Заняття 3

Другий спосіб знаходження коефіцієнтів. Коливання стержня з вільними кінцями, неповнота базису.

Задача № 3.3

Знайти коливання пружного стержня довжиною l з вільними кінцями, якщо початкове відхилення дорівнює нулю, а початкова швидкість $\psi(x) = \nu_0$. Якщо всі знайдені вами коефіцієнти Фур'є (коефіцієнти загального розв'язку) дорівнюють нулю, поясніть, що це означає, і знайдіть, де була допущена помилка.

Розв'язок

Формальна постановка задачі:

$$\begin{cases} u = u(x,t), \\ u_{tt} = v^2 u_{xx}, \\ 0 \le x \le l, t \ge 0, \\ u_x(0,t) = u_x(0,t) = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x) = 0, \\ u_t(x,0) = \psi(x) = \nu_0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Це задача із заданими початковими умовами (а саме - початковим розподілом зміщення та швидкостей), яка має єдиний розв'язок.

Рівняння і межові умови задачі однорідні, тому можна розділити змінні і знайти власні моди. Скористаємося результатом задачі 2.1 в якій відповідні власні моди були знайдені:

$$
\begin{cases}
u_0(x,t) = A_0 + B_0 t, \\
u_n(x,t) = [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] \cos(k_n x), \\
k_n = \dfrac{\pi n}{l} - \text{ хвильові вектори}, \\
\omega_n = v k_n = \dfrac{v \pi n}{l} - \text{ власні частоти}, \\
n = 1, 2, \ldots
\end{cases} \tag{3.2}
$$

і запишемо загальний розв'язок:

$$
u(x,t) = A_0 + B_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] \cos(k_n x) \tag{3.3}
$$

та його похідну по часу:

$$
u_t(x,t) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [-A_n \omega_n \sin(\omega_n t) + B_n \omega_n \cos(\omega_n t)] \cos(k_n x) \tag{3.4}
$$

Як і у попередніх задачах, загальний розв'язок має вигляд розвинення в узагальнений ряд Фур'є по власних функціях відповідної задачі Штурма-Ліувілля. Доданок загального розв'язку, який ми виділили окремо, відповідає власній функції $X_0(x) = 1$ і нульовому власному значенню $\lambda_0 = 0$; тому відповідна власна мода (її називають нульовою модою) не є коливальною, а відповідає рівномірному рухові стержня як цілого. Саме наявність нульової моди, яка не схожа на всі інші, відрізняє дану задачу від розв'язаних раніше. Підставляємо (3.3) у початкові умови (3.1):

$$
u(x,0) = \varphi(x) \;\Rightarrow\; A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos k_n x = 0 \tag{3.5}
$$

Підставляємо (3.4) у початкові умови (3.1):

$$
u_t(x,0) = \psi(x) \;\Rightarrow\; B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \omega_n \cos k_n x = \nu_0 \tag{3.6}
$$

Ліві частини одержаних рівностей є розвиненнями по ортогональній системі власних функціях задачі Штурма-Ліувілля. Прирівняємо коефіцієнти при однакових ортогональних функціях. У результаті знаходимо

$$
A_0 = 0; \; B_0 = \nu_0; \; A_n, B_n = 0, \text{ при } n \in \mathbb{N}
$$

Підставляємо знайдені коефіцієнти у загальний розв'язок і отримуємо розв'язок з одного доданку.

$$
u(x,t) = \nu_0 t \tag{3.7}
$$

Перевіряємо відповідь

- Власні функції перевірені в задачі 2.1
- Постановка задачі містить один неоднорідний член у початковій швидкості, пропорційний v_0. Перевіряємо наявністьцього множника у загальному розв'язку.
- Перевіряємо початкові умови - виконуються?
- Також дана задача є прикладом, коли розв'язок можна перевірити з фізичних міркувань: стержень не має закріплених точок , у початковий момент він не деформований, і всі точки його мають однакову швидкість. Тому далі він має рівномірно рухатись як ціле. Саме такому руховi і відповідає одержаний розв'язок.

Вище ми навели правильний і найкоротший спосіб розв'язання задачі. А тепер уявімо, що ми помилилися у задачі Штурма-Ліувілля і пропустили нульове власне значення. Якими будуть наслідки? Тоді у загальному розв'язку нульової моди немає, і умова для визначення коефіцієнтів B_n набуває вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \omega_n \cos k_n x = \nu_0 \tag{3.8}$$

За зразком задачі 2.3 домножаємо цю рівність на $\cos k_m x$ та інтегруємо почленно. Результатом є вираз для шуканих коефіцієнтів B_n через інтеграли. Але всі вони виявляються рівними нулю

$$B_n = \frac{2\nu_0}{\omega_n l} \int_0^l \cos(k_n x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Пропонуємо виконати обчислення і пересвідчитись у цьому самостійно. Отже, ми розкладали у ряд Фур'є функцію v_0 (тобто константу), обчислили всі її коефіцієнти Фур'є, а сума ряду зі знайденими коефіцієнтами виявилася рівною нулю, а не v_0: сума ряду Фур'є не дорівнює функції, яку ми розкладали. Причина цього розходження проста. Функція v_0, яку ми намагалися розкласти по системі $\cos k_n x$, ортогональна до всіх функцій цієї системи. Це означає, що використана нами система ортогональних функцій *неповна*. Адже її можна доповнити функцією 1, ортогональною до всіх функцій системи. Рівні нулю інтеграли для коефіцієнтів B_n це і є інтеграли ортогональності між 1 і всіма $\cos k_n x$.

Цей приклад показує, до чого може призводити використання неповної системи ортогональних функцій. Повною є система *всіх* власних функцій задачі Штурма-Ліувілля, а функцію $X_0 = 1$ ми пропустили. У результаті одержали неправильний розв'язок. Тому при розв'язанні задачі Штурма-Ліувілля так важливо ретельно перевіряти, чи *всі* її власні функції знайдено.