Équations différentielles - Cours

1. Notion d'équation différentielle

1.1. Vocabulaire, notion de solution

Définition 1 : *Une* ***équation différentielle*** *est une équation dont l'inconnue est une fonction ; l'équation est dite différentielle car elle fait apparaître un lien entre la ou les dérivée(s) de la fonction et la fonction elle-même.*
Dans ce chapitre, on étudie les équations différentielles, dites du ***premier ordre*** *(c'est l'ordre maximal de dérivation apparaissant dans l'équation) de la forme :* $\boxed{(E) : y'(t) = ay(t) + h(t)}$ *où*

- $y(t)$ *est une fonction dérivable que l'on cherche à trouver.*
- $a \in \mathbb{R}^*$ *est une constante (non nulle).*
- $h(t)$ *est une fonction donnée.*

On note $\boxed{(E_0) : y'(t) = ay(t)}$ *l'équation* ***homogène*** *associée à* (E)*. Elle est obtenue en «oubliant» le terme* $h(t)$*, seul terme qui ne contient pas* y *ou* y'*.*

- *Une fonction donnée vérifiant* (E) *est appelée* ***solution particulière*** *de* (E)*.*
  Pour les équations étudiés ici, on recherche des solutions qui sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ *entier (bien que la partie* $t \geqslant 0$ *soit suffisante pour les problèmes étudiés en spécialité sciences physiques).*
- *Il y a une infinité de solutions en général.*
  Une formule donnant un paramétrage de toutes les fonctions solutions de E *est appelée* ***solution générale*** *de* (E)*.*

Remarque 1 :

- On prend $a \neq 0$ car sinon le problème revient à rechercher les primitives de $h(t)$.
- La variable est en général notée t car les équations différentielles apparaîssent naturellement en modélisant des phénomènes évoluant au cours du temps.
- Lorsqu'il n'y a absolument aucune ambiguïté, on peut omettre la variable notée entre parenthèses pour les fonctions : $y' = ay + h$

Exercice 1 : $(E) : 3y'(t) + 15y(t) = 30t + 12$

1. Isoler le terme y' dans le membre de gauche.
2. Déterminer a, $h(t)$ et l'équation homogène (E_0) associée à (E).
3. Démontrer que $f(t) = 2t + 0{,}4$ est une solution (particulière) de (E).

Remarque : On pourrait démontrer de la même manière que pour toute valeur de $k \in \mathbb{R}$, la fonction $f_k(t) = 2t + 0{,}4 + k\mathrm{e}^{-5t}$ est aussi une solution de E. Cette formule est une solution générale de (E).

1.2. Recherche de solutions particulières

Remarque 2 : C'est un problème **difficile**. Quelques pistes :

- Le plus souvent, une solution particulière est donnée et il est demandé de la vérifer.
- Les solutions particulières sont de la «même forme» que la fonction $h(t)$, on peut utiliser des méthodes d'identifications des coefficients.
  Par exemple, dans l'exercice précédent, il aurait été possible de chercher la solution sous la forme $f(t) = At + B$.
- On peut utiliser un logiciel de calcul formel.
- Dans le supérieur, on peut utiliser la transformation de Laplace (qui peut être un sujet de grand oral).

2. Solutions particulières de $y'(t) = ay(t) + c$ (cas $h(t) = c$ constante)

Propriété 1 : Lorsque la fonction $h(t)$ est une constante (notée c), l'équation différentielle (E) admet toujours une solution particulière constante.

Méthode 1 : Pour la trouver, comme $y(t)$ est constante, il suffit de remplacer, dans (E), y' par 0 :
$0 = y' = ay + c$ donc $\boxed{y = \frac{-c}{a}}$.

Exercice 2 : Trouver une solution particulière de chacune des équations différentielles suivantes : $(E1) : y' = 2y + 10$ et $(E_2) : 4y' + 3y = 15$.

📋 **Remarque 3 :** Cette solution particulière constante forme une asymptote de n'importe quelle autre solution de l'équation différentielle. Physiquement, elle correspond à une situation d'équilibre (cf la suite du cours).

3. Solutions de l'équation homogène $y'(t) = ay(t)$

🟧 **Propriété 2 :** L'écart entre deux solutions particulières d'une équation différentielle $(E) : y'(t) = ay(t) + h(t)$ est une solution de l'équation homogène associée $(E_0) : y'(t) = ay(t)$.

