Задача 10.8

10.8. Привести рівняння $u_{tt} = v^2\left(u_{rr} + (2/r)u_r\right) + cu$ **до самоспряженого вигляду:**

$$\rho(r)u_{tt} = \frac{\partial}{\partial r}\left(k(r)\frac{\partial u}{\partial r}\right) - q(r)u\,.$$

$u_{tt} = v^2\left(u_{rr} + \frac{2}{r}u_r\right) + cu.$

$u_{tt} = v^2 u_{rr} + \frac{2v^2}{r}u_r + cu \;\Big|\cdot \rho(r).$

$\rho(r)u_{tt} = v^2\rho(r)u_{rr} + \frac{2v^2\rho(r)}{r}u_r + c\rho(r)u.$

Знайдемо вид функції $\rho(r)$:

$(v^2\rho(r))' = \frac{2v^2\rho(r)}{r} \to \rho' = \frac{2}{r}\rho \to \frac{d\rho}{\rho} = \frac{2dr}{r} \to \ln\rho = 2\ln r + \ln A \to \rho = Ar^2.$

Тоді: $\rho(r)u_{tt} = \frac{\partial}{\partial r}\left(k(r)\frac{\partial u}{\partial r}\right) - q(r)u$, де $\rho(r) = Ar^2$, $k(r) = Av^2r^2$, $q(r) = -Acr^2$.