Зміст

Тема I:

ЗАСТОСУВАННЯ ПРОЦЕДУРИ ФУР'Є БЕЗПОСЕРЕДНЬОГО ВІДОКРЕМЛЕННЯ ЗМІННИХ

Заняття 1

Відокремлення змінних, задача Штурма-Ліувілля і власні моди коливань струни для різних межових умов

Задача № 1.1

Знайти власні моди коливань струни завдовжки l із закріпленими кінцями (знайти функції вигляду $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$, визначені і достатньо гладкі в області $0 \leq x \leq l, -\infty \leq t \leq \infty$, не рівні тотожно нулю, які задовольняють одновимірне хвильове рівняння $u_{tt} = v^2 u_{xx}$ на проміжку $0 \leq x \leq l$ і межові умови $u(0,t) = 0, u(l,t) = 0$ на його кінцях). *Результат перевірити аналітично й графічно (див. текст до модульної контрольної роботи №1, с. 25) та проаналізувати його фізичний смисл. Знайти початкові умови (початкове відхилення і початкову швидкість) для кожної з мод.*

Розв'язок

Формальна постановка задачі:

$$\begin{cases} u = u(x,t), \\ u_{tt} = v^2 u_{xx}, \\ 0 \leq x \leq l, t \in \mathbb{R}, \\ u(0,t) = 0, \\ u(l,t) = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Необхідно знайти нетривіальні (тобто не рівні тотожно нулю) розв'язки (1.1) вигляду:

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) \neq 0 \tag{1.2}$$

Хвильове рівняння з двома межовими умовами (1.1) на кінцях проміжку по координаті x описує малі поперечні коливання струни із закріпленими кінцями, її довільний вільний рух. Струна має попередній натяг, і у положенні рівноваги всі її точки знаходяться на осі x, а при коливаннях відхиляться у напрямку осі y; $u(x,t)$ - це відповідне зміщення точки струни з координатою x в напрямку y відносно її рівноважного положення у даний момент часу t. Власні моди струни - це особливі рухи струни, які описуються розв'язками у вигляді добутків (1.2).

Підставляємо розв'язок у вигляді добутку (1.2) у рівняння й умови (1.1) Почнемо з межових умов:

$$u(0,t) = X(0) \cdot T(t) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} T(t) \neq 0, \forall t, \\ X(0) = 0; \end{cases}$$
$$u(l,t) = X(l) \cdot T(t) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} T(t) \neq 0, \forall t, \\ X(l) = 0; \end{cases}$$

Тут ми врахували, що умови на кінцях струни виконуються при всіх t, тому $T(t)$ не може бути рівним нулю.
Далі підставимо (1.2) у рівняння:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[X(x)T(t)\right] = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[X(x)T(t)\right] \;\Rightarrow\; XT'' = v^2 X'' T$$

Звідси переходимо до рівності двох функцій від різних змінних:

$$\frac{T''}{v^2 T} = \frac{X''}{X} \tag{1.3}$$

Це і є ситуація відокремлення змінних: функція від x має дорівнювати функції від t при всіх x і t. Це можливо тільки у випадку, якщо обидві ці функції є сталими. Тому маємо

$$\frac{T''}{v^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda, \tag{1.4}$$

де λ – стала відокремлення. Її можливі значення необхідно буде знайти.

Виписуємо результат відокремлення змінних:

$$\begin{cases} X = X(x), \\ X'' = -\lambda X, \\ 0 \leq x \leq l, \\ X(0) = 0, \\ X(l) = 0. \end{cases} \qquad\qquad T'' + \lambda v^2 T = 0 \tag{1.5}$$

Задача для $X = X(x)$ є так званою Штурма-Ліувілля. Необхідно знайти нетривіальні розв'язки цієї задачі і значення параметра λ, при яких вони існують; їх називають, відповідно, власними функціями і власними значеннями задачі. З умов задачі можна показати (див. лекції), що її власні значення є дійсними.

Розв'язуємо задачу Штурма-Ліувілля (1.5):

а) Розглянемо випадок $\lambda = 0$:

$$X'' = -\lambda X \;\Rightarrow\; X'' = 0 \;\Rightarrow\; X(x) = C_1 + C_2 x$$

Знаходимо константи з межових умов:

$$\begin{array}{l} \begin{cases} X(0) = C_1 = 0, \\ X(l) = C_1 + C_2 l = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 0; \end{cases} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} X(x) = 0 \text{ – розв'язок тривівльний,} \\ \lambda = 0 \text{ не є власним значенням.} \end{array}$$

б) Розглянемо випадок $\lambda < 0$. Розв'язок рівняння шукаємо у вигляді $X(x) = e^{\alpha x}$:

$$X'' = -\lambda X \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 \cancel{e^{\alpha x}} = +|\lambda| \cancel{e^{\alpha x}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pm\sqrt{|\lambda|} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow X(x) = \widetilde{C}_1 e^{\sqrt{|\lambda|}x} + \widetilde{C}_2 e^{-\sqrt{|\lambda|}x} = C_1 sh(\sqrt{|\lambda|}x) + C_2 ch(\sqrt{|\lambda|}x)$$

Знаходимо константи з межових умов:

$$\begin{array}{l} X(0) = C_2 \;\Rightarrow\; X(x) = C_1 sh(\sqrt{|\lambda|}x) \\ \begin{cases} X(l) = C_1 sh(\sqrt{|\lambda|}l) = 0, \\ sh(\sqrt{|\lambda|}l) \neq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 0; \end{cases} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} \text{розв'язок тривівльний,} \\ \text{немає від'ємних} \\ \text{власних значень.} \end{array}$$

в) Розглянемо випадок $\lambda > 0$. Розв'язок рівняння шукаємо у вигляді $X(x) = e^{\alpha x}$:

$$X'' = -\lambda X \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 \cancel{e^{\alpha x}} = -\lambda \cancel{e^{\alpha x}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pm i\sqrt{\lambda} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow X(x) = \widetilde{C}_1 e^{i\sqrt{\lambda}x} + \widetilde{C}_2 e^{-\sqrt{\lambda}x} = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}x)$$

Знаходимо константи з межових умов:

$$\begin{cases} X(0) = C_2 = 0, \\ X(l) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}l) + \cancelto{0}{C_2} \cos(\sqrt{\lambda}l) = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 \neq 0, \\ \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0; \end{cases}$$

Отже, нетривіальні розв'язки існують при значеннях параметра λ, які задовольняють характеристичне рівняння :

$$\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{\lambda_n}l = \pi n,\; n \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow\; \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}.$$

Випишемо тепер розв'язки для всіх n і визначимо, які з них необхідно залишити:

$$X_n(x) = C_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$$

Видно, що $n = 0$ відповідає тривіальному розв'язку. Видно також, що всі інші розв'язки визначені з точністю до довільного множника.
Тому власні функції, які співпадають з точністю до множника, вважають однаковими. У загальному випадку різними вважають лише лінійно незалежні власні функції, а розвя'зати задачу Штурма-Ліувілля означає знайти всі різні власні функції і відповідні власні значення. Отже, різним власним функціям відповідають лише натуральні n, а коефіцієнти C_n можна покласти рівними одиниці.
Власними значеннями і власними функціями є

$$\begin{cases} \lambda_n = \dfrac{\pi^2 n^2}{l^2}, \\ X_n(x) = \sin\left(\dfrac{\pi n x}{l}\right), \end{cases} \quad \text{де } n \in \mathbb{N}. \tag{1.6}$$

Повертаємося до рівняння для $T(t)$ (1.5). Підставляємо знайдені власні значення та знаходимо $T_n(t)$:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \\ T'' + \lambda v^2 T = 0, \end{aligned}\right\} \Rightarrow T_n(t) = A\cos(\omega_n t) + B\sin(\omega_n t),$$

де $\omega_n^2 = \lambda_n v^2$, $n \in \mathbb{N}$.
Власними модами коливань струни будуть всі розв'язки вигляду:

$$u_n(x,t) = X_n(x) \cdot T_n(t)$$

Виконаємо перепозначення і запишемо остаточний розв'язок:

$$\begin{cases} u_n(x,t) = [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] \sin(k_n x), \\ k_n = \dfrac{\pi n}{l} - \text{ хвильові вектори}, \\ \omega_n = v k_n = \dfrac{v\pi n}{l} - \text{ власні частоти}, \\ n = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{1.7}$$

Перевірка розв'язку задачі Штурма-Ліувілля

Перевірка результату (1.6) включає аналітичну і графічну перевірку. Необхідно перевірити, що знайдені розв'язки і числа (1.6) дійсно є власними функціями і власними значеннями задачі (1.5), а також, що знайдені всі її власні функції і власні значення. Перш за все, перевіряємо виконання всіх умов задачі (1.5).

1. Аналітична перевірка (пряма підстановка результату у рівняння).

   1) Перевіряємо рівняння, для цього обчислимо другу похідну власної функції

$$X_n'' = \frac{\pi n}{l}\left(C_n \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\right)' = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 C_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 X_n$$

   Порівнюємо з вихідним рівнянням і робимо перший висновок: кожна з функцій $X_n(x)$ дійсно є розв'язком рівняння (1.5) для значення спектрального параметра $\lambda = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$. Далі, порівняємо це значення зі знайденими раніше власним значенням (1.6) і робимо другий висновок: знайдені власні значення дійсно відповідають знайденим власним функціям.

   2) Перевіряємо виконання межових умов, підставляємо власні функції у межові умови (1.5)

$$X(0) = 0:$$

$$X_n(0) = C_n \sin(\sqrt{\lambda_n} \cdot 0) = 0 \text{ – виконується,}$$

причому незалежно від λ_n

$$X(l) = 0:$$

$$X_n(l) = C_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} \cdot l\right) = C_n \sin(\pi n) = 0 \text{ – виконується}$$

причому саме для знайдених значень λ_n.

2. Графічна перевірка.

Будуємо графіки кількох перших власних функцій. Масштаб по вертикалі може бути довільним і різним для різних функцій, оскільки значення він не має.

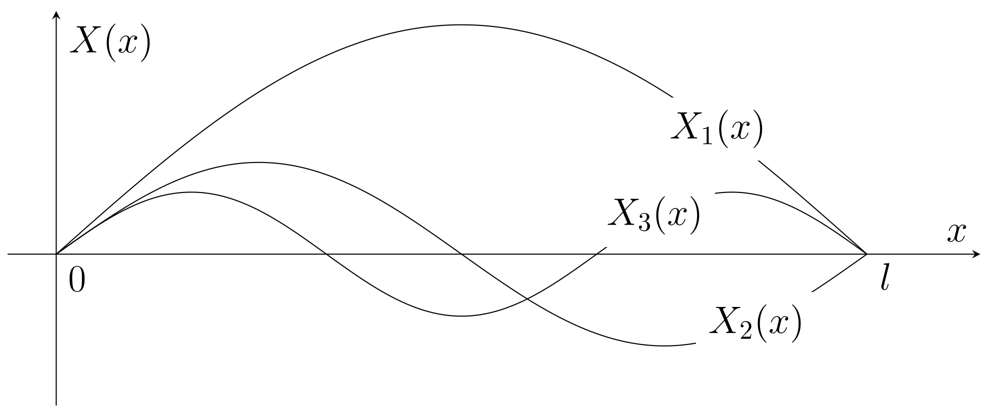


Рис. 1.1: Графічний розв'язок, наведені три перші власні функції

Функція, що відповідає найменшому власному значенню (у даному випадку

це $X_1(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$), відповідає так званій *основній моді* резонатора (струна є частинним випадком одномірного резонатора). *Для стаціонарних станів у квантовій механіці це основний стан системи, стан з найменшою можливою енергією.*
Графіки власних функцій відображають їх основні властивості, які і треба перевірити. З рисунку видно, що в точках $x = 0$ та $x = l$ всі графіки проходять через нуль, отже крайова умова (1.5) на обох кінцях виконується. *Графічна перевірка підсилює надійність аналітичної, в якій також іноді припускаються помилок, приймаючи бажане за дійсне.*

Проведені перевірки допомагають позбавитись більшості типових помилок, проте є надзвичайно підступний тип помилки, який проведені перевірки виявити не взмозі. Це випадок, коли ви дійсно знайшли власні функції та власні значення, але **не всі**, а отже задача розв'язана неправильно.
Помітити таку помилку допомагає так звана **осциляційна теорема**. З рисунку, наведеного в графічному методі, видно, що всі власні функції на проміжку $0 \leq x \leq l$ осцилюють, і при цьому всі вони мають **різне** число нулів. Число нулів (або "вузлів") всередені проміжку, на якому роророзв'язується задача, є своєрідною унікальною міткою власної функції. Власні значення необхідно розташувати у порядку зростання. Тоді за осциляційною теоремою основна мода одновимірної задачі Штурма-Ліувілля не має нулів у внутрішніх точках проміжку $[0, l]$. Тобто основна мода завжди є безвузловою. Далі, наступному за величиною власному значенню відповідає власна функція, що має один нуль, наступному - два нулі, і так далі. Для кожної наступної моди число вузлів збільшується на одиницю. Іншими словами, число нулів власної функції збігається з порядковим номером відповідного власного значення, якщо нумерувати їх у порядку зростання, починаючи з нуля.

