Заняття 11

Рівняння Лапласа в прямокутній області.

Задача № 11.3

Знайти електростатичний потенціал всередині області, обмеженої провідними пластинами $y = 0, y = b, x = 0$, якщо пластина $x = 0$ заряджена до потенціалу V, а інші – заземлені. Заряди всередині області відсутні. Розв'язком якої задачі є знайдена функція у півпросторі $x > 0$?
Вказівка. Це приклад задачі для рівняння Лапласа в необмеженій області. Подумайте, яку умову слід накласти на розв'язок при $x \to +\infty$, щоб для $V = 0$ задача мала лише нульовий розв'язок (в іншому разі розв'язок задачі не буде єдиним).
Ряд просумувати.
Указівка: скористайтесь формулою для суми геометричної прогресії.

Розв'язок

Формальна постановку задачі:

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ x \geq 0, 0 \leq y \leq b, \\ \Delta u = 0, \\ u(x, 0) = 0, \\ u(x, b) = 0, \\ u(0, y) = V, \\ u(x, y)\big|_{x \to \infty} \to 0. \end{cases} \tag{11.1}$$

Розв'язок

Можемо скористатися результатом, отриманим в задачі 1(посилання), і одразу записати розв'язок в загальному виді.

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\tilde{A}_n \mathrm{sh} k_n x + \tilde{B}_n \mathrm{ch} k_n x\Big)\sin k_n y = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n e^{k_n x} + B_n e^{-k_n x}\right)\sin k_n y,
\end{aligned} \tag{11.2}
$$

де $k_n = \pi n/b$.

Використаємо межові умови для y (11.1) для визначення невідомих коефіцієнтів. Оскільки при $x \to +\infty$ потенціал прямує до нуля, то в отриманому розв'язку (11.2) треба покласти константи A_n для кожного n рівними нулю.

$$
u(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin k_n y = V
$$

Домножуємо на m-ту власну функція задачі Штурма-Ліувілля та інтегруємо по y від 0 до b.

$$
B_m = \frac{2}{b}\int_0^b V \sin k_m y \, \mathrm{d}y = \frac{2V}{bk_m}\big(1-(-1)^m\big)
$$

Помітимо, що при парних значеннях m маємо $B_m = 0$. Явно випишемо коефіцієнти тільки з непарними номерами

$$
B_{2k+1} = \frac{2V}{bk_{2k+1}}\big(1-(-1)^{2k+1}\big) = \frac{2V}{b}\frac{b}{\pi(2k+1)}\cdot 2 = \frac{4V}{\pi(2k+1)} \tag{11.3}
$$

Підставляємо знайдені коефіцієнти в загальний розв'язок (11.2) і отримуємо розв'язок у вигляді ряду

$$
u(x,y) = \frac{4V}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\pi(2k+1)x/b}}{2k+1}\sin\big(\pi(2k+1)y/b\big), \tag{11.4}
$$

Тепер знайдемо суму ряду отриманого розв'язку. Для цього використовуємо формулу Ейлера для $\sin k_{2k+1}y$

$$
u(x,y) = \frac{4V}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left(\frac{e^{-\pi(2k+1)(x-iy)/b} - e^{-\pi(2k+1)(x+iy)/b}}{2i}\right)
$$

та обчислимо похідну по x

$$
\begin{aligned}
u_x &= -\frac{4V}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\pi(2k+1)}{(2k+1)b}\left(\frac{e^{-\pi(2k+1)(x-iy)/b} - e^{-\pi(2k+1)(x+iy)/b}}{2i}\right) = \\
&= \frac{2iV}{b}\sum_{s=0}^{\infty}\left(e^{-k_{2s+1}(x-iy)} - e^{-k_{2s+1}(x+iy)}\right)
\end{aligned}
$$

Маємо під сумою дві геометричні прогресії зі знаменниками

$$q_1 = e^{-2\pi(x-iy)/b} \quad \text{та} \quad q_2 = e^{-2\pi(x+iy)/b}$$

відповідно. За формулою суми нескінченної геометричної прогресії обчислимо їх суми.

