEI CONDOTTI

CONSIDERO UN FLUSSO STAZIONARIO-COMPRESSIBILE QU IN UN CONDOTTO A SEZIONE DEBOLMENTE VARIABILE. CERCHIAMO DI VALUTARE LE CONDIZIONI DI FLUSSO IN FUNZIONE DELL'AREA. PRENDENDO C.d.m. E DIFFERENZIANDO DIVENTA: $\rho u\frac{dA}{dx}+\rho A\frac{du}{dx}+uA\frac{d\rho}{dx}=0$ DIVIDO PER ρuA

$\frac{1}{A}\frac{dA}{dx}+\frac{1}{u}\frac{du}{dx}+\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dx}=0$ RICORDANDO CHE $\rho u\frac{du}{dx}=-c_0^2\frac{d\rho}{dx}$ => $\frac{1}{A}\frac{dA}{dx}+\frac{1}{u}\frac{du}{dx}-\frac{u}{c_0^2}\frac{du}{dx}=0$ => $\frac{1}{A}\frac{dA}{dx}+\frac{1}{u}\frac{du}{dx}\left(1-\frac{u^2}{c_0^2}\right)=0$ =>

=> $\frac{1}{A}\frac{dA}{dx}=\frac{1}{u}\frac{du}{dx}\left(M_a^2-1\right)$ DA CUI SI OTTIENE:

- Se $M_a<1$ $\frac{dA}{dx}$ E $\frac{du}{dx}$ HANNO SEGNO OPPOSTO (SE A DIMINUISCE CON X, LA u CRESCE) => $\bar u\uparrow$ IN UN CONVERGENTE, $\bar u\downarrow$ IN UN DIVERGENTE (= CASO INCOMPRESSIBILE)
- Se $M_a>1$ $\frac{dA}{dx}$ E $\frac{du}{dx}$ HANNO STESSO SEGNO => A AUMENTA CON LA X, LA $\bar u\uparrow$ IN UN DIVERGENTE; A E $\bar u\downarrow$ IN UN CONVERGENTE
- Se $M_a=1$ => $\frac{dA}{dx}=0$ => OTTENIBILE SOLO IN UNA GOLA (CONVERGENTE DIVERGENTE)



VARIAZIONE DI TEMPERATURA TRA DUE SEZIONI PER FLUSSI QU NON ISENTROPICI

$C_pT_1+\frac{u_1^2}{2}=C_pT_2+\frac{u_2^2}{2}$ COMBINANDO CON RELAZIONI TERMODINAMICHE A INIZIO PARAGRAFO

$\frac{T_1}{T_2}=H(M_1,M_2)=\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M_2^2}{1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2}$

NON SI SONO USATE NÉ ISENTROPICHE NÉ CONDIZIONE DI UNIDIMENSIONALITÀ => VALIDITÀ GENERALE

Pag.21

FLUSSI ISOENTROPICI CON MODELLO QU

VARIAZIONE DELLA PRESSIONE TRA DUE SEZIONI $\frac{P_1}{P_2} = H^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}(M_1,M_2) = \frac{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_2^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$

VARIAZIONE DELLA DENSITÀ $\frac{\rho_1}{\rho_2} = H^{\frac{1}{\gamma-1}}$

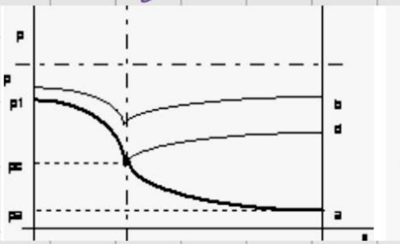
VARIAZIONE DEL M_a CON AREA DELLA SEZIONE $\frac{A_1}{A_2} = H^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}(M_1,M_2)\,\frac{M_2}{M_1}$

RELAZIONI AL RISTAGNO: VALORI AL RISTAGNO (ρ_t, P_t, T_t) QUELLI CHE SI OTTENGONO PER $M_a=0$ CIOÈ $u=0$

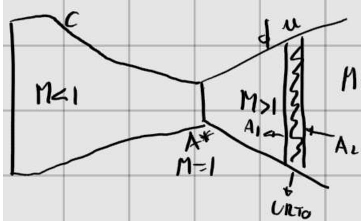
$H(M_1=M, M_2=0) = H(M) = \left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-1}$ DA CUI $\frac{P}{P^t} = H(M)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$; $\frac{\rho}{\rho^t} = H(M)^{\frac{1}{\gamma-1}}$; $\frac{T}{T_t} = H(M)$ → VALIDA ANCHE PER FLUSSI NON ISENTROPICI

RELAZIONI SONICHE (LE SEZIONI SONICHE SI INDICANO CON L'ASTERISCO, COSÌ COME LE FUNZIONI)

$H^* = \frac{\frac{1+\gamma}{2}}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}$ $\quad \frac{A}{A^*} = H^{*\,-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \cdot \frac{1}{M}$



NECESSARIO PER TRATTAZIONE URTO, NON AVVIENE SEMPRE, CI DEVONO ESSERE DELLE DETERMINATE CONDIZIONI



NOTA LA SEZIONE DI GOLA, SI PUÒ CALCOLARE SE NON VI SONO URTI, IL M_a IN QUALUNQUE SEZIONE A DEL CIRCUITO (O A NECESSARIA A REALIZZARE UN CERTO M_a) IL RAGGIUNGIMENTO DELLE CONDIZIONI SONICHE VIENE DETTO SOFFOCAMENTO (O CHOCKING), IN QUANTO LIMITA LA PORTATA IN VOLUME DEL CONDOTTO.

