BTS - Probabilités 2 - Cours

1. Généralités

On sait qu'un phénomène doit se produire à un instant donné, entre 0h et 10h. Quelle est la probabilité qu'il ait lieu entre 7h et 8h ?

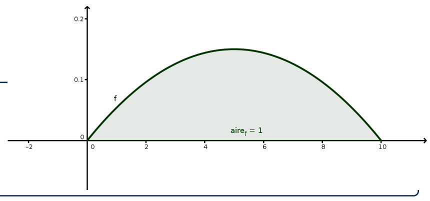
Ce type de problème est modélisé en utilisant des lois de probabilité continues.

1.1. Notion de densité

Définition 1 : *Soit I un intervalle et f une fonction définie sur I.*
*f est appelée **densité sur** I lorsque :*

- $f \geq 0$ *;*
- $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Exemple 1 : $f(t) = \dfrac{3}{500}x(10-x)$ est une densité sur $[0;10]$:



Exercice 1 : Déterminer la constante A pour que $g(x) = Ax$ soit une densité sur $[0;10]$.

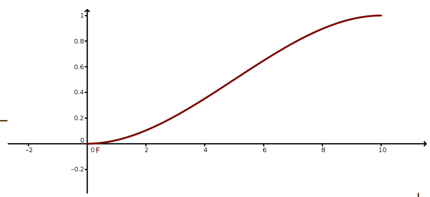
1.2. Fonction de répartition

Définition 2 : *Soit I un intervalle et f une densité sur I.*
On pose $a = \inf(I)$ et $b = \sup(I)$ (on peut avoir $a = -\infty$ et $b = +\infty$) et $F(t) = \displaystyle\int_a^t f(u)\,\mathrm{d}u$
(F est ainsi la primitive de f qui s'annule en $t = a$)
*Cette primitive F est appelée **fonction de répartition** associée à la densité f.*

Propriété 1 :

- F est croissante ;
- $F(a^+) = 0$ et $F(b^-) = 1$.

Exemple 2 :

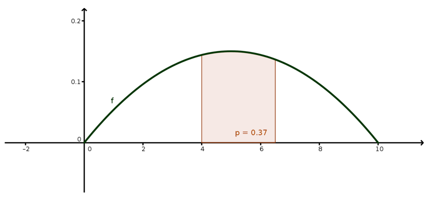


1.3. Loi de probabilité admettant une densité

Définition 3 : *Soit $c < d$ deux nombres de l'intervalle I.*
Si X est une variable aléatoire qui suit une loi de densité f, alors on a :

$$P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t = F(d) - F(c)$$

Exemple 3 : $c = 4$ et $d = 6{,}5$



Remarque 1 : Dans le cas d'une variable aléatoire X suivant une loi provenant d'une densité,

- pour n'importe quelle valeur de c dans I, $P(X = c) = 0$;
- $P(X < d) = P(X \leqslant d)$;
- $P(c < X) = P(c \leqslant X)$;
- de même, $P(c < X < d) = P(c \leqslant X < d) = P(c < X \leqslant d) = P(c \leqslant X \leqslant d)$.

1.4. Espérance et variance

Soit X une variable aléatoire provenant d'une densité f définie sur un intervalle I.

Définition 4 : Espérance : $\boxed{E(X) = \int_I x f(x)\,\mathrm{d}x}$

Propriété 2 : X et Y sont deux variables aléatoires, a et b deux constantes.

- $E(aX + b) = aE(X) + b$
- $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$ (linéarité)
- Si X et Y sont **indépendantes** : $E(XY) = E(X)E(Y)$

Exercice 2 : Calculer les espérances des deux variables aléatoires X et Y associées aux deux premiers exemples du cours, et en déduire l'espérance de leur produit (en admettant qu'elles sont indépendantes).

Définition 5 :

- ***Variance :*** $\boxed{V(X) = \int_I [x - E(X)]^2 f(x)\,\mathrm{d}x}$
- ***Écart-type :*** $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$

Propriété 3 : X et Y sont deux variables aléatoires, a et b deux constantes.

- $V(aX + b) = a^2 V(X)$ et $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$;
- Si X et Y sont **indépendantes** : $V(aX + bY) = a^2 V(X) + b^2 V(Y)$ et $\sigma(aX + bY) = \sqrt{[a\sigma(X)]^2 + [b\sigma(Y)]^2}$

Exercice 3 : Calculer les variances et écarts-type des deux variables aléatoires X et Y associées aux deux premiers exemples du cours, et en déduire l'écart-type de leur de leur moyenne (en admettant qu'elles sont indépendantes).

