PROVA RISERVATA 1 - PAGINE 1-11

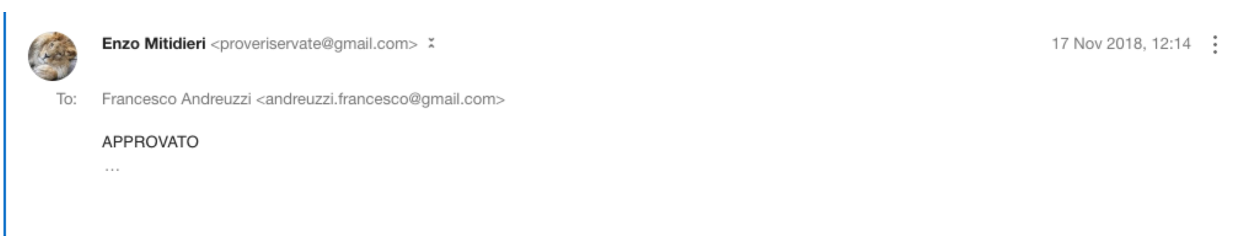
CONSEGNA: GIOVEDÌ 6 DICEMBRE 2018 ORE 12.00

Andreuzzi Francesco

Numero di Matricola: IN0500630

Laurea in Ingegneria Informatica (applicazioni informatiche)

Approvazione questionario:



Enzo Mitidieri <proveriservate@gmail.com> 17 Nov 2018, 12:14

To: Francesco Andreuzzi <andreuzzi.francesco@gmail.com>

APPROVATO

...

Soluzione Esercizio 1

Applichiamo la disuguaglianza $A_m \geq G_m$

$$\frac{a_n + b_n}{2} \geq \sqrt{a_n b_n} \quad \Longrightarrow \quad a_n \geq b_n \quad \forall\, n$$

- a_n è **decrescente**

$$1) \quad a_1 + b_1 < 2a_1 \Longrightarrow \frac{a_1 + b_1}{2} < a_1 \quad \Longrightarrow \quad a_2 < a_1$$

$$n) \quad a_n + b_n \leq 2a_n \Longrightarrow \frac{a_n + b_n}{2} \leq a_n \quad \Longrightarrow \quad a_{n+1} \leq a_n$$

- b_n è **crescente**

$$1) \quad \sqrt{a_1 b_1} > \sqrt{b_1 b_1} = b_1 \quad \Longrightarrow \quad b_2 > b_1$$

$$n) \quad \sqrt{a_n b_n} > \sqrt{b_n b_n} = b_n \quad \Longrightarrow \quad b_{n+1} > b_n$$

Quindi a_n, b_n sono **limitate** :

$$a_1 \geq a_n \geq b_n \geq b_1 \geq 0 \quad \forall\, n$$

a_n, b_n sono **monotone** e **limitate**

$$\Longrightarrow \exists\, L_a, L_b :$$

- $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = L_a$
- $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = L_b$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L_a = \frac{L_a + L_b}{2}$$
$$\Longrightarrow 2L_a = L_a + L_b \Longrightarrow L_a = L_b$$

$$\lim_{n \to \infty} b_n = L_b = \sqrt{L_a L_b}$$
$$\Longrightarrow {L_b}^2 = L_a L_b \Longrightarrow L_b = L_a$$

Soluzione Esercizio 2

ii)

Applico il criterio del **confronto asintotico** con la serie $\sum \frac{1}{e^n}$:

$$\lim_{n\to\infty} e^n \times \left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty} e^n \times \left(\frac{\cancel{n^2}(1+\frac{1}{n^2})}{\cancel{n^2}(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty} e^n \times \frac{(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}}{(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^n \times \frac{e}{(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{n+1}}{(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^{n^2}}$$

Valutiamo il valore al limite del denominatore:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = 1 \implies \ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) \sim \left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) - 1 = \frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)n^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\cancel{2}}}{\cancel{n}} + \frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}} = n+1$$

$$\implies \left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \sim e^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{n+1}}{(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^{n^2}} = \frac{e^{n+1}}{e^{n+1}} = 1$$

