Trigonométrie - Cours

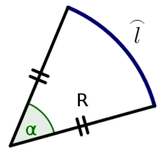
1. Introduction historique

- VII AVJC : les babyloniens utilisent le **degré** :
  - ils observent que les planètes du système solaire se déplacent dans une zone restreinte du ciel : le zodiaque : 12 constellations ;
  - le soleil cache successivement chaque constellation → chaque **mois**
  - un cercle, représentant l'année, peut donc être divisé en : 12 mois × 30 jours = 360 subdivisions.
- Révolution française : système métrique 90° = 100 gon (grades) ;
- 1873 J. Thomson : unité SI : le radian.

2. Mesurer des angles

2.1. Le radian

📕 ***Définition 1 :*** *Étant donné un arc de cercle $\overset{\frown}{l}$ de longueur l et de rayon R, la* ***mesure en radians*** *de l'angle géométrique $\widehat{\alpha}$ est :* $\boxed{\alpha = \frac{l}{R}}$



✏️ **Exercice 1 :** Un câble repose sur une poulie de diamètre 30cm. Une extrémité du câble est tendue horizontalement et l'autre verticalement.
Calculer la longueur de câble en contact avec la poulie.

📙 **Propriété 1 :** Les mesures en degré et radians sont proportionnelles : $\boxed{180° = \pi \text{ rad}}$

✏️ **Exercice 2 :** Compléter :

en radian	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$
en degré	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
nom ou obtus/aigu										

2.2. Orientation du plan

📕 ***Définition 2 : Convention :*** *On oriente le plan dans le sens* ***direct****.*

📋 **Remarque 1 :** En général, on nomme ou on énumère les sommets d'un polygone dans le sens direct.

sens direct	**sens indirect**
trigonométrique	
anti-horaire	horaire
giratoire	

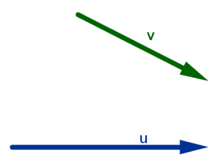
2.3. Le cercle trignométrique

📕 ***Définition 3 :*** *Dans un repère orthonormé, le* ***cercle trigonométrique*** *est le cercle qui a pour centre le centre du repère et qui est de rayon 1. On l'oriente dans le sens direct.*

📋 **Remarque 2 :** Comme le rayon R=1, le périmètre de ce cercle est donc de 2πR=2π.

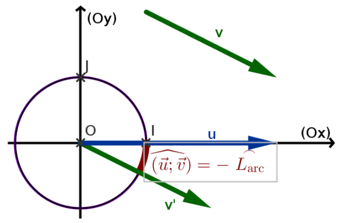
2.4. Mesure des angles orientés

On utilise le cercle trigonométrique pour mesurer des angles, de la même façon que l'on utilise un rapporteur : On note $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)$ une paire de vecteurs non nuls. On souhaite mesurer en radians l'angle orienté noté $\widehat{\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)}$, angle permettant de passer (par rotation) de la direction de $\overrightarrow{u}$ à celle de $\overrightarrow{v}$.



📗 **Méthode 1 :**

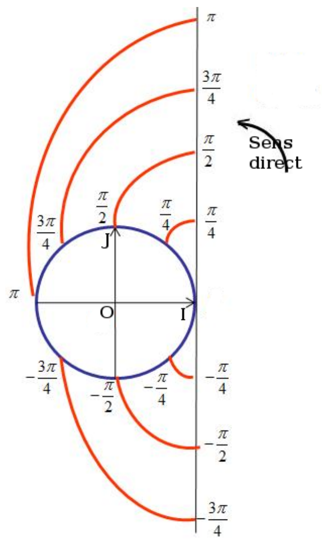
- On trace un représentant $\overrightarrow{v'}$ de $\overrightarrow{v}$ ayant même origine que $\overrightarrow{u}$; on trace un cercle trigonométrique centré sur cette origine, l'axe (Ox) ayant même direction que $\overrightarrow{u}$;
- la longueur de l'arc permettant de passer de $\overrightarrow{u}$ à $\overrightarrow{v'}$ correspond à la valeur absolue de la mesure d'angle $\widehat{\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)}$, car le rayon du cercle trigonométrique est 1 ;
- le signe de $\widehat{\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)}$ est positif lorsque l'on passe de $\overrightarrow{u}$ à $\overrightarrow{v}$ en tournant dans le sens direct ; négatif (cas de la figure donnée) si l'on tourne dans le sens indirect.



2.5. Enroulement de la droite réelle sur le cercle trigonométrique

📋 **Remarque 3 :** Par la construction exposée dans ce paragraphe, on a voulu pouvoir prendre en compte dans les mesures d'angles le fait de faire plusieurs tours :

📙 **Propriété 2 :** On peut «enrouler», en conservant les longueurs (cette opération s'appelle **revêtement** isométrique), une droite graduée représentant l'ensemble des réels sur le cercle trigonométrique, conventionnellement, de la façon indiquée sur le schéma ci-contre.



📙 **Propriété 3 :**

- Chaque réel t correspond alors à un point sur le cercle trigonométrique ; ce point est repéré par deux coordonnées dans le repère (O;I;J) associé au cercle trigonométrique ;
- Chaque point M du cercle à une infinité d'antécédents réels, espacés de 2π (la longueur d'un tour du cercle trigonométrique).

