

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

Факультет физики

## Экзамен

«Оптика»



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

Москва  
2020

## Содержание

<b>1. Световой луч. Распространение световых лучей. Оптическая длина пути. Принцип Ферма, понятие таутохронизма в оптике. Законы отражения и преломления света.</b>	<b>5</b>
<b>2. Явление полного внутреннего отражения, его применения. Оптические элементы и приборы, работающие на явлении полного внутреннего отражения. Оптоволокно, типы оптоволокна.</b>	<b>7</b>
<b>3. Преломление на сферической поверхности. Фокусы сферической поверхности. Изображение предмета. Преломление в линзе. Общая формула линзы (выход). Фокусные расстояния тонкой линзы. Действительное и мнимое изображения. Линейное (поперечное) увеличение. Оптическая сила линз.</b>	<b>9</b>
3.1. Преломление на сферической поверхности . . . . .	10
3.2. Тонкие линзы . . . . .	11
<b>4. Аберрации оптических систем. Аберрации, обусловленные широкими пучками лучей. Коррекция сферической и хроматической аберрации.</b>	<b>14</b>
4.1. Аберрации оптических систем. . . . .	14
4.1.1. Классификация геометрических аберраций . . . . .	14
4.1.2. Сферическая аберрация . . . . .	15
4.1.3. Хроматическая аберрация . . . . .	16
4.2. Коррекция сферической и хроматической аберрации. . . . .	16
<b>5. Оптические инструменты. Микроскоп. Телескоп (труба Кеплера, труба Галилея). Угловое увеличение телескопа.</b>	<b>17</b>
5.1. Микроскоп . . . . .	17
5.2. Труба Кеплера . . . . .	18
5.3. Труба Галилея . . . . .	18
<b>6. Плоская монохроматическая волна. Представление монохроматических волн в комплексном виде. Сферическая и цилиндрическая волны. Сточие электромагнитные волны. Опыты Винера.</b>	<b>20</b>
<b>7. Линейно, циркулярно и эллиптически поляризованный свет. Поляризация естественного света. Степень поляризации. Поляризаторы. Закон Малюса</b>	<b>24</b>
7.1. Типы поляризации . . . . .	24
7.2. Степень поляризации . . . . .	25
7.3. Поляризаторы . . . . .	25
7.4. Закон Малюса . . . . .	25
<b>8. Оптические явления на границе раздела изотропных диэлектриков. Соотношения амплитуд падающей, отраженной и преломленной волн (формулы Френеля). Изменение фазы волны при отражении. Энергетические коэффициенты отражения и пропускания света. Коэффициент отражения для естественного света.</b>	<b>27</b>
8.1. Законы отражения и преломления . . . . .	27
8.2. Коэффициенты Френеля . . . . .	28

<b>9. Принцип суперпозиции и интерференция монохроматических волн. Интерференция плоской и сферической волн. Видность полос.</b>	<b>33</b>
9.1. Интерференция двух плоских монохроматических волн. Ширина полосы . . . . .	33
9.1.1. Ширина полосы . . . . .	33
9.2. Интерференция плоской и сферической монохроматических волн . . . . .	33
9.3. Видность . . . . .	34
<b>10. Понятие о когерентности. Частично когерентный свет. Основные интерференционные схемы. Интерференция плоских волн, пространственный период полос.</b>	<b>35</b>
10.1. Основные схемы . . . . .	35
<b>11. Временная когерентность. Интерференция немонохроматических волн. Время и длина когерентности. Соотношения между временем когерентности и шириной спектрального интервала.</b>	<b>38</b>
11.1. Интерференция немонохроматических волн . . . . .	38
11.1.1. Корегентность . . . . .	38
11.1.2. Время и длина когерентности . . . . .	38
11.1.3. Связь времени когерентности с шириной спектра . . . . .	38
11.2. Влияние немонохроматичности на наблюдаемое число интерференционных полос	39
<b>12. Пространственная когерентность. Интерференция квазимонохроматических волн протяженных источников света. Роль конечных размеров источника света. Интерференционная картина в схеме Юнга.</b>	<b>42</b>
12.1. Пространственная когерентность . . . . .	42
12.2. Интерференция квазимонохроматических волн протяженных источников света .	43
<b>13. Пространственная когерентность. Радиус пространственной когерентности, зависимость радиуса пространственной когерентности от угловых размеров источника света.</b>	<b>44</b>
<b>14. Интерферометр Майкельсона. Фурье-спектрометр. Применение интерферометров в научных исследованиях</b>	<b>48</b>
14.1. Интерферометр Майкельсона . . . . .	48
14.2. Фурье-спектрометр . . . . .	48
14.3. Применение интерферометров в научных исследованиях . . . . .	49
<b>15. Явление дифракции. Принципы Гюйгенса и Гюйгенса-Френеля. Понятие о теории дифракции Кирхгофа. Дифракция Френеля и дифракция Фраунгофера (ближняя и дальняя зоны дифракции). Волновой параметр.</b>	<b>51</b>
15.1. Понятие о теории дифракции Кирхгофа. . . . .	51
15.2. Дифракция Френеля. Ближняя зона дифракции . . . . .	52
15.3. Дифракция Фраунгофера. Дальняя зона дифракции . . . . .	52
15.4. Волновой параметр . . . . .	53
<b>16. Дифракция Френеля. Простейшие дифракционные задачи. Дифракция на круглом отверстии и круглом экране, спираль Френеля. Пятно Пуассона. Распределение освещенности в дифракционной картине в поперечном направлении и вдоль оси отверстия.</b>	<b>54</b>

<b>17. Дифракция Френеля на прямолинейном краю плоского экрана и щели. Зоны Шустера, спираль Корню.</b>	<b>60</b>
17.1. Дифракционная картина от прямолинейного края экрана . . . . .	62
<b>18. Дифракционная решетка. Амплитудные и фазовые дифракционные решетки. Дифракционная решетка как спектральный прибор. Разрешающая способность дифракционной решетки. Критерий Рэлея</b>	<b>65</b>
18.1. Дифракционная решетка . . . . .	65
18.2. Амплитудные и фазовые дифракционные решетки . . . . .	67
18.3. Дифракционная решетка как спектральный прибор . . . . .	67
18.4. Разрешающая способность дифракционной решетки . . . . .	68
18.5. Критерий Рэлея . . . . .	68
<b>19. Спектральный прибор и его основные характеристики - аппаратная функция, линейная дисперсия, разрешающая способность и область дисперсии.</b>	<b>70</b>
19.1. Дисперсионная область . . . . .	70
19.2. Угловая дисперсия . . . . .	70
19.3. Линейная дисперсия . . . . .	71
19.4. Разрешающая способность . . . . .	72
<b>20. Роль дифракции в приборах, формирующих изображение. Критерий Рэлея (применительно к формированию изображений). Дифракционный предел разрешения телескопа и микроскопа.</b>	<b>74</b>
<b>21. Элементы Фурье-оптики. Явление саморепродукции. Метод Рэлея. Фурье-плоскость. Теория Аббе формирования изображений. Принципы пространственной фильтрации (схема Катрона). Методы наблюдения фазовых объектов.</b>	<b>76</b>
21.1. Фурье-оптика . . . . .	76
21.2. Метод Рэлея . . . . .	76
21.3. Явление саморепродукции (эффект Талбота) . . . . .	76
21.4. Фурье-плоскость . . . . .	79
21.5. Теория Аббе формирования изображения . . . . .	79
21.6. Схема Катрона . . . . .	79
21.7. Методы наблюдения фазовых объектов . . . . .	79
<b>22. Зависимости показателя преломления и коэффициента поглощения от частоты. Дисперсионная формула Зелмеера. Фазовая и групповая скорости. Формула Рэлея.</b>	<b>82</b>
22.1. Зависимости показателя преломления и коэффициента поглощения от частоты . . . . .	82
22.2. Дисперсионная формула Зельмейера . . . . .	83
22.3. Фазовая и групповая скорость, формула Рэлея . . . . .	84
<b>23. Тепловое излучение. Излучательная и поглощающая способности вещества и их соотношение. Модель абсолютно черного тела. Закон Кирхгофа.</b>	<b>85</b>
<b>24. Рассеяние фотонов на свободных электронах - эффект Комптона. Давление света в рамках теории фотонов.</b>	<b>91</b>

<b>25. Двухуровневая система. Взаимодействие двухуровневой системы с излучением: спонтанные и вынужденные переходы. Коэффициенты Эйнштейна</b>	<b>93</b>
25.1. Вынужденное излучение . . . . .	94
25.2. Коэффициенты Эйнштейна . . . . .	94
<b>26. Люминесценция: виды люминесценции. Безызлучательные переходы, квантовый выход люминесценции. Фотолюминесценция жидкостей и твердых тел. Спектральный состав люминесценции. Правило Стокса.</b>	<b>97</b>
26.1. Люминесценция: виды люминесценции . . . . .	97
26.2. Безызлучательные переходы, квантовый выход люминесценции . . . . .	97
26.3. Фотолюминесценция жидкостей и твердых тел . . . . .	98
26.4. Спектральный состав люминесценции . . . . .	98
26.5. Правило Стокса . . . . .	98
<b>27. Рассеяние света, зависимость интенсивности рассеянного света от частоты(формула Рэлея) и угловая диаграмма рассеяния. Молекулярное рассеяние света. Рассеяние света в мелкодисперсных и мутных средах.</b>	<b>99</b>
27.1. Рассеяние света . . . . .	99
27.2. Молекулярное рассеяние . . . . .	99
27.3. Закон Рэлея . . . . .	99
27.4. Сечение рассеяния . . . . .	100
27.4.1. Излучение колеблющегося диполя . . . . .	100

# 1. Световой луч. Распространение световых лучей. Оптическая длина пути. Принцип Ферма, понятие таутохронизма в оптике. Законы отражения и преломления света.

**Световым лучом** мы будем называть некоторый конечный, но очень узкий пучок, который может существовать изолированно от других лучей.

Согласно **закону прямолинейного распространения света** световые лучи в прозрачной однородной среде распространяются прямолинейно. Согласно **закону о независимости световых пучков** распространение каждого светового луча не зависит от того, есть ли в среде иные световые лучи, или нет. Это разумеется, не совсем корректно: тогда бы не было явления интерференции, однако в рамках геометрической оптики мы этим явлением пренебрежем.

**Оптической длиной пути**  $\Delta$  между двумя точками мы назовем расстояние, на которое свет распространился бы в вакууме за время прохождения расстояния между этими двумя точками. Как известно, скорость света в вакууме есть максимальная достижимая скорость и является константой  $c$ , а скорость света в веществе равна:

$$v = \frac{c}{n} \quad (1)$$

где  $n$  — абсолютный показатель преломления среды, который и вводится, как отношение скорости света в вакууме к скорости света в этой среде.

Тогда на основании формулы (1) можем записать:

$$\Delta = nl$$

где  $l$  — расстояние между точками,  $n$  — абсолютный показатель преломления среды.

Указанная формула имеет обобщение на случай, когда показатель среды может зависеть от координаты, тогда:

$$\Delta = \int_a^b n dl \quad (2)$$

**Принцип Ферма.** *Луч движется из начальной точки в конечную по траектории, которая обеспечивает минимальную оптическую длину пути. Является постулатом.*

Из принципа Ферма в случае однородной среды логичным образом вытекает закон прямолинейного распространения света, упомянутый ранее.

**Закон отражения света.** *Луч падающий, луч отраженный и перпендикуляр, восстановленный из точки падения, лежат в одной полуплоскости. Угол падения равен углу отражения.*

**Закон преломления света.** *Луч падающий, луч преломленный и перпендикуляр, восстановленный в точке преломления, лежат в одной плоскости. Угол падения и угол преломления связаны следующим соотношением:  $n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \gamma$ , где  $n_1$  — абсолютный показатель преломления среды, из которой луч приходит,  $n_2$  — среды, в которую луч преломляется,  $\alpha$  — угол падения,  $\gamma$  — угол преломления.*

◀ Пусть глаз наблюдателя находится на высоте  $H$  над поверхностью некоего водоема, а точечный источник — на глубине  $h$  в этом водоеме на расстоянии  $S$  от места, где стоит наблюдатель (вдоль поверхности воды). Показатель преломления воздуха примем равным  $n_{\text{возд}} = 1$ , а показатель преломления воды —  $n$ , известный нам.

Пусть проекция отрезка  $BS$  на поверхность воды равна  $x$ . В таком случае:

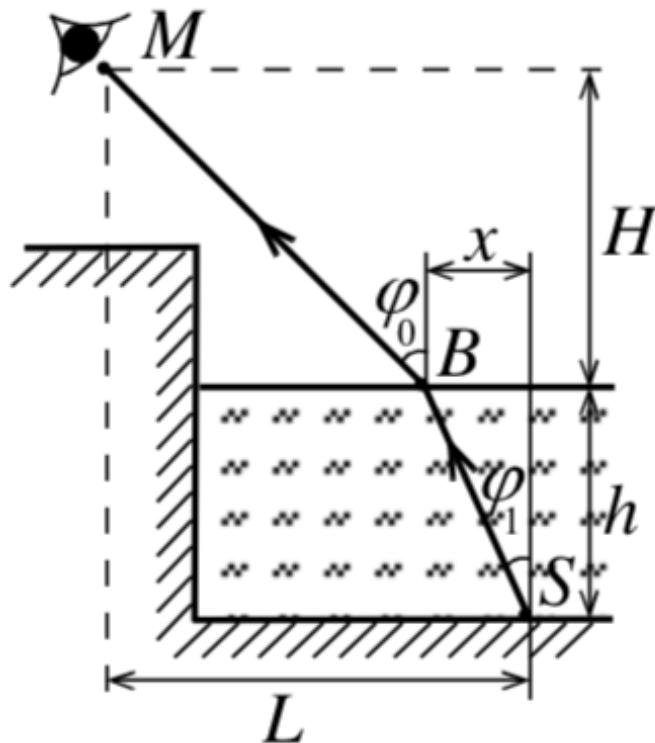
$$BS = \sqrt{h^2 + x^2},$$

$$MB = \sqrt{H^2 + (L - x)^2}$$

$$t = \frac{SB}{v} + \frac{MB}{c} = \left( n_1 \sqrt{h^2 + x^2} + \sqrt{H^2 + (L - x)^2} \right) / c$$

Согласно принципу наименьшего времени, полученное нами последнее выражение должно оказаться минимальным, другими словами  $\frac{dt}{dx} = 0$  или:

$$n_1 \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}} - \frac{L - x}{\sqrt{H^2 + (L - x)^2}} = 0$$



В то же время из рисунка мы однозначно можем утверждать:

$$\sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}}$$

$$\sin \gamma = \frac{L - x}{\sqrt{H^2 + (L - x)^2}}$$

Отсюда напрямую следует факт:

$n \sin \alpha = \sin \gamma$



## 2. Явление полного внутреннего отражения, его применения. Оптические элементы и приборы, работающие на явлении полного внутреннего отражения. Оптоволокно, типы оптоволокна.

Сначала наивное. Мы знаем формулу Снеллиуса  $\sin \theta = n_{21} \sin \theta'$ , где  $n_{21}$  – это относительная оптическая плотность. Если  $n_{21} < 1$  то должен существовать такой угол падения  $\arcsin n_{21}$  после которого не может уже существовать никакого прошедшего луча, а только отраженный. Так как свету некуда деться, кроме как отразиться, то он отражается полностью.

Теперь как это выглядит с точки зрения волновой оптики (Сивухин с 402)  
Пусть у нас есть падающая волна:

$$E^e = \mathcal{E} e^{i(\omega t - k_1 r)}$$

Мы из соображений геометрической оптики знаем, что должны быть еще отраженная ( $r$ ) и прошедшая ( $d$ ) волны:

$$E^r = \mathcal{R} e^{i(\omega t - k'_1 r)}$$

$$E^d = \mathcal{D} e^{i(\omega t - k_2 r)}$$

Мы предполагаем что они тоже плоские из соображений симметрии. Равенство частот у всех трех объясняется тем, что напряженности могут иметь только гармоническую зависимость от времени, а в случае наложения двух плоских полей с разными частотами такое не выполняется. Из соотношений симметрии надо заключить, что касательная к плоскости составляющая волнового вектора у всех трех волн одинаковая. В нашем случае это проекция на ось  $x$  (смотрите рисунок)

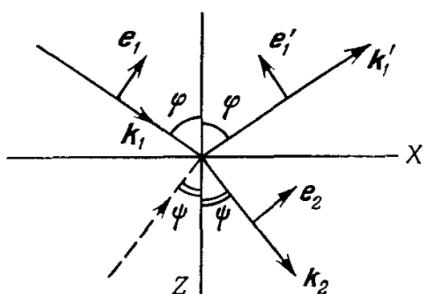


Рис. 238.

То есть:  $k_{1x} = k'_{1x} = k_{2x}$

Так же можем написать про волновые вектора:

$$k_1^2 = k_1'^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_1$$

$$k_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_2$$

Где эпсилон 1 и 2 это диэлектрическая проницаемость среды из которой пришел луч и в которую ушел соответственно. Отсюда можно узнать их z составляющие:

$$k'_{1z} = -\sqrt{k_1^2 - k_{1x}^2}$$

$$k_{2z} = \sqrt{k_2^2 - k_{1x}^2}$$

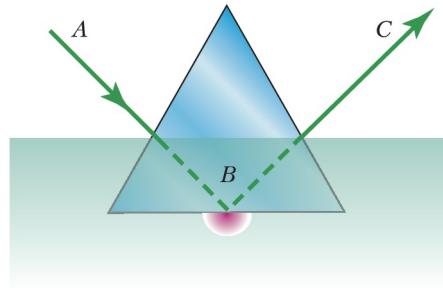
Так как нас волнует полное внутреннее отражение, то рассмотрим случай, когда  $k_2^2 < k_{1x}^2$  так как  $k_{1x} = k_1 \sin \varphi$ , то это условие равносильно условию  $\sin \varphi > \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = n_{21}$  так же как в геометрической оптике. Естественно чтобы такое условие вообще могло выполняться надо чтобы  $n_{21} < 1$ . В этом случае  $k_{2z}$  комплексный. Обозначим так:  $k_{2z} = \frac{-i}{2h}$  Почему минус? Потому что корень это функция многозначная и нужную ветвь мы выбираем исходя из физических требований, а тут нужен как раз минус. Со всем этим можем написать отраженную волну как:

$$E^d = \mathcal{D} e^{-z/2h} e^{i(\omega t - k_{1x}x)}$$

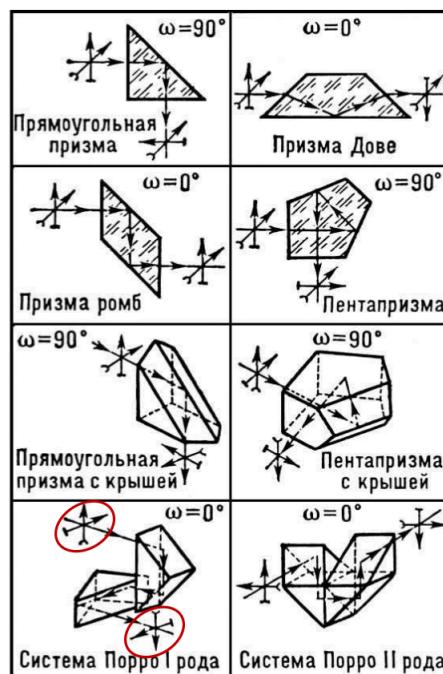
$$h = \frac{\lambda_1}{4\pi \sqrt{\sin^2 \varphi - n_{21}^2}}$$

То есть волна идет вдоль границы, но затухает вглубь вещества (см рисунок)

Рис. 1. Опыт Мандельштама и Селени



Эффект полного внутреннего отражения используется например в уголковых отражателях и во многих других призмах:



Оптоволокно это такая штука, в которой свет постоянно испытывает отражения от стенок. Состоит из двух слоев очевидно. Внешний имеет оптическую плотность больше. Заодно он защищает внутренний слой от повреждений. Сгибать сильно нельзя.

### 3. Преломление на сферической поверхности. Фокусы сферической поверхности. Изображение предмета. Преломление в линзе. Общая формула линзы (вывод). Фокусные расстояния тонкой линзы. Действительное и мнимое изображения. Линейное (поперечное) увеличение. Оптическая сила линз.

Сначала введём необходимые определения:

- 1) **Оптическая система** — совокупность оптических элементов (преломляющих, отражающих), созданная для преобразования световых пучков.
- 2) **Оптическая ось системы** — прямая линия, являющаяся осью симметрии преломляющих (отражающих) поверхностей. Она проходит перпендикулярно этим поверхностям через их центр кривизны.
- 3) **Центрированная оптическая система** — совокупность однородных преломляющих и отражающих сред, отделённых друг от друга симметричными поверхностями, центры кривизны которых находятся на одной прямой. Эту прямую называют *главной оптической осью системы*.
- 4) **Гомоцентрический пучок** — пучок, все образующие лучи которого при своём продолжении сходятся в одной точке. *Параллельный* пучок тоже считается гомоцентрическим, т.к. он исходит из бесконечно удалённой точки.
- 5) **Параксиальный пучок** — пучок, все образующие лучи которого распространяются вдоль оси центрированной оптической системы и образуют малые углы с осью и нормалями к преломляющим и отражающим поверхностям.
- 6) Пусть оптическая система преобразует свет, не нарушая гомоцентричности пучка, причём пучок лучей, исходящий из точки  $P$ , сходится в точке  $P'$ . Тогда точка  $P'$  — это **изображение** точки  $P$ .
- 7) Изображение называется **действительным**, если световые лучи от точки  $P$  сходятся к точке  $P'$  при своём распространении. Если же в точке  $P'$  сходятся продолжения лучей в направлении, обратном направлению распространения света, то изображение называется **мнимым**.
- 8) Пусть на оптическую систему падает пучок лучей, параллельных главной оптической оси. **Задний (второй главный) фокус** — это точка пересечения пучка таких лучей (или их продолжений) на выходе из системы.
- 9) Если на систему падает пучок лучей, исходящий из некоторой точки, и после прохождения оптической системы лучи идут параллельно главной оптической оси, исходная точка называется **передним (первым главным) фокусом**. Передний и задний фокусы всегда лежат на главной оптической оси.

- 10) **Линейное (поперечное) увеличение** — отношение линейных размеров изображения и предмета:

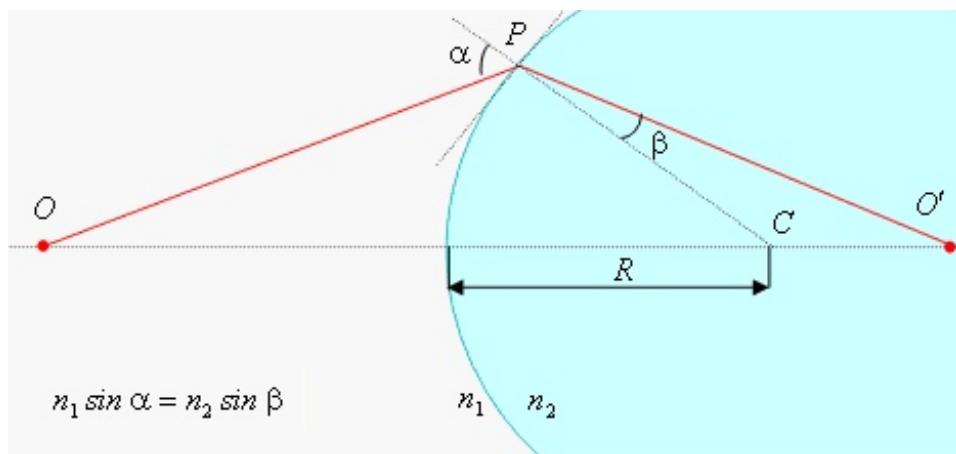
$$\beta = \frac{y'}{y}. \quad (3)$$

Отрезки  $y$  и  $y'$  считаются положительными, если они откладываются вверх от оптической оси, и отрицательными — в противном случае.

- 11) Если увеличение положительное, то изображение **прямое**. В противном случае изображение **обратное**.
- 12) Две сопряжённые плоскости, отображающиеся с линейным увеличением  $\beta = 1$ , называются **главными**. Точки пересечения главных плоскостей с главной оптической осью — **главные точки** оптической системы.
- 13) **Главные фокусные расстояния** — расстояния от главных точек до соответствующих фокусов. Эти расстояния считаются положительными, если свет идёт от главной плоскости к соответствующему главному фокусу (правило знаков).

### 3.1. Преломление на сферической поверхности

Пусть две среды с разными показателями преломления ( $n$  и  $n'$ ) отделены друг от друга сферической границей  $S$  радиуса  $R$ . Эта граница может рассматриваться как оптическая система, преобразующая падающее на неё излучение предмета. Считаем радиус сферы положительным, если её центр находится с той стороны, куда распространяются лучи.



