Trigonométrie - 1 - Mesurer des angles

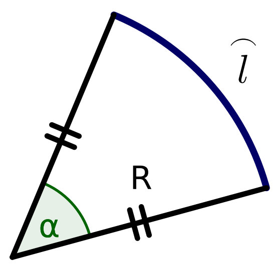
1. Introduction historique

- VII AVJC : les babyloniens utilisent le **degré** :
  - ils observent que les planètes du système solaire se déplacent dans une zone restreinte du ciel : le zodiaque : 12 constellations ;
  - le soleil cache successivement chaque constellation, chaque **mois**
  - un cercle, représentant approximativement l'année, peut donc être divisé en : 12 mois × 30 jours = 360 subdivisions.
- Révolution française : le grade (gon) ; système métrique : 90° = 100 gon (grades) ;
- 1873 J. Thomson (Lord Kelvin) : le radian (unité SI).

2. Mesure des angles avec le cercle trigonométrique

2.1. Le radian

Définition 1 : *Étant donné un arc de cercle $\overset{\frown}{l}$ de longueur l et de rayon R, la* ***mesure en radians*** *de l'angle géométrique $\widehat{\alpha}$ est :* $\boxed{\alpha = \dfrac{l}{R}}$



Exercice 1 : Un câble repose sur une poulie de diamètre 30cm. Une extrémité du câble est tendue horizontalement et l'autre verticalement.
Calculer la longueur L de câble en contact avec la poulie.

Propriété 1 : Les mesures en degré et radians sont proportionnelles : $\boxed{180^\circ = \pi \text{ rad}}$

Exercice 2 : Compléter le tableau par des mesures en degrés/radians associées. Compléter la troisième ligne par plat/droit/obtus/aigu.

en radian	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{-4\pi}{5}$	$\frac{9\pi}{4}$
en degré							135°			
nom ou obtus/aigu										

2.2. Orienter le plan

Définition 2 : Convention : *On oriente le plan dans le sens* ***direct*** *(positif); c'est à dire :*

- *le sens inverse des aiguilles d'une montre ;*
- *le sens de la rotation à effectuer pour passer de l'axe des x à l'axe des y dans un repère.*
- *le sens de rotation des véhicules sur un rond-point sur une carte.*

Par opposition, le sens de rotation des aiguilles d'une montre est appelé sens ***indirect*** *(négatif).*

Remarque 1 : Pour éviter les ambiguités, on nomme ou on énumère les sommets d'un polygone dans le sens direct.

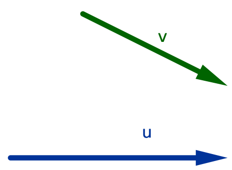
2.3. Le cercle trignométrique

Définition 3 : *Dans un repère orthonormé, le* ***cercle trigonométrique*** *est le cercle qui a pour centre le centre du repère et qui est de rayon 1. On l'oriente dans le sens direct.*

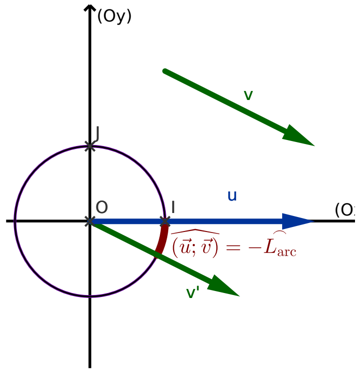
Remarque 2 : Comme le rayon est $R = 1$, le périmètre de ce cercle est donc de $2\pi R = 2\pi$.

2.4. Mesure des angles orientés

On utilise le cercle trigonométrique pour mesurer des angles, de la même façon que l'on utilise un rapporteur : On note $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)$ une paire de vecteurs non nuls. On souhaite mesurer en radians l'angle orienté noté $\widehat{\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)}$, angle permettant de passer (par rotation) de la direction de $\overrightarrow{u}$ à celle de $\overrightarrow{v}$.



