

Beugung

Protokoll zum Versuch Nummer O6 vom 29. Juni 2015

Frederik Edens, Dennis Eckermann

Gruppe 6mo

`fr.ed@wwu.de`

`dennis.eckermann@gmx.de`

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
1.1. Beugung	1
1.2. Beugung am Rechteckspalt	1
1.3. Beugung an Mehrfachspalten	2
2. Auswertung	4
2.1. Intensitätsverteilung von Einzelspalten	4
2.2. Vergleich der Beugungsbilder von Einzel- und Doppelspalt	5
2.3. Vergleich der Beugungsbilder mehrerer Doppelspalte	6
2.4. Vergleich der Beugungsbilder mehrerer Mehrfachspalte	7
2.4.1. Bestimmung des Formfaktors	8
2.5. Nebenmaxima am Vierfachspalt	9
3. Diskussion	11
3.1. Verschiedene Einfachspalte	11
3.2. Vergleich von Doppel- und Einzelspalt	11
3.3. Doppelspalte	11
3.4. Mehrfachspalte	12
3.5. Formfaktor	12
3.6. Auflösung der Nebenmaxima	13
A. Anhang	14
A.1. Fehlerrechnung	14

1. Einleitung

In diesem Versuch wird die Beugung von monochromatischem Licht an Rechteckspalten und Kombinationen mehrerer Rechteckspalte untersucht.

1.1. Beugung

Wenn monochromatische ebene Lichtwellen durch eine Blendenöffnung fallen können, auf einem dahinter liegenden Schirm dunkle und helle Bereiche erkannt werden. Diesen Effekt nennt man Beugung. Das auf dem Schirm zu erkennende Bild wird als Beugungsmuster oder Beugungsbild bezeichnet.

Beugung kann durch das Huygenssche Prinzip erklärt werden. An jedem Punkt der Blendenöffnung entstehen Elementarwellen. Je nach Winkel müssen diese verschiedene Strecken zum Schirm zurück legen. Diesen Streckenunterschied bezeichnet man als Gangunterschied Δ . Unter einem Winkel von 0° , also senkrecht zur Blende, sind alle Gangunterschiede 0. Hier liegt allgemein das Hauptmaximum des Beugungsbildes.

Mathematisch detailliert beschrieben wird Beugung durch das Kirchhoffsche Beugungsintegral. Da in den im Versuch nur Fälle beobachtet werden, in denen die Blendenöffnung klein und der Schirm weit von Blende entfernt ist, wird dieses Integral nur in Fraunhofer-Näherung betrachtet:

$$\psi(x, y) \propto \iint_{\text{Blende}} b(x', y') e^{-ik \frac{xx' + yy'}{L}} dx' dy' \quad (1.1)$$

Dabei ist $b(x', y')$ die Blendenfunktion, k ist die Wellenzahl $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ mit Wellenlänge λ , L ist die Entfernung zwischen Blende und Schirm. Die Amplitude ψ entspricht somit abgesehen von Vorfaktoren und Streckungsfaktoren der Fourier-Transformation der Blendenöffnung.

Gemessen wird nicht die Amplitude ψ sondern die Intensität I . Diese erhält man durch

$$I = |\psi|^2 \quad (1.2)$$

1.2. Beugung am Rechteckspalt

Bei der Beugung am Rechteckspalt im Versuch ist der Spalt in y -Richtung deutlich größer als die Breite des Laserstrahls. Daher wird nur das Beugungsmuster entlang der

x -Achse betrachtet. Die Blendenfunktion $b(x)$ ist Bereich der Blendenöffnung 1, sonst 0. Somit gilt für einen Spalt der Breite d nach (1.1)

$$\psi(x) \propto \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e^{-ik\frac{xx'}{L}} dx' = 2L \frac{\sin\left(\frac{dkx}{2L}\right)}{kx} \quad (1.3)$$

und damit

$$I \propto \frac{\sin^2\left(\frac{dkx}{2L}\right)}{x^2} \quad (1.4)$$

Das Maximum des Beugungsbildes befindet sich bei $x = 0$. Weitere lokale Maxima jeweils für $\sin^2\left(\frac{dkx}{2L}\right) \approx 1$

