Заняття 1

Задачі з неоднорідним рівнянням або неоднорідними межовими умовами

Метод розкладання по власних функціях в задачах з неоднорідним рівнянням

Задача № 6.3

Знайти коливання струни із закріпленими кінцями під дією сили $f(x,t) = f_0 t^N$, $N > 0$ *однорідно розподіленої по довжині струни. У початковий момент струна нерухома, і зміщення дорівнює нулю. Остаточні обчислення виконати для* $N = 2$.

Розв'язок

Формальна постановка задачі:

$$\begin{cases} u = u(x,t), \\ 0 \le x \le l, t \ge 0, \\ u_{tt} = v^2 u_{xx} + f_0 t^N, \\ u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Розкладемо неожнорідність рівняння по власних функціях задачі Штурма-Ліувіля нашої системи. Оскільки неоднорідністі не залежить від x, то нам треба розкласти константу.

$$g(x) = 1, \quad \tilde{g}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin k_n x$$

$$g_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \sin k_n x \, \mathrm{d}x = \frac{2}{k_n l} \cos k_n x \Big|_l^0 = \big| \cos k_n l = (-1)^n \big| = \frac{2}{k_n l}\big(1 - (-1)^n\big) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{k_n} \sin k_n x \tag{1.2}$$

Отже, розклад неоднорідністі рівняння запишеться у вигляді

$$f_0 t^N = \frac{2f_0}{l} t^N \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{k_n} \sin k_n x \tag{1.3}$$

Розв'язок шукаємо також у вигляді розкладу по власних функціях:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin k_n x \tag{1.4}$$

Підставимо (1.2) та (1.4) в рівняння (1.1) і отримаємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n''(t) \sin k_n x = -v^2 \sum_{n=1}^{\infty} k_n^2 u_n(t) \sin k_n x + \frac{2f_0}{l} t^N \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{k_n} \sin k_n x \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[u_n'' + v^2 k_n^2 u_n - \frac{2f_0}{l} \frac{1-(-1)^n}{k_n} t^N \right] \sin k_n x = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad u_n'' + \omega_n^2 u_n = \frac{2f_0}{l} \frac{1-(-1)^n}{k_n} t^N, \tag{1.5}$$

де $\omega_n = v k_n$

Знайдемо початкові умови для $u_n(t)$ прмою підстановкою (1.4) в початкові умови для $u(x,t)$ (1.1)

$$\begin{cases} u(x,0) = u_n(0) \sin k_n x = 0, \\ u_t(x,0) = u_n'(0) \sin k_n x = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u_n(0) = 0, \\ u_n'(0) = 0. \end{cases} \tag{1.6}$$

Маємо неоднорідне лінійне рівняння (1.5) з початковими умовами (1.6). Його розв'язок можно записати у вигляді

$$u_n(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t + \tilde{u}_n(t) \tag{1.7}$$

У нас неоднорідність це поліном N-того ступеню, тому шукаємо неоднорідний розв'язок у вигляді довільного полінома N-того ступеню.
При $N = 2$:

$$\tilde{u}_n(t) = at^2 + bt + c \quad \Rightarrow \quad \tilde{u}_n'' + \omega_n^2 \tilde{u}_n = 2a + \omega_n^2 (at^2 + bt + c) = \frac{2f_0}{l} \cdot \frac{1-(-1)^n}{k_n} t^2 \equiv \alpha t^2$$

$$\begin{cases} 2a + \omega_n^2 c = 0, \\ \omega_n^2 a = \alpha, \\ b = 0; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} b = 0 \\ a = \alpha / \omega_n^2, \\ c = -2\alpha / \omega_n^4. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \tilde{u}_n(t) = \alpha \left(\frac{t^2}{\omega_n^2} - \frac{2}{\omega_n^4} \right)$$

$$\tilde{u}_n(t) = \frac{2f_0}{\omega_n^4} \cdot \frac{1-(-1)^n}{k_n l}\big(\omega_n^2 t^2 - 2\big) \tag{1.8}$$

Із початкових умов (1.6) визначаємо константи

$$\begin{cases} u_n(0) = C_1 - \dfrac{2\alpha}{\omega_n^4} = 0, \\ u_n'(0) = C_2 = 0; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{2\alpha}{\omega_n^4} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad u_n(t) = \frac{2\alpha}{\omega_n^4}\cos\omega_n t + \frac{\alpha}{\omega_n^4}\big(\omega_n^2 t^2 - 2\big) = \frac{\alpha}{\omega_n^4}\Big[2(\cos\omega_n t - 1) + \omega_n^2 t^2\Big], \tag{1.9}$$

де $\alpha = 2f_0 \cdot \big(1-(-1)^n\big)/k_n l$

Підставляємо вираз для $u_n(t)$ в (1.4) і маємо розв'язок задачі

$$\begin{aligned} u(x,t) &= 2f_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{\omega_n^4}\Big[2(\cos\omega_n t - 1) + \omega_n^2 t^2\Big] \cdot \frac{\sin k_n x}{k_n l} = \\ &= 2f_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{\omega_n^4}\Big[\omega_n^2 t^2 - 4\sin^2\omega_n t\Big] \cdot \frac{\sin k_n x}{k_n l} \end{aligned} \tag{1.10}$$