From Bisimulation to Simulation, Coarsest Partition Problems

Bisimulazione massima

Si può dimostrare che la relazione $\equiv_b$, data dai nodi tra i quali esiste una qualche bisimulazione, è una relazione di equivalenza, ed è la massima bisimulazione.

Proposizione 3.3

- Dato un grafo $G(N, \rightarrow, \Sigma)$ dove Σ è una partizione stabile rispetto a $\rightarrow$, la relazione $R_\Sigma(a, b)$ valida se a e b appartengono allo stesso blocco di Σ è una bisimulazione
  - il primo punto della definizione è banale
  - suppongo che valga $R_\Sigma(a, b)$. Allora a,b stanno nello stesso blocco α. Suppongo che esista un nodo $a \rightarrow c$.
    - se $c \in \beta$ con $\beta \neq \alpha$, per la stabilità della partizione si ha che per ogni nodo nel blocco α deve esistere un ramo verso un nodo del blocco β (perchè l'intersezione tra α e $\rightarrow^{-1}(\beta)$ è non vuota, considerando il ramo $a \rightarrow c$). Quindi esite un ramo $b \rightarrow d$ per un $d \in \beta$. Allora $R_\Sigma(c, d)$ (appartengono allo stesso blocco β).
    - se $c \in \alpha$, si può fare lo stesso ragionamento applicato sopra? Dipende dalla definizione di stabilità: vale anche se $\alpha = \beta$?
  - lo stesso argomento può essere applicato per un ramo $b \rightarrow d$
- Dato un grafo $G(N, \rightarrow)$ ed una bisimulazione R (che sia anche una relazione di equivalenza), la partizione indotta da R è stabile rispetto a $\rightarrow$.
  Per partizione indotta si intende che i blocchi sono formati dai nodi per cui vale $R(a, b)$.
  Infatti suppongo di avere due nodi a,b di un blocco α. Suppongo che esista un ramo $a \rightarrow c$ con $c \in \beta \neq \alpha$. Allora per definizione di bisimulazione deve esistere un nodo $d \in \beta$ (perchè $R(c, d)$) ed esiste il ramo $b \rightarrow d$. Questo ragionamento vale per qualsiasi nodo $b \in \alpha$, quindi $\alpha \subset \rightarrow^{-1}(\beta)$ a patto che esista il primo ramo $a \rightarrow c$.
  Se non esiste nessun ramo $a \rightarrow c$ per qualche $c \notin \alpha$, allora $\alpha \cap \rightarrow^{-1}(\beta) = \emptyset$.

Nota: il richiedere nel secondo punto che la bisimulazione R sia una relazione di equivalenza non fa perdere generalità, in quanto data una bisimulazione r, la sua chiusura transitiva, riflessiva e simmetrica è ancora una bisimulazione.

Bisimulazione e insiemi non ben fondati

Dato un grafo $G(N, \rightarrow, \Sigma)$ ed una bisimulazione R, è possibile trovare un grafo $G'(N', \rightarrow')$ con $N \subset N'$, $\rightarrow \subset \rightarrow'$, per cui vale $R(a, b)$ su $G \iff R(a, b)$ su G' (non si considera il primo punto della definizione di bisimulazione).
Allora la definizione più "astratta" (senza partizione) di bisimulazione è abbastanza generale da inglobare tutte le bisimulazioni con partizione.

Rango di un nodo

$$rank(a) = \begin{cases} 0 & \text{se a è una foglia in } G \\ -\infty & \text{se } C(a) \text{ è una foglia in } G^{SCC} \text{ e a non è una foglia in } G \\ \max \begin{cases} 1 + rank(c) \text{ se } C(a) \rightarrow^{SCC} C(c) \land c \in WF(G) \\ rank(c) \text{ se } C(a) \rightarrow^{SCC} C(c) \land c \notin WF(G) \end{cases} & \forall c \in G(a) \end{cases}$$

Dove $C(a)$ è il sottografo strongly connected in cui è contenuto a.

Due proprietà importanti del rango lo rendono interessante dal punto di vista della bisimulazione:

- $a \equiv_b b \implies rank(a) = rank(b)$
- Se $\equiv_b$ è stata computata per tutti i nodi con rango $<$ i, allora può essere computata anche per i nodi con rango $=$ i

Grafo quoziente rispetto alla bisimulazione $\equiv_b$

Sia $G(N, \rightarrow, l)$ un grafo. Il grafo quoziente $G/\equiv_b$ è definito come

$$\begin{cases} N_{\equiv_b} = N/\equiv_b \\ [a]_b \rightarrow_{\equiv_b} [c]_b \iff \exists\, c_1 : (c_1 \in [c]_b \land a \rightarrow c_1) \\ l_{\equiv_b}([a]_b) = l(a) \end{cases}$$

Proposizione 3.10

Sia $G(N, \rightarrow, l)$ un grafo. Allora il grafo $G/\equiv_b$ è il **minor grafo** in bisimulazione con G.
Abbiamo rimpiazzato i nodi di G con le classi di equivalenza della bisimulazione.