

物理学実験 C : 周波数測定

Ver. 2018/4/13

< § 1 実験の目的 >

本実験では MHz 領域の高周波の各種測定を行うことで、高周波の特性や、高周波回路でよく用いられる機器について学ぶ。

< § 2 実験で使用する装置及びその原理 >

本章では実験に用いる実験装置の紹介とそれらの原理について説明する。

【 VCO 発振器 】 Mini-Circuits 製 ZOS-50+

Voltage Controlled Oscillator (VCO) 発振器とは電圧で発振周波数を制御する発振器である。発振回路において周波数を変化させるには、共振部を構成するコイルやコンデンサの値を変えなければならないが、VCO 発振器ではその一部にバリキャップダイオードを用いて発振周波数を変化させる。バリキャップダイオードとは可変容量ダイオードとも呼ばれ、印加される電圧によって静電容量が変化する。本実験装置では、VCO 発振器へ入力する電圧を 12 V DC 電源から可変抵抗を用いて 0~12 V の間で制御することができ、それに応じて発振周波数が変化する。

【 FFT 機能付きオシロスコープ 】 Tektronix 製 TBS1104

本実験で扱うオシロスコープは高速フーリエ変換 (FFT) 機能を有しており、読み取った電気信号の周波数成分を表示することができる。ここではその FFT についての原理を説明する。

まず、FFT のもとになっているフーリエ変換について説明する。フーリエ変換は

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (\text{式 1})$$

と表すことができ、 $f(t)$ という時間変数の関数を $F(\omega)$ という周波数変数の関数に変換することができる。これにより、信号に含まれる周波数の成分比を得ることができる。しかしフーリエ変換は時間についての連続関数を扱うため、デジタルオシロスコープで得られる離散的な電気信号には直接は対応できない。そこで離散フーリエ変換という時間軸上で離散化して得られたデータ列 $f[n]$ に対するフーリエ変換

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} \quad (\text{式 2})$$

を用いる。この計算を効率よく計算する方法が FFT である。

次にオシロスコープの各部位について簡単に説明する。

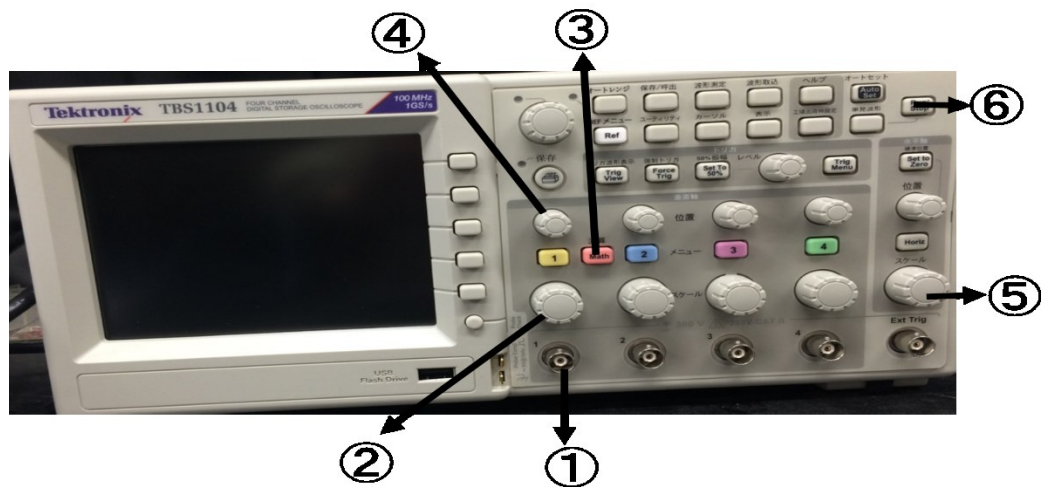


図 1 : オシロスコープ正面図。

- ①同軸ケーブル差込口
- ②垂直軸のスケールを調整するつまみ
- ③FFT 演算を行うボタン
- ④垂直軸の位置を調整するつまみ
- ⑤水平軸のスケールを調整するつまみ
- ⑥波形取得の一時停止およびその解除をするボタン

