Algebra : Chapter 0

Leven Huang

July 30, 2024

Abstract

This is my notes on the book *Algebra : chapter 0* by Aluffi. The book is a modern introduction to abstract algebra, and it is suitable for self-study.

Contents

Chapter 1

Preliminaries: Set theory and categories

1.1 Naive Set Theory

1.1.1 Sets

一个 set 由它所包含无序的、无重复的 *elements* 决定。set 的一个变种是 'multiset', 它的 elements 允许重复, 正确定义一个 multiset 的方式是使用 *functions*。

一些有名的 sets：

- $\emptyset$：空集；
- $\mathbb{N}$：自然数集；
- $\mathbb{Z}$：整数集；
- $\mathbb{Q}$：有理数集；
- $\mathbb{R}$：实数集；
- $\mathbb{C}$：复数集。

另外, 用 *singleton* 表示只有一个元素的 set。

下面是一些有用的符号（称为 *quantifiers*）：

- $\exists$: 存在；
- $\forall$: 对所有；
- $\exists!$: 存在唯一。

1.1.2 Inclusion of sets

我们用 $S \subseteq T$ 来表示 S 是 T 的子集。

1.1.3 Operations between sets

- $\cup$: 并集；
- $\cap$: 交集；
- $\setminus$: 差集；
- $\coprod$: 对称差；
- $\times$: 笛卡尔积;
- 'quotient by an equivalence relation'.

1.1.4 Equivalence relations, partitions, quotients

Definition 1.1.1 (Equivalence relation). An *equivalence relation* on a set S is a relation $\sim$ satisfying the following properties:

- *Reflexivity*: $a \sim a$ for all $a \in S$;
- *Symmetry*: if $a \sim b$, then $b \sim a$;
- *Transitivity*: if $a \sim b$ and $b \sim c$, then $a \sim c$.

Definition 1.1.2 (Quotient). The *quotient* of a set S with respect to an equivalence relation $\sim$ is the set

$$S/\sim := \mathscr{P}_{\sim}$$

of equivalence classes of elements of S with respect to $\sim$.

Example. 令 $S = \mathbb{Z}$, 并定义关系 $\sim$ 为

$$a \sim b \Leftrightarrow a - b \text{ is even.}$$

于是 $\mathbb{Z}/\sim$ 由两个等价类组成:

$$\mathbb{Z}/\sim = \{[0]_{\sim}, [1]_{\sim}\}$$

1.2 Functions between sets

1.2.1 Definition

sets 之间使用 functions 进行交互, function $f : A \to B$ 的所有信息就是 *which element b of B is the image of any given element of a of A*, 这些信息相当于一些二元组的集合, 即:

$$\Gamma_f := \{(a, b) \in A \times B \mid b = f(a)\} \subseteq A \times B$$

而集合 Γ_f 通常被称为 f 的 *graph*。

为了满足函数的定义, 集合 Γ_f 需要满足下列约束:

$$(\forall a \in A)\,(\exists! b \in B) \quad (a, b) \in \Gamma_f$$

我们声明 f 是从 A 到 B 的函数, 通常记作 $f : A \to B$, 也可以画成下图（‘diagram’）的形式:

$$A \xrightarrow{f} B$$

对于任意 $a \in A$, 我们记作:

$$a \mapsto f(a).$$

如果 S 是 A 的子集, 我们可以定义 $f(S)$ 为:

$$f(S) := \{b \in B \mid (\exists a \in A)\, b = f(a)\}.$$

也就是说, $f(S)$ 是包含所有 S 中的 elements 的像的集合。最大的这样的集合是 $f(A)$, 也记为 $\operatorname{Im} f$。

另外, 我们用 $f\,|_S$ 表示将 f 限制在 S 上的函数: 即 function $S \to B$ defined by

$$(\forall s \in S) : f\,|_S\,(s) = f(s).$$

Note. $f(S) = \operatorname{Im}(f\,|_S)$.

