

BTS - Equations Différentielles et plans d'expériences - DS - A

Exercice 1 : Équations Différentielles (10 points)

On considère deux réactions totales et successives d'ordre 1 dans un milieu homogène. Celles-ci concernent trois produits A, B et C, selon le schéma est le suivant : $A_{[f]} \xrightarrow{k_1} B_{[g]} \xrightarrow{k_2} C_{[h]}$ où f, g et h sont les concentrations relatives des produits A, B et C à l'instant t (en minutes) ($t \geq 0$), concentrations que l'on souhaite déterminer en fonction de t . Les conditions initiales sont les suivantes : $f(0) = 1, g(0) = 0$ et $h(0) = 0$.

Exercice 1 :

- L'étude cinétique permet d'abord d'écrire l'équation différentielle $\begin{cases} (E_1) & : f'(t) + 0,5f(t) = 0 \\ (ci_1) & : f(0) = 1 \end{cases}$
 - Vrai ou faux (pas de justification demandée) : (E_1) est homogène.
 - Déterminer les solutions générales de (E_1) .
 - Déterminer la solution f qui vérifie la condition initiale (ci_1) .
- L'étude cinétique permet ensuite d'écrire l'équation (E_2) vérifiée par g : $\begin{cases} (E_2) & : g'(t) + g(t) = 0,5e^{-0,5t} \\ (ci_2) & : g(0) = 0 \end{cases}$
On veut vérifier que $g(t) = e^{-0,5t} - e^{-t}$ est solution de (E_2) . Pour cela :
 - Calculer $g(0)$
 - Calculer $g'(t)$ pour tout t .
 - Simplifier l'expression $g'(t) + g(t)$ et conclure.
- D'après le principe de conservation de la matière, on a, pour tout nombre réel t positif : $f(t) + g(t) + h(t) = f(0) + g(0) + h(0)$. Exprimer alors $h(t)$ en fonction de t .
- En remarquant que $g'(t) = e^{-0,5t}(-0,5 + e^{-0,5t})$, déterminer l'instant t pour lequel g atteint un maximum.

Exercice 2 : Plans d'Expérience (10 points)

Niveaux

Niveau	Dilution	Surface
-1	10%	5cm ²
1	90%	10cm ²

Un technicien étudie le courant d'électrolyse traversant une cellule contenant une solution d'un électrolyte donné. Il souhaite optimiser ce courant en faisant varier deux facteurs :

- la dilution de la solution, comprise entre 10% et 90% ;
- la surface de l'électrode comprise entre 5 et 10 cm²;

pour cela, il va réaliser un plan d'expérience 2² avec interaction, construit selon l'algorithme de Yates.

résultats des expériences

Expérience	Dilution	Surface	Courant
1	10%	5cm ²	15%
2	90%	5cm ²	9%
3	10%	10cm ²	17%
4	90%	10cm ²	11%

Le courant traversant le circuit est ensuite mesuré et est exprimé par le rapport de ce courant à un courant servant de référence, ce qui permet de l'exprimer en pourcentage. Cette valeur Y est modélisée par une expression de la forme : $Y = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + a_{12}X_1X_2 + \varepsilon$ est une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne nulle. Elle sera ignorée dans les calculs.

- X_1 représente la dilution ;
- X_2 la surface de l'électrode ;

Exercice 2 :

1. Compléter la matrice des effets sur le tableau ci-après.
2. Calculer une estimation ponctuelle des coefficients du modèle et écrire l'expression complète du modèle.
3. Certains effets sont-ils à négliger (justifier) ?
4. Exprimer Y en fonction de X_2 dans le cas d'une dilution de 50%.
5. Que conseilleriez-vous au technicien afin d'obtenir un courant maximum ?

