# Intégrales - Cours

## 1. Introduction

L'intégrale est un outil fondamental pour les mathématiques et sciences physiques : elle permet, par exemple les calculs d'aires délimitées par des courbes, le calcul de valeurs moyennes, les calculs de volumes, d'énergie, etc...
Le calcul d'intégrales utilise les primitives.

## 2. Primitives

Dans toute cette partie, on se place sur un intervalle $I$.

📕 ***Définition 1 :*** *On dit qu'une fonction $f$ définie sur $I$ admet une **primitive** $F$ lorsque l'on a : $F' = f$*

🌄 **Exemple 1 :** Sur $\mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ est une primitive de $f(x) = x$ car : $F'(x) = \left(\frac{1}{2}x^2\right)' = \frac{1}{2} \times 2x = x = f(x)$

📋 **Remarque 1 :** On peut observer que $G(x) = \frac{1}{2}x^2 + 10$ est aussi une primitive de $x$ puisque $10' = 0$, ce qui nous conduit à énoncer la propriété qui suit :

📙 **Propriété 1 :** Sur un même intervalle, toutes les primitives diffèrent d'une constante, c'est à dire :

- si $k$ est une constante réelle et si $F$ est une primitive de $f$ sur $I$, alors $G = F + k$ est aussi une primitive de $f$ sur $I$ ;
- toutes les autres primitives de $f$ sur $I$ sont de la forme $F + k$ pour une certaine contante $k$.

**Démonstration :** Soit $F$ une primitive de $f$ sur $I$ et $k$ une constante réelle.

- On pose $G(x) = F(x) + k$ ; On a pour tout $x$ dans $I$ :
  $G'(x) = (F(x) + k)' = F'(x) + k' = f(x) + 0 = f(x)$, donc $G = F + k$ est aussi une primitive de $f$ sur $I$ .
- Soit $H$ une autre primitive de $f$ sur $I$. On a alors pour tout $x$ dans $I$,
  $(H - F)'(x) = H'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$.
  $H - F$ est donc une fonction constante de valeur un réel $k$ fixé. On a alors pour tout $x \in I$,
  $H(x) - F(x) = k$ donc $H(x) = F(x) + k$. Toutes les primitives de $f$ diffèrent donc d'une constante.

✏️ **Exercice 1 :** Déterminer la primitive $F$ (sur $\mathbb{R}$) de $f(x) = x^2$ telle que $F(2) = 3$.

### 2.1. Propriétés des primitives

📙 **Propriété 2 :** Soit $f$ et $g$ deux fonctions admettant deux primitives $F$ et $G$ sur un intervalle $I$, et $k$ une constante réelle. Alors :

- **Multiplication par une constante :** $kF$ est une primitive de $kf$.

  🌄 **Exemple 2 :** $x^3$ est une primitive de $3x^2$, donc $\frac{1}{3}x^3$ est une primitive de $\frac{1}{3}3x^2 = x^2$.

- **Somme :** $F + G$ est une primitive de $f + g$.

  🌄 **Exemple 3 :** $x^3 + x$ est une primitive de $3x^2 + 1$

📋 **Remarque 2 : Attention :** $FG$ n'est pas une primitive de $fg$ et $\dfrac{F}{G}$ n'est pas une primitive de $\dfrac{f}{g}$; en effet

$(FG)' = F'G + FG' = fG + Fg \neq fg$ et $\left(\dfrac{F}{G}\right)' = \dfrac{fG - gF}{G^2} \neq \dfrac{f}{g}$.

Contre-exemple : $1 = 1 \times 1$ **n**'admet **pas** pour primitive $x \times x = x^2$, car la dérivée de $x^2$ est $2x$ et pas 1 !

📗 **Méthode 1 :** Pour calculer une primitive, il faut souvent développer.

