



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

**ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ
ТЕХНОЛОГИЙ**

**Кафедра информатики, математического и компьютерного
моделирования**

ОТЧЕТ

к лабораторной работе №4 по дисциплине
«Математическое моделирование»

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент

гр. Б9120-01.03.02

Агличиев А.О.

(ФИО)

(подпись)

« 16 » декабря 2022 г.

г. Владивосток
2022

Содержание

1	Определение цели	3
2	Создание математической модели	3
3	Реализация модели	5
3.1	Сравнение линейных и нелинейных незатухающих колебаний . .	5
3.2	Затухающие колебания	10
3.3	Вынужденные колебания	13
3.4	Резонанс	14
4	Вывод	14

1 Определение цели

В данной лабораторной работе необходимо создать модель математического маятника. Маятник — система, подвешенная в поле тяжести и совершающая механические колебания. Одним из простейших маятников является шарик, подвешенный на нити. Маятники используются в различных приборах, например, в часах и сейсмографах.

2 Создание математической модели

Математический маятник — система, состоящая из материальной точки, подвешенной на конце нерастяжимой нити или на невесомом стержне в поле тяжести. Другой конец нити неподвижен.

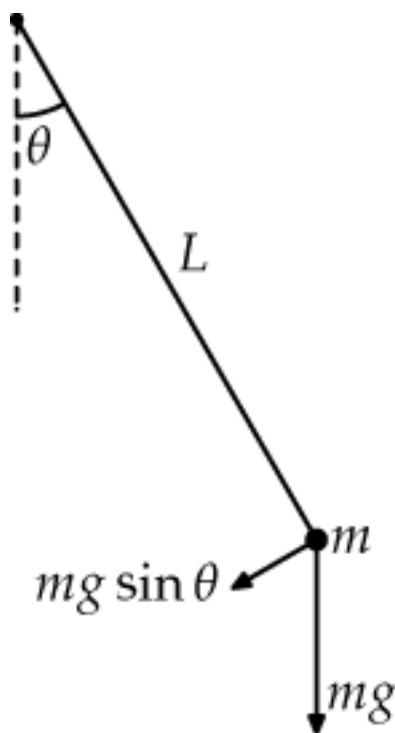


Рис. 1: Математический маятник

В записи второго закона Ньютона $m\vec{a} = \vec{F}$ выделим тангенциальную со-

ставляющую $ma_\tau = F_\tau$, получим:

$$mL\ddot{\theta} = -mg \sin \theta,$$

где L - длина нити, θ - угол отклонения маятника, g - ускорение свободного падения ($= 9.8 \text{ м/с}^2$), m - масса материальной точки

Поделим на mL и перенесём всё в правую часть, $\frac{g}{L} = \omega_0^2$ - частота собственных колебаний:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0,$$

При малых углах $\sin \theta \approx \theta$ и уравнение превращается в

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \cdot \theta = 0,$$

При наличии затуханий

$$\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0,$$

где k - коэффициент затухания

Добавим внешнюю периодическую силу $a \cdot \sin(\omega t)$ и колебания станут вынужденными:

$$\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = a \cdot \sin(\omega t),$$

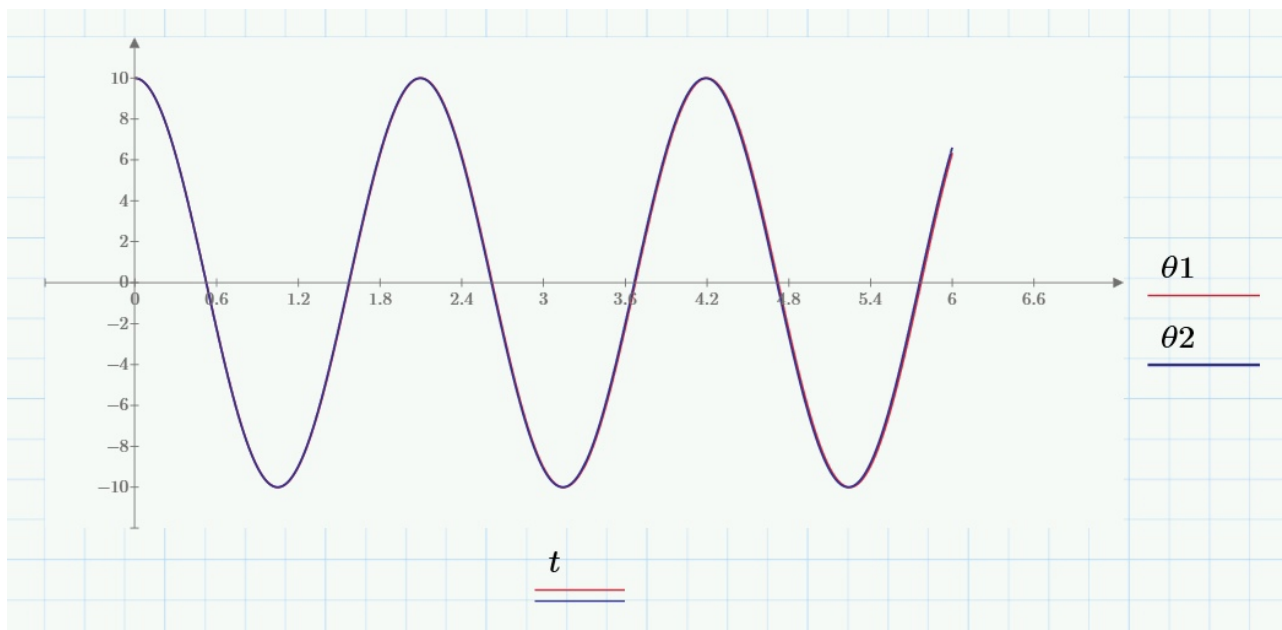
3 Реализация модели

Модель была реализована в MathCad.

