21.02.22 Домашня робота

514.2

$u_t = D u_{xx}, \quad 0 \le x \le l, \quad t > 0.$

$u(0) = u(l) = T_0$

$$u = \begin{cases} T_1, & 0 < x < \frac{l}{2}; \\ T_2, & \frac{l}{2} \le x < l; \end{cases}$$

$\cancel{u = u(x,t) = X(x) \cdot T(t)}.$

$\cancel{X(x) T'(t) = D X''(x) T(t).}$

$\cancel{\frac{T'}{DT} = \frac{X''}{X} = -\lambda = const}$

~~Із межових умов:~~ $\cancel{X(0) = X(l) = T_0} \to \cancel{\tilde{X}(0) = \tilde{X}(l) = 0}.$

Шукаємо розв'язок в вигляді:

$$u(x,t) = \tilde{u}(x,t) + T_0 = \tilde{X}(x)\tilde{T}(t) + T_0$$

Розв'язуємо задачу

Із межових умов:

$$\begin{cases} u(0,t) = \tilde{X}(0)\tilde{T}(t) + T_0 = T_0 \Rightarrow \tilde{X}(0) = 0, \\ u(l,t) = \tilde{X}(l)\tilde{T}(t) + T_0 = T_0 \Rightarrow \tilde{X}(l) = 0; \end{cases}$$

$$T'(t)X(x) = D X''(x)T(t) \;\Big|\cdot \frac{1}{D}\cdot\frac{1}{XT}$$

$$\frac{1}{D}\frac{\tilde{T}'}{\tilde{T}} = \frac{\tilde{X}''}{\tilde{X}} = -\lambda = \mathrm{const}$$

Розв'яжемо задачу Штурма-Ліувілля:

$$\begin{cases} \tilde{X}'' + \lambda\tilde{X} = 0. \\ \tilde{X}(0) = \tilde{X}(l) = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, n \in \mathbb{N} \\ \tilde{X}_n = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Розв'яжемо лінійне рівняння відносно T:

$$\tilde{T}' + D\lambda\tilde{T} = 0.$$

$$\tilde{T}_n(t) = C_n e^{-D\lambda_n t} = C_n e^{-D\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t}$$

$$\tilde{u}_n = \tilde{X}_n(x)\tilde{T}_n(x) = C_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\exp\left(-D\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\right).$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{u}_n + T_0 = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\exp\left(-D\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\right).$$

Із початкових умов:

$$\begin{cases} T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) = T_1, \quad 0 < x < \frac{l}{2}, \\ T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) = T_2, \quad \frac{l}{2} < x < l. \end{cases}$$

Розкладемо $T = \begin{cases} T_1 - T_0 \\ T_2 - T_0 \end{cases}$ в ряд Фур'є по синусам:

$$\cancel{T_1 - T_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (\dots) T_n \sin\frac{\pi n x}{l}}$$

$$\cancel{T_n = \frac{2}{l}\int_0^l b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\,dx}$$

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} T_n \sin\frac{\pi n x}{l}; \quad T_n = \frac{2}{l}\left[\int_0^{l/2}(T_1 - T_0)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx + \int_{l/2}^{l}(T_2 - T_0)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx\right] = \frac{2}{\pi n}\left[(T_1 - T_0)\cos\frac{\pi n x}{l}\Big|_{l/2}^{0} + (T_2 - T_0)\cos\frac{\pi n x}{l}\Big|_{l}^{l/2}\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left[(T_1 - T_0)\left(1 - \cos\frac{\pi n}{2}\right) + (T_2 - T_0)\left(\cos\frac{\pi n}{2} + (-1)^{n+1}\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left[T_1\left(1 - \cos\frac{\pi n}{2}\right) + T_0\left(\cancel{\cos\frac{\pi n}{2}} - 1 - \cancel{\cos\frac{\pi n}{2}} + (-1)^{n+1}\right) + T_2\left((-1)^{n+1} + \cos\frac{\pi n}{2}\right)\right] = \frac{2}{\pi n}\left(T_0\left((-1)^{n+1} - 1\right) + T_1\left(1 - \cos\frac{\pi n}{2}\right) + T_2\left((-1)^{n+1} + \cos\frac{\pi n}{2}\right)\right)$$