🌄 **Exemple 1 :**

Droite réelle	$\longmapsto$ **Cercle trigonométrique**
$\dots ; -2\pi ; 0 ; 2\pi ; \dots$	$\longmapsto I = \binom{1}{0}$
$\dots ; \frac{3\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} ; \frac{5\pi}{2} ; \dots$	$\longmapsto J = \binom{0}{1}$
$\dots ; -\pi ; \pi ; 3\pi ; \dots$	$\longmapsto I' = \binom{-1}{0}$

✏️ **Exercice 3 :** Donner 4 réels ayant la même image sur le cercle trigonométrique que le réel $\frac{\pi}{4}$.

✏️ **Exercice 4 :** Un snowboarder effectue 2 tours dans le sens indirect. Donner en radian la mesure d'angle correspondante.

2.6. Congruences

📕 ***Définition 4 :*** *On note deux réels t et t'.*
Lorsqu'il existe un entier (relatif) k tel que $t = t' + 2k\pi$, ce qui revient à dire que t et t' s'envoient sur la même point sur le

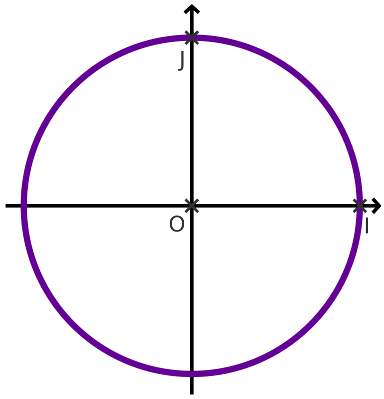
*cercle trigonométrique, on dit que t et t' sont **congrus** modulo 2π, et on écrit : $t \equiv t' \pmod{2\pi}$ ou bien $t \equiv t'(2\pi)$*

📋 **Remarque 4 :** Deux mesures d'angles en radians congrues modulo 2π correspondent au même angle géométrique.

✏️ **Exercice 5 :** A-t-on $\frac{5\pi}{2} \equiv \frac{-\pi}{2} \pmod{2\pi}$?

📙 **Propriété 4 :** Si $x \equiv x' \pmod{2\pi}$ et $y \equiv y' \pmod{2\pi}$ et $z \neq 0$, on a :

- $x + y \equiv x' + y' \pmod{2\pi}$
- $zx \equiv zx' \pmod{2\pi z}$

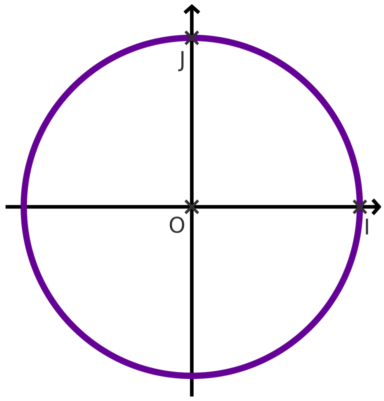


✏️ **Exercice 6 :** Résoudre et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique :

- $2x + \frac{\pi}{2} \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$
- $3x + \frac{\pi}{6} \equiv \frac{-\pi}{3} \pmod{2\pi}$

📙 **Propriété 5 :**

- $\widehat{(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})} \equiv 0 \pmod{\pi} \Leftrightarrow \overrightarrow{u}//\overrightarrow{v}$;
- $\widehat{(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})} \equiv 0 \pmod{2\pi} \Leftrightarrow \overrightarrow{u}//\overrightarrow{v}$ et ont même sens ;
- $\widehat{(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})} \equiv \pi \pmod{2\pi} \Leftrightarrow \overrightarrow{u}//\overrightarrow{v}$ et sont de sens opposés.



2.7. Mesure principale

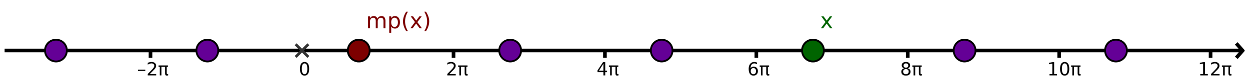
✏️ **Exercice 7 :** Un clown fait 10 m sans déraper sur un monocycle dont la roue, de centre noté O, à un rayon r=20cm, puis tombe et rigole, c'est flippant.

- Combien de tours a fait la roue avant la chute ?
- Le clown avait marqué sur sa roue le point de contact avec le sol (point A). Au moment de sa chute, le dernier point de contact avec le sol est B.

  Trouver la mesure en radians de $\widehat{AOB}$.

📕 ***Définition 5 :** On appelle **mesure principale** d'un angle x le nombre $\text{mp}(x)$ tel que :*
$x \equiv \text{mp}(x) \pmod{2\pi}$ *et* $\text{mp}(x) \in [0; 2\pi[$

📗 **Méthode 1 :** Parmi tous les représentants de x modulo 2π, la mesure principale est le seul représentant de x dans l'intervalle $[0, 2\pi[$.



- **Calculatrice :** $\text{mp}(x) = \text{partdéc}(x/(2\pi)) * 2\pi$
- **À la main :** On calcule le quotient q de x par 2π et on soustrait $2\pi q$ à x si $x > 0$, ou on ajoute $2\pi(q+1)$ à x si $x < 0$.