Рассмотрим луч  $OP$ , выходящий из точки  $O$ , испытывающий преломление в точке  $P$  и пересекающий оптическую ось в точке  $O'$ . Проведём из центра сферы радиус  $CP$ . Он ортогонален поверхности сферы  $S$ , так что для углов  $\alpha$  и  $\beta$  можно записать закон Снеллиуса:

$$n \sin \alpha = n' \sin \beta. \quad (4)$$

Обозначим путь луча  $OP$  как  $u$ , а дальнейший путь  $PO'$  как  $u'$ . Найдём их связь из геометрических соображений:

$$S_{OPC} + S_{PCO'} = S_{O'PO},$$

$$\begin{aligned} S_{OPC} &= -\frac{1}{2}uR \sin \alpha, \\ S_{PCO'} &= \frac{1}{2}u'R \sin \beta, \\ S_{O'PO} &= -\frac{1}{2}uu' \sin(\pi - \alpha + \beta). \end{aligned}$$

Из этих равенств находим

$$-uR \sin \alpha + u'R \sin \beta = -uu' \sin(\alpha - \beta).$$

Подставляем (4) и находим

$$-u + u' \frac{n}{n'} = -\frac{uu'}{R} \left( \cos \beta - \cos \alpha \frac{n}{n'} \right),$$

или

$$\frac{n}{u} - \frac{n'}{u'} = \frac{n \cos \alpha - n' \cos \beta}{R}. \quad (5)$$

Это точное соотношение. В случае параксиальных пучков, для которых  $|\alpha| \ll 1$ ,  $|\beta| \ll 1$ , формула (5) принимает вид

$$\frac{n}{x} - \frac{n'}{x'} = \frac{n - n'}{R}, \quad (6)$$

где  $x$  — расстояние от точки  $O$  до поверхности сферы,  $x'$  — расстояние от точки  $O'$  до поверхности сферы. Знаки величин  $x$  и  $x'$  определяются так же, как и для  $u$  и  $u'$ , из того условия, что отсчёт расстояния ведётся от преломляющей поверхности *по направлению лучей*.

Подставив  $x = -\infty$  и  $x' = \infty$ , находим положение заднего и переднего фокусов соответственно:

$$\begin{aligned} f' &= x' = \frac{R}{1 - n/n'}, \\ f &= x = -R \frac{n/n'}{1 - n/n'}. \end{aligned}$$

### 3.2. Тонкие линзы

**Линза** — это прозрачное тело, изготовленное из прозрачного оптически однородного материала, ограниченное двумя полированными выпуклыми или вогнутыми поверхностями.

Точки пересечения поверхностей линзы с оптической осью называются *вершинами линзы*. Расстояние  $d$  между вершинами линзы называется *толщиной линзы*. Линза считается **тонкой**, если её толщина мала по сравнению с радиусами кривизны поверхностей:  $d \ll R_1$ ,  $d \ll R_2$ . Главные плоскости тонкой линзы совпадают.

Представим линзу как совокупность двух последовательных преломляющих поверхностей. Согласно (6), для первой поверхности имеем:

$$\frac{n_e}{x} - \frac{n_i}{x_1} = \frac{n_e - n_i}{R_1}.$$

Поскольку линза предполагается тонкой, то координата  $x_1$  промежуточного изображения одинакова относительно обеих поверхностей. Следовательно, для второй поверхности можем записать

$$\frac{n_i}{x_1} - \frac{n_e}{x'} = \frac{n_i - n_e}{R_2}.$$

Складывая эти равенства, получаем

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x'} = -(n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad (7)$$

Здесь мы перешли к относительному показателю преломления  $n = n_i/n_e$ .

Фокусные расстояния тонкой линзы:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f'} &= (n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \\ f &= -f'. \end{aligned}$$

Для двояковыпуклой (или *собирающей*) линзы  $R_1 > 0$ ,  $R_2 < 0$  и фокусное расстояние  $f' > 0$ ,  $f < 0$ . Для двояковогнутой (или *рассеивающей*) линзы всё ровным счётом наоборот.

Заметим, что соотношение (7) можно переписать как

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x'} = \frac{1}{f}. \quad (8)$$

Полученная формула называется **формулой тонкой линзы**.

**Оптическую силу линзы** определяют как величину, обратно пропорциональную фокусному расстоянию:

$$D = \frac{1}{f'}. \quad (9)$$

Для собирающих линз оптическая сила положительна ( $f' > 0$ ), а для рассеивающих — отрицательна ( $f' < 0$ ). Единица измерения оптической силы — *диоптрия* (оптическая сила такой системы, фокусное расстояние которой  $|f'|$  равно одному метру).

Оптическая сила аддитивна (в случае тонких линз).

123

## 4. Аберрации оптических систем. Аберрации, обусловленные широкими пучками лучей. Коррекция сферической и хроматической аберрации.

### 4.1. Аберрации оптических систем.

**Аберрации оптических систем** (лат. aberratio - уклонение), погрешности изображений, даваемых оптическими системами. Проявляются в том, что оптические изображения в ряде случаев не вполне отчётливы, не точно соответствуют объекту или оказываются окрашенными. Аберрации делят на *монохроматические (геометрические)* и *хроматические*, среди геометрических выделяют

- Сферическая аберрация
- Кома
- Астигматизм
- Дисторсия
- Кривизна поля (поверхности) изображения

#### 4.1.1. Классификация геометрических аберраций

Геометрические аберрации практически всегда являются учётом непараксиальности в ходе лучей. Произвольный луч в пространстве можно задать, указав прямоугольные координаты  $y$ ,  $z$ ,  $\eta$  и  $\zeta$  точек его пересечения с предметной плоскостью (т.е. плоскостью, проходящей через изображаемую точку  $P$  перпендикулярно к главной оптической оси) и плоскостью входного зрачка. После прохождения через оптическую систему луч пересечёт плоскость параксиального изображения в точке с координатами  $y'$  и  $z'$ . Координаты самого параксиального изображения (*параксиального фокуса*) –  $y'_0$ ,  $z'_0$ . Разности

$$\Delta y' = y' - y'_0 \quad \Delta z' = z' - z'_0$$

примем за меру отступления от предельного случая параксиальной оптики. Координаты  $y'$  и  $z'$  будут функциями  $y$ ,  $z$ ,  $\eta$  и  $\zeta$ :

$$y' = f_y(y, z, \eta, \zeta) \quad z' = f_z(y, z, \eta, \zeta)$$

Линейные члены разложений  $f_y$  и  $f_z$  не зависят от  $\eta$  и  $\zeta$  и соответствуют параксиальной оптике, члены чётных степеней не войдут в эти разложения в силу осевой симметрии оптической задачи. Поэтому  $\Delta y'$  и  $\Delta z'$  будут определяться третьими членами разложения  $f_y$  и  $f_z$  (поэтому часто рассматриваемые далее аберрации называются аберрациями третьего порядка).

Введём три вектора, перпендикулярных главной оптической оси системы:

$$\mathbf{r} = y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad \mathbf{r}' = y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k} \quad \boldsymbol{\sigma} = \eta\mathbf{j} + \zeta\mathbf{k}$$

Тогда вектор

$$\Delta\mathbf{r}' = \Delta y'\mathbf{j} + \Delta z'\mathbf{k}$$

может быть разложен по векторам  $\mathbf{r}$  и  $\boldsymbol{\sigma}$ . Причём в виду симметрии коэффициенты этих разложений могут зависеть только от «инвариантов вращения»  $\boldsymbol{\sigma}^2$ ,  $(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{r})$  и  $r^2$ :

$$\Delta\mathbf{r}' \approx (A\boldsymbol{\sigma}^2 + B(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{r}) + Cr^2)\boldsymbol{\sigma} + (D\boldsymbol{\sigma}^2 + E(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{r}) + Fr^2)\mathbf{r} \quad (10)$$

В дальнейшем под  $|\boldsymbol{\sigma}|$  понимается радиус входного зрачка. Аберрационной кривой называют кривую, по которой плоскость параксиального изображения пересекает пучок лучей, проведённых из точки-объекта  $P$  через окружность входного зрачка. Изображением вместо точки теперь окажется область, ограниченная аберрационной кривой.

Каждый из постоянных коэффициентов  $A, B, C, D, E$  и  $F$  в уравнении (10) определяется конфигурацией оптической системы и отвечает за конкретный тип аберрации. Аберрация определяемая членом  $A\boldsymbol{\sigma}^2\boldsymbol{\sigma}$  называется [сферической](#). Членам  $B(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{r})\boldsymbol{\sigma} + D\boldsymbol{\sigma}^2\mathbf{r}$  соответствует [кома](#). Членам  $Cr^2\boldsymbol{\sigma} + E(\boldsymbol{\sigma}r)\mathbf{r}$  – [астигматизм](#) косых лучей и [искривление плоскости изображения](#). Члену  $Fr^2\mathbf{r}$  соответствует [дисторсия](#).

#### 4.1.2. Сферическая аберрация

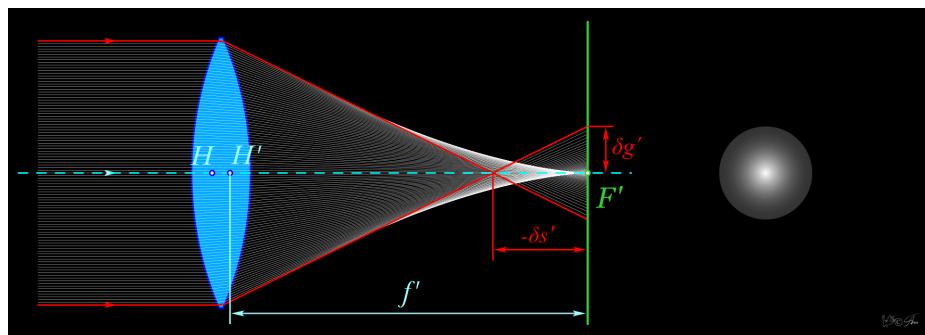


Рис. 2. Схема сферической аберрации, где  $H, H'$  – положения главных плоскостей;  $F'$  – задняя фокальная плоскость;  $f'$  – заднее фокусное расстояние;  $-\delta s'$  – продольная сферическая аберрация;  $\delta g' = \Delta r'$  – поперечная сферическая аберрация.

**Сферическая аберрация** – аберрация оптических систем из-за несовпадения фокусов для лучей света, проходящих на разных расстояниях от оптической оси (см. рис. 2.). Так как сферическая аберрация отвечает члену  $A\boldsymbol{\sigma}^2\boldsymbol{\sigma}$ , то если в системе есть только этот тип аберрации ( $|B|, |C|, |D|, |E|, |F| \approx 0 \ll |A|$ ), то

$$|\Delta r'| = A\sigma^3 = \text{const}$$

Значит аберрационной кривой является окружность (радиус которой пропорционален кубу входного зрачка), а изображение – круглое пятнышко, ограниченное этой окружностью (см. рис. 1).

В результате сферической аберрации цилиндрический пучок лучей, после преломления линзой (в пространстве изображений) получает вид не конуса, а некоторой воронкообразной фигуры, наружная поверхность которой, вблизи узкого места, называется каустической поверхностью. При этом изображение

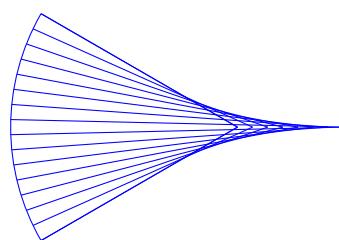


Рис. 3. Каустика – огибающая лучей от фронта

точки имеет вид диска с неоднородным распределением освещённости, а форма каустической кривой позволяет судить о характере распределения освещённости. В общем случае, фигура рассеяния, при наличии сферической aberrации, представляет собой систему концентрических окружностей с радиусами пропорциональными третьей степени координат на входном (или выходном) зрачке.

Сферическая aberrация линзы (системы линз) объясняется тем, что её преломляющие поверхности встречают отдельные лучи сколько-нибудь широкого пучка под различными углами. Вследствие чего, более удалённые от оптической оси лучи преломляются сильнее, нежели нулевые лучи, и образуют свои точки схода удалённые от фокальной плоскости.

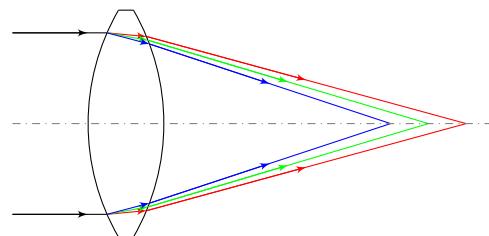


Рис. 4. Пример хроматической aberrации.

#### 4.1.3. Хроматическая aberrация

Если используется белый свет, то в изображении возникают дополнительные aberrации. Это связано с тем, что показатель преломления зависит от длины волны (дисперсия света). Поэтому оптическая система даёт не одно, а множество монохроматических изображений, отличающихся друг от друга по величине и расположению. Результирующее же изображение, получающееся от наложения таких монохроматических изображений, оказывается нерезким и с окрашенными краями. Это явление и называется *хроматической aberrацией* (например рис. 4).

### 4.2. Коррекция сферической и хроматической aberrации.

И сферическая и хроматическая aberrации могут быть с той или иной мерой точно откорректированы путём комбинации линз (например, рис. 5).

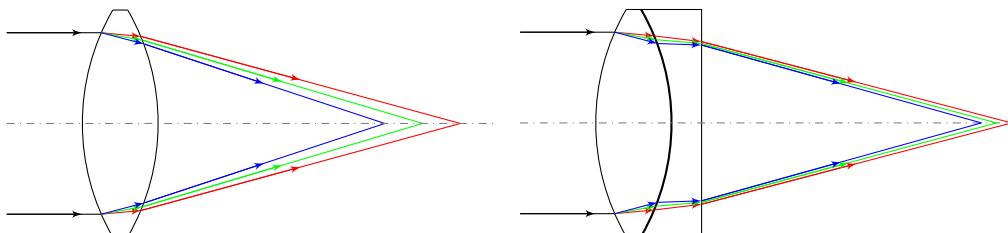


Рис. 5. Пример коррекции хроматической aberrации на собирающей линзе при помощи рассеивающей линзы.

5. Оптические инструменты. Микроскоп. Телескоп (труба Кеплера, труба Галилея). Угловое увеличение телескопа.

5.1. Микроскоп

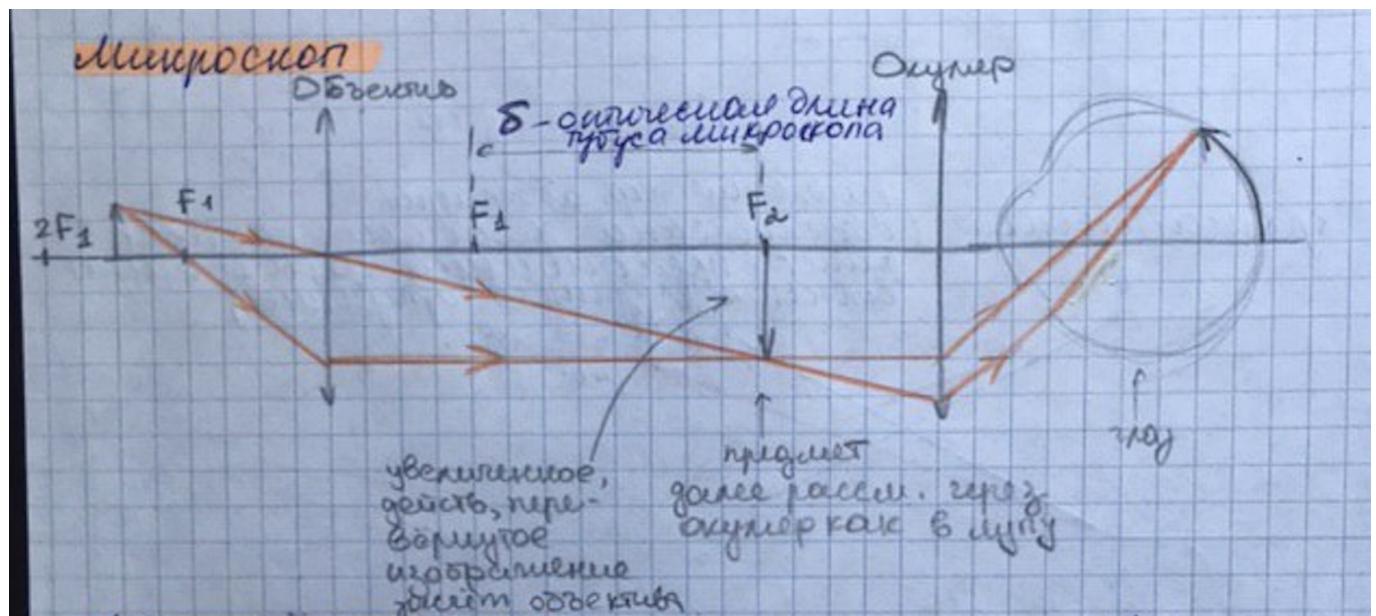


Рис. 6. Микроскоп. Извините, я усталъ.

## 5.2. Труба Кеплера

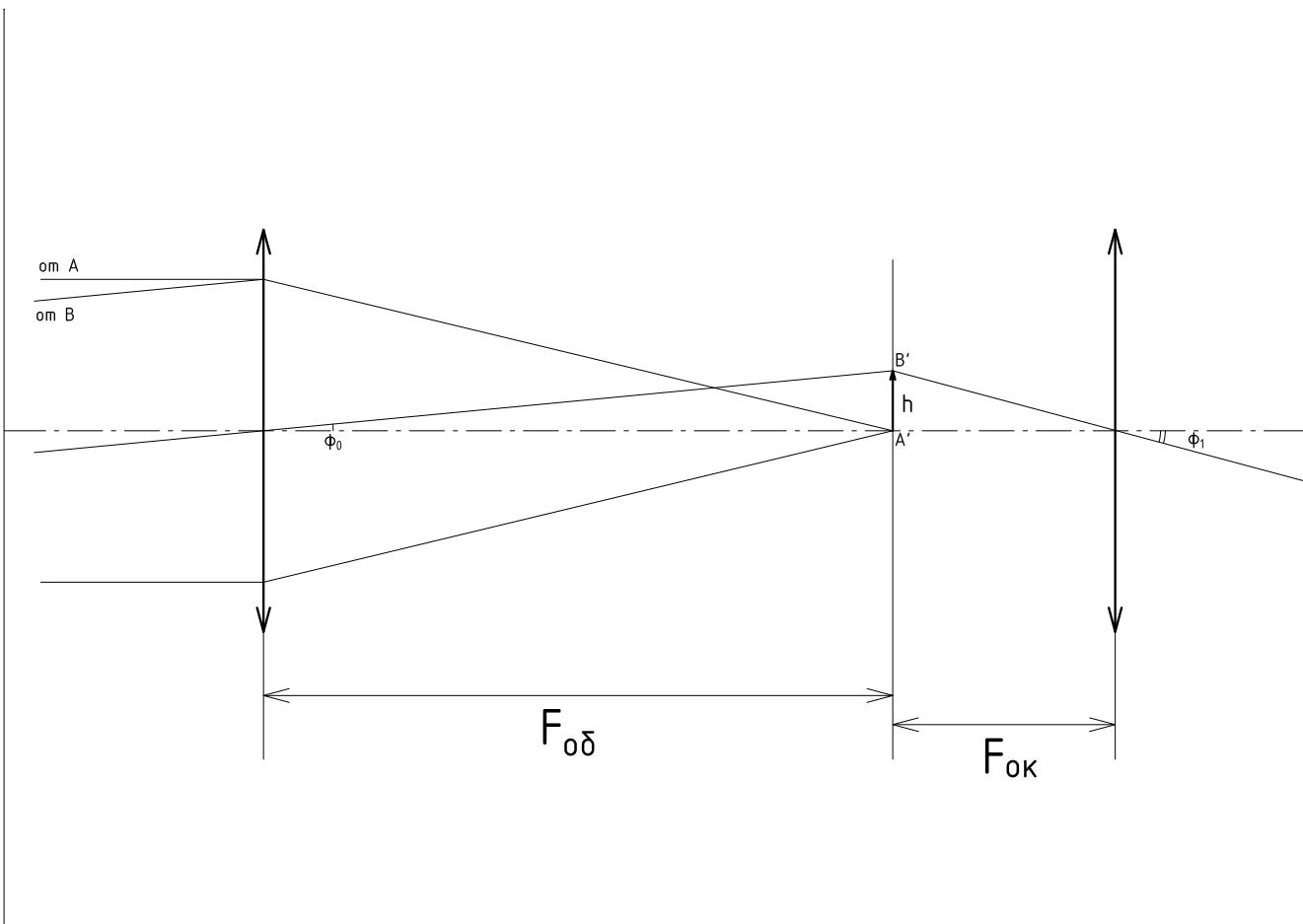


Рис. 7. Труба Кеплера

Из подобия мы сразу можем заявить:

$$\frac{D_{об}}{F_{об}} = \frac{D_{ок}}{F_{ок}}$$

Где \$D\$ — диаметр.

Пусть мы наводимся на далекий объект (луна, например). Рассмотрим два пучка от точки \$A\$ и \$B\$ соответственно. При прохождении через первую линзу они дадут изображение \$A'B'\$ в фокальной плоскости, пусть его высота \$h\$. Затем луч от точки \$B\$ выйдет из второй линзы (окуляра) под углом \$\varphi\_1\$. Введем **угловое увеличение телескопа** \$\gamma\$:

$$\gamma = \frac{\tg \varphi_1}{\tg \varphi_0} = \frac{h/F_{ок}}{h/F_{об}} = \frac{F_{об}}{F_{ок}} = \frac{D_{об}}{D_{ок}}$$

## 5.3. Труба Галилея

В случае трубы Галилея ситуация ровно такая же, как в случае трубы Кеплера, однако линза окуляра рассеивающая, а не собирающая. Из-за этого фокус объектива должен совпасть с **задним** фокусом окуляра (см. рисунок). Больше от этого ничего не меняется.

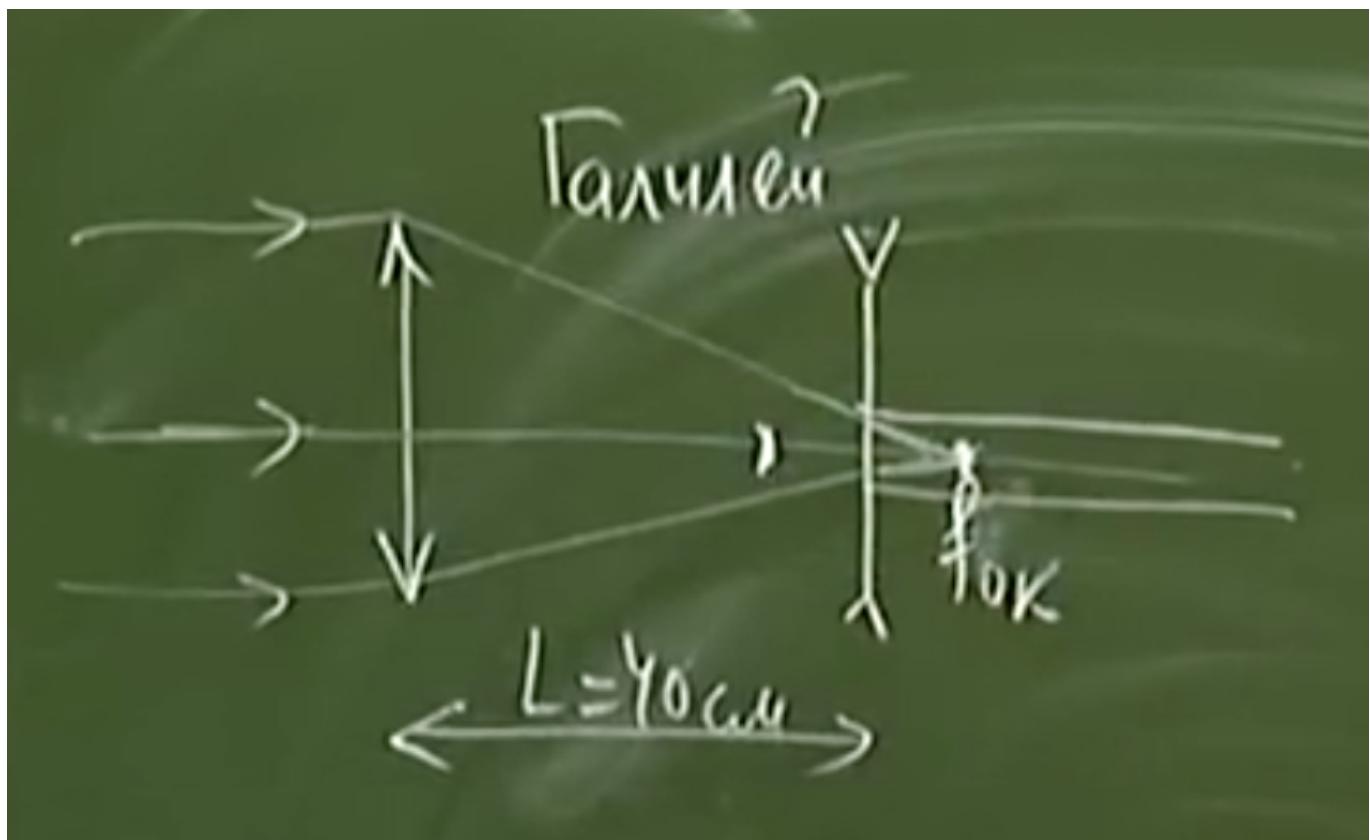


Рис. 8. Труба Галилея

## 6. Плоская монохроматическая волна. Представление монохроматических волн в комплексном виде. Сферическая и цилиндрическая волны. Стоячие электромагнитные волны. Опыты Винера.

