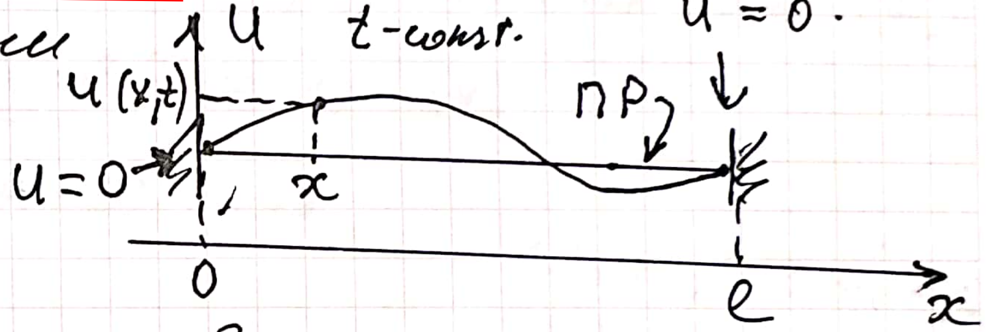
I семестр Задача 1.1 (1)

Власні моди струни

Формальна постановка



$$
\begin{cases}
u = u(x,t) \\
u_{tt} = v^2 u_{xx} \\
0 \le x \le l,\ t \ge 0 \\
u(0,t) = 0 \\
u(l,t) = 0.
\end{cases}
$$

Закріплені кінці у положенні рівноваги (ПР)

Шукаємо р-ня вигляду

$u(x,t) = T(t) \cdot X(x) \not\equiv 0$!

підставляємо   нетривіальні розв-ки

1) Відокремлення змінних

$u(0,t) = 0 \quad T(t)\,X(0) = 0$ — $T(t) \neq 0$.

$\boxed{X(0) = 0.}$

$u(l,t) = 0 \quad T(t)\,X(l) = 0 \Rightarrow X(l) = 0 \quad T(t) \neq 0$!

$u_{tt} = v^2 u_{xx} \qquad T''(t)\,X(x) = v^2\,T(t)\,X''(x) \;\Big|\times \dfrac{1}{v^2 X T}$

$$\frac{T''}{v^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda \text{ — стала відокремлення}$$

• Виписуємо результат відокремлення зм. 2

Задача Штурма-Ліувілля
$$\begin{cases} X'' = -\underline{\lambda} X \\ 0 \le x \le l \\ X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases}$$

$$T'' + \underline{\lambda} v^2 T = 0 \quad (*)$$

λ - невідоме

// Відокремлення закінчено.

2) Розв'язуємо задачу Ш.-Л.

а) $\lambda = 0$ $\quad X'' = -\lambda X \Rightarrow X'' = 0, \Rightarrow X(x) = c_1 + c_2 x$

$X(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow X(x) = c_2 x$ виключили 1 сталу

$X(l) = 0 \Rightarrow c_2 l = 0, \; c_2 = 0$ $\quad X(x) \equiv 0$ - трив. розв'язок.

$\Rightarrow$ Нетрив. розв'язків немає,

$\lambda = 0$ не є власним значенням - результат б) $\lambda \neq 0$ – довільне комплексне (включає $\lambda > 0$, $\lambda < 0$ і всі комплексні). ③

$X'' + \lambda X$ $\quad X(x) = e^{\alpha x}$ – шукаємо р-ок у вигляді

$(\alpha^2 + \lambda)\cancel{e^{\alpha x}} = 0 \qquad \alpha^2 = -\lambda \qquad \alpha = \pm i\sqrt{\lambda}$ – довільне компл. число $\neq 0$

$X_{1,2} = e^{\pm i\sqrt{\lambda}x}$

$X(x) = C_1 e^{i\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-i\sqrt{\lambda}x} =$

$\underline{e^{\pm iz} = \cos z \pm i \sin z}$

$= A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x \Rightarrow \begin{cases} X(0) = 0 \\ X(l) = 0. \end{cases}$

$X(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow$ ~~$X(x) = B$~~

$\Rightarrow X(x) = B\sin\sqrt{\lambda}x \rightarrow X(l) = 0$

$\Rightarrow B\sin\sqrt{\lambda}l = 0$ — $B = 0 \leftrightarrow$ трив. розв'язок $X(x) \equiv 0$

$\Rightarrow \boxed{\sin\sqrt{\lambda}l = 0}$ – Характеристичне рівняння.

$\Rightarrow \sqrt{\lambda}l = n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \dots \leftarrow$ нулі синуса у комплексній площині лежать тільки на дійсній осі

$\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$ – <u>кандидати</u> на вл. знач.

Запишемо розв'язки для $\lambda = \lambda_n$

$$X_n(x) = B \sin \frac{n\pi x}{l} \Leftrightarrow n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

трив. $\lambda = 0$

Залишаємо тільки ті n, які дають <u>різні</u> власні функції.

$n = -1, -2, \ldots$ – не дають нових вл. ф-й.

Різні вл. ф-ії – це лінійно незалежні власні функції!

• <u>Відповідь</u> (3 пункти!) до задачі Ш.-Л.:

$$\begin{cases} X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l} \\ n = 1, 2, 3, \ldots \\ \sqrt{\lambda_n} = \frac{n\pi}{l} \quad \left(\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2} > 0 ! \right) \end{cases}$$

• <u>Далі</u> – перевірка <u>повна!</u> вл. ф. і вл. значень! (див. §3 стор. 39–41)

Після перевірки вл. ф. і вл. значень $\{\lambda_n, X_n(x)\}$:

- Повертаємося до р-ня для $T(t)$ (с. 2 (*))

$\lambda = \lambda_n \to (*)$, $\Rightarrow$ $T'' + \lambda_n v^2 T = 0$ – р. осцилятора, $\lambda_n v^2 = \omega_n^2$

$T_n(t) = A\cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t$ $\quad \omega_n$, $n = 1, 2, \ldots$ – вл. частоти

- Власні моди – всі знайдені р-ки вигляду $u_n(x,t) = T_n(t) \cdot X_n(x)$

Відповідь – набір вл. мод

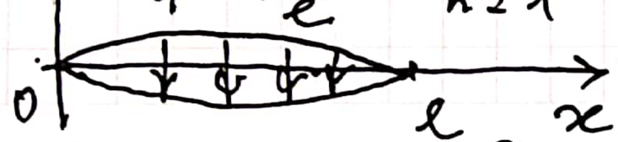
$$\boxed{\begin{cases} u_n(x,t) = (A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t)\sin k_n x \\ k_n = \frac{n\pi}{l} \text{ – хвильові вектори} \\ \omega_n = v k_n = \frac{n\pi v}{l} \text{ – власні частоти} \\ n = 1, 2, \ldots \end{cases}}$$

A_n, B_n – дов. сталі

– власні моди коливань струни

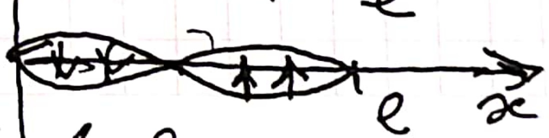
- Як рухається струна?

u $\quad \omega_1 = \frac{\pi v}{l}$, $n = 1$ – основний тон струни



Основна мода $n = 1$ - безвузлова!

u $\quad \omega_2 = 2\omega_1 = \frac{2\pi v}{l}$ – перший обертон



Мода $n = 2$ - має 1 вузол

Кожна власна мода має свою частоту коливань і свій просторовий розподіл зміщень