

# Algebra : Chapter 0

Leven Huang

July 30, 2024

### **Abstract**

This is my notes on the book *Algebra : chapter 0* by Aluffi. The book is a modern introduction to abstract algebra, and it is suitable for self-study.

# Contents

<b>1</b>	<b>Preliminaries: Set theory and categories</b>	<b>2</b>
1.1	Naive Set Theory . . . . .	2
1.2	Functions between sets . . . . .	3
1.3	Categories . . . . .	6
1.4	Morphisms . . . . .	9
1.5	Universal properties . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Groups, first encounter</b>	<b>13</b>
2.1	Definition of group . . . . .	13
<b>A</b>	<b>Additional Proofs</b>	<b>16</b>
A.1	Proof of ?? . . . . .	16

# Chapter 1

## Preliminaries: Set theory and categories

### 1.1 Naive Set Theory

#### 1.1.1 Sets

一个 set 由它所包含无序的、无重复的 *elements* 决定。set 的一个变种是 ‘multiset’, 它的 elements 允许重复, 正确定义一个 multiset 的方式是使用 *functions*。

一些有名的 sets:

- $\emptyset$ : 空集;
- $\mathbb{N}$ : 自然数集;
- $\mathbb{Z}$ : 整数集;
- $\mathbb{Q}$ : 有理数集;
- $\mathbb{R}$ : 实数集;
- $\mathbb{C}$ : 复数集。

另外, 用 *singleton* 表示只有一个元素的 set。

下面是一些有用的符号 (称为 *quantifiers*):

- $\exists$ : 存在;
- $\forall$ : 对所有;
- $\exists!$ : 存在唯一。

#### 1.1.2 Inclusion of sets

我们用  $S \subseteq T$  来表示  $S$  是  $T$  的子集。

#### 1.1.3 Operations between sets

- $\cup$ : 并集;
- $\cap$ : 交集;
- $\setminus$ : 差集;
- $\sqcup$ : 对称差;
- $\times$ : 笛卡尔积;
- ‘quotient by an equivalence relation’.

### 1.1.4 Equivalence relations, partitions, quotients

**Definition 1.1.1 (Equivalence relation).** An *equivalence relation* on a set  $S$  is a relation  $\sim$  satisfying the following properties:

- *Reflexivity*:  $a \sim a$  for all  $a \in S$ ;
- *Symmetry*: if  $a \sim b$ , then  $b \sim a$ ;
- *Transitivity*: if  $a \sim b$  and  $b \sim c$ , then  $a \sim c$ .

**Definition 1.1.2 (Quotient).** The *quotient* of a set  $S$  with respect to an equivalence relation  $\sim$  is the set

$$S / \sim := \mathcal{P}_{\sim}$$

of equivalence classes of elements of  $S$  with respect to  $\sim$ .

**Example.** 令  $S = \mathbb{Z}$ , 并定义关系  $\sim$  为

$$a \sim b \Leftrightarrow a - b \text{ is even.}$$

于是  $\mathbb{Z} / \sim$  由两个等价类组成:

$$\mathbb{Z} / \sim = \{[0]_{\sim}, [1]_{\sim}\}$$

## 1.2 Functions between sets

### 1.2.1 Definition

sets 之间使用 functions 进行交互, function  $f : A \rightarrow B$  的所有信息就是 *which element  $b$  of  $B$  is the image of any given element  $a$  of  $A$* , 这些信息相当于一些二元组的集合, 即:

$$\Gamma_f := \{(a, b) \in A \times B \mid b = f(a)\} \subseteq A \times B$$

而集合  $\Gamma_f$  通常被称为  $f$  的 *graph*。

为了满足函数的定义, 集合  $\Gamma_f$  需要满足下列约束:

$$(\forall a \in A) (\exists! b \in B) \quad (a, b) \in \Gamma_f$$

我们声明  $f$  是从  $A$  到  $B$  的函数, 通常记作  $f : A \rightarrow B$ , 也可以画成下图 (‘diagram’) 的形式:

$$A \xrightarrow{f} B$$

对于任意  $a \in A$ , 我们记作:

$$a \mapsto f(a).$$

如果  $S$  是  $A$  的子集, 我们可以定义  $f(S)$  为:

$$f(S) := \{b \in B \mid (\exists a \in A) b = f(a)\}.$$

也就是说,  $f(S)$  是包含所有  $S$  中的 elements 的像的集合。最大的这样的集合是  $f(A)$ , 也记为  $\text{Im } f$ 。

