Dénombrement et probabilités - TD

✏️ Exercice 1 : Les coefficients binomiaux et leur somme : démonstration

1. Le nombre de parties d'un ensemble de n éléments est ... .

   🖉**Corrigé :** Le nombre de parties d'un ensemble de n éléments est 2^n

2. Le nombre de **parties possédant k éléments** d'un ensemble de n éléments (= **combinaisons de k éléments** pris parmi n) est le coefficient binomial : $\binom{n}{k} = \dfrac{\dots!}{(\dots - \dots)!\dots!}$

   🖉**Corrigé :** $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ C'est aussi le nombre d'arrangements (= de k-listes) de k éléments pris parmi n éléments **divisé par** k!, car on ne tient pas compte de l'ordre pour une combinaison.

3. En particulier, pour $k \in \{0;1;2;n\}$, on a les valeurs remarquables suivantes :

$\binom{n}{0} = \dots$	$\binom{n}{1} = \dots$	$\binom{n}{2} = \dfrac{\dots(\dots - 1)}{2}$	$\binom{n}{n} = \dots$

   🖉**Corrigé :**

$\binom{n}{0} = 1$	$\binom{n}{1} = n$	$\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$	$\binom{n}{n} = 1$

4. Compléter le tableau des possibilités ci-contre. On en déduit que :
   $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = \dots$$

   🖉**Corrigé :** 2^n

5. Ainsi, la somme des coefficients binomiaux sur la ligne $n = 7$ sur le triangle de Pascal vaut $2^{\dots} = \dots$.
   Compléter la ligne $n = 7$ sur le triangle de Pascal ci-contre (on pourra se servir de la formule de symétrie $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$)

   🖉**Corrigé :** On utilise les formules (re)vues dans la question 3 et la formule de symétrie.

   - $\binom{7}{0} = \binom{7}{0} = 1$
   - $\binom{7}{1} = \binom{7}{7-1} = 7$
   - $\binom{7}{2} = \binom{7}{7-2} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$
   - Il reste $\binom{7}{3}$ et $\binom{7}{4}$, égaux par symétrie, dont la somme vaut $2^7 - 2 \times 1 - 2 \times 7 - 2 \times 21 = 128 - 2 - 14 - 42 =$, donc chacun vaut 35.
   - On complète la ligne suivante à l'aide de la relation de Pascal : $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$. On obtient :

   Triangle de Pascal (partiel)

↓n \ k→	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1							
2	1	2	1						
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

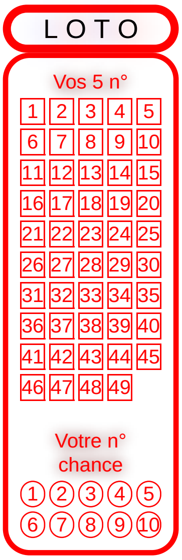
une partie d'un ensemble de cardinal n a :	**possibilités :**
soit 0 éléments ($\emptyset$)	$\binom{n}{0}$
soit 1 éléments (singleton)	$\binom{n}{\dots}$
soit 2 éléments (paire)	$\binom{\dots}{\dots}$
soit k éléments	$\binom{n}{k}$
soit n éléments	$\binom{n}{n}$
Total :	$2^{\dots}$

Triangle de Pascal (partiel)

k→ n↓	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1							
2	1	2	1						
⋮									
7									
8									

✏️ Exercice 2 : Le loto de la française des jeux : utiliser les combinaisons pour calculer des probabilités

Quitte à remplir une grille, autant *espérer* gagner quelque chose. Le loto de la française des jeux consiste à cocher sur une grille 5 nombres entiers entre 1 et 49 (compris) ainsi qu'un «numéro chance» qui est un entier entre 1 et 10 compris, comme dans la grille ci-contre. Les joueurs remplissent une grille (exemple ci-contre) ; Lors du tirage, 5 boules numérotées de 1 à 49 (compris) sont prélevées, au hasard, sans remise, dans une urne, suivies d'un tirage au hasard du numéro chance. Les gains tiennent compte du prix de la grille (moyenne [2008;2016]).



1. L'ordre des boules au tirage a-t-il une importance ?

   Corrigé : Non : sur la grille du joueur, aucun ordre n'est indiqué pour le choix des 5 numéros. Le numéro chance est, lui, traité à part.

2. Comptons le nombre de grilles réalisables : on doit choisir :
   - une combinaison de ... numéros parmi ... ;
   - un numéro chance parmi ... .

