Зміст

Розділ 1

ЗАСТОСУВАННЯ ПРОЦЕДУРИ ФУР'Є БЕЗПОСЕРЕДНЬОГО ВІДОКРЕМЛЕННЯ ЗМІННИХ

1.1 Відокремлення змінних, задача Штурма-Ліувілля і власні моди коливань струни для різних межових умов

Задача №1.1

***Знайти власні моди коливань струни завдовжки** l **із закріпленими кінцями (знайти функції вигляду** $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$**, визначені і достатньо гладкі в області** $0 \leq x \leq l, -\infty \leq t \leq \infty$**, не рівні тотожно нулю, які задовольняють одновимірне хвильове рівняння** $u_{tt} = v^2 u_{xx}$ **на проміжку** $0 \leq x \leq l$ **і межові умови** $u(0,t) = 0, u(l,t) = 0$ **на його кінцях).** Результат перевірити аналітично й графічно (див. текст до модульної контрольної роботи №1, с. 25) та проаналізувати його фізичний смисл. Знайти початкові умови (початкове відхилення і початкову швидкість) для кожної з мод.*

Розв'язок

Формальна постановка задачі:

$$\begin{cases} u = u(x,t), \\ u_{tt} = v^2 u_{xx}, \\ 0 \leq x \leq l, t \in \mathbb{R}, \\ u(0,t) = 0, \\ u(l,t) = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Шукаємо нетривіальні (тобто не рівні тотожно нулю) розв'язки рівняння у вигляді:

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) \neq 0 \tag{1.2}$$

Хвильове рівняння з двома межовими умовами на кінцях проміжку по координаті x описує малі поперечні коливання струни із закріпленими кінцями, її довільний вільний рух. Струна має попередній натяг, і у положенні рівноваги всі її точки знаходяться на осі x, а при коливаннях відхиляться у напрямку осі y; $u(x,t)$ - це відповідне зміщення точки струни з координатою x в напрямку у відносно її рівноважного положення у даний момент часу t. Власні моди струни - це особливі рухи струни, які описуються розв'язками у вигляді добутків (1.2).

Підставляємо розв'язок у вигляді добутку (1.4) у рівняння і умови (1.1) Почнемо з межових умов:

$$u(0,t) = X(0) \cdot T(t) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} T(t) \neq 0, \forall t, \\ X(0) = 0; \end{cases}$$
$$u(l,t) = X(l) \cdot T(t) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} T(t) \neq 0, \forall t, \\ X(l) = 0; \end{cases}$$

Умови на кінцях струни виконуються при всіх t, тому $T(t)$ не може бути рівним нулю.
Далі підставимо (1.2) у рівняння:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[X(x)T(t)\right] = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[X(x)T(t)\right] \;\Rightarrow\; XT'' = v^2 X'' T$$

Із рівняння ми прийшли до рівності двох функцій від різних змінних. Це і є ситуація відокремлення змінних: функція від x має дорівнювати функції від t при всіх x і t. Це можливо тільки у випадку, якщо обидві ці функції є сталими. Тому маємо

$$\frac{T''}{v^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda, \tag{1.3}$$

де λ – стала відокремлення. ЇЇ можливі значення необхідно буде знайти.

Виписуємо результат відокремлення змінних:

$$\begin{cases} X = X(x), \\ X'' = -\lambda X, \\ 0 \leq x \leq l, \\ X(0) = 0, \\ X(l) = 0. \end{cases} \qquad T'' + \lambda v^2 T = 0 \tag{1.4}$$

Задача для $X = X(x)$ є так званою Штурма-Ліувілля. Необхідно знайти нетривіальні розв'язки цієї задачі і значення параметра λ, при яких вони існують; їх називають, відповідно, власними функціями і власними значеннями задачі. *З умов задачі можна показати (див. лекції), що власні значення є дійсними.*
Розв'яжемо її:

а) Розглянемо випадок $\lambda = 0$:

$$X'' = -\lambda X \;\Rightarrow\; X'' = 0 \;\Rightarrow\; X(x) = C_1 + C_2 x$$

Знаходимо константи з межових умов:

$$\begin{cases} X(0) = C_1 = 0, \\ X(l) = C_1 + C_2 l = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} X(x) = 0 \text{ – розв'язок тривіальний,} \\ \lambda = 0 \text{ не є власним значенням.} \end{array}$$

б) Розглянемо випадок $\lambda < 0$. Розв'язок рівняння шукаємо у вигляді $X(x) = e^{\alpha x}$:

$$X'' = -\lambda X \quad \to \quad \alpha^2 \cancel{e^{\alpha x}} = +|\lambda| \cancel{e^{\alpha x}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pm\sqrt{|\lambda|} \;\to$$
$$\to X(x) = \widetilde{C}_1 e^{\sqrt{|\lambda|}x} + \widetilde{C}_2 e^{-\sqrt{|\lambda|}x} \equiv C_1 sh(\sqrt{|\lambda|}x) + C_2 ch(\sqrt{|\lambda|}x)$$

