Trigonométrie - 3 - Fonctions sinusoïdales

1. Fonctions sinusoïdales

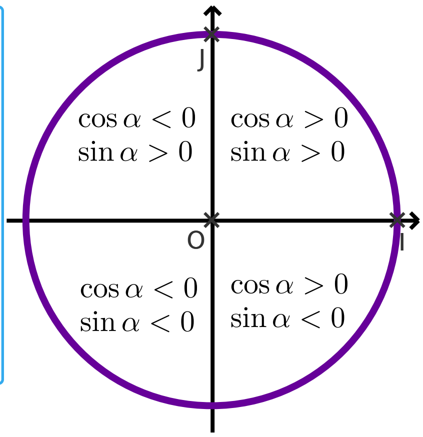
Remarque 1 : $\cos$ et $\sin$ étant 2π-périodiques, on les étudie sur une période : $]-\pi;\pi]$.

1.1. Signe

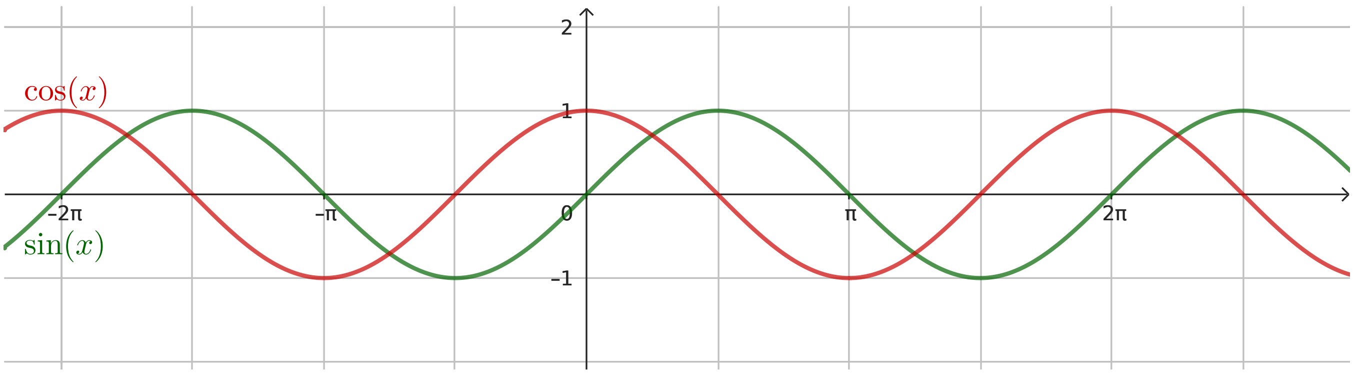
Exercice 1 : Compléter les tableaux de signe de cosinus et sinus :

x	$-\pi$		$\frac{-\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos(x)$			0				0		

x	$-\pi$		$\frac{-\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin(x)$	0				0				0



1.2. Variations



Exercice 2 : Compléter les tableaux de variations de cosinus et sinus :

x	$-\pi$		$\frac{-\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos(x)$				$\nearrow$					
			0						
		$\nearrow$							
	-1								-1

x	$-\pi$		$\frac{-\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin(x)$	0								0
		$\searrow$							
			-1						

Exercice 3 : Quel est le nombre de points d'intersection des courbes représentant les fonctions $\cos$ et $\sin$ sur l'intervalle $[0;200\pi]$?

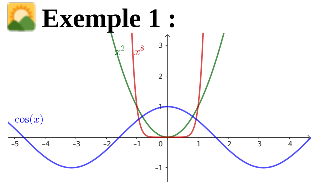
2. Parité

2.1. Fonctions paires

Définition 1 : *Une fonction f est **paire** lorsqu'elle est définie sur un ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ symétrique par rapport à 0 (par exemple $[-1,5;1,5]$) et vérifie les conditions (équivalentes) suivantes :*

- *pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = f(-x)$.*
- *la courbe de f est symétrique par rapport à l'axe vertical (Oy).*

Exemple 1 :



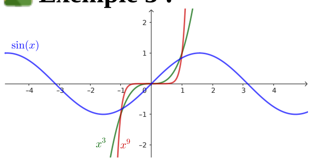
Exemple 2 : les fonctions définies par : x^n avec n entier pair et $\cos(x)$ sont des fonctions paires.

