



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

**ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ
ТЕХНОЛОГИЙ**

**Кафедра информатики, математического и компьютерного
моделирования**

Курсовая работа
**«Численная реализация вариационного метода штрафа в задаче
интерполяции на произвольной сетке данных»**

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент
гр. Б9120-01.03.02миопд
Агличеев А.О.

(ФИО) (подпись)

Проверил

(ФИО) (подпись)

« 9 » июня 2023 г.

г. Владивосток
2023

Содержание

1	Введение	3
2	Постановка задачи	3
3	Алгоритм	3
4	Вариационная постановка задачи	3
5	Расчетная часть	3
6	Вывод	12
7	Литература	13
8	Приложение	13

1 Введение

2 Постановка задачи

3 Алгоритм

4 Вариационная постановка задачи

Для решения дифференциального уравнения с частными производными будем использовать метод конечных элементов, поэтому необходима вариационная постановка задачи.

Умножим уравнение на тестовую функцию $v(x, y)$, $v|_{\Gamma} = g$, $u \in C^1(\Omega)$ с последующим интегрированием по области Ω :

$$\int_{\Omega} -\Delta u v dx dy + \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \delta_x \delta_y u v dx dy - \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \delta_x \delta_y f v dx dy = 0$$

Применим первую формулу Грина:

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx dy - \int_{\Gamma} v \frac{du}{dn} d\Gamma + \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \delta_x \delta_y u v dx dy - \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \delta_x \delta_y f v dx dy = 0$$

Так как на границе задано условие Дирихле, то $\int_{\Gamma} v \frac{du}{dn} d\Gamma = 0$, получим:

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx dy + \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \delta_x \delta_y u v dx dy - \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \delta_x \delta_y f v dx dy = 0$$

