



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

**ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ
ТЕХНОЛОГИЙ**

**Кафедра информатики, математического и компьютерного
моделирования**

ОТЧЕТ

к лабораторной работе №4 по дисциплине
«Математическое моделирование»

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент

гр. Б9120-01.03.02

Агличиев А.О.

(ФИО)

(подпись)

« 19 » января 2022 г.

г. Владивосток
2023

Содержание

1	Введение	3
2	Создание математической модели	4
3	Реализация модели	7
3.1	Сравнение линейных и нелинейных незатухающих колебаний . .	7
3.2	Затухающие колебания	11
3.3	Вынужденные колебания	14
3.4	Резонанс	15
4	Вывод	15

1 Введение

Маятник — система, подвешенная в поле тяжести и совершающая механические колебания. Маятники используются в различных приборах, например, в часах и сейсмографах. Они облегчают изучение колебаний, так как наглядно демонстрируют их свойства. Одним из простейших маятников является шарик, подвешенный на нити. Если считать нить нерастяжимой и пренебречь размерами груза по сравнению с длиной нити, а массой нити по сравнению с массой груза, то шарик на нити можно рассматривать как материальную точку, находящуюся на неизменном расстоянии от точки подвеса. Такой маятник называется математическим.

В данной работе будет реализована модель маятника в нескольких вариантах:

1. Без учёта трения
2. С учётом трения
3. С учётом трения и вынужденных колебаний

2 Создание математической модели

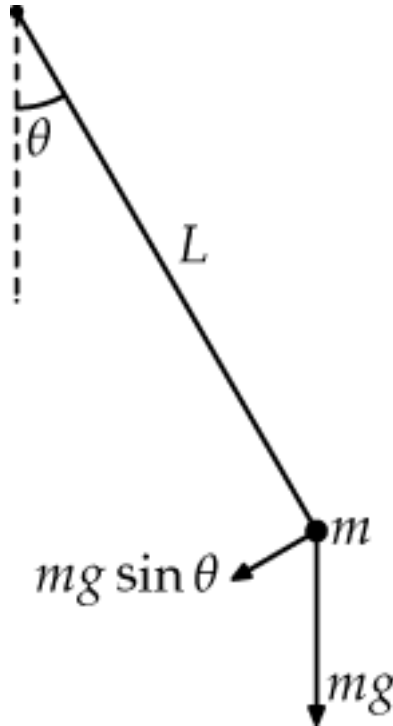


Рис. 1: Математический маятник

Момент инерции математического маятника равен:

$$M_{\text{ин}} = J \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (1)$$

, где θ - угол наклона маятника в текущий момент, J - момент инерции, относительно оси

Момент инерции вычисляется по формуле:

$$J = mL^2 \quad (2)$$

, где m - масса маятника, L - длина нити

Если тело не находится в положении равновесия, то на него действует возвращающий момент:

$$M_{\text{в}} = FL = -mgL \sin \theta$$

, где $g \approx 9.8$ - ускорение свободного падения

Подставим (2) в (1) и приравняем моменты:

$$mL^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgL \sin \theta$$

Сделаем элементарные преобразования, примем $\omega_0 = \frac{g}{L}$ и получим нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее маятник:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \cdot \sin \theta = 0$$

Для решения понизим порядком и сведем к системе дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v, \\ \dot{v} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \end{cases}$$

При малых углах $\sin \theta \approx \theta$ и уравнение превращается в

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \cdot \theta = 0,$$

с соответствующей ей системой:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v, \\ \dot{v} + \omega_0^2 \theta = 0 \end{cases}$$

При наличии затуханий уравнение примет вид:

$$\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0,$$

где k - коэффициент затухания

с соответствующей ей системой:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v, \\ \dot{v} + kv + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \end{cases}$$

Добавим внешнюю периодическую силу, действующую на маятник, и колебания станут вынужденными:

$$\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = a \cdot \sin(\omega t),$$

с соответствующей ей системой:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v, \\ \dot{v} + kv + \omega_0^2 \sin \theta = a \sin(\omega t) \end{cases}$$

3 Реализация модели

Модель была реализована в MathCad. Система дифференциальных уравнений решалась с помощью функции `rkfixed`. Она решает систему ОДУ методом Рунге-Кутты четвертого порядка и принимает в качестве параметров вектор начальных условий, границы интервала, на котором ищется решение, число точек внутри интервала и вектор содержащий производные.

