Phénomènes aléatoires - Cours

1. Modéliser

Remarque 1 : Même si des calculs concernant des risques ou des jeux de hasard ont été faits depuis l'antiquité, on date le début de la théorie des probabilités de la correspondance entre Blaise Pascal et Pierre de Fermat (1654) à propos du «problèmes des partis (url : https://fr.wikipedia.org/wiki/Probl%C3%A8me_des_partis)».

1.1. Notion de modèle

Exemple 1 : On lance un dé cubique et on note le numéro de la face supérieure.

Définition 1 : *Cette expérience est une* ***expérience aléatoire*** *dont les* ***issues*** *(résultats possibles) sont 1, 2, 3, 4, 5, 6 :*

Issue	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

*Une réalisation (que l'on appelle «**épreuve**») de cette expérience (réalité ou simulation), doit forcément aboutir à l'une de ses issues ; on ne sait pas laquelle exactement.*

Définition 2 : *L'**ensemble des issues** est* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Définition 3 : *Définir une **probabilité**, pour une expérience aléatoire, consiste à :*

- *préciser l'ensemble des issues possibles : l'«**univers**»* $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *;*
- *attribuer à chacune des issues* x_i *un nombre* p_i *positif ou nul, appelé **probabilité de*** x_i, *de sorte que l'on ait* $p_1 + \cdots + p_n = 1 = 100\%$

Exercice 1 : Le dé suivant est truqué :

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\ldots$

Calculer $p(6)$, la probabilité d'obtenir un six.

Exercice 2 : Il y a 86% d'élèves droitiers dans ce lycée. Quelle est la probabilité de tomber au hasard sur un élève qui ne le soit pas ?

Définition 4 : Notation somme : *Une somme telle que* $p_1 + \cdots + p_n$ *se note, de manière condensée, à l'aide du symbole sigma* (Σ) *:* $\sum_{i=1}^{n} p_i$

Exercice 3 : Calculer $A = \sum_{i=1}^{7} i$ et $B = \sum_{i=1}^{4} i^2$

Exercice 4 : (PISA) développer une intuition d'une probabilité :
Un géologue a affirmé :
«Au cours des 20 prochaines années, la probabilité que se produise un tremblement de terre à Springfield est de 2 sur 3»
Parmi les propositions suivantes, laquelle **exprime le mieux** ce que veut dire le géologue ?

- Puisque $\frac{2}{3} \times 20 \approx 13{,}3$, un tremblement de terre aura lieu à Springfield dans 13 à 14 ans.
- Puisque $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$, on est sûr qu'il y aura un tremblement de terre à Springfield dans les 20 ans.
- La probabilité d'avoir un tremblement de terre dans cette ville est plus forte que celle de ne pas en avoir.
- On ne peut rien dire, car personne n'est sûr du moment où un tremblement de terre se produit.

1.2. Construire un modèle

Propriété 1 : Dans la grande majorité des cas, on utilise l'une de ces deux façons de déterminer les probabilités p_i associées aux issues x_i :

- **Étude statistique - observer les fréquences**

  Exemple 2 : On lance un dé truqué un grand nombre de fois (10 000, par exemple) et on note le résultat dans le tableau suivant :

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,125	0,125	0,125	0,125	0,2	0,3

  On **décide** alors que l'on a expérimenté un nombre suffisant de lancers pour que les futurs lancers de ce dé respectent les mêmes fréquences que celles de cette expérience. Cette «décision» établit un **modèle** probabiliste : on peut remplacer le mot «Fréquence» (qui est du domaine de la statistique) dans le tableau par le mot «probabilité».

- **Par le choix de l'équiprobabilité.**

  Exemple 3 : Le lancer d'une pièce de monnaie **bien équilibrée** :

Issue	pile	face
Probabilité	0,5	0,5

  Définition 5 : *Dans une situation d'**équiprobabilité**, Toutes les issues possèdent la même probabilité.*

Méthode 1 : Étude statistique ou équiprobabilité ?
Le choix de l'équiprobabilité se fait lorsqu'il est suggéré dans l'énoncé (pièce équilibrée, tirage dans une urne au hasard).
Si on est dans une situation où les probabilités de chaque issue n'ont aucune raison d'être les mêmes, on doit mener une étude statistique.

Exercice 5 : Étude statistique ou équiprobabilité ? Le préciser.

