Indice

Pagina

1 Nozioni di Base~~Problemi considerati~~[ac]

[1]

1.1 Relazioni Binarie~~Alcune definizioni fondamentali della teoria dei grafi~~[ac]

Riportiamo la definizione di *relazione binaria* su uno o due insiemi, che sarà utile per definire formalmente il concetto di *grafo*, che sarà fondamentale all'interno di questo elaborato.

Definizione 1.1. Chiameremo *relazione binaria* su A, B qualsiasi sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$.
Chiameremo *relazione binaria* su A qualsiasi sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times A$.
Diremo che u, v sono *in relazione* rispetto a b se $(u, v) \in b$[2]. In questo caso potremo usare~~useremo~~[ac] la notazione ubv.

[3] Ad una relazione binaria su un insieme è possibile associare relazioni binarie che la contengono, le cosiddette *chiusure*. Ogni chiusura è costituita dall'unione della relazione iniziale e di un insieme di coppie costruito con un criterio differente a seconda del tipo di chiusura.
Quest'ultimo insieme fornisce la proprietà che caratterizza la chiusura (riflessività, simmetria, transitività).

Definizione 1.2. Sia b una relazione binaria su N[4]. Diamo le seguenti definizioni

- *Chiusura riflessiva*: $b_r = b \cup \{(x, x)\ \forall x \in N\}$
- *Chiusura simmetrica*: $b_s = b \cup \{(y, x)\ \forall x, y : (x, y) \in b\}$
- *Chiusura transitiva*: $b_t = b \cup \{(x, z)\ \forall x, z : \exists y : (x, y) \in b \land (y, z) \in b\}$

[5]

---

[1] **[ac 1]:** usa sempre `\emph` al posto di `\textit`.
[2] **[ac 2]:** Usa R per rappresentare una relazione al posto di b
[3] **[ac 3]:** Prima di parlare delle chiusure, darei le definizioni delle proprietà riflessiva, simmetrica, e transitiva di una relazioni e farei degli esempi.
[4] **[ac 4]:** Continua a usare A al posto di N
[5] **[ac 5]:** Metti qualche esempio

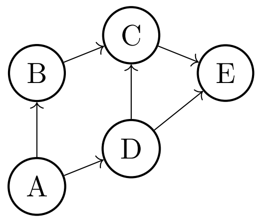


Figura 1: [8]

1.2 Grafi[ac]

Con queste premesse possiamo definire un *grafo* come segue:

Definizione 1.3. Sia $N \neq \emptyset$[6]. Sia $\rightarrow$ una relazione binaria su N.
Chiameremo *grafo diretto* o *orientato*~~*grafo*~~[ac] la coppia $G = (N, \rightarrow)$.
In questo caso

- N è l'insieme dei *nodi* o *vertici*~~*nodi*~~[ac];
- $\rightarrow$ è la relazione di raggiungibilità: $a \rightarrow b$ $(a, b \in N)$ significa “~~”~~[ac]nel grafo G esiste un arco dal nodo a al nodo b”~~”~~[ac].

~~Diremo che G è un *grafo direzionato* se (cioè se $\rightarrow$ non è una relazione binaria simmetrica). Altrimenti diremo che G è un *grafo non direzionato*.~~[7]

Osservazione 1.1. ~~Il grafo G' rappresentato dalla coppia $(N, \rightarrow')$, dove $\rightarrow'$ è la chiusura simmetrica della relazione di raggiungibilità $\rightarrow$ di un grafo direzionato, è un grafo non direzionato.~~[ac]

Esempio 1.1. Il grafo di Figura 1 è descritto dalla coppia

- $N = \{A, B, C, D, E\}$[9]
- $\rightarrow = \{(A, B), (A, D), (B, C), (D, C), (C, E), (D, E)\}$

Un grafo è quindi un insieme di elementi (i *nodi*) accoppiato con un insieme di relazioni tra questi elementi (gli *archi* o *rami*).
È~~E'~~[ac] naturale associare questo concetto all'idea di percorso: ogni grafo è definito da un insieme di nodi~~" luoghi"~~[ac] ed un insieme di *cammini*~~" percorsi"~~[ac] che consentono di spostarsi~~viaggiare~~[ac] da un nodo~~luogo~~[ac] ad un altro.
La seguente definizione sorge in modo spontaneo da questo punto di vista:

[6]**[ac 6]:** Usa sempre V al posto di N
[7]**[ac 7]:** Visto che tratti sempre i grafi diretti, eviterei di entrare in questa discussione
[9]**[ac 10]:** Usa sempre le lettere minuscole per indicare i nodi di un grafo

Definizione 1.4. Sia $G = (N, \to)$ un grafo. Siano $u, v \in N$. Diremo che v *è raggiungibile da* u, o in alternativa *esiste un cammino*[10] *da* u *a* v, o ancora $u \to_t v$ (la t in pedice è letta come *transitivo*), se $\exists$ una sequenza $x_n \subset N$ finita di lunghezza $K : x_K = v, x_0 = u, x_n \to x_{n+1}$.