IL PROCESSO DI ESPANSIONE NEL PRIMO TRATTO DIVERGENTE d NON PUÒ CONTINUARE IN MODO INDEFINITO ED INFATTI NELLA SEZIONE u SI PRODUCE UN URTO CHE DÀ LUOGO AD UNA RICOMPRESSIONE LOCALIZZATA DEL FLUIDO

URTO NORMALE

OBIETTIVO: DARE UNA SPIEGAZIONE FISICA DEL MOTIVO PER CUI LE ONDE DI COMPRESSIONE DANNO LUOGO AD UN URTO (PIÙ O MENO INTENSO) MENTRE LE ONDE DI ESPANSIONE TENDONO AD ALLONTANARSI FINO A DIVENTARE PIÙ DEBOLI.

PER LA COSTRUZIONE DEL MODELLO MATEMATICO DELL'URTO NON SI POSSONO USARE LE ISOENTROPICHE IN QUANTO I PROCESSI DISSIPATIVI (AI QUALI SONO ASSOCIATI VARIAZIONI DI ENTROPIA) ASSUMONO NELL'URTO ENORME IMPORTANZA.

CON RIFERIMENTO LA FIG. SOPRA, DETERMINO LE EQ. CHE GOVERNANO IL FLUSSO IN PRESENZA DI URTO SOTTO L'IPOTESI DI UNIDIMENSIONALITÀ (POSSIBILE POICHÉ URTO HA SPESSORE INFINITESIMALE).

EQ. C.d.m. $(A_1=A_2)$ $\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$

EQ. q.d.m. + E.S. $P_1 + \frac{P_1}{RT_1}u_1^2 = P_2 + \frac{P_2}{RT_2}u_2^2$ DOVE HO SOSTITUITO ρ => $P_1\left(1+\frac{\gamma u_1^2}{\gamma RT_1}\right) = P_2\left(1+\frac{\gamma u_2^2}{\gamma RT_2}\right)$ => $\frac{P_1}{P_2} = \frac{1+\gamma M_2^2}{1+\gamma M_1^2}$ (1) =>

M_{a2}

AVENDO L'EQ. DI STATO $\frac{P_1}{P_2} = \frac{\rho_1 RT_1}{\rho_2 RT_2}$ => SOSTITUISCO ρ_1/ρ_2 CON C.d.m => $\frac{P_1}{P_2} = \frac{u_2 T_1}{u_1 T_2}$ CONSIDERO $M_a^2 = \frac{u^2}{\gamma RT}$ => $u = M_a \cdot \sqrt{\gamma RT}$ => SOSTITUISCO

$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\sqrt{\gamma RT_2}}{\sqrt{\gamma RT_1}}\frac{T_1}{T_2}\frac{M_2}{M_1}$ => $\frac{P_1}{P_2} = \frac{M_2}{M_1}\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{1/2}$ (2) => RICORDANDO LA VARIAZIONE DI T TRA DUE SEZIONI PER FLUSSI Q.U. ANCHE NON ISOENTROPICI: $\frac{T_1}{T_2} = H(M_1,M_2)$ (3) [VALIDA ANCHE IN PRESENZA DI URTI => UNENDO LE TRE OTTENGO $H^{1/2}(M_1,M_2)\frac{M_2}{M_1} = \frac{1+\gamma M_2^2}{1+\gamma M_1^2}$ DA CUI SI PUÒ RICAVARE M_2 A VALLE DELL'URTO IN FUNZIONE DI M_1 A MONTE. LA PRESSIONE A VALLE DELL'URTO È MINORE CHE A MONTE A CAUSA DELLA PERDITA VISCOSA NELL'URTO (URTO, PROCESSO IRREVERSIBILE). DA QUELL'EQ. SI POSSONO RICAVARE LE EQ. DI SALTO PER L'URTO NORMALE

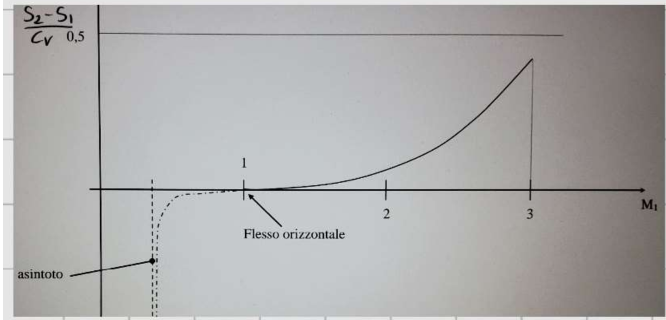
RELAZIONI DI RANKINE-HUGONIOT: DALLE RELAZIONI DI SALTO SI POSSONO DESUMERE DELLE RELAZIONI FRA RAPPORTI DI PRESSIONE, DENSITÀ E TEMPERATURA ELIMINANDO M_1. QUESTE RELAZIONI SI CHIAMANO DI RANKINE-HUGONIOT.