1. On lance un dé bien bien équilibré.
2. On choisit au hasard une consonne dans l'alphabet.
3. Probabilité qu'un foyer français ait 2 enfants.
4. Tomber sur le zéro sur une roulette de casino (numérotée de 0 à 36).
5. Que M. Dupont, 40 ans, que l'on ne connaît pas, attrape la grippe l'hiver prochain ?
6. Qu'une tartine tombe du côté de la confiture ?

2. Prévoir

2.1. Probabilité d'un événement

Exemple 4 : On lance un dé cubique et l'on considère l'**événement** A : «obtenir au moins 5».

- **issues favorables** à A (qui réalisent A) sont 5 et 6 ; on note $A = \{5; 6\}$.
- Pour le dé truqué (utilisé précédemment), si $P(5) = 0{,}2$ et $P(6) = 0{,}3$ alors $P(A) = 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5$.
- Pour un dé équilibré (situation d'équiprobabilité) : $P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$ alors $P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

Définition 6 : *Un **événement** A est un sous-ensemble (aussi appelée partie) de l'univers Ω (on note $A \subset \Omega$, on dit «A inclus dans Ω»).*
*La **probabilité** $P(A)$ est la somme des probabilités des issues favorables à A.*

Propriété 2 :

- Pour tout événement A, on a : $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$
- On a $P(\Omega) = 1$.
- L'événement B : «obtenir un 7 sur un dé est **impossible** : $P(B) = 0$. On identifie à l'ensemble vide noté $\emptyset$ tout événement impossible ($B = \emptyset$).

Propriété 3 : Dans une **situation d'équiprobabilité**, la probabilité d'un événement A est :

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorales à } A}{\text{nombre d'issuespossibles}}}$$

2.2. Opérations sur les événements

Définition 7 : *Si A et B sont deux événements,*

- *On note $\overline{A}$ l'événement complémentaire de A (toutes les issues qui ne réalisent pas A.)*
- *L'événement $A \cap B$ est l'ensemble des issues qui réalisent A **et** B (simultanément).*
- *L'événement $A \cup B$ est l'ensemble des issues qui réalisent A **ou** B (au moins l'un des deux).*

Exemple 5 : On lance un dé cubique et équilibré, et on note les événements suivants :

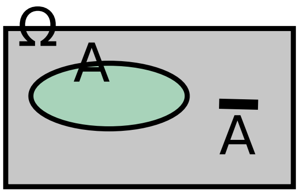
- A : «obtenir un nombre pair»
- B : «obtenir un un ou un six»

On a alors :

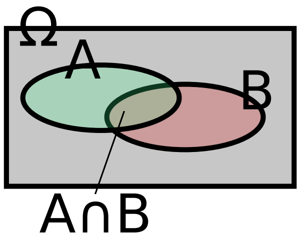
$A = \{2;4;6\}$	$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
$B = \{1;6\}$	$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
$\overline{A} = \{1;3;5\}$	$p\left(\overline{A}\right) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
$A \cap B = \{6\}$	$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$
$A \cup B = \{1,2;4;6\}$	$P(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Exercice 6 : Reproduire le tableau dans le cas d'un dé octaèdrique (8 faces).

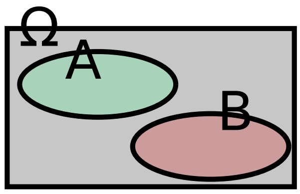
Propriété 4 : Soit A et B deux événements :



Événement complémentaire :
$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$



Union quelconque :
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



Union disjointe :
Si $P(A \cap B) = 0$, *alors*
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Définition 8 : *Lorsqu'on sait que A et B ne peuvent être réalisés simultanément ; A et B sont dits **incompatibles** ; dans ce cas on a $P(A \cap B) = 0$.*

Exercice 7 : A et B sont deux événements quelconques ; exprimer $P(A \cap B)$ en fonction de $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cup B)$.

Exercice 8 : $P(A) = 0{,}7$ et $P(B) = 0{,}6$.
Montrer que A et B ne peuvent pas être incompatibles.
En dégager une condition sur les probabilités de A et B impliquant que ces deux événements soient incompatibles.

Exercice 9 : Chaque ligne du tableau représente une situation différente. Compléter le tableau.

