

Rapport

TP2 : Algèbre Linéaire Creuse

Réalisé par

**Mathilde Ferreira
Félix Foucher de Brandois**

1 Introduction

On cherche à résoudre le système linéaire : $Ax = b$ avec $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice creuse, $b \in \mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

Pour cela, nous allons étudier les méthodes directes pour la résolution de systèmes linéaires creux. Ces méthodes reposent sur des décompositions factorielles telles que la factorisation de Cholesky et la décomposition LU.

L'objectif est d'analyser l'impact des réordonnancements sur la structure des matrices et d'optimiser le nombre d'opérations nécessaires à la résolution.

Pour évaluer la qualité des solutions calculées, nous utiliserons l'erreur inverse «normwise» définie par :

$$\eta_b^N(\tilde{x}) = \frac{\|b - A\tilde{x}\|}{\|b\|}.$$

2 Nombre d'opérations de la phase de résolution

Dans le cas d'une factorisation de Cholesky d'une matrice symétrique définie positive $A = LL^T$, la résolution du système $Ax = b$ se fait par la résolution des deux systèmes linéaires triangulaires $Ly = b$ puis $L^T x = y$.

Résolution de $Ly = b$:

Pour résoudre le système $Ly = b$, on utilise une substitution avant. Si L est creuse, le nombre d'opérations est proportionnel au nombre d'éléments non nuls $\text{nnz}(L)$ de L . Chaque élément non nul de L contribue à une multiplication et une addition (soustraction) dans le processus de substitution. Ainsi, le nombre total d'opérations pour résoudre le système $Ly = b$ est approximativement :

$$\text{Flops pour } Ly = b \approx 2 \cdot \text{nnz}(L).$$

Résolution de $L^T x = y$:

Pour résoudre le système $L^T x = y$, on utilise une substitution arrière. Le nombre d'opérations est similaire à celui de la substitution avant, soit approximativement :

$$\text{Flops pour } L^T x = y \approx 2 \cdot \text{nnz}(L).$$

Finalement, le nombre total d'opérations pour résoudre le système $Ax = b$ est approximativement :

$$\text{Flops pour } Ax = b \approx 4 \cdot \text{nnz}(L).$$

Le critère pour choisir une permutation est donc de minimiser le nombre de non-zéros de L , $\text{nnz}(L)$, afin de réduire le coût de la résolution.

3 Résolution du système linéaire symétrique avec une factorisation de Cholesky

On cherche à résoudre le système linéaire : $Ax = b$ où A est une matrice symétrique et $b = (1, 2, \dots, n)^T$.

Nous avons à notre disposition les 4 matrices `mat0`, ..., `mat3` qui sont les matrices provenant d'un problème de la chaleur avec différents maillage, ainsi que de la matrice BCSSTK27.

Après avoir préalablement vérifié que les matrices étaient symétriques définies positives, nous avons résolu les systèmes avec et sans réordonnancement.

3.1 Matrice `mat0`

Permutation	Normwise Error	Error	FLOPS	Nb Non Zero	Time (s)
sans permutation	1.2258×10^{-12}	1.0764×10^{-13}	15864	7777	0.001313
amd	1.5298×10^{-12}	2.0553×10^{-16}	4720	2205	0.001393
colamd	1.717×10^{-12}	1.5064×10^{-14}	5468	2579	0.006841
symamd	1.2042×10^{-12}	1.182×10^{-13}	4744	2217	0.000851
symrcm	1.4392×10^{-12}	9.5756×10^{-14}	6248	2969	0.002007
colperm	9.3378×10^{-13}	1.6504×10^{-13}	12812	6251	0.003066

TABLE 1 – Tableau des résultats pour la matrice `mat0`

La permutation `symamd` est celle qui minimise le nombre de non-zéros de L et le nombre d'opérations nécessaires à la résolution du système. Elle permet d'obtenir une erreur inverse $\eta_b^N(\tilde{x}) = 1.2042 \times 10^{-12}$: la solution est donc très proche de la solution exacte.

La figure 1 montre la structure de la matrice A obtenue après la factorisation de Cholesky avec la permutation `symamd`.