【 ファンクションジェネレータ 】

正弦波や三角波など、何種類かの交流電圧を出すことができ、その振幅 (amplitude)、周波数 (frequency)、電圧の中心値 (offset) を変えることができる。テキスト最後に使い方を記す。

【 ターミネーション 】

物理学の実験でよく用いられる同軸ケーブルは特性インピーダンスが $50\ \Omega$ のものである。これはケーブルの抵抗が $50\ \Omega$ であるわけではなく、ケーブルに瞬間的に電圧がかけられたときに瞬間的に電流が流れるが、その電圧と電流の比をとると $50\ \Omega$ になる、というものである。そしてその電気信号がケーブルの端に到達したとき、その端についている素子や装置のインピーダンスが $50\ \Omega$ であると、電圧と電流の比はそのままでよく電気信号の反射が起こらない (インピーダンス整合) が、そうでない場合は反射が起こる。この反射をなくすための $50\ \Omega$ の抵抗器がターミネーションである。本実験で用いるオシロスコープの入力インピーダンスは $1\ \text{M}\Omega$ であり、その入力端子近くに並列にターミネーションがつながることで、合成インピーダンスがほぼ $50\ \Omega$ になり、オシロスコープでの反射が起きなくなる。

【 ローパスフィルタ 】

抵抗、コンデンサ、コイルなどの 2 つの素子を図のように接続すると最も簡単な 1 次フィルタが構成される。フィルタとは、様々な周波数成分を持つ信号から特定の周波数領域だけを取り出したり除去したりするものである。

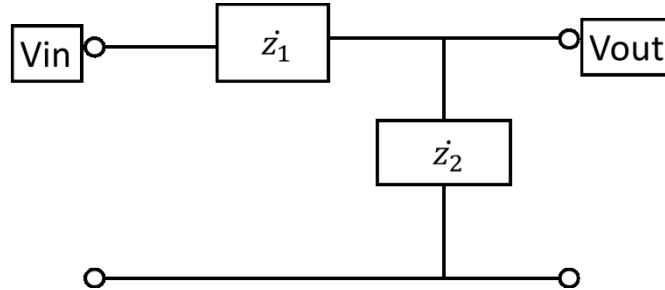


図 3 : 1 次フィルタの回路図。

図 3 の回路で、入力 \dot{v}_{in} は 2 つのインピーダンス z_1, z_2 で分圧されて出力 \dot{v}_{out} になる。 \dot{v}_{in} をインピーダンス z_1, z_2 で分圧すると出力 \dot{v}_{out} は

$$\begin{aligned}\dot{v}_{out} &= \dot{G} \dot{v}_{in} \\ &= \frac{z_2}{z_1 + z_2} \dot{v}_{in}\end{aligned}\quad (\text{式 3})$$

で与えられる。 \dot{v}_{out} と \dot{v}_{in} の比はゲインといい

$$\frac{\dot{v}_{out}}{\dot{v}_{in}} = \dot{G} = \frac{z_2}{z_1 + z_2} \quad (\text{式 4})$$

と求めることができる。ゲインを求めておけば、任意の入力信号電圧 \dot{v}_{in} を与えたときの出力信号電圧 \dot{v}_{out} を（式 4）で計算することができる。

ローパスフィルタ（以下 LPF）とはフィルタの一種で、信号のうちカットオフ周波数より低い周波数の成分はほとんど減衰せず、カットオフ周波数より高い周波数の成分を減衰させるフィルタである。LPF の回路は以下の回路図で示される。

