Prova bonus Analisi 1

Francesco Andreuzzi

12 ottobre 2018

Esercizio 1.

Dimostriamo la formula per la somma dei numeri da n a 2n:

$$n + .. + 2n = (n+1) * \frac{3}{2} * n$$

Per n = 1

$$S_1 = 3$$

Considerando valido il caso n-esimo, si può dimostrare il caso n+1-esimo

$$S_{n+1} - S_n = (2n+1) + (2n+2) - n$$

$$S_{n+1} = ((n+1)+1) * \frac{3}{2} * (n+1) = (n+1) * \frac{3}{2} * n + (2n+1) + (2n+2) - (n)$$

$$(n+2) * \frac{3}{2} * (n+1) = (n+1) * \frac{3}{2} * n + 3n + 3$$

$$(n+2) * \frac{3}{2} * (n+1) = (n+1) * \frac{3}{2} * n + 3(n+1)$$

$$(n+2) * \frac{3}{2} * (n+1) = (n+1) * (\frac{3}{2} * n + 3)$$

$$(n+2) * \frac{3}{2} * (n+1) = (n+1) * 3(\frac{1}{2} * n + 1)$$

$$(n+2) * \frac{3}{2} * (n+1) = (n+1) * 3(\frac{n+2}{2})$$

$$(n+2) * \frac{3}{2} * (n+1) = (n+1) * \frac{3}{2}(n+2)$$

Quindi la formula è valida per n $\geq$ 1

$$A_m \geq H_m$$

$$\frac{\frac{1}{n} + ... + \frac{1}{2n}}{n+1} \geq \frac{n+1}{n + ... + 2n}$$

$$\frac{\frac{1}{n} + ... + \frac{1}{2n}}{n+1} \geq \frac{n+1}{(n+1) * \frac{3}{2} * n}$$

$$\frac{\frac{1}{n} + ... + \frac{1}{2n}}{n+1} \geq \frac{2 * (n+1)}{(n+1) * 3 * n}$$

$$\frac{\frac{1}{n} + ... + \frac{1}{2n}}{n+1} \geq \frac{2}{3 * n}$$

$$\frac{1}{n} + ... + \frac{1}{2n} \geq \frac{2 * (n+1)}{3 * n}$$

$$\frac{1}{n} + ... + \frac{1}{2n} \geq \frac{2}{3} * \frac{n+1}{n}$$

$$\frac{1}{n} + ... + \frac{1}{2n} \geq \frac{2}{3} * (1 + \frac{1}{n}) > \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{n} + ... + \frac{1}{2n} > \frac{2}{3}$$

Esercizio 2.

Dimostriamo la formula per la somma dei numeri da n+1 a 3n+1:

$$(n+1) + ... + (3n+1) = (2n+1)^2$$

Per n = 1 si ottiene

$$S_1 = 9$$

Supponiamo che valga il caso (n), e cerchiamo di dimostrare il caso (n+1)

$$S_{n+1} - S_n = (3n+4) + (3n+3) + (3n+2) - (n+1)$$

$$S_{n+1} = [2(n+1)+1]^2 = (2n+1)^2 + (8n+8)$$

$$(2n+3)^2 = (2n+1)^2 + 8(n+1)$$

$$4n^2 + 12n + 9 = 4n^2 + 4n + 1 + 8n + 8$$

$$4n^2 + 12n + 9 = 4n^2 + 12n + 9$$

Quindi la formula è valida per n $\geq$ 1

$$A_m \geq H_m$$

$$\frac{\frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{3n+1}}{2n+1} \geq \frac{2n+1}{(2n+1)^2}$$

$$\frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{3n+1} \geq \frac{(2n+1)(2n+1)}{(2n+1)^2}$$

$$\frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{3n+1} \geq \frac{(2n+1)^2}{(2n+1)^2}$$

$$\frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{3n+1} \geq 1$$

Dimostriamo che non vale $S_n = 1$

$$1)\ S_1 = \frac{13}{12} > 1$$

Dobbiamo verificare che partendo da un $S_1 > 1$ è impossibile arrivare ad un $S_n = 1$

Ma S_n è **crescente**. Infatti si ha che:

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} - \frac{1}{n+1}$$

Poniamo $a = \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4}$

Poniamo $b = \frac{1}{n+1}$

Si può verificare che $a > b$ e quindi:

$$\frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} > \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow S_n > S_1 > 1\ \forall n$$

Esercizio 3.

Dimostriamo la formula per la somma dei numeri da 3n+1 a 5n+1:

$$(3n+1)+...+(5n+1)=(2n+1)(4n+1)$$

Per n = 1 si ottiene

$$S_1 = 15$$

Supponiamo che valga il caso (n), e cerchiamo di dimostrare il caso (n+1)

$$S_{n+1}-S_n=(5n+6)+(5n+5)+(5n+4)+(5n+3)+(5n+2)-(3n+1)-(3n+2)-(3n+3)$$

$$S_{n+1}=[2(n+1)+1][4(n+1)+1]=(2n+1)(4n+1)+(16n+14)$$

$$(2n+3)(4n+5)=8n^2+2n+4n+1+16n+14$$

$$8n^2+10n+12n+15=8n^2+22n+15$$

$$8n^2+22n+15=8n^2+22n+15$$

Quindi la formula è valida per n $\geq$ 1

$$A_m \geq H_m$$

$$\frac{\frac{1}{3n+1}+...+\frac{1}{5n+1}}{2n+1}\geq\frac{2n+1}{(2n+1)(4n+1)}$$

$$\frac{\frac{1}{3n+1}+...+\frac{1}{5n+1}}{2n+1}\geq\frac{1}{4n+1}$$

$$\frac{1}{3n+1}+...+\frac{1}{5n+1}\geq\frac{2n+1}{4n+1}>\frac{1}{2}\text{ infatti }\left(\frac{4n+2}{4n+1}>1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3n+1}+...+\frac{1}{5n+1}>\frac{1}{2}$$

Dimostriamo che $\frac{1}{3n+1}+...+\frac{1}{5n+1}<\frac{2}{3}$

$$S_1=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{15+12+10}{60}=\frac{37}{60}<\frac{2}{3}$$

Consideriamo a e b tali che

$$a=\frac{1}{5n+6}+\frac{1}{5n+5}+\frac{1}{5n+4}+\frac{1}{5n+3}+\frac{1}{5n+2}$$

$$b=\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}$$

$$S_{n+1}=S_n-b+a$$

Si dimostra facilmente che

$$a<b$$

$$\frac{1}{5n+6}+\frac{1}{5n+5}+\frac{1}{5n+4}+\frac{1}{5n+3}+\frac{1}{5n+2}<\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}$$

E quindi la quantità che viene **aggiunta** al variare di n ad S_n è minore di quella che viene **sottratta.**

Da questa informazione ricaviamo che $S_n > S_{n+1}$ (e quindi S_n è **decrescente**).

$$\Rightarrow S_n < S_1 < \frac{2}{3}\ \forall n$$