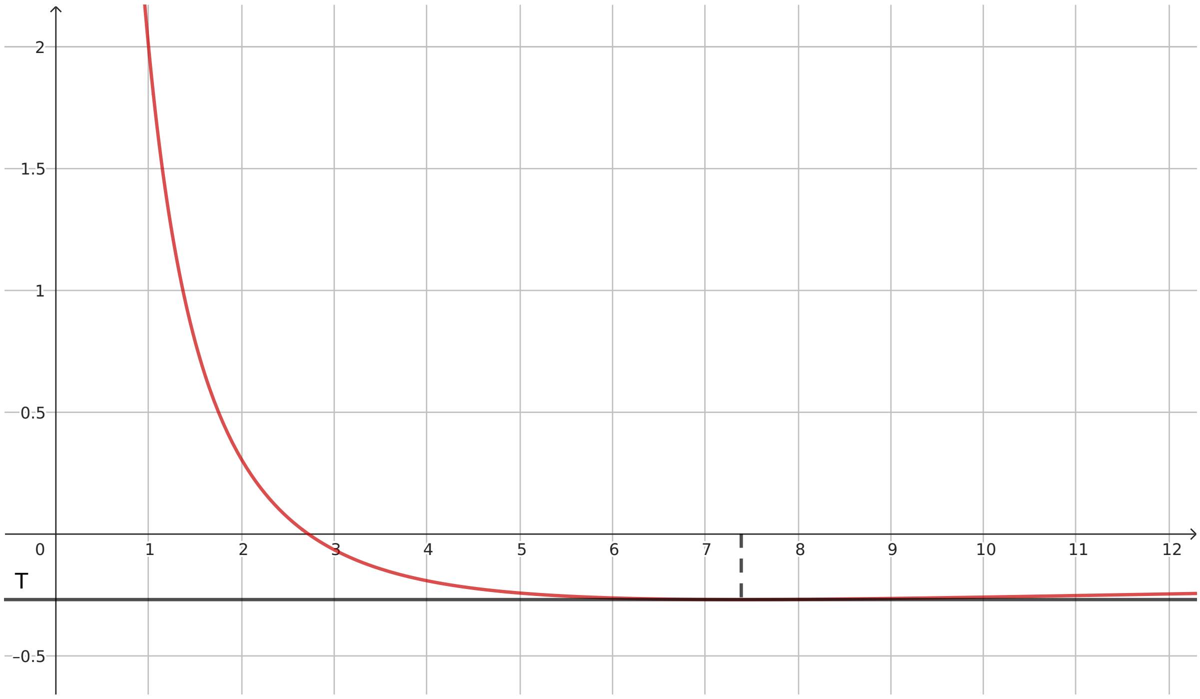
Fonction ln - DS7

Prénom NOM :

✏️ **Exercice 1 : Étude de fonction (10 points)**

- On considère la fonction f définie sur l'intervalle]0; +∞[par $f(x) = (2 - \ln(x)) \times \ln(x)$, où $\ln$ désigne la fonction logarithme naturel ou népérien.
  On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur]0; +∞[.
- On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.
- On note $\mathcal{C}'$ **la courbe de la fonction** f', dérivée de f. $\mathcal{C}'$ est tracée sur la figure ainsi que son unique tangente horizontale (T).



1. Par lecture graphique, avec la précision que permet le tracé ci-dessus, donner :
   a. le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}'$ au point d'abscisse 1.
   b. La fonction f est elle convexe sur [1;2] ? Justifier.
2. a. Calculer la limite de la fonction f en +∞.
   b. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat (remarque : parler d'«interprétation graphique» d'une limite revient à parler d'asymptote).
3. a. Montrer que pour tout réel x appartenant à]0; +∞[, $f'(x) = \dfrac{2(1 - \ln(x))}{x}$.
   b. En déduire, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur]0; +∞[.
4. Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en deux points exactement, dont on précisera les coordonnées (justifier par des propriétés de f).
5. On note f'' la dérivée seconde de f et **on admet** que pour tout réel x appartenant à]0;+∞[,
   $f''(x) = \dfrac{2(\ln(x) - 2)}{x^2}$.
   Déterminer par le calcul le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe et préciser les coordonnées du point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$.

Tourner S.V.P.

✏️ **Exercice 2 : Géométrie (10 points)**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, **une seule** des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Justifier le choix rapidement.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$.

On considère :

- les points $A(-1;-2;3)$, $B(1;-2;7)$ et $C(1;0;2)$;
- la droite Δ de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 \\ z = -4 + 3t \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$;
- le plan P d'équation cartésienne : $3x + 2y + z - 4 = 0$;
- le plan Q d'équation cartésienne : $-6x - 4y - 2z + 7 = 0$.
- **Question 1 :** Lequel des points suivants appartient au plan P ?
    a. R(1; −3; 1) ;
    b. S(1; 2; −1) ;
    c. T(1; 0; 1) ;
    d. U(2; −1; 1).
- **Question 2 :** Le triangle ABC est :
    a. équilatéral
    b. rectangle isocèle
    c. isocèle non rectangle
    d. rectangle non isocèle
- **Question 3 :** La droite Δ est :
    a. orthogonale au plan P;
    b. sécante au plan P ;
    c. incluse dans le plan P ;
    d. strictement parallèle au plan P ;
- **Question 4 :** On donne le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 20$. Une mesure au degré près de l'angle ABC est :
    a. 34°
    b. 120°
    c. 90°
    d. 0°
- **Question 5 :** L'intersection des plans P et Q est :
    a. un plan ;
    b. l'ensemble vide ;
    c. une droite ;
    d. réduite à un point.

✏️ **Exercice 3 : Bonus (2 points)**

- Calculer la dérivée de $f(x) = x^{(\mathrm{e}^x)}$ pour $x > 0$.
- Démontrer que $\log_{10}(10\mathrm{e}^x)$ est une fonction affine. ($\log_{10}$ désigne le logarithme décimal.)