Заняття 10

Приведення лінійних рівнянь у частинних похідних 2-го порядку з двома змінними до заданого вигляду

Задача № 10.5

Привести до простішого вигляду рівняння $u_t = a^2(u_{xx} + \alpha u_x) + cu$.

Розв'язок

Перенесемо всі доданки на одну сторону та поділимо на a^2

$$u_{xx} + \alpha u_x - a^{-2}u_t + a^{-2}cu = 0 \tag{10.1}$$

Маємо рівняння параболічного типу в канонічному виді.
Спростимо його позбавившись якнайбільше від похідних першого порядку.
Це зробимо використовуючи наступну заміну змінних та функції

$$u(x,t) = e^{\lambda x + \mu t}v(x,t) \tag{10.2}$$

Обчислимо перші похідні та другу похідну по просторовый змінній

$$u_x = e^{\lambda x+\mu t}(v_x + \lambda v),\ u_t = e^{\lambda x+\mu t}(v_t + \mu v),\ u_{xx} = e^{\lambda x+\mu t}(v_{xx} + 2\lambda v_x + \lambda^2 v)$$

Підставляємо їх в рівняння (10.1) та ділимо його на експоненту

$$v_{xx} + 2\lambda v_x + \lambda^2 v + \alpha(v_x + \lambda v) - a^{-2}(v_t + \mu v) + a^{-2}cv = 0$$

Зводимо подібні доданки

$$v_{xx} + (2\lambda + \alpha)v_x - a^{-2}v_t + (\lambda^2 + \alpha\lambda - a^{-2}\mu + a^{-2}c)v = 0 \tag{10.3}$$

Звідси визначемо λ та μ, прирівнючи вирази перед v_x та v до нуля.

$$\begin{cases} 2\lambda + \alpha = 0, \\ \lambda^2 + \alpha\lambda - a^{-2}\mu + a^{-2}c = 0; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda = -\alpha/2, \\ \mu = c - a^2\alpha^2/4; \end{cases} \tag{10.4}$$

Таким чином, заміна

$$u(x,t) = \exp\left[\left(c - \frac{a^2\alpha^2}{4}\right)t - \frac{\alpha t}{2}\right]v(x,t) \tag{10.5}$$

спрощує вихідне рівняння (10.1) до вигляду

$$v_t = a^2 v_{xx} \tag{10.6}$$