(ЛЛ2 §46 и дальше)

### Плоские волны

Стартуем с обычного волнового уравнения:

$$\Delta A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} A = 0$$

Где  $A$  - это вектор потенциал, так же помним что такое уравнение было получено при калибровке  $\operatorname{div} A = 0$ . Понятно, что для напряженности электрического и магнитного поля верны такие же уравнения. Хотим изучать плоские волны, это значит, что вектор потенциал может зависеть только от одной координаты. Для определенности это  $x$ . Тогда уравнение выглядит так:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} = 0 \quad (11)$$

Калибровочное условие превращается в  $\frac{\partial}{\partial x} A_x = 0$ , значит  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} A_x = 0$ . Отсюда логично заключить, что  $x$  компонента потенциала либо линейна по времени, либо ее нет. Первое означало бы наличие постоянного электрического поля, что никакого отношения к волнам не имеет. Значит  $A_x = 0$ . То есть вектор потенциал всегда лежит в плоскости перпендикулярной направлению движения. Для любого, кто читал конспект по матфизу очевидно, что решением уравнения (11) будет любая функция  $\vec{A}(t - \frac{x}{c})$  понятно что волна еще может лететь влево, но опустим это, там все то же самое. Из этого решения следует, что

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial x} \quad (12)$$

Пока запомним это. Теперь вычислим  $E$  и  $H$ , помня, что вектор потенциал зависит только от  $x$

$$\begin{aligned} \vec{H} &= -\vec{e}_y \partial_x A_z + \vec{e}_z \partial_x A_y \\ \vec{E} &= -\frac{1}{c} \vec{e}_y \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{1}{c} \vec{e}_z \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \vec{E} \cdot \vec{H} &= -\frac{1}{c^2} \partial_x A_y \partial_x A_z + \frac{1}{c^2} \partial_x A_y \partial_x A_z = 0 \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались формулой (12). Теперь мы знаем, что в любой плоской волне электрическое поле перпендикулярно электрическому. И лежат они в одной плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны. Кстати, по модулю они равны, что видно из уравнений выше. Так что можно смело написать:

$$S = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \cdot \vec{H}] = \frac{cE^2}{4\pi} \vec{n} = \frac{cH^2}{4\pi} \vec{n}$$

Где вектор  $\vec{n}$  единичный в направлении распространения.

Что такое монохроматическая волна? Это когда  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} = -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{A}$ , фактически фурье компонента. Если подставить это в уравнение (11), то получим обычное уравнение на гармонический осциллятор для координаты. Значит итоговое решение будет:

$$\vec{A} = \text{Re}\{\vec{A}_0 e^{-i\omega(t-x/c)}\}$$

Действительную часть мы взяли потому, что поля не бывают комплексными. А вот  $A_0$  бывает. Поэтому правильным выбором  $A_0$  волну можно сделать любой комбинацией синусов и косинусов которая нужна. Если взять от этой штуки частную производную по времени, что получить поле не сложно:

$$\vec{E} = \text{Re}\{\vec{E}_0 e^{-i\omega(t-x/c)}\}$$

Введя вектор  $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n}$  можно отвязаться от координат и просто написать

$$\vec{E} = \text{Re}\{\vec{E}_0 e^{i(kr-\omega t)}\}$$

Обычно взятие действительной части опускают. Так пока мы совершаем линейные операции с полями нам это не важно.

## Сферические и цилиндрические волны

Для простоты рассмотрим только монохроматические. Сферические волны это когда зависимость есть только от расстояния до начала координат. Вспоминая как выглядит оператор лапласа в сферике (например в вики) и быстро решая уравнение получаем (Re опустил):

$$A = A_0 \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}$$

Теперь пишем дифур на цилиндрические волны. **Здесь  $r$  - расстояние до оси**

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \partial_r(r \partial_r f) + k^2 f &= 0 \\ x = rk & \\ f'' + \frac{1}{x} f' + f &= 0 \end{aligned}$$

А это уравнение на функцию Бесселя. Конечно есть еще функция Неймана, но нам надо чтобы в нуле значение было конечным, а функция Неймана этого не дает. Итого решение пропорционально такой штуке:  $J_0(kr)e^{-i\omega t}$  на больших временах можно написать асимптотику:

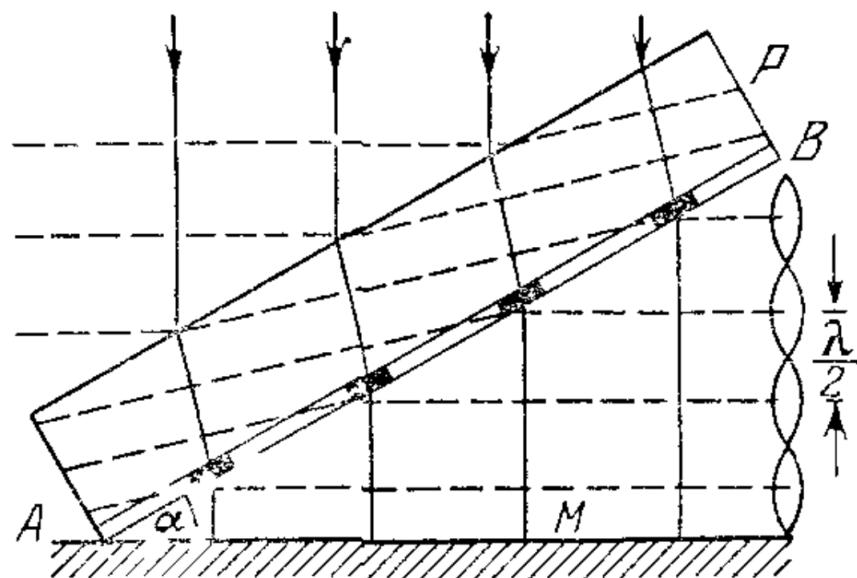
$$A_0 \frac{e^{i(kr-\omega t-\pi/4)}}{\sqrt{r}}$$

## Стоячие волны и опыт Винера

Если есть две одинаковые волны  $e^{i(kr-\omega t)}$   $-e^{i(-kr-\omega t)}$ , идущие в разных направлениях (например после отражения), то их можно сложить и получить  $2 \cos \omega t \cos kr$

Но физически мы можем заметить только квадрат амплитуды. Ну тут видно, что после усреднения по времени мы будем наблюдать серию кучностей на расстоянии по  $\lambda/2$  друг от друга. Проблема в их наблюдении это малая длина волны. Вот что придумал Винер.

Берем фоточувствительную пластинку и ставим ее под малым углом к зеркалу. Освещаем зеркало монохроматическим светом на наблюдаем тучности непосредственно



Расстояние между ними по прямой будет  $\frac{\lambda}{2 \sin \alpha}$ , то есть зная синус наклона можно узнать и длину волны.

123

## 7. Линейно, циркулярно и эллиптически поляризованный свет. Поляризация естественного света. Степень поляризации. Поляризаторы. Закон Малюса

*Поляризацией* называется характеристика векторных волновых полей, описывающая поведение вектора колеблющейся величины в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны.

*Плоскостью поляризации* называется плоскость, построенная на векторах  $(E, k)$ .

### 7.1. Типы поляризации

Плоская волна называется *линейно поляризованной*, если ориентация плоскости поляризации не меняется во времени, то есть вектор напряженности электрического поля  $E$  всегда лежит в одной и той же плоскости, содержащей вектор  $k$ .

В естественном (неполяризованном) свете плоскость поляризации меняется случайным образом (при этом вектор  $E$  остается перпендикулярным волновому вектору  $k$ ).

Выберем систему координат таким образом, что вектор  $k$  направлен вдоль оси  $z$ , а вектор  $E$  лежит в плоскости  $(x, y)$ . Пусть частота колебаний поля равна  $\omega$ . Тогда для компонент поля можно записать выражения

$$E_x = E_{x0} \cos(\omega t + \varphi_x)$$

$$E_y = E_{y0} \cos(\omega t + \varphi_y)$$

Если разность фаз этих величин равна

$$\delta = \varphi_x - \varphi_y = 0, \pm\pi,$$

то вектор  $E$  совершаеет колебания вдоль фиксированной прямой. Этот случай отвечает линейно поляризованной волне.

Если сдвиг фаз колебаний проекций отличается, то вектор  $E$  совершает вращение. В этом случае говорят, что свет имеет *эллиптическую поляризацию*. Получим уравнение кривой, описываемой концом вектора  $E$ :

$$\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)^2 - 2 \frac{E_x}{E_{x0}} \frac{E_y}{E_{y0}} \cos \delta = \sin^2 \delta.$$

Здесь  $\delta = \varphi_x - \varphi_y$  для сдвига фаз колебаний проекций  $E_x$  и  $E_y$ .

Если окажется

$$\delta = \varphi_x - \varphi_y = \pm \frac{\pi}{2}, E_{x0} = E_{y0},$$

то описываемая вектором  $E$  кривая есть окружность. В этом случае говорят о *круговой поляризации*.

Круговая поляризация бывает двух типов - *левая* и *правая*. Если смотреть навстречу волновому вектору, то левой поляризации отвечает вращение вектора  $E$  *против часовой стрелки*. В случае правой поляризации вектор  $E$  вращается *по часовой стрелке*.

## 7.2. Степень поляризации

Говорят, что свет *частично поляризован*, если он представляет собой смесь полностью поляризованного и естественного (неполяризованного) излучения. Пусть интенсивности этих компонент равны соответственно  $I_{\text{пол}}$  и  $I_{\text{ест}}$ . Тогда суммарная интенсивность составляет

$$I_0 = I_{\text{пол}} + I_{\text{ест}}.$$

*Степенью поляризации излучения называется отношение*

$$P = \frac{I_{\text{пол}}}{I_0} = \frac{I_{\text{пол}}}{I_{\text{пол}} + I_{\text{ест}}}.$$

## 7.3. Поляризаторы

*Поляризатором* называют прибор, предназначенный для получения полностью или частично поляризованного оптического излучения.

Действие поляризаторов, создающих линейно поляризованный свет, основано, в частности, на следующий явлений:

- 1) линейный дихроизм,
- 2) поляризация при отражении,
- 3) поляризация при рассеянии,
- 4) двойное лучепреломление.

## 7.4. Закон Малюса

Найдем интенсивность волны, прошедшей через поляроид. Для этого разложим вектор  $\mathbf{E}$  на две компоненты - вдоль и поперек оси поляроида.

$$E_z = E \cos \varphi, E_x = E \sin \varphi$$

Через поляроид пройдет волна с поляризацией  $E_z$ . Другая же волна (с поляризацией  $E_x$ ) полностью поглощается веществом. В итоге через поляроид проходит свет, поляризованный вдоль оси поляроида, причем его интенсивность ( $I_{\text{прош}} \sim E_z^2$ ) равна

$$I_{\text{прош}} = I_0 \cos^2 \varphi,$$

$I_0 \sim E^2 = E_x^2 + E_z^2$  - интенсивность волны, падающей на поляроид. Это соотношение называется законом Малюса.

123

## 8. Оптические явления на границе раздела изотропных диэлектриков. Соотношения амплитуд падающей, отраженной и преломленной волн (формулы Френеля). Изменение фазы волны при отражении. Энергетические коэффициенты отражения и пропускания света. Коэффициент отражения для естественного света.

При падении плоской волны на границу раздела двух изотропных диэлектриков, появляется две волны: преломленная (которая проходит границу раздела сред) и отраженная (не проходит), которые создаются за счет колебаний в диэлектриках, возбуждаемых падающей волной. Сразу быстро получим законы отражения и преломления.

### 8.1. Законы отражения и преломления

Пусть падающая волна имеет следующий вид:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

В таком случае, из-за того, что колебания являются вынужденными, мы можем сказать, что  $\omega = \omega_r = \omega_t$ .

Кроме того, как мы знаем из курса электричества, существует уравнение на граничное условие для вектора  $E$ , которое в нашем случае принимает вид (для тангенциальных компонент):

$$E_\tau + E_{r\tau} = E_{t\tau}$$

Возьмем любую точку на линии границы сред. В таком случае:

$$A_1 e^{i\vec{k}\vec{x}} + B_1 e^{i\vec{k}_r \vec{x}} = C_1 e^{i\vec{k}_t \vec{x}}$$

Это в свою очередь значит, что должны быть равны между собой величины, стоящие в показателе экспоненты. С учетом того, как мы ввели углы, получаем:

$$k \sin \varphi = k_r \sin \varphi_r = k_t \sin \varphi_t \quad (13)$$

При этом, как мы знаем,  $k$  зависит от свойств среды, поэтому для падающей волны и отраженной:

$$k = k_r = \frac{w}{c} \sqrt{\mu \epsilon}$$

А для преломленной:

$$k_t = \frac{w}{c} \sqrt{\mu' \epsilon'}$$

Тогда из уравнения 13 получаем:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_r \\ \frac{\sin \varphi_t}{\sin \varphi} &= \frac{k}{k_t} = \frac{\sqrt{\epsilon \mu}}{\sqrt{\epsilon' \mu'}} = \frac{n}{n'} \end{aligned}$$

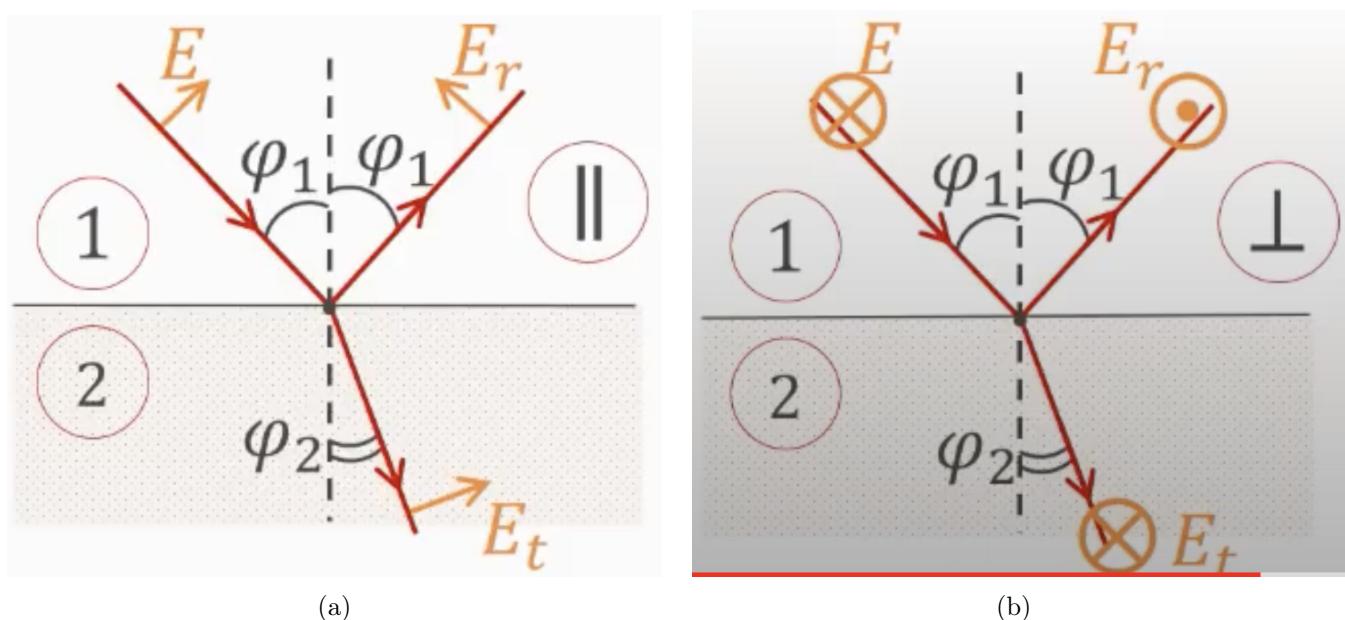
## 8.2. Коэффициенты Френеля

Разложим падающую волну  $\vec{E}$  по двум составляющим: в плоскости, параллельной плоскости рисунка, и в плоскости, перпендикулярной ( $E_{\parallel}$  и  $E_{\perp}$  соответственно). Мы имеем следующие граничные условия:

$$E_{\tau} + E_{r\tau} = E_{t\tau}$$

$$H_{\tau} + H_{r\tau} = H_{t\tau}$$

Мы также знаем соотношение, связывающее между собой  $H$  и  $E$ :  $H = \sqrt{\epsilon}E$  (пренебрегаем магнитными свойствами сред и считаем  $\mu = 1$ , а также не забываем, что  $\vec{H} \perp \vec{E}$ ). Также вспоминаем, что  $n = \sqrt{\epsilon}$ . Тогда граничные условия принимают вид (с учетом проекций, см. рисунок):



$$\left\{ \begin{array}{l} E \cos \varphi_1 - E_r \cos \varphi_1 = E_t \cos \varphi_2 \\ n_1 E + n_1 E_r = n_2 E_t \\ \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{n_2}{n_1} \end{array} \right. \quad \text{— для параллельной}$$
  

$$\left\{ \begin{array}{l} E - E_r = E_t \\ n_1 E \cos \varphi_1 + n_1 E_r \cos \varphi_1 = n_2 E_t \cos \varphi_2 \\ \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{n_2}{n_1} \end{array} \right. \quad \text{— для перпендикулярной}$$

Решив эту систему уравнений, мы получаем следующее:

$$\begin{cases} E_r = \frac{\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_2)}{\operatorname{tg}(\varphi_1 + \varphi_2)} E \\ E_t = \frac{2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} E \end{cases} \quad \text{— для параллельной}$$

$$\begin{cases} E_r = \frac{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)} E \\ E_t = \frac{2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)} E \end{cases} \quad \text{— для перпендикулярной}$$

Можно сразу же ввести энергетические коэффициенты отражения и пропускания света:

$$R_{\parallel} = \left( \frac{E_r}{E} \right)^2 = \frac{\operatorname{tg}^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{\operatorname{tg}^2(\varphi_1 + \varphi_2)} \quad T_{\parallel} = 1 - R_{\parallel}$$

$$R_{\perp} = \left( \frac{E_{\perp}}{E} \right)^2 = \frac{\sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)}{\sin^2(\varphi_2 + \varphi_1)} \quad T_{\perp} = 1 - R_{\perp}$$

123

123

123

123

## 9. Принцип суперпозиции и интерференция монохроматических волн. Интерференция плоской и сферической волн. Видность полос.

**Принцип суперпозиции.** Если в одной точке пространства накладываются колебания двух волн, то они порождают новую волну, равную их векторной сумме.

Из-за наличия принципа суперпозиции возможно явление интерференции, когда волны взаимно усиливают друг друга, или же наоборот, гасят.

**Монохроматическая волна** — волна, в спектр которой входит только одна частота.

### 9.1. Интерференция двух плоских монохроматических волн. Ширина полосы

Рассмотрим сперва интерференцию двух плоских монохроматических волн. Пусть распространяются две волны с одинаковой частотой  $\omega$ :

$$\begin{aligned} E_1 &= a_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r}_1 - \varphi_1)} \cdot e^{-i\omega t} \\ E_2 &= a_2 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r}_2 - \varphi_2)} \cdot e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

Как мы знаем, сами по себе волны складываются. Посмотрим теперь за интенсивностью  $I$ , которую мы запишем как  $I = EE^*$ . Распишем суммарную интенсивность (принимаем во внимание, что временная часть в экспоненте одинаковая у всех, поэтому она сократится при произведении с комплексно сопряженным и поэтому следить за ней не будем):

$$\begin{aligned} I_{\Sigma} &= (E_1 + E_2)(E_1 + E_2)^* = E_1 E_1^* + E_1 E_2^* + E_2 E_1^* + E_2 E_2^* = \\ &= a_1^2 + 2a_1 a_2 \cos(k\Delta - \Delta\varphi) + a_2^2 = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(k\Delta - \Delta\varphi) \end{aligned}$$

Здесь мы ввели  $\Delta = r_2 - r_1$ ,  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ . Напоминаю, что  $k = 2\pi/\lambda$ .

Если же  $k_1 \neq k_2$ , то вместо  $k$  в результирующей формуле будет  $K = |k_1 - k_2|$ .

#### 9.1.1. Ширина полосы

Рассмотрим чуть более общий случай, когда  $|k_1| = |k_2|$ , но при этом волны сходятся под некоторым углом  $\alpha$ . Тогда  $K = 2k \sin(\alpha/2)$

**Шириной полосы** будем называть расстояние между ближайшими максимумами (вообще говоря, в МФТИшном конспекте написано что между минимумами, а между максимумами это расстояние между полосами, но наш лектор видимо так не считает, но строго говоря какая разница казалось бы). В нашем случае она оказывается равной:

$$\Delta x = \frac{2\pi}{K} = \frac{2\pi}{2k \sin(\alpha/2)} = \frac{\lambda}{2 \sin(\alpha/2)} \approx \frac{\lambda}{\alpha}$$

### 9.2. Интерференция плоской и сферической монохроматических волн

Внимание на картинку.

Будем рассматривать область, где  $R_0 \gg r$ . При этом:

$$R = \sqrt{R_0 + r^2} \approx R_0 + \frac{r^2}{2R_0}$$

Для сферической волны:

$$E_{sp} = \frac{a_1}{R_0} e^{ikr} e^{-i\omega t} \approx \frac{a_1}{R_0} e^{ik(R_0+r^2/(2R_0))} e^{-i\omega t}$$

Для плоской волны:

$$E_f = a_2 e^{ikR_0 - i\omega t}$$

Если это счастье расписать так же, как мы делали с плоской волной, то получим:

$$I_{\Sigma} = \frac{a_1^2}{R_0^2} + a_2^2 + 2 \frac{a_1 a_2}{R_0} \cos \left( k \frac{r^2}{2R_0} \right)$$

### 9.3. Видность

Для характеристики выраженности интерференции вводят величину, называемую **видностью**  $V$ :

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \quad (14)$$

где  $I_{max}$ ,  $I_{min}$  — максимальное и минимальное значения интенсивности в области интерференции волн.

При интерференции двух **монохроматических** волн видность будет равна:

$$V = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$$

## 10. Понятие о когерентности. Частично когерентный свет. Основные интерференционные схемы. Интерференция плоских волн, пространственный период полос.

Монохроматических волн не бывает в природе. В реальности волны часто излучаются модулированными как по амплитуде, так и по частоте. Такие называют квазимонохроматическими.

$$a(t) \cos(\omega t + b(t))$$

**когерентными называются две волны, если у них постоянная разность фаз**

Так две монохроматические волны когерентны, если у них одинаковая частота.

Если есть какая-то маленькая разница в частотах  $\Delta\omega$  то говорят о времени когерентности  $t\Delta\omega \sim \pi$ . Предполагая малость  $\Delta\omega$  получаем  $t \sim \frac{\lambda^2}{2c\Delta\lambda}$  отсюда получается то, что называют

$$\text{длинной когерентности } l \sim \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda}$$

Пусть у нас есть две плоские волны.

