

Зміст

1	ЗАСТОСУВАННЯ ПРОЦЕДУРИ ФУР'Є БЕЗПОСЕРЕДНЬОГО ВІДОКРЕМЛЕННЯ ЗМІННИХ	3
1.1	Відокремлення змінних, задача Штурма-Ліувілля і власні моди коливань струни для різних межових умов	3

Розділ 1

ЗАСТОСУВАННЯ ПРОЦЕДУРИ ФУР'Є БЕЗПОСЕРЕДНЬОГО ВІДОКРЕМЛЕННЯ ЗМІННИХ

1.1 Відокремлення змінних, задача Штурма-Ліувілля і власні моди коливань струни для різних межових умов

Задача №1.1

Знайти власні моди коливань струни завдовжки l із закріпленими кінцями (знайти функції вигляду $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$, визначені і достатньо гладкі в області $0 \leq x \leq l, -\infty \leq t \leq \infty$, не рівні тотожно нулю, які задовольняють одновимірне хвильове рівняння $u_{tt} = v^2 u_{xx}$ на проміжку $0 \leq x \leq l$ і межові умови $u(0, t) = 0, u(l, t) = 0$ на його кінцях). Результат перевірити аналітично й графічно (див. текст до модульної контрольної роботи №1, с. 25) та проаналізувати його фізичний смисл. Знайти початкові умови (початкове відхилення і початкову швидкість) для кожної з мод.

Розв'язок

Постановка задачі:

$$\begin{cases} u = u(x, t), \\ u_{tt} = v^2 u_{xx}, \\ 0 \leq x \leq l, t \in \mathbb{R}, \\ u(0, t) = 0, \\ u(l, t) = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Шукаємо нетривіальні розв'язки рівняння у виді:

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t) \neq 0 \quad (1.2)$$

Тепер можливе відокремлення змінних в задачі. Почнемо з межових умов:

$$\begin{aligned} u(0, t) = X(0) \cdot T(t) = 0 &\Rightarrow \begin{cases} T(t) \neq 0, \forall t, \\ X(0) = 0; \end{cases} \\ u(l, t) = X(l) \cdot T(t) = 0 &\Rightarrow \begin{cases} T(t) \neq 0, \forall t, \\ X(l) = 0; \end{cases} \end{aligned}$$

Далі підставимо (1.2) в рівняння та виконаємо ряд перетворень:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} [X(x)T(t)] = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [X(x)T(t)] \rightarrow XT'' = v^2 X''T \rightarrow \frac{T''}{v^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda,$$

де λ – стала відокремлення.

Випишемо результат відокремлення змінних:

$$\begin{cases} X = X(x), \\ X'' = -\lambda X, \\ 0 \leq x \leq l, \\ X(0) = 0, \\ X(l) = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} T'' + \lambda v^2 T = 0 \\ \lambda - \text{невідомо} \end{cases} \quad (1.3)$$

Для $X = X(x)$ отримуємо задачу Штурма-Ліувілля. Розв'яжемо її:

а) Розглянемо випадок $\lambda = 0$:

$$X'' = -\lambda X \rightarrow X'' = 0 \rightarrow X(x) = C_1 + C_2 x$$

Знаходимо константи з межових умов:

$$\begin{cases} X(0) = C_1 = 0, \\ X(l) = C_1 + C_2 l = 0; \\ C_1 = 0, \\ C_2 = 0; \end{cases} \Rightarrow X(x) = 0 - \text{розв'язок тривіальний}$$

б) Розглянемо випадок $\lambda < 0$. Розв'язок рівняння шукаємо у виді $X(x) = e^{\alpha x}$, підставимо це в рівняння:

$$\begin{aligned} X'' = -\lambda X &\rightarrow \alpha^2 \cancel{e^{\alpha x}} = +|\lambda| \cancel{e^{\alpha x}} \rightarrow \alpha = \pm \sqrt{|\lambda|} \Rightarrow \\ \Rightarrow X(x) = \tilde{C}_1 e^{\sqrt{|\lambda|x}} + \tilde{C}_2 e^{-\sqrt{|\lambda|x}} &\equiv C_1 sh(\sqrt{|\lambda|x}) + C_2 ch(\sqrt{|\lambda|x}) \end{aligned}$$

