

Analyse Mathématique et principes de la méthode

1 Introduction

1.1 ModIA 4 : Différences finies

$$(P) \quad \begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x) & \text{sur } \Omega =]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Depuis une grille régulière homogène de pas h , on cherche une approximation de la solution u de (P) en les noeuds de maillage :

$$\begin{array}{cccccccccccc} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \end{array}$$

$(x_i)_{i \in \llbracket 0, N+1 \rrbracket}$, coordonnées des noeuds de maillage.

On cherche $u_h \in \mathbb{R}^{N+2}$, approximation de u en $(x_i)_{i \in \llbracket 0, N+1 \rrbracket}$.
Les conditions aux limites donnent : $\boxed{u_0 = u_{N+1} = 0}$

Il nous reste à trouver $(u_i)_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ avec $u_h = (u_i)_{i \in \llbracket 0, N+1 \rrbracket}$.

On approxime $u''(x_i) \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ par :
 $u''(x_i) \approx \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2}$. (Hypothèse que $u \in \mathcal{C}^4(]0, 1[)$)

D'où la résolution de (P) revient à résoudre :

$$(P_h) \quad \begin{cases} -\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + c(x_i)u_i = f(x_i) & \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket \\ u_0 = u_{N+1} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Remarque : Etude de la consistance, stabilité (instationnaire) et convergence du schéma numérique.

Remarque : Limitations :

- u supposé "suffisamment régulière" pour que l'approximation de u'' soit correcte. (Est-on contraint par une telle hypothèse pour la résolution numérique ?)
- Grille régulière : problème d'adéquation entre la grille spatiale et la frontière du domaine.

1.2 ModIA 5 : Formulation variationnelle et méthode des éléments finis

1.2.1 Construction d'un "nouveau" problème

Trouver $u \in V$ tel que :

$$(P_{FV}) \quad \forall v \in V, \quad - \int_{\Omega} u''(x)v(x)dx + \int_{\Omega} c(x)u(x)v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx \quad (3)$$

Questions :

- Dans quel espace choisir u et v pour que les intégrales soient bien définies ?
- Condition d'existence et unicité de la solution de ce problème
- Lien entre la solution de (P_{FV}) et celle de (P) ?

1.2.2 Résolution numérique de (P_{FV})

Recherche d'une solution à (P_{FV}) sur un sous-espace de dimension finie.

Questions :

- Comment construire ce sous-espace ?
- Convergence de la méthode ?

2 Espace $L^2(\Omega)$ et dérivée faible

2.1 Espace des fonctions tests

Définition - Espace des fonctions tests

On note $D(\Omega)$ l'espace des fonctions "tests", définies sur Ω , \mathcal{C}^∞ et à support compact K inclus dans Ω .

$D(\Omega)$ est un espace vectoriel.

Remarque :

- i) Support d'une fonction $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \text{supp}(\psi) = \overline{\{x \in \Omega, \psi(x) \neq 0\}}$.
- ii) Soit $\psi \in D(\Omega)$, alors toutes ses dérivées sont des fonctions tests.

Définition - Convergence dans $D(\Omega)$

Soient $\psi \in D(\Omega)$ et $(\psi_p) \in D(\Omega)^\mathbb{N}$.

On dit que (ψ_p) converge vers ψ dans $D(\Omega)$ si :

- i) $\exists K \subset \Omega$ compact tel que $\forall p \in \mathbb{N}, \text{supp}(\psi_p) \subset K$ et $\text{supp}(\psi) \subset K$.
- ii) $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, (D^\alpha \psi_p)$ converge uniformément vers $D^\alpha \psi$ sur K .

$$\Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \forall \varepsilon > 0, \exists p_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p \geq p_0, \\ \forall x \in \Omega, |D^\alpha \psi_p(x) - D^\alpha \psi(x)| < \varepsilon.$$

$$\text{avec } D^\alpha \psi = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \psi.$$

Exemple : $n = 2$

- $\alpha = (1, 0), D^\alpha \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}.$
- $\alpha = (1, 1), D^\alpha \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2}.$
- $\alpha = (0, 2), D^\alpha \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2}.$

2.2 Espace $L^2(\Omega)$

Définition

Soit Ω ouvert de \mathbb{R}^n muni de la mesure de Lebesgue.

On pose $\mathcal{L}^2(\Omega)$ l'ensemble des fonctions mesurables sur Ω :

$$\mathcal{L}^2(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } \int_\Omega |v(x)|^2 dx < +\infty\}.$$

On introduit la relation d'équivalence \sim sur $\mathcal{L}^2(\Omega)$, définie par :

$$\forall (f, g) \in (\mathcal{L}^2(\Omega))^2, f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ p.p. sur } \Omega$$

On définit $L^2(\Omega) := \mathcal{L}^2(\Omega) / \sim$.

$$\forall f \in L^2(\Omega), f = \{g \in \mathcal{L}^2(\Omega) \text{ tel que } g = f \text{ p.p. sur } \Omega\}$$

On identifie $f \in L^2(\Omega)$ avec son représentant f sur $\mathcal{L}^2(\Omega)$.