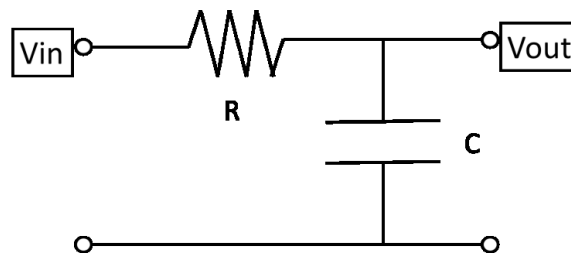


図 4 : RC ローパスフィルタ回路図。

RC ローパスフィルタでは入力される周波数が大きくなるとコンデンサのインピーダンスが小さくなり、それに伴って分圧比が小さくなるので出力電圧が減衰する。1 次フィルタでの図と比較して RC ローパスフィルタでのゲイン \dot{G} はインピーダンス

$$\begin{aligned}z_1 &= R \\ z_2 &= \frac{1}{i\omega C}\end{aligned}$$

を（式 4）に代入して、

$$\dot{G} = \frac{1}{i\omega CR + 1} \quad (\text{式 5})$$

と表すことができる。 \dot{G} のままでは複素数を考えなければならなくなるので

$$\dot{G} = G_0 \cdot e^{i\theta}$$

と分けて考えることにより、

$$\begin{cases} G_0 = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}} & (\text{式 6}) \\ \theta = -\tan^{-1}(\omega CR) & (\text{式 7}) \end{cases}$$

と表すことができる。ここで（式 6）は電圧利得の周波数特性であり（式 7）は位相のずれの周波数特性である。ここから、LPF による入出力の電圧比は G_0 で与えられる。

ここで、ゲインの表現にデシベルを採用する。デシベルは基準の値に対して比較したい値が何倍なのかを示すものであり、電圧比デシベルの定義は

$$G = 20 \log_{10}\left(\frac{v_{out}}{v_{in}}\right) \quad (\text{式 8})$$

と表す。電力比の場合と係数が異なることに注意せよ。LPF では $G_0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \doteq 0.707$ 、つまり -3 dB となる周波数をカットオフ周波数と言い、

$$f_c = \frac{1}{2\pi CR} \quad (\text{式 9})$$

と表せる。またカットオフ周波数より高い周波数成分があるときは、 $G_0 \approx 1/\omega CR$ となりゲインが低下するので、減衰量が大きくなりその周波数成分がカットされる。

【 ミキサー 】 Mini-Circuits 製 ZP-3LH+

二つの交流信号を入力してそれらを掛け合わせた信号を出力することがミキサーの基本動作である。ここでミキシングする交流信号のうちのひとつの波形を $A \sin(2\pi f_1 t)$ 、もうひとつを $B \sin(2\pi f_2 t)$ とすると 2 式の乗算は

$$\begin{aligned} & A \sin(2\pi f_1 t) B \sin(2\pi f_2 t) \\ &= \frac{AB}{2} \{ \cos(2\pi f_1 - 2\pi f_2)t - \cos(2\pi f_1 + 2\pi f_2)t \} \end{aligned} \quad (\text{式 10})$$

