



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
**«Дальневосточный федеральный университет»  
(ДВФУ)**

---

**ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ  
ТЕХНОЛОГИЙ**

**Кафедра информатики, математического и компьютерного  
моделирования**

**Лабораторная работа №4  
«Математический маятник»**

по дисциплине «Математическое моделирование»

Направление подготовки  
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент

гр. Б9120-01.03.02

Агличиев А.О.

(ФИО)

(подпись)

Проверил профессор

Пермяков М.С.

(ФИО)

(подпись)

« 2 » февраля 2023 г.

**г. Владивосток  
2023**

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Создание математической модели</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Реализация модели</b>	<b>7</b>
3.1	Сравнение линейных и нелинейных незатухающих колебаний . .	7
3.2	Затухающие колебания . . . . .	11
3.3	Вынужденные колебания . . . . .	14
3.4	Резонанс . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Вывод</b>	<b>17</b>

# 1 Введение

Маятник — система, подвешенная в поле тяжести и совершающая механические колебания. Маятники используются в различных приборах, например, в часах и сейсмографах. Они облегчают изучение колебаний, так как наглядно демонстрируют их свойства. Одним из простейших маятников является шарик, подвешенный на нити. Если считать нить нерастяжимой и пренебречь размерами груза по сравнению с длиной нити, а массой нити по сравнению с массой груза, то шарик на нити можно рассматривать как материальную точку, находящуюся на неизменном расстоянии от точки подвеса. Такой маятник называется математическим.

В данной работе будет реализована модель маятника в нескольких вариантах:

1. Без учёта трения
2. С учётом трения
3. С учётом трения и вынужденных колебаний

## 2 Создание математической модели

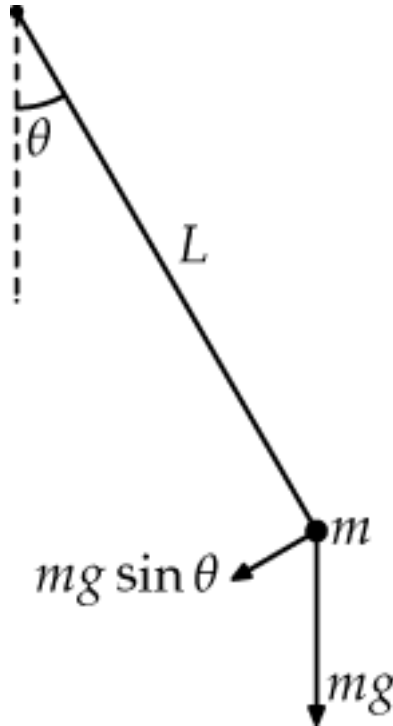


Рис. 1: Математический маятник

Момент инерции математического маятника равен:

$$M_{\text{ин}} = J \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (1)$$

, где  $\theta$  - угол наклона маятника в текущий момент,  $J$  - момент инерции, относительно оси

Момент инерции вычисляется по формуле:

$$J = mL^2 \quad (2)$$

, где  $m$  - масса маятника,  $L$  - длина нити

Если тело не находится в положении равновесия, то на него действует возвращающий момент:

$$M_{\text{в}} = FL = -mgL \sin \theta$$

, где  $g \approx 9.8$  - ускорение свободного падения

Подставим (2) в (1) и приравняем моменты:

$$mL^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgL \sin \theta$$

Сделаем элементарные преобразования, примем  $\omega_0 = \frac{g}{L}$  и получим нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее маятник:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \cdot \sin \theta = 0$$

Для решения понизим порядком и сведем к системе дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v, \\ \dot{v} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \end{cases}$$

При малых углах  $\sin \theta \approx \theta$  и уравнение превращается в

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \cdot \theta = 0,$$

с соответствующей ей системой:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v, \\ \dot{v} + \omega_0^2 \theta = 0 \end{cases}$$

При наличии затуханий уравнение примет вид:

$$\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0,$$

где  $k$  - коэффициент затухания

с соответствующей ей системой:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v, \\ \dot{v} + kv + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \end{cases}$$

Добавим внешнюю периодическую силу, действующую на маятник, и колебания станут вынужденными:

$$\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = a \cdot \sin(\omega t),$$

с соответствующей ей системой:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v, \\ \dot{v} + kv + \omega_0^2 \sin \theta = a \sin(\omega t) \end{cases}$$

### 3 Реализация модели

Модель была реализована в MathCad. Система дифференциальных уравнений решалась с помощью функции rkfixed. Она решает систему ОДУ методом Рунге-Кутты четвертого порядка и принимает в качестве параметров вектор начальных условий, границы интервала, на котором ищется решение, число точек внутри интервала и вектор содержащий производные.