Знаходимо константи з межових умов:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} X(0) = C_2 = 0, \\ X(l) = C_1 sh(\sqrt{|\lambda|}l) + C_2 ch(\sqrt{|\lambda|}l) = 0; \end{cases} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{cases} C_2 = 0, \\ C_1 sh(\sqrt{|\lambda|}l) = 0, \\ sh(\sqrt{|\lambda|}l) \neq 0; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 0; \end{cases} \Rightarrow \text{розв'язок тривіальний} \end{aligned}$$

в) Розглянемо випадок $\lambda > 0$. Розв'язок рівняння шукаємо у виді $X(x) = e^{\alpha x}$, підставимо це в рівняння:

$$\begin{aligned} X'' = -\lambda X &\rightarrow \alpha^2 \cancel{e^{\alpha x}} = -\lambda \cancel{e^{\alpha x}} \rightarrow \alpha = \pm i\sqrt{\lambda} \Rightarrow \\ \Rightarrow X(x) = \tilde{C}_1 e^{i\sqrt{\lambda}x} + \tilde{C}_2 e^{-i\sqrt{\lambda}x} &\equiv C_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}x) \end{aligned}$$

Знаходимо константи з межових умов:

$$\begin{cases} X(0) = C_2 = 0, \\ X(l) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}l) + \cancel{C_2} \cos(\sqrt{\lambda}l) = 0; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 \neq 0, \\ \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0; \end{cases}$$

Маємо нетривіальний розв'язок. Визначимо з характеристичного рівняння при яких значеннях λ він можливий:

$$\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0 \rightarrow \sqrt{\lambda}l = \pi n, n \in \mathbb{Z} \rightarrow \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, n \in \mathbb{N}.$$

Отже, ми визначили всі власні значення та відповідні їм власні функції.

$$\begin{cases} \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \\ X_n(x) = C_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \end{cases} \quad \text{де } n \in \mathbb{N}. \quad (1.4)$$

Повертаємося до рівняння для $T(t)$ - (1.3). Підставляємо знайдені значення та знаходимо $T_n(t)$:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_n &= \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \\ T'' + \lambda v^2 T &= 0, \end{aligned} \right\} \Rightarrow T_n(t) = A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t),$$

де $\omega_n^2 = \lambda_n v^2$, $n \in \mathbb{N}$.

Власними модами коливань струни будуть всі розв'язки вигляду:

$$u_n(x, t) = X_n(x) \cdot T_n(t)$$

Виконаємо перепозначення і запишемо остаточний розв'язок:

$$\begin{cases} u_n(x, t) = (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)) \sin(k_n x), \\ k_n = \frac{\pi n}{l} - \text{хвильові вектори}, \\ \omega_n = v k_n = \frac{v \pi n}{l} - \text{власні частоти}, \\ n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1.5)$$

Перевірка розв'язку задачі Штурма-Ліувілля

Щоб перевірити правильність отриманого результату, (1.4), треба використувати постановки самої задачі – (1.3).

1. Аналітична перевірка (пряма підстановка результату в рівняння).

1) Перевіряємо рівняння, для цього обчислимо другу похідну власної функції.

$$X_n'' = \frac{\pi n}{l} \left(C_n \cos \left(\frac{\pi n x}{l} \right) \right)' = - \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 C_n \sin \left(\frac{\pi n x}{l} \right) = - \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 X_n$$

Порівнюємо з вихідним рівнянням і робимо перший висновок: кожна з функцій $X_n(x)$ дійсно є розв'язком рівняння (1.3) для значення спектрального параметра $\lambda = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2$. Далі, ці значення λ збігаються зі знайденими раніше власними значеннями (1.4), отже робимо другий висновок: знайдені власні значення дійсно відповідають знайденим власним функціям.

2) Перевіряємо виконання межових умов, підставляємо власні функції в межові умови.

$$X_n(0) = 0 :$$

$$X_n(0) = C_n \sin(\sqrt{\lambda_n} \cdot 0) = 0 - \text{виконується,} \\ \text{причому незалежно від } \lambda_n$$

$$X_n(l) = 0 :$$

$$X_n(l) = C_n \sin \left(\frac{\pi n}{l} \cdot l \right) = C_n \sin(\pi n) = 0 - \text{виконується, але} \\ \text{саме для знайдених значень } \lambda_n$$

2. Графічна перевірка:

