Fonctions : limites, continuité et valeurs intermédiaires

1. Limites

1.1. Définition de la limite d'une fonction

Cadre :

- Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$ (ensemble de définition de f et soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ **adhérent** à $\mathcal{D}_f$, c'est à dire : a peut être dans $\mathcal{D}_f$ ou bien au bord de $\mathcal{D}_f$; par exemple, on peut avoir $a = +\infty$ pour $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$; autre exemple : $a = 0$ avec $\mathcal{D}_f =]0; +\infty[$.
- On note $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ la limite envisagée.

Exercice 1 : Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. En quelle(s) valeurs de a doit-on pouvoir déterminer $\lim\limits_{x \to a} f(x)$?

Définition 1 : *On dit que $f(x)$ admet l pour **limite** quand x tend vers a et on note : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{a} f = l$ lorsque les images $f(x)$ sont aussi proches que l'on veut de l, à condition de prendre n'importe quel x suffisamment proche de a.*

Définition 2 : Limites à gauche / à droite : *Si l'on ne considère que les valeurs*

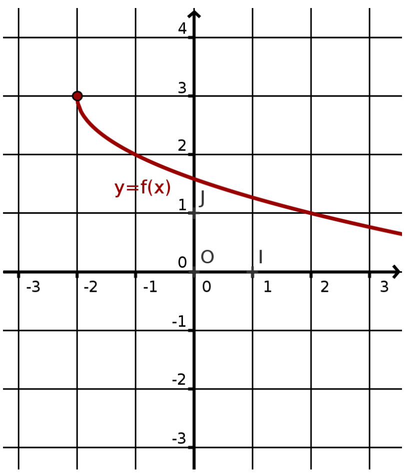
- *de $x < a$ on obtient la **limite** de f **à gauche** de a, notée : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{a^-} f$.*
- *de $x > a$ on obtient la **limite** de f **à droite** de a, notée : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{a^+} f$.*

Définition 3 :

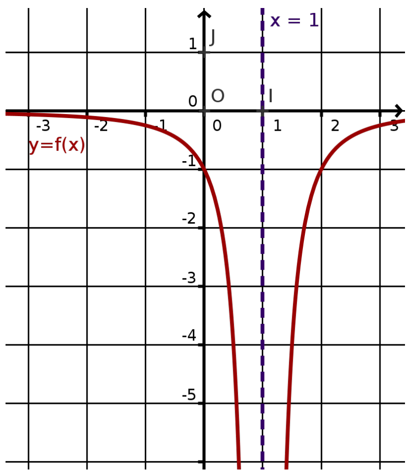
- ***asymptote verticale :***
  *Lorsque $\lim\limits_{a} f = l$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $l = \pm\infty$, on dit que la courbe représentative de f admet une **asymptote verticale** d'équation $x = a$.*
- ***asymptote horizontale :***
  *Lorsque $\lim\limits_{a} f = l$ avec $a = \pm\infty$ et $l \in \mathbb{R}$, on dit que la courbe représentative de f admet une **asymptote horizontale** d'équation $y = l$.*

1.2. Exemples graphiques

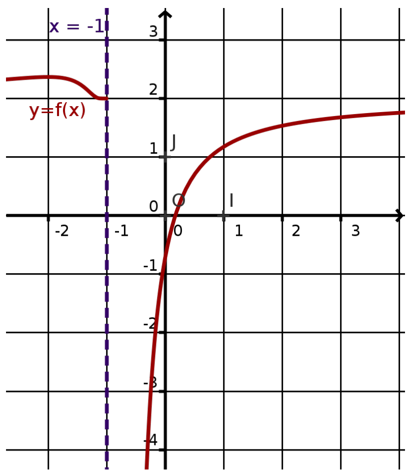
Exemple 1 : Limite en un point :



$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 3$: Il n'y a pas d'asymptote.