✏️ **Exercice 2 :** Déterminer une primitive sur $]0; +\infty[$ de : $f(x) = (1 + 2x^2)^2$ et de $g(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2}$

### 2.2. Primitives usuelles

📙 **Propriété 3 : Primitives usuelles :**

| Fonction | Primitive |
|---|---|
| $k$ (cte) | $kx$ |
| $x$ | $\frac{x^2}{2}$ |
| $x^2$ | $\frac{x^3}{3}$ |
| $x^\alpha$ $(\alpha \neq -1)$ | $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ |
| $\sqrt{x}$ | $\frac{2}{3}x\sqrt{x}$ |
| $\cos(\omega x)$ | $\frac{1}{\omega}\sin(\omega x)$ |
| $\sin(\omega x)$ | $\frac{-1}{\omega}\cos(\omega x)$ |
| $\dfrac{1}{1+x^2}$ | $\arctan(x)$ |

📙 **Propriété 4 : Primitives composées :** Si $u$ et $v$ sont des fonctions dérivables :

| Fonction | Primitive |
|---|---|
| $u'u^n$ $(n \in \mathbb{N}^*; u \neq 0)$ | $\frac{u^{n+1}}{n+1}$ |
| $u'\mathrm{e}^u$ | $\mathrm{e}^u$ |
| $\dfrac{u'}{u}$ $(u \neq 0)$ | $\ln(\lvert u\rvert)$ |
| $u'v' \circ u$ | $v \circ u$ |

✏️ **Exercice 3 :** Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3$
2. $g(x) = 3x$
3. $h(x) = 3x^2 - 7x + 2$
4. $i(x) = \left(3x - \dfrac{1}{x}\right)^2$
5. $j(x) = \dfrac{2}{2x+3} + \dfrac{1}{x^2}$
6. $k(x) = 30x(1+x^2)^{14}$
7. $l(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$
8. $m(x) = (x+3)\mathrm{e}^{-2x}$
9. $\dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$ (décomposer en $\dfrac{a}{x-3} + \dfrac{b}{x-2}$)

### 2.3. Notation crochet

📕 ***Définition 2 :** Soit $F$ une primitive de $f$ définie sur un intervalle $I$ et $a$ et $b$ dans $I$.*
*Pour noter une différence entre deux valeurs d'une même primitive, on utilise cette notation, appelée **«notation crochet»** :* $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

✏️ **Exercice 4 :** Calculer :

1. $A = \left[x^3 - x\right]_1^2$
2. $B = \left[x - \dfrac{1}{x}\right]_{10}^{20}$

📋 **Remarque 3 :** Attention au signe moins qui se répercute sur tout le «bloc» $F(a)$, il faut mettre des parenthèses en remplaçant $F(a)$ par son expression lorsque $F$ est une somme !

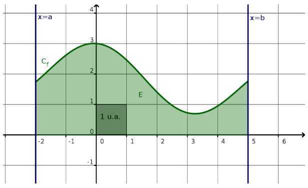
## 3. Intégrale d'une fonction

### 3.1. Définition

📕 ***Définition 3 :** $f$ est une fonction admettant une primitive $F$ sur un intervalle $I$ et $a, b \in I$ sont deux réels fixés. On appelle intégrale de $a$ à $b$ de $f$ le nombre noté :* $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$

📋 **Remarque 4 :** Cette définition est bien indépendante de la primitive choisie : comme les primitives de $f$ diffèrent d'une constante, l'écart entre deux valeurs d'une primitive de $f$ ne dépend pas du choix de cette primitive.

### 3.2. Interprétation graphique :




📙 **Propriété 5 :** Si $f$ est une fonction **positive** sur [a;b], alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ donne l'aire $\mathcal{A}(E)$, en unités d'aires (notées u.a.) du domaine $E$ délimité par la courbe de $f$, l'axe $(Ox)$ et les deux droites verticales passant par les abscisses $a$ et $b$.

📋 **Remarque 5 :** $E$ est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$.

✏️ **Exercice 5 :** Écrire, sous la forme d'une intégrale, l'aire $\mathcal{A}(E)$ du domaine $E$ indiqué sur le graphique.

✏️ **Exercice 6 :** Déterminer l'aire délimitée par la parabole d'équation $y = x^2$, l'axe $(Ox)$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

