Dovier

Rappresentazione di insiemi con grafi

Possiamo identificare la relazione $a \to b$ come $b \in / \subset a$. Quindi un ciclo rappresenta un insieme che contiene se stesso.

Accessible pointed graph (APG)

E' un grafo direzionato G con un nodo v distinto ($< G, v >$) tale che tutto G è raggiungibile da v.

Bisimulazione tra APG

Diremo che due APG $< G_1, v_1 >, < G_2, v_2 >$ sono in bisimulazione se $\exists b : b$ è una bisimulazione tra G_1, G_2 e $v_1 b v_2$.

Bisimulazione massima su APG

Dato un APG $< G, v >$ esiste sempre la bisimulazione massima, e questa è una relazione di equivalenza sull'insieme dei nodi di G. La bisimulazione massima è l'unione di tutte le bisimulazioni.

Allora possiamo "collassare" i nodi di G in insiemi di nodi equivalenti (secondo la relazione di bisimulazione). Questa si dice "contrazione per bisimulazione".

APG in bisimulazione $\iff$ determinazione della bisimulazione massima

Due APG $A_1 =< (N_1, E_1), v_1 >, A_2 =< (N_2, E_2), v_2 >$ sono in bisimulazione $\iff$ $v_1 \equiv v_2$, dove $\equiv$ è la bisimulazione massima su

$$A_3 =< (N_1 \cup N_2 \cup \{\alpha\}, E_1 \cup E_2 \cup \{(\alpha, v_1), (\alpha, v_2)\}), \alpha >$$

Dimostrazione

Il lato $\impliedby$ è banale.
Suppongo che A_1, A_2 siano in bisimulazione. Sia b l'unione di tutte le bisimulazioni tra A_1, A_2. Vale sicuramente $v_1 b v_2$ perchè abbiamo supposto che A_1, A_2 siano in bisimulazione. Sia $b' = b \cup (\alpha, \alpha)$. b' è ancora una bisimulazione, infatti vale

$$\alpha b' \alpha \wedge (\alpha, v_1) \wedge ((\alpha, v_2) \wedge v_1 b' v_2)$$

Allora se considero $\equiv$ la bisimulazione massima su A_3 (che contiene b') si deve avere $v_1 \equiv v_2$.

Bisimulazione $\iff$ Stable partition problem

Sia $G =< N, E >$ un grafo. E è una relazione binaria per cui vale $v_1 E v_2 \iff (v_1, v_2)$.

1. Sia P una partizione di N stabile rispetto a E. Allora la relazione binaria su N definita come

$$v_1 b_p v_2 \iff \exists B \in P : (v_1 \in B \wedge v_2 \in B)$$

   è una bisimulazione.
2. Sia b una bisimulazione che è anche una relazione di equivalenza. Allora la partizione di N definita dalle classi di equivalenza di b è una partizione stabile rispetto a E.

Dimostrazione

1. Siano v_1, v_2 due nodi nella stessa partizione B_1. Sia $u_1 : (v_1, u_1)$. Sia $B_2 \in P : u_1 \in B_2$. Per definizione di stabilità si può avere alternativamente che
   I. $B_1 \cap E^{-1}(B_2) = \emptyset$. Ma questo è assurdo perchè per ipotesi esiste un ramo $(v_1, u_1), v_1 \in B_1, u_1 \in B_2$
   II. $B_1 \subset E^{-1}(B_2) \implies \exists u_2 \in B_2 : (v_2, u_2)$ (può essere anche $u_2 = u_1$)
   Quindi $(v_1 b_p v_2 \wedge (v_1, u_1) \implies \exists u_2 : (u_1 b_p u_2 \wedge (v_2, u_2))) \implies b_p$ è una bisimulazione su G.
2. Sia $v_1 \in B_1$. Sia $u_1 \in B_2$. Si possono avere due casi
   I. $\nexists (v_1, u_1) \implies B_1 \cap E^{-1}(B_2) = \emptyset$
   II. (v_1, u_2). Sia $v_2 \in B_1$ (eventualmente va bene anche $v_1 = v_2$). Allora $(v_1 b v_2 \wedge (v_1, u_1)) \implies \exists u_2 \in N : ((v_2, u_2), u_1 b u_2) \implies u_2 \in B_2$. Allora l'esistenza di un ramo tra due nodi di partizioni differenti B_1, B_2 induce l'esistenza di un ramo tra un altro nodo qualsiasi di B_1 ed almeno un altro nodo di B_2. Quindi $B_1 \subset E^{-1}(B_2)$.

Osservazione

La bisimulazione che induce una partizione stabile non ha apparentemente alcun legame logico con la relazione E, ma questo legame è dato dalla definizione stessa di bisimulazione (la bisimulazione tra due nodi implica una relazione di raggiungibilità tra questi nodi ed altri del grafo).

Massima bisimulazione $\iff$ Coarsest stable partition problem

1. Suppongo di avere la massima bisimulazione. Questa induce una partizione stabile su N. Suppongo che non sia la coarsest. Allora posso trovarne una più coarsest. Ma questa induce una bisimulazione in cui più elementi sono in relazione. Quindi la bisimulazione iniziale non è massima.

2. Suppongo di avere la coarsest stable partition. Questa induce una bisimulazione. Suppongo che non sia massima. Allora posso trovarne una massima, che induce una partizione più coarsest, perchè più elementi sono in relazione secondo la bisimulazione massima. Allora la partizione non è la coarsest.

Rango

$$rank(u) = \begin{cases} 0 & \text{se } u \text{ è una foglia} \\ 1 + \max(rank(v) : (u, v)) \end{cases}$$

Proposizione 4.2

$u \equiv v \implies rank(u) = rank(v)$ (dove $\equiv$ è la bisimulazione massima)

Dimostrazione

Per induzione su $rank(u)$:

- Se u è una foglia, e $u \equiv v$, allora se p.a. $\exists c : v \to c$ (e quindi se v non fosse una foglia) $\implies \exists d : u \to d \implies u$ non è una foglia. Ma questo è chiaramente assurdo, allora anche v è una foglia $\implies rank(v) = rank(u) = 0$.
- Suppongo che la proposizione sia vera per $rank(u) = n - 1$. Suppongo che $u \equiv v \wedge rank(u) = n$. Per la definizione di $rank$ tra i nodi $n \in N : u \to n$ deve esisterne uno tale che $rank(u) = n - 1$. Per definizione di bisimulazione, $(u \to n \wedge u \equiv v) \implies \exists m : (v \to m \wedge n \equiv m) \implies rank(m) = rank(n) = n - 1$.
  Suppongo p.a. che $\exists x : v \to x \wedge rank(x) = w > n - 1$. In questo caso assurdo $rank(v) = w + 1 \neq n$, e quindi la proposizione non sarebbe verificata. Ma in questo caso, per definizione di bisimulazione, dovrebbe esistere un nodo $y : u \to y \wedge x \equiv y$. Ma per definizione di $rank$ deve valere $rank(y) \leq n - 1$, e per la simmetria di $\equiv$ deve valere $n - 1 \geq rank(y) = rank(x) = w > n - 1$, che è assurdo.