Convexité, Exp, Ln - Cours

1. Fonctions convexes

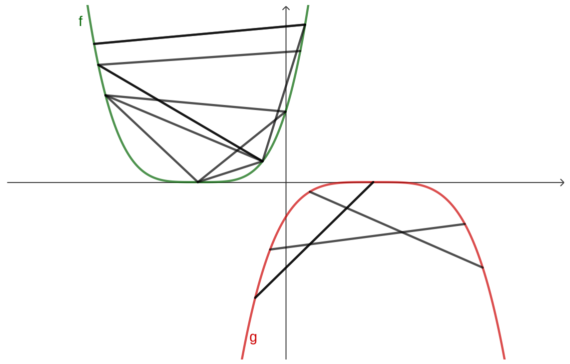
1.1. Définition

📕 ***Définition 1 :***

- *Un segment joignant deux points d'une courbe est une **corde** de cette courbe.*
- *f est une fonction définie sur un intervalle.*
  *On dit que f est **convexe** lorsque pour toute corde de la courbe de f, cette courbe est en dessous de chaque corde.*
- *On dit que f est **concave** lorsque pour toute corde de la courbe de f, cette courbe est au dessus de chaque corde.*

📙 **Propriété 1 :** f est convexe sur un intervalle I équivaut à $-f$ est concave sur I.

🌄 **Exemple 1 :** Sur le graphique ci-contre, f est convexe et g est concave.



✏️ **Exercice 1 :** Compléter :

1. La fonction carré est ...
2. La fonction valeur absolue est ...
3. La fonction cube ...

1.2. Dérivée seconde et convexité

📙 **Propriété 2 :**
f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I (on peut calculer la dérivée f'' de la dérivée f' de la fonction f) ; alors, les affirmations suivantes sont équivalentes :

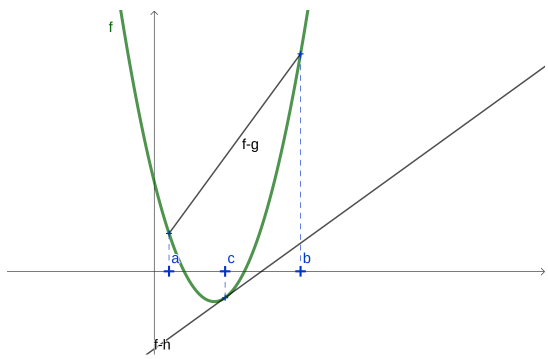
A. f'' est positive sur I.
B. f' est croissante sur I.
C. la courbe de f est au dessus de ses tangentes sur I.
D. f est convexe sur I.

De même, les affirmations suivantes sont équivalentes :

a. f'' est négative sur I.
b. f' est décroissante sur I.
c. la courbe de f est en dessous de ses tangentes sur I.
d. f est concave sur I.

✏️ **Exercice 2 : Démonstration partielle**
f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I. On prend $a < c < b$ tous dans I et on définit pour tout $x \in I$:

- $g(x) = f(x) - \left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right)$
- $h(x) = f(x) - (f'(c)(x-c)+f(c))$



1. Que «mesurent» ces deux fonctions ?
2. Calculer $g(a)$, $g(b)$ et $h(c)$.
3. Calculer g' et h' ; en déduire que $f''=g''=h''$
4. Dans la propriété précédente :
   - A⇒B est vraie.
   - Démontrer que B⇒C et que B⇒D en utilisant les fonctions h et g.

✏️ **Exercice 3 : Obtenir des inégalités**
Montrer que la fonction exponentielle est convexe. En déduire que :

1. Pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^x \geqslant 1+x$.

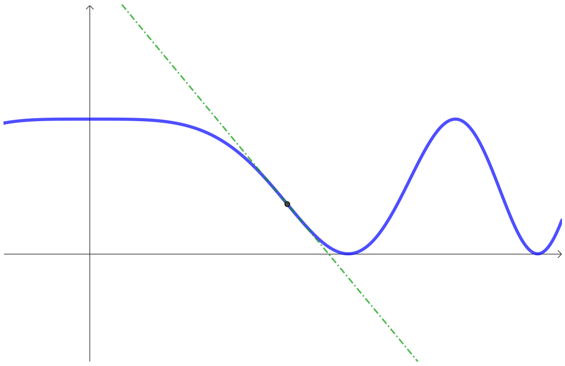
2. Pour tout réel $0 \leqslant x \leqslant 10$, on a $\mathrm{e}^x \leqslant \frac{\mathrm{e}^{10}-1}{10}x+1$

✏️ **Exercice 4 :** (dur) Démontrer que pour tout entier n, on a $0 \leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}}-1 \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1}{n}$ (utiliser la corde de la courbe de l'exponentielle sur $\left[0, \frac{1}{n}\right]$).

✏️ **Exercice 5 :** Déterminer des conditions portant sur les coefficients d'un polynôme de degré 4 $P(x) = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ pour qu'il soit convexe sur R.

1.3. Point d'inflexion

📕 ***Définition 2 : Point d'inflexion***
*Lorsque la tangente en un point A à une courbe traverse cette courbe en A, on dit que la courbe présente un **point d'inflexion** en A.*



✏️ **Exercice 6 :** Repérer les autres points d'inflexion sur la figure.

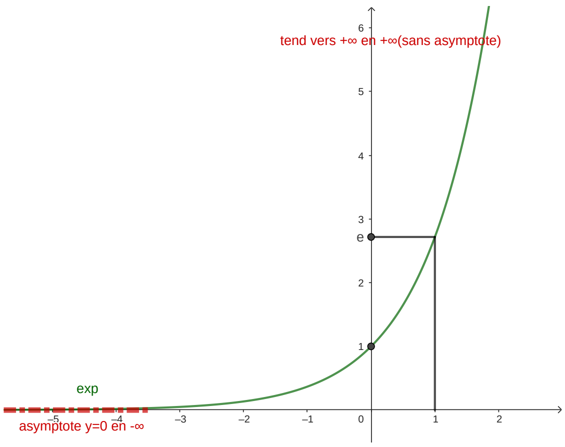
📙 **Propriété 3 :** Lorsque la dérivée seconde s'annule et change de signe, on est en présence d'un point d'inflexion.

✏️ **Exercice 7 :** Déterminer le(s) point(s) d'inflexion de la courbe de la fonction donnée par $f(x) = x^3-3x+2$.

2. Fonction exponentielle : rappels

2.1. Généralités

📕 ***Définition 3 :*** *La **fonction exponentielle**, notée $\exp$, est la seule fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$.*



📙 **Propriété 4 :**

$\exp(1) = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e} \approx 2{,}718\,281\,828\,46$;

- $\exp$ est strictement croissante, tend vers 0 en $-\infty$ ((Ox) est donc asymptote en $-\infty$) et tend très rapidement vers $+\infty$ en $+\infty$.
- $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$: sa courbe admet des tangentes en tout point.
- si u est une fonction dérivable : $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$

✏️ **Exercice 8 : Unicité de la fonction exponentielle (rappel)**
f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie : $f' = f$.

1. En dérivant $h(x) = g(x)\mathrm{e}^{-x}$, établir que h est constante.
2. en déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = f(0)\mathrm{e}^x$.
3. En déduire que la seule fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $f' = f$ et $f(0) = 1$ est l'exponentielle (et que si la contition $f(0) = 1$, n'est pas satisfaite, f est un multiple de l'exponentielle).

✏️ **Exercice 9 :** Calculer les dérivées premières et secondes des fonctions suivantes, donner leur tableau de variation et rechercher leurs éventuels points d'inflexion : $f(x) = \mathrm{e}^{1-x^2}$ et $g(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-5x}$

✏️ **Exercice 10 :** On définit pour tout x réel :
$f(x) = (x+3)\mathrm{e}^{-x}$ et $g(x) = (x+1)\mathrm{e}^x$; le but de cet exercice est de rechercher deux fonctions F et G telles que $F' = f$ et $G' = g$ (appelées «primitives»).
Méthode : poser $F(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x}$ et $G(x) = (cx+d)\mathrm{e}^x$, calculer leurs dérivées et en déduire les valeurs de a, b, c, d correspondantes.

