Заняття 5

Еволюційні задачі з неоднорідним рівнянням або неоднорідними межовими умовами: стаціонарні неоднорідності

Задача № 5.1

Знайти коливання вертикально розташованого пружного стержня під дією сили тяжіння для $t > 0$. Верхній кінець стержня закріплений, а нижній вільний. При $t < 0$ стержень був нерухомим і деформацій не було. Знайти спочатку стаціонарний розв'язок, що відповідає положенню рівноваги стержня в полі тяжіння, а потім знайти відхилення від нього, що відповідає коливанням навколо нового положення рівноваги. Намалювати графіки розподілу поля зміщень та поля напружень у положенні рівноваги.

Розв'язок

Знайти коливання вертикально розташованого пружного стержня під дією сили тяжіння для $t > 0$. Верхній кінець стержня закріплений, а нижній вільний. При $t < 0$ стержень був нерухомим і деформацій не було. Знайти спочатку стаціонарний розв'язок, що відповідає положенню рівноваги стержня в полі тяжіння, а потім знайти відхилення від нього, що відповідає коливанням навколо нового положення рівноваги. Намалювати графіки розподілу поля зміщень та сили натягу стержня у положенні рівноваги.

Розв'язок

Формальна постановка задачі:

$$\begin{cases} u = u(x,t), \\ u_{tt} = v^2 u_{xx} + g, \\ 0 \le x \le l, t \ge 0 \\ u(0,t) = 0,\ u_x(l,t) = 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

На відміну від попередніх задач, рівняння тут неоднорідне. Якщо рівняння і/або межові умови неоднорідні, то змінні не розділяються, і починати з відокремлення змінних не можна. Проте у даній задачі йдеться про систему, яка занходиться у стаціонарних (тобто незмінних з часом) зовнішніх умовах: стержень (певним чином закріплений) знаходиться у стаціонарному зовнішньому полі сили тяжіння. Математично це проявляється у тому, що неоднорідний член у рівнянні не залежить від часу. Завдяки такій особливості задачу можна розв'язати відносно просто, не звертаючись до загальних методів рорзв'язання задач з неоднорідними рівнянням чи межовими умовами. Ключик до задщачі можна знайти з фізичних міркувань. Простим аналогом задачі є задача про пружинний маятник (частинку, прикріплену до невагомої пружинки) у полі тяжіння. Уявляємо, що стерден перебував у положенні рівноваги, і сила тяжіння включається у початковий момент часу. Під дією сили тяжіння стерень почне розтягуватись і потім коливатися. Якщо врахувати мале тертя, то коливання згодом затухнуть, і стержень зупинится у положенні, в якому він буде розтягнутий під дією власної ваги. Це положення рівноваги стержня у полі тяжіння. Відповідний розв'язок рівняння з межовими умовами називають стаціонарним розв'язком $u = u_{\text{ст}}$. За смислом стаціонарний розв'язок не залежить від часу $u = u_{\text{ст}}(x)$ і задовольняє неоднорідне рівняння і межові умови задачі (5.1). Отже, $u_{\text{ст}}(x)$ можна знайти як розв'язок неоднорідної крайової задачі

$$\begin{cases} u = u_{\text{ст}}(x), \\ v^2 u'' + g = 0, \\ 0 \le x \le l, t \ge 0 \\ u(0) = 0,\, u'(l) = 0 \end{cases} \tag{5.2}$$

Фізично це задача на статичну рівновагу стержня у полі тяжіння.

Щоб розв'язати вихідну задачу, робимо заміну невідомої функції

$$u(x,t) = u_{\text{ст}}(x) + w(x,t) \tag{5.3}$$

Нове невідоме $w(x,t)$ відповідає вільним коливанням відносно нового положення рівноваги. Тому $w(x,t)$ задовольнятиме однорідні рівняння і межові умови, а такі задачі ми вже вміємо розв'язувати.

1) Стаціонарний розв'язок. Рівняння задачі (5.2) інтегруємо двічі. Маємо:

$$u_{\text{ст}}(x) = -\frac{gx^2}{2v^2} + C_1 x + C_2 \tag{5.4}$$

Сталі інтегрування визначаємо з крайових умов

$$\begin{aligned} u_{\text{ст}}(0) = C_2 = 0, \\ u'_{\text{ст}}(l) = -\frac{gl}{v^2} + C_1 = 0; \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0, \quad C_1 = \frac{gl}{v^2} \tag{5.5}$$

Отже, стаціонарний розв'язок має вигляд

$$u_{\text{ст}}(x) = -\frac{gx^2}{2v^2} + \frac{glx}{v^2} = A \cdot \frac{2lx - x^2}{l^2} \tag{5.6}$$

де позначено $A = gl^2/2v^2$. Графік поля зміщень має вигляд парболи з максимумом у точці кінця стержня $x = l$. Згідно закону Гука пружна сила $F(x) = \beta u_x$, де β - пружна стала, а $v^2 = \rho/\beta$, де ρ - лінійна густина маси. Звідси маємо

$$F(x) = \beta\frac{gl^2\rho}{2\beta} \cdot \frac{2l - 2x}{l^2} = Mg\frac{l - x}{l} \tag{5.7}$$

$M = \rho l$ - повна маса стержня. Отже, сила натягу максимальна і дорівнює вазі всього стержня у точці його закріплення і лінійно спадає до нуля у точці його нижнього кінця, що повністю відповідає фізиці ситуації.