   Corrigé : on doit choisir :
   - une combinaison de 5 numéros parmi 49 ;
   - un numéro chance parmi 10.

   Ainsi, le nombre de grilles possibles est :
   $$\binom{\cdots}{\cdots}\binom{\cdots}{1} = \cdots\cdots\cdots$$

   Corrigé :
   $$\binom{49}{5}\binom{10}{1} = 19\,068\,840$$

3.

n° gagnants	5 + c	5	4+c	4	3+c	3	2+c	2	1+c ou 0+c	
Gain G (€)	5 701 258	102 632	1 086	1 084	10	8	5	3	0	
Probabilité	$\frac{1}{19\,068\,840}$	$\frac{1}{2\,118\,760}$	$\frac{11}{953\,442}$	$\frac{11}{105\,938}$	**Corrigé :** $\frac{473}{953\,442}$	**Corrigé :** $\frac{473}{105\,938}$	**Corrigé :** $\frac{473}{68\,103}$	$\frac{473}{7\,567}$	$\frac{252\,109}{2\,724\,120}$	

   Le tableau ci-dessus donne la loi de la variable aléatoire gain G ; dans la première ligne, «+c» indique l'obtention du numéro chance au tirage en plus du nombre de numéros gagnants.

   Calculer et compléter $\mathrm{P}(G=10)$; pour cela, on doit cocher :
   - 3 numéros parmi les 5 numéros gagnants ;
   - 2 numéros parmi les ... numéros perdants ;

     Corrigé : 49-5 = 44 numéros perdants.
   - 1 nombre chance parmi un (gagnant).

   Ainsi (en divisant par le nombre de grilles possibles),
   $$\mathrm{P}(G=10) = \frac{\binom{\cdots}{\cdots}\binom{\cdots}{\cdots}\binom{\cdots}{\cdots}}{19\,068\,840} = \frac{\cdots}{\cdots}$$

   Corrigé :
   $$\mathrm{P}(G=10) = \frac{\binom{5}{3}\binom{44}{2}\binom{1}{1}}{19\,068\,840} = \frac{\ }{9}$$

4. Calculer la probabilité $\mathrm{P}(G=8)$ (le seul changement par rapport à la question précédente est de choisir le numéro chance parmi les 9 perdants).

   Corrigé : $\mathrm{P}(G=8) = \dfrac{\binom{5}{3}\binom{44}{2}\binom{9}{1}}{19\,068\,840} = \dfrac{473}{105\,938}$

5. Calculer les probabilités $\mathrm{P}(G=5)$, $\mathrm{P}(G=-2)$ et montrer que $\mathrm{P}(G>0) \approx 7{,}5\%$.

   Corrigé : $\mathrm{P}(G=5) = \dfrac{\binom{5}{2}\binom{44}{3}\binom{1}{1}}{19\,068\,840} = \dfrac{473}{68\,103}$

   $$\mathrm{P}(G=-2) = \frac{\binom{5}{1}\binom{44}{4}\binom{9}{1} + \binom{5}{0}\binom{44}{5}\binom{9}{1}}{19\,068\,840} = \frac{252\,109}{302\,680}$$

   $$\mathrm{P}(G>0) = 1 - \mathrm{P}(G=0) - \mathrm{P}(G=-2) = 1 - \frac{252\,109}{2\,724\,120} - \frac{252\,109}{306\,680} = \frac{20\,303}{272\,412}$$

6. M. Tolo joue 10 fois dans l'année (les tirages du loto sont *évidemment* indépendants). Il certifie qu'il obtient au moins un gain strictement positif un an sur deux. Est-ce crédible ? On notera Y_{10} la variable aléatoire comptant le nombre de gains strictement positifs durant 10 tirages.

   Corrigé : Y_{10} suit une loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=\mathrm{P}(G>0)\approx 7{,}5\%$; On a $\mathrm{P}(Y_{10}\geqslant 1) = 1-\mathrm{P}(Y_{10}=0) = 1-(1-p)^{10} \approx 50{,}2\%$. M. Tolo est donc crédible.

7. On donne $\mathbb{E}(G) \approx -0{,}9304$€. Combien de fois, en moyenne, sur 10 tirages, M. Tolo obtient-il un gain positif ? Quel gain moyen peut-il espérer sur 10 tirages ?