✏️ **Exercice 8 :** Calculer les mesures principales des angles de mesures suivantes :

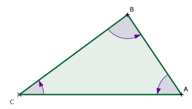
1. $\dfrac{5\pi}{3}$; 2. $\dfrac{3\pi}{2}$; 3. $\dfrac{-5\pi}{4}$; 4. $\dfrac{4\pi}{3}$; 5. $\dfrac{-11\pi}{6}$; 6. $\dfrac{-11\pi}{2}$;
7. 25π ; 8. 18π ; 9. -14π ; 10. $\dfrac{40\pi}{3}$; 11. $\dfrac{-31\pi}{6}$; 12. $\dfrac{25\pi}{4}$.

2.8. Compléments sur les angles

📙 **Propriété 6 : Relation de Chasles**

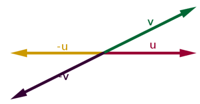
Si $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ sont trois vecteurs non nuls, on a : $\left(\widehat{\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{v}; \overrightarrow{w}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{u}; \overrightarrow{w}}\right) \pmod{2\pi}$

✏️ **Exercice 9 :**
Étant donné un triangle ABC, démontrer que la somme des angles orientés de ce triangle est congrue à π modulo 2π.



📙 **Propriété 7 : Angles associés**

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non nuls, et $k, l > 0$, alors :



- $\left(\widehat{\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}}\right) \equiv \left(\widehat{k\overrightarrow{u}; l\overrightarrow{v}}\right) \pmod{2\pi}$
- $\left(\widehat{\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}}\right) \equiv \left(\widehat{-\overrightarrow{u}; -\overrightarrow{v}}\right) \pmod{2\pi}$
- $\left(\widehat{\overrightarrow{u}; -\overrightarrow{v}}\right) \equiv \left(\widehat{-\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}}\right) \equiv \pi + \left(\widehat{\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}}\right) \pmod{2\pi}$
- $\left(\widehat{\overrightarrow{v}; \overrightarrow{u}}\right) \equiv -\left(\widehat{\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}}\right) \pmod{2\pi}$

✏️ **Exercice 10 :** Exprimer en fonction de $\left(\widehat{\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}}\right)$ l'angle $\left(\widehat{-2\overrightarrow{v}; 7\overrightarrow{u}}\right)$

✏️ **Exercice 11 :** Montrer que si $\overrightarrow{u}//\overrightarrow{u'}$ et $\overrightarrow{v}//\overrightarrow{v'}$ (ces quatre vecteurs sont non nuls), alors
$2\left(\widehat{\overrightarrow{u'}; \overrightarrow{v'}}\right) \equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}}\right)$.

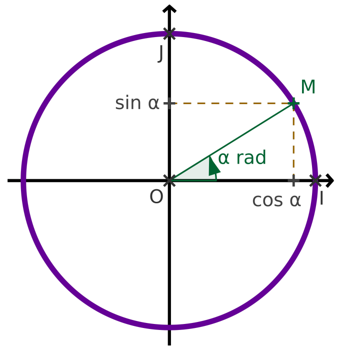
✏️ **Exercice 12 :** Soit deux droites d et d'. Une troisième droite Δ coupe ces deux droites respactivement en en A et A'. Déduire de la réponse précédente que $d//d'$ équivaut à «l'un des angles orientés autour de A a le même double qu'un angle orienté autour de A'».

3. Fonctions cosinus et sinus

3.1. $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$

📕 ***Définition 6 :*** *M est un point du cercle trigonométrique correspondant à un réel α (par la fonction enroulement vue précédemment).*
On note $\cos\alpha$ l'abscisse de M et $\sin\alpha$ l'ordonnée de M :

$$M\,(\cos\alpha\,;\,\sin\alpha)$$



📗 **Méthode 2 :**

- On repère un angle orienté α par rapport à l'axe (Ox), en marquant un point M sur le cerle trigonométrique ;
- si α est > 0, on tourne dans le sens direct (sens inverse des aiguilles d'une montre ; s'il est < 0, on tourne dans le sens indirect ;
- on lit alors les valeurs de $\cos\alpha$ (sur (Ox)) : c'est l'abscisse de M ;
- et celle de $\sin\alpha$ (sur (Oy)) : c'est l'ordonnée de M.

📋 **Remarque 5 :** Si l'on ajoute 2π à α, on fait un tour du cercle et on revient à la même position, donc on obtient les mêmes valeurs pour $\cos$ et $\sin$: on en déduit que les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont donc 2π-périodiques ou autrement dit, que les valeurs de $\cos$ sont les mêmes pour tous les réels congrus modulo 2π à un réel α donné (idem pour $\sin$).

📋 **Remarque 6 :** Si l'on considère que $A=(\cos\alpha;0)\in[OI]$, on retrouve dans le triangle OAM rectangle en M les définitions de $\cos$ et de $\sin$ vues en troisième, à savoir : $\cos\alpha=\frac{OA}{OM}$ et $\sin\alpha=\frac{AM}{OM}$. La nouveauté est la prise en comptes de valeurs négatives pour $\cos$ et $\sin$, apparaîssant si l'on considère des angles obtus.

3.2. Propriétés immédiates

📙 **Propriété 8 :** Pour x réel :

- $-1\leq\cos x\leq 1$ et
  $-1\leq\sin x\leq 1$;
- $\cos^2 x+\sin^2 x=1$;
- $\cos$ et $\sin$ sont 2π-périodiques.

