TF2206 MEDAN ELEKTROMAGNET

Hermawan K. Dipojono, Ph.D
ST (TF-ITB), MSEE (Hawaii), Ph.D (Ohio State)
Profesor (ITB)

November 9, 2016

Ekspansi Multipole

Jika Anda berada sangat jauh dari suatu distribusi muatan yang terlokalisir maka mereka akan tampak seperti sebuah muatan titik dan potensialnya dapat didekati dengan $(1/4\pi\epsilon_0)Q/r$ di mana Q adalah muatan total. Kita ingin mengamati hal ini dengan lebih rinci melalui beberapa contoh.

Soal: Sebuah dipol listrik terdiri atas dua buah muatan yang sama besar namun dengan polaritas yang berbeda $(\pm q)$ yang terpisahkan sejauh d. Tentukanlah penghampiran potensial di titik yang amat jauh dari dipol tersebut.

Ekspansi Multipol

Solusi: Misal R_- adalah jarak dari $-q$ dan R_+ adalah jarak dari $+q$ serta r jarak dari titik tengah dipol. Maka potensial di titik jauh itu adalah

$$\Phi(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{R_+} - \frac{q}{R_-}\right)$$

dan dengan menggunakan rumus cosinus dapat diperoleh

$$R_\pm^2 = r^2 + (d/2)^2 \mp rd\cos\theta = r^2\left(1 \mp \frac{d}{r}\cos\theta + \frac{d^2}{4r^2}\right)$$

Kita tertarik dengan wilayah di mana $r \gg d$ sehingga suku ketiga dapat diabaikan, dengan ekspansi binomial diperoleh:

Ekspansi Multipol

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R_\pm} &\cong \frac{1}{r}\left(1 \mp \frac{d}{r}\cos\theta\right)^{-1/2} \cong \frac{1}{r}\left(1 \pm \frac{d}{2r}\cos\theta\right) \\
\Longrightarrow \frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-} &\cong \frac{d}{r^2}\cos\theta \\
\therefore\ \Phi(\vec{\mathbf{r}}) &\cong \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qd\cos\theta}{r^2}
\end{aligned}$$

Terlihat bahwa potensial sebuah dipol sebanding dengan $1/r^2$ di titik yang amat jauh, jadi mengecil lebih cepat dibanding potensial dari sebuah muatan titik. Jika kita letakkan sepasang dipol namun dengan polaritas dipol berlawanan sehingga membentuk quadrupol maka potensialnya akan berbanding lurus dengan $1/r^3$. Sedangkan pasangan quadrupol akan membentuk oktopol dengan potensial berbanding lurus dengan $1/r^4$.

Ekspansi Multipol

Selanjutnya kita akan mengembangkan ekspansi sistematik untuk sembarang distribusi muatan terlokalisir dalam bentuk pangkat dari $1/r$.

$$\Phi(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{1}{R}\,\rho(\vec{\mathbf{r}}')\,\mathrm{d}V' \qquad (1)$$

$$R^2 = r^2 + (r')^2 - 2rr'\cos\theta' = r^2\left[1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{r'}{r}\right)\cos\theta'\right]$$

$$R = r\sqrt{1+\epsilon} \qquad (2)$$

$$\epsilon \equiv \left(\frac{r'}{r}\right)\left(\frac{r'}{r} - 2\cos\theta'\right).$$

Untuk titik-titik yang berada jauh dari distribusi muatan, ϵ akan jauh lebih kecil dari 1 sehingga dapat digunakan ekspansi binomial:

Ekspansi Multipol

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r}(1+\epsilon)^{-1/2} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{3}{8}\epsilon^2 - \frac{5}{16}\epsilon^3 + \cdots\right), \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{r}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)\left(\frac{r'}{r} - 2\cos\theta'\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{r'}{r}\right)^2\left(\frac{r'}{r} - 2\cos\theta'\right)^2\right. \\ &\quad \left. - \frac{5}{16}\left(\frac{r'}{r}\right)^3\left(\frac{r'}{r} - 2\cos\theta'\right)^3 + \cdots\right] \\ &= \frac{1}{r}\left[1 + \left(\frac{r'}{r}\right)(\cos\theta') + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 (3\cos^2\theta' - 1)/2\right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{r'}{r}\right)^3 (5\cos^3\theta' - 3\cos\theta')/2 + \cdots\right] \end{aligned} \tag{4}$$

Apakah yang menarik dari persamaan ini? Koefisien-koefisien yang berada di dalam kurung tidak lain adalah polinomial-polinomial Legendre.