✐**Corrigé :** En moyenne, sur 10 tirages, M. Tolo obtient un gain positif $\mathbb{E}(Y_{10}) = np \approx 0{,}75$ fois.
En notant $G_1 ; \dots ; G_{10}$ les variables aléatoires donnant les 10 gains successifs, on a
$\mathbb{E}(G_1 + \dots + G_{10}) = 10\mathbb{E}(G) = -9{,}304$€. Il perd donc environ 9,30€, en moyenne, sur 10 tirages.

✏️ **Exercice 3 : Jeu de la vie de Conway : probabilités conditionnelles, variables aléatoires, inégalités**
Le «jeu de la vie» se joue sur une grille plane carrée (quadrillage) : chaque case à 8 cases voisines. Chaque case du quadrillage est assimilé à une cellule qui a deux états : vivante (case □) ou morte (case vide). On note X une variable aléatoire, indiquant pour une cellule fixée son évolution selon les règles du jeu qui suivent :

- Une cellule morte possédant exactement trois cellules voisines vivantes devient vivante (elle naît : $X = 1$) ;
- Une cellule vivante possédant deux ou trois cellules voisines vivantes le reste ($X = 0$), sinon elle meurt ($X = -1$).

1. Donner la valeur de X pour la cellule occupant la case centrale, obtenue en suivant les règles données, pour les configurations suivantes :

	□	
		□
□		

La cellule centrale va ...
$X = \dots$

□		□
□	□	
		□

La cellule centrale va ...
$X = \dots$

✐**Corrigé :** naître ($X = 1$) ;
mourir ($X = -1$).

2. Au début du jeu, chaque cellule a une probabilité de 0,5 d'être vivante ou non, indépendemment des autres. Montrer que la loi de X est :
En déduire que $\mu = \mathbb{E}(X) = \frac{-29}{128}$ et $v = \mathrm{Var}(X) = \frac{6\,455}{16\,384} \approx 0{,}394$.

X	-1	0	1
prob.	$\frac{43}{128}$	$\frac{71}{128}$	$\frac{14}{128}$

✐**Corrigé :** On utilise une variable aléatoire Y loi binomiale de paramètre $n = 8$ voisins et de probabilité de succès $p = 0{,}5$ (voisin vivant).

- Sachant que la cellule centrale est vivante (probabilité 0,5) :
  - Elle se maintient en vie : $X = 0$, avec une probabilité
    $$\mathrm{P}(Y = 2) + \mathrm{P}(Y = 3) = \frac{21}{64}$$
  - Elle meurt, $X = -1$, le reste du temps, probabilité $\dfrac{43}{64}$
- Sachant que la cellule centrale n'est pas vivante (probabilité 0,5) :
  - Elle naît : $X = 1$, avec une probabilité
    $$\mathrm{P}(Y = 3) = \frac{14}{64}$$
  - Elle ne naît pas, $X = 0$, le reste du temps, probabilité $\dfrac{50}{64}$

En utilisant les probabilités conditionnelles :
$\mathrm{P}(X = 1) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{14}{64} = \dfrac{14}{128}$;
$\mathrm{P}(X = 0) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{21}{64} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{50}{64} = \dfrac{71}{128}$;
$\mathrm{P}(X = -1) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{43}{64} = \dfrac{43}{128}$.
De fait :
$\mathbb{E}(X) = \dfrac{43}{64} \times (-1) + \dfrac{71}{64} \times 0 + \dfrac{14}{64} \times 1 = \dfrac{-29}{128}$ et
$\mathrm{Var}(X) = \dfrac{43}{64} \times (-1)^2 + \dfrac{71}{64} \times 0^2 + \dfrac{14}{64} \times 1^2 - \left(\dfrac{-29}{128}\right)^2 =$

3. On fixe un échantillon $X_1 ; \dots ; X_n$ de cellules, suffisamment éloignées pour les considérer comme indépendantes. On note M_n la moyenne de cet échantillon. Quelle doit être la taille de cet échantillon pour que la probabilité que M_n s'écarte de μ d'au moins 1 soit inférieure à 10% ?

✐**Corrigé :** On applique l'inégalité de concentration avec un écart à la moyenne de $\delta = 1$:
$\mathrm{P}\left(|M_n - \mu| \geqslant \delta\right) \leqslant \dfrac{v}{n\delta^2}$; On doit avoir $\dfrac{v}{n\delta^2} \leqslant 10\% = 0{,}1$ donc $n \geqslant \dfrac{v}{0{,}1\delta^2} = 10v \approx 3{,}93$ d'où $n = 4$.

4. En se basant uniquement sur l'espérance, que penser de l'évolution de la population de cellules ? Pourquoi n'observe-t-on pas cela en général ?

