BTS - Équations Différentielles - DS2 - Sujet A

Prénom NOM : ____

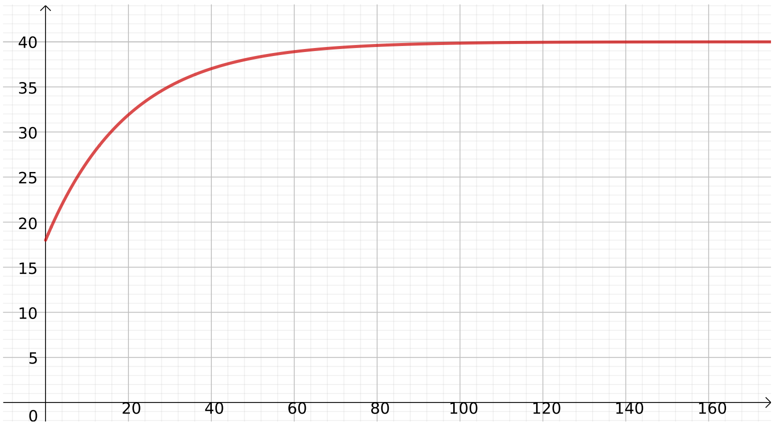
Partie 1 : dispositif de chauffe et de maintien de température (9 points)

On étudie le dispositif de chauffe et de maintien en température d'un récipient.
On note $y(t)$ la température du récipient, en degrés Celsius (°C) à l'instant t exprimé en secondes.
Condition initiale : À t=0, la température est $y(0) = 18$°C.

Dans les conditions de l'expérience, le bilan énergétique se traduit par l'équation différentielle suivante :

$$(E_1) \ : \ y'(t) + 0{,}05y(t) = 2$$

1. Déterminer une solution particulière constante de l'équation différentielle (E_1).
2. $(E_1^*) \ : \ y'(t) + 0{,}05y(t) = 0$ est l'équation homogène associée à (E_1).
   Résoudre cette équation homogène et en déduire toutes les solutions de (E_1).
3. Démontrer que dans les conditions de l'expérience, la température est donnée par : $y(t) = 40 - 22\mathrm{e}^{-0{,}05\mathrm{t}}$
4. Déterminer la température obtenue après un temps assez long, dite température «stationnaire», en calculant $\lim\limits_{t \to +\infty} 40 - 22\mathrm{e}^{-0{,}05\mathrm{t}}$
5. On a tracé la courbe de $y(t)$ dans le repère suivant :



   Tracer, sur le graphique, la tangente en t=0 et l'asymptote à la courbe.
6. faire apparaître la constante de temps τ sur la figure.
7. Déterminer, au centième de seconde près, l'instant t à partir duquel la température dépasse 29°C.
8. Calculer, en faisant apparaître les étapes, la dérivée de $Y(t) = 40t + 440\mathrm{e}^{-0{,}05\mathrm{t}}$. Il s'agit d'une primtive de $y(t)$.
9. En déduire la température moyenne de t=0 secondes à t=100 secondes en calculant :
   $m = \dfrac{1}{100} \int_0^{100} 40 - 22\mathrm{e}^{-0{,}05\mathrm{t}} \ \mathrm{dt}$

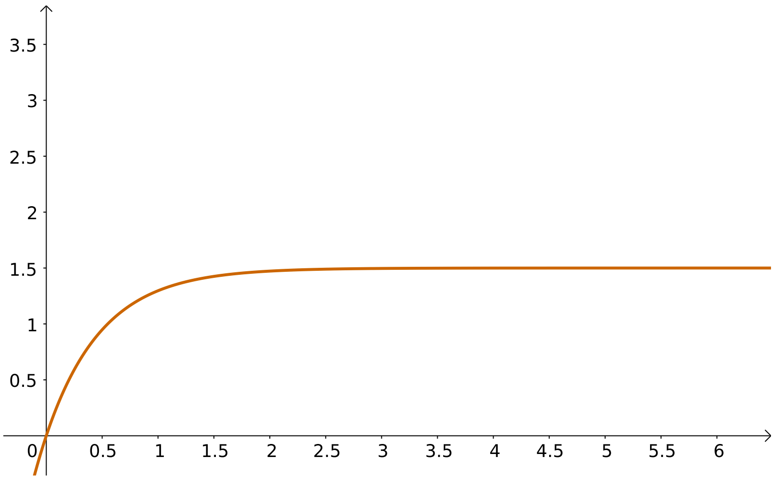
Partie 2 : Tri sélectif (3 points)

Voici 3 équations différentielles :

