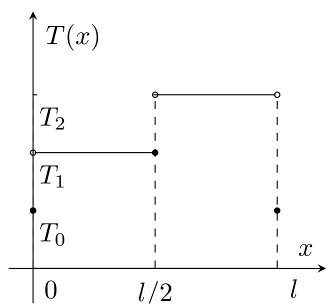
Заняття 4

Рівняння теплопровідності з однорідними межовими умовами

Задача № 4.2

У початковий момент часу ліва половина стержня з теплоізольованою бічною поверхнею має температуру T_1 , а права – температуру T_2 . Знайти розподіл температури при $t > 0$, якщо кінці стержня підтримуються при температурі T_0. Указівка: подумайте, що означає «температура дорівнює нулю», що це за нуль? Покладіть у кінцевому результаті $T_0 = 0$ і розгляньте частинні випадки: $T_1 = T_2$ та $T_1 = -T_2$. Які члени ряду при цьому обертаються в нуль? Чому? Нарисуйте графіки та порівняйте часову залежність температури для різних мод. Нарисуйте (якісно) графіки розподілу температури вдовж стержня у різні характерні послідовні моменти часу. Що таке «малий» і «великий» проміжок часу для цієї задачі? Як характерні часи залежать від розмірів системи?

Розв'язок



У задачі необхідно знайти, як буде змінюватися з часом заданий початковий розподіл температури у стержні. Формулювання задачі неявно передбачає, що у межах поперечного перерізу стержня температура є однаковою. Тому тепло передається лише вздовж стержня, температура u залежить лише від координати взовж стержня і часу. Процес описується одновимірним рівнянням теплопровідності; формальна постановка задачі має вигляд:

$$\begin{cases} u = u(x,t), \\ u_t = \kappa^2 u_{xx}, \\ 0 \le x \le l, t \ge 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = T_0, \\ u(x,0) = \varphi(x) = T_1 - (T_1 - T_2)\Theta(x - l/2). \end{cases} \tag{4.1}$$

Тут ми використали тета-функцію Хевісайта (або функцію сходинки):

$$\Theta(x-x_0)=\begin{cases}0, & \text{при } x<x_0\\ 1, & \text{при } x>x_0\end{cases}$$

Межові умови задачі неоднорідні, тому безпосереднє відокремлення змінних неможливе. У даному випадку можна легко привести межові умови до однорідних. Перейдемо до нової невідомоїфункції заміною

$$u(x,t)=\widetilde{u}(x,t)+T_0$$

Тоді рівняння для нової невідомої функції $\widetilde{u}(x,t)$ не змінить свого вигляду. Фізично це означає, що рівняння теплопровідності записується для різниці температур, або ж для температури, яка відраховується від довільно вибраного нуля. Якщо u дорівнює температурі кінців T_0, то температура $\widetilde{u}$ дорівнює нулю. Отже, після заміни ми відраховуємо температуру від температури кінців. У результаті заміни умови задачі на $\widetilde{u}$ набувають вигляду (хвильку надалі тимчасово опускаємо)

$$\begin{cases} u=\widetilde{u}(x,t),\\ u_t=\kappa^2 u_{xx},\\ 0\le x\le l, t\ge 0,\\ u(0,t)=u(l,t)=0,\\ u(x,0)=\varphi(x)=T_1-T_0-(T_1-T_2)\Theta(x-l/2).\end{cases} \tag{4.2}$$

Тепер рівняння і межові умови однорідні, і можена розділяти змінні. Шукаємо частинні розв'язки вигляду

$$u(x,t)=X(x)\cdot T(t) \tag{4.3}$$

У результаті відокремлення змінних приходимо до наступної задачі Штурма-Ліувілля на просторову частину розв'язку:

$$\begin{cases} X=X(x),\\ X''=-\lambda X,\\ 0\le x\le l,\\ X(0)=0,\\ X(l)=0.\end{cases} \qquad \widetilde{T}'+\lambda D\widetilde{T}=0 \tag{4.4}$$