$n = 1$: $\frac{2}{\pi}(T_1 + T_2 - 2T_0)$

$n = 2$: $\frac{1}{\pi}(2T_1 + (-2)T_2) = \frac{2}{\pi}(T_1 - T_2)$

$n = 3$: $\frac{2}{\pi \cdot 3}(T_1 + T_2 - 2T_0)$

$n = 4$: $\frac{1}{2\pi}(T_0(1 - 1) + T_1(1 - 1) + T_2(-1 + 1)) = 0.$

$n = 5$: $\frac{2}{5\pi}(T_1 + T_2 - 2T_0).$

$\vdots$

$$u(x,t) = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[T_0\left((-1)^n - 1\right) + T_1\left(1 - \cos\frac{\pi n}{2}\right) + T_2\left((-1)^{n+1} + \cos\frac{\pi n}{2}\right)\right] \cdot \frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\exp\left(-D\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\right)$$

Покладемо $T_0 = 0$ та розглянемо випадки $T_1 = -T_2$,

$T_1 = T_2$.

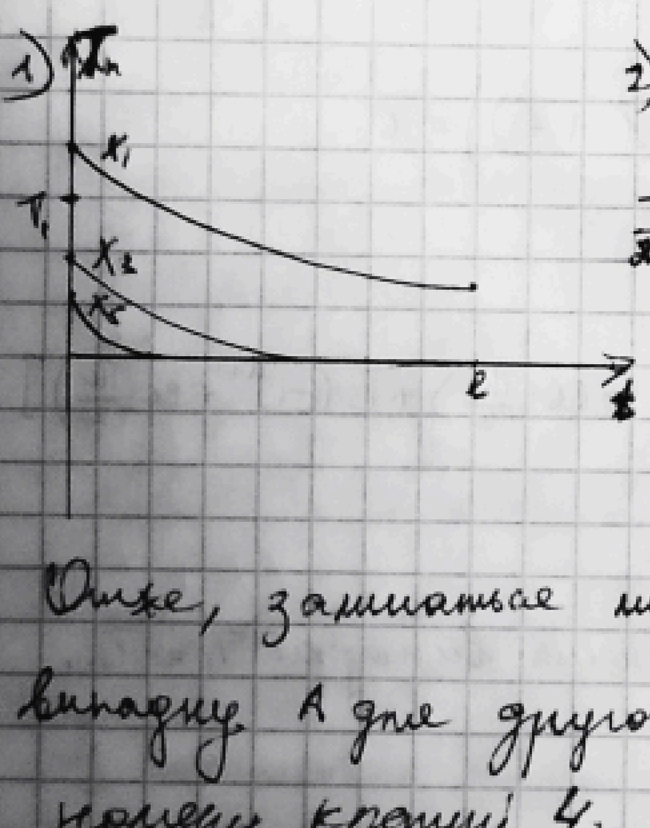
① $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_1\left(1 + (-1)^{n+1}\right)\frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\exp\left(-D\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\right).$

