Índice

Tema 00: Fórmulas útiles

Apuntes de : *Marion, Taylor y ejercicios resueltos*

1.1. Relaciones trigonométricas

Relaciones trigonométricas

$$\sin{(A \pm B)} = \sin A \cos B \pm \cos a \sin B.$$

$$\cos{(A \pm B)} = \cos A \cos B \pm \sin A \sin B.$$

$$\sin^2 A = 2 \sin A \cos A = \frac{2tanA}{1 + tan^2 A}.$$

$$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1.$$

$$\cos\beta \cdot \tan\alpha - \sin\beta = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta^a.$$

[a]aparece en el ejercicio 2-14 del Marion

Tema 02: Leyes de Newton

Apuntes de : *Marion*

2.1. Leyes de Newton

La combinación de conceptos de la distancia y el tiempo nos permiten hablar de términos de velocidad y aceleración. Para poder hablar de masa necesitamos conocer las Leyes de Newton.

Estudiar la mecánica clásica desde el punto de vista newtoniano no es la única manera, mas adelante veremos otro tipo de mecánica que también describe el movimiento de los cuerpos. Actualmente nos centraremos en el movimiento de una sola partícula, atendiendo a un sistema de partículas mas adelante
Las leyes de Newton son las siguientes:

1 : Todo cuerpo permanece en reposo o con movimiento uniforme a menos que se le aplique una Fuerza

2 : $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$ *; siendo* $\dot{\vec{p}} = m \cdot \dot{\vec{v}}$

3 : Si dos cuerpos interaccionan entre sí, las fuerzas que ejercen son iguales en magnitud y dirección pero con sentidos contrarios.

La primera ley nos da una idea del concepto de Fuerza nula, la cual se da cuando un cuerpo permanece en reposo o cuando está sometido a un movimiento rectilíneo uniforme. Este segundo movimiento se puede interpretar como si estuviera en reposo teniendo en cuenta el marco de referencia en el que estemos observando. Veremos esto más adelante.

La segunda ley nos dice que la Fuerza es el cambio de *momento* con respecto al tiempo (representamos ese cambio como una derivada). Como el momento se puede expresar como la masa por la velocidad, nos quedaría que la Fuerza es $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ (La forma vctorial es muy importante).

Debemos saber que la tercera ley no es una ley universal. Solo se cumple en el caso en el que las fuerzas sean centrales. Se dice que una fuerza es central cuando la fuerza entre dos partículas está dirigida a lo largo de una recta radial a un centro fijo. Por ejemplo, la ley de gravitación universal obecede la 3a ley de Newton; sin embargo, una fuerza que dependa de la velocidad del objeto no sería central por tanto en ese sistema no se cumple la 3a ley.

2.2. Marcos de Referencia

Sistema de Referencia Inercial (SRI) : Se dice que un SR es inercial si cumple las leyes de Newton. Si un cuerpo se mueve a velocidad constante o está en reposo sin aplicarle una fuerzaq el sistema de coordenadas es un SRI.

Nota: Que un cuerpo no esté sometido a ningún tipo de fuerza externa es igual a decir que cumple las leyes de newton y por tanto que se puede estudiar en un SRI. Esto es debido a que $\vec{F} = m \cdot \ddot{r}$ siendo r la posición de la partícula. Si esta se mueve a velocidad constante $\implies \ddot{r} = 0 \implies \vec{F} = 0$; siendo F en este caso una fuerza externa.

Ejemplo: Partícula se mueve a lo largo de una mesa horizontal en un medio resistente sometida a una fuerza de rozamiento $F_r = kv$

1 : Vemos las fuerzas que actúan en el sistema y la igualamos a la segunda ley de Newton:

$$F_r = -k\dot{x} = m\ddot{x};.$$

$$\ddot{x} = k'\dot{x}.$$

2 : Resolvemos esta EDO (mas conveniente pasar $\ddot{x}$ a $\dot{x}$)

$$\dot{v} = -k'v.$$

$$\ldots$$

$$v\left(t\right)=v_0e^{-k't}.$$

Teniendo en cuenta que $v(0)=0$

3 : Hemos resuelto para v, ahora toca resolver para x :

$$\dot{x}\left(t\right)=v_0e^{-k't}.$$

Si resolvermos la misma EDO, nos quedaría que:

$$x(t)=\left(1-e-k't\right)\frac{v_0}{t}.$$

2.3. Teoremas de Convservación (2.5)

Partiendo de las leyes de newton, encontraremos algunos teoremas de conservación que nos serán útiles en un futuro. Para empezar, supongamos una partícula que se mueve libremente, es decir, no está sometido a ninguna fuerza externa, por tanto $\vec{F}=0$. Como $\vec{F}=\dot{\vec{p}}$ obtenemos que $\dot{\vec{p}}=0$, es decir, el momento lineal no varía con respecto al tiempo.

