Suites : DS1-A

Nom	
Prénom	

1. Compléter (3 points)

1. Toute suite décroissante et minorée est _______________.
2. Toute suite _______________ et majorée est convergente.
3. $(-2)^n$ est une suite _____vergente.

corrigé :

1. Toute suite décroissante et minorée est convergente.
2. Toute suite croissante et majorée est convergente.
3. $(-2)^n$ est une suite divergente.

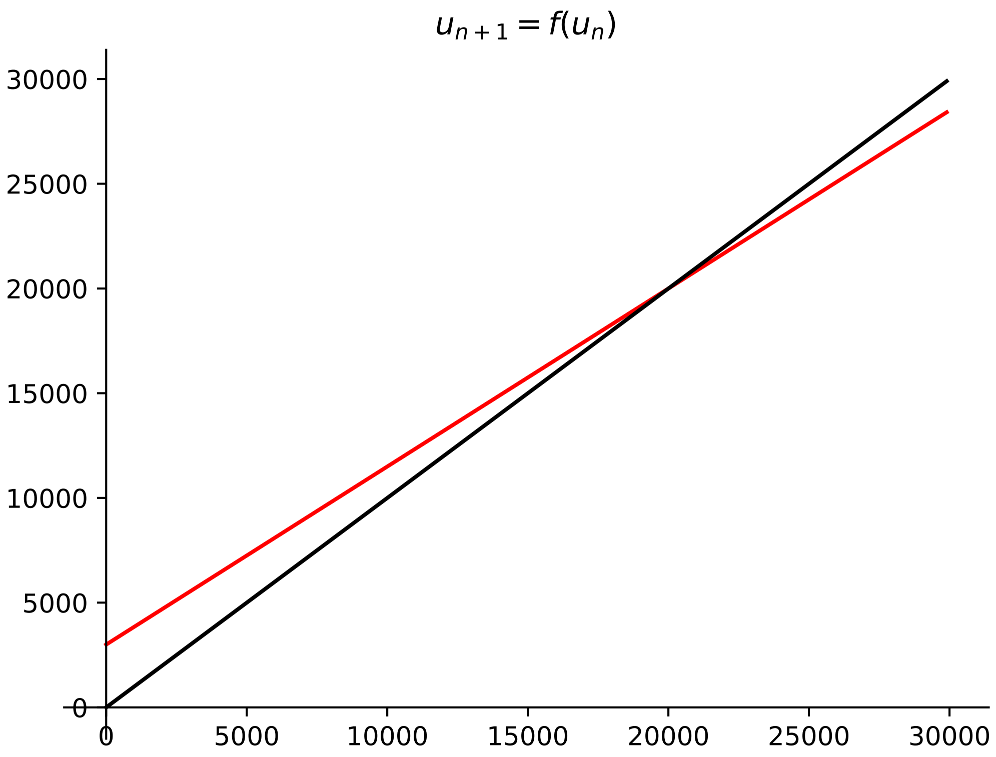
2. Suite récurrente et rugby (10 points)

Fin 2020, un club de rugby comptait 7 000 abonnés.
À la fin de chaque année, le club constate que 15% des abonnés ne se réabonnent pas et que 3 000 nouveaux abonnés arrivent.
On note u_n le nombre d'abonnés à la fin de l'année $2020+n$.

