# BTS - Initiation aux plans d'expériences - Cours

## 1. Introduction

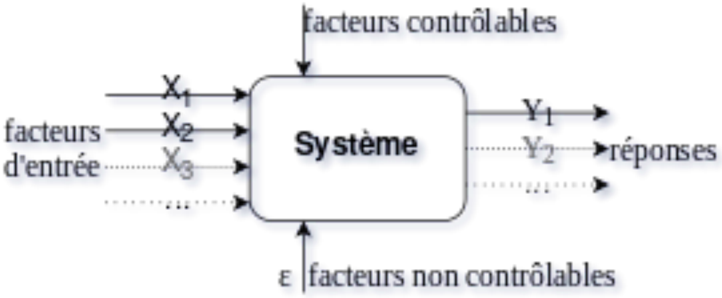
***Définition 1 :** Les **plans d'expériences**, en anglais : DOE pour design of experiments, désignent un **modèle mathématique et une méthode** associée développés par Ronald A. Fisher dans les années 1920.*

**Proposition 1 :**

- **But :** obtenir un maximum de renseignements en un minimum d'essais expérimentaux.
- **Avantage :** les calculs réalisés sont facilement programmables.
- **Limite :** on n'obtient directement l'explication physico-chimique modélisé.

## 2. Le modèle mathématique

### 2.1. Relation entrées/sorties




***Définition 2 : Notations :***

- *les **facteurs d'entrée** $X_k$ et les **réponses** $Y_l$ sont des valeurs réelles (mesures) ;*
- *On cherche à modéliser **une des réponses** en fonction des entrées. On la note $Y$.*
- *On note $p$ le nombre d'entrées : $X_1, \dots, X_p$.*
- *Le nombre de mesures effectuées (expérimentalement) pour chaque entrée $X_k$ est noté $n_k$, pour **nombre de niveaux**.*
  *Le nombre total d'expériences réalisables est alors $N = n_1 \times \cdots \times n_p$.*
  *Dans ce cours (et souvent), on utilise $n = 2$ ; on a alors $2^p$ expériences possibles : on parle de **plan complet** $2^p$.*
- *On prend acte des facteurs contrôlables (fixés) dans l'effet global, et des **perturbations ε** (facteurs non contrôlables).*
- *Il faudra, selon les situations, parfois tenir compte de **interactions** entre les entrées.*

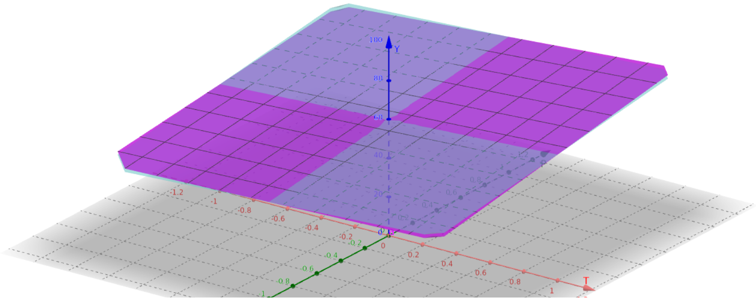
***Modèle mathématique :***

- *Pour un plan factoriel $2^2$, sans interaction : $Y = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + \varepsilon$*
- *Pour un plan factoriel $2^2$, avec interaction : $Y = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + a_{1\,2}X_1X_2 + \varepsilon$*
- *Pour un plan factoriel $2^3$, sans interaction : $Y = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + \varepsilon$*
- *Pour un plan factoriel $2^3$, avec interaction :*
  $Y = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_{1\,2}X_1X_2 + a_{1\,3}X_1X_3 + a_{2\,3}X_2X_3 + a_{1\,2\,3}X_1X_2X_3 + \varepsilon$

***Notations du modèle mathématique :***

- *$a_0$ est appelé **l'effet global** : il estime la **moyenne** des réponses, c'est la valeur centrale de Y.*
- *$a_k$, pour $k \geqslant 1$ est appelé **l'effet moyen de** $X_k$*
- *$a_{k\,l}$ est appelé **l'interaction** entre $X_k$ et $X_l$ ; il estime l'influence de l'interaction entre les deux facteurs concernés.*
  *Il en va de même pour 3 facteurs ou plus.*
- *$\varepsilon$ est appelé le **bruit** ; c'est une variable aléatoire qui tient compte de tous les facteurs autres que ceux étudiés.*