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1 \cos \mathbf{k}_1 \mathbf{r} - \omega t + \varphi_1 \\ A_2 &= a_2 \cos \mathbf{k}_2 \mathbf{r} - \omega t + \varphi_2 \end{aligned}$$

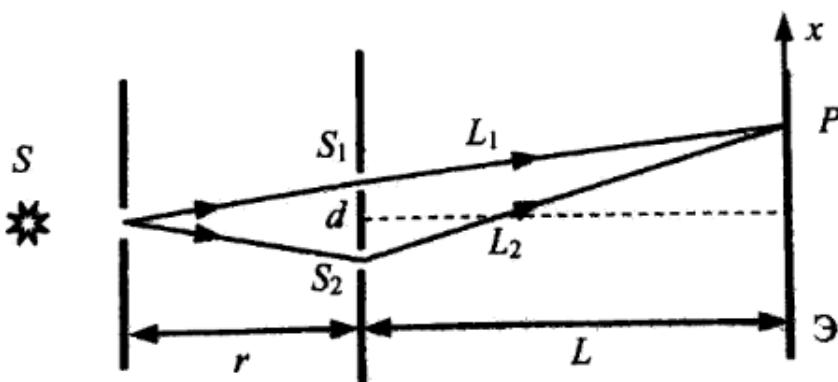
Тогда не сложно их сложить и получить распределение интенсивности

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos((\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\mathbf{r} + \varphi_1 - \varphi_2)$$

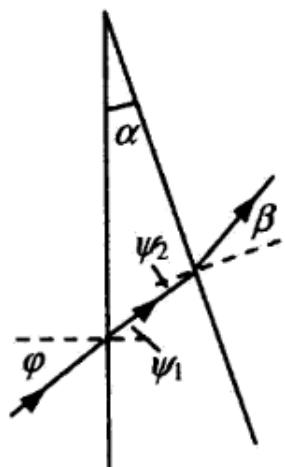
Ага, теперь мы знаем, что интенсивность постоянна в плоскостях перпендикулярных  $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ . Расстояние между плоскостями максимумов будет  $\frac{2\pi}{|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2|}$ . Для равных по модулю векторов  $\frac{\lambda}{2 \sin \alpha/2}$  где альфа это угол между векторами

### 10.1. Основные схемы

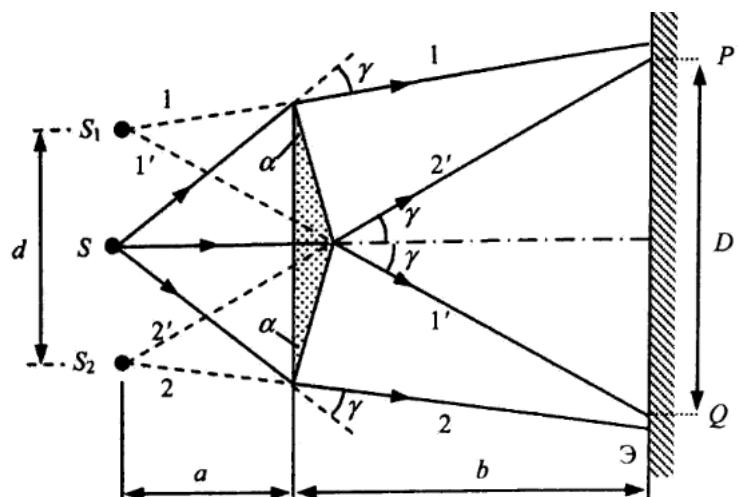
**Схема Юнга.** Ширина полос и расстояние между ними равно  $\frac{\lambda L}{d}$



**Тонкий клин.** В приближении малых углов падения и малости угла альфа просто поворачивает входной луч на  $(n - 1)\alpha$



**Бипризма Френеля** Две призмы из прошлого пункта. В итоге получаем, что эффективно один источник расслаивается на два. Расстояние между ними  $2a(n - 1)\alpha$ , и теперь задача свелась просто к опыту Юнга



123

# 11. Временная когерентность. Интерференция немонохроматических волн. Время и длина когерентности. Соотношения между временем когерентности и шириной спектрального интервала.

## 11.1. Интерференция немонохроматических волн

### 11.1.1. Корегентность

Две волны называются *когерентными*, если разность их фаз является постоянной. Когерентными являются две монохроматические волны, если только они имеют одинаковые частоты.

Если разность фаз волн меняется со временем, то эти волны называются *некогерентными*.

### 11.1.2. Время и длина когерентности

Рассмотрим сложение двух волн с разными частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

Временем когерентности называется такое время, в течение которого разность фаз рассматриваемых волн меняется незначительно. В случае двух волн

$$A_1 = a_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1)$$

$$A_2 = a_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2)$$

разность фаз равна

$$\Delta\varphi = \Delta\omega \cdot t + \Delta\alpha, \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2, \Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$$

Когда сдвиг фаз составит  $\Delta\omega \cdot t \sim \pi$ , волны уже нельзя считать когерентными. Поэтому время когерентности определяется условием

$$\Delta\varphi(t + t_{\text{kog}}) \sim \pi$$

$$t_{\text{kog}} \sim \frac{\pi}{\Delta\omega}$$

Переходя от частоты к длине волны по формуле  $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$  и считая  $\Delta\omega \ll \omega$ , получим

$$t_{\text{kog}} \sim \frac{\lambda^2}{2c\Delta\lambda}$$

Длина когерентности - путь, проходимый волнами за время когерентности. Она составляет

$$l_{\text{kog}} = ct_{\text{kog}} \sim \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda}$$

### 11.1.3. Связь времени когерентности с шириной спектра

Представим волновой пакет в виде суперпозиции монохроматических волн:

$$A(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A(t) e^{i\omega t} dt$$

Пусть фурье-спектр сигнала дается выражением

$$a(\omega) = \begin{cases} a_0, & |\omega - \omega_0| < \frac{\Delta\omega}{2}, \\ 0, & |\omega - \omega_0| > \frac{\Delta\omega}{2}. \end{cases}$$

Соответствующая временная зависимость сигнала определяется по первой формуле:

$$A(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad \frac{a_0}{2\pi} \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} e^{-i\omega t} d\omega = a_0 e^{-i\omega_0 t} F(t),$$

Здесь введена функция

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i t} (e^{i\Delta\omega t/2} - e^{-i\Delta\omega t/2}) = F_m \frac{\sin(\Delta\omega \cdot t/2)}{(\Delta\omega \cdot t/2)},$$

где  $F_m(t) = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$ .

Функция  $F(t)$  обращается в первый раз в нуль при  $\frac{\Delta\omega \cdot t}{2} = \pi$ , то есть в момент времени

$$t = \tau = \frac{2\pi}{\Delta\omega}.$$

Эта величина есть характерное время существования волнового пакета - время когерентности.

## 11.2. Влияние немонохроматичности на наблюдаемое число интерференционных полос

Сигнал называется квазимонозроматическим, если его можно представить в виде

$$A(t) = a(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)),$$

где амплитуда  $a(t)$  и фаза  $\varphi(t)$  - медленно меняющиеся функции.

Можно наблюдать интерференционную картину от квазимонозроматического источника. Действительно, свет, испускаемый таким источником, представляет собой суперпозицию монохроматических волн. Каждую из них можно расщепить на две волны (например, с помощью схемы Юнга), тогда получаемая в конце падающих волн уже создает интерференционную картину.

Интерференционная картина от всего спектра получается наложением интерференционных картин от отдельных компонент спектра. Однако, период отдельных картин зависит от соответствующей длины волны, поэтому положение максимумов и минимумов различно для разных компонент спектра. Это ограничивает общее число наблюдаемых полос от источника.

Рассмотрим компоненту спектра с длиной волны  $\lambda$ . Разность хода в опыте Юнга составляет

$$\delta \approx \frac{xd}{L}$$

Максимумы интерференционной картины наблюдаются в точках, для которых  $\delta = m\lambda$

$$x_m^{(max)} = \frac{\lambda L}{d} m.$$

Таким образом, ширина интерференционной полосы равна

$$\Delta x = \frac{\lambda L}{d}$$

Учтем, что источник создает немонохроматический свет в спектральном диапазоне  $\Delta\lambda$ . Для такого света длина когерентности есть

$$l_{\text{ког}} \sim \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}.$$

Максимальная разность хода лучей  $\delta$ , при которой они еще могут считаться когерентными, не должна превышать  $l_{\text{ког}}$ :

$$\delta < l_{\text{ког}}.$$

Отсюда наибольший порядок интерференции:

$$\delta_{\max} = m_{\max}\lambda \sim \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \Rightarrow m_{\max} \sim \frac{\lambda}{\Delta\lambda}.$$

Тогда максимальное число наблюдаемых полос интерференции составляет

$$2m_{\max} + 1 \sim \frac{2\lambda}{\Delta\lambda}.$$

123

## 12. Пространственная когерентность. Интерференция квазимохроматических волн протяженных источников света. Роль конечных размеров источника света. Интерференционная картина в схеме Юнга.

### 12.1. Пространственная когерентность

Будем рассматривать монохроматический протяженный источник. Буквенные обозначения введены на рисунке.

Положим полную интенсивность источника  $I_0$ . В таком случае интенсивность единицы длины источника равна:

$$J_0 = \frac{I_0}{b}$$

Введем понятие апертуры интерференционной системы:

$$\Omega = \frac{d}{R_0}$$

Сразу же отметим, что  $\alpha = d/R$ . Распишем оптическую разность хода. Из рисунка она оказывается равной:

$$\Delta = \alpha x + \Omega \xi = \frac{d}{R}x + \frac{d}{R_0}\xi = \frac{d}{R} \left( x + \frac{R}{R_0}\xi \right)$$

Здесь  $\xi$  — высота, на которой отстоит от оси симметрии рассматриваемый нами участок источника  $d\xi$ .

Вспомним формулу для ширины полосы:

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{\lambda R}{d}$$

Запишем теперь  $dI_\xi$ :

$$dI_\xi(x) = 2J_0 d\xi (1 + \cos k\Delta) = 2J_0 d\xi \left( 1 + \cos \left[ \frac{2\pi}{\Lambda} \cdot \left( x + \frac{R}{R_0}\xi \right) \right] \right)$$

Тогда чтобы получить интенсивность проинтегрируем по всему источнику:

$$I(x) = 2J_0 \int_{-b/2}^{b/2} \left( 1 + \cos \left[ \frac{2\pi}{\Lambda} \cdot \left( x + \frac{R}{R_0}\xi \right) \right] \right) d\xi$$

Введем замену:

$$q = \frac{2\pi}{\Lambda} \frac{R}{R_0}$$

И интеграл преобразится в (раскроем косинус и учтем, что интегрирование синуса в симметричных пределах дает 0):

$$2J_0b + 2J_0 \frac{b}{b} \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda}\right) \cdot \int_{-b/2}^{b/2} \cos(q\xi) d\xi = 2J_0b \left[ 1 + \frac{\sin\left(\frac{qb}{2}\right)}{\frac{qb}{2}} \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda}x\right) \right]$$

Преобразуем выражение  $qb/2$ :

$$\frac{qb}{2} = \frac{2\pi}{\Lambda} \frac{R}{R_0} \frac{b}{2} = \frac{\pi d R b}{\lambda R R_0} = \frac{\pi \Omega}{\lambda / b}$$

Таким образом мы получаем, что выражение перед косинусом (которое оказывается фактически **видностью**  $V(b)$  с точностью до знака) оказывается равно:

$$V(b) = \left| \frac{\sin \frac{\pi \Omega}{\lambda / b}}{\frac{\pi \Omega}{\lambda / b}} \right|$$

Отметим, что  $V = 0$  при условии:

$$\frac{\pi \Omega}{\lambda / b} = \pi \Rightarrow \Omega_{max} = \frac{\lambda}{b}$$

Итого мы видим полосы при  $\Omega \leq \Omega_{max} = \lambda / b$  (концом Овчинкин, например, пренебрег). Если же мы теперь зафиксируем  $\Omega$  и позволим меняться  $b$ , то:

$$b \leq b_{max} = \frac{\lambda}{\Omega} \Rightarrow \Omega = \frac{d}{R_0} \leq \frac{\lambda}{b} \Rightarrow d \leq \frac{\lambda R_0}{b} = \frac{\lambda}{\psi} = \rho_{kog}$$

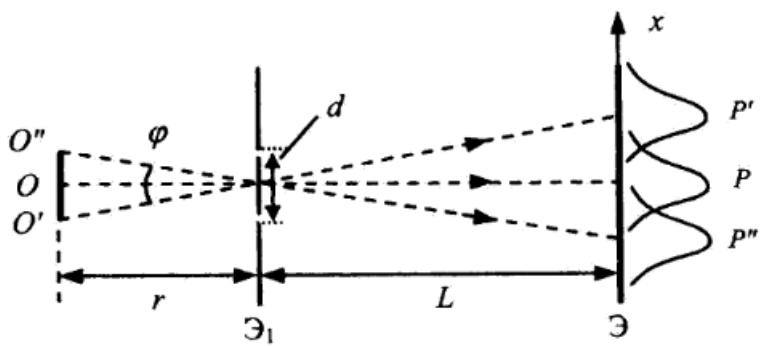
Здесь  $\rho_{kog}$  — радиус когерентности,  $\psi$  — угловой размер источника ( $\psi = b/R_0$ ).

## 12.2. Интерференция квазимохроматических волн протяженных источников света

В лекциях про это ничего не нашел, у Овчинкина упоминается только то, что этот случай является композицией интерференции квазимохроматических волн и интерференции протяженного источника. Картинка примерно такая:

### 13. Пространственная когерентность. Радиус пространственной когерентности, зависимость радиуса пространственной когерентности от угловых размеров источника света.

Будем рассматривать пространственную когерентность на примере опыта Юнга.



Пусть источник света имеет какие-то линейные размеры. Тогда каждая точка источника создает свою интерференционную картину, которые налагаются друг на друга. Как известно период полос  $\frac{\lambda L}{d}$  а сдвиг за счет неточечности будет  $\varphi L$  итого получаем условие  $b < \frac{\lambda}{\varphi}$  это и называют радиусом когерентности.  $\rho = \frac{\lambda}{\varphi}$

123

123

123

## 14. Интерферометр Майкельсона. Фурье-спектрометр. Применение интерферометров в научных исследованиях

### 14.1. Интерферометр Майкельсона

Схема интерферометра представлена на рисунке. Приведем краткое описание:

Свет от некоторого протяженного источника  $S$  попадает на плоскопараллельную полупрозрачную пластинку  $P_1$ . Она разделяет попавший на нее пучок на два, первый и второй соответственно. Первый пучок, после прохождения пластинки, отражается обратно **статичным** зеркалом  $M_1$ , после чего частично отражается от пластинки  $P_1$  в указанном направлении. Второй же пучок, отразившись от границы пластинки  $P_1$ , направляется к зеркалу  $M_2$ , после чего проходит через пластинку  $P_1$  и идет совместно с пучком 1. Отметим, что второй пучок проходит пластину  $P_1$  трижды. Чтобы исключить получающуюся из-за этого разность фаз, на пути первого пучка ставят пластинку  $P_2$ , идентичную  $P_1$ .

Пусть  $M'_1$  — изображение зеркала  $M_1$  в отражающей плоскости пластинки  $P_1$ . Тогда проходящая интерференция равносильна интерференции в воздушном слое между  $M'_1$  и  $M_2$ . Разность хода между лучами составляет  $\Delta = 2d \cos \varphi$ , где  $d$  — толщина слоя,  $\varphi$  — угол падения. Если слой плоскопараллелен, то мы получим интерференционные кольца с центром в точке схождения лучей, нормально отраженных от поверхностей  $M'_1$  и  $M_2$ . Этому направлению соответствует максимальная разность хода  $\Delta = 2d$ , значит максимальный порядок интерференции будет в центре. При увеличении  $d$  полосы будут перемещаться от центра; при увеличении зазора на  $d = \lambda/2$ , произойдет смещение картины на одну полосу (т.е. на место светлой полосы снова придет светлая), т.к.  $\Delta = \lambda$ . Если же мы измени углы падения, то разность хода изменится на  $\Delta = 2d \sin \varphi \Delta\varphi$ . Полосы получаются чем шире, чем меньше  $d$ , т.е. при  $d = 0$  мы получим равномерное освещение.

Интерферометр использовался, например, при проведении [опыта Майкельсона — Морли](#), в ходе которого было установлено отсутствие движения Земли относительно эфира.

### 14.2. Фурье-спектрометр

Схема спектрометра представлена на рисунке. Приведем краткое описание:

Основой спектрометра является интерферометр Майкельсона (только он тут почему-то без второй пластины, ха-ха). Предположим, что у нас есть некоторый когерентный источник излучения с длиной волны  $\lambda$ . Когда разность хода лучей в спектрометре оказывается равной  $\lambda/2$ , интенсивность регистрируемого света оказывается близкой к нулю. При перемещении правого зеркала интерферометра Майкельсона разность хода лучей изменяется, изменяется и интенсивность света, регистрируемая приёмником. Очевидно, что интенсивность света максимальная, когда разность хода лучей будет кратна длине волны  $\lambda$ .

При перемещении зеркала с постоянной скоростью на выходе приёмника будет наблюдаться электрический сигнал синусоидальной формы. Притом период синусоиды зависит от длины волны источника, а амплитуда от интенсивности источника.

Теперь представим, что на входе некогерентный источник. Каждая длина волны в спектре источника света будет давать свою синусоиду на выходе приёмника. Таким образом, на выходе приёмника мы получаем сложный сигнал. При выполнении над полученным сигналом обратного преобразования Фурье получаем спектр входного электрического сигнала, который также является спектром излучения источника (то есть интенсивность излучения источника на различных длинах волн).

За счет этого можно проводить спектральные анализы для выявления состава газов или

жидкостей. Каждый газ или жидкость имеет свой спектр поглощения проходящего через него излучения. Таким образом спектр на входе интерферометра будет иметь «провалы» на определённых длинах волн. После обратного преобразования Фурье получаем спектр поглощения, по которому достаточно просто определить присутствующие в анализируемом воздухе газы и их концентрацию.

### 14.3. Применение интерферометров в научных исследованиях

Фактически, интерферометр позволяет с большой точностью измерять расстояния, поэтому его можно применять для создания деталей, изготовление которых требует высокой точности (сдвиг в интерференционной картине будет виден даже при небольшом отклонении).

Интерференционные методы позволяют с высокой точностью выявлять очень малые изменения показателя преломления среды, которые влияют на изменение оптической длины пути, а значит, влекут за собой изменение интерференционной картины.

Можно также измерять и углы.

123

## 15. Явление дифракции. Принципы Гюйгенса и Гюйгенса-Френеля. Понятие о теории дифракции Кирхгофа. Дифракция Френеля и дифракция Фраунгофера (ближняя и дальняя зоны дифракции). Волновой параметр.

Дифракция света – уклонение от прямолинейного распространения, которое не является следствием отражения, преломления или изгиба света в среде.

Принцип Гюйгенса Каждая точка волнового фронта является источником сферических волн.

Принцип Гюйгенса-Френеля Каждая точка поверхности, окружающей источники света, является источником вторичных волн, распространяющихся во всех направлениях. Они ко-гераентны, так как возбуждаются одними и теми же первичными источниками, результат их интерференции совпадает с исходным световым полем.

### 15.1. Понятие о теории дифракции Кирхгофа.

Основная идея Гюйгенса-Френеля в теории интерференции и дифракции волн света заключается в том, что световое возмущение в некоторой точке появляется как следствие наложения (суперпозиции) вторичных волн, которые испускаются поверхностью, расположенной между рассматриваемой точкой и источником света. Кирхгоф создал математическую форму записи принципа Гюйгенса-Френеля. Он показал, что вышеназванный принцип можно считать некоторой формой интегральной теоремы. Интегральная теорема Кирхгофа дает возможность выразить амплитуду светового поля в точке наблюдения через интеграл по любой поверхности, которая охватывает точку наблюдения.

В теореме Кирхгофа решение однородного волнового уравнения в произвольной точке поля представлено через величину искомого параметра, его первую производную во всех точках произвольной замкнутой поверхности, которая окружает рассматриваемую точку.

Пусть волна будет монохроматической и скалярной:

$$U(r, t) = U_0(r, t)e^{(-i\omega t)}$$

$U_0$ -комплексная амплитуда светового поля. В вакууме часть этой волны, зависящая от координат, удовлетворяет волновому уравнению Гельмгольца:

$$(\text{grad}^2 + \kappa^2)U_0 = 0$$

$\kappa = \frac{\omega}{c}$ , так как само поле света удовлетворяет волновому уравнению.

Пусть  $V$  – объем, ограниченный произвольной замкнутой поверхностью  $S$ , точка  $A$  некоторая точка внутри рассматриваемого объема. Тогда одной из форм интегральной теоремы Кирхгофа – Гельмгольца:

$$U_0 = \frac{1}{4\pi} \oint [U_0 \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{i\kappa s}}{s} \right) - \frac{e^{i\kappa s}}{s} \frac{\partial U_0}{\partial n}] dS$$

где  $\frac{\partial}{\partial n}$  – означает дифференцирование вдоль внутренней нормали к поверхности  $S$ .  $s$  – расстояние от точки  $A$  до точки с координатами  $(x, y, z)$ .

## 15.2. Дифракция Френеля. Ближняя зона дифракции

Явления дифракции классифицируют в зависимости от расстояний источника и точки наблюдения (экрана) до препятствий, которые находятся на пути световой волны. Область дифракции, которая расположена недалеко от объекта, на котором происходит дифракция, называется ближней зоной дифракции или областью дифракции Френеля. Эта зона доходит до расстояний, с которых можно рассматривать дифракцию как фраунгоферову. В дифракционных задачах, использующих подходы Френеля нельзя пренебречь кривизной поверхности волны, которая падает на препятствие (отверстие) и волны после дифракции. При дифракции Френеля на экране получают «дифракционное изображение» препятствия. Аналитический расчет дифракционных задач Френеля составляет существенные трудности.

**Гипотеза Френеля** Для непрозрачного плоского экрана с отверстиями в качестве вспомогательной плоскости выберем неосвещенную сторону. Принцип Гюйгенса-Френеля позволяет свести задачу к определению поля на этой вспомогательной плоскости. На участках, перекрытых экраном, волновое поле 0, а на отверстиях оно определяется законами геометрической оптики.

Недостатки теории:

- 1) Непонятно, как выбирать вспомогательную плоскость для неплоских экранов.
- 2) Разрыв волнового поля на границах нарушает уравнения Максвелла.
- 3) Если найти волновое поле во всем пространстве по принципу Гюйгенса-Френеля, оно не совпадет с исходным. Например, оно точно не обратится в нуль на задней стороне экрана.
- 4) Гипотеза противоречит поперечности волн.

В простейших случаях для того, чтобы установить вид картины дифракции используют метод кольцевых зон Френеля, спираль Корню.

Особенности:

- 1) Для оси пучка света считается, что интенсивность постоянна и равна интенсивности исходящей от источника интенсивности.
- 2) Структура пучка света остается постоянной и задается формой отверстия. В пределах отверстия может располагаться множество зон Френеля.
- 2) Метод Френеля решения дифракционных задач может использоваться, когда размеры отверстий/препятствий  $d \gg \lambda$ , а значит, заметная интенсивность заметная при малых углах. Также, по гипотезе Френеля дифракционная картина не зависит от материала экрана.

## 15.3. Дифракция Фраунгофера. Дальняя зона дифракции

Если расстояние между источником и экраном велико, дифракция называется дифракцией в параллельных лучах.

Область дифракции Фраунгофера простирается от бесконечности до некоторого минимального расстояния. На практике реализация дифракции Фраунгофера выполняется, если точечный источник световых волн размещают в фокусе собирающей линзы. Получившийся при этом параллельный пучок света совершает дифракцию на препятствии. Дифракционную картину

наблюдают в фокальной плоскости линзы, которая размещается на пути света совершившего дифракцию или используют зрительную трубу, которую устанавливают на бесконечность. Картина дифракции является дифракционным изображением источника света.

Особенностями дальней зоны дифракции являются:

- 1) Интенсивность исходной световой волны много больше, чем интенсивность света на оси пучка.
- 2) Интенсивность света на оси пучка уменьшается в зависимости от расстояния до источника (она обратно пропорциональна квадрату расстояния).
- 3) Световой пучок, по мере распространения от источника, расширяется.
- 4) В границах отверстия размещается только одна малая центральная часть зоны Френеля номер один.

#### 15.4. Волновой параметр

Волновой параметр(число Френеля) Определяет вид дифракции. Определяется формулой  $p = \frac{\sqrt{\lambda z}}{b}$ , где  $\lambda$  - длина волны,  $b$  — размер отверстия,  $z$  — расстояние до плоскости (или до точки наблюдения):

- $p \ll 1$  – область геометрической оптики
- $p \sim 1$  – область дифракции Френеля
- $p \gg 1$  – область дифракции Фраунгофера

## 16. Дифракция Френеля. Простейшие дифракционные задачи. Дифракция на круглом отверстии и круглом экране, спираль Френеля. Пятно Пуассона. Распределение освещенности в дифракционной картине в поперечном направлении и вдоль оси отверстия.

**Дифракция Френеля** (*дифракция ближнего поля*) — случай дифракции при *волновом параметре*  $p \approx 1$ , где  $p = \frac{\sqrt{L\lambda}}{d}$  ( $L$  — расстояние от препятствия,  $\lambda$  — длина волны,  $d$  — размер препятствия).