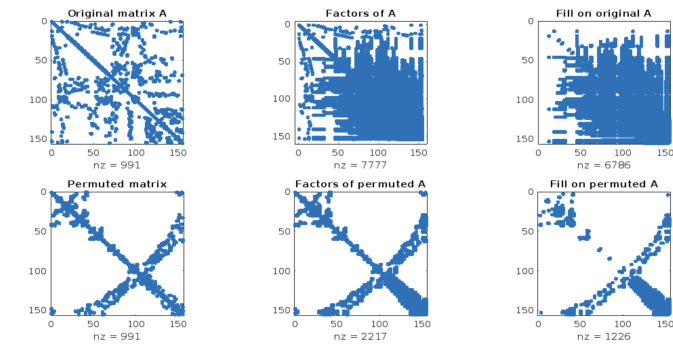


FIGURE 1 – Structure de la matrice A pour la matrice `mat0` avec la permutation `symamd`

3.2 Matrice mat1

Permutation	Normwise Error	Error	FLOPS	Nb Non Zero	Time (s)
sans permutation	7.5124×10^{-12}	4.495×10^{-13}	1.4233×10^5	70591	0.001822
amd	5.5497×10^{-12}	7.4669×10^{-16}	28104	13479	0.00147
colamd	8.0905×10^{-12}	1.5368×10^{-13}	35144	16999	0.004453
symamd	7.7481×10^{-12}	1.2991×10^{-13}	28192	13523	0.001385
symrcm	8.7598×10^{-12}	2.7061×10^{-13}	42224	20539	0.001671
colperm	6.989×10^{-12}	8.7731×10^{-14}	1.45×10^5	71927	0.003352

TABLE 2 – Tableau des résultats pour la matrice mat1

La permutation amd est celle qui minimise le nombre de non-zéros de L et le nombre d'opérations nécessaires à la résolution du système. Elle permet d'obtenir une erreur inverse $\eta_b^N(\tilde{x}) = 5.5497 \times 10^{-12}$.

La figure 2 montre la structure de la matrice A obtenue après la factorisation de Cholesky avec la permutation amd.

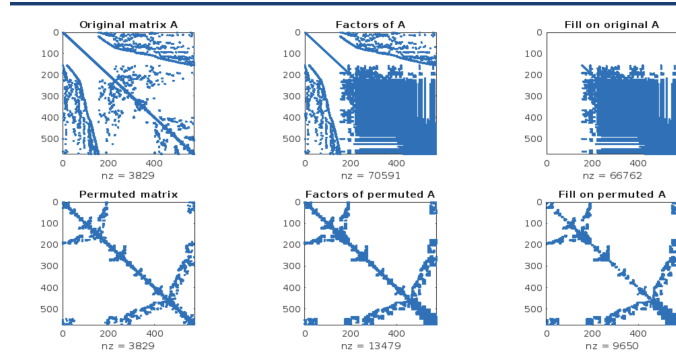


FIGURE 2 – Structure de la matrice A pour la matrice mat1 avec la permutation amd

3.3 Matrice mat2

Permutation	Normwise Error	Error	FLOPS	Nb Non Zero	Time (s)
sans permutation	3.0112×10^{-11}	5.8446×10^{-13}	1.3116×10^6	6.5358×10^5	0.010638
amd	2.7188×10^{-11}	6.4422×10^{-14}	1.7513×10^5	85363	0.004498
colamd	3.0935×10^{-11}	1.0542×10^{-12}	2.0152×10^5	98557	0.00864
symamd	3.099×10^{-11}	7.6133×10^{-13}	1.661×10^5	80851	0.003753
symrcm	4.2393×10^{-11}	1.1391×10^{-12}	3.076×10^5	1.516×10^5	0.004124
colperm	2.9388×10^{-11}	1.0891×10^{-12}	1.277×10^6	6.363×10^5	0.013823

TABLE 3 – Tableau des résultats pour la matrice mat2

La permutation symamd est celle qui minimise le nombre de non-zéros de L et le nombre d'opérations nécessaires à la résolution du système. Elle permet d'obtenir une

erreur inverse $\eta_b^N(\tilde{x}) = 3.099 \times 10^{-11}$.

La figure 3 montre la structure de la matrice A obtenue après la factorisation de Cholesky avec la permutation symamd.

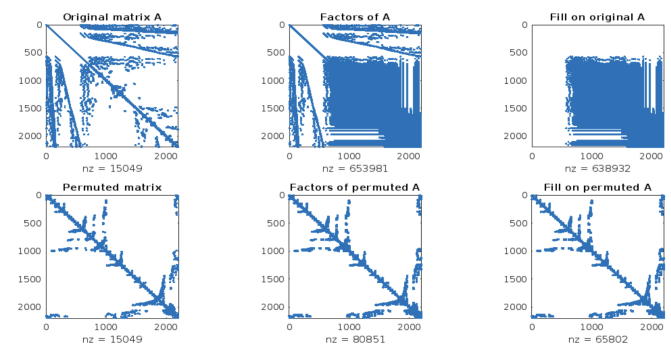


FIGURE 3 – Structure de la matrice A pour la matrice `mat2` avec la permutation `symamd`