L'esistenza di un cammino tra nodi fornisce un criterio immediato per partizionare ogni grafo~~suddividere un grafo in più pezzi~~[ac]. Riportiamo questo criterio come formulato in [2][11]:

Definizione 1.5. [12] Sia $G = (N, \to)$ un grafo. Chiameremo *grafo delle componenti fortemente connesse (CFC) di* G il grafo $G^{CFC} = (N^{CFC}, \to^{CFC})$ se

- $N^{CFC} = \{C : C = \{m \in N : \forall n \in C, m \to_t n\}\}$
- $\to^{CFC} = \{(A, B) \in N^{CFC} \times N^{CFC} : A \neq B, \exists m \in A, n \in B : m \to n\}$

Segue immediatamente la seguente proprietà:

Proposizione 1.1. *Sia G^{CFC} il grafo delle CFC di un grafo G generico. Allora G^{CFC} è aciclico.*

Dimostrazione. Suppongo per assurdo che in G^{CFC} esista un ciclo, quindi è possibile partendo da un $A \in N^{CFC}$ ritornare ad A seguendo un cammino che passa per un numero finito di nodi di N^{CFC}, che raggruppiamo nell'insieme $X \subset N^{CFC}$, con $A \notin X$. Ma allora qualsiasi nodo $n \in N : (\exists B \in N^{CFC} \wedge n \in B \wedge B \in X)$ è raggiungibile da qualsiasi nodo di A. Quindi tutti i nodi inclusi nel ciclo devono appartenere alla stessa componente, ma questa deduzione è in contrasto con l'ipotesi. $\square$

Esempio 1.2. La figura 2.a rappresenta un grafo generico, la figura 2.b rappresenta il suo grafo delle componenti fortemente connesse associato.

1.3 Rappresentare gli insiemi tramite i grafi~~Applicazione dei grafi alla teoria degli insiemi~~[ac]

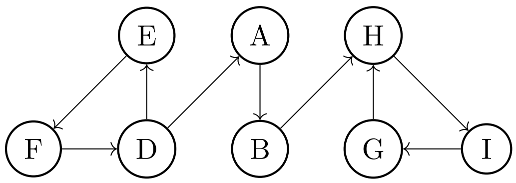
[14] In taluni casi,~~Per motivi che risulteranno chiari in seguito~~[ac] risulta conveniente fornire un'interpretazione~~interpretazione~~[ac] insiemistica della nozione

[10] **[ac 11]:** non hai mai detto cosa è un cammino

[11] **[ac 12]:** Qui citerei "DEPTH-FIRST SEARCH AND LINEAR GRAPH ALGORITHMS" di Tarjan o "Introduction to Algorithms" di Cormen, etc.

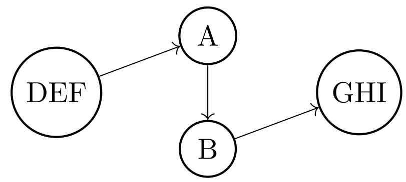
[12] **[ac 13]:** Prima di definire il grafo delle componenti connesse, definisci le componenti fortemente connesse e fai degli esempi

[14] **[ac 20]:** Qui andrebbero introdotte le nozioni di insieme ereditariamente finito (si può costruire a partire dall'insieme vuoto utilizzando solamente il costruttore vedi ZFC) e insime non-ben-fondato prima di usare i grafi per rappresentare gli insiemi



(a) [a]

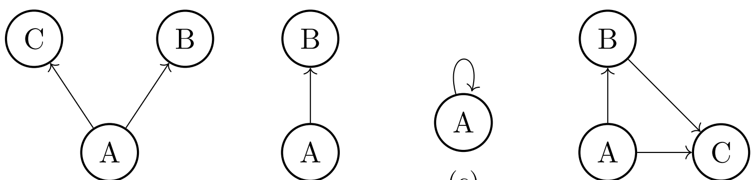
[a][**ac 15**]: Scrivi qualcosa



(b) [a]

[a][**ac 17**]: Scrivi qualcosa

Figura 2: [13]



(a) (b) (c) (d)

Figura 3

di grafo vista sopra.

