INSA - ModIA, 5^e année. **Années 2024-2025**

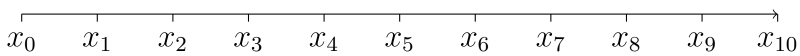
Analyse Mathématique et principes de la méthode

1 Introduction

1.1 ModIA 4 : Différences finies

$$(P) \qquad \begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x) & \text{sur } \Omega =]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Depuis une grille régulière homogène de pas h, on cherche une approximation de la solution u de (P) en les noeuds de maillage :



$(x_i)_{i\in[\![0,N+1]\!]}$, coordonnées des noeuds de maillage.

On cherche $u_h \in \mathbb{R}^{N+2}$, approximation de u en $(x_i)_{i\in[\![0,N+1]\!]}$.
Les conditions aux limites donnent : $\boxed{u_0 = u_{N+1} = 0}$

Il nous reste à trouver $(u_i)_{i\in[\![1,N]\!]}$ avec $u_h = (u_i)_{i\in[\![0,N+1]\!]}$.

On approxime $u''(x_i) \forall i \in [\![1,N]\!]$ par :
$u''(x_i) \approx \frac{u(x_{i+1})-2u(x_i)+u(x_{i-1})}{h^2}$. (Hypothèse que $u \in \mathcal{C}^4(]0,1[)$)

D'où la résolution de (P) revient à résoudre :

$$(P_h) \qquad \begin{cases} -\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2} + c(x_i)u_i = f(x_i) & \forall i \in [\![1,N]\!] \\ u_0 = u_{N+1} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Remarque : Etude de la consistence, stabilité (instationnaire) et convergence du schéma numérique.

Remarque : Limitations :

- u supposé "suffisamment régulière" pour que l'approximation de u'' soit correcte. (Est-on contraint apr une telle hypothèse pour la résolution numérique ?)
- Grille régulière : problème d'adéquation entre la grille spatiale et la frontière du domaine.

1.2 ModIA 5 : Formulation variationnelle et méthode des éléments finis

1.2.1 Construction d'un "nouveau" problème

Trouver $u \in V$ tel que :

$$(P_{FV}) \qquad \forall v \in V, \quad -\int_\Omega u''(x)v(x)dx + \int_\Omega c(x)u(x)v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx \tag{3}$$

Questions :

- Dans quel espace choisir u et v pour que les intégrales soient bien définies ?
- Condition d'existence et unicité de la solution de ce problème
- Lien entre la solution de (P_{FV}) et celle de (P) ?

1.2.2 Résolution numérique de (P_{FV})

Recherche d'une solution à (P_{FV}) sur un sous-espace de dimension finie.
Questions :

- Comment construire ce sous-espace ?
- Convergence de la méthode ?

2 Espace $L^2(\Omega)$ et dérivée faible

2.1 Espace des fonctions tests

Définition - Espace des fonctions tests

On note $D(\Omega)$ l'espace des fonctions "tests", définiés sur Ω, $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact K inclus dans Ω.
$D(\Omega)$ est un espace vectoriel.

Remarque :

i) Support d'une fonction $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$: $\text{supp}(\psi) = \overline{\{x \in \Omega, \psi(x) \neq 0\}}$.

ii) Soit $\psi \in D(\Omega)$, alors toutes ses dérivées sont des fonctions tests.

Définition - Convergence dans $D(\Omega)$

Soient $\psi \in D(\Omega)$ et $(\psi_p) \in D(\Omega)^{\mathbb{N}}$.
On dit que (ψ_p) converge vers ψ dans $D(\Omega)$ si :

i) $\exists K \subset \Omega$ compact tel que $\forall p \in \mathbb{N}, \text{supp}(\psi_p) \subset K$ et $\text{supp}(\psi) \subset K$.

ii) $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, $(D^\alpha \psi_p)$ converge uniformément vers $D^\alpha \psi$ sur K.

$\Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \forall \varepsilon > 0, \exists p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq p_0$,
$\forall x \in \Omega, |D^\alpha \psi_p(x) - D^\alpha \psi(x)| < \varepsilon$.

avec $D^\alpha \psi = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \psi$.

Exemple : $n = 2$

- $\alpha = (1, 0)$, $D^\alpha \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}$.
- $\alpha = (1, 1)$, $D^\alpha \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2}$.
- $\alpha = (0, 2)$, $D^\alpha \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2}$.

