

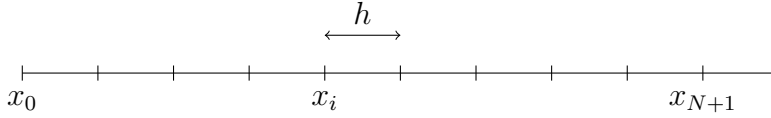
# Analyse Mathématique et principes de la méthode

## 1 Introduction

### 1.1 ModIA 4 : Différences finies

$$(P) \quad \begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x) & \text{sur } \Omega = ]0, 1[ \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Depuis une grille régulière homogène de pas  $h$ , on cherche une approximation de la solution  $u$  de  $(P)$  en les noeuds de maillage :



$(x_i)_{i \in \llbracket 0, N+1 \rrbracket}$ , coordonnées des noeuds de maillage.

On cherche  $u_h \in \mathbb{R}^{N+2}$ , approximation de  $u$  en  $(x_i)_{i \in \llbracket 0, N+1 \rrbracket}$ .  
Les conditions aux limites donnent :  $u_0 = u_{N+1} = 0$

Il nous reste à trouver  $(u_i)_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$  avec  $u_h = (u_i)_{i \in \llbracket 0, N+1 \rrbracket}$ .

On approxime  $u''(x_i) \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket$  par :  $u''(x_i) \approx \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2}$ .  
(Hypothèse que  $u \in \mathcal{C}^4([0, 1])$ )

D'où la résolution de  $(P)$  revient à résoudre :

$$(P_h) \quad \begin{cases} -\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + c(x_i)u_i = f(x_i) & \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket \\ u_0 = u_{N+1} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

**Remarque :** Etude de la consistance, stabilité (instationnaire) et convergence du schéma numérique.

**Remarque :** Limitations :

- $u$  supposé "suffisamment régulière" pour que l'approximation de  $u''$  soit correcte. (Est-on contraint apr une telle hypothèse pour la résolution numérique ?)
- Grille régulière : problème d'adéquation entre la grille spatiale et la frontière du domaine.

## 1.2 ModIA 5 : Formulation variationnelle et méthode des éléments finis

### 1.2.1 Construction d'un "nouveau" problème

Trouver  $u \in V$  tel que :

$$(P_{FV}) \quad \forall v \in V, \quad - \int_{\Omega} u''(x)v(x)dx + \int_{\Omega} c(x)u(x)v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx \quad (3)$$

Questions :

- Dans quel espace choisir  $u$  et  $v$  pour que les intégrales soient bien définies ?
- Condition d'existence et unicité de la solution de ce problème
- Lien entre la solution de  $(P_{FV})$  et celle de  $(P)$  ?

### 1.2.2 Résolution numérique de $(P_{FV})$

Recherche d'une solution à  $(P_{FV})$  sur un sous-espace de dimension finie.

Questions :

- Comment construire ce sous-espace ?
- Convergence de la méthode ?

## 2 Espace $L^2(\Omega)$ et dérivée faible

### 2.1 Espace des fonctions tests

#### Définition - Espace des fonctions tests

On note  $D(\Omega)$  l'espace des fonctions "tests", définies sur  $\Omega$ ,  $\mathcal{C}^\infty$  et à support compact  $K$  inclus dans  $\Omega$ .

$D(\Omega)$  est un espace vectoriel.

**Remarque :**

- i) Support d'une fonction  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \text{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega, \varphi(x) \neq 0\}}$ .
- ii) Soit  $\varphi \in D(\Omega)$ , alors toutes ses dérivées sont des fonctions tests.

### Définition - Convergence dans $D(\Omega)$

Soient  $\varphi \in D(\Omega)$  et  $(\varphi_p) \in D(\Omega)^\mathbb{N}$ .

On dit que  $(\varphi_p)$  converge vers  $\varphi$  dans  $D(\Omega)$  si :

- i)  $\exists K \subset \Omega$  compact tel que  $\forall p \in \mathbb{N}, \text{supp}(\varphi_p) \subset K$  et  $\text{supp}(\varphi) \subset K$ .
- ii)  $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, (D^\alpha \varphi_p)$  converge uniformément vers  $D^\alpha \varphi$  sur  $K$ .

$$\Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \forall \varepsilon > 0, \exists p_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p \geq p_0, \\ \forall x \in \Omega, |D^\alpha \varphi_p(x) - D^\alpha \varphi(x)| < \varepsilon.$$

$$\text{avec } D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \varphi.$$

**Exemple :**  $n = 2$

- $\alpha = (1, 0), D^\alpha \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}.$
- $\alpha = (1, 1), D^\alpha \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}.$
- $\alpha = (0, 2), D^\alpha \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}.$

## 2.2 Espace $L^2(\Omega)$

### Définition

Soit  $\Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$  muni de la mesure de Lebesgue.

On pose  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  l'ensemble des fonctions mesurables sur  $\Omega$  :

$$\mathcal{L}^2(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } \int_\Omega |v(x)|^2 dx < +\infty\}.$$

On introduit la relation d'équivalence  $\sim$  sur  $\mathcal{L}^2(\Omega)$ , définie par :

$$\forall (f, g) \in (\mathcal{L}^2(\Omega))^2, f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ p.p. sur } \Omega$$

On définit  $L^2(\Omega) := \mathcal{L}^2(\Omega) / \sim$ .

$$\forall f \in L^2(\Omega), f = \{g \in \mathcal{L}^2(\Omega) \text{ tel que } g = f \text{ p.p. sur } \Omega\}$$

On identifie  $f \in L^2(\Omega)$  avec son représentant  $f$  sur  $\mathcal{L}^2(\Omega)$ .

**Remarque :**

- $\int_\Omega |f(x)|^2 dx = 0$  avec  $f \in \mathcal{L}^2(\Omega) \Leftrightarrow f = 0$  p.p. sur  $\Omega$ .
- $\int_\Omega |f(x)|^2 dx = 0$  avec  $f \in L^2(\Omega) \Leftrightarrow f = 0$  sur  $L^2(\Omega)$ .

### Théorème

$L^2(\Omega)$  muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  défini par :

$$\forall (f, g) \in (L^2(\Omega))^2, \langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$$

est un espace de Hilbert.