#### 3.1 Сравнение линейных и нелинейных незатухающих колебаний

$\theta_1 := \begin{bmatrix} 10 \text{ deg} \\ 0 \end{bmatrix}$	$\omega_1 := 3$	$\theta_2 := \begin{bmatrix} 10 \text{ deg} \\ 0 \end{bmatrix}$	$\omega_2 := 3$
$D1(t, \theta) := \begin{bmatrix} \theta_1 \\ -(\omega_1^2) \cdot \sin(\theta_0) \end{bmatrix}$		$D2(t, \theta) := \begin{bmatrix} \theta_1 \\ -(\omega_2^2) \cdot \theta_0 \end{bmatrix}$	
$Z1 := \text{rkfixed}(\theta_1, 0, 6, 1000, D1)$		$Z2 := \text{rkfixed}(\theta_2, 0, 6, 1000, D2)$	
$t := Z1^{(0)}$	$\theta_1 := Z1^{(1)}$	$\theta_2 := Z2^{(1)}$	
$\theta_1 := \theta_1 \cdot \frac{180}{\pi}$	$v1 := Z1^{(2)}$	$\theta_2 := \theta_2 \cdot \frac{180}{\pi}$	$v2 := Z2^{(2)}$

Рис. 2: Код для сравнения линейных и нелинейных незатухающих колебаний

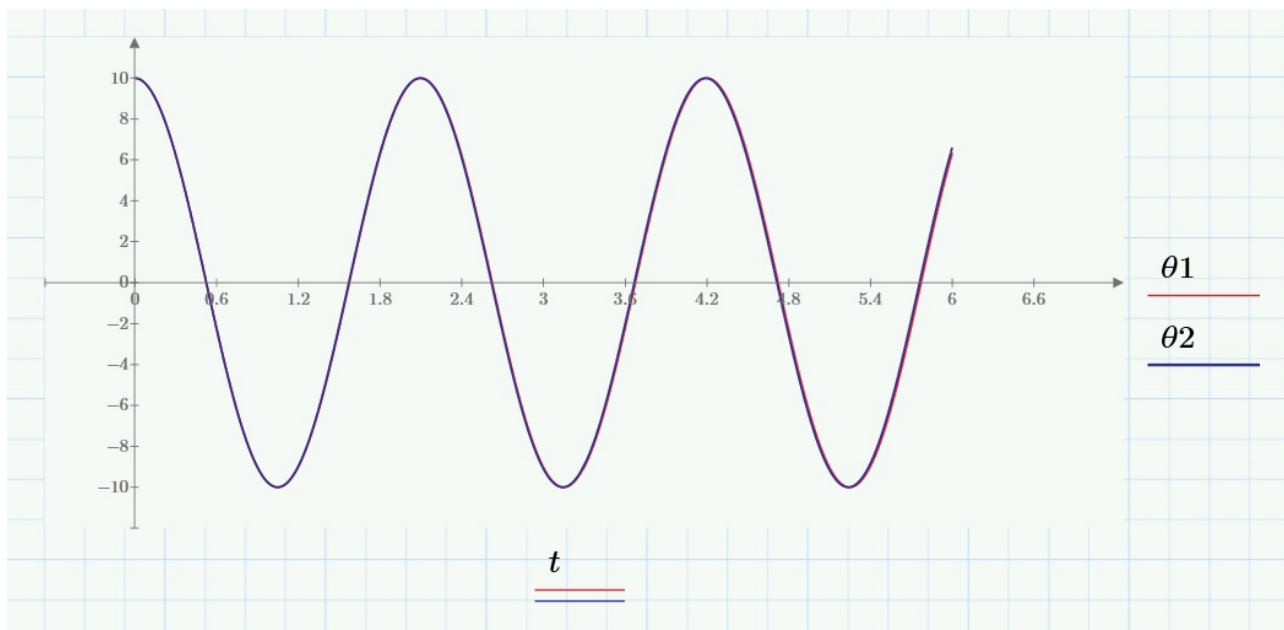


Рис. 3: График сравнения линейных и нелинейных колебаний при  $\theta = 10^\circ$

