Классические кубические сплайны класса C^2

Пусть на отрезке $[a, b]$ задано разбиение $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Функция S называется кубическим сплайном, если:

а) На каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ S является кубическим многочленом

$$S(x) \equiv S_i(x) = a_{i,0} + a_{i,1}(x - x_i) + a_{i,2}(x - x_i)^2 + a_{i,3}(x - x_i)^3$$

б) Соседние многочлены гладко состыкованы между собой

$$S_{i-1}^r(x_i - 0) = S_{i-1}^r(x_i + 0), i = 1, \dots, N - 1, r = 0,1,2$$

Кубический сплайн называется интерполяционным, если выполняются условия

$$S(x_i) = f_i, i = 0, \dots, N$$

Сплайн S на каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ определяется четырьмя коэффициентами, и поэтому для его построения на всем промежутке $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ необходимо определить $4N$ коэффициентов. Условия гладкости во всех внутренних узлах сетки дают $3(N - 1)$ равенств. Таким образом вместе с $(N + 1)$ условиями интерполяции получается $4N - 2$ соотношений. Два дополнительных условия задаются в виде ограничений на значения сплайна и его производных на концах промежутка $[a, b]$ и называется краевыми условиями. Существует несколько различных видов краевых условий, из которых наиболее употребительными считаются следующие типы:

$$I.\ S'(a) = f'(a), \qquad S'(b) = f'(b)$$

$$II.\ S''(a) = f''(a), \qquad S''(b) = f''(b)$$

$$III.\ S^{(r)}(a) = S^{(r)}(b), \qquad r = 1,2$$

Условия типа III называются периодическими. Рассматривая эти условия в дальнейшем, будем подразумевать, что $f(x)$ – периодическая функция с периодом $b - a$.

Построение сплайна.

Введем обозначение

$$S'(x) = m_i, i = 0, \dots, N \qquad (1)$$

Учитывая условия интерполяции и (1), для вычисления $a_{i\alpha}, \alpha = 0,1,2,3$, при каждом i имеем систему уравнений.

$$S(x_i) = f_i, \qquad S(x_{i+1}) = f_{i+1}, \qquad S'(x_i) = m_i, \qquad S'(x_{i+1}) = m_{i+1}$$

Решив эту систему, получаем на $[x_i, x_{i+1}]$

$$S(x) = f_i(1 - t^2)(1 + 2t) + f_{i+1}t^2(3 - 2t) + m_i h_i t(1 - t^2) - m_{i+1}h_i t^2(1 - t) \quad (2)$$

, где $h_i = x_{i+1} - x_i,\ t = (x - x_i)/h_i$.

Отсюда получаем

$$S'(x) = 6t(1 - t)\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} + (1 - 4t + 3t^2)m_i - (2t - 3t^2)m_{i+1} \qquad (3)$$

$$S''(x) = (f_{i+1} - f_i)(6 - 12t)/h_i^2 + m_i(-4 + 6t)/h_i + m_{i+1}(-2 + 6t)/h_i \qquad (4)$$

Кубический сплайн, представленный в таком виде на каждом из промежутков, непрерывен вместе со своей первой производной на $[a, b]$. Необходимо выбрать величины m_i, так чтобы была непрерывна и вторая производная. Так как

$$S''(x_i + 0) = 6\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i^2} - 4m_i/h_i - 2m_{i+1}/h_i$$

$$S''(x - 0) = 6\frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}^2} + 2m_{i-1}/h_{i-1} + 4m_i/h_{i-1}$$

то условие непрерывности второй производной $S''(f; x + 0) = S''(f; x - 0)$ в точках $x_i, i = 1, \dots, N - 1$, принимает вид

$$\lambda_i m_{i-1} + 2m_i + \mu_i m_{i+1} = 3\left(\mu_i\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} + \lambda_i\frac{f_i - f_{i+1}}{h_{i-1}}\right)$$

Здесь $\mu_i = h_{i-1}(h_{i-1} + h_i)^{-1}, \lambda_i = 1 - \mu_i$.

