0.1 Alcune definizioni fondamentali

Per definire formalmente il concetto di grafo è necessario introdurre la definizione di relazione binaria.

Definizione 0.1.1. *Chiameremo relazione binaria su A, B qualsiasi sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$.*
Chiameremo relazione binaria su A qualsiasi sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times A$.
Diremo che u, v sono in relazione rispetto a b se $(u, v) \in b$. In questo caso useremo la notazione $u\, b\, v$.

Definizione 0.1.2. *Sia b una relazione binaria su N. Diamo le seguenti definizioni*

- *Chiusura riflessiva:* $b_r = b \cup \{(x, x)\ \forall x \in N\}$
- *Chiusura simmetrica:* $b_s = b \cup \{(y, x)\ \forall x, y : (x, y) \in b\}$
- *Chiusura transitiva:* $b_t = b \cup \{(x, z)\ \forall x, z : \exists y : (x, y) \in b \wedge (y, z) \in b\}$

Definizione 0.1.3. *Sia $N \neq \emptyset$. Sia $\rightarrow$ una relazione binaria su N.*
Chiameremo grafo la coppia $G = (N, \rightarrow)$.
In questo caso

- *N è l'insieme dei nodi;*
- *$\rightarrow$ è la relazione di raggiungibilità: $a \rightarrow b$ $(a, b \in N)$ significa "nel grafo G esiste un arco dal nodo a al nodo b".*

Esempio 0.1.1. *Il grafo di Figura 1 è descritto dalla coppia*

- $N = \{A, B, C, D, E\}$
- $\rightarrow = \{(A, B), (A, D), (B, C), (D, C), (C, E), (D, E)\}$

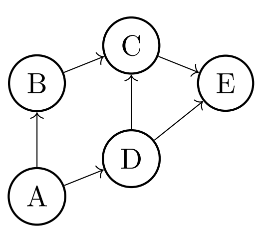

Figura 1

0.2 Bisimulazione

Definizione 0.2.1. *Siano* $G_1 = (N_1, E_1), G_2 = (N_2, E_2)$ *due grafi. Diremo che* G_1, G_2 *sono bisimili rispetto alla relazione binaria* b *su* N_1, N_2 *se* $\forall u \in N_1, v \in N_2$ *valgono congiuntamente le seguenti condizioni*

- $\forall u' \in N_1 : u \to u', u\, b\, v \implies \exists v' \in N_2 : (u'\, b\, v' \wedge v \to v')$
- $\forall v' \in N_2 : v \to v', u\, b\, v \implies \exists u' \in N_1 : (u'\, b\, v' \wedge u \to u')$

Per introdurre risultati che verranno presentati in seguito risulta utile definire la bisimulazione su un grafo:

Definizione 0.2.2. *Sia* $G = (N, \to)$ *un grafo, e* b *una relazione binaria su* N*. Diremo che* b *è una bisimulazione su* G *se* $\forall u, v \in N$ *valgono congiuntamente le seguenti condizioni*

- $\forall u' \in N : u \to u', u\, b\, v \implies \exists v' \in N_2 : (u'\, b\, v' \wedge v \to v')$
- $\forall v' \in N : v \to v', u\, b\, v \implies \exists u' \in N_1 : (u'\, b\, v' \wedge u \to u')$

Proposizione 0.2.1. *Sia* b *una bisimulazione sul grafo* G*. La sua chiusura riflessiva, simmetrica o transitiva è ancora una bisimulazione su* G*.*

Dimostrazione. Considero separatamente le tre relazioni b_r, b_s, b_t, rispettivamente la chiusura riflessiva, simmetrica e transitiva:

b_r Per definizione $b \subset b_r$, quindi è sufficiente dimostrare che b_r è una bisimulazione solo quando gli argomenti $u, v \in N$ non sono distinti.
Sia $u \in N$. Chiaramente $u\, b_r\, u$. Se $\exists u' \in N : u \to u' \implies u'\, b_r\, u'$.

b_s Per definizione $b \subset b_s$, quindi è sufficiente dimostrare che b_s è una bisimulazione quando per gli argomenti $u, v \in N$ si ha $u\, b\, v$ ma non $v\, b\, u$.
Sia $(u, v) \in N \times N$ una coppia con questa proprietà. Allora vale $u\, b\, v \wedge v\, b_s\, u$. Per la prima relazione si deduce che se $\exists v' \in N : v \to v' \implies \exists u' \in N : (u \to u' \wedge u'\, b\, v')$. Allora $v'\, b_s\, u'$. In modo speculare si dimostra la seconda parte della proprietà caratteristica della bisimulazione.

b_t Per definizione $b \subset b_t$, quindi è sufficiente dimostrare che b_t è una bisimulazione quando per gli argomenti $u, v, z \in N$ si ha $u\, b\, v$, $v\, b\, z$ ma non $u\, b\, z$.
Sia $(u, v, z) \in N \times N \times N$ con questa proprietà. Allora se $\exists u', v' \in N :$

$u \to u' \implies \exists v' \in N : v \to v' \wedge u' \, b \, v'$. Inoltre $\exists z' : z \to z' \wedge v' \, b \, z'$. Ricapitolando si ha $u' \, b \, v', v' \, b \, z'$. Allora per definizione di $b_t : u' \, b_t \, z'$. In modo speculare si ottiene la seconda parte della proprietà caratteristica della bisimulazione.

$\square$

Corollario 0.2.1. *Ad ogni bisimulazione b si può associare una bisimulazione $\widetilde{b} : b \subset \widetilde{b} \ \wedge \ \widetilde{b}$ è una relazione di equivalenza.*