Заняття 2

Власні моди інших систем. Вільні коливання для заданих початкових умов.

Стержень з вільними та пружно закріпленими кінцями; системи, описувані іншими рівняннями.

Задача № 2.1

Знайти власні моди повздовжніх рухів тонкого стержня $0 \le x \le l$ *із вільними кінцями (задача для хвильового рівняння з межовими умовами* $u_x(0,t) = 0, u_x(l,t) = 0$*).*
Результат перевірити аналітично й графічно (див. заняття №6, зразок модульної контрольної роботи №1) та проаналізувати його фізичний смисл. Чим відрізняється від інших основна (нульова) мода? Якому рухові стержня вона відповідає?

Розв'язок

Формальна постановка задачі:

$$\begin{cases} u = u(x,t), \\ u_{tt} = v^2 u_{xx}, \\ 0 \le x \le l, t \in \mathbb{R} \\ u_x(0,t) = 0, \\ u_x(l,t) = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Необхідно знайти розв'язки (2.1) вигляду:

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) \neq 0 \tag{2.2}$$

Від задачі №1.1 попереднього заняття задача відрізняється тільки межовою умовою, тому підставляємо розв'язок у вигляді добутку (2.2) тільки у межові умови (2.1):

$$u_x(0,t) = X'(0) \cdot T(t) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} T(t) \neq 0, \forall t, \\ X'(0) = 0; \end{cases}$$

$$u_x(l,t) = X'(l) \cdot T(t) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} T(t) \neq 0, \forall t, \\ X'(l) = 0; \end{cases}$$

Тут ми врахували, що умови на кінцях струни виконуються при всіх t, тому $T(t)$ не може бути рівним нулю.

Виписуємо результат відокремлення змінних:

$$\begin{cases} X = X(x), \\ X'' = -\lambda X, \\ 0 \leq x \leq l, \\ X'(0) = 0, \\ X'(l) = 0. \end{cases} \qquad T'' + \lambda v^2 T = 0 \tag{2.3}$$

Розв'язуємо задачу Штурма-Ліувілля (2.3). Розв'язки рівняння задачі для різних λ є такими ж, як у задачі 1.1, відмінність полягає у крайових умовах.

а) Випадок $\lambda < 0$.

$$X(x) = C_1 sh(\sqrt{|\lambda|}x) + C_2 ch(\sqrt{|\lambda|}x)$$

Знаходимо константи з межових умов:

$$X'(0) = C_1\sqrt{|\lambda|} \;\Rightarrow\; X(x) = C_2 \quad ch(\sqrt{|\lambda|}x)$$

$$\begin{cases} X'(l) = C_2\sqrt{|\lambda|}sh(\sqrt{|\lambda|}l) = 0, \\ sh(\sqrt{|\lambda|}l) \neq 0; \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 0; \end{cases}$$

розв'язок тривіальний, немає від'ємних власних значень.

б) Випадок $\lambda = 0$:

$$X(x) = C_1 + C_2 x$$

Знаходимо константи з межових умов:

$$\begin{cases} X'(0) = C_2 = 0, \\ X'(l) = C_2 = 0; \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad X(x) = C \text{ – розв'язок нетривіальний,}$$

$$\begin{cases} C_1 \in \mathbb{R}, \\ C_2 = 0; \end{cases} \qquad \lambda = 0 \text{ є власним значенням.}$$

в) Випадок $\lambda > 0$

$$X(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}x)$$

Знаходимо константи з межових умов:

$$\begin{cases} X'(0) = C_1\sqrt{\lambda} = 0, \\ X(x) = C_2 \cos(\sqrt{\lambda}x), \\ X'(l) = -C_2 \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 \neq 0, \\ \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0; \end{cases}$$

Отже, нетривіальні розв'язки існують при значеннях параметра λ, які задовольняють характеристичне рівняння :

$$\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{\lambda_n}l = \pi n,\, n \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow\; \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}.$$

Випишемо тепер розв'язки для всіх n, поклавши всі довільні сталі рівними 1. Залишаємо з них лише нетривіальні розв'язки для тих n, які відповідають різним власним функціям:

$$\begin{cases} X_0(x) = 1, \\ \lambda_0 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} X_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \\ \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

На відміну від задачі 1 з попереднього заняття тут $n = 0$ відповідає нетривіальному розв'язку. Випадок $\lambda > 0$ знову приводить до набору власних функцій занумерованих натуральними числами.
Отже, різним власним функціям відповідають натуральні n та 0.
Власними значеннями і власними функціями є

$$\begin{cases} \lambda_0 = 0, \\ X_0(x) = 1; \\ \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \text{ де } n \in \mathbb{N} \\ X_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \end{cases} \tag{2.4}$$

Повертаємося до рівняння для $T(t)$ (2.3). Підставляємо знайдені власні значення та знаходимо $T_n(t)$:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \\ T'' + \lambda v^2 T = 0, \end{aligned}\right\} \Rightarrow T_n(t) = A\cos(\omega_n t) + B\sin(\omega_n t),$$

де $\omega_n^2 = \lambda_n v^2$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\left.\begin{array}{r} \lambda_0 = 0, \\ T'' = 0, \end{array}\right\} \Rightarrow \; T_0(t) = A_0 + B_0 t,$$

Власними модами коливань струни будуть всі розв'язки вигляду:

$$u_n(x,t) = X_n(x) \cdot T_n(t)$$

Виконаємо перепозначення і запишемо остаточний розв'язок:

$$\begin{cases} u_0(x,t) = A_0 + B_0 t, \\ u_n(x,t) = [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] \sin(k_n x), \\ k_n = \dfrac{\pi n}{l} - \text{ хвильові вектори}, \\ \omega_n = v k_n = \dfrac{v \pi n}{l} - \text{ власні частоти}, \\ n = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{2.5}$$