5 Расчетная часть

1. $f(x, y) = 3 \sin x + (y - 0.2)^2$
 $N = 5774$

М	10	25	50
Относительная погрешность	0.008963	0.008207	0.007454

$M = 25$

Н	3718	5774	17101
Относительная погрешность	0.032763	0.008207	0.0067239

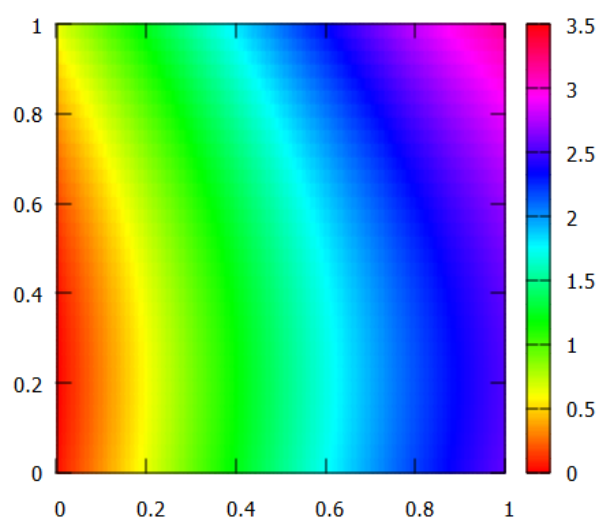


Рис. 1: Интерполируемая функция

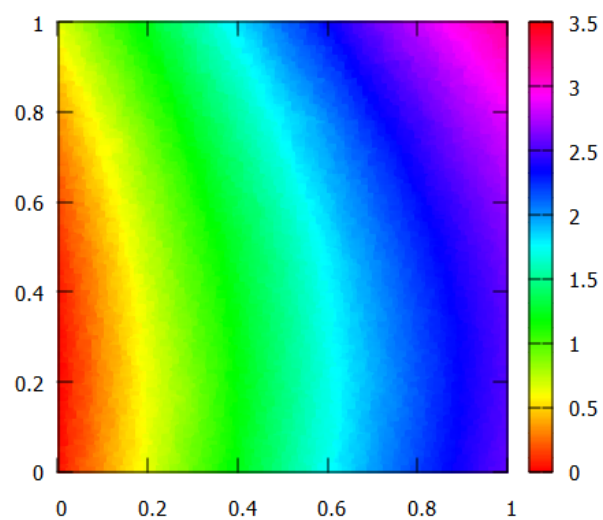


Рис. 2: Интерполяция при 10 точках

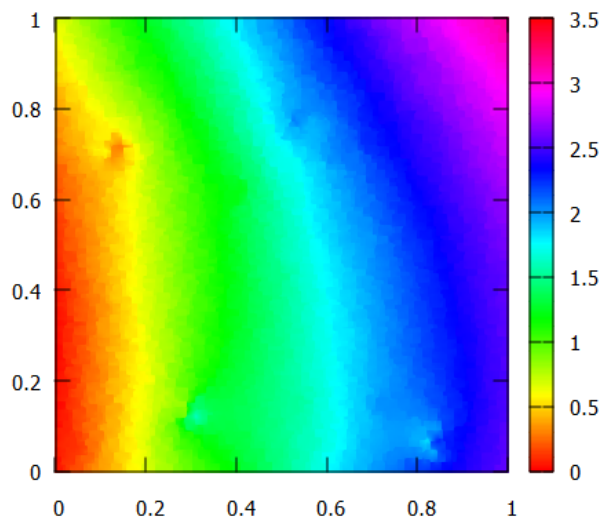


Рис. 3: Интерполяция при 25
точках с редкой сеткой

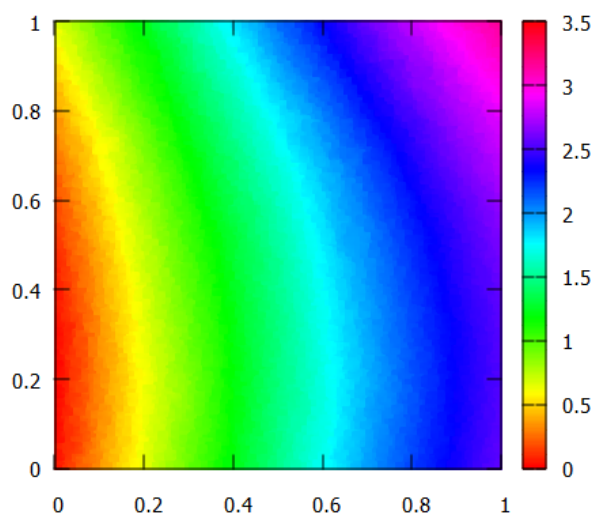


Рис. 4: Интерполяция при 25
