INSA - ModIA, 5^e année. **Années 2024-2025**

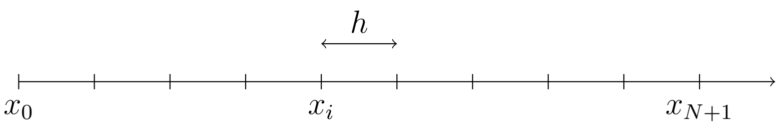
Analyse Mathématique et principes de la méthode

1 Introduction

1.1 ModIA 4 : Différences finies

$$(P) \qquad \begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad \text{sur } \Omega =]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Depuis une grille régulière homogène de pas h, on cherche une approximation de la solution u de (P) en les noeuds de maillage :



$(x_i)_{i\in[\![0,N+1]\!]}$, coordonnées des noeuds de maillage.

On cherche $u_h \in \mathbb{R}^{N+2}$, approximation de u en $(x_i)_{i\in[\![0,N+1]\!]}$.
Les conditions aux limites donnent : $\boxed{u_0 = u_{N+1} = 0}$

Il nous reste à trouver $(u_i)_{i\in[\![1,N]\!]}$ avec $u_h = (u_i)_{i\in[\![0,N+1]\!]}$.

On approxime $u''(x_i) \forall i \in [\![1,N]\!]$ par : $u''(x_i) \approx \frac{u(x_{i+1})-2u(x_i)+u(x_{i-1})}{h^2}$.
(Hypothèse que $u \in \mathcal{C}^4(]0,1[)$)

D'où la résolution de (P) revient à résoudre :

$$(P_h) \qquad \begin{cases} -\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2} + c(x_i)u_i = f(x_i) \quad \forall i \in [\![1,N]\!] \\ u_0 = u_{N+1} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Remarque : Etude de la consistence, stabilité (instationnaire) et convergence du schéma numérique.

Remarque : Limitations :

- u supposé "suffisamment régulière" pour que l'approximation de u'' soit correcte. (Est-on contraint apr une telle hypothèse pour la résolution numérique ?)
- Grille régulière : problème d'adéquation entre la grille spatiale et la frontière du domaine.

1.2 ModIA 5 : Formulation variationnelle et méthode des éléments finis

1.2.1 Construction d'un "nouveau" problème

Trouver $u \in V$ tel que :

$$(P_{FV}) \qquad \forall v \in V, \quad -\int_\Omega u''(x)v(x)dx + \int_\Omega c(x)u(x)v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx \tag{3}$$

Questions :

- Dans quel espace choisir u et v pour que les intégrales soient bien définies ?
- Condition d'existence et unicité de la solution de ce problème
- Lien entre la solution de (P_{FV}) et celle de (P) ?

1.2.2 Résolution numérique de (P_{FV})

Recherche d'une solution à (P_{FV}) sur un sous-espace de dimension finie.

Questions :

- Comment construire ce sous-espace ?
- Convergence de la méthode ?

2 Espace $L^2(\Omega)$ et dérivée faible

2.1 Espace des fonctions tests

Définition - Espace des fonctions tests

On note $D(\Omega)$ l'espace des fonctions "tests", définiés sur Ω, $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact K inclus dans Ω.
$D(\Omega)$ est un espace vectoriel.

Remarque :

i) Support d'une fonction $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$: $\text{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega, \varphi(x) \neq 0\}}$.

ii) Soit $\varphi \in D(\Omega)$, alors toutes ses dérivées sont des fonctions tests.

Définition - Convergence dans $D(\Omega)$

Soient $\varphi \in D(\Omega)$ et $(\varphi_p) \in D(\Omega)^{\mathbb{N}}$.
On dit que (φ_p) converge vers φ dans $D(\Omega)$ si :

i) $\exists K \subset \Omega$ compact tel que $\forall p \in \mathbb{N}, \text{supp}(\varphi_p) \subset K$ et $\text{supp}(\varphi) \subset K$.

ii) $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, $(D^\alpha \varphi_p)$ converge uniformément vers $D^\alpha \varphi$ sur K.

$\Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \forall \varepsilon > 0, \exists p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq p_0$,
$\forall x \in \Omega, |D^\alpha \varphi_p(x) - D^\alpha \varphi(x)| < \varepsilon$.

avec $D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \varphi$.

Exemple : $n = 2$

- $\alpha = (1,0)$, $D^\alpha \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$.
- $\alpha = (1,1)$, $D^\alpha \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}$.
- $\alpha = (0,2)$, $D^\alpha \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}$.

2.2 Espace $L^2(\Omega)$

Définition

Soit Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue.
On pose $\mathcal{L}^2(\Omega)$ l'ensemble des fonctions mesurables sur Ω :
$\mathcal{L}^2(\Omega) = \{v : \Omega \to \mathbb{R}$ tel que $\int_\Omega |v(x)|^2 dx < +\infty\}$.

On introduit la relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathcal{L}^2(\Omega)$, définie par :

$$\forall (f,g) \in (\mathcal{L}^2(\Omega))^2, f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ p.p. sur } \Omega$$

On définit $L^2(\Omega) := \mathcal{L}^2(\Omega)/\sim$.

$$\forall f \in L^2(\Omega), f = \{g \in \mathcal{L}^2(\Omega) \text{ tel que } g = f \text{ p.p. sur } \Omega\}$$

On identifie $f \in L^2(\Omega)$ avec son représentant f sur $\mathcal{L}^2(\Omega)$.

