PROVA RISERVATA 2 - PAGINE 1-6

CONSEGNA: MERCOLEDÌ 26 DICEMBRE 2018 ORE 18.00

(Le Papillon Machaon.)

Cognome e Nome: Andreuzzi Francesco

Numero di Matricola: IN0500630

Laurea in Ingegneria Informatica (applicazioni informatiche)

Valutazione PR1: 26

Bonus:

VALUTAZIONE: ANDREUZZI : 2018

Enzo Mitidieri <proveriservate@gmail.com>   8 Dec 2018, 11:58

To: Francesco Andreuzzi <andreuzzi.francesco@gmail.com>

1. bene
2. i) bene
ii) bene
3. il punto m=(b-a)/2 aparte ad (a,b) \iff a<b/3 e questa non e' una ipotesi!!!
\Questo significa che non puoi calcolare f(m)!!!
4. OK

VALUTAZIONE : 26

EM

Soluzione Esercizio 1

$$\frac{\left|\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right|}{|a_{n+1} - a_n|} = \frac{\frac{\cancel{|a_{n+1}-a_n|}}{|a_n a_{n+1}|}}{\cancel{|a_{n+1} - a_n|}} = \frac{1}{|a_n a_{n+1}|} \tag{1}$$

$$\frac{|a_{n+1} - a_n|}{\left|\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right|} = \frac{\cancel{|a_{n+1} - a_n|}}{\frac{\cancel{|a_{n+1}-a_n|}}{|a_n a_{n+1}|}} = |a_n a_{n+1}| \tag{2}$$

$$\bullet \quad \sum |a_{n+1} - a_n| < \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n a_{n+1} = a^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{a^2}$$

$$\Longrightarrow \qquad \forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \overline{n}: \quad \forall\, n \geq \overline{n} \quad \left|\frac{1}{|a_n a_{n+1}|} - \frac{1}{a^2}\right| < \epsilon \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{a^2} - \epsilon < \frac{1}{|a_n a_{n+1}|} < \frac{1}{a^2} + \epsilon$$

$$\epsilon = \frac{1}{2a^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{2a^2} < \frac{1}{|a_n a_{n+1}|} < \frac{3}{2a^2}$$

$$\Longrightarrow \qquad \left|\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right| < \frac{3}{2a^2}|a_{n+1} - a_n| \quad \forall\, n \geq \overline{n}_\epsilon \qquad\qquad \text{per } \mathbf{(1)}$$

$$\Longrightarrow \qquad \sum \left|\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right| < \infty \qquad\qquad ((\mathbf{1.1}) \text{ in appendice})$$

$$\bullet \quad \sum \left|\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right| < \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n a_{n+1} = a^2$$

$$\Longrightarrow \qquad \forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \overline{n}: \quad \forall\, n \geq \overline{n} \quad \big||a_n a_{n+1}| - a^2\big| < \epsilon \qquad \Longrightarrow \qquad a^2 - \epsilon < |a_n a_{n+1}| < a^2 + \epsilon$$

$$\epsilon = \frac{1}{2}a^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{2}a^2 < |a_n a_{n+1}| < \frac{3}{2}a^2$$

$$\Longrightarrow \qquad |a_{n+1} - a_n| < \frac{3}{2}a^2 \left|\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right| \quad \forall\, n \geq \overline{n}_\epsilon \qquad\qquad \text{per } \mathbf{(2)}$$

$$\Longrightarrow \qquad \sum |a_{n+1} - a_n| < \infty \qquad\qquad ((\mathbf{1.1}) \text{ in appendice})$$

Soluzione Esercizio 2

i)

$$\int_{(n-1)h}^{nh} f(x)dx \geq \int_{(n-1)h}^{nh} f(nh) \geq \int_{(n-1)h}^{nh} f(x+h)dx \qquad (f \text{ è } \textbf{decrescente})$$

$$\int_{(n-1)h}^{nh} f(x+h)dx \quad \overset{t\,=\,x\,+\,h}{=} \quad \int_{(n-1)h+h}^{nh+h} f(t)dt = \int_{nh}^{(n+1)h} f(t)dt$$

$$\int_{(n-1)h}^{nh} f(x)dx \geq \int_{(n-1)h}^{nh} f(nh) \geq \int_{nh}^{(n+1)h} f(x)dx \tag{3}$$

$$\int_{(n-1)h}^{nh} f(nh) = f(nh)(nh - nh + h) = hf(nh)$$

Sommando per $n = 1, 2, \ldots$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_{(n-1)h}^{nh} f(x)dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} hf(nh) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{nh}^{(n+1)h} f(x)dx$

$$\int_0^{\infty} f(x)dx \geq h \sum_{n=1}^{\infty} f(nh) \geq \int_h^{\infty} f(x)dx$$

