Заняття 4

Рівняння теплопровідності з однорідними межовими умовами

Задача № 4.1

Одну і ту ж функцію, наприклад $f(x) = \alpha x$, можна представити на проміжку $0 \leq x \leq l$ узагальненим рядом Фур'є по кожній із систем власних функцій чотирьох задач Штурма-Ліувілля, одержаних у задачах 1.1, 1.2, 1.3, 2.1. Користуючись явним виглядом власних функцій і не обчислюючи коефіцієнтів рядів, дайте відповіді на такі запитання.

1. *Який вигляд матиме графік суми кожного з таких рядів на всій числовій осі? Якою є парність суми ряду відносно точок $x = nl$, де n – ціле число, і як це пов'язано з виглядом крайових умов задачі Штурма-Ліувілля?*

2. *Покажіть, що кожний з рядів є частинним випадком класичного тригонометричного ряду Фур'є, сума якого є періодичною функцією. Які саме періоди відповідають кожному з рядів? Яка саме частина повного тригонометричного базису використовується в кожному з розкладань, а які коефіцієнти Фур'є дорівнюють нулю і чому?*

3. *Як пов'язаний характер збіжності вказаних рядів з крайовими умовами, які задовольняє функція $f(x)$ у точках $x = 0, l$? Чи дорівнює сума ряду Фур'є функції $f(x)$ на відкритому проміжку $0 < x < l$? на закритому проміжку $0 \leq x \leq l$*

Розв'язок

4.1.1 Запитання №1

Графік суми ряду буде періодично повторювати розкладену в ряд Фур'є функцію з періодом l. Відносно точок $x = nl$ сума ряду буде або парною, або непарною, функцією. Для задачі, де кінці струни закріплені, відносто всіх цих точок буде непарною. Це випливає із умов при яких можливий розклад в

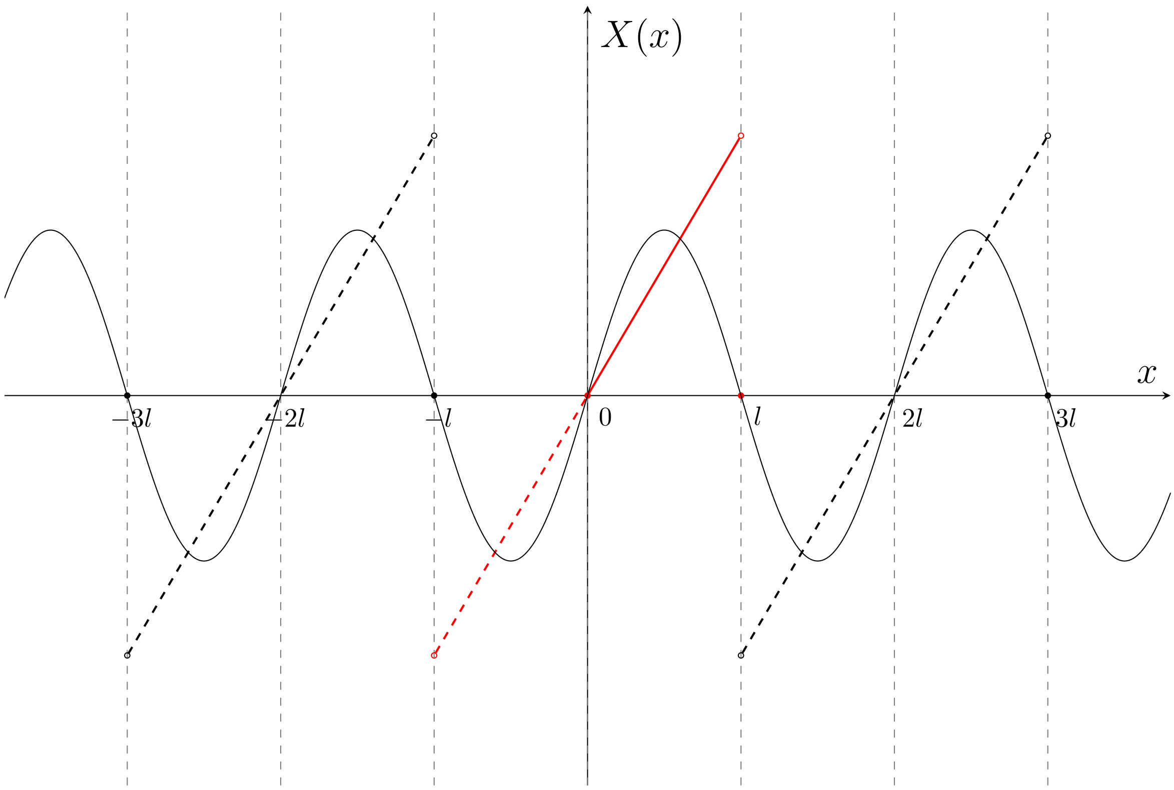

Рис. 4.1: Аналітичне продовження функції αx для розкладу системі власних функцій із задачі 1.1

