

Algebra : Chapter 0

Leven Huang

July 30, 2024

Abstract

This is my notes on the book *Algebra : chapter 0* by Aluffi. The book is a modern introduction to abstract algebra, and it is suitable for self-study.

Contents

1	Preliminaries: Set theory and categories	2
1.1	Naive Set Theory	2
1.2	Functions between sets	3
1.3	Categories	6
1.4	Morphisms	9
1.5	Universal properties	10
A	Additional Proofs	14
A.1	Proof of ??	14

Chapter 1

Preliminaries: Set theory and categories

1.1 Naive Set Theory

1.1.1 Sets

一个 set 由它所包含无序的、无重复的 *elements* 决定。set 的一个变种是 ‘multiset’, 它的 elements 允许重复, 正确定义一个 multiset 的方式是使用 *functions*。

一些有名的 sets:

- \emptyset : 空集;
- \mathbb{N} : 自然数集;
- \mathbb{Z} : 整数集;
- \mathbb{Q} : 有理数集;
- \mathbb{R} : 实数集;
- \mathbb{C} : 复数集。

另外, 用 *singleton* 表示只有一个元素的 set。

下面是一些有用的符号 (称为 *quantifiers*):

- \exists : 存在;
- \forall : 对所有;
- $\exists!$: 存在唯一。

1.1.2 Inclusion of sets

我们用 $S \subseteq T$ 来表示 S 是 T 的子集。

1.1.3 Operations between sets

- \cup : 并集;
- \cap : 交集;
- \setminus : 差集;
- \sqcup : 对称差;
- \times : 笛卡尔积;
- ‘quotient by an equivalence relation’.

1.1.4 Equivalence relations, partitions, quotients

Definition 1.1.1 (Equivalence relation). An *equivalence relation* on a set S is a relation \sim satisfying the following properties:

- *Reflexivity*: $a \sim a$ for all $a \in S$;
- *Symmetry*: if $a \sim b$, then $b \sim a$;
- *Transitivity*: if $a \sim b$ and $b \sim c$, then $a \sim c$.

Definition 1.1.2 (Quotient). The *quotient* of a set S with respect to an equivalence relation \sim is the set

$$S / \sim := \mathcal{P}_{\sim}$$

of equivalence classes of elements of S with respect to \sim .

Example. 令 $S = \mathbb{Z}$, 并定义关系 \sim 为

$$a \sim b \Leftrightarrow a - b \text{ is even.}$$

于是 \mathbb{Z} / \sim 由两个等价类组成:

$$\mathbb{Z} / \sim = \{[0]_{\sim}, [1]_{\sim}\}$$

1.2 Functions between sets

1.2.1 Definition

sets 之间使用 functions 进行交互, function $f : A \rightarrow B$ 的所有信息就是 *which element b of B is the image of any given element a of A* , 这些信息相当于一些二元组的集合, 即:

$$\Gamma_f := \{(a, b) \in A \times B \mid b = f(a)\} \subseteq A \times B$$

而集合 Γ_f 通常被称为 f 的 *graph*。

为了满足函数的定义, 集合 Γ_f 需要满足下列约束:

$$(\forall a \in A) (\exists! b \in B) \quad (a, b) \in \Gamma_f$$

我们声明 f 是从 A 到 B 的函数, 通常记作 $f : A \rightarrow B$, 也可以画成下图 (‘diagram’) 的形式:

$$A \xrightarrow{f} B$$

对于任意 $a \in A$, 我们记作:

$$a \mapsto f(a).$$

如果 S 是 A 的子集, 我们可以定义 $f(S)$ 为:

$$f(S) := \{b \in B \mid (\exists a \in A) b = f(a)\}.$$

也就是说, $f(S)$ 是包含所有 S 中的 elements 的像的集合。最大的这样的集合是 $f(A)$, 也记为 $\text{Im } f$ 。

另外, 我们用 $f|_S$ 表示将 f 限制在 S 上的函数: 即 function $S \rightarrow B$ defined by

$$(\forall s \in S) : f|_S(s) = f(s).$$

Note. $f(S) = \text{Im}(f|_S)$.

