



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
**«Дальневосточный федеральный университет»**  
**(ДВФУ)**

---

**ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ  
ТЕХНОЛОГИЙ**

**Кафедра информатики, математического и компьютерного  
моделирования**

**ОТЧЕТ**

к лабораторной работе №4 по дисциплине  
«Математическое моделирование»

Направление подготовки  
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент

гр. Б9120-01.03.02

Агличеев А.О.

(ФИО)

(подпись)

« 14 » января 2022 г.

г. Владивосток  
2023

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Создание математической модели</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Реализация модели</b>	<b>6</b>
3.1	Сравнение линейных и нелинейных незатухающих колебаний . .	6
3.2	Затухающие колебания . . . . .	10
3.3	Вынужденные колебания . . . . .	13
3.4	Резонанс . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Вывод</b>	<b>14</b>

# 1 Введение

Маятник — система, подвешенная в поле тяжести и совершающая механические колебания. Маятники используются в различных приборах, например, в часах и сейсмографах. Они облегчают изучение колебаний, так как наглядно демонстрируют их свойства. Одним из простейших маятников является шарик, подвешенный на нити. Если считать нить нерастяжимой и пренебречь размерами груза по сравнению с длиной нити, а массой нити по сравнению с массой груза, то шарик на нити можно рассматривать как материальную точку, находящуюся на неизменном расстоянии от точки подвеса. Такой маятник называется математическим.

В данной работе будет реализована модель маятника в нескольких вариантах:

1. Без учёта трения
2. С учётом трения
3. С учётом трения и вынужденных колебаний

## 2 Создание математической модели

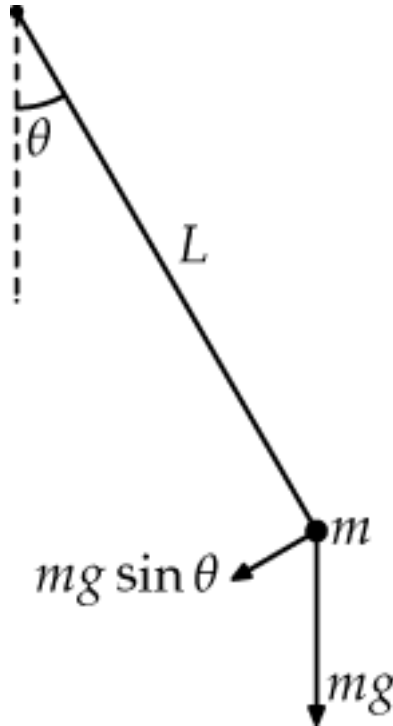


Рис. 1: Математический маятник

Момент инерции математического маятника равен:

$$M_{\text{ин}} = J \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (1)$$

, где  $\theta$  - угол наклона маятника в текущий момент,  $J$  - момент инерции, относительно оси

Момент инерции вычисляется по формуле:

$$J = mL^2 \quad (2)$$

, где  $m$  - масса маятника,  $L$  - длина нити

Если тело не находится в положении равновесия, то на него действует возвращающий момент:

$$M_{\text{в}} = FL = -mgL \sin \theta$$

, где  $g \approx 9.8$  - ускорение свободного падения

Подставим (2) в (1) и приравняем моменты:

$$mL^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgL \sin \theta$$

Сделаем элементарные преобразования, примем  $\omega_0 = \frac{g}{L}$  и получим нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее маятник:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \cdot \sin \theta = 0$$

Для решения понизим порядком и сведем к системе дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v, \\ \dot{v} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \end{cases}$$

При малых углах  $\sin \theta \approx \theta$  и уравнение превращается в

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \cdot \theta = 0,$$

с соответствующей ей системой:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v, \\ \dot{v} + \omega_0^2 \theta = 0 \end{cases}$$

При наличии затуханий уравнение примет вид:

$$\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0,$$

где  $k$  - коэффициент затухания

с соответствующей ей системой:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v, \\ \dot{v} + kv + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \end{cases}$$

Добавим внешнюю периодическую силу, действующую на маятник, и колебания станут вынужденными:

$$\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = a \cdot \sin(\omega t),$$

с соответствующей ей системой:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v, \\ \dot{v} + kv + \omega_0^2 \sin \theta = a \sin(\omega t) \end{cases}$$

### 3 Реализация модели

Модель была реализована в MathCad.