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \cap B$	$A \cup B$
0,2	0,5			0,1	
0,6			0,6	0	
		0,7	0,7		0,5
			0,8	0,2	0,4

Propriété 5 : Si A et B sont deux événements quelconques, on a toujours :

$$P(A \cap B) \leqslant \begin{matrix} P(A) \\ P(B) \end{matrix} \leqslant P(A \cup B)$$

Propriété 6 : Lois de Morgan : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Exercice 10 : Utiliser les lois de Morgan pour exprimer $\overline{(A \cap B) \cup C}$ en fonction de $\overline{A}$, $\overline{B}$ et $\overline{C}$.

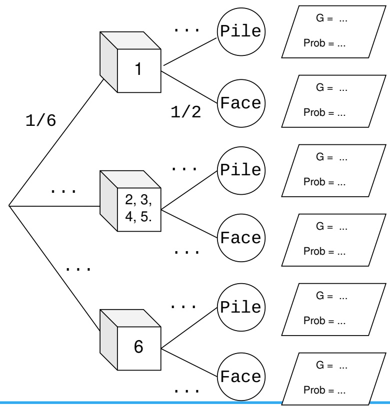
3. Variables aléatoires (réelles)

3.1. Définition

***Définition 9 :** Une fonction réelle définie sur un univers Ω est appelée **variable aléatoire**.*

Exemple 6 : Souvent, une variable aléatoire est utilisée pour rendre compte des gains dans un jeu de hasard.
On lance un dé (6 faces, bien équilibré), puis une pièce (bien équilibrée) ;

- si le dé donne 1, on gagne 5€ ;
- si le dé donne 6, on gagne 10€ ;
- si le dé donne un nombre compris entre 1 et 5 inclus, on ne gagne rien (0€) ;
- ensuite en lançant la pièce, aux gains obtenus avec le dé :
  - on ajoute 5€ si la pièce donne pile ;
  - on enlève 5€ si la pièce donne face ;
- on note alors G les gains ou pertes (G peut être négatif !) à la fin du jeu.



Arbre à compléter

Exercice 11 : Compléter l'arbre décrivant les possibilités de ce jeu.

Exercice 12 :

1. Quelles sont les valeurs possibles de G ?
2. Calculer $P(G=5)$, c'est à dire la probabilité de gagner 5€ à ce jeu.
3. Pourquoi est-il vrai que $P(G=-10)=0$?

3.2. Loi de probabilité

Notons $I=\{x_1;\dots;x_n\}$ l'ensemble des valeurs, rangées par ordre croissant, prises par une variable aléatoire X sur un univers Ω.

Remarque 2 : On manie ici des variables aléatoires ayant un nombre fini de valeurs (variables aléatoires discrètes). En utilisant des intégrales, plus tard, on pourra manier des variables alétoires dites continues, possédant un nombre infini de valeurs.

***Définition 10 :** La **loi de probabilité de X** associe chaque valeur x_i de X à sa probabilité $P(X=x_i)$.
on écrit souvent une loi sous la forme d'un tableau, présenté de la manière suivante :*

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
prob	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$	$\cdots$	$P(X=x_n)$

Exercice 13 : Compléter la loi de probabilité de G, la variable aléatoire manipulée dans l'exemple précédent.

G	...	...	5	...	...
prob			$\frac{5}{12}$		

3.3. Espérance

***Définition 11 :** Lorsque X est une variable aléatoire de valeurs $x_1,\dots,x_n$, on note $E(X)$ l'**espérance de X**. C'est la moyenne des valeurs de X pondérée (= «coefficientée») par les probabilités :* $\boxed{E(X)=\sum_{i=1}^{n} P(X=x_i)\,x_i}$

Exercice 14 : Calculer $E(G)$, la moyenne des gains.

4. Probabilités conditionnelles

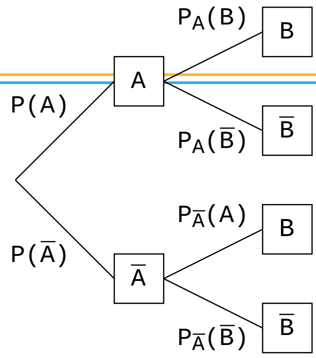
On cherche souvent à analyser la dépendance d'un événement par rapport à un autre, ou bien comprendre des phénomènes numériques paradoxaux... Les probabilités conditionnelles offrent un cadre simple qui peut aider.