3.1 Сравнение линейных и нелинейных незатухающих колебаний

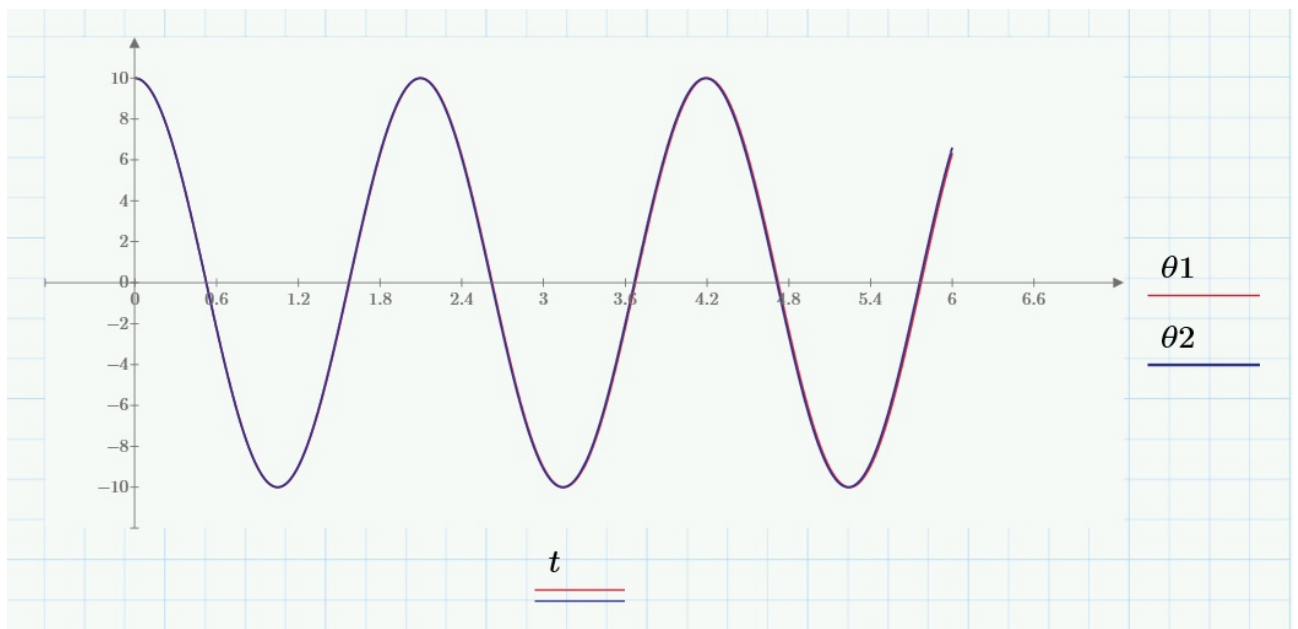


Рис. 2: График сравнения линейных и нелинейных колебаний при $\theta = 10^\circ$

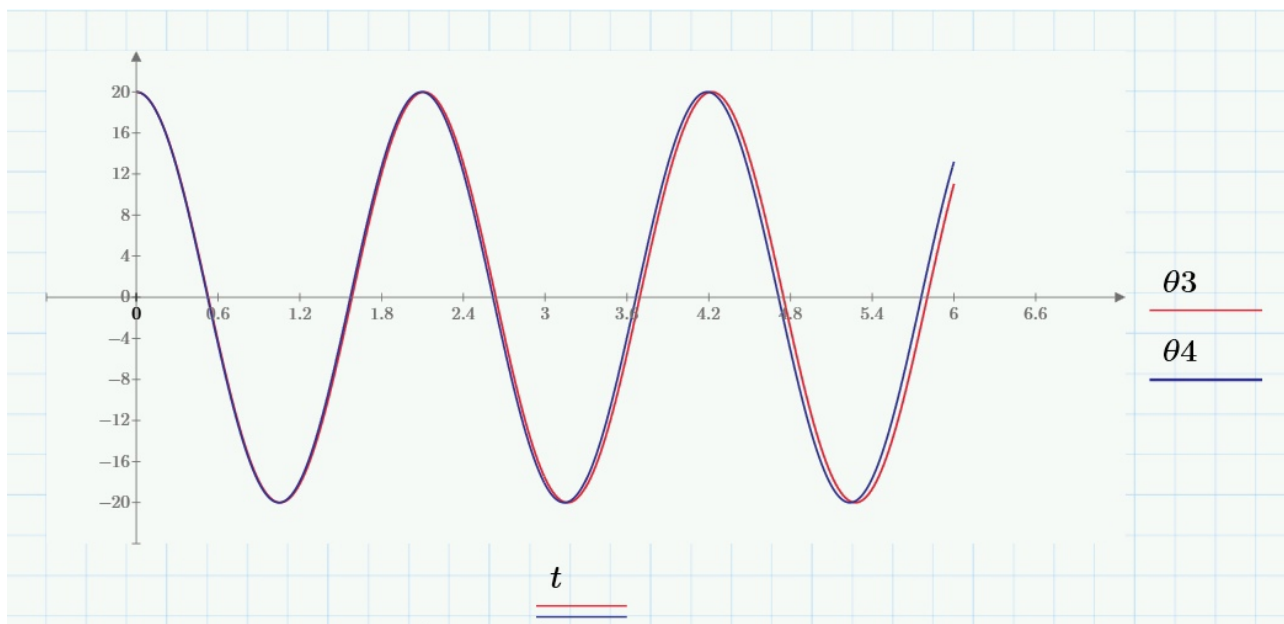


