Fonctions potentiel
et
surfaces implicites

Définition générale

Une fonction potentiel est une fonction f : $R^3 \rightarrow R$ qui à tout point $P(x_p,y_p,z_p)$ de l'espace R^3 associe une valeur de potentiel C_p :

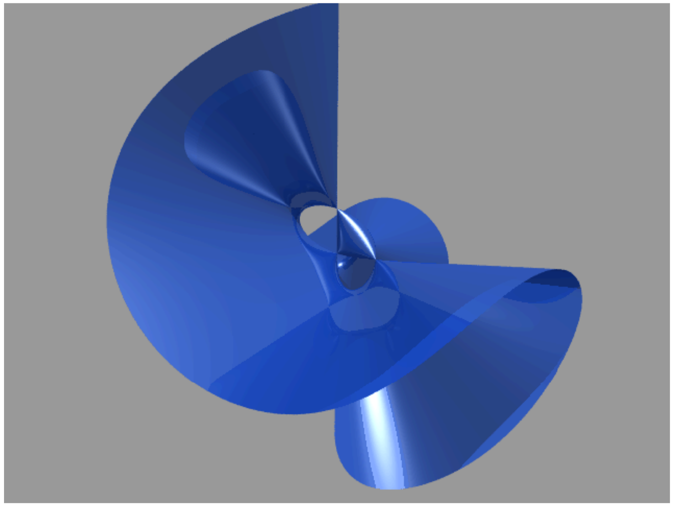
$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$P(x_P, y_P, z_P) \rightarrow f(P) = C_P$$

Une surface implicite est alors définie par l'ensemble des points de R^3 pour lesquels la fonction f associe la même valeur de potentiel C_0 :

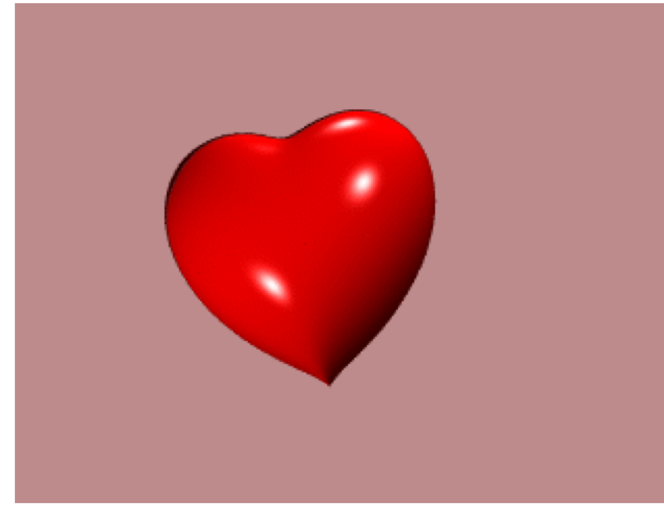
$$S = \{ P \in \mathbb{R}^3 / f(P) = C_0 \}$$

La définition de la surface est implicite : On ne peut pas directement calculer les points de la surface

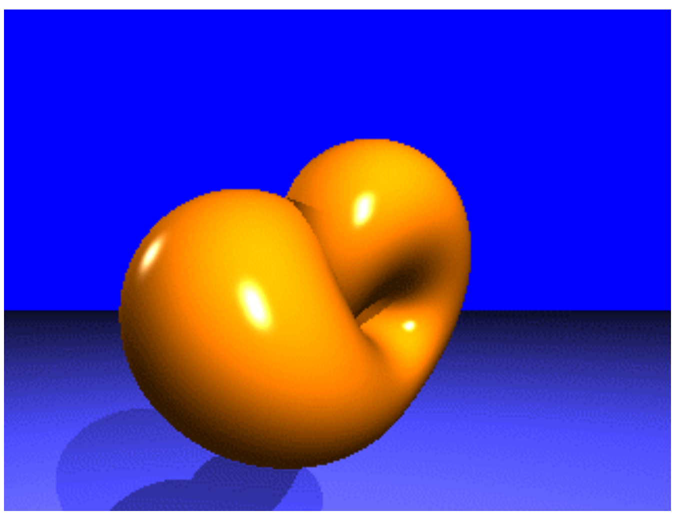
Exemple : les surfaces algébriques



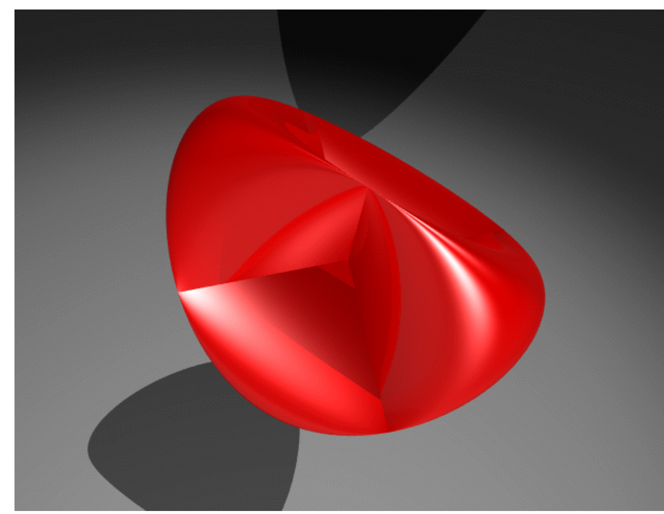
$$-5(x^{2y}+x^{2z}+y^{2x}+y^{2z}+z^{2y}+z^{2x})+2(xy+xz+yz)=0$$