1 : *Si una partícula no está sometida a fuerzas externas, el momento lineal se conservación*

El momento angular de una partícula con respecto a un origen cuya positicón r es conocida está definido como:

$$L=r\times p.$$

El torque o momento de Fuerza N con respecto al mismo origen es definido como:

$$N=r\times F.$$

donde r es la positión del vctor desde el origen del punto donde la Fuerza es aplicada. Como tenemos que $F=m\dot{v}$ el torque se puede expresar como

$$N=r\times\dot{\vec{p}}.$$

Calcularemos ahora $\dot{L}$:

$$\dot{L}=\dot{r}\times p+r\times\dot{p}.$$

Siendo $\dot{r}\times p=m\left(\dot{r}\times\dot{r}\right)=0$

Por tanto, nos queda que :

$$\boxed{\dot{L}=r\times\dot{p}=N}.$$

Obtenemos así el segundo teorema de conservación derivado de las leyes de newton:

2 : *El momento angular de una partícula que no es afectada por ninún torque se conserva en el tiempo*

Teorema de fuerzas vivas:

$$W_{12}=\int_1^2\vec{F}d\vec{r}=\int_1^2 m\cdot\frac{d\dot{\vec{v}}}{dt}d\vec{r}=\int_{t_1}^{t_2}m\cdot\frac{d\dot{\vec{v}}}{dt}\frac{d\dot{\vec{r}}}{dt}dt=\int_{t_1}^{t_2}m\cdot\vec{v}d\dot{\vec{v}}=T_2-T_1.$$

$$\boxed{W_{12}=\Delta T}.$$

La integral anterior la hemos visto desde el punto de vista del teorema de las fuerzas vivas; sin embargo, hay vces donde la energía de la partícula está dada en función de su posición, como el caso de un campo gravitatorio constante, o la energía eléctrica que sufre un electrón orbitando entorno a un grupo de protones. En este caso, consideramos la integral anterior desde otro punto de vista, llegando a la conclusión de que ambas son iguales (igualando esto obtenemos la conservación de la energía mecánica para un campo de fuerzas conservativo) Si tenemos un campo de fuerzas conservativo ; esto es que $\left(\vec{F}=\vec{\nabla}U\left(\vec{r}\right)\right);\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$

$$W_{12}=\int_1^2\vec{F}d\vec{r}=\int_1^2-\nabla Ud\vec{r}=\int_1^2-dU=-\Delta U;.$$

$$T_2-T_1=U_1-U_2;T_1+U_1=T_2+U_2;E_1=E_2.$$

Comprobamos a continuación que la energía en un campo de fuerzas conservativo es constante:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U.$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt}; \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}v^2 = \frac{1}{2}m2v\dot{\vec{v}} = mv\vec{v} = \vec{F}\vec{v}.$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \dots + \frac{\partial U}{\partial t} = \vec{\nabla} U \cdot \vec{v} = -\vec{F} \cdot \vec{v}^1$$

2.4. Centro de masas

El centro de masas es un vctor $\vec{R}$ que nos indica el vctor posición que tendría el sistema en el caso en el que fuera una partícula puntual, es decir, el centro de masas nos sirve para poder estudiar todo el sistema en un solo punto.

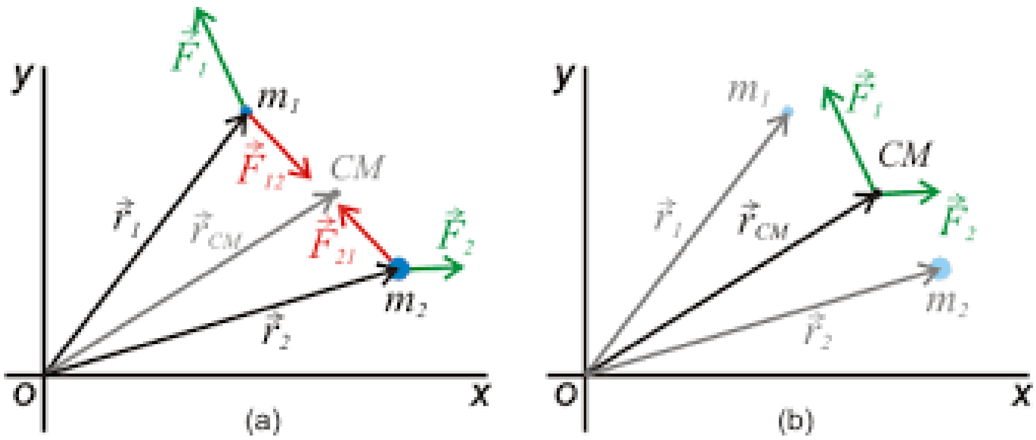

Figura 2.1: Centro de masa

Para hallar el centro de masas usamos:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{m_i \vec{r_i}}{m_i}$$