另外, 我们用  $f|_S$  表示将  $f$  限制在  $S$  上的函数: 即 function  $S \rightarrow B$  defined by

$$(\forall s \in S) : f|_S(s) = f(s).$$

**Note.**  $f(S) = \text{Im}(f|_S)$ .

### 1.2.2 Examples: Multisets, indexed sets

**Example (Multiset).** 我们用一个 function 来定义 multiset, 一种可能的方法是使用一个 function  $f : A \rightarrow \mathbb{N}^*$ , 其中  $A$  是一个集合。这样,  $f(a)$  就是  $a$  在 multiset 中的重复次数。

**Example (Indexed set).** 同样使用 function 来得到一个 indexed set。将集合  $I$  看作下标, 我们可以用一个 function  $f : I \rightarrow A$  来给  $\text{Im}(I) \subseteq A$  中的每个元素一个序号, 从而得到一个 indexed set。

### 1.2.3 Composition of functions

functions 可以被组合, 即给定两个 functions  $f : A \rightarrow B$  和  $g : B \rightarrow C$ , 我们可以定义它们的 *composition*  $gf : A \rightarrow C$  为:

$$(\forall a \in A) \quad (g \circ f)(a) := g(f(a))$$

用 diagram 的形式表示为:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & g \circ f & & \end{array}$$

我们称上图 *commutes* 或是 *commutative* 的, 表示无论  $A$  从那条路径到  $C$ , 得到的结果都是一样的。

**Note (Associativity).** composition 是 *associative* 的, 即对于任意三个 functions  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C, h : C \rightarrow D$ , 有  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ 。在 diagram 中表示为:

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D \\ & \searrow & & \nearrow & & & \\ & & g \circ f & & h \circ g & & \end{array}$$

### 1.2.4 Injections, surjections, bijections

- *Injection*:  $f : A \rightarrow B$  is an *injection* if for all  $a, a' \in A$ ,  $f(a) = f(a')$  implies  $a = a'$ .
- *Surjection*:  $f : A \rightarrow B$  is a *surjection* if for all  $b \in B$ , there exists  $a \in A$  such that  $f(a) = b$ .
- *Bijection*:  $f : A \rightarrow B$  is a *bijection* if it is both an injection and a surjection.

injections 通常画作  $\hookrightarrow$ , surjections 通常画作  $\twoheadrightarrow$ .

如果  $f$  既是 injection 又是 surjection, 我们称  $f$  是 *bijective* 的 (或称之为一个 *bijection* 或 *one to one correspondence* 或 *isomorphism of sets*), 写作  $f : A \xrightarrow{\sim} B$  或

$$A \cong B,$$

此时我们称  $A$  和  $B$  是 ‘*isomorphic*’ sets.

### 1.2.5 Injections, surjections, bijections: Second viewpoint

回顾前面对  $\Gamma_f$  的约束, 我们希望定义一个函数  $g : B \rightarrow A$ , 使得  $\forall a \in A, \exists b \in B, s.t. f(a) = b \Rightarrow g(b) = a$ , 当  $f$  是 surjection 时,  $\Gamma_g$  满足约束中的  $\forall b \in B$ ; 当  $f$  是 injection 时,  $\Gamma_g$  满足约束中的  $\exists! a \in A$ 。也就是说, 当  $f$  是 bijection 时, 存在唯一的函数  $g$  是  $f$  的逆函数。

从图形上看,  $g$  有一个有趣的性质, 即下面的图形是 commutative 的:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \xrightarrow{g} A \\ & \searrow & \nearrow \\ & & \text{id}_A \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{g} & A \xrightarrow{f} B \\ & \searrow & \nearrow \\ & & \text{id}_B \end{array}$$

**Proposition 1.2.1.** Assume  $A \neq \emptyset$ , and let  $f : A \rightarrow B$  be a function. Then

1.  $f$  has a left-inverse if and only if  $f$  is injective.

2.  $f$  has a right-inverse if and only if  $f$  is surjective.

**Corollary 1.2.1.** A function  $f : A \rightarrow B$  is a bijection if and only if it has a (two-sided) inverse.

### 1.2.6 Monomorphisms and epimorphisms

monomorphisms 和 epimorphisms 是 category theory 中的概念, 可以用更图形化的视角来看待 injectivity 和 surjectivity.