✏️ **Exercice 3 : Démonstration**
On note f et g deux solutions de l'équation différentielle $(E) : y'(t) = ay(t) + h(t)$ et on note $d(t) = f(t) - g(t)$ leur écart en fonction de t. Démontrer que d est solution de (E_0).

📋 **Remarque 4 :** Cette propriété permet d'«étendre» une solution particulière aux solutions générales dès lors que l'on connaît les solutions de l'équations homogène associée.

🟧 **Propriété 3 :** Les solutions d'une **équations différentielle homogène** $(E_0) : y' = ay$ sont les fonctions $\boxed{t \mapsto k\mathrm{e}^{at}}$ avec $k \in \mathbb{R}$ (k est une constante). On peut appeler ces solutions «solutions homogènes».

✏️ **Exercice 4 : Démonstration :**

1. Vérifier que ces fonctions sont des solutions de (E_0)
2. Vérifions que ce sont les seules solutions : on note $f(t)$ une solution de (E_0) (sur $\mathbb{R}$), et on pose $u(t) = f(t)\mathrm{e}^{-at}$. Dériver $u(t)$ et en déduire que u est constante sur $\mathbb{R}$, et vaut $f(0)$.
3. On note k le réel $f(0)$. En déduire que pour tout t réel, $f(t) = k\mathrm{e}^{at}$ et conclure.

4. Solutions générales

📗 **Méthode 2 :** Résoudre $(E1) : y' = 2y + 10$. L'obtention des solutions générales se mène en trois étapes :

1. **Trouver les solutions homogènes :**
   L'équation homogène associée est $(E1_0) : y' = 2y$ donc $a = 2$; les solutions homogènes sont donc les $k\mathrm{e}^{at} = k\mathrm{e}^{2t}$.
2. **Trouver une solution particulière :**
   Le terme non homogène de $(E1) : 2y + \mathbf{10}$, qui est 10 est constant donc on peut rechercher une solution constante ($y' = 0$) : $0 = 2y + 10$ donc $y = \frac{-10}{2} = -5$.
3. **Superposer (ajouter) les solutions homogènes et les solutions particulières pour obtenir les solutions générales** (paramétrées par $k \in \mathbb{R}$) :
   Les solutions générales sont : $-5 + k\mathrm{e}^{2t}$

✏️ **Exercice 5 :** Déterminer les solutions générales des équations différentielles suivantes :

1. $(EB) : v'(t) = 1{,}5 - 0{,}5v(t)$ désigne la vitesse de chute d'un ballon de baudruche (soumis à des frottements avec l'air) en fonction du temps.
2. $(ERC) : Rq'(t) + \dfrac{q(t)}{C} = 12$ désigne la charge q d'un condensateur de capacité C, en fonction du temps à travers une résistance R par une source de tension de 12 volts. On pourra prendre R=4 ohm et C = 0,5 farad (= énorme accumulateur de charge) pour les calculs.

5. Conditions initiales ou particulières

📕 ***Définition 2 :*** *Vocabulaire de sciences physiques : La donnée, en $t = 0$, d'une valeur de la fonction recherchée s'appelle une **condition initiale** (en un $t \neq 0$ on parle de **condition particulière**).*

📗 **Méthode 3 :** La donnée d'une condition initiale ou particulière permet de sélectionner **la** solution au problème posé parmi les solutions générales en fixant (une valeur pour) la constante k.
Ainsi, on remplace, dans la formule donnant les solutions générales, t et $y(t)$ par leurs valeurs données et on calcule k. Il suffit ensuite de réécrire la solution voulue avec la valeur de k calculée.

