Page 309 - Bases

115 *Capacité 6, p. 301*

Soit l'équation différentielle (**E**) $y' = -2y + 3$.

1. Déterminer la solution particulière constante de (**E**).

2. En déduire toutes les solutions de (**E**).

116 FORMEL Le logiciel Xcas fournit la solution générale d'une équation différentielle avec la commande **desolve**. Justifier le résultat ci-contre.

```
desolve(y'+4*y=8,y)
c_0 *exp(-4*x)+2
```

117 Déterminer la fonction f, solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $2y' + 6y = 1$, dont la courbe représentative passe par le point A(2 ; 0).

Page 309 - Problèmes

MATHS & PHYSIQUE

118 On chauffe dans une grande cuve un liquide et on appelle $g(t)$ sa température en degrés Celsius à l'instant t exprimé en secondes, g étant une fonction numérique définie sur $[0 ; +\infty[$.

La température à l'instant initial est de 20 °C.

On admet que la fonction g vérifie l'équation différentielle (**E**) : $y' + 0{,}0002y = 0{,}02$.

1. Exprimer $g(t)$ en fonction de t.

2. Quelle sera la température du liquide au bout d'une heure ?

3. Au bout de combien de secondes la température dépasse-t-elle 85 °C ? Donner la réponse en heures, minutes et secondes.

MATHS & SVT

112 On a constaté qu'après une injection intraveineuse de glucose, la glycémie décroît à partir d'un certain instant choisi comme origine des temps selon la loi $g'(t) + Kg(t) = 0$, où g désigne la fonction glycémique dépendant du temps t et K une constante strictement positive appelée coefficient d'assimilation glycémique.

1. On suppose que $g(0) = 2$.
Exprimer $g(t)$ en fonction de K et t.

2. Déterminer la formule donnant le coefficient K en fonction du taux de glycémie G_1 à l'instant donné t_1.

3. La valeur moyenne de K chez un sujet normal varie de 0,0106 à 0,0242.
Préciser si les résultats du sujet X qui a un taux de glycémie égal à 1,2 à l'instant $t_1 = 30$ sont normaux.

Page 310 - Maîtriser

119 VRAI/FAUX

Soit (**E**) l'équation différentielle $y' - 3y = 2$.

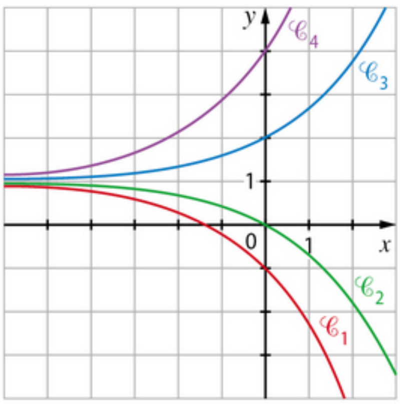
Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. L'équation (**E**) admet pour solutions les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{3x} + 2$, avec C réel quelconque.

2. La solution particulière f de (**E**) telle que $f(0) = 1$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}(5e^{3x} - 2)$.

3. La solution particulière g de (**E**) dont la courbe représentative admet une tangente de coefficient directeur 3 au point d'abscisse 0 est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\frac{2}{3} + e^{3x}$.

120 Les courbes ci-dessous représentent quatre solutions de l'équation différentielle $2y' = y - 1$.



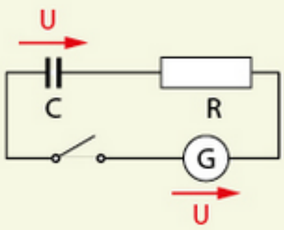
Résoudre cette équation différentielle, puis donner des équations des courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$.

Page 311 - Problèmes

MATHS & PHYSIQUE

131 PYTHON **Compléter et exécuter un programme**

Un circuit électrique est constitué d'un condensateur de capacité $C = 75 \times 10^{-6}$ farads, d'une résistance $R = 2 \times 10^4$ ohms, d'un générateur G et d'un interrupteur. On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$ et le générateur délivre alors une tension V.



La tension U au bornes du condensateur est alors solution, sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, de l'équation différentielle (1) :

$$RC\,U'(t) + U(t) = V(t).$$

On suppose que $V(t) = 6\,e^{-\frac{2}{3}t}$, où t est exprimé en secondes. De plus, la charge initiale du condensateur impose la condition (2) : $U(0) = \frac{1}{3}V(0)$.

1. Montrer que la fonction U_1 définie sur $[0\,;+\infty[$ par $U_1(t) = 4t\,e^{-\frac{2}{3}t}$ est une solution de l'équation (1).

2. En déduire la solution générale de (1).

3. Déterminer la solution U de l'équation différentielle (1) vérifiant la condition (2).

4. Étudier le sens de variation de U et calculer sa limite en $+\infty$.

5. L'appareil mesurant $U(t)$ ne détecte pas les tensions inférieures à 10^{-3} volts. On veut que le programme Python ci-contre renvoie la valeur de t, arrondie au dixième de seconde, pour laquelle l'appareil ne détecte plus la tension $U(t)$.

```python
from math import exp
def temps():
    t=0
    while (...):
        t=t+...
    return(t)
```

a. Compléter ce programme.

b. Déterminer cette valeur de t.

132 RAISONNER CALCULER

Soit n un entier strictement positif et l'équation différentielle $(E_n) : y' + y = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$.

1. Soit g et h deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x, $g(x) = h(x)\,e^{-x}$.

a. Montrer que g est solution de (E_n) si et seulement si

$$h'(x) = \frac{x^n}{n!}.$$

b. En déduire une solution particulière de l'équation (E_n).

2. a. Déterminer la solution générale de l'équation (E_n).

b. Déterminer la solution f de (E_n) vérifiant $f(0) = 0$.

3. On pose, pour tout réel x : $f_0(x) = e^{-x}$.

Pour tout entier strictement positif n, on définit la fonction f_n comme la solution de l'équation différentielle $y' + y = f_{n-1}$ vérifiant $f_n(0) = 0$.

Montrer par récurrence que, pour tout réel x et tout entier strictement positif n, $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$.

Page 316 - Problème

MATHS & PHYSIQUE

156 **Loi de refroidissement de Newton**

A l'instant $t = 0$ (exprimé en heures), un corps dont la température est de 100 °C est placé dans une salle à 20 °C.

On désigne par $\theta(t)$ la température du corps à l'instant t. D'après la loi de refroidissement de Newton, la vitesse de refroidissement $\theta'(t)$ est proportionnelle à la différence entre la température du corps et celle de la salle.

Le coefficient de refroidissement est égal ici à $-2{,}08$.

1. Expliquer pourquoi $\theta'(t) = -2{,}08\,(\theta(t) - 20)$.

2. En déduire l'expression de $\theta(t)$.

3. a. Étudier le sens de variation de la fonction θ sur $[0\,;+\infty[$.

b. Déterminer la limite en $+\infty$ de θ et l'interpréter.

c. Tracer la courbe représentative de θ.

4. Déterminer la température du corps, arrondie au degré, au bout de 20 minutes, puis au bout de 30 minutes.

5. Déterminer une valeur approchée du temps au bout duquel la température tombera à 30°.