Expériences	Global	X_1	X_2	X_1X_2	Passage du courant
1					15%
2					9%
3					17%
4					11%

BTS - Equations Différentielles et plans d'expériences - DS - B

Exercice 1 : Équations Différentielles (10 points)

On considère deux réactions totales et successives d'ordre 1 dans un milieu homogène. Celles-ci concernent trois produits A, B et C, selon le schéma est le suivant : $A_{[f]} \xrightarrow{k_1} B_{[g]} \xrightarrow{k_2} C_{[h]}$ où f , g et h sont les concentrations relatives des produits A, B et C à l'instant t (en minutes) ($t \geq 0$), concentrations que l'on souhaite déterminer en fonction de t . Les conditions initiales sont les suivantes : $f(0) = 1$, $g(0) = 0$ et $h(0) = 0$.

Exercice 1 :

- L'étude cinétique permet d'abord d'écrire l'équation différentielle $\begin{cases} (E_1) & : f'(t) + 0,5f(t) = 0 \\ (ci_1) & : f(0) = 1 \end{cases}$
 - Vrai ou faux (pas de justification demandée) : (E_1) est homogène.
 - Déterminer les solutions générales de (E_1) .
 - Déterminer la solution f qui vérifie la condition initiale (ci_1) .
- L'étude cinétique permet ensuite d'écrire l'équation (E_2) vérifiée par g : $\begin{cases} (E_2) & : g'(t) + g(t) = 0,5e^{-0,5t} \\ (ci_2) & : g(0) = 0 \end{cases}$
On veut vérifier que $g(t) = e^{-0,5t} - e^{-t}$ est solution de (E_2) . Pour cela :
 - Calculer $g(0)$
 - Calculer $g'(t)$ pour tout t .
 - Simplifier l'expression $g'(t) + g(t)$ et conclure.
- D'après le principe de conservation de la matière, on a, pour tout nombre réel t positif : $f(t) + g(t) + h(t) = f(0) + g(0) + h(0)$. Exprimer alors $h(t)$ en fonction de t .
- En remarquant que $g'(t) = e^{-0,5t}(-0,5 + e^{-0,5t})$, déterminer l'instant t pour lequel g atteint un maximum.

Exercice 2 : Plans d'Expérience (10 points)

Niveaux

Niveau	Dilution	Température
-1	10%	50°C
1	90%	80°C

Un technicien étudie le courant d'électrolyse traversant une cellule contenant une solution d'un électrolyte donné. Il souhaite optimiser ce courant en faisant varier trois facteurs :

- la dilution de la solution, comprise entre 10% et 90% ;
- la température de la solution, comprise entre 50°C et 80°C ;
- la surface de l'électrode comprise entre 5 et 10 cm²;

pour cela, il va réaliser un plan d'expérience 2², construit selon l'algorithme de Yates.

résultats des expériences

Expérience	Dilution	Température	Courant
1	10%	50°C	17%
2	90%	50°C	11%
3	10%	80°C	64%
4	90%	80°C	54%

Le courant traversant le circuit est ensuite mesuré et est exprimé par le rapport de ce courant à un courant servant de référence, ce qui permet de l'exprimer en pourcentage. Cette valeur Y est modélisée par une expression de la forme :

$$Y = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + a_{12}X_1X_2 + \varepsilon$$

ε est une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne nulle. Elle sera ignorée dans les calculs.

- X_1 représente la dilution ;
- X_2 la température ;

Exercice 2 :

1. Compléter la matrice des effets sur le tableau ci-après.
2. Calculer une estimation ponctuelle des coefficients du modèle et écrire l'expression complète du modèle.
3. Certains effets sont-ils à négliger (justifier) ?
4. Exprimer Y en fonction de X_2 dans le cas d'une dilution de 50%.
5. Que conseilleriez-vous au technicien afin d'obtenir un courant maximum ?

