

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

Факультет физики

## Экзамен

«Оптика»



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

Москва  
2020

## Содержание

<b>1. Световой луч. Распространение световых лучей. Оптическая длина пути. Принцип Ферма, понятие таутохронизма в оптике. Законы отражения и преломления света.</b>	<b>4</b>
<b>2. Явление полного внутреннего отражения, его применения. Оптические элементы и приборы, работающие на явлении полного внутреннего отражения. Оптоволокно, типы оптоволокна.</b>	<b>6</b>
<b>3. Преломление на сферической поверхности. Фокусы сферической поверхности. Изображение предмета. Преломление в линзе. Общая формула линзы (выход). Фокусные расстояния тонкой линзы. Действительное и мнимое изображения. Линейное (поперечное) увеличение. Оптическая сила линз.</b>	<b>8</b>
3.1. Преломление на сферической поверхности . . . . .	9
3.2. Тонкие линзы . . . . .	10
<b>4. Построение изображений. Центрированная оптическая система. Кардинальные точки и плоскости центрированной оптической системы. Сложение центрированных оптических систем. Отражение от сферических поверхностей. Фокусное расстояние выпуклого и вогнутого зеркал. Схема построения изображений для зеркал.</b>	<b>12</b>
4.1. Основные определения . . . . .	12
4.2. Построений изображений . . . . .	12
4.3. Сложение центрированных оптических систем . . . . .	12
4.3.1. Фокусные расстояния составной системы . . . . .	12
4.3.2. Оптическая сила составной системы . . . . .	14
4.4. Отражение от сферических поверхностей. Фокусное расстояние выпуклого и вогнутого зеркал . . . . .	14
4.5. Схема построения изображений для зеркал . . . . .	15
4.5.1. Построение изображения в плоском зеркале . . . . .	15
4.5.2. Построение изображения в сферическом зеркале . . . . .	15
<b>5. Аберрации оптических систем. Аберрации, обусловленные широкими пучками лучей. Коррекция сферической и хроматической аберрации.</b>	<b>16</b>
5.1. Аберрации оптических систем. . . . .	16
5.1.1. Классификация геометрических аберраций . . . . .	16
5.1.2. Сферическая аберрация . . . . .	17
5.1.3. Хроматическая аберрация . . . . .	18
5.2. Аберрации, обусловленные широкими пучками лучей. . . . .	18
5.2.1. Кома . . . . .	18
5.3. Коррекция сферической и хроматической аберрации. . . . .	19
5.4. Подробнее . . . . .	20
<b>6. Оптические инструменты. Микроскоп. Телескоп (труба Кеплера, труба Галилея). Угловое увеличение телескопа.</b>	<b>21</b>
6.1. Микроскоп . . . . .	21
6.2. Труба Кеплера . . . . .	22
6.3. Труба Галилея . . . . .	22

<b>7. Плоская монохроматическая волна. Представление монохроматических волн в комплексном виде. Сферическая и цилиндрическая волны. Стоячие электромагнитные волны. Опыты Винера.</b>	<b>24</b>
<b>8. Электромагнитные волны в однородных, изотропных диэлектрических средах. Уравнения Максвелла. Поперечность электромагнитной волны. Взаимная ориентация волнового вектора, векторов электрического и магнитного полей в плоской волне. Стоячие электромагнитные волны. Опыты Винера.</b>	<b>27</b>
8.1. Ликбез . . . . .	27
8.2. Уравнения Максвелла . . . . .	28
8.3. Электромагнитные волны в однородных, изотропных диэлектрических средах . . . . .	28
8.4. Взаимная ориентация волнового вектора, векторов электрического и магнитного полей в плоской волне . . . . .	29
8.5. Поперечность электромагнитной волны . . . . .	29
8.6. Стоячая волна . . . . .	30
8.7. Опыт Винера . . . . .	30
<b>9. Линейно, циркулярно и эллиптически поляризованный свет. Поляризация естественного света. Степень поляризации. Поляризаторы. Закон Малюса</b>	<b>32</b>
9.1. Типы поляризации . . . . .	32
9.2. Степень поляризации . . . . .	33
9.3. Поляризаторы . . . . .	33
9.4. Закон Малюса . . . . .	33
<b>10. Аберрации оптических систем. Аберрации, обусловленные зависимостью показателя преломления от длины волны (хроматические аберрации).</b>	<b>34</b>
10.1. Аберрации оптических систем. . . . .	34
10.1.1. Классификация геометрических аберраций . . . . .	34
10.2. Хроматическая аберрация . . . . .	35
10.3. Подробнее . . . . .	36
<b>11. Оптические явления на границе раздела изотропных диэлектриков. Соотношения амплитуд падающей, отраженной и преломленной волн (формулы Френеля). Изменение фазы волны при отражении. Энергетические коэффициенты отражения и пропускания света. Коэффициент отражения для естественного света.</b>	<b>37</b>
11.1. Законы отражения и преломления . . . . .	37
11.2. Коэффициенты Френеля . . . . .	38
<b>12. Поляризация отраженной и преломленной волн. Степень поляризации отраженного и преломленного света. Угол Брюстера. Физический смысл закона Брюстера.</b>	<b>40</b>
<b>13. Вращение плоскости поляризации (оптическая активность). Искусственная анизотропия оптических свойств, индуцированная механической деформацией, электрическим (эффект Керра и Покельса) и магнитным (эффект Коттона-Муттона) полями.</b>	<b>45</b>
13.1. Естественная оптическая активность . . . . .	45
13.2. Двойное лучепреломление . . . . .	46

13.3. Искусственная анизотропия оптических свойств, индуцированная механической деформацией . . . . .	46
13.4. Эффект Керра и Поккельса . . . . .	47
13.5. Эффект Коттона-Муттона . . . . .	47
<b>14. Принцип суперпозиции и интерференция монохроматических волн. Интерференция плоской и сферической волн. Видность полос.</b>	<b>48</b>
14.1. Интерференция двух плоских монохроматических волн. Ширина полосы . . . . .	48
14.1.1. Ширина полосы . . . . .	48
14.2. Интерференция плоской и сферической монохроматических волн . . . . .	48
14.3. Видность . . . . .	49
<b>15. Понятие о когерентности. Частично когерентный свет. Основные интерференционные схемы. Интерференция плоских волн, пространственный период полос.</b>	<b>50</b>
15.1. Основные схемы . . . . .	50
<b>16. Интерференция волн от одного источника. Интерференционные опыты с делением волнового фронта (опыт Поля, бипризма Френеля, зеркала Френеля, билинза Бийе, зеркало Ллойда). Схема Юнга.</b>	<b>52</b>
16.1. Интерференция волн от одного источника . . . . .	52
16.2. Методы получения когерентных пучков . . . . .	52
16.3. Схема Юнга . . . . .	53
16.4. Опыт Поля . . . . .	53
16.5. Бипризма Френеля . . . . .	54
16.6. Зеркала Френеля . . . . .	54
16.7. Билинза Бийе . . . . .	54
16.8. Зеркало Ллойда . . . . .	55
<b>17. Временная когерентность. Интерференция немонохроматических волн. Время и длина когерентности. Соотношения между временем когерентности и шириной спектрального интервала.</b>	<b>56</b>
17.1. Интерференция немонохроматических волн . . . . .	56
17.1.1. Корегентность . . . . .	56
17.1.2. Время и длина когерентности . . . . .	56
17.1.3. Связь времени когерентности с шириной спектра . . . . .	56
17.2. Влияние немонохроматичности на наблюдаемое число интерференционных полос . . . . .	57
<b>18. Временная когерентность. Видность интерференционной картины. Предельная разность хода и полное число наблюдаемых интерференционных полос.</b>	<b>59</b>
18.1. Степень когерентности . . . . .	59
18.2. Видность интерференционной картины . . . . .	60
18.3. Временная когерентность . . . . .	60
18.4. Предельная разность хода и полное число наблюдаемых интерференционных полос . . . . .	61
<b>19. Пространственная когерентность. Интерференция квазимонохроматических волн протяженных источников света. Роль конечных размеров источника света. Интерференционная картина в схеме Юнга.</b>	<b>62</b>
19.1. Пространственная когерентность . . . . .	62

19.2. Интерференция квазимохроматических волн протяженных источников света . . . . .	63
<b>20. Пространственная когерентность. Радиус пространственной когерентности, зависимость радиуса пространственной когерентности от угловых размеров источника света.</b>	<b>64</b>
<b>21. Пространственная когерентность. Степень пространственной когерентности. Звездный интерферометр Майкельсона и его современные модификации.</b>	<b>65</b>
21.1. Пространственная когерентность . . . . .	65
21.2. Степень пространственной когерентности . . . . .	66
21.3. Звездный интерферометр Майкельсона . . . . .	66
21.3.1. Принцип работы звездного интерферометра Майкельсона . . . . .	67
21.3.2. Современные модификации . . . . .	68
<b>22. Двухлучевые интерферометры. Интерферометры Рэлея, Маха-Цендера, Майкельсона. Применение интерферометров в научных исследованиях и технике: измерение малых смещений, изучение состояния поверхности, рефрактометрия (изменение показателя преломления).</b>	<b>70</b>
22.1. Двухлучевые интерферометры . . . . .	70
22.2. Интерферометр Рэлея . . . . .	70
22.3. Интерферометр Маха-Цендера . . . . .	71
22.4. Интерферометр Майкельсона . . . . .	71
22.5. Применение интерферометров в научных исследованиях и технике: измерение малых смещений, изучение состояния поверхности, рефрактометрия (изменение показателя преломления) . . . . .	72

# 1. Световой луч. Распространение световых лучей. Оптическая длина пути. Принцип Ферма, понятие таутохронизма в оптике. Законы отражения и преломления света.

**Световым лучом** мы будем называть некоторый конечный, но очень узкий пучок, который может существовать изолированно от других лучей.

Согласно **закону прямолинейного распространения света** световые лучи в прозрачной однородной среде распространяются прямолинейно. Согласно **закону о независимости световых пучков** распространение каждого светового луча не зависит от того, есть ли в среде иные световые лучи, или нет. Это разумеется, не совсем корректно: тогда бы не было явления интерференции, однако в рамках геометрической оптики мы этим явлением пренебрежем.

**Оптической длиной пути**  $\Delta$  между двумя точками мы назовем расстояние, на которое свет распространился бы в вакууме за время прохождения расстояния между этими двумя точками. Как известно, скорость света в вакууме есть максимальная достижимая скорость и является константой  $c$ , а скорость света в веществе равна:

$$v = \frac{c}{n} \quad (1)$$

где  $n$  — абсолютный показатель преломления среды, который и вводится, как отношение скорости света в вакууме к скорости света в этой среде.

Тогда на основании формулы (1) можем записать:

$$\Delta = nl$$

где  $l$  — расстояние между точками,  $n$  — абсолютный показатель преломления среды.

Указанная формула имеет обобщение на случай, когда показатель среды может зависеть от координаты, тогда:

$$\Delta = \int_a^b n dl \quad (2)$$

**Принцип Ферма.** *Луч движется из начальной точки в конечную по траектории, которая обеспечивает минимальную оптическую длину пути. Является постулатом.*

Из принципа Ферма в случае однородной среды логичным образом вытекает закон прямолинейного распространения света, упомянутый ранее.

**Принцип таутохронизма.** *Оптическая длина любого луча между двумя волновыми фронтами одна и та же.*

**Закон отражения света.** *Луч падающий, луч отраженный и перпендикуляр, восстановленный из точки падения, лежат в одной полуплоскости. Угол падения равен углу отражения.*

**Закон преломления света.** *Луч падающий, луч преломленный и перпендикуляр, восстановленный в точке преломления, лежат в одной плоскости. Угол падения и угол преломления связаны следующим соотношением:  $n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \gamma$ , где  $n_1$  — абсолютный показатель преломления среды, из которой луч приходит,  $n_2$  — среды, в которую луч преломляется,  $\alpha$  — угол падения,  $\gamma$  — угол преломления.*

◀ Пусть глаз наблюдателя находится на высоте  $H$  над поверхностью некоего водоема, а точечный источник — на глубине  $h$  в этом водоеме на расстоянии  $S$  от места, где стоит наблю-

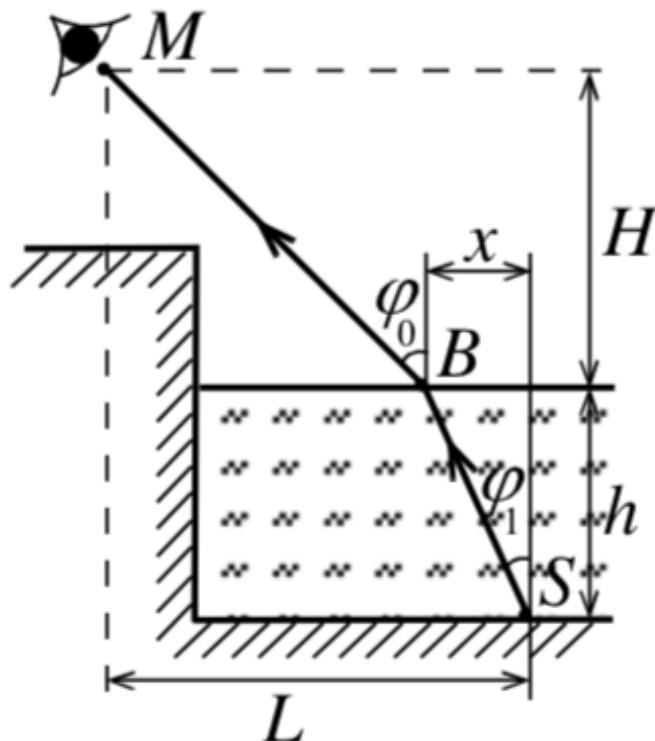
датель (вдоль поверхности воды). Показатель преломления воздуха примем равным  $n_{\text{возд}} = 1$ , а показатель преломления воды —  $n$ , известный нам.

Пусть проекция отреза  $BS$  на поверхность воды равна  $x$ . В таком случае:

$$\begin{aligned} BS &= \sqrt{h^2 + x^2}, \\ MB &= \sqrt{H^2 + (L - x)^2} \\ t &= \frac{SB}{v} + \frac{MB}{c} = \left( n_1 \sqrt{h^2 + x^2} + \sqrt{H^2 + (L - x)^2} \right) / c \end{aligned}$$

Согласно принципу наименьшего времени, полученное нами последнее выражение должно оказаться минимальным, другими словами  $\frac{dt}{dx} = 0$  или:

$$n_1 \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}} - \frac{L - x}{\sqrt{H^2 + (L - x)^2}} = 0$$



В то же время из рисунка мы однозначно можем утверждать:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}} \\ \sin \gamma &= \frac{L - x}{\sqrt{H^2 + (L - x)^2}} \end{aligned}$$

Отсюда напрямую следует факт:

$n \sin \alpha = \sin \gamma$



## 2. Явление полного внутреннего отражения, его применения. Оптические элементы и приборы, работающие на явлении полного внутреннего отражения. Оптоволокно, типы оптоволокна.

Сначала наивное. Мы знаем формулу Снеллиуса  $\sin \theta = n_{21} \sin \theta'$ , где  $n_{21}$  – это относительная оптическая плотность. Если  $n_{21} < 1$  то должен существовать такой угол падения  $\arcsin n_{21}$  после которого не может уже существовать никакого прошедшего луча, а только отраженный. Так как свету некуда деться, кроме как отразиться, то он отражается полностью.

Теперь как это выглядит с точки зрения волновой оптики (Сивухин с 402)  
Пусть у нас есть падающая волна:

$$E^e = \mathcal{E} e^{i(\omega t - k_1 r)}$$

Мы из соображений геометрической оптики знаем, что должны быть еще отраженная ( $r$ ) и прошедшая ( $d$ ) волны:

$$E^r = \mathcal{R} e^{i(\omega t - k'_1 r)}$$

$$E^d = \mathcal{D} e^{i(\omega t - k_2 r)}$$

Мы предполагаем что они тоже плоские из соображений симметрии. Равенство частот у всех трех объясняется тем, что напряженности могут иметь только гармоническую зависимость от времени, а в случае наложения двух плоских полей с разными частотами такое не выполняется. Из соотношений симметрии надо заключить, что касательная к плоскости составляющая волнового вектора у всех трех волн одинаковая. В нашем случае это проекция на ось  $x$  (смотрите рисунок)

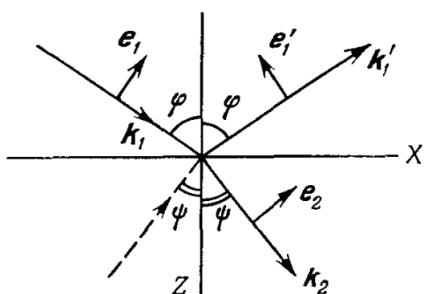


Рис. 238.

То есть:  $k_{1x} = k'_{1x} = k_{2x}$

Так же можем написать про волновые вектора:

$$k_1^2 = k_1'^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_1$$

$$k_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_2$$

Где эпсилон 1 и 2 это диэлектрическая проницаемость среды из которой пришел луч и в которую ушел соответственно. Отсюда можно узнать их z составляющие:

$$k'_{1z} = -\sqrt{k_1^2 - k_{1x}^2}$$

$$k_{2z} = \sqrt{k_2^2 - k_{1x}^2}$$

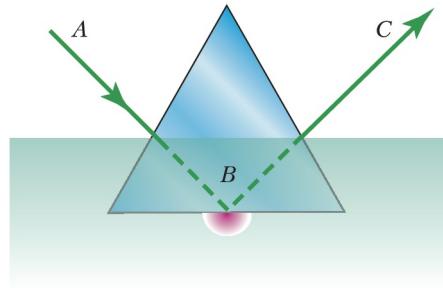
Так как нас волнует полное внутреннее отражение, то рассмотрим случай, когда  $k_2^2 < k_{1x}^2$  так как  $k_{1x} = k_1 \sin \varphi$ , то это условие равносильно условию  $\sin \varphi > \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = n_{21}$  так же как в геометрической оптике. Естественно чтобы такое условие вообще могло выполняться надо чтобы  $n_{21} < 1$ . В этом случае  $k_{2z}$  комплексный. Обозначим так:  $k_{2z} = \frac{-i}{2h}$  Почему минус? Потому что корень это функция многозначная и нужную ветвь мы выбираем исходя из физических требований, а тут нужен как раз минус. Со всем этим можем написать отраженную волну как:

$$E^d = \mathcal{D} e^{-z/2h} e^{i(\omega t - k_{1x}x)}$$

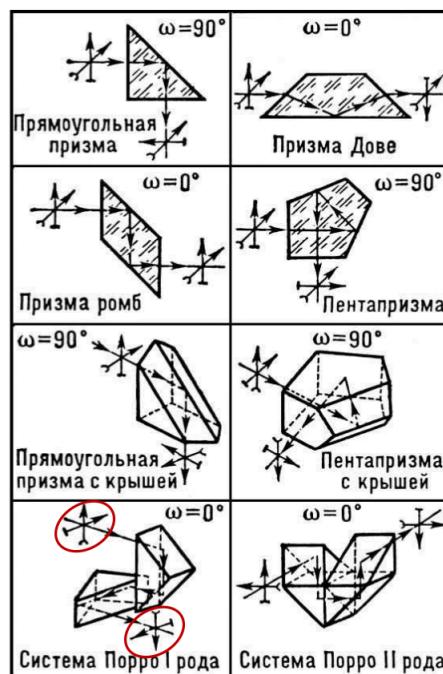
$$h = \frac{\lambda_1}{4\pi \sqrt{\sin^2 \varphi - n_{21}^2}}$$

То есть волна идет вдоль границы, но затухает вглубь вещества (см рисунок)

Рис. 1. Опыт Мандельштама и Селени



Эффект полного внутреннего отражения используется например в уголковых отражателях и во многих других призмах:



Оптоволокно это такая штука, в которой свет постоянно испытывает отражения от стенок. Состоит из двух слоев очевидно. Внешний имеет оптическую плотность больше. Заодно он защищает внутренний слой от повреждений. Сгибать сильно нельзя.

### 3. Преломление на сферической поверхности. Фокусы сферической поверхности. Изображение предмета. Преломление в линзе. Общая формула линзы (вывод). Фокусные расстояния тонкой линзы. Действительное и мнимое изображения. Линейное (поперечное) увеличение. Оптическая сила линз.

Сначала введём необходимые определения:

- 1) **Оптическая система** — совокупность оптических элементов (преломляющих, отражающих), созданная для преобразования световых пучков.
- 2) **Оптическая ось системы** — прямая линия, являющаяся осью симметрии преломляющих (отражающих) поверхностей. Она проходит перпендикулярно этим поверхностям через их центр кривизны.
- 3) **Центрированная оптическая система** — совокупность однородных преломляющих и отражающих сред, отделённых друг от друга симметричными поверхностями, центры кривизны которых находятся на одной прямой. Эту прямую называют *главной оптической осью системы*.
- 4) **Гомоцентрический пучок** — пучок, все образующие лучи которого при своём продолжении сходятся в одной точке. *Параллельный* пучок тоже считается гомоцентрическим, т.к. он исходит из бесконечно удалённой точки.
- 5) **Параксиальный пучок** — пучок, все образующие лучи которого распространяются вдоль оси центрированной оптической системы и образуют малые углы с осью и нормалями к преломляющим и отражающим поверхностям.
- 6) Пусть оптическая система преобразует свет, не нарушая гомоцентричности пучка, причём пучок лучей, исходящий из точки  $P$ , сходится в точке  $P'$ . Тогда точка  $P'$  — это **изображение** точки  $P$ .
- 7) Изображение называется **действительным**, если световые лучи от точки  $P$  сходятся к точке  $P'$  при своём распространении. Если же в точке  $P'$  сходятся продолжения лучей в направлении, обратном направлению распространения света, то изображение называется **мнимым**.
- 8) Пусть на оптическую систему падает пучок лучей, параллельных главной оптической оси. **Задний (второй главный) фокус** — это точка пересечения пучка таких лучей (или их продолжений) на выходе из системы.
- 9) Если на систему падает пучок лучей, исходящий из некоторой точки, и после прохождения оптической системы лучи идут параллельно главной оптической оси, исходная точка называется **передним (первым главным) фокусом**. Передний и задний фокусы всегда лежат на главной оптической оси.

- 10) **Линейное (поперечное) увеличение** — отношение линейных размеров изображения и предмета:

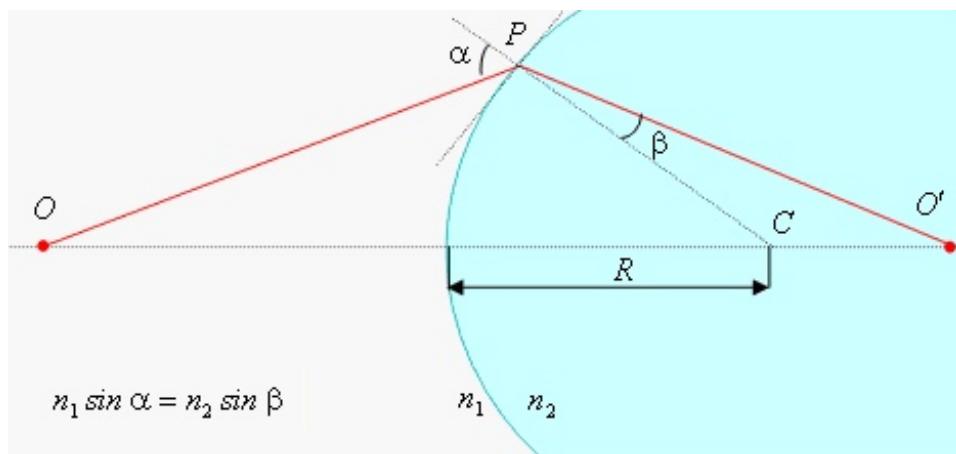
$$\beta = \frac{y'}{y}. \quad (3)$$

Отрезки  $y$  и  $y'$  считаются положительными, если они откладываются вверх от оптической оси, и отрицательными — в противном случае.

- 11) Если увеличение положительное, то изображение **прямое**. В противном случае изображение **обратное**.
- 12) Две сопряжённые плоскости, отображающиеся с линейным увеличением  $\beta = 1$ , называются **главными**. Точки пересечения главных плоскостей с главной оптической осью — **главные точки** оптической системы.
- 13) **Главные фокусные расстояния** — расстояния от главных точек до соответствующих фокусов. Эти расстояния считаются положительными, если свет идёт от главной плоскости к соответствующему главному фокусу (правило знаков).

### 3.1. Преломление на сферической поверхности

Пусть две среды с разными показателями преломления ( $n$  и  $n'$ ) отделены друг от друга сферической границей  $S$  радиуса  $R$ . Эта граница может рассматриваться как оптическая система, преобразующая падающее на неё излучение предмета. Считаем радиус сферы положительным, если её центр находится с той стороны, куда распространяются лучи.



Рассмотрим луч  $OP$ , выходящий из точки  $O$ , испытывающий преломление в точке  $P$  и пересекающий оптическую ось в точке  $O'$ . Проведём из центра сферы радиус  $CP$ . Он ортогонален поверхности сферы  $S$ , так что для углов  $\alpha$  и  $\beta$  можно записать закон Снеллиуса:

$$n \sin \alpha = n' \sin \beta. \quad (4)$$

Обозначим путь луча  $OP$  как  $u$ , а дальнейший путь  $PO'$  как  $u'$ . Найдём их связь из геометрических соображений:

$$S_{OPC} + S_{PCO'} = S_{O'PO},$$

$$\begin{aligned} S_{OPC} &= -\frac{1}{2}uR \sin \alpha, \\ S_{PCO'} &= \frac{1}{2}u'R \sin \beta, \\ S_{O'PO} &= -\frac{1}{2}uu' \sin(\pi - \alpha + \beta). \end{aligned}$$

Из этих равенств находим

$$-uR \sin \alpha + u'R \sin \beta = -uu' \sin(\alpha - \beta).$$

Подставляем (4) и находим

$$-u + u' \frac{n}{n'} = -\frac{uu'}{R} \left( \cos \beta - \cos \alpha \frac{n}{n'} \right),$$

или

$$\frac{n}{u} - \frac{n'}{u'} = \frac{n \cos \alpha - n' \cos \beta}{R}. \quad (5)$$

Это точное соотношение. В случае параксиальных пучков, для которых  $|\alpha| \ll 1$ ,  $|\beta| \ll 1$ , формула (5) принимает вид

$$\frac{n}{x} - \frac{n'}{x'} = \frac{n - n'}{R}, \quad (6)$$

где  $x$  — расстояние от точки  $O$  до поверхности сферы,  $x'$  — расстояние от точки  $O'$  до поверхности сферы. Знаки величин  $x$  и  $x'$  определяются так же, как и для  $u$  и  $u'$ , из того условия, что отсчёт расстояния ведётся от преломляющей поверхности *по направлению лучей*.

Подставив  $x = -\infty$  и  $x' = \infty$ , находим положение заднего и переднего фокусов соответственно:

$$\begin{aligned} f' &= x' = \frac{R}{1 - n/n'}, \\ f &= x = -R \frac{n/n'}{1 - n/n'}. \end{aligned}$$

### 3.2. Тонкие линзы

**Линза** — это прозрачное тело, изготовленное из прозрачного оптически однородного материала, ограниченное двумя полированными выпуклыми или вогнутыми поверхностями.

Точки пересечения поверхностей линзы с оптической осью называются *вершинами линзы*. Расстояние  $d$  между вершинами линзы называется *толщиной линзы*. Линза считается **тонкой**, если её толщина мала по сравнению с радиусами кривизны поверхностей:  $d \ll R_1$ ,  $d \ll R_2$ . Главные плоскости тонкой линзы совпадают.

Представим линзу как совокупность двух последовательных преломляющих поверхностей. Согласно (6), для первой поверхности имеем:

$$\frac{n_e}{x} - \frac{n_i}{x_1} = \frac{n_e - n_i}{R_1}.$$

Поскольку линза предполагается тонкой, то координата  $x_1$  промежуточного изображения одинакова относительно обеих поверхностей. Следовательно, для второй поверхности можем записать

$$\frac{n_i}{x_1} - \frac{n_e}{x'} = \frac{n_i - n_e}{R_2}.$$

Складывая эти равенства, получаем

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x'} = -(n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad (7)$$

Здесь мы перешли к относительному показателю преломления  $n = n_i/n_e$ .

Фокусные расстояния тонкой линзы:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f'} &= (n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \\ f &= -f'. \end{aligned}$$

Для двояковыпуклой (или *собирающей*) линзы  $R_1 > 0$ ,  $R_2 < 0$  и фокусное расстояние  $f' > 0$ ,  $f < 0$ . Для двояковогнутой (или *рассеивающей*) линзы всё ровным счётом наоборот.

Заметим, что соотношение (7) можно переписать как

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x'} = \frac{1}{f}. \quad (8)$$

Полученная формула называется **формулой тонкой линзы**.

**Оптическую силу линзы** определяют как величину, обратно пропорциональную фокусному расстоянию:

$$D = \frac{1}{f'}. \quad (9)$$

Для собирающих линз оптическая сила положительна ( $f' > 0$ ), а для рассеивающих — отрицательна ( $f' < 0$ ). Единица измерения оптической силы — *диоптрия* (оптическая сила такой системы, фокусное расстояние которой  $|f'|$  равно одному метру).

Оптическая сила аддитивна (в случае тонких линз).

**4. Построение изображений. Центрированная оптическая система. Кардинальные точки и плоскости центрированной оптической системы. Сложение центрированных оптических систем. Отражение от сферических поверхностей. Фокусное расстояние выпуклого и вогнутого зеркал. Схема построения изображений для зеркал.**

#### **4.1. Основные определения**

*Оптическая ось оптической системы* (включающая линзы, зеркала и так далее) - прямая линия, являющаяся осью симметрии преломляющих (отражающих) поверхностей. Она проходит перпендикулярно этим поверхностям через центры их кривизны.

*Центрированная оптическая система* - совокупность однородных преломляющих и отражающих сред, удаленных друг от друга симметричными поверхностями, центры кривизны которых находятся на одной прямой. Эту прямую называют *главной оптической осью*.

Две сопряженные плоскости, отображающиеся с линейным увеличением +1, называются *главными*. Одна из них называется главной плоскостью пространства предметов (или передней главной плоскостью), а вторая - главной плоскостью пространства изображений (или задней главной плоскостью). Точки пересечения главных плоскостей с главной оптической осью называются *главными точками оптической системы*.

Фокальные и главные точки центрированной системы называются ее *кардинальными точками*.

#### **4.2. Построение изображений**

Знание кардинальных точек позволяет строить изображение произвольного предмета. Для этого из точек предмета проводят два луча: один - параллельно главной оптической оси, а второй - через передний фокус. Первый луч, достигнув главной плоскости, преобразуется в луч, идущий через задний фокус, а второй - в луч, идущий параллельно оптической оси. Точка пересечения вторичных лучей (или их продолжений в обратном направлении) дает изображение (действительное или мнимое) соответствующих точек предмета.

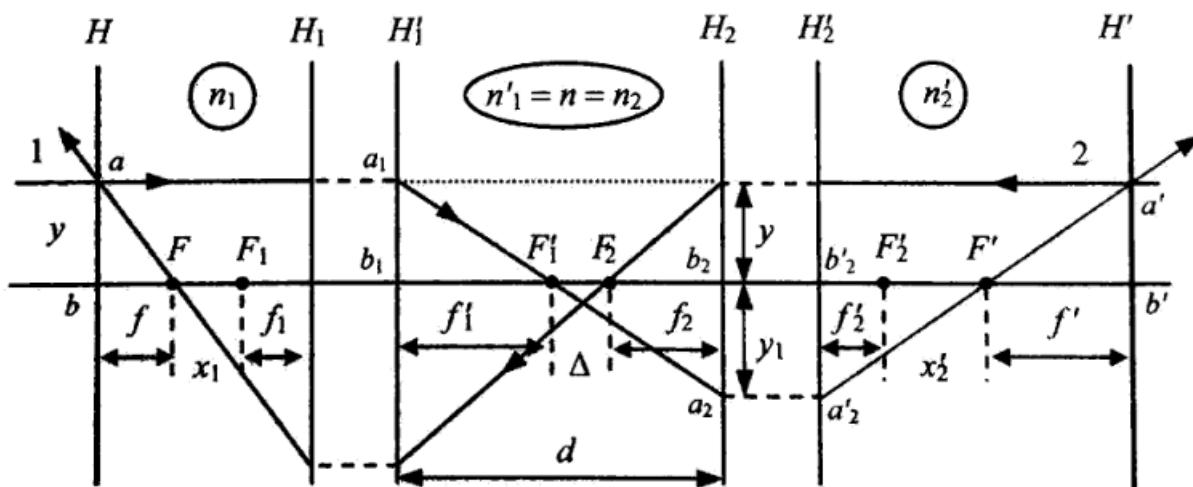
#### **4.3. Сложение центрированных оптических систем**

##### **4.3.1. Фокусные расстояния составной системы**

Рассмотрим две центрированные системы, главные оптические оси которых совпадают. Составная система при этом также оказывается центрированной.

Расстояние  $\Delta$  между задним фокусом  $F'_1$  первой системы и передним фокусом  $F_2$  второй называется *оптическим интервалом* двух складываемых систем.

Будем решать задачу о нахождении фокусных расстояний сложной системы, зная фокусные расстояния складываемых систем и оптический интервал между ними. Будем считать, что пространство между главными плоскостями  $H'_1$  и  $H_2$  складываемых оптических систем однородно и имеет показатель преломления  $n$ .



Пошлем луч 1 слева направо параллельно главной оптической оси. Данный луч пройдет на расстоянии  $\Delta$  от переднего фокуса  $F_2$  системы 2 и пересечет главную оптическую ось в точке  $F'$ , являющейся задним фокусом составной системы. Это позволяет найти расстояние  $x'_2$  от заднего фокуса  $F'_2$  системы 2 до заднего фокуса  $F'$  составной системы. По формуле Ньютона (получается из геометрии треугольников) после прохождения второй системы имеем

$$(-\Delta) \cdot x'_2 = f_2 f'_2 \Rightarrow x'_2 = -\frac{f_2 f'_2}{\Delta}$$

Для нахождения фокусного расстояния  $f'$  нужно найти положение главной плоскости  $H'$  составной системы. Из подобия треугольников  $a_1 b_1 F'_1$  и  $a_2 b_2 F'_1$  следует равенство

$$\frac{y}{-y'} = \frac{f'_1}{\Delta - f_2}$$

Для прямоугольных треугольников  $a'b'F'$  и  $a'_2 b'_2 F'$

$$\frac{y}{-y'} = \frac{-f'}{f'_2 + x'_2}$$

Подстановка сюда выражения  $x'_2 = -\frac{f_2 f'_2}{\Delta}$  дает

$$\frac{y}{-y_1} = \frac{f'}{f'_2 - \frac{f_2 f'_2}{\Delta}} = -\frac{f' \Delta}{f'_2 (\Delta - f_2)}$$

Сравнив полученные выражения, получим итоговую формулу для заднего фокусного расстояния  $f'$ :

$$f' = -\frac{f'_1 f'_2}{\Delta}$$

Положение передней главной плоскости и переднее фокусное расстояние можно найти, если рассмотреть траекторию луча 2, запущенного в обратном направлении. Проводя аналогичные рассуждения, получим расстояние от переднего фокуса  $F_1$  системы 1 до переднего фокуса  $F$  составной системы и суммарное переднее фокусное расстояние:

$$x_1 = \frac{f_1 f'_1}{\Delta}, \quad f = \frac{f_1 f_2}{\Delta}$$

#### 4.3.2. Оптическая сила составной системы

После преобразований полученного выражения для фокуса с помощью определения оптической силы, получим

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - \frac{d}{n} \Phi_1 \Phi_2.$$

В частном случае, когда  $d \rightarrow 0$ , получаем, что оптическая сила сложной системы равна сумме оптических сил составляющих систем:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2.$$

Этот результат можно распространить на случай произвольного числа элементов составной оптической системы, если только эти элементы расположены достаточно близко:

$$\Phi = \sum_i \Phi_i.$$

#### 4.4. Отражение от сферических поверхностей. Фокусное расстояние выпуклого и вогнутого зеркал

Запишем выражение для оптической силы преломляющей поверхности:

$$\Phi = -\frac{n - n'}{R}$$

Знание оптической силы позволяет найти фокусное расстояние:

$$f' = \frac{n'}{\Phi}$$

Для зеркала оптическая сила может быть определена, если положить  $n = 1, n' = -1$

$$\Phi = -\frac{2}{R}$$

Для выпуклого зеркала  $R > 0, \Phi < 0$ . Это зеркало будет рассеивать падающее на него излучение. Если же  $R < 0$ , то зеркало фокусирует излучение ( $\Phi > 0$ ).

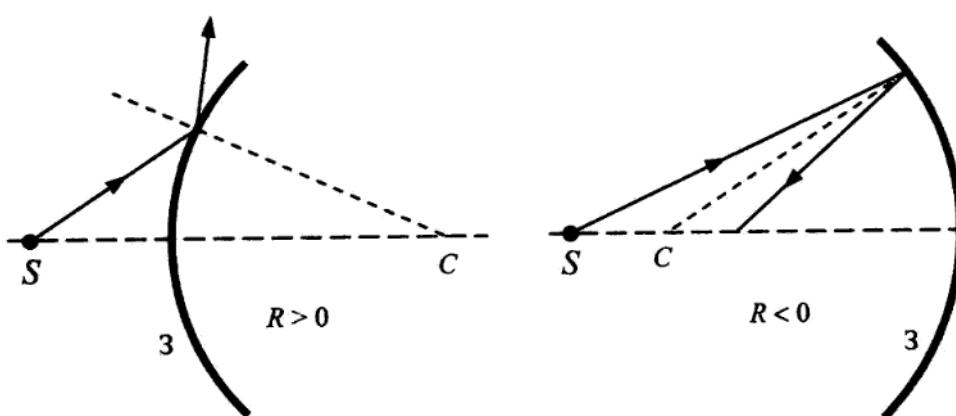


Рис. 2. Слева - отражение выпуклым зеркалом; справа - отражение вогнутым

## 4.5. Схема построения изображений для зеркал

### 4.5.1. Построение изображения в плоском зеркале

Общие идеи:

- 1) Падающий на зеркало луч, отражается, согласно закону отражения
- 2) Изображение строится на пересечении продолжения падающих лучей за плоскость зеркала
- 3) Предмет и изображение расположены симметрично относительно плоскости зеркала
- 4) Изображение мнимое

### 4.5.2. Построение изображения в сферическом зеркале

Общие идеи построения изображения в сферическом зеркале совпадают с принципами построения изображения в линзах:

- 1) Луч, пущенный вдоль главной оптической оси, после отражения пойдет через фокус
- 2) Луч, проходящий через фокус, отразившись, окажется параллельным ГОО
- 3) Луч, проходящий через центр кривизны зеркала, после отражения пройдет по тому же пути
- 4) Изображение строится на пересечении лучей или их продолжений

## 5. Аберрации оптических систем. Аберрации, обусловленные широкими пучками лучей. Коррекция сферической и хроматической аберрации.

