Зміст

Тема I:

ЗАСТОСУВАННЯ ПРОЦЕДУРИ ФУР'Є БЕЗПОСЕРЕДНЬОГО ВІДОКРЕМЛЕННЯ ЗМІННИХ

Заняття 1

Відокремлення змінних, задача Штурма-Ліувілля і власні моди коливань струни для різних межових умов

Задача № 1.1

Знайти власні моди коливань струни завдовжки l ***із закріпленими кінцями (знайти функції вигляду*** $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$***, визначені і достатньо гладкі в області*** $0 \leq x \leq l, -\infty \leq t \leq \infty$***, не рівні тотожно нулю, які задовольняють одновимірне хвильове рівняння*** $u_{tt} = v^2 u_{xx}$ ***на проміжку*** $0 \leq x \leq l$ ***і межові умови*** $u(0,t) = 0, u(l,t) = 0$ ***на його кінцях).*** *Результат перевірити аналітично й графічно (див. текст до модульної контрольної роботи №1, с. 25) та проаналізувати його фізичний смисл. Знайти початкові умови (початкове відхилення і початкову швидкість) для кожної з мод.*

Розв'язок

Формальна постановка задачі:

$$\begin{cases} u = u(x,t), \\ u_{tt} = v^2 u_{xx}, \\ 0 \leq x \leq l, t \in \mathbb{R}, \\ u(0,t) = 0, \\ u(l,t) = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Необхідно знайти нетривіальні (тобто не рівні тотожно нулю) розв'язки (1.1) вигляду:

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) \neq 0 \tag{1.2}$$

Хвильове рівняння з двома межовими умовами (1.1) на кінцях проміжку по координаті x описує малі поперечні коливання струни із закріпленими кінцями, її довільний вільний рух. Струна має попередній натяг, і у положенні рівноваги всі її точки знаходяться на осі x, а при коливаннях відхиляться у напрямку осі y; $u(x,t)$ - це відповідне зміщення точки струни з координатою x в напрямку y відносно її рівноважного положення у даний момент часу t. Власні моди струни - це особливі рухи струни, які описуються розв'язками у вигляді добутків (1.2).

Підставляємо розв'язок у вигляді добутку (1.2) у рівняння й умови (1.1) Почнемо з межових умов:

$$u(0,t) = X(0)\cdot T(t) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} T(t) \neq 0, \forall t, \\ X(0) = 0; \end{cases}$$

$$u(l,t) = X(l)\cdot T(t) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} T(t) \neq 0, \forall t, \\ X(l) = 0; \end{cases}$$

Тут ми врахували, що умови на кінцях струни виконуються при всіх t, тому $T(t)$ не може бути рівним нулю.
Далі підставимо (1.2) у рівняння:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[X(x)T(t)\right] = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[X(x)T(t)\right] \;\Rightarrow\; XT'' = v^2 X'' T$$

Звідси переходимо до рівності двох функцій від різних змінних:

$$\frac{T''}{v^2 T} = \frac{X''}{X} \tag{1.3}$$

Це і є ситуація відокремлення змінних: функція від x має дорівнювати функції від t при всіх x і t. Це можливо тільки у випадку, якщо обидві ці функції є сталими. Тому маємо

$$\frac{T''}{v^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda, \tag{1.4}$$

де λ – стала відокремлення. Її можливі значення необхідно буде знайти.

Виписуємо результат відокремлення змінних:

$$\begin{cases} X = X(x), \\ X'' = -\lambda X, \\ 0 \leq x \leq l, \\ X(0) = 0, \\ X(l) = 0. \end{cases} \qquad\qquad T'' + \lambda v^2 T = 0 \tag{1.5}$$

Задача для $X = X(x)$ є так званою Штурма-Ліувілля. Необхідно знайти нетривіальні розв'язки цієї задачі і значення параметра λ, при яких вони існують; їх називають, відповідно, власними функціями і власними значеннями задачі. З умов задачі можна показати (див. лекції), що її власні значення є дійсними.

Розв'язуємо задачу Штурма-Ліувілля (1.5):

а) Розглянемо випадок $\lambda = 0$:

$$X'' = -\lambda X \ \Rightarrow\ X'' = 0 \ \Rightarrow\ X(x) = C_1 + C_2 x$$

Знаходимо константи з межових умов:

$$\begin{array}{l} \begin{cases} X(0) = C_1 = 0, \\ X(l) = C_1 + C_2 l = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 0; \end{cases} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} X(x) = 0 \text{ – розв'язок тривіальний,} \\ \lambda = 0 \text{ не є власним значенням.} \end{array}$$

б) Розглянемо випадок $\lambda < 0$. Розв'язок рівняння шукаємо у вигляді $X(x) = e^{\alpha x}$:

$$X'' = -\lambda X \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 \cancel{e^{\alpha x}} = +|\lambda| \cancel{e^{\alpha x}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pm\sqrt{|\lambda|} \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X(x) = \widetilde{C}_1 e^{\sqrt{|\lambda|}x} + \widetilde{C}_2 e^{-\sqrt{|\lambda|}x} = C_1 sh(\sqrt{|\lambda|}x) + C_2 ch(\sqrt{|\lambda|}x)$$

Знаходимо константи з межових умов:

$$\begin{array}{l} X(0) = C_2 \ \Rightarrow\ X(x) = C_1 sh(\sqrt{|\lambda|}x) \\ \begin{cases} X(l) = C_1 sh(\sqrt{|\lambda|}l) = 0, \\ sh(\sqrt{|\lambda|}l) \neq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 0; \end{cases} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} \text{розв'язок тривіальний,} \\ \text{немає від'ємних} \\ \text{власних значень.} \end{array}$$

в) Розглянемо випадок $\lambda > 0$. Розв'язок рівняння шукаємо у вигляді $X(x) = e^{\alpha x}$:

$$X'' = -\lambda X \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 \cancel{e^{\alpha x}} = -\lambda \cancel{e^{\alpha x}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pm i\sqrt{\lambda} \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X(x) = \widetilde{C}_1 e^{i\sqrt{\lambda}x} + \widetilde{C}_2 e^{-\sqrt{\lambda}x} = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}x)$$

Знаходимо константи з межових умов:

$$\begin{cases} X(0) = C_2 = 0, \\ X(l) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}l) + \cancelto{0}{C_2} \cos(\sqrt{\lambda}l) = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 \neq 0, \\ \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0; \end{cases}$$

Отже, нетривіальні розв'язки існують при значеннях параметра λ, які задовольняють характеристичне рівняння :

$$\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0 \ \Rightarrow\ \sqrt{\lambda_n}l = \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \ \Rightarrow\ \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}.$$

Випишемо тепер розв'язки для всіх n і визначимо, які з них необхідно залишити:

$$X_n(x) = C_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$$

Видно, що $n = 0$ відповідає тривіальному розв'язку. Видно також, що всі інші розв'язки визначені з точністю до довільного множника.
Тому власні функції, які співпадають з точністю до множника, вважають однаковими. У загальному випадку різними вважають лише лінійно незалежні власні функції, а розвя'зати задачу Штурма-Ліувілля означає знайти всі різні власні функції і відповідні власні значення. Отже, різним власним функціям відповідають лише натуральні n, а коефіцієнти C_n можна покласти рівними одиниці.
Власними значеннями і власними функціями є

$$\begin{cases} \lambda_n = \dfrac{\pi^2 n^2}{l^2}, \\ X_n(x) = \sin\left(\dfrac{\pi n x}{l}\right), \end{cases} \quad \text{де } n \in \mathbb{N}. \tag{1.6}$$

Повертаємося до рівняння для $T(t)$ (1.5). Підставляємо знайдені власні значення та знаходимо $T_n(t)$:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_n &= \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \\ T'' + \lambda v^2 T &= 0, \end{aligned}\right\} \Rightarrow T_n(t) = A\cos(\omega_n t) + B\sin(\omega_n t),$$

де $\omega_n^2 = \lambda_n v^2$, $n \in \mathbb{N}$.
Власними модами коливань струни будуть всі розв'язки вигляду:

$$u_n(x,t) = X_n(x) \cdot T_n(t)$$

Виконаємо перепозначення і запишемо остаточний розв'язок:

$$\begin{cases} u_n(x,t) = [A_n\cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)]\sin(k_n x), \\ k_n = \dfrac{\pi n}{l} - \text{ хвильові вектори}, \\ \omega_n = v k_n = \dfrac{v\pi n}{l} - \text{ власні частоти}, \\ n = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{1.7}$$

Перевірка розв'язку задачі Штурма-Ліувілля

Перевірка результату (1.6) включає аналітичну і графічну перевірку. Необхідно перевірити, що знайдені розв'язки і числа (1.6) дійсно є власними функціями і власними значеннями задачі (1.5), а також, що знайдені всі її власні функції і власні значення. Перш за все, перевіряємо виконання всіх умов задачі Штурма-Ліувілля (1.5).

1. Аналітична перевірка Підставляємо знайдені функції у крайові умови і рівняння задачі Штурма-Ліувилля. Відмінні від нуля функції, які задовольняють крайові умови і рівняння, за означенням є власними функціями задачі. Одночасно знаходимо з рівняння відповідне власне значення і звіряємо його з указаним у відповіді.

1) Перевіряємо виконання крайових умов, підставляємо власні функції в умови (1.5)

$$X(0) = 0:$$
$$X_n(0) = C_n \sin(\sqrt{\lambda_n} \cdot 0) = 0 \text{ – виконується,}$$
причому незалежно від λ_n

$$X(l) = 0:$$
$$X_n(l) = C_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} \cdot l\right) = C_n \sin(\pi n) = 0 \text{ – виконується}$$
причому саме для знайдених значень λ_n.

2) Перевіряємо рівняння і власні значення. Виконання крайових умов уже перевірено; якщо ми підставимо функцію у рівняння, то одночасно знайдемо і відповідне їй власне значення (якщо рівняння виконується). Це власне значення має співпасти з указаним у відповіді.

   Почергово перевіряємо всі функції, вказані у відповіді. Обчислимо другу похідну

$$X_n'' = \frac{\pi n}{l}\left(C_n \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\right)' = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 C_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 X_n$$

   Порівнюємо з вихідним рівнянням і робимо перший висновок: кожна з функцій $X_n(x)$ дійсно є розв'язком рівняння (1.5). Одночасно, знаходимо з рівняння відповідне даній функції значення спектрального параметра, - це $\lambda = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$. Порівняємо це значення з тим, яке вказане у відповіді (1.6) і робимо другий висновок: знайдені власні значення дійсно відповідають знайденим власним функціям.

2. Графічна перевірка.
Будуємо графіки кількох перших власних функцій. Масштаб по вертикалі може бути довільним і різним для різних функцій, оскільки значення він не має.
Функція, що відповідає найменшому власному значенню (у даному випадку це $X_1(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$), відповідає так званій *основній моді* резонатора (струна є частинним випадком одномірного резонатора). *Для стаціонарних станів у квантовій механіці це основний стан системи, стан з найменшою можливою енергією.*

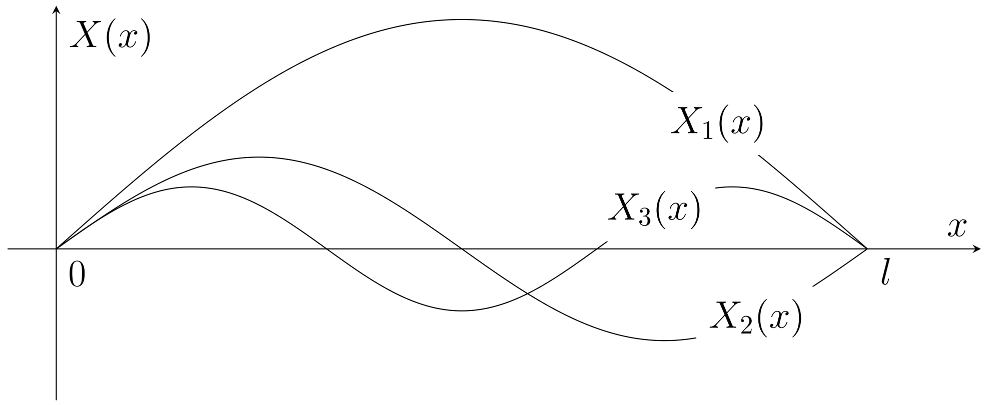


Рис. 1.1: Графічний розв'язок, наведені три перші власні функції

Графіки власних функцій відображають їх основні властивості, які і треба перевірити. З рисунку видно, що в точках $x = 0$ та $x = l$ всі графіки проходять через нуль, отже крайова умова (1.5) на обох кінцях виконується. *Графічна перевірка підсилює надійність аналітичної, в якій також іноді припускаються помилок, приймаючи бажане за дійсне.*

Проведені перевірки допомагають позбавитись більшості типових помилок, проте є надзвичайно підступний тип помилки, який проведені перевірки виявити не взмозі. Це випадок, коли ви дійсно знайшли власні функції та власні значення, але **не всі**, а отже задача розв'язана неправильно.
Помітити таку помилку допомагає так звана **осциляційна теорема**. З рисунку, наведеного в графічному методі, видно, що всі власні функції на проміжку $0 \le x \le l$ осцилюють, і при цьому всі вони мають **різне** число нулів. Число нулів (або "вузлів") всередені проміжку, на якомуророзв'язується задача, є своєрідною унікальною міткою власної функції. Власні значення необхідно розташувати у порядку зростання. Тоді за осциляційною теоремою основна мода одновимірної задачі Штурма-Ліувілля не має нулів у внутрішніх точках проміжку $[0, l]$. Тобто основна мода завжди є безвузловою. Далі, наступному за величиною власному значенню відповідає власна функція, що має один нуль, наступному - два нулі, і так далі. Для кожної наступної моди число вузлів збільшується на одиницю. Іншими словами, число нулів власної функції збігається з порядковим номером відповідного власного значення, якщо нумерувати їх у порядку зростання, починаючи з нуля.

Аналіз результату

З'ясуємо фізичний смисл одержаних розв'язків: яким саме рухам відповідають її власні моди. Розв'язки (1.7) є частинними розв'язками однорідного хвильового рівняння з однорідними межовими умовами (1.1). Це означає (див. лекції), що зовнішні сили на систему не діють, тому знайдені розв'язки відповідають вільним коливанням (рухам) струни. Це коливання (рухи) спеціального вигляду, оскільки відповідні розв'язки мають вигляд добутків $X_n(x) \cdot T_n(t)$.

Усі розв'язки $u_n(x,t)$ – дійсні. Візьмемо один із них. Зафіксуємо певний довільний момент часу $t = t_1$, це буде миттєве фото n–ї моди струни. Просторовий розподіл зміщень описується формулою

$$u_n(x, t_1) = X_n(x) \cdot T_n(t_1).$$

Видно, що в будь-який момент часу форма просторового розподілу зміщень (тобто форма струни) залишається однаковою і описується відповідною власною функцією $X_n(x)$; за рахунок множника $T_n(t)$ змінюється лише спільна амплітуда просторового розподілу і його знак. Отже, $X_n(x)$ задає просторовий «профіль» моди, це її унікальне просторове «обличчя», - найперша визначальна характеристика певної моди, за якою можна ідентифікувати відповідний рух струни.

Тепер прослідкуємо за рухом певної точки струни $x = x_1$:

$$u_n(x_1, t) = X_n(x_1) \cdot T_n(t).$$

Видно, що всі точки струни здійснюють один і той же рух, одне і те ж гармонічне коливання з частотою ω_n, але для різних мод частоти коливань різні. Коливання будь-якої точки задається однією функцією $T_n(t)$, але амплітуда визначається величиною $|X_n(x)|$. У точках, де $X_n(x)$ має нулі, амплітуда коливань дорівнює нулю, це **вузли** моди. Якщо ж $X_n(x)$ змінює знак, фаза коливання змінюється на π: частини струни, розділені вузлами, коливаються у протифазі.

Рух струни - це єдиний часово-просторовий процес. Для мод $n = 2$ і $n = 3$ він зображений на рисунку нижче. Усі вузли залишаються нерухомими, тільки якщо рух струни відповідає певній моді. У точках, де $X_n(x)$ максимальне (за модулем), максимальна й амплітуда коливань, – це пучності. У нашому випадку моди занумеровані так, що число вузлів всередині струни на одиницю менше номера моди. При цьому кожна мода має свою частоту коливань, за якою також можна розрізнити різні моди. Для струни з обома закріпленими кінцями частоти всіх мод кратні частоті основної моди (див. (1.7)).

У цілому рух у часі і розподіл зміщень у просторі залишаються ніби незалежними. Струна коливається, а просторовий розподіл «стоїть». Подібні рухи прийнято називати **стоячими хвилями**. Стоячі хвилі описуються добутком вигляду (1.2), в яких обидва множники є дійсними.

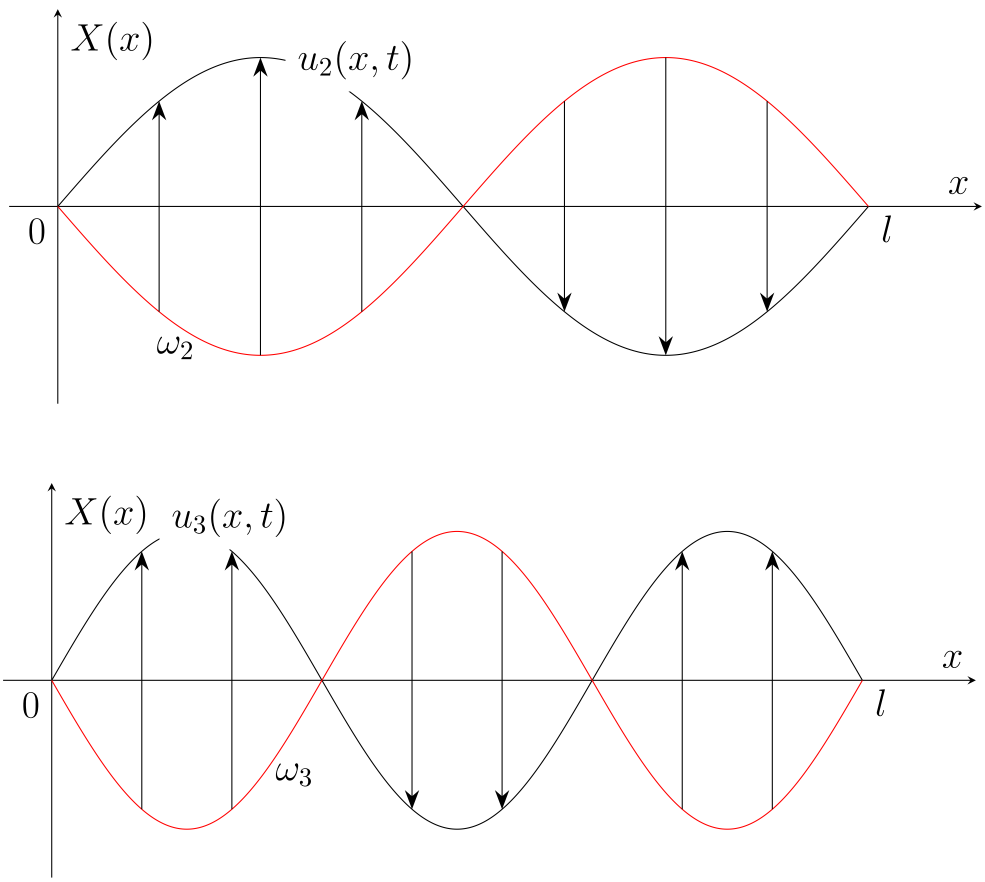


Рис. 1.2: Графіки другої та третьої моди

Заняття 2

Власні моди інших систем. Вільні коливання для заданих початкових умов.

Стержень з вільними та пружно закріпленими кінцями; системи, описувані іншими рівняннями.

Задача № 2.1

Знайти власні моди повздовжніх рухів тонкого стержня $0 \le x \le l$ із вільними кінцями (задача для хвильового рівняння з межовими умовами $u_x(0,t) = 0, u_x(l,t) = 0$).
Результат перевірити аналітично й графічно (див. заняття №6, зразок модульної контрольної роботи №1) та проаналізувати його фізичний смисл. Чим відрізняється від інших основна (нульова) мода? Якому рухові стержня вона відповідає?

Розв'язок

Формальна постановка задачі:

$$\begin{cases} u = u(x,t), \\ u_{tt} = v^2 u_{xx}, \\ 0 \le x \le l, t \in \mathbb{R} \\ u_x(0,t) = 0, \\ u_x(l,t) = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Необхідно знайти розв'язки (2.1) вигляду:

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) \neq 0 \tag{2.2}$$

Від задачі №1.1 попереднього заняття задача відрізняється тільки межовою умовою, тому підставляємо розв'язок у вигляді добутку (2.2) тільки у межові умови (2.1):

$$u_x(0,t) = X'(0)\cdot T(t) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} T(t) \neq 0, \forall t, \\ X'(0) = 0; \end{cases}$$

$$u_x(l,t) = X'(l)\cdot T(t) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} T(t) \neq 0, \forall t, \\ X'(l) = 0; \end{cases}$$

Тут ми врахували, що умови на кінцях струни виконуються при всіх t, тому $T(t)$ не може бути рівним нулю.

Виписуємо результат відокремлення змінних:

$$\begin{cases} X = X(x), \\ X'' = -\lambda X, \\ 0 \leq x \leq l, \\ X'(0) = 0, \\ X'(l) = 0. \end{cases} \qquad T'' + \lambda v^2 T = 0 \tag{2.3}$$

Розв'язуємо задачу Штурма-Ліувілля (2.3). Розв'язки рівняння задачі для різних λ є такими ж, як у задачі 1.1, відмінність полягає у крайових умовах.

а) Випадок $\lambda < 0$.

$$X(x) = C_1 sh(\sqrt{|\lambda|}x) + C_2 ch(\sqrt{|\lambda|}x)$$

Знаходимо константи з межових умов:

$$X'(0) = C_1\sqrt{|\lambda|} \;\Rightarrow\; X(x) = C_2 \quad ch(\sqrt{|\lambda|}x)$$

$$\begin{cases} X'(l) = C_2\sqrt{|\lambda|}sh(\sqrt{|\lambda|}l) = 0, \\ sh(\sqrt{|\lambda|}l) \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 0; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{розв'язок тривівльний, немає від'ємних власних значень.}$$

б) Випадок $\lambda = 0$:

$$X(x) = C_1 + C_2 x$$

Знаходимо константи з межових умов:

$$\begin{cases} X'(0) = C_2 = 0, \\ X'(l) = C_2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 \in \mathbb{R}, \\ C_2 = 0; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad X(x) = C \text{ – розв'язок нетривівльний, } \lambda = 0 \text{ є власним значенням.}$$

в) Випадок $\lambda > 0$

$$X(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}x)$$

Знаходимо константи з межових умов:

$$\begin{cases} X'(0) = C_1\sqrt{\lambda} = 0, \\ X(x) = C_2 \cos(\sqrt{\lambda}x), \\ X'(l) = -C_2 \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0; \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} C_2 \neq 0, \\ \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0; \end{cases}$$

Отже, нетривіальні розв'язки існують при значеннях параметра λ, які задовольняють характеристичне рівняння :

$$\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{\lambda_n}l = \pi n,\, n \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow\; \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}.$$

Випишемо тепер розв'язки для всіх n, поклавши всі довільні сталі рівними 1. Залишаємо з них лише нетривіальні розв'язки для тих n, які відповідають різним власним функціям:

$$\begin{cases} X_0(x) = 1, \\ \lambda_0 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} X_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \\ \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

На відміну від задачі 1 з попереднього заняття тут $n = 0$ відповідає нетривіальному розв'язку. Випадок $\lambda > 0$ знову приводить до набору власних функцій занумерованих натуральними числами.
Отже, різним власним функціям відповідають натуральні n та 0.
Власними значеннями і власними функціями є

$$\begin{cases} \lambda_0 = 0, \\ X_0(x) = 1; \\ \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \text{ де } n \in \mathbb{N} \\ X_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \end{cases} \tag{2.4}$$

Повертаємося до рівняння для $T(t)$ (2.3). Підставляємо знайдені власні значення та знаходимо $T_n(t)$:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \\ T'' + \lambda v^2 T = 0, \end{aligned}\right\} \Rightarrow T_n(t) = A\cos(\omega_n t) + B\sin(\omega_n t),$$

де $\omega_n^2 = \lambda_n v^2$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\left.\begin{aligned} \lambda_0 = 0, \\ T'' = 0, \end{aligned}\right\} \Rightarrow T_0(t) = A_0 + B_0 t,$$

Власними модами коливань струни будуть всі розв'язки вигляду:

$$u_n(x,t) = X_n(x) \cdot T_n(t)$$

Виконаємо перепозначення і запишемо остаточний розв'язок:

$$\begin{cases} u_0(x,t) = A_0 + B_0 t, \\ u_n(x,t) = [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] \sin(k_n x), \\ k_n = \dfrac{\pi n}{l} - \text{ хвильові вектори,} \\ \omega_n = v k_n = \dfrac{v \pi n}{l} - \text{ власні частоти,} \\ n = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{2.5}$$

Перевірка розв'язку задачі Штурма-Ліувілля

1. Аналітична перевірка

1) Перевіряємо, чи виконуються крайові умови задачі:

$$\begin{aligned} &X'(0) = 0 : \\ &\qquad X_0'(0) = 0, \\ &\qquad X_n'(0) = \sin(\sqrt{\lambda_n} \cdot 0) = 0 \text{ – виконується,} \\ &\qquad \text{ причому незалежно від } \lambda_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &X'(l) = 0 : \\ &\qquad X_0'(l) = 0, \\ &\qquad X_n'(l) = \sin\left(\frac{\pi n}{l} \cdot l\right) = \sin(\pi n) = 0 \text{ – виконується} \\ &\qquad \text{ причому саме для знайдених значень } \lambda_n. \end{aligned}$$

2) Перевіряємо, чи задовольняють знайдені функції рівняння на власні значення $X'' = -\lambda X$, і якщо так, то знаходимо відповідне значення спектрального параметра λ:

$$X_0^{''} = (1)^{''} = 0 \cdot 1 = 0 \cdot X_0$$
$$X_n^{''} = -\frac{\pi n}{l} \left(\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\right)^{'} = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 X_n$$

Отже знайдені функції задовольняють і крайові умови, і рівняння задачі Штурма-Ліувілля, причому для значень спектрального параметра

$$\lambda_0 = 0 \text{ і } \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \text{ де } n \in \mathbb{N} \tag{2.6}$$

які співпадають з раніше знайденими. Звідси робимо висновок, що вказані у відповіді (2.4) функції та значення спектрального параметра дійсно є власними функціями і відповідними їм власними значеннями задачі Штурма-Ліувілля.

