Розділ 1

ЗАСТОСУВАННЯ ПРОЦЕДУРИ ФУР'Є БЕЗПОСЕРЕДНЬОГО ВІДОКРЕМЛЕННЯ ЗМІННИХ

1.1 Власні моди інших систем. Вільні коливання для заданих початкових умов.

1.1.1 Стержень з вільними та пружно закріпленими кінцями; системи, описувані іншими рівняннями.

Задача №1

Знайти власні моди повздовжніх рухів тонкого стержня $0 \leq x \leq l$ *із вільними кінцями (задача для хвильового рівняння з межовими умовами* $u_x(0,t) = 0, u_x(l,t) = 0$*).*
Результат перевірити аналітично й графічно (див. заняття №6, зразок модульної контрольної роботи №1) та проаналізувати його фізичний смисл. Чим відрізняється від інших основна (нульова) мода? Якому рухові стержня вона відповідає?

1.1.2 Вільні коливання поля в резонаторі для заданих початкових умов. Ряд Фур'є по системі ортогональних функцій.

Задача №3

Знайти коливання струни завдовжки $0 \leq x \leq l$ *із закріпленими кінцями, якщо початкове відхил є* $\varphi(x) = hx/l$*, а початкова швидкість* $\psi(x) = \nu_0$*. Обчислити інтеграл ортогональності власних функцій і знайти квадрат норми. Чи є рух струни періодичним (тобто повторюється початковий стан струни через деякий проміжок часу?) Чи буде рух періодичним, якщо він описується рівнянням* $u_{tt} = v^2 u_{xx} - \omega_0^2 u$

Розв'язок

Формальна постановка задачі:

$$\begin{cases} u = u(x,t), \\ u_{tt} = v^2 u_{xx}, \\ 0 \le x \le l, t \in \mathbb{R}, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \\ \left.\begin{aligned} u(x,0) = \varphi(x) = \frac{hx}{l}, \\ u_t(x,0) = \psi(x) = \nu_0. \end{aligned}\right\} - \begin{aligned}&\text{початкові умови задають} \\ &\text{механічний стан} \\ &\text{системи при } t = 0\end{aligned} \end{cases} \tag{1.1}$$

Задача з заданими початковими умовами має єдиний розв'язок. Скористаємося результатами задачі 1 попереднього заняття (**??**).

$$\begin{cases} u_n(x,t) = [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] \sin(k_n x), \\ k_n = \dfrac{\pi n}{l}, \ n = 1, 2, \dots \\ \omega_n = v k_n = \dfrac{v \pi n}{l} - \text{ власні частоти.} \end{cases}$$

Запишемо загальний розв'язок задачі:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] \sin(k_n x) \tag{1.2}$$

Коефіцієнти A_n та B_n визначаємо із початкових умов. Підставляємо (1.2) в початкові умови (1.1):

$$\begin{aligned} &u(x,0) = \varphi(x) \ \Rightarrow \ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x) = \varphi(x) \\ &u_t(x,0) = \psi(x) \ \Rightarrow \\ &\qquad \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} \ [-A_n \omega_n \sin(\omega_n t) + B_n \omega_n \cos(\omega_n t)] \sin(k_n x)) \right|_{t=0} = \\ &\qquad\qquad = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \omega_n \sin(k_n x) = \psi(x) \end{aligned} \tag{1.3}$$

Отже, ми отримали дві умови для визначення A_n, B_n.
Далі скористаємося ортогональністю власних функцій задачі Штурма-Ліувілля.

$$\int_0^l X_n(x) \cdot X_m(x) \, \mathrm{d}x = ||X_n||^2 \delta_{n,m}, \tag{1.4}$$

де $||X_n||$ – норма власної функції.

Доможуємо отримані вирази в (1.3) на m-ту власну функції $\sin(k_m x)$ та інтегруємо від 0 до l.

$$\int\limits_0^l \varphi(x)\sin(k_m x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int\limits_0^l \sin(k_n x)\sin(k_m x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \frac{l}{2}\delta_{n,m} = \frac{A_m l}{2} \;\Rightarrow\; A_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin(k_n x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2}{l}\int\limits_0^l \frac{hx}{l}\sin(k_n x)\,\mathrm{d}x = \frac{2h}{l^2}\left(-\frac{1}{k_n}x\cos(k_n x)\Big|_0^l + \int\limits_0^l \frac{\cos(k_n x)}{k_n}\,\mathrm{d}t\right) =$$

$$= \left|k_n l = \frac{\pi n}{l}l = \pi n \Rightarrow \sin(k_n l) = 0,\, \cos(k_n l) = (-1)^n\right| =$$

$$= \frac{2h}{l^2}\left(-\frac{l}{k_n}(-1)^n + \frac{\sin(k_n x)}{k_n^2}\Big|_0^l\right) = \frac{2h}{l}\frac{(-1)^{n+1}}{k_n} \equiv A_n$$

$$\int\limits_0^l \psi(x)\sin(k_m x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\omega_n \cdot \frac{l}{2}\delta_{n,m} = \frac{B_m\omega_m l}{2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; B_n = \frac{2}{\omega_n l}\int\limits_0^l \psi(x)\sin(k_n x)\,\mathrm{d}x = \frac{2\nu_0}{\omega_n l}\int\limits_0^l \sin(k_n x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2\nu_0}{k_n\omega_n l}\cos(k_n x)\Big|_l^0 = \frac{2\nu_0}{l}\frac{1-(-1)^n}{k_n\omega_n} \equiv B_n$$

Підставляємо визначені константи в (1.2)

$$u(x,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\nu_0(1-(-1)^n)\frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n} - h(-1)^n\cos(\omega_n t)\right]\frac{\sin(k_n x)}{k_n} \tag{1.5}$$

Перевіримо періодичність розв'язку. Період коливання визначається за відомою формулою

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n},$$

де n - номер власної моди. Підставимо в (1.5) $t = t + T_n$

$$u(x, t+T_n) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\nu_0(1-(-1)^n)\frac{\sin(\omega_n t + \omega_n \cdot \frac{2\pi}{\omega_n})}{\omega_n} - \right.$$
$$\left. -h(-1)^n\cos(\omega_n t + \omega_n \cdot \frac{2\pi}{\omega_n})\right]\frac{\sin(k_n x)}{k_n} =$$
$$= \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\nu_0(1-(-1)^n)\frac{\sin(\omega_n t + 2\pi)}{\omega_n} - h(-1)^n\cos(\omega_n t + 2\pi)\right]\frac{\sin(k_n x)}{k_n} =$$
$$= \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\nu_0(1-(-1)^n)\frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n} - h(-1)^n\cos(\omega_n t)\right]\frac{\sin(k_n x)}{k_n} = u(x,t)$$

Тобто коливання струни буде періодичним.