En el caso de sólidos rígidos esa sumatoria se convierte en una integral, ya que definimos un sólido rígido como un conjunto de partículas continuas (es decir, con una distancia infinitesimal entre ellas):

$$\frac{\int_V \vec{r}dm}{\int_V dm}.$$

2.4.1. Cálculo de CM de algunos sólidos

Semiesfera Maciza :

1 : debido a que es un objeto macizo utilizaremos la ecuación $\vec{R}_{CM} = \frac{\int_V \vec{r}dm}{\int_V dm}$

2 : Calculamos primero el denominador:

$$\int_V dm = \int_V pdV = pV = p\frac{1}{2}\frac{2\pi^2 R^3}{3} = \frac{p}{3}\pi^2 R^3.$$

3 : Calculamos el numerador teniendo en cuenta que el diferencial de coordenadas esféricas es : $dV = r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr$ y que, como el objeto es simétrico en el eje X e Y ya conocemos la coordenada x e y del centro de masas $(x = 0, y = 0)$.

[1] Recordemos que para que el campo sea conservativo, el potencial no puede depender de la velocidad.

Tenemos en cuenta que $z = r\cos\theta$

$$\int_V \vec{r}dm = \int_V \vec{z}pdV = p\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r^3 dr = p\pi\frac{R^4}{4}.$$

3 : Por último dividimos ambos resultados:

$$\vec{z} = \frac{3}{8}R.$$

Es decir, el centro de masas se sitúa en la coordenada $\left(0, 0, \frac{3}{8}R\right)$

2.5. Ejercicios

Según los apuntes tomados en clase, faltarían los puntos de Momento lineal y Momento angular, pero en vez de ver la teoría, trabajaremos esos conceptos con los ejercios. A continuación irá unos apuntes de los conceptos mas importantes que se sacan de los ejercicios dados por A.Cuesta y algunos resueltos por el Marion

2.5.1. Ejercicio 3

Una partícula se deja caer en presencia de un campo gravitario constante. En presencia de una fuerza de fricción viscosa proporcional al cuadrado de la velocidad $F_v = kv^2$, demostrar que la distancia que recorre cuando su velocidad incrementa desde v_0 a v_1 es:

$$h = \frac{m}{2k}\ln\left(\frac{mg - kv_0^2}{mg - kv_1^2}\right).$$

1 : Utilizamos la segunda ley de newton para igualar las fuerzas que actúan en la partícula. Teniendo en cuenta que escogemos el sentido positivo como el vctor velocidad

$$\vec{F} = m\vec{a} = mg - kv^2 = m\frac{dv}{dt}.$$

2 : Utilizando la regla de la cadena podemos expresar la derivada de la velocidad respecto al tiempo:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}.$$

3 : Sustituyendo en la expresión anterior y pasando la variable a un miembro de la ecuación:

$$v\frac{dv}{dx} + \frac{k}{m}v^2 = g.$$

4 : Dividimos toda la ecuación por v y agrupamos los términos:

$$\frac{dv}{dx} + \frac{k}{m}v = \frac{g}{v}.$$

$$dv = (\frac{g}{v} - \frac{k}{m}v)dx.$$

$$vdv = \left(g - \frac{k}{m}v^2\right)dx.$$

$$\int \frac{v}{g - \frac{k}{m}v^2}dv = \int dx.$$

4 : Integramos a ambos lados:

$$-\frac{1}{\frac{2k}{m}}ln\left(g - \frac{k}{m}v^2\right) = x + c.$$

5 : Tenemos que calcular c. Para ello usamos la condición de contorno $v\,(x=0)=v_0$. Sustituimos:

$$-\frac{1}{\frac{2k}{m}}\ln\left(g-\frac{k}{m}v_0^2\right)=c..$$

6 : Entonces cuando $x=h$ la velocidad vale v_1 :

$$h=\frac{m}{2k}ln\left(\frac{mg-k!v_0^2}{mg-kv_1^2}\right).$$