Page 248 249

90 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;1{,}5]$ par $f(x) = 9x^2(1 - 2\ln(x)) + 10$.

1. a. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;1{,}5]$.

b. En déduire les variations de la fonction f sur $]0\,;1{,}5]$.

2. Montrer que la courbe représentative de la fonction f admet un point d'inflexion d'abscisse e^{-1}.

93 PYTHON **Compléter un programme**

1. a. Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln(x) - 1 + \frac{1}{x}$.

b. Calculer $f(1)$, et en déduire le signe de $f(x)$.

2. a. Étudier les variations de la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = \ln(x) + 1 - x$.

b. Calculer $g(1)$, en déduire le signe de $g(x)$.

3. Montrer que, pour tout réel x strictement positif :

$$1 - \frac{1}{x} < \ln(x) < x - 1.$$

4. a. Soit n un entier, $n \geqslant 2$. En posant $x = e^{\frac{1}{n}}$, montrer que :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}.$$

b. Écrire l'encadrement de e obtenu pour $n = 2$.

5. a. Recopier et compléter le script de la fonction Python ci-contre afin que l'appel encadre(p) renvoie les bornes d'un encadrement de e d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-p}.

```python
def encadre(p):
    k = 2
    a = 9/4; b = 4
    while ...  :
        k = ...
        a = ...
        b = ...
    return(a,b)
```

b. Programmer cette fonction et l'exécuter avec $p = 3$. Que constate-t-on ?

94 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = e \times \sqrt{u_n}$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel :

$$1 \leqslant u_n \leqslant e^2.$$

2. a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

b. En déduire la convergence de la suite (u_n).

3. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \ln(u_n) - 2$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_n = -\frac{1}{2^{n-1}}$.

c. En déduire une expression de u_n en fonction de l'entier naturel n.

d. Calculer la limite de la suite (u_n).

4. VRAI/FAUX

Dans cette question, on s'interroge sur le comportement de la suite (u_n) si l'on choisit d'autres valeurs que 1 pour u_0.

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

a. Si $u_0 = 2018$, alors la suite (u_n) est croissante.

b. Si $u_0 = 2$, alors pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant e^2$.

c. La suite (u_n) est constante si et seulement si $u_0 = 0$.

99 Montrer que $3\ln\left(\sqrt{2} + 1\right) + \ln\left(5\sqrt{2} - 7\right)$ est un entier naturel.

100 **1.** Simplifier les expressions suivantes.

a. $A = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right)$

b. $B = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{8}{9}\right) + \ln\left(\frac{9}{10}\right)$

2. Soit n un entier naturel non nul. Simplifier :

$$D = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right).$$

102 Démontrer que, pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$:

a. $\ln\left(\frac{x}{1+x}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0$

b. $\ln\left(\sqrt{e + x} - \sqrt{x}\right) + \ln\left(\sqrt{e + x} + \sqrt{x}\right) = 1$

103 Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = \frac{3}{2^n}$.

Quelle est la nature de la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln(u_n)$?

104 **Une question ouverte**

Que peut-on dire de la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = \ln(u_n)$ où (u_n) est une suite géométrique de premier terme et de raison strictement positifs ?

107 VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. Pour tout réel a strictement positif :

$$\ln(a^7) - \ln(a^{-2}) = \ln(a^3) + \ln(a^6).$$

2. Pour tout réel x strictement positif :

$$\ln(3x^2 + 15x) = \ln(3) + \ln(x) + \ln(x + 5).$$

110 Déterminer les conditions d'existence, puis résoudre les équations suivantes.

1. $\ln(x - 2) + \ln(x - 32) = 6\ln(2)$

2. $\ln((x - 2)(x - 32)) = 6\ln(2)$

Page 251

134 Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x) - 5x}{3x^2}$ **2.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x + 1}$

135 VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^3)}{x^3} = 1$ **2.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{\ln(x^2)} = +\infty$

137 Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x + 1}\right).$$

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

138 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1 + e^x)$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. a. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle une asymptote horizontale ?

2. Dresser le tableau de variation de f.

3. Démontrer que l'équation $f(x) = m$ admet une unique solution pour tout réel m strictement positif.

4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

5. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de la droite d d'équation $y = x$.

6. Construire la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites T et d.

Page 256 et 249

172 Un produit infini

Partie A : étude de fonctions

1. a. Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln(1+x) - x$.

b. En déduire le signe de $f(x)$.

2. a. Étudier le sens de variation de la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2$.

b. Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de $g(x)$.

3. Justifier que, pour tout réel $x \geqslant 0$:

$$x - \frac{1}{2}x^2 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$$

Partie B : encadrement et limite d'une suite

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \times \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \times \ldots \times \left(1 + \frac{n}{n^2}\right).$$

On pose, pour tout entier $n \geqslant 1$: $v_n = \ln(u_n)$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul,

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. En utilisant les questions précédentes, montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

3. En déduire la limite de la suite (v_n), puis celle de la suite (u_n).

MATHS & PHYSIQUE

106 La troisième loi de Kepler affirme que, pour une planète de notre système solaire, le carré de sa période de révolution T (en années) autour du Soleil est proportionnel au cube de sa distance moyenne d au Soleil, c'est-à-dire : $T^2 = k\,d^3$.

1. Écrire une relation entre les logarithmes népériens de T et de d.

2. Montrer que, dans un repère du plan, les points M de coordonnées $(\ln(d)\,;\ln(T))$ sont alignés.