BTS - Probabilités 1 - Cours

1. Modéliser

Remarque 1 : Même si des calculs concernant des risques ou des jeux de hasard ont été faits depuis l'antiquité, on date le début de la théorie des probabilités de la correspondance entre Blaise Pascal et Pierre de Fermat (1654) à propos du «problèmes des paris».

1.1. Notion de modèle

Exemple 1 : On lance un dé cubique et on note le numéro de la face supérieure.

Définition 1 : *Cette expérience est une **expérience aléatoire** dont les **issues** (résultats possibles) sont 1, 2, 3, 4, 5, 6 :*

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

*Une réalisation (que l'on appelle «**épreuve**») de cette expérience (réalité ou simulation), doit forcément aboutir à l'une de ses issues ; on ne sait pas laquelle exactement.*

Définition 2 : *L'**ensemble des issues** est* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Définition 3 : *Définir une **probabilité**, pour une expérience aléatoire, consiste à :*

- *préciser l'ensemble des issues possibles : l'«**univers**»* $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ *;*
- *attribuer à chacune des issues* x_i *un nombre* p_i *positif ou nul, appelé **probabilité de*** x_i, *de sorte que l'on ait* $p_1 + \cdots + p_n = 1 = 100\%$

Exercice 1 : Le dé suivant est truqué :

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\dots$

Calculer $p(6)$, la probabilité d'obtenir un six.

Exercice 2 : Il y a 86% d'élèves droitiers dans ce lycée. Quelle est la probabilité de tomber au hasard sur un élève qui ne le soit pas ?

Définition 4 : Notation somme : *Une somme telle que* $p_1 + \cdots + p_n$ *se note, de manière condensée, à l'aide du symbole sigma (* Σ*) :* $\sum_{i=1}^{n} p_i$

Exercice 3 : Calculer $A = \sum_{i=1}^{7} i$ et $B = \sum_{i=1}^{4} i^2$

Exercice 4 : (PISA) développer une intuition d'une probabilité :
Un géologue a affirmé :
«Au cours des 20 prochaines années, la probabilité que se produise un tremblement de terre à Springfield est de 2 sur 3»
Parmi les propositions suivantes, laquelle **exprime le mieux** ce que veut dire le géologue ?

- Puisque $\frac{2}{3} \times 20 \approx 13{,}3$, un tremblement de terre aura lieu à Springfield dans 13 à 14 ans.
- Puisque $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$, on est sûr qu'il y aura un tremblement de terre à Springfield dans les 20 ans.
- La probabilité d'avoir un tremblement de terre dans cette ville est plus forte que celle de ne pas en avoir.
- On ne peut rien dire, car personne n'est sûr du moment où un tremblement de terre se produit.

1.2. Construire un modèle

Propriété 1 : Dans la grande majorité des cas, on utilise l'une de ces deux façons de déterminer les probabilités p_i associées aux issues x_i :

- **Étude statistique - observer les fréquences**
  Exemple 2 : On lance un dé truqué un grand nombre de fois (10 000, par exemple) et on note le résultat dans le tableau suivant :

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$0{,}125$	$0{,}125$	$0{,}125$	$0{,}125$	$0{,}2$	$0{,}3$

  On **décide** alors que l'on a expérimenté un nombre suffisant de lancers pour que les futurs lancers de ce dé respectent les mêmes fréquences que celles de cette expérience. Cette «décision» établit un **modèle** probabiliste : on peut remplacer le mot «Fréquence» (qui est du domaine de la statistique) dans le tableau par le mot «probabilité».
- **Par le choix de l'équiprobabilité.**
  Exemple 3 : Le lancer d'une pièce de monnaie **bien équilibrée** :

Issue	pile	face
Probabilité	0,5	0,5

Définition 5 : *Dans une situation d'**équiprobabilité**, Toutes les issues possèdent la même probabilité.*

Méthode 1 : Étude statistique ou équiprobabilité ?
Le choix de l'équiprobabilité se fait lorsqu'il est suggéré dans l'énoncé (pièce équilibrée, tirage dans une urne au hasard).
Si on est dans une situation où les probabilités de chaque issue n'ont aucune raison d'être les mêmes, on doit mener une étude statistique.

Exercice 5 : Étude statistique ou équiprobabilité ? Le préciser.

