

# ~ BACCALAURÉAT GÉNÉRAL ~

## EXERCICES D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

### Session 2024 Exercices 0 – corrigés

#### Exercice 1

##### Partie I

On considère l'équation différentielle :  $(E) : y' + y = e^{-x}$ .

1. Soit  $u$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $u(x) = x e^{-x}$ .  
 $u'(x) + u(x) = (e^{-x} + x \times (-1) e^{-x}) + x e^{-x} = e^{-x} - x e^{-x} + x e^{-x} = e^{-x}$   
Donc la fonction  $u$  est une solution de l'équation différentielle  $(E)$ .
2. On considère l'équation différentielle  $(E') : y' + y = 0$  soit  $(E') \iff y' = -y$ .  
L'équation différentielle  $y' = ay$  a pour solutions les fonctions  $x \mapsto k e^{ax}$  avec  $k \in \mathbb{R}$ , donc l'équation différentielle  $(E')$  a pour solutions les fonctions  $x \mapsto k e^{-x}$  avec  $k \in \mathbb{R}$ .
3. La solution générale de l'équation  $(E)$  est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre associée  $(E')$ , et d'une solution particulière de  $(E)$ .  
On en déduit que les solutions de l'équation différentielle  $(E)$  sont les fonctions  $x \mapsto k e^{-x} + x e^{-x}$  avec  $k \in \mathbb{R}$ .
4. On cherche l'unique solution  $g$  de l'équation différentielle  $(E)$  telle que  $g(0) = 2$ .  
 $g(0) = 2 \iff k e^0 + 0 = 2 \iff k = 2$ ; donc  $g(x) = (x + 2) e^{-x}$ .

##### Partie II

Dans cette partie,  $k$  est un nombre réel fixé que l'on cherche à déterminer.

On considère la fonction  $f_k$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f_k(x) = (x + k) e^{-x}$ .

Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = e^{-x}$ .

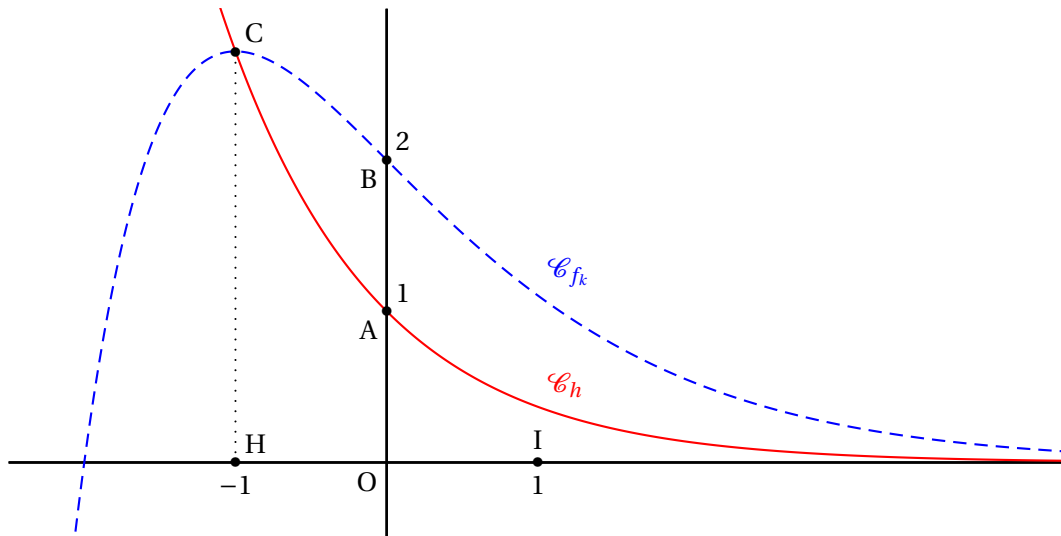
On note  $\mathcal{C}_k$  la courbe représentative de la fonction  $f_k$  dans un repère orthogonal et  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $h$ .

On a représenté sur le graphique en annexe les courbes  $\mathcal{C}_k$  et  $\mathcal{C}$  sans indiquer les unités sur les axes ni le nom des courbes.