Аналіз результату

З'ясуємо фізичний смисл одержаних розв'язків: яким саме рухам відповідають її власні моди. Розв'язки (1.7) є частинними розв'язками однорідного хвильового рівняння з однорідними межовими умовами (1.1). Це означає (див. лекції), що зовнішні сили на систему не діють, тому знайдені розв'язки відповідають вільним коливанням (рухам) струни. Це коливання (рухи) спеціального вигляду, оскільки відповідні розв'язки мають вигляд добутків $X_n(x) \cdot T_n(t)$. Усі розв'язки $u_n(x, t)$ – дійсні. Візьмемо один із них. Зафіксуємо певний довільний момент часу $t = t_1$, це буде миттєве фото n–ї моди струни. Просторовий розподіл зміщень описується формулою

$$u_n(x, t_1) = X_n(x) \cdot T_n(t_1).$$

Видно, що в будь-який момент часу форма просторового розподілу зміщень (тобто форма струни) залишається однаковою і описується відповідною власною функцією $X_n(x)$; за рахунок множника $T_n(t)$ змінюється лише спільна

амплітуда просторового розподілу і його знак. Отже, $X_n(x)$ задає просторовий «профіль» моди, це її унікальне просторове «обличчя», - найперша визначальна характеристика певної моди, за якою можна ідентифікувати відповідний рух струни.
Тепер прослідкуємо за рухом певної точки струни $x = x_1$:

$$u_n(x_1, t) = X_n(x_1) \cdot T_n(t).$$

Видно, що всі точки струни здійснюють один і той же рух, одне і те ж гармонічне коливання з частотою ω_n, але для різних мод частоти коливань різні. Коливання будь-якої точки задається однією функцією $T_n(t)$, але амплітуда визначається величиною $|X_n(x)|$. У точках, де $X_n(x)$ має нулі, амплітуда коливань дорівнює нулю, це **вузли** моди. Якщо ж $X_n(x)$ змінює знак, фаза коливання змінюється на π: частини струни, розділені вузлами, коливаються у протифазі.

Рух струни - це єдиний часово-просторовий процес. Для мод $n = 2$ і $n = 3$ він зображений на рисунку нижче. Усі вузли залишаються нерухомими, тільки якщо рух струни відповідає певній моді. У точках, де $X_n(x)$ максимальне (за модулем), максимальна й амплітуда коливань, – це пучності. У нашому

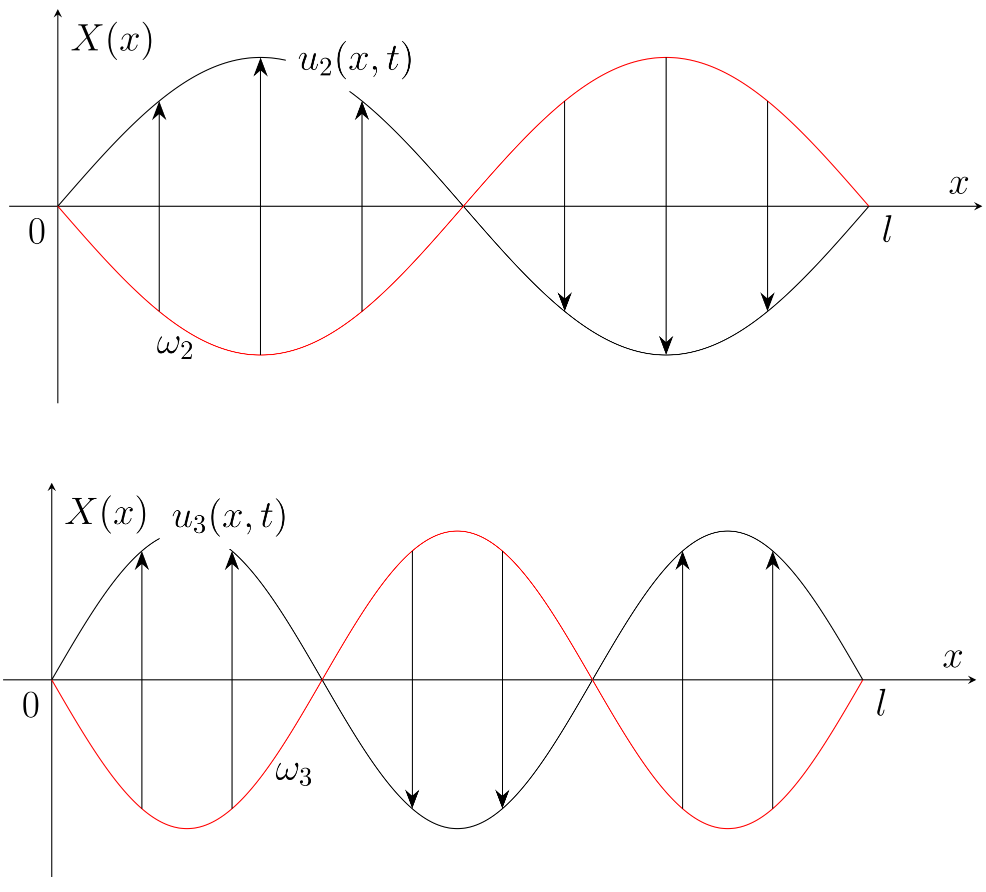


Рис. 1.2: Графіки другої та третьої моди

випадку моди занумеровані так, що число вузлів всередині струни на одиницю менше номера моди. При цьому кожна мода має свою частоту коливань,

за якою також можна розрізнити різні моди. Для струни з обома закріпленими кінцями частоти всіх мод кратні частоті основної моди (див. (1.7)).
У цілому рух у часі і розподіл зміщень у просторі залишаються ніби незалежними. Струна коливається, а просторовий розподіл «стоїть». Подібні рухи прийнято називати **стоячими хвилями**. Стоячі хвилі описуються добутком вигляду (1.2), в яких обидва множники є дійсними.

Заняття 2

Власні моди інших систем. Вільні коливання для заданих початкових умов.

Стержень з вільними та пружно закріпленими кінцями; системи, описувані іншими рівняннями.

Задача № 2.1

Знайти власні моди повздовжніх рухів тонкого стержня $0 \le x \le l$ із вільними кінцями (задача для хвильового рівняння з межовими умовами $u_x(0,t) = 0, u_x(l,t) = 0$).
Результат перевірити аналітично й графічно (див. заняття №6, зразок модульної контрольної роботи №1) та проаналізувати його фізичний смисл. Чим відрізняється від інших основна (нульова) мода? Якому рухові стержня вона відповідає?

Розв'язок

Формальна постановка задачі:

$$\begin{cases} u = u(x,t), \\ u_{tt} = v^2 u_{xx}, \\ 0 \le x \le l, t \in \mathbb{R} \\ u_x(0,t) = 0, \\ u_x(l,t) = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Необхідно знайти розв'язки (2.1) вигляду:

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) \neq 0 \tag{2.2}$$

Від задачі №1 попереднього заняття задача відрізняється тільки межовою умовою, тому підставляємо розв'язок у вигляді добутку (5.14) тільки у межові умови (2.1):

$$u_x(0,t) = X'(0) \cdot T(t) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} T(t) \neq 0, \forall t, \\ X'(0) = 0; \end{cases}$$

$$u_x(l,t) = X'(l) \cdot T(t) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} T(t) \neq 0, \forall t, \\ X'(l) = 0; \end{cases}$$

Тут ми врахували, що умови на кінцях струни виконуються при всіх t, тому $T(t)$ не може бути рівним нулю.

Виписуємо результат відокремлення змінних:

$$\begin{cases} X = X(x), \\ X'' = -\lambda X, \\ 0 \le x \le l, \\ X'(0) = 0, \\ X'(l) = 0. \end{cases} \qquad T'' + \lambda v^2 T = 0 \tag{2.3}$$

Розв'язуємо задачу Штурма-Ліувілля (2.3). Знову скористаємося результатами попередньої задачі та одразу запишемо якого типу отримуємо розв'язки для різних λ.

а) Випадок $\lambda < 0$.

$$X(x) = C_1 sh(\sqrt{|\lambda|}x) + C_2 ch(\sqrt{|\lambda|}x)$$

Знаходимо константи з межових умов:

$$X'(0) = C_1\sqrt{|\lambda|} \;\Rightarrow\; X(x) = C_2 \quad ch(\sqrt{|\lambda|}x)$$

$$\begin{cases} X'(l) = C_2\sqrt{|\lambda|} sh(\sqrt{|\lambda|}l) = 0, \\ sh(\sqrt{|\lambda|}l) \neq 0; \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 0; \end{cases}$$

розв'язок тривіальний, немає від'ємних власних значень.

б) Випадок $\lambda = 0$:

$$X(x) = C_1 + C_2 x$$

Знаходимо константи з межових умов:

$$\begin{cases} X'(0) = C_2 = 0, \\ X'(l) = C_2 = 0; \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad X(x) = 0 \text{ – розв'язок нетривіальний,}$$

$$\begin{cases} C_1 \in \mathbb{R}, \\ C_2 = 0; \end{cases} \qquad \lambda = 0 \text{ є власним значенням.}$$

в) Випадок $\lambda > 0$

$$X(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda} x)$$

Знаходимо константи з межових умов:

$$\begin{cases} X'(0) = C_1\sqrt{\lambda} = 0, \\ X'(l) = \sqrt{\lambda}\left(\cancelto{0}{C_1}\cos(\sqrt{\lambda} l) - C_2\sin(\sqrt{\lambda} l)\right) = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 \neq 0, \\ \sin(\sqrt{\lambda} l) = 0; \end{cases}$$

Отже, нетривіальні розв'язки існують при значеннях параметра λ, які задовольняють характеристичне рівняння :

$$\sin(\sqrt{\lambda} l) = 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{\lambda_n} l = \pi n,\, n \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow\; \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}.$$

Випишемо тепер розв'язки для всіх n, поклавши всі констатнти рівними 1, і визначимо, які з них необхідно залишити:

$$\begin{cases} X_0(x) = 1, \\ \lambda_0 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} X_n(x) = \cos\left(\dfrac{\pi n x}{l}\right), \\ \lambda_n = \dfrac{\pi^2 n^2}{l^2}, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

На відміну від задачі 1 з попереднього заняття тут $n = 0$ відповідає нетривіальному розв'язку. Випадок $\lambda > 0$ знову приводить до набору власних функцій занумерованих натуральними числами.
Отже, різним власним функціям відповідають натуральні n та 0.
Власними значеннями і власними функціями є

$$\begin{cases} \lambda_0 = 0, \\ X_0(x) = 1; \\ \lambda_n = \dfrac{\pi^2 n^2}{l^2}, \text{ де } n \in \mathbb{N} \\ X_n(x) = \cos\left(\dfrac{\pi n x}{l}\right), \end{cases} \tag{2.4}$$

Повертаємося до рівняння для $T(t)$ (2.3). Підставляємо знайдені власні значення та знаходимо $T_n(t)$:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \\ T'' + \lambda v^2 T = 0, \end{aligned}\right\} \Rightarrow T_n(t) = A\cos(\omega_n t) + B\sin(\omega_n t),$$

де $\omega_n^2 = \lambda_n v^2$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\left.\begin{aligned} \lambda_0 = 0, \\ T'' = 0, \end{aligned}\right\} \Rightarrow T_0(t) = A_0 + B_0 t,$$

Власними модами коливань струни будуть всі розв'язки вигляду:

$$u_n(x,t) = X_n(x) \cdot T_n(t)$$

Виконаємо перепозначення і запишемо остаточний розв'язок:

$$\begin{cases} u_0(x,t) = A_0 + B_0 t, \\ u_n(x,t) = [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] \cos(k_n x), \\ k_n = \dfrac{\pi n}{l} - \text{ хвильові вектори}, \\ \omega_n = v k_n = \dfrac{v \pi n}{l} - \text{ власні частоти}, \\ n = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{2.5}$$

Перевірка розв'язку задачі Штурма-Ліувілля

1. Аналітична перевірка

1) Перевіряємо рівняння:

$$X_0'' = (1)'' = 0 \cdot 1 = 0 \cdot X_0$$
$$X_n'' = -\frac{\pi n}{l}\left(\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\right)' = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 X_n$$

Робимо висновок, що знайдені функції та значення спектрального параметра (2.4) є власними функціями та відповідно власними значеннями.

2) Перевіряємо межові умови:

$$X'(0) = 0:$$
$$X_0'(0) = 0,$$
$$X_n'(0) = \sin(\sqrt{\lambda_n} \cdot 0) = 0 \text{ – виконується,}$$
причому незалежно від λ_n

$$X'(l) = 0:$$
$$X_0'(l) = 0,$$
$$X_n'(l) = \sin\left(\frac{\pi n}{l} \cdot l\right) = \sin(\pi n) = 0 \text{ – виконується}$$
причому саме для знайдених значень λ_n.