2.2 Espace $L^2(\Omega)$

Définition

Soit Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue.
On pose $\mathcal{L}^2(\Omega)$ l'ensemble des fonctions mesurables sur Ω :
$\mathcal{L}^2(\Omega) = \{v : \Omega \to \mathbb{R}$ tel que $\int_\Omega |v(x)|^2 dx < +\infty\}$.

On introduit la relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathcal{L}^2(\Omega)$, définie par :

$$\forall (f, g) \in (\mathcal{L}^2(\Omega))^2, f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ p.p. sur } \Omega$$

On définit $L^2(\Omega) := \mathcal{L}^2(\Omega)/\sim$.

$$\forall f \in L^2(\Omega), f = \{g \in \mathcal{L}^2(\Omega) \text{ tel que } g = f \text{ p.p. sur } \Omega\}$$

On identifie $f \in L^2(\Omega)$ avec son représentant f sur $\mathcal{L}^2(\Omega)$.

Remarque :

- $\int_\Omega |f(x)|^2 dx = 0$ avec $f \in \mathcal{L}^2(\Omega) \Leftrightarrow f = 0$ p.p. sur Ω.
- $\int_\Omega |f(x)|^2 dx = 0$ avec $f \in L^2(\Omega) \Leftrightarrow f = 0$ sur $L^2(\Omega)$.

Théorème

$L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par :

$$\forall (f,g) \in (L^2(\Omega))^2, \langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)g(x)dx$$

est un espace de Hilbert.
On notera $\|f\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\int_\Omega |f(x)|^2 dx}$ la norme associée.

Propriété - Fonctions "tests" et $L^2(\Omega)$

i) $D(\Omega) \subset L^2(\Omega)$.

ii) Soit $(\psi_p) \in D(\Omega)^{\mathbb{N}}$ qui converge (au sens de la convergence dans $D(\Omega)$) vers $\psi \in D(\Omega)$.
Alors (ψ_p) converge vers $\psi \in L^2(\Omega)$.

iii) $D(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$:
$\forall f \in L^2(\Omega), \exists (f_p) \in D(\Omega)^{\mathbb{N}}$ tel que $\lim\limits_{p \to \infty} \|f_p - f\|_{L^2(\Omega)} = 0$.

iv) Soit $f \in L^2(\Omega)$ telle que $\forall \psi \in D(\Omega), \int_\Omega f(x)\psi(x)dx = 0$.
Alors $f = 0$ sur $L^2(\Omega)$.

Remarque : On notera $\psi_p \xrightarrow[p \to \infty]{D(\Omega)} \psi \Rightarrow \psi_p \xrightarrow[p \to \infty]{L^2(\Omega)} \psi$.

2.3 Dérivée faible et divergence faible dans $L^2(\Omega)$

Définition - Dérivée faible

Soit $v \in L^2(\Omega)$.
On dit que v admet une *dérivée faible* dans $L^2(\Omega)$ si :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \exists w_i \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall \psi \in D(\Omega), \int_\Omega v(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega w_i(x)\psi(x)dx$$

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, w_i ainsi défini est appelé la *i-ème dérivée partielle première faible* de v. On la notera $w_i := \frac{\partial v}{\partial x_i}$.

Remarque :

i) $\forall v \in L^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_i}$ est un abus de langage renvoyant à la i-ème dérivée partielle faible.

ii) Si $v \in L^2(\Omega)$ est dérivable et $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$, alors les dérivées partielles faibles et classiques coïncident.

Propriété

Soit $v \in L^2(\Omega)$.
v admet une dérivée faible dans $L^2(\Omega)$ si

$$\exists c > 0 \text{ tel que } \forall \psi \in D(\Omega), \forall i \in [\![1, n]\!], \left| \int_\Omega v(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx \right| \leq c \|\psi\|_{L^2(\Omega)}$$

Définition - Divergence faible

Soit $\sigma : \Omega \to \mathbb{R}^n$ telle que $\forall i \in [\![1, n]\!], \sigma_i \in L^2(\Omega)$.
On notera également $\sigma \in [L^2(\Omega)]^n$.
On dit que σ admet une *divergence faible* dans $L^2(\Omega)$ si :

$$\exists w \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall \psi \in D(\Omega), \int_\Omega \sigma(x) \cdot \nabla \psi(x) dx = -\int_\Omega w(x)\psi(x) dx$$

avec $\sigma \cdot \nabla \psi = \sum_{i=1}^n \sigma_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$.

