Задача 7.2

7.2. Розв'язати задачу 7.1 методом розкладання по власних функціях.

$$\begin{cases} u_{tt} = v^2 u_{xx},\ 0 \le x \le l,\ t>0, \\ u_x(0,t) = F_0 e^{-\alpha t},\ u(l,t) = 0; \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0; \end{cases}$$

Розв'язок шукаємо у вигляді: $u(x,t) = T(t)X(x)$

$$\begin{cases} u_{tt} = v^2 u_{xx},\ 0 \le x \le l,\ t>0; \\ u_x(0,t) = u(l,t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_n = \left(\frac{\pi}{l}(n+\frac{1}{2})\right)^2,\ n = 0,1,2\ldots \\ X_n = \cos\frac{\pi}{l}(n+\frac{1}{2})x,\ n = 0,1,2\ldots \end{cases}$$ – базисні функції задачі.

Домножуємо рівняння на X_n та інтегруємо по x від 0 до l:

$$\frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^l u_{tt} X_n\,dx = \frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^l v^2 u_{xx} X_n\,dx.$$

Інтегруємо ліву частину:

$$\frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^l u_{tt} X_n\,dx = \frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^l \sum_{m=1}^{\infty} X_m(x)\cdot T_m''(t)\cdot X_n(x)\,dx = \frac{1}{\|X_n\|^2}\sum_{m=1}^{\infty} T_m''(t)\int_0^l X_m(x)X_n(x)\,dx =$$

$$= \frac{\delta_{nm}}{\|X_n\|^2} T_m''(t) X_n X_m = \delta_{nm}\cdot T_m''(t)$$

Праву частину рівності двічі інтегруємо частинами:

$$\frac{v^2}{\|X_n\|^2}\int_0^l \sum_{m=1}^{\infty} T_m(t) X_m''(x) X_n(x)\,dx = \frac{v^2}{\|X_n\|^2}\sum_{m=1}^{\infty} T_m(t)\int_0^l X_m''(x) X_n(x)\,dx.$$

Розглянемо окремо інтеграл під сумою:

$$\int_0^l X_m'' X_n\,dx = \int_0^l X_n\,dX_m' = X_n X_m'\Big|_0^l - \int_0^l X_n' X_m'\,dx = X_n X_m'\Big|_0^l - X_n' X_m\Big|_0^l + \int_0^l X_n'' X_m\,dx = (\cancel{X_n(l)} X_m'(l) - X_n(0) X_m'(0)) -$$

$$-(X_n'(l)\cancel{X_m(l)} - X_n'(0) X_m(0)) + \int_0^l X_n'' X_m\,dx = X_n'(0) X_m(0) - X_n(0) X_m'(0) + \int_0^l X_n'' X_m\,dx.$$

Повертаємося до суми і отримуємо:

$$\frac{v^2}{\|X_n\|^2}\int_0^l \sum_{m=1}^{\infty} T_m(t) X_m''(x) X_n(x)\,dx = \lambda_n v^2 T_m(t)\cdot\delta_{nm} + \frac{v^2}{\|X_n\|^2}\left[X_n'(0)\sum_{m=1}^{\infty} T_m(t) X_m(0) - X_n(0)\sum_{m=1}^{\infty} T_m(t) X_m'(0)\right] =$$

$$= \lambda_n v^2 \delta_{nm} T_m(t) + \frac{v^2}{\|X_n\|^2}\left[X_n'(0) u(0,t) - X_n(0)\cdot u_x(0,t)\right].$$

Отже, отримуємо лінійне рівняння відносно $T_n(t)$:

$$T_n''(t) + \lambda_n v^2 T_n(t) = \frac{v^2}{\|X_n\|^2}\left[\cancel{X_n'(0)} u(0,t) - X_n(0)\cdot u_x(0,t)\right].$$

$$T_n''(t) + \lambda_n v^2 T_n(t) = \frac{v^2}{\frac{l}{2}}\cdot(\alpha F_0 e^{-\alpha t}).$$

$\|X_n\|$

$$T_n''(t)+\lambda_n v^2 T_n(t) = \frac{v^2}{\frac{l}{2}}\cdot\left(\alpha F_0 e^{-\alpha t}\right).$$

$$T_n''+\lambda_n v^2 T_n = \frac{2\alpha\omega_n^2}{\pi(n+\frac{1}{2})}e^{-\alpha t}$$

$$T_n(t) = A_n\cos\omega_n t + B_n\sin\omega_n t + \tilde{T}_n(t)$$

$$\tilde{T}_n(t) = \beta e^{-\alpha t} \Rightarrow \alpha^2\beta - \omega_n^2\beta = \frac{2\alpha\omega_n^2}{\pi(n+\frac{1}{2})} \Rightarrow \beta = \frac{2}{\pi(n+\frac{1}{2})}\cdot\frac{\alpha\omega_n^2}{\alpha^2-\omega_n^2}.$$

Тоді: $T_n(t) = A_n\cos\omega_n t + B_n\sin\omega_n t + \frac{2\alpha\omega_n^2}{\pi(n+\frac{1}{2})(\alpha^2-\omega_n^2)}e^{-\alpha t}.$

Із початкових умов знаходимо A_n та B_n!

$$\begin{cases} T_n(0) = A_n + \frac{2\alpha\omega_n^2}{\pi(n+\frac{1}{2})(\alpha^2-\omega_n^2)} = 0, \\ T_n'(0) = \omega_n B_n - \frac{2\alpha^2\omega_n^2}{\pi(n+\frac{1}{2})(\alpha^2-\omega_n^2)} = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_n = -\frac{2\alpha\omega_n^2}{\pi(n+\frac{1}{2})(\alpha^2-\omega_n^2)}, \\ B_n = \frac{2\alpha^2\omega_n}{\pi(n+\frac{1}{2})(\alpha^2-\omega_n^2)}. \end{cases}$$

Остаточно маємо:

$$U(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} X(x)\cdot T(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\alpha\omega_n^2}{\pi(n+\frac{1}{2})(\alpha^2-\omega_n^2)}\left[\frac{\alpha}{\omega_n}\sin\omega_n t - \cos\omega_n t + e^{-\alpha t}\right].$$