Заняття 12

Функції Гріна звичайних диференціальних задач

Задача № 12.5

Функція Гріна $G(x, x')$ крайової задачі для одновимірного рівняння Гельмгольца $u'' - \mu^2 u = -f(x)$, $u(0) = 0$, $|u| < \infty$ при $x \to \infty$ за означенням є неперервним розв'язком цієї задачі для $f(x) = \delta(x - x')$, $0 < x' < \infty$.
а) Знайти функцію Гріна цієї задачі шляхом зшивання розв'язків однорідного рівняння і подальшого нормування (для даної задачі можливі принаймні три різні способи нормування розв'язку, які?).
б) Знайти функцію Гріна $G(x, x')$ крайової задачі для одновимірного рівняння Гельмгольца $u'' - \mu^2 u = -f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $|u| < \pm\infty$ при $x \to \pm\infty$ – шляхом граничного переходу $x, x' \to \infty$ при сталому $x - x'$ у $G(x, x')$, одержаній у пункті а) цієї задачі.
Дайте фізичну інтерпретацію знайдених функцій Гріна у термінах стаціонарної дифузії частинок зі скінченним часом життя. Якою є залежність від кожного з аргументів функції Гріна та симетрія відносно їх перестановки? Чому в одних випадках функція Гріна залежить від кожного з аргументів окремо, а в інших – тільки від їх різниці?

Розв'язок

Постановка задачі:

$$\begin{cases} u'' + \mu^2 u = -f(x),\ t \geq 0, \\ u(0) = 0, \\ |u| < \infty \text{ при } x \to +\infty. \end{cases} \tag{12.1}$$

Розв'язок однорідного рівняння:

$$u_0(x) = C_1 e^{-\mu x} + C_2 e^{\mu x} \tag{12.2}$$

Знайдемо вигляд розв'язків, що задовольняють також і межовим умовам. Перший розв'язок знаходимо прямою підстановкою:

$$u(0) = C_1 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -C_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad u_1(x) = e^{-\mu x} - e^{\mu x}$$

Для другого розв'язку треба покласти C_2 рівним нулю, щоб позбавитись розбіжного доданку.

$$|u(+\infty)| < \infty \quad \Rightarrow \quad u_2(x) = e^{-\mu x}$$

Отже, маємо два розв'язки з яких зшиванням побудуємо функцію Гріна

$$u_1(x) = e^{-\mu x} - e^{\mu x}, \quad u_2(x) = e^{-\mu x} \tag{12.3}$$

Визначимо функцію Гріна за формулою

$$G(x,x') = \begin{cases} \varphi(x')\big(e^{-\mu x} - e^{\mu x}\big),\ 0 \le x \le x' \\ \psi(x')e^{-\mu x},\ x' \le x \le \infty, \end{cases} \tag{12.4}$$

де $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ – гарні функції, та задовольняє умовам

$$\begin{cases} G(x,x')\Big|_{x=x'+0} = G(x,x')\Big|_{x=x'-0}, \\ \dfrac{\partial}{\partial x}G(x,x')\Big|_{x=x'+0} - \dfrac{\partial}{\partial x}G(x,x')\Big|_{x=x'-0} = 1. \end{cases} \tag{12.5}$$

Підставимо (12.4) в (12.5) та розв'яжемо отриману ситему рівнянь відносно невідомих функцій.

$$\begin{cases} \psi(x')e^{-\mu x'} - \varphi(x')(e^{-\mu x'} - e^{\mu x'}) = 0, \\ -\mu\psi(x')e^{-\mu x'} + \mu\varphi(x')(e^{-\mu x'} + e^{\mu x'}) = 1. \end{cases} \tag{12.6}$$

Поділимо на μ друге рівняння та додамо до першого

$$\begin{cases} \varphi(x')(e^{-\mu x'} + e^{\mu x'} - e^{-\mu x'} + e^{\mu x'}) = \dfrac{1}{\mu}, \\ \psi(x')e^{-\mu x'} = \varphi(x')(e^{-\mu x'} - e^{\mu x'}); \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\varphi(x')e^{\mu x'} = \dfrac{1}{\mu}, \\ \psi(x') = \varphi(x')(1 - e^{2\mu x'}); \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \varphi(x') = \dfrac{1}{2\mu}e^{-\mu x'}, \\ \psi(x') = \dfrac{1}{2\mu}e^{-\mu x'}(1 - e^{2\mu x'}) = \dfrac{1}{2\mu}(e^{-\mu x'} - e^{\mu x'}). \end{cases}$$

Отже, функція Гріна (12.4) має вигляд

$$G(x,x') = \begin{cases} \dfrac{1}{2\mu}e^{-\mu x'}\big(e^{-\mu x} - e^{\mu x}\big),\ 0 \le x \le x' \\ \dfrac{1}{2\mu}\big(e^{-\mu x'} - e^{\mu x'}\big)e^{-\mu x},\ x' \le x \le \infty, \end{cases} \tag{12.7}$$

або якщо розкрити дужки та врахувати невід'ємність різниці $(x - x')$ в аргументі другої експоненти модулем

$$G(x, x') = \frac{1}{2\mu}\left(e^{-\mu(x+x')} - e^{\mu|x-x'|}\right) \tag{12.8}$$

Розв'язок для задачі на нескінченному інтервалі (випадок б)) знайдемо граничним переходом $x, x' \to \infty$ при сталій різниці $x - x'$

$$\lim_{\substack{|x-x'|=\mathrm{c}\\ x,x'\to\infty}} G(x, x') = \lim_{\substack{|x-x'|=\mathrm{c}\\ x,x'\to\infty}} \frac{1}{2\mu}\left(e^{-\mu(x+x')} - e^{\mu|x-x'|}\right) = -\frac{1}{2\mu}e^{\mu|x-x'|} \tag{12.9}$$