1.2.2 Examples: Multisetsm, indexed sets

> **Example** (Multiset). 我们用一个 function 来定义 multiset，一种可能的方法是使用一个 function $f : A \to \mathbb{N}^*$，其中 A 是一个集合。这样，$f(a)$ 就是 a 在 multiset 中的重复次数。

> **Example** (Indexed set). 同样使用 function 来得到一个 indexed set。将集合 I 看作下标，我们可以用一个 function $f : I \to A$ 来给 $\mathrm{Im}(I) \subseteq A$ 中的每个元素一个序号，从而得到一个 indexed set.

1.2.3 Composition of functions

functions 可以被组合，即给定两个 functions $f : A \to B$ 和 $g : B \to C$，我们可以定义它们的 *composition* $gf : A \to C$ 为：

$$(\forall a \in A) \quad (g \circ f)(a) := g(f(a))$$

用 diagram 的形式表示为：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

我们称上图 *commutes* 或是 *commutative* 的，表示无论 A 从那条路径到 C，得到的结果都是一样的。

> **Note** (Associativity). composition 是 *associative* 的，即对于任意三个 functions $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D$，有 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. 在 diagram 中表示为：
>
> $$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "h \circ g"] & C \arrow[r, "h"] & D \end{tikzcd}$$

1.2.4 Injections, surjections, bijections

- *Injection*: $f : A \to B$ is an *injection* if for all $a, a' \in A$, $f(a) = f(a')$ implies $a = a'$.
- *Surjection*: $f : A \to B$ is a *surjection* if for all $b \in B$, there exists $a \in A$ such that $f(a) = b$.
- *Bijection*: $f : A \to B$ is a *bijection* if it is both an injection and a surjection.

injections 通常画作 $\hookrightarrow$，surjections 通常画作 $\twoheadrightarrow$.

如果 f 既是 injection 又是 surjection，我们称 f 是 *bijective* 的（或称之为一个 *bijection* 或 *one to one correspondence* 或 *isomorphism of sets*），写作 $f : A \xrightarrow{\sim} B$ 或

$$A \cong B,$$

此时我们称 A 和 B 是 '*isomorphic*' sets.

1.2.5 Injections, surjections, bijections: Second viewpoint

回顾前面对 Γ_f 的约束，我们希望定义一个函数 $g : B \to A$，使得 $\forall a \in A, \exists b \in B, s.t. f(a) = b \Rightarrow g(b) = a$，当 f 是 surjection 时，Γ_g 满足约束中的 $\forall b \in B$；当 f 是 injection 时，Γ_g 满足约束中的 $\exists! a \in A$。也就是说，当 f 是 bijection 时，存在唯一的函数 g 是 f 的逆函数。

从图形上看，g 有一个有趣的性质，即下面的图形是 commutative 的：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_A"'] & B \arrow[r, "g"] & A \end{tikzcd} \quad , \quad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_B"'] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

> **Proposition 1.2.1.** Assume $A \neq \emptyset$, and let $f : A \to B$ be a function. Then
>
> 1. f has a left-inverse if and only if f is injective.

2. f has a right-inverse if and only if f is surjective.

Corollary 1.2.1. A function $f : A \to B$ is a bijection if and only if it has a (two-sided) inverse.

1.2.6 Monomorphisms and epimorphisms

monomorphisms 和 epimorphisms 是 category theory 中的概念, 可以用更图形化的视角来看待 injectivity 和 surjectivity.

A function $f : A \to B$ is called a *monomorphism(monic)* if for any sets Z and functions $\alpha', \alpha'' : Z \to A$, $f \circ \alpha' = f\alpha''$ implies $\alpha' = \alpha''$.

Proposition 1.2.2. A function is injective if and only if it is a monomorphism.

类似的, epimorphisms 则对应 surjectivity.

1.2.7 Basic examples

Example (Natural projections). 令 A, B 为非空集合, 则 *natural projections* π_A, π_B:

$$\begin{tikzcd} & A \times B \arrow[dl, two heads, "\pi_A"'] \arrow[dr, two heads, "\pi_B"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

被定义为 $\pi_A(a, b) := a, \pi_B(a, b) := b, \forall (a, b) \in A \times B$。这两个映射都是 surjections.

