Progetto - Fondamenti di informatica

N. Matricola: IN0500630

Francesco Andreuzzi

Anno 2018-2019

1 Calcolo della funzione

Ricavo la funzione dal resto della divisione del numero di matricola per 2^{16}:

$(500630 \mod 65536) = 41878$

$41878_{10} = 1010001110010110_2$ $\Longrightarrow$

x	**y**	**z**	**k**	**f(x,y,z,k)**
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

Minterm

Riscrivo le combinazioni (x, y, z, k) in cui la funzione assume valore 1:

x	**y**	**z**	**k**	**f(x,y,z,k)**
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1

La funzione $f(x, y, z, k)$ quindi si può esprimere nel seguente modo:

$$\boldsymbol{f(x,y,z,k)} = (\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \cdot \overline{k}) + (\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z \cdot \overline{k}) + (\overline{x} \cdot y \cdot z \cdot \overline{k}) + (\overline{x} \cdot y \cdot z \cdot k) + (x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \cdot \overline{k}) + (x \cdot \overline{y} \cdot z \cdot k) +$$
$$+ (x \cdot y \cdot \overline{z} \cdot k) + (x \cdot y \cdot z \cdot \overline{k})$$

Maxterm

Riscrivo le combinazioni (x, y, z, k) in cui la funzione assume valore 0:

x	**y**	**z**	**k**	**f(x,y,z,k)**
0	0	0	1	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	0

La funzione $f(x, y, z, k)$ quindi si può esprimere nel seguente modo:

$$\boldsymbol{f(x,y,z,k)} = (x + y + z + \overline{k}) \cdot (x + y + \overline{z} + \overline{k}) \cdot (x + \overline{y} + z + k) \cdot (x + \overline{y} + z + \overline{k}) \cdot (\overline{x} + y + z + \overline{k}) \cdot$$
$$\cdot (\overline{x} + y + \overline{z} + k) \cdot (\overline{x} + \overline{y} + z + k) \cdot (\overline{x} + \overline{y} + \overline{z} + \overline{k})$$

2 Semplificazione

Semplificazione algebrica

Minterm

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{f(x,y,z,k)} &= \underline{(\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot\overline{z}\cdot\overline{k})} + (\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot z\cdot\overline{k}) + (\overline{x}\cdot y\cdot z\cdot\overline{k}) + (\overline{x}\cdot y\cdot z\cdot k) + \underline{(x\cdot\overline{y}\cdot\overline{z}\cdot\overline{k})} + (x\cdot\overline{y}\cdot z\cdot k) + \\
&\qquad + (x\cdot y\cdot\overline{z}\cdot k) + (x\cdot y\cdot z\cdot\overline{k}) \\
&\overset{T9}{=} (\overline{y}\cdot\overline{z}\cdot\overline{k}) + (\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot z\cdot\overline{k}) + (\overline{x}\cdot y\cdot z\cdot\overline{k}) + (\overline{x}\cdot y\cdot z\cdot k) + (x\cdot\overline{y}\cdot z\cdot k) + (x\cdot y\cdot\overline{z}\cdot k) \\
&\qquad + (x\cdot y\cdot z\cdot\overline{k}) \\
&= (\overline{y}\cdot\overline{z}\cdot\overline{k}) + (\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot z\cdot\overline{k}) + (\overline{x}\cdot y\cdot z\cdot\overline{k}) + (\overline{x}\cdot y\cdot z\cdot\overline{k}) + (\overline{x}\cdot y\cdot z\cdot\overline{k}) + (\overline{x}\cdot y\cdot z\cdot k) + \\
&\qquad + (x\cdot\overline{y}\cdot z\cdot k) + (x\cdot y\cdot\overline{z}\cdot k) + (x\cdot y\cdot z\cdot\overline{k}) \\
&= (\overline{y}\cdot\overline{z}\cdot\overline{k}) + \underline{(\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot z\cdot\overline{k})} + \underline{(\overline{x}\cdot y\cdot z\cdot\overline{k})} + (\overline{x}\cdot y\cdot z\cdot\overline{k}) + (\overline{x}\cdot y\cdot z\cdot\overline{k}) + (\overline{x}\cdot y\cdot z\cdot k) + \\
&\qquad + (x\cdot\overline{y}\cdot z\cdot k) + (x\cdot y\cdot\overline{z}\cdot k) + (x\cdot y\cdot z\cdot\overline{k}) \\
&\overset{T9}{=} (\overline{y}\cdot\overline{z}\cdot\overline{k}) + (\overline{x}\cdot z\cdot\overline{k}) + \underline{(\overline{x}\cdot y\cdot z\cdot\overline{k})} + (\overline{x}\cdot y\cdot z\cdot\overline{k}) + \underline{(\overline{x}\cdot y\cdot z\cdot k)} + (x\cdot\overline{y}\cdot z\cdot k) + \\
&\qquad + (x\cdot y\cdot\overline{z}\cdot k) + (x\cdot y\cdot z\cdot\overline{k}) \\
&\overset{T9}{=} (\overline{y}\cdot\overline{z}\cdot\overline{k}) + (\overline{x}\cdot z\cdot\overline{k}) + (\overline{x}\cdot y\cdot z) + \underline{(\overline{x}\cdot y\cdot z\cdot\overline{k})} + (x\cdot\overline{y}\cdot z\cdot k) + (x\cdot y\cdot\overline{z}\cdot k) + \\
&\qquad + \underline{(x\cdot y\cdot z\cdot\overline{k})} \\
&\overset{T9}{=} (\overline{y}\cdot\overline{z}\cdot\overline{k}) + (\overline{x}\cdot z\cdot\overline{k}) + (\overline{x}\cdot y\cdot z) + (y\cdot z\cdot\overline{k}) + (x\cdot\overline{y}\cdot z\cdot k) + (x\cdot y\cdot\overline{z}\cdot k)
\end{aligned}
$$