$w \in L^2(\Omega)$ ainsi défini est appelé la *divergence faible* de σ. On la notera $w := \text{div}(\sigma)$. $(\text{div}(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i})$

Propriété

Soit $\sigma \in [L^2(\Omega)]^n$.
σ admet une divergence faible si

$$\exists c > 0 \text{ tel que } \forall \psi \in D(\Omega), \left| \int_\Omega \sigma(x) \cdot \nabla \psi(x) dx \right| \leq c \|\psi\|_{L^2(\Omega)}$$

3 Espaces de Sobolev

3.1 Espace $H^1(\Omega)$ et ses généralisations

Définition

Soit Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$.
On appelle $H^1(\Omega)$ l'ensemble des éléments de $L^2(\Omega)$ qui admettent une dérivée faible dans $L^2(\Omega)$.
On notera : $H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall i \in [\![1, n]\!], \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\}$.

Remarque : La notation $\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$ renvoie à l'existence d'une i-ème dérivée partielle faible de v.

Théorème

$H^1(\Omega)$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par :

$$\forall (f,g) \in (H^1(\Omega))^2, \langle f, g \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega f(x)g(x)dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)dx$$

est un espace de Hilbert.

Remarque : $\langle f, g \rangle_{H^1(\Omega)} = \langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial g}{\partial x_i} \rangle_{L^2(\Omega)}$.

Remarque : On note $\langle f, g \rangle_{1,\Omega} := \sum_{i=1}^n \langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial g}{\partial x_i} \rangle_{L^2(\Omega)}$.

Cependant, $\langle f, g \rangle_{1,\Omega}$ n'est pas un produit scalaire sans autres hypothèses : $\langle f, f \rangle_{1,\Omega} = 0 \not\Rightarrow f = 0$.

▶

- $H^1(\Omega)$ muni de $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(\Omega)}$ est un espace préhilbertien. (admis)
- $H^1(\Omega)$ muni de $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ défini par $\forall f \in H^1(\Omega), \|f\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|\frac{\partial f}{\partial x_i}\|^2_{L^2(\Omega)}}$ est complet :

  Soit $(u_p) \in H^1(\Omega)^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy pour $\| \cdot \|_{H^1(\Omega)}$.
  Par définition,
  $\forall \varepsilon > 0, \exists p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, p, q \geq p_0 \Rightarrow \|u_p - u_q\|_{H^1(\Omega)} < \varepsilon$

  Par définition de $\| \cdot \|_{H^1(\Omega)}$,
  $\forall \varepsilon > 0, \exists p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, p, q \geq p_0 \Rightarrow \|u_p - u_q\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon$
  et $\|\frac{\partial u_p}{\partial x_i} - \frac{\partial u_q}{\partial x_i}\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon$ pour $i \in [\![1, n]\!]$.

  Donc (u_p) est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ muni de $\| \cdot \|_{L^2(\Omega)}$ et ainsi converge dans $L^2(\Omega)$. On note $u \in L^2(\Omega)$ sa limite.

  De même, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $(\frac{\partial u_p}{\partial x_i})$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ et converge dans $L^2(\Omega)$.
  $\forall i \in [\![1, n]\!], \exists w_i \in L^2(\Omega)$ tel que $\frac{\partial u}{\partial x_i} \xrightarrow[p \to +\infty]{L^2(\Omega)} w_i$.

  Soit $p \in \mathbb{N}$.
  $\forall i \in [\![1, n]\!]$, par définition de $\frac{\partial u_p}{\partial x_i}$,
  $\forall \psi \in D(\Omega), \int_\Omega u_p(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx = - \int_\Omega \frac{\partial u_p}{\partial x_i}(x)\psi(x)dx$.

  D'où, $\int_\Omega \frac{\partial u_p}{\partial x_i}(x)\psi(x)dx = -\langle u_p, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \rangle_{L^2(\Omega)} \xrightarrow[p \to +\infty]{} -\langle u, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \rangle_{L^2(\Omega)}$.

  Or, $\langle u, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx$.
  De plus, $\int_\Omega \frac{\partial u_p}{\partial x_i}(x)\psi(x)dx = \langle \frac{\partial u_p}{\partial x_i}, \psi \rangle_{L^2(\Omega)} \xrightarrow[p \to +\infty]{} \langle w_i, \psi \rangle_{L^2(\Omega)}$.

D'où, $\int_\Omega w_i \psi dx = -\int_\Omega u \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx$.
$\Leftrightarrow \int_\Omega u \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega w_i \psi dx$.

Texte manquant

Remarque :

i) Si Ω est borné, alors $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$.

ii) $H^1(\Omega) \subsetneq L^2(\Omega)$ (inclusion stricte).

iii) $D(\Omega)$ est un sous-espace vectoriel de $H^1(\Omega)$.
$D(\Omega)$ n'est pas dense dans $H^1(\Omega)$.