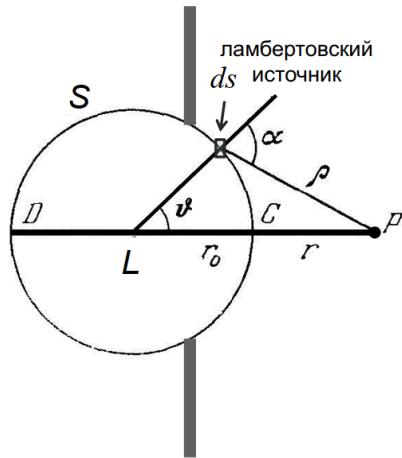
**Интеграл Френеля.** Для стационарного волнового уравнения

$$E(r, t) = A(r)e^{-i(\omega t - \varphi(r))} \quad (15)$$

определен комплексную амплитуду  $f(r) = A(r)e^{i\varphi(r)}$ , которая удовлетворяет *уравнению Гельмгольца*:

$$\delta f + k^2 f = 0, \text{ где } k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (16)$$

Рассмотрим (для простоты) сферическую поверхность  $S$  вокруг источника света  $L$ :



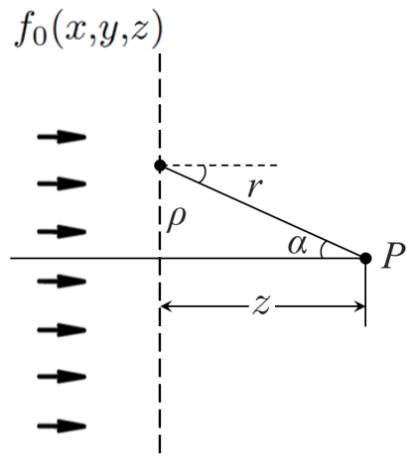
В соответствии с **принципом Гюйгенса-Френеля** элементарная площадка  $ds$  является источником вторичной сферической волны  $\sim f_s \frac{e^{ik\rho}}{\rho}$ , полная амплитуда которой пропорциональна площади  $ds$ . Таким образом, полную волну, доходящую до точки  $P$ , можно представить в виде

$$df_P = f_s \frac{e^{ik\rho}}{\rho} K(\alpha),$$

где  $K(\alpha)$  учитывает ориентацию площадки к направлению на точку  $P$ . Результирующая волна в точке  $P$  задается **интегралом Френеля**:

$$f_p = \int_S K(\alpha) f_s \frac{e^{ik\rho}}{\rho} ds, \text{ где } f_s = f_0 \frac{e^{ikr_0}}{r_0}.$$

Найдём вид зависимости  $K(\alpha)$ . Рассмотрим плоскую волну с амплитудой  $f_0$ . Результирующую волну в точке  $P$  найдем как интеграл от колышевых областей с радиусом  $\rho$  (см. рис).



$$r^2 = \rho^2 + z^2 \Rightarrow rdr = \rho d\rho$$

$$K(\alpha) = K_0 \cos \alpha = K_0 \frac{z}{r}$$

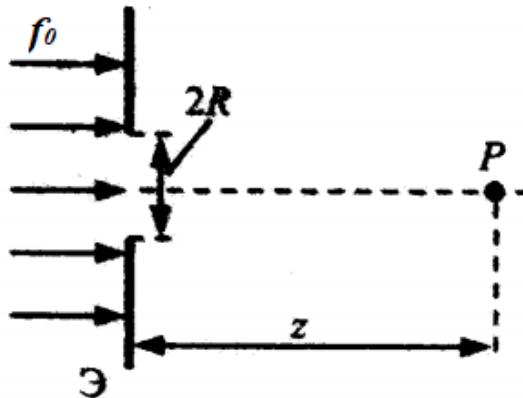
Тогда интеграл Френеля

$$f_p = \int_S K(\alpha) f_s \frac{e^{ik\rho}}{\rho} ds = f_0 K_0 \int_z^\infty \frac{e^{ikr}}{r} \frac{z}{r} 2\pi r dr = -2\pi f_0 K_0 \frac{e^{ikz}}{ik},$$

где учли затухание волны на бесконечности (для сходимости на верхнем пределе). Сравнивая с  $f_p = f_0 e^{ikz}$ , получаем

$$K_0 = \frac{1}{ik} \Rightarrow K(\alpha) = \frac{\cos \alpha}{ik}.$$

### Дифракция на круглом отверстии.

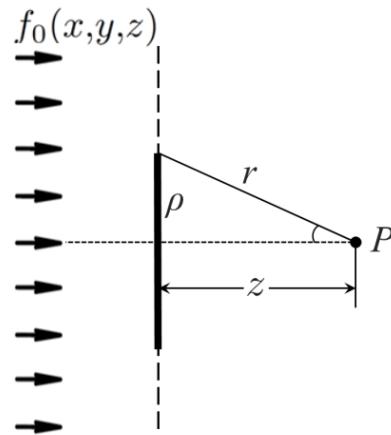


$$f_p = 2\pi f_0 K(0) \int_z^{\sqrt{z^2+R^2}} e^{ikr} dr = -f_0 (e^{ik\sqrt{z^2+R^2}} - e^{ikz})$$

Интенсивность  $I_P = |f_p|^2 = 2I_0(1 - \cos [k(\sqrt{z^2+R^2} - z)])$ . Для параксиальных пучков  $R \ll z$ :  $\sqrt{z^2+R^2} - z^2 \approx \frac{R^2}{2z}$ .

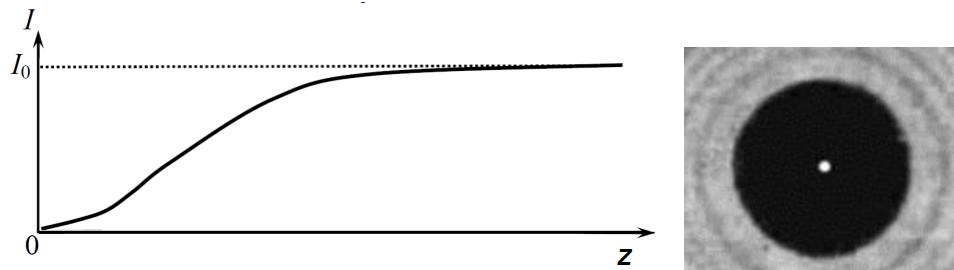
$$I_p = 4I_0 \sin^2 \left( \frac{\pi R^2}{2z\lambda} \right)$$

### Дифракция на круглом экране.



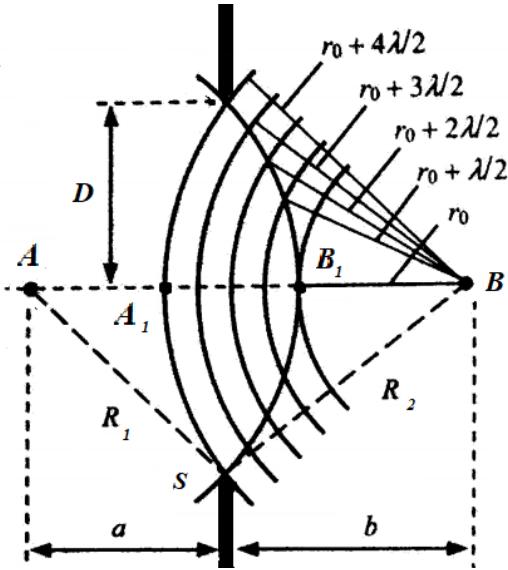
$$f_p = f_0 \frac{z}{i\lambda} \int_{\sqrt{\rho^2+r^2}}^{\infty} \frac{e^{ikr}}{r} dr = f_0 \frac{ze^{ik\sqrt{\rho^2+z^2}}}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$$

Тогда распределение интенсивности на оси  $I(z) = I_0 \frac{z^2}{\rho^2+z^2}$



При большом удалении от экрана в центре геометрической тени будет наблюдаться светлое пятно исходной интенсивности  $I_0$  — **пятно Пуассона**.

**Зоны Френеля.** Проведем из точки наблюдения  $B$  серию сферических поверхностей, первая из которых (с радиусом  $r_0$ ) касается волнового фронта  $S$ . Радиусы следующих поверхностей отличаются друг от друга на  $\frac{\lambda}{2}$ . Эти сферы разбивают волновой фронт на кольцевые области — **зоны Френеля**.



Найдём радиусы зон Френеля. Число зон, укладывающихся на открытой части волнового фронта есть

$$m = \frac{A_1 B_1}{\lambda / 2}$$

Найдём  $A_1 B_1$ :

$$R_1^2 = a^2 + D^2 \Rightarrow R_1 - a = \frac{D^2}{R_1 + a} \approx \frac{D^2}{2a}$$

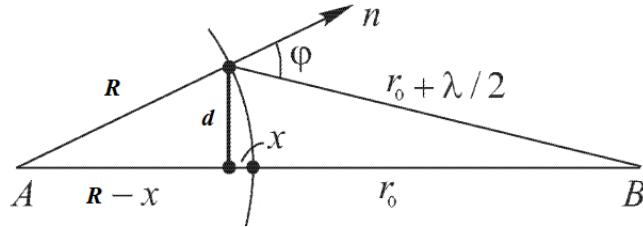
$$R_2^2 = b^2 + D^2 \Rightarrow R_2 - b = \frac{D^2}{R_2 + b} \approx \frac{D^2}{2b}$$

$$A_1 B_1 = (R_1 - a) + (R_2 - b) = \frac{D^2}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \Rightarrow m = \frac{D^2}{\lambda} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

Радиус  $m$ -ой зоны  $r_m = \sqrt{m \lambda \frac{ab}{a+b}}$

Найдём площадь зон Френеля.  $d^2 = R^2 - (R - x)^2 = (r_0 + \frac{\lambda}{2})^2 - (r_0 + x)^2 \Rightarrow x = \frac{r_0 - \lambda}{R + r_0} \frac{\lambda}{2}$   
Площадь сферического сегмента  $2\pi Rx = \frac{Rr_0}{R+r_0} \lambda$ .

Каждая из последующих зон имеет ту же площадь.



Из-за разности радиусов сферических поверхностей соседних зон Френеля на  $\frac{\lambda}{2}$  волны от них приходят в противоположных фазах, т.е. действия соседних зон ослабевают друг друга. Результирующая волна от всех зон Френеля в точке В есть

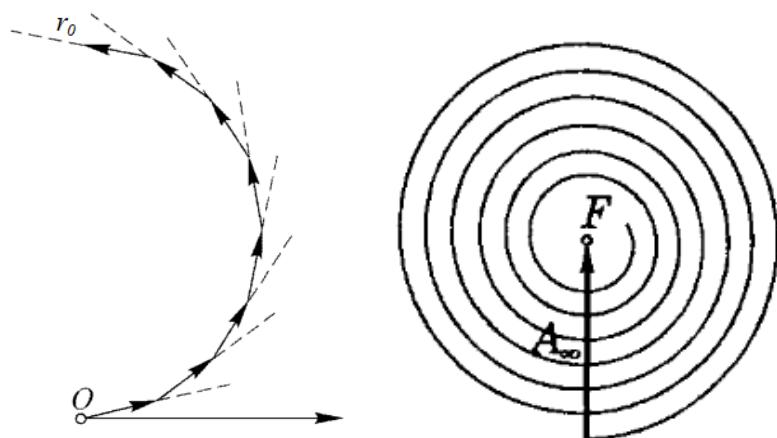
$$f_B = f_1 - f_2 + f_3 - \dots = \frac{1}{2} f_1 + (\frac{1}{2} f_1 - f_2 + \frac{1}{2} f_3) + (\frac{1}{2} f_3 - f_4 + \frac{1}{2} f_5) + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{2} f_n$$

Так как амплитуды волн из соседних зон почти равны, получаем

$$f_B = \frac{1}{2} f_1$$

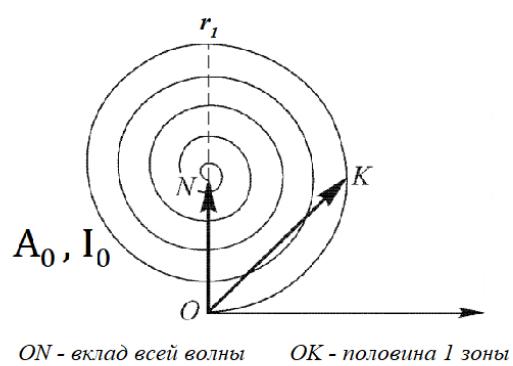
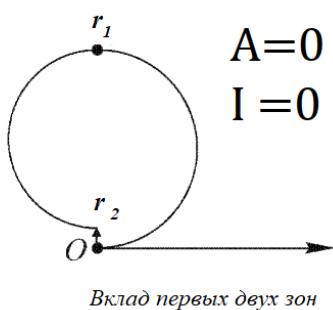
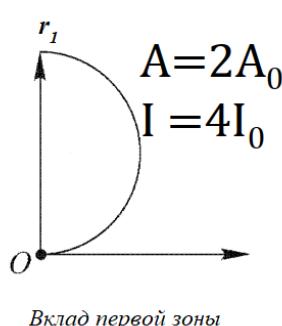
— амплитуда результирующей волны в отсутствие препятствий есть половина амплитуды волны первой зоны Френеля.

**Графический метод суммирования амплитуд** — спираль Френеля. Рассмотрим первую зону Френеля и разобьем её на  $n$  колец равной площади. Представим действие каждой подзоны в виде вектора, длина которого равна амплитуде волны, а угол поворота — фазе, и расположим векторы последовательных подзон друг за другом.



Устремим  $n$  к бесконечности и учтём вклады всех зон. Получим спираль Френеля.

Как пользоваться:



123

## 17. Дифракция Френеля на прямолинейном краю плоского экрана и щели. Зоны Шустера, спираль Корню.

Рассмотрим дифракцию на прямоугольной щели. Ограничимся рассмотрением плоских волн. Внимание на рисунок.

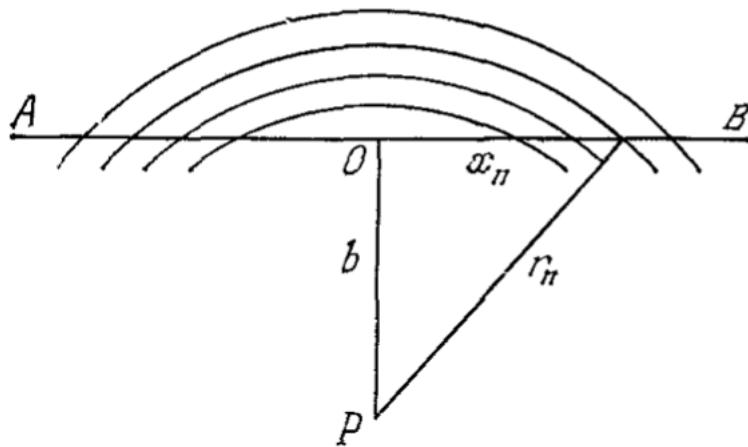


Рис. 9. Иллюстрация для зон Шустера

Проведем цилиндрические коаксиальные поверхности, ось которых проходит через точку  $P$  перпендикулярно к плоскости рисунка, радиусы которых равны  $b, b + \lambda/2, b + \lambda$  и т.д. Тогда волновой фронт разобьется на прямоугольные зоны, которые называются **зонами Шустера**. Центральную зону условимся считать сразу за две (одна слева от  $O$ , другая справа от  $O$ ). В таком случае:

$$r_n^2 = b^2 + x_n^2, \quad r_{n-1}^2 = b^2 + x_{n-1}^2 \quad \Rightarrow \quad r_n^2 - r_{n-1}^2 = x_n^2 - x_{n-1}^2$$

Приближенно мы получим:

$$r_n^2 - r_{n-1}^2 = (r_n - r_{n-1})(r_n + r_{n-1}) = 2b(\lambda/2) = b\lambda$$

Отсюда получаем рекуррентное соотношение:

$$x_n^2 - x_{n-1}^2 = b\lambda$$

С учетом того, что  $x_0 = 0$ , мы можем получить все  $x_n$ :

$$x_1 = \sqrt{b\lambda}, \quad x_2 = \sqrt{2b\lambda}, \quad \dots, \quad x_n = \sqrt{nb\lambda}$$

В таком случае ширины последовательных зон Шустера:

$$\sqrt{b\lambda}, \quad (\sqrt{2} - 1)\sqrt{b\lambda}, \quad (\sqrt{3} - \sqrt{2})\sqrt{b\lambda}$$

Согласно принципу Гюйгенса-Френеля волновое поле в точке  $P$  представляется интегралом:

$$E_p = \int \frac{1}{rr'} e^{i\Phi(R)} dF$$

Заметная интенсивность наблюдается лишь при малых углах дифракции, поэтому изменения  $rr'$  можно пренебречь. Если рассматривать относительное распределение интенсивности,

можно положить  $rr' = 1$ . В плоскости волнового фронта мы можем положить  $\Phi = \omega t - kr$  (здесь мы проведем переобозначение:  $r'$  из старой формулы теперь становится  $r$ ).

Примем фазовый фронт за плоскость  $XY$ , начало координат положим в точке  $O$ . Тогда  $r^2 = b^2 + (x^2 + y^2)$ . Тогда  $r - b = (x^2 + y^2)/(2b) + \dots$ . Члены высших порядков можно отбросить (даже если вклад порядка  $\pi$ ), т.к. они, как будет потом видно из формы полученной нами спирали, будут производить лишь незначительные смещения дифракционных максимумов и минимумов. Кроме того, высшие дифракционные максимумы и минимумы следуют друг за другом так часто, что для их реального осуществления требуются источники высокой степени монохроматичности. В противном случае они сольются в равномерный освещенный фон. Отбросим все фазовые множители, не влияющие на относительное распределение интенсивности светового поля. Тогда поле в точке  $P$  оказывается равным:

$$E_p = \int \int e^{-ik(x^2+y^2)/(2b)} dx dy$$

Пусть по оси  $Y$  поле простирается довольно далеко. Тогда по  $y$  можно интегрировать в пределах  $-\infty, \infty$ . От этого появится некоторый постоянный член, который нам не особо интересен. Интегрирование по оси  $x$  произведем от 0, а верхний предел будем считать переменным ( $s$ ). Вместо  $x$  тогда введем новую переменную  $s$  такую, что:

$$\frac{kx^2}{b} = \pi s^2$$

В таком случае получатся интегралы:

$$E_p = \int_0^s e^{-i\pi s^2/2} ds$$

$$E_p^* = \int_0^s e^{i\pi s^2/2} ds$$

Для изображения колебаний можно пользоваться любым из выражения. Для построения спирали будем пользоваться вторым выражением (в комплексной форме). В прямоугольных координатах мы в таком случае получим:

$$X(s) = \int_0^s \cos\left(\frac{\pi s^2}{2}\right) ds$$

$$Y(s) = \int_0^s \sin\left(\frac{\pi s^2}{2}\right) ds$$

Данные интегралы называются **интегралами Френеля**. Из них видно, что получаемая кривая должна быть симметрична относительно начала координат.

Чтобы найти фокусы спирали, положим  $s \rightarrow \infty$ . Тогда окажется:

$$X_F = Y_F = \frac{1}{2}, \quad X_{F'} = Y_{F'} = -\frac{1}{2}$$

Для того, чтобы пользоваться спиралью, необходимо уметь находить  $s$ . Зная ширину первой зоны Шустера  $\sqrt{\lambda b}$  мы далее получаем, что:

$$s = x \sqrt{\frac{2}{\lambda b}}$$

Для полноты картины необходимо получить графическую интерпретацию  $s$ . Из уравнения спирали в комплексной форме получаем для дифференциала дуги спирали:

$$\left| e^{i\pi s^2/2} ds \right| = |ds|$$

Отсюда следует, что параметр  $s$  определяет длину дуги спирали, отсчитываемую от начала координат  $O$ .

### 17.1. Дифракционная картина от прямолинейного края экрана

Где бы ни находилась точка  $P$ , для нее всегда оказывается открытым первый край волнового фронта. На спирали колебание представляется вектором  $\overrightarrow{M_n F}$ . Если мы теперь будем двигать точку  $M_n$  по спирали Корню, то мы получим распределение амплитуд и интенсивностей колебаний света по экрану. Спираль Корню представлена на рисунке ниже.

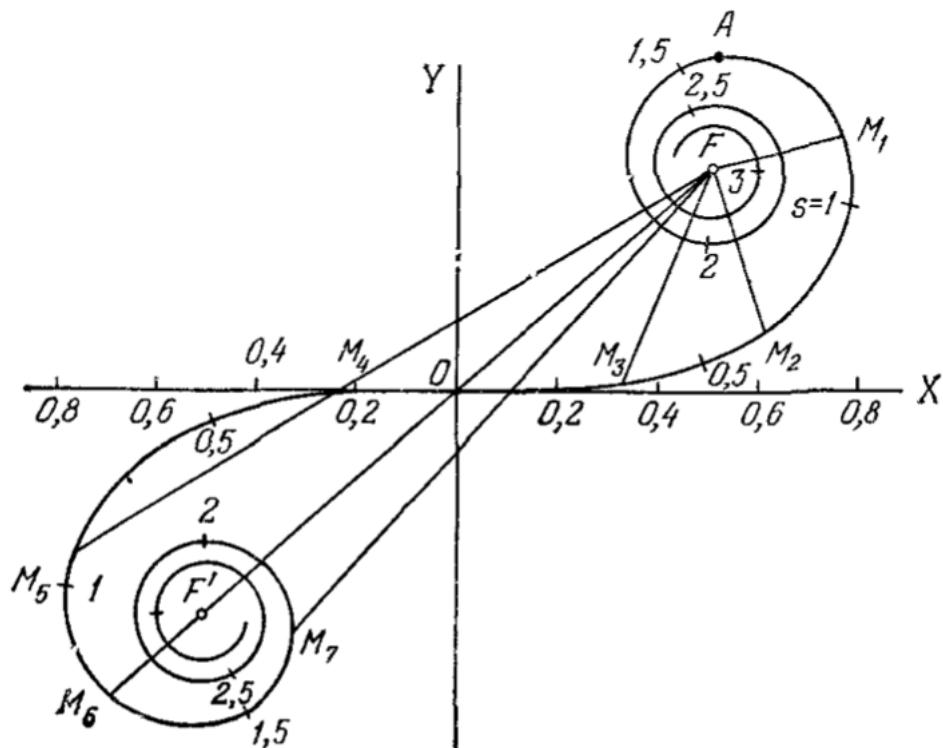


Рис. 10. Спираль Корню для дифракции на прямоугольном краю экрана.

Положим  $a_0 = |FF'|$ ,  $I_0 = a_0^2$ . Когда точка наблюдения находится на границе геометрической тени, ей соответствует колебание, которое представимо вектором  $\rightarrow OF = 1/2 \rightarrow F'F$ . Этому соответствует амплитуда  $1/2a_0$  и, соответственно, интенсивность  $1/4I_0$ . При перемещении точки в освещенную область, точка  $M_n$  будет смещаться дальше по спирали и мы получим следующий график:

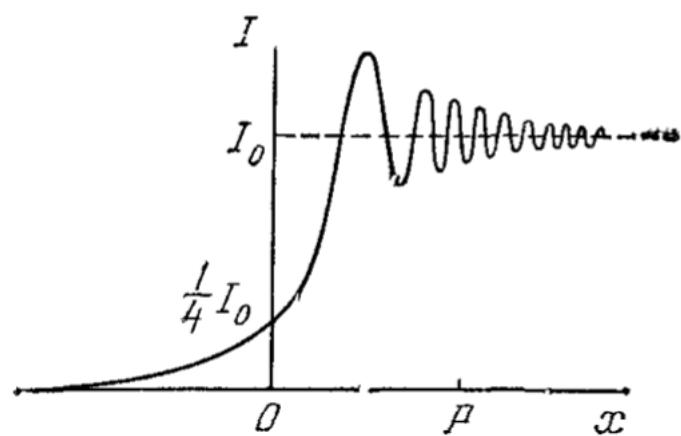


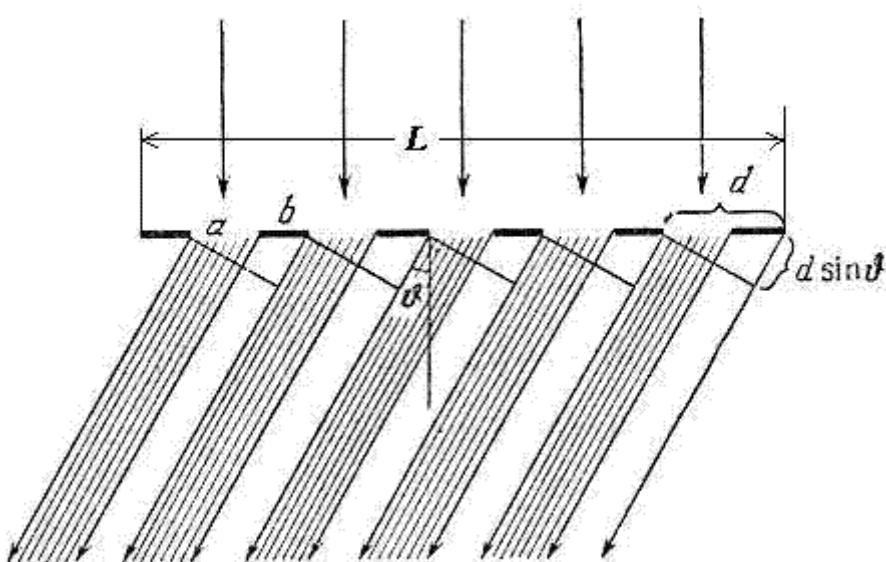
Рис. 11. Зависимость интенсивность от положения точки наблюдения при дифракции на прямолинейном краю экрана.

