



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
**«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)**

**ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ
ТЕХНОЛОГИЙ**

**Кафедра информатики, математического и компьютерного
моделирования**

**Лабораторная работа №4
«Математический маятник»**

по дисциплине «Математическое моделирование»

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент

гр. Б9120-01.03.02

Агличиев А.О.

(ФИО)

(подпись)

Проверил профессор

Пермяков М.С.

(ФИО)

(подпись)

« 3 » февраля 2023 г.

г. Владивосток
2023

Содержание

1	Введение	3
2	Создание математической модели	3
3	Реализация модели	6
3.1	Сравнение линейных и нелинейных незатухающих колебаний . .	6
3.2	Затухающие колебания	10
3.3	Вынужденные колебания	13
3.4	Резонанс	14
4	Вывод	15

1 Введение

Маятник — система, подвешенная в поле тяжести и совершающая механические колебания. Маятники используются в различных приборах, например, в часах и сейсмографах. Они облегчают изучение колебаний, так как наглядно демонстрируют их свойства. Одним из простейших маятников является шарик, подвешенный на нити. Если считать нить нерастяжимой и пренебречь размерами груза по сравнению с длиной нити, а массой нити по сравнению с массой груза, то шарик на нити можно рассматривать как материальную точку, находящуюся на неизменном расстоянии от точки подвеса. Такой маятник называется математическим.

В данной работе будет реализована модель маятника в нескольких вариантах:

1. Без учёта трения
2. С учётом трения
3. С учётом трения и вынужденных колебаний

2 Создание математической модели

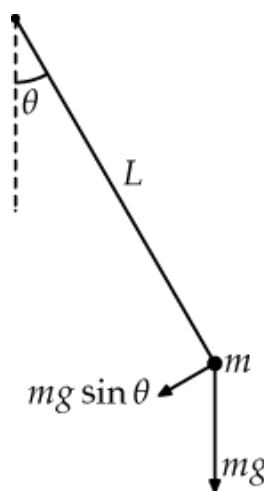


Рис. 1: Математический маятник

Момент инерции математического маятника равен:

$$M_{\text{ин}} = J \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (1)$$

, где θ - угол наклона маятника в текущий момент, J - момент инерции, относительно оси

Момент инерции вычисляется по формуле:

$$J = mL^2 \quad (2)$$

, где m - масса маятника, L - длина нити

Если тело не находится в положении равновесия, то на него действует возвращающий момент:

$$M_{\text{в}} = FL = -mgL \sin \theta$$

, где $g \approx 9.8$ - ускорение свободного падения

Подставим (2) в (1) и приравняем моменты:

$$mL^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgL \sin \theta$$

Сделаем элементарные преобразования, примем $\omega_0 = \frac{g}{L}$ и получим нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее маятник:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \cdot \sin \theta = 0$$

Для решения понизим порядком и сведем к системе дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v, \\ \dot{v} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \end{cases}$$

При малых углах $\sin \theta \approx \theta$ и уравнение превращается в

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \cdot \theta = 0,$$

с соответствующей ей системой:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v, \\ \dot{v} + \omega_0^2 \theta = 0 \end{cases}$$

При наличии затуханий уравнение примет вид:

$$\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0,$$

где k - коэффициент затухания
с соответствующей ей системой:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v, \\ \dot{v} + kv + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \end{cases}$$

Добавим внешнюю периодическую силу, действующую на маятник, и колебания станут вынужденными:

$$\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = a \cdot \sin(\omega t),$$

с соответствующей ей системой:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v, \\ \dot{v} + kv + \omega_0^2 \sin \theta = a \sin(\omega t) \end{cases}$$

3 Реализация модели

Модель была реализована в MathCad. Система дифференциальных уравнений решалась с помощью функции rkfixed. Она решает систему ОДУ методом Рунге-Кутты четвертого порядка и принимает в качестве параметров вектор начальных условий, границы интервала, на котором ищется решение, число точек внутри интервала и вектор содержащий производные.

3.1 Сравнение линейных и нелинейных незатухающих колебаний

$\theta_1 := \begin{bmatrix} 10 \text{ deg} \\ 0 \end{bmatrix}$	$\omega_1 := 3$	$\theta_2 := \begin{bmatrix} 10 \text{ deg} \\ 0 \end{bmatrix}$	$\omega_2 := 3$
$D1(t, \theta) := \begin{bmatrix} \theta_1 \\ -(\omega_1^2) \cdot \sin(\theta_0) \end{bmatrix}$		$D2(t, \theta) := \begin{bmatrix} \theta_1 \\ -(\omega_2^2) \cdot \theta_0 \end{bmatrix}$	
$Z1 := \text{rkfixed}(\theta_1, 0, 6, 1000, D1)$		$Z2 := \text{rkfixed}(\theta_2, 0, 6, 1000, D2)$	
$t := Z1^{(0)}$	$\theta_1 := Z1^{(1)}$	$\theta_2 := Z2^{(1)}$	
$\theta_1 := \theta_1 \cdot \frac{180}{\pi}$	$v1 := Z1^{(2)}$	$\theta_2 := \theta_2 \cdot \frac{180}{\pi}$	$v2 := Z2^{(2)}$