📋 **Remarque 7 :**

- La seconde formule se déduit du théorème de Pythagore, et du fait que $OM^2=1$;
- on note, pour plus de lisibilité, $\cos^2 x=(\cos x)^2$ (idem pour $\sin$).

✏️ **Exercice 13 :** Peut-on trouver un réel t tel que $\cos t=\frac{1}{4}$ et $\sin t=\frac{3}{4}$?

✏️ **Exercice 14 :** Soit t un réel tel que $\cos t=\frac{1}{5}$.

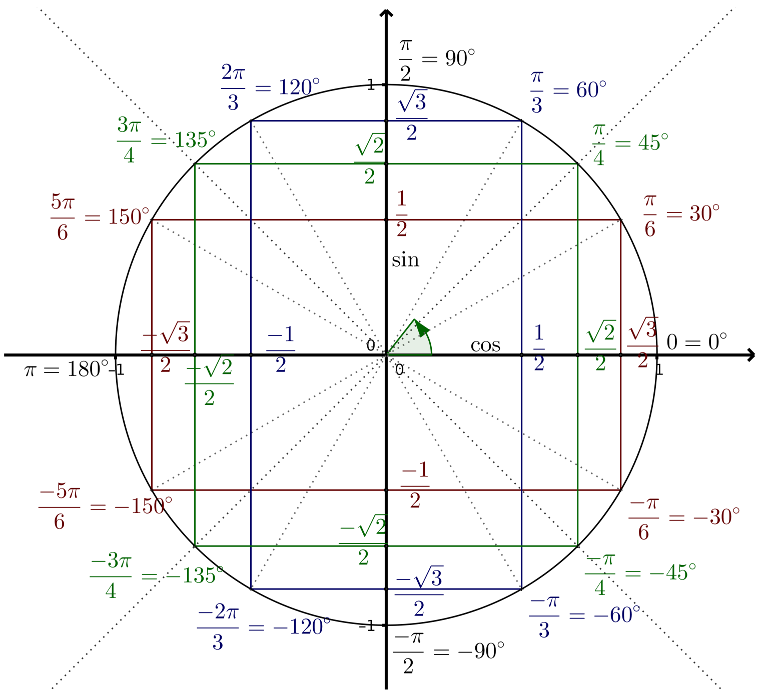
1. On suppose que $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.
   Calculer $\sin t$.
2. On suppose que $t\in\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$.
   Calculer $\sin t$.

3.3. Valeurs remarquables

✏️ **Exercice 15 :** Compléter le tableau de valeurs suivant :

α **(rad)**	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos\alpha$						
$\sin\alpha$						

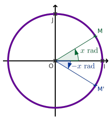
📙 **Propriété 9 :**



3.4. Valeurs associées

✏️ **Exercice 16 :** Compléter par $\pm\cos x$ et $\pm\sin x$ les égalités suivantes :

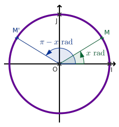
📙 **Propriété 10 :**
Symétrie / (Ox)



- $\cos(-x) =$ …
- $\sin(-x) =$…

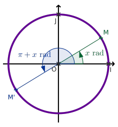
Rappel : $\cos$ est paire ; $\sin$ est impaire.

📙 **Propriété 11 :**
Symétrie / (Oy)



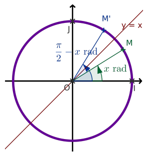
- $\cos(\pi - x) =$ …
- $\sin(\pi - x) =$ …

📙 **Propriété 12 :**
Symétrie / O



- $\cos(\pi + x) =$ …
- $\sin(\pi + x) =$ …

📙 **Propriété 13 :**
Symétrie / $y = x$



- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$ …
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$ …

✏️ **Exercice 17 :** Simplifier les expressions suivantes :

- $A = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sin(\pi + x) - 3\sin(\pi - x)$
- $B = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sin^2(\pi + x) - 2\cos^2(\pi + x)$

4. Fonctions sinusoïdales

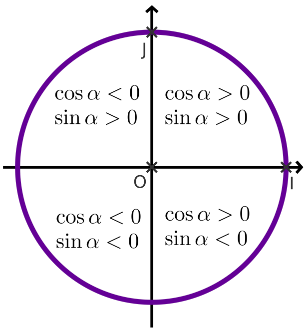
📋 **Remarque 8 :** $\cos$ et $\sin$ étant 2π-périodiques, on les étudie sur une période : $[0; 2\pi[$.

4.1. Signe et variation de $\cos$ et $\sin$

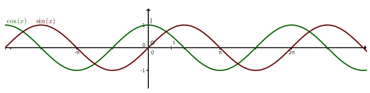
📙 **Propriété 14 :** On rappelle que $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$

✏️ **Exercice 18 :** Compléter le tableau de signe des dérivées et de variations de cosinus et sinus :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$-\sin(x)$	0		0		0
$\cos$	1 ↘	0 ↘	-1	↗	1
$\cos(x)$	1	0		0	1
$\cos$	0 ↗	↘	↘	-1	0



signe



graphes

✏️ **Exercice 19 :** Quel est le nombre de points d'intersection des courbes représentant les fonctions $\cos$ et $\sin$ sur l'intervalle $[0; 200\pi]$?

