МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра информатики, математического и компьютерного моделирования

ОТЧЕТ

к лабораторной работе №3 по дисциплине
«Математическое моделирование»

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент
гр. Б9120-01.03.02
Агличеев А.О. ________
(ФИО) *(подпись)*

« 14 » января 2022 г.

г. Владивосток
2023

Содержание

1 Введение

В XIX веке рассматривались дифференциальные уравнения роста одновидовой популяции; они привели к моделям экспоненциального роста. Но для экологии одновидовая популяция — проблема слишком узкая, и особое значение придается работам А. Лотки и В. Вольтерра, в которых впервые появляются системы уравнений, относящиеся к многовидовым сообществам.

Модель Лотки-Вольтерры является первоначальной и простейшей системой для описания модели «хищник-жертва», то есть популяции хищников и популяции жертв, взаимодействующих в какой-то среде: жертвы едят растительность, хищники — жертв

В данной лабораторной будет реализована модель Лотки-Вольтерра - модель взаимодействия двух видов типа - «хищник - жертва».

2 Создание математической модели

Рассматривается закрытый ареал, в котором обитают два вида: травоядные("жертва") и хищники.

Рис. 1: Хищник и жертва

Предполагается, что животные не иммигрируют и не эмигрируют, и что еды для травоядных имеется с избытком. Тогда уравнение изменения количества жертв принимает вид:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x,$$

где α - коэффициент рождаемости жертв, x - величина популяции жертв, $\frac{dx}{dt}$ - скорость прироста популяции жертв

Пока хищники не охотятся, они вымирают, следовательно, уравнение для численности хищников(без учета численности жертв) принимает вид:

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma y,$$

где γ - коэффициент убыли хищников, x - величина популяции хищников, $\dfrac{dx}{dt}$ - скорость прироста популяции хищников

При встречах хищников и жертв(частота которых прямо пропорциональна величине xy) происходит убийство с коэффициентом β, сытые хищники способны к воспроизводству с коэффициентом δ. С учетом этого, система уравнений модели такова:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy = (\alpha - \beta y)x, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\gamma y + \delta xy = (\delta x - \gamma)y. \end{cases}$$

3 Анализ модели

Найдём особые точки системы:

$$\begin{cases} (\alpha - \beta y)x = 0, \\ (\delta x - \gamma)y = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha x = \beta xy, \\ \delta xy = \gamma; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(0) = \dfrac{\alpha}{\beta}, \\ x(0) = \dfrac{\gamma}{\delta}; \end{cases}$$

4 Реализация модели

Модель была реализована в MathCad.

Рис. 2

Если жертв(x) нет, то хищники(y) вымирают экспоненциально.