1. La fonction  $h$  est définie par  $h(x) = e^{-x}$ . Sa dérivée  $h'$  est définie par  $h'(x) = -e^{-x}$ .  
Donc  $h'(x) < 0$  sur  $\mathbb{R}$  donc la fonction  $h$  est décroissante. C'est donc la courbe en trait plein qui représente la fonction  $h$ .
2.
  - La courbe  $\mathcal{C}_h$  coupe l'axe des ordonnées au point A. Le point A a donc pour coordonnées  $(0 ; h(0))$ . Or  $h(0) = e^0 = 1$ , donc le point A a pour ordonnée 1.
  - La courbe  $\mathcal{C}_{f_k}$  coupe l'axe des ordonnées au point qui semble avoir pour ordonnée 2. Donc  $f_k(0) = 2$ , c'est-à-dire  $(0 + k) e^0 = 2$  donc  $k = 2$ . Donc la courbe en pointillés représente la fonction  $f_2$  définie par  $f_2(x) = (x + 2) e^{-x}$ .
  - Les deux courbes se coupent au point C dont l'abscisse est solution de l'équation  $f_2(x) = h(x)$ .  
 $f_2(x) = h(x) \iff (x + 2) e^{-x} = e^{-x} \text{ (car } e^{-x} \neq 0) \iff x + 2 = 1 \iff x = -1$   
Le projeté orthogonal H de C sur l'axe des abscisses a pour coordonnées  $(-1 ; 0)$ , ce qui permet, par symétrie par rapport au point O, de placer le point I de coordonnées  $(1 ; 0)$ .

**Remarque des correcteurs** – La détermination de  $k$  repose sur une lecture graphique. Cette question a été posée en juin 2010 dans le sujet de terminale S de métropole; à l'époque, les graduations figuraient sur le repère, sans les unités naturellement!

## Annexe



## Exercice 2

## Partie I

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on désigne par  $f_n$  la fonction définie sur  $[0; 1]$  par :  $f_n(x) = x^n e^x$ . On note  $\mathcal{C}_n$  la courbe représentative de la fonction  $f_n$  dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan.

On désigne par  $(I_n)$  la suite définie pour tout entier  $n \geq 1$  par :  $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$ .

1. a. On désigne par  $F_1$  la fonction définie sur  $[0; 1]$  par :  $F_1(x) = (x - 1) e^x$ .

$$F_1'(x) = 1 \times e^x + (x - 1) \times e^x = x e^x$$

Donc  $F_1$  est une primitive de la fonction  $f_1$ .

b. 
$$I_1 = \int_0^1 x e^x dx = [F_1(x)]_0^1 = F_1(1) - F_1(0) = 0 - (-1 e^0) = 1$$

2. 
$$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^x dx$$

On pose  $u(x) = x^{n+1}$  et  $v'(x) = e^x$ ; donc  $u'(x) = (n+1)x^n$  et  $v(x) = e^x$ .

D'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^1 u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x) v(x) dx$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^1 x^{n+1} e^x dx = [x^{n+1} e^x]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n e^x dx = (e - 0) - (n+1) \int_0^1 x^n e^x dx \\ &= e - (n+1)I_n \end{aligned}$$

3. Pour  $n = 1$  :  $I_2 = e - 2I_1 = e - 2$ .

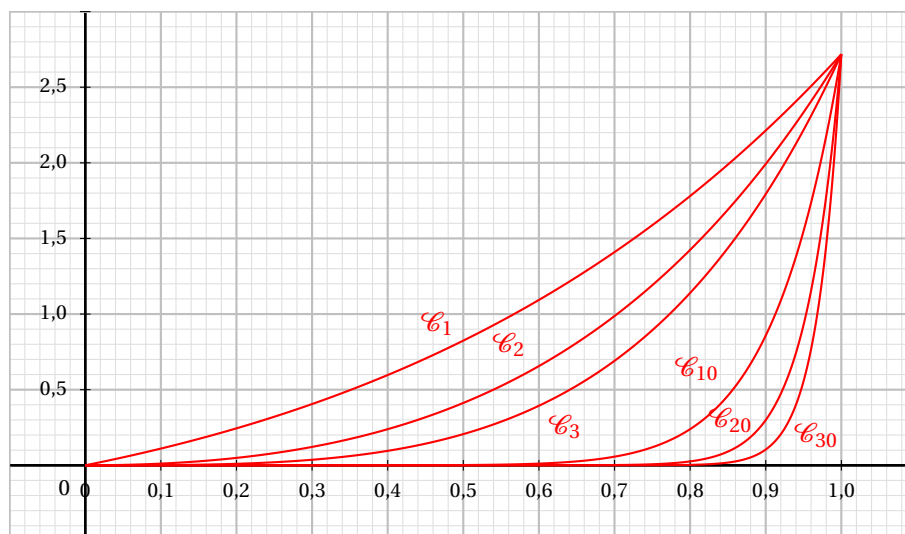
4. On considère la fonction `mystere` écrite dans le langage Python :

```
def mystere(n):
    a = 1
    L = [a]
    for i in range(1,n):
        a = e - (i + 1)*a
        L.append(a)
    return L
```

L'appel `mystere(5)` va donner la liste  $[I_1; I_2; I_3; I_4; I_5]$ .

## Partie II

1. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les courbes  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_{10}, \mathcal{C}_{20}$  et  $\mathcal{C}_{30}$ .