### 5.1. Аберрации оптических систем.

**Определение 1.** Аберрации оптических систем (лат. *aberratio* - уклонение), погрешности изображений, даваемых оптическими системами. Проявляются в том, что оптические изображения в ряде случаев не вполне отчётливы, не точно соответствуют объекту или оказываются окрашенными.

Аберрации делят на **монохроматические** (геометрические) и **хроматические**, среди геометрических выделяют

- Сферическая аберрация
- Кома
- Астигматизм
- Дисторсия
- Кривизна поля (поверхности) изображения

#### 5.1.1. Классификация геометрических аберраций

Геометрические аберрации практически всегда являются учётом непараксиальности в ходе лучей. Произвольный луч в пространстве можно задать, указав прямоугольные координаты  $y$ ,  $z$ ,  $\eta$  и  $\zeta$  точек его пересечения с предметной плоскостью (т.е. плоскостью, проходящей через изображаемую точку  $P$  перпендикулярно к главной оптической оси) и плоскостью входного зрачка. После прохождения через оптическую систему луч пересечёт плоскость параксиального изображения в точке с координатами  $y'$  и  $z'$ . Координаты самого параксиального изображения (*параксиального фокуса*) –  $y'_0$ ,  $z'_0$ . Разности

$$\Delta y' = y' - y'_0 \quad \Delta z' = z' - z'_0$$

примем за меру отступления от предельного случая параксиальной оптики. Координаты  $y'$  и  $z'$  будут функциями  $y$ ,  $z$ ,  $\eta$  и  $\zeta$ :

$$y' = f_y(y, z, \eta, \zeta) \quad z' = f_z(y, z, \eta, \zeta)$$

Линейные члены разложений  $f_y$  и  $f_z$  не зависят от  $\eta$  и  $\zeta$  и соответствуют параксиальной оптике, члены чётных степеней не войдут в эти разложения в силу осевой симметрии оптической задачи. Поэтому  $\Delta y'$  и  $\Delta z'$  будут определяться третьими членами разложения  $f_y$  и  $f_z$  (пожтому часто рассматриваемые дальше аберрации называются аберрациями третьего порядка).

Введём три вектора, перпендикулярных главной оптической оси системы:

$$\mathbf{r} = y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad \mathbf{r}' = y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k} \quad \boldsymbol{\sigma} = \eta\mathbf{j} + \zeta\mathbf{k}$$

Тогда вектор

$$\Delta\mathbf{r}' = \Delta y'\mathbf{j} + \Delta z'\mathbf{k}$$

может быть разложен по векторам  $\mathbf{r}$  и  $\sigma$ . Причём в виду симметрии коэффициенты этих разложений могут зависеть только от «инвариантов вращения»  $\sigma^2$ ,  $(\sigma\mathbf{r})$  и  $r^2$ :

$$\Delta\mathbf{r}' \approx (A\sigma^2 + B(\sigma\mathbf{r}) + Cr^2)\sigma + (D\sigma^2 + E(\sigma\mathbf{r}) + Fr^2)\mathbf{r} \quad (10)$$

В дальнейшем под  $|\sigma|$  понимается радиус входного зрачка. Аберрационной кривой называют кривую, по которой плоскость параксиального изображения пересекает пучок лучей, проведённых из точки-объекта  $P$  через окружность входного зрачка. Изображением вместо точки теперь окажется область, ограниченная аберрационной кривой.

Каждый из постоянных коэффициентов  $A, B, C, D, E$  и  $F$  в уравнении (13) определяется конфигурацией оптической системы и отвечает за конкретный тип аберрации. Аберрация определяемая членом  $A\sigma^2\sigma$  называется **сферической**. Членам  $B(\sigma\mathbf{r})\sigma + D\sigma^2\mathbf{r}$  соответствует **кома**. Членам  $Cr^2\sigma + E(\sigma\mathbf{r})\mathbf{r}$  – **астигматизм** косых лучей и **искривление плоскости изображения**. Члену  $Fr^2\mathbf{r}$  соответствует **дисторсия**.

### 5.1.2. Сферическая аберрация

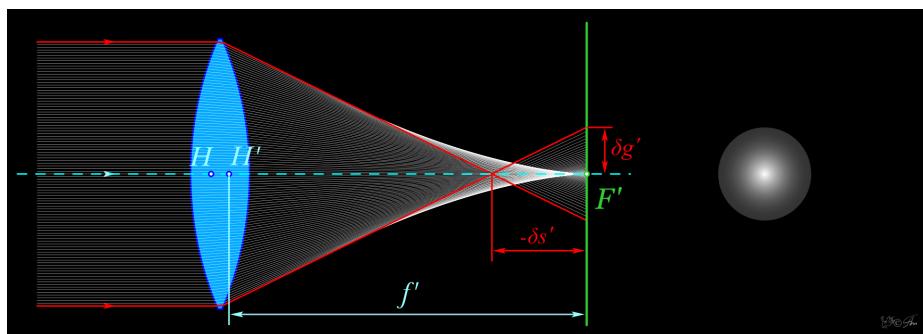


Рис. 3. Схема сферической аберрации, где  $H, H'$  — положения главных плоскостей;  $F'$  — задняя фокальная плоскость;  $f'$  — заднее фокусное расстояние;  $-\delta s'$  — продольная сферическая аберрация;  $\delta g' = \Delta r'$  — попечная сферическая аберрация.

**Определение 2. Сферическая аберрация** — аберрация оптических систем из-за несовпадения фокусов для лучей света, проходящих на разных расстояниях от оптической оси (см. рис. 3.).

Так как сферическая аберрация отвечает члену  $A\sigma^2\sigma$ , то если в системе есть только этот тип аберрации ( $|B|, |C|, |D|, |E|, |F| \approx 0 \ll |A|$ ), то

$$|\Delta r'| = A\sigma^3 = const$$

а значит аберрационной окривой является окружность (радиус которой пропорционален кубу входного зрачка), а изображение – круглое пятнышко, ограниченное этой окружностью (см. рис. 3).

В результате сферической аберрации цилиндрический пучок лучей, после преломления линзой (в пространстве изображений) получает вид не конуса, а некоторой воронкообразной фигуры, наружная поверхность которой, вблизи узкого места, называется каустической поверхностью (см. рис. 4). При этом

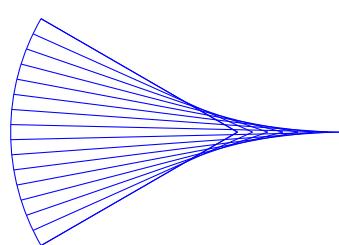


Рис. 4. Каустика – огибающая лучей от фронта

изображение точки имеет вид диска с неоднородным распределением освещённости, а форма каустической кривой позволяет судить о характере распределения освещённости. В общем случае, фигура рассеяния, при наличии сферической aberrации, представляет собой систему концентрических окружностей с радиусами пропорциональными третьей степени координат на входном (или выходном) зрачке.

Сферическая aberrация линзы (системы линз) объясняется тем, что её преломляющие поверхности встречают отдельные лучи сколько-нибудь широкого пучка под различными углами. Вследствие чего, более удалённые от оптической оси лучи преломляются сильнее, нежели нулевые лучи, и образуют свои точки схода удалённые от фокальной плоскости.

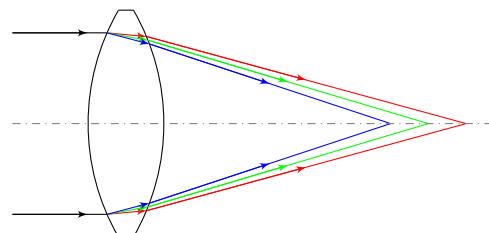


Рис. 5. Пример хроматической aberrации.

### 5.1.3. Хроматическая aberrация

Если используется белый свет, то в изображении возникают дополнительные aberrации. Это связано с тем, что показатель преломления зависит от длины волны (дисперсия света). Поэтому оптическая система даёт не одно, а множество монохроматических изображений, отличающихся друг от друга по величине и положению. Результирующее же изображение, получающееся отложения таких монохроматических изображений, оказывается нерезким и с окрашенными краями. Это явление называется *хроматической aberrацией* (например рис. 5).

## 5.2. Аберрации, обусловленные широкими пучками лучей.

К аберрациям, обусловленные широкими пучками лучей из монохроматическим относят сферическую aberrацию и кому. (Сферическую aberrацию смотри выше).

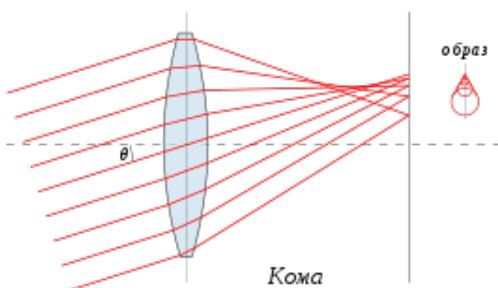


Рис. 6. Коматическая aberrация или кома.

### 5.2.1. Кома

Каждый участок оптической системы, удалённый от её оси на расстояние  $d$  (кольцевая зона), даёт изображение светящейся точки в виде кольца, радиус которого тем больше, чем больше  $d$ ; может рассматриваться как сферическая aberrация лучей, проходящих не через оптическую ось системы. Центры колец не совпадают, в результате чего их наложение, то есть изображение точки, даваемое системой в целом, принимает вид несимметричного пятна рассеяния, похожего на комету. Этим сходством и обусловлено название aberrации (см. рис. 6). Размеры пятна пропорциональны квадрату угловой апертуры системы и удалению точки-объекта от оси оптической системы.

метричного пятна рассеяния, похожего на комету. Этим сходством и обусловлено название aberrации (см. рис. 6). Размеры пятна пропорциональны квадрату угловой апертуры системы и удалению точки-объекта от оси оптической системы.

### 5.3. Коррекция сферической и хроматической аберрации.

И сферическая и хроматическая аберрации могут быть с той или иной мерой точности откорректированы путём комбинации линз (например, рис. 7).

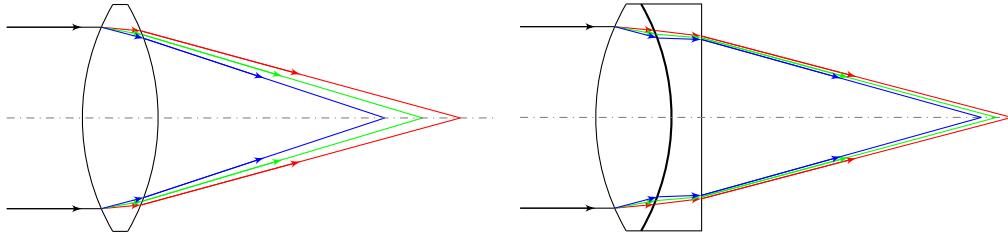


Рис. 7. Пример коррекции хроматической аберрации на собирающей линзе при помощи рассеивающей линзы. Аналогичным образом можно корректировать и сферические аберрации.

На рисунке 8 представлены способы коррекции сферической аберрации при помощи дифрагмирования и расфокусировки линзы.

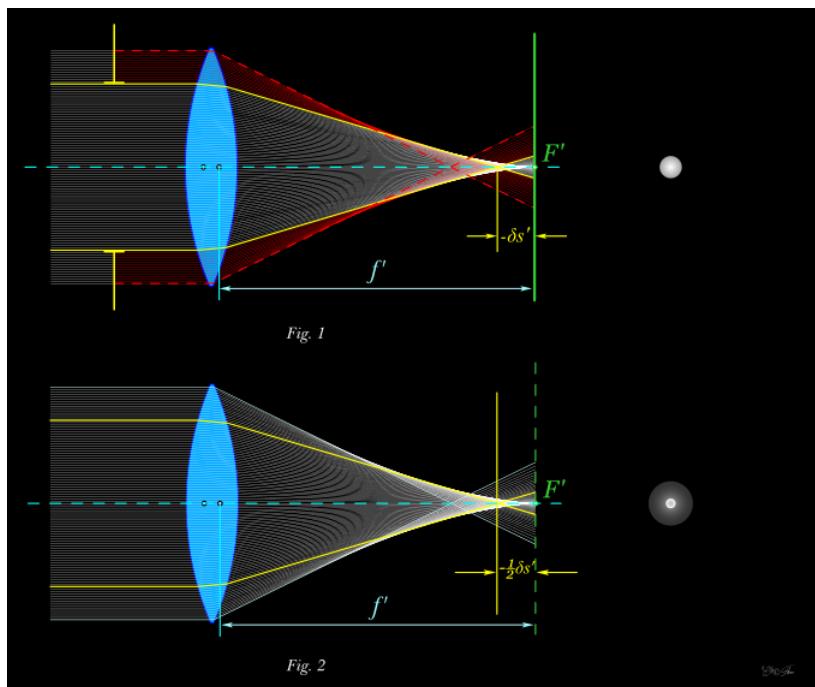


Рис. 8. Коррекция сферической аберрации: наверху – при помощи дифрагмирования, снизу – при помощи расфокусировки.

Заметное влияние на сферическую аберрацию оказывает диафрагмирование объектива (или иной оптической системы), так как при этом отсекаются краевые лучи широкого пучка. Очевидно, что этот способ непригоден для оптических систем, требующих высокой светосилы.

В отдельных случаях небольшая величина сферической аберрации третьего порядка может быть исправлена за счёт некоторой дефокусировки объектива. При этом плоскость изображения смещается к, так называемой, «плоскости лучшей установки», находящейся, как правило, посередине, между пересечением осевых и крайних лучей, и не совпадающей с самым узким местом пересечения всех лучей широкого пучка (диском наименьшего рассеяния). Это несов-

падение объясняется распределением световой энергии в диске наименьшего рассеяния, образующей максимумы освещённости не только в центре, но и на краю. То есть, можно сказать, что «диск» представляет из себя яркое кольцо с центральной точкой. Поэтому, разрешение оптической системы, в плоскости совпадающей с диском наименьшего рассеяния, будет ниже, несмотря на меньшую величину поперечной сферической aberrации. Пригодность этого метода зависит от величины сферической aberrации, и характера распределения освещённости в диске рассеяния.

#### **5.4. Подробнее**

Подробнее смотреть в Сивухине §13-17.

## 6. Оптические инструменты. Микроскоп. Телескоп (труба Кеплера, труба Галилея). Угловое увеличение телескопа.

### 6.1. Микроскоп

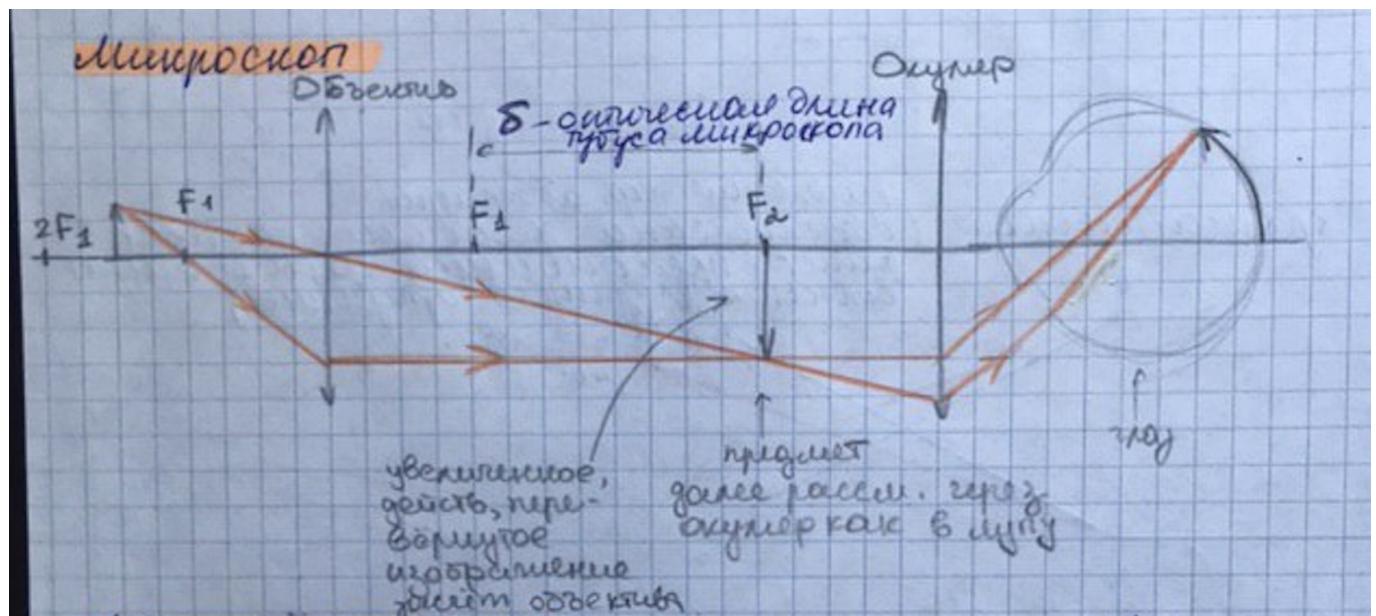


Рис. 9. Микроскоп. Извините, я устал.

## 6.2. Труба Кеплера

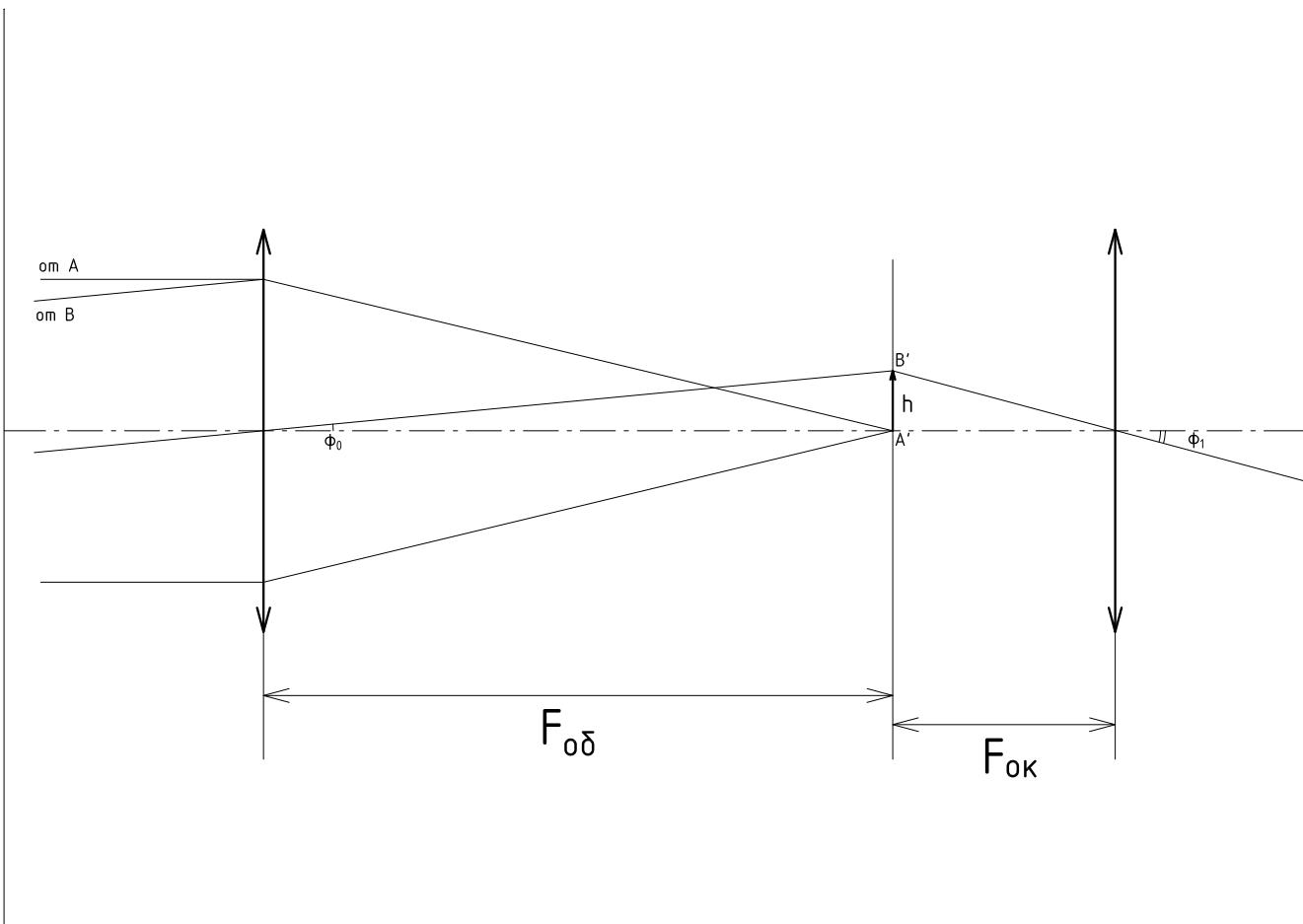


Рис. 10. Труба Кеплера

Из подобия мы сразу можем заявить:

$$\frac{D_{об}}{F_{об}} = \frac{D_{ок}}{F_{ок}}$$

Где \$D\$ — диаметр.

Пусть мы наводимся на далекий объект (луна, например). Рассмотрим два пучка от точки \$A\$ и \$B\$ соответственно. При прохождении через первую линзу они дадут изображение \$A'B'\$ в фокальной плоскости, пусть его высота \$h\$. Затем луч от точки \$B\$ выйдет из второй линзы (окуляра) под углом \$\varphi\_1\$. Введем **угловое увеличение телескопа** \$\gamma\$:

$$\gamma = \frac{\tg \varphi_1}{\tg \varphi_0} = \frac{h/F_{ок}}{h/F_{об}} = \frac{F_{об}}{F_{ок}} = \frac{D_{об}}{D_{ок}}$$

## 6.3. Труба Галилея

В случае трубы Галилея ситуация ровно такая же, как в случае трубы Кеплера, однако линза окуляра рассеивающая, а не собирающая. Из-за этого фокус объектива должен совпасть с **задним** фокусом окуляра (см. рисунок). Больше от этого ничего не меняется.

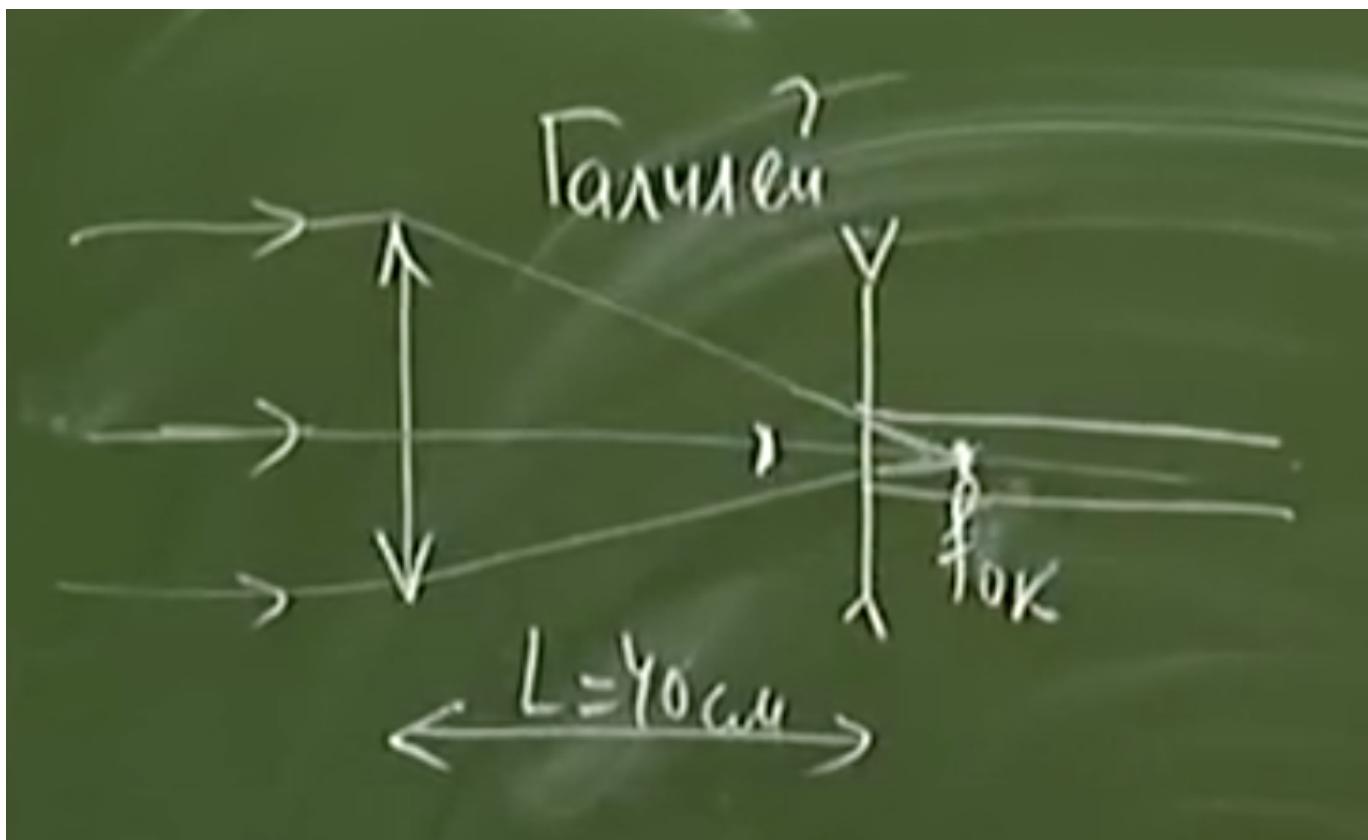


Рис. 11. Труба Галилея

## 7. Плоская монохроматическая волна. Представление монохроматических волн в комплексном виде. Сферическая и цилиндрическая волны. Стоячие электромагнитные волны. Опыты Винера.

(ЛЛ2 §46 и дальше)

### Плоские волны

Стартуем с обычного волнового уравнения:

$$\Delta A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} A = 0$$

Где  $A$  - это вектор потенциал, так же помним что такое уравнение было получено при калибровке  $\operatorname{div} A = 0$ . Понятно, что для напряженности электрического и магнитного поля верны такие же уравнения. Хотим изучать плоские волны, это значит, что вектор потенциал может зависеть только от одной координаты. Для определенности это  $x$ . Тогда уравнение выглядит так:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} = 0 \quad (11)$$

Калибровочное условие превращается в  $\frac{\partial}{\partial x} A_x = 0$ , значит  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} A_x = 0$ . Отсюда логично заключить, что  $x$  компонента потенциала либо линейна по времени, либо ее нет. Первое означало бы наличие постоянного электрического поля, что никакого отношения к волнам не имеет. Значит  $A_x = 0$ . То есть вектор потенциал всегда лежит в плоскости перпендикулярной направлению движения. Для любого, кто читал конспект по матфизу очевидно, что решением уравнения (11) будет любая функция  $\vec{A}(t - \frac{x}{c})$  понятно что волна еще может лететь влево, но опустим это, там все то же самое. Из этого решения следует, что

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial x} \quad (12)$$

Пока запомним это. Теперь вычислим  $E$  и  $H$ , помня, что вектор потенциал зависит только от  $x$

$$\begin{aligned} \vec{H} &= -\vec{e}_y \partial_x A_z + \vec{e}_z \partial_x A_y \\ \vec{E} &= -\frac{1}{c} \vec{e}_y \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{1}{c} \vec{e}_z \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \vec{E} \cdot \vec{H} &= -\frac{1}{c^2} \partial_x A_y \partial_x A_z + \frac{1}{c^2} \partial_x A_y \partial_x A_z = 0 \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались формулой (12). Теперь мы знаем, что в любой плоской волне электрическое поле перпендикулярно электрическому. И лежат они в одной плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны. Кстати, по модулю они равны, что видно из уравнений выше. Так что можно смело написать:

$$S = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \cdot \vec{H}] = \frac{cE^2}{4\pi} \vec{n} = \frac{cH^2}{4\pi} \vec{n}$$

Где вектор  $\vec{n}$  единичный в направлении распространения.

Что такое монохроматическая волна? Это когда  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} = -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{A}$ , фактически фурье компонента. Если подставить это в уравнение (11), то получим обычное уравнение на гармонический осциллятор для координаты. Значит итоговое решение будет:

$$\vec{A} = \text{Re}\{\vec{A}_0 e^{-i\omega(t-x/c)}\}$$

Действительную часть мы взяли потому, что поля не бывают комплексными. А вот  $A_0$  бывает. Поэтому правильным выбором  $A_0$  волну можно сделать любой комбинацией синусов и косинусов которая нужна. Если взять от этой штуки частную производную по времени, что получить поле не сложно:

$$\vec{E} = \text{Re}\{\vec{E}_0 e^{-i\omega(t-x/c)}\}$$

Введя вектор  $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n}$  можно отвязаться от координат и просто написать

$$\vec{E} = \text{Re}\{\vec{E}_0 e^{i(kr-\omega t)}\}$$

Обычно взятие действительной части опускают. Так пока мы совершаем линейные операции с полями нам это не важно.

## Сферические и цилиндрические волны

Для простоты рассмотрим только монохроматические. Сферические волны это когда зависимость есть только от расстояния до начала координат. Вспоминая как выглядит оператор лапласа в сферике (например в вики) и быстро решая уравнение получаем (Re опустил):

$$A = A_0 \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}$$

Теперь пишем дифур на цилиндрические волны. **Здесь  $r$  - расстояние до оси**

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \partial_r(r \partial_r f) + k^2 f &= 0 \\ x = rk & \\ f'' + \frac{1}{x} f' + f &= 0 \end{aligned}$$

А это уравнение на функцию Бесселя. Конечно есть еще функция Неймана, но нам надо чтобы в нуле значение было конечным, а функция Неймана этого не дает. Итого решение пропорционально такой штуке:  $J_0(kr)e^{-i\omega t}$  на больших временах можно написать асимптотику:

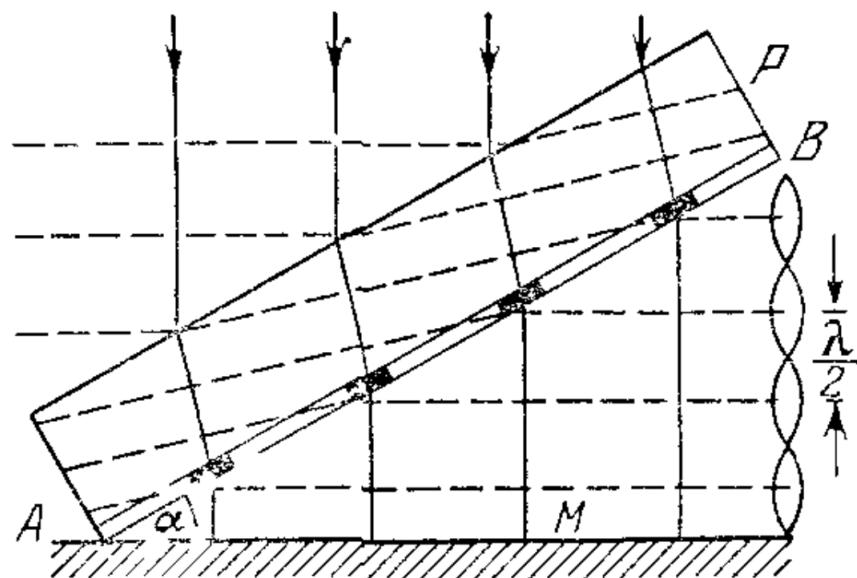
$$A_0 \frac{e^{i(kr-\omega t-\pi/4)}}{\sqrt{r}}$$

## Стоячие волны и опыт Винера

Если есть две одинаковые волны  $e^{i(kr-\omega t)}$   $-e^{i(-kr-\omega t)}$ , идущие в разных направлениях (например после отражения), то их можно сложить и получить  $2 \cos \omega t \cos kr$

Но физически мы можем заметить только квадрат амплитуды. Ну тут видно, что после усреднения по времени мы будем наблюдать серию кучностей на расстоянии по  $\lambda/2$  друг от друга. Проблема в их наблюдении это малая длина волны. Вот что придумал Винер.

Берем фоточувствительную пластинку и ставим ее под малым углом к зеркалу. Освещаем зеркало монохроматическим светом на наблюдаем тучности непосредственно



Расстояние между ними по прямой будет  $\frac{\lambda}{2 \sin \alpha}$ , то есть зная синус наклона можно узнать и длину волны.

## 8. Электромагнитные волны в однородных, изотропных диэлектрических средах. Уравнения Максвелла. Поперечность электромагнитной волны. Взаимная ориентация волнового вектора, векторов электрического и магнитного полей в плоской волне. Стоячие электромагнитные волны. Опыты Винера.

---

### 8.1. Ликбез

**Изотропной** среда называется если её физические свойства ( $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  и другие) не зависят от направления

**Электромагнитной** волна называется потому что характеризуется двумя взаимно ортогональными векторами: **E** и **H** - векторами напряженности электрического и магнитного полей, в процессе колебаний электрическое поле постепенно переходит в магнитное, магнитное — в электрическое.

**Фронтом** волны называют поверхность, до которой дошёл волновой процесс к данному моменту времени. По форме волнового фронта выделяют простейшие волны: сферическую, плоскую, цилиндрическую. Нормаль к волновому фронту совпадает с направлением распространения волны в данной точке.

**Плоская волна** - волна, фронт у которой плоский (движущиеся в пространстве параллельные плоскости).

**Волновой вектор** - вектор, направление которого перпендикулярно фазовому фронту бегущей волны, а абсолютное значение равно волновому числу.

**Волновое число** - отношение  $2\pi$  радиан к длине волны

Исходной системой для определения электромагнитного поля в среде является система **уравнений Максвелла**:

$$\text{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (1)$$

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\text{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad (3)$$

$$\text{div} \mathbf{B} = 0. \quad (4)$$

Здесь  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  - напряженности электрического и магнитного полей,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{D}$  - векторы электрической и магнитной индукции,  $\mathbf{j}$  и  $\rho$  - плотности токов и электрических зарядов в среде, их появление связано с действием электромагнитного поля, между собой они связаны уравнением непрерывности:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (5)$$

Оно отражает закон сохранения полного электрического заряда внутри объема среды. Уравнение (3) является следствием уравнений (1) и (5) (дивергенция от обоих частей (1), использование (5)), а (4) может быть получено из (2) (дивергенция от обоих частей (2),  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ ), поэтому система уравнений (1) - (5) не является полной и для её решения относительно  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{j}$  надо дополнить систему тремя материальными уравнениями:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H}), \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{E})$$

Для однородной изотропной среды с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , магнитной проницаемостью  $\mu$  и удельной проводимостью  $\sigma$  эти уравнения принимают вид:

$$\mathbf{D} = \epsilon(\mathbf{E}), \quad \mathbf{B} = \mu(\mathbf{H}), \quad \mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E})$$

## 8.2. Уравнения Максвелла

Для диэлектрической среды  $\sigma = 0$  уравнения Максвелла перепишутся в виде:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0.$$

## 8.3. Электромагнитные волны в однородных, изотропных диэлектрических средах

Исключая из системы  $\mathbf{H}$  ( $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E}$ , получим уравнение на вектор  $\mathbf{E}$ ):

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

И такое же на  $\mathbf{H}$ :

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$$

Если искать решения данных уравнений в виде монохроматических (строго гармонических) волн с постоянной во времени частотой, амплитудой и начальной фазой) волн, то получаем:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0, \quad k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon\mu}$$

Здесь  $k$  - величина комплексного **волнового вектора**  $\mathbf{k} = k\mathbf{s}$ , где  $\mathbf{s}$  - единичный вектор в направлении распространения волны. Его удобно представлять в виде  $k = k_0(n - ik)$ , где  $k_0 = \frac{\omega}{c}$ , а  $n$  и  $k$  называются коэффициентами преломления и поглощения соответственно.

## 8.4. Взаимная ориентация волнового вектора, векторов электрического и магнитного полей в плоской волне

Эти три вектора образуют правую тройку векторов.

Векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  могут быть представлены в виде:

$$\mathbf{E} = A_1 \exp(i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})), \quad \mathbf{H} = A_2 \exp(i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}))$$

Связь между ними следует из закона электромагнитной индукции Фарадея:

$$\text{rot} \mathbf{E} = -i[\mathbf{k}, \mathbf{E}] = -i \frac{\omega}{c} \sqrt{n^2 + k^2} [\mathbf{s}, \mathbf{E}] \exp(-i \arctg(\frac{k}{n}))$$

Отсюда:

$$\mathbf{B} = \sqrt{n^2 + k^2} [\mathbf{s}, \mathbf{E}] \exp(-i \arctg(\frac{k}{n}))$$

## 8.5. Поперечность электромагнитной волны

Чтобы определить структуру волн, а именно доказать их **поперечность** перейдём к рассмотрению поля в котором векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  зависят от одной пространственной координаты  $\xi = (\mathbf{m}\mathbf{r})$  ( $+m$  - направление распространения волны) и времени  $t$ , тогда:

$$\text{div} \mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial \xi} (\mathbf{m} \mathbf{E}), \quad \text{rot} \mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial \xi} [\mathbf{m} \mathbf{E}],$$

Уравнения Максвелла для такой системы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} [\mathbf{m} \mathbf{H}] &= \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \frac{\partial}{\partial \xi} [\mathbf{m} \mathbf{E}] &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \frac{\partial}{\partial \xi} (\mathbf{m} \mathbf{E}) &= \frac{\partial \mathbf{E}_\xi}{\partial \xi} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \xi} (\mathbf{m} \mathbf{H}) &= \frac{\partial \mathbf{H}_\xi}{\partial \xi} = 0 \end{aligned}$$

Значит, проекции векторов  $\mathbf{E}$   $\mathbf{E}_\xi$  и  $\mathbf{H}$   $\mathbf{H}_\xi$  на направление распространения волны могут зависеть только от времени. Умножая первые два уравнения скалярно на  $\mathbf{m}$ , получаем:

$$\frac{\partial \mathbf{E}_\xi}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{H}_\xi}{\partial t} = 0$$

Т.е. проекции не зависят так же и от времени, что означает что электромагнитные волны в диэлектрической среде являются поперечными волнами, векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  лежат в плоскости фронта волны.

