Заняття 2

Власні моди інших систем. Вільні коливання для заданих початкових умов.

Вільні коливання поля в резонаторі для заданих початкових умов. Ряд Фур'є по системі ортогональних функцій.

Задача № 2.3

Знайти коливання струни завдовжки $0 \leq x \leq l$ із закріпленими кінцями, якщо початкове відхил є $\varphi(x) = hx/l$, а початкова швидкість $\psi(x) = \nu_0$. Обчислити інтеграл ортогональності власних функцій і знайти квадрат норми. Чи є рух струни періодичним (тобто чи буде повторюватись початковий стан струни через деякий проміжок часу?) Чи буде рух періодичним, якщо він описується рівнянням $u_{tt} = v^2 u_{xx} - \omega_0^2 u$?

Розв'язок

Формальна постановка задачі:

$$\begin{cases} u = u(x,t), \\ u_{tt} = v^2 u_{xx}, \\ 0 \leq x \leq l, t \geq 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \\ \left.\begin{aligned} & u(x,0) = \varphi(x) = \dfrac{hx}{l}, \\ & u_t(x,0) = \psi(x) = \nu_0. \end{aligned}\right\} - \begin{aligned} &\text{початкові умови задають} \\ &\text{механічний стан} \\ &\text{системи при } t = 0 \end{aligned} \end{cases} \tag{2.1}$$

Це задача із заданими початковими умовами, яка має єдиний розв'язок. Щоб розв'язати її, необідно розділити змінні, знайти власні функції і власні значення задачі Штурма-Ліувілля і знайти власні моди. Це було зроблено у задачі №1.1 попереднього заняття (**??**). Результатом є нескінченний набір власних мод:

$$\begin{cases} u_n(x,t) = [A_n\cos(\omega_n t) + B_n\sin(\omega_n t)]\sin(k_n x), \\ k_n = \dfrac{\pi n}{l},\ n = 1, 2, \ldots \\ \omega_n = v k_n = \dfrac{v\pi n}{l} - \text{ власні частоти.} \end{cases} \tag{2.2}$$

Легко переконатися, що жодна окрема власна мода не може задовольнити початкові умови задачі (чому?). Щоб задовольнити початкові умови, необхідно записати так званий загальний або формальний розв'язок задачі, який є суперпозицією всіх мод:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n\cos(\omega_n t) + B_n\sin(\omega_n t)]\sin(k_n x) \tag{2.3}$$

Поява знака суми у цьому виразі означає, що його права частина більше не залежить від n. Коли коефіцієнти A_n і B_n будуть знайдені, він стане розв'язком (єдиним!) вихідної задачі. Коефіцієнти загального розв'язку знаходимо із початкових умов. Підставляємо (2.3) у початкові умови (2.1):

$$u(x,0) = \varphi(x) \ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x) = \varphi(x) \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} &u_t(x,0) = \psi(x) \ \Rightarrow \\ &\quad \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} [-A_n\omega_n\sin(\omega_n t) + B_n\omega_n\cos(\omega_n t)]\sin(k_n x) \right)\Bigg|_{t=0} = \\ &\quad = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\omega_n \sin(k_n x) = \psi(x) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Отже, ми одержали дві умови, для визначення A_n і B_n, відповідно. Далі необхідно скористатися ортогональністю власних функцій задачі Штурма-Ліувілля (див. Конспект лекцій, §4). У загальному вигляді інтеграл ортогональності власних функцій має вигляд:

$$\int_0^l X_n(x)\cdot X_m(x)\,\mathrm{d}x = ||X_n||^2\delta_{n,m}, \tag{2.6}$$

де $||X_n||$ – норма власної функції. Переконаємося, що власні функції дійсно ортогональні, і обчислимо квадрат норми.

1. Розглянемо випадок $n = m$:

$$\begin{aligned} &\int_0^l X_n(x)^2\,\mathrm{d}x = \int_0^l \sin^2(k_n x)\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2k_n}\int_0^l (1-\cos(k_n x))\,\mathrm{d}(k_n x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin(k_n x)}{k_n} \right)\Bigg|_0^l = \frac{l}{2} \end{aligned}$$

2. Випадок $n \neq m$:

$$\int_0^l X_n(x) \cdot X_m(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^l \sin(k_n x)\sin(k_m x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^l (\cos(k_n - k_m)x - \cos(k_n + k_m)x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(k_n - k_m)x}{k_n - k_m} - \frac{\sin(k_n + k_m)x}{k_n + k_m}\right)\bigg|_0^l = 0$$