**Exercice 1 :**

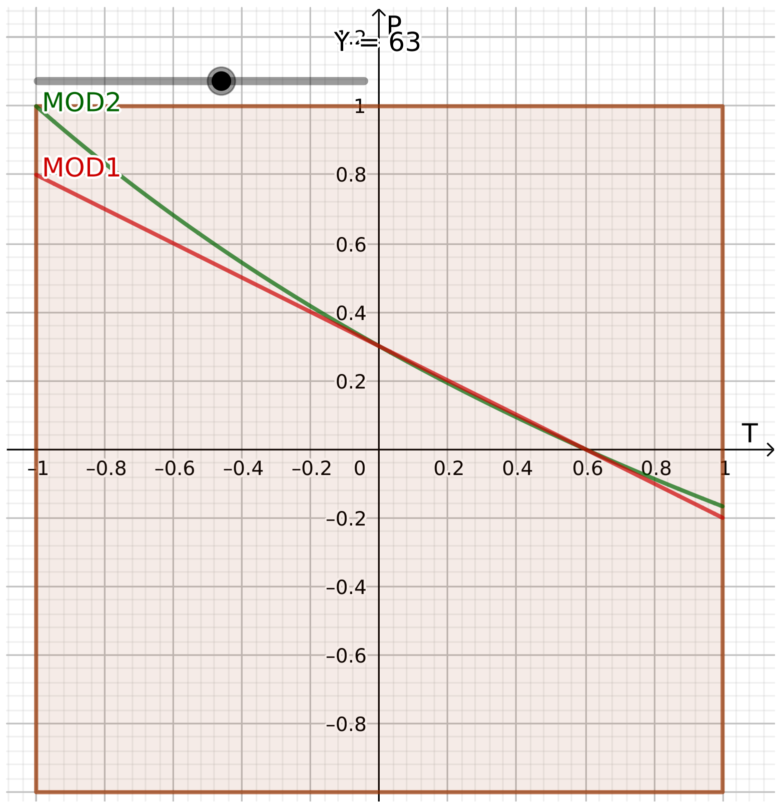


*Surface Y en fonction de T et P*

Dans cet exercice, on analyse **deux modèles** décrivant le rendement $Y$ (entre 0 et 100) d'une réaction chimique en fonction de deux facteurs d'entrée : la température $X_1 = T$ et la pression $X_2 = P$ ; ces deux entrées sont données, ici, en **unités arbitraires** (ua) : variant entre -1 et 1.

**MOD1 :** $Y = 60 + 5T + 10P + \varepsilon$ et **MOD2 :** $Y = 60 + 5T + 10P + 2TP + \varepsilon$

1. Identifier l'effet global et les effets moyens sur chaque modèle en précisant les valeurs.
2. Quel modèle fait apparaître une interaction entre les deux entrées ?
3. Donner les réponses, pour chaque modèle, lorsque $T = 0{,}5$ et $P = -0{,}2$.




*Courbes isoréponses T-P pour Y=63*

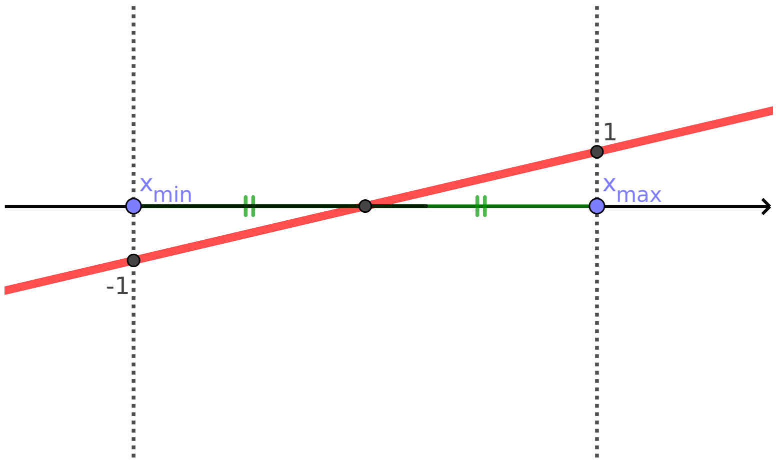
4. Quelle entrée est la plus efficace pour améliorer le rendement ?
5. Exprimer $P$ en fonction de $T$ pour un rendement $Y = 70$ ; on néglige les perturbations.
6. **Généralisation :** exprimer $P$ en fonction de $T$ pour un rendement $Y$ indéterminé.

***Définition 3 :*** *Une telle courbe s'appelle* ***courbe isoréponse*** *(cf figure ci-dessus).*

**Remarque 1 :** Les modèles étudiés correspondent à des développements limités, au voisinage de 0, d'ordre 1 pour ceux sans interaction. Si on tient compte d'interactions, on rajoute des termes (d'ordre 2 pour $X_k X_l$ et 3 pour $X_k X_l X_m$ ) à ce développement en 0. D'où l'idée de coder les valeurs des entrées par l'intervalle [-1;1] :

## 2.2. Codage affine des entrées (de Yates)

***Définition 4 :***




*Codage de Yates*

- *La valeur donnée à un facteur d'entrée pour réaliser un essai est appelée* ***niveau****.*
- *En pratique, le* ***domaine du facteur*** *(ensemble des valeurs du facteur d'entrée que l'on peut, ou veut, tester) est borné, de la forme* $[x_{\min}; x_{\max}]$.
  *Notant cela, Frack Yates (1902-1993) choisit de* ***ramener chaque domaine dans l'intervalle [-1;1]*** *en appliquant une fonction affine (codage de Yates) : ramener ces valeurs dans un même intervalle permet de mieux les comparer (quelle entrée a le plus d'influence, etc).*
- *Le niveau -1 est appelé «****niveau bas****» et le 1 «****niveau haut****».*
  *En pratique, on se limite souvent aux deux niveaux, le bas et le haut, pour tester chaque entrée.*

**Exercice 2 :** Déterminer le codage de Yates, de la forme $X = ax + b$ pour les grandeurs suivantes :

1. $P$ pour une pression $p$ comprise entre 1 et 2 bar ;
2. $T$ pour une température $\theta$ comprise entre 60°C et 80°C ;
3. $L$ pour une longueur $l$ comprise entre 1 micron et 10 microns ;
4. $S$ pour un coefficient d'agrandissement/réduction $s$ compris entre -20% et 50% ;
5. **Cas général :**
   $X$ pour une valeur $x$ comprise entre $x_{\min}$ et $x_{\max}$ ;

**Proposition 2 :** Codage de Yates $X \;:\; [x_{\min}; x_{\max}] \to [-1; 1]$ $\boxed{x \mapsto X = \frac{2}{x_{\max} - x_{\min}}\left(x - \frac{x_{\min} + x_{\max}}{2}\right)}$

**Exercice 3 :** Réciproque ($x$ en fonction de $X$) : justifier que $\boxed{x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2} X + \frac{x_{\min} + x_{\max}}{2}}$