Fonctions exponentielles

62 Soit f définie sur $\mathbb{R}+$ par $f(x) = 4 \times 2^x$.
1. Calculer $f(0)$ et $f(3)$.
2. Déterminer une valeur approchée de $f(1{,}5)$ à 10^{-2} près.

63 Soit f définie sur $\mathbb{R}+$ par $f(x) = 10 \times 0{,}2^x$.
1. Calculer $f(0)$ et $f(-1)$.
2. Déterminer une valeur approchée de $f(0{,}5)$ et de $f\left(\frac{1}{3}\right)$ à 10^{-3} près.

64 Chacune des fonctions suivantes a une expression de la forme $k \times a^x$. Pour chacune d'elles, indiquer les valeurs de k et de a puis donner son sens de variation.

a) $f(x) = 5 \times 0{,}5^x$ b) $g(x) = \frac{1}{2} \times 3^x$
c) $h(x) = 2 \times 1{,}05^x$ d) $k(x) = 6^x$
e) $m(x) = 4 \times 0{,}3^x$ f) $n(x) = 0{,}7^x$

65 Donner le sens de variation des fonctions f, g, h et k définies sur $\mathbb{R}+$ par :

a) $f(x) = 4 \times 3^x$ b) $g(x) = 5 \times 0{,}4^x$
c) $h(x) = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^x$ d) $k(x) = 4^x$

66 f est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}+$.
Indiquer ses expressions possibles parmi les suivantes :
- 4×6^x
- $2 \times 1{,}2^x$
- $6 \times 0{,}7^x$
- $\left(\frac{7}{8}\right)^x$

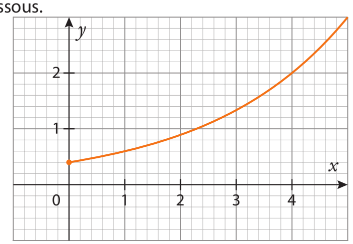
67 Tracer dans un repère l'allure des courbes des fonctions f, g, h et k définies sur $[0\,;+\infty[$ dont voici les expressions :

a) $f(x) = 2 \times 0{,}9^x$ b) $g(x) = -4 \times 2^x$
c) $h(x) = -0{,}7^x$ d) $k(x) = 6 \times 1{,}1^x$

68 Dresser le tableau de variations et donner l'allure de la courbe représentative des fonctions suivantes.

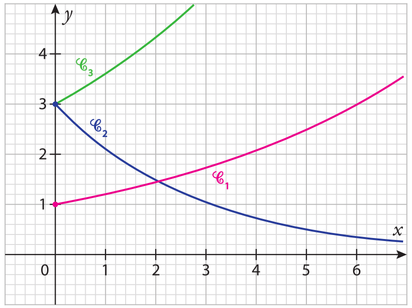
a) f définie par $f(x) = 2 \times 0{,}7^x$ pour $x \geqslant 0$.
b) g définie par $g(x) = -0{,}4 \times 1{,}05^x$ pour $x \geqslant 0$.
c) h définie par $h(x) = 0{,}9^x$ pour $x \geqslant 0$.
d) k définie par $k(x) = -10 \times 2{,}7^x$ pour $x \geqslant 0$.

69 f est une fonction de la forme $x \mapsto k \times a^x$, définie sur $\mathbb{R}+$. Sa courbe représentative est donnée dans le repère ci-dessous.



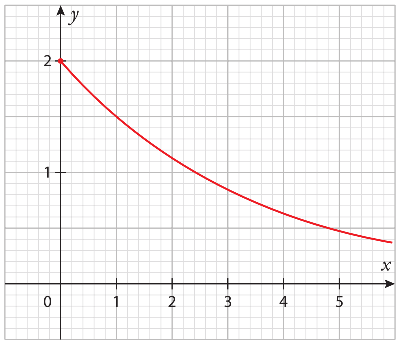
1. Déterminer graphiquement $f(0)$ et $f(1)$.
2. En déduire les valeurs de k et de a.

70 On considère les fonctions f, g et h dont les courbes sont tracées dans le repère ci-dessous.
Elles sont définies sur $\mathbb{R}+$ par :
- $f(x) = 3 \times 0{,}7^x$
- $g(x) = 3 \times 1{,}2^x$
- $h(x) = 1{,}2^x$



Associer chaque fonction à sa courbe représentative.

