9.1. Півнескінченна струна перебувала у стані рівноваги, а починаючи з початкового моменту часу $t=0$, на її кінець діє задана сила *F*(*t*). Сила натягу струни T_0, швидкість хвиль на ній *v*. Знайти розв'язок задачі про вимушені коливання струни у квадратурах і явний вигляд розв'язку для частинних випадків частинні випадки: а) $F(t)=F_0$, б) $F(t)=F_0\cos\omega t$, в) $F(t)=F_0\sin\omega t$. *Задача є прикладом так званої задачі про поширення межового режиму: задачі для півнескінченної струни з неоднорідною межовою умовою. Указівка: задача відшукання форми хвилі, створеної таким джерелом, зводиться до диференціального рівняння першого порядку; проблема знаходження константи інтегрування вирішується, якщо врахувати умову неперервності хвильового поля на передньому фронті хвилі, тобто на межі областей $x>vt$ і $x<vt$.*

$$\begin{cases} u_{tt}=v^2u_{xx}, \quad 0\le x\le\infty,\ t>0. \\ u_x(0,t)=\frac{1}{\beta}F(t)=f(t), \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0; \end{cases}$$

Шукаємо розв'язок у вигляді $u(x,t)=f\left(t-\frac{x}{v}\right)+F\left(t+\frac{x}{v}\right)$.

Із початкових умов маємо систему р-нь

$$\begin{cases} f\left(-\frac{x}{v}\right)+F\left(\frac{x}{v}\right)=0, \\ f'\left(-\frac{x}{v}\right)+F'\left(\frac{x}{v}\right)=0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f\left(-\frac{x}{v}\right)+F\left(\frac{x}{v}\right)=0, \\ -f\left(-\frac{x}{v}\right)+F\left(\frac{x}{v}\right)=2C; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F\left(\frac{x}{v}\right)=C, \\ f\left(-\frac{x}{v}\right)=-C. \end{cases}$$

Обираємо константу інтегрування C рівною нулю, тоді

$$\begin{cases} f\left(-\frac{x}{v}\right)=0, \\ F\left(\frac{x}{v}\right)=0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(\xi)=0, \text{ при } \xi<0, \\ F(-\xi)=0, \text{ при } \xi>0. \end{cases}$$

Із вигляду розв'язку:

$u(x,t)=f\left(t-\frac{x}{v}\right)+F\left(t+\frac{x}{v}\right)$, бачимо, що $F\left(t+\frac{x}{v}\right)=0$ на всій області задання задачі $(x\ge0,\ t\ge0)$.

Отже, із межової умови знаходимо розв'язок задачі:

$$u(x,t)=f\left(t-\frac{x}{v}\right).$$

$$u_x(0,t)=\frac{1}{\beta}F(t)\ \to\ -\frac{1}{v}f'(t)=\frac{1}{\beta}F(t)\ \to\ f(t)=-\frac{v}{\beta}\int_0^t F(\xi)\,d\xi\ \to$$

$$u(x,t)=f\left(t-\frac{x}{v}\right)=-\frac{v}{\beta}\int_0^{t-\frac{x}{v}}F(\xi)\,d\xi.$$

а) $u(x,t)=-\frac{v}{\beta}F_0\int_0^{t-\frac{x}{v}}d\xi=-\frac{vF_0}{\beta}\left(t-\frac{x}{v}\right).$

а) $u(x,t) = -\frac{v}{\beta} F_0 \int_0 d\xi = -\frac{v F_0}{\beta}\left(t - \frac{x}{v}\right).$

б) $u(x,t) = -\frac{v F_0}{\beta} \int_0^{t-\frac{x}{v}} \cos\omega\xi \, d\xi = -\frac{v F_0}{\omega\beta} \sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right).$

в) $u(x,t) = -\frac{v F_0}{\beta} \int_0^{t-\frac{x}{v}} \sin\omega\xi \, d\xi = \frac{v F_0}{\omega\beta} \cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right).$