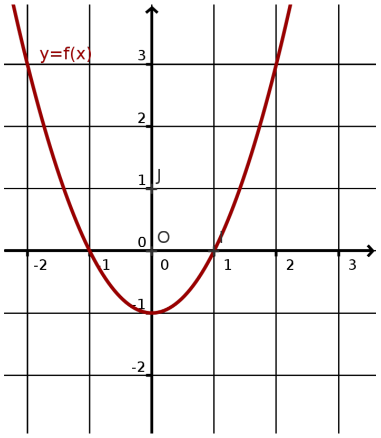


$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$: La courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

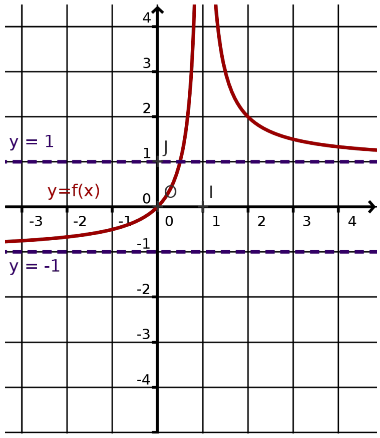


$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$
et $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = 2$: La courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.

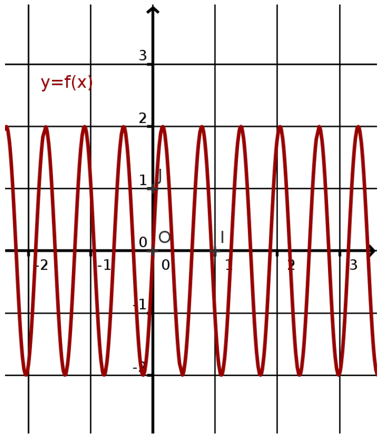
Exemple 2 : Limite en $+\infty$ et $-\infty$:



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Il n'y a pas d'asymptote.



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. La courbe de f admet deux asymptotes horizontales d'équation $y=-1$ en $-\infty$ et d'équation $y=1$ en $+\infty$.



f n'admet aucune limite en $+\infty$ et en $-\infty$.
sa courbe n'admet pas d'asymptote.

1.3. Limites des fonctions usuelles

Propriété 1 : Fonctions puissances :

n est un entier >0 ; on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \left|\begin{array}{l} +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ est impair}\end{array}\right.$

Pour leurs inverses : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

En 0 ces inverses ne sont pas définis (0 est valeur interdite). On a donc les limites suivantes au voisinage de 0 :

- si n est pair : $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$
- si n est impair : $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$.

Exercice 2 : Donner les limites en $-\infty$ et 0^- des expressions suivantes : x^3 ; $\frac{1}{x^4}$ et $\frac{1}{x^3}$.

Propriété 2 : Polynômes :
Les limites en $+\infty$ ou $-\infty$ d'un polynôme $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ sont les mêmes que celles du terme de plus haut degré $a_n x^n$ (terme dominant).

Exercice 3 : Donner les limites en $-\infty$ et $+\infty$ des expressions suivantes : $A(x) = x^2 - x$; $B(x) = x - x^3$ et $C(x) = 2x^5 + x^3$.

1.4. Limites et opérations :

Propriété 3 : Limites d'une somme : l, l' sont des réels et désignent des limites finies.

$\lim\limits_a f$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_a g$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_a f+g$	+					FI

Exercice 4 : Compléter le tableau.

Exercice 5 : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1}{x} + 2\right)$;
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1}{x^2} + x^2\right)$;
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\dfrac{1}{x} + x^2)$.

Propriété 4 : Limites d'un produit :

$\lim\limits_a f$	l	$l \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_a g$	l'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_a f \times g$	$l \times l'$	$*\infty$	$*\infty$	FI

Remarque 1 : $*\infty$: pour trouver si $*$ est $+$ ou $-$, on applique la règle des signes.

Propriété 5 : Limites d'un quotient : attention à tenir compte du signe (0^+ ou 0^-)

$\lim\limits_a f$	l	l	l	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_a g$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	0	l'	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_a \dfrac{f}{g}$	$\frac{l}{l'}$	0	$*\infty$	$*\infty$	FI	FI

Propriété 6 : Limite d'une fonction composée : Soit deux fonctions f et g.

Si $\begin{cases} \lim\limits_a f = b \\ \lim\limits_b g = c \end{cases}$ alors $\lim\limits_a g(f(x)) = c$.

