Géométrie dans l'espace

Cadre :

- On munit l'espace (noté $\mathbb{R}^3$) d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.
- Chaque point A ou vecteur $\vec{u}$ est alors déterminé respectivement, de manière unique, par un triplet de coordonnées noté horizontalement $\begin{pmatrix} x_A & y_A & z_A \end{pmatrix}$ ou bien noté verticalement $\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \\ z_{\vec{u}} \end{pmatrix}$.

1. Vecteurs

1.1. Points, vecteurs, translations, norme

Définition 1 : *Si $A\begin{pmatrix} x_A & y_A & z_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B & y_B & z_B \end{pmatrix}$ sont deux points de l'espace, alors le **vecteur** $\overrightarrow{AB}$ a pour **coordonnées** $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$.*

***Définition 2 : Somme et produit par un réel** :*

Si k et un réel et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs : $k\vec{u}\begin{pmatrix} kx_{\vec{u}} \\ ky_{\vec{u}} \\ kz_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ et $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}}+x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}}+y_{\vec{v}} \\ z_{\vec{u}}+z_{\vec{v}} \end{pmatrix}$

Propriété 1 : Relation de Chasles : Pour tous points A, B et C : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

Définition 3 : *Si $A\begin{pmatrix} x_A & y_A & z_A \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \\ z_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ sont un point et un vecteur de l'espace, alors le point C est l'image de A par la **translation** de vecteur $\vec{u}$ lorsque $\overrightarrow{AC}=\vec{u}$, donc $C\begin{pmatrix} x_A+x_{\vec{u}} & y_A+y_{\vec{u}} & z_A+z_{\vec{u}} \end{pmatrix}$.*

Définition 4 : *La **norme** du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \\ z_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ est $||\,u\,|| = \sqrt{x_{\vec{u}}^2+y_{\vec{u}}^2+z_{\vec{u}}^2}$.*

Propriété 2 : Si k est un réel et $\vec{u}$ un vecteur, alors : $\left\|k\vec{u}\right\| = |k|\left\|\vec{u}\right\|$

Définition 5 : *La **distance** entre deux points A et B de l'espace est :*

$$\boxed{AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}}.$$

Propriété 3 : Si A et B sont deux points de l'espace, le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{x_A+x_B}{2} & \frac{y_A+y_B}{2} & \frac{z_A+z_B}{2} \end{pmatrix}$.

📕 ***Définition 6 :***

- *Le **centre de gravité** d'un ensemble fini de points (les sommets d'un triangle, par exemple) est donné par la moyenne des coordonnées de ces points.*
- *Si l'on affecte des coefficients à chaque point pour faire une moyenne pondérée (=coefficientée), on parle de **barycentre** (et non plus de centre de gravité).*

1.2. Colinéarité

📕 ***Définition 7 :*** *Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dits **colinéaires** lorsqu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$. On note alors $\overrightarrow{u}//\overrightarrow{v}$.*

📋 **Remarque 1 :** Le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est le seul vecteur colinéaire à tout vecteur.

📙 **Propriété 4 :** Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ sont colinéaires et $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont colinéaires avec $\overrightarrow{w}$ **non nul**, alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

✏️ **Exercice 1 :** On donne les points : $A\begin{pmatrix}2 & -1 & 5\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}0 & 1 & 5\end{pmatrix}$

1. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils colinéaires ?
2. Calculer les coordonnées de D, translaté de B par $\overrightarrow{AC}$.
3. Calculer la distance entre A et C. À quelle distance le point B est-il de l'origine O ?
4. Calculer les coordonnées du milieu D de $[BC]$.
5. Calculer les coordonnées du centre de gravité du triangle ABC.
6. On attache des masses (ponctuelles) en chaque sommet du triangle ABC : 4kg pour A, 5kg pour B et 1kg pour C. Quel est le point d'équilibre du triangle ? (indication : calculer le brarycentre).
7. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{u}$, colinéaire à $\overrightarrow{AC}$ et de norme 2. Y a-t-il une seule solution ?

📗 **Méthode 1 :** Pour montrer que trois points A, B et C, sont alignés, on peut montrer que $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{AC}$.

