Formale Spezifikation und Verifikation
SAT

Wintersemester 2024/25
Übungsblatt 08

20. Januar 2025

Definitionen Aufgabe 1. a)

- **KNF**:

Definitionen Aufgabe 1. a)

- **KNF**: Eine Formel F ist genau dann in KNF, wenn F lediglich aus einer Konjunktion von Klauseln besteht. Eine Klausel ist eine Disjunktion von Literalen, spirch Variablensymbolen oder deren Negation (z.B. A bzw. $\neg A$).

Definitionen Aufgabe 1. a)

- **KNF**: Eine Formel F ist genau dann in KNF, wenn F lediglich aus einer Konjunktion von Klauseln besteht. Eine Klausel ist eine Disjunktion von Literalen, spirch Variablensymbolen oder deren Negation (z.B. A bzw. $\neg A$).
- **DNF**:

Definitionen Aufgabe 1. a)

- **KNF**: Eine Formel F ist genau dann in KNF, wenn F lediglich aus einer Konjunktion von Klauseln besteht. Eine Klausel ist eine Disjunktion von Literalen, spirch Variablensymbolen oder deren Negation (z.B. A bzw. $\neg A$).
- **DNF**: Eine Formel F ist genau dann in DNF, wenn F lediglich aus einer Disjunktion von Termen bestet, die eine reine Konjunktion von Literalen darstellen.

Definitionen Aufgabe 1. a)

- **KNF**: Eine Formel F ist genau dann in KNF, wenn F lediglich aus einer Konjunktion von Klauseln besteht. Eine Klausel ist eine Disjunktion von Literalen, spirch Variablensymbolen oder deren Negation (z.B. A bzw. $\neg A$).
- **DNF**: Eine Formel F ist genau dann in DNF, wenn F lediglich aus einer Disjunktion von Termen bestet, die eine reine Konjunktion von Literalen darstellen.
- **NNF**:

Definitionen Aufgabe 1. a)

- **KNF**: Eine Formel F ist genau dann in KNF, wenn F lediglich aus einer Konjunktion von Klauseln besteht. Eine Klausel ist eine Disjunktion von Literalen, spirch Variablensymbolen oder deren Negation (z.B. A bzw. $\neg A$).
- **DNF**: Eine Formel F ist genau dann in DNF, wenn F lediglich aus einer Disjunktion von Termen bestet, die eine reine Konjunktion von Literalen darstellen.
- **NNF**: Eine Formel F ist genau dann in NNF, wenn F nur aus Literalen, Konjunktion und Disjunktion besteht (alle Negationen stehen direkt vor Variablensymbolen).

Definitionen Aufgabe 1. b)

- **Unit Propagation**:

Definitionen Aufgabe 1. b)

- **Unit Propagation**: Gegeben sei eine Formel in KNF. Wenn eine der Klauseln nur aus einem Literal besteht, kann diese Klausel entfernt werden und der entsprechende Wahrheitswert der Variable in allen anderen Klauseln eingesetzt werden.

Definitionen Aufgabe 1. b)

- **Unit Propagation**: Gegeben sei eine Formel in KNF. Wenn eine der Klauseln nur aus einem Literal besteht, kann diese Klausel entfernt werden und der entsprechende Wahrheitswert der Variable in allen anderen Klauseln eingesetzt werden.
- **Pure Literal Elimination**:

Definitionen Aufgabe 1. b)

- **Unit Propagation**: Gegeben sei eine Formel in KNF. Wenn eine der Klauseln nur aus einem Literal besteht, kann diese Klausel entfernt werden und der entsprechende Wahrheitswert der Variable in allen anderen Klauseln eingesetzt werden.
- **Pure Literal Elimination**: Wenn in einer Formel eine Variable A ausschließlich als A oder $\neg A$ vorkommt, dann kann die Belegung für A so gewählt werden, dass A in jeder Klausel zu *true* evaluiert.