$\frac{T_2}{T_1} = f_1\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$; $\frac{\rho_2}{\rho_1} = f_2\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$; $\frac{P_2}{P_1} = f_3\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)$

SPESSORE URTO: SI DIMOSTRA CON CONSIDERAZIONI DI ANALISI DIMENSIONALE CHE: $Re_{urto} \approx 1$ => LO SPESSORE DELL'URTO È DELL'ORDINE DEL LIBERO CAMMINO MEDIO DELLE MOLECOLE

VARIAZIONI DELL'ENTROPIA NELL'URTO: ATTRAVERSO L'URTO C'È UNA DEGRADAZIONE DI ENERGIA MECCANICA IN ENERGIA TERMICA CHE DARÀ LUOGO AD UN AUMENTO DI ENTROPIA.

Pag.22



$\frac{S_2-S_1}{C_V} = f(M_1)$ ANDAMENTO ENTROPIA, IN $M_1 \simeq 1$ C'È UN FLESSO A TANGENTE ORIZZONTALE CHE CORRISPONDE AD URTI DEBOLI. GLI URTI DEBOLI SONO IMPORTANTI PERCHÉ DANNO LUOGO AD UNA RICOMPRESSIONE SENZA UN AUMENTO RILEVANTE DI ENTROPIA
$M<1 \rightarrow$ FENOMENI IMPOSSIBILI
$M>1$, $S_2-S_1>0 \Rightarrow P_{t_1} > P_{t_2}$ LA DIFFERENZA DI PRESSIONE TOTALE È L'ENERGIA MECCANICA PERSA NELL'URTO. (P_{t_1} E P_{t_2} RICAVATE CON FLUSSI ISOENTROPICI).
LA CONDIZIONE DI UN PASSAGGIO DA SUBSONICO A SUPERSONICO ATTRAVERSO UN SALTO DI ESPANSIONE È IMPOSSIBILE ($P_1 > P_2$, $M_1<1$, $M_2>1$), PRESSIONE DOVREBBE AUMENTARE SENZA LAVORO.

SOLUZIONI SEMPLICI DELLE EQ. DI N.S. PER FLUSSI VISCOSI INCOMPRESSIBILI:

PROBLEMA NELLA RISOLUZIONE DELLE EQ. DI N.S. STA NELLA NON LINEARITÀ DEI TERMINI CONVETTIVI $(\bar{u}\cdot\bar{\nabla})\bar{u}$ CHE RENDONO IMPOSSIBILE LA DETERMINAZIONE DI SOL. TALI TERMINI POSSONO ESSERE TRASCURATI E RISULTA POSSIBILE LA DETERMINAZIONE DELLE SOL. ESATTE, CASO FLUSSI LAMINARI. NEI FLUSSI TURBOLENTI, LA NATURA ALEATORIA DELLE FLUTTUAZIONI DI VELOCITÀ RENDI IMPOSSIBILE LA SOLUZIONE ANALITICA.

FLUSSO = COMPORTAMENTO DETERMINATO DALLE FORZE DI ATTRITO INTERNO
FLUSSO LAMINARE = GLI STRATI INFINITESIMI DI FLUIDO SCORRONO DOLCEMENTE UNO SOPRA L'ALTRO, SENZA CHE AVVENGA ALCUN RIMESCOLAMENTO, NEANCHE A LIVELLO MACROSCOPICO [$Re<1400$]

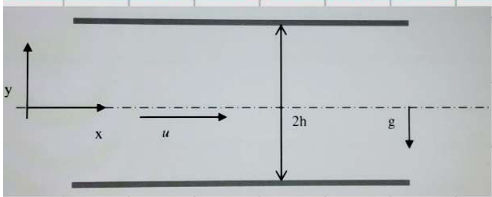
EQ. N.S. PER FLUSSI INCOMPRESSIBILI (ρ = COST.) DI FLUIDI NEWTONIANI:

$$\begin{cases} \rho \cancel{\frac{D\bar{u}}{Dt}} = -\bar{\nabla}P + \mu\nabla^2\bar{u} + \rho\bar{g} \\ \bar{\nabla}\cdot\bar{u} = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow 0$ PER STAZIONARIETÀ E INCOMPRESSIBILITÀ

$\rightarrow$ APPLICO HP:
- FORZA DI MASSA AGENTE = FORZA DI GRAVITÀ
- CONDIZIONE DI LAMINARITÀ $Re<1400$
- FLUSSO INCOMPRESSIBILE $\bar{\nabla}\cdot\bar{u}=0$
- FLUSSO STAZIONARIO $St\rightarrow\infty \Rightarrow \frac{1}{St} \ll 1$
- FLUSSO STOKESIANO $Re\rightarrow 0 \Rightarrow 1/Re \gg 1$

FLUSSO LAMINARE TRA LASTRE PIANE PARALLELE



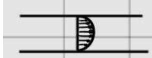
CONSIDERO DUE LASTRE PARALLELE A DISTANZA $2h$, SCELGO IL SISTEMA DI RIF. CON ASSE x PASSANTE PER L'ASSE DI SIMMETRIA DEL CONDOTTO. IL FLUSSO SI MUOVE DA SX VERSO DX IN MODO PARALLELO RISPETTO ALLE LASTRE, ED HA LA COMPONENTE LUNGO X DIVERSA DA 0.

$\bar{u} = (u,v,w) = (u,0,0) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ DA EQ. FLUSSO INCOMPRESSIBILE.

