Probabilités -- Intégrales -- Fonctions

Prénom NOM

1. Équations différentielles (8 points)

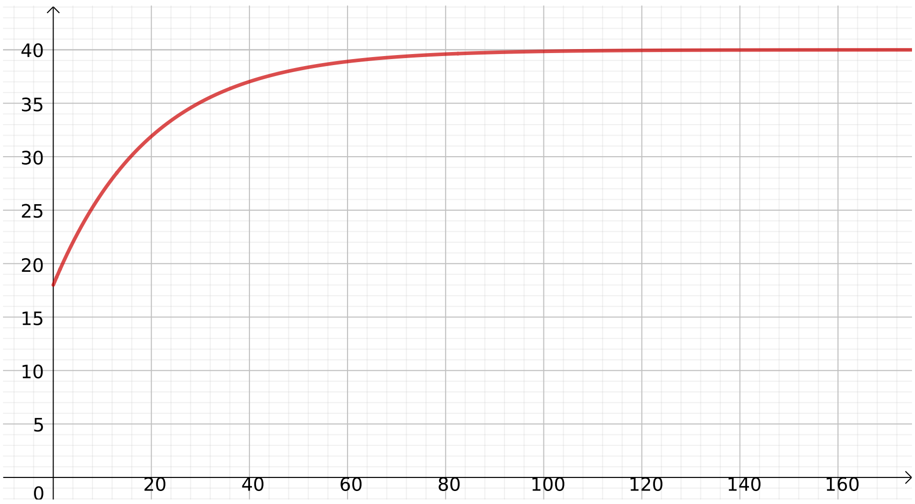
✏️ **Exercice 1 : Dispositif de chauffe et de maintien de température**

On étudie le dispositif de chauffe et de maintien en température d'un récipient.
On note $y(t)$ la température du récipient, en degrés Celsius (°C) à l'instant t exprimé en secondes.
Condition initiale : À t=0, la température est $y(0) = 18$°C.

Dans les conditions de l'expérience, le bilan énergétique se traduit par l'équation différentielle suivante :

$$(E) \ : \ \ y'(t) + 0{,}05y(t) = 2$$

1. Déterminer une solution particulière constante de l'équation différentielle (E).
2. $(E_0) \ : \ \ y'(t) + 0{,}05y(t) = 0$ est l'équation homogène associée à (E_1).
   Résoudre cette équation homogène et en déduire toutes les solutions de (E).
3. Démontrer que dans les conditions de l'expérience, la température est donnée par la fonction g définie pour tout temps t positif par le relation : $g(t) = 40 - 22\mathrm{e}^{-0{,}05\mathrm{t}}$
4. Déterminer la température obtenue après un temps assez long, dite température «stationnaire», en calculant $\lim\limits_{t \to +\infty} 40 - 22\mathrm{e}^{-0{,}05\mathrm{t}}$
5. Calculer $g'(t)$ et en déduire $g'(0)$. La fonction g est-elle convexe, concave ? Justifier.
6. On a tracé la courbe de $g(t)$ dans le repère suivant :

   Tracer, sur le graphique, la tangente en t=0 et l'asymptote à la courbe.
   Écrire l'abscisse du point d'intersection de cette tangente et de cette asymptote, que l'on appellera τ.
7. En utilisant une intégrale que l'on écrira, calculer la température moyenne de t=0 secondes à t=100 secondes (arrondir au centième).
8. Expliquer la valeur affichée après l'exécution du programme Python suivant :

```
from math import exp

def g(t):
    return 40 - 22*exp(-0.05*t)

t = 0
while g(t) < 29:
    t = t + 0.01
print(t)
```

9. Déterminer, au centième de seconde près, l'instant t à partir duquel la température dépasse 29°C.

2. Probabilités (7,5 points)

✏️ **Exercice 2 :**
Mansour étudie la qualité de ses services au tennis. Il associe une double faute à la valeur $X=-1$, un service gagnant à la valeur $X=1$ et les autres services à la valeur $X=0$.
Une étude statistique lui a permis d'établir la loi de X ci-contre.

X	-1	0	1
Prob	0,05	0,75	0,2

1. Calculer l'espérance de X.
2. Démontrer que la variance de X est 0,2275.
3. On note M_n la moyenne d'un échantillon de n variables aléatoires indépendantes $(X_1,\ldots,X_n)$ de même loi que X.
   Écrire l'inégalité de concentration appliquée à M_n.
4. Combien de services doit-il réaliser au minimum pour être sûr au seuil de 91% que la moyenne obtenue d'un échantillon $(X_1,\ldots,X_n)$ de la variable aléatoire X soit strictement comprise entre 0 et 0,30 ?
5. On note Y la variable aléatoire, qui, sur un échantillon de 10 services indépendants, compte le nombre de services gagnants.
   Quel est le nom de la loi suivie par Y ? Préciser ses paramètres. Combien Y a-t-elle de valeurs possibles ?
6. Calculer la probabilité de réaliser au moins un service gagnant parmi les 10 services réalisés (arrondir au millième).
7. Calculer la probabilité de réaliser exactement deux services gagnant parmi les 10 services réalisés (arrondir au millième).
8. Que représente la valeur 2 pour la variable aléatoire Y ?

.

3. Intégration - aires (7,5 points)

✏️ **Exercice 3 :** f est la fonction définie sur [0;∞[par $f(x)=x\mathrm{e}^{-x}$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère ci-dessous.

1. On note D le domaine situé entre la courbe $\mathcal{C}$ et l'axe horizontal, sur l'intervalle [0;1]. Hachurer ou colorier le domaine D sur la figure :

2. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer l'aire, en unités d'aire (u.a.), du domaine D. On arrondira au millième.
3. Pour tout entier $n\geqslant 1$, on définit sur [0;∞[la fonction f_n par $f_n(x)=x^n\mathrm{e}^{-x}$.
   Justifier que pour $0\leqslant x\leqslant 1$, on a $0\leqslant f_n(x)\leqslant x^n$
4. On note $I_n=\displaystyle\int_0^1 x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ pour $n\geqslant 1$. Démontrer que pour tout entier $n\geqslant 1$, on a $0\leqslant I_n\leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
5. En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
6. En utilisant une intégration par parties, démontrer que $\mathrm{e}=\dfrac{1}{I_{n+1}+(n+1)I_n}$