## 8.6. Стоячая волна

**Стоячая волна** есть результат суперпозиции двух электромагнитных волн бегущих на встречу друг другу:

Если первая волна распространяется в положительном направлении оси  $x$  и задается:

$$E_y = E_m \cos(\omega t - kx), \quad H_z = H_m \cos(\omega t - kx),$$

то уравнение волны бегущей в обратном направлении получается если заменить в скобках минусы на плюсы, учитывая что векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{k}$  должны составлять правую тройку. Уравнение встречной:

$$E_y = E_m \cos(\omega t + kx), \quad H_z = -H_m \cos(\omega t + kx)$$

Результирующая:

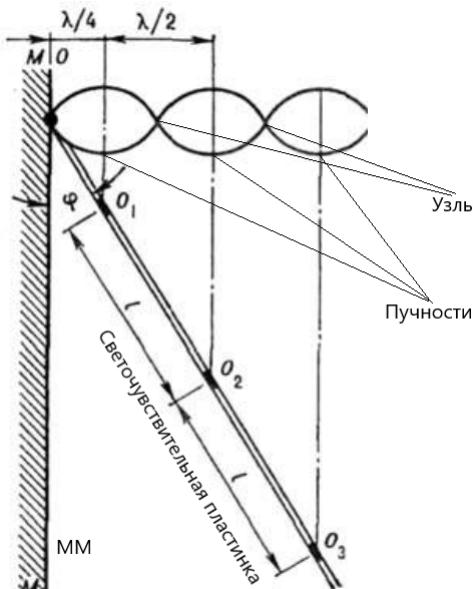
$$E_y = 2E_m \cos(kx) \cos(\omega t), \quad H_z = 2H_m \sin(kx) \sin(\omega t)$$

Колебания векторов  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  сдвинуты по фазе на  $\pi/2$ , для амплитудных значений  $E_m$  и  $H_m$  выполняется соотношение:

$$E_m \sqrt{\epsilon \epsilon_0} = H_m \sqrt{\mu \mu_0}$$

Если в некоторый момент  $E_y$  во всех точках имело максимальное значение и при этом  $H_z = 0$ , то через четверть периода картина будет обратной:  $H_z$  достигнет всюду максимальных значений со сдвигом в пространстве на  $\lambda/4$ , а  $E_y$  обратится в нуль.

## 8.7. Опыт Винера



На плоское металл.зеркало (ММ) направляется по нормали монохроматич. свет длиной волны  $\lambda$ . При отражении световых волн от этой поверхности образуются стоячие волны, узловые плоскости к-рых параллельны ММ и отстоят друг от друга на расстоянии  $\frac{\lambda}{2}$ ; при этом на поверхности находятся узел электрич. вектора ( $E=0$ ) и пучность магн. вектора. Под малым углом к поверхности зеркала располагается стеклянная пластинка с тонким  $\frac{\lambda}{20}$  светочувствит. слоем эмульсии. Светочувствит. слой пересекался с пучностями векторов стоячей волны по прямым, параллельным поверхности зеркала. После проявления на пластинке возникает система параллельных тёмных полос ( $O_1, O_2, O_3$ ), соответствующих местам макс. выделения серебра. Винер установил, что первая тёмная полоса располагается не на краю светочувствит. слоя, граничащего с металлич. зеркалом, а отстаёт от него на  $\frac{\lambda}{4}$ . Именно на этом расстоянии располагается первая пучность (пучность — точка или область в пространстве, в которой амплитуда максимальна и равна сумме амплитуд интерферирующих волн (амплитуда стоячей волны в пучностях вдвое больше амплитуды каждой из интерферирующих волн) электрической световой волны, т. е. фотографическое действие световой волны связано с её электрич. вектором.

## 9. Линейно, циркулярно и эллиптически поляризованный свет. Поляризация естественного света. Степень поляризации. Поляризаторы. Закон Малюса

*Поляризацией* называется характеристика векторных волновых полей, описывающая поведение вектора колеблющейся величины в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны.

*Плоскостью поляризации* называется плоскость, построенная на векторах  $(E, k)$ .

### 9.1. Типы поляризации

Плоская волна называется *линейно поляризованной*, если ориентация плоскости поляризации не меняется во времени, то есть вектор напряженности электрического поля  $E$  всегда лежит в одной и той же плоскости, содержащей вектор  $k$ .

В естественном (неполяризованном) свете плоскость поляризации меняется случайным образом (при этом вектор  $E$  остается перпендикулярным волновому вектору  $k$ ).

Выберем систему координат таким образом, что вектор  $k$  направлен вдоль оси  $z$ , а вектор  $E$  лежит в плоскости  $(x, y)$ . Пусть частота колебаний поля равна  $\omega$ . Тогда для компонент поля можно записать выражения

$$E_x = E_{x0} \cos(\omega t + \varphi_x)$$

$$E_y = E_{y0} \cos(\omega t + \varphi_y)$$

Если разность фаз этих величин равна

$$\delta = \varphi_x - \varphi_y = 0, \pm\pi,$$

то вектор  $E$  совершаеет колебания вдоль фиксированной прямой. Этот случай отвечает линейно поляризованной волне.

Если сдвиг фаз колебаний проекций отличается, то вектор  $E$  совершает вращение. В этом случае говорят, что свет имеет *эллиптическую поляризацию*. Получим уравнение кривой, описываемой концом вектора  $E$ :

$$\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)^2 - 2 \frac{E_x}{E_{x0}} \frac{E_y}{E_{y0}} \cos \delta = \sin^2 \delta.$$

Здесь  $\delta = \varphi_x - \varphi_y$  для сдвига фаз колебаний проекций  $E_x$  и  $E_y$ .

Если окажется

$$\delta = \varphi_x - \varphi_y = \pm \frac{\pi}{2}, E_{x0} = E_{y0},$$

то описываемая вектором  $E$  кривая есть окружность. В этом случае говорят о *круговой поляризации*.

Круговая поляризация бывает двух типов - *левая* и *правая*. Если смотреть навстречу волновому вектору, то левой поляризации отвечает вращение вектора  $E$  *против часовой стрелки*. В случае правой поляризации вектор  $E$  вращается *по часовой стрелке*.

## 9.2. Степень поляризации

Говорят, что свет *частично поляризован*, если он представляет собой смесь полностью поляризованного и естественного (неполяризованного) излучения. Пусть интенсивности этих компонент равны соответственно  $I_{\text{пол}}$  и  $I_{\text{ест}}$ . Тогда суммарная интенсивность составляет

$$I_0 = I_{\text{пол}} + I_{\text{ест}}.$$

*Степенью поляризации излучения называется отношение*

$$P = \frac{I_{\text{пол}}}{I_0} = \frac{I_{\text{пол}}}{I_{\text{пол}} + I_{\text{ест}}}.$$

## 9.3. Поляризаторы

*Поляризатором* называют прибор, предназначенный для получения полностью или частично поляризованного оптического излучения.

Действие поляризаторов, создающих линейно поляризованный свет, основано, в частности, на следующий явлений:

- 1) линейный дихроизм,
- 2) поляризация при отражении,
- 3) поляризация при рассеянии,
- 4) двойное лучепреломление.

## 9.4. Закон Малюса

Найдем интенсивность волны, прошедшей через поляроид. Для этого разложим вектор  $\mathbf{E}$  на две компоненты - вдоль и поперек оси поляроида.

$$E_z = E \cos \varphi, E_x = E \sin \varphi$$

Через поляроид пройдет волна с поляризацией  $E_z$ . Другая же волна (с поляризацией  $E_x$ ) полностью поглощается веществом. В итоге через поляроид проходит свет, поляризованный вдоль оси поляроида, причем его интенсивность ( $I_{\text{прош}} \sim E_z^2$ ) равна

$$I_{\text{прош}} = I_0 \cos^2 \varphi,$$

$I_0 \sim E^2 = E_x^2 + E_z^2$  - интенсивность волны, падающей на поляроид. Это соотношение называется законом Малюса.

## 10. Аберрации оптических систем. Аберрации, обусловленные зависимостью показателя преломления от длины волны (хроматические аберрации).

### 10.1. Аберрации оптических систем.

**Определение 3.** *Аберрации оптических систем* (лат. *aberratio* - уклонение), погрешности изображений, даваемых оптическими системами. Проявляются в том, что оптические изображения в ряде случаев не вполне отчётливы, не точно соответствуют объекту или оказываются окрашенными.

Аберрации делят на **монохроматические** (геометрические) и **хроматические**, среди геометрических выделяют

- Сферическая аберрация
- Кома
- Астигматизм
- Дисторсия
- Кривизна поля (поверхности) изображения

#### 10.1.1. Классификация геометрических аберраций

Геометрические аберрации практически всегда являются учётом непараксиальности в ходе лучей. Произвольный луч в пространстве можно задать, указав прямоугольные координаты  $y$ ,  $z$ ,  $\eta$  и  $\zeta$  точек его пересечения с предметной плоскостью (т.е. плоскостью, проходящей через изображаемую точку  $P$  перпендикулярно к главной оптической оси) и плоскостью входного зрачка. После прохождения через оптическую систему луч пересечёт плоскость параксиального изображения в точке с координатами  $y'$  и  $z'$ . Координаты самого параксиального изображения (*параксиального фокуса*) –  $y'_0$ ,  $z'_0$ . Разности

$$\Delta y' = y' - y'_0 \quad \Delta z' = z' - z'_0$$

примем за меру отступления от предельного случая параксиальной оптики. Координаты  $y'$  и  $z'$  будут функциями  $y$ ,  $z$ ,  $\eta$  и  $\zeta$ :

$$y' = f_y(y, z, \eta, \zeta) \quad z' = f_z(y, z, \eta, \zeta)$$

Линейные члены разложений  $f_y$  и  $f_z$  не зависят от  $\eta$  и  $\zeta$  и соответствуют параксиальной оптике, члены чётных степеней не войдут в эти разложения в силу осевой симметрии оптической задачи. Поэтому  $\Delta y'$  и  $\Delta z'$  будут определяться третьими членами разложения  $f_y$  и  $f_z$  (пожтому часто рассматриваемые дальше аберрации называются аберрациями третьего порядка).

Введём три вектора, перпендикулярных главной оптической оси системы:

$$\mathbf{r} = y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad \mathbf{r}' = y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k} \quad \boldsymbol{\sigma} = \eta\mathbf{j} + \zeta\mathbf{k}$$

Тогда вектор

$$\Delta\mathbf{r}' = \Delta y'\mathbf{j} + \Delta z'\mathbf{k}$$

может быть разложен по векторам  $\mathbf{r}$  и  $\sigma$ . Причём в виду симметрии коэффициенты этих разложений могут зависеть только от «инвариантов вращения»  $\sigma^2$ ,  $(\sigma\mathbf{r})$  и  $r^2$ :

$$\Delta\mathbf{r}' \approx (A\sigma^2 + B(\sigma\mathbf{r}) + Cr^2)\sigma + (D\sigma^2 + E(\sigma\mathbf{r}) + Fr^2)\mathbf{r} \quad (13)$$

В дальнейшем под  $|\sigma|$  понимается радиус входного зрачка. Аберрационной кривой называют кривую, по которой плоскость параксиального изображения пересекает пучок лучей, проведённых из точки-объекта  $P$  через окружность входного зрачка. Изображением вместо точки теперь окажется область, ограниченная аберрационной кривой.

Каждый из постоянных коэффициентов  $A, B, C, D, E$  и  $F$  в уравнении (13) определяется конфигурацией оптической системы и отвечает за конкретный тип аберрации. Аберрация определяемая членом  $A\sigma^2\sigma$  называется [сферической](#). Членам  $B(\sigma\mathbf{r})\sigma + D\sigma^2\mathbf{r}$  соответствует [кома](#). Членам  $Cr^2\sigma + E(\sigma\mathbf{r})\mathbf{r}$  – [астигматизм](#) косых лучей и [искривление плоскости изображения](#). Члену  $Fr^2\mathbf{r}$  соответствует [дисторсия](#).

## 10.2. Хроматическая аберрация

Если используется белый свет, то в изображении возникают дополнительные аберрации. Это связано с тем, что показатель преломления зависит от длины волны (дисперсия света). Поэтому оптическая система даёт не одно, а множество монохроматических изображений, отличающихся друг от друга по величине и положению. Результирующее же изображение, получающееся отложения таких монохроматических изображений, оказывается нерезким и с окрашенными краями. Это явление и называется *хроматической аберрацией* (например рис. 12).

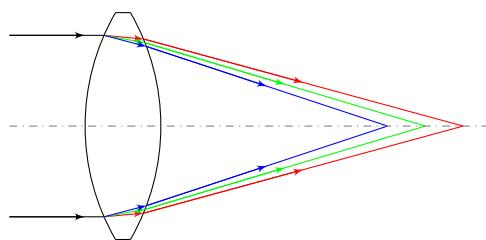


Рис. 12. Пример хроматической аберрации.

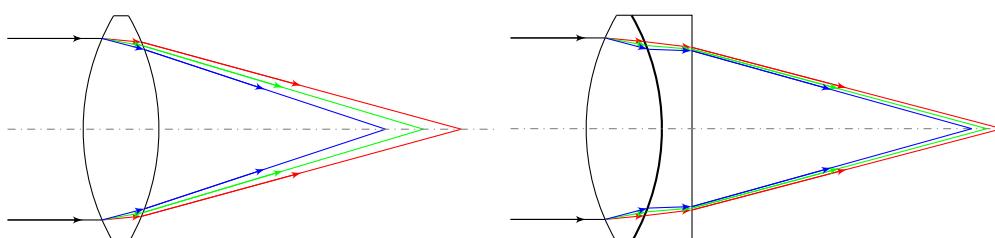
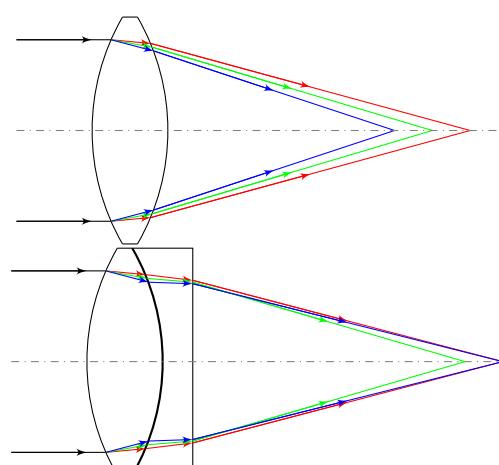


Рис. 13. Уменьшение хроматической аберрации при помощи рассеивающей линзы

Аберрации хроматического типа не устраняются полностью, однако их эффект снижается использованием линз изготовленных из стекла с различными оптическими свойствами или использованием линз различной формы, например рис. 13. В примере приведённый на рисунке наблюдается так называемый хроматизм положения, величина аберрации в нём обычно определяется расстоянием



между фокусом синих и красных лучей, при помощи дополнительной линзы это расстояние удаётся уменьшить, однако чаще используется ахроматическая линза, которая собирает в один фокус два пучка света с разной длиной волны (чаще всего синий и красный). Система линз, выполняющих сближение фокусов фокусов трёх лучей называется апохроматической, четырёх — суперахроматической. Оставшиеся после ахроматизации хроматические aberrации называются вторичными.

### 10.3. Подробнее

Подробнее смотреть в Сивухине §13-17.

# 11. Оптические явления на границе раздела изотропных диэлектриков. Соотношения амплитуд падающей, отраженной и преломленной волн (формулы Френеля). Изменение фазы волны при отражении. Энергетические коэффициенты отражения и пропускания света. Коэффициент отражения для естественного света.

При падении плоской волны на границу раздела двух изотропных диэлектриков, появляется две волны: преломленная (которая проходит границу раздела сред) и отраженная (не проходит), которые создаются за счет колебаний в диэлектриках, возбуждаемых падающей волной. Сразу быстро получим законы отражения и преломления.

## 11.1. Законы отражения и преломления

Пусть падающая волна имеет следующий вид:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

В таком случае, из-за того, что колебания являются вынужденными, мы можем сказать, что  $\omega = \omega_r = \omega_t$ .

Кроме того, как мы знаем из курса электричества, существует уравнение на граничное условие для вектора  $E$ , которое в нашем случае принимает вид (для тангенциальных компонент):

$$E_\tau + E_{r\tau} = E_{t\tau}$$

Возьмем любую точку на линии границы сред. В таком случае:

$$A_1 e^{i\vec{k}\vec{x}} + B_1 e^{i\vec{k}_r \vec{x}} = C_1 e^{i\vec{k}_t \vec{x}}$$

Это в свою очередь значит, что должны быть равны между собой величины, стоящие в показателе экспоненты. С учетом того, как мы ввели углы, получаем:

$$k \sin \varphi = k_r \sin \varphi_r = k_t \sin \varphi_t \quad (14)$$

При этом, как мы знаем,  $k$  зависит от свойств среды, поэтому для падающей волны и отраженной:

$$k = k_r = \frac{w}{c} \sqrt{\mu \epsilon}$$

А для преломленной:

$$k_t = \frac{w}{c} \sqrt{\mu' \epsilon'}$$

Тогда из уравнения 14 получаем:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_r \\ \frac{\sin \varphi_t}{\sin \varphi} &= \frac{k}{k_t} = \frac{\sqrt{\epsilon \mu}}{\sqrt{\epsilon' \mu'}} = \frac{n}{n'} \end{aligned}$$

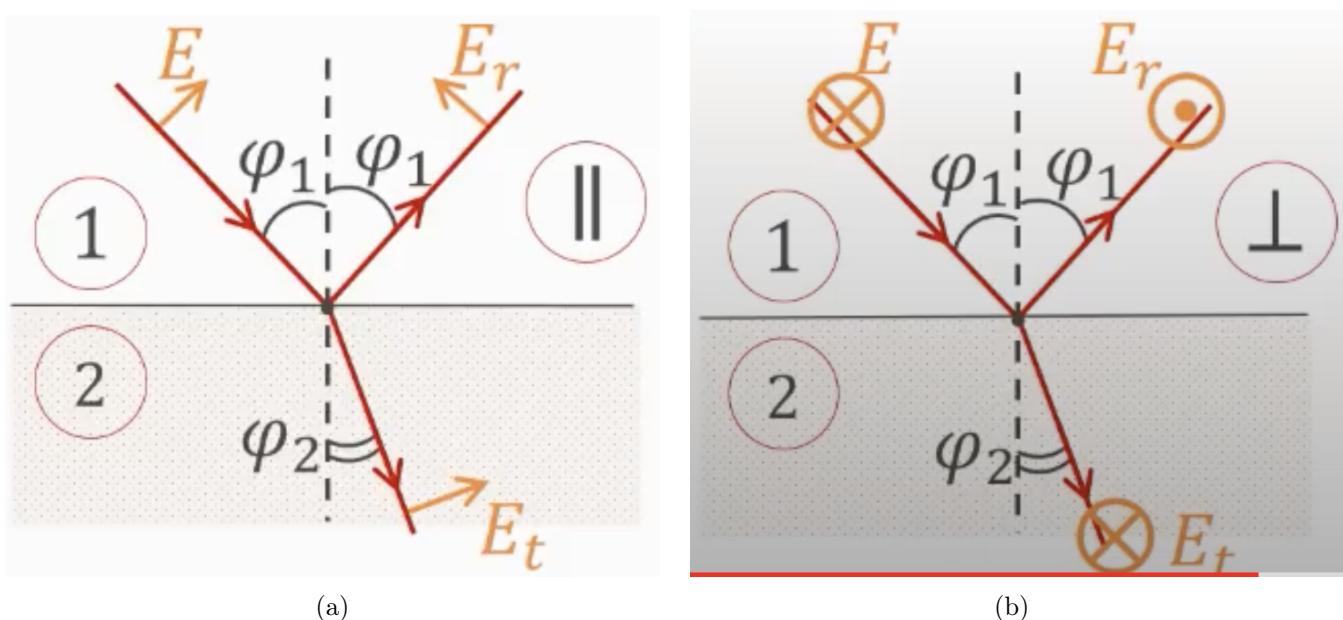
## 11.2. Коэффициенты Френеля

Разложим падающую волну  $\vec{E}$  по двум составляющим: в плоскости, параллельной плоскости рисунка, и в плоскости, перпендикулярной ( $E_{\parallel}$  и  $E_{\perp}$  соответственно). Мы имеем следующие граничные условия:

$$E_{\tau} + E_{r\tau} = E_{t\tau}$$

$$H_{\tau} + H_{r\tau} = H_{t\tau}$$

Мы также знаем соотношение, связывающее между собой  $H$  и  $E$ :  $H = \sqrt{\epsilon}E$  (пренебрегаем магнитными свойствами сред и считаем  $\mu = 1$ , а также не забываем, что  $\vec{H} \perp \vec{E}$ ). Также вспоминаем, что  $n = \sqrt{\epsilon}$ . Тогда граничные условия принимают вид (с учетом проекций, см. рисунок):



$$\left\{ \begin{array}{l} E \cos \varphi_1 - E_r \cos \varphi_1 = E_t \cos \varphi_2 \\ n_1 E + n_1 E_r = n_2 E_t \\ \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{n_2}{n_1} \end{array} \right. \quad \text{— для параллельной}$$
  

$$\left\{ \begin{array}{l} E - E_r = E_t \\ n_1 E \cos \varphi_1 + n_1 E_r \cos \varphi_1 = n_2 E_t \cos \varphi_2 \\ \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{n_2}{n_1} \end{array} \right. \quad \text{— для перпендикулярной}$$

Решив эту систему уравнений, мы получаем следующее:

$$\begin{cases} E_r = \frac{\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_2)}{\operatorname{tg}(\varphi_1 + \varphi_2)} E \\ E_t = \frac{2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} E \end{cases} \quad \text{— для параллельной}$$

$$\begin{cases} E_r = \frac{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)} E \\ E_t = \frac{2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)} E \end{cases} \quad \text{— для перпендикулярной}$$

Можно сразу же ввести энергетические коэффициенты отражения и пропускания света:

$$R_{\parallel} = \left( \frac{E_r}{E} \right)^2 = \frac{\operatorname{tg}^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{\operatorname{tg}^2(\varphi_1 + \varphi_2)} \quad T_{\parallel} = 1 - R_{\parallel}$$

$$R_{\perp} = \left( \frac{E_{\perp}}{E} \right)^2 = \frac{\sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)}{\sin^2(\varphi_2 + \varphi_1)} \quad T_{\perp} = 1 - R_{\perp}$$

## 12. Поляризация отраженной и преломленной волн. Степень поляризации отраженного и преломленного света. Угол Брюстера. Физический смысл закона Брюстера.

Поляризация отражённой и преломлённой волн.

### Отражение и преломление света

	$\varphi + \psi < \pi/2$	$\varphi + \psi > \pi/2$
$\varphi > \psi$ , т.е. $n_2 > n_1$ , или $n > 1$	$E_{r\perp}$ и $E_{i\perp}$ <u>противоположны</u> по фазе (противоположны по знаку) $E_{r\parallel}$ и $E_{i\parallel}$ <u>противоположны</u> по фазе (противоположны по знаку)	$E_{r\perp}$ и $E_{i\perp}$ <u>противоположны</u> по фазе (противоположны по знаку) $E_{r\parallel}$ и $E_{i\parallel}$ <u>совпадают</u> по фазе (совпадают по знаку)
$\varphi < \psi$ , т.е. $n_2 < n_1$ , или $n < 1$	$E_{r\perp}$ и $E_{i\perp}$ <u>совпадают</u> по фазе (совпадают по знаку) $E_{r\parallel}$ и $E_{i\parallel}$ <u>совпадают</u> по фазе (совпадают по знаку)	$E_{r\perp}$ и $E_{i\perp}$ <u>совпадают</u> по фазе (совпадают по знаку) $E_{r\parallel}$ и $E_{i\parallel}$ <u>противоположны</u> по фазе (противоположны по знаку)

$\varphi$  — угол падения,  $\psi$  — угол преломления;  $E_i$  — амплитуда падающей волны,  $E_r$  — прошедшой.

Степень поляризации

$$\Delta = \frac{I_\perp - I_\parallel}{I_\perp + I_\parallel}$$

Отношение отражённого потока к падающему:

$$r_\perp^2 = \left[ \frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)} \right]^2, \quad r_\parallel^2 = \left[ \frac{\tan(\varphi - \psi)}{\tan(\varphi + \psi)} \right]^2$$

При  $\varphi \rightarrow \pi/2$  (скользящее падение):  $r_\perp^2 = r_\parallel^2 = 1$  — полное отражение.

При полном отражении фаза волны испытывает скачок  $\delta_\perp$  и  $\delta_\parallel$ :

$$\tan \frac{\delta_\perp}{2} = \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{\cos \varphi}, \quad \tan \frac{\delta_\parallel}{2} = \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{n^2 \cos \varphi},$$

Компоненты  $E_{r\perp}$  и  $E_{r\parallel}$  испытывают изменения фазы по отношению к  $E_{i\perp}$  и  $E_{i\parallel}$ , причем  $\delta_\perp$  отлично от  $\delta_\parallel$ . Для их разности справедливо

$$\tan \frac{\delta}{2} = \frac{\cos \varphi \sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{\sin^2 \varphi} \Rightarrow \tan \frac{\delta}{2} > 0, \quad 0 < \delta < \pi.$$

Если в падающей волне  $E_{i\perp}$  и  $E_{i\parallel}$  находятся в одной фазе, то в отраженном свете между  $E_{r\perp}$  и  $E_{r\parallel}$  появляется сдвиг фазы, зависящий от угла падения и показателя преломления.

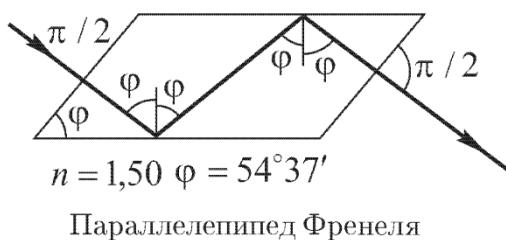
Таким образом, явление полного внутреннего отражения позволяет получить эллиптически-поляризованный свет. Учитывая  $0 < \delta < \pi$ , эллиптическая поляризация будет левой.

$\delta = 0$  при  $\varphi = \varphi_{critical}$  и  $\varphi = \pi/2$  Максимальный сдвиг  $\delta_m$  при  $\cos \varphi = \sqrt{\frac{(1-n^2)}{(1+n^2)}}$ :  $\tan \frac{\delta_m}{2} = \frac{1-n^2}{2n}$

Для получения круговой поляризации отражённого света, необходимо выполнение условий:

$$E_r \parallel = \pm E_r \perp, \quad \delta = \pi/2.$$

Чтобы получить такой сдвиг при однократном отражении нужен  $n = \sqrt{2} - 1$ . Для стекла можно подобрать такие значения угла падения, чтобы  $\delta = \pi/4$ , тогда при двукратном полном отражении в стекле происходило изменение фазы на  $\pi/2$  (так действует пластинка в четверть волны).



Параллелепипед Френеля

Если  $E_i \parallel = E_i \perp$  (плоскость поляризации составляет угол 45 градусов), то при полном внутреннем отражении  $|E_r \parallel| = |E_r \perp|$  и при  $\delta = \pi/2$  свет получится поляризованным по кругу.

### Явление Брюстера.

Согласно формулам Френеля коэффициент отражения параллельно поляризованной волне обращается в ноль при таком угле  $\theta_B$ , что  $\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1}$ , где  $n_1$  — показатель преломления среды, из которой падает луч,  $n_2$  — показатель преломления, в которую падает луч. Угол  $\theta_B$  называется углом Брюстера.

При падении под таким углом отражённая волна оказывается полностью поляризованной, обладающей перпендикулярной поляризацией.

Коэффициент отражения для  $p$ -поляризованной волны (из формул Френеля):

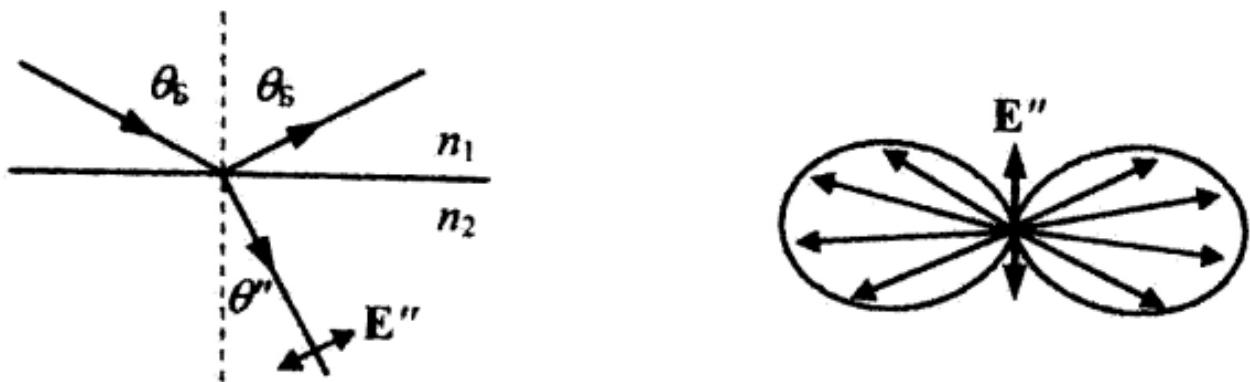
$$R_{\parallel} = \frac{\tan^2(\alpha - \beta)}{\tan^2(\alpha + \beta)},$$

где  $\alpha$  — угол падения,  $\beta$  — угол преломления.

Из равенства нулю  $R_{\parallel}$  следует, что  $\theta_B + \beta = \frac{\pi}{2}$ .

### Физический смысл закона Брюстера

Отражённая волна возникает вследствие того, что излучение, падающее не веществом, проникает в него и возбуждает колебания электронов. Возникающие в результате этого волны от всех электронов суммируются и формируют отражённую волну. Однако при падении луча под углом Брюстера преломлённый и отражённый лучи образуют прямой угол. При параллельной поляризации волны вектор напряжённости поля преломлённой волны  $E''$  совершает колебания в направлении, параллельном волновому вектору отражённой волны. Однако, как видно из диаграммы направленности (на рисунке ниже — справа), именно в этом направлении интенсивность излучения практически нулевая, что приводит к отсутствию отражённого излучения.



### Получение линейно поляризованного света.

При падении света на одну пластинку под углом Брюстера интенсивность отражённого линейно поляризованного света очень мала (от границы воздух–стекло отражается около 3,75% интенсивности падающего луча). Для прошедшего излучения отношение интенсивностей с параллельной и перпендикулярной поляризациями равно

$$\delta = \frac{(I_d)_{\perp}}{(I_d)_{\parallel}} = \frac{d_{\perp}^2}{d_{\parallel}^2},$$

где  $d_{\perp}$  и  $d_{\parallel}$  — амплитудные коэффициенты прохождения.

$$d_{\perp} = \frac{2 \sin \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad d_{\parallel} = \frac{2 \sin \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}$$

Следовательно  $\delta = \cos^2(\alpha - \beta)$ , при  $\alpha = \theta_B$ :

$$\delta = \frac{4n^2}{(1+n^2)^2} < 1.$$

Таким образом, в прошёдшем свете доля перпендикулярной компоненты уменьшается. Для увеличения степени поляризации прошёдшего и отражённого света применяют несколько пластинок, сложенных в *стопу Столетова*. При прохождении её, отражённый свет становится перпендикулярно поляризованным, а прошедший — параллельно поляризованным. Так, для стопы с 16 пластинками с  $n = 1,5$  степень поляризации около 99%.



123

123

### 13. Вращение плоскости поляризации (оптическая активность). Искусственная анизотропия оптических свойств, индуцированная механической деформацией, электрическим (эффект Керра и Поккельса) и магнитным (эффект Коттона-Муттона) полями.

#### 13.1. Естественная оптическая активность

*Явление преломления плоскости поляризации* заключается в том, что в плоско-параллельных слоях некоторых веществ линейно поляризованный свет поворачивает плоскость своей поляризации по мере прохождения слоя. Вещества, в которых такое явление наблюдается, называются *естественно-оптически активными* (в противовес магнитной оптической активности, причиной которой так же служит магнитное поле). Характерная особенность таких веществ заключается в том, что поворот плоскости поляризации в них всегда происходит в одном и том же направлении (которое принято определять с точки зрения наблюдателя смотрящего на приближающийся свет). По этому принципу оптически активные вещества разделяют на *правовращающие* и *левовращающие*. Направление в котором свет проходит через этот слой не важно, и в прямом и в обратном направлении свет поворачивается направо от соответствующего наблюдателя. Если после прохождения слоя свет отразился и вернулся к наблюдателю через этот же слой, то направление его плоскости поляризации таким образом будет исходным. Это свойство оптической активности называется *дисимметрией*. Био эмпирически установил, что угол поворота плоскости поляризации  $\chi$  прямо пропорционален толщине пройденного слоя  $\ell$ :

$$\chi = \alpha \ell \quad (15)$$

Коэффициент  $\alpha$  зависит от свойств вещества, температуры и длины волны проходящего света, причём от последней он зависит приблизительно как от обратного квадрата (то есть альфа увеличивается с уменьшением длины волны). Рассмотрим волну (в смысле электрического поля)  $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$

$$E_x = A \cos(\chi) \cos(\omega t - kz) \quad E_y = A \sin(\chi) \cos(\omega t - kz)$$

Пользуясь (15)

$$E_x = A \cos(-\alpha z) \cos(\omega t - kz) \quad E_y = A \sin(-\alpha z) \cos(\omega t - kz)$$

Откуда

$$E_x = \frac{A}{2} \cos(\omega t - kz + \alpha z) + \frac{A}{2} \cos(\omega t - kz - \alpha z) \quad (16)$$

$$E_y = \frac{A}{2} \cos\left(\omega t - kz + \alpha z + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{A}{2} \cos\left(\omega t - kz - \alpha z - \frac{\pi}{2}\right) \quad (17)$$

Введём новые обозначения

$$k^\circlearrowleft = k - \alpha$$

$$k^\circlearrowright = k + \alpha$$

$$E_x^\circlearrowleft = \frac{A}{2} \cos(\omega t - k^\circlearrowleft z)$$

$$E_y^\circlearrowleft = \frac{A}{2} \cos\left(\omega t - k^\circlearrowleft z + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$E_x^\circlearrowright = \frac{A}{2} \cos(\omega t - k^\circlearrowright z)$$

$$E_y^\circlearrowright = \frac{A}{2} \cos\left(\omega t - k^\circlearrowright - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{\circlearrowleft} + \mathbf{E}^{\circlearrowright} = \begin{pmatrix} E_x^{\circlearrowleft} \\ E_y^{\circlearrowleft} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_x^{\circlearrowright} \\ E_y^{\circlearrowright} \end{pmatrix}$$

Таким образом волна  $\mathbf{E}$  раскладывается на две поляризованных по кругу в противоположных направлениях. Скорости этих волн:

$$v^{\circlearrowleft} = \frac{\omega}{k - \alpha} \quad v^{\circlearrowright} = \frac{\omega}{k + \alpha}$$

Показатели преломления:

$$n^{\circlearrowleft} = \frac{c}{v^{\circlearrowleft}} = \frac{c(k - \alpha)}{\omega} \quad n^{\circlearrowright} = \frac{c}{v^{\circlearrowright}} = \frac{c(k + \alpha)}{\omega}$$

$$\alpha = \frac{\omega}{2c} (n^{\circlearrowright} - n^{\circlearrowleft}) \quad (18)$$

Пользуясь (18) если  $\alpha > 0$  то вращение плоскости поляризации происходит вправо, если  $\alpha < 0$  – влево. Френель показал эти соотношения опытно, позднее эти же соображения были получены из уравнений Максвелла для материальной среды.

### 13.2. Двойное лучепреломление

Явление разделения кинематической волны на две поляризованных по кругу при вращении плоскости поляризации называется *круговым двойным лучепреломлением*. В общем случае двойное лучепреломление – эффект расщепления в анизотропных средах луча света на две составляющие. Если луч света падает перпендикулярно к поверхности кристалла, то на этой поверхности он расщепляется на два луча. Первый луч продолжает распространяться прямо, и называется обыкновенным (o – ordinary), второй же отклоняется в сторону, и называется необыкновенным (e – extraordinary), причём обыкновенный и необыкновенный лучи поляризованы по-разному.

### 13.3. Искусственная анизотропия оптических свойств, индуцированная механической деформацией

Двойное лучепреломление можно наблюдать и в изотропных средах (аморфных телах), если подвергнуть их механическим нагрузкам.

Изотропное тело, подвергнутое упругим деформациям, может стать анизотропным и изменить состояние поляризации проходящего света. Это явление носит название фотоупругости или пьезооптического эффекта. При одностороннем растяжении или сжатии тела становится подобным одноосному кристаллу с оптической осью, параллельной направлению приложенной силы. Мерой возникающей при этом оптической анизотропии служит разность показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей. Опыт показывает, что эта разность пропорциональна напряжению  $\sigma = \frac{dF}{dS}$  в данной точке тела. От этого напряжения будет зависеть разность показателей преломления:  $n_o - n_e = k\sigma$ , где  $k$  – коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств вещества.

Поместим стеклянную пластинку  $G$  между двумя поляризаторами  $P_1$  и  $P_2$  (рис. 15).

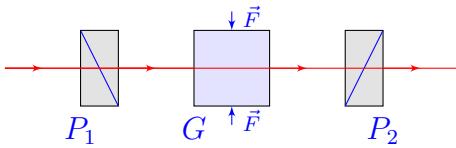


Рис. 15. Искусственная анизотропия оптических свойств, индуцированная механической деформацией

В отсутствие механической деформации свет через них проходит не будет. Если же стекло подвергнуть деформации, то свет может пройти, причем картина на экране получится цветная. По распределению цветных полос можно судить о распределении напряжений в стеклянной пластинке.

### 13.4. Эффект Керра и Поккельса

Под воздействием внешнего постоянного или переменного электрического поля в среде может наблюдаться двойное лучепреломление, вследствие изменения поляризации вещества. Пусть коэффициент преломления для обыкновенного луча равен  $n_o$ , а для необыкновенного —  $n_e$ . Разложим разность коэффициентов преломления  $n_o - n_e$ , как функцию внешнего поля  $E$ , по степеням  $E$ . Если до наложения поля среда была неполяризованной и изотропной, то  $n_o - n_e$  должно быть чётной функцией  $E$  (при изменении направления поля эффект не должен менять знак). Значит, в разложении по степеням  $E$  должны присутствовать члены лишь чётных порядков, начиная с  $E^2$ . В слабых полях членами высших порядков можно пренебречь, в результате чего

$$n_e - n_o \sim kE^2 \quad (19)$$

Эффект Керра обусловлен, главным образом, гиперполяризуемостью среды, происходящей в результате деформации электронных орбиталей атомов или молекул или вследствие переориентации последних.

