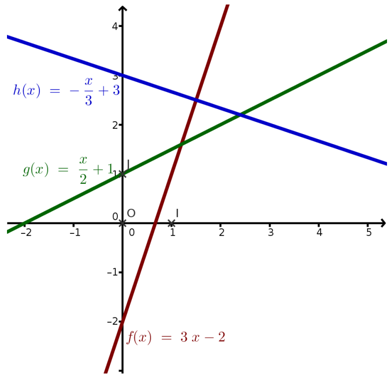
# Variation instantanée et globale

## 1. Variation instantanée

La notion de dérivée permet de généraliser la notion de coefficient directeur d'une fonction affine.

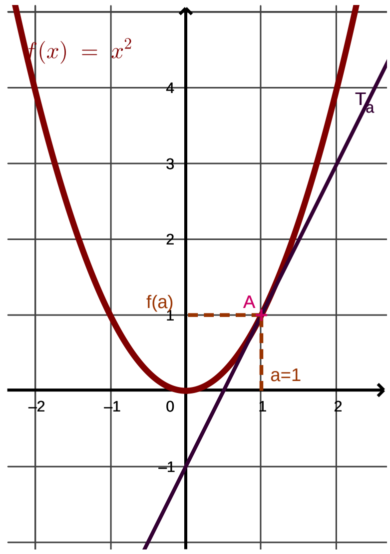
🌄 **Exemple 1 :** Trois droites représentant trois fonctions affines (ci-contre) :




**Rappels :**

- le fait qu'une fonction affine soit croissante ou décroissante est indiqué par le signe de son coefficient directeur ;
- que plus la valeur absolue (= valeur sans signe $\pm$) de ce coefficient directeur est grande, plus la droite représentant la fonction affine penche, vers le haut (coefficient directeur positif), ou vers le bas (coefficient directeur négatif) .

**Problème :** Une fonction quelconque est représentée par une courbe et non une droite, et ses variations peuvent changer lorsque sa variable $x$ évolue : elles peuvent, comme sur cette parabole représentant la fonction carré, être faibles près de $0$ et s'accentuer alors qu'on s'éloigne de $0$.

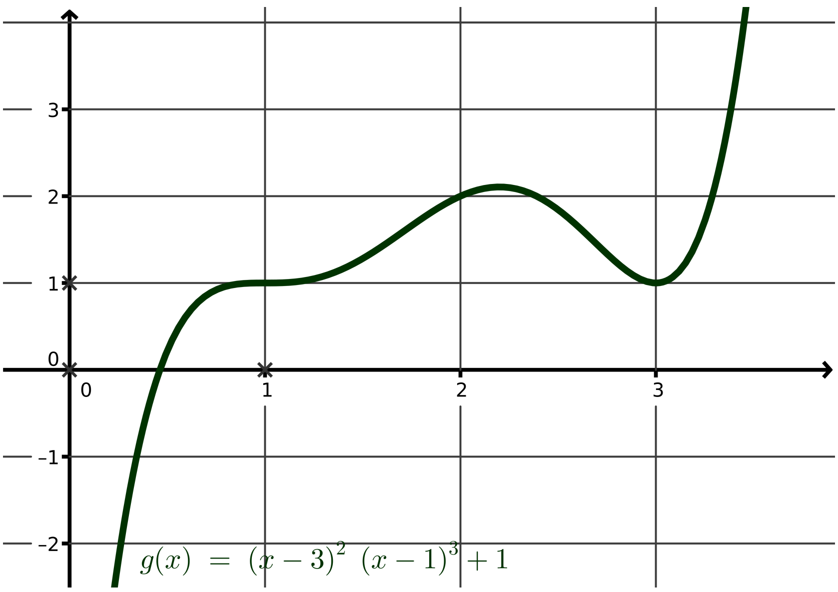



Pour une fonction quelconque $f$, une «mesure de la variation», comme celle que nous fournit le coefficient directeur pour les fonctions affines, devra donc dépendre de sa variable $x$. Pour «se ramener» au cas d'une droite, on trace, lorsque c'est possible, la tangente $T_a$ à la courbe représentant la fonction $f$ au point d'abscisse $x = a$ ; c'est la droite qui approxime au mieux, lorsqu'on est proche de $a$, la courbe représentant la fonction $f$.

📕 ***Définition 1 :*** *On note alors $f'(a)$ ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$ le **coefficient directeur de la tangente** $T_a$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x = a$, et on appelle ce nombre le **nombre dérivé** de $f$ en $a$.*

✏️ **Exercice 1 :** On pose $f(x) = x^2$.
Compléter : Graphiquement, on lit $f'(1) = \ldots$ et $f'(-1) = \ldots$.

