МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Департамент математического и компьютерного моделирования

Реферат
«Решение краевой задачи для уравнение Лапласа в круге и вне круга методом Фурье. Формула Пуассона решения краевой задачи для уравнения Лапласа в круге и вне круга.»

по дисциплине «Уравнения математической физики»

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент
гр. Б9120-01.03.02миопд
Агличеев А.О. ________
(ФИО) *(подпись)*

Проверил д.ф.-м.н.
Алексеев Г.В. ________
(ФИО) *(подпись)*

« 24 » апреля 2023 г.

г. Владивосток
2024

Содержание

1 Введение

При исследовании стационарных процессов обычно приходят к уравнения эллиптического вида.[2, с. 295] К эллиптическому виду относится уравнение Лапласа

$$\Delta u = 0,$$

где Δ – оператор Лапласа. В n-мерном пространстве выглядит следующим образом

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}. \tag{1}$$

Чтобы выделить единственное решение уравнение Лапласа необходимо поставить одно из граничных условий:

1. $u = g$ на Γ – условие Дирихле,
2. $\dfrac{\partial u}{\partial n} = g$ на Γ – условие Неймана,
3. $\dfrac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g$ на Γ – условие 3-го рода,
4. $\alpha u + \beta \dfrac{\partial u}{\partial n} = g$ на Γ – смешанное.

Решение краевых задач может быть найдено методом Фурье в случае некоторых простейших областей(круг, промоугольник, шар и др.).[2] В этом реферате мы рассмотрим решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге и вне круга.

2 Основная часть

2.1 Постановка краевых задач. Применение метода Фурье.

Пусть $\Omega = \Omega_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < a^2\}$ – круг радиуса a, $\Omega_e = \mathbb{R} \backslash \overline{\Omega}$. Рассмотрим две задачи[1]:

1. Внутренняя задача Дирихле, заключающаяся в нахождении классического решения u уравнения Лапласа

   $$\Delta u = 0 \tag{2}$$

   в Ω, удовлетворяющего граничному условию

   $$u\big|_{\Gamma} = g \tag{3}$$

2. Внешняя задача Дирихле, заключающаяся в нахождении классического решения уравнения (2) в области Ω_e, удовлетворяющего граничному условию (3) и условию на бесконечности:

$$u(x, y) = O(1) \text{ при } (x^2 + y^2) \to \inf \tag{4}$$

Для решения этих задач перейдем в полярные координаты[3]

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \tag{5}$$

Уравнение (2) в полярных координатах имеет вид[1]:

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0 \tag{6}$$

Решим задачу методом разделения переменных, т.е. будем искать частное решение уравнения (2) в виде

$$u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi) \tag{7}$$

Подставляя (7) в (6) и разделяя переменные получаем

$$\frac{\rho(\rho R')'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda, \tag{8}$$

где $\lambda = const$.

Комментарий:

В разных частях полученного равенства стоят функции разных переменных. Это может быть только тогда, когда обе они постоянны.

Отсюда получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$\rho^2 R'' + \rho R' - \lambda R = 0 \tag{9}$$

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0 \tag{10}$$

Заметим, что при измении угла φ на величину 2π однозначная функция $u(\rho, \varphi)$ должна вернуться к исходному значению.

$$u(\rho, \varphi) = u(\rho, \varphi + 2\pi) \tag{11}$$

Отсюда следует, что

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi) \tag{12}$$

Равенства (10) и (12) представляют собой спектральную задачу. Ее решение имеет вид

$$\lambda_k = k^2,\ \Phi_k(\varphi) = a_k \cos(k\varphi) + b_k \sin(k\varphi), k = 0, 1, 2... \tag{13}$$

Комментарий:

Составим и решим характеристическое уравнение

$$z^2 + \lambda = 0$$

$$z = \pm\sqrt{-\lambda}$$

Рассмотрим разные знаки λ

1. $\lambda < 0$

$$\Phi(\varphi) = ae^{\sqrt{-\lambda}\varphi} + be^{-\sqrt{-\lambda}\varphi}$$

В данном случае задача имеет только тривиальное решение.