Рис. 2: Код для сравнения линейных и нелинейных незатухающих колебаний

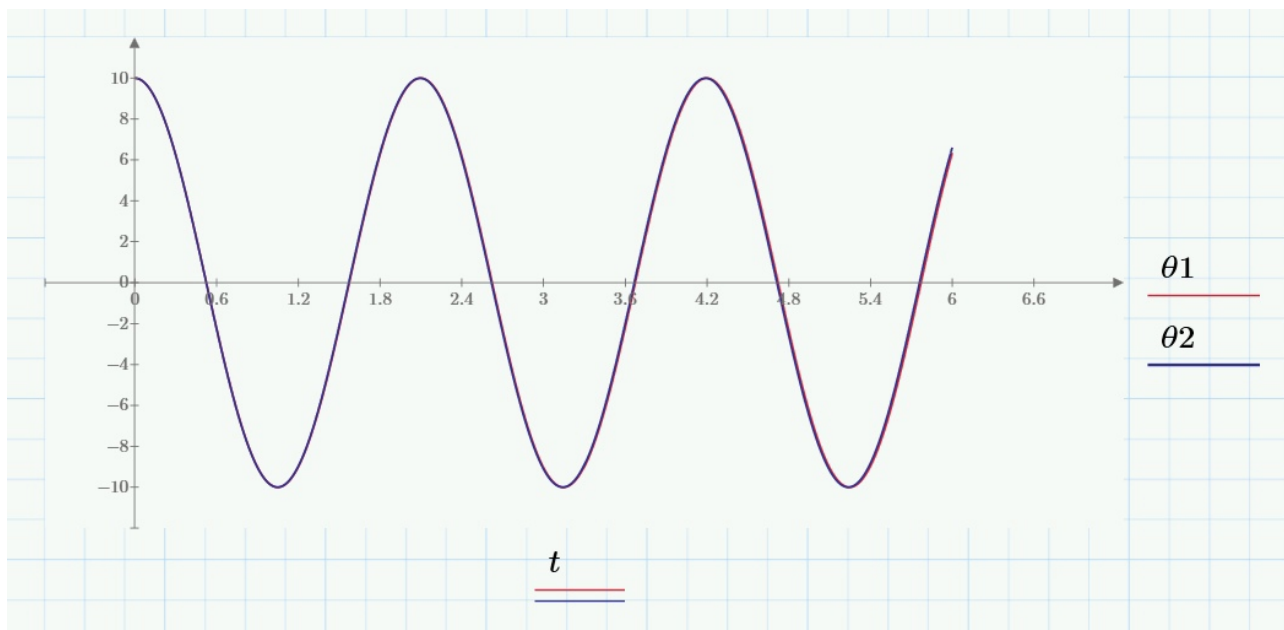


Рис. 3: График сравнения линейных и нелинейных колебаний при $\theta = 10^\circ$

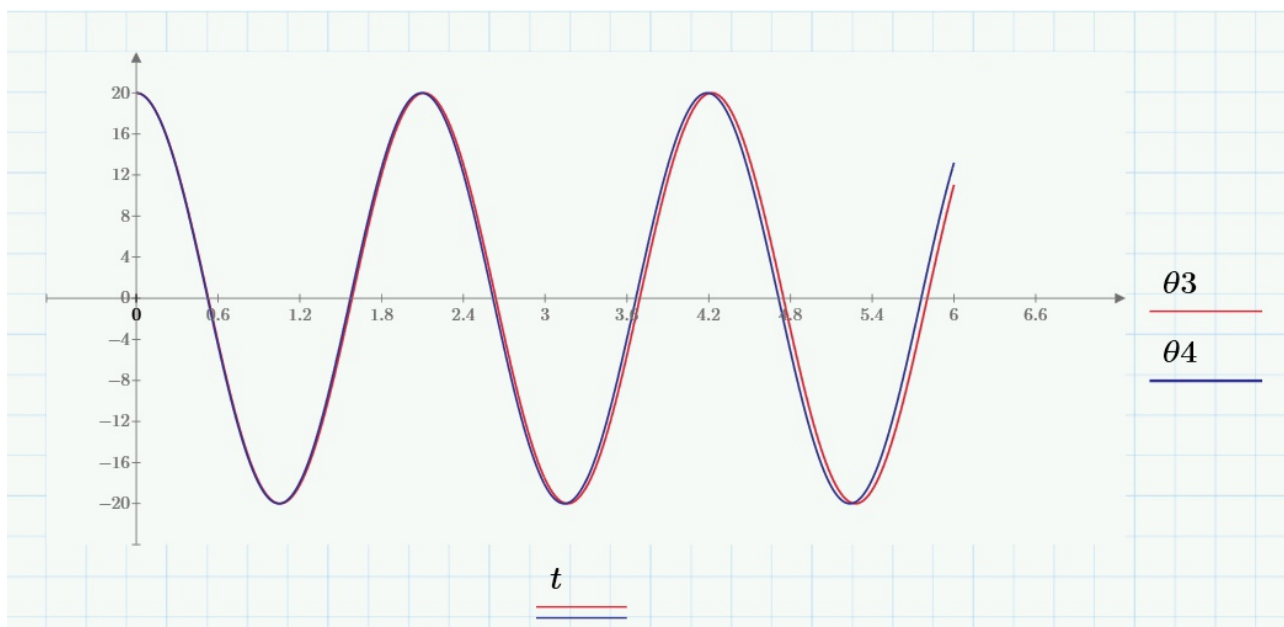


Рис. 4: График сравнения линейных и нелинейных колебаний при $\theta = 20^\circ$

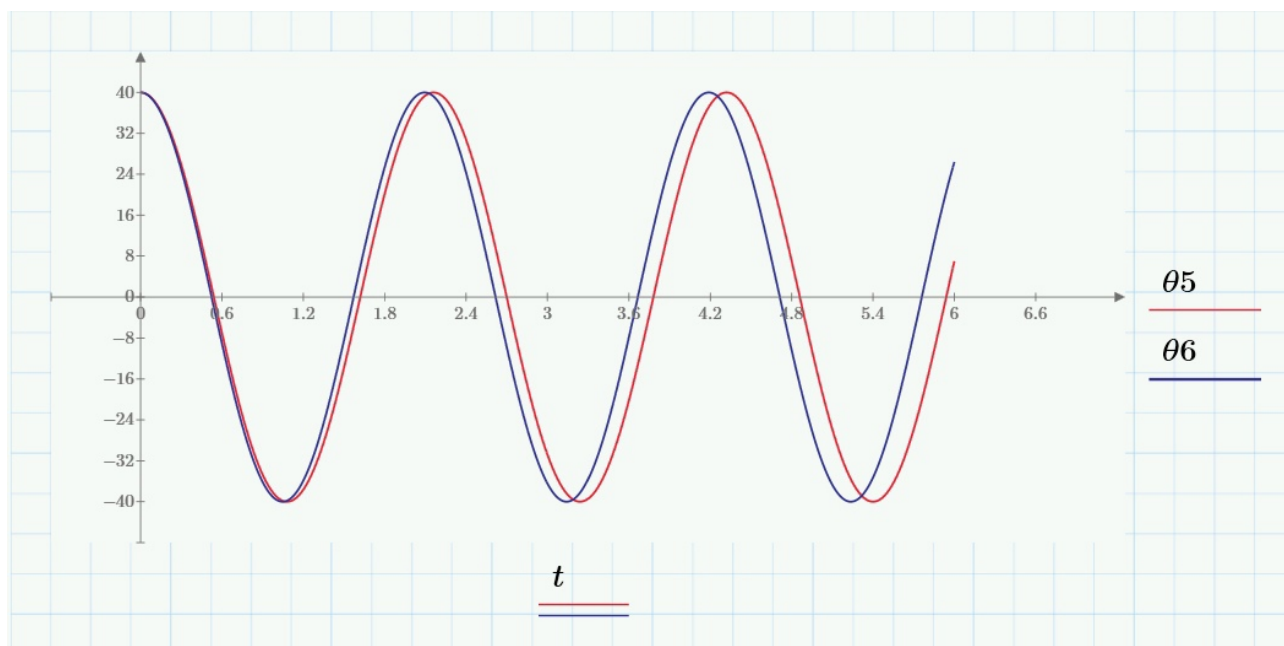


