



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
**«Дальневосточный федеральный университет»  
(ДВФУ)**

---

**ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ  
ТЕХНОЛОГИЙ**

**Кафедра информатики, математического и компьютерного  
моделирования**

**Лабораторная работа №6  
«Задача переноса примесей»**

по дисциплине «Математическое моделирование»

Направление подготовки  
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент

гр. Б9120-01.03.02

Агличиев А.О.

(ФИО)

(подпись)

Проверил профессор

Пермяков М.С.

(ФИО)

(подпись)

« 8 » июня 2023 г.

г. Владивосток  
2023

# Содержание

|   |                                |   |
|---|--------------------------------|---|
| 1 | Введение                       | 3 |
| 2 | Создание математической модели | 3 |
| 3 | Реализация модели              | 4 |
| 4 | Заключение                     | 7 |

# 1 Введение

В данной лабораторной работе необходимо создать модель переноса примесей. В качестве объекта для создания модели возьмем закрытую акваторию с заданным полем концентрации в начальный момент времени и стационарным полем скорости. Необходимо определить поле концентрации в любой момент времени в стационарном поле скорости.

## 2 Создание математической модели

Для моделирования процессов распространения используется уравнение переноса. Уравнение переноса – дифференциальное уравнение в частных производных, описывающее изменение скалярной величины в пространстве. Уравнение переноса имеет следующий вид:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = 0$$

, где  $t$  - время,  $C$  - концентрация,  $x$  и  $y$  - координаты,  $u$  - компонента скорости на  $x$ ,  $v$  - компонента скорости на  $y$ .

В начальный момент задано поле концентрации:

$$C(x, y, t) = C_0(x, y)$$

Концентрация точек будет постоянной и не меняться со временем  $\left(\frac{dC}{dt} = 0\right)$ .

Поле скорости зададим через функцию тока  $\psi = \psi(x, y)$  с компонентами скорости:

$$\begin{cases} u(x, y) = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v(x, y) = \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

Для численного решения уравнений в частных производных существует несколько способов. Один из них, который будет использоваться в данной

лабораторной работе – метод частиц. Метод частиц состоит в представлении тела совокупностью взаимодействующих частиц (материальных точек), описываемых законами классической механики. Составим систему дифференциальных уравнений для каждой частицы:

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = u(x_i, y_i), \\ \frac{dy_i}{dt} = v(x_i, y_i) \end{cases}$$

### 3 Реализация модели

Для модели создадим 20 тысяч частиц с начальными координатами от 0 до 1.

За поле скорости возьмем следующую функцию тока:

$$\psi = \sin(2\pi x) \cdot \sin(\pi y)$$

с компонентами скорости:

$$\begin{cases} u(x, y) = -\pi \cdot \sin(2\pi x) \cdot \cos(\pi y) \\ v(x, y) = 2\pi \cdot \cos(2\pi x) \cdot \sin(\pi y) \end{cases}$$