Ekspansi Multipol

Jadi dapat dituliskan sebagai berikut

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\theta') \tag{5}$$

$$\therefore\ \Phi(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\int_V (r')^n P_n(cos\theta')\rho(\vec{\mathbf{r}}')\,\mathrm{d}V' \tag{6}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r}\int_V \rho(\vec{\mathbf{r}}')\,\mathrm{d}V' + \frac{1}{r^2}\int_V r'\cos\theta'\rho(\vec{\mathbf{r}}')\,\mathrm{d}V' + \frac{1}{r^3}\int_V (r')^2\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta' - \frac{1}{2}\right)\rho(\vec{\mathbf{r}}')\,\mathrm{d}V' + \cdots\right]. \tag{7}$$

Inilah bentuk persamaan ekspansi multipol dari $\Phi(\vec{\mathbf{r}})$ dalam fungsi pangkat dari $1/r$.

Suku-suku Monopol dan Dipol

Ekspansi multipol pada jarak yang amat jauh akan didominasi oleh suku monopol:

$$\Phi_{\text{mon}}(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} \tag{8}$$

di mana $q = \int \rho \mathrm{d}V$. Hasil ini tepat sama dengan harapan kita untuk potensial yang amat jauh dari sumber muatan. Secara kebetulan, untuk sumber muatan titik di titik awal maka Φ_{mon} menyatakan harga potensial eksak di mana pun. Jika muatan total sama dengan nol, maka suku yang dominan adalah dipol (kecuali jika dipolnya juga nol):

$$\Phi_{\text{dip}}(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\int r' \cos\theta' \rho(\vec{\mathbf{r}}') \,\mathrm{d}V'$$

Suku-suku Monopol dan Dipol

Mengingat θ' adalah sudut antara $\vec{\mathbf{r}}'$ and $\vec{\mathbf{r}}$ maka

$$\begin{aligned} r' \cos\theta' &= \vec{\mathbf{a}}_r \cdot \vec{\mathbf{r}}' \\ \Phi_{\mathsf{dip}}(\vec{\mathbf{r}}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\vec{\mathbf{a}}_r \cdot \int \vec{\mathbf{r}}' \rho(\vec{\mathbf{r}}')\,\mathrm{d}V' \end{aligned}$$

Integral ini yang tidak tergantung sama sekalai pada $\vec{\mathbf{r}}$ disebut momen dipol:

$$\vec{\mathbf{p}} \equiv \int \vec{\mathbf{r}}'\,\rho(\vec{\mathbf{r}}')\,\mathrm{d}V' \tag{9}$$

$$\Phi_{\mathsf{dip}}(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{a}}_r}{r^2} \tag{10}$$

Medan Listrik Sebuah Dipol

Jika dipilih koordinat sehingga $\vec{\mathbf{p}}$ terletak di titik awal dan mengarah sejajar sumbu z maka potensial di (r, θ) adalah

$$\Phi_{\text{dip}}(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{\mathbf{a}}_r \cdot \vec{\mathbf{p}}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} \tag{11}$$

$$E_r = -\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2p\cos\theta}{r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\sin\theta}{r^3}$$

$$E_\phi = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi} = 0$$

$$\therefore\ \vec{\mathbf{E}}_{\text{dip}}(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{r^3}\left(2\cos\theta\vec{\mathbf{a}}_r + \sin\theta\vec{\mathbf{a}}_\theta\right) \tag{12}$$

Medan Listrik di dalam Materi

Dalam hal ini, materi dapat dibedakan ke dalam dua katagori: konduktor dan isolator (dielektrik). Jika suatu materi berada dalam pengaruh medan listrik maka akan dihasilkan dipol induksi

$$\vec{\mathbf{p}} = \alpha \vec{\mathbf{E}} \tag{13}$$

α disebut polarisibilitas atomis.

Polarisibilitas: Contoh

Dalam model yang paling sederhana, atom terdiri atas nukleus dengan muatan $+q$ yang diselubungi oleh awan elektron berapat muatan uniform dengan muatan total $-q$. Hitunglah polarisibilitas atomisnya.

