МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра информатики, математического и компьютерного моделирования

Лабораторная работа №6
«Задача переноса примесей»

по дисциплине «Математическое моделирование»

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент
гр. Б9120-01.03.02
Агличеев А.О. ________
(ФИО) *(подпись)*

Проверил профессор
Пермяков М.С. ________
(ФИО) *(подпись)*

« 3 » февраля 2023 г.

г. Владивосток
2023

Содержание

1 Введение

В данной лабораторной работе необходимо создать модель переноса примесей. В качестве объекта для создания модели возьмем закрытую акваторию с заданным полем концентрации в начальный момент времени и стационарным полем скорости. Необходимо определить поле концентрации в любой момент времени в стационарном поле скорости.

2 Создание математической модели

Для моделирования процессов распространения используется уравнение переноса. Уравнение переноса – дифференциальное уравнение в частных производных, описывающее изменение скалярной величины в пространстве. Уравнение переноса имеет следующий вид:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u\frac{\partial C}{\partial x} + \upsilon\frac{\partial C}{\partial y} = 0$$

, где t - время, C - концетрация, x и y - координаты, u - компонента скорости на x, υ - компонента скорости на y.

В начальный момент задано поле концетрации:

$$C(x, y, t) = C0(x, y)$$

Концентрация точек будет постоянной и не меняться со временем $\left(\frac{dC}{dt} = 0\right)$.

Поле скорости зададим через функцию тока $\psi = \psi(x, y)$ с компонентами скорости:

$$\begin{cases} u(x, y) = -\dfrac{\partial \psi}{\partial y} \\ \upsilon(x, y) = \quad \dfrac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

Для численного решения уравнений в частных производных существует несколько способов. Один из них, который будет использоваться в данной лабораторной работе – метод частиц. Метод частиц состоит в представлении тела совокупностью взаимодействующих частиц(материальных точек), описываемых законами классической механики. Составим систему дифференциальных уравнений для каждой частицы:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = u(x_i, y_i), \\ \dfrac{dy_i}{dt} = v(x_i, y_i) \end{cases}$$

3 Реализация модели

Для модели создадим 20 тысяч частиц с начальными координатами от 0 до 1.

За поле скорости возьмем следующую функцию тока:

$$\psi = \sin(2\pi x) \cdot \sin(\pi y)$$

с компонентами скорости:

$$\begin{cases} u(x, y) = -\pi \cdot \sin(2\pi x) \cdot \cos(2\pi) \\ v(x, y) = 2\pi \cdot \cos(2\pi x) \cdot \sin(\pi y) \end{cases}$$