123

## 18. Дифракционная решетка. Амплитудные и фазовые дифракционные решетки. Дифракционная решетка как спектральный прибор. Разрешающая способность дифракционной решетки. Критерий Рэлея

### 18.1. Дифракционная решетка

**Дифракционная решетка** — спектральный прибор, предназначенный для разложения света в спектр и измерения длин волн. Ширину щели как правило обозначают  $a$ , ширину непрозрачной части экрана между щелями —  $b$ . Величина  $d = a + b$  — период решетки. Дифракционная картина наблюдается по методу Фраунгофера.



Здесь угол  $v$  — угол дифракции.

Разность хода между вторичными волнами, исходящими из соседних щелей  $d \sin v$ , а разность фаз  $\delta = kd \sin v = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin v$

Если  $E_i$  — вклад в поле, измеренное в точке наблюдения от  $i$ -той щели, то:

$$\begin{aligned} E_1 &= a \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad \alpha = \frac{kb \sin v}{v} \\ E_2 &= E_1 e^{(-i\delta)} \\ E_3 &= E_1 e^{(-2i\delta)}, \quad E_N = E_1 e^{(-(N-1)i\delta)} \end{aligned}$$

Для  $N$  щелей поле представляется суммой:

$$E = E_1 [1 + e^{(-i\delta)} + \dots + e^{(-(N-1)i\delta)}] = E_1 \frac{1 - e^{(-Ni\delta)}}{1 - e^{(-i\delta)}} = E_1 \frac{\sin N\delta/2}{\sin \delta/2} e^{-i(N-1)\delta/2}$$

Тогда интенсивность выражается через интенсивность одной щели:

$$I = I_1 \left[ \frac{\sin N\delta/2}{\sin \delta/2} \right]^2$$

Для особых случаев  $v = 0$  и  $d \sin v = m\lambda$  формулы дают следующие результаты:

$$A = A_1 N, I = I_1 N^2$$

В направлениях, определяемых этим условием, получаются главные максимумы. Интенсивность в соответствующих точках превышает исходную в  $N^2$  раз.

**Условие главных максимумов:**  $d \sin v = m\lambda$

Здесь целое число  $m$  — порядок спектра.

Однако при некоторых значениях  $m$  максимум может не возникнуть, например, если он максимум одной щели накладывается на минимум другой. При  $a = b$  каждый второй максимум не будет виден и условие главных максимумом будет совпадать с условием дифракционного минимума одной щели:  $d = a + b = 2a, 2a \sin v = 2n\lambda$

**Условие дифракционного минимума одной щели:**  $a \sin v = (m + 1/2)\lambda$

Для поиска дифракционных минимумов посмотрим, при каком условии формула интенсивности зануляется:

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{N\delta}{2}\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \neq 0 \end{cases}$$

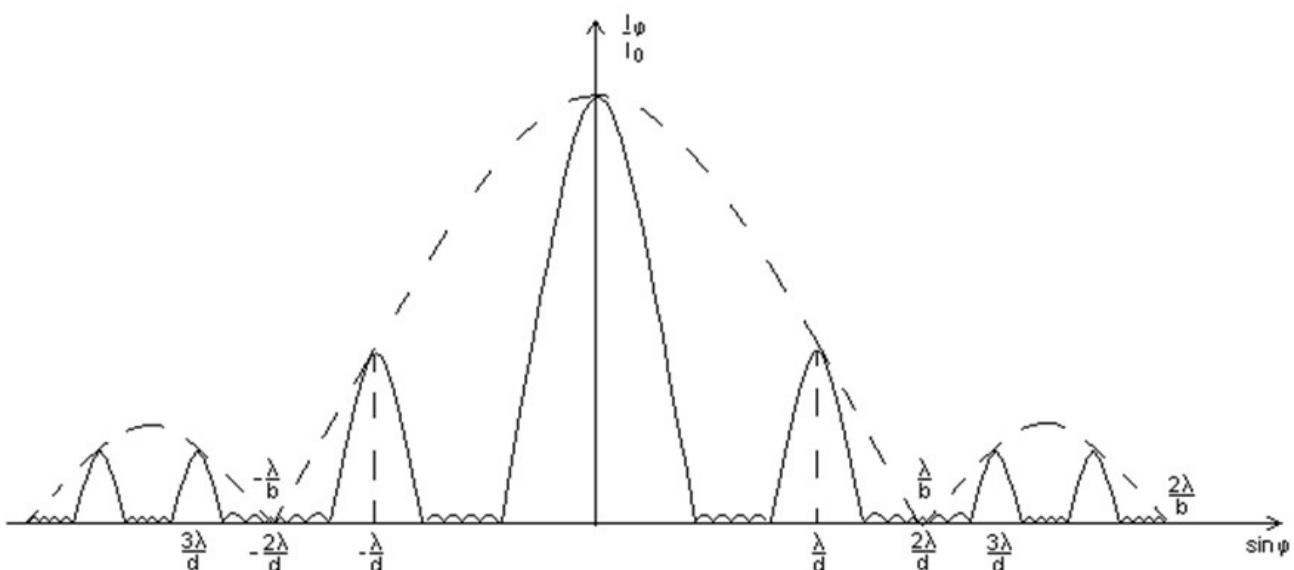
$$N\delta/2 = (Nm + p)\pi, \Leftrightarrow d \sin v = (m + \frac{p}{N})\lambda, p = 1, 2, \dots, N - 1$$

Между двумя соседними минимумами будут возникать второстепенные максимумы. Между двумя главными максимумами располагаются  $N - 1$  минимумов и  $N - 2$  второстепенных максимумов.

Найти величину  $\delta$  можно найти по приближенной формуле:

$$N\delta/2 = \frac{(Nm + p)\pi}{2} + \frac{(N(m + 1) + p)\pi}{2} \Leftrightarrow \delta/2 = (m + \frac{2p + 1}{2N})\pi$$

Дифракционная картина выглядит следующим образом:



Если волна падает под углом, разность хода между соседними пучками  $d(\sin v - \sin v_0)$ . Характер дифракционной картины сохранится, но условия минимумов и максимумов изменятся:

- Условие главных максимумов:

$$d(\sin v - \sin v_0) = m\lambda$$

- Условие дифракционного минимума одной щели:

$$d(\sin v - \sin v_0) = (m + p/N)\lambda$$

Дифракционную решетку используют для измерения длины волны.

## 18.2. Амплитудные и фазовые дифракционные решетки

**Амплитудная решетка** Решетка, вносящая периодические изменения в амплитуду волны, не влияя на ее фазу. Примером является рассмотренная выше решетка.

**Фазовая решетка** Решетка, вносящая периодические изменения в фазу волны, не влияя на ее амплитуду.

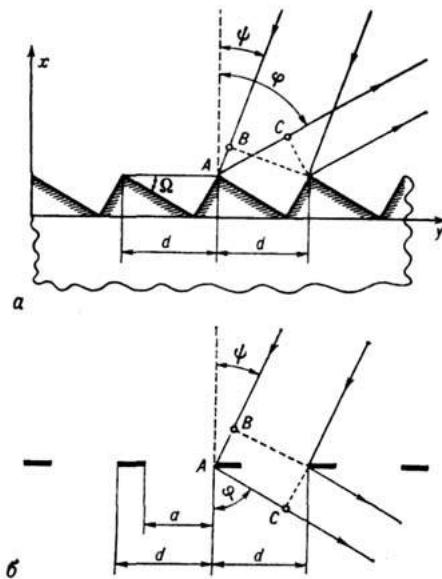
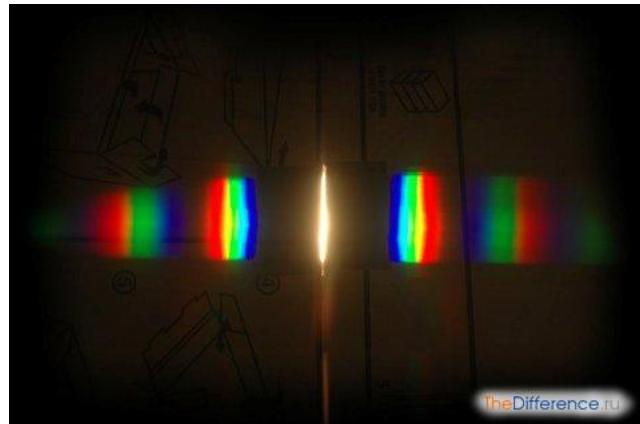


Рис. 12. а) Фазовая решетка; б) Амплитудная решетка

## 18.3. Дифракционная решетка как спектральный прибор

Положение главных максимумов ненулевого порядка зависит от длины волны, значит, всякий сложный свет при прохождении через дифракционную решетку будет раскладываться в спектр: отдельные монохроматические компоненты разделятся, отклонившись на разные углы. Дифракционные максимумы 1 порядка образуют спектр 1 порядка, затем образуется спектр 2, 3 порядка и т.д.

Спектр называется нормальным, если координата  $x$ , характеризующая положение спектральной линии, меняется линейно с длиной волны. Решетка дает нормальный спектр на малых углах.



#### 18.4. Разрешающая способность дифракционной решетки

Угловая дисперсия: производная  $\frac{dv}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos v} = \frac{\sin v - \sin v_0}{\lambda \cos v}$ . Не зависит от параметров решетки.

Дисперсионная область Максимальная ширина спектрального интервала  $\Delta\lambda$ , при которой еще нет перекрытия спектров соседних порядков. Крайний случай — правый конец спектра  $m + 1$  порядка для длины волны  $\lambda$  совпадает с левым концом спектра порядка  $m$  для длины волны  $\lambda'$ . Тогда:

$$\begin{aligned} d(\sin v - \sin v_0) &= m\lambda' = (m + 1)\lambda \\ \lambda' - \lambda &= \Delta\lambda = \frac{\lambda}{m} \end{aligned}$$

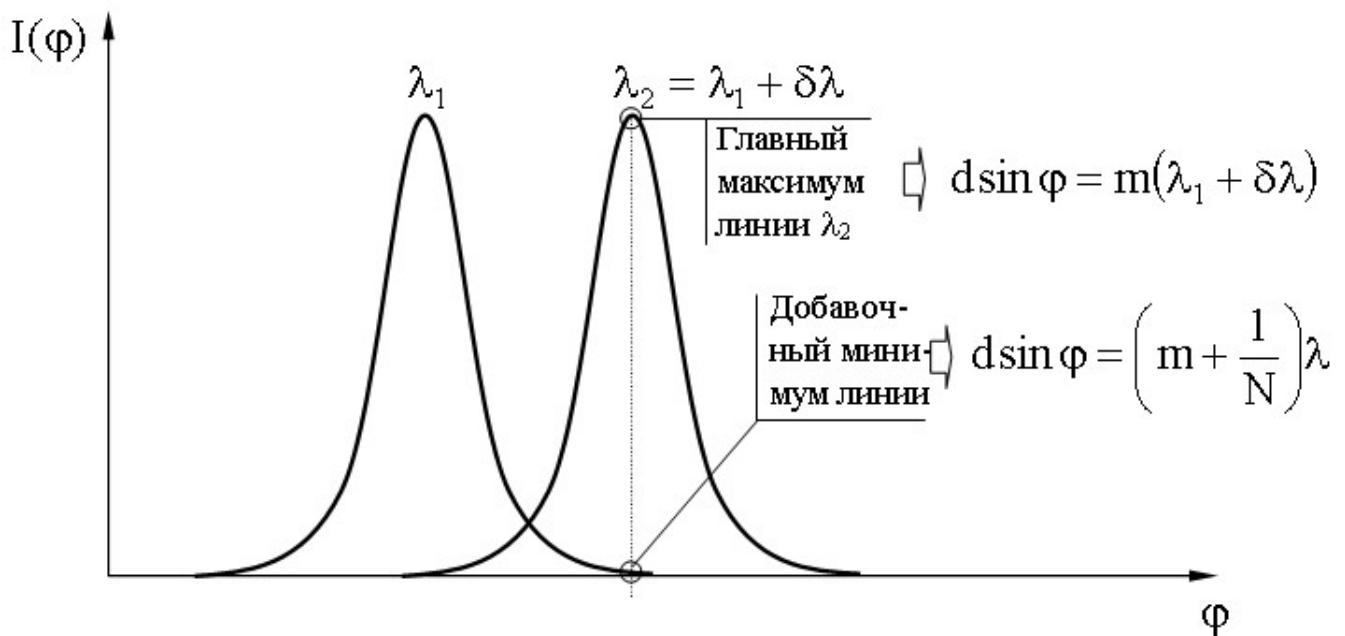
Большая дисперсия еще не говорит о том, что две спектральные линии воспринимаются при наблюдении как раздельные объекты, так как любой спектральный аппарат изображает линию как размытую полосу с собственными максимумами и минимумами (дисперсия). Чем более узкие спектральные линии, тем на меньшее расстояние надо их развести, чтобы "разрешить" их. Широкие и сильно размытые линии дадут дифракционную картину одной спектральной линии.

разрешающая способность аппарата: величина  $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}$  называется разрешающей способностью аппарата, где  $\delta\lambda$  — наименьшая разность длин волн двух спектральных линий, при которой спектральный аппарат разрешает их.

#### 18.5. Критерий Рэлея

Критерий спектрального разрешения дифракционной решетки. Спектральные линии с близкими длинами волн называются разрешенными, если главный максимум дифракционной картины совпадает с первым дифракционным минимумом в том же порядке для другой длины волны.

$$\begin{aligned} d(\sin v - \sin v_0) &= m\lambda' = \left(m + \frac{1}{N}\right)\lambda \\ \delta\lambda = \frac{\lambda}{Nm} &\Rightarrow R = Nm \end{aligned}$$



Такого вида картина интенсивности позволяет явно увидеть 2 полосы вместо 1.

## 19. Спектральный прибор и его основные характеристики - аппаратная функция, линейная дисперсия, разрешающая способность и область дисперсии.

### 19.1. Дисперсионная область

Область дисперсии - максимальная ширина спектрального интервала  $\Delta\lambda$ , при которой спектры соседних порядков еще не перекрываются. Если спектры начали накладываться друг на друга, данный прибор не позволяет исследовать данный интервал  $\Delta\lambda$ .

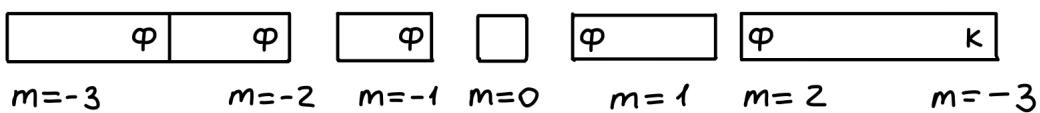


Рис. 13. Качественный вид дифракционной картины, получаемой дифракционной решеткой, на которую падает свет с конечной шириной спектра  $\Delta\lambda$ .

Найдем условие, при котором начинается перекрытие. Возьмем спектральный диапазон  $(\lambda, \lambda')$ ,  $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$ . Главный максимум  $m$ -ого порядка для границы спектра  $\lambda'$  имеет такое направление, что

$$d \sin \theta = m\lambda'.$$

Максимум  $(m+1)$ -ого порядка для границы спектра  $\lambda$  должен распространяться под тем же углом, так что

$$d \sin \theta = (m+1)\lambda.$$

$$(m+1)\lambda = m\lambda' \Rightarrow m\Delta\lambda = \lambda \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}.$$

Таким образом, спектры  $m$ -ого и  $(m+1)$ -ого порядка не перекрываются, если ширина спектрального диапазона достаточно мала:

$$\Delta\lambda \leq \frac{\lambda}{m}$$

### 19.2. Угловая дисперсия

Угловая дисперсия дифракционного прибора - это величина, определяемая равенством

$$D = \frac{d\theta}{d\lambda}$$

Она определяет угловое расстояние  $d\theta$  между спектральными линиями, отстоящими по длине волны на  $d\lambda$ :

$$\Delta\theta \approx D\Delta\lambda$$

Например, для дифракционной решетки имеем

$$\sin \theta = m \frac{\lambda}{d} \Rightarrow D = \frac{m}{d \cos \theta}$$

В частности, для малых углов дифракции

$$D = \frac{m}{d}$$

### 19.3. Линейная дисперсия

Линейная дисперсия - это расстояние между разрешаемыми линиями спектра на экране, на котором рассматривается дифракционная картина.

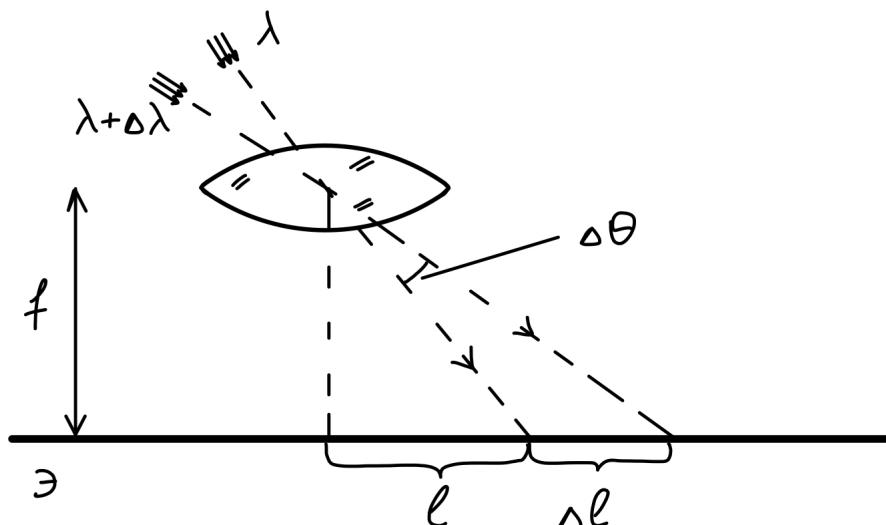


Рис. 14. Волны, отвечающие разным спектральным компонентам, отображаются с помощью линзы на экране в разные точки

Отображая спектральные компоненты  $\lambda$  и  $\Delta\lambda$  в фокальной плоскости линзы, получаем линейное расстояние  $\Delta l$  между ними на экране. Формально линейная дисперсия определяется равенством

$$D_{\text{лин}} = \frac{dl}{d\theta}$$

Поскольку  $dl = f \cdot d\theta$ , то

$$D_{\text{лин}} = f \cdot D \approx \frac{fm}{d}$$

(Здесь использовано  $D = \frac{m}{d}$  для дифракционной решетки)

## 19.4. Разрешающая способность

Разрешающая способность спектрального прибора - это величина, определяемая равенством

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}, \text{ где}$$

$\Delta\lambda$  - минимальная разность длин волн двух спектральных линий, которые воспринимаются раздельно.

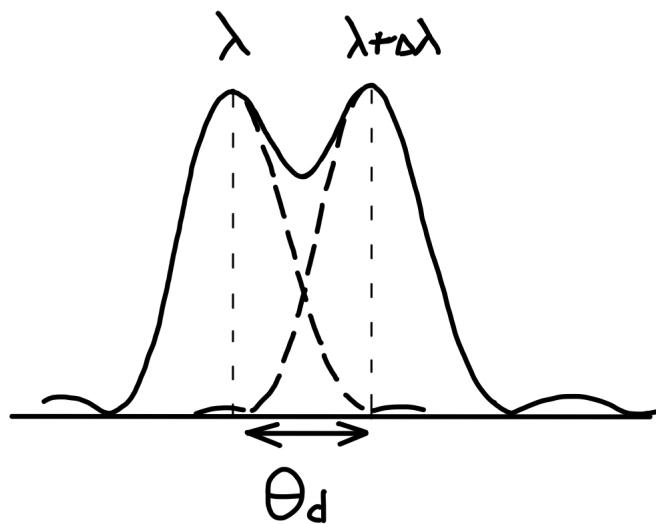


Рис. 15. Дифракционные пятна от двух компонент спектра,  $\theta_d$  – угловой радиус главного дифракционного максимума

В качестве примера найдем разрешающую способность дифракционной решетки. Используем критерий Рэлея (см. рисунок). Пусть решетка имеет  $N$  штрихов. Выберем главный максимум  $m$ -ого порядка для компоненты  $\lambda$ . Направление на первый дифракционный минимум дается равенством

$$d \sin \theta_d = \left( m + \frac{1}{N} \right) \lambda$$

Согласно критерию Рэлея компоненты считаются разрешенными, если это же направление соответствует главному дифракционному максимуму для второй компоненты  $\lambda + \Delta\lambda$ :

$$d \sin \theta_d = m(\lambda + \Delta\lambda)$$

$$\left( m + \frac{1}{N} \right) \lambda = m(\lambda + \Delta\lambda) \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{\lambda}{mN}$$

Таким образом, получим разрешающую способность дифракционной решетки:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN$$

123

## 20. Роль дифракции в приборах, формирующих изображение. Критерий Рэлея (применительно к формированию изображений). Дифракционный предел разрешения телескопа и микроскопа.

Из-за наличия во Вселенной дифракции Фраунгофера на круглом отверстии, вместо точки при фокусировке света мы получаем небольшое пятнышко, которое называется **пятном (диском) Эйри**. Его радиус можно рассчитать по следующей формуле:

$$\rho_a = 1.22 \frac{\lambda}{D} F$$

Здесь  $\lambda$  — длина волны наблюдаемого излучения,  $D$  — диаметр линзы,  $F$  — ее фокусное расстояние.

Пусть мы наблюдаем некоторый объект, который находится на главной оптической оси. Тогда и его изображение будет находиться там же. Пусть теперь у нас добавляется еще один объект, который находится от первоначального на некотором (небольшом) угловом расстоянии  $\psi$ . Пятно Эйри от этого объекта в таком случае будет находиться на таком же угловом расстоянии от исходного пятна, а линейное расстояние тогда будет равно  $l = F\psi$ .

Для того, чтобы понять, возможно ли эти два объекта разрешить, был введен так называемый **критерий Рэлея**, который говорит, что минимальное расстояние между объектами, на котором их можно разрешить, оказывается таким, что первый минимум пятна Эйри от одного объекта находится на нулевой максимум пятна Эйри другого (см рисунок)

С учетом имеющейся у нас формулы для радиуса пятна Эйри мы получим:

$$\psi_{min} F = 1.22 \frac{\lambda}{D} F \Rightarrow \boxed{\psi_{min} = 1.22 \frac{\lambda}{D}}$$

Рассмотрим теперь микроскоп. Предположим, что предмет у нас лежит в какой-то среде с показателем преломления  $n$  (так делается, например, в диффузионных микроскопах); по другую сторону линзы у нас, соответственно, воздух, с показателем преломления  $n_{air} = 1$ . Как уже было сказано ранее, от каждой точки предмета будет получаться не точечное изображение, а пятно Эйри. Введем углы  $u_1$  и  $u_2$  (см. рисунок). Угол  $u_1$  называется апертурным углом объектива.

Как видно из рисунка, верно следующее:

$$\frac{D}{L} \approx 2u_2 \approx 2 \sin u_2$$

Согласно Аббе, идеальный с точки зрения геометрии микроскоп подчиняется следующему условию (**условие синусов Аббе**):

$$l_1 n_1 \sin u_1 = l_2 n_2 \sin u_2 \Rightarrow l_1 n \sin u_1 = l_2 \frac{D}{2L}$$

Здесь  $l_1$  и  $l_2$  есть линейные размеры предмета и изображения соответственно.

Ну и с учетом критерия Рэлея, который в данном случае удобно сформулировать как "линейный размер изображения должен получаться не меньше радиуса пятна Эйри мы получим:

$$l_{2min} = \rho_a = l_{1min} \frac{2L n \sin u_1}{D} = 1.22 \frac{\lambda}{D} L \Rightarrow l_{1min} = 0.61 \frac{\lambda}{n \sin u_1}$$

Выражение  $n \sin u_1$  в знаменателе называют **числовой апертурой микроскопа**.

123

21. Элементы Фурье-оптики. Явление саморепродукции. Метод Рэлея. Фурье-плоскость. Теория Аббе формирования изображений. Принципы пространственной фильтрации (схема Катрона). Методы наблюдения фазовых объектов.

### 21.1. Фурье-оптика

**Фурье-оптика** - собирательное название для методов исследования оптических систем с помощью преобразования Фурье (для этого нужно отдельное название, да).

