Dénombrement et probabilités - TD

✏️ Exercice 1 : Les coefficients binomiaux et leur somme : démonstration

1. Le nombre de parties d'un ensemble de n éléments est ... .
2. Le nombre de **parties possédant k éléments** d'un ensemble de n éléments (= **combinaisons de k éléments** pris parmi n) est le coefficient binomial : $\binom{n}{k} = \dfrac{\dots!}{(\dots - \dots)!\dots!}$
3. En particulier, pour $k \in \{0; 1; 2; n\}$, on a les valeurs remarquables suivantes :

$\binom{n}{0} = \dots$	$\binom{n}{1} = \dots$	$\binom{n}{2} = \dfrac{\dots(\dots - 1)}{2}$	$\binom{n}{n} = \dots$

4. Compléter le tableau des possibilités ci-contre. On en déduit que :
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = \dots$$
5. Ainsi, la somme des coefficients binomiaux sur la ligne $n = 7$ sur le triangle de Pascal vaut $2^{\dots} = \dots.$
Compléter la ligne $n = 7$ sur le triangle de Pascal ci-contre (on pourra se servir de la formule de symétrie $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$)

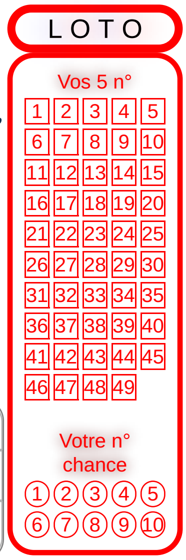
une partie d'un ensemble de cardinal n a :	possibilités :
soit 0 éléments ($\emptyset$)	$\binom{n}{0}$
soit 1 éléments (singleton)	$\binom{n}{\dots}$
soit 2 éléments (paire)	$\binom{\dots}{\dots}$
soit k éléments	$\binom{n}{k}$
soit n éléments	$\binom{n}{n}$
Total :	$2^{\dots}$

Triangle de Pascal (partiel)

$k\to$ $n\downarrow$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	1	1							
2	1	2	1						
⋮									
7									
8									

✏️ Exercice 2 : Le loto de la française des jeux : utiliser les combinaisons pour calculer des probabilités

Quitte à remplir une grille, autant *espérer* gagner quelque chose. Le loto de la française des jeux consiste à cocher sur une grille 5 nombres entiers entre 1 et 49 (compris) ainsi qu'un «numéro chance» qui est un entier entre 1 et 10 compris, comme dans la grille ci-contre. Les joueurs remplissent une grille (exemple ci-contre) ; Lors du tirage, 5 boules numérotées de 1 à 49 (compris) sont prélevées, au hasard, sans remise, dans une urne, suivies d'un tirage au hasard du numéro chance. Les gains tiennent compte du prix de la grille (moyenne [2008;2016]).



1. L'ordre des boules au tirage a-t-il une importance ?
2. Comptons le nombre de grilles réalisables :
on doit choisir :
   - une combinaison de ... numéros parmi ... ;
   - un numéro chance parmi ... .

   Ainsi, le nombre de grilles possibles est :
$$\binom{\dots}{\dots}\binom{\dots}{1} = \dots\dots\dots$$
3.

n° gagnants	5 + c	5	4+c	4	3+c	3	2+c	2	1+c ou 0+c	1 ou 0
Gain G (€)	5 701 258	102 632	1 086	1 084	10	8	5	3	0	-2
Probabilité	$\frac{1}{19\,068\,840}$	$\frac{1}{2\,118\,760}$	$\frac{11}{953\,442}$	$\frac{11}{105\,938}$				$\frac{473}{7\,567}$	$\frac{252\,109}{2\,724\,120}$	

   Le tableau ci-dessus donne la loi de la variable aléatoire gain G ; dans la première ligne, «+c» indique l'obtention du numéro chance au tirage en plus du nombre de numéros gagnants.
   Calculer et compléter $\mathrm{P}(G = 10)$; pour cela, on doit cocher :
   - 3 numéros parmi les 5 numéros gagnants ;
   - 2 numéros parmi les ... numéros perdants ;
   - 1 nombre chance parmi un (gagnant).

   Ainsi (en divisant par le nombre de grilles possibles),
$$\mathrm{P}(G = 10) = \frac{\binom{\dots}{\dots}\binom{\dots}{\dots}\binom{\dots}{\dots}}{19\,068\,840} = \frac{\dots}{\dots}$$
4. Calculer la probabilité $\mathrm{P}(G = 8)$ (le seul changement par rapport à la question précédente est de choisir le numéro chance parmi les 9 perdants).
5. Calculer les probabilités $\mathrm{P}(G = 5)$, $\mathrm{P}(G = -2)$ et montrer que $\mathrm{P}(G > 0) \approx 7{,}5\%$.
6. M. Tolo joue 10 fois dans l'année (les tirages du loto sont *évidemment* indépendants). Il certifie qu'il obtient au moins un gain strictement positif un an sur deux. Est-ce crédible ? On notera Y_{10} la variable aléatoire comptant le nombre de gains strictement positifs durant 10 tirages.
7. On donne $\mathbb{E}(G) \approx -0{,}9304$€. Combien de fois, en moyenne, sur 10 tirages, M. Tolo obtient-il un gain positif ? Quel gain moyen peut-il espérer sur 10 tirages ?

