МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра информатики, математического и компьютерного моделирования

ОТЧЕТ

к лабораторной работе №4 по дисциплине
«Обыкновенные дифференциальные уравнения»

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент
гр. Б9120-01.03.02
Агличеев А.О. ________
(ФИО) *(подпись)*

« 7 » июня 2022 г.

г. Владивосток
2022

Содержание

1 Введение

В данной лабораторной работе мне нужно решить и дать хар-ку линейных уравнений высших порядков, решить задачу Коши для уравнений 2-го порядка и найти коэффициент логистичекого уравнения.

2 Задание 1

2.1 Постановка задачи

Для следующих линейных дифференциальных уравнений дать характеристику и найти общее решение:

1. $y'' - y' \tan x - y \sec^2 x = 0$
2. $y'' - y' = \tanh x$
3. $x^2y'' + 2xy' = \Big(2 + \ln^2 x\Big) \cdot \sinh(5\ln x) \cdot \sin(\ln x)$
4. $x^{IV} + 2x''' + 30x'' + 8x' + 104x = \big(-6 + 5t^2\big) \cdot \sinh 4t$
5. $(x-1)^2y'' - x^2y' + 2xy = 2y'' - 3y' + 2y$

2.2 Решение

Поиск решения и построение векторного поля будет проводиться в системе компьютерной математики Wolfram Mathematica.

1. $y'' - y' \tan x - y \sec^2 x = 0$

   Характеристика: Линейное однородное приведенное дифференциальное уравнения второго порядка с переменными коэффициентами

   Ответ: $y \cos x = C_1 \sin x + C_2$

2. $y'' - y' = \tanh x$

   Характеристика: Линейное неоднородное приведенное дифференциальное уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, неоднородность общего вида

   Ответ: $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + (e^x + e^{-x}) \operatorname{arctg} e^x$

3. $x^2y'' + 2xy' = \Big(2 + \ln^2 x\Big) \cdot \sinh(5\ln x) \cdot \sin(\ln x)$

Характеристика: Уравнение Эйлера второго порядка, характерестическая неоднородность после замены $x = e^t$

Ответ: $$y = \frac{C_1}{x} + C_2 + \frac{29x^5\ln^2 x \cdot \sin\ln x}{1924} - \frac{19\ln^2 x \cdot \sin\ln x}{884x^5} - \\ - \frac{2299x^5\ln x \cdot \sin\ln x}{232361} + \frac{14464829x^5\sin\ln x}{445138564} + \\ - \frac{801x^5\ln x \cdot \sin\ln x}{48841x^5} - \frac{2042719x^5\sin\ln x}{43175444x^5} - \\ - \frac{11x^5\ln^2 x \cdot \cos\ln x}{1924} - \frac{9\ln^2 x \cdot \cos\ln x}{884x^5} - \\ - \frac{6023787x^5\cos\ln x}{445138564} + \frac{2789x^5\ln x \cdot \cos\ln x}{462722} - \\ - \frac{1110393x^5\cos\ln x}{43175444x^5} - \frac{1259x^5\ln x \cdot \cos\ln x}{97682x^5}$$

4. $x^{IV} + 2x''' + 30x'' + 8x' + 104x = \Big(-6 + 5t^2\Big) \cdot \sinh 4t$

Характеристика: Линейное неоднородное приведенное дифференциальное уравнения четвёртого порядка с постоянными коэффициентами, характеристическая неоднородность

Ответ: $$y = e^{-t}(C_1\cos 5t + C_2\sin 5t) + C_3\cos 2t + C_4\sin 2t + e^{4t}\bigg(\frac{1}{400}t^2 - \\ - \frac{3}{1000}t - \frac{39}{20000}\bigg) - e^{-4t}\bigg(\frac{1}{272}t^2 + \frac{49}{11560}t + \frac{21929}{3930400}\bigg)$$

5. $(x-1)^2y'' - x^2y' + 2xy = 2y'' - 3y' + 2y$

Характеристика: Линейное однородное неприведенное дифференциальное уравнения второго порядка с переменными коэффициентами

Ответ: $y = C_1e^x + C_2(x^2 - 1)$

3 Задание 2

3.1 Постановка задачи

Для заданных уравнений указать тип в простой форме. Найти общее решение. Найти частное решение, удовлетворяющее заданным условиям. Построить график решения:

1. $2yy'' + y'^2 + y'^4 = 0; \;\; y(0) = 1, \; y'(0) = 2$
2. $2yy'' = 4y'^2 + y''; \;\; y(0) = 0, \; y'(0) = -2$

3.2 Решение

1. $\begin{cases} 2yy'' + y'^2 + y'^4 = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 2; \end{cases}$

   Тип уравнения: Общее уравнение несодержащее аргумента

   Общее решение: $2(C_1 y - 1)^{\frac{3}{2}} + C_2 = 3C_1 x$

   Задача Коши: $(5y - 4)^{\frac{3}{2}} - 1 = 15x$

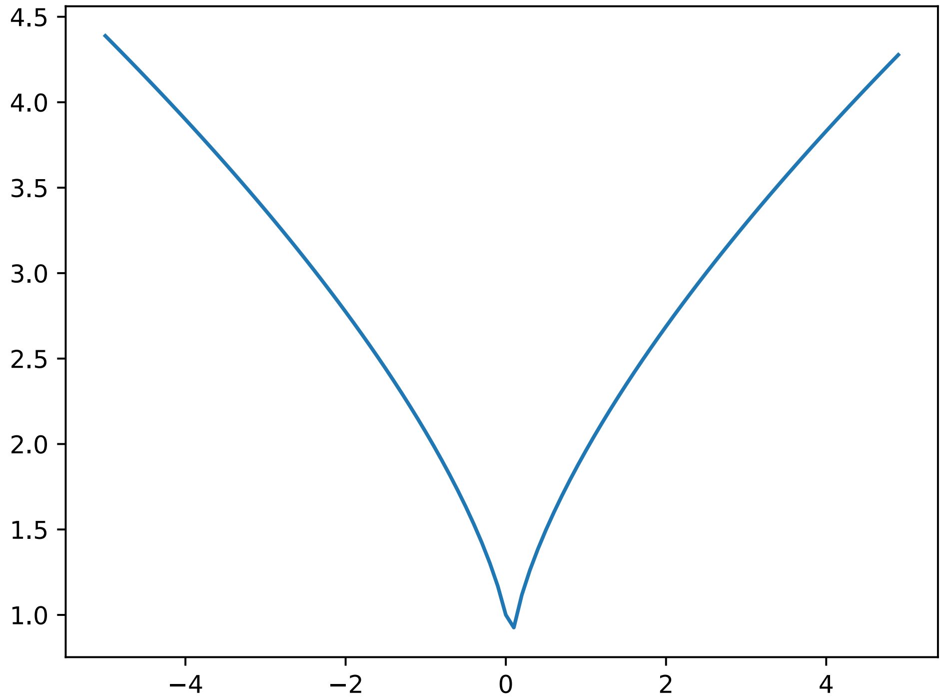

Рис. 1: График $(5y-4)^{\frac{3}{2}} - 1 = 15x$

2. $\begin{cases} 2yy'' = 4y'^2 + y'', \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = -2; \end{cases}$