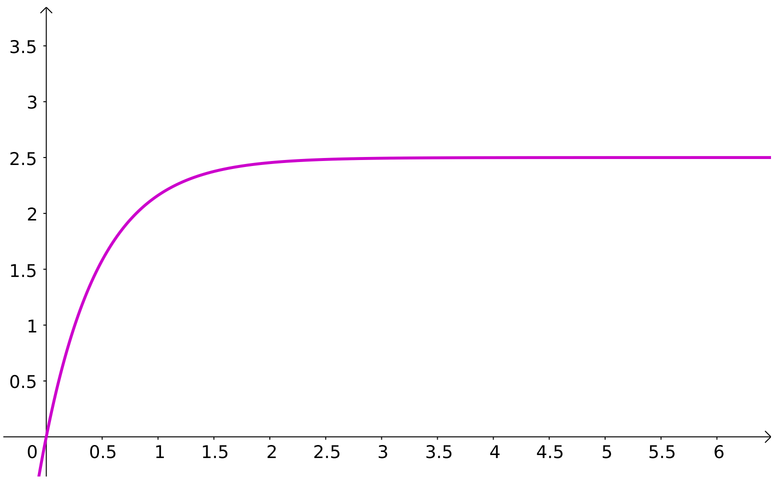
$$(A)\ :\ \begin{cases} 2y'(t)+4y(t)=6 \\ y(0)=0 \end{cases} \quad (B)\ :\ \begin{cases} 5y'(t)+10y(t)=25 \\ y(0)=0 \end{cases} \quad (C)\ :\ \begin{cases} 2y'(t)+8y(t)=16 \\ y(0)=4 \end{cases}$$

ainsi que 3 courbes :

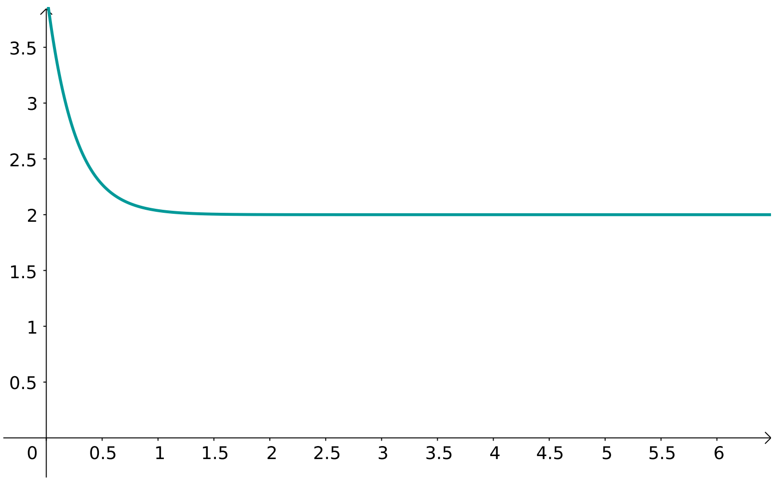
Fonction f :



Fonction g :



Fonction h :



En justifiant rapidement pour chaque fonction, déterminer de quelle équation différentielle, parmi celles données ci-dessus, elle peut être la solution.

BTS - Équations Différentielles - DS2 - Sujet B

Prénom NOM : ____

Partie 1 : dispositif de refroidissement et de maintien de température (9 points)

On étudie le dispositif de congélation d'un récipient.

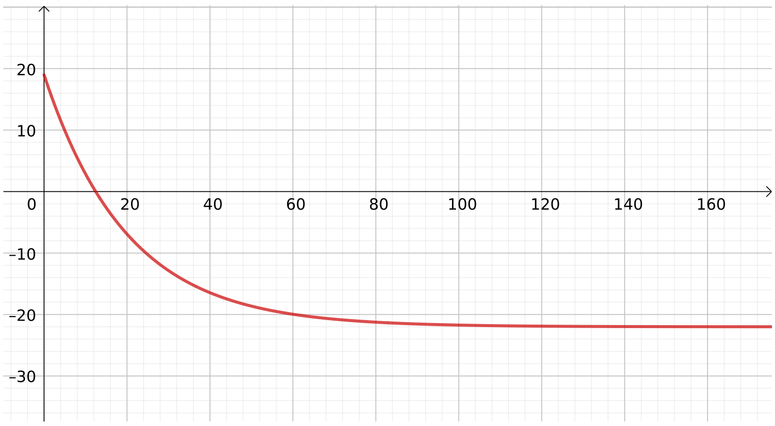
On note $y(t)$ la température du récipient, en degrés Celsius (°C) à l'instant t exprimé en secondes.

Condition initiale : À t=0, la température est $y(0) = 19$°C.

Dans les conditions de l'expérience, le bilan énergétique se traduit par l'équation différentielle suivante :

$$(E_1) \ : \ \ y'(t) + 0{,}05y(t) = -1{,}1$$

1. Déterminer une solution particulière constante de l'équation différentielle (E_1).
2. $(E_1^*) \ : \ \ y'(t) + 0{,}05y(t) = 0$ est l'équation homogène associée à (E_1).
   Résoudre cette équation homogène et en déduire toutes les solutions de (E_1).
3. Démontrer que dans les conditions de l'expérience, la température est donnée par : $y(t) = -22 + 41\mathrm{e}^{-0{,}05\mathrm{t}}$
4. Déterminer la température obtenue après un temps assez long, dite température «stationnaire», en calculant $\lim\limits_{t \to +\infty} -22 + 41\mathrm{e}^{-0{,}05\mathrm{t}}$
5. On a tracé la courbe de $y(t)$ dans le repère suivant :



