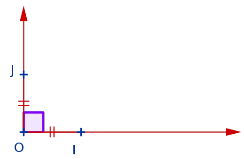
# Produit scalaire

## 1. Introduction

**Histoire :**

- Descartes (XVII) : transformer les problèmes géométriques en problèmes de calcul ;
- Grassmann (XIX) : «produit linéaire» (produit scalaire) issu d'un travail sur les marées.

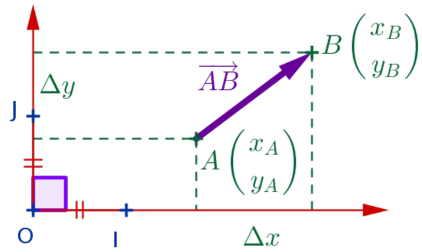
Dans ce chapitre, on travaille dans des repères orthonormés :




*orthogonal :* $(OI) \perp (OJ)$ *et normé :* $OI = OJ = 1$

## 2. Outils et rappels

***Définition 1 : Coordonnées** de* $\overrightarrow{AB} = \binom{x_B - x_A}{y_B - y_A} = \binom{\Delta x}{\Delta y}$




***Définition 2 :** On appelle **norme** de* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ *la distance entre l'origine et l'extrémité du vecteur, donnée par :*

$$\boxed{||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

**Propriété 1 :** Si $k$ est un réel, $||k\overrightarrow{u}|| = |k|\ ||\overrightarrow{u}||$

***Définition 3 : Somme et produit par un réel** :*

*Si* $k$ *et un nombre et* $\overrightarrow{u} = \binom{x}{y}$ *et* $\overrightarrow{v} = \binom{x'}{y'}$ *sont deux vecteurs :*

$$k\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$$

***Définition 4 :** Si* $A\,(x_A \quad y_A)$ *et* $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x_{\overrightarrow{u}} \\ y_{\overrightarrow{u}} \end{pmatrix}$ *sont un point et un vecteur du plan, alors on dit que le point* $C$ *est l'image de* $A$ *par la **translation** de vecteur* $\overrightarrow{u}$ *lorsque* $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{u}$*, donc* $C\,(x_A + x_{\overrightarrow{u}} \quad y_A + y_{\overrightarrow{u}})$.

**Propriété 2 : Relation de Chasles :** Si $A$, $B$ et $C$ sont trois points quelconques, alors :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$$

**Propriété 3 : Projections : rappels**

Lorsque $\overrightarrow{u}$ fait un angle $\alpha$ avec l'axe des abscisses,

on a : $\boxed{\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} ||\overrightarrow{u}||\cos\alpha \\ ||\overrightarrow{u}||\sin\alpha \end{pmatrix}}$

**Exercice 1 :** On a $\overrightarrow{v} = \binom{3}{-4}$. Calculer $||\overrightarrow{v}||$. En déduire $||-2\overrightarrow{v}||$.

**Exercice 2 :** $A(1;4)$, $B(3;1)$ et $C(4;6)$.

1. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$
2. Déterminer $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ et donner ses coordonnées.
   Faire de même pour $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$.
3. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{u} = -2\overrightarrow{AB} + 0{,}5\overrightarrow{BC}$.
4. Donner les coordonnées du translaté de $C$ par $\overrightarrow{u}$.

**Exercice 3 :**

- Simplifier, en utilisant la relation de Chasles : $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}$.
- Simplifier $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + 3\overrightarrow{BC}$.

**Exercice 4 :** $\overrightarrow{u}$ est un vecteur de norme $5$ et fait un angle de $30°$ avec l'axe horizontal. Calculer ses coordonnées.

**Exercice 5 :** $\overrightarrow{v} = \binom{3}{-4}$ ; calculer son angle avec l'axe horizontal.

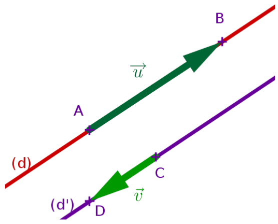
## 2.1. Colinéarité

***Définition 5 :*** *$\overrightarrow{u}=\binom{x}{y}$ et $\overrightarrow{v}=\binom{x'}{y'}$ sont deux vecteurs non nuls. On passe du vecteur $\overrightarrow{u}$ au vecteur $\overrightarrow{v}$ en tournant d'un angle $\alpha$. Le* ***déterminant*** *de ces deux vecteurs est un nombre pouvant se calculer de deux manières :*