Рис. 5: График сравнения линейных и нелинейных колебаний при $\theta = 40^\circ$

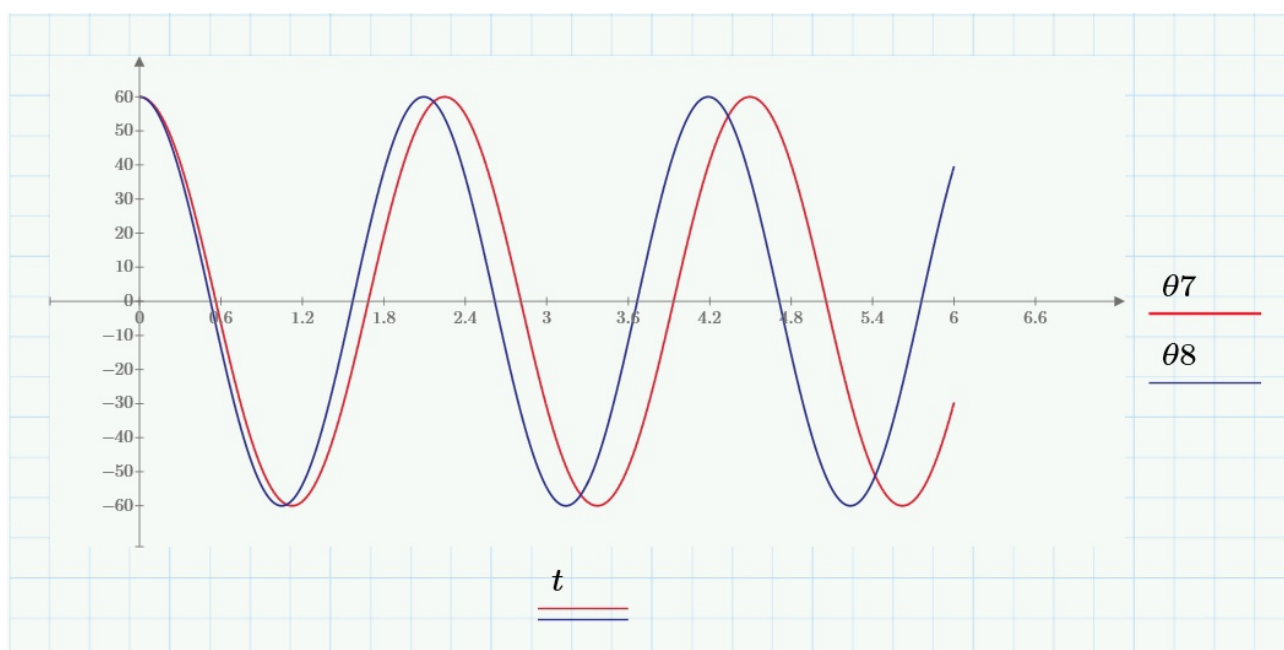


Рис. 6: График сравнения линейных и нелинейных колебаний при $\theta = 60^\circ$

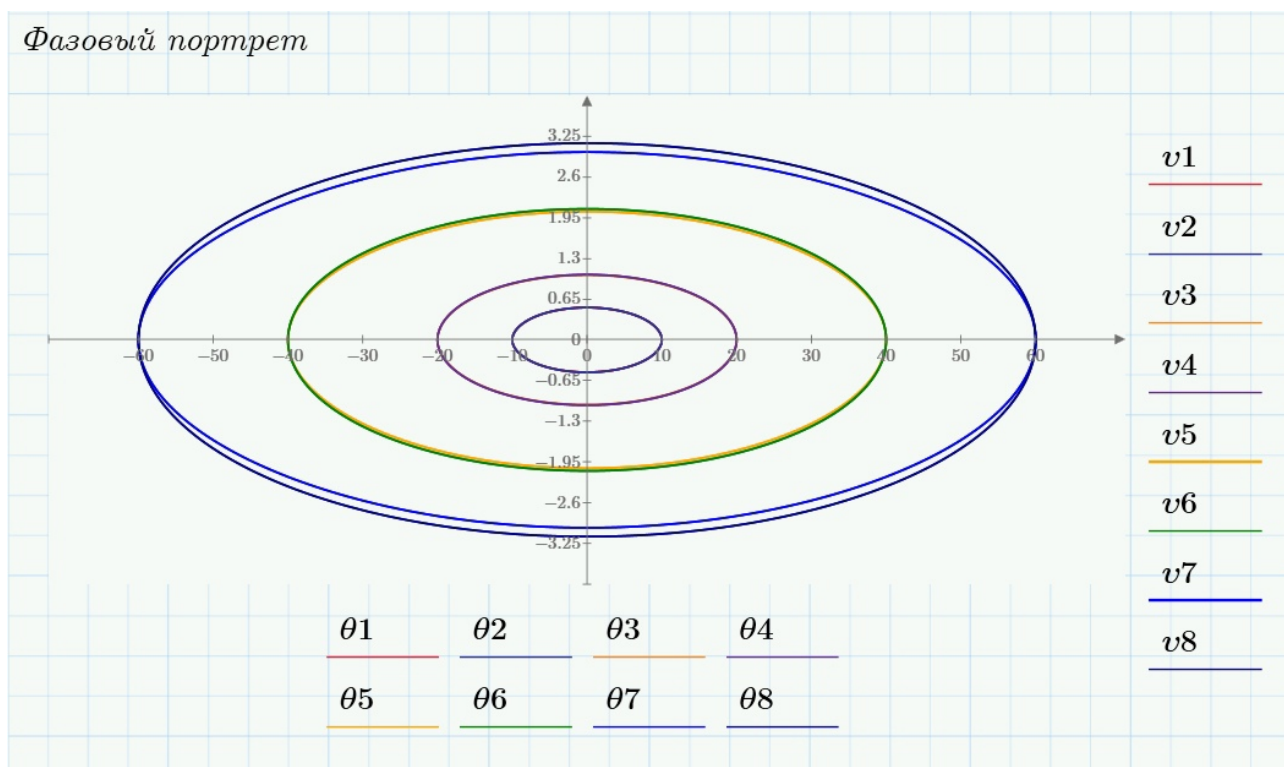


Рис. 7: Фазовый портрет колебаний при разных углах

3.2 Затухающие колебания

$$\begin{aligned}\theta_1 &:= \begin{bmatrix} 20 \text{ deg} \\ 0 \end{bmatrix} & \omega_1 &:= 3 & k_1 &:= 0.25 \\ D_1(t, \theta) &:= \begin{bmatrix} \theta_1 \\ -(\omega_1^2) \cdot \sin(\theta_0) - k_1 \cdot \theta_1 \end{bmatrix} \\ Z_1 &:= \text{rkfixed}(\theta_1, 0, 50, 1000, D_1) \\ t &:= Z_1^{(0)} & \theta_1 &:= Z_1^{(1)} \\ \theta_1 &:= \theta_1 \cdot \frac{180}{\pi} & v_1 &:= Z_1^{(2)}\end{aligned}$$