1.3. Produit scalaire

📕 ***Définition 8 :*** *Le **produit scalaire** de deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ est le réel noté : $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$*

📙 **Propriété 5 :** (admise). Le produit scalaire peut être calculé de deux manières :

$$\boxed{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz' = \left\|\overrightarrow{u}\right\|\left\|\overrightarrow{v}\right\|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}}\right)}$$

📙 **Propriété 6 :** Si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont trois vecteurs et k et l deux réels :

- $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}$
- $\left(k\overrightarrow{u}\right)\cdot\left(l\overrightarrow{v}\right) = kl\,\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$
- $\overrightarrow{u}\cdot\left(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\right) = \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}$
- $\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right)\cdot\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}$

📕 ***Définition 9 : Carré scalaire :***

On note $\overrightarrow{u}^2$ le nombre $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u} = \left\|\overrightarrow{u}\right\|^2$.

✏️ **Exercice 2 :** Développer :

- $\left(\overrightarrow{u} \pm \overrightarrow{v}\right)^2$
- $\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) \cdot \left(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\right)$

📕 ***Définition 10 :*** *Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dits* ***orthogonaux*** *lorsque $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$. On note alors $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$.*

📋 **Remarque 2 :** $\overrightarrow{0}$ est le seul vecteur orthogonal à tout vecteur.

✏️ **Exercice 3 :** On a $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Déterminer, si cela est possible, $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{u}$ soit orthogonal à $\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$.

2. Les Droites

2.1. Définition, représentation paramétrique

📋 **Remarque 3 : Attention :** Une droite, dans l'espace, n'admet pas d'équation mais un paramétrage.

📕 ***Définition 11 :*** *Une* ***droite*** *(d) passant par $A\begin{pmatrix} x_A & y_A & z_A \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x_{\overrightarrow{u}} \\ y_{\overrightarrow{u}} \\ z_{\overrightarrow{u}} \end{pmatrix}$ est l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$ tels que $\overrightarrow{AM} // \overrightarrow{u}$, c'est à dire : $M \in (d) \Leftrightarrow$ Il existe $k \in \mathbb{R}$, tel que $\begin{cases} x = x_A + kx_{\overrightarrow{u}} \\ y = y_A + ky_{\overrightarrow{u}} \\ z = z_A + kz_{\overrightarrow{u}} \end{cases}$*

📋 **Remarque 4 :** Attention, une même droite a une infinité de représentations paramétriques.

✏️ **Exercice 4 :** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB), avec $A\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$et $B\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

✏️ **Exercice 5 :**

- Déterminer un vecteur directeur et un point par lequel passe la droite (d) paramétrée par : $\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = -4k \qquad (k \in \mathbb{R}) \\ z = -5 \end{cases}$
- $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ est-il aussi un vecteur directeur de (d) ?
- Le point $A\begin{pmatrix} 5 & -8 & 5 \end{pmatrix}$ est-il sur (d) ? Et le point $B\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$?

📙 **Propriété 7 :** Tout vecteur non nul colinéaire au vecteur directeur d'une droite est aussi vecteur directeur de cette même droite.

✏️ **Exercice 6 :** Démontrer que les paramétrages suivants définissent la même droite : $\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = -4k \qquad (k \in \mathbb{R}) \\ z = -5 + 8k \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 5 - l \\ y = -8 + 2l \quad (l \in \mathbb{R}) \\ z = 11 - 4l \end{cases}$. Y a-t-il alors un lien entre k et l ?

2.2. Positions relatives de droites

📙 **Propriété 8 :** Deux droites sont parallèles si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

📋 **Remarque 5 :** Si elles ont de plus un point commun, elles sont confondues.

📙 **Propriété 9 :** Deux droites sont orthogonales si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

📋 **Remarque 6 :** Si elles ont de plus un point commun, elles sont dites perpendiculaires.

📙 **Propriété 10 :** Deux droites sont sécantes lorsqu'elles ont un point commun et que leurs vecteurs directeurs sont non colinéaires.