2. $\lambda = 0$

$$\Phi(\varphi) = a + b\varphi$$

При $b = 0$ *получаем периодическую функцию – константу.*

3. $\lambda > 0$

$$\Phi(\varphi) = a\cos\sqrt{\lambda}\varphi + b\sin\sqrt{\lambda}\varphi$$

При $\lambda = k^2$ *– функция периодическая. Решения из пункта 2 и 3 можно объединить, если считать, что* k *меняется, начиная с* 0*.[3]*

Проверим:

$$(\cos\sqrt{\lambda}\varphi)'' = -\lambda\cos\sqrt{\lambda}\varphi \qquad (\sin\sqrt{\lambda}\varphi)'' = -\lambda\sin\sqrt{\lambda}\varphi$$

$$-\lambda\cos\sqrt{\lambda}\varphi + \lambda\cos\sqrt{\lambda}\varphi = 0 \qquad -\lambda\sin\sqrt{\lambda}\varphi + \lambda\sin\sqrt{\lambda}\varphi = 0$$

Оба решения удовлетворяют уравнению, а так как оно однородное, то и их линейная комбинация тоже является решением.

Перейдем к решению уравнения (9). Заменим λ на k^2. Получим уравнение Эйлера.[1]

$$\rho^2 R'' + \rho R' - k^2 R = 0 \tag{14}$$

Полагая $R(\rho) = \rho^\mu$, находим при $k > 0$ два решения: ρ^k и ρ^{-k}, при $k = 0$ решениями являются 1 и $\ln\rho$.

Комментарий:

$R(\rho) = \rho^\mu \qquad R'(\rho) = \mu\rho^{(\mu-1)} \qquad R''(\rho) = \mu(\mu-1)\rho^{(\mu-2)}$

Подставляем в (14) и сокращая на ρ^μ, получаем

$$\mu^2 = k^2 \Rightarrow \mu = \pm k$$

При $k > 0$ получаем общее решение:

$$R(\rho) = a\rho^k + b\rho^{-k}$$

Проверка:

$$R' = k\rho^{k-1} \qquad\qquad R' = -k\rho^{-k-1}$$

$$R'' = k(k-1)\rho^{k-2} \qquad\qquad R'' = -k(-k-1)\rho^{-k-2}$$

$$k(k-1)\rho^k + k\rho^k - k^2\rho^k = 0 \qquad -k(k-1)\rho^k - k\rho^k - k^2\rho^k = 0$$

$$k^2 - k + k - k^2 = 0 \qquad\qquad k^2 + k - k - k^2 = 0$$

При $k = 0$ получаем общее решение:

$$R(\rho) = a + b\ln\rho$$

Проверка:

$$R' = 0 \qquad\qquad R' = \frac{1}{\rho}$$

$$R'' = 0 \qquad\qquad R'' = -\frac{1}{\rho^2}$$

$$0 = 0 \qquad\qquad -1 + 1 = 0$$

Для внутренней задачи возьмем[1]

$$R_0(\rho) = 1,\ R_k(\rho) = \rho^k, k \geq 1 \tag{15}$$

и для внешней

$$R_0(\rho) = 1,\ R_k(\rho) = \rho^{-k}, k \geq 1 \tag{16}$$

Итак, частные решения найдены:

$$u_k(\rho, \varphi) = \rho^k(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi), k = 0, 1, 2... \tag{17}$$

для внутренней задачи Дирихле и

$$u_k(\rho, \varphi) = \rho^{-k}(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi), k = 0, 1, 2... \tag{18}$$

для внешней задачи Дирихле.

Комментарий:

Найдем частные производные (17) по ρ и φ и подставим в (6).

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = k\rho^{(k-1)}(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) = k^2\rho^{(k-1)}(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = k\rho^k(-a_k \sin k\varphi + b_k \cos k\varphi)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -k^2\rho^k(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)$$

$$k^2\rho^{(k-2)}(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) - k^2\rho^{k-2}(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) = 0$$

Получили тождество, значит полученое решение верно. Аналогично и для решения (18) внешней задачи.

