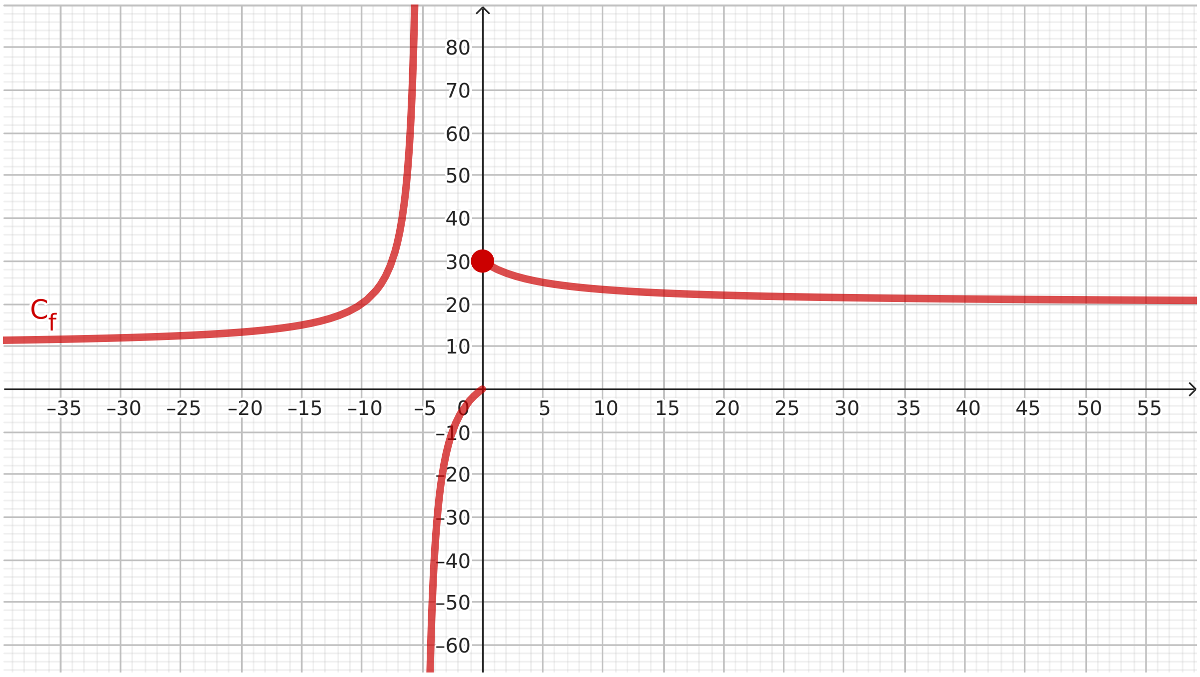
Limites, continuité, suites : DS2

Nom	
Prénom	

Exercice 1 : Graphiquement : Limites et continuité (5 points)
Voici la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie sur $\mathcal{D}_f =]-\infty; -5[\cup]-5; +\infty[$



1. Graphiquement, déterminer les limites suivantes, et préciser dans chaque colonne «asymptote vericale/horizontale» aini que les équations de ces asymptotes.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$	$\lim\limits_{x\to-5^-} f(x) =$	$\lim\limits_{x\to-5^+} f(x) =$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$
asymptote ... d'équation ...=...			

2. La fonction f est-elle continue en 0 ? Justifier.

3. On définit la fonction g sur $\mathcal{D}_g = \mathcal{D}_f$ par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$. Donner les limites et valeurs suivantes :

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) =$	$\lim\limits_{x\to-5^-} g(x) =$	$\lim\limits_{x\to-5^+} g(x) =$	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) =$
$\lim\limits_{x\to0^-} g(x) =$	$\lim\limits_{x\to0^+} g(x) =$	$g(0) =$	

Tourner s.v.p.

Exercice 2 : Limites (7 points)

A. On note $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x-1}{x+3}}$.

1. Étudier le signe de $\dfrac{2x-1}{x+3}$ pour x réel $\neq 3$.
2. En déduire l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
3. Déterminer les limites de f en $+\infty$, $0{,}5^+$ et -3^-.

