

Заняття 2

Власні моди інших систем. Вільні коливання для заданих початкових умов.

Вільні коливання поля в резонаторі для заданих початкових умов. Ряд Фур'є по системі ортогональних функцій.

Задача № 2.3

Знайти коливання струни завдовжки $0 \leq x \leq l$ із закріпленими кінцями, якщо початкове відхилення $\varphi(x) = hx/l$, а початкова швидкість $\psi(x) = \nu_0$. Обчислити інтеграл ортогональності власних функцій і знайти квадрат норми. Чи є рух струни періодичним (тобто чи буде повторюватись початковий стан струни через деякий проміжок часу?) Чи буде рух періодичним, якщо він описується рівнянням $u_{tt} = v^2 u_{xx} - \omega_0^2 u$?

Розв'язок

Формальна постановка задачі:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = u(x, t), \\ u_{tt} = v^2 u_{xx}, \\ 0 \leq x \leq l, t \geq 0, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x) = \frac{hx}{l}, \\ u_t(x, 0) = \psi(x) = \nu_0. \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{початкові умови задають} \\ \text{— механічний стан} \\ \text{системи при } t = 0 \end{array} \quad (2.1)$$

Це задача із заданими початковими умовами, яка має єдиний розв'язок. Щоб розв'язати її, необхідно розділити змінні, знайти власні функції і власні значення задачі Штурма-Ліувілля і знайти власні моди. Це було зроблено у задачі №1.1 попереднього заняття (??). Результатом є нескінченний набір

ВЛАСНИХ МОД:

$$\begin{cases} u_n(x, t) = [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] \sin(k_n x), \\ k_n = \frac{\pi n}{l}, n = 1, 2, \dots \\ \omega_n = vk_n = \frac{v\pi n}{l} - \text{власні частоти.} \end{cases} \quad (2.2)$$

Легко переконатися, що жодна окрема власна мода не може задовольнити початкові умови задачі (чому?). Щоб задовольнити початкові умови, необхідно записати так званий загальний або формальний розв'язок задачі, який є суперпозицією всіх мод:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] \sin(k_n x) \quad (2.3)$$

Поява знака суми у цьому виразі означає, що його права частина більше не залежить від n . Коли коефіцієнти A_n і B_n будуть знайдені, він стане розв'язком (єдиним!) вихідної задачі. Коефіцієнти загального розв'язку знаходимо із початкових умов. Підставляємо (2.3) у початкові умови (2.1):

$$u(x, 0) = \varphi(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x) = \varphi(x) \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} u_t(x, 0) = \psi(x) &\Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} [-A_n \omega_n \sin(\omega_n t) + B_n \omega_n \cos(\omega_n t)] \sin(k_n x) \right) \Big|_{t=0} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \omega_n \sin(k_n x) = \psi(x) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Отже, ми одержали дві умови, для визначення A_n і B_n , відповідно. Далі необхідно скористатися ортогональністю власних функцій задачі Штурма-Ліувілля (див. Конспект лекцій, §4). У загальному вигляді інтеграл ортогональності власних функцій має вигляд:

$$\int_0^l X_n(x) \cdot X_m(x) dx = \|X_n\|^2 \delta_{n,m}, \quad (2.6)$$

де $\|X_n\|$ – норма власної функції. Переконаємося, що власні функції дійсно ортогональні, і обчислимо квадрат норми.

1. Розглянемо випадок $n = m$:

$$\begin{aligned} \int_0^l X_n(x)^2 dx &= \int_0^l \sin^2(k_n x) dx = \\ &= \frac{1}{2k_n} \int_0^l (1 - \cos(k_n x)) d(k_n x) = \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin(k_n x)}{k_n} \right) \Big|_0^l = \frac{l}{2} \end{aligned}$$

2. Випадок $n \neq m$:

$$\begin{aligned} \int_0^l X_n(x) \cdot X_m(x) dx &= \int_0^l \sin(k_n x) \sin(k_m x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l (\cos(k_n - k_m)x - \cos(k_n + k_m)x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(k_n - k_m)x}{k_n - k_m} - \frac{\sin(k_n + k_m)x}{k_n + k_m} \right) \Big|_0^l = 0 \end{aligned}$$