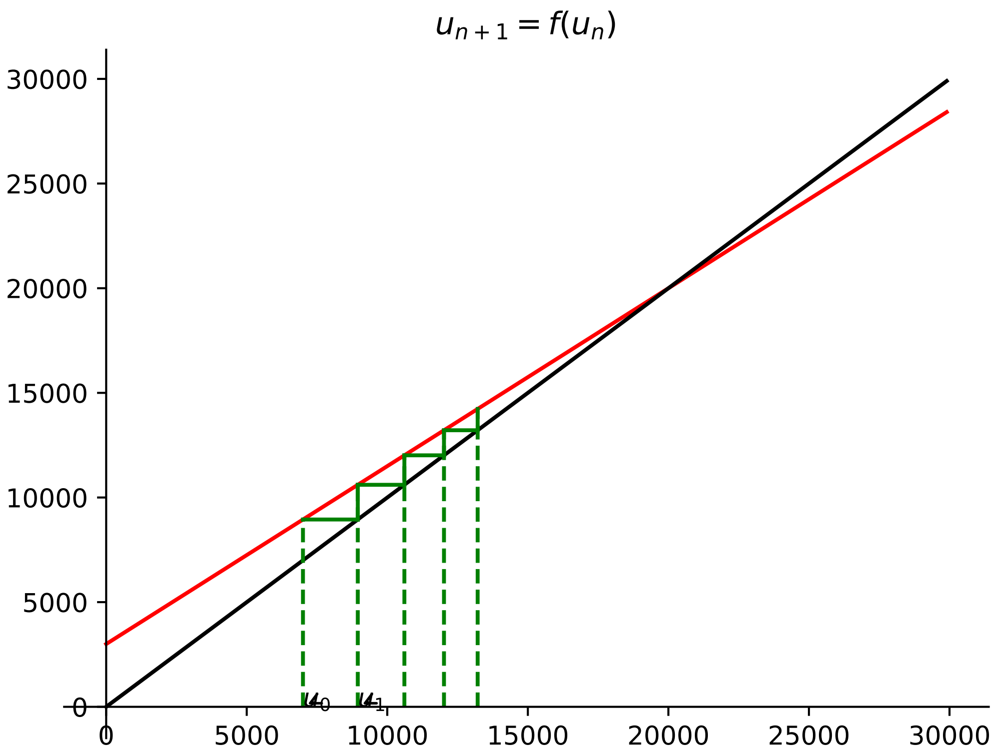
1. Préciser u_0 et expliquer rapidement pourquoi, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 0{,}85u_n + 3\,000$
2. Démontrer que pour tout entier n, la propriété $H_n : u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 30\,000$ est vraie.
3. En déduire que (u_n) est convergente.
4. Construire les quatre premiers termes de la suite (u_n), et repérer la limite éventuelle de la suite sur la figure ci-contre.

corrigé :

1. $u_0 = 7000$; le nombre d'abonnés u_n est réduit de 15%, ce qui revient à le multiplier par 0,85 ; on ajoute ensuite 3000 nouveaux abonnés, d'où la formule de définition de la suite $u_{n+1} = 0{,}85u_n + 3\,000$.
2.
   - Initialisation :
     $u_1 = 0{,}85 \times 7000 + 3000 = 8950$ Donc on a bien $H_0 : u_0 = 7000 \leqslant u_1 = 8950 \leqslant 30000$
   - Hérédité :
     On suppose H_n vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. Démontrons $H_{n+1} : u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 30000$.
     D'après la définition de (u_n), la fonction affine $f(x) = 0{,}85x + 3000$ vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme f est strictement croissante, en l'appliquant à l'inégalité suivante, l'ordre est conservé :
     $H_n : u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 30000$ devient $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(30000)$ donc $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 28500$ et comme 28500<30000, H_{n+1} est vraie
   - Conclusion : H_n est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$
3. (u_n) est croissante et majorée d'après H_n donc elle est convergente.
4. Sur la figure ci-contre.



corrigé :



3. Limites (7 points)

Calculer les limites suivantes (rédiger) :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{n} + n^2 + 4$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{\sqrt{n}}\left(3 + \dfrac{3}{n^2} - \dfrac{2}{n}\right)$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{0{,}46^n - 8}{n^2 + 10}$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5 - 0{,}5^n}{0{,}1^n - 7}$

