# BTS - CCF Blanc - CH

**Prénom NOM classe :**

## Exercice 1 : Plan d'expérience (10 points)

Pour établir un modèle du rendement en trichlorométhane, on réalise un plan factoriel d'expériences $2^2$ (avec interaction) portant sur deux facteurs $X_1$ et $X_2$. Ce plan d'expériences est construit selon l'algorithme de Yates.

- $X_1$ représente la température dans le réacteur, de 50°C à 100°C ;
- $X_2$ représente la durée de passage dans le réacteur, de 10 minutes à 20 minutes ;

**Niveaux**

| Niveau | Température | Durée |
|---|---|---|
| -1 | 50°C | 10 min |
| 1 | 100°C | 20 min |

On suppose que le rendement Y du phénomène est modélisé par une expression de la forme :

$$Y = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + a_{12}X_1X_2 + \varepsilon$$

où $\varepsilon$ est une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne nulle. Elle sera ignorée dans les calculs.

**résultats des expériences**

| Expérience | Température | Durée | Rendement |
|---|---|---|---|
| 1 | 50°C | 10 min | 0,05 |
| 2 | 100°C | 10 min | 0,10 |
| 3 | 50°C | 20 min | 0,15 |
| 4 | 100°C | 20 min | 0,25 |

1. Compléter la matrice des effets sur le tableau ci-après :

| Expériences | Global | $X_1$ | $X_2$ | $X_1X_2$ | $Y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | |
| 2 | | | | | |
| 3 | | | | | |
| 4 | | | | | |

2. Calculer une estimation ponctuelle des coefficients du modèle et écrire l'expression complète du modèle.

3. Certains effets sont-ils à négliger (discuter) ?

4. Exprimer $Y$ en fonction de $X_1$ dans le cas d'une durée de 15 minutes.

## Exercice 2 : Étude de la cinétique d'une réaction en chaîne (10 points)

On considère un réacteur dans lequel on fait réagir du $CH_4$ dans du $Cl_2$ en excès.
Dans ce cas, on peut modéliser les réactions par des cinétiques d'ordre 1 :
$CH_4 \rightarrow CH_3Cl \rightarrow CH_2Cl_2 \rightarrow$ ... (la réaction peut se poursuivre avec d'autres réactifs)

Le temps t est exprimé en minutes.
Les valeurs approchées seront arrondies au centième le plus proche.
$[CH_4](t)$ étant la concentration en $CH_4$ à l'instant t , on pose $f(t) = \frac{[CH_4](t)}{[CH_4](0)}$, de manière à ce que l'on ait $f(0) = 100\% = 1$.
Les lois cinétiques donnent l'équation différentielle suivante :

$$(E_1) : f'(t) + 4f(t) = 0$$

1. a. Donner la solution générale de l'équation différentielle $(E_1)$.

   b. Déterminer la solution de l'équation $(E_1)$ qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1$.

2. [$CH_3Cl$] étant la concentration en $CH_3Cl$ à l'instant t , on pose $g(t) = [CH_3](t)$. À l'instant t = 0, la concentration en $CH_3Cl$ est nulle, donc $g(0) = 0$.
   Les lois cinétiques donnent l'équation différentielle suivante :

$$(E_2) : y' + 3y = 4\mathrm{e}^{-4t}$$

   a. Écrire les solutions de l'équation différentielle homogène associée $y' + 3y = 0$ (inutile de détailler).

   b. On pose $s(t) = A\mathrm{e}^{-4t}$ où $A$ est une constante réelle.
   Calculer $s'(t) + 3s(t)$ en fonction de $A$ et de $t$.

   c. En déduire pour quelle valeur de $A$ la fonction $s$ est une solution particulière de l'équation $(E_2)$.

