0.0.1 Стержень з вільними та пружно закріпленими кінцями; системи, описувані іншими рівняннями.

Задача №1

Знайти власні моди повздовжніх рухів тонкого стержня $0 \leq x \leq l$ *із вільними кінцями (задача для хвильового рівняння з межовими умовами* $u_x(0,t) = 0, u_x(l,t) = 0$*).*
Результат перевірити аналітично й графічно (див. заняття №6, зразок модульної контрольної роботи №1) та проаналізувати його фізичний смисл. Чим відрізняється від інших основна (нульова) мода? Якому рухові стержня вона відповідає?

Розв'язок

Формальна постановка задачі:

$$\begin{cases} u = u(x,t), \\ u_{tt} = v^2 u_{xx}, \\ 0 \leq x \leq l, t \in \mathbb{R} \\ u_x(0,t) = 0, \\ u_x(l,t) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Необхідно знайти розв'язки (1) вигляду:

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) \neq 0 \tag{2}$$

Від задачі №1 попереднього заняття задача відрізняється тільки межовою умовою, тому підставляємо розв'язок у вигляді добутку (2) тільки у межові умови (1):

$$u_x(0,t) = X'(0) \cdot T(t) = 0 \ \Rightarrow \begin{cases} T(t) \neq 0, \forall t, \\ X'(0) = 0; \end{cases}$$
$$u_x(l,t) = X'(l) \cdot T(t) = 0 \ \Rightarrow \begin{cases} T(t) \neq 0, \forall t, \\ X'(l) = 0; \end{cases}$$

Тут ми врахували, що умови на кінцях струни виконуються при всіх t, тому $T(t)$ не може бути рівним нулю.

Виписуємо результат відокремлення змінних:

$$\begin{cases} X = X(x), \\ X'' = -\lambda X, \\ 0 \leq x \leq l, \\ X'(0) = 0, \\ X'(l) = 0. \end{cases} \qquad T'' + \lambda v^2 T = 0 \tag{3}$$

Розв'язуємо задачу Штурма-Ліувілля (3). Знову скористаємося результатами попередньої задачі та одразу запишемо якого типу отримуємо розв'язки для різних λ.

а) Випадок $\lambda < 0$.

$$X(x) = C_1 sh(\sqrt{|\lambda|}x) + C_2 ch(\sqrt{|\lambda|}x)$$

Знаходимо константи з межових умов:

$$X'(0) = C_1\sqrt{|\lambda|} \;\Rightarrow\; X(x) = C_2 \quad ch(\sqrt{|\lambda|}x)$$

$$\begin{cases} X'(l) = C_2\sqrt{|\lambda|} sh(\sqrt{|\lambda|}l) = 0, \\ sh(\sqrt{|\lambda|}l) \neq 0; \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 0; \end{cases}$$

розв'язок тривівльний, немає від'ємних власних значень.

б) Випадок $\lambda = 0$:

$$X(x) = C_1 + C_2 x$$

Знаходимо константи з межових умов:

$$\begin{cases} X'(0) = C_2 = 0, \\ X'(l) = C_2 = 0; \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad X(x) = 0 \text{ – розв'язок нетривівльний,}$$

$$\begin{cases} C_1 \in \mathbb{R}, \\ C_2 = 0; \end{cases} \qquad \lambda = 0 \text{ є власним значенням.}$$

в) Випадок $\lambda > 0$

$$X(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}x)$$

Знаходимо константи з межових умов:

$$\begin{cases} X'(0) = C_1\sqrt{\lambda} = 0, \\ X'(l) = \sqrt{\lambda}\left(\cancelto{0}{C_1}\cos(\sqrt{\lambda}l) - C_2\sin(\sqrt{\lambda}l)\right) = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 \neq 0, \\ \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0; \end{cases}$$

Отже, нетривіальні розв'язки існують при значеннях параметра λ, які задовольняють характеристичне рівняння :

$$\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{\lambda_n}l = \pi n,\, n \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow\; \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}.$$

Випишемо тепер розв'язки для всіх n, поклавши всі констатнти рівними 1, і визначимо, які з них необхідно залишити:

$$\begin{cases} X_0(x) = 1, \\ \lambda_0 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} X_n(x) = \cos\left(\dfrac{\pi n x}{l}\right), \\ \lambda_n = \dfrac{\pi^2 n^2}{l^2}, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

На відміну від задачі 1 з попереднього заняття тут $n = 0$ відповідає нетривіальному розв'язку. Випадок $\lambda > 0$ знову приводить до набору власних функцій занумерованих натуральними числами.
Отже, різним власним функціям відповідають натуральні n та 0.
Власними значеннями і власними функціями є

$$\begin{cases} \lambda_0 = 0, \\ X_0(x) = 1; \\ \lambda_n = \dfrac{\pi^2 n^2}{l^2}, \text{ де } n \in \mathbb{N} \\ X_n(x) = \cos\left(\dfrac{\pi n x}{l}\right), \end{cases} \tag{4}$$