71 f est une fonction de la forme $x \mapsto k \times a^x$, dont on donne la représentation graphique dans le repère ci-dessous. Déterminer les valeurs de k et de a.



Propriétés algébriques

Méthode 3 p. 85

72 Simplifier les expressions suivantes.

a) $2^{1,7} \times 2^{4,3}$ b) $3^y \times 3^{-4}$
c) $\frac{5^{3x}}{5^x}$ d) $(0{,}7^4)^{1,5}$

73 Simplifier les expressions suivantes.

a) $2^4 \times 2^{1,5}$ b) $\frac{3^5}{3^{3,5}}$
c) $(0{,}6^{0,2})^{15}$ d) $0{,}8^x \times 5^x$
e) $\frac{4{,}5^{3,5}}{1{,}5^{3,5}}$ f) $z^2 \times z^{1,4}$

74 Écrire les nombres suivants sous la forme a^x, où a est un nombre entier.

a) $7^{3,1} \times 3^{3,1}$ b) $4 \times 2^{-2,3}$
c) $5 \times \frac{5^{2,1}}{5^{1,5}}$ d) $\frac{6^{4,6}}{2^{4,6}}$
e) $4^3 \times (4^{2,1})^2$ f) $\frac{13^{3,1} \times 13}{13^{4,2}}$

75 Soient f et g les fonctions définies sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = 0{,}8^x$ et $g(x) = 1{,}2^x$.
h est la fonction définie par $h(x) = f(x) \times g(x)$.
1. Déterminer l'expression de $h(x)$.
2. Déterminer le sens de variation de h.

Équation $x^n = c$

76 Résoudre les équations suivantes dans $[0\,;+\infty[$:

a) $x^3 = 64$ b) $x^4 = 81$
c) $x^3 = 0{,}125$ d) $x^2 = 25$

77 Résoudre les équations suivantes dans $[0\,;+\infty[$.
On donnera une valeur approchée au centième des solutions.

a) $2x^3 = 10$
b) $5x^4 - 100 = 0$

78 Résoudre les équations suivantes dans $[0\,;+\infty[$.
On donnera une valeur approchée au millième des solutions.
1. $5x^4 - 1 = 0$
2. $3x^3 - 2 = 0$

79 u est une suite géométrique de raison q telle que $u_1 = 8$ et $u_4 = 12{,}167$.
1. Montrer que q est solution de l'équation $q^3 = 1{,}520\,875$.
2. Déterminer u_2, u_3 et u_0.

80 u est une suite géométrique croissante telle que $u(0) = 0{,}8$ et $u(4) = 4{,}05$. Déterminer sa raison.

81 On place une somme de 1 000 € **Économie**
sur un compte bancaire rapportant t % d'intérêts composés par an. Au bout de 5 ans, la somme présente sur ce compte est de 1 104,80 €.
Déterminer t.

Taux moyen

Méthode 4 p. 85

82 Déterminer les taux moyens associés au taux d'évolution global et au nombre de périodes données. On arrondira si besoin les résultats à 0,01 %.

a) Une hausse globale de 15 % sur cinq périodes.
b) Une baisse globale de 20 % sur quatre périodes.
c) Une hausse globale de 1,2 % sur deux périodes.
d) Une baisse globale de 70 % sur dix périodes.

83 Le montant des ventes d'un journal a augmenté de 21 % sur un an.
Déterminer le taux d'évolution semestriel moyen.

84 **Esprit critique**

L'indice des prix d'une céréale a augmenté de 36 % en un an.

Jocunda affirme que cela correspond à une hausse mensuelle de 3 %. Discuter de l'affirmation de Jocunda.

85 Une directrice de lycée a constaté qu'en dix ans, la fréquentation des cantines de sa ville avait doublé.
Déterminer le taux d'évolution annuel de la fréquentation de ses cantines.
On arrondira le résultat à 0,1 % près.

86 En 2023, le maire d'une ville de 10 000 habitants a constaté que la population a augmenté de 20 % en dix ans.
1. Déterminer le taux d'évolution annuel moyen de la population de la ville.
2. Déterminer une estimation de la population de la ville en 2024.

87 Entre 2015 et 2018, le record de hauteur du perchiste Armand Duplantis s'est amélioré chaque année, passant de 5,30 m à 6,05 m. Déterminer le taux d'évolution annuel moyen de son record.

