Phénomènes aléatoires - 2 - Probabilités conditionnelles

1. Probabilités conditionnelles

1.1. Effets de masse, découpages...

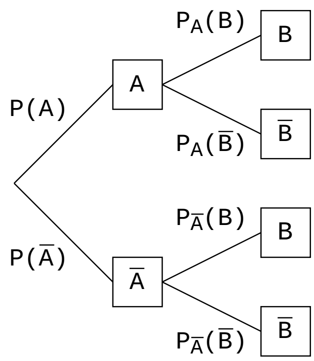
📋 **Remarque 1 :** On cherche souvent à analyser la dépendance d'un événement par rapport à un autre, ou bien comprendre des phénomènes numériques paradoxaux... Les probabilités conditionnelles offrent un cadre simple qui peut aider.

✏️ **Exercice 1 : exemple de paradoxe apparent : phénomène de Rogers**
Un prof de maths est perçu comme particulièrement sévère : sur les deux groupes d'approfondissement qu'il suit, composés de quelques élèves, les moyennes de ce trimestre sont 1, 2, 3, 4 pour le groupe A et 5, 6, 7, 8, 9 pour le groupe B, sur 20. Son supérieur lui explique qu'il faut impérativement que les moyennes des deux groupes augmentent. Le prof refuse catégoriquement de changer les moyennes de chaque élève, et dit à son supérieur qu'il n'avait qu'à faire les groupes différemment pour avoir de meilleures moyennes. Pourquoi ?

📋 **Remarque 2 :** Il est donc fondamental de savoir si l'on calcule sur la population globale (Ω entier) ou bien si l'on est restreint à une partie seulement de cette population.

1.2. Définition et propriétés

📕 ***Définition 1 :*** *A, B sont deux événements avec $P(A) \neq 0$.*
*On note $P_A(B)$ la «**probabilité de B sachant A**» le nombre $\dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.*



Représentation des probabilités conditionnelles sur un arbre

✏️ **Exercice 2 : Contrôle qualité :**
Une production en très grande série contient 90% de pièces conformes et 10% de pièces défectueuses. Un contrôle de qualité accepte les pièces conformes dans 92% des cas et rejette les pièces défectueuses dans 94% des cas.
On tire une pièce au hasard dans la production, après le contrôle qualité. On note :

- C : «la pièce tirée est conforme» ;
- A : «la pièce tirée est acceptée au contrôle».

1. Construire l'arbre des possibilités (conseil : mettre les probabilités marginales au premier niveau de l'arbre).
2. En déduire les probabilités des 4 issues possibles.
3. Identifier les faux positifs (pièce refusée bien que conforme) et les faux négatifs (acceptée mais défectueuse) sur l'arbre
4. En déduire la probabilité que la pièce prélevée ait subi une erreur de contrôle.
5. **Inverser l'arbre :** Construire un arbre dans lequel les événements A et son complémentaire sont au 1er niveau, indiquer les probabilités sur chaque branche.
   Ce changement de point de vue peut être utile pour mieux analyser une situation.
6. **Approfondissement :** En cas de pièce contrôlée et refusée, on fait un deuxième contrôle, indépendant du premier, qui sera déterminant mais coûte trois fois plus cher.
   La situation est-elle améliorée ?

✏️ **Exercice 3 :** À la suite de la découverte dans un pays A des premiers cas d'une maladie contagieuse non mortelle M, il a été procédé dans ce pays à une importante campagne de navigation : 70% des habitants ont été vaccinés.
Une étude a révélé que 5% des vaccinés ont été touchés à des degrés divers par la maladie, pourcentage qui s'est élevé à 60% chez les non-vaccinés.

$V \setminus M$	M	$\overline{M}$	**total**
V	...	...	...
$\overline{V}$			
total			

1. Calculer la probabilité qu'un individu pris au hasard dans la population ait été touché par la maladie.
2. Calculer la probabilité pour qu'un individu ait été vacciné, sachant qu'il a été atteint par la maladie.
3. Commenter les pourcentages manipulés : peut-on en faire de bonnes/mauvaises interprétations ?
4. Il est parfois plus judicieux d'essayer d'éviter de présenter des probabilités conditionnelles : on peut présenter les intersections, qui ont l'avantage d'être immédiatement comparables entre elles, mais il peut y avoir de gros écarts. Présenter les données sous la forme d'un tableau à double entrée.

1.3. Indépendance

📕 ***Définition 2 :*** *A et B sont deux événements de probabilité non nulle.*
*On dit que A et B sont **indépendants** s'ils vérifient une de ces trois affirmations équivalentes :*

$$P_A(B) = P(B)$$
$$\Leftrightarrow \quad P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$
$$\Leftrightarrow \quad P_B(A) = P(A)$$

Explication : *On passe de la première ligne à la deuxième en multipliant par $P(A)$ et de la deuxième à la troisième en divisant par $P(B)$.*

📋 **Remarque 3 :** Lorsque A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi, ainsi que $\overline{A}$ et B, et aussi $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

✏️ **Exercice 4 :** On a $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}2$. A et B sont-ils indépendants ?
En calculant, vérifier si $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont.