- Sur  $[0; 1]$ ,  $x^n e^x \geq 0$  donc l'intégrale  $I_n$  représente l'aire de la portion de plan comprise entre la courbe  $\mathcal{C}_n$ , l'axe des abscisses, et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 1$ .
- D'après l'allure des courbes tracées, on peut conjecturer que la suite  $(I_n)$  tend vers 0.

- $x^n e^x \geq 0$  sur  $[0; 1]$ , donc  $\int_0^1 x^n e^x dx \geq 0$  donc  $I_n \geq 0$ .
  - La fonction exponentielle est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , donc si  $0 \leq x \leq 1$ , on a  $e^0 \leq e^x \leq e^1$  donc  $e^x \leq e$ .  
Sur  $[0; 1]$ , on a  $x^n \geq 0$  donc  $x^n e^x \leq e x^n$ .

D'après la positivité de l'intégration,  $\int_0^1 x^n e^x dx \leq \int_0^1 x^n e dx$ , ce qui veut dire :  $I_n \leq e \int_0^1 x^n dx$ .

On a donc démontré que :  $0 \leq I_n \leq e \int_0^1 x^n dx$ .

- $$\int_0^1 x^n dx = \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \text{ donc } 0 \leq I_n \leq e \int_0^1 x^n dx \text{ équivaut à } 0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}.$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$  donc, d'après le théorème des gendarmes, on peut dire que la suite  $(I_n)$  converge et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ .

## Exercice 3

Dans un examen, une épreuve notée sur dix points est constituée de deux exercices : le premier est noté sur deux points, le deuxième sur huit points.

### Partie I

Le premier exercice est constitué de deux questions Q1 et Q2.

Chaque question est notée sur un point. Une réponse correcte rapporte un point; une réponse incorrecte, incomplète ou une absence de réponse rapporte zéro point.

On considère que :

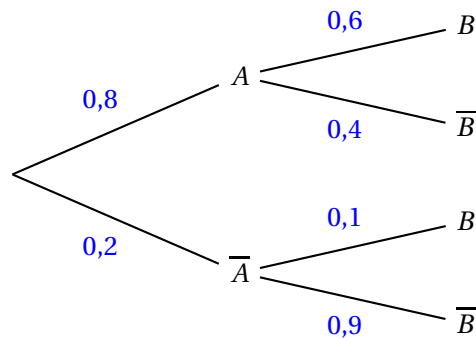
- Un candidat pris au hasard a une probabilité 0,8 de répondre correctement à la question Q1.
- Si le candidat répond correctement à Q1, il a une probabilité 0,6 de répondre correctement à Q2; s'il ne répond pas correctement à Q1, il a une probabilité 0,1 de répondre correctement à Q2.

On prend un candidat au hasard et on note :

- $A$  l'évènement : « le candidat répond correctement à la question Q1 »;
- $B$  l'évènement : « le candidat répond correctement à la question Q2 ».

On note  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$  les évènements contraires de  $A$  et de  $B$ .

1. On complète l'arbre pondéré ci-dessous.



2. La probabilité que le candidat réponde correctement aux deux questions Q1 et Q2 est :  $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0,8 \times 0,6 = 0,48$
3. La probabilité que le candidat réponde correctement à la question Q2 est  $p(B)$ . D'après la formule des probabilités totales :  

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = 0,48 + 0,2 \times 0,1 = 0,5$$

On note :

- $X_1$  la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à la question Q1 ;
- $X_2$  la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à la question Q2 ;
- $X$  la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à l'exercice, c'est-à-dire  $X = X_1 + X_2$ .

4. La loi de probabilité de  $X_1$  est :

$x_i$	0	1
$P(X_1 = x_i)$	0,2	0,8

Donc  $E(X_1) = 0 \times 0,2 + 1 \times 0,8 = 0,8$ .

La loi de probabilité de  $X_2$  est :

$x_i$	0	1
$P(X_2 = x_i)$	0,5	0,5

Donc  $E(X_2) = 0 \times 0,5 + 1 \times 0,5 = 0,5$ .

$E(X) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$  d'après la linéarité de l'espérance mathématique. Donc  $E(X) = 0,8 + 0,5 = 1,3$ . Un élève obtient, en moyenne, la note de 1,3 à l'exercice 1.