Рис. 8: Код для затухающих колебаний

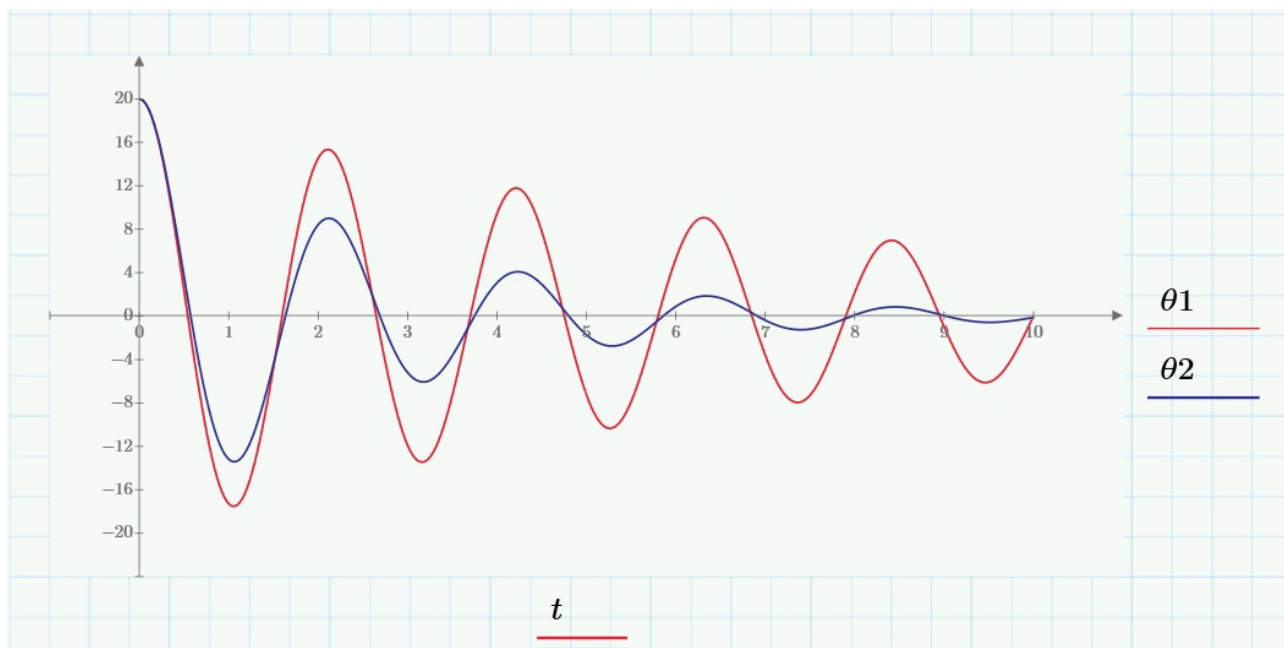


Рис. 9: График колебаний при $\theta = 20^\circ$ $k = 0.25$ и $k = 0.75$

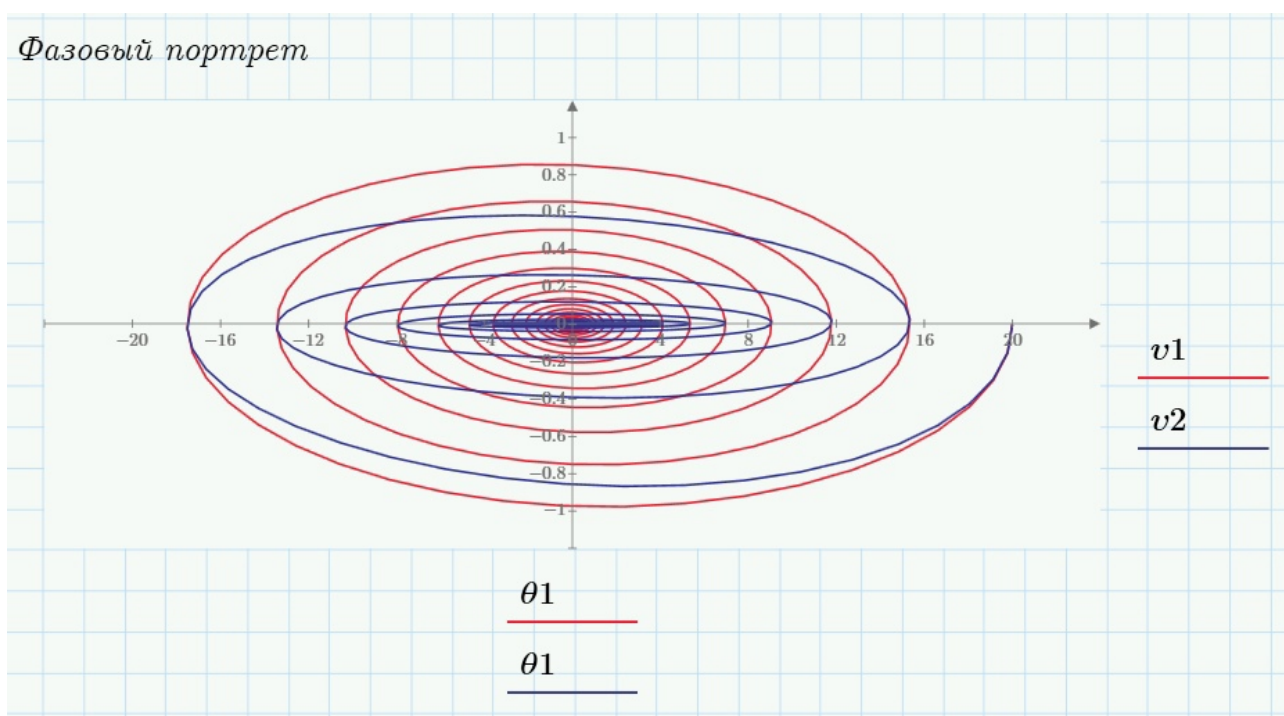


Рис. 10: Фазовый портрет при $\theta = 20^\circ$ $k = 0.25$ и $k = 0.75$

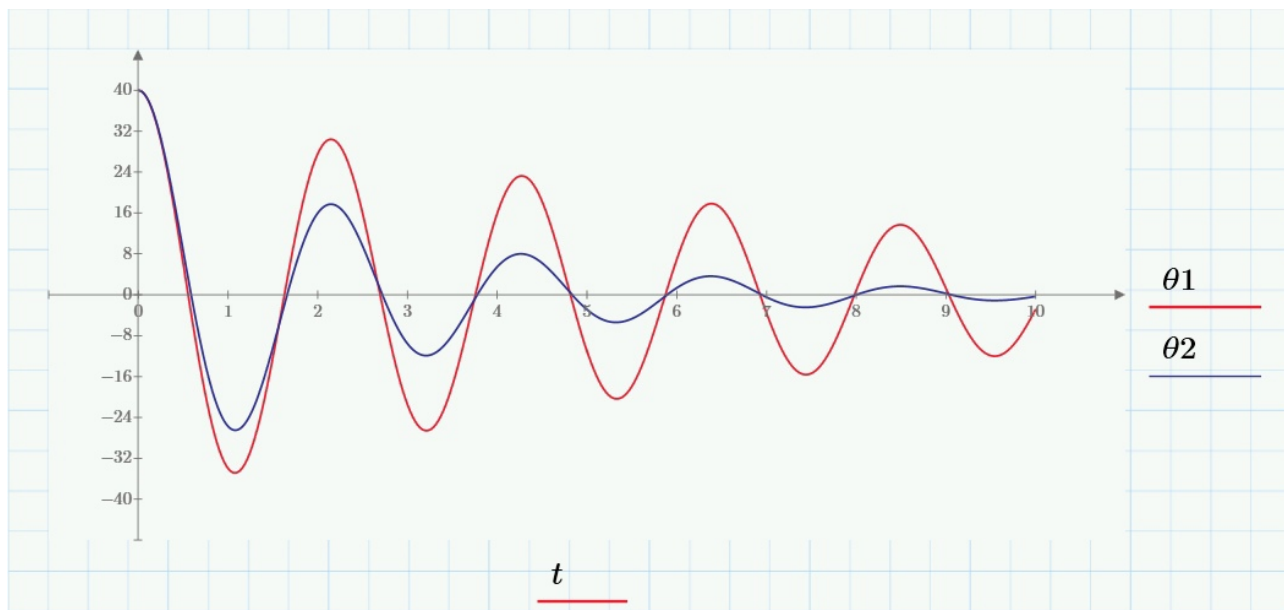


