Отчёт по лабораторной работе №2

Группа Б9120-01.03.02миопд
Агличеев Александр

7 мая 2022 г.

Содержание

Введение

В данной лабораторной работе мне нужно найти общее решение и построить векторное после с помощью программ компьютерной математики, решить задачу Коши и проверить решение задачи Коши.

Задание 1

Постановка задачи

Для следующих дифференциальных уравнений определить тип, найти общее решение и построить векторное поле с помощью программ компьютерной математики:

1. $\sinh x \cdot \cosh x + y - 1 = (\sinh y \cdot \cosh y) \cdot y'$
2. $xy' - 4\tan y = 2x^2 \cdot \cos x^2 \cdot \sec y$
3. $y' \sin x - y \cot x = \cot x \cdot \sin x$
4. $\sec^2 xy \cdot \tan xy \cdot \big(xy' + y\big) + \operatorname{sech}^2 x - y' \cos y = 1$
5. $y' \cdot \cos^2 x = \sec y \cdot \ln \sin y$

Решение

Поиск решения и построение векторного поля будет проводиться в системе компьютерной математики Wolfram Mathematica.

1. $\sinh x \cdot \cosh x + y - 1 = (\sinh y \cdot \cosh y - x - 1) \cdot y'$

   Тип уравнения: Уравнение в полных дифференциалах

   Ответ: $\sinh^2 y - \sinh^2 x + 2x - 2xy - 2y = C$

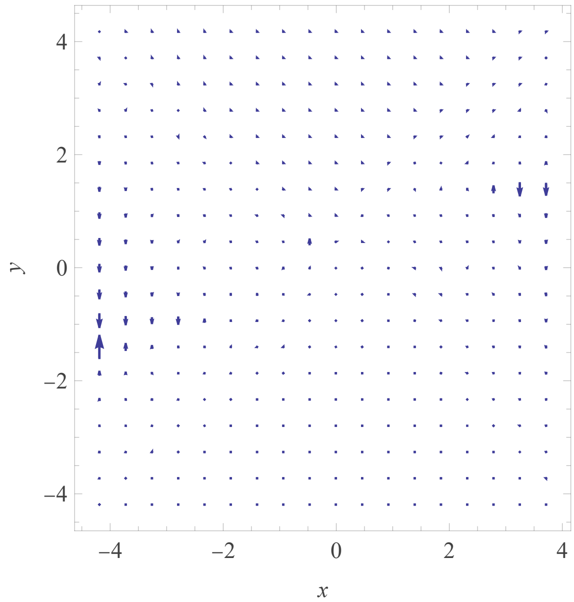

Рис. 1: Векторное поле
$\sinh x \cdot \cosh x + y - 1 = (\sinh y \cdot \cosh y) \cdot y'$

2. $xy' - 4\tan y = 2x^2 \cdot \cos x^2 \cdot \sec y$

   Тип уравнения: Линейное неоднородное неприведенное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами относительно переменной $u = \sin y$

   Ответ: $\sin y = Cx^4 + x^2 \cdot \left(x^2 \operatorname{Si}\left(x^2\right) + \cos x^2\right)$

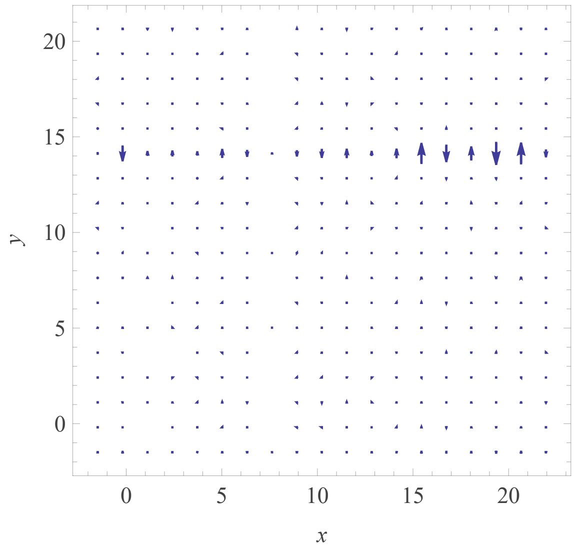

Рис. 2: Векторное поле
$xy' - 4\tan y = 2x^2 \cdot \cos x^2 \cdot \sec y$

3. $y' \sin x - y \cot x = \cot x \cdot \sin x$

   Тип уравнения: Линейное неоднородное неприведенное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами относильное переменной y

