Exercices - Eq. Différentielles

Ex 115 (E) : $y' = -2y + 3 \iff y' + 2y = 3$

1. SP

3, le second membre, est constant, donc il existe une solution constante

$\rightarrow y' = 0 \Rightarrow 2y = 3$

$\boxed{y = 1{,}5}$

2. SH

$y' + 2y = 0$ est l'éq. homogène associée à (E)

$\iff y' = -2y$

$\boxed{y = ke^{-2t}}$ solutions :

On superpose

$y(t) = 1{,}5 + ke^{-2t}$

Ex 116 (E) : $y' + 4y = 8$

SP

8, 2nd membre est une constante, donc il existe une solution constante

$y' = 0 \Rightarrow 4y = 8$

$\boxed{y = 2}$

SH → Éq. homogène associée :

$y' + 4y = 0$

$\iff y' = -4y$

$\boxed{y = ke^{-4t}}$ solution

$y = 2 + ke^{-4t}$

Ex 117 (E) : $2y' + 6y = 1$

SP

1 est un second membre constant donc il existe une solution constante

$y' = 0 \Rightarrow 6y = 1 \iff \boxed{y = \frac{1}{6}}$

→ Eq. Homogène associée

$2y' + 6y = 0$

$\iff 2y' = -6y$

$\iff y' = -3y$

$\boxed{y = ke^{-3t}}$ solution

$y = \frac{1}{6} + ke^{-3t}$

condition initiale

La solution passe par le point $A(t = 2 \ ; \ y = 0)$

donc $0 = y(2) = \frac{1}{6} + ke^{-3\times 2}$

$\iff ke^{-6} = \frac{-1}{6}$ $\times e^{6}$

$\iff k = \frac{-e^{6}}{6}$

D'où $y(t) = \frac{1}{6} - \frac{e^{6}}{6} e^{-3t} = \frac{1 - e^{6-3t}}{6}$

Ex 118 (E) $y' + 0{,}0002y = 0{,}02$

cf les exercices précédents pour la méthode et la rédaction

SP

$y' = 0 \Rightarrow 0{,}0002y = 0{,}02$

$\iff y = \frac{0{,}02}{0{,}0002} = 100$

SH

$y' + 0{,}0002y = 0$

$y' = -0{,}0002y$

$y = ke^{-0{,}0002t}$

Solution

$g(t) = 100 + ke^{-0{,}0002t}$

Condition initiale $g(0) = 20°C$

$20 = g(0) = 100 + ke^{-0{,}0002\times 0}$

$\iff 20 = 100 + k$

$\iff k = -80$ donc $g(t) = 100 - 80e^{-0{,}0002t}$

2. t est en secondes : $1h = 3600s \Rightarrow g(3600) = 100 - 80e^{-0{,}0002\times 3600}$
$\simeq 61{,}06\,°C$

3. On doit résoudre :

$$g(t) \geq 85 \Leftrightarrow 100 - 80e^{-0{,}0002t} \geq 85$$
$$\Leftrightarrow -80e^{-0{,}0002t} \geq 85 - 100 = -15 \quad \Big) : -80 < 0$$
$$\Leftrightarrow e^{-0{,}0002t} \leq \frac{-15}{-80} = \frac{3}{16} \quad \Big) \ln \nearrow$$
$$\Leftrightarrow -0{,}0002t \leq \ln\frac{3}{16}$$
$$\Leftrightarrow t \geq \left(\ln\frac{3}{16}\right) / -0{,}0002 \quad \Big) : -0{,}0002 < 0$$
$$\Leftrightarrow t \geq 8369{,}88 = 2h\ 19min\ 29{,}88s$$

$\boxed{\text{Ex 112}}$ 1. $g' + Kg = 0$ (cette équation est (déjà) homogène)
$\rightarrow$ SH : $g' = -Kg \Leftrightarrow g = ke^{-Kt}$
condition initiale : $g(0) = 2$ donc $ke^{-K\times 0} = k = 2$
d'où $g(t) = 2e^{-Kt}$

2. On exprime en fonction de K l'expression $G_1 = 2e^{-Kt_1}$

$$G_1 = 2e^{-Kt_1} \Leftrightarrow e^{-Kt_1} = \frac{G_1}{2} \quad \Big) \ln$$
$$\Leftrightarrow -Kt_1 = \ln(G_1/2)$$
$$\Leftrightarrow K = \frac{-1}{t_1}\ln(G_1/2) = \ln(2/G_1)/t_1$$

3. $\begin{cases} G_1 = 1{,}2 \\ t_1 = 30 \end{cases} \Rightarrow K = \ln(2/1{,}2)/30 = 0{,}0170 \in [0{,}0106\ ;\ 0{,}0262]$
donc X a une glycémie normale.

$\boxed{\text{Ex 119}}$ 1. Faux, c'est $f(x) = -\frac{2}{3} + Ce^{3x}$

2. Vrai : $f(x) = \frac{1}{3}(5e^{3x} - 2) = \frac{5}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}$
est bien une solution ($k = 5/3$) et $f(0) = 1$

3. $f'(x) = 2 + 3f(x)$ donc $f'(0) = 2 + 3f(0)$
$= 3 \Leftrightarrow 3 = 2 + 3f(0)$
VRAI. $\Leftrightarrow f(0) = +1/3 \Rightarrow k = 1$

$\boxed{\text{Ex 120}}$ $2y' = y - 1$

SP : $\boxed{y = 1}$

$\rightarrow$ SH : $2y' = y$
$y' = \frac{1}{2}y$
$\boxed{y = ke^{\frac{t}{2}}}$) Sol

$y(t) = 1 + ke^{t/2}$
$\Rightarrow y(0) = 1 + k \Rightarrow k = y(0) - 1$

$\mathscr{C}_1$: $y(0) = -1$, $k = -2$: $\boxed{1 - 2e^{t/2}}$

$\mathscr{C}_2$: $y(0) = 0$, $k = -1$: $\boxed{1 - e^{t/2}}$

$\mathscr{C}_3$: $y(0) = 2$, $k = 1$: $\boxed{1 + e^{t/2}}$

$\mathscr{C}_4$: $y(0) = 4$, $k = 3$: $\boxed{1 + 3e^{t/2}}$