



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

**ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ
ТЕХНОЛОГИЙ**

**Кафедра информатики, математического и компьютерного
моделирования**

Лабораторная работа №4

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»
профиль « Математическое и информационное обеспечение математической
деятельности »

Выполнил студент
гр. Б9120-01.03.02
Агличеев А.О. _____
(ФИО) (подпись)

Проверил
Яковлев А.А. _____
(ФИО) (подпись)

« 22 » мая 2023 г.

г. Владивосток
2023

1 Постановка задачи

Пусть дана матричная игра, заданная матрицей A размерности 6×8 . Необходимо найти верхнюю и нижнюю цену игры и равновесное решение в смешанных стратегиях.

$$A = \begin{pmatrix} 24 & 15 & 12 & 11 & 20 & 11 & 20 & 20 \\ 3 & 16 & 20 & 12 & 21 & 18 & 2 & 6 \\ 1 & 28 & 10 & 4 & 24 & 16 & 4 & 12 \\ 25 & 3 & 15 & 16 & 7 & 11 & 22 & 3 \\ 3 & 23 & 18 & 2 & 16 & 4 & 22 & 3 \\ 23 & 5 & 8 & 23 & 6 & 8 & 15 & 11 \end{pmatrix}$$

Нижняя цена игры:

$$\underline{A} = \max_i \min_j a_{ij} = 11$$

Верхняя цена игры:

$$\overline{A} = \max_j \max_i a_{ij} = 18$$

Искать равновесное решение в смешанных стратегиях будем с помощью симплекс-метода. Необходимо решить следующие задачи:

$$\begin{cases} y \cdot e \rightarrow \max \\ Ay \leq e^T \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} e \cdot x \rightarrow \min \\ A^T x \geq e \\ x \geq 0 \end{cases}$$

В этом случае оптимальная стратегия первого игрока будет найдена по формуле:

$$p^* = \frac{x}{\|x\|}$$

А оптимальная стратегия второго игрока будет найдена по формуле:

$$q^* = \frac{y}{\|y\|}$$

Цена игры будет равна:

$$\phi = \frac{1}{\alpha},$$

где α – значение целевой функции, полученной в результате решения задач линейной оптимизации.

q^* – находится прямой задачей;

p^* – находится двойственной задачей;

Прямая задача

Задача приводится к каноническому виду. За начальную угловую точку берём $y_0 = (0, e)$

Видим, что в первой строке (не включая значение целевой функции) есть отрицательные элементы, а значит оптимальное решение еще не найдено.

Разрешающая колонка находится путем выборки такого столбца, у которого элемент строки целевой функции отрицательный. Мы будем брать отрицательный элемент, максимальный по модулю.

Разрешающей строкой будет строка, содержащая наименьшее *положительное* отношение свободного числа к элементу разрешающего столбца. Элемент, расположенный на пересечении разрешающих столбца и строки, называется разрешающим элементом.

$$\begin{pmatrix} -1.0 & -1.0 & -1.0 & -1.0 & -1.0 & -1.0 & -1.0 & -1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 24.0 & 15.0 & 12.0 & 11.0 & 20.0 & 11.0 & 20.0 & 20.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 3.0 & 16.0 & 20.0 & 12.0 & 21.0 & 18.0 & 2.0 & 6.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 1.0 & 28.0 & 10.0 & 4.0 & 24.0 & 16.0 & 4.0 & 12.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 25.0 & 3.0 & 15.0 & 16.0 & 7.0 & 11.0 & 20.0 & 3.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 3.0 & 23.0 & 18.0 & 2.0 & 16.0 & 4.0 & 22.0 & 3.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 1.0 \\ 23.0 & 5.0 & 8.0 & 23.0 & 6.0 & 8.0 & 15.0 & 11.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

Разрешающий столбец = 1

Разрешающая строка = 5

Разрешающий элемент = 25.0

Преобразовываем строки матрицы, то есть один из базисных столбцов станет **не** базисным, а разрешающий столбец – базисным:

1. Элементы разрешающей строки делим на разрешающий элемент.
2. Преобразования остальных строк: Новая строка = Строка - элемент строки в разрешающем столбце * элемент разрешающей строки