К уравнениям следует добавить уравнения, вытекающие из краевых условий. Таким образом, получается система для определения $N + 1$ неизвестных $m_i, i = 0, \dots, N$.

В случае

1) краевых условий I типа получаем

$$m_0 = f_0'$$

$$\lambda_i m_{i-1} + 2m_i + \mu_i m_{i+1} = 3\left(\mu_i \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} + \lambda_i \frac{f_i - f_{i+1}}{h_{i-1}}\right), i = 1 \dots N - 1$$

$$m_N = f_N'$$

2) краевых условий II типа получаем

$$2m_0 + m_1 = 3\frac{f_1 - f_0}{h_0} - \frac{h_0}{2} f_0''$$

$$\lambda_i m_{i-1} + 2m_i + \mu_i m_{i+1} = 3\left(\mu_i \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} + \lambda_i \frac{f_i - f_{i+1}}{h_{i-1}}\right), i = 1 \dots N - 1$$

$$m_{N-1} + 2m_N = 3\frac{f_N - f_{N-1}}{f_{N-1}} + \frac{h_{N-1}}{2} f_N''$$

3) краевых условий III типа продолжаем периодическим образом сетку Δ и, полагая

$$f_0 = f_N,\ f_1 = f_{N+1},\ m_0 = m_N,\ m_1 = m_{N+1},\ h_0 = h_N,$$

получаем

$$2m_1 + \mu_1 m_2 + \lambda_1 m_N = 3\left(\mu_1 \frac{f_2 - f_1}{h_1} + \lambda_1 \frac{f_1 - f_0}{h_0}\right)$$

$$\lambda_i m_{i-1} + 2m_i + \mu_i m_{i+1} = 3\left(\mu_i \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} + \lambda_i \frac{f_i - f_{i+1}}{h_{i-1}}\right), i = 2 \dots N$$

$$\mu_N m_1 + \lambda_N m_{N-1} + 2m_N = 3\left(\mu_N \frac{f_1 - f_0}{h_0} + \lambda_N \frac{f_0 - f_{N-1}}{h_{N-1}}\right)$$

Существует другое представление кубического сплайна, в котором вместо величин m_i присутствуют $M_i = S''(x_i), i = 0, \dots, N$.

Используя то, что на каждом промежутке сплайн представляет собой кубический многочлен, а также условия

$$S(x) = f_i, \qquad S(x_i) = f_{i+1}, \qquad S''(x_i) = M_i, \qquad S''(x_{i+1}) = M_{i+1}$$

получим для S(x) следующую формулу:

$$S(x) = f_i(1-t) + f_{i+1}t - \frac{h_i^2}{6}t(1-t)[(2-t)M_i + (1+t)M_{i+1}], \tag{5}$$

$$x \in [x_i, x_{i+1}], \qquad i = 0,1,\dots,N_1$$

Отсюда

$$S'(x) = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}[(2 - 6t + 3t^2)M_i + (1 - 3t^2)M_{i+1}], \tag{6}$$

$$S''(x) = M_i(1-t) + M_{i+1}t \tag{7}$$

Из (5) следует непрерывность функции, из (7) непрерывность её второй производной. Согласно (6)

$$S'(x_i + 0) = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(2M_i + M_{i+1})$$

$$S'(x_i - 0) = \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{h_{i-1}}{6}(M_{i-1} + 2M_i)$$

Следовательно, чтобы была непрерывна первая производная сплайна необходимо выполнение условий:

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = \frac{6}{h_{i-1} + h_i}\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}\right), \qquad i = 1,\dots,N-1$$

Эти уравнения вместе с краевыми условиями образуют систему относительно неизвестным M_i.