3.1 Сравнение линейных и нелинейных незатухающих колебаний

Колебания без затухания при $\theta = 10^\circ$

$\theta_1 := \begin{bmatrix} 10 \text{ } \textcolor{blue}{deg} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \omega_1 := 3$	$\theta_2 := \begin{bmatrix} 10 \text{ } \textcolor{blue}{deg} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \omega_2 := 3$
$D1(t, \theta) := \begin{bmatrix} \theta_1 \\ -(\omega_1^2) \cdot \sin(\theta_0) \end{bmatrix}$	$D2(t, \theta) := \begin{bmatrix} \theta_1 \\ -(\omega_2^2) \cdot \theta_0 \end{bmatrix}$
$Z1 := \text{rkfixed}(\theta_1, 0, 6, 1000, D1)$	$Z2 := \text{rkfixed}(\theta_2, 0, 6, 1000, D2)$
$t := Z1^{(0)} \quad \theta_1 := Z1^{(1)}$	$\theta_2 := Z2^{(1)}$
$\theta_1 := \theta_1 \cdot \frac{180}{\pi} \quad v_1 := Z1^{(2)}$	$\theta_2 := \theta_2 \cdot \frac{180}{\pi} \quad v_2 := Z2^{(2)}$



Колебания без затухания при $\theta = 20^\circ$

$$\theta 3 := \begin{bmatrix} 20 \text{ } \textcolor{blue}{deg} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \omega 3 := 3$$

$$D3(t, \theta) := \begin{bmatrix} \theta_1 \\ -(\omega 3^2) \cdot \sin(\theta_0) \end{bmatrix}$$

$$Z3 := \text{rkfixed}(\theta 3, 0, 6, 1000, D3)$$

$$\theta 3 := Z3^{(1)}$$

$$\theta 3 := \theta 3 \cdot \frac{180}{\pi} \quad v3 := Z3^{(2)}$$

$$\theta 4 := \begin{bmatrix} 20 \text{ } \textcolor{blue}{deg} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \omega 4 := 3$$

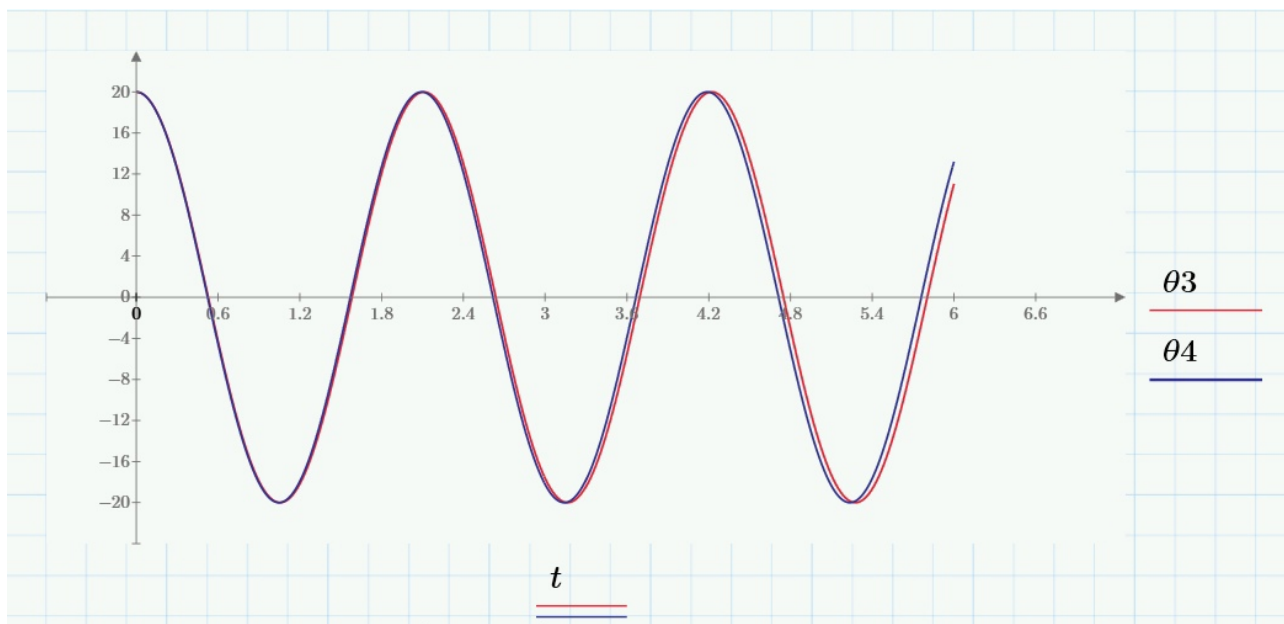
$$D4(t, \theta) := \begin{bmatrix} \theta_1 \\ -(\omega 4^2) \cdot \theta_0 \end{bmatrix}$$

