Dénombrement

1. Ensembles, cardinaux, principes additif et multiplicatif

1.1. Parties et opérations sur les ensembles

Définition 1 : *Intuitivement, un ensemble est une **collection d'objets**. Chacun de ces objets est désigné par un nom ou un symbole qui lui est propre.*
*Ces objets peuvent être énumérés, séparés par des virgules ou points virgules, tout cela entre deux accolades ; l'ordre n'a pas d'importance. Dans ce cas, on dit que l'on définit un ensemble **par extension**.*
*On appelle **cardinal** d'un ensemble le nombre de ses éléments.*

Exemple 1 : $A=\{2;-1,5;x;y\}$ est un ensemble de cardinal 4.
On note $\text{Card}(A)=4$.

Remarque 1 : On note $\emptyset$ l'ensemble vide. On a $\text{Card}(\emptyset)=0$.

Remarque 2 : Il existe des ensembles infinis : par exemple, les ensembles de nombres usuels ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$) sont infinis. Leurs cardinaux peuvent être construits, mais ce ne sont pas des entiers naturels (hors programme).

Propriété 1 : Un ensemble est infini lorsqu'il contient une suite d'éléments tous distincts.

Exemple 2 : L'ensemble des multiples de 10 : $\{0;10;20;30;\ldots\}$est infini puisqu'il contient la suite $(10n)_{n\in\mathbb{N}}$ (tous ses éléments sont distincts car cette suite est strictement croissante).

Définition 2 : Parties et opérations

- *On dit que A est une **partie** (ou sous-ensemble) d'un ensemble E lorsque tous les éléments de A sont des éléments de E, et on note A ⊂ B. On note $\mathcal{P}(E)$ l'**ensemble des parties** de E.*
- *On peut créer une partie en utilisant une propriété : par exemple $A=\left\{x\in\mathbb{R}, x^2=1\right\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ (de deux éléments : -1 et 1) ; on dit que A est définie en **compréhension**.*
- *$\complement_E A=\overline{A}=\{x\in E, x\notin A\}$ est le **complémentaire** de A dans E (les éléments de E qui ne sont pas dans A).*
- *l'**intersection** A∩B contient les éléments à la fois dans A **et** dans B.*
- *la **réunion** A ∪ B contient les éléments à la fois dans A **ou** dans B. Le «ou» est inclusif : on prend aussi les éléments à la fois dans A et dans B.*

Exercice 1 :

1. $E=[0;10]$; $A=[2;5[$; $B=]4;10[$. Écrire $\complement_E A$, $\complement_E B$, $A\cup B$, $A\cap B$, $(\complement_E A)\cap B$, $\complement_E(A\cap B)$.
2. A désigne les entiers naturels multiples de 2 inférieurs ou égaux à 12, et B désigne les entiers naturels multiples de 3 inférieurs ou égaux à 12 ; Déterminer les parties suivantes et calculer leurs cardinaux : A, B, $A\cup B$, $A\cap B$, leurs complémentaires.

1.2. Principe additif

Propriété 2 : Lorsque A et B sont des parties d'un ensemble E fini :

- $\text{Card}(A\cup B)=\text{Card}(A)+\text{Card}(B)-\text{Card}(A\cap B)$
- $\text{Card}\left(\overline{A}\right)=\text{Card}(E)-\text{Card}(A)$
- $\text{Card}(A\cap B)\leqslant \begin{matrix}\text{Card}(A)\\ \text{Card}(B)\end{matrix} \leqslant \text{Card}(A\cup B)$

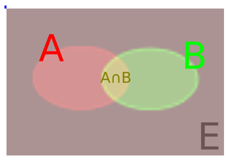

Diagramme de Venn

Méthode 1 : Pour dénombrer, on utilise souvent le diagramme de Venn ci-contre.

✏️ **Exercice 2 :** Dans une classe de 35 élèves, 15 élèves s'inscrivent uniquement à l'atelier théatre (T), 8 élèves s'inscrivent uniquement à l'atelier musique (M) et 4 élèves s'inscrivent à ces deux ateliers à la fois.

1. Combien d'élèves s'inscrivent dans au moins un atelier ?
2. Combien d'élèves ne s'inscrivent dans aucun atelier ?

✏️ **Exercice 3 :** On s'intéresse aux défauts de freinage et d'éclarage de 500 véhicules d'un réseau d'entreprises. Parmi eux, 65 ont au moins un défaut de freinage (F), 150 ont au moins un défaut d'éclairage (E) et 50 présentent les deux défauts. Combien de véhicules de ce réseau ne présente aucun des deux défauts ?