📋 **Remarque 7 : Attention :** Dans l'espace, deux droites sont :

- soit coplanaires, et dans ce cas elles sont ou bien sécantes ou bien parallèles ;
- soit non coplanaires (elles pourront alors, cas particulier, être orthogonales mais pas perpendiculaires).

✏️ **Exercice 7 :** Vues sur une photo satellite, deux routes se croisent à angle droit, pourtant, elles ne forment pas une intersection. Pourquoi ?

✏️ **Exercice 8 :** Déterminer géométriquement (droite, segment, demi-droite ?) les ensembles suivants :

1. $\begin{cases} x = 2 - 2k \\ y = -1 + 2k \\ z = 1 - 4k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$
2. $\begin{cases} x = 2 - 2k \\ y = -1 + 2k \\ z = 1 - 4k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}_+)$
3. $\begin{cases} x = 2 - 2k \\ y = -1 + 2k \\ z = 1 - 4k \end{cases} \quad (k \in [-2;3])$
4. $\begin{cases} x = 2 - 2k \\ y = -1 + 2k \\ z = 1 - 4k \end{cases} \quad (k \in [0;1])$

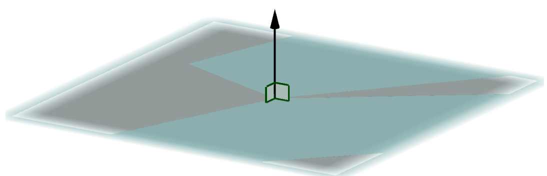
✏️ **Exercice 9 :**

Déterminer l'intersection de : $(d) \begin{cases} x = 2 - 2k \\ y = -1 + 2k \\ z = 1 - 4k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$ et $(d') \begin{cases} x = 3 + l \\ y = 4 + 5l \\ z = -1 - 2l \end{cases} \quad (l \in \mathbb{R})$

3. Les plans

3.1. Définition, vecteur normal, équations

📕 ***Définition 12 :** Le **plan** passant par le point A et de vecteur **normal** $\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}$ est l'ensemble des points M de l'espace vérifiant $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$.*



✏️ **Exercice 10 :** Placer A, M (en plusieurs exemplaires M_1, M_2, ...) et $\overrightarrow{n}$ sur le schéma ci-contre.

📗 **Méthode 2 :** En posant $M\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$ et en développant l'équation $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$, on obtient une équation de ce plan, de la forme : $ax + by + cz + d = 0$ où $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et d dépend de $\overrightarrow{n}$ et A.

Exercice 11 : Donner une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par $A\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\end{pmatrix}$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}$.

Remarque 8 : Attention, un plan a **plusieurs** équations : si $ax+by+cz+d=0$ est une équation d'un plan et $k\neq 0$, alors $kax+kby+kcz+kd=0$ est aussi une équation de ce même plan.

Propriété 11 : Un vecteur non nul colinéaire à un vecteur normal à un plan est aussi vecteur normal à ce plan.

Propriété 12 : Toute équation de la forme $ax+by+cz+d=0$ (avec a, b, c, d réels fixés) définit un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Exercice 12 :

1. Déterminer un vecteur normal $\overrightarrow{n}$ et un point E contenu dans le plan $\mathcal{P}\ :\ 2x-3y-5z+2=0$.
2. Écrire une équation vectorielle vérifiée par tous les points du plan $\mathcal{P}$.

Exercice 13 : Démontrer que les plans passant par l'origine O ont tous une équation de la forme $ax+by+cz=0$ (c'est à dire $d=0$).

Exercice 14 : Trouver deux points distincts A et B contenus dans les plans d'équations $z=0$ et $2x-3y-5z+2=0$.

Méthode 3 : Pour trouver une équation d'un plan $\mathcal{P}$ passant par A, B et C :

1. On cherche un vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ à $\mathcal{P}$:

   il vérifie alors $\begin{cases}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$
2. On connaît alors les valeurs de a, b et c avec un degré de liberté : on choisit une valeur «au hasard» pour c (par exemple) et on calcule les a et b correspondants.
3. On trouve d en utilisant le fait que les coordonnée d'un des trois points (en prendre un au choix) du plan vérifient l'équation de ce plan.
4. On peut vérifier l'équation obtenue en la testant sur les trois points de $\mathcal{P}$ donnés.