Propriété 7 : Traitement des formes indéterminées :
Il y a quatre FI : $+\infty - \infty$; $0 \times \pm\infty$; $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$; $\frac{0}{0}$.

Méthode 1 : Il faut essayer de mettre le terme le plus « fort » en facteur et simplifier, ou bien factoriser et simplifier, ou bien développer, ou bien se servir de la quantité conjuguée (en présence de racines carrées), ou bien utiliser les propriétés de croissances comparées (en présence de $\ln$ et $\exp$: cf chapitre correspondant).

Exercice 6 : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-2)(x+7)$;
2. $\lim\limits_{x \to 0^+} (x-3)\dfrac{1}{x}$;
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-1)x^3$.

Exercice 7 : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\frac{1}{x} - 3}{x^2}$;
2. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x-1}$;
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3 - \dfrac{1}{x^2}}{x}$.

Exercice 8 : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2+3}$;
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{2x+1}$;
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{25 + \dfrac{1}{x}}$.

Exercice 9 : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x}(x^2+1)$;
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} - x$;
3. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x}$

1.5. Limites et encadrements

Théorème 1 : Théorème des gendarmes / d'encadrement : (admis)
$a, l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ et f, g et h sont trois fonctions telles que $\lim\limits_a f = l$ et $\lim\limits_a h = l$, et pour tout x assez proche de a, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$;
alors on a : $\lim\limits_a g = l$.

Remarque 2 : Lorsque $l = +\infty$, l'inégalité de gauche (minoration) suffit ; lorsque $l = -\infty$, l'inégalité de droite (majoration) suffit.

Exercice 10 : À l'aide d'encadrements bien choisis, déterminer les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$a(x) = \frac{\cos(x)}{x} + 2$ $\qquad$ $b(x) = \sin(x) + \sqrt{x}$ $\qquad$ $c(x) = -x^2 + \sin(3x) + x\cos(2x)$

Exercice 11 : $g(x)$ est une fonction telle que pour tout $x \geqslant 1$, on a : $\frac{1}{x} \leqslant g(x) \leqslant \frac{x+1}{x+2}$. Cet encadrement permet-il de conclure sur une limite éventuelle de g en $+\infty$?

2. Continuité

Définition 4 : *Soit a un réel. Une fonction f est dite* ***continue*** *lorsqu'on a :* $\boxed{\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)}$.

- *Si on a juste l'égalité de gauche, on dit que f est continue à gauche de a.*
- *Si on a juste l'égalité de droite, on dit que f est continue à droite de a.*

Remarque 3 : Lorsque a est sur le bord gauche (resp. droit) d'un intervalle de l'ensemble de définition de f, on ne considère pas la limite en a^- (resp. en a^+).

Exemple 3 : La fonction racine carrée est continue en 0 car $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$ et $\sqrt{0} = 0$.

Remarque 4 : Graphiquement, une fonction est continue lorsque sa courbe peut être tracée sans lever le crayon de la feuille : sa courbe ne présente pas de «sauts» de valeurs.

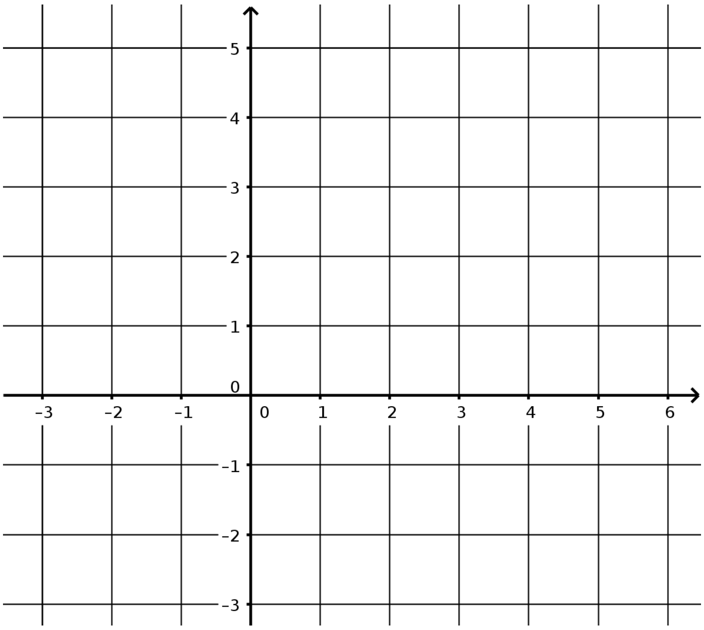
Propriété 8 : Les fonctions affines, carré, inverse, racine carrée, valeur absolue, polynômes, $\cos$, $\sin$ et $\tan$ sont continues **sur tout intervalle** inclus dans leurs ensemble de définition.

