Page 026

Questions flash

17 ORAL Pour chacune des propriétés $P(n)$ ci-dessous, dire si $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies. Justifier.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: « $-3n+5 \geqslant 0$ ».

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: « $3^n \leqslant 2$ ».

18 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = 2u_n - 1.$$

Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $u_n = 1 + 2^n$ ».
Vérifier que $P(0)$ est vraie.

19 Soit (u_n) une suite telle que, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 3u_n - 8$. Pour tout entier naturel n, on appelle $P(n)$ la propriété « $u_n = 4$ ». L'objectif de l'exercice est de montrer que $P(n)$ est héréditaire.

1. Soit p un entier naturel tel que $P(p)$ est vraie.
Écrire l'égalité qu'on obtient.

2. Justifier qu'on doit alors montrer que $u_{p+1} = 4$.
Le faire, puis conclure.

20 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n - n + 1$.
Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$: « $u_n \geqslant n$ ».

1. Montrer que $P(0)$ est vraie.

2. a. Soit p un entier naturel tel que $P(p)$ est vraie.
Écrire l'inégalité qu'on obtient.

b. Écrire la propriété $P(p+1)$.

c. Montrer qu'on peut en déduire que $P(p+1)$ est vraie.

3. Que peut-on en conclure ?

Page 140

17 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{n}$.
Justifier sans calcul qu'il existe un entier naturel N tel que $u_n > 100$ pour tout $n \geqslant N$.

18 Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = -n^2.$$

Justifier sans calcul qu'il existe un entier naturel N tel que $v_n < -10\,000$ pour tout $n \geqslant N$.

19 Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$w_n = \frac{1}{n^7}.$$

Justifier sans calcul qu'il existe un entier naturel N tel que $-0{,}001 < w_n < 0{,}001$ pour tout $n \geqslant N$.

Questions flash

21 ORAL Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$.
Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \times w_n$.

Pour les exercices 22 à 28, déterminer la limite des suites (u_n).

22 **1.** $u_n = n^2 + 5$ **2.** $u_n = -2n^2$

23 **1.** $u_n = n^2 + 3n$ **2.** $u_n = -n^3 + 5$

24 **1.** $u_n = 5n^2 + 2\sqrt{n} + 1$ **2.** $u_n = -n^2 - 2n + 150$

25 **1.** $u_n = \sqrt{n} + \dfrac{1}{n^2}$ **2.** $u_n = 2n^2 + \dfrac{5}{n^3}$

26 **1.** $u_n = \left(-n^3\right)\left(3n^2 + 4\right)$ **2.** $u_n = \left(-7 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)(n+1)$

27 **1.** $u_n = \dfrac{1}{n^2 + 5}$ **2.** $u_n = -\dfrac{6}{\sqrt{n} + 1}$

28 **1.** $u_n = \dfrac{3}{3 - 4n^2}$ **2.** $u_n = \dfrac{7}{n^2 + 2n + 3}$

29 **1.** Déterminer les limites des suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 2 - \dfrac{1}{n}$ et $v_n = -7 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

2. En déduire la limite de la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$w_n = \frac{2 - \dfrac{1}{n}}{-7 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}}.$$

47 CALC Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 6n + 4$.

1. a. À l'aide d'une calculatrice, calculer les 10 premiers termes de la suite (u_n).

b. -1 peut-il être un minorant de (u_n) ?

c. 20 peut-il être un majorant de (u_n) ?

2. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n + 5 = (n-3)^2$.

3. En déduire un minorant de (u_n).

48 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6} \end{cases}.$$

a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 3$.

b. On admet que la suite (u_n) est croissante. Est-ce que la suite (u_n) est convergente ?

49 CALC Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 3$.

1. a. À l'aide de la calculatrice, calculer les 10 premiers termes de la suite.

b. Conjecturer le sens de variation de (u_n) et une majoration de (u_n).