#### 3.1 Сравнение линейных и нелинейных незатухающих колебаний

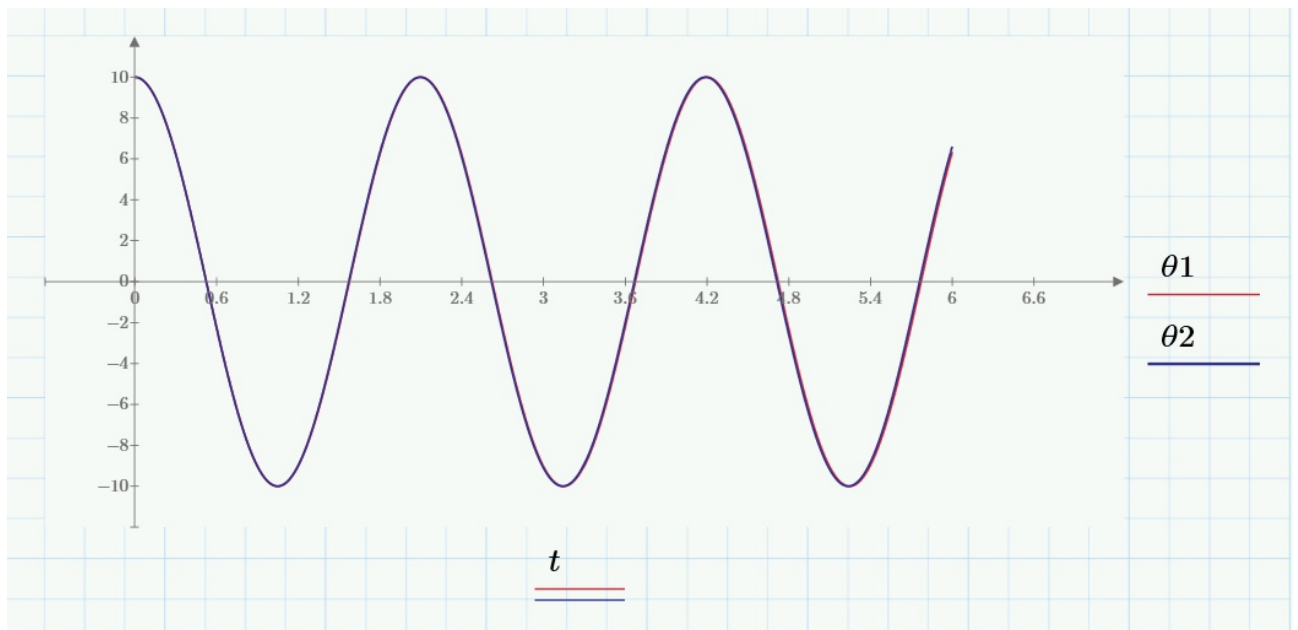


Рис. 2: График сравнения линейных и нелинейных колебаний при  $\theta = 10^\circ$

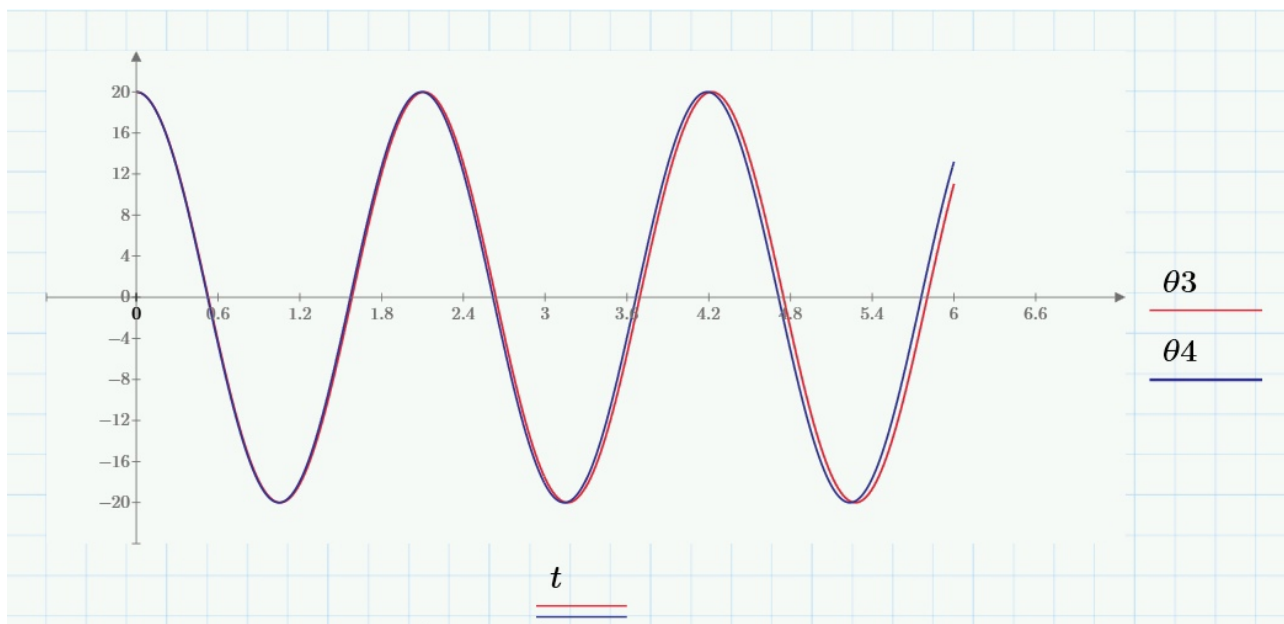


Рис. 3: График сравнения линейных и нелинейных колебаний при  $\theta = 20^\circ$