Definizione 1.6. Sia $G = (N, \to)$ un grafo orientato~~direzionato~~[ac]. Sia $u \in N : \forall v \in N, u \to_t v$, cioè ogni nodo di G è raggiungibile da u. Allora la terna $(N, \to, u)$ si dice *accessible pointed graph*, o *APG*.

Se si associano la relazione di raggiungibilità $\to$ e la relazione di appartenenza $\in$, e se si interpreta ogni nodo come un insieme, ad ogni APG è possibile associare un unico insieme [15]. Tuttavia ad ogni insieme si può associare più di un APG [1][16].

Esempio 1.3. Il grafo in figura 3.a e quello in 3.b rappresentano l'insieme $A = \{\emptyset\}$. Il grafo in figura 3.c rappresenta l'insieme $A = \{A\}$. Il grafo in figura 3.d rappresenta l'insieme $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

1.4 Bisimulazione

Definizione 1.7. [17] Siano $G_1 = (N_1, E_1), G_2 = (N_2, E_2)$ due grafi. Diremo

[15][**ac 21**]: Questo è quello che, normalmente, viene definito AFA (assioma di antifondatezza) vedi Forti, Honsell 81 o Aczel 88)

[16][**ac 22**]: Cita Forti, Honsell 81 o Aczel 88

[17][**ac 23**]: Prima di definire la bisimilarità, definisci cosa è una relazione di bisimulazione. Poi puoi dire che due oggetti in relazione tramite una bisimulazione sono bisimili

che G_1, G_2 sono *bisimili* (come in [1]) rispetto alla relazione binaria b su N_1, N_2 se $\forall u \in N_1, v \in N_2$ valgono congiuntamente le seguenti condizioni

- $\forall u' \in N_1 : u \to u', ubv \implies \exists v' \in N_2 : (u'bv' \wedge v \to v')$
- $\forall v' \in N_2 : v \to v', ubv \implies \exists u' \in N_1 : (u'bv' \wedge u \to u')$

[18] Se per una determinata coppia di grafi esiste almeno una bisimulazione che li lega, possiamo dedurre che i nodi dei due grafi mostrano un comportamento simile. Questo concetto verrà chiarito in seguito, per ora forniamo solamente la seguente definizione:

Definizione 1.8. Siano $G_1 = (N_1, E_1, v_1), G_2 = (N_2, E_2, v_2)$ due APG. Diremo che sono *bisimili* se $\exists$ una bisimulazione b su $G_1, G_2 : v_1 b v_2$.

Per introdurre i risultati che verranno presentati in seguito risulta utile definire la bisimulazione su un unico grafo:

Definizione 1.9. Sia $G = (N, \to)$ un grafo, e b una relazione binaria su N. Diremo che b è una *bisimulazione* se $\forall u, v \in N$ valgono congiuntamente le seguenti condizioni

- $\forall u' \in N : u \to u', ubv \implies \exists v' \in N : (u'bv' \wedge v \to v')$
- $\forall v' \in N : v \to v', ubv \implies \exists u' \in N : (u'bv' \wedge u \to u')$

Proponiamo ora un risultato che consentirà di considerare più generali di quanto sembrino in apparenza alcuni risultati presentati nel seguito del lavoro.

Teorema 1.1. *Sia b una bisimulazione sul grafo G. La sua chiusura riflessiva, simmetrica o transitiva è ancora una bisimulazione su G.*

Dimostrazione. Consideriamo separatamente le tre relazioni b_r, b_s, b_t, rispettivamente la chiusura riflessiva, simmetrica e transitiva:

b_r Per definizione $b \subset b_r$, quindi è sufficiente dimostrare che b_r è una bisimulazione quando gli argomenti $u, v \in N$ non sono distinti.
Sia $u \in N$. Chiaramente per definizione di b_r si ha $u b_r u$. Se $\exists u' \in N : u \to u'$ allora (sempre per definizione di b_r) si ha $u' b_r u'$.

[18]**[ac 24]:** Mostra degli esempi di bisimulazioni e tra queste alcune che non siano riflessive, simmetriche e transistive

b_s Per definizione $b \subset b_s$, quindi è sufficiente dimostrare che b_s è una bisimulazione quando per gli argomenti $u, v \in N$ si ha ubv ma non vbu.
Sia $(u, v) \in N \times N$. Allora

$$ub_sv \implies ubv \vee vbu$$

Suppongo ad esempio che vbu.

$$\begin{aligned}&\implies \forall v' \in N : (v \to v')\ \exists u' \in N : (u \to u' \wedge v'bu') \\ &\implies u'b_sv'\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}&\implies \forall u' \in N : (u \to u')\ \exists v' \in N : (v \to v' \wedge v'bu') \\ &\implies u'b_sv'\end{aligned}$$

cioè sono dimostrate le due condizioni caratteristiche della bisimulazione.
La dimostrazione è analoga se ubv.