1.3. Beugung an Mehrfachspalten

Mehrfachspalte bestehen aus mehreren Rechteckspalten nebeneinander im jeweiligen Abstand g . Dieser Abstand g ist die Gitterkonstante. Das Beugungsbild entsteht durch Überlagerung der Beugungsbilder der einzelnen Rechteckspalte. Für große Schirmabstände ist der Gangunterschied Δs in guter Näherung gegeben durch

$$\Delta s = g \sin \varphi \approx g \frac{x}{L} \quad (1.5)$$

Dabei ist φ der Beugungswinkel. Addiert man die Amplituden auf erhält man mit Amplitude ψ_0 der einzelnen Rechteckspalte und Gitterzahl N die Gesamtamplitude

$$\psi = \sum_{n=0}^{N-1} \psi_0 e^{ikn\Delta s} = \psi_0 \frac{1 - e^{ikN\Delta s}}{1 - e^{ik\Delta s}} = \psi_0 \frac{e^{i\frac{kN\Delta s}{2}} \sin\left(\frac{kN\Delta s}{2}\right)}{e^{i\frac{k\Delta s}{2}} \sin\left(\frac{k\Delta s}{2}\right)} \quad (1.6)$$

Die Intensität ist damit gegeben durch

$$I = \psi_0^2 \frac{\sin^2\left(\frac{kN\Delta s}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\Delta s}{2}\right)} = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{kNgx}{2L}\right)}{\sin^2\left(\frac{k gx}{2L}\right)} \quad (1.7)$$

I_0 ist nach (1.4) abhängig von x und bildet damit eine Einhüllende der Intensitätsverteilung. Ihr Einfluss nimmt mit zunehmender Spaltzahl und Spaltdichte ab. $\frac{\sin^2\left(\frac{kNgx}{2L}\right)}{\sin^2\left(\frac{k gx}{2L}\right)}$

hat Hauptmaxima für $\sin\left(\frac{k_g x}{2L}\right) = 0$, also

$$x = m \frac{2\pi L}{k_g} \quad (1.8)$$

mit ganzen Zahlen m . Dazwischen befinden sich $N-1$ Minima und $N-2$ Nebenmaxima. Setzt man dies x -Werte in (1.4) ein und normiert für $m = 0$ auf 1, erhält man

$$I_0 = \left(\frac{\sin\left(m\pi \frac{d}{g}\right)}{m\pi \frac{d}{g}} \right)^2 \quad (1.9)$$

Diesen Faktor nennt man Formfaktor. Er kann verwendet werden um anhand der Hauptmaxima die Gitterstruktur zu bestimmen.

Das globale Intensitätsmaximum befindet sich bei $x = 0$. Da

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2\left(\frac{k N g x}{2L}\right)}{\sin^2\left(\frac{k g x}{2L}\right)} = N^2 \quad (1.10)$$

ist die Intensität des Maximums proportional zum Quadrat der Spaltenzahl. Dieser Zusammenhang gilt auch an allen anderen Stellen mit $\sin\left(\frac{k g x}{2L}\right) \rightarrow 0$.

2. Auswertung

2.1. Intensitätsverteilung von Einzelspalten

Im ersten Versuchsteil soll aus den Beugungsbildern eines Lasers an Einzelspalten verschiedener Breiten (0,075 mm, 0,15 mm und 0,4 mm) die Wellenlänge des verwendeten Lasers bestimmt werden. Dazu fittet man den gemessenen Intensitätsverlauf gegen eine Funktion

$$f(x) = a \cdot \frac{\sin^2(bx)}{x^2} + c \quad (2.1)$$

Nach (1.4) entspricht b dem Vorfaktor im Argument des Sinus

$$b = \frac{dk}{2L} = \frac{\pi d}{\lambda L} \quad (2.2)$$

Also ist die Wellenlänge λ gegeben durch

$$\lambda = \frac{\pi d}{bL} \quad (2.3)$$

Die Fits haben wir mit *Gnuplot* nach dem *Least-Square-Fit* Verfahren erstellt. Sie sind zusammen mit den Messwerten in Abbildung 1 zu sehen.