1.2.2 Examples: Multisetsm, indexed sets

Example (Multiset). 我们用一个 function 来定义 multiset, 一种可能的方法是使用一个 function $f : A \rightarrow \mathbb{N}^*$, 其中 A 是一个集合。这样, $f(a)$ 就是 a 在 multiset 中的重复次数。

Example (Indexed set). 同样使用 function 来得到一个 indexed set。将集合 I 看作下标, 我们可以用一个 function $f : I \rightarrow A$ 来给 $\text{Im}(I) \subseteq A$ 中的每个元素一个序号, 从而得到一个 indexed set。

1.2.3 Composition of functions

functions 可以被组合, 即给定两个 functions $f : A \rightarrow B$ 和 $g : B \rightarrow C$, 我们可以定义它们的 *composition* $gf : A \rightarrow C$ 为:

$$(\forall a \in A) \quad (g \circ f)(a) := g(f(a))$$

用 diagram 的形式表示为:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & g \circ f & & \end{array}$$

我们称上图 *commutes* 或是 *commutative* 的, 表示无论 A 从那条路径到 C , 得到的结果都是一样的。

Note (Associativity). composition 是 *associative* 的, 即对于任意三个 functions $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C, h : C \rightarrow D$, 有 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ 。在 diagram 中表示为:

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D \\ & \searrow & & \nearrow & & & \\ & & g \circ f & & h \circ g & & \end{array}$$

1.2.4 Injections, surjections, bijections

- *Injection*: $f : A \rightarrow B$ is an *injection* if for all $a, a' \in A$, $f(a) = f(a')$ implies $a = a'$.
- *Surjection*: $f : A \rightarrow B$ is a *surjection* if for all $b \in B$, there exists $a \in A$ such that $f(a) = b$.
- *Bijection*: $f : A \rightarrow B$ is a *bijection* if it is both an injection and a surjection.

injections 通常画作 \hookrightarrow , surjections 通常画作 \twoheadrightarrow .

如果 f 既是 injection 又是 surjection, 我们称 f 是 *bijective* 的 (或称之为一个 *bijection* 或 *one to one correspondence* 或 *isomorphism of sets*), 写作 $f : A \xrightarrow{\sim} B$ 或

$$A \cong B,$$

此时我们称 A 和 B 是 ‘*isomorphic*’ sets.

1.2.5 Injections, surjections, bijections: Second viewpoint

回顾前面对 Γ_f 的约束, 我们希望定义一个函数 $g : B \rightarrow A$, 使得 $\forall a \in A, \exists b \in B, s.t. f(a) = b \Rightarrow g(b) = a$, 当 f 是 surjection 时, Γ_g 满足约束中的 $\forall b \in B$; 当 f 是 injection 时, Γ_g 满足约束中的 $\exists! a \in A$ 。也就是说, 当 f 是 bijection 时, 存在唯一的函数 g 是 f 的逆函数。

从图形上看, g 有一个有趣的性质, 即下面的图形是 commutative 的:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \xrightarrow{g} A \\ & \searrow & \nearrow \\ & & \text{id}_A \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{g} & A \xrightarrow{f} B \\ & \searrow & \nearrow \\ & & \text{id}_B \end{array}$$

Proposition 1.2.1. Assume $A \neq \emptyset$, and let $f : A \rightarrow B$ be a function. Then

1. f has a left-inverse if and only if f is injective.

2. f has a right-inverse if and only if f is surjective.

Corollary 1.2.1. A function $f : A \rightarrow B$ is a bijection if and only if it has a (two-sided) inverse.

1.2.6 Monomorphisms and epimorphisms

monomorphisms 和 epimorphisms 是 category theory 中的概念, 可以用更图形化的视角来看待 injectivity 和 surjectivity.

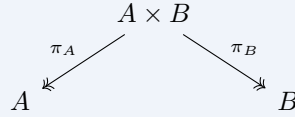
A function $f : A \rightarrow B$ is called a *monomorphism* (*monic*) if for any sets Z and functions $\alpha', \alpha'' : Z \rightarrow A$, $f \circ \alpha' = f \circ \alpha''$ implies $\alpha' = \alpha''$.