2. Графічна перевірка.
Будуємо графіки кількох перших власних функцій. Масштаб по вертикалі може бути довільним і різним для різних функцій, оскільки значення він не має.

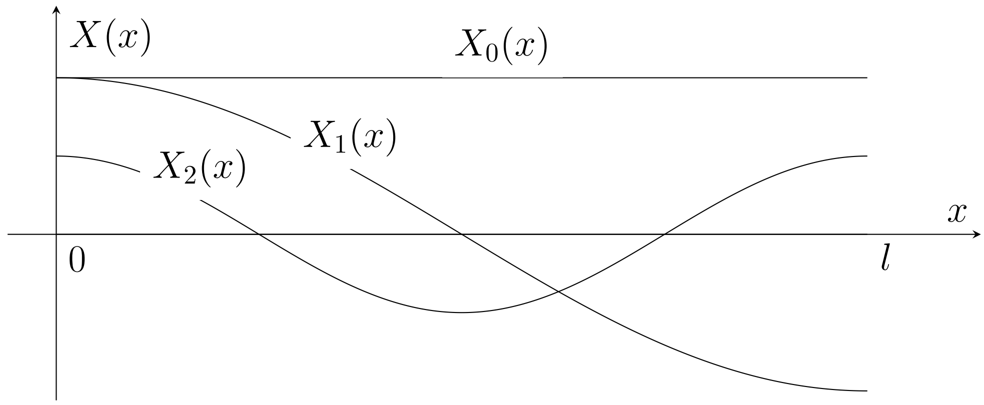


Рис. 2.1: Графічний розв'язок задачі, наведені три власні функції

У даному випадку основною модою буде функція $X_0(x) = 1$. Вона цікава, бо відмінна від усіх інших мод і описує не коливний рух стержня.
З рисунку бачимо, що межові умови в точках $x = 0$ та $x = l$ задовольняють крайовим умовам (2.3) на обох кінцях – дотичні в точках $x = 0$ та $x = l$ горизонтальні.

Використовуючи осциляційну теорему, можна переконатися, що ми знайшли основну моду і всі інші розв'язки.

Аналіз результату

Для мод $n = 1, 2, \ldots$ ми знову отримуємо стоячі хвилі, хоча вони менш наочні. Оскільки коливання повздовжнє, то в стержні виникатимуть області, де він стискається і його густина зростає (аналогія для випадку струни – вузли), та області, де він розтягується і відповідно його густина зменшується (пучності). Для основної ж моди характерний не коливальний рух. Їй відповідатиме або стан спокою стержня, або рівномірний прямолінійний рух, що залежить від початкових умов задачі.

Вільні коливання поля в резонаторі для заданих початкових умов. Ряд Фур'є по системі ортогональних функцій.

Задача № 2.3

Знайти коливання струни завдовжки $0 \le x \le l$ із закріпленими кінцями, якщо початкове відхил є $\varphi(x) = hx/l$, а початкова швидкість $\psi(x) = \nu_0$. Обчислити інтеграл ортогональності власних функцій і знайти квадрат *норми. Чи є рух струни періодичним (тобто чи буде повторюватись початковий стан струни через деякий проміжок часу?) Чи буде рух періодичним, якщо він описується рівнянням $u_{tt} = v^2 u_{xx} - \omega_0^2 u$?*

Розв'язок

Формальна постановка задачі:

$$\begin{cases} u = u(x,t), \\ u_{tt} = v^2 u_{xx}, \\ 0 \le x \le l, t \ge 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \\ \left.\begin{aligned} & u(x,0) = \varphi(x) = \frac{hx}{l}, \\ & u_t(x,0) = \psi(x) = \nu_0. \end{aligned}\right\} - \begin{array}{l}\text{початкові умови задають} \\ \text{механічний стан} \\ \text{системи при } t = 0\end{array} \end{cases} \tag{2.6}$$

Це задача із заданими початковими умовами, яка має єдиний розв'язок. Щоб розв'язати її, необідно розділити змінні, знайти власні функції і власні значення задачі Штурма-Ліувілля і знайти власні моди. Це було зроблено у задачі №1.1 попереднього заняття (1.7). Результатом є нескінченний набір власних мод:

$$\begin{cases} u_n(x,t) = [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] \sin(k_n x), \\ k_n = \dfrac{\pi n}{l},\ n = 1, 2, \ldots \\ \omega_n = v k_n = \dfrac{v \pi n}{l} - \text{ власні частоти.} \end{cases} \tag{2.7}$$

Легко переконатися, що жодна окрема власна мода не може задовольнити початкові умови задачі (чому?). Щоб задовольнити початкові умови, необхідно записати так званий загальний або формальний розв'язок задачі, який є суперпозицією всіх мод:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] \sin(k_n x) \tag{2.8}$$

Поява знака суми у цьому виразі означає, що його права частина більше не залежить від n. Коли коефіцієнти A_n і B_n будуть знайдені, він стане розв'язком (єдиним!) вихідної задачі. Коефіцієнти загального розв'язку знаходимо із початкових умов. Підставляємо (3.3) у початкові умови (2.6):

$$u(x,0) = \varphi(x) \ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x) = \varphi(x) \tag{2.9}$$

$$
\begin{aligned}
u_t(x,0) = \psi(x) \;\Rightarrow \\
\Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left[-A_n\omega_n \sin(\omega_n t) + B_n\omega_n \cos(\omega_n t)\right] \sin(k_n x)\right)\Bigg|_{t=0} = \\
= \sum_{n=1}^{\infty} B_n\omega_n \sin(k_n x) = \psi(x)
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

Отже, ми одержали дві умови, для визначення A_n і B_n, відповідно. Далі необхідно скористатися ортогональністю власних функцій задачі Штурма-Ліувілля (див. Конспект лекцій, §4). У загальному вигляді інтеграл ортогональності власних функцій має вигляд:

$$
\int_0^l X_n(x) \cdot X_m(x)\,\mathrm{d}x = ||X_n||^2 \delta_{n,m}, \tag{2.11}
$$

де $||X_n||$ – норма власної функції. Переконаємося, що власні функції дійсно ортогональні, і обчислимо квадрат норми.

1. Розглянемо випадок $n = m$:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^l X_n(x)^2\,\mathrm{d}x = \int_0^l \sin^2(k_n x)\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{2k_n}\int_0^l (1-\cos(k_n x))\,\mathrm{d}(k_n x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin(k_n x)}{k_n}\right)\Bigg|_0^l = \frac{l}{2}
\end{aligned}
$$

2. Випадок $n \neq m$:

$$
\begin{aligned}
\int_0^l X_n(x) \cdot X_m(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^l \sin(k_n x)\sin(k_m x)\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^l (\cos(k_n - k_m)x - \cos(k_n + k_m)x)\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(k_n - k_m)x}{k_n - k_m} - \frac{\sin(k_n + k_m)x}{k_n + k_m}\right)\Bigg|_0^l = 0
\end{aligned}
$$

Щоб одержати правильні вирази для коефіцієнтів загального розв'язку, застосовуємо формальну процедуру, описану у §4 Конспекту лекцій. Домножуємо кожну з одержаних рівностей (3.17) та (2.10) на m-ту власну функції

$\sin(k_m x)$ та інтегруємо від 0 до l.

$$\begin{gathered}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin(k_m x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int\limits_0^l \sin(k_n x)\sin(k_m x)\,\mathrm{d}x = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \frac{l}{2}\delta_{n,m} = \frac{A_m l}{2} \ \Rightarrow\ A_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin(k_n x)\,\mathrm{d}x\end{gathered} \tag{2.12а}$$

$$\begin{gathered}\int\limits_0^l \psi(x)\sin(k_m x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\omega_n \int\limits_0^l \sin(k_n x)\sin(k_m x)\,\mathrm{d}x = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\omega_n \cdot \frac{l}{2}\delta_{n,m} = \frac{B_m\omega_m l}{2} \ \Rightarrow\ B_n = \frac{2}{\omega_n l}\int\limits_0^l \psi(x)\sin(k_n x)\,\mathrm{d}x\end{gathered} \tag{2.12б}$$

Обчислюємо отримані інтеграли (2.12).

$$\begin{aligned}A_n &= \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin(k_n x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \frac{hx}{l}\sin(k_n x)\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{2h}{l^2}\left(-\frac{1}{k_n}x\cos(k_n x)\Big|_0^l + \int\limits_0^l \frac{\cos(k_n x)}{k_n}\,\mathrm{d}t\right) = \\ &= \left|k_n l = \frac{\pi n}{l}l = \pi n \Rightarrow \sin(k_n l) = 0,\ \cos(k_n l) = (-1)^n\right| = \\ &= \frac{2h}{l^2}\left(-\frac{l}{k_n}(-1)^n + \frac{\sin(k_n x)}{k_n^2}\Big|_0^l\right) = \frac{2h}{l}\frac{(-1)^{n+1}}{k_n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_n &= \frac{2}{\omega_n l}\int\limits_0^l \psi(x)\sin(k_n x)\,\mathrm{d}x = \frac{2\nu_0}{\omega_n l}\int\limits_0^l \sin(k_n x)\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{2\nu_0}{k_n\omega_n l}\cos(k_n x)\Big|_l^0 = \frac{2\nu_0}{l}\frac{1-(-1)^n}{k_n\omega_n}\end{aligned}$$

Підставляємо визначені константи в (3.3) і одержуємо відповідь:

$$u(x,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\nu_0(1-(-1)^n)\frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n} - h(-1)^n\cos(\omega_n t)\right]\frac{\sin(k_n x)}{k_n} \tag{2.13}$$

Процедура, за якою ми визначали константи A_n та B_n, фактично зводиться до розкладання даних початкових умов в узагальнений ряд Фур'є по системі власних функцій задачі Штурма-Ліувілля. У даному випадку цей ряд є частинним випадком тригонометричного ряду Фур'є.

З'ясуємо, чи є розв'язок періодичною функцією часу. Розв'язок є суперпозицією всіх мод, кожна з них має іншу частоту коливань ω_n. У розглянутій задачі частоти всіх мод кратні частоті основної моди ω_1. Тому період (найменший) коливань основної моди

$$T = \frac{2l}{v},$$

є спільним періодом для всіх мод. Отже, рух струни буде періодичним з періодом коливань основної моди.

Нехай тепер замість хвильового рух системи описується рівнянням

$$u_{tt} = v^2 u_{xx} - \omega_0^2 u$$

з тими ж межовими умовами. Легко бачити, що після розділення змінних вигляд задачі Штурма-Ліувілля не зміниться, а зміниться лише рівняння для часової частини розв'язку $T(t)$:

$$T'' + (\lambda_n * v^2 + \omega_0^2)T = 0 \;\Rightarrow\; T'' + \widetilde{\omega}_n^2 T = 0,$$

де $\widetilde{\omega}_n = \sqrt{\omega_n^2 + \omega_0^2}$, а ω_n - частоти коливань розв'язаної вище задачі. Тобто частоти коливань зміняться і вже не будуть цілими кратними частоти основної моди. Тобто рух такої системи не буде періодимчним.
Якщо рівняння міститиме доданок пропорційний u_t, то буде спостерігатися затухання чи підсилення коливань (залежно від знаку коефіцієнта при u_t).

Заняття 3

Другий спосіб знаходження коефіцієнтів. Коливання стержня з вільними кінцями, неповнота базису.

Задача № 3.1

Знайти коливання пружного стержня $0 \leq x \leq l$, лівий кінець якого закріплений, а правий вільний, якщо початкове відхилення $\varphi(x) = h\sin(3\pi x/2l)$, а початкова швидкість $\psi(x) = \nu_0 \sin(\pi x/2l)$.

Розв'язок

Формальна постановка задачі:

$$\begin{cases} u = u(x,t), \\ u_{tt} = v^2 u_{xx}, \\ 0 \leq x \leq l, t \geq 0, \\ u(0,t) = 0, \\ u_x(0,t) = 0, \\ \left.\begin{aligned} & u(x,0) = \varphi(x) = h\sin\left(\dfrac{3\pi x}{2l}\right), \\ & u_t(x,0) = \psi(x) = v_0 \sin\left(\dfrac{\pi x}{2l}\right). \end{aligned}\right\} - \text{специфіка задачі у вигляді початкових умов} \end{cases} \tag{3.1}$$

Це задача із заданими початковими умовами (а саме - початковим розподілом зміщення та швидкостей), яка має єдиний розв'язок.

