

Übungen zur Vorlesung Formale Spezifikation und Verifikation

Wintersemester 2024/25

Übungsblatt 10

Bekanntgabe am 20.01.2025

Für dieses Übungsblatt wird Aufgabe 1 in den Tutorien vorgerechnet. Die Bearbeitung der Aufgabe 2 soll in den Tutorien erfolgen.

Auf diesem Übungsblatt sollen Sie Eigenschaften mit Quantoren über Zahlen und Arrays formalisieren.

Auf diesem Blatt sollen Sie *keine Beweise* führen.

1 Eigenschaften über Zahlen

Die Sorte `Int` bezeichnet die ganzen Zahlen. Sie haben uneingeschränkt die mathematischen Operatoren $+$, $*$, usw zur Verfügung.

Aufgabe

- Für die Funktion

$even: \text{Int} \rightarrow \text{Bool}$

definieren Sie ein Axiom (d.h. eine Allquantifizierte Formel), die besagt, dass das Ergebnis von $even(x)$ immer angibt ob x gerade ist.

Eine gerade Zahl lässt sich darstellen als das Vielfache von 2 und einer weiteren ganzen Zahl.

- Definieren Sie mit Hilfe von $even$ eine Funktion

$odd: \text{Int} \rightarrow \text{Bool}$

sodass $odd(x)$ genau für die ungeraden Zahlen gilt (nicht zu kompliziert denken!)

2 Eigenschaften über Arrays

Die (SMT-LIB) Theorie der funktionalen Arrays wie in der Vorlesung besprochen besteht aus

- Sorten: $\text{Array}\langle s, s' \rangle$ für alle Sorten s, s'
- Funktionen: $_[_]: \text{Array}\langle s, s' \rangle \times s \rightarrow s'$
 $_[_] := _: \text{Array}\langle s, s' \rangle \times s \times s' \rightarrow \text{Array}\langle s, s' \rangle$

Zur Erinnerung, es gelten folgende Eigenschaften. Diese benötigen Sie nicht *direkt* in Ihrer Formalisierung, aber es hilft, die Bedeutung der Funktionen zu erklären.

- Read over Write $\forall k, k', v. a[k := v][k'] = \begin{cases} v, & \text{if } k = k' \\ a[k'], & \text{if } k \neq k' \end{cases}$
- Extensionalität $(\forall k. a[k] = b[k]) \implies a = b$

Aufgaben

- Folgende Funktion

$$\text{const}: s' \rightarrow \text{Array}\langle s, s' \rangle$$

soll ein Array bezeichnen bei denen für alle Schlüssel ein angegebener Wert herauskommt. Die Funktion initialisiert also ein Array in dem alle Werte gleich sind.

- Schreiben Sie eine Formel, die bezeichnet, dass wenn a gleich $\text{const}(7)$ ist, dann ist $a[9]$ dieser Wert 7. In diesem Fall, was sind dann die konkreten Sorten s und s' ?
- Definieren Sie eine Eigenschaft die besagt, dass ganz allgemein für $a = \text{const}(c)$ bei jedem Index der richtige Wert herauskommt.
- Formalisieren Sie dass für ein gegebenes Array $a: \text{Array}\langle \text{Int}, \text{Int} \rangle$
 - Gerade Schlüssel immer gerade Werte enthalten.
 - Der Wert an allen Schlüsseln ist immer größer als der Schlüssel selbst
 - Jeder gerade im Array enthaltene Wert ist an einem ungeraden Schlüssel gespeichertNutzen Sie *even* und *odd* wie oben beschrieben.
- Arrays der Form $a: \text{Array}\langle \text{Int}, \text{Bool} \rangle$ können zur Charakterisierung von Mengen über Int verwendet werden, dabei entspricht $a[n]$ dem Test ob n in der von a repräsentierten Menge enthalten ist (d.h. statt $n \in a$ schreiben wir $a[n]$).
 - Wie lässt sich die leere Menge mit Hilfe von const als ein Term schreiben?
 - Bestimmen Sie einen Term gegeben a ein Array angibt, welches alle Elemente von a repräsentiert außer die 7. Nutzen Sie dazu das Array Update $a[_] := _$.
 - Bestimmen Sie eine Formel: a repräsentiert die Vereinigung der Mengen, die durch b und c repräsentiert werden