Proposition 1.2.2. A function is injective if and only if it is a monomorphism.

类似的, epimorphisms 则对应 surjectivity.

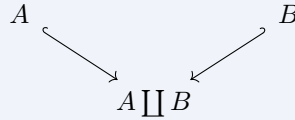
1.2.7 Basic examples

Example (Natural projections). 令 A, B 为非空集合, 则 *natural projections* π_A, π_B :



被定义为 $\pi_A(a, b) := a, \pi_B(a, b) := b, \forall (a, b) \in A \times B$ 。这两个映射都是 surjections.

Example (Natural injections). 类似的, 有 natural injections from A and B to the disjoint union $A \amalg B$:



即将 $a \in A$ 映射到 $(a, 0) \in A \amalg B$, 将 $b \in B$ 映射到 $(b, 1) \in A \amalg B$.

Example (Canonical projection). 假设 \sim 是集合 A 上的等价关系, 于是有 (surjective) canonical projection:

$$A \twoheadrightarrow A/\sim$$

即将 $a \in A$ 映射到它的等价类 $[a]_{\sim}$.

1.2.8 Canonical decomposition

We define an equivalence relation \sim on set A as follows: for all $a', a'' \in A, a' \sim a'' \Leftrightarrow f(a') = f(a'')$.

Theorem 1.2.1 (Canonical decomposition). Let $f : A \rightarrow B$ be any function, and define \sim as above. Then f decomposes as follows:

$$A \twoheadrightarrow (A/\sim) \xrightarrow[\tilde{f}]{\sim} \text{Im } f \hookrightarrow B$$

where the first function is the canonical projection $A \rightarrow A/\sim$, the third function is the inclusion

induced $\text{im } f \subseteq B$, and the bijection \tilde{f} in the middle is defined by

$$\tilde{f}([a]_{\sim}) := f(a)$$

for all $a \in A$.

Remark. 可以看出, 任何一个函数都可以分解为一个 surjection, 一个 bijection 和一个 injection 的组合, 这个定理的 key insight 在于按照 $\text{Im } f$ 将 A 拆分为等价类。

如果对 \tilde{f} 的定义合法, 那么显然上述分解是 commutative 的。因此证明这个定理的关键在于:

- \tilde{f} 确实是一个 function;
- \tilde{f} 确实是一个 bijection.

在上述定理中对 \tilde{f} 的定义中存在一个问题, 那就是对于同一等价类中的 a' 和 a'' , 是否有 $f(a') = f(a'')$, 如果是否定的话, 那么 $[a]_{\sim}$ 会对应多个 image, 从而 \tilde{f} 不是一个 function. 从前面对 \sim 的定义中, 显然 $f(a') = f(a'')$, 因此 \tilde{f} 是 *well-defined* 的。

而对于 bijection, 我们只需证明 \tilde{f} 既是 injection 又是 surjection 即可, 这里不再赘述。

1.2.9 Clarification

通过 disjoint unions, products 或 quotients 得到的集合, 它们的主要性质并不是指它们包含了什么 elements, 而是它们与其他集合之间的关系。这在之后的 Universal properties section 中会有所体现。

1.3 Categories

categories 的语言被 Norman Steenrod 称为 *abstract nonsense*, 因为 categories 的主要研究重点是 ‘structure’ 而非 ‘meaning’, 这强调了你应该把注意力放在 how that set may sit in relationship with all other sets 而不是 how you run into a specific set.

1.3.1 Definition

一个 category 由一些满足特定条件的 ‘objects’ 和 ‘morphisms’ 组成 (collection)。注意这里使用的是 ‘collection’ 而不是 ‘set’, 这是因为根据 Russell’s paradox, 我们应该避免讨论 ‘set of all sets’, 而 category 的 objects 是一个比 set 更广泛的概念, 它允许 ‘collection of all sets’.