✐**Corrigé :** On pourrait penser que la population va disparaître, mais ce n'est pas le cas : la dépendance entre les cellules est forte. L'hypothèse d'indépendance des variables de l'échantillon, est **valable uniquement pour la 1re**

génération, pas pour la suite de l'évolution.

✏️ **Exercice 4 : Poker : Combinaisons, probabilités conditionnelles**

Le poker est un jeu dans lequel chaque joueur reçoit une «main», c'est à dire une combinaison de 5 cartes. Dans cette exercice, on utilisera un jeu de 32 cartes représenté par le produit cartésien $H \times C$, avec
$H = \{7; 8; 9; 10; V_{\text{valet}}; D_{\text{dame}}; R_{\text{roi}}; 1_{\text{as}}\}$ (de la plus faible à la plus forte) et $C = \{♠; ♣; ♥; ♦\}$ (pas d'ordre sur les couleurs). Pour gagner la mise, il faut posséder la figure (combinaison particulière) la plus forte ; ces figures sont indiquées, de la plus forte à la plus faible, dans le tableau suivant :

figures	possibilités	probabilité (%)
quinte flush : 5 cartes de hauteurs consécutives de même couleur		
carré : 4 cartes de même hauteur		
full : 3 cartes de même hauteur et 2 cartes d'une (autre) même hauteur		
couleur : 5 cartes de même couleur mais de hauteurs non consécutives		
quinte : 5 cartes de hauteurs consécutives (2 couleurs au moins présentes)		
brelan : 3 cartes de même hauteur		
double paire : 2 cartes de même hauteur et 2 cartes d'une (autre) même hauteur		
paire : 2 cartes de même hauteur		
aucune figure : 5 cartes de hauteurs distinctes non consécutives		

1. Combien y a-t-il de «mains» possibles ?

   Corrigé : On recherche le nombre de combinaisons de 5 cartes parmi 32 : $\binom{32}{5} = 201\,376$ possibilités.

2. Compléter le tableau (au moins pour la quinte flush, le carré, le full et le brelan). On considère que chaque main est équiprobable ; on arrondira les probabilités, exprimées en pourcentage, au centième de %.

   Corrigé :

   - **quinte flush :** On choisit la hauteur de départ (du 7 au 10 compris sont possibles : 4 choix) et on choisit la couleur des 5 cartes : $\binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times = 4^2 = 16$; probabilité : $\dfrac{16}{201\,376} = \dfrac{1}{12\,586} \approx 0{,}01\%$
   - **carré :** On choisit la hauteur du carré (8 choix) et **on complète la main** avec une autre carte parmi les 28 cartes restantes : $\binom{8}{1} \times \binom{28}{1} = 8 \times 28 = 224$; probabilité : $\dfrac{224}{201\,376} = \dfrac{1}{899} \approx 0{,}11\%$
   - **full :** On choisit la hauteur du brelan (8 choix), le brelan parmi 4, la hauteur de la paire (7 choix), la paire parmi 4 : $\binom{8}{1} \times \binom{4}{3} \times \binom{7}{1} \times \binom{4}{2} = 8 \times 4 \times 7 \times 6 = 1\,344$; probabilité : $\dfrac{1\,344}{201\,376} = \dfrac{6}{899} \approx 0{,}67\%$
   - **couleur :** On choisit la couleur (4 choix) et on choisit 5 cartes parmi les 8 cartes de cette couleur **et** on retire les quintes flush ! $\binom{4}{1} \times \binom{8}{5} - 16 = 4 \times 56 - 16 = 208$; probabilité : $\dfrac{208}{201\,376} = \dfrac{13}{12\,586} \approx 0{,}10\%$
   - **quinte :** On choisit la hauteur de départ (du 7 au 10 compris sont possibles : 4 choix) et on choisit les couleurs de chacune des 5 cartes **et** on retire les quintes flush !
     $\binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} - 16 = 4^6 - 16 = 4\,080$; probabilité : $\dfrac{4\,080}{201\,376} = \dfrac{255}{12\,586} \approx 2{,}03\%$
   - **brelan :** On choisit la hauteur du brelan (8 choix), le brelan parmi 4, on complète avec 2 cartes parmi 28 et on retire les fulls : $\binom{8}{1} \times \binom{4}{3} \times \binom{28}{2} - 1\,344 = 8 \times 4 \times 378 - 1\,344 = 10\,752$; probabilité : $\dfrac{10\,752}{201\,376} = \dfrac{48}{899} \approx 5{,}34\%$
   - **double paire :** On choisit les 2 hauteurs des deux paires parmi 8, on choisit deux fois 2 cartes parmi 4, et on complète avec une carte parmi les 32-(4+4) = 24 restantes :
     $\binom{8}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{24}{1} = 28 \times 6^2 \times 24 = 24\,192$; probabilité : $\dfrac{24\,192}{201\,376} = \dfrac{108}{899} \approx 12{,}01\%$
   - **paire :** On choisit la hauteur de la paire parmi 8, on choisit2 cartes parmi 4 pour la paire, et on complète en choisissant 3 hauteurs différentes et les 3 couleurs des 3 cartes (parmi 4) :
     $\binom{8}{1} \times \binom{4}{2} \times \binom{8}{3} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} = 8 \times 6 \times 35 \times 4^3 = 107\,520$; probabilité : $\dfrac{107\,520}{201\,376} = \dfrac{480}{899} \approx 53{,}39\%$
   - **aucune figure :** On choisit 5 hauteurs différentes parmi 8, on choisit, pour chaque carte, 1 couleur parmi 4 et on retire les couleurs, quintes et quintes flush :