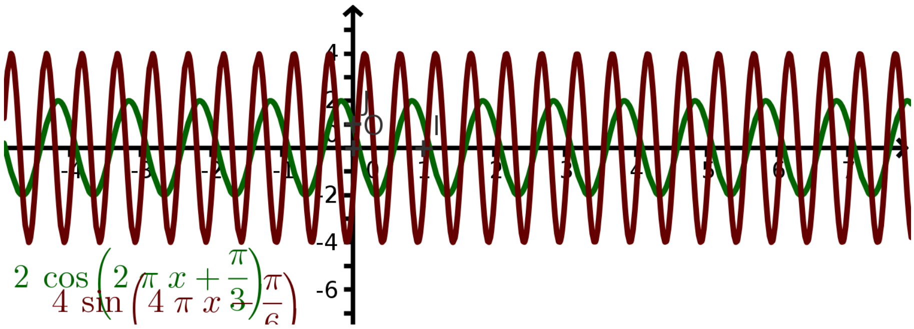
4.2. Signal sinosoïdal

📕 ***Définition 7 :*** *Une fonction du temps de la forme $f(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ ou $g(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ s'appelle signal sinusoïdal d'**amplitude** ou bien **valeur max** A, de **pulsation** ω et de **phase à l'origine** ϕ.*

📋 **Remarque 9 :** Le graphe du signal est le même que les fonctions $\sin$ et $\cos$ vues précedemment, mais il oscille entre les valeurs $\pm A$ au lieu de ± 1 et n'est plus 2π-périodique :

On a $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi F$ où T est la période du signal et $F = \frac{1}{T}$ sa fréquence.

🌄 **Exemple 2 :** $f(x) = 2\cos\left(2\pi x + \frac{\pi}{3}\right)$ et $g(x) = 4\sin\left(4\pi x - \frac{\pi}{6}\right)$:



✏️ **Exercice 20 :** Identifier la période, la pulsation, la fréquence et la phase à l'origine des signaux ci-dessus.

✏️ **Exercice 21 :** Tracer sur $[-2; 10]$ le signal sinusoïdal $h(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$.

✏️ **Exercice 22 : Activité de découverte**

On se place dans un repère orthonormé $(O; I; J)$ et dans le cercle trigonométrique associé.

On considère une horloge analogique tracée sur ce cercle trigonométrique, munie d'une petite aiguille $\overrightarrow{OP}$ de norme $\frac{3}{4}$ et d'une grande aiguille $\overrightarrow{OG}$ de norme 1. Le fonctionnement de cette horloge à la fois esthétique et précise est conventionnel ; et assuré par des piles en bon état de marche.

On note t le temps, en heures, et on considère une journée $\mathcal{D} = [0; 24[$.

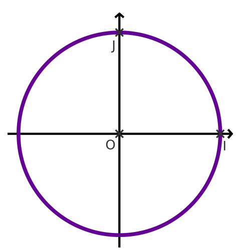
1. Faire une figure ; on insistera sur l'aspect esthétique de l'horloge.
2. Vérifier que pour tout $t \in \mathcal{D}$, on a : $\left(\widehat{\overrightarrow{OJ}; \overrightarrow{OG}}\right) \equiv -2\pi t \pmod{2\pi}$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OJ}; \overrightarrow{OP}}\right) \equiv \frac{-2\pi}{12} t \pmod{2\pi}$
3. Il est 11h12. Quel est l'angle aigu formé par les deux aiguilles ?
4. À quelle heure de la journée les deux aiguilles sont-elles symétriques par rapport à (Ox) ?
5. À quelle heure de la journée les deux aiguilles sont-elles symétriques par rapport à (Oy) ?
6. À quelle heure de la journée les deux aiguilles sont-elles colinéaires ? De même sens ? De sens opposé ?
7. À quelle heure de la journée les deux aiguilles sont-elles orthogonales ?

5. (In)Équations trigonométriques

5.1. Équation $\cos x = k$ avec $k \in \mathbb{R}$

📙 **Propriété 15 :**

- Si $k < -1$ ou bien si $k > 1$, l'équation $\cos x = k$ n'a pas de solution ;
- si $k \in [-1; 1]$, alors $\cos x = k$ a une infinité de solutions dans $\mathbb{R}$, qui correspondent à une ou deux solutions modulo 2π.



📗 **Méthode 3 :**

1. On place k sur **l'axe (Ox)** (correspondant à $\cos$) ;
2. on recherche les deux angles α et $-\alpha$ tels que $\cos\alpha = k$;

📋 **Remarque 10 :** on peut utiliser $\alpha = \arccos k$ noté aussi $\cos^{-1} k$;

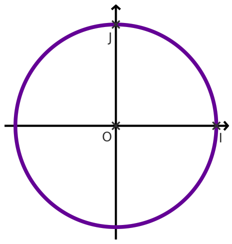
3. on a alors : $\boxed{\cos x = k \quad \Leftrightarrow \quad x \equiv \alpha \ \ (2\pi) \text{ ou } x \equiv -\alpha \ \ (2\pi)}$

✏️ **Exercice 23 :** Résoudre $\cos x = \frac{1}{2}$.