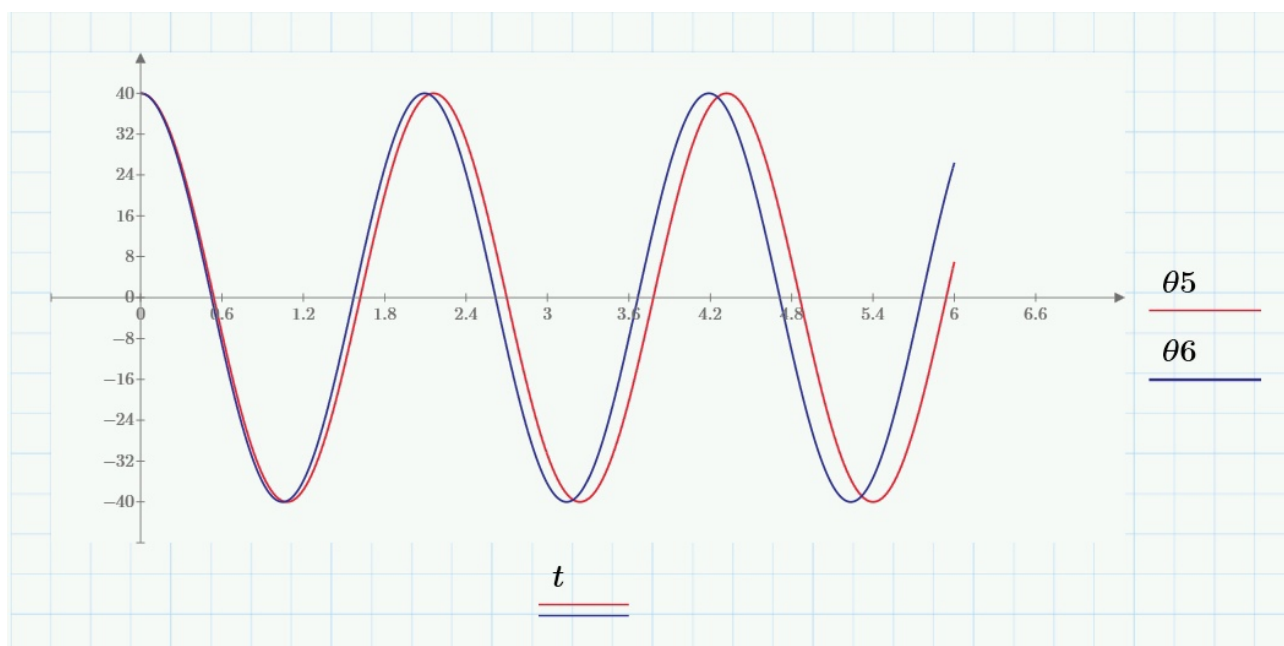


Рис. 4: График сравнения линейных и нелинейных колебаний при  $\theta = 40^\circ$