Бесконечные суммы этих решений[1]

$$u(\rho, \varphi) = \sum_0^\infty \rho^k(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) \tag{19}$$

$$u(\rho, \varphi) = \sum_0^\infty \rho^{-k}(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) \tag{20}$$

также будут гармоническими функциями, при условии, что ряд (19) (либо (20)) можно почленно дифференцировать по r и по φ с сохранением равномерной сходимости в $\Omega(\Omega_e)$.

Для определения коэффициентов a_k и b_k воспользуемся граничным условием (3).

$$u(a, \varphi) = \sum_0^\infty a^k(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) \tag{21}$$

Предположим, что функция g удовлетворяет условиям

(i) $g \in C^0[0,2\pi], g(0) = g(2\pi)$ С учетом условий (i) функцию g можно разложить в ряд Фурье:

$$g(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_1^{\infty} (\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi), \tag{22}$$

где коэффициенты α_0, α_k и β_k определяются формулами

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\psi) d\psi,\ \alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\psi) \cos k\psi d\psi,\ \beta_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\psi) \sin k\psi d\psi \tag{23}$$

Сравнивая ряды (21) и (22), получаем

$$a_0 = \frac{\alpha_0}{2},\ a_k = \frac{\alpha_k}{a^k},\ b_k = \frac{\beta_k}{a^k} \tag{24}$$

для внутренней задачи и

$$a_0 = \frac{\alpha_0}{2},\ a_k = \alpha_k a^k,\ b_k = \beta_k a^k \tag{25}$$

для внешней.

Таким образом, получили решение первой задачи в виде ряда[1]

$$u(\rho, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_1^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^k (\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi), \tag{26}$$

а для внешней

$$u(\rho, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_1^{\infty} \left(\frac{a}{\rho}\right)^k (\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi), \tag{27}$$

Чтобы убедиться в том, что полученные ряды действительно являются классическими решениями, нужно убедиться, что ряды можно почленно дифференцировать и они равномерно сходятся в $\Omega(\Omega_e)$.

Рассмотрим доказательство, что ряд (26) является классическим решением для первой краевой задачи из [1]. Докажем, что ряд можно дважды почленно дифференцировать.

Доказательство. Рассмотрим сначала ряд (26) и докажем, что в замкнутом круге $\overline{\Omega}_{\rho_0} = \{(\rho, \varphi) : 0 \le \rho \le \rho_0, \varphi \in [0, 2\pi]\}$ равномерно сходятся как ряд (26) так и ряды

$$\sum_k \frac{\partial u_k}{\partial \rho},\ \sum_k \frac{\partial^2 u_k}{\partial \rho^2},\ \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial \varphi},\ \sum_k \frac{\partial^2 u_k}{\partial \varphi^2}, \tag{28}$$

полученные его почленным дифференцированием.

Комментарий:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{\rho}{a}\right)^{k-1}(\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} = \frac{1}{a^2}\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)\left(\frac{\rho}{a}\right)^{k-2}(\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{\rho}{a}\right)^{k}(-\alpha_k \sin k\varphi + \beta_k \cos k\varphi)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -\sum_{k=1}^{\infty} k^2\left(\frac{\rho}{a}\right)^{k}(\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi)$$

При выполнении условий (i) для коэффициентов Фурье α_k и β_k функции g справедливы следующии оценки:

$$|\alpha_0| \leq M, |\alpha_k| \leq M, |\beta_k| \leq M = \text{const}\ \forall k = 1, 2, ... \tag{29}$$

Учитывая, (29), выводим, что ряды (27) и (28) мажорируются в круге $\overline{\Omega}_{\rho_0}$ соответственно числовыми рядами:

$$\frac{M}{2} + 2M\sum_k \left(\frac{\rho_0}{a}\right)^k,\ \frac{2M}{a}\sum_k k\left(\frac{\rho_0}{a}\right)^{(k-1)}\ \frac{2M}{a^2}\sum_k k(k-1)\left(\frac{\rho_0}{a}\right)^{(k-2)}$$

$$2M\sum_k k\left(\frac{\rho_0}{a}\right)^k\ 2M\sum_k k^2\left(\frac{\rho_0}{a}\right)^k$$

Сходимость их следует из признака Даламбера.