$$Z4 := \text{rkfixed}(\theta 4, 0, 6, 1000, D4)$$

$$\theta 4 := Z4^{(1)}$$

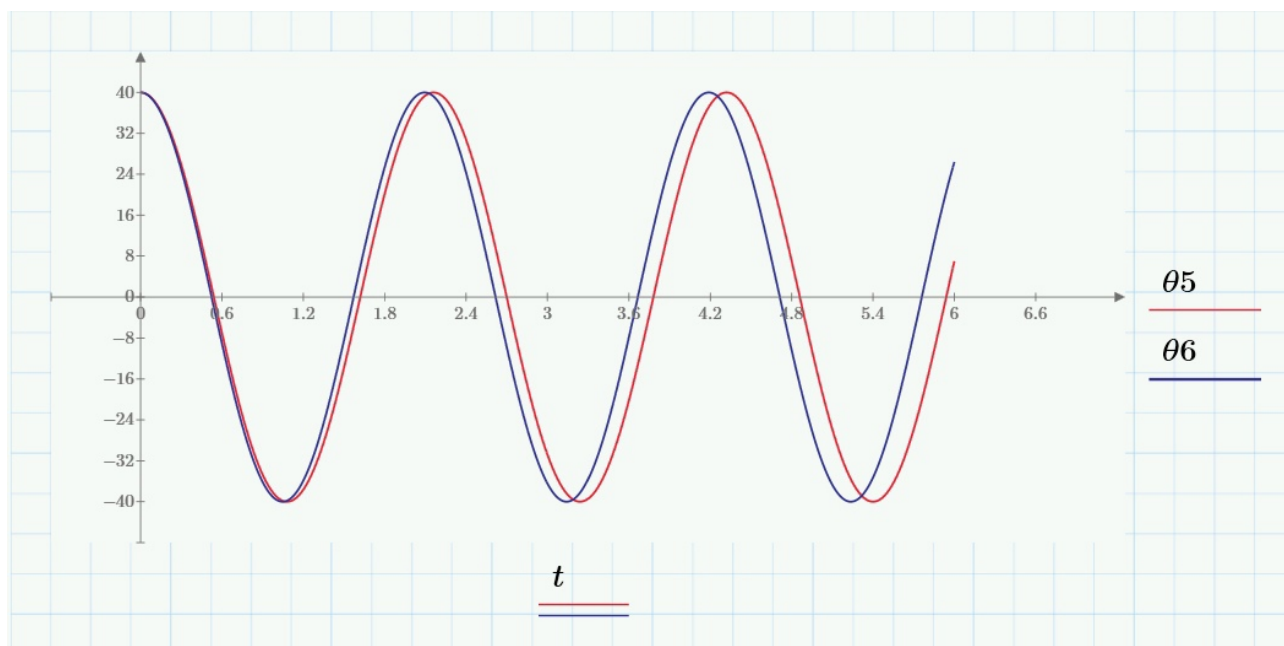
$$\theta 4 := \theta 4 \cdot \frac{180}{\pi} \quad v4 := Z4^{(2)}$$

$+$



Колебания без затухания при $\theta = 40^\circ$

$\theta 5 := \begin{bmatrix} 40 \text{ deg} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \omega 5 := 3$	$\theta 6 := \begin{bmatrix} 40 \text{ deg} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \omega 6 := 3$
$D 5(t, \theta) := \begin{bmatrix} \theta_1 \\ -(\omega 5^2) \cdot \sin(\theta_0) \end{bmatrix}$	$D 6(t, \theta) := \begin{bmatrix} \theta_1 \\ -(\omega 6^2) \cdot \theta_0 \end{bmatrix}$
$Z 5 := \text{rkfixed}(\theta 5, 0, 6, 1000, D 5)$	$Z 6 := \text{rkfixed}(\theta 6, 0, 6, 1000, D 6)$
$\theta 5 := Z 5^{(1)}$	$\theta 6 := Z 6^{(1)}$
$\theta 5 := \theta 5 \cdot \frac{180}{\pi} \quad v 5 := Z 5^{(2)}$	$\theta 6 := \theta 6 \cdot \frac{180}{\pi} \quad v 6 := Z 6^{(2)}$



Колебания без затухания при $\theta = 60^\circ$

$$\theta 7 := \begin{bmatrix} 60 \text{ deg} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \omega 7 := 3$$

$$\theta 8 := \begin{bmatrix} 60 \text{ deg} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \omega 8 := 3$$

$$D7(t, \theta) := \begin{bmatrix} \theta_1 \\ -(\omega 7^2) \cdot \sin(\theta_0) \end{bmatrix} +$$

$$D8(t, \theta) := \begin{bmatrix} \theta_1 \\ -(\omega 8^2) \cdot \theta_0 \end{bmatrix}$$

