

Отчёт по лабораторной работе №3

Группа Б9120-01.03.02миопд

Агличиев Александр

6 декабря 2023 г.

1 Метод сплайн коллокаций

1.1 Постановка задачи

Необходимо краевую задачу методом сплайн коллокаций для дифференциального уравнения второго порядка ($x \in [0; 1]$):

$$\begin{cases} u'' - (1+x)u' - u = \frac{2}{(x+1)^3}, \\ u(0) = 1, u(1) = 0.5. \end{cases}$$

1.2 Решение

1.2.1 Метод сплайн-коллокаций

Решение будем искать в виде кубического В-сплайна

$$S(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} b_i B_i(x)$$

, где b_i - неизвестные коэффициенты. Введем на отрезке $[0,1]$ равномерную сетку с шагом $h = 0.1$ и дополним двумя узлами в начале и конце построенной сетки

Найдем коэффициенты системы уравнений:

$$A_k = \frac{1}{3h} \left(1 + \frac{h}{2} (x_k^2 + 1) - \frac{h^2}{3} x_k \right) = \frac{3}{10} \left(1 + \frac{1}{20} (1+x) - \frac{1}{600} \right)$$

$$D_k = \frac{1}{3h} \left(1 - \frac{h}{2} (x_k^2 + 1) - \frac{h^2}{3} x_k \right) = \frac{3}{10} \left(1 - \frac{1}{20} (1+x) - \frac{1}{600} \right)$$

$$C_k = -A_k - D_k - \frac{2}{60}$$

$$F_k = \frac{1}{6} f_k (h_k + h_{k-1}) = \frac{4}{60(x+1)^3}$$

$$\alpha_1 = 1, \beta_1 = 0, \gamma_1 = 1$$

$$\alpha_2 = 1, \beta_1 = 0, \gamma_2 = 0.5$$

$$A_{-1} = \alpha_1 h - 3\beta_1 = 0.1$$

$$A_{11} = \alpha_2 h - 3\beta_2 = 0.1$$

$$C_{-1} = 4\alpha_1 h = 0.4$$

$$C_{11} = 4\alpha_2 h = 0.4$$

$$D_{-1} = \alpha_1 h + 3\beta_1 = 0.1$$

$$D_{11} = \alpha_2 h + 3\beta_2 = 0.1$$

$$F_{-1} = 6\gamma_1 h = 0.6$$

$$F_{11} = 6\gamma_1 h = 0.3$$

$$\tilde{C}_0 = C_0 - C_{-1} \frac{A_0}{A_{-1}} = -20.66666 \quad \tilde{A}_{10} = A_{10} - A_{11} \frac{D_{10}}{D_{11}} = 0.66666$$

$$\tilde{D}_0 = D_0 - D_{-1} \frac{A_0}{A_{-1}} = 0.333333 \quad \tilde{C}_{10} = C_{10} - C_{11} \frac{D_{10}}{D_{11}} = -18.66666$$

$$\tilde{F}_0 = F_0 - F_{-1} \frac{A_0}{A_1} = -20.9 \quad \tilde{F}_{10} = F_{10} - F_{11} \frac{D_{10}}{D_{11}} = -8.975$$

Система принимает вид:

$$\begin{cases} -20.66666b_0 - 0.333333b_1 = -20.9, \\ b_{k-1}A_k - b_kC_k + b_{k+1}D_k = F_k, \quad k = 1, \dots, 9 \\ 0.66666b_9 - 18.66666b_{10} = -8.975 \end{cases}$$

Решим эту систему и найдем коэффициенты b_i

1.3 Сравнение между точным и приближенным значением

Найдем разницу между точным и приближенным решением на отрезке $[0, 1]$ с шагом $h = 0.1$. y_i^* - точное решение, y_i - приближенное.

Точное решение $u(x) = \frac{1}{x+1}$

x_i	y*_i	b_i	y*_i - b_i
0.00000	1.00000	0.99667	0.00333
0.10000	0.90909	0.90635	0.00274
0.20000	0.83333	0.83103	0.00230
0.30000	0.76923	0.76728	0.00195
0.40000	0.71429	0.71261	0.00167
0.50000	0.66667	0.66523	0.00143
0.60000	0.62500	0.62378	0.00122
0.70000	0.58824	0.58721	0.00102
0.80000	0.55556	0.55472	0.00083
0.90000	0.52632	0.52568	0.00063
1.00000	0.50000	0.49958	0.00042

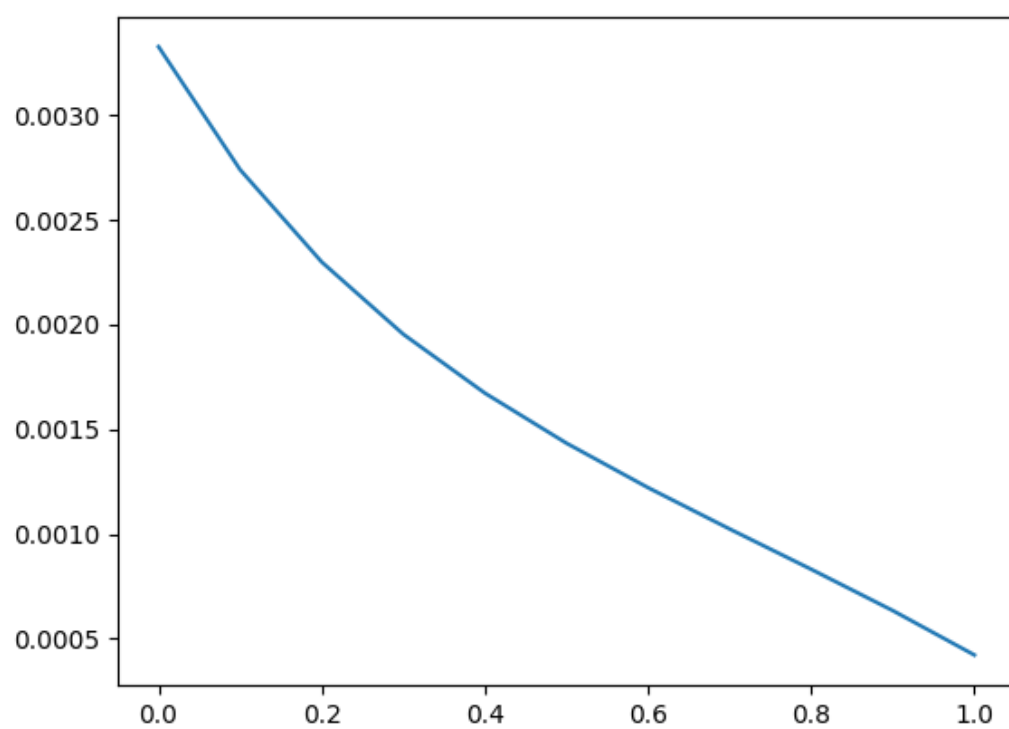


Рис. 1: График погрешности