

Заняття 12

Функції Гріна звичайних диференціальних задач

Задача № 12.5

Функція Гріна $G(x, x')$ крайової задачі для одновимірного рівняння Гельмгольца $u'' - \mu^2 u = -f(x)$, $u(0) = 0$, $|u| < \infty$ при $x \rightarrow \infty$ за означенням є неперервним розв'язком цієї задачі для $f(x) = \delta(x - x')$, $0 < x' < \infty$.

а) Знайти функцію Гріна цієї задачі шляхом зшивання розв'язків однорідного рівняння і подальшого нормування (для даної задачі можливі принаймні три різні способи нормування розв'язку, які?).

б) Знайти функцію Гріна $G(x, x')$ крайової задачі для одновимірного рівняння Гельмгольца $u'' - \mu^2 u = -f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $|u| < \pm\infty$ при $x \rightarrow \pm\infty$ – шляхом граничного переходу $x, x' \rightarrow \infty$ при сталому $x - x'$ у $G(x, x')$, одержаній у пункті а) цієї задачі.

Дайте фізичну інтерпретацію знайдених функцій Гріна у термінах стаціонарної дифузії частинок зі скінченним часом життя. Якою є залежність від кожного з аргументів функції Гріна та симетрія відносно їх перестановки? Чому в одних випадках функція Гріна залежить від кожного з аргументів окремо, а в інших – тільки від їх різниці?