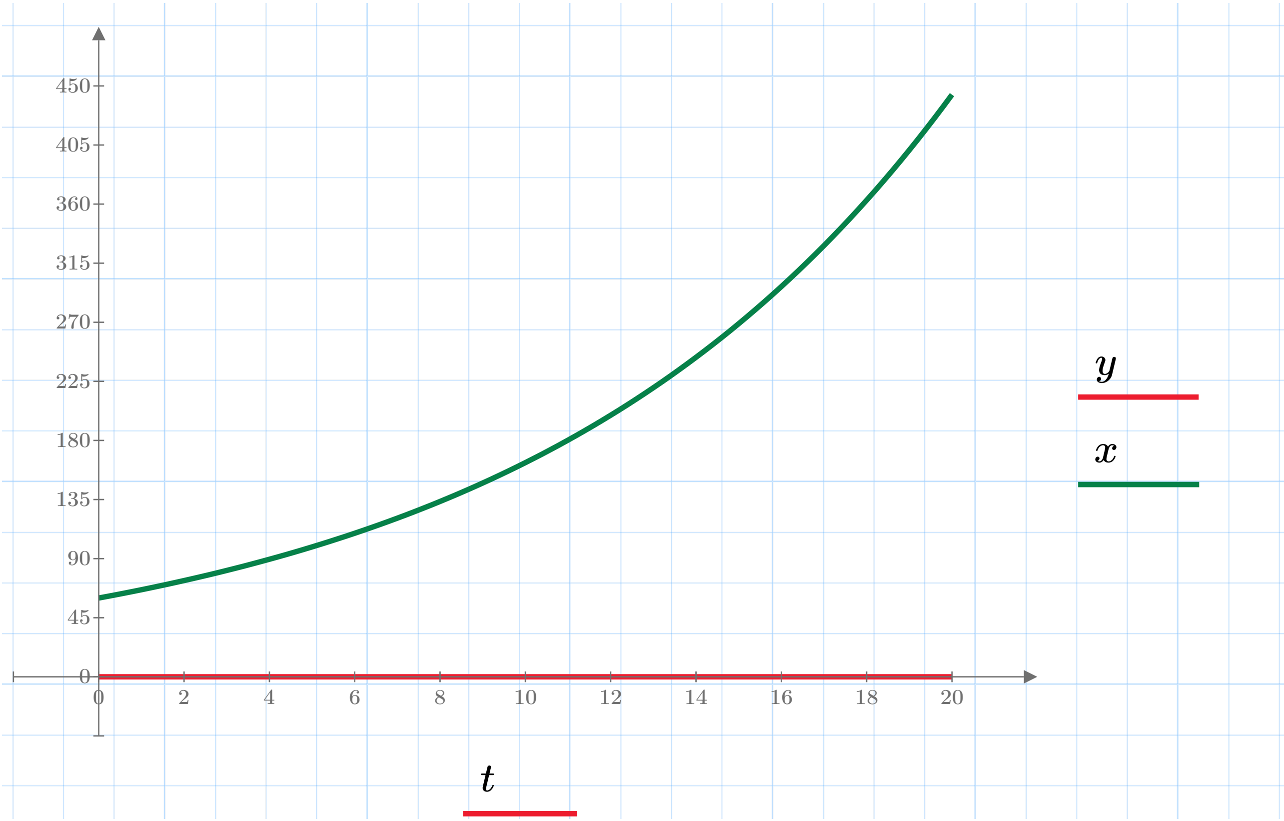

Рис. 3

Если хищников(y) нет, то популяция жертв растет экспоненциально.

$$x = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = 2, \beta = 1, \gamma = 2, \delta = 1$$