✏️ **Exercice 7 :**

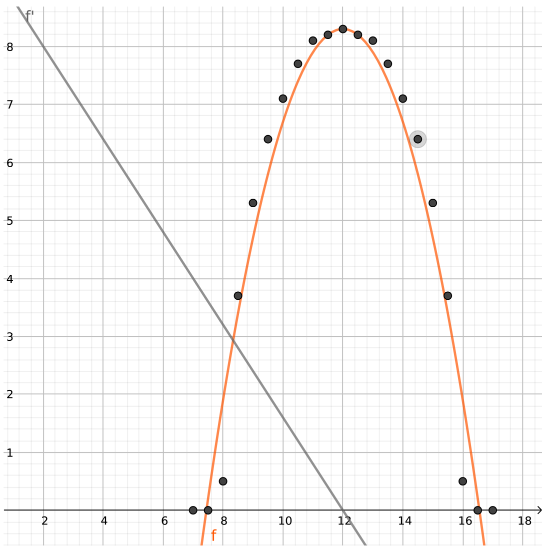
D'après pseau.org : « L'eau solaire » consiste à capter l'énergie solaire via des panneaux photovoltaïques pour produire de l'électricité qui alimente une pompe électrique permettant d'assurer l'exhaure de l'eau.
Le plus souvent utilisée dans les zones rurales non desservies par le réseau électrique, l'énergie solaire est depuis plusieurs années déjà une alternative à l'énergie « thermique » (produite au moyen d'un groupe électrogène) pour faire fonctionner les systèmes de pompage.
L'énergie solaire n'est disponible que 6 heures par jour environ, elle atteint son intensité maximale au zénith.

**Mesures :** On mesure, en mètre cube par heure, le débit $y$ d'une pompe alimentée par un panneau solaire, en fonction de l'heure solaire $x$ (en heure).

| $x$ | 7 | 7,5 | 8 | 8,5 | 9 | 9,5 | 10 | 10,5 | 11 | 11,5 | 12 | 12,5 | 13 | 13,5 | 14 | 14,5 | 15 | 15,5 | 16 | 16,5 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0 | 0,5 | 3,7 | 5,3 | 6,4 | 7,1 | 7,7 | 8,1 | 8,2 | 8,3 | 8,2 | 8,1 | 7,7 | 7,1 | 6,4 | 5,3 | 3,7 | 0,5 | 0 | 0 |

Observer et commenter les valeurs de $y$ en fonction de $x$.

Dans Geogebra, on a sélectionné `afficher / tableur` puis on a entré les valeurs comme ci-dessous. En sélectionnant l'ensemble des valeurs sur les deux colonnes puis en faisant `clic droit / créer une liste de points`, on a obtenu la figure ci-contre ; on a tracé un ajustement quadratique $f$ (polynôme de degré 2) passant près de ces points.




**Détermination du volume d'eau :**

1. Sur le graphique, quel sens physique donner à l'aire d'un rectangle de côtés parallèles aux axes ?
2. Déterminer et expliquer une méthode permettant de calculer, avec une assez bonne approximation, le volume $V$ d'eau pompée dans la journée.
3. Calculer les débits moyens sur une base des 10 heures de fonctionnement, ainsi que sur une base de 24 heures.
4. Pourrait-on représenter simplement ce volume calculé par une aire sur le graphique ?

**Modélisation par une fonction :** On utilise un logiciel pour effectuer un ajustement quadratique (de degré 2): $f(x) = -0,4x^2 + 9,6x - 49,3$ des mesures du débit en fonction du temps.

1. Donner, approximativement, l'intervalle sur lequel l'ajustement a un sens.
2. Sur la figure, on a aussi tracé la dérivée $f'(x)$.Comment lui donner un sens physique ? Interpréter.

**Calcul précis du volume d'eau pompée :**

1. Graphiquement : repérer le volume d'eau d'eau pompée sur le graphique, délimité par la courbe de $f$.
2. Écrire ce volume en se servant d'une intégrale dont on précisera les bornes.
3. Déterminer une primitive de $f$ : et calculer ce volume ; comparer avec la mesure précédemment obtenue.

## 4. Propriétés de l'intégrale

Dans cette partie, $f, g$ sont deux fonctions admettant des primitives sur $[a; b]$ et $k$ une constante.

