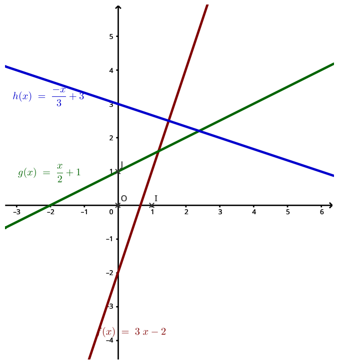
Variation instantanée et globale

1. Variation instantanée

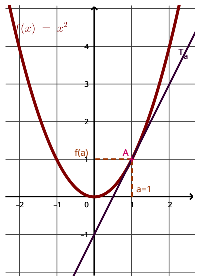
La notion de dérivée permet de généraliser la notion de coefficient directeur d'une fonction affine.



🌄 **Exemple 1 :** Trois droites représentant trois fonctions affines (ci-contre) :

Rappels :

- le fait qu'une fonction affine soit croissante ou décroissante est indiqué par le signe de son coefficient directeur ;
- que plus la valeur absolue (= valeur sans signe ±) de ce coefficient directeur est grande, plus la droite représentant la fonction affine penche, vers le haut (coefficient directeur positif), ou vers le bas (coefficient directeur négatif) .



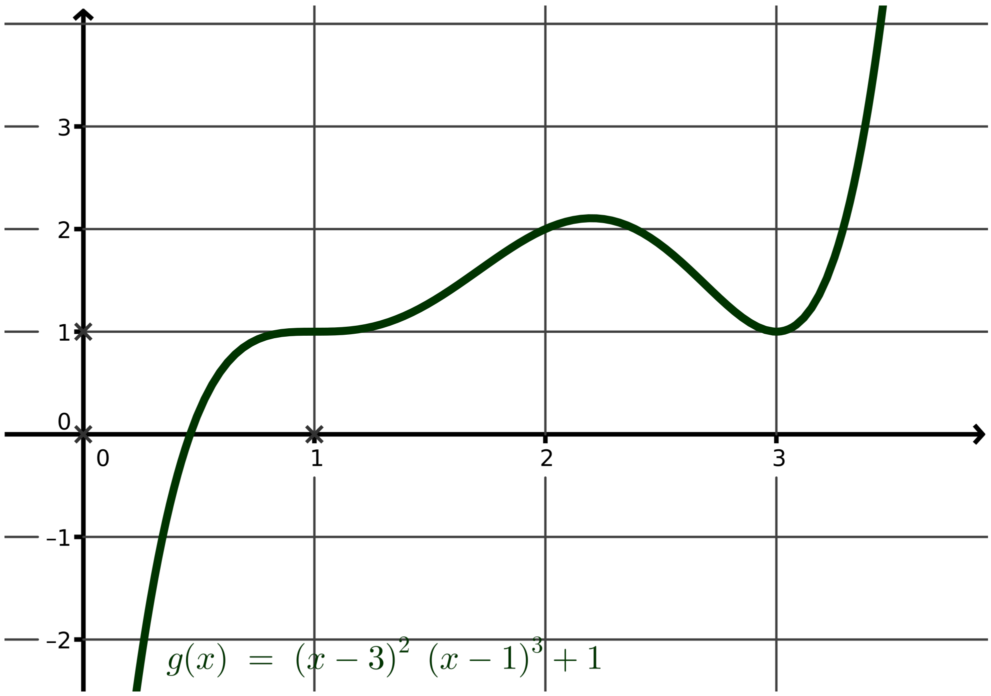
Problème : Une fonction quelconque est représentée par une courbe et non une droite, et ses variations peuvent changer lorsque sa variable x évolue : elles peuvent, comme sur cette parabole représentant la fonction carré, être faibles près de 0 et s'accentuer alors qu'on s'éloigne de 0.

Pour une fonction quelconque f, une «mesure de la variation», comme celle que nous fournit le coefficient directeur pour les fonctions affines, devra donc dépendre de sa variable x.
Pour «se ramener» au cas d'une droite, on trace, lorsque c'est possible, la tangente T_a à la courbe représentant la fonction f au point d'abscisse $x = a$; c'est la droite qui approxime au mieux, lorsqu'on est proche de a, la courbe représentant la fonction f.

✏️ **Exercice 1 :** On pose $f(x) = x^2$.
Compléter : Graphiquement, on lit $f'(1) = \ldots$ et $f'(-1) = \ldots$.