SOLUSI: Medan listrik eksternal akan menggeser posisi nukleus kekanan dan elektron ke kiri. Setelah keadaan mencapai seimbang, posisi itu tergeser sejauh d. Dalam keadaan seimbang itu medan eksternal sama dengan medan internal dan pasangan nukleus dan elektron membentuk sebuah dipol. Maka besarnya medan listrik pada jarak sejauh r adalah

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qd}{r^3} \quad \text{atau} \\ p &= qd = (4\pi\epsilon_0 r^3)E \\ \therefore\ \alpha &= 4\pi\epsilon_0 r^3 = 3\epsilon_0\Omega \end{aligned}$$

di mana Ω adalah volume atom.

Molekul-molekul Polar

Pada atom netral seperti contoh sebelumnya tidak mempunyai momen dipol, momen $\vec{\mathrm{p}}$ adalah hasil induksi oleh medan eksternal. Sejumlah molekul mempunyai momen dipol internal. Molekul air misalnya elektron-elektronnya cenderung berkumpul di sekitar oksigen dan karena molekulnya melengkung sebesar 105^o maka seolah-olah muatan negatif berada di ujung dan muatan positif berada diujung lainnya. Maka molekul ini mempunyai momen dipol yang relatif besar yaitu $6,1 \times 10^{-30}$ C-m. Apakah yang akan timbul bila molekul-molekul seperti ini (disebut molekul-moleku polar) berada dalam pengaruh medan eksternal?

Molekul-molekul Polar

Jika medan luar itu uniform, maka gaya pada muatan positif $\vec{\mathbf{F}}_+ = q\vec{\mathbf{E}}$ akan saling menghapuskan dengan gaya pada muatan negatif $\vec{\mathbf{F}}_- = -q\vec{\mathbf{E}}$. Tetapi akan ada torka sebesar

$$
\begin{aligned}
\vec{\mathbf{T}} &= (\vec{\mathbf{r}}_+ \times \vec{\mathbf{F}}_+) + (\vec{\mathbf{r}}_- \times \vec{\mathbf{F}}_-) \\
&= [(\vec{\mathbf{d}}/2) \times (q\vec{\mathbf{E}})] + [(-\vec{\mathbf{d}}/2) \times (-q\vec{\mathbf{E}})] = q\vec{\mathbf{d}} \times \vec{\mathbf{E}} \\
&= \vec{\mathbf{p}} \times \vec{\mathbf{E}}
\end{aligned}
$$

Arah $\vec{\mathbf{T}}$ selalu cenderung sedemikian rupa sehingga $\vec{\mathbf{p}}$ sejajar dengan $\vec{\mathbf{E}}$. Jika medan eksternal itu tidak uniform maka di samping ada torka juga ada gaya yang bekerja pada dipol tersebut.

Molekul-molekul Polar

Gaya pada dipol akibat medan eksternal yang tidak uniform adalah

$$\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_+ + \vec{\mathbf{F}}_- = q(\vec{\mathbf{E}}_+ + \vec{\mathbf{E}}_-) = q(\Delta\vec{\mathbf{E}})$$

sehingga bila dipol itu amat pendek maka perubahan pada E_x dapat didekati dengan

$$\begin{aligned} E_x &\equiv (\nabla E_x)\cdot\vec{\mathbf{d}} \\ \therefore\ \Delta\vec{\mathbf{E}} &= (\vec{\mathbf{d}}\cdot\nabla)\,\vec{\mathbf{E}} \\ \therefore\ \vec{\mathbf{F}} &= (\vec{\mathbf{p}}\cdot\nabla)\,\vec{\mathbf{E}} \qquad (14) \end{aligned}$$

Medan Objek Terpolarisasi

Misal sebuah objek mempunyai banyak dipol yang terpolarisir dengan momen dipol per satuan volumenya adalah $\vec{\mathbf{P}}$. Berapakah medan listrik yang dihasilkan oleh seperti ini? Kita mulai dari potensial yang ditimbulkan oleh sebuah dipol yaitu

$$\Phi(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{\mathbf{a}}_r \cdot \vec{\mathbf{p}}}{r^2} \tag{15}$$

maka potensial total yang ditimbulkan oleh objek tersebut adalah

$$\Phi(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\vec{\mathbf{a}}_r \cdot \vec{\mathbf{P}}(\vec{\mathbf{r}}')}{r^2} \, \mathrm{d}V' \tag{16}$$