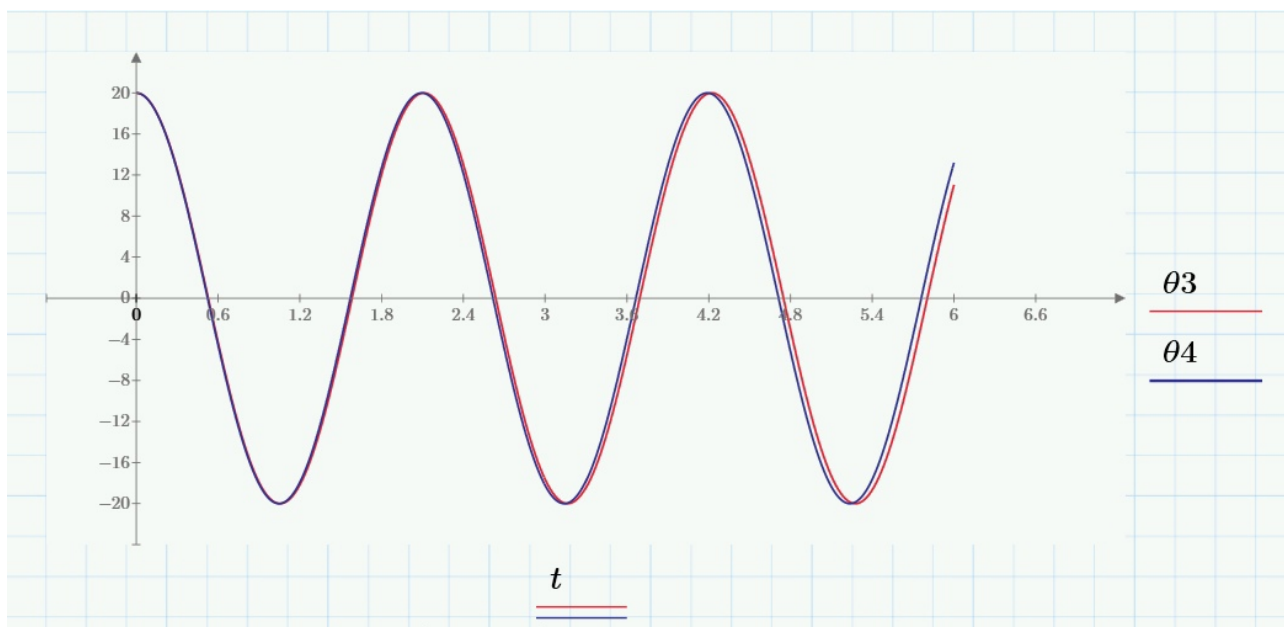


Рис. 4: График сравнения линейных и нелинейных колебаний при  $\theta = 20^\circ$



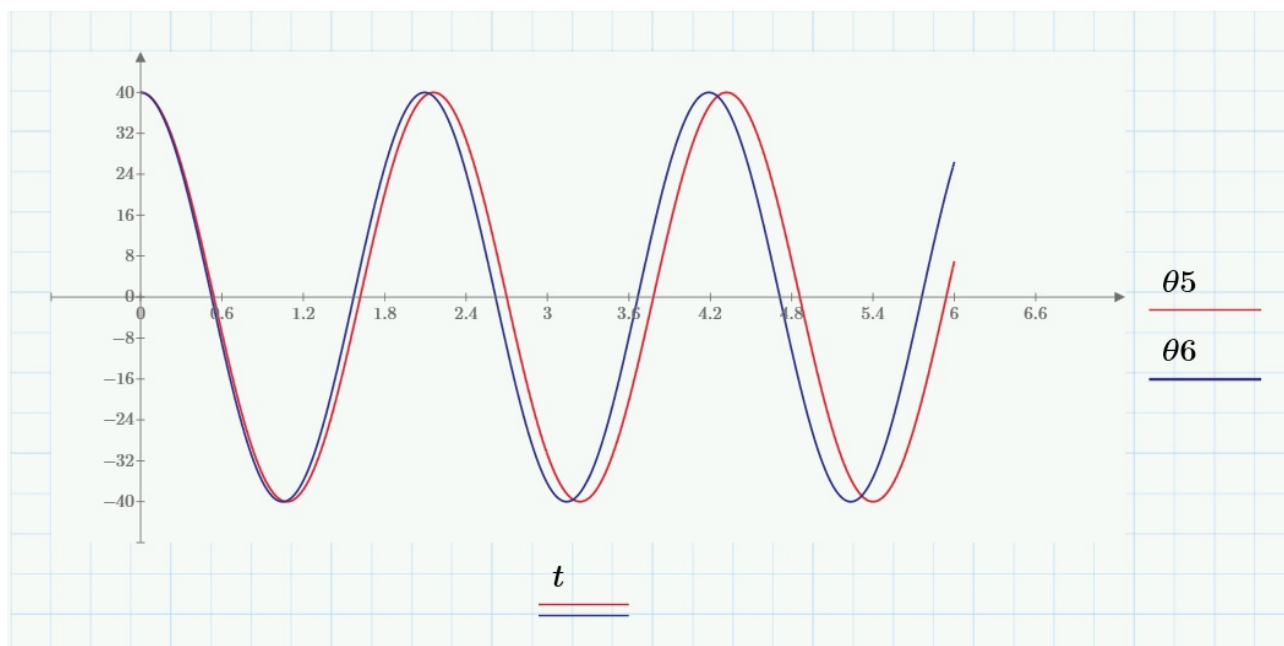


Рис. 5: График сравнения линейных и нелинейных колебаний при  $\theta = 40^\circ$