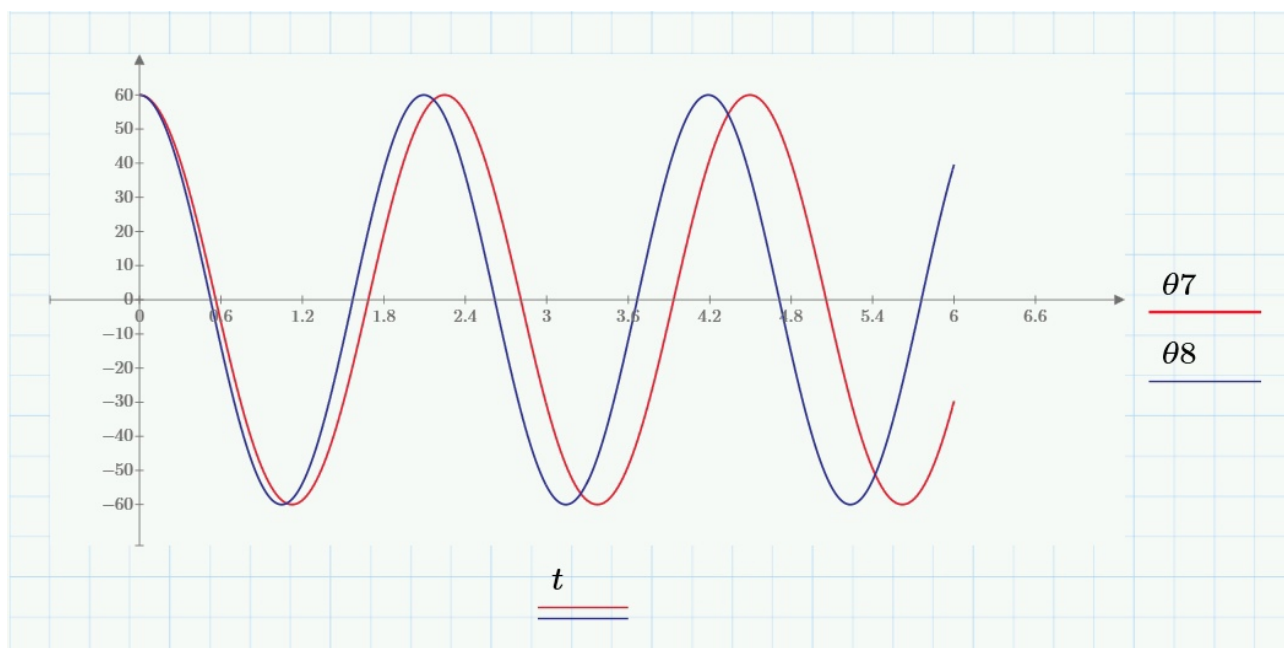


Рис. 5: График сравнения линейных и нелинейных колебаний при  $\theta = 60^\circ$