2.1 Negationsnormalform (NNF)

a) $\neg A \Rightarrow \neg B$

b) $\neg(A \wedge (\neg B \vee C))$

c) $A \Leftrightarrow B$

2.1 Negationsnormalform (NNF)

a) $\neg A \Rightarrow \neg B$

Implikation: $\neg(\neg A) \vee \neg B$

b) $\neg(A \wedge (\neg B \vee C))$

c) $A \Leftrightarrow B$

2.1 Negationsnormalform (NNF)

a) $\neg A \Rightarrow \neg B$

Implikation: $\neg(\neg A) \vee \neg B$

Vereinfachen: $A \vee \neg B$

b) $\neg(A \wedge (\neg B \vee C))$

c) $A \Leftrightarrow B$

2.1 Negationsnormalform (NNF)

a) $\neg A \Rightarrow \neg B$

Implikation: $\neg(\neg A) \vee \neg B$

Vereinfachen: $A \vee \neg B$

b) $\neg(A \wedge (\neg B \vee C))$

De-Morgan: $\neg A \vee \neg(\neg B \vee C))$

c) $A \Leftrightarrow B$

2.1 Negationsnormalform (NNF)

a) $\neg A \Rightarrow \neg B$

Implikation: $\neg(\neg A) \vee \neg B$

Vereinfachen: $A \vee \neg B$

b) $\neg(A \wedge (\neg B \vee C))$

De-Morgan: $\neg A \vee \neg(\neg B \vee C))$

De-Morgan: $\neg A \vee (B \wedge \neg C)$

c) $A \Leftrightarrow B$

2.1 Negationsnormalform (NNF)

a) $\neg A \Rightarrow \neg B$

Implikation: $\neg(\neg A) \vee \neg B$

Vereinfachen: $A \vee \neg B$

b) $\neg(A \wedge (\neg B \vee C))$

De-Morgan: $\neg A \vee \neg(\neg B \vee C))$

De-Morgan: $\neg A \vee (B \wedge \neg C)$

c) $A \Leftrightarrow B$

Äquivalenz: $(\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$

2.2 Konjunktive Normalform (KNF)

a) $(A \wedge B) \vee (C \wedge D)$

b) $\neg(A \wedge (\neg B \vee C))$

c) $(A \vee (B \wedge \neg C)) \wedge (\neg A \vee C \vee \neg D)$

2.2 Konjunktive Normalform (KNF)

a) $(A \land B) \lor (C \land D)$

Distributionsgesetz: $((A \land B) \lor C) \land ((A \land B) \lor D)$

b) $\neg(A \land (\neg B \lor C))$

c) $(A \lor (B \land \neg C)) \land (\neg A \lor C \lor \neg D)$

2.2 Konjunktive Normalform (KNF)

a) $(A \wedge B) \vee (C \wedge D)$

Distributionsgesetz: $((A \wedge B) \vee C) \wedge ((A \wedge B) \vee D)$

Distributionsgesetz: $(A \vee C) \wedge (B \vee C) \wedge (A \vee D) \wedge (B \vee D)$

b) $\neg(A \wedge (\neg B \vee C))$

c) $(A \vee (B \wedge \neg C)) \wedge (\neg A \vee C \vee \neg D)$

2.2 Konjunktive Normalform (KNF)

a) $(A \wedge B) \vee (C \wedge D)$

Distributionsgesetz: $((A \wedge B) \vee C) \wedge ((A \wedge B) \vee D)$

Distributionsgesetz: $(A \vee C) \wedge (B \vee C) \wedge (A \vee D) \wedge (B \vee D)$

b) $\neg(A \wedge (\neg B \vee C))$

De-Morgan: $\neg A \vee \neg(\neg B \vee C))$

c) $(A \vee (B \wedge \neg C)) \wedge (\neg A \vee C \vee \neg D)$

2.2 Konjunktive Normalform (KNF)

a) $(A \wedge B) \vee (C \wedge D)$

Distributionsgesetz: $((A \wedge B) \vee C) \wedge ((A \wedge B) \vee D)$

Distributionsgesetz: $(A \vee C) \wedge (B \vee C) \wedge (A \vee D) \wedge (B \vee D)$

b) $\neg(A \wedge (\neg B \vee C))$

De-Morgan: $\neg A \vee \neg(\neg B \vee C))$

De-Morgan: $\neg A \vee (B \wedge \neg C)$

c) $(A \vee (B \wedge \neg C)) \wedge (\neg A \vee C \vee \neg D)$

2.2 Konjunktive Normalform (KNF)

a) $(A \land B) \lor (C \land D)$

Distributionsgesetz: $((A \land B) \lor C) \land ((A \land B) \lor D)$

Distributionsgesetz: $(A \lor C) \land (B \lor C) \land (A \lor D) \land (B \lor D)$

b) $\neg(A \land (\neg B \lor C))$

De-Morgan: $\neg A \lor \neg(\neg B \lor C))$

De-Morgan: $\neg A \lor (B \land \neg C)$

Distributionsgesetze: $(\neg A \lor B) \land (\neg A \lor \neg C)$

c) $(A \lor (B \land \neg C)) \land (\neg A \lor C \lor \neg D)$

2.2 Konjunktive Normalform (KNF)

a) $(A \wedge B) \vee (C \wedge D)$

Distributionsgesetz: $((A \wedge B) \vee C) \wedge ((A \wedge B) \vee D)$

Distributionsgesetz: $(A \vee C) \wedge (B \vee C) \wedge (A \vee D) \wedge (B \vee D)$

b) $\neg(A \wedge (\neg B \vee C))$

De-Morgan: $\neg A \vee \neg(\neg B \vee C))$

De-Morgan: $\neg A \vee (B \wedge \neg C)$

Distributionsgesetze: $(\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg C)$

c) $(A \vee (B \wedge \neg C)) \wedge (\neg A \vee C \vee \neg D)$

Distributionsgesetz: $(A \vee B) \wedge (A \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee C \vee \neg D)$