2. Графічна перевірка.
Будуємо графіки кількох перших власних функцій. Масштаб по вертикалі може бути довільним і різним для різних функцій, оскільки значення він не має.

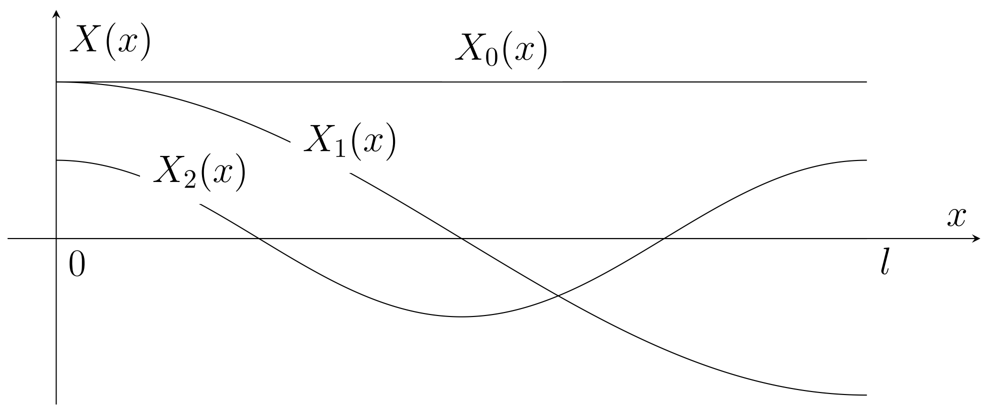


Рис. 2.1: Графічний розв'язок задачі, наведені три власні функції

З рисунку бачимо, що дотичні до всіх графіків у точках $x = 0$ та $x = l$ горизонтальні, тобто крайові умови (2.3) виконуються на обох кінцях проміжку. Далі перевіряємо, чи виконується осциляційна теорема. Власні функції занумеровані у нас у порядку зростання власних значень, а мінімальному власному значенню відповідає функція $X_0(x) = 1$. Як видно з рисунка, вона не має нулів всередині проміжку, як і має бути для основної моди; кожна наступна власна функція має рівно на один нуль більше. Тобто осциляційна теорема виконується. Звідси робимо висновок, що ми знайшли всі власні функції і власні значення задачі.

Аналіз результату

Моди $n = 1, 2, \ldots$ відповідають стоячим хвилям. Коливання стержня повздовжні, і тому показані на рисунку графіки власних функцій пов'язані з реальним рухом стержня не настульки очевидним чином, як для поперечних коливань струни. У процесі коливань певні частини стердня зміщуються поперемінно праворуч і ліворуч, а між ним виникають області розтягу і стиснення. Області максимального відносного стиснення і розтягу (екстремуми похідної по координаті) припадають на вузли поля зміщень. Оскільки стежень з обома вільними кінцями симетричний відносно сердини, то власні функції почергово є або симетричними (парними), або антисиметричними (непарними) відносно середини проміжку (див. рисунок). Аналогічну картину ми спостерігали і у задачі №1.1, для поперечних коливань струни з обома закріпленими кінцями, яка теж є симетричною відносно середини. Проте, якщо врахувати векторний характер поля зміщень, то для поперечних коливань (струна) симетричній власній функції (див. рисунок вище) відповідає симетричне поле зміщень, а для повздовжніх коливань (стержнь) - антисеместричне! Нарисуйте самостійно векторне поле зміщень, яке відповідає моді $n = 1$, наприклад. Основна мода у даній задачі одночасно є нульовою модою, оскільки вона відповідає нульовому власному значенню. Нульові моди, як правило, є особливими і відрізняються від інших. Так, у даній задачі нульова мода відповідає не коливанню, а стану спокою або рівномірного прямолінійного руху стержня як цілого, залежно від початкових умов, які у задачі на власні моди не задається. Кожній власній можі можна поставити у відповідність окремий ступінь вільності. Нульова мода відповідає рухові центра мас стержня, а інші - коливанням різних типів відносно нерухомого центра мас.

Вільні коливання поля в резонаторі для заданих початкових умов. Ряд Фур'є по системі ортогональних функцій.

Задача № 2.3

Знайти коливання струни завдовжки $0 \le x \le l$ із закріпленими кінцями, якщо початкове відхил є $\varphi(x) = hx/l$, а початкова швидкість $\psi(x) = \nu_0$. Обчислити інтеграл ортогональності власних функцій і знайти квадрат норми. Чи є рух струни періодичним (тобто чи буде повторюватись початковий стан струни через деякий проміжок часу?) Чи буде рух періодичним, якщо він описується рівнянням $u_{tt} = v^2 u_{xx} - \omega_0^2 u$?

Розв'язок

Формальна постановка задачі:

$$\begin{cases} u = u(x,t), \\ u_{tt} = v^2 u_{xx}, \\ 0 \le x \le l, t \ge 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \\ \left.\begin{aligned} & u(x,0) = \varphi(x) = \dfrac{hx}{l}, \\ & u_t(x,0) = \psi(x) = \nu_0. \end{aligned}\right\} - \begin{array}{l}\text{початкові умови задають} \\ \text{механічний стан} \\ \text{системи при } t = 0\end{array} \end{cases} \tag{2.7}$$

Це задача із заданими початковими умовами, яка має єдиний розв'язок. Щоб розв'язати її, необідно спочатку розділити змінні, знайти власні функції і власні значення задачі Штурма-Ліувілля, а потім власні моди. Це було зроблено у задачі №1.1 попереднього заняття (1.6). Результатом є нескінченний набір власних мод:

$$\begin{cases} u_n(x,t) = [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] \sin(k_n x), \\ k_n = \dfrac{\pi n}{l},\ n = 1, 2, \ldots \\ \omega_n = v k_n = \dfrac{v \pi n}{l} - \text{ власні частоти.} \end{cases} \tag{2.8}$$

Легко переконатися, що жодна окрема власна мода не може задовольнити початкові умови задачі (чому?). Щоб задовольнити початкові умови, необхідно записати так званий загальний або формальний розв'язок задачі, який є суперпозицією всіх мод:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] \sin(k_n x) \tag{2.9}$$

На відміну від виразу для окремої власної моди, права частина цієї рівності містить знак суму по всіх модах. Тому загальний не залежить від n. Коли коефіцієнти A_n і B_n будуть знайдені, він стане розв'язком (єдиним!) вихідної задачі. Коефіцієнти загального розв'язку знаходимо із початкових умов. Підставляємо (2.9) у початкові умови (2.7):

$$u(x,0) = \varphi(x) \ \Rightarrow \ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x) = \varphi(x) \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} & u_t(x,0) = \psi(x) \ \Rightarrow \\ & \quad \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} [-A_n \omega_n \sin(\omega_n t) + B_n \omega_n \cos(\omega_n t)] \sin(k_n x) \right) \Bigg|_{t=0} = \\ & \quad = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \omega_n \sin(k_n x) = \psi(x) \end{aligned} \tag{2.11}$$

Отже, ми одержали дві умови, для визначення A_n і B_n, відповідно. Далі необхідно скористатися ортогональністю власних функцій задачі Штурма-Ліувілля (див. Конспект лекцій, §4). У загальному вигляді інтеграл ортогональності власних функцій має вигляд:

$$\int_0^l X_n(x) \cdot X_m(x) \, \mathrm{d}x = ||X_n||^2 \delta_{nm}, \tag{2.12}$$

де $||X_n||$ – норма власної функції. Переконаємося, що власні функції дійсно ортогональні, і обчислимо квадрат норми.

1. Розглянемо випадок $n = m$:

$$\int_0^l X_n(x)^2 \, \mathrm{d}x = \int_0^l \sin^2(k_n x) \, \mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2k_n} \int_0^l (1 - \cos(k_n x)) \, \mathrm{d}(k_n x) = \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin(k_n x)}{k_n} \right) \Bigg|_0^l = \frac{l}{2}$$

2. Випадок $n \neq m$:

$$\int_0^l X_n(x) \cdot X_m(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^l \sin(k_n x) \sin(k_m x) \, \mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^l (\cos(k_n - k_m)x - \cos(k_n + k_m)x) \, \mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(k_n - k_m)x}{k_n - k_m} - \frac{\sin(k_n + k_m)x}{k_n + k_m} \right) \Bigg|_0^l = 0$$

Тут у випадку $n = m$ знаменник першого доданку у підстаноці обертається у нуль, і вираз втрачає смисл. Щоб одержати правильні вирази для коефіцієнтів загального розв'язку, застосовуємо формальну процедуру, описану у §4 Конспекту лекцій. Доможуємо кожну з одержаних рівностей (2.10) і (2.11) на m-ту власну функцію $\sin(k_m x)$ та інтегруємо від 0 до l. Ліві частини інтегруємо почленно.

$$\int_0^l \varphi(x)\sin(k_m x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^l \sin(k_n x)\sin(k_m x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \frac{l}{2}\delta_{nm} = \frac{A_m l}{2} \;\Rightarrow\; A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin(k_n x)\,\mathrm{d}x \tag{2.13a}$$

$$\int_0^l \psi(x)\sin(k_m x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\omega_n \int_0^l \sin(k_n x)\sin(k_m x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} B_n\omega_n \cdot \frac{l}{2}\delta_{nm} = \frac{B_m\omega_m l}{2} \;\Rightarrow\; B_n = \frac{2}{\omega_n l}\int_0^l \psi(x)\sin(k_n x)\,\mathrm{d}x \tag{2.13б}$$

Обчислюємо інтеграли (2.13).

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin(k_n x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{l}\int_0^l \frac{hx}{l}\sin(k_n x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{2h}{l^2}\left(-\frac{1}{k_n}x\cos(k_n x)\Big|_0^l + \int_0^l \frac{\cos(k_n x)}{k_n}\,\mathrm{d}t\right) =$$
$$= \left|k_n l = \frac{\pi n}{l}l = \pi n \Rightarrow \sin(k_n l) = 0,\ \cos(k_n l) = (-1)^n\right| =$$
$$= \frac{2h}{l^2}\left(-\frac{l}{k_n}(-1)^n + \frac{\sin(k_n x)}{k_n^2}\Big|_0^l\right) = \frac{2h}{l}\frac{(-1)^{n+1}}{k_n}$$

$$B_n = \frac{2}{\omega_n l}\int_0^l \psi(x)\sin(k_n x)\,\mathrm{d}x = \frac{2\nu_0}{\omega_n l}\int_0^l \sin(k_n x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{2\nu_0}{k_n\omega_n l}\cos(k_n x)\Big|_l^0 = \frac{2\nu_0}{l}\frac{1-(-1)^n}{k_n\omega_n}$$

Підставляємо визначені константи у (2.9) і одержуємо відповідь:

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{l\nu_0}{v}(1-(-1)^n)\frac{\sin(\omega_n t)}{\pi n} - h(-1)^n\cos(\omega_n t)\right]\frac{\sin(k_n x)}{n}, \tag{2.14}$$

де k_n і ω_n визначені формулами (2.8). Коли розв'язок знайдено, необхідно перевірити його, на скільки це можливо, щоб виключити принаймні елементарані помилки. У даному випадку можливо і потрібно перевірити дві речі:

що обидва параметри h і ν_0 неоднорідних членів у постановці задачі увійшли у розв'язок, і що всі доданк розв'язку мають таку ж розмірність, як і шукане поле u. Переконайтеся самостійно, що це дійсно так.

Процедура, за якою ми визначали константи A_n та B_n, фактично зводиться до розкладання даних початкових умов в узагальнений ряд Фур'є по системі власних функцій задачі Штурма-Ліувілля. У даному випадку цей ряд є частинним випадком тригонометричного ряду Фур'є.

З'ясуємо, чи є розв'язок періодичною функцією часу. Розв'язок (2.14) є суперпозицією всіх мод, кожна з них має іншу частоту коливань ω_n. У розглянутій задачі всі ω_n (2.8) кратні частоті основної моди ω_1. Тому період основної моди

$$T = \frac{2l}{v},$$

є спільним періодом для *всіх* мод. Отже, рух струни буде періодичним.

Нехай тепер замість хвильового рух системи описується рівнянням

$$u_{tt} = v^2 u_{xx} - \omega_0^2 u$$

з тими ж межовими умовами. Легко бачити, що після розділення змінних вигляд задачі Штурма-Ліувілля не зміниться, а зміниться лише рівняння для часової частини розв'язку $T(t)$:

$$T'' + (\lambda_n v^2 + \omega_0^2)T = 0 \ \Rightarrow \ T'' + \widetilde{\omega}_n^2 T = 0, \tag{2.15}$$

де $\widetilde{\omega}_n = \sqrt{\omega_n^2 + \omega_0^2}$, а ω_n - частоти (2.8). Тобто частоти коливань зміняться і вже не будуть цілими кратними частоти основної моди. Отже рух такої системи не буде періодичним.

Якщо рівняння міститиме доданок, пропорційний u_t, то буде спостерігатися затухання чи підсилення коливань, залежно від знаку коефіцієнта при u_t.

Заняття 3

Другий спосіб знаходження коефіцієнтів. Коливання стержня з вільними кінцями, неповнота базису.

Задача № 3.1

Знайти коливання пружного стержня $0 \leq x \leq l$, лівий кінець якого закріплений, а правий вільний, якщо початкове відхилення $\varphi(x) = h\sin(3\pi x/2l)$, а початкова швидкість $\psi(x) = \nu_0 \sin(\pi x/2l)$.

Розв'язок

Формальна постановка задачі:

$$\begin{cases} u = u(x,t), \\ u_{tt} = v^2 u_{xx}, \\ 0 \leq x \leq l, t \geq 0, \\ u(0,t) = 0, \\ u_x(0,t) = 0, \\ \left.\begin{aligned} & u(x,0) = \varphi(x) = h\sin\left(\dfrac{3\pi x}{2l}\right), \\ & u_t(x,0) = \psi(x) = v_0 \sin\left(\dfrac{\pi x}{2l}\right). \end{aligned}\right\} \text{ — } \begin{array}{l}\text{специфіка задачі} \\ \text{полягає у вигляді} \\ \text{початкових умов}\end{array} \end{cases} \tag{3.1}$$

Як і задача 2.3, це задача із заданими початковими умовами, яка має єдиний розв'язок, причому рівняння і межові умови однорідні. Тому розв'язувати її можна за тим же планом, як і 2.3, а відмінність полягатиме у способі знаходження коефіцієнтів загального розв'язку.

Спочатку залишаємо у стороні початкові умови (обидві вони неоднорідні); розділяємо змінні у рівнянні і межових умовах, які є однорідними, і знаходимо набір власних мод. Скористаємося розв'язком задачі 1.2, в якій це було зроблено:

$$\begin{cases} u_n(x,t) = [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] \sin(k_n x), \\ k_n = (n + \dfrac{1}{2})\dfrac{\pi}{l},\ n = 0, 1, 2, \ldots \\ \omega_n = v k_n = (n + \dfrac{1}{2})\dfrac{\pi v}{l} - \text{ власні частоти.} \end{cases} \tag{3.2}$$

Записуємо загальний розв'язок

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] \sin(k_n x) \tag{3.3}$$

$$u_t(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} [-A_n \omega_n \sin(\omega_n t) + B_n \omega_n \cos(\omega_n t)] \sin(k_n x) \tag{3.4}$$

і підставляємо (3.3), (3.4) у початкові умови (3.1):

$$u(x,0) = \varphi(x) \ \Rightarrow \ \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin\left((n + \frac{1}{2})\frac{\pi x}{l}\right) = h \sin\left(\frac{3\pi x}{2l}\right) \tag{3.5}$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) \ \Rightarrow \ \sum_{n=0}^{\infty} B_n \omega_n \sin\left((n + \frac{1}{2})\frac{\pi x}{l}\right) = v_0 \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right) \tag{3.6}$$

Із цих двох рівностей необхідно знайти коефіцієнти загального розв'язку A_n і B_n відповідно. Для цього у задачі (2.2) ми одержали формули для коефіцієтів у вигляді інтегралів, придатні для функцій $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ загального вигляду, і потім обчислислили ці інтеграли для конкретних $\phi(x)$ і $\psi(x)$, заданих в умові задчі 2.2. За таким же зразком можна було би діяти і зараз. Проте, уважно придивившись до рівності (3.5), можна помітити, що функція у правій частині є однією з власних функцій задачі Штурма-Ліувіля, по яких розкладена ліва частина. Аналогічна ситуація має місце і для другої рівності (3.6). У цьому полягає особливість цієї задачі, яка відрізняє її від задачі 2.2. Це дозволяє знайти коефіцієнти A_n, B_n простіше, без обчислення інтегралів, що швидше і надійніше з точки зору імовірності зробити помилку. Обчислювати інтеграли у такій особливій ситуації не слід.

Якщо два розвинення в узагальнений ряд Фур'є по одній і тій же системі функцій рівні, то і відповідні коефіцієнти цих розвинень рівні. Це випливає з єдиності розвинення у ряд Фур'є. Скористаємося цим:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0} A_n \sin\left((n + \frac{1}{2})\frac{\pi x}{l}\right) = A_0 \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right) + \\ + A_1 \sin\left(\frac{3\pi x}{2l}\right) + A_2 \sin\left(\frac{5\pi x}{2l}\right) + \ldots = h \sin\left(\frac{3\pi x}{2l}\right) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Прирівнюємо коефіцієнти *при однакових функціях* у лівій і правій частинах. Результат має вигляд: $A_1 = h$, а всі інші коефіцієнти дорівнюють нулю $A_0 = A_2 = A_3 = ... = 0$.

Аналогічно, для рівності (3.6):

$$\sum_{n=0} \omega_n B_n \sin\left((n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{l}\right) = \omega_0 B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right) + \\ +\omega_1 B_1 \sin\left(\frac{3\pi x}{2l}\right) + \omega_2 B_2 \sin\left(\frac{5\pi x}{2l}\right) + ... = v_0 \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right) \tag{3.8}$$

Звідси маємо: $B_0 = \frac{v_0}{\omega_0}, B_1 = B_2 = B_3 = ... = 0$.

Тепер необхідно *правильно* записати відповідь через знайдені коефіцієнти A_n, B_n! Підставляємо знайдені коефіцієнти у загальний розв'язок. Тільки два коефіцієнти - A_1 і B_0 не дорівнюють нулю, тож з усіх членів загального розв'язку у розв'язку задачі мають залишитись всего два!

Остаточна відповідь:

$$u(x,t) = h\cos(\omega_1 t)\sin(k_1 x) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\sin(k_0 x) \tag{3.9}$$

де $k_0 = \frac{\pi x}{2l}, k_1 = \frac{3\pi x}{2l}, \omega_0 = vk_0, \omega_1 = vk_1$. Розв'язок є суперпозицією двох власних мод. Як і має бути, кожна з них має свою частоту.

Перевіримо відповідь.

- Власні функції перевірені у задачі 1.2.
- Постановка задачі містить два неоднорідних члени у початкових умовах, один пропорційний h, інший пропорційний v_0. Розв'язок має містити доданки, пропорціні кожному з цих множників. З відповіді видно, що це дійсно так.
- Перевіряємо початкові умови. Переконайтесь самостійно, що вони виконуються.

Альтернативний шлях – знайти коефіцієнти загального розв'яку як коефіцієнти розкладу у ряд Фур'є за означенням, через інтеграли. Переконаємося, що цей шлях приводить до того ж результату. Маємо:

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\left((\frac{1}{2}+n)\frac{\pi x}{l}\right)dx \tag{3.10}$$

Підставивши явний вигляд $\phi(x)$, одержимо інтеграл, який є інтегралом ортогональності власних функцій

$$\int_0^l \sin\left(\frac{3\pi x}{2l}\right)\sin\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\frac{\pi x}{l}\right)dx = \int_0^l X_1(x)X_n(x)dx = \frac{l}{2}\delta_{1n} \qquad (3.11)$$

Якщо ви не побачите що інтеграл є інтегралом ортогональності, і будете його обчилювати, то втратите час і можете помилитися у викладках. У результаті одержите неправильну відповідь, що часто і відбувається.

Результат $A_1 = h, A_0 = A_2 = A_3 = ... = 0$ та для швидкостей $B_0 = \frac{v_0}{\omega_0}, B_1 = B_2 = B_3 = ... = 0$

Отримали теж саме, але складнішим шляхом!

Задача № 3.3

Знайти коливання пружного стержня довжиною l з вільними кінцями, якщо початкове відхилення дорівнює нулю, а початкова швидкість $\psi(x) = \nu_0$. Якщо всі знайдені вами коефіцієнти Фур'є (коефіцієнти загального розв'язку) дорівнюють нулю, поясніть, що це означає, і знайдіть, де була допущена помилка.

Розв'язок

Формальна постановка задачі:

$$\begin{cases} u = u(x,t), \\ u_{tt} = v^2 u_{xx}, \\ 0 \le x \le l, t \ge 0, \\ u_x(0,t) = u_x(0,t) = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x) = 0, \\ u_t(x,0) = \psi(x) = \nu_0. \end{cases} \qquad (3.12)$$

Це задача із заданими початковими умовами (а саме - початковим розподілом зміщення та швидкостей), яка має єдиний розв'язок.

Рівняння і межові умови задачі однорідні, тому можна розділити змінні і знайти власні моди. Скористаємося результатом задачі 2.1 в якій відповідні власні моди були знайдені:

$$\begin{cases} u_0(x,t) = A_0 + B_0 t, \\ u_n(x,t) = [A_n\cos(\omega_n t) + B_n\sin(\omega_n t)]\cos(k_n x), \\ k_n = \dfrac{\pi n}{l} - \text{ хвильові вектори}, \\ \omega_n = v k_n = \dfrac{v\pi n}{l} - \text{ власні частоти}, \\ n = 1, 2, \ldots \end{cases} \qquad (3.13)$$

і запишемо загальний розв'язок:

$$u(x,t) = A_0 + B_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] \cos(k_n x) \tag{3.14}$$

та його похідну по часу:

$$u_t(x,t) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [-A_n \omega_n \sin(\omega_n t) + B_n \omega_n \cos(\omega_n t)] \cos(k_n x) \tag{3.15}$$

Як і у попередніх задачах, загальний розв'язок має вигляд розвинення в узагальнений ряд Фур'є по власних функціях відповідної задачі Штурма-Ліувілля. Доданок загального розв'язку, який ми виділили окремо, відповідає власній функції $X_0(x) = 1$ і нульовому власному значенню $\lambda_0 = 0$; тому відповідна власна мода (її називають нульовою модою) не є коливальною, а відповідає рівномірному рухові стержня як цілого. Саме наявність нульової моди, яка не схожа на всі інші, відрізняє дану задачу від розв'язаних раніше. Підставляємо (3.14) у початкові умови (3.12):

$$u(x,0) = \varphi(x) \;\Rightarrow\; A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos k_n x = 0 \tag{3.16}$$

Підставляємо (3.15) у початкові умови (3.12):

$$u_t(x,0) = \psi(x) \;\Rightarrow\; B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \omega_n \cos k_n x = \nu_0 \tag{3.17}$$

Ліві частини одержаних рівностей є розвиненнями по ортогональній системі власних функціях задачі Штурма-Ліувілля. Прирівняємо коефіцієнти при однакових ортогональних функціях. У результаті знаходимо

$$A_0 = 0;\; B_0 = \nu_0;\; A_n, B_n = 0,\; \text{при } n \in \mathbb{N}$$

Підставляємо знайдені коефіцієнти у загальний розв'язок і отримуємо розв'язок з одного доданку.

$$u(x,t) = \nu_0 t \tag{3.18}$$

Перевіряємо відповідь

- Власні функції перевірені в задачі 2.1
- Постановка задачі містить один неоднорідний член у початковій швидкості, пропорційний v_0. Перевіряємо наявністьцього множника у загальному розв'язку.

