



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

**ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ
ТЕХНОЛОГИЙ**

**Кафедра информатики, математического и компьютерного
моделирования**

ОТЧЕТ

к лабораторной работе №4 по дисциплине
«Обыкновенные дифференциальные уравнения»

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент

гр. Б9120-01.03.02

Агличеев А.О.

(ФИО)

(подпись)

« 25 » января 2022 г.

г. Владивосток
2024

Содержание

1	Введение	3
2	Задание 1	4
2.1	Постановка задачи	4
2.2	Решение	4
3	Задание 2	6
3.1	Постановка задачи	6
3.2	Решение	6
4	Задание 3	9
4.1	Постановка задачи	9
4.2	Решение	9
5	Заключение	10

1 Введение

В данной лабораторной работе мне нужно решить и дать хар-ку линейных уравнений высших порядков, решить задачу Коши для уравнений 2-го порядка и найти коэффициент логистического уравнения.

2 Задание 1

2.1 Постановка задачи

Для следующих линейных дифференциальных уравнений дать характеристику и найти общее решение:

1. $y'' - y' \tan x - y \sec^2 x = 0$

2. $y'' - y' = \tanh x$

3. $x^2 y'' + 2x y' = (2 + \ln^2 x) \cdot \sinh(5 \ln x) \cdot \sin(\ln x)$

4. $x^{IV} + 2x''' + 30x'' + 8x' + 104x = (-6 + 5t^2) \cdot \sinh 4t$

5. $(x - 1)^2 y'' - x^2 y' + 2xy = 2y'' - 3y' + 2y$

2.2 Решение

Поиск решения и построение векторного поля будет проводиться в системе компьютерной математики Wolfram Mathematica.

1. $y'' - y' \tan x - y \sec^2 x = 0$

Характеристика: Линейное однородное приведенное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами

Ответ: $y \cos x = C_1 \sin x + C_2$

2. $y'' - y' = \tanh x$

Характеристика: Линейное неоднородное приведенное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, неоднородность общего вида

Ответ: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + (e^x + e^{-x}) \operatorname{arctg} e^x$

$$3. \quad x^2 y'' + 2xy' = (2 + \ln^2 x) \cdot \sinh(5 \ln x) \cdot \sin(\ln x)$$

Характеристика: Уравнение Эйлера второго порядка, характеристическая неоднородность после замены $x = e^t$

$$\begin{aligned} \text{Ответ: } y = & \frac{C_1}{x} + C_2 + \frac{29x^5 \ln^2 x \cdot \sin \ln x}{1924} - \frac{19 \ln^2 x \cdot \sin \ln x}{884x^5} - \\ & - \frac{2299x^5 \ln x \cdot \sin \ln x}{232361} + \frac{14464829x^5 \sin \ln x}{445138564} + \\ & - \frac{801x^5 \ln x \cdot \sin \ln x}{48841x^5} - \frac{2042719x^5 \sin \ln x}{43175444x^5} - \\ & - \frac{11x^5 \ln^2 x \cdot \cos \ln x}{1924} - \frac{9 \ln^2 x \cdot \cos \ln x}{884x^5} - \\ & - \frac{6023787x^5 \cos \ln x}{445138564} + \frac{2789x^5 \ln x \cdot \cos \ln x}{462722} - \\ & - \frac{1110393x^5 \cos \ln x}{43175444x^5} - \frac{1259x^5 \ln x \cdot \cos \ln x}{97682x^5} \end{aligned}$$

$$4. \quad x^{IV} + 2x''' + 30x'' + 8x' + 104x = (-6 + 5t^2) \cdot \sinh 4t$$

Характеристика: Линейное неоднородное приведенное дифференциальное уравнения четвёртого порядка с постоянными коэффициентами, характеристическая неоднородность

$$\begin{aligned} \text{Ответ: } y = & e^{-t}(C_1 \cos 5t + C_2 \sin 5t) + C_3 \cos 2t + C_4 \sin 2t + e^{4t} \left(\frac{1}{400} t^2 - \right. \\ & \left. - \frac{3}{1000} t - \frac{39}{20000} \right) - e^{-4t} \left(\frac{1}{272} t^2 + \frac{49}{11560} t + \frac{21929}{3930400} \right) \end{aligned}$$

$$5. \quad (x-1)^2 y'' - x^2 y' + 2xy = 2y'' - 3y' + 2y$$

Характеристика: Линейное однородное неприведенное дифференциальное уравнения второго порядка с переменными коэффициентами

$$\text{Ответ: } y = C_1 e^x + C_2 (x^2 - 1)$$

3 Задание 2

3.1 Постановка задачи

Для заданных уравнений указать тип в простой форме. Найти общее решение. Найти частное решение, удовлетворяющее заданным условиям. Построить график решения:

