Fonctions et Probabilités - DS8

Prénom NOM :

✏️ **Exercice 1 : Probabilités (10 points)**

Selon les autorités sanitaires d'un pays, 7% des habitant sont infectés par une certaine maladie.
Dans ce pays, un test est mis au point pour détecter cette maladie. Ce test a les caractéristiques suivantes :

- pour les individus malades, le test donne un résultat négatif dans 20% des cas ;
- pour les individus sains, le test donne un résultat positif dans 1% des cas.

Une personne est choisie au hasard dans la population et testée. On considère les événements suivants :

- M : « la personne est malade » ;
- T : « le test est positif ».

1. Calculer la probabilite de l'evenement $M \cap T$. On pourra construire un arbre pondéré :
2. Démontrer que la probabilité que le test de la personne choisie au hasard soit positif, est de 0,0653.
3. Calculer la probabilité que la personne choisie au hasard soit malade sachant que son test est positif. Arrondir à 10^{-4}.
4. Calculer la probabilité que la personne choisie au hasard soit malade sachant que son test est négatif. Arrondir à 10^{-4}.
5. On choisit dix personnes au hasard dans la population. La taille de la population de ce pays permet d'assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
   On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'individus ayant un test positif parmi les dix personnes.
   a. Donner sans justifier la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.
   Donner sans justifier l'expérance de X.
   b. Déterminer la probabilité pour qu'exactement deux personnes aient un test positif. On arrondira le résultat au centième.
   c. Déterminer la probabilité pour qu'au moins deux personnes aient un test positif. On arrondira le résultat au centième.
6. Déterminer le nombre minimum de personnes à tester dans ce pays pour que la probabilité qu'au moins l'une d'entre elles ait un test positif, soit supérieure à 99%.

Tourner S.V.P.

✏️ **Exercice 2 : Étude de fonction (10 points)**

Partie A

On étudie la fonction h définie sur l'intervalle]0;+∞[par : $h(x) = 1 + \dfrac{\ln(x)}{x}$

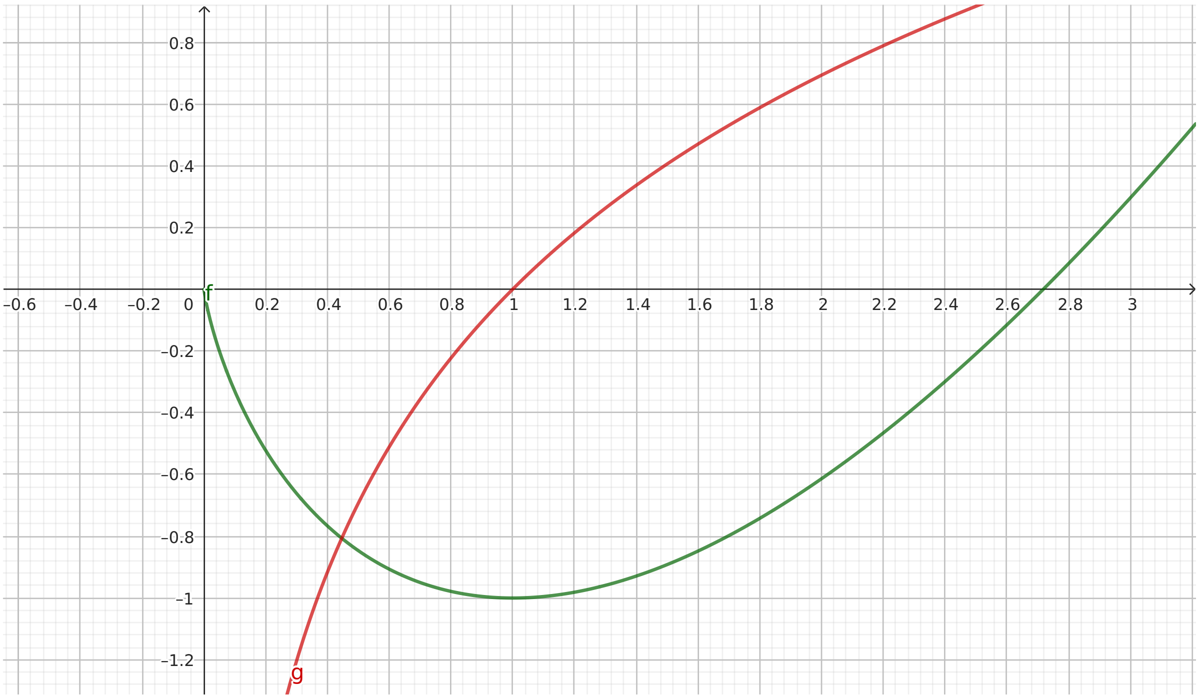
1. Déterminer la limite de la fonction h en 0.
2. Déterminer la limite de la fonction h en +∞.
3. h étant dérivable, on note h' sa dérivée.

   Vérifier, en calculant, que pour tout x de l'intervalle]0;+∞[, on a $h'(x) = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$
4. Dresser le tableau de variation de h sur l'intervalle]0;+∞[.
5. Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans]0;+∞[. Justifier que 0,5<α<0,6.

Partie B

Dans cette partie, on considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle]0;+∞[par : $f(x) = x\ln(x) - x$ et $g(x) = \ln(x)$

On se place dans un repère orthonormé.



On note, pour tout nombre réel $a > 0$:

- Tf_a la tangente à la courbe de f en a ;
- Tg_a la tangente à la courbe de g en a ;

1. Démontrer que les coefficients directeurs de Tf_a et Tg_a sont respectivement $\ln(a)$ et $\dfrac{1}{a}$.
2. Démontrer que la fonction f est convexe et que la fonction g est concave.
3. On rappelle (propriété admise ici) qu'une droite de coefficient directeur m est dirigée un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

   Démontrer que deux droites de coefficients directeurs m et m' sont perpendiculaires lorsque $m \times m' = -1$.
4. En utilisant la propriété énoncée dans la question précédente, démontrer qu'il existe une unique valeur de a telle que les tangentes Tf_a et Tg_a soient perpendiculaires. On en donnera un encadrement au dixième près.

Partie bonus

Démontrer que les courbes des trois fonctions f, g et h de l'exercice se coupent en deux points uniques.