точках

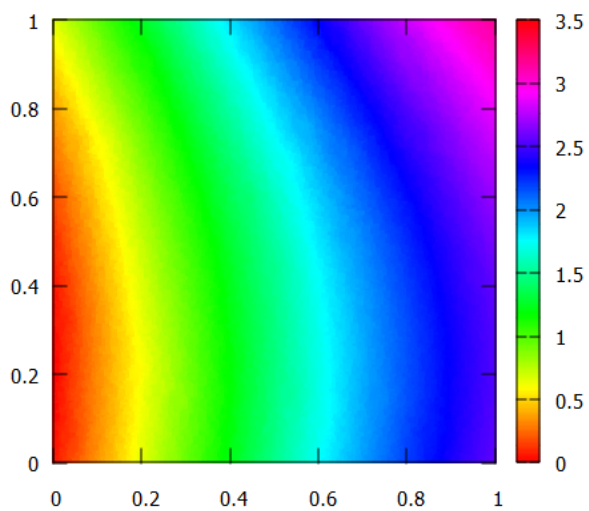


Рис. 5: Интерполяция при 25
точках с частой сеткой

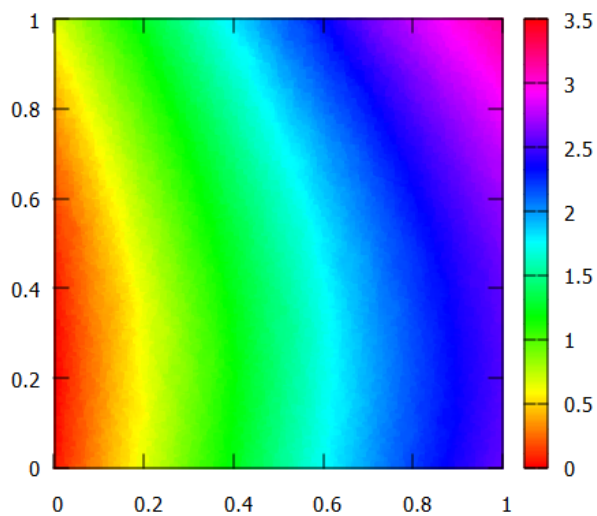


Рис. 6: Интерполяция при 50
точках

$$2. \ f(x, y) = \arctan(10(x + y))$$

$$N = 5774$$

М	10	25	50
Относительная погрешность	0.0223348	0.0170492	0.013383

$M = 25$

N	3718	5774	17101
Относительная погрешность	0.0168654	0.0170492	0.0163659

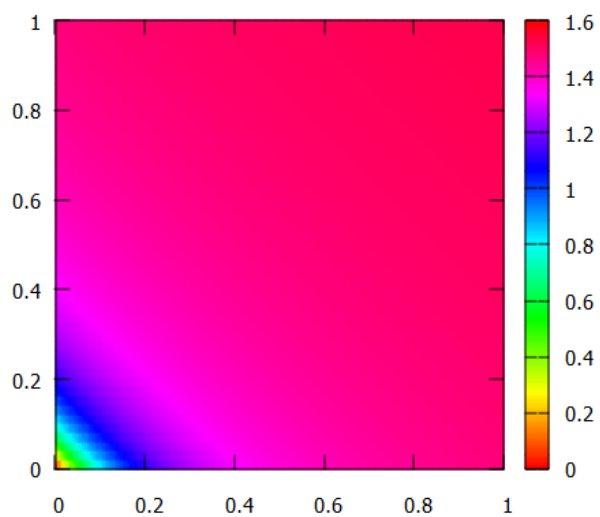


Рис. 7: Интерполируемая функция

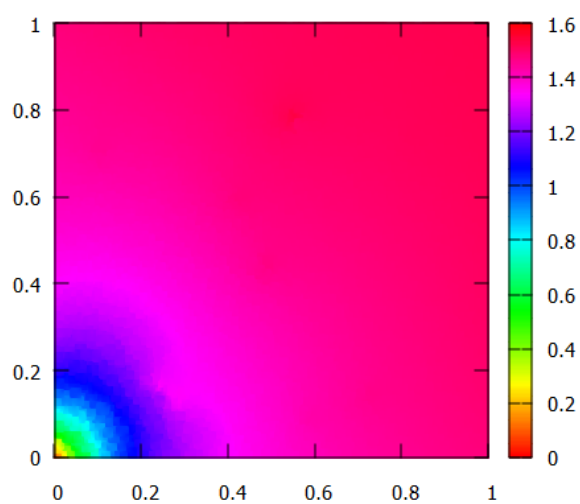


Рис. 8: Интерполяция при 10 точках