Exercice 15 : exemple de paradoxe apparent : phénomène de Rogers
Un prof de maths est perçu comme particulièrement sévère : sur les deux groupes d'approfondissement qu'il suit, composés de quelques élèves, les moyennes de ce trimestre sont 1, 2, 3, 4 pour le groupe A et 5, 6, 7, 8, 9 pour le groupe B, sur 20. Son supérieur lui explique qu'il faut impérativement que les moyennes des deux groupes augmentent. Le prof refuse catégoriquement de changer les moyennes de chaque élève, et dit à son supérieur qu'il n'avait qu'à faire les groupes différemment pour avoir de meilleures moyennes. Pourquoi ?

Remarque 3 : Il est donc fondamental de savoir si l'on calcule sur la population globale (Ω entier) ou bien si l'on est restreint à une partie seulement de cette population.

4.1. Définition et propriétés

Définition 12 : *A, B sont deux événements avec $P(A) \neq 0$.*
*On note $P_A(B)$ la «**probabilité de B sachant A**» le nombre $\dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.*



Représentation des probabilités conditionnelles sur un arbre

Exercice 16 : Contrôle qualité :
Une production en très grande série contient 90% de pièces conformes et 10% de pièces défectueuses. Un contrôle de qualité accepte les pièces conformes dans 92% des cas et rejette les pièces défectueuses dans 94% des cas.
On tire une pièce au hasard dans la production, après le contrôle qualité. On note :

- C : «la pièce tirée est conforme» ;
- A : «la pièce tirée est acceptée au contrôle».

1. Construire l'arbre des possibilités (conseil : mettre les probabilités marginales au premier niveau de l'arbre).
2. En déduire les probabilités des 4 issues possibles.
3. Identifier les faux positifs (pièce refusée bien que conforme) et les faux négatifs (acceptée mais défectueuse) sur l'arbre
4. En déduire la probabilité que la pièce prélevée ait subi une erreur de contrôle.
5. **Inverser l'arbre :** Construire un arbre dans lequel les événements A et son complémentaire sont au 1er niveau, indiquer les probabilités sur chaque branche.
   Ce changement de point de vue peut être utile pour mieux analyser une situation.
6. **Approfondissement :** En cas de pièce contrôlée et refusée, on fait un deuxième contrôle, indépendant du premier, qui sera déterminant mais coûte trois fois plus cher.
   La situation est-elle améliorée ?

Exercice 17 : À la suite de la découverte dans un pays A des premiers cas d'une maladie contagieuse non mortelle M, il a été procédé dans ce pays à une importante campagne de navigation : 70% des habitants ont été vaccinés.
Une étude a révélé que 5% des vaccinés ont été touchés à des degrés divers par la maladie, pourcentage qui s'est élevé à 60% chez les non-vaccinés.

$V \setminus M$	M	$\overline{M}$	**total**
V	...	...	...
$\overline{V}$			
total			

1. Calculer la probabilité qu'un individu pris au hasard dans la population ait été touché par la maladie.
2. Calculer la probabilité pour qu'un individu ait été vacciné, sachant qu'il a été atteint par la maladie.
3. Commenter les pourcentages manipulés : peut-on en faire de bonnes/mauvaises interprétations ?
4. Il est parfois plus judicieux d'essayer d'éviter de présenter des probabilités conditionnelles : on peut présenter les intersections, qui ont l'avantage d'être immédiatement comparables entre elles, mais il peut y avoir de gros écarts. Présenter les données sous la forme d'un tableau à double entrée.

Définition 13 : *A et B sont deux événements de probabilité non nulle.*
*On dit que A et B sont **indépendants** s'ils vérifient une de ces trois affirmations équivalentes :*

$$P_A(B) = P(B)$$
$$\Leftrightarrow \quad P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$$
$$\Leftrightarrow \quad P_B(A) = P(A)$$

Explication : *On passe de la première ligne à la deuxième en multipliant par $P(A)$ et de la deuxième à la troisième en divisant par $P(B)$.*

Remarque 4 : Lorsque A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi, ainsi que $\overline{A}$ et B, et aussi $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

Exercice 18 : On a $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}5$ et $P(A\cap B) = 0{,}2$. A et B sont-ils indépendants ?
En calculant, vérifier si $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont.

Exercice 19 : Un même individu peut être atteint de surdité unilatérale ou bilatérale (mais pas plus). \ On note G et D les deux événements «être atteint de surdité à l'oreille gauche/droite».
G et D sont indépendants, et $P(G) = P(D) = 5\%$. On note : B : «surdité bilatérale» ; U : «surdité unilatérale» ; S : «surdité» (une oreille au moins).

