0.0.1 Вільні коливання поля в резонаторі для заданих початкових умов. Ряд Фур'є по системі ортогональних функцій.

Задача №3

Знайти коливання струни завдовжки $0 \le x \le l$ із закріпленими кінцями, якщо початкове відхил є $\varphi(x) = hx/l$, а початкова швидкість $\psi(x) = \nu_0$. Обчислити інтеграл ортогональності власних функцій і знайти квадрат норми. Чи є рух струни періодичним (тобто повторюється початковий стан струни через деякий проміжок часу?) Чи буде рух періодичним, якщо він описується рівнянням $u_{tt} = v^2 u_{xx} - \omega_0^2 u$

Розв'язок

Формальна постановка задачі:

$$
\begin{cases}
u = u(x,t), \\
u_{tt} = v^2 u_{xx}, \\
0 \le x \le l, t \ge 0, \\
u(0,t) = u(l,t) = 0, \\
\left.\begin{aligned} u(x,0) = \varphi(x) = \frac{hx}{l}, \\ u_t(x,0) = \psi(x) = \nu_0. \end{aligned}\right\} - \begin{array}{l}\text{початкові умови задають} \\ \text{механічний стан} \\ \text{системи при } t = 0\end{array}
\end{cases}
\tag{1}
$$

Задача з заданими початковими умовами має єдиний розв'язок. Скористаємося результатами задачі 1 попереднього заняття (**??**).

$$
\begin{cases}
u_n(x,t) = [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] \sin(k_n x), \\
k_n = \frac{\pi n}{l}, \; n = 1, 2, \ldots \\
\omega_n = v k_n = \frac{v \pi n}{l} - \text{ власні частоти.}
\end{cases}
$$

Запишемо загальний розв'язок задачі:

$$
u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] \sin(k_n x) \tag{2}
$$

Коефіцієнти A_n та B_n визначаємо із початкових умов. Підставляємо (2) в початкові умови (1):

$$u(x,0) = \varphi(x) \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x) = \varphi(x)$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left[-A_n \omega_n \sin(\omega_n t) + B_n \omega_n \cos(\omega_n t) \right] \sin(k_n x) \right)\Big|_{t=0} = \tag{3}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \omega_n \sin(k_n x) = \psi(x)$$

Отже, ми отримали дві умови для визначення A_n, B_n.
Далі скористаємося ортогональністю власних функцій задачі Штурма-Ліувілля.

$$\int_0^l X_n(x) \cdot X_m(x)\,\mathrm{d}x = ||X_n||^2 \delta_{n,m}, \tag{4}$$

де $||X_n||$ – норма власної функції.

Доможуємо отримані вирази в (3) на m-ту власну функції $\sin(k_m x)$ та інтегруємо від 0 до l.

$$\int_0^l \varphi(x) \sin(k_m x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^l \sin(k_n x) \sin(k_m x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \frac{l}{2} \delta_{n,m} = \frac{A_m l}{2} \;\Rightarrow\; A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin(k_n x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2}{l} \int_0^l \frac{hx}{l} \sin(k_n x)\,\mathrm{d}x = \frac{2h}{l^2} \left(-\frac{1}{k_n} x \cos(k_n x) \Big|_0^l + \int_0^l \frac{\cos(k_n x)}{k_n}\,\mathrm{d}t \right) =$$

$$= \left| k_n l = \frac{\pi n}{l} l = \pi n \Rightarrow \sin(k_n l) = 0,\ \cos(k_n l) = (-1)^n \right| =$$

$$= \frac{2h}{l^2} \left(-\frac{l}{k_n} (-1)^n + \frac{\sin(k_n x)}{k_n^2} \Big|_0^l \right) = \frac{2h}{l} \frac{(-1)^{n+1}}{k_n} \equiv A_n$$

$$\int_0^l \psi(x) \sin(k_m x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \omega_n \cdot \frac{l}{2} \delta_{n,m} = \frac{B_m \omega_m l}{2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; B_n = \frac{2}{\omega_n l} \int_0^l \psi(x) \sin(k_n x)\,\mathrm{d}x = \frac{2\nu_0}{\omega_n l} \int_0^l \sin(k_n x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2\nu_0}{k_n \omega_n l} \cos(k_n x) \Big|_l^0 = \frac{2\nu_0}{l} \frac{1 - (-1)^n}{k_n \omega_n} \equiv B_n$$

Підставляємо визначені константи в (2)

$$u(x,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\nu_0(1-(-1)^n)\frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n} - h(-1)^n\cos(\omega_n t)\right]\frac{\sin(k_n x)}{k_n} \tag{5}$$

Перевіримо періодичність розв'язку. Період коливання визначається за відомою формулою

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n},$$

де n - номер власної моди. Підставимо в (5) $t = t + T_n$

$$\begin{aligned} u(x,t+T_n) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[\nu_0(1-(-1)^n)&\frac{\sin(\omega_n t + \omega_n\cdot\frac{2\pi}{\omega_n})}{\omega_n} - \\ &-h(-1)^n\cos(\omega_n t + \omega_n\cdot\frac{2\pi}{\omega_n})\Bigg]\frac{\sin(k_n x)}{k_n} = \\ = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\nu_0(1-(-1)^n)\frac{\sin(\omega_n t + 2\pi)}{\omega_n} - h(-1)^n\cos(\omega_n t + 2\pi)\right]&\frac{\sin(k_n x)}{k_n} = \\ = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\nu_0(1-(-1)^n)\frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n} - h(-1)^n\cos(\omega_n t)\right]&\frac{\sin(k_n x)}{k_n} = u(x,t) \end{aligned}$$

Тобто коливання струни буде періодичним.