Déterminer un seuil

88 Soit u la suite définie par $u(n) = 3^n$ pour $n \geqslant 0$.
1. Déterminer les cinq premiers termes de la suite.
2. Déterminer la plus petite valeur de n telle que $u(n)$ dépasse 100.
3. Déterminer la plus petite valeur de n telle que $u(n)$ dépasse 1 000.

89 On considère la suite v telle que $v(n) = 10 \times 0{,}9^n$ pour $n \geqslant 0$.
1. Déterminer $v(0)$ et $v(4)$.
2. Déterminer la plus petite valeur de n telle que $v(n) < 5$.

90 On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour $n \geqslant 0$ par $u_n = 0{,}25 \times 2^n$ et $v_n = 10 \times 0{,}8^n$.
1. Calculer les cinq premiers termes de chaque suite.
On arrondira si besoin les résultats au centième.
2. Construire dans un même repère les nuages de points associés aux suites.
3. Déterminer la valeur du petit entier n tel que u_n dépasse v_n.

Exercices d'entraînement

91 On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}+$ par $f(x) = 8 \times 0{,}5^x$ et $g(x) = 0{,}1 \times 1{,}5^x$.
1. Afficher les courbes de f et de g à la calculatrice.
2. Déterminer à partir de quelle valeur entière de x on a $f(x) < g(x)$.

92 Soit la fonction N définie — Physique — SVT
sur $[0\,;+\infty[$ par $N(t) = 5 \times 0{,}917^t$ dont on admet que $N(t)$ donne le nombre de noyaux, exprimé en millions, d'iode 131 présents dans un échantillon à l'instant t exprimé en jours. Déterminer à partir de quand il y aura moins de 2,5 millions de noyaux d'iode 131 dans cet échantillon.

Modélisations

93 Le premier numéro d'une revue est publié le 1er janvier 2023. On compte à son lancement 1 000 abonnés. Sa rédactrice en chef estime qu'elle devrait compter 1 200 abonnés le 1er janvier 2024, et que la progression devrait suivre le même pourcentage d'évolution les années suivantes.

On souhaite modéliser l'évolution par une croissance exponentielle. Soit f la fonction qui donne le nombre d'abonnés à la revue, x années après 2023.
1. Donner la forme générale de l'expression $f(x)$.
2. Que vaut $f(0)$? En déduire la valeur de k.
3. Simplifier $\dfrac{f(1) - f(0)}{f(0)}$.
En déduire l'expression complète de la fonction f.
4. Déterminer à combien d'abonnés on peut s'attendre le 1er janvier 2025 et le 1er juillet 2025 selon cette modélisation.

94 Modéliser une évolution
Les dépenses annuelles de fonctionnement de deux services d'une entreprise, nommés ici A et B, ont été étudiées sur une assez longue période, ce qui a conduit à la modélisation suivante. Les dépenses du service A augmentent de 4 000 euros chaque année, tandis que celles du service B augmentent de 15 % chaque année.
En 2023, les deux services ont effectué des dépenses identiques : 20 000 euros.
On note a_n le total des dépenses du service A et b_n le total des dépenses du service B la n-ième année.
1. a) Déterminer le type de croissance de la suite (a_n).
b) Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n.
c) Donner le montant des dépenses du service A en 2027.
2. a) Déterminer le type de croissance de la suite (b_n).
b) Exprimer b_{n+1} en fonction de b_n.
c) Donner le montant des dépenses du service B en 2027.
3. Déterminer en quelle année les dépenses du services B seront plus importantes que celles du service A.

↪ Résolution de problèmes p. 86

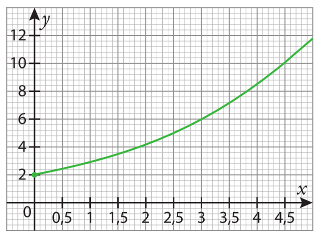
95 Histoire des sciences — Économie
Dans *Essai sur le principe de la population*, Thomas Robert Malthus écrit en 1798 :

Thomas Robert Malthus (1766-1834)