b_t Per definizione $b \subset b_t$, quindi è sufficiente dimostrare che b_t è una bisimulazione quando per gli argomenti $u, v, z \in N$ si ha ubv, vbz ma non ubz.
Sia $(u, v, z) \in N \times N \times N$ con questa proprietà. Allora $\forall u' \in N : u \to u' \implies \exists v' \in N : v \to v' \wedge u'bv'$. Inoltre $\exists z' : z \to z' \wedge v'bz'$.
Riordinando si ha $u'bv', v'bz'$. Allora per definizione di b_t, $u'b_tz'$.
In modo speculare si ottiene la seconda condizione caratteristica della bisimulazione.

$\square$

Da questa proposizione si deduce il seguente corollario, che risulta dall'applicazione iterativa delle tre chiusure viste in precedenza:

Corollario 1.1. *Ad ogni bisimulazione b è possibile associare una bisimulazione $\widetilde{b} : b \subset \widetilde{b} \ \wedge\ \widetilde{b}$ è una relazione di equivalenza.*

Concludiamo la parte relativa ai risultati generali sulla bisimulazione con la seguente proposizione, che sarà utile in seguito

Proposizione 1.2. *Siano b_1, b_2 due bisimulazioni su G_1, G_2. Allora $b = b_1 \cup b_2$ è ancora una bisimulazione.*

Dimostrazione. Siano $u, v : ubv$. Sia $u' : u \to u'$. Allora deve essere $ub_1v \vee ub_2v$. Ma quindi $\exists v' : (v \to v' \wedge u'b_{1|2}v')$. $\square$

1.4.1 Bisimulazione massima

Definiamo ora il concetto di *bisimulazione massima*, che gioca un ruolo chiave nella risoluzione dei problemi considerati in questo elaborato.

Definizione 1.10. Diremo che una bisimulazione b_M su G_1, G_2 è *massima* se $\forall b$: "b è una bisimulazione su G_1, G_2" si ha $ubv \implies ub_Mv \;\; \forall a \in N_1, b \in N_2$.

Naturalmente la bisimulazione massima dipende dai due grafi presi in esame. Possiamo dedurre alcune caratteristiche in modo molto semplice:

Proposizione 1.3. *Valgono le seguenti proprietà:*

1. *La bisimulazione massima su due grafi G_1, G_2 è unica*

2. *La bisimulazione massima è una relazione di equivalenza*

Dimostrazione. Le proprietà seguono banalmente dal Corollario 1.1 e dall'Osservazione 1.2.

1. Suppongo per assurdo che esistano due bisimulazioni massime b_{M_1}, b_{M_2}. La loro unione è ancora una bisimulazione, che è "più massima" delle supposte bisimulazioni massime.

2. Se per assurdo la bisimulazione massima non fosse una relazione di equivalenza, potremmo considerare la sua chiusura riflessiva, simmetrica e transitiva, che sarebbe "più massima" ed anche una relazione di equivalenza.

□

Naturalmente il concetto di *bisimulazione massima* può essere definito anche su unico grafo G. Questo caso si rivelerà di grande interesse nel seguito. Per ora dimostriamo il seguente risultato:

Teorema 1.2. *Sia G un grafo (finito). Allora $\exists b_M$ la bisimulazione massima su G.*

Dimostrazione. Può esistere solamente un numero finito di relazioni binarie su G, e questo numero fornisce un limite superiore al numero massimo di bisimulazioni su G. Allora possiamo considerare l'unione di questo numero finito di bisimulazioni, che sarà chiaramente la bisimulazione massima. □

1.4.2 Interpretazione insiemistica della bisimulazione

Il seguente teorema è la prova che la bisimulazione può essere utilizzata per verificare l'uguaglianza tra insiemi rappresentati da due APG differenti:

Teorema 1.3. *Due APG sono bisimili* $\iff$ *rappresentano lo stesso insieme.*

Dimostrazione. Da dimostrare... $\square$

Tenendo conto di quanto affermato nella sezione 1.3, il Teorema 1.3 dimostra che la bisimulazione può sostituire la relazione di uguaglianza tra insiemi quando questi sono rappresentati da degli APG [1].
Dopo questa considerazone, risulta naturale definire il seguente concetto:

Definizione 1.11. Sia b una bisimulazione su G che sia anche una relazione di equivalenza. Definiamo un nuovo grafo $G_b = (N_b, \to_b)$ come in [2], che chiameremo *contrazione rispetto alla bisimulazione b di G*:

- $N_b = \{A = \{m \in N : \forall n \in A, mbn\}\}$
- $[m]_b \to_b [n]_b \iff \exists c \in [n]_b : m \to c$

Risulta conveniente definire la *classe del nodo a* rispetto alla bisimulazione b, con la notazione $[a]_b$ come il nodo di N_b a cui appartiene il nodo a.