Remarque :

- $\int_\Omega |f(x)|^2 dx = 0$ avec $f \in \mathcal{L}^2(\Omega) \Leftrightarrow f = 0$ p.p. sur Ω.
- $\int_\Omega |f(x)|^2 dx = 0$ avec $f \in L^2(\Omega) \Leftrightarrow f = 0$ sur $L^2(\Omega)$.

Théorème

$L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ défini par :

$$\forall (f,g) \in (L^2(\Omega))^2, \langle f,g\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)g(x)dx$$

est un espace de Hilbert.
On notera $\|f\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\int_\Omega |f(x)|^2 dx}$ la norme associée.

Propriété - Fonctions "tests" et $L^2(\Omega)$

i) $D(\Omega) \subset L^2(\Omega)$.

ii) Soit $(\varphi_p) \in D(\Omega)^{\mathbb{N}}$ qui converge (au sens de la convergence dans $D(\Omega)$) vers $\varphi \in D(\Omega)$.
Alors (φ_p) converge vers $\varphi \in L^2(\Omega)$.

iii) $D(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$:
$\forall f \in L^2(\Omega), \exists (f_p) \in D(\Omega)^{\mathbb{N}}$ tel que $\lim_{p\to\infty} \|f_p - f\|_{L^2(\Omega)} = 0$.

iv) Soit $f \in L^2(\Omega)$ telle que $\forall \varphi \in D(\Omega), \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = 0$.
Alors $f = 0$ sur $L^2(\Omega)$.

Remarque : On notera $\varphi_p \xrightarrow[p\to\infty]{D(\Omega)} \varphi \Rightarrow \varphi_p \xrightarrow[p\to\infty]{L^2(\Omega)} \varphi$.

2.3 Dérivée faible et divergence faible dans $L^2(\Omega)$

Définition - Dérivée faible

Soit $v \in L^2(\Omega)$.
On dit que v admet une *dérivée faible* dans $L^2(\Omega)$ si :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \exists w_i \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall \varphi \in D(\Omega), \int_\Omega v(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega w_i(x)\varphi(x)dx$$

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, w_i ainsi défini est appelé la *i-ème dérivée partielle première faible* de v. On la notera $w_i := \frac{\partial v}{\partial x_i}$.

Remarque :

i) $\forall v \in L^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_i}$ est un abus de langage renvoyant à la i-ème dérivée partielle faible.

ii) Si $v \in L^2(\Omega)$ est dérivable et $\forall i \in [\![1,n]\!], \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$, alors les dérivées partielles faibles et classiques coïncident.

Propriété

Soit $v \in L^2(\Omega)$.
v admet une dérivée faible dans $L^2(\Omega)$ si

$$\exists c > 0 \text{ tel que } \forall \varphi \in D(\Omega), \forall i \in [\![1,n]\!], \left| \int_\Omega v(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \right| \leq c \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}$$

Définition - Divergence faible

Soit $\sigma : \Omega \to \mathbb{R}^n$ telle que $\forall i \in [\![1,n]\!], \sigma_i \in L^2(\Omega)$.
On notera également $\sigma \in [L^2(\Omega)]^n$.
On dit que σ admet une *divergence faible* dans $L^2(\Omega)$ si :

$$\exists w \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall \varphi \in D(\Omega), \int_\Omega \sigma(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx = - \int_\Omega w(x) \varphi(x) dx$$

avec $\sigma \cdot \nabla \varphi = \sum_{i=1}^n \sigma_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$.

$w \in L^2(\Omega)$ ainsi défini est appelé la *divergence faible* de σ. On la notera $w := \operatorname{div}(\sigma)$. ($\operatorname{div}(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i}$)

Propriété

Soit $\sigma \in [L^2(\Omega)]^n$.
σ admet une divergence faible si

$$\exists c > 0 \text{ tel que } \forall \varphi \in D(\Omega), \left| \int_\Omega \sigma(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx \right| \leq c \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}$$

3 Espaces de Sobolev

3.1 Espace $H^1(\Omega)$ et ses généralisations

Définition

Soit Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$.
On appelle $H^1(\Omega)$ l'ensemble des éléments de $L^2(\Omega)$ qui admettent une dérivée faible dans $L^2(\Omega)$.
On notera : $H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall i \in [\![1,n]\!], \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\}$.

Remarque : La notation $\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$ renvoie à l'existence d'une i-ème dérivée partielle faible de v.

Théorème

$H^1(\Omega)$ muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ défini par :

$$\forall (f,g)\in (H^1(\Omega))^2, \langle f,g\rangle_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega f(x)g(x)dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)dx$$

est un espace de Hilbert.

Remarque : $\langle f,g\rangle_{H^1(\Omega)} = \langle f,g\rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial g}{\partial x_i}\rangle_{L^2(\Omega)}$.

Remarque : On note $\langle f,g\rangle_{1,\Omega} := \sum_{i=1}^n \langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial g}{\partial x_i}\rangle_{L^2(\Omega)}$.

Cependant, $\langle f,g\rangle_{1,\Omega}$ n'est pas un produit scalaire sans autres hypothèses : $\langle f,f\rangle_{1,\Omega} = 0 \not\Rightarrow f=0$.