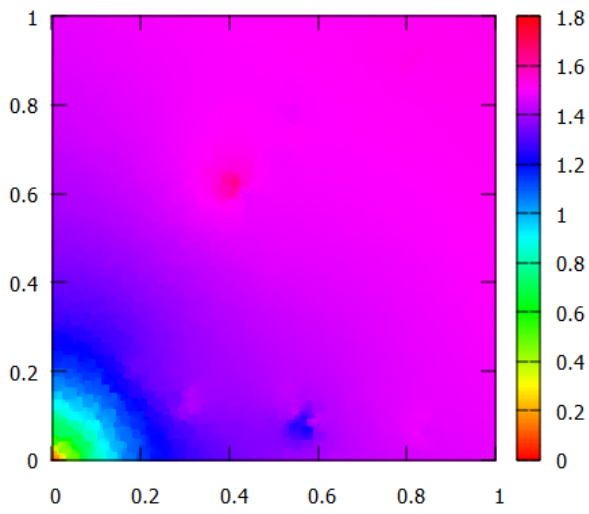


Рис. 9: Интерполяция при 25 точках с редкой сеткой

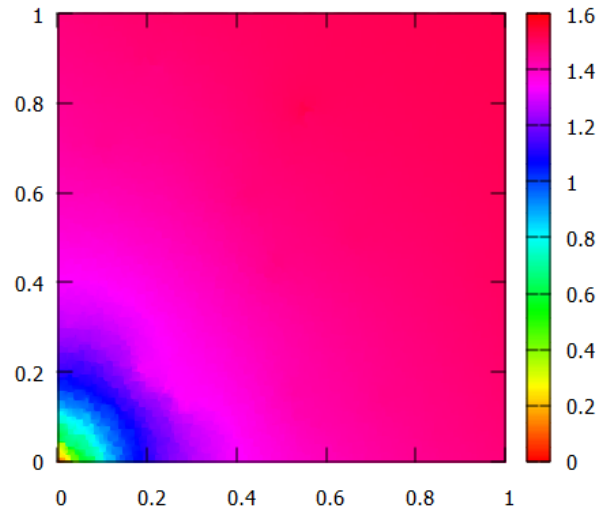


Рис. 10: Интерполяция при 25 точках

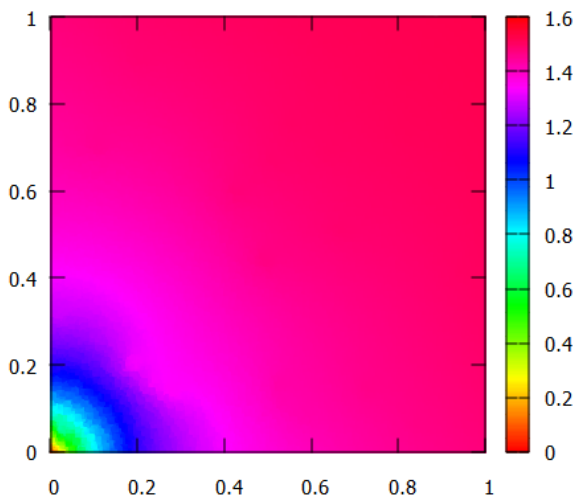


Рис. 11: Интерполяция при 25 точках с частой сеткой

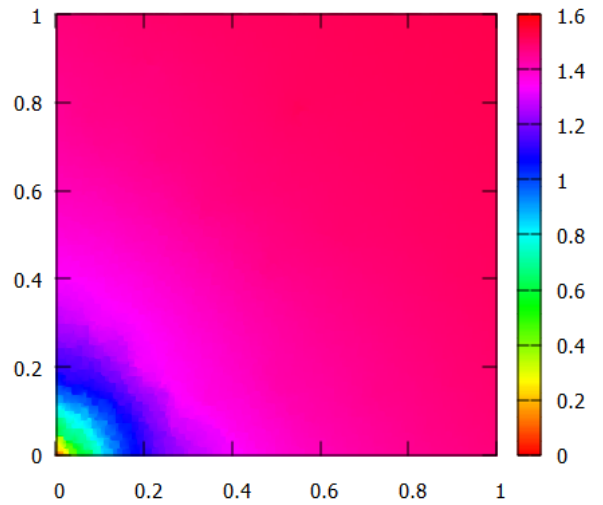


Рис. 12: Интерполяция при 50 точках

$$3. \quad f(x, y) = \arctan \frac{3y}{x}$$

$$N = 5774$$

М	10	25	50
Относительная погрешность	0.0901691	0.0666124	0.0529867

$M = 25$

N	3718	5774	17101
Относительная погрешность	0.123237	0.0666124	0.0632562