Exercice 12 : fonction partie entière :
Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ mais non continue en chaque entier relatif : la fonction partie entière :
À tout réel x on associe l'entier (relatif) $E(x)$ immédiatement inférieur à x.

1. Remplir le tableau de valeurs :

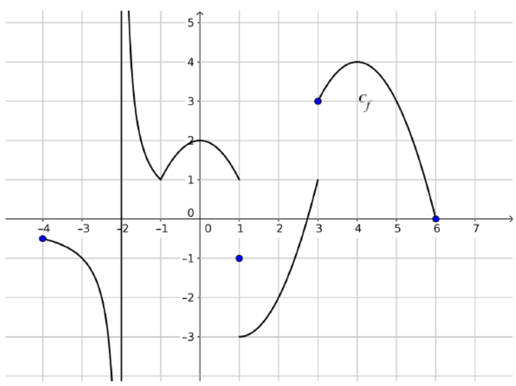
x	0	2	2,1	2,6	-3	-3,9	-3,1
$E(x)$							

2. Tracer la courbe représentant la fonction E dans le repère ci-contre.
3. Discuter de la continuité à gauche et à droite de E en chaque entier.
4. Sur quel ensembles E est-elle :
   - Continue ?
   - Continue à gauche ?
   - Continue à droite ?
   - Dérivable ?



Exercice 13 :

1. Quel est l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de cette fonction f ?
2. Donner les limites aux bords de $\mathcal{D}_f$ ainsi que les asymptotes éventuelles à sa courbe $\mathcal{C}_f$.
3. Pour quelle(s) valeurs de x la fonction f n'est-elle pas continue ? Préciser les limites à gauche et à droite en ces valeurs, ainsi que la valeur de $f(x)$, si elle existe.
4. Préciser les intervalles sur lesquels f est continue.
5. Déterminer les solutions de $f(x) = 0$.
6. Déterminer les solutions de $f(x) = 2$ sur $]-2; 4]$.



Propriété 9 : (admise) **Dérivable** $\Rightarrow$ **continue**
Si une fonction f est dérivable sur un intervalle I, alors elle est continue sur I.

Remarque 5 : La réciproque est fausse : la fonction racine carrée est continue en 0 mais pas dérivable en 0.

Propriété 10 : Continuité et suites (admise)
Les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

- f est une fonction continue en $x = a \in \mathcal{D}_f$;
- pour toute suite (x_n) convergent vers a, la suite $\left(f(x_n)\right)$ converge vers a.

Définition 5 : *Tout nombre x tel que $f(x) = x$ est appelé* ***point fixe*** *de f*

Propriété 11 : Suites récurrentes et points fixes
(u_n) est une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que (u_n) converge vers l et que f est continue en l ; alors $f(l) = l$ (la limite est un point fixe de f).

Exercice 14 : On note $f(x) = x^2$ et on définit la suite $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = 0{,}5 \end{cases}$.

1. Résoudre $f(x) = x$ pour déterminer les points fixes de f
2. Démontrer que (u_n) est décroissante.
3. En déduire que (u_n) converge.
4. Déterminer la limite de (u_n) (justifier).

Remarque 6 :

- Attention, une fonction peut avoir plusieurs point fixes.
- Il faut bien s'assurer de la convergence de la suite ; le fait que f ait un point fixe ne suffit pas : ainsi, pour $f(x) = 2x$ et $u_0 = 1$, (u_n) diverge vers $+\infty$, bien que f admette 0 pour point fixe.