▶

- $H^1(\Omega)$ muni de $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^1(\Omega)}$ est un espace préhilbertien. (admis)
- $H^1(\Omega)$ muni de $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ défini par $\forall f \in H^1(\Omega), \|f\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|\frac{\partial f}{\partial x_i}\|^2_{L^2(\Omega)}}$ est complet :

  Soit $(u_p)\in H^1(\Omega)^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy pour $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.
  Par définition,
  $\forall \varepsilon>0, \exists p_0\in\mathbb{N}$ tel que $\forall (p,q)\in\mathbb{N}^2, p,q\geq p_0 \Rightarrow \|u_p-u_q\|_{H^1(\Omega)}<\varepsilon$

  Par définition de $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$,
  $\forall \varepsilon>0, \exists p_0\in\mathbb{N}$ tel que $\forall (p,q)\in\mathbb{N}^2, p,q\geq p_0 \Rightarrow \|u_p-u_q\|_{L^2(\Omega)}<\varepsilon$
  et $\|\frac{\partial u_p}{\partial x_i} - \frac{\partial u_q}{\partial x_i}\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon$ pour $i\in[\![1,n]\!]$.

  Donc (u_p) est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ muni de $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ et ainsi converge dans $L^2(\Omega)$. On note $u\in L^2(\Omega)$ sa limite.

  De même, $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $(\frac{\partial u_p}{\partial x_i})$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ et converge dans $L^2(\Omega)$.
  $\forall i\in[\![1,n]\!], \exists w_i\in L^2(\Omega)$ tel que $\frac{\partial u}{\partial x_i} \xrightarrow[p\to+\infty]{L^2(\Omega)} w_i$.

  Soit $p\in\mathbb{N}$.
  $\forall i\in[\![1,n]\!]$, par définition de $\frac{\partial u_p}{\partial x_i}$,
  $\forall \varphi\in D(\Omega), \int_\Omega u_p(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega \frac{\partial u_p}{\partial x_i}(x)\varphi(x)dx$.

  D'où, $\int_\Omega \frac{\partial u_p}{\partial x_i}(x)\varphi(x)dx = -\langle u_p, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\rangle_{L^2(\Omega)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} -\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\rangle_{L^2(\Omega)}$.

  Or, $\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx$.
  De plus, $\int_\Omega \frac{\partial u_p}{\partial x_i}(x)\varphi(x)dx = \langle \frac{\partial u_p}{\partial x_i}, \varphi\rangle_{L^2(\Omega)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \langle w_i,\varphi\rangle_{L^2(\Omega)}$.

D'où, $\int_\Omega w_i \varphi dx = -\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx$.
$\Leftrightarrow \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega w_i \varphi dx$, et ce pour tout $\varphi \in D(\Omega)$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$.
$\Rightarrow u$ admet une dérivée faible dans $L^2(\Omega)$ et $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\frac{\partial u}{\partial x_i} = w_i$.

Donc $u \in H^1(\Omega)$.

On vérifie que $\lim\limits_{p \to +\infty} \|u_p - u\|_{H^1(\Omega)} = 0$.

Remarque :

i) Si Ω est borné, alors $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$.

ii) $H^1(\Omega) \subsetneq L^2(\Omega)$ (inclusion stricte).

iii) $D(\Omega)$ est un sous-espace vectoriel de $H^1(\Omega)$.
$D(\Omega)$ n'est pas dense dans $H^1(\Omega)$.

3.2 Espace $H_0^1(\Omega)$

Définition - Espace $H_0^1(\Omega)$

$H_0^1(\Omega)$ est la fermeture de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

$H_0^1(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{H^1(\Omega)} = \{v \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \exists (v_p) \in D(\Omega)^{\mathbb{N}} \text{ tel que } v_p \xrightarrow[p \to +\infty]{H^1(\Omega)} v\}$

Propriété - Inégalité de Poincarré

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.
$\exists C_\Omega > 0$ tel que $\forall v \in H_0^1(\Omega)$, $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega |v|_{1,\Omega}$.
avec $|v|_{1,\Omega} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \|\frac{\partial v}{\partial x_i}\|^2_{L^2(\Omega)}}$.

- admis (calcul intégral)

Remarque : Si Ω est un ouvert borné, $H_0^1(\Omega) \subsetneq H^1(\Omega)$ (exemple : fonction constante non-nulle).
De plus, l'inégalité de Poincarré n'est pas valide pour $v \in H^1(\Omega) \backslash H_0^1(\Omega)$.

Corollaire : Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.
La semi-norme $|\cdot|_{1,\Omega}$ est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme induite par $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.

Théorème

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.
$H_0^1(\Omega)$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1,\Omega}$ défini par :

$$\forall (f,g) \in (H_0^1(\Omega))^2, \langle f, g \rangle_{1,\Omega} = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) dx$$

est un espace de Hilbert.

Propriété

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière Lipschitzienne. (Ω est appelé "domaine")
Alors $D(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$ pour la norme $\| \cdot \|_{H^1(\Omega)}$
avec $D(\overline{\Omega}) = \{$restriction des fonctions tests de $\mathbb{R}^n$ à $\Omega\}$.

- admis

Définition

Soit $m \in \mathbb{N}$.
On appelle $H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega)$ tel que $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m, D^\alpha v \in L^2(\Omega)\}$.
avec $D^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$.