- Перевіряємо початкові умови - виконуються?
- Також дана задача є прикладом, коли розв'язок можна перевірити з фізичних міркувань: стержень не має закріплених точок , у початковий момент він не деформований, і всі точки його мають однакову швидкість. Тому далі він має рівномірно рухатись як ціле. Саме такому рухові і відповідає одержаний розв'язок.

Вище ми навели правильний і найкоротший спосіб розв'язання задачі. А тепер уявімо, що ми помилилися у задачі Штурма-Ліувілля і пропустили нульове власне значення. Якими будуть наслідки? Тоді у загальному розв'язку нульової моди немає, і умова для визначення коефіцієнтів B_n набуває вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \omega_n \cos k_n x = \nu_0 \tag{3.19}$$

За зразком задачі 2.3 домножаємо цю рівність на $\cos k_m x$ та інтегруємо почленно. Результатом є вираз для шуканих коефіцієнтів B_n через інтеграли. Але всі вони виявляються рівними нулю

$$B_n = \frac{2\nu_0}{\omega_n l} \int\limits_0^l \cos(k_n x)\, \mathrm{d}x = 0$$

Пропонуємо виконати обчислення і пересвідчитись у цьому самостійно. Отже, ми розкладали у ряд Фур'є функцію v_0 (тобто константу), обчислили всі її коефіцієнти Фур'є, а сума ряду зі знайденими коефіцієнтами виявилася рівною нулю, а не v_0: сума ряду Фур'є не дорівнює функції, яку ми розкладали. Причина цього розходження проста. Функція v_0, яку ми намагалися розкласти по системі $\cos k_n x$, ортогональна до всіх функцій цієї системи. Це означає, що використана нами система ортогональних функцій *неповна*. Адже її можна доповнити функцією 1, ортогональною до всіх функцій системи. Рівні нулю інтеграли для коефіцієнтів B_n це і є інтеграли ортогональності між 1 і всіма $\cos k_n x$.

Цей приклад показує, до чого може призводити використання неповної системи ортогональних функцій. Повною є система *всіх* власних функцій задачі Штурма-Ліувілля, а функцію $X_0 = 1$ ми пропустили. У результаті одержали неправильний розв'язок. Тому при розв'язанні задачі Штурма-Ліувілля так важливо ретельно перевіряти, чи *всі* її власні функції знайдено.

Заняття 4

Рівняння теплопровідності з однорідними межовими умовами

Задача № 4.1

Одну і ту ж функцію, наприклад $f(x) = \alpha x$, можна представити на проміжку $0 \leq x \leq l$ узагальненим рядом Фур'є по кожній із систем власних функцій чотирьох задач Штурма-Ліувілля, одержаних у задачах 1.1, 1.2, 1.3, 2.1. Користуючись явним виглядом власних функцій і не обчислюючи коефіцієнтів рядів, дайте відповіді на такі запитання.

1. *Який вигляд матиме графік суми кожного з таких рядів на всій числовій осі? Якою є парність суми ряду відносно точок $x = nl$, де n – ціле число, і як це пов'язано з виглядом крайових умов задачі Штурма-Ліувілля?*

2. *Покажіть, що кожний з рядів є частинним випадком класичного тригонометричного ряду Фур'є, сума якого є періодичною функцією. Які саме періоди відповідають кожному з рядів? Яка саме частина повного тригонометричного базису використовується в кожному з розкладань, а які коефіцієнти Фур'є дорівнюють нулю і чому?*

3. *Як пов'язаний характер збіжності вказаних рядів з крайовими умовами, які задовольняє функція $f(x)$ у точках $x = 0, l$? Чи дорівнює сума ряду Фур'є функції $f(x)$ на відкритому проміжку $0 < x < l$? на закритому проміжку $0 \leq x \leq l$*

Розв'язок

Запитання №1

Графік суми ряду буде періодично повторювати розкладену в ряд Фур'є функцію з періодом l. Відносно точок $x = nl$ сума ряду буде або парною, або непарною, функцією. Для задачі, де кінці струни закріплені, відносто всіх цих точок буде непарною. Це випливає із умов при яких можливий розклад в

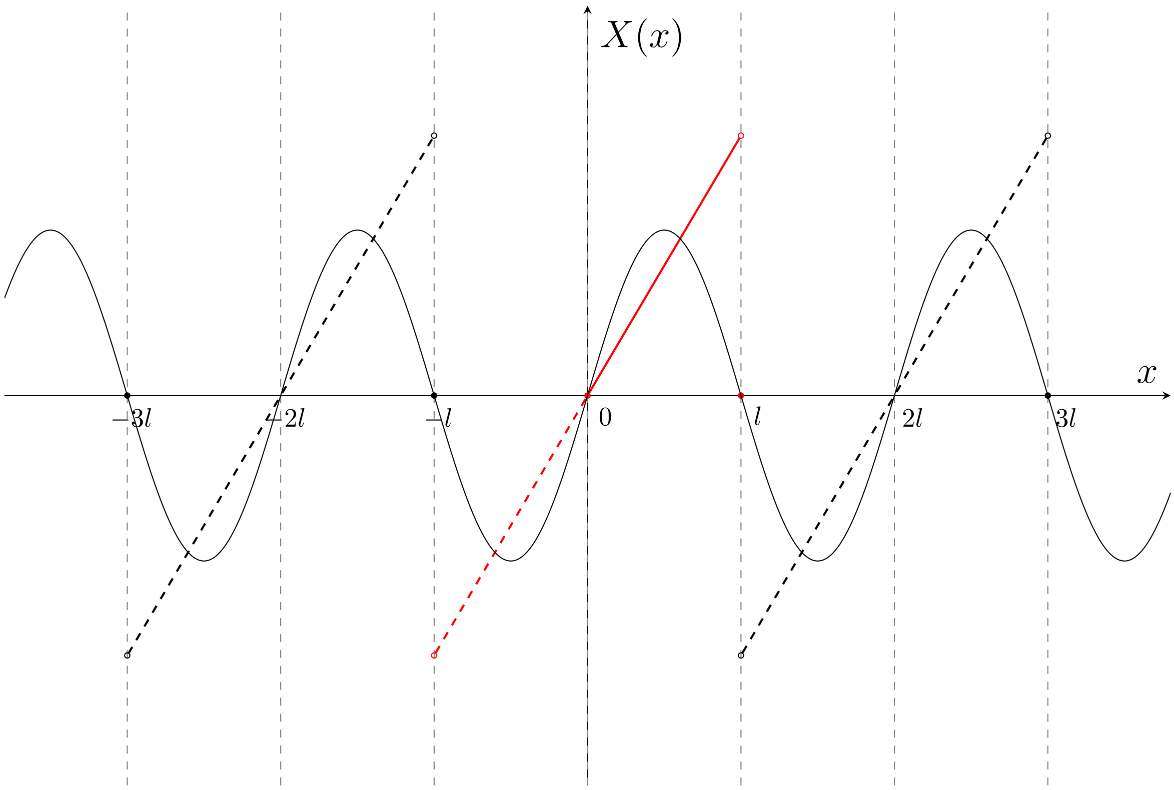


Рис. 4.1: Аналітичне продовження функції αx для розкладу системі власних функцій із задачі 1.1

ряд Фур'є – кусково-гладкість та періодичність функції, тобто щоб задовольняти всім цим умовам і отримували в точках $x = nl$ значення функції рівним нулю, необхідно щоб функція була непарна відносно ціє точки. Аналогічна, ситуація для межової умови, де кінець струни вільний ($X'(nl) = 0$), тільки треба згадати, що похідна змінює парність функції (звісно якщо функція має певну парність), тому відносно вільних кінців сума ряду буде парною функцією.

Запитання №2

Запитання №3

Графіки суми рядів Фур'є буде періодичною функцією, що на відкритому проміжку $(0, l)$ співпадає з нашою функцією, а на в точках може бути розрив першого роду.

Червоним позначена функція, яку ми розкладуємо в ряд Фур'є. Пунктина лінія, знову червона, показує відповідне симетрійне продовження відносно нуля. Чорною пунктирною лінією позначено симетрійні відображення відносно інших точкок.

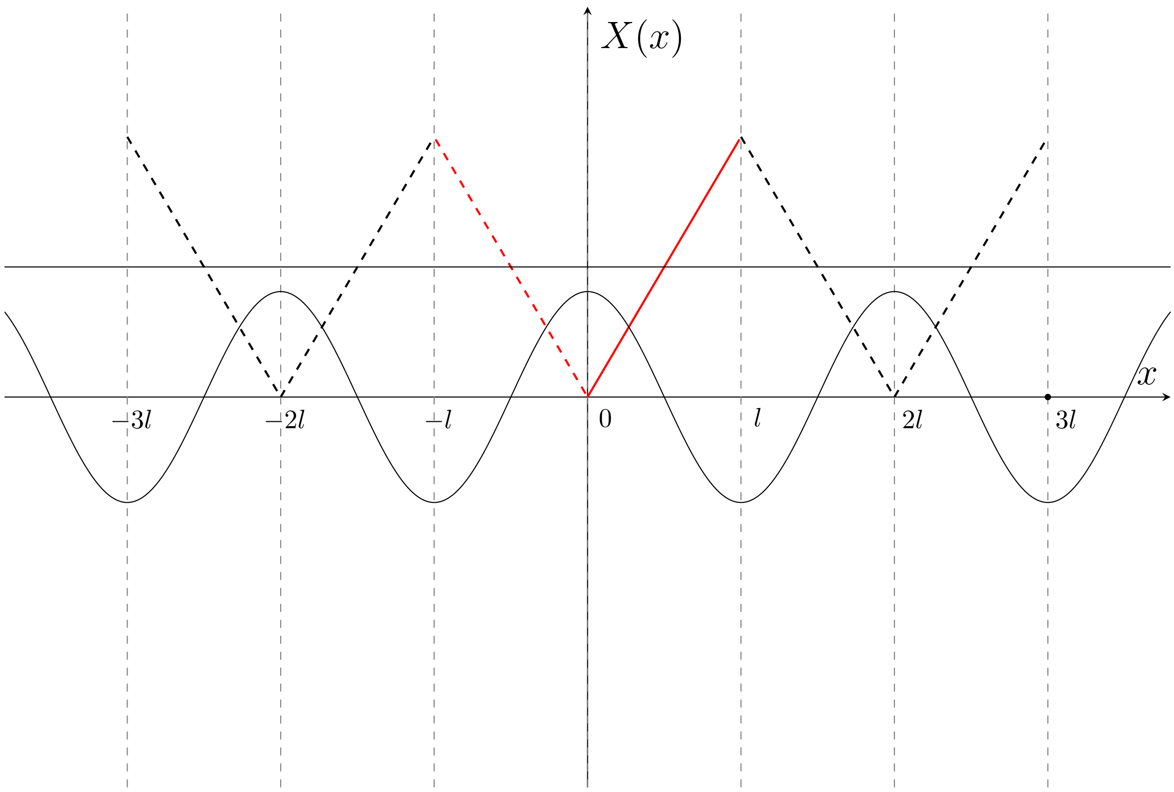


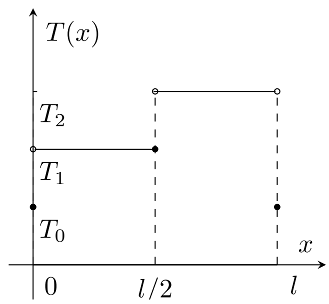
Рис. 4.2: Аналітичне продовження функції αx для розкладу системі власних функцій із задачі 2.1

Задача № 4.2

У початковий момент часу ліва половина стержня з теплоізольованою бічною поверхнею має температуру T_1 , а права – температуру T_2 . Знайти розподіл температури при $t > 0$, якщо кінці стержня підтримуються при температурі T_0. Указівка: подумайте, що означає «температура дорівнює нулю», що це за нуль? Покладіть у кінцевому результаті $T_0 = 0$ і розгляньте частинні випадки: $T_1 = T_2$ та $T_1 = -T_2$. Які члени ряду при цьому обертаються в нуль? Чому? Нарисуйте графіки та порівняйте часову залежність температури для різних мод. Нарисуйте (якісно) графіки розподілу температури вдовж стержня у різні характерні послідовні моменти часу. Що таке «малий» і «великий» проміжок часу для цієї задачі? Як характерні часи залежать від розмірів системи?

Розв'язок

У задачі необхідно знайти, як буде змінюватися з часом заданий початковий розподіл температури у стержні. Формулювання задачі неявно передбачає, що у межах поперечного перерізу стержня температура є однаковою. Тому тепло передається лише вздовж стержня, температура u залежить лише від координати взовж стержня і часу. Процес описується одновимірним рівнянням теплопровідності; формальна постановка задачі має вигляд:



$$\begin{cases} u = u(x,t), \\ u_t = \kappa^2 u_{xx}, \\ 0 \le x \le l, t \ge 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = T_0, \\ u(x,0) = \varphi(x) = T_1 - (T_1 - T_2)\Theta(x - l/2). \end{cases} \tag{4.1}$$

Тут ми використали тета-функцію Хевісайта (або функцію сходинки):

$$\Theta(x - x_0) = \begin{cases} 0, \text{ при } x < x_0 \\ 1, \text{ при } x > x_0 \end{cases}$$

Межові умови задачі неоднорідні, тому безпосереднє відокремлення змінних неможливе. У даному випадку можна легко привести межові умови до однорідних. Перейдемо до нової невідомоїфункції заміною

$$u(x,t) = \widetilde{u}(x,t) + T_0$$

Тоді рівняння для нової невідомої функції $\widetilde{u}(x,t)$ не змінить свого вигляду. Фізично це означає, що рівняння теплопровідності записується для різниці температур, або ж для температури, яка відраховується від довільно вибраного нуля. Якщо u дорівнює температурі кінців T_0, то температура $\widetilde{u}$ дорівнює нулю. Отже, після заміни ми відраховуємо температуру від температури кінців. У результаті заміни умови задачі на $\widetilde{u}$ набувають вигляду (хвильку надалі тимчасово опускаємо)

$$\begin{cases} u = \widetilde{u}(x,t), \\ u_t = \kappa^2 u_{xx}, \\ 0 \le x \le l, t \ge 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x) = T_1 - T_0 - (T_1 - T_2)\Theta(x - l/2). \end{cases} \tag{4.2}$$

Тепер рівняння і межові умови однорідні, і можена розділяти змінні. Шукаємо частинні розв'язки вигляду

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) \tag{4.3}$$

У результаті відокремлення змінних приходимо до наступної задачі Штурма-Ліувілля на просторову частину розв'язку:

$$\begin{cases} X = X(x), \\ X'' = -\lambda X, \\ 0 \le x \le l, \\ X(0) = 0, \\ X(l) = 0. \end{cases} \qquad \widetilde{T}' + \lambda D \widetilde{T} = 0 \tag{4.4}$$

Її розв'язок (1.6) знайдений у задачі №1,1:

$$\begin{cases} \lambda_n = \dfrac{\pi^2 n^2}{l^2}, \\ X_n(x) = \sin\left(\dfrac{\pi n x}{l}\right), \end{cases} \quad \text{де } n \in \mathbb{N}. \tag{4.5}$$

Для часової частини одержуємо лінійне рівняння першого порядку, яке ленгко розв'язується:

$$\begin{gathered} \frac{T'}{T} = -\lambda_n \kappa^2 = -\tau_n^{-1} \;\Rightarrow\; \int \frac{\mathrm{d}T}{T} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{\tau_n} \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; \ln T_n = \ln C_n - t/\tau_n \;\Rightarrow\; T_n = C_n e^{-t/\tau_n}, \text{ де } n \in \mathbb{N} \end{gathered} \tag{4.6}$$

Виписуємо набір власних мод системи

$$\begin{aligned}
&u_n(x,t) = X_n \cdot T_n = C_n e^{-t/\tau_n} \sin(k_n x), \\
&k_n = \frac{\pi n}{l} - \text{ хвильові вектори}, \\
&\tau_n = \frac{1}{\kappa^2 k_n^2} = \frac{l^2}{\kappa^2 \pi^2 n^2} - \text{ характерний час зміни температури}, \\
&n = 1, 2, \ldots
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Виписуємо загальний розв'язок задачі для $\widetilde{u}$

$$\widetilde{u}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-t/\tau_n} \sin(k_n x) \tag{4.8}$$

Із початкової умови на $\widetilde{u}$ (4.2) одержуємо умову для визначення коефіцієнтів C_n:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(k_n x) = T_1 - T_0 - (T_1 - T_2)\Theta(x - l/2) \tag{4.9}$$

Оскільки права частина є функцією x загального вигляду, коефіцієнти знаходимо за зразком задачі 2.3

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{2}{l}\left[\int_0^{l/2} (T_1 - T_0)\sin(k_n x)\,\mathrm{d}x + \int_{l/2}^{l} (T_2 - T_0)\sin(k_n x)\,\mathrm{d}x\right] = \\
&= -\frac{2}{lk_n}\left[(T_1 - T_0)\cos(k_n x)\Big|_0^{l/2} + (T_2 - T_0)\cos(k_n x)\Big|_0^{l/2}\right] = \\
&= \frac{2}{lk_n}\left[(T_1 - T_0)(1 - \cos(k_n l/2)) + (T_2 - T_0)(\cos(k_n l/2) - (-1)^n)\right] = \\
&= \frac{2}{lk_n}\left[T_1(1 - \cos(k_n l/2)) + T_2(\cos(k_n l/2) - (-1)^n) + T_0((-1)^n - 1)\right]
\end{aligned}$$

Для непарних і парних n відповідно маємо

$$\begin{aligned}
n = 2m - 1: \ &\Rightarrow C_{2m-1} = \frac{2}{k_{2m-1} l}\left[T_1 + T_2 - 2T_0\right] \\
n = 2m: \ &\Rightarrow C_{2m} = \frac{2}{k_{2m} l}\left[T_1 - T_2\right]\left[1 - (-1)^m\right]
\end{aligned}$$

Таким чином розв'язок для $\widetilde{u}$ природним чином розпадається на суму двох частин, які виражаються рядами окремо по непарних і парних n. Перша і друга частини розв'язку пропорційна різним множникам, перша - $(T_1 + T_2 -$

$2T_0$), а друга - $(T_1 - T_2)$. Розв'язком задачі є

$$\begin{aligned} u(x,t) = T_0 + 2(T_1 + T_2 - 2T_0) \sum_{m=1}^{\infty} e^{-t/\tau_{2m-1}} \frac{\sin(k_{2m-1}x)}{lk_{2m-1}} + \\ +2(T_1 - T_2) \sum_{m=1}^{\infty} [1 - (-1)^m] e^{-t/\tau_{2m}} \frac{\sin(k_{2m}x)}{lk_{2m}} \end{aligned} \tag{4.10}$$

Моди з непарними номерами є симетричними, а з парними - антисиметричними відносно середини стержня (див. задачу 1.1). Відповідно, таку ж симетрію мають суми першого і другого рядів. Такий результат обумовлений симетрією самого стержня з урахуванням фізичних умов на його кінцях. У частинному випадку $T_2 = T_1$ початковий розподіл температури є симетричним. Тоді з розв'язку видно, що його антисиметрична частина зануляється, і розподіл температури залишається симетричним відносно середини стержня в усі моменти часу. У випадку $T_2 = -T_1$ і $T_0 = 0$ початковий розподіл температури є антисиметричним. Тоді антисиметрична частина розв'язку зануляється, і в усі моменти часу розподіл температури залишається антисиметричним відносно середини стержня . .

Аналіз розв'язку

Поведінку знайдених груп доданків можна побачити на наступному графіку. Тут наведено по одному з кожної групи.

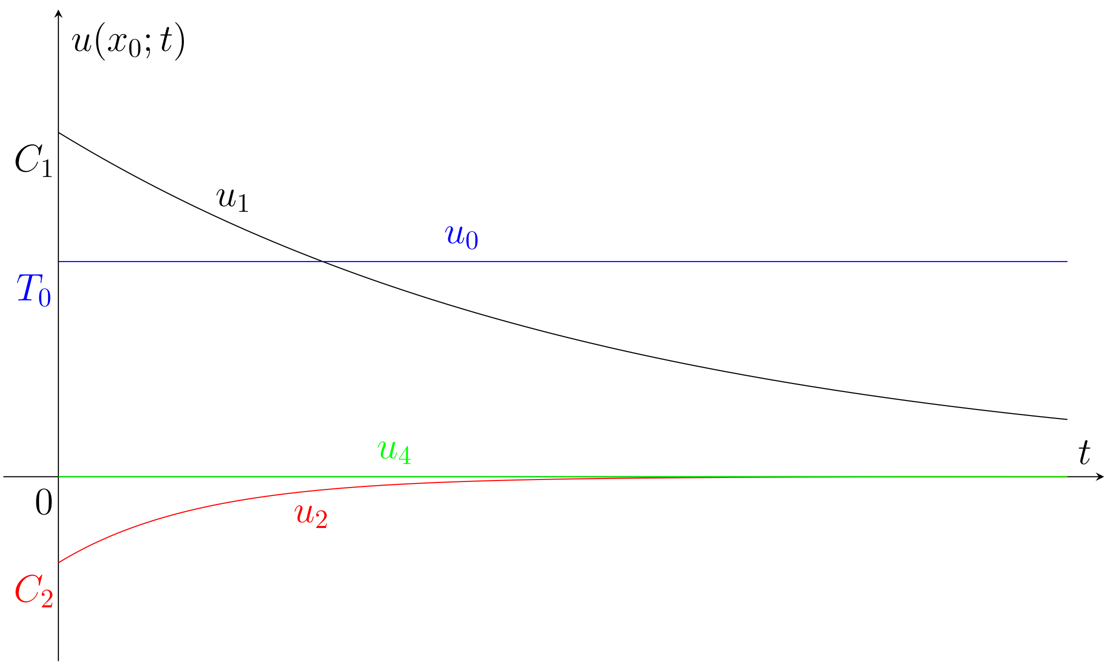


Рис. 4.3: Перші чотири розв'язки

Проміжок часу називається малим, коли $t \ll \tau$, а великим – $t > \tau$

Задача № 4.4

Початкова температура повністю теплоізольованого тонкого стержня $0 \le x \le l$ дорівнює $T_1 \cos(\pi x/2l) + T_2 \cos(2\pi x/l)$. Знайти поле температур при $t > 0$. Перевірити виконання початкових умови при $T_1 = 0$ і $T_2 = 0$.