5.2. Équation $\sin x = k$ avec $k \in \mathbb{R}$

📙 **Propriété 16 :**

- Si $k < -1$ ou bien si $k > 1$, l'équation $\sin x = k$ n'a pas de solution ;
- si $k \in [-1; 1]$, alors $\sin x = k$ a une infinité de solutions dans $\mathbb{R}$, qui correspondent à une ou deux solutions modulo 2π.



📗 **Méthode 4 :**

1. On place k sur **l'axe (Oy)** (correspondant à $\sin$) ;
2. on recherche les deux angles α et $\pi - \alpha$ tels que $\sin \alpha = k$;

📋 **Remarque 11 :** on peut utiliser $\alpha = \arcsin k$ noté aussi $\sin^{-1} k$;

3. on a alors : $\boxed{\sin x = k \quad \Leftrightarrow \quad x \equiv \alpha \ \ (2\pi) \text{ ou } x \equiv \pi - \alpha \ \ (2\pi)}$

✏️ **Exercice 24 :** Résoudre $\sin x = \frac{1}{2}$.

📋 **Remarque 12 :** Attention à ne pas se tromper d'axe en plaçant k !

✏️ **Exercice 25 :** Résoudre les équations trigonométriques suivantes

1. $3\sin x - 5 = 0$
2. $\sin^2 x = 2$
3. $\sqrt{2} + 2\cos x = 0$
4. $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$
5. $2\sin 2x = 1$
6. $\cos\frac{x}{2} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$
7. $4\sin^2 - 3 = 0$
8. $2\cos^2 x = 1$
9. $\sin 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$
10. $\sin 3x = \cos 2x$
11. $\cos^2 x = \sin^2 2x$
12. $\sin 2x = \cos\frac{x}{2}$

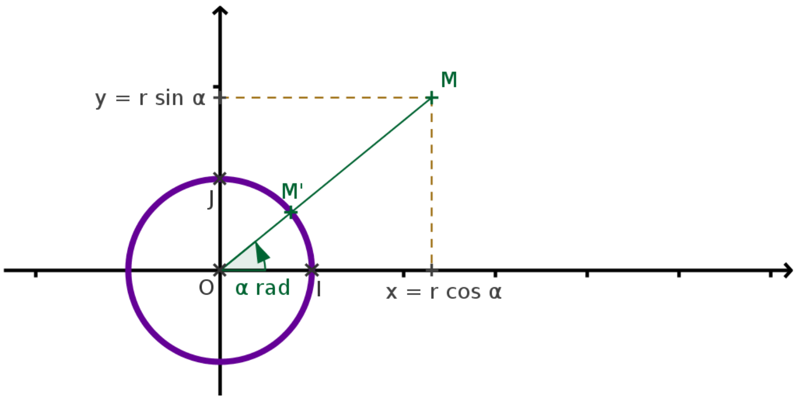
📋 **Remarque 13 :** On adapte ces méthodes aux inéquations trigonométriques facilement.

✏️ **Exercice 26 :** Résoudre $\cos x \leq \dfrac{1}{2}$ et $\sin x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

6. Coordonnées polaires

📙 **Propriété 17 :** Dans un repère **orthonormé**, on note M un point du plan distinct de l'origine O.
Tout point M distinct de l'origine O peut être repéré par un couple de réels $\boxed{(r;\alpha)_{\text{pol}}}$, avec :

- $r = OM > 0$ (distance à l'origine) ; unique ;
- $\alpha \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}}\right)$ (angle par rapport à l'axe des abscisses) ; unique **modulo** 2π.



📕 ***Définition 8 :*** *$(r;\alpha)_{\text{pol}}$ s'appelle **coordonnées polaires** de M dans $(O;I;J)$.*

📙 **Propriété 18 :** On a alors : $\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\alpha = \dfrac{x}{r} \\ \sin\alpha = \dfrac{y}{r} \end{cases}$

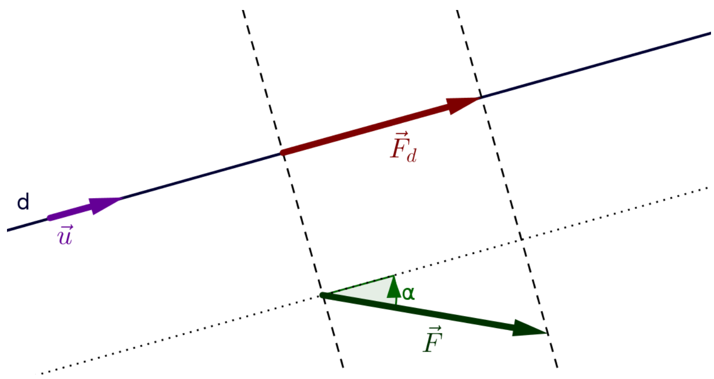
✏️ **Exercice 27 :**

1. Donner les coordonnées cartésiennes de $A\left(3;\frac{-5}{6}\right)_{\text{pol}}$.
2. Déterminer les coordonnées polaires de $B\left(2;2\sqrt{3}\right)$.

