Exercices – Variables aléatoires

Ex 59 lois des T_i :

T_i	-1	1
prob	$0,5$	$0,5$

← tirage au hasard avec remise de tous les jetons : équiprobabilité

1. X est le déplacement résultant de tous les déplacements T_i, on a ainsi $X = \sum_{i=1}^{n} T_i$ donc $E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(T_i)$

2. De fait : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} 0 = 0$ $\quad E(T_i) = -1\times 0,5 + 1\times 0,5 = 0$

Ex 60 On note D_i le résultat du lancer du dé à l'étape i (avec $1\le i\le 3$) et P_i le résultat du lancer de la pièce à l'étape i (avec $1\le i\le 5$)

"bien équilibré" → on est dans un cas d'équiprobabilité.

Voici les lois des D_i et P_i :

D_i	1	2	3	4	5	6
prob	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

P_i	face: 0	pile: 1
prob	0,5	0,5

$E(D_i) = \sum_{i=1}^{6} \frac{i}{6} = \frac{21}{6} = 3,5$ et $E(P_i) = 0\times 0,5 + 1\times 0,5 = 0,5$

D'après l'énoncé :

$X_1 = D_1$; $X_2 = D_1 + D_2$; $X_3 = D_1 + D_2 + D_3$

$Y_1 = P_1$; $Y_2 = P_1 + P_2$; ... ; $Y_5 = P_1 + \dots + P_5$

1. $E(X_1) = E(D_1) = 3,5$; $E(X_2) = E(D_1) + E(D_2) = 2\times 3,5 = 7$ $\quad E(X_3) = 3\times 3,5 = 10,5$

2. $E(Y_1) = E(P_1) = 0,5$; $E(Y_2) = E(P_1) + E(P_2) = 2\times 0,5 = 1$; ... ; $E(Y_k) = E(P_1) + \dots + E(P_k) = k\times 0,5$

3. a) $Z = X_3 + Y_5$

b) • $E(Z) = E(X_3) + E(Y_5) = 10,5 + 5\times 0,5 = 13$

• les X_i et Y_i étant indépendantes, comme les D_i et P_i :

$Var(Z) = Var(X_3) + Var(Y_5)$

$= Var(D_1 + D_2 + D_3) + Var(P_1 + \dots + P_5)$

$= \underbrace{Var(D_1) + Var(D_2) + Var(D_3)}_{3\text{ fois}} + \underbrace{Var(P_1) + \dots + Var(P_5)}_{5\text{ fois}}$

$= 3\times \frac{35}{12} + 5\times 0,25 = 10$

$\sigma(Z) = \sqrt{10} = 3,16$

• $Var(D_i) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} i^2 - 3,5^2 = \frac{35}{12}$

• $Var(P_i) = E(P_i) - E(P_i)^2 = 0,5 - 0,25 = 0,25$

Ex 61 loi des X_k :

X_k	0	1
prob	$(n-1)/n$	$1/n$

← 1 chance/n places d'être à la bonne place

1. Y compte le nombre de cartes à leur place, donc $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$

2. $E(Y) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n}\left(0\times\frac{n-1}{n} + 1\times\frac{1}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n} = n\times\frac{1}{n} = 1$

En moyenne, une carte sera à sa place

Ex 70

1. $P(|X - \underbrace{16}_{E(X)}| \ge \delta) \le \frac{\overset{V(X)}{4}}{\delta^2}$

2. $12 \xleftarrow{-\delta} 16 \xrightarrow{+\delta} 20 \quad \rightarrow \delta = 4$

$P(12\le X\le 20) = P(|X-16|\le 4) = 1 - P(|X-16| > 4)$

Or $P(|X-16| > 4) < \frac{4}{4^2} = \frac{1}{4}$ (inég B-T pour $\delta = 4$)

donc $P(12\le X\le 20) \ge \frac{3}{4}$

Ex 71 1. $P(|X-\mu|\geq\delta)\leq\frac{\sigma^2}{\delta^2}$

2. $P(|X-\mu|<15)=1-P(|X-\mu|\geq 15)\geq 1-\frac{\sigma^2}{15^2}$ (B-T pour $\delta=15$)

On recherche donc σ tel que $1-\frac{\sigma^2}{15^2}\geq 0{,}96$

$\Leftrightarrow \frac{\sigma^2}{15^2}\leq 1-0{,}96=0{,}04$

$\Leftrightarrow \sigma/15\leq 0{,}2$ $\sqrt{\ }$

$\Leftrightarrow \sigma\leq 3$

Remarque : il est possible aussi d'obtenir σ par balayage

Ex 82 Inégalité de concentration pour $E(X)=60$ et $V(X)=10$:

$P(|M_n-60|\geq 2)\leq\frac{10}{4n}=\frac{2{,}5}{n}$ ($E(X)$, $\boxed{\delta=2}$, $V(X)$)

donc son complémentaire $P(|M_n-60|<2)\geq\frac{1}{2}$ lorsque $\frac{2{,}5}{n}\leq\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow n\geq 5$

Ex 86 1. Comme les temps d'études sont indépendants :

$E(X)=5+3=8$ et $V(X)=2^2+1^2=5$ donc $\sigma(X)=\sqrt{5}$

2. De la même manière, les temps d'études étant indép :

$E(T)=100\,E(X)=800$ heures et $V(T)=V(X_1+\dots+X_{100})=100\,V(X)$ pas de carré

$=100\times 5=500$

donc $\sigma(T)=10\sqrt{5}$

3. a) $P(|T-800|\geq\delta)\leq\frac{500}{\delta^2}$

b) 700, 800, 900 ; -100, $+100$; $\delta=100\longrightarrow$ $P(|T-800|<100)$

$=1-P(|T-800|\geq 100)$

$\geq 1-\frac{500}{100^2}=1-0{,}05=0{,}95$