Exercices - Intégrales

Ex 95 $I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$ et $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

1. a) $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 = 0^n \leq x^n \leq 1^n = 1$ car $x \mapsto x^n$ est croissante sur $[0;1]$

$\Rightarrow 1 \leq 1+x^n \leq 2$

$\Rightarrow 1 = \frac{1}{1} \geq \frac{1}{1+x^n} \geq \frac{1}{2}$ car $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $[1;2]$

CQFD

b) Comme $\forall x \in [0;1]$, on a $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^n} \leq 1$, alors

$\int_0^1 \frac{1}{2} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx \leq \int_0^1 1 dx$ d'où $\frac{1}{2} \leq I_n \leq 1$

car $\int_0^1 \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} \times (1-0)$ et $\int_0^1 1 = 1 \times (1-0) = 1$. De fait, (I_n) est une suite majorée par 1.

2. a) Comme $x^n \geq 0$ pour $0 \leq x \leq 1$ et que $0 \leq \frac{1}{1+x^n} \leq 1$,

on a par produit par x^n, $0 \leq \frac{x^n}{1+x^n} \leq x^n$,

et en intégrant sur $[0;1]$ cette inégalité, on a :

$$0 = \int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx \leq \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

d'où $0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

b) Comme $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, par encadrement, $\lim_{n \to +\infty} J_n = 0$

3. a) $I_n + J_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx \overset{\text{LINÉARITÉ de l'intégrale}}{=} \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} + \frac{x^n}{1+x^n} dx$

$$= \int_0^1 \frac{1+x^n}{1+x^n} dx = \int_0^1 1 dx = 1 \times (1-0) = 1$$

D'où, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $I_n + J_n = 1$

b) $I_n = 1 - J_n$, donc comme $\lim_{n \to +\infty} J_n = 0$, on a

$\lim_{n \to +\infty} I_n = 1$

Ex 81 $I = \int_{-2}^3 (x+1) e^x dx = \left[(x+1) e^x\right]_{-2}^3 - \int_{-2}^3 1 e^x dx$

(u, v')   (u, v)   (u', v)

$= 4e^3 - -1e^{-2} - \left[e^x\right]_{-2}^3 = 4e^3 + e^{-2} - e^3 + e^{-2}$

$= 3e^3 + 2e^{-2} \simeq 10{,}527$

$J = \int_0^1 x e^{2x} = \left[x \frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 1 \frac{e^{2x}}{2} dx = \frac{e^2}{2} - 0 - \left[\frac{e^{2x}}{4}\right]_0^1$

(u, v')   (u, v)   (u', v)

$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$

$= \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4} \simeq 2{,}097$

Ex 82 $I = \int_1^e 1 \ln x \, dx = \left[x \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{x} dx$

astuce : introduire 1

$= e \underbrace{\ln e}_{=1} - 1 \underbrace{\ln 1}_{=0} - \int_1^e 1 \, dx$

$= e - 1(e-1)$

$= \cancel{e} - \cancel{e} + 1$

$J = \int_1^e \underset{u'}{x^2} \underset{v}{\ln(x)} \, dx = \left[\underset{u}{\frac{x^3}{3}} \underset{v}{\ln x} \right]_1^e - \int_1^e \underset{u}{\frac{x^3}{3}} \times \underset{v'}{\frac{1}{x}} dx$

$= \frac{e^3}{3} - 0 - \int_1^e \frac{x^2}{3} dx$

$= \frac{e^3}{3} - \left[\frac{x^3}{9} dx \right]_1^e$

$= \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9}$

$= \frac{2e^3+1}{9} \approx 4,575$

Ex 83

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underset{u}{x} \underset{v'}{\cos(x)} dx = \left[\underset{u}{x} \underset{v}{\sin x} \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \underset{u'}{1} \underset{v}{\sin x} \, dx$