Рис. 11: График колебаний при $\theta = 40^\circ$ $k = 0.25$ и $k = 0.75$

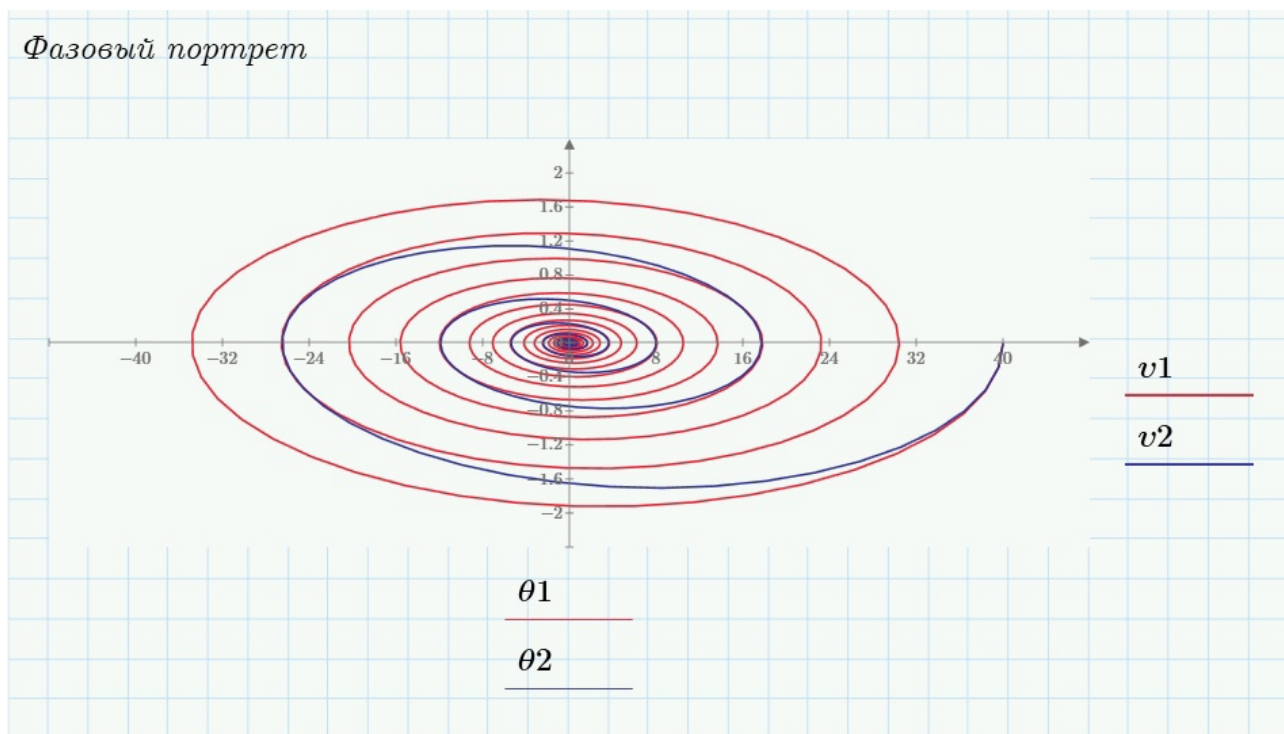


Рис. 12: Фазовый портрет при $\theta = 40^\circ$ $k = 0.25$ и $k = 0.75$

3.3 Вынужденные колебания

```

 $\theta_1 := \begin{bmatrix} 0 \text{ deg} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \omega_0 := 3 \quad k_1 := 0.25 \quad a := 1 \quad \omega_1 := 3$ 
 $D1(t, \theta) := \begin{bmatrix} \theta_1 \\ -(\omega_0^2) \cdot \sin(\theta_0) - k_1 \cdot \theta_1 + a \cdot \sin(\omega_1 \cdot t) \end{bmatrix}$ 

 $Z1 := \text{rkfixed}(\theta_1, 0, 50, 1000, D1)$ 

 $\theta_1 := Z1^{(1)} \quad t := Z1^{(0)}$ 

 $\theta_1 := \theta_1 \cdot \frac{180}{\pi} \quad v_1 := Z1^{(2)}$ 