В первой строке (не включая значение целевой функции) есть отрицательные элементы, а значит оптимальное решение еще не найдено

$$\begin{pmatrix} 0.0 & -0.9 & -0.4 & -0.4 & -0.7 & -0.6 & -0.2 & -0.9 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 12.1 & -2.4 & -4.4 & 13.3 & 0.4 & 0.8 & 17.1 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 15.6 & 18.2 & 10.1 & 20.2 & 16.7 & -0.4 & 5.6 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & -0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.9 \\ 0.0 & 27.9 & 9.4 & 3.4 & 23.7 & 15.6 & 3.2 & 11.9 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 1.0 & 0.1 & 0.6 & 0.6 & 0.3 & 0.4 & 0.8 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 22.6 & 16.2 & 0.1 & 15.2 & 2.7 & 19.6 & 2.6 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.1 & 1.0 & 0.0 & 0.9 \\ 0.0 & 2.2 & -5.8 & 8.3 & -0.4 & -2.1 & -3.4 & 8.2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.9 & 0.0 & 1.0 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Разрешающий столбец = 2

Разрешающая строка = 2

Разрешающий элемент = 12.1

$$\begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 & -0.6 & -0.7 & 0.2 & -0.5 & -0.1 & 0.4 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & -0.2 & -0.4 & 1.1 & 0.0 & 0.1 & 1.4 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & -0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 21.3 & 15.7 & 3.0 & 16.1 & -1.4 & -16.5 & -1.3 & 1.0 & 0.0 & 1.1 & 0.0 & 0.0 & 0.8 \\ 0.0 & 0.0 & 14.9 & 13.4 & -6.8 & 14.5 & 1.4 & -27.5 & -2.3 & 0.0 & 1.0 & 2.2 & 0.0 & 0.0 & 0.9 \\ 1.0 & 0.0 & 0.6 & 0.7 & 0.1 & 0.4 & 0.8 & -0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 20.7 & 8.2 & -9.6 & 1.9 & 18.1 & -29.3 & -1.9 & 0.0 & 0.0 & 1.7 & 1.0 & 0.0 & 0.8 \\ 0.0 & 0.0 & -5.4 & 9.1 & -2.9 & -2.2 & -3.5 & 5.1 & -0.2 & 0.0 & 0.0 & -0.7 & 0.0 & 1.0 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Разрешающий столбец = 4

Разрешающая строка = 7

Разрешающий элемент = 9.1

$$\begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 & -1.0 & 0.0 & 0.0 & -0.7 & -0.4 & 0.7 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & -0.1 & 0.0 & 0.1 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & -0.4 & 0.0 & 1.0 & -0.1 & -0.1 & 1.6 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & -0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 30.6 & 0.0 & 8.0 & 19.9 & 4.7 & -25.2 & -1.0 & 1.0 & 0.0 & 2.4 & 0.0 & -1.7 & 0.7 \\ 0.0 & 0.0 & 22.8 & 0.0 & -2.6 & 17.8 & 6.6 & -35.0 & -2.0 & 0.0 & 1.0 & 3.3 & 0.0 & -1.5 & 0.8 \\ 1.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.4 & 0.6 & 1.1 & -0.4 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & -0.1 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 25.5 & 0.0 & -7.0 & 3.9 & 21.3 & -33.9 & -1.7 & 0.0 & 0.0 & 2.3 & 1.0 & -0.9 & 0.7 \\ 0.0 & 0.0 & -0.6 & 1.0 & -0.3 & -0.2 & -0.4 & 0.6 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.1 & 0.0 & 0.1 & 0.0 \end{pmatrix}$$

Разрешающий столбец = 3

Разрешающая строка = 3

Разрешающий элемент = 30.6

$$\begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.3 & -0.1 & -0.3 & -0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 1.1 & 0.2 & -0.0 & 1.3 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & -0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.3 & 0.7 & 0.2 & -0.8 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & -0.1 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -8.6 & 2.9 & 3.1 & -16.1 & -1.3 & -0.7 & 1.0 & 1.5 & 0.0 & -0.2 & 0.2 \\ 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & -0.1 & 0.9 & 0.4 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -13.7 & -12.8 & 17.4 & -12.9 & -0.9 & -0.8 & 0.0 & 0.3 & 1.0 & 0.5 & 0.2 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & -0.2 & 0.1 & -0.3 & 0.1 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 \end{pmatrix}$$