### 13.5. Эффект Коттона-Муттона

Эффект Коттона — Муттона, двойное лучепреломление света в изотропном веществе, помещенном в поперечное магнитное поле (перпендикулярное световому лучу). Впервые обнаружено в коллоидных растворах Дж. Керром и (независимо от него) итальянским физиком К. Майораной в 1901. Подробно исследовано Эмье Коттоном (Aime Cotton) и А. Мутоном (H. Mouton) в 1907. Для наблюдения К.—М. э. через образец прозрачного изотропного вещества, помещенный между полюсами сильного электромагнита, пропускают монохроматический свет, линейно поляризованный в плоскости, составляющей с направлением магнитного поля угол  $\frac{\pi}{4}$ . В магнитном поле вещество становится оптически анизотропным (его оптическая ось параллельна магнитному полю), а проходящий свет превращается в эллиптически поляризованный, т. к. он распространяется в веществе в виде 2 волн — обычной и необыкновенной, имеющих разные фазовые скорости. Разность показателей преломления обычного  $n_o$  и необыкновенного  $n_e$  лучей, называемая величиной двойного лучепреломления, равна:

$$n_e - n_o = kH^2\lambda,$$

где  $H$  — напряженность магнитного поля,  $k$  — зависящая от вещества константа, называемая постоянной Коттона—Муттона,  $\lambda$  — длина волны света. Величина  $C$  обратно пропорциональна абсолютной температуре и, как правило, очень мала.

## 14. Принцип суперпозиции и интерференция монохроматических волн. Интерференция плоской и сферической волн. Видность полос.

**Принцип суперпозиции.** Если в одной точке пространства накладываются колебания двух волн, то они порождают новую волну, равную их векторной сумме.

Из-за наличия принципа суперпозиции возможно явление интерференции, когда волны взаимно усиливают друг друга, или же наоборот, гасят.

**Монохроматическая волна** — волна, в спектр которой входит только одна частота.

### 14.1. Интерференция двух плоских монохроматических волн. Ширина полосы

Рассмотрим сперва интерференцию двух плоских монохроматических волн. Пусть распространяются две волны с одинаковой частотой  $\omega$ :

$$\begin{aligned} E_1 &= a_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r}_1 - \varphi_1)} \cdot e^{-i\omega t} \\ E_2 &= a_2 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r}_2 - \varphi_2)} \cdot e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

Как мы знаем, сами по себе волны складываются. Посмотрим теперь за интенсивностью  $I$ , которую мы запишем как  $I = EE^*$ . Распишем суммарную интенсивность (принимаем во внимание, что временная часть в экспоненте одинаковая у всех, поэтому она сократится при произведении с комплексно сопряженным и поэтому следить за ней не будем):

$$\begin{aligned} I_{\Sigma} &= (E_1 + E_2)(E_1 + E_2)^* = E_1 E_1^* + E_1 E_2^* + E_2 E_1^* + E_2 E_2^* = \\ &= a_1^2 + 2a_1 a_2 \cos(k\Delta - \Delta\varphi) + a_2^2 = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(k\Delta - \Delta\varphi) \end{aligned}$$

Здесь мы ввели  $\Delta = r_2 - r_1$ ,  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ . Напоминаю, что  $k = 2\pi/\lambda$ .

Если же  $k_1 \neq k_2$ , то вместо  $k$  в результирующей формуле будет  $K = |k_1 - k_2|$ .

#### 14.1.1. Ширина полосы

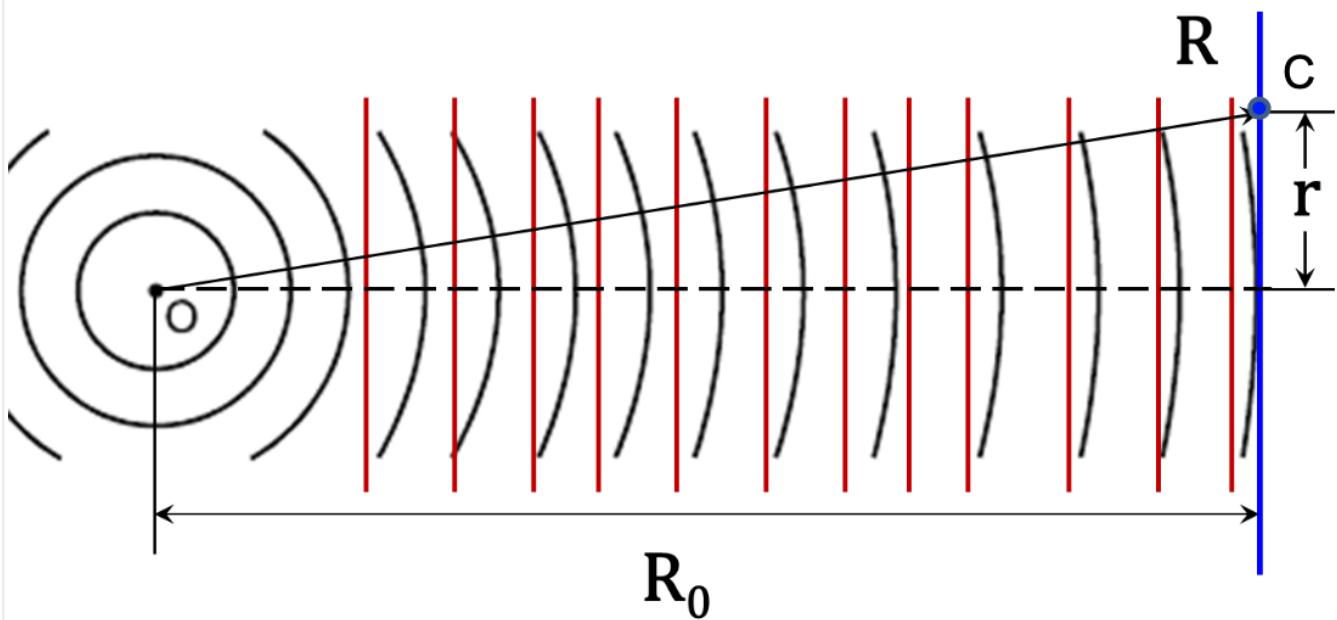
Рассмотрим чуть более общий случай, когда  $|k_1| = |k_2|$ , но при этом волны сходятся под некоторым углом  $\alpha$ . Тогда  $K = 2k \sin(\alpha/2)$

**Шириной полосы** будем называть расстояние между ближайшими максимумами (вообще говоря, в МФТИшном конспекте написано что между минимумами, а между максимумами это расстояние между полосами, но наш лектор видимо так не считает, но строго говоря какая разница казалось бы). В нашем случае она оказывается равной:

$$\Delta x = \frac{2\pi}{K} = \frac{2\pi}{2k \sin(\alpha/2)} = \frac{\lambda}{2 \sin(\alpha/2)} \approx \frac{\lambda}{\alpha}$$

### 14.2. Интерференция плоской и сферической монохроматических волн

Внимание на картинку.



Будем рассматривать область, где  $R_0 \gg r$ . При этом:

$$R = \sqrt{R_0 + r^2} \approx R_0 + \frac{r^2}{2R_0}$$

Для сферической волны:

$$E_{sp} = \frac{a_1}{R_0} e^{ikr} e^{-i\omega t} \approx \frac{a_1}{R_0} e^{ik(R_0 + r^2/(2R_0))} e^{-i\omega t}$$

Для плоской волны:

$$E_f = a_2 e^{ikR_0 - i\omega t}$$

Если это счастье расписать так же, как мы делали с плоской волной, то получим:

$$I_{\Sigma} = \frac{a_1^2}{R_0^2} + a_2^2 + 2 \frac{a_1 a_2}{R_0} \cos \left( k \frac{r^2}{2R_0} \right)$$

### 14.3. Видность

Для характеристики выраженности интерференции вводят величину, называемую **видностью**  $V$ :

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \quad (20)$$

где  $I_{max}$ ,  $I_{min}$  — максимальное и минимальное значения интенсивности в области интерференции волн.

При интерференции двух **монохроматических** волн видность будет равна:

$$V = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$$

## 15. Понятие о когерентности. Частично когерентный свет. Основные интерференционные схемы. Интерференция плоских волн, пространственный период полос.

Монохроматических волн не бывает в природе. В реальности волны часто излучаются модулированными как по амплитуде, так и по частоте. Такие называют квазимонохроматическими.

$$a(t) \cos(\omega t + b(t))$$

**когерентными называются две волны, если у них постоянная разность фаз**

Так две монохроматические волны когерентны, если у них одинаковая частота.

Если есть какая-то маленькая разница в частотах  $\Delta\omega$  то говорят о времени когерентности  $t\Delta\omega \sim \pi$ . Предполагая малость  $\Delta\omega$  получаем  $t \sim \frac{\lambda^2}{2c\Delta\lambda}$  отсюда получается то, что называют

$$\text{длинной когерентности } l \sim \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda}$$

Пусть у нас есть две плоские волны.

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1 \cos \mathbf{k}_1 \mathbf{r} - \omega t + \varphi_1 \\ A_2 &= a_2 \cos \mathbf{k}_2 \mathbf{r} - \omega t + \varphi_2 \end{aligned}$$

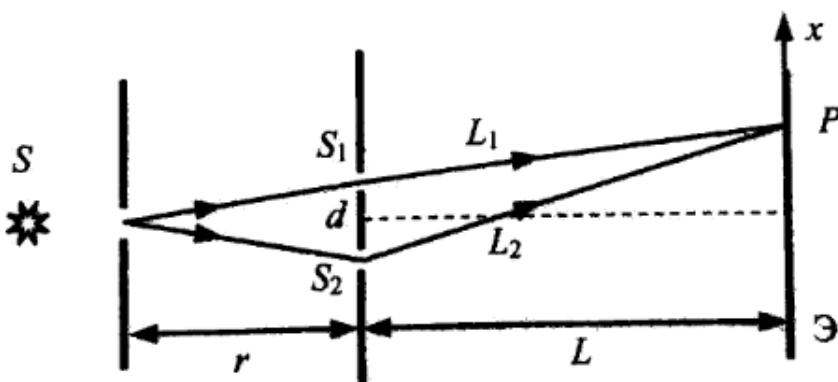
Тогда не сложно их сложить и получить распределение интенсивности

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos((\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\mathbf{r} + \varphi_1 - \varphi_2)$$

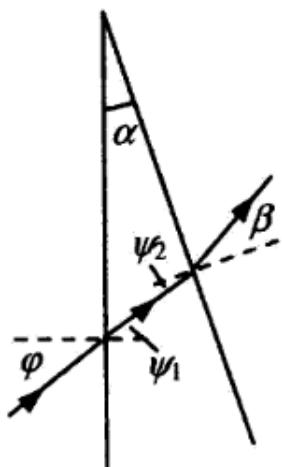
Ага, теперь мы знаем, что интенсивность постоянна в плоскостях перпендикулярных  $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ . Расстояние между плоскостями максимумов будет  $\frac{2\pi}{|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2|}$ . Для равных по модулю векторов  $\frac{\lambda}{2 \sin \alpha/2}$  где альфа это угол между векторами

### 15.1. Основные схемы

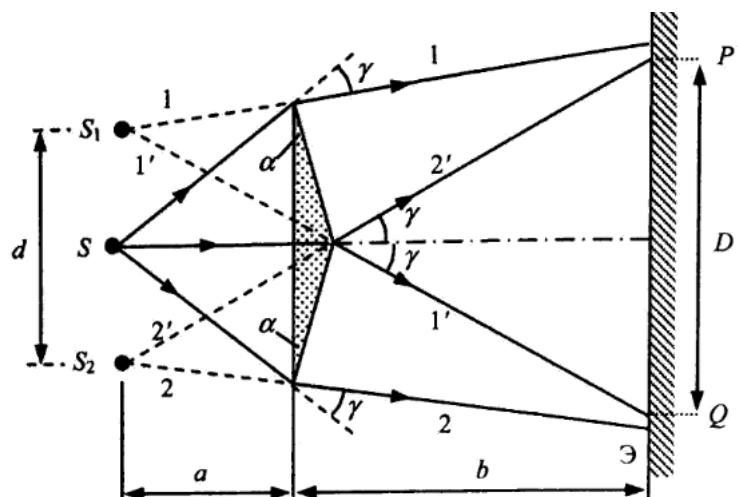
**Схема Юнга.** Ширина полос и расстояние между ними равно  $\frac{\lambda L}{d}$



**Тонкий клин.** В приближении малых углов падения и малости угла альфа просто поворачивает входной луч на  $(n - 1)\alpha$



**Бипризма Френеля** Две призмы из прошлого пункта. В итоге получаем, что эффективно один источник расслаивается на два. Расстояние между ними  $2a(n - 1)\alpha$ , и теперь задача свелась просто к опыту Юнга



## 16. Интерференция волн от одного источника. Интерференционные опыты с делением волнового фронта (опыт Поля, бипризма Френеля, зеркала Френеля, билинза Бийе, зеркало Ллойда). Схема Юнга.

### 16.1. Интерференция волн от одного источника

Для наблюдения интерференции света необходимо:

Постоянство во времени разности фаз складываемых колебаний

Равенство частот интерферирующих волн

Параллельность векторов  $E_1$  и  $E_2$

Независимость от времени амплитуд световых волн.

Если разность фаз двух колебаний с течением времени изменяется очень медленно, то говорят, что колебания остаются временно когерентными.

Обозначим за  $\tau$  время, за которое разность фаз двух колебаний успела измениться на величину, сравнимую  $\pi$ .

За это время волна распространится на расстояние  $c\tau$ , и колебания напряженности электрического поля волны в точках, удаленных друг от друга на это расстояние вдоль направления распространения волны оказываются некогерентными.

Таким образом, расстояние вдоль направления распространения плоской волны, на котором случайные изменения разности фаз колебаний достигают величины, сравнимой с  $\pi$ , называют длиной когерентности (расстояние, при прохождении которого две или несколько волн утрачивают когерентность.)

Наиболее распространенным способом получения двух когерентных волн является расщепление волны, излучаемой одним источником, на две волны, распространяющиеся по разным путям, но, в конце концов, встречающиеся в одной точке, где и происходит их сложение. Если запаздывание одной волны по отношению к другой, связанное с разностью пройденных ими путей, меньше длины когерентности, то колебания в точке сложения будут когерентными, и будет наблюдаться явление интерференции. Когда разность оптических путей двух волн приближается к длине когерентности, интерференционная картина исчезает, и интенсивность в каждой точке пространства становится равной сумме интенсивностей двух волн.

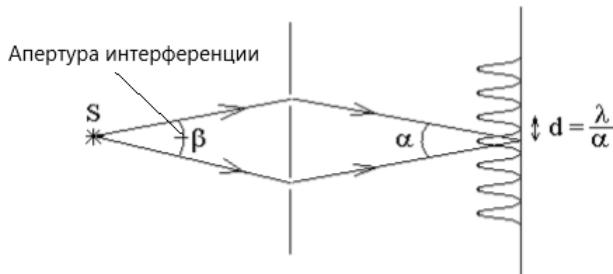
### 16.2. Методы получения когерентных пучков

Существующие экспериментальные методы получения когерентных пучков из одного светового пучка можно разделить на два класса.

В **методе деления волнового фронта** пучок пропускается, например, через два близко расположенных отверстия в непрозрачном экране. Такой метод пригоден лишь при достаточно малых размерах источника.

В другом методе пучок делится на одной или нескольких частично отражающих, частично пропускающих поверхностях. Этот **метод деления амплитуды** может применяться и при протяженных источниках. Он обеспечивает большую интенсивность и лежит в основе действия разнообразных интерферометров. В зависимости от числа интерферирующих пучков различают двулучевые и многолучевые интерферометры.

### 16.3. Схема Юнга

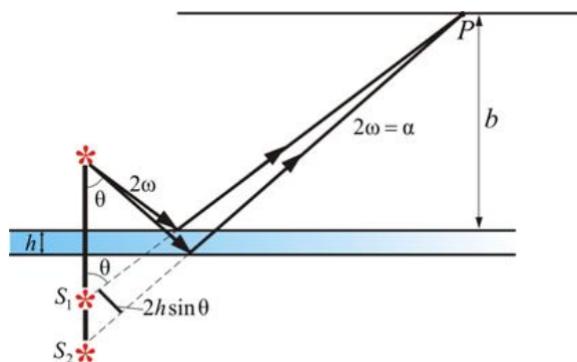


Свет падает на экран с узкой щелью, дальше его можно рассматривать как точечный, монохроматический источник света S. После дифракции на щели световая волна распространялась до двух маленьких отверстий S<sub>1</sub> и S<sub>2</sub>, сделанных в экране. После очередной дифракции два расходящихся пучка света перекрывают друг друга, и, являясь когерентными, при наложении дают интерференционную картину.

### 16.4. Опыт Поля

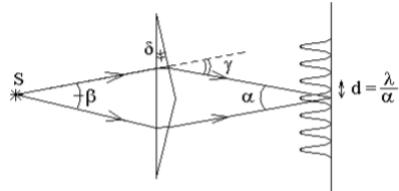
Опыт Поля - способ наблюдения интерференции света основанный на методу деления амплитуды.

В опыте Поля свет от источника S отражается двумя поверхностями тонкой прозрачной плоскопараллельной пластинки, в любую точку P, находящуюся с той же стороны от пластиинки, что и источник, приходят два луча. Эти лучи образуют интерференционную картину. Для определения вида полос можно представить себе, что лучи выходят из мнимых изображений S<sub>1</sub> и S<sub>2</sub> источника S, создаваемых поверхностями пластиинки. На удаленном экране, расположеннном параллельно пластиинке, интерференционные полосы имеют вид концентрических колец с центрами на перпендикуляре к пластиинке, проходящем через источник S



## 16.5. Бипризма Френеля

Бипризма Френеля - призма, в основании которой находится тупоугольный равнобедренный треугольник.

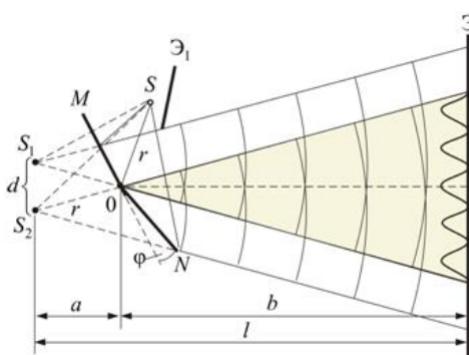


Угол  $\delta$  при основании треугольника и угол  $\gamma$ , на который каждый из двух тонких оптических клиньев поворачивает луч, связаны соотношением:

$$\gamma = (n - 1)\delta$$

## 16.6. Зеркала Френеля

Две когерентные световые волны получаются в результате отражения от двух зеркал  $M$  и  $N$ , плоскости которых наклонены под небольшим углом  $\varphi$  друг к другу:



Источником служит узкая ярко освещенная щель  $S$ , параллельная ребру между зеркалами. Отраженные от зеркал пучки падают на экран, и в той области, где они перекрываются (после интерференции), возникает интерференционная картина. От прямого попадания лучей от источника  $S$  экран защищен ширмой  $\mathcal{E}$ . Для расчета освещенности  $J$  экрана можно считать, что интерферирующие волны испускаются вторичными источниками  $S_1$  и  $S_2$ , представляющими собой мнимые изображения щели  $S$  в зеркалах. Поэтому  $J$  будет определяться формулой двулучевой интерференции, в которой расстояние  $l$  от источников до экрана следует заменить на  $a + b$ , где  $a \approx r$  - расстояние от  $S$  до ребра зеркал,  $b$  - расстояние от ребра до экрана. Расстояние  $d$  между вторичными источниками равно:  $d \approx 2a\varphi$ . Поэтому ширина интерференционной полосы на экране равна:

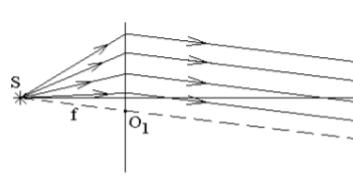
$$\Delta x \approx \frac{\lambda l}{d} = \frac{\lambda(a + b)}{2a\varphi}$$

## 16.7. Билинза Бийе

Из обычной линзы вырезают полоску, получается билинза Бийе:



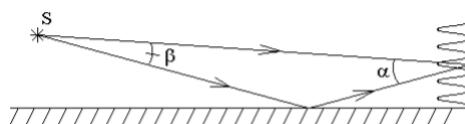
Точку пересечения фокальной плоскости и оси симметрии задачи можно назвать фокусом Бийе. Рассмотрим точечный источник света  $S$ , расположенный в фокусе билинзы Бийе и рассмотрим лучи света проходящие через верхнюю половину билинзы:



Если верхнюю половину билинзы достроить вниз до полной линзы, то центр полной линзы будет находиться в некоторой точке  $O_1$ , расположенной ниже оси симметрии задачи. Лучи, прошедшие через верхнюю половину билинзы, после билинзы пойдут параллельно прямой  $SO_1$ , так как луч, проходящий через центр линзы  $O_1$ , должен пройти линзу без изменения направления. Остальные лучи обязаны быть параллельными лучу  $SO_1$ , так как источник света находится в фокальной плоскости. Как видно из рисунка этот пучок лучей наклонен вниз относительно оси симметрии задачи. Аналогично, лучи, прошедшие нижнюю половину билинзы, пойдут после билинзы параллельным пучком лучей слегка наклоненным вверх. На экран приходят два параллельных пучка лучей, представляющих собой две плоских волны. Интерференционные полосы будут иметь одинаковую ширину по всему экрану, так как угол между интерферирующими лучами в каждой точке экрана один и тот же.

## 16.8. Зеркало Ллойда

Интерферируют два луча, один идет прямо от источника света  $S$  к экрану, второй отражается от зеркала, здесь  $\beta$  - апертура интерференции. Ширина полос  $d = \frac{\lambda}{\alpha}$



В нижней точке, где экран соприкасается с зеркалом, находится середина темной полосы. В эту точку волны приходят в противофазе, так как при отражении от зеркала одна из волн теряет половину волны.

## 17. Временная когерентность. Интерференция немонохроматических волн. Время и длина когерентности. Соотношения между временем когерентности и шириной спектрального интервала.

### 17.1. Интерференция немонохроматических волн

#### 17.1.1. Корегентность

Две волны называются *когерентными*, если разность их фаз является постоянной. Когерентными являются две монохроматические волны, если только они имеют одинаковые частоты.

Если разность фаз волн меняется со временем, то эти волны называются *некогерентными*.

#### 17.1.2. Время и длина когерентности

Рассмотрим сложение двух волн с разными частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

Временем когерентности называется такое время, в течение которого разность фаз рассматриваемых волн меняется незначительно. В случае двух волн

$$A_1 = a_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1)$$

$$A_2 = a_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2)$$

разность фаз равна

$$\Delta\varphi = \Delta\omega \cdot t + \Delta\alpha, \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2, \Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$$

Когда сдвиг фаз составит  $\Delta\omega \cdot t \sim \pi$ , волны уже нельзя считать когерентными. Поэтому время когерентности определяется условием

$$\Delta\varphi(t + t_{\text{kog}}) \sim \pi$$

$$t_{\text{kog}} \sim \frac{\pi}{\Delta\omega}$$

Переходя от частоты к длине волны по формуле  $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$  и считая  $\Delta\omega \ll \omega$ , получим

$$t_{\text{kog}} \sim \frac{\lambda^2}{2c\Delta\lambda}$$

Длина когерентности - путь, проходимый волнами за время когерентности. Она составляет

$$l_{\text{kog}} = ct_{\text{kog}} \sim \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda}$$

#### 17.1.3. Связь времени когерентности с шириной спектра

Представим волновой пакет в виде суперпозиции монохроматических волн:

$$A(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A(t) e^{i\omega t} dt$$

Пусть фурье-спектр сигнала дается выражением

$$a(\omega) = \begin{cases} a_0, & |\omega - \omega_0| < \frac{\Delta\omega}{2}, \\ 0, & |\omega - \omega_0| > \frac{\Delta\omega}{2}. \end{cases}$$

Соответствующая временная зависимость сигнала определится по первой формуле:

$$A(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad \frac{a_0}{2\pi} \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} e^{-i\omega t} d\omega = a_0 e^{-i\omega_0 t} F(t),$$

Здесь введена функция

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i t} (e^{i\Delta\omega t/2} - e^{-i\Delta\omega t/2}) = F_m \frac{\sin(\Delta\omega \cdot t/2)}{(\Delta\omega \cdot t/2)},$$

где  $F_m(t) = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$ .

Функция  $F(t)$  обращается в первый раз в нуль при  $\frac{\Delta\omega \cdot t}{2} = \pi$ , то есть в момент времени

$$t = \tau = \frac{2\pi}{\Delta\omega}.$$

Эта величина есть характерное время существования волнового пакета - время когерентности.

## 17.2. Влияние немонохроматичности на наблюдаемое число интерференционных полос

Сигнал называется квазимонозроматическим, если его можно представить в виде

$$A(t) = a(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)),$$

где амплитуда  $a(t)$  и фаза  $\varphi(t)$  - медленно меняющиеся функции.

Можно наблюдать интерференционную картину от квазимонозроматического источника. Действительно, свет, испускаемый таким источником, представляет собой суперпозицию монохроматических волн. Каждую из них можно расщепить на две волны (например, с помощью схемы Юнга), тогда получаемая в конце падающих волн уже создает интерференционную картину.

Интерференционная картина от всего спектра получается наложением интерференционных картин от отдельных компонент спектра. Однако, период отдельных картин зависит от соответствующей длины волны, поэтому положение максимумов и минимумов различно для разных компонент спектра. Это ограничивает общее число наблюдаемых полос от источника.

Рассмотрим компоненту спектра с длиной волны  $\lambda$ . Разность хода в опыте Юнга составляет

$$\delta \approx \frac{xd}{L}$$

Максимумы интерференционной картины наблюдаются в точках, для которых  $\delta = m\lambda$

$$x_m^{(max)} = \frac{\lambda L}{d} m.$$

Таким образом, ширина интерференционной полосы равна

$$\Delta x = \frac{\lambda L}{d}$$

Учтем, что источник создает немонохроматический свет в спектральном диапазоне  $\Delta\lambda$ . Для такого света длина когерентности есть

$$l_{\text{ког}} \sim \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}.$$

Максимальная разность хода лучей  $\delta$ , при которой они еще могут считаться когерентными, не должна превышать  $l_{\text{ког}}$ :

$$\delta < l_{\text{ког}}.$$

Отсюда наибольший порядок интерференции:

$$\delta_{\max} = m_{\max}\lambda \sim \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \Rightarrow m_{\max} \sim \frac{\lambda}{\Delta\lambda}.$$

Тогда максимальное число наблюдаемых полос интерференции составляет

$$2m_{\max} + 1 \sim \frac{2\lambda}{\Delta\lambda}.$$

## 18. Временная когерентность. Видность интерференционной картины. Предельная разность хода и полное число наблюдаемых интерференционных полос.

### 18.1. Степень когерентности

Рассмотрим квазимохроматический свет, с фазово-амплитудной модуляцией:

$$E(t) = a(t)e^{i\omega_0 t} = a_0(t)e^{i\delta(t)}e^{i\omega_0 t}$$

где  $a_0(t)$  и  $\delta(t)$  – медленно меняющиеся функции времени. Для реального света эти функции – случайные. В предположении, что приёмники света ринимают только квадраты напряжённостей (интенсивности) световых полей, усреднённых по промежуткам времени, весьма большими с периодами колебаний квазимохроматического света и временами изменения функций вышеописанных случайных функций. Световые потоки в срелнем будем полагать стационарными. Квадрат поля можно представить следующим образом:

$$(\Re(E))^2 = \left( \frac{E + E^*}{2} \right)^2 = \frac{E^2 + E^{*2}}{4} + \frac{E\bar{E}}{2}$$

$E^2 + E^{*2} = 2a_0^2 \cos(2(\omega_0 t + \delta))$  – быстроосциллирующая величина,

при усреднении выпадет, откуда

интенсивность полагается:  $I = \overline{EE^*}$

Пусть теперь в момент времени  $t$  колебания приходят в точку  $P$  из источников  $S_1$  и  $S_2$ ? из которых они вышли во времена  $t - \theta_1$  и  $t - \theta_2$  соответственно. Тогда

$$E = E(P, t) = E_1(t - \theta_1) + E_2(t - \theta_2)$$

$$I = \overline{E_1(t - \theta_1) \cdot E_1^*(t - \theta_1)} + \overline{E_2(t - \theta_2) \cdot E_2^*(t - \theta_2)} + \overline{E_1(t - \theta_1) \cdot E_2^*(t - \theta_2) + E_2(t - \theta_2) \cdot E_1^*(t - \theta_1)}$$

В силу предположения о средней стационарности потоков первое слагаемое не зависит от  $t$  и  $\theta$ , обозначим его  $I_1$ . Положая  $\tau$  – отрезком времени усреднения:

$$I_1 = \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E_1(t - \theta_1) \cdot E_1^*(t - \theta_1) dt = \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E_1(t) \cdot E_1^*(t) dt$$

Аналогично второй член

$$I_2 = \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E_2(t) \cdot E_2^*(t) dt$$

Последний перекрёсный член зависит таким образом только от  $\theta = \theta_2 - \theta_1$ , его обозначают  $F_{12}(\theta)$  и называют корреляционной функцией колебаний  $E_1(t - \theta_1)$  и  $E_2(t - \theta_2)$ . Если  $E_1(\cdot)$  и  $E_2(\cdot)$  равны функция называется автокорреляционной (для простоты  $F(\theta)$ ). Функция

$$f_{12}(\theta) = \frac{F_{12}(\theta)}{\sqrt{I_1 I_2}}$$

называется нормированной корреляционной. Через неё запишем интенсивность в  $P$ .

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \Re(f_{12}(\theta))$$

Пользуясь квазимохроматическим приближением  $E_i = a_i e^{i\omega_0 t}$ ,  $i = 1, 2$ , так что

$$\overline{a_1(t)a_2^*(t-\theta)}e^{i\omega t} = \sqrt{I_1 I_2} f_{12}(\theta)$$

Функция

$$\gamma_{12}(\theta) = f_{12}(\theta) e^{-i\omega_0 \theta}$$

называется комплексной степенью когерентности.

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \Re(\gamma_{12}(\theta) e^{-i\omega_0 t}) \\ I &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}(\theta)| \cos(\omega_0 \theta + \delta) \end{aligned}$$

Тогда

$$I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}(\theta)| \quad I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}(\theta)| \quad (21)$$

## 18.2. Видность интерференционной картины.

**Определение 4.** Видностью интерференционной картины называется величина  $V$ , определяемая следующим образом:

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}, \quad (22)$$

где  $I_{max}$  и  $I_{min}$  – интенсивности света в точках максимума и минимума интерференции соответственно.

Пользуясь (21)

$$V = \frac{\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} |\gamma_{12}(\theta)|$$

Если  $|\gamma_{12}(\theta)|$  при всех  $\theta$  равна нулю, то  $V = 0$  и интерференционный полосы не видны, колебания называются полностью некогерентными. Когда же  $|\gamma_{12}(\theta)|$  при всех  $\theta$  равна единице, то когерентность называется полной. В остальных случаях говорят о частичной некогерентности.

## 18.3. Временная когерентность

Пусть рассматривается когерентность одного и того же светового поля в пространственно-временных точках  $R_1(Q_1, t_1)$  и  $R_2(Q_2, t_2)$ . Пусть пространственные точки  $Q_1$  и  $Q_2$  являются маленькими отверстиями в непрозрачном экране на пути светового излучения, из этих отверстий выйдет дифрагмированный свет и пусть он придет в удаленную точку  $P$  одновременно (рис. 16).

По определению колебания в  $R_1(Q_1, t_1)$  и  $R_2(Q_2, t_2)$  мы называем когерентными или

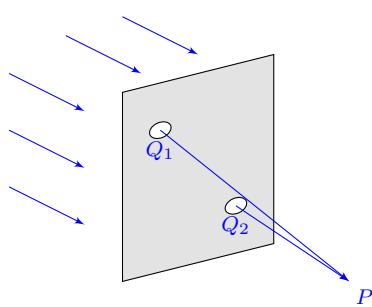


Рис. 16. Излучение от двух отверстий

некогерентными, если когерентны или некогерентны соответствующие колебания в  $P$ . Степень когерентности  $\gamma(\theta)$  определяется для них той же величиной, что и для  $R_1(Q_1, t_1)$  и  $R_2(Q_2, t_2)$ .

Если точки  $Q_1$  и  $Q_2$  совпадают, но свет попадает в  $P$  разными путями, то  $R_1(Q_1, t_1)$  и  $R_2(Q_2, t_2)$  отличаются только  $t_1$  и  $t_2$ . В этом случае говорят о *временной когерентности*. При  $t_1 = t_2$  степень временной когерентности равна единице, с увеличением разности этих времён степень когерентности убывает. Максимальное значение  $|t_2 - t_1|$ , при котором когерентность ещё сохраняется, называется временем когерентности. Расстояние  $\ell = v|t_2 - t_1|$ , проходимое светом за это время, называется *длинной когерентности*.

#### 18.4. Предельная разность хода и полное число наблюдаемых интерференционных полос.

Пусть спектральный интервал излучения, создающего наблюдаемую интерференционную картину, ограничен длинами волн  $\lambda$  и  $\lambda + \Delta\lambda$ . Интерференционная картина будет размываться, если максимум  $m$ -го порядка для длины волны  $\lambda + \Delta\lambda$  будет накладываться на максимум  $(m + 1)$ -го порядка для длины волны  $\lambda$ . Тогда с учетом условия максимума

$$m_{max}(\lambda + \Delta\lambda) = (m_{max} + 1)\lambda$$

Откуда

$$m_{max} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \quad (23)$$

С другой стороны, интерференция наблюдается до тех пор, пока разность хода не превышает длину когерентности  $\ell$ :

$$\ell \approx m_{max} \cdot \lambda$$

Откуда предельная разность хода и длина когерентности  $\delta_{max} \sim \ell$ :

$$\ell \approx \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \quad (24)$$

## 19. Пространственная когерентность. Интерференция квазимохроматических волн протяженных источников света. Роль конечных размеров источника света. Интерференционная картина в схеме Юнга.

### 19.1. Пространственная когерентность

Будем рассматривать монохроматический протяженный источник. Буквенные обозначения введены на рисунке.

Положим полную интенсивность источника  $I_0$ . В таком случае интенсивность единицы длины источника равна:

$$J_0 = \frac{I_0}{b}$$

Введем понятие апертуры интерференционной системы:

$$\Omega = \frac{d}{R_0}$$

Сразу же отметим, что  $\alpha = d/R$ . Распишем оптическую разность хода. Из рисунка она оказывается равной:

$$\Delta = \alpha x + \Omega \xi = \frac{d}{R}x + \frac{d}{R_0}\xi = \frac{d}{R} \left( x + \frac{R}{R_0}\xi \right)$$

Здесь  $\xi$  — высота, на которой отстоит от оси симметрии рассматриваемый нами участок источника  $d\xi$ .

Вспомним формулу для ширины полосы:

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{\lambda R}{d}$$

Запишем теперь  $dI_\xi$ :

$$dI_\xi(x) = 2J_0 d\xi (1 + \cos k\Delta) = 2J_0 d\xi \left( 1 + \cos \left[ \frac{2\pi}{\Lambda} \cdot \left( x + \frac{R}{R_0}\xi \right) \right] \right)$$

Тогда чтобы получить интенсивность проинтегрируем по всему источнику:

$$I(x) = 2J_0 \int_{-b/2}^{b/2} \left( 1 + \cos \left[ \frac{2\pi}{\Lambda} \cdot \left( x + \frac{R}{R_0}\xi \right) \right] \right) d\xi$$

Введем замену:

$$q = \frac{2\pi}{\Lambda} \frac{R}{R_0}$$

И интеграл преобразится в (раскроем косинус и учтем, что интегрирование синуса в симметричных пределах дает 0):

$$2J_0b + 2J_0 \frac{b}{b} \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda}\right) \cdot \int_{-b/2}^{b/2} \cos(q\xi) d\xi = 2J_0b \left[ 1 + \frac{\sin\left(\frac{qb}{2}\right)}{\frac{qb}{2}} \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda}x\right) \right]$$

Преобразуем выражение  $qb/2$ :

$$\frac{qb}{2} = \frac{2\pi}{\Lambda} \frac{R}{R_0} \frac{b}{2} = \frac{\pi d R b}{\lambda R R_0} = \frac{\pi \Omega}{\lambda/b}$$

Таким образом мы получаем, что выражение перед косинусом (которое оказывается фактически **видностью**  $V(b)$  с точностью до знака) оказывается равно:

$$V(b) = \left| \frac{\sin \frac{\pi \Omega}{\lambda/b}}{\frac{\pi \Omega}{\lambda/b}} \right|$$

Отметим, что  $V = 0$  при условии:

$$\frac{\pi \Omega}{\lambda/b} = \pi \Rightarrow \Omega_{max} = \frac{\lambda}{b}$$

Итого мы видим полосы при  $\Omega \leq \Omega_{max} = \lambda/b$  (концом Овчинкин, например, пренебрег). Если же мы теперь зафиксируем  $\Omega$  и позволим меняться  $b$ , то:

$$b \leq b_{max} = \frac{\lambda}{\Omega} \Rightarrow \Omega = \frac{d}{R_0} \leq \frac{\lambda}{b} \Rightarrow d \leq \frac{\lambda R_0}{b} = \frac{\lambda}{\psi} = \rho_{kog}$$

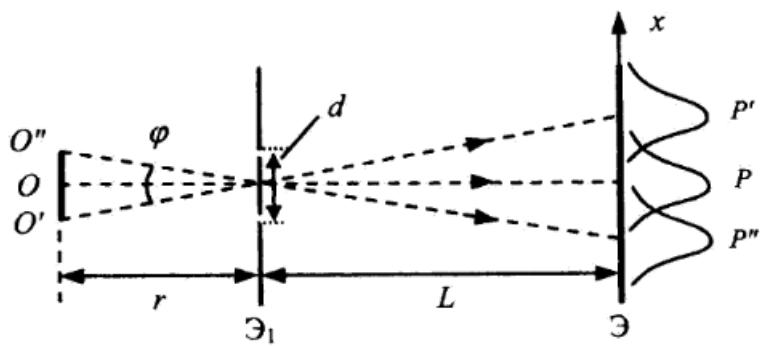
Здесь  $\rho_{kog}$  — радиус когерентности,  $\psi$  — угловой размер источника ( $\psi = b/R_0$ ).