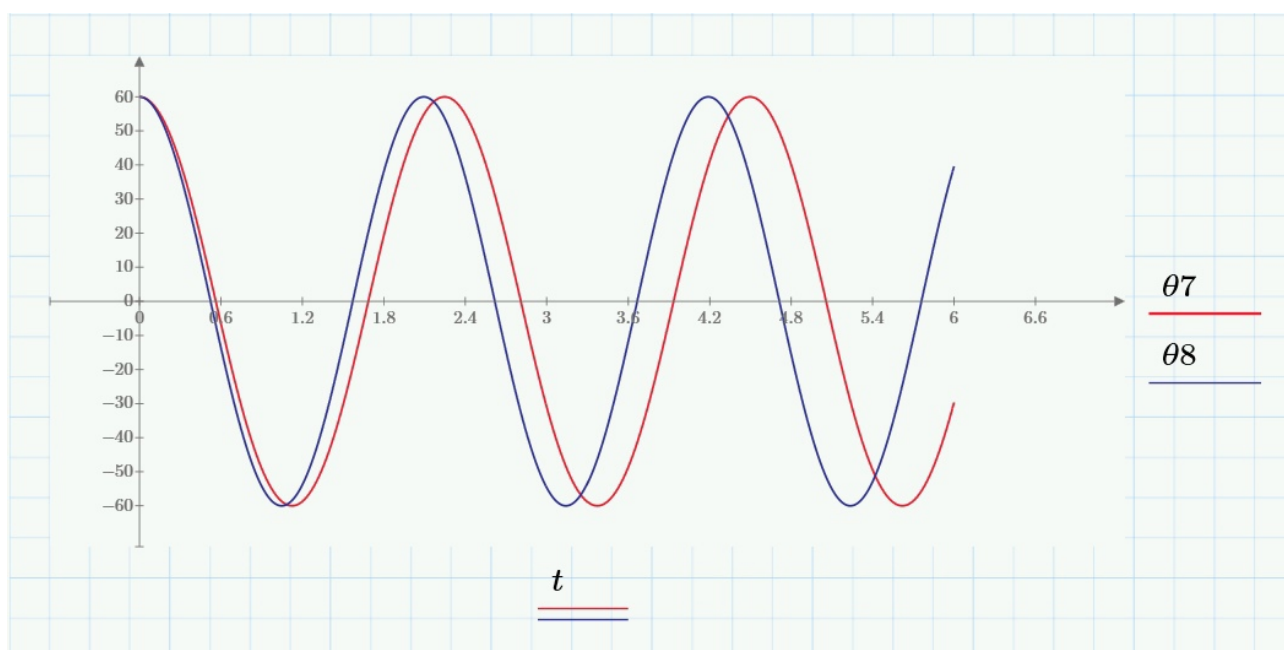


Рис. 6: График сравнения линейных и нелинейных колебаний при  $\theta = 60^\circ$

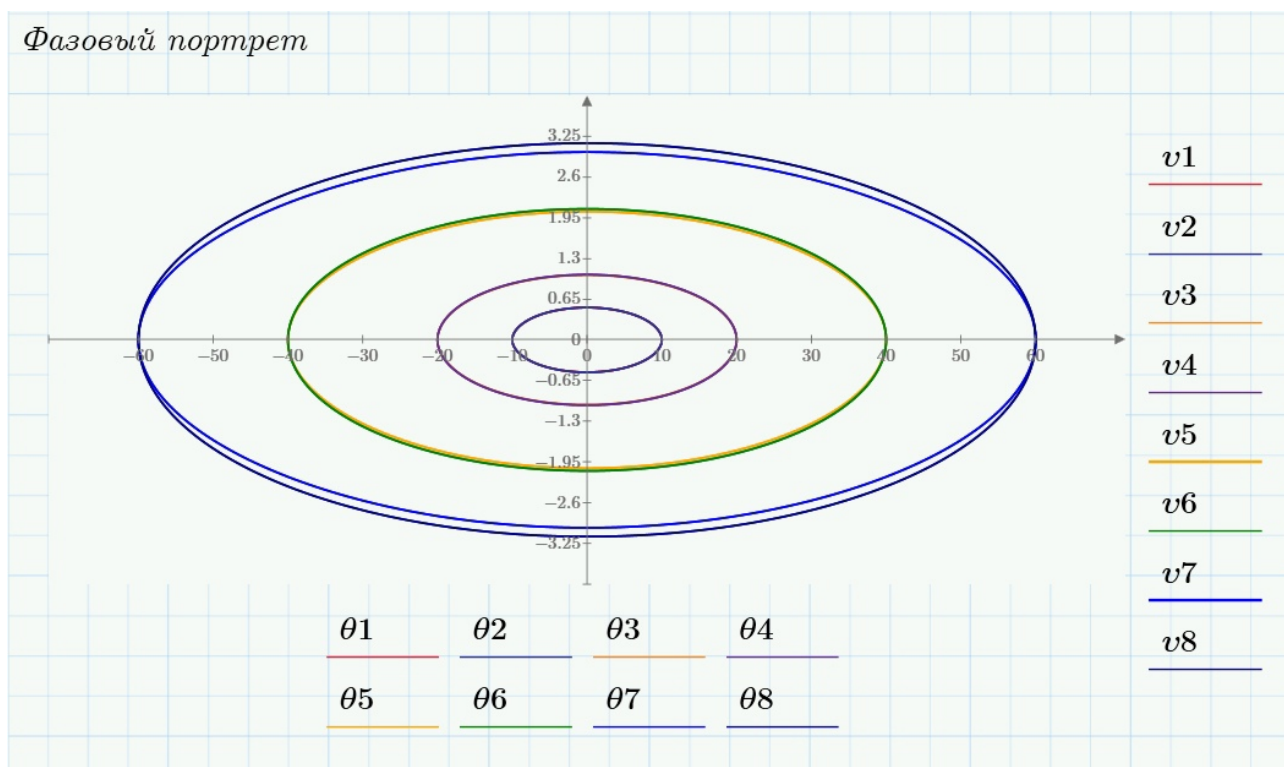


Рис. 7: Фазовый портрет колебаний при разных углах

## 3.2 Затухающие колебания

$$\begin{aligned}\theta_1 &:= \begin{bmatrix} 20 \text{ deg} \\ 0 \end{bmatrix} & \omega_1 &:= 3 & k_1 &:= 0.25 \\ D_1(t, \theta) &:= \begin{bmatrix} \theta_1 \\ -(\omega_1^2) \cdot \sin(\theta_0) - k_1 \cdot \theta_1 \end{bmatrix} \\ Z_1 &:= \text{rkfixed}(\theta_1, 0, 50, 1000, D_1) \\ t &:= Z_1^{(0)} & \theta_1 &:= Z_1^{(1)} \\ \theta_1 &:= \theta_1 \cdot \frac{180}{\pi} & v_1 &:= Z_1^{(2)}\end{aligned}$$