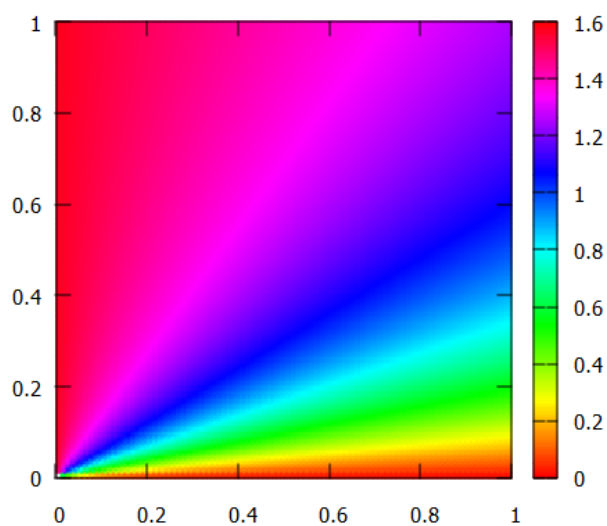


Рис. 13: Интерполируемая функция

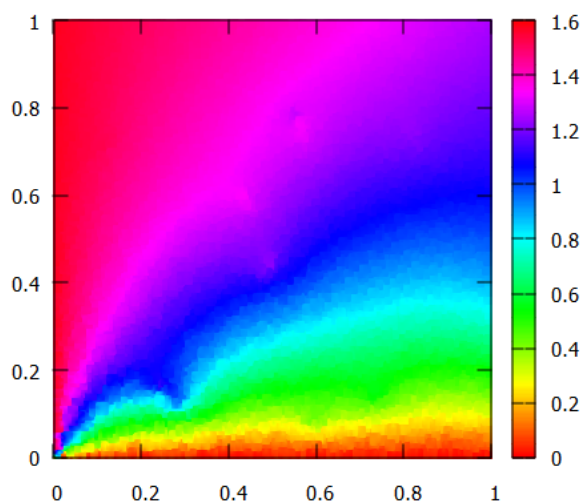


Рис. 14: Интерполяции при 10 точках

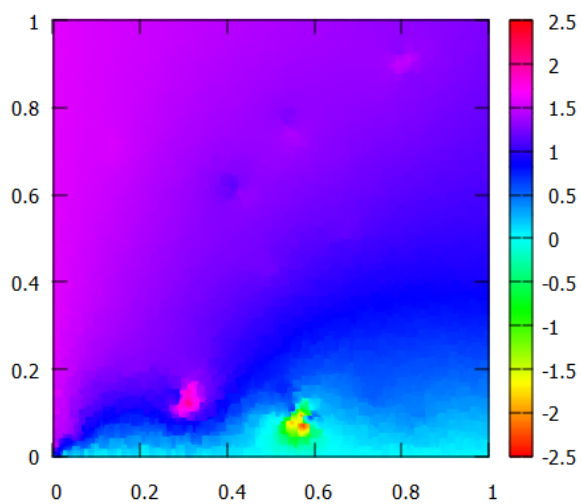


Рис. 15: Интерполяция при 25
точках с редкой сеткой

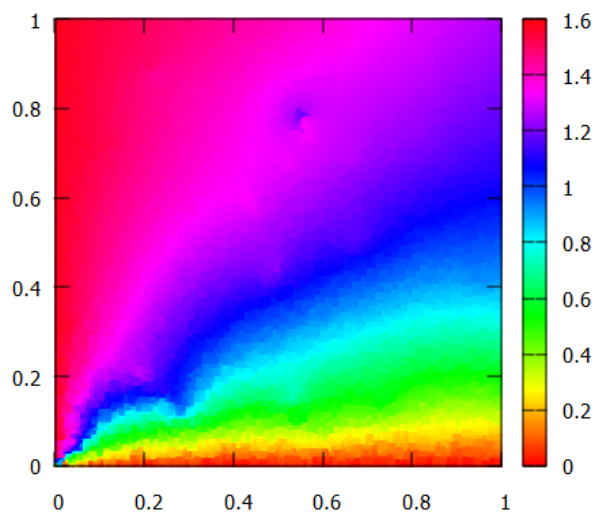


Рис. 16: Интерполяция при 25
точках

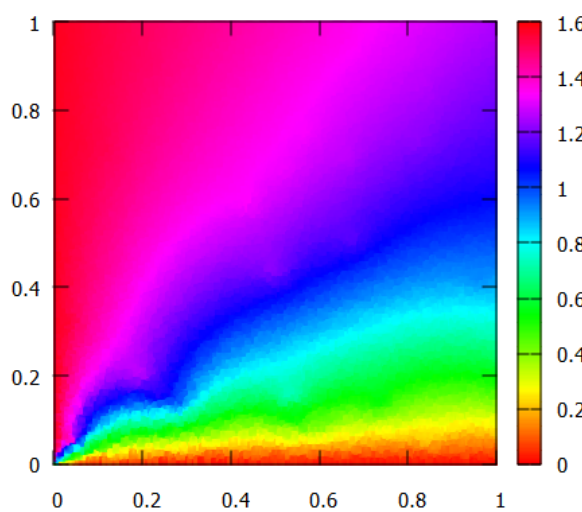


Рис. 17: Интерполяция при 25
точках с частой сеткой

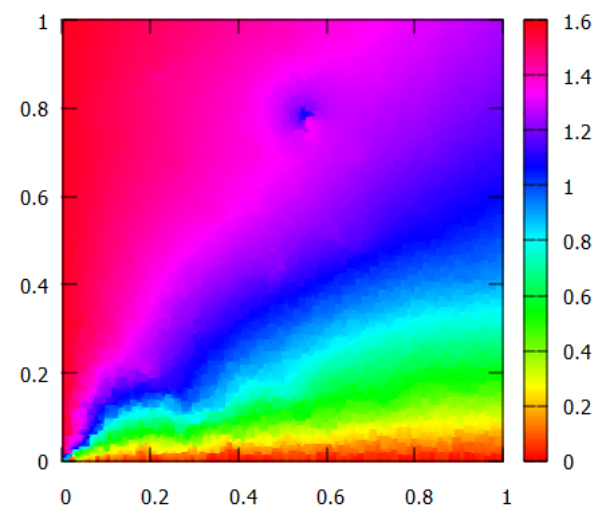


Рис. 18: Интерполяция при 50
точках

4. $f(x, y) = e^{10x}$