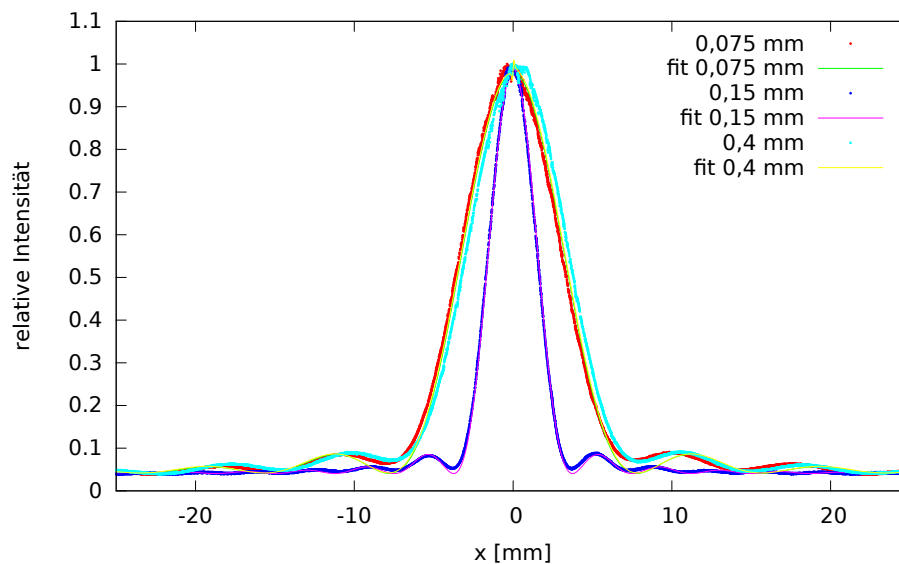


Abbildung 1 – Beugungsbilder der Einzelspalte verschiedener Breiten mit Fit

Bei der Auswertung ist uns aufgefallen, dass die Datenreihe, die eigentlich zur Spaltbreite 0,4 mm gehören sollte, nur dann sinnvolle Werte ergibt, wenn man eine Spaltbreite von 0,075 mm annimmt. Wir können nicht feststellen, ob dies durch einen Fehler von uns verursacht wurde, oder ob die verwendete Software beim Exportieren der Messwerte einen Fehler erzeugt hat.

Zudem haben wir die Abstand zwischen Schirm und Blende nicht notiert. Wir schätzen diesen daher durch (90 ± 10) cm ab.

Aus den Fits erhalten wir bei einer Blendenöffnung von 0,075 mm $b = (403 \pm 1) \text{ m}^{-1}$ und $b = (401 \pm 1) \text{ m}^{-1}$. Bei einer Blendenöffnung von 0,15 mm erhalten wir $b = (840 \pm 1) \text{ m}^{-1}$. Mit (2.3) erhalten wir daraus im Mittel eine Wellenlänge von $\lambda = (640 \pm 70) \text{ nm}$.

2.2. Vergleich der Beugungsbilder von Einzel- und Doppelspalt

In diesem Versuch wird das Beugungsbild eines Einzelspalt der Breite $d = 0,15 \text{ mm}$ mit dem eines Doppelspaltes gleicher Breite und Gitterkonstante $g = 0,25 \text{ mm}$ verglichen. Nach Formel (1.7) wird erwartet, dass sich die Beugungsbilder nach dem normieren nur noch um den Strukturfaktor

$$\frac{\sin^2\left(\frac{kgx}{L}\right)}{\sin^2\left(\frac{kgx}{2L}\right)} \quad (2.4)$$

unterscheiden, also das Beugungsbild des Einzelspalts eine Einhüllende des Beugungsbildes des Doppelspalts bildet. Unsere Messwerte sind in Abbildung 2 zu sehen.