📙 **Propriété 6 : Permutation des bornes**

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

**Démonstration :** En effet, on a : $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

📙 **Propriété 7 : Linéarité :**

$f, g$ sont deux fonctions admettant des primitives sur $[a; b]$ et $k$ une constante. Alors :

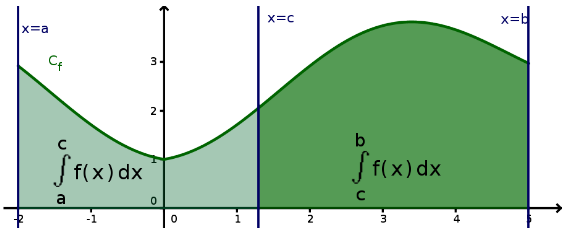
$\displaystyle\int_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

**Démonstration :** hérité des propriétés sur les primitives.

📙 **Propriété 8 : Relation de Chasles :**

Pour tous réels $a,\ b,\ c$ dans $I$ :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$




**Démonstration :** $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ et $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - \cancel{F(c)} + \cancel{F(c)} - F(a)$

📙 **Propriété 9 : Ordre :**

$f, g$ sont deux fonctions admettant des primitives sur $[a; b]$. Si $f \leqslant g$ sur $[a; b]$, alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

📋 **Remarque 6 :** Attention : il faut bien vérifier que $a \leqslant b$ pour avoir ce résultat (c'est ici garanti par la notation [a;b] ; en effet, in intervalle [a;b] avec a>b est par convention vide).

**Démonstration :** $f \leqslant g$ donc $g - f \geqslant 0$, or $g - f$ est la dérivée de $G - F$ qui est croissante donc $G(a) - F(a) \leqslant G(b) - F(b)$, donc $F(b) - F(a) \leqslant G(b) - G(a)$, donc $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

📙 **Propriété 10 : Conséquence :**

Si $f \geqslant 0$ sur $[a; b]$ alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ et si $f \leqslant 0$ sur $[a; b]$ alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$.

## 5. Construction de primitives

📙 **Propriété 11 :** Si $f$ est une fonction admettant une primitive $F$ sur un intervalle $I$ si $a$ est un nombre dans $I$, et si $b$ est une valeur donnée, alors $\displaystyle F_a(x) = y_0 + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de $f$ qui vaut $y_0$ en $a$.

**Démonstration :** Soit $F$ une primitive de $f$ ; $[F_a(x)]' = (y_0 + [F(x) - F(a)])' = 0 + F'(x) + 0 = f(x)$ donc $F_a$ est bien une primitive de $f$ ; de plus on a bien : $F_a(b) = y_0 + F(a) - F(a) = Y_0$.

Si $G$ est une autre primitive de $f$ sur $I$ vérifiant $G(a) = b$, alors on a pour tout $x$ dans $I$ : $F_a(x) - G(x) = k$, où $k$ est une constante. Comme $F_a(a) = G(a) = b$, on a $k = 0$, donc $G = F_a$. $F_a$ est donc bien l'unique primitive de $f$ qui vaut $y_0$ en $a$.

✏️ **Exercice 8 :** Déterminer ainsi, sur le plus grand intervalle possible :

1. la primitive $F$ de $f(x) = 3x^3 + 1$ qui s'annule en $x = 4$.
2. la primitive $G$ de $g(x) = \sqrt{x}$ qui vérifie $G(3) = 6$.

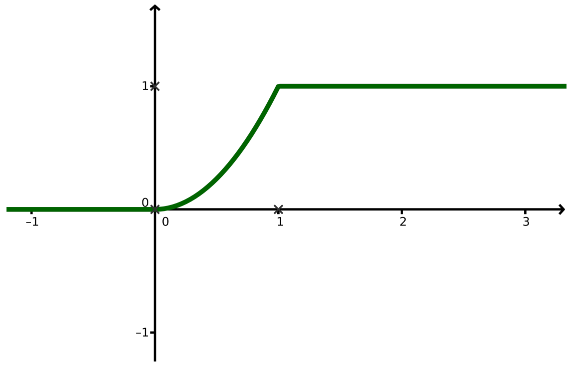
## 6. Intégrale d'une fonction définie par morceaux

📙 **Propriété 12 :** Soit $f$ une fonction définie par morceau, c'est à dire donnée par des expressions distinctes sur plusieurs intervalles ; supposons qu'elle admette des primitives sur chacun de ces intervalles. Il est possible de calculer l'intégrale d'une telle fonction en étendant la définition de l'intégrale à l'aide de la relation de Chasles.

📗 **Méthode 2 :** On découpe, selon le principe de la relation de Chasles, l'intégrale sur chacun des morceaux donnés dans la définition de la fonction.