Розв'язок

Формальна постановка задачі:

$$\begin{cases} u = u(x,t), \\ u_t = Du_{xx}, \\ 0 \le x \le l, t \ge 0, \\ u_x(0,t) = 0,\, u_x(l,t) = 0, \\ u(x,0) = T_1 \cos(\pi x/2l) + T_2 \cos(2\pi x/l). \end{cases} \tag{4.11}$$

Виконуючи розділення змінних ми отримаємо дві вже розв'язані задачі. Задачу Штурма-Ліувілля (2.3) з задачі №2.1 та часове диференціальне рівняння (4.6) з задачі №4.2. Отже, загальний розв'язок можна одразу записати комбінуюці відомі.

$$u(x,t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-t/\tau_n} \cos k_n x, \tag{4.12}$$

$$k_n = \frac{\pi n}{l} - \text{ хвильові вектори,}$$
$$\tau_n = \frac{1}{Dk_n^2} - \text{ характерний час зміни температури,}$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

З початкові умови визначимо невіомі коефіцієнти. Для цього треба розкласти $\cos(\pi x/2l)$ по набору власних функцій задачі Ш.-Л.

$$\cos(\pi x/2l) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos k_n x$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^l \cos(\pi x/2l)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\sin(\pi x/2l)\Big|_0^l = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \cos(\pi x/2l)\cos k_n x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{l}\Bigg(\int_0^l \cos((k_n + \pi/2l)x)\,\mathrm{d}x +$$

$$+\int_0^l \cos((k_n - \pi/2l)x)\,\mathrm{d}x\Bigg) = \frac{1}{l}\left(\frac{\sin((k_n+\pi/2l)x)}{k_n+\pi/2l}\Bigg|_0^l + \frac{\sin((k_n-\pi/2l)x)}{k_n-\pi/2l}\Bigg|_0^l\right) =$$

$$= \left(\frac{\sin(k_n l + \pi/2)}{k_n l + \pi/2} + \frac{\sin(k_n l - \pi/2)}{k_n l - \pi/2}\right) = \left(\frac{1}{k_n l + \pi/2} - \frac{1}{k_n l - \pi/2}\right)\cos k_n l =$$

$$= \Big|\cos k_n l = (-1)^n\Big| = \frac{(-1)^{n+1}\pi}{(k_n l + \pi/2)(k_n l - \pi/2)} =$$

$$= (-1)^{n+1}\cdot\frac{4\pi}{4k_n^2 l^2 - \pi^2} = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$$

Тепер підставимо (4.12) в початкову умову (4.11) і отримаємо:

$$\begin{aligned} u(x,0) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos k_n x = T_1\cos(\pi x/2l) + T_2\cos(2\pi x/l) = \\ = \frac{2T_1}{\pi} + T_2\cos k_2 x + \frac{4T_1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos k_n x}{4n^2-1} \end{aligned} \tag{4.13}$$

З чого слідує

$$C_0 = \frac{2T_1}{\pi},\ C_2 = T_2 - \frac{4T_1}{15\pi},\ C_n = \frac{4T_1}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1},\ \text{де } n \neq 2$$

Отже, остаточним розв'язком буде

$$u(x,t) = \frac{2T_1}{\pi} + T_2 e^{-t/\tau_2}\cos k_2 x + \frac{4T_1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos k_n x}{4n^2-1} \tag{4.14}$$

Прямою підстановкою можна переконатися, що при $T_1 = 0$ та $T_2 = 0$ початкові умови виконуються.

Тема II:

МЕТОД ЧАСТИННИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ТА МЕТОД РОЗКЛАДАННЯ ЗА ВЛАСНИМИ ФУНКЦІЯМИ.

Заняття 5

Еволюційні задачі з неоднорідним рівнянням або неоднорідними межовими умовами: стаціонарні неоднорідності

Задача № 5.1

Знайти коливання вертикально розташованого пружного стержня під дією сили тяжіння для $t > 0$. Верхній кінець стержня закріплений, а нижній вільний. При $t < 0$ стержень був нерухомим і деформацій не було. Знайти спочатку стаціонарний розв'язок, що відповідає положенню рівноваги стержня в полі тяжіння, а потім знайти відхилення від нього, що відповідає коливанням навколо нового положення рівноваги. Намалювати графіки розподілу поля зміщень та поля напружень у положенні рівноваги.

Розв'язок

Знайти коливання вертикально розташованого пружного стержня під дією сили тяжіння для $t > 0$. Верхній кінець стержня закріплений, а нижній вільний. При $t < 0$ стержень був нерухомим і деформацій не було. Знайти спочатку стаціонарний розв'язок, що відповідає положенню рівноваги стержня в полі тяжіння, а потім знайти відхилення від нього, що відповідає коливанням навколо нового положення рівноваги. Намалювати графіки розподілу поля зміщень та сили натягу стержня у положенні рівноваги.

Розв'язок

Формальна постановка задачі:

$$\begin{cases} u = u(x,t), \\ u_{tt} = v^2 u_{xx} + g, \\ 0 \le x \le l, t \ge 0 \\ u(0,t) = 0,\ u_x(l,t) = 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

На відміну від попередніх задач, рівняння тут неоднорідне. Якщо рівняння і/або межові умови неоднорідні, то змінні не розділяються, і починати з відокремлення змінних не можна. Проте у даній задачі йдеться про систему, яка занходиться у стаціонарних (тобто незмінних з часом) зовнішніх умовах: стержень (певним чином закрілений) знаходиться у стаціонарному зовнішньому полі сили тяжіння. Математично це проявляється у тому, що неоднорідний член у рівнянні не залежить від часу. Завдяки такій особливості задачу можна розв'язати відносно просто, не звертаючись до загальних методів рорзв'язання задач з неоднорідними рівнянням чи межовими умовами. Ключик до задщачі можна знайти з фізичних міркувань. Простим аналогом задачі є задача про пружинний маятник (частинку, прикріплену до невагомої пружинки) у полі тяжіння. Уявляємо, що стердень перебував у положенні рівноваги, і сила тяжіння включається у початковий момент часу. Під дією сили тяжіння стерень почне розтягуватись і потім коливатися. Якщо врахувати мале тертя, то коливання згодом затухнуть, і стержень зупинится у положенні, в якому він буде розтягнутий під дією власної ваги. Це положення рівноваги стержня у полі тяжіння. Відповідний розв'язок рівняння з межовими умовами називають стаціонарним розв'язком $u = u_{\text{ст}}$. За смислом стаціонарний розв'язок не залежить від часу $u = u_{\text{ст}}(x)$ і задовольняє неоднорідне рівняння і межові умови задачі (5.1). Отже, $u_{\text{ст}}(x)$ можна знайти як розв'язок неоднорідної крайової задачі

$$\begin{cases} u = u_{\text{ст}}(x), \\ v^2 u'' + g = 0, \\ 0 \le x \le l, t \ge 0 \\ u(0) = 0,\ u'(l) = 0 \end{cases} \tag{5.2}$$

Фізично це задача на статичну рівновагу стержня у полі тяжіння.

Щоб розв'язати вихідну задачу, робимо заміну невідомої функції

$$u(x,t) = u_{\text{ст}}(x) + w(x,t) \tag{5.3}$$

Нове невідоме $w(x,t)$ відповідає вільним коливанням відносно нового положення рівноваги. Тому $w(x,t)$ задовольнятиме однорідні рівняння і межові умови, а такі задачі ми вже вміємо розв'язувати.

1) Стаціонарний розв'язок. Рівняння задачі (5.2) інтегруємо двічі. Маємо:

$$u_{\text{ст}}(x) = -\frac{gx^2}{2v^2} + C_1 x + C_2 \tag{5.4}$$

Сталі інтегрування визначаємо з крайових умов

$$\begin{aligned} u_{\text{ст}}(0) = C_2 = 0, \\ u'_{\text{ст}}(l) = -\frac{gl}{v^2} + C_1 = 0; \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0, \quad C_1 = \frac{gl}{v^2} \tag{5.5}$$

Отже, стаціонарний розв'язок має вигляд

$$u_{\text{ст}}(x) = -\frac{gx^2}{2v^2} + \frac{glx}{v^2} = A \cdot \frac{2lx - x^2}{l^2} \tag{5.6}$$

де позначено $A = gl^2/2v^2$. Графік поля зміщень має вигляд парболи з максимумом у точці кінця стержня $x = l$. Згідно закону Гука пружна сила $F(x) = \beta u_x$, де β - пружна стала, а $v^2 = \rho/\beta$, де ρ - лінійна густина маси. Звідси маємо

$$F(x) = \beta\frac{gl^2\rho}{2\beta} \cdot \frac{2l - 2x}{l^2} = Mg\frac{l - x}{l} \tag{5.7}$$

$M = \rho l$ - повна маса стержня. Отже, сила натягу максимальна і дорівнює вазі всього стержня у точці його закріплення і лінійно спадає до нуля у точці його нижнього кінця, що повністю відповідає фізиці ситуації.

2) Нестаціонарна частина розв'язку. Зробимо заміну (5.3): перепишемо умови задачі через нове невідоме $w(x, t)$, враховуючи умови (5.2), які задовольняє стаціонарний розв'язок. Рівняння:

$$u_{tt} = v^2 u_{xx} + g \;\Rightarrow\; w_{tt} = v^2 w_{xx} + v^2 u''_{\text{ст}} + g = v^2 w_{xx}$$

Межові умови:

$$\begin{array}{r} u(0,t) = u_{\text{ст}}(0) + w(0,t) = 0, \\ u_x(l,t) = u'_{\text{ст}}(0) + w_x(l,t) = 0 \end{array} \;\Rightarrow\; w(0,t) = 0,\; w_x(l,t) = 0$$

Початкові умови:

$$u(x,0) = u_{\text{ст}}(x) + w(x,0) = 0 \;\Rightarrow\; w(x,0) = -u_{\text{ст}}(x) = A \cdot \frac{x^2 - 2lx}{l^2}$$

$$u_t(x,0) = 0 \;\Rightarrow\; w_t(x,0) = 0$$

Отже, ми одержали задачу для $w(x, t)$ з однорідними межовими умовами і однорідними рівнянням та зміненими початковими умовами:

$$\begin{cases} w = w(x,t), \\ w_{tt} = v^2 w_{xx}, \\ 0 \le x \le l, t \ge 0 \\ w(0,t) = 0,\; w_x(l,t) = 0, \\ w(x,0) = A\dfrac{x^2 - 2lx}{l^2}, \\ w_t(x,0) = 0. \end{cases} \tag{5.8}$$

Власні моди для такої задачі були знайдені у задачі 1.2. Загальний розв'язок має вигляд:

$$\begin{aligned}
&w(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \big(A_n \sin\omega_n t + B_n \cos\omega_n t\big) \sin k_n x,\\
&k_n = \frac{\pi}{l}(n+1/2) \text{ – хвильове число,}\\
&\omega_n = v k_n \text{ – частота коливання,}\\
&n = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Залишається визначити коефіцієнти A_n та B_n з початкових умов:

$$w_t(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \omega_n \sin k_n x = 0 \;\Rightarrow\; A_n = 0, \,\forall n$$

$$w_t(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin k_n x = A \cdot \frac{x^2 - 2lx}{l^2} \;\Rightarrow\; B_n = \frac{2A}{l^3} \int\limits_0^l (x^2 - 2lx) \sin k_n x \,\mathrm{d}x$$

Обчислимо отриманий інтеграл

$$\int\limits_0^l (x^2 - 2lx) \sin k_n x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{k_n}(x^2 - 2lx) \cos k_n x \bigg|_0^l -$$

$$-\frac{2}{k_n} \int\limits_0^l (x - l) \cos k_n x \,\mathrm{d}x = \frac{2}{k_n^2}\left[(x-l)\sin k_n x\bigg|_0^l - \int\limits_0^l \sin k_n x \,\mathrm{d}x\right] =$$

$$= \frac{2}{k_n^3}\big(\cos k_n l - \cos 0\big) = \bigg|\cos k_n l = 0\bigg| = -\frac{2}{k_n^3}$$

Отже, розв'язок

$$u(x,t) = \frac{gl^2}{2v^2}\left(\frac{2lx - x^2}{l^2} - 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\omega_n t \sin k_n x}{(lk_n)^3}\right) \tag{5.10}$$

З відповіді видно, що стаціонарний розв'язок (це перший доданок, якщо розкрити дужки) об'єктивно відрізняється від інших складових розв'язку задачі, оскільки вони залежать від часу. Стаціонарний розв'язок відповідає положенню рівноваги стержня у полі тяжіння, і тому представляє самостійний інтерес з фізичної фізичної точки зору. Якщо врахувати затухання коливань, то при великих t поле зміщень прямуватиме до стаціонарного розв'язку.

Зверніть увагу, що одержаний ряд Фур'є збігається швидше, ніж у попередніх задачах: коефіцієнти ряду спадають як $1/n^3$ при великих n. Це пов'язано з тим, що стаціонарний розв'язок задовольняє такі ж крайові умови, як і власні функції задачі Штурма-Ліувілля, по яких він розкладається у ряд.

Зауважимо, що стаціонарний розв'язок існує не завжди. Може бути, що неоднорідні члени у рівнянні і/або межових умовах не залежать від часу, але задача на стаціонарний розв'язок розв'язку не має. Наприклад, якщо у розглянутій вище задачі закріплений кінець зробити вільним, то стержень буде вільно падати. Отже фізично це випадки, коли статична рівновага у системі неможлива. Тоді метод необхідно модифікувати.

Задача № 5.3

У стержні довжиною l з непроникною бічною поверхнею відбувається дифузія частинок (коефіцієнт дифузії D), що мають час життя τ. Через правий кінець всередину стержня подається постійний потік частинок I_0. Знайти стаціонарний розподіл концентрації та розв'язок, що задовольняє нульову початкову умову, якщо через лівий кінець частинки вільно виходять назовні й назад не вертаються. Знайти вигляд стаціонарного розв'язку в граничних випадках великих і малих τ та нарисувати графіки. *Указівка. Рівняння дифузії частинок зі скінченним часом життя має вигляд: $u_t = Du_{xx} - \frac{1}{\tau}u$. Його зручно переписати через так звану довжину дифузійного зміщення $L = \sqrt{D\tau}$:*

$$\tau u_t = L^2 u_{xx} - u.$$

Величина L має смисл характерної відстані, на яку частинки встигають зміститися (в середньому) за час свого життя. «Великі» й «малі» τ означають у дійсності $L \gg l$ і $L \ll l$ відповідно. Останній випадок фактично означає перехід до наближення півнескінченного стержня $-\infty < x \leq l$.

Розв'язок

Формальна постановка задачі:

$$\begin{cases} u = u(x,t), \\ \tau u_t = L^2 u_{xx} - u, \\ 0 \leq x \leq l, t \geq 0, \\ u(x,0) = 0, \\ u(0,t) = 0, \\ u_x(l,t) = I_0. \end{cases} \tag{5.11}$$

Спочатку спробуємо знайти неоднорідну частину розв'язку $u_{\text{неодн}}$, яка задовільнить рівняння і межові умови (але не обов'язково задовільнятиме початкові). Шукатимемо її методом підбору. Оскільки межові умови не залежать від часу, то намагатимемося знайти його у вигляді функції $f(x)$ лише від x. Підставляючи такий вигляд неоднорідного розв'язку у рівняння, отримуємо:

$$L^2\frac{d^2f}{dx^2} - f = 0$$

Звідси маємо $u_{\text{неодн}} = f(x) = C_1\sinh(x/L) + C_2\cosh(x/L)$. Підставляючи отриманий розв'язок у межові умови, отримуємо

$$C_1 = \frac{I_0 L}{\cosh(l/L)}, \quad C_2 = 0.$$

Остаточно маємо:

$$u_{\text{неодн}} = \frac{I_0 L\sinh(x/L)}{\cosh(l/L)} \tag{5.12}$$

Далі шукаємо поний розв'язок у вигляді $u = u_{\text{неодн}} + u_{\text{одн}}$. Підставивши u в задачу (5.11) і отримаємо однорідну задачу на $u_{\text{одн}}$:

$$\begin{cases} u_{\text{одн}} = u_{\text{одн}}(x,t), \\ \tau(u_{\text{одн}})_t = L^2(u_{\text{одн}})_{xx} - u_{\text{одн}}, \\ u_{\text{одн}}(x,0) = -\dfrac{I_0 L\sinh\left(\frac{x}{L}\right)}{\cosh\left(\frac{l}{L}\right)}, \\ u_{\text{одн}}(0,t) = 0, \\ (u_{\text{одн}})_x(l,t) = 0. \end{cases}$$

Перш ніж розділити змінні, спростимо рівняння класичним прийомом, який непогано було б запам'ятати. Якщо ми маємо рівння типу

$$U_t = DU_{xx} + aU$$

з однорідними межовими умовами, то підстановка $U = u\exp(at)$ перетворить його рівняння на $u_t = Du_{xx}$, а межові та початкові умови для u будуть такими самими як були на U.

Тепер використаємо цей прийом. Підставимо $u_{\text{одн}} = \tilde{u}\exp(-\frac{t}{\tau})$ та отримаэмо задачу на $\tilde{u}$:

$$\begin{cases} \tilde{u} = \tilde{u}(x,t), \\ \tilde{u}_t = D\tilde{u}_{xx}, \\ 0 \le x \le l, t \ge 0, \\ \tilde{u}(x,0) = -\dfrac{I_0 L\sinh(x/L)}{\cosh(l/L)}, \\ \tilde{u}(0,t) = 0, \\ \tilde{u}_x(l,t) = 0. \end{cases} \tag{5.13}$$

А такі задачі ми вже добре вміємо розв'язувати. Потрібно знайти розв'язки (5.13) наступного вигляду:

$$\tilde{u}(x,t) = X(x) \cdot T(t) \neq 0 \tag{5.14}$$

Після підстановки відокремлення змінних (див. задачу 1.1) маємо:

$$\frac{T'}{DT} = \frac{X''}{X} = -\lambda \tag{5.15}$$

Отримуємо задачу Штурма-Ліувіля на $X(x)$ яка розв'язана у домашній задачі №1,2 з посібника. Випишемо результат:

$$\begin{cases} \lambda_n = \dfrac{\pi^2(2n-1)^2}{4l^2} - \text{власні числа}, \\ k_n = \dfrac{\pi(2n-1)}{2l} - \text{власні хвильові вектори}, \\ \text{де } n \in \mathbb{N}, \\ X_n(x) = \sin k_n x - \text{власні функції}. \end{cases} \tag{5.16}$$

Оскільки всі власні числа додатні, то після підстановки $\tilde{u}$ в $u_{одн}$ показники часових експонент не зможуть скомпенсуватися, адже будуть одного знаку, отже $u_{одн}$ є залежним від часу і виділити незалежну частину неможливо. А це означає, що знайдене раніше $u_{неодн}$ і є шуканим стаціонарним розв'язком задачі.

Тепер розв'яжемо рівняння на $T_n(t)$:

$$\begin{cases} \dot{T}_n + \lambda_n D T_n = 0, \\ \dfrac{1}{\tau_n} = D\lambda_n - \text{власний характерний час}, \\ T_n = C_n \exp\left(-\dfrac{t}{\tau_n}\right). \end{cases} \tag{5.17}$$

Збираючи по отриманим функціям $T(t)$ і $X(x)$ власні функції задачі й просумувавши їх, отримуємо загальний розв'язок:

$$\tilde{u}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp\left(-\frac{t}{\tau_n}\right) \sin(k_n x) \tag{5.18}$$

Тепер підставимо (5.18) у початкові умови:

$$\tilde{u}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(k_n x) = -\frac{I_0 L \sinh\left(\frac{x}{L}\right)}{\cosh\left(\frac{l}{L}\right)} \tag{5.19}$$

Ліва сторона рівності є розкладом Фур'є правої сторони по синусах. Знайдемо коефіцієнти цього розкладу:

$$C_n \int_0^l \left(\sin\left(k_n x\right)\right)^2 \, \mathrm{d}x = \frac{lC_n}{2} = -\frac{I_0 L}{\cosh\left(\frac{l}{L}\right)} \int\limits_0^l \sinh\left(\frac{x}{L}\right) \sin(k_n x)\, \mathrm{d}x =$$

$$= [\cos(k_n l) - (-1)^n] = -\frac{I_0 L}{\cosh\left(\frac{l}{L}\right)} \frac{4l^2 L (-1)^{n+1} \cosh\left(\frac{l}{L}\right)}{4l^2 + \pi^2 L^2 (2n-1)^2} = \frac{L^2 I_0 (-1)^n}{1 + L^2 \lambda_n}.$$

Підставляючи отримані коефіцієнти у (5.19), а його у $u_{\text{одн}}$ і сумуючи з $u_{\text{неодн}}$, отримуємо відповідь:

$$u(x,t) = \frac{I_0 L \sinh\left(\frac{x}{L}\right)}{\cosh\left(\frac{l}{L}\right)} + \frac{2L^2 I_0}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L^2 I_0 (-1)^n}{1 + L^2 \lambda_n} \exp\left(-\left(\frac{t}{\tau_n} + \frac{t}{\tau}\right)\right) \sin(k_n x)$$

Заняття 6

Задачі з неоднорідним рівнянням або неоднорідними межовими умовами

Джерела з гармонічною залежністю від часу.

Задача № 6.1

Знайти коливання струни $0 \le x \le l$, лівий кінець якої закріплений, а правий вільний, при $t > 0$ під дією розподіленої сили $f(x,t) = f(x)\cos\omega t$. При $t < 0$ струна перебувала в положенні рівноваги. Розглянути окремий випадок $f(x) = f_0$. Виділити складову розв'язку, яка відповідає усталеним вимушеним коливанням і проаналізувати картину резонансу. Перевірити, чи переходить одержаний розв'язок у розв'язок задачі 5.1 за відповідних умов.

Розв'язок

Спершу розберемося з розмірностями. Під розподіленою силою слід розуміти величину $\vec{f} = \frac{\Delta\vec{F}}{\Delta m} = \frac{d\vec{F}}{dV}\nu$, де $\nu = \frac{1}{\rho}$ - питомий об'єм.
Формальна постановка задачі:

$$\begin{cases} u = u(x,t), \\ 0 \le x \le l, t \ge 0, \\ u_{tt} = v^2 u_{xx} + f(x,t), \\ f(x,t) = f(x)\cos\omega t \\ \text{окремий випадок:} \quad f(x) = f_0, \\ u(x,0) = 0, \\ u_t(x,0) = 0, \\ u(0,t) = 0, \\ u_x(l,t) = 0. \end{cases} \tag{6.1}$$

Виділимо складову розв'язку $\tilde{u}$, яка відповідає вимушеним коливанням. Шукатимемо її у формі $\tilde{u}(x,t) = \widetilde{X}(x)\cos\omega t$. Після підстановки отримуємо наступну задачу (нам не принципово, щоб вона задовільняла ще й початкові умови):

$$\begin{cases} v^2\widetilde{X}'' + \omega^2\widetilde{X} + f(x) = 0, \\ \widetilde{X}(0) = 0, \\ \widetilde{X}'(l) = 0. \end{cases} \tag{6.2}$$

Найпростішим методом її розв'язання є метод функцій Гріна, який ви вивчали на курсі диференціальних рівнянь. Спочатку знаходимо функцію Гріна $G(x, s)$ до цієї задачі:

1. При $x \neq s$, вона має задовільняти однорідній частині рівняння, тобто

$$v^2 G'' + \omega^2 G = 0.$$

   Тоді, при вказаних вище умовах, маємо для кожної з областей $(x < s)$ і $(x > s)$:

$$G(x, s) = C_i(s)\cos\left(\frac{\omega x}{v}\right) + C_j(s)\sin\left(\frac{\omega x}{v}\right),$$

$$\begin{cases} i = 1,\ j = 2,\ x < s; \\ i = 3,\ j = 4,\ x > s. \end{cases}$$

2. Вона має задовільняти крайовим умовам.

$$G(x, s) = C_2(s)\sin\left(\frac{\omega x}{v}\right),\ x < s$$

$$G(x, s) = C_3(s)\left[\cos\left(\frac{\omega x}{v}\right) + \sin\left(\frac{\omega x}{v}\right)\tan\left(\frac{\omega l}{v}\right)\right],\ x > s$$

3. При $x = s$ вона неперервна по x, а її похідна має скачок, що дорівнює оберненій величині до коефіцієнта при другій похідній та залежить від s, замість x. У нашому випадку цей скачок дорівнює $\frac{1}{v^2}$.

$$C_2(s)\sin\left(\frac{\omega s}{v}\right) = C_3(s)\left[\cos\left(\frac{\omega s}{v}\right) + \sin\left(\frac{\omega s}{v}\right)\tan\left(\frac{\omega l}{v}\right)\right]$$

$$C_2(s)\cos\left(\frac{\omega s}{v}\right) + \frac{1}{v\omega} = C_3(s)\left[\cos\left(\frac{\omega s}{v}\right)\tan\left(\frac{\omega l}{v}\right) - \sin\left(\frac{\omega s}{v}\right)\right]$$

   Після спрощень отримуємо:

$$C_3 = -\frac{\sin\left(\frac{\omega s}{v}\right)}{v\omega}$$

$$C_2 = -\frac{\cos\left(\frac{\omega(s-l)}{v}\right)}{v\omega\cos\left(\frac{\omega l}{v}\right)}$$

$$G(x,s) = -\frac{\cos\left(\frac{\omega(s-l)}{v}\right)}{v\omega\cos\left(\frac{\omega l}{v}\right)}\sin\left(\frac{\omega x}{v}\right),\ x < s$$

$$G(x,s) = -\frac{\cos\left(\frac{\omega(x-l)}{v}\right)}{v\omega\cos\left(\frac{\omega l}{v}\right)}\sin\left(\frac{\omega s}{v}\right),\ x > s$$