✏️ Exercice 3 : Jeu de la vie de Conway : probabilités conditionnelles, variables aléatoires, inégalités

Le «jeu de la vie» se joue sur une grille plane carrée (quadrillage) : chaque case à 8 cases voisines. Chaque case du quadrillage est assimilé à une cellule qui a deux états : vivante (case □) ou morte (case vide). On note X une variable aléatoire, indiquant pour une cellule fixée son évolution selon les règles du jeu qui suivent :

- Une cellule morte possédant exactement trois cellules voisines vivantes devient vivante (elle naît : $X = 1$) ;
- Une cellule vivante possédant deux ou trois cellules voisines vivantes le reste ($X = 0$), sinon elle meurt ($X = -1$).

1. Donner la valeur de X pour la cellule occupant la case centrale, obtenue en suivant les règles données, pour les configurations suivantes :

	□	
		□
□		

La cellule centrale va ...
$X = \dots$

□		□
□	□	
		□

La cellule centrale va ...
$X = \dots$

2. Au début du jeu, chaque cellule a une probabilité de 0,5 d'être vivante ou non, indépendemment des autres. Montrer que la loi de X est :

X	-1	0	1
prob.	$\frac{43}{128}$	$\frac{71}{128}$	$\frac{14}{128}$

En déduire que $\mu = \mathbb{E}(X) = \frac{-29}{128}$ et $v = \mathrm{Var}(X) = \frac{6\,455}{16\,384} \approx 0{,}394$.

3. On fixe un échantillon $X_1; \dots; X_n$ de cellules, suffisamment éloignées pour les considérer comme indépendantes. On note M_n la moyenne de cet échantillon. Quelle doit être la taille de cet échantillon pour que la probabilité que M_n s'écarte de μ d'au moins 1 soit inférieure à 10% ?
4. En se basant uniquement sur l'espérance, que penser de l'évolution de la population de cellules ? Pourquoi n'observe-t-on pas cela en général ?

✏️ Exercice 4 : Poker : Combinaisons, probabilités conditionnelles

Le poker est un jeu dans lequel chaque joueur reçoit une «main», c'est à dire une combinaison de 5 cartes. Dans cette exercice, on utilisera un jeu de 32 cartes représenté par le produit cartésien $H \times C$, avec $H = \{7; 8; 9; 10; V_{\text{valet}}; D_{\text{dame}}; R_{\text{roi}}; 1_{\text{as}}\}$ (de la plus faible à la plus forte) et $C = \{♠; ♣; ♥; ♦\}$ (pas d'ordre sur les couleurs). Pour gagner la mise, il faut posséder la figure (combinaison particulière) la plus forte ; ces figures sont indiquées, de la plus forte à la plus faible, dans le tableau suivant :

figures	possibilités	probabilité (%)
quinte flush : 5 cartes de hauteurs consécutives de même couleur		
carré : 4 cartes de même hauteur		
full : 3 cartes de même hauteur et 2 cartes d'une (autre) même hauteur		
couleur : 5 cartes de même couleur mais de hauteurs non consécutives		
quinte : 5 cartes de hauteurs consécutives (2 couleurs au moins présentes)		
brelan : 3 cartes de même hauteur		
double paire : 2 cartes de même hauteur et 2 cartes d'une (autre) même hauteur		
paire : 2 cartes de même hauteur		
aucune figure : 5 cartes de hauteurs distinctes non consécutives		

1. Combien y a-t-il de «mains» possibles ?
2. Compléter le tableau (au moins pour la quinte flush, le carré, le full et le brelan). On considère que chaque main est équiprobable ; on arrondira les probabilités, exprimées en pourcentage, au centième de %.
3. En regardant ses cartes pendant la distribution, Mme Asinoc observe que les 3 cartes qu'elle a reçues sont de même hauteur. Sachant qu'elle a ainsi au moins un brelan, quelle est la probabilité qu'elle ait, en fin de distribution, ou full ? Un carré ? Un brelan seulement ?
Attention : les événements «obtenir un full» et «obtenir un brelan», par exemple, sont ... .

✏️ Exercice 5 : ⭐ Utilisations du binôme de Newton

Pour $n \geqslant 2$ (même si la formule obtenue est vraie pour tout entier naturel), on pose $B_n = (x+y)^n = (x+y)(x+y)\cdots(x+y)$ (n facteurs). Développer cette expression revient à choisir, pour tout entier k compris entre 0 et n, k fois le nombre x et de fait $n-k$ fois le nombre y parmi les n facteurs $(x+y)$. On obtiendra donc une somme de monômes $x^k y^{n-k}$, chacun de ses monômes au nombre de $\binom{n}{k}$

$$\boxed{B_n = (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}}$$

1. En déduire le développement de $B_3 = (x+y)^3$ et $B_4 = (x+y)^4$.
2. En posant $x = y = 1$, que retrouve-t-on ?
3. En posant $x = p \in [0;1]$ et $y = 1-p$, quel résultat concernant la loi binomiale retrouve-t-on ?
4. En posant $x = -y = 1$, que peut-on apprendre sur le nombre de parties de cardinal pair et le nombre de parties de cardinal impair d'un ensemble de cardinal n ?
5. Soient u et v deux fonctions dérivables successivement un nombre infini de fois (on dit de classe C^∞). On note $u^{(n)} = u''\cdots'$ la dérivée n-ième de u (par convention $u^{(0)} = u$, on dérive 0 fois).
Calculer $(uv)''$, puis $(uv)^{(3)}$. Que peut-on conjecturer? Essayer de trouver une démonstration par récurrence.