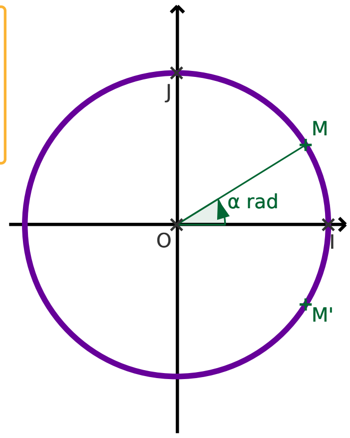
Trigonométrie - 2 -Sinus et cosinus

1. Sinus et cosinus sur le cercle trigonométrique

1.1. $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$

Définition 1 : *M est un point du cercle trigonométrique correspondant à un réel α (par la fonction enroulement vue précédemment).*
On note $\cos\alpha$ l'abscisse de M et $\sin\alpha$ l'ordonnée de M :

$$M\,(\cos\alpha\,;\,\sin\alpha)$$



Méthode 1 :

- On repère un angle orienté α par rapport à l'axe (Ox), en marquant un point M sur le cerle trigonométrique ;
- si α est > 0, on tourne dans le sens direct (sens inverse des aiguilles d'une montre ; s'il est < 0, on tourne dans le sens indirect ;
- on lit alors les valeurs de $\cos\alpha$ (sur (Ox)) : c'est l'abscisse de M ;
- et celle de $\sin\alpha$ (sur (Oy)) : c'est l'ordonnée de M.

Remarque 1 : Si l'on considère que $A = (\cos\alpha; 0) \in [OI]$, on retrouve dans le triangle OAM rectangle en M les définitions de $\cos$ et de $\sin$ vues en troisième, à savoir : $\cos\alpha = \frac{OA}{OM}$ et $\sin\alpha = \frac{AM}{OM}$. La nouveauté est la prise en compte de valeurs négatives pour $\cos$ et $\sin$, qui apparaîssent si l'on considère des angles obtus.

Si l'on ajoute 2π à α, on fait un tour du cercle et on revient à la même position, donc on obtient les mêmes valeurs pour $\cos$ et $\sin$.

Définition 2 : *Une fonction f étant donnée et un réel T étant fixé, lorsque pour tout x réel, on a $f(x+T) = f(x)$, on dit que f est **T-périodique** (ou périodique de période T).*

Propriété 1 : Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont 2π-périodiques ou autrement dit : pour tout x réel, on a $\sin(x+2\pi) = \sin x$ et $\cos(x+2\pi) = \cos x$.

1.2. Propriétés immédiates

Propriété 2 : Pour x réel :

- $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$;
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$;
- $\cos$ et $\sin$ sont 2π-périodiques.

Remarque 2 :

- La seconde formule se déduit du théorème de Pythagore, et du fait que $OM^2 = 1$;
- on note, pour plus de lisibilité, $\cos^2 x = (\cos x)^2$ (idem pour $\sin$).

Exercice 1 :

a. Calculer $\sin^2 t$ sachant que $\cos t = \frac{1}{4}$.

b. Peut-on trouver un réel t tel que $\cos t = \frac{1}{4}$ et $\sin t = \frac{3}{4}$?

Exercice 2 : Soit t un réel tel que $\cos t = \frac{3}{5}$.

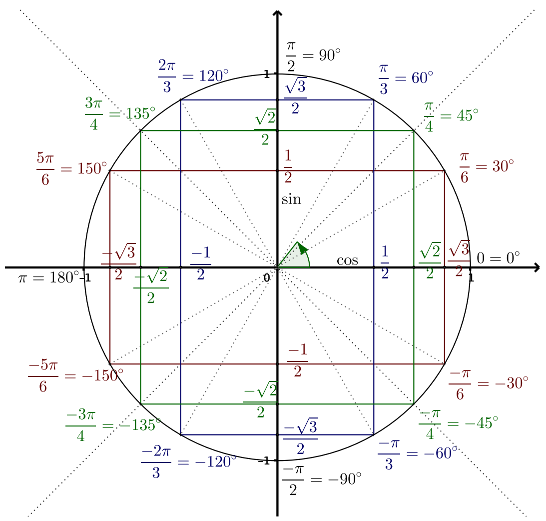
a. On suppose que $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Calculer $\sin t$.

b. On suppose que $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$. Calculer $\sin t$.