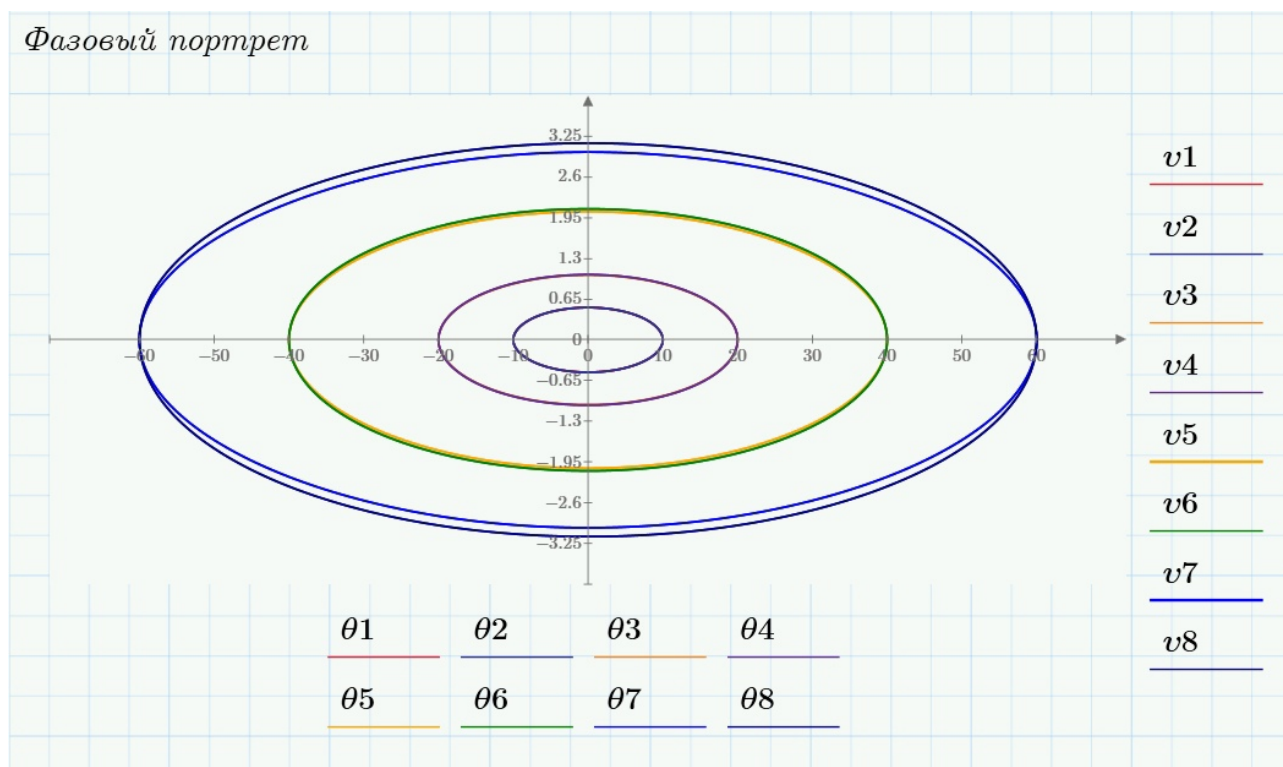


Рис. 6: Фазовый портрет колебаний при разных углах

### 3.2 Затухающие колебания

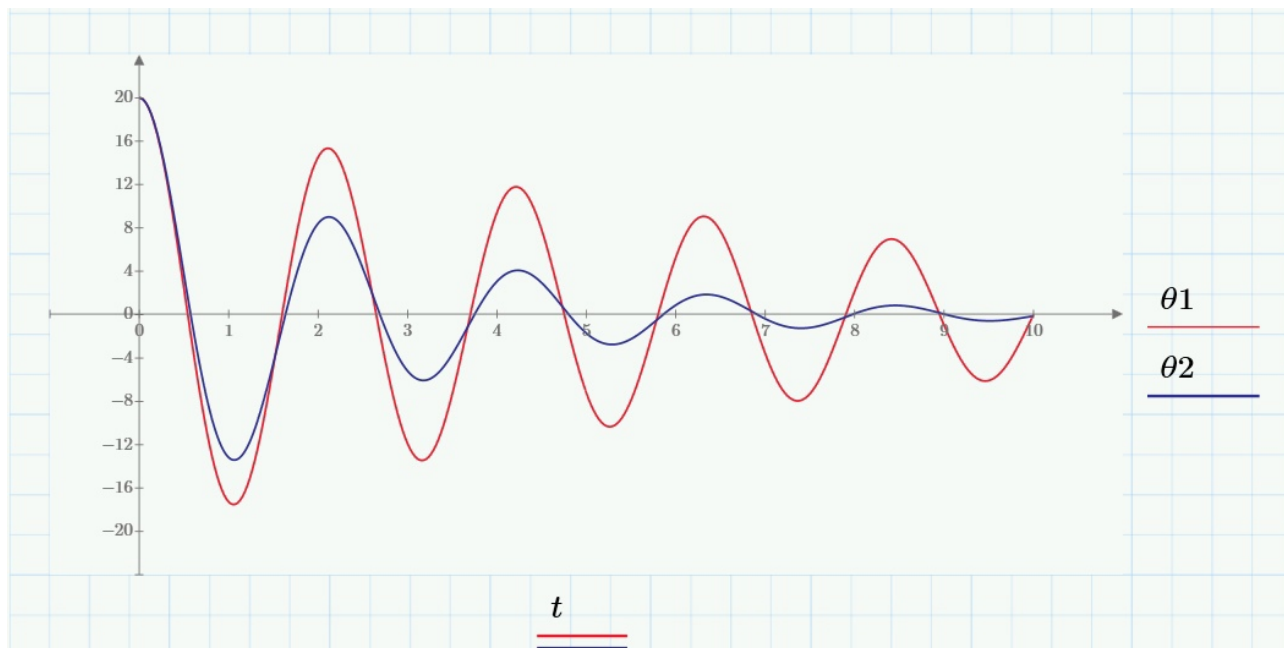


Рис. 7: График колебаний при  $\theta = 20^\circ$   $k = 0.25$  и  $k = 0.75$