« Chaque période de vingt-cinq ans ajoute à la production annuelle [de ressources alimentaires] de la Grande-Bretagne une quantité égale à sa production actuelle. […] Comptons pour onze millions la population de la Grande-Bretagne et supposons que le produit actuel de son sol suffit pour la maintenir. Au bout de vingt-cinq ans, la population sera de vingt-deux millions ; et la nourriture ayant également doublé, elle suffira encore à l'entretenir. Après une seconde période de vingt-cinq ans, la population sera portée à quarante-quatre millions : mais les moyens de subsistance ne pourront plus nourrir que trente-trois millions d'habitants. Dans la période suivante, la population – arrivée à quatre-vingt-huit millions – ne trouvera des moyens de subsistance que pour la moitié de ce nombre. »
1. Quel type de croissance Malthus considère-t-il pour la population de la Grande-Bretagne ?
2. Modéliser la population de la Grande-Bretagne et la population pouvant être nourrie d'après ce modèle par deux suites u et v où u_n et v_n donnent ces populations (en millions) après n quarts de siècle.
3. Expliquer la problématique soulevée par Malthus et la discuter.

↪ Résolution de problèmes p. 20

96 Le nombre de bactéries — Sciences de la vie
d'un échantillon de laboratoire augmente de 50 % chaque jour. On suppose que l'échantillon contient 2 000 bactéries le premier jour, et on note $u(n)$ le nombre de bactéries (en milliers) présentes au bout de n jours. Ainsi, $u(0) = 2$.
1. a) Donner la nature de la suite u.
b) Donner le terme général de la suite u.
c) En calculant les premiers termes de la suite, déterminer au bout de combien de jours la population de bactérie dépassera 10 000.
2. On a représenté dans le graphique ci-dessous la courbe de la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2 \times 1{,}5^x$.



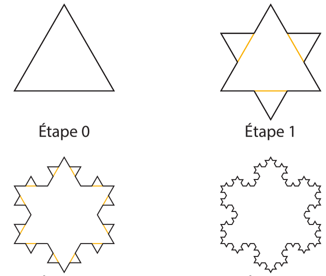
a. En utilisant la courbe représentative de la fonction f, retrouver le résultat de la question **1 c)**.
b. Déterminer le nombre de bactéries au bout de 12 h.

97 Un échantillon de noyaux — Physique — SVT
radioactifs voit son nombre de noyaux diminuer en fonction du temps en raison de leur désintégration. La période de demi-vie de l'iode de 131 est d'environ 8 jours : la moitié des noyaux se sont désintégrés au bout de 8 jours.
1. a) Quel type de croissance est caractéristique de l'évolution du nombre d'atomes d'iode 131 ?
b) Au bout de combien de temps le nombre de noyaux aura-t-il été divisé par 4 ?
c) Déterminer le taux d'évolution quotidien moyen du nombre d'atomes d'iode 131 dans un échantillon.
d) On veut modéliser par une fonction f le nombre de noyaux d'iode 131 dans échantillon qui en contient un nombre initial N_0 en fonction du temps. Déterminer l'expression $f(t)$ où t correspond au temps écoulé en jours.
2. L'iode 131 est administré à des patients pour des traitements de radiothérapie. Il est alors recommandé au patient de s'isoler jusqu'à ce que l'activité radioactive résiduelle redescende sous le seuil recommandé de 55 MBq.
L'activité résiduelle est proportionnelle au nombre de noyaux d'iode 131 présents. On mesure après administration de l'iode radioactive une activité résiduelle de 800 MBq. On modélise donc l'activité résiduelle (en MBq) par la fonction $g(t) = 800 \times 0{,}917^t$ où t correspond au nombre de jours écoulés depuis la prise du traitement.
a) Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant (arrondir si besoin les valeurs à l'unité).

t	0	5	10	15	20	25	30
$g(t)$							

b) Construire la courbe associée dans un repère.
c) Déterminer au bout de combien de jours le patient n'a plus besoin de s'isoler.

98 À partir d'un triangle — Dénombrement
équilatéral de côté 1, on construit un flocon en ajoutant à chaque segment une pointe, et en itérant le processus à chaque étape.
On forme ainsi une figure appelée flocon de von Koch.
Les figures ci-dessous indiquent les premières étapes de construction du flocon.