$$Z7 := \text{rkfixed}(\theta 7, 0, 6, 1000, D7)$$

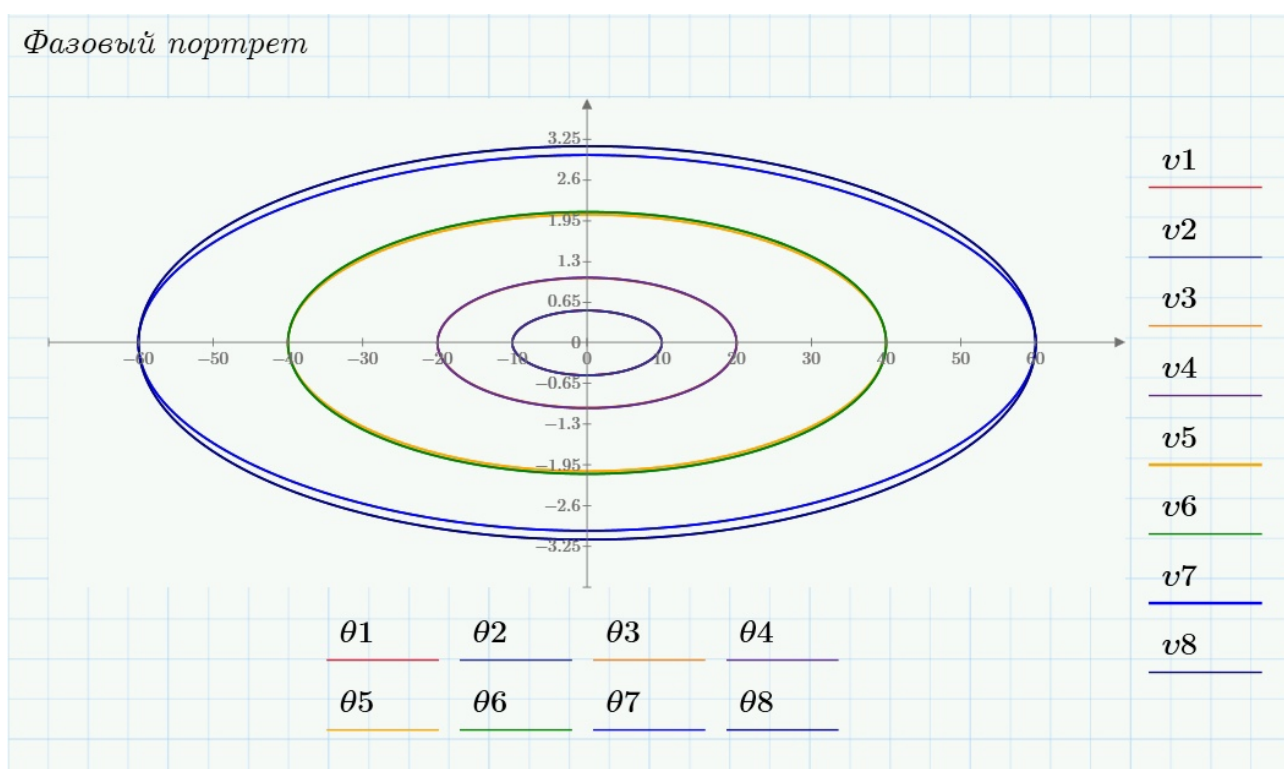
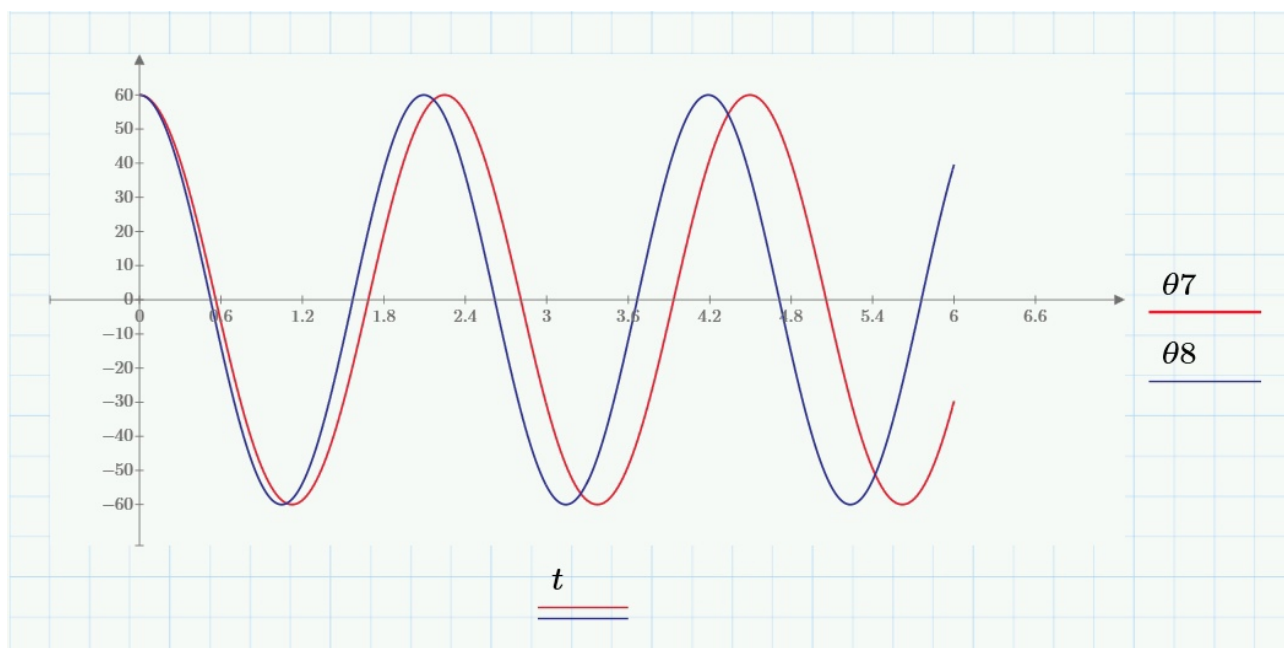
$$Z8 := \text{rkfixed}(\theta 8, 0, 6, 1000, D8)$$