3.2 Espace $H_0^1(\Omega)$

Définition - Espace $H_0^1(\Omega)$

$H_0^1(\Omega)$ est la fermeture de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

$H_0^1(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{H^1(\Omega)} = \{v \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \exists (v_p) \in D(\Omega)^{\mathbb{N}} \text{ tel que } v_p \xrightarrow[p \to +\infty]{H^1(\Omega)} v\}$

Propriété - Inégalité de Poincarré

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.
$\exists C_\Omega > 0$ tel que $\forall v \in H_0^1(\Omega), \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega |v|_{1,\Omega}$.
avec $|v|_{1,\Omega} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \|\frac{\partial v}{\partial x_i}\|^2_{L^2(\Omega)}}$.

- admis (calcul intégral)

Remarque : Si Ω est un ouvert borné, $H_0^1(\Omega) \subsetneq H^1(\Omega)$ (exemple : fonction constante non-nulle).
De plus, l'inégalité de Poincarré n'est pas valide pour $v \in H^1(\Omega) \backslash H_0^1(\Omega)$.

Corollaire : Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.
La semi-norme $|\cdot|_{1,\Omega}$ est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme induite par $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.

Théorème

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.
$H_0^1(\Omega)$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1,\Omega}$ défini par :

$$\forall (f,g) \in (H_0^1(\Omega))^2, \langle f, g \rangle_{1,\Omega} = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) dx$$

est un espace de Hilbert.

Propriété

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière Lipschitzienne. (Ω est appelé "domaine")
Alors $D(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$
avec $D(\overline{\Omega}) = \{$restriction des fonctions tests de $\mathbb{R}^n$ à $\Omega\}$.

▶ admis

Définition

Soit $m \in \mathbb{N}$.
On appelle $H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega)$ tel que $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m, D^\alpha v \in L^2(\Omega)\}$.

Texte manquant

4 Théorème de Lax-Milgram et application

4.1 Théorème de Lax-Milgram

Théorème - Théorème de Lax-Milgram

Soit V un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$, $a : V \times V \to \mathbb{R}$ une application bilinéaire continue et coercive, $l : V \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue.
Alors, $\exists! u \in V$ tel que :

$$\forall v \in V, a(u, v) = l(v)$$

▶ admis (Analyse Hilbertienne)

Remarque :

- a bilinéaire continue : $\exists M > 0, \forall (u, v) \in V^2, |a(u, v)| \leq M\|u\|_V\|v\|_V$.
- a coercive : $\exists \alpha > 0, \forall v \in V, a(v, v) \geq \alpha\|v\|_V^2$.
- l linéaire continue : $\exists C > 0, \forall v \in V, |l(v)| \leq C\|v\|_V$.

Propriété

Sous les hypothèses du théorème de Lax-Milgram, la solution $u \in V$ du problème de Lax-Milgram dépend continûment de $l \in V'$.

▶ Soient l_1, l_2, deux formes linéaires continues. On note $u_1 \in V$ et $u_2 \in V$ les solutions associées du problème de Lax-Milgram.
$\forall v \in V, \begin{cases} a(u_1, v) = l_1(v) \\ a(u_2, v) = l_2(v) \end{cases}$

Par coercivité de a, $\exists \alpha > 0, \forall v \in V, a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2$.

Texte manquant

Remarque : $|||l||| = \sup\limits_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{|l(v)|}{\|v\|_V} = \sup\limits_{\|v\|_V = 1} |l(v)|$.

Propriété

Sous les hypothèses du théorème de Lax-Milgram, en supposant a symétrique, les deux problèmes suivants sont équivalents :

i) Trouver $u \in V$ tel que $\forall v \in V, a(u,v) = l(v)$.

ii) $\min\limits_{v \in V} \frac{1}{2} a(v,v) - l(v)$.

- *Texte manquant*

4.2 Application aux équations aux dérivées partielles

Problème :

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u + c(x) u = f(x) & \text{sur } \Omega \text{ domaine de } \mathbb{R}^n \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \text{ frontière de } \Omega \end{cases} \tag{4}$$

avec $f \in L^2(\Omega)$, $c \in L^\infty(\Omega)$ tel que $c(x) \geq 0$ presque partout sur Ω.

Objectif :

1. Formulation variationnelle : Se ramener à un problème de Lax-Milgram.
2. Existence et unicité de la solution de la formulation variationnelle.
3. Lien avec le problème original (P).