Maxterm

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{f(x,y,z,k)} &= (x+y+z+\overline{k})\cdot(x+y+\overline{z}+\overline{k})\cdot(x+\overline{y}+z+k)\cdot(x+\overline{y}+z+\overline{k})\cdot(\overline{x}+y+z+\overline{k})\cdot \\
&\qquad \cdot(\overline{x}+y+\overline{z}+k)\cdot(\overline{x}+\overline{y}+z+k)\cdot(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}+\overline{k}) \\
&= \underline{(x+y+z+\overline{k})}\cdot(x+y+z+\overline{k})\cdot(x+y+z+\overline{k})\cdot\underline{(x+y+\overline{z}+\overline{k})}\cdot(x+\overline{y}+z+k)\cdot \\
&\qquad \cdot(x+\overline{y}+z+\overline{k})\cdot(\overline{x}+y+z+\overline{k})\cdot(\overline{x}+y+\overline{z}+k)\cdot(\overline{x}+\overline{y}+z+k)\cdot(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}+\overline{k}) \\
&\overset{T9}{=} (x+y+\overline{k})\cdot\underline{(x+y+z+\overline{k})}\cdot(x+y+z+\overline{k})\cdot(x+\overline{y}+z+k)\cdot\underline{(x+\overline{y}+z+\overline{k})}\cdot \\
&\qquad \cdot(\overline{x}+y+z+\overline{k})\cdot(\overline{x}+y+\overline{z}+k)\cdot(\overline{x}+\overline{y}+z+k)\cdot(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}+\overline{k}) \\
&\overset{T9}{=} (x+y+\overline{k})\cdot(x+z+\overline{k})\cdot\underline{(x+y+z+\overline{k})}\cdot(x+\overline{y}+z+k)\cdot\underline{(\overline{x}+y+z+\overline{k})}\cdot \\
&\qquad \cdot(\overline{x}+y+\overline{z}+k)\cdot(\overline{x}+\overline{y}+z+k)\cdot(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}+\overline{k}) \\
&\overset{T9}{=} (x+y+\overline{k})\cdot(x+z+\overline{k})\cdot(y+z+\overline{k})\cdot\underline{(x+\overline{y}+z+k)}\cdot(\overline{x}+y+\overline{z}+k)\cdot \\
&\qquad \cdot\underline{(\overline{x}+\overline{y}+z+k)}\cdot(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}+\overline{k}) \\
&\overset{T9}{=} (x+y+\overline{k})\cdot(x+z+\overline{k})\cdot(y+z+\overline{k})\cdot(\overline{y}+z+k)\cdot(\overline{x}+y+\overline{z}+k)\cdot \\
&\qquad \cdot(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}+\overline{k})
\end{aligned}
$$