Щоб одержати правильні вирази для коефіцієнтів загального розв'язку, застосовуємо формальну процедуру, описану у §4 Конспекту лекцій. Доможемо кожну з одержаних рівностей (2.4) та (2.5) на m -ту власну функції $\sin(k_m x)$ та інтегруємо від 0 до l .

$$\begin{aligned} \int_0^l \varphi(x) \sin(k_m x) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^l \sin(k_n x) \sin(k_m x) dx = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \frac{l}{2} \delta_{n,m} = \frac{A_m l}{2} \Rightarrow A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin(k_n x) dx \end{aligned} \quad (2.7a)$$

$$\begin{aligned} \int_0^l \psi(x) \sin(k_m x) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \omega_n \int_0^l \sin(k_n x) \sin(k_m x) dx = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \omega_n \cdot \frac{l}{2} \delta_{n,m} = \frac{B_m \omega_m l}{2} \Rightarrow B_n = \frac{2}{\omega_n l} \int_0^l \psi(x) \sin(k_n x) dx \end{aligned} \quad (2.7b)$$

Обчислюємо отримані інтеграли (2.7).

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin(k_n x) dx = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{hx}{l} \sin(k_n x) dx = \\ &= \frac{2h}{l^2} \left(-\frac{1}{k_n} x \cos(k_n x) \Big|_0^l + \int_0^l \frac{\cos(k_n x)}{k_n} dt \right) = \\ &= \left| k_n l = \frac{\pi n}{l} l = \pi n \Rightarrow \sin(k_n l) = 0, \cos(k_n l) = (-1)^n \right| = \\ &= \frac{2h}{l^2} \left(-\frac{l}{k_n} (-1)^n + \frac{\sin(k_n x)}{k_n^2} \Big|_0^l \right) = \frac{2h}{l} \frac{(-1)^{n+1}}{k_n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_n &= \frac{2}{\omega_n l} \int_0^l \psi(x) \sin(k_n x) dx = \frac{2\nu_0}{\omega_n l} \int_0^l \sin(k_n x) dx = \\
&= \frac{2\nu_0}{k_n \omega_n l} \cos(k_n x) \Big|_l^0 = \frac{2\nu_0}{l} \frac{1 - (-1)^n}{k_n \omega_n}
\end{aligned}$$

Підставляємо визначені константи в (2.3) і одержуємо відповідь:

$$u(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\nu_0 (1 - (-1)^n) \frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n} - h (-1)^n \cos(\omega_n t) \right] \frac{\sin(k_n x)}{k_n} \quad (2.8)$$

Процедура, за якою ми визначали константи A_n та B_n , фактично зводиться до розкладання даних початкових умов в узагальнений ряд Фур'є по системі власних функцій задачі Штурма-Ліувілля. У даному випадку цей ряд є частинним випадком тригонометричного ряду Фур'є.

З'ясуємо, чи є розв'язок періодичною функцією часу. Розв'язок є суперпозицією всіх мод, кожна з них має іншу частоту коливань ω_n . У розглянутій задачі частоти всіх мод кратні частоті основної моди ω_1 . Тому період (найменший) коливань основної моди

$$T = \frac{2l}{v},$$

є спільним періодом для всіх мод. Отже, рух струни буде періодичним з періодом коливань основної моди.

Нехай тепер замість хвильового рух системи описується рівнянням

$$u_{tt} = v^2 u_{xx} - \omega_0^2 u$$

з тими ж межовими умовами. Легко бачити, що після розділення змінних вигляд задачі Штурма-Ліувілля не зміниться, а зміниться лише рівняння для часової частини розв'язку $T(t)$:

$$T'' + (\lambda_n * v^2 + \omega_0^2) T = 0 \Rightarrow T'' + \tilde{\omega}_n^2 T = 0,$$

де $\tilde{\omega}_n = \sqrt{\omega_n^2 + \omega_0^2}$, а ω_n - частоти коливань розв'язаної вище задачі. Тобто частоти коливань зміняться і вже не будуть цілими кратними частоті основної моди. Тобто рух такої системи не буде періодичним.

Якщо рівняння міститиме доданок пропорційний u_t , то буде спостерігатися затухання чи підсилення коливань (залежно від знаку коефіцієнта при u_t).