Звідси отримуємо просторову складову, що відповідає усталеним коливанням, для загальної функції f:

$$\tilde{u} = \int\limits_0^x \frac{\cos\left(\frac{\omega(x-l)}{v}\right)\sin\left(\frac{\omega s}{v}\right)f(s)}{v\omega\cos\left(\frac{\omega l}{v}\right)}\,\mathrm{d}s + \int\limits_x^l \frac{\cos\left(\frac{\omega(s-l)}{v}\right)\sin\left(\frac{\omega x}{v}\right)f(s)}{v\omega\cos\left(\frac{\omega l}{v}\right)}\,\mathrm{d}s \tag{6.3}$$

Підставивши у (6.3) окремий випадок і виконавши інтегрування, отримаємо:

$$\tilde{u} = \frac{f_0\cos(\omega t)}{\omega^2}\left(\frac{\cos\left(\frac{\omega(x-l)}{v}\right)}{\cos\left(\frac{\omega l}{v}\right)} - 1\right) \tag{6.4}$$

Повний розв'язок є комбінацією однорідної u_0 і вимушеної $\tilde{u}$ частини: $u = u_0 + \tilde{u}$. Задача на u_0 отримується підстановкою цієї комбінації у (6.1) і виглядає наступним чином:

$$\begin{cases} u_0 = u_0(x,t), \\ 0 \le x \le l, t \ge 0, \\ (u_0)_{tt} = v^2 (u_0)_{xx}, \\ u_0(0,t) = 0, (u_0)_x(l,t) = 0, \\ u_0(x,0) = -\tilde{u}(x,0), \\ (u_0)_t(x,0) = 0. \end{cases} \tag{6.5}$$

Маємо просту задачу на хвильове рівняння з початковими умовами. Пошук власних мод для таких крайових умов вже виконаний у домашній задачі №1,2. Випишемо результат:

$$\begin{cases} \lambda_n = \dfrac{\pi^2(2n-1)^2}{4l^2} - \text{власні числа}, \\ k_n = \dfrac{\pi(2n-1)}{2l} - \text{власні хвильові вектори}, \\ \omega_n = v k_n - \text{власні частоти}, \\ \text{де } n \in \mathbb{N}, \\ (u_0)_n = (A_n \sin\omega_n t + B_n \cos\omega_n t)\sin k_n x - \text{власні моди}. \end{cases}$$

Одразу можемо побачити, що оскільки початковий розподіл швидкостей нульовий, то $\forall n \in \mathbb{N}, A_n = 0$. Тоді однорідна частина розв'язку матиме вигляд:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \omega_n t \sin k_n x \tag{6.6}$$

Залишається підставити (6.6) в умову на початкове зміщення:

$$u_0(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin k_n x = -\tilde{u} = \frac{f_0}{\omega^2}\left(1 - \frac{\cos\left(\frac{\omega(x-l)}{v}\right)}{\cos\left(\frac{\omega l}{v}\right)}\right) \tag{6.7}$$

Коефіцієнти B_n для просторового розподілу сили загального вигляду знаходяться наступним чином:

$$B_n = -\frac{2}{l}\int_0^l \tilde{u} \sin k_n x \, \mathrm{d}x \tag{6.8}$$

І після всіх підстановок загальна задача буде розв'язана. Знайдемо ці коефіцієнти для окремого випадку:

$$\begin{aligned} B_n = \frac{2f_0}{l\omega^2}\int_0^l \left(1 - \frac{\cos\left(\frac{\omega(x-l)}{v}\right)}{\cos\left(\frac{\omega l}{v}\right)}\right)\sin(k_n x)dx = \frac{2f_0}{l\omega^2}\left(\frac{1}{k_n} - \frac{k_n}{k_n^2 - \left(\frac{\omega}{v}\right)^2}\right) = \\ = -\frac{2f_0}{lk_n\left(\omega_n^2 - \omega^2\right)} \end{aligned} \tag{6.9}$$

Повний розв'язок задачі матиме вигляд:

$$u = \tilde{u}\cos\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \omega_n t \sin k_n x \tag{6.10}$$

Для окремого випадку:

$$u = \frac{f_0}{\omega^2}\left(\frac{\cos\left(\frac{\omega(x-l)}{v}\right)}{\cos\left(\frac{\omega l}{v}\right)} - 1\right)\cos\omega t - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2f_0}{lk_n\left(\omega_n^2 - \omega^2\right)}\cos\omega_n t \sin k_n x \tag{6.11}$$

Добре видно, що при наближенні частоти ω, з якою діє сила, до власної частоти ω_n, амплітуда відповідної власної моди нескінченно зростатиме. Це явище відповідає визначенню резонансу.

Тепер спрямуємо ω до 0. При цьому вимушений розв'язок матиме вигляд:

$$\frac{f_0}{\omega^2}\left(\frac{\cos\left(\frac{\omega(x-l)}{v}\right)}{\cos\left(\frac{\omega l}{v}\right)}-1\right)\cos\omega t=\left[\cos\left(\frac{\omega(x-l)}{v}\right)=1-\frac{\omega^2(x-l)^2}{v^2}+O(\omega^4)\right]=$$
$$\frac{f_0\left(1-\frac{\omega^2(x-l)^2}{v^2}-1+\frac{\omega^2l^2}{v^2}+O(\omega^4)\right)}{\omega^2-\frac{\omega^4l^2}{v^2}+O(\omega^6)}=\frac{f_0\left(2xl-x^2+O(\omega^2)\right)}{v^2(1+O(\omega^2))}.$$

І повний розв'язок матиме вигляд:

$$u=\frac{f_0\left(2xl-x^2\right)}{v^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2f_0}{lk_n\omega_n^2}\cos(\omega_n t)\sin(k_n x) \tag{6.12}$$

Що повністю відповідає розв'язку (5.10) задачі №5,1.

Метод розкладання по власних функціях в задачах з неоднорідним рівнянням

Задача № 6.3

Знайти коливання струни із закріпленими кінцями під дією сили $f(x,t)=f_0t^N$, $N>0$ однорідно розподіленої по довжині струни. У початковий момент струна нерухома, і зміщення дорівнює нулю. Остаточні обчислення виконати для $N=2$.

Розв'язок

Формальна постановка задачі:

$$\begin{cases} u=u(x,t), \\ 0\le x\le l, t\ge 0, \\ u_{tt}=v^2u_{xx}+f_0t^N, \\ u(0,t)=0,\ u(l,t)=0, \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0. \end{cases} \tag{6.13}$$

Розкладемо неожнорідність рівняння по власних функціях задачі Штурма-Ліувіля нашої системи. Оскільки неоднорідністі не залежить від x, то нам треба розкласти константу.

$$g(x) = 1, \quad \tilde{g}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin k_n x$$

$$g_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \sin k_n x \, \mathrm{d}x = \frac{2}{k_n l} \cos k_n x \Big|_l^0 = \big| \cos k_n l = (-1)^n \big| = \frac{2}{k_n l}\big(1 - (-1)^n\big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{k_n} \sin k_n x \tag{6.14}$$

Отже, розклад неоднорідністі рівняння запишеться у вигляді

$$f_0 t^N = \frac{2f_0}{l} t^N \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{k_n} \sin k_n x \tag{6.15}$$

Розв'язок шукаємо також у вигляді розкладу по власних функціях:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin k_n x \tag{6.16}$$

Підставимо (6.14) та (6.16) в рівняння (6.13) і отримаємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n''(t) \sin k_n x = -v^2 \sum_{n=1}^{\infty} k_n^2 u_n(t) \sin k_n x + \frac{2f_0}{l} t^N \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{k_n} \sin k_n x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[u_n'' + v^2 k_n^2 u_n - \frac{2f_0}{l} \frac{1 - (-1)^n}{k_n} t^N \right] \sin k_n x = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad u_n'' + \omega_n^2 u_n = \frac{2f_0}{l} \frac{1 - (-1)^n}{k_n} t^N, \tag{6.17}$$

де $\omega_n = v k_n$

Знайдемо початкові умови для $u_n(t)$ прмою підстановкою (6.16) в початкові умови для $u(x,t)$ (6.13)

$$\begin{cases} u(x,0) = u_n(0) \sin k_n x = 0, \\ u_t(x,0) = u_n'(0) \sin k_n x = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u_n(0) = 0, \\ u_n'(0) = 0. \end{cases} \tag{6.18}$$

Маємо неоднорідне лінійне рівняння (6.17) з початковими умовами (6.18). Його розв'язок можно записати у вигляді

$$u_n(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t + \tilde{u}_n(t) \tag{6.19}$$

У нас неоднорідність це поліном N-того ступеню, тому шукаємо неоднорідний розв'язок у вигляді довільного полінома N-того ступеню.
При $N = 2$:

$$\tilde{u}_n(t) = at^2+bt+c \quad \Rightarrow \quad \tilde{u}_n''+\omega_n^2\tilde{u}_n = 2a+\omega_n^2(at^2+bt+c) = \frac{2f_0}{l}\cdot\frac{1-(-1)^n}{k_n}t^2 \equiv \alpha t^2$$

$$\begin{cases} 2a + \omega_n^2 c = 0, \\ \omega_n^2 a = \alpha, \\ b = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = \alpha/\omega_n^2, \\ c = -2\alpha/\omega_n^4. \end{cases} \Rightarrow \quad \tilde{u}_n(t) = \alpha\left(\frac{t^2}{\omega_n^2} - \frac{2}{\omega_n^4}\right)$$

$$\tilde{u}_n(t) = \frac{2f_0}{\omega_n^4}\cdot\frac{1-(-1)^n}{k_n l}\big(\omega_n^2 t^2 - 2\big) \tag{6.20}$$

Із початкових умов (6.18) визначаємо константи

$$\begin{cases} u_n(0) = C_1 - \dfrac{2\alpha}{\omega_n^4} = 0, \\ u_n'(0) = C_2 = 0; \end{cases} \Rightarrow \quad C_1 = \frac{2\alpha}{\omega_n^4} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad u_n(t) = \frac{2\alpha}{\omega_n^4}\cos\omega_n t + \frac{\alpha}{\omega_n^4}\big(\omega_n^2 t^2 - 2\big) = \frac{\alpha}{\omega_n^4}\Big[2(\cos\omega_n t - 1) + \omega_n^2 t^2\Big], \tag{6.21}$$

де $\alpha = 2f_0\cdot\big(1-(-1)^n\big)/k_n l$

Підставляємо вираз для $u_n(t)$ в (6.16) і маємо розв'язок задачі

$$\begin{aligned} u(x,t) &= 2f_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{\omega_n^4}\Big[2(\cos\omega_n t - 1) + \omega_n^2 t^2\Big]\cdot\frac{\sin k_n x}{k_n l} = \\ &= 2f_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{\omega_n^4}\Big[\omega_n^2 t^2 - 4\sin^2\omega_n t\Big]\cdot\frac{\sin k_n x}{k_n l} \end{aligned} \tag{6.22}$$

Заняття 7

Задачі з неоднорідними межовими умовами загального вигляду

Задача № 7.1

Знайти коливання пружного стержня, якщо правий кінець його закріплений нерухомо, до лівого при $t > 0$ прикладена сила $F(t)$, а шляхом зведення до задачі з неоднорідним рівнянням. Відповідь одержати для частинного випадку $F(t) = F_0 e^{-\alpha t}$. При $t < 0$ стержень перебував у положенні рівноваги.

Розв'язок

Формальна постановка задачі:

$$\begin{cases} u = u(x,t), \\ u_{tt} = v^2 u_{xx}, \\ 0 \le x \le l, t \ge 0 \\ u_x(0,t) = \dfrac{F_0}{\beta} e^{-\alpha t},\ u(l,t) = 0, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0. \end{cases} \tag{7.1}$$

Шукаємо розв'язок у вигляді:

$$u(x,t) = w(x,t) + \mathcal{V}(x,t), \tag{7.2}$$

де $w(x,t)$ – задовольняє межовим умовам, а $\mathcal{V}(x,t)$ – довільна функція.

Найпростішим видом функції $w(x,t)$ буде:

$$w(x,t) = \frac{F_0}{\beta} e^{-\alpha t}(x-l) = f_0 e^{-\alpha t}(x-l) \tag{7.3}$$

Перевіримо виконання межових умов

$$w_x(0,t) = f_0 e^{-\alpha t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x-l) = f_0 e^{-\alpha t}, \quad w(l,t) = f_0 e^{-\alpha t}(l-l) = 0$$

Виконаємо перетворення рівняння та початкових умов і перепишемо задачу для функції $v(x,t)$.
Рівняння:

$$u_{tt} = v^2 u_{xx} \;\Rightarrow\; \mathcal{V}_{tt} + \alpha^2 f_0 e^{-\alpha t}(x-l) = v^2 \mathcal{V}_{xx}$$

Межові умови:

$$u_x(0,t) = f_0 e^{-\alpha t},\, u(l,t) = 0 \;\Rightarrow\; \mathcal{V}_x(0,t) = 0\, \mathcal{V}(l,t) = 0$$

Початкові умови:

$$u(x,0) = f_0(x-l) + \mathcal{V}(x,0) = 0 \;\Rightarrow\; \mathcal{V}(x,0) = -f_0(x-l)$$

$$u_t(x,0) = -\alpha f_0(x-l) + \mathcal{V}_t(x,0) = 0 \;\Rightarrow\; \mathcal{V}_t(x,0) = \alpha f_0(x-l)$$

Отже, отримуємо задачу для $\mathcal{V}(x,t)$ з однорідними межовими умовами, але з неоднорідними рівнянням та початковими умовами.

$$\begin{cases} \mathcal{V} = \mathcal{V}(x,t), \\ \mathcal{V}_{tt} - v^2 \mathcal{V}_{xx} = -\alpha^2 f_0 e^{-\alpha t}(x-l), \\ 0 \le x \le l, t \ge 0 \\ \mathcal{V}_x(0,t) = 0,\, \mathcal{V}(l,t) = 0, \\ \mathcal{V}(x,0) = -f_0(x-l), \\ \mathcal{V}_t(x,0) = \alpha f_0(x-l). \end{cases} \tag{7.4}$$

Розв'язок шукаємо у вигдялі:

$$\mathcal{V}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{\mathcal{V}}_n(t) \cos k_n x, \tag{7.5}$$

де $k_n = \frac{\pi}{l}(n + 1/2)$ – хвильове число.

Зрозуміло, що це розклад шуканої функції по власних функціях системи (див. ров'язок відповідної задачі Штурма-Ліувілля в задачі 1.3). По цій же системі функцій треба розкласти неоднорідність рівняння.

$$(x-l) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos k_n x$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l (\xi - l) \cos k_n \xi \; \mathrm{d}\xi = \frac{2}{l} \Bigg[\overbrace{\frac{\xi}{k_n} \sin k_n \xi \Big|_0^l}^{=0} - \frac{1}{k_n} \int_0^l \sin k_n \xi \; \mathrm{d}\xi -$$

$$
-\overbrace{\frac{l}{k_n}\sin k_n\xi\Big|_0^l}^{=0}\Bigg] = -\frac{2}{k_n l}\int\limits_0^l \sin k_n\xi \, \mathrm{d}\xi = \frac{2}{k_n^2 l}\cos k_n\xi\Big|_0^l = -\frac{2}{k_n^2 l} \;\Rightarrow \\
\Rightarrow\; (x-l) = -\frac{2}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos k_n x}{k_n^2} \tag{7.6}
$$

Отже, маємо

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{\mathcal{V}}_n''\cos k_n x + v^2\sum_{n=0}^{\infty}k_n^2\widetilde{\mathcal{V}}_n\cos k_n x = \frac{2\alpha^2}{l}f_0 e^{-\alpha t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos k_n x}{k_n^2} \;\Rightarrow \\
\Rightarrow\; \widetilde{\mathcal{V}}_n'' + v^2 k_n^2\widetilde{\mathcal{V}}_n = \frac{2\alpha^2 f_0}{l k_n^2}e^{-\alpha t} \;\Rightarrow\; \widetilde{\mathcal{V}}_n'' + \omega_n^2\widetilde{\mathcal{V}}_n = \kappa_n\alpha^2 e^{-\alpha t}, \tag{7.7}
$$

де $\kappa_n = \frac{2f_0}{lk_n^2}$ – розмірна константа $\big[\kappa_n\big] = \big[\text{м}\big]$

Розв'яжемо отримане лінійне неожнорідне рівняння. Його розв'язок шукатимето у вигляді:

$$
\widetilde{\mathcal{V}}_n(t) = A_n\sin\omega_n t + B_n\cos\omega_n t + \widetilde{\mathcal{V}}_{\text{неод}}(t) \tag{7.8}
$$

За умови $\alpha \neq \pm i\omega_n$ (що виконується завжди, бо $\alpha \in \mathbb{R}$), доданок, відповідний неоднорідності, можемо записати у вигляді:

$$
\widetilde{\mathcal{V}}_{\text{неод}}(t) = \gamma e^{-\alpha t}
$$

Нам залишаться визначити константу γ, для цього підставимо "вгаданий" розв'язок в рівняння.

$$
(\gamma e^{-\alpha t})'' + \omega_n^2\gamma e^{-\alpha t} = \kappa_n\alpha^2 e^{-\alpha t} \;\Rightarrow\; \gamma(\alpha^2+\omega_n^2) = \kappa_n\alpha^2 \;\Rightarrow\; \gamma = \frac{\kappa_n\alpha^2}{(\omega_n^2+\alpha^2)}
$$

Отже, загальний розв'язок рівняння

$$
\widetilde{\mathcal{V}}_n(t) = A_n\sin\omega_n t + B_n\cos\omega_n t + \frac{\kappa_n\alpha^2}{(\omega_n^2+\alpha^2)}e^{-\alpha t} \tag{7.9}
$$

Ми вже розкладали неоднорідність в рівнянні по власним функціям системи, таким же шляхом треба розкласти початкові умови задачі (7.4). Нам треба знову ж розкласти функцію $x-l$, тому можемо скористатися готовим результатом (7.6).

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{V}(x,0) = -f_0(x-l), \\
&\mathcal{V}_t(x,0) = \alpha f_0(x-l).
\end{aligned}
\quad\Rightarrow\quad
\begin{aligned}
&\widetilde{\mathcal{V}}_n(0) = 2f_0/lk_n^2 = \kappa_n, \\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widetilde{\mathcal{V}}_n(0) = -2\alpha f_0/lk_n^2 = -\kappa_n\alpha.
\end{aligned} \tag{7.10}
$$

З отриманих початковими умовами для n-их коефіцієнтів розкладу в ряд за власними функціями системи визначемо константи A_n та B_n в розв'язку (7.9).

$$\widetilde{\mathcal{V}}_n(0) = B_n + \frac{\kappa_n\alpha^2}{(\omega_n^2+\alpha^2)} = \kappa_n \;\Rightarrow\; B_n = \kappa_n - \frac{\kappa_n\alpha^2}{\omega_n^2+\alpha^2} = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2+\alpha^2}\kappa_n$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widetilde{\mathcal{V}}_n(0) = A_n\omega_n - \frac{\kappa_n\alpha^3}{(\omega_n^2+\alpha^2)} = -\kappa_n\alpha \;\Rightarrow\; A_n = -\frac{\alpha\omega_n}{\omega_n^2+\alpha^2}\kappa_n$$

Підставляємо в розв'язок

$$\widetilde{\mathcal{V}}_n(t) = \frac{\kappa_n}{(\omega_n^2+\alpha^2)}\left(\omega_n^2\cos\omega_n t - \alpha\omega_n\sin\omega_n t + \alpha^2 e^{-\alpha t}\right) \tag{7.11}$$

Тепер запишемо вид функції $\mathcal{V}(x,t)$

$$\mathcal{V}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\kappa_n}{(\omega_n^2+\alpha^2)}\left(\omega_n^2\cos\omega_n t - \alpha\omega_n\sin\omega_n t + \alpha^2 e^{-\alpha t}\right)\cos k_n x \tag{7.12}$$

І повний розв'язок задачі

$$u(x,t) = f_0 e^{-\alpha t}(x-l) + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\kappa_n\cos k_n x}{(\omega_n^2+\alpha^2)}\left(\omega_n^2\cos\omega_n t - \alpha\omega_n\sin\omega_n t + \alpha^2 e^{-\alpha t}\right) \tag{7.13}$$

Задача № 7.2

Розв'язати задачу №7.1 методом розкладання по власних функціях.

Розв'язок

Формальна постановка задачі:

$$\begin{cases} u = u(x,t), \\ u_{tt} = v^2 u_{xx}, \\ 0 \le x \le l, t \ge 0 \\ u_x(0,t) = \dfrac{F_0}{\beta}e^{-\alpha t} = f_0 e^{-\alpha t}, \\ u(l,t) = 0, \\ u(x,0) = 0,\; u_t(x,0) = 0. \end{cases} \tag{7.14}$$

Розв'язок шукаємо у вигляді:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) X_n(x), \tag{7.15}$$

де $X_n(x)$ – власні функції задачі. Їх визначаємо, розв'язуючи задачу Штурма-Ліувілля з однорідними межовими умовами.

$$\begin{cases} u_{tt} = v^2 u_{xx}, \\ u_x(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_m'' + k_m^2 X_m = 0, \\ X_m'(0) = 0,\ X_m(l) = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_m = \dfrac{\pi}{l}(m + 1/2) \text{ – хвильві числа,} \\ X_m(x) = \cos k_m x,\ m = 0, 1, 2\ldots \end{cases}$$

Розкладемо рівняння по власним функціям. Для цього домножимо його на $X_m / \|X_m\|^2$ та проінтегруємо по x.

$$\frac{1}{\|X_m\|^2} \int\limits_0^l u_{tt} X_m \,\mathrm{d}x = \frac{v^2}{\|X_m\|^2} \int\limits_0^l u_{xx} X_m \,\mathrm{d}x \tag{7.16}$$

Випишемо окремо перетворення для лівої та правої частини рівняня. Почнемо з лівої

$$\frac{1}{\|X_m\|^2} \int\limits_0^l u_{tt} X_m \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n''(t)}{\|X_m\|^2} \int\limits_0^l X_n(x) X_m(x) \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} T_n''(t) \delta_{n,m} = T_m''(t)$$

Тепер розглянемо праву частину рівняння, двічі використаємо інтегрування частинами

$$\frac{1}{\|X_m\|^2} \int\limits_0^l u_{xx} X_m \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n(t)}{\|X_m\|^2} \int\limits_0^l X_n''(x) X_m(x) \,\mathrm{d}x =$$

Випишемо окремо інтегрування під сумою

$$\int\limits_0^l X_n''(x) X_m(x) \,\mathrm{d}x = X_n'(x) X_m(x) \Big|_0^l - \int\limits_0^l X_n'(x) X_m'(x) \,\mathrm{d}x =$$

$$= X_n'(x) X_m(x) \Big|_0^l - X_n(x) X_m'(x) \Big|_0^l + \int\limits_0^l X_n(x) X_m''(x) \,\mathrm{d}x$$

Скористаємося рівнянням для $X_n(x)$:

$$X_n'(x) X_m(x) \Big|_0^l - X_n(x) X_m'(x) \Big|_0^l - k_n^2 \int\limits_0^l X_n(x) X_m(x) \,\mathrm{d}x =$$

$$= X_n'(x) X_m(x) \Big|_0^l - X_n(x) X_m'(x) \Big|_0^l - k_n^2 \|X_m\|^2 \delta_{n,m}$$

І повернемося до початкового виразу та запишемо його через зміщення $u(x,t)$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n(t)}{\|X_m\|^2}\left[X'_n(x)X_m(x)\Big|_0^l - X_n(x)X'_m(x)\Big|_0^l - k_n^2\|X_m\|^2\delta_{n,m}\right] =$$

$$= -k_m^2 T_m(t) + \frac{1}{\|X_m\|^2}\left[u_x(x,t)X_m(x)\Big|_0^l - u(x,t)X'_m(x)\Big|_0^l\right] =$$

Скористаємося межовими умовами початкової задачі та задачі Штурма-Ліувілля для власних функцій системи при обчисленні значень отриманих виразів після інтегрування

$$= -k_n^2 T_m(t) + \frac{2}{l}\Big[u_x(l,t)X_m(l) - u_x(0,t)X_m(0) -$$

$$-u(l,t)X'_m(l) + u(0,t)X'_m(0)\Big] = -k_n^2 T_m(t) - \frac{2f_0}{l}e^{-\alpha t},$$

тут для $X_m(x)$ дивимось на межові умови задачі Штурма-Ліувілля, а для $u(x,t)$ – межові умови початкової задачі.

