

# Отчёт по лабораторной работе №2

Группа Б9120-01.03.02миопд

Агличиев Александр

25 октября 2023 г.

# 1 Решение краевой задачи

## 1.1 Постановка задачи

Необходимо краевую задачу методом Галеркина для дифференциального уравнения второго порядка ( $x \in [0; 1]$ ):

$$\begin{cases} u'' - (1+x)u' - u = \frac{2}{(x+1)^3}, \\ u(0) = 1, u(1) = 0.5. \end{cases}$$

## 1.2 Решение

### 1.2.1 Метод Галеркина

Решение будем искать в виде

$$u(x) = \phi_0(x) + \sum_{i=1}^2 C_i \phi_i(x)$$

, где  $\phi_0(x)$  удовлетворяет каждому из краевых условий, функции  $\phi_1(x)$  и  $\phi_2(x)$  – линейно независимые, непрерывные функции вместе со своими вторыми производными до второго порядка, удовлетворяющие однородным граничным условиям.

В качестве базисным функций выберем полиномы:

$$\begin{cases} \phi_0(x) = ax + b, \\ \phi_1(x) = ax^2 + bx + c, \\ \phi_2(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d. \end{cases}$$

Тогда:

$$\begin{cases} \phi_0(x) = 1 - \frac{1}{2}x, \\ \phi_1(x) = 0, \\ \phi_2(x) = x^2 - x. \end{cases}$$

Тогда численное решение:

$$\begin{aligned} u(x) &= 1 - \frac{1}{2}x + C_2(x^2 - x) \\ u'(x) &= -\frac{1}{2} + C_2(2x - 1) \end{aligned}$$

$$u''(x) = 2C_2$$

Подставим  $u''(x)$ ,  $u'(x)$ ,  $u(x)$  в дифференциальное уравнение

$$R(x, C_1, C_2) = C_2(-3x^2 + 3) + x - \frac{1}{2} - \frac{2}{(x+1)^3}$$

Условия ортогональности функции  $R(x, C_1, C_2)$  к функциям  $\phi_1(x)$ ,  $\phi_2(x)$  приводят к системе:

$$\int_0^1 \phi_1(x) R(x, C_1, C_2) dx = 0, \int_0^1 \phi_2(x) R(x, C_1, C_2) dx = 0$$

Подставляя вместо  $R(x, C_1, C_2)$  и  $\phi_i(x)$  нужные значения, после соответствующего интегрирования и решения СЛАУ, найдём  $C_1$  и  $C_2$ .

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 0.325. \end{cases}$$

В итоге решение имеет вид:

$$u(x) = 1 - \frac{x}{2} + 0.325(x^2 - x)$$

### 1.3 Сравнение между точным и приближенным значением

Найдем разницу между точным и приближенным решением на отрезке  $[0, 1]$  с шагом  $h = 0.1$ .  $y_i^*$  - точное решение,  $y_i$  - приближенное.

$$\text{Точное решение } u(x) = \frac{1}{x+1}$$

| $x_i$   | $y^*_i$ | $y_i$   | $ y^*_i - y_i $ |
|---------|---------|---------|-----------------|
| 0.00000 | 1.00000 | 1.00000 | 0.00000         |
| 0.11111 | 0.90000 | 0.91235 | 0.01235         |
| 0.22222 | 0.81818 | 0.83272 | 0.01453         |
| 0.33333 | 0.75000 | 0.76111 | 0.01111         |
| 0.44444 | 0.69231 | 0.69753 | 0.00522         |
| 0.55556 | 0.64286 | 0.64198 | 0.00088         |
| 0.66667 | 0.60000 | 0.59444 | 0.00556         |
| 0.77778 | 0.56250 | 0.55494 | 0.00756         |
| 0.88889 | 0.52941 | 0.52346 | 0.00595         |
| 1.00000 | 0.50000 | 0.50000 | 0.00000         |

