Page 414 - Variables aléatoires

59 Capacité 3, p. 405

Soit a et b des entiers naturels non nuls. On tire avec remise un jeton dans une urne contenant a jetons marqués +1 et b jetons marqués −1.
Sur un axe d'origine O, à chaque jeton tiré, on déplace un pion d'une unité vers la droite si le jeton est marqué +1 et d'une unité vers la gauche si le jeton est marqué −1. Au départ, le pion est en O.
Soit n un entier naturel non nul et i un entier tel que $1 \leqslant i \leqslant n$.
On désigne par T_i la variable aléatoire égale au numéro inscrit sur le jeton tiré au i-ième tirage et par X la variable aléatoire égale à l'abscisse du pion à l'issue de n déplacements.

1. Exprimer X en fonction des variables $T_1, T_2, \dots, T_n$.

2. Calculer $E(T_i)$ et en déduire l'espérance de X.

60 Un jeu consiste à lancer un dé cubique bien équilibré trois fois successivement, puis une pièce de monnaie non truquée cinq fois successivement.
On gagne autant d'euros que le numéro inscrit sur le dé, et un euro quand on obtient pile.
Pour tout entier k compris entre 1 et 3, on note X_k la variable aléatoire qui, au k-ième lancer du dé, associe le gain obtenu et, pour tout entier i compris entre 1 et 5, Y_i la variable aléatoire qui, au i-ième lancer de la pièce, associe le gain obtenu.

1. Calculer $E(X_k)$ et $V(X_k)$.

2. Calculer $E(Y_i)$ et $V(Y_i)$.

3. Soit Z la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le gain du joueur.

a. Exprimer Z en fonction des variables X_k et Y_i.

b. En déduire l'espérance et la variance de Z.

61 Soit n cartes numérotées de 1 à n.
On permute au hasard les cartes de ce jeu et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de cartes qui occupent leur place « naturelle ».
Pour k entier compris entre 1 et n, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si la k-ième carte est à sa place et 0 sinon.

1. Montrer que $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

2. En déduire l'espérance de Y.

Page 415 - Inégalités TCV et CC

70 Capacité 5, p. 407

On appelle X la variable aléatoire qui, sur le créneau horaire 14 h – 15 h, associe le nombre d'avions atterrissant sur un aéroport. On estime que $E(X) = 16$ et $V(X) = 4$.

1. Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev relative à la variable X.

2. Déterminer une minoration de la probabilité qu'il arrive entre 12 et 20 avions sur cet aéroport entre 14 h et 15 h.

71 Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart-type σ.

1. Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev relative à la variable X.

2. Déterminer les valeurs du réel positif σ de façon que $P(|X - \mu| < 15) \geqslant 0{,}96$.

82 Soit M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire d'espérance 40 et de variance 10.
À l'aide de l'inégalité de concentration, déterminer la taille minimale de l'échantillon pour que $P\left(\left|M_n - 40\right| < 2\right) \geqslant \frac{1}{2}$.

Page 417 - Bilan

86 CALCULER RAISONNER

Dans une entreprise, l'étude d'un dossier comporte deux volets : le temps, en heures, consacré à l'étude financière d'un dossier suit une loi de probabilité d'espérance 5 et d'écart-type 2, et celui consacré à l'étude administrative suit une loi d'espérance 3 et d'écart-type 1.
On note X la variable aléatoire égale au temps total consacré à l'étude d'un dossier. On admet que les temps d'étude sont indépendants.

1. Déterminer l'espérance et l'écart-type de X.

2. Soit T la variable aléatoire qui, à un échantillon aléatoire de 100 dossiers de l'entreprise, associe le temps passé à étudier l'ensemble de ces dossiers.
Déterminer l'espérance et la variance de T.

3. a. Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev relative à la variable aléatoire T.

b. Montrer que la probabilité que le temps d'étude de cet échantillon de dossiers soit strictement compris entre 700 et 900 heures est d'au moins 95 %.