微积分第六章练习题（一）

Li Jiahong

2024 年 12 月

定义 1 (定积分)**.**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i,$$

其中 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{|\Delta x_i|\}$, 且 $x_i(i = 1, 2, \ldots, n-1), \xi_i(i = 1, 2, \ldots, n)$ 的取法不影响得到的定积分值.

将区间 $[a, b]$ 进行 n 等分, 则 $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}$, $x_i = a + \dfrac{i(b-a)}{n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. 若取 $\xi_i = x_i$, 则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{i(b-a)}{n}\right). \tag{1}$$

特别地, 取 $a = 0, b = 1$ 有

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right). \tag{2}$$

若取 $\xi_i = \dfrac{x_{i-1}+x_i}{2}$, $x_i = a + \dfrac{(2i-1)(b-a)}{2n}$, 则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{(2i-1)(b-a)}{2n}\right). \tag{3}$$

特别地, 取 $a = 0, b = 1$ 有

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\left(\frac{2i-1}{2n}\right). \tag{4}$$

习题 1. 计算极限 $L = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sqrt{1+\cos\dfrac{\pi}{n}} + \sqrt{1+\cos\dfrac{2\pi}{n}} + \cdots + \sqrt{1+\cos\dfrac{n\pi}{n}}\right)$.

解 应用 (1) 式, 取 $a = 0, b = \pi$, $x_i = \dfrac{i\pi}{n}$, $\xi_i = x_i$, 有

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^n\sqrt{1+\cos\frac{i\pi}{n}} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi\sqrt{1+\cos x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\pi\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sin\frac{x}{2}\Big|_0^\pi = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}.
\end{aligned}$$

习题 2. 计算极限 $L=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{\left(n+\sqrt{i}\right)^2}\ln\left(1+\dfrac{i}{n}\right)$.

解 夹挤准则. 由

$$\frac{i}{n^2}<\frac{i}{\left(n+\sqrt{i}\right)^2}<\frac{i}{\left(n+\sqrt{n}\right)^2},$$

有

$$A=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)<L<\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{\left(n+\sqrt{n}\right)^2}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)=B.$$

又由 (2) 式有

$$\begin{aligned}A&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)=\int_0^1 x\ln(1+x)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\left(x^2\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{1+x}\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\ln 2-\int_0^1\left(x-1+\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\ln 2-\left[\frac{1}{2}x^2-x+\ln(1+x)\right]\Big|_0^1\right)=\frac{1}{4},\end{aligned}$$

$$B=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\left(n+\sqrt{n}\right)^2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)=1\cdot A=\frac{1}{4},$$

因此 $L=\dfrac{1}{4}$.

习题 3. 计算极限 $L=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\arctan\dfrac{2k-n}{n}$.

解

$$\begin{aligned}L&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+\sqrt[3]{n}+100}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\arctan\left(2\frac{k}{n}-1\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\arctan\left(2\frac{k}{n}-1\right)\\&=\int_0^1\arctan(2x-1)\mathrm{d}x&&\text{(应用 (2) 式)}\\&\xlongequal{2x-1=t}\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\arctan t\,\mathrm{d}t=0.&&(\arctan t\text{ 为奇函数})\end{aligned}$$

习题 4. 计算极限 $L=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)\sin\dfrac{2k-1}{2n}$.

解 应用 (4) 式, 则有

$$\begin{aligned}L &= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2n}\sin\frac{2k-1}{2n}\\ &= 2\int_0^1 x\sin x\mathrm{d}x = 2(\sin x - x\cos x)\Big|_0^1 = 2(\sin 1-\cos 1).\end{aligned}$$

习题 5. 计算极限 $L=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}$.

解

$$\begin{aligned}L &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)}\\ &= \exp\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)\\ &= \exp\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x\\ &= \exp[(1+x)\ln(1+x)-(1+x)]\Big|_0^1 = \mathrm{e}^{2\ln 2-1} = \frac{4}{\mathrm{e}}.\end{aligned}$$

去掉积分号的两个方法:

定理 1 (变限积分求导公式)**.**

$$\left(\int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(t)\mathrm{d}t\right)' = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

定理 2 (定积分中值定理)**.** 设 $f(x)\in C[a,b]$, 则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$, 使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

习题 6. 计算极限 $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}(1-\sin 2t)^{1/t}\mathrm{d}t}{(\mathrm{e}^x-1)\ln(1+\arctan x)}$.