Рис. 3: График сравнения линейных и нелинейных колебаний при $\theta = 20^\circ$

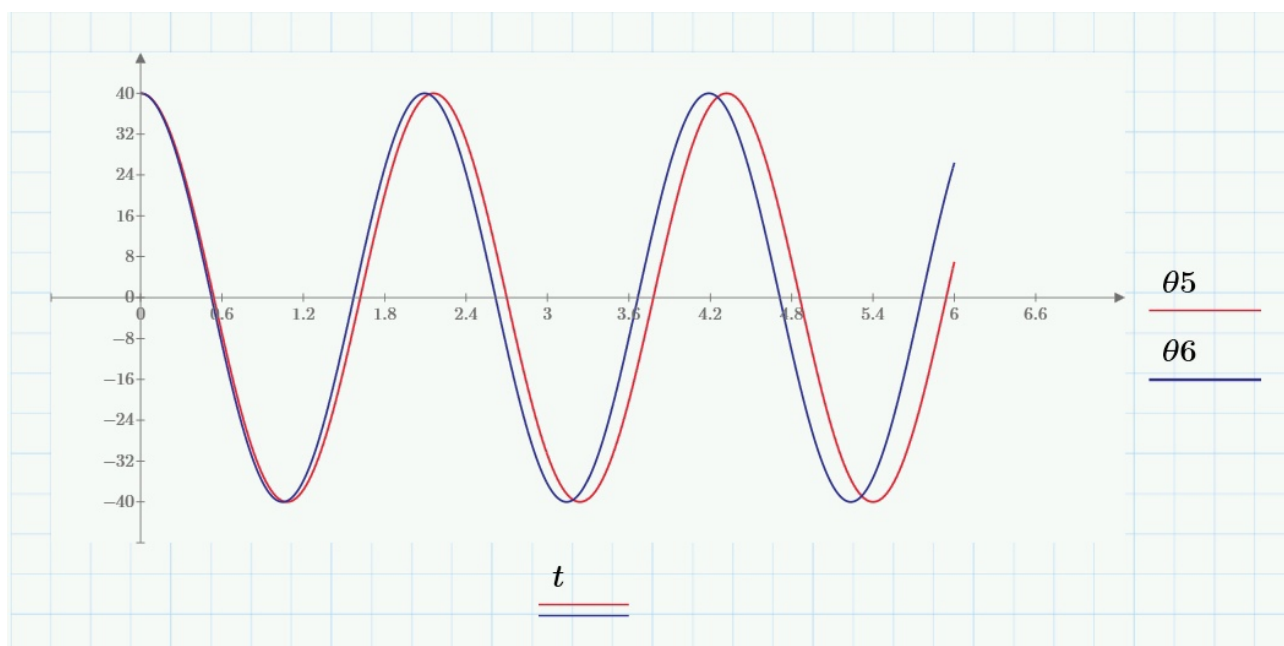


Рис. 4: График сравнения линейных и нелинейных колебаний при $\theta = 40^\circ$