Kita akan uraikan agar dapat diperoleh bentuk yang lebih relevan dan mencerahkan sebagai berikut:

Medan Objek Terpolarisasi

$$
\begin{aligned}
\nabla'\left(\frac{1}{r}\right) &= \frac{\vec{\mathbf{a}}_r}{r^2} \\
\Phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \vec{\mathbf{P}}\cdot\nabla'\left(\frac{1}{r}\right)\,\mathrm{d}V' \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\int_V \nabla'\cdot\left(\frac{\vec{\mathbf{P}}}{r}\right)\,\mathrm{d}V' - \int_V \frac{1}{r}(\nabla'\cdot\vec{\mathbf{P}})\,\mathrm{d}V'\right] \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\oint_{\vec{\mathbf{S}}} \frac{1}{r}\vec{\mathbf{P}}\cdot\mathrm{d}\vec{\mathbf{S}}' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{1}{r}(\nabla'\cdot\vec{\mathbf{P}})\,\mathrm{d}V' \qquad (17) \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\oint_{\vec{\mathbf{S}}} \frac{\rho_S}{r}\,\mathrm{d}\vec{\mathbf{S}}' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho_V}{r}\,\mathrm{d}V \qquad (18) \\
\rho_S &\equiv \vec{\mathbf{P}}\cdot\vec{\mathbf{a}}_n \qquad \rho_V \equiv -\nabla\cdot\vec{\mathbf{P}} \qquad (19)
\end{aligned}
$$

Hukum Gauss Bahan Dielektrik

Akibat adanya polarisasi akan menghasilkan muatan-muatan yang terkungkung dengan rapat muatan volume $\rho_V = -\nabla \cdot \vec{\mathbf{P}}$ di dalam bahan, dan $\rho_S = \vec{\mathbf{P}} \cdot \vec{\mathbf{a}}_n$ di permukaan. Dengan demikian di dalam bahan akan ada muatan itu plus muatan-muatan lain (kita sebut sebagai muatan bebas)

$$\begin{aligned}
\rho &= \rho_V + \rho_f && (20)\\
\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} &= \rho = \rho_V + \rho_f = -\nabla \cdot \vec{\mathbf{P}} + \rho_f \\
\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}}) &= \rho_f \\
\vec{\mathbf{D}} &\equiv \epsilon_0 \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}} && (21)\\
\nabla \cdot \vec{\mathbf{D}} &= \rho_f && (22)\\
\oint_{\vec{\mathbf{S}}} \vec{\mathbf{D}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{S}} &= Q_{\text{enc}} && (23)
\end{aligned}$$

di mana Q_{enc} menyatakan muatan bebas total yang berada di dalam selubung $\vec{\mathbf{S}}$.

Contoh

Sebuah kabel kawat yang amat panjang membawa muatan garis ρ_L diselubungi oleh karet isolator dengan jari-jari a. Hitunglah $\vec{\mathbf{D}}$.
SOLUSI: Gunakan permukaan Gauss silindris berjari-jari r dengan panjang L maka diperoleh

$$\begin{aligned} D(2\pi sL) &= \rho_L L \\ \therefore\ \vec{\mathbf{D}} &= \frac{\rho_L}{2\pi r}\vec{\mathbf{a}}_r \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa persamaan ini berlaku untuk di dalam maupun di luar silindris. Untuk kasus di luar silinder, $\vec{\mathbf{P}} = 0$ sehingga

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{\epsilon_0}\vec{\mathbf{D}} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 r}\vec{\mathbf{a}}_r \quad \text{untuk} \quad r > a$$

Medan listrik di dalam karet tidak dapat ditentukan karena $\vec{\mathbf{P}}$ tidak kita ketahui.