N.S. PER QUESTO CASO:
$$\begin{cases} -\partial P/\partial x + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ -\frac{\partial P}{\partial y} - g\rho = 0 \rightarrow -g\rho \text{ PER S.R.} \\ -\frac{\partial P}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

POICHÉ $\bar{u}$ DIPENDE SOLO DA $y \Rightarrow$ ANCHE $\frac{\partial}{\partial x} = 0$ DELLA DERIVATA SOSTANZ.

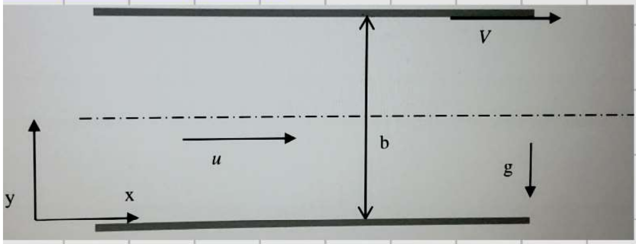
DAL SISTEMA, INTEGRANDO, SI VEDE CHE LA PRESSIONE P SI PUÒ ESPRIMERE COME: $P(x,y) = -\rho g y + f_1(x)$ DOVE $f_1(x)$ È UNA FUNZIONE ARBITRARIA DI $x \Rightarrow$ FISSATO x, LA PRESSIONE VARIA IDROSTATICAMENTE NELLA DIREZIONE y. $\Rightarrow$ SCRIVO: $\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{\mu}\frac{df_1}{dx} \Rightarrow$ INTEGRO E TROVO $u(y) = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)y^2 + C_1 y + C_2$. DOVE $\frac{\partial P}{\partial x}$ CONSIDERATO COME UNA COSTANTE NELL'INTEGRAZIONE. C_1 E C_2 RICAVABILI DA C.C.: $u=0$ PER $y=\pm h$ (LASTRE FISSE). $\Rightarrow C_1 = 0$ $C_2 = -\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)h^2 \Rightarrow$ RELAZIONE FINALE: $u(y) = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)(y^2-h^2) \Rightarrow$ PROFILO VELOCITÀ PARABOLICO.



PORTATA IN VOLUME TRA LE DUE LASTRE $Q = \int_{-h}^{h} u\,dy$. SI NOTI CHE IL TERMINE $\frac{\partial P}{\partial x}$ È NEGATIVO PER EFFETTO DELLE PERDITE, LA PRESSIONE DIMINUISCE LUNGO x.

Pag.23

FLUSSO DI COUETTE

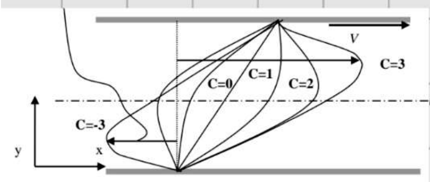


SIMILE AL FLUSSO TRA DUE LASTRE PIANE, MA CON LA DIFFERENZA CHE QUI UNA DELLE DUE LASTRE SI MUOVE PARALLELAMENTE ALL'ALTRA CON VELOCITÀ RELATIVA V. ORIGINE ASSI IN CORRISPONDENZA LASTRA INFERIORE CHE SUPPONIAMO FERMA. EQ. N.S. COME PRIMA:

$$\begin{cases} -\partial p/\partial x + \mu \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ -\dfrac{\partial p}{\partial y} - \rho g = 0 \\ -\dfrac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

MA CAMBIANO LE C.C.: $u=0$ PER $y=0$, $u=V$ PER $y=b$

TENENDO CONTO DELLE CONSIDERAZIONI FATTE SUL GRADIENTE DI PRESSIONE E TENENDO CONTO DELLE C.C., INTEGRANDO LA 1° EQ. DEL SISTEMA, HO: $u(y) = \frac{V}{b}y + \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)(y^2 - by)$ IN FORMA ADIMENSIONALE SE PONGO COST: $\frac{u(y)}{V}$; LA VELOCITÀ ADIMENSIONALE DIPENDE DALLA DISTANZA ADIMENSIONALE $\frac{y}{b}$ ATTRAVERSO IL PARAMETRO ADIMENSIONALE C. HO DIVERSI PROFILI DI VELOCITÀ.



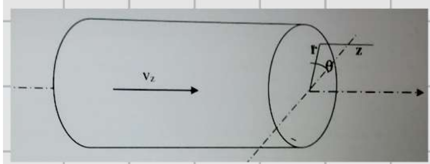
CASO PIÙ SEMPLICE $C=0$ CORRISPONDENTE A GRADIENTE DI PRESSIONE NULLO.

$C<0$ FLUIDO IN DIREZIONE NEGATIVA (GRAD.P POSITIVO CON x VINCE LA VISCOSITÀ)

ES. CASO REALE (LUBRIFICAZIONE TRA DUE CUSCINETTI).