### 21.2. Метод Рэлея

Еще один эвфемизм у оптиков для словосочетания "преобразование Фурье" (см. рис 16)

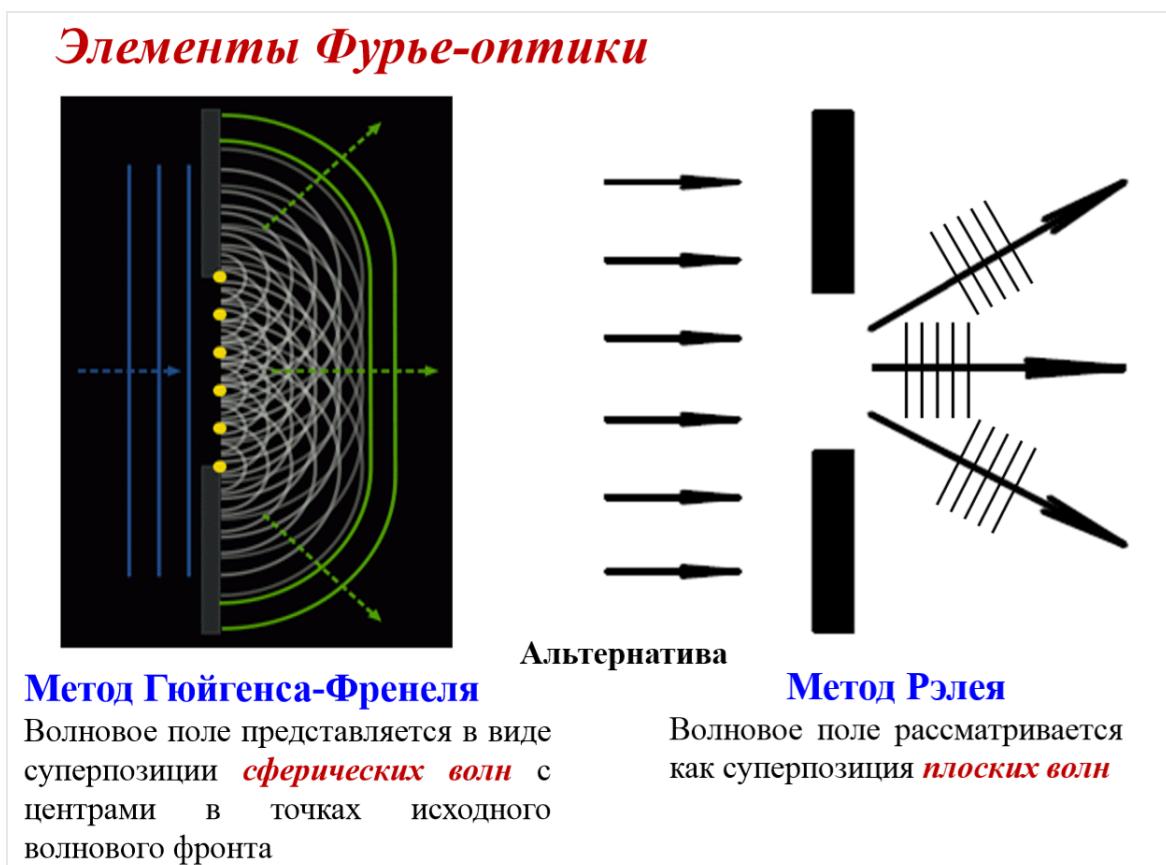


Рис. 16. Иллюстрация лектора

### 21.3. Явление саморепродукции (эффект Талбота)

Представим себе бесконечный экран, относительно которого введем координаты так, как показано на рисунке (17). Пусть отверстия на экране имеют какую-либо периодическую структуру с пространственным периодом  $d$ . Слева на экран перпендикулярно падает плоская волна с волновым вектором  $k$ . Тогда справа от экрана мы получим электрическое поле  $E(t = 0, x = 0+)$  в

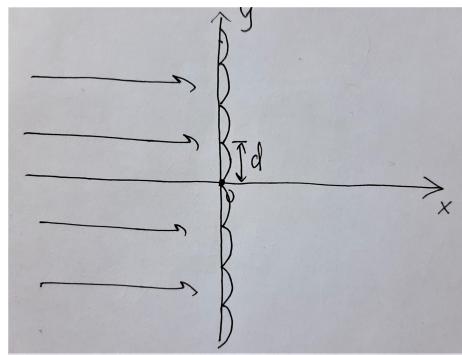


Рис. 17. Экран с какой-то периодической структурой (это не синусоида) и падающая плоская волна

виде периодической функции с периодом, равным периоду решетки  $d$ . Раз поле  $E(t = 0, x = 0+)$  периодическое, мы можем разложить его в ряд Фурье (разложить по плоским волнам, т.е. перейти к представлению Рэлея):

$$E(t = 0, x = 0+) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} C_n \exp^{in\Omega y} \quad (17)$$

$$\Omega = \frac{2\pi}{d} \quad (18)$$

В случае, если период решетки больше длины падающей волны, найдется плоская волна, распространяющаяся под таким направлением  $\theta$  к оси  $Ox$ , что:

$$\Omega = k \sin(\theta) \quad (19)$$

То есть, ее пространственная частота по оси  $y$  совпадает с частотой периодической структуры экрана (см. рис. 18).

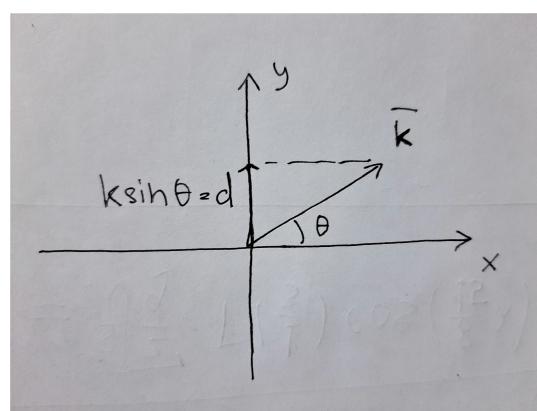


Рис. 18. Выбранная плоская волна

Теперь мы хотим устроить так, чтобы на расстоянии  $x$  от экрана рассмотренное поле  $E$  **саморепродуцировалось**. Найдем это расстояние. Выберем произвольную координату по оси  $Oy$  и потребуем, чтобы в ней поле перешло в себя. В терминах представления Рэлея это означает (см. рис. 19), что на расстоянии  $x$  от экрана набег фазы между волнами  $e_4$  и  $e_3$  должен быть равен сдвигу фаз между волнами  $e_1, e_0$  с точностью до  $2\pi$ .

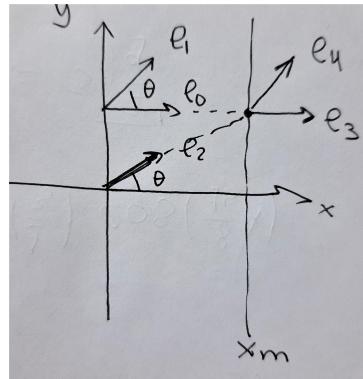


Рис. 19. Репродукция поля в терминах представления Рэлея

При этом в волну  $e_4$  переходит волна  $e_2$ . Запишем разность набега фаз и найдем  $x_m$ :

$$\omega t - ky \sin(\theta) - kx_m \cos \theta - (\omega t - kx_m) = -ky \sin(\theta) + 2\pi m \quad (20)$$

$$-kx_m \cos(\theta) + kx_m = 2\pi m \quad (21)$$

$$-kx_m \sqrt{1 - \sin^2(\theta)} + kx_m = 2\pi m \quad (22)$$

В приближении  $\sin(\theta) = \frac{\Omega}{k} = \frac{\lambda}{d} \ll 1$ :

$$-kx_m \left(1 - \frac{\lambda^2}{2d^2}\right) + kx_m = 2\pi m \quad (23)$$

$$kx_m \frac{\lambda^2}{2d^2} = 2\pi m \quad (24)$$

$$kx_m \frac{2\pi\lambda}{2kd^2} = 2\pi m \quad (25)$$

$$x_m \frac{\lambda}{d^2} = 2m \quad (26)$$

$$x_m = 2m \frac{d^2}{\lambda}$$

Красивая картиночка по этому поводу напоследок (рис. 20).

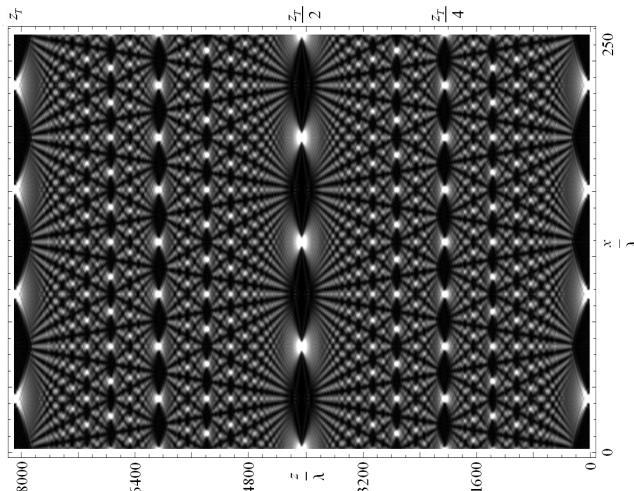


Рис. 20. Т.н. ковер Талбота

Оценка того, сколько раз поле воспроизведет само себя приводится в лекции №15 на слайде 11.

## 21.4. Фурье-плоскость

**Фурье-плоскость** - фокальная плоскость линзы. Различные плоские волны при прохождении линзы сфокусируются в разные точки в фокальной плоскости. Таким образом, опять получим преобразование Фурье (пространственное).

## 21.5. Теория Аббе формирования изображения

Изображение формируется в два этапа. Свет приходит от предмета на линзу. Линза раскладывает свет по плоским волнам в фокальной плоскости (фурье-плоскости). Получается первичное изображение предмета. Каждая точка в фокальной плоскости является источником вторичных волн. Эти волны интерферируют в плоскости экрана. Получается вторичное изображение предмета.

## 21.6. Схема Катрона

Схема Катрона представлена на рис. 21. На месте  $\Phi$  можно поставить какую-нибудь решетку. Пример от лектора: взять на месте  $P_1$  решетку с периодом  $d$ , получить в  $\Phi$  серию точек, закрыть каждую вторую и получить в  $P_2$  изображение решетки с периодом  $d/2$ .

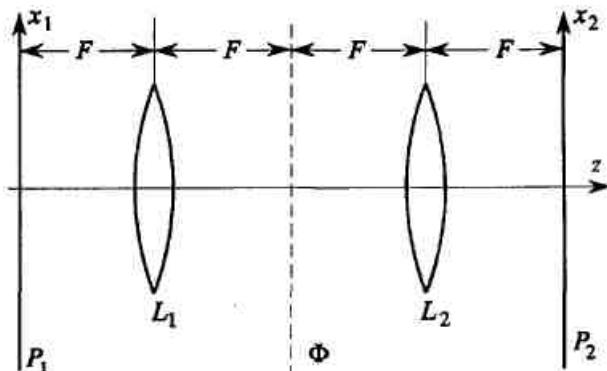


Рис. 21. Схема Катрона

## 21.7. Методы наблюдения фазовых объектов

Кириченко, параграф 8.5.1. Вроде все хорошо написано, но нет сил перепечатывать.

123

123

## 22. Зависимости показателя преломления и коэффициента поглощения от частоты. Дисперсионная формула Зельмейера. Фазовая и групповая скорости. Формула Рэлея.

### 22.1. Зависимости показателя преломления и коэффициента поглощения от частоты

На некоторых экспериментах люди стали замечать зависимость показателя преломления от длины волны(частоты) падающего света, знаменитое разделение пучка посредством призмы:

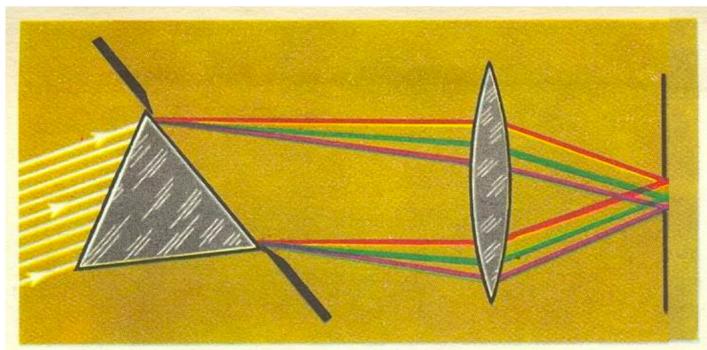


Рис. 22. Иллюстрация дисперсии

Первая формула, которая описывала это называется **формулой Коши**(нормальный ход дисперсии), она представляет ряд по обратным четным степеням длины волны:

$$n(\lambda) = a + b/\lambda^2 + c/\lambda^4 + \dots \quad (27)$$

Эта формула абсолютно эмпирическая и поэтому числовые коэффициенты должны быть найдены в ходе эксперимента.

Дальше про микроскопическую теорию: запишем показатель преломления через диэлектрическую проницаемость:  $n = \sqrt{\epsilon}$ , также поговорим о специфике задачи: атом в электрическом поле это диполь с дипольным моментом равным :  $p = r \cdot e$ . Тогда запишем уравнение движения атомного осциллятора:

$$m\ddot{r} = eE - kr - \gamma\dot{r} \quad (28)$$

где второе слагаемое определяет удерживающую силу, а третье диссипацию энергии. Немного преобразовав (заменив радиус вектор на дипольный момент, а также умножив на  $e/m$  ) получим:

$$p + \gamma\dot{p} + \omega_0^2 p = \frac{e^2}{m} E_0 e^{-i\omega t} \quad (29)$$

Где расписана плоская волна, и в ней мы считаем, что заряд локализован в окрестности начала координат, а также скорость приобретаемая при колебаниях значительно меньше скорости света, поэтому действием магнитного поля можно пренебречь. Такое уравнение решается экспоненциальным анзацем, поэтому решение имеет вид:

$$p = \frac{e^2 E_0}{m} \cdot \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - (i\gamma\omega)} e^{-i\omega t} \quad (30)$$

Дальше вспомним определение тела — это среда состоящая из диполей, а поэтому мы зная некоторые соотношения между основными электромагнитными характеристиками получить :

$$D = E + 4\pi P = E + 4\pi Np = \epsilon E \quad (31)$$

Откуда несложно выражается диэлектрическая проницаемость:

$$\epsilon = 1 + \frac{4\pi Ne^2}{m} \cdot \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega} \quad (32)$$

Вспоминаем, что показатель преломления — это корень из эпсилон, а поэтому становится понятно, что во-первых легитимно существование мнимого показателя преломления, а во-вторых, вследствие многозначности корня мы получаем много ветвей нашего показателя преломления.

Также можно без труда заметить, что имеется резонансный характер, а значит без трения и в ситуации совпадения внешней и внутренней частот будет наблюдаться резонанс.

Теперь распишем показатель преломления:  $\hat{n} = n(1 - i\kappa)$ , где  $\kappa$  — коэффициент поглощения. а дальше используя выражение (32) получим два выражения, определяющие зависимости из названия главы:

$$n^2 (1 - \kappa^2) = 1 + 4\pi \frac{e}{m} N_0 \frac{f(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2(\gamma/m)^2} \quad (33)$$

$$2n^2 \kappa = 4\pi \frac{e}{m} N_0 \frac{f(\gamma/m)\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \omega^2(\gamma/m)^2} \quad (34)$$

где первое кривая дисперсии, а вторая кривая поглощения (абсорбции):

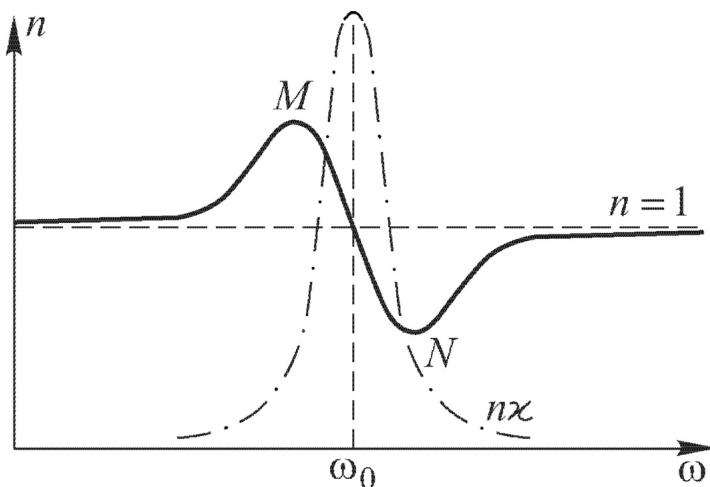


Рис. 23. Кривая дисперсии (сплошная) и абсорбции (пунктирная)

Если также учесть взаимодействие с молекулами среды (вот так  $E' = E + \frac{4\pi}{3}P$ ) получаем формулу Лоренца - Лорентца:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} = N_0 \frac{4\pi e^2 f}{3m (\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (35)$$

## 22.2. Дисперсионная формула Зельмейера

Если полос поглощения (резонансов) много, тогда мы получаем (пренебрегая затуханием) и суммируем по всем частотам переходов получаем:

$$n^2 = 1 + 4\pi N_0 \sum \frac{f_i e_i^2}{m_i} \frac{1}{(\omega_{0i}^2 - \omega^2)} \quad (36)$$

Где через  $f_i$  — обозначена сила.

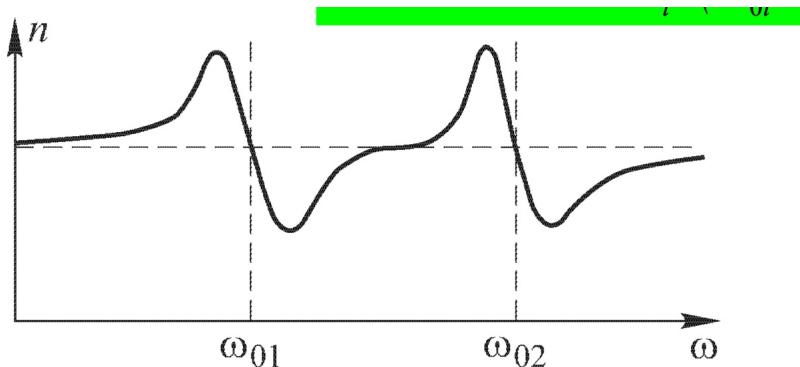


Рис. 24. Кривая дисперсии при нескольких резонансах

### 22.3. Фазовая и групповая скорость, формула Рэлея

Фазовая скорость — скорость распространения волнового фронта:  $V = \omega/k = c/n$ , в вакууме совпадает со скоростью света.

Теперь попробуем осознать, что такое групповая скорость: рассмотрим движения волнового пакета с шириной частот  $2\delta\omega \ll \omega_0$ , распишем два закона движения волн, для двух крайних частот спектра:

$$y_1 = a \sin(\omega_1 t - k_1 x) \quad \text{и} \quad y_2 = a \sin(\omega_2 t - k_2 x), \quad \omega_{1,2} = \omega_0 \pm \delta\omega \quad (37)$$

Просуммируем и преобразуем тригонометрическими формулами:

$$y = y_1 + y_2 = \underbrace{2a \cos(t\delta\omega - x\delta k)}_A \sin(\omega_0 t - k_0 x) \quad (38)$$

Выделим на импульсе точку, где  $A$  максимально. Скорость перемещения этой точки характеризует скорость распространения импульса. Таким образом, скорость импульса (группы), которую, по Рэлею, называют групповой скоростью, есть скорость перемещения амплитуды,  $a$ , следовательно энергии, переносимой движущимся импульсом.

$$A = \text{const} \Rightarrow t\delta\omega - x\delta k = \text{const} \Rightarrow \delta\omega dt - \delta k dx = 0 \quad (39)$$

Отсюда найдем, что групповая скорость равна:

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{\delta\omega}{\delta k} = \frac{d\omega}{dk} \quad (40)$$

Выразив фазовую скорость через волновой вектор и используя определение длины волны, несложно получить формулу Рэлея:

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(Vk)}{dk} = V + k \frac{dV}{dk}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (41)$$

$$\boxed{u = V - \lambda \frac{dV}{d\lambda}} \quad (42)$$

Можно немного преобразовать и получить:

$$u = \frac{c}{n + \omega \cdot dn/d\omega} \quad (43)$$

Если говорить о геометрическом смысле фазовой и групповой скорости нетрудно получить, что

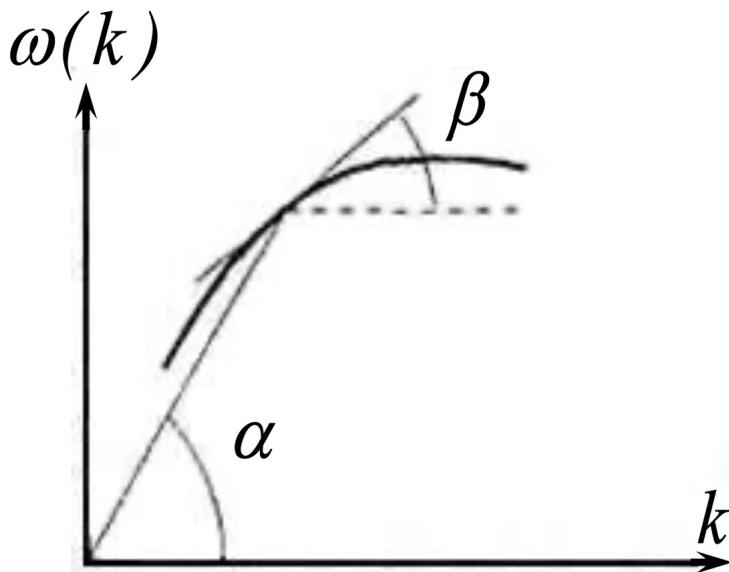


Рис. 25.  $\tan \alpha$  — фазовая скорость,  $\tan \beta$  — групповая скорость

### 23. Тепловое излучение. Излучательная и поглощательная способности вещества и их соотношение. Модель абсолютно черного тела. Закон Кирхгофа.

**Поглощение света.**

**Закон Бугера — Ламберта — Бера.** При распространении параллельного монохроматического пучка в поглощающей среде его интенсивность изменяется по закону

$$I = I_0 e^{-\alpha d},$$

где  $I_0$  — интенсивность падающего пучка,  $d$  — ширина поглощающего образца,  $\alpha$  — коэффициент поглощения.

Чтобы исключить влияние коэффициента отражения  $R$ , нужно произвести опыты с образцами разной толщины. Тогда отношение интенсивностей равно

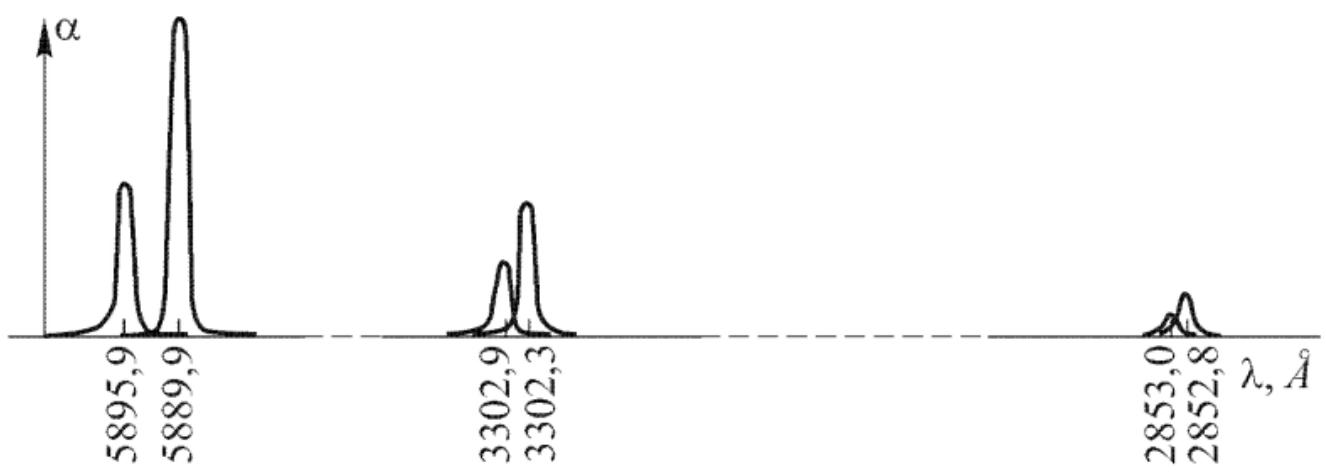
$$I_1 \setminus I_2 = e^{\alpha(d_2 - d_1)}, \text{ где } \alpha = \alpha(\omega)$$

**Закон Бера.** Поглощающая способность молекулы не зависит от влияния окружающих молекул.

$$\alpha = Ac, \quad I = I_0 e^{-Acd}, \quad A = \text{const}$$

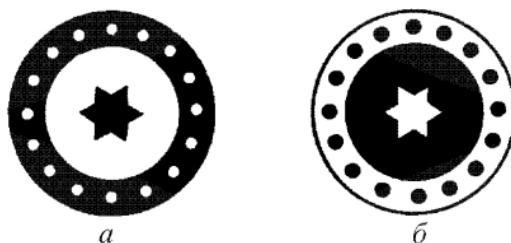
Если имеется ряд полос поглощения (например, в парах натрия), то вблизи них коэффициент преломления ведет себя следующим образом:

$$\tilde{n} = n(1 - i\chi) \Rightarrow \alpha = \frac{4\pi}{\lambda_0} n \chi.$$



**Тепловое излучение.**

**Правило Прево.** При установлении теплового равновесия в изолированной системе для каждого тела должно соблюдаться равенство между количеством испускаемой и поглощаемой им в единицу времени энергии. Если тела поглощают разные количества энергии, то и испускание должно быть различно.