## 19.2. Интерференция квазимохроматических волн протяженных источников света

В лекциях про это ничего не нашел, у Овчинкина упоминается только то, что этот случай является композицией интерференции квазимохроматических волн и интерференции протяженного источника. Картинка примерно такая:

## 20. Пространственная когерентность. Радиус пространственной когерентности, зависимость радиуса пространственной когерентности от угловых размеров источника света.

Будем рассматривать пространственную когерентность на примере опыта Юнга.



Пусть источник света имеет какие-то линейные размеры. Тогда каждая точка источника создает свою интерференционную картину, которые налагаются друг на друга. Как известно период полос  $\frac{\lambda L}{d}$  а сдвиг за счет неточечности будет  $\varphi L$  итого получаем условие  $b < \frac{\lambda}{\varphi}$  это и называют радиусом когерентности.  $\rho = \frac{\lambda}{\varphi}$

## 21. Пространственная когерентность. Степень пространственной когерентности. Звездный интерферометр Майкельсона и его современные модификации.

### 21.1. Пространственная когерентность.

Пространственная когерентность – когерентность колебаний, которые совершаются в один и тот же момент времени в разных точках плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны. Вводится для объяснения интерференции нескольких источников. Два источника называются пространственно когерентными, если их размеры и расположение позволяют наблюдать интерференцию.

2 некогерентных точечных источника.



Условие для хорошей контрастности интерференционной картины ( $\alpha$  - правильная дробь):

$$\Delta = l[\cos \beta_1 - \cos \beta_2] = (m + \alpha)\lambda, \alpha \in [0, 1/4] \quad (25)$$

Максимумы и минимумы накладываются:

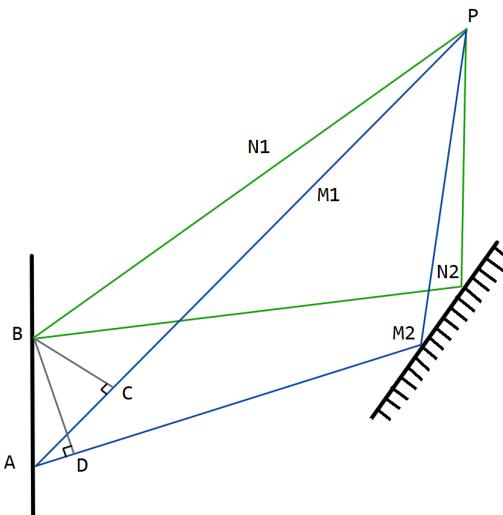
$$\Delta = l[\cos \beta_1 - \cos \beta_2] = m\lambda \quad (26)$$

Компенсируются:

$$\Delta = l[\cos \beta_1 - \cos \beta_2] = (m + 1/2)\lambda \quad (27)$$



◀ Рассмотрим интерференцию от двух точечных источников А и В. Р-точка интерференции. Из точки А исходят два луча:  $AM_1P$  и  $AM_2P$ , которые друг с другом интерферируют в точке Р. Аналогично для точки В есть 2 луча  $BN_1P$  и  $BN_2P$ .



Если расстояние  $AB = l$  мало, оптическая разность хода лучей от А и В:

$$\Delta_A = (AM_1P) - (BN_1P) = (AC) = \cos BAC = \cos \beta_1$$

$$\Delta_B = (AM_2P) - (BN_2P) = (AD) = \cos BAD = \cos \beta_2$$

И результирующая разность хода:

$\Delta = |\Delta_A - \Delta_B| = l|\cos \beta_1 - \cos \beta_2|$  – характеризует относительный сдвиг двух независимых интерференционных картин

$\Delta \sim 0$  или  $\Delta \sim \lambda$ , сдвиг нулевой  $\Rightarrow$  максимумы и минимумы складываются.

$\Delta \sim \lambda$ , максимумы накладываются на минимумы  $\Rightarrow$  интерференционная картина пропадает.

Очевидно, при сдвиге на целое число длин волн картина не меняется. Условие 25 отражает промежуточное состояние, может показаться произвольным, но ним так будет удобно в будущем. ►

*Протяженный источник длины l.*

► Разобьем источник на пары некогерентных точек  $(A_1B_1), (A_2B_2), \dots$  находящихся на расстоянии  $l/2$ . Для каждой из них можно записать условие 27:

$$\frac{l}{2}|\cos \beta_1 - \cos \beta_2| = \frac{\lambda}{2} \text{ или } \delta = l[\cos \beta_1 - \cos \beta_2] = \lambda$$

То есть каждая пара не дает интерференционных полос  $\Rightarrow$  мы видим равномерный светлый фон. Аналогично, если  $\delta = (m + \alpha)\lambda$ , где  $\alpha$  правильная дробь, мы можем разбить источник на две части в пропорции  $m : \alpha$ . Меньшая часть будет создавать полосы на светлом фоне, создаваемом большей частью. Чем больше  $m$ , тем хуже видно интерференцию.

Условие хорошей контрастности:  $\delta = l[\cos \beta_1 - \cos \beta_2] \leq \lambda/2$

Если существует точка, из которой лучи исходят симметрично, т.е.  $\beta_2 = \pi - \beta_1$ , угол между этими лучами – угол интерференции  $\Omega = \beta_2 - \beta_1 = \pi - 2\beta_1$ .

$$|\cos \beta_1 - \cos \beta_2| = 2 \cos \beta_1 = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right) = \sin \frac{\Omega}{2}$$

В этом случае условие хорошей контрастности:  $l \frac{\sin \Omega}{2} \leq \lambda/4$



## 21.2. Степень пространственной когерентности.

Для определения степени когерентности вообщат понятие

**Корреляционная функция** – Зависящая от времени корреляция двух случайных функций  $E(r_1, t_1)$  и  $E(r_2, t_2)$  определяется как  $B(r_1, t_1, r_2, t_2) \langle E(r_1, t_1)E(r_2, t_2) \rangle$ , где угловые скобки обозначают процедуру усреднения.

**Степень когерентности** Для светового пучка введем величину

$$\gamma(r_1, r_2, t = t_1 - t_2) = \frac{B}{\sqrt{I_1 I_2}}$$

– комплексную степень когерентности.  $\gamma \leq 1$  При  $t=0$   $|\gamma|$  – степень пространственной когерентности, а при  $r_1 = r_2$  – степень временной когерентности.

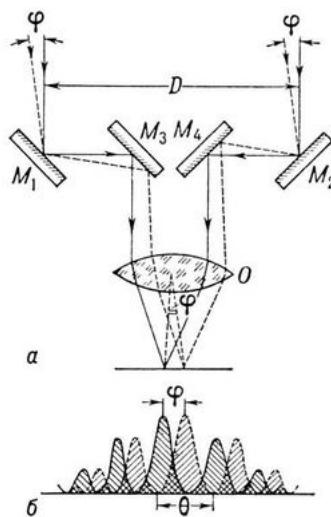
## 21.3. Звездный интерферометр Майкельсона

Если поставить на пути лучей источника экран с двумя отверстиями, расположенными на расстоянии D, появляется специфическая картина. Если закрыть одно отверстие, то дифракция лучей на втором даст стандартную картину колец, однако если открыть оба отверстия, две системы колец совместятся. К эффекту обычного сложения минимумов и максимумов добавится

интерференция двух щелей и кольца будут пересечены интерференционными полосами. Угловое расстояние между этими полосами определяется угловым расстоянием – углом, на который отличаются направления на соседние интерференционные максимумы:  $v = \lambda/D$ . Допустим, мы наблюдаем в такую систему двойную звезду с угловым расстоянием  $\delta\varphi = v/2$  между ее компонентами. Тогда минимумы интерференционных полос от одной звезды наложатся на минимумы другой. Изменяя расстояние D можно добиться картины, на которой интерференционные полосы пропадут совсем или их видимость станет наименьшей. В таком случае угловое расстояние между компонентами звезды станет

$$\delta\varphi = \frac{\lambda}{2D}$$

Для одиночной звезды можно применить тот же метод: для упрощения вычислений можно проецировать, что звезда излучает как квадрат, плоскость которого параллельная фокальной плоскости объектива, а пара сторон параллельная прямой, соединяющей отверстия экрана. Тогда можно разбить этот квадрат на пары полосок (аналогично случаю с протяженным источником в этом же билете), каждая пара не даст интерференционных полос. Подбрав D так, что интерференционные полосы исчезнут, угловой размер стороны квадрата можно найти по формуле  $\delta\varphi' = \frac{\lambda}{D}$ . Если звезду представить как равномерно светящийся диск, угловой размер можно найти по формуле  $\delta\varphi' = 1,22 \frac{\lambda}{D}$ . Проблема этого метода в том, что для хорошей интерференции нужен телескоп с большим диаметром объектива. Майкельсон соединил телескоп с интерферометром и решил эту проблему, добавив зеркала.



Изменяя расстояние между отверстиями и перемещая зеркала, можно добиться исчезновения интерференционной картины.

### 21.3.1. Принцип работы звездного интерферометра Майкельсона

По принципу Гюйгенса-Френеля заменим звезду на вторичный фронт (уберем звезду, поместим вторичные источники  $S_1$  и  $S_2$  в отверстия экрана.) Зеркала дадут 2 пары мнимых изображений. Если от звезды идет пучок параллельных лучей, то источники, а значит, и их изображения, будут в одной фазе. Получается, что зеркала позволяют "сблизить" вторичные источники, а интерференционная картина сохранится.

Теперь расположим вторую звезду на расстоянии  $\delta\varphi$  от первой. Ее волновой фронт будет достигать отверстий не одновременно (нет симметрии). Разность хода между лучами, приходящими

ми в отверстия, будет равна  $D\delta\varphi$ . Интерференционные полосы минимизируются, если разность хода будет равна  $D\delta\varphi = \lambda/2$ . Получилась формула, идентичная старой модели телескопа.

Проблема телескопа такой конструкции в том, что система зеркал должна быть строго неподвижной и при этом раздвигаться на большое расстояние.

### 21.3.2. Современные модификации.

Я не имею ни малейшего понятия, что тут имеется в виду, но вот что накопалось в гугле:

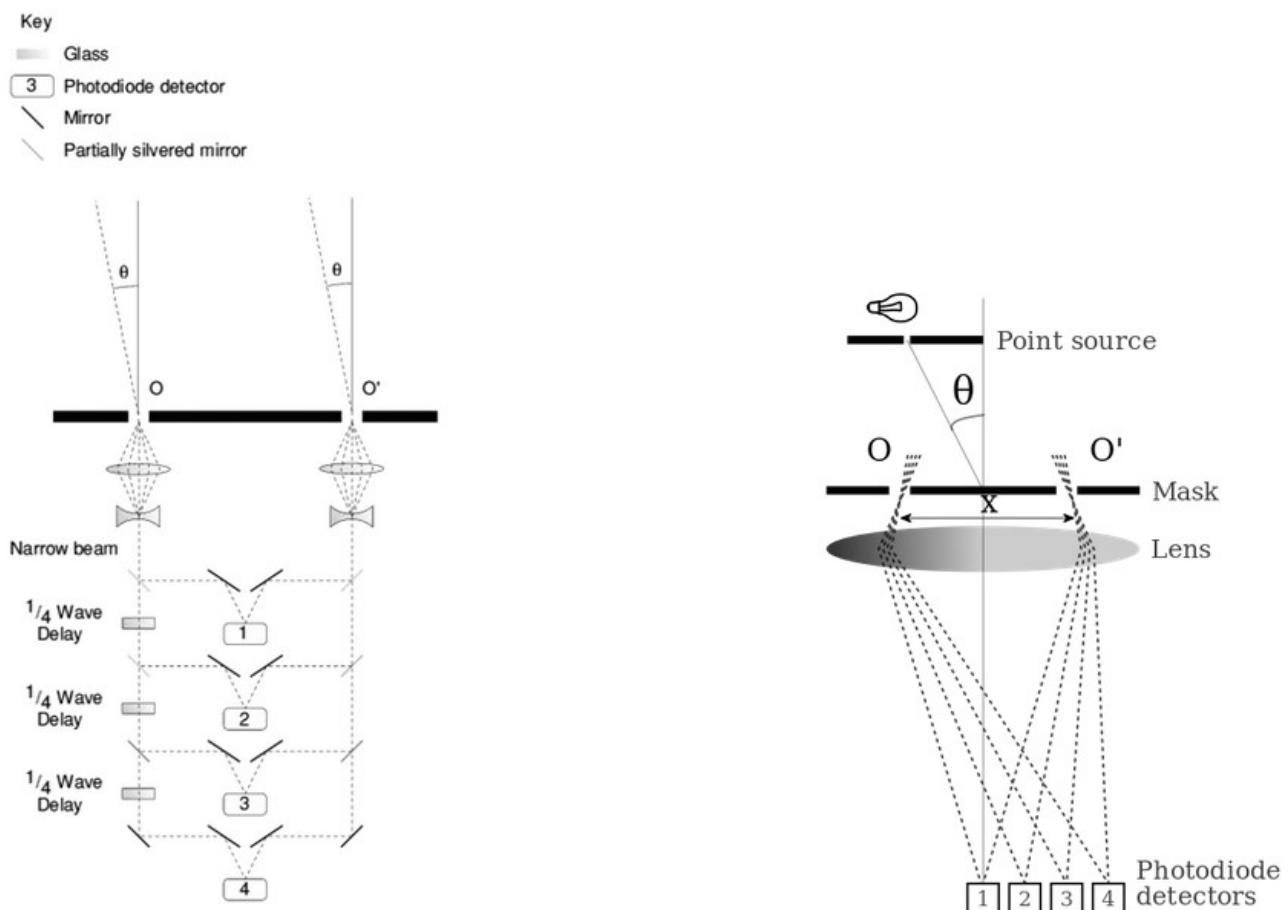


Рис. 17. Слева: двухэлементный оптический интерферометр. Справа: Интерферометр с дополнительной диафрагмой.

Простой двухэлементный интерферометр устроен следующим образом: Свет от двух телескопов(на схеме изображены как линзы) с помощью системы пластинок и зеркал направляется в 4 независимых детектора. Пластиинки обеспечивают фазовую задержку и позволяет измерить видность изображения.

В телескопе с диафрагмой используется несколько датчиков, во которые свет будет попадать, пройдя один и тот же оптический путь, что позволяет увеличить точность измерений.

123

**22. Двухлучевые интерферометры. Интерферометры Рэлея, Маха-Цендера, Майкельсона. Применение интерферометров в научных исследованиях и технике: измерение малых смещений, изучение состояния поверхности, рефрактометрия (изменение показателя преломления).**

### 22.1. Двухлучевые интерферометры.

**Определение 5.** Интерферометром называется измерительный прибор основным действием которого основано на явлении интерференции. Принцип действия интерферометра заключается в следующем: пучок электромагнитного излучения с помощью того или иного устройства пространственно разделяется на два или большее количество когерентных пучков. Каждый из пучков проходит различные оптические пути и направляется на экран, создавая интерференционную картину, по которой можно установить разность фаз интерферирующих пучков в данной точке картины.

**Определение 6.** Двулучевыми называются интерферометры использующие в своей работе два когерентных пучка, идущих разными оптическими путями.

### 22.2. Интерферометр Рэлея

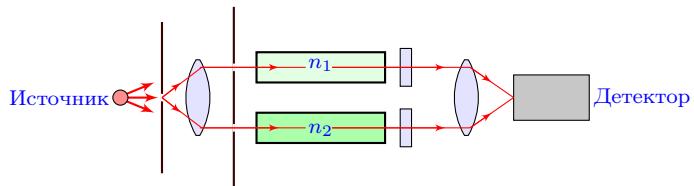


Рис. 18. Интерферометр Рэлея

Интерферометр Рэлея представлен на рис. 18. Свет от источника пропускается через линзу, создающую параллельный пучок, и апертуры, вырезающие из него два луча (плечи интерферометра). Каждый из лучей проходит сквозь собственную кювету с газом со своим показателем преломления ( $n_1$  и  $n_2$ ). На выходе схемы расположена линза, сводящая оба пучка вместе для получения интерференционных полос в её фокусе.

Для измерений в одно из плеч вносится компенсатор — например, стеклянная пластинка, с помощью поворота которой можно изменять оптическую длину пути луча в плече. Если показатель преломления в одном из плеч равен  $n_1$ , то второй неизвестный показатель преломления равен

$$n_2 = n_1 + \frac{\lambda_0}{\ell} \Delta m$$

где  $\ell$  — длина кюветы с газом,  $\lambda_0$  — длина волны источника света,  $\Delta m$  — порядок интерференции (количество пересекающихся в заданной точке интерференционных полос). При типичных параметрах установки — длине кювет в один метр, длине волны в 550 нм и порядке интерференции 1/40, — можно измерить разницу показателей преломления, равную  $10^{-8}$ . Чувствительность интерферометра определяется длиной кюветы. Её максимальная длина, как правило, определяется техническими возможностями контроля за температурой, так как тепловые флуктуации будут искажать показатели преломления газов.

### 22.3. Интерферометр Маха-Цендера

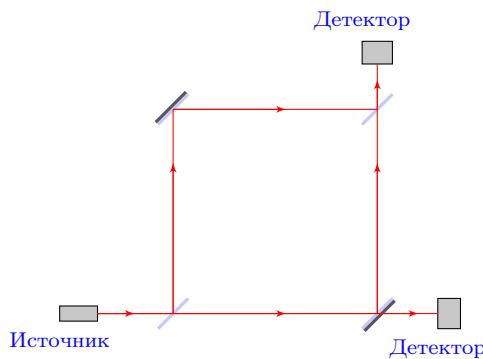


Рис. 19. Схема интерферометра Маха-Цендера

Интерферометр Маха-Цендера устроен следующим образом (Рис. (19)). На входе интерферометра находится полупрозрачное зеркало, расщепляющее световой поток на два луча. Они сводятся вместе после отражения от двух непрозрачных зеркал в четвёртом зеркале. Зеркала интерферометра образуют параллелограмм. Для проведения исследований в одно из плеч интерферометра помещают ёмкость с исследуемым газом и компенсаторы.

### 22.4. Интерферометр Майкельсона

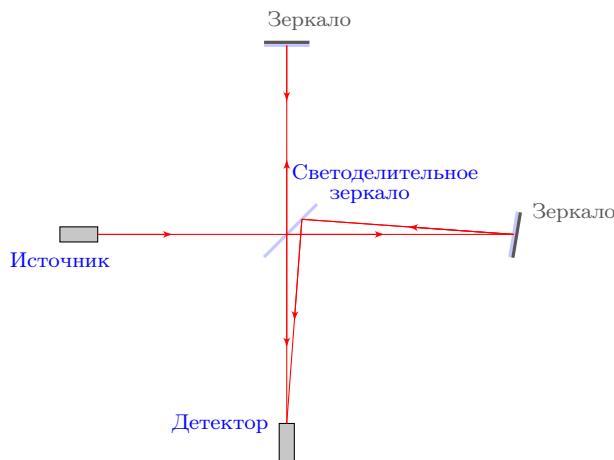


Рис. 20. Схема интерферометра Майкельсона

Интерферометр Майкельсона (рис. 20) – двулучевой интерферометр. Конструктивно состоит из светоотражающего зеркала, разделяющего входящий луч (выходящий из источника когерентного излучения) на два, которые в свою очередь, отражаются зеркалом обратно. На полупрозрачном зеркале разделённые лучи вновь направляются в одну сторону, чтобы, смешавшись на экране, образовать интерференционную картину. Анализируя её и изменения длину одного плеча на известную величину, можно по изменению вида интерференционных полос измерить длину волны, либо, наоборот, если длина волны известна, можно определить неизвестное изменение длины плеч. Радиус когерентности изучаемого источника света или другого излучения определяет максимальную разность между плечами интерферометра.

## **22.5. Применение интерферометров в научных исследованиях и технике: измерение малых смещений, изучение состояния поверхности, рефрактометрия (изменение показателя преломления).**

В силу того, что интерферометры очень чувствительны к изменению оптического хода лучей в них, при помощи интерферометров часто измеряются малые расстояния. Рефрактометрия – метод исследования веществ, основанный на определении показателя (коэффициента) преломления (рефракции) и некоторых его функций. Как видно выше при помощи интерферометров можно измерять показатели преломления различных веществ за счёт изменения разности хода различных световых пучков внутри интерферометра.

## 23. Интерферометр Майкельсона. Фурье-спектрометр. Применение интерферометров в научных исследованиях

### 23.1. Интерферометр Майкельсона

Схема интерферометра представлена на рисунке.

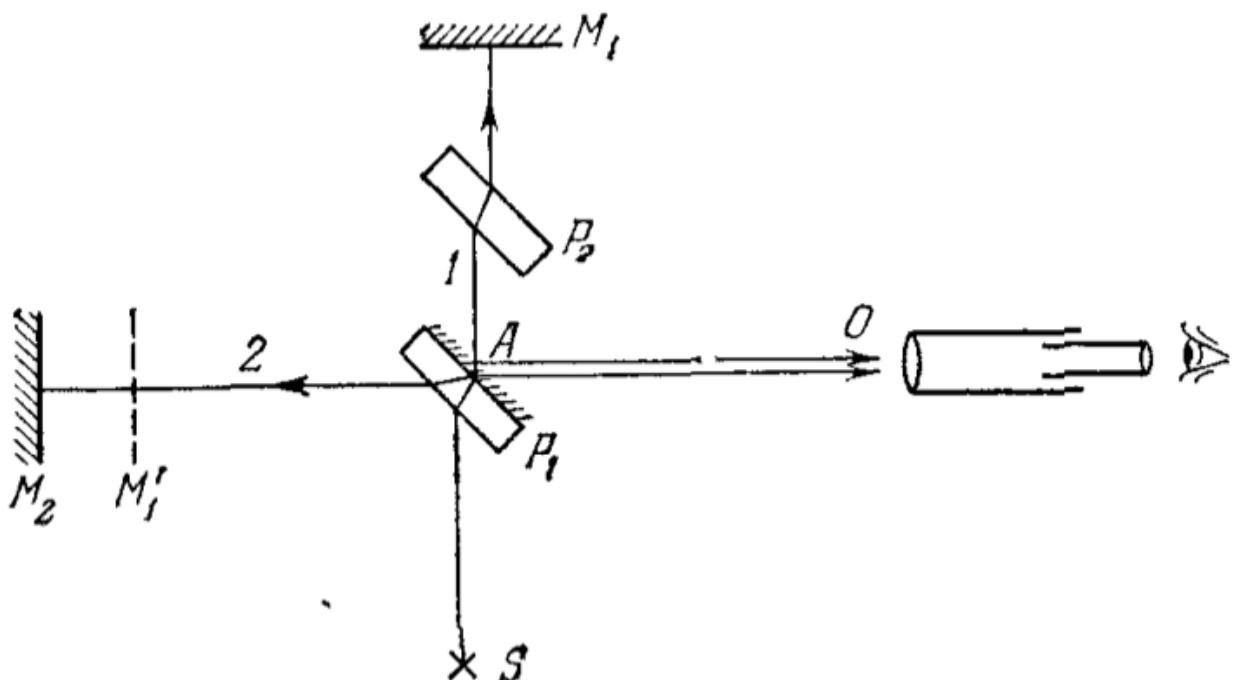


Рис. 21. Интерферометр Майкельсона

Приведем краткое описание:

Свет от некоторого протяженного источника  $S$  попадает на плоскопараллельную полупрозрачную пластинку  $P_1$ . Она разделяет попавший на нее пучок на два, первый и второй соответственно. Первый пучок, после прохождения пластины, отражается обратно **статичным** зеркалом  $M_1$ , после чего частично отражается от пластины  $P_1$  в указанном направлении. Второй же пучок, отразившись от границы пластины  $P_1$ , направляется к зеркалу  $M_2$ , после чего проходит через пластины  $P_1$  и идет совместно с пучком 1. Отметим, что второй пучок проходит пластины  $P_1$  трижды. Чтобы исключить получающуюся из-за этого разность фаз, на пути первого пучка ставят пластинку  $P_2$ , идентичную  $P_1$ .

Пусть  $M'_1$  — изображение зеркала  $M_1$  в отражающей плоскости пластины  $P_1$ . Тогда проходящая интерференция равносильна интерференции в воздушном слое между  $M'_1$  и  $M_2$ . Разность хода между лучами составляет  $\Delta = 2d \cos \varphi$ , где  $d$  — толщина слоя,  $\varphi$  — угол падения. Если слой плоскопараллелен, то мы получим интерференционные кольца с центром в точке схождения лучей, нормально отраженных от поверхностей  $M'_1$  и  $M_2$ . Этому направлению соответствует максимальная разность хода  $\Delta = 2d$ , значит максимальный порядок интерференции будет в центре. При увеличении  $d$  полосы будут перемещаться от центра; при увеличении зазора на  $d = \lambda/2$ , произойдет смещение картины на одну полосу (т.е. на место светлой полосы снова придет светлая), т.к.  $\Delta = \lambda$ . Если же мы измени углы падения, то разность хода изменится

на  $\Delta = 2d \sin \varphi \Delta\varphi$ . Полосы получаются чем шире, чем меньше  $d$ , т.е. при  $d = 0$  мы получим равномерное освещение.

Интерферометр использовался, например, при проведении [опыта Майкельсона – Морли](#), в ходе которого было установлено отсутствие движения Земли относительно эфира.

### 23.2. Фурье-спектрометр

Схема спектрометра представлена на рисунке.

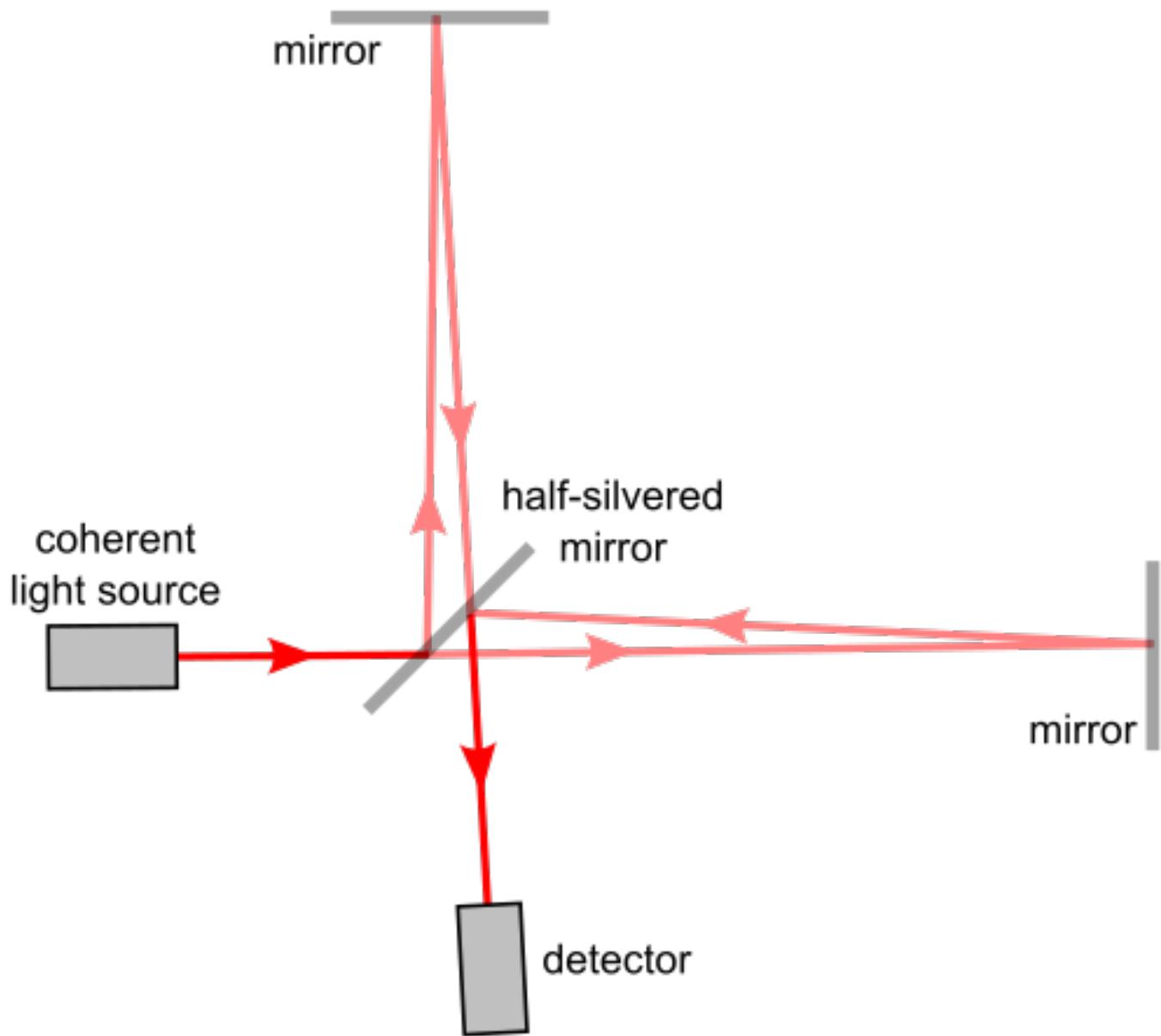


Рис. 22. Фурье=спектрометр

Приведем краткое описание:

Основой спектрометра является интерферометр Майкельсона (только он тут почему-то без второй пластины, ха-ха). Предположим, что у нас есть некоторый когерентный источник излучения с длиной волны  $\lambda$ . Когда разность хода лучей в спектрометре оказывается равной  $\lambda/2$ ,

интенсивность регистрируемого света оказывается близкой к нулю. При перемещении правого зеркала интерферометра Майкельсона разность хода лучей изменяется, изменяется и интенсивность света, регистрируемая приёмником. Очевидно, что интенсивность света максимальная, когда разность хода лучей будет кратна длине волны  $\lambda$ .

При перемещении зеркала с постоянной скоростью на выходе приёмника будет наблюдаться электрический сигнал синусоидальной формы. Притом период синусоиды зависит от длины волны источника, а амплитуда от интенсивности источника.

Теперь представим, что на входе некогерентный источник. Каждая длина волны в спектре источника света будет давать свою синусоиду на выходе приёмника. Таким образом, на выходе приёмника мы получаем сложный сигнал. При выполнении над полученным сигналом обратного преобразования Фурье получаем спектр входного электрического сигнала, который также является спектром излучения источника (то есть интенсивность излучения источника на различных длинах волн).

За счет этого можно проводить спектральные анализы для выявления состава газов или жидкостей. Каждый газ или жидкость имеет свой спектр поглощения проходящего через него излучения. Таким образом спектр на входе интерферометра будет иметь «провалы» на определённых длинах волн. После обратного преобразования Фурье получаем спектр поглощения, по которому достаточно просто определить присутствующие в анализируемом воздухе газы и их концентрацию.

### 23.3. Применение интерферометров в научных исследованиях

Фактически, интерферометр позволяет с большой точностью измерять расстояния, поэтому его можно применять для создания деталей, изготовление которых требует высокой точности (сдвиг в интерференционной картине будет виден даже при небольшом отклонении).

Интерференционные методы позволяют с высокой точностью выявлять очень малые изменения показателя преломления среды, которые влияют на изменение оптической длины пути, а значит, влечут за собой изменение интерференционной картины.

Можно также измерять и углы.

**24. Многолучевая интерференция. Интерферометр Фабри-Перо. Формула Эйри. Пластинка Люммера-Герке. Интерференционные фильтры и зеркала. Просветление оптики.**

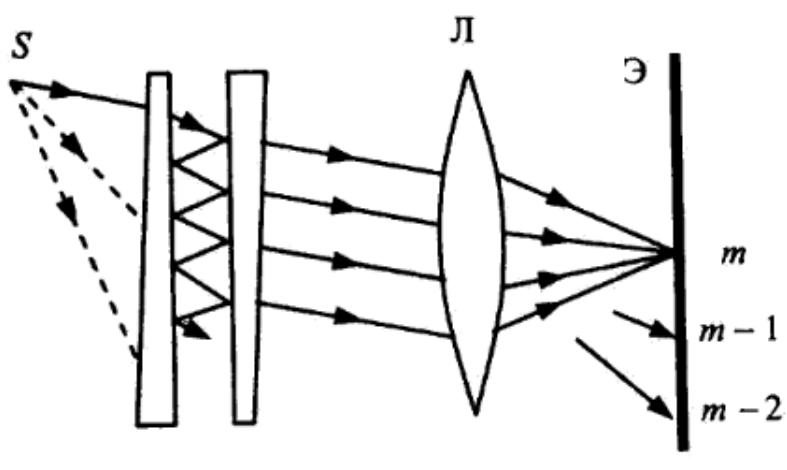


Рис. 7.3.1. Интерферометр Фабри-Перо

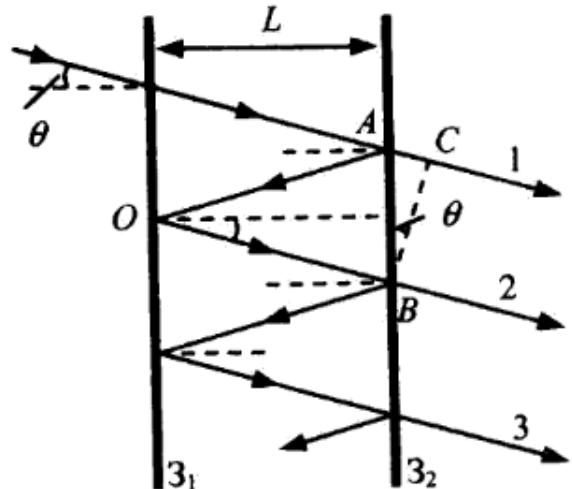


Рис. 7.3.2. К расчёту функции пропускания интерферометра Фабри-Перо

Интерферометр Фабри-Перо это два почти идеальных зеркала, которые отражают  $\sim 99\%$  а оставшееся пропускают. Луч, попадая в нее испытывает многократные отражения. Обычно после интерферометра ставят линзу, что бы собрать параллельный пучек в точку. Итак, пусть луч падает под углом  $\theta$  на интерферометр. Надо думать, что он маленький, иначе не множественных отражений просто не будет. За один проход луч неберет фазу  $\Delta = AOC - AB = \frac{2L}{\cos \theta} - 2L \tan \theta \sin \theta = 2L \cos \theta$  получается условие на максимумы будет иметь вид  $2L \cos \theta = \lambda m$ . Пусть мы отражаемся много раз. Пусть на интерферометр падает луч с амплитудой  $A$  и фазой ноль, тогда тот луч, который прошел ни разу не отразившись будет иметь  $Ad^2$  тот который 2 раза отразился перед выходом  $Ad^2 r^2 e^{i\delta}$  и так далее. Если угол тета мал, то отражений будет очень много, а  $r^2 < 1$  то просуммировав ряд получим:

$$A = Ad^2 \frac{1}{1 - r^2 e^{i\delta}}$$

$$\delta = 2Lk \cos \theta$$

$$D = \frac{(1 - r^2)^2}{1 - 2r^2 \cos \delta + r^4}$$

Д это энергетический коэффициент пропускания. Так же это называется формулой Эйри, если судить по презентациям лектора.

Посмотрим на пластинку Люммера-Герке. Что-то очень похожее на Фабри-Перо. Очевидно, что максимумы достигаются при условии  $2dn \cos \theta = \lambda m$  где  $d$  толщина, а  $n$ - оптическая плотность

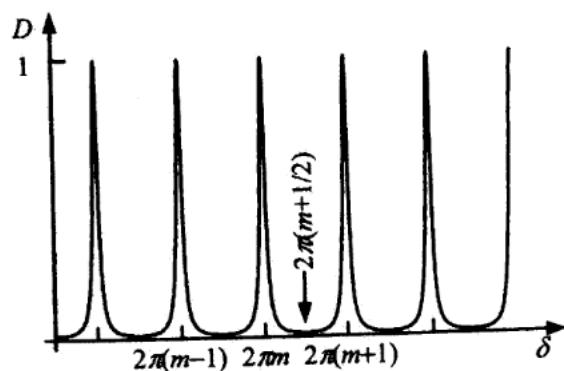


Рис. 7.3.3. Зависимость пропускания интерферометра Фабри-Перо от фазы  $\delta = (4\pi L/\lambda) \cos \theta$

### Пластинка Люммера - Герке

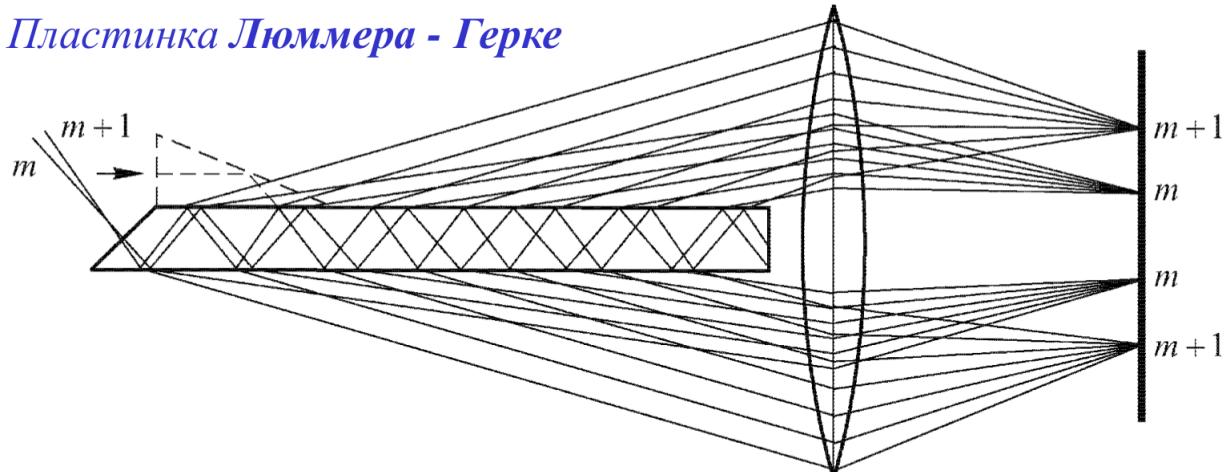
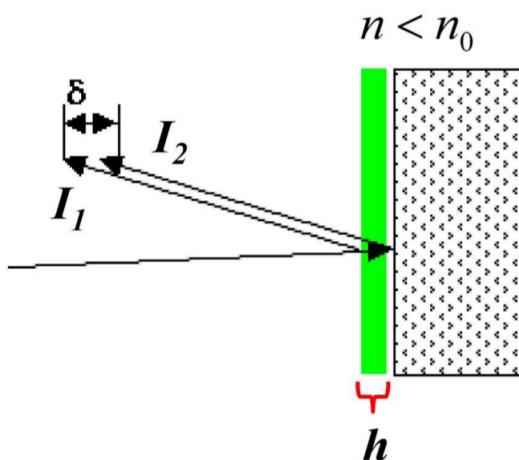


Схема пластиинки Люммера—Герке (разница в углах сильно преувеличена)

**Просветление оптики** Допустим мы недовольны коэффициентом отражения стекла. Тогда мы можем нанести тонкий слой чего-нибудь на поверхность, главное чтобы это что-нибудь имело  $n$  меньше, чем у нашего стекла. При условии  $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} 2nh = (2m + 1)$  отраженная от первого края волна и отраженная от второго погасят друг друга и коэффициент прохождения увеличится.