Рис. 8: Код для затухающих колебаний

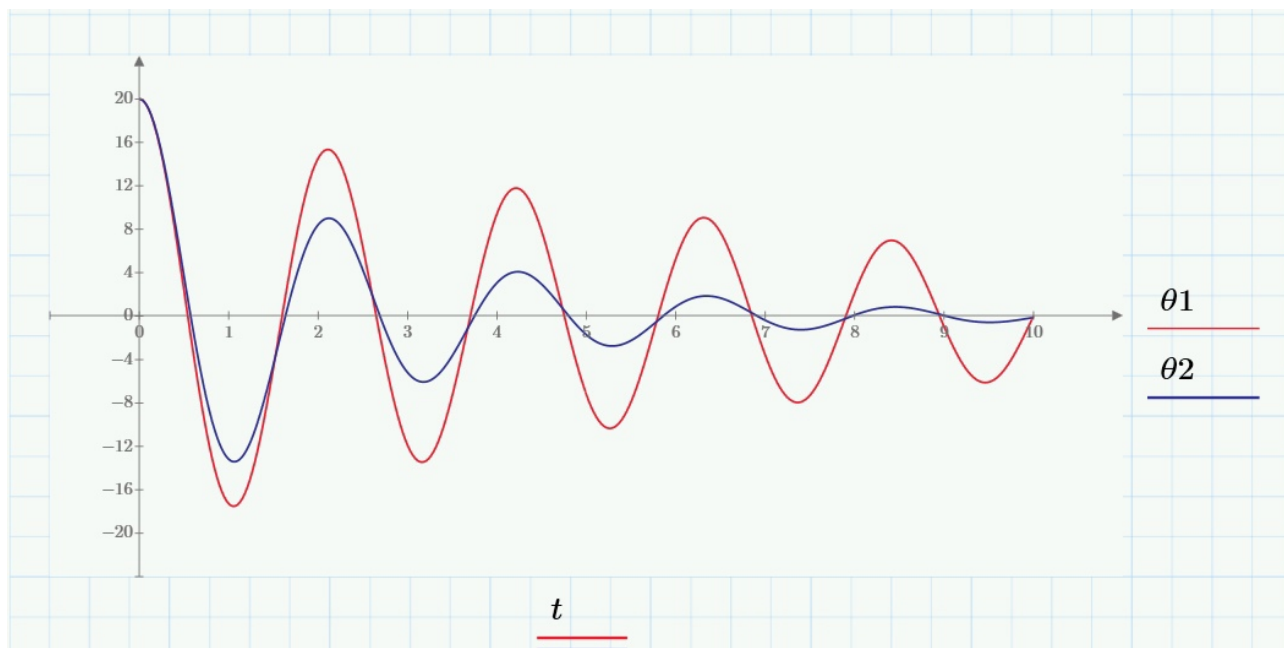


Рис. 9: График колебаний при  $\theta = 20^\circ$   $k = 0.25$  и  $k = 0.75$

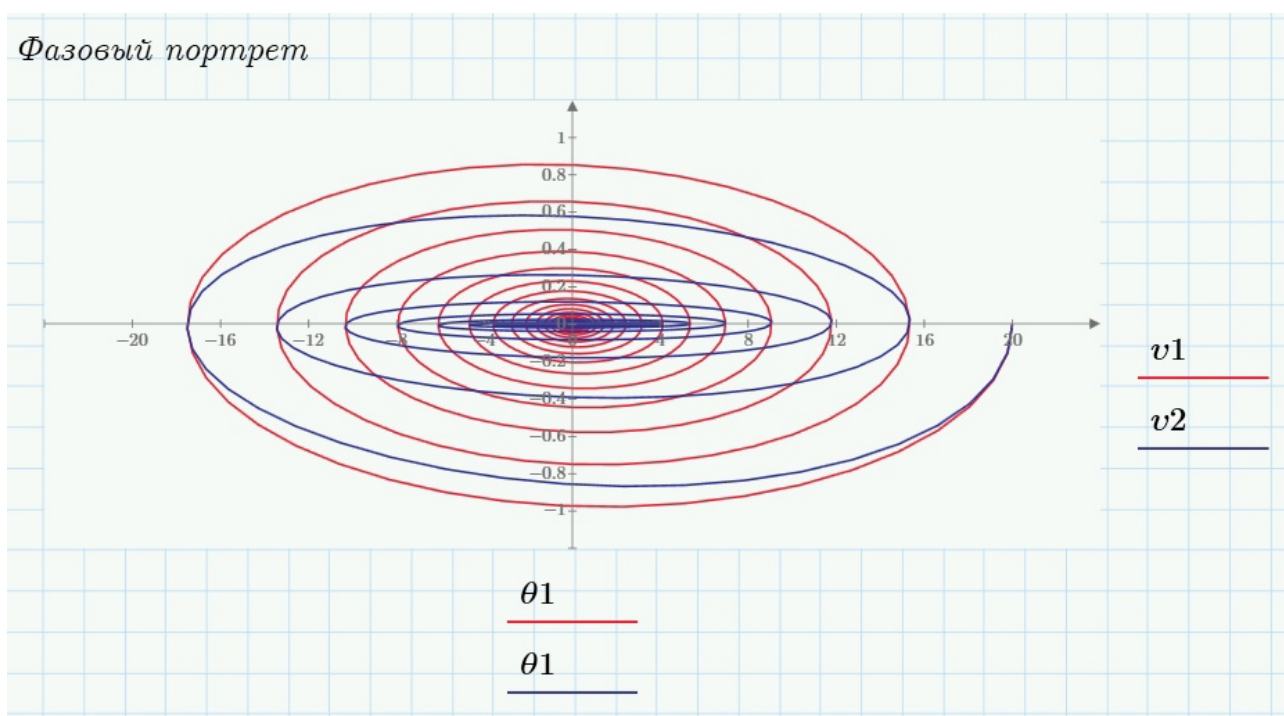


Рис. 10: Фазовый портрет при  $\theta = 20^\circ$   $k = 0.25$  и  $k = 0.75$

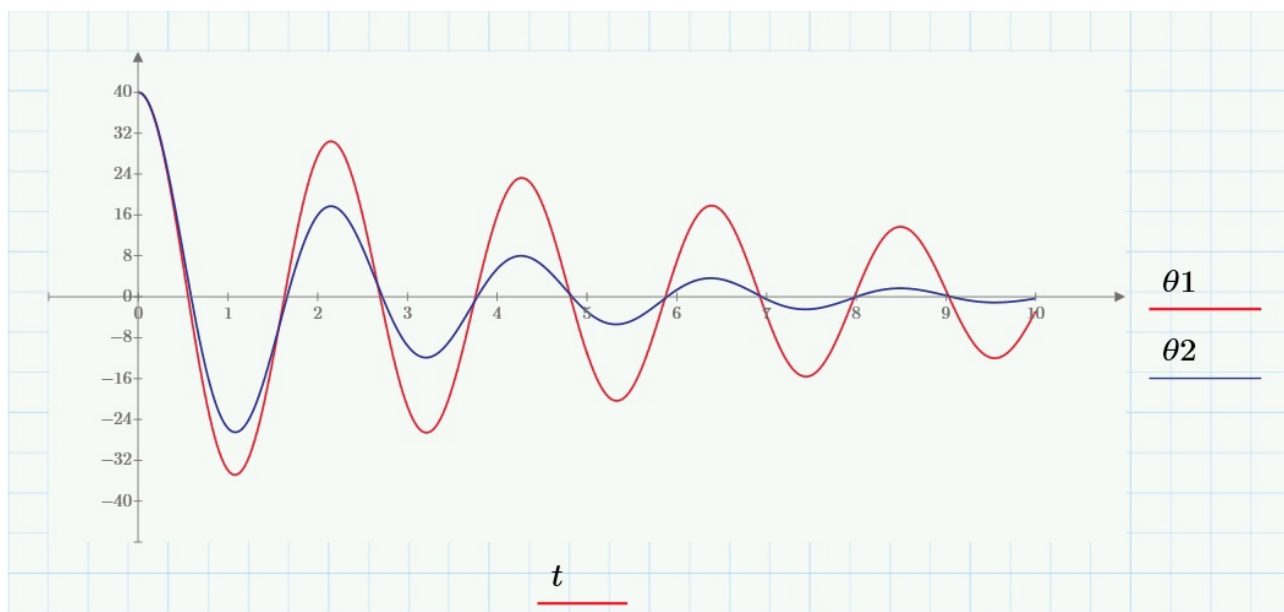


Рис. 11: График колебаний при  $\theta = 40^\circ$   $k = 0.25$  и  $k = 0.75$

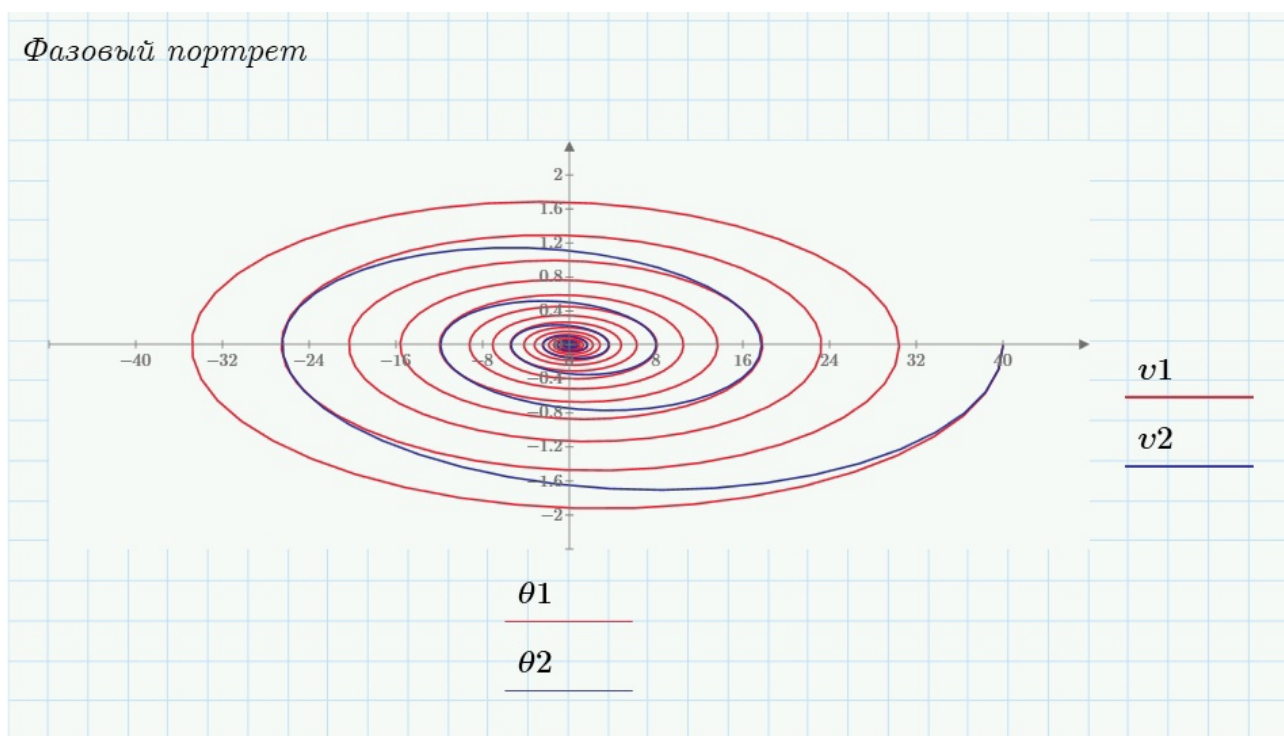


Рис. 12: Фазовый портрет при  $\theta = 40^\circ$   $k = 0.25$  и  $k = 0.75$

### 3.3 Вынужденные колебания

```

 $\theta_1 := \begin{bmatrix} 0 \text{ deg} \\ 0 \end{bmatrix}$ 
 $\omega_0 := 3$ 
 $k_1 := 0.25$ 
 $a := 1$ 
 $\omega_1 := 3$ 
 $D1(t, \theta) := \begin{bmatrix} \theta_1 \\ -(\omega_0^2) \cdot \sin(\theta_0) - k_1 \cdot \theta_1 + a \cdot \sin(\omega_1 \cdot t) \end{bmatrix}$ 
 $Z1 := \text{rkfixed}(\theta_1, 0, 50, 1000, D1)$ 
 $\theta_1 := Z1^{(1)}$ 
 $t := Z1^{(0)}$ 
 $\theta_1 := \theta_1 \cdot \frac{180}{\pi}$ 
 $v_1 := Z1^{(2)}$ 