Example (Natural injections). 类似的, 有 natural injections from A and B to the disjoint union $A \coprod B$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, hook] & & B \arrow[dl, hook'] \\ & A \coprod B & \end{tikzcd}$$

即将 $a \in A$ 映射到 $(a, 0) \in A \coprod B$, 将 $b \in B$ 映射到 $(b, 1) \in A \coprod B$.

Example (Canonical projection). 假设 $\sim$ 是集合 A 上的等价关系, 于是有 (surjective) canonical projection:

$$A \twoheadrightarrow A/\sim$$

即将 $a \in A$ 映射到它的等价类 $[a]_\sim$.

1.2.8 Canonical decomposition

We define an equivalence relation $\sim$ on set A as follows: for all $a', a'' \in A, a' \sim a'' \Leftrightarrow f(a') = f(a'')$.

Theorem 1.2.1 (Canonical decomposition). Let $f : A \to B$ be any function, and define $\sim$ as above. Then f decomposes as follows:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads] \arrow[rrr, bend left, "f"] & (A/\sim) \arrow[r, "\sim", "\tilde{f}"'] & \operatorname{Im} f \arrow[r, hook] & B \end{tikzcd}$$

where the first function is the canonical projection $A \to A/\sim$, the third function is the inclusion induced $\operatorname{im} f \subseteq B$, and the bijection $\tilde{f}$ in the middle is defined by

$$\tilde{f}([a]_\sim) := f(a)$$

for all $a \in A$.

Remark. 可以看出, 任何一个函数都可以分解为一个 surjection, 一个 bijection 和一个 injection 的组合, 这个定理的 key insight 在于按照 $\operatorname{Im} f$ 将 A 拆分为等价类。

如果对 $\tilde{f}$ 的定义合法, 那么显然上述分解是 commutative 的。因此证明这个定理的关键在于:

- $\tilde{f}$ 确实是一个 function;
- $\tilde{f}$ 确实是一个 bijection.

在上述定理中对 $\tilde{f}$ 的定义中存在一个问题, 那就是对于同一等价类中的 a' 和 a'', 是否有 $f(a') = f(a'')$, 如果是否定的话, 那么 $[a]_\sim$ 会对应多个 image, 从而 $\tilde{f}$ 不是一个 function. 从前面对 $\sim$ 的定义中, 显然 $f(a') = f(a'')$, 因此 $\tilde{f}$ 是 *well-defined* 的。

而对于 bijection, 我们只需证明 $\tilde{f}$ 既是 injection 又是 surjection 即可, 这里不再赘述。

1.2.9 Clarification

通过 disjoint unions, products 或 quotients 得到的集合, 它们的主要性质并不是指它们包含了什么 elements, 而是它们与其他集合之间的关系。这在之后的 Universal properties section 中会有所体现。

1.3 Categories

categories 的语言被 Norman Steenrod 称为 *abstract nonsense*, 因为 categories 的主要研究重点是 'structure' 而非 'meaning', 这强调了你应该把注意力放在 how that set may sit in relationship with all other sets 而不是 how you run into a specific set.

1.3.1 Definition

一个 category 由一些满足特定条件的 'objects' 和 'morphisms' 组成（collection）。注意这里使用的是 'collection' 而不是 'set', 这是因为根据 Russell's paradox, 我们应该避免讨论 'set of all sets', 而 category 的 objects 是一个比 set 更广泛的概念, 它允许 'collection of all sets'.

用 technical name 来描述上述 collection 则是 *class*, 即 'class of sets', 这是一个比 set 更大的概念。另一种描述是用 *universe* 来定义一个足够大的 set, 然后默认所有的 categories 的所有 objects 都取自这个 universe.