$$\theta 7 := Z7^{(1)}$$

$$\theta 8 := Z8^{(1)}$$

$$\theta 7 := \theta 7 \cdot \frac{180}{\pi} \quad v 7 := Z7^{(2)}$$

$$\theta 8 := \theta 8 \cdot \frac{180}{\pi} \quad v 8 := Z8^{(2)}$$



3.2 Затухающие колебания

Колебания с затуханием при $\theta = 20^\circ$

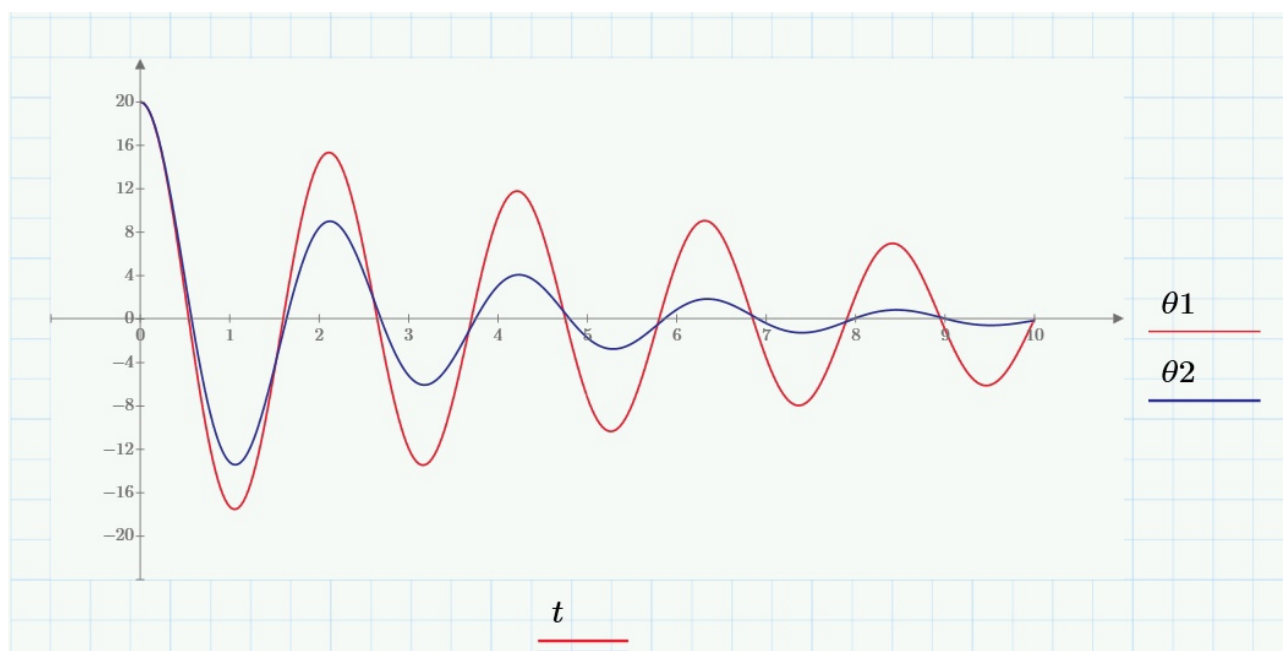
$$\theta_1 := \begin{bmatrix} 20 \text{ deg} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \omega_1 := 3 \quad k_1 := 0.25 \quad \theta_2 := \begin{bmatrix} 20 \text{ deg} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \omega_2 := 3 \quad k_2 := 0.75$$

$$D1(t, \theta) := \begin{bmatrix} \theta_1 \\ -(\omega_1^2) \cdot \sin(\theta_0) - k_1 \cdot \theta_1 \end{bmatrix} \quad D2(t, \theta) := \begin{bmatrix} \theta_1 \\ -(\omega_2^2) \cdot \sin(\theta_0) - k_2 \cdot \theta_1 \end{bmatrix}$$

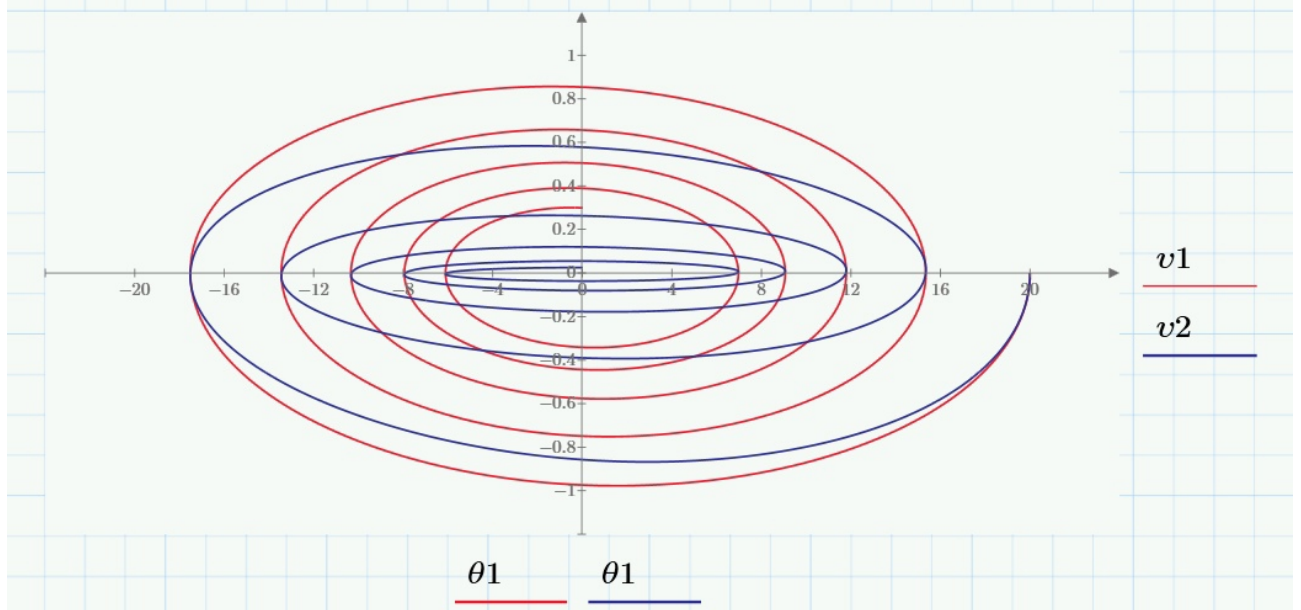
$$Z1 := \text{rkfixed}(\theta_1, 0, 10, 1000, D1) \quad Z2 := \text{rkfixed}(\theta_2, 0, 10, 1000, D2)$$

