Brevet de technicien supérieur septembre 2020 - groupement A

Spécialités :
— Électrotechnique
— Systèmes phoniques
— Techniques physiques pour l'industrie et le laboratoire

Exercice 1 **10 points**

Afin d'assurer une meilleure protection contre les surtensions du réseau et de réduire les harmoniques de courant produits par le variateur sur le réseau, un technicien décide d'insérer en amont du variateur une inductance de ligne.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

Partie A : étude du modèle théorique

On note i_1 la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ qui modélise le courant (exprimé en ampère) induit dans cette inductance en fonction du temps t (exprimé en seconde).
À l'instant $t = 0$, aucun courant ne circule donc : $i_1(0) = 0$.
L'équation régissant l'évolution du courant il dans le circuit est : di,

$$L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + Ri_1 = E$$

où L est l'inductance, exprimée en henry (H), R est la résistance, exprimée en ohm (Ω), et E est la différence de potentiel dans le circuit, exprimée en volt (V).
On donne : $E = 6$V.

Dans cette partie, on prend $R = 0,5\Omega$ et $L = 0,015$H. Ces valeurs sont celles qui figurent sur la plaque signalétique de l'inductance que le technicien souhaite installer.

1. Justifier que la fonction i_1 est solution, sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, de l'équation différentielle

$$(E_1) \quad 3y' + 100y = 1200.$$

2. On rappelle que l'équation différentielle $ay' + by = 0$ (a et b réels avec $a \neq 0$) admet pour solutions les fonctions définies, pour tout réel t, par :

$$y(t) = K\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}t}, \text{ avec } K \text{ constante réelle.}$$

   a. Donner les solutions de l'équation différentielle (E_0) : $3y' + 100y = 0$.
   b. Déterminer une fonction constante $y_0 : t \longmapsto c$, c constante réelle, qui soit solution particulière de l'équation différentielle (E_l).
   c. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E_l).

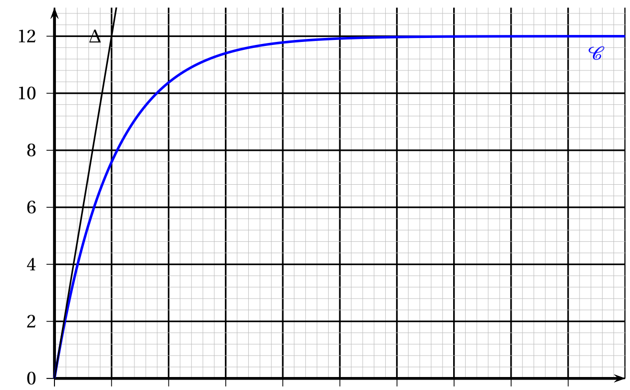
3. Montrer que pour tout réel positif ou nul t :

$$i_1(t) = 12 - 12\mathrm{e}^{-\frac{100}{3}t}.$$

4. On note i_1' la fonction dérivée de la fonction i_1 sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. Calculer $i_1'(t)$ et en déduire que la fonction i_1 est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
5. Sur l'annexe 1 on a tracé la courbe Γ qui représente la fonction i_1.
On note T la tangente à cette courbe en son point d'abscisse 0.
   a. Déterminer une équation de la droite T.
   b. Tracer la droite T sur le même graphique que la courbe Γ.

Partie B : contrôle des valeurs de R et L

Le technicien souhaite contrôler que l'inductance de ligne qu'il veut installer possède bien les valeurs indiquées sur la plaque signalétique. On rappelle ces valeurs : $R = 0,5\Omega$ et $L = 0,015$H.
Pour effectuer ce contrôle, il prend $E = 6$V et enregistre, à l'aide d'un système d'acquisition informatisé, l'intensité (en ampère) du courant qui traverse le circuit en fonction du temps (en seconde).
Le résultat de l'enregistrement montre des différences avec la courbe Γ donnée dans la partie A. Le technicien se sert de cet enregistrement pour déterminer les valeurs réelles de R et de L dans l'inductance de ligne considérée.
Sur le schéma ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}$ représente l'intensité du courant enregistrée. Cette intensité (en ampère), à l'instant t (en seconde), est notée $i_2(t)$.
La droite Δ tracée est la tangente à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0.
Le point de coordonnées $(0,02\,;\,12)$ appartient à Δ.