在后面的一些 examples 中, 我们会看到一些 category 的 objects 是 sets, 这种 category 我们称它是 *small* 的。

Definition 1.3.1 (Category)**.** A *category* C consists of

- a class $\operatorname{Obj}(\mathsf{C})$ of *objects* of the category; and
- for every two objects A, B of C, a set $\operatorname{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B)$ of *morphisms* with the properties listed below.
  - For every object of A of C, there exists (at least) one morphism $1_A \in \operatorname{Hom}_{\mathsf{C}}(A, A)$, the 'identity' on A.
  - One can compose morphisms: two morphisms $f \in \operatorname{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B)$ and $g \in \operatorname{Hom}_{\mathsf{C}}(B, C)$ determine a morphism $gf \in \operatorname{Hom}_{\mathsf{C}}(A, C)$.
  - This 'composition law' is associative: if $f \in \operatorname{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B), g \in \operatorname{Hom}_{\mathsf{C}}(B, C)$, and $h \in \operatorname{Hom}_{\mathsf{C}}(C, D)$, then
  $$h(gf) = (hg)f.$$
  - The identity morphisms are identities with respect to composition: that is, for all $f \in$

$\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B)$ we have

$$f 1_A = f, \quad 1_B f = f.$$

One further requirment is that the sets

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B), \quad \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(C, D)$$

be *disjoint* unless $A = C, B = D$.

Note. 值得注意的是, 上述定义中 90% 描述的是 morphisms 的性质, 这与上面提到的 "categories 的研究重点是 'structure' " 的观点不谋而合, 因为 morphisms 才是描述 'structure' 的关键。

但是, 我们也会不可避免地从 objects 的角度来看待 categories, 因为 morphisms 最终还是由 objects 决定的。

Definition 1.3.2 (Endomorphism). A morphism of an object A of a category C to itself is called an *endomorphism*; $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, A)$ is denoted $\mathrm{End}_{\mathsf{C}}(A)$.

Note. The composition defines an 'operation' on $\mathrm{End}_{\mathsf{C}}(A)$: if f, g are elements of $\mathrm{End}_{\mathsf{C}}(A)$, so is their composition gf.

1.3.2 Examples

Example (Set). We will use Set to denote the category of sets. Thus

- $\mathrm{Obj}(\mathsf{Set})$ = the class of all sets;
- for A, B in $\mathrm{Obj}(\mathsf{Set})$, $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(A, B) = B^A$

Note. 尽管 sections 1.1.3 and 1.1.4 中提到了 sets 的 operations 体现了其他 categories 不一定有的 Set 的一些有意思的 features, 但是它们与 Set 的定义无关。

Example (Slice category). 设 C 是一个 category, A 为 C 中的一个 object, 我们现在由 A 构造一个 category C_A:

- $\mathrm{Obj}(\mathsf{C}_A)$ = all morphisms from any object of C to A;
- 对于 objects $f_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(Z_1, A)$, $f_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(Z_2, A)$, 定义 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}_A}(f_1, f_2) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(Z_1, Z_2)$, 即

$$\begin{tikzcd} Z_1 \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "f_1"'] & & Z_2 \arrow[dl, "f_2"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Definition 1.3.3 (Slice category). 使用这种方式构造的 category 被称为 *slice category*, 它们是 *comma categories* 的特例。

Example (Coslice category). 将 [Eg3.5] 中 objects 的箭头反过来, 类似的方法得到它的 morphisms, 这种 category 被称为 *coslice category*.

$$\begin{tikzcd} Z_1 \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "f_1"'] & & Z_2 \arrow[dl, "f_2"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Example. 在 [Eg3.5] 中, 我们固定了 C 中的一个 object A, 现在我们固定两个 objects A, B 来构建 category $\mathsf{C}_{A,B}$:

- $\mathrm{Obj}(\mathsf{C}_{A,B})$ = diagrams

$$\begin{tikzcd} & A \\ Z \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \\ & B \end{tikzcd}$$

  in C

- morphisms 是 *commutative* diagrams

$$\begin{tikzcd} & & A \\ Z_1 \arrow[r, "\sigma"] \arrow[urr, bend left, "f_1"] \arrow[drr, bend right, "g_1"'] & Z_2 \arrow[ur, "f_2"] \arrow[dr, "g_2"] & \\ & & B \end{tikzcd}$$