FLUSSO DI POISEUILLE

CONSIDERO MOTO LAMINARE, ASSIALSIMMETRICO E STAZIONARIO DI UN FLUIDO ATTRAVERSO UN TUBO DI SEZIONE CIRCOLARE COSTANTE E DI RAGGIO R. DATA LA GEOMETRIA DEL PROBLEMA, SI USANO LE COORDINATE CILINDRICHE (r, θ, z). SI ASSUME $v_r = v_\theta = 0$, $v_z \neq 0$

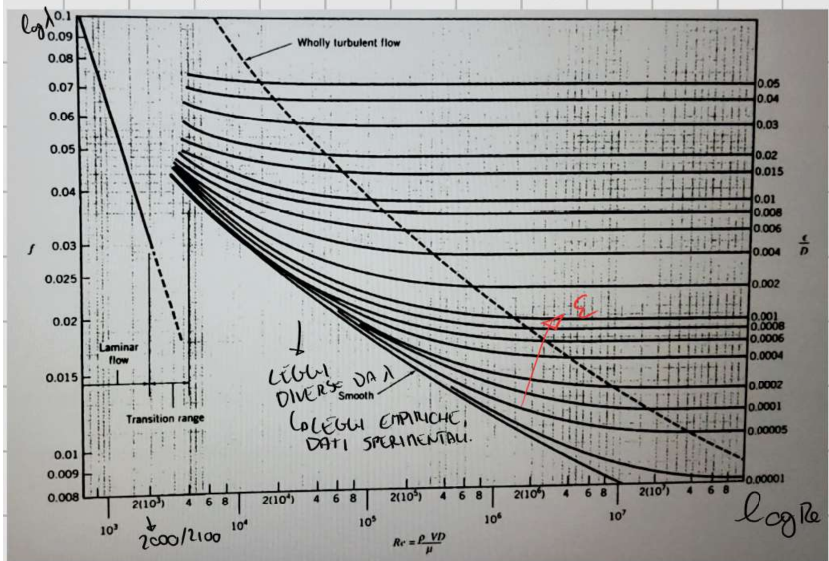


CON STESSA PROCEDURA DI PRIMA: SI SCRIVONO EQ. N.S. IN COORDINATE CILINDRICHE, SI INTEGRANO LE ULTIME DUE EQ. DEL SISTEMA E SI TROVA P. SI TROVANO LE COSTANTI CON C.C.

IL PROFILO DI VELOCITÀ È PARABOLICO; SI PUÒ OTTENERE LA LEGGE DI HAGEN-POISEUILLE $Q = \frac{\pi R^4}{8\mu}\frac{\Delta P}{\Delta L}$. INOLTRE DA QUESTO STUDIO DI FLUSSO POSSO TROVARE UNA MISURA DELLA RESISTENZA DATA DAL GRAD(P) AL MOTO DEL FLUIDO, RESISTENZA DATA DA UN PARAMETRO ADIMENSIONALE, DETTO COEFF. DI FANNING E DA UNA STIMA ADIMENSIONALE DELLE PERDITE DI CARICO DOVUTE ALL'ATTRITO. TUTTO CIÒ VALE PER FLUSSI LAMINARI.

$\lambda = \frac{64}{Re}$ LEGGE VALIDA FINO A $Re < 2100$, RICAVATA DA DATI SPERIMENTALI

DA DATI SPERIMENTALI OTTENGO IL DIAGRAMMA GENERALE, CARTA DI MOODY



PER FLUSSI LAMINARI LA RUGOSITÀ NON HA EFFETTO MENTRE DIVENTA IMPORTANTE PER FLUSSI TURBOLENTI E PER Re ELEVATI (SEMPLIFICAZIONE TERMINI NON LINEARI NON PIÙ POSSIBILE).

GRAFICO log, log.
NUMERI DI RIFERIMENTO PER FLUSSO LAMINARE.

Re AUMENTA, MAGGIORI PERDITE DI CARICO (AUMENTO VISCOSITÀ)
STUDIO CONDOTTI NON LISCI, C'È UNA RUGOSITÀ, CONDOTTO SCABROSO. RUGOSITÀ MISURATA CON $\varepsilon \rightarrow$ LUNGHEZZA MEDIA DELLE CRESTE RUGOSITÀ. A PARITÀ DI Re, PERDITE CARICO MINORI PER CONDOTTI LISCI RISPETTO A RUGOSI.
MOTORE VENTOLA PER VINCERE PERDITA DI CARICO.

COMPORTAMENTO LAMINARE → DIAGRAMMA MOODY
È EFFETTO RUGOSITÀ

Pag.24

2 Mappe Concettuali

Per facilitare il ripasso in vista dell'esame, ho realizzato un piccolo specchietto riassuntivo che consente di richiamare rapidamente i concetti principali del programma.

(E.C.M.)

$\frac{dM}{dt} = 0 \rightarrow \frac{D\rho}{Dt} + \rho \bar{\nabla} \cdot \bar{u} = 0$ (1)

(E.B.Q.D.M.)

$\frac{dq}{dt} = \bar{F}_m + \bar{F}_s \rightarrow \rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = \rho \bar{g} + \bar{\nabla} \cdot \bar{\bar{T}}$ (2) $\rightarrow$ RELAZIONI COSTITUTIVE FLUIDI NEWTONIANI $\rightarrow \rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = \rho \bar{g} - \bar{\nabla} P + \mu \nabla^2 \bar{u} + \frac{\mu}{3} \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \cdot \bar{u})$ (3)

(EQ. N.S. $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ SE $\underset{\text{COST.}}{\mu \in \lambda}$)

(E.B.E.T.)

