Заняття 7

Задачі з неоднорідними межовими умовами загального вигляду

Задача № 7.1

Знайти коливання пружного стержня, якщо правий кінець його закріплений нерухомо, до лівого при $t > 0$ прикладена сила $F(t)$, а шляхом зведення до задачі з неоднорідним рівнянням. Відповідь одержати для частинного випадку $F(t) = F_0 e^{-\alpha t}$. При $t < 0$ стержень перебував у положенні рівноваги.

Розв'язок

Формальна постановка задачі:

$$\begin{cases} u = u(x,t), \\ u_{tt} = v^2 u_{xx}, \\ 0 \le x \le l, t \ge 0 \\ u_x(0,t) = \dfrac{F_0}{\beta} e^{-\alpha t},\ u(l,t) = 0, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0. \end{cases} \tag{7.1}$$

Шукаємо розв'язок у вигляді:

$$u(x,t) = w(x,t) + \mathcal{V}(x,t), \tag{7.2}$$

де $w(x,t)$ – задовольняє межовим умовам, а $\mathcal{V}(x,t)$ – довільна функція.

Найпростішим видом функції $w(x,t)$ буде:

$$w(x,t) = \frac{F_0}{\beta} e^{-\alpha t}(x - l) = f_0 e^{-\alpha t}(x - l) \tag{7.3}$$

Перевіримо виконання межових умов

$$w_x(0,t) = f_0 e^{-\alpha t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x - l) = f_0 e^{-\alpha t}, \quad w(l,t) = f_0 e^{-\alpha t}(l - l) = 0$$

Виконаємо перетворення рівняння та початкових умов і перепишемо задачу для функції $v(x,t)$.
Рівняння:

$$u_{tt} = v^2 u_{xx} \;\Rightarrow\; \mathcal{V}_{tt} + \alpha^2 f_0 e^{-\alpha t}(x-l) = v^2 \mathcal{V}_{xx}$$

Межові умови:

$$u_x(0,t) = f_0 e^{-\alpha t},\, u(l,t) = 0 \;\Rightarrow\; \mathcal{V}_x(0,t) = 0\, \mathcal{V}(l,t) = 0$$

Початкові умови:

$$u(x,0) = f_0(x-l) + \mathcal{V}(x,0) = 0 \;\Rightarrow\; \mathcal{V}(x,0) = -f_0(x-l)$$

$$u_t(x,0) = -\alpha f_0(x-l) + \mathcal{V}_t(x,0) = 0 \;\Rightarrow\; \mathcal{V}_t(x,0) = \alpha f_0(x-l)$$

Отже, отримуємо задачу для $\mathcal{V}(x,t)$ з однорідними межовими умова, але з неоднорідними рівнянням та початковими умовами.

$$\begin{cases} \mathcal{V} = \mathcal{V}(x,t), \\ \mathcal{V}_{tt} - v^2 \mathcal{V}_{xx} = -\alpha^2 f_0 e^{-\alpha t}(x-l), \\ 0 \le x \le l, t \ge 0 \\ \mathcal{V}_x(0,t) = 0,\, \mathcal{V}(l,t) = 0, \\ \mathcal{V}(x,0) = -f_0(x-l), \\ \mathcal{V}_t(x,0) = \alpha f_0(x-l). \end{cases} \tag{7.4}$$

Розв'язок шукаємо у вигдялі:

$$\mathcal{V}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{\mathcal{V}}_n(t) \cos k_n x, \tag{7.5}$$

де $k_n = \frac{\pi}{l}(n+1/2)$ – хвильове число.

Зрозуміло, що це розклад шуканої функції по власних функціях системи (див. ров'язок відповідної задачі Штурма-Ліувілля в задачі 1.3). По цій же системі функцій треба розкласти неоднорідність рівняння.

$$(x-l) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos k_n x$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l (\xi - l)\cos k_n \xi \,\mathrm{d}\xi = \frac{2}{l}\Bigg[\overbrace{\frac{\xi}{k_n}\sin k_n \xi\bigg|_0^l}^{=0} - \frac{1}{k_n}\int\limits_0^l \sin k_n \xi \,\mathrm{d}\xi -$$

$$
-\overbrace{\frac{l}{k_n}\sin k_n\xi\Big|_0^l}^{=0}\Bigg] = -\frac{2}{k_n l}\int_0^l \sin k_n\xi \, \mathrm{d}\xi = \frac{2}{k_n^2 l}\cos k_n\xi\Big|_0^l = -\frac{2}{k_n^2 l} \Rightarrow
$$
$$
\Rightarrow (x-l) = -\frac{2}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos k_n x}{k_n^2} \tag{7.6}
$$