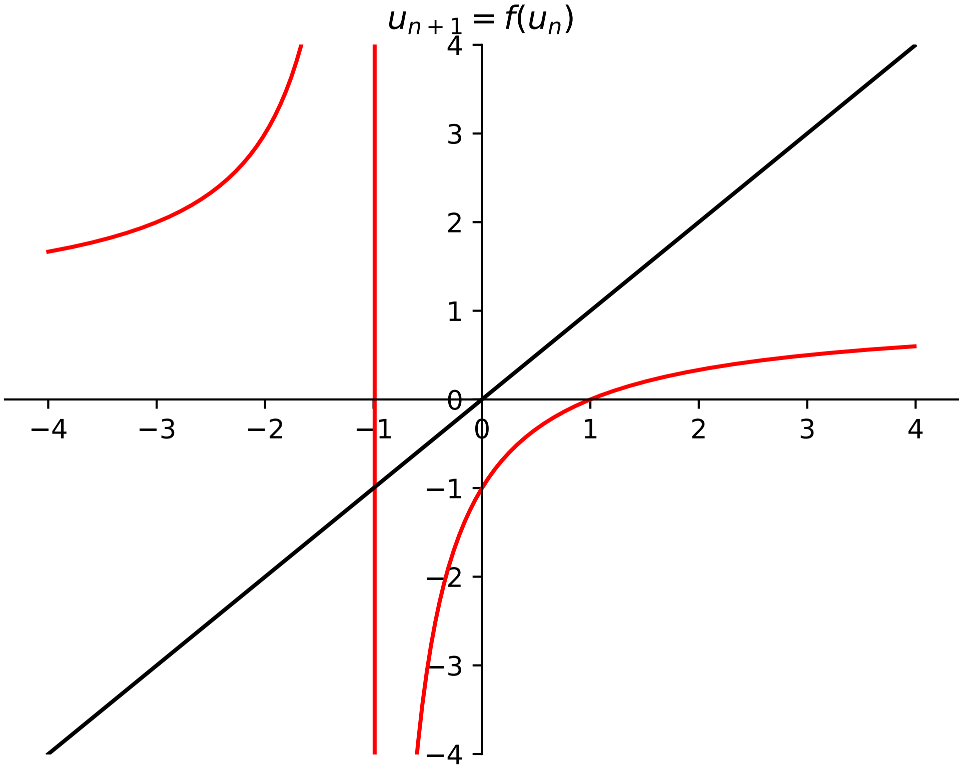
corrigé :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{n} = 0^-$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + 4 = +\infty$ (parabole 🙂), donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{n} + n^2 + 4 = +\infty$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{\sqrt{n}} = 0^+$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3 + \dfrac{3}{n^2} - \dfrac{2}{n}\right) = 3$ car (somme) on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n^2} = 0^+$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{2}{n} = 0^-$
   donc par produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{\sqrt{n}}\left(3 + \dfrac{3}{n^2} - \dfrac{2}{n}\right) = 0^+$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}46^n = 0^+$ car $0{,}46 \in]-1;1[$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + 10 = +\infty$ (parabole 🙂). Par quotient,
   $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{0{,}46^n - 8}{n^2 + 10} = \dfrac{0^+ - 8}{+\infty} = 0^-$
4. Comme $0{,}5; 0{,}1 \in]-1;1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5 - 0{,}5^n}{0{,}1^n - 7} = \dfrac{5 - 0^+}{0^+ - 7} = \dfrac{5^-}{-7^+} = \left(\dfrac{-5}{7}\right)^+$.