On admet que pour tout réel positif ou nul t :

$$i_2(t) = \frac{E}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

1. **a.** Conjecturer graphiquement la limite de la fonction i_2 quand t tend vers $+\infty$.
   b. À l'aide de cette conjecture et en déterminant $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} i_2(t)$ à partir de l'expression de $i_2(t)$, montrer que la valeur de R est bien celle figurant sur la plaque signalétique.
2. **a.** Justifier que la droite Δ a pour équation : $y = 600t$.
   b. On note i_2' la fonction dérivée de i_2. Déterminer $i_2'(t)$ puis $i_2'(0)$ en fonction de E et de L.
   c. En déduire la valeur de L.

Partie C : vérification de la norme

On note j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
L'impédance complexe de l'inductance de ligne est donnée par le nombre complexe $\underline{Z} = R + jL\omega$ avec $R = 0,5\ \Omega$ et $L = 0,01$ H.

La pulsation ω est exprimée en rad/s. On a : $\omega = 2\pi f$ où f est la fréquence du réseau, en Hz.
On donne : $f = 50$ Hz.

1. Calculer la valeur approchée, arrondie à 10^{-2}, du module de $\underline{Z}$, noté $\left|\underline{Z}\right|$.
2. Le réseau est alimenté par une tension de 230 V.
   La chute de tension U ,exprimée en volt, aux bornes de l'inductance est donnée par :

   $U = \left|\underline{Z}\right| I$, où I est le courant efficace absorbé dans le circuit, exprimé en ampère.

   La documentation indique : $I = 3,5$A.
   Pour éviter une perte de couple du moteur, la norme EN 50178 impose que la chute de tension U aux bornes de l'inductance de ligne soit comprise entre 3 % et 5 % de la tension d'alimentation du réseau.
   La chute de tension aux bornes de l'inductance de ligne est-elle conforme à la norme EN 50178 ?
   Justifier la réponse.

EXERCICE 2 **10 points**

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes et peuvent être traitées dans n'importe quel ordre.

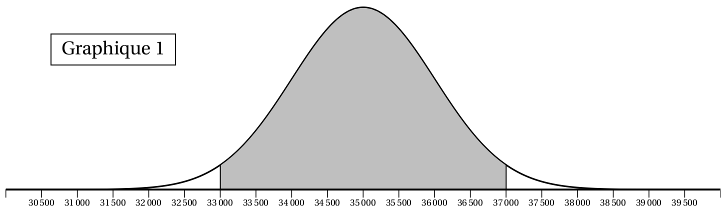
Partie A

Dans toute cette partie, les probabilités demandées sont à arrondir à 10^{-3} près.

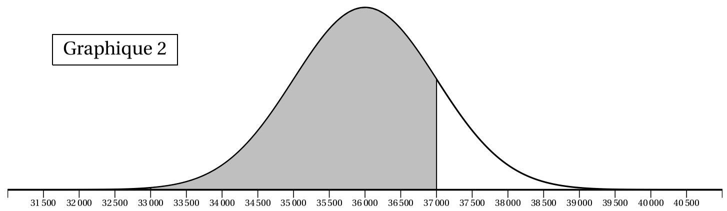
Une entreprise fabrique différents modèles d'ampoules LED.

1. Les ampoules LED MR0011 High Power de 3 watts ont une durée de vie annoncée par l'entreprise égale à 35 000 heures. On peut modéliser cette durée de vie, exprimée en heure, par une variable aléatoire D suivant une loi normale de moyenne $\mu = 35000$ et d'écart-type $\sigma = 1000$.
   a. On donne ci-dessous trois graphiques.
   L'un des trois représente la fonction densité de la variable aléatoire D et, en gris, la probabilité $P(33000 \leqslant D \leqslant 37000)$.
   Quel est ce graphique ? Justifier.