🌄 **Exemple 4 :**

Soit $f(x) = \left| \begin{array}{l} 0 \text{ si } x \leqslant 0 \\ x^2 \text{ si } 0 < x \leqslant 1 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{array} \right.$




On a :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{0} 0\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x^2\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{3} 1\,\mathrm{d}x \\ &= 0 + \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 + [x]_1^3 \\ &= \frac{1}{3} - 0 + 3 - 1 \\ &= 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}\end{aligned}$$

📋 **Remarque 7 :** La relation de Chasles, ainsi étendue, reste évidemment valide dans le cas des fonctions définies par morceaux.

✏️ **Exercice 9 :** Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$
2. $\int_1^2 \frac{3x^2 - 4x + 2}{x}\,\mathrm{d}x$ (développer !)
3. $\int_0^1 8(2x-1)^3\,\mathrm{d}x$
4. $\int_{-1}^1 2x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$
5. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$
6. $\int_0^1 (e^x - 1)(e^x - x)\,\mathrm{d}x$
7. $\int_1^2 2x\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$
8. $\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x$
9. $\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$
10. $\int_0^{0,1} (1 + \cos(20\pi x))\,\mathrm{d}x$
11. $\int_1^2 (1-5x)^3\,\mathrm{d}x$
12. $\int_1^e \frac{1}{x \ln x}\,\mathrm{d}x$

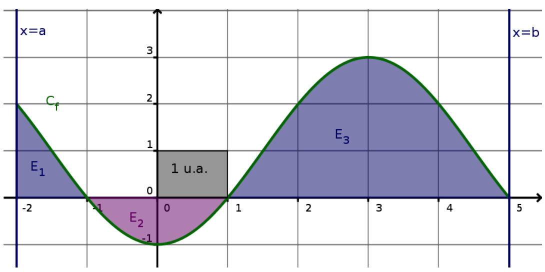
# 7. Calcul d'aires

## 7.1. Avec une fonction de signe variable

📋 **Remarque 8 :** Si $f$ est une fonction de signe non constant sur $[a; b]$, alors l'intégrale de $a$ à $b$ de la fonction $f$ est la somme des «aires algébriques» des domaines situés entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ (c'est à dire, sur les intervalles où $f \geq 0$, l'aire entre la courbe et l'axe est comptée posivement, et si $f \leq 0$, négativement).

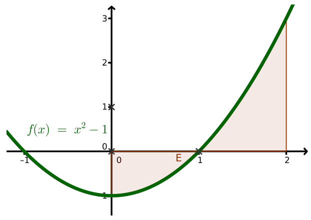
✏️ **Exercice 10 :**

$\int_{-2}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = \mathcal{A}(E_1) - \mathcal{A}(E_2) + \mathcal{A}(E_3)$ Alors que si l'on veut obtenir l'aire du domaine $E_1 \cup E_2 \cup E_3$, il faudra utiliser la relation de Chasles et prendre l'opposé sur la partie comptée négativement par l'intégrale (sur $[-1; 1]$ dans l'exemple donné).




Ainsi : $\mathcal{A}(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = \overbrace{\int_{-2}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x}^{f \geq 0} - \overbrace{\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x}^{f \leq 0} + \overbrace{\int_{1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x}^{f \geq 0}$

✏️ **Exercice 11 :**
Calculer l'aire du domaine $E$ délimité par la courbe d'équation $y = x^2 - 1$, l'axe $(Ox)$ et les droites verticales d'équation $x = 0$ et $x = 2$.




📙 **Propriété 13 :** L'aire du domaine $E$ délimité par la courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe $(Ox)$ et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$ est : $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$

On rappelle que $|f| = \begin{vmatrix} f \text{ si } f \geqslant 0 \\ -f \text{ si } f \leqslant 0 \end{vmatrix}$

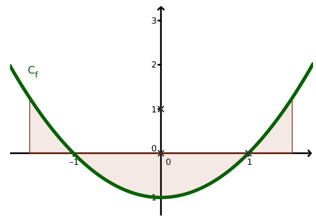
✏️ **Exercice 12 :** Sur la figure, dans l'exercice précédent, tracer la fonction $|f|$ et observer.