## 25. Явление дифракции. Принципы Гюйгенса и Гюйгенса-Френеля. Понятие о теории дифракции Кирхгофа. Дифракция Френеля и дифракция Фраунгофера (ближняя и дальняя зоны дифракции). Волновой параметр.

**Дифракция света** – уклонение от прямолинейного распространения, которое не является следствием отражения, преломления или изгиба света в среде.

**Принцип Гюйгенса** Каждая точка волнового фронта является источником сферических волн.

**Принцип Гюйгенса-Френеля** Каждая точка поверхности, окружающей источники света, является источником вторичных волн, распространяющихся во всех направлениях. Они ко-гераентны, так как возбуждаются одними и теми же первичными источниками, результат их интерференции совпадает с исходным световым полем.

### 25.1. Понятие о теории дифракции Кирхгофа.

Основная идея Гюйгенса-Френеля в теории интерференции и дифракции волн света заключается в том, что световое возмущение в некоторой точке появляется как следствие наложения (суперпозиции) вторичных волн, которые испускаются поверхностью, расположенной между рассматриваемой точкой и источником света. Кирхгоф создал математическую форму записи принципа Гюйгенса-Френеля. Он показал, что вышеназванный принцип можно считать некоторой формой интегральной теоремы. Интегральная теорема Кирхгофа дает возможность выразить амплитуду светового поля в точке наблюдения через интеграл по любой поверхности, которая охватывает точку наблюдения.

В теореме Кирхгофа решение однородного волнового уравнения в произвольной точке поля представлено через величину искомого параметра, его первую производную во всех точках произвольной замкнутой поверхности, которая окружает рассматриваемую точку.

Пусть волна будет монохроматической и скалярной:

$$U(r, t) = U_0(r, t)e^{(-i\omega t)}$$

$U_0$ -комплексная амплитуда светового поля. В вакууме часть этой волны, зависящая от координат, удовлетворяет волновому уравнению Гельмгольца:

$$(\text{grad}^2 + \kappa^2)U_0 = 0$$

$\kappa = \frac{\omega}{c}$ , так как само поле света удовлетворяет волновому уравнению.

Пусть  $V$  – объем, ограниченный произвольной замкнутой поверхностью  $S$ , точка  $A$  некоторая точка внутри рассматриваемого объема. Тогда одной из форм интегральной теоремы Кирхгофа – Гельмгольца:

$$U_0 = \frac{1}{4\pi} \oint [U_0 \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{i\kappa s}}{s} \right) - \frac{e^{i\kappa s}}{s} \frac{\partial U_0}{\partial n}] dS$$

где  $\frac{\partial}{\partial n}$  – означает дифференцирование вдоль внутренней нормали к поверхности  $S$ .  $s$  – расстояние от точки  $A$  до точки с координатами  $(x, y, z)$ .

## 25.2. Дифракция Френеля. Ближняя зона дифракции

Явления дифракции классифицируют в зависимости от расстояний источника и точки наблюдения (экрана) до препятствий, которые находятся на пути световой волны. Область дифракции, которая расположена недалеко от объекта, на котором происходит дифракция, называется ближней зоной дифракции или областью дифракции Френеля. Эта зона доходит до расстояний, с которых можно рассматривать дифракцию как фраунгоферову. В дифракционных задачах, использующих подходы Френеля нельзя пренебречь кривизной поверхности волны, которая падает на препятствие (отверстие) и волны после дифракции. При дифракции Френеля на экране получают «дифракционное изображение» препятствия. Аналитический расчет дифракционных задач Френеля составляет существенные трудности.

**Гипотеза Френеля** Для непрозрачного плоского экрана с отверстиями в качестве вспомогательной плоскости выберем неосвещенную сторону. Принцип Гюйгенса-Френеля позволяет свести задачу к определению поля на этой вспомогательной плоскости. На участках, перекрытых экраном, волновое поле 0, а на отверстиях оно определяется законами геометрической оптики.

Недостатки теории:

- 1) Непонятно, как выбирать вспомогательную плоскость для неплоских экранов.
- 2) Разрыв волнового поля на границах нарушает уравнения Максвелла.
- 3) Если найти волновое поле во всем пространстве по принципу Гюйгенса-Френеля, оно не совпадет с исходным. Например, оно точно не обратится в нуль на задней стороне экрана.
- 4) Гипотеза противоречит поперечности волн.

В простейших случаях для того, чтобы установить вид картины дифракции используют метод кольцевых зон Френеля, спираль Корню.

Особенности:

- 1) Для оси пучка света считается, что интенсивность постоянна и равна интенсивности исходящей от источника интенсивности.
- 2) Структура пучка света остается постоянной и задается формой отверстия. В пределах отверстия может располагаться множество зон Френеля.
- 2) Метод Френеля решения дифракционных задач может использоваться, когда размеры отверстий/препятствий  $d \gg \lambda$ , а значит, заметная интенсивность заметная при малых углах. Также, по гипотезе Френеля дифракционная картина не зависит от материала экрана.

## 25.3. Дифракция Фраунгофера. Дальняя зона дифракции

Если расстояние между источником и экраном велико, дифракция называется дифракцией в параллельных лучах.

Область дифракции Фраунгофера простирается от бесконечности до некоторого минимального расстояния. На практике реализация дифракции Фраунгофера выполняется, если точечный источник световых волн размещают в фокусе собирающей линзы. Получившийся при этом параллельный пучок света совершает дифракцию на препятствии. Дифракционную картину

наблюдают в фокальной плоскости линзы, которая размещается на пути света совершившего дифракцию или используют зрительную трубу, которую устанавливают на бесконечность. Картина дифракции является дифракционным изображением источника света.

Особенностями дальней зоны дифракции являются:

- 1) Интенсивность исходной световой волны много больше, чем интенсивность света на оси пучка.
- 2) Интенсивность света на оси пучка уменьшается в зависимости от расстояния до источника (она обратно пропорциональна квадрату расстояния).
- 3) Световой пучок, по мере распространения от источника, расширяется.
- 4) В границах отверстия размещается только одна малая центральная часть зоны Френеля номер один.

#### 25.4. Волновой параметр

Волновой параметр(число Френеля) Определяет вид дифракции. Определяется формулой  $p = \frac{\sqrt{\lambda z}}{b}$ , где  $\lambda$  - длина волны,  $b$  — размер отверстия,  $z$  — расстояние до плоскости (или до точки наблюдения):

- $p \ll 1$  – область геометрической оптики
- $p \sim 1$  – область дифракции Френеля
- $p \gg 1$  – область дифракции Фраунгофера

## 26. Дифракция Френеля. Простейшие дифракционные задачи. Дифракция на круглом отверстии и круглом экране, спираль Френеля. Пятно Пуассона. Распределение освещенности в дифракционной картине в поперечном направлении и вдоль оси отверстия.

**Дифракция Френеля** (*дифракция ближнего поля*) — случай дифракции при *волновом параметре*  $p \approx 1$ , где  $p = \frac{\sqrt{L\lambda}}{d}$  ( $L$  — расстояние от препятствия,  $\lambda$  — длина волны,  $d$  — размер препятствия).

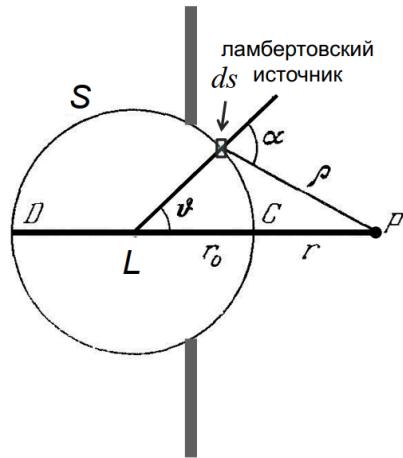
**Интеграл Френеля.** Для стационарного волнового уравнения

$$E(r, t) = A(r)e^{-i(\omega t - \varphi(r))} \quad (28)$$

определен комплексную амплитуду  $f(r) = A(r)e^{i\varphi(r)}$ , которая удовлетворяет *уравнению Гельмгольца*:

$$\delta f + k^2 f = 0, \text{ где } k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (29)$$

Рассмотрим (для простоты) сферическую поверхность  $S$  вокруг источника света  $L$ :



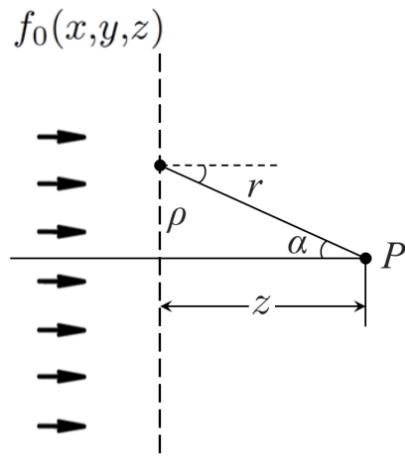
В соответствии с **принципом Гюйгенса-Френеля** элементарная площадка  $ds$  является источником вторичной сферической волны  $\sim f_s \frac{e^{ik\rho}}{\rho}$ , полная амплитуда которой пропорциональна площади  $ds$ . Таким образом, полную волну, доходящую до точки  $P$ , можно представить в виде

$$df_P = f_s \frac{e^{ik\rho}}{\rho} K(\alpha),$$

где  $K(\alpha)$  учитывает ориентацию площадки к направлению на точку  $P$ . Результирующая волна в точке  $P$  задается **интегралом Френеля**:

$$f_p = \int_S K(\alpha) f_s \frac{e^{ik\rho}}{\rho} ds, \text{ где } f_s = f_0 \frac{e^{ikr_0}}{r_0}.$$

Найдём вид зависимости  $K(\alpha)$ . Рассмотрим плоскую волну с амплитудой  $f_0$ . Результирующую волну в точке  $P$  найдем как интеграл от колышевых областей с радиусом  $\rho$  (см. рис).



$$r^2 = \rho^2 + z^2 \Rightarrow rdr = \rho d\rho$$

$$K(\alpha) = K_0 \cos \alpha = K_0 \frac{z}{r}$$

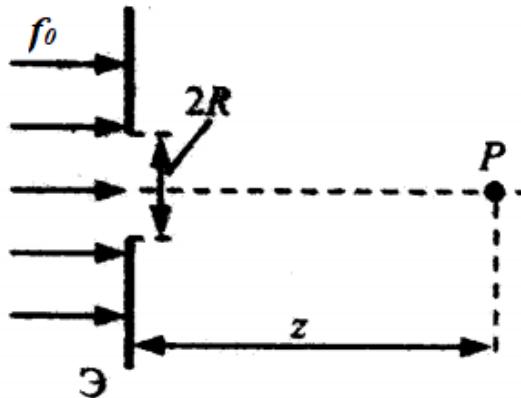
Тогда интеграл Френеля

$$f_p = \int_S K(\alpha) f_s \frac{e^{ik\rho}}{\rho} ds = f_0 K_0 \int_z^\infty \frac{e^{ikr}}{r} \frac{z}{r} 2\pi r dr = -2\pi f_0 K_0 \frac{e^{ikz}}{ik},$$

где учли затухание волны на бесконечности (для сходимости на верхнем пределе). Сравнивая с  $f_p = f_0 e^{ikz}$ , получаем

$$K_0 = \frac{1}{ik} \Rightarrow K(\alpha) = \frac{\cos \alpha}{ik}.$$

### Дифракция на круглом отверстии.

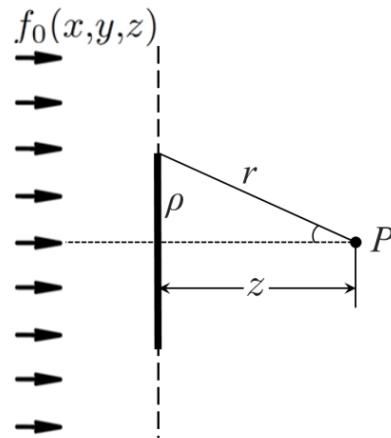


$$f_p = 2\pi f_0 K(0) \int_z^{\sqrt{z^2+R^2}} e^{ikr} dr = -f_0 (e^{ik\sqrt{z^2+R^2}} - e^{ikz})$$

Интенсивность  $I_P = |f_p|^2 = 2I_0(1 - \cos [k(\sqrt{z^2+R^2} - z)])$ . Для параксиальных пучков  $R \ll z$ :  $\sqrt{z^2+R^2} - z^2 \approx \frac{R^2}{2z}$ .

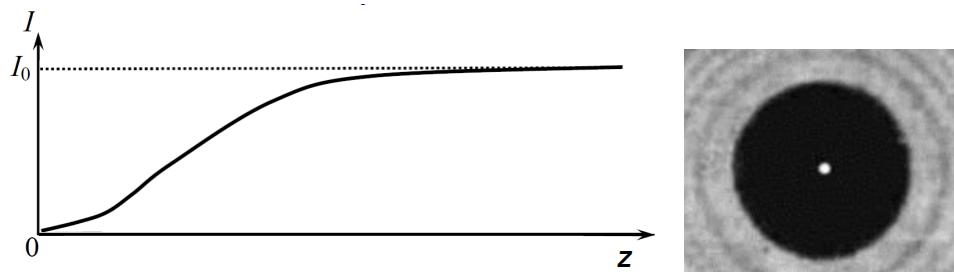
$$I_p = 4I_0 \sin^2 \left( \frac{\pi R^2}{2z\lambda} \right)$$

### Дифракция на круглом экране.



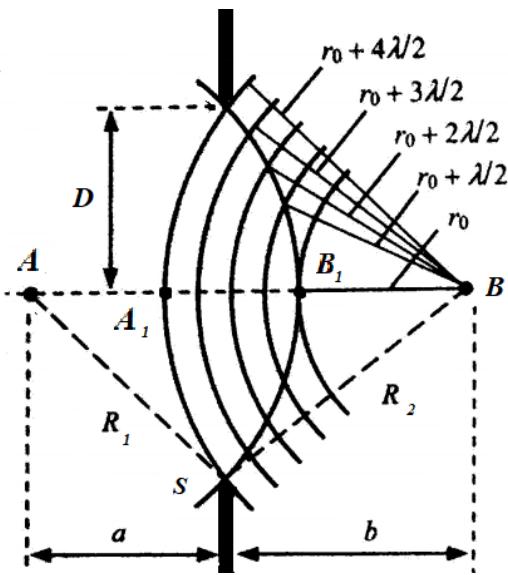
$$f_p = f_0 \frac{z}{i\lambda} \int_{\sqrt{\rho^2+r^2}}^{\infty} \frac{e^{ikr}}{r} dr = f_0 \frac{ze^{ik\sqrt{\rho^2+z^2}}}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$$

Тогда распределение интенсивности на оси  $I(z) = I_0 \frac{z^2}{\rho^2+z^2}$



При большом удалении от экрана в центре геометрической тени будет наблюдаться светлое пятно исходной интенсивности  $I_0$  — **пятно Пуассона**.

**Зоны Френеля.** Проведем из точки наблюдения  $B$  серию сферических поверхностей, первая из которых (с радиусом  $r_0$ ) касается волнового фронта  $S$ . Радиусы следующих поверхностей отличаются друг от друга на  $\frac{\lambda}{2}$ . Эти сферы разбивают волновой фронт на кольцевые области — **зоны Френеля**.



Найдём радиусы зон Френеля. Число зон, укладывающихся на открытой части волнового фронта есть

$$m = \frac{A_1 B_1}{\lambda / 2}$$

Найдём  $A_1 B_1$ :

$$R_1^2 = a^2 + D^2 \Rightarrow R_1 - a = \frac{D^2}{R_1 + a} \approx \frac{D^2}{2a}$$

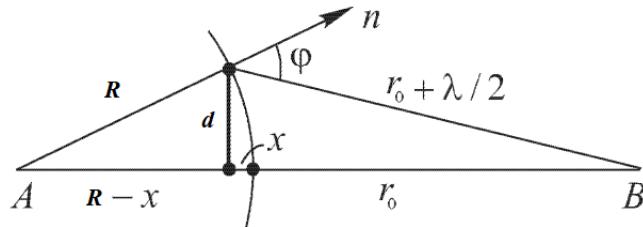
$$R_2^2 = b^2 + D^2 \Rightarrow R_2 - b = \frac{D^2}{R_2 + b} \approx \frac{D^2}{2b}$$

$$A_1 B_1 = (R_1 - a) + (R_2 - b) = \frac{D^2}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \Rightarrow m = \frac{D^2}{\lambda} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

Радиус  $m$ -ой зоны  $r_m = \sqrt{m \lambda \frac{ab}{a+b}}$

Найдём площадь зон Френеля.  $d^2 = R^2 - (R - x)^2 = (r_0 + \frac{\lambda}{2})^2 - (r_0 + x)^2 \Rightarrow x = \frac{r_0 - \lambda}{R + r_0} \frac{\lambda}{2}$   
Площадь сферического сегмента  $2\pi Rx = \frac{Rr_0}{R+r_0} \lambda$ .

Каждая из последующих зон имеет ту же площадь.



Из-за разности радиусов сферических поверхностей соседних зон Френеля на  $\frac{\lambda}{2}$  волны от них приходят в противоположных фазах, т.е. действия соседних зон ослабевают друг друга. Результирующая волна от всех зон Френеля в точке В есть

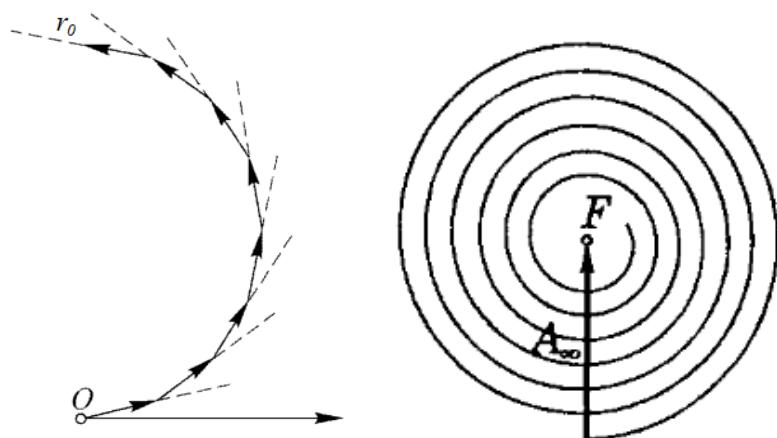
$$f_B = f_1 - f_2 + f_3 - \dots = \frac{1}{2} f_1 + (\frac{1}{2} f_1 - f_2 + \frac{1}{2} f_3) + (\frac{1}{2} f_3 - f_4 + \frac{1}{2} f_5) + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{2} f_n$$

Так как амплитуды волн из соседних зон почти равны, получаем

$$f_B = \frac{1}{2} f_1$$

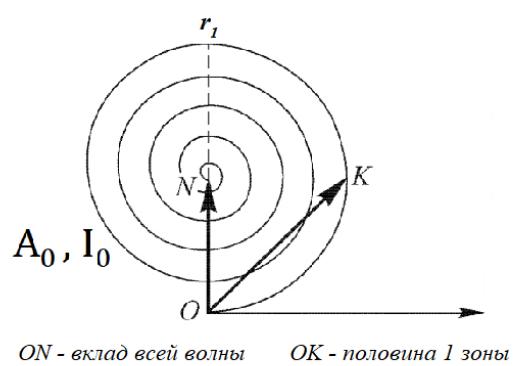
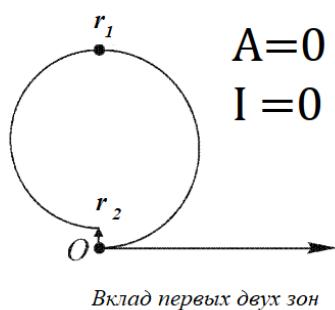
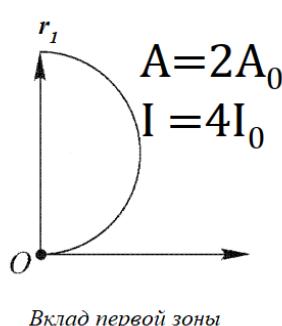
— амплитуда результирующей волны в отсутствие препятствий есть половина амплитуды волны первой зоны Френеля.

**Графический метод суммирования амплитуд** — спираль Френеля. Рассмотрим первую зону Френеля и разобьем её на  $n$  колец равной площади. Представим действие каждой подзоны в виде вектора, длина которого равна амплитуде волны, а угол поворота — фазе, и расположим векторы последовательных подзон друг за другом.



Устремим  $n$  к бесконечности и учтём вклады всех зон. Получим спираль Френеля.

Как пользоваться:



123

## 27. Дифракция Френеля на прямолинейном краю плоского экрана и щели. Зоны Шустера, спираль Корню.

Рассмотрим дифракцию на прямоугольной щели. Ограничимся рассмотрением плоских волн. Внимание на рисунок.

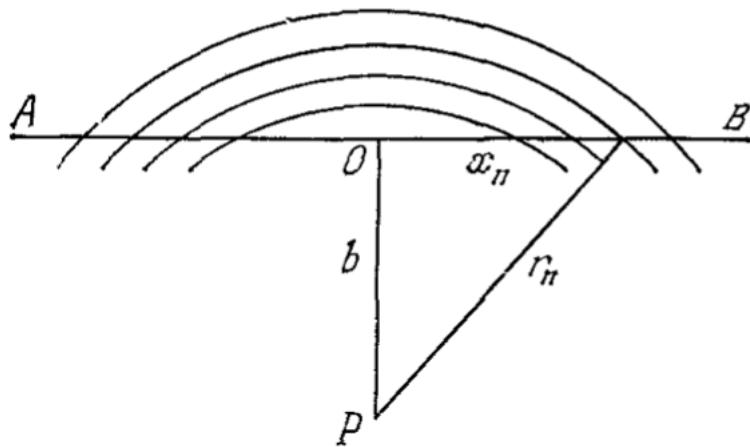


Рис. 23. Иллюстрация для зон Шустера

Проведем цилиндрические коаксиальные поверхности, ось которых проходит через точку  $P$  перпендикулярно к плоскости рисунка, радиусы которых равны  $b, b + \lambda/2, b + \lambda$  и т.д. Тогда волновой фронт разобьется на прямоугольные зоны, которые называются **зонами Шустера**. Центральную зону условимся считать сразу за две (одна слева от  $O$ , другая справа от  $O$ ). В таком случае:

$$r_n^2 = b^2 + x_n^2, \quad r_{n-1}^2 = b^2 + x_{n-1}^2 \quad \Rightarrow \quad r_n^2 - r_{n-1}^2 = x_n^2 - x_{n-1}^2$$

Приближенно мы получим:

$$r_n^2 - r_{n-1}^2 = (r_n - r_{n-1})(r_n + r_{n-1}) = 2b(\lambda/2) = b\lambda$$

Отсюда получаем рекуррентное соотношение:

$$x_n^2 - x_{n-1}^2 = b\lambda$$

С учетом того, что  $x_0 = 0$ , мы можем получить все  $x_n$ :

$$x_1 = \sqrt{b\lambda}, \quad x_2 = \sqrt{2b\lambda}, \quad \dots, \quad x_n = \sqrt{nb\lambda}$$

В таком случае ширины последовательных зон Шустера:

$$\sqrt{b\lambda}, \quad (\sqrt{2} - 1)\sqrt{b\lambda}, \quad (\sqrt{3} - \sqrt{2})\sqrt{b\lambda}$$

Согласно принципу Гюйгенса-Френеля волновое поле в точке  $P$  представляется интегралом:

$$E_p = \int \frac{1}{rr'} e^{i\Phi(R)} dF$$

Заметная интенсивность наблюдается лишь при малых углах дифракции, поэтому изменения  $rr'$  можно пренебречь. Если рассматривать относительное распределение интенсивности,

можно положить  $rr' = 1$ . В плоскости волнового фронта мы можем положить  $\Phi = \omega t - kr$  (здесь мы проведем переобозначение:  $r'$  из старой формулы теперь становится  $r$ ).

Примем фазовый фронт за плоскость  $XY$ , начало координат положим в точке  $O$ . Тогда  $r^2 = b^2 + (x^2 + y^2)$ . Тогда  $r - b = (x^2 + y^2)/(2b) + \dots$ . Члены высших порядков можно отбросить (даже если вклад порядка  $\pi$ ), т.к. они, как будет потом видно из формы полученной нами спирали, будут производить лишь незначительные смещения дифракционных максимумов и минимумов. Кроме того, высшие дифракционные максимумы и минимумы следуют друг за другом так часто, что для их реального осуществления требуются источники высокой степени монохроматичности. В противном случае они сольются в равномерный освещенный фон. Отбросим все фазовые множители, не влияющие на относительное распределение интенсивности светового поля. Тогда поле в точке  $P$  оказывается равным:

$$E_p = \int \int e^{-ik(x^2+y^2)/(2b)} dx dy$$

Пусть по оси  $Y$  поле простирается довольно далеко. Тогда по  $y$  можно интегрировать в пределах  $-\infty, \infty$ . От этого появится некоторый постоянный член, который нам не особо интересен. Интегрирование по оси  $x$  произведем от 0, а верхний предел будем считать переменным ( $s$ ). Вместо  $x$  тогда введем новую переменную  $s$  такую, что:

$$\frac{kx^2}{b} = \pi s^2$$

В таком случае получатся интегралы:

$$E_p = \int_0^s e^{-i\pi s^2/2} ds$$

$$E_p^* = \int_0^s e^{i\pi s^2/2} ds$$

Для изображения колебаний можно пользоваться любым из выражения. Для построения спирали будем пользоваться вторым выражением (в комплексной форме). В прямоугольных координатах мы в таком случае получим:

$$X(s) = \int_0^s \cos\left(\frac{\pi s^2}{2}\right) ds$$

$$Y(s) = \int_0^s \sin\left(\frac{\pi s^2}{2}\right) ds$$

Данные интегралы называются **интегралами Френеля**. Из них видно, что получаемая кривая должна быть симметрична относительно начала координат.

Чтобы найти фокусы спирали, положим  $s \rightarrow \infty$ . Тогда окажется:

$$X_F = Y_F = \frac{1}{2}, \quad X_{F'} = Y_{F'} = -\frac{1}{2}$$

Для того, чтобы пользоваться спиралью, необходимо уметь находить  $s$ . Зная ширину первой зоны Шустера  $\sqrt{\lambda b}$  мы далее получаем, что:

$$s = x \sqrt{\frac{2}{\lambda b}}$$

Для полноты картины необходимо получить графическую интерпретацию  $s$ . Из уравнения спирали в комплексной форме получаем для дифференциала дуги спирали:

$$\left| e^{i\pi s^2/2} ds \right| = |ds|$$

Отсюда следует, что параметр  $s$  определяет длину дуги спирали, отсчитываемую от начала координат  $O$ .

## 27.1. Дифракционная картина от прямолинейного края экрана

Где бы ни находилась точка  $P$ , для нее всегда оказывается открытым первый край волнового фронта. На спирали колебание представляется вектором  $\overrightarrow{M_n F}$ . Если мы теперь будем двигать точку  $M_n$  по спирали Корню, то мы получим распределение амплитуд и интенсивностей колебаний света по экрану. Спираль Корню представлена на рисунке ниже.

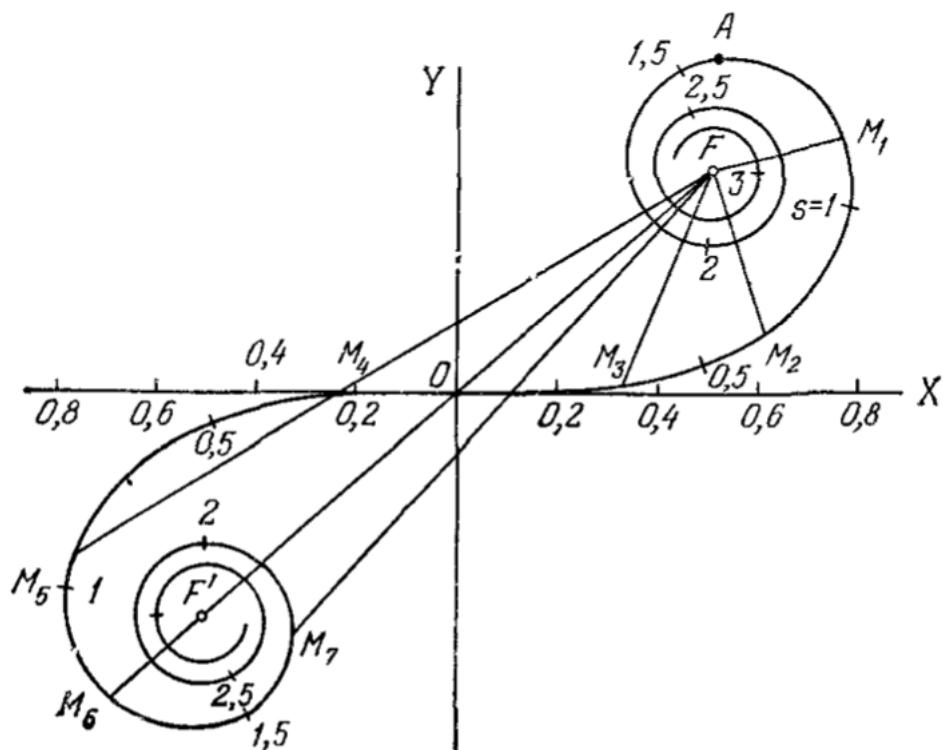


Рис. 24. Спираль Корню для дифракции на прямоугольном краю экрана.

Положим  $a_0 = |FF'|$ ,  $I_0 = a_0^2$ . Когда точка наблюдения находится на границе геометрической тени, ей соответствует колебание, которое представимо вектором  $\rightarrow OF = 1/2 \rightarrow F'F$ . Этому соответствует амплитуда  $1/2a_0$  и, соответственно, интенсивность  $1/4I_0$ . При перемещении точки в освещенную область, точка  $M_n$  будет смещаться дальше по спирали и мы получим следующий график:

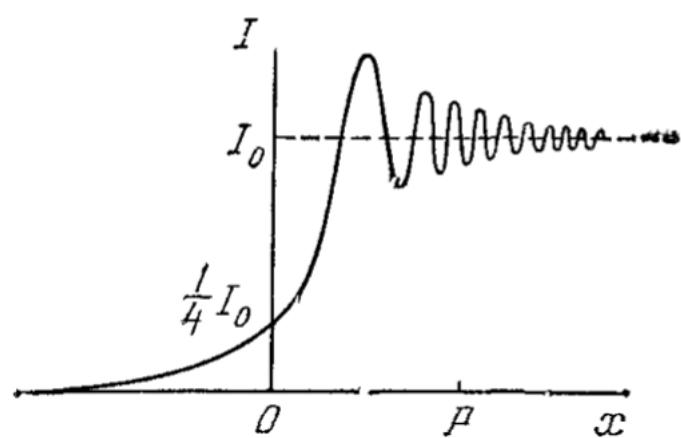


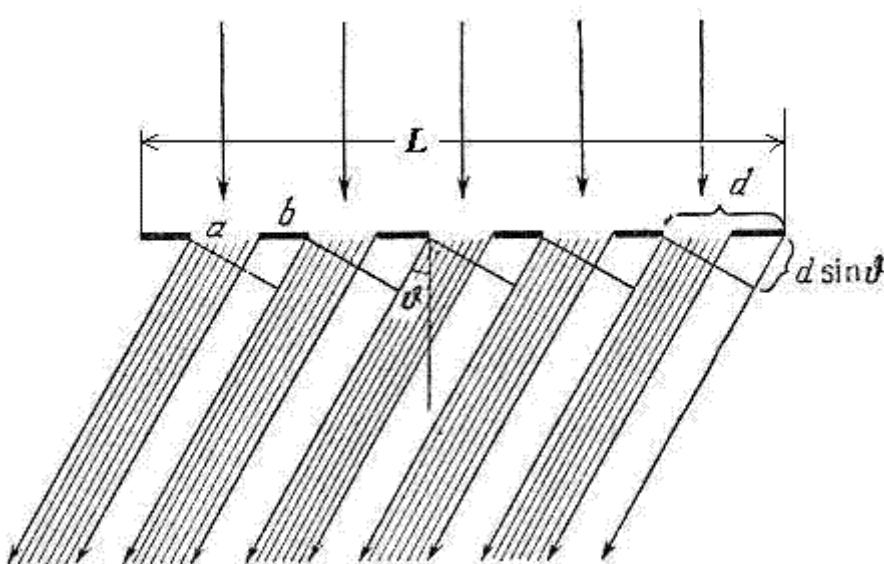
Рис. 25. Зависимость интенсивность от положения точки наблюдения при дифракции на прямолинейном краю экрана.

123

## 28. Дифракционная решетка. Амплитудные и фазовые дифракционные решетки. Дифракционная решетка как спектральный прибор. Разрешающая способность дифракционной решетки. Критерий Рэлея

### 28.1. Дифракционная решетка

**Дифракционная решетка** — спектральный прибор, предназначенный для разложения света в спектр и измерения длин волн. Ширину щели как правило обозначают  $a$ , ширину непрозрачной части экрана между щелями —  $b$ . Величина  $d = a + b$  — период решетки. Дифракционная картина наблюдается по методу Фраунгофера.



Здесь угол  $v$  — угол дифракции.

Разность хода между вторичными волнами, исходящими из соседних щелей  $d \sin v$ , а разность фаз  $\delta = kd \sin v = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin v$

Если  $E_i$  — вклад в поле, измеренное в точке наблюдения от  $i$ -той щели, то:

$$\begin{aligned} E_1 &= a \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad \alpha = \frac{kb \sin v}{v} \\ E_2 &= E_1 e^{(-i\delta)} \\ E_3 &= E_1 e^{(-2i\delta)}, \quad E_N = E_1 e^{(-(N-1)i\delta)} \end{aligned}$$

Для  $N$  щелей поле представляется суммой:

$$E = E_1 [1 + e^{(-i\delta)} + \dots + e^{(-(N-1)i\delta)}] = E_1 \frac{1 - e^{(-Ni\delta)}}{1 - e^{(-i\delta)}} = E_1 \frac{\sin N\delta/2}{\sin \delta/2} e^{-i(N-1)\delta/2}$$

Тогда интенсивность выражается через интенсивность одной щели:

$$I = I_1 \left[ \frac{\sin N\delta/2}{\sin \delta/2} \right]^2$$

Для особых случаев  $v = 0$  и  $d \sin v = m\lambda$  формулы дают следующие результаты:

$$A = A_1 N, I = I_1 N^2$$

В направлениях, определяемых этим условием, получаются главные максимумы. Интенсивность в соответствующих точках превышает исходную в  $N^2$  раз.

**Условие главных максимумов:**  $d \sin v = m\lambda$

Здесь целое число  $m$  — порядок спектра.

Однако при некоторых значениях  $m$  максимум может не возникнуть, например, если он максимум одной щели накладывается на минимум другой. При  $a = b$  каждый второй максимум не будет виден и условие главных максимумом будет совпадать с условием дифракционного минимума одной щели:  $d = a + b = 2a, 2a \sin v = 2n\lambda$

**Условие дифракционного минимума одной щели:**  $a \sin v = (m + 1/2)\lambda$

Для поиска дифракционных минимумов посмотрим, при каком условии формула интенсивности зануляется:

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{N\delta}{2}\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \neq 0 \end{cases}$$

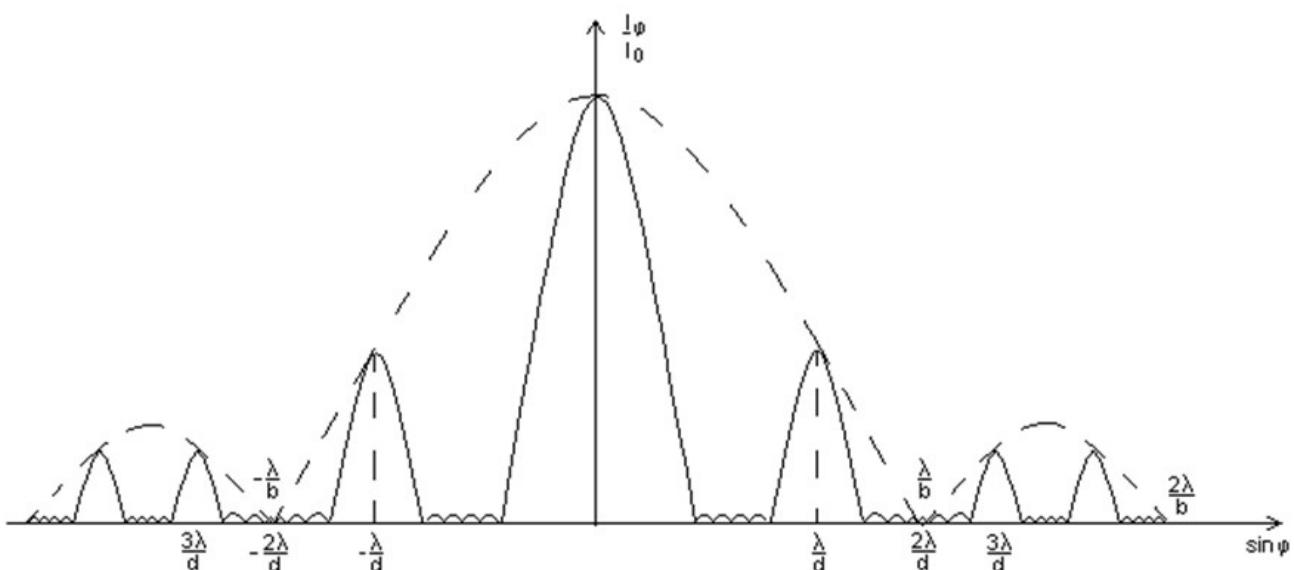
$$N\delta/2 = (Nm + p)\pi, \Leftrightarrow d \sin v = (m + \frac{p}{N})\lambda, p = 1, 2, \dots, N - 1$$

Между двумя соседними минимумами будут возникать второстепенные максимумы. Между двумя главными максимумами располагаются  $N - 1$  минимумов и  $N - 2$  второстепенных максимумов.