1. a) Déterminer le nombre de segments lors des quatre premières étapes.
b) Déterminer l'expression du nombre de segments présents à l'étape n.
2. a) Déterminer la longueur de chaque segment de la figure lors des quatre premières étapes.
b) Déterminer l'expression de la longueur de chaque segment présent à l'étape n.
3. a) Déterminer le périmètre total de la figure à l'étape n.
b) Étudier la variation du périmètre.
c) Déterminer à quelle étape le périmètre aura triplé.

À chacun son rythme

99 Dans une ville, on compte 1 000 voitures électriques en circulation. On estime qu'à partir de 2023, le nombre de voitures électriques en circulation augmentera de 12 % par an. Au 1er janvier 2023, cette ville proposait 1 500 places de parking spécifiques avec borne de recharge. La commune prévoit de créer chaque année 130 places supplémentaires.

Énoncé A
1. Déterminer le nombre de voitures électriques en 2024 et en 2025.
2. Déterminer le nombre de places de parking en 2024 et en 2025.
3. Quel type de croissance suivent les voitures électriques ? Et le nombre de places de parking ?

Énoncé B
On note $u(n)$ le nombre de voitures n années après 2023.
1. Déterminer la nature de la suite u.
2. Déterminer une expression de $u(n)$ en fonction de n.
3. Déterminer en quelle année le nombre de voitures doublera.
4. Déterminer le nombre de voitures en 2050.
Que dire de cette modélisation ?

Énoncé C
1. Déterminer en quelle année le nombre de places de parking sera insuffisant.
2. Déterminer quel devrait être le nombre de places créées chaque année pour qu'il y ait suffisamment de places disponibles en 2040.

Exercices de synthèse

100 Étude d'une suite

Soit u la suite géométrique de raison 0,9 et de terme initial $u(0) = 10$, avec $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer $u(1)$ et $u(3)$.
2. Déterminer le terme général de la suite u.
3. Déterminer en justifiant le sens de variation de u.
4. Dans un repère, placer les quatre premiers termes de la suite.
5. Déterminer à partir de quelle valeur de n on a $u(n) < 5$.

101 Cours du blé

Économie

Le prix d'une tonne de blé est de 300 euros en 2021. Il passe à 350 euros un an plus tard. On note $f(x)$ le coût, en euros, d'une tonne de blé x années après 2021 pour $x \in [0\,;+\infty[$.
On suppose que f suit une croissance exponentielle, avec une expression de la forme $f(x) = k \times a^x$.

1. Déterminer $f(0)$ et en déduire k.
2. Déterminer $f(1)$ et en déduire a.
3. Selon ce modèle, déterminer le coût de la tonne de blé à la mi-2024.

102 Pour une raison inconnue

On considère une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 5$, de raison q positive et telle que $u_{10} = 295\,245$.

1. Déterminer q.
2. En déduire u_{11} et u_9.

103 Désintoxication

Sciences de la vie

À la suite d'une intoxication alimentaire, on étudie l'élimination d'une toxine chez un cheval au cours du temps. À l'instant initial, la concentration est de 30 µg/L. On sait que la concentration de la toxine dans le sang baisse de 4,5 % chaque jour. On note $f(t)$ la concentration de la toxine en µg/L au bout de t jours.

1. Expliquer pourquoi on peut utiliser un modèle de décroissance exponentielle pour décrire l'évolution de la concentration.
2. Déterminer les valeurs de k et de a telles que $f(t) = k \times a^t$ pour $t \geqslant 0$.
3. Déterminer la concentration présente au bout de 12 h.
4. Déterminer le sens de variation de la fonction f.
5. Afficher la courbe représentative de la fonction f à l'aide de la calculatrice et déterminer au bout de combien de jours la concentration aura diminué de moitié.
6. On considère que la toxine ne représente plus un danger pour le cheval lorsque la concentration tombe en dessous de 15 % de la concentration initiale. Déterminer au bout de combien de temps le cheval sera hors de danger.