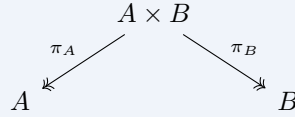
A function  $f : A \rightarrow B$  is called a *monomorphism* (*monic*) if for any sets  $Z$  and functions  $\alpha', \alpha'' : Z \rightarrow A$ ,  $f \circ \alpha' = f \circ \alpha''$  implies  $\alpha' = \alpha''$ .

**Proposition 1.2.2.** A function is injective if and only if it is a monomorphism.

类似的, epimorphisms 则对应 surjectivity.

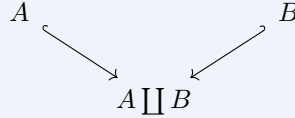
### 1.2.7 Basic examples

**Example (Natural projections).** 令  $A, B$  为非空集合, 则 *natural projections*  $\pi_A, \pi_B$ :



被定义为  $\pi_A(a, b) := a, \pi_B(a, b) := b, \forall (a, b) \in A \times B$ . 这两个映射都是 surjections.

**Example (Natural injections).** 类似的, 有 natural injections from  $A$  and  $B$  to the disjoint union  $A \amalg B$ :



即将  $a \in A$  映射到  $(a, 0) \in A \amalg B$ , 将  $b \in B$  映射到  $(b, 1) \in A \amalg B$ .

**Example (Canonical projection).** 假设  $\sim$  是集合  $A$  上的等价关系, 于是有 (surjective) canonical projection:

$$A \twoheadrightarrow A/\sim$$

即将  $a \in A$  映射到它的等价类  $[a]_{\sim}$ .

### 1.2.8 Canonical decomposition

We define an equivalence relation  $\sim$  on set  $A$  as follows: for all  $a', a'' \in A, a' \sim a'' \Leftrightarrow f(a') = f(a'')$ .

**Theorem 1.2.1 (Canonical decomposition).** Let  $f : A \rightarrow B$  be any function, and define  $\sim$  as above. Then  $f$  decomposes as follows:

$$A \twoheadrightarrow (A/\sim) \xrightarrow[\tilde{f}]{\sim} \text{Im } f \hookrightarrow B$$

where the first function is the canonical projection  $A \rightarrow A/\sim$ , the third function is the inclusion

induced  $\text{im } f \subseteq B$ , and the bijection  $\tilde{f}$  in the middle is defined by

$$\tilde{f}([a]_{\sim}) := f(a)$$

for all  $a \in A$ .

**Remark.** 可以看出, 任何一个函数都可以分解为一个 surjection, 一个 bijection 和一个 injection 的组合, 这个定理的 key insight 在于按照  $\text{Im } f$  将  $A$  拆分为等价类。

如果对  $\tilde{f}$  的定义合法, 那么显然上述分解是 commutative 的。因此证明这个定理的关键在于:

- $\tilde{f}$  确实是一个 function;
- $\tilde{f}$  确实是一个 bijection.

在上述定理中对  $\tilde{f}$  的定义中存在问题, 那就是对于同一等价类中的  $a'$  和  $a''$ , 是否有  $f(a') = f(a'')$ , 如果是否定的话, 那么  $[a]_{\sim}$  会对应多个 image, 从而  $\tilde{f}$  不是一个 function. 从前面对  $\sim$  的定义中, 显然  $f(a') = f(a'')$ , 因此  $\tilde{f}$  是 *well-defined* 的。

而对于 bijection, 我们只需证明  $\tilde{f}$  既是 injection 又是 surjection 即可, 这里不再赘述。

## 1.2.9 Clarification

通过 disjoint unions, products 或 quotients 得到的集合, 它们的主要性质并不是指它们包含了什么 elements, 而是它们与其他集合之间的关系。这在之后的 Universal properties section 中会有所体现。

## 1.3 Categories

categories 的语言被 Norman Steenrod 称为 *abstract nonsense*, 因为 categories 的主要研究重点是 ‘structure’ 而非 ‘meaning’, 这强调了你应该把注意力放在 how that set may sit in relationship with all other sets 而不是 how you run into a specific set.

### 1.3.1 Definition

一个 category 由一些满足特定条件的 ‘objects’ 和 ‘morphisms’ 组成 (collection)。注意这里使用的是 ‘collection’ 而不是 ‘set’, 这是因为根据 Russell’s paradox, 我们应该避免讨论 ‘set of all sets’, 而 category 的 objects 是一个比 set 更广泛的概念, 它允许 ‘collection of all sets’.

用 technical name 来描述上述 collection 则是 *class*, 即 ‘class of sets’, 这是一个比 set 更大的概念。另一种描述是用 *universe* 来定义一个足够大的 set, 然后默认所有的 categories 的所有 objects 都取自这个 universe.