Разрешающий столбец = 7

Разрешающая строка = 6

Разрешающий элемент = 17.4

$$\begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & -0.2 & 0.0 & -0.3 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 1.1 & 0.2 & 0.0 & 1.3 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & -0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.4 & 0.8 & 0.0 & -0.7 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & -0.0 & -0.1 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -6.1 & 5.2 & 0.0 & -13.9 & -1.1 & -0.6 & 1.0 & 1.4 & -0.2 & -0.3 & 0.2 \\ 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.8 & 0.6 & 0.0 & 1.1 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.1 & -0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.8 & -0.7 & 1.0 & -0.7 & -0.1 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & -0.4 & -0.1 & 0.0 & -0.1 & -0.1 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 \end{pmatrix}$$

Разрешающий столбец = 8

Разрешающая строка = 5

Разрешающий элемент = 1.1

$$\begin{pmatrix} 0.4 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.4 & 0.0 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.1 \\ -0.3 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.9 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -1.3 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & -0.7 & 0.0 & 0.0 & -2.1 & -0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.1 & -0.0 & 0.0 \\ -8.7 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -13.2 & 0.0 & 0.0 & -23.3 & -1.9 & -0.7 & 1.0 & 1.3 & 0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 1.7 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.4 & 1.0 & 0.0 & 1.8 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.1 & -0.1 & 0.0 \\ 1.2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & 1.0 & 0.6 & 0.1 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & -0.0 & 0.0 \\ 0.1 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & -0.3 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 \end{pmatrix}$$

Разрешающий столбец = 13

Разрешающая строка = 3

Разрешающий элемент = 0.1

$$\begin{pmatrix} 0.3 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 \\ 0.1 & 1.0 & -0.3 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 1.6 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & -0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -22.3 & 0.0 & 17.3 & 0.0 & -11.3 & 0.0 & 0.0 & -36.4 & -2.3 & 0.5 & 0.0 & 1.2 & 1.0 & -0.1 & 0.3 \\ -2.6 & 0.0 & -4.8 & 0.0 & -10.1 & 0.0 & 0.0 & -13.3 & -1.2 & -0.8 & 1.0 & 1.0 & 0.0 & 0.1 & 0.1 \\ -0.3 & 0.0 & 1.5 & 0.0 & 0.4 & 1.0 & 0.0 & -1.4 & -0.1 & 0.1 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & -0.1 & 0.0 \\ 1.1 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 1.0 & 0.4 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & 0.0 \\ 0.4 & 0.0 & -0.2 & 1.0 & -0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.4 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 \end{pmatrix}$$

Разрешающий столбец = 8

Разрешающая строка = 2

Разрешающий элемент = 1.6

$$\begin{pmatrix} 0.3 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.4 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 \\ 0.0 & 0.6 & -0.2 & 0.0 & 0.6 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -20.7 & 23.2 & 9.8 & 0.0 & 12.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.5 & 0.5 & 0.0 & -1.2 & 1.0 & 0.7 & 0.5 \\ -2.0 & 8.5 & -7.5 & 0.0 & -1.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.6 & -0.8 & 1.0 & 0.2 & 0.0 & 0.4 & 0.2 \\ -0.2 & 0.9 & 1.2 & 0.0 & 1.2 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.1 & 0.0 \\ 1.1 & -0.2 & 0.2 & 0.0 & -0.1 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & -0.0 & 0.0 \\ 0.3 & -0.2 & -0.1 & 1.0 & -0.4 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 \end{pmatrix}$$

В первой строке (не включая значение целевой функции) **НЕТ** отрицательных элементов, а значит оптимальное решение найдено.

Оптимальное решение:

$$y = (0 \ 0 \ 0 \ 0.019 \ 0 \ 0.039 \ 0.012 \ 0.0056)$$

Целевая функция: 0.076

Оптимальная стратегия второго игрока:

$$q^* = \frac{y}{\|y\|} = (0 \ 0 \ 0 \ 0.42 \ 0 \ 0.86 \ 0.26 \ 0.12)$$

Двойственная задача

Двойственная задача приводится к каноническому виду, далее ищется начальная угловая точка, решая вспомогательную задачу..

