0.0.1 Стержень з вільними та пружно закріпленими кінцями; системи, описувані іншими рівняннями.

Задача №1

Знайти власні моди повздовжніх рухів тонкого стержня $0 \leq x \leq l$ *із вільними кінцями (задача для хвильового рівняння з межовими умовами* $u_x(0,t) = 0, u_x(l,t) = 0$*).*
Результат перевірити аналітично й графічно (див. заняття №6, зразок модульної контрольної роботи №1) та проаналізувати його фізичний смисл. Чим відрізняється від інших основна (нульова) мода? Якому рухові стержня вона відповідає?

Розв'язок

Формальна постановка задачі:

$$\begin{cases} u = u(x,t), \\ u_{tt} = v^2 u_{xx}, \\ 0 \leq x \leq l, t \in \mathbb{R} \\ u_x(0,t) = 0, \\ u_x(l,t) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Необхідно знайти розв'язки (1) вигляду:

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) \neq 0 \tag{2}$$

Від задачі №1 попереднього заняття задача відрізняється тільки межовою умовою, тому підставляємо розв'язок у вигляді добутку (2) тільки у межові умови (1):

$$u_x(0,t) = X'(0) \cdot T(t) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} T(t) \neq 0, \forall t, \\ X'(0) = 0; \end{cases}$$

$$u_x(l,t) = X'(l) \cdot T(t) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} T(t) \neq 0, \forall t, \\ X'(l) = 0; \end{cases}$$

Тут ми врахували, що умови на кінцях струни виконуються при всіх t, тому $T(t)$ не може бути рівним нулю.

Виписуємо результат відокремлення змінних:

$$\begin{cases} X = X(x), \\ X'' = -\lambda X, \\ 0 \leq x \leq l, \\ X'(0) = 0, \\ X'(l) = 0. \end{cases} \qquad T'' + \lambda v^2 T = 0 \tag{3}$$

Розв'язуємо задачу Штурма-Ліувілля (3). Знову скористаємося результатами попередньої задачі та одразу запишемо якого типу отримуємо розв'язки для різних λ.

а) Випадок $\lambda < 0$.

$$X(x) = C_1 sh(\sqrt{|\lambda|}x) + C_2 ch(\sqrt{|\lambda|}x)$$

Знаходимо константи з межових умов:

$$X'(0) = C_1\sqrt{|\lambda|} \ \Rightarrow \ X(x) = C_2 \quad ch(\sqrt{|\lambda|}x)$$

$$\begin{cases} X'(l) = C_2\sqrt{|\lambda|} sh(\sqrt{|\lambda|}l) = 0, \\ sh(\sqrt{|\lambda|}l) \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 0; \end{cases} \Rightarrow$$

розв'язок тривівльний, немає від'ємних власних значень.

б) Випадок $\lambda = 0$:

$$X(x) = C_1 + C_2 x$$

Знаходимо константи з межових умов:

$$\begin{cases} X'(0) = C_2 = 0, \\ X'(l) = C_2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 \in \mathbb{R}, \\ C_2 = 0; \end{cases} \Rightarrow$$

$X(x) = 0$ – розв'язок нетривівльний, $\lambda = 0$ є власним значенням.

в) Випадок $\lambda > 0$

$$X(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}x)$$

Знаходимо константи з межових умов:

$$\begin{cases} X'(0) = C_1\sqrt{\lambda} = 0, \\ X'(l) = \sqrt{\lambda}\left(\cancelto{0}{C_1}\cos(\sqrt{\lambda}l) - C_2 \sin(\sqrt{\lambda}l)\right) = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 \neq 0, \\ \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0; \end{cases}$$

Отже, нетривіальні розв'язки існують при значеннях параметра λ, які задовольняють характеристичне рівняння :

$$\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0 \ \Rightarrow \ \sqrt{\lambda_n}l = \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \ \Rightarrow \ \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}.$$

Випишемо тепер розв'язки для всіх n і визначимо, які з них необхідно залишити:

$$\begin{cases} X_0(x) = C_0, \\ \lambda_0 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} X_n(x) = C_n \sin\left(\dfrac{\pi n x}{l}\right), \\ \lambda_n = \dfrac{\pi^2 n^2}{l^2}, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Необхідно відредагувати наступний текст Видно, що $n = 0$ відповідає тривіальному розв'язку. Видно також, що всі інші розв'язки визначені з точністю до довільного множника.

Тому власні функції, які співпадають з точністю до множника, вважають однаковими. У загальному випадку різними вважають лише лінійно незалежні власні функції, а розвя'зати задачу Штурма-Ліувілля означає знайти всі різні власні функції і відповідні власні значення. Отже, різним власним функціям відповідають лише натуральні n, а коефіцієнти C_n можна покласти рівними одиниці.

Власними значеннями і власними функціями є

$$\begin{cases} \lambda_n = \dfrac{\pi^2 n^2}{l^2}, \\ X_n(x) = \sin\left(\dfrac{\pi n x}{l}\right), \end{cases} \quad \text{де } n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Повертаємося до рівняння для $T(t)$ (3). Підставляємо знайдені власні значення та знаходимо $T_n(t)$:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \\ T'' + \lambda v^2 T = 0, \end{aligned}\right\} \Rightarrow T_n(t) = A\cos(\omega_n t) + B\sin(\omega_n t),$$

де $\omega_n^2 = \lambda_n v^2$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\left.\begin{aligned} \lambda_0 = 0, \\ T'' = 0, \end{aligned}\right\} \Rightarrow T_0(t) = A_0 + B_0 t,$$

Власними модами коливань струни будуть всі розв'язки вигляду:

$$u_n(x,t) = X_n(x) \cdot T_n(t)$$

Виконаємо перепозначення і запишемо остаточний розв'язок:

$$\begin{cases} u_0(x,t) = A_0 + B_0 t, \\ u_n(x,t) = [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] \sin(k_n x), \\ k_n = \dfrac{\pi n}{l} - \text{ хвильові вектори}, \\ \omega_n = v k_n = \dfrac{v \pi n}{l} - \text{ власні частоти}, \\ n = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{5}$$