Знаходимо константи з межових умов:

$$X(0) = C_2 \;\Rightarrow\; X(x) = C_1 sh(\sqrt{|\lambda|}x)$$
$$\begin{cases} X(l) = C_1 sh(\sqrt{|\lambda|}l) = 0, \\ sh(\sqrt{|\lambda|}l) \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} \text{розв'язок тривіальний,} \\ \text{немає від'ємних} \\ \text{власних значень.} \end{array}$$

в) Розглянемо випадок $\lambda > 0$. Розв'язок рівняння шукаємо у вигляді $X(x) = e^{\alpha x}$:

$$X'' = -\lambda X \quad \to \quad \alpha^2 \cancel{e^{\alpha x}} = -\lambda \cancel{e^{\alpha x}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pm i\sqrt{\lambda} \;\to$$
$$\to X(x) = \widetilde{C}_1 e^{i\sqrt{\lambda}x} + \widetilde{C}_2 e^{-\sqrt{\lambda}x} \equiv C_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}x)$$

Знаходимо константи з межових умов:

$$\begin{cases} X(0) = C_2 = 0, \\ X(l) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}l) + \cancelto{0}{C_2} \cos(\sqrt{\lambda}l) = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 \neq 0, \\ \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0; \end{cases}$$

Нетривіальні розв'язки існують при значеннях параметра λ, які задовольняють характерисичне рівняння :

$$\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0 \;\to\; \sqrt{\lambda_n} l = \pi n,\, n \in \mathbb{Z} \;\to\; \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}.$$

Випишемо відповідні розв'язки для всіх n:

$$X_n(x) = C_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$$

Видно, що $n = 0$ відповідає тривіальному розв'язку, а власні функції визначені з точністю до довільного множника.
Тому функції, які співпадають з точністю до множника, вважають однаковими, і різним власним функціям відповідають лише натуральні n. Тому власними значеннями і власними функціями є

$$\begin{cases} \lambda_n = \dfrac{\pi^2 n^2}{l^2}, \\ X_n(x) = \sin\left(\dfrac{\pi n x}{l}\right), \end{cases} \quad \text{де } n \in \mathbb{N}. \tag{1.5}$$

Повертаємося до рівняння для $T(t)$ – (1.4). Підставляємо знайдені власні значення та знаходимо $T_n(t)$:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \\ T'' + \lambda v^2 T = 0, \end{aligned}\right\} \Rightarrow T_n(t) = A\cos(\omega_n t) + B\sin(\omega_n t),$$

де $\omega_n^2 = \lambda_n v^2$, $n \in \mathbb{N}$.
Власними модами коливань струни будуть всі розв'язки вигляду:

$$u_n(x,t) = X_n(x) \cdot T_n(t)$$

Виконаємо перепозначення і запишемо остаточний розв'язок:

$$\begin{cases} u_n(x,t) = [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] \sin(k_n x), \\ k_n = \dfrac{\pi n}{l} - \text{ хвильові вектори}, \\ \omega_n = v k_n = \dfrac{v \pi n}{l} - \text{ власні частоти}, \\ n = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{1.6}$$

Перевірка розв'язку задачі Штурма-Ліувілля

Щоб перевірити правильність отриманого результату, (1.5), треба використовувати постановки самої задачі – (1.4).

1. Аналітична перевірка (пряма підстановка результату в рівняння).

   1) Перевіряємо рівняння, для цього обчислимо другу похідну власної функції.

$$X_n'' = \frac{\pi n}{l}\left(C_n \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\right)' = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 C_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 X_n$$

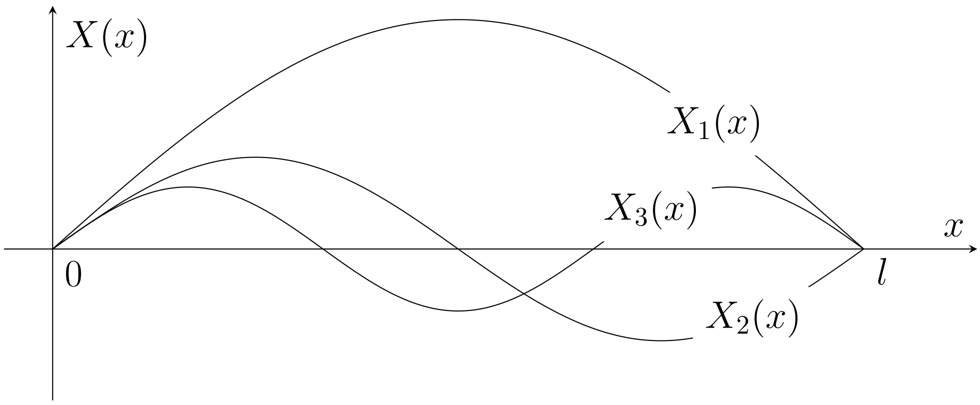
Порівнюємо з вихідним рівнянням і робимо перший висновок: кожна з функцій $X_n(x)$ дійсно є розв'язком рівняння (1.4) для значення спектрального параметра $\lambda = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$. Далі, ці значення λ збігаються зі знайденими раніше власними значеннями (1.5), отже робимо другий висновок: знайдені власні значення дійсно відповідають знайденим власним функціям.

