Заняття 4

Рівняння теплопровідності з однорідними межовими умовами

Задача № 4.2

У початковий момент часу ліва половина стержня з теплоізольованою бічною поверхнею має температуру T_1 , а права – температуру T_2 . Знайти розподіл температури при $t > 0$, якщо кінці стержня підтримуються при температурі T_0. Указівка: подумайте, що означає «температура дорівнює нулю», що це за нуль? Покладіть у кінцевому результаті $T_0 = 0$ і розгляньте частинні випадки: $T_1 = T_2$ та $T_1 = -T_2$. Які члени ряду при цьому обертаються в нуль? Чому? Нарисуйте графіки та порівняйте часову залежність температури для різних мод. Нарисуйте (якісно) графіки розподілу температури вдовж стержня у різні характерні послідовні моменти часу. Що таке «малий» і «великий» проміжок часу для цієї задачі? Як характерні часи залежать від розмірів системи?

Розв'язок

Формальна постановка задачі:

Graph under comment

$$\begin{cases} u = u(x,t), \\ u_t = Du_{xx}, \\ 0 \le x \le l, t \ge 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = T_0, \\ u(x,0) = \varphi(x) = T_1 - (T_1 - T_2)\Theta(x - l/2). \end{cases} \tag{4.1}$$

Тут використана тета-функція Хевісайта (або функція сходинки). Вона задається таким чином:

$$\Theta(x - x_0) = \begin{cases} 0, \text{ при } x < x_0 \\ 1, \text{ при } x > x_0 \end{cases}$$

Зробимо заміну, яка приведе до однорідних крайових умовами

$$u(x,t) = \widetilde{u}(x,t) + T_0$$

і тепер можемо скористатися розділенням змінних.

$$\widetilde{u}(x,t) = \widetilde{X}(x) \cdot \widetilde{T}(t) \tag{4.2}$$

Рівняння для нової функції не змінить свого виду, тому процедура відокремлення змінних виконується аналогічно до проведених раніше. Результат відокремлення змінних:

$$\begin{cases} \widetilde{X} = \widetilde{X}(x), \\ \widetilde{X}'' = -\lambda \widetilde{X}, \\ 0 \le x \le l, \\ \widetilde{X}(0) = 0, \\ \widetilde{X}(l) = 0. \end{cases} \qquad \widetilde{T}' + \lambda D \widetilde{T} = 0 \tag{4.3}$$

Розв'язок цієї задачі Штурма-Ліувілля отриманий в задачі 1.1.

$$\begin{cases} \lambda_n = \dfrac{\pi^2 n^2}{l^2}, \\ \widetilde{X}_n(x) = \sin\left(\dfrac{\pi n x}{l}\right), \end{cases} \quad \text{де } n \in \mathbb{N}. \tag{4.4}$$

У часовому рівнянні змінні розділяються, тому його легко проінтегруємо:

$$\begin{gathered} \frac{\widetilde{T}'}{\widetilde{T}} = -\lambda_n D = -\tau_n^{-1} \;\Rightarrow\; \int \frac{\mathrm{d}\widetilde{T}}{\widetilde{T}} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{\tau_n} \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; \ln \widetilde{T}_n = \ln C_n - t/\tau_n \;\Rightarrow\; \widetilde{T}_n = C_n e^{-t/\tau_n}, \text{ де } n \in \mathbb{N} \end{gathered} \tag{4.5}$$

Отже, отримаємо остаточний розв'язок

$$\begin{aligned} & u_n(x,n) = T_0 + \widetilde{X}_n \cdot \widetilde{T}_n = T_0 + C_n e^{-t/\tau_n} \sin(k_n x), \\ & k_n = \frac{\pi n}{l} - \text{ хвильові вектори}, \\ & \tau_n = \frac{1}{D k_n^2} = \frac{l^2}{D \pi^2 n^2} - \text{ характерний час зміни температури}, \\ & n = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{4.6}$$

Запишемо загальний розв'язок задачі

$$u(x,n) = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-t/\tau_n} \sin(k_n x) \tag{4.7}$$

Із початкової умови (4.1) визначимо коефіцієнти C_n:

$$u(x,0) = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(k_n x) = T_1 - (T_1 - T_2)\Theta(x - l/2) \tag{4.8}$$