Решение вспомогательной задачи

Составим симплекс-таблицу

$$\begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 0.0 \\ 24.0 & 3.0 & 1.0 & 25.0 & 3.0 & 23.0 & -1.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 15.0 & 16.0 & 28.0 & 3.0 & 23.0 & 5.0 & -0.0 & -1.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 12.0 & 20.0 & 10.0 & 15.0 & 18.0 & 8.0 & -0.0 & -0.0 & -1.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 11.0 & 12.0 & 4.0 & 16.0 & 2.0 & 23.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -1.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 20.0 & 21.0 & 24.0 & 7.0 & 16.0 & 6.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -1.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 11.0 & 18.0 & 16.0 & 11.0 & 4.0 & 8.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -1.0 & -0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 1.0 \\ 20.0 & 2.0 & 4.0 & 20.0 & 22.0 & 15.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -1.0 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 1.0 \\ 20.0 & 6.0 & 12.0 & 3.0 & 3.0 & 11.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

Выделим базисные столбцы с помощью элементарных преобразований строк. К первой строке добавим все остальные строки, умноженные на -1 . Получаем:

$$\begin{pmatrix} -133.0 & -98.0 & -99.0 & -100.0 & -91.0 & -99.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -8.0 \\ 24.0 & 3.0 & 1.0 & 25.0 & 3.0 & 23.0 & -1.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 15.0 & 16.0 & 28.0 & 3.0 & 23.0 & 5.0 & -0.0 & -1.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 12.0 & 20.0 & 10.0 & 15.0 & 18.0 & 8.0 & -0.0 & -0.0 & -1.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 11.0 & 12.0 & 4.0 & 16.0 & 2.0 & 23.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -1.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 20.0 & 21.0 & 24.0 & 7.0 & 16.0 & 6.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -1.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 11.0 & 18.0 & 16.0 & 11.0 & 4.0 & 8.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -1.0 & -0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 1.0 \\ 20.0 & 2.0 & 4.0 & 20.0 & 22.0 & 15.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -1.0 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 1.0 \\ 20.0 & 6.0 & 12.0 & 3.0 & 3.0 & 11.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

Разрешающий столбец = 1

Разрешающая строка = 2

Разрешающий элемент = 24.0

$$\begin{pmatrix} 0.0 & -81.4 & -93.5 & 38.5 & -74.4 & 28.5 & -4.5 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 5.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -2.5 \\ 1.0 & 0.1 & 0.0 & 1.0 & 0.1 & 1.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 14.1 & 27.4 & -12.6 & 21.1 & -9.4 & 0.6 & -1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.6 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.4 \\ 0.0 & 18.5 & 9.5 & 2.5 & 16.5 & -3.5 & 0.5 & 0.0 & -1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.5 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.5 \\ 0.0 & 10.6 & 3.5 & 4.5 & 0.6 & 12.5 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & -1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.5 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.5 \\ 0.0 & 18.5 & 23.2 & -13.8 & 13.5 & -13.2 & 0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.2 \\ 0.0 & 16.6 & 15.5 & -0.5 & 2.6 & -2.5 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 & 0.0 & 0.0 & -0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.5 \\ 0.0 & -0.5 & 3.2 & -0.8 & 19.5 & -4.2 & 0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 & 0.0 & -0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.2 \\ 0.0 & 3.5 & 11.2 & -17.8 & 0.5 & -8.2 & 0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 & -0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Разрешающий столбец = 3

Разрешающая строка = 6

Разрешающий элемент = 23.2

$$\begin{pmatrix} 0.0 & -6.7 & 0.0 & -17.3 & -19.9 & -24.7 & -1.2 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & -3.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 2.2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 4.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.8 \\ 1.0 & 0.1 & 0.0 & 1.1 & 0.1 & 1.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & 0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -7.7 & 0.0 & 3.7 & 5.2 & \mathbf{6.2} & -0.4 & -1.0 & 0.0 & 0.0 & 1.2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.4 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & -1.2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.2 \\ 0.0 & 10.9 & 0.0 & 8.2 & 11.0 & 1.9 & 0.2 & 0.0 & -1.0 & 0.0 & 0.4 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.2 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & -0.4 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.4 \\ 0.0 & 7.8 & 0.0 & 6.7 & -1.4 & 14.5 & 0.3 & 0.0 & 0.0 & -1.0 & 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.3 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & -0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.5 \\ 0.0 & 0.8 & 1.0 & -0.6 & 0.6 & -0.6 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 4.2 & 0.0 & 8.8 & -6.4 & 6.3 & -0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.7 & -1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.7 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.4 \\ 0.0 & -3.0 & 0.0 & 1.1 & 17.7 & -2.4 & 0.7 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & -1.0 & 0.0 & -0.7 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.1 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.1 \\ 0.0 & -5.4 & 0.0 & -11.2 & -6.0 & -1.8 & 0.4 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & -1.0 & -0.4 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.5 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Разрешающий столбец = 6