在后面的一些 examples 中, 我们会看到一些 category 的 objects 是 sets, 这种 category 我们称它是 *small* 的。

**Definition 1.3.1 (Category).** A category  $\mathcal{C}$  consists of

- a class  $\text{Obj}(\mathcal{C})$  of *objects* of the category; and
- for every two objects  $A, B$  of  $\mathcal{C}$ , a set  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  of *morphisms* with the properties listed below.
  - For every object  $A$  of  $\mathcal{C}$ , there exists (at least) one morphism  $1_A \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ , the ‘identity’ on  $A$ .
  - One can compose morphisms: two morphisms  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  and  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$  determine a morphism  $gf \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$ .
  - This ‘composition law’ is associative: if  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ,  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ , and  $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$ , then

$$h(gf) = (hg)f.$$

- The identity morphisms are identities with respect to composition: that is, for all  $f \in$



$\text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$  we have

$$f1_A = f, \quad 1_B f = f.$$

One further requirement is that the sets

$$\text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B), \quad \text{Hom}_{\mathbf{C}}(C, D)$$

be *disjoint* unless  $A = C, B = D$ .

**Note.** 值得注意的是, 上述定义中 90% 描述的是 morphisms 的性质, 这与上面提到的 “categories 的研究重点是 ‘structure’ ” 的观点不谋而合, 因为 morphisms 才是描述 ‘structure’ 的关键。

但是, 我们也会不可避免地 from objects 的角度来看待 categories, 因为 morphisms 最终还是由 objects 决定的。

**Definition 1.3.2 (Endomorphism).** A morphism of an object  $A$  of a category  $\mathbf{C}$  to itself is called an *endomorphism*;  $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, A)$  is denoted  $\text{End}_{\mathbf{C}}(A)$ .

**Note.** The composition defines an ‘operation’ on  $\text{End}_{\mathbf{C}}(A)$ : if  $f, g$  are elements of  $\text{End}_{\mathbf{C}}(A)$ , so is their composition  $gf$ .

### 1.3.2 Examples

**Example (Set).** We will use  $\mathbf{Set}$  to denote the category of sets. Thus

- $\text{Obj}(\mathbf{Set}) =$  the class of all sets;
- for  $A, B$  in  $\text{Obj}(\mathbf{Set})$ ,  $\text{Hom}_{\mathbf{Set}}(A, B) = B^A$

**Note.** 尽管 sections 1.1.3 and 1.1.4 中提到了 sets 的 operations 体现了其他 categories 不一定有的  $\mathbf{Set}$  的一些有意思的 features, 但是它们与  $\mathbf{Set}$  的定义无关。

**Example (Slice category).** 设  $\mathbf{C}$  是一个 category,  $A$  为  $\mathbf{C}$  中的一个 object, 我们现在由  $A$  构造一个 category  $\mathbf{C}_A$ :

- $\text{Obj}(\mathbf{C}_A) =$  all morphisms from any object of  $\mathbf{C}$  to  $A$ ;
- 对于 objects  $f_1 \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(Z_1, A), f_2 \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(Z_2, A)$ , 定义  $\text{Hom}_{\mathbf{C}_A}(f_1, f_2) = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(Z_1, Z_2)$ , 即

$$\begin{array}{ccc} Z_1 & \xrightarrow{\sigma} & Z_2 \\ & \searrow f_1 & \swarrow f_2 \\ & A & \end{array}$$

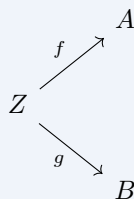
**Definition 1.3.3 (Slice category).** 使用这种方式构造的 category 被称为 *slice category*, 它们是 *comma categories* 的特例。

**Example (Coslice category).** 将 [Eg3.5] 中 objects 的箭头反过来, 类似的方法得到它的 morphisms, 这种 category 被称为 *coslice category*.

$$\begin{array}{ccc} Z_1 & \xrightarrow{\sigma} & Z_2 \\ & \searrow f_1 & \swarrow f_2 \\ & A & \end{array}$$

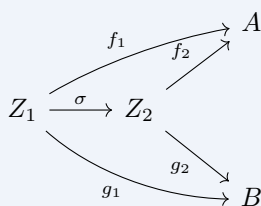
**Example.** 在 [Eg3.5] 中, 我们固定了  $\mathcal{C}$  中的一个 object  $A$ , 现在我们固定两个 objects  $A, B$  来构建 category  $\mathcal{C}_{A,B}$ :