Розкладемо за синусами модифіковану початкову умову $u(x,0) - T_0$

$$T_1 - T_0 - (T_1 - T_2)\Theta(x - l/2) = -\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(k_n x)$$

$$C_n = -\frac{2}{l}\left[\int\limits_0^{l/2} (T_1 - T_0)\sin(k_n x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{l/2}^{l} (T_2 - T_0)\sin(k_n x)\,\mathrm{d}x\right] =$$

$$= \frac{2}{lk_n}\left[(T_1 - T_0)\cos(k_n x)\Big|_0^{l/2} + (T_2 - T_0)\cos(k_n x)\Big|_0^{l/2}\right] =$$

$$= \frac{2}{lk_n}\left[(T_1 - T_0)(1 - \cos(k_n l/2)) + (T_2 - T_0)(\cos(k_n l/2) - (-1)^n)\right] =$$

$$= \frac{2}{lk_n}\left[T_1(1 - \cos(k_n l/2)) + T_2(\cos(k_n l/2) - (-1)^n) + T_0((-1)^n - 1)\right]$$

Випишемо декілька перших множників C_n для визначення поведінки їх множини

$$\begin{aligned}
&n = 1 : [T_1 + T_2 - 2T_0] && \Rightarrow C_{4m+1} = \frac{2}{k_{4m+1} l}\left[T_1 + T_2 - 2T_0\right] \\
&n = 2 : [T_1 - T_2] && \Rightarrow C_{4m+2} = \frac{2}{k_{4m+2} l}\left[T_1 - T_2\right] \\
&n = 3 : [T_1 + T_2 - 2T_0] && \Rightarrow C_{4m+3} = \frac{2}{k_{4m+3} l}\left[T_1 + T_2 - 2T_0\right] \\
&n = 4 : 0 && \Rightarrow C_{4m} = 0
\end{aligned}$$

Покладемо тут $T_0 = 0$ та $T_1 = T_2$ з чого видно, що коефіцієнти з парними індексами зануляються. Для випадку $T_1 = -T_2$ навпаки – з непарними.

Отже, розв'язком буде

$$\begin{gathered}
u(x,n) = T_0 + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[T_1(1 - \cos(k_n l/2)) + \\
+ T_2(\cos(k_n l/2) - (-1)^n) + T_0((-1)^n - 1)\Big] e^{-t/\tau_n} \frac{\sin(k_n x)}{k_n}
\end{gathered} \tag{4.9}$$

Графіки розв'язків

Поведінку знайдених груп доданків можна побачити на наступному графіку. Тут наведено по одному з кожної групи.

Проміжок часу називається малим, коли $t \ll \tau$, а великим – $t > \tau$

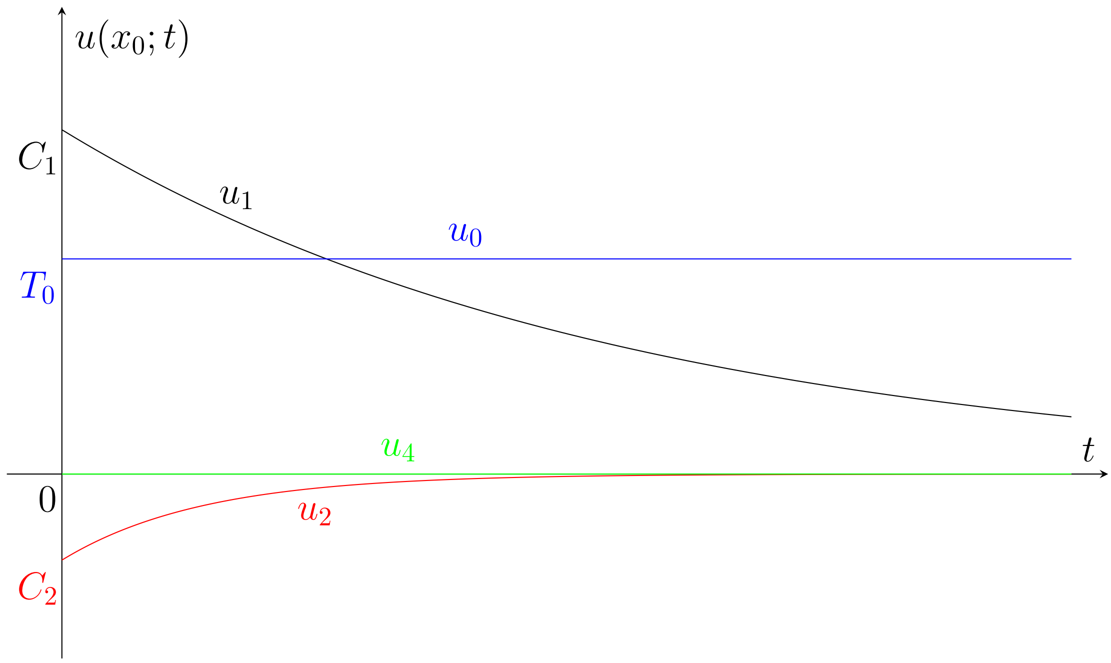

Рис. 4.1: Перші чотири розв'язки