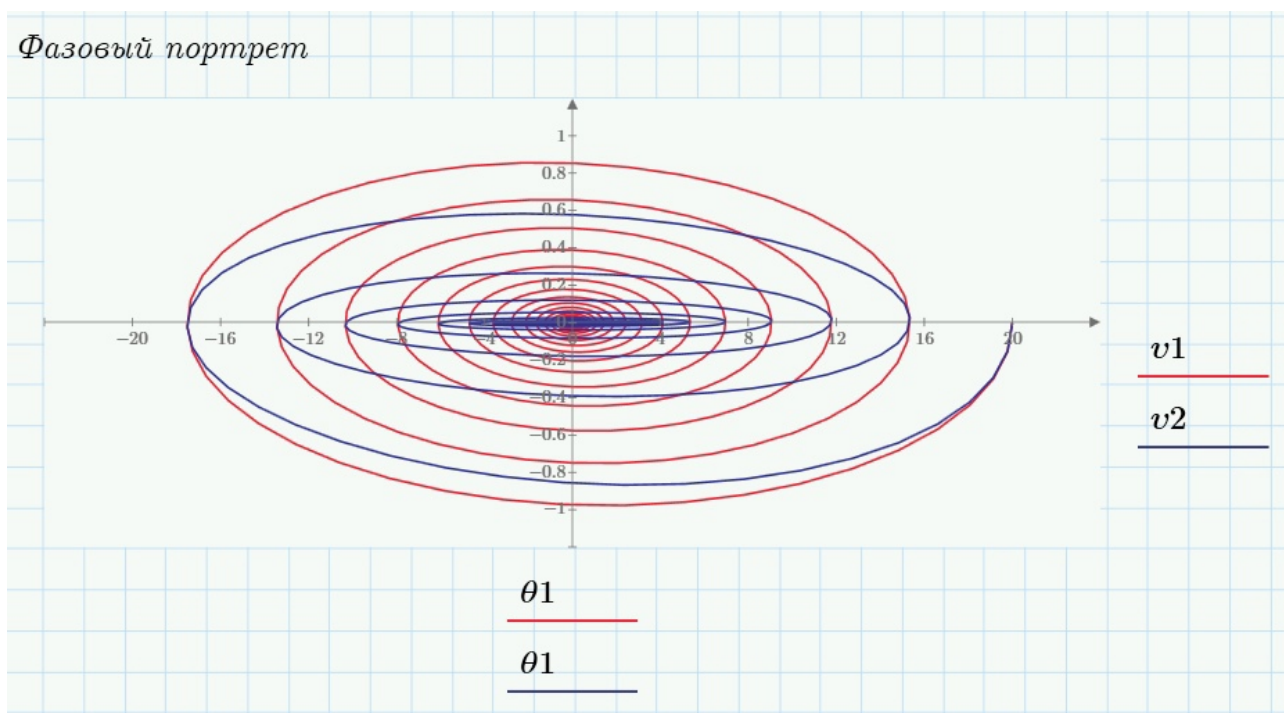


Рис. 8: Фазовый портрет при  $\theta = 20^\circ$   $k = 0.25$  и  $k = 0.75$

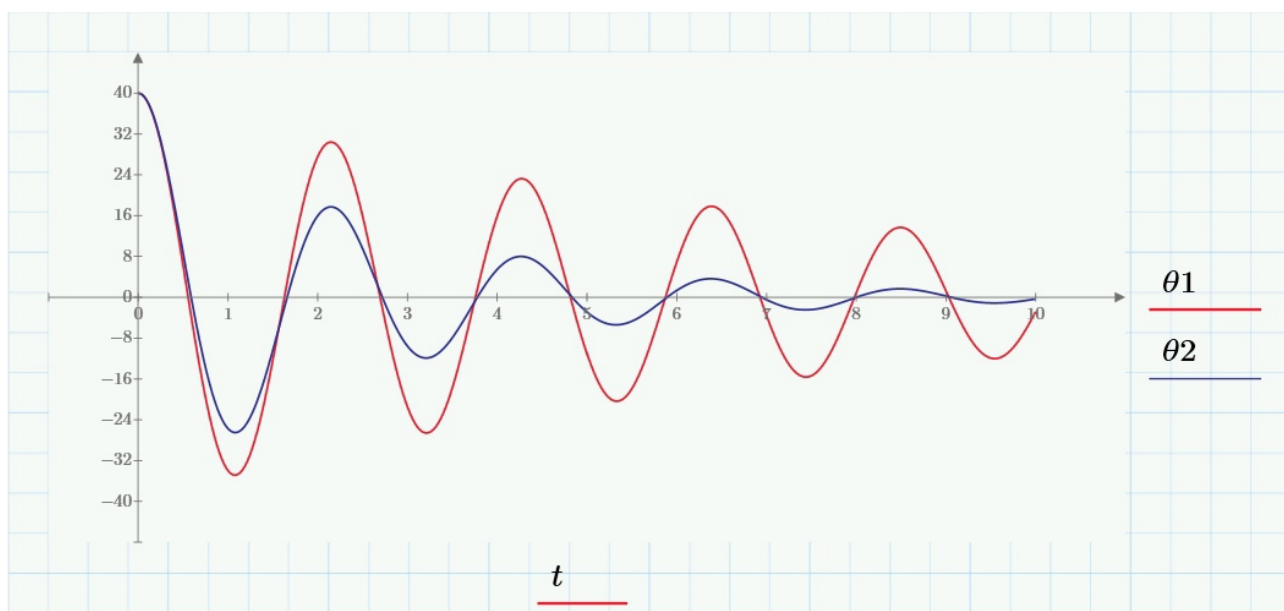


Рис. 9: График колебаний при  $\theta = 40^\circ$   $k = 0.25$  и  $k = 0.75$