7. Projection orthogonale

7.1. Définition

📕 ***Définition 9 :*** *$\overrightarrow{F}$ est un vecteur, et (d) une droite dirigée par un vecteur $\overrightarrow{u}$.*
*On appelle **projeté othogonal** de $\overrightarrow{F}$ sur (d) (on peut aussi dire sur $\overrightarrow{u}$, seule la direction importe) le vecteur $\overrightarrow{F_d}$ défini par : $\overrightarrow{F_d} = \dfrac{||\overrightarrow{F}||\cos\alpha}{||\overrightarrow{u}||}\overrightarrow{u}$*



📙 **Propriété 19 :** Tout vecteur dont l'origine et l'extrémité sont placées sur les mêmes droites perpendiculaires à (d) que $\overrightarrow{F}$ a même projeté orthogonal que $\overrightarrow{F}$ sur (d).

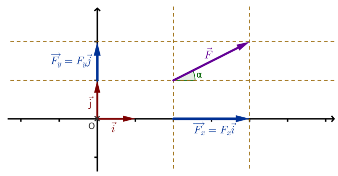
✏️ **Exercice 28 :** Dessiner un vecteur $\overrightarrow{F_1}$ ayant même projeté orthogonal sur (d) que $\overrightarrow{F}$.

✏️ **Exercice 29 :** $\overrightarrow{v}$, de norme 3, fait un angle de $\frac{\pi}{6}$ avec la droite d dirigée par $\overrightarrow{u}\binom{3}{4}$.
Donner une valeur approchée de v_d à 10^{-3} près, ainsi que les coordonnées de $\overrightarrow{v_d}$ à 10^{-3} près.

7.2. Sur les axes

📕 ***Définition 10 :*** *On se place dans un repère **orthonormé** $\left(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right)$. Toutes les lignes de rappel sont parallèles ou perpendiculaires aux axes. Le vecteur $\overrightarrow{F}$ fait un angle α avec l'axe (Ox).*

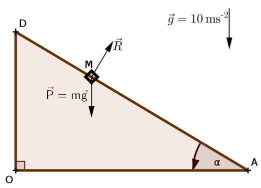
*On appelle **projeté othogonal** de $\overrightarrow{F}$ sur (Ox) (ou bien sur tout vecteur de même direction que cet axe, par exemple $\overrightarrow{i}$) le vecteur $\overrightarrow{F_x}=F_x\overrightarrow{i}$ défini par :*
$F_x=||\overrightarrow{F}||\cos\alpha$



✏️ **Exercice 30 :** En toute généralité, démontrer que $F_y=||\overrightarrow{F}||\sin\alpha$.

✏️ **Exercice 31 :**
Big Mike et Little Tim font du skate M sur un plan incliné de $\alpha=30^\circ$ long de $OA=20\,\text{m}$. Ils partent de D au temps $t=0$ (en secondes), sans vitesse initiale et comptent arriver au point A. On néglige les frottements du skate, les roues ont été changées et c'est de la top-qualité.

Bilan des forces : Le poids $\overrightarrow{P}=m\overrightarrow{g}$ du système skate+skateur de masse m est compensé partiellement par la réaction du support $\overrightarrow{R}$: le skate ne s'enfonce pas dans le sol mais il n'y a pas équilibre des forces (contrairement au skateur, on l'espère), et c'est le projeté orthogonal $\overrightarrow{F}$ de $\overrightarrow{P}$ sur DA qui va induire un mouvement du point M
.



1. Calculer F $(=||\overrightarrow{F}||)$; puis utiliser la **relation de Newton :** $\overrightarrow{F}=m\overrightarrow{a}$ pour calculer l'accélération (en m/s^2) du point M
.
2. La situation est-elle changée si le skateur est Big Mike ou bien Little Tim ? S'il n'y a pas de skateur sur le skate ?
3. On rappelle que la dérivée de la distance parcourue est la vitesse et que la dérivée de la vitesse est l'accélération. Calculer la vitesse $v(t)$ et la distance $d(t)$.
4. Au bout de combien de temps le point M est-il en A ?
5. En déduire la vitesse d'arrivée en km/h.

8. Formules d'addition, applications

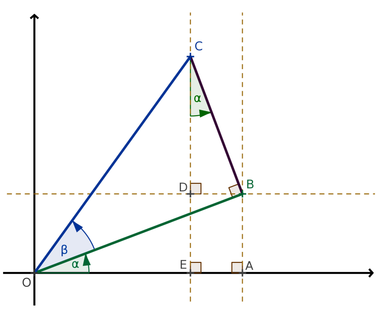
8.1. Formules d'addition

📙 **Propriété 20 :**

- $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
- $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
- $\sin(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

✏️ **Exercice 32 : Démonstration :** Vérifier les étapes.

Dans cette démonstration, toutes les longueurs sont exprimées en valeur algébrique pour prendre en compte le fait que les angles α et β peuvent être obtus. On pourra ne pas en tenir compte en première approche.



$\widehat{AOB} = \widehat{DCB}$ car les triangles sont semblables. On note que $\overline{DE} = \overline{AB}$:

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{\overline{ED}+\overline{DC}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{OC}} + \frac{\overline{DC}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{OC}}\frac{\overline{OB}}{\overline{OB}} + \frac{\overline{DC}}{\overline{OC}}\frac{\overline{BC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}}\frac{\overline{ED}}{\overline{OB}} + \frac{\overline{BC}}{\overline{OC}}\frac{\overline{DC}}{\overline{BC}}$$

$$= \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}}\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} + \frac{\overline{BC}}{\overline{OC}}\frac{\overline{DC}}{\overline{BC}} = \cos\beta\sin\alpha + \sin\beta\cos\alpha = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

✏️ **Exercice 33 :** Démontrer les autres formules par des changements de variables $\beta \to -\beta$ et $\alpha \to \frac{\pi}{2} - \alpha$.

