Rapport BE :
Testing for homogeneity of a Poisson process

by Maxime Baba,
Mathilde Fererra,
and Felix Foucher de Brandois

Formation ModIA - INSA, 5^{th} year
2024-2025

Contents

List of Figures

1 Introduction

2 Brouillon

Soit $(N_t)_t$ un processus de Poisson inhomogène de taux $\lambda(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

On observe ce processus sur un intervalle $[0, T^*]$, $T^* > 0$.
Soit $n = N_{T^*}$ le nombre d'événements observés.
Soit $0 < T_1 < T_2 < \ldots < T_n < T^*$ les instants des événements observés.

Test de Laplace :
On teste l'hypothèse $H_0 : \lambda(t) = \lambda_0$ pour tout $t \in [0, T^*]$.
contre
$H_1 : \lambda$ croissante sur $[0, T^*]$.

Stat de test :

$$L = \sum_{i=1}^{n} \frac{T_i}{T^*}$$

Conditional distribution :
Let N be a homogeneous Poisson process with rate $\lambda > 0$ and fix $t > 0$. Let $n \in \mathbb{N}^*$. Given that $N_t = n$, the n first arrival times $(T_1, \ldots, T_n)$ have the same distribution as the order statistic corresponding to n independent random variables uniformly distributed on the interval $[0, t]$, that is :

$$(T_1, T_2, \ldots, T_n) | N_t = n \overset{d}{=} (U_{(1)}, U_{(2)}, \ldots, U_{(n)}) \quad \text{where} \quad U_1, \ldots, U_n \text{ i.i.d} \sim U([0, t])$$

Sous H_0, les variables aléatoires $\frac{T_i}{T^*}$ sont i.i.d et ont la même distribution que la statistique d'ordre correspondant à n variables aléatoires uniformément distribuées sur $[0, 1]$.
Donc sous H_0, $L \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$ (théorème de la limite centrale).

H0 : $\beta = 0$ contre H1 : $\beta > 0$
pour $\lambda(t) = \alpha e^{\beta t}$,