Для початку скористаємося розв'язком задачі 1.2:

$$\begin{cases} u_n(x,t) = [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] \sin(k_n x), \\ k_n = (n + \dfrac{1}{2})\dfrac{\pi}{l}, \; n = 1, 2, \ldots \\ \omega_n = v k_n = (n + \dfrac{1}{2})\dfrac{\pi v}{l} - \text{ власні частоти.} \end{cases} \tag{3.2}$$

І запишемо загальний розв'язок:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] \sin(k_n x) \tag{3.3}$$

$$u_t(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} [-A_n \omega_n \sin(\omega_n t) + B_n \omega_n \cos(\omega_n t)] \sin(k_n x) \tag{3.4}$$

Підставляємо (3.3) у початкові умови (3.1):

$$u(x,0) = \varphi(x) \ \Rightarrow \ \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin\left((n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{l}\right) = h \sin\left(\frac{3\pi x}{2l}\right) \tag{3.5}$$

Підставляємо (**??**) у початкові умови (3.1):

$$u_t(x,0) = \psi(x) \ \Rightarrow \ \sum_{n=0}^{\infty} B_n \omega_n \sin\left((n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{l}\right) = v_0 \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right) \tag{3.6}$$

Особливі ситуації: функції у правій частині є однією з власних функцій задачі Штурма-Ліувіля. Це дозволяє знайти коефіцієнти A_n, B_n простіше, порівнюючи з загальнім знаходженням з вихідних функцій $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ загального вигляду! Тобто брати інтеграл у цій особливій ситуації не потрібно.

Якщо 2 ряда Фур'є по одній системі функцій рівні, то і відповідні коефіцієнти цих рядів рівні.

$$\begin{gathered}\sum_{n=0} A_n \sin\left((n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{l}\right) = A_0 \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right) + \\ + A_1 \sin\left(\frac{3\pi x}{2l}\right) + A_2 \sin\left(\frac{5\pi x}{2l}\right) + ... = h \sin\left(\frac{3\pi x}{2l}\right)\end{gathered} \tag{3.7}$$

Результат $A_1 = h, A_0 = A_2 = A_3 = ... = 0$
Аналогічно робимо з **??**:

$$\begin{gathered}\sum_{n=0} \omega_n B_n \sin\left((n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{l}\right) = \omega_0 B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right) + \\ + \omega_1 B_1 \sin\left(\frac{3\pi x}{2l}\right) + \omega_2 B_2 \sin\left(\frac{5\pi x}{2l}\right) + ... = v_0 \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right)\end{gathered} \tag{3.8}$$

Результат $B_0 = \frac{v_0}{\omega_0}, B_1 = B_2 = B_3 = ... = 0$

Тепер треба правильно написати відповідь через знайдені коефіцієнти A_n, B_n! Підставляємо знайдені коефіцієнти у загальний розв'язок (тільки два коефіцієнти - A_1 і B_0 не дорівнюють нулю, тож членів у розв'язку всего два!)

Фінальна відповідь:

$$u(x,t) = h\cos(\omega_1 t)\sin(k_1 x) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\sin(k_0 x) \tag{3.9}$$

де $k_0 = \frac{\pi x}{2l}, k_1 = \frac{3\pi x}{2l}, \omega_0 = vk_0, \omega_1 = vk_1$. Можемо помітити, що у кожної моди своя частота.

Перевіряємо відповідь

- Власні функції перевірені в задачі 1.2
- Постановка задачі містить два неоднорідних члени у початкових умовах. Один пропорційний $\sim h$, інший пропорційний $\sim v_0$. Перевірити наявність цих множників у загальному розв'язку.
- Перевіряємо початкові умови - виконуються?

Альтернативний шлях – знайти за означенням коефіцієнти розкладу у ряд Фур'є.

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\left((\frac{1}{2}+n)\frac{\pi x}{l}\right)dx \tag{3.10}$$

Одержали інтеграл ортогональності

$$\int_0^l \sin\left(\frac{3\pi x}{2l}\right)\sin\left((\frac{1}{2}+n)\frac{\pi x}{l}\right)dx = \int_0^l \chi_1(x)\chi_n(x)dx = \delta_{1n} \tag{3.11}$$

Якщо ви не побачите що інтеграл є інтегралом ортогональності, і будете його обчилювати, то втратите час і можете помилитися і одержати неправильну відповідь (що часто і буває).

Результат $A_1 = h, A_0 = A_2 = A_3 = ... = 0$ та для швидкостей $B_0 = \frac{v_0}{\omega_0}, B_1 = B_2 = B_3 = ... = 0$

Отримали теж саме, але складнішим шляхом!

Задача № 3.3

Знайти коливання пружного стержня довжиною l з вільними кінцями, якщо початкове відхилення дорівнює нулю, а початкова швидкість $\psi(x) = \nu_0$. Якщо всі знайдені вами коефіцієнти Фур'є (коефіцієнти загального розв'язку) дорівнюють нулю, поясніть, що це означає, і знайдіть, де була допущена помилка.

Розв'язок

Формальна постановка задачі:

$$
\begin{cases}
u = u(x,t), \\
u_{tt} = v^2 u_{xx}, \\
0 \le x \le l, t \ge 0, \\
u_x(0,t) = u_x(0,t) = 0, \\
u(x,0) = \varphi(x) = 0, \\
u_t(x,0) = \psi(x) = \nu_0.
\end{cases} \tag{3.12}
$$

Це задача із заданими початковими умовами (а саме - початковим розподілом зміщення та швидкостей), яка має єдиний розв'язок.

Для початку скористаємося розв'язком задачі 2.1:

$$
\begin{cases}
u_0(x,t) = A_0 + B_0 t, \\
u_n(x,t) = [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] \cos(k_n x), \\
k_n = \dfrac{\pi n}{l} - \text{ хвильові вектори}, \\
\omega_n = v k_n = \dfrac{v \pi n}{l} - \text{ власні частоти}, \\
n = 1, 2, \ldots
\end{cases} \tag{3.13}
$$

І запишемо загальний розв'язок:

$$
u(x,t) = A_0 + B_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] \cos(k_n x) \tag{3.14}
$$

Та похідна по часу:

$$
u_t(x,t) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [-A_n \omega_n \sin(\omega_n t) + B_n \omega_n \cos(\omega_n t)] \cos(k_n x) \tag{3.15}
$$

Підставляємо (3.14) у початкові умови (3.12):

$$
u(x,0) = \varphi(x) \;\Rightarrow\; A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos k_n x = 0 \tag{3.16}
$$

Підставляємо (3.15) у початкові умови (3.12):

$$
u_t(x,0) = \psi(x) \;\Rightarrow\; B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \omega_n \cos k_n x = \nu_0 \tag{3.17}
$$

Прирівняємо коефіцієнти при лінійно незалежних функціях. В результаті отримаємо

$$
B_0 = \nu_0; \; A_n, B_n = 0, \text{ при } n \in \mathbb{N}
$$

Підставляємо знайдені коефіцієнти і отримуємо розв'язок із одного доданку.

$$u(x,t) = \nu_0 t \tag{3.18}$$

Перевіряємо відповідь

- Власні функції перевірені в задачі 2.1
- Постановка задачі містить неоднорідний член у початковій швидкості, який пропорційний $\sim v_0$. Перевірити наявність цих множників у загальному розв'язку.
- Перевіряємо початкові умови - виконуються?

Альтернативний шлях – знайти за означенням коефіцієнти розкладу у ряд Фур'є.

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\left((\frac{1}{2}+n)\frac{\pi x}{l}\right)dx \tag{3.19}$$

Одержали інтеграл ортогональності

$$\int_0^l \sin\left(\frac{3\pi x}{2l}\right)\sin\left((\frac{1}{2}+n)\frac{\pi x}{l}\right)dx = \int_0^l \chi_1(x)\chi_n(x)dx = \delta_{1n} \tag{3.20}$$

Якщо ви не побачите що інтеграл є інтегралом ортогональності, і будете його обчилювати, то втратите час і можете помилитися і одержати неправильну відповідь (що часто і буває).

Результат $A_1 = h, A_0 = A_2 = A_3 = ... = 0$ та для швидкостей $B_0 = \frac{v_0}{\omega_0}, B_1 = B_2 = B_3 = ... = 0$

Отримали теж саме, але складнішим шляхом!

Заняття 4

Рівняння теплопровідності з однорідними межовими умовами

Задача № 4.1

Одну і ту ж функцію, наприклад $f(x) = \alpha x$, можна представити на проміжку $0 \leq x \leq l$ узагальненим рядом Фур'є по кожній із систем власних функцій чотирьох задач Штурма-Ліувілля, одержаних у задачах 1.1, 1.2, 1.3, 2.1. Користуючись явним виглядом власних функцій і не обчислюючи коефіцієнтів рядів, дайте відповіді на такі запитання.

1. *Який вигляд матиме графік суми кожного з таких рядів на всій числовій осі? Якою є парність суми ряду відносно точок $x = nl$, де n – ціле число, і як це пов'язано з виглядом крайових умов задачі Штурма-Ліувілля?*

2. *Покажіть, що кожний з рядів є частинним випадком класичного тригонометричного ряду Фур'є, сума якого є періодичною функцією. Які саме періоди відповідають кожному з рядів? Яка саме частина повного тригонометричного базису використовується в кожному з розкладань, а які коефіцієнти Фур'є дорівнюють нулю і чому?*

3. *Як пов'язаний характер збіжності вказаних рядів з крайовими умовами, які задовольняє функція $f(x)$ у точках $x = 0, l$? Чи дорівнює сума ряду Фур'є функції $f(x)$ на відкритому проміжку $0 < x < l$? на закритому проміжку $0 \leq x \leq l$*

Розв'язок

Запитання №1

Графік суми ряду буде періодично повторювати розкладену в ряд Фур'є функцію з періодом l. Відносно точок $x = nl$ сума ряду буде або парною, або непарною, функцією. Для задачі, де кінці струни закріплені, відносто всіх цих точок буде непарною. Це випливає із умов при яких можливий розклад в

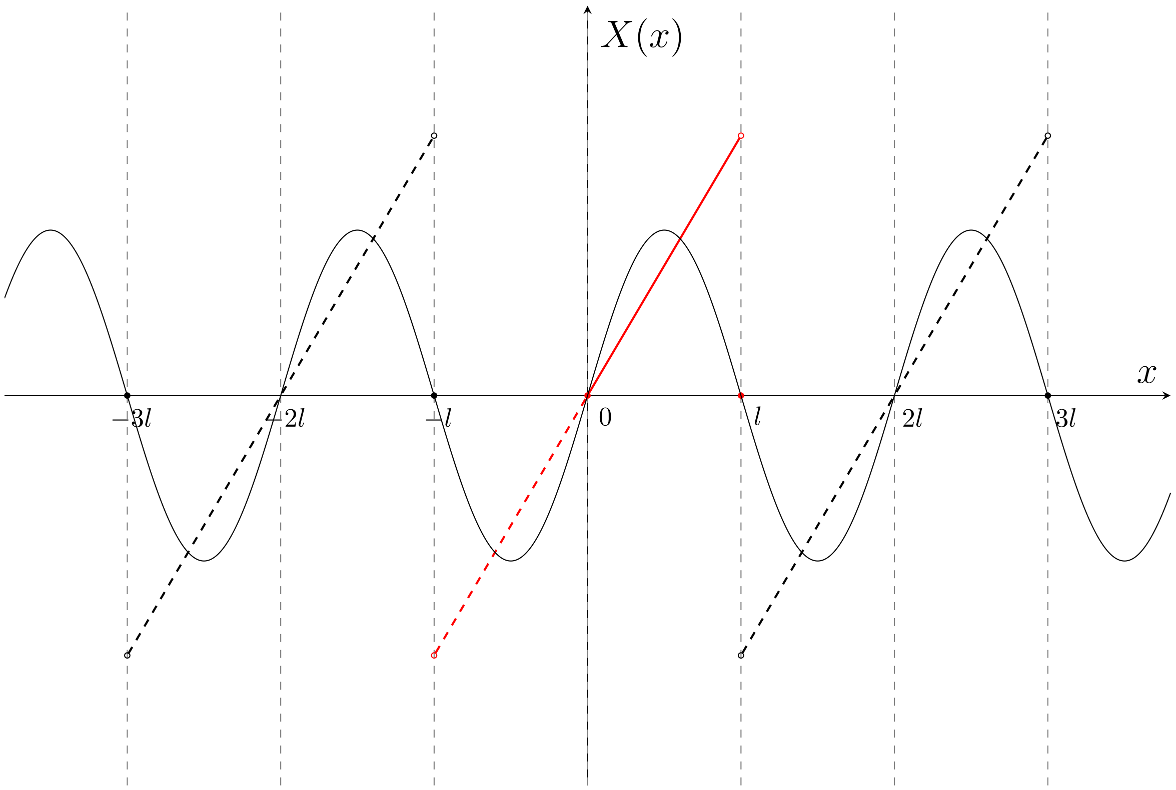


Рис. 4.1: Аналітичне продовження функції αx для розкладу системі власних функцій із задачі 1.1

ряд Фур'є – кусково-гладкість та періодичність функції, тобто щоб задовольняти всім цим умовам і отримували в точках $x = nl$ значення функції рівним нулю, необхідно щоб функція була непарна відносно ціє точки. Аналогічна, ситуація для межової умови, де кінець струни вільний $(X'(nl) = 0)$, тільки треба згадати, що похідна змінює парність функції (звісно якщо функція має первну парність), тому відносно вільних кінців сума ряду буде парною функцією.