✏️ **Exercice 34 : Formules de duplication :**
En déduire, en fonction de $\cos x$ et $\sin x$, la valeur de $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$.

8.2. Dérivation

📙 **Propriété 21 :** $\sin' x = \cos x$ et $\cos' x = -\sin x$

✏️ **Exercice 35 : Démonstration :** Établir les deux formules : $\sin' x = \cos x$ et $\cos' x = -\sin x$ en utilisant le taux de variation en x de $\sin$ (puis de $\cos$), les formules d'addition, et le fait que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$ et $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos(h)-1}{h} = 0$.
Que se passe-t-il si l'on dérive $\cos$ ou $\sin$ 4 fois ?

📙 **Propriété 22 : Dérivation de fonctions sinusoïdales :** $[\cos(\omega t+\phi)]' = -\omega\sin(\omega t+\phi)$ et $[\sin(\omega t+\phi)]' = \omega\cos(\omega t+\phi)$

✏️ **Exercice 36 :** Calculer la dérivée de $\sin(3t+2)$.

📙 **Propriété 23 : Primitives de fonctions sinusoïdales :**
$\left[\dfrac{-\cos(\omega t+\phi)}{\omega}\right]' = \sin(\omega t+\phi)$ et $\left[\dfrac{\sin(\omega t+\phi)}{\omega}\right]' = \cos(\omega t+\phi)$

✏️ **Exercice 37 :** Donner une primitive de $\cos(3t+2)$.

9. TD : Étude de fonctions trigonométriques

9.1. Dérivées

✏️ **Exercice 38 :** Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \cos(x)\times\sin(x)$
2. $g(x) = \dfrac{\cos x}{2+\cos x}$
3. $h(x) = \sqrt{2+\sin(3x)}$
4. $k(x) = \ln[3+\cos(5x-2)]$
5. $t(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

✏️ **Exercice 39 :** Démontrer que la fonction $f(x) = 5x + \cos(3x)$ est strictement croissante.

9.2. intégrales

✏️ **Exercice 40 :** Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x \,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)\mathrm{e}^{\cos x} \,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{2+\sin x} \,\mathrm{d}x$

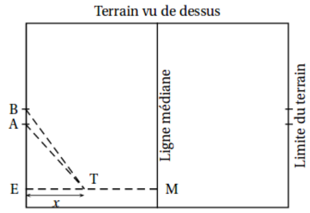
9.3. Limites

✏️ **Exercice 41 :** Déterminer les limites suivantes (on peut être amené à encadrer $\sin$ ou $\cos$) :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+\sin x)$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\cos(3x)}{x^2}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3 + \dfrac{2\sin x}{x}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to\pi^-} \dfrac{x}{\sin x}$
5. $\lim\limits_{x\to\pi^+} \left(3 + \dfrac{x}{2\sin x}\right)$

9.4. Bac métropole 2016

✏️ **Exercice 42 :**



Lors d'un match de rugby, un joueur doit transformer un essai qui a été marqué au point E (voir la figure ci-contre) situé à l'extérieur du segment $[AB]$.
La transformation consiste à taper le ballon par un coup de pied depuis un point T que le joueur a le droit de choisir n'importe où sur le segment $[EM]$ perpendiculaire à la droite (AB) sauf en E.
La transformation est réussie si le ballon passe entre les poteaux repérés par les points A et B sur la figure.
Pour maximiser ses chances de réussite, le joueur tente de déterminer la position du point T qui rend l'angle $\widehat{ATB}$ le plus grand possible.
Le but de cet exercice est donc de rechercher s'il existe une position du point T sur le segment $[EM]$ pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et, si c'est le cas, de déterminer une valeur approchée de cet angle.
Dans toute la suite, on note x la longueur ET, qu'on cherche à déterminer.
Les dimensions du terrain sont les suivantes : $EM = 50$\,m, $EA = 25$\,m et $AB = 5{,}6$\,m . On note α la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETA}$, β la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETB}$ et γ la mesure en radian de l'angle $\widehat{ATB}$.

1. En utilisant les triangles rectangles ETA et ETB ainsi que les longueurs fournies, exprimer $\tan\alpha$ et $\tan\beta$ en fonction de x.
   La fonction tangente est définie sur l'intervalle $\left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.
2. Montrer que la fonction tan est strictement croissante sur l'intervalle $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$.
3. L'angle $\widehat{ATB}$ admet une mesure γ appartenant à l'intervalle $\left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$, résultat admis ici, que l'on peut observer sur la figure.
   On admet que, pour tous réels a et b de l'intervalle $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$,
   $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b}$. Montrer que $\tan\gamma = \dfrac{5{,}6x}{x^2 + 765}$.
4. L'angle $\widehat{ATB}$ est maximum lorsque sa mesure γ est maximale. Montrer que cela correspond à un minimum sur l'intervalle $]0; 50]$ de la fonction f définie par : $f(x) = x + \dfrac{765}{x}$.
   Montrer qu'il existe une unique valeur de x pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et déterminer cette valeur de x au mètre près ainsi qu'une mesure de l'angle $\widehat{ATB}$ à $0{,}01$ radian près.