Exercice 15 : Calculer une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par $A\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

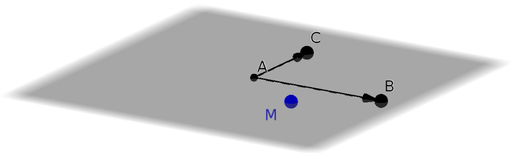
Remarque 9 : Les inéquations $ax+by+cz+d<0$ et $ax+by+cz+d>0$ découpent l'espace en deux demi-espaces de même frontière, celle-ci étant le plan d'équation $ax+by+cz+d=0$.

3.2. Paramétrage d'un plan

Propriété 13 :
Soit un plan (ABC) (ci-contre) :

$\mathcal{R}_{(ABC)}=\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ étant un repère de (ABC),

tout point $M\in(ABC)$ est repéré par un couple de coordonnées (attention, dans $\mathcal{R}_{(ABC)}$!) (k,l) tel que $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AC}$.



Exercice 16 : Sur la figure, lire approximativement les coordonnées de M dans $\mathcal{R}_{(ABC)}$.

***Définition 13 :** On dit que $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AC}$ sont des **vecteurs directeurs** du plan (ABC).*

📋 **Remarque 10 :** Des vecteurs directeurs d'un plan sont donc donnés en couple (ils sont non nuls, non colinéaires).

📙 **Propriété 14 :** Le plan $\mathcal{P}$ passant par A et dirigé par $\overrightarrow{u}$ et par $\overrightarrow{v}$ est donc l'ensemble des points $M\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}$ tels que :

$$\begin{cases} x = x_A + kx_{\overrightarrow{u}} + lx_{\overrightarrow{v}} \\ y = y_A + ky_{\overrightarrow{u}} + ly_{\overrightarrow{v}} \quad (k, l \in \mathbb{R}) \\ z = z_A + kz_{\overrightarrow{u}} + lz_{\overrightarrow{v}} \end{cases}$$

📕 ***Définition 14 :** On appelle cette expression **représentation paramétrique** du plan $\mathcal{P}$.}*

✏️ **Exercice 17 :** Écrire une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$ passant par $A\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

📙 **Propriété 15 :** Deux plans dirigés par le même couple de vecteurs directeurs sont parallèles.

📋 **Remarque 11 : Attention :** Deux plans peuvent être définis par deux couples de vecteurs directeurs donnés différents et être parallèles tout de même.

✏️ **Exercice 18 :** Démontrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ respectivement dirigés par $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}0\\-3\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v'}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$ sont parallèles.

📙 **Propriété 16 :** Si un vecteur $\overrightarrow{w}$ est normal à deux droites non colinéaires contenues dans un plan $\mathcal{P}$, alors $\overrightarrow{w}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

✏️ **Exercice 19 :** Le démontrer.

3.3. Positions relatives de plans

📙 **Propriété 17 :** Deux plans sont sécants lorsque leurs vecteurs normaux sont non colinéaires.

📋 **Remarque 12 :** L'intersection de ces deux plans est alors une droite.

📙 **Propriété 18 :** Deux plans sont parallèles lorsque leurs vecteurs normaux sont colinéaires.

📋 **Remarque 13 :** S'ils ont un point commun, ils sont alors confondus.

📙 **Propriété 19 :** Deux plans sont perpendiculaires lorsque leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

✏️ **Exercice 20 :** Soit le plan $\mathcal{P}$ passant par $A\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\end{pmatrix}$, et le $\mathcal{P}'$ passant par $D\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $E\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\end{pmatrix}$ et $F\begin{pmatrix}0 & 0 & 3\end{pmatrix}$.
Déterminer $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$.

📙 **Propriété 20 :** L'intersection de trois plans est :

- soit un singleton (ensemble contenant un seul point) ;
- soit une droite ;
- soit un plan ;
- soit l'ensemble vide.

✏️ **Exercice 21 :** Donner des exemples pour chacune de ces situations.