$$(2x^2+y^2+z^2-1)^3-\frac{1}{10}x^2z^3-y^2z^3=0$$

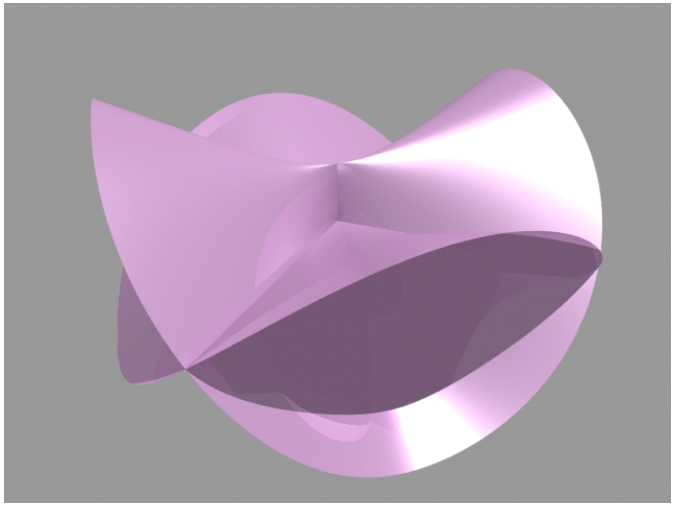


$$(x^2+y^2+z^2+2y-1)((x^2+y^2+z^2-2y-1)^2-8z^2)+16xz(x^2+y^2+z^2-2y-1)=0$$

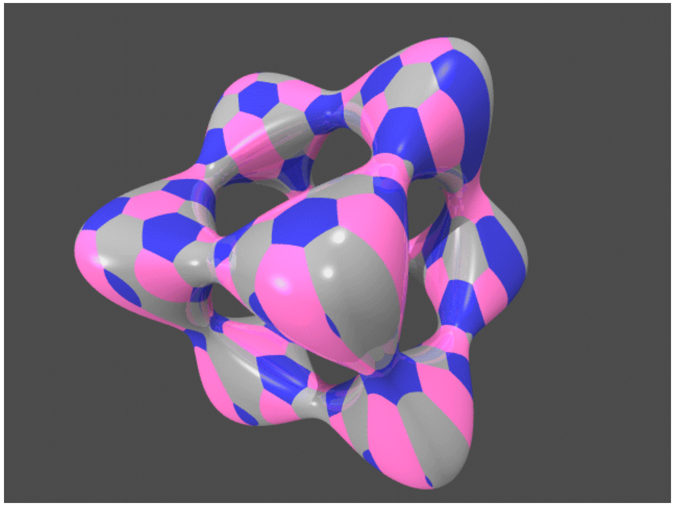


$$x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2+xyz=0$$

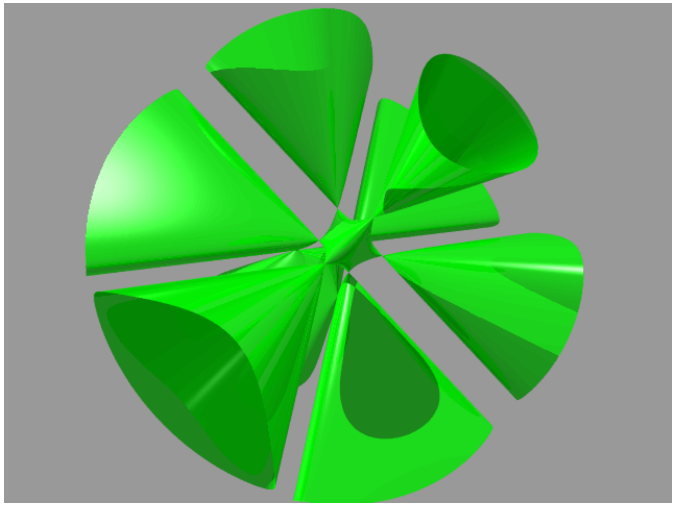
Exemple : les surfaces algébriques



$$x^2 y^2 - x^2 z^2 + y^2 z^2 - xyz = 0$$



$$x^4 - 5x^2 + y^4 - 5y^2 + z^4 - 5z^2 + 11.8 = 0$$



$$25(x^3(y+z)+y^3(x+z)+z^3(x+y))+50(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)-125(x^2yz+y^2xz+z^2xy)+60xyz-4(xy+xz+yz)=0$$

Définition volumique

Pour permettre de modéliser des objets complexes, on c'est intéressé à définir des primitives ayant les propriétés suivantes :

Variation continue de la fonction potentiel f

Contrôle simple et intuitif de la forme de la surface

Définition volumique de l'objet 3D :

$$V = \{ P \in \mathbb{R}^3 / f(P) \geqslant C_0 \}$$

Ainsi :

si $f(P) > C_0$ le point P est à l'intérieur du volume de l'objet

si $f(P) < C_0$ le point P est à l'extérieur du volume de l'objet

si $f(P) = C_0$ le point P est sur la surface

La représentation volumique est une convention et la convention inverse peut aussi être utilisée :

$$V = \{ P \in \mathbb{R}^3 / f(P) \leqslant C_0 \}$$

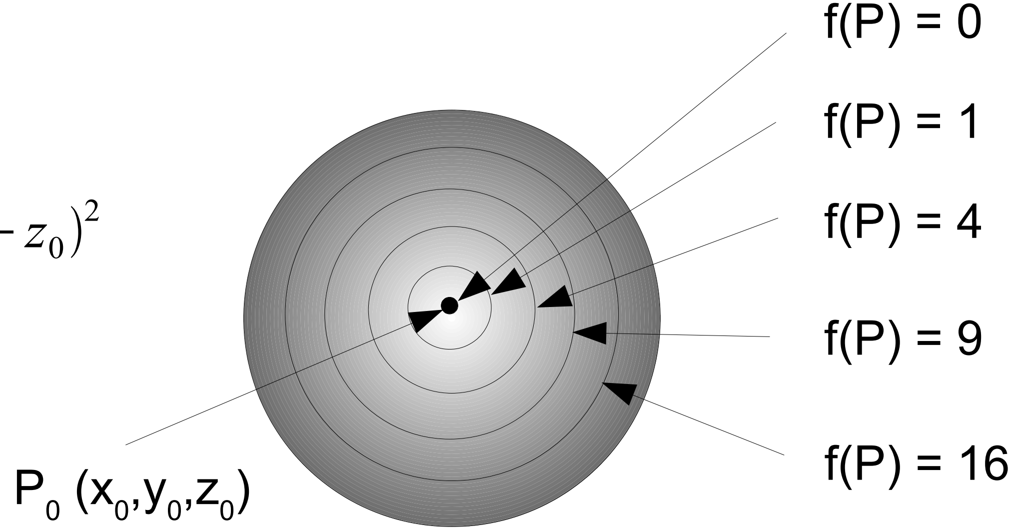
Pour passer d'une convention à l'autre :

$$f'(P) = -f(P) + 2C_0$$

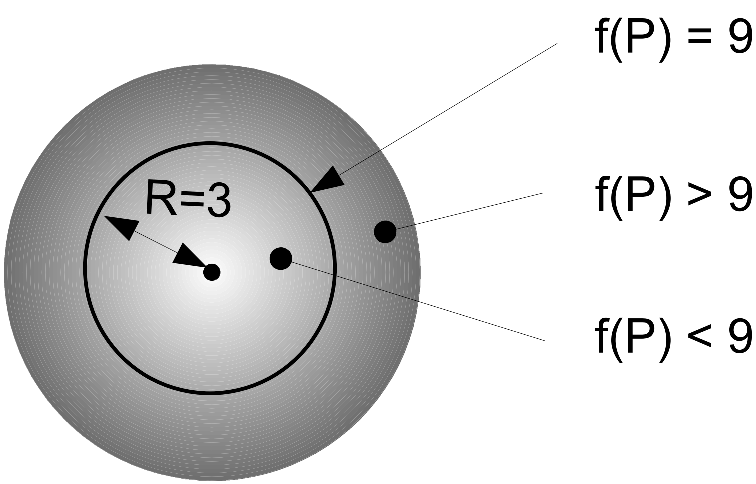
Exemple

Soit l 'équation potentiel :

$$f(x,y,z)=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$$



L'équation f(P) = 9 définit une sphère de rayon R=3 centrée au point P_0 (x_0,y_0,z_0).