1.3. Valeurs remarquables

Exercice 3 : Compléter le tableau de valeurs suivant :

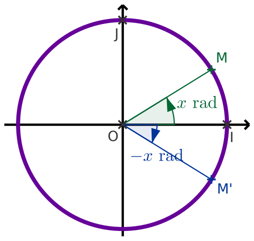
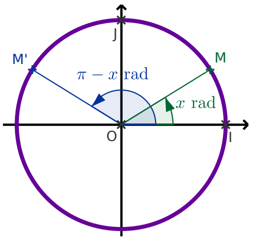
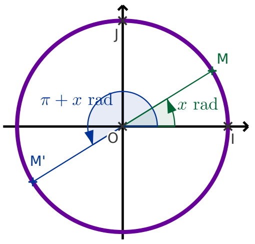
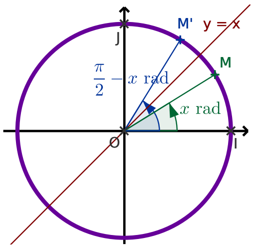
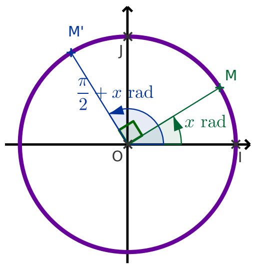
α **(rad)**	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos\alpha$						
$\sin\alpha$						



1.4. Valeurs associées

✏️ **Exercice 4 :** Compléter par $\pm\cos x$ et $\pm\sin x$ les égalités suivantes :

Propriété 3 :

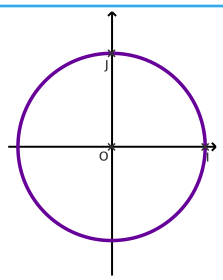
Symétrie / (Ox)	**Symétrie / (Oy)**	**Symétrie / O**	**Symétrie / $y=x$**	**Rotation$_{90°}$ / O**
				
$\cos(-x) =$	$\cos(\pi - x) =$	$\cos(\pi + x) =$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) =$
$\sin(-x) =$	$\sin(\pi - x) =$	$\sin(\pi + x) =$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) =$

✏️ **Exercice 5 :** Compléter le tableau de valeurs suivant :

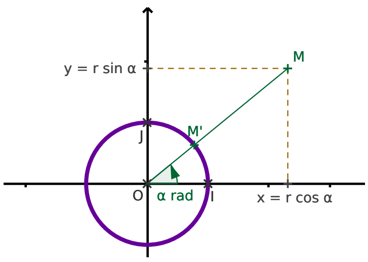
α **(rad)**	$a = \frac{-\pi}{6}$	$b = \frac{3\pi}{4}$	$c = \frac{-2\pi}{3}$	$d = \frac{3\pi}{2}$	$e = -\pi$
$\cos\alpha$					
$\sin\alpha$					

✏️ **Exercice 6 :** Simplifier les expressions suivantes :

- $A = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(\pi + x) - 3\sin(\pi - x)$
- $B = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin^2(\pi + x) + 2\cos^2(\pi + x$



2. Coordonnées polaires



Propriété 4 : Dans un repère **orthonormé**, on note M un point du plan distinct de l'origine O.
Tout point M distinct de l'origine O peut être repéré par un couple de réels $\boxed{(r;\alpha)_{\text{pol}}}$, avec :

- $r = OM > 0$ (distance à l'origine) ; unique ;
- $\alpha \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}}\right)$ (angle par rapport à l'axe des abscisses) ; unique **modulo** 2π.

Définition 3 : *Le couple noté $(r;\alpha)_{\text{pol}}$ est appelé **coordonnées polaires** et le couple $(x;y)$ est appelé **coordonnées cartésiennes** du point M dans le repère orthonormé $(O;I;J)$.*

Propriété 5 : On a alors : $\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\alpha = \dfrac{x}{r} \\ \sin\alpha = \dfrac{y}{r} \end{cases}$

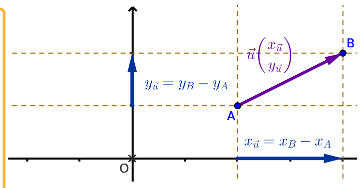
✏️ **Exercice 7 :**

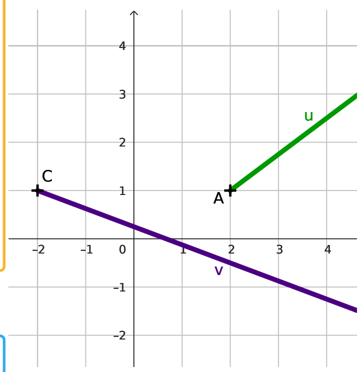
1. Donner les coordonnées cartésiennes de $A\left(3;\frac{-5\pi}{6}\right)_{\text{pol}}$.
2. Déterminer les coordonnées polaires de $B\left(2;-2\sqrt{3}\right)$.