   Ответ: $y = e^{-\csc x} \cdot \big(C - \mathrm{Ei}\,(\csc x)\big)$

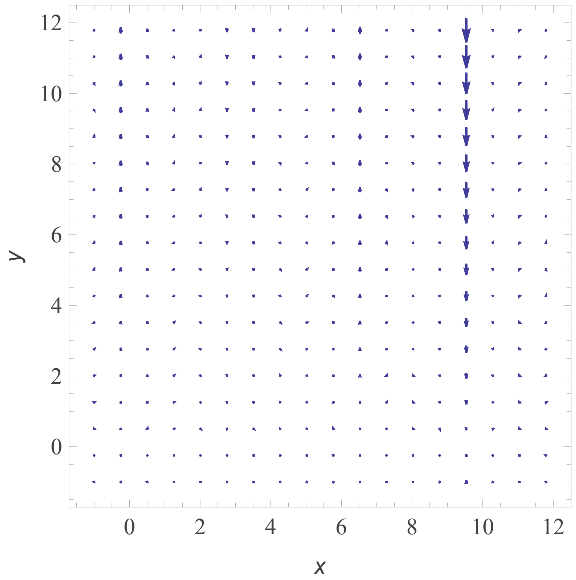

Рис. 3: Векторное поле
$y' \sin x - y \cot x = \cot x \cdot \sin x$

4. $\sec^2 xy \cdot \tan xy \cdot \left(xy' + y\right) + \operatorname{sech}^2 x - y' \cos y = 1$

   Тип уравнения: Уравнение в полных дифференциалах

   Ответ: $\operatorname{tg}^2 xy + 2 \tanh x - 2 \sinh y - 2x = C$

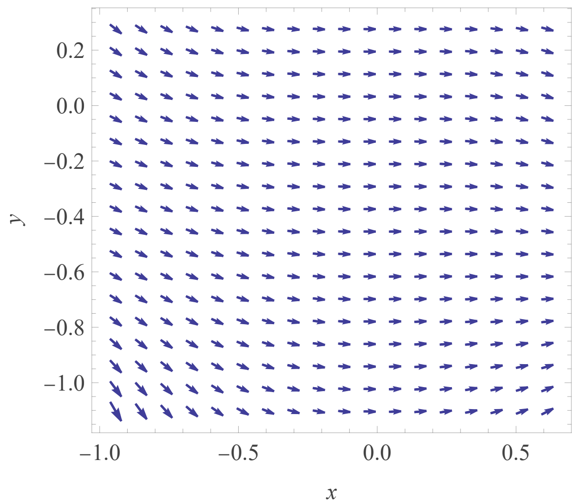

Рис. 4: Векторное поле
$\sec^2 xy \cdot \tan xy \cdot \left(xy' + y\right) + \operatorname{sech}^2 x - y' \cos y = 1$

5. $y' \cdot \cos^2 x = \sec y \cdot \ln \sin y$

Тип уравнения: Уравнение с разделяющимся переменными

Ответ: $\operatorname{li}(\sin y) - \tan x = C$

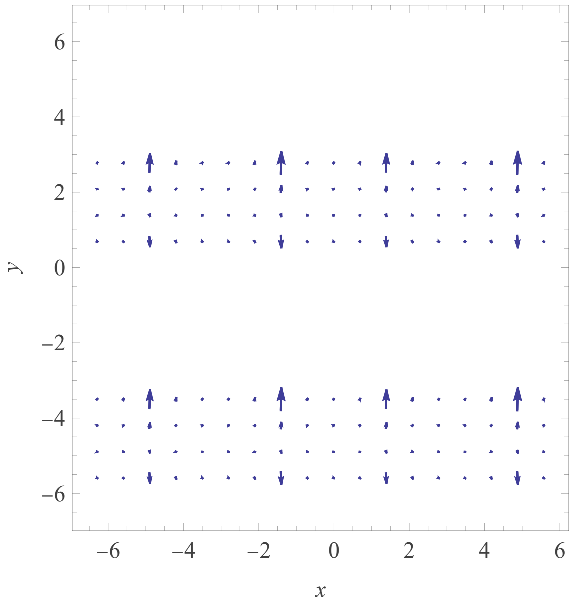

Рис. 5: Векторное поле
$y' \cdot \cos^2 x = \sec y \cdot \ln \sin y$

Задание 2

Постановка задачи

Решить задачу Коши, построить график решения:

1. $y' = e^{-x^2} - 2xy; \quad y(0) = 1$
2. $(\cos x - \sin x \cdot \tan y) \cdot y' = \sin x + (\cos x + \sin x)\tan y - \cos x;$
   $y(0) = \dfrac{\pi}{2}$