В случае

1) краевых условий I рода получаем

$$2M_0 + M_1 = \frac{6}{h_0}\left(\frac{f_1 - f_0}{h_0} - f_0'\right)$$

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = \frac{6}{h_{i-1} + h_i}\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}\right), \qquad i = 1, \dots, N-1$$

$$M_{N-1} + 2M_N = \frac{6}{h_{N-1}}\left(f_N' - \frac{f_N - f_{N-1}}{h_{N-1}}\right)$$

2) краевых условий II рода

$$M_0 = f_0''$$

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = \frac{6}{h_{i-1} + h_i}\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}\right), \qquad i = 1, \dots, N-1$$

$$M_N = \mathrm{f}_\mathrm{N}''$$

3) краевых условий III рода

$$2M_1 + \lambda_1 M_2 + \mu_1 M_N = \frac{6}{h_0 + h_1}\left(\frac{f_2 - f_1}{h_1} - \frac{f_1 - f_0}{h_0}\right)$$

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = \frac{6}{h_{i-1} + h_i}\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}\right), \qquad i = 2, \dots, N-1$$

$$\lambda_N M_1 + \mu_N M_{N-1} + 2M_N = \frac{6}{h_{N-1} + h_0}\left(\frac{f_1 - f_0}{h_0} - \frac{f_0 - f_{N-1}}{h_{N-1}}\right)$$

В дальнейшем сплайн вида (2) будем называть сплайном по наклонам, а сплайн вида (5) – сплайном по моментам.

Обобщенные сплайны

Если кубический сплайн не сохраняет качественный свойства, то можно воспользоваться обобщенными сплайнами.

На отрезке [a, b] введем сетку $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$. Свяжем с сеткой систему функций $1, x, \Phi_i, \Psi_i,\ i = 0, \dots, N-1$, которые определены и непрерывные в R и для заданного i непрерывны на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$. Потребуем, чтобы функции Φ_i и Ψ_i удовлетворяли условиям

$$\Phi_i^r(x_{i+1}) = \Psi_i^r(x_i) = 0, \qquad r = 0,1,2; \qquad \Phi_i''(x_i) = \Psi_i''(x_{i+1}) = 1$$

Всякий элемент S_i пространства Υ_i , образованного линейными комбинациями функций $1, x, \Phi_i, \Psi_i$, может быть единственным образом записан в виде

$$S_i(x) = [S_i(x_i) - \Phi_i(x_i)M_i](1-t) + [S_i(x_{i+1}) - \Psi_i(x_{i+1})M_{i+1}]t + \Phi_i(x)M_i + \Psi_i(x)M_{i+1}$$

Функция S называется обобщенным сплайном, если:

a) Для всякого целого i 0 <= i <= N, существует единственная функция S_i из Υ_i, такая что $S(x) \equiv S_i(x), x \in [x_i, x_{i+1}]$
b) $S \in C^2[a, b]$

Функции Φ_i, Ψ_i называются определяющими функциями и зависят от параметров контроля формы. На практике полагается:

$$\Phi_i(x) = \phi_i(t)h_i^2 = \psi(p_i, 1-t)h_i^2$$

$$\Psi_{i(x)} = \psi_i(t)h_i^2 = \psi(q_i, t)h_i^2, \qquad 0 \le p_i, q_i < \infty$$

При p_i и $q_i \to \infty$ требуется, чтобы функция S переходила в линейную функцию. Кроме того, при $p_i = q_i = 0$ требуется, чтобы мы получали стандартный кубический сплайн.

Построение сплайна.

По аналогии с кубическим сплайном получаем:

$$S'(x) = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} + \frac{M_i}{h_{i-1}}\left(\Phi_i(x_i) + h_{i-1}\Phi_i'(x)\right) - \frac{M_{i+1}}{h_i}\left(\Psi_i(x_{i+1}) - h_i\Psi'_i(x_{i+1})\right)$$

$$S''(x) = \Phi_i''(x)M_i + \Psi_i''(x)M_{i+1}$$

Условие непрерывности первой производной приводит нас к:

$$\Phi_{i-1}(x_{i-1})\frac{M_{i-1}}{h_{i-1}} - (A_i + B_i)\mathrm{M_i} + \Psi_i(x_{i+1})\frac{M_{i+1}}{h_i} = \left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}\right), i = 1, \dots, N-1$$