Запитання №2

Запитання №3

Графій суми рядів Фур'є буде періодичною функцією, що на відкритому проміжку $(0, l)$ співпадає з нашою функцією, а на в точках може бути розрив першого роду.

Червоним позначена функція, яку ми розкладуємо в ряд Фур'є. Пунктина лінія, знову червона, показує відповідне симетрійне продовження відносно нуля. Чорною пунктирною лінією позначено симетрійні відображення відносно інших точкок.

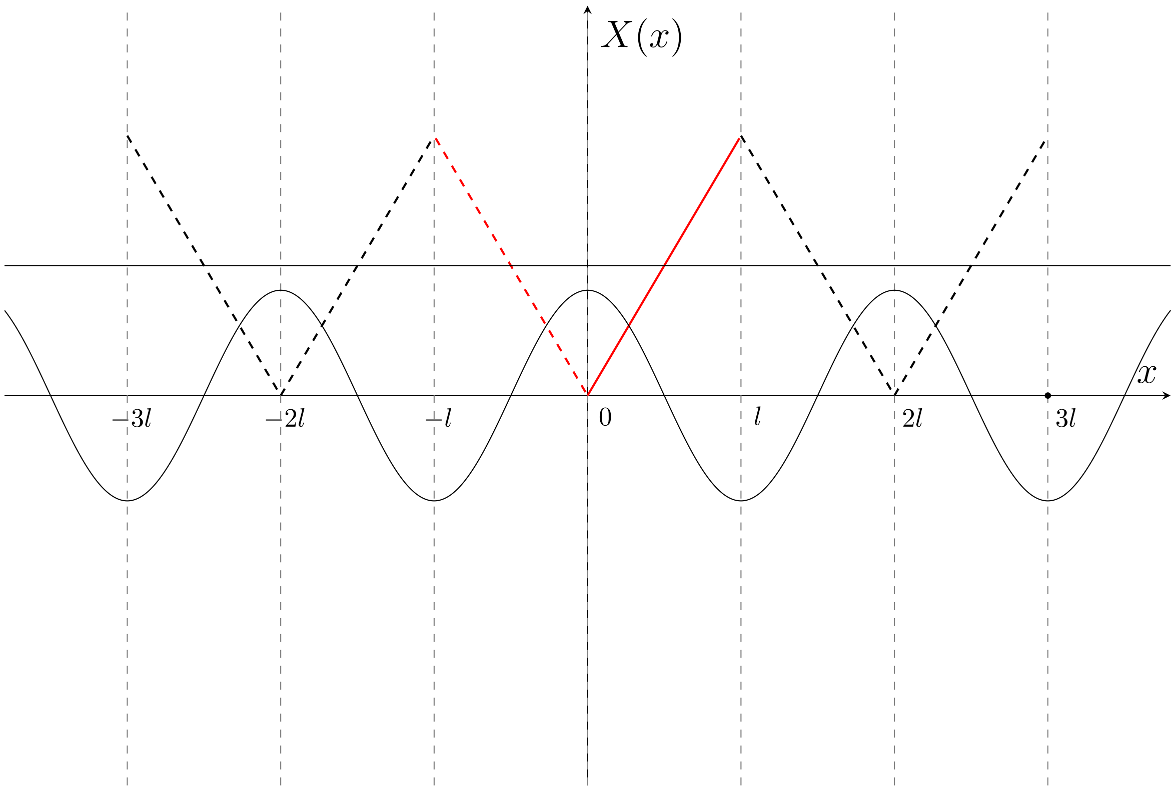


Рис. 4.2: Аналітичне продовження функції αx для розкладу системі власних функцій із задачі 2.1

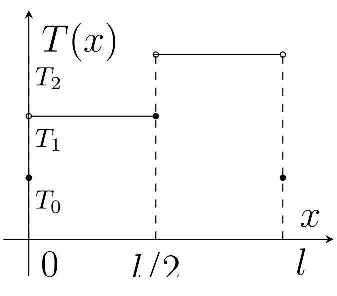
Задача № 4.2

У початковий момент часу ліва половина стержня з теплоізольованою бічною поверхнею має температуру T_1 , а права – температуру T_2 . Знайти розподіл температури при $t > 0$, якщо кінці стержня підтримуються при температурі T_0. Указівка: подумайте, що означає «температура дорівнює нулю», що це за нуль? Покладіть у кінцевому результаті $T_0 = 0$ і розгляньте частинні випадки: $T_1 = T_2$ та $T_1 = -T_2$. Які члени ряду при цьому обертаються в нуль? Чому? Нарисуйте графіки та порівняйте часову залежність температури для різних мод. Нарисуйте (якісно) графіки розподілу температури вдовж стержня у різні характерні послідовні моменти часу. Що таке «малий» і «великий» проміжок часу для цієї задачі? Як характерні часи залежать від розмірів системи?

Розв'язок

Формальна постановка задачі:

$$\begin{cases} u = u(x,t), \\ u_t = Du_{xx}, \\ 0 \le x \le l, t \ge 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = T_0, \\ u(x,0) = \varphi(x) = T_1 - (T_1 - T_2)\Theta(x - l/2). \end{cases} \tag{4.1}$$



Тут використана тета-функція Хевісайта (або функція сходинки). Вона задається таким чином:

$$\Theta(x-x_0)=\begin{cases}0, \text{ при } x<x_0\\ 1, \text{ при } x>x_0\end{cases}$$

Зробимо заміну, яка приведе до однорідних крайових умовами

$$u(x,t)=\widetilde{u}(x,t)+T_0$$

і тепер можемо скористатися розділенням змінних.

$$\widetilde{u}(x,t)=\widetilde{X}(x)\cdot\widetilde{T}(t) \tag{4.2}$$

Рівняння для нової функції не змінить свого виду, тому процедура відокремлення змінних виконується аналогічно до проведених раніше. Результат відокремлення змінних:

$$\begin{cases}\widetilde{X}=\widetilde{X}(x),\\ \widetilde{X}''=-\lambda\widetilde{X},\\ 0\le x\le l,\\ \widetilde{X}(0)=0,\\ \widetilde{X}(l)=0.\end{cases} \qquad \widetilde{T}'+\lambda D\widetilde{T}=0 \tag{4.3}$$

Розв'язок цієї задачі Штурма-Ліувілля отриманий в задачі 1.1.

$$\begin{cases}\lambda_n=\dfrac{\pi^2n^2}{l^2},\\ \widetilde{X}_n(x)=\sin\left(\dfrac{\pi nx}{l}\right),\end{cases} \quad \text{де } n\in\mathbb{N}. \tag{4.4}$$

У часовому рівнянні змінні розділяються, тому його легко проінтегруємо:

$$\begin{gathered}\frac{\widetilde{T}'}{\widetilde{T}}=-\lambda_nD=-\tau_n^{-1} \Rightarrow \int\frac{\mathrm{d}\widetilde{T}}{\widetilde{T}}=-\int\frac{\mathrm{d}t}{\tau_n} \Rightarrow\\ \Rightarrow \ln\widetilde{T}_n=\ln C_n-t/\tau_n \Rightarrow \widetilde{T}_n=C_ne^{-t/\tau_n}, \text{ де } n\in\mathbb{N}\end{gathered} \tag{4.5}$$

Отже, отримаємо остаточний розв'язок

$$\begin{aligned}&u_n(x,t)=T_0+\widetilde{X}_n\cdot\widetilde{T}_n=T_0+C_ne^{-t/\tau_n}\sin(k_nx),\\ &k_n=\frac{\pi n}{l}- \text{ хвильові вектори},\\ &\tau_n=\frac{1}{Dk_n^2}=\frac{l^2}{D\pi^2n^2}- \text{ характерний час зміни температури},\\ &n=1,2,\dots\end{aligned} \tag{4.6}$$

Запишемо загальний розв'язок задачі

$$u(x,n) = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-t/\tau_n} \sin(k_n x) \tag{4.7}$$

Із початкової умови (4.1) визначимо коефіцієнти C_n:

$$u(x,0) = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(k_n x) = T_1 - (T_1 - T_2)\Theta(x - l/2) \tag{4.8}$$

Розкладемо за синусами модифіковану початкову умову $u(x,0) - T_0$

$$T_1 - T_0 - (T_1 - T_2)\Theta(x - l/2) = -\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(k_n x)$$

$$C_n = -\frac{2}{l}\left[\int\limits_0^{l/2} (T_1 - T_0)\sin(k_n x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{l/2}^{l} (T_2 - T_0)\sin(k_n x)\,\mathrm{d}x\right] =$$

$$= \frac{2}{lk_n}\left[(T_1 - T_0)\cos(k_n x)\Big|_0^{l/2} + (T_2 - T_0)\cos(k_n x)\Big|_0^{l/2}\right] =$$

$$= \frac{2}{lk_n}\left[(T_1 - T_0)(1 - \cos(k_n l/2)) + (T_2 - T_0)(\cos(k_n l/2) - (-1)^n)\right] =$$

$$= \frac{2}{lk_n}\left[T_1(1 - \cos(k_n l/2)) + T_2(\cos(k_n l/2) - (-1)^n) + T_0((-1)^n - 1)\right]$$

Випишемо декілька перших множників C_n для визначення поведінки їх множини

$$\begin{aligned}
&n = 1 : [T_1 + T_2 - 2T_0] && \Rightarrow C_{4m+1} = \frac{2}{k_{4m+1}l}[T_1 + T_2 - 2T_0] \\
&n = 2 : [T_1 - T_2] && \Rightarrow C_{4m+2} = \frac{2}{k_{4m+2}l}[T_1 - T_2] \\
&n = 3 : [T_1 + T_2 - 2T_0] && \Rightarrow C_{4m+3} = \frac{2}{k_{4m+3}l}[T_1 + T_2 - 2T_0] \\
&n = 4 : 0 && \Rightarrow C_{4m} = 0
\end{aligned}$$

Покладемо тут $T_0 = 0$ та $T_1 = T_2$ з чого видно, що коефіцієнти з парними індексами зануляються. Для випадку $T_1 = -T_2$ навпаки – з непарними.

Отже, розв'язком буде

$$\begin{gathered}
u(x,t) = T_0 + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\big[T_1(1 - \cos(k_n l/2)) + \\
+ T_2(\cos(k_n l/2) - (-1)^n) + T_0((-1)^n - 1)\big] e^{-t/\tau_n} \frac{\sin(k_n x)}{k_n}
\end{gathered} \tag{4.9}$$

Графіки розв'язків

Поведінку знайдених груп доданків можна побачити на наступному графіку. Тут наведено по одному з кожної групи.

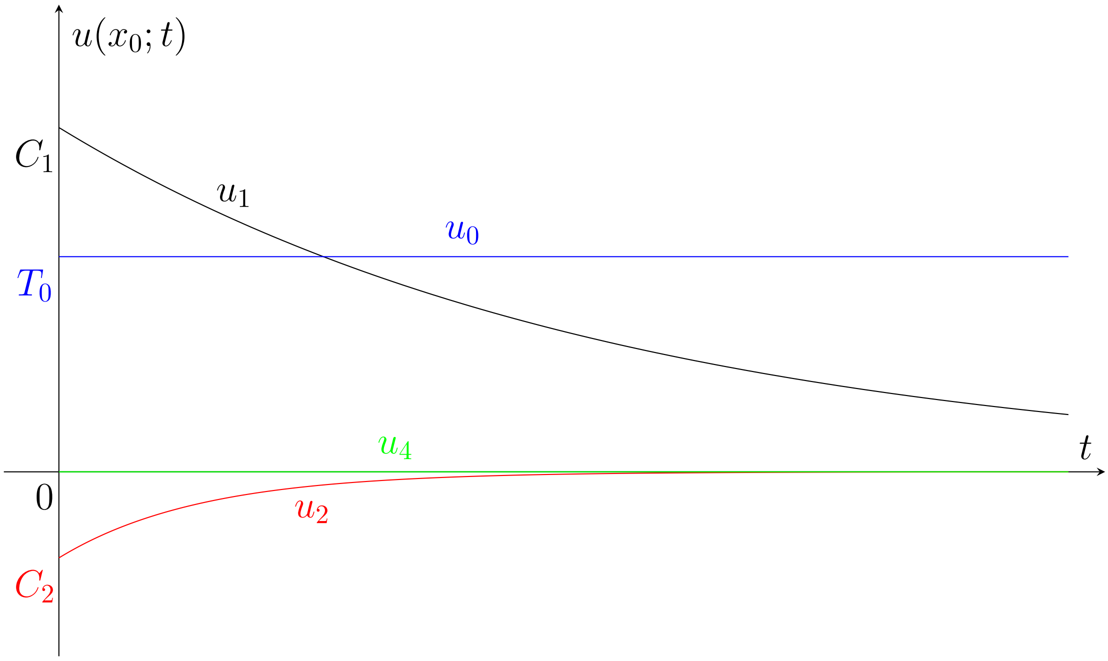


Рис. 4.3: Перші чотири розв'язки

Проміжок часу називається малим, коли $t \ll \tau$, а великим – $t > \tau$

Задача № 4.4

Початкова температура повністю теплоізольованого тонкого стержня $0 \leq x \leq l$ *дорівнює* $T_1 \cos(\pi x/2l) + T_2 \cos(2\pi x/l)$. *Знайти поле температур при* $t > 0$. *Перевірити виконання початкових умови при* $T_1 = 0$ *і* $T_2 = 0$.