$\frac{dE_s}{dt} = L_m + L_s + Q_m + Q_s \rightarrow \rho \frac{De}{Dt} = \underbrace{\rho q}_{Q_m} - \underbrace{\bar{\nabla} \cdot \bar{k}}_{Q_s} + \underbrace{\rho \bar{g} \cdot \bar{u}}_{L_m} + \underbrace{\bar{\nabla} \cdot (\bar{u} \cdot \bar{\bar{T}})}_{L_s}$ (4) $\rightarrow$ SCOMPONGO $\bar{\bar{T}} = -P\bar{\bar{\delta}} + \bar{\bar{\sigma}}$ $\rightarrow \rho \frac{De}{Dt} = \rho q - \bar{\nabla} \cdot \bar{k} + \rho \bar{g} \cdot \bar{u} - \bar{u} \cdot \bar{\nabla} P - P \bar{\nabla} \cdot \bar{u} + \bar{u} \cdot \bar{\nabla} \cdot \bar{\bar{\sigma}} + \bar{\nabla} \bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{u}$ (5)

EQ. DI BERNOULLI PER FLUSSI COMPRESSIBILI: (FORMA DEBOLE) $\rightarrow$ PRENDO (4) $\rightarrow$ 5 Hp:
1. FLUSSO STAZIONARIO
2. PROD. CALORE $q = 0$
3. COND. CALORE $k = 0$
4. $\bar{g}$ CONS. $\bar{g} = -\bar{\nabla} G$
5. $\bar{\bar{T}} = -P\delta_{ik}$

$\rightarrow \rho \bar{u} \cdot \bar{\nabla} e = -\rho \bar{u} \cdot \bar{\nabla} G - \bar{u} \cdot \bar{\nabla} P - P \bar{\nabla} \cdot \bar{u} \rightarrow$

$\rightarrow H = \text{ENT. TOT} = \left(\frac{u_i^2}{2} + U + G + \frac{P}{\rho}\right) = \text{COST}$ $\quad h = \frac{P}{\rho} + U = PV + U$

EQ. BILANCIO ENERGIA MECCANICA $\rightarrow$ (2) E MOLTIPLICO SCALARMENTE PER u_i $\rightarrow \rho u_i \frac{Du_i}{Dt} = \rho g_i u_i + \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} u_i \rightarrow \rho \frac{D}{Dt} \frac{\bar{u}^2}{2} = \rho \bar{g} \cdot \bar{u} + \bar{\nabla} \cdot (\bar{u} \cdot \bar{\bar{T}})$ (6)

EQ. B.E.T. IN TERMINI DI U $\rightarrow$ EQ. B.E.T.: $\rho \frac{DU}{Dt} + \rho \frac{D\bar{u}^2}{2Dt} = \rho \bar{g} \cdot \bar{u} + \bar{\nabla} \cdot (\bar{u} \cdot \bar{\bar{T}}) - \bar{\nabla} \cdot \bar{k}_i - P \bar{\nabla} \cdot \bar{u} + \bar{\nabla} \bar{u} \cdot \bar{\bar{\sigma}}$ $\rightarrow$ SOTTRAGGO (6) E TROVO: $\rho \frac{DU}{Dt} = \rho q - \bar{\nabla} \cdot \bar{k} + \underbrace{\bar{\nabla} \bar{u} \cdot \bar{\bar{\sigma}}}_{\mu \varphi^2} - P \bar{\nabla} \cdot \bar{u}$ (7)

EQ. B.E.T. IN TERMINI DI T $\rightarrow$ PRENDO (7) E RICORDANDO (RELAZIONI COSTITUTIVE). $dU = C_v dT$ E $\bar{k} = k \bar{\nabla} T$ $\rightarrow \rho C_v \frac{DT}{Dt} = \rho q - P \bar{\nabla} \cdot \bar{u} + \mu \varphi^2 - k \nabla^2 T$

EQ. B.E.T. IN TERMINI DI h $\rightarrow \rho \frac{Dh}{Dt} = \rho q + \frac{DP}{Dt} + \mu \varphi^2 + k \nabla^2 T \rightarrow dh = C_p dT \rightarrow \rho C_p \frac{DT}{Dt} = \rho q + \frac{DP}{Dt} + k \nabla^2 T + \mu \varphi^2$

EQ. B.E.T. IN TERMINI DI S $\rightarrow \rho T \frac{ds}{dt} = \rho q + \mu \varphi^2 - \bar{\nabla} \cdot \bar{k}$

ACCELERAZIONE DI LAGRANGE $\rightarrow \frac{D\bar{u}}{Dt} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{u} + \bar{\nabla} \frac{\bar{u}^2}{2}$ (8)

TEO TRASPORTO DELLA VORTICITÀ (FLUSSI INCOMPRESSIBILI) $\rightarrow$ PRENDO (3) + 2 Hp: $\bar{\nabla} \cdot \bar{u} = 0$, $\bar{g} = -\bar{\nabla} G$ $\rightarrow \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \rho \bar{u} \cdot \bar{\nabla} \bar{u} = -\rho \bar{\nabla} G - \bar{\nabla} P + \mu \nabla^2 \bar{u}$ $\rightarrow$ APPLICO $\bar{\nabla} \rightarrow \rho \frac{D\bar{\omega}}{Dt} = \mu \nabla^2 \bar{\omega} + \rho \bar{\omega} \cdot \bar{\nabla} \bar{u}$