Найти величину  $\delta$  можно найти по приближенной формуле:

$$N\delta/2 = \frac{(Nm + p)\pi}{2} + \frac{(N(m + 1) + p)\pi}{2} \Leftrightarrow \delta/2 = (m + \frac{2p + 1}{2N})\pi$$

Дифракционная картина выглядит следующим образом:



Если волна падает под углом, разность хода между соседними пучками  $d(\sin v - \sin v_0)$ . Характер дифракционной картины сохранится, но условия минимумов и максимумов изменятся:

- Условие главных максимумов:

$$d(\sin v - \sin v_0) = m\lambda$$

- Условие дифракционного минимума одной щели:

$$d(\sin v - \sin v_0) = (m + p/N)\lambda$$

Дифракционную решетку используют для измерения длины волны.

## 28.2. Амплитудные и фазовые дифракционные решетки

**Амплитудная решетка** Решетка, вносящая периодические изменения в амплитуду волны, не влияя на ее фазу. Примером является рассмотренная выше решетка.

**Фазовая решетка** Решетка, вносящая периодические изменения в фазу волны, не влияя на ее амплитуду.

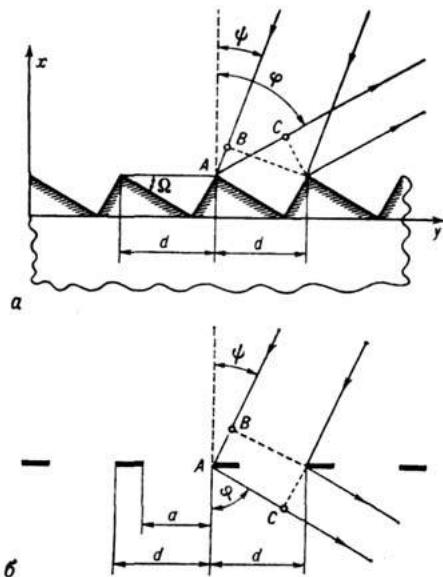
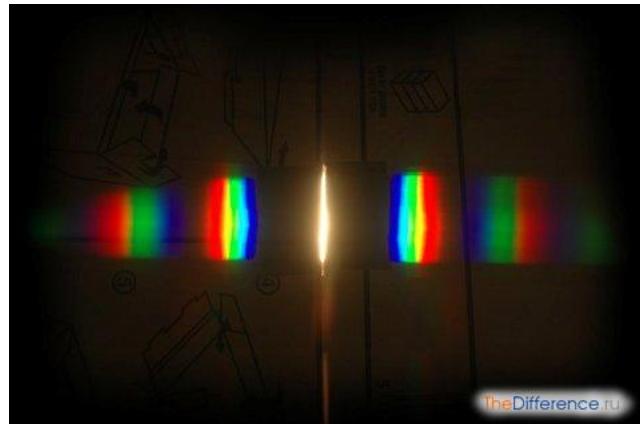


Рис. 26. а) Фазовая решетка; б) Амплитудная решетка

## 28.3. Дифракционная решетка как спектральный прибор

Положение главных максимумов ненулевого порядка зависит от длины волны, значит, всякий сложный свет при прохождении через дифракционную решетку будет раскладываться в спектр: отдельные монохроматические компоненты разделятся, отклонившись на разные углы. Дифракционные максимумы 1 порядка образуют спектр 1 порядка, затем образуется спектр 2, 3 порядка и т.д.

Спектр называется нормальным, если координата  $x$ , характеризующая положение спектральной линии, меняется линейно с длиной волны. Решетка дает нормальный спектр на малых углах.



## 28.4. Разрешающая способность дифракционной решетки

Угловая дисперсия: производная  $\frac{dv}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos v} = \frac{\sin v - \sin v_0}{\lambda \cos v}$ . Не зависит от параметров решетки.

Дисперсионная область Максимальная ширина спектрального интервала  $\Delta\lambda$ , при которой еще нет перекрытия спектров соседних порядков. Крайний случай — правый конец спектра  $m + 1$  порядка для длины волны  $\lambda$  совпадает с левым концом спектра порядка  $m$  для длины волны  $\lambda'$ . Тогда:

$$\begin{aligned} d(\sin v - \sin v_0) &= m\lambda' = (m + 1)\lambda \\ \lambda' - \lambda &= \Delta\lambda = \frac{\lambda}{m} \end{aligned}$$

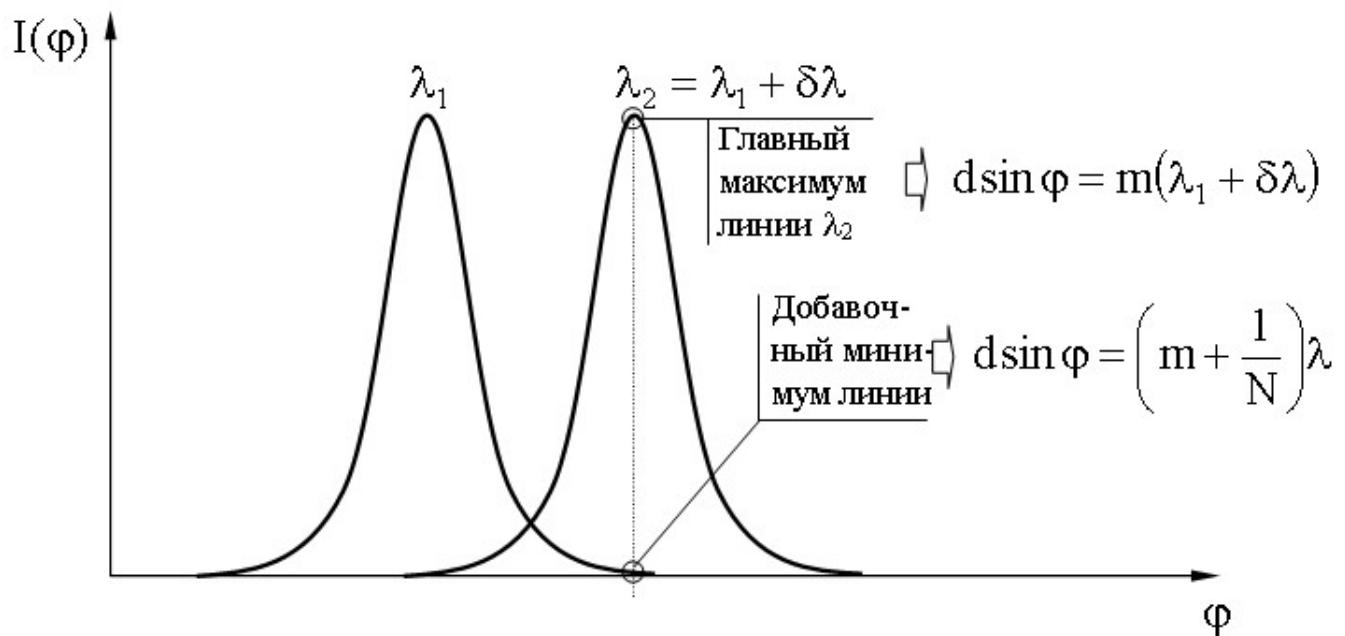
Большая дисперсия еще не говорит о том, что две спектральные линии воспринимаются при наблюдении как раздельные объекты, так как любой спектральный аппарат изображает линию как размытую полосу с собственными максимумами и минимумами (дисперсия). Чем более узкие спектральные линии, тем на меньшее расстояние надо их развести, чтобы "разрешить" их. Широкие и сильно размытые линии дадут дифракционную картину одной спектральной линии.

разрешающая способность аппарата: величина  $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}$  называется разрешающей способностью аппарата, где  $\delta\lambda$  — наименьшая разность длин волн двух спектральных линий, при которой спектральный аппарат разрешает их.

## 28.5. Критерий Рэлея

Критерий спектрального разрешения дифракционной решетки. Спектральные линии с близкими длинами волн называются разрешенными, если главный максимум дифракционной картины совпадает с первым дифракционным минимумом в том же порядке для другой длины волны.

$$\begin{aligned} d(\sin v - \sin v_0) &= m\lambda' = \left(m + \frac{1}{N}\right)\lambda \\ \delta\lambda = \frac{\lambda}{Nm} &\Rightarrow R = Nm \end{aligned}$$



Такого вида картина интенсивности позволяет явно увидеть 2 полосы вместо 1.

## 29. Спектральный прибор и его основные характеристики - аппаратная функция, линейная дисперсия, разрешающая способность и область дисперсии.

### 29.1. Дисперсионная область

Область дисперсии - максимальная ширина спектрального интервала  $\Delta\lambda$ , при которой спектры соседних порядков еще не перекрываются. Если спектры начали накладываться друг на друга, данный прибор не позволяет исследовать данный интервал  $\Delta\lambda$ .

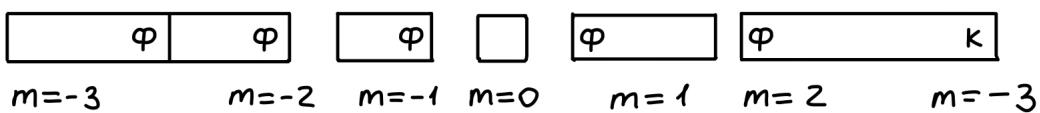


Рис. 27. Качественный вид дифракционной картины, получаемой дифракционной решеткой, на которую падает свет с конечной шириной спектра  $\Delta\lambda$ .

Найдем условие, при котором начинается перекрытие. Возьмем спектральный диапазон  $(\lambda, \lambda')$ ,  $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$ . Главный максимум  $m$ -ого порядка для границы спектра  $\lambda'$  имеет такое направление, что

$$d \sin \theta = m\lambda'.$$

Максимум  $(m+1)$ -ого порядка для границы спектра  $\lambda$  должен распространяться под тем же углом, так что

$$d \sin \theta = (m+1)\lambda.$$

$$(m+1)\lambda = m\lambda' \Rightarrow m\Delta\lambda = \lambda \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}.$$

Таким образом, спектры  $m$ -ого и  $(m+1)$ -ого порядка не перекрываются, если ширина спектрального диапазона достаточно мала:

$$\Delta\lambda \leq \frac{\lambda}{m}$$

### 29.2. Угловая дисперсия

Угловая дисперсия дифракционного прибора - это величина, определяемая равенством

$$D = \frac{d\theta}{d\lambda}$$

Она определяет угловое расстояние  $d\theta$  между спектральными линиями, отстоящими по длине волны на  $d\lambda$ :

$$\Delta\theta \approx D\Delta\lambda$$

Например, для дифракционной решетки имеем

$$\sin \theta = m \frac{\lambda}{d} \Rightarrow D = \frac{m}{d \cos \theta}$$

В частности, для малых углов дифракции

$$D = \frac{m}{d}$$

### 29.3. Линейная дисперсия

Линейная дисперсия - это расстояние между разрешаемыми линиями спектра на экране, на котором рассматривается дифракционная картина.

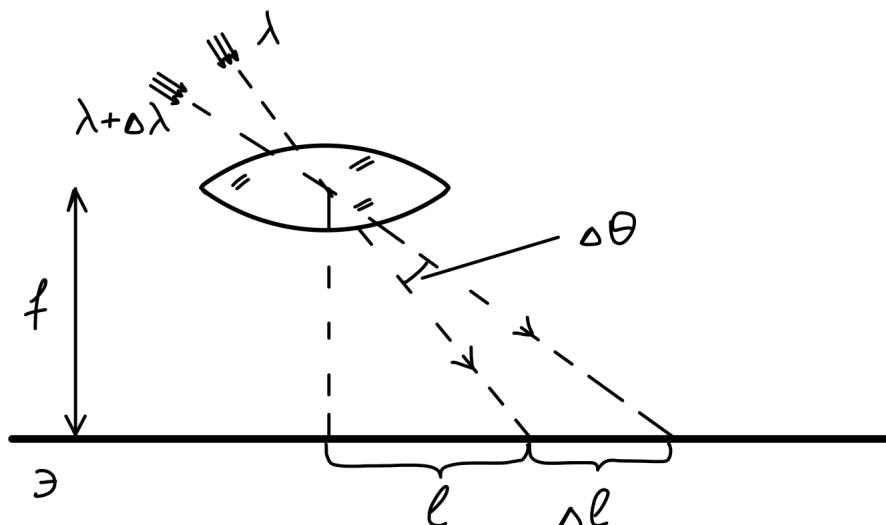


Рис. 28. Волны, отвечающие разным спектральным компонентам, отображаются с помощью линзы на экране в разные точки

Отображая спектральные компоненты  $\lambda$  и  $\Delta\lambda$  в фокальной плоскости линзы, получаем линейное расстояние  $\Delta l$  между ними на экране. Формально линейная дисперсия определяется равенством

$$D_{\text{лин}} = \frac{dl}{d\theta}$$

Поскольку  $dl = f \cdot d\theta$ , то

$$D_{\text{лин}} = f \cdot D \approx \frac{fm}{d}$$

(Здесь использовано  $D = \frac{m}{d}$  для дифракционной решетки)

## 29.4. Разрешающая способность

Разрешающая способность спектрального прибора - это величина, определяемая равенством

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}, \text{ где}$$

$\Delta\lambda$  - минимальная разность длин волн двух спектральных линий, которые воспринимаются раздельно.

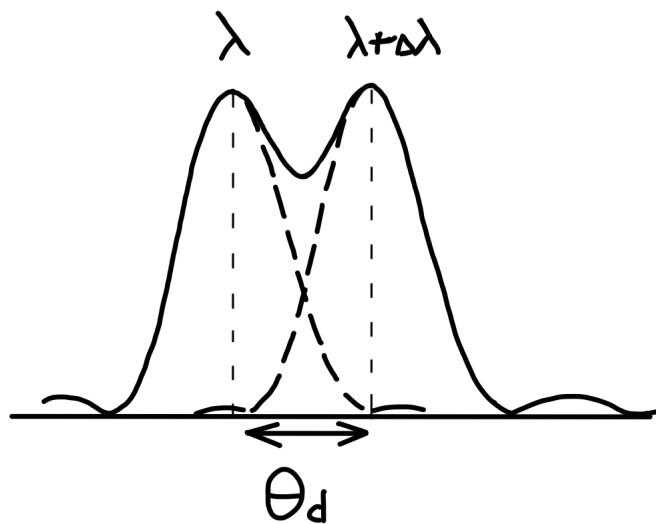


Рис. 29. Дифракционные пятна от двух компонент спектра,  $\theta_d$  – угловой радиус главного дифракционного максимума

В качестве примера найдем разрешающую способность дифракционной решетки. Используем критерий Рэлея (см. рисунок). Пусть решетка имеет  $N$  штрихов. Выберем главный максимум  $m$ -ого порядка для компоненты  $\lambda$ . Направление на первый дифракционный минимум дается равенством

$$d \sin \theta_d = \left( m + \frac{1}{N} \right) \lambda$$

Согласно критерию Рэлея компоненты считаются разрешенными, если это же направление соответствует главному дифракционному максимуму для второй компоненты  $\lambda + \Delta\lambda$ :

$$d \sin \theta_d = m(\lambda + \Delta\lambda)$$

$$\left( m + \frac{1}{N} \right) \lambda = m(\lambda + \Delta\lambda) \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{\lambda}{mN}$$

Таким образом, получим разрешающую способность дифракционной решетки:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN$$

123

### 30. Роль дифракции в приборах, формирующих изображение. Критерий Рэлея (применительно к формированию изображений). Дифракционный предел разрешения телескопа и микроскопа.

Из-за наличия во Вселенной дифракции Фраунгофера на круглом отверстии, вместо точки при фокусировке света мы получаем небольшое пятнышко, которое называется **пятном (диском) Эйри**. Его радиус можно рассчитать по следующей формуле:

$$\rho_a = 1.22 \frac{\lambda}{D} F$$

Здесь  $\lambda$  — длина волны наблюдаемого излучения,  $D$  — диаметр линзы,  $F$  — ее фокусное расстояние.

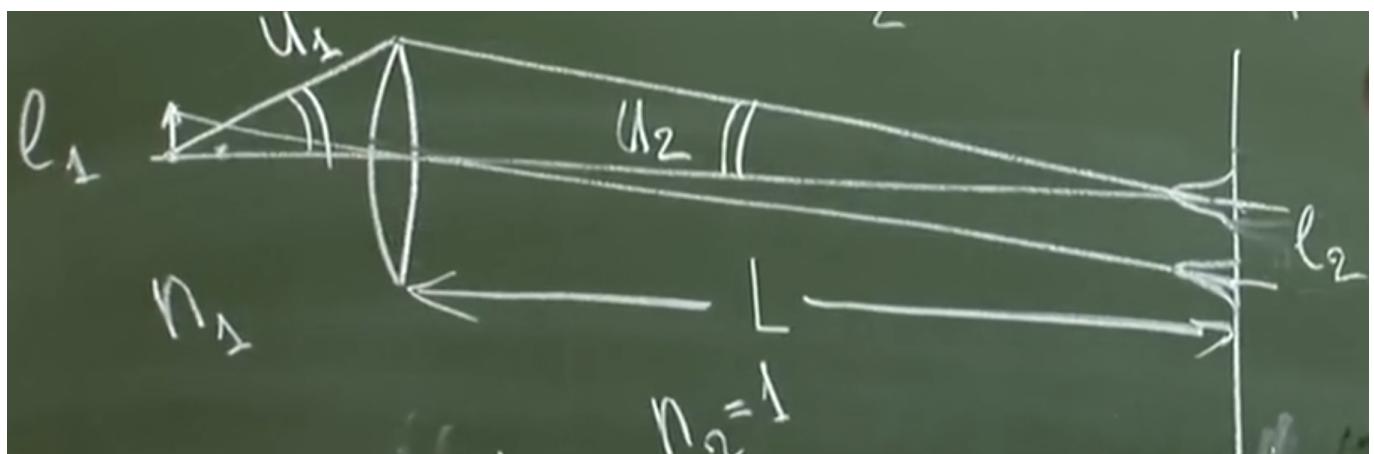
Пусть мы наблюдаем некоторый объект, который находится на главной оптической оси. Тогда и его изображение будет находиться там же. Пусть теперь у нас добавляется еще один объект, который находится от первоначального на некотором (небольшом) угловом расстоянии  $\psi$ . Пятно Эйри от этого объекта в таком случае будет находиться на таком же угловом расстоянии от исходного пятна, а линейное расстояние тогда будет равно  $l = F\psi$ .

Для того, чтобы понять, возможно ли эти два объекта разрешить, был введен так называемый **критерий Рэлея**, который говорит, что минимальное расстояние между объектами, на котором их можно разрешить, оказывается таким, что первый минимум пятна Эйри от одного объекта приходится на нулевой максимум пятна Эйри другого.

С учетом имеющейся у нас формулы для радиуса пятна Эйри мы получим:

$$\psi_{min}F = 1.22 \frac{\lambda}{D} F \Rightarrow \boxed{\psi_{min} = 1.22 \frac{\lambda}{D}}$$

Рассмотрим теперь микроскоп. Предположим, что предмет у нас лежит в какой-то среде с показателем преломления  $n_1$  (так делается, например, в диффузионных микроскопах); по другую сторону линзы у нас, соответственно, воздух, с показателем преломления  $n_{air} = 1$ . Как уже было сказано ранее, от каждой точки предмета будет получаться не точечное изображение, а пятно Эйри. Введем углы  $u_1$  и  $u_2$  (см. рисунок). Угол  $u_1$  называется апертурным углом объектива.



Как видно из рисунка, верно следующее:

$$\frac{D}{L} \approx 2u_2 \approx 2 \sin u_2$$

Согласно Аббе, идеальный с точки зрения геометрии микроскоп подчиняется следующему условию (**условие синусов Аббе**):

$$l_1 n_1 \sin u_1 = l_2 n_2 \sin u_2 \Rightarrow l_1 n \sin u_1 = l_2 \frac{D}{2L}$$

Здесь  $l_1$  и  $l_2$  есть линейные размеры предмета и изображения соответственно.

Ну и с учетом критерия Рэлея, который в данном случае удобно сформулировать как "линейный размер изображения должен получаться не меньше радиуса пятна Эйри мы получим:

$$l_{2min} = \rho_a = l_{1min} \frac{2Ln \sin u_1}{D} = 1.22 \frac{\lambda}{D} L \Rightarrow l_{1min} = 0.61 \frac{\lambda}{n \sin u_1}$$

Выражение  $n \sin u_1$  в знаменателе называют **числовой апертурой микроскопа**.

123

31. Элементы Фурье-оптики. Явление саморепродукции. Метод Рэлея. Фурье-плоскость. Теория Аббе формирования изображений. Принципы пространственной фильтрации (схема Катрона). Методы наблюдения фазовых объектов.

### 31.1. Фурье-оптика

**Фурье-оптика** - собирательное название для методов исследования оптических систем с помощью преобразования Фурье (для этого нужно отдельное название, да).

### 31.2. Метод Рэлея

Еще один эвфемизм у оптиков для словосочетания "преобразование Фурье" (см. рис 2)

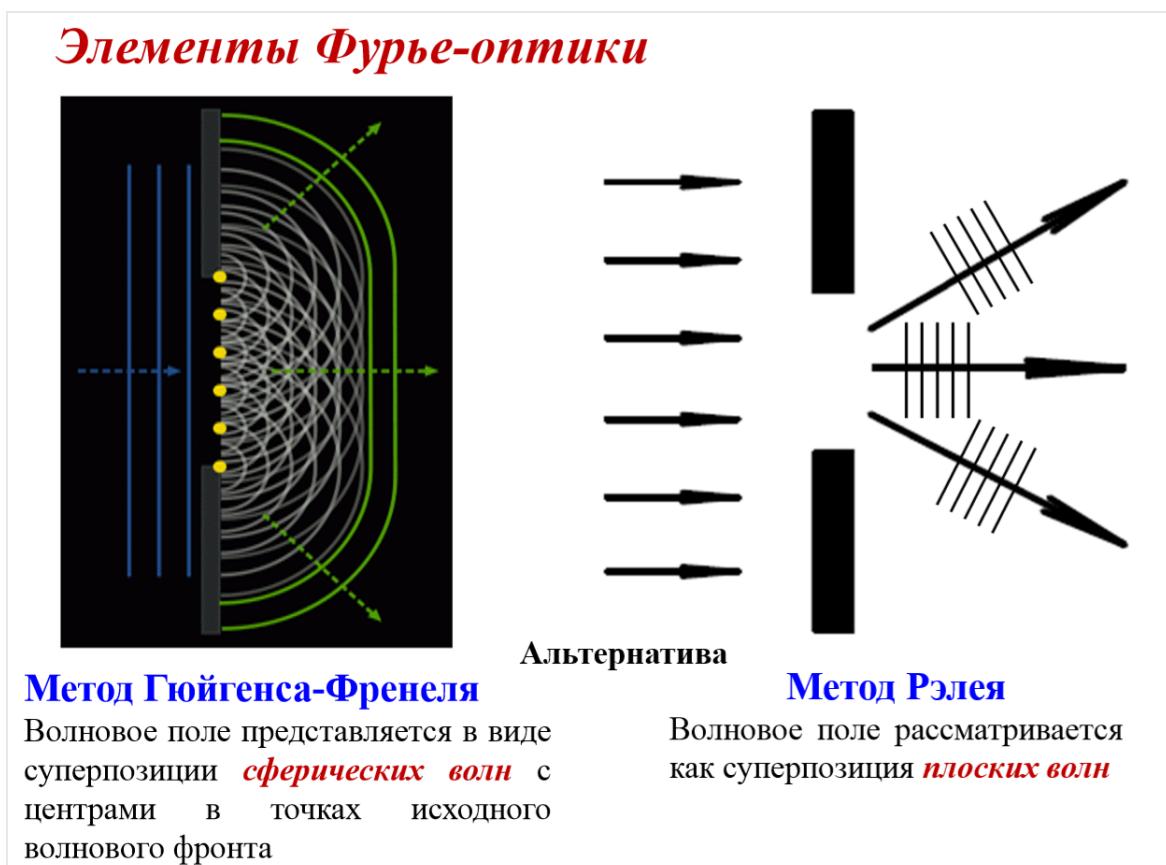


Рис. 30. Иллюстрация лектора

### 31.3. Явление саморепродукции (эффект Талбота)

Представим себе бесконечный экран, относительно которого введем координаты так, как показано на рисунке (??) Пусть отверстия на экране имеют какую-либо периодическую структуру с пространственным периодом  $d$ . Слева на экран перпендикулярно падает плоская волна с волновым вектором  $k$ . Тогда справа от экрана мы получим электрическое поле  $E(t = 0, x = 0+)$  в

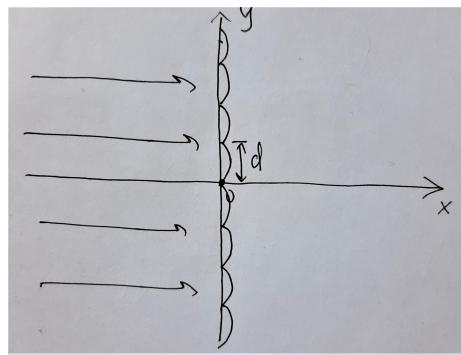


Рис. 31. Экран с какой-то периодической структурой (это не синусоида) и падающая плоская волна

виде периодической функции с периодом, равным периоду решетки  $d$ . Раз поле  $E(t = 0, x = 0+)$  периодическое, мы можем разложить его в ряд Фурье (разложить по плоским волнам, т.е. перейти к представлению Рэлея):

$$E(t = 0, x = 0+) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} C_n \exp^{in\Omega y} \quad (30)$$

$$\Omega = \frac{2\pi}{d} \quad (31)$$

В случае, если период решетки больше длины падающей волны, найдется плоская волна, распространяющаяся под таким направлением  $\theta$  к оси  $Ox$ , что:

$$\Omega = k \sin(\theta) \quad (32)$$

То есть, ее пространственная частота по оси  $y$  совпадает с частотой периодической структуры экрана (см. рис. ??).

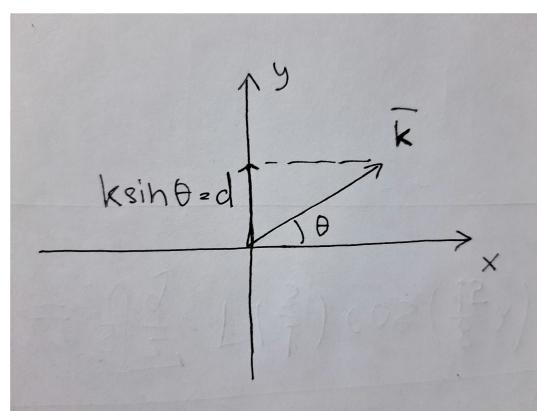


Рис. 32. Выбранная плоская волна

Теперь мы хотим устроить так, чтобы на расстоянии  $x$  от экрана рассмотренное поле  $E$  **саморепродуцировалось**. Найдем это расстояние. Выберем произвольную координату по оси  $Oy$  и потребуем, чтобы в ней поле перешло в себя. В терминах представления Рэлея это означает (см. рис. ??), что на расстоянии  $x$  от экрана набег фазы между волнами  $e_4$  и  $e_3$  должен быть равен сдвигу фаз между волнами  $e_1, e_0$  с точностью до  $2\pi$ .

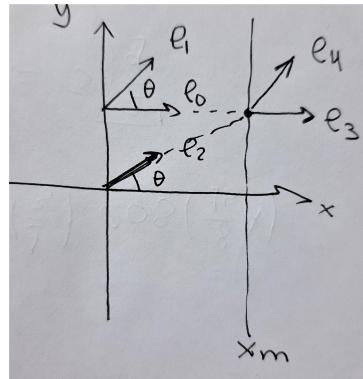


Рис. 33. Репродукция поля в терминах представления Рэлея

При этом в волну  $e_4$  переходит волна  $e_2$ . Запишем разность набега фаз и найдем  $x_m$ :

$$\omega t - ky \sin(\theta) - kx_m \cos \theta - (\omega t - kx_m) = -ky \sin(\theta) + 2\pi m \quad (33)$$

$$-kx_m \cos(\theta) + kx_m = 2\pi m \quad (34)$$

$$-kx_m \sqrt{1 - \sin^2(\theta)} + kx_m = 2\pi m \quad (35)$$

В приближении  $\sin(\theta) = \frac{\Omega}{k} = \frac{\lambda}{d} \ll 1$ :

$$-kx_m \left(1 - \frac{\lambda^2}{2d^2}\right) + kx_m = 2\pi m \quad (36)$$

$$kx_m \frac{\lambda^2}{2d^2} = 2\pi m \quad (37)$$

$$kx_m \frac{2\pi\lambda}{2kd^2} = 2\pi m \quad (38)$$

$$x_m \frac{\lambda}{d^2} = 2m \quad (39)$$

$$x_m = 2m \frac{d^2}{\lambda}$$

Красивая картиночка по этому поводу напоследок (рис. ??).

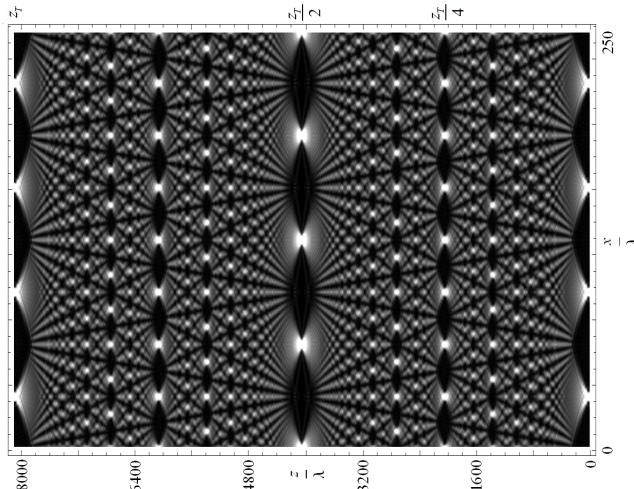


Рис. 34. Т.н. ковер Талбота

Оценка того, сколько раз поле воспроизведет само себя приводится в лекции №15 на слайде 11.

### 31.4. Фурье-плоскость

**Фурье-плоскость** - фокальная плоскость линзы. Различные плоские волны при прохождении линзы сфокусируются в разные точки в фокальной плоскости. Таким образом, опять получим преобразование Фурье (пространственное).

### 31.5. Теория Аббе формирования изображения

Изображение формируется в два этапа. Свет приходит от предмета на линзу. Линза раскладывает свет по плоским волнам в фокальной плоскости (фурье-плоскости). Получается первичное изображение предмета. Каждая точка в фокальной плоскости является источником вторичных волн. Эти волны интерферируют в плоскости экрана. Получается вторичное изображение предмета.

### 31.6. Схема Катрона

Схема Катрона представлена на рис. ???. На месте  $\Phi$  можно поставить какую-нибудь решетку. Пример от лектора: взять на месте  $P_1$  решетку с периодом  $d$ , получить в  $\Phi$  серию точек, закрыть каждую вторую и получить в  $P_2$  изображение решетки с периодом  $d/2$ .

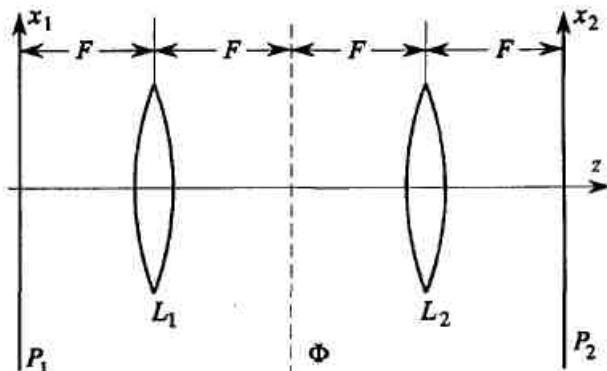


Рис. 35. Схема Катрона

### 31.7. Методы наблюдения фазовых объектов

Кириченко, параграф 8.5.1. Вроде все хорошо написано, но нет сил перепечатывать.

123

123

## 32. Зависимости показателя преломления и коэффициента поглощения от частоты. Дисперсионная формула Зельмейера. Фазовая и групповая скорости. Формула Рэлея.

### 32.1. Зависимости показателя преломления и коэффициента поглощения от частоты

На некоторых экспериментах люди стали замечать зависимость показателя преломления от длины волны(частоты) падающего света, знаменитое разделение пучка посредством призмы:

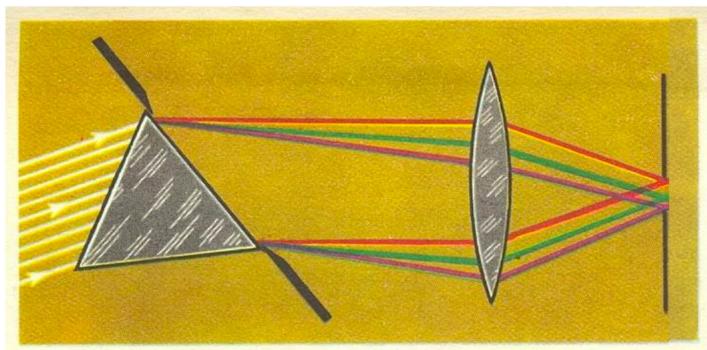


Рис. 36. Иллюстрация дисперсии

Первая формула, которая описывала это называется **формулой Коши**(нормальный ход дисперсии), она представляет ряд по обратным четным степеням длины волны:

$$n(\lambda) = a + b/\lambda^2 + c/\lambda^4 + \dots \quad (40)$$

Эта формула абсолютно эмпирическая и поэтому числовые коэффициенты должны быть найдены в ходе эксперимента.

Дальше про микроскопическую теорию: запишем показатель преломления через диэлектрическую проницаемость:  $n = \sqrt{\epsilon}$ , также поговорим о специфике задачи: атом в электрическом поле это диполь с дипольным моментом равным :  $p = r \cdot e$ . Тогда запишем уравнение движения атомного осциллятора:

$$m\ddot{r} = eE - kr - \gamma\dot{r} \quad (41)$$

где второе слагаемое определяет удерживающую силу, а третье диссипацию энергии. Немного преобразовав (заменив радиус вектор на дипольный момент, а также умножив на  $e/m$  ) получим:

$$p + \gamma\dot{p} + \omega_0^2 p = \frac{e^2}{m} E_0 e^{-i\omega t} \quad (42)$$

Где расписана плоская волна, и в ней мы считаем, что заряд локализован в окрестности начала координат, а также скорость приобретаемая при колебаниях значительно меньше скорости света, поэтому действием магнитного поля можно пренебречь. Такое уравнение решается экспоненциальным анзацем, поэтому решение имеет вид:

$$p = \frac{e^2 E_0}{m} \cdot \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - (i\gamma\omega)} e^{-i\omega t} \quad (43)$$

Дальше вспомним определение тела — это среда состоящая из диполей, а поэтому мы зная некоторые соотношения между основными электромагнитными характеристиками получить :

$$D = E + 4\pi P = E + 4\pi Np = \epsilon E \quad (44)$$

Откуда несложно выражается диэлектрическая проницаемость:

$$\epsilon = 1 + \frac{4\pi Ne^2}{m} \cdot \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega} \quad (45)$$

Вспоминаем, что показатель преломления — это корень из эпсилон, а поэтому становится понятно, что во-первых легитимно существование мнимого показателя преломления, а во-вторых, вследствие многозначности корня мы получаем много ветвей нашего показателя преломления.

Также можно без труда заметить, что имеется резонансный характер, а значит без трения и в ситуации совпадения внешней и внутренней частот будет наблюдаться резонанс.

Теперь распишем показатель преломления:  $\hat{n} = n(1 - i\kappa)$ , где  $\kappa$  — коэффициент поглощения. а дальше используя выражение (??) получим два выражения, определяющие зависимости из названия главы:

$$n^2 (1 - \kappa^2) = 1 + 4\pi \frac{e}{m} N_0 \frac{f(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2(\gamma/m)^2} \quad (46)$$

$$2n^2 \kappa = 4\pi \frac{e}{m} N_0 \frac{f(\gamma/m)\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \omega^2(\gamma/m)^2} \quad (47)$$

где первое кривая дисперсии, а вторая кривая поглощения (абсорбции):

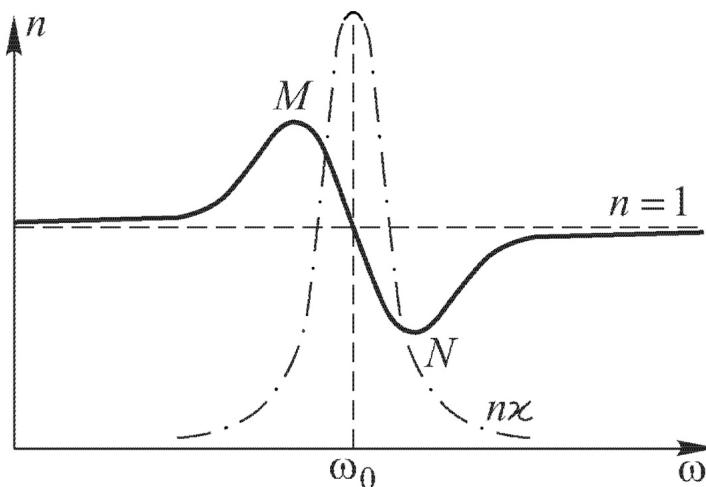


Рис. 37. Кривая дисперсии (сплошная) и абсорбции (пунктирная)

Если также учесть взаимодействие с молекулами среды (вот так  $E' = E + \frac{4\pi}{3}P$ ) получаем формулу Лоренца - Лорентца:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} = N_0 \frac{4\pi e^2 f}{3m (\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (48)$$

### 32.2. Дисперсионная формула Зельмейера

Если полос поглощения (резонансов) много, тогда мы получаем (пренебрегая затуханием) и суммируем по всем частотам переходов получаем:

$$n^2 = 1 + 4\pi N_0 \sum \frac{f_i e_i^2}{m_i} \frac{1}{(\omega_{0i}^2 - \omega^2)} \quad (49)$$

Где через  $f_i$  — обозначена сила.