Розв'язок

Формальна постановка задачі:

$$\begin{cases} u = u(x,t), \\ u_t = Du_{xx}, \\ 0 \leq x \leq l, t \geq 0, \\ u_x(0,t) = 0, \; u_x(l,t) = 0, \\ u(x,0) = T_1 \cos(\pi x/2l) + T_2 \cos(2\pi x/l). \end{cases} \tag{4.10}$$

Виконуючи розділення змінних ми отримаємо дві попереднбо розв'язані задачі. Задачу Штурма-Ліувілля з задачі №2.1 та часове диференціальне рівняння з задачі №4.2. Отже, загальний розв'язок можна одразу записати комбінуюці відомі.

$$u(x,t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-t/\tau_n} \cos k_n x, \tag{4.11}$$

$k_n = \dfrac{\pi n}{l} -$ хвильові вектори,

$\tau_n = \dfrac{1}{D k_n^2} -$ характерний час зміни температури,

$n = 0, 1, 2, \ldots$

З початкової умови визначимо невіомі коефіцієнти. Для цього треба розкласти $\cos(\pi x/2l)$ по набору власних функцій задачі Ш.-Л.

$$\cos(\pi x/2l) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos k_n x$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^l \cos(\pi x/2l)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\sin(\pi x/2l)\Big|_0^l = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \cos(\pi x/2l)\cos k_n x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{l}\Bigg(\int_0^l \cos((k_n + \pi/2l)x)\,\mathrm{d}x +$$

$$+\int_0^l \cos((k_n - \pi/2l)x)\,\mathrm{d}x\Bigg) = \frac{1}{l}\left(\frac{\sin((k_n+\pi/2l)x)}{k_n+\pi/2l}\Bigg|_0^l + \frac{\sin((k_n-\pi/2l)x)}{k_n-\pi/2l}\Bigg|_0^l\right) =$$

$$= \left(\frac{\sin(k_n l + \pi/2)}{k_n l + \pi/2} + \frac{\sin(k_n l - \pi/2)}{k_n l - \pi/2}\right) = \left(\frac{1}{k_n l + \pi/2} - \frac{1}{k_n l - \pi/2}\right)\cos k_n l =$$

$$= \Big|\cos k_n l = (-1)^n\Big| = \frac{(-1)^{n+1}\pi}{(k_n l + \pi/2)(k_n l - \pi/2)} =$$

$$= (-1)^{n+1}\cdot\frac{4\pi}{4k_n^2 l^2 - \pi^2} = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$$

Тепер підставимо (4.11) в початкову умову і отримаємо:

$$\begin{aligned} u(x,0) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos k_n x = T_1\cos(\pi x/2l) + T_2\cos(2\pi x/l) = \\ = \frac{2T_1}{\pi} + T_2\cos k_2 x + \frac{4T_1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos k_n x}{4n^2-1} \end{aligned} \tag{4.12}$$

З чого слідує

$$C_0 = \frac{2T_1}{\pi},\ C_2 = T_2 - \frac{4T_1}{15\pi},\ C_n = \frac{4T_1}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1},\ \text{де } n \neq 2$$

Отже, остаточним розв'язком буде

$$u(x,t) = \frac{2T_1}{\pi} + T_2 e^{-t/\tau_2} \cos k_2 x + \frac{4T_1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos k_n x}{4n^2 - 1} \tag{4.13}$$

Прямою підстановкою можна переконатися, що при $T_1 = 0$ та $T_2 = 0$ початкові умови виконуються.

Тема II:

МЕТОД ЧАСТИННИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ТА МЕТОД РОЗКЛАДАННЯ ЗА ВЛАСНИМИ ФУНКЦІЯМИ.

Заняття 5

Еволюційні задачі з неоднорідним рівнянням або неоднорідними межовими умовами: стаціонарні неоднорідності

Задача № 5.1

Знайти коливання вертикально розташованого пружного стержня під дією сили тяжіння для $t > 0$. Верхній кінець стержня закріплений, а нижній вільний. При $t < 0$ стержень був нерухомим і деформацій не було. Знайти спочатку стаціонарний розв'язок, що відповідає положенню рівноваги стержня в полі тяжіння, а потім знайти відхилення від нього, що відповідає коливанням навколо нового положення рівноваги. Намалювати графіки розподілу поля зміщень та поля напружень у положенні рівноваги.

Розв'язок

Формальна постановка задачі:

$$\begin{cases} u = u(x,t), \\ u_{tt} = v^2 u_{xx} + g, \\ 0 \le x \le l, t \ge 0 \\ u(0,t) =, \; u_x(l,t) = 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

Шукаємо розв'язок у вигляді:

$$u = u_{\text{ст}}(x) + w(x,t) \tag{5.2}$$

Перепишемо задачу для стаціонарної частини розв'язку

$$\begin{cases} u = u_{\text{ст}}(x), \\ v^2 u_{xx} + g = 0, \\ 0 \le x \le l, t \ge 0 \\ u(0) = 0, \; u_x(l) = 0 \end{cases} \tag{5.3}$$

Рівняння двічі інтегрується і маємо:

$$u_{\text{ст}}(x) = -\frac{gx^2}{2v^2} + C_1 x + C_2, \tag{5.4}$$

а з межових умов визначимо константи інтегрування

$$\begin{aligned} u_{\text{ст}}(0) = C_2 = 0,& \\ (u_{\text{ст}})_x(l) = -\frac{gl}{v^2} + C_1 = 0;& \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0, \quad C_1 = \frac{gl}{v^2} \tag{5.5}$$

Отже, стаціонарний розв'язок

$$u_{\text{ст}}(x) = -\frac{gx^2}{2v^2} + \frac{glx}{v^2} = -\frac{gl^2}{2v^2} \cdot \frac{x^2 - 2lx}{l^2} = -A \cdot \frac{x^2 - 2lx}{l^2} \tag{5.6}$$

Тепер необхідно записати задачу для нестаціонарної частини $w(x,t)$ Рівняння:

$$u_{tt} = v^2 u_{xx} + g \ \Rightarrow \ w_{tt} = v^2 w_{xx} - v^2 \frac{gl^2}{2v^2} \frac{2}{l^2} + g = v^2 w_{xx}$$

Межові умови:

$$\begin{aligned} u(0,t) = -\frac{gl^2}{2v^2} \cdot \frac{x^2 - 2lx}{l^2}\bigg|_{x=0} + w(l,t) = 0,& \\ u_x(l,t) = -\frac{gl^2}{v^2} \cdot \frac{x - l}{l^2}\bigg|_{x=l} + w_x(l,t) = 0& \end{aligned} \ \Rightarrow \ w(0,t) = 0, \ w_x(l,t) = 0$$

Початкові умови:

$$u(x,0) = -A \cdot \frac{x^2 - 2lx}{l^2} + w(x,t) = 0 \ \Rightarrow \ w(x,0) = A \cdot \frac{x^2 - 2lx}{l^2}$$

$$u_t(x,0) = 0 \ \Rightarrow \ w_t(x,0) = 0$$

Отже, отримуємо задачу для $w(x,t)$ з однорідними межовими умова, але з неоднорідними рівнянням та початковими умовами.

$$\begin{cases} w = w(x,t), \\ w_{tt} = v^2 w_{xx}, \\ 0 \le x \le l, t \ge 0 \\ w(0,t) = 0, \ w_x(l,t) = 0, \\ w(x,0) = A \cdot \dfrac{x^2 - 2lx}{l^2}, \\ w_t(x,0) = 0. \end{cases} \tag{5.7}$$

Розв'язок такої задачі був знайдений раніше (див. задачу 1.2):

$$\begin{aligned}
&w(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \big(A_n \sin\omega_n t + B_n \cos\omega_n t\big) \sin k_n x, \\
&k_n = \frac{\pi}{l}(n+1/2) \text{ – хвильове число}, \\
&\omega_n = v k_n \text{ – частота коливання}, \\
&n = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Залишається визначити коефіцієнти A_n та B_n з початкових умов:

$$w_t(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\omega_n \sin k_n x = 0 \;\Rightarrow\; A_n = 0,\, \forall n$$

$$w_t(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin k_n x = A\cdot\frac{x^2-2lx}{l^2} \;\Rightarrow\; B_n = \frac{2A}{l^3}\int\limits_0^l (x^2-2lx)\sin k_n x \,\mathrm{d}x$$

Обчислимо отриманий інтеграл

$$\int\limits_0^l (x^2-2lx)\sin k_n x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k_n}(x^2-2lx)\cos k_n x\Big|_0^l -$$

$$-\frac{2}{k_n}\int\limits_0^l (x-l)\cos k_n x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{k_n^2}\left[(x-l)\sin k_n x\Big|_0^l - \int\limits_0^l \sin k_n x\,\mathrm{d}x\right] =$$

$$= \frac{2}{k_n^3}\big(\cos k_n l - \cos 0\big) = \Big|\cos k_n l = 0\Big| = -\frac{2}{k_n^3}$$

Прим.: *можна було спростити інтегрування, зсунувши межі інтегрування на $-l/2$, адже тоді можна скористатися тим фактом, що непарна підінтегральна функція по симетричним межам дає нуль*

Отже, розв'язок

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= -A\cdot\frac{x^2-2lx}{l^2} - 4A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\omega_n t\sin k_n x}{l^3k_n^3} = \\
&= -A\left(\frac{x^2-2lx}{l^2} + 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\omega_n t\sin k_n x}{(lk_n)^3}\right)
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Задача № 5.3

У стержні довжиною l з непроникною бічною поверхнею відбувається дифузія частинок (коефіцієнт дифузії D), що мають час життя τ. Через правий кінець всередину стержня подається постійний

потік частинок I_0. Знайти стаціонарний розподіл концентрації та розв'язок, що задовольняє нульову початкову умову, якщо через лівий кінець частинки вільно виходять назовні й назад не вертаються. Знайти вигляд стаціонарного розв'язку в граничних випадках великих і малих τ та нарисувати графіки. *Указівка. Рівняння дифузії частинок зі скінченним часом життя має вигляд: $u_t = Du_{xx} - \frac{1}{\tau}u$. Його зручно переписати через так звану довжину дифузійного зміщення $L = \sqrt{D\tau}$:*

$$\tau u_t = L^2 u_{xx} - u.$$

Величина L має смисл характерної відстані, на яку частинки встигають зміститися (в середньому) за час свого життя. «Великі» й «малі» τ означають у дійсності $L \gg l$ і $L \ll l$ відповідно. Останній випадок фактично означає перехід до наближення півнескінченного стержня $-\infty < x \leq l$.

Розв'язок

Формальна постановка задачі:

$$\begin{cases} u = u(x,t), \\ \tau u_t = L^2 u_{xx} - u, \\ 0 \leq x \leq l, t \geq 0, \\ u(x,0) = 0, \\ u(0,t) = 0, \\ u_x(l,t) = I_0. \end{cases} \tag{5.10}$$

Спочатку спробуємо знайти неоднорідну частину розв'язку $u_{\text{неодн}}$, яка задовільнить рівняння і межові умови (але не обов'язково задовільнятиме початкові). Шукатимемо її методом підбору. Оскільки межові умови не залежать від часу, то намагатимемося знайти його у вигляді функції $f(x)$ лише від x. Підставляючи такий вигляд неоднорідного розв'язку у рівняння, отримуємо:

$$L^2 \frac{d^2 f}{dx^2} - f = 0$$

Звідси маємо $u_{\text{неодн}} = f(x) = C_1 \sinh\left(\frac{x}{L}\right) + C_2 \cosh\left(\frac{x}{L}\right)$. Підставляючи отриманий розв'язок у межову умову на лівому боці, отримуємо, що $C_2 = 0$. Підставляючи його тепер в умову на правому боці, $C_1 = \frac{I_0 L}{\cosh\left(\frac{l}{L}\right)}$. Остаточно маємо:

$$u_{\text{неодн}} = \frac{I_0 L \sinh\left(\frac{x}{L}\right)}{\cosh\left(\frac{l}{L}\right)} \tag{5.11}$$

Далі шукаємо поний розв'язок у вигляді $u = u_{\text{неодн}} + u_{\text{одн}}$. Підставивши u в задачу (5.1) і отримаємо однорідну задачу на $u_{\text{одн}}$:

$$
\begin{cases}
u_{\text{одн}} = u_{\text{одн}}(x,t),\\
\tau(u_{\text{одн}})_t = L^2(u_{\text{одн}})_{xx} - u_{\text{одн}},\\
u_{\text{одн}}(x,0) = -\dfrac{I_0 L \sinh\left(\frac{x}{L}\right)}{\cosh\left(\frac{l}{L}\right)},\\
u_{\text{одн}}(0,t) = 0,\\
(u_{\text{одн}})_x(l,t) = 0.
\end{cases}
$$

Перш ніж розділити змінні, спростимо рівняння класичним прийомом, який непогано було б запам'ятати. Якщо ми маємо рівння типу

$$
U_t = DU_{xx} + aU \tag{5.12}
$$

з однорідними межовими умовами, то підстановка $U = u\exp(at)$ перетворить його рівняння на $u_t = Du_{xx}$, а межові та початкові умови для u будуть такими самими як були на U.