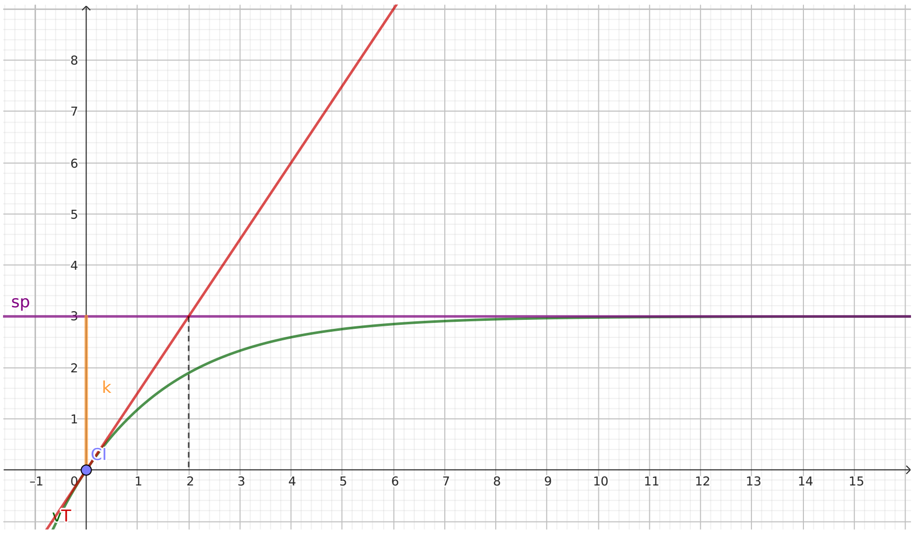
Exercice 6 :

1. $(EB) : v'(t) = 1{,}5 - 0{,}5v(t)$ pour $v(0) = 0$ et $v(0) = 5$
2. $(ERC) : Rq'(t) + \dfrac{q(t)}{C} = 12$ pour $q(0) = 0$ et $q(0) = 3$

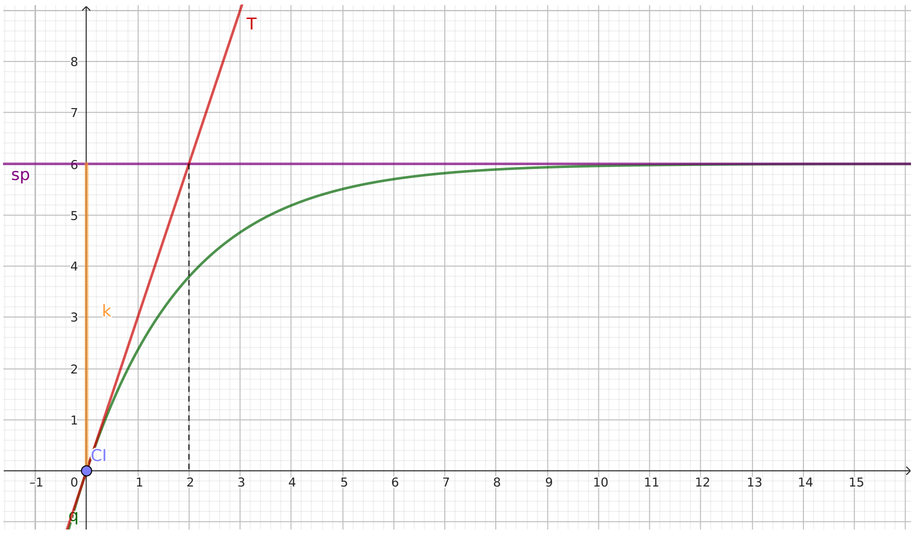
6. Dynamique des solutions

6.1. Conjecture

Les courbes 1 et 2 représentant les solutions de (EB) et de (ERC) pour les conditions initiales $v(0) = 0$ et $q(0) = 0$ sont tracées ici, ainsi que leurs tangentes T en t=0 et leur asymptotes horizontales en l'infini :



Courbe 1 (Page Géogebra) : $v(t) = 3 - 3\mathrm{e}^{-0{,}5t}$



Courbe 2 (Page Géogebra) : $q(t) = 6 - 6\mathrm{e}^{-0{,}5t}$

On peut remarquer que ces courbes ont une même forme, et chacune possède une asymptote horizontale correspondant à la solution particulière constante trouvée lors de la résolution.
De plus la tangente en t=0 coupe cette asymptote en un point de coordonnées dont l'abscisse est $\frac{-1}{a}$.

Exercice 7 : Vérifier que les coordonnées du point d'intersection de la tangente T en t=0 à la courbe de v et de son asymptote horizontale est bien $\left(\frac{-1}{a} ; 3\right)$

Définition 3 : *Dans une équation différentielle $y'(t) = ay(t) + h(t)$, on appelle **constante de temps** et on note τ le nombre, homogène à un temps, égal à* $\boxed{\dfrac{-1}{a}}$.