$= \frac{\pi}{2} - 0 - \left[-\cos x \right]_0^{\pi/2}$

$= \frac{\pi}{2} - (-0 - -1)$

$= \frac{\pi}{2} - 1$

$J = \int_0^{\pi} \underset{u}{(x+1)} \underset{v'}{\sin(x)} dx = \left[\underset{u}{(x+1)} \underset{v}{(-\cos x)} \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \underset{u'}{1} (\underset{v}{+\cos x}) \, dx$

$= (\pi+1) + 1 + \left[\sin x \right]_0^{\pi}$

$= \pi + 2 + 0 - 0$

$= \pi + 2$

Ex 84

$I = \int_0^{\pi} \underset{u}{t} \underset{v'}{\sin(2t)} dt = \left[\underset{u}{t} \underset{v}{\frac{-\cos(2t)}{2}} \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \underset{u'}{1} \underset{v}{\frac{+\cos(2t)}{2}} dt$

$= \pi \frac{-1}{2} - 0 + \left[\frac{\sin(2t)}{4} \right]_0^{\pi}$

$= \frac{-\pi}{2} + \cancel{\frac{\overset{=0}{\sin(2\pi)}}{4}} - \cancel{\frac{\sin(0)}{4}}$

$J = \int_{-1}^{2} \underset{u}{(3t+1)} \underset{v'}{e^{-t}} dt = \left[\underset{u}{(3t+1)} \underset{v}{(-e^{-t})} \right]_{-1}^{2} + \int_{-1}^{2} \underset{u'}{3} (\underset{v}{+e^{-t}}) dt$

$= -7e^{-2} - 2e + \left[-3e^{-t} \right]_{-1}^{2}$

$= -7e^{-2} - 2e - 3e^{-2} + 3e$

$= e - 10e^{-2} \approx 1,365$

Ex 122

1 a) $I \geq 0$ car $f \geq 0$ (et $-2 < 0$)

2 b) compter les carreaux de 1 ua : $4 < I < 6$

ou bien 1 quart de cercle de rayon 2 + 2 ua : $\frac{1}{4}\pi 2^2 + 2 = 2 + \pi \approx 5,14$

3 c) triangle : $\frac{1}{2} \times \overset{\text{base}}{3} \times \overset{\text{hauteur}}{2} + 3 \text{ ua} = 6$

4 b) $J + K = \int_0^3 f + \int_3^5 f$ (relation de Chasles)

Ex104 $\begin{cases} f(x) = 2x^2 - 3x + 1 \\ g(x) = x^2 + 3x - 4 \end{cases}$ | 1a) les courbes se coupent en $x=1$ et 5. $\mathcal{C}_g$ est au-dessus de $\mathcal{C}_f$ sur $[1;5]$, en dessous sinon.

1.b) On étudie le signe de $f(x) - g(x) = (2x^2-3x+1) - (x^2+3x-4) = x^2 - 6x + 5$ $\quad a=1,\ b=-6,\ c=5$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4\times1\times5 = 36 - 20 = 16 > 0$

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6-\sqrt{16}}{2} = 1$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6+\sqrt{16}}{2} = 5$

x		1		5	
$f(x)-g(x)$	+	0	−	0	+
pos. rel.	$\mathcal{C}_f / \mathcal{C}_g$		$\mathcal{C}_g / \mathcal{C}_f$		$\mathcal{C}_f / \mathcal{C}_g$

$a>0$

← position relative $\mathcal{C}_f$ au dessus ou en dessous de $\mathcal{C}_g$

2. $\mathcal{C}_f$ étant en dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $[2;4]$, cette aire vaut $\displaystyle\int_2^4 g(x) - f(x)\,dx = \int_2^4 -x^2+6x-5\,dx$

$= \left[-\dfrac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x\right]_2^4 = -\dfrac{64}{3} + 48 - 20 - \left(-\dfrac{8}{3} + 12 - 10\right)$

$= -\dfrac{56}{3} + 28 - 2 = \dfrac{22}{3}$ u.a.

Cette aire vaut $\dfrac{22}{3}$ u.a.