3. En déduire les solutions générales de l'équation différentielle $(E_2)$.

4. Déterminer la solution de l'équation différentielle $(E_2)$ qui vérifie la condition initiale $g(0) = 0$

# Exercice 3 : Probabilités (10 points)

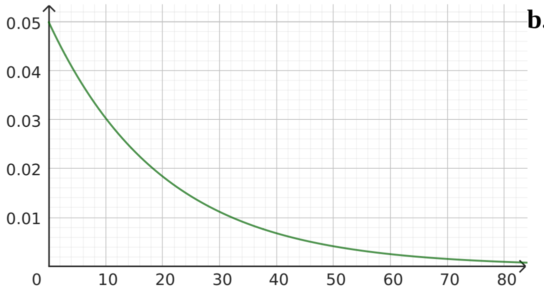
Un amplificateur audio (ancien) contient deux composants essentiels à son fonctionnement : un potentiomètre (résistance variable) et un tube à vide (ancètre du transistor).

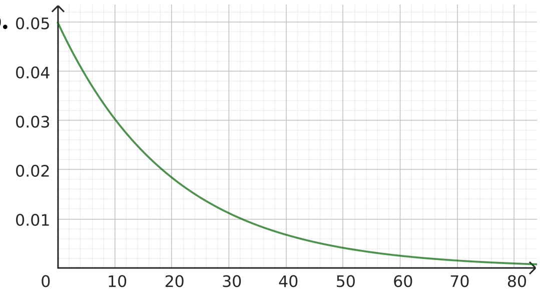
## Partie A : temps de bon fonctionnement du potentiomètre

Le temps de bon fonctionnement (sans entretien), en années, d'un potentiomètre, est une variable aléatoire R positive qui suit, dans des conditions normales d'utilisation, une loi continue dont la densité est la fonction $f(t) = 0{,}05\mathrm{e}^{-0{,}05t}$.

1. Hachurer, sur les diagrammes suivants, les surfaces dont les aires correspondent aux probabilités suivantes :
   a. $P(2 < R < 10)$;

   b. Probabilité que le potentiomètre ne tombe pas en panne durant les 20 premières années.

**a.**



**b.**



2. En utilisant le calcul intégral ou bien en expliquant la méthode numérique utilisée, calculer les deux probabilités énoncées à la question précédente. Arrondir au centième.

3. Ces potentiomètres sont vendus par lots de 20, et on estime que la probabilité qu'un potentiomètre, pris au hasard dans la production (assez importante pour que cela soit assimilé à un tirage avec remise), soit encrassé en moins de 2 ans est 10%.
   a. En moyenne, dans un lot, combien de potentiomètres sont encrassés au bout de 2 ans ?

   b. Donner la loi (ainsi que ses paramètres) à utiliser pour calculer la probabilité P que 5 potentiomètres ou plus, dans un lot pris au hasard, soient encrassés au bout de 2 ans. Donner une valeur de P arrondie au centième (il n'est pas nécessaire de justifier).

## Partie B : temps de bon fonctionnement du tube à vide

La durée de vie X, en années, d'un tube à vide suit une loi normale de moyenne $\mu=8$ et d'écart-type 2. On donnera les résultats en pourcentage, arrondis à 1% près.

1. Déterminer la probabilité que le tube tombe en panne entre la $4^{ème}$ et la $12^{ème}$ année.

2. Déterminer la probabilité que le tube tombe en panne entre la $8^{ème}$ et la $16^{ème}$ année.

## Partie C : interactions

On étudie un amplificateur en fonctionnement intensif depuis deux ans ;
on admet que la probabilité que le tube V fonctionne est de 0,98 ; dans ce cas, la probabilité que le potentiomètre R fonctionne est de 0,96. Lorsque le tube ne fonctionne pas, la probabilité que le potentiomètre ne fonctionne pas est de 0,1.
Arrondir les calculs au millième.

1. Représenter cette situation par un arbre de probabilités.
2. Calculer la probabilité qu'au moins un des deux éléments V ou R ne fonctionne pas.
3. Calculer la probabilité que V ne fonctionne pas sachant que R fonctionne