2.3 Disjunktive Normalform (DNF)

a) $(A \vee B) \wedge (C \vee D)$

b) $\neg(A \wedge (\neg B \vee C))$

c) $(A \vee (B \wedge \neg C)) \wedge (\neg A \vee C \vee \neg D)$

2.3 Disjunktive Normalform (DNF)

a) $(A \vee B) \wedge (C \vee D)$

Distributionsgesetz: $((A \vee B) \wedge C) \vee ((A \vee B) \wedge D)$

b) $\neg(A \wedge (\neg B \vee C))$

c) $(A \vee (B \wedge \neg C)) \wedge (\neg A \vee C \vee \neg D)$

2.3 Disjunktive Normalform (DNF)

a) $(A \vee B) \wedge (C \vee D)$

Distributionsgesetz: $((A \vee B) \wedge C) \vee ((A \vee B) \wedge D)$

Distributionsgesetz: $(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \vee (A \wedge D) \vee (B \wedge D)$

b) $\neg(A \wedge (\neg B \vee C))$

c) $(A \vee (B \wedge \neg C)) \wedge (\neg A \vee C \vee \neg D)$

2.3 Disjunktive Normalform (DNF)

a) $(A \vee B) \wedge (C \vee D)$

Distributionsgesetz: $((A \vee B) \wedge C) \vee ((A \vee B) \wedge D)$

Distributionsgesetz: $(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \vee (A \wedge D) \vee (B \wedge D)$

b) $\neg(A \wedge (\neg B \vee C))$

De-Morgan: $\neg A \vee \neg(\neg B \vee C)$

c) $(A \vee (B \wedge \neg C)) \wedge (\neg A \vee C \vee \neg D)$

2.3 Disjunktive Normalform (DNF)

a) $(A \vee B) \wedge (C \vee D)$

Distributionsgesetz: $((A \vee B) \wedge C) \vee ((A \vee B) \wedge D)$

Distributionsgesetz: $(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \vee (A \wedge D) \vee (B \wedge D)$

b) $\neg(A \wedge (\neg B \vee C))$

De-Morgan: $\neg A \vee \neg(\neg B \vee C)$

De-Morgan: $\neg A \vee (B \wedge \neg C)$

c) $(A \vee (B \wedge \neg C)) \wedge (\neg A \vee C \vee \neg D)$

2.3 Disjunktive Normalform (DNF)

a) $(A \lor B) \land (C \lor D)$

Distributionsgesetz: $((A \lor B) \land C) \lor ((A \lor B) \land D)$

Distributionsgesetz: $(A \land C) \lor (B \land C) \lor (A \land D) \lor (B \land D)$

b) $\neg(A \land (\neg B \lor C))$

De-Morgan: $\neg A \lor \neg(\neg B \lor C)$

De-Morgan: $\neg A \lor (B \land \neg C)$

c) $(A \lor (B \land \neg C)) \land (\neg A \lor C \lor \neg D)$

Distributionsgesetz:
$((A \lor (B \land \neg C)) \land \neg A) \lor ((A \lor (B \land \neg C)) \land C) \lor ((A \lor (B \land \neg C)) \land \neg D)$

2.3 Disjunktive Normalform (DNF)

a) $(A \lor B) \land (C \lor D)$

Distributionsgesetz: $((A \lor B) \land C) \lor ((A \lor B) \land D)$

Distributionsgesetz: $(A \land C) \lor (B \land C) \lor (A \land D) \lor (B \land D)$

b) $\neg(A \land (\neg B \lor C))$

De-Morgan: $\neg A \lor \neg(\neg B \lor C)$

De-Morgan: $\neg A \lor (B \land \neg C)$

c) $(A \lor (B \land \neg C)) \land (\neg A \lor C \lor \neg D)$

Distributionsgesetz:
$((A \lor (B \land \neg C)) \land \neg A) \lor ((A \lor (B \land \neg C)) \land C) \lor ((A \lor (B \land \neg C)) \land \neg D)$

Distributionsgesetz:
$(A \land \neg A) \lor (B \land \neg C \land \neg A) \lor (A \land C) \lor (B \land \neg C \land C) \lor (A \land \neg D) \lor (B \land \neg C \land \neg D)$