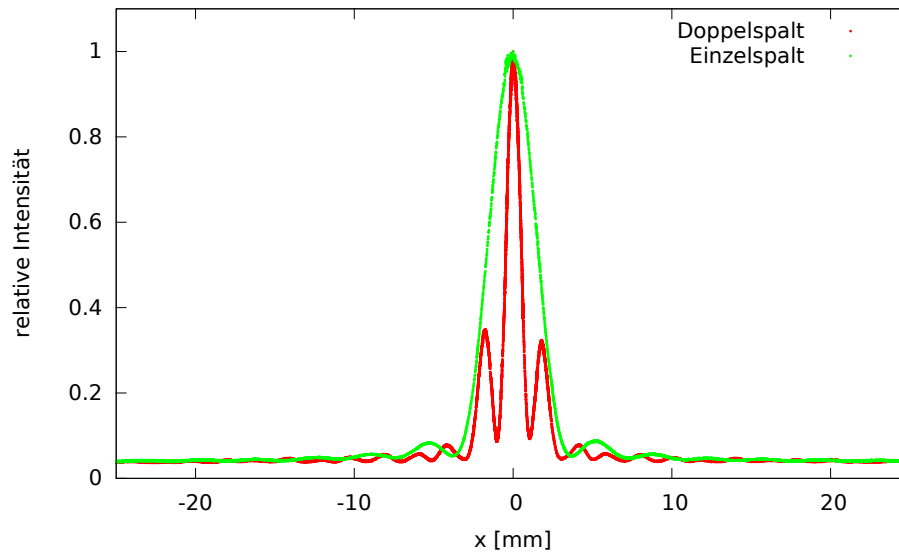


Abbildung 2 – Beugungsbild eines Einzelspalt und Doppelspalt gleicher Breite

2.3. Vergleich der Beugungsbilder mehrerer Doppelspalte

Bei diesem Versuchsteil werden die Intensitätsverläufe mehrerer Doppelspalte untersucht. Diese haben alle jeweils Spaltöffnungen der Breite 0,15 mm bei Spaltabständen von 0,25 mm, 0,50 mm und 1,00 mm respektive. Nach der Theorie wird erwartet, dass die Dichte der Maxima gemäß (1.7) proportional zur Gitterkonstante zunimmt. Dabei bleibt jedoch die relative Intensität verschiedener Maxima an gleicher x -Position gleich.

Unsere Beugungsbilder sind in Abbildung 3 zu sehen.

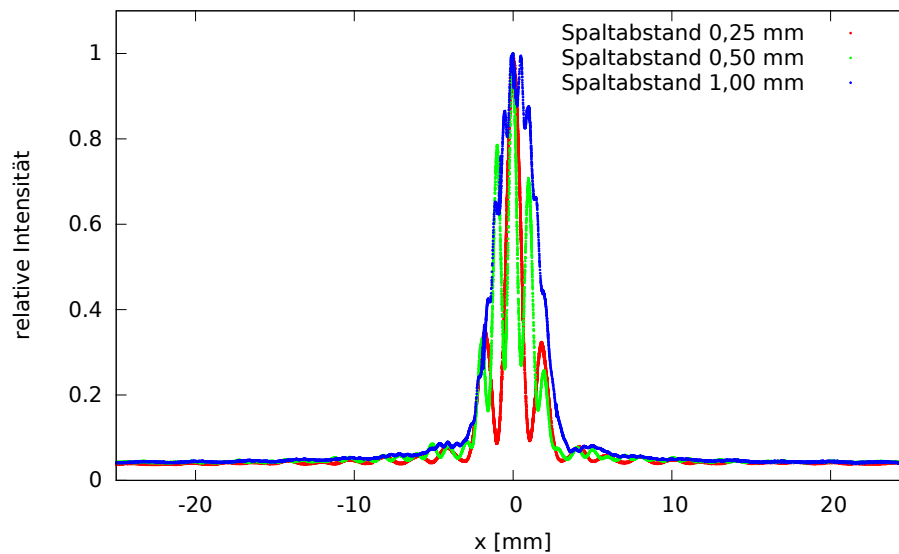


Abbildung 3 – Beugungsbilder verschiedener Doppelspalte mit gleichen Spaltöffnungen