$\binom{8}{5} \times \binom{4}{1}^5 - 208 - 4\,080 - 16 = 8 \times 1024 \times -4\,304 = 53\,040$; probabilité : $\dfrac{53\,040}{201\,376} = \dfrac{3\,315}{12\,586} \approx 26{,}34\%$

3. En regardant ses cartes pendant la distribution, Mme Asinoc observe que les 3 cartes qu'elle a reçues sont de même hauteur. Sachant qu'elle a ainsi au moins un brelan, quelle est la probabilité qu'elle ait, en fin de distribution, ou full ? Un carré ? Un brelan seulement ?
   Attention : les événements «obtenir un full» et «obtenir un brelan», par exemple, sont ... .

Corrigé : Attention : les événements «obtenir un full» et «obtenir un brelan», par exemple, sont **incompatibles**.
On appelle «pré-brelan» l'événement «obtenir trois cartes de même hauteur».
Une partition de ce dernier événement (= une réunion d'événements incompatibles 2 à 2 qui est égale à cet événement) est {brelan ; full ; carré}. On utilise les probabilités conditionnelles :
$$\mathrm{P}_{\text{pré-brelan}}(\text{carré}) = \frac{\mathrm{P}(\text{carré})}{\mathrm{P}(\text{pré-brelan})} = \frac{\mathrm{P}(\text{carré})}{\mathrm{P}(\text{brelan}) + \mathrm{P}(\text{full}) + \mathrm{P}(\text{carré})} = \frac{224}{10\,752 + 1\,344 + 224}$$
Le même raisonnement et calcul (seul le numérateur change) donne $\mathrm{P}_{\text{pré-brelan}}(\text{full}) \approx 10{,}91$ et $\mathrm{P}_{\text{pré-brelan}}(\text{brelan}) \approx 87{,}27$.

Exercice 5 : ⭐ Utilisations du binôme de Newton

Pour $n \geqslant 2$ (même si la formule obtenue est vraie pour tout entier naturel), on pose $B_n = (x+y)^n = (x+y)(x+y)\cdots(x+y)$ (n facteurs).
Développer cette expression revient à choisir, pour tout entier k compris entre 0 et n, k fois le nombre x et de fait $n-k$ fois le nombre y parmi les n facteurs $(x+y)$. On obtiendra donc une somme de monômes $x^k y^{n-k}$, chacun de ses monômes au nombre de $\binom{n}{k}$

$$\boxed{B_n = (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}}$$

1. En déduire le développement de $B_3 = (x+y)^3$ et $B_4 = (x+y)^4$.
2. En posant $x = y = 1$, que retrouve-t-on ?
3. En posant $x = p \in [0;1]$ et $y = 1-p$, quel résultat concernant la loi binomiale retrouve-t-on ?
4. En posant $x = -y = 1$, que peut-on apprendre sur le nombre de parties de cardinal pair et le nombre de parties de cardinal impair d'un ensemble de cardinal n ?
5. Soient u et v deux fonctions dérivables successivement un nombre infini de fois (on dit de classe C^∞). On note $u^{(n)} = u''\cdots'$ la dérivée n-ième de u (par convention $u^{(0)} = u$, on dérive 0 fois).
   Calculer $(uv)''$, puis $(uv)^{(3)}$. Que peut-on conjecturer? Essayer de trouver une démonstration par récurrence.