Propriété

Soit $m \in \mathbb{N}$.
$H^m(\Omega)$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par :

$$\forall (f,g) \in (H^m(\Omega))^2, \langle f, g \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha f, D^\alpha g \rangle_{L^2(\Omega)}$$

est un espace de Hilbert.
Si de plus Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière Lipschitzienne, alors $D(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^m(\Omega)$ pour la norme $\| \cdot \|_{H^m(\Omega)}$.

- admis

3.3 Trace sur Γ de fonctions de $H^1(\Omega)$

> **Remarque :** Soit $u \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$.
> On peut définir la restriction de u sur le bord Γ de Ω par prolongement par continuité.

On va chercher à étendre ce résultat aux fonctions de $H^1(\Omega)$.

Théorème - Théorème de la Trace

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière Lipschitzienne.
Alors il existe une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$, notée γ_0, telle que :

$$\forall v \in D(\overline{\Omega}), \gamma_0(v) = v_{|\Gamma}$$

Elle vérifie de plus :

i) $\mathrm{Ker}(\gamma_0) = H_0^1(\Omega)$.

ii) $\mathrm{Im}(\gamma_0)$ est dense dans $L^2(\Gamma)$.

- admis

Propriété - Formule de Green

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière Lipschitzienne.
$\forall (u, v) \in H^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$, on a :

$$\int_\Omega \nabla u \cdot v dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Gamma \gamma_0(v)\gamma_1(u) d\gamma$$

avec $\gamma_1(u) = \sum_{i=1}^n \gamma_0(\frac{\partial u}{\partial x_i})\nu_i$ et $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ le vecteur normal unitaire extérieur à Ω.

De plus, $\forall (u, v) \in (H^1(\Omega))^2, \forall i \in [\![1, n]\!]$:

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_\Omega \gamma_1(u)\gamma_0(v)\nu_i d\gamma$$

- cf TD1

4 Théorème de Lax-Milgram et application

4.1 Théorème de Lax-Milgram

Théorème - Théorème de Lax-Milgram

Soit V un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$, $a : V \times V \to \mathbb{R}$ une application bilinéaire continue et coercive, $l : V \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue.
Alors, $\exists! u \in V$ tel que :

$$\forall v \in V, a(u, v) = l(v)$$

- admis (Analyse Hilbertienne)

Remarque :

- a bilinéaire continue : $\exists M > 0, \forall (u,v) \in V^2, |a(u,v)| \leq M\|u\|_V\|v\|_V$.
- a coercive : $\exists \alpha > 0, \forall v \in V, a(v,v) \geq \alpha\|v\|_V^2$.
- l linéaire continue : $\exists C > 0, \forall v \in V, |l(v)| \leq C\|v\|_V$.

Propriété

Sous les hypothèses du théorème de Lax-Milgram, la solution $u \in V$ du problème de Lax-Milgram dépend continûment de $l \in V'$.

▶ Soient l_1, l_2, deux formes linéaires continues. On note $u_1 \in V$ et $u_2 \in V$ les solutions associées du problème de Lax-Milgram.
$\forall v \in V, \begin{cases} a(u_1, v) = l_1(v) \\ a(u_2, v) = l_2(v) \end{cases}$

Par coercivité de a, $\exists \alpha > 0, \forall v \in V, a(v,v) \geq \alpha\|v\|_V^2$.

$$\begin{aligned}
\|u_1 - u_2\|_V^2 &\leq \frac{1}{\alpha}a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \\
&= \frac{1}{\alpha}(a(u_1, u_1 - u_2) - a(u_2, u_1 - u_2)) \qquad \text{(bilinéarité de } a\text{)} \\
&= \frac{1}{\alpha}(l_1(u_1 - u_2) - l_2(u_1 - u_2)) \qquad \text{(coercivité de } a\text{)} \\
&\leq \frac{1}{\alpha}((l_1 - l_2)(u_1 - u_2)) \qquad \text{(linéarité de } l_1 \text{ et } l_2\text{)}
\end{aligned}$$

D'où : $\|u_1 - u_2\|_V \leq \frac{1}{\alpha}|||l_1 - l_2||| \times \|u_1 - u_2\|_V \xrightarrow[l_1 \to l_2]{} 0$.

Remarque : $|||l||| = \sup\limits_{v \in V\setminus\{0\}} \frac{|l(v)|}{\|v\|_V} = \sup\limits_{\|v\|_V = 1} |l(v)|$.

Propriété

Sous les hypothèses du théorème de Lax-Milgram, en supposant a symétrique, les deux problèmes suivants sont équivalents :

i) Trouver $u \in V$ tel que $\forall v \in V, a(u,v) = l(v)$.

ii) $\min\limits_{v \in V} \frac{1}{2}a(v,v) - l(v)$.

▶ On pose : $J : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longmapsto & \frac{1}{2}a(v,v) - l(v) \end{array}$
Soient $(u,v) \in V^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
J(u+\lambda v) &= \frac{1}{2}a(u+\lambda v, u+\lambda v) - l(u+\lambda v) \\
&= \frac{1}{2}a(u,u) + \lambda a(u,v) + \frac{\lambda^2}{2}a(v,v) - l(u) - \lambda l(v) \\
&= J(u) + \lambda(a(u,v) - l(v)) + \frac{\lambda^2}{2}a(v,v)
\end{aligned}$$

<u>i) $\Rightarrow$ ii)</u>
Soit $w \in V \backslash \{u\}$.
$w = u + w - u = u + \lambda v$ avec $\lambda = \|w-u\|_V > 0$ et $v = \frac{w-u}{\|w-u\|_V}$.