Exercice 8 : Calculer et exprimer en pourcentage (à 1% près) les valeurs $\dfrac{v(n\tau)}{3}$ pour $n \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. On pourra vérfier que l'on obtient les mêmes valeurs pour la seconde fonction (q).

6.2. Cas général : équation $y' = ay + c$, constante de temps τ, régimes

Propriété 4 :

- En appliquant la méthode de résolution à l'équation différentielle $y' = ay + c$, on obtient ses solutions générales $\boxed{y(t) = \dfrac{-c}{a} + k e^{at}}$
- En notant $\boxed{\tau = \frac{-1}{a}}$, elles deviennent : $\boxed{y(t) = c\tau + k e^{\frac{-t}{\tau}}}$.

On étudie dans la très grande majorité des cas des systèmes physiques qui se stabilisent dans le temps, ce qui correspond à $a < 0$, et, de manière équivalente, à $\tau > 0$. Dans ce cas :

- $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = c\tau$: quelque soit la condition initiale choisie, la solution $y(t)$ tend vers la solution particulière constante $y_p = c\tau$.
  La solution particulière constante représente donc un état d'équilibre vers lequel le système étudié tend.
- Le terme en $k e^{\frac{-t}{\tau}}$, solution de l'équation homogène associée, tend vers 0 au cours du temps, d'autant plus vite que τ et k sont petits.
  les solutions homogènes rendent comptent du passage d'un ètat initial du système à son état d'équilibre.
- Comme $y(0) = c\tau + k$, le paramètre k mesure l'écart initial entre la valeur initiale $y(0)$ et la valeur limite $c\tau$.
- On peut, en calculant, pour $t = n\tau$ avec n entier (et en l'exprimant en pourcentage) la quantité :
  $\dfrac{c\tau - y(t)}{k} = \dfrac{\cancel{k}\, e^{\frac{-t}{\tau}}}{\cancel{k}} = e^{\frac{-n\cancel{\tau}}{\cancel{\tau}}}$, jauger de l'écart relatif entre la solution à un instant et sa position limite :

$t = n\tau$	0	τ	2τ	3τ	4τ	5τ	6τ	15τ
$\dfrac{c\tau - y(t)}{k} = e^{-n}$	100%	36,8%	13,5%	5,0%	1,8%	0,7%	0,25%	3.10^{-5}%

Le nombre de τ écoulés est un indicateur fondamental de l'écart du système avec sa position d'équilibre au cours du temps.

Propriété 5 : τ peut être obtenu graphiquement comme abscisse du point d'intersection de l'asymptote avec la tangente à la courbe de la solution en t=0.

Exercice 9 : Démonstration

1. En dérivant $y(t) = c\tau + k e^{\frac{-t}{\tau}}$, démontrer que $y'(0) = \frac{-k}{\tau}$.
2. En déduire l'équation de la tangente T en t=0 à la courbe de la solution (en fonction de t, c, k et τ).
3. Conclure.

***Définition 4 :** On appelle :*

- ***Régime transitoire** l'intervalle de temps $[0; 5\tau[$.*
- ***Régime permanent** l'intervalle de temps $[5\tau; +\infty[$.*

7. Problèmes

Exercice 10 : Lorsqu'une réaction chimique suit une loi de vitesse d'ordre 1, la concentration molaire $[A]$ du réactif A diminue selon l'équation différentielle suivante : $\dfrac{d\,[A](t)}{dt} + K\,[A](t) = 0$
Équation de la réaction modélisant la transformation chimique de synthèse du méthanal (formol) : $CH_3OH \rightarrow H_2CO + H_2$; $K = 2$; le temps est en minutes et $[CH_3OH]$=0,30 mol/L.
Déterminer la concentration en fonction du temps.

Exercice 11 : Un parachutiste saute d'une hauteur $x(0) = 8\,500$ m sans vitesse initiale et ouvre son parachute au bout de 120 s. Son poids $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$ est conditionné par l'accélération de pesanteur $\overrightarrow{g}$, vers le bas, de norme 10 m/s^2. On considère que le parachutiste subit les frottements linéaires de l'air de coefficients $K_1 = 0{,}15$ lors de la chute libre puis $K_2 = 10$ après l'ouverture du parachute.
Le principe fondamental de la dynamique Newtonienne conduit à : $(E) \;:\; v' + K_{1|2} v = g$ Résoudre l'équation différentielle (E) et tracer les courbes de position, vitesse et accélération du parachutiste.