となる。このようにミキサーによって $f_1 + f_2$ と $f_1 - f_2$ の周波数成分を持つ信号に変換される。

< § 3 実験 >

実験配線図

本実験では VCO 発振器と周辺の機器を以下の図のように配線してある。

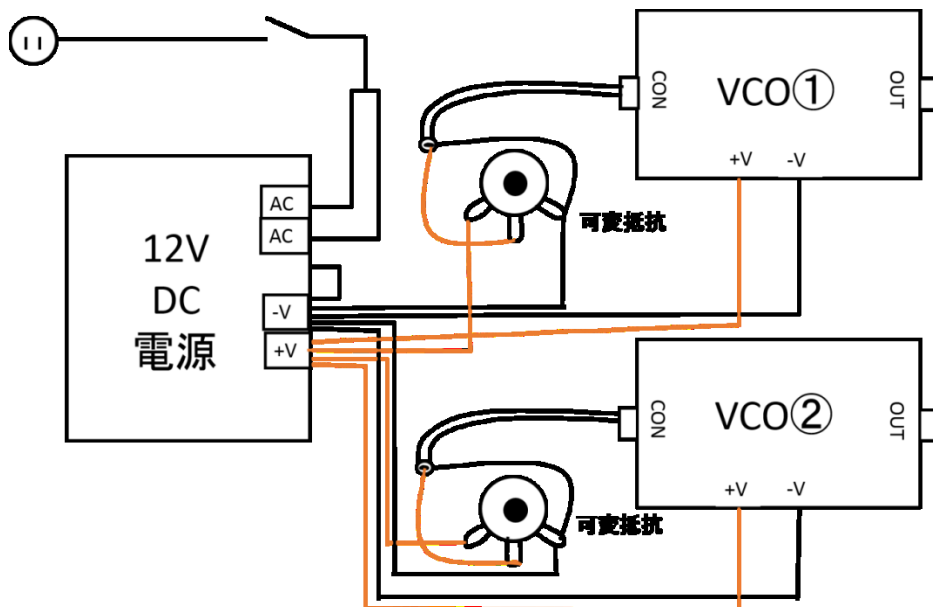


図 5 : VCO 発振器とその周辺機器の配線図。

VCO 発振器の入力端子には 12 V DC 電源から可変抵抗によって 0~12 V の間で入力電圧を調整できるダイヤルをとりつけてある。実験時にはダイヤルを調整することで VCO 発振器から発振される周波数を制御できる。

§ 3.1 VCO 発振器の動作確認

VCO 発振器①を使用し、入力直流電圧を変えると出力信号の周期がどう変わるかをオシロスコープで測定し、入力電圧と出力周波数の関係をグラフにする。また、オシロスコープの FFT 機能も用いて出力信号の周波数を確認する。

§ 3.1.1 実験方法

- ① DC 電源のスイッチが OFF になっていることを確認する。
- ② VCO 発振器①の OUT 端子に 2 m の同軸ケーブルを取り付ける。
- ③ オシロスコープの電源を入れる。
- ④ VCO 発振器①の OUT 端子から伸びている同軸ケーブルをオシロスコープの CH1 の分岐コネクタの一方に差し込む。このとき、分岐コネクタのもう一方には 50 Ω のターミネーションを装着しておくこと。



図 5 : VCO 発振器①の配線図。

- ⑤ VCO 発振器①側のダイヤルが 0 V になっていることを確認する。
- ⑥ DC 電源のスイッチを ON にする。
- ⑦ オシロスコープの通常の測定方法（横軸が時間、縦軸が電圧）で、出力信号を観測して周期と周波数を求める。またオシロスコープの「演算」ボタンを押して FFT を行い、周波数を読み取る。FFT をみるときのオシロスコープの横軸のレンジは 12.5 MHz か 25.0 MHz がよい。
- ⑧ 次にダイヤルを 2 V、4 V、…と 12 V と変化させ、0~12 V の電圧間で VCO 発振器から発信される信号がどのように変化するかを観測する。また、各電圧で FFT も行い周波数を読み取る。
- ⑨ 測定が終わったらダイヤルを 0 V に戻し、DC 電源のスイッチを OFF にする。

§ 3.1.2 課題

- ① 出力信号の周期から求めた周波数が、FFT を行った時の一番大きい周波数成分のものと一致するか確認せよ。
- ② VCO 発振器への入力電圧を横軸、出力信号の周波数を縦軸としてグラフを作成せよ。

