

# Catatan Kuliah TF2106: Magnetostatika

Fadjar Fathurrahman

2016

## 1 Gaya magnetik

Hukum gaya Lorentz:

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Gaya magnetik tidak melakukan kerja:

$$\begin{aligned} dW_{\text{mag}} &= \mathbf{F}_{\text{mag}} \cdot d\mathbf{l} \\ &= Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

## 2 Arus

Arus listrik:

$$I = \frac{\delta Q}{\delta t}$$

Gaya magnet pada arus garis, arus permukaan, dan arus volume

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \lambda dl \quad (\text{garis})$$

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \sigma da \quad (\text{permukaan})$$

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \rho d\tau \quad (\text{volume})$$

Persamaan kontinuitas:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

## 3 Hukum Biot-Savart

Medan magnet dari arus tunak pada garis adalah:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{I} \times \hat{\mathbf{z}}}{z^2} dl' \quad (6)$$

Konstanta  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$  adalah permeabilitas vakum. Satuan dari  $\mathbf{B}$  adalah newton per ampere-meter atau tesla.

Untuk arus permukaan hukum Biot-Savart dinyatakan sebagai:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{z}}}{z^2} dl' \quad (7)$$

Sedangkan untuk arus volume hukum Biot-Savart dinyatakan sebagai:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{z}}}{z^2} dl' \quad (8)$$

## 4 Divergensi dan curl dari medan magnet

Divergensi dari medan magnet adalah nol.

$$(1) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (9)$$

Curl dari  $\mathbf{B}$  adalah

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (10)$$

Persamaan ini juga dikenal dengan nama Hukum Ampere. Dalam bentuk integral Hukum Ampere dapat dituliskan sebagai:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} \quad (11)$$

## 5 Potensial vektor magnetik

Potensial vektor magnetik  $\mathbf{A}$  diperoleh dari persamaan

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (12)$$

- (2) Persamaan ini memberikan curl dari  $\mathbf{A}$  akan tetapi tidak memberikan informasi mengenai divergensi dari  $\mathbf{A}$ . Kita bebas memilih nilai divergensi  $\mathbf{A}$  dan nol merupakan pilihan yang paling sederhana.

$$(4) \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (13)$$

Dengan pemilihan ini, Hukum Ampere dapat dituliskan menjadi

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (14)$$

- (5) Dengan asumsi bahwa  $\mathbf{J}$  mendekati nol pada tak hingga, dapat diperoleh solusi

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{z} d\tau' \quad (15)$$

Untuk arus garis:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{I}}{z} dl' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{1}{z} dl' \quad (16)$$

sedangkan untuk arus permukaan:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{K}}{z} da'. \quad (17)$$

## 6 Syarat-syarat batas

Komponen medan magnetik yang tegak lurus terhadap permukaan:

$$B_{\text{above}}^{\perp} = B_{\text{below}}^{\perp} \quad (18)$$

Komponen medan magnetik yang sejajar dengan permukaan:

$$\mathbf{B}_{\text{above}}^{\parallel} - \mathbf{B}_{\text{below}}^{\parallel} = \mu_0 K \quad (19)$$

Dua kondisi tersebut dapat dituliskan sebagai:

$$\mathbf{B}_{\text{above}} - \mathbf{B}_{\text{below}} = \mu_0 (\mathbf{K} \times \hat{n}) \quad (20)$$

Potensial vektor bersifat kontinu di semua perbatasan.

$$\mathbf{A}_{\text{above}} = \mathbf{A}_{\text{below}} \quad (21)$$

## 7 Ekspansi multipol dan potensial vektor

Dengan menggunakan ekspansi multipol:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \alpha) \quad (22)$$

dengan  $\alpha$  merupakan sudut antara  $\mathbf{r}$  dan  $\mathbf{r}'$

Potensial vektor dapat dituliskan menjadi:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{1}{z} d\mathbf{l}' \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r^{n+1}} \oint (r')^n P_n(\cos \alpha) d\mathbf{l}' \end{aligned}$$

Tinjau suku-suku  $1/r^n$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\text{mon}}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r} \oint d\mathbf{l}' \\ \mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r^2} \oint r' \cos \alpha d\mathbf{l}' \\ \mathbf{A}_{\text{quad}}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \end{aligned}$$

Suku monopol magnetik selalu bernilai  $\neq 0$ , karena

$$\oint d\mathbf{l}' = \mathbf{0} \quad (23)$$

Suku dominan adalah dipol

$$\mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint r' \cos \alpha d\mathbf{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') d\mathbf{l}' \quad (24)$$

dengan menggunakan

$$\oint (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') d\mathbf{l}' = -\hat{\mathbf{r}} \times \int d\mathbf{a}' \quad (25)$$

Maka persamaan untuk dipol dapat dituliskan menjadi:

$$\mathbf{A}_{\text{dip}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (26)$$

di mana  $\mathbf{m}$  adalah momen dipol magnetik:

$$\mathbf{m} \equiv I \int d\mathbf{a} = I \mathbf{a} \quad (27)$$