- $\text{Obj}(\mathcal{C}_{A,B}) = \text{diagrams}$

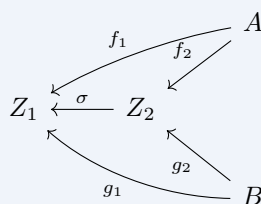


in  $\mathcal{C}$

- morphisms 是 *commutative* diagrams

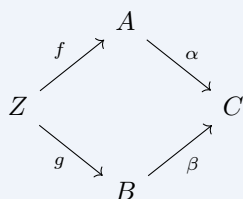


**Note.** 类似的, 我们也有 coslice 版  $\mathcal{C}^{A,B}$ :



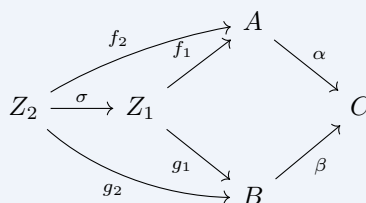
**Example.** 作为  $\mathcal{C}_{A,B}$  的变种, 我们也可以考虑固定两个  $\mathcal{C}$  中的 morphisms  $\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C), \beta \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$  得到一个 *fibred* version of  $\mathcal{C}_{A,B}$ :

- $\text{Obj}(\mathcal{C}_{\alpha,\beta}) = \text{commutative diagrams}$

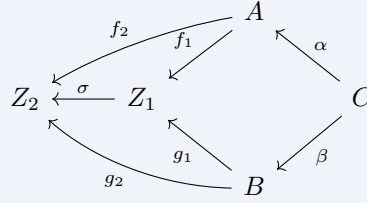


in  $\mathcal{C}$

- morphism 是响应的 *commutative diagrams*



**Note.** 对应的 coslice category 为  $C^{\alpha, \beta}$ :



**Exercise (3.9).** •  $\text{Obj}(\mathbf{MSet}) =$  二元组  $(S, \sim)$ , 其中  $S$  为集合,  $\sim$  为等价关系.

- $\text{Hom}_{\mathbf{MSet}}((S, \sim), (T, \approx)) =$  从  $S$  到  $T$  的所有 functions  $f$ , 使得  $f$  保持等价关系, 即

$$\forall s_1, s_2 \in S, s_1 \sim s_2 \Rightarrow f(s_1) \approx f(s_2).$$

**Proof.** 下面证明上述定义的  $\mathbf{MSet}$  是一个 category:

- 由于 functions 满足 associativity 与 composition law, 显然  $\mathbf{MSet}$  中的 morphisms 也满足 associativity 和 composition law.
- 对于任意  $(S, \sim)$ , 存在一个 identity morphism  $\text{id}_{(S, \sim)}$  使得  $\forall s \in S, \text{id}_{(S, \sim)}(s) = s$ .
- $\text{id}_{(S, \sim)}$  显然也是 composition law 的 identity.

⊛

**Exercise (3.10).** 想要从 object  $A$  中取出某个 subobject, 题干告诉我们这个过程是通过 morphisms  $A \rightarrow \Omega$  来实现的, 容易想到特定的 subobject 由特定的 morphisms 指定, 那么  $\Omega$  的内容应该要能够指出哪些内容属于这个 subobject, 哪些不属于。

在  $\mathbf{Set}$  中,  $\Omega$  应该是一个集合, 简单起见, 我们可以直接令其为  $\{0, 1\}$ , 其中 0 表示不属于 subobject, 1 表示属于 subobject.

## 1.4 Morphisms

在  $\mathbf{Set}$  中, 它的 morphisms 就是前面提到的 functions, 但是 morphisms 与 functions 有很大不同, morphisms 是一个更宽泛的概念, functions 的定义是 elementwise 的, 而 category 中的 objects 并不一定有 elements.