D'où :

$$\begin{aligned}
J(w) &= J(u+\lambda v) \\
&= J(u) + \lambda(a(u,v) - l(v)) + \frac{\lambda^2}{2}a(v,v) \quad \text{(cf. calcul précédent)} \\
&= J(u) + \frac{\lambda^2}{2}a(v,v) \quad \text{(car } a(u,v) = l(v) \text{ par hypothèse)} \\
&\geq J(u) \quad \text{(car } a(v,v) > 0 \text{ par coercivité de } a\text{)}
\end{aligned}$$

Donc u est un minimum de J.

<u>ii) $\Rightarrow$ i)</u>
Soit u un minimum de J sur V.
$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in V, u + \lambda v \in V$.
Donc $J(u+\lambda v) \geq J(u) \Leftrightarrow J(u+\lambda v) - J(u) \geq 0$.

Or, $J(u+\lambda v) - J(u) = \frac{\lambda^2}{2}a(v,v) + \lambda(a(u,v) - l(v))$.
Donc $\forall v \in V, \frac{\lambda^2}{2}a(v,v) + \lambda(a(u,v) - l(v)) \geq 0$.

- Soit $\lambda > 0$:
  Alors $a(u,v) - l(v) + \frac{\lambda}{2}a(v,v) \geq 0$.
  A la limite, quand $\lambda \to 0$, $a(u,v) - l(v) \geq 0$.
- Soit $\lambda < 0$:
  Alors $a(u,v) - l(v) + \frac{\lambda}{2}a(v,v) \leq 0$.
  A la limite, quand $\lambda \to 0$, $a(u,v) - l(v) \leq 0$.

Bilan : $\forall v \in V, a(u,v) = l(v)$.

4.2 Application aux équations aux dérivées partielles

Problème :

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u + c(x)u = f(x) & \text{sur } \Omega \text{ domaine de } \mathbb{R}^n \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \text{ frontière de } \Omega \end{cases} \tag{4}$$

avec $f \in L^2(\Omega)$, $c \in L^\infty(\Omega)$ tel que $c(x) \geq 0$ presque partout sur Ω.

Objectif :

1. Formulation variationnelle : Se ramener à un problème de Lax-Milgram.
2. Existence et unicité de la solution de la formulation variationnelle.
3. Lien avec le problème original (P).

Idée :
$u \in L^2(\Omega)$ et $\Delta u \in L^2(\Omega) \Rightarrow$ existence d'une dérivée faible de u jusqu'à l'ordre 2.
$\Rightarrow u \in H^2(\Omega)$.

Soit $u \in H^2(\Omega)$ solution de (P).

> **Remarque :** D'après Lax-Milgram, $\exists! u \in V$ tel que $\forall v \in V, a(u,v) = l(v)$.

De plus, Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière Lipschitzienne :
$\forall (u,v) \in (H^2(\Omega))^2$, $\int_\Omega \Delta u v dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Gamma \gamma_0(v)\gamma_1(u) d\gamma$.

$\Rightarrow$ Choisir $v \in H^2(\Omega)$ pour appliquer cette formule et n'avoir que des dérivées faibles d'ordre 1.

$\forall v \in H^1(\Omega)$, $-\int_\Omega \Delta u v dx + \int_\Omega c(x) u v dx = \int_\Omega f(x) v dx$.
$c \in L^\infty(\Omega)$ et $u \in L^2(\Omega) \Rightarrow cu \in L^2(\Omega)$.

De plus, Ω est un domaine, donc par la formule de Green :
$\int_\Omega \Delta u v dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Gamma \gamma_0(v)\gamma_1(u) d\gamma$.

Il vient : $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_\Gamma \gamma_0(v)\gamma_1(u) d\gamma + \int_\Omega c(x) u v dx = \int_\Omega f(x) v dx$.

> **Remarque :** Il n'y a pas de dérivées faibles d'ordre 2 de u dans l'équation, seulement des dérivées faibles d'ordre 1.

On cherche $u \in H^2(\Omega)$ tel que :

$$\forall v \in H^1(\Omega), \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_\Gamma \gamma_0(v)\gamma_1(u) d\gamma + \int_\Omega c(x) u v dx = \int_\Omega f(x) v dx$$

Remarque : Conditions aux limites : $u = 0$ sur Γ.

- Pour $u \in H^1(\Omega)$, ceci est équivalent à $\gamma_0(u) = 0$.
- $u \in \text{Ker}(\gamma_0) = H_0^1(\Omega)$.

Les conditions aux limites conduisent à chercher $u \in H^1(\Omega)$ tel que $\gamma_0(u) = 0 \Leftrightarrow u \in H_0^1(\Omega)$.

