Page 388

120 Surcharges d'un serveur Web

On s'intéresse aux requêtes reçues par le serveur web d'une grande entreprise, provenant de clients dispersés sur le réseau Internet. La réception de trop nombreuses requêtes est susceptible d'engendrer des problèmes de surcharge du serveur.

On considère :

– d'une part, que la probabilité pour le serveur de ne pas connaître de dysfonctionnements importants au cours d'une journée donnée est $p = 0{,}99$;

– d'autre part, que des dysfonctionnements importants survenant au cours de journées distinctes constituent des événements aléatoires indépendants.

On appelle Y la variable aléatoire qui, à un mois de 30 jours, associe le nombre de jours où le serveur ne connaît pas de dysfonctionnements importants.

1. Déterminer la loi suivie par Y.

2. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité que le serveur connaisse au plus 3 jours de dysfonctionnements importants pendant un mois.

121 Contrôle douanier

Dans un aéroport, les passagers d'un avion en provenance d'un pays dit « sensible » sont attentivement surveillés.

En effet, la douane a estimé à 8 % le pourcentage de trafiquants présents dans cet avion. De cet avion débarquent 345 passagers dont n seront contrôlés au hasard par les douaniers, avec n supérieur ou égal à 3.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque groupe de n personnes contrôlées, associe le nombre de trafiquants.

1. Exprimer, en fonction de n, la probabilité de l'événement « il y a au moins un trafiquant parmi les personnes contrôlées ».

2. Le chef des douaniers se fixe un objectif : contrôler suffisamment de personnes pour que la probabilité de trouver au moins un trafiquant soit supérieure ou égale à 0,7.

Déterminer alors le nombre minimal de personnes que les douaniers doivent contrôler pour atteindre leur objectif.

122 CALC Coups francs

À l'entraînement, un grand footballeur marque 61 % de ses coups francs. La réussite de chacun de ses tirs est supposée indépendante des autres tirs. On arrondira les probabilités demandées au millième.

1. Quelle est la probabilité qu'il marque chaque fois s'il tire 20 coups francs ?

2. Quelle est la probabilité qu'il marque au moins un coup franc dans un match durant lequel il aura eu trois tentatives ?

3. À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre minimal de coups francs qu'il devrait tirer dans un match pour que la probabilité de marquer au moins un but soit supérieure à 0,999.

123 Un parc éolien

Un parc de dix éoliennes toutes identiques est mis en service. La probabilité qu'une des éoliennes soit encore en fonctionnement sans défaut de performance au bout d'un an vaut 0,8. Le fonctionnement d'une éolienne est indépendant de celui des autres éoliennes.

1. Quelle est la probabilité que sept éoliennes exactement fonctionnent sans défaut de performance au bout d'un an ?

2. Sachant qu'il y a au moins sept éoliennes fonctionnant sans défaut de performance, calculer la probabilité pour qu'il y en ait au plus neuf.

124 RAISONNER CALCULER

Un festival de cinéma

À l'occasion d'un festival de cinéma à Tarantiville, on interroge cinq personnes à la fin de la projection d'un film.

Le nombre de personnes assistant à cette projection est suffisamment grand pour que l'on puisse assimiler ce sondage à des « tirages successifs » avec remise. On appelle C la variable aléatoire qui associe, à chaque groupe de personnes interrogées, le nombre de personnes ayant aimé le film.

1. On a constaté dans d'autres villes de la région que 40 % des personnes interrogées ont aimé le film.

a. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire C ?

b. On appelle A l'évènement « parmi les cinq personnes interrogées, il y en a trois qui ont aimé ce film ».

Déterminer la probabilité de l'événement A.

2. Il s'avère que la population ayant assisté à cette projection est très différente de celle des autres villes car cette projection a eu lieu dans le cadre d'un festival. On appelle p la probabilité pour une personne d'aimer ce film.

a. Exprimer, en fonction de p, la probabilité de l'événement A.

b. Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ par $f(p) = p^3(1 - p)^2$.

c. Pour quelle valeur de p, la probabilité de l'événement A est-elle maximale ?

125 **Des points au hasard**

Un sac contient trois boules numérotées respectivement 0, 1 et 2, indiscernables au toucher. On tire une boule du sac, on note son numéro x et on la remet dans le sac ; puis on tire une seconde boule, on note son numéro y et on la remet dans le sac. Toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.