$\hookrightarrow$ ALTRIMENTI CON (8) APPLICO $\bar{\nabla} \times \rightarrow \mu \nabla^2 \bar{\omega} = \rho \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} + \bar{\nabla} \times (\bar{\omega} \times \bar{u})\right)$

EQ. BERNOULLI FLUSSI INCOMPRESSIBILI E ROTAZIONALI $\rightarrow$ (3) + 5 Hp: $\bar{\nabla} \cdot \bar{u} = 0$, $\bar{g} = -\bar{\nabla} G$, FORZE VISCOSE TRASCURABILI, FLUSSO STAZIONARIO, FORZE PRESSIONE CONSERVATIVE $\rightarrow \rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = -\rho \bar{\nabla} G - \bar{\nabla} P +$ (8) $\rightarrow \bar{\nabla}\left(\frac{\bar{u}^2}{2} + G + \frac{P}{\rho}\right) = -\bar{\omega} \times \bar{u} \rightarrow H_m = \left(\frac{u^2}{2} + G + \frac{P}{\rho}\right)$ (9)

TEO KELVIN THOMPSON $\rightarrow \Gamma = \oint_C \bar{u} \cdot d\bar{l} + \frac{D\Gamma}{Dt} \rightarrow$ (3) $+ \nabla \oint_C \left(\frac{u^2}{2}\right) \cdot dl \rightarrow$ 4 Hp:
- FORZE VISCOSE TRASC.
- $\bar{\nabla} P = \nabla \int \frac{dP}{\rho}$ BAROTROPICO
- $\bar{g} = -\bar{\nabla} G$
- SE VALE $\Gamma = \oint_C \bar{u} \cdot d\bar{l}$

$\Rightarrow$ (9) $\rightarrow \frac{D\Gamma}{Dt} = 0$

1° TEO HELMHOLTZ $\rightarrow \Gamma = \iint_S \bar{\omega} \cdot \bar{n} \, ds = \iiint_V \bar{\nabla} \cdot \bar{\omega} \, dV = 0 \rightarrow \Gamma_1 = \Gamma_2$ INTENSITÀ VORTICE INVARIABILE LUNGO DI ESSO

2° TEO HELMHOLTZ $\rightarrow$ PARTICELLE DI FLUIDO ALL'INTERNO DI UN VORTICE FANNO PARTE SEMPRE DI ESSO

3° TEO HELMHOLTZ $\rightarrow \Gamma$ INVARIABILE NEL TEMPO $\rightarrow$ CONFERMA TEO KELVIN THOMPSON

$St = L = \frac{u_0 t_0}{L_0}$; $Ma^2 = V = \frac{u_0^2}{c^2}$; $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$; $Ru = P = \frac{u_0^2 \rho_0}{P_0}$; $Fr = V^2 = \frac{u_0^2}{g L_0}$; $Re = M = \frac{\rho_0 u_0 L_0}{\mu}$; $Pr = \frac{c_p \mu}{K}$; $Ec = \frac{u_0^2}{c_p T_0}$

FLUSSO EULERIANO INCOMPRESSIBILE $\frac{1}{Re} << 1$

FLUSSO POTENZIALE $\rightarrow$ 3 Hp:
- FORZE VISCOSE TRASC.
- FORZE MASSA TRASC.
- FLUSSO INCOMP.

$\rightarrow \rho = \rho_0$, $\bar{\nabla} \cdot \bar{u} = 0$, $\frac{D\bar{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \bar{\nabla} P$ $\rightarrow$ COND. KELVIN + $\bar{u} = \bar{\nabla} \varphi$ $\rightarrow \nabla^2 \varphi = 0$ (EQ. LAPLACE) $+ C.C. \rightarrow$ SOVRAPPOSIZIONE EFFETTI

$\downarrow$

$\varphi_\infty = u_\infty (x \cos\alpha + y \sin\alpha)$
- SEMICORPO
- CILINDRO: $F_x = F_y = 0$ D'ALAMBERT
- CILINDRO ROTANTE: $F_x = 0$, $F_y = -\rho \bar{U}_\infty \Gamma$ KUTTA JUKOWSKY, $\bar{L} = -\rho \bar{U}_\infty \times \bar{\Gamma}$

STRATO LIMITE $\rightarrow$ 4 Hp:
- FLUSSO INCOMP.
- FLUSSO STAZ.
- FORZE MASSA CONS.
- FLUSSO EULERIANO

$\rightarrow$ EQ. IN 2D COORDINATE LOCALI $\rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \\ \rho \bar{u} \cdot \bar{\nabla} u_1 = -\bar{\nabla} P + \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_i^2} & \text{EQ. TANGENTE PARETE} \\ \rho \bar{u} \cdot \bar{\nabla} u_2 = -\bar{\nabla} P + \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_i^2} & \text{EQ. NORMALE} \end{cases}$$