$$S_1 = \frac{e^{-\pi(x-iy)/b}}{1-e^{-2\pi(x-iy)/b}} = \frac{1}{e^{\pi(x-iy)/b}-e^{-\pi(x-iy)/b}} \tag{11.5}$$

$$S_2 = \frac{1}{e^{\pi(x+iy)/b}-e^{-\pi(x+iy)/b}} \tag{11.6}$$

Маємо

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{2iV}{b}\left(\frac{1}{e^{\pi(x-iy)/b}-e^{-\pi(x-iy)/b}} - \frac{1}{e^{\pi(x+iy)/b}-e^{-\pi(x+iy)/b}}\right) = \\ &= \frac{2iV}{b}\frac{e^{\pi(x+iy)/b}-e^{-\pi(x+iy)/b}-e^{\pi(x-iy)/b}+e^{-\pi(x-iy)/b}}{\big(e^{\pi(x-iy)/b}-e^{-\pi(x-iy)/b}\big)\big(e^{\pi(x+iy)/b}-e^{-\pi(x+iy)/b}\big)} = \\ &= \frac{2iV}{b}\frac{\big(e^{\pi x/b}-e^{-\pi x/b}\big)\big(e^{i\pi y/b}-e^{-i\pi y/b}\big)}{e^{2\pi x/b}+e^{-2\pi x/b}-\big(e^{2\pi iy/b}+e^{-2\pi iy/b}\big)} = \\ &= \frac{2iV}{b}\cdot 2i\frac{\operatorname{ch}(\pi x/b)\sin(\pi y/b)}{\operatorname{ch}(2\pi x/b)-\cos(2\pi y/b)} = -\frac{4V}{b}\frac{\operatorname{ch}(\pi x/b)\sin(\pi y/b)}{\operatorname{ch}(2\pi x/b)-\cos(2\pi y/b)} \end{aligned}$$

Сумою ряду буде

$$u(x,y) = -\frac{4V}{b}\sin(\pi y/b)\int \frac{\operatorname{ch}(\pi x/b)\,\mathrm{d}x}{\operatorname{ch}(2\pi x/b)-\cos(2\pi y/b)} \tag{11.7}$$

Обчислимо інтеграл

$$\begin{aligned} &\int \frac{\operatorname{ch}(\pi x/b)\,\mathrm{d}x}{\operatorname{ch}(2\pi x/b)-\cos(2\pi y/b)} = \left| z = \operatorname{sh}(\pi x/b), \mathrm{d}z = \frac{\pi}{b}\operatorname{ch}(\pi x/b)\mathrm{d}x \right| = \\ &= \frac{b}{\pi}\int \frac{\mathrm{d}z}{1-2z^2-\cos(2\pi y/b)} = \frac{b}{\pi}\int \frac{\mathrm{d}z}{2\sin^2(\pi y/b)-2z^2} = \\ &= \frac{b}{2\pi}\frac{1}{\sin(\pi y/b)}\operatorname{arctg}\left(\frac{z}{\sin(\pi y/b)}\right) + \tilde{C} = \frac{b}{2\pi}\frac{1}{\sin(\pi y/b)}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{sh}(\pi x/b)}{\sin(\pi y/b)}\right) + \tilde{C} \end{aligned}$$

Отже

$$u(x,y) = C - \frac{2V}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{sh}(\pi x/b)}{\sin(\pi y/b)}\right) \tag{11.8}$$

З межової умови в $x = 0$ визсачимо значення констатни

$$u(0,y) = C - \frac{2V}{\pi}\cdot 0 = V \;\Rightarrow\; C = V$$

Остаточно, маємо розв'язок

$$u(x,y) = V - \frac{2V}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{sh}(\pi x/b)}{\sin(\pi y/b)}\right) = V\left(1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{sh}(\pi x/b)}{\sin(\pi y/b)}\right)\right) \qquad (11.9)$$

При $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{sh}(\pi x/b)}{\sin(\pi y/b)}\right) = 1 - \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2} = 0 \;\Rightarrow\; u(x,y) \to 0$$