用 technical name 来描述上述 collection 则是 *class*, 即 ‘class of sets’, 这是一个比 set 更大的概念。另一种描述是用 *universe* 来定义一个足够大的 set, 然后默认所有的 categories 的所有 objects 都取自这个 universe.

在后面的一些 examples 中, 我们会看到一些 category 的 objects 是 sets, 这种 category 我们称它是 *small* 的。

Definition 1.3.1 (Category). A category \mathcal{C} consists of

- a class $\text{Obj}(\mathcal{C})$ of *objects* of the category; and
- for every two objects A, B of \mathcal{C} , a set $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ of *morphisms* with the properties listed below.
 - For every object A of \mathcal{C} , there exists (at least) one morphism $1_A \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$, the ‘identity’ on A .
 - One can compose morphisms: two morphisms $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ and $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ determine a morphism $gf \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$.
 - This ‘composition law’ is associative: if $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$, and $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$, then

$$h(gf) = (hg)f.$$
 - The identity morphisms are identities with respect to composition: that is, for all $f \in$

$\text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$ we have

$$f1_A = f, \quad 1_B f = f.$$

One further requirement is that the sets

$$\text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B), \quad \text{Hom}_{\mathbf{C}}(C, D)$$

be *disjoint* unless $A = C, B = D$.

Note. 值得注意的是, 上述定义中 90% 描述的是 morphisms 的性质, 这与上面提到的 “categories 的研究重点是 ‘structure’ ” 的观点不谋而合, 因为 morphisms 才是描述 ‘structure’ 的关键。

但是, 我们也会不可避免地 from objects 的角度来看待 categories, 因为 morphisms 最终还是由 objects 决定的。

Definition 1.3.2 (Endomorphism). A morphism of an object A of a category \mathbf{C} to itself is called an *endomorphism*; $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, A)$ is denoted $\text{End}_{\mathbf{C}}(A)$.

Note. The composition defines an ‘operation’ on $\text{End}_{\mathbf{C}}(A)$: if f, g are elements of $\text{End}_{\mathbf{C}}(A)$, so is their composition gf .

1.3.2 Examples

Example (Set). We will use \mathbf{Set} to denote the category of sets. Thus

- $\text{Obj}(\mathbf{Set}) =$ the class of all sets;
- for A, B in $\text{Obj}(\mathbf{Set})$, $\text{Hom}_{\mathbf{Set}}(A, B) = B^A$

Note. 尽管 sections 1.1.3 and 1.1.4 中提到了 sets 的 operations 体现了其他 categories 不一定有的 \mathbf{Set} 的一些有意思的 features, 但是它们与 \mathbf{Set} 的定义无关。

Example (Slice category). 设 \mathbf{C} 是一个 category, A 为 \mathbf{C} 中的一个 object, 我们现在由 A 构造一个 category \mathbf{C}_A :

- $\text{Obj}(\mathbf{C}_A) =$ all morphisms from any object of \mathbf{C} to A ;
- 对于 objects $f_1 \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(Z_1, A), f_2 \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(Z_2, A)$, 定义 $\text{Hom}_{\mathbf{C}_A}(f_1, f_2) = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(Z_1, Z_2)$, 即

$$\begin{array}{ccc} Z_1 & \xrightarrow{\sigma} & Z_2 \\ & \searrow f_1 \quad \swarrow f_2 & \\ & A & \end{array}$$

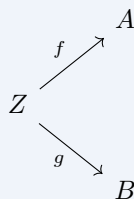
Definition 1.3.3 (Slice category). 使用这种方式构造的 category 被称为 *slice category*, 它们是 *comma categories* 的特例。

Example (Coslice category). 将 [Eg3.5] 中 objects 的箭头反过来, 类似的方法得到它的 morphisms, 这种 category 被称为 *coslice category*.

$$\begin{array}{ccc} Z_1 & \xrightarrow{\sigma} & Z_2 \\ & \searrow f_1 \quad \swarrow f_2 & \\ & A & \end{array}$$