104 Épargnes

Économie

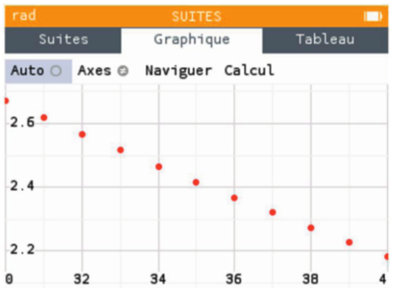
1. Simon dépose sur son livret d'épargne 20 000 euros au taux composé annuel de 5 % le 1er janvier 2023. Les intérêts sont calculés par rapport à la somme disponible en début d'année. On note $u(n)$ le montant disponible sur son livret d'épargne n années après.
a) Calculer $u(1)$ et $u(2)$.
b) Exprimer $u(n+1)$ en fonction de $u(n)$. En déduire la nature de la suite u.
c) Déterminer le terme général de la suite u.
d) Combien d'années Simon devra-t-il laisser son argent en banque s'il veut doubler son dépôt initial ?
2. Son banquier lui propose une autre formule : son épargne lui rapporterait chaque année 6 % de la somme initiale. On note $v(n)$ le montant disponible sur son livret d'épargne n années après.
a) Déterminer la somme disponible au bout de deux ans.
b) Déterminer la nature de la suite v. Préciser le premier terme et la raison.
c) En déduire une expression de $v(n)$ en fonction de n.
3. Quelle formule peut-on conseiller à Simon ? Discuter selon la durée du placement.

105 Réduction de déchets

Développement durable

En 2017, la production annuelle de déchets par habitant en France était estimée à 4,9 tonnes.
La maire d'une ville souhaite ramener cette production à 3,9 tonnes en 2028 en favorisant le recyclage.

1. **a)** Déterminer le taux d'évolution global entre ces deux dates si la prévision de la maire se réalise.
b) Déterminer le taux moyen t annuel de la quantité de déchets.
2. On suppose que la quantité de déchets diminue de t chaque année.
On note u_n la quantité de déchets produits par habitant dans la ville, en tonnes, n années après 2017.
a) Déterminer la nature de la suite u. Préciser son premier terme et sa raison.
b) Déterminer une expression de $u(n)$ en fonction de n.
c) On donne ci-dessous une capture d'écran du nuage représentant la suite pour n entre 30 et 40. Déterminer à quelle année la production de déchets aura diminué de moitié.



Exercices d'approfondissement

106 Datation au carbone 14

Physique SVT

Le carbone présente deux isotopes, 12 et 14. Le second est faiblement radioactif et se désintègre en azote au fil du temps. À leur mort, les organismes n'assimilent plus de carbone : la quantité de carbone 12 reste alors constante quand celle de carbone 14 diminue. La datation au carbone 14 évalue la proportion entre les deux isotopes de carbone pour estimer le moment où l'organisme a cessé d'intégrer du carbone 14 (^{14}C). La demi-vie du ^{14}C est de 5 730 ans : la quantité de ^{14}C présente dans un échantillon est divisée par 2 au bout de 5 730 ans.
On souhaite étudier l'évolution au cours du temps de la quantité de ^{14}C dans un échantillon provenant d'un organisme qui, au moment de sa mort, contenait 10 µg de ^{14}C. Pour cela, on note $f(t)$ la quantité, en µg, de ^{14}C présente au bout de t années.

1. Donner la valeur de $f(0)$ et de $f(5\,730)$.
2. On modélise l'évolution de la quantité de carbone 14 par une fonction f de la forme $f(x) = k \times a^x$.
Déterminer la valeur de k puis la valeur de a arrondie à 10^{-6}.
3. Selon ce modèle, quelle serait la quantité de carbone 14 présente au bout de 10 000 ans ?
4. On mesure que la proportion de ^{14}C dans un ossement correspond à 13 % de celle présente lors de la mort de l'organisme. Dater l'ossement.

107 Interpolation

La ville de Montargis est passé de 14 616 habitants en 2011 à 14 976 en 2019. (*Source* : INSEE)

1. Estimer la population en 2015 selon les hypothèses suivantes.
a) La croissance de la population suit un modèle linéaire.
b) La croissance de la population suit un modèle exponentiel.
2. Estimer selon chacun des modèles en quelle année la population dépasserait 16 000 habitants.

108 Suite auxiliaire

Soit u la suite définie par $u(n+1) = 4u(n) + 9$ pour $n \geqslant 0$ et $u(0) = 1$.

1. Calculer $u(1)$ et $u(2)$.
2. Montrer que la suite u n'est ni arithmétique ni géométrique.
3. Soit v la suite définie par $v(n) = u(n) + 3$.
a) Calculer $v(0)$.
b) Montrer que v est géométrique de raison 4.
c) En déduire une expression de $v(n)$ en fonction de n.
d) Déduire de la question précédente une expression de $u(n)$ en fonction de n.