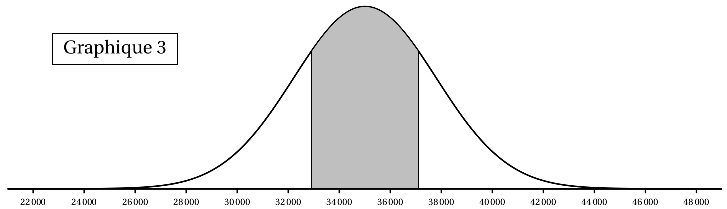
Graphique 1



Graphique 2



Graphique 3



   b. Calculer la probabilité qu'une ampoule LED MR0011 High Power de 3 watts fonctionne plus de 37 000 heures.

2. L'entreprise fabrique d'autres ampoules LED. Celles-ci ont des formes différentes :
   - 20 % des ampoules sont de forme *épi de maïs*;
   - 50 % des ampoules sont de forme *sphérique*;
   - 30 % des ampoules sont de forme *flamme*.

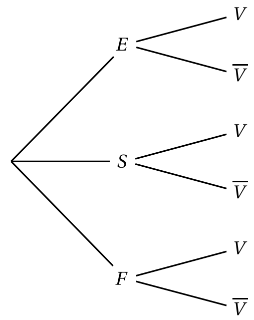
   90 % des ampoules de forme *épi de maïs* ont une durée de vie d'au moins 50 000 heures.
   30 % des ampoules de forme *sphérique* ont une durée de vie d'au moins 50 000 heures.
   La moitié des ampoules de forme *flamme* ont une durée de vie d'au moins 50 000 heures.

   On prélève une ampoule au hasard dans la production de l'entreprise. On considère les évènements suivants :

   E : « l'ampoule est de forme épi de maïs » ;
   S : « l'ampoule est de forme sphérique » ;
   F : « l'ampoule est de forme flamme » ;
   V : « l'ampoule a une durée de vie d'au moins 50 000 heures ».

   On note $\overline{V}$ l'évènement contraire de l'évènement V.

   a. Recopier et compléter l'arbre pondéré de probabilités suivant :



b. Calculer la probabilité $P(F \cap V)$.

c. Calculer la probabilité qu'une ampoule prise au hasard dans la production ait une durée de vie d'au moins 50 000 heures.

d. Quelle est la probabilité qu'une ampoule ayant une durée de vie d'au moins 50 000 heures soit de forme *épi de maïs*?

Partie B

Le moteur triphasé d'une voiture électrique est alimenté par un onduleur pour modifier sa vitesse.
La tension simple à la sortie de cet onduleur dépend de ωt où ω est la pulsation (en rad/s) et t le temps (en s). On l'exprime sous la forme $v(\omega t)$, où v est une fonction paire, périodique de période $T = 2\pi$, et définie pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,\pi]$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcll} v(x) & = & 300 & \text{si} \quad 0 \leqslant x < \frac{\pi}{6} \\ v(x) & = & 150 & \text{si} \quad \frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ v(x) & = & -150 & \text{si} \quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{6} \\ v(x) & = & -300 & \text{si} \quad \frac{5\pi}{6} \leqslant x \leqslant \pi \end{array}\right.$$

1. Compléter sur **l'annexe 2** la représentation graphique de la fonction v sur l'intervalle $\left[-\dfrac{3\pi}{2}\,;\,\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

On admet que la fonction v est développable en série de Fourier et que, pour tout réel x, on a :

$$v(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right).$$

2. Justifier que $b_n = 0$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

3. On rappelle que : $a_0 = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}} v(x)\,\mathrm{d}x$.

Montrer que : $a_0 = 0$.