Щоб одержати правильні вирази для коефіцієнтів загального розв'язку, застосовуємо формальну процедуру, описану у §4 Конспекту лекцій. Домоножуємо кожну з одержаних рівностей (2.4) та (2.5) на m-ту власну функції $\sin(k_m x)$ та інтегруємо від 0 до l.

$$\int\limits_0^l \varphi(x)\sin(k_m x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int\limits_0^l \sin(k_n x)\sin(k_m x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \frac{l}{2}\delta_{n,m} = \frac{A_m l}{2} \;\Rightarrow\; A_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin(k_n x)\,\mathrm{d}x \tag{2.7а}$$

$$\int\limits_0^l \psi(x)\sin(k_m x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\omega_n \int\limits_0^l \sin(k_n x)\sin(k_m x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} B_n\omega_n \cdot \frac{l}{2}\delta_{n,m} = \frac{B_m\omega_m l}{2} \;\Rightarrow\; B_n = \frac{2}{\omega_n l}\int\limits_0^l \psi(x)\sin(k_n x)\,\mathrm{d}x \tag{2.7б}$$

Обчислюємо інтеграли (2.7).

$$A_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin(k_n x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \frac{hx}{l}\sin(k_n x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{2h}{l^2}\left(-\frac{1}{k_n}x\cos(k_n x)\bigg|_0^l + \int\limits_0^l \frac{\cos(k_n x)}{k_n}\,\mathrm{d}t\right) =$$
$$= \left|k_n l = \frac{\pi n}{l}l = \pi n \Rightarrow \sin(k_n l) = 0,\; \cos(k_n l) = (-1)^n\right| =$$
$$= \frac{2h}{l^2}\left(-\frac{l}{k_n}(-1)^n + \frac{\sin(k_n x)}{k_n^2}\bigg|_0^l\right) = \frac{2h}{l}\frac{(-1)^{n+1}}{k_n}$$

$$B_n = \frac{2}{\omega_n l}\int\limits_0^l \psi(x)\sin(k_n x)\,\mathrm{d}x = \frac{2\nu_0}{\omega_n l}\int\limits_0^l \sin(k_n x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2\nu_0}{k_n\omega_n l}\cos(k_n x)\Big|_l^0 = \frac{2\nu_0}{l}\frac{1-(-1)^n}{k_n\omega_n}$$

Підставляємо визначені константи у (2.3) і одержуємо відповідь:

$$u(x,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\nu_0(1-(-1)^n)\frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n} - h(-1)^n\cos(\omega_n t)\right]\frac{\sin(k_n x)}{k_n}, \qquad (2.8)$$

де k_n і ω_n визначені формулами (2.2).

Процедура, за якою ми визначали константи A_n та B_n, фактично зводиться до розкладання даних початкових умов в узагальнений ряд Фур'є по системі власних функцій задачі Штурма-Ліувілля. У даному випадку цей ряд є частинним випадком тригонометричного ряду Фур'є.

З'ясуємо, чи є розв'язок періодичною функцією часу. Розв'язок (2.8) є суперпозицією всіх мод, кожна з них має іншу частоту коливань ω_n. У розглянутій задачі всі ω_n (2.2) кратні частоті основної моди ω_1. Тому період (найменший) коливань основної моди

$$T = \frac{2l}{v},$$

є спільним періодом для всіх мод. Отже, рух струни буде періодичним.

Нехай тепер замість хвильового рух системи описується рівнянням

$$u_{tt} = v^2 u_{xx} - \omega_0^2 u$$

з тими ж межовими умовами. Легко бачити, що після розділення змінних вигляд задачі Штурма-Ліувілля не зміниться, а зміниться лише рівняння для часової частини розв'язку $T(t)$:

$$T'' + (\lambda_n v^2 + \omega_0^2)T = 0 \;\Rightarrow\; T'' + \widetilde{\omega}_n^2 T = 0, \qquad (2.9)$$

де $\widetilde{\omega}_n = \sqrt{\omega_n^2 + \omega_0^2}$, а ω_n - частоти (2.2). Тобто частоти коливань зміняться і вже не будуть цілими кратними частоти основної моди. Отже рух такої системи не буде періодичним.

Якщо рівняння міститиме доданок, пропорційний u_t, то буде спостерігатися затухання чи підсилення коливань, залежно від знаку коефіцієнта при u_t.