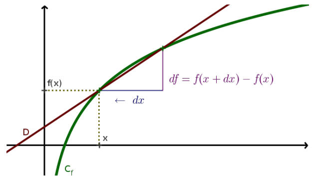
📕 ***Définition 1 :*** *On note alors $f'(a)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$ le **coefficient directeur de la tangente** T_a à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x = a$, et on appelle ce nombre le **nombre dérivé** de f en a.*

✏️ **Exercice 2 :** On a $g(x) = (x-3)^2(x-1)^3 + 1$:



1. Graphiquement, donner les nombres dérivés suivants : $g'(1) = \ldots$; $g'(2) = \ldots$; $g'(3) = \ldots$
2. Graphiquement, donner l'ensemble des x pour lesquels $g'(x) < 0$.

1.1. Nombre dérivé



On se donne une fonction f et on se place en un x fixé. Soit dx un petit accroissement de la variable x (positif ou négatif), correspondant à un accroissement $df = f(x+dx) - f(x)$ des images.

Si l'on fait tendre dx vers 0, la droite D prend une position de tangente à la courbe de f en x.

📕 ***Définition 2 :*** *Si* $\lim\limits_{dx \to 0} \dfrac{df}{dx}$ *existe, on dit que* f *est dérivable en* x *; on note alors* $f'(x)$ *ou bien* $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$ *cette limite, que l'on appelle* ***nombre dérivé de*** f ***en*** x***, et qui indique le coefficient directeur de la tangente à la courbe de*** f ***en*** x***.***

📙 **Propriété 1 :** L'équation de la tangente à la courbe de f en $x = a$ est : $\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$

✏️ **Exercice 3 :** Calculer les équations des tangentes T_3 et T_{-2} à la courbe de $f(x) = x^2$ en $x = 3$ et $x = -2$.

2. Dérivées de fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$
cte	0
$x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\frac{-1}{x^2} = -x^{-2}$
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2$

Fonctions composées :
u désigne une fonction dérivable ; ω, φ sont des constantes réelles ; n est un entier naturel différent de 0.

f	f'
$\frac{1}{u} \quad (u \neq 0)$	$\frac{-u'}{u^2}$
$\ln(u) \quad (u > 0)$	$\frac{u'}{u}$
e^u	$u'\mathrm{e}^u$
u^n	$nu'u^{n-1}$
$\sin(\omega t + \varphi)$	$\omega\cos(\omega t + \varphi)$
$\cos(\omega t + \varphi)$	$-\omega\sin(\omega t + \varphi)$
$\arctan u$	$\frac{u'}{1+u^2}$

3. Dérivées et opérations

📙 **Propriété 2 :** u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k est une constante réelle.

Somme : $\boxed{(u+v)' = u' + v'}$

🌄 **Exemple 2 :** $\left(x^2 + x^3\right)' = 2x + 3x^2$

Produit par une constante : $\boxed{(ku)' = ku'}$

🌄 **Exemple 3 :** $\left(5x^2\right)' = 5\left(x^2\right)' = 5 \times 2x = 10x$

✏️ **Exercice 4 :** Calculer les fonctions dérivées de :
$f(x) = x^2 - 3x + 4$ et $g(x) = -3x^2 - x - 2$

Produit de deux fonctions : $\boxed{(uv)' = u'v + v'u}$

🌄 **Exemple 4 :**
$(x \sin x)' = x' \sin x + x(\sin x)' = 1 \sin x + x$ co

Quotient : $\boxed{\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}}$

Attention : v ne doit pas s'annuler sur I.

🌄 **Exemple 5 :**
$$\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x}\right)' = \frac{(\mathrm{e}^x)'x - x'\mathrm{e}^x}{x^2} = \frac{\mathrm{e}^x x - 1\mathrm{e}^x}{x^2} = \frac{(x -}{x}$$

✏️ **Exercice 5 :** $a(x) = x^2 \sin(x)$;
$b(x) = \dfrac{\sin(x)}{x^2}$;calculer $a'(x)$ et $b'(x)$

4. Principe de Lagrange

📗 **Méthode 1 :** Une fois que l'on a calculé la dérivée d'une fonction, il est intéressant de déterminer le signe de cette dérivée. En effet connaître le signe de f' nous permet de connaître les variations de f :

📙 **Propriété 3 :**

- $f' > 0$ sur I (f' peut même s'annuler en des points isolés) $\Rightarrow$ f est strictement croissante sur I ;
- $f' = 0$ sur tout l'intervalle $I \Rightarrow f$ est constante sur I ;
- $f' < 0$ sur I (f' peut même s'annuler en des points isolés) $\Rightarrow$ f est strictement décroissante sur I.
- f' passe de $-$, à 0, puis à $+ \Rightarrow f$ admet un minimum local pour $x = a$;
- f' passe de $+$, à 0, puis à $- \Rightarrow f$ admet un maximum local pour $x = a$.

✏️ **Exercice 6 :** Réaliser les tableaux de signe de $f'(x)$ et de variation de f.