✏️ **Exercice 5 :** Un même individu peut être atteint de surdité unilatérale ou bilatérale (mais pas plus). \ On note G et D les deux événements «être atteint de surdité à l'oreille gauche/droite».
G et D sont indépendants, et $P(G) = P(D) = 5\%$. On note : B : «surdité bilatérale» ; U : «surdité unilatérale» ; S : «surdité» (une oreille au moins).

1. Calculer les probabilités de ces événements.
2. Sachant qu'un individu pris au hasard dans la population est atteint de surdité, quelle est la probabilité pour qu'il soit atteint de surdité à droite ? Pour qu'il soit atteint de surdité bilatérale ?

1.4. Partitions

📙 **Propriété 1 : Formule des probabilités totales :**
Soit $C_1, C_2, \ldots, C_k$ des événements de probabilité non nulle formant une **partition** de Ω (tous les C_i sont disjoints et recouvrent entièrement Ω : ils représentent des cas différents).
Alors, on a : $P(A) = P(A \cap C_1) + P(A \cap C_2) + \cdots + P(A \cap C_k)$
Qui peut aussi s'écrire :
$$P(A) = P(C_1)P_{C_1}(A) + P(C_2)P_{C_2}(A) + \cdots + P(C_k)P_{C_k}(A)$$

📋 **Remarque 4 :** Si $B \neq \emptyset$, B et $\overline{B}$ formant naturellement une partition de Ω, on a :
$$P(A) = P(B)P_B(A) + P(\overline{B})P_{\overline{B}}(A)$$

✏️ **Exercice 6 :** On lance un dé tétraédrique (4 faces) bien équilibré : on multiplie le résultat R par 2 s'il est pair. On lance ensuite une pièce bien équilibrée ; dans le cas pile, on multiplie R par 2.
Utiliser un arbre pour déterminer la loi de R (dire où apparaît une partition) et calculer son espérance et son écart-type.

2. Problèmes

Par groupe de 3 maximum, présenter un des exercices suivants :

✏️ **Exercice 7 : Pierre feuille ciseaux**

Alice et Bob jouent à pierre/feuille/ciseaux. On considère que tous les tirages sont indépendants et équiprobables.

A.
   1. Représenter la situation par un arbre ou un tableau.
   2. Déterminer les probabilités que Alice gagne, que Bob gagne, ou d'un match nul.

B. Alice a vu sur internet que jouer pierre donne de meilleurs résultats. Elle l'utilise donc 50% du temps contre 25% du temps pour les deux autres. Bob ne change pas de stratégie.
Mêmes questions qu'au A.

✏️ **Exercice 8 : Paradoxe du Duc de Toscane**

On lance trois dés à 6 faces bien équilibrés et on note la somme S des deux nombres obtenus. Le Duc de Toscane, dans une lettre à Galilée, signale :

- `S =  9 = 1+2+6 = 1+3+5 = 1+4+4 = 2+2+5 = 2+3+4 = 3+3+3` (6 décompositions)
- `S = 10 = 1+3+6 = 1+4+5 = 2+2+6 = 2+3+5 = 2+4+4 = 3+3+4` (6 décompositions)

Pourtant, en pratique, S=10 est obtenue plus souvent ! Y a-t-il une explication ?

✏️ **Exercice 9 : Paradoxe de Monty Hall** (présentateur du jeu TV «let's make a deal»).

Un candidat se trouve devant 3 portes fermées. Derrière une de ces portes, il y a une superbe voiture à gagner, et un poireau dans les deux autres. Le candidat doit choisir une porte au hasard (sans l'ouvrir). L'animateur ouvre alors une autre porte contenant un poireau.
Que devrait faire le candidat : garder la porte qu'il a choisie ou changer d'avis et choisir l'autre porte restante ? Justifier.

Conseils : Essayer de représenter la situation par un arbre ; réfléchir à ce qu'il se passerait s'il y avait 100 portes (une voiture et 99 poireaux).

✏️ **Exercice 10 : Problème des partis**

On date le début de la théorie des probabilités de la correspondance entre Blaise Pascal et Pierre de Fermat (1654) à propos du «problèmes des partis (url : https://fr.wikipedia.org/wiki/Probl%C3%A8me_des_partis)» :

Deux joueurs jouent à un jeu de hasard en 3 parties gagnantes, chacun ayant misé la même somme d'argent m ; or il se trouve que le jeu est interrompu avant que l'un des deux joueurs ait obtenu 3 victoires et ainsi remporté la victoire et de ce fait la totalité des enjeux soit $2m$. Comment, dans ces circonstances, doit-on partager les enjeux ?

3. Compléments et entraînement

✏️ **Exercice 11 : Manuel Sésamath** pages 46 à 53.