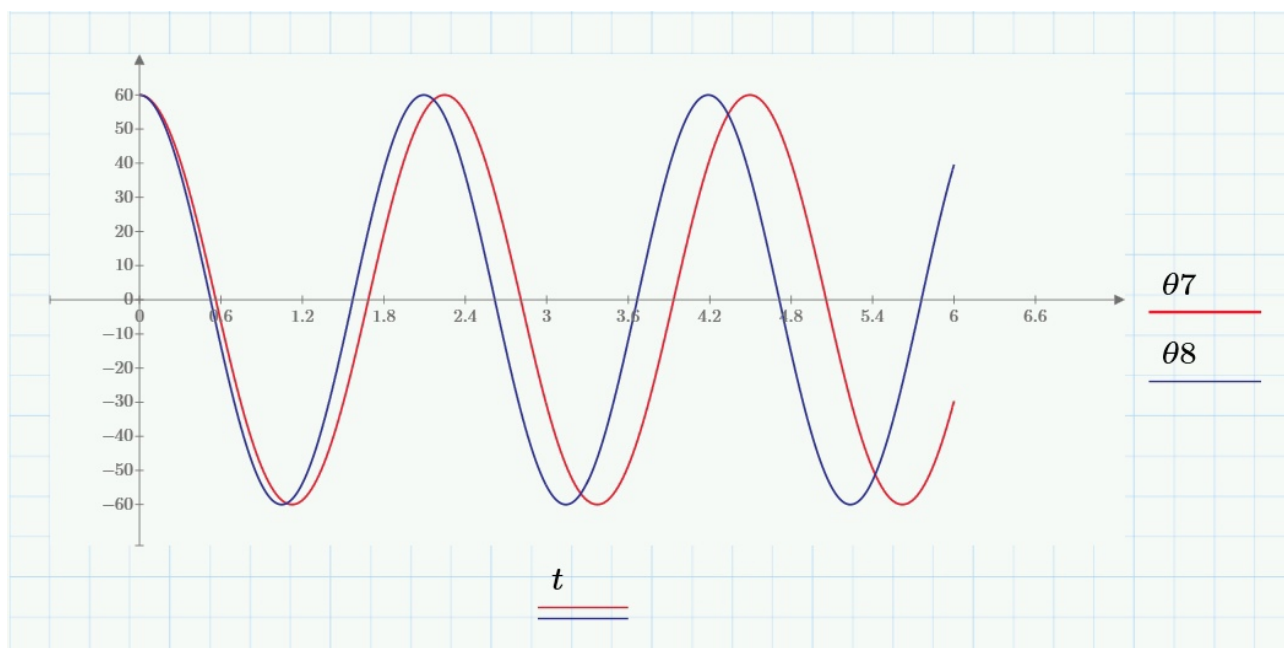


Рис. 5: График сравнения линейных и нелинейных колебаний при $\theta = 60^\circ$

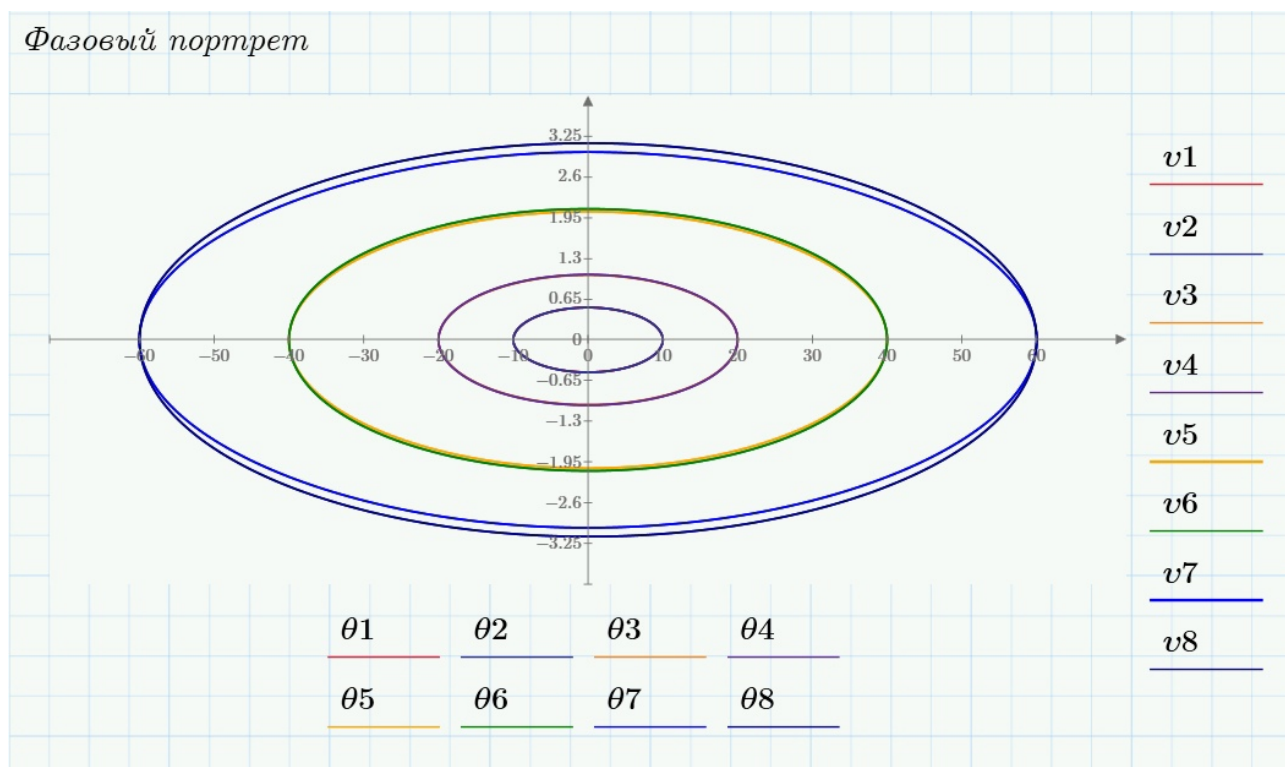


Рис. 6: Фазовый портрет колебаний при разных углах