📕 ***Définition 4 :*** *Une fonction F dérivable telle que $F' = f$ est appelé une **primitive** de f.*

✏️ **Exercice 11 : Les primitives d'une fonction diffèrent uniquement d'une constante.** Si F et G sont deux primitives de f, démontrer que $F - G$ est une constante (dériver cette différence !)

2.2. Opérations et exp

📙 **Propriété 5 :** La fonction exp respecte les règles connues sur les puissances (elle permet d'étendre la notion de puissance à une puissance réelle, non rationelle).
Pour a, b réels et n entier :

- $\mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b = \mathrm{e}^{a+b}$
- $\dfrac{1}{\mathrm{e}^a} = \mathrm{e}^{-a}$
- $\dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} = \mathrm{e}^{a-b}$
- $(\mathrm{e}^a)^n = \mathrm{e}^{an}$

✏️ **Exercice 12 :** Simplifier :

- $A = \dfrac{\mathrm{e}^7}{\mathrm{e}^5}$
- $B = \mathrm{e}^{x-2}\mathrm{e}^{2-x}$
- $C = (\mathrm{e}^x)^2\mathrm{e}^{-x}$
- $D = \mathrm{e}^{(x^2)}\mathrm{e}^{-x}$
- $E = \dfrac{\mathrm{e}^{5x+4}}{\mathrm{e}^{-6x}}$

2.3. Limites usuelles

📙 **Propriété 6 : Croissances comparées :**
Pour tout $n > 0$, on a :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n\mathrm{e}^x = 0^+$ si n est pair, 0^- si n est impair.
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$

✏️ **Exercice 13 : Démonstrations :**
On pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^{n+1}}$ (on a $n > 0$).

1.
   - Étudier f et démontrer que pour tout $x \geqslant 1$, la fonction f est minorée par un nombre positif ε.
   - En déduire que pour tout $x > 0$, $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} \geqslant \varepsilon x$.
   - En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$.
2. Utiliser le fait que $(-x)^n\mathrm{e}^{-x} = (-1)^n\dfrac{x^n}{\mathrm{e}^x}$
3. Identifier un taux de variation.

✏️ **Exercice 14 :** Calculer :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x + 1}{x^2 + 1}$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+1)e^x$
3. $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x}\mathrm{e}^x$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - \mathrm{e}^x$

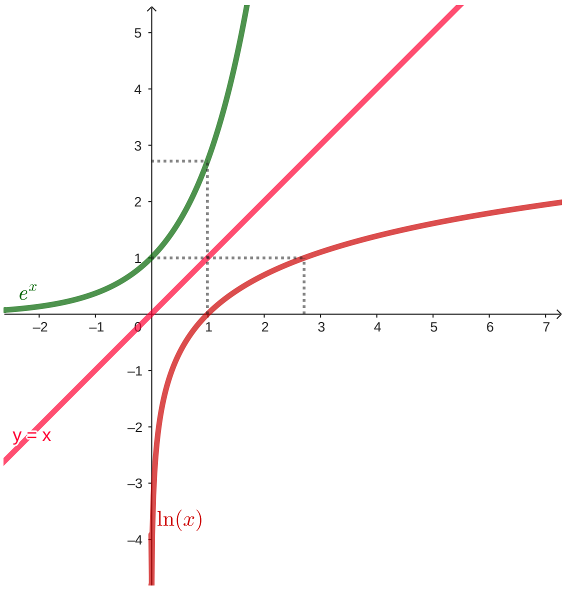
3. Fonction logarithme

3.1. Définition comme réciproque de l'exponentielle

📙 **Propriété 7 :**

- La fonction exponentielle est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $]0;+\infty[$.
- Chaque réel $y > 0$ admet, selon le théorème des valeurs intermédiaires, un seul antécédent x par exp.