где

$$A_i = \Phi_i(x_i)/h_i + \Phi_i'(x_i), B_i = \Psi_{i-1}(x_i)/h_{i-1} - \Psi_{i-1}'(x_i)$$

В случае

1) краевых условий I типа получаем

$$\mathrm{M}_0\, A_0 - \frac{M_1}{h_0}\Psi_0(x_1) = f_0' - \frac{f_1 - f_0}{h_0}$$

$$\Phi_{i-1}(x_{i-1})\frac{M_{i-1}}{h_{i-1}} - (A_i + B_i)\mathrm{M_i} + \Psi_i(x_{i+1})\frac{M_{i+1}}{h_i} = \left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}\right), i = 1, \dots, N-1$$

$$\frac{M_{N-1}}{h_{N-1}}\Phi_{N-1}(x_{N-1}) - M_N B_N = f_N' - \frac{f_N - f_{N-1}}{h_{N-1}}$$

2) краевых условий II типа

$$M_0 = f_0''$$

$$\Phi_{i-1}(x_{i-1})\frac{M_{i-1}}{h_{i-1}} - (A_i + B_i)\mathrm{M_i} + \Psi_i(x_{i+1})\frac{M_{i+1}}{h_i} = \left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}\right), i = 1, \dots, N-1$$

$$M_N = \mathrm{f}_\mathrm{N}''$$

3) краевых условий III типа

$$(A_1 + B_1)\frac{M_1}{h_0} + \Psi_1(x_2)\frac{M_2}{h_1} + \Phi_{i-1}(x_{i-1})\frac{M_N}{h_0} = \left(\frac{f_2 - f_1}{h_1} - \frac{f_1 - f_0}{h_0}\right)$$

$$\Phi_{i-1}(x_{i-1})\frac{M_{i-1}}{h_{i-1}} - (A_i + B_i)\mathrm{M_i} + \Psi_i(x_{i+1})\frac{M_{i+1}}{h_i} = \left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}\right),$$

$$i = 2, \dots, N-1$$

$$\Phi_{N-1}(x_{N-1})\frac{M_{N-1}}{h_{N-1}} + (A_N + B_N)M_\mathrm{N} + \Psi_0(x_1)\frac{M_1}{h_0} = \left(\frac{f_1 - f_0}{h_0} - \frac{f_0 - f_{N-1}}{h_{N-1}}\right)$$

Наиболее употребительные на практике следующие определяющие функции:

1) Рациональный сплайны

$$\phi_i(t) = \frac{t^3}{1 + q_i(1-t)} \cdot \frac{1}{2(1+q_i)(3+q_i)}$$

2) Экспоненциальный сплайны

$$\phi_i(t) = \frac{t^3 e^{q_i(t-1)}}{6 + 6q_i + q_i^2}$$

3) Гиперболические сплайны

$$\phi_i(t) = \frac{\sinh q_i t - q_i t}{q_i^2 \sinh q_i}$$

4) Сплайны переменного порядка

$$\phi_i(t) = \frac{t^{k_i}}{k_i(k_i - 1)}, \qquad k_i = q_i + 3$$

Численное дифференцирование

Самый простой способ приближенного вычисления производной функции $f(x)$ состоит в замене их производными интерполяционного сплайна, построенного по значениям $f_i = f(x_i), i = 0, \ldots, N$, заданным на сетке $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$.

Из представления кубического сплайна по наклонам вытекают следующие формулы численного дифференцирования:

$$S'(x) = 6t(1-t)\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} + (1 - 4t + 3t^2)m_i - (2t - 3t^2)m_{i+1}$$

$$S''(x) = (f_{i+1} - f_i)(6 - 12t)/h_i^2 + m_i(-4 + 6t)/h_i + m_{i+1}(-2 + 6t)/h_i$$

$$S'''(x) = \frac{6}{h_i^2}\left(m_{i+1} + m_i - 2\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i}\right)$$