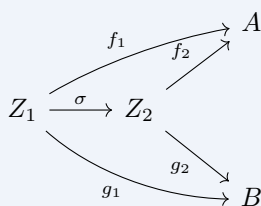
Example. 在 [Eg3.5] 中, 我们固定了 \mathcal{C} 中的一个 object A , 现在我们固定两个 objects A, B 来构建 category $\mathcal{C}_{A,B}$:

- $\text{Obj}(\mathcal{C}_{A,B}) = \text{diagrams}$

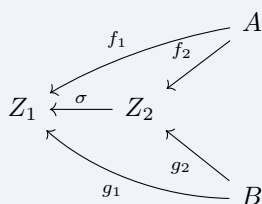


in \mathcal{C}

- morphisms 是 *commutative* diagrams

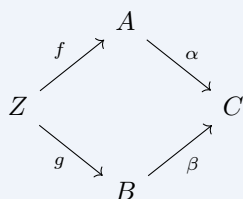


Note. 类似的, 我们也有 coslice 版 $\mathcal{C}^{A,B}$:



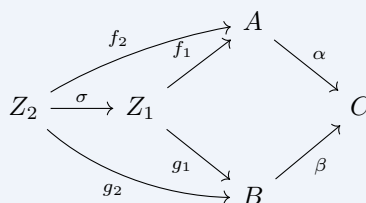
Example. 作为 $\mathcal{C}_{A,B}$ 的变种, 我们也可以考虑固定两个 \mathcal{C} 中的 morphisms $\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C), \beta \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ 得到一个 *fibred* version of $\mathcal{C}_{A,B}$:

- $\text{Obj}(\mathcal{C}_{\alpha,\beta}) = \text{commutative diagrams}$

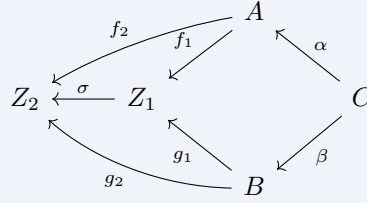


in \mathcal{C}

- morphism 是响应的 *commutative diagrams*



Note. 对应的 coslice category 为 $C^{\alpha, \beta}$:



Exercise (3.9). • $\text{Obj}(\mathbf{MSet}) =$ 二元组 (S, \sim) , 其中 S 为集合, \sim 为等价关系.

- $\text{Hom}_{\mathbf{MSet}}((S, \sim), (T, \approx)) =$ 从 S 到 T 的所有 functions f , 使得 f 保持等价关系, 即

$$\forall s_1, s_2 \in S, s_1 \sim s_2 \Rightarrow f(s_1) \approx f(s_2).$$

Proof. 下面证明上述定义的 \mathbf{MSet} 是一个 category:

- 由于 functions 满足 associativity 与 composition law, 显然 \mathbf{MSet} 中的 morphisms 也满足 associativity 和 composition law.
- 对于任意 (S, \sim) , 存在一个 identity morphism $\text{id}_{(S, \sim)}$ 使得 $\forall s \in S, \text{id}_{(S, \sim)}(s) = s$.
- $\text{id}_{(S, \sim)}$ 显然也是 composition law 的 identity.

⊛

Exercise (3.10). 想要从 object A 中取出某个 subobject, 题干告诉我们这个过程是通过 morphisms $A \rightarrow \Omega$ 来实现的, 容易想到特定的 subobject 由特定的 morphisms 指定, 那么 Ω 的内容应该要能够指出哪些内容属于这个 subobject, 哪些不属于。

在 \mathbf{Set} 中, Ω 应该是一个集合, 简单起见, 我们可以直接令其为 $\{0, 1\}$, 其中 0 表示不属于 subobject, 1 表示属于 subobject.

1.4 Morphisms

在 \mathbf{Set} 中, 它的 morphisms 就是前面提到的 functions, 但是 morphisms 与 functions 有很大不同, morphisms 是一个更宽泛的概念, functions 的定义是 elementwise 的, 而 category 中的 objects 并不一定有 elements.