On note $\ln(y)$ cet unique antécédent x.
On définit ainsi, sur $]0;+\infty[$ la fonction $\ln$.
Par construction, $\ln$ est la fonction réciproque de $\exp$, et leurs courbes sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.
De plus, la courbe de l'exponentielle, fonction dérivable, admet des tangentes en tout point et ces tangentes ne sont pas horizontales.
De fait, la courbe de $\ln$ admet aussi, par symétrie, des tangentes en tout point, non verticales, ce qui en fait une fonction dérivable.

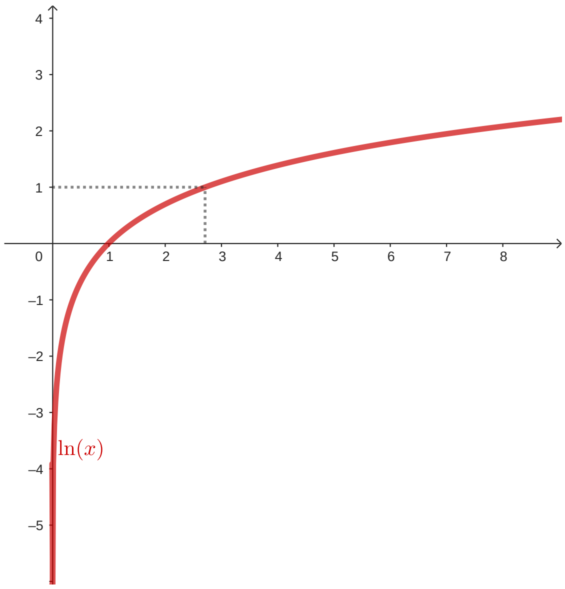


📕 ***Définition 5 :** On appelle $\ln$ (**logarithme népérien ou naturel**) la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$, réciproque de la fonction exponentielle.*

3.2. Courbe, variation, signe

📙 **Propriété 8 :** Toutes ces affirmations s'expliquent par la symétrie des courbes de l'exponentiel et du logarithme naturel :

- $\ln$ est strictement croissante et croît lentement vers $+\infty$;
- 0 est valeur interdite et (Oy) est asymptote (verticale) à la courbe de $\ln$: les valeurs de $\ln$ tendent vers $-\infty$ pour x proche de 0 ;
- Attention : $\ln x < 0$ lorsque $0 < x < 1$.



✏️ **Exercice 15 :** Résoudre les (in)équations suivantes :

1. $e^{x-1} = 2$
2. $e^{x^2} = e^{-4x}e^3$
3. $\ln(2x) = 5$
4. $\ln(2x) > -1$

3.3. Dérivation et $\ln$

📙 **Propriété 9 :**

- Pour tout $x > 0$, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.
- Si u est une fonction dérivable à valeurs **strictement positives**, on a : $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

✏️ **Exercice 16 : Démonstration :** dériver les deux membres de l'égalité $\mathrm{e}^{\ln u} = u$ et en déduire les propriétés précédentes.

✏️ **Exercice 17 :** Calculer les dérivées des fonctions suivantes : $f(x) = \ln(1 + x^2)$ et $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

✏️ **Exercice 18 : Primitive du logarithme naturel**
Trouver les valeurs adéquates des réel a et b pour que la fonction F définie pour $x > 0$ par $F(x) = ax + bx\ln x$ vérifie $F'(x) = \ln(x)$.

✏️ **Exercice 19 : Primitive de $\frac{1}{x}$ sur les réels**

1. On fixe deux constantes réelles a et b et on définit $F(x) = \begin{cases} \ln(-x) + a \text{ si } x < 0 \\ \ln(x) + b \text{ si } x > 0 \end{cases}$

   Démontrer que pour tout réel $x \neq 0$, $(F(x))' = \dfrac{1}{x}$.
2. En déduire que pour tout réel $x \neq 0$, $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$.
3. En toute rigueur, peut-on dire que « $\ln$ est *la* primitive de la fonction inverse » ?