Siccome $\sum \frac{1}{e^n}$ **converge** (vedi punto **(4)** in appendice)

$$\implies \sum \left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^{n^2} \quad \textbf{converge}$$

Soluzione Esercizio 2

i)

$$\frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt[3]{n^3+1}}{1} \times \frac{n^2+1+\sqrt[3]{n^3+1}^2+\sqrt{n^2+1}\sqrt[3]{n^3+1}}{n^2+1+\sqrt[3]{n^3+1}^2+\sqrt{n^2+1}\sqrt[3]{n^3+1}} = \frac{n^2\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+1}-n^3-1}{n^2+1+\sqrt[3]{n^3+1}^2+\sqrt{n^2+1}\sqrt[3]{n^3+1}}$$

$$= \frac{n^2\sqrt{n^2+1}-n^3}{n^2+1+\sqrt[3]{n^3+1}^2+\sqrt{n^2+1}\sqrt[3]{n^3+1}} + \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+1+\sqrt[3]{n^3+1}^2+\sqrt{n^2+1}\sqrt[3]{n^3+1}}$$

$$-\frac{1}{n^2+1+\sqrt[3]{n^3+1}^2+\sqrt{n^2+1}\sqrt[3]{n^3+1}}$$

Quindi avremo che

$$\sum \sqrt{n^2+1}-\sqrt[3]{n^3+1} = \sum a_n + \sum b_n + \sum c_n$$

Non c'è il rischio di ottenere una **forma indeterminata** $\infty - \infty$, infatti:

$$c_n \sim \frac{1}{3n^2} \implies c_n \text{ è } \textbf{convergente}$$

$$b_n \sim \frac{n}{3n^2} \sim \frac{1}{n} \implies b_n \text{ è } \textbf{positivamente divergente}$$

$$a_n = \frac{n^2\sqrt{n^2+1}-n^3}{n^2+1+\sqrt[3]{n^3+1}^2+\sqrt{n^2+1}\sqrt[3]{n^3+1}} \times \frac{n^2\sqrt{n^2+1}+n^3}{n^2\sqrt{n^2+1}+n^3}$$

$$= \frac{\cancel{n^6}+n^4-\cancel{n^6}}{(n^2+1+\sqrt[3]{n^3+1}^2+\sqrt{n^2+1}\sqrt[3]{n^3+1})(n^2\sqrt{n^2+1}+n^3)}$$

$$= \frac{n^4}{(n^2+1+\sqrt[3]{n^3+1}^2+\sqrt{n^2+1}\sqrt[3]{n^3+1})(n^2\sqrt{n^2+1}+n^3)} \sim \frac{n^4}{2n^5} \sim \frac{1}{n}$$

$$\implies \quad \sum a_n \text{ è } \textbf{positivamente divergente}$$

$$\implies \sum \sqrt{n^2+1}-\sqrt[3]{n^3+1} \ \textbf{diverge positivamente} \quad \text{(vedi punto } \textbf{(3)} \text{ in appendice)}$$

Soluzione Esercizio 3

Consideriamo il punto $m = \dfrac{b-a}{2}$

Sviluppiamo la **formula di Taylor** (con **resto di Lagrange**) centrata in a e b

$$f(m) = f(a) + \cancel{f^{'}(a)(m-a)} + \frac{f^{''}(\psi)}{2}(m-a)^2$$

$$f(m) = f(b) + \cancel{f^{'}(b)(m-b)} + \frac{f^{''}(\omega)}{2}(m-b)^2$$

Per qualche $\psi, \omega \in (a, b)$

$$f(b) + \frac{f^{''}(\omega)}{2}(m-b)^2 = f(a) + \frac{f^{''}(\psi)}{2}(m-a)^2$$

$$f(b) - f(a) = \frac{f^{''}(\psi)}{2}\left(\frac{1}{2}(b-a)\right)^2 - \frac{f^{''}(\omega)}{2}\left(\frac{1}{2}(b-a)\right)^2 = \left[\frac{f^{''}(\psi)}{2} - \frac{f^{''}(\omega)}{2}\right]\frac{1}{4}(b-a)^2$$

$$4 \times \frac{[f(b)-f(a)]}{(b-a)^2} = \left[\frac{f^{''}(\psi)}{2} - \frac{f^{''}(\omega)}{2}\right] \quad \Longrightarrow \quad 4 \times \frac{|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2} = \frac{|f^{''}(\psi) - f^{''}(\omega)|}{2}$$