Remarque :

- $\int_\Omega |f(x)|^2 dx = 0$ avec $f \in \mathcal{L}^2(\Omega) \Leftrightarrow f = 0$ p.p. sur Ω .
- $\int_\Omega |f(x)|^2 dx = 0$ avec $f \in L^2(\Omega) \Leftrightarrow f = 0$ sur $L^2(\Omega)$.

Théorème

$L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par :

$$\forall (f, g) \in (L^2(\Omega))^2, \langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$$

est un espace de Hilbert.

On notera $\|f\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx}$ la norme associée.

Propriété - Fonctions "tests" et $L^2(\Omega)$

- i) $D(\Omega) \subset L^2(\Omega)$.
- ii) Soit $(\psi_p) \in D(\Omega)^{\mathbb{N}}$ qui converge (au sens de la convergence dans $D(\Omega)$) vers $\psi \in D(\Omega)$.
Alors (ψ_p) converge vers $\psi \in L^2(\Omega)$.
- iii) $D(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$:
 $\forall f \in L^2(\Omega), \exists (f_p) \in D(\Omega)^{\mathbb{N}}$ tel que $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f_p - f\|_{L^2(\Omega)} = 0$.
- iv) Soit $f \in L^2(\Omega)$ telle que $\forall \psi \in D(\Omega), \int_{\Omega} f(x)\psi(x)dx = 0$.
Alors $f = 0$ sur $L^2(\Omega)$.

Remarque : On notera $\psi_p \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{D(\Omega)} \psi \Rightarrow \psi_p \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{L^2(\Omega)} \psi$.

2.3 Dérivée faible et divergence faible dans $L^2(\Omega)$

Définition - Dérivée faible

Soit $v \in L^2(\Omega)$.

On dit que v admet une *dérivée faible* dans $L^2(\Omega)$ si :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists w_i \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall \psi \in D(\Omega), \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} w_i(x) \psi(x) dx$$

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, w_i ainsi défini est appelé la *i-ème dérivée partielle première faible* de v . On la notera $w_i := \frac{\partial v}{\partial x_i}$.

Remarque :

- i) $\forall v \in L^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_i}$ est un abus de langage renvoyant à la i-ème dérivée partielle faible.
- ii) Si $v \in L^2(\Omega)$ est dérivable et $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$, alors les dérivées partielles faibles et classiques coïncident.

Propriété

Soit $v \in L^2(\Omega)$.

v admet une dérivée faible dans $L^2(\Omega)$ si

$$\exists c > 0 \text{ tel que } \forall \psi \in D(\Omega), \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \left| \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx \right| \leq c \|\psi\|_{L^2(\Omega)}$$

Définition - Divergence faible

Soit $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sigma_i \in L^2(\Omega)$.

On notera également $\sigma \in [L^2(\Omega)]^n$.

On dit que σ admet une *divergence faible* dans $L^2(\Omega)$ si :

$$\exists w \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall \psi \in D(\Omega), \int_{\Omega} \sigma(x) \cdot \nabla \psi(x) dx = - \int_{\Omega} w(x) \psi(x) dx$$

avec $\sigma \cdot \nabla \psi = \sum_{i=1}^n \sigma_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$.

$w \in L^2(\Omega)$ ainsi défini est appelé la *divergence faible* de σ . On la notera $w := \operatorname{div}(\sigma)$. ($\operatorname{div}(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i}$)

Propriété

Soit $\sigma \in [L^2(\Omega)]^n$.

σ admet une divergence faible si

$$\exists c > 0 \text{ tel que } \forall \psi \in D(\Omega), \left| \int_{\Omega} \sigma(x) \cdot \nabla \psi(x) dx \right| \leq c \|\psi\|_{L^2(\Omega)}$$

3 Espaces de Sobolev

3.1 Espace $H^1(\Omega)$ et ses généralisations

Définition

Soit Ω ouvert de \mathbb{R}^n .

On appelle $H^1(\Omega)$ l'ensemble des éléments de $L^2(\Omega)$ qui admettent une dérivée faible dans $L^2(\Omega)$.

On notera : $H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\}$.

Remarque : La notation $\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$ renvoie à l'existence d'une i -ème dérivée partielle faible de v .

Théorème

$H^1(\Omega)$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par :

$$\forall (f, g) \in (H^1(\Omega))^2, \langle f, g \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)dx$$

est un espace de Hilbert.

Remarque : $\langle f, g \rangle_{H^1(\Omega)} = \langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial g}{\partial x_i} \rangle_{L^2(\Omega)}$.