Note. 类似的, 我们也有 coslice 版 $\mathsf{C}^{A,B}$:

$$\begin{tikzcd} & & A \arrow[dll, bend right, "f_1"'] \arrow[dl, "f_2"] \\ Z_1 & Z_2 \arrow[l, "\sigma"'] & \\ & & B \arrow[ull, bend left, "g_1"] \arrow[ul, "g_2"'] \end{tikzcd}$$

Example. 作为 $\mathsf{C}_{A,B}$ 的变种, 我们也可以考虑固定两个 C 中的 morphisms $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, C), \beta \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(B, C)$ 得到一个 *fibered* version of $\mathsf{C}_{A,B}$:

- $\mathrm{Obj}(\mathsf{C}_{\alpha,\beta})$ = *commutative diagrams*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dr, "\alpha"] & \\ Z \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & C \\ & B \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

  in C

- morphism 是响应的 *commutative diagrams*

$$\begin{tikzcd} & & A \arrow[dr, "\alpha"] & \\ Z_2 \arrow[r, "\sigma"] \arrow[urr, bend left, "f_2"] \arrow[drr, bend right, "g_2"'] & Z_1 \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "g_1"] & & C \\ & & B \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

Note. 对应的 coslice category 为 $\mathsf{C}^{\alpha,\beta}$:

$$\begin{tikzcd}
& & A \arrow[dl, "f_1"] \arrow[dll, bend right, "f_2"'] & \\
Z_2 & Z_1 \arrow[l, "\sigma"'] & & C \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[dl, "\beta"] \\
& & B \arrow[ul, "g_1"] \arrow[ull, bend left, "g_2"] &
\end{tikzcd}$$

Exercise (3.9).

- $\mathrm{Obj}(\mathsf{MSet})=$ 二元组 $(S,\sim)$, 其中 S 为集合, $\sim$ 为等价关系.
- $\mathrm{Hom}_{\mathsf{MSet}}((S,\sim),(T,\approx))=$ 从 S 到 T 的所有 functions f, 使得 f 保持等价关系, 即

$$\forall s_1,s_2\in S, s_1\sim s_2\Rightarrow f(s_1)\approx f(s_2).$$

Proof. 下面证明上述定义的 MSet 是一个 category:

- 由于 functions 满足 associativity 与 composition law, 显然 MSet 中的 morphisms 也满足 associativity 和 composition law.
- 对于任意 $(S,\sim)$, 存在一个 identity morphism $\mathrm{id}_{(S,\sim)}$ 使得 $\forall s\in S, \mathrm{id}_{(S,\sim)}(s)=s$.
- $\mathrm{id}_{(S,\sim)}$ 显然也是 composition law 的 identity.

⊛

Exercise (3.10). 想要从 object A 中取出某个 subobject, 题干告诉我们这个过程是通过 morphisms $A\to\Omega$ 来实现的, 容易想到特定的 subobject 由特定的 morphisms 指定, 那么 Ω 的内容应该要能够指出哪些内容属于这个 subobject, 哪些不属于。

在 Set 中, Ω 应该是一个集合, 简单起见, 我们可以直接令其为 $\{0,1\}$, 其中 0 表示不属于 subobject, 1 表示属于 subobject.

1.4 Morphisms

在 Set 中, 它的 morphisms 就是前面提到的 functions, 但是 morphisms 与 functions 有很大不同, morphisms 是一个更宽泛的概念, functions 的定义是 elementwise 的, 而 categoy 中的 objects 并不一定有 elements.

1.4.1 Isomorphism

Definition 1.4.1 (Isomorphism). A morphism $f\in\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,B)$ is an *isomorphism* if it has a (two-sided) inverse under composition: if $\exists g\in\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(B,A)$ such that

$$gf=1_A,\quad fg=1_B.$$

由于 function 的定义是 elementwise 的, 所以一个 function 的 ‘inverse’ 从定义上看天然是 unique 的, 而 isomorphism 的 ‘inverse’ 则不然, 但它确实也是 unique 的, 只是需要一个额外的验证。

Proposition 1.4.1. The inverse of an isomorphism is unique.

