Definizioni

Relazione antisimmetrica

Sia R una relazione. Diremo che R è antisimmetrica se il fatto che valga $R(a, b)$ implica che non vale $R(b, a)$

Transitive closure

Sia R una relazione. Chiameremo "transitive closure" di R, R_+, la più piccola relazione (cioè che mette in relazione il minor numero di elementi) tale che

- $R \subset R_+$
- R_+ è transitiva

Bisimulazione

Diremo che una relazione R è una bisimulazione se

- $R(a, b)$ implica che a,b stanno nella stessa partizione (quindi il concetto di bisimulazione dipende dalla scelta della partizione(?))
- Se $R(a, b)$, e se esiste un ramo $a \to c$, allora esiste un nodo d tale che $R(c, d)$ ed esiste un ramo $b \to d$
- La stessa cosa vale se il ragionamento viene fatto dalla parte di b

I punti 2,3 per la bisimulaione $\equiv_b$ si possono scrivere come

$$\forall\ a, b, c : (a \to c \land b \in [a]_b) \implies \exists\ d : (b \to c \land d \in [c]_b$$

dove $[a]_b$ indica l'insieme dei nodi che sono in bisimulazione (per qualche bisimulazione) con a.

Bisimulazione tra grafi

Siano due grafi $G_1(N_1, \to_1, l_1)$ e $G_2(N_2, \to_2, l_2)$, con l_1, l_2 funzioni "etichettanti" che mappano i nodi dei rispettivi grafi in un insieme comune di etichette.
Diremo che $R : N_1 \times N_2$ è una bisimulazione tra G_1, G_2 se

- $R(a, b) \implies l_1(a) = l_2(b)$
- punti 2,3 della bisimulazione (sono validi perchè non si chiede che esistano rami tra a,b o tra c,d)
- $\forall\ a \in N_1\ \exists\ b \in N_2 : R(a, b)$
- $\forall\ b \in N_2\ \exists\ a \in N_1 : R(a, b)$

Partizione

Sia E un insieme. Diremo che Σ, un insieme di sosttoinsiemi di E, è una partizione di E, se $\forall \alpha, \beta \in \Sigma$ si ha che $\alpha \cap \beta = \emptyset$

Rifinitura di una partizione

Diremo che la partizione Σ rifinisce la partizione M se per ogni blocco α di Σ si ha che $\alpha \subset a$ per un blocco di M.

Relazione inversa

Sia $R \subset U \times U$ (cioè R è una relazione binaria su U). Sia $S \subset U$.

$$E(S) = \{y : \exists x \in U : R(x, y)\}$$
$$E^{-1}(s) = \{x : \exists y \in U : R(x, y)\}$$

Partizione stabile

Diremo che una partizione Σ è stabile rispetto ad una relazione binaria R se $\forall \alpha, \beta \in \Sigma$ vale uno dei seguenti punti (R^{-1} è inteso come relazione inversa di R)

- $\alpha \cap R^{-1}(\beta) = \emptyset$
- $\alpha \subset R^{-1}(\beta)$

Supponendo che $R^{-1}(\beta)$ significhi "l'insieme dei nodi a tali che esiste un $b \in \beta$ tale che $R(a, b)$, il significato del secondo punto è "α è interamente contenuto nell'insieme $R^{-1}(\beta)$, cioè tutti gli $a \in \alpha$ hanno la proprietà di essere in relazione con qualche $b \in \beta$ (in particolare devono essere i primi membri della relazione)".
Si può immaginare $R = \rightarrow$, quindi in questo caso da tutti gli $a \in \alpha$ parte un nodo verso almeno un $b \in \beta$. E' evidente che i blocchi α, β sono "molto connessi".

Strongly connected component

Un grafo è "strongly connected" se per ogni coppia di nodi a,b esiste un percorso per andare da a a b. Un grafo può essere suddiviso in SCC, in cui i sottografi sono strongly connected. Ogni SCC può essere considerato un nodo, quindi si ottiene un nuovo grafo in cui i nodi sono i SCC, ed i rami sono i rami che legano i singoli nodi tra due SCC.

Well-Founded part

Sia $G(N, \rightarrow)$ un grafo. Sia $G(a)$ l'insieme di tutti i nodi raggiungibili partendo dal nodo a.
Allora

$$WF(G) = \{a \in N : G(a) \text{ non contiene cicli}\}$$