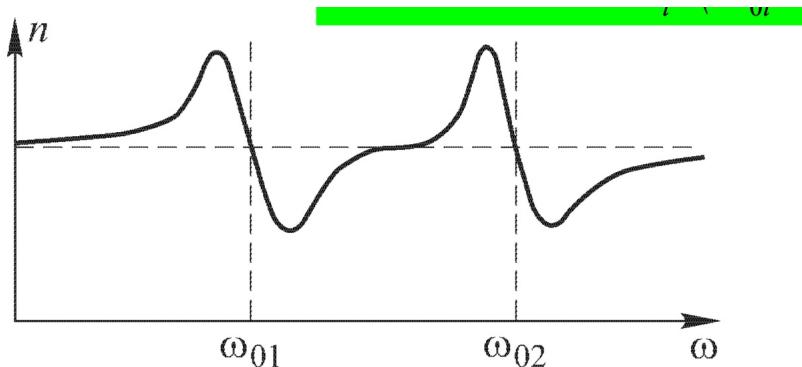


Рис. 38. Кривая дисперсии при нескольких резонансах

### 32.3. Фазовая и групповая скорость, формула Рэлея

Фазовая скорость — скорость распространения волнового фронта:  $V = \omega/k = c/n$ , в вакууме совпадает со скоростью света.

Теперь попробуем осознать, что такое групповая скорость: рассмотрим движения волнового пакета с шириной частот  $2\delta\omega \ll \omega_0$ , распишем два закона движения волн, для двух крайних частот спектра:

$$y_1 = a \sin(\omega_1 t - k_1 x) \quad \text{и} \quad y_2 = a \sin(\omega_2 t - k_2 x), \quad \omega_{1,2} = \omega_0 \pm \delta\omega \quad (50)$$

Просуммируем и преобразуем тригонометрическими формулами:

$$y = y_1 + y_2 = \underbrace{2a \cos(t\delta\omega - x\delta k)}_A \sin(\omega_0 t - k_0 x) \quad (51)$$

Выделим на импульсе точку, где  $A$  максимально. Скорость перемещения этой точки характеризует скорость распространения импульса. Таким образом, скорость импульса (группы), которую, по Рэлею, называют групповой скоростью, есть скорость перемещения амплитуды,  $a$ , следовательно энергии, переносимой движущимся импульсом.

$$A = \text{const} \Rightarrow t\delta\omega - x\delta k = \text{const} \Rightarrow \delta\omega dt - \delta k dx = 0 \quad (52)$$

Отсюда найдем, что групповая скорость равна:

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{\delta\omega}{\delta k} = \frac{d\omega}{dk} \quad (53)$$

Выразив фазовую скорость через волновой вектор и используя определение длины волны, несложно получить формулу Рэлея:

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(Vk)}{dk} = V + k \frac{dV}{dk}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (54)$$

$$u = V - \lambda \frac{dV}{d\lambda} \quad (55)$$

Можно немного преобразовать и получить:

$$u = \frac{c}{n + \omega \cdot dn/d\omega} \quad (56)$$

Если говорить о геометрическом смысле фазовой и групповой скорости нетрудно получить, что

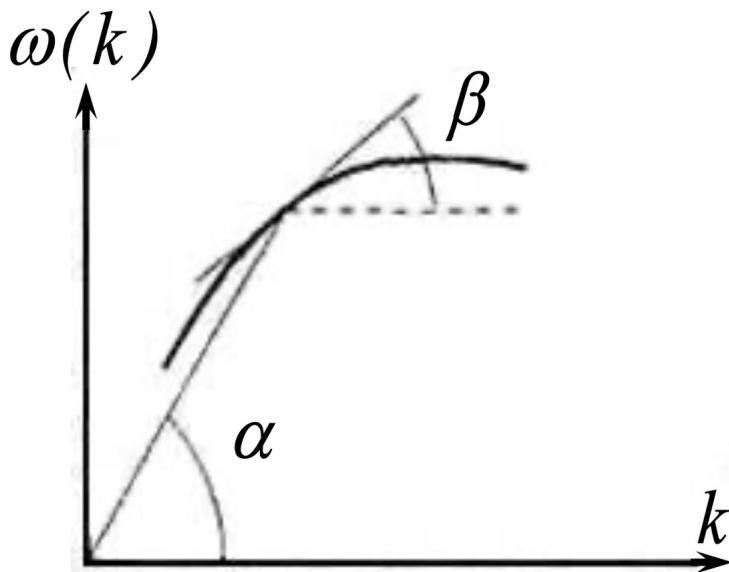


Рис. 39.  $\tan \alpha$  — фазовая скорость,  $\tan \beta$  — групповая скорость

### 33. Тепловое излучение. Излучательная и поглощательная способности вещества и их соотношение. Модель абсолютно черного тела. Закон Кирхгофа.

**Поглощение света.**

**Закон Бугера — Ламберта — Бера.** При распространении параллельного монохроматического пучка в поглощающей среде его интенсивность изменяется по закону

$$I = I_0 e^{-\alpha d},$$

где  $I_0$  — интенсивность падающего пучка,  $d$  — ширина поглощающего образца,  $\alpha$  — коэффициент поглощения.

Чтобы исключить влияние коэффициента отражения  $R$ , нужно произвести опыты с образцами разной толщины. Тогда отношение интенсивностей равно

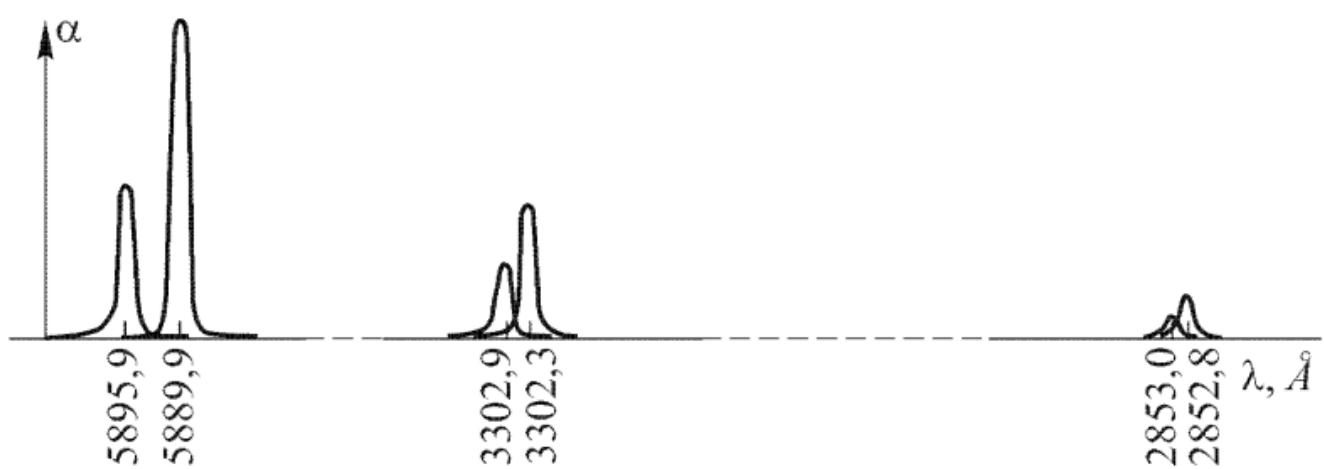
$$I_1 \setminus I_2 = e^{\alpha(d_2 - d_1)}, \text{ где } \alpha = \alpha(\omega)$$

**Закон Бера.** Поглощающая способность молекулы не зависит от влияния окружающих молекул.

$$\alpha = Ac, \quad I = I_0 e^{-Acd}, \quad A = \text{const}$$

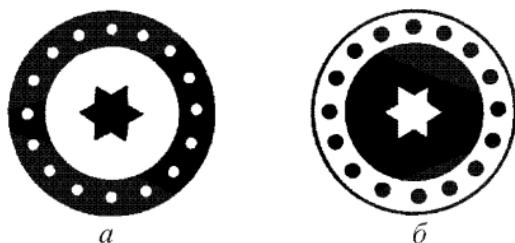
Если имеется ряд полос поглощения (например, в парах натрия), то вблизи них коэффициент преломления ведет себя следующим образом:

$$\tilde{n} = n(1 - i\chi) \Rightarrow \alpha = \frac{4\pi}{\lambda_0} n \chi.$$



**Тепловое излучение.**

**Правило Прево.** При установлении теплового равновесия в изолированной системе для каждого тела должно соблюдаться равенство между количеством испускаемой и поглощаемой им в единицу времени энергии. Если тела поглощают разные количества энергии, то и испускание должно быть различно.



- а) Тарелка имеет темный узор. б) При нагревании темные области излучают сильнее.

**Поглощательная способность.**

$A_\omega(T)$  — отношение поглощённого потока  $\Phi'$  к падающему  $\Phi$ .

$$A = \frac{d\Phi'}{d\Phi}$$

$A = 0$  — абсолютно белое тело (например, мел).  $A = 1$  — абсолютно черное тело (уголь, сажа).

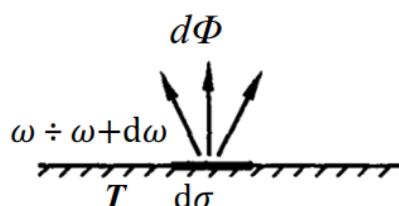
**Абсолютно черное тело.**

*Абсолютно черное тело* — физическая абстракция; тело, поглощающее всё попадающее на него электромагнитное излучение во всех диапазонах и ничего не отражающее.

Абсолютно черное тело может испускать электромагнитное излучение любой частоты и визуально изменять цвет. Его спектр определяется только его **температурой**.

**Испускание света.**

Рассмотрим тело при температуре  $T$ , испускающее с элементарной площадки  $d\sigma$  поток излучения  $d\Phi$  с частотами в диапазоне от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ .



$E_T(\omega), E_T(\lambda)$  — **испускательная способность**, зависит от температуры излучающего тела и не зависит от температуры окружающих тел.

$$d\Phi = E_T(\omega)d\omega = E_T(\lambda)d\lambda$$

$$E(\omega) = E(\lambda) \frac{\lambda^2}{2\pi c}$$

Суммарное излучение  $\Phi(T) = \int_0^\infty E_T(\omega)d\omega$

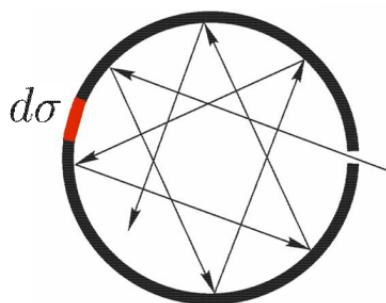
**Закон Кирхгофа.** Отношение испускательной и поглощательной способностей тела не зависит от природы тела.

$$\frac{E_{\omega,T}}{A_{\omega,T}} = \varepsilon_{\omega,T}$$

$\varepsilon_{\omega,T}$  — универсальная для всех тел функция температуры и частоты. Она есть не что иное, как испускательная способность абсолютно черного тела, так как для него

$$\frac{E_{\omega,T}}{A_{\omega,T}} = \frac{\varepsilon_{\omega,T}}{\alpha_{\omega,T}} = \varepsilon_{\omega,T}, \quad \alpha = 1.$$

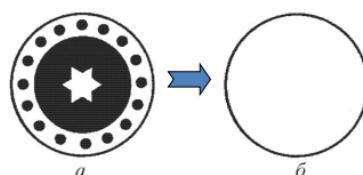
Рассмотрим пример абсолютно черного тела с площадкой  $d\sigma$  серого тела ( $0 < \alpha < 1$ ).



Такое тело вск еще не излучает. Как устанавливается динамическое равновесие при разности излучательной способности? Оказывается, площадка  $d\sigma$  частично отражает попадающий на нее свет (т.е. не поглощает его, как абсолютно черные стенки, а отражает), чем и поддерживает равенство излучаемого потока от всех элементарных площадок.

$$Ed\sigma = A\varepsilon d\sigma, \quad \varepsilon d\sigma \text{ — падающий поток,}$$

$$d\sigma[E + (1 - A)\varepsilon] = \varepsilon d\sigma, \quad \text{где член } (1 - A) \text{ возникает из-за отражения.}$$



При тепловом равновесии рисунок становится неразличим, все области излучают одинаково.

## 34. Закон Стефана-Больцмана, формула смещения Вина. Формула Рэлея-Джинса. Ограничность классической теории излучения. Элементы квантового подхода. Формула Планка.

### 34.1. Закон Стефана-Больцмана

**Закон Стефана-Больцмана** - закон, связывающий поверхностную плотность излучения абсолютно черного тела (тела, которое при любой температуре поглощает все падающее на него излучение) с его температурой.

$$P = \sigma T^4, \quad (57)$$

где  $P$  - мощность излучения единицы поверхности абсолютно черного тела,  $T$  - температура,  $\sigma$  - коэффициент пропорциональности, постоянная Стефана-Больцмана.

Эмпирически получен Стефаном, теоретически обоснован Больцманом методами статистической физики. Отметим, что закон говорит только об интегральной мощности излучения, но ничего не говорит о спектре. А вот о спектре скажет закон Рэлея-Джинса.

### 34.2. Формула Рэлея-Джинса

**Формула Рэлея-Джинса** - спектр (в данном случае закон распределения излучательной способности по частотам испускаемых волн) теплового излучения абсолютно черного тела при фиксированной температуре. При интегрировании этой формулы по всем частотам получается величина, пропорциональная полной мощности излучения. Закон получен Рэлеем и Джинсом теоретически в рамках классической теории. Записывается как:

$$B(\omega, T) = kT \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2}, \quad (58)$$

где  $B$  - яркость излучения в интервале частот от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ ,  $T$  - температура абсолютно черного тела,  $c$  - скорость света,  $k$  - постоянная Больцмана,  $\omega$  - циклическая частота световой волны, чей вклад в общее излучение мы смотрим.

### 34.3. Ограничность классической теории излучения

Попробуем, собственно, проинтегрировать формулу Рэлея-Джинса (??) по всем частотам. Интергал, очевидно, расходится:

$$P \sim \int_0^\infty B(\omega, T) d\omega = \int_0^\infty kT \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} d\omega \rightarrow \infty \quad (59)$$

Иными словами, с точки зрения классической теории полная мощность теплового излучения единицы объема абсолютно черного тела при любой температуре бесконечно велика. Данный парадокс получил название ультрафиолетовой катастрофы, так как расходимость интеграла вызвана именно видом спектра излучения при больших частотах (см. рис. ??)

### 34.4. Элементы квантового подхода, формула Планка и формула смещения Вина

На помощь по борьбе с парадоксами в классической теории снова приходят кванты.



Рис. 40. Сравнение законов излучения, о которых пойдет речь в билете

**Формула Планка** - полученный из квантово-статистических соображений закон распределения яркости теплового излучения по частотам при фиксированной температуре абсолютно чёрного тела. Записывается как:

$$B(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{\exp(\frac{\hbar\omega}{kT}) - 1}, \quad (60)$$

Обозначения те же, что и в формуле Рэлея-Джинса. При разложении экспоненты в знаменателе до первого порядка получится формула Рэлея-Джинса. То есть, при малых частотах излучения классическая теория еще работает. Это проиллюстрировано на рис. ?? (за не-классический случай отвечает кривая, подписанная 'По Вину', почему так - будет понятно ниже).

**Закон смещения Вина** устанавливает зависимость частоты волны, на которой поток излучения энергии чёрного тела достигает своего максимума, от температуры чёрного тела. Дифференцируя формулу планка, приравнивая производную к нулю и отбрасывая 'скучные' решения в нуле и на бесконечности, получим запись закона Вина в виде трансцендентного уравнения:

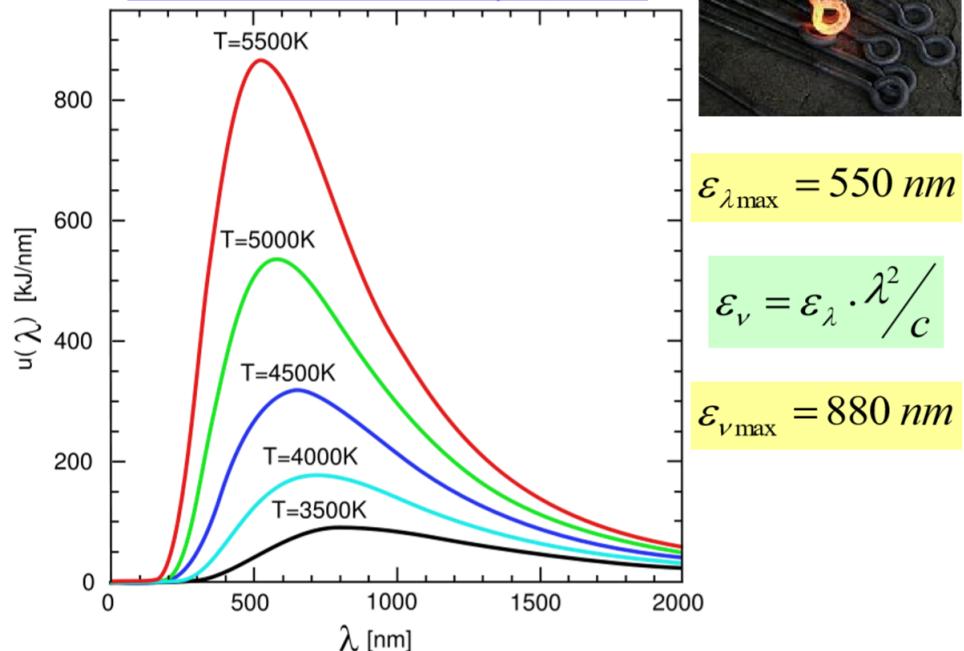
$$\frac{x \exp^x}{\exp^x - 1} = 5, \quad (61)$$

где произведена замена  $x = \frac{\hbar\omega}{kT}$ . Численно решив уравнение на  $x$  потом получим параметрическую связь  $\omega_{max}$  и  $T$ :

$$\omega_{max} = \frac{xkT}{\hbar} \quad (62)$$

То есть, с ростом температуры линейно растет частота волны, соответствующей максимуму излучения, или, что то же самое, линейно падает длина волны. Это и иллюстрируется графиком ??.

**ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ**  
Закон смещения (максимума) Вина



$$\varepsilon_{\lambda \max} = 550 \text{ nm}$$

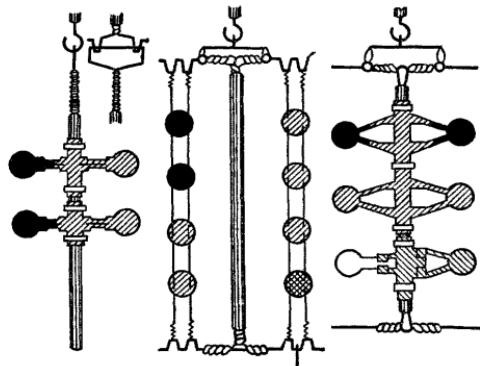
$$\varepsilon_\nu = \varepsilon_\lambda \cdot \lambda^2 / c$$

$$\varepsilon_{\nu \max} = 880 \text{ nm}$$

Рис. 41. Слайд лектора

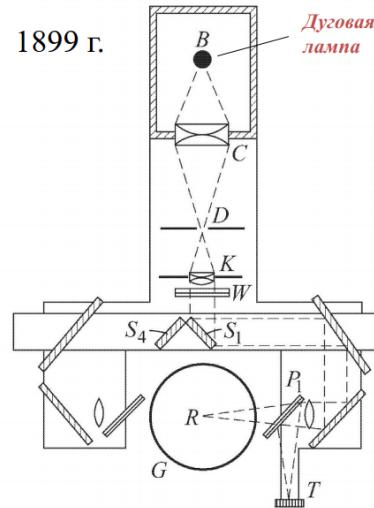
## 35. Рассеяние фотонов на свободных электронах - эффект Комптона. Давление света в рамках теории фотонов.

Опыты Лебедева по измерению давления света.



*Различные системы крепления крыльышек на легком подвесе из тонкой нити в приборе П.Н. Лебедева (крутильные весы)*

1899 г.



*Схема опытов П.Н. Лебедева по измерению давления света*

В опытах Лебедева по измерению давления света использовались крутильные весы с тонкими отражающими и поглощающими крыльышками, помещённые в вакуумную колбу. Крыльшки освещались с помощью дуговой лампы, и по углу отклонения весов рассчитывалось световое давление.

### Экспериментальные сложности и их решение.

*Конвекционные потоки.* При несколько наклонённом положении крыльышка при его нагревании излучением около него образуются возходящие потоки воздуха, действующие на него с некоторой силой, не зависящей от направления освещения. *Решение:* помещаем установку в вакуум и проводим серию опытов, освещая лепестки с разных сторон.

*Радиометрическое действие.* С освещенной стороны лепестка молекулы газа отражаются от него с большей скоростью. Это действие зависит от стороны освещения. *Решение:* сделать тонкие лепестки, чтобы температура освещенной и неосвещенной стороны были почти одинаковы.

### Давление света в рамках теории фотонов.

Энергия фотонов  $E = N\hbar\omega$ ,  $N$  — число фотонов. Импульс фотона  $p = \frac{\hbar\omega}{c}$ .

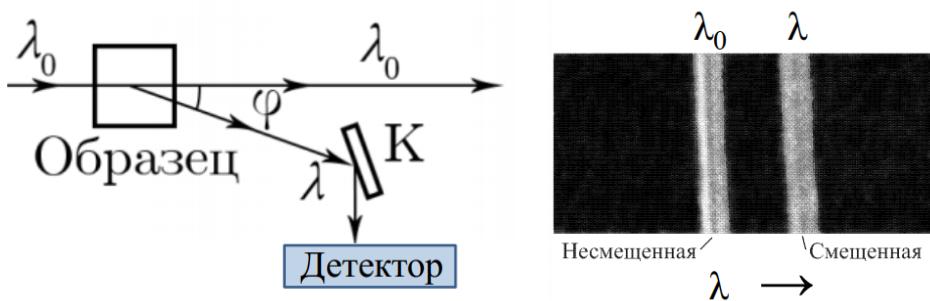
При поглощении фотона стенке сообщается импульс  $p \Rightarrow$  давление  $P = Np = \frac{E}{c}$

При отражении сообщается импульс  $2p \Rightarrow$  давление  $P = \frac{2E}{c}$

При коэффициенте отражения  $R$  давление  $P = \frac{E}{c}(1 - R + 2R) = \frac{E}{c}(1 + R)$

$$P = \frac{E}{c}(1 + R)$$

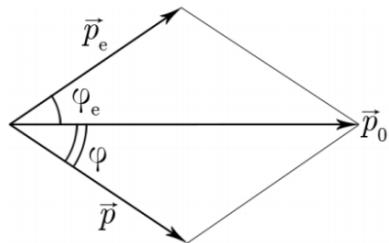
**Эффект Комптона.** Рассматривается рентгеновское излучение с длиной волны  $\lambda_0$ . При прохождении волны через *рассеивающее тело* — вещество с лёгкими атомами (уголь, парафин) — наблюдается рассеяние не только на линии рентгена  $\lambda_0$ , но и на смещённой линии  $\lambda$ .



Смещение линии выражается законом:

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \Lambda_e(1 - \cos(\varphi)),$$

где  $\Lambda_e$  — комптоновская длина волны электронов.  $\Lambda_e = 2,4263 \cdot 10^{-10} \text{ см.}$



Закон сохранения импульса:

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_e + \vec{p} \Rightarrow p_0^2 = p_e^2 - 2pp_0 \cos(\varphi) + p^2,$$

где  $\vec{p}_e$  — импульс электрона,  $\vec{p}_0$  — импульс рентгеновского фотона.

Закон сохранения энергии:

$$\hbar\omega_0 + m_0 c^2 = \hbar\omega + \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \text{ где } m_0 \text{ — масса электрона, } v \text{ — его скорость.}$$

$$\Delta\lambda = 2\pi \frac{\hbar}{m_0 c} (1 - \cos \varphi) = \Lambda_e (1 - \cos \varphi) \Rightarrow \Lambda_e = 2\pi \frac{\hbar}{m_0 c}.$$

### 36. Двухуровневая система. Взаимодействие двухуровневой системы с излучением: спонтанные и вынужденные переходы. Коэффициенты Эйнштейна

Элементарная квантовая теория теплового излучения строится на основе двухуровневой модели атома. Допускают, что у атома имеется два дискретных энергетических состояния. Одно из них называют основным, его энергию обозначим  $E_0$ . Второе состояние называется возбуждённым, его энергия  $E_1$ . Количество атомов в каждом из данных состояний ( $N_0$  и  $N_1$ ) называют населенностями уровней основного и возбужденного.

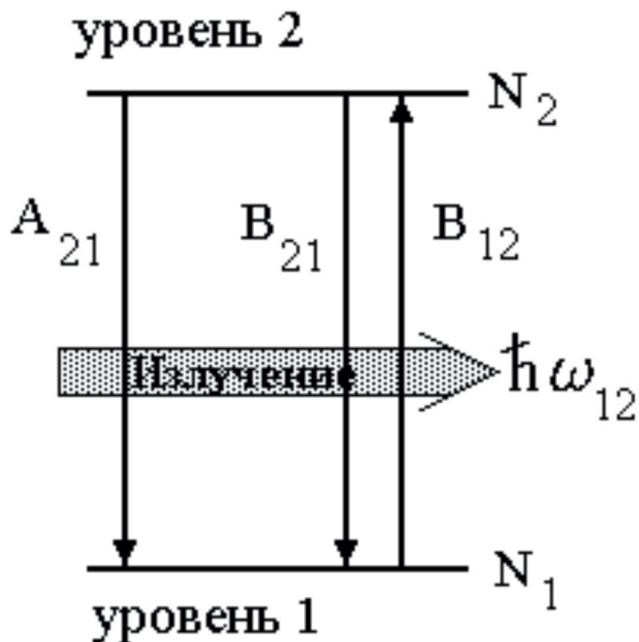


Рис. 42. Иллюстрация двухуровневой системы

Разность энергий описанных энергетических состояний равна энергии кванта света. Данный квант поглощается в том случае, если переход осуществляется с нулевого на первый уровень и излучается, если переход осуществляется с первого на уровень 0.

В соответствии с этой теорией возможно 2 вида переходов:

- 1) Спонтанное излучение. Атом первоначально находится в возбужденном состоянии  $E_1$ . В некоторый момент времени он самопроизвольно переходит в основное состояние. При этом атом испускает фотон  $\hbar\omega_{10}$ . Данный процесс характеризуют вероятностью перехода в единицу времени.
- 2) Поглощение. В данном случае. Изначально атом находится в основном состоянии и, поглощая квант света, приходит в состояние возбуждения. Вероятность данного перехода пропорциональна плотности энергии электромагнитного поля на частоте перехода и некоторому коэффициенту, который зависит от вида атома. При каждом акте поглощения количество фотонов уменьшается на один.

Вышеназванные типы переходов соответствуют классической теории, но они не могут обеспечить сохранение энергетического баланса. Если вероятность спонтанного излучения зависит

от внутренних свойств атома, то вероятность поглощения всегда определяется числом падающих фотонов имеющих определенную частоту. Значит, равновесие для всех частот не устанавливается. Для того чтобы устранить данное противоречие Эйнштейн предложил еще один тип перехода.

### 36.1. Вынужденное излучение

Атом переходит из возбужденного состояния в основное под действием внешнего электромагнитного поля. Количество фотонов увеличивается на один. При вынужденном излучении новый фотон невозможно отличить от фотона, который вызвал переход. Все фотоны, которые появились в результате вынужденного излучения, имеют одинаковую частоту, фазу, направление распространения и поляризацию. Вынужденное излучение когерентно.

Объектов с двумя энергетическими уровнями не существует в действительности. Существующие молекулы и атомы имеют существенно большее количество уровней энергии. Но, в условиях резонанса, если частота перехода между парой уровней в веществе близка к частоте света, обычно пренебрегают влиянием остальных уровней. В квантовой физике двухуровневая система играет важную роль, подобную роли гармонического осциллятора в классической физике. Данная модель используется в оптике для описания лазера и его взаимодействия веществом. Поэтому разговор о многоуровневой системе сводится к задаче об одноуровневой системе.

### 36.2. Коэффициенты Эйнштейна

$A_{10}$  — вероятность спонтанного перехода атома из состояния 1 в состояние 2,  $B_{10}$  — эйнштейновский коэффициент индуцированного излучения,  $B_{01}$  — эйнштейновский коэффициент поглощения. Тогда заселенность верхнего уровня:

$$N_1 = N_1(0) \exp(-A_{10}t)$$

$$(A_{10} + B_{10}\rho_\omega) N_1 = B_{01}\rho_\omega N_0$$

где  $\rho(\omega)$  — спектральная плотность. Соотношение выше показывает, что число переходов вверх равно числу переходов вниз, а также что с низкого энергетического уровня на более высокий энергетический уровень электрон может перейти, только поглотив фотон, то есть вынужденно. Спонтанно перейти на более высокий уровень атом не может, так как это вступает в противоречие с законом сохранения энергии. Переходы атомов с более высоких уровней на более низкие энергетические уровни возможны: вынужденные (вызванные внешними к атому причинами) и самопроизвольные (вызванные внутренними причинами).

Поговорим об излучении тел, закон Гиббса показывает распределение по энергетическим состояниям частиц в веществе, отсюда получаем:

$$N_J = g_J N_0 e^{-E_J/kT}$$

$$\frac{g_2}{g_1} e^{-(E_2-E_1)/(kT)} = \frac{B_{12}\rho_\omega}{A_{21} + B_{21}\rho_\omega}$$

Замечая, что при  $T \rightarrow \infty$  спектральная плотность неограниченно возрастает, замечаем симметричность коэффициента Эйнштейна у невырожденных уровней. Выражая спектральную плотность, получаем закон Планка:

$$\rho_\omega = \frac{A_{21}g_2}{g_1B_{12} \left\{ \exp \left( \frac{\hbar\omega_{21}}{kT} \right) - 1 \right\}} \quad E_2 - E_1 = \hbar\omega_{21}$$

Тогда получаем такие соотношения ( $g_i$  — кратность вырождения i-ого уровня):

$$g_1B_{21} = g_2B_{12}, \quad A_{21} = B_{21} \frac{\hbar\omega_{21}^3}{\pi^2 c^3} \frac{g_1}{g_2}$$

Ну и тогда число переходов из состояния 1 в 2 будет равно:

$$dn_{12} = B_{12}\rho_\omega N_1 dt = N_1\sigma_{12}(\omega) \frac{\rho_\omega c}{\hbar\omega_{12}} dt$$

где  $\sigma_{12}(\omega)$  — сечения рассеяния частиц.

123

## 37. Люминесценция: виды люминесценции. Безызлучательные переходы, квантовый выход люминесценции. Фотолюминесценция жидкостей и твердых тел. Спектральный состав люминесценции. Правило Стокса.

### 37.1. Люминесценция: виды люминесценции

**Люминесценция** - нетепловое излучение вещества (т.е. излучение сверх того, что при данной температуре излучает абсолютно черное тело). Природа явления заключается в следующем: электрону молекулы или атома неким способом сообщили избыточную энергию, он 'поднялся' на более высокий энергетический уровень, а затем 'вернулся', излучив при этом энергию в виде света.

Виды люминесценции выделяются по способам подведения энергии к излучающим системам.

**Фотолюминесценция** — свечение под действием света (видимого и УФ-диапазона). Она, в свою очередь, делится на флуоресценцию (время жизни  $10^{-9} - 10^{-6}$  с) и фосфоресценцию ( $10^{-3} - 10$  с).

**Хемилюминесценция** — свечение, использующее энергию химических реакций. Примеры: свечение фосфора при медленном окислении, попы светлячков.

**Катодолюминесценция** — вызвана облучением быстрыми электронами (катодными лучами).

**Сонолюминесценция** — люминесценция, вызванная звуком высокой частоты. Примеры: вспышка света при схлопывании кавитационных пузырьков, рожденных в воде стоячей ультразвуковой волной.

**Триболюминесценция** — люминесценция, возникающая при растирании, раздавливании или раскалывании люминофоров. Триболюминесценция вызывается электрическими разрядами, происходящими между образовавшимися наэлектризованными частями — свет разряда вызывает фотолюминесценцию люминофора. Пример: разбивание рафинированного сахара.

**Электролюминесценция** - возникает при пропускании электрического тока через определённые типы люминофоров. Примеры: лампы дневного света.

### 37.2. Безызлучательные переходы, квантовый выход люминесценции

**Безызлучательные переходы** - 'переходы' на более высокие энергетические уровни без последующего 'возвращения' и излучения фотона.

**Квантовый выход** - характеристика процесса люминесценции. Квантовый выход  $\varphi$  определяется как:

$$\varphi = N_i/N_p, \quad (63)$$

где  $N_i$  - среднее число излученных квантов,  $N_p$  - среднее число поглощенных квантов. Отличие этого показателя от единицы определяется как раз (в основном) наличием безызлучательных переходов.

Энергетический выход - так же характеристика люминесценции, только отношение средней излученной энергии к средней поглощенной энергии.

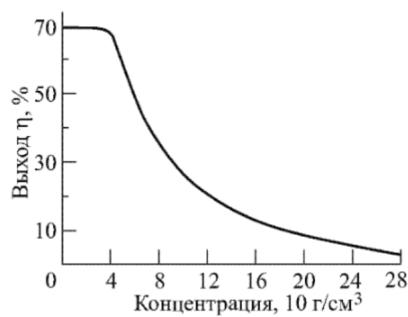


Рис. 43. Зависимость выхода люминесценции от концентрации водного раствора флуорисцеина Иллюстрация из Ландсберга

### 37.3. Фотолюминесценция жидкостей и твердых тел

В жидкостях и твердых телах фотолюминесценция часто "тушится" (легальный термин) при добавлении примесей, которые поглощают выделяющиеся кванты и перераспределяют их энергию в тепловое движение. Однако, при увеличении концентрации самого люминесцирующего вещества тоже наблюдается падение выхода флуоресценции (см. рис. ??).

### 37.4. Спектральный состав люминесценции

Спектром люминесценции называют зависимость интенсивности люминесцентного излучения от длины волны испускаемого света. Наиболее простые — атомные спектры, в которых указанная выше зависимость определяется только электронным строением атома. Спектры молекул гораздо более сложные вследствие того, что в молекуле реализуются различные деформационные и валентные колебания.

### 37.5. Правило Стокса

**Правило Стокса:** свет люминесценции имеет большую длину волны, чем поглощенный свет, вызвавший люминесценцию. (см. рис. ??). Как и все, что названо словом "правило" иногда нарушается.



Рис. 44. Схема, поясняющая правило Стокса. Максимум поглощения левее максимума испускания по шкале длин волн. Иллюстрация из Ландсберга

## 38. Рассеяние света, зависимость интенсивности рассеянного света от частоты(формула Рэлея) и угловая диаграмма рассеяния. Молекулярное рассеяние света. Рассеяние света в мелкодисперсных и мутных средах.

### 38.1. Рассеяние света

*Рассеяние света* - это преобразование света веществом, сопровождающееся изменением направления и проявляющееся как *вынужденное свечение*, обусловленное колебаниями электронов в атомах, молекулах и ионах.

В однородной среде рассеяние может возникать, только если в среде присутствуют неоднородности. Дело в том, что вторичные волны, излученные электронами, в однородной среде взаинно погашаются благодаря интерференции.

Рассеяние света в мутных средах с размерами неоднородностей  $d \leq (0,1 - 0,2)\lambda$  называется *эффектом Тиндалля*(рассеяние в мутных средах).

### 38.2. Молекулярное рассеяние

Рассеяние света наблюдается и в чистых средах без примесей. В этом случае оно называется *молекулярным рассеянием*. Возникновение неоднородностей в таких средах связано с различными флюктуациями, приводящими к отклонениям показателя преломления от постоянного значения.

Если размеры неоднородностей малы по сравнению с длиной волны, то рассеяние является *упругим*: частоты исходного и рассеянного света оказываются одинаковыми.

Рассеяние света на неоднородностях, размеры которых много меньше его длины волны называется *рэлеевским*.

Это явление объясняется взаимодействием электромагнитных волн с электронами. Как известно, мощность излучения диполя с дипольным моментом  $p(t)$  дается формулой

$$Q = \frac{2}{3c^3} \ddot{p}^2$$

### 38.3. Закон Рэлея

Пусть диэлектрическая проницаемость среды  $\epsilon_0$ , а диэлектрическая проницаемость неоднородного включения -  $\epsilon$ . Если размер неоднородности  $a$  мал по сравнению с длиной волны излучения, то электрическое поле в области включения можно считать однородным. Будем считать эту область шаром радиуса  $a$ . Ее индуцированный дипольный момент равен

$$p = \beta E, \beta = a^3 \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \epsilon_0,$$

где  $E$  - электрическое поле вне шара. Пусть поле  $E$  совершает гармонические колебания:  $E = E_0 \cos(\omega t + \varphi)$ . Тогда

$$p = \beta E_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

Усредним по периоду колебаний и после подстановки получим

$$Q = \frac{e^4 \beta^2 E_0^2}{3c^3} \omega^4$$

Учитывая равенство  $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ , получим закон Рэлея:

$$Q = \frac{(2\pi e)^4 c \beta^2 E_0^2}{3\lambda^4} \sim \frac{1}{\lambda^4}$$

Заметим, что данная зависимость выполняется, когда частоты света находятся вдали от резонансных частот вещества:  $\omega \ll \omega_0$ , и зависимость диэлектрической проницаемости от длины волны излучения слабая. Это обычно имеет место при рассеянии света в прозрачных средах (в частности, в воздухе).

Для неоднородностей размерами  $a > 0,2\lambda$  рэлеевское рассеяние переходит в дифракцию, причем закон Рэлея оказывается несправедливым. Если же размеры неоднородностей велики:  $a \gg \lambda$ , то для расчета рассеяния применимы законы геометрической оптики.

## 38.4. Сечение рассеяния

### 38.4.1. Излучение колеблющегося диполя

Пусть дипольный момент совершает колебания вдоль фиксированного направления, а его величина меняется по некоторому закону  $p = p(t)$ . Тогда электрическое и магнитное поля в волновой зоне даются формулами

$$E = \frac{\ddot{p}}{c^2 r} \sin \theta, H = \frac{\ddot{p}}{c^2 r} \sin \theta$$

Плотность потока энергии поля определяется вектором Пойнтинга:

$$S = \frac{c}{4\pi} E \times H$$

Отсюда после усреднения по периоду колебаний находим интенсивность излучения:

$$I = \overline{S} = \frac{\overline{\dot{p}^2}}{4\pi c^3 r^2} n \sin^2 \theta$$

Эта зависимость дает угловое распределение (диаграмму направленности) дипольного излучения.

123