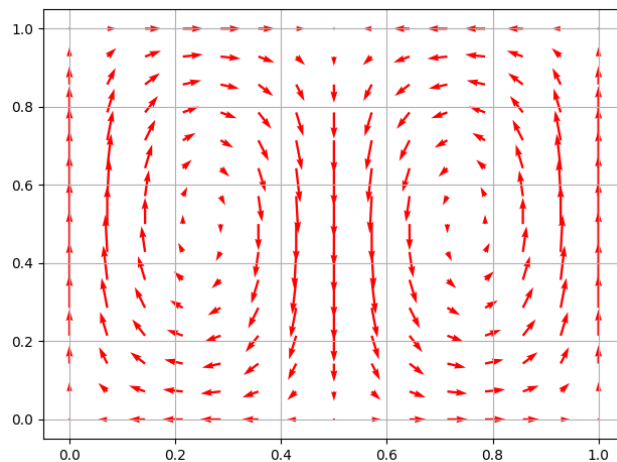
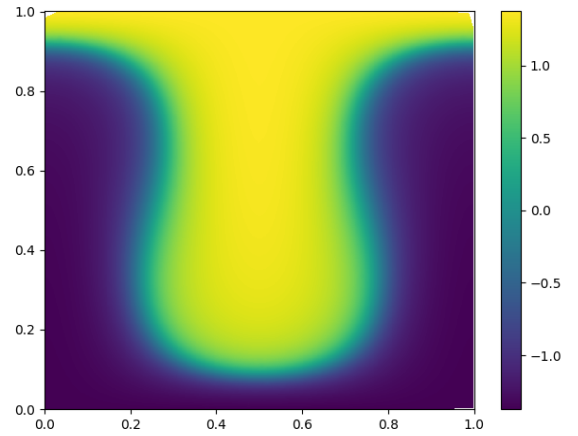
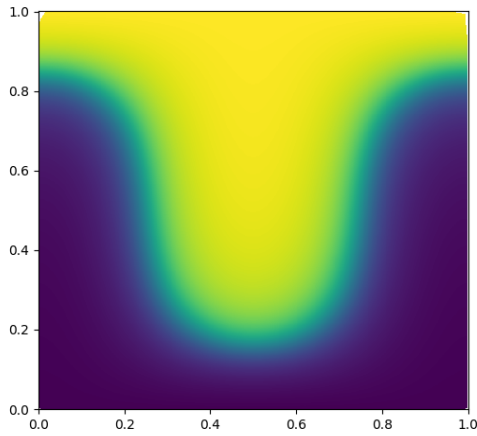
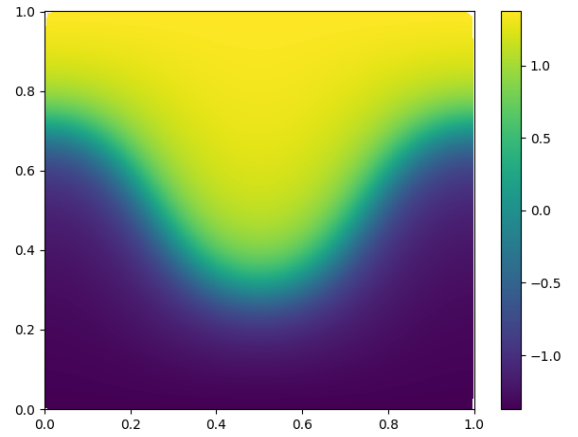
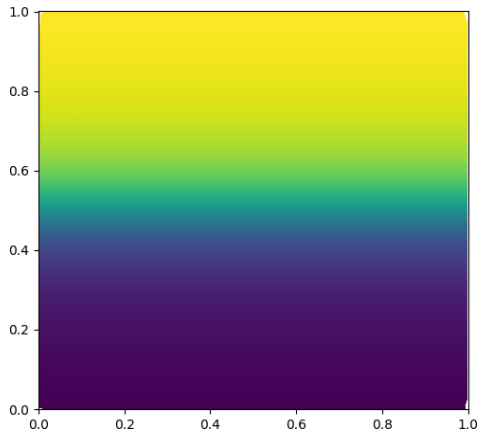


