BTS - Équations Différentielles - TD2

Situations analysées

Le but de ce TD est d'étudier l'évolution de phénomènes physiques décrits par des équations différentielles en découvrant et mettant en place des outils (demi-vie et constante de temps) appropriés.

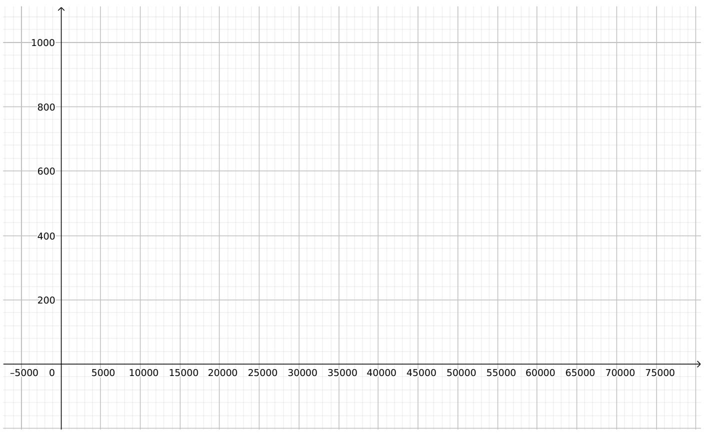
Situation 1 : on étudie la désintégration radioactive de $N(0) = 1000$ noyaux de carbone 14, dont le nombre $N(t)$, au cours du temps t, en années, évolue selon : $\begin{cases} 8267N'(t) + N(t) = 0 \\ N(0) = 1000 \end{cases}$.

Situation 2 : on étudie la tension $u(t)$ en volt, au cours du temps t en milliseconde, aux bornes d'un condensateur C=500nF (déchargé), dans un circuit où il est associé en série à une résistance R=1kΩ, alimenté par une batterie de 12V. Cette tension évolue selon :
$\begin{cases} 0{,}5u'(t) + u(t) = 12 \\ u(0) = 0 \end{cases}$. Remarque : le 0,5 est égal à $R \times C$ exprimé en ms.

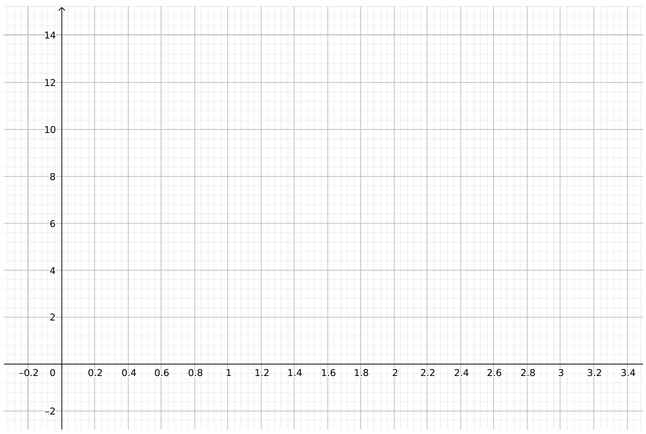
Résoudre et tracer

Exercice 1 : Pour chaque problème :

1. Résoudre l'équation différentielle (avec la condition initiale donnée).
2. Tracer la courbe sur le papier et sur l'ordinateur/calculatrice. On pourra éventuellement visualiser le champ de tangentes associé.
3. Déterminer et tracer la tangente à la courbe en $t = 0$.



Courbe 1



Courbe 2

Régimes transitoires et permanents, demi-vie

Exercice 2 : Pour chaque problème :

1. Calculer l'abscisse τ du point d'intersection de la tangente en 0 avec l'axe horizontal (situation 1) et la droite horizontale passant par 12 (situation 2).

   Définition 1 : *Ce temps τ est appelé* ***constante de temps*** *du problème.*

2. Exprimer en pourcentage les valeurs $\frac{N(t)}{N(0)}$ et $\frac{u(t)}{12}$ pour $t \in \{\tau; 2\tau; 3\tau; 4\tau; 5\tau\}$. Que remarque-t-on ?

   Définition 2 : *La partie $t \geqslant 5\tau$ est appelée* ***régime permanent*** *et celle entre 0 et 5τ est appelée* ***régime transitoire****.*

   Justifier ces qualificatifs.

3. À quel pourcentage correspond un temps $t_{\frac{1}{2}} = \tau \ln(2)$?

   Définition 3 : *$t_{\frac{1}{2}}$ s'appelle* ***demi-vie****.*

4. Le césium 137 a une demi-vie de 30,2 ans. Écrire une équation différentielle décrivant la désintégration de cet isotope.

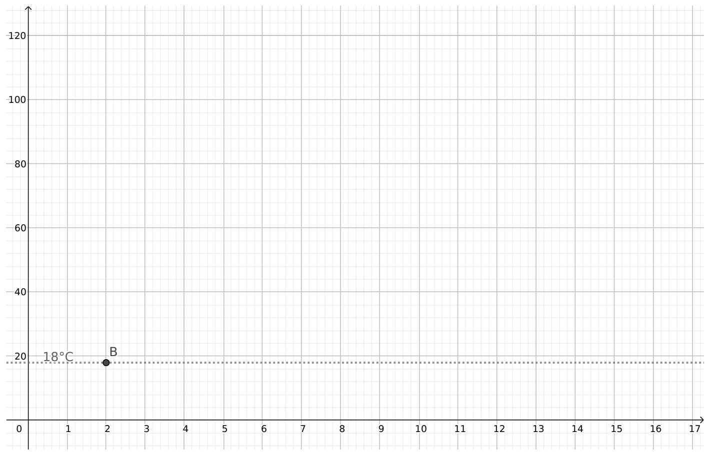
Loi thermique de Newton

Exercice 3 : Loi termique de Newton : $\boxed{T'(t) + cT(t) = cT_{\text{ext}}}$

- (\T\) est la température en degrés Celsius ;
- t le temps en minutes ;
- T_{ext} la température extérieure en degrés Celsius, généralement constante ; elle peut être variable si besoin ;
- c est une constante dépendant du matériau

On s'intéresse au refroidissement d'une casserole de semoule : à t=0 on stoppe le feu sous la casserole, alors à 100°C. Pour l'eau et les aliments, c=0,5. La température extérieure est 18°C.

1. Écrire et résoudre l'équation différentielle vérifiée par la casserole (avec les conditions initiales).
2. Déterminer la limite de la fonction solution lorsque t tend vers l'infini.
3. Graphiquement, tracer la tangente en t=0 à la courbe et vérifier qu'elle passe par B.
4. En déduire la valeur de la constante de temps τ, en minutes.
5. Déterminer le temps correspondant à une demi-chute de la température, de deux manières :
    - Par le calcul de $t_{\frac{1}{2}}$
    - En résolvant une équation en t



Courbe donnant la température en fonction du temps