Primitives - Cours

1. Introduction

Les primitives permettent le calcul d'intégrales, qui modélisent nombre de problèmes issus de la géométrie et des sciences physiques ; on peut citer, par exemple :
les calculs d'aires délimitées par des courbes, le calcul de valeurs moyennes, les calculs de volumes, d'énergie, etc...

2. Primitives

Dans toute cette partie, on se place sur un intervalle I.

📕 ***Définition 1 :*** *On dit qu'une fonction f définie sur I admet une* ***primitive*** *F lorsque l'on a : $F' = f$*

🌄 **Exemple 1 :** Sur $\mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ est une primitive de $f(x) = x$ car : $F'(x) = \left(\frac{1}{2}x^2\right)' = \frac{1}{2} \times 2x = x = f(x)$

📋 **Remarque 1 :** On peut observer que $G(x) = \frac{1}{2}x^2 + 10$ est aussi une primitive de x puisque $10' = 0$, ce qui nous conduit à énoncer la propriété qui suit :

📙 **Propriété 1 :** Sur un même intervalle, toutes les primitives diffèrent d'une constante, c'est à dire :

- si k est une constante réelle et si F est une primitive de f sur I, alors $G = F + k$ est aussi une primitive de f sur I ;
- toutes les autres primitives de f sur I sont de la forme $F + k$ pour une certaine contante k.

Démonstration : Soit F une primitive de f sur I et k une constante réelle.

- On pose $G(x) = F(x) + k$; On a pour tout x dans I :
  $G'(x) = (F(x) + k)' = F'(x) + k' = f(x) + 0 = f(x)$, donc $G = F + k$ est aussi une primitive de f sur I.
- Soit H une autre primitive de f sur I. On a alors pour tout x dans I,
  $(H - F)'(x) = H'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$.
  $H - F$ est donc une fonction constante de valeur un réel k fixé. On a alors pour tout $x \in I$,
  $H(x) - F(x) = k$ donc $H(x) = F(x) + k$. Toutes les primitives de f diffèrent donc d'une constante.

✏️ **Exercice 1 :** Déterminer la primitive F (sur $\mathbb{R}$) de $f(x) = x^2$ telle que $F(2) = 3$.

2.1. Propriétés des primitives

📙 **Propriété 2 :** Soit f et g deux fonctions admettant deux primitives F et G sur un intervalle I, et k une constante réelle. Alors :

- **Multiplication par une constante :** kF est une primitive de kf.

  🌄 **Exemple 2 :** x^3 est une primitive de $3x^2$, donc $\frac{1}{3}x^3$ est une primitive de $\frac{1}{3}3x^2 = x^2$.

- **Somme :** $F + G$ est une primitive de $f + g$.

  🌄 **Exemple 3 :** $x^3 + x$ est une primitive de $3x^2 + 1$

📋 **Remarque 2 : Attention :** FG n'est pas une primitive de fg et $\dfrac{F}{G}$ n'est pas une primitive de $\dfrac{f}{g}$; en effet
$(FG)' = F'G + FG' = fG + Fg \neq fg$ et $\left(\dfrac{F}{G}\right)' = \dfrac{fG - gF}{G^2} \neq \dfrac{f}{g}$.
Contre-exemple : $1 = 1 \times 1$ **n'**admet **pas** pour primitive $x \times x = x^2$, car la dérivée de x^2 est $2x$ et pas 1 !

📗 **Méthode 1 :** Pour calculer une primitive, il faut souvent développer.

✏️ **Exercice 2 :** Déterminer une primitive sur $]0; +\infty[$ de : $f(x) = (1 + 2x^2)^2$ et de $g(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2}$

2.2. Primitives usuelles

📙 **Propriété 3 : Primitives usuelles :**

Fonction	Primitive
k (cte)	kx
x	$\frac{x^2}{2}$
x^2	$\frac{x^3}{3}$
x^α $(\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x}$
$\cos(\omega x)$	$\frac{1}{\omega}\sin(\omega x)$
$\sin(\omega x)$	$\frac{-1}{\omega}\cos(\omega x)$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$

📙 **Propriété 4 : Primitives composées :** Si u et v sont des fonctions dérivables :

Fonction	Primitive
$u'u^n$ $(n \in \mathbb{N}^*; u \neq 0)$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$u'\mathrm{e}^u$	e^u
$\dfrac{u'}{u}$ $(u \neq 0)$	$\ln(\lvert u \rvert)$
$u'v' \circ u$	$v \circ u$

✏️ **Exercice 3 :** Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3$
2. $g(x) = 3x$
3. $h(x) = 3x^2 - 7x + 2$
4. $i(x) = \left(3x - \dfrac{1}{x}\right)^2$
5. $j(x) = \dfrac{2}{2x+3} + \dfrac{1}{x^2}$
6. $k(x) = 30x(1+x^2)^{14}$
7. $l(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$
8. $m(x) = (x+3)\mathrm{e}^{-2x}$

2.3. Notation crochet

📕 ***Définition 2 :*** *Soit F une primitive de f définie sur un intervalle I et a et b dans I.*
*Pour noter une différence entre deux valeurs d'une même primitive, on utilise cette notation, appelée **«notation crochet»** :* $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

📋 **Remarque 3 :** Attention au signe moins qui se répercute sur tout le «bloc» $F(a)$, il faut mettre des parenthèses en remplaçant $F(a)$ par son expression lorsque F est une somme !

✏️ **Exercice 4 :** Calculer :

1. $A = \left[x^3 - x\right]_1^2$
2. $B = \left[x - \dfrac{1}{x}\right]_{10}^{20}$

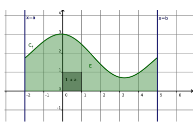
3. Intégrale d'une fonction

3.1. Définition

📕 ***Définition 3 :*** *f est une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I et $a, b \in I$ sont deux réels fixés. On appelle intégrale de a à b de f le nombre noté :* $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; [F(x)]_a^b \;=\; F(b) - F(a)}$

📋 **Remarque 4 :** Cette définition est bien indépendante de la primitive choisie : comme les primitives de f diffèrent d'une constante, l'écart entre deux valeurs d'une primitive de f ne dépend pas du choix de cette primitive.

3.2. Interprétation graphique :



📙 **Propriété 5 :** Si f est une fonction **positive** sur [a;b], alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ donne l'aire $\mathcal{A}(E)$, en unités d'aires (notées u.a.) du domaine E délimité par la courbe de f, l'axe (Ox) et les deux droites verticales passant par les abscisses a et b.

✏️ **Exercice 5 :** Écrire, sous la forme d'une intégrale, l'aire $\mathcal{A}(E)$ du domaine E indiqué sur le graphique.

✏️ **Exercice 6 :** Déterminer l'aire délimitée par la parabole d'équation $y = x^2$, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

📋 **Remarque 5 :** Si f est une fonction de signe non constant sur $[a;b]$, alors l'intégrale de a à b de la fonction f est la somme des «aires algébriques» des domaines situés entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ (c'est à dire, sur les intervalles où $f \geq 0$, l'aire entre la courbe et l'axe est comptée posivement, et si $f \leq 0$, négativement).