3.2 Затухающие колебания

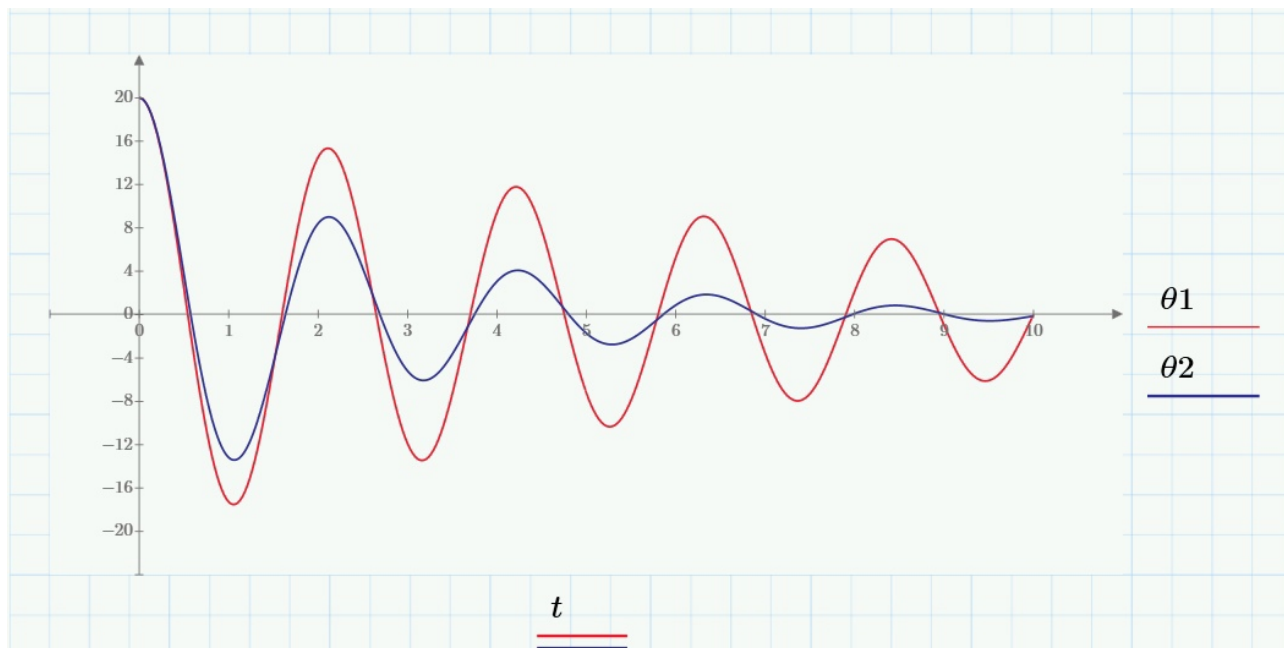


Рис. 7: График колебаний при $\theta = 20^\circ$ $k = 0.25$ и $k = 0.75$

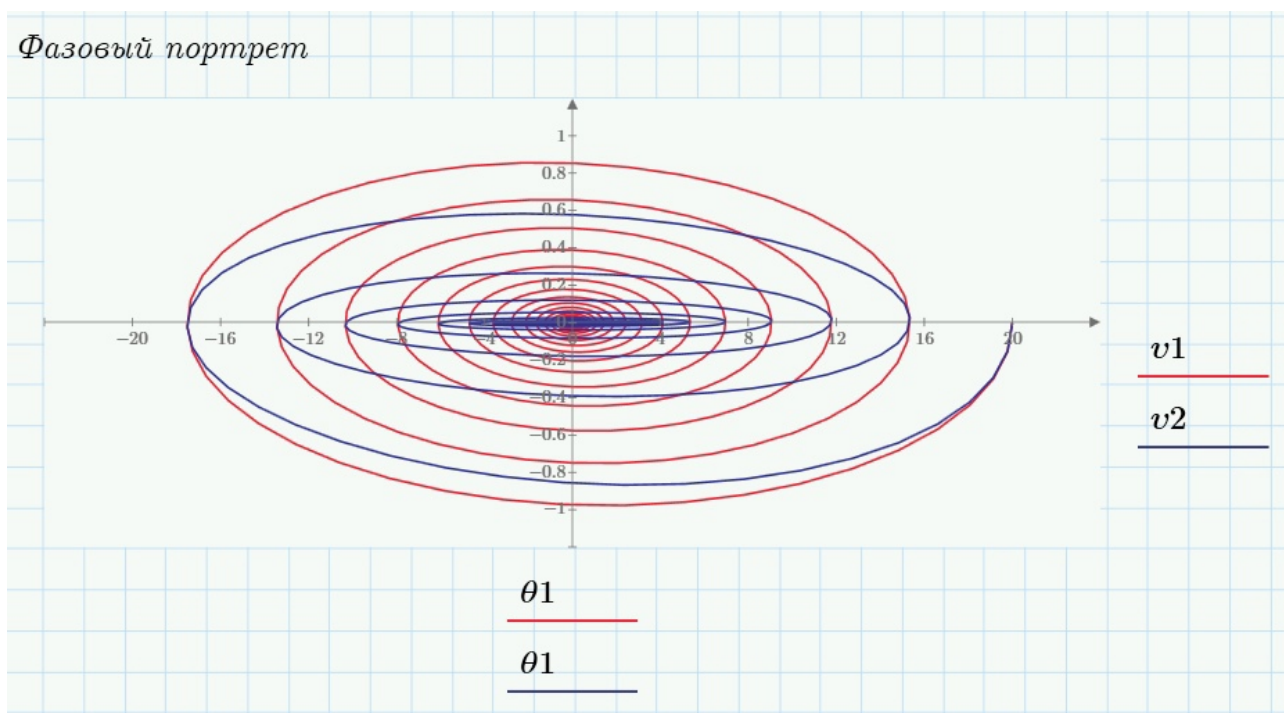