2.4. Vergleich der Beugungsbilder mehrerer Mehrfachspalte

In diesem Versuchsteil wird das Beugungsverhalten von Licht an Mehrfachspalten abhängig von der Anzahl der beleuchteten Spalte untersucht. Dazu werden optische Gitter mit Spaltöffnung $d = 0,15$ mm und Gitterkonstante $g = 0,25$ mm bei Spaltzahlen von $N = 3, 4, 5$ und 40 verwendet. Insbesondere soll dabei der Zusammenhang zwischen N und der Intensität untersucht werden. Daher werden in diesem Versuchsteil alle Beugungsbilder mit dem gleichen Faktor normiert.

Bei der Durchführung fiel auf, dass, anders als in der Theorie erwartet, die Intensität nicht bei $N = 40$ sondern für $N = 5$ maximal wird. Daher sind alle Messwerte in Abbildung 4 durch das Maximum des Intensitätsverlaufs für $N = 5$ geteilt. Diese Beobachtung lässt sich mit der Beobachtung in Verbindung bringen, dass bei $N = 40$ nicht das gesamte Gitter beleuchtet wurde.

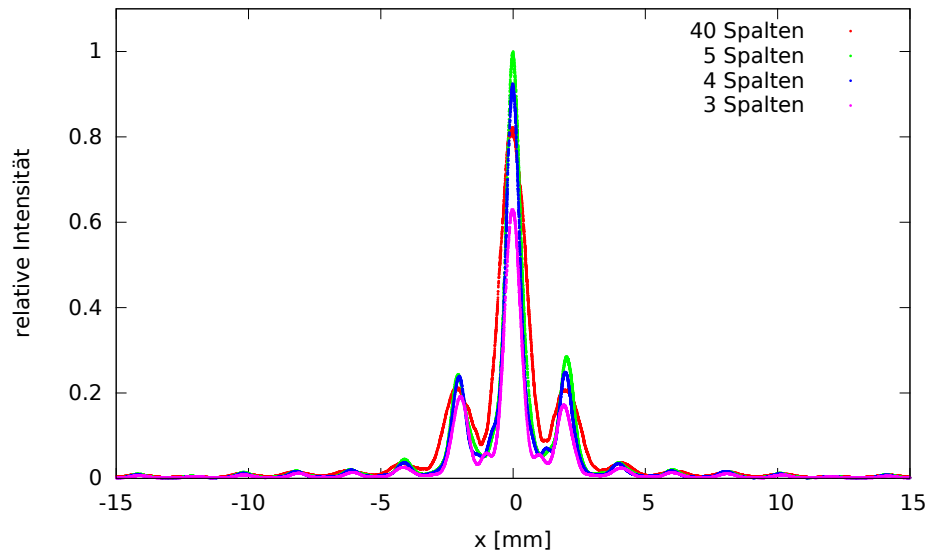


Abbildung 4 – Beugungsbilder verschiedener Mehrfachspalte mit gleichen Spaltgrößen und -abständen

Am Hauptmaximum betragen die relativen Intensitäten für $N = 5$ $I_{rel} = 0,98 \pm 0,02$, für $N = 4$ $I_{rel} = 0,91 \pm 0,02$ und für $N = 3$ ist $I_{rel} = 0,625 \pm 0,005$.

2.4.1. Bestimmung des Formfaktors

Zur Bestimmung des Formfaktors werden am Diagramm die Intensitätsabnahmen an den Hauptmaxima abgelesen. Gemittelt über $N = 3, 4$ und 5 und den Hauptmaxima auf beiden Seiten des globalen Maximums erhalten wir die folgenden Intensitätsverhältnisse zum Maximum nullter Ordnung: $0,27 \pm 0,03$ für $|m| = 1$ und $0,039 \pm 0,004$ für $|m| = 2$. Für größere Ordnungen ist die Intensitätsauflösung zu gering um zuverlässige Werte zu erhalten.