Отже, маємо

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{\mathcal{V}}_n''\cos k_n x + v^2\sum_{n=0}^{\infty}k_n^2\widetilde{\mathcal{V}}_n\cos k_n x = \frac{2\alpha^2}{l}f_0 e^{-\alpha t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos k_n x}{k_n^2} \Rightarrow
$$
$$
\Rightarrow \widetilde{\mathcal{V}}_n'' + v^2 k_n^2\widetilde{\mathcal{V}}_n = \frac{2\alpha^2 f_0}{l k_n^2}e^{-\alpha t} \Rightarrow \widetilde{\mathcal{V}}_n'' + \omega_n^2\widetilde{\mathcal{V}}_n = \kappa_n\alpha^2 e^{-\alpha t}, \tag{7.7}
$$

де $\kappa_n = \frac{2f_0}{lk_n^2}$ – розмірна константа $\big[\kappa_n\big] = \big[\text{м}\big]$

Розв'яжемо отримане лінійне неожнорідне рівняння. Його розв'язок шукатимето у вигляді:

$$
\widetilde{\mathcal{V}}_n(t) = A_n\sin\omega_n t + B_n\cos\omega_n t + \widetilde{\mathcal{V}}_{\text{неод}}(t) \tag{7.8}
$$

За умови $\alpha \neq \pm i\omega_n$ (що виконується завжди, бо $\alpha \in \mathbb{R}$), доданок, відповідний неоднорідності, можемо записати у вигляді:

$$
\widetilde{\mathcal{V}}_{\text{неод}}(t) = \gamma e^{-\alpha t}
$$

Нам залишаться визначити константу γ, для цього підставимо "вгаданий" розв'язок в рівняння.

$$
(\gamma e^{-\alpha t})'' + \omega_n^2\gamma e^{-\alpha t} = \kappa_n\alpha^2 e^{-\alpha t} \Rightarrow \gamma(\alpha^2+\omega_n^2) = \kappa_n\alpha^2 \Rightarrow \gamma = \frac{\kappa_n\alpha^2}{(\omega_n^2+\alpha^2)}
$$

Отже, загальний розв'язок рівняння

$$
\widetilde{\mathcal{V}}_n(t) = A_n\sin\omega_n t + B_n\cos\omega_n t + \frac{\kappa_n\alpha^2}{(\omega_n^2+\alpha^2)}e^{-\alpha t} \tag{7.9}
$$

Ми вже розкладали неоднорідність в рівнянні по власним функціям системи, таким же шляхом треба розкласти початкові умови задачі (**??**). Нам треба знову ж розкласти функцію $x-l$, тому можемо скористатися готовим результатом (**??**).

$$
\begin{aligned} \mathcal{V}(x,0) &= -f_0(x-l), \\ \mathcal{V}_t(x,0) &= \alpha f_0(x-l). \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &\widetilde{\mathcal{V}}_n(0) = 2f_0/lk_n^2 = \kappa_n, \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widetilde{\mathcal{V}}_n(0) = -2\alpha f_0/lk_n^2 = -\kappa_n\alpha. \end{aligned} \tag{7.10}
$$

З отриманих початковими умовами для n-их коефіцієнтів розкладу в ряд за власними функціями системи визначемо константи A_n та B_n в розв'язку (**??**).

$$\widetilde{\mathcal{V}}_n(0) = B_n + \frac{\kappa_n \alpha^2}{(\omega_n^2 + \alpha^2)} = \kappa_n \;\Rightarrow\; B_n = \kappa_n - \frac{\kappa_n \alpha^2}{\omega_n^2 + \alpha^2} = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 + \alpha^2}\kappa_n$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widetilde{\mathcal{V}}_n(0) = A_n\omega_n - \frac{\kappa_n \alpha^3}{(\omega_n^2 + \alpha^2)} = -\kappa_n\alpha \;\Rightarrow\; A_n = -\frac{\alpha\omega_n}{\omega_n^2 + \alpha^2}\kappa_n$$

Підставляємо в розв'язок

$$\widetilde{\mathcal{V}}_n(t) = \frac{\kappa_n}{(\omega_n^2 + \alpha^2)}\left(\omega_n^2 \cos\omega_n t - \alpha\omega_n \sin\omega_n t + \alpha^2 e^{-\alpha t}\right) \tag{7.11}$$

Тепер запишемо вид функції $\mathcal{V}(x, t)$

$$\mathcal{V}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\kappa_n}{(\omega_n^2 + \alpha^2)}\left(\omega_n^2 \cos\omega_n t - \alpha\omega_n \sin\omega_n t + \alpha^2 e^{-\alpha t}\right)\cos k_n x \tag{7.12}$$

І повний розв'язок задачі

$$u(x,t) = f_0 e^{-\alpha t}(x - l) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\kappa_n \cos k_n x}{(\omega_n^2 + \alpha^2)}\left(\omega_n^2 \cos\omega_n t - \alpha\omega_n \sin\omega_n t + \alpha^2 e^{-\alpha t}\right) \tag{7.13}$$