Разрешающая строка = 3

Разрешающий элемент = 6.2

$$\begin{pmatrix} 0.0 & -37.6 & 0.0 & -2.4 & 0.7 & 0.0 & -2.6 & -3.0 & 1.0 & 1.0 & 1.7 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 3.6 & 4.0 & 0.0 & 0.0 & -0.7 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.1 \\ 1.0 & 1.3 & 0.0 & 0.5 & -0.7 & 0.0 & 0.0 & 0.2 & -0.0 & -0.0 & -0.2 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -1.3 & 0.0 & 0.6 & 0.8 & 1.0 & -0.1 & -0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.2 & 0.0 & 0.0 & -0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 13.3 & 0.0 & 7.0 & 9.4 & 0.0 & 0.3 & 0.3 & -1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.3 & -0.3 & 1.0 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.4 \\ 0.0 & \mathbf{25.9} & 0.0 & -2.1 & -13.5 & 0.0 & 1.2 & 2.3 & 0.0 & -1.0 & -2.6 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.2 & -2.3 & 0.0 & 1.0 & 2.6 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 \\ 0.0 & 0.1 & 1.0 & -0.3 & 1.1 & 0.0 & 0.0 & -0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & -0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 12.1 & 0.0 & 5.0 & -11.7 & 0.0 & 0.3 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & -0.5 & -1.0 & 0.0 & 0.0 & -0.3 & -1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.5 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.2 \\ 0.0 & -6.0 & 0.0 & 2.5 & 19.6 & 0.0 & 0.6 & -0.4 & 0.0 & 0.0 & 0.6 & 0.0 & -1.0 & 0.0 & -0.6 & 0.4 & 0.0 & 0.0 & -0.6 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.2 \\ 0.0 & -7.7 & 0.0 & -10.1 & -4.5 & 0.0 & 0.3 & -0.3 & 0.0 & 0.0 & 0.8 & 0.0 & 0.0 & -1.0 & -0.3 & 0.3 & 0.0 & 0.0 & -0.8 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Разрешающий столбец = 2

Разрешающая строка = 5

Разрешающий элемент = 25.9

$$\begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & -5.4 & -18.9 & 0.0 & -0.9 & 0.4 & 1.0 & -0.5 & -2.1 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.9 & 0.6 & 0.0 & 1.5 & 3.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.9 \\ 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.6 & -0.0 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & -0.0 & 0.1 & -0.1 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & -0.1 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.5 & 0.2 & 1.0 & -0.0 & -0.0 & 0.0 & -0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 8.1 & 16.3 & 0.0 & -0.3 & -0.9 & -1.0 & 0.5 & 1.4 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.9 & 1.0 & -0.5 & -1.4 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.3 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & -0.1 & -0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & -0.0 & -0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & -0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & -0.2 & 1.1 & 0.0 & -0.0 & -0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & -0.0 & -0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 6.0 & -5.4 & 0.0 & -0.3 & -0.1 & 0.0 & 0.5 & 0.7 & -1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.1 & 0.0 & -0.5 & -0.7 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.2 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 2.0 & \mathbf{16.5} & 0.0 & 0.9 & 0.2 & 0.0 & -0.2 & -0.0 & 0.0 & -1.0 & 0.0 & -0.9 & -0.2 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.2 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -10.7 & -8.5 & 0.0 & 0.7 & 0.4 & 0.0 & -0.3 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & -1.0 & -0.7 & -0.4 & 0.0 & 0.3 & -0.1 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Разрешающий столбец = 5