$$t := Z1^{(0)} \quad \theta_1 := Z1^{(1)} \quad \theta_2 := Z2^{(1)}$$

$$\theta_1 := \theta_1 \cdot \frac{180}{\pi} \quad v1 := Z1^{(2)} \quad \theta_2 := \theta_2 \cdot \frac{180}{\pi} \quad v2 := Z2^{(2)}$$



Фазовый портрет



Колебания с затуханием при $\theta = 40^\circ$

$$\theta_1 := \begin{bmatrix} 40 \text{ deg} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \omega_1 := 3 \quad k_1 := 0.25$$

$$\theta_2 := \begin{bmatrix} 40 \text{ deg} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \omega_2 := 3 \quad k_2 := 0.75$$

$$D1(t, \theta) := \begin{bmatrix} \theta_1 \\ -(\omega_1^2) \cdot \sin(\theta_0) - k_1 \cdot \theta_1 \end{bmatrix}$$

$$D2(t, \theta) := \begin{bmatrix} \theta_1 \\ -(\omega_2^2) \cdot \sin(\theta_0) - k_2 \cdot \theta_1 \end{bmatrix}$$

$$Z1 := \text{rkfixed}(\theta_1, 0, 10, 1000, D1)$$

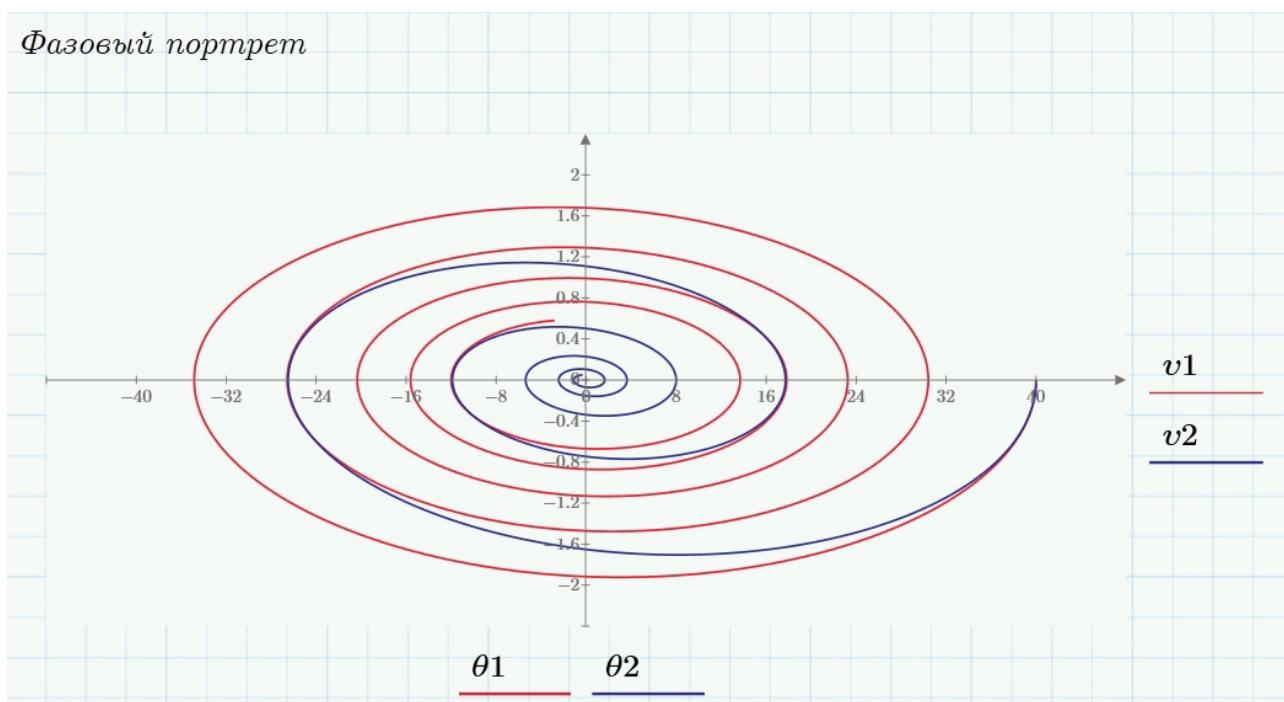
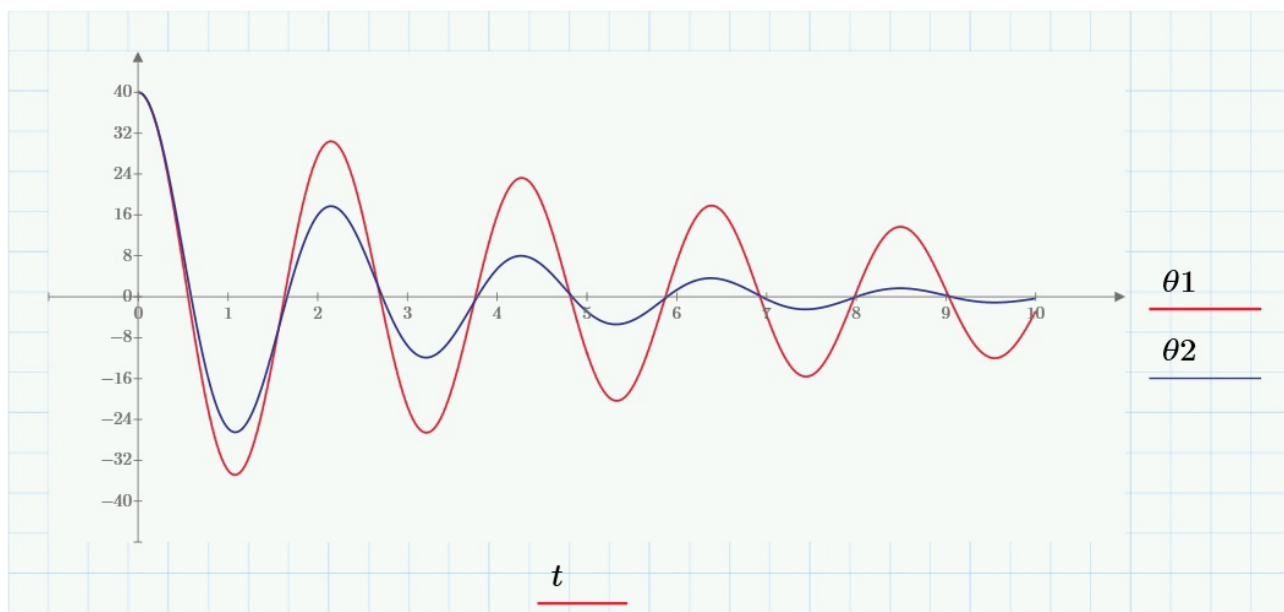
$$Z2 := \text{rkfixed}(\theta_2, 0, 10, 1000, D2)$$