2. Exemples de lois continues

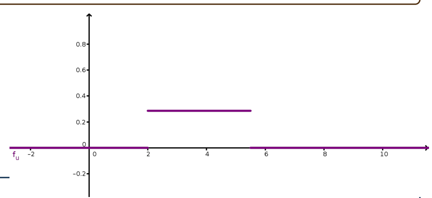
2.1. Loi uniforme

Définition 6 : *Cette loi existe sur tout intervalle I borné (c'est à dire qu'aucune des bornes de I ne doit être infinie). On sait qu'un événement va se produire à un instant dans l'intervalle de temps $I = [a; b]$, mais on ne sait pas quand et il n'y a aucune raison de privilégier telle ou telle date.*

***Définition 7 : Loi uniforme** sur $I = [a; b]$:*

Cette loi a pour densité la fonction constante sur I : $f(x) = \dfrac{1}{b - a}$

Exemple 4 : Densité uniforme sur $[2; 5,5]$:



Propriété 4 : Calcul effectif : Pour $c < d$ deux constantes dans $[a; b]$:

$$\boxed{P(c < X < d) = \frac{d - c}{b - a}}$$

Exercice 4 : Le démontrer.

Propriété 5 : Espérance, variance, écart-type :
Si X suit une loi uniforme sur $[a;b]$:

- $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ (milieu de $[a;b]$) ;
- $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$ et $\sigma(X) = \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

Exercice 5 : Mike peut peut débarquer n'importe quand entre 12h et 14h.

1. Quelle est la probabilité qu'il débarque entre 13h et 13h30 ?
2. À quelle heure, en moyenne, débarque-t-il ?
3. Il est 13h et Mike se fait toujours attendre. Sachant qu'il n'est toujours pas là à 13h, quelle est la probabilité qu'il arrive avant 13h30 ?

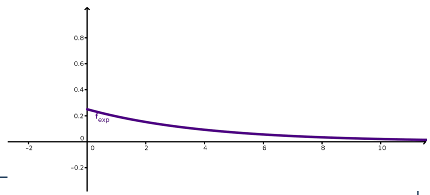
Exercice 6 : * Démontrer les formules générales d'espérance et variance de la loi uniforme données.

2.2. Loi exponentielle

Remarque 2 : Cette loi existe sur $I = [0;+\infty[$; elle modélise la durée de vie d'un phénomène sans mémoire, comme la durée de vie d'un composant électrique.

Définition 8 : Loi exponentielle de paramètre λ :
Cette loi a pour densité la fonction : $\boxed{f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}}$

Exemple 5 : Densité exponentielle de paramètre 1/4 :



Propriété 6 : Calcul effectif : Pour c constante positive :

$$P(X < c) = \int_0^c \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 7 : Le composant A a une durée de vie qui suit une loi exponentielle de paramètre 0,0004.
Calculer la probabilité, arrondie au centième, que le composant A ait une durée de vie strictement inférieure à 1000 heures.

Propriété 7 : Espérance, variance, écart-type : Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ :

- **Espérance :** $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$
- **Variance :** $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$
- **Écart-type :** $\sigma(X) = \dfrac{1}{\lambda}$

Exercice 8 : * Démontrer que $F(x) = -\left(x + \frac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda x}$ est une primitive de $\lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}$; démontrer alors la formule donnant l'espérance d'une loi exponentielle.

Propriété 8 : Loi sans mémoire : La loi exponentielle est dite «sans mémoire», dans le sens où si $c > a > 0$ sont donnés, alors : $\boxed{P_{X>a}(X < c) = P(x < c - a)}$

Exercice 9 : Le composant A a une durée de vie qui suit une loi exponentielle de paramètre 0,0004.
Sachant que le composant A a tenu déjà 1000 heures, calculer la probabilité, arrondie au centième, que le composant A ait une durée de vie strictement inférieure à 2000 heures.

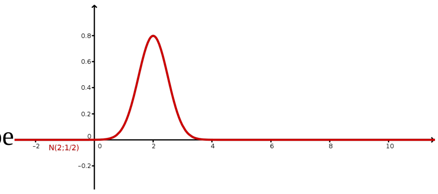
3. Loi normale

3.1. Premières propriétés

Remarque 3 : Cette loi est définie sur $]-\infty;+\infty[$; elle est très fréquemment observée dans l'étude de phénomènes physiques ou biologiques.