Її розв'язок (**??**) знайдений у задачі №1,1:

$$\begin{cases} \lambda_n=\dfrac{\pi^2 n^2}{l^2},\\ X_n(x)=\sin\left(\dfrac{\pi n x}{l}\right),\end{cases} \qquad \text{де } n\in\mathbb{N}. \tag{4.5}$$

Для часової частини одержуємо лінійне рівняння першого порядку, яке ленгко розв'язується:

$$\begin{gathered}\frac{T'}{T} = -\lambda_n \kappa^2 = -\tau_n^{-1} \;\Rightarrow\; \int \frac{\mathrm{d}T}{T} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{\tau_n} \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; \ln T_n = \ln C_n - t/\tau_n \;\Rightarrow\; T_n = C_n e^{-t/\tau_n},\ \text{де } n \in \mathbb{N}\end{gathered} \tag{4.6}$$

Виписуємо набір власних мод системи

$$\begin{aligned}&u_n(x,t) = X_n \cdot T_n = C_n e^{-t/\tau_n} \sin(k_n x),\\ &k_n = \frac{\pi n}{l} - \text{ хвильові вектори},\\ &\tau_n = \frac{1}{\kappa^2 k_n^2} = \frac{l^2}{\kappa^2 \pi^2 n^2} - \text{ характерний час зміни температури},\\ &n = 1, 2, \ldots\end{aligned} \tag{4.7}$$

Виписуємо загальний розв'язок задачі для $\widetilde{u}$

$$\widetilde{u}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-t/\tau_n} \sin(k_n x) \tag{4.8}$$

Із початкової умови на $\widetilde{u}$ (4.2) одержуємо умову для визначення коефіцієнтів C_n:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(k_n x) = T_1 - T_0 - (T_1 - T_2)\Theta(x - l/2) \tag{4.9}$$

Оскільки права частина є функцією x загального вигляду, коефіцієнти знаходимо за зразком задачі 2.3

$$\begin{aligned}C_n &= \frac{2}{l}\left[\int_0^{l/2} (T_1 - T_0)\sin(k_n x)\,\mathrm{d}x + \int_{l/2}^{l} (T_2 - T_0)\sin(k_n x)\,\mathrm{d}x\right] = \\ &= -\frac{2}{l k_n}\left[(T_1 - T_0)\cos(k_n x)\Big|_0^{l/2} + (T_2 - T_0)\cos(k_n x)\Big|_0^{l/2}\right] = \\ &= \frac{2}{l k_n}\left[(T_1 - T_0)(1 - \cos(k_n l/2)) + (T_2 - T_0)(\cos(k_n l/2) - (-1)^n)\right] = \\ &= \frac{2}{l k_n}\left[T_1(1 - \cos(k_n l/2)) + T_2(\cos(k_n l/2) - (-1)^n) + T_0((-1)^n - 1)\right]\end{aligned}$$

Для непарних і парних n відповідно маємо

$$\begin{aligned}n = 2m-1:&\quad \Rightarrow C_{2m-1} = \frac{2}{k_{2m-1} l}\left[T_1 + T_2 - 2T_0\right]\\ n = 2m:&\quad \Rightarrow C_{2m} = \frac{2}{k_{2m} l}\left[T_1 - T_2\right]\left[1 - (-1)^m\right]\end{aligned}$$

Таким чином розв'язок для $\widetilde{u}$ природним чином розпадається на суму двох частин, які виражаються рядами окремо по непарних і парних n. Перша і друга частини розв'язку пропорційна різним множникам, перша - $(T_1 + T_2 - 2T_0)$, а друга - $(T_1 - T_2)$. Розв'язком задачі є

$$\begin{aligned} u(x,t) = T_0 + 2(T_1 + T_2 - 2T_0) \sum_{m=1}^{\infty} e^{-t/\tau_{2m-1}} \frac{\sin(k_{2m-1}x)}{lk_{2m-1}} + \\ +2(T_1 - T_2) \sum_{m=1}^{\infty} [1 - (-1)^m] e^{-t/\tau_{2m}} \frac{\sin(k_{2m}x)}{lk_{2m}} \end{aligned} \tag{4.10}$$