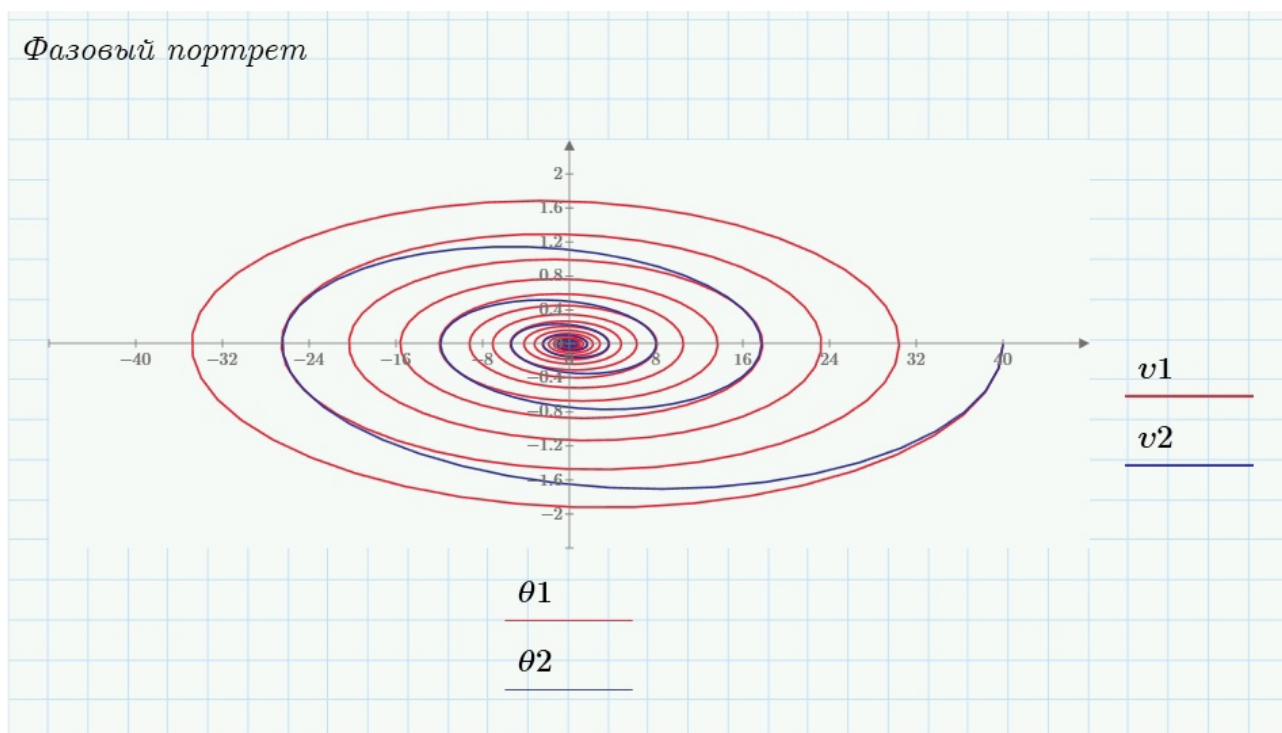


Рис. 10: Фазовый портрет при  $\theta = 40^\circ$   $k = 0.25$  и  $k = 0.75$

### 3.3 Вынужденные колебания

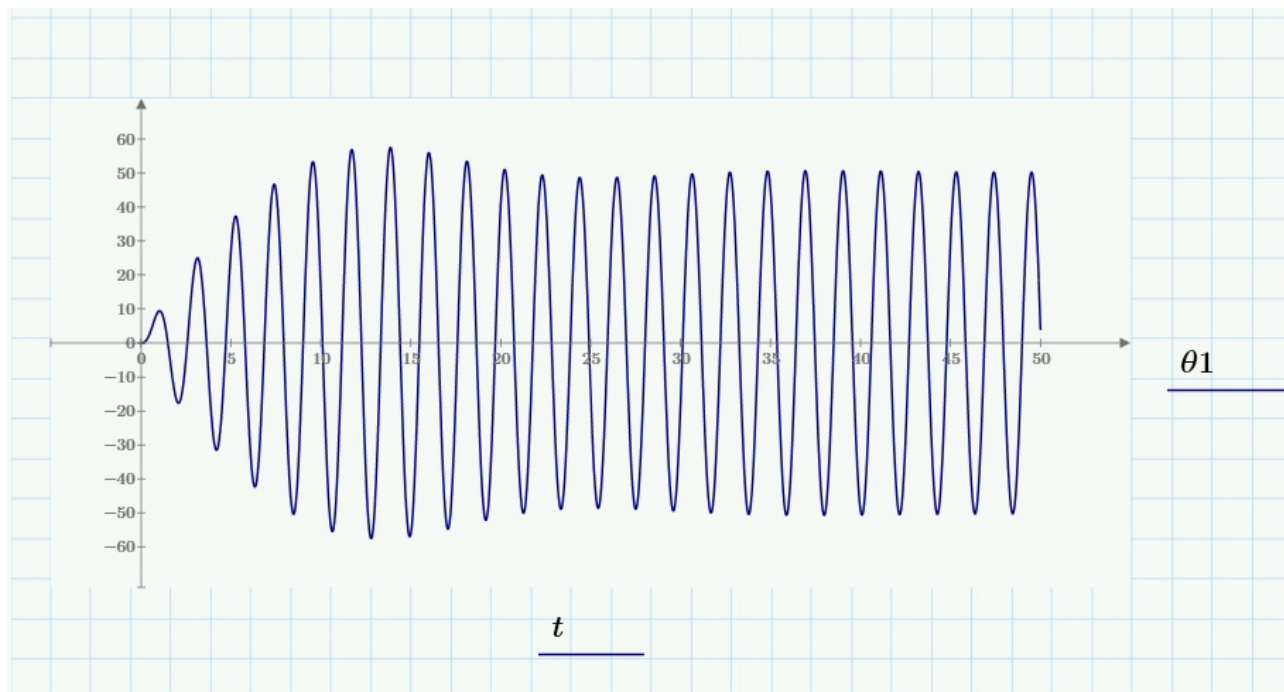
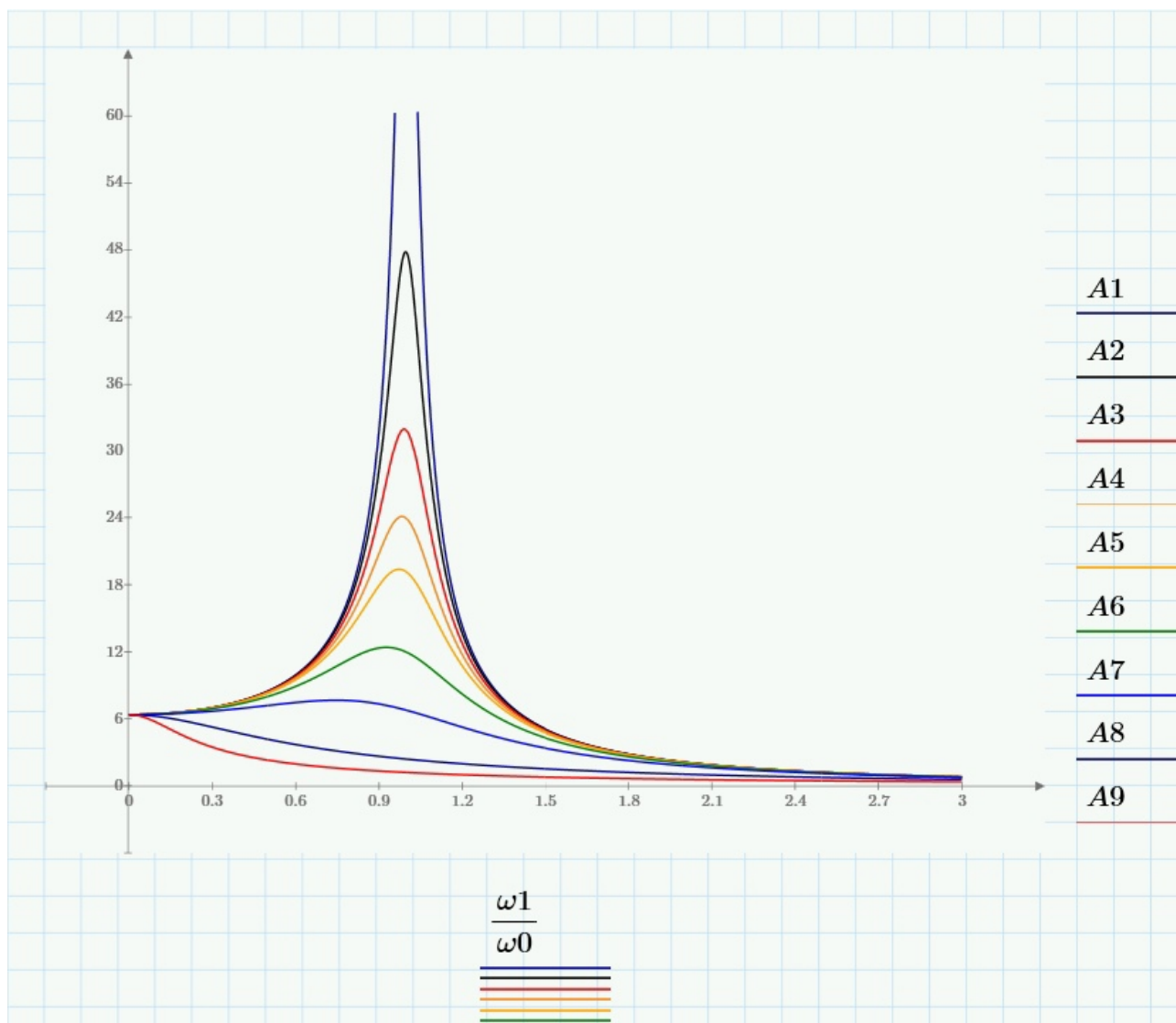


Рис. 11: График вынужденных колебаний

### 3.4 Резонанс



При  $\omega_0 = \omega$  возникает резонанс.

## 4 Вывод

Таким образом, были составлены математические модели линейных и нелинейных незатухающих, затухающих и вынужденных колебаний.