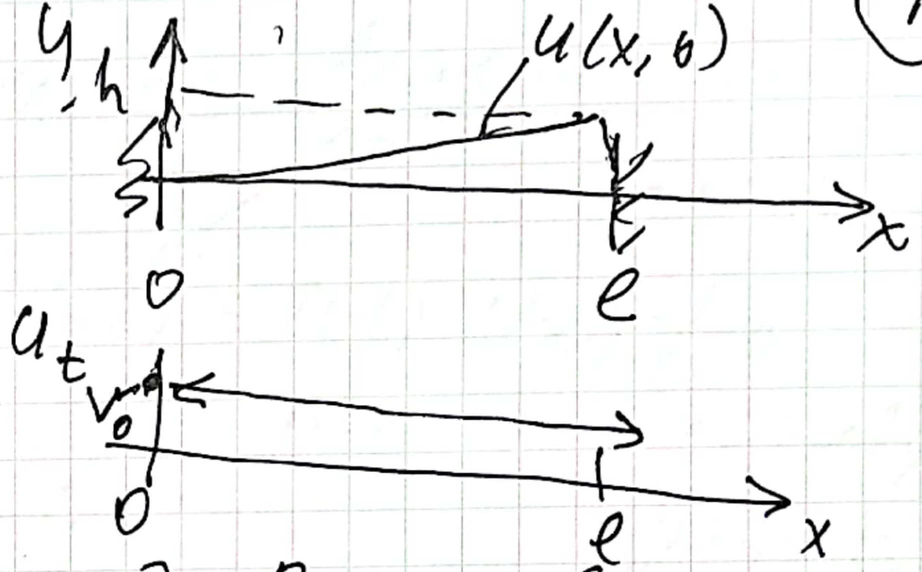
Задача 2.3

$$
\begin{cases}
u = u(x,t) \\
u_{tt} = v^2 u_{xx} \\
0 \le x \le l, \; t \ge 0 \\
u(0,t) = u(l,t) = 0 \\
u(x,0) = h\, x/l = \varphi(x) \\
u_t(x,0) = v_0 = \psi(x)
\end{cases}
$$



$\Big\}$ Початкові умови задають початк. механічний стан при $t = 0$

Задача має єдиний (один) розв'язок!

Розв'язання

1) Розв'язуємо задачу на власні моди =

$= N\ 1.1$

$$\begin{cases} u_{tt} = v^2 u_{xx} \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0 \end{cases} \qquad u(x,t) = T(t)\,X(x) \not\equiv 0$$

р-ки такого вигляду

Беремо результат з № 1.1:

$\sqrt{\lambda_n} = k_n$

$$(1)\ \begin{cases} u_n(x,t) = (A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t)\,\underbrace{\sin\frac{n\pi x}{\ell}}_{X_n(x)\text{ - вл.ф-ї задачі Шт.-Ліув.}} \\ k_n = \sqrt{\lambda_n} = \frac{n\pi}{\ell}, \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

$\omega_n = v k_n = \frac{n\pi v}{\ell}$ - вл. частоти коливань струни

2) ~~Діґ~~ Складаємо загальний розв'язок:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) =$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\omega_n t + B_n\sin\omega_n t\right)X_n(x)$$

3) Шукаємо к-ти A_n, B_n із поч. умов

Підставляємо в П. У.

$$u(x,0)=\cancel{0}\,\varphi(x) \Rightarrow \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x)=\varphi(x)}, (e) \checkmark$$

$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n\omega_n \sin\omega_n t + B_n\omega_n\cos\omega_n t\right)X_n(x)$$

$$u_t(x,0)=\cancel{0}\,\psi(x) \Rightarrow \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n B_n\cdot X_n(x)=\psi(x)} \checkmark$$

Одержали 2 умови для визначення A_n, B_n

Ортогональність вл. ф-цій $X_n(x)$!

$$I_{nm} = \int_0^l X_n(x)\, X_m(x)\, dx = 0, \quad n \neq m$$

Обчислено: (у задачах обчислювати не треба, треба користуватися)

$$I_{nm} = \int_0^l \sin\frac{n\pi x}{l} \sin\frac{m\pi x}{l}\, dx = \ldots = 0$$

Далі інтегал треба порахувати і переконатися, шо він =0
Як шукати к-ти, див. параграф 4, першу половину