Ex109 1a) $g'(x) = \dfrac{\ln x}{x^2} > 0$ pour $x>1$ donc g est strictement croissante sur $[1;+\infty[$

b) $g(3) = \displaystyle\int_1^3 \frac{\ln t}{t^2}\,dt$ est l'aire comprise entre les droites $y=0$, $x=1$, $x=3$ et la courbe de $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t^2}$

2a) $g(x) = \displaystyle\int_1^x \underbrace{\frac{1}{t^2}}_{u'}\underbrace{\ln(t)}_{v}\,dt = \left[\underbrace{\frac{-1}{t}}_{u}\underbrace{\ln(t)}_{v}\right]_1^x + \int_1^x \underbrace{\frac{+1}{t}}_{u}\times\underbrace{\frac{1}{t}}_{v'}\,dt$

$= \dfrac{-1}{x}\ln x - \cancel{\dfrac{-1}{1}\ln(1)}_{=0} + \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt$

$= -\dfrac{\ln x}{x} + \left[-\dfrac{1}{t}\right]_1^x = \dfrac{-\ln x}{x} + \dfrac{-1}{x} - \dfrac{-1}{1}$

$= 1 - \dfrac{\ln(x)+1}{x}$ CQFD

b) Par croissance comparée en $+\infty$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$ (par somme)

Ex121 1a) $f_n(x) = (x+2)e^{-nx} \overset{n=1}{\Rightarrow} f_1(x) = (x+2)e^{-x} = xe^{-x} + 2e^{-x}$

1b) $xe^{-x} \to 0$, $e^{-x} \to 0$ par croissance comparée

donc $\lim_{+\infty} f_1 = 0$

(la droite $y=0$ est asymptote à la courbe de f_1)

2) Par opération, f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$,
$f_1'(x) = 1e^{-x} + (x+2)(-e^{-x}) = (1-(x+2))e^{-x} = -\underbrace{(x+1)}_{>0}\underbrace{e^{-x}}_{>0} < 0$

donc f_1 est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3) Comme f_1 est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et que $\lim_{+\infty} f_1 = 0$, f_1 est positive

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_1'(x)$		−	
f_1		↘	0

4) À tracer à la calculatrice ou sur le PC

5) $I_1 = \displaystyle\int_0^1 f_1(x)\,dx = \int_0^1 (x+2)e^{-x}\,dx$

$= \left[(x+2)(-e^{-x})\right]_0^1 + \displaystyle\int_0^1 1e^{-x} = -3e^{-1} + 2 + \left[-e^{-x}\right]_0^1 = -3e^{-1} + 2 - e^{-1} + 1$

$= 3 - 4e^{-1}$

6) $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$

a) $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (x+2)e^{-(n+1)x}\,dx - \int_0^1 (x+2)e^{-nx}\,dx$ par linéarité de l'$\int$, et en factorisant par $(x+2)$

$= \int_0^1 (x+2)\left(e^{-(n+1)x} - e^{-nx}\right) dx$

$= \int_0^1 \underbrace{(x+2)}_{\geq 0}\ \underbrace{e^{-nx}}_{\geq 0}\ \underbrace{\left(e^{-x} - 1\right)}_{\leq 0 \text{ car } e^0 = 1 \text{ et } e^{-x} \searrow} dx$ factoriser par e^{-nx}

Pour $x \in [0;1]$:

b) ≤ 0 donc $(I_n) \searrow$

c) $I_n = \int_0^1 \underbrace{(x+2)}_{\geq 0}\underbrace{e^{-nx}}_{\geq 0}\,dx \geq 0$

pour $x \in [0;1]$:

et $\forall x \in [0;1]$ $\quad (x+2)e^{-nx} \leq 3e^{-nx}$ majorer $x+2$ par 3 (ok sur $[0;1]$) intégrer sur $[0;1]$

$0 \leq I_n \leq 3\int_0^1 e^{-nx}\,dx$

$0 \leq I_n \leq 3\left[-\frac{e^{-nx}}{n}\right]_0^1 = \frac{3}{n}\left(1 - e^{-n}\right)$

d) Comme $0 \leq I_n \leq \frac{3}{n}$ et que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3}{n} = 0$,

par encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$