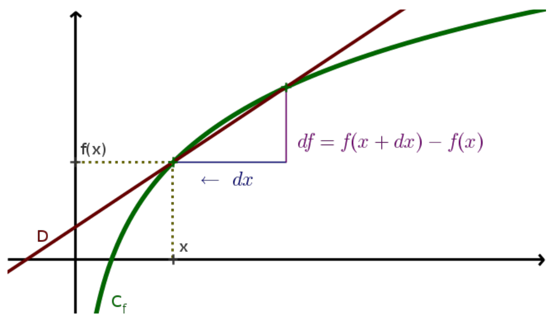
3. Dérivation (rappels)

3.1. Nombre dérivé et tangente

Cadre : On se donne une fonction f et on se place en un x fixé. Soit dx un petit accroissement de la variable x (positif ou négatif), correspondant à un accroissement $df = f(x+dx) - f(x)$ des images.
Si l'on fait tendre dx vers 0, la droite D prend une position de tangente à la courbe de f en x.

Définition 6 : *On appelle la quantité $\frac{df}{dx}$* ***taux d'accroissement*** *ou* ***taux de variation*** *de f entre x et $x + dx$.*

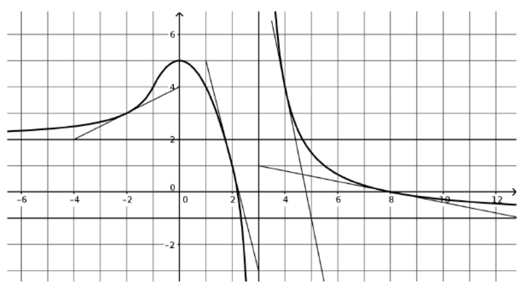
Définition 7 : *Si $\lim\limits_{dx \to 0} \dfrac{df}{dx}$ existe, on dit que f est dérivable en x ; on note alors $f'(x)$ ou bien $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$ cette limite, que l'on appelle* ***nombre dérivé*** *de f en x, et qui indique le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f en x.*



Propriété 12 : L'équation de la tangente à la courbe de f en $x = a$ est : $\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$.

Exercice 15 : Calculer l'équation de la tangente à la courbe de $f(x) = x^3 - 2x$ en $x = 0{,}5$.

Exercice 16 :
On a tracé sur la figure ci-contre la courbe de f ainsi que des tangentes à f en quatre points d'abscisse entière.



1. Donner l'ensemble de définition de f ainsi que les limites de f aux bornes de f, et les asympotes éventuelles
2. Donner les valeurs de $f(x)$ pour $x \in \{-2; 0; 2; 4; 8\}$.
3. Donner le tableau de variation de f, ainsi que le tableau de signe de sa dérivée f'.
4. Donner les valeurs de $f'(x)$ pour $x \in \{-2; 0; 2; 4; 8\}$ et écrire les équations des tangentes correspondantes.

3.2. Dérivées de fonctions usuelles

Propriété 13 :

$f(x)$	constante	x^α	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	e^x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
$f'(x)$	0	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	e^x	$\cos x$	$-\sin x$	$1+\tan^2(x)$

Remarque 7 :

- Lorsque $\alpha \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est définie sur $\mathbb{R}$ entier.
- Lorsque α est un entier strictement négatif, elle n'est pas définie en 0 mais l'est partout ailleurs.
- Lorsque α est un réel non entier positif, elle est définie sur $[0;+\infty[$
- Lorsque α est un réel non entier négatif, elle est définie sur $]0;+\infty[$

Exercice 17 :

1. En utilisant le fait que $\frac{1}{x} = x^{-1}$, retrouver la formule de la dérivée de $x \mapsto \frac{1}{x}$.
2. En utilisant le fait que $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, retrouver la formule de la dérivée de $x \mapsto \sqrt{x}$.

Exercice 18 : Limites utilisant les taux de variations

Calculer les limites suivantes en utilisant des taux de variation $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^{15}-1}{x-1} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$$

3.3. Dérivation et opération

Propriété 14 :

u et v sont deux fonctions dérivables et k est une constante réelle

f	ku	$u+v$	$u\times v$	$\frac{1}{u}$ avec $u\neq 0$	$\dfrac{u}{v}$ avec $v \neq 0$
f'	ku'	$u'+v'$	$u'v+uv'$	$\frac{-u'}{u^2}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

Exercice 19 : Démontrer la formule donnant les dérivées d'un inverse et d'un quotient à parir de la formule du produit.