$$\theta_1 := Z1^{(1)}$$

$$\theta_2 := Z2^{(1)}$$

$$\theta_1 := \theta_1 \cdot \frac{180}{\pi} \quad v1 := Z1^{(2)}$$

$$\theta_2 := \theta_2 \cdot \frac{180}{\pi} \quad v2 := Z2^{(2)}$$



3.3 Вынужденные колебания

Вынужденные колебания

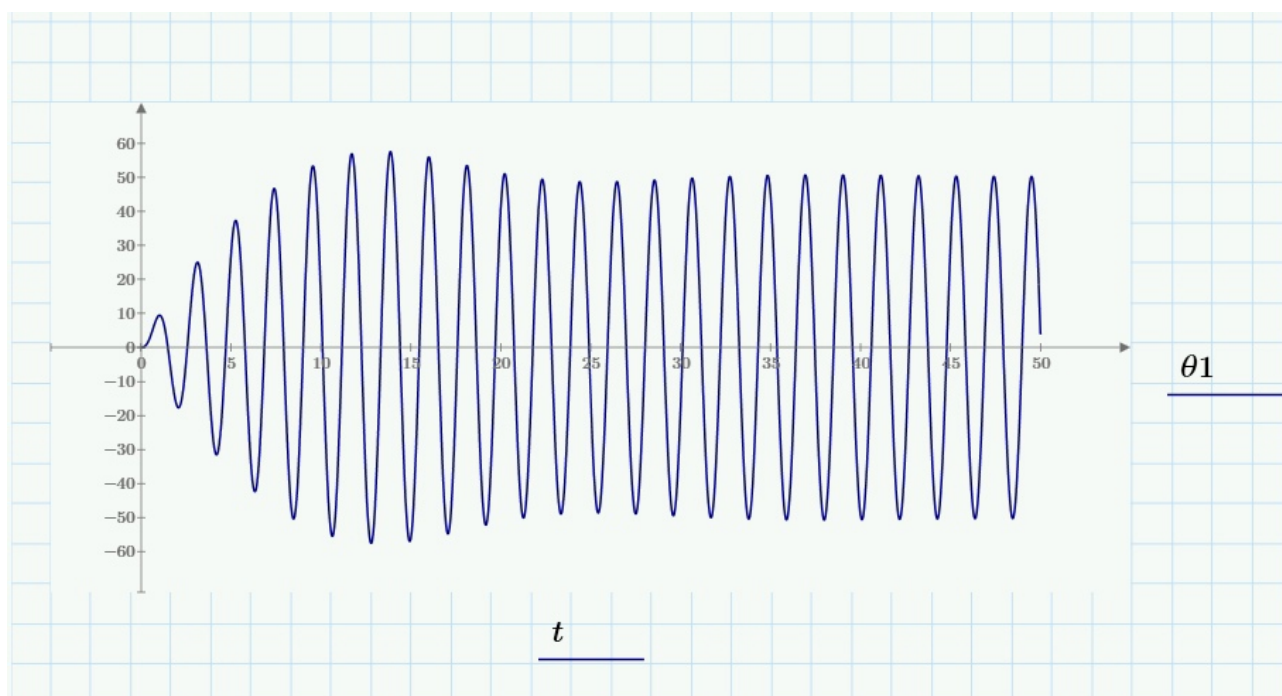
$$\theta_1 := \begin{bmatrix} 0 \text{ deg} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \omega_0 := 3 \quad k_1 := 0.25 \quad a := 1 \quad \omega_1 := 3$$