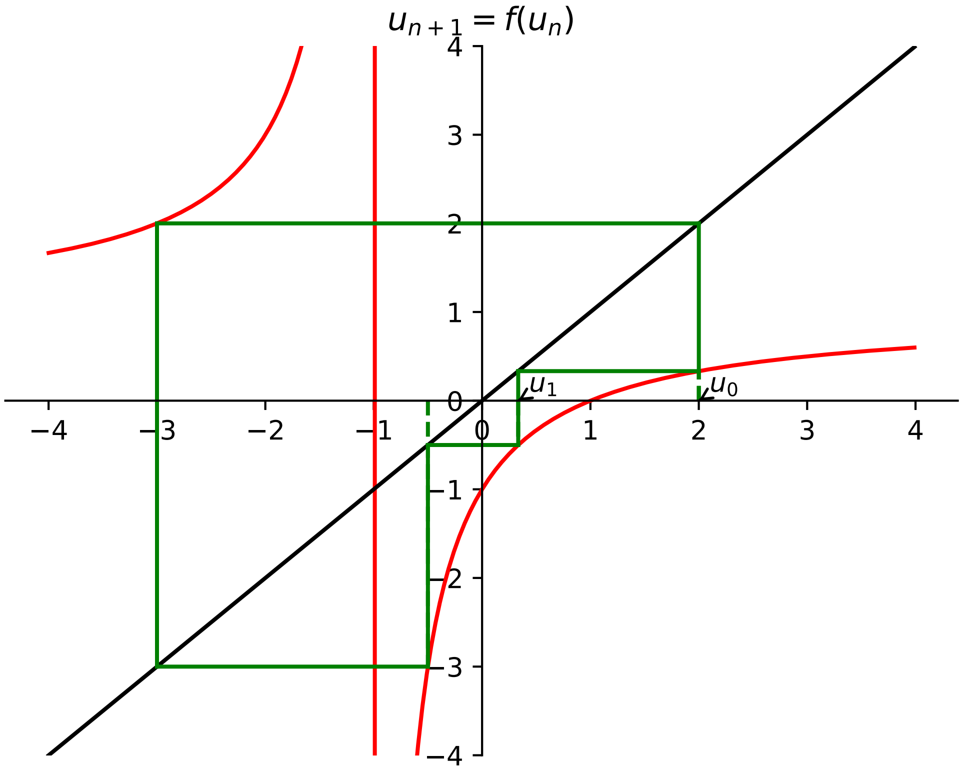
4. Bonus

On définit pour tout entier n la suite (v_n) par $\begin{cases} v_{n+1} = \dfrac{v_n - 1}{v_n + 1} \\ v_0 = 2 \end{cases}$.En expliquant la démarche suivie, calculer v_{2023}.

corrigé : On calcule les premiers termes : $v_1 = \frac{1}{3}$; $v_2 = \frac{-1}{2}$; $v_3 = -3$; $v_4 = 2 = v_0$. De fait, (v_n) est périodique de période 4. Comme $2023 = 505 \times 4 + 3$ (le reste dans la division par 4 de 2023 est 3), $v_{2023} = v_3 = -3$.



$u_{n+1} = f(u_n)$
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4



$u_{n+1} = f(u_n)$
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
u_1
u_0

corrigé :

Suites : DS1-B

Nom	
Prénom	

1. Compléter (3 points)

1. Toute suite croissante et majorée est ________________.
2. Toute suite décroissante et ________________ est convergente.
3. $(-1)^n$ est une suite _______vergente.

corrigé :

1. Toute suite croissante et majorée est convergente.
2. Toute suite décroissante et minorée est convergente.
3. $(-1)^n$ est une suite divergente.