On cherche alors $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que :
$\forall v \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega c(x)uvdx = \int_\Omega f(x)vdx$. (car $\int_\Gamma \gamma_0(v)\gamma_1(u)d\gamma = 0$)

On obtient alors le problème suivant :

Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que :

$$(P_{FV}) : \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega), a(u,v) = l(v) \tag{5}$$

avec $a : \begin{array}{rcl} H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega c(x)uvdx \end{array}$

et $l : \begin{array}{rcl} H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longmapsto & \int_\Omega f(x)vdx \end{array}$

4.3 Existence et unicité de la solution de (P_{FV})

On a : $H_0^1(\Omega)$ muni de $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1,\Omega}$ est un espace de Hilbert (Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^n$).

Etude de l :

- l est linéaire.
- l est continue : $\forall v \in H_0^1(\Omega)$,
  $|l(v)| = |\int_\Omega f(x)v(x)dx| = \left|\langle f, v\rangle_{L^2(\Omega)}\right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}$ (inégalité de Cauchy-Schwarz).
  Or Ω est un ouvert borné.

  Par inégalité de Poincarré : $\exists C_\Omega > 0, \forall v \in H_0^1(\Omega), \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega |v|_{1,\Omega}$.

  D'où : $|l(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} C_\Omega |v|_{1,\Omega}$.

Etude de a :

- a est bilinéaire (par linéarité de l'intégrale).
- a est continue : $\forall (u,v) \in (H_0^1(\Omega))^2$,
  $|a(u,v)| \leq |\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx| + |\int_\Omega c(x)uvdx| \leq \langle u, v\rangle_{1,\Omega} + \langle cu, v\rangle_{L^2(\Omega)}$.

Par inégalité de Cauchy-Schwarz :
$|a(u,v)| \leq |u|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega} + \|cu\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}$.

Or, $\|cu\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\int_\Omega |cu|^2 \, dx} \leq \sqrt{\int_\Omega \|c\|^2_{L^\infty(\Omega)} |u|^2 \, dx} \leq \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}$.

Donc $\forall (u,v) \in (H^1_0(\Omega))^2, |a(u,v)| \leq |u|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega} + \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}$
$\leq |u|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega} + C_\Omega \|c\|_{L^\infty(\Omega)} |u|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega}$
$\leq (1 + C_\Omega \|c\|_{L^\infty(\Omega)}) |u|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega}$

- a est coercive :
  $\forall v \in H^1_0(\Omega), a(v,v) = \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx + \int_\Omega c(x) |v|^2 \, dx = |v|^2_{1,\Omega} + \int_\Omega c(x) |v|^2 \, dx$.

  Or, $c(x) \geq 0$ presque partout sur Ω donc $\int_\Omega c(x) |v|^2 \, dx \geq 0$.
  Donc $\forall v \in H^1_0(\Omega), a(v,v) \geq |v|^2_{1,\Omega} \geq \alpha \|v\|^2_{H^1(\Omega)}$.

On peut donc appliquer le théorème de Lax-Milgram à (P_{FV}) :
$\exists! u \in H^1_0(\Omega)$ tel que $\forall v \in H^1_0(\Omega), a(u,v) = l(v)$.

4.4 Lien avec le problème original (P)

Soit $u \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ solution de (P_{FV}).
On a : $\forall v \in H^1_0(\Omega), \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega c(x) u v dx = \int_\Omega f(x) v dx$.

Or $u \in H^2(\Omega)$ et $\forall v \in H^1_0(\Omega), v \in H^1(\Omega)$ (par la formule de Green).
Donc $\int_\Omega \Delta u v dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Gamma \gamma_0(v) \gamma_1(u) d\gamma = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx$.

D'où : $\forall v \in H^1_0(\Omega), -\int_\Omega \Delta u v dx + \int_\Omega c(x) u v dx = \int_\Omega f(x) v dx$.

Or, $D(\Omega) \subset H^1_0(\Omega)$ d'où : $\forall v \in D(\Omega), \int_\Omega (-\Delta u + c(x) u - f(x)) v dx = 0$.
avec $-\Delta u + c(x) u - f(x) \in L^2(\Omega)$.
Donc $-\Delta u + c(x) u - f(x) = 0$ presque partout sur Ω.
$\Rightarrow -\Delta u + c(x) u = f(x)$ dans $L^2(\Omega)$.

Donc u est solution de (P).

5 Résolution numérique : la méthode des éléments finis

5.1 Principe de la méthode de Galerkin

On rappelle le problème (P_{FV}) :

Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que :

$$(P_{FV}) : \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega), a(u,v) = l(v) \tag{6}$$

avec $a : V \times V \to \mathbb{R}$ bilinéaire continue et coercive
et $l : V \to \mathbb{R}$ linéaire continue.

Idée :
On va se ramener à chercher une "solution" dans un sous-espace vectoriel de V de dimension finie.

Soit V_h un sous-espace vectoriel de V de dimension finie.

On cherche $u_h \in V_h$ tel que :

$$(P_h) : \qquad \forall v_h \in V_h, a(u_h, v_h) = l(v_h) \tag{7}$$

Soit u_h une telle solution (si elle existe). Alors $\forall v_h \in V_h, a(u_h, v_h) = l(v_h)$.
Par définition de $u \in V$: $\forall v_h \in V_h, a(u, v_h) = l(v_h)$.
Donc $a(u - u_h, v_h) = 0, \forall v_h \in V_h$.

On suppose de plus que a est symétrique.
Alors a est un produit scalaire sur V.
On montre que V muni de a est un espace de Hilbert.
Ainsi, V_h s.e.v de V est un espace de Hilbert.

