Заняття 12

Функції Гріна звичайних диференціальних задач

Задача № 12.1

Функція Гріна $G(t)$ задачі Коші для рівняння гармонічного осцилятора

$$y'' + \omega^2 y = f(t),\ t \geq 0,\ y(0) = y_0,\ y'(0) = \nu_0$$

є розв'язком цієї задачі при $\nu_0 = 1$, $y_0 = 1$ і $f(t) = 0$. Тобто $y = G(t)$ задовольняє умови

$$y'' + \omega^2 y = 0,\ t \geq 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$$

Знайдіть явний вигляд функції Гріна сцилятора; чи зберігає вона смисл при $\omega \to 0$?

Розв'язок

Запишимо постановку задачі для визначення функції Гріна $G(t)$

$$\left\{ y'' + \omega^2 y = 0, t \geq 0, y(0) = 0, y'(0) = 1. \right. \tag{12.1}$$

Функція Гріна є розв'язком рівняння, тому

$$y = G(t) \ \rightarrow \ G'' + \omega^2 G = 0,$$

а розв'язком буде

$$G(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{12.2}$$

З початкових умов визначаємо константи

$$G(0) = A = 0 \ \Rightarrow \ A = 0$$

$$G'(0) = B\omega = 1 \ \Rightarrow \ B = \frac{1}{\omega}$$

Таким чином функція Гріна для осцилятора має вигляд

$$G(t) = \frac{\sin\omega t}{\omega} \tag{12.3}$$

Перевіримо чи зберігає функція Гріна сенс при $\omega \to 0$.

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{\sin\omega t}{\omega} = t\cdot\lim_{\omega\to 0}\frac{\sin\omega t}{\omega t} = t$$

Зрозуміло, що $\omega = 0$ відповідає відсутності повертаючої сили в системі, тобто тоді ми отримаємо задачу про вільний рух. Повертаючись до умови задачі Коші, яка визначає функцію Гріна, бачимо, що початкова умова описує частинку, яка в початковий момент часу в точці $y_0 = 0$ має швидкість $v_0 = 1$. При вільному русі закон руху буде лінійною функцією і, використовуючи початкові умови, отримаємо $G(t) = t$.