Перевірка розв'язку задачі Штурма-Ліувілля

1. Аналітична перевірка

   1) Перевіряємо, чи виконуються крайові умови задачі:

$$\begin{aligned} &X'(0) = 0: \\ &\qquad X_0'(0) = 0, \\ &\qquad X_n'(0) = \sin(\sqrt{\lambda_n} \cdot 0) = 0 \text{ – виконується,} \\ &\qquad \text{причому незалежно від } \lambda_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &X'(l) = 0: \\ &\qquad X_0'(l) = 0, \\ &\qquad X_n'(l) = \sin\left(\frac{\pi n}{l} \cdot l\right) = \sin(\pi n) = 0 \text{ – виконується} \\ &\qquad \text{причому саме для знайдених значень } \lambda_n. \end{aligned}$$

   2) Перевіряємо, чи задовольняють знайдені функції рівняння на власні значення $X'' = -\lambda X$, і якщо так, то знаходимо відповідне значення спектрального параметра λ:

$$X_0'' = (1)'' = 0 \cdot 1 = 0 \cdot X_0$$

$$X_n'' = -\frac{\pi n}{l}\left(\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\right)' = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 X_n$$

Отже знайдені функції задовольняють і крайові умови, і рівняння задачі Штурма-Ліувілля, причому для значень спектрального параметра

$$\lambda_0 = 0 \text{ і } \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \text{ де } n \in \mathbb{N} \tag{2.6}$$

які співпадають з раніше знайденими. Звідси робимо висновок, що вказані у відповіді (2.4) функції та значення спектрального параметра дійсно є власними функціями і відповідними їм власними значеннями задачі Штурма-Ліувілля.

2. Графічна перевірка.
Будуємо графіки кількох перших власних функцій. Масштаб по вертикалі може бути довільним і різним для різних функцій, оскільки значення він не має.

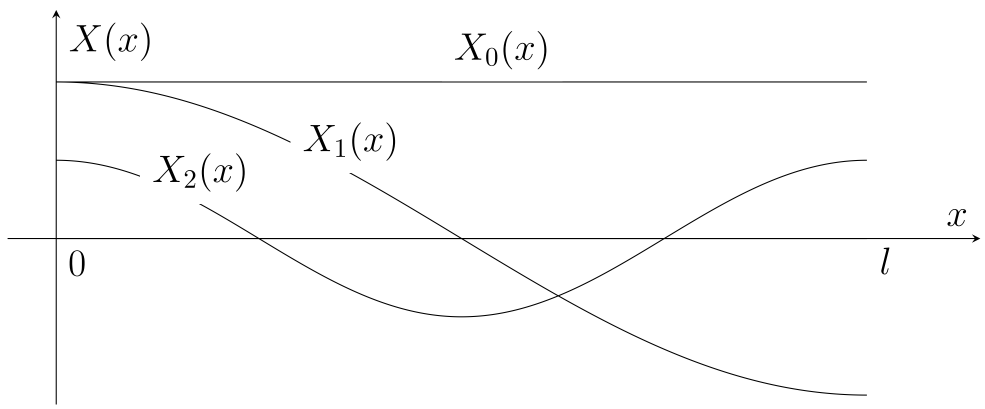

Рис. 2.1: Графічний розв'язок задачі, наведені три власні функції

З рисунку бачимо, що дотичні до всіх графіків у точках $x = 0$ та $x = l$ горизонтальні, тобто крайові умови (2.3) виконуються на обох кінцях проміжку. Далі перевіряємо, чи виконується осциляційна теорема. Власні функції занумеровані у нас у порядку зростання власних значень, а мінімальному власному значенню відповідає функція $X_0(x) = 1$. Як видно з рисунка, вона не має нулів всередині проміжку, як і має бути для основної моди; кожна наступна власна функція має рівно на один нуль більше. Тобто осциляційна теорема виконується. Звідси робимо висновок, що ми знайшли всі власні функції і власні значення задачі.

Аналіз результату

Моди $n = 1, 2, \ldots$ відповідають стоячим хвилям. Коливання стержня повздовжні, і тому показані на рисунку графіки власних функцій пов'язані з реальним рухом стержня не настульки очевидним чином, як для поперечних коливань струни. У процесі коливань певні частини стердня зміщуються поперемінно праворуч і ліворуч, а між ним виникають області розтягу і стиснення. Області максимального відносного стиснення і розтягу (екстремуми похідної по координаті) припадають на вузли поля зміщень. Оскільки стежень з обома вільними кінцями симетричний відносно сердини, то власні функції почергово є або симетричними (парними), або антисиметричними (непарними) відносно середини проміжку (див. рисунок). Аналогічну картину ми спостерігали і у задачі №1.1, для поперечних коливань струни з обома закріпленими кінцями, яка теж є симетричною відносно середини. Проте, якщо врахувати векторний характер поля зміщень, то для поперечних коливань (струна) симетричній власній функції (див. рисунок вище) відповідає симетричне поле зміщень, а для повздовжніх коливань (стержнь) - антисеместричне! Нарисуйте самостійно векторне поле зміщень, яке відповідає моді $n = 1$, наприклад. Основна мода у даній задачі одночасно є нульовою модою, оскільки вона відповідає нульовому власному значенню. Нульові моди, як правило, є особливими і відрізняються від інших. Так, у даній задачі нульова мода відповідає не коливанню, а стану спокою або рівномірного прямолінійного руху стержня як цілого, залежно від початкових умов, які у задачі на власні моди не задається. Кожній власній можі можна поставити у відповідність окремий ступінь вільності. Нульова мода відповідає рухові центра мас стержня, а інші - коливанням різних типів відносно нерухомого центра мас.