À chaque tirage de deux boules, on associe dans le plan, muni d'un repère orthonormé (O ; I, J), le point M de coordonnées $(x ; y)$. On désigne par $\mathscr{D}$ le disque de centre O et de rayon $\sqrt{3}$.

1. Placer dans le plan les points correspondants aux différents résultats possibles.
2. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules, associe la somme $x^2 + y^2$.
Déterminer la loi de probabilité de X sous forme d'un tableau.
3. Calculer la probabilité que le point M appartienne au disque $\mathscr{D}$.
4. On tire cinq fois de suite, de façon indépendante, deux boules successivement et avec remise : on obtient ainsi cinq points du plan.
a. Quelle est la probabilité que trois points exactement appartiennent au disque $\mathscr{D}$?
b. Quelle est la probabilité qu'au moins un de ces points appartienne au disque $\mathscr{D}$?
5. On renouvelle, n fois de suite, de façon indépendante, le tirage de deux boules successivement et avec remise : on obtient ainsi n points du plan.
Déterminer le plus petit entier n strictement positif tel que la probabilité de l'événement « au moins un de ces points appartient à $\mathscr{D}$ » soit supérieure ou égale à 0,999 9.

Page 389

127 RAISONNER CALCULER

Test unilatéral : défauts de mitigeurs

Une entreprise du bâtiment a constaté qu'un certain nombre de mitigeurs thermostatiques, posés par elle, avait un mauvais fonctionnement, dû à une pièce cylindrique. L'entreprise pose 304 mitigeurs. Le pourcentage de pièces ayant un défaut est de 5 %. Soit X la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 304 pièces, associe le nombre de défauts.

1. Quelle loi suit X ?
2. Déterminer le plus petit entier a tel que $P(X \leqslant a) > 0{,}95$.
3. En déduire un intervalle $[a ; b]$ tel que la probabilité $P\left(X \in [a;b]\right)$ soit supérieure à 95 %.
4. On sait qu'il y a 18 défauts sur 304 pièces.
Que peut-on en conclure ?

128 **Surréservation à l'hôtel capsule**

Au Japon, un hôtel capsule a une capacité d'accueil de 70 places et n'héberge que des personnes ayant réservé au préalable. La probabilité qu'une personne ayant réservé se présente à l'hôtel est estimée à 0,8.

On note n le nombre de réservations prises par l'hôtel et X la variable aléatoire qui, à chaque groupe de n personnes ayant réservé, associe le nombre de ces personnes qui se présentent à l'hôtel.

Chaque personne prend sa réservation pour elle seule et de façon indépendante des autres.

1. Quelle est alors la loi suivie par X ? En préciser les paramètres.
2. Afin de compenser ses pertes, l'hôtel décide de recourir à la surréservation et prend 82 réservations.
Quelle est la probabilité qu'il ne puisse pas accueillir certains des clients ayant réservé qui se présentent ? On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près.
3. Déterminer le nombre maximum de réservations que l'hôtel peut prendre en étant sûr à 95 % de ne pas décevoir une personne ayant réservé.

MATHS & SVT

129 **Sexisme à l'embauche**

Deux entreprises recrutent leur personnel dans un vivier de très grande taille comportant autant d'hommes que de femmes. Voici la répartition entre hommes et femmes dans ces deux entreprises.

	Hommes	Femmes	Total
Entreprise A	57	43	100
Entreprise B	1425	1075	2500

1. Calculer la proportion des hommes dans chacune de ces entreprises.
2. Soit X la variable aléatoire qui, à un échantillon de 100 personnes, associe le nombre d'hommes présents dans ce groupe. On suppose qu'il y a parité homme-femme.
On se pose alors la question (Q) suivante : « Peut-on suspecter l'une des entreprises de ne pas respecter la parité hommes-femmes à l'embauche ? »
a. Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
b. Déterminer les entiers a et b tels que a est le plus petit entier tel que $P\left(X \leqslant a\right) > 0{,}025$ et b est le plus petit entier tel que $P\left(X \leqslant b\right) \geqslant 0{,}975$.
c. En déduire un intervalle I tel que $P\left(X \in I\right) \geqslant 0{,}95$.
d. Répondre à la question (Q) pour l'entreprise A.
3. En considérant la variable aléatoire Y qui, à un échantillon de 2 500 personnes choisies au hasard, associe le nombre d'hommes présents dans ce groupe, reprendre la question 2. pour l'entreprise B.