Из представления кубического сплайна по моментам:

$$S'(x) = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}[(2 - 6t + 3t^2)M_i + (1 - 3t^2)M_{i+1}]$$

$$S''(x) = M_i(1-t) + M_{i+1}t$$

$$S'''(x) = \frac{M_{i+1} - M_i}{h_i}$$

Теорема 1. Если $S(x)$ интерполирует $f(x) \in C^2 W_{\Delta,\infty}^4[a,b]$ и удовлетворяет краевым условиям I, II, III, тогда имеют место оценки

$$\left|\left|S^{(r)}(x) - f^{(r)}(x)\right|\right|_\infty = O\left(\overline{h}^{4-r}\right), \qquad r = 0,1,2,3,$$

где $\overline{h} = \max_i h_i$

С практической точки зрения формулы, вытекающие из представления кубического сплайна по моментам, предпочтительные, так как они требует меньшего количества арифметических операций.

Если использовать обобщенный сплайн, то

$$S'(x) = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} + \frac{M_i}{h_{i-1}}\left(\Phi_i(x_i) + h_{i-1}\Phi_i'(x)\right) - \frac{M_{i+1}}{h_i}\left(\Psi_i(x_{i+1}) - h_i\Psi'_i(x_{i+1})\right)$$

$$S''(x) = \Phi_i''(x)M_i + \Psi_i''(x)M_{i+1}$$

$$S'''(x) = \Phi_i'''(x)M_i + \Psi_i'''(x)M_{i+1}$$

Асимптотические формулы.

Пусть кубический сплайн $S(x)$ интерполирует периодическую функцию с периодом $b-a$ на равномерной сетке Δ: $a = x_i = a + ih, i = 0, \dots, N, x_N = b$.

Для величин M_i имеем систему:

$$M_{i-1} + 4M_i + M_i = \frac{6}{h^2}(f_{i-1} - f_i + f_{i+1}), \qquad i = 0, \dots, N$$

$$M_k = M_{N+k}, f_k = f_{N+k}, k = 0{,}1$$

Будем искать решение системы в виде

$$M_i = f_i'' + \alpha_i h^2 f_i^{IV}.$$

Подставляя и разлагая обе части i-го уравнения по формуле Тейлора в точке x_i, находим

$$6f_i'' + h^2 f_i^{IV} + (\alpha_{i-1} + 4\alpha_i + \alpha_{i+1})h^2 f_i^{IV} = 6f_i'' + \frac{6}{h^2} f_i^{IV} + O(h^4)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых по порядку производных, получаем следующую систему уравнений для нахождения α_i

$$4\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_N = -1/2$$

$$\alpha_{i-1} + 4\alpha_i o + \alpha_{i+1} = -1/2, \qquad i = 2, \dots N-1$$

$$\alpha_1 + \alpha_{N-1} + 4\alpha_N = -1/2$$

, которая имеет единственное решение $a_i = -1/12, i = 1, \dots, N$.

При таких α_i величины M_i удовлетворяют системе с точностью $O(h^4)$.

$$M_i = f_i'' - \frac{1}{12} h^2 f_i^{IV} + O(h^4), i = 0, \dots, N \tag{8}$$

Использую представление сплайна по моментам, (8) и разложение Тейлора в точке $x = x_i + th_i$, находим

$$\mathrm{S}(x) = f(x) - \frac{u^2h^4}{24} f^{IV}(x) + O(h^6),$$

где $u = t(1-t)$.

Дифференцируя, имеем

$$S'(x) = f'(x) - \frac{u(1-2t)}{12} h^3 f^{IV}(x) + O(h^5)$$

$$S''(x) = f''(x) - \frac{1-6u}{12} h^2 f^{IV}(x) + O(h^4)$$

$$S'''(x) = f'''(x) - \frac{1-2t}{2} h f^{IV}(x) + O(h^3)$$

Эти формулы дают исчерпывающую характеристику погрешности приближения кубическим периодическим сплайном.

Все полученные формулы могут быть распространены на случай, когда $\mathrm{f}(x)$ непериодическая. Для этого достаточно краевые условия для сплайна задавать в асимптотическом виде.