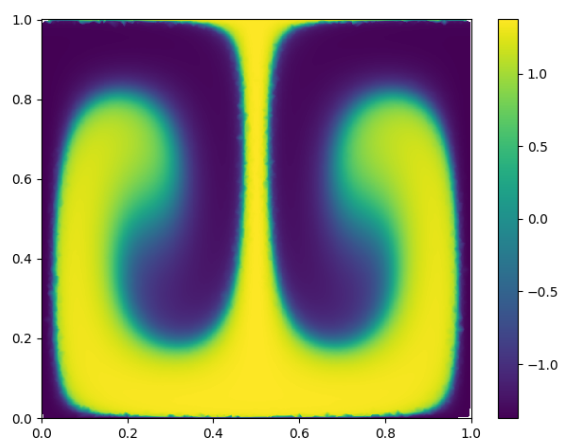
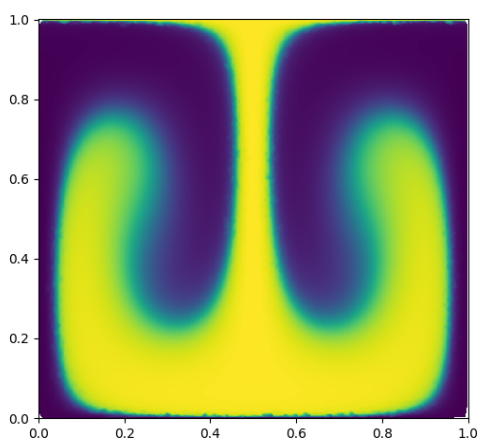
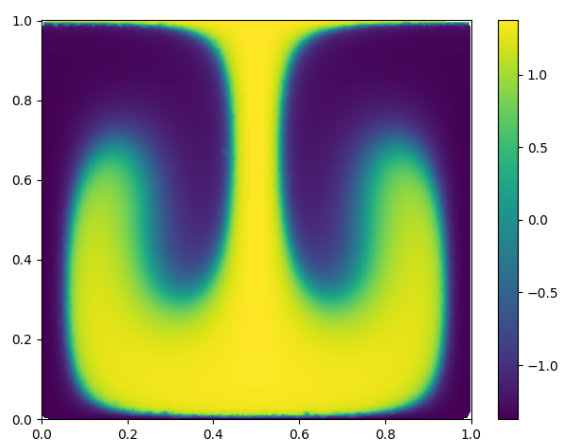
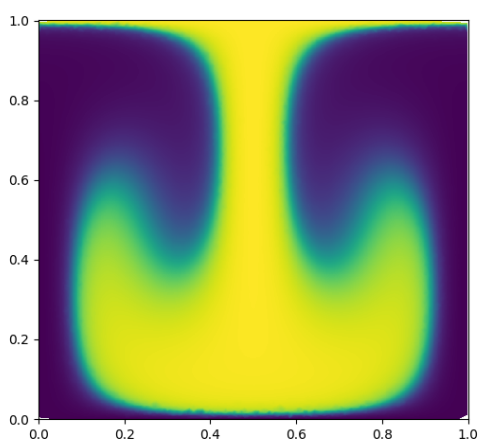
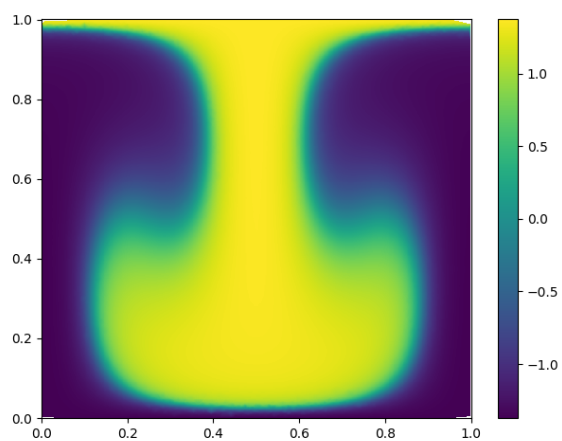
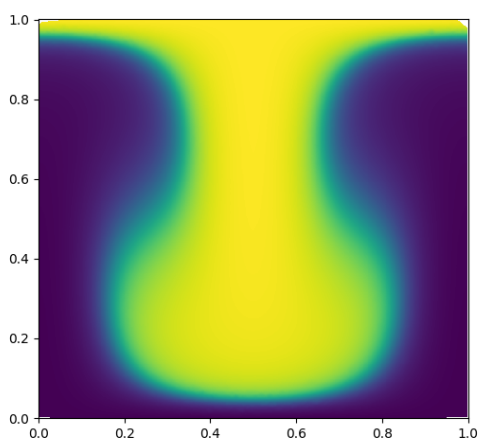
Рис. 1: Функция тока  $\psi = \sin(2\pi x) \cdot \sin(\pi y)$

Для каждой частицы зададим начальную концентрацию:

$$C0(x, y) = \arctan\left(\frac{y - 0.5}{0.1}\right)$$

Модель была реализована в Python. Для решения системы дифференциальных уравнений используется функция `odeint`, которая численно решает её методом Рунге-Кутты 4 порядка. Она принимает 3 параметра: система дифференциальных уравнений, начальные значения и интервал, на котором строится решение. Для интерполяции на прямоугольную сетку с помощью билинейной интерполяции используется функция `griddata`. Она принимает координаты точек, значения в них и сетку, на которую будет интерполироваться.





## 4 Заключение

В ходе лабораторной работы была создана и реализована модель переноса примесей в стационарном поле скорости.