Заняття 11

Рівняння Лапласа в прямокутній області.

Задача № 11.1

Знайти стаціонарний розподіл температури в однорідній прямокутній пластині, якщо вздовж лівої її сторони (довжиною b) підтримується заданий розподіл температури, права сторона теплоізольована, а верхня і нижня (довжиною a) підтримуються при нульовій температурі. Відповідь запишіть через коефіцієнти Фур'є розподілу температури на лівій стороні, вважаючи їх відомими. Які якісні зміни відбуваються у розв'язку при переході від довгої і вузької пластини ($a \gg b$) до короткої і широкої ($a \ll b$)? Намалюйте для цих випадків графіки функцій, що описують зміну температури в повздовжньому напрямку для кількох перших поперечних мод; функції нормуйте так, щоб на лівій стороні пластини вони приймали однакове значення одиниця. Як змінюється в залежності від співвідношення сторін відносна роль внесків різних поперечних мод у розподіл температури на правій стороні пластини?

Розв'язок

Для стаціонарної задачі $u \neq u(t)$ рівняння параболічного типу, яке відповідає задачі теплопровідності, перетворюється на на еліптичне. Тобто нам потрібно розглянути задачу, де є дві незалежні просторові змінні. Запишемо постановку задачі:

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0, \\ 0 \leq x \leq a, \\ 0 \leq y \leq b, \\ u(0, y) = \varphi(y), \\ u_x(a, y) = 0, \\ u(x, 0) = 0, \\ u(x, b) = 0. \end{cases} \tag{11.1}$$

Виконаємо розділення змінних $u(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$. Для $Y(y)$ отримаємо багато разів розв'язану задачу Штурма-Ліувілля, а для $X(x)$ – лінійне рівняння.

$$\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0, \\ 0 \le y \le b, \\ Y(0) = 0,\, Y(b) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y_n(y) = \sin k_n y, \\ k_n = \sqrt{\lambda_n} = \pi n/b, n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{11.2}$$

Запишемо розв'язок рівняння для $X(x)$

$$X'' - k_n^2 X = 0 \quad \Rightarrow \quad X_n(x) = A_n \mathrm{sh} k_n x + B_n \mathrm{ch} k_n x \tag{11.3}$$

Виконуємо зворотню заміну та отримаємо, виконуючи підсумовування по всім модам, загальний розв'язок задачі.

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \mathrm{sh} k_n x + B_n \mathrm{ch} k_n x) \sin k_n y \tag{11.4}$$

Залишається із межових умов для змінної x визначити невідомі константи A_n та B_n. Маємо

$$\begin{cases} u(0,y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin k_n y = \varphi(y), \\ u_x(a,y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (A_n k_n \mathrm{ch} k_n a + B_n k_n \mathrm{sh} k_n a) \sin k_n y = 0. \end{cases} \tag{11.5}$$

В правій частині першого рівняння підставимо розклад межової умови в ряд Фур'є, який вважається відомим, та визначимо B_n

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin k_n y = \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin k_n y \quad \Rightarrow \quad B_n = \frac{2}{b} \varphi_n \tag{11.6}$$

З другої, однорідної, межової умови маємо

$$A_n \mathrm{ch} k_n a + B_n \mathrm{sh} k_n a = 0 \quad \Rightarrow \quad A_n = -B_n \mathrm{th} k_n a = -\frac{2}{b} \varphi_n \mathrm{th} k_n a \tag{11.7}$$

Підставляємо отримані значення в загальний розв'язок

$$u(x,y) = \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \big(\mathrm{ch} k_n x - \mathrm{th}(k_n a) \mathrm{sh} k_n x\big) \sin k_n y, \tag{11.8}$$

або, скориставшись однією з властивостей гіперболічних функцій, запишемо

$$u(x,y) = \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cdot \frac{\mathrm{ch}\big(k_n (x-a)\big)}{\mathrm{ch} k_n a} \sin k_n y \tag{11.9}$$

Розглянемо, використовуючи формулу (11.8), граничні випадки: а) довгої і вузької пластини, б) короткої і широкої.
а) $a \gg b$

$$\mathrm{th} k_n a = \mathrm{th}(\pi n a/b)\Big|_{a\gg b} \to 1$$

Таким чином розв'язок переходить в

$$u(x,y) = \frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\big(\mathrm{ch}k_n x - \mathrm{sh}k_n x\big)\sin k_n y = \frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n e^{-k_n x}\sin k_n y, \qquad (11.10)$$

що відповідає рівнянню теплопровідності для одновимірного випадку; температура спадає за експоненційним законом при віддалені від джерела

б) $a \ll b$

$$\mathrm{th}(\pi n a/b)\Big|_{a\ll b} \to 0, \quad \mathrm{ch}(\pi n x/b)\Big|_{b\to\infty} \to 1,$$

оскільки $x \le a$, то умову $a \ll b$ можна замінити на $b \to \infty$

Отже, при зменшенні b зменшуються втрати теплоти, оскільки ширина пластинки набагато менша за довжину джерела.
Таким чином розв'язок переходить в

$$u(x,y) = \frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{ch}k_n x \sin k_n y \qquad (11.11)$$