Proof. 若 $g,h\in\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(B,A)$ 都满足上式且 $g\neq h$, 于是我们有

$$g=g1_B=g(fh)=(gf)h=1_Ah=h$$

与假设矛盾。 ■

Proposition 1.4.2. With notation as above:

- (reflective) Each identity 1_A is an isomorphism and is its own inverse.
- (symmetric) If f is an isomorphism, then so is its inverse f^{-1} and further $(f^{-1})^{-1} = f$.
- (transitive) If $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B), g \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(B, A)$ are isomorphisms, then so is gf and $(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$.

Note. 一个 category 中的两个 objects A, B 如果满足存在一个 isomorphism $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B)$, 那么我们称 A 和 B 是 *isomorphic*, 记作 $A \cong B$.

Example (Groupoid). 如果一个 category 中所有的 morphisms 都是 isomorphism, 那么这个 category 被称为 *groupoid*.

一个 *automorphism* 指的是 category C 中的 object A 中所有在 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, A)$ 中的 isomorphisms 的集合, 记作 $\mathrm{Aut}_{\mathsf{C}}(A)$, 它是 $\mathrm{End}_{\mathsf{C}}(A)$ 的子集. 不难发现 $\mathrm{Aut}_{\mathsf{C}}(A)$ 是一个 group.

1.4.2 Monomorphisms and epimorphisms

在 morphism 中类比于 injectivity 和 surjectivity 的概念分别是 *monomorphism* 和 *epimorphism*.

Definition 1.4.2 (Monomorphism). Let C be a category. A morphism $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B)$ is a *monomorphism* if the following holds:

$$\forall Z \in \mathrm{Obj}(\mathsf{C}), \forall g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(Z, A), f \circ g_1 = f \circ g_2 \Rightarrow g_1 = g_2.$$

Definition 1.4.3 (Epimorphism). Let C be a category. A morphism $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B)$ is an *epimorphism* if the following holds:

$$\forall Z \in \mathrm{Obj}(\mathsf{C}), \forall g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(B, Z), g_1 \circ f = g_2 \circ f \Rightarrow g_1 = g_2.$$

在 Set 中, monomorphism 完全等价于 injectivity, epimorphism 完全等价于 surjectivity. 但是在由 $\mathbb{Z}$ 上的关系 $\leq$ 定义得到的 category 中, 每个 morphism 都同时是 monomorphism 和 epimorphism, 但是唯一的 isomorphisms 只有 identies.

因此上述特性只是因为 Set 是一个特殊的 category 而已, 更广泛来说, 上面这种特性会出现在所有 *abelian category* 中.

1.5 Universal properties

从 Section 1.3 中的 examples 可以看出, 一个 category 可以通过一些操作来构造 (construction) 得到一些新的 categories, 而我们现在要研究的就是这些 constructions 之间的 *universal properties*.

1.5.1 Initial and final objects

Definition 1.5.1 (Initial and final objects). Let C be a category. We say that an object I of C is *initial* if for every object A of C, there exists a *unique* morphism $I \to A$ in C:

$$\forall A \in \mathrm{Obj}(\mathsf{C}): \quad \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(I, A) \text{ is a singleton.}$$

We say that an object T of C is *final* if for every object A of C, there exists a *unique* morphism $A \to F$ in C:

$$\forall A \in \mathrm{Obj}(\mathsf{C}): \quad \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, F) \text{ is a singleton.}$$

Note. 一个 category 不一定要有 initial 或者 final objects, 如果有的话, 它们不一定是 unique 的.

Example (Set)**.** 在 Set 中, 它的 initial object 是空集 $\emptyset$, final objects 是任何 singleton.

尽管 initial/final objects 不一定是 unique 的, 但是只要它们存在, 它们就一定是 isomorphic 的.

Proposition 1.5.1. Let C be a category.

- If I_1, I_2 are both initial objects of C, then $I_1 \cong I_2$.
- If F_1, F_2 are both final objects of C, then $F_1 \cong F_2$.

Further, these isomorphisms are unique determined.

Proof. 由 initial/final object 的定义, 任意两个 initial/final objects 之间各只会有一个 morphism, 因此这个 morphism 一定是 isomorphism. ■

1.5.2 Universal properties

当某种 construction 可以看作某个 category 的 terminal object 时, 我们称它满足了某个 universal property. 换句话说, 一个 object 需要满足了某个 universal property 才能成为 terminal object.

