Заняття 7

Задачі з неоднорідними межовими умовами загального вигляду

Задача № 7.2

Розв'язати задачу №7.1 методом розкладання по власних функціях.

Розв'язок

Формальна постановка задачі:

$$\begin{cases} u = u(x,t), \\ u_{tt} = v^2 u_{xx}, \\ 0 \le x \le l, t \ge 0 \\ u_x(0,t) = \dfrac{F_0}{\beta} e^{-\alpha t} = f_0 e^{-\alpha t}, \\ u(l,t) = 0, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0. \end{cases} \tag{7.1}$$

Розв'язок шукаємо у вигляді:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) X_n(x), \tag{7.2}$$

де $X_n(x)$ – власні функції задачі. Їх визначаємо, розв'язуючи задачу з однорідними межовими умовами.

$$\begin{cases} u_{tt} = v^2 u_{xx}, \\ u_x(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X''_m + k_m^2 X_m = 0, \\ X'_m(0) = 0,\ X_m(l) = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_m = \dfrac{\pi}{l}(m + 1/2) \text{ – хвильві числа,} \\ X_m(x) = \cos k_m x,\ m = 0, 1, 2 \ldots \end{cases}$$

Розкладемо рівняння по власним функціям. Для цього домножимо його на $X_m / \|X_m\|^2$ та проінтегруємо по x.

$$\frac{1}{\|X_m\|^2}\int\limits_0^l u_{tt}X_m \,\mathrm{d}x = \frac{v^2}{\|X_m\|^2}\int\limits_0^l u_{xx}X_m \,\mathrm{d}x \tag{7.3}$$

Випишемо окремо перетворення для лівої та правої частини рівняня. Почнемо з лівої

$$\frac{1}{\|X_m\|^2}\int\limits_0^l u_{tt}X_m \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{T_n''(t)}{\|X_m\|^2}\int\limits_0^l X_n(x)X_m(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}T_n''(t)\delta_{n,m} = T_m''(t)$$

Тепер розглянемо праву частину рівняння, двічі використаємо інтегрування частинами

$$\frac{1}{\|X_m\|^2}\int\limits_0^l u_{xx}X_m \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{T_n(t)}{\|X_m\|^2}\int\limits_0^l X_n''(x)X_m(x)\,\mathrm{d}x =$$

Випишемо окремо інтегрування під сумою

$$\int\limits_0^l X_n''(x)X_m(x)\,\mathrm{d}x = X_n'(x)X_m(x)\Big|_0^l - \int\limits_0^l X_n'(x)X_m'(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= X_n'(x)X_m(x)\Big|_0^l - X_n(x)X_m'(x)\Big|_0^l + \int\limits_0^l X_n(x)X_m''(x)\,\mathrm{d}x$$

Скористаємося рівнянням для $X_n(x)$:

$$X_n'(x)X_m(x)\Big|_0^l - X_n(x)X_m'(x)\Big|_0^l - k_n^2\int\limits_0^l X_n(x)X_m(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= X_n'(x)X_m(x)\Big|_0^l - X_n(x)X_m'(x)\Big|_0^l - k_n^2\|X_m\|^2\delta_{n,m}$$

І повернемося до початкового виразу та запишемо його через зміщення $u(x,t)$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{T_n(t)}{\|X_m\|^2}\left[X_n'(x)X_m(x)\Big|_0^l - X_n(x)X_m'(x)\Big|_0^l - k_n^2\|X_m\|^2\delta_{n,m}\right] =$$

$$= -k_m^2T_m(t) + \frac{1}{\|X_m\|^2}\left[u_x(x,t)X_m(x)\Big|_0^l - u(x,t)X_m'(x)\Big|_0^l\right] =$$

Скористаємося межовими умовами початкової задачі та задачі Штурма-Ліувілля для власних функцій системи при обчисленні значень отриманих виразів після інтегрування

$$= -k_n^2 T_m(t) + \frac{2}{l}\Big[u_x(l,t)X_m(l) - u_x(0,t)X_m(0) -$$

$$-u(x,l)X_m'(l) + u(x,0)X_m'(0)\Big] = -k_n^2 T_m(t) - \frac{2f_0}{l}e^{-\alpha t},$$

тут для $X_m(x)$ дивимось на межові умови задачі Штурма-Ліувілля, а для $u(x,t)$ – межові умови початкової задачі.

Повертаємося до розкладу рівняння (7.3), збираючи разом результати обчислень для лівої та правої частинами

$$T_m''(t) = -k_m^2 v^2 T_m(t) - \frac{2v^2 f_0}{l}e^{-\alpha t}, \quad \text{або} \quad T_n''(t) + \omega_n^2 T_n(t) = -\kappa_n \omega_n^2 e^{-\alpha t} \tag{7.4}$$

Отримали лінійне неожнорідне рівняння для $T_n(t)$, його розв'язок шукаємо у вигляді

$$T_n(t) = A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t + \gamma e^{-\alpha t}, \tag{7.5}$$

а γ, коефіцієнт частинного розв'язку, визначаємо підстановкою в рівняння

$$\widetilde{T}_n(t) = \gamma e^{-\alpha t} \quad \Rightarrow \alpha^2\gamma + \omega_n^2\gamma = -\kappa_n\omega_n^2 \Rightarrow \gamma = -\frac{\kappa_n\omega_n^2}{\omega_n^2+\alpha^2}$$

Маємо

$$T_n(t) = A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t - \frac{\kappa_n\omega_n^2}{\omega_n^2+\alpha^2}e^{-\alpha t} \tag{7.6}$$

Залишається визначити коефіцієнти A_n та B_n. Оскільки, обидві умови однорідні можна одразу записати:

$$\begin{cases} T_n(0) = 0, \\ T_n'(0) = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_n(0) = A_n - \dfrac{\kappa_n\omega_n^2}{\omega_n^2+\alpha^2} = 0, \\[2ex] T_n'(0) = B_n\omega_n + \dfrac{\alpha\kappa_n\omega_n^2}{\omega_n^2+\alpha^2} = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_n = \dfrac{\kappa_n\omega_n^2}{\omega_n^2+\alpha^2}, \\[2ex] B_n = -\dfrac{\kappa_n\alpha\omega_n}{\omega_n^2+\alpha^2}. \end{cases}$$

Наш остаточний розв'язок

$$u(x,t) = \sum_0^l \frac{\kappa_n \cos k_n x}{\omega_n^2+\alpha^2}\left(\omega_n^2\cos\omega_n t - \alpha\omega_n \sin\omega_n t - \omega_n^2 e^{-\alpha t}\right) \tag{7.7}$$