Зміст

Розділ 1

ЗАСТОСУВАННЯ ПРОЦЕДУРИ ФУР'Є БЕЗПОСЕРЕДНЬОГО ВІДОКРЕМЛЕННЯ ЗМІННИХ

1.1 Відокремлення змінних, задача Штурма-Ліувілля і власні моди коливань струни для різних межових умов

Задача №1.1

Знайти власні моди коливань струни завдовжки l ***із закріпленими кінцями (знайти функції вигляду*** $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$***, визначені і достатньо гладкі в області*** $0 \le x \le l, -\infty \le t \le \infty$***, не рівні тотожно нулю, які задовольняють одновимірне хвильове рівняння*** $u_{tt} = v^2 u_{xx}$ ***на проміжку*** $0 \le x \le l$ ***і межові умови*** $u(0,t) = 0, u(l,t) = 0$ ***на його кінцях).*** *Результат перевірити аналітично й графічно (див. текст до модульної контрольної роботи №1, с. 25) та проаналізувати його фізичний смисл. Знайти початкові умови (початкове відхилення і початкову швидкість) для кожної з мод.*

Розв'язок

Постановка задачі:

$$\begin{cases} u = u(x,t), \\ u_{tt} = v^2 u_{xx}, \\ 0 \le x \le l, t \in \Re, \\ u(0,t) = 0, \\ u(l,t) = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Шукаємо нетривіальні розв'язки рівняння у виді:

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) \neq 0 \tag{1.2}$$

Тепер можливе відокремлення змінних в задачі. Почнемо з межових умов:

$$u(0,t) = X(0) \cdot T(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} T(t) \neq 0, \forall t, \\ X(0) = 0; \end{cases}$$

$$u(l,t) = X(l) \cdot T(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} T(t) \neq 0, \forall t, \\ X(l) = 0; \end{cases}$$

Далі підставимо (1.2) в рівняння та виконаємо ряд перетворень:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[X(x)\cdot T(t)\right] = v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[X(x)\cdot T(t)\right], \to\ X\cdot T'' = v^2 X''\cdot T\ \to\ \frac{T''}{v^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda,$$

де λ – стала відокремлення.
Виписуємо результат відокремлення змінних:

$$\begin{cases} X = X(x), \\ X'' = -\lambda X, \\ 0 \le x \le l, \\ X(0) = 0, \\ X(l) = 0. \end{cases} \qquad T'' + \lambda v^2 T = 0\lambda - -\text{невідома} \tag{1.3}$$

Для $X = X(x)$ отримуємо задачу Штурма-Ліувілля. Розв'яжемо її:

а) Розглянемо випадок $\lambda = 0$:

$$X'' = -\lambda X\ \to\ X'' = 0\ \to\ X(x) = C_1 + C_2 x$$

Знаходимо константи з межових умов:

$$\begin{cases} X(0) = C_1 = 0, \\ X(l) = C_1 + C_2 l = 0; \end{cases} \to \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 0; \end{cases} \to\ X(x) = 0 - \text{розв'язок тривіальний}$$

б) Розглянемо випадок $\lambda < 0$. Розв'язок рівняння шукаємо у виді $X(x) = e^{\alpha x}$, підставимо це в рівняння:

$$X'' = -\lambda X\ \to\ \alpha^2 \cancel{e^{\alpha x}} = +|\lambda|\cancel{e^{\alpha x}}\ \to\ \alpha = \pm\sqrt{|\lambda|}\ \to$$
$$\to\ X(x) = \widetilde{C}_1 e^{\sqrt{|\lambda|}x} + \widetilde{C}_2 e^{-\sqrt{|\lambda|}x} \equiv C_1 sh(\sqrt{|\lambda|}x) + C_2 ch(\sqrt{|\lambda|}x)$$

Знаходимо константи з межових умов:

$$\begin{cases} X(0) = C_2 = 0, \\ X(l) = C_1 sh(\sqrt{|\lambda|}l) + C_2 ch(\sqrt{|\lambda|}l) = 0; \end{cases} \to$$
$$\to \begin{cases} C_2 = 0, \\ C_1 sh(\sqrt{|\lambda|}l) = 0, \\ sh(\sqrt{|\lambda|}l) \ne 0; \end{cases} \to \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 0; \end{cases} \to\ \text{розв'язок тривіальний}$$

в) Розглянемо випадок $\lambda > 0$. Розв'язок рівняння шукаємо у виді $X(x) = e^{\alpha x}$, підставимо це в рівняння:

$$X'' = -\lambda X\ \to\ \alpha^2 \cancel{e^{\alpha x}} = -\lambda\cancel{e^{\alpha x}}\ \to\ \alpha = \pm i\sqrt{\lambda}\ \to$$
$$\to\ X(x) = \widetilde{C}_1 e^{i\sqrt{\lambda}x} + \widetilde{C}_2 e^{-\sqrt{\lambda}x} \equiv C_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \cos(i\sqrt{\lambda}x)$$

Знаходимо константи з межових умов:

$$\begin{cases} X(0) = C_2 = 0, \\ X(l) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}l) + \cancelto{0}{C_2} \cos(\sqrt{\lambda}l) = 0; \end{cases} \to \begin{cases} C_1 \ne 0, \\ \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0; \end{cases}$$

Маємо нетривіальний розв'язок. Визначимо з характерисичного рівняння при яких значеннях λ він можливий:

$$\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0 \;\to\; \sqrt{\lambda}l = \pi n,\; n \in \mathbb{Z} \;\to\; \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2},\; n \in \mathbb{N}.$$

Отже, ми визначили всі власні значення та відповідні їм власні функції.

$$\begin{cases} \lambda_n = \dfrac{\pi^2 n^2}{l^2}, \\ X_n(x) = C_n \sin\left(\dfrac{\pi n x}{l}\right), \end{cases} \quad \text{де } n \in \mathbb{N}. \tag{1.4}$$

Повертаємося до рівняння для $T(t)$ - (1.3). Підставляємо знайдені значення та знаходимо $T_n(t)$:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \\ T'' + \lambda v^2 T = 0, \end{aligned}\right\} \;\Rightarrow\; T_n(t) = A\cos(\omega_n t) + B\sin(\omega_n t),$$

де $\omega_n^2 = \lambda_n v^2$, $n \in \mathbb{N}$. Власними модами коливань струни будуть всі розв'язки вигляду:

$$u_n(x,t) = X_n(x) \cdot T_n(t)$$

Виконаємо перепозначення і запишемо остаточний розв'язок.

$$\begin{cases} u_n(x,t) = (A_n\cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t))\sin(k_n x), \\ k_n = \dfrac{\pi n}{l} - \text{ хвильові вектори}, \\ \omega_n = v k_n = \dfrac{v\pi n}{l} - \text{ власні частоти}, \\ n = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{1.5}$$