1.4.1 Isomorphism

Definition 1.4.1 (Isomorphism). A morphism $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$ is an *isomorphism* if it has a (two-sided) inverse under composition: if $\exists g \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(B, A)$ such that

$$gf = 1_A, \quad fg = 1_B.$$

由于 function 的定义是 elementwise 的, 所以一个 function 的 ‘inverse’ 从定义上看天然 unique 的, 而 isomorphism 的 ‘inverse’ 则不然, 但它确实也是 unique 的, 只需要一个额外的验证。

Proposition 1.4.1. The inverse of an isomorphism is unique.

Proof. 若 $g, h \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(B, A)$ 都满足上式且 $g \neq h$, 于是我们有

$$g = g1_B = g(fh) = (gf)h = 1_A h = h$$

与假设矛盾。 ■

Proposition 1.4.2. With notation as above:

- (reflective) Each identity 1_A is an isomorphism and is its own inverse.
- (symmetric) If f is an isomorphism, then so is its inverse f^{-1} and further $(f^{-1})^{-1} = f$.
- (transitive) If $f \in \text{Hom}_C(A, B)$, $g \in \text{Hom}_C(B, A)$ are isomorphisms, then so is gf and $(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$.

Note. 一个 category 中的两个 objects A, B 如果满足存在一个 isomorphism $f \in \text{Hom}_C(A, B)$, 那么我们称 A 和 B 是 *isomorphic*, 记作 $A \cong B$.

Example (Groupoid). 如果一个 category 中所有的 morphisms 都是 isomorphism, 那么这个 category 被称为 *groupoid*.

一个 *automorphism* 指的是 category C 中的 object A 中所有在 $\text{Hom}_C(A, A)$ 中的 isomorphisms 的集合, 记作 $\text{Aut}_C(A)$, 它是 $\text{End}_C(A)$ 的子集. 不难发现 $\text{Aut}_C(A)$ 是一个 group.

1.4.2 Monomorphisms and epimorphisms

在 morphism 中类比于 injectivity 和 surjectivity 的概念分别是 *monomorphism* 和 *epimorphism*.

Definition 1.4.2 (Monomorphism). Let C be a category. A morphism $f \in \text{Hom}_C(A, B)$ is a *monomorphism* if the following holds:

$$\forall Z \in \text{Obj}(C), \forall g_1, g_2 \in \text{Hom}_C(Z, A), f \circ g_1 = f \circ g_2 \Rightarrow g_1 = g_2.$$

Definition 1.4.3 (Epimorphism). Let C be a category. A morphism $f \in \text{Hom}_C(A, B)$ is an *epimorphism* if the following holds:

$$\forall Z \in \text{Obj}(C), \forall g_1, g_2 \in \text{Hom}_C(B, Z), g_1 \circ f = g_2 \circ f \Rightarrow g_1 = g_2.$$

在 Set 中, monomorphism 完全等价于 injectivity, epimorphism 完全等价于 surjectivity. 但是在由 \mathbb{Z} 上的关系 \leq 定义得到的 category 中, 每个 morphism 都同时是 monomorphism 和 epimorphism, 但是唯一的 isomorphisms 只有 identities.

因此上述特性只是因为 Set 是一个特殊的 category 而已, 更广泛来说, 上面这种特性会出现在所有 *abelian category* 中.

1.5 Universal properties

从 Section 1.3 中的 examples 可以看出, 一个 category 可以通过一些操作来构造 (construction) 得到一些新的 categories, 而我们现在要研究的就是这些 constructions 之间的 *universal properties*.

1.5.1 Initial and final objects

Definition 1.5.1 (Initial and final objects). Let C be a category. We say that an object I of C is *initial* if for every object A of C , there exists a *unique* morphism $I \rightarrow A$ in C :

$$\forall A \in \text{Obj}(C) : \quad \text{Hom}_C(I, A) \text{ is a singleton.}$$

We say that an object T of C is *final* if for every object A of C , there exists a *unique* morphism $A \rightarrow T$ in C :

$$\forall A \in \text{Obj}(C) : \quad \text{Hom}_C(A, T) \text{ is a singleton.}$$

Note. 一个 category 不一定要有 initial 或者 final objects, 如果有的话, 它们不一定是 unique 的.

Example (Set). 在 Set 中, 它的 initial object 是空集 \emptyset , final objects 是任何 singleton.