Разрешающая строка = 8

Разрешающий элемент = 16.5

$$\begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & -3.1 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.6 & 1.0 & -0.7 & -2.1 & 1.0 & -0.1 & 1.0 & 0.9 & 0.4 & 0.0 & 1.7 & 3.1 & 0.0 & 1.1 & 0.0 & -0.7 \\ 1.0 & 0.0 & 0.0 & \mathbf{0.6} & 0.0 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & -0.1 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & -0.1 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.5 & 0.0 & 1.0 & -0.0 & -0.1 & 0.0 & -0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & -0.1 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 6.1 & 0.0 & 0.0 & -1.2 & -1.1 & -1.0 & 0.7 & 1.4 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 1.2 & 1.1 & 1.0 & -0.7 & -1.4 & 0.0 & -1.0 & 0.0 & 0.1 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.1 & 0.0 & -0.0 & -0.1 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & -0.1 & -0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & -0.4 & 0.0 & 0.0 & -0.1 & -0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.1 & 0.1 & 0.0 & -0.0 & -0.1 & 0.0 & -0.1 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 6.6 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.4 & 0.7 & -1.0 & -0.3 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.4 & -0.7 & 1.0 & 0.3 & 0.0 & 0.3 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 1.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & -0.0 & 0.0 & -0.1 & 0.0 & -0.1 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -9.6 & 0.0 & 0.0 & 1.1 & 0.5 & 0.0 & -0.4 & 0.0 & 0.0 & -0.5 & -1.0 & -1.1 & -0.5 & 0.0 & 0.4 & -0.0 & 0.0 & 0.5 & 1.0 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Разрешающий столбец = 4

Разрешающая строка = 2

Разрешающий элемент = 0.6

$$\begin{pmatrix} 5.3 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.2 & 0.8 & 1.0 & -0.4 & -2.4 & 1.0 & -0.2 & 1.0 & 1.2 & 0.2 & 0.0 & 1.4 & 3.4 & 0.0 & 1.2 & 0.0 & -0.6 \\ 1.7 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & -0.1 & 0.1 & 0.0 & 0.1 & -0.1 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.1 & -0.1 & 0.0 & -0.1 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & -0.1 & 0.0 & -0.1 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.1 & -0.1 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -10.4 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.7 & -1.5 & -1.0 & 0.2 & 2.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.7 & 1.5 & 1.0 & -0.2 & -2.0 & 0.0 & -1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.1 & 0.0 & -0.0 & -0.1 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & -0.1 & -0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.7 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.1 & -0.1 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.1 & 0.1 & 0.0 & -0.1 & -0.0 & 0.0 & -0.1 & 0.0 & 0.0 \\ -11.4 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.5 & -0.5 & 0.0 & -0.2 & 1.3 & -1.0 & -0.3 & 0.0 & -0.5 & 0.5 & 0.0 & 0.2 & -1.3 & 1.0 & 0.3 & 0.0 & 0.2 \\ -0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.1 & 0.0 & -0.1 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 \\ 16.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.4 & 1.1 & 0.0 & 0.4 & -0.8 & 0.0 & -0.5 & -1.0 & -0.4 & -1.1 & 0.0 & -0.4 & 0.8 & 0.0 & 0.5 & 1.0 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Разрешающий столбец = 11

Разрешающая строка = 4

Разрешающий элемент = 2.0

$$\begin{pmatrix} -7.6 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.1 & -1.0 & -0.2 & -0.2 & 0.0 & 1.0 & 1.1 & 1.0 & 2.1 & 2.0 & 1.2 & 1.2 & 1.0 & 0.0 & -0.1 & 0.0 & -0.6 \\ 1.2 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & -0.1 & 0.0 & -0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & -0.0 & 0.0 & -0.1 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.1 & -0.0 & 0.1 & -0.1 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & -0.1 & 0.0 & -0.1 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -5.3 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.4 & -0.8 & -0.5 & 0.1 & 1.0 & 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.4 & 0.8 & 0.5 & -0.1 & -1.0 & 0.0 & -0.5 & 0.0 & 0.0 \\ -0.5 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.1 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & -0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.9 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.1 & -0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.1 & -0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -4.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.5 & 0.7 & -0.3 & 0.0 & -1.0 & -1.0 & 0.0 & -1.0 & -0.5 & -0.7 & 0.3 & 0.0 & 1.0 & 1.0 & 0.0 & 0.2 \\ -0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.1 & 0.0 & -0.1 & -0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 \\ 12.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.5 & -0.4 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & -0.1 & -1.0 & -0.1 & -0.5 & 0.4 & -0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 1.0 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Разрешающий столбец = 1