Le volume est défini par f(P) < 9

Calcul de la normale en un point

La normale à la surface en un point P est égale au gradient de la fonction potentiel f en ce point :

si $f(P) > C_0$ définit le volume :

$$\vec{N}(P) = -\nabla f(P) = \begin{bmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x} \\ -\frac{\partial f}{\partial y} \\ -\frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}$$

si $f(P) < C_0$ définit le volume :

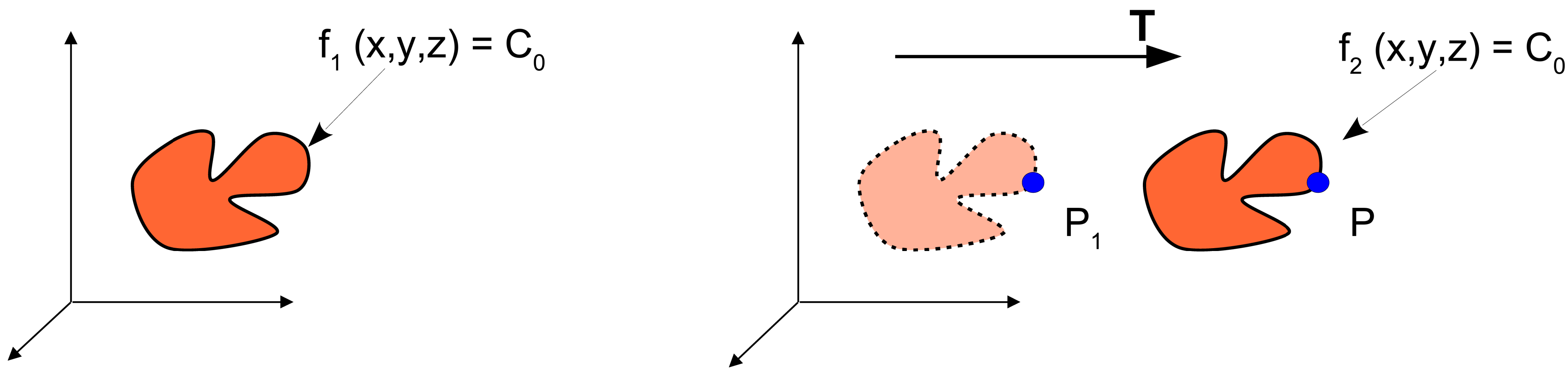
$$\vec{N}(P) = \nabla f(P) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Appliquer une transformation

Pour appliquer une transformation de l'espace à une surface implicite, on transforme l'espace dans lequel elle est définie

Exemple sur la translation d'une surface

On connaît l'équation f_1 de la fonction potentiel définissant la surface de gauche. Quelle est l'équation f_2 de la fonction potentiel définissant la surface à droite ?



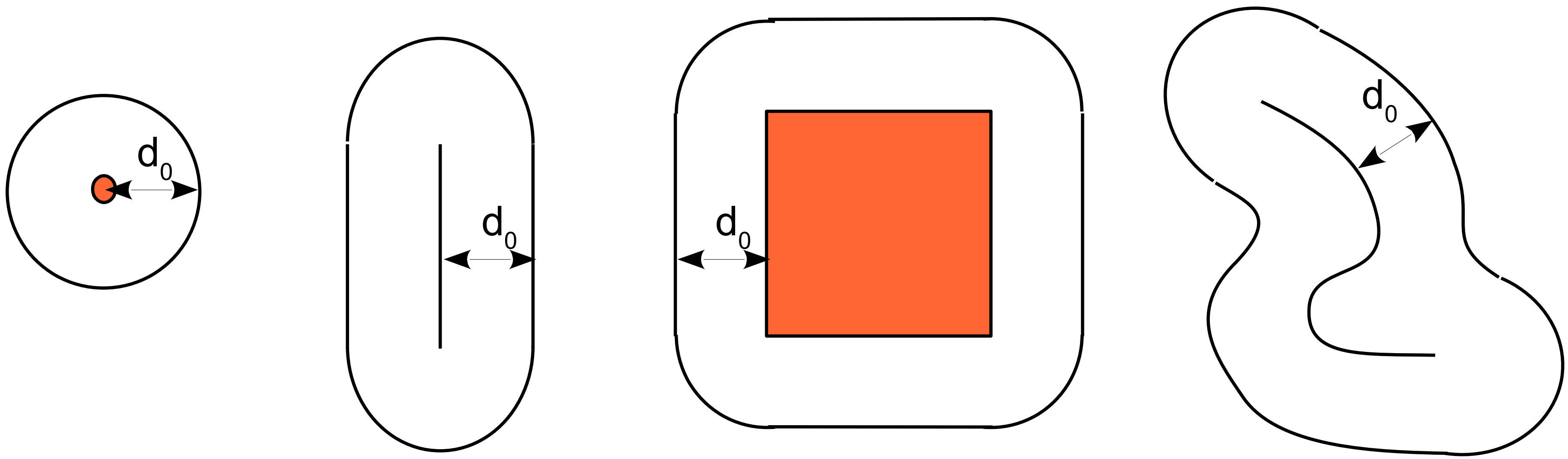
Cela se comprend en disant les choses ainsi : la valeur de f_2 en un point P et celle de f_1 au point P_1, c'est à dire :

$$f_2(P) = f_1(P_1) = f_1(T^{-1}(P))$$

L'équation de f_2 se déduit directement de celle de f_1 en appliquant la translation inverse aux points P de R^3