### 1.4.1 Isomorphism

**Definition 1.4.1 (Isomorphism).** A morphism  $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$  is an *isomorphism* if it has a (two-sided) inverse under composition: if  $\exists g \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(B, A)$  such that

$$gf = 1_A, \quad fg = 1_B.$$

由于 function 的定义是 elementwise 的, 所以一个 function 的 ‘inverse’ 从定义上看天然 unique 的, 而 isomorphism 的 ‘inverse’ 则不然, 但它确实也是 unique 的, 只需要一个额外的验证。

**Proposition 1.4.1.** The inverse of an isomorphism is unique.

**Proof.** 若  $g, h \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(B, A)$  都满足上式且  $g \neq h$ , 于是我们有

$$g = g1_B = g(fh) = (gf)h = 1_A h = h$$

与假设矛盾。 ■

**Proposition 1.4.2.** With notation as above:

- (reflective) Each identity  $1_A$  is an isomorphism and is its own inverse.
- (symmetric) If  $f$  is an isomorphism, then so is its inverse  $f^{-1}$  and further  $(f^{-1})^{-1} = f$ .
- (transitive) If  $f \in \text{Hom}_C(A, B)$ ,  $g \in \text{Hom}_C(B, A)$  are isomorphisms, then so is  $gf$  and  $(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$ .

**Note.** 一个 category 中的两个 objects  $A, B$  如果满足存在一个 isomorphism  $f \in \text{Hom}_C(A, B)$ , 那么我们称  $A$  和  $B$  是 *isomorphic*, 记作  $A \cong B$ .

**Example (Groupoid).** 如果一个 category 中所有的 morphisms 都是 isomorphism, 那么这个 category 被称为 *groupoid*.

一个 *automorphism* 指的是 category  $C$  中的 object  $A$  中所有在  $\text{Hom}_C(A, A)$  中的 isomorphisms 的集合, 记作  $\text{Aut}_C(A)$ , 它是  $\text{End}_C(A)$  的子集. 不难发现  $\text{Aut}_C(A)$  是一个 group.

## 1.4.2 Monomorphisms and epimorphisms

在 morphism 中类比于 injectivity 和 surjectivity 的概念分别是 *monomorphism* 和 *epimorphism*.

**Definition 1.4.2 (Monomorphism).** Let  $C$  be a category. A morphism  $f \in \text{Hom}_C(A, B)$  is a *monomorphism* if the following holds:

$$\forall Z \in \text{Obj}(C), \forall g_1, g_2 \in \text{Hom}_C(Z, A), f \circ g_1 = f \circ g_2 \Rightarrow g_1 = g_2.$$

**Definition 1.4.3 (Epimorphism).** Let  $C$  be a category. A morphism  $f \in \text{Hom}_C(A, B)$  is an *epimorphism* if the following holds:

$$\forall Z \in \text{Obj}(C), \forall g_1, g_2 \in \text{Hom}_C(B, Z), g_1 \circ f = g_2 \circ f \Rightarrow g_1 = g_2.$$

在  $\text{Set}$  中, monomorphism 完全等价于 injectivity, epimorphism 完全等价于 surjectivity. 但是在由  $\mathbb{Z}$  上的关系  $\leq$  定义得到的 category 中, 每个 morphism 都同时是 monomorphism 和 epimorphism, 但是唯一的 isomorphisms 只有 identities.

因此上述特性只是因为  $\text{Set}$  是一个特殊的 category 而已, 更广泛来说, 上面这种特性会出现在所有 *abelian category* 中.

## 1.5 Universal properties

从 Section 1.3 中的 examples 可以看出, 一个 category 可以通过一些操作来构造 (construction) 得到一些新的 categories, 而我们现在要研究的就是这些 constructions 之间的 *universal properties*.

### 1.5.1 Initial and final objects

**Definition 1.5.1 (Initial and final objects).** Let  $C$  be a category. We say that an object  $I$  of  $C$  is *initial* if for every object  $A$  of  $C$ , there exists a *unique* morphism  $I \rightarrow A$  in  $C$ :

$$\forall A \in \text{Obj}(C) : \quad \text{Hom}_C(I, A) \text{ is a singleton.}$$

We say that an object  $T$  of  $C$  is *final* if for every object  $A$  of  $C$ , there exists a *unique* morphism  $A \rightarrow T$  in  $C$ :

$$\forall A \in \text{Obj}(C) : \quad \text{Hom}_C(A, T) \text{ is a singleton.}$$

**Note.** 一个 category 不一定要有 initial 或者 final objects, 如果有的话, 它们不一定是 unique 的.

**Example (Set).** 在 Set 中, 它的 initial object 是空集  $\emptyset$ , final objects 是任何 singleton.

尽管 initial/final objects 不一定是 unique 的, 但是只要它们存在, 它们就一定是 isomorphic 的.

**Proposition 1.5.1.** Let  $\mathcal{C}$  be a category.

- If  $I_1, I_2$  are both initial objects of  $\mathcal{C}$ , then  $I_1 \cong I_2$ .
- If  $F_1, F_2$  are both final objects of  $\mathcal{C}$ , then  $F_1 \cong F_2$ .