On notera  $\|f\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx}$  la norme associée.

### Propriété - Fonctions "tests" et $L^2(\Omega)$

- i)  $D(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ .
- ii) Soit  $(\varphi_p) \in D(\Omega)^{\mathbb{N}}$  qui converge (au sens de la convergence dans  $D(\Omega)$ ) vers  $\varphi \in D(\Omega)$ .  
Alors  $(\varphi_p)$  converge vers  $\varphi \in L^2(\Omega)$ .
- iii)  $D(\Omega)$  est dense dans  $L^2(\Omega)$  :  
 $\forall f \in L^2(\Omega), \exists (f_p) \in D(\Omega)^{\mathbb{N}}$  tel que  $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f_p - f\|_{L^2(\Omega)} = 0$ .
- iv) Soit  $f \in L^2(\Omega)$  telle que  $\forall \varphi \in D(\Omega), \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx = 0$ .  
Alors  $f = 0$  sur  $L^2(\Omega)$ .

**Remarque :** On notera  $\varphi_p \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{D(\Omega)} \varphi \Rightarrow \varphi_p \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{L^2(\Omega)} \varphi$ .

## 2.3 Dérivée faible et divergence faible dans $L^2(\Omega)$

### Définition - Dérivée faible

Soit  $v \in L^2(\Omega)$ .

On dit que  $v$  admet une *dérivée faible* dans  $L^2(\Omega)$  si :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists w_i \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall \varphi \in D(\Omega), \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} w_i(x) \varphi(x) dx$$

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $w_i$  ainsi défini est appelé la *i-ème dérivée partielle première faible* de  $v$ . On la notera  $w_i := \frac{\partial v}{\partial x_i}$ .

**Remarque :**

- i)  $\forall v \in L^2(\Omega)$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x_i}$  est un abus de langage renvoyant à la i-ème dérivée partielle faible.
- ii) Si  $v \in L^2(\Omega)$  est dérivable et  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$ , alors les dérivées partielles faibles et classiques coïncident.

### Propriété

Soit  $v \in L^2(\Omega)$ .  
 $v$  admet une dérivée faible dans  $L^2(\Omega)$  si

$$\exists c > 0 \text{ tel que } \forall \varphi \in D(\Omega), \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \left| \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \right| \leq c \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}$$

### Définition - Divergence faible

Soit  $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sigma_i \in L^2(\Omega)$ .  
On notera également  $\sigma \in [L^2(\Omega)]^n$ .  
On dit que  $\sigma$  admet une *divergence faible* dans  $L^2(\Omega)$  si :

$$\exists w \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall \varphi \in D(\Omega), \int_{\Omega} \sigma(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx = - \int_{\Omega} w(x) \varphi(x) dx$$

avec  $\sigma \cdot \nabla \varphi = \sum_{i=1}^n \sigma_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ .

$w \in L^2(\Omega)$  ainsi défini est appelé la *divergence faible* de  $\sigma$ . On la notera  $w := \operatorname{div}(\sigma)$ . ( $\operatorname{div}(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i}$ )

### Propriété

Soit  $\sigma \in [L^2(\Omega)]^n$ .  
 $\sigma$  admet une divergence faible si

$$\exists c > 0 \text{ tel que } \forall \varphi \in D(\Omega), \left| \int_{\Omega} \sigma(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx \right| \leq c \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}$$

## 3 Espaces de Sobolev

### 3.1 Espace $H^1(\Omega)$ et ses généralisations

#### Définition

Soit  $\Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .  
On appelle  $H^1(\Omega)$  l'ensemble des éléments de  $L^2(\Omega)$  qui admettent une dérivée faible dans  $L^2(\Omega)$ .  
On notera :  $H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\}$ .

**Remarque :** La notation  $\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$  renvoie à l'existence d'une i-ème dérivée partielle faible de  $v$ .

### Théorème

$H^1(\Omega)$  muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  défini par :

$$\forall (f, g) \in (H^1(\Omega))^2, \langle f, g \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)dx$$

est un espace de Hilbert.

**Remarque :**  $\langle f, g \rangle_{H^1(\Omega)} = \langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial g}{\partial x_i} \rangle_{L^2(\Omega)}$ .

**Remarque :** On note  $\langle f, g \rangle_{1,\Omega} := \sum_{i=1}^n \langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial g}{\partial x_i} \rangle_{L^2(\Omega)}$ .

Cependant,  $\langle f, g \rangle_{1,\Omega}$  n'est pas un produit scalaire sans autres hypothèses :  $\langle f, f \rangle_{1,\Omega} = 0 \nRightarrow f = 0$ .



- $H^1(\Omega)$  muni de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(\Omega)}$  est un espace préhilbertien. (admis)
- $H^1(\Omega)$  muni de  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$  défini par  $\forall f \in H^1(\Omega), \|f\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \|\frac{\partial f}{\partial x_i}\|_{L^2(\Omega)}^2}$  est complet :

Soit  $(u_p) \in H^1(\Omega)^{\mathbb{N}}$  une suite de Cauchy pour  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ .

Par définition,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, p, q \geq p_0 \Rightarrow \|u_p - u_q\|_{H^1(\Omega)} < \varepsilon$$

Par définition de  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ ,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, p, q \geq p_0 \Rightarrow \|u_p - u_q\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon$$

$$\text{et } \|\frac{\partial u_p}{\partial x_i} - \frac{\partial u_q}{\partial x_i}\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon \text{ pour } i \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

Donc  $(u_p)$  est une suite de Cauchy dans  $L^2(\Omega)$  muni de  $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$  et ainsi converge dans  $L^2(\Omega)$ . On note  $u \in L^2(\Omega)$  sa limite.

De même,  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $(\frac{\partial u_p}{\partial x_i})$  est une suite de Cauchy dans  $L^2(\Omega)$  et converge dans  $L^2(\Omega)$ .

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists w_i \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \frac{\partial u}{\partial x_i} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} w_i.$$

Soit  $p \in \mathbb{N}$ .