Разрешающая строка = 2

Разрешающий элемент = 1.2

$$\begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 6.2 & 0.0 & 0.0 & -1.7 & -1.0 & -0.5 & 0.4 & 0.0 & 1.0 & 1.4 & 1.0 & 2.7 & 2.0 & 1.5 & 0.6 & 1.0 & 0.0 & -0.4 & 0.0 & -0.5 \\ 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.8 & 0.0 & 0.0 & -0.1 & 0.0 & -0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & -0.0 & 0.0 & -0.1 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & -0.1 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & -0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 4.3 & 0.0 & 0.0 & -0.8 & -0.7 & -0.7 & 0.5 & 1.0 & 0.0 & 0.7 & 0.0 & 0.8 & 0.7 & 0.7 & -0.5 & -1.0 & 0.0 & -0.7 & 0.0 & 0.1 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.4 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & -0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & 0.1 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & -0.7 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.1 & 0.1 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & 0.1 & -0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 3.7 & 0.0 & 0.0 & 0.6 & 0.5 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & -1.0 & -0.8 & 0.0 & -0.6 & -0.5 & -0.5 & -0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.8 & 0.0 & 0.2 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 1.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & -0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.1 & 0.0 & -0.1 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -9.8 & 0.0 & 0.0 & 1.2 & 0.5 & 0.0 & -0.4 & 0.0 & 0.0 & -0.5 & -1.0 & -1.2 & -0.5 & -0.0 & 0.4 & 0.0 & 0.0 & 0.5 & 1.0 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Разрешающий столбец = 7

Разрешающая строка = 9

Разрешающий элемент = 1.2

Разрешающий элемент = 0.6

Разрешающий элемент = 0.1

Разрешающий элемент = 1.2

11

В первой строке не осталось отрицательных элементов (не считая значение целевой функции) и $u = 0$, значит найдено оптимальное решение для вспомогательной задачи, но начальное угловое и допустимое решение для исходной двойственной задачи.

Оптимальное решение:

(0.036 0.026 0 0.0041 0 0.0093 0.26 0.0031 0.11 0 0.37 0 0 0 0 0 0 0 0 0)

Решение двойственной задачи

Составим симплекс-таблицу для двойственной задачи. Из прошлой матрицы убираем столбцы, соответствующие вектору u , первую строку заменяем на $(e, 0)$.

$$\begin{pmatrix} 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & -0.0 & 0.0 \\ 1.0 & 0.0 & 0.6 & 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -0.4 & 0.0 & -0.7 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.1 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & -0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.5 & 0.0 & -12.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.4 & 1.0 & -1.2 & 0.1 & -0.6 & 0.4 \\ 0.0 & 1.0 & 0.8 & 0.0 & -0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & -0.1 & 0.0 & -0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 7.5 & 0.0 & -9.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.1 & 0.0 & -1.2 & -0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0.0 & 0.0 & -8.5 & 0.0 & -23.2 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & -0.9 & 0.2 & -0.6 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -0.2 & 1.0 & 1.2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & -0.1 & 0.1 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 2.0 & 0.0 & 20.7 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & -0.3 & 0.0 & 0.2 & -1.1 & -0.0 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Выделяем базисные столбцы с помощью элементарных преобразований строк матрицы.

$$\begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.1 \\ 1.0 & 0.0 & 0.6 & 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -0.4 & 0.0 & -0.7 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.1 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & -0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.5 & 0.0 & -12.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.4 & 1.0 & -1.2 & 0.1 & -0.6 & 0.4 \\ 0.0 & 1.0 & 0.8 & 0.0 & -0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & -0.1 & 0.0 & -0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 7.5 & 0.0 & -9.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.1 & 0.0 & -1.2 & -0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0.0 & 0.0 & -8.5 & 0.0 & -23.2 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & -0.9 & 0.2 & -0.6 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -0.2 & 1.0 & 1.2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & -0.1 & 0.1 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 2.0 & 0.0 & 20.7 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & -0.3 & 0.0 & 0.2 & -1.1 & -0.0 & 0.3 \end{pmatrix}$$

В первой строке не осталось отрицательных элементов, значит найдено оптимальное решение.