Рис. 8: Фазовый портрет при $\theta = 20^\circ$ $k = 0.25$ и $k = 0.75$

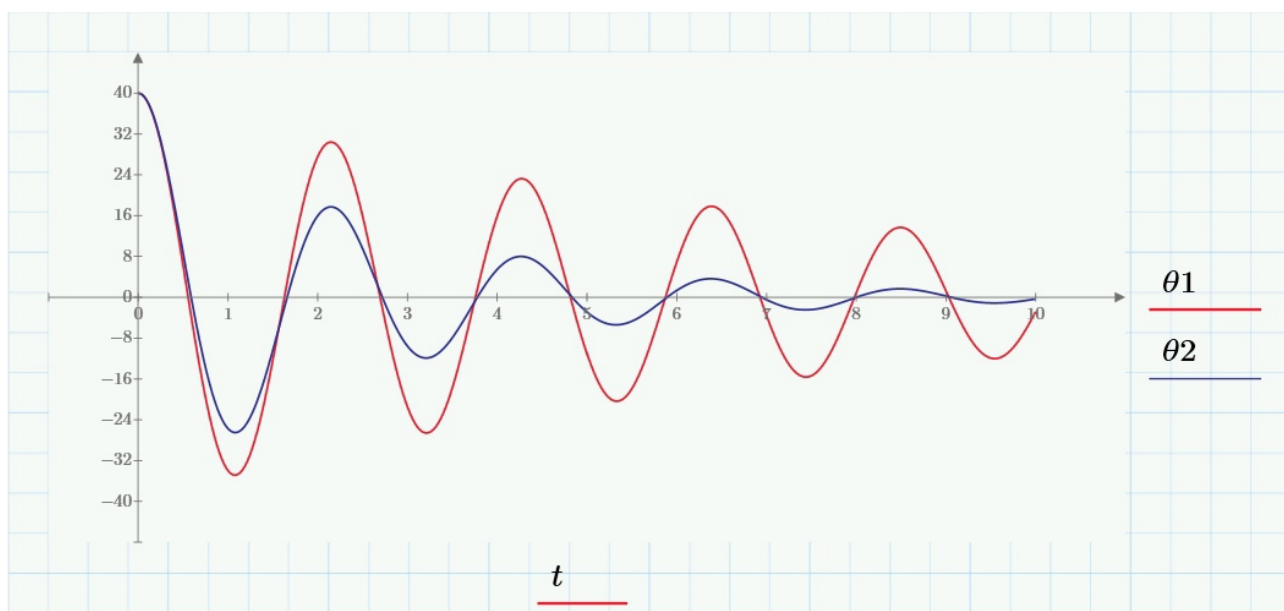


Рис. 9: График колебаний при $\theta = 40^\circ$ $k = 0.25$ и $k = 0.75$

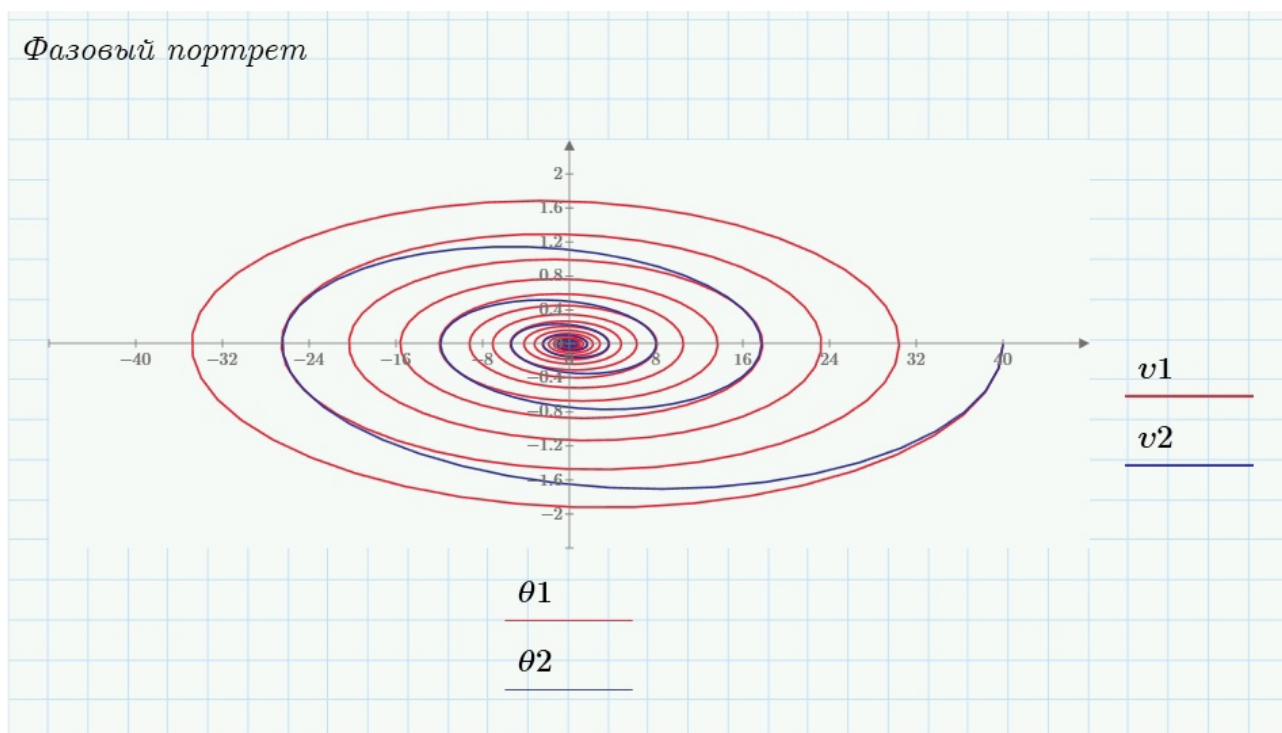