📗 **Méthode 2 :** Penser à utiliser un tableau à double entrée dans les cas où le diagramme de Venn serait moins approprié.

✏️ **Exercice 4 :**
À leur entrée en L1, les étudiants choisissent une langue (anglais ou allemand) et une option (informatique, chimie ou astronomie). Dans un groupe d'étudiants, 12 étudiants sont inscrits en astronomie, 15 en chimie, 16 étudient l'allemand. Par ailleurs, 8 inscrits en astronomie et 3 inscrits en informatique étudient l'anglais, 6 inscrits en chimie étudient l'allemand.
Indiquer la répartition des étudiants par discipline, ainsi que le nombre total d'étudiants dans le groupe.

	Astro	**Ch**	**Inf**	**total**
Ang				
All				
total				

✏️ **Exercice 5 : (long)**
Dans une entreprise, il y a 800 employés. 300 sont des hommes, 352 sont membres d'un syndicat, 424 sont mariés, 188 sont des hommes syndiqués, 166 sont des hommes mariés, 208 sont syndiqués et mariés, 144 sont des hommes mariés syndiqués. Combien y a-t-il de femmes célibataires non syndiquées ?

1.3. k-uplets et produit cartésien

📕 ***Définition 3 :*** *E, F, G sont trois ensembles (non vides).*

- *On appelle **produit cartésien** de E et de F, noté $E \times F$, l'ensemble des **couples** $(x; y)$ avec $x \in E$ et $y \in F$.*
- *On appelle **produit cartésien** de E, F et G, noté $E \times F \times G$, l'ensemble des **triplets** $(x; y; z)$ avec $x \in E$, $y \in F$ et $z \in G$.*
- *On appelle **produit cartésien** de k ensembles $E_1; \dots; E_k$ noté $E_1 \times \dots \times E_k$, l'ensemble des k**-uplets** $(x_1; \cdots; x_k)$ avec pour tout $i \in \{1; \dots; k\}$, $x_i \in E$.
Lorsque tous les E_i sont un même ensemble E, on note E^k le produit cartésien $E \times \dots \times E$.*

📋 **Remarque 3 :** Un produit cartésien de deux facteurs peut se présenter sous la forme d'un tableau. Pour un produit de trois facteur ce n'est pas possible (il faudrait un «tableau» à 3 dimensions).

🌄 **Exemple 3 :** $E = \{0; 1; 2\}$ et $F = \{10; 20; 30; 40\}$; on a :

$E \times F$	**10**	**20**	**30**	**40**
0	(0;10)	(0;20)	(0;30)	(0;40)
1	(1;10)	(1;20)	(1;30)	(1;40)
2	(2;10)	(2;20)	(2;30)	(2;40)

🌄 **Exemple 4 :** un repère du plan ou de l'espace étant fixé :

- $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est l'ensemble des couples de réels : il désigne l'ensemble des points du plan .
- $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est l'ensemble des triplets de réels : il désigne l'ensemble des points de l'espace.

✏️ **Exercice 6 :** Dans un jeu de cartes traditionnel, chaque carte est repérée par sa hauteur, dont l'ensemble des valeurs possibles est $H = \{1_{\text{as}}; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; V; D; R\}$ et par sa couleur (notion différente de la couleur rouge/noire de la carte) dont l'ensemble des valeurs possibles est $C = \{\spadesuit; \clubsuit; \heartsuit; \diamondsuit\}$.
Écrire sous forme de produit cartésien et donner le cardinal de :

1. l'ensemble de toutes les cartes ;
2. l'ensemble de toutes les as ;
3. l'ensemble de toutes les cœurs ;
4. l'ensemble de toutes les figures dont la couleur est rouge ;

📕 ***Définition 4 :*** *On appelle **liste ordonnée d'un ensemble E, avec répétition, de longueur** k un k-uplet d'éléments chacun pris dans E ; ce k-uplet est donc lui-même un élément de E^k.
Par abus de langage, on dit parfois «k-uplet **d**'élément**s** de E».*

🌄 **Exemple 5 :**

- Un mot de 6 lettres est un 6-uplet de l'alphabet : «lettre» est différent de «letter» (l'ordre a une importance et on peut répéter des lettres : ici e et t).

- Un code secret de carte bancaire est un 4-uplet de $\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$

1.4. Principe multiplicatif

Propriété 3 : $E, F, E_1, \ldots, E_k$ sont des ensembles finis.

