

# 1 Problemi considerati

## 1.1 Alcune definizioni fondamentali

Per definire formalmente il concetto di grafo è necessario introdurre la definizione di relazione binaria.

**Definizione 1.1.1.** Chiameremo relazione binaria su  $A, B$  qualsiasi sottoinsieme del prodotto cartesiano  $A \times B$ .

Chiameremo relazione binaria su  $A$  qualsiasi sottoinsieme del prodotto cartesiano  $A \times A$ .

Diremo che  $u, v$  sono in relazione rispetto a  $b$  se  $(u, v) \in b$ . In questo caso useremo la notazione  $u b v$ .

**Definizione 1.1.2.** Sia  $b$  una relazione binaria su  $N$ . Diamo le seguenti definizioni

- Chiusura riflessiva:  $b_r = b \cup \{(x, x) \mid \forall x \in N\}$
- Chiusura simmetrica:  $b_s = b \cup \{(y, x) \mid \forall x, y : (x, y) \in b\}$
- Chiusura transitiva:  $b_t = b \cup \{(x, z) \mid \forall x, z : \exists y : (x, y) \in b \wedge (y, z) \in b\}$

**Definizione 1.1.3.** Sia  $N \neq \emptyset$ . Sia  $\rightarrow$  una relazione binaria su  $N$ .

Chiameremo grafo la coppia  $G = (N, \rightarrow)$ .

In questo caso

- $N$  è l'insieme dei nodi;
- $\rightarrow$  è la relazione di raggiungibilità:  $a \rightarrow b$  ( $a, b \in N$ ) significa "nel grafo  $G$  esiste un arco dal nodo  $a$  al nodo  $b$ ".

**Esempio 1.1.1.** Il grafo di Figura 1 è descritto dalla coppia

- $N = \{A, B, C, D, E\}$
- $\rightarrow = \{(A, B), (A, D), (B, C), (D, C), (C, E), (D, E)\}$

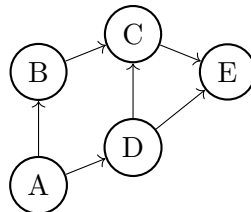


Figura 1

## 1.2 Bisimulazione

**Definizione 1.2.1.** Siano  $G_1 = (N_1, E_1), G_2 = (N_2, E_2)$  due grafi. Diremo che  $G_1, G_2$  sono bisimili [1] rispetto alla relazione binaria  $b$  su  $N_1, N_2$  se  $\forall u \in N_1, v \in N_2$  valgono congiuntamente le seguenti condizioni

- $\forall u' \in N_1 : u \rightarrow u', u b v \implies \exists v' \in N_2 : (u' b v' \wedge v \rightarrow v')$
- $\forall v' \in N_2 : v \rightarrow v', u b v \implies \exists u' \in N_1 : (u' b v' \wedge u \rightarrow u')$

Per introdurre i risultati che verranno presentati in seguito risulta utile definire la bisimulazione su un grafo:

**Definizione 1.2.2.** Sia  $G = (N, \rightarrow)$  un grafo, e  $b$  una relazione binaria su  $N$ . Diremo che  $b$  è una bisimulazione su  $G$  se  $\forall u, v \in N$  valgono congiuntamente le seguenti condizioni

- $\forall u' \in N : u \rightarrow u', u b v \implies \exists v' \in N : (u' b v' \wedge v \rightarrow v')$
- $\forall v' \in N : v \rightarrow v', u b v \implies \exists u' \in N : (u' b v' \wedge u \rightarrow u')$

**Proposizione 1.2.1.** *Sia  $b$  una bisimulazione sul grafo  $G$ . La sua chiusura riflessiva, simmetrica o transitiva è ancora una bisimulazione su  $G$ .*

*Dimostrazione.* Consideriamo separatamente le tre relazioni  $b_r, b_s, b_t$ , rispettivamente la chiusura riflessiva, simmetrica e transitiva:

$b_r$  Per definizione  $b \subset b_r$ , quindi è sufficiente dimostrare che  $b_r$  è una bisimulazione solo quando gli argomenti  $u, v \in N$  non sono distinti.  
Sia  $u \in N$ . Chiaramente  $u b_r u$ . Se  $\exists u' \in N : u \rightarrow u' \implies u' b_r u'$ .

$b_s$  Per definizione  $b \subset b_s$ , quindi è sufficiente dimostrare che  $b_s$  è una bisimulazione quando per gli argomenti  $u, v \in N$  si ha  $u b v$  ma non  $v b u$ .

Sia  $(u, v) \in N \times N$ . Allora

$$\begin{aligned} v b_s u &\implies u b v \\ &\implies \forall v' \in N : (v \rightarrow v') \exists u' \in N : (u \rightarrow u' \wedge u' b v') \\ &\implies v' b_s u' \end{aligned}$$

In altre parole, ricordando che  $b_s$  è simmetrica, si ottiene  $u b_s v, v \rightarrow v' \implies \exists u' \in N : (u \rightarrow u' \wedge u' b_s v')$ .

In modo speculare si dimostra la seconda parte della proprietà caratteristica della bisimulazione.

$b_t$  Per definizione  $b \subset b_t$ , quindi è sufficiente dimostrare che  $b_t$  è una bisimulazione quando per gli argomenti  $u, v, z \in N$  si ha  $u b v, v b z$  ma non  $u b z$ .

Sia  $(u, v, z) \in N \times N \times N$  con questa proprietà. Allora  $\forall u' \in N : u \rightarrow u' \implies \exists v' \in N : v \rightarrow v' \wedge u' b v'$ . Inoltre  $\exists z' : z \rightarrow z' \wedge v' b z'$ .

Riordinando si ha  $u' b v', v' b z'$ . Allora per definizione di  $b_t$ ,  $u' b_t z'$ .

In modo speculare si ottiene la seconda parte della proprietà caratteristica della bisimulazione.

□

**Corollario 1.2.1.** *Ad ogni bisimulazione  $b$  si può associare una bisimulazione  $\tilde{b} : b \subset \tilde{b} \wedge \tilde{b}$  è una relazione di equivalenza.*

## Bibliografia

- [1] Agostino Dovier, Carla Piazza, and Alberto Policriti. A fast bisimulation algorithm. In *International Conference on Computer Aided Verification*, pages 79–90. Springer, 2001.