Заняття 13

Функції Гріна і розв'язки задач для рівнянь у частинних похідних з однорідними межовими умовами

Задача № 13.6

Поставити задачу на функцію Гріна $G(\vec{r}, \vec{r}')$ крайової задачі для 3-D рівняння Гельмгольца $\Delta_3 u - \mu^2 u = -f(\vec{r})$ у необмеженому просторі з умовою прямування розв'язку до нуля на нескінченності і розв'язати її за допомогою інтегрального перетворення Фур'є, дати фізичну інтерпретацію розв'язку у термінах стаціонарної дифузії частинок зі скінченним часом життя. Граничним переходом $\mu \to +0$ перейти до функції Гріна рівняння Лапласа. Записати розв'язок задачі з довільним джерелом $f(\vec{r})$ через функцію Гріна.

Розв'язок

Постановка задачі на фінкцію Гріна

$$\begin{cases} u = G(\vec{r}, \vec{r}'), \\ \Delta_3 u - \mu^2 u = -\delta(\vec{r} - \vec{r}') \end{cases} \tag{13.1}$$

Виконаємо перетворення Фур'є рівняння

$$-k_x^2 \hat{u} - k_y^2 \hat{u} - k_z^2 \hat{u} - \mu^2 \hat{u} = -e^{i(\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}'))}$$

Звідки отримаємо Фур'є-образ функції Гріна

$$\hat{u}(\vec{k}) = \frac{1}{k^2 + \mu^2} \cdot e^{i(\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}'))} \tag{13.2}$$

Тепер функції Гріна знайдемо оберненим перетворенням Фур'є

$$G(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i(\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}'))}}{k^2 + \mu^2} \, \mathrm{d}\vec{k} = \tag{13.3}$$

Залишається обчислити отриманий інтеграл. Це не важко зробити використовуючи лемму Жордана та обчислюючи лишки.
Переходимо в сферичны координати і позначимо $\rho = |\vec{r} - \vec{r}'|$ та θ – кут між векторами $\vec{k}$ та $\vec{r} - \vec{r}'$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\infty} k^2 \,\mathrm{d}k \int_0^{\pi} \frac{e^{ik\rho\cos\theta}}{k^2+\mu^2} \,\mathrm{d}(\cos\phi) =$$
$$= \frac{2\pi}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} \frac{k^2}{k^2+\mu^2} \left(\frac{e^{ik\rho\cos\theta}}{ik\rho} \right)\Bigg|_0^{\pi} \mathrm{d}k =$$
$$= \frac{1}{8\pi^2 i\rho} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ke^{-ik\rho}}{k^2+\mu^2} \,\mathrm{d}k - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ke^{ik\rho}}{k^2+\mu^2} \,\mathrm{d}k \right] =$$

Підінтегральній вираз має 2 особливі точки $k = \pm i\mu$. Для першого інтегралу потрібно розглянути контур в комплексній півплощині, де $\mathrm{Im}z > 0$, а для другого навпаки – $\mathrm{Im}z < 0$.

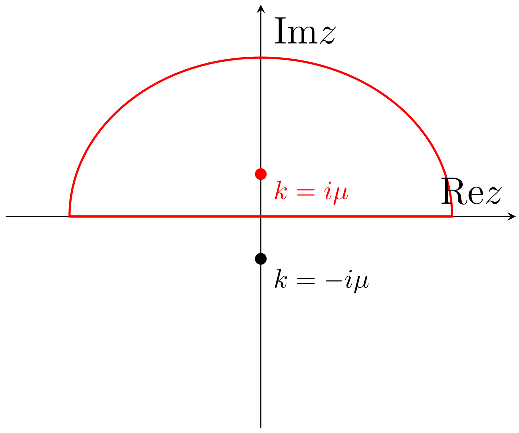

Рис. 13.1: Контур для 1 інтегралу

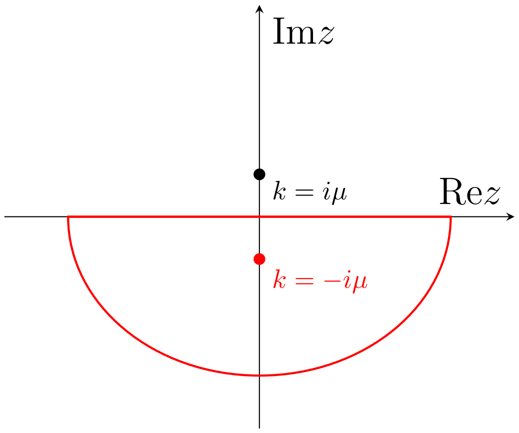

Рис. 13.2: Контур для 2 інтегралу

За лемою Жордана інтеграл вздовж півкола буде прямувати до нуля при прямуванні його радіуса до нескінченності, тому значення інтегралів, які ми отримали раніше дорівнює

$$= \frac{2\pi i}{8\pi^2 i\rho} \left[\operatorname*{Res}_{k=i\mu} \frac{ke^{-ik\rho}}{k^2+\mu^2} + \operatorname*{Res}_{k=-i\mu} \frac{ke^{ik\rho}}{k^2+\mu^2} \right] = \frac{1}{4\pi\rho} \left[\lim_{k=i\mu} \frac{ke^{-ik\rho}}{k+i\mu} + \lim_{k=-i\mu} \frac{ke^{ik\rho}}{k-i\mu} \right] =$$
$$= \frac{1}{4\pi\rho} \left[\frac{i\mu e^{\mu\rho}}{2i\mu} + \frac{-i\mu e^{\mu\rho}}{-2i\mu} \right] = \frac{1}{4\pi\rho} e^{\mu\rho} = \frac{e^{\mu|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Отже, маємо функцію Гріна для рівняння Гельмгольца

$$G(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{e^{\mu|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{13.4}$$

Фізична інтерпритація: ???

Знайдемо функцію Гріна для рівняння Лапласа

$$G(\vec{r} - \vec{r}') = \lim_{\mu \to +0} \frac{e^{\mu|\vec{r} - \vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{13.5}$$

Розв'язок задачі для довільного джерела

$$u(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\vec{r} - \vec{r}') f(\vec{r}')\, \mathrm{d}\vec{r}' = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\, \mathrm{d}\vec{r}' \tag{13.6}$$