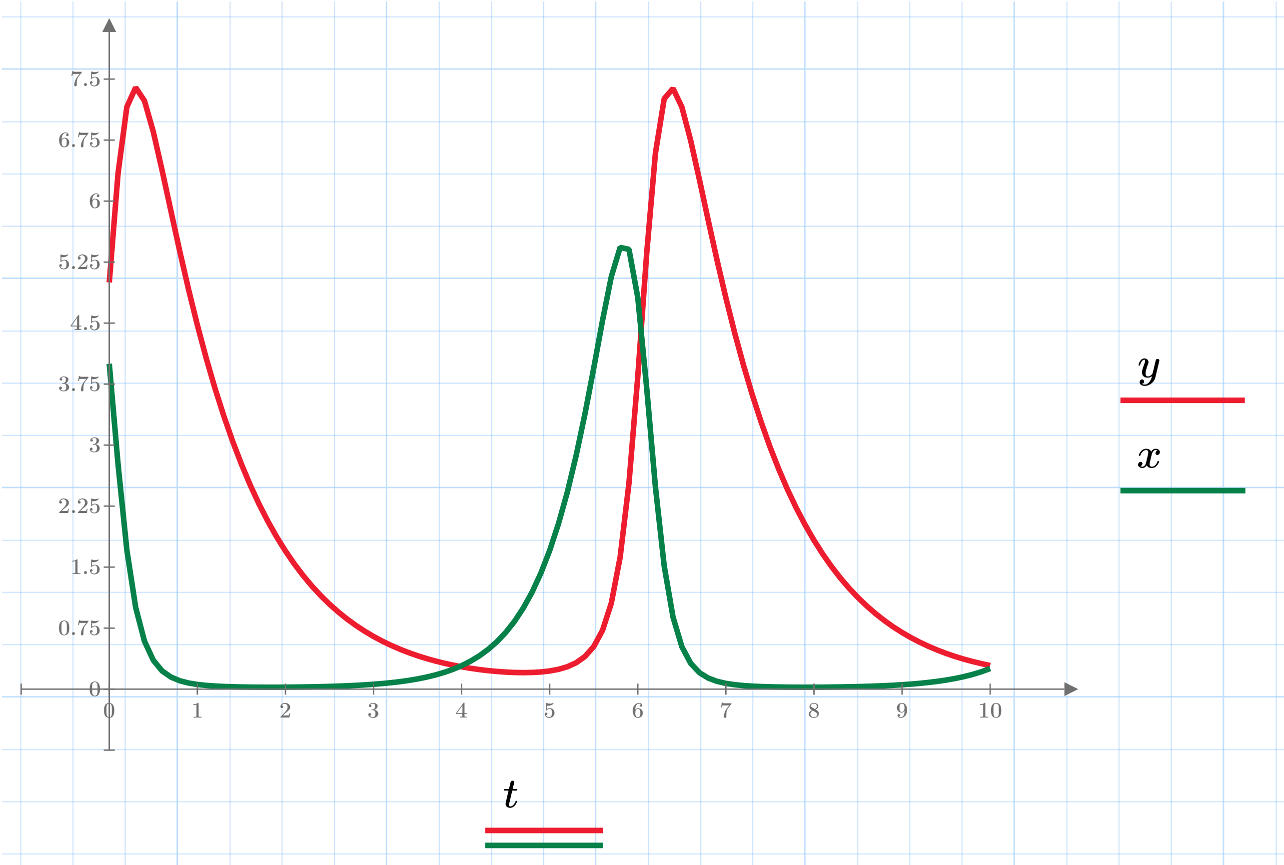

Рис. 4

В начале периода количество жертв возрастает. Вместе с ними растет и количество хищников из-за обилия пищевых ресурсов. Активное поедание жертв приводит к снижению их количества. В следствии уменьшии пищи для хищников, они начинают вымирать. Цикл переодически повторяется.

$$x = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = 2, \beta = 1, \gamma = 1, \delta = 1$$

