

BTS - Maths+STI - TD Spectre

1. Harmoniques et valeurs efficaces

Définition 1 : Un développement en série de Fourier d'un signal périodique s'écrit :

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) + \dots + a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) + \dots$$

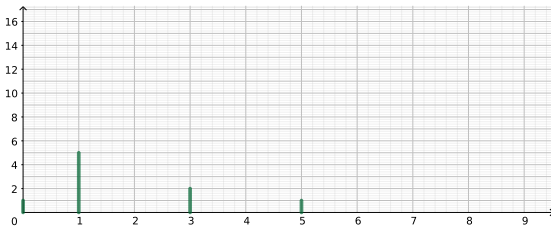
$$= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

- a_0 représente la composante continue du signal ;
- les autres coefficients a_n et b_n sont rattachés à \cos et \sin ; ils indiquent la valeur max de l'harmonique de rang n ;
- ils peuvent être en nombre infini (mais ils tendent à devenir de plus en plus petits lorsque n grandit, globalement)

Propriété 1 :

- L'harmonique de rang n : $h_n(t) = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$;
- a pour valeur max $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$;
- comme c'est une sinusoïde, elle a pour valeur efficace $H_n = \frac{A_n}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{a_n^2 + b_n^2}{2}}$;

Méthode 1 : On trace le spectre sous la forme d'un diagramme bâtons qui indique la valeur efficace A_n en fonction de n .

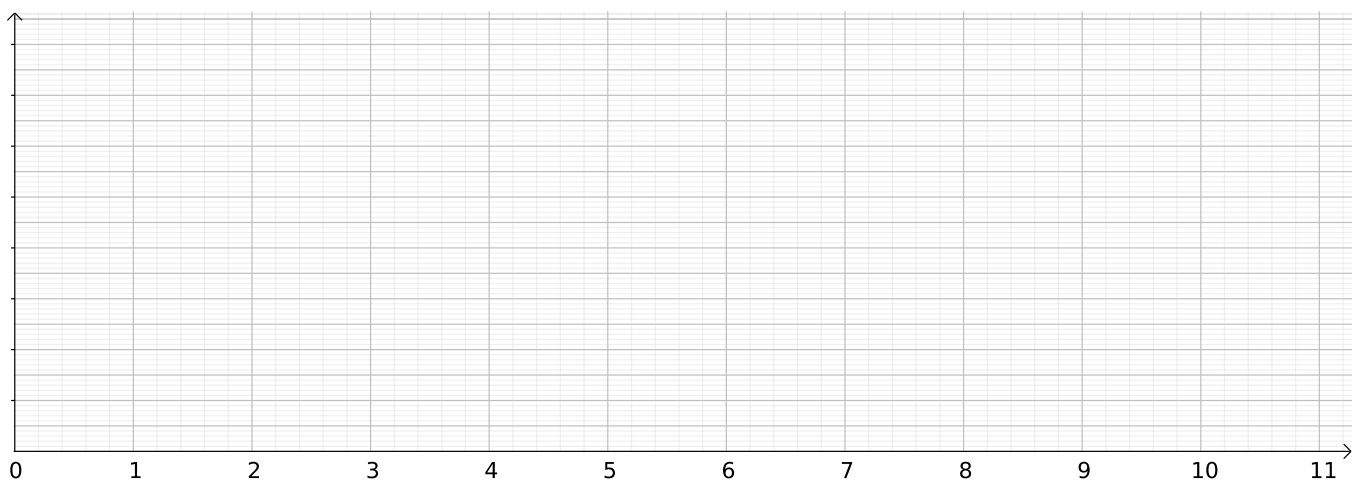


Exemple 1 : Le diagramme donne le spectre de $f(t) = 1 + 4 \cos(t) + 3 \sin(t) + 2 \sin(3t) - \cos(5t)$; on voit sur l'expression que $\omega = 1$ rad/s.

Exercice 1 : Pour chaque signal donné, après avoir indiqué ω tracer les spectres dans les diagrammes suivants (compléter l'axe vertical).

1. $g(t) = 1 + 4 \cos(t) + 3 \sin(t) + 2 \sin(3t) - \cos(5t)$; $\omega = \dots$ rad/s
2. $u(t) = 10 + 40 \cos(2t) + 35 \sin(4t) + 20 \sin(18t) - 5 \cos(18t)$; $\omega = \dots \neq 1$ rad/s
3. $v(t) = 5 + 240\sqrt{2} \cos(100\pi t) + 90 \sin(500\pi t) + 20 \sin(200\pi t) - \cos(800\pi t)$; $\omega = \dots$ rad/s





Exercice 2 : Deux signaux différents peuvent-ils avoir le même spectre ?
Si oui, quelles sont les informations manquantes dans un spectre ?

2. Valeurs efficaces

Définition 2 : Deux signaux f et g sont dits **orthogonaux** lorsque la valeur efficace $(f + g)_{\text{eff}}$ de $f + g$ sont liées par l'expression quadratique de Pythagore : $(f + g)_{\text{eff}}^2 = f_{\text{eff}}^2 + g_{\text{eff}}^2$

Propriété 2 : Deux harmoniques de rangs différents, ainsi que la composante continue d'un signal sont chacune orthogonales entre elles.

Propriété 3 : On en déduit : $f_{\text{eff}}^2 = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} H_n^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} A_n^2$

Exercice 3 : Calculer les valeurs efficaces des signaux étudiés dans la partie précédente.

3. Enquête

Exercice 4 : On a relevé le spectre suivant pour un signal pair : $a_0 = 216$; $a_2 = 144$; $a_4 = -29$; $a_6 = 12$; Quel montage permet d'obtenir un signal de ce type ?
Indice : tracer la série.