Комментарий:

$$\sum_k \left(\frac{\rho_0}{a}\right)^k \qquad \lim_{k\to\infty}\frac{\rho_0^{(k+1)}\cdot a^k}{a^{(k+1)}\cdot \rho_0^k} = \frac{\rho_0}{a} < 1 \Rightarrow \textit{сходится}$$

$$\sum_k k\left(\frac{\rho_0}{a}\right)^{(k-1)} \qquad \lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)\rho_0^k\cdot a^{(k-1)}}{ka^k\cdot \rho_0^{(k-1)}} = \frac{\rho_0}{a} < 1 \Rightarrow \textit{сходится}$$

$$\sum_k k(k-1)\left(\frac{\rho_0}{a}\right)^{(k-2)} \lim_{k\to\infty}\frac{k(k+1)\rho_0^{(k-1)}\cdot a^{(k-2)}}{k(k-1)a^{(k-1)}\cdot \rho_0^{(k-2)}} = \frac{\rho_0}{a} < 1 \Rightarrow \textit{сходится}$$

$$\sum_k k\Big(\frac{\rho_0}{a}\Big)^k \qquad \lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)\rho_0^{(k+1)}\cdot a^k}{ka^{(k+1)}\cdot\rho_0^k}=\frac{\rho_0}{a}<1\Rightarrow \textit{сходится}$$

$$\sum_k k^2\Big(\frac{\rho_0}{a}\Big)^k \qquad \lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)^2\rho_0^{(k+1)}\cdot a^k}{k^2a^{(k+1)}\cdot\rho_0^k}=\frac{\rho_0}{a}<1\Rightarrow \textit{сходится}$$

Отсюда вытекает, что ряд (26) имеет непрерывные производные первого и второго порядка по ρ и φ и является гармонической в Ω. ■

Осталось доказать равномерную сходимость в $\overline{\Omega}$.

Доказательство. Для этого достаточно доказать сходимость числового ряда

$$|\alpha_0|+\sum_{k=1}^{\infty}(|\alpha_k|+|\beta_k|) \tag{30}$$

который является мажорирующим для ряда (26) в замкнутом круге $\overline{\Omega}$. Предположим, что в дополнение к условиям (i) выполняется условие:

(ii) функция g имеет кусочно-непрервыную производную g'. Интегрирую по частям, мы видим, что коэффициенты Фурье $\widetilde{\alpha}_k$ и $\widetilde{\beta}_k$ функции g' связаны с коэффициентами Фурье α_k и β_k функции g следующими формулами

$$\widetilde{\alpha}_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}g'(\varphi)\cos k\varphi d\varphi=k\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}g(\varphi)\sin k\varphi d\varphi=k\beta_k, k=1,2,...,$$

$$\widetilde{\beta}_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}g'(\varphi)\sin k\varphi d\varphi=k\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}g(\varphi)\cos k\varphi d\varphi=-k\alpha_k, k=1,2,...,$$

Комментарий:

$$\widetilde{\alpha}_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}g'(\varphi)\cos k\varphi d\varphi=\begin{matrix}+\\-\end{matrix}\begin{vmatrix}\cos k\varphi & g'\\ -k\sin k\varphi & g\end{vmatrix}=g(\varphi)\cos k\varphi\Big|_0^{2\pi}+$$
$$+\frac{k}{\pi}\int_0^{2\pi}g(\varphi)\sin k\varphi d\varphi=k\beta_k$$

Аналогично и для $\widetilde{\beta}_k$.

