Partie 1 - Produit scalaire

143 On se place dans le repère orthonormé d'origine A, d'axe

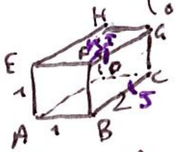
- des x : (AB) $(A \to B)$
- des y : (AD) $(A \to D)$ sens positif
- des z : (AE) $(A \to E)$

a) $\vec{BC} \cdot \vec{BG} = \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix} = 0 + 16 + 0 = 16$

b) $\vec{AB} \cdot \vec{AF} = \begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}8\\0\\4\end{pmatrix} = 64 + 0 + 0 = 64$

c) $\vec{BC} \cdot \vec{HF} = \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}8\\-4\\0\end{pmatrix} = 0 - 16 + 0 = -16$

144



$\begin{cases} \vec{FI} = \frac{1}{4}\vec{AD} \\ \vec{BJ} = \frac{3}{4}\vec{AD} \end{cases}$ $\vec{DK} = \frac{1}{2}\vec{AE}$

Base orthonormée $(\vec{AB}, \frac{1}{2}\vec{AD}, \vec{AE})$

① $\vec{JI} = \vec{JB} + \vec{BF} + \vec{FI}$
$= -\frac{3}{4}\vec{AD} + \vec{AE} + \frac{1}{4}\vec{AD}$
$= -\frac{1}{2}\vec{AD} + \vec{AE}$

② $\vec{JK} = \vec{JB} + \vec{BA} + \vec{AD} + \vec{DK}$
$= -\frac{3}{4}\vec{AD} - \vec{AB} + \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AE}$
$= \frac{1}{4}\vec{AD} - \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AE}$

③ $\vec{JI} \cdot \vec{JK} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

④ IJK est rectangle en J.

147 ① $\vec{AB}\begin{pmatrix}4\\8\\19\end{pmatrix} \cdot \vec{AC}\begin{pmatrix}2\\6\\9\end{pmatrix} = 8 + 48 + 171 = 227$ ⓐ

② $AB = \sqrt{4^2 + 8^2 + 19^2} = \sqrt{441} = 21$ ⓑ

$AC = \sqrt{2^2 + 6^2 + 9^2} = \sqrt{121} = 11$

③ $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \times AC} = \frac{227}{21 \times 11} = \frac{227}{231}$

ⓒ $\widehat{BAC} \approx 10{,}68°$

Partie 2 - Plans et droites

151 a) $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\0\\5\end{pmatrix} \cdot \vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 10 \neq 0$

$\vec{n}\begin{pmatrix}5\\0\\5\end{pmatrix} \cdot \vec{v}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 10 \neq 0$

$\to \vec{n} \not\perp \vec{u}, \vec{v}$ FAUX

b) $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix} \cdot \vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 3 - 3 = 0$

$\vec{n}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix} \cdot \vec{v}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 3 - 3 = 0$

$\to \vec{n} \perp \vec{u}, \vec{v}$ donc $\vec{n} \perp P$ VRAI

c) les $k\vec{n}$ pour $k \in \mathbb{R}^*$ $(k \neq 0)$ sont des vecteurs normaux de P (une infinité) VRAI

157 ① $\vec{AB}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ sont non colinéaires (cf 4)

② a) A, B, C vérifient l'équation du plan.

b) $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\-5\\2\end{pmatrix}$

160 $\vec{BC}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ $\vec{BD}\begin{pmatrix}7\\5\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{CD}\begin{pmatrix}6\\5\\3\end{pmatrix}$

$BC^2 = 5$ $BD^2 = 75$ $CD^2 = 70$

donc $BD^2 = BC^2 + CD^2$

donc BCD est rectangle en C.

Aire$(BCD) = \frac{1}{2}$ Base $\times$ hauteur $= \frac{1}{2} BC \times DC$

$= \frac{1}{2}\sqrt{5} \times \sqrt{70} = \frac{5}{2}\sqrt{14}$

$\vec{AH}\begin{pmatrix}-4\\6\\2\end{pmatrix}$ $AH = \sqrt{16 + 36 + 4} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$

Vol$(ABCD) = \frac{\text{Base} \times \text{hauteur}}{3} = \frac{\frac{5}{\cancel{2}}\sqrt{14} \times \cancel{2}\sqrt{14}}{3} = \frac{70}{3} = 23{,}33\ldots$

Partie 3 - Projeté ⊥

152 $P : 2x + y + z + 1 = 0$ ← $A \in P$

① H vérifie l'éq de P.

② c'est vrai si $\vec{BH} \perp P$

donc si $\vec{BH}$ est colinéaire à $\vec{n}$

$\vec{BH}\begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ $\times 2$ $\vec{BH} = 2\vec{n}$ donc c'est vrai,

H est le proj ⊥ de B sur P

③ $BH^2 = 16 + 4 + 4 = 24$

donc $d(B, P) = BH = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

159 droite passant par A et ⊥ au plan P :

$A + k\vec{n}$

$\to \begin{cases} x = -8 - k \\ y = 17 + 2k \\ z = 8 + k \end{cases}$

- son intersection avec P :

$-x + 2y + z + 4$

$= -(-8 - k) + 2(17 + 2k) + 8 + k + 4$

$= +8 + k + 34 + 4k + 8 + k + 4$

$= 50 + 6k + 4$

$= 54 + 6k$

donc $54 + 6k = 0$

$k = 9$

$H\begin{pmatrix}x = -17\\y = 35\\z = 17\end{pmatrix}$