Kemiripan Yang Menyesatkan

Persamaan (22) nampak seperti hukum Gauss, yang membedakan hanyalah ρ diganti dengan ρ_f, dan $\epsilon_0\vec{\mathbf{E}}$ diganti dengan $\vec{\mathbf{D}}$. Kita akan mudah tergoda untuk menyimpulkan bahwa $\vec{\mathbf{D}}$ adalah seperti $\vec{\mathbf{E}}$ (hanya sekedar berbeda dengan faktor pengali ϵ_0). Kesimpulan ini adalah salah karena tidak ada hukum Coulomb untuk $\vec{\mathbf{D}}$:

$$\vec{\mathbf{D}} \neq \frac{1}{4\pi}\int \frac{\vec{\mathbf{a}}_r}{r^2}\,\rho_f(\vec{\mathbf{r}}')\,\mathrm{d}V'$$

Di samping itu untuk elektrostatik curl $\vec{\mathbf{E}}$ akan selalu sama dengan nol, tetapi curl $\vec{\mathbf{D}}$ tidak selalu sama dengan nol

$$\nabla \times \vec{\mathbf{D}} = \epsilon_0(\nabla \times \vec{\mathbf{E}}) + (\nabla \times \vec{\mathbf{P}}) = \nabla \times \vec{\mathbf{P}} \tag{24}$$

Syarat-syarat Batas

Persamaan (23) menyatakan bahwa komponen normal dari $\vec{\mathbf{D}}$ mengalami diskontinyuitas di antar muka

$$D_{n1} - D_{n2} = \rho_f \tag{25}$$

sedangkan persamaan (24) mengalami diskontinyuitas pada komponen tangensial mengikuti persamaan

$$D_{t1} - D_{t2} = P_{t1} - P_{t2} \tag{26}$$

dengan hadirnya bahan dielektrik persaman di atas menjadi lebih penting dibanding

$$E_{n1} - E_{n2} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \tag{27}$$

$$E_{t1} - E_{t2} = 0 \tag{28}$$

Dielektrik Linier: Susceptibilitas, Permittivitas, Konstanta Dielektrik

Untuk banyak materi, polarisasi sebanding medan dengan catatan $\vec{\mathbf{E}}$ tidak terlalu kuat

$$\vec{\mathbf{P}} = \epsilon_0 \chi_e \vec{\mathbf{E}} \tag{29}$$

Konstanta kesebandingan χ_e disebut *electric suscepstibility* yang harganya tergantung pada struktur mikro materialnya. Material yang memenuhi persamaan (29) disebut dielektrik linier. Medan $\vec{\mathbf{E}}$ ini merupakan medan total, baik yang disebabkan oleh muatan-muatan bebas maupun polarisasi.

Dielektrik Linier

Di dalam media linier diperoleh

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{D}} &= \epsilon_0\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}} = \epsilon_0\vec{\mathbf{E}} + \epsilon_0\chi_e\vec{\mathbf{E}} = \epsilon_0(1+\chi_e)\vec{\mathbf{E}} && (30)\\
&= \epsilon\vec{\mathbf{E}} && (31)\\
\epsilon &\equiv \epsilon_0(1+\chi_e) && (32)
\end{aligned}$$

Konstanta ϵ disebut permittivitas dari material. Besaran tanpa dimensi:

$$\epsilon_r \equiv 1 + \chi_e = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \qquad (33)$$

disebut permittivitas relatif, atau konstanta dielektrik.

Dielektrik Linier

Konstanta Dielektrik

Material	ϵ_r	Material	ϵ_r
Vacuum	1	Benzene	2,28
Helium	1,000065	Diamond	5,7
Neon	1,00013	Salt	5,9
Hydrogen	1,00025	Silicon	11,8
Argon	1,00052	Methanol	33,0
Air (dry)	1,00054	Water	80,1
Nitrogen	1,00055	Ice (-30^o C)	99
Water vapor (100^o C)	1,0057	$KTaNbO_3$ (0^o C)	34.000

Contoh

Sebuah bola logam berjari-jari a membawa muatan Q, diselubungi oleh bahan dielektrik linier dengan permittivitas ϵ hingga berjari-jari b. Hitunglah potensial di pusat bola relatif terhadap titik tak hingga.