- *à partir des coordonnées* $\boxed{\det\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)=\det\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix};\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\right)=xy'-yx'}$ *;*
- *à partir des normes et de l'angle :* $\boxed{\det\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)=||\overrightarrow{u}||\,||\overrightarrow{v}||\sin\alpha}$ *;*

**Propriété 4 :** $\overrightarrow{u}=\binom{x}{y}$ et $\overrightarrow{v}=\binom{x'}{y'}$ sont **colinéaires** (noté $\overrightarrow{u}//\overrightarrow{v}$, c'est à dire qu'ils ont **même direction** (mais pas forcément de même sens)) lorsque (les conditions suivantes sont équivalentes):

- Il existe un réel $k$ (appelé **coefficient de colinéarité**) tel que $\overrightarrow{u}=k\overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{v}=k\overrightarrow{u}$.
- les produits en croix sont égaux dans le tableau $\begin{array}{|c|c|}\hline x & x' \\ \hline y & y' \\ \hline\end{array}$, c'est à dire que les coordonnées des deux vecteurs sont proportionnelles
- $\det\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)=0$
- L'angle entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est de 0° ou 180°.



*deux vecteurs colinéaires*

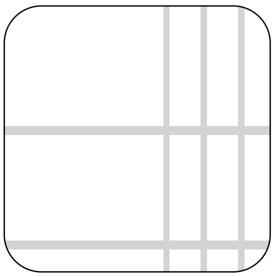
**Exercice 6 :** On donne $\overrightarrow{u}=\binom{-2}{3}$ et $\overrightarrow{v}=\binom{4}{-6}$.
Démontrer que ces vecteurs sont colinéaires et donner leur coefficient de colinéarité.

**Propriété 5 :** Trois points $A$, $B$ et $C$ du plan sont alignés lorsque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

**Remarque 1 :** Le déterminant de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ correspond à l'aire du parallélogramme dont deux côtés sont $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ (tracés avec la même origine) ; l'aire est comptée négativement si l'on passe de $\overrightarrow{u}$ à $\overrightarrow{v}$ en tournant dans le sens indirect.

**Exercice 7 :**

Dans un repère orthonormé, on a $\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}0{,}7\\2{,}4\end{pmatrix}$ ; tracer les deux vecteurs à partir de l'origine d'un repère orthonormé ; calculer leur déterminant et en déduire l'angle entre ces deux vecteurs.

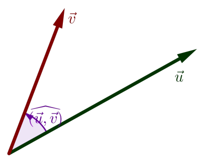


# 3. Produit scalaire et applications

## 3.1. Définitions et propriétés fondamentales

***Définition 6 :*** *$\overrightarrow{u}=\binom{x}{y}$ et $\overrightarrow{v}=\binom{x'}{y'}$ sont deux vecteurs non nuls. On passe du vecteur $\overrightarrow{u}$ au vecteur $\overrightarrow{v}$ en tournant d'un angle $\alpha=\left(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}}\right)$. Le* ***produit scalaire*** *de ces deux vecteurs est un nombre noté $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ et pouvant se calculer de deux manières :*

- *à partir des coordonnées* $\boxed{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\binom{x}{y}\cdot\binom{x'}{y'}=xx'+yy'}$ *;*
- *à partir des normes et de l'angle :* $\boxed{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=||\overrightarrow{u}||\,||\overrightarrow{v}||\cos\alpha}$ *;*




**Propriété 6 : Nullité du produit scalaire = orthogonalité**

$\boxed{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v}}$

**Propriété 7 : Symétrie :**

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ : $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}$

✏️ **Exercice 8 :** Déterminer les couples de vecteurs orthogonaux : $\overrightarrow{u}=\binom{-3}{-9}; \overrightarrow{v}=\binom{3}{-1}; \overrightarrow{w}=\binom{9}{3}$

✏️ **Exercice 9 :** Deux vecteurs de normes $2$ et $3$ font un angle de $\dfrac{\pi}{3}$. Calculer leur produit scalaire.

✏️ **Exercice 10 :** Deux vecteurs de normes $2$ et $3$ ont un produit scalaire de $-3$.
Calculer la mesure de l'angle géométrique entre ces deux vecteurs et dessiner deux configurations possibles.

✏️ **Exercice 11 :** ⭐ Démontrer que deux droites sont perpendiculaires lorsque le produit de leurs coefficients directeurs vaut $-1$.