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , par définition de  $\frac{\partial u_p}{\partial x_i}$ ,

$$\forall \varphi \in D(\Omega), \int_{\Omega} u_p(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u_p}{\partial x_i}(x) \varphi(x) dx.$$

$$\text{D'où, } \int_{\Omega} \frac{\partial u_p}{\partial x_i}(x) \varphi(x) dx = - \langle u_p, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} - \langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

$$\text{Or, } \langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx.$$

$$\text{De plus, } \int_{\Omega} \frac{\partial u_p}{\partial x_i}(x) \varphi(x) dx = \langle \frac{\partial u_p}{\partial x_i}, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \langle w_i, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

D'où,  $\int_{\Omega} w_i \varphi dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx$ .  
 $\Leftrightarrow \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} w_i \varphi dx$ , et ce pour tout  $\varphi \in D(\Omega)$ ,  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .  
 $\Rightarrow u$  admet une dérivée faible dans  $L^2(\Omega)$  et  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x_i} = w_i$ .

Donc  $u \in H^1(\Omega)$ .

On vérifie que  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|u_p - u\|_{H^1(\Omega)} = 0$ .

### Remarque :

- i) Si  $\Omega$  est borné, alors  $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$ .
- ii)  $H^1(\Omega) \subsetneq L^2(\Omega)$  (inclusion stricte).
- iii)  $D(\Omega)$  est un sous-espace vectoriel de  $H^1(\Omega)$ .  
 $D(\Omega)$  n'est pas dense dans  $H^1(\Omega)$ .

## 3.2 Espace $H_0^1(\Omega)$

### Définition - Espace $H_0^1(\Omega)$

$H_0^1(\Omega)$  est la fermeture de  $D(\Omega)$  dans  $H^1(\Omega)$ .

$$H_0^1(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{H^1(\Omega)} = \{v \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \exists (v_p) \in D(\Omega)^{\mathbb{N}} \text{ tel que } v_p \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{H^1(\Omega)} v\}$$

### Propriété - Inégalité de Poincaré

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ .

$\exists C_{\Omega} > 0$  tel que  $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ ,  $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\Omega} |v|_{1,\Omega}$ .

avec  $|v|_{1,\Omega} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2}$ .

► admis (calcul intégral)

**Remarque :** Si  $\Omega$  est un ouvert borné,  $H_0^1(\Omega) \subsetneq H^1(\Omega)$  (exemple : fonction constante non-nulle).

De plus, l'inégalité de Poincaré n'est pas valide pour  $v \in H^1(\Omega) \setminus H_0^1(\Omega)$ .

Corollaire : Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ .

La semi-norme  $|\cdot|_{1,\Omega}$  est une norme sur  $H_0^1(\Omega)$  équivalente à la norme induite par  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ .

### Théorème

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ .

$H_0^1(\Omega)$  muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1,\Omega}$  défini par :

$$\forall (f, g) \in (H_0^1(\Omega))^2, \langle f, g \rangle_{1,\Omega} = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) dx$$

est un espace de Hilbert.

### Propriété

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  à frontière Lipschitzienne. ( $\Omega$  est appelé "domaine")

Alors  $D(\overline{\Omega})$  est dense dans  $H^1(\Omega)$  pour la norme  $\| \cdot \|_{H^1(\Omega)}$  avec  $D(\overline{\Omega}) = \{\text{restriction des fonctions tests de } \mathbb{R}^n \text{ à } \Omega\}$ .

► admis

### Définition

Soit  $m \in \mathbb{N}$ .

On appelle  $H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m, D^\alpha v \in L^2(\Omega)\}$ .

avec  $D^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ .

### Propriété

Soit  $m \in \mathbb{N}$ .

$H^m(\Omega)$  muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  défini par :

$$\forall (f, g) \in (H^m(\Omega))^2, \langle f, g \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha f, D^\alpha g \rangle_{L^2(\Omega)}$$

est un espace de Hilbert.

Si de plus  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  à frontière Lipschitzienne, alors  $D(\overline{\Omega})$  est dense dans  $H^m(\Omega)$  pour la norme  $\| \cdot \|_{H^m(\Omega)}$ .

► admis

## 3.3 Trace sur $\Gamma$ de fonctions de $H^1(\Omega)$

**Remarque :** Soit  $u \in C^0(\overline{\Omega})$ .

On peut définir la restriction de  $u$  sur le bord  $\Gamma$  de  $\Omega$  par prolongement par continuité.

On va chercher à étendre ce résultat aux fonctions de  $H^1(\Omega)$ .



### **Théorème - Théorème de la Trace**

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  à frontière Lipschitzienne.

Alors il existe une application linéaire continue de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Gamma)$ , notée  $\gamma_0$ , telle que :

$$\forall v \in D(\overline{\Omega}), \gamma_0(v) = v|_{\Gamma}$$

Elle vérifie de plus :

- i)  $\text{Ker}(\gamma_0) = H_0^1(\Omega)$ .
- ii)  $\text{Im}(\gamma_0)$  est dense dans  $L^2(\Gamma)$ .

► admis

### **Propriété - Formule de Green**

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  à frontière Lipschitzienne.

$\forall (u, v) \in H^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$ , on a :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot v dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Gamma} \gamma_0(v) \gamma_1(u) d\gamma$$

avec  $\gamma_1(u) = \sum_{i=1}^n \gamma_0(\frac{\partial u}{\partial x_i}) \nu_i$  et  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$  le vecteur normal unitaire extérieur à  $\Omega$ .

De plus,  $\forall (u, v) \in (H^1(\Omega))^2, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} \gamma_1(u) \gamma_0(v) \nu_i d\gamma$$

► cf TD1

## **4 Théorème de Lax-Milgram et application**

### **4.1 Théorème de Lax-Milgram**

#### **Théorème - Théorème de Lax-Milgram**

Soit  $V$  un espace de Hilbert sur  $\mathbb{R}$ ,  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  une application bilinéaire continue et coercive,  $l : V \rightarrow \mathbb{R}$  une forme linéaire continue.

Alors,  $\exists ! u \in V$  tel que :

$$\forall v \in V, a(u, v) = l(v)$$

► admis (Analyse Hilbertienne)

**Remarque :**

- $a$  bilinéaire continue :  $\exists M > 0, \forall (u, v) \in V^2, |a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V$ .
- $a$  coercive :  $\exists \alpha > 0, \forall v \in V, a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2$ .
- $l$  linéaire continue :  $\exists C > 0, \forall v \in V, |l(v)| \leq C \|v\|_V$ .