Повертаємося до рівняння для $T(t)$ (3). Підставляємо знайдені власні значення та знаходимо $T_n(t)$:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \\ T'' + \lambda v^2 T = 0, \end{aligned}\right\} \Rightarrow T_n(t) = A\cos(\omega_n t) + B\sin(\omega_n t),$$

де $\omega_n^2 = \lambda_n v^2$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\left.\begin{aligned} \lambda_0 = 0, \\ T'' = 0, \end{aligned}\right\} \Rightarrow T_0(t) = A_0 + B_0 t,$$

Власними модами коливань струни будуть всі розв'язки вигляду:

$$u_n(x,t) = X_n(x) \cdot T_n(t)$$

Виконаємо перепозначення і запишемо остаточний розв'язок:

$$\begin{cases} u_0(x,t) = A_0 + B_0 t, \\ u_n(x,t) = [A_n\cos(\omega_n t) + B_n\sin(\omega_n t)]\sin(k_n x), \\ k_n = \dfrac{\pi n}{l} - \text{ хвильові вектори}, \\ \omega_n = v k_n = \dfrac{v\pi n}{l} - \text{ власні частоти}, \\ n = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{5}$$

Перевірка розв'язку задачі Штурма-Ліувілля

1. Аналітична перевірка

   1) Перевіряємо рівняння:

$$X_0'' = (1)'' = 0 \cdot 1 = 0 \cdot X_0$$
$$X_n'' = -\frac{\pi n}{l}\left(\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\right)' = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 X_n$$

Робимо висновок, що знайдені функції та значення спектрального параметра (4) є власними функціями та відповідно власними значеннями.

2) Перевіряємо межові умови:

$$X'(0) = 0:$$
$$X_0'(0) = 0,$$
$$X_n'(0) = \sin(\sqrt{\lambda_n} \cdot 0) = 0 \text{ – виконується,}$$
причому незалежно від λ_n

$$X'(l) = 0:$$
$$X_0'(l) = 0,$$
$$X_n'(l) = \sin\left(\frac{\pi n}{l} \cdot l\right) = \sin(\pi n) = 0 \text{ – виконується}$$
причому саме для знайдених значень λ_n.

2. Графічна перевірка.
Будуємо графіки кількох перших власних функцій. Масштаб по вертикалі може бути довільним і різним для різних функцій, оскільки значення він не має.

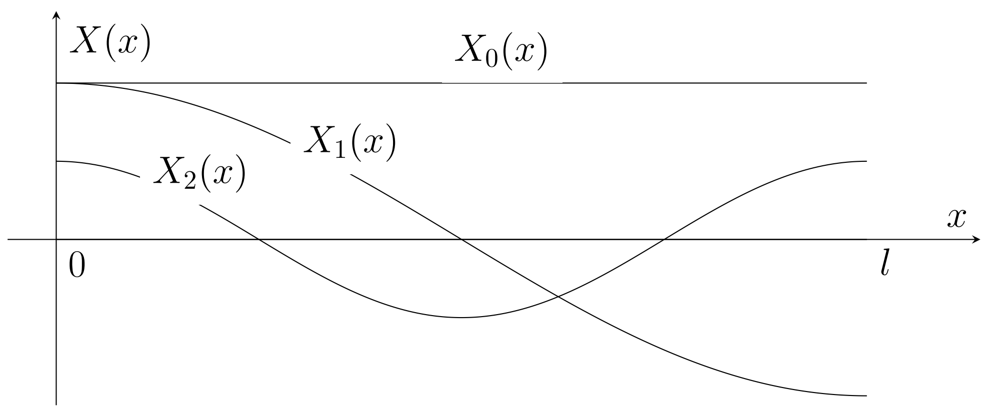

Рис. 1: Графічний розв'язок задачі, наведені три власні функції

У даному випадку основною модою буде функція $X_0(x) = 1$. Вона цікава, бо відмінна від усіх інших мод і описує не коливний рух стержня.
З рисунку бачимо, що межові умови в точках $x = 0$ та $x = l$ задовольняють крайовим умовам (3) на обох кінцях – дотичні в точках $x = 0$ та $x = l$ горизонтальні.

Використовуючи осциляційну теорему, можна переконатися, що ми знайшли основну моду і всі інші розв'язки.

Аналіз результату

Для мод $n = 1, 2, \ldots$ ми знову отримуємо стоячі хвилі, хоча вони менш наочні. Оскільки коливання повздовжнє, то в стержні виникатимуть області, де він стискається і його густина зростає (аналогія для випадку струни – вузли), та області, де він розтягується і відповідно його густина зменшується (пучності). Для основної ж моди характерний не коливальний рух. Їй відповідатиме або стан спокою стержня, або рівномірний прямолінійний рух, що залежить від початкових умов задачі.