📙 **Propriété 8 : Produit scalaire de deux vecteurs colinéaires :**

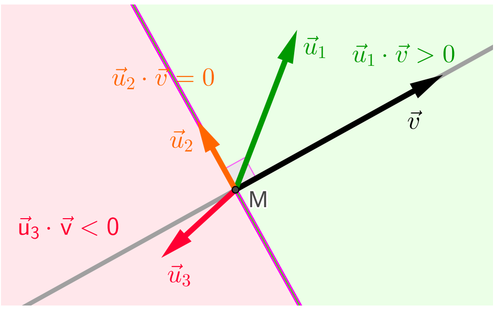
Lorsque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires :

- s'ils ont même sens, alors $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|$ ;
- s'ils sont de sens opposés, alors $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=-\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|$.

En effet, deux vecteurs colinaires de même sens font un angle de mesure $0$, dont le $\cos$ vaut $1$. S'ils sont de sens opposés, ils font un angle de $\pi$, dont le $\cos$ est $-1$.

## 3.2. Signe du produit scalaire et interprétation physique

Lorsqu'un objet $M$ soumis à plusieurs forces effectue un déplacement rectiligne (en mètres) $\overrightarrow{v}\neq\overrightarrow{0}$, la contribution énergétique, en Joules, de la force $\overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0}$ (exprimée en Newtons) à ce déplacement est donnée par $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$. On appelle cette énergie le **travail** de $\overrightarrow{u}$ selon $\overrightarrow{v}$.




📙 **Propriété 9 :** Les mesures d'angles sont à $2\pi$ près :

1. si $\dfrac{-\pi}{2}<\left(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}\right)<\dfrac{\pi}{2}$ alors $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}>0$ ;

   on dit que la force $\overrightarrow{u}$ produit un travail moteur : elle contribue au mouvement.
2. si $\left(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}\right)=\pm\dfrac{\pi}{2}$ alors $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$ ;

   la force $\overrightarrow{u}$ ne produit aucun travail : elle ne contribue pas au mouvement.
3. si $\dfrac{\pi}{2}<\left(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}\right)<\dfrac{3\pi}{2}$ alors $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}<0$ ;

   on dit que la force $\overrightarrow{u}$ produit un travail résistif : elle résiste au mouvement.

✏️ **Exercice 12 :** ⭐ Un objet roule sur un plan incliné à 45°, entraîné seulement par son poids (Énergie cinétique : $E_c=\frac{1}{2}mv^2$.
Sur quelle longueur doit-il rouler pour atteindre une vitesse de $2$ m/s ?

## 3.3. Calcul vectoriel et produit scalaire

📙 **Propriété 10 :** soit $\overrightarrow{u}=\binom{x}{y}, \overrightarrow{v}=\binom{x'}{y'}, \overrightarrow{w}=\binom{x''}{y''}$ trois vecteurs et $k$ un nombre réel.
On a :

- $\overrightarrow{u}\cdot\left(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\right)=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}$
- $\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right)\cdot\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}$
- $\left(k\overrightarrow{u}\right)\cdot\overrightarrow{v}=\overrightarrow{u}\cdot\left(k\overrightarrow{v}\right)=k\left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\right)$

📕 ***Définition 7 : Carré scalaire :***
*On note $\overrightarrow{u}^2$ le nombre $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}=\|\overrightarrow{u}\|^2$.*

📙 **Propriété 11 : Identités remarquables :**

- $\left(\overrightarrow{u}\pm\overrightarrow{v}\right)^2=\overrightarrow{u}^2+\overrightarrow{v}^2\pm 2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$
- $\overrightarrow{u}^2-\overrightarrow{v}^2=\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right)\left(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right)$

✏️ **Exercice 13 :** Démontrer les deux propriétés précédentes.

📋 **Remarque 2 :** Le produit scalaire est donc distributif sur l'addition de vecteurs. Il est donc possible de calculer avec les vecteurs de la même manière qu'avec des nombres, à l'exception du fait qu'un produit scalaire n'a que deux facteurs. On peut donc utiliser des identités remarquables.

