Заняття 9

Використання загального розв'язку хвильового рівняння у вигляді суперпозиції зустрічних хвиль. Нестаціонарна задача розсіяння.

Задача № 9.1

Півнескінченна струна (сила натягу T_0, швидкість хвиль v) з вільним кінцем перебувала у стані рівноваги. Починаючи з моменту часу $t = 0$, на її кінець діє у поперечному напрямі задана сила $F(t)$. Знайти розв'язок задачі про вимушені коливання струни у квадратурах, а також знайти поле зміщень у явному вигляді і зобразити графічно форму струни, якщо: а) $F(t) = F_0$, б) $F(t) = F_0 \cos \omega t$, в) $F(t) = F_0 \sin \omega t$
Задача є прикладом так званої задачі про поширення межового режиму: задачі для півнескінченної струни з неоднорідною межовою умовою. Указівка: задача відшукання форми хвилі, створеної таким джерелом, зводиться до диференціального рівняння першого порядку; проблема знаходження сталої інтегрування вирішується, якщо врахувати умову неперервності хвильового поля на передньому фронті хвилі, тобто на межі областей $x > vt$ й $x < vt$.

Розв'язок

Формальна постановка задачі:

$$\begin{cases} u = u(x,t), \\ u_{tt} = v^2 u_{xx}, \\ 0 \le x < \infty, t \ge 0 \\ u_x(0,t) = F(t)/\beta = f(t), \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0. \end{cases} \tag{9.1}$$

Шукаємо розв'язок у вигляді:

$$u(x,t) = g(t - x/v) + h(t + x/v) \tag{9.2}$$

Із початкових умов маємо систему:

$$\begin{cases} u(x,0) = g(-x/v) + h(x/v) = 0, \\ u_t(x,0) = g'(-x/v) + h'(x/v) = 0. \end{cases} \tag{9.3}$$

Інтегруємо друге рівняння та розв'язуємо лінійну систему

$$\begin{cases} g(-\xi) + h(\xi) = 0, \\ \displaystyle\int g'(-\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int h'(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(-\xi) + h(\xi) = 0, \\ h(\xi) + C_2 - g(-\xi) + C_1 = 0; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g(-\xi) + h(\xi) = 0, \\ -g(-\xi) + h(\xi) = 2\widetilde{C}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(-\xi) = -\widetilde{C}, \\ h(\xi) = \widetilde{C}. \end{cases}$$

Обираємо константу інтегрування $\widetilde{C}$ рівною нулю, тоді

$$\begin{cases} g(-x/v) = 0, \\ h(x/v) = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(\xi) = 0, \text{ при } \xi < 0, \\ h(\eta) = 0, \text{ при } \eta > 0. \end{cases}$$

Отже, $h(t + x/v) = 0$ в нашій задачі, адже $x \geq 0$ та $t > 0$, що фізично означає відсутність хвилі, яка поширюється з нескінченность до краю струни (падаючої хвилі).
Маємо розв'язок у виді біжучої хвилі, яка створюється межовою умовою.

$$u(x,t) = g(t - x/v) \tag{9.4}$$

З межової умови визначимо розв'язок

$$u_x(0,t) = f(t) \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{v} g'(t) = f(t) \quad \Rightarrow \quad g(t) = -v \int\limits_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{9.5}$$

Загальний вид розв'язку

$$u(x,t) = -v \int\limits_0^{t-x/v} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{9.6}$$

Обчислимо розв'язки для визначених межових умов:

а)

$$u(x,t) = -\frac{vF_0}{\beta} \int\limits_0^{t-x/v} \mathrm{d}\tau = -\frac{vF_0}{\beta}\left(t - \frac{x}{v}\right),$$

б)

$$u(x,t) = -\frac{vF_0}{\beta}\int\limits_0^{t-x/v} \sin\omega\tau \, \mathrm{d}\tau = -\frac{vF_0}{\omega\beta}\cos\omega(t - x/v),$$

в)

$$u(x,t) = -\frac{vF_0}{\beta}\int\limits_0^{t-x/v} \cos\omega\tau \, \mathrm{d}\tau = \frac{vF_0}{\omega\beta}\sin\omega(t - x/v).$$