Заняття 1

Рівняння теплопровідності з однорідними межовими умовами

Задача № 4.4

Початкова температура повністю теплоізольованого тонкого стержня $0 \le x \le l$ *дорівнює* $T_1 \cos(\pi x/2l) + T_2 \cos(2\pi x/l)$. *Знайти поле температур при* $t > 0$. *Перевірити виконання початкових умови при* $T_1 = 0$ *і* $T_2 = 0$.

Розв'язок

Формальна постановка задачі:

$$\begin{cases} u = u(x,t), \\ u_t = Du_{xx}, \\ 0 \le x \le l, t \ge 0, \\ u_x(0,t) = 0,\, u_x(l,t) = 0, \\ u(x,0) = T_1 \cos(\pi x/2l) + T_2 \cos(2\pi x/l). \end{cases} \tag{1.1}$$

Виконуючи розділення змінних ми отримаємо дві попереднбо розв'язані задачі. Задачу Штурма-Ліувілля з задачі №2.1 та часове диференціальне рівняння з задачі №4.2. Отже, загальний розв'язок можна одразу записати комбінуюці відомі.

$$u(x,t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-t/\tau_n} \cos k_n x, \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} &k_n = \frac{\pi n}{l} - \text{ хвильові вектори}, \\ &\tau_n = \frac{1}{Dk_n^2} - \text{ характерний час зміни температури}, \\ &n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

З початкової умови визначимо невіомі коефіцієнти. Для цього треба розкласти $\cos(\pi x/2l)$ по набору власних функцій задачі Ш.-Л.

$$\cos(\pi x/2l) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos k_n x$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^l \cos(\pi x/2l)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\sin(\pi x/2l)\Big|_0^l = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \cos(\pi x/2l)\cos k_n x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{l}\Bigg(\int_0^l \cos((k_n+\pi/2l)x)\,\mathrm{d}x +$$

$$+\int_0^l \cos((k_n-\pi/2l)x)\,\mathrm{d}x\Bigg) = \frac{1}{l}\left(\frac{\sin((k_n+\pi/2l)x)}{k_n+\pi/2l}\Bigg|_0^l + \frac{\sin((k_n-\pi/2l)x)}{k_n-\pi/2l}\Bigg|_0^l\right) =$$

$$= \left(\frac{\sin(k_n l+\pi/2)}{k_n l+\pi/2} + \frac{\sin(k_n l-\pi/2)}{k_n l-\pi/2}\right) = \left(\frac{1}{k_n l+\pi/2} - \frac{1}{k_n l-\pi/2}\right)\cos k_n l =$$

$$= \Big|\cos k_n l = (-1)^n\Big| = \frac{(-1)^{n+1}\pi}{(k_n l+\pi/2)(k_n l-\pi/2)} =$$

$$= (-1)^{n+1}\cdot\frac{4\pi}{4k_n^2 l^2-\pi^2} = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$$

Тепер підставимо (1.2) в початкову умову і отримаємо:

$$\begin{aligned} u(x,0) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos k_n x = T_1\cos(\pi x/2l) + T_2\cos(2\pi x/l) = \\ = \frac{2T_1}{\pi} + T_2\cos k_2 x + \frac{4T_1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos k_n x}{4n^2-1} \end{aligned} \tag{1.3}$$

З чого слідує

$$C_0 = \frac{2T_1}{\pi},\ C_2 = T_2 - \frac{4T_1}{15\pi},\ C_n = \frac{4T_1}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1},\ \text{де } n \neq 2$$

Отже, остаточним розв'язком буде

$$u(x,t) = \frac{2T_1}{\pi} + T_2 e^{-t/\tau_2}\cos k_2 x + \frac{4T_1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos k_n x}{4n^2-1} \tag{1.4}$$

Прямою підстановкою можна переконатися, що при $T_1 = 0$ та $T_2 = 0$ початкові умови виконуються.