Заняття 3

Другий спосіб знаходження коефіцієнтів. Коливання стержня з вільними кінцями, неповнота базису.

Задача № 3.1

Знайти коливання пружного стержня $0 \leq x \leq l$, лівий кінець якого закріплений, а правий вільний, якщо початкове відхилення $\varphi(x) = h\sin(3\pi x/2l)$, а початкова швидкість $\psi(x) = \nu_0 \sin(\pi x/2l)$.

Розв'язок

Формальна постановка задачі:

$$\begin{cases} u = u(x,t), \\ u_{tt} = v^2 u_{xx}, \\ 0 \leq x \leq l, t \geq 0, \\ u(0,t) = 0, \\ u_x(0,t) = 0, \\ \left.\begin{aligned} & u(x,0) = \varphi(x) = h\sin\left(\frac{3\pi x}{2l}\right), \\ & u_t(x,0) = \psi(x) = v_0 \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right). \end{aligned}\right\} - \begin{array}{l} \text{специфіка задачі} \\ \text{полягає у вигляді} \\ \text{початкових умов} \end{array} \end{cases} \tag{3.1}$$

Як і задача 2.3, це задача із заданими початковими умовами, яка має єдиний розв'язок, причому рівняння і межові умови однорідні. Тому розв'язувати її можна за тим же планом, як і 2.3, а відмінність полягатиме у способі знаходження коефіцієнтів загального розв'язку.

Спочатку залишаємо у стороні початкові умови (обидві вони неоднеорідні); розділяємо змінні у рівнянні і межових умовах, які є однорідними, і знаходимо набір власних мод. Скористаємося розв'язком задачі 1.2, в якій це було зроблено:

$$\begin{cases} u_n(x,t) = [A_n\cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)]\sin(k_n x), \\ k_n = (n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{l},\ n = 0,1,2,\ldots \\ \omega_n = v k_n = (n+\frac{1}{2})\frac{\pi v}{l} - \text{ власні частоти.} \end{cases} \tag{3.2}$$

Записуємо загальний розв'язок

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}[A_n\cos(\omega_n t) + B_n\sin(\omega_n t)]\sin(k_n x) \tag{3.3}$$

$$u_t(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}[-A_n\omega_n\sin(\omega_n t) + B_n\omega_n\cos(\omega_n t)]\sin(k_n x) \tag{3.4}$$

і підставляємо (3.3), (3.4) у початкові умови (3.1):

$$u(x,0) = \varphi(x) \ \Rightarrow \ \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin\left((n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{l}\right) = h\sin\left(\frac{3\pi x}{2l}\right) \tag{3.5}$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) \ \Rightarrow \ \sum_{n=0}^{\infty} B_n\omega_n \sin\left((n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{l}\right) = v_0\sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right) \tag{3.6}$$

Із цих двох рівностей необхідно знайти коефіцієнти загального розв'язку A_n і B_n відповідно. Для цього у задачі (**??**) ми одержали формули для коефіцієтів у вигляді інтегралів, придатні для функцій $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ загального вигляду, і потім обчислислили ці інтеграли для конкретних $\phi(x)$ і $\psi(x)$, заданих в умові задчі **??**. За таким же зразком можна було би діяти і зараз. Проте, уважно придивишись до рівності (3.5), можна помітити, що функція у правій частині є однією з власних функцій задачі Штурма-Ліувіля, по яких розкладена ліва частина. Аналогічна ситуація має місце і для другої рівності (3.6). У цьому полягає особливість цієї задачі, яка відрізняє її від задачі **??**. Це дозволяє знайти коефіцієнти A_n, B_n простіше, без обчислення інтегралів, що швидше і надійніше з точки зору імовірності зробити помилку. Обчислювати інтеграли у такій особливій ситуації не слід.

Якщо два розвинення в узагальнений ряд Фур'є по одній і тій же системі функцій рівні, то і відповідні коефіцієнти цих розвинень рівні. Це випливає з єдиності розвинення у ряд Фур'є. Скористаємося цим:

$$\begin{gathered} \sum_{n=0} A_n \sin\left((n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{l}\right) = A_0\sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right) + \\ + A_1\sin\left(\frac{3\pi x}{2l}\right) + A_2\sin\left(\frac{5\pi x}{2l}\right) + \ldots = h\sin\left(\frac{3\pi x}{2l}\right) \end{gathered} \tag{3.7}$$

Прирівнюємо коефіцієнти *при однакових функціях* у лівій і правій частинах. Результат має вигляд: $A_1 = h$, а всі інші коефіцієнти дорівнюють нулю $A_0 = A_2 = A_3 = ... = 0$.

Аналогічно, для рівності (3.6):

$$\sum_{n=0} \omega_n B_n \sin\left((n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{l}\right) = \omega_0 B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right) + \\ +\omega_1 B_1 \sin\left(\frac{3\pi x}{2l}\right) + \omega_2 B_2 \sin\left(\frac{5\pi x}{2l}\right) + ... = v_0 \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right) \tag{3.8}$$

Звідси маємо: $B_0 = \frac{v_0}{\omega_0}, B_1 = B_2 = B_3 = ... = 0$.

Тепер необхідно *правильно* записати відповідь через знайдені коефіцієнти A_n, B_n! Підставляємо знайдені коефіцієнти у загальний розв'язок. Тільки два коефіцієнти - A_1 і B_0 не дорівнюють нулю, тож з усіх членів загального розв'язку у розв'язку задачі мають залишитись всего два!

Остаточна відповідь:

$$u(x,t) = h\cos(\omega_1 t)\sin(k_1 x) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\sin(k_0 x) \tag{3.9}$$

де $k_0 = \frac{\pi x}{2l}, k_1 = \frac{3\pi x}{2l}, \omega_0 = vk_0, \omega_1 = vk_1$. Розв'язок є суперпозицією двох власних мод. Як і має бути, кожна з них має свою частоту.

Перевіримо відповідь.

- Власні функції перевірені у задачі 1.2.
- Постановка задачі містить два неоднорідних члени у початкових умовах, один пропорційний h, інший пропорційний v_0. Розв'язок має містити доданки, пропорціні кожному з цих множників. З відповіді видно, що це дійсно так.
- Перевіряємо початкові умови. Переконайтесь самостійно, що вони виконуються.

Альтернативний шлях – знайти коефіцієнти загального розв'яку як коефіцієнти розкладу у ряд Фур'є за означенням, через інтеграли. Переконаємося, що цей шлях приводить до того ж результату. Маємо:

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\left((\frac{1}{2}+n)\frac{\pi x}{l}\right)dx \tag{3.10}$$

Підставивши явний вигляд $\phi(x)$, одержимо інтеграл, який є інтегралом ортогональності власних функцій

$$\int_0^l \sin\left(\frac{3\pi x}{2l}\right)\sin\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\frac{\pi x}{l}\right)dx = \int_0^l X_1(x)X_n(x)dx = \frac{l}{2}\delta_{1n} \qquad (3.11)$$

Якщо ви не побачите що інтеграл є інтегралом ортогональності, і будете його обчилювати, то втратите час і можете помилитися у викладках. У результаті одержите неправильну відповідь, що часто і відбувається.

Результат $A_1 = h, A_0 = A_2 = A_3 = ... = 0$ та для швидкостей $B_0 = \frac{v_0}{\omega_0}, B_1 = B_2 = B_3 = ... = 0$

Отримали теж саме, але складнішим шляхом!