**Propriété**

Sous les hypothèses du théorème de Lax-Milgram, la solution  $u \in V$  du problème de Lax-Milgram dépend continûment de  $l \in V'$ .

► Soient  $l_1, l_2$ , deux formes linéaires continues. On note  $u_1 \in V$  et  $u_2 \in V$  les solutions associées du problème de Lax-Milgram.

$$\forall v \in V, \begin{cases} a(u_1, v) = l_1(v) \\ a(u_2, v) = l_2(v) \end{cases}$$

Par coercivité de  $a$ ,  $\exists \alpha > 0, \forall v \in V, a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2$ .

$$\begin{aligned} \|u_1 - u_2\|_V^2 &\leq \frac{1}{\alpha} a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \\ &= \frac{1}{\alpha} (a(u_1, u_1 - u_2) - a(u_2, u_1 - u_2)) \quad (\text{bilinéarité de } a) \\ &= \frac{1}{\alpha} (l_1(u_1 - u_2) - l_2(u_1 - u_2)) \quad (\text{coercivité de } a) \\ &\leq \frac{1}{\alpha} ((l_1 - l_2)(u_1 - u_2)) \quad (\text{linéarité de } l_1 \text{ et } l_2) \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \|u_1 - u_2\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|l_1 - l_2\| \times \|u_1 - u_2\|_V \xrightarrow{l_1 \rightarrow l_2} 0.$$

$$\text{Remarque : } \|l\| = \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{|l(v)|}{\|v\|_V} = \sup_{\|v\|_V=1} |l(v)|.$$

**Propriété**

Sous les hypothèses du théorème de Lax-Milgram, en supposant  $a$  symétrique, les deux problèmes suivants sont équivalents :

- Trouver  $u \in V$  tel que  $\forall v \in V, a(u, v) = l(v)$ .
- $\min_{v \in V} \frac{1}{2} a(v, v) - l(v)$ .

$$\begin{aligned} \text{► On pose : } J : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \frac{1}{2} a(v, v) - l(v) \end{aligned}$$

Soient  $(u, v) \in V^2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned}
J(u + \lambda v) &= \frac{1}{2}a(u + \lambda v, u + \lambda v) - l(u + \lambda v) \\
&= \frac{1}{2}a(u, u) + \lambda a(u, v) + \frac{\lambda^2}{2}a(v, v) - l(u) - \lambda l(v) \\
&= J(u) + \lambda(a(u, v) - l(v)) + \frac{\lambda^2}{2}a(v, v)
\end{aligned}$$

i)  $\Rightarrow$  ii)

Soit  $w \in V \setminus \{u\}$ .

$w = u + w - u = u + \lambda v$  avec  $\lambda = \|w - u\|_V > 0$  et  $v = \frac{w-u}{\|w-u\|_V}$ .

D'où :

$$\begin{aligned}
J(w) &= J(u + \lambda v) \\
&= J(u) + \lambda(a(u, v) - l(v)) + \frac{\lambda^2}{2}a(v, v) \quad (\text{cf. calcul précédent}) \\
&= J(u) + \frac{\lambda^2}{2}a(v, v) \quad (\text{car } a(u, v) = l(v) \text{ par hypothèse}) \\
&\geq J(u) \quad (\text{car } a(v, v) > 0 \text{ par coercivité de } a)
\end{aligned}$$

Donc  $u$  est un minimum de  $J$ .

ii)  $\Rightarrow$  i)

Soit  $u$  un minimum de  $J$  sur  $V$ .

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in V, u + \lambda v \in V$ .

Donc  $J(u + \lambda v) \geq J(u) \Leftrightarrow J(u + \lambda v) - J(u) \geq 0$ .

Or,  $J(u + \lambda v) - J(u) = \frac{\lambda^2}{2}a(v, v) + \lambda(a(u, v) - l(v))$ .

Donc  $\forall v \in V, \frac{\lambda^2}{2}a(v, v) + \lambda(a(u, v) - l(v)) \geq 0$ .

- Soit  $\lambda > 0$  :  
Alors  $a(u, v) - l(v) + \frac{\lambda}{2}a(v, v) \geq 0$ .  
A la limite, quand  $\lambda \rightarrow 0$ ,  $a(u, v) - l(v) \geq 0$ .
- Soit  $\lambda < 0$  :  
Alors  $a(u, v) - l(v) + \frac{\lambda}{2}a(v, v) \leq 0$ .  
A la limite, quand  $\lambda \rightarrow 0$ ,  $a(u, v) - l(v) \leq 0$ .

Bilan :  $\forall v \in V, a(u, v) = l(v)$ .

## 4.2 Application aux équations aux dérivées partielles

Problème :

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta u + c(x)u = f(x) & \text{sur } \Omega \text{ domaine de } \mathbb{R}^n \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \text{ frontière de } \Omega \end{cases} \quad (4)$$

avec  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $c \in L^\infty(\Omega)$  tel que  $c(x) \geq 0$  presque partout sur  $\Omega$ .

Objectif :

1. Formulation variationnelle : Se ramener à un problème de Lax-Milgram.
2. Existence et unicité de la solution de la formulation variationnelle.
3. Lien avec le problème original  $(P)$ .

Idée :

$u \in L^2(\Omega)$  et  $\Delta u \in L^2(\Omega) \Rightarrow$  existence d'une dérivée faible de  $u$  jusqu'à l'ordre 2.  
 $\Rightarrow u \in H^2(\Omega)$ .

Soit  $u \in H^2(\Omega)$  solution de  $(P)$ .

**Remarque :** D'après Lax-Milgram,  $\exists ! u \in V$  tel que  $\forall v \in V, a(u, v) = l(v)$ .

De plus,  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  à frontière Lipschitzienne :  
 $\forall (u, v) \in (H^2(\Omega))^2, \int_{\Omega} \Delta u v dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Gamma} \gamma_0(v) \gamma_1(u) d\gamma$ .

$\Rightarrow$  Choisir  $v \in H^2(\Omega)$  pour appliquer cette formule et n'avoir que des dérivées faibles d'ordre 1.

$\forall v \in H^1(\Omega), - \int_{\Omega} \Delta u v dx + \int_{\Omega} c(x) u v dx = \int_{\Omega} f(x) v dx$ .  
 $c \in L^\infty(\Omega)$  et  $u \in L^2(\Omega) \Rightarrow cu \in L^2(\Omega)$ .