Повертаємося до розкладу рівняння (7.16), збираючи разом результати обчислень для лівої та правої частинами

$$T''_m(t) = -k_m^2 v^2 T_m(t) - \frac{2v^2 f_0}{l}e^{-\alpha t}, \quad \text{або} \quad T''_n(t) + \omega_n^2 T_n(t) = -\kappa_n \omega_n^2 e^{-\alpha t} \tag{7.17}$$

Отримали лінійне неоднорідне рівняння для $T_n(t)$, його розв'язок шукаємо у вигляді

$$T_n(t) = A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t + \gamma e^{-\alpha t}, \tag{7.18}$$

а γ, коефіцієнт частинного розв'язку, визначаємо підстановкою в рівняння

$$\widetilde{T}_n(t) = \gamma e^{-\alpha t} \quad \Rightarrow \ \alpha^2\gamma + \omega_n^2\gamma = -\kappa_n\omega_n^2 \ \Rightarrow \ \gamma = -\frac{\kappa_n\omega_n^2}{\omega_n^2 + \alpha^2}$$

Маємо

$$T_n(t) = A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t - \frac{\kappa_n\omega_n^2}{\omega_n^2 + \alpha^2}e^{-\alpha t} \tag{7.19}$$

Залишається визначити коефіцієнти A_n та B_n. Оскільки, обидві умови однорідні можна одразу записати:

$$\begin{cases} T_n(0) = 0, \\ T'_n(0) = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_n(0) = A_n - \dfrac{\kappa_n\omega_n^2}{\omega_n^2+\alpha^2} = 0, \\ T'_n(0) = B_n\omega_n + \dfrac{\alpha\kappa_n\omega_n^2}{\omega_n^2+\alpha^2} = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_n = \dfrac{\kappa_n\omega_n^2}{\omega_n^2+\alpha^2}, \\ B_n = -\dfrac{\kappa_n\alpha\omega_n}{\omega_n^2+\alpha^2}. \end{cases}$$

Наш остаточний розв'язок

$$u(x,t) = \sum_0^l \frac{\kappa_n \cos k_n x}{\omega_n^2 + \alpha^2}\left(\omega_n^2\cos\omega_n t - \alpha\omega_n \sin\omega_n t - \omega_n^2 e^{-\alpha t}\right) \tag{7.20}$$

Тема III:

??

Заняття 8

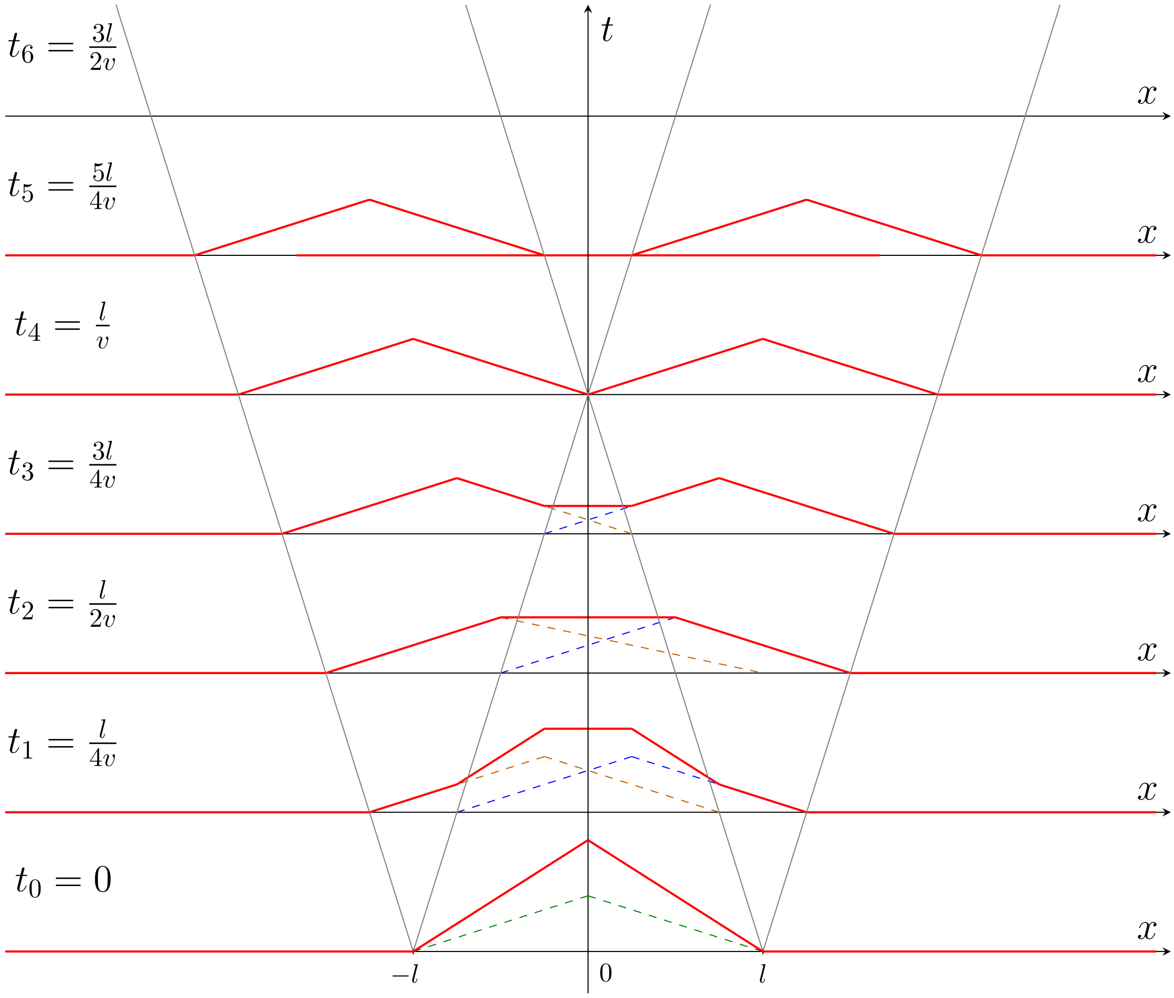
Метод характеристик і формула Даламбера: нескінченна пряма, півнескінченна пряма та відрізок. Метод непарного продовження.

Вільні коливання нескінченної струни.

Задача № 8.1

Зобразити графічно поле зміщень і поле швидкостей нескінченної струни в характерні послідовні моменти часу, якщо початковий відхил (зміщення) має форму рівнобедреного трикутника висотою h і основою $2L$, а початкова швидкість дорівнює нулю. Чи всі частини трикутника приходять у рух одразу? Відповідь поясніть.

Розв'язок

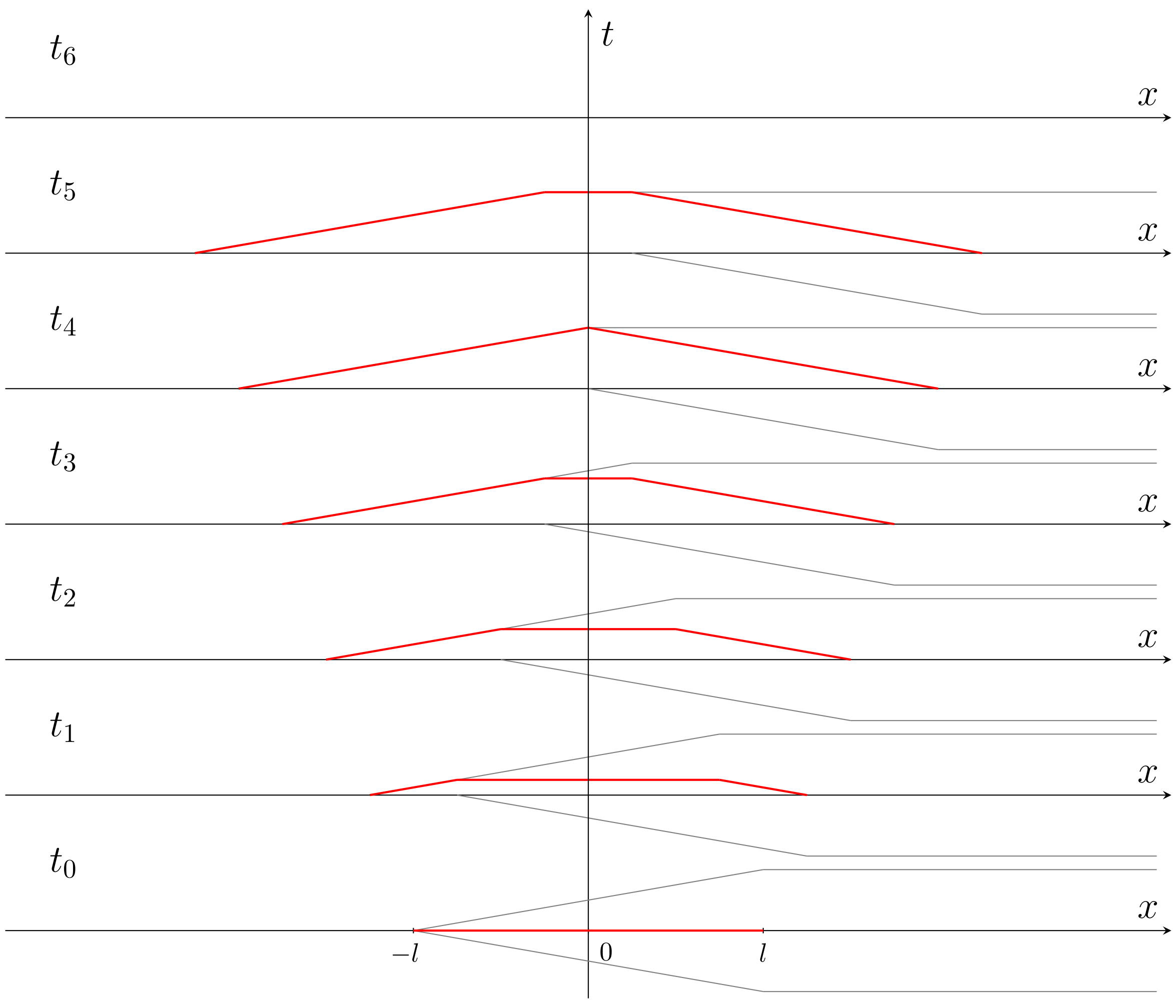


$t_6 = \frac{3l}{2v}$
$t_5 = \frac{5l}{4v}$
$t_4 = \frac{l}{v}$
$t_3 = \frac{3l}{4v}$
$t_2 = \frac{l}{2v}$
$t_1 = \frac{l}{4v}$
$t_0 = 0$
t
x
$-l$
0
l

Задача № 8.2

Зобразити графічно поле зміщень і поле швидкостей нескінченної струни в характерні послідовні моменти часу, якщо початкове відхилення (зміщення) дорівнює нулю, початкова швидкість всіх точок струни на деякому відрізку довжиною $2l$ однакова і дорівнює ν_0, а в усіх інших точках дорівнює нулю. У який кінцевий стан переходить струна в результаті такого процесу? З точки зору механіки системи частинок результат є парадоксальним: у початковий момент тілу був переданий імпульс (у поперечному напрямі до струни), а в кінцевому стані струна нерухома, замість того щоб рухатись рівномірно. Зобразіть також вигляд поля зміщень і поля швидкостей при наближенні до границі: $l \to 0$, $\nu_0 \to \infty$ при фіксованому t, якщо переданий струні імпульс залишається сталим.

Розв'язок



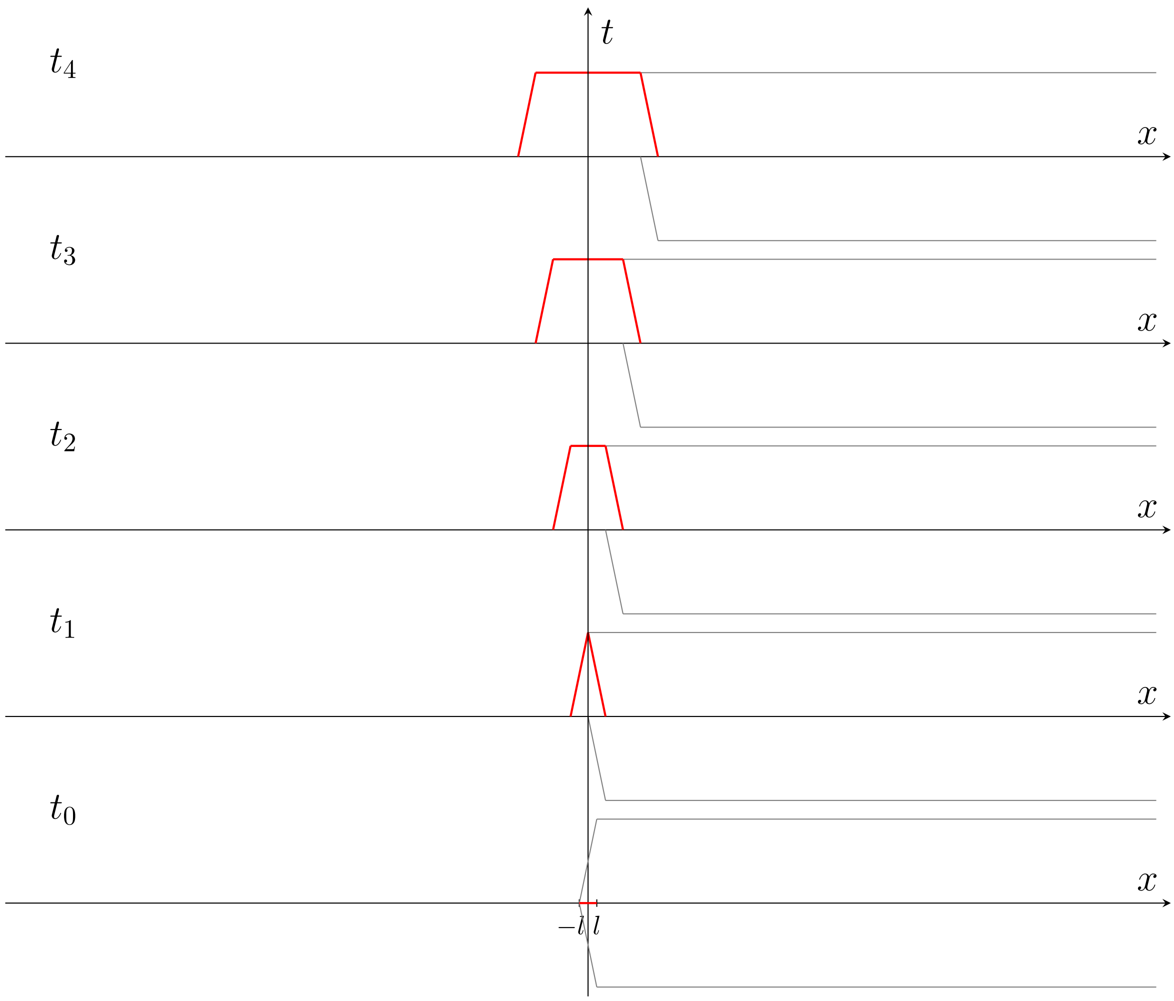


Рис. 8.1: Випадок $l \to 0$

Метод непарного продовження для півнескінченної та скінченної струни

Задача № 8.3

Зобразити графічно поле зміщень півнескінченної струни у характерні послідовні моменти часу. Початкове відхилення має форму прямокутного трикутника, більшим катетом служить положення рівноваги струни, а вершина гострого кута орієнтована в бік кінця струни. Початкова швидкість дорівнює нулю. Кінець струни а) вільний (відносно поперечних зміщень), б) закріплений нерухомо.

Розв'язок

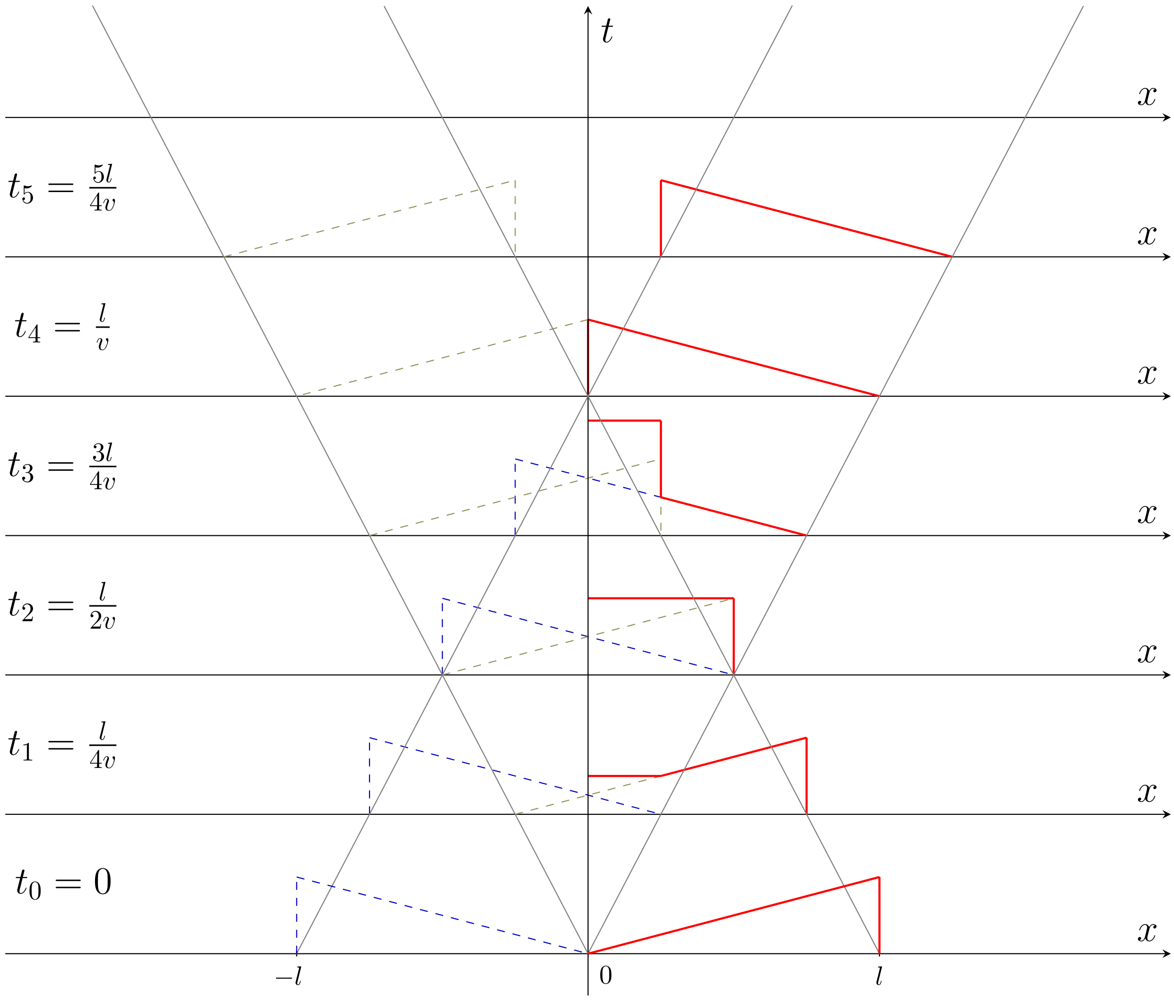


Рис. 8.2: Парне продовження

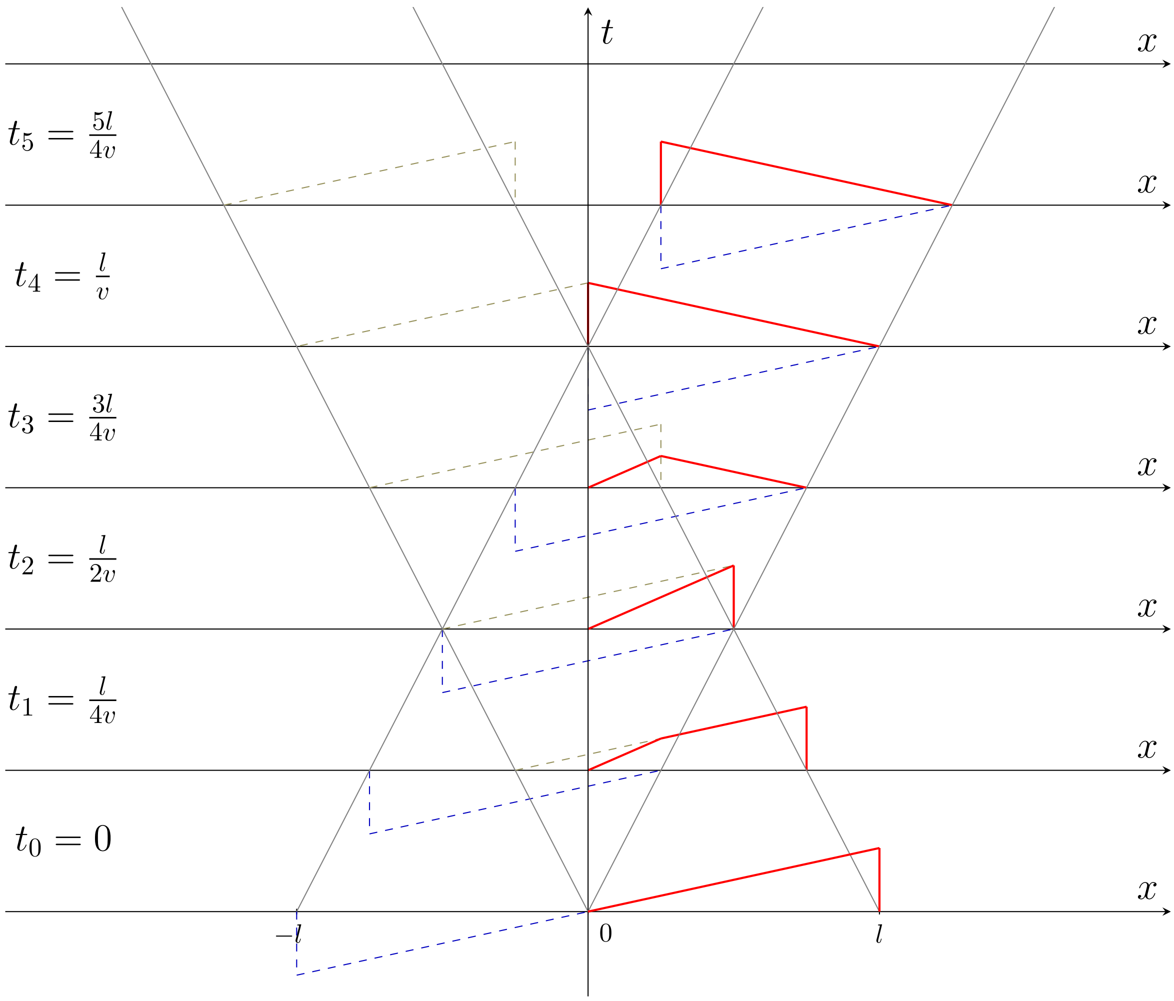


Рис. 8.3: Непарне продовження

Заняття 9

Використання загального розв'язку хвильового рівняння у вигляді суперпозиції зустрічних хвиль. Нестаціонарна задача розсіяння.

Задача № 9.1

Півнескінченна струна (сила натягу T_0, швидкість хвиль v) з вільним кінцем перебувала у стані рівноваги. Починаючи з моменту часу $t = 0$, на її кінець діє у поперечному напрямі задана сила $F(t)$. Знайти розв'язок задачі про вимушені коливання струни у квадратурах, а також знайти поле зміщень у явному вигляді і зобразити графічно форму струни, якщо: а) $F(t) = F_0$, б) $F(t) = F_0 \cos \omega t$, в) $F(t) = F_0 \sin \omega t$
Задача є прикладом так званої задачі про поширення межового режиму: задачі для півнескінченної струни з неоднорідною межовою умовою. Указівка: задача відшукання форми хвилі, створеної таким джерелом, зводиться до диференціального рівняння першого порядку; проблема знаходження сталої інтегрування вирішується, якщо врахувати умову неперервності хвильового поля на передньому фронті хвилі, тобто на межі областей $x > vt$ й $x < vt$.