1. $2yy'' + y'^2 + y'^4 = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$
2. $2yy'' = 4y'^2 + y''$; $y(0) = 0$, $y'(0) = -2$

3.2 Решение

1.
$$\begin{cases} 2yy'' + y'^2 + y'^4 = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 2; \end{cases}$$

Тип уравнения: Общее уравнение не содержащее аргумента

Общее решение: $2(C_1y - 1)^{\frac{3}{2}} + C_2 = 3C_1x$

Задача Коши: $(5y - 4)^{\frac{3}{2}} - 1 = 15x$

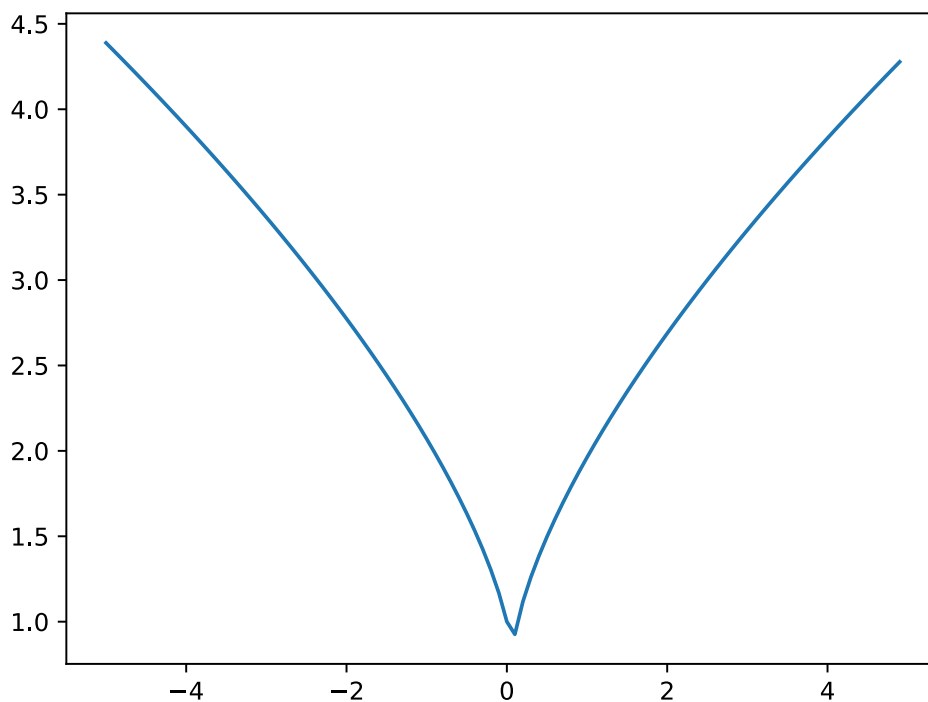


Рис. 1: График $(5y - 4)^{\frac{3}{2}} - 1 = 15x$

$$2. \begin{cases} 2yy'' = 4y'^2 + y'', \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = -2; \end{cases}$$