3.4 Matrice `mat3`

Permutation	Normwise Error	Error	FLOPS	Nb Non Zero	Time (s)
sans permutation	1.2946×10^{-10}	1.5834×10^{-12}	1.1257×10^7	5.6199×10^6	0.11676
amd	1.169×10^{-10}	1.4303×10^{-13}	1.0218×10^6	5.0227×10^5	0.015098
colamd	1.2809×10^{-10}	2.444×10^{-12}	1.2247×10^6	6.0372×10^5	0.026894
symamd	1.0873×10^{-10}	1.5197×10^{-12}	9.249×10^5	4.5382×10^5	0.014656
symrcm	1.7213×10^{-10}	3.3079×10^{-12}	2.3614×10^6	1.1721×10^6	0.015146
colperm	1.2655×10^{-10}	3.7064×10^{-13}	1.0509×10^7	5.246×10^6	0.11473

TABLE 4 – Tableau des résultats pour la matrice `mat3`

La permutation `symamd` est celle qui minimise le nombre de non-zéros de L et le nombre d'opérations nécessaires à la résolution du système. Elle permet d'obtenir une erreur inverse $\eta_b^N(\tilde{x}) = 1.0873 \times 10^{-10}$.

La figure 4 montre la structure de la matrice A obtenue après la factorisation de Cholesky avec la permutation `symamd`.

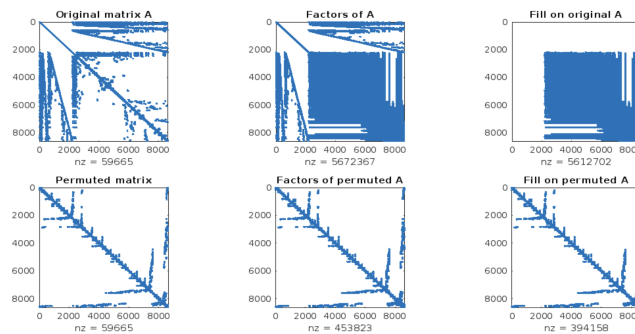


FIGURE 4 – Structure de la matrice A pour la matrice `mat3` avec la permutation `symamd`

3.5 Matrice BCSSTK27

Permutation	Normwise Error	Error	FLOPS	Nb Non Zero	Time (s)
sans permutation	3.6069×10^{-14}	7.3934×10^{-15}	2.0206×10^5	9.9806×10^4	0.002375
amd	3.6027×10^{-14}	2.4155×10^{-15}	2.23×10^5	1.1027×10^5	0.004195
colamd	3.8606×10^{-14}	8.2324×10^{-15}	2.0566×10^5	1.016×10^5	0.006406
symamd	4.494×10^{-14}	6.9124×10^{-15}	2.3542×10^5	1.1649×10^5	0.004641
symrcm	3.5509×10^{-14}	4.8157×10^{-15}	2.035×10^5	1.0053×10^5	0.003569
colperm	4.0717×10^{-14}	9.7507×10^{-15}	1.314×10^6	6.5577×10^5	0.010103

TABLE 5 – Tableau des résultats pour la matrice BCSSTK27

L'absence de permutation minimise le nombre de non-zéros de L et le nombre d'opérations nécessaires à la résolution du système. Elle permet d'obtenir une erreur inverse $\eta_b^N(\tilde{x}) = 3.6069 \times 10^{-14}$.

La figure 5 montre la structure de la matrice A obtenue après la factorisation de Cholesky sans permutation, ainsi qu'avec la permutation symrcm (qui donne des résultats similaires).

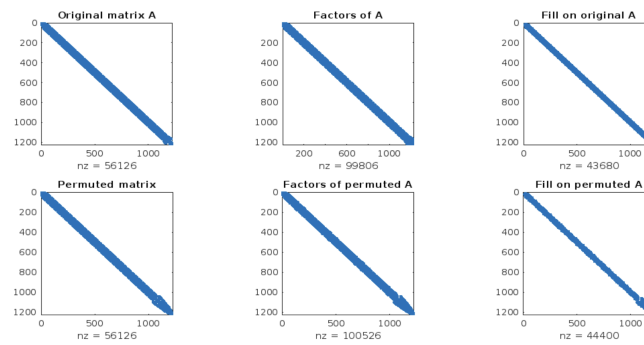


FIGURE 5 – Structure de la matrice A pour la matrice BCSSTK27 sans permutation