BTS - Maths+STI - TD Spectre

1. Harmoniques et valeurs efficaces

Définition 1 : *Un **développement en série de Fourier** d'un signal périodique s'écrit :*

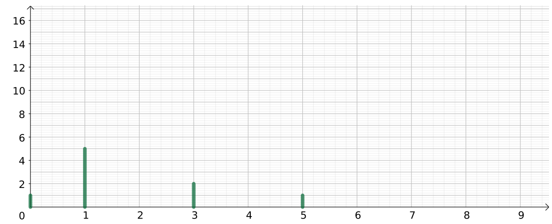
$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + a_1\cos(\omega t) + b_1\sin(\omega t) + \cdots + a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t) + \cdots \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\right) \end{aligned}$$

- *a_0 représente la composante continue du signal ;*
- *les autres coefficients a_n et b_n sont rattachés à $\cos$ et $\sin$; ils indiquent la valeur max de l'harmonique de rang n ;*
- *ils peuvent être en nombre infini (mais ils tendent à devenir de plus en plus petits lorsque n grandit, globalement)*

Propriété 1 :

- L'harmonique de rang n : $h_n(t) = a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)$;
- a pour valeur max $\boxed{A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$;
- comme c'est une sinusoïde, elle a pour valeur efficace $\boxed{H_n = \dfrac{A_n}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{a_n^2 + b_n^2}{2}}}$;

Méthode 1 : On trace le spectre sous la forme d'un diagramme bâtons qui indique la valeur efficace A_n en fonction de n.



Exemple 1 : Le diagramme donne le spectre de $f(t) = 1 + 4\cos(t) + 3\sin(t) + 2\sin(3t) - \cos(5t)$; on voit sur l'expression que $\omega = 1$ rad/s.

Exercice 1 : Pour chaque signal donné, près avoir indiqué ω tracer les spectres dans les diagrammes suivants (compléter l'axe vertical).

1. $g(t) = 1 + 4\cos(t) + 3\sin(t) + 2\sin(3t) - \cos(5t)$; $\omega = \ldots$ rad/s
2. $u(t) = 10 + 40\cos(2t) + 35\sin(4t) + 20\sin(18t) - 5\cos(18t)$; $\omega = \ldots \neq 1$ rad/s
3. $v(t) = 5 + 240\sqrt{2}\cos(100\pi t) + 90\sin(500\pi t) + 20\sin(200\pi t) - \cos(800\pi t)$; $\omega = \ldots$ rad/s

Exercice 2 : Deux signaux différents peuvent-ils avoir le même spectre ?
Si oui, quelles sont les informations manquantes dans un spectre ?

2. Valeurs efficaces

Définition 2 : *Deux signaux f et g sont dits* ***orthogonaux*** *lorsque la valeur efficace $(f+g)_{\text{eff}}$ de $f+g$ sont liées par l'expression quadratique de Pythagore :* $\boxed{(f+g)^2_{\text{eff}} = f^2_{\text{eff}} + g^2_{\text{eff}}}$

Propriété 2 : Deux harmoniques de rangs différents, ainsi que la composante continue d'un signal sont chacunes orthogonales entre elles.

Propriété 3 : On en déduit : $\boxed{f^2_{\text{eff}} = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} H_n^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} A_n^2}$

Exercice 3 : Calculer les valeurs efficaces des signaux étudiés dans la partie précédente.

3. Enquête

Exercice 4 : On a relevé le spectre suivant pour un signal pair : $a_0 = 216$; $a_2 = 144$; $a_4 = -29$; $a_6 = 12$; Quel montage permet d'obtenir un signal de ce type ?
Indice : tracer la série.