La Definizione 1.11 è di fondamentale importanza per la seguente osservazione:

Proposizione 1.4. *Sia G un grafo, e sia G_b come nella Definizione 1.11, per una bisimulazione b qualsiasi. Allora G, G_b sono bisimili.*

Dimostrazione. Sia $\equiv \subset N \times N_b$ la relazione binaria definita come segue:

$$m \equiv M \iff M = [m]_b$$

Vogliamo dimostrare che tale relazione è una bisimulazione su i grafi G, G_b.
Supponiamo che $x \equiv X$, e che $x \to y$ per qualche $y \in N$. Chiamiamo $Y := [y]_b$. Allora, per la Definizione 1.11, si ha $X \to Y$. Inoltre vale banalmente $y \equiv Y$.
Per dimostrare la seconda condizione caratteristica della bisimulazione, supponiamo che $x \equiv X$, e che $X \to Y$ per qualche $Y \in N_b$. Sempre per la Definizione 1.11 deve esistere un $y \in Y : (y \equiv Y \wedge x \to y)$. $\square$

La Proposizione 1.4 ha una conseguenza ovvia, che risulta evidente per il Teorema 1.3:

Corollario 1.2. *Sia b una bisimulazione che sia anche una relazione di equivalenza. Allora l'APG (G, v) e l'APG $(G_b, [v]_b)$ rappresentano lo stesso insieme.*

Quindi risulta naturale sfruttare le proprietà della bisimulazione per minimizzare la rappresentazione di insiemi, considerando che è sufficiente una bisimulazione sulla rappresentazione iniziale per ottenere una rappresentazione equivalente. Definiamo una relazione d'ordine sulle rappresentazioni:

Definizione 1.12. Diremo che la rappresentazione (G_a, v_a) di un insieme è *minore* della rappresentazione equivalente (G_b, v_b) se $\#N_a < \#N_b$.
Diremo che una rappresentazione è *minima* se non esiste un'altra rappresentazione minore.

Osservazione 1.2. La *contrazione per bisimulazione* di un grafo ha sempre un numero di nodi minore o uguale di quello del grafo iniziale.

Concludiamo la sezione con il seguente risultato, che stabilisce in modo univoco la bisimulazione prescelta per minimizzare la rappresentazione di un dato insieme:

Teorema 1.4. *Sia (G, v) un APG rappresentante un insieme. Sia b_M la bisimulazione massima su (G, v). Allora la contrazione per bisimulazione indotta da b_M su (G, v) fornisce la rappresentazione minima dell'insieme.*

Dimostrazione. Suppongo per assurdo che esista una bisimulazione b_N su (G, v) che fornisce una contrazione avente un numero di nodi strettamente inferiore alla contrazione indotta da b_M. Ma questo implica che esistono almeno due nodi di G che sono in relazione secondo b_N e non secondo b_M. Chiaramente questa deduzione è in contrasto con il fatto che b_M è la bisimulazione massima.

Suppongo per assurdo che, dopo la contrazione indotta da b_M, sia possibile trovare una nuova bisimulazione b_O su $(G_{b_M}, [v]_{b_M})$ che induca una contrazione avente un numero di nodi strettamente inferiore a quello di $(G_{b_M}, [v]_{b_M})$. Chiaramente $b_O \subset N_{b_M} \times N_{b_M}$.
Definisco una nuova bisimulazione $b_{\widetilde{M}} \subset N \times N$ tale che

$$xb_{\widetilde{M}}y \iff (xb_My \vee [x]_{b_M} b_O [y]_{b_M})$$

Per definizione di bisimulazione massima bisogna avere $b_{\widetilde{M}} \subset b_M$, quindi non è possibile che la contrazione indotta da b_O sia una rappresentazione minore di quella indotta da b_M. $\square$

Bibliografia

[1] Agostino Dovier, Carla Piazza, and Alberto Policriti. A fast bisimulation algorithm. In *International Conference on Computer Aided Verification*, pages 79–90. Springer, 2001.

[2] Raffaella Gentilini, Carla Piazza, and Alberto Policriti. From bisimulation to simulation: Coarsest partition problems. *Journal of Automated Reasoning*, 31(1):73–103, 2003.