Further, these isomorphisms are unique determined.

**Proof.** 由 initial/final object 的定义, 任意两个 initial/final objects 之间各只会会有一个 morphism, 因此这个 morphism 一定是 isomorphism. ■

### 1.5.2 Universal properties

当某种 construction 可以看作某个 category 的 terminal object 时, 我们称它满足了某个 universal property. 换句话说, 一个 object 需要满足了某个 universal property 才能成为 terminal object.

一个简单的例子是我们称  $\emptyset$  is universal with respect to the property of mapping to sets, 这句话和 “ $\emptyset$  is the initial object in Set” 是等价的.

在更多的时候 initial/final objects 对应的 properties 会更复杂, 对于一个 universal property 的 ‘explanation’ 可能会遵循以下模式: “object  $X$  is universal with respect to the following property: for any  $Y$  such that..., there exists a unique morphism  $Y \rightarrow X$  such that...”.

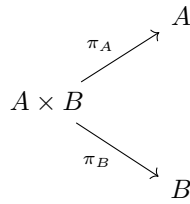
### 1.5.3 Quotients

设  $\sim$  是定义在集合  $A$  上的一个等价关系, 我们有:

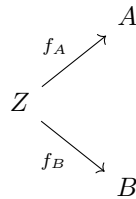
“The quotient  $A/\sim$  is universal with respect to the property of mapping  $A$  to a set in such a way that equivalent elements have the same image.”

### 1.5.4 Products

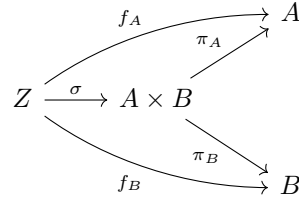
假设  $A, B$  是两个集合, 考虑它们的 product  $A \times B$  以及两个 natural projections:



我们有, 对任意集合  $Z$  和 morphisms



存在一个 unique morphism  $\sigma: Z \rightarrow A \times B$  使得 diagrams



commutes.

此时,  $\sigma$  通常记为  $f_A \times f_B$ .

**Proof.**  $\forall z \in Z$ , 令

$$\sigma(z) = (f_A(z), f_B(z)).$$

■

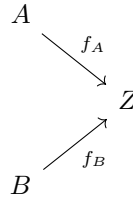
不难发现,  $A \times B$  (together with the information of their natural projections to the factors) 是  $\mathcal{C}_{A,B}$  中的 final object.

当 category  $\mathcal{C}$  中的任意两个 objects  $A, B$  在  $\mathcal{C}_{A,B}$  中都有 final objects 时, 我们称  $\mathcal{C}$  有 (finite) products.

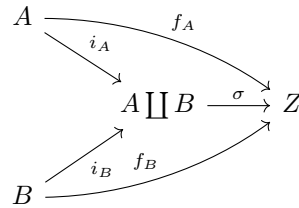
通过这种视角来看待 products 的主要好处就是, universal property 可能在任意 category 中成立, 而不仅仅是在 Set 中.

### 1.5.5 Coproducts

类似地, 给定两个 morphisms  $i_A : A \rightarrow A \coprod B, i_B : B \rightarrow A \coprod B$ , 我们有 coproduct  $A \coprod B$  是  $\mathcal{C}^{A,B}$  中的 initial object, 满足下述 universal property: 对任意 object  $Z$  和 morphisms



存在一个 unique morphism  $\sigma : A \coprod B \rightarrow Z$  使得 diagrams



commutes.

**Proposition 1.5.2** (Coproducts in Set). The disjoint union is a coproduct in Set.

## Chapter 2

# Groups, first encounter

前面学习了 category 的概念，现在我们学习一种特殊的 category，叫做 group（称为 Grp）。

### 2.1 Definition of group

#### 2.1.1 Groups and groupoids

[Joke] *Definition:* A group is a groupoid with a single object.

这个定义很好的体现了 groups 的 properties，在 groupoid  $G$  中，所有 morphisms 都是 isomorphism，当 object 只有一个（记为  $*$ ）时，那么这些 morphisms 都是 automorphism，即

$$\mathrm{Hom}_G(*, *) = \mathrm{Aut}_G(*)$$

将 set  $\mathrm{Hom}_G(*, *)$  记作  $G$ ，可以发现  $G$  对 composition 是封闭的、每个 morphism 都有 inverse、有单位元  $1_*$ ，事实上， $G$  加上 composition law 才是一个 group，前面的定义错在将 group 当成了一个 groupoid with a single object.