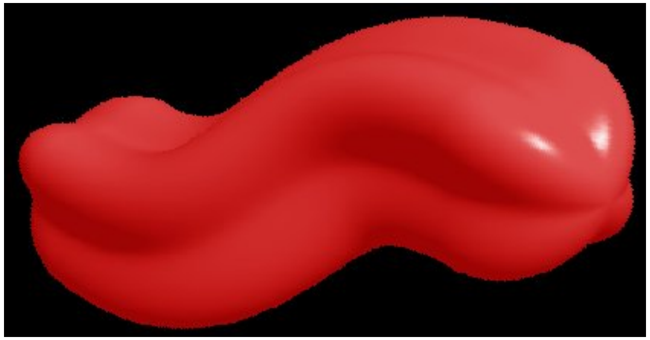
Les primitives à squelette

- Surfaces :

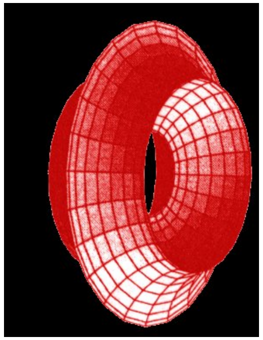


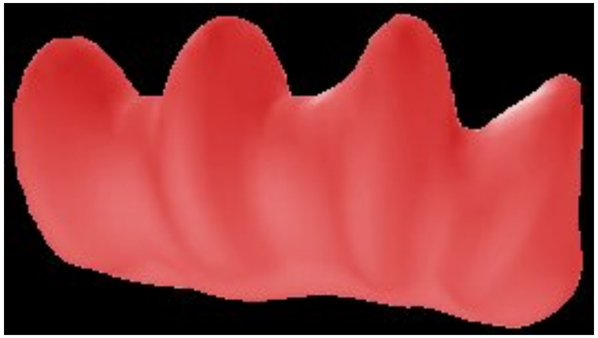
Autres primitives

- Il est aussi possible de construire des primitives de révolution et de balayage



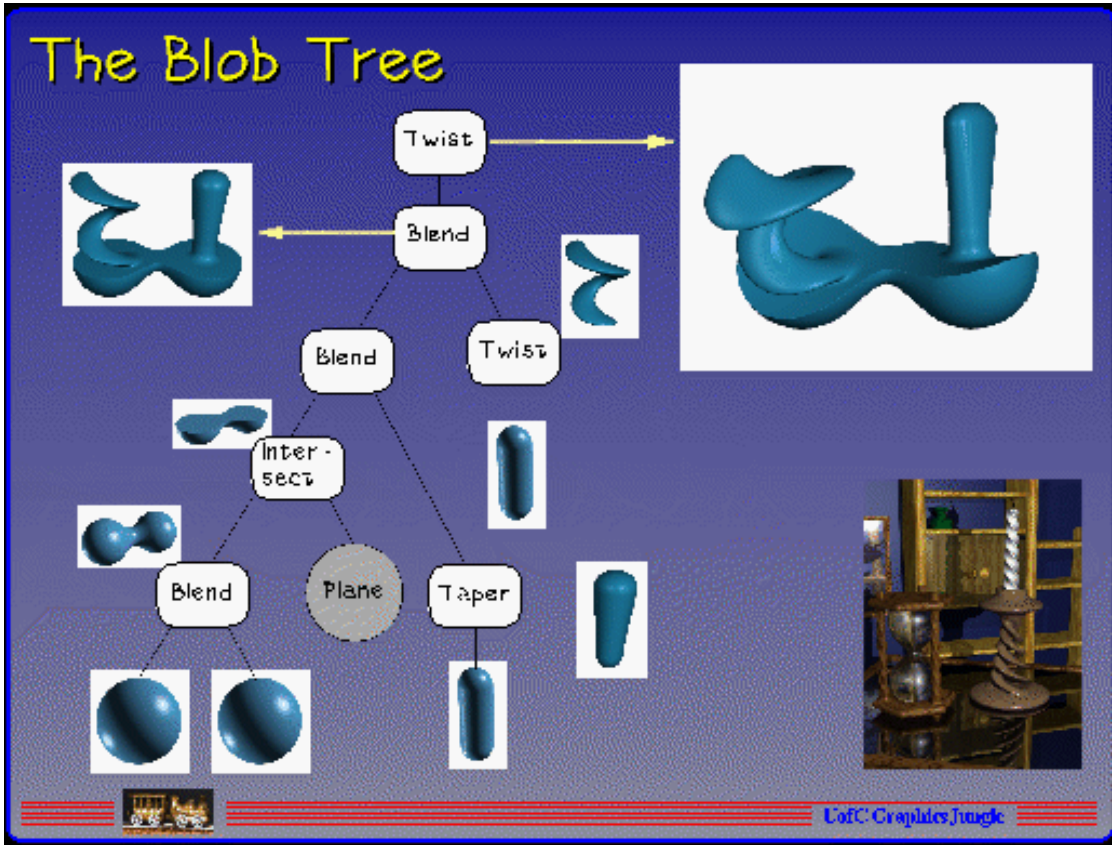
- Les familles de quadriques permettent de définir des primitives simples : cône, cylindre, ellipse
- Il existe d'autres primitives plus complexes : superquadriques, cylindres généralisés, carreaux paramétriques implicitisés, etc.





Combinaison dans un arbre CSG

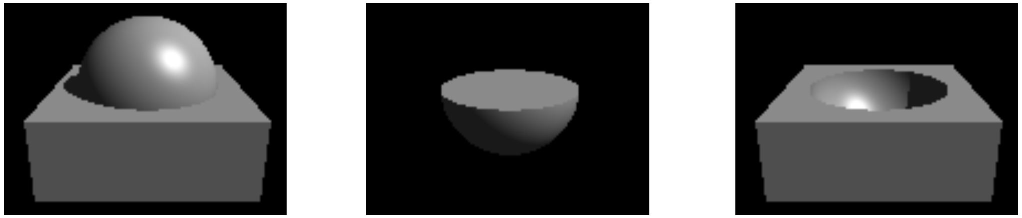
- Pour construire un objet complexe, les primitives peuvent être combinées dans un arbre CSG.