> ***Définition 9 : Loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ :***
> *Cette loi a pour densité la fonction :* $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

Exemple 6 : Densité normale avec $\mu = 2$ et $\sigma = \dfrac{1}{2}$:



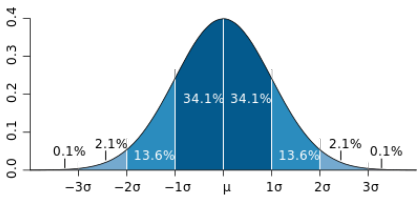
Propriété 9 : La courbe de f est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = \mu$; plus σ est grand, plus la bosse autour de μ est applatie ; l'aire sous cette courbe sur reste toujours de 1=100%.

> ***Définition 10 :***
>
> - *Si $\mu = 0$, on dit que la loi normale est **centrée**.*
> - *Si $\sigma = 1$, on dit que la loi normale est **réduite**.*
> - *Si $\mu = 0$ et $\sigma = 1$, on dit que la loi normale est **centrée-réduite**.*

Propriété 10 : Si $X \sim \mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$, alors $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite.

Propriété 11 : Il est important de mémoriser les 3 intervalles suivants :
Si $X \sim \mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$, alors :

- $P(\mu-\sigma \leqslant X \leqslant \mu+\sigma) \approx 68\%$ (à 10^{-2}) ;
- $P(\mu-2\sigma \leqslant X \leqslant \mu+2\sigma) \approx 95\%$ (à 10^{-2}) ;
- $P(\mu-3\sigma \leqslant X \leqslant \mu+3\sigma) \approx 99,7\%$ (à 10^{-3}).



> ***Définition 11 :*** *On appelle l'intervalle $[\mu-2\sigma;\mu+2\sigma]$: **plage de normalité**.*

> **Exercice 10 :** Déterminer $P(\mu \leqslant X \leqslant \mu+3\sigma)$.

Remarque 4 : La densité d'une loi normale n'admettant pas de primitive «commune», on utilise la calculatrice ou des tables pour calculer les probabilités d'une variable aléatoire qui suit une loi normale.

Remarque 5 : Calculatrice : Si $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma)$:

- TI : dans $\boxed{\text{Distrib}}$ (2nde-Var) : $P(a \leqslant X \leqslant b) =$ normalFrep(a,b,μ,σ)
- Casio : $\boxed{\text{OPTN}}$ / STATS / DIST / Norm : $P(a \leqslant X \leqslant b) =$ Ncd(a,b,σ,μ)
  penser à mettre en mode «variable» ($\neq$ liste).

Remarque 6 : Pour $a = -\infty$, prendre $a = -10^{99}$ ou pour $b = +\infty$, prendre $b = 10^{99}$.

3.2. Coefficients u_α ; inversion de la loi normale

Propriété 12 : Si X suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ, alors pour tout $0 < \alpha \leq 1$, il existe un unique $u_\alpha \geqslant 0$ tel que : $P(\mu - u_\alpha\sigma \leqslant X \leqslant \mu + u_\alpha\sigma) = 1-\alpha$

Exercice 11 : *On pose pour $t \geq 0$: $\phi(t) = P(\mu - t\sigma \leqslant X \leqslant \mu + t\sigma)$

1. Calculer $\phi(0)$ et $\lim\limits_{+\infty} \phi$.
2. Justifier que ϕ est continue et strictement croissante.
3. Conclure.

Exercice 12 : Démontrer que : $P(\mu - u_\alpha\sigma \leqslant X \leqslant \mu + u_\alpha\sigma) = 1 - \alpha \Leftrightarrow P(X \leqslant \mu + u_\alpha\sigma) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$

Remarque 7 : Calculatrice : Calcul de a tel que $P(X \leqslant a) = p$ (avec $0 < p < 1$ donné) :

- TI : dans $\boxed{\text{Distrib}}$ (2nde-Var) : $\text{invNorm}(p, \mu, \sigma)$ ou $\text{FracNormale}(p, \mu, \sigma)$
- Casio : $\boxed{\text{OPTN}}$ / STATS / DIST / Norm $\text{invN}(p, \sigma, \mu)$

3.3. Exercices

Exercice 13 : On admet que le temps passé en heures chaque jour devant la TV peut être modélisé par une variable aléatoire X suivant une loi normale de moyenne 4h et d'écart-type 45min. On donnera les résultats au millième près.