5. On souhaite déterminer la variance de  $X$ .

- a.
  - $P(X = 0) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,2 \times 0,9 = 0,18$
  - $P(X = 2) = P(A \cap B) = 0,48$
  - $P(X = 1) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 2)) = 1 - (0,18 + 0,48) = 1 - 0,66 = 0,34$

On peut donc en déduire la loi de probabilité de  $X$  :

$x_i$	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,18	0,34	0,48

- b.** D'après la formule de König :  $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ .  
 $E(X^2) = 0^2 \times 0,18 + 1^2 \times 0,34 + 2^2 \times 0,48 = 2,26$   
Donc  $V(X) = 2,26 - 1,3^2 = 0,57$
- c.**  $V(X_1) = E(X_1^2) - [E(X_1)]^2 = (0^1 \times 0,2 + 1^2 \times 0,8) - (0,8)^2 = 0,8 - 0,64 = 0,16$   
 $V(X_2) = E(X_2^2) - [E(X_2)]^2 = (0^1 \times 0,5 + 1^2 \times 0,5) - (0,5)^2 = 0,5 - 0,25 = 0,25$   
 $V(X_1) + V(X_2) = 0,16 + 0,25 = 0,41$ ; or  $V(X) = 0,57$  donc  $V(X_1) + V(X_2) \neq V(X)$ .  
Ce n'est pas surprenant car les variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$  ne sont pas indépendantes.

## Partie II

Le deuxième exercice est constitué de huit questions indépendantes.

Chaque question est notée sur un point. Une réponse correcte rapporte un point; une réponse incorrecte et une absence de réponse rapporte zéro point.

Les huit questions sont de même difficulté : pour chacune des questions, un candidat a une probabilité  $\frac{3}{4}$  de répondre correctement, indépendamment des autres questions.

On note  $Y$  la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note au deuxième exercice, c'est-à-dire le nombre de bonnes réponses.

- On est dans le cas d'une répétition de 8 épreuves identiques et indépendantes, la probabilité du succès lors d'une épreuve étant  $\frac{3}{4}$ . Donc la variable aléatoire  $Y$  qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres  $n = 8$  et  $p = \frac{3}{4}$ .
- Pour une variable aléatoire  $Y$  suivant la loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$ , on a :  
 $P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ , donc  $P(Y = 8) = \binom{8}{8} \left(\frac{3}{4}\right)^8 \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{8-8} = \left(\frac{3}{4}\right)^8$
- L'espérance de  $Y$  est  $E(Y) = np = 8 \times \frac{3}{4} = 6$ .  
La variance de  $Y$  est  $V(Y) = np(1-p) = 8 \times \frac{3}{4} \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$ .

## Partie III

On suppose que les deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont indépendantes. On note la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note totale à l'examen :  $Z = X + Y$ .

- $Z = X + Y$  donc  $E(Z) = E(X) + E(Y) = 1,3 + 6 = 7,3$   
 $Z = X + Y$  et  $X$  et  $Y$  sont indépendantes donc  $V(Z) = V(X) + V(Y) = 0,57 + 1,5 = 2,07$

- Soit  $n$  un nombre entier strictement positif.

Pour  $i$  entier variant de 1 à  $n$ , on note  $Z_i$  la variable aléatoire qui, à un échantillon de  $n$  élèves, associe la note de l'élève numéro  $i$  à l'examen.

On admet que les variables aléatoires  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  sont identiques à  $Z$  et indépendantes.

On note  $M_n$  la variable aléatoire qui, à un échantillon de  $n$  élèves, associe la moyenne de leurs  $n$  notes, c'est-à-dire :  $M_n = \frac{Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n}{n}$

- Pour tout  $i$  entre 1 et  $n$ , on a  $E(Z_i) = 7,3$ .  
 $E(M_n) = \frac{E(Z_1) + E(Z_2) + \dots + E(Z_n)}{n} = \frac{n \times 7,3}{n} = 7,3$
- L'écart-type est :  $\sigma(M_n) = \sqrt{V(M_n)}$   
 $V(M_n) = \frac{V(Z)}{n} = \frac{2,07}{n}$  donc  $\sigma(M_n) = \sqrt{\frac{2,07}{n}}$

On cherche  $n$  tel que :  $\sqrt{\frac{2,07}{n}} \leq 0,5$

$$\sqrt{\frac{2,07}{n}} \leq 0,5 \iff \frac{2,07}{n} \leq 0,25 \iff \frac{2,07}{0,25} \leq n \iff n \geq 8,28$$

Donc l'écart type de  $M_n$  est inférieur ou égal à 0,5 pour  $n \geq 9$ .

- c. Pour les valeurs trouvées en b., on va montrer que la probabilité que  $6,3 \leq M_n \leq 8,3$  est supérieure ou égale à 0,75.

$$\begin{aligned} P(6,3 \leq M_n \leq 8,3) &= P(7,3 - 1 \leq M_n \leq 7,3 + 1) = P(-1 \leq M_n - 7,3 \leq 1) \\ &= P(-1 \leq M_n - E(M_n) \leq 1) = P(|M_n - E(M_n)| \leq 1) \\ &= 1 - P(|M_n - E(M_n)| > 1) \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Bienaymé Tchebychev :

$$P(|X - \mu| > \delta) \leq \frac{V}{\delta^2} \text{ donc } P(|M_n - E(M_n)| > 1) \leq \frac{V(M_n)}{1^2}.$$

D'après la question précédente, on peut prendre  $n \geq 9$  donc

$$V(M_n) = \frac{2,07}{n} \leq \frac{2,07}{9} \text{ et donc } P(|M_n - E(M_n)| > 1) \leq \frac{2,07}{9}.$$

$$\text{On déduit que : } 1 - P(|M_n - E(M_n)| > 1) \geq 1 - \frac{2,07}{9}.$$

$$1 - \frac{2,07}{9} = \frac{6,93}{9} \approx 0,77 \geq 0,75$$

On a donc démontré que, pour  $n \geq 9$ ,  $P(6,3 \leq M_n \leq 8,3) \geq 0,75$ .