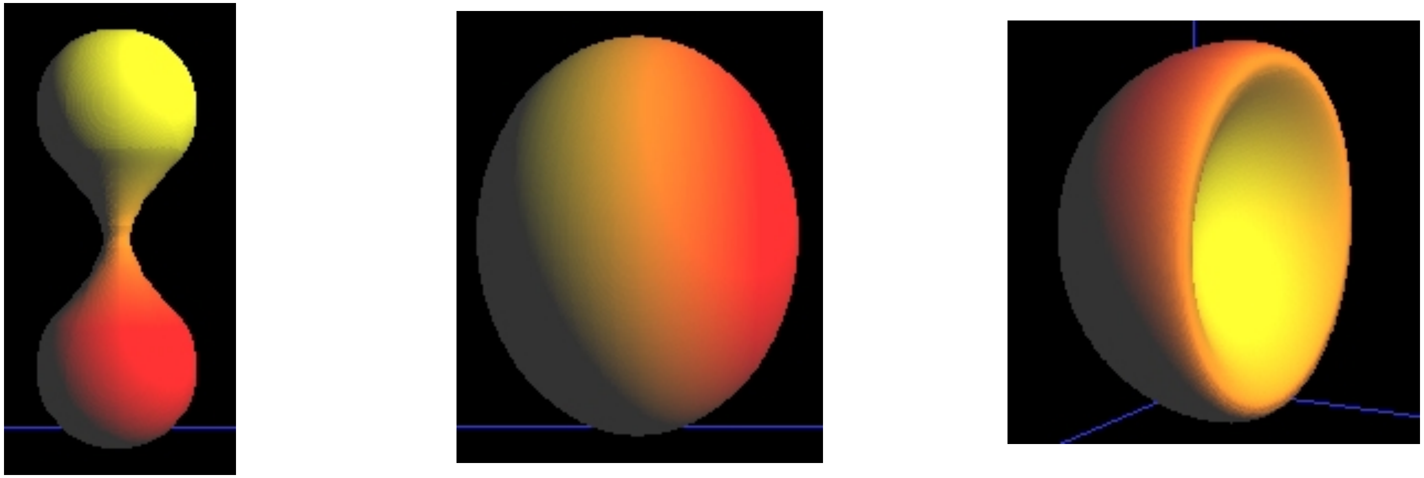
– Feuilles : primitives implicites
– Noeuds :
  - Transformation de l'espace (translation, rotation, torsion, etc)
  - Combinaison booléenne : union, intersection, différence (avec ou sans transition douce)

Opérateurs de composition booléenne

- Ces opérateurs sont : l'union, l'intersection et la différence.
  - Ce sont des opérateurs volumiques
  - La transition entre les primitives peut être franche :



  - Ou alors, elle peut être douce :



Fonctions réelles

Une **fonction réelle** (**R-function**, V. L. Rvachev, 1963) est une fonction f : R^nR qui ne peut changer de signe que si l'un de ses arguments change de signe.

Ainsi, les opérateurs de composition booléenne avec transition franche définis avec les fonctions *min* et *max* vues dans les cours sur les arbres CSG sont des **opérateurs réels** (**R-operator**) définis par des fonctions réelles :

$$\widehat{G^2_{\cup}}(f_1, f_2) = max(f_1, f_2)$$

$$\widehat{G^2_{\cap}}(f_1, f_2) = min(f_1, f_2)$$

$$\widehat{G^2_{\setminus}}(f_1, f_2) = min(f_1, -f_2)$$

R-functions de Rvachev

Ces « R-functions » ont la particularité d'être C^0 seulement quand $f_1=f_2=0$ et d'être de continuité C^1 partout ailleurs

$$\widehat{G^2_\cup}(f_1,f_2)=f_1+f_2+\sqrt{f_1^2+f_2^2}$$

$$\widehat{G^2_\cap}(f_1,f_2)=-\widehat{G^2_\cup}(-f_1,-f_2)=f_1+f_2-\sqrt{f_1^2+f_2^2}$$

$$\widehat{G^2_\setminus}(f_1,f_2)=\widehat{G^2_\cap}(f_1,-f_2)=f_1-f_2-\sqrt{f_1^2+f_2^2}$$

Rappel :

$$O_1\cap O_2=\neg(\neg O_1\cup\neg O_2)$$

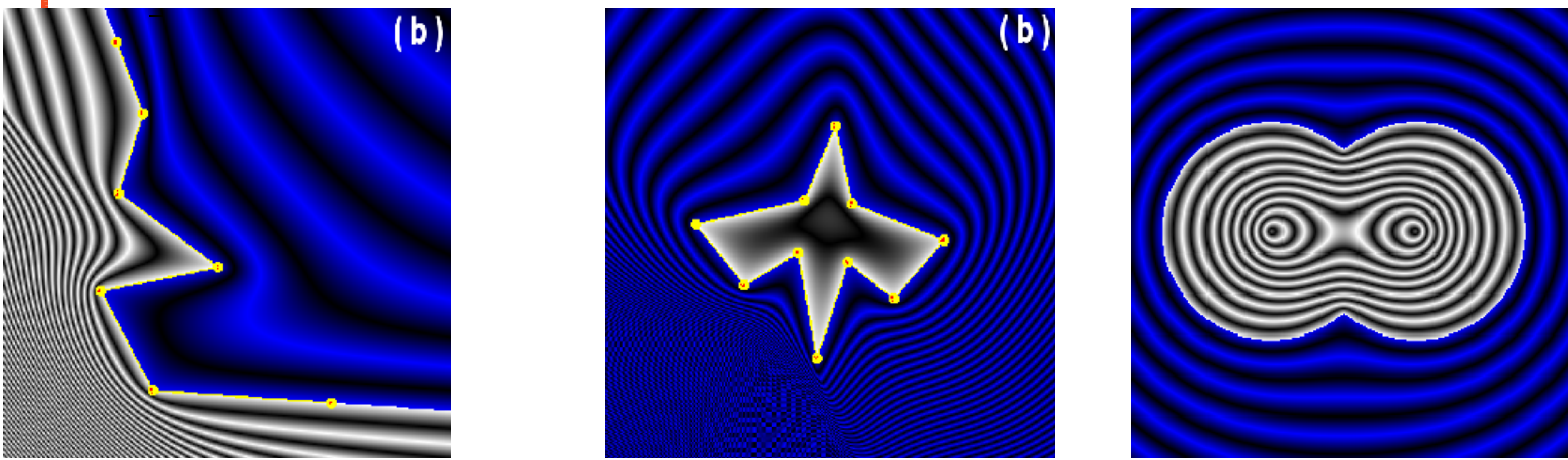
$$O_1\setminus O_2=O_1\cap\neg O_2$$

R-functions de Rvachev

- Si on souhaite un champ de potentiel de continuité C^m, la fonction suivante peut être utilisée :

$$\widehat{G^2_{\cup}}(f_1, f_2) = \left(f_1 + f_2 + \sqrt{f_1^2 + f_2^2}\right)\left(f_1^2 + f_2^2\right)^{\frac{m}{2}}$$

  - Il faut noter qu'avec cet opérateur, il est possible qu'il y ait apparition de zéros internes, ce qui n'est pas souhaitable.