Verifica

Dimostro per induzione perfetta che le espressioni sono equivalenti:

x	y	z	k		minterm(x,y,z,k)	maxterm(x,y,z,k)
0	0	0	0		1	1
0	0	0	1		0	0
0	0	1	0		1	1
0	0	1	1		0	0
0	1	0	0		0	0
0	1	0	1		0	0
0	1	1	0		1	1
0	1	1	1		1	1
1	0	0	0		1	1
1	0	0	1		0	0
1	0	1	0		0	0
1	0	1	1		1	1
1	1	0	0		0	0
1	1	0	1		1	1
1	1	1	0		1	1
1	1	1	1		0	0

Mappa di Karnaugh

z k \ x y	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	1	0
11	0	1	0	1
10	1	1	1	0

La funzione ottenuta è la seguente:

$$\boldsymbol{f(x,y,z,k)} = (\overline{y} \cdot \overline{z} \cdot \overline{k}) + (x \cdot y \cdot \overline{z} \cdot k) + (x \cdot \overline{y} \cdot z \cdot k) + (\overline{x} \cdot y \cdot z) + (\overline{x} \cdot z \cdot \overline{k}) + (y \cdot z \cdot \overline{k})$$

Metodo tabellare di Quine - Mc Cluskey

Costruisco la tabella (ordinata secondo il numero di 1 all'interno del termine):

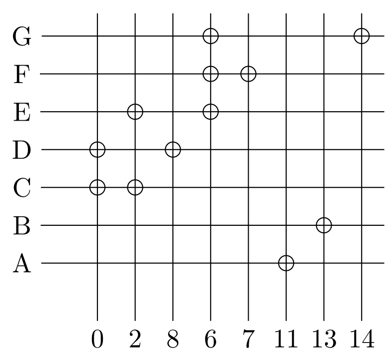
	Livello	**Numero**	**Termine**
✓	0	0	0000
✓	1	2	0010
✓	1	8	1000
✓	2	6	0110
✓	3	7	0111
A	3	11	1011
B	3	13	1101
✓	3	14	1110

Effettuate le semplificazioni, ottengo la seguente tabella.

	Livelli	**Implicanti**	**Termine**
C	0,1	0,2	00-0
D	0,1	0,8	-000
E	1,2	2,6	0-10
F	2,3	6,7	011-
G	2,3	6,14	-110

Non è possibile operare alcuna semplifiazione.

Costruisco il reticolo, in modo da poter valutare quali sono gli implicanti essenziali:



Posso scegliere, per coprire il termine 2, l'implicante C oppure l'implicante E. Scegliendo l'implicante E mi riconduco all'espressione della funzione trovata con la mappa di Karnaugh.

Implicante	**Termini implicati**	**Espressione**
A	11	$x \cdot \overline{y} \cdot z \cdot k$
B	13	$x \cdot y \cdot \overline{z} \cdot k$
G	6,14	$y \cdot z \cdot \overline{k}$
F	6,7	$\overline{x} \cdot y \cdot z$
D	0,8	$\overline{y} \cdot \overline{z} \cdot \overline{k}$
E	0,2	$\overline{x} \cdot z \cdot \overline{k}$