2.3 Disjunktive Normalform (DNF)

a) $(A \lor B) \land (C \lor D)$

Distributionsgesetz: $((A \lor B) \land C) \lor ((A \lor B) \land D)$

Distributionsgesetz: $(A \land C) \lor (B \land C) \lor (A \land D) \lor (B \land D)$

b) $\neg(A \land (\neg B \lor C))$

De-Morgan: $\neg A \lor \neg(\neg B \lor C)$

De-Morgan: $\neg A \lor (B \land \neg C)$

c) $(A \lor (B \land \neg C)) \land (\neg A \lor C \lor \neg D)$

Distributionsgesetz:
$((A \lor (B \land \neg C)) \land \neg A) \lor ((A \lor (B \land \neg C)) \land C) \lor ((A \lor (B \land \neg C)) \land \neg D)$

Distributionsgesetz:
$(A \land \neg A) \lor (B \land \neg C \land \neg A) \lor (A \land C) \lor (B \land \neg C \land C) \lor (A \land \neg D) \lor (B \land \neg C \land \neg D)$

Vereinfachen: $(A \land C) \lor (A \land \neg D) \lor (B \land \neg C \land \neg A) \lor (B \land \neg C \land \neg D)$

3.1 DPLL a)

Gegeben: $((x_1 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_3)) \wedge x_2$.

3.1 DPLL a)

Gegeben: $((x_1 \land x_3) \lor (x_1 \land \neg x_3)) \land x_2$.

KNF (ohne Vereinfachung):

$(x_1 \lor x_1) \land (x_1 \lor \neg x_3) \land (x_1 \lor x_3) \land (x_3 \lor \neg x_3) \land x_2$

3.1 DPLL a)

Gegeben: $((x_1 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_3)) \wedge x_2$.

KNF (ohne Vereinfachung):

$(x_1 \vee x_1) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (x_3 \vee \neg x_3) \wedge x_2$

Unit Propagation mit $x_2 \mapsto true$:

$(x_1 \vee x_1) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (x_3 \vee \neg x_3)$

3.1 DPLL a)

Gegeben: $((x_1 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_3)) \wedge x_2$.

KNF (ohne Vereinfachung):

$(x_1 \vee x_1) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (x_3 \vee \neg x_3) \wedge x_2$

Unit Propagation mit $x_2 \mapsto true$:

$(x_1 \vee x_1) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (x_3 \vee \neg x_3)$

Pure Literal Elimination $x_1 \mapsto true$:

$(true \vee true) \wedge (true \vee \neg x_3) \wedge (x_3 \vee true) \wedge (x_3 \vee \neg x_3)$

3.1 DPLL a)

Gegeben: $((x_1 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_3)) \wedge x_2$.

KNF (ohne Vereinfachung):

$(x_1 \vee x_1) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (x_3 \vee \neg x_3) \wedge x_2$

Unit Propagation mit $x_2 \mapsto true$:

$(x_1 \vee x_1) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (x_3 \vee \neg x_3)$

Pure Literal Elimination $x_1 \mapsto true$:

$(true \vee true) \wedge (true \vee \neg x_3) \wedge (x_3 \vee true) \wedge (x_3 \vee \neg x_3)$

Vereinfachen: $x_3 \vee \neg x_3$

3.1 DPLL a)

Gegeben: $((x_1 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_3)) \wedge x_2$.

KNF (ohne Vereinfachung):

$(x_1 \vee x_1) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (x_3 \vee \neg x_3) \wedge x_2$

Unit Propagation mit $x_2 \mapsto true$:

$(x_1 \vee x_1) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (x_3 \vee \neg x_3)$

Pure Literal Elimination $x_1 \mapsto true$:

$(true \vee true) \wedge (true \vee \neg x_3) \wedge (x_3 \vee true) \wedge (x_3 \vee \neg x_3)$

Vereinfachen: $x_3 \vee \neg x_3$

Split mit $x_3 \mapsto true$: $(true \vee \neg true)$

3.1 DPLL a)

Gegeben: $((x_1 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_3)) \wedge x_2$.

KNF (ohne Vereinfachung):
$(x_1 \vee x_1) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (x_3 \vee \neg x_3) \wedge x_2$

Unit Propagation mit $x_2 \mapsto true$:
$(x_1 \vee x_1) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (x_3 \vee \neg x_3)$

Pure Literal Elimination $x_1 \mapsto true$:
$(true \vee true) \wedge (true \vee \neg x_3) \wedge (x_3 \vee true) \wedge (x_3 \vee \neg x_3)$

Vereinfachen: $x_3 \vee \neg x_3$

Split mit $x_3 \mapsto true$: $(true \vee \neg true)$

Vereinfachen: $true$

3.1 DPLL a)

Gegeben: $((x_1 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_3)) \wedge x_2$.