Тепер використаємо цей прийом. Підставимо $u_{\text{одн}} = \tilde{u}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ та отримаэмо задачу на $\tilde{u}$:

$$
\begin{cases}
\tilde{u} = \tilde{u}(x,t),\\
\tilde{u}_t = D\tilde{u}_{xx},\\
0 \le x \le l, t \ge 0,\\
\tilde{u}(x,0) = -\dfrac{I_0 L \sinh\left(\frac{x}{L}\right)}{\cosh\left(\frac{l}{L}\right)},\\
\tilde{u}(0,t) = 0,\\
\tilde{u}_x(l,t) = 0.
\end{cases} \tag{5.13}
$$

А такі задачі ми вже добре вміємо розв'язувати. Потрібно знайти розв'язки наступного вигляду:

$$
\tilde{u}(x,t) = X(x)\cdot T(t) \neq 0 \tag{5.14}
$$

Після підстановки відокремлення змінних (див. задачу 1.1) маємо:

$$
\frac{\dot{T}}{DT} = \frac{X''}{X} = -\lambda \tag{5.15}
$$

Отримуємо задачу Штурма-Ліувіля на $X(x)$ яка розв'язана у домашній задачі №1,2 з посібника. Випишемо результат:

$$\begin{cases} \lambda_n = \dfrac{\pi^2(2n-1)^2}{4l^2} - \text{власні числа,} \\ k_n = \dfrac{\pi(2n-1)}{2l} - \text{власні хвильові вектори,} \\ \text{де } n \in \mathbb{N}, \\ X_n(x) = \sin k_n x - \text{власні функції.} \end{cases} \tag{5.16}$$

Оскільки всі власні числа додатні, то після підстановки $\tilde{u}$ в $u_{одн}$ показники часових експонент не зможуть скомпенсуватися, адже будуть одного знаку, отже $u_{одн}$ є залежним від часу і виділити незалежну частину неможливо. А це означає, що знайдене раніше $u_{неодн}$ і є шуканим стаціонарним розв'язком задачі.

Тепер розв'яжемо рівняння на $T_n(t)$:

$$\begin{cases} \dot{T}_n + \lambda_n D T_n = 0, \\ \dfrac{1}{\tau_n} = D\lambda_n - \text{власний характерний час,} \\ T_n = C_n \exp\left(-\dfrac{t}{\tau_n}\right). \end{cases} \tag{5.17}$$

Збираючи по отриманим функціям $T(t)$ і $X(x)$ власні функції задачі й просумувавши їх, отримуємо загальний розв'язок:

$$\tilde{u}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp\left(-\frac{t}{\tau_n}\right) \sin(k_n x) \tag{5.18}$$

Тепер підставимо (5.18) у початкові умови:

$$\tilde{u}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(k_n x) = -\frac{I_0 L \sinh\left(\frac{x}{L}\right)}{\cosh\left(\frac{l}{L}\right)} \tag{5.19}$$

Ліва сторона рівності є розкладом Фур'є правої сторони по синусах. Знайдемо коефіцієнти цього розкладу:

$$C_n \int_0^l (\sin(k_n x))^2 \, dx = \frac{lC_n}{2} = -\frac{I_0 L}{\cosh\left(\frac{l}{L}\right)} \int_0^l \sinh\left(\frac{x}{L}\right) \sin(k_n x) \, dx =$$

$$= [\cos(k_n l) = (-1)^n] = -\frac{I_0 L}{\cosh\left(\frac{l}{L}\right)} \frac{4l^2 L(-1)^{n+1} \cosh\left(\frac{l}{L}\right)}{4l^2 + \pi^2 L^2 (2n-1)^2} = \frac{L^2 I_0 (-1)^n}{1 + L^2 \lambda_n}.$$

Підставляючи отримані коефіцієнти у (5.19), а його у $u_{\text{одн}}$ і сумуючи з $u_{\text{неодн}}$, отримуємо відповідь:

$$u(x,t) = \frac{I_0 L \sinh\left(\frac{x}{L}\right)}{\cosh\left(\frac{l}{L}\right)} + \frac{2L^2 I_0}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L^2 I_0 (-1)^n}{1 + L^2 \lambda_n} \exp\left(-\left(\frac{t}{\tau_n} + \frac{t}{\tau}\right)\right) \sin\left(k_n x\right)$$

Заняття 6

Задачі з неоднорідним рівнянням або неоднорідними межовими умовами

Джерела з гармонічною залежністю від часу.

Задача № 6.1

Знайти коливання струни $0 \leq x \leq l$, лівий кінець якої закріплений, а правий вільний, при $t > 0$ під дією розподіленої сили $f(x,t) = f(x)\cos\omega t$. При $t < 0$ струна перебувала в положенні рівноваги. Розглянути окремий випадок $f(x) = f_0$. Виділити складову розв'язку, яка відповідає усталеним вимушеним коливанням і проаналізувати картину резонансу. Перевірити, чи переходить одержаний розв'язок у розв'язок задачі 5.1 за відповідних умов.

Розв'язок

Спершу розберемося з розмірностями. Під розподіленою силою слід розуміти величину $\vec{f} = \frac{\Delta\vec{F}}{\Delta m} = \frac{d\vec{F}}{dV}\nu$, де $\nu = \frac{1}{\rho}$ - питомий об'єм.

Формальна постановка задачі:

$$\begin{cases} u = u(x,t), \\ 0 \leq x \leq l, t \geq 0, \\ u_{tt} = v^2 u_{xx} + f(x,t), \\ f(x,t) = f(x)\cos\omega t \\ \text{окремий випадок:} \quad f(x) = f_0, \\ u(x,0) = 0, \\ u_t(x,0) = 0, \\ u(0,t) = 0, \\ u_x(l,t) = 0. \end{cases} \tag{6.1}$$

Виділимо складову розв'язку $\tilde{u}$, яка відповідає вимушеним коливанням. Шукатимемо її у формі $\tilde{u}(x,t) = \widetilde{X}(x)\cos\omega t$. Після підстановки отримуємо наступну задачу (нам не принципово, щоб вона задовільняла ще й початкові умови):

$$\begin{cases} v^2\widetilde{X}'' + \omega^2\widetilde{X} + f(x) = 0, \\ \widetilde{X}(0) = 0, \\ \widetilde{X}'(l) = 0. \end{cases} \tag{6.2}$$

Найпростішим методом її розв'язання є метод функцій Гріна, який ви вивчали на курсі диференціальних рівнянь. Спочатку знаходимо функцію Гріна $G(x,s)$ до цієї задачі:

1. При $x \neq s$, вона має задовільняти однорідній частині рівняння, тобто

   $$v^2 G'' + \omega^2 G = 0.$$

   Тоді, при вказаних вище умовах, маємо для кожної з областей $(x < s)$ і $(x > s)$:

   $$G(x,s) = C_i(s)\cos\left(\frac{\omega x}{v}\right) + C_j(s)\sin\left(\frac{\omega x}{v}\right),$$

   $$\begin{cases} i = 1,\ j = 2, & x < s; \\ i = 3,\ j = 4, & x > s. \end{cases}$$

2. Вона має задовільняти крайовим умовам.

   $$G(x,s) = C_2(s)\sin\left(\frac{\omega x}{v}\right), \quad x < s$$

   $$G(x,s) = C_3(s)\left(\cos\left(\frac{\omega x}{v}\right) + \sin\left(\frac{\omega x}{v}\right)\tan\left(\frac{\omega l}{v}\right)\right), \quad x > s$$

3. При $x = s$ вона неперервна по x, а її похідна має скачок, що дорівнює оберненій величині до коефіцієнта при другій похідній та залежить від s, замість x. У нашому випадку цей скачок дорівнює $\frac{1}{v^2}$.

   $$C_2(s)\sin\left(\frac{\omega s}{v}\right) = C_3(s)\left(\cos\left(\frac{\omega s}{v}\right) + \sin\left(\frac{\omega s}{v}\right)\tan\left(\frac{\omega l}{v}\right)\right)$$

   $$C_2(s)\cos\left(\frac{\omega s}{v}\right) + \frac{1}{v\omega} = C_3(s)\left(\cos\left(\frac{\omega s}{v}\right)\tan\left(\frac{\omega l}{v}\right) - \sin\left(\frac{\omega s}{v}\right)\right)$$

   Після спрощень отримуємо:

   $$C_3 = -\frac{\sin\left(\frac{\omega s}{v}\right)}{v\omega}$$

$$C_2 = -\frac{\cos\left(\frac{\omega(s-l)}{v}\right)}{v\omega\cos\left(\frac{\omega l}{v}\right)}$$

$$G(x,s) = -\frac{\cos\left(\frac{\omega(s-l)}{v}\right)}{v\omega\cos\left(\frac{\omega l}{v}\right)}\sin\left(\frac{\omega x}{v}\right), \quad x < s$$

$$G(x,s) = -\frac{\cos\left(\frac{\omega(x-l)}{v}\right)}{v\omega\cos\left(\frac{\omega l}{v}\right)}\sin\left(\frac{\omega s}{v}\right), \quad x > s$$

Звідси отримуємо просторову складову, що відповідає усталеним коливанням, для загальної функції f:

$$\tilde{u} = \int_0^x \frac{\cos\left(\frac{\omega(x-l)}{v}\right)\sin\left(\frac{\omega s}{v}\right)f(s)}{v\omega\cos\left(\frac{\omega l}{v}\right)}ds + \int_x^l \frac{\cos\left(\frac{\omega(s-l)}{v}\right)\sin\left(\frac{\omega x}{v}\right)f(s)}{v\omega\cos\left(\frac{\omega l}{v}\right)}ds \tag{6.3}$$

Підставивши у (6.3) окремий випадок і виконавши інтегрування, отримаємо:

$$\tilde{u} = \frac{f_0\cos(\omega t)}{\omega^2}\left(\frac{\cos\left(\frac{\omega(x-l)}{v}\right)}{\cos\left(\frac{\omega l}{v}\right)} - 1\right) \tag{6.4}$$

Повний розв'язок є комбінацією однорідної u_0 і вимушеної $\tilde{u}$ частини: $u = u_0+\tilde{u}$. Задача на u_0 отримується підстановкою цієї комбінації у (6.1) і виглядає наступним чином:

$$\begin{cases} u_0 = u_0(x,t), \\ 0 \le x \le l, t \ge 0, \\ (u_0)_{tt} = v^2(u_0)_{xx}, \\ u_0(0,t) = 0, (u_0)_x(l,t) = 0, \\ u_0(x,0) = -\tilde{u}(x,0), \\ (u_0)_t(x,0) = 0. \end{cases} \tag{6.5}$$

Маємо просту задачу на хвильове рівняння з початковими умовами. Пошук власних мод для таких крайових умов вже виконаний у домашній задачі №1,2. Випишемо результат:

$$\begin{cases} \lambda_n = \dfrac{\pi^2(2n-1)^2}{4l^2} - \text{власні числа}, \\ k_n = \dfrac{\pi(2n-1)}{2l} - \text{власні хвильові вектори}, \\ \omega_n = vk_n - \text{власні частоти}, \\ \text{де } n \in \mathbb{N}, \\ (u_0)_n = (A_n\sin\omega_n t + B_n\cos\omega_n t)\sin k_n x - \text{власні моди}. \end{cases}$$

Одразу можемо побачити, що оскільки початковий розподіл швидкостей нульовий, то $\forall n \in \mathbb{N}, A_n = 0$. Тоді однорідна частина розв'язку матиме вигляд:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \omega_n t \sin k_n x \tag{6.6}$$

Залишається підставити (6.10) в умову на початкове зміщення:

$$u_0(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin k_n x = -\tilde{u} = \frac{f_0}{\omega^2}\left(1 - \frac{\cos\left(\frac{\omega(x-l)}{v}\right)}{\cos\left(\frac{\omega l}{v}\right)}\right) \tag{6.7}$$

Коефіцієнти B_n для просторового розподілу сили загального вигляду знаходяться наступним чином:

$$B_n = -\frac{2}{l}\int\limits_0^l \tilde{u} \sin k_n x \, dx \tag{6.8}$$

І після всіх підстановок загальна задача буде розв'язана. Знайдемо ці коефіцієнти для окремого випадку:

$$B_n = \frac{2f_0}{l\omega^2}\int_0^l \left(1 - \frac{\cos\left(\frac{\omega(x-l)}{v}\right)}{\cos\left(\frac{\omega l}{v}\right)}\right) \sin(k_n x) dx = \frac{2f_0}{l\omega^2}\left(\frac{1}{k_n} - \frac{k_n}{k_n^2 - \left(\frac{\omega}{v}\right)^2}\right) = \\ = -\frac{2f_0}{lk_n\left(\omega_n^2 - \omega^2\right)} \tag{6.9}$$

Повний розв'язок задачі матиме вигляд:

$$u = \tilde{u}\cos\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \omega_n t \sin k_n x \tag{6.10}$$

Для окремого випадку:

$$u = \frac{f_0}{\omega^2}\left(\frac{\cos\left(\frac{\omega(x-l)}{v}\right)}{\cos\left(\frac{\omega l}{v}\right)} - 1\right)\cos\omega t - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2f_0}{lk_n\left(\omega_n^2 - \omega^2\right)} \cos \omega_n t \sin k_n x \tag{6.11}$$

Добре видно, що при наближенні частоти ω, з якою діє сила, до власної частоти ω_n, амплітуда відповідної власної моди нескінченно зростатиме. Це явище відповідає визначенню резонансу.