2) Нестаціонарна частина розв'язку. Зробимо заміну (5.3): перепишемо умови задачі через нове невідоме $w(x,t)$, враховуючи умови (5.2), які задовольняє стаціонарний розв'язок. Рівняння:

$$u_{tt} = v^2 u_{xx} + g \;\Rightarrow\; w_{tt} = v^2 w_{xx} + v^2 u''_{\text{ст}} + g = v^2 w_{xx}$$

Межові умови:

$$\begin{array}{r} u(0,t) = u_{\text{ст}}(0) + w(0,t) = 0, \\ u_x(l,t) = u'_{\text{ст}}(0) + w_x(l,t) = 0 \end{array} \;\Rightarrow\; w(0,t) = 0,\; w_x(l,t) = 0$$

Початкові умови:

$$u(x,0) = u_{\text{ст}}(x) + w(x,0) = 0 \;\Rightarrow\; w(x,0) = -u_{\text{ст}}(x) = A \cdot \frac{x^2 - 2lx}{l^2}$$

$$u_t(x,0) = 0 \;\Rightarrow\; w_t(x,0) = 0$$

Отже, ми одержали задачу для $w(x,t)$ з однорідними межовими умовами і однорідними рівнянням та зміненими початковими умовами:

$$\begin{cases} w = w(x,t), \\ w_{tt} = v^2 w_{xx}, \\ 0 \le x \le l, t \ge 0 \\ w(0,t) = 0,\; w_x(l,t) = 0, \\ w(x,0) = A\dfrac{x^2 - 2lx}{l^2}, \\ w_t(x,0) = 0. \end{cases} \tag{5.8}$$

Власні моди для такої задачі були знайдені у задачі 1.2. Загальний розв'язок має вигляд:

$$\begin{aligned}
&w(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \big(A_n \sin\omega_n t + B_n \cos\omega_n t\big) \sin k_n x,\\
&k_n = \frac{\pi}{l}(n+1/2) \text{ – хвильове число,}\\
&\omega_n = v k_n \text{ – частота коливання,}\\
&n = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Залишається визначити коефіцієнти A_n та B_n з початкових умов:

$$w_t(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \omega_n \sin k_n x = 0 \;\Rightarrow\; A_n = 0, \,\forall n$$

$$w_t(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin k_n x = A \cdot \frac{x^2 - 2lx}{l^2} \;\Rightarrow\; B_n = \frac{2A}{l^3} \int_0^l (x^2 - 2lx) \sin k_n x \,\mathrm{d}x$$

Обчислимо отриманий інтеграл

$$\int_0^l (x^2 - 2lx) \sin k_n x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{k_n}(x^2 - 2lx) \cos k_n x \Big|_0^l -$$

$$-\frac{2}{k_n} \int_0^l (x-l) \cos k_n x \,\mathrm{d}x = \frac{2}{k_n^2} \left[(x-l) \sin k_n x \Big|_0^l - \int_0^l \sin k_n x \,\mathrm{d}x \right] =$$

$$= \frac{2}{k_n^3}\big(\cos k_n l - \cos 0\big) = \Big| \cos k_n l = 0 \Big| = -\frac{2}{k_n^3}$$

Отже, розв'язок

$$u(x,t) = \frac{gl^2}{2v^2} \left(\frac{2lx - x^2}{l^2} - 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\omega_n t \sin k_n x}{(lk_n)^3} \right) \tag{5.10}$$

З відповіді видно, що стаціонарний розв'язок (це перший доданок, якщо розкрити дужки) об'єктивно відрізняється від інших складових розв'язку задачі, оскільки вони залежать від часу. Стаціонарний розв'язок відповідає положенню рівноваги стержня у полі тяжіння, і тому представляє самостійний інтерес з фізичної фізичної точки зору. Якщо врахувати затухання коливань, то при великих t поле зміщень прямуватиме до стаціонарного розв'язку.

Зверніть увагу, що одержаний ряд Фур'є збігається швидше, ніж у попередніх задачах: коефіцієнти ряду спадають як $1/n^3$ при великих n. Це пов'язано з тим, що стаціонарний розв'язок задовольняє такі ж крайові умови, як і власні функції задачі Штурма-Ліувілля, по яких він розкладається у ряд.

Зауважимо, що стаціонарний розв'язок існує не завжди. Може бути, що неоднорідні члени у рівнянні і/або межових умовах не залежать від часу, але задача на стаціонарний розв'язок розв'язку не має. Наприклад, якщо у розглянутій вище задачі закріплений кінець зробити вільним, то стержень буде вільно падати. Отже фізично це випадки, коли статична рівновага у системі неможлива. Тоді метод необхідно модифікувати.