Заняття 12

Функції Гріна звичайних диференціальних задач

Задача № 12.2

Користуючись означенням функції Гріна $G(t)$, але не використовуючи її явного вигляду, показати безпосередньою підстановкою в умови задачі, що функція

$$y(t) = \int\limits_0^t G(t-t')f(t')\,\mathrm{d}t' + y'(0)G(t) + y(0)G'(t)$$

є розв'язком задачі про вимушені коливання гармонічного осцилятора при $t > 0$ під дією узагальненої сили $f(t)$ з початковими умовами $y(0) = y_0$, $y'(0) = \nu_0$. Розв'язками яких частинних задач є окремі доданки цього виразу?

Розв'язок

Закон руху

$$y(t) = \int\limits_0^t G(t-t')f(t')\,\mathrm{d}t' + y'(0)G(t) + y(0)G'(t) \tag{12.1}$$

є розв'язком задачі:

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = 0,\ t \geq 0, \\ y(0) = y_0,\ y'(0) = v_0. \end{cases} \tag{12.2}$$

Обчислимо першу похідну по часу від розв'язку (12.1)

$$y'(t) = G(0)f(t) + \int\limits_0^t G'(t-t')f(t')\,\mathrm{d}t' + y'(0)G'(t) + y(0)G''(t) =$$

За означенням функції Гріна $G(t)$ (**??**)

$$G''(t) = -\omega^2 G(t), \quad G(0) = 0, \quad G'(0) = 1$$

Підставимо $G''(t)$ та $G(0)$

$$= \int\limits_0^t G'(t-t')f(t')\,\mathrm{d}t' + y'(0)G'(t) - \omega^2 y(0)G(t)$$

Аналогічно друга похідна

$$y''(t) = G'(0)f(t) + \int\limits_0^t G''(t-t')f(t')\,\mathrm{d}t' + y'(0)G''(t) - \omega^2 y(0)G'(t) =$$

$$= f(t) - \omega^2\left(\int\limits_0^t G(t-t')f(t')\,\mathrm{d}t' + y'(0)G(t) + y(0)G'(t)\right) = f(t) - \omega^2 y(t)$$

Підставимо другу похідну в рівняння

$$y'' + \omega^2 y = f(t) - \omega^2 y + \omega^2 y \equiv f(t)$$

Таким чином (12.1) задовільняє рівняння (12.2)

Визначимо для яких задач є розв'язками кожен з доданків (12.1). Для цього треба покласти 2 з 3 параметрів (зовнішня сила та початкові умови) рівними нулю.

1. $y(0) = 0, y'(0) = 0$

$$y(t) = \int\limits_0^t G(t-t')f(t')\,\mathrm{d}t' \quad \text{є розв'язком задачі:}$$

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = f(t),\ t \geq 0, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0. \end{cases} \tag{12.3}$$

2. $f(t) = 0, y(0) = 0$

$$y(t) = y'(0)G(t) \quad \text{є розв'язком задачі:}$$

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = 0,\ t \geq 0, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1. \end{cases} \tag{12.4}$$

3. $f(t) = 0, y'(0) = 0$

$$y(t) = y(0)G'(t) \quad \text{є розв'язком задачі:}$$

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = 0,\ t \geq 0, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0. \end{cases} \tag{12.5}$$