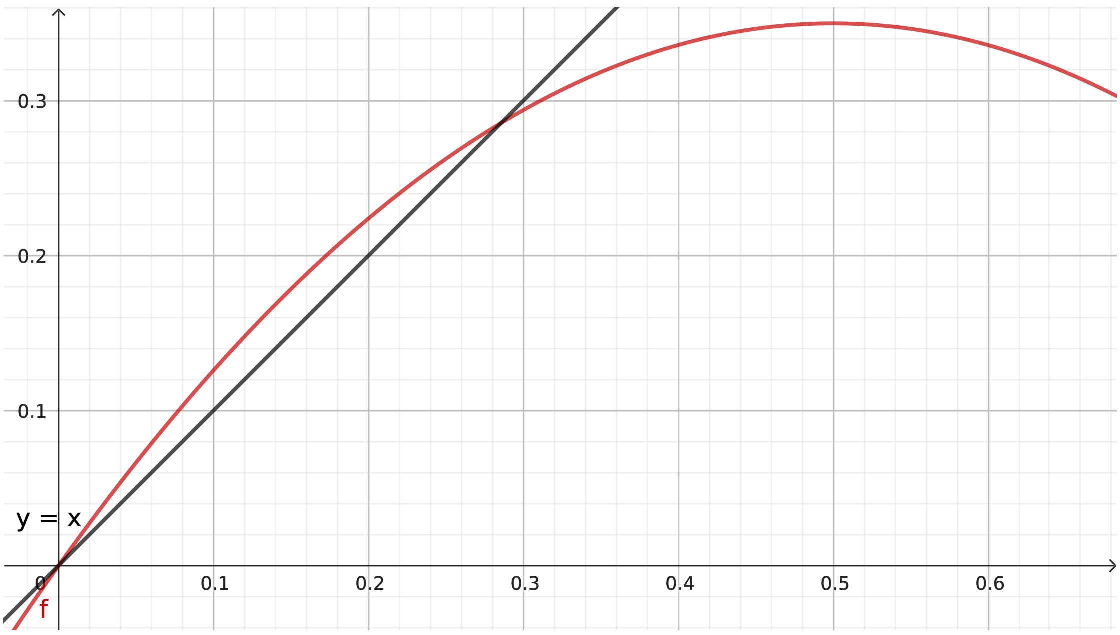
B. On note $g(x) = \dfrac{3x^2 - x + 1}{(2-x)(5x+4)}$. Déterminer la limite de g en $+\infty$ et $-\infty$.

C. On note $h(x) = \dfrac{10}{x\sqrt{x^2+1} - x^2}$. Déterminer la limite de h en $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 3 : Suites (8 points)

- On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par $f(x) = 1{,}4x(1-x)$.
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = 0{,}1 \end{cases}$

1. De quel type est la fonction f (exemple de types possibles : affine, sinusoïdale, ...). Est-elle continue ?
2. Résoudre l'équation $f(x) = x$ dans $\mathbb{R}$ pour obtenir les points fixes r et s de f (on choisira $r < s$).
3. Démontrer que f est croissante sur $]-\infty ; 0{,}5[$.
4. Calculer u_1 et u_2 ; construire les termes de la suite jusqu'à $n = 4$ sur la figure ci-dessous, et conjecturer le sens de variation ainsi que la limite de (u_n).
5. Démontrer par récurrence, que pour tout entier n, on a $H_n : u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant s$
6. En déduire que (u_n) converge vers un réel l.
7. Démontrer que $l = s$.



Exercice 4 : Bonus

Un automobiliste a parcouru la moitié de son trajet à 30km/h. On note, en km/h, v sa vitesse moyenne sur la seconde moitié du trajet et V sa vitesse moyenne sur la totalité du trajet. Que peut-on dire de $\lim\limits_{v \to +\infty} V$? Interpréter.