De plus,  $\Omega$  est un domaine, donc par la formule de Green :  
 $\int_{\Omega} \Delta u v dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Gamma} \gamma_0(v) \gamma_1(u) d\gamma$ .

Il vient :  $\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\Gamma} \gamma_0(v) \gamma_1(u) d\gamma + \int_{\Omega} c(x) u v dx = \int_{\Omega} f(x) v dx$ .

**Remarque :** Il n'y a pas de dérivées faibles d'ordre 2 de  $u$  dans l'équation, seulement des dérivées faibles d'ordre 1.

On cherche  $u \in H^2(\Omega)$  tel que :

$$\forall v \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\Gamma} \gamma_0(v) \gamma_1(u) d\gamma + \int_{\Omega} c(x) u v dx = \int_{\Omega} f(x) v dx$$

**Remarque :** Conditions aux limites :  $u = 0$  sur  $\Gamma$ .

- Pour  $u \in H^1(\Omega)$ , ceci est équivalent à  $\gamma_0(u) = 0$ .
- $u \in \text{Ker}(\gamma_0) = H_0^1(\Omega)$ .

Les conditions aux limites conduisent à chercher  $u \in H^1(\Omega)$  tel que  $\gamma_0(u) = 0 \Leftrightarrow u \in H_0^1(\Omega)$ .

On cherche alors  $u \in H_0^1(\Omega)$  tel que :  
 $\forall v \in H_0^1(\Omega), \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} c(x)uv dx = \int_{\Omega} f(x)v dx$ . (car  $\int_{\Gamma} \gamma_0(v)\gamma_1(u)d\gamma = 0$ )

On obtient alors le problème suivant :

Trouver  $u \in H_0^1(\Omega)$  tel que :

$$(P_{FV}) : \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), a(u, v) = l(v) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{avec } a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} c(x)uv dx \\ \text{et } l : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \int_{\Omega} f(x)v dx \end{aligned}$$

### 4.3 Existence et unicité de la solution de $(P_{FV})$

On a :  $H_0^1(\Omega)$  muni de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1,\Omega}$  est un espace de Hilbert ( $\Omega$  ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ ).

Etude de  $l$  :

- $l$  est linéaire.
- $l$  est continue :  $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ ,  
 $|l(v)| = \left| \int_{\Omega} f(x)v(x)dx \right| = \left| \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}$  (inégalité de Cauchy-Schwarz).  
Or  $\Omega$  est un ouvert borné.

Par inégalité de Poincaré :  $\exists C_{\Omega} > 0, \forall v \in H_0^1(\Omega), \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\Omega} |v|_{1,\Omega}$ .

D'où :  $|l(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} C_{\Omega} |v|_{1,\Omega}$ .

Etude de  $a$  :

- $a$  est bilinéaire (par linéarité de l'intégrale).
- $a$  est continue :  $\forall (u, v) \in (H_0^1(\Omega))^2$ ,  
 $|a(u, v)| \leq \left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \right| + \left| \int_{\Omega} c(x)uv dx \right| \leq \langle u, v \rangle_{1,\Omega} + \langle cu, v \rangle_{L^2(\Omega)}$ .

Par inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|a(u, v)| \leq |u|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega} + \|cu\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

$$\text{Or, } \|cu\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\int_{\Omega} |cu|^2 dx} \leq \sqrt{\int_{\Omega} \|c\|_{L^\infty(\Omega)}^2 |u|^2 dx} \leq \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \forall (u, v) \in (H_0^1(\Omega))^2, |a(u, v)| &\leq |u|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega} + \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq |u|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega} + C_{\Omega} \|c\|_{L^\infty(\Omega)} |u|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega} \\ &\leq (1 + C_{\Omega} \|c\|_{L^\infty(\Omega)}) |u|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

- $a$  est coercive :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), a(v, v) = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Omega} c(x) |v|^2 dx = |v|_{1,\Omega}^2 + \int_{\Omega} c(x) |v|^2 dx.$$

Or,  $c(x) \geq 0$  presque partout sur  $\Omega$  donc  $\int_{\Omega} c(x) |v|^2 dx \geq 0$ .

$$\text{Donc } \forall v \in H_0^1(\Omega), a(v, v) \geq |v|_{1,\Omega}^2 \geq \alpha \|v\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

On peut donc appliquer le théorème de Lax-Milgram à  $(P_{FV})$  :

$\exists ! u \in H_0^1(\Omega)$  tel que  $\forall v \in H_0^1(\Omega), a(u, v) = l(v)$ .

#### 4.4 Lien avec le problème original $(P)$

Soit  $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  solution de  $(P_{FV})$ .

On a :  $\forall v \in H_0^1(\Omega), \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} c(x) u v dx = \int_{\Omega} f(x) v dx$ .

Or  $u \in H^2(\Omega)$  et  $\forall v \in H_0^1(\Omega), v \in H^1(\Omega)$  (par la formule de Green).

$$\text{Donc } \int_{\Omega} \Delta u v dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Gamma} \gamma_0(v) \gamma_1(u) d\gamma = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx.$$

$$\text{D'où : } \forall v \in H_0^1(\Omega), - \int_{\Omega} \Delta u v dx + \int_{\Omega} c(x) u v dx = \int_{\Omega} f(x) v dx.$$

Or,  $D(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$  d'où :  $\forall v \in D(\Omega), \int_{\Omega} (-\Delta u + c(x)u - f(x)) v dx = 0$ .

avec  $-\Delta u + c(x)u - f(x) \in L^2(\Omega)$ .

Donc  $-\Delta u + c(x)u - f(x) = 0$  presque partout sur  $\Omega$ .

$\Rightarrow -\Delta u + c(x)u = f(x)$  dans  $L^2(\Omega)$ .

Donc  $u$  est solution de  $(P)$ .

## 5 Résolution numérique : la méthode des éléments finis

### 5.1 Principe de la méthode de Galerkin

On rappelle le problème  $(P_{FV})$  :

Trouver  $u \in H_0^1(\Omega)$  tel que :

$$(P_{FV}) : \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), a(u, v) = l(v) \quad (6)$$

avec  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  bilinéaire continue et coercive  
et  $l : V \rightarrow \mathbb{R}$  linéaire continue.

