

Partie C. Puissance moyenne du signal sur l'intervalle [0 ; 2π]

- 1. Montrer que :  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt = \frac{11}{2} \pi^2$ .
- 2. On pose :  $p(n) = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)$ .
  - a. Calculer  $p(9)$ . Arrondir la réponse au millième.
  - b. Montrer que si on prend  $p(9)$  comme valeur approchée de  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt$  on commet une erreur inférieure à 3 %.

Exercice 2

10 points

On étudie un système chargé de réguler la variation de pression à l'intérieur d'un caisson.

On choisit une échelle dans laquelle la valeur initiale de la pression est prise en origine et la valeur à atteindre vaut 1.

On rappelle que la fonction échelon unité, notée  $U$ , est définie par :

$$\begin{cases} U(t) = 0 & \text{lorsque } t < 0 \\ U(t) = 1 & \text{lorsque } t \geq 0. \end{cases}$$

On donne un extrait de formulaire pour la transformation de Laplace :

Fonction causale	Transformée de Laplace
$t \mapsto U(t - a)$ , avec $a$ constante réelle	$p \mapsto \frac{1}{p} e^{-ap}$
$t \mapsto e^{-at} \sin(\omega t) U(t)$ , avec $\omega$ constante réelle	$p \mapsto \frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$t \mapsto e^{-at} \cos(\omega t) U(t)$ , avec $\omega$ constante réelle	$p \mapsto \frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$t \mapsto f(t) U(t)$	$p \mapsto F(p)$
$t \mapsto f(t - a) U(t - a)$ , avec $a$ constante réelle	$p \mapsto F(p) e^{-ap}$
$t \mapsto f'(t) U(t)$	$p \mapsto p F(p) - f(0^+)$
$t \mapsto f''(t) U(t)$	$p \mapsto p^2 F(p) - p f(0^+) - f'(0^+)$

Partie A : Première commande

À l'instant  $t = 0$ , on commande le passage de la pression initiale (0 dans l'échelle choisie) à la pression souhaitée (1 dans l'échelle choisie).

La pression à l'instant  $t$  à l'intérieur du caisson (dans l'échelle choisie) est modélisée par une fonction  $s$  qui vérifie :

$$\frac{1}{101} s''(t) + \frac{2}{101} s'(t) + s(t) = U(t) \quad (1)$$

La pression initiale vaut 0 dans l'échelle choisie, on a :  $s(0) = 0$ .

On admet de plus que :  $s'(0) = 0$ .

On note  $S$  la transformée de Laplace de la fonction  $s$ .

- 1. a. En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'égalité (1) ci-dessus, montrer que :  $S(p) = \frac{101}{p(p^2 + 2p + 101)}$ .  
b. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu :

1	ÉlémentsSimples[101/(p(p^2+2p+101))] → 1/(-p-2)
2	FormeCanonique[p^2+2p+101] → (p+1)^2+100

🎓 Brevet de technicien supérieur 9 novembre 2015 🎓  
groupement A Nouvelle-Calédonie

Exercice 1

10 points

Lors de l'étude des signaux, on rencontre des signaux de type créneau qui sont modélisés par des fonctions en escalier.

Soit la fonction  $f$  paire et périodique de période  $2\pi$  définie de la façon suivante :

$$\begin{cases} f(t) = 2\pi & \text{lorsque } 0 \leq t < \frac{\pi}{4} \\ f(t) = 3\pi & \text{lorsque } \frac{\pi}{4} \leq t < \frac{3\pi}{4} \\ f(t) = 0 & \text{lorsque } \frac{3\pi}{4} \leq t < \pi \end{cases}$$

Partie A. Étude de la fonction

- 1. Tracer une représentation de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[-\pi ; 3\pi]$  dans le repère figurant dans le document réponse 1.

- 2. Calculer  $\int_0^\pi f(t) dt$ .

- 3. En déduire la valeur moyenne  $\mu(f)$  de  $f$  sur une période.

On rappelle que :  $\mu(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi f(t) dt$ .

Partie B. Série de Fourier associée à la fonction  $f$

On rappelle que la série de Fourier associée à une fonction T-périodique continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$  est

$$s(t) = a_0 + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)), \quad \text{avec } \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

$a_0$  est la valeur moyenne de la fonction sur une période.

La fonction  $f$  étant paire, les coefficients  $b_n$  sont nuls et pour les entiers non nuls  $n$  les coefficients  $a_n$  vérifient :  $a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt$ .

- 1. Montrer que pour les entiers  $n$  non nuls :  $a_n = \frac{2}{n} \left[ 3 \sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right]$ .
- 2. Exprimer simplement  $a_1$  et  $a_2$  puis compléter le tableau du document réponse 1.
- 3. On appelle somme partielle d'ordre  $n$  de la série de Fourier de la fonction  $f$ , la fonction  $s_n$  telle que :  $s_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$ .

- a. Écrire la somme partielle d'ordre 7 de la série de Fourier de la fonction  $f$ .
- b. Les sommes partielles d'ordres 2 et 11 de la série de Fourier de  $f$  ont été représentées sur le graphique donné dans le document réponse 1, l'une en pointillés, l'autre en trait plein.

Qu'observe-t-on si on compare ces représentations à celle de la fonction  $f$  obtenue à la question A. 1. ?  
Indiquer à quelle somme partielle correspond chaque courbe du graphique donné.

En déduire que :  $S(p) = \frac{1}{p} - \frac{p+1}{(p+1)^2 + 10^2} - \frac{1}{(p+1)^2 + 10^2}$ .