尽管 initial/final objects 不一定是 unique 的, 但是只要它们存在, 它们就一定是 isomorphic 的.

Proposition 1.5.1. Let \mathcal{C} be a category.

- If I_1, I_2 are both initial objects of \mathcal{C} , then $I_1 \cong I_2$.
- If F_1, F_2 are both final objects of \mathcal{C} , then $F_1 \cong F_2$.

Further, these isomorphisms are unique determined.

Proof. 由 initial/final object 的定义, 任意两个 initial/final objects 之间各只会会有一个 morphism, 因此这个 morphism 一定是 isomorphism. ■

1.5.2 Universal properties

当某种 construction 可以看作某个 category 的 terminal object 时, 我们称它满足了某个 universal property. 换句话说, 一个 object 需要满足了某个 universal property 才能成为 terminal object.

一个简单的例子是我们称 \emptyset is universal with respect to the property of mapping to sets, 这句话和 “ \emptyset is the initial object in Set” 是等价的.

在更多的时候 initial/final objects 对应的 properties 会更复杂, 对于一个 universal property 的 ‘explanation’ 可能会遵循以下模式: “object X is universal with respect to the following property: for any Y such that..., there exists a unique morphism $Y \rightarrow X$ such that...”.

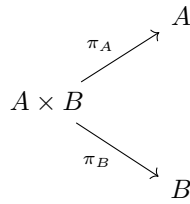
1.5.3 Quotients

设 \sim 是定义在集合 A 上的一个等价关系, 我们有:

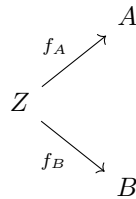
“The quotient A/\sim is universal with respect to the property of mapping A to a set in such a way that equivalent elements have the same image.”

1.5.4 Products

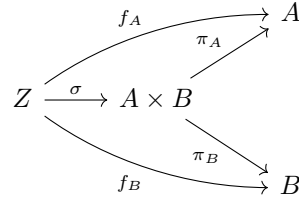
假设 A, B 是两个集合, 考虑它们的 product $A \times B$ 以及两个 natural projections:



我们有, 对任意集合 Z 和 morphisms



存在一个 unique morphism $\sigma: Z \rightarrow A \times B$ 使得 diagrams



commutes.

此时, σ 通常记为 $f_A \times f_B$.

Proof. $\forall z \in Z$, 令

$$\sigma(z) = (f_A(z), f_B(z)).$$

■

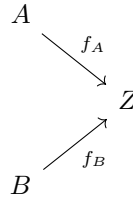
不难发现, $A \times B$ (together with the information of their natural projections to the factors) 是 $\mathcal{C}_{A,B}$ 中的 final object.

当 category \mathcal{C} 中的任意两个 objects A, B 在 $\mathcal{C}_{A,B}$ 中都有 final objects 时, 我们称 \mathcal{C} 有 (finite) products.

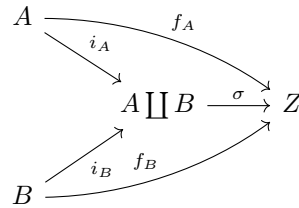
通过这种视角来看待 products 的主要好处就是, universal property 可能在任意 category 中成立, 而不仅仅是在 Set 中.

1.5.5 Coproducts

类似地, 给定两个 morphisms $i_A : A \rightarrow A \coprod B, i_B : B \rightarrow A \coprod B$, 我们有 coproduct $A \coprod B$ 是 $\mathcal{C}^{A,B}$ 中的 initial object, 满足下述 universal property: 对任意 object Z 和 morphisms



存在一个 unique morphism $\sigma : A \coprod B \rightarrow Z$ 使得 diagrams



commutes.

Proposition 1.5.2 (Coproducts in Set). The disjoint union is a coproduct in Set.

Appendix

Appendix A

Additional Proofs

A.1 Proof of ??

We can now prove ??.

Proof of ??. See [here](#).



Bibliography

[Alu09] Paolo Aluffi. *Algebra : chapter 0*. American Mathematical Society, 2009.