Idée :

On va se ramener à chercher une "solution" dans un sous-espace vectoriel de  $V$  de dimension finie.

Soit  $V_h$  un sous-espace vectoriel de  $V$  de dimension finie.

On cherche  $u_h \in V_h$  tel que :

$$(P_h) : \quad \forall v_h \in V_h, a(u_h, v_h) = l(v_h) \quad (7)$$

Soit  $u_h$  une telle solution (si elle existe). Alors  $\forall v_h \in V_h, a(u_h, v_h) = l(v_h)$ .

Par définition de  $u \in V$ :  $\forall v_h \in V_h, a(u, v_h) = l(v_h)$ .

Donc  $a(u - u_h, v_h) = 0, \forall v_h \in V_h$ .

On suppose de plus que  $a$  est symétrique.

Alors  $a$  est un produit scalaire sur  $V$ .

On montre que  $V$  muni de  $a$  est un espace de Hilbert.

Ainsi,  $V_h$  s.e.v de  $V$  est un espace de Hilbert.

On a :  $\forall v_h \in V_h, a(u - u_h, v_h) = 0 \Rightarrow u - u_h \in V_h^\perp$  :  $u_h$  est la projection orthogonale de  $u$  sur  $V_h$  pour le produit scalaire  $a$ .

#### Propriété - Lemme de Céa

Soit  $V$  un espace de Hilbert.

Soient  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  bilinéaire continue et coercive et  $l : V \rightarrow \mathbb{R}$  linéaire continue de sorte que  $\exists! u \in V$  tel que  $\forall v \in V, a(u, v) = l(v)$ .

Soit  $V_h$  un s.e.v de  $V$  de dimension finie.

Alors  $\exists! u_h \in V_h$  tel que  $\forall v_h \in V_h, a(u_h, v_h) = l(v_h)$ .

De plus,  $\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$

avec  $\alpha$  constante de coercivité de  $a$

et  $M$  constante de continuité de  $a$ .

**Remarque :**  $\exists M \geq 0$  tel que  $\forall (u, v) \in V^2, |a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V$   
 $\exists \alpha > 0$  tel que  $\forall v \in V, a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2$ .



- $V_h$  muni de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$  est un espace préhilbertien.  
 De plus,  $V_h$  est de dimension finie donc complet pour  $\| \cdot \|_V$ .  
 Donc  $V_h$  est un espace de Hilbert.

De plus,  $a : V_h \times V_h \rightarrow \mathbb{R}$  est bilinéaire continue et coercive.  
 et  $l : V_h \rightarrow \mathbb{R}$  est linéaire continue.

D'après le théorème de Lax-Milgram,  
 $\exists! u_h \in V_h$  tel que  $\forall v_h \in V_h, a(u_h, v_h) = l(v_h)$ .

- $\|u - u_h\|_V \leq \frac{1}{\alpha} a(u - u_h, u - u_h)$  par coercivité de  $a$ .

Soit  $v_h \in V_h$ .

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_V^2 &\leq \frac{1}{\alpha} a(u - u_h, u - v_h + v_h - u_h) \\ &\leq \frac{1}{\alpha} (a(u - u_h, u - v_h) + a(u - u_h, v_h - u_h)) \\ &\leq \frac{1}{\alpha} a(u - u_h, u - v_h) \quad (\text{car } v_h - u_h \in V_h \Rightarrow a(u - u_h, v_h - u_h) = 0) \\ &\leq \frac{M}{\alpha} \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_V \quad (\text{par continuité de } a) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V.$$

Question : Comment obtenir  $u_h \in V_h$  ?

On note  $N_h = \dim V_h$ .

Soit  $(w_i)_{i \in \llbracket 1, N_h \rrbracket} \in V_h^{N_h}$  une base de  $V_h$ .

On cherche  $u_h = \sum_{i=1}^{N_h} \lambda_i w_i$  avec  $(\lambda_i)_{i \in \llbracket 1, N_h \rrbracket} \in \mathbb{R}^{N_h}$ .

Par définition de  $u_h : \forall v_h \in V_h, a(u_h, v_h) = l(v_h)$ .

En particulier :

$$\forall j \in \llbracket 1, N_h \rrbracket, a(u_h, w_j) = l(w_j) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N_h} \lambda_i a(w_i, w_j) = l(w_j) \Leftrightarrow Ax = b.$$

avec  $A = (a(w_i, w_j))_{(i,j) \in \llbracket 1, N_h \rrbracket^2} \in \mathcal{M}_{N_h}(\mathbb{R})$ ,

$$x = (\lambda_i)_{i \in \llbracket 1, N_h \rrbracket} \in \mathbb{R}^{N_h}$$

$$\text{et } b = (l(w_j))_{j \in \llbracket 1, N_h \rrbracket} \in \mathbb{R}^{N_h}.$$

On est amené à résoudre un système linéaire.



De plus,  $A$  est symétrique et définie positive (car  $a$  est symétrique et coercive) :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}^{N_h} \setminus \{0\}, x^T A x &= \sum_{i=1}^{N_h} \sum_{j=1}^{N_h} x_i a(w_i, w_j) x_j \\
&= a \left( \sum_{i=1}^{N_h} x_i w_i, \sum_{j=1}^{N_h} x_j w_j \right) \quad (\text{bilinéarité de } a) \\
&\geq \alpha \left\| \sum_{i=1}^{N_h} x_i w_i \right\|_V^2 \quad (\text{coercivité de } a) \\
&> 0 \quad (\text{car } x \neq 0)
\end{aligned}$$

Donc ce système admet une unique solution.

## 5.2 Exemple en dimension 2

### 5.2.1 Principe

On cherche à recouvrir  $\Omega$  par des structures géométriquement simples (triangles, quadrilatères, ...), notées  $(T_p)_{p \in \llbracket 1, N_T \rrbracket}$ .

Dans la suite, on notera  $\mathcal{T}_h = (T_p)_{p \in \llbracket 1, N_T \rrbracket}$  l'ensemble des  $(T_p)$ . avec  $h = \sup_{p \in \llbracket 1, N_T \rrbracket} \text{diam}(T_p)$ .

♠  $\text{diam}(T_p)$  est le diamètre de  $T_p$ , à savoir la plus grande distance entre deux points de  $T_p$ .