1. On lance un dé bien bien équilibré.
2. On choisit au hasard une consonne dans l'alphabet.
3. Probabilité qu'un foyer français ait 2 enfants.
4. Tomber sur le zéro sur une roulette de casino (numérotée de 0 à 36).
5. Que M. Dupont, 40 ans, que l'on ne connaît pas, attrape la grippe l'hiver prochain ?
6. Qu'une tartine tombe du côté de la confiture ?

2. Prévoir

2.1. Probabilité d'un événement

Exemple 4 : On lance un dé cubique et l'on considère l'**événement** A : «obtenir au moins 5».

- **issues favorables** à A (qui réalisent A) sont 5 et 6 ; on note $A=\{5;6\}$.
- Pour le dé truqué (utilisé précédemment), si $P(5)=0{,}2$ et $P(6)=0{,}3$ alors $P(A)=0{,}2+0{,}3=0{,}5$.
- Pour un dé équilibré (situation d'équiprobabilité) : $P(5)=P(6)=\frac{1}{6}$ alors $P(A)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

Définition 6 : *Un **événement** A est un sous-ensemble (aussi appelée partie) de l'univers Ω (on note $A\subset\Omega$, on dit «A inclus dans Ω»).*
*La **probabilité** $P(A)$ est la somme des probabilités des issues favorables à A.*

Propriété 2 :

- Pour tout événement A, on a : $0\leqslant P(A)\leqslant 1$
- On a $P(\Omega)=1$.
- L'événement B : «obtenir un 7 sur un dé est **impossible** : $P(B)=0$. On identifie à l'ensemble vide noté $\emptyset$ tout événement impossible ($B=\emptyset$).

Propriété 3 : Dans une **situation d'équiprobabilité**, la probabilité d'un événement A est :

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorales à } A}{\text{nombre d'issues possibles}}}$$

2.2. Opérations sur les événements

Définition 7 : *Si A et B sont deux événements,*

- *On note $\overline{A}$ l'événement complémentaire de A (toutes les issues qui ne réalisent pas A.)*
- *L'événement $A \cap B$ est l'ensemble des issues qui réalisent A **et** B (simultanément).*
- *L'événement $A \cup B$ est l'ensemble des issues qui réalisent A **ou** B (au moins l'un des deux).*

Exemple 5 : On lance un dé cubique et équilibré, et on note les événements suivants :

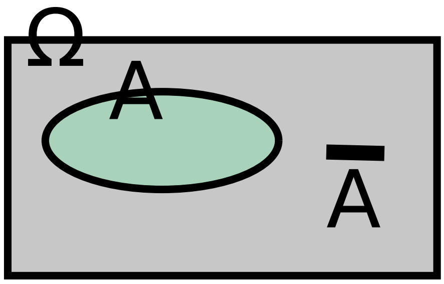
- A : «obtenir un nombre pair»
- B : «obtenir un un ou un six»

On a alors :

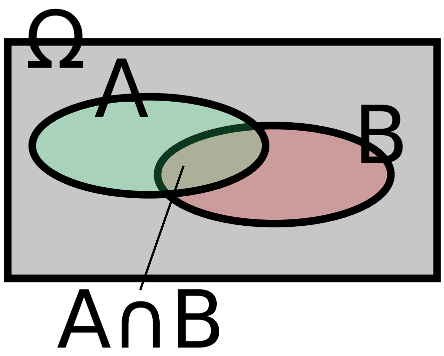
$A = \{2;4;6\}$	$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
$B = \{1;6\}$	$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
$\overline{A} = \{1;3;5\}$	$p\left(\overline{A}\right) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
$A \cap B = \{6\}$	$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$
$A \cup B = \{1,2;4;6\}$	$P(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Exercice 6 : Reproduire le tableau dans le cas d'un dé octaèdrique (8 faces).

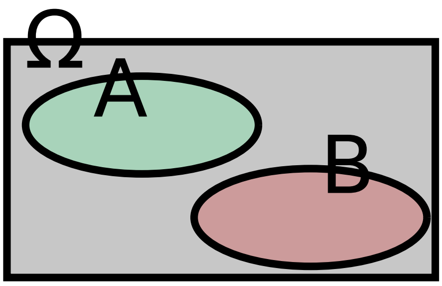
Propriété 4 : Soit A et B deux événements :



Événement complémentaire :
$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$



Union quelconque :
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



Union disjointe :
Si $P(A \cap B) = 0$, *alors* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Définition 8 : *Lorsqu'on sait que A et B ne peuvent être réalisés simultanément ; A et B sont dits **incompatibles** ; dans ce cas on a $P(A \cap B) = 0$.*

Exercice 7 : A et B sont deux événements quelconques ; exprimer $P(A \cap B)$ en fonction de $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cup B)$.