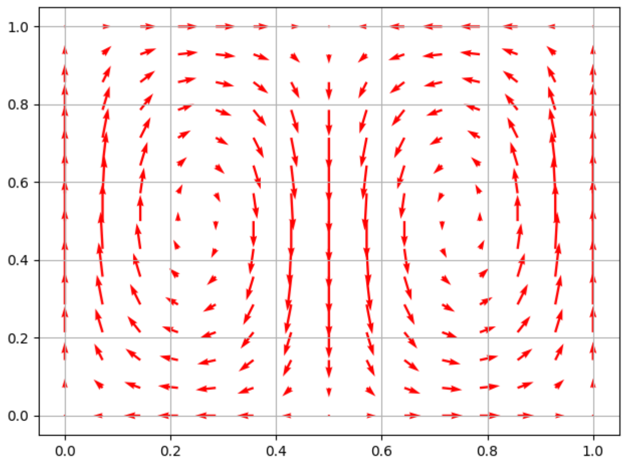
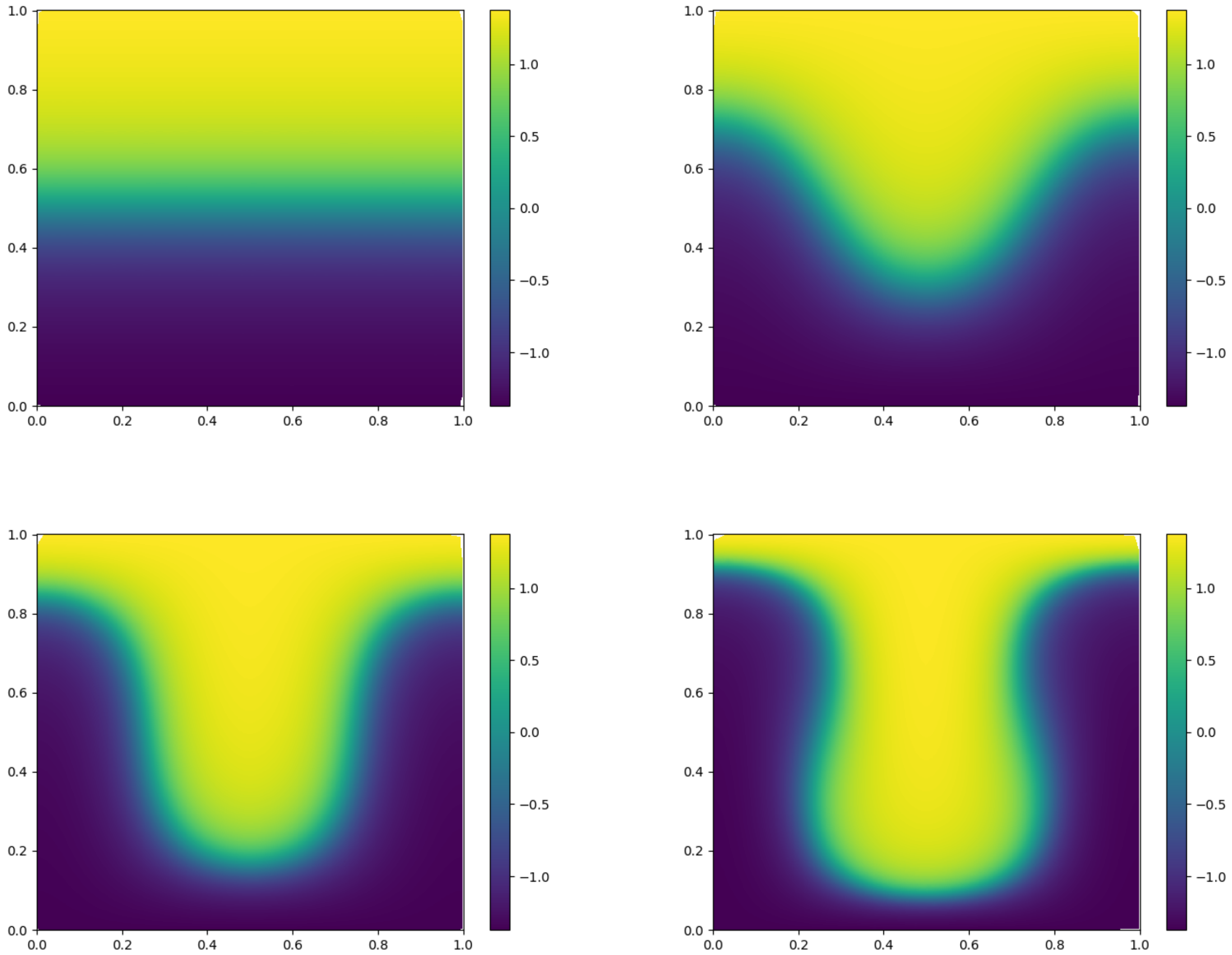