2) Перевіряємо виконання межових умов, підставляємо власні функції в межові умови.

$$X_n(0) = 0 :$$
$$X_n(0) = C_n \sin(\sqrt{\lambda_n} \cdot 0) = 0 \text{ – виконується,}$$
$$\text{причому незалежно від } \lambda_n$$

$$X_n(l) = 0 :$$
$$X_n(l) = C_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} \cdot l\right) = C_n \sin(\pi n) = 0 \text{ – виконується, але}$$
$$\text{саме для знайдених значень } \lambda_n$$

2. Графічна перевірка.
Побудуємо графіки кількох перших власних функцій. Масштаб по вертикалі може бути довільним і різним для різних функцій, оскільки значення він не має.



Функція, що відповідає найменшому власному значенню (у даному випадку це $X_1(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$), відповідає так званій основній моді резонатора. *Для стаціонарних станів у квантовій механіці це основний стан системи, стан з найменшою можливою енергією.*
Графіки власних функцій відображають їх основні властивості, які і треба перевірити. З рисунку видно, що в точках $x = 0$ та $x = l$ всі графіки проходять через нуль, отже крайова умова (1.4) на обох кінцях виконується. *Графічна перевірка підсилює надійність аналітичної, де також іноді припускаються помилок, приймаючи бажане за дійсне.*

Наведені вище методи допомагають позбавитись більшості помилок, проте є надзвичайно підступна тип помилки, яку згадані методи піймати не взмозі. В процесі розв'язування задачі Штурма-Ліувіля з більш складними межовими умовами можлива така ситуація, коли отримається декілька типів розв'язків (будуть нетривіальними розв'зки не тільки для додатних λ), тоді можливо не визначити всі значення спектрального параметру та відповідні хвильові функції. Звісно, в такому випадку ві знайдете власні функції та власні значення, але **не всі**, а отже задача розв'язана неправильно.
Помітити таку помилку допомагає так звана **осциляційна теорема**. З рисунку, наведеного в графічному методі, видно, що всі власні функції на проміжку $0 \leq x \leq l$ осцилюють, і пр ицьому всі вони мають **різне** число нулів. Число нулів (або 'вузлів') всередені проміжку, на якому ророзв'язується задача, є своєрідною унікальною міткою власної функції. Цей факт не є випадковим і безпосередньо пов'язаний з ортогональністю власних функцій. Всі власні значення даної задачі прості, тобто між власними функціями і власними значеннями існує взаємно однозначна відповідність. Треба розташувати власні значення в порядку зростання. Тоді за осциляційною теоремою найменшому власному значенню відповідає функція, яка не має нулів у внутрішніх точках проміжку $[0, l]$. Тобто основна мода завжди є безвузловою. Далі, наступному за величиною власному значенню відповідає власна функція, що має один нуль, наступному - два нулі, і так далі. Для кожної наступної моди число вузлів збільшується на одиницю. Іншими словами, число нулів власної функції збігається з порядковим номером відповідного власного значення, якщо нумерувати їх у порядку зростання, починаючи з нуля.

Аналіз результату

З'ясуємо фізичний смисл одержаних розв'язків. Для наочності будемо говорити про поперечні коливання струни. Розв'язки (1.6) є частинними розв'язками однорідного хвильового рівняння з однорідними межовими умовами (1.1); отже зовнішні сили на систему не діють, тому з фізичної точки зору ці розв'язки відповідають вільним коливанням (рухам) струни. Окрім того, вони відповідають коливанням (рухам) спеціального вигляду, оскільки відповідні розв'язки мають вигляд добутків $X_n(x) \cdot T_n(t)$. З фізичної точки зору такі рухи і є власними модами поля в резонаторі для випадку вільних коливань. Про власні моди можна говорити й у випадку вимушених коливань.
Всі розв'язки $u_n(x,t)$ – дійсні. Візьмемо один із них. Зафіксуємо певний довільний момент часу $t = t_1$, це буде миттєве фото n–ї моди струни. Просторовий розподіл зміщень описується формулою