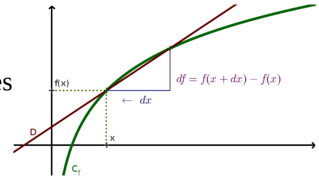
✏️ **Exercice 2 :** On a $g(x) = (x-3)^2(x-1)^3 + 1$ :




1. Graphiquement, donner les nombres dérivés suivants : $g'(1) = \ldots$ $\quad g'(2) = \ldots$ $\quad g'(3) = \ldots$
2. Graphiquement, donner l'ensemble des $x$ pour lesquels $g'(x) < 0$.

### 1.1. Nombre dérivé

On se donne une fonction $f$ et on se place en un $x$ fixé. Soit $dx$ un petit accroissement de la variable $x$ (positif ou négatif), correspondant à un accroissement $\mathrm{d}f = f(x+\mathrm{d}x) - f(x)$ des images.




Si l'on fait tendre $\mathrm{d}x$ vers $0$, la droite $D$ prend une position de tangente à la courbe de $f$ en $x$.

***Définition 2 :*** *Si $\lim\limits_{dx \to 0} \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ existe, on dit que $f$ est dérivable en $x$ ; on note alors $f'(x)$ ou bien $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$ cette limite, que l'on appelle* ***nombre dérivé de $f$ en $x$, et qui indique le coefficient directeur de la tangente à la courbe de $f$ en $x$.***

**Propriété 1 :** L'équation de la tangente à la courbe de $f$ en $x = a$ est : $\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$

## 2. Dérivées de fonctions usuelles

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| cte | $0$ |
| $x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ |
| $\frac{1}{x} = x^{-1}$ | $\frac{-1}{x^2} = -x^{-2}$ |
| $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ |
| $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ |
| $\mathrm{e}^x$ | $\mathrm{e}^x$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ |
| $\tan x$ | $\frac{1}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2$ |

**Fonctions composées :**
$u$ désigne une fonction dérivable ; $\omega$, $\phi$ sont des constantes réelles ; $n$ est un entier naturel différent de $0$.

| $f$ | $f'$ |
|---|---|
| $\frac{1}{u} \quad (u \neq 0)$ | $\frac{-u'}{u^2}$ |
| $\ln(u) \quad (u > 0)$ | $\frac{u'}{u}$ |
| $\mathrm{e}^u$ | $u'\mathrm{e}^u$ |
| $u^n$ | $nu'u^{n-1}$ |
| $\sin(\omega t + \phi)$ | $\omega\cos(\omega t + \phi)$ |
| $\cos(\omega t + \phi)$ | $-\omega\sin(\omega t + \phi)$ |
| $\arctan u$ | $\frac{u'}{1+u^2}$ |

## 3. Dérivées et opérations

**Propriété 2 :**
$u$ et $v$ sont deux fonctions dérivables sur un intervalle $I$ et $k$ est une constante réelle.

**Somme :** $\boxed{(u+v)' = u' + v'}$

**Exemple 2 :** $\left(x^2 + x^3\right)' = 2x + 3x^2$

**Produit par une constante :** $\boxed{(ku)' = ku'}$

**Exemple 3 :** $\left(5x^2\right)' = 5\left(x^2\right)' = 5 \times 2x = 10x$

**Produit de deux fonctions :** $\boxed{(uv)' = u'v + v'u}$

**Exemple 4 :**
$(x\sin x)' = x'\sin x + x(\sin x)' = 1\sin x + x\cos x$

**Quotient :** $\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}}$

**Attention :** $v$ ne doit pas s'annuler sur $I$.

**Exemple 5 :**
$$\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x}\right)' = \frac{(\mathrm{e}^x)'x - x'\mathrm{e}^x}{x^2} = \frac{\mathrm{e}^x x - 1\mathrm{e}^x}{x^2} = \frac{(x-1)\mathrm{e}^x}{x^2}$$

## 4. Principe de Lagrange

**Méthode 1 :** $f$ est une fonction dérivable sur un intervalle $I$.
Une fois que l'on a calculé la dérivée d'une fonction, il faut la factoriser au mieux pour déterminer son signe. En effet connaître le signe de la dérivée $f'$ nous permet de connaître les variations de $f$ :

**Propriété 3 :**

- $f' > 0$ sur $I$ ($f'$ peut même s'annuler en des points isolés) $\Rightarrow$ $f$ est strictement croissante sur $I$ ;
- $f' = 0$ sur tout l'intervalle $I \Rightarrow f$ est constante sur $I$ ;
- $f' < 0$ sur $I$ ($f'$ peut même s'annuler en des points isolés) $\Rightarrow$ $f$ est strictement décroissante sur $I$.
- $f'$ passe de $-$, à 0, puis à $+ \Rightarrow f$ admet un minimum local pour $x = a$ ;
- $f'$ passe de $+$, à 0, puis à $- \Rightarrow f$ admet un maximum local pour $x = a$ .