## 7.2. Parité : Fonctions paires

📕 ***Définition 4 :*** *Une fonction $f$ est **paire** lorsqu'elle est définie sur un ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ symétrique par rapport à 0 (par exemple $[-1,5; 1,5]$) et vérifie les conditions (équivalentes) suivantes :*

- *pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = f(-x)$.*
- *la courbe de $f$ est symétrique par rapport à l'axe vertical $(Oy)$.*

🌄 **Exemple 5 :**




🌄 **Exemple 6 :** les fonctions définies par : $x^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$ pair, $\cos(x)$, $\cosh(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ sont des fonctions paires.

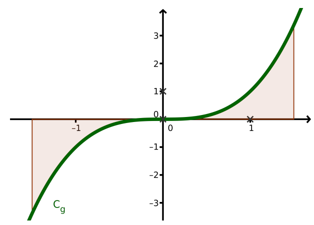
📙 **Propriété 14 :** Si $f$ est paire, alors : a$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

## 7.3. Parité : Fonctions impaires

📕 ***Définition 5 :*** *Une fonction $f$ est **impaire** lorsqu'elle est définie sur un ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ symétrique par rapport à 0 (par exemple $[-1,5; 1,5]$) et vérifie les conditions (équivalentes) suivantes :*

- *pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = -f(-x)$.*
- *la courbe de $f$ est symétrique par rapport au centre du repère.*

🌄 **Exemple 7 :**




🌄 **Exemple 8 :** les fonctions définies par : $x^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$ impair, $\sin(x)$, $\tan(x)$ $\sinh(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$ sont des fonctions impaires.

📙 **Propriété 15 :** Pour une fonction $g$ impaire : $\displaystyle\int_{-a}^{a} g(x)\,\mathrm{d}x = 0$

✏️ **Exercice 13 :** calculer en utilisant la parité : $A = \displaystyle\int_{-10}^{10} x^2\,\mathrm{d}x$ ; $B = \displaystyle\int_{-10}^{10} x^3\,\mathrm{d}x$ et

$C = \displaystyle\int_{-1}^{1} x^5 - x^3 - 2x^2 + 50x + 10\,\mathrm{d}x$

✏️ **Exercice 14 : Compléments sur les fonctions paires/impaires :**

1. Donner un exemple de fonction ni paire ni impaire
2. Une somme de fonctions paires est ?
3. Une somme de fonctions impaires est ?
4. Un produit de fonctions paires est ?
5. Un produit de fonctions impaires est ?
6. Le produit d'une fonction paire par une fonction impaire est ?
7. Si $f$ est une fonction définie sur une partie $\mathcal{D}_f$ de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0, montrer que $p(x) = \dfrac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ est paire et que $i(x) = \dfrac{1}{2}(f(x) - f(-x))$ est impaire.
8. Calculer $p + i$ et en déduire que $f$ se décompose comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire (de manière unique).

## 7.4. Aire délimitée par deux courbes

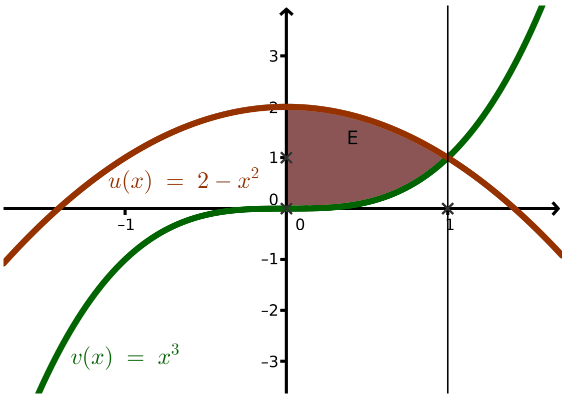
Soit $f \leq g$ deux fonctions admettant des primitives sur un intervalle $I$ et $a, b$ deux nombres dans $I$. On note $E$ le domaine du plan délimité par les courbes représentant $f$ et $g$ et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$.

📗 **Méthode 3 :**

1. On repère quelle est la fonction (ici $g$) dont la courbe est au-dessus de l'autre (ici $f$) ;
2. on calcule l'intégrale de $g - f$ entre $a$ et $b$ pour obtenir l'aire du domaine ;

📋 **Remarque 9 :** Si les courbes changent de position relative, on découpe l'intervalle d'intégration.

✏️ **Exercice 15 :** On a $u(x) = 2 - x^2$ et $v(x) = x^3$.
Calculer l'aire (en u.a.) du domaine $E$.