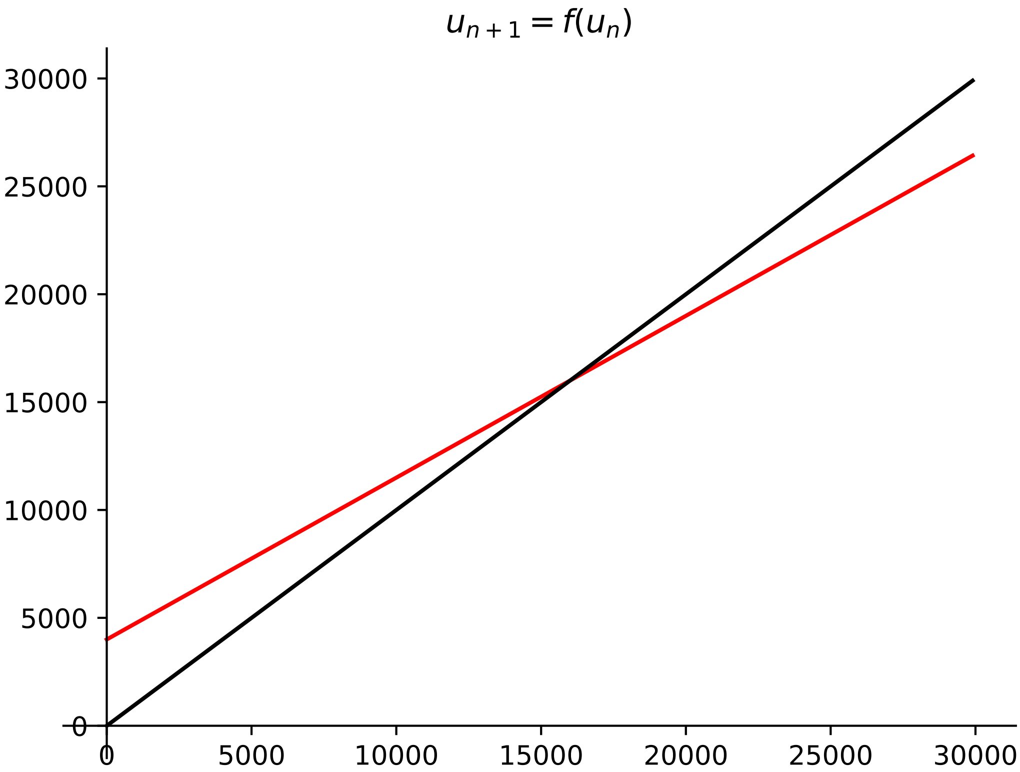
2. Suite récurrente et rugby (10 points)

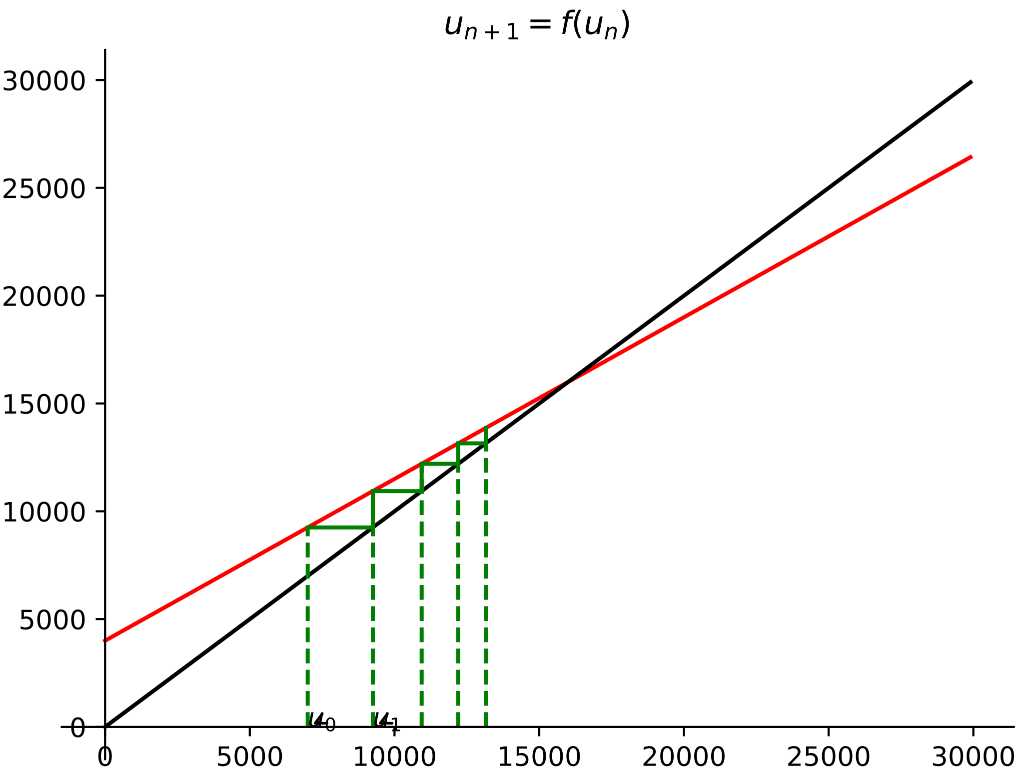
Fin 2020, un club de rugby comptait 7 000 abonnés.
À la fin de chaque année, le club constate que 25% des abonnés ne se réabonnent pas et que 4 000 nouveaux abonnés arrivent.
On note u_n le nombre d'abonnés à la fin de l'année $2020 + n$