```

Рис. 13: Код для вынужденных колебаний

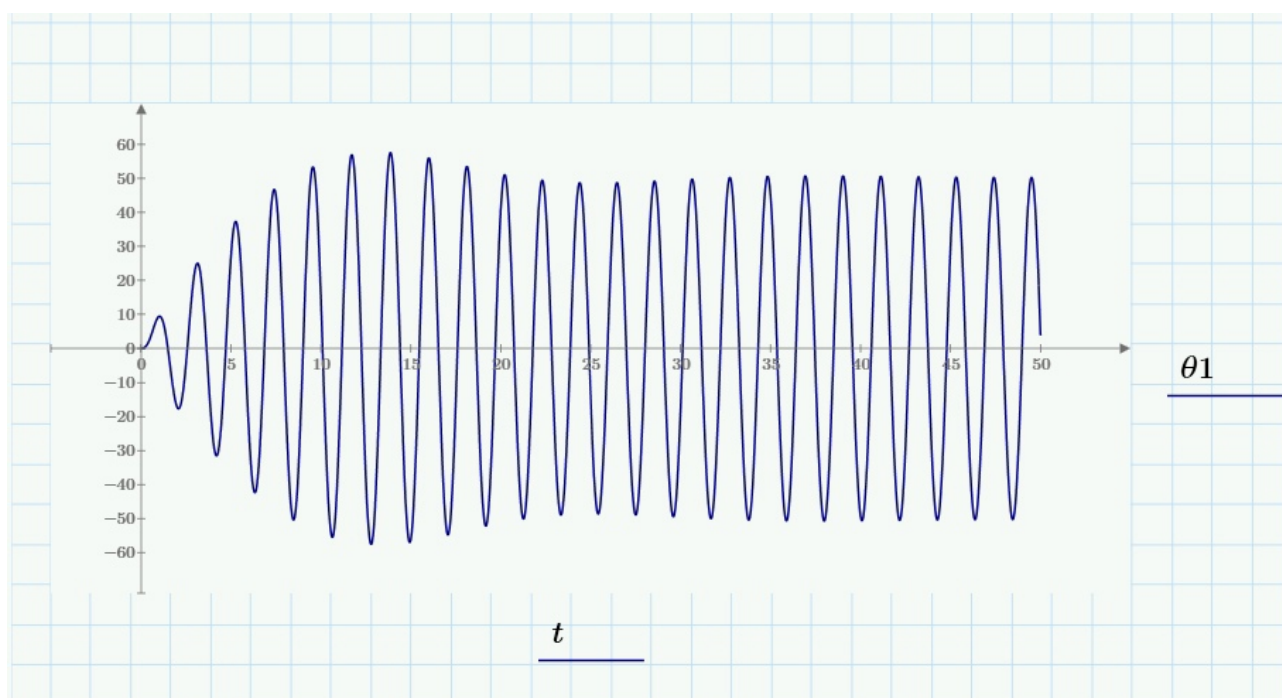


Рис. 14: График вынужденных колебаний



### 3.4 Резонанс

```

θ1 := [ 0 deg ]      ω0 := 3      k1 := 0.25      a := 1      ω1 := 3
      [ 0 ]
      θ1
D1(t, θ) := [ - (ω02) • sin(θ0) - k1 • θ1 + a • sin(ω1 • t) ]

Z1 := rkfixed(θ1, 0, 50, 1000, D1)

θ1 := Z1(1)      t := Z1(0)

θ1 := θ1 •  $\frac{180}{\pi}$       v1 := Z1(2)

n := 1000

V := 0, 0.001..3 = [ 0 ]
                   [ : ]