On a : $\forall v_h \in V_h, a(u - u_h, v_h) = 0 \Rightarrow u - u_h \in V_h^\perp$: u_h est la projection orthogonale de u sur V_h pour le produit scalaire a.

Propriété - Lemme de Céa

Soit V un espace de Hilbert.
Soient $a : V \times V \to \mathbb{R}$ bilinéaire continue et coercive et $l : V \to \mathbb{R}$ linéaire continue de sorte que $\exists! u \in V$ tel que $\forall v \in V, a(u,v) = l(v)$.
Soit V_h un s.e.v de V de dimension finie.

Alors $\exists! u_h \in V_h$ tel que $\forall v_h \in V_h, a(u_h, v_h) = l(v_h)$.

De plus, $\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf\limits_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$
avec α constante de coercivité de a
et M constante de continuité de a.

Remarque : $\exists M \geq 0$ tel que $\forall (u,v) \in V^2, |a(u,v)| \leq M\|u\|_V\|v\|_V$
$\exists \alpha > 0$ tel que $\forall v \in V, a(v,v) \geq \alpha\|v\|_V^2$.

▶

- V_h muni de $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ est un espace préhilbertien.
  De plus, V_h est de dimension finie donc complet pour $\| \cdot \|_V$.
  Donc V_h est un espace de Hilbert.

  De plus, $a : V_h \times V_h \to \mathbb{R}$ est bilinéaire continue et coercive.
  et $l : V_h \to \mathbb{R}$ est linéaire continue.

  D'après le théorème de Lax-Milgram,
  $\exists! u_h \in V_h$ tel que $\forall v_h \in V_h, a(u_h, v_h) = l(v_h)$.

- $\|u - u_h\|_V \leq \frac{1}{\alpha} a(u - u_h, u - u_h)$ par coercivité de a.

  Soit $v_h \in V_h$.

$$\begin{aligned}
\|u - u_h\|_V^2 &\leq \frac{1}{\alpha} a(u - u_h, u - v_h + v_h - u_h) \\
&\leq \frac{1}{\alpha} (a(u - u_h, u - v_h) + a(u - u_h, v_h - u_h)) \\
&\leq \frac{1}{\alpha} a(u - u_h, u - v_h) \quad \text{(car } v_h - u_h \in V_h \Rightarrow a(u - u_h, v_h - u_h) = 0\text{)} \\
&\leq \frac{M}{\alpha} \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_V \quad \text{(par continuité de } a\text{)}
\end{aligned}$$

  Donc $\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$.

Question : Comment obtenir $u_h \in V_h$?

On note $N_h = \dim V_h$.
Soit $(w_i)_{i \in [\![1, N_h]\!]} \in V_h^{N_h}$ une base de V_h.
On cherche $u_h = \sum_{i=1}^{N_h} \lambda_i w_i$ avec $(\lambda_i)_{i \in [\![1, N_h]\!]} \in \mathbb{R}^{N_h}$.

Par définition de u_h : $\forall v_h \in V_h, a(u_h, v_h) = l(v_h)$.
En particulier :
$\forall j \in [\![1, N_h]\!], a(u_h, w_j) = l(w_j) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N_h} \lambda_i a(w_i, w_j) = l(w_j) \Leftrightarrow Ax = b$.
avec $A = (a(w_i, w_j))_{(i,j) \in [\![1, N_h]\!]^2} \in \mathcal{M}_{N_h}(\mathbb{R})$,
$x = (\lambda_i)_{i \in [\![1, N_h]\!]} \in \mathbb{R}^{N_h}$
et $b = (l(w_j))_{j \in [\![1, N_h]\!]} \in \mathbb{R}^{N_h}$.

On est amené à résoudre un système linéaire.

De plus, A est symétrique et définie positive (car a est symétrique et coercive) :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^{N_h}\backslash\{0\}, x^T A x &= \sum_{i=1}^{N_h}\sum_{j=1}^{N_h} x_i a(w_i, w_j) x_j \\ &= a\left(\sum_{i=1}^{N_h} x_i w_i, \sum_{j=1}^{N_h} x_j w_j\right) \qquad \text{(bilinéarité de } a\text{)} \\ &\geq \alpha \left\|\sum_{i=1}^{N_h} x_i w_i\right\|_V^2 \qquad \text{(coercivité de } a\text{)} \\ &> 0 \quad (\text{car } x \neq 0)\end{aligned}$$

Donc ce système admet une unique solution.

5.2 Exemple en dimension 2

5.2.1 Principe

On cherche à recouvrir Ω par des structures géométriquement simples (triangles, quadrilatères, ...), notées $(T_p)_{p\in[\![1,N_T]\!]}$.
Dans la suite, on notera $\mathcal{T}_h = (T_p)_{p\in[\![1,N_T]\!]}$ l'ensemble des (T_p). avec $h = \sup_{p\in[\![1,N_T]\!]} \text{diam}(T_p)$.

♠ $\text{diam}(T_p)$ est le diamètre de T_p, à savoir la plus grande distance entre deux points de T_p.

Définition - Triangulation admissible

Une triangulation $\mathcal{T}_h$ de Ω est dite admissible si :

i) L'intersection de deux éléments de $\mathcal{T}_h$ est soit vide, soit réduite à un point, soit réduite à un côté tout entier.