### 3.4. Application : Égalité du #parallélogramme#

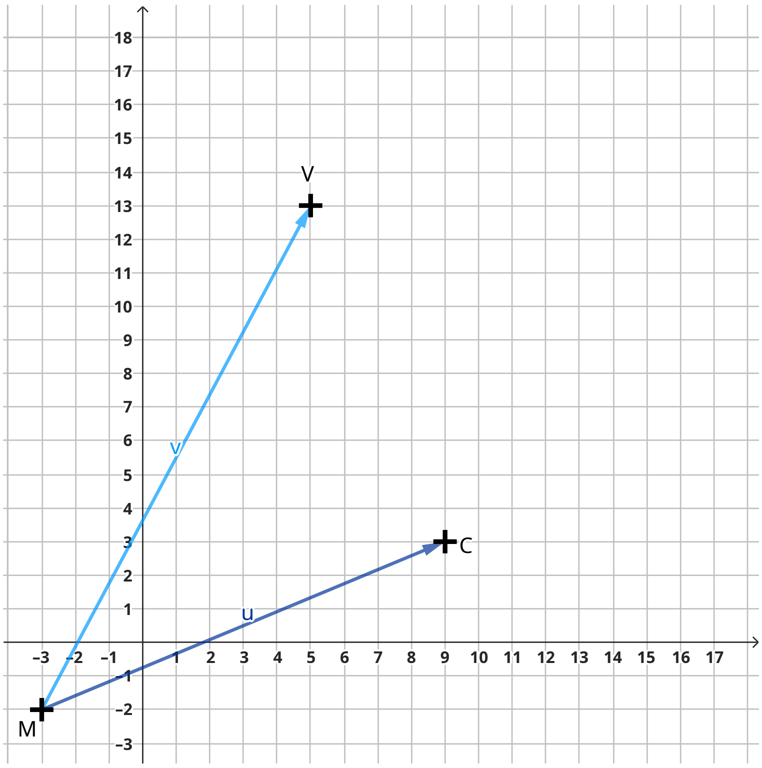
**Exercice 14 :**

Le bateau $M$ est soumis :

- à un courant marin $\overrightarrow{u}$ qui le déplacerait, sous sa seule influence, au point $C$ en une heure ;
- à un vent $\overrightarrow{v}$ qui le déplacerait, sous sa seule influence, au point $V$ en une heure ;

Le bateau va subir les influences combinées du vent et du courant : pour connaître sa position réelle, notée $F$, dans une heure, on va calculer la somme des deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

1. Lire et noter les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$ et calculer les normes de ces vecteurs.
2. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, le tracer sur la figure avec pour origine $M$ et calculer aussi sa norme.
   Placer la position $F$ du bateau dans une heure.
3. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$, ainsi que sa norme.
   Tracer un représentant de ce vecteur à partir du point $V$. S'agit-il du vecteur $\overrightarrow{VC}$ ?
4. Quelle est la nature du quadrilatère $MCFV$ ?
   Que représentent les vecteurs $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{d}$ pour ce quadrilatère ?
5. Calculer la somme des carrés des longueurs des 4 côtés du parallélogramme ; calculer la somme des carrés des longueurs des diagonales. Qu'observe-t-on ?
6. Développer $\left(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\right)^2 + \left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right)^2$ ; conclure.



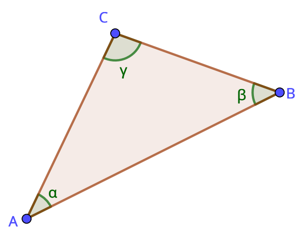

**Théorème 1 : Égalité du parallélogramme :**
Dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des deux diagonales est égale à la somme des carrés des quatre côtés.

**Exercice 15 :** La réciproque est-elle vraie ? Un quadrilatère dont la somme des carrés des longueurs des deux diagonales est égale à la somme des carrés des quatre côtés est-il toujours un parallélogramme ?

### 3.5. Application : Théorème d'Al-Kashi

**Théorème 2 : Théorème d'Al-Kashi**
Ce théorème, d'un grand mathématicien perse, lie les longueurs des côtés d'un triangle à ses angles.
Soit $MAB$ un triangle quelconque. Alors :

$$\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos\alpha}$$




**Exercice 16 : Écriture de la formule et démonstration :**

1. Écrire l'égalité analogue pour l'angle $\beta$.
2. Démontrer ce théorème en développant (compléter) : $BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{\ldots B}\right)^2$

**Exercice 17 :**

- Un triangle a des côtés de 3 et 4 cm qui forment un angle de $\frac{\pi}{3}$. Calculer la longueur de son troisième côté.
- Un triangle a des côtés de 10, 8 et 5 cm. Donner les angles de ce triangle au degré près.