一个简单的例子是我们称 $\emptyset$ *is universal with respect to the property of mapping to sets*, 这句话和 "$\emptyset$ is the initial object in Set" 是等价的.

在更多的时候 initial/final objects 对应的 properties 会更复杂, 对于一个 universal property 的 'explanation' 可能会遵循以下模式: "object X is universal with respect to the following property: for any Y such that..., there exists a unique morphism $Y \to X$ such that...".

1.5.3 Quotients

设 $\sim$ 是定义在集合 A 上的一个等价关系, 我们有:

"The quotient $A/\sim$ is universal with respect to the property of mapping A to a set in such a way that equivalent elements have the same image."

1.5.4 Products

假设 A, B 是两个集合, 考虑它们的 product $A \times B$ 以及两个 natural projections:

$$\begin{tikzcd} & A \\ A \times B \arrow[ur, "\pi_A"] \arrow[dr, "\pi_B"'] & \\ & B \end{tikzcd}$$

我们有, 对任意集合 Z 和 morphisms

$$\begin{tikzcd} & A \\ Z \arrow[ur, "f_A"] \arrow[dr, "f_B"'] & \\ & B \end{tikzcd}$$

存在一个 unique morphism $\sigma\colon Z \to A \times B$ 使得 diagrams

$$
\begin{tikzcd}
 & & A \\
Z \arrow[r, "\sigma"] \arrow[urr, bend left, "f_A"] \arrow[drr, bend right, "f_B"'] & A \times B \arrow[ur, "\pi_A"'] \arrow[dr, "\pi_B"] & \\
 & & B
\end{tikzcd}
$$

commutes.

此时, σ 通常记为 $f_A \times f_B$.

Proof. $\forall z \in Z$, 令

$$\sigma(z) = (f_A(z), f_B(z)).$$

■

不难发现, $A \times B$ (together with the information of their natural projections to the factors) 是 $\mathsf{C}_{A,B}$ 中的 final object.

当 category C 中的任意两个 objects A, B 在 $\mathsf{C}_{A,B}$ 中都有 final objects 时, 我们称 C 有 *(finite) products*.

通过这种视角来看待 products 的主要好处就是, universal property 可能在任意 category 中成立, 而不仅仅是在 Set 中.

1.5.5 Coproducts

类似地, 给定两个 morphisms $i_A : A \to A \coprod B, i_B : B \to A \coprod B$, 我们有 *coproduct* $A \coprod B$ 是 $\mathsf{C}^{A,B}$ 中的 initial object, 满足下述 universal property: 对任意 object Z 和 morphisms

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "f_A"] & \\
 & Z \\
B \arrow[ur, "f_B"'] &
\end{tikzcd}
$$

存在一个 unique morphism $\sigma : A \coprod B \to Z$ 使得 diagrams

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "i_A"'] \arrow[drr, bend left, "f_A"] & & \\
 & A \coprod B \arrow[r, "\sigma"] & Z \\
B \arrow[ur, "i_B"] \arrow[urr, bend right, "f_B"'] & &
\end{tikzcd}
$$

commutes.

Proposition 1.5.2 (Coproducts in Set)**.** The disjoint union *is a coproduct in* Set.

Chapter 2

Groups, first encounter

前面学习了 category 的概念，现在我们学习一种特殊的 category，叫做 group（称为 Grp）.

2.1 Definition of group

2.1.1 Groups and groupoids

[Joke] *Definition*: A group *is a groupoid with a single object.*

这个定义很好的体现了 groups 的 properties，在 groupoid G 中，所有 morphisms 都是 isomorphism，当 object 只有一个（记为 $*$）时，那么这些 morphisms 都是 automorphism，即

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{G}}(*,*) = \mathrm{Aut}_{\mathsf{G}}(*)$$

将 set $\mathrm{Hom}_{\mathsf{G}}(*,*)$ 记作 G，可以发现 G 对 composition 是封闭的、每个 morphism 都有 inverse、有单位元 1_*，事实上，G 加上 composition law 才是一个 group，前面的定义错在将 group 当成了一个 groupoid with a single object.