$$D1(t, \theta) := \begin{bmatrix} -(\omega_0^2) \cdot \sin(\theta_0) - k_1 \cdot \theta_1 + a \cdot \sin(\omega_1 \cdot t) \end{bmatrix}$$

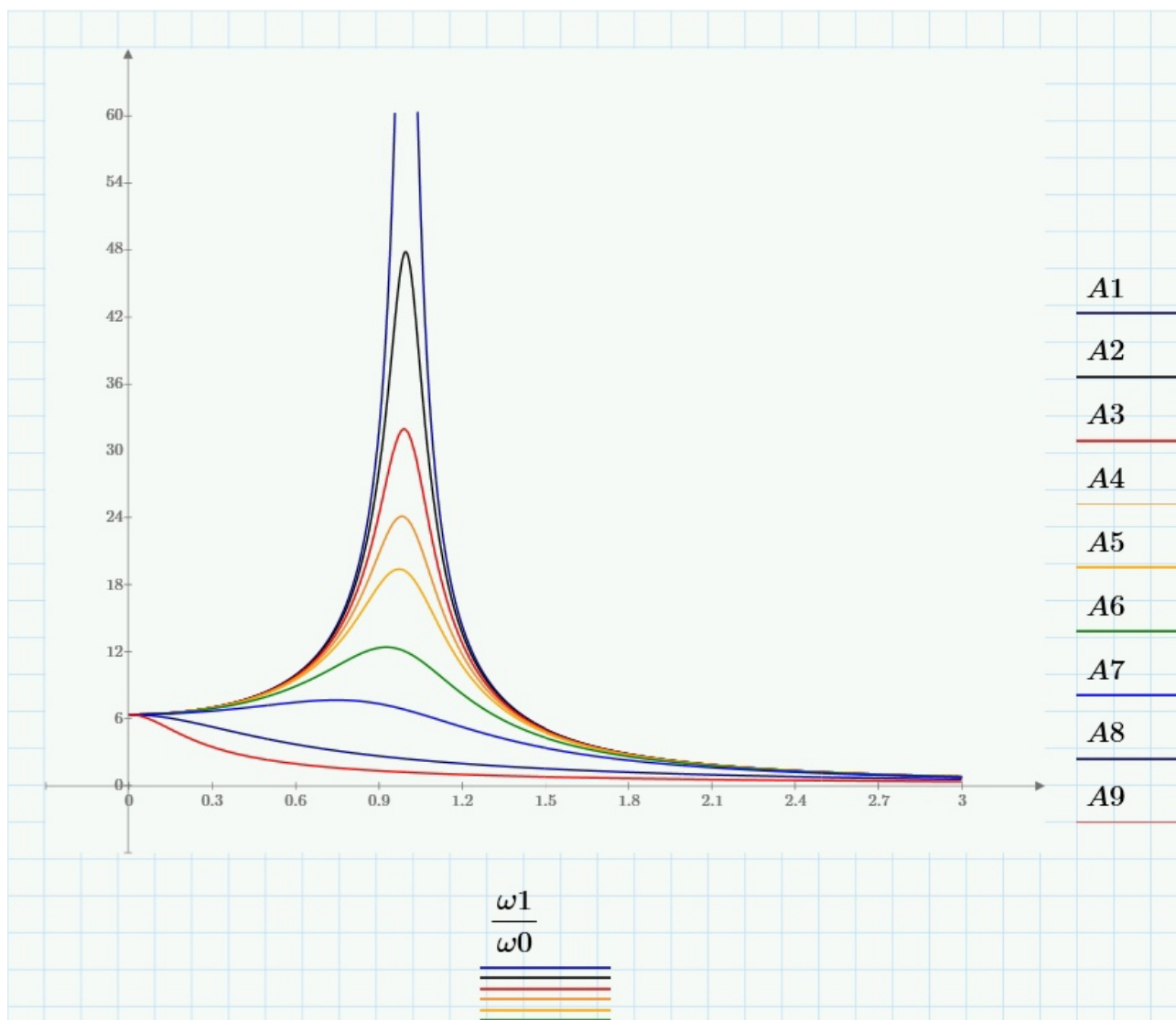
$$Z1 := \text{rkfixed}(\theta_1, 0, 50, 1000, D1)$$

$$\theta_1 := Z1^{(1)} \quad t := Z1^{(0)}$$

$$\theta_1 := \theta_1 \cdot \frac{180}{\pi} \quad v_1 := Z1^{(2)}$$



3.4 Резонанс



При $\omega_0 = \omega$ возникает резонанс.

4 Вывод

Таким образом, были составлены математические модели линейных и нелинейных незатухающих, затухающих и вынужденных колебаний.