Розв'язок

Формальна постановка задачі:

$$\begin{cases} u = u(x,t), \\ u_{tt} = v^2 u_{xx}, \\ 0 \le x < \infty, t \ge 0 \\ u_x(0,t) = F(t)/\beta = f(t), \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0. \end{cases} \tag{9.1}$$

Шукаємо розв'язок у вигляді:

$$u(x,t) = g(t - x/v) + h(t + x/v) \tag{9.2}$$

Із початкових умов маємо систему:

$$\begin{cases} u(x,0) = g(-x/v) + h(x/v) = 0, \\ u_t(x,0) = g'(-x/v) + h'(x/v) = 0. \end{cases} \tag{9.3}$$

Інтегруємо друге рівняння та розв'язуємо лінійну систему

$$\begin{cases} g(-\xi) + h(\xi) = 0, \\ \displaystyle\int g'(-\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int h'(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(-\xi) + h(\xi) = 0, \\ h(\xi) + C_2 - g(-\xi) + C_1 = 0; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g(-\xi) + h(\xi) = 0, \\ -g(-\xi) + h(\xi) = 2\widetilde{C}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(-\xi) = -\widetilde{C}, \\ h(\xi) = \widetilde{C}. \end{cases}$$

Обираємо константу інтегрування $\widetilde{C}$ рівною нулю, тоді

$$\begin{cases} g(-x/v) = 0, \\ h(x/v) = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(\xi) = 0, \text{ при } \xi < 0, \\ h(\eta) = 0, \text{ при } \eta > 0. \end{cases}$$

Отже, $h(t + x/v) = 0$ в нашій задачі, адже $x \geq 0$ та $t > 0$, що фізично означає відсутність хвилі, яка поширюється з нескінченность до краю струни (падаючої хвилі).
Маємо розв'язок у виді біжучої хвилі, яка створюється межовою умовою.

$$u(x,t) = g(t - x/v) \tag{9.4}$$

З межової умови визначимо розв'язок

$$u_x(0,t) = f(t) \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{v}g'(t) = f(t) \quad \Rightarrow \quad g(t) = -v\int\limits_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{9.5}$$

Загальний вид розв'язку

$$u(x,t) = -v \int\limits_0^{t-x/v} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{9.6}$$

Обчислимо розв'язки для визначених межових умов:

а)

$$u(x,t) = -\frac{vF_0}{\beta}\int\limits_0^{t-x/v}\mathrm{d}\tau = -\frac{vF_0}{\beta}\left(t - \frac{x}{v}\right),$$

б)

$$u(x,t) = -\frac{vF_0}{\beta}\int\limits_0^{t-x/v} \sin\omega\tau \, \mathrm{d}\tau = -\frac{vF_0}{\omega\beta}\cos\omega(t - x/v),$$

в)

$$u(x,t) = -\frac{vF_0}{\beta}\int\limits_0^{t-x/v} \cos\omega\tau \, \mathrm{d}\tau = \frac{vF_0}{\omega\beta}\sin\omega(t - x/v).$$

Задача № 9.2

При $t < t_0$ по півнескінченній струні $0 \geq x < \infty$ у напрямі її кінця поширюється хвиля заданої форми (падаючий «імпульс»), причому передній фронт хвилі при $t \geq t_0$ не досягає кінця струни. Знайти коливання струни при $t > t_0$ і форму відбитого імпульсу для скінченного t_0 і $t_0 \to -\infty$. Кінець струни: а) закріплений жорстко; б) зазнає дії сили тертя, пропорційної швидкості. Як пояснити відсутність відбивання при певному значенні коефіцієнта тертя?
Указівка: звести до задачі про поширення межового режиму типу задачі 9.1, використати вказівку до цієї задачі та умову, що при $t < t_0$ фронт хвилі не досягає кінця струни.

Розв'язок

Формальна постановка задачі:

$$\begin{cases} u = u(x,t), \\ u_{tt} = v^2 u_{xx}, \\ 0 \leq x \leq \infty, t \geq t_0 \\ \text{а) } u(0,t) = 0, \\ \text{б) } \mu u_x(0,t) = u_t(0,t), \\ u(x,t) = F_0(vt + x) - \text{падаюча хвиля, для } t < t_0 \\ F(t) = 0,\ t < t_0 \text{ - падаюча хвиля не досягне кінця струни до } t_0. \end{cases} \tag{9.7}$$

Де μ - коефіцієнт тертя.

Повний розв'язок хвильового рівняння представляється комбінацією двох збурень, що поширюються у протилежних напрямках та є фукнціями однієї змінної. У нашому випадку це падаюча та відбита хвиля у відповідному порядку:

$$u(x,t) = u_{\text{пад}}(x,t) + u_{\text{від}}(x,t) = F(x + tv) + f(x - tv) \tag{9.8}$$

З постановки (9.7) ми знаємо частину, що відповідає падаючій хвилі:

$$u_{\text{пад}}(x,t) = F_0(x+tv)$$

Звідси маємо умову на $u_{\text{від}}$ при $t < t_0$:

$$u_{\text{від}}(x,t) = 0 \tag{9.9}$$

Для випадку *а)* можна було б скористатися доведенною в лекціях вимогою на непарність $u(x,t)$ по змінній x для приведенної граничної умови. Але розв'яжемо обидва випадки одним методом. Розглянемо точку $x = 0$ у момент часу $t > t_0$:

$$\begin{aligned}
&\text{а) } u_{\text{від}}(0,t) + u_{\text{пад}}(0,t) = 0 \quad \Rightarrow \\
&\Rightarrow \quad u_{\text{від}}(0,t) = f(x-tv)|_{x=0} = f(-tv) = -F_0(tv), \\
\\
&\text{б) } \mu u_x(0,t) - u_t(0,t) = 0 \quad \Rightarrow \\
&\Rightarrow \quad \mu \frac{\partial u_{\text{від}}}{\partial x}\bigg|_{x=0} + \frac{\partial u_{\text{від}}}{\partial t}\bigg|_{x=0} = (\mu+v)f'(-tv) = \\
&= -(\mu - v)F_0'(tv)
\end{aligned} \tag{9.10}$$

З отриманих рівнянь (9.10) та умови (9.9) можна одразу отримати відповіді:

$$\begin{aligned}
&\text{а) } u_{\text{від}}(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{, якщо } t < t_0, \text{ або } x > vt \\ -F_0(tv - x) & \text{, якщо } t > t_0, \ x < vt. \end{cases} \\
&\text{б) } u_{\text{від}}(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{, якщо } t < t_0, \text{ або } x > vt \\ \frac{\mu - v}{\mu + v}(F_0(tv - x) + c) & \text{, якщо } t > t_0, \ x < vt. \end{cases}
\end{aligned} \tag{9.11}$$

Де c - константа інтегрування. Накладаючи вимогу неперервності $u_{\text{від}}(0,t_0) = 0$ маємо $c = -F_0(0)$. Якщо $F(\xi)$ є неперервною функцією, то $c = 0$. Ці результати можна переписати у більш винтонченній формі за допомогою тета-функції:

$$\begin{aligned}
&\text{а) } u_{\text{від}}(x,t) = -F_0(tv-x)\Theta\big(v(t-t_0) - x\big) \\
\\
&\text{б) } u_{\text{від}}(x,t) = \frac{\mu - v}{\mu + v}\big(F_0(tv-x) - F_0(0)\big)\Theta\big(v(t-t_0) - x\big).
\end{aligned} \tag{9.12}$$

При $t_0 \to -\infty, \quad \Theta\big(v(t-t_0) - x\big) = 1$, тож поле матиме форму:

$$\begin{aligned} &\text{а) } u_{\text{від}}(x,t) = -F_0(tv - x) \\ &\text{б) } u_{\text{від}}(x,t) = \frac{\mu - v}{\mu + v}(F_0(tv - x) - F_0(0)). \end{aligned} \tag{9.13}$$

Заняття 10

Приведення лінійних рівнянь у частинних похідних 2-го порядку з двома змінними до заданого вигляду

Задача № 10.1

Визначити тип рівняння $u_{xx} + 4u_{xy} + cu_{yy} + u_x = 0$, привести його до канонічного вигляду для $c = 0$ і знайти загальний розв'язок.

Розв'язок

Загальний вид рівняння:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = 0, \quad \text{або} \quad \hat{L}u + cu = 0 \tag{10.1}$$

Тип рівняння визначається визначником матриці, яка складається з коефіцієнтів перед другими похідними. *Фактично оператор $\hat{L}$ є білінійною формою з лінійної алгебри, де замість змінних будуть похідні.*

$$\Delta = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 2^2 - 1 \cdot c = 4 - c \tag{10.2}$$

При $c = 0$ визначник $\Delta > 0$, тому маємо рівняння гіперболічного типу.

Суть канонізації – перейти до нових змінних для яких рівняння прийматиме канонічний вид. Для визначення таких змінних записуємо спочатку характеристичне рівняння:

$$a_{11}(\mathrm{d}y)^2 + 2a_{12}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + a_{22}(\mathrm{d}x)^2 = 0, \quad \text{або} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{12}} \tag{10.3}$$

Обидва рівняння приводять до

$$y_1' = 4, \qquad y_2' = 0. \tag{10.4}$$

Звідси маємо перші інтеграли

$$\begin{gathered} y_1' = 4 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 4x \quad \Rightarrow \quad \Phi(x, y) = y - 4x = C_1 \\ y_2' = 0 \quad \Rightarrow \quad \Psi(x, y) = y = C_2 \end{gathered} \tag{10.5}$$

З теорії нові змінні отримаємо формальною заміною $C_1 \to \xi$, $C_2 \to \eta$. Отже, нові змінні

$$\begin{cases} \xi = y - 4x, \\ \quad\; \eta = y. \end{cases} \tag{10.6}$$

Далі треба зробити заміну змінних. Для цього окремо випишемо похідні від нових змінних

$$\xi_x = -4,\ \xi_y = 1,\ \eta_x = 0,\ \eta_y = 1,\ \xi_{xy} = \eta_{xy} = 0,\ \xi_{xx} = \eta_{xx} = 0,\ \xi_{yy} = \eta_{yy} = 0.$$

Тепер не важко виконати заміну змінних

$$\begin{gathered} u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = -4u_\xi, \\ u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi + u_\eta, \\ u_{xx} = (-4u_\xi)'_x = -4(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x) = 16u_{\xi\xi}, \\ u_{xy} = (-4u_\xi)'_y = -4(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y) = -4(u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}). \end{gathered}$$

Підставляємо отримані вирази в рівняння

$$u_{xx} + 4u_{xy} + u_x = 16u_{\xi\xi} - 16(u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}) - 4u_\xi = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{\xi\eta} + \frac{1}{4}u_\xi = 0$$

Отже, отримали рівняння в канонічному виді

$$u_{\xi\eta} + \frac{1}{4}u_\xi = 0 \tag{10.7}$$

Розв'яжемо отримане рівняння. Легко побачити, що по ξ можна проінтегрувати.

$$u_{\xi\eta} + \frac{1}{4}u_\xi = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(u_\eta + \frac{1}{4}u\right)'_\xi = 0 \quad \Rightarrow \quad u_\eta + \frac{1}{4}u = f(\eta)$$

Звідки ми отримали лінійне неоднорідне диференційне рівняння однієї змінної. Розв'яжемо спочатку однорідне рівняння

$$\tilde{u}_\eta + \frac{1}{4}\tilde{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln \tilde{u} = -\frac{1}{4}\eta + \ln C \quad \Rightarrow \quad \tilde{u} = Ce^{-\eta/4}$$

Варіюємо змінну $C \to C(\eta)$

$$u = C(\eta)e^{-\eta/4} \quad \Rightarrow \quad C'e^{-\eta/4} = f(\eta) \quad \Rightarrow \quad C(\eta) = \int f(\eta)e^{\eta/4}\,\mathrm{d}\eta + \gamma$$

Отже, маємо розв'язок рівняння

$$u(\xi, \eta) = \gamma e^{-\eta/4} + e^{-\eta/4} \cdot \int^\eta f(z)e^{z/4}\,\mathrm{d}z \tag{10.8}$$

Задача № 10.5

Привести до простішого вигляду рівняння $u_t = a^2(u_{xx} + \alpha u_x) + cu$.

Розв'язок

Перенесемо всі доданки на одну сторону та поділимо на a^2

$$u_{xx} + \alpha u_x - a^{-2}u_t + a^{-2}cu = 0 \tag{10.9}$$

Маємо рівняння параболічного типу в канонічному виді.
Спростимо його позбавившись якнайбільше від похідних першого порядку. Це зробимо використовуючи наступну заміну змінних та функції

$$u(x,t) = e^{\lambda x + \mu t}v(x,t) \tag{10.10}$$

Обчислимо перші похідні та другу похідну по просторовый змінній

$$u_x = e^{\lambda x+\mu t}(v_x + \lambda v),\ u_t = e^{\lambda x+\mu t}(v_t + \mu v),\ u_{xx} = e^{\lambda x+\mu t}(v_{xx} + 2\lambda v_x + \lambda^2 v)$$

Підставляємо їх в рівняння (10.9) та ділимо його на експоненту

$$v_{xx} + 2\lambda v_x + \lambda^2 v + \alpha(v_x + \lambda v) - a^{-2}(v_t + \mu v) + a^{-2}cv = 0$$

Зводимо подібні доданки

$$v_{xx} + (2\lambda + \alpha)v_x - a^{-2}v_t + (\lambda^2 + \alpha\lambda - a^{-2}\mu + a^{-2}c)v = 0 \tag{10.11}$$

Звідси визначимо λ та μ, прирівнючи вирази перед v_x та v до нуля.

$$\begin{cases} 2\lambda + \alpha = 0, \\ \lambda^2 + \alpha\lambda - a^{-2}\mu + a^{-2}c = 0; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda = -\alpha/2, \\ \mu = c - a^2\alpha^2/4; \end{cases} \tag{10.12}$$

Таким чином, заміна

$$u(x,t) = \exp\left[\left(c - \frac{a^2\alpha^2}{4}\right)t - \frac{\alpha t}{2}\right]v(x,t) \tag{10.13}$$

спрощує вихідне рівняння (10.9) до вигляду

$$v_t = a^2 v_{xx} \tag{10.14}$$

Задача № 10.8

Привести рівняння $u_{tt} = v^2\big(u_{rr} + (2/r)u_r\big) + cu$ *до самоспряженого вигляду:*

$$\rho(r)u_{tt} = \frac{\partial}{\partial r}\left(k(r)\frac{\partial u}{\partial r}\right) - q(r)u.$$

Розв'язок

Запишемо рівняння, розкриваючи дужки

$$u_{tt} = v^2 u_{rr} + \frac{2v^2}{r}u_r + cu \tag{10.15}$$

Домножимо його на довільну функцію $\rho(r)$, яку ми визначимо далі

$$\rho(r)u_{tt} = v^2\rho(r)u_{rr} + \frac{2v^2\rho(r)}{r}u_r + c\rho(r)u$$

Порівнюючи його з рівнянням у самоспряженому вигляді, позначимо

$$k(r) = v^2\rho(r), \quad k'(r) = \frac{2v^2\rho(r)}{r}, \quad q(r) = -c\rho(r).$$

Ми отримали вирази для функції $k(r)$ та її похідної. Звідси і знайдемо рівняння для $\rho(r)$: диференцюємо вираз для $k(r)$ і прирівнюємо до $k'(r)$.

$$\big(v^2\rho(r)\big)' = \frac{2v^2\rho(r)}{r} \tag{10.16}$$

Розв'яжемо отримане рівняння

$$\rho'(r) = \frac{2\rho(r)}{r} \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = \frac{2\mathrm{d}r}{r} \;\Rightarrow\; \ln\rho = 2\ln r + \ln K = \ln(Kr^2) \;\Rightarrow\; \rho(r) = Kr^2$$

Оскільки на $\rho(r)$ ми домножили все рівняння і враховуючи, що рівняння є однорідним, то можна покласти $K = 1$.

Маємо вихідне рівняння (10.15) в самоспряженому вигляді:

$$r^2u_{tt} = \frac{\partial}{\partial r}\left(v^2r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + cr^2u \tag{10.17}$$

Тема IV:

РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА І ПУАССОНА.

Заняття 11

Рівняння Лапласа в прямокутній області.

Задача № 11.1

Знайти стаціонарний розподіл температури в однорідній прямокутній пластині, якщо вздовж лівої її сторони (довжиною b) підтримується заданий розподіл температури, права сторона теплоізольована, а верхня і нижня (довжиною a) підтримуються при нульовій температурі. Відповідь запишіть через коефіцієнти Фур'є розподілу температури на лівій стороні, вважаючи їх відомими. Які якісні зміни відбуваються у розв'язку при переході від довгої і вузької пластини ($a \gg b$) до короткої і широкої ($a \ll b$)? Намалюйте для цих випадків графіки функцій, що описують зміну температури в повздовжньому напрямку для кількох перших поперечних мод; функції нормуйте так, щоб на лівій стороні пластини вони приймали однакове значення одиниця. Як змінюється в залежності від співвідношення сторін відносна роль внесків різних поперечних мод у розподіл температури на правій стороні пластини?

Розв'язок

Для стаціонарної задачі $u \neq u(t)$ рівняння параболічного типу, яке відповідає задачі теплопровідності, перетворюється на на еліптичне. Тобто нам потрібно розглянути задачу, де є дві незалежні просторові змінні. Запишемо постановку задачі:

$$\begin{cases} u = u(x,y), \\ \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0, \\ 0 \le x \le a, \\ 0 \le y \le b, \\ u(0,y) = \varphi(y), \\ u_x(a,y) = 0, \\ u(x,0) = 0, \\ u(x,b) = 0. \end{cases} \tag{11.1}$$

Виконаємо розділення змінних $u(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$. Для $Y(y)$ отримаємо багато разів розв'язану задачу Штурма-Ліувілля, а для $X(x)$ – лінійне рівняння.

$$\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0, \\ 0 \le y \le b, \\ Y(0) = 0,\, Y(b) = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} Y_n(y) = \sin k_n y, \\ k_n = \sqrt{\lambda_n} = \pi n/b, n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{11.2}$$

Запишемо розв'язок рівняння для $X(x)$

$$X'' - k_n^2 X = 0 \quad \Rightarrow \quad X_n(x) = A_n \mathrm{sh} k_n x + B_n \mathrm{ch} k_n x \tag{11.3}$$

Виконуємо зворотню заміну та отримаємо, виконуючи підсумовування по всім модам, загальний розв'язок задачі.

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \mathrm{sh} k_n x + B_n \mathrm{ch} k_n x) \sin k_n y \tag{11.4}$$

Залишається із межових умов для змінної x визначити невідомі константи A_n та B_n. Маємо

$$\begin{cases} u(0,y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n \sin k_n y = \varphi(y), \\ u_x(a,y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (A_n k_n \mathrm{ch} k_n a + B_n k_n \mathrm{sh} k_n a) \sin k_n y = 0. \end{cases} \tag{11.5}$$

В правій частині першого рівняння підставимо розклад межової умови в ряд Фур'є, який вважається відомим, та визначимо B_n

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin k_n y = \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin k_n y \quad \Rightarrow \quad B_n = \frac{2}{b} \varphi_n \tag{11.6}$$

З другої, однорідної, межової умови маємо

$$A_n \mathrm{ch} k_n a + B_n \mathrm{sh} k_n a = 0 \quad \Rightarrow \quad A_n = -B_n \mathrm{th} k_n a = -\frac{2}{b} \varphi_n \mathrm{th} k_n a \tag{11.7}$$

Підставляємо отримані значення в загальний розв'язок

$$u(x,y) = \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \big(\mathrm{ch} k_n x - \mathrm{th}(k_n a) \mathrm{sh} k_n x \big) \sin k_n y, \tag{11.8}$$

або, скориставшись однією з властивостей гіперболічних функцій, запишемо

$$u(x,y) = \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cdot \frac{\mathrm{ch}\big(k_n (x-a)\big)}{\mathrm{ch} k_n a} \sin k_n y \tag{11.9}$$

Розглянемо, використовуючи формулу (11.8), граничні випадки: а) довгої і вузької пластини, б) короткої і широкої.
а) $a \gg b$

$$\mathrm{th}k_n a = \mathrm{th}(\pi n a/b)\Big|_{a\gg b} \to 1$$

Таким чином розв'язок переходить в

$$u(x,y) = \frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\big(\mathrm{ch}k_n x - \mathrm{sh}k_n x\big)\sin k_n y = \frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n e^{-k_n x}\sin k_n y, \qquad (11.10)$$

що відповідає рівнянню теплопровідності для одновимірного випадку; температура спадає за експоненційним законом при віддалені від джерела

б) $a \ll b$

$$\mathrm{th}(\pi n a/b)\Big|_{a\ll b} \to 0, \quad \mathrm{ch}(\pi n x/b)\Big|_{b\to\infty} \to 1,$$

оскільки $x \le a$, то умову $a \ll b$ можна замінити на $b \to \infty$

Отже, при зменшенні b зменшуються втрати теплоти, оскільки ширина пластинки набагато менша за довжину джерела.
Таким чином розв'язок переходить в

$$u(x,y) = \frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{ch}k_n x \sin k_n y \qquad (11.11)$$

Задача № 11.3

Знайти електростатичний потенціал всередині області, обмеженої провідними пластинами $y = 0, y = b, x = 0$, якщо пластина $x = 0$ заряджена до потенціалу V, а інші – заземлені. Заряди всередині області відсутні. Розв'язком якої задачі є знайдена функція у півпросторі $x > 0$?
Вказівка. Це приклад задачі для рівняння Лапласа в необмеженій області. Подумайте, яку умову слід накласти на розв'язок при $x \to +\infty$, щоб для $V = 0$ задача мала лише нульовий розв'язок (в іншому разі розв'язок задачі не буде єдиним).
Ряд просумувати.
Указівка: скористайтесь формулою для суми геометричної прогресії.

Розв'язок

Формальна постановку задачі:

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ x \geq 0, 0 \leq y \leq b, \\ \Delta u = 0, \\ u(x, 0) = 0, \\ u(x, b) = 0, \\ u(0, y) = V, \\ u(x, y)\big|_{x \to \infty} \to 0. \end{cases} \tag{11.12}$$

Розв'язок

Можемо скористатися результатом, отриманим в задачі 1(посилання), і одразу записати розв'язок в загальному виді.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tilde{A}_n \mathrm{sh} k_n x + \tilde{B}_n \mathrm{ch} k_n x \right) \sin k_n y = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n e^{k_n x} + B_n e^{-k_n x} \right) \sin k_n y, \end{aligned} \tag{11.13}$$

де $k_n = \pi n / b$.