§ 3.2 電気信号の伝播速度の測定

VCO 発振器①からの出力信号を、長さの異なる同軸ケーブルを用いてそれぞれオシロスコープで測定し、その結果から電気信号の伝播速度を測定する。

§ 3.2.1 実験方法

- ① DC 電源のスイッチが OFF になっていることを確認する。
- ② § 3.1 で使用した VCO 発振器①の OUT 端子につないだ同軸ケーブルを外し、代わりに分岐コネクタを取り付ける。
- ③ 分岐コネクタの先に、長さの異なる同軸ケーブルをとりつける。同軸ケーブルは 0.25 m, 0.5 m, 1 m, 2 m, 5 m, 10 m のものが用意されているのでここから 2 本選ぶ。
- ④ 一方の同軸ケーブルをオシロスコープの CH1 に差し込み、もう一方の同軸ケーブルを CH2 に差し込む。このときの CH1、CH2 には分岐コネクタによって 50 Ω のターミネーションが装着されていること。

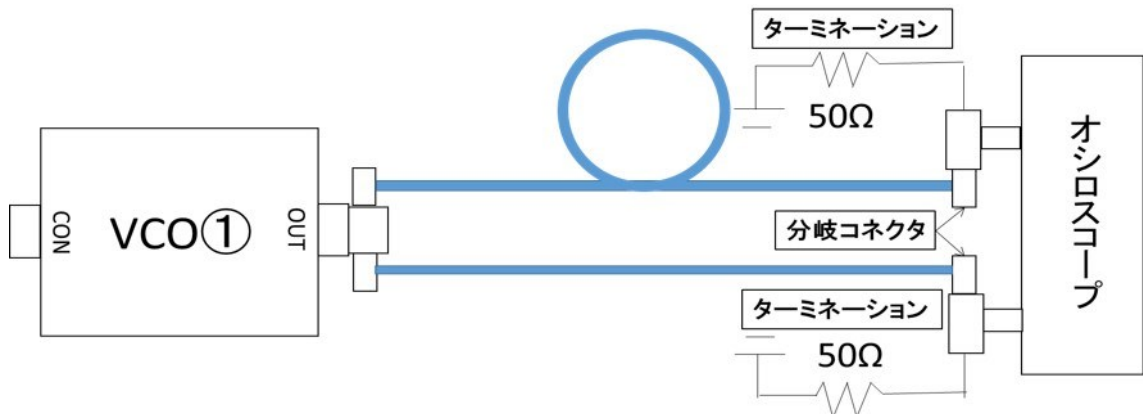


図 6 : VCO 発振器①の配線図。

- ⑤ VCO 発振器①側のダイヤルが 0 V になっていることを確認する。
- ⑥ DC 電源のスイッチを ON にする。
- ⑦ オシロスコープの CH1 と CH2 でみられる出力信号よりケーブル長の違いから生じる時間差を比較する。また、この時間差は入力電圧を変化させ出力信号の周波数が変わっても変化しないことを確認する。
- ⑧ 測定が終わったら DC 電源のスイッチを OFF にする。