Тепер спрямуємо ω до 0. При цьому вимушений розв'язок матиме вигляд:

$$\frac{f_0}{\omega^2}\left(\frac{\cos\left(\frac{\omega(x-l)}{v}\right)}{\cos\left(\frac{\omega l}{v}\right)}-1\right)\cos\omega t=\left[\cos\left(\frac{\omega(x-l)}{v}\right)=1-\frac{\omega^2(x-l)^2}{v^2}+O(\omega^4)\right]=$$
$$\frac{f_0\left(1-\frac{\omega^2(x-l)^2}{v^2}-1+\frac{\omega^2l^2}{v^2}+O(\omega^4)\right)}{\omega^2-\frac{\omega^4l^2}{v^2}+O(\omega^6)}=\frac{f_0\left(2xl-x^2+O(\omega^2)\right)}{v^2(1+O(\omega^2))}.$$

І повний розв'язок матиме вигляд:

$$u=\frac{f_0\left(2xl-x^2\right)}{v^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2f_0}{lk_n\omega_n^2}\cos(\omega_n t)\sin(k_n x) \tag{6.12}$$

Що повністю відповідає розв'язку (**??**) задачі №5,1.

Метод розкладання по власних функціях в задачах з неоднорідним рівнянням

Задача № 6.3

Знайти коливання струни із закріпленими кінцями під дією сили $f(x,t)=f_0t^N$, $N>0$ однорідно розподіленої по довжині струни. У початковий момент струна нерухома, і зміщення дорівнює нулю. Остаточні обчислення виконати для $N=2$.

Заняття 7

Задачі з неоднорідними межовими умовами загального вигляду

Задача № 7.1

Знайти коливання пружного стержня, якщо правий кінець його закріплений нерухомо, до лівого при $t > 0$ прикладена сила $F(t)$, а шляхом зведення до задачі з неоднорідним рівнянням. Відповідь одержати для частинного випадку $F(t) = F_0 e^{-\alpha t}$. При $t < 0$ стержень перебував у положенні рівноваги.

Розв'язок

Формальна постановка задачі:

$$\begin{cases} u = u(x,t), \\ u_{tt} = v^2 u_{xx}, \\ 0 \le x \le l, t \ge 0 \\ u_x(0,t) = \dfrac{F_0}{\beta} e^{-\alpha t},\ u(l,t) = 0, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0. \end{cases} \tag{7.1}$$

Шукаємо розв'язок у вигляді:

$$u(x,t) = w(x,t) + \mathcal{V}(x,t), \tag{7.2}$$

де $w(x,t)$ – задовольняє межовим умовам, а $\mathcal{V}(x,t)$ – довільна функція.

Найпростішим видом функції $w(x,t)$ буде:

$$w(x,t) = \frac{F_0}{\beta} e^{-\alpha t}(x-l) = f_0 e^{-\alpha t}(x-l) \tag{7.3}$$

Перевіримо виконання межових умов

$$w_x(0,t) = f_0 e^{-\alpha t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x-l) = f_0 e^{-\alpha t}, \quad w(l,t) = f_0 e^{-\alpha t}(l-l) = 0$$

Виконаємо перетворення рівняння та початкових умов і перепишемо задачу для функції $v(x,t)$.
Рівняння:

$$u_{tt} = v^2 u_{xx} \;\Rightarrow\; \mathcal{V}_{tt} + \alpha^2 f_0 e^{-\alpha t}(x-l) = v^2 \mathcal{V}_{xx}$$

Межові умови:

$$u_x(0,t) = f_0 e^{-\alpha t},\, u(l,t) = 0 \;\Rightarrow\; \mathcal{V}_x(0,t) = 0\, \mathcal{V}(l,t) = 0$$

Початкові умови:

$$u(x,0) = f_0(x-l) + \mathcal{V}(x,0) = 0 \;\Rightarrow\; \mathcal{V}(x,0) = -f_0(x-l)$$

$$u_t(x,0) = -\alpha f_0(x-l) + \mathcal{V}_t(x,0) = 0 \;\Rightarrow\; \mathcal{V}_t(x,0) = \alpha f_0(x-l)$$

Отже, отримуємо задачу для $\mathcal{V}(x,t)$ з однорідними межовими умова, але з неоднорідними рівнянням та початковими умовами.

$$\begin{cases} \mathcal{V} = \mathcal{V}(x,t), \\ \mathcal{V}_{tt} - v^2 \mathcal{V}_{xx} = -\alpha^2 f_0 e^{-\alpha t}(x-l), \\ 0 \le x \le l, t \ge 0 \\ \mathcal{V}_x(0,t) = 0,\, \mathcal{V}(l,t) = 0, \\ \mathcal{V}(x,0) = -f_0(x-l), \\ \mathcal{V}_t(x,0) = \alpha f_0(x-l). \end{cases} \tag{7.4}$$

Розв'язок шукаємо у вигдялі:

$$\mathcal{V}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{\mathcal{V}}_n(t) \cos k_n x, \tag{7.5}$$

де $k_n = \frac{\pi}{l}(n + 1/2)$ – хвильове число.

Зрозуміло, що це розклад шуканої функції по власних функціях системи (див. ров'язок відповідної задачі Штурма-Ліувілля в задачі 1.3). По цій же системі функцій треба розкласти неоднорідність рівняння.

$$(x-l) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos k_n x$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l (\xi - l) \cos k_n \xi \, \mathrm{d}\xi = \frac{2}{l} \Bigg[\overbrace{\frac{\xi}{k_n} \sin k_n \xi \Bigg|_0^l}^{=0} - \frac{1}{k_n} \int_0^l \sin k_n \xi \, \mathrm{d}\xi -$$

$$
-\overbrace{\frac{l}{k_n}\sin k_n\xi\Big|_0^l}^{=0}\Bigg] = -\frac{2}{k_n l}\int\limits_0^l \sin k_n\xi\,\mathrm{d}\xi = \frac{2}{k_n^2 l}\cos k_n\xi\Big|_0^l = -\frac{2}{k_n^2 l} \Rightarrow
$$
$$
\Rightarrow (x-l) = -\frac{2}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos k_n x}{k_n^2} \tag{7.6}
$$

Отже, маємо

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{\mathcal{V}}_n''\cos k_n x + v^2\sum_{n=0}^{\infty}k_n^2\widetilde{\mathcal{V}}_n\cos k_n x = \frac{2\alpha^2}{l}f_0 e^{-\alpha t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos k_n x}{k_n^2} \Rightarrow
$$
$$
\Rightarrow \widetilde{\mathcal{V}}_n'' + v^2 k_n^2\widetilde{\mathcal{V}}_n = \frac{2\alpha^2 f_0}{lk_n^2}e^{-\alpha t} \Rightarrow \widetilde{\mathcal{V}}_n'' + \omega_n^2\widetilde{\mathcal{V}}_n = \kappa_n\alpha^2 e^{-\alpha t}, \tag{7.7}
$$

де $\kappa_n = \frac{2f_0}{lk_n^2}$ – розмірна константа $\big[\kappa_n\big] = \big[\text{м}\big]$

Розв'яжемо отримане лінійне неожнорідне рівняння. Його розв'язок шукатимето у вигляді:

$$
\widetilde{\mathcal{V}}_n(t) = A_n\sin\omega_n t + B_n\cos\omega_n t + \widetilde{\mathcal{V}}_{\text{неод}}(t) \tag{7.8}
$$

За умови $\alpha \neq \pm i\omega_n$ (що виконується завжди, бо $\alpha \in \mathbb{R}$), доданок, відповідний неоднорідності, можемо записати у вигляді:

$$
\widetilde{\mathcal{V}}_{\text{неод}}(t) = \gamma e^{-\alpha t}
$$

Нам залишаться визначити константу γ, для цього підставимо "вгаданий" розв'язок в рівняння.

$$
(\gamma e^{-\alpha t})'' + \omega_n^2\gamma e^{-\alpha t} = \kappa_n\alpha^2 e^{-\alpha t} \Rightarrow \gamma(\alpha^2+\omega_n^2) = \kappa_n\alpha^2 \Rightarrow \gamma = \frac{\kappa_n\alpha^2}{(\omega_n^2+\alpha^2)}
$$

Отже, загальний розв'язок рівняння

$$
\widetilde{\mathcal{V}}_n(t) = A_n\sin\omega_n t + B_n\cos\omega_n t + \frac{\kappa_n\alpha^2}{(\omega_n^2+\alpha^2)}e^{-\alpha t} \tag{7.9}
$$

Ми вже розкладали неоднорідність в рівнянні по власним функціям системи, таким же шляхом треба розкласти початкові умови задачі (7.4). Нам треба знову ж розкласти функцію $x-l$, тому можемо скористатися готовим результатом (7.6).

$$
\begin{array}{l} \mathcal{V}(x,0) = -f_0(x-l), \\ \mathcal{V}_t(x,0) = \alpha f_0(x-l). \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \widetilde{\mathcal{V}}_n(0) = 2f_0/lk_n^2 = \kappa_n, \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widetilde{\mathcal{V}}_n(0) = -2\alpha f_0/lk_n^2 = -\kappa_n\alpha. \end{array} \tag{7.10}
$$

З отриманих початковими умовами для n-их коефіцієнтів розкладу в ряд за власними функціями системи визначемо константи A_n та B_n в розв'язку (7.9).

$$\widetilde{\mathcal{V}}_n(0) = B_n + \frac{\kappa_n \alpha^2}{(\omega_n^2 + \alpha^2)} = \kappa_n \;\Rightarrow\; B_n = \kappa_n - \frac{\kappa_n \alpha^2}{\omega_n^2 + \alpha^2} = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 + \alpha^2}\kappa_n$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widetilde{\mathcal{V}}_n(0) = A_n \omega_n - \frac{\kappa_n \alpha^3}{(\omega_n^2 + \alpha^2)} = -\kappa_n \alpha \;\Rightarrow\; A_n = -\frac{\alpha \omega_n}{\omega_n^2 + \alpha^2}\kappa_n$$

Підставляємо в розв'язок

$$\widetilde{\mathcal{V}}_n(t) = \frac{\kappa_n}{(\omega_n^2 + \alpha^2)}\left(\omega_n^2 \cos\omega_n t - \alpha\omega_n \sin\omega_n t + \alpha^2 e^{-\alpha t}\right) \tag{7.11}$$

Тепер запишемо вид функції $\mathcal{V}(x,t)$

$$\mathcal{V}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\kappa_n}{(\omega_n^2 + \alpha^2)}\left(\omega_n^2 \cos\omega_n t - \alpha\omega_n \sin\omega_n t + \alpha^2 e^{-\alpha t}\right)\cos k_n x \tag{7.12}$$

І повний розв'язок задачі

$$u(x,t) = f_0 e^{-\alpha t}(x-l) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\kappa_n \cos k_n x}{(\omega_n^2 + \alpha^2)}\left(\omega_n^2 \cos\omega_n t - \alpha\omega_n \sin\omega_n t + \alpha^2 e^{-\alpha t}\right) \tag{7.13}$$

Задача № 7.2

Розв'язати задачу №7.1 методом розкладання по власних функціях.

Тема III:

??

Тема IV:

РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА І ПУАССОНА.