3.4. Positions relatives d'une droite et d'un plan

Soit une droite (d) dirigée par $\overrightarrow{u}$ et un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

📙 **Propriété 21 :** Lorsque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ ne sont pas orthogonaux, $\mathcal{P} \cap (d)$ est un singleton (ensemble qui contient un seul point).

Propriété 22 : Lorsque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux :

- soit (d) et $\mathcal{P}$ ont un point commun, et alors (d) est incluse dans $\mathcal{P}$;
- soit (d) et $\mathcal{P}$ n'ont aucun point commun, et alors (d) est strictement parallèle à $\mathcal{P}$;

Exercice 22 : Soit le plan $\mathcal{P}$ passant par $A\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\end{pmatrix}$, et la droite (DE) avec $D\begin{pmatrix} & 1 & 2\end{pmatrix}$ et $E\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\end{pmatrix}$. Déterminer $\mathcal{P}\cap(d)$.

Exercice 23 : $ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1. I et J sont les milieux respectifs de $[DB]$ et $[AE]$. On se place dans le repère orthonormé $\left(E; \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH}, \overrightarrow{EA}\right)$.

1. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{ED}$.
2. Qu'en déduire de la droite (AG) et du plan (EDB) ?
3. Que dire de (EI) et (AG) ?
4. Calculer AL.

Exercice 24 : (suite) Dessiner la section du cube $ABCDEFGH$ par le plan (IJF).

Méthode 4 : Il faut essayer de déterminer l'intersection du plan de coupe avec chaque arête et face du solide !

Exercice 25 : Comment placer le plan de coupe de manière à obtenir un hexagone ?

Théorème 1 : Théorème du toit :
2 versions de l'énoncé :

- Si une droite $(d)'$ est parallèle à deux plans sécants $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, alors elle est parallèle à leur droite d'intersection (d).
- Si on a deux droites parallèles (d_1) et (d_2), un plan $\mathcal{P}_1$ contenant (d_1), un plan $\mathcal{P}_2$ contenant (d_2) et $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sécants suivant une droite (d), alors l'intersection (d) des deux plans est parallèle aux droites (d_1) et (d_2).

Exercice 26 : Le démontrer (faire une figure !).

4. Compléments

4.1. Projeté orthogonal

Définition 15 : *Soit R un point n'appartenant pas à une droite ou un plan noté(e) $\mathcal{T}$.*

*On appelle **projeté orthogonal** de R sur $\mathcal{T}$ le point $S\in\mathcal{T}$ vérifiant : Pour tout $M\in\mathcal{T}$, $\overrightarrow{SR}\cdot\overrightarrow{SM}=0$*

Exercice 27 : On donne $A\begin{pmatrix}x_A & y_A & z_A\end{pmatrix}$, $R\begin{pmatrix}x_R & y_R & z_R\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Donner les coordonnées du projeté orthogonal S de R sur le plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$; puis celles du projeté orthogonal S' de R sur la droite (d), passant par A et dirigée par $\overrightarrow{n}$.

Propriété 23 : Soit $\mathcal{P}\ :\ ax+by+cz+d=0$ et $A\begin{pmatrix}x_A & y_A & z_A\end{pmatrix}$. La distance de A à $\mathcal{P}$ est :

$$\boxed{d(A,\mathcal{P})=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

Exercice 28 : Le démontrer.

Exercice 29 : Trouver une formule permettant de calculer la distance d'un point à une droite.

Exercice 30 : On donne $A\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\end{pmatrix}$. Calculer la distance (minimale) entre (AB) et (CD).

4.2. Sphère

Définition 16 :

- *La **sphère** de centre C et de rayon R est l'ensemble des points M de l'espace vérifiant $CM = R$.*
- *La **boule** de centre C et de rayon R est l'ensemble des points M de l'espace vérifiant $CM \leqslant R$.*

Propriété 24 : Les plans tangents à une sphère ont pour vecteur normal le rayon de la sphère au point de tangence.

Exercice 31 : Soient $A\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\end{pmatrix}$. Donner une équation :

1. de la sphère de centre A et de rayon AB ;
2. du plan tangent à cette sphère en B.

Exercice 32 : Soient $A\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\end{pmatrix}$. Caractériser géométriquement l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$.