§ 3.2.2 課題

観測された位相差から電気信号の伝播速度を計算せよ。このとき、同軸ケーブル内の屈折率は 1.5 で計算すること。

§ 3.3 LPF の作成及び性能実験

高周波回路で多く使用される LPF を作成する。またその性能を実験によりオシロスコープで測定する。

§ 3.3.1 実験方法

- ① 前述の LPF の原理及び回路図を参考にアルミ板上にあるユニバーサル基板のソケットに、まずは抵抗 $390\ \Omega$ のみを取り付ける。

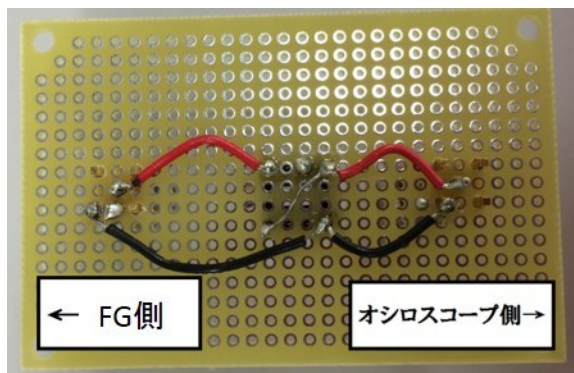


図 7：ユニバーサル基板（裏側）の配線。

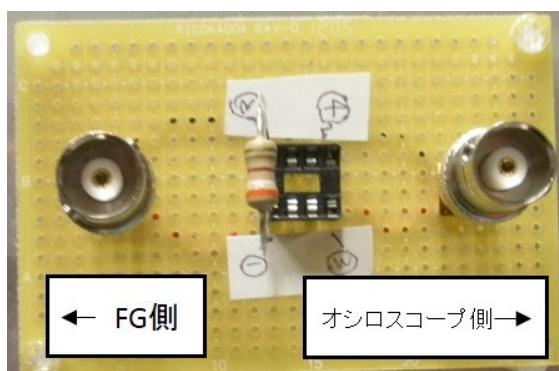


図 8：ソケットに抵抗を取り付けた写真。

- ② ファンクションジェネレータの出力とユニバーサル基板の入力側とつなぐ。
- ③ ユニバーサル基板の出力側とオシロスコープの CH1 とを同軸ケーブルでつなぐ。

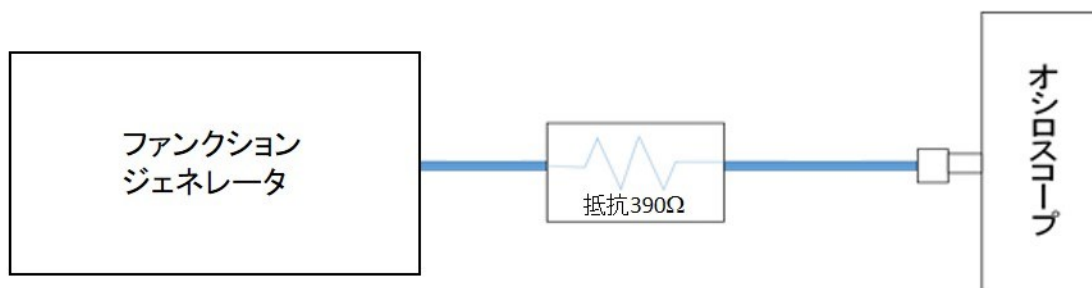


図 9：VCO 発振器①以降の配線図。

- ④ ファンクションジェネレータの出力信号の種類（function）は正弦波を選び、減衰（ATT）は off（押されていない状態）にし、振幅（amplitude）は最小にし、オフセット

(DC offset, つまみをひっぱると調整できる) を中央にする。ファンクションジェネレータの電源を入れ、オシロスコープを見ながらオフセット電圧をほぼ0にする。500 mV程度の振幅の正弦波信号が見えるはずである。

⑤ ファンクションジェネレータの周波数(frequency および frequency range)を変え、0.1 kHz ～ 100 kHz の間で周波数と電圧の関係を測定する。