Expériences	Global	X_1	X_2	X_{12}	Passage du courant
1					17%
2					11%
3					64%
4					54%

BTS - Equations Différentielles et plans d'expériences - DS - C

Exercice 1 : Équations Différentielles (10 points)

On considère deux réactions totales et successives d'ordre 1 dans un milieu homogène. Celles-ci concernent trois produits A, B et C, selon le schéma est le suivant : $A_{[f]} \xrightarrow{k_1} B_{[g]} \xrightarrow{k_2} C_{[h]}$ où f , g et h sont les concentrations relatives des produits A, B et C à l'instant t (en minutes) ($t \geq 0$), concentrations que l'on souhaite déterminer en fonction de t . Les conditions initiales sont les suivantes : $f(0) = 1$, $g(0) = 0$ et $h(0) = 0$.

Exercice 1 :

- L'étude cinétique permet d'abord d'écrire l'équation différentielle $\begin{cases} (E_1) & : f'(t) + 0,5f(t) = 0 \\ (ci_1) & : f(0) = 1 \end{cases}$
 - Vrai ou faux (pas de justification demandée) : (E_1) est homogène.
 - Déterminer les solutions générales de (E_1) .
 - Déterminer la solution f qui vérifie la condition initiale (ci_1) .
- L'étude cinétique permet ensuite d'écrire l'équation (E_2) vérifiée par g : $\begin{cases} (E_2) & : g'(t) + g(t) = 0,5e^{-0,5t} \\ (ci_2) & : g(0) = 0 \end{cases}$
On veut vérifier que $g(t) = e^{-0,5t} - e^{-t}$ est solution de (E_2) . Pour cela :
 - Calculer $g(0)$
 - Calculer $g'(t)$ pour tout t .
 - Simplifier l'expression $g'(t) + g(t)$ et conclure.
- D'après le principe de conservation de la matière, on a, pour tout nombre réel t positif : $f(t) + g(t) + h(t) = f(0) + g(0) + h(0)$. Exprimer alors $h(t)$ en fonction de t .
- En remarquant que $g'(t) = e^{-0,5t}(-0,5 + e^{-0,5t})$, déterminer l'instant t pour lequel g atteint un maximum.

Exercice 2 : Plans d'Expérience (10 points)

Niveaux

Niveau	Dilution	Température	Surface
-1	10%	50°C	5cm ²
1	90%	80°C	10cm ²

Un technicien étudie le courant d'électrolyse traversant une cellule contenant une solution d'un électrolyte donné.

Il souhaite optimiser ce courant en faisant varier trois facteurs :

- la dilution de la solution, comprise entre 10% et 90% ;
- la température de la solution, comprise entre 50°C et 80°C ;
- la surface de l'électrode comprise entre 5 et 10 cm²;

pour cela, il va réaliser un plan d'expérience 2³, sans tenir compte des interactions, construit selon l'algorithme de Yates.

résultats des expériences

Expérience	Dilution	Température	Surface	Courant
1	10%	50°C	5cm ²	15%
2	90%	50°C	5cm ²	9%
3	10%	80°C	5cm ²	61%
4	90%	80°C	5cm ²	49%
5	10%	50°C	10cm ²	17%
6	90%	50°C	10cm ²	11%
7	10%	80°C	10cm ²	64%
8	90%	80°C	10cm ²	54%

Le courant traversant le circuit est ensuite mesuré et est exprimé par le rapport de ce courant à un courant servant de référence, ce qui permet de l'exprimer en pourcentage. Cette valeur Y est modélisée par une expression de la forme :

$Y = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + \varepsilon$ où l'on ne tient pas compte des interactions.

ε est une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne nulle. Elle sera ignorée dans les calculs.

- X_1 représente la dilution ;
- X_2 la température ;
- X_3 la surface de l'électrode ;

Exercice 2 :

1. Compléter la matrice des effets sur le tableau ci-après.
2. Calculer une estimation ponctuelle des coefficients du modèle et écrire l'expression complète du modèle.
3. Certains effets sont-ils à négliger (justifier) ?
4. Exprimer Y en fonction de X_2 dans le cas d'une dilution de 50%.
5. Que conseilleriez-vous au technicien afin d'obtenir un courant maximum ?

Expériences	Global	X_1	X_2	X_3	Passage du courant
1					15%
2					9%
3					61%
4					49%
5					17%
6					11%
7					64%
8					54%