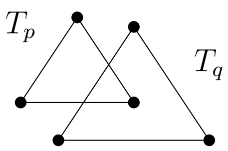
ii) Les "coins" de Γ sont des sommets d'éléments de $\mathcal{T}_h$.

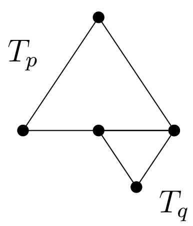
iii) On note $\Omega_h = \bigcup_{p=1}^{N_T} T_p$ et Γ_h la frontière de Ω_h.
Les sommets de Γ_h sont également sur Γ.

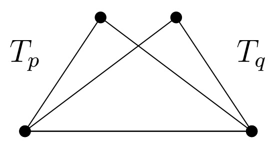
iv) $\lambda(T_p) \neq 0$ avec $\lambda(T_p)$ la mesure de Lebesgue.

Exemple :

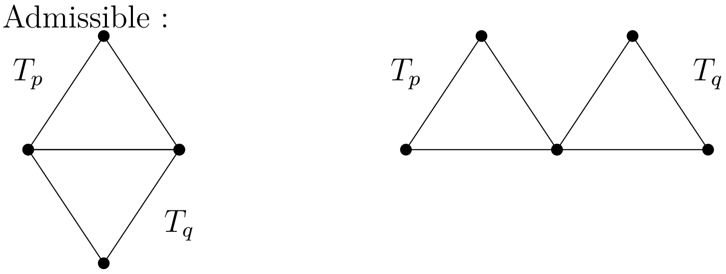
i) Non-admissible :



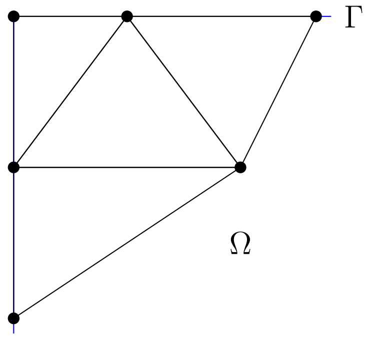




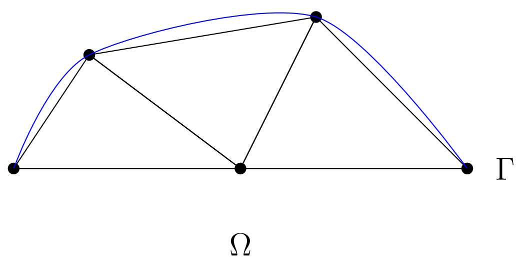
Admissible :



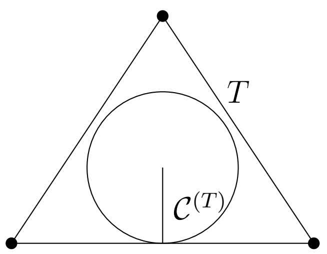
ii) .



iii) .



On suppose par la suite, par la convergence de la méthode, que
$\exists c > 0$ tel que $\forall h > 0, \sup\limits_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{\mathrm{diam}(T)}{\mathcal{C}^{(T)}} \leq c$ avec $\mathcal{C}^{(T)}$ le rayon du cercle inscrit dans T.



5.2.2 Exemple

Soit $\Omega =]0,1[\times]0,1[$.

On considère le problème suivant : $\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$

On rappelle le problème (P_{FV}) :
Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $\forall v \in H_0^1(\Omega), a(u,v) = l(v)$
avec $\begin{array}{rccc} a : & H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \longmapsto & \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega uv dx \end{array}$

et $l: \begin{array}{ccc} H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longmapsto & \int_\Omega fv dx \end{array}$

(P_{FV}) admet une solution unique (Théorème de Lax-Milgram).

On suppose avoir N_T triangles et $\mathcal{T}_h = (T_p)_{p \in [\![1, N_T]\!]}$ une triangulation admissible de Ω.
On note $(q_i)_{i \in [\![1, N_T]\!]}$ les sommets des triangles T_p.
On note $P^1 = \mathbb{R}_1[X_1, X_2]$ l'espace des polynômes de degré au plus 1 par rapport à X_1 et X_2. On a donc $P^1 = \text{Vect}\{1, X_1, X_2\}$.

On pose $\tilde{V_h} = \{v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}), v_{|T_p} \in P^1, \forall p \in [\![1, N_T]\!]\}$.
$V_h = \{v_h \in \tilde{V_h}, v_{h|\Gamma} = 0\}$.

Propriété

i) Les fonctions de $\tilde{V_h}$ sont entièrement définies par leurs valeurs en leurs sommets q_i.

ii) $\dim \tilde{V_h} = N_S$.
De plus, une base de $\tilde{V_h}$ est donnée par $(\varphi_i)_{i \in [\![1, N_S]\!]}$ avec $\varphi_i(q_j) = \delta_{ij}$.
En particulier, $\forall v_h \in \tilde{V_h}, v_h = \sum_{i=1}^{N_S} v_h(q_i)\varphi_i$.

iii) $\tilde{V_h} \subset H^1(\Omega)$.

iv) $\dim V_h = N_1$ avec N_1 le nombre de sommets q_i n'appartenant pas à Γ.

v) $V_h \subset H_0^1(\Omega)$.

Remarque : shema

- *Texte Manquant*