109 Taux de reproduction d'un virus

SVT

On s'intéresse à l'évolution d'une épidémie de rhume causée par un virus au sein d'une population. On note R_0 le taux de reproduction d'une maladie.
Cela correspond au nombre de personnes qu'une personne malade va contaminer.
On suppose que la maladie est bénigne et que chaque personne guérit spontanément au bout d'une semaine.
On estime à 60 000 le nombre de personnes malades actuellement. On note (u_n) le nombre de personnes (en milliers) contaminées au bout de n semaines.
Ainsi, $u_0 = 60$.

Partie A ▶ Une première modélisation

On suppose ici que $R_0 = 1{,}4$.

1. Justifier que $u_1 = 84$ puis calculer u_2 et u_3.
2. Déterminer une expression de u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
4. Quelle limite présente cette modélisation ?

Partie B ▶ Cas général

1. Déterminer une expression de u_{n+1} en fonction de u_n et de R_0.
2. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) en discutant selon les valeurs de R_0.

110 Propagation d'une rumeur

Sciences sociales

Une enquête de l'Institut National des Hautes Études de la Sécurité et de la Justice s'intéresse à la diffusion des informations à travers les réseaux sociaux. L'institut cite une étude du chercheur D. Watts, qui a relevé que :

- 93 % du temps, une information est diffusée par un utilisateur, mais elle n'est jamais relayée.
- 6,8 % du temps, une information est relayée à une ou deux personnes qui vont la relayer au maximum une seule fois.
- 0,2 % du temps, l'information est cascadée de manière exponentielle.

Interpréter dans chacun des cas ce qui se passe si une personne diffuse une rumeur sur un réseau social. On pourra discuter des limites de ces modélisations.

Exercices d'approfondissement

111 Télétravail

En mai 2022, une entreprise de 5 000 salariés a fait le choix de développer le télétravail. Au départ, en mai 2022, 200 d'entre eux ont choisi le télétravail. Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, la PDG constate que 85 % de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de continuer, et que, chaque mois, 450 salariés supplémentaires choisissent le télétravail.
On note u_n le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail n mois après mai 2022.
Ainsi, $u_0 = 200$.
1. Calculer u_1 et u_2.
2. Donner l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n pour $n \geqslant 0$.
3. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 3\,000$.
a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique et que sa raison est 0,85.
b) Donner l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.
c) Déterminer au bout de combien de temps la moitié des salariés sera en télétravail.

112 Suite particulière

Soit (u_n) définie par $u_n = \dfrac{2^n}{4^{n+1}}$ pour $n \geqslant 0$.
1. Déterminer une expression de u_{n+1} en fonction de n.
2. Montrer que u est géométrique.
Préciser le terme initial et la raison.

113 Absorbance SVT

On cherche à estimer la présence de microbes en observant l'absorbance d'une préparation. Les données conduisent à modéliser l'absorbance au bout de t minutes par $f(t) = 1{,}2 \times 1{,}05^t$.
1. Calculer l'absorbance à l'instant 0 puis au bout de 2 et de 4 minutes.
2. Pourquoi peut-on penser que l'absorbance suit bien une croissance exponentielle ?
3. Exprimer $\dfrac{f(t+h)}{f(t)}$ en fonction de h.
Que peut-on en déduire ?

Vers les Maths complémentaires

114 Avec une suite auxiliaire

Soit u définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n + 2$.
1. Démontrer que la suite u n'est ni arithmétique, ni géométrique.
2. Soit v la suite définie pour tout entier n par $v_n = u_n + 1$.
a) Démontrer que la suite v est géométrique.
b) En déduire v_n puis u_n en fonction de n.
c) Déterminer pour quelle valeur de n u_n dépasse 100.

115 Seuil et Python Python

On considère les suites u et v définies par :
- $u_{n+1} = 2u_n - 3$ pour $n \geqslant 0$ et $u_0 = 4$.
- $v_n = \dfrac{4}{2n+1}$ pour $n \geqslant 0$.