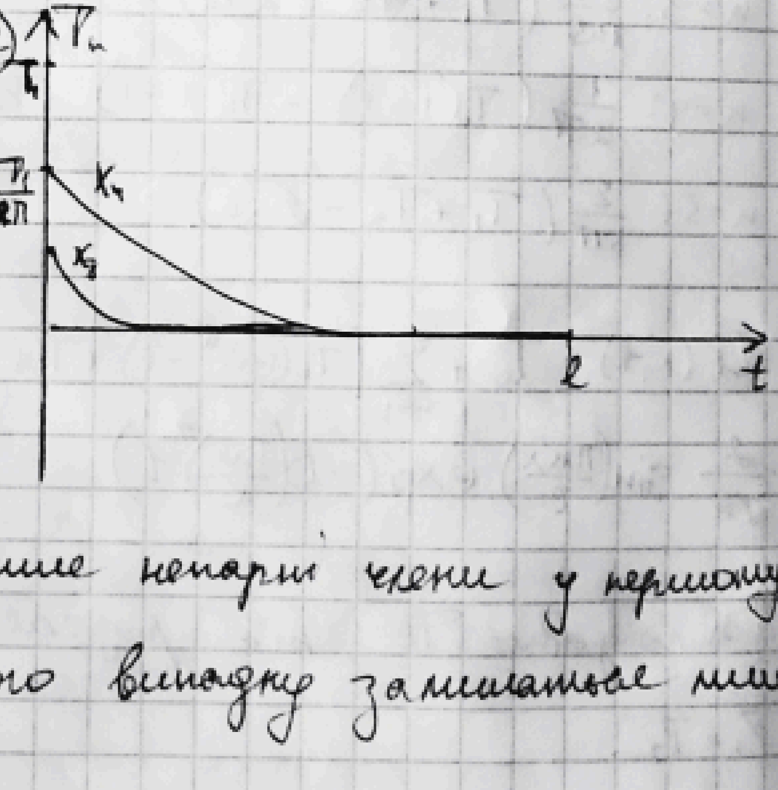
2) $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_1\left(2\cos\frac{\pi n}{2} + 1 + (-1)^n\right)\frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\exp\left(-D\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\right) =$

$= \frac{2T_1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 + 2\cos\frac{\pi n}{2} + (-1)^n\right)\frac{\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)}{n}\exp\left(-D\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\right).$

У першому випадку занулюються T_0, розклад T_0 в ряд Фур'є та доданки T_1 з косинусами. З цього приходимо до розкладу константи T_1 в ряд Фур'є, що відповідає змісту ~~умови~~ початкової умови $u(0,t) = T_1$, $0 < x < l$.

В другому випадку занулюється лише T_0 та її розклад. А члени T_1 з косинусами ~~б~~ залишаються, що будуть відповідати розриву в точці $x = \frac{l}{2}$.

1) 

2) 

Отже, залишаються лише непарні члени у першому випадку. А для другого випадку залишаються лише номери кратні 4.

„Малий" проміжок часу є час менший часу

релаксації $t_м \ll \tau = \frac{l^2}{Dn^2\pi^2}$, а великим є час ~~яким~~ для якого неможна скористатися даним наближенням.

Очевидно, що характерні часи залежать від розмірів системи квадратичною залежністю $\tau \approx l^2$.

54.3

$$\begin{cases} U_t = DU_{xx} \\ U = U(x,t) \\ 0 \le x \le l,\ t > 0 \\ U(0,t) = T_1, \\ U_x(l,t) = 0, \\ U(x,0) = T_2 + T_0 \sin\frac{\pi x}{2l} \end{cases}$$

Шукаємо розв'язок в виді:

$U(x,t) = \tilde{U}(x,t) + T_1 = \tilde{X}(x)\tilde{T}(t) + T_1$

З межових умов:

$\tilde{X}(0) = 0;\ \tilde{X}'(l) = 0.$

$U_t = DU_{xx} \Rightarrow \frac{\tilde{T}'(t)}{D\tilde{T}(t)} = \frac{\tilde{X}''(x)}{\tilde{X}(x)} = -\lambda$

Розв'яжемо задачу Штурма-Ліувілля:

$$\begin{cases} \tilde{X}'' + \lambda\tilde{X} = 0, \\ \tilde{X}(0) = 0, \\ \tilde{X}'(l) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_n = \left(\frac{\pi}{2l}(2n+1)\right)^2, & n = 0,1,2\ldots \\ \tilde{X}_n = \sin\left(\frac{\pi x}{2l}(2n+1)\right), & n = 0,1,2\ldots \end{cases}$$