- $\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$
- $\text{Card}(E_1 \times \cdots \times E_k) = \text{Card}(E_1) \times \ldots \times \text{Card}(E_k))$
- $\text{Card}(E^k) = \text{Card}(E)^k$

Exercice 7 : Calculer :

1. le nombre de codes secrets possibles pour une carte de paiement ;
2. le nombre de mots (avec ou sans sens dans une langue) possibles avec 5 lettres ;
3. le nombre de mots de passe possibles au lycée (6 chiffres et lettres majuscules) ;

Méthode 3 : Lorsque les répétitions **sont possibles** et que l'**ordre a une importance**, on doit souvent utiliser une des 3 formules précédentes.

Exercice 8 : Une plaque d'immatriculation est constituée de deux lettres puis trois chiffres, puis 2 lettres à nouveau. On exclue les lettres I, O, U pour ne pas les confondre avec 0, 1 et V. Combien y a-t-il de plaques possibles ?

Exercice 9 : Sur mon digicode (4 chiffres), je me souviens que le 2e chiffre est un 1 ou un 7, et le dernier un zéro. Combien de codes faut-il tester ?

Exercice 10 : À la cantine, on propose 3 entrées, 4 plats et 2 desserts. Combien de menus sont possibles si l'on prend chaque élément ? Si l'on a le droit de ne pas prendre d'entrée et/ou de dessert ?

1.5. Application : cardinal de $\mathcal{P}(E)$

Remarque 4 : On rappelle que lorsqu'on énumère les éléments d'un ensemble (entre accolades, par extension), l'ordre n'a pas d'importance (autre que la lisibilité pour le lecteur).

Exemple 6 : L'ensemble des parties de l'ensemble $E = \{a; b; c\}$ contient toutes les parties (ou sous-ensembles) possibles de cet ensemble E, c'est à dire :

0. la partie vide $\emptyset$, qui compte 0 éléments ;
1. les singletons (un singleton possède un unique élément) : $\{a\}$; $\{b\}$; $\{c\}$
2. les paires : $\{a; b\}$; $\{a; c\}$; $\{b; c\}$
3. l'ensemble E lui-même, qui est bien une partie de lui-même car $E \subset E$. Ainsi :

$$\mathcal{P}(E) = \Big\{\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{c\}; \{a; b\}; \{a; c\}; \{b; c\}; E\Big\}$$

Exercice 11 : Mathéo a des devoirs à remettre en maths, physique, et LLCE aujourd'hui. Mais il ne souvient pas s'il les a mis dans son sac ou non, ni, s'il en a mis, lesquels. Par combien de situations différentes cela peut-il se traduire ?

Propriété 4 : Un ensemble E de cardinal n a 2^n parties :
on a $\boxed{\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n}$.

Démonstration : Pour $A \subset E$ fixée, on définit sur E la fonction $\chi_A(x) = 1$ lorsque $x \in A$ et $\chi_A(x) = 0$ lorsque $x \notin A$. Chaque fonction χ_A caractérise une seule partie A. Si E a n éléments, une telle fonction correspond à une n-liste d'éléments de $\{0; 1\}$, soit 2^n possibilités.

2. Techniques de dénombrement

2.1. Factorielle : rappels

Définition 5 : *Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle **factorielle de** n et on note $n!$ l'entier $n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$; par convention $0! = 1$.*

Propriété 5 : On a $(n+1)! = (n+1) \times n!$

Exercice 12 : Calculer : $A = \frac{5!}{4!}$; $B = \frac{8!}{10!}$; $C = \frac{101!}{99!}$; $D = \frac{10!}{6!4!}$;
Simplifier : $U = (n+2)(n+1)n!$; $V = \frac{(n+2)!}{n!}$; $W = \frac{(n+7)!}{(n+5)!}$; $X = \frac{(n+1)!}{(n-1)!}$

$$0! = 1 \xrightarrow{\times 1} 1! = 1 \xrightarrow{\times 2} 2! = 2 \xrightarrow{\times 3} 3! = 6 \xrightarrow{\times 4} 4! = 24 \xrightarrow{\times 5} 5! = 120 \xrightarrow{\times 6} 6! = 720 \xrightarrow{\times 7} 7! = 5\,040 \ldots$$

2.2. Listes d'éléments d'un ensemble fini

Propriété 6 : E est un ensemble fini, non vide, de cardinal n.