Se $h \to 0^+ \quad \Longrightarrow \quad \displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx \geq h \sum_{n=1}^{\infty} f(nh) \geq \int_0^{\infty} f(x)dx$

Per il teorema dei **carabinieri** : $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx = \lim_{h\to 0^+} h \sum_{n=1}^{\infty} f(nh)$

$$\lim_{h\to 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h}{1+h^2x^2} = \lim_{h\to 0^+} h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+h^2x^2} = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = [\arctan(x)]_{x=0}^{x\to\infty} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

Nota : è necessario che $h \to 0^+$ (e non $h \to 0^-$) perchè la catena di disuguaglianze **(3)** non risulta valida per valori **negativi** di h

Avremmo infatti che $(n+1)h < nh < (n-1)h$

$$\Longrightarrow \quad \int_{nh}^{(n+1)h} f(x)dx \geq \int_{(n-1)h}^{nh} f(nh) \geq \int_{(n-1)h}^{nh} f(x)dx$$

Soluzione Esercizio 2

ii)

f è **integrabile** sul suo dominio perchè è **continua**

Anche $xf(x)$ è **integrabile** perchè è un prodotto di funzioni **continue**

$$F(x) := \int_0^x f(t)dt$$

Calcoliamo **per parti** una primitiva di $xf(x)$:

$$\int xf(x)dx = xF(x) - \int F(x)dx$$

$$\frac{1}{n}\int_0^n xf(x)dx = \frac{1}{n}\left(nF(n) - \int_0^n F(x)dx\right) = F(n) - \frac{1}{n}\int_0^n F(x)dx$$

Per il teorema di **Cesàro**, siccome $\exists \lim_{x\to\infty} F(x) = \int_0^\infty f(x)dx < \infty$

$$\implies \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_0^n F(x)dx = \lim_{n\to\infty} F(n)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_0^n xf(x)dx = \lim_{n\to\infty} F(n) - \frac{1}{n}\int_0^n F(x)dx = \lim_{n\to\infty} F(n) - F(n) = 0$$

Soluzione Esercizio 3

Dimostriamo che $g(x)$ **non è** uniformemente continua in $\mathbb{R}$

$$a_n := \frac{2}{3}n^2\pi + \frac{1}{3n} \qquad b_n := \frac{2}{3}n^2\pi$$
$$|a_n - b_n| = \left|\frac{2}{3}n^2\pi + \frac{1}{3n} - \frac{2}{3}n^2\pi\right| = \left|\frac{1}{3n}\right| \to 0$$

$$|g(a_n) - g(b_n)| = \left|\left|\frac{2}{3}n^2\pi + \frac{1}{3n}\right| \sin(2n^2\pi + \frac{1}{n}) - \cancel{\left|\frac{2}{3}n^2\pi\right| \sin(2n^2\pi)}\right|$$
$$= \left|\left(\frac{2}{3}n^2\pi + \frac{1}{3n}\right)\left[\cancel{\sin(2n^2\pi)\cos\left(\frac{1}{n}\right)} + \cos(2n^2\pi)\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right|$$
$$= \left|\left(\frac{2}{3}n^2\pi + \frac{1}{3n}\right)\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right| \quad \not\to \quad 0$$

La successione $\left(\frac{2}{3}n^2\pi + \frac{1}{3n}\right)\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ **diverge**, dato che

$$\left(\frac{2}{3}n^2\pi + \frac{1}{3n}\right)\sin\left(\frac{1}{n}\right) > n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right) \quad \forall\, n$$

e la successione $n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ **diverge** (punto **(3.1)** in appendice)

APPENDICE

1.1)

$$\sum a_n < +\infty$$
$$\exists\, C > 0, \quad \exists\, \overline{n} : \quad b_n < C a_n \quad \forall\, n \geq \overline{n}$$
$$\implies \quad \sum b_n < +\infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\overline{n}-1} b_n + \sum_{n=\overline{n}}^{\infty} b_n \qquad \left(\text{con } \sum_{n=1}^{\overline{n}-1} b_n < \infty\right)$$
$$\sum_{n=\overline{n}}^{\infty} b_n \leq \sum_{n=\overline{n}}^{\infty} C a_n = C \sum_{n=\overline{n}}^{\infty} a_n < \infty$$
$$\implies \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq \sum_{n=1}^{\overline{n}-1} b_n + C \sum_{n=\overline{n}}^{\infty} a_n < \infty$$

3.1)

$$n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right) \quad \overset{n \to \infty}{\sim} \quad n^2 \frac{1}{n} = n$$
$$\implies \quad \lim_{n\to\infty} n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$