З цього отримуємо:

$\tilde{T}' + \lambda D\tilde{T} = 0 \Rightarrow \tilde{T}_n(t) = C_n \exp\left(-D\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2(2n+1)^2 t\right).$

З початкових умов:

$U(x,0) = T_1 + \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{\pi x}{2l}(2n+1)\right) = T_2 + T_0 \sin\frac{\pi x}{2l}.$

Розкладемо $T = T_2 - T_1$ в ряд Фур'є:

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} T_n \sin\frac{\pi x}{2l}(2n+1)$$

$$T_n = \frac{2}{l}\int_0^l (T_2 - T_1)\sin\left(\frac{\pi x}{2l}(2n+1)\right)dx = \frac{2(T_2-T_1)}{\pi(n+\frac{1}{2})}\cos\frac{\pi x}{2l}(2n+1)\Big|_l^0$$

$$= \frac{4(T_2-T_1)}{\pi(2n+1)}\left(1 - \cancel{\cos\pi(n+\tfrac{1}{2})}^{\,0}\right) = \frac{4}{\pi}(T_2-T_1)\frac{1}{2n+1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin\frac{\pi x}{2l}(2n+1) = \left(T_0 + \frac{4}{\pi}(T_2-T_1)\right)\sin\frac{\pi x}{2l} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}(T_2-T_1)\sin\frac{\pi x}{2l}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_0 = T_0 + \frac{4}{\pi}(T_2-T_1), \\ C_n = \frac{4}{\pi}(T_2-T_1),\ n \in \mathbb{N}; \end{cases}$$

Отже, $u(x,t) = T_1 + \left(T_0 + \frac{4}{\pi}(T_2-T_1)\right)\sin\frac{\pi x}{2l}\, e^{-\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 Dt} +$

$$+ \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(T_2-T_1)\sin\left(\frac{\pi x}{2l}(2n+1)\right) e^{-\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2(2n+1)^2 Dt}.$$

№4.4

$$\begin{cases} u_t = D u_{xx} \\ u = u(x,t). \\ 0 \le x \le l,\ t > 0. \\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0. \\ u(x,0) = T_1\cos\frac{\pi x}{2l} + T_2\cos\frac{2\pi x}{l}; \end{cases}$$

$u(x,t) = X(x)T(t).$

Із межових умов:

$X'(0) = X'(l) = 0.$

Розв'яжемо задачу Штурма-Ліувілля:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(l) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_0 = 0 \\ X_0(x) = C_1 = 1 \\ \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2,\ n \in \mathbb{N} \\ X_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right),\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Розв'яжемо рівняння для $T(t)$,

$T' + \lambda D T = 0 \Rightarrow T_n(t) = \cancel{C_n t +}\, C_n e^{-D\lambda t} = C_n\left(\cancel{1+}\, e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 D t}\right)$, $n = 0, 1, \ldots$

~~Остаточно~~ Отже:

$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n T_n = \cancel{\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\right)}\; C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 D t}$

Із початкових умов:

$u(x,0) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\frac{\pi n x}{l} = T_1 \cos\frac{\pi x}{2l} + T_2 \cos\frac{2\pi x}{l}.$

Розкладемо C_0 ~~$+ T_1 \cos\frac{\pi x}{2l}$~~ по набору ~~$\cos\frac{\pi n x}{l}$~~, $n \in N$

$\cos\frac{\pi x}{2l}(2n+1)$, $n = 0, 1, 2 \ldots$

$C_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{l}\int_0^l C_0 \cos\frac{\pi \xi}{2l}(2n+1)\, d\xi\right) \cdot \cos\frac{\pi x}{2l}(2n+1)$, $= C_{0n}$

$C_{0n} = \frac{2C_0}{l}\int_0^l \cos\frac{\pi x}{2l}(2n+1)\, dx = \frac{2C_0}{\pi(n+\frac{1}{2})} \sin\frac{\pi x}{2l}(2n+1)\Big|_0^l = \frac{4C_0}{\pi(2n+1)}(-1)^n$

$C_0 = \frac{4}{\pi} C_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos\frac{\pi x}{2l}(2n+1)$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових косинусах отримуємо:

$C_0 = \frac{T_1 \pi}{4}$; $C_2 = T_2$; $C_n = 0$, де $n \neq 0, 2$.