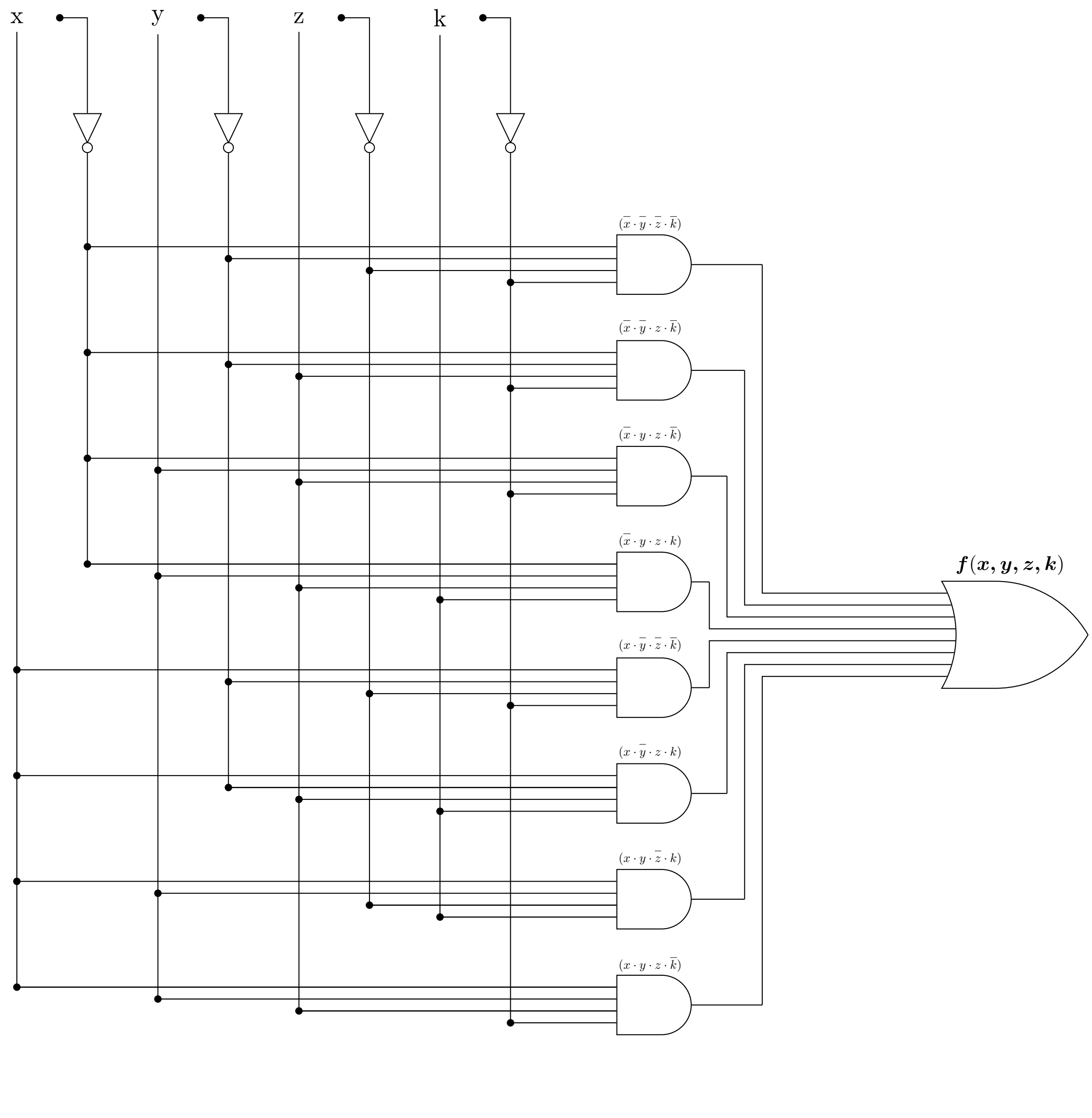
La funzione ottenuta è la seguente:

$$\boldsymbol{f(x,y,z,k)} = \underbrace{(\overline{y} \cdot \overline{z} \cdot \overline{k})}_{\text{D}} + \underbrace{(x \cdot y \cdot \overline{z} \cdot k)}_{\text{B}} + \underbrace{(x \cdot \overline{y} \cdot z \cdot k)}_{\text{A}} + \underbrace{(\overline{x} \cdot y \cdot z)}_{\text{F}} + \underbrace{(\overline{x} \cdot z \cdot \overline{k})}_{\text{E}} + \underbrace{(y \cdot z \cdot \overline{k})}_{\text{G}}$$