   Est-il possible qu'un point ait les mêmes coordonnées cartésiennes et polaires ?

3. Projections orthogonales

3.1. Vecteur unitaires et rappels





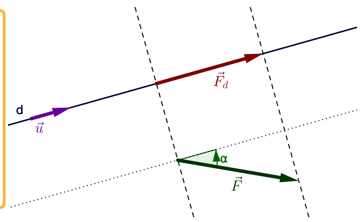
Définition 4 :

- *Un **vecteur** $\overrightarrow{u}$ représente un déplacement (en ligne droite) d'un point A vers un point B. On note $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ le vecteur donnant le déplacement de A vers B.*
- *Ses coordonnées $\binom{x_{\vec{u}}}{y_{\vec{u}}}$ représentent le déplacement horizontal $x_{\vec{u}} = x_B - x_A$ et le déplacement vertical $y_{\vec{u}} = y_B - y_A$ lors de ce trajet de A vers B.*
- *Dans un repère orthonormé, sa **norme**, notée $||\overrightarrow{u}||$ est la distance AB. La formule de Pythagore permet de la calculer*
  $||\overrightarrow{u}|| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
- *Un vecteur **normé** est un vecteur de norme 1.*

Méthode 2 : Pour normer un vecteur, il suffit de le diviser par sa norme.

Exercice 8 : Déterminer les coordonnées et calculer les normes des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Normer ces deux vecteurs.

3.2. Définition



***Définition 5 :** $\overrightarrow{F}$ est un vecteur, et (d) une droite dirigée par un vecteur $\overrightarrow{u}$ normé.*

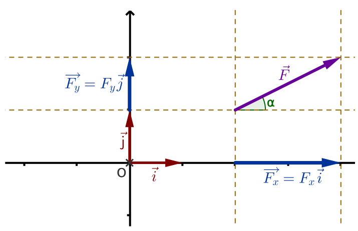
*On appelle **projeté othogonal** de $\overrightarrow{F}$ sur (d) (on peut aussi dire sur $\overrightarrow{u}$, seule la direction importe) le vecteur $\overrightarrow{F_d}$ défini par : $\overrightarrow{F_d} = ||\overrightarrow{F}|| \cos(\alpha)\overrightarrow{u}$*

Propriété 6 : Tout vecteur dont l'origine et l'extrémité sont placées sur les mêmes droites perpendiculaires à (d) que $\overrightarrow{F}$ a même projeté orthogonal que $\overrightarrow{F}$ sur (d).

Exercice 9 : Dessiner un vecteur $\overrightarrow{F_1}$ ayant même projeté orthogonal sur (d) que $\overrightarrow{F}$.

Exercice 10 : $\overrightarrow{w}$, de norme 3, fait un angle de $\frac{-\pi}{3}$ avec la droite d dirigée par $\overrightarrow{v}\binom{3}{4}$.
Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{w_d}$. Attention : $\overrightarrow{v}$ n'est pas normé.

3.3. Sur les axes



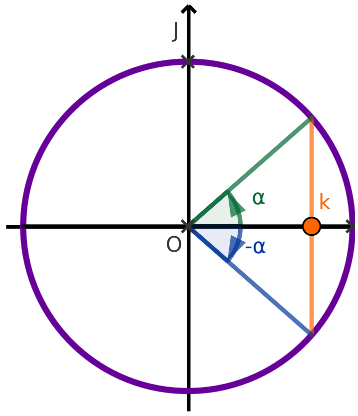
Propriété 7 : On se place dans un repère **orthonormé** $\left(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}\right)$. Toutes les lignes de rappel sont parallèles ou perpendiculaires aux axes. Le vecteur $\overrightarrow{F}$ fait un angle α avec l'axe (Ox). On obtient :