SOLUSI: Untuk menghitung Φ perlu diketahui $\vec{\mathbf{E}}$. Untuk menghitung $\vec{\mathbf{E}}$ perlu diketahui $\vec{\mathbf{P}}$ tetapi untuk menghitung $\vec{\mathbf{P}}$ kita perlu tahu $\vec{\mathbf{E}}$. Untung diketahui muatan bebasnya sebesar Q sehingga dapat diperoleh

$$\vec{\mathbf{D}} = \frac{Q}{4\pi r^2}\vec{\mathbf{a}}_r \quad \text{untuk semua titik } r > a$$

Contoh

Di dalam logam tentunya $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{P}} = \vec{\mathbf{D}} = 0$. Sekali sudah diperoleh $\vec{\mathbf{D}}$ maka $\vec{\mathbf{E}}$ dapat dihitung dengan mudah

$$\vec{\mathbf{E}} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}\vec{\mathbf{a}}_r, & \text{untuk } a < r < b \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{\mathbf{a}}_r, & \text{untuk } r > b \end{cases}$$

Potensial di pusat bola adalah

$$\begin{aligned} \Phi &= -\int_{-\infty}^{0} \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}} = -\int_{\infty}^{b} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right) \mathrm{d}r - \int_{b}^{a} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}\right) \mathrm{d}r - \int_{a}^{0} (0)\, \mathrm{d}r \\ &= \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{\epsilon_0 b} + \frac{1}{\epsilon a} - \frac{1}{\epsilon b}\right). \end{aligned}$$

Contoh

Polarisasi dihitung sebagai berikut

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{P}} &= \epsilon_0\chi_e\vec{\mathbf{E}} = \frac{\epsilon_0\chi_e Q}{4\pi\epsilon r^2}\,\vec{\mathbf{a}}_r \quad \text{di dalam dielektrik, sehingga} \\ \rho_b &= -\nabla\cdot\vec{\mathbf{P}} = 0 \longleftarrow \text{ rapat muatan di dalam dielektrik}\end{aligned}$$

sedangkan rapat dipermukaan selubung adalah

$$\rho_S = \vec{\mathbf{P}}\cdot\vec{\mathbf{a}}_n = \begin{cases} \frac{\epsilon_0\chi_e Q}{4\pi\epsilon b^2}, & \text{dipermukaan luar} \\ \frac{-\epsilon_0\chi_e Q}{4\pi\epsilon a^2}, & \text{dipermukaan dalam}\end{cases}$$

Perhatikan bahwa di bagian dalam muatan permukaan berharga negatif karena mengarah keluar dari bahan dielektrik.

Contoh

Karena $\vec{\mathbf{P}}$ dan $\vec{\mathbf{D}}$ sebanding dengan $\vec{\mathbf{E}}$ apakah berarti curl-nya juga akan nol? Jawabannya adalah tidak! Alasannya adalah karena faktor kesebandingan $\epsilon_0\chi_e$ berbeda harganya di kedua wilayah. Pada lingkaran (loop) ini $\oint \vec{\mathbf{P}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}} \neq 0$, sehingga dengan menggunakan hukum Stokes curl dari $\vec{\mathbf{P}}$ tidak sama dengan nol di manapun di dalam loop. Sudah barang tentu, jika kesemua ruang itu diisi dengan sebuah dielektrik linier yang homogen maka

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{D}} = \rho_f \quad \text{dan} \quad \nabla \times \vec{\mathbf{D}} = 0$$

sehingga $\vec{\mathbf{D}}$ dapat diperoleh dari muatan bebas di mana seolah-olah dielektrik tidak ada di tempat tersebut:

$$\vec{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \vec{\mathbf{E}}_{\text{vac}}$$

di mana $\vec{\mathbf{E}}_{\text{vac}}$ adalah medan listrik yang dihasilkan oleh muatan bebas tanpa adanya bahan dielektrik.

Contoh

Berdasar persamaan-persamaan (31) dan (33) maka

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{\epsilon}\vec{\mathbf{D}} = \frac{1}{\epsilon_r}\vec{\mathbf{E}}_{\text{vac}} \tag{34}$$

Kesimpulan: Jika semua ruang diisi dengan bahan dielektrik linier homogen, maka medan listrik di manapun sama dengan medan listrik di ruang hampa dibagi konstanta dielektrik.
Sebagai contoh, jika sebuah sumber muatan titik q berada di dalam suatu bahan dielektrik yang amat besar maka medan yang dihasilkan adalah

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{q}{r^2}\vec{\mathbf{a}}_r \tag{35}$$

dan gaya yang bekerja pada muatan disekitarnya juga akan tereduksi sebanding.