Разложив M_{i-1} и M_{i+1} по формуле Тейлора в точке x_i , заметим следующие соотношения для численного дифференцирования

$$\frac{M_{i+1} + 10M_i + M_{i-1}}{12} = f_i^2 + O(h^4)$$

$$\frac{M_{i+1} - M_{i-1}}{2h} = f_i^3 + O(h^3)$$

$$\frac{M_{i+1} - 2M_i + M_{i+1}}{h^2} = f_i^{IV} + O(h^4)$$

, которые позволяют найти производные f_i^2, f_i^3 с повышенной точностью. Неожиданным является последний результат, мы получили аппроксимацию четвертой производной с очень высокой точностью, несмотря на то что $S^{IV}(x) = 0$ почти всюду на $[a, b]$.

Численное интегрирование

Наиболее простой способ получения формул численного интегрирования для интеграла

$$\int_a^b f(x)dx$$

основан на аппарате интерполирования. При этом функция $f(x)$ заменяется некоторым интерполяционным сплайном $S(x)$ и в качестве приближенного значения интеграла берется величина

$$\int_a^b S(x)dx.$$

Если для $S(x)$ используется представление через наклоны, то получаем

$$\int_a^b S(x)dx = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1} h_i(f_i + f_{i+1}) + \frac{1}{12}\sum_{i=0}^{N-1}(m_i - m_{i+1})h_i^2$$

На равномерной сетке сумма в правой части упрощается, и формула приобретает вид

$$\int_a^b S(x)dx = \frac{h}{2}f_0 + h\sum_{i=0}^{N-1} f_i + \frac{h}{2}f_N + \frac{h^2}{12}(m_0 - m_N).$$

Если же $f(x)$ – периодическая с периодом $b-a$, то формула выглядит следующим образом:

$$\int_a^b S(x)dx = h\sum_{i=0}^{N-1} f_i.$$

Эта формула совпадает с формулой трапеций.

Если для $S(x)$ используется представление через моменты, то

$$\int_a^b S(x)dx = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1} h_i(f_i + f_{i+1}) - \frac{1}{24}\sum_{i=0}^{N-1} h_i^3(M_i + M_{i+1})$$

На равномерной сетке имеем:

$$\int_a^b S(x)dx = \frac{5h}{12}(f_0 + f_N) + \frac{13}{12}h(f_1 + f_{N-1})z + h\sum_{i=2}^{N-2} f_i$$
$$-\frac{h^3}{72}(2M_0 + M_1 + M_{N-1} + 2M + N)$$

Если $f(x)$ интерполируется обобщенными сплайнами, получаем

$$\int_a^b S(x)dx = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1} h_i\big(f_i - \Phi_i(x_i)\big) + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1} h_i\big(f_{i+1} - \Psi_i(x_i)\big) - \sum_{i=0}^{N-1} \Phi_i(x_i)\, M_i$$
$$+ \sum_{i=0}^{N-1} \Psi_{i(x_{i+1})}\, M_{i+1}$$

Погрешность вычисления интеграла можно оценить следующим образом:

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b S(x)dx\right| \le \int_a^b |S(x) - f(x)|dx \le (b-a)\big||S(x) - f(x)|\big|_c$$

Следовательно, достаточно иметь оценку погрешности приближения функции $f(x)$ сплайном $S(x)$. Более точные оценки можно получить, если привлечь поточечные оценки для погрешности $|S(x) - f(x)|$.

Интегрирование сильно осциллирующих функций.

Если необходимо вычислить интегралы вида

$$\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} cos\, \alpha x\, f(x)dx, \tag{9}$$

или

$$\int_a^b sin\, \alpha x\, f(x)dx, \tag{10}$$

при больших значения α, то применение квадратурных формул, основанных на замене сплайном всей подынтегральной функции, потребует большого числа узлов. Более удобные формулы получаются, когда функции $cos\, \alpha x\,, sin\, \alpha x$ рассматривать как весовые, а сплайном приближать только $\mathrm{f}(x)$.

