Phénomènes aléatoires - 1 Probabilités et variables aléatoires

1. Modéliser

📋 **Remarque 1 :** Même si des calculs concernant des risques ou des jeux de hasard ont été faits depuis l'antiquité, on date le début de la théorie des probabilités de la correspondance entre Blaise Pascal et Pierre de Fermat (1654) à propos du «problèmes des partis (url : https://fr.wikipedia.org/wiki/Probl%C3%A8me_des_partis)».

1.1. Notion de modèle

🌄 **Exemple 1 :** On lance un dé cubique et on note le numéro de la face supérieure.

📕 ***Définition 1 :*** *Cette expérience est une **expérience aléatoire** dont les **issues** (résultats possibles) sont 1, 2, 3, 4, 5, 6 :*

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

*Une réalisation (que l'on appelle «**épreuve**») de cette expérience (réalité ou simulation), doit forcément aboutir à l'une de ses issues ; on ne sait pas laquelle exactement.*

📕 ***Définition 2 :*** *L'**ensemble des issues** est* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

📕 ***Définition 3 :*** *Définir une **probabilité**, pour une expérience aléatoire, consiste à :*

- *préciser l'ensemble des issues possibles : l'«**univers**»* $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$;
- *attribuer à chacune des issues* x_i *un nombre* p_i *positif ou nul, appelé **probabilité de*** x_i, *de sorte que l'on ait* $p_1 + \dots + p_n = 1 = 100\%$

✏️ **Exercice 1 :** Il y a 86% d'élèves droitiers dans ce lycée. Quelle est la probabilité de tomber au hasard sur un élève qui ne le soit pas ?

✏️ **Exercice 2 :** Le dé suivant est truqué :

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\dots$

Calculer $p(6)$, la probabilité d'obtenir un six.

📕 ***Définition 4 : Notation somme :*** *Une somme telle que* $p_1 + \dots + p_n$ *se note, de manière condensée, à l'aide du symbole sigma* (Σ) *:* $\sum_{i=1}^{n} p_i$

✏️ **Exercice 3 :** Calculer $A = \sum_{i=1}^{7} i$ et $B = \sum_{i=1}^{4} i^2$

✏️ **Exercice 4 : (PISA) développer une intuition d'une probabilité :**
Un géologue a affirmé :
«Au cours des 20 prochaines années, la probabilité que se produise un tremblement de terre à Springfield est de 2 sur 3»
Parmi les propositions suivantes, laquelle **exprime le mieux** ce que veut dire le géologue ?

a. Puisque $\frac{2}{3} \times 20 \approx 13{,}3$, un tremblement de terre aura lieu à Springfield dans 13 à 14 ans.
b. Puisque $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$, on est sûr qu'il y aura un tremblement de terre à Springfield dans les 20 ans.
c. La probabilité d'avoir un tremblement de terre dans cette ville est plus forte que celle de ne pas en avoir.
d. On ne peut rien dire, car personne n'est sûr du moment où un tremblement de terre se produit.

1.2. Construire un modèle

📙 **Propriété 1 :** Dans la grande majorité des cas, on utilise l'une de ces deux façons de déterminer les probabilités p_i associées aux issues x_i :

Par le choix de l'équiprobabilité.

📕 ***Définition 5 :*** *Dans une situation d'**équiprobabilité**, Toutes les issues possèdent la même probabilité.*

🌄 **Exemple 2 :** Le lancer d'une pièce de monnaie **bien équilibrée** :

Issue pile face Probabilité 0,5 0,5

Étude statistique - observer les fréquences

🌄 **Exemple 3 :** On lance un dé truqué un grand nombre de fois (10 000, par exemple) et on note le résultat dans le tableau suivant :

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$0{,}125$	$0{,}125$	$0{,}125$	$0{,}125$	$0{,}2$	$0{,}3$

On **décide** alors que l'on a expérimenté un nombre suffisant de lancers pour que les futurs lancers de ce dé respectent les mêmes fréquences que celles de cette expérience. Cette «décision» établit un **modèle** probabiliste : on peut remplacer le mot «Fréquence» (qui est du domaine de la statistique) dans le tableau par le mot «probabilité».

📗 **Méthode 1 : Étude statistique ou équiprobabilité ?**
Le choix de l'équiprobabilité se fait lorsqu'il est suggéré dans l'énoncé (pièce équilibrée, tirage dans une urne au hasard).
Si on est dans une situation où les probabilités de chaque issue n'ont aucune raison d'être les mêmes, on doit mener une étude statistique.