## Exercice 4

On considère le prisme droit ABFEDCGH tel que  $AB = AD$ .

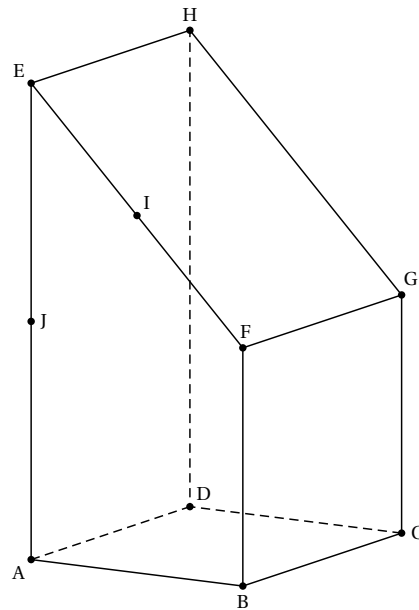
Sa base ABFE est un trapèze rectangle en A, vérifiant  $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AE}$ .

On note I le milieu du segment [EF].

On note J le milieu du segment [AE].

On associe à ce prisme le repère ortho-normé  $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  tel que :

$$\vec{i} = \overrightarrow{AB}; \quad \vec{j} = \overrightarrow{AD}; \quad \vec{k} = \overrightarrow{AJ}$$



1. On donne les coordonnées de quatre vecteurs dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Lequel est un vecteur normal au plan (ABG) ?

a.  $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b.  $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c.  $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

d.  $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Le plan (ABG) a pour vecteurs directeurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{BG}$ .

$\overrightarrow{AB}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et

$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AJ}$  donc  $\overrightarrow{BG}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

On cherche donc, parmi les trois vecteurs proposés, celui qui est orthogonal à la fois à  $\overrightarrow{AB}$  et à  $\overrightarrow{BG}$ . Pour  $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , on a :

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \times 1 + (-1) \times 0 + 1 \times 0 = 0 \text{ donc } \vec{n} \perp \overrightarrow{AB}; \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BG} &= 0 \times 0 + (-1) \times 1 + 1 \times 1 = 0 \text{ donc } \vec{n} \perp \overrightarrow{BG} \end{aligned}$$

**Réponse c.**

2. Parmi les droites suivantes, laquelle est parallèle à la droite (IJ) ?

a. (DG)                      b. (BD)                      c. (AG)                      d. (FG)

La droite (IJ) est parallèle à la droite (AF) (droite des milieux dans le triangle AEF).

Les vecteurs  $\overrightarrow{AF}$  et  $\overrightarrow{DG}$  sont égaux donc les droites (AF) et (DG) sont parallèles.

On en déduit que les droites (IJ) et (DG) sont parallèles.

**Réponse a.**

3. Quels vecteurs forment une base de l'espace ?

a.  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CG})$                       b.  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD})$                       c.  $(\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DG})$                       d.  $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CG}; \overrightarrow{CE})$

Il faut trouver trois vecteurs non coplanaires.

On peut éliminer la proposition a car il n'y a que deux vecteurs.

On peut éliminer la proposition b car  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$  donc les trois vecteurs sont coplanaires.

On peut éliminer la proposition d car  $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CG}$  donc les trois vecteurs sont coplanaires.

**Réponse c.**

4. Une décomposition du vecteur  $\overrightarrow{AG}$  comme somme de plusieurs vecteurs **deux à deux orthogonaux** est :

a.  $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HG}$                       b.  $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AJ}$   
c.  $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{JG}$                       d.  $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HG}$

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}$  et  $\overrightarrow{BG} \neq \overrightarrow{HG}$  ; donc la proposition a est fausse.

Les trois vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AD}$  et  $\overrightarrow{AJ}$  sont orthogonaux deux à deux puisqu'ils forment une base orthonormée.

De plus  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}$ .

**Réponse b.**

5. Le volume du prisme droit ABFEDCGH, est égal à :

a.  $\frac{5}{8}$                       b.  $\frac{8}{5}$                       c.  $\frac{3}{2}$                       d. 2

Si on appelle K le milieu de [DH], on peut dire que le prisme est composé du cube ABCDJFGK, de volume 1, surmonté du prisme JFGKHE, qui est la moitié du cube du dessous, donc qui a pour volume  $\frac{1}{2}$ . Le volume total fait donc  $\frac{3}{2}$ .