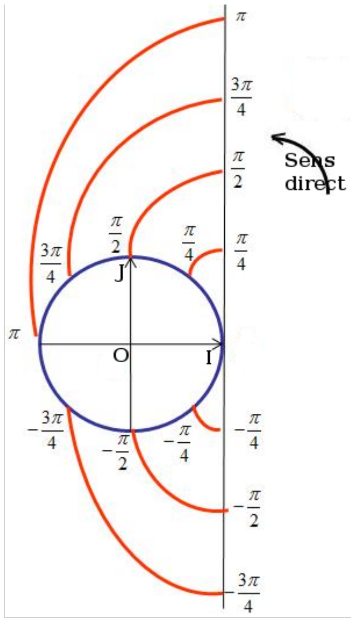
📗 **Méthode 1 :**



- On trace un représentant $\overrightarrow{v'}$ de $\overrightarrow{v}$ ayant même origine que $\overrightarrow{u}$; on trace un cercle trigonométrique centré sur cette origine, l'axe (Ox) ayant même direction que $\overrightarrow{u}$;
- la longueur de l'arc permettant de passer de $\overrightarrow{u}$ à $\overrightarrow{v'}$ correspond à la valeur absolue de la mesure d'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}}\right)$, car le rayon du cercle trigonométrique est 1 ;
- le signe de $\left(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}}\right)$ est positif lorsque l'on passe de $\overrightarrow{u}$ à $\overrightarrow{v}$ en tournant dans le sens direct ; négatif (cas de la figure donnée) si l'on tourne dans le sens indirect.

3. Congruences et mesures principales

3.1. Enroulement de la droite réelle sur le cercle trigonométrique



📋 **Remarque 3 :** Par la construction exposée dans ce paragraphe, on a voulu pouvoir prendre en compte dans les mesures d'angles le fait de faire plusieurs tours :

📙 **Propriété 2 :** On peut «enrouler», en conservant les longueurs (cette opération s'appelle **revêtement** isométrique), une droite graduée représentant l'ensemble des réels sur le cercle trigonométrique, conventionnellement, de la façon indiquée sur le schéma ci-contre.

📙 **Propriété 3 :**
- Chaque réel t correspond alors à un point sur le cercle trigonométrique ; ce point est repéré par deux coordonnées dans le repère $(O;I;J)$ associé au cercle trigonométrique ;
- Chaque point M du cercle à une infinité d'antécédents réels, espacés de 2π (la longueur d'un tour du cercle trigonométrique).

🌄 **Exemple 1 :**

Droite réelle	$\longmapsto$	**Cercle trigonométrique**
$\ldots ; -2\pi ; 0 ; 2\pi ; \ldots$	$\longmapsto$	$I = \binom{1}{0}$
$\ldots ; \frac{3\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} ; \frac{5\pi}{2} ; \ldots$	$\longmapsto$	$J = \binom{0}{1}$
$\ldots ; -\pi ; \pi ; 3\pi ; \ldots$	$\longmapsto$	$I' = \binom{-1}{0}$

✏️ **Exercice 3 :** Donner :
1. 2 réels ayant la même image sur le cercle trigonométrique que le réel $\frac{-\pi}{2}$.
2. 3 réels ayant la même image sur le cercle trigonométrique que le réel $\frac{\pi}{4}$.

✏️ **Exercice 4 :** Un snowboarder effectue 2 tours et demi dans le sens indirect. Donner en radian la mesure d'angle correspondante.

3.2. Congruences

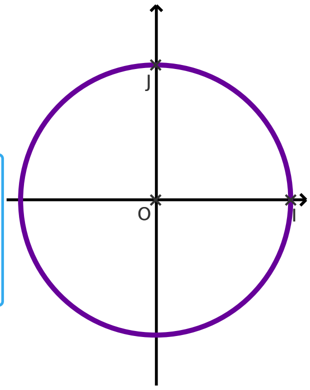
📕 ***Définition 4 :*** *On note deux réels t et t'.*
Lorsqu'il existe un entier (relatif) k tel que $t = t' + 2k\pi$, ce qui revient à dire que t et t' s'envoient sur la même point sur le cercle trigonométrique, on dit que t et t' sont ***congrus modulo*** *2π , et on écrit : $t \equiv t' \pmod{2\pi}$*

📋 **Remarque 4 :** Deux mesures d'angles en radians congrues modulo 2π correspondent au même angle géométrique.