✏️ **Exercice 5 :** Étude statistique ou équiprobabilité ? Le préciser.
1. On lance un dé bien équilibré.
2. On choisit au hasard une consonne dans l'alphabet.
3. Probabilité qu'un foyer français ait 2 enfants.
4. Tomber sur le zéro sur une roulette de casino (numérotée de 0 à 36).
5. Que M. Dupont, 40 ans, que l'on ne connaît pas, attrape la grippe l'hiver prochain ?
6. Qu'une tartine tombe du côté de la confiture ?

2. Prévoir

2.1. Probabilité d'un événement

🌄 **Exemple 4 :** On lance un dé cubique et l'on considère l'**événement** A : «obtenir au moins 5».
- **issues favorables** à A (qui réalisent A) sont 5 et 6 ; on note $A=\{5;6\}$.
- Pour le dé truqué (utilisé précédemment), si $P(5)=0{,}2$ et $P(6)=0{,}3$ alors $P(A)=0{,}2+0{,}3=0{,}5$.
- Pour un dé équilibré (situation d'équiprobabilité) : $P(5)=P(6)=\frac{1}{6}$ alors $P(A)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

📕 ***Définition 6 :*** *Un **événement** A est un sous-ensemble (aussi appelée partie) de l'univers Ω (on note $A\subset\Omega$, on dit «A inclus dans Ω»).*
*La **probabilité** $P(A)$ est la somme des probabilités des issues favorables à A.*

📙 **Propriété 2 :**
- Pour tout événement A, on a : $0\leqslant P(A)\leqslant 1$
- On a $P(\Omega)=1$.
- L'événement B : «obtenir un 7 sur un dé est **impossible** : $P(B)=0$. On identifie à l'ensemble vide noté $\emptyset$ tout événement impossible ($B=\emptyset$).

📙 **Propriété 3 :** Dans une **situation d'équiprobabilité**, la probabilité d'un événement A est :

$$\boxed{P(A)=\frac{\text{nombre d'issues favorales à } A}{\text{nombre d'issuespossibles}}}$$

2.2. Opérations sur les événements

📕 ***Définition 7 :*** *Si A et B sont deux événements,*
- *On note $\overline{A}$ l'événement complémentaire de A (toutes les issues qui ne réalisent pas A.)*
- *L'événement $A\cap B$ est l'ensemble des issues qui réalisent A **et** B (simultanément).*
- *L'événement $A\cup B$ est l'ensemble des issues qui réalisent A **ou** B (au moins l'un des deux).*

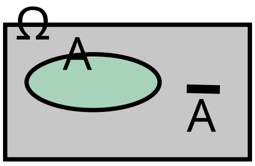
🌄 **Exemple 5 :** On lance un dé cubique et équilibré, et on note les événements suivants :
- A : «obtenir un nombre pair»
- B : «obtenir un le nombre minimal ou le nombre maximal»

On obtiens les resultats suivants (tableau ci-contre)

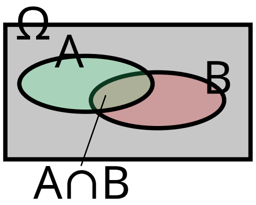
$A=\{2;4;6\}$	$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$
$B=\{1;6\}$	$P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$
$\overline{A}=\{1;3;5\}$	$p\left(\overline{A}\right)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$
$A\cap B=\{6\}$	$P(A\cap B)=\frac{1}{6}$
$A\cup B=\{1,2;4;6\}$	$P(A\cup B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

✏️ **Exercice 6 :** Reproduire le tableau dans le cas d'un dé octaèdrique (8 faces).

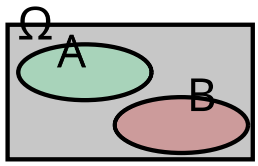
📙 **Propriété 4 :** Soit A et B deux événements :



Événement complémentaire :
$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$



Union quelconque :
$P(A \cup B) =$
$P(A) + P(B) - P(A \cap B$



Union disjointe :
Si $P(A \cap B) = 0,$
alors
$P(A \cup B) = P(A) + P(B$

📕 ***Définition 8 :*** *Lorsqu'on sait que A et B ne peuvent être réalisés simultanément ; A et B sont dits **incompatibles** ; dans ce cas on a $P(A \cap B) = 0$.*

✏️ **Exercice 7 :** A et B sont deux événements quelconques ; exprimer $P(A \cap B)$ en fonction de $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cup B)$.