Exercice 8 : $P(A) = 0{,}7$ et $P(B) = 0{,}6$.
Montrer que A et B ne peuvent pas être incompatibles.
En dégager une condition sur les probabilités de A et B impliquant que ces deux événements soient incompatibles.

Exercice 9 : Chaque ligne du tableau représente une situation différente. Compléter le tableau.

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \cap B$	$A \cup B$
0,2	0,5			0,1	
0,6			0,6	0	
		0,7	0,7		0,5
			0,8	0,2	0,4

Propriété 5 : Si A et B sont deux événements quelconques, on a toujours : $P(A \cap B) \leqslant \begin{matrix} P(A) \\ P(B) \end{matrix} \leqslant P(A \cup B)$

Propriété 6 : Lois de Morgan :
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Exercice 10 : Utiliser les lois de Morgan pour exprimer $\overline{(A \cap B) \cup C}$ en fonction des événements complémentaires de ces trois événements.

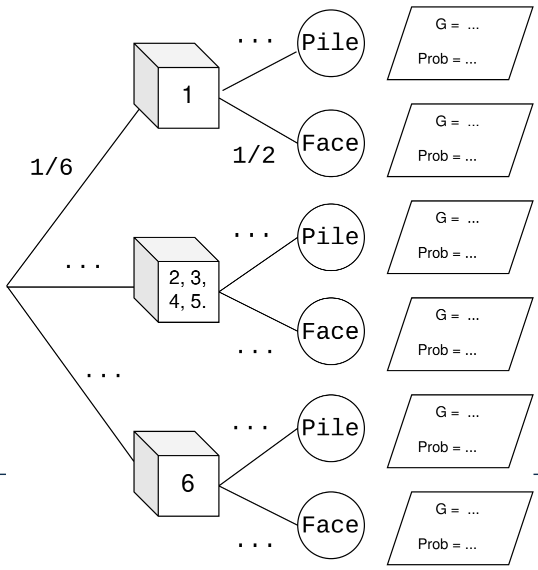
3. Variables aléatoires (réelles)

3.1. Définition

***Définition 9 :** Une fonction réelle définie sur un univers Ω est appelée **variable aléatoire**.*

Exemple 6 : Souvent, une variable aléatoire est utilisée pour rendre compte des gains dans un jeu de hasard.
On lance un dé (6 faces, bien équilibré), puis une pièce (bien équilibrée) ;

- si le dé donne 1, on gagne 5€ ;
- si le dé donne 6, on gagne 10€ ;
- si le dé donne un nombre compris entre 1 et 5 inclus, on ne gagne rien (0€) ;
- ensuite en lançant la pièce, aux gains obtenus avec le dé :
  - on ajoute 5€ si la pièce donne pile ;
  - on enlève 5€ si la pièce donne face ;
- on note alors G les gains ou pertes (G peut être négatif !) à la fin du jeu.



Arbre à compléter

Exercice 11 : Compléter l'arbre décrivant les possibilités de ce jeu.

Exercice 12 :

1. Quelles sont les valeurs possibles de G ?
2. Calculer $P(G = 5)$, c'est à dire la probabilité de gagner 5€ à ce jeu.
3. Pourquoi est-il vrai que $P(G = -10) = 0$?

3.2. Loi de probabilité

Notons $I = \{x_1 ; \ldots ; x_n\}$ l'ensemble des valeurs, rangées par ordre croissant, prises par une variable aléatoire X sur un univers Ω.

Remarque 2 : On manie ici des variables aléatoires ayant un nombre fini de valeurs (variables aléatoires discrètes). En utilisant des intégrales, plus tard, on pourra manier des variables alétoires dites continues, possédant un nombre infini de valeurs.

***Définition 10 :** La **loi de probabilité de X** associe chaque valeur x_i de X à sa probabilité $P(X = x_i)$.*
on écrit souvent une loi sous la forme d'un tableau, présenté de la manière suivante :

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
prob	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	$\cdots$	$P(X = x_n)$

Exercice 13 : Compléter la loi de probabilité de G, la variable aléatoire manipulée dans l'exemple précédent.

