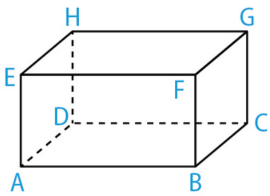
Partie 1 - Méthodes - produit scalaire

143 10 min Capacité 1, p. 89

Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle tel que AB = 8, AE = 4 et FG = 4.

Calculer les produits scalaires suivants :

a. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BG}$ **b.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}$ **c.** $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{HF}$



144 15 min Capacité 2, p. 89

Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle tel que AB = AE = 1 et AD=2.

On considère les points I, J et K définis par :

$$\overrightarrow{FI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{BJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD} \text{ et } \overrightarrow{DK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}.$$

1. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{JI}$ en fonction de $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ puis le vecteur $\overrightarrow{JK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{JI}\cdot\overrightarrow{JK}$.

3. Que peut-on en déduire pour le triangle IJK ?

147 15 min Capacité 4, p. 91

QCM *Choisir la ou les bonnes réponses.*

Soit A(–2 ; –1 ; –9), B(2 ; 7 ; 10) et C(0 ; 5 ; 0).

1. Le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ est égal à :

a. 227 **b.** –35 **c.** 56 **d.** 231

2. Quelles sont les longueurs exactes de AB et AC ?

a. AB = 21 **b.** AB = $\sqrt{37}$ **c.** AC = 101 **d.** AC = 11

3. Un mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ en degrés est égal à :

a. 0,19° à 0,01 près **b.** 79,32 à 0,01 près

c. 10,68° à 0,01 près **d.** 0,98° à 0,01 près

Partie 2 - Méthodes - plans et droites

151 10 min Capacité 7, p. 95

VRAI/FAUX

Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par A(5 ; 2 ; –5) et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(1\ ;1\ ;1)$ et $\vec{v}(1\ ;0\ ;1)$.

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

a. Le vecteur $\vec{n}(5\ ;0\ ;5)$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

b. Le vecteur $\vec{n}(-3\ ;0\ ;3)$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

c. Il existe plusieurs vecteurs normaux au plan $\mathcal{P}$.

157 10 min Capacité 10, p. 97

Soit A(1 ; 1 ; 0), B(0 ; 1 ; 2) et C(3 ; 3 ; 1) trois points de l'espace et $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $4x-5y+2z+1=0$.

1. Démontrer que les points A, B et C définissent un plan.

2. a. Démontrer que $\mathcal{P}$ est le plan (ABC).

b. En déduire un vecteur normal au plan (ABC).

160 20 min Capacité 14, p. 99

Soit les points de l'espace A(5 ; –5 ; 2), B(–1 ; 1 ; 0), C(0 ; 1 ; 2) et D(6 ; 6 ; –1).

1. Déterminer la nature du triangle BCD et calculer son aire.

2. On admet que la perpendiculaire à (BCD) passant par A coupe (BCD) en H(1 ; 1 ; 4). Déterminer le volume du tétraèdre ABCD.

Partie 3 - Méthodes - projeté orthogonal

152 15 min Capacité 8, p. 95

Soit A(0 ; –1 ; 0) un point de l'espace et $\mathcal{P}$ le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(2\ ;1\ ;1)$

On note H le point de coordonnées (2 ; –1 ; –4).

1. Démontrer que H appartient au plan $\mathcal{P}$.

2. Démontrer que H est le projeté orthogonal du point B(–2 ; –3 ; –6) sur le plan $\mathcal{P}$.

3. En déduire la distance du point B au plan $\mathcal{P}$.

159 15 min Capacité 13, p. 99

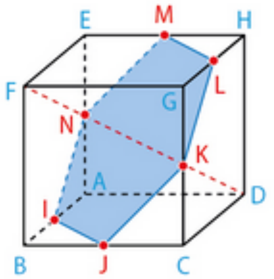
Soit A (–8 ; 17 ; 8) un point de l'espace et $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $-x+2y+z+4=0$.

Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point A sur le plan $\mathcal{P}$.

Partie 4 - Problèmes

134 On considère un cube ABCDEFGH.

On note I le milieu de [AB] et $\mathcal{P}$ le plan passant par I et perpendiculaire à la droite (FD).



On se place dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

1. Déterminer les coordonnées du point I et du vecteur $\overrightarrow{FD}$.

2. En déduire une équation du plan $\mathcal{P}$.

3. On note J, K, L, M et N les milieux respectifs des segments [BC], [GC], [GH], [HE] et [EA].

Démontrer que les points J, K, L, M et N appartiennent à $\mathcal{P}$.

4. Quelle est la nature de l'hexagone IJKLMN ?

137 *Capacité 14, p. 99*

Dans l'espace muni du repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ d'unité 1 cm, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives $(2\,;1\,;4)$, $(4\,;-1\,;0)$, $(0\,;3\,;2)$ et $(4\,;3\,;-2)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CD).

2. a. Démontrer que le projeté orthogonal de B sur la droite (CD) est le point H de coordonnées $(3\,;3\,;-1)$.

b. Montrer que l'aire du triangle BCD est égale à 12 cm^2.

3. a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2\,;1\,;2)$ est un vecteur normal au plan (BCD).

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).

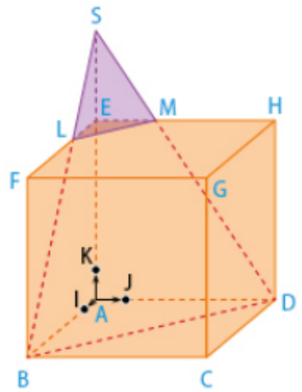
c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par A et orthogonale au plan (BCD).

d. En déduire que le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD) est le point I de coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{8}{3}\right)$.

4. Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

142 CHERCHER COMMUNIQUER

Un artiste souhaite réaliser une sculpture composée d'un tétraèdre posé sur un cube de 6 mètres d'arête.
Ces deux solides sont représentés par le cube ABCDEFGH et par le tétraèdre SELM ci-dessous.



On munit l'espace du repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AK})$ tel que $I \in [AB]$, $J \in [AD]$, $K \in [AE]$ et $AI = AJ = AK = 1$, l'unité graphique représentant 1 mètre.

Les points L, M et S sont définis de la façon suivante :

- L est le point tel que $\overrightarrow{FL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FE}$;
- M est le point d'intersection du plan (BDL) et de la droite (EH) ;
- S est le point d'intersection des droites (BL) et (AK).

1. Démontrer que les coordonnées du point L sont $(2\,;0\,;6)$.

2. a. Donner une représentation paramétrique de la droite (BL).

b. Vérifier que les coordonnées du point S sont $(0\,;0\,;9)$.

3. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(3\,;3\,;2)$.

a. Vérifier que $\vec{n}$ est normal au plan (BDL).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (BDL).

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EH).

d. Calculer les coordonnées du point M.

4. Calculer le volume du tétraèdre SELM.

5. L'artiste souhaite que la mesure de l'angle $\widehat{SLE}$ soit comprise entre 55° et 60°.

Cette contrainte d'angle est-elle respectée ?

Partie 5 - Approfondissements

MATHS & PHYSIQUE

173 Histoire des mathématiques

Le produit vectoriel

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit $\vec{u}(a ; b ; c)$ et $\vec{v}(a' ; b' ; c')$ deux vecteurs.
On considère le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées :

$$\vec{n}(bc' - b'c ; ca' - c'a ; ab' - a'b).$$

1. a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

b. Démontrer que $\vec{n} = \vec{0}$ si, et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Le vecteur $\vec{n}$ est appelé produit vectoriel des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, il est noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

2. Une particule de charge q mobile et de vitesse $\vec{v}$ plongée dans un champ magnétique $\vec{B}$ subit une force $\vec{F}$ telle que $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$.
Justifier que la force $\vec{F}$ est orthogonale à la fois à vitesse $\vec{v}$ de la particule et au champ $\vec{B}$.

3. Soit $A(3 ; 0 ; 1)$, $B(0 ; -1 ; -2)$ et $C(1 ; -1 ; 0)$.

a. Justifier que les points A, B et C définissent un plan.

b. En utilisant la question **1.**, déterminer un vecteur normal au plan (ABC).

c. En déduire une équation du plan (ABC).

174 Approfondissement du programme

Sphère circonscrite à un tétraèdre

On considère les points $A(16 ; 6 ; 5)$, $B(4 ; 11 ; 14)$, $C(11 ; 1 ; 15)$ et $D(12 ; 6 ; -7)$. On cherche à déterminer, si elle existe, une sphère passant par les quatre sommets du tétraèdre ABCD.
On suppose qu'il existe une telle sphère et on note O son centre.

1. a. Justifier que le point O appartient au plan médiateur de [AB].

b. Déterminer une équation du plan médiateur de [AB].

2. Déterminer une équation du plan médiateur de [AC] et une équation du plan médiateur de [AD].

3. a. En déduire que les coordonnées $(x ; y ; z)$ du point O vérifient le système : $\begin{cases} -12x + 5y + 9z - 8 = 0 \\ -x - y + 2z - 3 = 0 \\ -x - 3z + 11 = 0 \end{cases}$.

b. Résoudre le système précédent.

4. En déduire l'existence d'une sphère passant par les points A, B, C et D ; préciser le centre et le rayon de cette sphère.

180 Un ensemble de points

Partie A

Soit A et B deux points distincts de l'espace et I le milieu de [AB].

1. Démontrer que, pour tout point M de l'espace, on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2.$$

2. Déterminer la nature de l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M de l'espace tels que $MA^2 + MB^2 = AB^2$.

Partie B

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ d'équations respectives : $3x + 4y + z - 1 = 0$ et $x - 2y - z + 5 = 0$ et les points A et B de coordonnées respectives $(-1 ; 0 ; 4)$ et $(3 ; -4 ; 2)$.

1. Montrer que les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont sécants.

On nomme (Δ) la droite d'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$.

2. a. Montrer que le point A appartient à la droite (Δ).

b. Montrer que $\vec{u}(1 ; -2 ; 5)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ).

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ).

3. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$MA^2 + MB^2 = AB^2.$$

Déterminer l'ensemble des points d'intersection de $\mathscr{E}$ et de la droite (Δ). On précisera les coordonnées de ces points.

Piste B. 3. : On peut soit utiliser la question A.2. soit traduire analytiquement l'ensemble $\mathscr{E}$.

176 RAISONNER CALCULER

Perpendiculaire commune

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 3.
On choisit le repère orthonormé $(D ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que $\vec{i} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$, $\vec{j} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$ et $\vec{k} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DH}$.

1. a. Donner les coordonnées des points A, C et E.

b. Déterminer les coordonnées du point L défini par $\overrightarrow{CL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$.

c. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DL}$.

2. Soit $(a ; b)$ un couple de réels.
On note M le point de la droite (AE) tel que $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AE}$ et N le point de la droite (DL) tel que $\overrightarrow{DN} = b\overrightarrow{DL}$.

a. Montrer qu'il existe un seul point M_0 de (AE) et un seul point N_0 de (DL) tels que la droite (M_0N_0) est orthogonale aux droites (AE) et (DL).

b. Déterminer les coordonnées des points M_0 et N_0 puis calculer la distance M_0N_0.