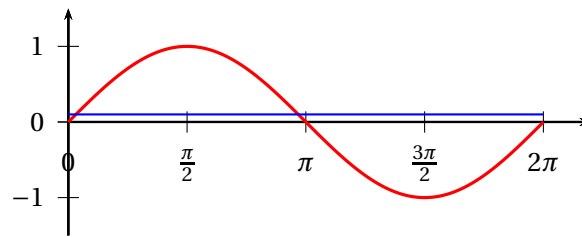
**Réponse c.**

## Exercice 5

1. Sur l'intervalle  $[0 ; 2\pi]$ , l'équation  $\sin(x) = 0,1$  admet :

a. zéro solution                      b. une solution  
c. deux solutions                      d. quatre solutions

On peut par exemple dire que la courbe représentant la fonction sinus et la droite d'équation  $y = 0,1$  ont deux points d'intersection sur l'intervalle  $[0 ; 2\pi]$ .

**Réponse c.**

2. On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0 ; \pi]$  par  $f(x) = x + \sin(x)$ .

- a. La fonction  $f$  est convexe sur l'intervalle  $[0 ; \pi]$
- b. La fonction  $f$  est concave sur l'intervalle  $[0 ; \pi]$
- c. La fonction  $f$  admet sur l'intervalle  $[0 ; \pi]$  un unique point d'inflexion
- d. La fonction  $f$  admet sur l'intervalle  $[0 ; \pi]$  exactement deux points d'inflexion

$f'(x) = 1 + \cos(x)$  et  $f''(x) = -\sin(x) \leq 0$  sur  $[0 ; \pi]$ , donc la fonction  $f$  est concave sur cet intervalle.

**Réponse b.**

3. Une urne contient cinquante boules numérotées de 1 à 50. On tire successivement trois boules dans cette urne, **sans remise**. On appelle « tirage » la liste non ordonnée des numéros des trois boules tirées. Quel est le nombre de tirages possibles, **sans tenir compte de l'ordre des numéros** ?

a.  $50^3$

b.  $1 \times 2 \times 3$

c.  $50 \times 49 \times 48$

d.  $\frac{50 \times 49 \times 48}{1 \times 2 \times 3}$

$$\binom{50}{3} = \frac{50 \times 49 \times 48}{1 \times 2 \times 3}$$

**Réponse d.**

4. On effectue dix lancers d'une pièce de monnaie. Le résultat d'un lancer est « pile » ou « face ». On note la liste ordonnée des dix résultats.

Quel est le nombre de listes ordonnées possibles ?

a.  $2 \times 10$

b.  $2^{10}$

c.  $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 10$

d.  $\frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 10}{1 \times 2}$

Il y a 2 résultats possibles si on effectue 1 lancer,  $2^2$  résultats possibles si on effectue 2 lancers, etc.,  $2^{10}$  résultats possibles si on effectue 10 lancers.

**Réponse b.**

5. On effectue  $n$  lancers d'une pièce de monnaie équilibrée. Le résultat d'un lancer est « pile » ou « face ». On considère la liste ordonnée des  $n$  résultats.

Quelle est la probabilité d'obtenir au plus deux fois « pile » dans cette liste ?

a.  $\frac{n(n-1)}{2}$

b.  $\frac{n(n-1)}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

c.  $1 + n + \frac{n(n-1)}{2}$

d.  $\left(1 + n + \frac{n(n-1)}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

La variable aléatoire  $X$  qui donne le nombre de résultats « pile » sur  $n$  lancers suit la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $\frac{1}{2}$ .

On cherche  $P(X \leq 2)$  soit  $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$ .

$$\bullet P(X = 0) = \binom{n}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-0} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\bullet P(X = 1) = \binom{n}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-1} = n \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\bullet P(X = 2) = \binom{n}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$



$$\text{Donc } P(X \leq 2) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + n \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(1 + n + \frac{n(n-1)}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

**Réponse d.****Exercice 6**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n} \text{ pour tout entier naturel } n \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

- **Affirmation 1 :** «  $u_4 = \frac{1}{9}$ . »

$$u_0 = 1; u_1 = \frac{u_0}{1+2u_0} = \frac{1}{1+2 \times 1} = \frac{1}{3}; u_2 = \frac{u_1}{1+2u_1} = \frac{\frac{1}{3}}{1+2 \times \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{1}{5};$$

$$u_3 = \frac{u_2}{1+2u_2} = \frac{\frac{1}{5}}{1+2 \times \frac{1}{5}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{1}{7}; u_4 = \frac{u_3}{1+2u_3} = \frac{\frac{1}{7}}{1+2 \times \frac{1}{7}} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{9}{7}} = \frac{1}{9}$$

**Affirmation 1 vraie**

- **Affirmation 2 :** « Pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = \frac{1}{2n+1}$ . »

D'après la question précédente, la propriété «  $u_n = \frac{1}{2n+1}$  » est vérifiée pour  $n$  entre 0 et 4. On va démontrer par récurrence qu'elle est vraie pour tout  $n$ .