 $N = 5774$

М	10	25	50	100
Относительная погрешность	0.640972	0.475457	0.273087	0.154733

$M = 100$

N	3718	5774	17101
Относительная погрешность	0.458518	0.154733	0.150765

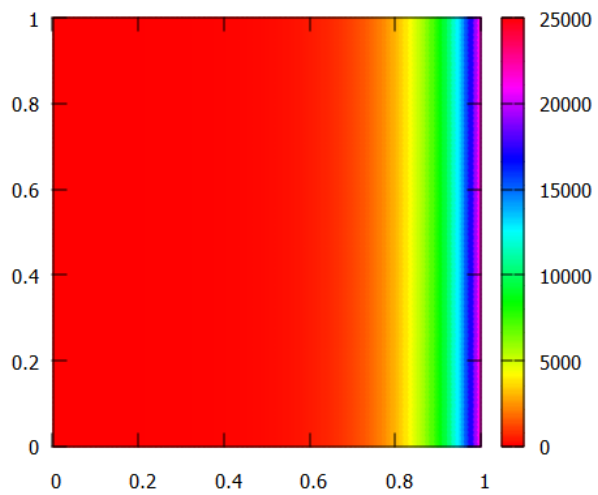


Рис. 19: Интерполируемая функция

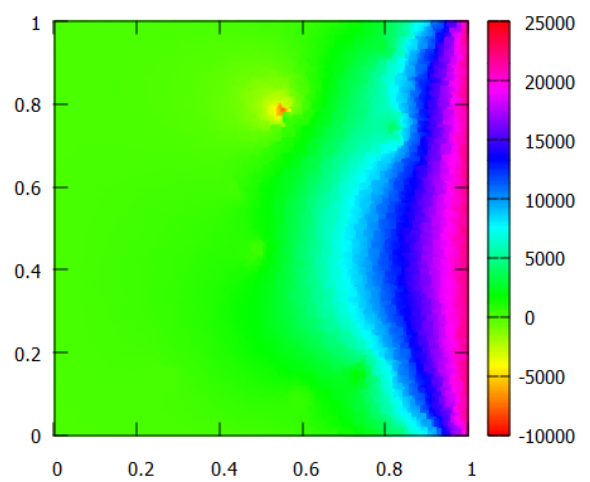


Рис. 20: Интерполяции при 10 точках

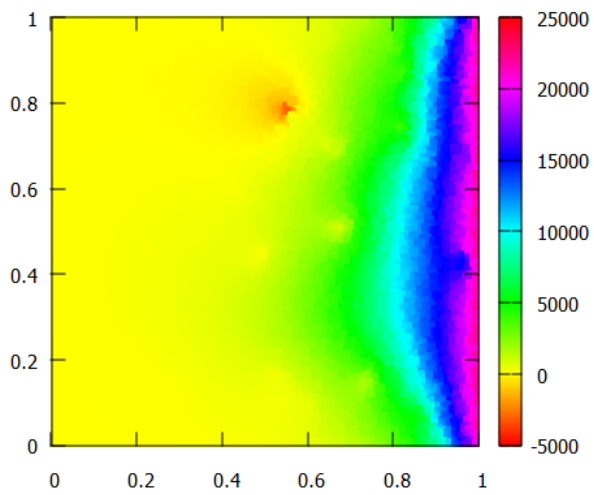


Рис. 21: Интерполяция при 25
точках

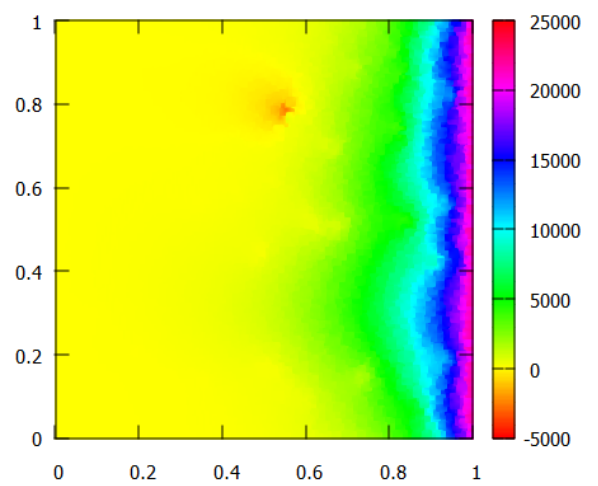


Рис. 22: Интерполяция при 50
точках

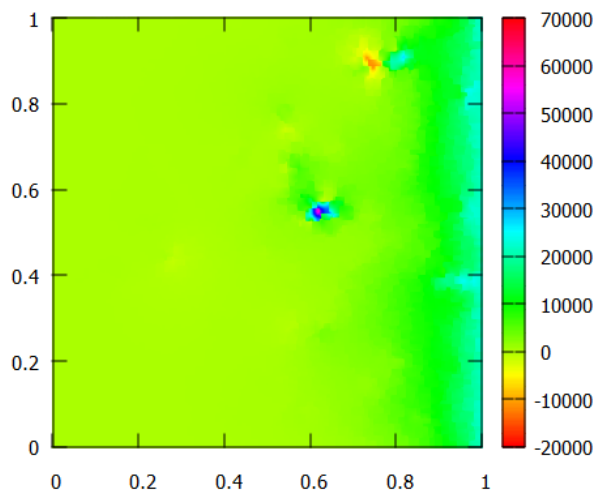


