Заняття 5

Еволюційні задачі з неоднорідним рівнянням або неоднорідними межовими умовами: стаціонарні неоднорідності

Задача № 5.1

Знайти коливання вертикально розташованого пружного стержня під дією сили тяжіння для $t > 0$. Верхній кінець стержня закріплений, а нижній вільний. При $t < 0$ стержень був нерухомим і деформацій не було. Знайти спочатку стаціонарний розв'язок, що відповідає положенню рівноваги стержня в полі тяжіння, а потім знайти відхилення від нього, що відповідає коливанням навколо нового положення рівноваги. Намалювати графіки розподілу поля зміщень та поля напружень у положенні рівноваги.

Розв'язок

Формальна постановка задачі:

$$\begin{cases} u = u(x,t), \\ u_{tt} = v^2 u_{xx} + g, \\ 0 \leq x \leq l, t \geq 0 \\ u(0,t) =, \ u_x(l,t) = 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

Шукаємо розв'язок у вигляді:

$$u = u_{\text{ст}}(x) + w(x,t) \tag{5.2}$$

Перепишемо задачу для стаціонарної частини розв'язку

$$\begin{cases} u = u_{\text{ст}}(x), \\ v^2 u_{xx} + g = 0, \\ 0 \leq x \leq l, t \geq 0 \\ u(0) = 0, \ u_x(l) = 0 \end{cases} \tag{5.3}$$

Рівняння двічі інтегрується і маємо:

$$u_{\text{ст}}(x) = -\frac{gx^2}{2v^2} + C_1 x + C_2, \tag{5.4}$$

а з межових умов визначимо константи інтегрування

$$\begin{array}{r} u_{\text{ст}}(0) = C_2 = 0, \\ (u_{\text{ст}})_x(l) = -\dfrac{gl}{v^2} + C_1 = 0; \end{array} \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0, \quad C_1 = \frac{gl}{v^2} \tag{5.5}$$

Отже, стаціонарний розв'язок

$$u_{\text{ст}}(x) = -\frac{gx^2}{2v^2} + \frac{glx}{v^2} = -\frac{gl^2}{2v^2} \cdot \frac{x^2 - 2lx}{l^2} = -A \cdot \frac{x^2 - 2lx}{l^2} \tag{5.6}$$

Тепер необхідно записати задачу для нестаціонарної частини $w(x,t)$ Рівняння:

$$u_{tt} = v^2 u_{xx} + g \;\Rightarrow\; w_{tt} = v^2 w_{xx} - v^2 \frac{gl^2}{2v^2} \frac{2}{l^2} + g = v^2 w_{xx}$$

Межові умови:

$$\begin{array}{r} u(0,t) = -\dfrac{gl^2}{2v^2} \cdot \dfrac{x^2 - 2lx}{l^2}\Bigg|_{x=0} + w(l,t) = 0, \\ u_x(l,t) = -\dfrac{gl^2}{v^2} \cdot \dfrac{x - l}{l^2}\Bigg|_{x=l} + w_x(l,t) = 0 \end{array} \;\Rightarrow\; w(0,t) = 0,\; w_x(l,t) = 0$$

Початкові умови:

$$u(x,0) = -A \cdot \frac{x^2 - 2lx}{l^2} + w(x,t) = 0 \;\Rightarrow\; w(x,0) = A \cdot \frac{x^2 - 2lx}{l^2}$$

$$u_t(x,0) = 0 \;\Rightarrow\; w_t(x,0) = 0$$

Отже, отримуємо задачу для $w(x,t)$ з однорідними межовими умова, але з неоднорідними рівнянням та початковими умовами.

$$\begin{cases} w = w(x,t), \\ w_{tt} = v^2 w_{xx}, \\ 0 \le x \le l, t \ge 0 \\ w(0,t) = 0,\; w_x(l,t) = 0, \\ w(x,0) = A \cdot \dfrac{x^2 - 2lx}{l^2}, \\ w_t(x,0) = 0. \end{cases} \tag{5.7}$$

Розв'язок такої задачі був знайдений раніше (див. задачу 1.2):

$$\begin{aligned}
&w(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \big(A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t\big) \sin k_n x,\\
&k_n = \frac{\pi}{l}(n + 1/2) \text{ – хвильове число,}\\
&\omega_n = v k_n \text{ – частота коливання,}\\
&n = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Залишається визначити коефіцієнти A_n та B_n з початкових умов:

$$w_t(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \omega_n \sin k_n x = 0 \;\Rightarrow\; A_n = 0,\, \forall n$$

$$w_t(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin k_n x = A \cdot \frac{x^2 - 2lx}{l^2} \;\Rightarrow\; B_n = \frac{2A}{l^3} \int\limits_0^l (x^2 - 2lx) \sin k_n x \; \mathrm{d}x$$

Обчислимо отриманий інтеграл

$$\int\limits_0^l (x^2 - 2lx) \sin k_n x \; \mathrm{d}x = \frac{1}{k_n}(x^2 - 2lx) \cos k_n x \Big|_0^l -$$

$$-\frac{2}{k_n} \int\limits_0^l (x - l) \cos k_n x \; \mathrm{d}x = \frac{2}{k_n^2}\left[(x-l) \sin k_n x \Big|_0^l - \int\limits_0^l \sin k_n x \; \mathrm{d}x\right] =$$

$$= \frac{2}{k_n^3}\big(\cos k_n l - \cos 0\big) = \Big|\cos k_n l = 0\Big| = -\frac{2}{k_n^3}$$

Прим.: *можна було спростити інтегрування, зсунувши межі інтегрування на $-l/2$, адже тоді можна скористатися тим фактом, що непарна підінтегральна функція по симетричним межам дає нуль*

Отже, розв'язок

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= -A \cdot \frac{x^2 - 2lx}{l^2} - 4A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \omega_n t \sin k_n x}{l^3 k_n^3} =\\
&= -A \left(\frac{x^2 - 2lx}{l^2} + 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \omega_n t \sin k_n x}{(l k_n)^3} \right)
\end{aligned} \tag{5.9}$$