Використаємо межові умови для y (11.12) для визначення невідомих коефіцієнтів. Оскільки при $x \to +\infty$ потенціал прямує до нуля, то в отриманому розв'язку (11.13) треба покласти константи A_n для кожного n рівними нулю.

$$u(0, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin k_n y = V$$

Домножуємо на m-ту власну функція задачі Штурма-Ліувілля та інтегруємо по y від 0 до b.

$$B_m = \frac{2}{b} \int_0^b V \sin k_m y \, \mathrm{d}y = \frac{2V}{b k_m} \big(1 - (-1)^m \big)$$

Помітимо, що при парних значеннях m маємо $B_m = 0$. Явно випишемо коефіцієнти тільки з непарними номерами

$$B_{2k+1} = \frac{2V}{b k_{2k+1}} \big(1 - (-1)^{2k+1} \big) = \frac{2V}{b} \frac{b}{\pi(2k+1)} \cdot 2 = \frac{4V}{\pi(2k+1)} \tag{11.14}$$

Підставляємо знайдені коефіцієнти в загальний розв'язок (11.13) і отримуємо розв'язок у вигляді ряду

$$u(x, y) = \frac{4V}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\pi(2k+1)x/b}}{2k+1} \sin \big(\pi(2k+1) y / b \big), \tag{11.15}$$

Тепер знайдемо суму ряду отриманого розв'язку. Для цього використовуємо формулу Ейлера для $\sin k_{2k+1}y$

$$u(x,y) = \frac{4V}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left(\frac{e^{-\pi(2k+1)(x-iy)/b} - e^{-\pi(2k+1)(x+iy)/b}}{2i}\right)$$

та обчислимо похідну по x

$$u_x = -\frac{4V}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\pi(2k+1)}{(2k+1)b}\left(\frac{e^{-\pi(2k+1)(x-iy)/b} - e^{-\pi(2k+1)(x+iy)/b}}{2i}\right) =$$
$$= \frac{2iV}{b}\sum_{s=0}^{\infty}\left(e^{-k_{2s+1}(x-iy)} - e^{-k_{2s+1}(x+iy)}\right)$$

Маємо під сумою дві геометричні прогресії зі знаменниками

$$q_1 = e^{-2\pi(x-iy)/b} \quad \text{та} \quad q_2 = e^{-2\pi(x+iy)/b}$$

відповідно. За формулою суми нескінченної геометричної прогресії обчислимо їх суми.

$$S_1 = \frac{e^{-\pi(x-iy)/b}}{1-e^{-2\pi(x-iy)/b}} = \frac{1}{e^{\pi(x-iy)/b} - e^{-\pi(x-iy)/b}} \tag{11.16}$$

$$S_2 = \frac{1}{e^{\pi(x+iy)/b} - e^{-\pi(x+iy)/b}} \tag{11.17}$$

Маємо

$$u_x = \frac{2iV}{b}\left(\frac{1}{e^{\pi(x-iy)/b} - e^{-\pi(x-iy)/b}} - \frac{1}{e^{\pi(x+iy)/b} - e^{-\pi(x+iy)/b}}\right) =$$
$$= \frac{2iV}{b}\frac{e^{\pi(x+iy)/b} - e^{-\pi(x+iy)/b} - e^{\pi(x-iy)/b} + e^{-\pi(x-iy)/b}}{\left(e^{\pi(x-iy)/b} - e^{-\pi(x-iy)/b}\right)\left(e^{\pi(x+iy)/b} - e^{-\pi(x+iy)/b}\right)} =$$
$$= \frac{2iV}{b}\frac{(e^{\pi x/b} - e^{-\pi x/b})(e^{i\pi y/b} - e^{-i\pi y/b})}{e^{2\pi x/b} + e^{-2\pi x/b} - \left(e^{2\pi iy/b} + e^{-2\pi iy/b}\right)} =$$
$$= \frac{2iV}{b}\cdot 2i\frac{\operatorname{ch}(\pi x/b)\sin(\pi y/b)}{\operatorname{ch}(2\pi x/b) - \cos(2\pi y/b)} = -\frac{4V}{b}\frac{\operatorname{ch}(\pi x/b)\sin(\pi y/b)}{\operatorname{ch}(2\pi x/b) - \cos(2\pi y/b)}$$

Сумою ряду буде

$$u(x,y) = -\frac{4V}{b}\sin(\pi y/b)\int\frac{\operatorname{ch}(\pi x/b)\,\mathrm{d}x}{\operatorname{ch}(2\pi x/b) - \cos(2\pi y/b)} \tag{11.18}$$

Обчислимо інтеграл

$$\int\frac{\operatorname{ch}(\pi x/b)\,\mathrm{d}x}{\operatorname{ch}(2\pi x/b) - \cos(2\pi y/b)} = \left|z = \operatorname{sh}(\pi x/b), \mathrm{d}z = \frac{\pi}{b}\operatorname{ch}(\pi x/b)\mathrm{d}x\right| =$$
$$= \frac{b}{\pi}\int\frac{\mathrm{d}z}{1-2z^2-\cos(2\pi y/b)} = \frac{b}{\pi}\int\frac{\mathrm{d}z}{2\sin^2(\pi y/b) - 2z^2} =$$
$$= \frac{b}{2\pi}\frac{1}{\sin(\pi y/b)}\operatorname{arctg}\left(\frac{z}{\sin(\pi y/b)}\right) + \tilde{C} = \frac{b}{2\pi}\frac{1}{\sin(\pi y/b)}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{sh}(\pi x/b)}{\sin(\pi y/b)}\right) + \tilde{C}$$

Отже

$$u(x,y) = C - \frac{2V}{\pi}\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{sh}(\pi x/b)}{\sin(\pi y/b)}\right) \tag{11.19}$$

З межової умови в $x = 0$ визсачимо значення констатни

$$u(0,y) = C - \frac{2V}{\pi} \cdot 0 = V \;\Rightarrow\; C = V$$

Остаточно, маємо розв'язок

$$u(x,y) = V - \frac{2V}{\pi}\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{sh}(\pi x/b)}{\sin(\pi y/b)}\right) = V\left(1 - \frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{sh}(\pi x/b)}{\sin(\pi y/b)}\right)\right) \tag{11.20}$$

При $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{sh}(\pi x/b)}{\sin(\pi y/b)}\right) = 1 - \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2} = 0 \;\Rightarrow\; u(x,y) \to 0$$

Заняття 12

Функції Гріна звичайних диференціальних задач

Задача № 12.1

Функція Гріна $G(t)$ задачі Коші для рівняння гармонічного осцилятора

$$y'' + \omega^2 y = f(t),\ t \geq 0,\ y(0) = y_0,\ y'(0) = \nu_0$$

є розв'язком цієї задачі при $\nu_0 = 1$, $y_0 = 1$ і $f(t) = 0$. Тобто $y = G(t)$ задовольняє умови

$$y'' + \omega^2 y = 0,\ t \geq 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$$

Знайдіть явний вигляд функції Гріна сцилятора; чи зберігає вона смисл при $\omega \to 0$?

Розв'язок

Запишимо постановку задачі для визначення функції Гріна $G(t)$

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = 0, t \geq 0, \\ y(0) = 0, y'(0) = 1. \end{cases} \tag{12.1}$$

Функція Гріна є розв'язком рівняння, тому

$$y = G(t)\ \rightarrow\ G'' + \omega^2 G = 0,$$

а розв'язком буде

$$G(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{12.2}$$

З початкових умов визначаємо константи

$$G(0) = A = 0\ \Rightarrow\ A = 0$$

$$G'(0) = B\omega = 1\ \Rightarrow\ B = \frac{1}{\omega}$$

Таким чином функція Гріна для осцилятора має вигляд

$$G(t) = \frac{\sin \omega t}{\omega} \tag{12.3}$$

Перевіримо чи зберігає функція Гріна сенс при $\omega \to 0$.

$$\lim_{\omega \to 0} \frac{\sin \omega t}{\omega} = t \cdot \lim_{\omega \to 0} \frac{\sin \omega t}{\omega t} = t$$

Зрозуміло, що $\omega = 0$ відповідає відсутності повертаючої сили в системі, тобто тоді ми отримаємо задачу про вільний рух. Повертаючись до умови задачі Коші, яка визначає функцію Гріна, бачимо, що початкова умова описує частинку, яка в початковий момент часу в точці $y_0 = 0$ має швидкість $v_0 = 1$. При вільному русі закон руху буде лінійною функцією і, використовуючи початкові умови, отримаємо $G(t) = t$.

Задача № 12.2

Користуючись означенням функції Гріна $G(t)$, але не використовуючи її явного вигляду, показати безпосередньою підстановкою в умови задачі, що функція

$$y(t) = \int_0^t G(t - t')f(t')\,\mathrm{d}t' + y'(0)G(t) + y(0)G'(t)$$

є розв'язком задачі про вимушені коливання гармонічного осцилятора при $t > 0$ під дією узагальненої сили $f(t)$ з початковими умовами $y(0) = y_0$, $y'(0) = \nu_0$. Розв'язками яких частинних задач є окремі доданки цього виразу?

Розв'язок

Закон руху

$$y(t) = \int_0^t G(t - t')f(t')\,\mathrm{d}t' + y'(0)G(t) + y(0)G'(t) \tag{12.4}$$

є розв'язком задачі:

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = 0,\ t \geq 0, \\ y(0) = y_0,\ y'(0) = v_0. \end{cases} \tag{12.5}$$

Обчислимо першу похідну по часу від розв'язку (12.4)

$$y'(t) = G(0)f(t) + \int_0^t G'(t - t')f(t')\,\mathrm{d}t' + y'(0)G'(t) + y(0)G''(t) =$$

За означенням функції Гріна $G(t)$ (12.1)

$$G''(t) = -\omega^2 G(t), \quad G(0) = 0, \quad G'(0) = 1$$

Підставимо $G''(t)$ та $G(0)$

$$= \int\limits_0^t G'(t-t')f(t')\,\mathrm{d}t' + y'(0)G'(t) - \omega^2 y(0)G(t)$$

Аналогічно друга похідна

$$y''(t) = G'(0)f(t) + \int\limits_0^t G''(t-t')f(t')\,\mathrm{d}t' + y'(0)G''(t) - \omega^2 y(0)G'(t) =$$

$$= f(t) - \omega^2\left(\int\limits_0^t G(t-t')f(t')\,\mathrm{d}t' + y'(0)G(t) + y(0)G'(t)\right) = f(t) - \omega^2 y(t)$$

Підставимо другу похідну в рівняння

$$y'' + \omega^2 y = f(t) - \omega^2 y + \omega^2 y \equiv f(t)$$

Таким чином (12.4) задовільняє рівняння (12.5)

Визначимо для яких задач є розв'язками кожен з доданків (12.4). Для цього треба покласти 2 з 3 параметрів (зовнішня сила та початкові умови) рівними нулю.

1. $y(0) = 0, y'(0) = 0$

$$y(t) = \int\limits_0^t G(t-t')f(t')\,\mathrm{d}t' \quad \text{є розв'язком задачі:}$$

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = f(t),\ t \geq 0, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0. \end{cases} \tag{12.6}$$

2. $f(t) = 0, y(0) = 0$

$$y(t) = y'(0)G(t) \quad \text{є розв'язком задачі:}$$

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = 0,\ t \geq 0, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1. \end{cases} \tag{12.7}$$

3. $f(t) = 0, y'(0) = 0$

$$y(t) = y(0)G'(t) \quad \text{є розв'язком задачі:}$$

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = 0,\ t \geq 0, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0. \end{cases} \tag{12.8}$$

Задача № 12.5

Функція Гріна $G(x,x')$ крайової задачі для одновимірного рівняння Гельмгольца $u'' - \mu^2 u = -f(x)$, $u(0) = 0$, $|u| < \infty$ при $x \to \infty$ за означенням є неперервним розв'язком цієї задачі для $f(x) = \delta(x - x')$, $0 < x' < \infty$.
а) Знайти функцію Гріна цієї задачі шляхом зшивання розв'язків однорідного рівняння і подальшого нормування (для даної задачі можливі принаймні три різні способи нормування розв'язку, які?).
б) Знайти функцію Гріна $G(x,x')$ крайової задачі для одновимірного рівняння Гельмгольца $u'' - \mu^2 u = -f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $|u| < \pm\infty$ при $x \to \pm\infty$ – шляхом граничного переходу $x, x' \to \infty$ при сталому $x - x'$ у $G(x,x')$, одержаній у пункті а) цієї задачі.
Дайте фізичну інтерпретацію знайдених функцій Гріна у термінах стаціонарної дифузії частинок зі скінченним часом життя. Якою є залежність від кожного з аргументів функції Гріна та симетрія відносно їх перестановки? Чому в одних випадках функція Гріна залежить від кожного з аргументів окремо, а в інших – тільки від їх різниці?

Розв'язок

Постановка задачі:

$$\begin{cases} u'' + \mu^2 u = -f(x),\ t \geq 0, \\ u(0) = 0, \\ |u| < \infty \text{ при } x \to +\infty. \end{cases} \tag{12.9}$$

Розв'язок однорідного рівняння:

$$u_0(x) = C_1 e^{-\mu x} + C_2 e^{\mu x} \tag{12.10}$$

Знайдемо вигляд розв'язків, що задовольняють також і межовим умовам. Перший розв'язок знаходимо прямою підстановкою:

$$u(0) = C_1 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -C_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad u_1(x) = e^{-\mu x} - e^{\mu x}$$

Для другого розв'язку треба покласти C_2 рівним нулю, щоб позбавитись розбіжного доданку.

$$|u(+\infty)| < \infty \quad \Rightarrow \quad u_2(x) = e^{-\mu x}$$

Отже, маємо два розв'язки з яких зшиванням побудуємо функцію Гріна

$$u_1(x) = e^{-\mu x} - e^{\mu x}, \quad u_2(x) = e^{-\mu x} \tag{12.11}$$

Визначимо функцію Гріна за формулою

$$G(x,x') = \begin{cases} \varphi(x')\big(e^{-\mu x} - e^{\mu x}\big), \ 0 \le x \le x' \\ \psi(x')e^{-\mu x}, \ x' \le x \le \infty, \end{cases} \tag{12.12}$$

де $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ – гарні функції, та задовольняє умовам

$$\begin{cases} G(x,x')\Big|_{x=x'+0} = G(x,x')\Big|_{x=x'-0}, \\ \dfrac{\partial}{\partial x}G(x,x')\Big|_{x=x'+0} - \dfrac{\partial}{\partial x}G(x,x')\Big|_{x=x'-0} = 1. \end{cases} \tag{12.13}$$

Підставимо (12.12) в (12.13) та розв'яжемо отриману ситему рівнянь відносно невідомих функцій.

$$\begin{cases} \psi(x')e^{-\mu x'} - \varphi(x')(e^{-\mu x'} - e^{\mu x'}) = 0, \\ -\mu\psi(x')e^{-\mu x'} + \mu\varphi(x')(e^{-\mu x'} + e^{\mu x'}) = 1. \end{cases} \tag{12.14}$$

Поділимо на μ друге рівняння та додамо до першого

$$\begin{cases} \varphi(x')(e^{-\mu x'} + e^{\mu x'} - e^{-\mu x'} + e^{\mu x'}) = \dfrac{1}{\mu}, \\ \psi(x')e^{-\mu x'} = \varphi(x')(e^{-\mu x'} - e^{\mu x'}); \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\varphi(x')e^{\mu x'} = \dfrac{1}{\mu}, \\ \psi(x') = \varphi(x')(1 - e^{2\mu x'}); \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \varphi(x') = \dfrac{1}{2\mu}e^{-\mu x'}, \\ \psi(x') = \dfrac{1}{2\mu}e^{-\mu x'}(1 - e^{2\mu x'}) = \dfrac{1}{2\mu}(e^{-\mu x'} - e^{\mu x'}). \end{cases}$$

Отже, функція Гріна (12.12) має вигляд

$$G(x,x') = \begin{cases} \dfrac{1}{2\mu}e^{-\mu x'}\big(e^{-\mu x} - e^{\mu x}\big), \ 0 \le x \le x' \\ \dfrac{1}{2\mu}\big(e^{-\mu x'} - e^{\mu x'}\big)e^{-\mu x}, \ x' \le x \le \infty, \end{cases} \tag{12.15}$$

або якщо розкрити дужки та врахувати невід'ємність різниці $(x - x')$ в аргументі другої експоненти модулем

$$G(x,x') = \frac{1}{2\mu}\big(e^{-\mu(x+x')} - e^{-\mu|x-x'|}\big) \tag{12.16}$$

Розв'язок для задачі на нескінченному інтервалі (випадок б)) знайдемо граничним переходом $x, x' \to \infty$ при сталій різниці $x - x'$

$$\lim_{\substack{|x-x'|=c \\ x,x'\to\infty}} G(x,x') = \lim_{\substack{|x-x'|=c \\ x,x'\to\infty}} \frac{1}{2\mu}\big(e^{-\mu(x+x')} - e^{-\mu|x-x'|}\big) = -\frac{1}{2\mu}e^{-\mu|x-x'|} \tag{12.17}$$

Заняття 13

Функції Гріна і розв'язки задач для рівнянь у частинних похідних з однорідними межовими умовами

Задача № 13.5

Обчислити Фур'є-образ і знайти формальне представлення у вигляді інтеграла Фур'є:
б) просторової дельта-функції $\delta(\vec{r}-\vec{r}')$ у необмеженому тривимірному просторі.

Розв'язок

За означенням перетворень Фур'є мають вигляд

$$\begin{aligned} \text{Пряме: } \hat{f}(k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x, \\ \text{Обернене: } f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)e^{ikx}\,\mathrm{d}k. \end{aligned} \tag{13.1}$$

Також згадаємо властивість дельта-функції

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-x')\,\mathrm{d}x = f(x'), \tag{13.2}$$

Запишемо формулу Фур'є-образу просторової дельта-функції

$$\hat{f}(\vec{k}) = \int_{\mathbb{R}^3} \delta(\vec{r}-\vec{r}')e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r})}\,\mathrm{d}\vec{r} = \tag{13.3}$$

Скористаємося властивістю експоненти та представленням просторової дельта-функції у вигляді добутку одновимірних щоб отримати три окремих перетворення Фур'є

$$= \int_{\mathbb{R}^3} \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')\exp[-i(k_x x + k_y y + k_z z)]\,\mathrm{d}\vec{r} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik_x x}\delta(x-x')\,\mathrm{d}x \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik_y y}\delta(y-y')\,\mathrm{d}y \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik_z z}\delta(z-z')\,\mathrm{d}z =$$

$$= e^{-ik_x x'} \cdot e^{-ik_y y'} \cdot e^{-ik_z z'} = e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}\,')}$$

Тепер ми можемо знайти представлення дельта-функції у вигляді інтеграла Фур'є використовуючи обернене перетворення

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}\,')} \cdot e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r})}\,\mathrm{d}\vec{k} = \int_{\mathbb{R}^3} e^{i(\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,'))}\,\mathrm{d}\vec{k} \tag{13.4}$$

Задача № 13.6

Поставити задачу на функцію Гріна $G(\vec{r},\vec{r}\,')$ крайової задачі для 3-D рівняння Гельмгольца $\Delta_3 u - \mu^2 u = -f(\vec{r})$ у необмеженому просторі з умовою прямування розв'язку до нуля на нескінченності і розв'язати її за допомогою інтегрального перетворення Фур'є, дати фізичну інтерпретацію розв'язку у термінах стаціонарної дифузії частинок зі скінченним часом життя. Граничним переходом $\mu \to +0$ перейти до функції Гріна рівняння Лапласа. Записати розв'язок задачі з довільним джерелом $f(\vec{r})$ через функцію Гріна.

Розв'язок

Постановка задачі на фінкцію Гріна

$$\begin{cases} u = G(\vec{r},\vec{r}\,'), \\ \Delta_3 u - \mu^2 u = -\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \end{cases} \tag{13.5}$$

Виконаємо перетворення Фур'є рівняння

$$-k_x^2\hat{u} - k_y^2\hat{u} - k_z^2\hat{u} - \mu^2\hat{u} = -e^{i(\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,'))}$$

Звідки отримаємо Фур'є-образ функції Гріна

$$\hat{u}(\vec{k}) = \frac{1}{k^2+\mu^2} \cdot e^{i(\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,'))} \tag{13.6}$$

Тепер функції Гріна знайдемо оберненим перетворенням Фур'є

$$G(\vec{r}-\vec{r}\,') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i(\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,'))}}{k^2+\mu^2}\,\mathrm{d}\vec{k} = \tag{13.7}$$

Залишається обчислити отриманий інтеграл. Це не важко зробити використовуючи лемму Жордана та обчислючи лишки.
Переходимо в сферичні координати і позначимо $\rho = |\vec{r} - \vec{r}'|$ та θ – кут між векторами $\vec{k}$ та $\vec{r} - \vec{r}'$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\infty} k^2 \, \mathrm{d}k \int_0^{\pi} \frac{e^{ik\rho\cos\theta}}{k^2 + \mu^2} \mathrm{d}(\cos\phi) =$$
$$= \frac{2\pi}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} \frac{k^2}{k^2 + \mu^2} \left(\frac{e^{ik\rho\cos\theta}}{ik\rho} \right) \Bigg|_0^{\pi} \mathrm{d}k =$$
$$= \frac{1}{8\pi^2 i\rho} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ke^{-ik\rho}}{k^2 + \mu^2} \mathrm{d}k - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ke^{ik\rho}}{k^2 + \mu^2} \mathrm{d}k \right] =$$

Підінтегральній вираз має 2 особливі точки $k = \pm i\mu$. Для першого інтегралу потрібно розглянути контур в комплексній півплощині, де $\mathrm{Im} z > 0$, а для другого навпаки – $\mathrm{Im} z < 0$.

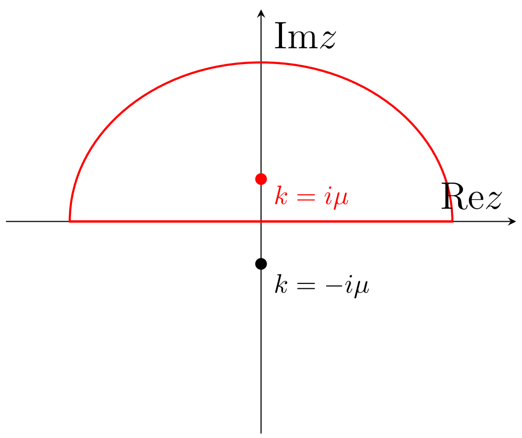


Рис. 13.1: Контур для 1 інтегралу

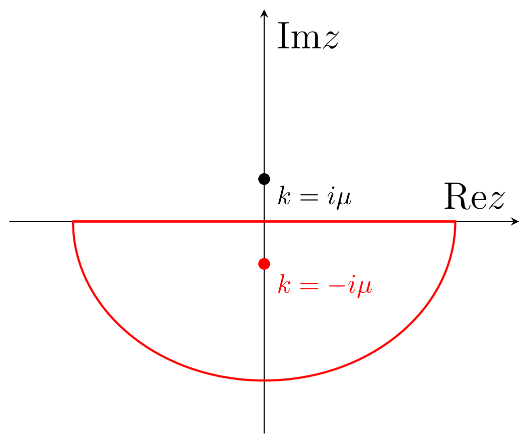


Рис. 13.2: Контур для 2 інтегралу

За лемою Жордана інтеграл вздовж півкола буде прямувати до нуля при прямуванні його радіуса до нескінченності, тому значення інтегралів, які ми отримали раніше дорівнює

$$= \frac{2\pi i}{8\pi^2 i\rho} \left[\operatorname*{Res}_{k=i\mu} \frac{ke^{-ik\rho}}{k^2 + \mu^2} + \operatorname*{Res}_{k=-i\mu} \frac{ke^{ik\rho}}{k^2 + \mu^2} \right] = \frac{1}{4\pi\rho} \left[\lim_{k=i\mu} \frac{ke^{-ik\rho}}{k + i\mu} + \lim_{k=-i\mu} \frac{ke^{ik\rho}}{k - i\mu} \right] =$$
$$= \frac{1}{4\pi\rho} \left[\frac{i\mu e^{\mu\rho}}{2i\mu} + \frac{-i\mu e^{\mu\rho}}{-2i\mu} \right] = \frac{1}{4\pi\rho} e^{\mu\rho} = \frac{e^{\mu|\vec{r} - \vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Отже, маємо функцію Гріна для рівняння Гельмгольца

$$G(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{e^{\mu|\vec{r} - \vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{13.8}$$

Фізична інтерпритація: ???

Знайдемо функцію Гріна для рівняння Лапласа

$$G(\vec{r}-\vec{r}') = \lim_{\mu\to+0} \frac{e^{\mu|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{13.9}$$

Розв'язок задачі для довільного джерела

$$u(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\vec{r}-\vec{r}')f(\vec{r}')\,\mathrm{d}\vec{r}' = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}\vec{r}' \tag{13.10}$$

Задача № 13.7

Знайти функцію Гріна $G(x,x')$ крайової задачі для одновимірного рівняння Гельмгольца

$$u'' - \mu^2 u = -f(x), \quad -\infty < x < +\infty,\ |u| < \infty \text{ при } x \to \pm\infty$$

за допомогою інтегрального перетворення Фур'є. Порівняти результат з розв'язком задачі 12.5б.

Розв'язок

Постановка задачі на фінкцію Гріна

$$\begin{cases} u = G(x,x'), \\ u'' - \mu^2 u = -\delta(x) \end{cases} \tag{13.11}$$

Перетворимо рівняння за Фур'є

$$-k^2\hat{u} - \mu^2\hat{u} = -e^{ikx}$$

Маємо Фур'є-образ

$$\hat{u}(k) = \frac{e^{ikx}}{k^2+\mu^2} \tag{13.12}$$

Тепер функції Гріна знайдемо оберненим перетворенням Фур'є

$$G(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{k^2+\mu^2}\,\mathrm{d}k \tag{13.13}$$

Аналогічно до задачі №13,6 будемо шукати лишки, але в цій задачі треба розглянути окремо дві області $x>0$ та $x<0$ і зшити їх.
При $x>0$ розглядаємо контур з $\mathrm{Im}z<0$:

$$G(x>0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{k^2+\mu^2}\,\mathrm{d}k = i\operatorname*{Res}_{k=-i\mu} \frac{ke^{-ikx}}{k^2+\mu^2} = i\lim_{k=-i\mu} \frac{ke^{-ikx}}{k-i\mu} = -\frac{e^{\mu x}}{2\mu}$$

При $x < 0$ розглядаємо контур з $\mathrm{Im} z > 0$:

$$G(x<0) = i \operatorname*{Res}_{k=-i\mu} \frac{ke^{-ikx}}{k^2+\mu^2} = i \lim_{k=-i\mu} \frac{ke^{-ikx}}{k-i\mu} = -\frac{e^{-\mu x}}{2\mu}$$

Отже, функція Гріна має вигляд

$$G(x,x') = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\mu}e^{-\mu(x-x')},\ x<0 \\ -\dfrac{1}{2\mu}e^{\mu(x-x')},\ x>0, \end{cases} \tag{13.14}$$

або

$$G(x,x') = -\frac{1}{2\mu}e^{-\mu|x-x'|} \tag{13.15}$$

Отриманий вираз выдповідає результату пунтку б) задачі №12,5