1. Préciser u_0 et expliquer rapidement pourquoi, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 0{,}75u_n + 4\,000$
2. Démontrer que pour tout entier n, la propriété $H_n : u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 30\,000$ est vraie.
3. En déduire que (u_n) est convergente.
4. Construire les quatre premiers termes de la suite (u_n), et repérer la limite éventuelle de la suite sur la figure ci-contre.

corrigé :

1. $u_0 = 7000$; le nombre d'abonnés u_n est réduit de 25%, ce qui revient à le multiplier par 0,75 ; on ajoute ensuite 4000 nouveaux abonnés, d'où la formule de définition de la suite $u_{n+1} = 0{,}75u_n + 4\,000$.
2.
   - Initialisation :
     $u_1 = 0{,}75 \times 7000 + 4000 = 9250$ Donc on a bien $H_0 : u_0 = 7000 \leqslant u_1 = 9250 \leqslant 30000$
   - Hérédité :
     On suppose H_n vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. Démontrons $H_{n+1} : u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 30000$.
     D'après la définition de (u_n), la fonction affine $f(x) = 0{,}75x + 4000$ vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme f est strictement croissante, en l'appliquant à l'inégalité suivante, l'ordre est conservé :
     $H_n : u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 30000$ devient $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(30000)$ donc $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 26500$ et comme 26500<30000, H_{n+1} est vraie
   - Conclusion : H_n est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$
3. (u_n) est croissante et majorée d'après H_n donc elle est convergente.
4. Sur la figure ci-contre.





corrigé :

3. Limites (7 points)

Calculer les limites suivantes (rédiger) :

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} 4n + \dfrac{-1}{n^2}$
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-3}{\sqrt{n}}\left(3 + \dfrac{3}{n} - \dfrac{2}{n+10}\right)$
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{0{,}46^n - 1}{n^2}$
4. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{5 - 0{,}9^n}{7 - 0{,}1^n}$

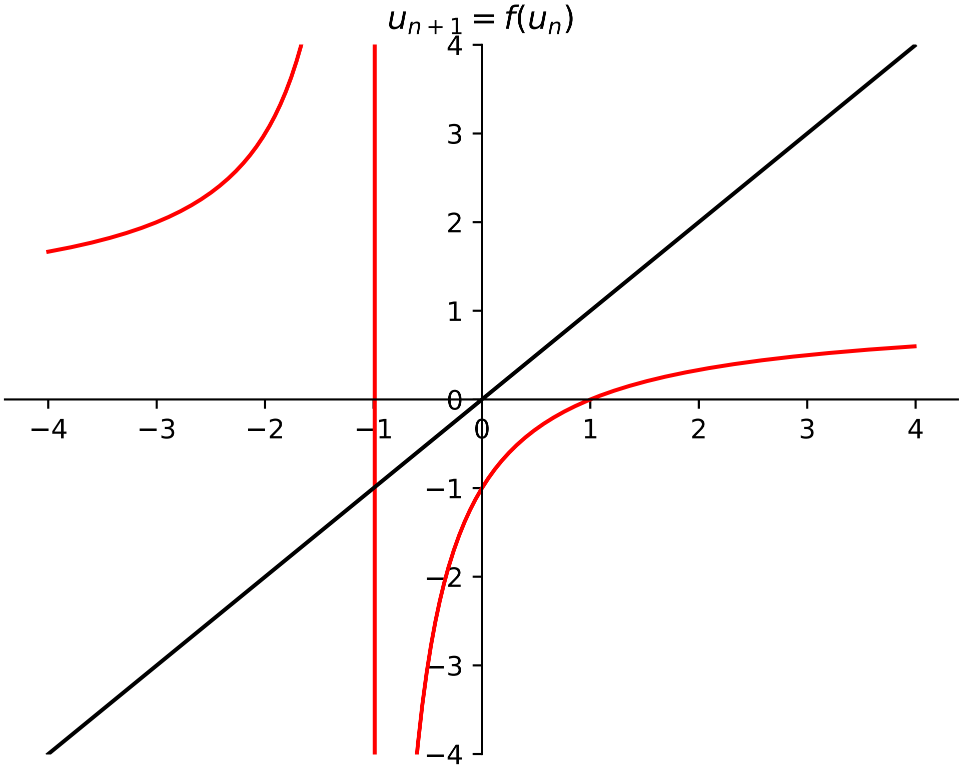
corrigé :

