# Заняття 3

# Другий спосіб знаходження коефіцієнтів. Коливання стержня з вільними кінцями, неповнота базису.

Задача № 3.1

*Знайти коливання пружного стержня $0 \leq x \leq l$, лівий кінець якого закріплений, а правий вільний, якщо початкове відхилення $\varphi(x) = h\sin(3\pi x/2l)$, а початкова швидкість $\psi(x) = \nu_0 \sin(\pi x/2l)$.*

**Розв'язок**

Формальна постановка задачі:

$$\begin{cases} u = u(x,t), \\ u_{tt} = v^2 u_{xx}, \\ 0 \leq x \leq l, t \geq 0, \\ u(0,t) = 0, \\ u_x(0,t) = 0, \\ \left.\begin{aligned} & u(x,0) = \varphi(x) = h\sin\left(\frac{3\pi x}{2l}\right), \\ & u_t(x,0) = \psi(x) = v_0 \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right). \end{aligned}\right\} - \begin{matrix}\text{специфіка задачі} \\ \text{у вигляді} \\ \text{початкових умов}\end{matrix} \end{cases} \tag{3.1}$$

Це задача із заданими початковими умовами (а саме - початковим розподілом зміщення та швидкостей), яка має єдиний розв'язок.

Для початку скористаємося розв'язком задачі 1.2:

$$\begin{cases} u_n(x,t) = [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] \sin(k_n x), \\ k_n = (n + \frac{1}{2})\frac{\pi}{l}, \ n = 1, 2, \ldots \\ \omega_n = v k_n = (n + \frac{1}{2})\frac{\pi v}{l} - \text{ власні частоти.} \end{cases} \tag{3.2}$$

І запишемо загальний розв'язок:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] \sin(k_n x) \tag{3.3}$$

$$u_t(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} [-A_n\omega_n \sin(\omega_n t) + B_n\omega_n \cos(\omega_n t)] \sin(k_n x) \tag{3.4}$$

Підставляємо (3.3) у початкові умови (3.1):

$$u(x,0) = \varphi(x) \;\Rightarrow\; \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin\left((n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{l}\right) = h \sin\left(\frac{3\pi x}{2l}\right) \tag{3.5}$$

Підставляємо (**??**) у початкові умови (3.1):

$$u_t(x,0) = \psi(x) \;\Rightarrow\; \sum_{n=0}^{\infty} B_n\omega_n \sin\left((n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{l}\right) = v_0 \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right) \tag{3.6}$$

Особливі ситуації: функції у правій частині є однією з власних функцій задачі Штурма-Ліувіля. Це дозволяє знайти коефіцієнти $A_n, B_n$ простіше, порівнюючи з загальнім знаходженням з вихідних функцій $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ загального вигляду! Тобто брати інтеграл у цій особливій ситуації не потрібно.

Якщо 2 ряда Фур'є по одній системі функцій рівні, то і відповідні коефіцієнти цих рядів рівні.

$$\begin{gathered}\sum_{n=0} A_n \sin\left((n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{l}\right) = A_0 \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right) + \\ + A_1 \sin\left(\frac{3\pi x}{2l}\right) + A_2 \sin\left(\frac{5\pi x}{2l}\right) + ... = h \sin\left(\frac{3\pi x}{2l}\right)\end{gathered} \tag{3.7}$$

Результат $A_1 = h, A_0 = A_2 = A_3 = ... = 0$
Аналогічно робимо з **??**:

$$\begin{gathered}\sum_{n=0} \omega_n B_n \sin\left((n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{l}\right) = \omega_0 B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right) + \\ + \omega_1 B_1 \sin\left(\frac{3\pi x}{2l}\right) + \omega_2 B_2 \sin\left(\frac{5\pi x}{2l}\right) + ... = v_0 \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right)\end{gathered} \tag{3.8}$$

Результат $B_0 = \frac{v_0}{\omega_0}, B_1 = B_2 = B_3 = ... = 0$

Тепер треба правильно написати відповідь через знайдені коефіцієнти $A_n, B_n$! Підставляємо знайдені коефіцієнти у загальний розв'язок (тільки два коефіцієнти - $A_1$ і $B_0$ не дорівнюють нулю, тож членів у розв'язку всего два!)

Фінальна відповідь:

$$u(x,t) = h\cos(\omega_1 t)\sin(k_1 x) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\sin(k_0 x) \tag{3.9}$$

де $k_0 = \frac{\pi x}{2l}, k_1 = \frac{3\pi x}{2l}, \omega_0 = vk_0, \omega_1 = vk_1$. Можемо помітити, що у кожної моди своя частота.

Перевіряємо відповідь

- Власні функції перевірені в задачі 1.2
- Постановка задачі містить два неоднорідних члени у початкових умовах. Один пропорційний $\sim h$, інший пропорційний $\sim v_0$. Перевірити наявність цих множників у загальному розв'язку.
- Перевіряємо початкові умови - виконуються?

Альтернативний шлях – знайти за означенням коефіцієнти розкладу у ряд Фур'є.

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\left((\frac{1}{2}+n)\frac{\pi x}{l}\right)dx \tag{3.10}$$

Одержали інтеграл ортогональності

$$\int_0^l \sin\left(\frac{3\pi x}{2l}\right)\sin\left((\frac{1}{2}+n)\frac{\pi x}{l}\right)dx = \int_0^l \chi_1(x)\chi_n(x)dx = \delta_{1n} \tag{3.11}$$

Якщо ви не побачите що інтеграл є інтегралом ортогональності, і будете його обчилювати, то втратите час і можете помилитися і одержати неправильну відповідь (що часто і буває).

Результат $A_1 = h, A_0 = A_2 = A_3 = ... = 0$ та для швидкостей $B_0 = \frac{v_0}{\omega_0}, B_1 = B_2 = B_3 = ... = 0$

Отримали теж саме, але складнішим шляхом!