Остаточно:

$u(x,t) = \frac{T_1 \pi}{4} \cos\frac{\pi x}{2l} + T_2 \cos\frac{2\pi x}{l}.$

54.5

$u_t = D u_{xx} + \beta u$, $\beta > 0$, $D > 0$

а) $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0.$

$u = u(x,t) = X(x)T(t)$

$u_t = Du_{xx} + \beta u$

$T'X = DTX'' + \beta TX \ \Big| \cdot \frac{1}{DTX}$

$\frac{T'}{DT} = \frac{X''}{X} + \frac{\beta}{D} \Rightarrow \frac{T'}{DT} - \frac{\beta}{D} = \frac{X''}{X} = -\lambda - const.$

$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X'(0) = X'(l) = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_0 = 0, \ X_0 = C = 1. \\ \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, n \in N \\ X_n = \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), n \in N \end{cases}$

Розв'яжемо рівняння для $T(t)$:

$T' - \beta T + \lambda D T = 0.$

$T' + (-\beta + \lambda D)T = 0.$

$T(t) = Ce^{-(-\beta + \lambda D)t} \Rightarrow T_n(t) = C_n e^{+\beta t - \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 Dt}$

$u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \exp\left(-\left(-\beta + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 D\right)t\right) + C_0$

~~Найто~~, Головний внесок в зростання к-ті частинок робить exp, отже, умовою необмеженого зростання буде:

$-(\lambda D - \beta)t > 0.$

$\lambda D - \beta < 0 \Rightarrow \lambda < \frac{\beta}{D} \Rightarrow \frac{\pi n}{l} < \sqrt{\frac{\beta}{D}} \Rightarrow \boxed{l > \pi n \sqrt{\frac{D}{\beta}}}$

б) $u(0,t) = u(l,t) = 0.$

$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0,t) = X(l,t) = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, n \in N \\ X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right), n \in N \end{cases}$

$T' + (\lambda D - \beta) T = 0$

$T(t) = Ce^{-(\lambda D - \beta)t} \Rightarrow T_n(t) = C_n \exp\left(-\left(\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 D - \beta\right)t\right),\ n \in \mathbb{N}$

$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X(x) T(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \exp\left(\beta t - \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 D t\right).$

Аналогічно: $\boxed{l > \pi n \sqrt{\frac{D}{\beta}}}$

в) $u(0,t) = 0;\ u_x(l,t) = 0.$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0,t) = 0, \\ X'(l,t) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_n = \left(\frac{\pi(n+\frac{1}{2})}{l}\right)^2, & n = 0,1,2\ldots \\ X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2l}(2n+1)\right), & n = 0,1,2\ldots \end{cases}$$

$T' + (\lambda D - \beta) T = 0 \Rightarrow T(t) = C \exp(\beta t - D\lambda t)$

$T_n(t) = C_n \exp\left(\beta t - D\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 (2n+1)^2 t\right),\ n = 0,1,2\ldots$

$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} X(x) T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{\pi x}{2l}(2n+1)\right) \exp\Big(\beta t -$

$- \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 D t\Big).$

Аналогічно: $\beta t - \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 D t > 0$

$\beta > \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 D \Rightarrow \frac{\pi}{l}\left(n+\frac{1}{2}\right) < \sqrt{\frac{\beta}{D}} \Rightarrow \boxed{l > \pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{D}{\beta}}}$