Тип уравнения: Общее уравнение несодержащее аргумента

Общее решение: $y = \dfrac{C_1x + C_2 - 1}{2(C_1x + C_2)}$

Задача Коши: $y = \dfrac{2x}{4x-1}$

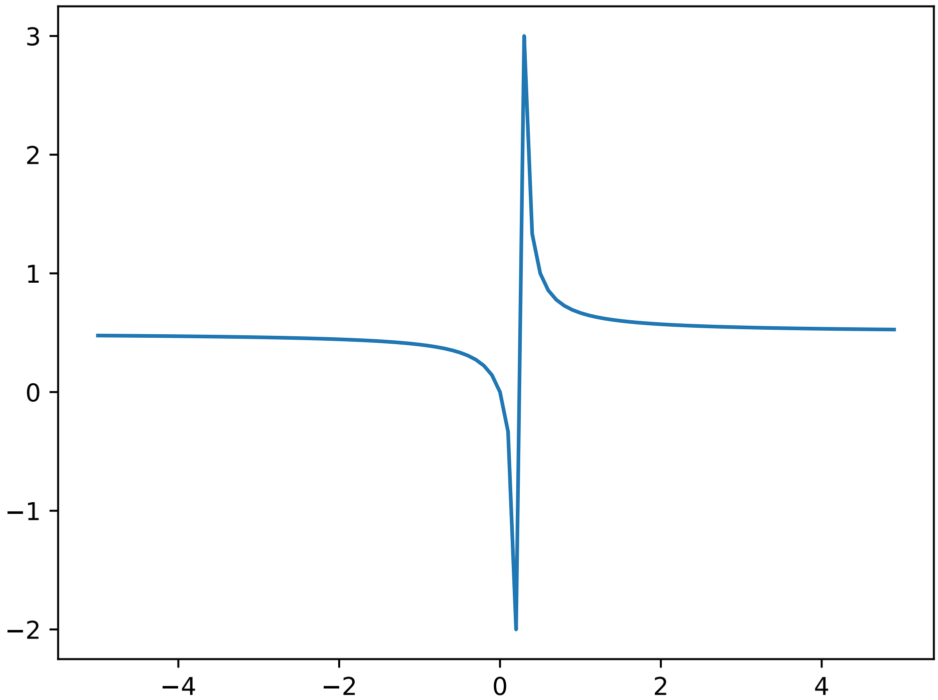

Рис. 2: График $y = \dfrac{2x}{4x-1}$

4 Задание 3

4.1 Постановка задачи

Дано логистическое уравнение популяции:

$$\frac{dP(t)}{dt} = kP(t) \cdot \left(1 - \frac{P(t)}{M}\right), \quad \begin{matrix} P(0) = 800, & P(800) = 1100 \\ M = 29000, & P(t_i) = 3100 \end{matrix}$$

Аналитически найти, при каких k и t_i решение будет удовлетворять условиям выше. Вывести соответствующую систему для неизвестных. Построить график решения данного уравнения. Решение оформить в среде TEX.

4.2 Решение

Решим дифференциальное уравнение:

$$\frac{P}{M - P} = Ce^{kt}$$

Составим систему для неизвестных и решим её:

$$\begin{cases} \frac{800}{28200} = Ce^{0}, \\ \frac{1100}{27900} = Ce^{800k}, \\ \frac{3100}{25900} = Ce^{kt_i}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{800}{28200} = C, \\ \ln\left(\frac{1551}{1116}\right)^{1/800} = k, \\ \log_{\frac{1551}{1116}}\left(\frac{4371}{1036}\right)^{800} = t_i. \end{cases}$$

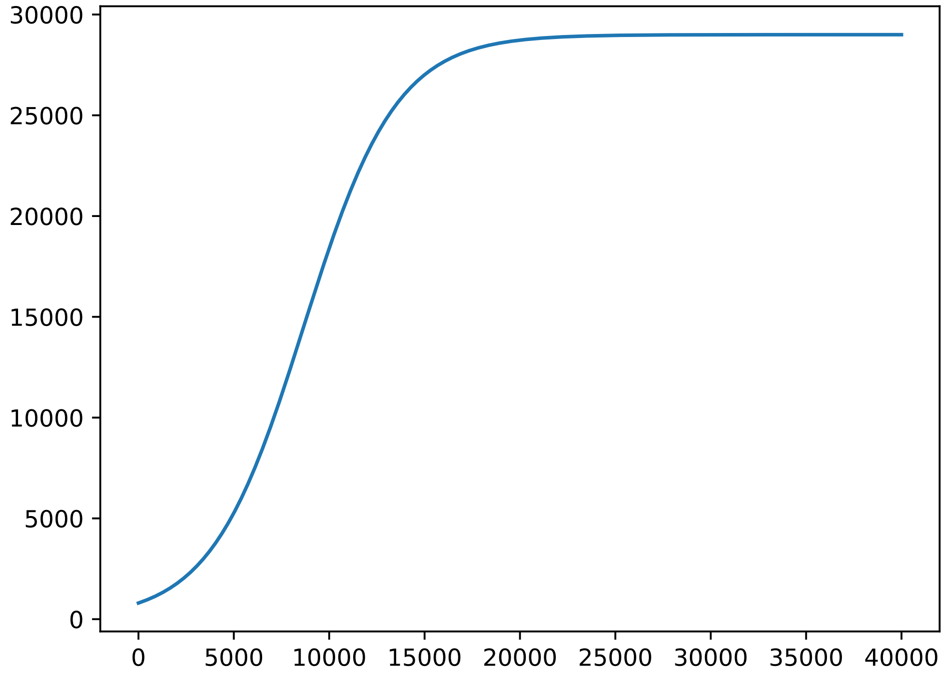

Рис. 3: График решения уравнения

5 Заключение

Я решил 5 линейных уравнений высших порядков, 2 задачи Коши для уравнений 2-го порядка и аналитически нашёл коэффициент для логистического уравнения. Оформлял отчёт по работе в «TEX Live».