Рис. 23: Интерполяция при 100
точках с редкой сеткой

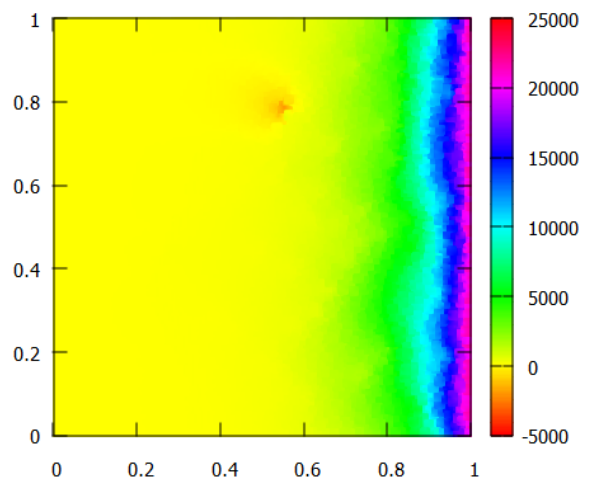


Рис. 24: Интерполяция при 100
точках

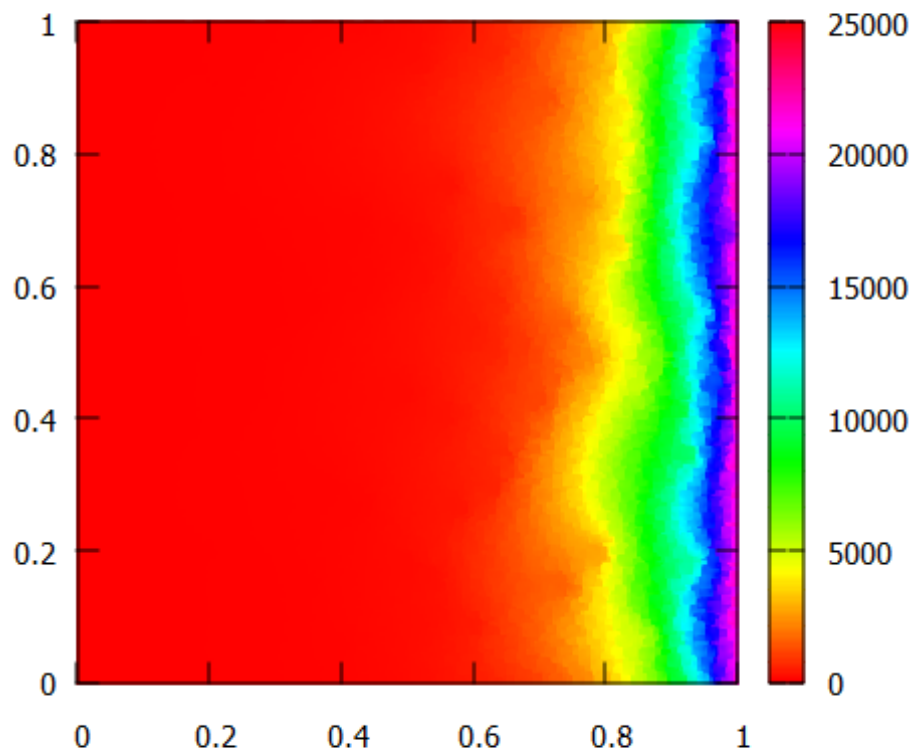


Рис. 25: Интерполяция при 100 точках с частой сеткой

6 Вывод

Качество интерполяции зависит от количества заданных точек и частоты сетки. На редкой сетке и при недостаточном количестве точек появляются «всплески». Метод плохо интерполирует функции с большими складками, для удовлетворительного результата необходимо большое количество точек в этой области.