2.2. Fonctions impaires

Définition 2 : *Une fonction f est* ***impaire*** *lorsqu'elle est définie sur un ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ symétrique par rapport à 0 (par exemple $[-1,5;1,5]$) et vérifie les conditions (équivalentes) suivantes :*

- *pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = -f(-x)$.*
- *la courbe de f est symétrique par rapport au centre du repère.*

Exemple 3 :



Exemple 4 : les fonctions définies par : x^n avec n entier impair, $\sin(x)$, la fonction inverse, et $\tan(x)$ sont des fonctions impaires.

Exercice 4 :

1. Donner un exemple de fonction ni paire ni impaire
2. On note f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On pose $p(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$. Montrer que p est une fonction paire.
3. On pose $i(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$. Montrer que i est une fonction impaire.
4. En déduire que f est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Moralité : une fonction qui n'est ni paire ni impaire est quand même la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

3. Signal sinosoïdal

3.1. Paramètres : période, pulsation, fréquence et phase à l'origine

Définition 3 : *Une fonction du temps de la forme $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ ou $g(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ s'appelle signal sinusoïdal d'**amplitude** ou bien **valeur max** A, de **pulsation** ω et de **phase à l'origine** φ.*

Propriété 1 : Le graphe du signal est le même que les fonctions $\sin$ et $\cos$ vues précedemment, mais il oscille entre les valeurs $\pm A$ au lieu de ± 1 et sa période n'est plus forcément 2π :

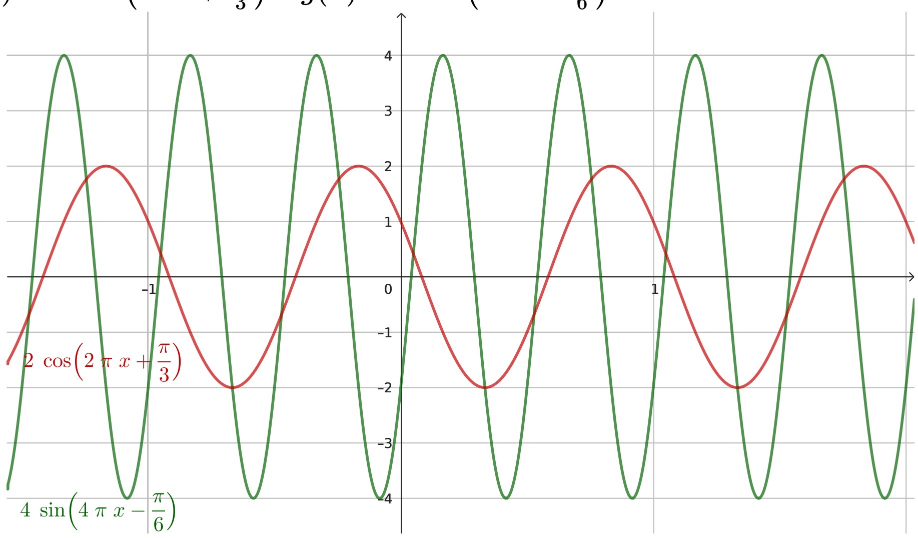
On a $\boxed{\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi F}$ où :

Définition 4 :

- *T est la **période** (un temps, généralement en seconde dans le système international) ;*
- *$F = \dfrac{1}{T}$ est la **fréquence** (généralement en hertz : Hz) ;*

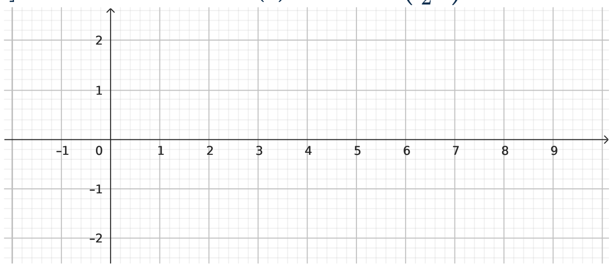
*$\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi F$ est la **pulsation** (généralement en radians par seconde : rad/s).*