解

$$\begin{aligned}L &= \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}(1-\sin 2t)^{1/t}\mathrm{d}t}{x^2} && \text{(等价无穷小代换)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\sin 2x^2)^{1/x^2}(2x)}{2x} && \text{(洛必达法则)}\\ &= \lim_{x\to 0}(1-\sin 2x^2)^{1/x^2}\\ &= \exp\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin 2x^2)}{x^2}\\ &= \exp\lim_{x\to 0}\frac{-\sin 2x^2}{x^2} = \exp\lim_{x\to 0}\frac{-2x^2}{x^2} && \text{(等价无穷小代换)}\\ &= \mathrm{e}^{-2}.\end{aligned}$$

习题 7. 计算极限 $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\left(\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u}{x(1-\cos x)}$.

解

$$\begin{aligned}L&=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left(\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u}{\frac{1}{2}x^3}\\&\xlongequal{洛}\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t}{\frac{3}{2}x^2}\\&\xlongequal{洛}\lim_{x\to 0}\frac{2x\arctan(1+x^2)}{3x}\\&=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\arctan(1+x^2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

习题 8. 计算极限 $L=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x \mathrm{e}^t\sqrt{x-t}\mathrm{d}t}{\sqrt{x^3}}$.

解 首先有

$$\int_0^x \mathrm{e}^t\sqrt{x-t}\mathrm{d}t\xlongequal{\sqrt{x-t}=u}\int_{\sqrt{x}}^0 \mathrm{e}^{x-u^2}u(-2u\mathrm{d}u)=2\mathrm{e}^x\int_0^{\sqrt{x}}u^2\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u.$$

注意被积函数中不能含有 x. 于是

$$\begin{aligned}L&=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\mathrm{e}^x\int_0^{\sqrt{x}}u^2\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u}{x^{3/2}}=2\lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^x\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{\sqrt{x}}u^2\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u}{x^{3/2}}\\&\xlongequal{洛}2\lim_{x\to 0^+}\frac{x\mathrm{e}^{-x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{3}{2}\sqrt{x}}=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

习题 9. 设 $f(x)$ 可导, 且 $f(0)=0,f'(0)=0$, 求 $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t}{(1-\cos x)\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)}$.

解 为了准备应用洛必达法则, 先求出分子的导数:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t&\xlongequal{x^2-t^2=u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^2}^0\sqrt{x^2-u}f(u)\left(\frac{-\mathrm{d}u}{2\sqrt{x^2-u}}\right)\\&=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2}f(u)\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{2}f(x^2)(2x)=xf(x^2).\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}L&=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t}{\frac{1}{4}x^4}\\&\xlongequal{洛}\lim_{x\to 0}\frac{xf(x^2)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)}{x^2}\\&=f'(0)=0.\end{aligned}$$

习题 10. 设 $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$, $f(0) \neq 0$, 计算极限

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t}{\int_0^x xf(x-t)\mathrm{d}t}.$$

解

$$\begin{aligned}
L &\xlongequal{x-t=u} \lim_{x\to 0} \frac{\int_x^0 (x-u)f(u)(-\mathrm{d}u)}{x\int_x^0 f(u)(-\mathrm{d}u)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u - \int_0^x uf(u)\mathrm{d}u}{x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{xf(x) + \int_0^x f(u)\mathrm{d}u - xf(x)}{xf(x) + \int_0^x f(u)\mathrm{d}u} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{xf(x) + \int_0^x f(u)\mathrm{d}u} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{xf(\xi)}{xf(x) + xf(\xi)} \quad (\xi \text{ 介于 } 0 \text{ 和 } x \text{ 之间}) \quad (\text{定积分中值定理}) \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

习题 11. 设 $f(x) \in C[0,1]$, $f(x) = x^2 + 2\sqrt{x}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$, 求 $f(x)$.

解 设 $\int_0^f (x)\mathrm{d}x = A$, 题中式子两边取 $[0,1]$ 的定积分得

$$A = \int (x^2 + 2A\sqrt{x})\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{3}x^3 + 2A\frac{2}{3}x^{3/2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}A,$$

解得 $A = -1$, 故 $f(x) = x^2 - 2\sqrt{x}$.