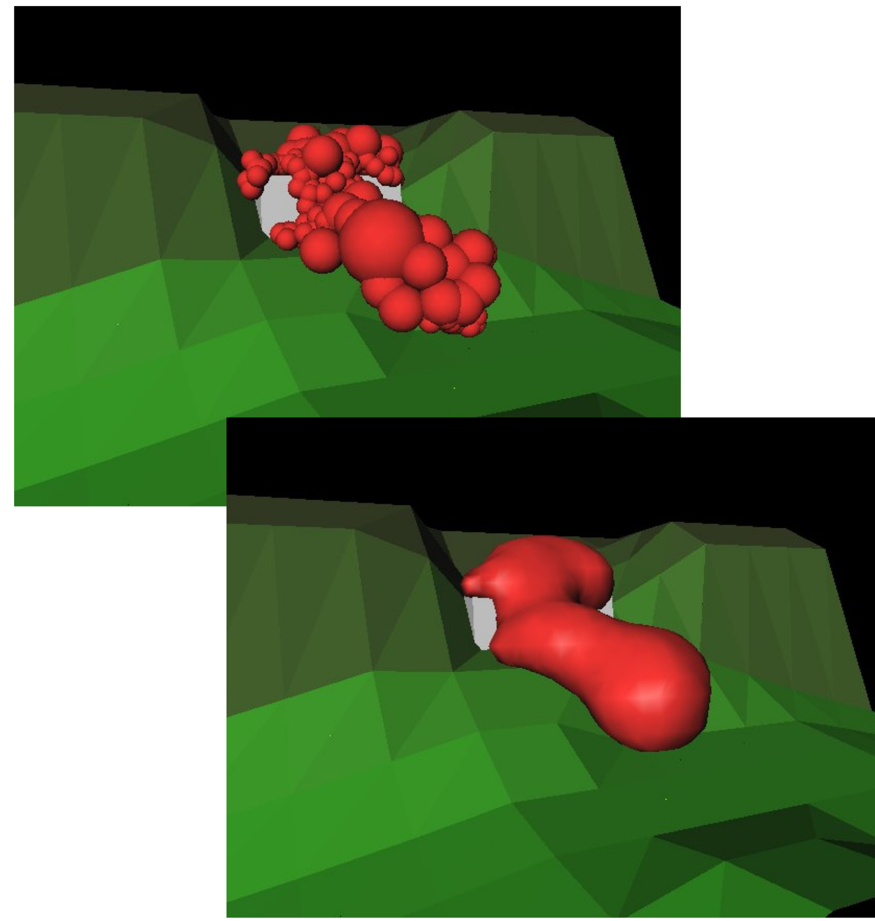
Exemples de champs de potentiels obtenus par unions et intersections de droites, puis sur l'union de deux sphères

Fonctions potentiel à support compact

Le « Blobby model » : le mélange

- Un objet complexe est obtenu à partir du mélange d'un grand nombre de « blobs » (sphères).
- Le mélange de **n** « blobs » est réalisé en faisant la somme de leurs fonctions potentiel :

$$F(P) = \sum_{i=1}^{n} f_i(P)$$



Plus / Moins

- Plus
  - Expression très simple
  - Mélange presque gratuit : simple somme des fonctions potentielles
  - Simplicité d'animation de surfaces lisses et hautement déformables par simple déplacement du centre de « blobs »
- Moins
  - Evaluation coûteuse de la fonction exponentielle
  - Les fonctions potentiel ne sont pas bornées
    - même si dès que d est suffisamment grand, f(d) □ 0

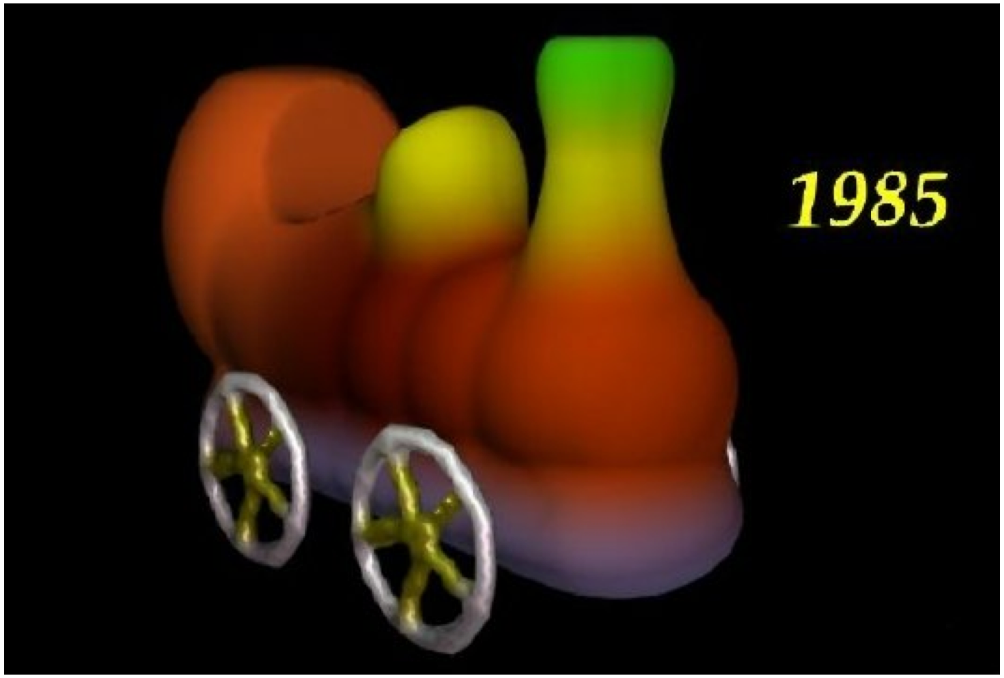
Les primitives à squelette

- Les primitives à squelette sont construites à partir d'une fonction de distance
- Elles sont directement utilisée avec des fonctions à support compact en utilisant comme distance d dans f(d) la distance entre un point P de l'espace et le squelette
- Vu ainsi, jusqu'à maintenant, nous utilisions uniquement des squelettes ponctuels pour définir les « blobs »
- Toute primitive géométrique à partir de laquelle on peut définir une fonction de distance d peut ainsi être composée avec une fonction f à support compact pour former une primitive à squelette qui aura la propriété de se mélanger par simple somme.