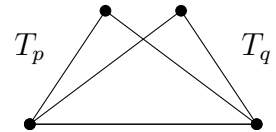
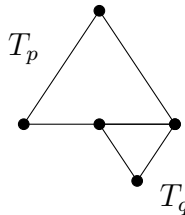
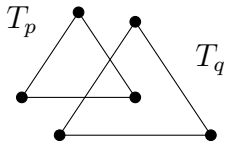
#### Définition - Triangulation admissible

Une triangulation  $\mathcal{T}_h$  de  $\Omega$  est dite admissible si :

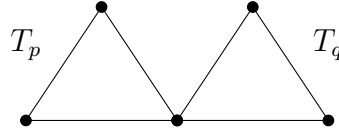
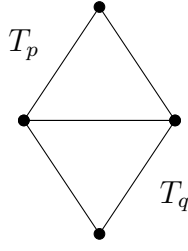
- i) L'intersection de deux éléments de  $\mathcal{T}_h$  est soit vide, soit réduite à un point, soit réduite à un côté tout entier.
- ii) Les "coins" de  $\Gamma$  sont des sommets d'éléments de  $\mathcal{T}_h$ .
- iii) On note  $\Omega_h = \bigcup_{p=1}^{N_T} T_p$  et  $\Gamma_h$  la frontière de  $\Omega_h$ .  
Les sommets de  $\Gamma_h$  sont également sur  $\Gamma$ .
- iv)  $\lambda(T_p) \neq 0$  avec  $\lambda(T_p)$  la mesure de Lebesgue.

**Exemple :**

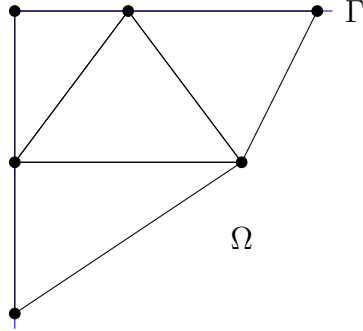
i) Non-admissible :



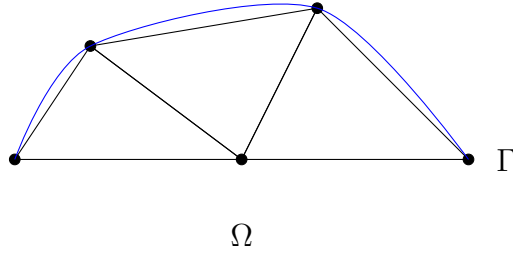
Admissible :



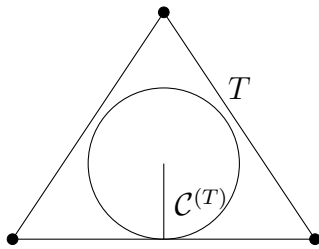
ii) .



iii) .



On suppose par la suite, par la convergence de la méthode, que  $\exists c > 0$  tel que  $\forall h > 0, \sup_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{\text{diam}(T)}{\mathcal{C}^{(T)}} \leq c$  avec  $\mathcal{C}^{(T)}$  le rayon du cercle inscrit dans  $T$ .



### 5.2.2 Exemple

Soit  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$ .

On considère le problème suivant : 
$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

On rappelle le problème  $(P_{FV})$  :  
 Trouver  $u \in H_0^1(\Omega)$  tel que  $\forall v \in H_0^1(\Omega), a(u, v) = l(v)$   
 avec  $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(u, v) \mapsto \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} u v dx$

$$\begin{aligned} \text{et } l : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \int_{\Omega} f v dx \end{aligned}$$

$(P_{FV})$  admet une solution unique (Théorème de Lax-Milgram).

On suppose avoir  $N_T$  triangles et  $\mathcal{T}_h = (T_p)_{p \in \llbracket 1, N_T \rrbracket}$  une triangulation admissible de  $\Omega$ .

On note  $(q_i)_{i \in \llbracket 1, N_T \rrbracket}$  les sommets des triangles  $T_p$ .

On note  $P^1 = \mathbb{R}_1[X_1, X_2]$  l'espace des polynômes de degré au plus 1 par rapport à  $X_1$  et  $X_2$ . On a donc  $P^1 = \text{Vect}\{1, X_1, X_2\}$ .

On pose  $\tilde{V}_h = \{v \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}), v|_{T_p} \in P^1, \forall p \in \llbracket 1, N_T \rrbracket\}$ .  
 $V_h = \{v_h \in \tilde{V}_h, v_h|_{\Gamma} = 0\}$ .

### Propriété

- i) Les fonctions de  $\tilde{V}_h$  sont entièrement définies par leurs valeurs en leurs sommets  $q_i$ .
- ii)  $\dim \tilde{V}_h = N_S$ .  
De plus, une base de  $\tilde{V}_h$  est donnée par  $(\varphi_i)_{i \in \llbracket 1, N_S \rrbracket}$  avec  $\varphi_i(q_j) = \delta_{ij}$ .  
En particulier,  $\forall v_h \in \tilde{V}_h, v_h = \sum_{i=1}^{N_S} v_h(q_i) \varphi_i$ .
- iii)  $\tilde{V}_h \subset H^1(\Omega)$ .
- iv)  $\dim V_h = N_1$  avec  $N_1$  le nombre de sommets  $q_i$  n'appartenant pas à  $\Gamma$ .
- v)  $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ .

**Remarque :** shema

► *Texte Manquant*

Pour résoudre le problème  $(P_{FV})$ , il nous faut résoudre le système linéaire  $Ax = b$  avec  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, N_S \rrbracket^2, A_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$  et  $b_i = l(\varphi_i)$ .  $u_h = \sum_{i=1}^{N_S} x_i \varphi_i$ .

Construction de  $A$  et  $b$  :

On a :  $a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx + \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j dx$ .  
et  $b_i = l(\varphi_i) = \int_{\Omega} f \varphi_i dx$ .

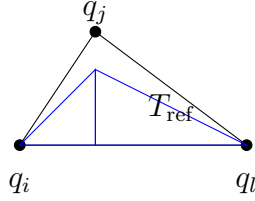
$A_{ij} = \sum_{p=1}^{N_T} \left[ \int_{T_p} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx + \int_{T_p} \varphi_i \varphi_j dx \right]$  : on se ramène sur des intégrales sur les triangles du maillage  $\mathcal{T}_h$ .