- Le **projeté othogonal de $\overrightarrow{F}$ sur (Ox)** le vecteur $\overrightarrow{F_x} = F_x\overrightarrow{i}$ avec :
  $F_x = ||\overrightarrow{F}|| \cos\alpha$.
- Le **projeté othogonal de $\overrightarrow{F}$ sur (Oy)** le vecteur $\overrightarrow{F_y} = F_y\overrightarrow{j}$ avec : $F_y = ||\overrightarrow{F}|| \sin\alpha$
  .
- Les coordonnées de $\overrightarrow{F}$: $\binom{F_x}{F_y} = \begin{pmatrix} ||\overrightarrow{F}|| \cos\alpha \\ ||\overrightarrow{F}|| \sin\alpha \end{pmatrix} = ||\overrightarrow{F}|| \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$

✏️ **Exercice 11 :** Un vecteur $\overrightarrow{F}$, de norme 10, représentant une force, fait un angle de -60° avec l'horizontale. Déterminer les valeurs arrondies au dixième des coordonnées $\binom{F_x}{F_y}$.

4. (In)Équations trigonométriques

4.1. Équation $\cos x = k$ avec $k \in \mathbb{R}$



Propriété 8 :

- Si $k < -1$ ou bien si $k > 1$, l'équation $\cos x = k$ n'a pas de solution ;
- si $k \in [-1; 1]$, alors $\cos x = k$ a une infinité de solutions dans $\mathbb{R}$, qui correspondent à une ou deux solutions modulo 2π.

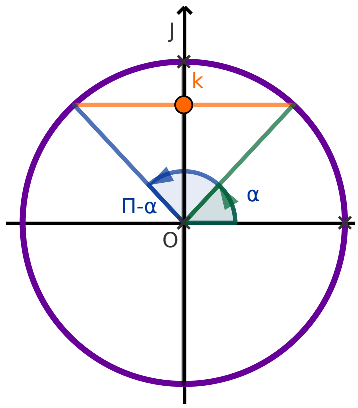
Méthode 3 :

1. On place k sur **l'axe (Ox)** (correspondant à $\cos$) ;
2. on recherche les deux angles α et $-\alpha$ tels que $\cos \alpha = k$;

   Remarque 3 : on peut utiliser $\alpha = \arccos k$ noté aussi $\cos^{-1} k$;
3. on a alors : $\boxed{\cos x = k \quad \Leftrightarrow \quad x \equiv \alpha \ \ (2\pi) \text{ ou } x \equiv -\alpha \ \ (2\pi)}$

✏️ **Exercice 12 :** Résoudre $\cos x = \frac{1}{2}$.

4.2. Équation $\sin x = k$ avec $k \in \mathbb{R}$



Propriété 9 :

- Si $k < -1$ ou bien si $k > 1$, l'équation $\sin x = k$ n'a pas de solution ;
- si $k \in [-1; 1]$, alors $\sin x = k$ a une infinité de solutions dans $\mathbb{R}$, qui correspondent à une ou deux solutions modulo 2π.

Méthode 4 :

1. On place k sur **l'axe (Oy)** (correspondant à $\sin$) ;
2. on recherche les deux angles α et $\pi - \alpha$ tels que $\sin \alpha = k$;

   Remarque 4 : on peut utiliser $\alpha = \arcsin k$ noté aussi $\sin^{-1} k$;
3. on a alors : $\boxed{\sin x = k \quad \Leftrightarrow \quad x \equiv \alpha \ \ (2\pi) \text{ ou } x \equiv \pi - \alpha \ \ (2\pi)}$

✏️ **Exercice 13 :** Résoudre $\sin x = \frac{1}{2}$.

Remarque 5 : Attention à ne pas se tromper d'axe en plaçant k !

✏️ **Exercice 14 :** Résoudre les équations trigonométriques suivantes

1. $3 \sin x - 5 = 0$
2. $\sin^2 x = 2$
3. $\sqrt{2} + 2 \cos x = 0$
4. $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$
5. $2 \sin 2x = 1$
6. $\cos \frac{x}{2} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$
7. $4 \sin^2 x - 3 = 0$
8. $2 \cos^2 x = 1$
9. $\sin 3x = \cos 2x$
10. $\cos^2 x = \sin^2 2x$

✏️ **Exercice 15 :** Déterminer l'angle que fait le vecteur $\sqrt{2}\binom{2}{-2}$ avec l'axe horizontal.

4.3. Inéquations

Remarque 6 : On adapte ces méthodes aux inéquations trigonométriques facilement.

✏️ **Exercice 16 :** Résoudre $\cos x \leq \dfrac{1}{2}$ et $\sin x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.