3 Schema logico

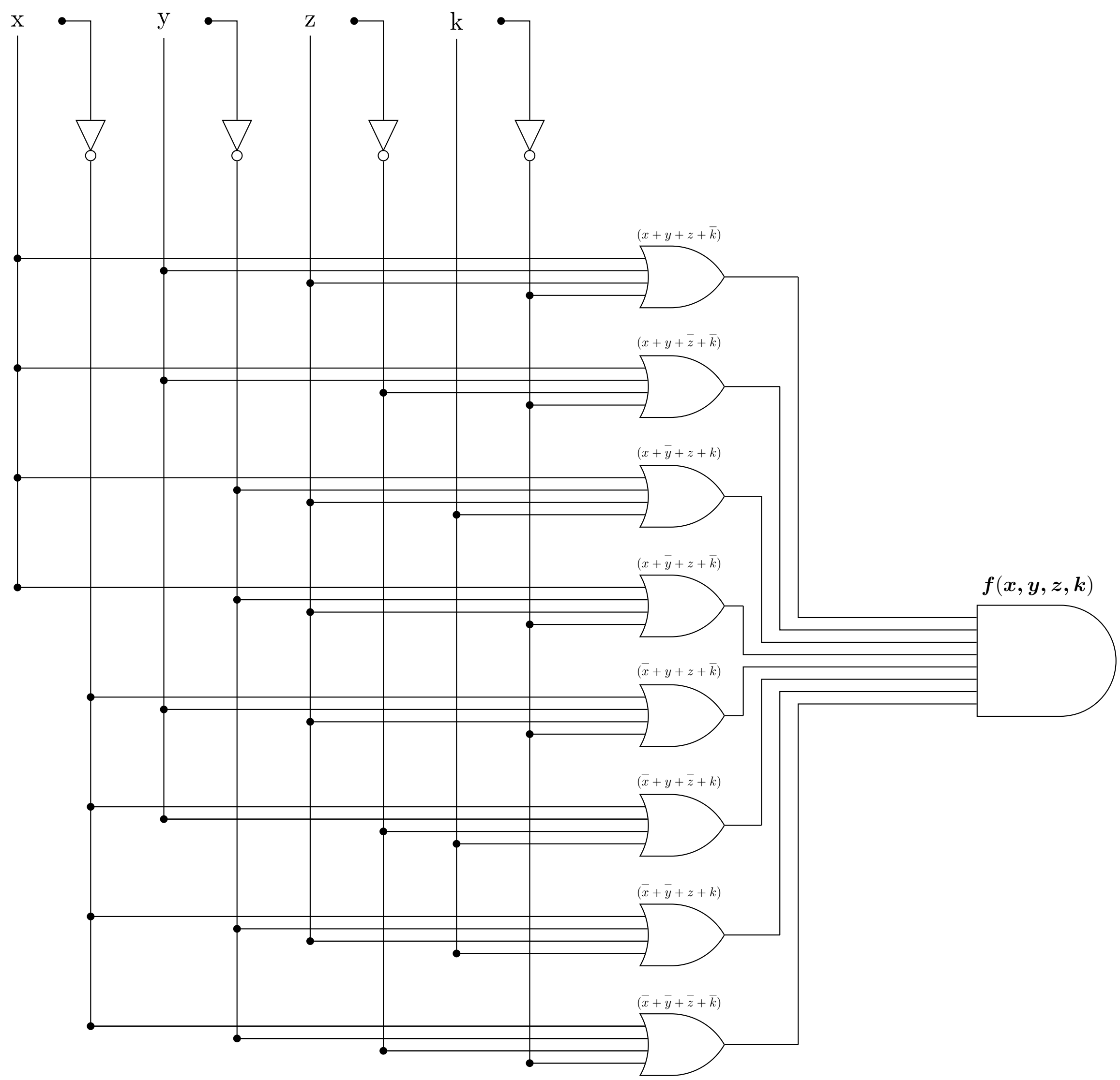
Minterm:

$$\boldsymbol{f(x,y,z,k)} = (\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \cdot \overline{k}) + (\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z \cdot \overline{k}) + (\overline{x} \cdot y \cdot z \cdot \overline{k}) + (\overline{x} \cdot y \cdot z \cdot k) + (x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \cdot \overline{k}) + (x \cdot \overline{y} \cdot z \cdot k) + \\ + (x \cdot y \cdot \overline{z} \cdot k) + (x \cdot y \cdot z \cdot \overline{k})$$



Maxterm:

$$\boldsymbol{f(x,y,z,k)} = (x+y+z+\overline{k})\cdot(x+y+\overline{z}+\overline{k})\cdot(x+\overline{y}+z+k)\cdot(x+\overline{y}+z+\overline{k})\cdot(\overline{x}+y+z+\overline{k})\cdot$$
$$\cdot(\overline{x}+y+\overline{z}+k)\cdot(\overline{x}+\overline{y}+z+k)\cdot(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}+\overline{k})$$



Funzione semplificata:

$\boldsymbol{f(x,y,z,k)} = (\overline{y} \cdot \overline{z} \cdot \overline{k}) + (x \cdot y \cdot \overline{z} \cdot k) + (x \cdot \overline{y} \cdot z \cdot k) + (\overline{x} \cdot y \cdot z) + (\overline{x} \cdot z \cdot \overline{k}) + (y \cdot z \cdot \overline{k})$