Die so erhaltenen Werte fitten wir gegen eine Funktion

$$f(m) = \frac{\sin^2(am)}{(am)^2} \quad (2.5)$$

Nach (1.9) gilt

$$a = \frac{\pi d}{g} \Leftrightarrow \frac{d}{g} = \frac{a}{\pi} \quad (2.6)$$

Die Intensitätsverhältnisse sind zusammen mit dem dazugehörigen Fit in Abbildung 5 dargestellt.

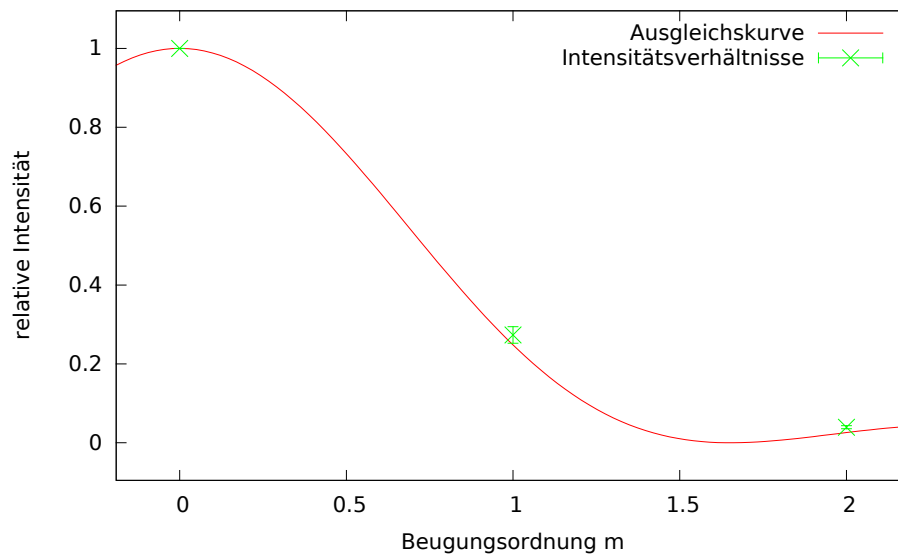


Abbildung 5 – Formfaktor in Abhängigkeit zur Ordnung der Maxima

Mit *Gnuplot* nach dem *Least-Square-Fit* Verfahren erhalten wir $a = 1,9 \pm 0,1$. Damit ist $\frac{d}{g} = 0,60 \pm 0,04$.

2.5. Nebenmaxima am Vierfachspalt

In diesem Versuchsteil wird der Bereich zwischen dem zweiten und dritten Hauptmaxima des Vierfachspalts genauer betrachtet. In der Theorie werden hier drei Minima und zwei Nebenmaxima erwartet. Das von uns aufgenommene Beugungsbild ist in Abbildung 6 zu sehen.

