

BTS - Équations Différentielles - TD2

Situations analysées

Le but de ce TD est d'étudier l'évolution de phénomènes physiques décrits par des équations différentielles en découvrant et mettant en place des outils (demi-vie et constante de temps) appropriés.

Situation 1 : on étudie la désintégration radioactive de $N(0) = 1000$ noyaux de carbone 14, dont le nombre $N(t)$, au cours du temps t , en années, évolue selon :
$$\begin{cases} 8267N'(t) + N(t) = 0 \\ N(0) = 1000 \end{cases}.$$

Situation 2 : on étudie la tension $u(t)$ en volt, au cours du temps t en milliseconde, aux bornes d'un condensateur $C=500\text{nF}$ (déchargé), dans un circuit où il est associé en série à une résistance $R=1\text{k}\Omega$, alimenté par une batterie de 12V. Cette tension évolue selon :

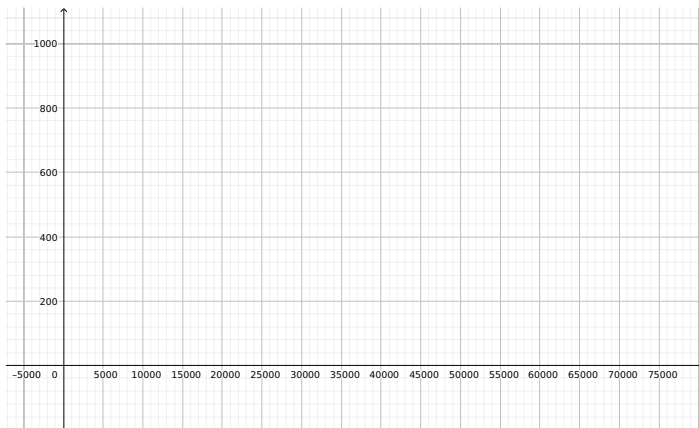
$$\begin{cases} 0,5u'(t) + u(t) = 12 \\ u(0) = 0 \end{cases}.$$

Remarque : le 0,5 est égal à $R \times C$ exprimé en ms.

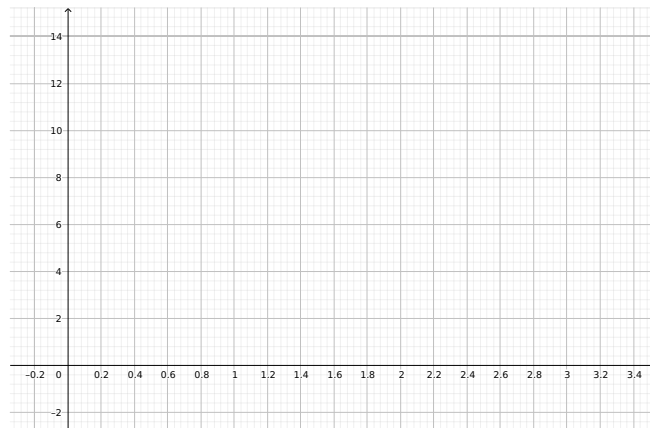
Résoudre et tracer

Exercice 1 : Pour chaque problème :

1. Résoudre l'équation différentielle (avec la condition initiale donnée).
2. Tracer la courbe sur le papier et sur l'ordinateur/calculatrice. On pourra éventuellement visualiser le champ de tangentes associé.
3. Déterminer et tracer la tangente à la courbe en $t = 0$.



Courbe 1



Courbe 2

Régimes transitoires et permanents, demi-vie

Exercice 2 : Pour chaque problème :

1. Calculer l'abscisse τ du point d'intersection de la tangente en 0 avec l'axe horizontal (situation 1) et la droite horizontale passant par 12 (situation 2).

Définition 1 : Ce temps τ est appelé **constante de temps** du problème.

2. Exprimer en pourcentage les valeurs $\frac{N(t)}{N(0)}$ et $\frac{u(t)}{12}$ pour $t \in \{\tau; 2\tau; 3\tau; 4\tau; 5\tau\}$. Que remarque-t-on ?

Définition 2 : La partie $t \geq 5\tau$ est appelée **régime permanent** et celle entre 0 et 5τ est appelée **régime transitoire**.

Justifier ces qualificatifs.

3. À quel pourcentage correspond un temps $t_{\frac{1}{2}} = \tau \ln(2)$?

Définition 3 : $t_{\frac{1}{2}}$ s'appelle **demi-vie**.

4. Le césium 137 a une demi-vie de 30,2 ans. Écrire une équation différentielle décrivant la désintégration de cet isotope.

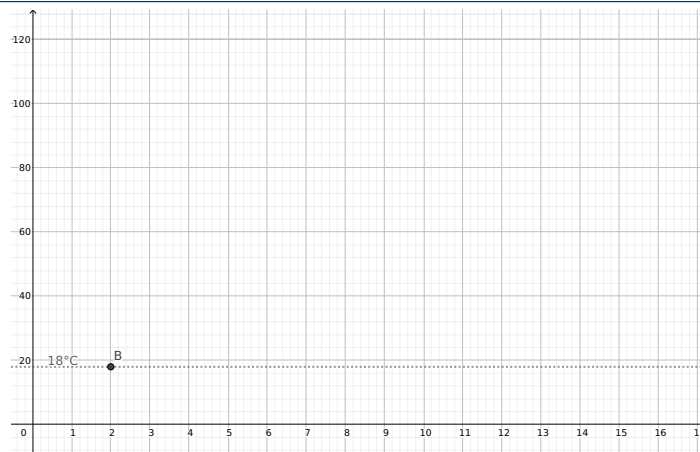
Loi thermique de Newton

Exercice 3 : Loi thermique de Newton : $T'(t) + cT(t) = cT_{\text{ext}}$

- (T) est la température en degrés Celsius ;
- t le temps en minutes ;
- T_{ext} la température extérieure en degrés Celsius, généralement constante ; elle peut être variable si besoin ;
- c est une constante dépendant du matériau

On s'intéresse au refroidissement d'une casserole de semoule : à $t=0$ on stoppe le feu sous la casserole, alors à 100°C . Pour l'eau et les aliments, $c=2$. La température extérieure est 18°C .

1. Écrire et résoudre l'équation différentielle vérifiée par la casserole (avec les conditions initiales).
2. Déterminer la limite de la fonction solution lorsque t tend vers l'infini.
3. Graphiquement, tracer la tangente en $t=0$ à la courbe et vérifier qu'elle passe par B.
4. En déduire la valeur de la constante de temps τ , en minutes.
5. Déterminer le temps correspondant à une demi-chute de la température, de deux manières :
 - Par le calcul de $t_{\frac{1}{2}}$
 - En résolvant une équation en t



Courbe donnant la température en fonction du temps