- **Initialisation**

Pour  $n = 0$ , on a :  $u_0 = 1$  et  $\frac{1}{2 \times 0 + 1} = 1$ ; donc la propriété est vérifiée.

- On suppose la propriété vraie à un rang  $n \geq 0$ , c'est-à-dire que  $u_n = \frac{1}{2n+1}$ . C'est l'hypothèse de récurrence.

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n} = \frac{\frac{1}{2n+1}}{1+2 \times \frac{1}{2n+1}} = \frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{2n+1+2}{2n+1}} = \frac{1}{2n+1} \times \frac{2n+1}{2n+3} = \frac{1}{2(n+1)+1}$$

Donc la propriété est vraie au rang  $n+1$ .

- **Conclusion**

La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout  $n \geq 0$ , donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout  $n$ .

**Affirmation 2 vraie**

- **Affirmation 3 :** « La suite numérique  $(u_n)$  est minorée par  $10^{-10}$ . »

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n+1 = +\infty \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+1} = 0 \text{ et donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

Si la suite  $(u_n)$  est minorée par  $10^{-10}$  qui est un nombre strictement positif, elle ne peut pas avoir pour limite le nombre 0.

**Affirmation 3 fausse****Exercice 7**

On considère les fonctions  $f_k$  définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f_k(x) = x + k e^{-x}$ , où  $k$  est un réel strictement positif.

1. On s'intéresse dans cette question au cas  $k = 0,5$ , donc à la fonction  $f_{0,5}$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f_{0,5}(x) = x + 0,5 e^{-x}$ .

$$\text{a. } f'_{0,5}(x) = 1 + 0,5 \times (-1) e^{-x} = 1 - 0,5 e^{-x}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b. } f'_{0,5}(x) > 0 &\Leftrightarrow 1 - 0,5e^{-x} > 0 \Leftrightarrow 1 > 0,5e^{-x} \Leftrightarrow \frac{1}{0,5} > e^{-x} \\
 &\Leftrightarrow 2 > e^{-x} \Leftrightarrow \ln(2) > -x \Leftrightarrow -\ln(2) < x \Leftrightarrow x > \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\
 &\Leftrightarrow x > \ln(0,5)
 \end{aligned}$$

De même :  $f'_{0,5}(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln(0,5)$ , et  $f'_{0,5}(x) < 0 \Leftrightarrow x < \ln(0,5)$ .

On en déduit que la fonction  $f_{0,5}$  admet un minimum en  $\ln(0,5)$ .

Soit  $k$  un réel strictement positif. On donne le tableau de variations de la fonction  $f_k$ .

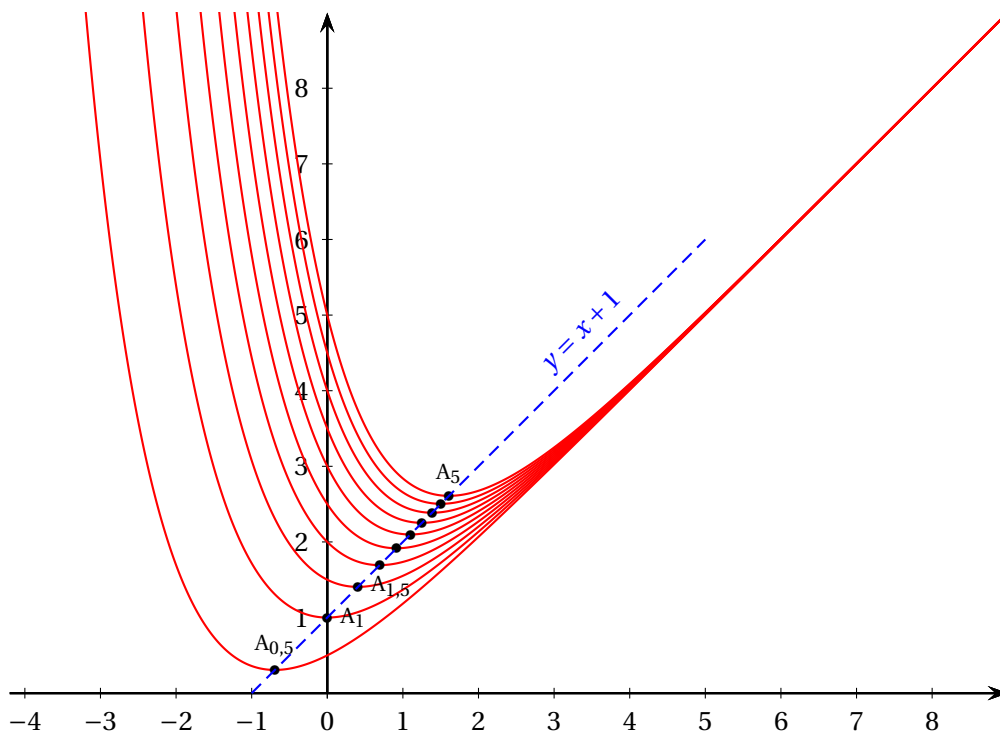
Valeurs de $x$	$-\infty$	$\ln(k)$	$+\infty$
Variations de $f_k$	$+\infty$	$f_k(\ln k)$	$+\infty$

