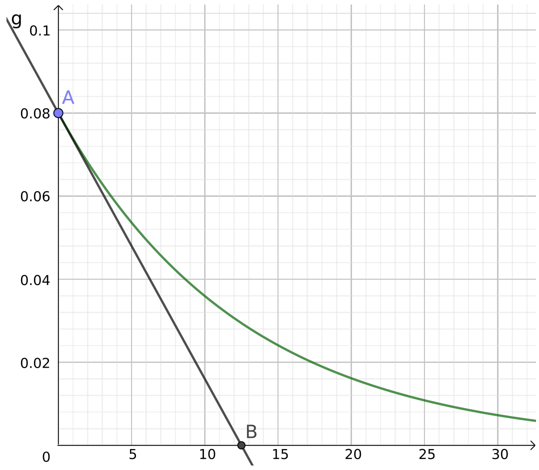
BTS - Maths+STI - TD Probabilités

Alain fabrique, en amateur, des appareils électroniques. Il est aussi très anxieux et a décidé de calculer toutes les probabilités pour vivre sa passion.

Partie A

Chez son fournisseur de composants électroniques, la durée d'attente T en caisse, exprimée en minutes, suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,08$.
On rappelle que la densité associée à la loi exponentielle est définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$, et que l'espérance de cette loi est $\frac{1}{\lambda}$

Exercice 1 :



1. À quelle valeur remarquable correspond $f(0)$? Indiquer λ sur le graphique.
2. Démontrer que l'équation de la tangente à la courbe de f en $t = 0$ est $y = \lambda - \lambda^2 t$.
3. En déduire que $x(B) = \frac{1}{\lambda} = E(T)$, et que sa valeur est 12,5.
4. En moyenne, combien de temps devra attendre Alain ?
5. Quelle est la probabilité qu'Alain attende moins de cinq minutes ? Hachurer la zone correspondante à cette probabilité sur le graphique.
6. Sachant qu'Alain attend depuis 10 minutes, quelle est la probabilité qu'il paye dans les 5 minutes qui suivent ?

Partie B comme bin...

Alain achète des composants ayant tous une apparence identique, mais dont certains présentent un défaut. On estime que ce défaut concerne $1,8\%$ des composants vendus. On admet que le nombre de composants vendus est assez important pour que l'achat de 50 composants soit assimilé à un tirage avec remise.

Exercice 2 :

1. En moyenne, combien de composants sont défectueux dans un lot de 50 ?
2. Quelle loi de probabilité utilise-t-on pour modéliser cette situation ? Préciser ses paramètres.
3. Quelle est la probabilité qu'aucun composant, dans un lot, ne soit défecteux ? Même question pour un composant seul ? Même question pour exactement 4 composants ? Pourquoi cette dernière probabilité est-elle élevée ?
4. Quelle est la probabilité pour qu'au plus 10% des composants d'un lot soient défectueux ?

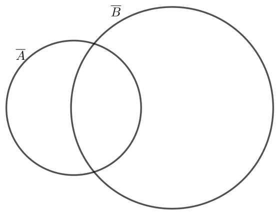
Partie C

Les montages électriques sont équipés d'une batterie qui (dans une cadre d'une utilisation normale), a un temps de bon fonctionnement T, en années, qui suit une loi normale de moyenne 6 ans et d'écart-type 1 an.

Exercice 3 : Écrire la réponse sous la forme $P(\cdots \leqslant T \leqslant \cdots) = \ldots$ pour chaque question :

1. Quelle est la probabilité qu'une batterie dure entre 4 et 8 ans ?
2. Quelle est la probabilité qu'une batterie dure plus de 9 ans ?
3. Quelle est la probabilité qu'une batterie dure moins de 2 ans ?
4. Quel devrait être l'écart-type pour que plus de 99% des batteries durent entre 4 et 8 ans ?

Partie D



Arrondir les résultats au millième.
Dans le montage électrique, il y a deux composants critiques A et B. On notera A l'événement : «le composant A fonctionne» et $\overline{A}$ le complémentaire. De même pour B. Après analyse de 100 montages, on dénombre :

- 3 montages avec A défecteux seul.
- 5 montages avec B défecteux seul.
- 2 montages avec A et B défecteux.

Exercice 4 :

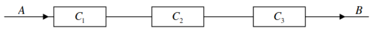
1. Compléter le diagramme ci-dessus avec les nombres donnés.
2. En admettant que l'étude statistique permet d'établir un modèle probabiliste, donner $P(\overline{A})$, $P(\overline{B})$ et $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.
3. En déduire que $P(A) = 0,95$, $P(B) = 0,93$ et $P(A \cup B) = 0,98$, puis $P(A \cap B) = 0,9$.
4. Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier.
5. On rappelle que $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

   Réaliser deux arbres représentant la situation (l'un avec A et $\overline{A}$ au premier étage, l'autre avec B et $\overline{B}$ au premier étage).

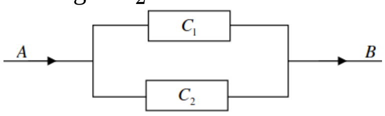
Partie E

Pour étudier le design du circuit, on a le choix entre trois montages différents :

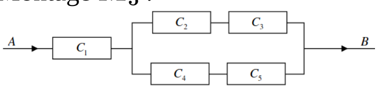
- Montage M_1 :



- Montage M_2 :



- Montage M_3 :



On note p_i la probabilité de défaillance du composant C_i.
On admet que les événements $\overline{C}_i$: «le composant C_i est défaillant» sont tous indépendants (2 à 2) ; en cas de défaillance, chaque composant se comporte comme un interrupteur ouvert ; sinon, il laisse toujours passer du courant.
On admet qu'un montage est fonctionnel lorsque le courant peut aller de A à B.

Exercice 5 :

1. Pour chaque montage M_j, calculer sa probabilité P_j de fonctionnement en fonction des p_i. En cas de difficulté, on pourra considérer que tous les p_i valent une même valeur p.
2. On considère que tous les p_i valent une même valeur p.
   Tracer sur $[0, 1]$, en fonction de p, les 3 fonctions P_j.
3. Selon les valeurs de p, discuter du montage le plus robuste.