Решение

1. $\begin{cases} y' = e^{-x^2} - 2xy; \\ y(0) = 1; \end{cases}$

   Тип уравнения: Линейное уравнение первого порядка относительно переменной y

   Общее решение: $y = e^{-x^2}(C + x)$

   Задача Коши: $y = e^{-x^2}(1 + x)$

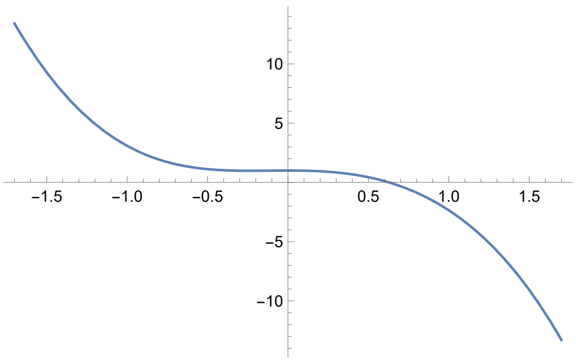

Рис. 6: График $y = e^{-x^2}(1 + x)$

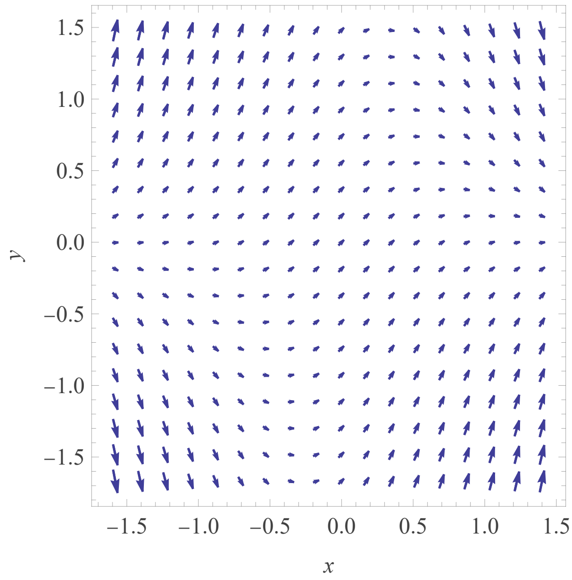

Рис. 7: Векторное поле $y' = e^{-x^2} - 2xy$

2. $\begin{cases} (\cos x - \sin x \cdot \tan y) \cdot y' = \sin x + (\cos x + \sin x) \tan y - \cos x; \\ y(0) = \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$

Тип уравнения: Однородное уравнение

Общее решение: $\sin(x + y) = Ce^x$

Задача Коши: $\sin(x + y) = e^x$

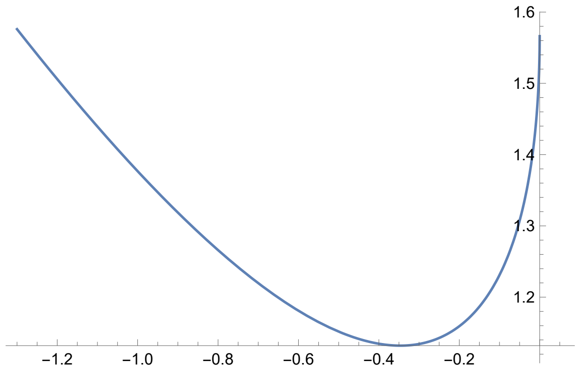

Рис. 8: График $\sin(x + y) = e^x$

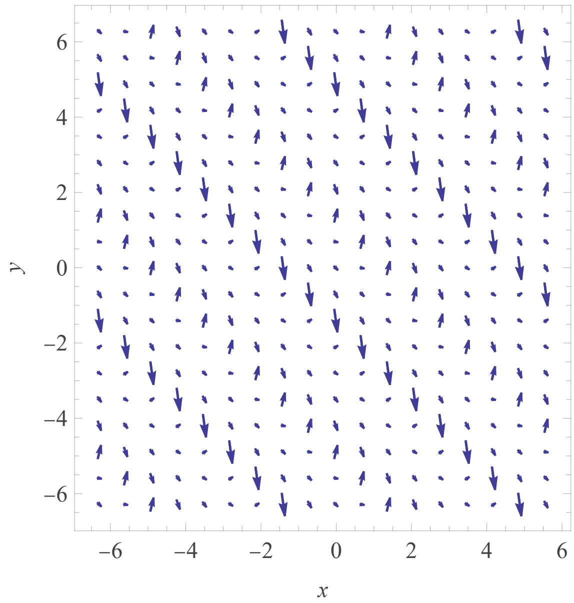

Рис. 9: Векторное поле
$(\cos x - \sin x \cdot \tan y) \cdot y' = \sin x + (\cos x + \sin x) \tan y - \cos x$

Задание 3

Постановка задачи

Проверить, является ли, представленная неявная функция решением следующей задачи Коши:

$$2xy = 2\sin(x+y)y' - y\sqrt{1-y^2-x^2}(1+y'), y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}; \sin(x+y) = y^2 - x^2$$

Решение

Проверим начальное условие $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \\ \sin 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Начальное условие выполняется

$$y' = \frac{2x + \cos(x+y)}{2y - \cos(x+y)}$$

Подставим в уравнение и проверим получится ли верное равенство:

$$2xy = 2\sin(x+y)\cdot\left(\frac{2x+\cos(x+y)}{2y-\cos(x+y)}\right) - y\sqrt{1-y^2-x^2}\left(1+\frac{2x+\cos(x+y)}{2y-\cos(x+y)}\right)$$

Неявная функция $\sin(x+y) = y^2 - x^2$ не является решением задачи Коши.

Заключение

Я решил задачи Коши, проверил задачу Коши и с помощью Wolfram Mathematica решил 5 дифференциальных уравнений. Оформлял отчёт по работе в «TeX Live».