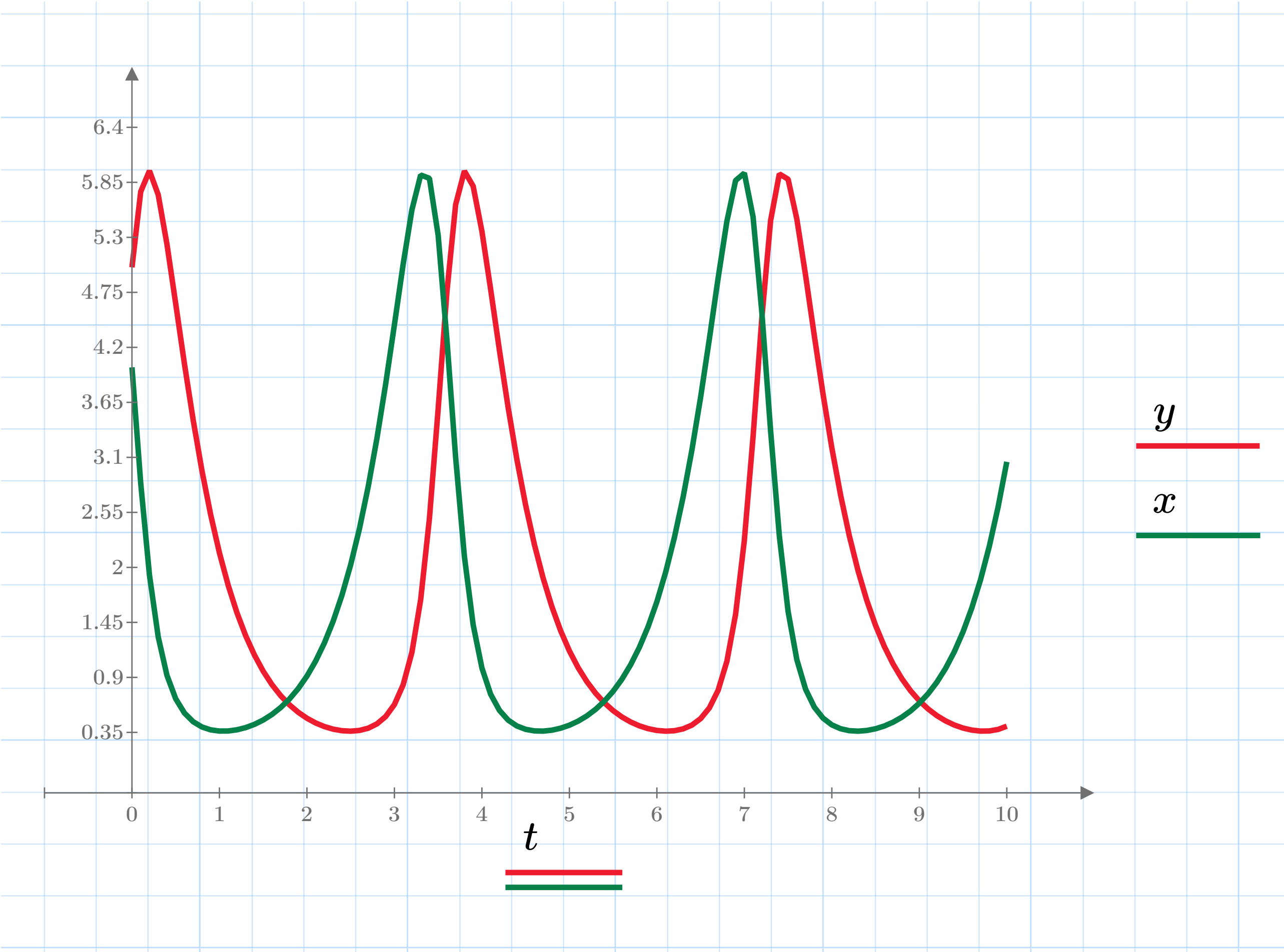

Рис. 5

Увеличение естественной смертности хищников привело к тому, что период и максимальный размер популяции хищников уменьшились.

$$x = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = 7, \beta = 1, \gamma = 1, \delta = 1$$

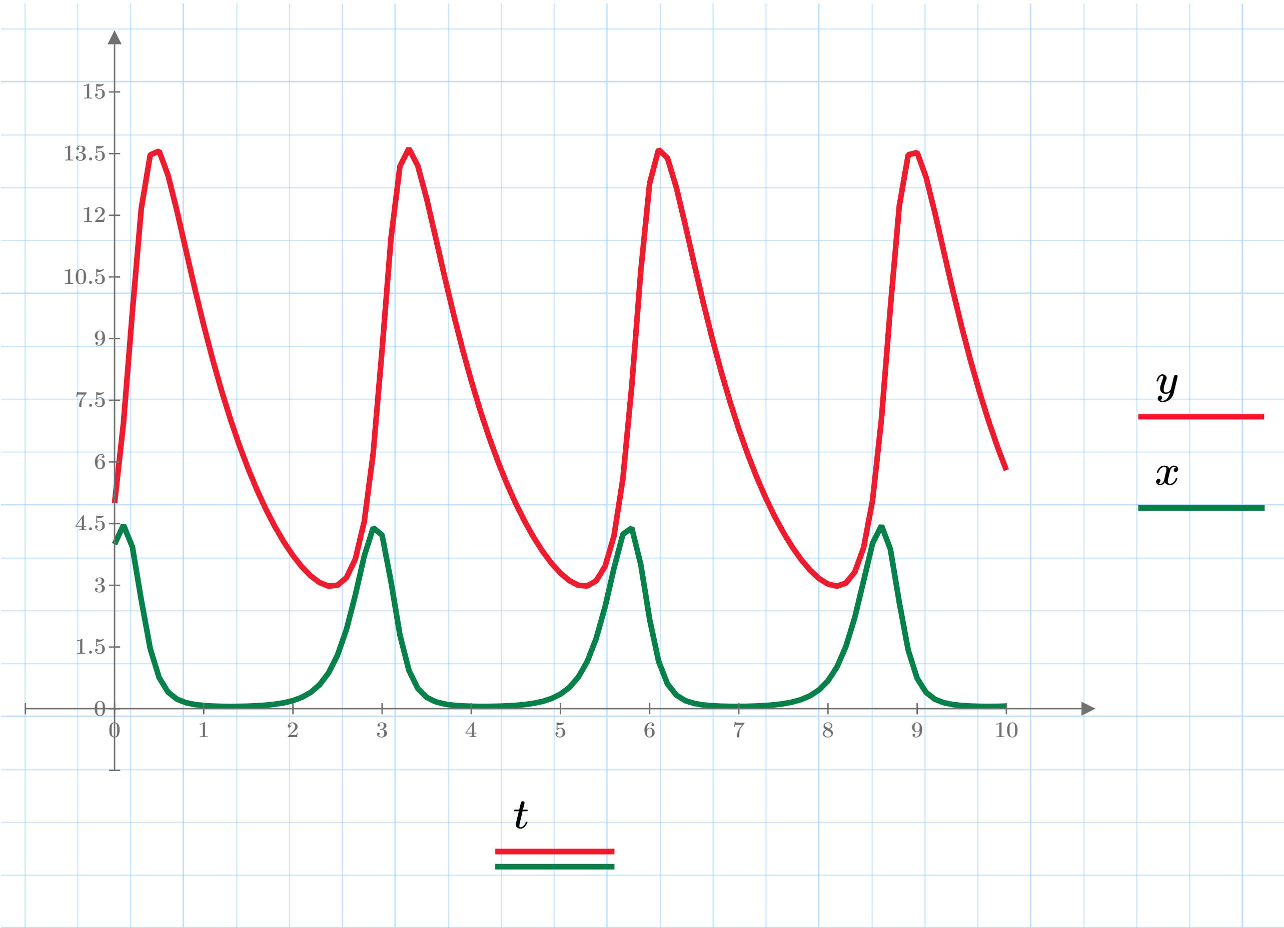

Рис. 6

Увеличение рождаемости жертв приводит к уменьшению длительности периода и увеличению популяции хищников.

$$x = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = 5, \beta = 1, \gamma = 4, \delta = 1$$

Рис. 7

При данных параметрах система находится в равновесии: обе популяции неизменны и сбалансированы.