```

Рис. 13: Код для вынужденных колебаний

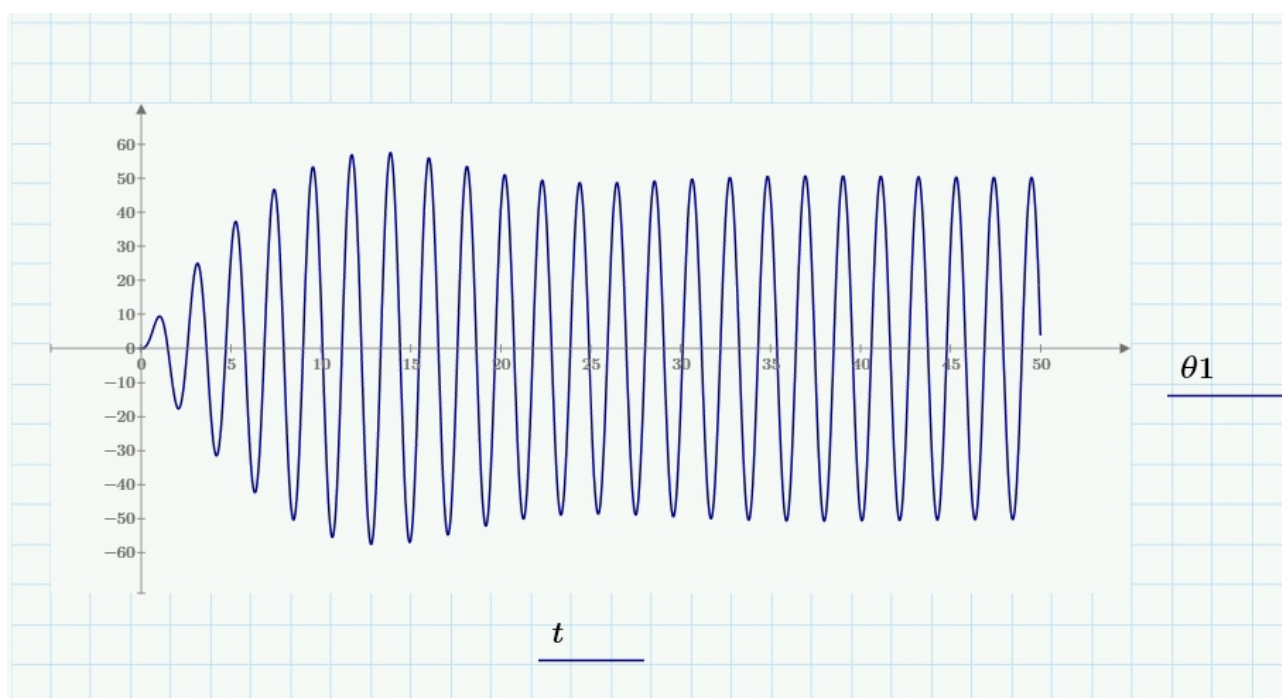


Рис. 14: График вынужденных колебаний

3.4 Резонанс

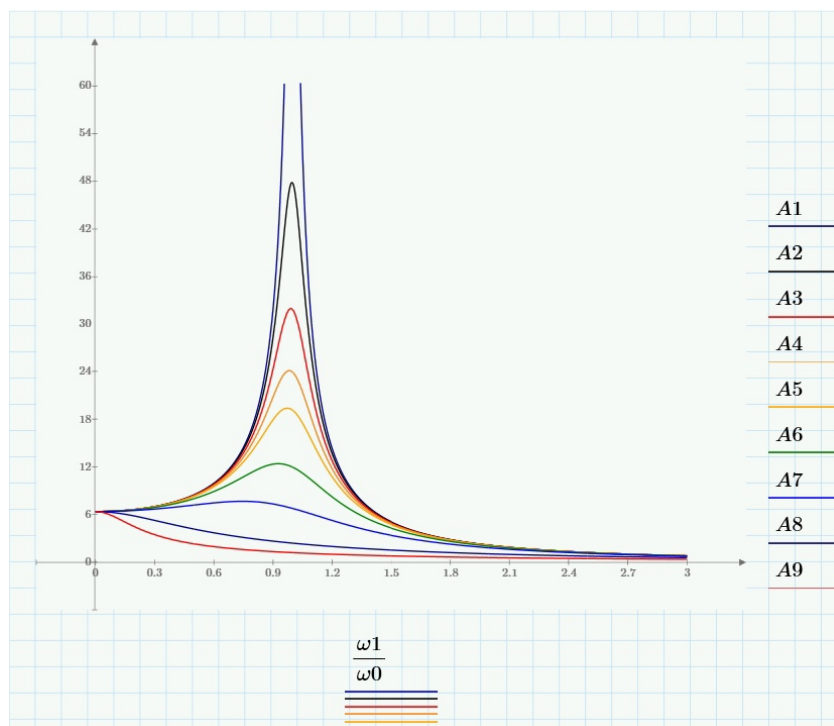
```

A1 := || i ← 0
      || while i < length(ω1)
      ||   || Ai ←  $\frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{1_i}^2)^2 + 0.01 \cdot 4 \omega_{1_i}^2}}$ 
      ||   || i ← i + 1
      || A

```

A1 := $A1 \cdot \frac{180}{\pi}$

Рис. 15: Код для резонанса



При $\omega_0 = \omega$ возникает резонанс.

4 Вывод

Таким образом, были составлены математические модели линейных и нелинейных незатухающих, затухающих и вынужденных колебаний.