习题 12. 连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x) - \cos^2 x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/4} f(2t)\mathrm{d}t$, 计算 $\int_0^{\pi/2} f(x)\mathrm{d}x$.

解 首先右侧令 $2t = x$ 得 $\int_0^{\pi/4} f(2t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} f(x)\mathrm{d}x$. 设 $\int_0^{\pi/2} f(x)\mathrm{d}x = A$, 两边取 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 的定积分得

$$A - \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2\pi}A\mathrm{d}x,$$

即

$$A - \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right)\vec{0}\pi/2 = \frac{A}{2\pi}x\Big|_0^{\pi/2},$$

即

$$A - \frac{\pi}{4} = \frac{A}{4},$$

解得

$$A = \frac{\pi}{3}.$$

习题 13. 设 $f(x)$ 连续, 且 $\int_0^x \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^{2x} - x^2 f'(0)$, 求 $f(x)$.

解 两边求导得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \mathrm{e}^{f(t)}\mathrm{d}t = \left[x\mathrm{e}^{2x} - x^2 f'(0)\right]',$$

即

$$\mathrm{e}^{f(x)} = (1+2x)\mathrm{e}^{2x} - 2f'(0)x,$$

解得

$$f(x) = \ln\left[(1+2x)\mathrm{e}^{2x} - 2f'(0)x\right],$$

求导得

$$f'(x) = \frac{4(1+x)\mathrm{e}^{2x} - 2f'(0)}{(1+2x)\mathrm{e}^{2x} - 2f'(0)x}.$$

于是 $f'(0) = 4 - 2f'(0)$, 解得 $f'(0) = \frac{4}{3}$, 代入得

$$f(x) = \ln\left[(1+2x)\mathrm{e}^{2x} - \frac{8}{3}x\right].$$

习题 14. 设 $f(x)$ 及其反函数 $\varphi(x)$ 都可导, 且满足 $\int_1^{f(x)} \varphi(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\left(x^{3/2} - 8\right)$, 求 $f(x)$.

解 两边对 x 求导得

$$\varphi(f(x))f'(x) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{1/2},$$

即

$$xf'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x},$$

即

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

于是

$$f(x) = \sqrt{x} + C, \quad \varphi(x) = (x-C)^2.$$

回代得

$$\int_1^{\sqrt{x}+C} (t-C)^2\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\left(x^{3/2} - 8\right),$$

令 $x = 0$ 则

$$\int_1^C (t-C)^2\mathrm{d}t = -\frac{8}{3},$$

即

$$\frac{1}{3}(t-C)^3\Big|_1^C = -\frac{8}{3},$$

即

$$0 - (1-C)^3 = -8,$$

解得 $C = -1$. 因此 $f(x) = \sqrt{x} - 1$.

习题 15. 设 $f(x)$ 连续, 且 $\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t = \frac{x^2}{3} - \frac{x}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x + 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$, 求 $f(x)$.

解 设 $xt = u$, 则

$$\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t = \int_0^x f(u)\frac{1}{x}\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u,$$

那么有

$$\int_0^x f(u)\mathrm{d}u = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x + 2x\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

设 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = A, \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = B$, 分别令 $x = 0, x = 1$ 得

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 f(u)\mathrm{d}u = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{B}{2}x^2 + 2Ax\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{B}{2} + 2A, \\ B &= \int_0^2 f(u)\mathrm{d}u = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{B}{2}x^2 + 2Ax\right)\Bigg|_0^2 = \frac{8}{3} - 2B + 4A, \end{aligned}$$

解得 $A = \frac{1}{3}, B = \frac{4}{3}$, 因此

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{B}{2}x^2 + 2Ax\right) = x^2 - Bx + 2A = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}.$$

定理 3 (定积分的保序性)**.** 若在 $[a,b]$ 上恒有 $f(x) \le g(x)$, 则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\mathrm{d}x,$$

当且仅当 $f(x) \equiv g(x)$ 时两定积分相等.

习题 16. 设 $I = \int_0^{\pi/4} \ln\sin x\mathrm{d}x$, $J = \int_0^{\pi/4} \ln\cot x\mathrm{d}x$, $K = \int_0^{\pi/4} \ln\cos x\mathrm{d}x$, 比较 I, J, K 的大小.