Exemple 5 : $f(x) = 2\cos\left(2\pi x + \frac{\pi}{3}\right)$ et $g(x) = 4\sin\left(4\pi x - \frac{\pi}{6}\right)$:



Exercice 5 : Identifier sur l'écriture du signal l'amplitude, la pulsation et la phase à l'origine des deux signaux ci-dessus. En déduire leur périodes et leurs fréquences

Exercice 6 : Tracer sur $[-2; 10]$ le signal sinusoïdal $h(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$. Commencer par calculer la période.



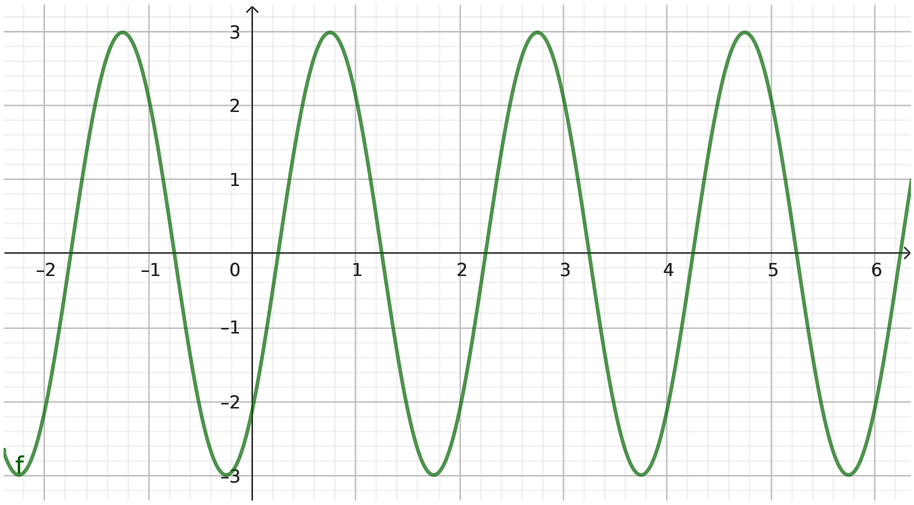
3.2. Utiliser : pulsation, période, fréquence

Méthode 1 : Pour déterminer la pulsation et la fréquence à partir d'un graphique :

- on détermine la longueur minimale du motif qui se répète sur la courbe du signal ;
- on en déduit ω et F par le calcul : $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ et $F = \dfrac{1}{T}$.

Remarque 2 : En général, on laisse ω en valeur exacte (avec des π) lorsque c'est possible.

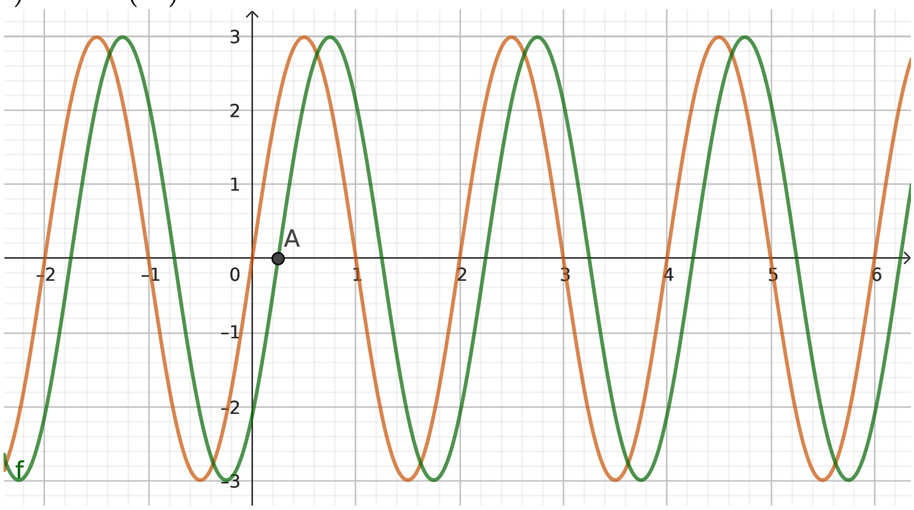
Exercice 7 : Déterminer à partir du graphique la période, la pulsation et la fréquence de ce signal, ainsi que son amplitude A.