3.4. Opérations et $\ln$

📙 **Propriété 10 :** La fonction $\ln$ transforme les produits en somme et les quotients en différences : si $a, b > 0$ et n est un entier :

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\ln\left(a^n\right) = n\ln a$, en particulier $\ln\left(\mathrm{e}^n\right) = n$
- $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln a$

✏️ **Exercice 20 : Démonstration :**
Démontrer la propriété précédente ; pour le premier item, on pourra dériver $\ln(ax)$.

🌄 **Exemple 2 :** D'après la propriété précédente, on a : $\ln(12) = \ln(2^2 \times 3) = \ln 2^2 + \ln 3 = 2\ln 2 + \ln 3$

✏️ **Exercice 21 :** Exprimer en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$ les nombres suivants :

1. $\ln\left(\frac{32}{9}\right)$
2. $\ln\left(\sqrt{6}\right)$
3. $\ln\left(\frac{1}{6}\right)$

Attention aux erreurs ! :

- $\ln(a + b) \neq \ln a + \ln b$
- Toute expression à l'intérieur d'un $\ln$ doit être positive.

✏️ **Exercice 22 :** Déterminer l'ensemble de définition de : $f(x) = \ln(1 - x)$ et $g(x) = \ln\left(1 - x^2\right)$

3.5. Limites usuelles

📙 **Propriété 11 :**

- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$
- $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x\ln x = 0^-$
- $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x - \ln x = +\infty$

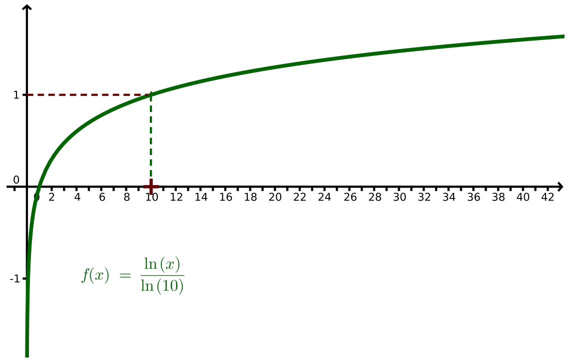
✏️ **Exercice 23 :** Démontrer ces limites ; pour le premier item, on pourra poser $x = \mathrm{e}^t$; pour le second, poser $x = \frac{1}{t}$; pour le troisième, penser que $\ln$ est dérivable en 1.

✏️ **Exercice 24 :** Calculer :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 1}$
2. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^3 \ln x$
3. $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} \ln x$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} - \ln x$

4. Le logarithme décimal

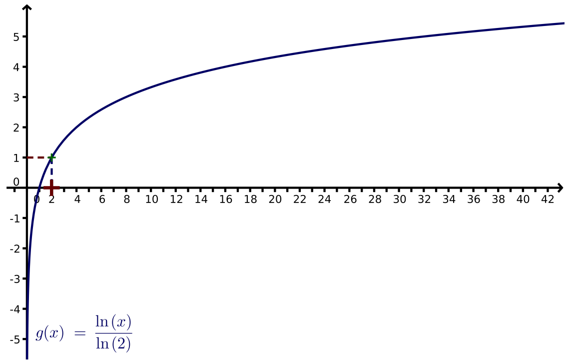
📕 ***Définition 6 :** Pour $x > 0$, on note* $\boxed{\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}}$.



📙 **Propriété 12 :** $\log$ possède les mêmes propriétés que $\ln$ en terme de variation, signe, limites et calcul, sauf pour la propriété $\ln(\mathrm{e}^n) = n$ qui se traduit en $\log(10^n) = n$: on dit que le logarithme décimal a 10 pour base, alors que le logarithme naturel a le réel e pour base.

📋 **Remarque 1 :** Ainsi, un nombre dont le logarithme décimal vaut environ 2,223 est compris entre 10^2=100 et 10^3=1000.

📋 **Remarque 2 :** En informatique, on utilise le log binaire $\log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}$; un nombre dont le $\log_2$ vaut environ 7,5 doit être codé sur 8 bits (8 caractères zéro ou un).



📕 ***Définition 7 :** Plus généralement, on peut construire le $\log_a$ (logarithme de base a) en posant* $\boxed{\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}}$.