7 Литература

8 Приложение

```
1 real a = 1., b = 1.;
2 int m = 10;
3
4 border g1(t = 0, 1) {x = 0; y = b*t; label = 1;};
5 border g2(t = 0, 1) {x = a*t; y = b; label = 1;};
6 border g3(t = 0, 1) {x = a; y = b*(1 - t); label = 1;};
7 border g4(t = 0, 1) {x = a*(1 - t); y = 0; label = 1;};
8
9 mesh Th = buildmesh (g1(-m) + g2(-m) + g3(-m) + g4(-m));
10 Th = adaptmesh(Th, hmin = 0.02, hmax = 0.025, nbvx = 1e6);
11
12 //func f = atan(10 * (x + y));
13 //func f = atan2(3*y, x);
14 func f = exp(10*x);
15
16 fespace Vh(Th, P2);
17 Vh fe = f;
18 plot(fe, fill=1, wait=1);
19
20 int N = 100;
21 real[int] xs(N);
22 {
23     ifstream file("xs.txt", binary);
24     string line;
25     for (int i = 0; i < N; ++i) {
26         getline(file, line);
27         xs[i] = atof(line);
28     }
29 }
30
```

```

31 | real[int] ys(N);
32 | {
33 |     ifstream file("ys.txt", binary);
34 |     string line;
35 |     for (int i = 0; i < N; ++i) {
36 |         getline(file, line);
37 |         ys[i] = atof(line);
38 |     }
39 | }
40 |
41 | real[int] zs(N);
42 | for (int i = 0; i < N; ++i) {
43 |     zs[i] = f(xs[i], ys[i]);
44 | }
45 |
46 | func real delta(real n, int i) {
47 |     return n^2/pi * exp(-((x - xs[i])*n)^2) * exp(-((y - ys[i])*n)^2);
48 | }
49 | real n = 120.;
50 | macro deltaMacro(i) (n^2/pi * exp(-((x - xs[i])*n)^2) * exp(-((y - ys[i])*n)
    ^2)) //
51 |
52 | fespace Vm(Th, P2);
53 | Vm wf;
54 | wf = deltaMacro(0);
55 | real maxhist = wf[].max;
56 | wf = zs[0]*wf/maxhist;
57 | for (int i = 0; i < N; ++i) {
58 |     wf = wf + zs[i]*deltaMacro(i)/maxhist;
59 | }
60 | plot(wf, wait=1, value=1, fill=1);
61 |
62 | Vm wh, whz;
63 | wh = deltaMacro(0);
64 | whz = zs[0] * wh;

```

```

65 for (int i = 0; i < N; ++i) {
66     wh = wh + deltaMacro(i);
67 }
68 for (int i = 0; i < N; ++i) {
69     whz = whz + zs[i]*deltaMacro(i);
70 }
71
72 Vh u, v;
73 real e = 0.1;
74 problem bottom(u, v) = int2d(Th) ( dx(u)*dx(v) + dy(u)*dy(v) )
75     + int2d (Th) ( pow(e, -2) * wh * u * v )
76     - int2d(Th)( pow(e, -2) * whz * v )
77     + on(1, u = f);
78 bottom;
79 plot(u, wait=1, fill=1, value=1);
80
81 real error = sqrt(int2d(Th)((fe - u)^2)) / sqrt(int2d(Th)(fe^2));
82 cout << "error_=" << error;
83
84 { ofstream gnu("4func/plot6.dat");
85     for (int i = 0; i < Th.nt; i++) {
86         for (int j = 0; j < 3; j++) {
87             gnu << Th[i][j].x << "_" << Th[i][j].y << "_" << u[][Vh(i,j)] << endl;
88         }
89         gnu << Th[i][0].x << "_" << Th[i][0].y << "_" << u[][Vh(i,0)] << "\n\n"
90             << endl;
91     }
92 }

```

Листинг 1: Код программы во FreeFem++