解 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 时, 有 $\sin x < \cos x < \cot x$, 故 $\ln\sin x < \ln\cos x < \ln\cot x$, 因此

$$I < K < J.$$

习题 17. 设 $M = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$, $N = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$, $K = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 + \sqrt{\cos x}\right)\mathrm{d}x$, 比较 M, N, K 的大小.

解 首先有

$$M = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 + \frac{2x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = x\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi.$$

由于 $\mathrm{e}^x \ge 1 + x$, 当且仅当 $x = 0$ 时取等, 则 $\frac{1+x}{\mathrm{e}^x} \le 1$, 故

$$N < \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}x = x\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi.$$

同理, 由于 $1+\sqrt{\cos x}\geq 1$, 当且仅当 $x=\pm\dfrac{\pi}{2}$ 时取等, 故 $K>\pi$. 因此

$$N<M=\pi<K.$$

习题 18. 设 $I_k=\int_0^{k\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\mathrm{d}x$, $k=1,2,3$, 比较 I_1,I_2,I_3 的大小.

解　作差得

$$I_2-I_1=\int_\pi^{2\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\mathrm{d}x<0,$$

故 $I_2<I_1$. 同理

$$I_3-I_1=\int_\pi^{3\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\mathrm{d}x>\int_\pi^{3\pi}\sin x\mathrm{d}x=0,$$

故 $I_3>I_1$. 因此

$$I_2<I_1<I_3.$$

习题 19. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续、单调不减且不等于常数，$I_1=\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$, $I_2=\dfrac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, 比较 I_1,I_2 的大小关系.

解　令 $F(x)=\int_a^x tf(t)\mathrm{d}t-\dfrac{a+x}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, 则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且

$$\begin{aligned}F'(x)&=xf(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{a+x}{2}f(x)=\frac{x-a}{2}f(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int_a^x[f(x)-f(t)]\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调不减且不等于常数, 有 $F'(x)>0$, 故 $F(b)>F(a)=0$, 即

$$\int_a^b tf(t)\mathrm{d}t>\frac{a+b}{2}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

因此 $I_1>I_2$.

习题 20. 设

$$\begin{cases}x=\cos t^2,\\ y=t\cos t^2-\displaystyle\int_0^{t^2}\frac{1}{2\sqrt{u}}\cos u\mathrm{d}u,\end{cases}$$

求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\sqrt{\pi/2}}$, $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\sqrt{\pi/2}}$.

解　首先有 $x'_t=-2t\sin t^2$. 由变限积分求导公式得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{t^2}\frac{1}{2\sqrt{u}}\cos u\mathrm{d}u=2t\frac{\cos t^2}{2t}=\cos t^2,$$

故

$$y'_t = \cos t^2 - 2t^2\sin t^2 - \cos t^2 = -2t^2\sin t^2.$$

由参数式函数求导公式得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y'_t}{x'_t} = t,$$

因此 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\sqrt{\pi/2}} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$. 再对 x 求导得

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{1}{-2t\sin t^2}.$$

因此 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\sqrt{\pi/2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

习题 21. 设函数 $y=y(x)$ 由方程

$$\begin{cases} x = t^2+t+1, \\ \displaystyle\int_1^y \mathrm{e}^{u^2}\mathrm{d}u + t\int_1^t \cos(ut)^2\mathrm{d}u = t^3, \end{cases}$$

所确定, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 首先有 $x'_t = 2t+1$. 由变限积分求导公式得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_1^{y(t)} \mathrm{e}^{u^2}\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{y^2(t)}y'(t) = y'_t\mathrm{e}^{y^2}.$$

又

$$t\int_1^t \cos(ut)^2\mathrm{d}u \xlongequal{v=ut} t\int_t^{t^2}\cos v^2\cdot\frac{1}{t}\mathrm{d}v = \int_t^{t^2}\cos v^2\mathrm{d}v,$$

故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t\int_1^t \cos(ut)^2\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_t^{t^2}\cos v^2\mathrm{d}v = 2t\cos t^4 - \cos t^2.$$

因此第二个式子对 t 求导得

$$y'_t\mathrm{e}^{y^2} + 2t\cos t^4 - \cos t^2 = 3t^2,$$

解得

$$y'_t = \frac{3t^2 - 2t\cos t^4 + \cos t^2}{\mathrm{e}^{y^2}},$$

故

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3t^2-2t\cos t^4+\cos t^2}{\mathrm{e}^{y^2}(2t+1)}.$$

习题 22. 证明方程 $\displaystyle\int_a^x \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^2}\mathrm{d}t + \int_b^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t^2}\mathrm{d}t = 0$ 在区间 (a,b) 内只有一个实根.