📙 **Propriété 13 :** Si n est l'entier immédiatement inférieur à $\log_a x$, alors $a^n < x < a^{n+1}$.

✏️ **Exercice 25 : En chimie : le pH**

Le pH d'une solution aqueuse est défini par la relation $pH = -\log[H_3O^+]$ où $[H_3O^+]$ désigne la concentration en ions H_3O^+. On a toujours $0 \leqslant \mathrm{pH} \leqslant 14$.

1. Calculer le pH d'une solution dont H_3O^+ $4{,}0 \times 10^{-5}$ mol/L.
2. Que devient le pH quand la concentration en ions H_3O^+ est divisée par 10 ? Par 100 ?
3. Que devient la concentration quand le pH diminue de 1 ? De 2 ?

✏️ **Exercice 26 :** Expliquer comment utiliser le logarithme décimal pour trouver le nombre de chiffres d'un nombre entier ; avec combien de chiffres s'écrit le nombre 1515^{1789} ?

5. Notation puissance réelle

5.1. Définition

📕 ***Définition 8 :*** *On étend la notation puissance (jusqu'alors utilisée pour des exposants entiers relatifs) en posant, pour $a > 0$ et b réel :* $a^b = \mathrm{e}^{b \ln a}$.

📙 **Propriété 14 :** Ainsi, les mêmes règles algébriques que pour les entiers sont valables pour des exposants réels.

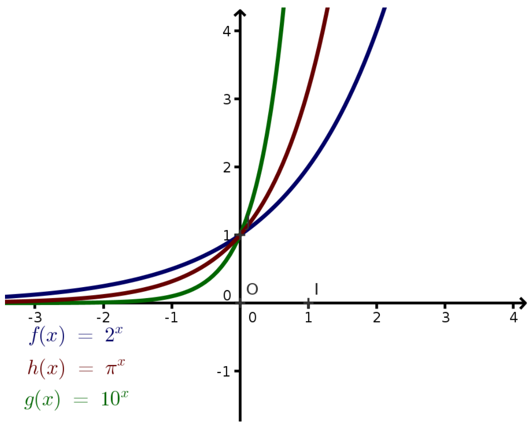
✏️ **Exercice 27 :** Étudier $f(x) = x^x$ et $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

5.2. Fonctions exponentielles de base a

📕 ***Définition 9 :*** *Soit $a > 1$ fixé et x réel (variable). En posant $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$ on définit les fonctions exponentielles de base a pour un exposant réel quelconque.*

📙 **Propriété 15 :** Elles sont les réciproques des fonctions logarithmes de base a. En particulier, $x \mapsto 10^x$ est la réciproque de $\log$.

🌄 **Exemple 3 :**



✏️ **Exercice 28 : En accoustique : le décibel**

Le niveau sonore N (en décibels : dB) est : N$= 20 \log\left(\dfrac{p}{p_0}\right)$ où p est la pression (en Pa) correspondant au son mesuré et p_0 une valeur de référence (on prend dans la plupart des cas le seuil d'audibilité d'un son par une oreille humaine qui correspond à 20 µPa).

1. Dans la rue, je passe à 5m d'un marteau-piqueur (100 dB) et à 2 m d'un joueur de vuvuzela (110 dB). Ai-je mal (seuil de la douleur : 120 dB) ?
2. Deux élèves qui chuchotent émettent 32 dB. Calculer combien de dB émettent 34 élèves qui chuchotent ; comparer à la voix du professeur (58 dB).

5.3. Fonctions puissances (réelles)

📕 ***Définition 10 :*** *Soit p réel fixé et $x > 0$ (variable). En posant $x^p = \mathrm{e}^{p \ln x}$ on définit les fonctions puissance p (p réel quelconque).*

📙 **Propriété 16 :** La fonction réciproque de la fonction $x \mapsto x^p$ est $x \mapsto x^{\frac{1}{p}}$.

🌄 **Exemple 4 :** la fonction racine cubique, réciproque de la fonction cube, est en fait le fonction puissance un tiers.

🌄 **Exemple 5 :**