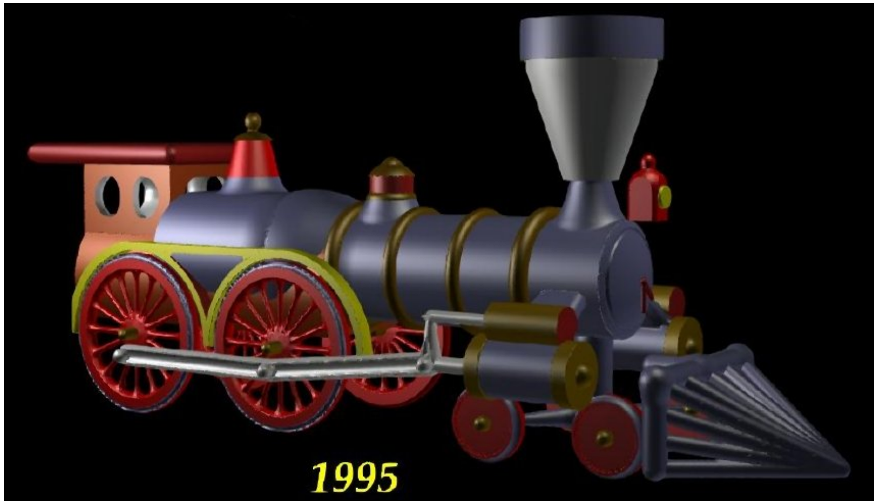
Les primitives négatives

- Quand on fait la somme des primitives pour les mélanger, il est possible d'ajouter les primitives négative
- Au lieu de se mélanger, ces primitives vont avoir un effet répulsif sur la surface

$$F(P)=\sum_{i=1}^{n} f_i(P) - \sum_{j=n+1}^{m} f_j(P)$$



Quelques résultats



Quelques résultats

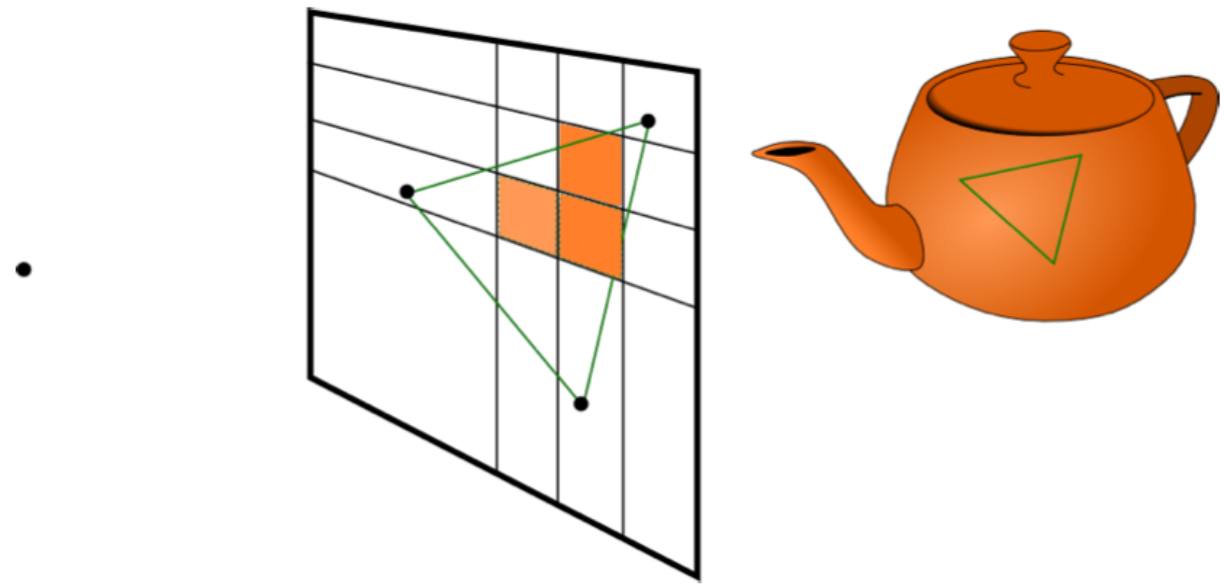
Avantages et inconvénients

- Les plus
  - Evaluation peut coûteuse
  - Mélange global par simple somme des fonctions potentiel
  - Possibilité de contrôler le mélange
  - Influence locale des primitives et possibilité d'algorithmes incrémentaux
  - Adaptés à une manipulation interactive

- Les moins
  - Moins d'opérations différentes que les fonctions à support global
  - Difficulté de produire des opérateurs CSG efficaces

Pipeline graphique

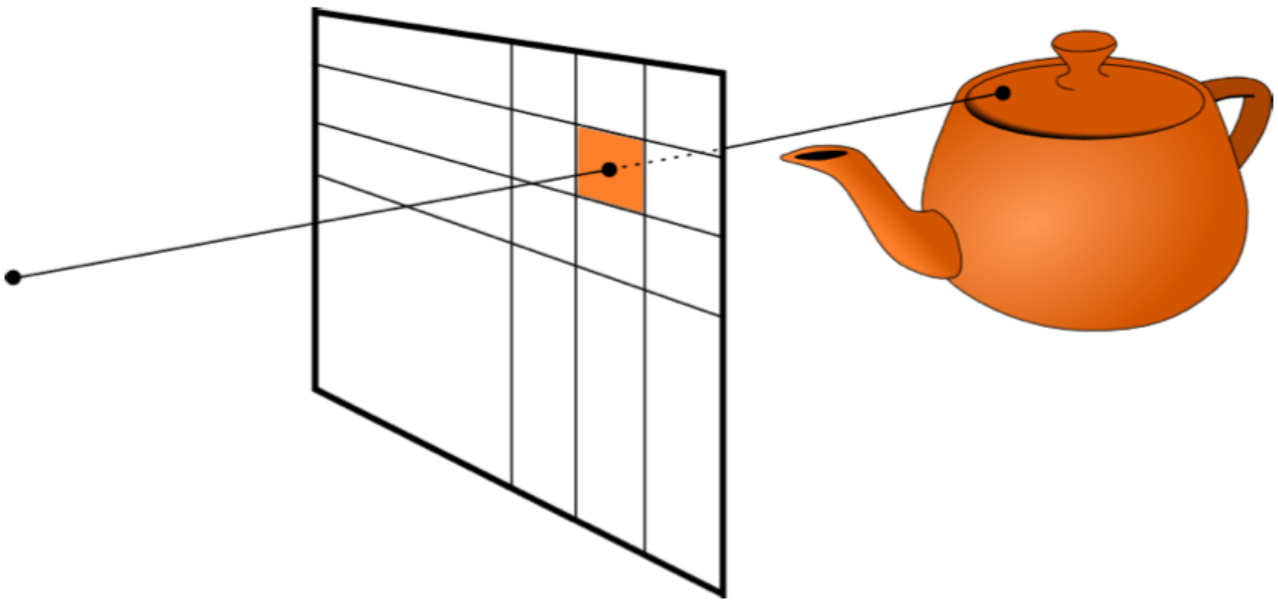
- **Rastérisation**



  - « Forward projection »
  - Procédure centrale: remplissage de primitives

Pipeline graphique

- Lancer de rayons



  - « Backward projection »
  - Procédure centrale: intersection rayon / primitive

Ray Tracing

- Provides rendering method with
  - Refraction/Transparent surfaces
  - Reflective surfaces
  - Shadows

