

Заняття 3

Другий спосіб знаходження коефіцієнтів. Коливання стержня з вільними кінцями, неповнота базису.

Задача № 3.3

Знайти коливання пружного стержня довжиною l з вільними кінцями, якщо початкове відхилення дорівнює нулю, а початкова швидкість $\psi(x) = \nu_0$. Якщо всі знайдені вами коефіцієнти Фур'є (коефіцієнти загального розв'язку) дорівнюють нулю, поясніть, що це означає, і знайдіть, де була допущена помилка.

Розв'язок

Формальна постановка задачі:

$$\begin{cases} u = u(x, t), \\ u_{tt} = v^2 u_{xx}, \\ 0 \leq x \leq l, t \geq 0, \\ u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x) = 0, \\ u_t(x, 0) = \psi(x) = \nu_0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Це задача із заданими початковими умовами (а саме - початковим розподілом зміщення та швидкостей), яка має єдиний розв'язок.

Для початку скористаємося розв'язком задачі 2.1:

$$\begin{cases} u_0(x, t) = A_0 + B_0 t, \\ u_n(x, t) = [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] \cos(k_n x), \\ k_n = \frac{\pi n}{l} - \text{хвильові вектори}, \\ \omega_n = v k_n = \frac{v \pi n}{l} - \text{власні частоти}, \\ n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.2)$$

І запишемо загальний розв'язок:

$$u(x, t) = A_0 + B_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] \cos(k_n x) \quad (3.3)$$

Та похідна по часу:

$$u_t(x, t) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [-A_n \omega_n \sin(\omega_n t) + B_n \omega_n \cos(\omega_n t)] \cos(k_n x) \quad (3.4)$$

Підставляємо (3.3) у початкові умови (3.1):

$$u(x, 0) = \varphi(x) \Rightarrow A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos k_n x = 0 \quad (3.5)$$

Підставляємо (3.4) у початкові умови (3.1):

$$u_t(x, 0) = \psi(x) \Rightarrow B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \omega_n \cos k_n x = \nu_0 \quad (3.6)$$

Прирівняємо коефіцієнти при лінійно незалежних функціях. В результаті отримаємо

$$B_0 = \nu_0; \quad A_n, B_n = 0, \quad \text{при } n \in \mathbb{N}$$

Підставляємо знайдені коефіцієнти і отримуємо розв'язок із одного доданку.

$$u(x, t) = \nu_0 t \quad (3.7)$$

Перевіряємо відповідь

- Власні функції перевірені в задачі 2.1
- Постановка задачі містить неоднорідний член у початковій швидкості, який пропорційний $\sim \nu_0$. Перевірити наявність цих множників у загальному розв'язку.
- Перевіряємо початкові умови - виконуються?