3.3. Utiliser : phase à l'origine

Remarque 3 : La phase à l'origine introduit un décalage horizontal (dans le temps) du signal. C'est un angle, exprimé en degrés ou radians.

Exemple 6 : Le signal rouge est de la même forme qu'un sinus (il s'annule en 0). En mesurant sa période et son amplitude, on sait qu'il s'écrit $g(t) = 3\sin(\pi t)$.



Le signal vert f est la même signal que g mais décalé dans le temps (déphasé). Il s'écrit donc $f(t) = 3\sin(\pi t + \varphi)$. Comment trouver φ ?

Méthode 2 :

- On mesure le décalage horizontal Δt (ici 0,25) qui correspond à l'abscisse du point A sur le schéma.
- Pour obtenir le **signe** de φ :
    1. On se décale vers la droite (comme sur le schéma) : signe moins - ;
    2. On se décale vers la gauche : signe plus - ;
- On effectue une règle de proportionalité pour obtenir une valeur angulaire : en effet, un tour complet (2π) correspond à une période T :

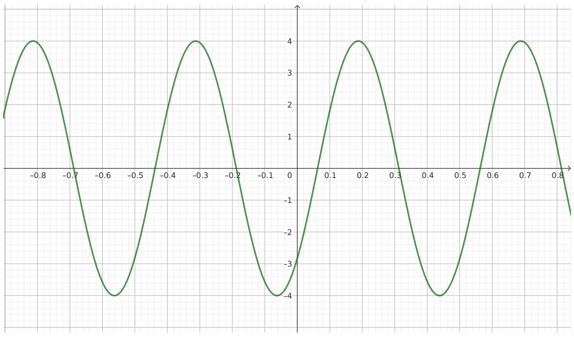
temps	angle
$T = 2$	$2\pi = 360°$
$\Delta t = 0{,}25$	$\varphi =???$

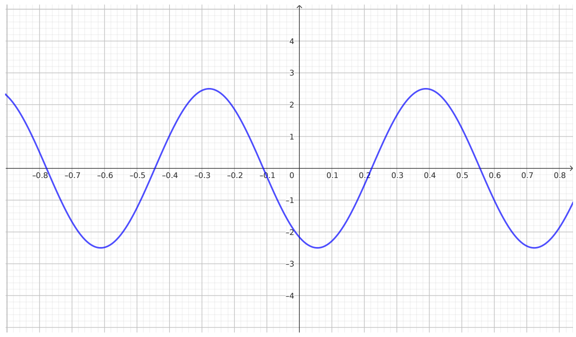
Donc $\varphi = [\text{Signe}]\Delta t \times \dfrac{2\pi}{T} = -\omega\Delta t = -\pi \times 0{,}25 = \dfrac{-\pi}{4}$

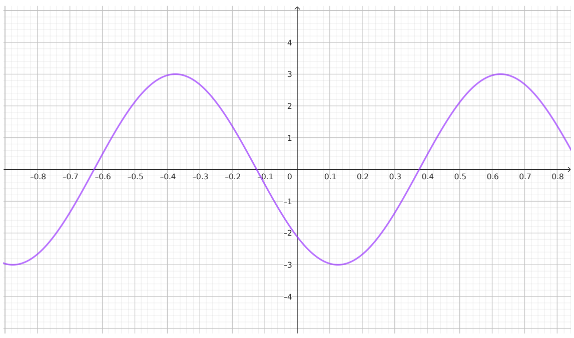
- On écrit le signal : $f(t) = 3\sin\left(\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$

Exercice 8 : Écrire ce signal f sous la forme $A\cos(\omega t + \varphi)$. On mesure le décalage horizontal jusqu'au premier maximum de f, un cosinus (non déphasé) présentant un max en zéro.

Exercice 9 : Écrire les signaux suivants sous la forme $A\sin(\omega t + \varphi)$.

a. 

b. 

c. 

d.