Фазовый портрет при:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} x_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} x_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = 2, \beta = 0.5, \gamma = 1 \delta = 0.5$$

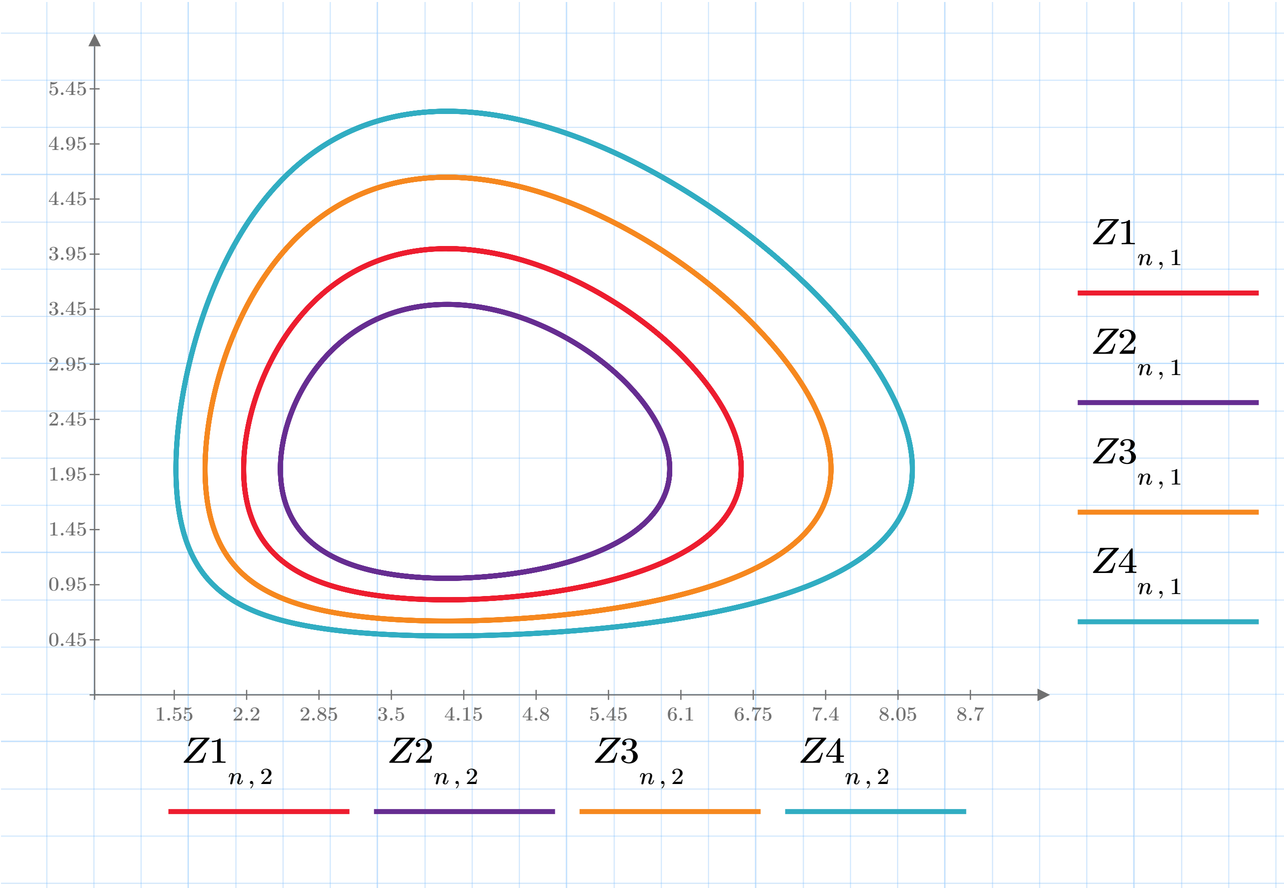

Рис. 8

5 Вывод

В ходе лабораторной работы была изучена модель Лотки-Вольтерры и реализована с помощью программы Mathcad при разных параметрах.