A.
1. On considère que u ne s'annule pas. Exprimer v' en fonction de $(uv)'$, $u'v$ et u.
2. En posant $v = \frac{1}{u}$, retrouver la formule de la dérivée de l'inverse.

B.
1. Dériver $u \times \frac{1}{v}$ en utilisant la formule du produit.
2. En déduire la dérivée de $\frac{u}{v}$.

Exercice 20 : Calculer les dérivées des fonctions suivantes

$$a(x) = 3x^2 - 2x + 1 \qquad b(x) = x\cos(x) \qquad c(x) = \frac{1}{x+e^x} \qquad d(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Par définition, $d(x) = \tan(x)$. En déduire deux écritures possibles de $(\tan(x))'$.

3.4. Fonctions composées

***Définition 8 :** Lorsque l'ensemble des images d'une fonction f définie sur $\mathcal{D}_f$ est inclus dans l'ensemble de définition $\mathcal{D}_g$ d'une fonction g, On peut définir (sur $\mathcal{D}_f$) la **fonction composée** de f par g, notée $g \circ f$ et définie par $g \circ f(x) = g(f(x))$.*

Remarque 8 : En résumé, appliquer $g \circ f$ à un nombre x revient à appliquer f pour calculer $f(x)$ et à appliquer g au $f(x)$

obtenu : $x \overset{f}{\mapsto} f(x) \overset{g}{\mapsto} g(f(x))$ revient à $x \overset{g\circ f}{\mapsto} g(f(x))$.

Exemple 4 : Si $f(x) = 3x - 2$ et $g(x) = \sqrt{x}$, alors $g \circ f(x) = \sqrt{3x-2}$.
Mais attention à l'ordre : $f \circ g(x) = 3\sqrt{x} - 2$.

Propriété 15 :

f, g et u désignent des fonctions dérivables ; a, b et α sont des constantes réelles ;.

f	$g \circ f(x)$	$u(ax+b)$	u^α	e^u
f'	$g' \circ f(x) f'(x)$	$au'(ax+b)$	$\alpha u^{\alpha-1} u'$	$u'\mathrm{e}^u$

Exercice 21 : En admettant la formule dans la première colonne, en déduire toutes les autres.

Exercice 22 : Dérivée de la fonction réciproque (dur)
f et g sont deux fonctions telles que $f \circ g(x) = x$ pour tout x dans un intervalle I.

1. Exprimer $g'(x)$ en fonction de f, f' et g.
2. En déduire la dérivée des fonctions $\arccos$, $\arcsin$ et $\arctan$; en déduire la dérivée de la fonction réciproque de $\exp$ (appelée $\ln$).

3.5. Principe de Lagrange

Méthode 1 : Une fois que l'on a calculé la dérivée d'une fonction, il faut la factoriser au mieux pour déterminer son signe. En effet connaître le signe de la dérivée f' nous permet de connaître les variations de f :

Propriété 16 :

- $f' > 0$ sur I (f' peut même s'annuler en des points isolés) $\Rightarrow$ f est strictement croissante sur I ;
- $f' = 0$ sur tout l'intervalle $I \Rightarrow f$ est constante sur I ;
- $f' < 0$ sur I (f' peut même s'annuler en des points isolés) $\Rightarrow$ f est strictement décroissante sur I.

Propriété 17 : Si f' s'annule et change de signe pour en a dans I, alors

- f' passe de $-$ à $+ \Rightarrow f$ admet un minimum local pour $x = a$;
- f' passe de $+$ à $- \Rightarrow f$ admet un maximum local pour $x = a$.

Remarque 9 : La condition de changement de signe est importante : en effet $x \mapsto x^3$ a pour dérivée $3x^2$ qui s'annule en 0 mais ne change pas de signe (elle reste positive) ; la fonction cube n'admet pas de max/min en $x = 0$ (elle est strictement croissante).

Exercice 23 : Étudier les fonctions suivantes : ensemble de définition, dérivée, variations, limites.