Используя для $S(x)$ представление через моменты, получаем

$$\int_a^b e^{i\alpha x} S(x)dx$$
$$= \frac{ie^{i\alpha x_0}}{\alpha}\left(f_0 - \frac{1}{\alpha^2}M_0\right) - \frac{ie^{i\alpha x_n}}{\alpha}\left(f_N - \frac{1}{\alpha^2}M_N\right) + \frac{1}{\alpha^2}(\Sigma_1 + \Sigma_2)$$
$$- \frac{1}{\alpha^4}\sum_{k=0}^{N-1} \frac{e^{i\alpha x_{k+1}-e^{i\alpha x_k}}}{h_k}(M_{k+1} - M_k),$$

где

$$\Sigma_1 = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{N-1} h_k\left[e^{i\alpha x_k}(2M_k + M_{k+1}) + e^{i\alpha x_{k+1}}(M_k + 2M_{k+1})\right]$$
$$\Sigma_2 = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{f_{k+1} - f_k}{h_k}\left(e^{i\alpha x_{k+1}} - e^{i\alpha x_k}\right)$$

Так как

$$\sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{i\alpha x_{k+1}}(M_k + 2M_{k+1}) = \sum_{k=1}^{N-1} h_{k-1} e^{i\alpha x_k}(M_{k-1} + 2M_k)$$
$$+\ h_{N-1}e^{i\alpha x_N}(M_{N-1} + 2M_N),$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{f_{k+1} - f_k}{h_k} e^{iax_{k+1}} = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{f_k - f_{k-1}}{h_{k-1}} e^{iaxk} + \frac{f_N - f_{N-1}}{h_{N-1}} e^{iax_N},$$

то $\Sigma_1 + \Sigma_2$ приводятся к виду

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 = e^{iax_0}\left[\frac{h_0}{6}(2M_0 + M_1) - \frac{f_1 - f_0}{h_0}\right]$$
$$+ e^{iax_N}\left[\frac{h_{N-1}}{6}(M_{N-1} + 2M_N) + \frac{f_N - f_{N-1}}{h_{N-1}}\right]$$

В итоге

$$\int_a^b e^{iax} S(x)dx$$
$$= -\frac{1}{\alpha^4}\sum_{k=0}^{N-1} \frac{e^{iax_{k+1}} - e^{iax_k}}{h_k}(M_{k+1} - M_k) + e^{iax_0}(A + iC)$$
$$+ e^{iax_N}(B + iD),$$

где

$$A = \frac{1}{\alpha^2}\left[-\frac{f_1 - f_0}{h_0} + \frac{h_0}{6}(2M_0 + M - 1 - 1)\right], \qquad C = \frac{1}{\alpha}\left(f_0 - \frac{1}{\alpha^2}M_0\right)$$

$$B=\frac{1}{\alpha^2}\left[\frac{f_N-f_{N-1}}{h_{N-1}}+\frac{h_{N-1}}{6}(2M_{N-1}+M_N-1)\right],\qquad D=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha^2}M_N-f_N\right)$$

Выделяя действительную и мнимую части, получим формулы

$$\int_a^b cos\,\alpha x\,S(x)dx$$
$$=-\frac{1}{\alpha^4}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{cos\alpha x_{k+1}-cos\,\alpha x_k}{h_k}(M_{k+1}-M_k)+A\,cos\,\alpha x_0-C\,sin\,\alpha x_0$$
$$+B\,cos\,\alpha x_N-D\,sin\,\alpha x_N$$

$$\int_a^b sin\,\alpha x\,S(x)dx$$
$$=\frac{1}{\alpha^4}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{sin\,\alpha x_{k+1}-sin\,\alpha x_k\,h_k}{h_k}(M_{k+1}-M_k)+A\,sin\,\alpha x_0+C\,cos\,\alpha x_0$$
$$+B\,sin\,\alpha x_N+D\,cos\,\alpha x_N$$

Оценим погрешность вычисления интегралов

$$\left|\int_a^b cos\,\alpha x\,S(x)dx-\int_a^b cos\,\alpha x\,f(x)dx\right|\le(b-a)\left|\left|S_1(x)-f(x)\right|\right|_C$$

Такая же оценка получается и для (10).