- 1<sup>er</sup> cas :  $\lambda(\text{supp}(\varphi_i) \cap \text{supp}(\varphi_j)) = 0$   
 $\Rightarrow \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j dx = 0$  et  $\int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx = 0 \Rightarrow A_{ij} = 0$ .
- 2<sup>eme</sup> cas :  $\lambda(\text{supp}(\varphi_i) \cap \text{supp}(\varphi_j)) \neq 0$   
Calcul de  $\int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx + \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j dx$  : stratégie de l'élément de référence.

$$T_p = [q_i, q_j, q_l], \{ii, jj, ll\} = \{1, 2, 3\}^2.$$

Sur  $T_p$ , on s'intéresse à  $\varphi_i, \varphi_j, \varphi_l$  uniquement.

⇒ Changeons de variables pour se ramener à un domaine d'intégration "simple".



avec  $\Phi$  affine de sorte que  $\Phi_{T_p}(A^{(k)}) = A_p^{(kk)} \quad k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, kk \in \llbracket ii, jj, ll \rrbracket$ .

### Définition - Coordonnées barycentriques relatives à un triangle

Soit  $T = [A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}]$  un triangle.

$\forall M = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \exists! (\lambda_i(M))_{i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket} \in \mathbb{R}^3$  tel que :

$$M = \sum_{i=1}^3 \lambda_i(M) A^{(i)} \text{ et } \sum_{i=1}^3 \lambda_i(M) = 1.$$

Les  $\lambda_i(M)$  sont appelées les *coordonnées barycentriques* de  $M$  relatives à  $T$ .

De plus, on a :

$$\text{i) } \forall (i, j) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2, \lambda_i(A^{(j)}) = \delta_{ij}.$$

$$\text{ii) } \forall M \in (A^{(i)}, A^{(j)}) \text{ avec } (i, j) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow \lambda_k(M) > 0.$$

$$\text{iii) } \forall M \in T, \forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, 0 \leq \lambda_i(M) \leq 1.$$

Expression de  $\Phi_{T_p}(M)$  :

$$\begin{aligned} \Phi_{T_p}(M) &= A_p^{(ii)} + x_1 \overrightarrow{A_p^{(ii)} A_p^{(jj)}} + x_2 \overrightarrow{A_p^{(ii)} A_p^{(ll)}} \\ &= A_p^{(ii)} + x_1 (A_p^{(jj)} - A_p^{(ii)}) + x_2 (A_p^{(ll)} - A_p^{(ii)}) \\ &= (1 - x_1 - x_2) A_p^{(ii)} + x_1 A_p^{(jj)} + x_2 A_p^{(ll)} \end{aligned}$$

On pose  $\lambda_i(M) = 1 - x_1 - x_2, \lambda_j(M) = x_1, \lambda_l(M) = x_2$ .

On a  $\sum_{i=1}^3 \lambda_i(M) = 1$ .

Donc  $(\lambda_i)_{i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket}$  sont les coordonnées barycentriques de  $\Phi_{T_p}(M)$  relatives à  $T_p$ .

Pour le triangle de référence  $T_u$  :

$$\forall M \in T_u, \forall k \in \{ii, jj, ll\}, \lambda_k^{(T_p)}(\Phi_{T_p}(M)) = \lambda_k^{(T_u)}(M).$$

$$\text{Sur } T_p, \lambda_{ii}^{(T_p)}(A_p^{(kk)}) = \delta_{ii, kk} = \varphi_i(A_p^{(kk)}) = \varphi_i(q_k).$$

$$\text{et } \lambda_{ii}^{(T_p)}(M) = \varphi_i(M).$$

Avec  $q_i, q_j$  des sommets de  $T_p$ , on a :

$$\int_{T_p} \varphi_i \varphi_j dx = \int_{T_p} \lambda_{ii}^{(T_p)} \lambda_{jj}^{(T_p)} dx = \int_{T_u} (\lambda_{ii}^{(T_p)} \circ \Phi_{T_p})(\lambda_{jj}^{(T_p)} \circ \Phi_{T_p}) |J_{\Phi_{T_p}}| dx = \int_{T_u} \lambda_{ii}^{(T_u)} \lambda_{jj}^{(T_u)} |J_{\Phi_{T_p}}| dx.$$

avec  $|J_{\Phi_{T_p}}| = \|\overrightarrow{A_p^{(ii)} A_p^{(jj)}} \cap \overrightarrow{A_p^{(ii)} A_p^{(ll)}}\| = 2 \times \text{aire}(T_p)$ .

$$\int_{T_p} \varphi_i \varphi_j dx = 2 \times \text{aire}(T_p) \int_0^1 \int_0^{1-x_2} \lambda_{ii}^{(T_u)} \lambda_{jj}^{(T_u)} dx_1 dx_2 = 2 \times \text{aire}(T_p) \int_0^1 x_2 \left( \int_0^{1-x_2} x_1 dx_1 \right) dx_2.$$

$$\Rightarrow \int_{T_p} \varphi_i \varphi_j dx = \frac{\text{aire}(T_p)}{12}.$$

---

**Algorithm 1:** Assemblage de la matrice  $A$  et du vecteur  $b$

---

```

1 For :  $p = 1, N_T \#$  Boucle sur les triangles  $T_p = [q_i, q_j, q_l] = [A_p^{(ii)}, A_p^{(jj)}, A_p^{(ll)}]$ 

2   • Calcul de  $M_{T_p} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ 
3    $[M_{T_p}]_{ii,ii} = \int_{T_p} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_i dx + \int_{T_p} \varphi_i \varphi_i dx$ 

4   • Mise à jour de  $A$ 
5    $A([q_i, q_j, q_l], [q_i, q_j, q_l]) = A([q_i, q_j, q_l], [q_i, q_j, q_l]) + M_{T_p}$ 

6   • Calcul de  $T_0 \in \mathbb{R}^3$ 
7    $T_{0,ii} = \int_{T_p} f q_i dx$ 

8   • Mise à jour de  $b$ 
9    $b([q_i, q_j, q_l]) = b([q_i, q_j, q_l]) + T_0$ 

10 End For

```

---