6.3, Дмитро Жаров

6.3. Знайти коливання струни із закріпленими кінцями під дією сили $f(x,t)=f_0 t^N$, $N>0$ однорідно розподіленої по довжині струни. У початковий момент струна нерухома, і зміщення дорівнює нулю. Остаточні обчислення виконати для $N=2$.

$$\begin{cases} u_{tt}=v^2u_{xx}+f_0t^N, \ 0<x<l, \ t>0 \\ u(0,t)=u(l,t)=0, \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0. \end{cases}$$

Розкладемо неоднорідність хвильового рівняння по власних функціях відповідної задачі Штурма-Ліувілля.

Оскільки ця неоднорідність не залежить від x, скористаємось розкладом константи.

$$1=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\cdot \sin\frac{\pi n}{l}x$$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l \sin\frac{\pi n}{l}x\,dx=\frac{2}{l}\cdot\frac{l}{\pi n}\cdot\cos\frac{\pi n}{l}x\Big|_l^0=\frac{2}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Отже,

$$f_0t^N=\frac{2f_0}{\pi}t^N\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Будемо шукати розв'язок у вигляді

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\cdot\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n''(t)\cdot\sin\frac{\pi n}{l}x=-v^2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2u_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x+\frac{2f_0}{\pi}t^N\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\sin\frac{\pi n}{l}x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\left[u_n''(t)+\left(\frac{v\pi n}{l}\right)^2u_n(t)-\frac{2f_0}{\pi}\cdot\frac{1-(-1)^n}{n}\cdot t^N\right]\cdot\sin\frac{\pi n}{l}x=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_n''(t)+\omega_n^2u_n(t)=\frac{2f_0}{\pi}\cdot\frac{1-(-1)^n}{n}\cdot t^N.$$

Із початкових умов:

$$\begin{cases} u(x,0) = u_n(0) = 0, \\ u_t(x,0) = u_n'(0) = 0. \end{cases}$$

Отримали лінійне неоднорідне рівняння другого порядку з однорідними початковими умовами. Знаходимо його розв'язок у вигляді

$$u_n(t) = C_{1_n}\cos\omega_n t + C_{2_n}\sin\omega_n t + \tilde{u}_n(t).$$

Оскільки неоднорідність у рівнянні має вигляд полінома N-того степеню, знаходимо частинний розв'язок у вигляді поліному N-того степеню.

При N=2:

$$u_n'' + \omega_n^2 u_n = \alpha_n t^2, \quad \alpha_n = \frac{2f_0}{\pi}\cdot\frac{1-(-1)^n}{n}.$$

$$\tilde{u}_n(t) = a_n t^2 + b_n t + c_n \Rightarrow \quad 2a_n + \omega_n^2(a_n t^2 + b_n t + c_n) = \alpha_n t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a_n + \omega_n^2 c_n = 0, \\ \omega_n^2 a_n = \alpha_n, \\ b_n = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_n = -\frac{2\alpha_n}{\omega_n^4}, \\ a_n = \frac{\alpha_n}{\omega_n^2}, \\ b_n = 0. \end{cases} \Rightarrow \tilde{u}_n(t) = \frac{\alpha_n}{\omega_n^2}t^2 - \frac{2\alpha_n}{\omega_n^4}.$$

Тоді

$$u_n(t) = C_{1_n}\cos\omega_n t + C_{2_n}\sin\omega_n t + \frac{\alpha_n}{\omega_n^2}t^2 - \frac{2\alpha_n}{\omega_n^4}.$$

Із початкових умов:

$$\begin{cases} u_n(0) = C_{1_n} = \frac{2\alpha_n}{\omega_n^4}, \\ u_n'(0) = C_{2_n} = 0. \end{cases} \Rightarrow u_n(t) = \frac{2\alpha_n}{\omega_n^4}\cos\omega_n t + \frac{\alpha_n}{\omega_n^2}t^2 - \frac{2\alpha_n}{\omega_n^4}.$$

Таким чином,

$$\left.\begin{aligned} & u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha_n}{\omega_n^4}\left(\cos\omega_n t + \frac{\omega_n^2}{2}t^2 - 1\right)\sin\frac{\pi n}{l}x \\ & \alpha_n = \frac{2f_0}{\pi}\cdot\frac{1-(-1)^n}{n} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{4f_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\cdot\frac{\alpha_n}{\omega_n^4}\left(\cos\omega_n t + \frac{\omega_n^2}{2}t^2 - 1\right)\sin\frac{\pi n}{l}x.$$