G	...	...	...	...	...
prob					

Unknown environment 'tabular'

\exo{Compléter la loi de probabilité de G :\

Unknown environment 'tabular'

}\par \rema Ce tableau est à rapprocher d'un tableau statistique : les probabilités jouent le même rôle que les fréquences en statistiques.

4. Probabilités conditionnelles

On cherche souvent à analyser la dépendance d'un événement par rapport à un autre, ou bien comprendre des phénomènes numériques paradoxaux... Les probabilités conditionnelles offrent un cadre simple qui peut aider.

Exercice 14 : exemple de paradoxe apparent : phénomène de Rogers
Un prof de maths est perçu comme particulièrement sévère : sur les deux groupes d'approfondissement qu'il suit, composés de quelques élèves, les moyennes de ce trimestre sont 1, 2, 3, 4 pour le groupe A et 5, 6, 7, 8, 9 pour le groupe B, sur 20. Son supérieur lui explique qu'il faut impérativement que les moyennes des deux groupes augmentent. Le prof refuse catégoriquement de changer les moyennes de chaque élève, et dit à son supérieur qu'il n'avait qu'à faire les groupes différemment pour avoir de meilleures moyennes. Pourquoi ?

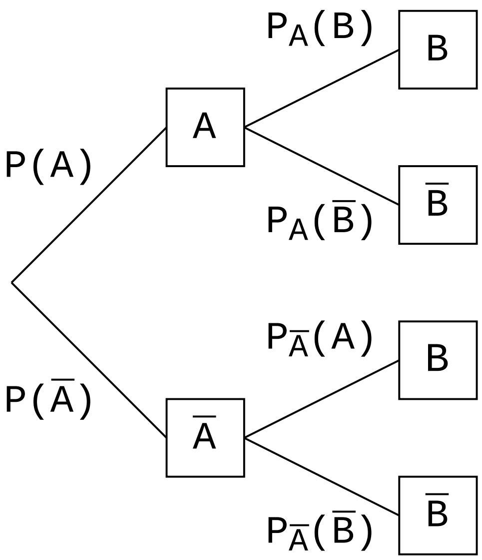
Remarque 3 : Il est donc fondamental de savoir si l'on calcule sur la population globale (Ω entier) ou bien si l'on est restreint à une partie seulement de cette population.

4.1. Définition et propriétés

Définition 11 : *A, B sont deux événements avec $P(A) \neq 0$.*
*On note $P_A(B)$ la «**probabilité de B sachant A**» le nombre $\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$.*

\defi{Soit A, B deux événements de probabilité non nulle.\ On dit que A et B sont \underline{indépendants} s'ils vérifient une de ces trois affirmations équivalentes :}\ \prop

$$\begin{aligned} & P_A(B) = P(B) \\ \Leftrightarrow & P(A\cap B) = P(A)\times P(B) \\ \Leftrightarrow & P_B(A) = P(A) \end{aligned}$$



Représentation des probabilités conditionnelles sur un arbre

\demo On passe de la première ligne à la deuxième en multipliant par $P(A)$ et de la deuxième à la troisième en divisant par $P(B)$.\par \rema Lorsque A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi, ainsi que $\overline{A}$ et B, et aussi $\overline{A}$ et $\overline{B}$.\par \exo{On a $P(A)=0,4$, $P(B)=0,5$ et $P(A\cap B)=0,2$.\ A et B sont-ils indépandants ?}\par \prop \textbf{Formule des probabilités totales :} Soit $C_1, C_2, \ldots,C_k$ des événements de probabilité non nulle formant une partition de Ω (tous les C_i sont disjoints et recouvrent Ω : ils représentent des cas différents). Alors on a :

$$P(A) = P(A\cap C_1) + P(A\cap C_2) + \cdots + P(A\cap C_k)$$

Qui peut aussi s'écrire :

$$P(A)=P(C_1)P_{C_1}(A)+P(C_2)P_{C_2}(A)+\cdots+P(C_k)P_{C_k}(A)$$

\rema $B\neq\emptyset$ et $\overline{B}$ formant une partition de Ω, on a :

$$P(A)=P(B)P_B(A)+P(\overline{B})P_{\overline{B}}(A)$$