Page 344 - Int Suites

95 Soit (I_n) et (J_n) les suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x \text{ et } J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\mathrm{d}x.$$

1. a. Justifier que, pour tout réel x de $[0 ; 1]$, $\frac{1}{1+x^n} \leqslant 1$.

b. Montrer que la suite (I_n) est majorée par 1.

2. a. Montrer que, pour n dans $\mathbb{N}^*$, $0 \leqslant J_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.

b. En déduire la limite de la suite (J_n).

3. a. Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $I_n + J_n$.

b. Déterminer la limite de la suite (I_n).

Page 344 - Int part

Pour chacun des exercices 81 à 84, calculer les intégrales en utilisant la méthode d'intégration par parties.

81 *Capacité 6, p. 335*

1. $\mathrm{I} = \int_{-2}^{3}(x+1)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ **2.** $\mathrm{J} = \int_0^1 x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$

82 **1.** $\mathrm{I} = \int_1^{\mathrm{e}}\ln(x)\mathrm{d}x$ **2.** $\mathrm{J} = \int_1^{\mathrm{e}}x^2\ln(x)\mathrm{d}x$

83 **1.** $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos(x)\mathrm{d}x$ **2.** $\mathrm{J} = \int_0^{\pi}(x+1)\sin(x)\mathrm{d}x$

84 **1.** $\mathrm{I} = \int_0^{\pi}t\sin(2t)\mathrm{d}t$ **2.** $\mathrm{J} = \int_{-1}^{2}(3t+1)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$

Page 345 - Aire

104 Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 1 \text{ et } g(x) = x^2 + 3x - 4.$$

1. a. À l'aide d'une calculatrice, conjecturer la position relative des courbes représentatives de ces deux fonctions.

b. Démontrer cette conjecture.

2. En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par ces deux courbes et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$.

Page 346 - Fonc Int Part

109 Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

1. a. Déterminer le sens de variation de la fonction g sur $[1 ; +\infty[$.

b. Donner une interprétation géométrique du réel $g(3)$.

2. a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$g(x) = 1 - \frac{\ln(x)+1}{x}.$$

b. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

Page 347 - Problème

121 CALCULER REPRÉSENTER

On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-nx}$$

où n est un entier naturel non nul. On note $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique 4 cm.

1. a. Déterminer la limite de la fonction f_1 en $-\infty$.

b. Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$ puis donner une interprétation graphique de ce résultat.

2. Étudier les variations de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$ puis construire son tableau de variations.

3. Déterminer le signe de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

4. Construire la courbe $\mathscr{C}_1$.

5. On note $\mathscr{S}_1$ la surface délimitée par $\mathscr{C}_1$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, une valeur exacte puis arrondie à 10^{-3} de l'aire en cm² du domaine $\mathscr{S}_1$.

6. Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x.$$

a. Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (x+2)\mathrm{e}^{-nx}\left(\mathrm{e}^{-x} - 1\right)\mathrm{d}x.$$

b. En déduire le sens de variation de la suite (I_n).

c. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{3}{n}\left(1 - \mathrm{e}^{-n}\right)$.

d. En déduire que la suite (I_n) converge.

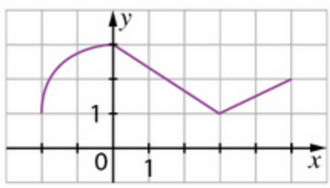
Page 348 - Aire

Estimer une intégrale

* **122** 15 min *Capacité 1, p. 331*

QCM *Choisir la ou les bonnes réponses.*

On considère la fonction f définie sur $[-2 ; 5]$ et dont la courbe $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous.



On note $\mathrm{I} = \int_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x$, $\mathrm{J} = \int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$ et $\mathrm{K} = \int_3^5 f(x)\mathrm{d}x$.

1. L'intégrale $\int_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ est :

a. $\mathrm{I} > 0$ **b.** $\mathrm{I} < 0$ **c.** $\mathrm{I} = 0$

2. La meilleure estimation de I est :

a. $\mathrm{I} \approx 4$ **b.** $\mathrm{I} \approx 5$ **c.** $\mathrm{I} \approx 6$

3. L'intégrale J est comprise entre :

a. $1 < \mathrm{J} < 3$ **b.** $3 < \mathrm{J} < 5$ **c.** $5 < \mathrm{J} < 7$

4. L'intégrale de 0 à 5 de la fonction f est égale à :

a. $\mathrm{I} + \mathrm{J}$ **b.** $\mathrm{J} + \mathrm{K}$ **c.** $\mathrm{I} + \mathrm{K}$