Contoh

Sebuah kapasitor pelat paralel diisi dengan bahan isolator dengan konstanta dielektrik ϵ_r. Apakah efeknya terhadap kapasitansinya?
SOLUSI: Mengingat medan sepenuhnya berada di ruang yang berisi isolator maka $\vec{\mathbf{E}}$ akan tereduksi, sehingga demikian pula dengan beda potensialnya Φ akan tereduksi sebesar $1/\epsilon_r$. Selanjutnya mengingat $C = Q/V$ maka kapasitansinya akan meningkat dengan faktor kesebandingan ϵ_r yaitu menjadi

$$C = \epsilon_r \, C_{\text{vac}} \tag{36}$$

Ini menjadi cara termudah untuk meningkatkan kapasitansi sebuah kapasitor.

Tensor Susceptibilitas

Pada kristal umumnya mempunyai polarisasi yang tidak seragam, mudah terpolarisasi di satu arah tetapi di arah lainnya lebih sulit. Dalam hal ini maka persamaan (29) akan digantikan dengan persamaan yang lebih umum yaitu

$$\left.\begin{array}{l} P_x = \epsilon_0(\chi_{exx}E_x + \chi_{exy}E_y + \chi_{exz}E_z) \\ P_y = \epsilon_0(\chi_{eyx}E_x + \chi_{eyy}E_y + \chi_{eyz}E_z) \\ P_z = \epsilon_0(\chi_{ezx}E_x + \chi_{ezy}E_y + \chi_{ezz}E_z) \end{array}\right\} \tag{37}$$

Kesembilan koefisien $\chi_{exx}, \chi_{exy}, \cdots$ disebut tensor susceptibilitas.

Problema Syarat Batas dengan Dielektrik Linier

Di dalam sebuah dielektrik linier muatan terkurung (ρ_b) sebanding dengan muatan bebas (ρ_f) sehingga

$$\rho_b = -\nabla \cdot \vec{\mathbf{P}} = -\nabla \cdot \left(\epsilon_0 \frac{\chi_e}{\epsilon} \vec{\mathbf{D}}\right) = -\left(\frac{\chi_e}{1+\chi_e}\right) \rho_f \qquad (38)$$

Selanjutnya dari persamaan (25) dapat diperoleh

$$\begin{aligned} \epsilon_1 E_{n1} - \epsilon_2 E_{n2} &= \rho_f && (39) \\ \epsilon_1 \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \epsilon_2 \frac{\partial \Phi}{\partial n} &= -\rho_f && (40) \\ \Phi_1 &= \Phi_2 && (41) \end{aligned}$$

Energi Sistem-sistem Dielektrik

Diperlukan kerja untuk mengisi sebuah kapasitor:

$$W = \frac{1}{2} C \Phi^2$$

Selanjutnya jika kapasitor diisi dengan bahan dielektrik maka

$$C = \epsilon_r \, C_{\text{vac}}$$

. Sebelumnya juga telah dibahas bahwa

$$\begin{aligned} W &= \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 \, \mathrm{d}V \qquad (42) \\ \therefore \; W &= \frac{\epsilon_0}{2} \int \epsilon_r E^2 \, \mathrm{d}V = \frac{1}{2} \int \vec{\mathbf{D}} \cdot \vec{\mathbf{E}} \, \mathrm{d}V \end{aligned}$$

Gaya-gaya Pada Dielektrik

Kebocoran medan pada suatu kapasitor sangat sulit dihitung; untunglah keharusan menghitung itu dapat dihindari dengan metoda berikut ini. Perhatikan suatu kapasitor pelat sejajar. Misal W adalah energi sistem kapasitor tersebut. Jika dielektrik itu ditarik keluar sejauh $\mathrm{d}x$ maka energi akan diubah sebanyak kerja yang diperlukan untuk mengeluarkan itu:

$$\mathrm{d}W = F_d \mathrm{d}x` \tag{43}$$

di mana F_d adalah gaya yang harus dikeluarkan untuk melawan gaya F pada dielektrik: $F_d = -F$. Jadi gaya listrik pada lapisan dielektrik itu adalah

$$F = -\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x} \tag{44}$$

colorletmystructstructure

colorletmystructstructure

colorletmystructstructure