ADIMENS
- $\rightarrow \frac{U}{L} \frac{\delta}{V} = O(1)$
- $\rightarrow \lim_{Re \to \infty} \frac{L^2}{\delta^2} \frac{1}{Re} = O(1) \Rightarrow \delta = O\left(\frac{L}{\sqrt{Re}}\right)$, $V \propto \frac{U}{\sqrt{Re}}$
- $\rightarrow \int_0^{\delta/L} \frac{\partial P'}{\partial y''} dy'' \simeq \frac{1}{Re^{3/2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{dP}{dx} = \frac{dP_e}{dx}$ $\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v''}{\partial y''} = 0 \\ u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v'' \frac{\partial u'}{\partial y''} = -\frac{dP_e}{dx'} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y''^2} \end{cases}$ $\Rightarrow \frac{dP_e'}{dx'} = \frac{\partial^2 u'}{\partial y''^2}\Big|_w$

C.C. + C.I. + EQ. BERNOULLI

FLUSSO EULERIANO COMPRESSIBILE → 5Hp:

- $Ma > 0{,}3$
- $q = 0$
- $\frac{1}{Fr} \ll 1$
- $\frac{1}{St} \ll 1$
- $\frac{1}{Re} \ll 1$

→

$$\frac{P}{\rho} = RT$$
$$\bar{\nabla}\cdot(\rho\bar{u}) = 0$$
$$\rho\bar{u}\cdot\bar{\nabla}\bar{u} = -\bar{\nabla}P$$
$$\rho c_p \bar{u}\cdot\bar{\nabla}T = +\bar{u}\cdot\bar{\nabla}P$$

→ **MODELLO Q.U.:** $u_1 \neq 0$, $\frac{d}{dx_1} \neq 0$, $\frac{dA}{dx_1} \neq 0$

$$\rho u A = cost$$
$$c_pT + \frac{u^2}{2} = cost$$
$$\rho u \frac{du}{dx} = -\frac{dP}{dx}$$

→ DA N.S. + B.E.T.(A)

→ VARIAZIONI Ma CONDOTTI (C.d.m.): $\frac{1}{A}\frac{dA}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}\left(Ma^2 - 1\right)$

→ VARIAZIONI GRANDEZZE (B.E.T.): $\frac{T_1}{T_2} = H(M_1, M_2)$, $\frac{\rho_1}{\rho_2}$, $\frac{A_1}{A_2}$, $\frac{P_1}{P_2}$

→ **MODELLO U.:** $\frac{dA}{dx_1} = 0$

$$\rho u = cost$$
$$\rho\frac{u^2}{2} + P = cost \rightarrow Q.D.M.$$

→ UGELLO DI LAVAL: (NO ISOENTROPICHE) Hp $A_1 = A_2$

Q.D.M. + E.S.
E.S. + C.d.m.
$\frac{T_1}{T_2} = H(M_1, M_2)$

→ $H^{1/2}(M_1, M_2)\,\frac{M_2}{M_1} = \frac{1+\gamma M_1^2}{1+\gamma M_2^2}$ → RANKINE HUGONIOT

FLUSSO STOKESIANO: $\frac{1}{Re} \gg 1$, $Re \rightarrow 0$

→ SOL SEMPLICI N.S. 5Hp:

- $\frac{1}{Re} \gg 1$, $Re \rightarrow 0$
- $\frac{1}{St} \ll 1$, $St \rightarrow \infty$
- $\bar{g} = \bar{0}$
- FLUSSO LAMINARE $Re < 1400$
- $\bar{\nabla}\cdot\bar{u} = 0$

→
$$\begin{cases} \bar{\nabla}\cdot\bar{u} = 0 \\ -\bar{\nabla}P + \rho g + \mu\nabla^2\bar{u} = 0 \end{cases}$$

→ FLUSSO TRA LASTRE PIANE $(u, 0, 0)$, $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$

$$\begin{cases} -\partial P/\partial x + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ -\partial P/\partial y - \rho g = 0 \\ -\frac{\partial P}{\partial z} = 0 \end{cases} \Rightarrow u(y) = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)(y^2 - h^2)$$

$u = 0$, $y = \pm h$; $C_1 = 0$, $C_2 = -\frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x}h^2$

→ FLUSSO COUTTE: UNA LASTRA SI MUOVE

$$\begin{cases} -\partial P/\partial x + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ -\frac{\partial P}{\partial y} - g\rho = 0 \\ -\frac{\partial P}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

C.C. $u = 0$, $y = 0$; $u = V$, $y = h$

$$u(y) = \frac{V}{b}y + \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)(y^2 - by)$$

→ FLUSSO POISEUILLE: $\lambda = \frac{64}{Re}$, $Re < 2100$

3 Conclusioni

Spero che questo materiale vi sia stato utile tanto quanto lo è stato per me.

Affrontare il percorso universitario può essere difficile e, a volte, persino frustrante. Sono consapevole delle sfide che ognuno di noi incontra lungo il cammino, spesso non solo per motivi personali, ma anche per le difficoltà imposte dal sistema. Tuttavia, da studente, ho imparato che la perseveranza e la determinazione sono gli strumenti più preziosi per superare gli ostacoli.

Non arrendetevi mai. Credete in voi stessi, affrontate ogni difficoltà con determinazione e non perdete di vista i vostri obiettivi. L'esame che vi attende è solo un altro passo verso il traguardo che vi siete prefissati. Vi auguro di affrontarlo con fiducia e di ottenere il successo che meritate.

In bocca al lupo per il vostro futuro!

Contatti

Se riscontrate errori o imprecisioni, vi invito a segnalarmeli: sarò lieto di correggerli e migliorare questo materiale.

GitHub — LinkedIn