Remarque : On note $\langle f, g \rangle_{1,\Omega} := \sum_{i=1}^n \langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial g}{\partial x_i} \rangle_{L^2(\Omega)}$.

Cependant, $\langle f, g \rangle_{1,\Omega}$ n'est pas un produit scalaire sans autres hypothèses : $\langle f, f \rangle_{1,\Omega} = 0 \nRightarrow f = 0$.



- $H^1(\Omega)$ muni de $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(\Omega)}$ est un espace préhilbertien. (admis)
- $H^1(\Omega)$ muni de $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ défini par $\forall f \in H^1(\Omega), \|f\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \|\frac{\partial f}{\partial x_i}\|_{L^2(\Omega)}^2}$ est complet :

Soit $(u_p) \in H^1(\Omega)^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy pour $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.

Par définition,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, p, q \geq p_0 \Rightarrow \|u_p - u_q\|_{H^1(\Omega)} < \varepsilon$$

Par définition de $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, p, q \geq p_0 \Rightarrow \|u_p - u_q\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon$$

$$\text{et } \|\frac{\partial u_p}{\partial x_i} - \frac{\partial u_q}{\partial x_i}\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon \text{ pour } i \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

Donc (u_p) est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ muni de $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ et ainsi converge dans $L^2(\Omega)$. On note $u \in L^2(\Omega)$ sa limite.

De même, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(\frac{\partial u_p}{\partial x_i})$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ et converge dans $L^2(\Omega)$.

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists w_i \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{L^2(\Omega)} w_i.$$

Soit $p \in \mathbb{N}$.

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, par définition de $\frac{\partial u_p}{\partial x_i}$,

$$\forall \psi \in D(\Omega), \int_{\Omega} u_p(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u_p}{\partial x_i}(x) \psi(x) dx.$$

$$\text{D'où, } \int_{\Omega} \frac{\partial u_p}{\partial x_i}(x) \psi(x) dx = - \langle u_p, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \rangle_{L^2(\Omega)} \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} - \langle u, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

$$\text{Or, } \langle u, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx.$$

$$\text{De plus, } \int_{\Omega} \frac{\partial u_p}{\partial x_i}(x) \psi(x) dx = \langle \frac{\partial u_p}{\partial x_i}, \psi \rangle_{L^2(\Omega)} \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} \langle w_i, \psi \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

$$\begin{aligned} \text{D'où, } \int_{\Omega} w_i \psi dx &= - \int_{\Omega} u \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx. \\ \Leftrightarrow \int_{\Omega} u \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx &= - \int_{\Omega} w_i \psi dx. \end{aligned}$$

Texte manquant

Remarque :

- i) Si Ω est borné, alors $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$.
- ii) $H^1(\Omega) \subsetneq L^2(\Omega)$ (inclusion stricte).
- iii) $D(\Omega)$ est un sous-espace vectoriel de $H^1(\Omega)$.
 $D(\Omega)$ n'est pas dense dans $H^1(\Omega)$.

3.2 Espace $H_0^1(\Omega)$

Définition - Espace $H_0^1(\Omega)$

$H_0^1(\Omega)$ est la fermeture de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

$$H_0^1(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{H^1(\Omega)} = \{v \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \exists (v_p) \in D(\Omega)^{\mathbb{N}} \text{ tel que } v_p \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{H^1(\Omega)} v\}$$

Propriété - Inégalité de Poincaré

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n .

$\exists C_{\Omega} > 0$ tel que $\forall v \in H_0^1(\Omega), \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\Omega} |v|_{1,\Omega}$.

avec $|v|_{1,\Omega} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2}$.

► admis (calcul intégral)

Remarque : Si Ω est un ouvert borné, $H_0^1(\Omega) \subsetneq H^1(\Omega)$ (exemple : fonction constante non-nulle).

De plus, l'inégalité de Poincaré n'est pas valide pour $v \in H^1(\Omega) \setminus H_0^1(\Omega)$.

Corollaire : Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n .

La semi-norme $|\cdot|_{1,\Omega}$ est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme induite par $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.

Théorème

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n .

$H_0^1(\Omega)$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1,\Omega}$ défini par :

$$\forall (f, g) \in (H_0^1(\Omega))^2, \langle f, g \rangle_{1,\Omega} = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) dx$$

est un espace de Hilbert.

Propriété

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n à frontière Lipschitzienne. (Ω est appelé "domaine")

Alors $D(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ avec $D(\overline{\Omega}) = \{\text{restriction des fonctions tests de } \mathbb{R}^n \text{ à } \Omega\}$.

► admis

Définition

Soit $m \in \mathbb{N}$.

On appelle $H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m, D^\alpha v \in L^2(\Omega)\}$.

Texte manquant