📙 **Propriété 16 :** L'aire d'un domaine $E$ délimité par des courbes d'équations $y = f(x)$, $y = g(x)$ et des droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$ est : $\displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)|\, \mathrm{d}x$

✏️ **Exercice 16 :** Utiliser Geogebra ou la calculatrice (la fonction valeur absolue s'écrit `abs()`) pour tracer la fonction $|f(x) - g(x)|$ liée à l'exercice précédent.

✏️ **Exercice 17 :** Calculer l'aire du domaine compris entre les deux courbes représentant les fonctions définies par $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$. Attention : les courbes se croisent.

✏️ **Exercice 18 : Aire finie ?**

On définit sur $[4; +\infty[$ la fonction : $f(x) = \dfrac{-6x + 6}{x^2 - 2x - 3}$

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Que peut-on en déduire pour l'axe (Ox) et la courbe représentant $f$ ?
2. Soit k>4 un nombre fixé. Calculer l'aire comprise entre la courbe représentant $f$, l'axe (Ox) et les droites d'équations x=4 et x=k.
3. l'aire comprise entre la courbe représentant $f$, l'axe (Ox) et la droite d'équation x=4 est-elle finie ? (indication : faire tendre k$\to +\infty$.)

## 7.5. Les fonctions continues admettent des primitives

Ce paragraphe permet de démontrer (démonstration partielle au programme) que toute fonction continue $f$ sur $[a; b]$ admet des primitives, et donc est intégrable.

📙 **Propriété 17 :** On suppose ici $f$ croissante et positive. Pour tout $x \in [a; b]$, on note $F(x)$ l'aire du domaine situé entre la courbe de $f$, l'axe $(Ox)$, et les droites verticales passant par les abscisses $a$ et $x$. Alors $F$ est une primitive de $f$.

✏️ **Exercice 19 : Démonstration partielle :** Soit $x_0 \in [a;b]$ et $h > 0$.

1. Faire un schéma et repérer l'aire correspondant à la valeur $F(x_0+h) - F(x_0)$.
2. Tracer les deux rectangles de base $[x_0; x_0+h]$ et de hauteur $f(x_0)$ et $f(x_0+h)$.
3. En déduire que $hf(x_0) \leq F(x_0+h) - F(x_0) \leq hf(x_0+h)$.
4. En déduire que $F$ est dérivable en $x_0$ (à droite) et que $F'(x_0^+) = f(x_0)$.
5. Recommencer avec $h < 0$ et en déduire que $F'(x_0^-) = f(x_0)$. Conclure

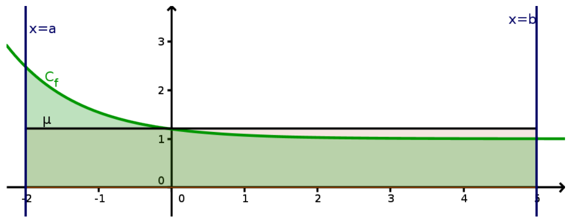
📙 **Propriété 18 : (admise)** Toute fonction continue sur un intervalle $I$ y admet des primitives.

# 8. Applications de l'intégrale

## 8.1. Valeur moyenne

📕 ***Définition 6 :*** *Si $f$ est une fonction qui admet des primitives (éventuellement par morceaux) sur $[a;b]$, on appelle **valeur moyenne** de $f$ sur $[a;b]$ le réel :*

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$




📋 **Remarque 10 :** Lorsque $f$ est continue et positive sur $[a;b]$, le domaine situé sous la courbe de $f$ et le rectangle de dimensions $b-a$ et $\mu$ ont même aire : on trouve une fonction constante, égale à $\mu$, qui a la même intégrale que $f$ sur $[a;b]$.

✏️ **Exercice 20 :** Tracer et calculer les valeurs moyennes des fonctions suivantes, définies sur I=[0;4]: $f(x) = 4 - x$ ; $g(x) = 1 + \mathrm{e}^{0,3x}$ ; $h(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$ et $k(x) = \begin{cases} 5 \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant a \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ ( où $a$ est un paramètre (= une constante) dans [0;4])

✏️ **Exercice 21 :** On définit sur [0;1], pour tout n entier, les fonctions $f_n(x) = \begin{cases} n \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

1. Pour tout entier n, calculer la valeur moyenne $f_{\text{moy},n}$ de $f_n$ sur [0;1].
2. Soit un $x_0$ fixé dans [0;1] ; que dire de $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_0)$ ? De quelle fonction «se rapproche» cette suite de fonction ?
3. A-t-on $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ ?

