Lehrstuhl für Software and Computational Systems
Prof. Dr. Gidon Ernst, Marian Lingsch-Rosenfeld

Übungen zur Vorlesung
Formale Spezifikation und Verifikation

Wintersemester 2024/25

Übungsblatt 09

Bekanntgabe am 15.01.2025

Für diese Aufgabe werden Teilaufgaben (1) - (3) in den Tutorien vorgerechnet.

Die Bearbeitung der Teilaufgaben (4) - (6)

1 Satisfiability Modulo Theory

Es sind die folgenden prädikatenlogischen Formeln über die Integer-Variablen x, y, z gegeben:

$$(x \geq 0 \lor x + y < 7) \land (x \neq 0 \lor y < 4) \land (y > 2) \tag{1}$$
$$(x = 5 \lor x > y) \land (y = 2) \land \neg(x > y) \tag{2}$$
$$(x \geq 0 \lor \neg(y > 0)) \land (\neg(x \geq 0) \lor z \geq 0) \land (y < 1 \lor \neg(z \geq 0)) \land (\neg(x \geq 0 \lor y \leq 0)) \tag{3}$$
$$(\forall x. \neg p(x) \lor q(x)) \land p(1) \land \neg q(1) \tag{4}$$
$$(\exists x.\, 0 < x \land x < y) \land y = 0 \tag{5}$$
$$(\exists x.\, 0 < x \land x < y) \land (\forall z.\, z \neq 1 \lor f(z) = y) \land f(1) = x \land x = 0 \tag{6}$$

In dieser Aufgabe sollen Sie Belegungen $s = [x \mapsto \ldots]$ mit konkreten für die jeweils vorkommenden Variablen bestimmen, welche die Formeln erfüllen. Wenden Sie dazu das Vorgehen aus der Vorlesung an, der Integration von DPLL mit theoriespezifischen Schritten.

Überlegen Sie sich zusätzlich Definitionen der uninterpretierten Prädikate p und q und Funktion f, welche die Formel wahr machen. Wie hilft Ihnen die Analyse mit DPLL dabei?

1. Ersetzen Sie die atomaren booleschen Terme wie $x > 5$ in den Formeln durch aussagenlogische Variablen und finden Sie eine Belegung für diese, so dass die entstandene aussagenlogische Formel erfüllt wird.
2. Gibt es Werte für x, y, z, mit denen die aussagenlogischen Variablen tatsächlich diese Belegung einnehmen können?

   Falls dies nicht der Fall ist: finden Sie eine Formel, die den Grund dafür beschreibt! Fügen Sie diese als neue Klausel(n) zur ursprünglichen Formel hinzu und führen Sie den DPLL Algorithmus weiter aus (zurück zu Punkt 1.).

Hinweise:

- Für den $\forall$ Quantor gilt folgende Regel: Gegeben eine Klausel $\forall z.\phi(z)$, nimm eine weitere Klausel $\phi(k)$ hinzu, bei der k ein beliebiger Term ist (z.B. eine Konstante).
- Für den $\exists$ Quantor dürfen Sie folgende Regel benutzen: Gegeben eine Klausel $\exists z.\phi(z)$ ersetze diese durch $\phi(z_0)$ wobei z_0 eine *neue* Variable ist, die sonst nicht vorkommt.
- In Formel (6) dürfen Sie neue Klauseln folgern, die sich aus den Regeln für Gleichungen ergeben, sofern die jeweiligen Annahmen bereits mit DPLL als wahr angesehen werden.