✏️ **Exercice 5 :** A-t-on $\frac{5\pi}{2} \equiv \frac{-\pi}{2} \pmod{2\pi}$?

Propriété 4 : Si $x \equiv x' \pmod{2\pi}$ et $y \equiv y' \pmod{2\pi}$ et $z \neq 0$, on a :

- $x + y \equiv x' + y' \pmod{2\pi}$
- $zx \equiv zx' \pmod{2\pi z}$

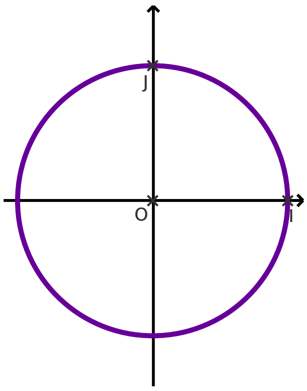


Exercice 6 : ⭐Résoudre et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique :

- $2x + \frac{\pi}{2} \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$
- $3x + \frac{\pi}{6} \equiv \frac{-\pi}{3} \pmod{2\pi}$

Propriété 5 :

- $\widehat{\left(\vec{u};\vec{v}\right)} \equiv 0 \pmod{\pi} \Leftrightarrow \vec{u}//\vec{v}$;
- $\widehat{\left(\vec{u};\vec{v}\right)} \equiv 0 \pmod{2\pi} \Leftrightarrow \vec{u}//\vec{v}$ et ont même sens ;
- $\widehat{\left(\vec{u};\vec{v}\right)} \equiv \pi \pmod{2\pi} \Leftrightarrow \vec{u}//\vec{v}$ et sont de sens opposés.



3.3. Mesure principale

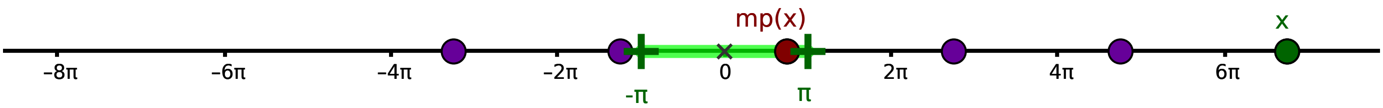
Exercice 7 : Un clown fait 10 m sans déraper sur un monocycle dont la roue, de centre noté O, à un rayon r=20cm, puis tombe.

- Combien de tours a fait la roue avant la chute (indication : calculer le périmètre de la roue) ?
- ⭐ Le clown avait marqué sur sa roue le point de contact avec le sol (point A). Au moment de sa chute, le dernier point de contact avec le sol est B.

  Trouver la mesure en radians de $\widehat{AOB}$.

Définition 5 : *On appelle* ***mesure principale*** *d'un angle x le nombre $\text{mp}(x)$ tel que :*
$x \equiv \text{mp}(x) \pmod{2\pi}$ *et* $\text{mp}(x) \in \left]-\pi;\pi\right]$

Méthode 2 : Parmi tous les représentants de x modulo 2π, la mesure principale est le seul représentant de x dans l'intervalle $\left]-\pi,\pi\right]$.



- Pour trouver $\text{mp}(x)$, on enlève à x un nombre entier k de tours complets (chacun de 2π radians) du cercle trigonométrique.
  Calculatrice : k est la valeur arrondie à l'entier le plus proche de $\frac{x}{2\pi}$
  On calcule ensuite $x - 2k\pi$ pour obtenir $\text{mp}(x)$.
- **À la main :** On repère le multiple entier de 2π le plus proche de x et on soustrait.

Exercice 8 : Calculer les mesures principales des angles de mesures suivantes :

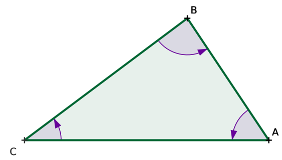
1. $\dfrac{5\pi}{3}$;
2. $\dfrac{3\pi}{2}$;
3. $\dfrac{-5\pi}{4}$;
4. $\dfrac{4\pi}{3}$;
5. $\dfrac{-11\pi}{6}$;
6. $\dfrac{-11\pi}{2}$;
7. 25π ;
8. 18π ;
9. -14π ;
10. $\dfrac{40\pi}{3}$;
11. $\dfrac{-31\pi}{6}$;
12. $\dfrac{25\pi}{4}$.
13. $\dfrac{-27\pi}{4}$.
14. $\dfrac{-1111\pi}{11111}$.
15. $-\pi$.

