# Заняття 13

# Функції Гріна і розв'язки задач для рівнянь у частинних похідних з однорідними межовими умовами

Задача № 13.7

*Знайти функцію Гріна $G(x, x')$ крайової задачі для одновимірного рівняння Гельмгольца*

$$u'' - \mu^2 u = -f(x), \quad -\infty < x < +\infty, \ |u| < \infty \text{ при } x \to \pm\infty$$

*за допомогою інтегрального перетворення Фур'є. Порівняти результат з розв'язком задачі 12.5б.*

## Розв'язок

Постановка задачі на фінкцію Гріна

$$\begin{cases} u = G(x, x'), \\ u'' - \mu^2 u = -\delta(x) \end{cases} \tag{13.1}$$

Перетворимо рівняння за Фур'є

$$-k^2 \hat{u} - \mu^2 \hat{u} = -e^{ikx}$$

Маємо Фур'є-образ

$$\hat{u}(k) = \frac{e^{ikx}}{k^2 + \mu^2} \tag{13.2}$$

Тепер функції Гріна знайдемо оберненим перетворенням Фур'є

$$G(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{k^2 + \mu^2} \, \mathrm{d}k \tag{13.3}$$

Аналогічно до задачі №13,6 будемо шукати лишки, але в цій задачі треба розглянути окремо дві області $x > 0$ та $x < 0$ і зшити їх.

При $x > 0$ розглядаємо контур з $\mathrm{Im} z < 0$:

$$G(x > 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{k^2 + \mu^2} \,\mathrm{d}k = i \operatorname*{Res}_{k=-i\mu} \frac{ke^{-ikx}}{k^2 + \mu^2} = i \lim_{k=-i\mu} \frac{ke^{-ikx}}{k - i\mu} = -\frac{e^{\mu x}}{2\mu}$$

При $x < 0$ розглядаємо контур з $\mathrm{Im} z > 0$:

$$G(x < 0) = i \operatorname*{Res}_{k=-i\mu} \frac{ke^{-ikx}}{k^2 + \mu^2} = i \lim_{k=-i\mu} \frac{ke^{-ikx}}{k - i\mu} = -\frac{e^{-\mu x}}{2\mu}$$

Отже, функція Гріна має вигляд

$$G(x, x') = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\mu} e^{-\mu(x-x')},\ x < 0 \\ -\dfrac{1}{2\mu} e^{\mu(x-x')},\ x > 0, \end{cases} \tag{13.4}$$

або

$$G(x, x') = -\frac{1}{2\mu} e^{-\mu|x-x'|} \tag{13.5}$$

Знайдемо функцію Гріна для рівняння Лапласа

$$G(\vec{r} - \vec{r}') = \lim_{\mu \to +0} \frac{e^{\mu|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{13.6}$$

Розв'язок задачі для довільного джерела

$$u(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\vec{r} - \vec{r}') f(\vec{r}') \,\mathrm{d}\vec{r}' = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \,\mathrm{d}\vec{r}' \tag{13.7}$$