On considère la fonction en langage **Python** suivante.

```
def u(n):
    u=4
    for i in range(n):
        u=2*u-3
    return(u)
```

1. Que renvoie `u(3)` ?
2. Écrire une fonction en langage Python qui permet de renvoyer le terme de rang n de la suite v.
3. Écrire une fonction en langage Python qui permet de déterminer la plus petite valeur de n telle que u_n dépasse 1 000.

116 Variations

Soit (u_n) la suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = -1$.
1. Calculer u_1 et u_2.
2. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).
3. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = -u_n$.
Justifier que (v_n) est géométrique puis démontrer la conjecture réalisée à la question précédente.

117 Une formule pour une somme

Soit n un entier naturel et q un réel avec $q \neq 1$.
1. Développer l'expression $(1-q)(1+q+q^2+\ldots+q^n)$.
2. En déduire que $1+q+q^2+\ldots+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
3. Soit u une suite géométrique, de terme initial u_0 et de raison $q \neq 1$.
a) Rappeler le terme général de la suite u.
b) En déduire une expression de $u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ en fonction de q, n et u_0.

118 Et maintenant des sommes

En utilisant la formule de la question **2** de l'exercice **117**, déterminer la valeur de :
a) $1+2+2^2+\ldots+2^8$
b) $1+3+9+\ldots+243$
c) $1+\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+\ldots+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}$
d) $1+4+16+\ldots+4^n$
e) $2+6+18+\ldots+2\times 3^n$

Préparer le contrôle Je révise

CARTES FLASH
Mémoriser le cours
www.lienmini.fr/7822-5

Objectif 1 Utiliser les suites géométriques

Calculer les premiers termes d'une suite géométrique

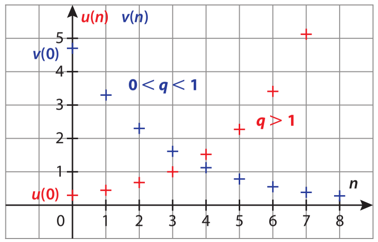
Une suite u est une **suite géométrique** s'il existe un nombre réel q tel que
$u(n+1) = q \times u(n)$ pour tout entier naturel n.

Déterminer le terme général d'une suite géométrique

Soient $n \in \mathbb{N}$ (ou $n \in \mathbb{N}^*$) et $q \in \mathbb{R}$.
Le **terme de rang n** (ou terme général) de la suite géométrique u de raison q est donné par :
- $u(n) = u(0) \times q^n$
- $u(n) = u(1) \times q^{n-1}$

Déterminer les variations d'une suite géométrique

Soit u une suite géométrique de raison q et de **terme initial positif.**
Alors :
- si $0 < q < 1$, alors u est **décroissante.**
- si $q > 1$, alors u est **croissante.**

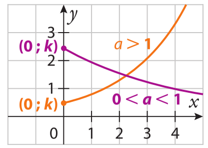


Objectif 2 Utiliser les fonctions exponentielles

Calculer avec les fonctions exponentielles
- $a^0 = 1$
- $a^x \times a^y = a^{x+y}$
- $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
- $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{x \times y}$
- $a^x \times b^x = (ab)^x$
- $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$

Déterminer le sens de variation d'une fonction exponentielle

Soient $k > 0$ et $a > 0$. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}+$ par $f(x) = k \times a^x$. Alors :
- si $a > 1$, alors la fonction f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}+$.
- si $0 < a < 1$, alors la fonction f est **strictement décroissante** sur $\mathbb{R}+$.



Objectif 3 Modéliser

On peut modéliser des phénomènes de croissance exponentielle, soit de **manière discrète** avec des **suites géométriques,** soit de **façon continue** avec des **fonctions exponentielles** de la forme $x \mapsto k \times a^x$.

Objectif 4 Déterminer un taux moyen

Résoudre une équation de la forme $x^n = c$

Soit $c \geqslant 0$. L'équation $x^n = c$ admet une unique solution réelle positive. Cette solution est $x = c^{\frac{1}{n}}$.

Déterminer un taux d'évolution moyen

- On suppose qu'au cours de n périodes, le taux d'évolution d'une quantité est t_{global}.
Alors le taux d'évolution moyen par période est
$t_{moyen} = \left(1 + t_{global}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$.
- Si au cours de n périodes, le coefficient multiplicateur global est c_{global}, alors le taux d'évolution moyen par période est
$t_{moyen} = \left(c_{global}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$.