1. Déterminer le pourcentage de personnes regardant la télévision entre 3 et 5 heures par jour.
2. Déterminer le pourcentage de personnes regardant la télévision moins de 2 heures par jour.
3. Déterminer les trois nombres Q_1, Med et Q_3 tels que :
   $P(x < Q_1) = \dfrac{1}{4}$; $P(x < Med) = \dfrac{1}{2}$; $P(X < Q_3) = \dfrac{3}{4}$

Exercice 14 : Dans une population, le résultat X au test du QI d'une personne prise au hasard suit une loi normale de moyenne 100 et d'écart-type 15.

1. Déterminer le pourcentage de personnes ayant un QI supérieur à 90 ; inférieur à 85 ; entre 70 et 90.
2. Déterminer le réel k tel que $P(X < k) = 0{,}9$; interpréter.
3. Déterminer la valeur du réel l tel que 60% des personnes ont un QI supérieur à l.

3.4. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Propriété 13 : Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, avec n assez grand (en pratique on prend $np(1-p) > 9$), alors la loi de X est proche de celle de la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ de même espérance (prendre $\mu = np$) et de même écart type (prendre $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$).
Remarque 8 : Problème : Pour une loi normale, la probabilité d'une valeur isolée est nulle. Il semble donc impossible de calculer $P(X = k)$ avec cette approximation.
Approcher la loi binomiale par la loi normale c'est remplacer une loi discrète (celle de $X \sim \mathcal{B}(n, p)$) par une loi continue (celle de $X_c \sim \mathcal{N}(\mu = np, \sigma = \sqrt{np(1-p)})$).
Solution : On remplace donc la probabilité de la valeur isolée x de la variable X par celle d'un intervalle de longueur 1 centré en x pour la variable X_c : $P(X = x) \approx P(x - 0,5 < X_c < x + 0,5)$

Définition 12 : *Cette opération s'appelle la **correction de continuité**.*

Propriété 14 : La variable discrète X étant approchée par la variable continue X_c , on utilise les règles suivantes d'approximation :

- $P(X < n)$ s'obtient avec $P(X_c < n–0{,}5)$;
- $P(X \leqslant n)$ s'obtient avec $P(X_c < n + 0{,}5)$;
- $P(X > n)$ s'obtient avec $P(X_c > n + 0{,}5)$;
- $P(X \geqslant n)$ s'obtient avec $P(X_c > n–0{,}5)$.

On calcule par exemple $P(a < X \leqslant b)$ avec $P(a + 0{,}5 < X_c < b + 0{,}5)$.
Exemple 7 : Soit $X \sim \mathcal{B}\left(50, \frac{1}{2}\right)$.
Les conditions d'approximations de la loi de X par une loi normale sont remplies, et l'on peut considérer que X suit à peu près la loi $\mathcal{N}\left(25, \frac{25}{2}\right)$. Évaluons alors de deux façons $P(24 \leqslant X \leqslant 26)$:

- En valeur exacte avec la loi binomiale : $P(X = 24) + P(X = 25) + P(X = 26) \approx 0{,}3282$
- En valeur approchée avec la loi normale : $P(24 \leqslant X \leqslant 26) \approx 0{,}2222$
- En valeur approchée avec la loi normale corrigée par continuité : $P(23{,}5 \leqslant X \leqslant 26{,}5) \approx 0{,}3286$
  Le résultat est bien meilleur en tenant compte de la correction par continuité.

4. Théorème central-limite

Théorème 1 : Plus généralement que dans le paragraphe précédent, si $X_1, X_2, \ldots$ est une suite de variable aléatoires suivant la même loi (mêmes espérances μ et mêmes écarts-type s), alors leur moyenne $M_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$, pour n assez grand, suit approximativment une loi normale : $\boxed{\mathcal{N}\left(\mu, \frac{s}{\sqrt{n}}\right)}$

Remarque 9 : de petits phénomènes hasardeux de même type, dans la nature, s'«ajoutent», et la contribution de chacun permet d'obtenir à grande échelle des distributions ressemblant à la courbe de la loi normale (appelée aussi courbe de Gauss).