Рис. 10: Фазовый портрет при $\theta = 40^\circ$ $k = 0.25$ и $k = 0.75$

3.3 Вынужденные колебания

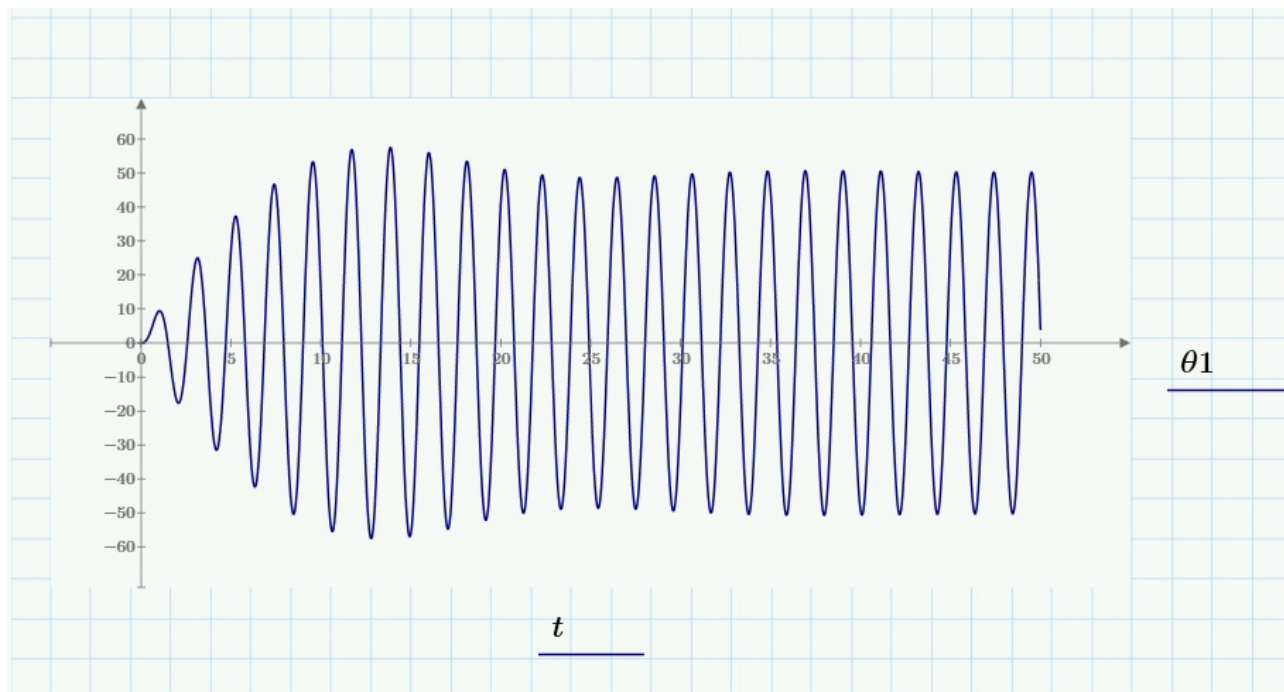
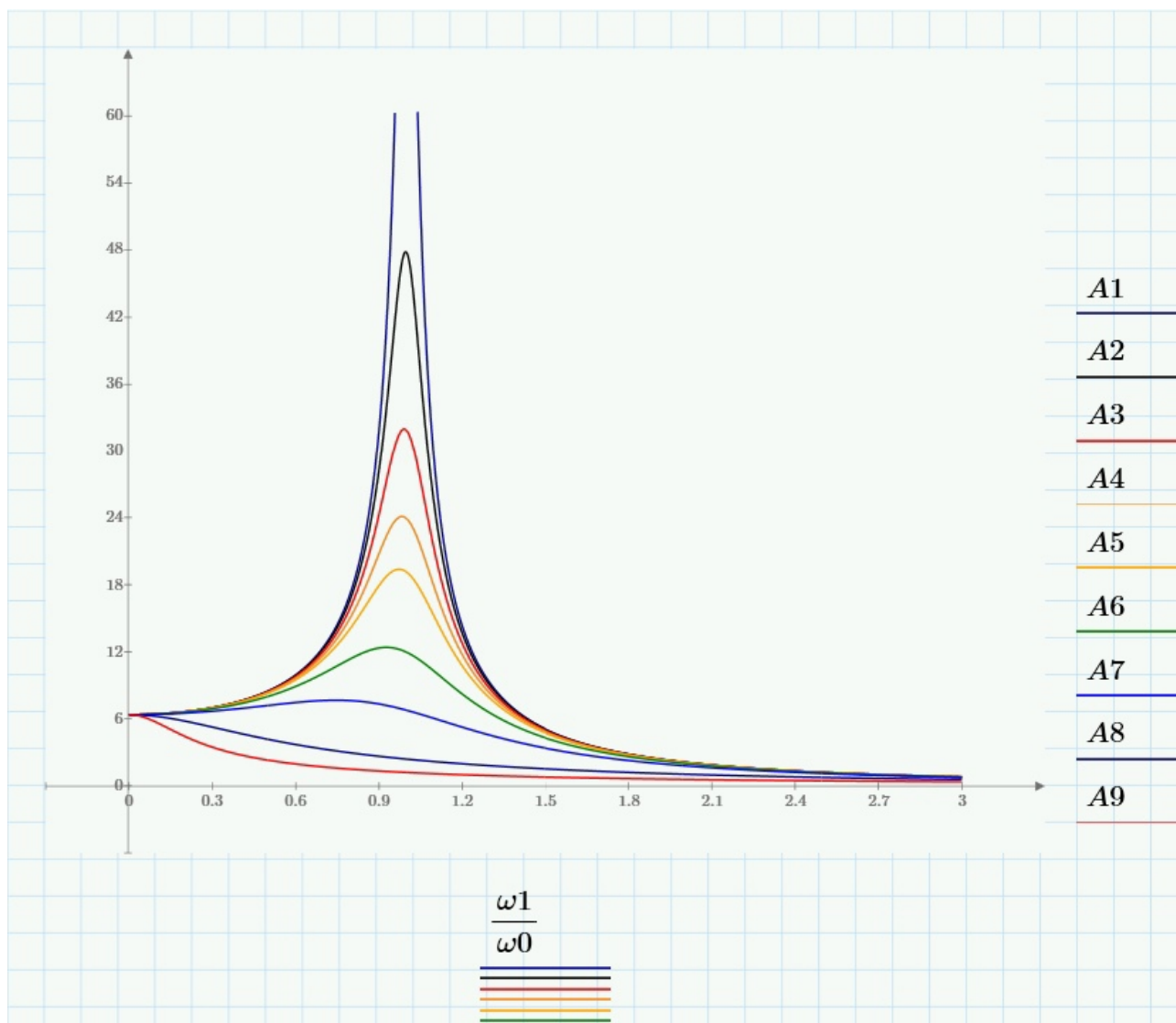


Рис. 11: График вынужденных колебаний

3.4 Резонанс



При $\omega_0 = \omega$ возникает резонанс.

4 Вывод

Таким образом, были составлены математические модели линейных и нелинейных незатухающих, затухающих и вынужденных колебаний.