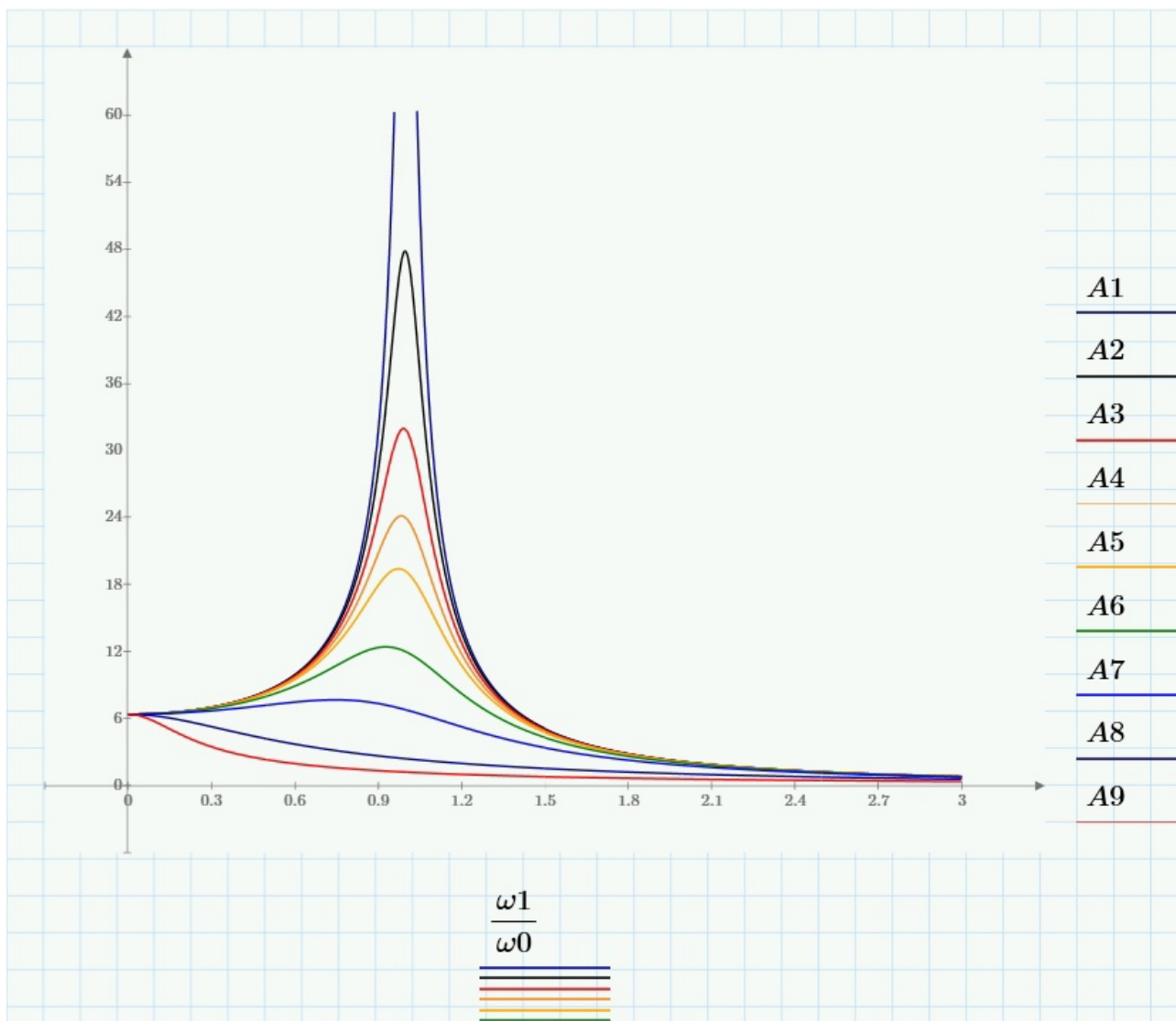
ω1 := V • ω0

A1 := || i ← 0
      || while i < length(ω1)
      || || Ai ←  $\frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{1_i}^2)^2 + 0.01 \cdot 4 \omega_{1_i}^2}}$ 
      || || i ← i + 1
      || A

A1 := A1 •  $\frac{180}{\pi}$ 

```

Рис. 15: Код для резонанса



При  $\omega_0 = \omega$  возникает резонанс.

## 4 Вывод

Таким образом, были составлены математические модели линейных и нелинейных незатухающих, затухающих и вынужденных колебаний.