Моди з непарними номерами є симетричними, а з парними - антисиметричними відносно середини стержня (див. задачу 1.1). Відповідно, таку ж симетрію мають суми першого і другого рядів. Такий результат обумовлений симетрією самого стержня з урахуванням фізичних умов на його кінцях. У частинному випадку $T_2 = T_1$ початковий розподіл температури є симетричним. Тоді з розв'язку видно, що його антисиметрична частина зануляється, і розподіл температури залишається симетричним відносно середини стержня в усі моменти часу. У випадку $T_2 = -T_1$ і $T_0 = 0$ початковий розподіл температури є антисиметричним. Тоді антисиметрична частина розв'язку зануляється, і в усі моменти часу розподіл температури залишається антисиметричним відносно середини стержня . .

Аналіз розв'язку

Поведінку знайдених груп доданків можна побачити на наступному графіку. Тут наведено по одному з кожної групи.

Проміжок часу називається малим, коли $t \ll \tau$, а великим – $t > \tau$

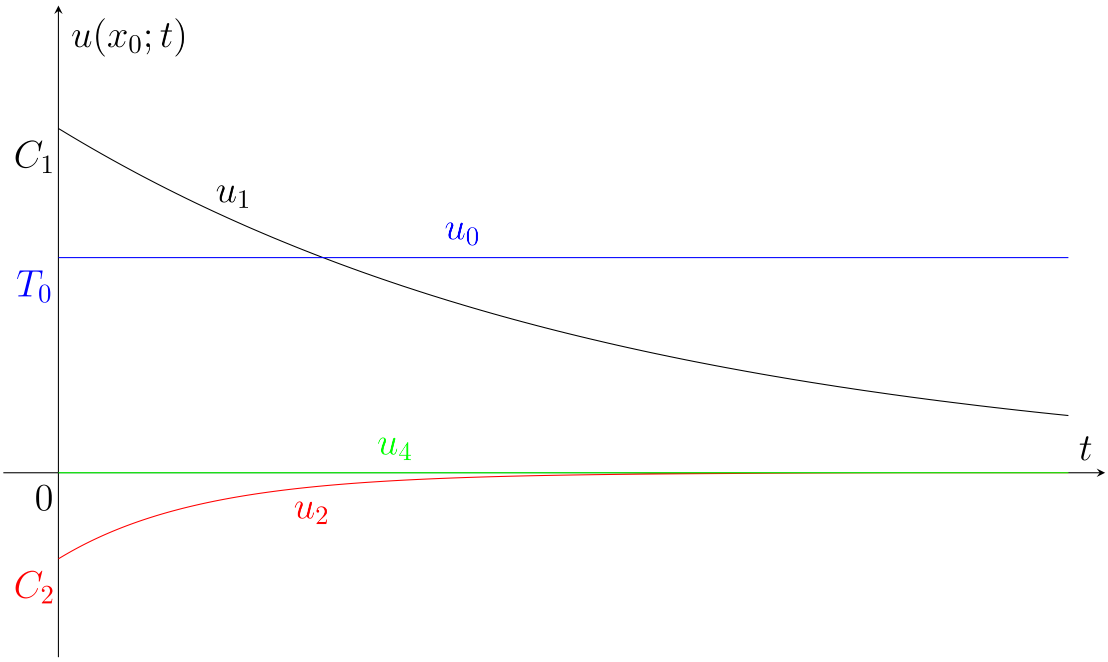


Рис. 4.1: Перші чотири розв'язки