   Tracer, sur le graphique, la tangente en t=0 et l'asymptote à la courbe.
6. faire apparaître la constante de temps τ sur la figure.
7. Déterminer, au centième de seconde près, l'instant t à partir duquel la température vaut 0°C.
8. Calculer, en faisant apparaître les étapes, la dérivée de $Y(t) = -22t - 820\mathrm{e}^{-0{,}05\mathrm{t}}$. Il s'agit d'une primtive de $y(t)$.
9. En déduire la température moyenne de t=0 secondes à t=100 secondes en calculant :
   $m = \dfrac{1}{100} \int_0^{100} \ -22 + 40\mathrm{e}^{-0{,}05\mathrm{t}} \ \mathrm{dt}$

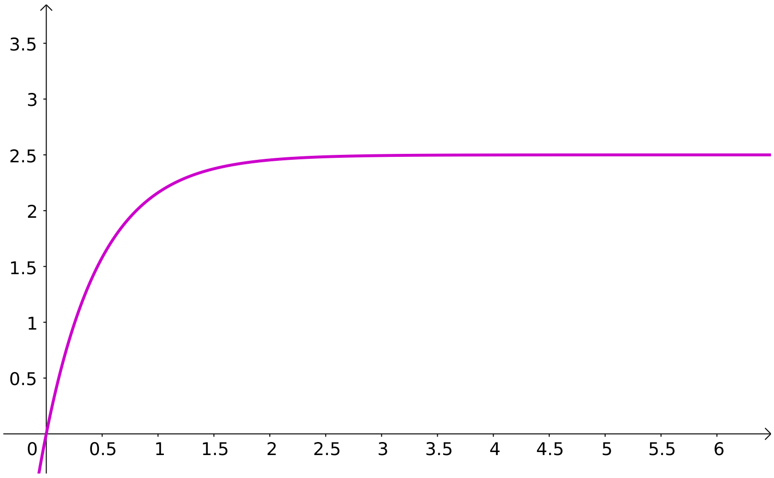
Partie 2 : Tri sélectif (3 points)

Voici 3 équations différentielles :

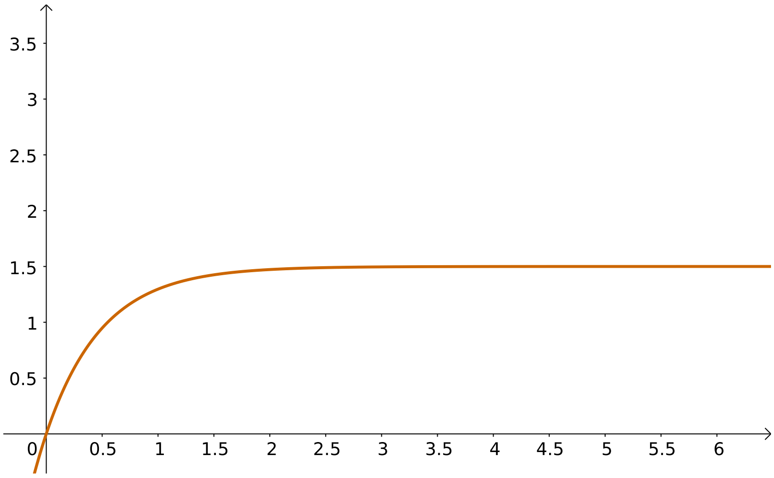
$$(A)\ :\ \begin{cases}2y'(t)+4y(t)=6\\ y(0)=0\end{cases}\quad (B)\ :\ \begin{cases}5y'(t)+10y(t)=25\\ y(0)=0\end{cases}\quad (C)\ :\ \begin{cases}2y'(t)+8y(t)=16\\ y(0)=4\end{cases}$$

ainsi que 3 courbes :

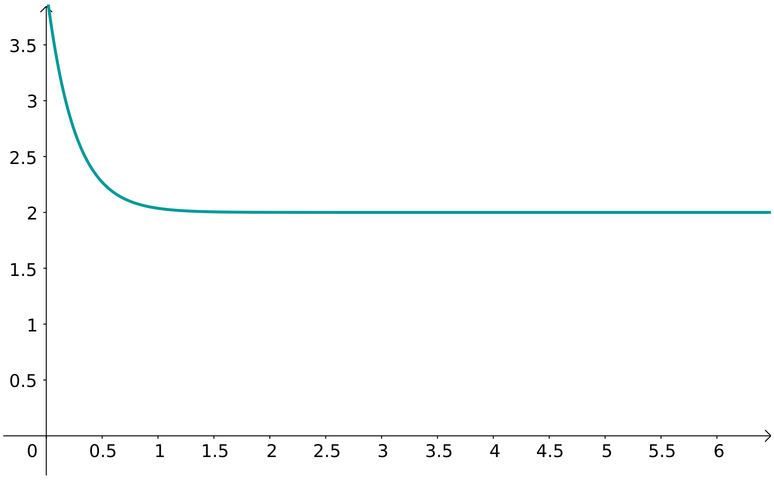
Fonction f :



Fonction g :



Fonction h :



En justifiant rapidement pour chaque fonction, déterminer de quelle équation différentielle, parmi celles données ci-dessus, elle peut être la solution.