2.1.2 Definition

在正式的定义中，将上述 composition law 记作 $\bullet$，称为 'mulplication'，notation 形如：

$$\bullet : G \times G \to G$$

或

$$\bullet(g,h) =: g \bullet h$$

Definition 2.1.1 (Group). Let G be a nonempty set, endowed with the binary operation $\bullet$ (briefly, $(G,\bullet)$ or simply G), is a *group* if

1. the operation $\bullet$ is *associative*;
2. there exists an *identity element* e_G for $\bullet$;
3. every element in G has an *inverse* with respect to $\bullet$.

最简单的 group 显然是只包含 e_G 一个元素的 group，称为 *trivial group*.

Example. 可逆的 $n \times n$ matrices with real entries 的集合与矩阵乘法运算可以构成一个 group，表示为 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

2.1.3 Basic properties

从前面 groupoid 的角度来看，G 中的 e_G 显然对应的是 1_*，但是正式的定义里并没有说明这一点，甚至没有要求 e_G 是 unique 的，实际上，G 的元素中除了 1_* 没有其他的元素能 work as an identity.

Proposition 2.1.1. If $h \in G$ is an identity of G, then $h = e_G$.

Proof. 直接使用 identity element 的定义导出矛盾。假设 h 是一个 identity 且 $h \neq e_G$，那么有

$$h = e_G h = e_G$$

⊛

Proposition 2.1.2. The inverse is also unique.

Proof. 由于 G 中的每个元素都是 isomorphism，因此根据 Proposition 1.4.1 这个引理显然是成立的。 ⊛

Proposition 2.1.2 启示我们可以将元素 g 的 inverse 记作 g^{-1}，进一步地，我们将一个元素对自身做 n 次的 multiplication 记作 g^n，它的 inverse 记作 g^{-n}，于是我们可以很自然地定义 $g^0 = e_G$.

2.1.4 Cancellation

'cancellation' 在 group 中同样存在，由于 isomorphism 既是 monomorphism 又是 epimorphism，因此 G 中的每个元素都是左右可消的。

Note. 反过来不成立，如果一个 morphism 即是 monomorphism 又是 epimorphism，那么它也不一定是 isomorphism，由偏序关系 $<$ 导出的 category 就是一个反例。

Proposition 2.1.3. Let G be a group. Then $\forall a, g, h \in G$

$$ga = ha \Rightarrow g = h, \quad ag = ah \Rightarrow g = h.$$

Proof. 因为 group 中每个元素都有 inverse，因此等式两边同时乘上 a^{-1} 即可得证。 ⊛

2.1.5 Commutative groups

我们称对 • 满足 commutative law 的 group 为 commutative group 或 *abelian group*.

abelian groups 有一个很重要的性质，那就是它的结构是 '$\mathbb{Z}$-module structure'，这种性质在当 abelian groups 与其他 operations 同时存在的当情况下很有用。

换句话说，abelian groups 和 $\mathbb{Z}$-module 是同构的，那么我们可以直接将它作为 $\mathbb{Z}$-module 来处理。

注意到 $\mathbb{Z}$-module 中的 • 对应的是 $+$，因此 abelian groups A 中的 • 可以用 $+$ 来表示，0_A 即是 *identity*，$a \in A$ 的 inverse 则是 $-a$，前面使用的 'power' notation 则成为了 'multiple': $0a = 0$，对于正整数 n，有

$$na = \underbrace{a + \cdots + a}_{n \text{ times}}, \quad (-n)a = \underbrace{(-a) + \cdots + (-a)}_{n \text{ times}}.$$

Remark. 这里的 na 只是一种 notation，并不存在 'cancellation'.

Appendix

Appendix A

Additional Proofs

A.1 Proof of ??

We can now prove **??**.

Proof of ??. See here. ■

Bibliography

[Alu09] Paolo Aluffi. *Algebra : chapter 0*. American Mathematical Society, 2009.