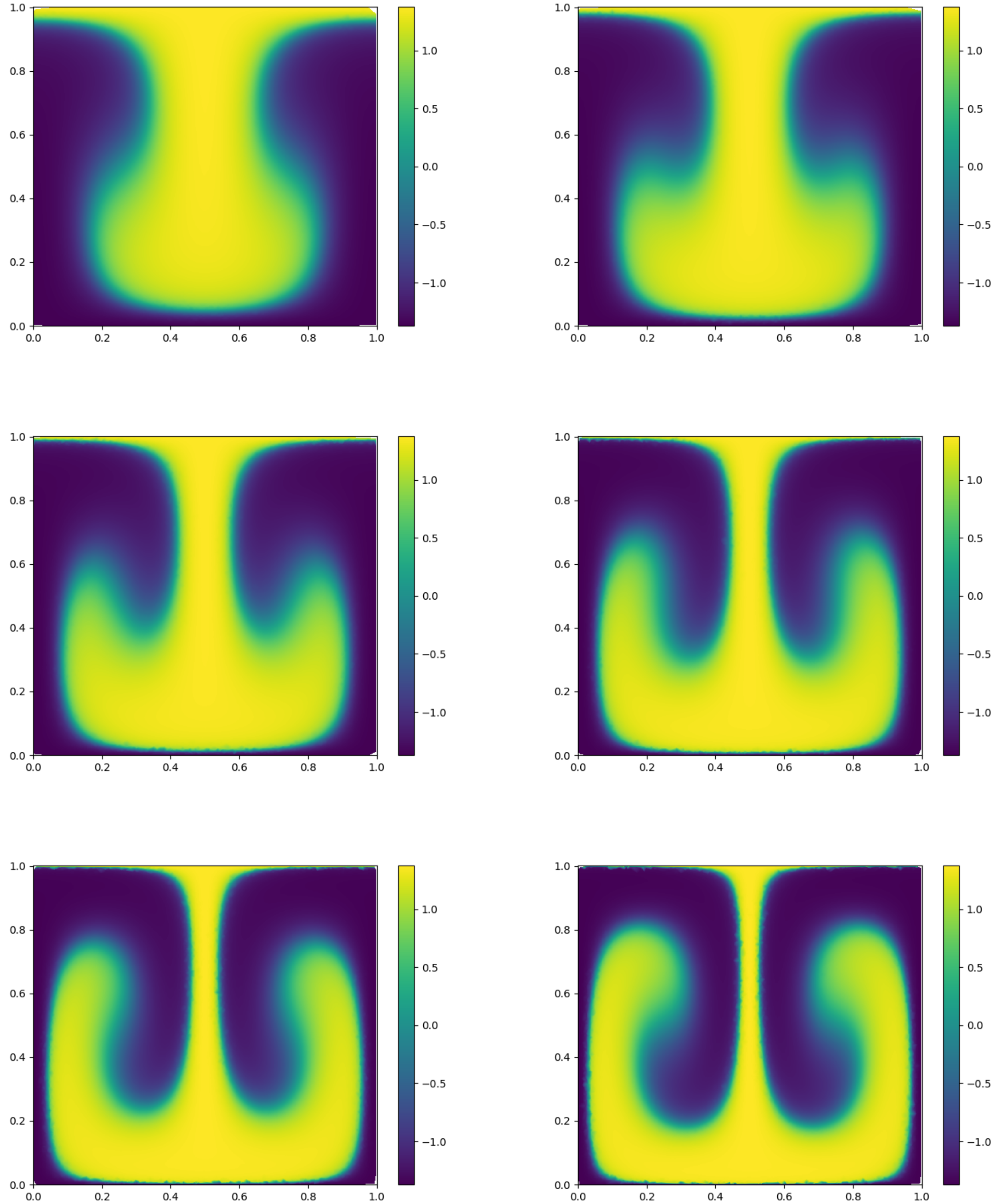
Рис. 1: Функция тока $\psi = \sin(2\pi x) \cdot \sin(\pi y)$

Для каждой частицы зададим начальную концентрацию:

$$C0(x, y) = \arctan\left(\frac{y - 0.5}{0.1}\right)$$

Модель была реализована в Python. Для решения системы дифференциальных уравнений используется функция odeint, которая численно решает её методом Рунге-Кутты 4 порядка. Она принимает 3 параметра: система дифференциальных уравнений, начальные значения и интервал, на котором строится решение. Для интерполяции на прямоугольную сетку с помощью билинейной интерполяции используется функция griddata. Она принимает координаты точек, значения в них и сетку, на которую будет интепорлировать.




0.0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0
0.0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0
1.0 0.5 0.0 −0.5 −1.0

4 Заключение

В ходе лабораторной работы была создана и реализована модель переноса примесей в стационарном поле скорости.