Per la disuguaglianza **(2)** in appendice:

$$\frac{|f^{''}(\psi) - f^{''}(\omega)|}{2} \leq \max\left(|f^{''}(\psi)|, |f^{''}(\omega)|\right) = |f^{''}(\theta)|$$

$$4 \times \frac{|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2} \leq |f^{''}(\theta)|$$

Con $\theta = \psi$ oppure $\theta = \omega$

Soluzione Esercizio 4

i)

$$\cos(x) = \cos\left(2 \times \frac{x}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$x \neq 0 \implies \sin(x) < |x|$$
$$\implies 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) > 1 - 2\left(\frac{|x^2|}{4}\right) = 1 - \frac{x^2}{2}$$
$$\implies \cos(x) > 1 - \frac{x^2}{2} \quad \text{per} \quad x \neq 0$$

ii)

$$\text{Se per } \textbf{assurdo} \quad \exists\, x > 0: \quad x - \frac{x^3}{3!} \geq \sin(x)$$
$$\implies \quad \frac{x - \sin(x)}{\frac{x^3}{3!}} \geq 1$$

$$f(x) := x - \sin(x) \quad g(x) := \frac{x^3}{3!}$$
$$f(0) = 0 \quad g(0) = 0$$

Per il teorema di **Cauchy**

$$\frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{'}(\theta)}{g^{'}(\theta)} = \frac{1 - \cos(\theta)}{\frac{\theta^2}{2}}$$

Applichiamo ancora lo stesso procedimento:

$$\frac{1 - \cos(\theta)}{\frac{\theta^2}{2}} = \frac{\sin(\psi)}{\psi}$$

$$\frac{x - \sin(x)}{\frac{x^3}{3!}} \geq 1 \iff \exists\, \psi \in (0, \theta): \quad (\text{con } 0 < \theta < x)$$
$$\frac{\sin(\psi)}{\psi} \geq 1$$

che è **impossibile** (vedi punto **(1)** in appendice)

Soluzione Esercizio 4

iii)

$$\text{Se per } \textbf{assurdo} \quad \exists\, x > 0 : \quad x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \leq \sin(x)$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{\sin(x) + \frac{x^3}{3!} - x}{\frac{x^5}{5!}} \geq 1$$

Applichiamo il teorema di **Cauchy** (con lo stesso procedimento del punto **(2)**):

$$\frac{\sin(x) + \frac{x^3}{3!} - x}{\frac{x^5}{5!}} = \frac{\cos(\theta) + \frac{\theta^2}{2} - 1}{\frac{\theta^4}{4!}} = \frac{-\sin(\psi) + \psi}{\frac{\psi^3}{3!}}$$

$$= \frac{1 - \cos(\upsilon)}{\frac{\upsilon^2}{2}} = \frac{\sin(\lambda)}{\lambda}$$

$$\frac{\sin(x) + \frac{x^3}{3!} - x}{\frac{x^5}{5!}} \geq 1 \iff \exists\, \lambda \in (0, \upsilon) : \quad (\text{con } \upsilon < \psi < \theta < x)$$

$$\frac{\sin(\lambda)}{\lambda} \geq 1$$

che è **impossibile** (vedi punto **(1)** in appendice)

APPENDICE

1)

$$\sin(x) < x \quad \text{per} \quad x > 0$$

$$\text{Se per } \textbf{assurdo} \quad \exists\, x > 0 : \quad \sin(x) > x$$
$$\implies \frac{\sin(x)}{x} > 1$$

$$f(x) := \sin(x) \quad g(x) := x$$
$$f(0) = 0 \quad g(0) = 0$$

Per il teorema di **Cauchy**

$$\frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\exists\, \theta \in (0, x) :$$
$$\frac{\sin(x)}{x} = \cos(\theta) > 1 \quad (\textbf{assurdo})$$