- c. Montrer que pour tout réel positif ou nul  $t$  :

$$s(t) = 1 - \left[ \cos(10t) + \frac{1}{10} \sin(10t) \right] e^{-t}.$$

2. Montrer que pour tout réel positif ou nul  $t$  :  $s'(t) = \frac{101}{10} \sin(10t) e^{-t}$ .
3. On note  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par :  $f(t) = \sin(10t)$ .
- a. Montrer que  $f$  est périodique de période  $\frac{2\pi}{10}$ .
- b. Recopier et compléter le tableau suivant :

$t$	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{10}$
Signe de $f(t) = \sin(10t)$			
Sens de variation de $s$			

4. Les maximums relatifs successifs de la courbe représentant la fonction  $s$  ont pour coordonnées  $\left( \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}; 1 + e^{-\left(\frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}\right)} \right)$ , avec  $k$  entier naturel.

On pose pour tout entier naturel  $k$  :  $m_k = 1 + e^{-\left(\frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}\right)}$ .

- a. Compléter le tableau de valeurs donné dans le document réponse 2.
- b. On considère que l'équilibre du système est atteint dès qu'un maximum de la courbe représentant la fonction  $s$  a une ordonnée  $m_k$  inférieure ou égale à 1,02.

Sachant que l'unité de temps est la seconde, combien de temps faut-il pour que l'équilibre soit atteint ? Arrondir au centième.

### Partie B : Modification de la commande

On souhaite réduire l'amplitude des variations de la pression à l'intérieur du caisson pendant le passage de la valeur initiale à la valeur souhaitée et atteindre plus rapidement l'équilibre du système. Pour cela, on commande l'augmentation de pression à l'intérieur du caisson en deux temps.

À l'instant  $t = 0$ , on demande le passage de 0 à 0,5 (dans l'échelle choisie) puis, à l'instant  $t = \frac{\pi}{10}$ , on demande le passage de 0,5 à 1.

La pression à l'instant  $t$  à l'intérieur du caisson (dans l'échelle choisie) est alors modélisée par une fonction  $r$  qui, sauf en  $\frac{\pi}{10}$ , vérifie :

$$\frac{1}{101} r''(t) + \frac{2}{101} r'(t) + r(t) = \frac{1}{2} U(t) + \frac{1}{2} U\left(t - \frac{\pi}{10}\right). \quad (2)$$

De plus  $r(0) = 0$  et on admet que  $r'(0) = 0$ .

1. On note  $R$  la transformée de Laplace de la fonction  $r$ . Montrer que :

$$R(p) = \frac{1}{2} \frac{101}{p(p^2 + 2p + 101)} \left( 1 + e^{-\frac{\pi}{10}p} \right).$$

2. En déduire que :  $r(t) = \frac{1}{2} s(t) U(t) + \frac{1}{2} s\left(t - \frac{\pi}{10}\right) U\left(t - \frac{\pi}{10}\right)$ .

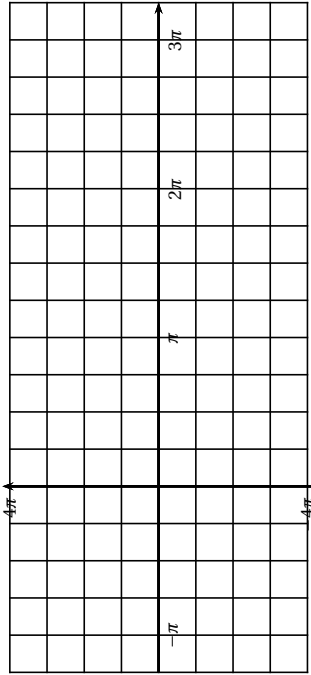
3. On admet que la courbe de la fonction  $r$  présente des maximums relatifs successifs d'abscisses  $\frac{\pi}{5} + \frac{k\pi}{5}$  et d'ordonnées  $n_k = 1 + \frac{1 - e^{-\frac{\pi}{10} - \frac{k\pi}{5}}}{2}$ , avec  $k$  entier naturel non nul.

On donne dans le **document réponse 2** les premières valeurs de  $n_k$ .

Document réponse 1 à rendre avec la copie

Exercice 1

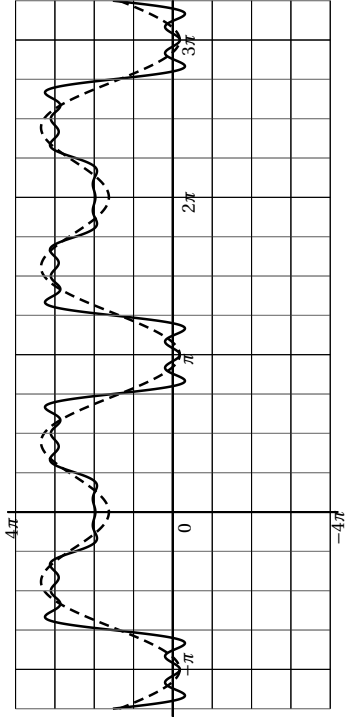
Partie A question 1



Partie B question 2

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
valeur exacte de $a_n$	$2\pi$			$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	0	$-\frac{2\sqrt{2}}{5}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{2\sqrt{2}}{7}$	0	$\frac{2\sqrt{2}}{9}$

Partie B question 3



Document réponse 2 à rendre avec la copie

Exercice 2

Partie A question 4. a.

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7
valeur arrondie au millième de $m_k$			1,208					

Partie B question 3.

$k$	1	2	3	4	5	6	7
valeur arrondie au millième de $n_k$	1,053	1,028	1,015	1,008	1,004	1,002	1,001