KNF (ohne Vereinfachung):
$(x_1 \vee x_1) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (x_3 \vee \neg x_3) \wedge x_2$

Unit Propagation mit $x_2 \mapsto true$:
$(x_1 \vee x_1) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (x_3 \vee \neg x_3)$

Pure Literal Elimination $x_1 \mapsto true$:
$(true \vee true) \wedge (true \vee \neg x_3) \wedge (x_3 \vee true) \wedge (x_3 \vee \neg x_3)$

Vereinfachen: $x_3 \vee \neg x_3$

Split mit $x_3 \mapsto true$: $(true \vee \neg true)$

Vereinfachen: $true$

$\Rightarrow$ Formel ist erfüllbar

3.1 DPLL a)

Gegeben: $((x_1 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_3)) \wedge x_2$.

KNF (ohne Vereinfachung):
$(x_1 \vee x_1) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (x_3 \vee \neg x_3) \wedge x_2$

Unit Propagation mit $x_2 \mapsto true$:
$(x_1 \vee x_1) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (x_3 \vee \neg x_3)$

Pure Literal Elimination $x_1 \mapsto true$:
$(true \vee true) \wedge (true \vee \neg x_3) \wedge (x_3 \vee true) \wedge (x_3 \vee \neg x_3)$

Vereinfachen: $x_3 \vee \neg x_3$

Split mit $x_3 \mapsto true$: $(true \vee \neg true)$

Vereinfachen: $true$

$\Rightarrow$ Formel ist erfüllbar

Variablenbelegung als Zeuge der Erfüllbarkeit:
$\{x_2 \mapsto true, x_1 \mapsto true, x_3 \mapsto true\}$

3.1 DPLL b)

Gegeben:

$(s \vee \neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg s)$

3.1 DPLL b)

Gegeben:

$(s \lor \neg p \lor q) \land (p \lor \neg q \lor r) \land (\neg s)$

Pure literal elimination mit $r \mapsto true$:

$(s \lor \neg p \lor q) \land \cancel{(p \lor \neg q \lor r)} \land (\neg s)$

3.1 DPLL b)

Gegeben:

$$(s \vee \neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg s)$$

Pure literal elimination mit $r \mapsto true$:

$$(s \vee \neg p \vee q) \wedge \cancel{(p \vee \neg q \vee r)} \wedge (\neg s)$$

Unit propagation mit $s \mapsto false$:

$$(\neg p \vee q)$$

3.1 DPLL b)

Gegeben:
$(s \vee \neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg s)$

Pure literal elimination mit $r \mapsto true$:
$(s \vee \neg p \vee q) \wedge \cancel{(p \vee \neg q \vee r)} \wedge (\neg s)$

Unit propagation mit $s \mapsto false$:
$(\neg p \vee q)$

$\Rightarrow$ Erfüllbar, da bereits konsistente Menge an Literalen.

3.2 Knobelaufgabe

Formalisieren Sie nachfolgendes Statement und lösen Sie es mit Hilfe von DPLL:

Auf der Insel der Ritter und Schurken sprechen Ritter immer die Wahrheit, während Schurken immer lügen. Du triffst Alex und Chris, jeder ist entweder ein Ritter oder ein Schurke, aber man sieht es ihnen nicht an.

Alex sagt: "Genau dann wenn Chris ein Schurke ist, bin ich ein Schurke."
Chris sagt: "Wir sind verschiedenen Typs."

3.2 Knobelaufgabe

Auf der Insel der Ritter und Schurken sprechen Ritter immer die Wahrheit, während Schurken immer lügen. Du triffst Alex und Chris, jeder ist entweder ein Ritter oder ein Schurke, aber man sieht es ihnen nicht an.

Alex sagt: “Genau dann wenn Chris ein Schurke ist, bin ich ein Schurke.”
Chris sagt: “Wir sind verschiedenen Typs.”

Wir denotieren ”Alex ist Ritter“ mit A, andernfalls $\neg A$ (“Alex ist Schurke”).
Analog denotieren wir ”Chris ist Ritter“ mit C, andernfalls $\neg C$.

3.2 Knobelaufgabe

Auf der Insel der Ritter und Schurken sprechen Ritter immer die Wahrheit, während Schurken immer lügen. Du triffst Alex und Chris, jeder ist entweder ein Ritter oder ein Schurke, aber man sieht es ihnen nicht an.

Alex sagt: “Genau dann wenn Chris ein Schurke ist, bin ich ein Schurke.”
Chris sagt: “Wir sind verschiedenen Typs.”

Wir denotieren ”Alex ist Ritter“ mit A, andernfalls $\neg A$ (“Alex ist Schurke”).
Analog denotieren wir ”Chris ist Ritter“ mit C, andernfalls $\neg C$.