⑤ 測定し終わったら、ソケットにコンデンサをとりつけ LPF を完成させる。コンデンサは 1 μ F, 0.1 μ F, 10 nF の3種類が用意してある。

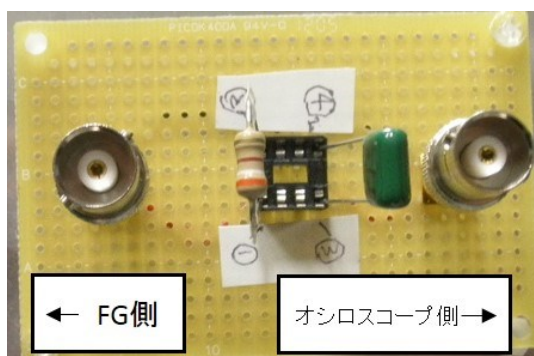


図 10 : 抵抗 390 Ω 、コンデンサ 0.1 μ F の LPF をソケット上で完成させたときの写真。

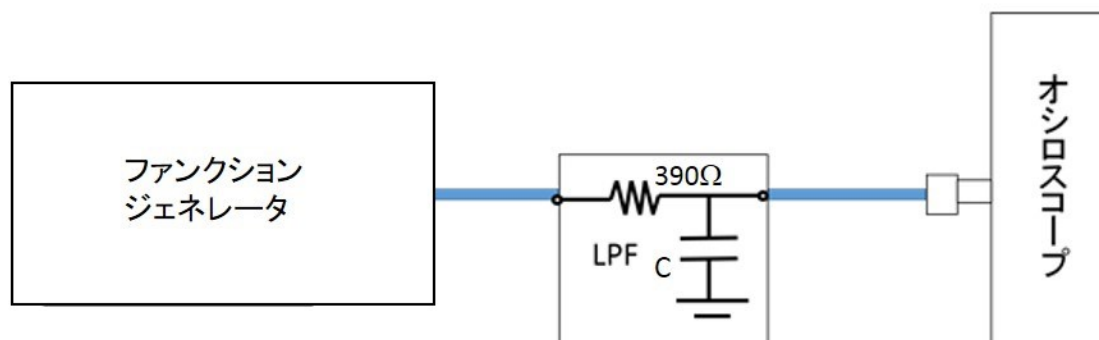


図 11 : VCO 発振器①以降の配線図。

⑦ 3種類のコンデンサそれぞれの場合について、周波数と電圧の関係を測定し、期待される振る舞い通りかを確認する。

⑧ すべて測定し終わったらファンクションジェネレータの電源を切る。

§ 3.3.2 課題

① 3種類のコンデンサのそれぞれの場合についてカットオフ周波数を求めよ。

② コンデンサを取り付けたとき、周波数が 0.1~100 kHz の間で LPF のインピーダンスがどう変化するか計算せよ。

③ コンデンサがない場合の電圧を V_{in} 、コンデンサがある場合の電圧を V_{out} とし、 V_{out}/V_{in} の常用対数を縦軸、周波数の常用対数を横軸にして理論的に予想されるグラフを作成せよ。

- ④ 実験で得られた $0.1 \sim 100 \text{ kHz}$ での V_{out}/V_{in} のグラフと③のグラフを比較せよ。

§ 3.4 ミキサーによる周波数変換

ミキサーの原理を理解し、2つの VCO 発振器の出す周波数からミキサーと LPF を用いて別の周波数に変換させる。20～45 MHz の正弦波を出す VCO 2 台から、100 kHz 以下の正弦波を作り出す。

§ 3.4.1 実験方法

- ① DC 電源のスイッチが OFF になっていることを確認する。
- ① VCO 発振器①の出力端子に同軸ケーブルを取り付け、ミキサーの LO 端子につなぐ。
- ② VCO 発振器②の出力端子に同軸ケーブルを取り付け、ミキサーの RF 端子につなぐ。
- ③ ミキサーの IF 端子に同軸ケーブルを取り付け、オシロスコープの CH1 に差し込む。このとき CH1 には分岐コネクタによって 50Ω のターミネーションが装着されていること。
- ④ オシロスコープの電源を ON にして、DC 電源のスイッチを ON にする。
- ⑤ VCO 発振器①の出力周波数と VCO 発振器②の出力周波数を調整し、まずは LPF を通さずにミキシングの結果を観測する。このとき横軸のレンジを変化させることで、VCO 発振器①と VCO 発振器②から発振される周波数の和と差の周波数をもつ波形が見られるので、見られると予想される周波数が観測できるようなレンジに調整すること。RUN/STOP ボタンを押すことで波形をいったん停止させ読み取ること。