4. Compléments sur les angles

Propriété 6 : Relation de Chasles

Si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont trois vecteurs non nuls, on a : $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)+\left(\widehat{\vec{v};\vec{w}}\right)\equiv\left(\widehat{\vec{u};\vec{w}}\right) \pmod{2\pi}$

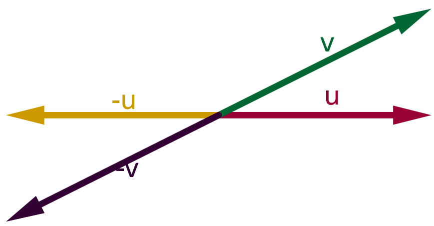
Exercice 9 :
Le but de cet exercice est de démontré un résultat connu sur la somme des angles d'un triangle dans le plan.
Étant donné un triangle ABC, démontrer que la somme des angles orientés de ce triangle est congrue à π modulo 2π.



Propriété 7 : Angles associés

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, et $k, l > 0$, alors :

- $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)\equiv\left(\widehat{k\vec{u};l\vec{v}}\right) \pmod{2\pi}$
- $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)\equiv\left(\widehat{-\vec{u};-\vec{v}}\right) \pmod{2\pi}$
- $\left(\widehat{\vec{u};-\vec{v}}\right)\equiv\left(\widehat{-\vec{u};\vec{v}}\right)\equiv\pi+\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right) \pmod{2\pi}$
- $\left(\widehat{\vec{v};\vec{u}}\right)\equiv-\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right) \pmod{2\pi}$



Exercice 10 : Exprimer en fonction de $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$ l'angle $\left(\widehat{-2\vec{v};7\vec{u}}\right)$

Exercice 11 : ⭐Configurations sur une horloge

On se place dans un repère orthonormé $(O;I;J)$ et dans le cercle trigonométrique associé.

On considère une horloge analogique (à aiguilles) tracée sur ce cercle trigonométrique, munie d'une petite aiguille $\overrightarrow{OP}$ de norme $\frac{3}{4}$ et d'une grande aiguille $\overrightarrow{OG}$ de norme 1. Le fonctionnement de cette horloge à la fois esthétique et précise est conventionnel ; et assuré par des piles en bon état de marche.
On note t le temps, en heures, et on considère une journée $\mathcal{D}=[0;24[$.

Pour tout $t\in\mathcal{D}$, on a : $\alpha=\left(\widehat{\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OP}}\right)\equiv\frac{-2\pi}{12}t \pmod{2\pi}$ et $\beta=\left(\widehat{\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OG}}\right)\equiv-2\pi t \pmod{2\pi}$ et

1. Calculer α et β pour $t\in\{12\,;\,6{,}75\,;\}$ et faire des figures ; on insistera sur l'aspect esthétique de l'horloge.
2. À quelle(s) heure(s) de la journée(s) les directions des deux aiguilles sont-elles symétriques par rapport à (Oy) ?
3. À quelle(s) heure(s) de la journée les directions des deux aiguilles sont-elles symétriques par rapport à (Ox) ? (On résoudre $\alpha\equiv\pi-\beta \pmod{2\pi}$.)
4. À quelle(s) heure(s) de la journée les deux aiguilles sont-elles alignées ? De même sens ? De sens opposé ?
5. À quelle(s) heure(s) de la journée les deux aiguilles sont-elles perpendiculaires ?

Exercice 12 : ⭐

a. Montrer que si $\vec{u}//\vec{u'}$ et $\vec{v}//\vec{v'}$ (ces quatre vecteurs sont non nuls), alors
$$2\left(\widehat{\vec{u'};\vec{v'}}\right)\equiv2\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right).$$
b. On trace deux droites d et d'. Une troisième droite Δ coupe ces deux droites respectivement en en A et A'.
Déduire de la réponse précédente que $d//d'$ équivaut à «l'un des angles orientés autour de A a le même double qu'un angle orienté autour de A'».