Заняття 13

Функції Гріна і розв'язки задач для рівнянь у частинних похідних з однорідними межовими умовами

Задача № 13.5

Обчислити Фур'є-образ і знайти формальне представлення у вигляді інтеграла Фур'є:
б) просторової дельта-функції $\delta(\vec{r}-\vec{r}')$ у необмеженому тривимірному просторі.

Розв'язок

За означенням перетворень Фур'є мають вигляд

$$\begin{aligned} \text{Пряме: } \hat{f}(k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx}\,\mathrm{d}x, \\ \text{Обернене: } f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{ikx}\,\mathrm{d}k. \end{aligned} \tag{13.1}$$

Також згадаємо властивість дельта-функції

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-x')\,\mathrm{d}x = f(x'), \tag{13.2}$$

Запишемо формулу Фур'є-образу просторової дельта-функції

$$\hat{f}(\vec{k}) = \int_{\mathbb{R}^3} \delta(\vec{r}-\vec{r}') e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r})}\,\mathrm{d}\vec{r} = \tag{13.3}$$

Скористаємося властивістю експоненти та представленням просторової дельта-функції у вигляді добутку одновимірних щоб отримати три окремих перетворення Фур'є

$$= \int_{\mathbb{R}^3} \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z') \exp[-i(k_x x + k_y y + k_z z)] \,\mathrm{d}\vec{r} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik_x x}\delta(x - x') \,\mathrm{d}x \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik_y y}\delta(y - y') \,\mathrm{d}y \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik_z z}\delta(z - z') \,\mathrm{d}z =$$

$$= e^{-ik_x x'} \cdot e^{-ik_y y'} \cdot e^{-ik_z z'} = e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}')}$$

Тепер ми можемо знайти представлення дельта-функції у вигляді інтеграла Фур'є використовуючи обернене перетворення

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}')} \cdot e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r})} \,\mathrm{d}\vec{k} = \int_{\mathbb{R}^3} e^{i(\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}'))} \,\mathrm{d}\vec{k} \tag{13.4}$$