Отсюда следует, что $|\alpha_k| + |\beta_k| = (|\widetilde{\alpha}_k| + |\widetilde{\beta}_k|)/k$ и для доказательства сходимости ряда достаточно доказать сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{|\widetilde{\alpha}_k|}{k} + \frac{|\widetilde{\beta}_k|}{k} \right\} \tag{31}$$

Но сходимость ряда следует их элементарных неравенств

$$\frac{|\widetilde{\alpha}_k|}{k} \le \frac{1}{2}\left(\widetilde{\alpha}_k^2 + \frac{1}{k^2}\right), \ \frac{|\widetilde{\beta}_k|}{k} \le \frac{1}{2}\left(\widetilde{\beta}_k^{\ 2} + \frac{1}{k^2}\right)$$

и из сходимости рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\widetilde{\alpha}_k^2 + \widetilde{\beta}_k^2), \ \sum_{k=1}^{\infty} (1/k^2)$$

Комментарий:

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (\widetilde{\alpha}_k^2 + \widetilde{\beta}_k^2)$ сходится в силу равенсва Парсеваля для функции g':

$$\frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^2 + \beta_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (g')^2 d\varphi$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (1/k^2)$ сходится в силу признака Коши-Маклорена:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = -\lim_{b\to\infty} \frac{1}{x}\Big|_1^b = -\lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{b} - 1\right) = 1$$

Интеграл сходится, следовательно соответвующий ряд так же сходится.

■

2.2 Интеграл Пуассона

Преобразуем формулы (26) и (27) к более простому виду. Как и в прошлом пункте рассмотрим внутреннюю задачу, а для внешней получим результат по аналогии.

Подставляя выражение для коэффициентов Фурье в (26) и меняя порядок суммирования и интегрирования будем иметь[1]

$$\begin{aligned} u(\rho,\varphi) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\psi)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^k(\cos k\psi\cos k\varphi+\sin k\psi\sin k\varphi)\right\}d\psi \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\psi)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^k\cos(\varphi-\psi)\right\}d\psi. \end{aligned} \tag{32}$$

Сделаем следующие тождественные преобразования[1]

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^k\cos(\varphi-\psi) &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}t^n\left[e^{in(\varphi-\psi)}+e^{-in(\varphi-\psi)}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left\{1+\sum_{k=1}^{\infty}\left[(te^{i(\varphi-\psi)})^n+(te^{-i(\varphi-\psi)})^n\right]\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left[1+\frac{te^{i(\varphi-\psi)}}{1-te^{i(\varphi-\psi)}}+\frac{te^{-i(\varphi-\psi)}}{1-te^{-i(\varphi-\psi)}}\right] \\ &= \frac{1}{2}\frac{1-t^2}{1-2t\cos(\varphi-\psi)+t^2}, \quad t=\frac{\rho}{a}<1 \end{aligned} \tag{33}$$

Подставляя (33) в (32), получаем[1]

$$u(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^2-\rho^2}{a^2-2a\rho\cos(\varphi-\psi)+\rho^2}g(\psi)d\psi. \tag{34}$$

Полученная формула называется интегралом Пуассона, в подыинтегральное выражение

$$k(\rho,\varphi;a,\psi)=\frac{a^2-\rho^2}{a^2-2a\rho\cos(\varphi-\psi)+\rho^2} \tag{35}$$

называется Ядром Пуассона. Отметим, что $k(\rho,\varphi;a,\psi)>0$ при $\rho<a$, так как $2ap<a^2+\rho^2$, если $\rho\neq a$.

Положим $\mathbf{x}=(\rho,\varphi)\in\Omega$, $\mathbf{y}=(a,\psi)\in\Gamma_a$, $\varphi,\psi\in[0,2\pi)$.