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-1}{n^2} = 0^-$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 4n = +\infty$, donc par somme $\lim\limits_{n \to +\infty} 4n + \dfrac{-1}{n^2} = +\infty$
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-3}{\sqrt{n}} = 0^-$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(3 + \dfrac{3}{n} - \dfrac{2}{n+10}\right) = 3$ car (somme) on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3}{n} = 0^+$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{2}{n+10} = 0^-$ donc par produit : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{4}{\sqrt{n}}\left(3 + \dfrac{3}{n^2} - \dfrac{2}{n}\right) = 0^-$
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}46^n = 0^+$ car $0{,}46 \in \left]-1;1\right[$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 + 10 = +\infty$ (parabole 🙂). Par quotient, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{0{,}46^n - 8}{n^2 + 10} = \dfrac{0^+ - 8}{+\infty} = 0^-$
4. Comme $0{,}9; 0{,}1 \in \left]-1;1\right[$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{5 - 0{,}5^n}{0{,}1^n - 7} = \dfrac{5 - 0^+}{7 - 0^+} = \dfrac{5^-}{7^-} = \dfrac{5}{7}$.

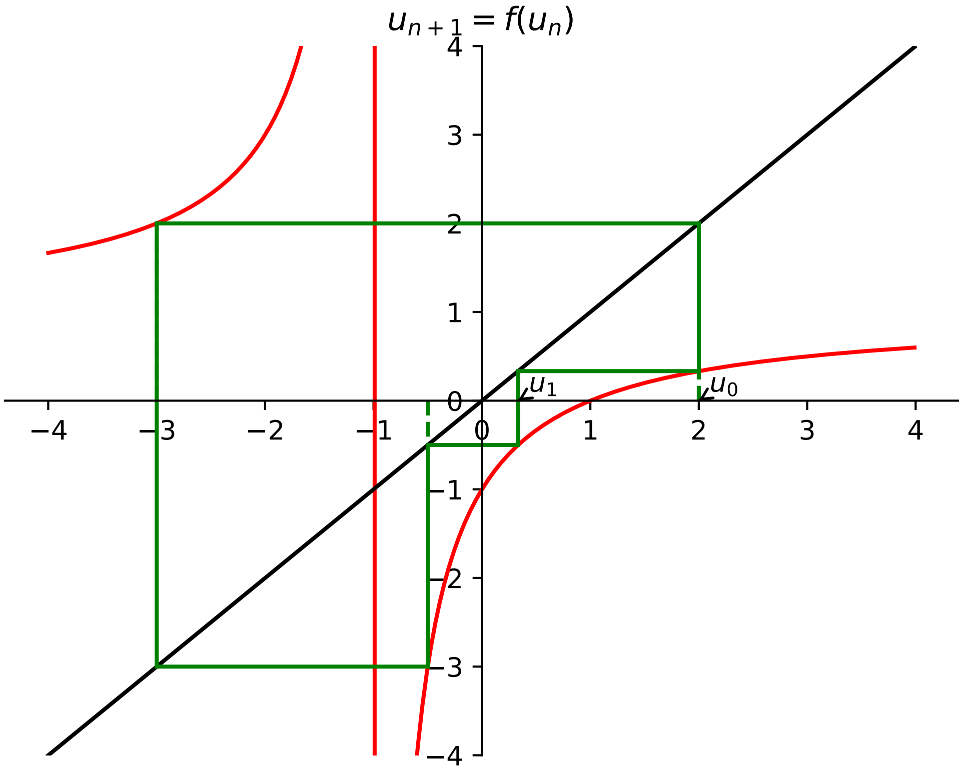
4. Bonus