1. Calculer les probabilités de ces événements.
2. Sachant qu'un individu pris au hasard dans la population est atteint de surdité, quelle est la probabilité pour qu'il soit atteint de surdité à droite ? Pour qu'il soit atteint de surdité bilatérale ?

Propriété 7 : Formule des probabilités totales :
Soit $C_1, C_2, \ldots, C_k$ des événements de probabilité non nulle formant une **partition** de Ω (tous les C_i sont disjoints et recouvrent entièrement Ω : ils représentent des cas différents).
Alors, on a : $P(A) = P(A\cap C_1) + P(A\cap C_2) + \cdots + P(A\cap C_k)$
Qui peut aussi s'écrire :
$P(A) = P(C_1)P_{C_1}(A) + P(C_2)P_{C_2}(A) + \cdots + P(C_k)P_{C_k}(A)$

Remarque 5 : Si $B \neq \emptyset$, B et $\overline{B}$ formant naturellement une partition de Ω, on a : $P(A) = P(B)P_B(A) + P(\overline{B})P_{\overline{B}}(A)$

Exercice 20 : On lance un dé tétraédrique (4 faces) bien équilibré : on multiplie le résultat R par 2 s'il est pair. On lance ensuite une pièce bien équilibrée ; dans le cas pile, on multiplie R par 2.
Utiliser un arbre pour déterminer la loi de R (dire où apparaît une partition) et calculer son espérance et son écart-type.

5. Problèmes

Exercice 21 : Erreur de d'Alembert

Quelle est la probabilité d'obtenir **au moins** une fois pile en deux lancés successifs ?

Remarque : D'Alembert avait fait un raisonnement faux dans le calcul de la probabilité, dans l'article « croix ou pile » de l'Encyclopédie .
De l'existence de 3 cas (pile au premier lancer, pile au second lancer, aucun lancer ne donnant pile), il avait déduit que la probabilité était 2/3.

Exercice 22 : Pierre feuille ciseaux

Alice et Bob jouent à pierre/feuille/ciseaux. On considère que tous les tirages sont indépendants et équiprobables.

A.
   1. Représenter la situation par un arbre ou un tableau.
   2. Déterminer les probabilités que Alice gagne, que Bob gagne, ou d'un match nul.

B. Alice a vu sur internet que jouer pierre donne de meilleurs résultats. Elle l'utilise donc 50% du temps contre 25% du temps pour les deux autres. Bob ne change pas de stratégie.
Mêmes questions qu'au A.

Exercice 23 : Paradoxe du Duc de Toscane

On lance trois dés à 6 faces bien équilibrés et on note la somme S des deux nombres obtenus. Le Duc de Toscane, dans une lettre à Galilée, signale :

- `S =  9 = 1+2+6 = 1+3+5 = 1+4+4 = 2+2+5 = 2+3+4 = 3+3+3` (6 décompositions)
- `S = 10 = 1+3+6 = 1+4+5 = 2+2+6 = 2+3+5 = 2+4+4 = 3+3+4` (6 décompositions)

Pourtant, en pratique, S=10 est obtenue plus souvent ! Y a-t-il une explication ?

Exercice 24 : Paradoxe de Monty Hall (présentateur du jeu TV «let's make a deal»).

Un candidat se trouve devant 3 portes fermées. Derrière une de ces portes, il y a une superbe voiture à gagner, et un poireau dans les deux autres. Le candidat doit choisir une porte au hasard (sans l'ouvrir). L'animateur ouvre alors une autre porte contenant un poireau.
Que devrait faire le candidat : garder la porte qu'il a choisie ou changer d'avis et choisir l'autre porte restante ? Justifier.

Conseils : Essayer de représenter la situation par un arbre ; réfléchir à ce qu'il se passerait s'il y avait 100 portes (une voiture et 99 poireaux).

Exercice 25 : Problème des partis

On date le début de la théorie des probabilités de la correspondance entre Blaise Pascal et Pierre de Fermat (1654) à propos du «problèmes des partis (url : https://fr.wikipedia.org/wiki/Probl%C3%A8me_des_partis)» :

Deux joueurs jouent à un jeu de hasard en 3 parties gagnantes, chacun ayant misé la même somme d'argent m ; or il se trouve que le jeu est interrompu avant que l'un des deux joueurs ait obtenu 3 victoires et ainsi remporté la victoire et de ce fait la totalité des enjeux soit $2m$. Comment, dans ces circonstances, doit-on partager les enjeux ?