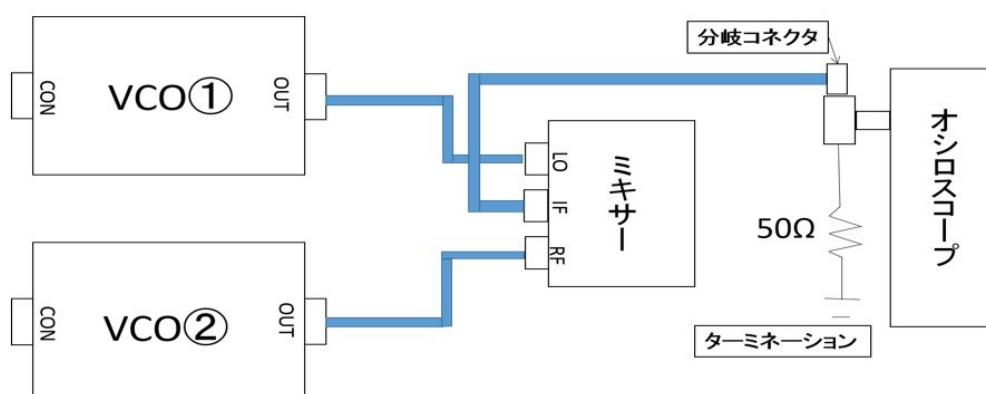


図 12 : VCO 発振器①②以降の配線図。

- ⑥ 次に LPF を取り付け、ミキシングの結果と LPF を用いて 100 kHz 以下の信号のみを取り出しオシロスコープに表示させよ。

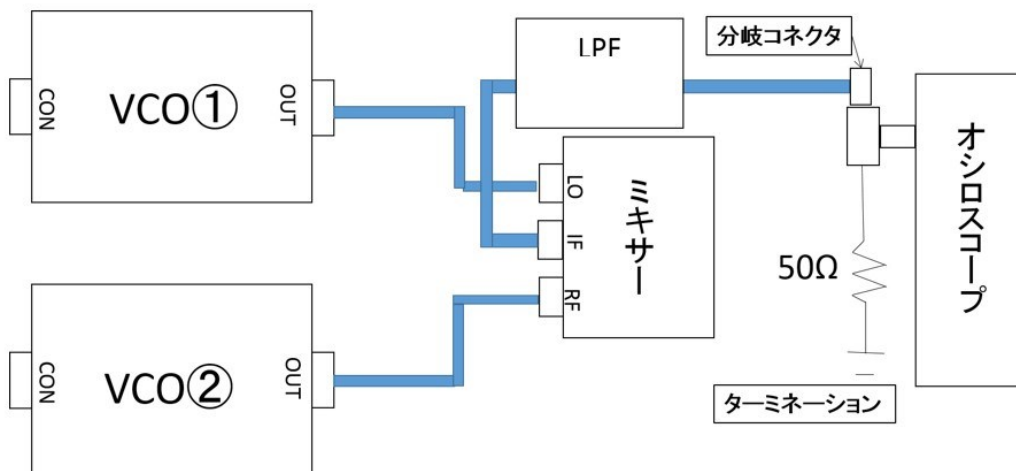


図 13 : VCO 発振器①②以降の配線図。

⑦ 測定が終わったら DC 電源のスイッチを OFF にする。

§ 3.4.2 課題

① デルタ関数 $\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt$ とオイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ を用いて

$$f(t) = \sin(\omega_1 t) * \sin(\omega_2 t)$$

をフーリエ変換しなさい。

② ①の結果や、4 ページの (式 10) を基にして、実験⑤⑥の結果を説明せよ。

ファンクションジェネレータ (波形発生器) の使い方

本実験では発振器として function generator を使用する。下の写真にフロントパネルを示す。

- ・ FUNCTION が三角波のマークのボタンが押されていることを確認する。
- ・ FREQUENCY でおおまかなレンジを選び、細かい周波数の設定にはつまみを回す。
- ・ 信号の大きさ (振幅) と直流成分電圧 (オフセット) はつまみで調節する。
- ・



図 14 : ファンクションジェネレータの写真