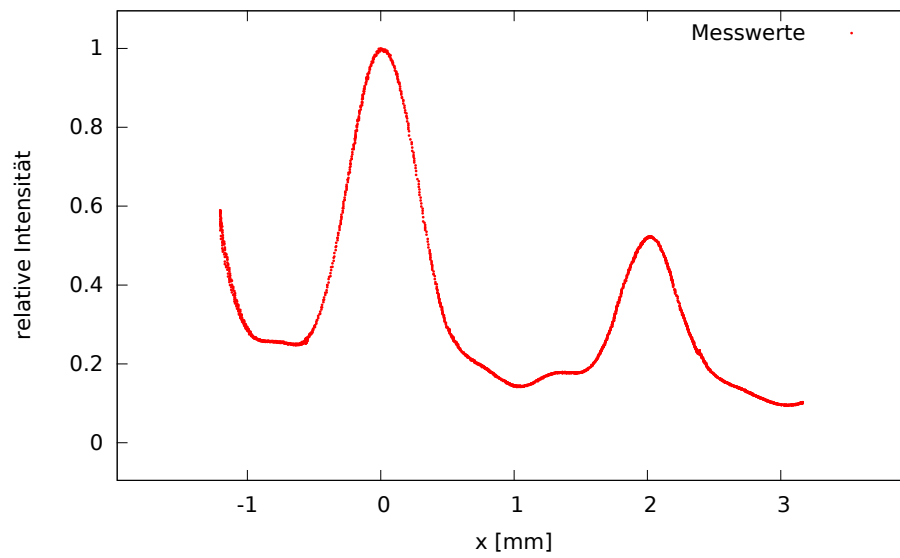


Abbildung 6 – Auflösung des Bereichs zwischen zweiten und dritten Hauptmaximum

3. Diskussion

3.1. Verschiedene Einfachspalte

Die von uns bestimmte Wellenlänge $\lambda = (640 \pm 70)$ nm liegt im Bereich des roten Lichts. Somit haben wir, obwohl wir den Schirmabstand abschätzen mussten, einen realistischen Werte erhalten. Das Beugung verwendet werden kann um die Wellenlänge von Licht zu bestimmen haben wir bereits in früheren Versuchen gesehen. Im Spektroskopie-Versuch O3 haben wir Beugung am Gitter verwendet, um aus den Beugungswinkel die spektrale Aufteilung des Lichts zu bestimmen. Mit dem dort verwendeten Aufbau, mit dem Beugungswinkel auf weniger als $0,1^\circ$ genau messbar sind, lässt sich auch die Wellenlänge genauer bestimmen.

Selbst wenn man den Schirmabstand genau bestimmt hätte, wäre das Ergebnis aus dem Einzelspalt-Versuch ungenauer, da die Nebenmaxima deutlich weniger scharf auflösen.

3.2. Vergleich von Doppel- und Einzelspalt

Der theoretisch erwartete Verlauf ist etwa bis zum ersten Minimum des Einzelspalts zu beobachten. Die Intensität des Doppelspalts hier immer unter der des Einzelspalts und nähert sich ihr beim Hauptmaximum an. Ebenfalls gut zu erkennen ist, dass wie erwartet zwischen zwei Maxima immer ein Minimum und keine weiteren Nebenmaxima sind.

Das der Verlauf im äußeren Verlauf nicht den Erwartungen entspricht ist wahrscheinlich die Folge diverser Störeinflüsse. In der Theorie geht man von monochromatischen Ebenen wellen aus, die durch alle Spalte mit gleicher Intensität fallen. Allein die Annahme der ebenen Wellen ist bedingt durch den, selbst im Vergleich zum Versuchsaufbau, beschränkten Laserstrahls. Nach dem huygensschen Prinzip kann im Rand des Strahls keine ebene Welle existieren.

3.3. Doppelspalte

Die stärksten Interferenzphänomene sind bei einem Spaltabstand von $0,5\text{mm}$ beobachtbar. Bei einem Abstand von $0,25\text{mm}$ ist ebenfalls Interferenz zu sehen, bei einem Abstand von 1mm aber war die Intensitätsverteilung eher die eines Einzelspalts. Dies entspricht im wesentlichen der Theorie. Mit zunehmenden g rücken die Maxima und Minima immer dichter zusammen, so dass sich der Verlauf immer öfter dem des Einzelspalts

annähert.

3.4. Mehrfachspalte

Die Lage der Hauptmaxima wird bei allen Spaltenzahlen als gleich erwartet. Es wird erwartet, dass die Anzahl der Nebenmaxima mit zunehmender Spaltenzahl größer wird. Auch wird angenommen, dass mit größerer Spaltenzahl die Intensität der Hauptmaxima zunimmt und die Breite der Hauptmaxima abnimmt. Also die Hauptmaxima bei $N = 40$ am hellsten und am schmalsten.

Entgegen der Erwartungen war bei einer Spaltenzahl von 5 die Intensität am höchsten und die Hauptmaxima am schmalsten. Ein möglicher Grund hierfür wäre, dass der Laser nicht alle 40 Spalten beleuchten kann und einige Spalten nur zum Teil beleuchtet wurden. Das könnte das Interferenzmuster beeinflussen.