✏️ **Exercice 8 :** $P(A) = 0{,}7$ et $P(B) = 0{,}6$.
Montrer que A et B ne peuvent pas être incompatibles.
En dégager une condition sur les probabilités de A et B impliquant que ces deux événements soient incompatibles.

✏️ **Exercice 9 :** Chaque ligne du tableau représente une situation différente. Compléter le tableau.

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \cap B$	$A \cup B$
0,2	0,5			0,1	
0,6			0,6	0	
		0,7	0,7		0,5
			0,8	0,2	0,4

📙 **Propriété 5 :** Si A et B sont deux événements quelconques, on a toujours : $P(A \cap B) \leqslant \begin{matrix} P(A) \\ P(B) \end{matrix} \leqslant P(A \cup B)$

📙 **Propriété 6 : Lois de Morgan :** $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

✏️ **Exercice 10 :** Utiliser les lois de Morgan pour exprimer $\overline{(A \cap B) \cup \overline{B}}$ en fonction de A, B, $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

✏️ **Exercice 11 : Erreur de d'Alembert**

Quelle est la probabilité d'obtenir **au moins** une fois pile en deux lancés successifs ?

Remarque : D'Alembert avait fait un raisonnement faux dans le calcul de la probabilité, dans l'article « croix ou pile » de l'Encyclopédie .
De l'existence de 3 cas (pile au premier lancer, pile au second lancer, aucun lancer ne donnant pile), il avait déduit que la probabilité était 2/3.

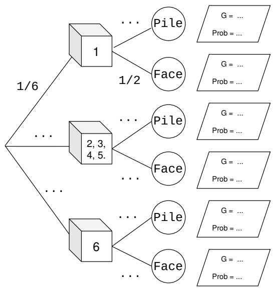
3. Variables aléatoires (réelles)

3.1. Définition

📕 ***Définition 9 :*** *Une fonction réelle définie sur un univers Ω est appelée* ***variable aléatoire****.*

🌄 **Exemple 6 :** Souvent, une variable aléatoire est utilisée pour rendre compte des gains dans un jeu de hasard.
On lance un dé (6 faces, bien équilibré), puis une pièce (bien équilibrée) ;

- si le dé donne 1, on gagne 5€ ;
- si le dé donne 6, on gagne 10€ ;
- si le dé donne un nombre compris entre 1 et 5 inclus, on ne gagne rien (0€) ;
- ensuite en lançant la pièce, aux gains obtenus avec le dé :
  - on ajoute 5€ si la pièce donne pile ;
  - on enlève 5€ si la pièce donne face ;
- on note alors G les gains ou pertes (G peut être négatif !) à la fin du jeu.



Arbre à compléter

✏️ **Exercice 12 :** Compléter l'arbre décrivant les possibilités de ce jeu.

✏️ **Exercice 13 :**

1. Quelles sont les valeurs possibles de G ?
2. Calculer $P(G = 5)$, c'est à dire la probabilité de gagner 5€ à ce jeu.
3. Pourquoi est-il vrai que $P(G = -10) = 0$?

3.2. Loi de probabilité

Notons $I = \{x_1; \ldots; x_n\}$ l'ensemble des valeurs, rangées par ordre croissant, prises par une variable aléatoire X sur un univers Ω.

📋 **Remarque 2 :** On manie ici des variables aléatoires ayant un nombre fini de valeurs (variables aléatoires discrètes). En utilisant des intégrales, plus tard, on pourra manier des variables alétoires dites continues, possédant un nombre infini de valeurs.

📕 ***Définition 10 :*** *La* ***loi de probabilité de*** X *associe chaque valeur x_i de X à sa probabilité $P(X = x_i)$.*
on écrit souvent une loi sous la forme d'un tableau, présenté de la manière suivante :

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
prob	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	$\cdots$	$P(X = x_n)$

✏️ **Exercice 14 :**

G	...	...	5	...	...
prob			$\frac{5}{12}$		

Compléter la loi de probabilité de G, la variable aléatoire manipulée dans l'exemple précédent.

3.3. Espérance

📕 ***Définition 11 :*** *Lorsque X est une variable aléatoire de valeurs $x_1, \ldots, x_n$, on note $E(X)$ l'****espérance de*** X*. C'est la moyenne des valeurs de X pondérée (= «coefficientée») par les probabilités :* $\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i)\, x_i}$

✏️ **Exercice 15 :** Calculer $E(G)$, la moyenne des gains.