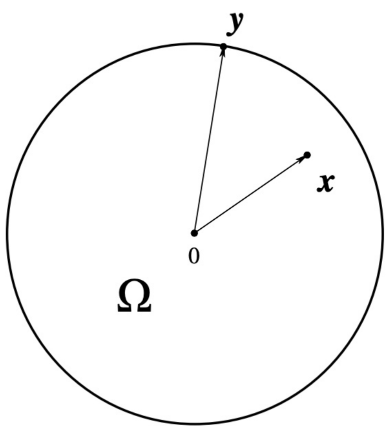

Рис. 1

Легко видеть, что расстояние r между $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ определяется формулой

$$r^2 = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = a^2 - 2a\rho\cos(\varphi - \psi) + \rho^2. \tag{36}$$

Учитывая (36) и выбирая в качестве переменной интегрирования длину дуги $s = a\psi$, перепишем формулу (34) в виде:[1]

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi a}\int_{\Gamma_a} \frac{(a^2 - \rho^2)}{r^2} g(\mathbf{y}) ds_y = \frac{1}{2\pi a}\int_{\Gamma_a} \frac{(a^2 - |\mathbf{x}^2|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} g(\mathbf{y}) ds_y \tag{37}$$

При выполнении лишь условия (i) интеграл Пуассона является гармонической в Ω функцией, так как этим свойством обладает исходный ряд (26). То же самое справедливо и для (37). Более того, если функция g удовлетворяет еще и условию (ii), то можно утверждать, что

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}_0), \quad \lim_{\substack{\rho\to a\\ \varphi\to\varphi_0}} u(\rho, \varphi) = g(\varphi_0) \;\; \forall \varphi_0 \in [0, 2\pi), \tag{38}$$

так как ряд, из которого получена формула (26) ((37)) является при выполнении условий (i) и (ii) непрерывной функцией в замкнутом круге $\overline{\Omega}$, удовлетворяющей граничному условию (3).

Функция, определенная формулой[2]

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi a}\int_{\Gamma_a} \dfrac{(a^2 - \rho^2)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} g(\mathbf{y}) ds_y, \mathbf{x} \in \Omega \\ g(\mathbf{x}), \qquad\qquad\qquad\qquad \mathbf{x} \in \Gamma_a \end{cases} \tag{39}$$

даёт дает решение первой задачи даже в том случае, когда g только непрерывна.

Решение внешней задачи имеет вид

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi a} \int_{\Gamma_a} \dfrac{(\rho^2 - a^2)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} g(\mathbf{y}) ds_y, \mathbf{x} \in \Omega_e \\ g(\mathbf{x}), \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \mathbf{x} \in \Gamma_a \end{cases} \tag{40}$$

Рассмотрим доказательство, что (39) дает классическое решение задачи, только при выполнении условия (i) из [1].

Доказательство. Для функции $g \equiv 1$ на Γ_a решением первой задачи является функция $u \equiv 1$. Это вытекает из принципа максимума. С учетом этого приходим к соотношению

$$1 = \frac{1}{2\pi a} \int_{\Gamma_a} \frac{a^2 - \rho^2}{r^2} ds_y \tag{41}$$

Комментарий:

Принцип максимума: Функция u, гармоническая внутри ограниченной области Ω, не может принимать своего максимального и минимального значений внутри Ω, кроме случая, когда $u \equiv \mathrm{const}$.

Умножим обе части на $g(\mathbf{x}_0)$, где $\mathbf{x}_0 \in \Gamma_a$ - фиксированная точка, и вычтем из (37)

$$u(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi a} \int_{\Gamma_a} [g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x}_0)] \frac{a^2 - \rho^2}{r^2} ds_y. \tag{42}$$

Окружим точку $\mathbf{x}_0$ окружность $S_{2\delta}$ радиуса 2δ. δ выберем таким образом, чтобы во всех точках $\mathbf{y}$ части Γ_1 границы Γ_a, лежащей внутри $S_{2\delta}$, выполнялось неравенство

$$|g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x}_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{43}$$

где $\varepsilon > 0$ -произвольное сколь угодно малое число.