Оптимальное решение:

(0.036 0.0260 0.0041 0 0.00933)

Целевая функция: 0.076

Получим оптимальную стратегию первого игрока:

$$p^* = \frac{x}{\|x\|} = (0.78 \ 0.58 \ 0 \ 0.089 \ 0 \ 0.20225716)$$

Цена игры:

$$\phi = \frac{1}{\alpha} = 13.16$$

2 Ответ

Нижняя цена игры: 11

Верхняя цена игры: 18

Оптимальная стратегия первого игрока:

$$p^* = \frac{x}{\|x\|} = (0.78 \ 0.58 \ 0 \ 0.089 \ 0 \ 0.20)$$

Оптимальная стратегия второго игрока:

$$q^* = \frac{y}{\|y\|} = (0 \ 0 \ 0 \ 0.42 \ 0 \ 0.86 \ 0.26 \ 0.12)$$

Цена игры:

$$\phi = \frac{1}{\alpha} = 13.16$$

3 Приложение

Код программы:

```
import math
import numpy as np
import enum

class TaskType(enum.Enum):
    direct = 0
    secondary = 1
    dual = 2

def build_matrix_for_direct_task(a, b, c) -> np.ndarray:
    a_c = np.append([-c], a, axis=0)
    eye = np.append([np.zeros(8,)], np.eye(8), axis=0)
    a_c_eye = np.append(a_c, eye, axis=1)
    return np.append(a_c_eye, np.append([[0]], b, axis=0), axis=1)

def build_matrix_for_secondary_task(a, c) -> np.ndarray:
```

```

a = np.append([np.zeros((8,))], a, axis=0)
minus_i = np.append([np.zeros((6,))], -np.eye(6), axis=0)
i = np.append([np.ones((6,))], np.eye(6), axis=0)
c = np.append([[0]], c.reshape((6, 1)), axis=0)
res = np.hstack([a, minus_i, i, c])
for i in range(1, len(res)):
    res[0] = res[0] - res[i]
return res

def build_matrix_for_dual_task(simplex_table: np.ndarray, b) -> np.ndarray:
    base_col = [False for i in range(len(simplex_table[0]))]
    for j in range(len(simplex_table[0])):
        if not math.isclose(simplex_table[0][j], 0, rel_tol=1e-10):
            continue
        is_base_col = True
        for i in range(len(simplex_table)):
            if not (math.isclose(simplex_table[i][j], 0, rel_tol=1e-10) or math.
isclose(simplex_table[i][j], 1, rel_tol=1e-10)):
                is_base_col = False
                break
        base_col[j] = is_base_col

    simplex_table = np.delete(simplex_table, np.s_[14:20], axis=1)
    for i in range(len(b)):
        simplex_table[0][i] = b[i]

    for j in range(len(simplex_table[0])):
        if not base_col[j]:
            continue
        for i in range(len(simplex_table)):
            if not math.isclose(simplex_table[i][j], 1, rel_tol=1e-10):
                continue
            simplex_table[0] -= simplex_table[i] * simplex_table[0][j]
            break

    return simplex_table

def simplex(a, b, c, task_type: TaskType):
    if task_type == TaskType.direct:
        simplex_table = build_matrix_for_direct_task(a, b, c)
        y_bias = 0
    elif task_type == TaskType.secondary:
        simplex_table = build_matrix_for_secondary_task(a, c)
        y_bias = 0
    else:
        simplex_table = build_matrix_for_dual_task(a, b)
        y_bias = 1

```

```

it = 0
while True:
    it += 1
    resolving_column = None
    min_c = 0
    for i in range(len(simplex_table[0])-1):
        if round(simplex_table[0][i], 13) < min_c:
            min_c = simplex_table[0][i]
            resolving_column = i

    if resolving_column is None:
        break

    min_b = float('inf')
    resolving_stroke = None
    for i in range(len(a) - y_bias):
        if 0 < simplex_table[i+1][-1] / simplex_table[i+1][resolving_column] < min_b:
            min_b = simplex_table[i+1][-1] / simplex_table[i+1][resolving_column]
            resolving_stroke = i + 1

    resolving_element = simplex_table[resolving_stroke][resolving_column]

    simplex_table[resolving_stroke] /= resolving_element

    for i in range(len(simplex_table)):
        if i == resolving_stroke:
            continue
        simplex_table[i] -= simplex_table[i][resolving_column] * simplex_table[
            resolving_stroke]

    ans = np.zeros(len(simplex_table[0]))
    for j in range(len(simplex_table[0])):
        for i in range(len(simplex_table)):
            if round(simplex_table[i][j], 2) == 1.:
                ans[j] = simplex_table[i][-1]
                break

    return (ans, simplex_table)

```