− −

$$\sin(x) = x \quad \iff \quad x = 0$$

$$f(x) := \sin(x) - x \quad f(0) = 0$$

Supponiamo per **assurdo** che $\exists\, x_0 \in\ (0, 1] : \quad \sin(x_0) = x_0$

Applichiamo il **teorema di Lagrange** :

$$\frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} = f'(\theta) \quad \text{con } \theta \in (0, x_0)$$
$$\frac{0}{x_0} = 0 = \cos(\theta) - 1 \quad \implies \quad \cos(\theta) = 1$$

$$\nexists\, \theta \in (0, x_0) : \quad \cos(\theta) = 1$$
$$\implies \quad \nexists\, x_0 \in\ (0, 1] : \quad \sin(x_0) = x_0$$

APPENDICE

2)

$$\frac{|x-y|}{2} \leq \max\left(|x|, |y|\right)$$

Per la disuguaglianza triangolare:

$$|x+(-y)| \leq |x| + |y|$$

$$M := \max\left(|x|, |y|\right)$$

$$|x| + |y| \leq 2M$$

$$\implies \quad |x-y| \leq 2M$$

$$\frac{|x-y|}{2} \leq \max\left(|x|, |y|\right)$$

APPENDICE

3)

Se

- $\sum a_n = \sum b_n + \sum c_n + \sum d_n$
- $\sum b_n, \sum c_n$ divergono positivamente
- $\sum d_n$ converge

$$\implies \sum a_n \text{ diverge positivamente}$$

Verifichiamo la definizione per $\sum a_n$:

Scegliamo un M qualsiasi

$$L := \sum d_n (< +\infty)$$

Scegliamo n_b :

$$\forall\, n \geq n_b \quad \sum_{i=1}^{n} b_i \geq \frac{M}{2} + \frac{|L|}{2}$$

Analogamente scegliamo n_c :

$$\forall\, n \geq n_c \quad \sum_{i=1}^{n} c_i \geq \frac{M}{2} + \frac{|L|}{2}$$

$$\alpha := \max(n_b, n_c)$$

$$\implies \forall\, n \geq \alpha \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \geq \frac{M}{2} + \frac{|L|}{2} + \frac{M}{2} + \frac{|L|}{2} + L = M + |L| + L \geq M$$

Quindi $\sum a_n$ è **divergente**

Lo stesso ragionamento vale per un numero differente di serie divergenti positivamente o convergenti

APPENDICE

4)

$$\sum \frac{1}{e^n} \quad \textbf{converge}$$

Dimostriamo per **induzione** che $e^n > n^2 \quad \forall\, n$

$$1) \quad e > 1$$

$$n) \quad e^{n+1} = e^n \times e = (e-1)e^n + e^n$$

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 < e^n + 2n + 1 < e^n + (e-1)e^n$$

Dimostriamo per **induzione** che $(e-1)e^n > 2n+1 \quad \forall\, n$

$$1) \quad 4.67 > 3$$

$$n) \quad (e-1)e^{n+1} = (e-1)e^n \times e = (e-1)(e-1)e^n + (e-1)e^n = (e-1)^2 e^n + (e-1)e^n$$

$$2(n+1) + 1 = 2n + 3 < (e-1)e^n + 2 < (e-1)e^n + (e-1)^2 e^n$$

Dimostriamo che $(e-1)^2 e^n > 2 \quad \forall\, n$

$$1) \quad 8.02 > 2$$

$$n) \quad (e-1)^2 e^n \text{ è } \textbf{crescente}$$

$$e^n > n^2 \quad \forall\, n$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{e^n} < \frac{1}{n^2} \quad \forall\, n$$

Quindi $\sum \frac{1}{e^n}$ **converge** per il criterio del **confronto**