$\boxed{Ex 132}$ $(E_n) : y' + y = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$

1 a. g est solution de $(E_n) \Leftrightarrow g' + g = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$

$\Leftrightarrow (he^{-x})' + he^{-x} = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$

$\Leftrightarrow h'e^{-x} - \cancel{he^{-x}} + \cancel{he^{-x}} = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$ $) \times e^{+x}$

b. $h' = \frac{x^n}{n!}$ admet $\Leftrightarrow h' = \frac{x^n}{n!}$

comme primitive $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ donc $g_p(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{-x}$

2 a. $y' + y = 0$ est l'équation homogène associée.

$y' = -y \Rightarrow$ solutions : ke^{-x}

donc les solutions de (E_n) sont $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{-x} + ke^{-x}$

b. $f(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{0^{n+1}}{(n+1)!} e^{-0} + ke^{-0} = 0$

$\Leftrightarrow k = 0$

donc $f(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{-x}$

3. $H_n : \begin{cases} f_n' + f_n = h_{n-1} \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$)

$\boxed{Init}$ H_1 est vraie : $f_1'(x) + f_1(x) = (xe^{-x})' + xe^{-x} = e^{-x} - \cancel{xe^{-x}} + \cancel{xe^{-x}} = f_0(x)$

$\boxed{Héréd}$ $H_n \Rightarrow H_{n+1}$ est vérifiée par la question 2 a b.
Conclusion, H_n est vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$\boxed{Ex 156}$ 1. $\underbrace{\theta'(t)}_{\theta' \text{ est proportionnelle à cette différence}} = -2{,}08 \underbrace{(\theta(t) - 20)}_{\text{différence de température entre le corps et la salle}}$

2. $\theta'(t) = -2{,}08 (\theta(t) - 20)$

SP : $\boxed{\theta(t) = 20}$ $(\theta'(t) = 0)$

SH : Équation homogène associée $\theta'(t) = -2{,}08\,\theta(t)$
solutions $\boxed{ke^{-2{,}08t}}$

Superposition

$\theta(t) = 20 + ke^{-2{,}08t}$

Condition initiale (pour fixer k) : à $t = 0$, $\theta(0) = 100$ °C

$100 = \theta(0) = 20 + ke^{-2{,}08 \times 0} = 20 + k$ donc $k = 100 - 20 = 80$ °C

d'où $\theta(t) = 20 + 80e^{-2{,}08t}$

3 a) $\theta'(t) = \underbrace{80}_{>0} \times \underbrace{(-2{,}08)}_{<0} \underbrace{e^{-2{,}08t}}_{>0} < 0$ donc θ est strictement ↘

b) $\lim_{+\infty} \theta = \lim_{t \to +\infty} 20 + 80e^{-2{,}08t} = 20^+$ $\Rightarrow Y = 20$ est asymptote à la courbe de θ

$-2{,}08t \to -\infty$, $80e^{-2{,}08t} \to 0^+$

4) 20 min $= \frac{1}{3}$ h et 30 min $= 0{,}5$ h $\to$ On calcule $\theta(\frac{1}{3}) \simeq 59{,}99$ °C

$\theta(\frac{1}{2}) \simeq 48{,}28$ °C

5) On résout $\theta(t) = 30$ °C $\Leftrightarrow 20 + 80e^{-2{,}08t} = 30$

$\Leftrightarrow e^{-2{,}08t} = \frac{10}{80} = \frac{1}{8}$ $\Leftrightarrow t = \frac{\ln(1/8)}{-2{,}08} = \frac{\ln 8}{2{,}08} \approx 1$ h

$\boxed{\text{Ex131}}$ $RC = 2.10^6 \times 75\times10^{-6} = 150.10^{-2} = 1,5$

$(E_1) : 1,5\,U'(t) + U(t) = V(t) = 6e^{-\frac{2}{3}t}$

1) On calcule $1,5u'(t)+u(t)$ pour $u(t) = 4te^{-\frac{2}{3}t}$:

$1,5 \times \left(4te^{-\frac{2}{3}t}\right)' + 4te^{-\frac{2}{3}t}$

$= 1,5\left(4e^{-\frac{2}{3}t} + 4t\left(-\frac{2}{3}\right)e^{-\frac{2}{3}t}\right) + 4te^{-\frac{2}{3}t}$

$= 6e^{-\frac{2}{3}t} \cancel{- 4te^{-\frac{2}{3}t}} \cancel{+ 4te^{-\frac{2}{3}t}}$ donc $4te^{-\frac{2}{3}t}$ est bien solution de (E_1).

2) équation homogène associée : $1,5u' + u = 0$

$u' = -\frac{u}{1,5} = -\frac{2}{3}u$

donc : solutions : $ke^{-\frac{2}{3}t}$

solutions de (E_1) : $4te^{-\frac{2}{3}t} + ke^{-\frac{2}{3}t} = (4t+k)e^{-\frac{2}{3}t}$

3) Condition 2 : $u(0) = \frac{1}{3}V(0) = \frac{1}{3}6e^{-\frac{2}{3}\times 0} = 2$

donc $2 = u(0) = (4\times 0 + k)e^{-\frac{2}{3}\times 0} = k$ donc $k = 2$

et on a $u(t) = (4t+2)e^{-\frac{2}{3}t}$.

4) $u'(t) = 4e^{-\frac{2}{3}t} + (4t+2)e^{-\frac{2}{3}t}\left(-\frac{2}{3}\right) = e^{-\frac{2}{3}t}\left(4 - \frac{2}{3}(4t+2)\right)$

$= e^{-\frac{2}{3}t}\left(-\frac{8}{3}t + \frac{8}{3}\right) = \underbrace{\frac{8}{3}e^{-\frac{2}{3}t}}_{>0}(1-t)$ est du signe de $(1-t)$

t	0		1		$+\infty$
$u'(t)$		$+$	0	$-$	
$u(t)$	2	$\nearrow$	$6e^{-\frac{2}{3}}$	$\searrow$	0^+

• $\lim\limits_{t\to+\infty} \underbrace{(4t+2)}_{\to+\infty}\underbrace{e^{-\frac{2}{3}t}}_{\to 0} = 0^+$ par croissance comparée

• $u(1) = (4+2)e^{-\frac{2}{3}} = 6e^{-\frac{2}{3}}$

• $u(0) = 2$ (CI)

5)
```
while (4*t+2)*exp(-2*t/3) > 10**(-3)
    t = t+0.1
```

6) $t = 16,8$