Für Aussage von Alex gilt: $\phi_{Alex} = A \Leftrightarrow (\neg C \Leftrightarrow \neg A)$
(”Entweder sind beide Schurken, oder beide sind Ritter“)

3.2 Knobelaufgabe

> Auf der Insel der Ritter und Schurken sprechen Ritter immer die Wahrheit, während Schurken immer lügen. Du triffst Alex und Chris, jeder ist entweder ein Ritter oder ein Schurke, aber man sieht es ihnen nicht an.
>
> Alex sagt: “Genau dann wenn Chris ein Schurke ist, bin ich ein Schurke.”
> Chris sagt: “Wir sind verschiedenen Typs.”

Wir denotieren ”Alex ist Ritter“ mit A, andernfalls $\neg A$ (“Alex ist Schurke”). Analog denotieren wir ”Chris ist Ritter“ mit C, andernfalls $\neg C$.

Für Aussage von Alex gilt: $\phi_{Alex} = A \Leftrightarrow (\neg C \Leftrightarrow \neg A)$
(”Entweder sind beide Schurken, oder beide sind Ritter“)

Chris sagt das Gegenteil: $\phi_{Chris} = C \Leftrightarrow (\neg C \Leftrightarrow A)$

3.2 Knobelaufgabe

Nebenrechnung: Umwandlung von ϕ_{Alex} in KNF:

$$\phi_{Alex} = {\color{blue}A} \Leftrightarrow \underbrace{(\neg {\color{red}C} \Leftrightarrow \neg {\color{green}A})}_{B}$$

3.2 Knobelaufgabe

Nebenrechnung: Umwandlung von ϕ_{Alex} in KNF:

$$\begin{aligned}\phi_{Alex} &= A \Leftrightarrow \underbrace{(\neg C \Leftrightarrow \neg A)}_{B} \\ &= A \Leftrightarrow B\end{aligned}$$

3.2 Knobelaufgabe

Nebenrechnung: Umwandlung von ϕ_{Alex} in KNF:

$$\begin{aligned}\phi_{Alex} &= A \Leftrightarrow \underbrace{(\neg C \Leftrightarrow \neg A)}_{B} \\ &= A \Leftrightarrow B \\ &= (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)\end{aligned}$$

3.2 Knobelaufgabe

Nebenrechnung: Umwandlung von ϕ_{Alex} in KNF:

$$\begin{aligned}
\phi_{Alex} &= A \Leftrightarrow \underbrace{(\neg C \Leftrightarrow \neg A)}_{B} \\
&= A \Leftrightarrow B \\
&= (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \\
&= (\neg A \vee (\neg C \Leftrightarrow \neg A)) \wedge (A \vee \neg(\neg C \Leftrightarrow \neg A))
\end{aligned}$$

3.2 Knobelaufgabe

Nebenrechnung: Umwandlung von ϕ_{Alex} in KNF:

$$\begin{aligned}
\phi_{Alex} &= A \Leftrightarrow \underbrace{(\neg C \Leftrightarrow \neg A)}_{B} \\
&= A \Leftrightarrow B \\
&= (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \\
&= (\neg A \vee (\neg C \Leftrightarrow \neg A)) \wedge (A \vee \neg(\neg C \Leftrightarrow \neg A)) \\
&= (\neg A \vee ((C \vee \neg A) \wedge (\neg C \vee A))) \\
&\qquad \wedge (A \vee \neg((\neg C \wedge \neg A) \vee (C \wedge A)))
\end{aligned}$$

3.2 Knobelaufgabe

Nebenrechnung: Umwandlung von ϕ_{Alex} in KNF:

$$\begin{aligned}
\phi_{Alex} &= A \Leftrightarrow \underbrace{(\neg C \Leftrightarrow \neg A)}_{B} \\
&= A \Leftrightarrow B \\
&= (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \\
&= (\neg A \vee (\neg C \Leftrightarrow \neg A)) \wedge (A \vee \neg(\neg C \Leftrightarrow \neg A)) \\
&= (\neg A \vee ((C \vee \neg A) \wedge (\neg C \vee A))) \\
&\qquad \wedge (A \vee \neg((\neg C \wedge \neg A) \vee (C \wedge A))) \\
&= (\neg A \vee C \vee \neg A) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee A) \\
&\qquad \wedge (A \vee ((C \vee A) \wedge (\neg C \vee \neg A)))
\end{aligned}$$