On définit pour tout entier n la suite (v_n) par $\begin{cases} v_{n+1} = \dfrac{v_n - 1}{v_n + 1} \\ v_0 = 2 \end{cases}$ .En expliquant la démarche suivie, calculer v_{2023}.

corrigé : On calcule les premiers termes : $v_1 = \frac{1}{3}$; $v_2 = \frac{-1}{2}$; $v_3 = -3$; $v_4 = 2 = v_0$. De fait, (v_n) est périodique de période 4. Comme $2023 = 505 \times 4 + 3$ (le reste dans la division par 4



$u_{n+1} = f(u_n)$



$u_{n+1} = f(u_n)$
u_1
u_0

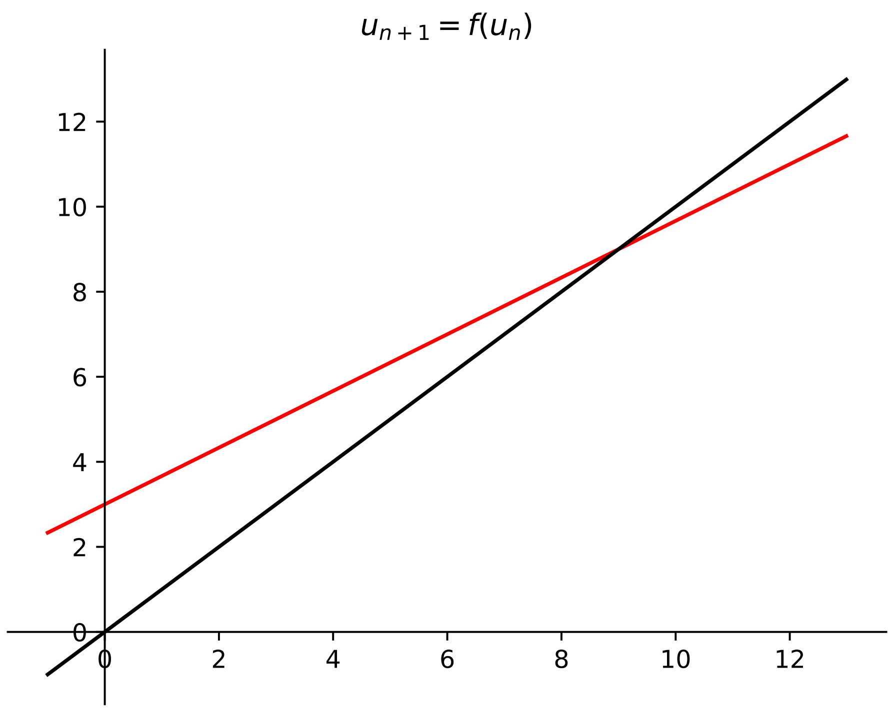
Suites : DS1-C

Nom	
Prénom	

1. Suite récurrente (10 points)

Soit u_n la suite définie par $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + 3 \\ u_0 = 2 \end{cases}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 9$
3. Justifier que la suite (u_n) converge.
4. En utilisant la figure suivante, déterminer la valeur de la limite de (u_n) en $+\infty$.



2. Limites (10 points)

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{4}{4 - n^2}$
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{9 + \frac{3}{n}}{3 - \frac{6}{n^2}}$
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{11}{10 + n - n^2}$
4. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{4 - 1{,}8^n}$
5. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{4 + 0{,}4^n}{4 - 0{,}2^n}$