

1 Problemi considerati

1.1 Alcune definizioni fondamentali

Per definire formalmente il concetto di grafo è necessario introdurre la definizione di relazione binaria.

Definizione 1.1.1. *Chiameremo relazione binaria su A, B qualsiasi sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$.*

Chiameremo relazione binaria su A qualsiasi sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times A$.

Diremo che u, v sono in relazione rispetto a b se $(u, v) \in b$. In questo caso useremo la notazione $u b v$.

Definizione 1.1.2. *Sia b una relazione binaria su N . Diamo le seguenti definizioni*

- *Chiusura riflessiva: $b_r = b \cup \{(x, x) \mid \forall x \in N\}$*
- *Chiusura simmetrica: $b_s = b \cup \{(y, x) \mid \forall x, y : (x, y) \in b\}$*
- *Chiusura transitiva: $b_t = b \cup \{(x, z) \mid \forall x, z : \exists y : (x, y) \in b \wedge (y, z) \in b\}$*

Definizione 1.1.3. *Sia $N \neq \emptyset$. Sia \rightarrow una relazione binaria su N .*

Chiameremo grafo la coppia $G = (N, \rightarrow)$.

In questo caso

- *N è l'insieme dei nodi;*
- *\rightarrow è la relazione di raggiungibilità: $a \rightarrow b$ ($a, b \in N$) significa "nel grafo G esiste un arco dal nodo a al nodo b ".*

Esempio 1.1.1. *Il grafo di Figura 1 è descritto dalla coppia*

- $N = \{A, B, C, D, E\}$
- $\rightarrow = \{(A, B), (A, D), (B, C), (D, C), (C, E), (D, E)\}$

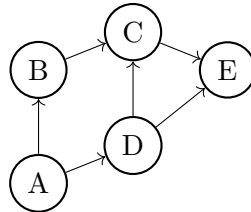


Figura 1

1.2 Bisimulazione

Definizione 1.2.1. Siano $G_1 = (N_1, E_1), G_2 = (N_2, E_2)$ due grafi. Diremo che G_1, G_2 sono bisimili rispetto alla relazione binaria b su N_1, N_2 se $\forall u \in N_1, v \in N_2$ valgono congiuntamente le seguenti condizioni

- $\forall u' \in N_1 : u \rightarrow u', u b v \implies \exists v' \in N_2 : (u' b v' \wedge v \rightarrow v')$
- $\forall v' \in N_2 : v \rightarrow v', u b v \implies \exists u' \in N_1 : (u' b v' \wedge u \rightarrow u')$

Per introdurre risultati che verranno presentati in seguito risulta utile definire la bisimulazione su un grafo:

Definizione 1.2.2. Sia $G = (N, \rightarrow)$ un grafo, e b una relazione binaria su N . Diremo che b è una bisimulazione su G se $\forall u, v \in N$ valgono congiuntamente le seguenti condizioni

- $\forall u' \in N : u \rightarrow u', u b v \implies \exists v' \in N : (u' b v' \wedge v \rightarrow v')$
- $\forall v' \in N : v \rightarrow v', u b v \implies \exists u' \in N : (u' b v' \wedge u \rightarrow u')$

Proposizione 1.2.1. Sia b una bisimulazione sul grafo G . La sua chiusura riflessiva, simmetrica o transitiva è ancora una bisimulazione su G .

Dimostrazione. Considero separatamente le tre relazioni b_r, b_s, b_t , rispettivamente la chiusura riflessiva, simmetrica e transitiva:

b_r Per definizione $b \subset b_r$, quindi è sufficiente dimostrare che b_r è una bisimulazione solo quando gli argomenti $u, v \in N$ non sono distinti. Sia $u \in N$. Chiaramente $u b_r u$. Se $\exists u' \in N : u \rightarrow u' \implies u' b_r u'$.

b_s Per definizione $b \subset b_s$, quindi è sufficiente dimostrare che b_s è una bisimulazione quando per gli argomenti $u, v \in N$ si ha $u b v$ ma non $v b u$.

Sia $(u, v) \in N \times N$ una coppia con questa proprietà. Allora vale $u b v \wedge v b_s u$. Per la prima relazione si deduce che se $\exists v' \in N : v \rightarrow v' \implies \exists u' \in N : (u \rightarrow u' \wedge u' b v')$. Allora $v' b_s u'$. In modo speculare si dimostra la seconda parte della proprietà caratteristica della bisimulazione.

b_t Per definizione $b \subset b_t$, quindi è sufficiente dimostrare che b_t è una bisimulazione quando per gli argomenti $u, v, z \in N$ si ha $u b v, v b z$ ma non $u b z$.

Sia $(u, v, z) \in N \times N \times N$ con questa proprietà. Allora se $\exists u', v' \in N :$

$u \rightarrow u' \implies \exists v' \in N : v \rightarrow v' \wedge u' b v'$. Inoltre $\exists z' : z \rightarrow z' \wedge v' b z'$.
 Ricapitolando si ha $u' b v', v' b z'$. Allora per definizione di $b_t : u' b_t z'$.
 In modo speculare si ottiene la seconda parte della proprietà caratteristica della bisimulazione.

□

Corollario 1.2.1. *Ad ogni bisimulazione b si può associare una bisimulazione $\tilde{b} : b \subset \tilde{b} \wedge \tilde{b}$ è una relazione di equivalenza.*