- Pour tout entier $k \geqslant 1$, le nombre de listes de k éléments de E est $\boxed{n^k}$.
- Pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant n$, le nombre de listes de k **éléments distincts** est $\boxed{n(n-1)\cdots(n-k+1)}$ (k facteurs) qui s'écrit aussi $\boxed{\dfrac{n!}{(n-k)!}}$

Démonstration : On utilise le principe multiplicatif : dans le premier cas (avec remise), il y a n possibilités pour chaque élément de la k-liste (élément de E^k), d'où n^k possibilités.
Dans le second cas (sans remise, éléments de la k-liste 2 à 2 distincts), il y a n possibilités pour le premier élément de la liste, $n-1$ pour le deuxième, $n-2$ pour le troisième... jusqu'à $n-(k-1) = n-k+1$ pour le k$^{\text{ième}}$ (dernier) élément de la k-liste.

Exercice 13 : Une urne contient 10 boules (numérotés de 0 à 9). Combien y a-t-il de tirages possibles de 3 boules :

1. avec remise (on remet la boule tirée dans l'urne après chaque tirage) ?
2. sans remise (la boule tirée sort définitivement de l'urne) ?

Définition 6 : *On nomme **arrangement de k éléments de E** une k-liste **ordonnée** (classée) d'éléments distincts de E (tirage sans remise).*

Exercice 14 : Calculer le nombre de podiums (3 places) possibles pour le classement de la ligue 1 de football (20 équipes). Calculer le nombre de podiums possibles contenant le TFC.

2.3. Permutations

Définition 7 : *On appelle **permutation** d'un ensemble E de n elements toute liste de n éléments distincts de E (c'est à dire un arrangement de n éléments de E). Une permutation de E peut être vue comme une façon d'énumérer (en classant) les éléments d'un ensemble.*

Propriété 7 :
Le nombre de permutations d'un ensemble de n éléments est $\boxed{n!}$.

Exercice 15 : Un anagramme est un mot obtenu par permutation des lettres d'un autre mot ; par exemple «orange» est un anagramme de «organe». On ne se préoccupe pas de la signification du mot obtenu. Dénombrer les anagrammes des mots suivants : «pi» ; «rien» ; «maths» ; «facteur» ; «fini» ; «abba» ; «tralala». Attention aux trois derniers (cf méthode ci-dessous).

Exemple 7 : Voici les 6 permutations de $E = \{1; 2; 3\}$: $(1; 2; 3)$; $(1; 3; 2)$; $(2; 1; 3)$; $(2; 3; 1)$; $(3; 1; 2)$; $(3; 2; 1)$

Méthode 4 : Si des lettres sont répétées, on divise, pour chacune, par la factorielle du nombre de répétitions (faire permuter les lettres indiscernables donne la même liste).

2.4. Combinaisons : rappels

Définition 8 :

- *On nomme **combinaison de k éléments de E** une k-liste d'éléments distincts de E **non ordonnée** (l'ordre n'a pas d'importance, pas de classement).*
- *Une combinaison k éléments de E est donc une **partie de E possédant k éléments**.*
- *On note $\binom{n}{k}$ «**k parmi n**» le **nombre** de combinaisons de k éléments d'un ensemble de cardinal n.*

Propriété 8 : $\boxed{\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}}$

Démonstration : Exactement $k!$ arrangements de k éléments parmi n correspondent à une seule combinaison de k éléments parmi n : l'ordre des k éléments de la liste n'a pas d'importance, on peut les faire permuter sur les k places : on divise donc e nombre d'arrangments possibles $\frac{n!}{(n-k)!}$ par $k!$ pour obtenir le nombre de combinaisons possibles.

Propriété 9 : On a : $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
ainsi que la relation de Pascal (pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$) :
$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Exercice 16 : Démontrer ces propriétés et construire le triangle de Pascal jusqu'à n=6.

Exercice 17 : Le 1er mai 2028, la séquence basket commence en EPS, et chacun des 49 élèves de la classe négocie avec le prof de sport pour être sélectionné dans la dream team (5 joueurs). Combien y a-t-il de dream team possibles ?

Exercice 18 : On trace dans un plan 5 droites en position générale (c'est-à-dire que deux droites ne sont jamais parallèles, et 3 droites ne sont jamais concourantes). Combien de triangles a-t-on ainsi tracé ?

Exercice 19 : (dur). Vrai ou faux ? Le nombre de trajets les plus courts pour aller du départ à l'arrivée sur le quadrillage ci-contre est égal à 120.