ряд Фур'є – кусково-гладкість та періодичність функції, тобто щоб задовольняти всім цим умовам і отримували в точках $x = nl$ значення функції рівним нулю, необхідно щоб функція була непарна відносно ціє точки. Аналогічна, ситуація для межової умови, де кінець струни вільний ($X'(nl) = 0$), тільки треба згадати, що похідна змінює парність функції (звісно якщо функція має первну парність), тому відносно вільних кінців сума ряду буде парною функцією.

4.1.2 Запитання №2

4.1.3 Запитання №3

Графій суми рядів Фур'є буде періодичною функцією, що на відкритому проміжку $(0, l)$ співпадає з нашою функцією, а на в точках може бути розрив першого роду.

Червоним позначена функція, яку ми розкладуємо в ряд Фур'є. Пунктина лінія, знову червона, показує відповідне симетрійне продовження відносно нуля. Чорною пунктирною лінією позначено симетрійні відображення відносно інших точкок.

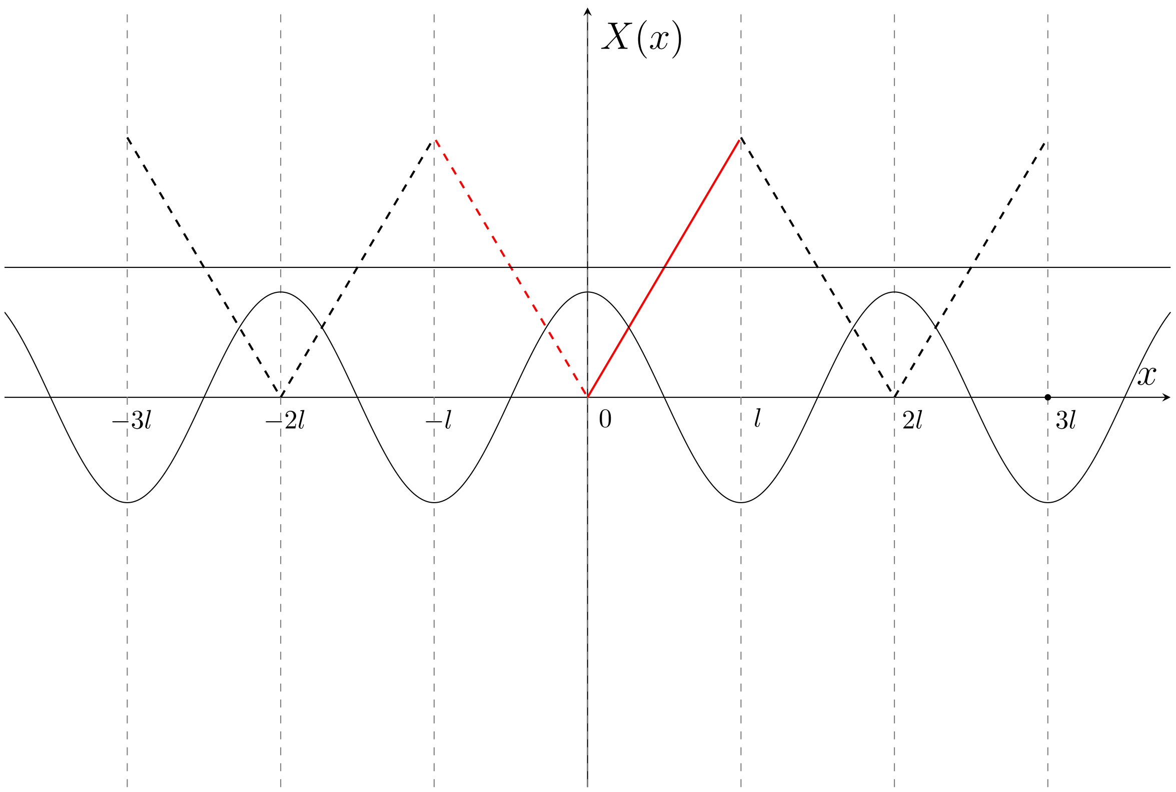

Рис. 4.2: Аналітичне продовження функції αx для розкладу системі власних функцій із задачі 2.1