3.2 Knobelaufgabe

Nebenrechnung: Umwandlung von ϕ_{Alex} in KNF:

$$
\begin{aligned}
\phi_{Alex} &= A \Leftrightarrow \underbrace{(\neg C \Leftrightarrow \neg A)}_{B} \\
&= A \Leftrightarrow B \\
&= (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \\
&= (\neg A \vee (\neg C \Leftrightarrow \neg A)) \wedge (A \vee \neg(\neg C \Leftrightarrow \neg A)) \\
&= (\neg A \vee ((C \vee \neg A) \wedge (\neg C \vee A))) \\
&\qquad \wedge (A \vee \neg((\neg C \wedge \neg A) \vee (C \wedge A))) \\
&= (\neg A \vee C \vee \neg A) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee A) \\
&\qquad \wedge (A \vee ((C \vee A) \wedge (\neg C \vee \neg A))) \\
&= (\neg A \vee C \vee \neg A) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee A) \\
&\qquad \wedge (A \vee C \vee A) \wedge (A \vee \neg C \vee \neg A)
\end{aligned}
$$

3.2 Knobelaufgabe

Nebenrechnung: Umwandlung von ϕ_{Alex} in KNF:

$$
\begin{aligned}
\phi_{Alex} &= A \Leftrightarrow \underbrace{(\neg C \Leftrightarrow \neg A)}_{B} \\
&= A \Leftrightarrow B \\
&= (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \\
&= (\neg A \vee (\neg C \Leftrightarrow \neg A)) \wedge (A \vee \neg(\neg C \Leftrightarrow \neg A)) \\
&= (\neg A \vee ((C \vee \neg A) \wedge (\neg C \vee A))) \\
&\qquad \wedge (A \vee \neg((\neg C \wedge \neg A) \vee (C \wedge A))) \\
&= (\neg A \vee C \vee \neg A) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee A) \\
&\qquad \wedge (A \vee ((C \vee A) \wedge (\neg C \vee \neg A))) \\
&= (\neg A \vee C \vee \neg A) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee A) \\
&\qquad \wedge (A \vee C \vee A) \wedge (A \vee \neg C \vee \neg A) \\
&= (\neg A \vee C) \wedge true \wedge (A \vee C) \wedge true
\end{aligned}
$$

3.2 Knobelaufgabe

Nebenrechnung: Umwandlung von ϕ_{Chris} in KNF:

$$
\begin{aligned}
\phi_{Chris} &= C \Leftrightarrow \underbrace{(\neg C \Leftrightarrow A)}_{B} \\
&= C \Leftrightarrow B \\
&= (\neg C \vee B) \wedge (C \vee \neg B) \\
&= (\neg C \vee (\neg C \Leftrightarrow A)) \wedge (C \vee \neg(\neg C \Leftrightarrow A)) \\
&= (\neg C \vee ((C \vee A) \wedge (\neg C \vee \neg A))) \\
&\qquad \wedge (C \vee \neg((\neg C \wedge A) \vee (C \wedge \neg A))) \\
&= (\neg C \vee C \vee A) \wedge (\neg C \vee \neg C \vee \neg A) \\
&\qquad \wedge (C \vee ((C \vee \neg A) \wedge (\neg C \vee A))) \\
&= (\neg C \vee C \vee A) \wedge (\neg C \vee \neg C \vee \neg A) \\
&\qquad \wedge (C \vee C \vee \neg A) \wedge (C \vee \neg C \vee A) \\
&= true \wedge (\neg A \vee \neg C) \wedge (C \vee \neg A) \wedge true
\end{aligned}
$$

3.2 Knobelaufgabe

Gegeben:

$\phi_{Alex} = (\neg A \vee C) \wedge (A \vee C)$
$\phi_{Chris} = (\neg A \vee \neg C) \wedge (C \vee \neg A)$

In KNF:

$(\neg A \vee C) \wedge (A \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg C) \wedge (C \vee \neg A)$

Lösen mit Hilfe von DPLL:

3.2 Knobelaufgabe

Gegeben:

$\phi_{Alex} = (\neg A \vee C) \wedge (A \vee C)$
$\phi_{Chris} = (\neg A \vee \neg C) \wedge (C \vee \neg A)$

In KNF:

$(\neg A \vee C) \wedge (A \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg C) \wedge (C \vee \neg A)$

Lösen mit Hilfe von DPLL:

UP/PLE nicht anwendbar, daher Verzweigen:

3.2 Knobelaufgabe

Gegeben:

$\phi_{Alex} = (\neg A \vee C) \wedge (A \vee C)$

$\phi_{Chris} = (\neg A \vee \neg C) \wedge (C \vee \neg A)$

In KNF:

$(\neg A \vee C) \wedge (A \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg C) \wedge (C \vee \neg A)$

Lösen mit Hilfe von DPLL:

UP/PLE nicht anwendbar, daher Verzweigen:

- Wähle $A \mapsto false$

  $true \wedge (false \vee C) \wedge true \wedge true$

3.2 Knobelaufgabe

Gegeben:

