Задача 10.1

10.1. Визначити тип рівняння $u_{xx} + 4u_{xy} + cu_{yy} + u_x = 0$**, привести його до канонічного вигляду для** $c = 0$ **і знайти загальний розв'язок.**

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 4 - c, \quad c = 0 \to \Delta = 4 > 0$$

Отже, маємо рівняння гіперболічного типу.

Запишемо характеристичне рівняння:

$$a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}dx\,dy + a_{22}(dx)^2 = 0.$$

1) $(dy)^2 - 4dx\,dy = 0. \to \begin{cases} dy = 4dx, \\ dy = 0; \end{cases} \to \begin{cases} y = 4x + C_1 \\ y = C_2 \end{cases} \to \begin{cases} C_1 = y - 4x, \\ C_2 = y; \end{cases}$

2) $\frac{dy}{dx} = \frac{2 \pm \sqrt{\Delta}}{a_{11}} \quad \frac{dy}{dx} = 4$, або $\frac{dy}{dx} = 0.$

Робимо заміну:

$$\begin{cases} \xi = y - 4x, \\ \eta = y. \end{cases} \to \xi_x = -4,\ \xi_y = 1,\ \eta_x = 0,\ \eta_y = 1,\ \xi_{ij} = 0,\ \eta_{ij} = 0\ \forall i,j.$$

$$u(\xi(x,y), \eta(x,y)) = u(x,y).$$

$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = -4u_\xi,$

$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi + u_\eta,$

$u_{xx} = -4u_{\xi\xi}\xi_x - 4u_{\xi\eta}\eta_x = 16u_{\xi\xi},$

$u_{yx} = -4u_{\xi\xi}\xi_y - 4u_{\xi\eta}\eta_y = -4u_{\xi\xi} - 4u_{\xi\eta}.$

$$u_{xx} + 4u_{xy} + u_x = \cancel{16u_{\xi\xi}} \cancel{-16u_{\xi\xi}} - 16u_{\xi\eta} - 4u_\xi = 0$$

$$\boxed{u_{\xi\eta} + \frac{1}{4}u_\xi = 0}$$

$$\left(u_\eta + \frac{1}{4}u\right)'_\xi = 0 \to u_\eta + \frac{1}{4}u = \varphi(\eta)$$

$(u_\eta + \frac{1}{4}u)_\xi = 0 \qquad u_\eta + \frac{1}{4}u = \varphi(\eta)$

$u_\eta = -\frac{1}{4}u \Rightarrow \ln u = -\frac{1}{4}\eta + \ln C \Rightarrow u = Ce^{-\frac{1}{4}\eta}.$

$u = C(\eta)e^{-\frac{1}{4}\eta} \Rightarrow C'e^{-\frac{1}{4}\eta} \cancel{-\frac{1}{4}Ce^{-\frac{1}{4}\eta}} + \cancel{\frac{1}{4}Ce^{-\frac{1}{4}\eta}} = \varphi(\eta).$

$C' = \varphi(\eta)e^{\frac{1}{4}\eta} \rightarrow C = \int \varphi(\eta)e^{\frac{1}{4}\eta}d\eta + C_1$

Отже, $u = C_1 e^{-\frac{1}{4}\eta} + \int \varphi(\eta)e^{\frac{1}{4}\eta}d\eta \cdot e^{-\frac{1}{4}\eta}.$