Заняття 10

Приведення лінійних рівнянь у частинних похідних 2-го порядку з двома змінними до заданого вигляду

Задача № 10.8

Привести рівняння $u_{tt} = v^2\big(u_{rr} + (2/r)u_r\big) + cu$ *до самоспряженого вигляду:*

$$\rho(r)u_{tt} = \frac{\partial}{\partial r}\left(k(r)\frac{\partial u}{\partial r}\right) - q(r)u.$$

Розв'язок

Запишемо рівняння, розкриваючи дужки

$$u_{tt} = v^2 u_{rr} + \frac{2v^2}{r}u_r + cu \tag{10.1}$$

Домножимо його на довільну функцію $\rho(r)$, яку ми визначимо далі

$$\rho(r)u_{tt} = v^2\rho(r)u_{rr} + \frac{2v^2\rho(r)}{r}u_r + c\rho(r)u$$

Порівнюючи його з рівнянням у самоспряженому вигляді, позначимо

$$k(r) = v^2\rho(r), \quad k'(r) = \frac{2v^2\rho(r)}{r}, \quad q(r) = -c\rho(r).$$

Ми отримали вирази для функції $k(r)$ та її похідної. Звідси і знайдемо рівняння для $\rho(r)$: диференцюємо вираз для $k(r)$ і прирівнюємо до $k'(r)$.

$$\big(v^2\rho(r)\big)' = \frac{2v^2\rho(r)}{r} \tag{10.2}$$

Розв'яжемо отримане рівняння

$$\rho'(r) = \frac{2\rho(r)}{r} \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = \frac{2\mathrm{d}r}{r} \;\Rightarrow\; \ln\rho = 2\ln r + \ln K = \ln(Kr^2) \;\Rightarrow\; \rho(r) = Kr^2$$

Оскільки на $\rho(r)$ ми домножили все рівняння і враховуючи, що рівняння є однорідним, то можна покласти $K = 1$.

Маємо вихідне рівняння (10.1) в самоспряженому вигляді:

$$r^2 u_{tt} = \frac{\partial}{\partial r}\left(v^2 r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + c r^2 u \tag{10.3}$$