2. Montrer par récurrence que (u_n) est majorée par 9.

3. Montrer que $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{3}u_n + 3$, puis en déduire le sens de variation de la suite (u_n).

4. Justifier que la suite (u_n) converge.

Pour les exercices 64 et 65, déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul, en utilisant les théorèmes de comparaison.

64 Capacité 5, p. 133

1. $u_n = n - \sin n$ **2.** $u_n = -n^2 + \cos n$

3. $u_n = \dfrac{n}{2 + \cos n}$ **4.** $u_n = \dfrac{n - \sin n}{n^2 + 1}$

65 **1.** $u_n = \dfrac{4n + (-1)^n}{n + 2}$ **2.** $u_n = 5n^3 + (-1)^n$

3. $u_n = \dfrac{-n + (-1)^n}{2n - (-1)^n}$ **4.** $u_n = \dfrac{n^2 + (-1)^n \sqrt{n}}{n}$

67 VRAI/FAUX

Indiquer si l'affirmation est vraie ou fausse, puis justifier.

On considère une suite (v_n). Si, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $-1 - \frac{1}{n} \leqslant v_n \leqslant 1 + \frac{1}{n}$ alors la suite (v_n) converge.

78 **Une question ouverte**

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Montrer l'égalité suivante :

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right).$$

2. La suite (v_n) est définie par $v_n = 1{,}27\ldots$ avec n décimales consécutives égales à 7. Ainsi $v_0 = 1{,}2$, $v_1 = 1{,}27$ et $v_2 = 1{,}277$.
Démontrer que la suite (v_n) converge vers un nombre rationnel r.

49 CALC Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 3$.

1. a. À l'aide de la calculatrice, calculer les 10 premiers termes de la suite.

b. Conjecturer le sens de variation de (u_n) et une majoration de (u_n).

2. Montrer par récurrence que (u_n) est majorée par 9.

3. Montrer que $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{3}u_n + 3$, puis en déduire le sens de variation de la suite (u_n).

4. Justifier que la suite (u_n) converge.

66 **1.** Soit (u_n) une suite qui vérifie $u_n \geqslant 3n^2 - 1$ pour tout entier naturel n. Déterminer la limite de la suite (u_n).

2. Soit (u_n) une suite telle que $u_n \leqslant -5n$ pour tout entier naturel n.
Déterminer la limite de la suite (u_n).

3. Soit (u_n) une suite telle que $\frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \frac{2}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$.
Déterminer la limite de la suite (u_n).

69 QCM *Choisir la ou les bonnes réponses.*

Soit (u_n) une suite.

1. Si $u_n \leqslant \frac{1}{n^2}$ pour tout entier naturel n non nul, alors :

a. la suite (u_n) converge vers 0.

b. il existe un rang à partir duquel tous les termes sont positifs.

c. on ne peut pas déterminer si la suite est convergente ou divergente.

2. Si pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 2 - 3n$, alors :

a. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

b. la suite (u_n) converge.

c. il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont négatifs.

81 On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2\,u_n + n - 1$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = 2^n - n.$$

2. Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$\frac{u_{n+1} - 1}{2^n} = \frac{u_n - 1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n}$$

3. En remarquant qu'on peut alors écrire pour tout entier naturel n non nul :

$$\frac{u_n - 1}{2^{n-1}} = \frac{u_{n-1} - 1}{2^{n-2}} + \frac{n-1}{2^{n-1}}$$

$$\frac{u_{n-1} - 1}{2^{n-2}} = \frac{u_{n-2} - 1}{2^{n-3}} + \frac{n-2}{2^{n-2}}$$

$$\frac{u_2 - 1}{2^1} = \frac{u_1 - 1}{2^{1-1}} + \frac{1}{2^1}$$

$$\frac{u_1 - 1}{2^0} = \frac{u_0 - 1}{2^{0-1}} + \frac{0}{2^0}.$$

En déduire que pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k} = \frac{u_n - 1}{2^{n-1}}.$$