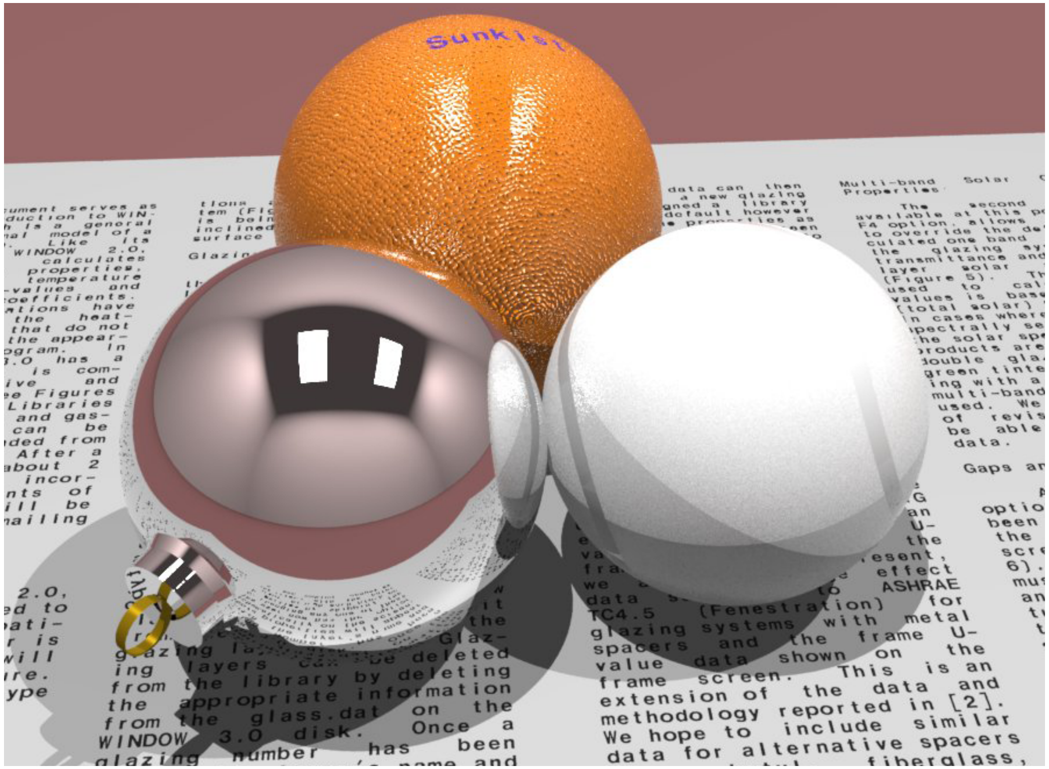


Image taken from http://radsite.lbl.gov/radiance/book/img/plate10.jpg

Ray Tracing

- Provides rendering method with
  - Refraction/Transparent surfaces
  - Reflective surfaces
  - Shadows

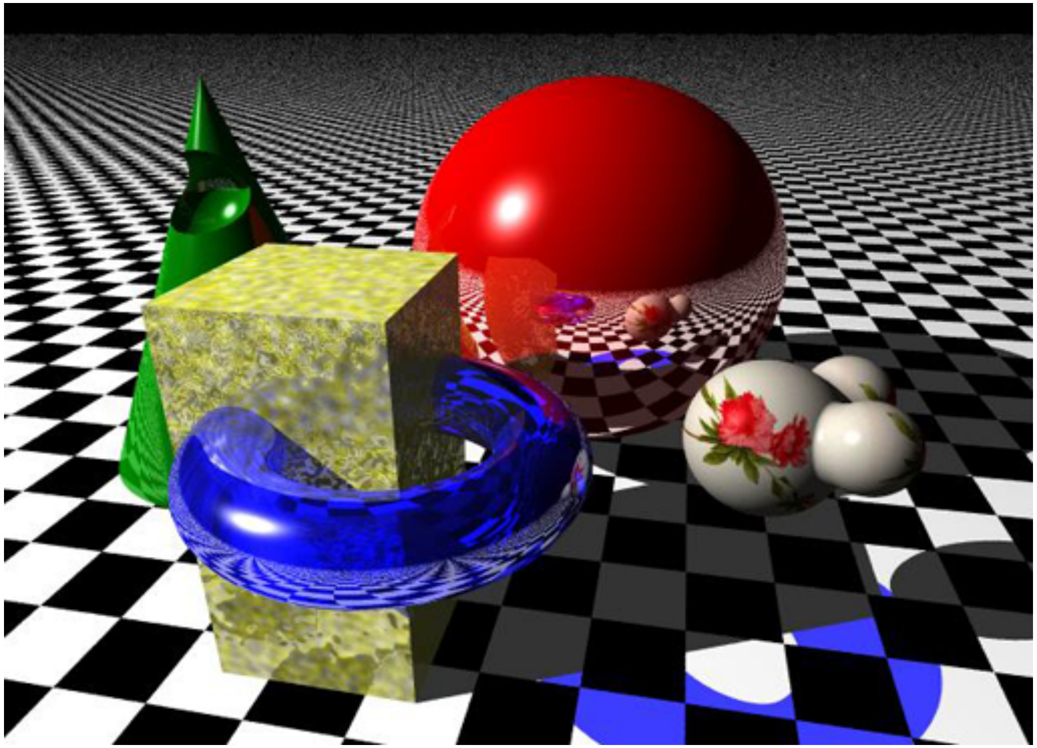


Image taken from http://www.tjhsst.edu/~dhyatt/superap/samplex.jpg

Ray Tracing

- Provides rendering method with
  - Refraction/Transparent surfaces
  - Reflective surfaces
  - Shadows