$\phi_{Alex} = (\neg A \vee C) \wedge (A \vee C)$
$\phi_{Chris} = (\neg A \vee \neg C) \wedge (C \vee \neg A)$

In KNF:

$(\neg A \vee C) \wedge (A \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg C) \wedge (C \vee \neg A)$

Lösen mit Hilfe von DPLL:

UP/PLE nicht anwendbar, daher Verzweigen:

- Wähle $A \mapsto false$
  $true \wedge (false \vee C) \wedge true \wedge true$
- Wähle $C \mapsto true$
  $true$

3.2 Knobelaufgabe

Gegeben:

$\phi_{Alex} = (\neg A \vee C) \wedge (A \vee C)$

$\phi_{Chris} = (\neg A \vee \neg C) \wedge (C \vee \neg A)$

In KNF:

$(\neg A \vee C) \wedge (A \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg C) \wedge (C \vee \neg A)$

Lösen mit Hilfe von DPLL:

UP/PLE nicht anwendbar, daher Verzweigen:

- Wähle $A \mapsto false$
  $true \wedge (false \vee C) \wedge true \wedge true$
- Wähle $C \mapsto true$
  $true$

Ergebnis: Erfüllbar mit $\{A \mapsto false, C \mapsto true\}$

3.2 Knobelaufgabe

Gegeben:

$\phi_{Alex} = (\neg A \vee C) \wedge (A \vee C)$

$\phi_{Chris} = (\neg A \vee \neg C) \wedge (C \vee \neg A)$

In KNF:

$(\neg A \vee C) \wedge (A \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg C) \wedge (C \vee \neg A)$

Lösen mit Hilfe von DPLL:

UP/PLE nicht anwendbar, daher Verzweigen:

3.2 Knobelaufgabe

Gegeben:

$\phi_{Alex} = (\neg A \vee C) \wedge (A \vee C)$
$\phi_{Chris} = (\neg A \vee \neg C) \wedge (C \vee \neg A)$

In KNF:

$(\neg A \vee C) \wedge (A \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg C) \wedge (C \vee \neg A)$

Lösen mit Hilfe von DPLL:

UP/PLE nicht anwendbar, daher Verzweigen:

- Wähle $A \mapsto true$
  $(false \vee C) \wedge true \wedge (false \vee \neg C) \wedge (C \vee false)$

3.2 Knobelaufgabe

Gegeben:

$\phi_{Alex} = (\neg A \lor C) \land (A \lor C)$
$\phi_{Chris} = (\neg A \lor \neg C) \land (C \lor \neg A)$

In KNF:

$(\neg A \lor C) \land (A \lor C) \land (\neg A \lor \neg C) \land (C \lor \neg A)$

Lösen mit Hilfe von DPLL:

UP/PLE nicht anwendbar, daher Verzweigen:

- Wähle $A \mapsto true$
  $(false \lor C) \land true \land (false \lor \neg C) \land (C \lor false)$
  $C \land \neg C \land C$

3.2 Knobelaufgabe

Gegeben:

$\phi_{Alex} = (\neg A \vee C) \wedge (A \vee C)$

$\phi_{Chris} = (\neg A \vee \neg C) \wedge (C \vee \neg A)$

In KNF:

$(\neg A \vee C) \wedge (A \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg C) \wedge (C \vee \neg A)$

Lösen mit Hilfe von DPLL:

UP/PLE nicht anwendbar, daher Verzweigen:

- Wähle $A \mapsto true$
  $(false \vee C) \wedge true \wedge (false \vee \neg C) \wedge (C \vee false)$
  $C \wedge \neg C \wedge C$
- Vereinfache
  $false$

3.2 Knobelaufgabe

Gegeben:

$\phi_{Alex} = (\neg A \vee C) \wedge (A \vee C)$
$\phi_{Chris} = (\neg A \vee \neg C) \wedge (C \vee \neg A)$

In KNF:

$(\neg A \vee C) \wedge (A \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg C) \wedge (C \vee \neg A)$

Lösen mit Hilfe von DPLL:

UP/PLE nicht anwendbar, daher Verzweigen:

- Wähle $A \mapsto true$
  $(false \vee C) \wedge true \wedge (false \vee \neg C) \wedge (C \vee false)$
  $C \wedge \neg C \wedge C$
- Vereinfache
  $false$

Ergebnis: Unerfüllbar

3.2 Knobelaufgabe

Anmerkung:
Ein Video mit einer ausführlichen Erklärung von Prof. Ernst finden Sie unter
https://www.cip.ifi.lmu.de/~ernstg/fsv2021/u06-RitterSchurken.mp4.

Die Zugangsdaten sind analog wie zu den Vorlesungsfolien.