Pages 184-185 Exercices - Dérivées

Pour les exercices 123 à 126, f, g et h sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée de ces trois fonctions.

123 *Capacité 9, p. 175*

$f(x)=\sqrt{x^2+2}$, $g(x)=(3x+1)^3$ et $h(x)=\dfrac{1}{\left(x^4+3\right)^2}$

124 $f(x)=\dfrac{1}{\left(x^2+x+1\right)^3}$, $g(x)=\dfrac{1}{\left(e^x+3\right)^4}$ et $h(x)=\sqrt{e^x+1}$

125 $f(x)=3(1-x)^3$, $g(x)=(1-5e^x)^2$ et $h(x)=e^{1+x+x^2}$

126 $f(x)=(2e^x-1)^3$, $g(x)=\dfrac{1}{e^{-x}+3}$ et $h(x)=\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+3}$

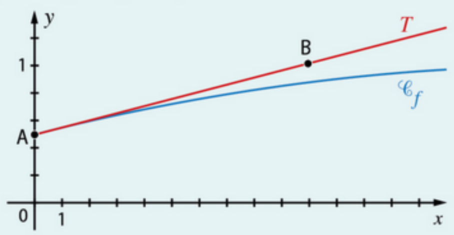
127 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x\sqrt{x^2+4}$.

Démontrer que pour tout réel x, $f'(x)=\dfrac{2\left(x^2+2\right)}{\sqrt{x^2+4}}$.

132 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=5e^{0,2x^2+0,5x}$.
Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0.

134 Une question ouverte

Soit a et b des nombres réels. On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{a}{1+e^{-bx}}$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f est donnée ci-dessous.
Elle passe par le point A(0 ; 0,5). La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A passe par le point B(10 ; 1).



Déterminer la valeur de a et celle de b.

136 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(e^{1-0,5x}-1)^2$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f.

1. a. Déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
b. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote.
2. a. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $\mathbb{R}$.
b. Construire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

128 FORMEL Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{x^2+2}}$.
Avec un logiciel de calcul formel, on a dérivé la fonction f et obtenu le résultat ci-dessous.

```
1  f(x):=3/sqrt(x^2+2)
```
$x \to \dfrac{3}{\sqrt{x^2+2}}$
```
2  deriver(f(x))
```
$-\dfrac{3*x}{(\sqrt{x^2+2})*(x^2+2)}$

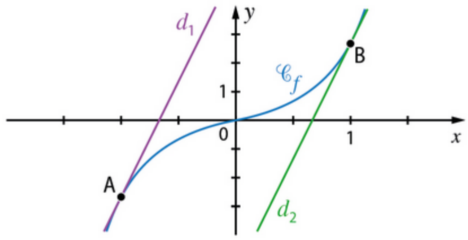
Retrouver ce résultat par le calcul.

129 Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$.
Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$ pour tout réel x de $[0\,;+\infty[$.

130 Reprendre l'exercice 129 avec $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^3}$.

131 Reprendre l'exercice 129 avec $f(x)=(2-3x)e^{1-x}$.

133 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=xe^{x^2}$.
Sur la figure ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f ainsi que ses tangentes d_1 et d_2 aux points A et B d'abscisses respectives -1 et 1.



Les tangentes d_1 et d_2 sont-elles parallèles ? Justifier.

135 *Capacité 10, p. 175*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3+xe^{1-x}$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Calculer la limite de f en $-\infty$.
2. a. Montrer que pour tout réel x, $f(x)=3+\dfrac{xe}{e^x}$.
b. Calculer la limite de f en $+\infty$. Quelle conséquence graphique peut-on en déduire ?
3. a. Montrer que pour tout réel x, $f'(x)=(1-x)e^{1-x}$.
b. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

137 CALC Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x^2+2}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. a. Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote d parallèle à l'axe des abscisses.
b. Avec la calculatrice, représenter $\mathscr{C}$ et d.
Conjecturer la position de $\mathscr{C}$ par rapport à d.
c. Démontrer cette conjecture.
2. a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
b. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

138 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 2x\sqrt{x+3}.$$

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]-3\,;+\infty[$.

3. Construire le tableau de variation de la fonction f.

140 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 0{,}25x^4 + 0{,}5x^2 - 2x + 1.$$

On note f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$ et f'' la fonction dérivée de f' sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Calculer $f'(x)$, puis $f''(x)$ pour tout réel x.

3. Justifier chaque donnée du tableau de variation de la fonction f' ci-dessous.

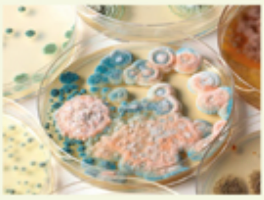
x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

4. a. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

MATH & SVT

142 On a mesuré expérimentalement, sur une durée fixée, le taux d'évolution du nombre de bactéries d'un type donné présentes dans un milieu à différentes températures.



On considère que la fonction f définie sur l'intervalle $[-5\,;43]$ par $f(t) = (-1{,}4t+59)e^{0{,}2t-4{,}75}$ modélise ce taux d'évolution (en pourcentage) en fonction de la température (en degré Celsius) pour des valeurs comprises entre -5 °C et 43 °C.

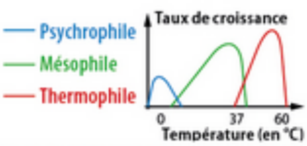
1. Calculer $f'(t)$ pour tout réel t de $[-5\,;43]$.

2. Pour quelle température le taux d'évolution de ce type de bactéries est-il maximal ?

3. Résoudre l'inéquation $f(t) < 0$ dans l'intervalle $[-5\,;43]$. Quelle information sur le développement de ce type de bactéries ce résultat fournit-il ?

LE SAVIEZ-VOUS

On peut classer les bactéries selon les températures auxquelles elles se développent.



MÉTHODE À L'ORAL

139 On considère les fonctions f, g et h définies sur $]3\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$, $g(x) = x + 3\cos(x)$ et $h(x) = e^{3-x}$.

1. Est-ce que les limites de ces fonctions en $+\infty$ se calculent par la même méthode ? Exposer oralement la méthode à suivre pour calculer chacune de ces limites.

2. Expliquer comment on détermine la limite de la fonction f en 3.

3. Pour la fonction h, expliquer comment calculer sa fonction dérivée.

141 Une question ouverte

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 1.$$

Déterminer les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

MATHS & SVT

143 PYTHON La taille d'une population de rongeurs exprimée en centaines d'individus, est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(t) = \dfrac{3e^{0{,}5t}}{e^{0{,}5t}+2}$, où t représente le temps écoulé depuis l'année 2015, exprimé en années.

1. a. Calculer $f(0)$ et interpréter ce résultat.

b. Montrer que : $f(t) = 3 - \dfrac{6}{e^{0{,}5t}+2}$.

c. En déduire la limite de f quand t tend vers $+\infty$.

2. a. Montrer que pour tout réel t de $[0\,;+\infty[$,

$$f'(t) = \frac{3e^{0{,}5t}}{\left(e^{0{,}5t}+2\right)^2}.$$

b. Établir le tableau de variation de f sur $[0\,;+\infty[$.

3. Recopier et compléter le programme ci-dessous afin que la fonction rongeur retourne l'année à partir de laquelle il y aura plus de 250 rongeurs.

```
from math import*
def rongeur():
    t=0
    p=1
    while ........:
        t=t+1
        p=3*exp(0.5*t)/(exp(0.5*t)+2)
    return(........)
```