## 8.2. D'autres applications

✏️ **Exercice 22 : Calculs de volumes :**

1. **Volume d'un cône**
   Dans un repère de l'espace, un cône a sa base incluse dans le plan d'équation z=0. On rappelle que l'aire de sa base est $\pi R^2$, avec $R$ le rayon du disque de base ; son sommet a pour coordonnées z=H (H est la hauteur du cône). On prend h compris entre 0 et H.
   Quelle est, en fonction de R et h, l'aire $A(h)$ de la coupe du cône par le plan z=h ?
   Calculer $V = \displaystyle\int_0^H A(h)\,\mathrm{d}h$.
   Adapter le raisonnement au calcul du volume d'un tétraèdre, d'une pyramide, ... .
2. **Volume d'une boule :** En utilisant la même méthode, retrouver la formule du volume d'une boule de rayon R.

Attention : cette méthode (intégration d'une coupe) fonctionne bien pour le calcul de volumes, mais est à adapter avec précaution pour les calculs des aires de surfaces des solides. On pourra s'inspirer de l'exercice suivant.

✏️ **Exercice 23 : Longueur d'une courbe :**
Lorsque l'on parcourt, au cours du temps $t$, la courbe d'une fonction $f$ avec un déplacement horizontal de 1 unité de longueur par seconde, le vecteur vitesse de notre déplacement est $\begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix}$.
On retrouve la formule de la longueur d'une courbe en intégrant la norme de ce vecteur vitesse selon le temps :

$$L = \int_a^b \sqrt{1+f'(t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Calculer la longueur de la courbe de $f(x) = \cosh(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ sur [-3;3].

## 9. Intégration par parties

📙 **Propriété 19 :** Soit $u$ et $v$ deux fonctions dérivables sur un intervalle $I$ telles que $u'v$ et $uv'$ admettent des primitives sur $I$ (éventuellement par morceaux), alors pour tout $a$ et $b$ de $I$ : $\boxed{\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x}$

✏️ **Exercice 24 : Démonstration :**

1. Écrire la formule de la dérivée du produit.
2. Isoler le terme $uv'$ à gauche de l'égalité, puis intégrer

📗 **Méthode 4 :** Il faut, la plupart du temps, dériver la partie polynomiale pour la faire «disparaître».

🌄 **Exemple 9 :** Calculons $\int_0^1 x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

On pose $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \mathrm{e}^{2x} \end{cases}$. On a $v(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$ et $u'(x) = 1$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \overset{u}{x}\overset{v'}{\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x &= \left[\overset{u}{x}\overset{v}{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}}\right]_0^1 - \int_0^1 \overset{u'}{1}\overset{v}{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - 0\right] - \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \frac{1}{2}\right] \\
&= \frac{1}{4}\mathrm{e}^2 + \frac{1}{4} \\
&= \frac{\mathrm{e}^2+1}{4}
\end{aligned}$$

✏️ **Exercice 25 :** Calculer les intégrales suivantes en utilisant la formule d'intégration par parties (une ou plusieurs fois successivement) :

1. $\int_1^{\mathrm{e}} (x+1)\ln x\,\mathrm{d}x$
2. $\int_0^{\pi} t\cos t\,\mathrm{d}t$
3. $\int_0^1 te^{pt}\,\mathrm{d}t$ avec ($p$ constante réelle)
4. $\int_{-1}^1 (t+1)\cos \pi t\,\mathrm{d}t$
5. $\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos x\,\mathrm{d}x$ (2 fois !)
6. $\int_{-1}^1 (x^2-1)e^{-3x}\,\mathrm{d}x$
7. $\int_0^x \ln t\,\mathrm{d}t = \int_0^x 1\ln t\,\mathrm{d}t$ (avec $x>0$, cela donne une primitive de $\ln$).
8. $\int_0^1 \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$
9. $\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,\mathrm{d}x$
10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1)\sin x\,\mathrm{d}x$
11. $\int_0^{\pi} \cos x e^{-2x}\,\mathrm{d}x$