- а) Тарелка имеет темный узор. б) При нагревании темные области излучают сильнее.

**Поглощательная способность.**

$A_\omega(T)$  — отношение поглощённого потока  $\Phi'$  к падающему  $\Phi$ .

$$A = \frac{d\Phi'}{d\Phi}$$

$A = 0$  — абсолютно белое тело (например, мел).  $A = 1$  — абсолютно черное тело (уголь, сажа).

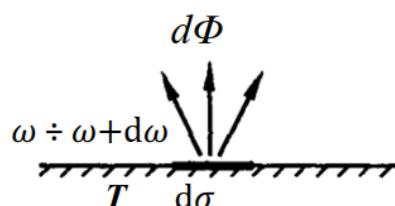
**Абсолютно черное тело.**

Абсолютно черное тело — физическая абстракция; тело, поглощающее всё попадающее на него электромагнитное излучение во всех диапазонах и ничего не отражающее.

Абсолютно черное тело может испускать электромагнитное излучение любой частоты и визуально изменять цвет. Его спектр определяется только его **температурой**.

**Испускание света.**

Рассмотрим тело при температуре  $T$ , испускающее с элементарной площадки  $d\sigma$  поток излучения  $d\Phi$  с частотами в диапазоне от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ .



$E_T(\omega), E_T(\lambda)$  — **испускательная способность**, зависит от температуры излучающего тела и не зависит от температуры окружающих тел.

$$d\Phi = E_T(\omega)d\omega = E_T(\lambda)d\lambda$$

$$E(\omega) = E(\lambda) \frac{\lambda^2}{2\pi c}$$

Суммарное излучение  $\Phi(T) = \int_0^\infty E_T(\omega)d\omega$

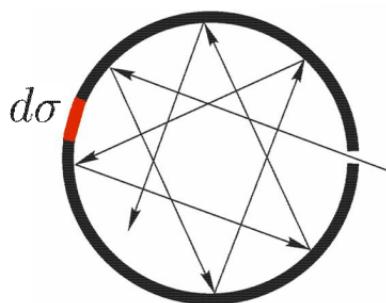
**Закон Кирхгофа.** Отношение испускательной и поглощательной способностей тела не зависит от природы тела.

$$\frac{E_{\omega,T}}{A_{\omega,T}} = \varepsilon_{\omega,T}$$

$\varepsilon_{\omega,T}$  — универсальная для всех тел функция температуры и частоты. Она есть не что иное, как испускательная способность абсолютно черного тела, так как для него

$$\frac{E_{\omega,T}}{A_{\omega,T}} = \frac{\varepsilon_{\omega,T}}{\alpha_{\omega,T}} = \varepsilon_{\omega,T}, \quad \alpha = 1.$$

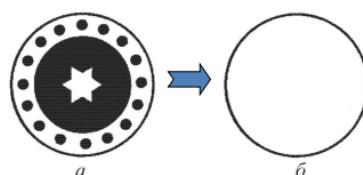
Рассмотрим пример абсолютно черного тела с площадкой  $d\sigma$  серого тела ( $0 < \alpha < 1$ ).



Такое тело вск еще не излучает. Как устанавливается динамическое равновесие при разности излучательной способности? Оказывается, площадка  $d\sigma$  частично отражает попадающий на нее свет (т.е. не поглощает его, как абсолютно черные стенки, а отражает), чем и поддерживает равенство излучаемого потока от всех элементарных площадок.

$$Ed\sigma = A\varepsilon d\sigma, \quad \varepsilon d\sigma \text{ — падающий поток,}$$

$$d\sigma[E + (1 - A)\varepsilon] = \varepsilon d\sigma, \quad \text{где член } (1 - A) \text{ возникает из-за отражения.}$$



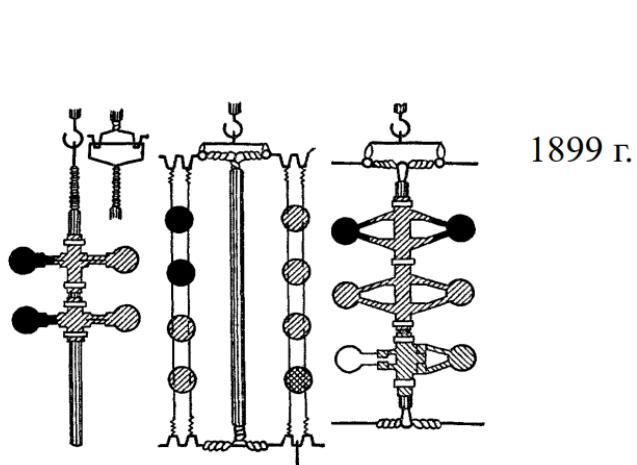
При тепловом равновесии рисунок становится неразличим, все области излучают одинаково.

123

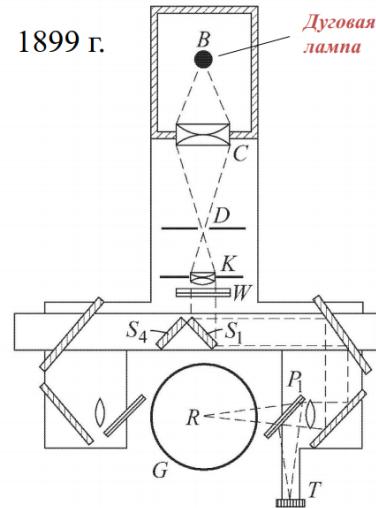
123

## 24. Рассеяние фотонов на свободных электронах - эффект Комптона. Давление света в рамках теории фотонов.

Опыты Лебедева по измерению давления света.



*Различные системы крепления крыльышек на легком подвесе из тонкой нити в приборе П.Н. Лебедева (крутильные весы)*



*Схема опытов П.Н. Лебедева по измерению давления света*

В опытах Лебедева по измерению давления света использовались крутильные весы с тонкими отражающими и поглощающими крыльышками, помещённые в вакуумную колбу. Крыльшки освещались с помощью дуговой лампы, и по углу отклонения весов рассчитывалось световое давление.

### Экспериментальные сложности и их решение.

*Конвекционные потоки.* При несколько наклонённом положении крыльышка при его нагревании излучением около него образуются возходящие потоки воздуха, действующие на него с некоторой силой, не зависящей от направления освещения. *Решение:* помещаем установку в вакуум и проводим серию опытов, освещая лепестки с разных сторон.

*Радиометрическое действие.* С освещенной стороны лепестка молекулы газа отражаются от него с большей скоростью. Это действие зависит от стороны освещения. *Решение:* сделать тонкие лепестки, чтобы температура освещенной и неосвещенной стороны были почти одинаковы.

### Давление света в рамках теории фотонов.

Энергия фотонов  $E = N\hbar\omega$ ,  $N$  — число фотонов. Импульс фотона  $p = \frac{\hbar\omega}{c}$ .

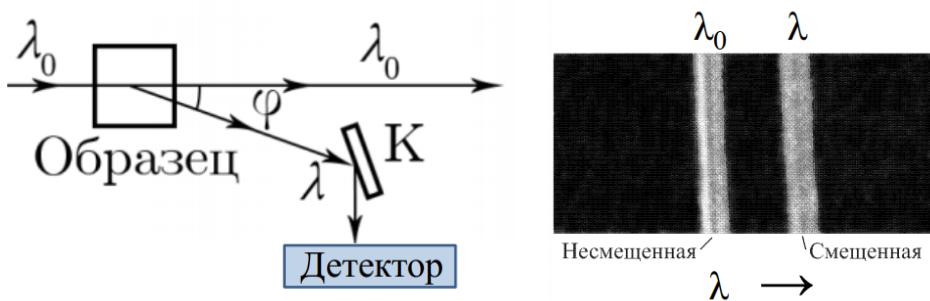
При поглощении фотона стенке сообщается импульс  $p \Rightarrow$  давление  $P = Np = \frac{E}{c}$

При отражении сообщается импульс  $2p \Rightarrow$  давление  $P = \frac{2E}{c}$

При коэффициенте отражения  $R$  давление  $P = \frac{E}{c}(1 - R + 2R) = \frac{E}{c}(1 + R)$

$$P = \frac{E}{c}(1 + R)$$

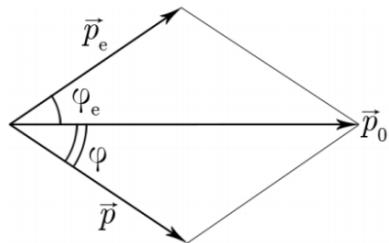
**Эффект Комптона.** Рассматривается рентгеновское излучение с длиной волны  $\lambda_0$ . При прохождении волны через *рассеивающее тело* — вещество с лёгкими атомами (уголь, парафин) — наблюдается рассеяние не только на линии рентгена  $\lambda_0$ , но и на смещенной линии  $\lambda$ .



Смещение линии выражается законом:

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \Lambda_e(1 - \cos(\varphi)),$$

где  $\Lambda_e$  — комптоновская длина волны электронов.  $\Lambda_e = 2,4263 \cdot 10^{-10} \text{ см.}$



Закон сохранения импульса:

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_e + \vec{p} \Rightarrow p_e^2 = p_o^2 - 2pp_0 \cos(\varphi) + p^2,$$

где  $\vec{p}_e$  — импульс электрона,  $\vec{p}_0$  — импульс рентгеновского фотона.

Закон сохранения энергии:

$$\hbar\omega_0 + m_0 c^2 = \hbar\omega + \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \text{ где } m_0 \text{ — масса электрона, } v \text{ — его скорость.}$$

$$\Delta\lambda = 2\pi \frac{\hbar}{m_0 c} (1 - \cos \varphi) = \Lambda_e (1 - \cos \varphi) \Rightarrow \Lambda_e = 2\pi \frac{\hbar}{m_0 c}.$$

## 25. Двухуровневая система. Взаимодействие двухуровневой системы с излучением: спонтанные и вынужденные переходы. Коэффициенты Эйнштейна

Элементарная квантовая теория теплового излучения строится на основе двухуровневой модели атома. Допускают, что у атома имеется два дискретных энергетических состояния. Одно из них называют основным, его энергию обозначим  $E_0$ . Второе состояние называется возбуждённым, его энергия  $E_1$ . Количество атомов в каждом из данных состояний ( $N_0$  и  $N_1$ ) называют населенностями уровней основного и возбужденного.

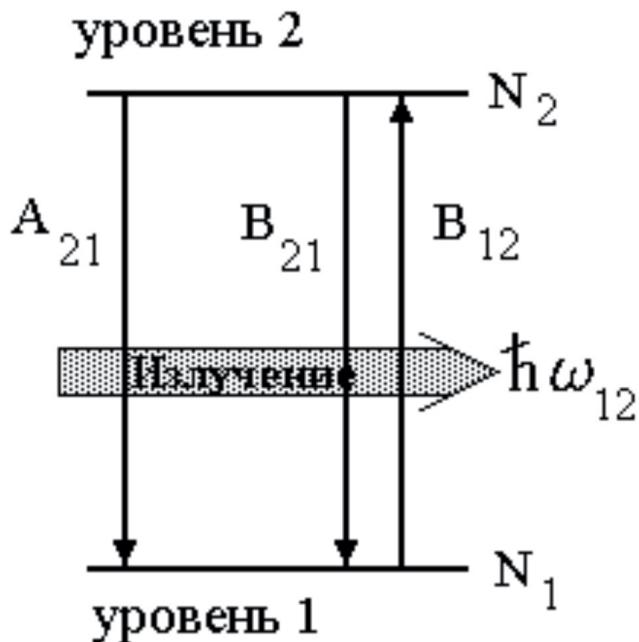


Рис. 26. Иллюстрация двухуровневой системы

Разность энергий описанных энергетических состояний равна энергии кванта света. Данный квант поглощается в том случае, если переход осуществляется с нулевого на первый уровень и излучается, если переход осуществляется с первого на уровень 0.

В соответствии с этой теорией возможно 2 вида переходов:

- 1) Спонтанное излучение. Атом первоначально находится в возбужденном состоянии  $E_1$ . В некоторый момент времени он самопроизвольно переходит в основное состояние. При этом атом испускает фотон  $\hbar\omega_{10}$ . Данный процесс характеризуют вероятностью перехода в единицу времени.
- 2) Поглощение. В данном случае. Изначально атом находится в основном состоянии и, поглощая квант света, приходит в состояние возбуждения. Вероятность данного перехода пропорциональна плотности энергии электромагнитного поля на частоте перехода и некоторому коэффициенту, который зависит от вида атома. При каждом акте поглощения количество фотонов уменьшается на один.

Вышеназванные типы переходов соответствуют классической теории, но они не могут обеспечить сохранение энергетического баланса. Если вероятность спонтанного излучения зависит

от внутренних свойств атома, то вероятность поглощения всегда определяется числом падающих фотонов имеющих определенную частоту. Значит, равновесие для всех частот не устанавливается. Для того чтобы устранить данное противоречие Эйнштейн предложил еще один тип перехода.

## 25.1. Вынужденное излучение

Атом переходит из возбужденного состояния в основное под действием внешнего электромагнитного поля. Количество фотонов увеличивается на один. При вынужденном излучении новый фотон невозможно отличить от фотона, который вызвал переход. Все фотоны, которые появились в результате вынужденного излучения, имеют одинаковую частоту, фазу, направление распространения и поляризацию. Вынужденное излучение когерентно.

Объектов с двумя энергетическими уровнями не существует в действительности. Существующие молекулы и атомы имеют существенно большее количество уровней энергии. Но, в условиях резонанса, если частота перехода между парой уровней в веществе близка к частоте света, обычно пренебрегают влиянием остальных уровней. В квантовой физике двухуровневая система играет важную роль, подобную роли гармонического осциллятора в классической физике. Данная модель используется в оптике для описания лазера и его взаимодействия веществом. Поэтому разговор о многоуровневой системе сводится к задаче об одноуровневой системе.

## 25.2. Коэффициенты Эйнштейна

$A_{10}$  — вероятность спонтанного перехода атома из состояния 1 в состояние 2,  $B_{10}$  — эйнштейновский коэффициент индуцированного излучения,  $B_{01}$  — эйнштейновский коэффициент поглощения. Тогда заселенность верхнего уровня:

$$N_1 = N_1(0) \exp(-A_{10}t)$$

$$(A_{10} + B_{10}\rho_\omega) N_1 = B_{01}\rho_\omega N_0$$

где  $\rho(\omega)$  — спектральная плотность. Соотношение выше показывает, что число переходов вверх равно числу переходов вниз, а также что с низкого энергетического уровня на более высокий энергетический уровень электрон может перейти, только поглотив фотон, то есть вынужденно. Спонтанно перейти на более высокий уровень атом не может, так как это вступает в противоречие с законом сохранения энергии. Переходы атомов с более высоких уровней на более низкие энергетические уровни возможны: вынужденные (вызванные внешними к атому причинами) и самопроизвольные (вызванные внутренними причинами).

Поговорим об излучении тел, закон Гиббса показывает распределение по энергетическим состояниям частиц в веществе, отсюда получаем:

$$N_J = g_J N_0 e^{-E_J/kT}$$

$$\frac{g_2}{g_1} e^{-(E_2 - E_1)/(kT)} = \frac{B_{12}\rho_\omega}{A_{21} + B_{21}\rho_\omega}$$

Замечая, что при  $T \rightarrow \infty$  спектральная плотность неограниченно возрастает, замечаем симметричность коэффициента Эйнштейна у невырожденных уровней. Выражая спектральную плотность, получаем закон Планка:

$$\rho_\omega = \frac{A_{21}g_2}{g_1B_{12} \left\{ \exp \left( \frac{\hbar\omega_{21}}{kT} \right) - 1 \right\}} \quad E_2 - E_1 = \hbar\omega_{21}$$

Тогда получаем такие соотношения ( $g_i$  — кратность вырождения i-ого уровня):

$$g_1B_{21} = g_2B_{12}, \quad A_{21} = B_{21} \frac{\hbar\omega_{21}^3}{\pi^2 c^3} \frac{g_1}{g_2}$$

Ну и тогда число переходов из состояния 1 в 2 будет равно:

$$dn_{12} = B_{12}\rho_\omega N_1 dt = N_1\sigma_{12}(\omega) \frac{\rho_\omega c}{\hbar\omega_{12}} dt$$

где  $\sigma_{12}(\omega)$  — сечения рассеяния частиц.

123

## 26. Люминесценция: виды люминесценции. Безызлучательные переходы, квантовый выход люминесценции. Фотолюминесценция жидкостей и твердых тел. Спектральный состав люминесценции. Правило Стокса.

### 26.1. Люминесценция: виды люминесценции

**Люминесценция** - нетепловое излучение вещества (т.е. излучение сверх того, что при данной температуре излучает абсолютно черное тело). Природа явления заключается в следующем: электрону молекулы или атома неким способом сообщили избыточную энергию, он 'поднялся' на более высокий энергетический уровень, а затем 'вернулся', излучив при этом энергию в виде света.

Виды люминесценции выделяются по способам подведения энергии к излучающим системам.

**Фотолюминесценция** — свечение под действием света (видимого и УФ-диапазона). Она, в свою очередь, делится на флуоресценцию (время жизни  $10^{-9} - 10^{-6}$  с) и фосфоресценцию ( $10^{-3} - 10$  с).

**Хемилюминесценция** — свечение, использующее энергию химических реакций. Примеры: свечение фосфора при медленном окислении, попы светлячков.

**Катодолюминесценция** — вызвана облучением быстрыми электронами (катодными лучами).

**Сонолюминесценция** — люминесценция, вызванная звуком высокой частоты. Примеры: вспышка света при схлопывании кавитационных пузырьков, рожденных в воде стоячей ультразвуковой волной.

**Триболюминесценция** — люминесценция, возникающая при растирании, раздавливании или раскалывании люминофоров. Триболюминесценция вызывается электрическими разрядами, происходящими между образовавшимися наэлектризованными частями — свет разряда вызывает фотолюминесценцию люминофора. Пример: разбивание рафинированного сахара.

**Электролюминесценция** - возникает при пропускании электрического тока через определённые типы люминофоров. Примеры: лампы дневного света.

### 26.2. Безызлучательные переходы, квантовый выход люминесценции

**Безызлучательные переходы** - 'переходы' на более высокие энергетические уровни без последующего 'возвращения' и излучения фотона.

**Квантовый выход** - характеристика процесса люминесценции. Квантовый выход  $\varphi$  определяется как:

$$\varphi = N_i/N_p, \quad (44)$$

где  $N_i$  - среднее число излученных квантов,  $N_p$  - среднее число поглощенных квантов. Отличие этого показателя от единицы определяется как раз (в основном) наличием безызлучательных переходов.

Энергетический выход - так же характеристика люминесценции, только отношение средней излученной энергии к средней поглощенной энергии.

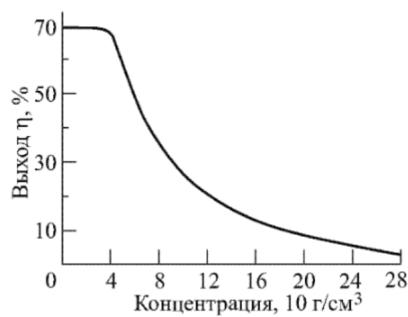


Рис. 27. Зависимость выхода люминесценции от концентрации водного раствора флуорисцеина. Иллюстрация из Ландсберга

### 26.3. Фотолюминесценция жидкостей и твердых тел

В жидкостях и твердых телах фотолюминесценция часто "тушится" (легальный термин) при добавлении примесей, которые поглощают выделяющиеся кванты и перераспределяют их энергию в тепловое движение. Однако, при увеличении концентрации самого люминесцирующего вещества тоже наблюдается падение выхода флуоресценции (см. рис. 27).

### 26.4. Спектральный состав люминесценции

Спектром люминесценции называют зависимость интенсивности люминесцентного излучения от длины волны испускаемого света. Наиболее простые — атомные спектры, в которых указанная выше зависимость определяется только электронным строением атома. Спектры молекул гораздо более сложные вследствие того, что в молекуле реализуются различные деформационные и валентные колебания.

### 26.5. Правило Стокса

**Правило Стокса:** свет люминесценции имеет большую длину волны, чем поглощенный свет, вызвавший люминесценцию. (см. рис. 28). Как и все, что названо словом "правило" иногда нарушается.

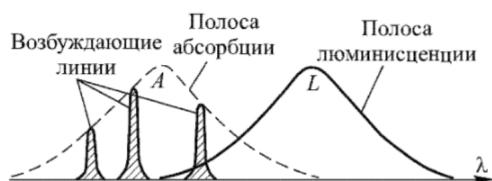


Рис. 28. Схема, поясняющая правило Стокса. Максимум поглощения левее максимума испускания по шкале длин волн. Иллюстрация из Ландсберга

## 27. Рассеяние света, зависимость интенсивности рассеянного света от частоты(формула Рэлея) и угловая диаграмма рассеяния. Молекулярное рассеяние света. Рассеяние света в мелкодисперсных и мутных средах.

### 27.1. Рассеяние света

*Рассеяние света* - это преобразование света веществом, сопровождающееся изменением направления и проявляющееся как *вынужденное свечение*, обусловленное колебаниями электронов в атомах, молекулах и ионах.

В однородной среде рассеяние может возникать, только если в среде присутствуют неоднородности. Дело в том, что вторичные волны, излученные электронами, в однородной среде взаинно погашаются благодаря интерференции.

Рассеяние света в мутных средах с размерами неоднородностей  $d \leq (0,1 - 0,2)\lambda$  называется *эффектом Тиндалля*(рассеяние в мутных средах).

### 27.2. Молекулярное рассеяние

Рассеяние света наблюдается и в чистых средах без примесей. В этом случае оно называется *молекулярным рассеянием*. Возникновение неоднородностей в таких средах связано с различными флюктуациями, приводящими к отклонениям показателя преломления от постоянного значения.

Если размеры неоднородностей малы по сравнению с длиной волны, то рассеяние является *упругим*: частоты исходного и рассеянного света оказываются одинаковыми.

Рассеяние света на неоднородностях, размеры которых много меньше его длины волны называется *рэлеевским*.

Это явление объясняется взаимодействием электромагнитных волн с электронами. Как известно, мощность излучения диполя с дипольным моментом  $p(t)$  дается формулой

$$Q = \frac{2}{3c^3} \ddot{p}^2$$

### 27.3. Закон Рэлея

Пусть диэлектрическая проницаемость среды  $\epsilon_0$ , а диэлектрическая проницаемость неоднородного включения -  $\epsilon$ . Если размер неоднородности  $a$  мал по сравнению с длиной волны излучения, то электрическое поле в области включения можно считать однородным. Будем считать эту область шаром радиуса  $a$ . Ее индуцированный дипольный момент равен

$$p = \beta E, \beta = a^3 \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \epsilon_0,$$

где  $E$  - электрическое поле вне шара. Пусть поле  $E$  совершает гармонические колебания:  $E = E_0 \cos(\omega t + \varphi)$ . Тогда

$$p = \beta E_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

Усредним по периоду колебаний и после подстановки получим

$$Q = \frac{e^4 \beta^2 E_0^2}{3c^3} \omega^4$$

Учитывая равенство  $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ , получим закон Рэлея:

$$Q = \frac{(2\pi e)^4 c \beta^2 E_0^2}{3\lambda^4} \sim \frac{1}{\lambda^4}$$

Заметим, что данная зависимость выполняется, когда частоты света находятся вдали от резонансных частот вещества:  $\omega \ll \omega_0$ , и зависимость диэлектрической проницаемости от длины волны излучения слабая. Это обычно имеет место при рассеянии света в прозрачных средах (в частности, в воздухе).

Для неоднородностей размерами  $a > 0,2\lambda$  рэлеевское рассеяние переходит в дифракцию, причем закон Рэлея оказывается несправедливым. Если же размеры неоднородностей велики:  $a \gg \lambda$ , то для расчета рассеяния применимы законы геометрической оптики.

## 27.4. Сечение рассеяния

### 27.4.1. Излучение колеблющегося диполя

Пусть дипольный момент совершает колебания вдоль фиксированного направления, а его величина меняется по некоторому закону  $p = p(t)$ . Тогда электрическое и магнитное поля в волновой зоне даются формулами

$$E = \frac{\ddot{p}}{c^2 r} \sin \theta, H = \frac{\ddot{p}}{c^2 r} \sin \theta$$

Плотность потока энергии поля определяется вектором Пойнтинга:

$$S = \frac{c}{4\pi} E \times H$$

Отсюда после усреднения по периоду колебаний находим интенсивность излучения:

$$I = \overline{S} = \frac{\overline{\dot{p}^2}}{4\pi c^3 r^2} n \sin^2 \theta$$

Эта зависимость дает угловое распределение (диаграмму направленности) дипольного излучения.

123