Тип уравнения: Общее уравнение не содержащее аргумента

Общее решение: $y = \frac{C_1x + C_2 - 1}{2(C_1x + C_2)}$

Задача Коши: $y = \frac{2x}{4x - 1}$

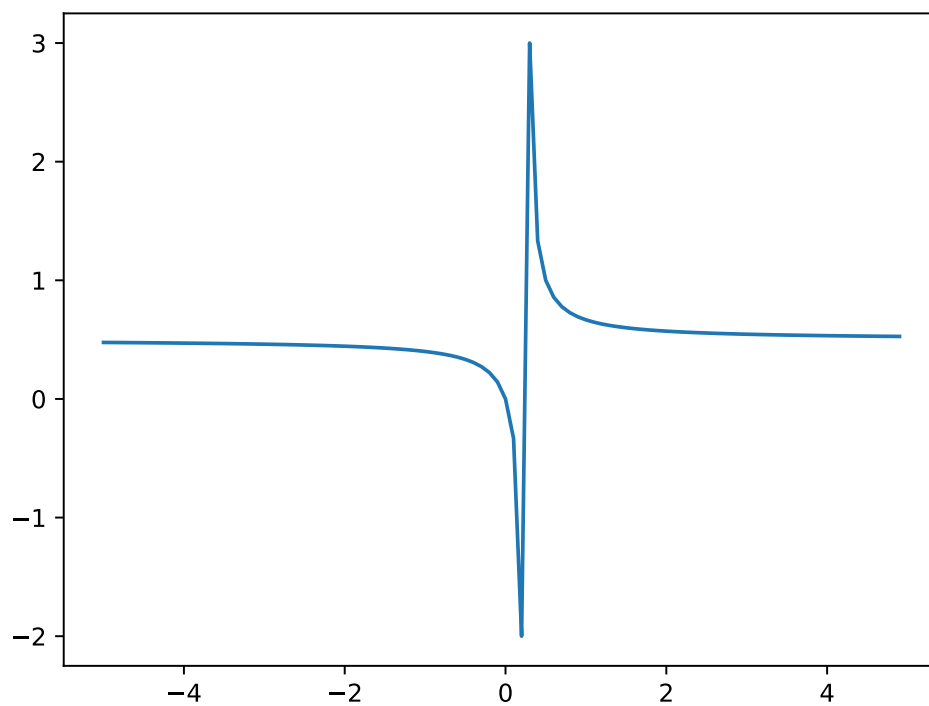


Рис. 2: График $y = \frac{2x}{4x - 1}$

4 Задание 3

4.1 Постановка задачи

Дано логистическое уравнение популяции:

$$\frac{dP(t)}{dt} = kP(t) \cdot \left(1 - \frac{P(t)}{M}\right), \quad P(0) = 800, \quad P(800) = 1100 \\ M = 29000, \quad P(t_i) = 3100$$

Аналитически найти, при каких k и t_i решение будет удовлетворять условиям выше. Вывести соответствующую систему для неизвестных. Построить график решения данного уравнения. Решение оформить в среде Т_ЕX.

4.2 Решение

Решим дифференциальное уравнение:

$$\frac{P}{M - P} = Ce^{kt}$$

Составим систему для неизвестных и решим её:

$$\begin{cases} \frac{800}{28200} = Ce^0, \\ \frac{1100}{27900} = Ce^{800k}, \\ \frac{3100}{25900} = Ce^{kt_i}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{800}{28200} = C, \\ \ln \left(\frac{1551}{1116} \right)^{1/800} = k, \\ \log_{\frac{1551}{1116}} \left(\frac{4371}{1036} \right)^{800} = t_i. \end{cases}$$

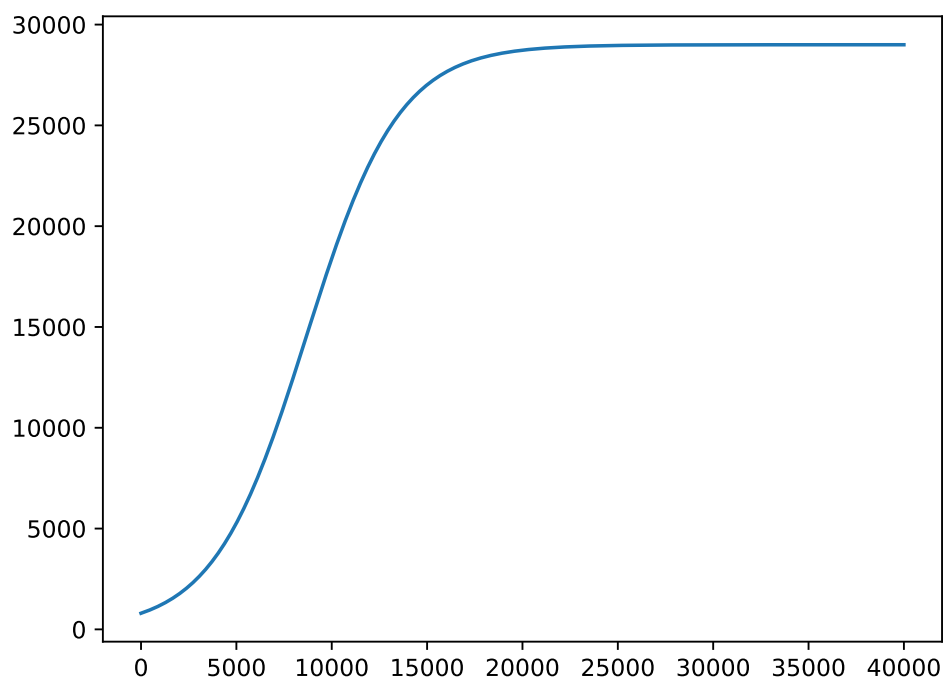


Рис. 3: График решения уравнения

5 Заключение

Я решил 5 линейных уравнений высших порядков, 2 задачи Коши для уравнений 2-го порядка и аналитически нашёл коэффициент для логистического уравнения. Оформлял отчёт по работе в «TeX Live».