$$u_n(x, t_1) = X_n(x) \cdot T_n(t_1).$$

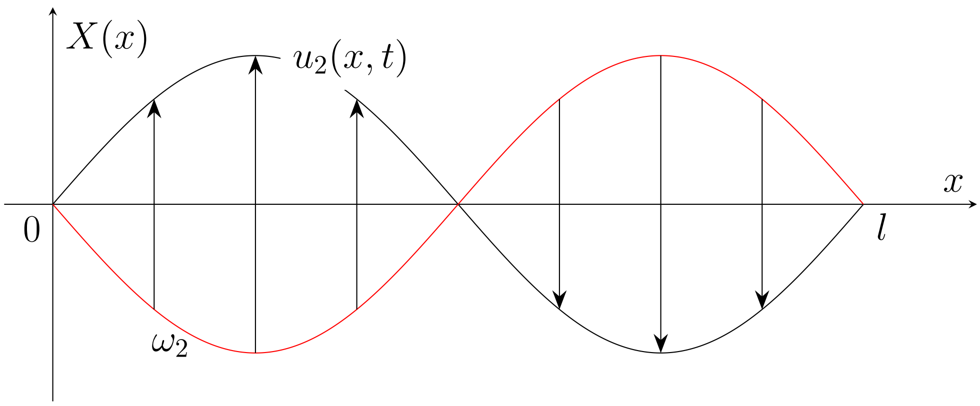
Видно, що в будь-який момент форма просторового розподілу зміщень (тобто форма струни) залишається однаковою і описується відповідною власною

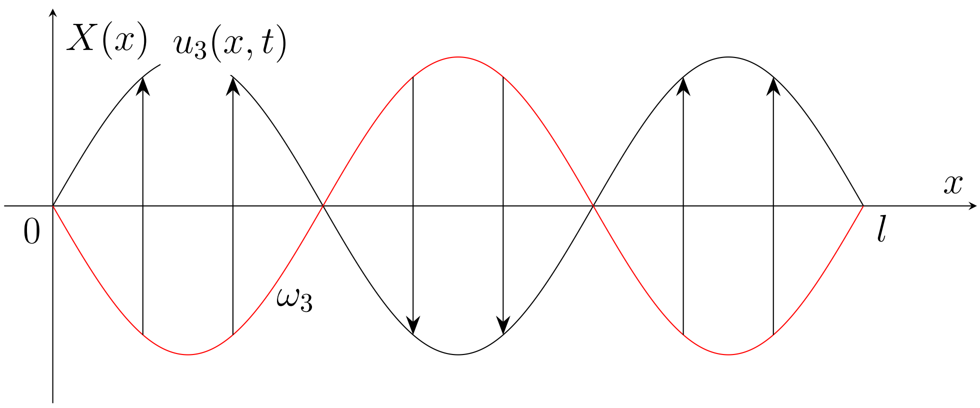
функцією $X_n(x)$; змінюється лише спільна амплітуда цього просторового розподілу і його знак за рахунок множника $T_n(t)$. Отже, $X_n(x)$ задає просторовий «профіль» моди, це її унікальне просторове «обличчя», - найперша визначальна характеристика певної моди, за якою її можна пізнати.
Тепер прослідкуємо за рухом певної точки струни $x = x_1$:

$$u_n(x_1, t) = X_n(x_1) \cdot T_n(t).$$

Видно, що всі точки струни здійснюють один і той же рух, одне і те ж гармонічне коливання з частотою ω_n, але для різних мод частоти коливань різні. З точністю до числового множника і знаку коливання будь-якої точки струни задається однією функцією $T_n(t)$, але амплітуда цих часових коливань в різних точках різна, вона визначається величиною $|X_n(x)|$. У точках, де $X_n(x)$ має нулі, амплітуда коливань дорівнює нулю, це **вузли** моди. Якщо ж $X_n(x)$ змінює знак, то це відповідає зміні фази коливань на π: частини струни, розділені вузлами, коливаються в протифазі.

Рух струни - це єдиний часово-просторовий процес. Для мод $n = 2$ і $n = 3$ він зображений на рисунку нижче. Вузли залишаються нерухомими в процесі руху струни, якщо він відповідає певній моді. У точках, де $X_n(x)$ максимальне (за модулем), максимальна і амплітуда коливань, це пучності. У нашому випадку моди занумеровані так, що число вузлів всередині струни (без урахування вузла на правому кінці струни) дорівнює номеру моди.





Вузли і пучності не переміщуються вздовж струни, і взагалі, в цілому рух у часі і просторовий розподіл зміщень залишаються ніби незалежними. Струна коливається, а просторовий розподіл «стоїть». Подібні рухи прийнято називати **стоячими хвилями**.