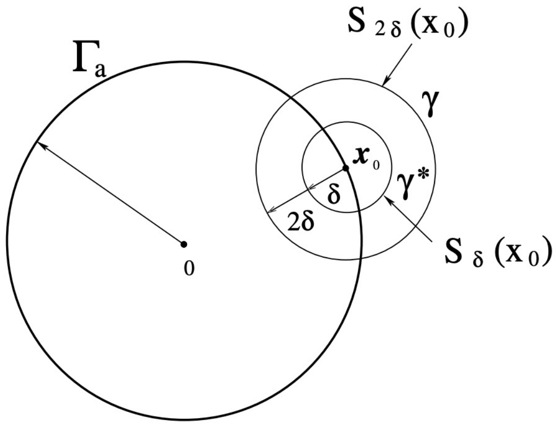

Рис. 2

Положим

$$\Gamma_2 = \Gamma_a \setminus \overline{\Gamma}_1, \quad I_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi a}\int_{\Gamma_k}[g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x}_0)]\frac{a^2-\rho^2}{r^2}ds_y, \quad k = 1, 2. \tag{44}$$

Из (42) и (44) имеем

$$|u(\mathbf{x} - g(\mathbf{x}_0))| \leq |I_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)| + |I_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)| \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \tag{45}$$

Оценим в отдельности каждое слагаемое в правой части этого неравенства. Учитывая (41) и (43), имеем

$$|I_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)| < \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{2\pi a}\int_{\Gamma_1}\frac{a^2-\rho^2}{r^2}ds_y < \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{2\pi a}\int_{\Gamma_a}\frac{a^2-\rho^2}{r^2}ds_y = \frac{\varepsilon}{2} \ \forall \mathbf{x} \in \Omega \tag{46}$$

Оценим теперь $|I_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)|$. Для этого построим еще одну окружность S_δ с центром в точке $\mathbf{x}_0$, имеющую радиус δ. Поскольку нас интересует решение $u(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$, то можно считать, что точка $\mathbf{x}$ находится внутри окружности S_δ. Тогда для любой точки $\mathbf{y} \in \Gamma_2$ выполняется неравенство $r \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{y}| > \delta$. Учитывая, кроме того, что непрерываная на $[0, 2\pi]$ функция g ограничена, так что $|g(\mathbf{y})| \leq M' = \text{const}$ на Γ_a, имеем, согласно (44), что

$$|I_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)| \leq \frac{2M'(a^2-\rho^2)}{2\pi a\delta^2}\int_{\Gamma_2}ds \leq \frac{2M'(a^2-\rho^2)}{\delta^2} \tag{47}$$

Так как число δ зафиксировано, а при $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$, очевидно, что $\rho = |\mathbf{x} \to a|$ и, следовательно, правая часть (47) стремится к нулю, то найдется такое число $\delta_1 > 0$, что выполняется неравенство

$$|I_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \ \text{ при } \ |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta_1. \tag{48}$$

Из (46) и (48) вытекает в силу произвольности ε, что

$$|u(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)| \to 0 \ \text{ при } \ |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \to 0 \tag{49}$$

Из (49) , в частности, следует, что $u \in C(\overline{\Omega})$. Кроме того, $u \in C^2(\Omega)$. Это означает, что формула (39) определяет классическое решение задачи Дирихле. ■

3 Заключение

Таким образом, с помощью метода Фурье мы получили решения задачи Дирихле уравнения Лапласа в круге и вне круга. Доказали, что они являются классическими решениями, при соблюдении условий (i) и (ii). Затем преобразовали решение к интегралу Пуассона и доказали, что он дает классическое решение, даже в случае соблюдения только условия (i).

4 Список литературы

1. Алексеев. Г.В. Классические модели и методы математической физики. Учебное пособие. – Владивосток: Дальнаука, 2011. – 452 с.

2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики: Учебное пособие. – М. : издательство МГУ, 1999. – 799 с.

3. Орловский Д.Г. Уравнение Лапласа в круговых областях[Электронный ресурс] URL: http://www.orlovsky-mephi.narod.ru/Circle.pdf (дата обращение 15.01.2024)