$f(x) = \dfrac{x^2+2x+3}{x^2+2}$ $\qquad g(x) = 10x\sqrt{x^2-5}$ $\qquad h(x) = \mathrm{e}^{2x+1} + 3x$

3.6. Non-dérivabilité : aspect graphique

Remarque 10 : Une fonction continue sur un intervalle I n'est pas forcément dérivable en tout x dans I ; on peut visualiser ce caractère non-dérivable lorsqu'on observe :

- une rupture de pente, ou point anguleux (deux demi-tangentes qui forment un angle non plat), comme pour la fonction valeur absolue en 0 ;
- une tangente verticale (la dérivée tend alors vers $\pm\infty$), comme pour la racine carrée en 0.

Exercice 24 : On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left| \begin{array}{l} x^2 - 4 \text{ si } x \leqslant 1 \\ \frac{-2}{x} - 1 \text{ si } x > 1 \end{array} \right.$.

1. Cette fonction est-elle dérivable ?
2. Étudier cette fonction.

4. Théorème des valeurs intermédiaires

4.1. Conventions dans un tableau de variation

Convention : Une flèche dans un tableau de variation d'une fonction indique à la fois :

- la stricte croissance ou stricte décroissance de f sur l'intervalle correspondant ;
- la continuité de la fonction f sur l'intervalle correspondant.

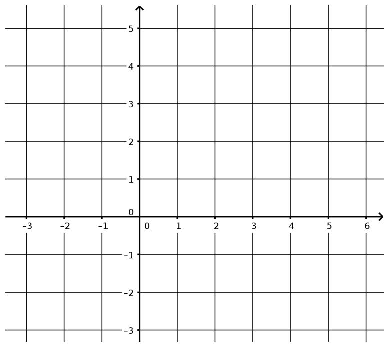
4.2. Théorème des valeurs intermédiaires

But : Soit k un réel et f une fonction. On cherche à résoudre l'équation $f(x) = k$.

Théorème 2 : (admis) **théorème des valeurs intermédiaires**
Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I et $a < b$ deux réels de I.
Si k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins** un réel $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$.

Remarque 11 : Il est aussi possible d'utiliser des valeurs limites de f.

Exercice 25 :
Tracer une fonction f continue sur $[-3; 6]$ telle que $f(x) = 2$ ait 3 solutions :



Exercice 26 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x - 1$

1. Étudier les variations de f.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 3$ a au moins une solution.

Propriété 18 : unicité de la solution Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle I et $a < b$ deux réels de I.
Si k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un **unique** réel $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$.

Remarque 12 : Il est toujours possible d'utiliser des valeurs limites de f.

4.3. Obtenir une approximation d'une solution de l'équation $f(x) = k$, avec k réel fixé

Méthode 2 : Il existe deux méthodes :

1. **Par balayage :**
   On utilise la table de calculatrice, en affinant le pas jusqu'à la précision désirée, pour localiser la solution.
2. **Par dichotomie :**
   Lorsque l'on a localisé la solution dans un intervalle $[a; b]$, on calcule $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$; en s'aidant du tableau de variations, on voit si la solution est localisée dans la première moitié ou seconde moitié de l'intervalle $[a; b]$; on répète alors la même méthode plusieurs fois sur des intervalles imbriqués dont les longueurs diminuent à chaque étape de moitié, jusqu'à arriver à la précision désirée.

Exercice 27 : (suite) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x - 1$

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 3$ a une unique solution dans $[3; +\infty[$.
2. Donner une valeur approchée de cette solution à 10^{-2} près en utilisant une dichotomie.

Exercice 28 : Méthode de Newton (dur) :
Newton propose une méthode qu'il pense plus rapide que la dichotomie pour trouver la solution d'une équation $f(x) = 0$.
Partant d'un point x_0 proche de la solution, il construit la suite (x_n) comme ceci : x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de la tangente à la courbe de f en x_n avec l'axe (Ox).
Appliquer cette méthode à l'équation $x^2 - 3 = 0$. Y a-t-il convergence vers la solution partant de $x_0 = 2$? Est-elle rapide ?
Donner un exemple d'équation pour laquelle la méthode de Newton échoue.