$$2. f_k(\ln k) = \ln(k) + k e^{-\ln(k)} = \ln(k) + \frac{k}{e^{\ln(k)}} = \ln(k) + \frac{k}{k} = \ln(k) + 1$$

On note  $\mathcal{C}_k$  la courbe représentative de la fonction  $f_k$  dans un plan muni d'un repère orthonormé.

On note  $A_k$  le point de la courbe  $\mathcal{C}_k$  d'abscisse  $\ln k$ .

On a représenté ci-dessous quelques courbes  $\mathcal{C}_k$  pour différentes valeurs de  $k$ .



3. Le point  $A_k$  a pour coordonnées  $(\ln(k) ; f_k(\ln(k)))$  soit  $(\ln(k) ; \ln(k) + 1)$ . Donc tous les points  $A_k$  sont situés sur la droite d'équation  $y = x + 1$ .

L'affirmation : « Pour tout réel  $k$  strictement positif, les points  $A_{0,5}$ ,  $A_1$  et  $A_k$  sont alignés. » est donc vraie.

## Exercice 8

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = 3u_n + 1$  pour tout entier naturel  $n$ .

1. On considère la fonction calcul écrite dans le langage Python qui renvoie la valeur de  $u_n$ .

```
def calcul(n):
    u = 0
    for i in range(n):
        u = 3 * u + 1
    return u
```

On considère par ailleurs la fonction liste écrite dans le langage Python :

```
def liste(n):
    l = []
    for i in range(n):
        l.append(calcul(i))
    return l
```

**Affirmation 1 :** « l'appel `liste(6)` renvoie la liste  $[0, 1, 4, 13, 42, 121]$ . »

$u_0 = 0$ ,  $u_1 = 3 \times u_0 + 1 = 1$ ,  $u_2 = 3 \times u_1 + 1 = 4$ ,  $u_3 = 3 \times u_2 + 1 = 13$  et  $u_4 = 3 \times u_3 + 1 = 40 \neq 42$ .

**Affirmation 1 fausse**

2. **Affirmation 2 :** « pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = \frac{1}{2} \times 3^n - \frac{1}{2}$ . »

Pour  $n = 0$ , on a  $u_0 = 0$  et  $\frac{1}{2} \times 3^0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ .

Pour  $n = 1$ , on a  $u_1 = 1$  et  $\frac{1}{2} \times 3^1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$ .

Pour  $n = 2$ , on a  $u_2 = 4$  et  $\frac{1}{2} \times 3^2 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$ .

On conjecture que la propriété «  $u_n = \frac{1}{2} \times 3^n - \frac{1}{2}$  » est vraie pour tout  $n$ , et on va démontrer cette conjecture en utilisant un raisonnement par récurrence.

- **Initialisation**

Pour  $n = 0$ , on a  $u_0 = 0$  et  $\frac{1}{2} \times 3^0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ ; la propriété est vraie.

- **Hérédité**

On suppose la propriété vraie au rang  $n$ , c'est-à-dire  $u_n = \frac{1}{2} \times 3^n - \frac{1}{2}$ .

$$u_{n+1} = 3u_n + 1 = 3\left(\frac{1}{2} \times 3^n - \frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{1}{2} \times 3^{n+1} - \frac{3}{2} + 1 = \frac{1}{2} \times 3^{n+1} - \frac{1}{2}$$

La propriété est donc vraie au rang  $n + 1$ .

- **Conclusion**

La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout  $n \geq 0$ , donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout  $n$ .

**Affirmation 2 vraie**

3. **Affirmation 3 :** « pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n$  est une puissance de 3. »

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(\frac{1}{2} \times 3^{n+1} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} \times 3^n - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \times 3^{n+1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 3^n + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \times 3^{n+1} - \frac{1}{2} \times 3^n = \frac{1}{2} \times 3^n (3 - 1) = \frac{1}{2} \times 3^n \times 2 = 3^n \end{aligned}$$

**Affirmation 3 vraie**