Auch wenn die Abhängigkeit der Intensität von der Spaltzahl bis auf die Abweichung bei 40 Spalten, die leicht zu erklären ist, qualitativ beobachtet wurde, stimmen die quantitativen Verhältnisse nicht mit der Theorie überein. Nach der Theorie wird ein quadratischer Zusammenhang erwartet. Somit wäre das Verhältnis zwischen $N = 4$ und $N = 5$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} = 0,64$$

Stattdessen beobachten wir aber ein Verhältnis von mehr als 0,9. Auch die anderen Verhältnisse sind größer als erwartet.

Eine mögliche Erklärung wäre, dass in der Theorie angenommen wird, dass parallel verlaufende Strahlen mit rein konstruktiver Interferenz am gleichen Punkt auf dem Schirm auftreffen. In der Praxis trifft das aber nur als Näherung zu. Mit zunehmender Breite des beleuchteten Blendenbereichs kommt es zunehmend zu einem Gangunterschied zwischen den Äußerer Strahlen und den Mittleren. Dadurch kommt es zur teilweisen Auslöschung, so dass die Intensität zwar noch zunimmt, jedoch nicht quadratisch. Dies könnte auch erklären, warum bei $N = 40$ die Intensität geringer als bei $N = 5$ ist.

3.5. Formfaktor

Da wir d und g kennen, können wir die Gitterstruktur auch direkt berechnen.

$$\frac{d}{g} = \frac{15}{25} = 0,6$$

Der aus den Intensitätsverteilungen bestimmte Wert $\frac{d}{g} = 0,60 \pm 0,04$ stimmt damit genau überein. Dieses Verfahren lässt sich auch bei Gittern anwenden, bei denen nicht wie in diesem Versuch die Längen direkt messbar sind. Mit sichtbarem Licht ließen sich damit Gitter mit Größen bis in den Bereich weniger Mikrometer untersuchen. Nimmt man Wellen höherer Energie wie beispielsweise Röntgen- oder Gammastrahlung ließen sich damit auch noch viel kleinere Gitterstrukturen wie Kristallstrukturen untersuchen. Die von uns erzielte Genauigkeit ist zwar relativ gering, jedoch ließen sich bei feineren Gittern auch noch mehr Spalte beleuchten, so dass sich mehr Beugungsordnungen verwenden lassen.

3.6. Auflösung der Nebenmaxima

Die Nebenmaxima sind im Beugungsbild kaum zu erkennen. Dies ist jedoch wahrscheinlich kein Problem der Datenerfassung oder -verarbeitung. Es ist anzunehmen, dass in dem Bereich der Einfluss des Formfaktors den Struktur nahezu vollständig unterdrückt. In praktischen Anwendungen ist dieser Effekt jedoch oft von Vorteil. Beleuchtet man viele Gitterspalte entsteht dazwischen ein im Vergleich zur Breite der Hauptmaxima breiter Bereich, in dem die Intensität gering ist. Dadurch lassen sich Hauptmaxima besser auflösen. Dies ist ein Effekt, der bereits im Spektrometerversuch O3 zu beobachten war. Verwendet man dort ein Gitter mit halber Spaltdichte sind doppelt so viele Spektrallinien zu sehen. Will man ein großes Spektrum auflösen ist dies unter Umständen problematisch. Es könnte passieren, dass kurzwellige Spektrallinien hoher Ordnung mit langwelligen Spektrallinien niedrigerer Ordnung überschneiden. In diesem Fall wäre das Auflösungsvermögen zu gering.

A. Anhang

A.1. Fehlerrechnung

Für linear errechnete Größen $y(x_1, \dots, x_n)$ ist der Fehler allgemein gegeben durch

$$\Delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(y \frac{\Delta x_i}{x_i} \right)^2} = |y| \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\Delta x_i}{x_i} \right)^2} \quad (\text{A.1})$$