解 设 $F(x)=\int_a^x \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^2}\mathrm{d}t+\int_b^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t^2}\mathrm{d}t$, 则 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 且

$$F(a)=\int_b^a \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t^2}\mathrm{d}t<0,\quad F(b)=\int_a^b \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^2}\mathrm{d}t>0,$$

即 $F(a)F(b)<0$, 由零点存在定理知, $F(x)$ 在 (a,b) 内至少有一个实根. 又

$$F'(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{1+x^2}+\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+x^2}=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{1+x^2}>0,$$

故 $F(x)$ 在 (a,b) 内单增, 因此 $F(x)$ 在 (a,b) 内有且仅有一个实根.

习题 23. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且满足 $f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}} x\mathrm{e}^{1-x}f(x)\mathrm{d}x$ $(k>1)$, 证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=\left(1-\frac{1}{\xi}\right)f(\xi)$.

解 令 $x\mathrm{e}^{1-x}f(x)=F(x)$, 则 $F(1)=f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}F(x)\mathrm{d}x$, 由定积分中值定理知, 存在 $\eta\in\left[0,\frac{1}{k}\right]$, 使

$$f(1)=k\cdot\frac{1}{k}F(\eta)=F(\eta).$$

再由 Rolle 定理知, 存在 $\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$, 使 $F'(\xi)=0$, 即

$$\mathrm{e}^{1-\xi}f(\xi)-\xi\mathrm{e}^{1-\xi}f(\xi)+\xi\mathrm{e}^{1-\xi}f'(\xi)=0,$$

即

$$f'(\xi)=\left(1-\frac{1}{\xi}\right)f(\xi).$$

习题 24. 设在区间 $[a,b]$ 上函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 可积, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单调, $g(x)$ 恒大于零, 证明至少存在一点 $\xi\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x+f(x)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x.$$

解 不妨设 $f(x)$ 单增, 则有 $f(a)\le f(x)\le f(b)$, $x\in[a,b]$. 那么

$$f(a)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\le f(b)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

设

$$F(x)=\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t-f(a)\int_a^x g(t)\mathrm{d}t-f(b)\int_x^b g(t)\mathrm{d}t,$$

则

$$F(a)=\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t-f(b)\int_a^b g(t)\mathrm{d}t\le 0,$$
$$F(b)=\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t-f(a)\int_a^b g(t)\mathrm{d}t\ge 0.$$

若 $F(a)=0$ 或 $F(b)=0$, 则 a 或 b 就是所求的 ξ. 否则, 由于 $g(x)$ 可积, 有 $\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$ 和 $\int_x^b g(t)\mathrm{d}t$ 连续, 因此 $F(x)\in C[a,b]$. 由连续函数的零点存在定理知, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $F(\xi)=0$, 即

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x - f(b)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x.$$

习题 25. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且满足 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$, 证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使得 $\displaystyle\int_0^\xi f(x)\mathrm{d}x=0$.

解 设 $F(x)=\displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t$, 则

$$F(0)=0,\quad F(1)=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t-\int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t=0.$$

又 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 由 Rolle 定理知, 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得

$$\begin{aligned}F'(\xi)&=\left[\xi\int_0^\xi f(t)\mathrm{d}t-\int_0^\xi tf(t)\mathrm{d}t\right]'\\&=\int_0^\xi f(t)\mathrm{d}t+\xi f(\xi)-\xi f(\xi)=\int_0^\xi f(t)\mathrm{d}t=0.\end{aligned}$$

或令 $G(x)=\displaystyle\int_0^x\left[\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u$, 则 $G(0)=0$,

$$G(1)=u\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\bigg|_0^1-\int_0^1 uf(u)\mathrm{d}u=0.$$

接下来的步骤与上面 $F(x)$ 相同. 事实上由分部积分法可证明 $F(x)=G(x)$.