#### 2.1.2 Definition

在正式的定义中，将上述 composition law 记作  $\bullet$ ，称为 ‘multiplication’，notation 形如：

$$\bullet: G \times G \rightarrow G$$

或

$$\bullet(g, h) =: g \bullet h$$

**Definition 2.1.1 (Group).** Let  $G$  be a nonempty set, endowed with the binary operation  $\bullet$  (briefly,  $(G, \bullet)$  or simply  $G$ ), is a *group* if

1. the operation  $\bullet$  is *associative*;
2. there exists an *identity element*  $e_G$  for  $\bullet$ ;
3. every element in  $G$  has an *inverse* with respect to  $\bullet$ .

最简单的 group 显然是只包含  $e_G$  一个元素的 group，称为 *trivial group*.

**Example.** 可逆的  $n \times n$  matrices with real entries 的集合与矩阵乘法运算可以构成一个 group，表示为  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ .

### 2.1.3 Basic properties

从前面 groupoid 的角度来看,  $G$  中的  $e_G$  显然对应的是  $1_*$ , 但是正式的定义里并没有说明这一点, 甚至没有要求  $e_G$  是 unique 的, 实际上,  $G$  的元素中除了  $1_*$  没有其他的元素能 work as an identity.

**Proposition 2.1.1.** If  $h \in G$  is an identity of  $G$ , then  $h = e_G$ .

**Proof.** 直接使用 identity element 的定义导出矛盾。假设  $h$  是一个 identity 且  $h \neq e_G$ , 那么有

$$h = e_G h = e_G$$

⊗

**Proposition 2.1.2.** The inverse is also unique.

**Proof.** 由于  $G$  中的每个元素都是 isomorphism, 因此根据 Proposition 1.4.1 这个引理显然是成立的。⊗

Proposition 2.1.2 启示我们可以将元素  $g$  的 inverse 记作  $g^{-1}$ , 进一步地, 我们将一个元素对自身做  $n$  次的 multiplication 记作  $g^n$ , 它的 inverse 记作  $g^{-n}$ , 于是我们可以很自然地定义  $g^0 = e_G$ .

### 2.1.4 Cancellation

‘cancellation’ 在 group 中同样存在, 由于 isomorphism 既是 monomorphism 又是 epimorphism, 因此  $G$  中的每个元素都是左右可消的。

**Note.** 反过来不成立, 如果一个 morphism 即是 monomorphism 又是 epimorphism, 那么它也不一定是 isomorphism, 由偏序关系  $<$  导出的 category 就是一个反例。

**Proposition 2.1.3.** Let  $G$  be a group. Then  $\forall a, g, h \in G$

$$ga = ha \Rightarrow g = h, \quad ag = ah \Rightarrow g = h.$$

**Proof.** 因为 group 中每个元素都有 inverse, 因此等式两边同时乘上  $a^{-1}$  即可得证。⊗

### 2.1.5 Commutative groups

我们称对  $\bullet$  满足 commutative law 的 group 为 commutative group 或 abelian group.

abelian groups 有一个很重要的性质, 那就是它的结构是 ‘ $\mathbb{Z}$ -module structure’, 这种性质在当 abelian groups 与其他 operations 同时存在的当情况下很有用。

换句话说, abelian groups 和  $\mathbb{Z}$ -module 是同构的, 那么我们可以直接将它作为  $\mathbb{Z}$ -module 来处理。

注意到  $\mathbb{Z}$ -module 中的  $\bullet$  对应的是  $+$ , 因此 abelian groups  $A$  中的  $\bullet$  可以用  $+$  来表示,  $0_A$  即是 identity,  $a \in A$  的 inverse 则是  $-a$ , 前面使用的 ‘power’ notation 则成为了 ‘multiple’:  $0a = 0$ , 对于正整数  $n$ , 有

$$na = \underbrace{a + \cdots + a}_{n \text{ times}}, \quad (-n)a = \underbrace{(-a) + \cdots + (-a)}_{n \text{ times}}.$$

**Remark.** 这里的  $na$  只是一种 notation, 并不存在 ‘cancellation’.



# Appendix

## Appendix A

# Additional Proofs

### A.1 Proof of ??

We can now prove ??.

**Proof of ??.** See [here](#).



# Bibliography

[Alu09] Paolo Aluffi. *Algebra : chapter 0*. American Mathematical Society, 2009.