Заняття 10

Приведення лінійних рівнянь у частинних похідних 2-го порядку з двома змінними до заданого вигляду

Задача № 10.1

Визначити тип рівняння $u_{xx} + 4u_{xy} + cu_{yy} + u_x = 0$, привести його до канонічного вигляду для $c = 0$ і знайти загальний розв'язок.

Розв'язок

Загальний вид рівняння:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = 0, \quad \text{або} \quad \hat{L}u + cu = 0 \tag{10.1}$$

Тип рівняння визначається визначником матриці, яка складається з коефіцієнтів перед другими похідними. *Фактично оператор $\hat{L}$ є білінійною формою з лінійної алгебри, де замість змінних будуть похідні.*

$$\Delta = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 2^2 - 1 \cdot c = 4 - c \tag{10.2}$$

При $c = 0$ визначник $\Delta > 0$, тому маємо рівняння гіперболічного типу.

Суть канонізації – перейти до нових змінних для яких рівняння прийматиме канонічний вид. Для визначення таких змінних записуємо спочатку характеристичне рівняння:

$$a_{11}(\mathrm{d}y)^2 + 2a_{12}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + a_{22}(\mathrm{d}x)^2 = 0, \quad \text{або} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{12}} \tag{10.3}$$

Обидва рівняння приводять до

$$y_1' = 4, \qquad y_2' = 0. \tag{10.4}$$

Звідси маємо перші інтеграли

$$\begin{gathered} y_1' = 4 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 4x \quad \Rightarrow \quad \Phi(x, y) = y - 4x = C_1 \\ y_2' = 0 \quad \Rightarrow \quad \Psi(x, y) = y = C_2 \end{gathered} \tag{10.5}$$

З теорії нові змінні отримаємо формальною заміною $C_1 \to \xi$, $C_2 \to \eta$. Отже, нові змінні

$$\begin{cases} \xi = y - 4x, \\ \eta = y. \end{cases} \tag{10.6}$$

Далі треба зробити заміну змінних. Для цього окремо випишемо похідні від нових змінних

$$\xi_x = -4,\ \xi_y = 1,\ \eta_x = 0,\ \eta_y = 1,\ \xi_{xy} = \eta_{xy} = 0,\ \xi_{xx} = \eta_{xx} = 0,\ \xi_{yy} = \eta_{yy} = 0.$$

Тепер не важко виконати заміну змінних

$$\begin{gathered} u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = -4u_\xi, \\ u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi + u_\eta, \\ u_{xx} = (-4u_\xi)'_x = -4(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x) = 16u_{\xi\xi}, \\ u_{xy} = (-4u_\xi)'_y = -4(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y) = -4(u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}). \end{gathered}$$

Підставляємо отримані вирази в рівняння

$$u_{xx} + 4u_{xy} + u_x = 16u_{\xi\xi} - 16(u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}) - 4u_\xi = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{\xi\eta} + \frac{1}{4}u_\xi = 0$$

Отже, отримали рівняння в канонічному виді

$$u_{\xi\eta} + \frac{1}{4}u_\xi = 0 \tag{10.7}$$

Розв'яжемо отримане рівняння. Легко побачити, що по ξ можна проінтегрувати.

$$u_{\xi\eta} + \frac{1}{4}u_\xi = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(u_\eta + \frac{1}{4}u\right)'_\xi = 0 \quad \Rightarrow \quad u_\eta + \frac{1}{4}u = f(\eta)$$

Звідки ми отримали лінійне неоднорідне диференційне рівняння однієї змінної. Розв'яжемо спочатку однорідне рівняння

$$\tilde{u}_\eta + \frac{1}{4}\tilde{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln\tilde{u} = -\frac{1}{4}\eta + \ln C \quad \Rightarrow \quad \tilde{u} = Ce^{-\eta/4}$$

Варіюємо змінну $C \to C(\eta)$

$$u = C(\eta)e^{-\eta/4} \quad \Rightarrow \quad C'e^{-\eta/4} = f(\eta) \quad \Rightarrow \quad C(\eta) = \int f(\eta)e^{\eta/4}\,\mathrm{d}\eta + \gamma$$

Отже, маємо розв'язок рівняння

$$u(\xi, \eta) = \gamma e^{-\eta/4} + e^{-\eta/4} \cdot \int^\eta f(z)e^{z/4}\,\mathrm{d}z \tag{10.8}$$