4. On donne, pour tout entier $n \geqslant 1$: $a_n = \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}} v(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x$.

a. On pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} 300\cos(nx)\,\mathrm{d}x$ et $J_n = \displaystyle\int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} [-300\cos(nx)]\,\mathrm{d}x$

Calculer I_n et J_n en fonction de n.

b. Écrire les intégrales qu'il reste à calculer pour obtenir l'expression de a_n en fonction de n.
On ne demande pas de les calculer.

5. On admet que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $a_n = \dfrac{300}{n\pi}\left[\sin\left(\dfrac{n\pi}{6}\right) + 2\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right) + \sin\left(\dfrac{5n\pi}{6}\right)\right]$.

Recopier et compléter le tableau ci-dessous. :

Valeurs de n	0	1	2	3	4	5	6	7
Valeurs approchées de a_n arrondies au dixième.	0	286,5	0	0				

6. On évalue la pollution harmonique de deux façons : de manière qualitative, en observant la présence d'harmoniques sur le spectre des amplitudes, et de manière quantitative en calculant le taux de distorsion harmonique par rapport au fondamental.

a. Compléter sur **l'annexe 2** le spectre des amplitudes A_n associé à la fonction v pour n allant de 0 à 7.

On rappelle que pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.

b. On s'intéresse au taux de distorsion harmonique par rapport au fondamental.

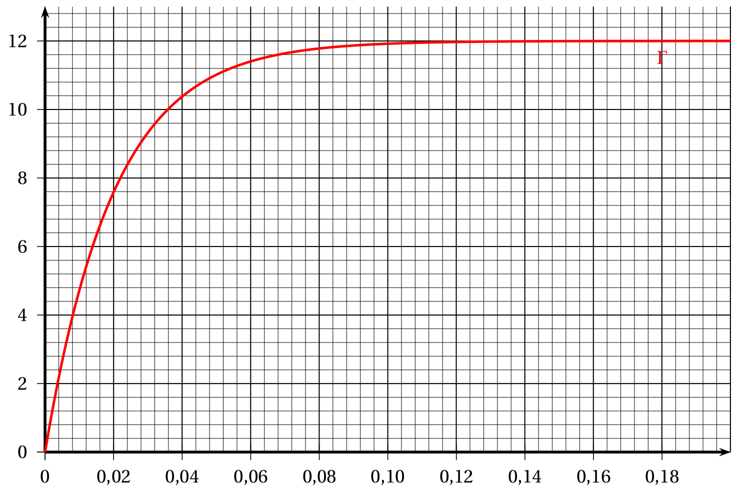
On obtient une valeur approchée significative de ce taux en calculant le nombre T donné par :

$$\mathrm{T} = \frac{\sqrt{a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2}}{a_1}.$$

Sachant que ce taux doit être inférieur à 10 %, la commande de l'onduleur du moteur est-elle adaptée ?

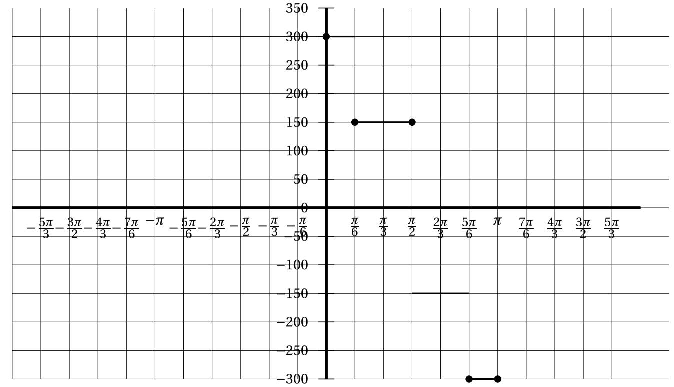
ANNEXE 1 à rendre avec la copie

EXERCICE 1 - Partie A - Question 5



ANNEXE 2 à rendre avec la copie

ANNEXE EXERCICE 2 - Partie B - Question 1



EXERCICE 2 - Partie B - Question 6. a.